Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930).Formes de représentation et méthodes de décomposition.

Frederic Brechenmacher

▶ To cite this version:

Frederic Brechenmacher. Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930).Formes de représentation et méthodes de décomposition.. Mathématiques [math]. Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales (EHESS), 2006. Français. NNT : . tel-00142786

HAL Id: tel-00142786

https://theses.hal.science/tel-00142786

Submitted on 22 Apr 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE DES HAUTES ETUDES EN SCIENCES SOCIALES

2005 *N° attribué par la bibliothèque*

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'EHESS

Discipline : histoire.

Présentée et soutenue publiquement

par

Frédéric BRECHENMACHER

Le 9 mars 2006 au Centre Alexandre Koyré, Pavillon Chevreul.

HISTOIRE DU THEOREME DE JORDAN DE LA DECOMPOSITION MATRICIELLE (1870-1930).

Formes de représentations et méthodes de décompositions.

Directeur de thèse : Jean DHOMBRES

JURY

Jean Dhombres
Catherine Goldstein
Norbert Schappacher
Jean Mawhin

ECOLE DES HAUTES ETUDES EN SCIENCES SOCIALES

2005 *N° attribué par la bibliothèque*

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'EHESS

Discipline : histoire.

Présentée et soutenue publiquement

par

Frédéric BRECHENMACHER

Le 9 mars 2006 au Centre Alexandre Koyré, Pavillon Chevreul.

HISTOIRE DU THEOREME DE JORDAN DE LA DECOMPOSITION MATRICIELLE (1870-1930).

Formes de représentations et méthodes de décompositions.

Directeur de thèse : Jean DHOMBRES

JURY

Jean Dhombres
Catherine Goldstein
Norbert Schappacher
Jean Mawhin

RESUME en français.

L'histoire du théorème de Jordan est abordée sous l'angle d'une question d'identité posée sur la période qui sépare la date de 1870 et l'énoncé par Camille Jordan d'une *forme canonique* des *substitutions linéaires* des années trente du vingtième siècle au cours desquelles le *théorème de Jordan de la décomposition matricielle* acquiert une place centrale dans la théorie des matrices canoniques. A partir d'un moment historique de référence, la controverse entre Jordan et Kronecker de 1874, le théorème de Jordan permet de jeter un regard original sur l'histoire de la période 1870-1930 en suivant le rôle joué par des savoirs tacites, des idéaux et des pratiques propres à des réseaux et des communautés. Ce regard permet notamment de mettre en évidence la dynamique d'une tension entre *formes canoniques* et *invariants* dans l'évolution de la signification de la notion de *forme* en mathématiques et contribue à l'histoire de l'algèbre linéaire en décrivant le rôle joué par une méthode de *décomposition* indissociable d'un mode particulier de *représentation : la décomposition matricielle*.

TITRE en anglais

A history of the Jordan decomposition theorem (1870-1930).

Forms of representations and methods of decomposition.

RESUME en anglais

The thesis takes as its point of departure the Jordan decomposition theorem and traces its evolution over the sixty-year period from its statement by Camille Jordan in 1870 to 1930 and the emergence of the theory of canonical matrices. A historical analysis of this *particular* theorem serves as a lens not only on internal developments of the evolving mathematics discipline of algebra but also on the external developments of mathematics as an internationalizing discipline in the decades around the turn of the twentieth century. The thesis draws from the study of networks of sources in order to analyze the theorem's transformation from a result in nineteenth-century group theory to one in the new twentieth century area of linear algebra, while, at the same time, the thesis explores issues of community formation and the role of tacit knowledge in the evolution of mathematical methods. The thesis will focus on a history the decomposition of matrices as a method of *decomposition* of a particular *form* of *representation*.

DISCIPLINE – SPECIALITE DOCTORALE

Histoire des mathématiques.

MOTS-CLES.

Théorème de Jordan. Matrices. Jordan. Weyr. Kronecker. Autonne. Forme canonique. Décomposition. Algèbre. Formes bilinéaires. Représentation.

INTITULE ET ADRESSE DU LABORATOIRE

Centre Alexandre Koyré.
Museum National d'Histoire Naturelle. Pavillon Chevreul, 57, rue Cuvier - 75231 Paris.

Remerciements.

A Amel pour ne pas avoir accepté que cette thèse engloutisse tout.

Je remercie de tout cœur Jean Dhombres qui a su diriger et maintenir mon enthousiasme pour cette thèse.

Tous mes remerciements à Thomas Hawkins pour son histoire du théorème des diviseurs élémentaires écrite en 1977 et qui a donné un point de départ à mes recherches. A Karen Parshall pour ses travaux sur l'histoire de la notion de matrice et pour avoir accepté de rédiger un rapport sur cette thèse depuis les Etats-Unis.

Un très grand merci à Alain Bernard, Andrea Breard, Catherine Goldstein et Norbert Schappacher pour leurs relectures et commentaires critiques.

Merci aux historiens qui m'ont accueilli dans leurs séminaires et ont aidé la maturation de mes travaux : Karine Chemla, Pierre Crepel, Marie-Josée Durand-Richard, les membres du groupe M:A.T.H., les organisateurs du séminaire commun de l'E.N.S., du séminaire de l'I.H.P et des congrès de Gand et de Pékin.

Merci également aux doctorants avec qui j'ai travaillé et échangé : Amirouche, Anne, Elodie, Juliette, Guillaume, Jean, Maarten, Matthieu, Norbert, Renaud, Sarah et Sebastien. Une mention spéciale pour l'enthousiasme des participants des *Novembertagung* d'Utrecht et de Paris.

Je ne serais pas arrivé à mener cette thèse à son terme sans le soutien de mes amis et collègues du Lycée Gaston Bachelard. Merci à tous les amis que j'ai rencontré là et ailleurs.

A tous ceux qui m'ont plus particulièrement accompagné pendant mon travail de thèse : Marie, Olivier, Eric, Esther, Thomas, Jacques, Yann, mes parents.

TABLE DES Matières.

INTRODUCTION. 13

Première partie. LA CONTROVERSE JORDAN-KRONECKER DE 1874. 27
INTRODUCTION. 28
Chapitre 1. La tension *formes canoniques-invariants* et les idéaux opposés par Jordan et Kronecker. 31
I. Genèse d'une querelle. 33
1. Un va-et-vient entre public et privé. 37
2. La querelle : un révélateur de connaissance tacite et un vecteur de communication scientifique. 45
II. Généralité et effectivité : les invariants arithmétiques de Kronecker. 51
1. Le théorème de Weierstrass de 1868 comme exemplaire d'une "véritable généralité". 51
2. Une théorie homogène, la théorie arithmétique de faisceaux de formes de Kronecker. 63
III. Généralité et simplicité : la réduction canonique de Jordan. 75
Une conclusion pour conduire l'étude. 78
Chapitre 2. La *discussion des petites oscillations* en prélude à la controverse Jordan - Kronecker. 81
Introduction 82
I. La controverse comme opposition de deux fins données à une discussion longue d'un siècle. 85
1. L'histoire de la discussion des petites oscillations du point de vue de 1874. 85
2. Un point de vue parisien sur la discussion des petites oscillations en 1870. 87
3. Les caractéristiques de la discussion des petites oscillations. 90
II. Différents idéaux de généralité, différentes représentations portées par une discussion d'un siècle (1766-1858). 93
1. Lagrange et la "solution générale du Problème des oscillations très petites d'un système quelconque de corps . 95
2. Le problème de d'Alembert et sa représentation mécanique. 105
3. La discussion de Lagrange sur la nature des racines d'une équation algébrique. 113
4. La discussion de Laplace sur la stabilité des variations séculaires. 117
5. La discussion des petites oscillations dans un cadre géométrique chez Cauchy. 128
6. Clore la discussion : les "formes" et "transformations" de Weierstrass. 147
Conclusion. 157
Chapitre 3. La controverse comme rencontre de deux cultures mathématiques. 165
Introduction. 167
I. Simplicité et réduction chez Jordan. 171
1. Un contexte d' "application" par Jordan des méthodes de la théorie des groupes entre 1870 et 1880. 171
2. Un regard rétrospectif sur les travaux de Jordan sur la résolubilité des équations. 179
3. Un idéal de simplicité et une méthode de réduction. 187
II. La théorie des formes bilinéaires en prélude au théorème des diviseurs élémentaires (1858-1868). 205
1. Des fonctions homogènes du second degré aux formes bilinéaires. 207
2. Les invariants de la théorie des formes bilinéaires de Kronecker et Christoffel. 217
3. Le théorème des diviseurs élémentaires de Weierstrass. 227

4. Des analogies entre deux théorèmes dans le champ des applications. 239
III. Issues d'une querelle : communication et organisation théorique de savoirs mathématiques (1874-1880). 245
1. Le calcul symbolique de Frobenius comme unifiant l'algèbre des substitutions de Jordan et l'arithmétique des formes de Kronecker 247
2. Des héritages mêlés, une théorie unificatrice : la communication Darboux-Frobenius. 255
3. Les procédés rationnels de Frobenius, un achèvement de l'idéal de Kronecker. 261
4. La tension dormes canoniques – invariants. La place relative des idéaux de Jordan et Kronecker dans la théorie de Frobenius. 267

CONCLUSION. 271

Deuxième partie. UN POINT DE CONVERGENCE DE DIFFERENTS RESEAUX DE RECHERCHES : LA DECOMPOSTION DES MATRICES D'EDUARD WEYR (1880-1907). 279

INTRODUCTION. 281

Chapitre 4. Etude d'un mouvement en histoire des mathématiques : la dynamique de la notion de matrice dans la décennie 1880-1890. 291
Introduction. 293
I. Une postérité des matrices de Cayley (1858) dans les années 1880-1890. 299
1. Le "calcul des matrices" : Eduard Weyr [1890] lit Arthur Cayley [1858] et Georg Frobenius [1878]. 299
2. Une postérité de Cayley : la notion de "single quantity". 305
II. Les lectures de Cayley (1858) par Sylvester (1882): dynamique de la notion de matrice entre 1882 et 1885. 309
1. Sylvester (1882) lit Sylvester (1851), la mère des mineurs d'un déterminant. 313
2. Sylvester (1882) lit Cayley (1858), un problème et sa résolution, le calcul de $\sqrt{M}$. 321
3. Une première postérité de Cayley : la notion de "Single quantity" de Cayley (1858) et la deuxième loi du mouvement algébrique de Sylvester (1883). 327
4. Sylvester (1884) relit Cayley (1858) : un problème et sa résolution, l'équation en matrice $mn = nm$. 331
Conclusion. 339
Chapitre 5. Une méthode de décomposition des matrices à l'intersection de réseaux de recherches en analyse, algèbre et arithmétique (1880-1904). 345
Introduction 347
I. La construction par Weyr d'une méthode de décomposition matricielle (1885-1890). 352
1. Les lectures croisées de Weyr (1885) : décomposition de Riemann (1857), extraction de mineurs de Sylvester (1885) et calcul symbolique de Cayley (1858). 352
2. La formation des "espèces" de matrices : une méthode de décomposition de la *forme* matricielle. 354
3. La nouvelle caractéristique de Weyr en 1890 et les systèmes de valeurs de Kronecker. 357
II. Une combinatoire sur la représentation : la composition des systèmes de valeurs de Kronecker (1880-1890). 367
1. La notion de rang, d'une induction à la théorie arithmétique des grandeurs algébriques de Kronecker. 367
2. Le degré des systèmes de Kronecker et le rang des formes bilinéaires de 383

Frobenius.
3. Une méthode associée à la notion de rang : la manipulation arithmétique des systèmes de valeurs. 387
III. Intersections des systèmes de Kronecker et de la décomposition des matrices de Weyr (1890). 393
1. Kronecker et les systèmes de nombres complexes (1888). 393
2. Un mouvement vers l'avant dans le corpus : les travaux de Kurt Hensel (1890-1904). 397
Conclusion. 401
Chapitre 6. Forme typique et système normal de Weyr : dynamique d'une articulation entre décomposition et représentation (1884-1907). 405
Introduction. 407
I. Culture commune et différences au sein d'une même théorie des systèmes hypercomplexes. 411
1. Présentation franco-allemande de la théorie et de ses méthodes en 1908. 411
2. Un premier point d'origine : les formes canoniques de Poincaré (1884). 417
3. Un second point d'origine : système normal et forme typique des matrices chez Weyr (1890). 420
II. Décomposition des systèmes hypercomplexes, décomposition polynomiale. 423
1. Groupes de transformations continus et systèmes hypercomplexes. 423
2. Décomposition de l'équation caractéristique et décomposition des systèmes chez Scheffers (1891). 429
III. Décomposition et représentation (1893-1904). 433
1. Représentation des systèmes hypercomplexes chez Molien (1893). 433
2. Représentation matricielle des systèmes primitifs : forme typique et système normal. 443
3. La représentation des groupes, de Molien à Frobenius. 451

CONCLUSION. 461

Troisième partie. LE THEOREME DE JORDAN DE DECOMPOSITION MATRICIELLE COMME CONSTRUCTION D'UNE CULTURE COMMUNE. (1907-1930). 489

INTRODUCTION. 490
Chapitre 7. Postérité de la forme canonique dans la théorie des groupes linéaires au tournant du siècle (1896-1907). 493
Introduction. 494
I. Postérités et nouveautés. Le groupe linéaire, de Jordan à l'école de Chicago. 496
1. *Linear groups* et *Traité des substitutions.* 496
2. Les idéaux de l'école de Chicago. 498
3. La méthode de décomposition de Dickson et la postérité de l'idéal de simplicité de Jordan. 501
4. Une première rencontre de la méthode de réduction de Jordan et de la représentation matricielle. 505
II. Le groupe linéaire et la tension formes canoniques – invariants. (1895-1905). 509
1. Evolution du rôle du groupe linéaire dans l'organisation du savoir mathématique. 509
2. Le procédé effectif de Burnside de réduction à la forme de Jordan des substitutions linéaires. 513
Conclusion. 519

Chapitre 8. Décompositions des tableaux et réduction canonique : construction d'une méthode "naturelle" au sein d'un réseau de travaux arithmétiques (1878-1907). 521
Introduction. 522
I. La théorie des matrices de Séguier et la postérité de Jordan en 1907. 525
1. La vision du progrès mathématique chez de Séguier comme d'une "fonte" de travaux distincts en une même théorie fondamentale. 527
2. Des méthodes propres à Jordan et Kronecker venant se "fondre" dans la décomposition matricielle. 531
II. La réduction canonique comme méthode. La postérité de Jordan au sein d'un corpus arithmétique (1878-1913). 537
1. La référence de Séguier aux travaux de Jordan et l'écho de la querelle de 1874. 539
2. La forme canonique comme méthode de classification (1874-1878). 545
3. La réduction comme méthode générale de la théorie des formes (1878-1888). 551
III. Forme canonique et représentation géométrique chez Poincaré (1880-1886). 557
1. La "notion de réduite" dans les premiers travaux de Poincaré sur les formes. 557
2. La forme canonique et les fonctions fuchsiennes. 564
IV. La méthode de réduction des formes et la combinatoire de décomposition des tableaux (1880-1910). 570
1. La méthode de décomposition des tableaux de Jordan. 571
2. Les tableaux chez Poincaré. 576
Conclusion. 579
Chapitre 9. Une dynamique de va-et vient entre enseignement et recherche. Le développement de la théorie des matrices canoniques (1914-1945). 590
Introduction. 591
I. La forme typique des matrices de Léon Autonne (1900-1912). 599
1. La méthode de décomposition des tableaux d'Autonne. 599
2. Articulation entre formes et invariants chez Autonne. 604
3. L'approche d'Autonne sur les équations différentielles : entre géométrie et théorie des groupes. 619
4. Rencontre des méthodes des formes bilinéaires et de la réduction des tableaux chez Autonne. 625
II. Des répercussions de préoccupations didactiques sur la recherche mathématique : la question de la décomposition rationnelle des matrices. (1914-1930). 629
1. Origine d'une théorie dans des préoccupations pédagogiques. 631
2. La forme canonique rationnelle de Lattès. 637
3. La théorie des matrices canoniques. 643

CONCLUSION. 651

ANNEXE 1. Une formulation contemporaine de la relation mathématique entre diviseurs élémentaires et forme de Jordan. 678
ANNEXE 2. Glossaire de termes de théorie des groupes. 682
ANNEXE 3. Le défaut de généralité chez Jordan relevé par Kronecker. 689

BIBLIOGRAPHIE. 695

Tables des encarts.

TABLE DES ENCARTS DE L'INTRODUCTION.

1. Un exemple de représentation de réseau de recherches. 14
2. Deux extrémités du spectre de la question d'identité 15
3. Quelques exemples d'emplois du terme "forme" en mathématiques. 20
4. Les diviseurs élémentaires de Weierstrass 22
5. Le théorème de Weyr de 1885. 24
6. Le rôle de la représentation matricielle dans l'énoncé d'une identité entre formes canoniques et diviseurs élémentaires dans les années trente. 26

TABLE DES ENCARTS DE LA PREMIERE PARTIE.

Chapitre 1.

1. Chronologie d'une querelle. 32
2. Extraits de la correspondance de Jordan. 34
a. Extrait d'une première lettre de Jordan à Kronecker. 36
b. Jordan à Kronecker. Janvier 1874. 38
c. Jordan à Weierstrass. Janvier 1874. 50
d. Kronecker à Jordan. Février 1874. 54
e. Jordan à Kronecker. Février 1874. 64
f. Kronecker à Jordan. Mars 1874. 68
3. Sur le théorème de Kronecker des faisceaux singuliers de formes. 72

Chapitre 2.

1. Le corpus de textes formant la discussion des petites oscillations. 84
2. Un point de vue contemporain sur la discussion des petites oscillations. 92
3. Les méthodes de la discussion des petites oscillations.
a. Une double méthode des coefficients indéterminés : Lagrange [1766]. 94
b. La méthode de Cauchy: transformations géométriques et déterminants. 132
c. L'algèbre des formes de Weierstrass. 148
4. L'artifice de Laplace pour la démonstration de la réalité des racines. 124
5. La démonstration de Cauchy de la réalité des racines de l'équation caractéristique. 140

Chapitre 3.

1. Un état civil de Camille Jordan 164
2. Les candidatures de Jordan à l'académie des sciences 166
3. Quelques éléments sur la famille Jordan. 170
4. La forme canonique et le groupe linéaire dans le *Traité des substitutions*. 174
5. La méthode de réduction de Jordan : démonstration de la forme canonique. 182
6. "Origine" du groupe linéaire, de la forme canonique et de la méthode de réduction de Jordan: les recherches sur les équations résolubles dans les années 1860-1870. 196
7. Généralisation par Christoffel des méthodes de Weierstrass aux "fonctions bilinéaires". 208
8. La généralisation du théorème de Jacobi [1857] au cas complexe. 210
9. Les fonctions bilinéaires et la géométrie projective. 212
10. Un élément de contexte : les origines de la théorie des invariants. 214
11. Un éclairage historique sur les fonctions thêta de plusieurs variables. 216
12. La représentation des fonctions elliptiques de Weierstrass 222
13. Diviseurs élémentaires de Weierstrass, diviseurs élémentaires de Kronecker. 230
14. Meyer Hamburger et les équations de Fuchs. 238

15. Quelques précisions sur le calcul symbolique des formes de Frobenius. 244
16. Les approches de Darboux et Frobenius sur le problème de Pfaff. 246
17. Sur l'influence des travaux d'Hermite sur les formes quadratiques. 248
18. Le "calcul des systèmes linéaires" de Laguerre [1867]. 252
19. Une méthode : les fonctions rationnelles de formes de Frobenius. 254
20. Généralisation du lemme de Smith et effectivité du calcul symbolique des formes. 256
21. Les travaux de Smith sur les systèmes de congruences à coefficients entiers. 258
22. Sur l'opérationnalité de la forme canonique de Jordan. 274

TABLE DES ENCARTS DE LA DEUXIEME PARTIE.

INTRODUCTION.
1. Convergences de réseaux de recherches (1880-1907). 280
2. La caractéristique de Weyr en 1885. 282
3. Plan d'une démonstration contemporaine du théorème de Jordan. 286
4. A propos du rôle des matrices dans les origines de la théorie des systèmes hypercomplexes. 288
5. Quelques éléments biographiques sur Eduard Weyr. 290

Chapitre 4.
1. Représentation graphique du corpus étudié. 292
2. Une histoire de la théorie des matrices écrite par les mathématiques en 1890. 294
3 Comparaison des mémoires de Cayley et de Weyr. 296
4. Une postérité de Cayley et Weyr chez Frobenius [1894]. La factorisation des polynômes de matrices. 302
5. Origine des matrices comme mères des mineurs : les travaux de Sylvester (1851) sur les intersections de deux coniques. 306
6. Généralisation de la méthode de Sylvester aux intersections de quadriques et introduction des mineurs et matrices. 316
7. Premiers travaux de Cayley [1855] sur les matrices de Sylvester. 324
8. Un théorème de Cayley et sa postérité. 328

Chapitre 5.
1. Représentation graphique du corpus étudié. 344
2. La nullité des matrices de Sylvester. 346
3. La référence de Weyr à Riemann 348
4. Le degré des systèmes de diviseurs de Kronecker. 358
5. Quelques précisions sur les travaux de Kronecker de 1883 sur le rang des systèmes de diviseurs. 362
6. Les systèmes de diviseurs dans la théorie arithmétique des grandeurs algébriques de Kronecker. 364
7. Systèmes unités et opérations élémentaires sur les lignes et colonnes 382
8. Les corps de matrices de Hensel [1903]. 386
9. La décomposition matricielle chez Hensel : 392
a. Relation entre diviseurs élémentaires et la caractéristique de Weyr.
b. Le problème des matrices échangeables. 396

Chapitre 6.
1. Représentation graphique du corpus étudié. 404
2. La note de Poincaré [1884] et les matrices. 406
3. Sur les algèbres de Wedderburn et la postérité de la méthode d'itération de Weyr. 408
4. La présentation de la théorie par Cartan et Study dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*. 410

5. Sur les travaux de Lie et Killing. 416
6. Un exemple de la décomposition des systèmes chez Scheffers. 420
7. Une postérité diffuse de la forme de Jordan chez Cartan. 428
8. Les relations entre les systèmes hypercomplexes de Cartan et la représentation des groupes de Frobenius explicitées par Poincaré [1903]. 438
9. Sur le rôle des matrices dans la théorie de représentation des groupes de Frobenius. 444
10. Décomposition et représentation dans un exposé de synthèse sur les systèmes hypercomplexes : le mémoire de Hawks [1905]. 446

CONCLUSION.
1. Extraits de différents théorèmes énoncés dans des réseaux de recherches distincts. 460
2. Représentation graphique d'un corpus de recherches. 462
3. Extraits du rapport de Hermite sur la thèse de Sauvage. 464
4. Quelques extraits des mémoires de Sauvage. 464
5. Les cours sur les équations différentielles de Schlesinger. 468
6. Caractéristique de Segre et la classification des homographies. 470
7. Extraits du mémoire de Frobenius [1911] exposant la méthode de Weyr. 474
8. Un problème paradigmatique de la théorie des matrices au tournant du siècle : le problème des matrices qui commutent. 476
9. Décomposition et représentation : l'exemple du mémoire de Taber [1899] dans la tradition de Grassmann. 484
10. Invariants et recompositions : la théorie arithmétique des formes dans l'*Encyclopédie* franco-allemande [1911] 487

TABLE DES ENCARTS DE LA TROISIEME PARTIE.

Chapitre 7.
1. Une nouvelle classe de groupes simples. 500
2. La démonstration de la forme canonique de Dickson [1901]. 502
3. Articulation entre formes canoniques et invariants chez Dickson, le rôle des matrices. 504
4. Formes canoniques et diviseurs élémentaires chez Netto [1893]. 510
5. Procédés d'itérations et formation de chaînes dans la méthode effective de réduction à une forme canonique de Burnside [1899]. 512
6. Formes canoniques ou invariants ? La note de Baker au mémoire de Burnside. 518

Chapitre 8.
1. La note de Séguier de 1907 sur la théorie des matrices. 524
2. Les applications de la forme de Jordan à la théorie des matrices réalisées par de Séguier. 528
3. de Séguier et la forme canonique des substitutions linéaires en 1902. 532
4. Extraits de la note aux Comptes Rendus de Jordan [1904]. 536
5. Les faisceaux de formes quadratiques et bilinéaires chez Jordan en 1906. 542
6. La classification des sous groupes finis du groupe linéaire et l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires par Jordan en 1878. 548
7."Sur l'équivalence des formes", Jordan [1880a]. 550
8. La non finitude des classes d'équivalence des cubiques dans les cas "exceptionnels" étudiés par Poincaré [1880]. 558
9. Interprétations géométriques des types de formes canoniques par Poincaré. 560
10. Opérativité de la notation par tableaux chez Jordan 572
11. Les tableaux comme méthode de la théorie des nombres chez Chatelet (1910-1913). 580

12. Commentaires de Chatelet apposés au mémoire "Sur la représentation des nombres par les formes" de Poincaré [1950, 400]. 586

Chapitre 9.

1. Méthodes de décomposition des tableaux dans les *Leçons de la théorie des nombres* de Châtelet. 592
2. La "forme la plus simple" des substitutions et la construction des " groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire quaternaire régulier". 598
3. "Sommaire raisonné" du traité "Sur les formes mixtes" d'Autonne [1905]. 606
4. Application de la forme typique des matrices aux connexes. 608
5. "Sur les droites fondamentales et sur les collinéations de l'espace à N-1 dimensions" [Autonne, 1905b]. 614
6. Quelques compléments sur les travaux d'Autonne. 618
7. L'approche géométrique sur les équations du premier ordre [Autonne, 1890]. 622
8. Une première application des diviseurs élémentaires à la géométrie : la thèse de Klein [1868]. 626
9. Autonne et l'étude des connexes et des formes mixtes "dans le sens de Clebsch". 632
10. La formulation vectorielle de l'approche géométrique chez Weyl [1923]. 640

CONCLUSION.

1. L'histoire de la théorie des matrices dans les années trente. 650
2. Différences de présentation de la forme de Jordan dans les deux traités de Mac Duffee de 1933 et 1943. 654
3. Les procédés d'itérations de la théorie des algèbres associatives dans les cours sur les matrices de Wedderburn. 664
4. Une nouvelle articulation entre formes canoniques et invariants : la détermination de la" forme canonique classique" chez Turnbull et Aitken. 668
5. Efficacité et simplicité de la combinatoire des matrices : le problème de la détermination des matrices commutant à une matrice donnée. 674
6. Les trois lois du mouvement de Sylvester. 676

Théorème de Jordan.

Réduction d'une substitution à sa "forme canonique simple". Théorie des substitutions. Jordan. Paris, 1870.

Réduction de Jordan d'une substitution. Théorie des groupes linéaires. Dickson. Chicago, 1900.

Réduction de Jordan d'une matrice. Théorie des formes bilinéaires. De Séguier. Paris, 1907.

Une nouvelle forme canonique des substitutions linéaires. Systèmes d'équations différentiels. Lattès. Toulouse, 1913.

Décomposition de Jordan d'une matrice. Théorie des matrices canoniques. Turnbull et Aitken. Londres, 1933.

Décomposition de Jordan d'un opérateur. Algèbre linéaire. Mac Duffee. New York, 1943.

Matrice.

Matrice comme mère des mineurs d'un déterminant. Théorie des invariants. Sylvester. Londres, 1851.

Calcul symbolique des matrices. Théorie des matrices. Cayley. Londres, 1858.

Forme normale d'une matrice. Théorie des nombres. Smith. Londres, 1861.

Caractéristique d'une matrice. Théorie des formes bilinéaires. Weyr. Vienne, 1890.

Diviseurs élémentaires d'une matrice. Représentation des groupes. Frobenius. Berlin, 1896.

Forme typique d'une matrice. Géométrie algébrique. Autonne. Lyon, 1905.

Réduction rationnelle à une suite de matrices compagnons. Représentation des groupes. Krull.. Fribourg, 1921.

Décomposition d'une matrice. Théorie des matrices canoniques. Turnbull et Aitken. Londres, 1932.

Polynôme caractéristique.

Equation des inégalités séculaires des planètes. Mécanique. Lagrange. Paris, 1788.

Equation des axes principaux d'une conique. Géométrie analytique. Cauchy. Paris, 1828.

Equation caractéristique. Systèmes d'équations différentiels. Cauchy. Paris, 1839.

Propriété remarquable de certaines équations caractéristiques. Fonctions homogènes du second degré. Weierstrass. Berlin, 1858.

Arithmétique des polynômes de formes bilinéaires. Théorie des formes bilinéaires. Frobenius. Berlin, 1879.

On pourrait poursuivre la coloration du théorème de la page de droite sur les termes *endomorphismes*, *corps*, *espace vectoriel*. La signification des termes ***forme*** et ***représentation*** est particulièrement problématique comme on le verra dans la suite.

introduction.

Un jeu de couleurs sur un énoncé du théorème de Jordan extrait d'un traité contemporain d'enseignement supérieur permet un premier éclairage de l'objet et de la problématique de cette thèse de doctorat ([1]).

> Théorème. Réduction de Jordan d'un endomorphisme.
> Soit f un endomorphisme sur un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps K et tel que son polynôme caractéristique P_f soit scindé sur K :
>
> $$P_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$
>
> Alors il existe une base B de E dans laquelle f se **représente** par une matrice de la **forme** :
>
> $$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_s \end{pmatrix}$$
>
> où pour tout i :
>
> $$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & v_{i,1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & v_{i,2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & v_{i,\alpha_{i-1}} \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$
>
> avec pour tout (i,j), $v_{ij} \in \{0,1\}$.
> Exemple :
>
> $$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & & & & & \\ & & \lambda_2 & 1 & 0 & & & \\ & & 0 & \lambda_2 & 1 & & & \\ & & 0 & & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ & & & & & & \lambda_4 & 1 \\ & & & & & & & \lambda_4 \end{pmatrix}$$
>
> [Gourdon, 1994, 196]

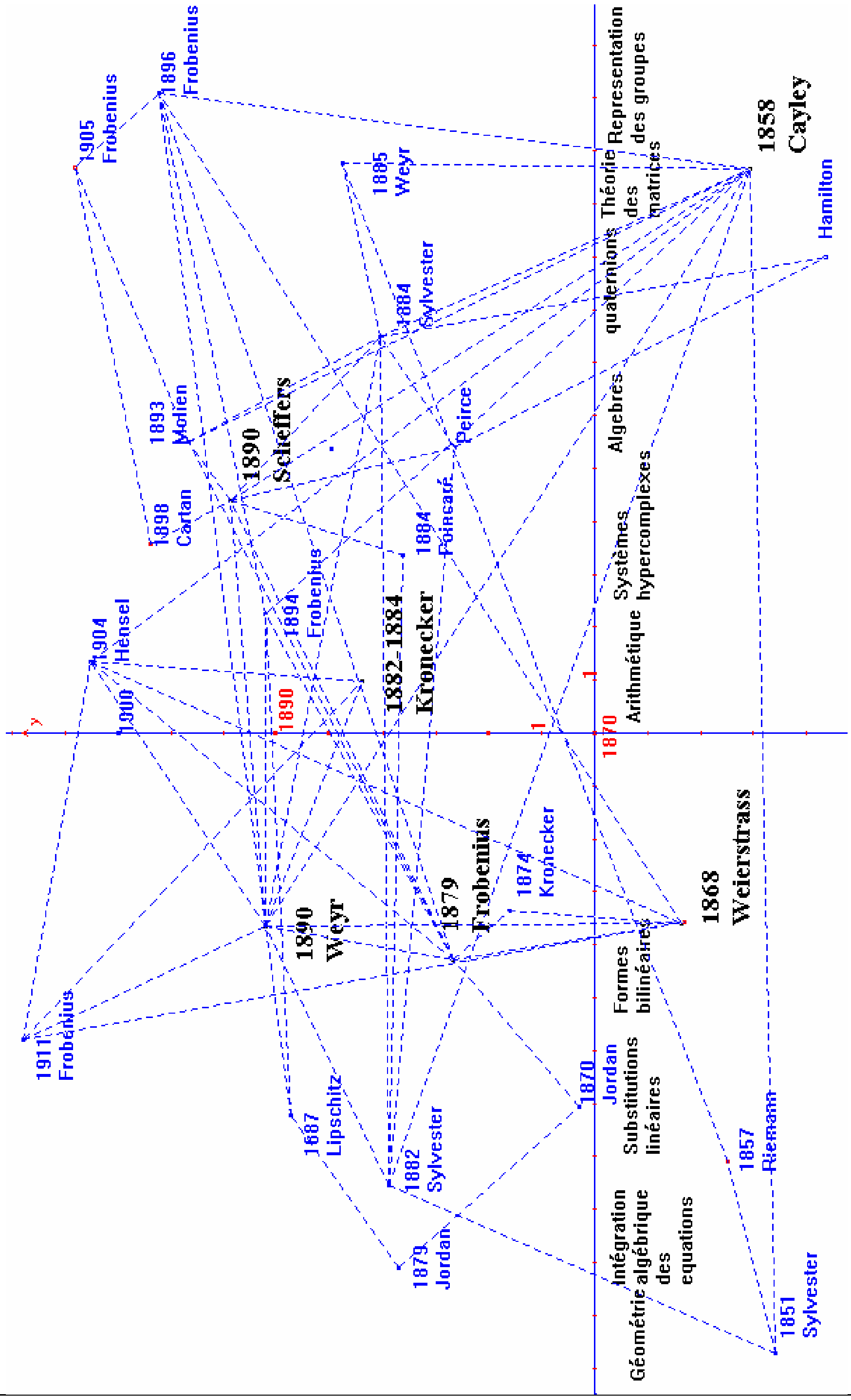
Comme nous le voyons en page de gauche, différentes théories, différents auteurs, différentes époques, différents contextes culturels se mêlent en une même coloration dans l'énoncé d'un théorème contemporain. Ce coloriage met

[1] La référence [Auteur, Date, Page] placée en fin de chaque citation renvoie à la bibliographie donnée à la fin de la thèse.

ENCART 1.

Un exemple de représentation de réseaux de recherches (1880-1907).

Dans l'exemple de réseau représenté ci-dessous et qui est établi dans la deuxième partie de cette thèse, le *Traité des substitutions* de Jordan joue un rôle marginal quand on le situe par rapport aux nœuds que sont les mémoires de Frobenius [1879], Weierstrass [1858] et Weyr [1890].



en évidence la façon dont la dénomination de "théorème de Jordan" est problématique d'un point de vue historique. Selon que l'on accole le nom de Jordan aux qualificatifs de *réduction* ou *décomposition*, aux objets mathématiques de *substitutions*, *formes bilinéaires, matrices* ou *endomorphismes*, différents moments de l'histoire sont désignés sur une période longue. Envisager un énoncé mathématique contemporain comme le filage en une tresse de fils reliant des époques et des sociétés variées est une des motivations à l'origine de ce travail. La métaphore de la tresse renvoie à une position sur la manière de restituer la "dynamique réelle des savoirs" par la "multiplicité de leurs origines" [Dhombres, 2002] qui revient à ancrer un énoncé mathématique dans l'histoire en posant la question de son identité [Goldstein, 1987]. Y a-t-il un ou plusieurs théorèmes de Jordan ? Y en-a-t-il au moins un ? Les déclinaisons multiples de cette question d'identité donnent à cette thèse de doctorat sa trame principale.

Pour cerner la complexité historique sous jacente à l'énoncé contemporain du théorème de Jordan, la méthodologie de cette thèse de doctorat repose sur l'établissement de réseaux de textes (encart 1). Une recherche bibliographique a permis d'établir un premier corpus regroupant tous les textes faisant référence à un "théorème de Jordan". Ce premier corpus de textes a ensuite été complété par un épuisement systématique des références bibliographiques. L'examen du corpus général obtenu fixe une périodisation, allant de 1870 à 1930, et son découpage en trois parties reflète une première description grossière de l'évolution historique de l'identité du théorème de Jordan :

- De 1870 à 1880, de nombreuses publications font référence à un "théorème de Jordan" de réduction des substitutions linéaires à une forme canonique établi par Camille Jordan en 1870 dans son *Traité des substitutions* (encart 2,1).

- De 1880 à 1907, ce même "théorème de Jordan" disparaît de la scène mathématique, il ne fait l'objet que de quelques références éparses. Dans cette période, plusieurs théorèmes sont établis dans des contextes théoriques différents par des auteurs comme Weyr [1890] ou Autonne [1905] (encart 5). Ces résultats distincts seront perçus dans les années trente du XX^e siècle comme équivalents au "théorème de Jordan de décomposition matricielle".

- De 1907 à 1930, le "théorème de Jordan de décomposition matricielle" joue un rôle essentiel dans l'élaboration d'une nouvelle organisation théorique (encart 2,2). Les nombreux traités sur la théorie des matrices publiés dans les années trente du XX^e siècle s'articulent autour de ce théorème dont le contenu renvoie à des résultats distincts établis entre 1880 et 1930, le plus souvent sans aucune référence à Jordan ([2]).

Le découpage en trois parties qui structure le plan de cette thèse de doctorat reflète les trois périodes ainsi mises en évidence : 1870-1880, 1880-1907, 1907-

[2] Voir par exemple le traité de Mac Duffy [1933] qui adjoint systématiquement des notes historiques aux énoncés mathématiques.

ENCART 2.

Deux extrémités du spectre d'une question d'identité.

1. La forme canonique de Jordan en 1870.

Le théorème suivant est énoncé par Jordan dans sont *Traité des Substitutions* de 1870. Un jeu de couleur similaire à celui qui a été appliqué au théorème contemporain cité à la page 13 fait apparaître les termes de *substitution linéaire*, *facteur irréductible*, *partage en systèmes d'indices correspondant aux racines d'une congruence irréductible, entiers complexes* et ***forme simple.*** Les différences dans les termes employés par Jordan en 1870 par rapport à la formulation du théorème contemporain ou à celle du théorème de décomposition matricielle de 1943 cité page suivante met en évidence la question d'identité qui fait la problématique de cette thèse.

THEOREME. –*Soit*

$$A = |x, x',\dots\ ax+bx'+\dots,\ a'x+b'x'+\dots,\ \dots|$$

une substitution linéaire quelconque à coefficients entiers entre n indices variables chacun de 0 à p-1 ; Soient F, F', … les facteurs irréductibles de la congruence de degré n

$$\begin{vmatrix} a-K & a' & \dots \\ b & b-K & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \equiv 0 (\mathrm{mod}.\, p)$$

l, l', …leurs degrés respectifs ; m, m', … leurs degrés de multiplicité ;

On pourra remplacer les n indices indépendants x, x', … par d'autres indices jouissant des propriétés suivantes :

1° Ces indices se partagent en systèmes correspondants aux divers facteurs F, F',… et contenant respectivement lm, l'm',… indices ;

2° Soient K_0, K_1, …, K_{l-1} *les racines de la congruence irréductible* $F\equiv 0$ *(mod.p) ; les n indices du système correspondant à F se partagent en l séries correspondantes aux racines* K_0, K_1, …, K_{l-1} *;*

3° Les indices de la première série de ce système sont des fonctions linéaires des indices primitifs, dont les coefficients sont des entiers complexes formés avec l'imaginaire K_0 *; ils constituent une ou plusieurs suite* y_0, z_0, u_0,…, y'_0, z'_0,… ; … (*) *telles que A remplace les indices* y_0, z_0, u_0, … *d'une même suite respectivement par* K_0y_0, $K_0(z_0+y_0)$, $K_0(u_0+z_0)$, … ;

4° Les indices de la r+1^ième^ *série sont les fonctions* y_r, z_r, u_r,… ; y'_r, z'_r,… ; … *respectivement conjuguées des précédente, que l'on forme en y remplaçant* K_0 *par* K_r *; A les remplace respectivement par*

$$K_ry_r,\ K_r(z_r+y_r),\ K_r(u_r+z_r,\dots;\dots)$$

Cette forme simple

$$\left| \begin{array}{ll} y_0, z_0, u_0, \dots, y'_0, \dots & K_0y_0, K_0(z_0+y_0), K_0(u_0+z_0), \dots, K_0y'_0 \\ y_1, z_1, u_1, \dots, y'_1, \dots & K_1y_1, K_1(z_1+y_{10}), K_1(u_1+z_1), \dots, K_1y'_1 \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \upsilon_0 & K'_0\,\upsilon_0, \dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{array} \right|$$

à laquelle on peut ramener la substitution *A* par un choix d'indice convenable, sera pour nous sa forme *canonique.*

[Jordan, 1870, 127].

1930. Préciser ce premier découpage nécessite d'étudier la manière dont les textes et acteurs des périodes considérées s'organisent en réseaux. L'analyse des références bibliographiques des textes du corpus général conduit à distinguer des réseaux cohérents de textes, essentiellement distincts les uns des autres et ne correspondant pas globalement à des théories. Ces réseaux ne sont cependant pas sans présenter des points de contacts, des communications. Des graphes permettent de représenter les liens entretenus par les différents textes d'un même réseau et la manière dont s'articulent les réseaux eux-mêmes, ils montrent notamment l'existence de points de convergences, de nœuds, dans l'entremêlement des références bibliographiques (encart 1). Le *Traité des Substitutions* de 1870 dans lequel Jordan énonce sa forme canonique n'est pas toujours un point de convergence. D'autres nœuds apparaissent et correspondent à des auteurs, des théories, des lieux et des époques variés. *A chaque réseau cohérent isolé par la recherche bibliographique correspond un chapitre de cette thèse. C'est à partir du réseau qui lui est associé que chaque chapitre se voit associer une périodisation et une problématique.* Une représentation graphique simplifiée du réseau considéré est placée dans un encart en ouverture du chapitre associé.

Un premier résultat de cette méthodologie d'établissement de réseaux par épuisement des références bibliographiques est que l'histoire du théorème de Jordan doit s'envisager sur une période longue et ne peut se réduire à l'histoire d'une théorie avant l'algèbre linéaire des années trente du XX^e^ siècle ([3]). Il y a un seul théorème de Jordan dans les manuels à partir de 1930-1940 et cette fixation exige à la fois une histoire archéologique et une histoire qui s'intéresse à la postérité du résultat établi par Jordan en 1870. Aux deux bornes extrêmes de la périodisation, aux limites du spectre de la dynamique de la question d'identité, figurent deux théorèmes distincts et ce travail de doctorat peut tout à la fois se concevoir comme une histoire du théorème de réduction des substitutions à une forme canonique énoncé par Jordan en 1870 et une préhistoire du théorème de décomposition matricielle des années trente du XX^e^ siècle (encarts 2,1 et 2,2) ([4]). La richesse de l'histoire du théorème de Jordan provient souvent de ce qui échappe à une description mathématique contemporaine. Dans son ouvrage intitulé *Un théorème de Fermat et ses lecteurs,* Catherine Goldstein [1995] a montré la pertinence de la question d'identité pour décrire des évolutions qui ne relèvent pas simplement d'une

[3] C'est précisément quand l'algèbre linéaire ou plus précisément la théorie des matrices canoniques, s'organise en une théorie dans les années trente que l'histoire de cette thèse s'achève.

[4] Les termes "histoires" et "préhistoires" prennent ici la signification qu'en donne Christian Gilain dans le cadre de son histoire du "théorème fondamental de l'algèbre".

> La notion d'histoire d'un théorème va sans doute moins de soi que celle d'histoire d'une théorie. Aussi n'est-il pas inutile de préciser quelque peu le vocabulaire utilisé dans cet article ; nous parlons de début de l'"histoire (au sens strict)" quand, dans le cadre d'une théorie, apparaît un texte où figurent à la fois un énoncé relativement précis et une démonstration assez sérieuse (même si elle est lacunaire) du théorème. Nous nommons alors "préhistoire" du théorème la séquence antérieure où figurent de premières formes du théorème, manquant d'exactitude ou de généralité ; c'est une période qui non seulement précède mais prépare l'histoire [...]. [Gilain, 1991, 22].

A la différence du théorème de Jordan étudié dans cette thèse, le "théorème fondamental de l'algèbre" est nommé d'après une théorie et ne pose donc pas de question de postérité.

ENCART 2.

Deux extrémités du spectre de la question d'identité.

2. Le théorème de décomposition matricielle des années trente du XX^{e} siècle.

Un jeu de couleur porté sur le théorème suivant extrait d'un manuel publié par Mac Duffee en 1943 fait apparaître les termes *matrice*, *fonction minimale*, *semblable*, *blocs*, *diagonale*, *lignes*, *colonnes*, *corps algébriquement clos*. En comparant avec l'énoncé de Jordan de 1870 cité à la page précédente, on voit notamment que les termes *semblables, diagonale*, *blocs* associés à la représentation matricielle donne une signification *différente* au terme **forme** employé par les deux théorèmes de 1870 et 1943.
La qualificatif "familière" associé à la dénomination "forme normale de Jordan" manifeste la fixation du théorème de Jordan dans les manuels à partir des années trente du XX^{e} siècle.

> [...]THEOREM 65. *Every non derogatory matrix whose minimum function is [l(x)]^{h} where l(x) is irreductible of degree j is similar to a matrix of the type (35) with h blocks along the diagonal.*

$$(35)\quad \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & -l_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -l_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -l_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -l_2 \end{array}\right]$$

> The case where *F* is the complex field, or in fact any algebraically closed field, deserves special mention. In this case we can write

$$m(x) = (x - x_1)^{h_1}(x - x_2)^{h_2} \ldots (x - x_k)^{h_k}$$

> so that *A* is similar to a direct sum of matrices of the form

$$(36)\qquad B_i = \begin{bmatrix} x_i & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & x_i & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_i & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x_i \end{bmatrix},$$

> of h_i rows and columns. This the familiar *Jordan normal form* of a matrix with complex elements.
> [Mac Duffee, 1943, 114-121]

activité mathématique de recherche de nouveaux résultats ou de meilleures preuves. Une démonstration mathématique est structurée tout autant par des non dits que par des procédés déductifs de nature logique. Des implicites du savoir mathématique tiennent à des types d'intuitions tacites, des modes de pensées locaux, des idéaux disciplinaires et des méthodes indissociables d'un contexte culturel et social daté. La méthodologie des réseaux vise à permettre une description de cultures mathématiques, de leurs interactions et communications. Elle permet de préciser la métaphore de la tresse appliquée à l'énoncé contemporain du théorème de Jordan : la mise en évidence de réseaux distincts permet de poser la question des communications, des convergences, c'est-à-dire de la manière dont des cultures locales se tressent et participent de l'histoire plurielle d'un théorème sur la période 1870-1930.

Le choix de clore la période étudiée par les années trente du XX^{e} siècle tient à la nouvelle identité que donne au théorème de Jordan son énoncé comme théorème de *décomposition matricielle* au sein d'une théorie mathématique internationale, l'algèbre linéaire. "Représentation", "forme" et "décomposition" sont des mots clés des énoncés du théorème de Jordan dans les années trente (encart 2,2). Qu'est ce qu'une *forme* en mathématiques et qu'est-ce qu'une *représentation* ? Ces deux questions s'avèrent indissociables d'une réflexion sur l'identité du théorème de Jordan. D'un point de vue contemporain, la notion de *matrice* donne *forme* à la *représentation* linéaire d'un groupe d'opérateurs sur un espace de dimension finie. Forme et représentation ont tous deux une signification bien fixée par la notion de matrice. A l'opposé, le qualificatif de "forme", envisagé sur une longue durée, renvoie à des significations très diverses qui ne sont pas sans rapport avec les différents objets que le mathématicien contemporain a coutume de représenter par un même concept de matrice. Différentes relations d'équivalences donnent à la forme matricielle différentes significations qui renvoient à des moments distincts de l'histoire : similitude pour les systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants et les substitutions linéaires, congruence pour les formes quadratiques, équivalence pour les systèmes linéaires, les formes bilinéaires ou plus généralement les modules de types finis. Si dans les années trente, la représentation matricielle fait unité en écrasant la pluralité de son histoire, la question de l'identité du théorème Jordan implique de défaire la tresse de la notion contemporaine de matrice en suivant les fils des significations diverses et souvent implicites revêtues par le terme "forme" tout au long du XIX^{e} siècle.
Envisager l'histoire du théorème de Jordan comme une histoire de formes renvoie à s'interroger sur un terme qui, bien que fréquemment employé dans un cadre mathématique, n'est pendant longtemps soutenu par aucune définition explicite. Dans son histoire de la théorie des nœuds, Moritz Epple [1999] met en évidence le rôle joué par la représentation imagée pour la mathématisation progressive de l'idée naïve de nœud. Je copie un artifice employé par Epple dans son introduction et propose en encart 3 quelques citations de textes d'époques variées dans lesquelles figure le terme "forme". Quelques mots clés s'en dégagent : *invariants*, *transformations*, *équivalence*, *réduction*, *simplicité*, *algèbre*, *arithmétique*, *mécanique*. Ces mots clés manifestent la diversité de représentations des "formes" mathématiques dans des contextes théoriques variés. Ces représentations sont souvent les guides implicites des méthodes, des intuitions, des idéaux qui font les différentes identités du théorème de Jordan, résultat portant sur une méthode de *décomposition* indissociable d'une

ENCART 3.

Quelques exemples d'emplois du terme "forme" en mathématiques.

Traité des substitutions. [Jordan, 1870, 127] :

Cette forme simple

$$\left| \begin{array}{ll} y_0, z_0, u_0, ..., y'_0, ... & K_0 y_0, K_0(z_0 + y_0), K_0(u_0 + z_0), ..., K_0 y'_0 \\ y_1, z_1, u_1, ..., y'_1, ... & K_1 y_1, K_1(z_1 + y_{10}), K_1(u_1 + z_1), ..., K_1 y'_1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \upsilon_0 & K'_0 \upsilon_0, ... \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right|$$

à laquelle on peut ramener la substitution *A* par un choix d'indice convenable, sera pour nous sa forme *canonique*.

"Sur un théorème des fonctions homogènes du second degré", [Weierstrass, 1858, 233, traduction F.B.] :

Soit deux fonctions homogènes du second degré Φ, Ψ de *n* variables $x_1, x_2, ...,$ alors il est en général possible, de les représenter de cette même forme

$$\Phi = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n$$
$$\Psi = s_1\theta_1 + s_2\theta_2 + \ldots + s_n\theta_n,$$

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ étant des expressions quadratiques homogènes des $x_1, \ldots x_n$ et $s_1, \ldots, s_n$ des constantes.

Si, on note par *s* une grandeur arbitraire, le déterminant de $s\Phi$-Ψ par $f(s)$, alors les valeurs s_i sont des valeurs de *s* pour lesquelles $f(s) = 0$.

Cette transformation de Φ, Ψ est une des tâches algébriques des plus intéressantes et importante que l'on rencontre dans le cadre de problèmes de natures les plus différentes

Mécanique Analytique. [Lagrange, 1788, 243-286] :

Cependant comme ces équations [les équations de la mécanique] peuvent avoir différentes formes plus ou moins simples, & surtout plus ou moins propres pour l'intégration, il n'est pas indifférent sous quelle forme elles se présentent d'abord ; & c'est peut-être un des principaux avantages de notre méthode, de fournir toujours les équations de chaque problème sous la forme la plus simple relativement aux variables qu'on y emploie, & de mettre en état de juger d'avance quelles sont les variables dont l'emploi peut en faciliter le plus l'intégration. Nous allons donner ici pour cet objet quelques principes généraux, dont on verra ensuite l'application dans la solution de différens problèmes.

"Sur la théorie des formes quadratiques", [Hermite, 1853, 225] :

Deux formes sont dites *équivalentes* lorsqu'on peut obtenir l'une d'elles en faisant dans l'autre une substitution linéaire et homogène, à coefficients entiers et de déterminant un. C'est cela du moins que consiste l'*équivalence arithmétique.* En admettant des quantités quelconques pour les coefficients de la substitution, on aura la notion de ce qu'on peut appeler l'*équivalence algébrique.*

La théorie des matrices canoniques [Turnbul et Aitken, 1932] :

The theory of canonical matrices is concerned with the systematic investigation of types of transformation which reduce matrices to the simplest and most convenient shape.

forme de représentation. Si cette introduction a déjà permis de présenter un plan général de ce travail, il reste à expliciter plus avant certaines problématiques et hypothèses de travail par une présentation plus détaillée des trois parties qui structurent cette thèse et portent des éclairages différents sur la question de l'identité du théorème de Jordan dans l'histoire.
Les convergences du réseau de textes associé à la période 1870-1880 s'entrelacent en un nœud qui mêle, en 1874, les références à quatre auteurs principaux : Jordan, Weierstrass, Kronecker et Frobenius. En 1874 une vive controverse oppose Camille Jordan à Leopold Kronecker sur une querelle de priorité suscitée par la rencontre de deux théorèmes. L'un, énoncé par Jordan dans le cadre de son *Traité des substitutions* de 1870, établit une *forme canonique* des substitutions du groupe linéaire (encart 2). L'autre, établi par Karl Weierstrass en 1868, énonce un système complet *d'invariants* des couples non singuliers de formes bilinéaires : les diviseurs élémentaires (encart 4) ([5]). Le théorème de Jordan est-il le *même* que celui de Weierstrass ? Poser cette question, c'est formuler le problème de l'identité du théorème de Jordan comme relevant d'une distinction entre équivalence et indépendance mathématique de deux théorèmes. La première partie de ce travail est toute entière consacrée à la querelle Jordan-Kronecker de 1874 et propose l'histoire de la construction d'une équivalence mathématique ([6]). La théorie des formes bilinéaires de Frobenius [1878-1879] vient clore la périodisation considérée et donner une issue à la controverse par une première démonstration complète de l'équivalence des théorèmes de Jordan et Weierstrass. Au cœur de l'organisation théorique de Frobenius, un unique théorème énonce des invariants inspirés des travaux de Weierstrass et Kronecker ; la forme canonique de Jordan apparaît comme corollaire. La réponse de Frobenius à la question d'identité n'est cependant pas définitive. Comment préciser ce qui, dans une question d'identité, n'est pas réductible au seul énoncé d'une équivalence mathématique ? Les arguments qu'opposent Jordan et Kronecker relèvent moins de la technicité mathématique que *d'idéaux* sur ce que doit être *l'algèbre*, *l'arithmétique*, la *généralité* ou encore la *simplicité*. *Opposition de deux théorèmes, la querelle Jordan-Kronecker est également la rencontre de deux cultures mathématiques et met en évidence des idéaux, des pratiques et des associations disciplinaires locales*.

Formes canoniques contre invariants, simplicité contre effectivité, certaines des questions posées par la controverse de 1874 restent ouvertes pour longtemps. Le travail sur la controverse de 1874 mené dans la première partie de cette thèse permet de spécifier un *moment historique de référence* à partir duquel est conduite l'étude de l'histoire de la période 1880-1907. La dynamique de la tension *forme canonique/ invariants* permet notamment de mettre en évidence des mouvements historiques ne se réduisant pas à des réorganisations théoriques du savoir mathématique et qui n'ont pas été abordés par

---

[5] Voir l'encart 6 pour une définition des diviseurs élémentaires et une formulation de leurs relations avec le théorème de Jordan. Les relations entre les diviseurs élémentaires et la forme canonique d'une matrice sont détaillées de manière contemporaine en annexe 1.

[6] L'histoire du théorème des diviseurs élémentaires de Weierstrass a été étudiée par Thomas Hawkins [Hawkins, 1977b]. La première partie de cette thèse reprend et complète les travaux de T. Hawkins.

ENCART 4.

Les diviseurs élémentaires de Weierstrass.

[Weierstrass, 1868, 21] :

Es werde durch die Substitutionen

$$(7)\begin{cases} x_1 = \sum_\gamma h_{1\gamma} u_\gamma ,..., x_n = \sum_\gamma h_{n\gamma} u_\gamma \\ y_1 = \sum_\gamma k_{1\gamma} v_\gamma ,..., y_n = \sum_\gamma k_{n\gamma} v_\gamma \end{cases}$$

wo $u_1, \ldots, u_n$ und $v_1, \ldots, v_n$ neue Veränderliche bedeuten, $h_{11}, \ldots, h_{nn}, k_{11}, \ldots, k_{nn}$ aber Constanten, welche keiner anderen Beschränkung unterworfen sind, als dass die Determinanten

$$(8.)H = \begin{vmatrix} h_{11},...,h_{1n} \\ .... \\ h_{n1},...,h_{nn} \end{vmatrix}, K = \begin{vmatrix} k_{11},...,k_{1n} \\ .... \\ k_{n1},...,k_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null sein dürfen, die Form

$P(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$ in eine $P'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$;

und zugleich

$Q(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$ in eine $Q'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$

verwandelt ; so stimmen die Determinanten der beiden Formen

$pP+qQ, pP'+qQ'$

in ihren Elementar-Theilern überein.

Und umgekehrt, wenn zwei Formen-Paare $P(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$,$P'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$; und $Q(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$, $Q'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$ gegeben sind, und es stimmen die beiden Determinanten $[P,Q]$, $[P',Q']$ in ihren Elementar-Theilern überein ; so können auch stets die Coefficienten $(h_{11}, \ldots, h_{nn})$ und $(k_{11}, \ldots, k_{nn})$ so bestimmt werden, dass durch die unter (7.) angegebenen Substitutionen P in P' und zugleich Q in Q' übergeht.

[Traduction, F.B.]. Si par les substitutions

$$(7)\begin{cases} x_1 = \sum_\gamma h_{1\gamma} u_\gamma ,..., x_n = \sum_\gamma h_{n\gamma} u_\gamma \\ y_1 = \sum_\gamma k_{1\gamma} v_\gamma ,..., y_n = \sum_\gamma k_{n\gamma} v_\gamma \end{cases}$$

où $u_1, \ldots, u_n$ et $v_1, \ldots, v_n$ sont des nouvelles variables et $h_{11}, \ldots, h_{nn}, k_{11}, \ldots, k_{nn}$ des constantes, qui ne sont soumises à aucune condition sauf que les déterminants

$$(8.)H = \begin{vmatrix} h_{11},...,h_{1n} \\ .... \\ h_{n1},...,h_{nn} \end{vmatrix}, K = \begin{vmatrix} k_{11},...,k_{1n} \\ .... \\ k_{n1},...,k_{nn} \end{vmatrix}$$

ne doivent pas être nuls, la forme $P(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$ se transforme en une autre $P'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$; et de même $Q(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$ en $Q'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$; alors les diviseurs élémentaires des déterminants de chaque forme $pP+qQ, pP'+qQ'$ coïncident.

Et inversement, quand deux couples de formes

$P(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$,$P'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$;

et

$Q(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$, $Q'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$

sont donnés dont les diviseurs élémentaires des déterminants

$[P,Q]$, $[P',Q']$

coïncident ; alors il est toujours possible de déterminer les coefficients $(h_{11}, \ldots, h_{nn})$ et $(k_{11}, \ldots, k_{nn})$, telle que par les substitutions (7.) P va sur P' et Q sur Q'.

l'historiographie des théories mathématiques de la période 1870-1930. La deuxième partie de cette thèse aborde la question de l'identité du théorème de Jordan par l'examen de réseaux en lesquels s'organisent un grand nombre d'auteurs et de textes sur la période 1880-1907. L'étude des convergences des références bibliographiques met en valeur un mémoire publié en 1890 par un mathématicien presque inconnu de l'historiographie, Eduard Weyr. Dans l'ambition de restituer l'originalité d'une pensée, un parti pris de la rédaction de la deuxième partie de la thèse est de structurer l'étude de la période 1880-1907 par un suivi fidèle du texte de Weyr de 1890 et la présentation des différents réseaux qui s'y rattachent. Présenter le mémoire de Weyr comme un point de convergence permet de décrire les différences influences qui se mêlent pour constituer une nouvelle méthode mathématique de décomposition indissociable d'un mode particulier de représentation: la décomposition matricielle du théorème d'Eduard Weyr (encart 5).

La troisième partie de cette thèse est consacrée au théorème de Jordan de la décomposition matricielle. Ce théorème des années trente se présente comme une tresse de notions et méthodes élaborées au sein de réseaux distincts entre 1870 et 1930. Son histoire est abordée comme la construction d'une culture mathématique commune. De jeunes enseignants chercheurs comme Autonne, de Séguier, Lattès ou Chatelet prêtent aux matrices des vertus pédagogiques qui leur permettent d'exposer leurs recherches les plus récentes dans des traités d'enseignement. Ces préoccupations pédagogiques interrogent directement la recherche sur des questions nouvelles et impulsent le développement de la théorie des matrices canoniques par une dynamique de va-et-vient entre enseignement et recherche. La problématique de la troisième partie s'élabore autour d'une hypothèse de travail selon laquelle la "production mathématique ne peut être séparée à priori par l'historien des conditions de sa reproduction" [Belhoste, 1988, 292]. L'enseignement des mathématiques ne se réduit pas au rôle secondaire de communication, de transmission et vulgarisation du savoir mathématique, il est essentiel pour rendre compte de la socialisation, de la mise en commun qui donne au théorème de Jordan une nouvelle identité dans les années trente du XXe siècle.

ENCART 5.

Le théorème de Weyr de 1885.

Le théorème ci-dessous est énoncé par Eduard Weyr en 1885 de manière totalement indépendante des travaux de Jordan. Dans les années 1930, ce théorème sera présenté comme l'une de des principales méthodes de démonstration du théorème de Jordan de la décomposition matricielle.

"Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces," [Weyr, 1885b , 966] :

> Soient M une matrice quelconque d'ordre n et μ_α une racine αuple de M. En formant les puissances de $M-\mu_\alpha$, on tombe nécessairement sur une puissance $(M-\mu_\alpha)^\rho$ qui est de nullité α ; les puissances plus élevées sont de la même nullité.
>
> Désignons par
>
> $$\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\dots,\ \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\rho = \alpha$$
>
> les degrés de nullité des matrices
>
> $$M-\mu_\alpha,\ (M-\mu_\alpha)^2,\dots,(M-\mu_\alpha)^\rho$$
>
> [....] Pour abréger, je dis que la racine μ_α a pour *caractéristiques* les nombres $(\alpha, \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\rho)$.
>
> [...] Je dis, de deux matrices d'ordre n, qu'elles sont de même espèce si elles possèdent les mêmes racines aux mêmes caractéristiques.
>
> *M et N étant deux matrices de même espèce, on peut toujours assigner des matrices Q, de nullité zéro, telles qu'on ait $N = Q^{-1}MQ$.*
>
> Et, réciproquement [...] je dis qu'il existe toujours des matrices d'ordre n, ayant les racines μ_α, $\mu_\beta,\dots,\mu_\lambda$ aux caractéristiques respectives $(\alpha, \alpha_1,\dots,\alpha_\rho)$, $(\beta, \beta_1,\dots,\beta_\sigma),\dots$, $(\lambda, \lambda_1,\lambda_\tau)$, les valeurs μ_α, μ_β, ..., μ_λ étant arbitraires, mais distinctes entre elles.
>
> Pour cet effet, désignons *par* $G_{\rho-1-\mu\alpha}$ la matrice zéro, et d'ordre α_ρ,, et posons successivement
>
> $$G_{\rho-2-\mu\alpha} = \left\{\begin{array}{c|c} \begin{matrix} G_{\rho-1-\mu_\alpha} \\ \hline A_{\rho-1}\end{matrix} & \overbrace{\begin{matrix}0&\dots&0\\ .&\dots&.\\ 0&\dots&0\end{matrix}}^{(\alpha_{\rho-1}).}\end{array}\right\},\quad G_{\rho-3-\mu\alpha} = \left\{\begin{array}{c|c} \begin{matrix} G_{\rho-2-\mu_\alpha} \\ \hline A_{\rho-2}\end{matrix} & \overbrace{\begin{matrix}0&\dots&0\\ .&\dots&.\\ 0&\dots&0\end{matrix}}^{(\alpha_{\rho-2}).}\end{array}\right\},$$
>
> ....,
>
> $$G_{1-\mu\alpha} = \left\{\begin{array}{c|c} \begin{matrix} G_{2-\mu_\alpha} \\ \hline A_{2}\end{matrix} & \overbrace{\begin{matrix}0&\dots&0\\ .&\dots&.\\ 0&\dots&0\end{matrix}}^{(\alpha_{2}).}\end{array}\right\},\quad H_{-\mu\alpha} = \left\{\begin{array}{c|c} \begin{matrix} G_{1-\mu_\alpha} \\ \hline A_{1}\end{matrix} & \overbrace{\begin{matrix}0&\dots&0\\ .&\dots&.\\ 0&\dots&0\end{matrix}}^{(\alpha_{1}).}\end{array}\right\}.$$
>
> [...] Les compartiments $A_{\rho-1}$, $A_{\rho-2}$, ..., A_1 sont formés de la manière suivante :
>
> $$A_{\rho-1} = \left\{\begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix}1&0&\dots&0\\ 0&1&\dots&0\\ .&.&\dots&.\\ 0&0&\dots&1\end{matrix}}^{(\alpha_\rho)} \\ \begin{matrix}0&0&\dots&0\\ .&.&\dots&.\\ 0&0&\dots&0\end{matrix}\end{matrix}\right\}(\alpha_{\rho-1}),\quad A_{\rho-2} = \left\{\begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix}0&\dots&0\\ 0&\dots&0\\ .&\dots&.\\ 0&\dots&0\\ 0&\dots&0\\ .&\dots&.\\ 0&\dots&0\end{matrix}}^{(\alpha_\rho)} & \overbrace{\begin{matrix}1&0&\dots0\\ 0&1&\dots0\\ .&.&\dots.\\ 0&0&\dots1\\ 0&0&\dots0\\ .&.&\dots.\\ 0&0&\dots0\end{matrix}}^{(\alpha_{\rho-1})}\end{matrix}\right\}(\alpha_{\rho-2}),$$
>
> ....

Un dernier mot de cette introduction concerne la forme de rédaction adoptée proposant un texte en deux parties faisant vivre un discours commun. Des encarts, placés en regard du corps du texte, proposent des discours parallèles, des inédits, des extraits de textes originaux, des précisions historiques ou mathématiques, bref toutes sortes de compléments venant éclairer une trame principale. Certains encarts constituent de véritables discours parallèles au texte principal qu'ils viennent éclairer sous un angle différent. D'autres sont l'occasion d'entrer dans le détail des textes mathématiques et présenter les argumentations venant soutenir les assertions de cette thèse. La forme que donne au texte de la thèse ce discours à plusieurs voix vient appuyer une position épistémologique selon laquelle l'histoire d'un théorème ne peut se résumer à une liste d'énoncés de résultats mais est plutôt constituée de lectures multiples et de cadres de références qui évoluent. Les encarts occupent les pages de gauche, ils sont caractérisés par une mise en page spécifique et appelées par des références portées dans le corps du texte. La lecture n'en est jamais indispensable et ne présuppose aucun ordre.
Trois annexes viennent donner, sous forme contemporaine, des compléments mathématiques sur les notions abordés dans la thèse.

ENCART 6.

Le rôle de la représentation matricielle dans l'énoncé d'une identité entre forme canonique et diviseurs élémentaires dans les années trente.

[Wedderburn, 1933] :

Theorem 6. If $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ are any constants, not necessarily all different and $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ are positive integers whose sum is n, and if a_i is the array of ν_i rows and columns given by

$$\begin{matrix} \lambda_i & 1 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ & & & ... & & \\ & & & 0 & \lambda_i & 1 \\ & & & & 0 & \lambda_i \end{matrix} \quad (10)$$

where each coordinate on the main diagonal equals λ_i, those on the parallel on its right are 1, and the remaining ones are 0, and if a is the matrix of n rows and columns given by

$$a = \left\| \begin{matrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & ... & \\ & & & a_s \end{matrix} \right\| \quad (11)$$

composed of blocks of terms defined by (10) arranged so that the main diagonal of each lies on the main diagonal of a, the other coordinates being 0, then λ-a has the elementary divisors

$$(\lambda-\lambda_1)^{\nu_1}, (\lambda-\lambda_2)^{\nu_2}, \ldots, (\lambda-\lambda_s)^{\nu_s} \quad (12)$$

[...]

If A is a matrix with the same elementary divisors as a, it follows from theorem 5, that there is a matrix P such that $A = PaP^{-1}$ and hence, if we choose in place of the fundamental basis $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ the basis $(Pe_1, Pe_2, \ldots, Pe_n)$, [...] (11) gives the form of A relative to the new basis. This form is called the canonical form of A.

Première partie.

La controverse

Jordan - Kronecker

De 1874.

INTRODUCTION.

> [...] dans le Mémoire de M. *Jordan "Sur les formes bilinéaires" (Journal de M. Liouville, 2^e série t. XIX, pp. 35-54),* la solution du premier problème n'est pas véritablement nouvelle ; la solution du deuxième est manquée, et celle du troisième n'est pas suffisamment établie. Ajoutons qu'en réalité ce troisième problème embrasse les deux autres comme cas particuliers, et que sa solution complète résulte du travail de M. *Weierstrass* de 1868 et se déduit aussi de mes additions à ce travail. Il y a donc, si je ne me trompe, de sérieux motifs pour contester à M. *Jordan* l'invention première de ses résultats, en tant qu'ils sont corrects ; [...].
> [Kronecker, 1874b, 19 (les italiques sont dans le texte original)].

Une vive controverse oppose en 1874 Camille Jordan à Leopold Kronecker. Une série de notes et de mémoires, publiés aux Académies de Paris et Berlin ainsi que dans le *Journal de Liouville* ([1] , sont autant d'attaques et contre attaques "sur la scène publique" [Jordan, VI2a2X1855]. Dans la sphère privée, un échange épistolaire a lieu durant l'hiver 1874 et cette correspondance inédite, conservé par les archives de l'école Polytechnique, est présentée dans les encarts de ce chapitre ([2]).
La querelle a pour origine l'ambition de Jordan, formulée dans une note aux *Comptes Rendus* de 1873, de réorganiser la théorie des formes quadratiques et bilinéaires autour d'une unique notion qu'il qualifie de "simple" : la notion de forme canonique.

> On sait qu'il existe une infinité de manières de ramener un polynôme bilinéaire
> $$P = \Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \ (\alpha = 1,2,\ldots,n,\ \beta = 1,2,\ldots,n)$$
> à la forme canonique $x_1y_1+\ldots+x_my_m$, [...] par des transformations linéaires opérées sur les deux systèmes de variables $x_1,..,x_n$, $y_1,..,y_n$. Parmi les diverses questions de ce genre que l'on peut se proposer, nous considérons les suivantes :
> 1. Ramener un polynôme bilinéaire P à une forme canonique simple par des substitutions orthogonales opérées les unes sur $x_1,\ldots,x_n$, les autres sur $y_1,\ldots,y_n$.
> 2. Ramener P à une forme canonique simple par des substitutions linéaires quelconques opérées simultanément sur les x et les y.
> 3. Ramener simultanément à une forme canonique deux polynômes P et Q par des substitutions linéaires quelconques, opérées isolement sur chacune des deux séries de variables.
> [Jordan, 1873, 1487].

Qu'est ce qu'une forme bilinéaire en 1874 ? La controverse signale les enjeux nouveaux portés par une notion encore jeune, puisque elle est développée dans les années 1860 par un petit groupe de géomètres berlinois dans le contexte de l'un des grands domaines de recherches de l'époque : la théorie des fonctions elliptiques et

---

[1] L'appellation *Journal de Liouville* désigne le *Journal de mathématiques pures et appliquées* lancé en 1836 par Joseph Liouville. Le mémoire de D.E.A. de S. Duvina propose les grandes étapes de l'histoire de ce journal [Duvina, 1994] et une thèse de doctorat est actuellement consacrée au *Journal de Liouville* par N. Verdier.

[2] Voir la présentation de la correspondance mathématique de Jordan par la conservatrice des archives, Claudine Billoux [Billoux, 1985]. Les inédits sont référencés par la côte VI2a2X1855 des archives de l'Ecole Polytechnique.

abéliennes ([3]). La note de Jordan est la première publication parisienne consacrée aux "polynômes bilinéaires" et la querelle qui en résulte se présente d'abord comme un fort moment de communication entre Paris et Berlin ([4]). Dans les années 1874-1880, la notion de forme bilinéaire passe d'un sujet de recherche local à une théorie d'envergure internationale. Ce passage procède d'un double mouvement. D'une part la notion de forme bilinéaire s'affirme comme participant d'une théorie autonome, elle se détache du contexte local de sa création et tient d'une mathématique *pure*, une *mathématique des formes*. Dans le même temps, c'est sa capacité à *s'appliquer* dans divers domaines des mathématiques qui permet à la mathématique des formes de s'enrichir d'une épaisseur théorique. La classification proposée par Jordan pour ordonner la théorie met en évidence une diversité de domaines d'interventions : en théorie des nombres, géométrie, intégration des équations différentielles. Dans la citation de Jordan ci-dessus, la "forme canonique" $x_1y_1+\ldots+x_myB_m$ généralise la loi d'inertie de la théorie des formes quadratiques, le problème 1 fait référence à la classification des fonctions homogènes du second degré réalisée par Cauchy en 1829 dans un cadre géométrique, le problème 2 renvoie à la question arithmétique de l'équivalence des formes quadratiques dans la tradition de Gauss et des *Disquitiones Aritmeticae* de 1801 et le problème 3 provient de la théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants remontant au XVIII^e siècle. C'est par sa grande étendue d'applications que la notion de forme bilinéaire accède, dans les années 1870, au statut de théorie autonome ([5]). La controverse a donc un enjeu véritable qui est d'organiser l'objet et les méthodes d'une théorie désormais destinée à jouer un rôle essentiel dans les mathématiques ([6]).

Quelle est cette *mathématique des formes* ? Appartient-elle à *l'algèbre* ou à *l'arithmétique* ? Lorsque Jordan propose d'articuler la théorie par la notion de forme canonique, la réplique de Kronecker ne se fait pas attendre et une querelle de priorité se développe sur l'opposition de deux théorèmes, découverts indépendamment et dans des théories différentes. L'un, du à Weierstrass [1868] définit des *invariants*, les diviseurs élémentaires, pour caractériser l'équivalence des couples de formes bilinéaires (encart 2) ; l'autre, énoncé par Jordan en 1870, définit une *forme canonique* des substitutions linéaires dans un contexte de travaux sur la

---

[3] Des recherches sur la transformation des fonctions thêta de plusieurs variables sont à l'origine de la publication, en 1866, de deux mémoires de Christoffel et Kronecker qui revendiquent la création d'une théorie des formes bilinéaires. L'histoire des formes bilinéaires dans les années 1860 est abordée dans le chapitre II de ce travail.

[4] Le terme "polynôme bilinéaire" utilisé par Jordan en 1873, pour désigner l'expression $\Sigma A_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$, illustre la communication scientifique qui passe par la controverse : dès 1874, Jordan le remplace par l'expression "forme bilinéaire" de Kronecker qui renvoie à l'arithmétique des formes de Gauss.

[5] En termes contemporains, la "forme canonique" $x_1y_1+\ldots+x_my_m$ permet de déterminer les classes d'équivalence des matrices carrées pour la relation d'équivalence *(ARB ñ └P, Q☻GL$_n$(Ê), PAQ = B)*. Le problème 1. consiste en l'étude de la relation de similitude des matrices orthogonales *(ARB ñ └ P ☻ O(Ê), $P^{-1}AP = B$)*. Le problème 2 renvoie à la congruence des matrices *(ARB ñ └P☻GL$_n$(Ê), $^tPAP = B$)*. Le problème 3 à l'équivalence des couples de matrices *(A,B)*.
Le problème 3 intervient pour la résolution des systèmes d'équations différentielles $AY''+BY=0$. Dans le cas particulier où $B=I$, la relation d'équivalence des couples *(A,I)* est identique à la relation de similitude des matrices A : $B = P^{-1}AP$. Comme le fait remarquer Kronecker, le 3^e problème suffit à déduire les deux autres : le problème 1. revenant à l'étude de la congruence du couple *(A,I)* et le 2. de l'équivalence du couple $(A, {}^tA)$.

[6] Les nouveaux enjeux de la théorie des formes bilinéaires conduisent à la publication d'un mémoire de Frobenius en 1878, très influent jusqu'en 1930. Voir la partie II pour une discussion du terme '"application" et des "enjeux" qui lui sont liés. En termes contemporains, la notion de forme bilinéaire joue pendant longtemps un rôle analogue à celui que jouera la notion de matrice dans l'algèbre linéaire du XX^e siècle.

résolubilité des équations algébriques (encart 4) ([7]). *Forme canonique* ou *invariants* ? La question de méthode dépasse la simple querelle de priorité tant elle est perçue comme exemplaire de la capacité de l'algèbre à atteindre la *généralité* : si la réduction d'un couple (A,B) à une forme canonique simple ($x_1y_1+\ldots+x_ny_n$, $s_1x_1y_1+\ldots+s_nx_my_m$) est toujours possible dans le cas particulier où les racines $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de l'équation caractéristique $|A+sB|=0$ sont toutes distinctes, le théorème de Weierstrass permet, pour Kronecker, de dépasser ce cas particulier et d'atteindre la "vraie généralité" ; il fait de la théorie des formes bilinéaires une des rares théories algébriques développée "dans toutes ses particularités", un modèle de généralité face aux anciennes méthodes négligeant l'occurrence de racines multiples et critiquées comme "formelles". Lorsque, en 1873, Jordan se propose de traiter le problème par une méthode qu'il juge non seulement plus "simple" mais aussi plus "générale" ([8]), *la controverse qui s'ensuit voit s'opposer des idéaux disciplinaires forts sur ce que doit être le rôle de l'algèbre et sa capacité à atteindre la généralité*.
Cette première partie est toute entière consacrée à ce moment particulier de communication qu'est la controverse Jordan-Kronecker. La richesse des arguments déployés donne un accès original à l'histoire des mathématiques. En effet, le discours de Kronecker mêle argumentation mathématique et recours à l'histoire. De fait, la controverse mathématique entraîne aussi l'écriture d'une histoire des méthodes mises en œuvre sur la période 1760-1860 par des auteurs comme Lagrange, Laplace, Cauchy, Hermite et Weierstrass au sein de la *discussion des petites oscillations*, ensemble cohérent de textes qui, sur une période longue, se répondent, se citent, discutent d'un problème de mécanique résolu par Lagrange en 1766. Comment les méthodes des petites oscillations, nées de la mathématisation des vibrations d'une corde par des systèmes d'équations différentielles se trouvent-t-elles, en 1874, au cœur d'une controverse sur ce que doit ou ne doit pas être la *mathématique des formes* ? Le deuxième chapitre propose un premier éclairage de la controverse qui met en lumière la façon dont les idéaux disciplinaires opposés par la querelle de 1874 sont indissociables d'une certaine écriture d'une histoire des mathématiques de la période 1766-1870.
Cette partie s'articule en trois chapitres. Le premier chapitre détaille les idéaux disciplinaires opposés par Jordan et Kronecker en 1874. Le second présente la controverse comme l'opposition de deux fins données à une longue discussion mathématique se développant sur la période 1766-1874. Enfin, le troisième chapitre aborde la querelle comme rencontre de deux cultures mathématiques distinctes, il s'achève par une étude de la communication dont la controverse est le vecteur et qui aboutit à la formulation d'une équivalence mathématique des théorèmes de Weierstrass et de Jordan au sein de la nouvelle théorie des formes bilinéaires élaborée par Frobenius en 1878-1879.

---

[7] Consulter les encarts 2 et 4 de l'introduction générale pour des énoncés des théorèmes de Jordan et Weierstrass. Les démonstrations de Jordan et Weierstrass sont détaillés dans le chapitre 3.
D'un point de vue contemporain, le théorème de réduction d'une matrice à coefficient complexe à sa forme canonique de Jordan est équivalent au théorème des diviseurs élémentaires (encart 6). Cette équivalence est explicitée en annexe 1.

[8] En termes contemporains, le cas "générique" négligeant l'occurrence de racines multiples se limite aux matrices diagonalisables. Les diviseurs élémentaires et la forme de Jordan permettent de traiter le cas général de la similitude des matrices. Un faisceau non singulier $sA+B$, $|A| \neq 0$, est équivalent à $sI-J$ où J est sous forme de Jordan.

Chapitre 1.

La tension
formes canoniques - Invariants
et les idéaux opposés par Jordan et Kronecker.

ENCART 1.

Chronologie d'une querelle.

- Jordan. Décembre 1873. "Sur les Polynômes bilinéaires". Note à l'Académie des Sciences de Paris.
- Kronecker. Décembre 1873. "Ueber schaaren von quadratischen und bilinearen formen" [1874a]. Mémoire lu à l'Académie de Berlin le 22 décembre 1873.
- Kronecker. Janvier 1874. Lettre de Kronecker à Jordan accompagnant l'envoi du mémoire de décembre [1874a].
- Jordan. Janvier 1874. Lettre de Jordan à Kronecker (reproduite en encart 2b).
- Jordan. Janvier 1874. Lettre de Jordan à Weierstrass (reproduite en encart 2c).
- Kronecker. Février 1874. Lettre de Kronecker à Jordan (reproduite en encart 2d).
- Jordan. Mars 1874 . "Sur les formes bilinéaires" [1874a]. Publication dans le *Journal de Liouville* du mémoire annoncé par la note de 1873.
- Jordan. 2 mars 1874. "Sur la réduction des formes bilinéaires" [1874b]. Note à l'Académie de Paris.
- Kronecker. 10 mars 1874. Lettre de Kronecker à Jordan (reproduite en encart 2e)
- Kronecker. Mars 1874. "Ueber quadratische und bilineare Formen" [1874b]. Mémoire lu à l'Académie de Berlin.
- Kronecker. Avril 1874. "Sur les faisceaux de formes quadratiques et bilinéaires" [1874c]. Note à l'Académie de Paris.
- Kronecker. Mai 1874. "Nachtrag". Suite du mémoire de mars, lue à l'Académie de Berlin.
- Jordan. Juin 1874. "Sur les systèmes de formes quadratiques" [1874d]. Note à l'Académie de Paris suivie d'un mémoire dans le *Journal de Liouville*, intitulé "Mémoire sur la réduction et la transformation des systèmes quadratiques".
- Kronecker. 1874. "Uber die congruenten Transformationen der bilinearen formen" [1874d]. Mémoire à l'Académie de Berlin.

I. GENESE D'UNE QUERELLE.

Le problème de la transformation des couples de formes bilinéaires est énoncé pour la première fois en 1866 à l'occasion de la parution, dans le *Journal de Crelle* ([1]), de deux mémoires successifs de Christoffel et Kronecker qui revendiquent la création d'une théorie des formes bilinéaires. Sa résolution "générale" fait l'objet de la publication de deux mémoires en 1868 : le premier, de Weierstrass, définit un système complet d'invariants, les diviseurs élémentaires, pour le cas où le déterminant du faisceau $\lambda A + \mu B$ n'est pas identiquement nul ; le second, de Kronecker, traite le cas singulier où le déterminant du faisceau est nul ([2]. La chronologie semble assurer la priorité à ceux que Jordan désigne comme les "géomètres de Berlin". Pour cette raison, la posture que prend Jordan est de revendiquer la nouveauté d'une méthode ("Les méthodes nouvelles que nous proposons ") indissociable d'idéaux disciplinaires comme la simplicité ("sont, au contraire, extrêmement simples ") et la généralité (" et ne comportent aucune exception") ([3]) :

> Le premier de ces problèmes est nouveau, si nous ne nous trompons. Le deuxième a déjà été traité (dans le cas où n est pair) par M. Kronecker, et le troisième par M. Weierstrass ; mais les solutions données par les éminents géomètres de Berlin sont incomplètes, en ce qu'ils ont laissé de côté certains cas exceptionnels qui, pourtant, ne manquent pas d'intérêt. Leur analyse est en outre assez difficile à suivre, surtout celle de M. Weierstrass. Les méthodes nouvelles que nous proposons sont, au contraire, extrêmement simples et ne comportent aucune exception. [...] :
>
> Le cas considéré par M. Weierstrass est celui où, parmi les fonctions de la forme $pP+qQ$, il en est une dont le déterminant ne soit pas nul. Nous montrons que, dans ce cas, la réduction simultanée des deux fonctions P et Q est un problème identique à celui de la réduction d'une substitution linéaire à sa forme canonique.
>
> [Jordan, 1873, 7-11].

La réplique de Kronecker à la méthode "simple" et "sans exception" revendiquée par Jordan ne se fait pas attendre. S'intercalant entre la note de 1873 et la parution du mémoire "Sur les formes bilinéaires" [1874c] qu'elle annonce, Kronecker riposte le 22 décembre 1873 par une lecture à l'académie de Berlin d'un mémoire intitulé "Uber schaaren von quadratischen und bilinearen formen" [1874a]. Dans ce mémoire, et la contre-attaque de Jordan qu'il suscite, les deux géomètres campent des positions sur une querelle de priorité alimentée par la publication d'une suite de notes et de mémoire tout au

---

[1] L'appellation *Journal de Crelle* fait référence au *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, lancé par August Leopold Crelle en 1826, en Allemagne.

[2] Cette origine de la théorie des formes bilinéaires est détaillée dans le chapitre 3.

[3] Les trois problèmes auxquels Jordan fait allusion ici sont ceux par lesquels il propose d'organiser la théorie des formes bilinéaires. Voir l'introduction de la première partie.

ENCART 2.

Extraits de la correspondance de Jordan.

Des lettres inédites extraites de la correspondance mathématique de Jordan portent un éclairage sur la partie privée de la controverse de 1874. Chaque lettre est référencée par la côte VI2A2X1855 des archives de l'école Polytechnique suivie de la numérotation attribuée par la conservatrice. L'ambition initiale était de proposer une édition et une traduction de ces inédits. Mais, au regard de l'introduction de la lettre de Kronecker du 12 février 1874, présentant des arguments justifiant l'emploi de la langue allemande par l'auteur, il serait malvenu de proposer une traduction hâtive et la rigueur nécessaire à une édition des lettres de Kronecker dépasse le cadre de ce travail. La présentation des inédits reproduits dans cet encart se limite à un court commentaire suivi du texte original. Seuls les passages cités dans le corps de la thèse sont traduits.

La correspondance de Jordan conservée à l'Ecole Polytechnique contient des lettres et des brouillons sur la période 1867-1896. Les années 1867-1872 sont marquées par des échanges très nourris entre Jordan et des géomètres Italiens (Brioschi, Cremona, Cajorati) et Allemands (Clebsch, Listing, Borchardt). Des débats on lieu en particulier entre Jordan, Cremona et Clebsch sur une question portant sur les surfaces cubiques et se ramenant à l'étude d'une équation algébrique du 40^{e} degré. Ces échanges donnent lieu à un mémoire de Jordan, publié dans le *Journal de Liouville* en 1869 et intitulé "Sur l'équation aux 27 droites d'une surface du troisième ordre".

Après 1870, la publication du Traité des substitutions [1870] suscite de nombreuses félicitations (Crémona 9/2/1869, Borchardt 9/41870, Puiseux 1870, Clebsch 1871, Saint Venant 1872, Cayley 1874). Les premières années de la décennie sont l'occasion d'échanges avec Sylow et Lie. C'est dans ce contexte que débute, en janvier 1874 la correspondance liée à la controverse. A partir de 1883, les échanges concernent essentiellement le *Journal de mathématiques pures et appliques* qui perd le nom de *Journal de Liouville* et dont Jordan prend la direction à la suite de Résal, probablement à l'instigation de Bertrand [Zerner, 1991].

long de l'année 1874 (la chronologie des publications relatives à la querelle est détaillée en encart 1). Si Kronecker, lors de son intervention à l'Académie parisienne d'avril 1874, se défend de poursuivre une "question de priorité" [Kronecker 1874b, 19], l'avalanche de dates que déclenchent les échanges des deux géomètres ne laisse guère de doute sur la nature du conflit.

> [...] mais ce n'est pas là l'intention qui m'a guidé dans l'examen auquel, dans le cours des miens, j'ai soumis les travaux analogues de M. Jordan. J'ai été entraîné dans cette voie par le désir de reconnaître la véritable portée des méthodes dont il s'est servi et des résultats auxquels il est parvenu, et d'en éclaircir les rapports avec les méthodes et les résultats antérieurs, et ce n'est pas une question de priorité, mais une question d'analyse, que je me suis proposé d'élucider par mes remarques.
> [Kronecker, 1874b, 19].

On chercherait pourtant en vain de tels éclaircissements dans les travaux de Kronecker. En particulier, contrairement à Jordan qui démontre comment son théorème de réduction des substitutions linéaires implique le théorème de Weierstrass, Kronecker ne se soucie pas d'expliciter l'implication réciproque, qui ne sera mise en valeur que quatre ans plus tard par Frobenius [1878]. La tentation d'une rhétorique guerrière dont témoignent les brouillons de lettres de Jordan atteste plutôt de la violence de la question de priorité:

> Je ~~ne voudrais pas~~ tiens en effet à certifier deux retards d'impression dont vous me faites part, ~~que je désire la guerre, et~~ que je préférerais ~~une polémique / guerre/~~ des débats publics à des explications amicales. Ce n'est pas moi qui ai ~~ouvert les hostilités~~ commencé la polémique.
> [Jordan, VI2a2X1855, N. 39, lettre à Kronecker, février 1874, voir encart 2e].

ENCART 2a.

Extrait d'une première lettre de Jordan à Kronecker [VI2a2X1855, N. 18].

Ce document non daté est le brouillon d'une lettre écrite à l'époque de la rédaction du *Traité des substitutions*. Jordan y interroge Kronecker sur les équations modulaires et la multiplication complexe. La récente rencontre entre les deux hommes à laquelle Jordan fait référence est vraisemblablement à dater du voyage de Jordan en Allemagne de 1868 - voir la lettre de Listing, N.3 du 15/4/68 qui annonce une visite de Jordan à Göttingen en mai 1868. Lors de cette visite, Jordan aurait séjourné dans la résidence de campagne de la famille Borchardt à Rudersdorf dans les environs de Berlin (lettre de Borchardt, N.12, du 9/4/70). Aucune réponse de Kronecker à cette lettre ne figure dans la correspondance de Jordan, réponse qui a cependant pu prendre la forme de l'envoi d'un mémoire.

> Je me souviens que visitant un jour l'éléphant du Thiergarten, et contemplant sa Majesté informe, vous vous êtes écrié : ceci est un théorème très général. Les vôtres sont plus civilisés mais ce sont des Bucéphales et je ne suis pas un Alexandre. J'ai bien retrouvé la liaison que vous signalez entre le degré de ces équations et le nombre des formes quadratiques ; mais les relations que vous signalez entre ses racines, et desquelles vous déduisez sa résolubilité m'échappent complètement. Encore moins suis-je rouge à vous suivre dans les applications si nombreuses et si importantes que vous faites de cette théorie à l'arithmétique. Il serait cependant honteux, faisant un gros livre sur les équations, de passer à côté de pareilles questions sans les voir et je ne saurais m'y résigner de bon cœur. Serait-ce trop présumer de votre bonté de vous prier de me communiquer tout au moins la preuve de la résolubilité par radicaux des équations remarquables ?

1. Un va-et-vient entre public et privé.

La violence du conflit naît de sa dimension publique. Pour Jordan, c'est Kronecker qui "commence la polémique" par sa critique publique du 22 décembre 1873 à l'Académie de Berlin. Pour Kronecker, Jordan est le premier fautif pour avoir publié sa note sur les polynômes bilinéaires en 1873 sans, au préalable, être entré en contact avec lui-même ou Weierstrass :

> Permettez-moi, Monsieur, en terminant cette lettre, de vous exprimer le regret que vous ayez attendu pour demander ces explications d'avoir publié vos critiques. Vous comprendrez en effet qu'il m'est impossible de laisser sans aucune réponse une note qui me conteste l'invention de tous mes résultats et m'accuse en outre d'avoir profité sans les citer des travaux de plusieurs géomètres.
> [Jordan VI2a2X1855, N. 30, lettre à Kronecker, janvier 1874, voir encart 2b].

L'opposition *public/privé* est un des moteurs de la controverse et la correspondance entre les deux savants se présente comme une tentative de ramener le débat de la sphère publique à la sphère privée. L'échange épistolaire débute en janvier 1874, Kronecker adresse à Jordan la publication de sa communication de décembre accompagnée d'une ([4]) :

> [...] sorte de sommation d'avoir à déclarer dans les Comptes Rendus 1° Que dans ses additions à votre travail de 1868 [celui de Weierstrass]. il a traité le cas *[P,Q] = 0* ; 2° que les formes canoniques que j'ai indiquées ne sont autres que la formule (44) de votre mémoire.
> [Jordan VI2a2X1855, N. 31, lettre à Weierstrass, janvier 1874, voir encart 2c].

Les pratiques de l'information mathématique sont multiples en 1874 : aux anciennes formes de communications comme l'échange épistolaire et la publicité académique, s'ajoutent un nombre croissant de journaux spécialisés, la création de nouvelles sociétés savantes - les sociétés mathématiques nationales -, et la pratique du séminaire ([5]). Au sein de ces différentes pratiques de l'information, la correspondance en Jordan et Kronecker procède une distinction entre les critiques portées sur la scène publique (journaux et communications académiques), et ce qui tient de la relation privée, à savoir l'échange épistolaire. Dans la sphère privée, les témoignages de sympathie de Kronecker visent à apaiser le sentiment de Jordan d'avoir été agressé "devant tout le monde" : il ne s'agit ni d'une attaque personnelle ("je ne vous écrirais pas une lette si longue et si précise [Kronecker à Jordan VI2a2X1855, N. 32]),

---

[4] Le terme de "sommation" employé par Jordan fait ici référence à un courrier de Kronecker de janvier 1874 qui n'a pas été retrouvé (voir encart 2b).

[5] Consulter l'article de C. Goldstein : "Sur quelques pratiques de l'information mathématique" [Goldstein, 1997]. Des études des journaux mathématiques sont proposées par [Ausejo et Hormigon , 1993], [Dhombres, 1994] et [Goldstein, Gray et Ritter, 1996]. Au sujet de la création de sociétés mathématiques nationales voir [Gispert, 1991] et [Gispert et Tobies, 1996]. Pour une comparaison des différents contextes institutionnels européens voir [Schubring, 1996].

ENCART 2b.
Lettre de Jordan à Kronecker. Janvier 1874. [VI2a2X1855, N. 30.]

Kronecker a envoyé à Jordan, en janvier 1874, la publication de son allocution à l'Académie Berlinoise du 22 décembre 1873 [Kronecker, 1874a]. Le brouillon de lettre présenté ci-dessous est une réponse de Jordan qui permet de reconstituer le contenu du message de Kronecker. Une deuxième lettre, envoyée par Jordan à Weierstrass en janvier 1874 et reproduite plus loin, indique que Kronecker a adressé à Jordan la "sommation" (l'expression est de Jordan) de reconnaître la priorité des berlinois devant l'Académie des Sciences de Paris.

ECOLE POLYTECHNIQUE ARCHIVES
Art. VI
§ 2
Sect. a 2
N°

Mon cher Monsieur

Je viens vous remercier de l'envoi que vous avez bien voulu me faire de votre nouveau mémoire sur les faisceaux de formes quadratiques. Je viens de le parcourir rapidement, et j'ai pu facilement l'identité pour ainsi dire complète de nos procédés de réduction. Cette rencontre prouve combien est naturelle la marche que nous avons suivie. Votre mode d'exposition présente pourtant l'avantage de s'appliquer à la fois aux formes quadratiques et bilinéaires, tandis que je ne me suis occupé que de ces dernières. ~~Il est probable du reste qu'on pourrait sans trop de~~

ni d'une accusation de plagiat ("je pensais que mes "remarques" du 18 mai 1868 n'étaient pas connues de vous avant votre note aux comptes rendus" [Kronecker à Jordan VI2a2X1855, N. 31]).

> Je ~~ne voudrais pas~~ tiens en effet à certifier deux retards d'impression dont vous me faites part, ~~que je désire la guerre, et~~ que je préférerais ~~une polémique / guerre/~~ des débats publics à des explications amicales. Ce n'est pas moi qui ait ~~ouvert les hostilités~~ commencé la polémique. J'ai publié il est vrai (c'était mon droit évident) sans vous consulter des recherches qui complétaient les vôtres sur une question dont vous vous étiez occupé, et dont vous ne m'aviez jamais entretenu. ~~C'était mon droit évident.~~ Là-dessus, sans explication préalable à l'instant même vous publiez une critique plus longue que mon article, où vous me reprochez 1° De n'avoir rien compris à la manière de poser la question. 2° De n'y avoir apporté aucun élément nouveau 3° D'avoir pillé sans scrupule M. Weierstrass, M. Christoffel et vous.
> Si au lieu de jeter brusquement ce débat dans le public, vous vous étiez adressé à moi pour échanger des explications, comme je me voyais en droit de l'espérer, nous nous serions sans doute entendu. Sur votre indication, j'aurais ~~constaté immédiatement, ce que j'ai reconnu trop tard, que votre méthode de 1868~~ relu plus attentivement votre mémoire de 1868 et constaté, ce que je n'avais pas remarqué à première vue, que les formes bilinéaires non citées dans votre travail, y sont pourtant implicitement comprises. De votre côté, vous m'auriez concédé, j'en suis certain, que la réduction publiée par vous à cette époque était insuffisante 1° Parce que ces faisceaux réduits contenaient encore des coefficients indéterminés à faire disparaître qui gêneraient beaucoup pour étudier la question de l'équivalence 2° Parce que le caractère fondamental de la réduction à savoir la décomposition en faisceaux élémentaires n'était pas mis en évidence.
> Vous m'auriez répondu que cette réduction ultérieure n'offrait pas grande difficulté, j'aurais répliqué que toute la question est très simple d'un bout à l'autre et nous serions tombés d'accord.
> La publication imprévue de vos objections a un peu changé tout cela. ~~Il faut bien que la réponse soit publique~~ Attaqué devant tout le monde, il me faut bien répondre de même et il ne tiendra pas à moi que ce débat en reste là.
> [Jordan VI2a2X1855, N. 30, lettre à Kronecker, janvier 1874, voir encart 2b].

Au-delà des témoignages privés de sympathie, la correspondance ne parvient pas à une conciliation sur le plan mathématique, lié à la sphère publique. D'un côté Kronecker ne parvient pas, malgré les longs compléments mathématiques de ses courriers, à justifier sa priorité de 1866. D'un autre, Jordan échoue dans sa tentative de convaincre Kronecker de son "droit évident" à soutenir l'originalité de sa méthode comme une généralisation et une "mise "en lumière" du résultat de Weierstrass :

> Je viens de le parcourir rapidement [le mémoire de Kronecker 1874a], et j'ai vu facilement l'identité pour ainsi dire complète de nos procédés de réductions. Cette rencontre prouve combien est naturelle la marche que nous avons suivie. [...] Permettez-moi de vous dire mon cher Monsieur, que je ne m'explique pas très bien la rectification que vous me demandez. Je comprendrais à la rigueur que M. Weierstrass ne fût pas satisfait de la critique courtoise que je me suis permis de lui adresser sur la clarté de son exposition, quoique après tout il me

~~difficulté rendre symétrique le procédé de réduction lorsque la forme bilinéaire est elle-même symétrique. Il serait alors indifférent de considérer la forme bilinéaire comme un cas particulier de la forme quadratique, ou réciproquement. Mais comme je ne m'occupais de ce sujet que très incidemment, je n'ai pas élucidé cette question, et j'aurais quelque peine à le faire maintenant, n'ayant plus sous la main mon mémoire que j'ai transmis à M. Liouville. Il est actuellement imprimé, et dès qu'il sera paru, j'aurai l'honneur de vous l'adresser.~~

Permettez-moi de vous dire, mon cher Monsieur, que je ne m'explique pas très bien la rectification que vous me demandez. Je comprendrais à la rigueur que M. Weierstrass ne fût pas satisfait de la critique courtoise que je me suis permis de lui adresser sur la clarté de son exposition ; quoique après tout il

> semble avoir plutôt mis en lumière que rabaissé l'importance de son travail, en montrant qu'il avait implicitement résolu l'un des problèmes fondamentaux de la théorie des substitutions linéaires, autrement féconde, à mon avis, que la théorie algébrique des formes du second degré. Mais en dehors de cette phrase, je ne vois pas ce qu'il pourrait y avoir à rectifier dans les assertions de ma note. Je me suis borné à dire en effet que vos solutions, dont je ne contestais nullement l'exactitude, laissaient de côté certains cas particuliers. [...].
> [Jordan VI2a2X1855, N. 30, lettre à Kronecker, janvier 1874, voir encart 2b].

"A mon grand regret, j'ai trouvé dans votre lettre que vous refusez d'accéder à la requête de mon précédent courrier" [Kronecker, VI2a2X1855, N. 23]). L'explication mathématique se tiendra sur la scène publique des *Comptes Rendus* de l'Académie de Paris. Au printemps 1874, les interventions publiques successives de Jordan et Kronecker à l'Académie parisienne, signalent l'échec de la "discussion privée", des "explications amicales" [Jordan VI2a2X1855, N. 39] et la fin de la correspondance.
Quelle est exactement la dimension publique de la controverse ? Jordan redoute de faire l'objet d'une "réclamation collective" des "géomètres berlinois" dans un courrier adressé à Weierstrass dès janvier 1874 :

> ~~Notre ami commun —~~ M. Kronecker qui vient ~~attaquer~~ de critiquer cette note avec une certaine vivacité dans les Monatsberichte, m'adresse en outre une sorte de sommation d'avoir à déclarer dans les Comptes Rendus 1° Que dans ses additions à votre travail de 1868 il a traité le cas $[P,Q]=0$; 2° que les formes canoniques que j'ai indiquées ne sont autres que la formule (44) de votre mémoire.
> Les termes ~~un peu ambigus~~ de la lettre de M. Kronecker me laissant incertain si je me trouve ici en présence d'une réclamation collective de votre part ou si je n'ai à répondre qu'à lui seul. J'aimerais être fixé à cet égard. [....]
> [J'espère d'ailleurs que vous n'avez pas pris en mauvaise part la critique courtoise que je me suis permis de vous adresser au sujet des] M. Kronecker a également relevé le passage où j'ai pris la liberté de parler des difficultés que j'ai éprouvées dans l'étude de votre mémoire. Je sais que mon impression à cet égard a été partagée par d'habiles géomètres que cette lecture a découragé. Je crois pouvoir attribuer une grande partie des difficultés à la forme synthétique que vous avez donné à votre démonstration. J'espère d'ailleurs que vous n'aurez pas été froissé de cette légère critique où il ne me semble pas avoir dépassé les bornes de la courtoisie.
> [Jordan VI2a2X1855, N. 31, lettre à Weierstrass, janvier 1874, voir encart 2c].

La lettre de Jordan restera sans réponse et Weierstrass ne prendra pas part à la querelle. Des échanges avec Cayley, Sylvester et Smith en prévision du voyage de Jordan à Londres au début de l'année 1875, attestent des tentatives de Jordan d'obtenir des appuis publics. Ces tentatives restent vaines ([6]). La querelle semble d'ailleurs mettre Jordan en difficulté sur la scène parisienne - notamment vis-à-vis d'Hermite, le "cher ami" de Kronecker - et ruiner les

[6] Jordan ne reçoit comme soutien direct qu'une remarque courte de Smith dans une lettre envoyée d'Oxford le 16 janvier 1875 : "I was wrong in saying that I could not follow <u>your</u> papers on the bilinear forms : it is M. Kronecker who gives me the trouble" [Smith, VI2a2X1855, N. 44].

me semble avoir plutôt mis en lumière que rabaissé l'importance de son travail, en montrant qu'il avait implicitement résolu l'un des problèmes fondamentaux de la théorie des substitutions linéaires, autrement féconde, à mon avis, que la théorie algébrique des formes du second degré. Mais en dehors de cette phrase, je ne vois pas ce qu'il pourrait y avoir à rectifier dans les assertions de ma note. Je me suis borné à dire en effet que vos solutions, dont je ne contestais nullement l'exactitude, laissaient de côté certains cas particuliers. Cela ne me paraît guère contestable pour la solution du second problème, contenue dans votre note du 15 octobre 1866; et quant au troisième problème, M. Weierstrass signale et exclut expressément dans son mémoire le cas où $[P, Q] = 0$. Mon assertion me semble donc parfaitement justifiée. Ne ambitions de Jordan de remplacer Bertrand à l'Académie ([7]). *Il n'y a pas d'engagement explicite des communautés savantes envers l'un ou l'autre des protagonistes. Du point de la controverse, la notion de communauté n'est pas pertinente et, en particulier, la querelle ne peut pas bénéficier d'un éclairage nationaliste simpliste qui y ferrait résonner un écho de la guerre de 1870.* Si les tensions existent entre les géomètres parisiens et berlinois, comme en témoigne par exemple la correspondance de Liouville ([8]), pour ce qui est de la querelle Jordan-Kronecker, la scène publique est avant tout le lieu des débats mathématiques.

---

[7] Voir à ce sujet le chapitre 3. Ce renvoi à un chapitre ultérieur s'explique par le plan suivi dans la première partie de cette thèse : le premier chapitre traite de la controverse mathématique de 1874, le troisième chapitre propose une mise en contexte du travail de Jordan.

[8] Une lettre de Kronecker est adressée à Liouville le 16 décembre 1875 à propos de la publication d'un mémoire sur la théorie arithmétique des formes quadratiques de déterminant négatif dans le journal de *Mathématiques pures et appliquées* (ayant été écarté de l'édition du journal, Liouville ne pourra pas publier ce mémoire). Dans sa lettre, Kronecker propose à Liouville et Chasles les deux places vacantes de correspondants étrangers de la section de géométrie de l'Académie berlinoise. Si toute crispation relative à la guerre de 1870 semble absente de la réponse de Liouville :

> Oui, je serai flatté d'obtenir pour mes faibles travaux les suffrages de vos Géomètres. Les premiers encouragements me sont venus spontanément autrefois des Académies de Berlin et de Turin, c'est-à-dire de Lejeune Dirichlet, de Jacobi, d'Alexandre de Humboldt et de Plana, qui m'ont honoré, tant qu'ils ont vécu, de leur amitié, et dont la mémoire me sera toujours chère. Une même gratitude serait due par moi pour toute faveur nouvelle que votre illustra Académie pourrait m'accorder. Le patriotisme le plus ardent ne dispense pas de la reconnaissance personnelle.
>
> [Liouville à Kronecker *in* Neuenschwander, 1984, 86]

Les annotations portées sur un brouillon des cours de Liouville au Collège de France témoignent des tensions entre Académies :

> 6ème leçon : Jeudi 30Xbre 1875
>
> Note. Dans une lettre très aimable, Mr Kronecker me dit qu'on songe à Berlin à Chasles et à moi dans l'académie, mais on semble craindre que nous ne refusions avec colère.

Je remercie Norbert Verdier pour avoir porté ces documents à mon attention.

n'occupant que des formes bilinéaires,
je n'avais pas à citer votre mémoire
du 18 mai 1868, qui a trait aux
formes quadratiques; car ces deux sujets,
quoique très-voisins, ne sont pas
identiques, puisque pour passer de l'un
à l'autre, il faut restreindre à la fois
la nature de ~~l'expression~~ la forme considérée, et
celle des substitutions à employer
pour la transformer. D'ailleurs vous
n'aviez donné dans ce mémoire qu'un
commencement de réduction, et non une
solution.

Je ne puis non plus m'expliquer le
reproche que vous me faites de n'avoir
pas signalé l'identité de l'une de mes
formules réduites avec la formule (44) de
M. Weierstrass. J'ai dit en effet très
explicitement qu'il avait résolu la
question dans le cas général, où $[P, Q] \gtrless 0$.
Si ma solution avait contredit la sienne,
je n'aurais pas manqué de le dire. Mais
~~dans~~ l'autre formule, relative au cas où
$[P, Q] = 0$, que vous passez sous silence, est
précisément ce qu'il y a de nouveau dans
ma note, ainsi que vous le reconnaîtrez
facilement en examinant la chose avec plus

2. La querelle : un révélateur de connaissances tacites et un vecteur de communication scientifique.

La correspondance révèle la difficulté pour Jordan d'acquérir la part de connaissances tacites dans les méthodes développées à Berlin dans les années 1860 pour l'étude des formes bilinéaires. Jordan ne connaît ni les travaux de Christoffel, ni ceux de Kronecker de 1866 avant qu'un courrier de janvier 1874 ne le somme de les citer et s'il révèle alors son ignorance, il en appelle à la vertu académique de ne pas revendiquer sur ce sujet ([9]) :

> Je regrette surtout que vous ayez cru devoir introduire dans cette question le nom de M. Christoffel. [...] J'ajouterai qu'à cette époque, je ne connaissais pas son mémoire ~~ce qui est bien permis.~~ Je suis persuadé d'ailleurs qu'il aurait été fort réservé dans les réclamations de ce genre. C'est d'après ce principe que j'ai laissé passer sans rien dire, dans le dernier numéro du Journal de M. Borchardt un mémoire volumineux de M. Sohnke sur la symétrie dans le plan où je n'étais pas cité, bien que j'eusse traité complètement cette question, pour le plan et pour l'espace, dans le journal de MM Brioschi et Cremona, il y a de cela cinq à six ans.
> [Jordan, VI2a2X1855, N. 30, lettre à Kronecker, janvier 1874, voir encart 2b].

Il y a bien pour Jordan quelque chose d'étranger dans les méthodes des formes bilinéaires. Il y a d'abord les difficultés éprouvées par Jordan à la lecture du mémoire de Weierstrass et confessées à de nombreuses occasions dans la correspondance ([10]). Surtout, les relations qu'entretiennent les publications berlinoises les unes avec les autres sont étrangères à Jordan. Ainsi, lorsqu'il publie sa note de 1873, Jordan n'a pas conscience que le théorème de Weierstrass vient répondre à des questions posées par Kronecker et Christoffel en 1866, et que si ce théorème se limite au cas des faisceaux non singuliers, la publication de Weierstrass ne peut être dissociée du mémoire de Kronecker publié à sa suite dans le *Journal de Crelle* : les deux publications de 1868 sont liées ensemble, comme un "développement en deux parties" [Kronecker, VI2a2X1855, N. 24]. Pourtant, l'intitulé du mémoire de Kronecker de 1868 ne faisant mention que des formes quadratiques, Jordan ne l'associe d'abord pas aux formes bilinéaires et se méprend sur son objet.

---

[9] Kronecker décrit en février 1874 son mémoire de 1866 et celui de Christoffel comme contenant respectivement les preuves :

> [...] <u>premièrement</u> du problème des transformations orthogonales des formes quadratiques ; dans le cas où elles sont linéaires, <u>deuxièmement</u> de la transformation d'un faisceau de formes bilinéaires constitué d'une forme et de sa transposée.
> [Kronecker, VI2a2X1855, N. 25, traduction F.B.].

[10] Voir à ce sujet l'extrait de la lettre de Jordan à Weierstrass cité en page 41. Consulter également les lettres de Jordan à Kronecker et Weierstrass de Janvier 1874 en encarts 2b et 2c.

de soin.

Permettez-moi, Monsieur, en terminant cette lettre, de vous exprimer le regret que vous ayez attendu pour ~~mettre vos~~ demander ces explications d'avoir publié vos critiques. Vous comprendrez en effet qu'il m'est impossible de laisser sans aucune réponse une note qui me conteste l'invention de tous mes résultats, et m'accuse en outre d'avoir profité sans les citer des travaux de plusieurs géomètres. Je regrette surtout que vous ayez cru devoir introduire dans cette question le nom de M. Christoffel. Il aurait pu réclamer lui-même, si tel avait été son désir. Je lui aurais répondu, comme à vous, qu'il n'avait traité que des formes bilinéaires générales, en laissant de côté les formes particulières qui faisaient précisément l'objet de mon travail. J'ajouterai qu'à cette époque, je ne connaissais pas

> Je me suis borné à dire en effet que vos solutions, dont je ne contestais nullement l'exactitude, laissaient de côté certains cas particuliers. Cela ne me paraît guère contestable pour la solution du second problème, contenue dans votre note du 15 octobre 1866, et quand au troisième problème, M. Weierstrass signale et exclut expressément dans son mémoire le cas où $[P,Q]=0$. [...] Ne m'occupant que des formes bilinéaires, je n'avais pas à citer votre mémoire du 18 mai 1868, qui a trait aux formes quadratiques [....]. D'ailleurs vous n'aviez donné dans ce mémoire qu'un commencement de réduction et non une solution.
> [...] Mais l'autre formule, relative au cas où $[P,Q]=0$, que vous passez sous silence, est précisément ce qu'il y a de nouveau dans ma note, ainsi que vous le reconnaitrez facilement en examinant la chose avec plus de soin.
> [Jordan, VI2a2X1855, N. 30, lettre à Kronecker, janvier 1874, voir encart 2b].

L'objet du mémoire de Kronecker, son articulation avec la publication de Weierstrass, sont des informations inaccessibles à Jordan qui participent de la part *tacite* des travaux d'une *communauté, d'un réseau berlinois. L'étranger pour Jordan tient à ce qui est tacite, local aux travaux berlinois et entraine une incompréhension des travaux de Kronecker.* La communication de la part tacite des travaux berlinois nécessite la longue lettre adressée par Kronecker à Jordan 11 février 1874 :

> [...] la formule finale que je donne aux faisceaux de formes quadratiques de déterminants identiquement nuls, associée au résultat de Weierstrass, donne une solution complète du problème de la transformation de deux faisceaux quelconques ([11]). Ils ne contiennent pas un "début" de solution mais la solution elle-même [...] pour tous les faisceaux.
> [Kronecker, VI2a2X1855, N. 24, lettre à Jordan de février 1874, *traduction F.B.*, voir encart 2d]

Il y a, à l'origine de la querelle, une méprise de Jordan due à la *difficile communication* de la part *locale* et *tacite* des travaux berlinois. Kronecker identifie très précisément la nature de la méprise de Jordan qu'il qualifie de "levis culpa", une faute légère et commune que Kronecker reconnaît avoir commis lui-même dans le passé vis-à-vis d'Hermite ou Serret. Réparer cette faute ne demande qu'une preuve de "moralité" et de "loyauté", que Jordan apporte en reconnaissant publiquement sa méprise sur le contenu des travaux de Kronecker de 1868 [Jordan, 1874b] ([12]).
Que l'origine de la querelle soit liée à une difficulté de c*ommunication scientifique* aurait pu permettre une sortie de crise rapide. Pourtant, la conciliation "sur cette même chose dont il n'y a plus rien à dire et qui me peine" [Kronecker, VI2a2X1855, N. 25] échoue en mars 1874. La correspondance et les premiers mémoires publiés à l'hivers 1874 ont joué à plein leurs rôles de vecteur de la communication scientifique ; ils ont permis à Jordan d'acquérir les connaissance élaborées à Berlin comme les notions de "formes", de

---

[11] Le terme allemand "schaaren" employé par Kronecker pour désigner les expressions $uP+vQ$ (P, Q deux formes bilinéaires ; u et v deux réels) est traduit ici par l'expression "faisceau" employée Jordan.

[12] Jordan fait d'ailleurs observer que d'autres ont fait la même faute à son égard, voir la première citation de la page précédente.

son mémoire, ~~ce qui est bien permis~~.

Je suis persuadé d'ailleurs qu'il aurait été d'avis, comme moi, qu'il faut être fort réservé dans les réclamations de ce genre. C'est d'après ce principe que j'ai ~~Aussi ai-je~~ laissé passer sans rien dire, dans le dernier numéro du Journal de M. Borchardt un mémoire volumineux de M. Sohnke, sur la symétrie dans le plan, ~~bien que j'eusse~~ où je n'étais pas cité, bien que j'eusse traité complètement cette question pour le plan et pour l'espace, dans le journal de MM. Brioschi et Cremona, il y a de cela cinq à six ans.

Veuillez agréer, Monsieur, l'expression de mes sentiments respectueux

C Jordan

ECOLE POLYTECHNIQUE
Art. VI
§ 2
Sect. a 2
Nº
ARCHIVES

"faisceaux", d’"équivalence" et, au printemps 1874, armé de méthodes qui lui étaient naguères étrangères, Jordan contre-attaque sur la "question de priorité". A cette date, on sait alors de quoi on parle : il ne s’agit plus de communiquer ou d’expliquer mais d’imposer une méthode, une vision de ce que doit être la "théorie algébrique des formes". Les deux parties suivantes de ce chapitre explicitent les visions opposées de Jordan et Kronecker sur la théorie des formes bilinéaires.

ENCART 2c.

Lettre de Jordan à Weierstrass. Janvier 1874. VI2a2X1855, N. 31

Ce courrier est adressé par Jordan à Weierstrass à la suite de la parution des premières critiques de Kronecker. Jordan s'adresse à Weierstrass afin de savoir si il doit faire face à une "réclamation collective" de ceux qu'il désigne comme "les géomètres berlinois". Aucune réponse de ne figure dans les archives et Weierstrass ne prendra jamais parti dans la querelle. Les premières lettres de Weierstrass à Jordan sont datées de 1885, le ton y est très amical et le sujet débattu le cours d'analyse de Jordan.

Monsieur

J'ai ~~adressé~~ l'honneur de vous transmettre ci-joint une note sur les polynômes bilinéaires, dont le but principal est de simplifier la méthode que vous avez donnée en 1868 pour ~~comm~~ réduire simultanément deux formes ~~quadratiques~~ bilinéaires, et de le compléter en ~~traitant~~ traitant le cas où $[P, Q] = 0$, dont vous ne vous étiez pas occupé ~~dans votre travail~~.

~~M. Kronecker Notre ami commun~~ M. Kronecker qui vient de critiquer cette ~~d'attaquer ma~~ note avec une certaine vivacité dans les Monatsberichte, m'adresse en outre une sorte de sommation d'avoir à déclarer dans les ~~aux~~ Comptes Rendus 1° Que dans ses additions à votre travail ~~mémoire~~ de 1868 il a traité le cas $[P, Q] = 0$;
2° que les formes canoniques que j'ai indiquées ne sont autres que ~~identiques à~~ la formule (44) de votre mémoire.

Les termes ~~un peu ambigus~~ de la lettre de M. Kronecker me laissent incertain ~~laissent dans~~ ~~fort douteux~~ si ~~vous~~ je me trouve ici en présence d'une réclamation collective de

II. GENERALITE ET EFFECTIVITE : LES INVARIANTS ARITHMETIQUES DE KRONECKER.

1. Le théorème de Weierstrass de 1868 comme exemplaire d'une "véritable généralité".

L'opposition des deux théorèmes qui nourrit la querelle de 1874 renvoie à l'opposition de deux idéaux forts sur la nature de la généralité en mathématiques. Kronecker présente le théorème de Weierstrass comme exemplaire d'une "véritable généralité" par opposition à l'"apparente généralité" dont il accuse la méthode de Jordan. Qu'est ce qu'une généralité véritable en mathématiques ? Kronecker précise son *idéal de généralité* en opposant "formel" et "contenu" ([13]). Ce que Kronecker critique comme relevant d'une "apparente généralité" renvoie au caractère "formel" qui condamne à ses yeux la forme canonique de Jordan comme une "notion sans contenu objectif" :

> Sowie sie hier gestellt sind, ermangeln diese Probleme durchaus der Bestimmtheit, wie sehr auch grade das Wort "canonisch" seinem eigentlichen Sinne gemäss, den Schein von etwas absolut Bestimmtem zu erwecken geeignet ist. In der That hat der Ausdruck "canonische Form" oder "einfache canonische Form", welchen Hr. Jordan behufs Präcisirung der Frage gebraucht, keinerlei allgemein massgebende Bedeutung und bezeichnet an und für sich einen Begriff ohne jeden objectiven Inhalt.
> [Kronecker, 1874a, 367].
>
> *Traduction de l'extrait ci-dessus [traduction F.B.] :*
> Ces problèmes, ainsi qu'ils sont posés ici [dans le mémoire de Jordan de 1873], manquent tout à fait de précision même si le mot "canonique" suivant son sens propre donne justement l'impression qu'il pourrait s'agir de quelque chose absolument déterminé. [...] La signification de l'expression "forme canonique" ou "forme canonique simple" utilisée par Mr. Jordan pour préciser la question [de la théorie des formes bilinéaires et quadratiques], n'a aucune pertinence générale ou décisive et désigne une notion sans aucun contenu objectif.

[13] L'emploi de l'"expression "idéal de généralité" pour caractériser le point de vue de Kronecker vise à dissocier un *idéal* explicité à l'occasion d'un travail mathématique d'un développement *épistémologique* qui vise à donner un sens précis à ce qu'est la généralité d'une théorie mathématique. Auguste Comte propose un exposé épistémologique précis de la généralité mathématique dans son *Cours de philosophie* de 1830 et dans son traité sur la *Théorie élémentaire de la géométrie analytique*. La référence à Comte n'apparaît jamais dans la controverse de 1874.

J'aimerais à être fixé à cet égard

votre part, ou si je n'ai à répondre qu'à lui seul.) Autant le premier point de sa réclamation me semble peu fondé, autant je m'empresse de reconnaître la concordance de vos résultats avec les miens, dans le cas que vous avez traité. ~~Si vous désirez que j'insiste sur ce point en répondant à M. Kronecker, je le ferai très volontiers~~, ~~bien que~~ Je crois avoir été suffisamment explicite ~~dans une~~ à cet égard ~~note~~ en indiquant dans ma note que vous aviez résolu le problème posé ; si pourtant vous désiriez que j'insiste sur ce point en répondant à M. Kronecker, je le ferai très volontiers.

M. Kronecker a également relevé le passage où j'ai pris la liberté de parler des ~~J'espère d'ailleurs que vous ne m'en voudrez pas pour ce mauvais gré de la critique que je me suis permis de vous adresser au sujet des~~ difficultés que j'ai éprouvées dans l'étude de votre mémoire. Je sais que mon impression à cet égard a été partagée par d'habiles géomètres, que cette lecture a découragés. Je crois pouvoir attribuer en grande partie ces difficultés à la forme synthétique que vous avez donnée à votre démonstration. J'espère d'ailleurs que vous n'aurez pas été froissé de cette légère critique, où il ne me semble ~~je ne vous~~ pas avoir dépassé les bornes de la courtoisie.

Veuillez agréer, Monsieur, l'expression de mes sentiments respectueux

Le caractère formel ne suffit pas à donner à une expression algébrique sa "signification décisive". Celle-ci ne peut pas provenir de l'algèbre elle-même mais de la théorie des formes bilinéaires et quadratiques dont la question fondatrice est de caractériser les formes qui se transforment les unes en les autres ([14]). Or Jordan désigne sous la dénomination de "forme canonique" trois expressions algébriques distinctes associées aux trois problèmes de sa théorie des formes bilinéaires (voir la citation de Jordan en introduction de ce chapitre), il est par conséquent accusé par Kronecker de recourir à une notion formelle, sans signification précise, pour parvenir à la "simplicité" d'une présentation uniforme dont la généralité n'est qu'apparente :

> Dass sich aber für eine zugleich einheitliche und ganz allgemeine Entwickelung, wie sie in der ben erwähten Arbeit gegeben ist, gewisse neue Principien als nöthig erwiesen, kann durchaus nicht befremden, und es wäre im Gegentheil zu verwundern, wenn wirklich den *Jordan*'schen Behauptungen gemäss ("Les méthodes nouvelles que nous proposons sont, au contraire extrêmement simples..." "On voit par une discussion très simple, que l'on peut transformer...") die allereinfachsten Mittel dazu ausreichen sollten.
> [Kronecker, 1874c, 404-405].
>
> *Traduction de l'extrait ci-dessus [traduction F.B.] :*
> Toutefois, il ne faut pas du tout être surpris que pour un développement à la fois tout à fait général et uniforme, comme [Jordan] en donne dans son travail cité, l'auteur soit nécessairement contraint de prouver certains nouveaux principes ; et il faudrait nous étonner au contraire, si conformément aux affirmations de Jordan ("Les méthodes nouvelles que nous proposons sont, au contraire extrêmement simples..." "On voit par une discussion très simple, que l'on peut transformer...") le moyen extrêmement simple devait vraiment suffire.

Les revendications de simplicité de Jordan sont caricaturées par Kronecker comme un simplisme naïf ([15]). Ce simplisme, quand il est associé à une revendication de généralité, comme dans la note de Jordan de 1873, participe de ce que Kronecker critique comme une "apparente généralité" qui en reste "à des aspects uniquement formels", et n'atteint pas la profondeur des "raisons internes" de la théorie. La critique de Kronecker se fait plus précise : si l'approche de Jordan doit être rejetée comme formelle, c'est qu'elle procède de la confusion entre ce qui tient de la méthode et ce qui est le contenu de la théorie: déterminer à quelles conditions une forme peut être transformée en une autre. Pour le véritable objet de la recherche, si l'utilisation d'une forme canonique peut tenir lieu de méthode, de "moyen", elle ne saurait dicter l'organisation de la théorie. Kronecker emploie lui-même une "forme normale" depuis 1866, et ce que Jordan désigne comme "forme canonique" intervient

---

[14] Les "transformations" autorisées sont alors des substitutions linéaires ou orthogonales : voir la note 4. de l'introduction de ce chapitre.

[15] Les idéaux de simplicité de Jordan reposant sur des méthodes élaborées pour la théorie des groupes, la signification du terme "simplicité" est bien peu simple en elle-même. Le chapitre 3 explicite la relation entre l'idéal de simplicité de Jordan et une méthode de réduction issue des travaux des années 1860-1870 sur la résolubilité des équations algébriques.

ENCART 2d.

Lettre de Kronecker à Jordan. 11/2/1874. VI2a2X1855, N. 32

Cette réponse au courrier de Jordan de janvier débute par soulever la question de la langue de correspondance. Son premier courrier, écrit à Jordan en français ayant reçu une réponse en français également, Kronecker considère n'avoir pas manqué à ses "obligations internationales" et qu'à présent, "chacun poursuit dans sa langue maternelle". Kronecker exprime dans cette lettre son regret que Jordan ne reconnaisse pas la priorité des berlinois. Sa bonne foi, mise en valeur par le témoignage de ses relations mathématiques avec Serret et Hermite, le "cher ami", devrait amener Jordan à reconnaître la "levis culpa", faute légère qu'on lui reproche. Après ces "questions de moralité", la lettre s'articule en trois parties qui sont autant d'arguments posés par Kronecker : 1. Le mémoire de 1868 donne un traitement "complet" de l'équivalence des faisceaux singuliers. 2. Ce mémoire et celui de Weierstrass sont à considérer comme les deux parties d'un travail qui donne la "première solution complète" de l'équivalence des faisceaux de formes. 3. Les développements donnés à ces mémoires le 22 décembre 1873 ne viennent pas compléter des travaux incomplets de 1868 mais "éclairer" les méthodes employées en donnant un développement parfaitement "homogène".

dans la démonstration du théorème de Weierstrass de 1868 ([16]). Kronecker, critique donc la volonté de Jordan de faire de sa forme canonique une "notion" centrale, de la théorie des formes et, quittant alors sa "place relative" de méthode, la forme canonique n'est plus qu'un de ces "aspects uniquement formels qui progressent souvent dans le domaine de l'algèbre la plus récente - et certainement pas au profit de la défense de la science – [...]". La critique de Kronecker repose sur une conception forte du rôle de l'algèbre, ce rôle doit être du côté des méthodes et mettre l'algèbre au service d'"autres disciplines" comme l'arithmétique car seule cette dernière discipline doit organiser la théorie des formes dans la tradition de Gauss :

> Nachträglich, wenn dergleichen allgemeine Ausdrücke gefunden sind, dürfte die Bezeichnung derselben als canonische Formen allenfalls durch ihre Allgemeinheit und Einfacheit motiviert werden können ; aber wenn man nicht bei den bloss formalen Gesichtspunkten stehen bleiben will, welche –gewiss nicht zum Vortheil der wahren Erkenntnis- in der neueren Algebra vielfach in den Vordergrund getreten sind, so darf man nicht unterlassen, die Berechtigung der aufgestellten canonischen Formen aus inneren Gründen herzuleiten.
> In Wahrheit sind überhaupt die so genannten canonischen oder Normalformen lediglich durch die Tendenz der Untersuchung bestimmt und daher nur als Mittel, nicht aber als Zweck der Forschung anzusehen. Dies tritt namentlich überall da deutlich hervor, wo die algebraische Arbeit im Dienste andrer mathematischer Disciplinen geleistet wird und von ihnen Ausgangs – und Zielpunkt angewiesen erhält. Aber auch die Algebra selbst kann natürlich ausreichende Beweggründe zur Aufstellung canonischer Formen liefern, und so sind z.B. die Momente, welche Hrn. Weierstrass und mich in den beiden von Hrn. Jordan citirten Arbeiten bei Einführung gewisser Normalformen geleitet haben, an den bezüglichen Stellen klar und deutlich hervorgehoben.
> [Kronecker, 1874a, 367].
>
> *Traduction de l'extrait ci-dessus [traduction F.B.]* :
> Si de telles expressions générales sont trouvées, on pourrait au besoin leur donner a posteriori une même désignation de formes canoniques pour des motivations de simplicité et de généralité. Mais si on ne veut pas en rester à ces aspects uniquement formels qui ont souvent été mis en avant par les travaux d'algèbre les plus récents - certainement pas au profit de la défense de la science –, alors on ne peut omettre de déduire le bien fondé de l'établissement des formes canoniques pour des raisons internes.

[16] Voir à ce sujet le chapitre 3.

Berlin 11. Febr. 1874.
Bellevuestr. 13.

ECOLE POLYTECHNIQUE
Art. VI
§ 2
Sect. a 2
N°
ARCHIVES

Geehrter Herr,

Soeben erst erhalte ich Ihren werthen Brief vom 7. c. und beeile mich Ihnen mit meinem besten Dank zugleich meine Erwiderung in deutscher Sprache zu übersenden. Ich glaubte einer Anstandspflicht genügen zu müssen, da ich voriges Mal bei der Einleitung dieses Briefwechsels mich Ihrer Sprache bediente, so schwer es mir auch geworden und so schlecht es auch gerathen sein mag; jetzt aber bei der Fortsetzung unserer Correspondenz dürfen wohl bei der Wahl des Idioms einzig und allein die sachlichen Rücksichten maßgebend sein, welche – gleichwie im modernen diplomatischen Verkehr – es am geeignetsten erscheinen lassen, wenn der Schreibende sich seiner Muttersprache bedient, in der er sich am leichtesten und auch am genauesten auszudrücken vermag. — Zu meinem großen Bedauern habe ich aus Ihrem Briefe ersehen, daß Sie nicht geneigt scheinen, den Wünschen zu genügen, die ich in meinem vorigen Briefe an Sie gerichtet habe. Ich hatte diese meine Wünsche allerdings an die Voraussetzung geknüpft, daß Sie meine Einwürfe gerechtfertigt finden; aber eben diese Voraussetzung erweist sich leider als nicht zutreffend. Ich bin dadurch, ich gestehe es, unangenehm überrascht worden. In der That habe ich geglaubt, daß Ihnen meine „Bemerkungen" vom 18. Mai 68 unbekannt waren, oder wenigstens daß Ihnen, wie es bei einer flüchtigen Durchsicht leicht geschehen kann, die genaue Beziehung entgangen sei, in welcher deren Inhalt zu dem von Ihnen behandelten Gegenstande steht. Von dieser Annahme ausgehend habe ich es für zulässig erachtet, Sie um eine in diesem Sinne abzufassende Ergänzung und Richtigstellung ~~Berichtigung~~ Ihrer Aeusserungen in den Comptes Rendus zu bitten. Sie können, geehrter Herr, versichert sein, daß ich hiermit Ihnen nichts zugemuthet habe, was ich nicht an Ihrer Stelle ohne Weiteres zu erfüllen bereit wäre. Mein hochgeschätzter Freund Hermite hat vor Jahren einmal mit bereitwilligster Loyalität so mir gegenüber gehandelt; ich selber habe dereinst auf Serret's Aufforderung Fehler eingestanden, die sich in eine meiner Publicationen eingeschlichen haben, und ich würde und werde bei vorkommendenfalls stets in der unbefangensten Weise thun, da ich für mich keinerlei „Unfehlbarkeit" in Anspruch nehme. Ebensowenig würde man jemals vergeblich an meine Loyalität appelliren, wenn es mir passirt ~~ist~~ wäre, die Arbeit eines Andern übersehen zu haben, und ich würde mit leichtem Herzen solche „levis culpa" gern öffentlich eingestehen. Soviel zur „moralischen" Rechtfertigung der in meinem vorigen Briefe ausgedrückten Wünsche. Zur sachlichen Rechtfertigung derselben erlaube ich mir Folgendes auf Ihre Einwendungen zu repliciren.

1) Meine Bemerkungen vom 18. Mai 68, welche unmittelbar an die Weierstraß'sche Abhandlung angeschlossen und in den Separatabdrücken auch damit zusammen gebunden ~~ist~~ sind, dienten in ihrem zweiten Theile ausdrücklich dazu, jene zu ergänzen. Daß dies geschehen d.h. daß der Fall $[P,Q]=0$ dort von mir zuerst bemerkt (cf. pag. 340, Monatsbericht 68, Schlußsatz der Einleitung) und

> En réalité, les dites formes canoniques ou formes normales sont effectivement déterminées uniquement par l'orientation donnée à l'étude et doivent donc seulement être considérées comme les moyens, mais non comme le but de la recherche. Cela ressort notamment clairement partout où le travail algébrique est effectué au service d'autres disciplines mathématiques, dont il reçoit ses fins et dont dépendent ses objectifs. Toutefois l'algèbre peut naturellement elle-même susciter également des motifs suffisants visant à l'établissement de formes canoniques, comme par exemple lorsque Mr. Weierstrass et moi-même avons été conduits dans les deux travaux cités par Mr. Jordan, à l'introduction de certaines formes normales, dont la place relative a été explicitement et clairement soulignée.

La critique de Kronecker est précisée par la publication, en avril 1874, d'un appendice au mémoire de janvier. Kronecker y explicite sa conception de la "véritable généralité", dont le mémoire de Weierstrass donne l'exemple parfait, en s'appuyant sur un "défaut" relevé dans le mémoire de Jordan publié en mars : la mise au dénominateur d'une expression algébrique susceptible de s'annuler (ce défaut est détaillé en annexe 2). A partir de ce défaut, Kronecker développe un discours sur deux significations opposées du terme généralité :

> Denn man ist es gewohnt –zumal in algebraischen Fragen- wesentlich neue Schwierigkeiten anzutreffen, wenne man sich von der Beschränkung auf diejenigen Fälle losmachen will, welche man als die allgemeinen zu bezeichnen pflegt. Sobald man von der Oberfläche der sogenannten, jede Besonderheit ausschliessenden Allgemeinheit in das Innere der wahren Allgemeinheit eindringt, welche alle Singularitäten mit umfasst, findet man in der Regel erst die eigentlichen Schwierigkeiten der Untersuchung, zugleich aber auch die Fülle neuer Gesichtpunkte und Erscheinungen, welche sie in ihren Tiefen enthält.
> [Kronecker, 1874c, 404-405].
>
> *Traduction de l'extrait ci-dessus [traduction F.B.]* :
> Car on est habitué –en particulier dans les questions algébriques – à trouver des difficultés largement nouvelles, si on veut se détacher de la restriction à ces cas, que l'on a coutume de désigner comme généraux.
> Aussitôt que l'on perce la surface de la prétendue généralité, excluant chaque particularité, on pénètre l'intérieur de la vraie généralité que toutes les singularités recouvrent, et l'on trouve généralement ainsi seulement les difficultés réelles de l'étude, ainsi que les abondants nouveaux points de vue et phénomènes qu'elle contient dans ses profondeurs.

La "vraie généralité" est dépeinte comme un océan métaphorique dont il faut percer la "surface" pour pénétrer les "profondeurs". La métaphore de la surface représente un "prétendue généralité" incapable de traiter les "singularités" car s'appuyant sur des expressions algébriques formelles perdant toute signification dans certains cas particuliers. Au contraire du formel, la "vraie généralité" permet d'atteindre le "réel" enfoui dans les profondeurs des cas singuliers. :

> Diess bewährt sich durchweg in den wenigen algebraischen Fragen, welche bis in alle ihre Einzelheiten vollständig durchgeführt sind, namentlich aber in der

vollständig erledigt worden ist, haben Sie in Ihrer Notiz vom 22. Dec. 73 nicht anerkannt, und dagegen glaubten Sie mir einwenden zu sollen, daß ein erheblicher Theil meiner kleinen Publication nicht erreicht worden sei. Zur Widerlegung Ihrer darauf bezüglichen Vorwürfe möchte ich einige Worte näherer Begründung für meine Behauptung hinzufügen. <u>Erstens</u>: Wenn quadratische Formen vermittelst der Transformationen so behandelt werden, daß – falls jene bilinear sind – keine Vermengung der beiden Variabeln-systeme entsteht, so umfaßt die Behandlung der quadratischen Formen ohne Weiteres den Fall als speciellen in sich, wo dieselben bilinear sind und als bilineare betrachtet werden. Dies ist in Art. II pag. 344–46 l.c. durchaus geschehen, und es liegt dies bei der dort angewendeten Methode so sehr auf der Hand, daß ich es für überflüssig erachtete, besonders darauf hinzuweisen. Ueberhaupt bin ich sehr gewöhnt, die quadratischen Formen – den bilinearen gegenüber – als die allgemeineren aufzufassen und zu behandeln, daß ich meiner Publication vom 19. Jan. c. nur deshalb eine darauf bezügliche Bemerkung hinzugefügt habe, weil mir aus Ihrer Notiz v. Dec. hervorzugehen schien, als ob meine Auffassungsweise selbst so guten Algebraikern, wie Sie, nicht allgemein geläufig

<u>Zweitens</u>: Die Normalformeln, die ich für Schaaren quadratischer Formen mit verschwindender Determinante auf pag. 345 meiner l.c. gegeben habe, erledigen unter Hinzuziehung der Weierstraß'schen Resultate vollständig das Problem der Transformation zweier beliebiger Schaaren. Sie enthalten nicht bloß einen „Anfang" der Lösung, wie Sie in Ihrem Briefe sagen, sondern die Lösung selbst. Denn die in meinen Formeln abgesonderte Schaar $u\Phi + v\Psi$ enthält entweder ebenfalls lauter Formen mit Determinante Null oder sie fällt unter die Weierstraß'schen Betrachtungen; der <u>erstere</u> Theil meiner erwähnten Formeln aber hat die charakteristische Eigenschaft, daß damit <u>alle</u> Schaaren von verschwindenden $[P, Q]$ und <u>nur solche</u> aus- werden. Einen solchen Ausdruck aufzustellen, ist offenbar der einzige wahre Inhalt des bezüglichen Problems. Ob an formale „Verschönerungen" noch an solchen Ausdrücke anzubringen sind, ist eine durchaus untergeordnete und überdies nicht einmal zu präcisirende Frage. Dazu kommt, daß die Transformation (cf. pag. 17 meiner neuesten Notiz) der Formen

$$f_1x'_{m+1}+\dots+f_mx'_{2m}+\mathfrak{F},\quad f'_1x'_{m+1}+\dots+f'_mx'_{2m}+\mathfrak{F}' \text{ in } \Sigma x_{2k}x_{2k+1}+\Phi,\quad \Sigma x_{2k+1}x_{2k+2}+\Psi,$$

falls sie beliebt wird, in der leichtesten Weise zu bewirken ist. Denn setzt man $f_h = x'_{h-1}$, und nimmt man an, daß in der an- Form die ersten $k-1$ Glieder bereits die gewünschte Gestalt haben, so kann dann $f'_k = x^0_k$ gesetzt werden und es k

$$x'_0x'_{m+1}+x'_1x'_{m+2}+\dots+x'_{k-1}x'_{m+k}+f_{k+1}x'_{m+k+1}+x'_{k+1}x'_{m+k+2}+x'_{k+2}x'_{m+k+3}+\dots+\mathfrak{F}$$
$$x'_1x'_{m+1}+x'_2x'_{m+2}+\dots+x^0_kx'_{m+k}+f'_{k+1}x'_{m+k+1}+f'_{k+2}x'_{m+k+2}+f'_{k+3}x'_{m+k+3}+\dots+\mathfrak{F}$$

Hier ist offenbar f_{k+1} nur als eine lineare Function von $x^0_k, x'_{k+1}, x'_{k+2}, \dots$ anzusehen, da die ersten $k-1$ Va-riabeln mit den vorhergehenden Theilen der Form vereinigt werden können, ohne die andre Form in ihrer Gestalt zu verändern. Nun sind aber (cf. die ersten Zeilen meiner Notiz vom Januar c. pag. 8.) die Glieder $x'_{k+1}, x'_{k+2}, \dots$ wegzuschaffen, wenn für alle diese ~~x~~ jetzt neue Variabeln $x''_h = x'_h + c_h x'_{m+k+1}$ eingeführt werden, und das verbleibende $x^0_k + c_k$ gleich x''_k gesetzt wird. Hierdurch ändert die zweite Form ihre Gestalt nicht und die bezweckte Umformung ist

Theorie der Schaaren von quadratischen Formen, die obein in ihren Hauptzügen entwickelt worden ist. Denn so lange man es nicht wagte, die Voraussetzung fallen zu lassen, dass die Determinante nur ungleiche Factoren enthalte, gelangte man bei jener bekannten Frage der gleichzeitigen Transformation von zwei quadratischen Formen, welche seit einem Jahrhundert so vielfach, wenn auch meist blos gelegentlich, behandelt worden ist, nur zu höchst dürftigen Resultaten, und die wahren Gesichtpunkte der Untersuchung blieben gänzlich unerkannt. Mit dem Aufgeben jener Voraussetzung führte die *Weierstrass*'sche Arbeit vom Jahre 1858 schon zu einer höheren Einsicht und namentlich zu einer vollständigen Erledigung des Falles, in welchem nur einfache Elementartheiler vorhanden sind. Aber die allgemeine Einführung dieses Begriffes der Elementartheiler, zu welcher dort nur ein vorläufiger Schritt gethan war, erfolgte erst in der *Weierstrass*'schen Abhandlung vom Jahre 1868, und es kam damit ganz neues Licht in die Theorie der Schaaren für den Fall beliebiger, doch von Null verschiedener Determinanten. Als ich darauf auch diese letzte Beschränkung abstreifte und aus jenem Begriffe der Elementartheiler den allgemeineren der elementaren Schaaren entwickelte, verbreitete sich die vollste Klarheit über die Fülle der neu auftretenden algebraischen Gebilde, und bei dieser vollständigen Behandlung des Gegenstandes wurden zugleich die wertvollsten Einblicke in die Theorie der höheren, in ihrer wahren Allgemeinheit aufzufassenden Invarianten gewonnen.
[Kronecker, 1874c, 404-405].

Traduction de l'extrait ci-dessus [traduction F.B.] :
Ceci se confirme partout dans les rares questions algébriques qui sont mises en œuvre complètement jusqu'à leurs moindres détails, notamment dans la théorie des faisceaux des formes quadratiques qui a été développée plus haut dans ses caractéristiques principales. Parce que, pendant si longtemps, on n'osait pas faire tomber la condition que le déterminant ne contient que des facteurs inégaux, on est arrivé avec cette question connue de la transformation simultanée de deux formes quadratiques ; qui a été si souvent traitée depuis un siècle, mais de manière sporadique, à des résultats très insuffisants et les vrais aspects de l'étude ont été ignorés. Avec l'abandon de cette condition, le travail de Weierstrass de l'année 1858 à conduit à un aperçu plus élevé et notamment à un règlement complet du cas, dans lequel n'existent que des diviseurs élémentaires simples. Mais l'introduction générale de cette notion de diviseur élémentaire, dont seule une étape provisoire était alors accomple, intervient seulement dans le mémoire de Weierstrass de l'année 1868, et une lumière tout à fait nouvelle est ainsi faite sur la théorie des faisceaux pour n'importe quel cas, avec la seule condition que le déterminant soit différent de zéro. Quand j'ai aussi dépouillé cette dernière restriction et l'ai développé à partir de la notion de diviseur élémentaire des faisceaux élémentaires généraux, la clarté la plus pleine s'est répandue sur une quantité de nouvelles formes algébriques, et par ce traitement complet de l'objet des vues plus élevées ont été acquises sur une théorie des invariants comprise dans sa vraie généralité.

Le théorème de Weierstrass de 1868 fait des formes bilinéaires une des rares théories atteignant la "vraie généralité". Cette généralité vient clore et sanctionner les "résultats très insuffisants" obtenus au cours d'une longue ein Glied weiter fortgeschritten. Diesen ungemein einfachen Uebergang der einen Gestalt einer Schaaren mit verschwindender Determinante zur andern habe ich bereits im Jahre 68 gemacht und damals Weierstrass mitgetheilt, aber es konnte mir nicht in den Sinn kommen, diese nur anders formirten Ausdrücke als etwas Neues zu publiciren; und auch Sie werden schwerlich in dieser einfachen formalen Umgestaltungen etwas „Neues" erblicken wollen.

2) Die Entwickelungen im I Theile meiner Notiz vom Jahre 68 haben nicht bloss ihre principielle Bedeutung darin, dass sie zeigen, wie man in den dort behandelten Fällen durch ein Reductionsverfahren zum Ziele gelangt, sondern auch darin, dass die Fälle an und für sich von besonderem Interesse sind, indem sie die Theorie der Schaaren „erster Art" vollständig erledigen. Jene Entwickelungen verhalten sich demnach grade so zu der Weierstrass'schen Arbeit vom Jahre 58, wie meine jetzige zu der des Hrn Weierstrass vom Jahre 68.

3) Sowohl Weierstrass als ich, wir haben beide bei Durchlesung Ihrer Notiz vom 22. Dec. den Eindruck empfangen, als ob Sie von einem genaueren Studium der Weierstrass'schen Arbeit abgeschreckt auch die in der Formel (44) enthaltenen Resultate übersehen hätten. Ist dies nicht der Fall, so hätten Sie, meine ich, um so weniger Anstand nehmen, in den C. R. ergänzend hinzuzufügen, dass die von Ihnen gegebenen Formeln, soweit sie sich auf den Fall $[\Phi,\Psi] \gtrless 0$ beziehen, in den Weierstrass'schen enthalten sind. Dass diejenigen, welche den Fall $[\Phi,\Psi]=0$ betreffen in den meinigen enthalten, oder wenigstens leicht einfach daraus abzuleiten sind, habe ich schon oben sub 1) auseinanderzusetzen versucht.

Ich weiss nicht, ob ich hoffen darf, Sie nunmehr von der Berechtigung meiner Wünsche überzeugt zu haben; sollte es nicht der Fall sein, so werde ich auf eine weitere Befürwortung meines Verlangens verzichten müssen. Aber einige Bemerkungen in Ihrem Briefe erfordern noch einige Zeilen Erwiderung. Dass ich zuerst <u>öffentlich</u> mich gegen einige Ihrer Aeusserungen vom 22. Dec. p. a. kritisirend habe wenden müssen, ist mir bei den persönlichen Beziehungen, durch die ich mich mit Ihnen verbunden fühle, wahrlich nicht leicht geworden; aber ich glaubte darin <u>Ihrem Vorgang</u> folgen zu müssen. In der That kann ich nicht recht begreifen, warum Sie nicht vor der Veröffentlichung Ihrer Notiz sich brieflich an mich oder an Weierstrass gewendet haben. Da Ihnen unsere Arbeiten schwer verständlich erschienen, so musste Ihnen wohl daran gelegen sein, sich vor Ihrer Publication durch briefliche Anfrage eine genauere Kenntniss von deren wesentlichem Inhalt zu verschaffen, um über deren Beziehungen zu Ihren Resultaten ein klares Urtheil zu gewinnen. Ich für mein Theil hätte Ihnen bereitwilligst Auskunft ertheilt; Ihre Publication wäre, glaube ich, demnach etwas anders ausgefallen und mir wäre dadurch die unangenehme Nothwendigkeit einer öffentlichen Kritik erspart worden. Uebrigens habe ich diese Kritik durchaus sachlich gehalten, es handelt sich ja überhaupt weder um Ihre noch um meine Person, noch gar um die des Hrn Christoffel, dem ich gänzlich fern stehe. Aber die Christoffelsche <u>Arbeit</u> war meines Erachtens an der Stelle zu erwähnen, wo Sie ausdrücklich behaupten, dass die meinige sich nur auf grade Zahlen n bezieht. Sie fassen mit Unrecht meine diesfällige Auslassung als eine histoire de méthodes développées "durant tout un siècle [...] de manière sporadique". Il s'agit là de la mauvaise signification du qualitatif général qui sanctionne une histoire qui fait implicitement référence aux travaux de Lagrange, Cauchy, Jacobi et bien d'autres comme négligeant d'aborder les singularités en "n'osant pas faire tomber" la condition que le déterminant du faisceau $A+sB$ contient des facteurs inégaux ([17]). Par contraste, pour Kronecker, les méthodes de Weierstrass répandent "la clarté la plus pleine" sur l'ensemble de la théorie en élaborant un "traitement complet de l'objet" par des méthodes algébriques homogènes ne souffrant aucune exception et permettant d'atteindre une "vraie généralité". Cette histoire, sanctionnée par Kronecker, d'une discussion longue d'un siècle est détaillée dans le chapitre 2 afin d'éclairer la querelle de 1874.

[17] C'est-à-dire la condition imposant des racines caractéristiques distinctes ou, en termes contemporains, des matrices diagonalisables.

„Reclamation zu Gunsten Christoffels" auf; nicht im Interesse irgend welcher Person sondern im Interesse der Sache, zur Beförderung der Einsicht scheint es mir geboten, überall soviel als möglich die Beziehungen der Methoden und Resultate, die man publicirt, zu bereits publicirten hervorzuheben. Aus demselben Grunde hätten Sie meines Erachtens die Beziehungen nicht dürfen unerwähnt lassen, in denen Ihr erstes und zweites Problem zu dem dritten steht; denn eine solche Hervorhebung fördert offenbar die Einsicht und Erkenntniss des Lesers. Ich will dabei nicht in Abrede stellen, dass es immerhin sachgemäss erscheinen kann, einen speciellen Fall eines allgemeineren Problems noch gesondert zu behandeln, zumal ja oft genug dabei eine elegantere Lösung zulässig ist, aber es darf doch dieses Verhältniss des speciellen Falls zum Allgemeinen nicht ganz mit Stillschweigen übergangen werden. Dabei ist es in Ihren Fällen noch dazu recht lehrreich zu sehen, erstens wie so das bekannte Problem der orthogonalen Transformation zweier quadratischer Formen, falls sie bilinear sind, auf Substitutionen führt, die beide Variabeln-Systeme getrennt halten, zweitens wie so die Reduction einer aus zwei transponirten bilinearen Formen entstehenden Schaar auf elementare Schaaren zu Substitutionen führt, die in Beziehung auf beide Variabeln-Systeme identisch sind. Man kann in der erwähnten Ansicht sowohl die Weierstrass'schen Entwickelungen vom Jahre 58 und 68 folgern, ~~oder aber~~ als auch direct aus dem allgemeinen die speciellen Resultate ableiten, was aber freilich ein genaueres Eingehen in die Sache erfordert.*

Nur eines — das will ich zum Schlusse bemerken — ist mir bei der ganzen Sache persönlich, nämlich das persönliche Interesse, das ich seit lange für Sie hege; nur dieses persönliche Interesse, das werden Sie mir wohl glauben, hat mich veranlasst, mich mit einem so ausführlichen und umfangreichen Briefe an Sie zu wenden. Weder mein Gesundheitszustand noch der Drang meiner Geschäfte machen es mir leicht, eine so lange briefliche Auseinandersetzung abzufassen, die ich vorgestern begonnen und — nach mannigfachen Störungen — erst heute am 13. Febr. habe vollenden können. Ich wünsche nur, dass Sie wenigstens meinen Bemühungen um Klarlegung der Sache Ihre Anerkennung nicht versagen werden und zeichne

mit achtungsvoller Begrüssung

ergebenst

Kronecker

ECOLE POLYTECHNIQUE ARCHIVES
Art. VI
§ 2
Sect. a 2
N°

*Ich habe hierbei den wahrhaft allgemeinen Fall Ihrer ersten beiden Probleme vorgetragen. Aber es ist dabei stets $[\varphi,\psi] \gtrless 0$.

2. Une théorie homogène : la théorie arithmétique des faisceaux de formes de Kronecker.

L'origine des travaux sur les formes bilinéaires à Berlin dans les années 1860-1870 est détaillée au chapitre 3 qui propose une étude contextuelle des travaux de Kronecker et Jordan. Elle se présente comme une entreprise théorique guidée par un idéal de généralité. La résolution complète de la question de la transformation des couples de formes bilinéaires et quadratiques par les publications conjointes de Weierstrass et Kronecker de 1868 est un des fondements de la théorie. Pourquoi dans ce cas Kronecker publie-t-il une nouvelle série de mémoires tout au long de l'année 1874 sur une question qu'il présente lui-même comme complètement résolue en 1868 ? Homogénéité : tel est le maître mot des nouvelles ambitions de généralité de Kronecker cette année 1874. Dans sa communication à l'académie berlinoise de décembre 1873, Kronecker [1874a] présente sa nouvelle approche comme développant des idées échangées avec Kummer sur la nécessité de construire une nouvelle synthèse homogène des différents résultats obtenus par Christoffel, Kronecker et Weierstrass dans les années 1860 [Kronecker, 1874a, 355]. L'idéal d'homogénéité de Kronecker se manifeste dans sa critique de l'approche de Jordan qui organise la théorie des formes bilinéaires par une classification en trois problèmes distincts de réduction à des formes canoniques (l'extrait suivant, déjà cité en introduction de ce chapitre, est cité à nouveau afin d'en proposer une nouvelle lecture) :

> [...] dans le Mémoire de M. *Jordan "Sur les formes bilinéaires" (Journal de M. Liouville, 2e série t. XIX, pp. 35-54),* la solution du premier problème n'est pas véritablement nouvelle ; la solution du deuxième est manquée, et celle du troisième n'est pas suffisamment établie. Ajoutons qu'en réalité ce troisième problème embrasse les deux autres comme cas particuliers, et que sa solution complète résulte du travail de M. *Weierstrass* de 1868 et se déduit aussi de mes additions à ce travail. Il y a donc, si je ne me trompe, de sérieux motifs pour contester à M. *Jordan* l'invention première de ses résultats, en tant qu'ils sont corrects ; [...].
> [Kronecker, 1874b, 19].

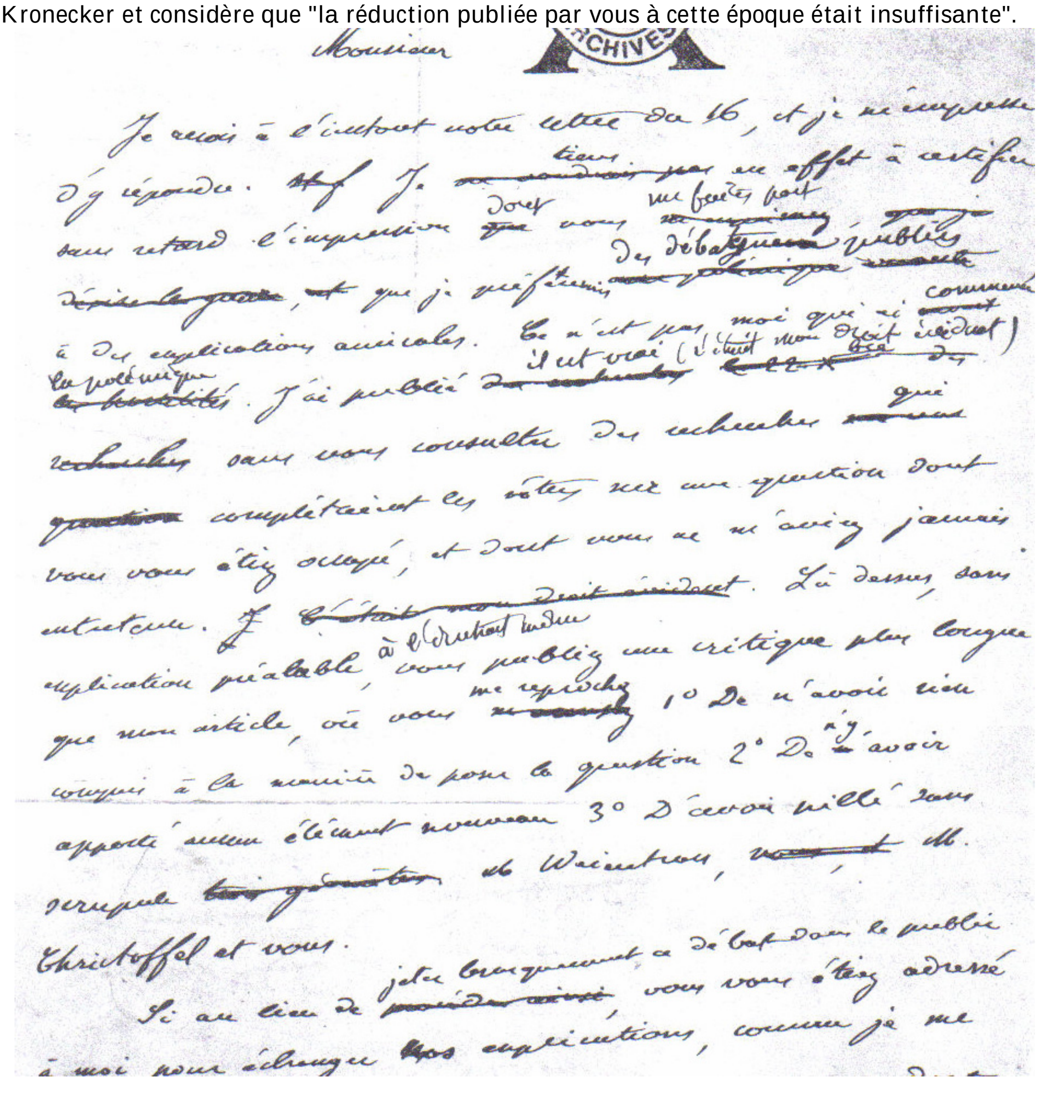
L'approche homogène de tous les problèmes relatifs à l'équivalence algébrique des formes quadratiques est chez Kronecker basée sur la seule caractérisation des transformations des couples de formes (problème 3 de Jordan) ([18]). Les

[18] Kronecker démontre ainsi que le problème I de Jordan est un cas particulier de l'étude d'un faisceau $u\varphi+v\psi$ où φ est bilinéaire et ψ est quadratique (la forme ψ est par exemple, pour le cas de la classification des coniques, la forme identité qui correspond à la condition d'orthonormalité des substitutions). C'est essentiellement pour cette raison que Kronecker rejette la classification de Jordan en trois problèmes, qui s'appuie sur l'action des groupes classiques. C'est aussi ce qui motive la critique de Kronecker de l'expression "forme canonique" comme vide de toute signification, puisque Jordan l'applique aussi bien à la réduction des couples des formes bilinéaires par *équivalence*, à la réduction d'une seule forme bilinéaire par *équivalence* ou encore à la réduction d'une forme bilinéaire par *congruence* comme on l'a déjà expliqué en intoduction de ce chapitre.

ENCART 2e.

Lettre de Jordan à Kronecker. Février 1874. VI2a2X1855, N. 39.

La nouvelle réponse de Jordan à Kronecker accompagne l'envoi du mémoire sur les formes bilinéaires [1874a], objet de la controverse et qui, bien qu'annoncé dès 1873 connaît des "retards d'impression". Par rapport à son courrier précédent (encart 2c.), Jordan adopte une nouvelle position après avoir étudié le mémoire de Kronecker de 1868 : " je n'avais pas remarqué à première vue, que les formes bilinéaires non citées dans votre travail y sont pourtant implicitement comprises." Jordan ne reconnaît pas pour autant la priorité de Kronecker et considère que "la réduction publiée par vous à cette époque était insuffisante".


Monsieur

Je reçois à l'instant votre lettre du 16, et je m'empresse d'y répondre. J. tiens en effet à certifier sans retard l'impression dont vous me faites part des débats publiés, et que je préférerais comme à des explications amicales. Ce n'est pas moi qui ai commencé (c'était mon droit évident) il est vrai. La polémique. J'ai publié sans vous consulter des recherches qui complètent les vôtres sur une question dont vous vous étiez occupé, et dont vous ne m'aviez jamais entretenu. Là-dessus sans explication préalable, à l'instant même vous publiez une critique plus longue que mon article, où vous me reprochez 1° De n'avoir rien compris à la manière de poser la question 2° De n'y avoir apporté aucun élément nouveau 3° D'avoir pillé sans scrupule de Weierstrass, M. Christoffel et vous.

Si au lieu de jeter brusquement ce débat dans le public, vous vous étiez adressé à moi pour échanger nos explications, comme je me résultats obtenus par Christoffel, Kronecker et Weierstrass dans les années 1860-1870 sont réorganisés en une théorie arithmétique des "faisceaux de formes quadratiques" dont les formes bilinéaires apparaissent comme cas particulier ([19]). Que signifie le qualificatif "arithmétique" donné par Kronecker à sa nouvelle théorie ? Il y a d'abord la revendication d'un héritage historique de l'arithmétique des formes de Gauss et les travaux conjoints d'Hermite et de Kronecker au début des années soixante ([20]). D'un point de vue mathématique, l'héritage de Gauss se manifeste dans l'emploi du terme "forme" pour ce que d'autres désignent comme des "fonctions" ([Weierstrass, 1858], [Christoffel, 1866]) ou des "polynômes" (voir la citation de [Jordan, 1873] en introduction de ce chapitre). Que signifie ici la notion de forme ? La réponse de Kronecker est arithmétique : le terme de forme, tel qu'introduit par Gauss dans les *Disquitiones Arithmeticae* de 1801, tire sa signification mathématique de la notion arithmétique de classe d'équivalence des formes quadratiques dont la généralisation aux faisceaux de formes fonde la nouvelle théorie de Kronecker comme une "application des notions de l'arithmétique à l'algèbre" :

> En appliquant les notions de l'Arithmétique à l'Algèbre, on peut appeler *équivalentes* deux formes bilinéaires, dont l'une peut être transformée en l'autre par une même substitution, opérée sur les deux systèmes de variables, et ensuite on peut réunir en une même *classe* toutes les formes équivalentes. Cela posé, on voit que toute forme bilinéaire est équivalente à une somme de formes élémentaires, et que par conséquent tout classe peut être décomposée, pour ainsi dire, en *classes élémentaires.*
> Pour que deux formes bilinéaires $\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$ appartiennent à une même classe, il faut et il suffit que les deux faisceaux formés des deux paires de fonctions conjuguées $u\varphi(x,y)+v\varphi(y,x)$, $u\psi(x,y) + v\psi(y,x)$ soient équivalents.
> [Kronecker, 1874b, 415]

Les résultats sont exposés pour les formes quadratiques mais les méthodes peuvent s'appliquer au "cas particulier" des formes bilinéaires par la distinction de deux types de relations d'équivalences selon que l'on fasse opérer des substitutions linéaires ou orthogonales : ce sont les relations d'"équivalence" et de "congruence" des formes [Kronecker, 1874d] ([21]). Le

---

[19] Jordan ne comprend pas immédiatement que Kronecker traite aussi bien du cas quadratique que du cas bilinéaire, c'est un des points que Kronecker éclaircit dans sa correspondance (voir paragraphe 1. de ce chapitre) :

> Bilinearen Formen können hierbei als spezielle Arten quadratischer Formen einer graden Anzahl von Variabeln betrachtet werden, aber die linearen Transformationen sind alsdann der Beschränkung zu unterwerfen, dass di eine wie die andere Hälfte der Variabeln nur für sich transformiert werde, und hiernach ist auch der Aequivalenz – und Classenbegriff zu modificiren.
> [Kronecker, 1874a, 352].

[20] Pour illustrer comment doit être menée une recherche d'invariants caractérisant des classes d'équivalences arithmétiques, Kronecker fait référence aux recherches conjointes d'Hermite sur la résolutions des équations algébriques par les équations modulaires des fonctions elliptiques [Kronecker, 1874c, 382-383] .

[21] Cette dénomination ne revêt pas un sens identique à celui des termes "équivalence" et "congruence" dans les mathématiques contemporaines. De telles définitions seront données quelques années plus tard par Frobenius (voir le chapitre 3). Kronecker appelle ainsi "équivalents" aussi bien des *polynômes* de formes équivalents $pP+qQ$ et $pP'+qQ'$ que des formes bilinéaires

essayai en droit de l'espérer, nous nous serions sans doute entendus ~~mis d'accord~~. Sur votre indication, j'aurais ~~contesté immédiatement, ce que j'ai reconnu trop tard, que votre méthode de 1868~~ relu plus attentivement votre mémoire de 1868 et constaté, ce que ~~je ne savais~~ je n'avais pas remarqué à première vue, que les ~~formes~~ bilinéaires, non citées dans votre travail, y sont partout implicitement comprises. De votre côté, vous reconnaîtrez, j'en suis certain, que la réduction publiée par vous à cette époque était insuffisante 1° Parce que ces ~~formes~~ faisceaux réduits contenaient ... coefficients indéterminés à faire

ECOLE POLYTECHNIQUE
Art. VI
§ 2
Sect. a 2
N°
ARCHIVES

Permettez-moi de vous signaler une autre point de discordance entre nous. ~~Considérons pour plus de~~ C'est sur l'équivalence des ~~systèmes~~ faisceaux de formes. Considérons pour plus de simplicité un ~~système~~ faisceau F formé de m faisceaux élémentaires pour lesquels $[P, Q] = 0$. Si je ne me trompe pas dans l'application de votre formule A, ces m premiers ~~faisceaux F aura pour~~ classes déterminantes de F se réduisent à 0 et les autres à l'unité. Donc tous les faisceaux F dans lesquels m est constant seraient équivalents. Je trouve au contraire qu'il est nécessaire pour l'équivalence de F et de F' que les ~~variables y soient réparties en même nombre~~ faisceaux élémentaires correspondants contiennent le même nombre de variables.

De quelque manière que les ~~...~~ variables fussent réparties entre ces faisceaux élémentaires

Veuillez agréer l'assurance de mes sentiments dévoués

C Jordan

problème essentiel de la théorie – caractériser la transformation des formes – se formule à présent comme une question arithmétique : caractériser les classes d'équivalences des faisceaux de formes. Cette nouvelle formulation arithmétique du problème s'accompagne de nouvelles exigences qui nécessitent une nouvelle définition des diviseurs élémentaires introduits par Weierstrass. Ces exigences renvoient à des idéaux implicites qui se manifestent dans la critique de la forme canonique de Jordan :

> Seit meinem am 16. Februar gehaltenen Vortrage "über quadratische und bilineare Formen" sind zwei Publikationen des Hrn. C. Jordan über den selben Gegenstand erschienen [....].Seine Proposition "dass für die Aequivalenz der Systeme zweier Formen die Uebereinstimmung der Reductiren nothwendig und hinreihend sei", ist zwar vollkommen richtig, aber zu dürftigen Inhalts, denn es handelt sich nicht um die Angabe eines praktischen Verfahrens zur Entscheidung der Frage der Aequivalenz gegebener Formensysteme, sondern um eine möglichst unmittelbare Anknüpfung der theoretischen Kriterien der Aequivalenz an die Coëfficienten der gegebenen Formen, d.h. die Aufstellung eines vollständigen Systems von "Invarianten", im höheren Sinne des Wortes.
> [Kronecker, 1874c, 382].
>
> *Traduction de l'extrait ci-dessus [traduction F.B.] :*
> Depuis ma présentation "sur les formes quadratiques et bilinéaires" du 16 février, deux publication de M. C. Jordan sont parues sur le même objet [...] Sa proposition selon laquelle "la condition suffisante et nécessaire pour l'équivalence du système de deux formes est l'identité des réduites", bien que parfaitement exacte, n'est pas d'un contenu satisfaisant. Elle n'énonce en effet aucun procédé pratique pour caractériser l'équivalence d'un système de formes et doit être distinguée de la possibilité immédiate qu'offre le critère théorique d'équivalence, de former un système complet d'invariants –au sens propre du mot-à partir des coefficients des formes données.

Dans ce passage, Kronecker formule tout à la fois sa critique principale de Jordan et l'ambition de ses travaux de 1874. L'approche arithmétique qui suscite la synthèse théorique de Kronecker s'accompagne d'un idéal d'effectivité : la méthode de Jordan de réduction à une forme canonique n'est pas "d'un contenu satisfaisant" car elle nécessite l'extraction des racines d'une équation algébrique générale, l'équation caractéristique $|P+sQ| = 0$. Selon ce critère d'effectivité, la méthode de Jordan n'atteint pas la généralité car elle ne présente de procédé "pratique" que pour les équations de degré inférieur à 5. Or la critique de Kronecker atteint aussi bien la forme de Jordan que les diviseurs élémentaires tels que définis par Weierstrass par une factorisation du polynôme caractéristique en expressions linéaires (voir les compléments mathématiques proposés en annexe 1). Pour cette raison, Kronecker propose une nouvelle définition des diviseurs élémentaires comme des invariants arithmétiques déterminés par une procédure *effective* ([22]):

---

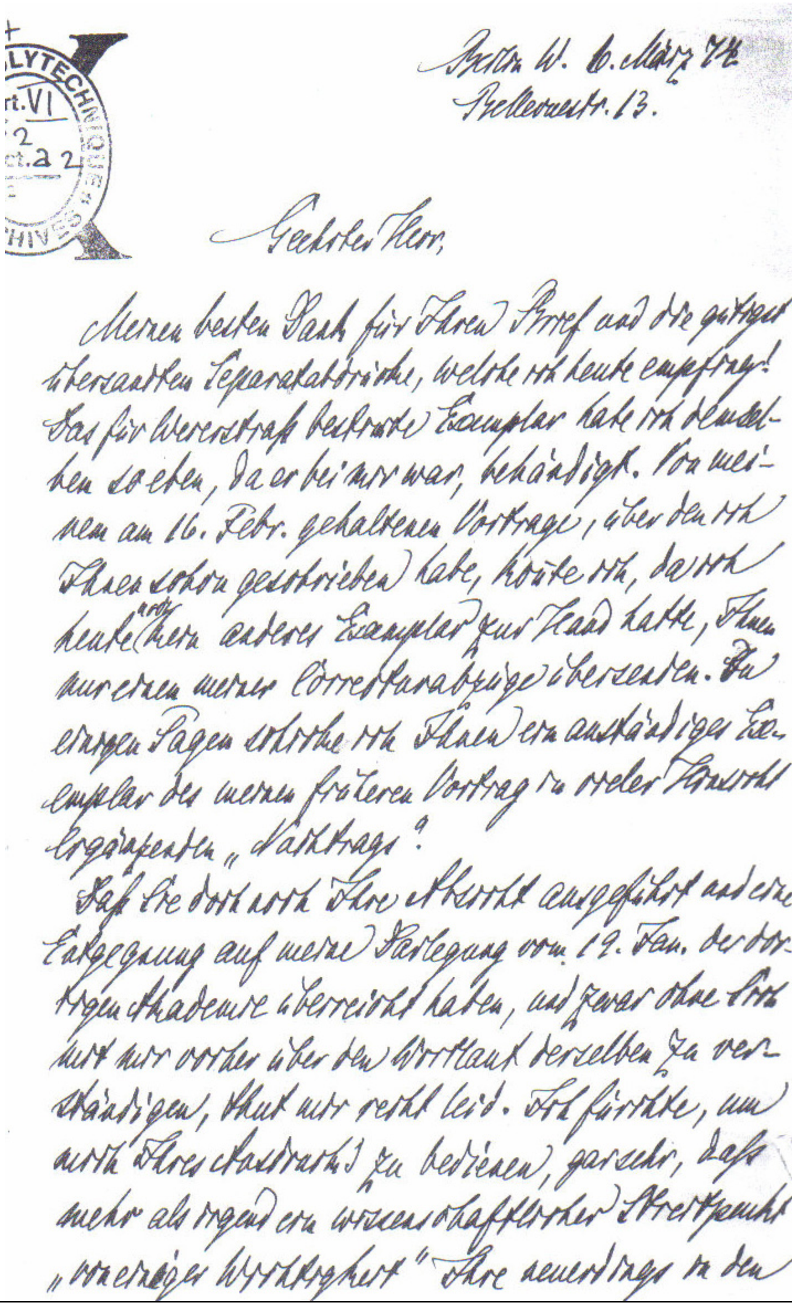
congruentes P et P'. Dans la même année [1874d, p.423] Kronecker introduit le terme "formes correspondantes" pour ce deuxième cas. La dénomination de formes "congruentes" sera réservée à des formes "correspondantes" par l'action du groupe orthogonal.

[22] Ce passage est extrait d'une note de bas de page appelée, dans le texte original, par un astérisque *) placée à la fin de la citation précédente.

ENCART 2f.

Lettre de Kronecker à Jordan. 10 Mars 1874. VI2a2X1855, N. 24.

Cette lettre vient clore la "discussion privée" de Kronecker et Jordan, elle accompagne une copie des "suppléments" au mémoire du 23 décembre qui n'ont d'autre ambition que de donner "d'autres développements" à la question sans "revenir sur cette même chose dont il n'y a rien à dire et qui me peine". La correspondance s'achève et la controverse repasse dans la sphère publique.



Berlin W. 10. März 74.
Bellevuestr. 13.

Geehrter Herr,

Meinen besten Dank für Ihren Brief und die gütigst übersandten Separatabdrücke, welche ich heute empfing! Das für Weierstraß bestimmte Exemplar habe ich demselben soeben, da er bei mir war, behändigt. Von meinem am 16. Febr. gehaltenen Vortrage, über den ich Ihnen schon geschrieben habe, könnte ich, da ich heute nicht ein anderes Exemplar zur Hand habe, Ihnen nur einen meiner Correcturabzüge übersenden. In einigen Tagen schicke ich Ihnen ein anständiges Exemplar des meinen früheren Vortrag in vieler Hinsicht ergänzenden „Nachtrags".

Daß Sie doch auch Ihre Absicht ausgeführt und eine Entgegnung auf meine Darlegung vom 19. Jan. der dortigen Akademie überreicht haben, und zwar ohne sich mit mir vorher über den Wortlaut derselben zu verständigen, thut mir recht leid. Ich fürchte, um mich Ihres Ausdrucks zu bedienen, garsehr, daß mehr als irgend ein wissenschaftlicher Streitpunkt „vermeintliche Wichtigkeit" Ihre neuerdings in den

> In der arithmetischen Theorie der Formen muss man sich freilich mit der Angabe eines Verfahrens zur Entscheidung der Frage der Aequivalenz begnügen und das betreffende Problem wird deshalb auch ausdrücklich in dieser Weise formuliert (cf. Gauss : Disquitiones arithmeticae, Sectio V [...]) Das Verfahren selbst beruht auch dort auf dem Uebergange zu reductiren Formen : doch ist dabei nicht zu übersehen, dass denselben in den arithmetischen Theorien eine ganz andere Bedeutung zukommt als in der Algebra. De nämlich die Invarianten äquivalenter Formen dort ihrer Natur nach nur zahlentheoretische Functionen der Coëfficienten sind, so kann es nicht befremden, wenn dieselben zwar direct definiert aber nicht explicite sondern nur als Endresultate arithmetischer Operationen dargestellt werden können ; denn ganz ähnlich verhält es sich mit den meisten arithmetischer Begriffen, z.B. schon mit jenem einfachsten Begriffe des grössten gemeinsamen Theilers.
> [Kronecker, 1874c, 382]
>
> *Traduction de l'extrait ci-dessus [traduction F.B.] :*
> Dans la théorie arithmétique des formes, il faut à vrai dire se contenter de l'indication d'une méthode pour décider de la question de l'équivalence […] (cf. Gauss : Disquitiones arithmeticae, Sectio V [...]). La méthode elle-même peut nécessiter la transition à des formes réduites : cependant il ne faut pas omettre que celles-ci ont une toute autre importance dans la théorie arithmétique des formes qu'en algèbre. Les invariants des formes équivalentes, de part leurs natures, doivent être obtenus des coefficients par des procédés arithmétiques, et on ne doit pas être surpris si ces procédés, bien que définis de manière directe, ne peuvent être représentées explicitement comme des résultats d'opérations arithmétiques ; la plupart des notions arithmétiques se comporte de manière tout à fait semblable, comme la notion simple de plus grand diviseur commun.

Effectivité et *arithmétique* sont indissociables chez Kronecker : les invariants de la théorie des formes doivent s'exprimer de manière effective par des opérations arithmétiques sur les coefficients. Cette exigence s'oppose à l'énoncé de formules algébriques comme la forme canonique de Jordan. "Dans la théorie arithmétique des formes, il faut à vrai dire se contenter de l'indication d'une méthode pour décider de la question de l'équivalence […]", les invariants qui caractérisent les classes d'équivalences arithmétiques ne peuvent pas être "représentés explicitement" par des formules, ils sont définis par un procédé de calcul : ce sont les plus grands diviseurs communs des mineurs respectifs du déterminant caractéristique ([23]). L'ambition de généralité de Kronecker s'oppose à l'énoncé d'une formule algébrique car la décomposition des polynômes dépend du "domaine de rationalité" sur lequel on travaille, au contraire de l'algorithme du p.g.c.d. qui permet une définition parfaitement générale et effective des invariants au prix de l'abandon d'une "expression explicite" :

> Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dass, wie hier, so die algebraischen Invarianten überhaupt in ihrer wahren Allgemeinheit nur aus grössten

[23] Une formulation contemporaine de la définition de Kronecker est proposée en annexe 1.

Comptes Rendus veröffentlichten Erklärung nur „brennen“ (brûler) wählte. Daß ich mich der Fortsetzung einer jeden privaten Discussion unserer Angelegenheit enthalte, bis ich von Ihrer neuesten darauf bezüglichen Publication Kenntniß genommen habe, werden Sie vollkommen begreiflich finden. Ich meinerseits hatte Ihnen in meinem jüngsten Briefe nochmals den Vorschlag wiederholt, von nun an alles Weitere vor der Publication privatim zu verhandeln und festzustellen, und ich möchte fast glauben, daß die Annahme dieses Vorschlages auch in Ihrem Interesse gewesen sein würde. Hoffentlich haben Sie die Güte mir baldigst den Rest Ihrer „Réponse“ zuzuschicken, ich würde mich darnach beeilen, Ihnen meine Mittheilungen zugehen zu lassen.

Mit achtungsvollem Grüße

Ihr ergebener

Kronecker

> gemeinsamen Theilern von ganzen Functionen gegebener Elemente herzuleiten und keineswegs, wie bisher angenommen wurde, durch liteale Bildungen zu rechöpfen sind. Ich bin hierauf schon vor einer langen Reihe von Jahren bei meinen Untersuchungen über die Discriminante von algebraischen Gleichungen geführt worden, sowie später bei meiner Arbeit über lineare Transformationen, welche ich im October 1868 der Akademie mitgetheit habe. [Kronecker, 1874a, 353].
>
> *Traduction de l'extrait ci-dessus [traduction F.B.] :*
> Je remarque à cette occasion, que les invariants algébriques sont déduits de manière effective et dans leur pleine généralité comme plus grand communs diviseurs de fonctions entières et nullement, comme on l'a accepté jusqu'ici, par des écritures littérales. Je suis arrivé à ce résultat depuis quelques années par mon travail sur les discriminants des équations algébriques et plus tard, par mon travail sur les transformations linéaires soumis à l'Académie en octobre 1868.

La querelle de 1874 voit Kronecker expliciter pour la première fois l'idéal d'effectivité souvent associé par l'historiographie à la théorie arithmétique des grandeurs algébriques des années 1880-1890 ([24]). En 1874, la pratique des calculs de Kronecker ne reflète cependant pas la radicalité de l'idéal d'effectivité présenté dans les discours : si une formule non effective, et donc "formelle", comme la forme canonique de Jordan ne doit en aucun cas participer de l'organisation théorique, les procédés formels, et l'algèbre en général, jouent le rôle de méthodes [Kronecker, 1874a, 367]. ([25]). Dans la pratique des ses calculs et démonstrations, Kronecker recourt à des "formes normales" similaires aux formes canoniques de Jordan et nécessitant des extractions de racines d'équations algébriques. Le théorème principal de Kronecker caractérise les couples de formes bilinéaires ou quadratiques, singuliers ou non, par des "formes élémentaires" associées à des invariants. Chaque classe d'équivalence des faisceaux de formes bilinéaires est ainsi associée à une suite de diviseurs élémentaires - polynômes homogènes en deux variables $f(u,v)$ - dénommée "Reihe von determinirenden Classen". Le premier terme de la suite est le déterminant caractéristique du faisceau, le membre suivant est le 'plus grand commun diviseur des premiers sous déterminants" et ainsi de suite en considérant les p.g.c.d. des sous déterminants successifs. Ces suites de polynômes se décomposent en des suites "élémentaires" correspondantes aux diviseurs élémentaires de Weierstrass et à chaque diviseur élémentaire est associé un faisceau de formes de déterminant $f(u,v)$: ce sont les "faisceaux élémentaires". Chaque faisceau de formes s'écrit alors comme un "agrégat" de "faisceaux élémentaires". Les formes élémentaires de Kronecker sont données par les expressions "$x_1x_2+x_3x_4+\ldots\ldots$; $x_2x_3+x_4x_5+\ldots.+x_{n-1}x_n$" ou "$x_1x_2+x_3x_4+\ldots\ldots$; $x_2x_3+x_4x_5+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}+\delta x_n^2$", avec dans la dernière expression $\delta = 0$ ou $\delta = 1$, leurs

---

[24] Cette théorie sera abordée dans la partie II.

[25] Voir à ce sujet la discussion contenu/formel chez Kronecker, détaillée dans la partie I de ce chapitre.
Le point de vue arithmétique de Kronecker se radicalise cependant dans les années 1880 et conduit, en 1890, à la publication d'un nouveau mémoire sur les faisceaux de formes dont l'objet est de remplacer les "défauts des méthodes analytico-algébriques par des méthodes purement arithmétiques [Kronecker, 1890b, 142].

ENCART 3.

Une formulation des années trente du théorème de Kronecker sur les faisceaux singuliers de formes.

[Turnbull et Aitken, 1933, 120-125] :

The foregoing method in §2, p.115 of reducing pencils of matrices to equivalent canonical forms, applies only to non-singular pencils. Where the matrix pencil is square but singular, or else is rectangular, peculiar features arise, necessitating a closer examination of the dependence in F of the row and column vectors which comprise the matrix.[...]

$$L_m = \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ \mu & \lambda & & & \\ & \mu & . & & \\ & & . & . & \\ & & & \mu & \lambda \end{bmatrix}$$

[...]

$$L_1 = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} \lambda & . \\ \mu & \lambda \\ . & \mu \end{bmatrix}, \ldots$$

[...] Theorem I. The matrix $\Lambda = [\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}]$ of a singular pencil can be reduced by rational equivalent transformations to the canonical form

$$P\Lambda Q = L = \begin{bmatrix} L_{m_1} & & & & & & & \\ & L_{m_2} & & & & & & \\ & & . & & & & & \\ & & & L_{m_k} & & & & \\ & & & & L'_{m'_1} & & & \\ & & & & & L'_{m'_2} & & \\ & & & & & & . & \\ & & & & & & & M \end{bmatrix},$$

where M is a square non –sungular core in rational canonical form $[B_v(\lambda,\mu)]$ or possibly, with change of basis, $[B_v(\rho,\sigma)]$

[...] The irrational canonical form for a pencil of quadratics was given by Weierstrass in a classical memoir [1868]. The existence of singular pencils was mentioned by him but excluded from discussion. The discussion of the singular case is due to Kronecker [1890], [1891]. A treatment by rational methods has recently been given by Dickson [1927].

[...] The theorem that in a pencil based on a symmetric and a skew symmetric matrix elementary divisors of the types $\rho^{2\nu}$, $\sigma^{2\nu+1}$ must occur in pair was given by Kronecker [1874]. Later proofs are due to Stickelberger [1879] and Frobenius. They are connected with generating series for the reciprocal matrix pencil and incidently with the methods employed by Darboux for the reduction of a pencil of quadratic forms.

The actual reduction of a singular pencil, for the general cases of a collineation and of a correlation, is agrégats donnent la structure des classes d'équivalences arithmétiques en un énoncé homogène qui unifie les résultats distincts obtenus par Weierstrass et Kronecker en 1868 pour les cas singuliers et non singuliers (une formulation de théorème du point de vue des années 1930 est proposée en encart 3) ([26]) :

> a) Zu äquivalenten Schaaren gehört eine und dieselbe Reihe von determinirenden Classen, und wenn für zwei Schaaren die Reihe der determinirenden Classen genau dieselben Glieder und darunter keine oder nur eine Null enthält, so sind dieselben äquivalent.
>
> b) Jede Schaar von quadratischen Formen ist ein Aggregat von elementaren Schaaren ; d.h. für jede Schaar $u\varphi+v\psi$ besteht eine Gleichung
> $$u\varphi+v\psi = \Sigma_k\,(u_k\varphi_k+v_k\psi_k)\ (k=1,2,3,...),$$
> in welcher jedes einzelne Glied auf der rechten Seite eine elementare Schaar repräsentiert, während die Grössen u_k v_k sämtlich lineare homogene Functionen der zwei Variabeln u und v bedeuten.
>
> c) Jede Classe elementarer Schaaren von n Variablen kann durch zwei Grundformen folgender Gestalt repräsentirt werden
> $$x_1x_2+x_3x_4+\ldots.. \ ;\ x_2x_3+x_4x_5+\ldots.,$$
> wo die eine mit $x_{n-1}x_n$, die andere mit $x_{n-2}x_{n-1}+\delta x_n^2$ abschliesst und $\delta=0$ oder 1 ist ; der Werth $\delta=0$ ist für eine grade Anzahl der Variabeln jedoch nur dann zuzulassen, wenn die Formen bilinear sind und als solche behandelt werden.
>
> [Kronecker, 1874a, 350].

> C'est par ces moyens, en effet, que j'ai trouvé qu'en opérant la même substitution linéaire sur les deux séries de variables, tout polynôme bilinéaire peut être transformé en une somme de fonctions de l'une des formes suivantes :
>
> I. $$(-1)^n\sum_h x_h y_{h+1} + \sum_h (-1)^h y_h x_{h+1} + x_n y_n \qquad (h=0,1,\ldots,n-1)$$
>
> II. $$(-1)^m\sum_h x_h y_{h+1} + \sum_h (-1)^h y_h x_{h+1} \qquad (h=0,1,\ldots,2m-2)$$
>
> III $$a\sum_h x_h y_{h+1} + b\sum_h y_h x_{h+1} \quad (h=0,1,\ldots,n-1\ ;\ a^2 \gtrless b^2)$$
>
> Ces trois fonctions ne sont plus décomposables d'une manière analogue et c'est pourquoi je les désigne comme *formes élémentaires*. [...] C'est de cette manière qu'un certain faisceau de formes est lié avec chaque forme bilinéaire, et si l'on désigne par F_1, F_2, F_3 respectivement les faisceaux qui appartiennent aux formes élémentaires I, II, III et par D_1, D_2, D_3 leurs *déterminants,* on a
>
> $D_1 = [u+(-1)^n v]^{n+1}$,
> $D_2 = [u+(-1)^m v]^{2m}$,
> $D_3 = (au+bv)^m(av+bu)^m$, ($n+1$ étant égal à $2m$)
> $D_3 = 0$ ($n+1$ étant un nombre impair). [Kronecker, 1874b, 418]

L'emploi par Kronecker de formes normales et élémentaires similaires aux formes canoniques de Jordan n'est pas contradictoire avec son idéal d'effectivité et c'est là toute la portée d'une des première critiques adressée par Kronecker à Jordan : il faut distinguer ce qui vient des méthodes et ce qui doit fonder une théorie. C'est dans les méthodes que l'algèbre joue son rôle, "au service des autres disciplines" comme l'arithmétique.

[26] Le premier extrait cité provient du mémoire de Kronecker adressé à l'Académie de Berlin en décembre 1873. Plutôt que d'en proposer une traduction, je cite à sa suite un autre texte écrit en français par Kronecker lui-même pour l'Académie de Paris en mars 1874.

III. GENERALITE ET SIMPLICITE : LA REDUCTION CANONIQUE DE JORDAN.

> Nous résoudrons dans ce mémoire les problèmes suivants :
> 1. Ramener un polynôme bilinéaire P à une forme canonique simple par des substitutions orthogonales opérées les unes sur $x_1,\ldots,x_n$, les autres sur $y_1,\ldots,y_n$.
> 2. Ramener P à une forme canonique simple par des substitutions linéaires quelconques opérées simultanément sur les x et les y.
> 3. Ramener simultanément à une forme canonique deux polynômes P et Q par des substitutions linéaires quelconques, opérées isolement sur chacune des deux séries de variables.
> Le premier de ces problèmes est nouveau, si nous ne nous trompons. Le deuxième a déjà été traité (dans le cas où n est pair) par M. Kronecker, et le troisième par M. Weierstrass ; mais les solutions données par les éminents géomètres de Berlin sont incomplètes, en ce qu'ils ont laissé de côté certains cas exceptionnels qui, pourtant, ne manquent pas d'intérêt. Leur analyse est en outre assez difficile à suivre, surtout celle de M. Weierstrass.
> Nous pensons donc satisfaire les géomètres en exposant, pour la solution de ces questions, une méthode nouvelle très simple, et ne comportant plus aucun cas d'exception.
> Nous terminerons ce mémoire en montrant que le troisième problème, borné aux limites où l'avait considéré M. Weierstrass, est identique à celui de la réduction des substitutions linéaires à leur forme canonique.
> [Jordan, 1874a, 35].

A la généralité, et aussi l'uniformité, revendiquées par Kronecker, Jordan oppose une constante revendication de simplicité. Cette simplicité se réduit-elle à un simplisme ingénu comme le caricature Kronecker ? Des termes de la citation suivante de Jordan ont été soulignés pour mettre en évidence le fait que l'idéal de simplicité de Jordan est indissociable d'une méthode de réduction :

> La méthode par laquelle nous traitons le premier problème est plus **simple** que celle dont s'est servie M. Kronecker ; mais elle repose sur les mêmes principes, et la solution des deux autres questions s'en déduit fort **aisément** ; aussi aurions nous hésité à publier ce travail ; mais nos scrupules ont été levés par la lecture d'un Mémoire récent de M. Kronecker (*Monatsbericht*, mars 1874). Cet habile analyste, après avoir contesté ce que nous avions dit [...] sur la **simplicité** des principes dont cette question dépend, annonce en effet, qu'il s'est occupé de la transformation d'un système en lui-même, mais qu'il n'a pas réussi à obtenir une conclusion complètement satisfaisante, et que, dans l'étude de ce problème, il n'a pu tirer que peu de profit de son procédé de **réduction**. Pour qu'un géomètre aussi exercé ait pu méconnaître ainsi, du même coup, la **simplicité** et la portée de sa propre méthode, il faut évidemment que la question ne soit pas encore suffisamment élucidée.
> [...]
> Nous ferons observer en outre qu'on gagne beaucoup en **simplicité** et en **élégance** en opérant symétriquement sur les formes à **réduire**. Tout le

raisonnement tient en quelques lignes. On obtient directement les faisceaux **élémentaires** tandis que M. Kronecker a besoin dans certains cas d'une **réduction** ultérieure. Enfin, on reconnaît, chemin faisant, de la manière la plus **simple**, que la forme des **réduites** est complètement déterminée [...]. [Jordan, 1874].

"Simplicité" et "réduction" : les arguments de Jordan ne se réduisent pas au simplisme naïf caricaturé par Kronecker. Ils appuient une critique des résultats du mémoire de 1868 de Kronecker :

> Le lecteur nous sera gré de reproduite ici le résultat publié à cette époque par M. Kronecker :
> "*Si deux formes quadratiques P et Q, à n variables, satisfont à la condition (P,Q) = 0, on pourra les réduire toutes les deux, par un changement de variables à la forme*
> *(1)* $f_1x_{m+1} + f_2x_{m+2} + \ldots + f_mx_{2m} + F$
> *(2) F étant une forme quadratique des n-2 m-1 dernière variables, et* $f_1, \ldots f_m$ *étant des fonctions linéaires quelconques de toutes les variables.*
> [Jordan, 1874b, 15].

Pour Jordan, l'énoncé de Kronecker n'est pas satisfaisant, au contraire de son propre résultat et "la différence ce ces deux énoncés frappe au premier coup d'œil":

> *Si deux formes bilinéaires P et Q satisfont à la condition (P,Q) = 0, on pourra les réduire à la forme*
> *(3)* $P = x_1y_1 + \ldots + x_{m-1}y_{m-1} + P', \quad Q = x_2y_1 + \ldots + x_my_{m-1} + Q'$,
> P' et Q' ne contenant plus que les variables $x_{m+1}, y_{m+1}, \ldots, x_n, y_n$, et pouvant être traitées par le même procédé que P et Q, si $(P',Q') = 0$ ou si $(P',Q') <\ > 0$, par un procédé analogue, qui revient comme résultat à celui de M. Weierstrass.
> [Jordan, 1874b, 15].

Jordan critique dans la réduite (1) de Kronecker le fait qu'elle ne satisfait pas à ce qui constitue au critère des "vraies réduites". Ce critère est normé par un idéal de simplicité : les réduites doivent être les plus simples au où sens toute réduction ultérieure doit être impossible :

> [les réduites de Kronecker] contiennent encore des coefficients indéterminées qu'un réduction ultérieure doit faire disparaître. Elles ne peuvent servir à constater l'équivalence de deux systèmes de deux formes P et Q, P_1 et Q_1 ; car on peut trouver pour P et Q, d'une infinité de manières, une infinité d'expressions différentes de l'espèce [...]. Enfin les expressions (1) ne mettent pas en évidence le caractère fondamental des vraies réduites d'être décomposables en fonctions partielles ne contenant chacune qu'une portion des variables.
> [Jordan, 1874b, 14].

L'idéal de simplicité de Jordan est indissociable d'une méthode de "réduction" des problèmes. La méthode de réduction est normée par un critère de simplicité : les maillons de la chaîne doivent être les "plus simples". C'est en ce sens que la forme canonique est définie en 1870 comme la "forme la plus simple" des substitutions linéaires. S*i pour Kronecker, l'emploi de formes canoniques vient d'une méthode algébrique permettant de démontrer un théorème général énonçant des invariants arithmétiques, pour Jordan au contraire, la forme canonique sous tend une méthode de réduction des problèmes qui donne à l'algèbre une capacité à atteindre la généralité.* Cette méthode, issue des recherches de Jordan sur la résolubilité des équations, est détaillée au sein de l'étude contextuelle des travaux de Jordan proposée au chapitre 3.

UNE CONCLUSION POUR CONSTRUIRE LE DEROULEMENT DE L'ETUDE.

Sur un plan sociologique, la querelle de 1874 se développe à partir d'une difficulté de communication scientifique et d'une opposition public/privé. La correspondance entre Jordan et Kronecker se présente comme un vecteur de connaissances tacites entre deux savants évoluant au sein de réseaux distincts. Elle permet, sur un plan privé, de désamorcer les attaques publiques à l'origine de la querelle. La controverse n'en reste pourtant pas là et si l'opposition des deux auteurs se déclare tout d'abord en raison de leurs appartenances à des réseaux différents, la querelle évolue en une confrontation de positions épistémologiques fortes.

Analysée sur le plan épistémologique, la querelle de 1874 oppose deux perceptions du rôle de l'algèbre et de sa capacité à atteindre la *généralité*. A *l'idéal d'effectivité* de Kronecker répond le point de vue de Jordan selon lequel une résolution "générale" n'a de sens qu'en tant qu'elle procède de la "*réduction*" d'un problème jusqu'à son expression ultime qualifiée de "*simple*". L'*idéal de simplicité* de Jordan présente un caractère *abstrait* : il demande que soient extraites toutes les racines d'une équation algébrique pour l'obtention d'une "réduite", définie par une "qualité", sa simplicité maximale. L'opposition des idéaux de simplicité et d'effectivité conduit à la confrontation de deux signification de la généralité en mathématiques. Jordan reproche à Kronecker le manque de *généralité* de sa méthode, car ses réduites peuvent encore être décomposées ; Kronecker, de son côté, reproche à Jordan sa réduction abstraite qui nécessite des extractions de racines d'équations algébriques, ce qui n'est pas possible en *général* et se présente donc comme une méthode formelle. La méthode de réduction de Jordan aboutit à une *forme canonique*, la méthode arithmétique de Kronecker établit des *invariants* arithmétiques obtenus par un calcul effectif. La tension *formes canoniques - invariants* est au cœur de la controverse, son étude guide l'organisation de la suite de cette première partie, organisée en deux temps, deux chapitres.

Le chapitre 2 place le moment historique de référence qu'est la controverse de 1874 dans une perspective historique plus générale. Si la controverse se présente comme la rencontre de deux théorèmes- celui de Weierstrass de 1868 et celui de Jordan de 1870 - et de deux méthodes - formes canoniques et invariants, cette rencontre peut s'interpréter comme celle de deux cultures mathématiques distinctes, portant des connaissances tacites, des représentations et des idéaux propres mais se reconnaissant une histoire commune qui prend ses racines dans les problèmes mécaniques du XVIII^{e} siècle et implique des auteurs comme Lagrange, Laplace, Cauchy, Weierstrass et Hermite : la *discussion des petites oscillations.* Le chapitre 2 étudie la manière dont la querelle entre Jordan et Kronecker présente deux lectures différentes d'une *discussion* mathématique longue d'un siècle. Les deux théorèmes opposés en 1874 se présentent alors comme deux fins données à une histoire commune.

Afin d'expliciter les idéaux opposés par Jordan et Kronecker, le chapitre 3 étudie en détail les contextes distincts dans lesquels sont énoncés les deux théorèmes opposés en 1874. L'idéal de simplicité de Jordan est indissociable des méthodes de réductions élaborées pour la recherche des groupes résolubles dans les années 1860-1870, et en particulier du théorème de décomposition des groupes en chaines de groupes "simples" (Jordan-Hölder). L'idéal d'homogénéité de Kronecker se rattache à un contexte très différent qui renvoie à la construction d'une théorie des formes bilinéaires à Berlin dans les années 1860-1870. Selon ce point de vue, la controverse de 1874 se présente comme la rencontre de deux théories : théorie des groupes et des formes bilinéaires.

Chapitre 2.

La *discussion des petites oscillations* (1766-1874) en prélude a la controverse Jordan-Kronecker.

INTRODUCTION.

La tension f*ormes canoniques - invariants* sur laquelle se développe la querelle de 1874 alimente aussi un discours sur ce qui est nouveau par opposition à ce qui tient au passé. La controverse ne laisse pas neutres les perceptions des protagonistes sur une histoire des mathématiques. Au contraire, une histoire s'écrit dans les détails des mémoires mathématiques publiés au cours de l'année 1874. Pour Kronecker, comme nous l'avons vu au chapitre premier, le théorème de Weierstrass de 1868 vient sanctionner les "résultats si mauvais" obtenus par des méthodes développées "durant tout un siècle [...] et dont la généralité n'est qu'apparente". Les méthodes du passé sont sanctionnées parce qu'elles négligent d'aborder les singularités, en "n'osant pas faire tomber la condition que le déterminant du faisceau $A+sB$ contienne des facteurs inégaux" ([1]), et emploient par conséquent des expressions algébriques qualifiée de "formelles" car elles perdent toute signification en cas d'occurrence de racines multiples pour l'équation caractéristique $|A+sB|=0$. Au contraire de ces méthodes, que l'on peut qualifier de *génériques* pour reprendre le terme employé par Thomas Hawkins ([2]), les travaux de Weierstrass répandent "la clarté la plus pleine" sur l'ensemble de la théorie en élaborant un "traitement complet de l'objet" par des méthodes algébriques homogènes et d'une "généralité véritable".

Si les méthodes génériques naissent avec l'algèbre symbolique elle-même, comme on le voit par exemple dans la méthode des indéterminées de Descartes, elles font l'objet au XIX^e siècle des critiques de géomètres influents comme Cauchy et Weierstrass. Thomas Hawkins [1977, 122] a mis en évidence la manière dont l'idéal de généralité porté par théorème des diviseurs élémentaires de Weierstrass implique une rupture avec les méthodes génériques du passé. Il faut cependant remarquer que les premières lignes de l'histoire qui sanctionne des méthodes du passé comme "génériques" sont écrites par Kronecker lui-même dans le contexte très particulier d'une

---

[1] C'est-à-dire la condition imposant des racines caractéristiques distinctes ou, en termes contemporains, des matrices diagonalisables.

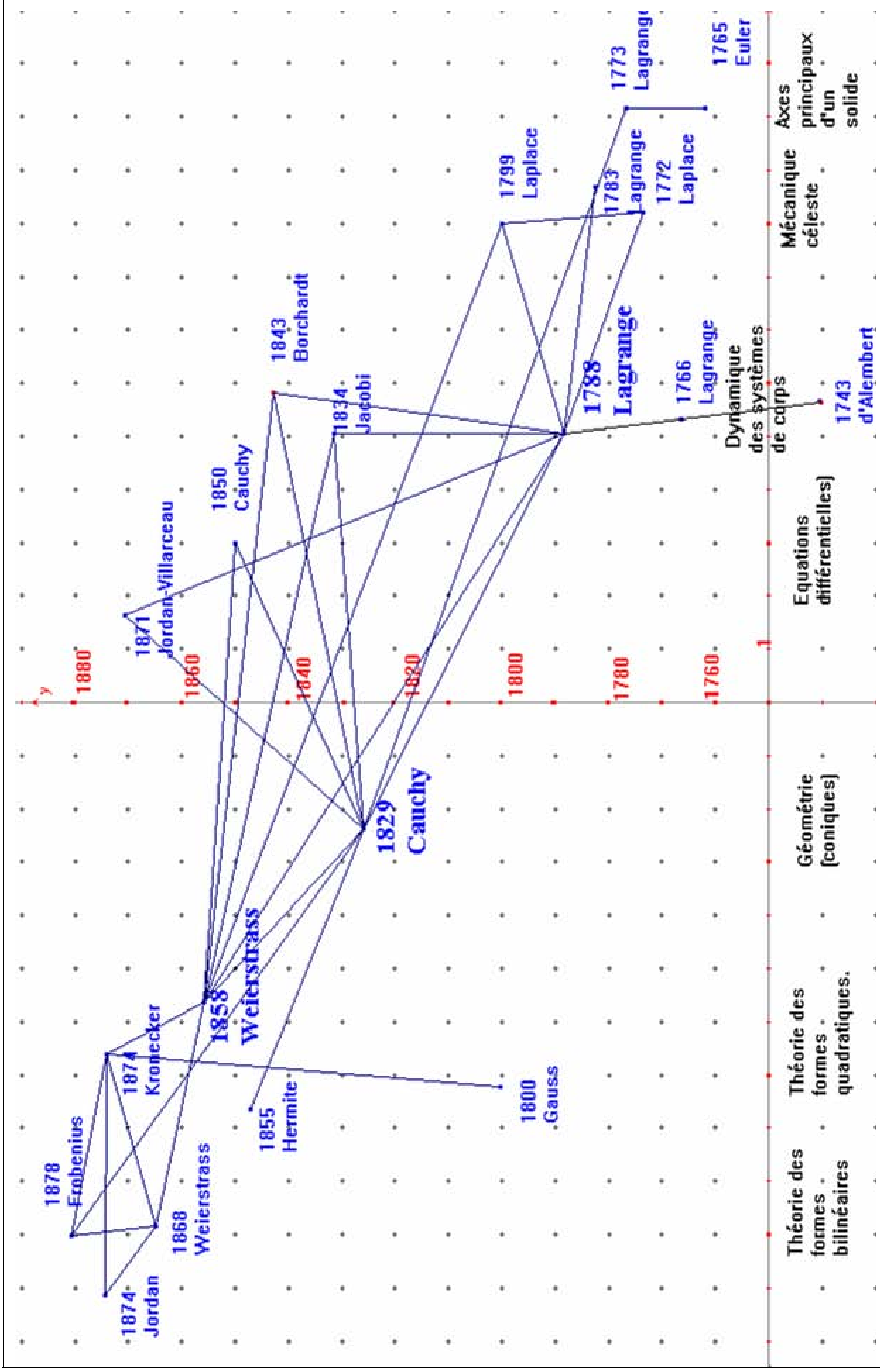
[2] Thomas Hawkins a proposé de désigner par le qualificatif de "générique" un certain type de raisonnement algébrique qui ne se préoccupe pas de la signification des symboles et dont il fait remonter l'origine à l'analyse de Viète au XVI^e siècle :

> In the new analysis one reckons with species by means of "signs" (symbols) which do not represent specific magnitudes, but an entire species of magnitudes. Analysis became a method for reasoning with, manipulating, expressions involving symbols with "general" values and a tendency developed to think almost exclusively in terms of the "general" case with little, if any, attention given to potential difficulties or inaccuracies that might be caused by assigning certain specific values to the symbols. Such reasoning with "general" expressions I shall refer to for the sake of brevity as *generic reasoning.* Lagrange's treatment of the principal axis theorem of mechanics [1788,Pt. II. Sect. VI] affords a simple example of generic reasoning. In the course of it algebraic expressions arise which for certain values of the symbols involved possess zero in denominators. Since these expressions are however meaningful on the generic level the proof proceeds. [Hawkins, 1977, 122].

controverse mathématique. L'étude de la querelle de 1874 et des idéaux disciplinaires qu'elle oppose, nécessite de compléter l'approche de Thomas Hawkins en abordant d'autres points de vues sur le passé que celui de Kronecker et, pour cela, d'interroger la dynamique historique du terme *généralité* dans ce que Kronecker désigne comme l'histoire de "la théorie des faisceaux de formes quadratiques depuis un siècle".

ENCART 1

Le corpus de textes formant la discussion des petites oscillations.



I. LA CONTROVERSE COMME OPPOSITION DE DEUX FINS DONNEES A UNE DISCUSSION LONGUE D'UN SIECLE.

1. L'histoire de la *discussion des petites oscillations* du point de vue de 1874.

La *discussion des petites oscillations* désigne un corpus regroupant des textes mathématiques en un ensemble cohérent et fermé sur une périodisation donnée (1766-1874). Au sens des citations et références que les textes entretiennent entre eux, visualisées par le graphe de l'encart 1, le corpus articule une discussion entre différents auteurs et différentes théories. En 1766, Lagrange travaille sur l'intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants ; en 1829, la question traitée par Cauchy est la classification des surfaces du second degré et, en 1858, il s'agit pour Weierstrass de caractériser les transformations de fonctions homogènes du second degré par substitutions sur les variables (un point de vue contemporain est proposé en encart 2). La discussion ne se laisse pas aisément caractériser. Ce n'est pas une théorie si on ne la fixe pas à un moment précis et qu'on la considère sur la longue durée. Ce n'est pas non plus le développement de la résolution d'un problème : si il y a bien un problème fondateur, celui-ci est considéré, jusqu'au mémoire de Weierstrass de 1858, comme résolu par Lagrange en 1766. L'historiographie a souvent abordé cette discussion dans le cadre d'une histoire de l'algèbre linéaire [Dieudonné, 1978], de la théorie des matrices [Hawkins, 1975], de la mécanique [Laskar, 1992]. Kronecker décrit cette discussion comme relevant de l'"histoire de la théorie des faisceaux de formes quadratiques". Eclairer la controverse de 1874 impose, au contraire, de ne pas décrire cette histoire comme celle d'une théorie afin de cerner ce qui permet les communications entre auteurs du corpus, les passages d'une théorie à l'autre. Le parti pris de ce travail est donc de présenter cette discussion du point de vue de 1874, lorsqu'une première histoire de la discussion s'écrit sous la plume de Kronecker. Un autre point de vue sur la discussion, très proche puisque provenant des années 1880 et d'auteurs comme Poincaré, conduirait à ouvrir le corpus à des textes de mécanique ou d'astronomie et à centrer le questionnement sur la stabilité du système du monde et le problème des trois corps ([3]). Un point de vue encore différent, des années trente du XX^{e} siècle, pourrait faire participer d'un même corpus des textes de Lagrange et de

[3] Pour une histoire de la discussion selon ce point de vue, voir [Laskar, 1992].

Fourier, et y voir une origine de l'algèbre linéaire et de la théorie des matrices [Mac Duffee, 1933], [Turnbull et Aitken, 1932].
Prendre le point de vue de 1874, c'est utiliser les témoignages de cette époque pour fixer la périodisation (1766-1874) et le corpus étudié. Il y a alors un début, correspondant à la résolution par Lagrange d'un problème de mécanique en 1766, et une fin marquée par la publication de deux mémoires de Weierstrass en 1858 et 1868. Le problème fondateur de la discussion, origine du corpus, est énoncé par Lagrange en 1766 comme "problème des petites oscillations d'un système quelconque de corps". Pour Kronecker, ce problème relève de la théorie des faisceaux de formes quadratiques et son histoire se résume à la négligence du traitement d'un cas particulier : l'occurrence de racines multiples de l'équation caractéristique du système. Les deux mémoires de Weierstrass viennent alors clore la discussion par leur capacité à traiter le cas général par une méthode algébrique homogène. Cette histoire écrite par Kronecker peut être relativisée par d'autres points de vue de la même époque, comme ceux de Yvon Villarceau ou Jordan. Ces nouveaux points de vue font porter un premier éclairage sur la controverse par l'histoire de la discussion des petites oscillations : la discussion conserve un même début, [Lagrange, 1766], mais prend désormais deux fins : [Weierstrass, 1858-1868] et [Jordan, 1871, 1872]. Selon cet éclairage, la controverse oppose deux fins d'une longue discussion mathématique indépendantes l'une de l'autre.

2. Un point de vue parisien sur la *discussion des petites oscillations* en 1870.

> L'intégration des équations différentielles du mouvement de rotation d'un corps solide, soumis à l'action de la pesanteur, a été présentée pour la première fois par l'illustre auteur de la *Mécanique analytique*, dans le cas des petites oscillations.
> [Yvon-Villarceau, 1870, 762].

En 1870, l'astronome Yvon-Villarceau signale aux géomètres de l'Académie de Paris une "incorrection" dans la méthode classique "d'intégration des équations différentielles du mouvement de rotation d'un corps solide, soumis à l'action de la pesanteur". La méthode a été établie en 1766 par Lagrange pour un problème remontant à d'Alembert : étant donnée une corde fixée en un point, lestée d'un nombre quelconque de masses, et écartée de sa position d'équilibre, décrire ses "petites oscillations". Le principe de conservation des forces vives permet de mathématiser le problème par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants ([4]) :

> Lagrange forme trois équations différentielles du second ordre, entre lesquelles il élimine l'une des trois inconnues. Pour abréger j'écrirai le résultat de l'élimination comme il suit :
>
> $$(a)\begin{cases} g\dfrac{d^2u}{dt^2}+a\dfrac{d^2s}{dt^2}+cu=0, \\ f\dfrac{d^2s}{dt^2}+a\dfrac{d^2u}{dt^2}+cs=0, \end{cases}$$
>
> [Yvon-Villarceau, 1870, 763].

Antoine Yvon-Villarceau, major de la section de mécanique de l'école centrale, entre en 1846 à l'observatoire de Paris en tant qu'astronome ([5]). Ses travaux de mécanique céleste concernent la détermination des orbites de divers corps célestes, des exemples célèbres sont le calcul de la périodicité de la comète d'Arrest (1851) et la prévision des éphémérides en tenant compte des perturbations produites par Jupiter. La résolution de ces problèmes repose sur l'application réalisée par Lagrange de la méthode des petites oscillations aux mouvements séculaires des planètes et Yvon-Villarceau publie la note de 1870 peu après son élection à l'Académie des sciences (1867). La méthode d'intégration du système (a) repose sur la détermination, par les méthodes d'éliminations, d'une équation algébrique dénommée équation caractéristique depuis Cauchy [1839] :

---

[4] Dans la citation de Vil arceau, *u* et *s* sont des fonctions de *t*, *g*, *f* et *a* des constantes. L'intervention de *u* et *s* est en miroir dans les équations, en termes contemporains le système est donc symétrique.

[5] Pour une bibliographie d'Yvon-Villarceau, consulter [Baillaud, 1957].

> [Ces méthodes] fournissent l'équation caractéristique
> $$\frac{c^2}{\rho^4} - (f+g)\frac{c}{\rho^2} + fg - a^2 = 0$$
> [Yvon-Villarceau, 1870, 763].

Pour un système de n équations, la méthode de Lagrange associe aux n racines de l'équation caractéristique, n équations différentielles indépendantes de la forme $\frac{d^2u}{dt^2} + \rho u = 0$ (ρ racine de l'équation caractéristique) auxquelles elle ramène l'intégration du système. Cette méthode nécessite de supposer les racines ρ de l'équation caractéristique toutes distinctes (un point de vue contemporain sur ce problème est proposé en encart 2) :

> Faisant abstraction du signe des racines, et désignant leurs valeurs absolues par ρ et ρ', on a les expressions suivantes de *s* et de *u* :
> $$(f)\begin{cases} s = \alpha\sin(\rho t + \beta) + \alpha'\sin(\rho' t + \beta') \\ u = \dfrac{a\rho^2}{c - g\rho^2}\alpha\sin(\rho t + \beta) + \dfrac{a\rho'^2}{c - g\rho'^2}\alpha'\sin(\rho' t + \beta') \end{cases}$$
> [1870,763].

Les racines représentent les périodes des petites oscillations et Lagrange interprète l'occurrence de racines multiples comme synonyme *d'instabilité* du système : les oscillations ne restent pas bornées car le temps *t* "sort du sinus" et les solutions prennent la forme $s = t\sin(\rho t+\beta)$.

> Au reste, dit Lagrange, comme cette solution est fondée sur l'hypothèse que *s, u* et $\frac{d\theta}{dt}$ soient de très petites quantités il faudra, pour qu'elle soit légitime : [...] que les racines *ρ* et *ρ'* soient réelles et *inégales*, afin que l'angle *t soit toujours sous le signe des sinus.*
> [1870, 764].

Yvon-Villarceau critique cette interprétation et soumet à l'Académie la question de l'intégration du système en cas d'occurrence de racines multiples : "C'est sur la seconde des conditions ici énoncées que je me permets d'appeler l'attention de l'Académie. Je dis qu'il n'est pas nécessaire que cette condition soit remplie, pour que les petites oscillations se maintiennent" [1870, 764]. Si, par exemple, $g = f$ et $a = 0$ alors le système différentiel (a) a des solutions *stables* malgré une équation caractéristique admettant des racines multiples ([6]).

L'intervention de Villarceau permet de mettre en valeur un point de vue alternatif à celui de Kronecker qui désignera en 1874 le problème des petites oscillations comme relevant d'une transformation de faisceaux de formes

[6] En terme contemporain, le système est stable s'il est diagonalisable dans Ë, ce qui n'implique pas l'occurrence de valeurs propres distinctes. Consulter à ce sujet l'encart 2.

quadratiques. Pour Yvon-Villarceau, la discussion des petites oscillations est un problème de mécanique. Si, comme Kronecker, Villarceau met en évidence un "défaut" dans une méthode centenaire, défaut relatif à la négligence d'un cas particulier ([7]), le discours et ses conclusions reposent sur une *représentation mécanique sous jacente : un mouvement oscillatoire doit pouvoir se décomposer en des mouvements indépendants.* L'intervention d'Yvon-Villarceau a alors pour objet de mettre en évidence, non un défaut de rigueur ou un idéal de simplicité, mais la possibilité de concilier des solutions stables, une décomposition en mouvements indépendants, et l'existence de périodes *propres* égales :

> Voici un cas très simple, auquel correspondent des racines égales de l'équation caractéristique : c'est celui d'un corps solide, homogène et de révolution, oscillant autour d'un point pris sur son axe de figure. Chacun comprendra sans recourir au calcul, que la petitesse des oscillations est assurée dans ce cas, si le centre de gravité est, à l'origine du mouvement, au-dessous du centre de suspension, à une petite distance de la verticale passant par ce point, et si le mouvement oscillatoire initial est suffisamment faible. [...] Ayant rencontré d'autres systèmes d'équations linéaires qui m'ont présenté la même particularité relativement aux racines égales de l'équation caractéristique, et constaté que ces systèmes se résolvaient alors en équations distinctes qui s'intègrent isolément [...]. J'ai cru devoir appeler l'attention des géomètres sur un point assez important de la théorie des équations linéaires, et qui n'occupe pas une place suffisante dans les traités sur cette matière. Peut-être la question que je soulève a-t-elle déjà été résolue ; mais il faut croire que la solution n'est pas généralement connue, puisque l'incorrection que je signale dans la *Mécanique analytique* a pu échapper à un géomètre aussi érudit que le savant auteur de la nouvelle édition d'un ouvrage devenu classique ([8]).
> [1870, 764-766].

"Peut-être la question que je soulève a-t-elle déjà été résolue" : la résolution de Weierstrass n'est pas connue des Parisiens. Les systèmes d'équations différentielles de Yvon-Villarceau n'ont pas de lien avec les "fonctions homogènes du second degré" de Weierstrass ou les "faisceaux de formes quadratiques" de Kronecker. Jordan répond à l'appel de Villarceau par la publication de deux notes [Jordan, 1871 et 1872] qui résolvent le problème posé par les racines multiples. Par sa réponse à Villarceau et la fin qu'il donne à la discussion des petites oscillations, Jordan est amené sur le terrain jusqu'alors berlinois des formes bilinéaires et publie en 1873 la note aux *Comptes Rendus* qui va susciter la querelle de 1874 ([9]).

---

[7] Le défaut de la méthode de Lagrange est interprété par Villarceau comme une analogie abusive entre les systèmes de *n* équations et l'intégration différentielle d'ordre *n*.

[8] Yvon-Villarceau fait ici allusion à la nouvelle édition de la *Mécanique Analytique* de Lagrange par J. Bertrand en 1853.

[9] La réponse de Jordan à l'appel de Villarceau est détaillée en conclusion de chapitre.

3. Les caractéristiques de la discussion des petites oscillations.

Le propos de ce chapitre, éclairer la controverse Jordan-Kronecker par une histoire longue d'un siècle, pose le problème de la cohérence du corpus étudié et visualisé par le graphe de l'encart 1. Ce corpus a-t-il une cohérence interne ou n'obtient-il d'unité que du point de vue rétrospectif de Kronecker ou de Jordan en 1874 ? Dégager les cohérences internes à la discussion des petites oscillations nécessite une étude détaillée des méthodes mathématiques employées dans les textes du corpus. Afin de ne pas encombrer le corps du texte de considérations techniques, le détail de cette étude est proposé sous la forme d'un discours parallèle en encarts 3a, 3b et 3c. Les conclusions de l'examen des méthodes mathématiques de Lagrange, Laplace, Cauchy et Weierstrass sont que, si elle ne se laisse par réduire à une théorie, un problème ou une méthode, la discussion des petites oscillations adopte toujours une forme semblable qui en fait la cohérence interne et présente trois caractéristiques essentielles :

- Une méthode polynomiale spécifique.
- Une propriété remarquable des coefficients du système d'équations différentielles, pour reprendre les notations de la *Mécanique Analytique* de Lagrange : $(i,j) = (j,i)$.
- Une discussion qualitative sur les racines d'une équation algébrique.

- **Une méthode polynomiale propre à la discussion.**

La "solution générale" élaborée par Lagrange pour le "problème des petites oscillations très petites d'un système quelconque de corps" [Lagrange, 1788, 243] est basée sur une méthode qui se veut spécifique par son rejet de la méthode des coefficients indéterminés, une méthode critiquée par son incapacité à traiter le cas "général" de *n* corps (consulter l'encart 3_a pour tout complément). La spécificité consiste à ramener le problème de l'intégration d'un système de *n* équations différentielles linéaires à coefficients constants à la résolution d'une équation algébrique de degré *n*. La *méthode polynomiale* qui appuie cette démarche est un processus algébrique original et caractéristique de la discussion des petites oscillations sur toute sa durée ([10]).

[10] L'équation algébrique dont il s'agit est dénommée depuis [Cauchy, 1839] : équation caractéristique du système.

- **Une propriété remarquable des coefficients du système différentiel,**

Une deuxième caractéristique de la discussion se présente dans ce que Laplace désigne comme l'occurrence de "rapports remarquables" dans les coefficients du système d'équations différentielles :

$$(1,2) = (2,1) \text{ et } [1,2] = [2,1].$$

Ces rapports remarquables sont présentés dans la *Méchanique Analytique* [Lagrange, 1774, 647] comme provenant du développement de deux expressions quadratiques. Le terme *(i,j)* provient du développement de *l'énergie cinétique* et *[i,j]* du développement de Taylor à l'ordre 2 de *l'énergie potentielle*. Une étude des notations employées montre que cette propriété remarquable des systèmes est absente des travaux de d'Alembert et de Lagrange avant 1766. L'encart 3_a montre que les "rapports remarquables" sont une conséquence du jeu sur les exposants et les indices qui fait la spécificité de la méthode élaborée par Lagrange dans la période 1762-1765 pour intégrer le système (a).

Notation de [Lagrange, 1766]

$$(a)\begin{cases} \dfrac{d^2y'}{dt^2}+A'y'+B'y''+C'y'''+...+N'y^{(n)}=0 \\ \dfrac{d^2y''}{dt^2}+A''y'+B''y''+C''y'''+...+N''y^{(n)}=0 \\ \dfrac{d^2y'''}{dt^2}+A'''y'+B'''y''+C'''y'''+...+N'''y^{(n)}=0 \\ ... \\ \dfrac{d^2y^{(n)}}{dt^2}+A^{(n)}y'+B^{(n)}y''+C^{(n)}y'''+...+N^{(n)}y^{(n)}=0 \end{cases}$$

Notation de [Lagrange, 1774]

$$0 = (I)\ \frac{d^2\xi}{dt^2} + (I,2)\ \frac{d^2\psi}{dt^2} + (I,3)\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \&c + [I]\ \xi + [I,2]\ \psi + [I,3]\varphi + \&c.$$

$$0 = (2)\ \frac{d^2\psi}{dt^2} + (I,2)\ \frac{d^2\xi}{dt^2} + (2,3)\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \&c + [2]\psi + [I,2]\xi + [2,3]\varphi + \&c$$

$$0 = (3)\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + (I,3)\ \frac{d^2\xi}{dt^2} + (2,3)\ \frac{d^2\psi}{dt^2} + \&c + [3]\varphi + [I,3]\xi + [2,3]\psi + \&c$$

&c.

$$0 = (n)\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + (I,n)\ \frac{d^2\xi}{dt^2} + (2,n)\ \frac{d^2\psi}{dt^2} + \&c + [n]\varphi + [I,n]\xi + [2,n]\psi + \&c$$

- **Une discussion qualitative sur les racines d'une équation algébrique.**

La méthode de Lagrange fait jouer un rôle particulier à une équation algébrique pour la résolution du problème des petites oscillations. Cette équation permet de déterminer les "petites oscillations" *propres*, c'est-à-dire les périodes ρ des solutions particulières $\lambda e^{\rho t}dt$. La nature mécanique du problème nécessite une discussion sur la nature qualitative des racines de cette équation : sont-elles toutes distinctes, réelles ? Cette discussion sur la nature qualitative des racines d'une équation algébrique est une caractéristique forte de la discussion des petites oscillations, elle en sera également le moteur principal, de son origine chez d'Alembert à sa clôture par Weierstrass en 1858 et Jordan en 1871 (encarts $3_{a,b,c}$).

ENCART 2.

Un point de vue contemporain sur la discussion des petites oscillations.

En termes contemporains, la matrice du système d'équations différentielle linéaire à coefficients constants de Lagrange est diagonalisable, car symétrique. Il est donc toujours possible de ramener le système à *n* équations indépendantes, quelle que soit la multiplicité des racines de l'équation caractéristique. Voir par exemple le traité de Gantmacher de 1959 pour une interprétation mécanique du problème :

> Dans la théorie des petites oscillations, il est nécessaire de considérer simultanément deux formes quadratiques dont l'une donne le potentiel et l'autre l'énergie cinétique du système. La deuxième forme est toujours définie positive. [...]
> Théorème. L'équation caractéristique $|A-\lambda B|=0$ d'un faisceau de formes $A(x,x)-\lambda B(x,x)$ à toujours *n* racines réelles λ_k $(k=1,2,\ldots,n)$ avec les vecteurs principaux correspondants
> $$z^k = (z_{1k}, z_{2k},\ldots,z_{nk})\ (k=1,2,\ldots,n):$$
> $$Az^k = \lambda_k Bz^k\ (k=1,2\ldots,n).$$
> [Gantmacher, 1959, 311-315].

La stabilité du système mécanique nécessite que la matrice *A* soit diagonalisable et, contrairement à la conclusion de Lagrange, ceci est le cas quelle que soit la multiplicité des valeurs propres.

Les différents cadres théoriques que traverse la discussion des petites oscillations et qui sont représenté dans le graphe proposé en encart 1 (mécanique analytique de Lagrange, géométrie analytique de Cauchy, fonctions homogènes du second degré de Weierstrass) sont, d'un point de vue contemporain, confondus en une unique théorie à savoir la théorie des matrices ou plus généralement l'algèbre linéaire. Le traité de Gantmacher de 1959 formule de la manière suivante la recherches des axes principaux des coniques et quadriques qui préoccupe Cauchy en 1829 :

> [...] Théorème 9. – Si $Z = \|z_{ik}\|_1^n$ est une matrice principale d'un faisceau régulier de formes $A(x,x)-\lambda B(x,x)$ la transformation $X = Z\xi$ réduit simultanément les formes $A(x,x)$ et $B(x,x)$ aux sommes de carrés $\Sigma\lambda_k\xi_k^2$, $\Sigma\xi_k^2$, [...].Ainsi, la détermination des valeurs caractéristiques et des vecteurs principaux d'un faisceau régulier de formes $A(x,x)-\lambda B(x,x)$ est équivalente à la réduction, aux axes principaux, de l'équation de l'hypersurface centrée du second ordre, à la condition que l'équation de l'hypersurface soit donnée dans un système général de coordonnées gauche dans lequel la sphère unité ait l'équation $B(x,x)=1$.
> Exemple – Soit l'équation d'une surface du second ordre
> $$2x^2-2y^2-2z^2-10yz+2xz-4=0$$
> dans un système général de coordonnées gauche dans lequel l'équation de la sphère unité est
> $$2x^2+3y^2+2z^2+2xz = 1.$$
> Réduisons l'équation aux axes principaux [...] forme canonique :
> $$\xi_1^2+\xi_2^2-4\xi_3^2-4=0, \quad \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=1.$$
> La première équation [...] est l'équation d'un hyperboloide de révolution à une nappe avec *demi-axe réel égal à 2 et demi-axe imaginaire égal à 1.*
> [Gantmacher, 1959, 311-315].

II. DIFFERENTS IDEAUX DE GENERALITE.

Afin d'éclairer les idéaux opposés par la controverse Jordan-Kronecker et notamment l'idéal d'une "véritable généralité" formulé par Kronecker dans sa critique de Jordan, cette partie propose un examen des textes qui sont considérés en 1874 comme les principales étapes de la discussion des petites oscillations. Les principales références renvoient aux travaux de Lagrange et Laplace de 1770 à 1800, de Cauchy dans les années trente et de Weierstrass en 1858 (voir le graphe de l'encart 1). La question de la généralité tient un rôle important dans les discours des acteurs de la discussion : dès 1766 Lagrange revendique la portée générale de sa méthode par opposition aux cas particuliers traités par d'Alembert en 1743. Un siècle plus tard, Weierstrass justifie sa remise en cause des conclusions de Lagrange par une nouvelle revendication de généralité. Afin de cerner l'évolution du qualificatif "général" dans le cadre de la discussion des petites oscillations, l'approche se subdivise en deux parties parallèles poursuivies dans le corps du texte d'une part, dans les encarts 3_a, 3_b et 3_c d'autre part. Tandis que les encarts entrent dans le détail des techniques mathématiques afin de cerner les caractéristiques d'une méthode propre au corpus étudié, le corps du texte s'attache à mettre en évidence la dynamique historique de la discussion, à savoir son évolution dans le temps marquée par le passage d'un auteur à un autre, d'une théorie à une autre. Une attention particulière sera portée sur les *représentations*, souvent implicites, qui donnent aux méthodes algébriques leurs significations. Le terme de *représentation* d'une méthode algébrique désigne ici toute interprétation de cette méthode procédant d'un changement de cadre. Nous aurons l'occasion d'étudier comment des représentations implicites différentes, mécaniques ou géométriques, impliquent des regards *différents* sur de mêmes formulations algébriques.

ENCART 3.

Les méthodes de la discussion des petites oscillations.

Dans le corps du texte, la deuxième partie de ce chapitre aborde la discussion des petites oscillations sous l'angle des différences : différents de cadres théoriques, différents idéaux de généralité, différentes représentations, souvent implicites, donnant aux méthodes leurs significations. Cet encart développe un discours parallèle dont l'objet est de mettre en évidence ce qui reste le même, ce qui se transmet, dans les méthodes employées au sein de la discussion des petites oscillations. Y a-t-il des raisonnements propres à la discussion des petites oscillations ? Poser la question de l'identité d'une méthode est une manière de contribuer à l'étude d'une des origines historiques de l'algèbre linéaire et de la théorie spectrale ([Hawkins, 1975], [Dieudonné, 1977], [Dahan Dalmedico, 1992]). Cet encart, forcément technique, conserve un plan chronologique et un questionnement orienté par la controverse de 1874.

1. Une double méthode des coefficients indéterminés : Lagrange [1766].

Dans ses "*Solutions de différents problèmes de calcul intégral*" Lagrange présente le problème des petites oscillations d'une corde comme une application de son principe pour réduire l'ordre d'une équation différentielle dont on connaît des solutions particulières [1766, 519] :

> Les équations proposées seront intégrables algébriquement, si l'on peut trouver, [...] autant de valeurs particulières de chacune des quantités *y, y', y'',...* qu'il y a d'unités dans la somme des exposants des plus hautes différences de ces variables.

Le problème des petites oscillations d'un système "quelconque'" de corps, traité dans les cas particuliers de deux et trois corps par d'Alembert, est présenté comme un exemple de la portée générale du principe de réduction de l'ordre [1766, 520] :

> Méthode générale pour déterminer le mouvement d'un système quelconque de corps qui agissent les uns sur les autres, en supposant que ces corps ne fassent que des oscillations infiniment petites autour de leurs points d'équilibre.
>
> Soit *n* le nombre des corps qui composent le système, et nommons *y', y'', y''',...* les espaces infiniments petits que ces corps décrivent dans leurs oscillations pendant le temps *t* ; on aura, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre et des ordres plus élevés des équations de cette forme
>
> $$(a)\begin{cases} \dfrac{d^2y'}{dt^2}+A'y'+B'y''+C'y'''+...+N'y^{(n)}=0 \\ \dfrac{d^2y''}{dt^2}+A''y'+B''y''+C''y'''+...+N''y^{(n)}=0 \\ \dfrac{d^2y'''}{dt^2}+A'''y'+B'''y''+C'''y'''+...+N'''y^{(n)}=0 \\ \qquad ... \\ \dfrac{d^2y^{(n)}}{dt^2}+A^{(n)}y'+B^{(n)}y''+C^{(n)}y'''+...+N^{(n)}y^{(n)}=0 \end{cases}$$
>
> *A', B', C',..., A'', B'', C'',...* étant des constantes données par la nature du problème.

Le système différentiel des petites variations est d'ordre 2. Lagrange considère un système de *n* solutions particulières de la forme $\lambda e^{\rho t}dt$, où λ et ρ sont des "constantes indéterminées" permettant de réduire l'ordre du système de la manière suivante : les *n* équations sont ramenées en une seule en les sommant après multiplication par les coefficients indéterminés $\lambda e^{\rho t}d$ et l'unique équation obtenue peut alors s'intégrer par partie [1766,520] :

1. Lagrange et la "solution générale du Problème des oscillations très petites d'un système quelconque de corps."

La section V de la *Méchanique Analytique*, "Solutions de différens problêmes de Dynamique" [1788, 243-286], se présente comme une application des "principes généraux" exposés dans le traité. Le premier exemple de mise en œuvre est celui des oscillations très petites d'un système de corps. Il s'agit d'étudier le déplacement d'un système de corps *m, m', m'', &c,* dont on suppose qu'il s'éloigne très peu d'une position d'équilibre de coordonnées *a,b,c*. Lagrange exprime les coordonnées rectangles *x,y,z,*de chaque corps à l'aide de variables indépendantes entres elles ξ, ψ, φ :

> Au reste, on pourra souvent aussi, en ayant égard aux conditions du problême, réduire les coordonnées immédiatement par des substitutions, en fonctions rationnelles & entières d'autres variables indépendantes entr'elles, & très petites, dont la valeur soit nulle dans l'état d'équilibre [([11])].
> Ainsi nous supposerons en général que l'on ait :
> $$x = a + a_1 \xi + a_2 \psi + a_3 \varphi + \&c + a'_1 \xi^2 + \&c,$$
> $$y = b + b_1 \xi + b_2 \psi + b_3 \varphi + \&c + b'_1 \xi^2 + \&c,$$
> $$z = c + c_1 \xi + c_2 \psi + c_3 \varphi + \&c + c'_1 \xi^2 + \&c,$$
> & ainsi des autres coordonnées *x',y',* &c, les quantités *a, b, c,* a_1, b_1 & c, sont constantes, & les quantités ξ, ψ, φ, &c, sont variables, très petites, & nulles dans l'équilibre.
> [Lagrange,1788, 243].

Les équations du mouvement sont déduites des conditions initiales et du principe de conservation des forces vives. Elles se présentent sous la forme d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Les "variables" ξ, ψ, φ,… représentent les petites oscillations qu'il s'agit de déterminer ([12]) :

(*)

$$0 = (\mathrm{I})\frac{d^2\xi}{dt^2} + (\mathrm{I},2)\frac{d^2\psi}{dt^2} + (\mathrm{I},3)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \&c + [\mathrm{I}]\,\xi + [\mathrm{I},2]\,\psi + [\mathrm{I},3]\varphi + \&c.$$

$$0 = (2)\frac{d^2\psi}{dt^2} + (\mathrm{I},2)\frac{d^2\xi}{dt^2} + (2,3)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \&c + [2]\psi + [\mathrm{I},2]\xi + [2,3]\varphi + \&c$$

$$0 = (3)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + (\mathrm{I},3)\frac{d^2\xi}{dt^2} + (2,3)\frac{d^2\psi}{dt^2} + \&c + [3]\varphi + [\mathrm{I},3]\xi + [2,3]\psi + \&c$$

&c.

---

[11] En termes contemporains, ce que Lagrange dénomme "fonction rationnelle" est un polynôme.

[12] En termes contemporains, il s'agit du calcul du Lagrangien $L = T - V$ où T représente l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle. Le système est obtenu après prise en compte des conditions initiales et développements de Taylor de V dont on néglige les termes supérieurs à l'ordre 2 en t selon le principe des petites oscillations.

Pour intégrer ces équations suivant la méthode expliquée ci-dessus, on multipliera la première par $\lambda' e^{\rho t}dt$, la seconde *par* $\lambda'' e^{\rho t}dt$, et ainsi de suite, λ, λ', λ'', ... étant, ainsi que ρ, des constantes indéterminées ; ensuite on les ajoutera ensemble, et on en prendra l'intégrale en faisant disparaître de dessous le signe ∫ les différences des variables y', y'', y''',. ... ; après quoi on fera les coefficients des quantités $\int y' e^{\rho t}dt$, $\int y'' e^{\rho t}dt$, $\int y''' e^{\rho t}dt$,... égaux à zéro ; de cette manière on aura d'abord l'équation intégrale

$$(b)\ [\lambda'(\frac{dy'}{dt}-\rho y') + \lambda''(\frac{dy''}{dt}-\rho y'') + \lambda'''(\frac{dy'''}{dt}-\rho y''') + \ldots + \lambda^{(n)}(\frac{dy^{(n)}}{dt}-\rho y^{(n)})]e^{\rho t} = const.$$

Les termes $\frac{dy'}{dt}-\rho y'$ expriment la qualité de solutions particulières des expressions $\lambda' e^{\rho t}dt$ réduisant l'ordre du système différentiel d'une unité. La méthode des coefficients indéterminés donne les conditions sur les λ et ρ permettant l'obtention de l'équation (b) : "on fera les coefficients des quantités $\int y' e^{\rho t}dt$, $\int y'' e^{\rho t}dt$, $\int y''' e^{\rho t}dt$,... égaux à zéro". Ces conditions sont exprimées par un système d'équations linéaires [1766,520] ([1]) :

et ensuite les équations

$$(c)\begin{cases} \rho^2\lambda' + A'\lambda' + A''\lambda'' + A'''\lambda''' + \ldots + A^{(n)}\lambda^{(n)} = 0, \\ \rho^2\lambda'' + B'\lambda' + B''\lambda'' + B'''\lambda''' + \ldots + B^{(n)}\lambda^{(n)} = 0, \\ \rho^2\lambda''' + C'\lambda' + C''\lambda'' + C'''\lambda''' + \ldots + C^{(n)}\lambda^{(n)} = 0, \\ \ldots \\ \rho^2\lambda^{(n)} + N'\lambda' + N''\lambda'' + N'''\lambda''' + \ldots + N^{(n)}\lambda^{(n)} = 0, \end{cases}$$

lesquelles serviront à déterminer les quantités ρ, λ', λ'', λ''',...[...]

La résolution du système (c) permet de déterminer les solutions particulières $\lambda e^{\rho t}dt$, l'"élimination des équations" conduit en effet à une équation de degré n en ρ notée $P = 0$ permettant de déterminer les n valeurs $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ des indéterminés ρ.

Une fois les solutions particulières obtenues, l'équation intégrale (b) permet de trouver les solutions aux conditions initiales. C'est pour déterminer ces dernières solutions que Lagrange élabore une méthode *spécifique* ramenant l'expression des solutions à la seule donnée de l'équation algébrique $P = 0$.

---

[1] Par exemple la méthode des coefficients indéterminés sur le système à deux inconnues

$$\begin{cases} \frac{d^2y'}{dt^2} + A'y' + B'y'' = 0 \\ \frac{d^2y''}{dt^2} + A''y' + B''y'' = 0 \end{cases}$$

donne l'équation $\lambda' e^{\rho t}(\frac{d^2y'}{dt^2} + A'y' + B'y'') + \lambda'' e^{\rho t}(\frac{d^2y''}{dt^2} + A''y' + B''y'') = 0$.

L'équation intégrale est obtenue par intégration par partie :

$$\int \frac{d^2y}{dt^2}e^{\rho t}dt = \int \rho\frac{dy}{dt}e^{\rho t}dt - [\frac{dy}{dt}e^{\rho t}] = \int \rho^2 y e^{\rho t}dt + [\rho y e^{\rho t}] - [\frac{dy}{dt}e^{\rho t}]$$

à la condition que les termes en $\int y'' e^{\rho t}dt$ s'annulent, c'est-à-dire que $\rho^2\lambda' + A'\lambda' + A''\lambda'' = 0$.

équations qui étans sous une forme linéaire avec des cœfficients constants, peuvent être intégrées rigoureusement & généralement par les méthodes connues.
[Lagrange,1788, 243].

La méthode mise en œuvre est une généralisation du principe de réduction de l'ordre d'une équation différentielle par la connaissance de solutions particulières [Lagrange, 1766], pour ce faire on suppose connue la forme générale des solutions comme ayant entre elles des "rapports constants" ([13]) :

> [...] les variables dans ces sortes d'équations ayent entr'elles des rapports constants ; c'est-à-dire que l'on ait $\psi = f\xi$, $\phi = g\xi$, *&c,* le système s'écrit alors :
>
> $$((I) + (I,2)f + (I,3)g + \&c)\frac{d^2\xi}{dt^2} + ([I] + [I,2]f + [I,3]g + \&c)\xi = 0$$
> $$((2)f + (I,2) + (2,3)g + \&c)\frac{d^2\xi}{dt^2} + ([2]f + [I,2] + [2,3]g + \&c)\xi = 0$$
> $$((3)g + (I,3) + (2,3)f + \&c)\frac{d^2\xi}{dt^2} + ([3]g + [I,3] + [2,3]f + \&c)\xi = 0$$
>
> &c,
>
> lesquelles donnent $\frac{d^2\xi}{dt^2} + K\xi = 0$, en faisant
>
> $$K = \frac{[I]+[I,2]f+[I,3]g+\&c}{(I)+(I,2)f+(I,3)g+\&c} = \frac{[2]f+[I,2]+[2,3]g+\&c}{(2)f+(I,2)+(2,3)g+\&c} = \frac{[3]g+[I,3]+[2,3]f+\&c}{(3)g+(I,3)+(2,3)f+\&c}$$
>
> [Lagrange,1788, 243].

La méthode repose sur la possibilité de déterminer une "forme intégrable" pour le système d'équations, ce qui revient à remplacer le système (*) par *n* équations indépendantes les unes des autres et nécessite de déterminer *n* valeurs réelles distinctes de *K*:

> Maintenant l'équation $\frac{d^2\xi}{dt^2} + K\xi = 0$, donne par l'intégration
>
> $\xi = E\sin(t\sqrt{K} + \varepsilon)$. *E*, ε étant des constantes arbitraires ; ainsi comme on a supposé $\psi = f\xi$, $\varphi = g\xi$, &c, on a aussi les valeurs de ψ, φ, &c. Cette solution n'est que particulière, mais elle est en même temps double, triple, &c, selon le nombre des valeurs de K ; par conséquent en les joignant ensemble, on aura la solution générale [...]. Dénotant par *K', K'', K''', &c,* les différentes valeurs de *K*, c'est-à-dire, les racines de l'équation en *K* [...]

[13] En discutant le mémoire de 1766, j'aurai l'occasion de montrer que la représentation mécaniqe implicite conduit à rechercher *n* solutions particulières de la forme $\xi = E\sin(t\sqrt{K} + \varepsilon)$, $\sqrt{K}$ représentant une petite oscillation propre. Dire que les solutions ont entre elles des rapports constants : $\psi = f\xi$, $\varphi = g\xi$,... s'interprète, dans le cadre des mathématiques contemporaines , comme la reconnaissance d'une structure linéaire de l'ensemble des solutions formant un espace vectoriel de dimension *n.*

- **Le caractère spécifique de la méthode de Lagrange : un *jeu sur les primes et les indices*..**

La méthode de Lagrange développée par Lagrange pour la résolution du système aux conditions initiales est *propre* au problème des petites oscillations. La spécificité de la méthode se présente comme un j*eu sur les primes et les indices* construit sur une propriété de la méthode des coefficients indéterminés : les coefficients du système (c) sont en miroir de ceux du système (a) : le coefficient *A''*, deuxième coefficient de la première équation de (a), est identique au premier coefficient de la deuxième équation de (b).

$$(a)\begin{cases} \dfrac{d^2y'}{dt^2}+A'y'+B'y''+C'y'''+...+N'y^{(n)}=0 \\ \dfrac{d^2y''}{dt^2}+A''y'+B''y''+C''y'''+...+N''y^{(n)}=0 \\ \dfrac{d^2y'''}{dt^2}+A'''y'+B'''y''+C'''y'''+...+N'''y^{(n)}=0 \\ \quad ... \\ \dfrac{d^2y^{(n)}}{dt^2}+A^{(n)}y'+B^{(n)}y''+C^{(n)}y'''+...+N^{(n)}y^{(n)}=0 \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} \rho^2\lambda'+A'\lambda'+A''\lambda''+A'''\lambda'''+...+A^{(n)}\lambda^{(n)}=0, \\ \rho^2\lambda''+B'\lambda'+B''\lambda''+B'''\lambda'''+...+B^{(n)}\lambda^{(n)}=0, \\ \rho^2\lambda'''+C'\lambda'+C''\lambda''+C'''\lambda'''+...+C^{(n)}\lambda^{(n)}=0, \\ \quad ... \\ \rho^2\lambda^{(n)}+N'\lambda'+N''\lambda''+N'''\lambda'''+...+N^{(n)}\lambda^{(n)}=0, \end{cases}$$

Une formulation contemporaine de la méthode de Lagrange.

En termes contemporains, le système (c) est le transposé du système (a) car les conditions des coefficients indéterminées sont des conditions d'*orthogonalité duale.* Il faut cependant remarquer la difficulté de formuler cette propriété de transposition si l'on cherche à éviter l'anachronisme du formalisme matriciel et des représentations géométriques qui lui sont associées, comme l'idée de *symétrie* et de *diagonale*, mais absentes des systèmes différentiels de Lagrange. Cette remarque illustre le nécessaire abandon du confort que procure une interprétation des méthodes de Lagrange par l'algèbre linéaire contemporaine dans un travail qui, précisément, vise à une histoire de la représentation matricielle.
Une reconstruction de la méthode de Lagrange selon un point de vue contemporain est cependant proposée ci-dessous, avant de passer à l'étude détaillée du texte de Lagrange dans les pages suivantes.

Il s'agit d'exprimer les n solutions (y_i) du système $y''+Ay=0$ où y est une fonction $\ddot{E} \leftrightarrow \ddot{E}^n$ n-dérivable et A ☻$M_n(\ddot{E})$ est diagonalisable, à partir des vecteurs propres (λ_i) et des conditions initiales.
Soit Λ la matrice dont les colonnes sont composées de la base de vecteurs propres (λ_i) (ces sont donc solutions du système diagonalisé $\lambda''=\rho\,\lambda$) et soit $Y=(y_i(0))$ le vecteur colonne des coefficients donnant les conditions initiales pour $t=0$. Alors le vecteur colonne Θ exprimant les coordonnées de Y dans la base des vecteurs propres sera

$$\Theta=\Lambda Y.$$

Le problème de la détermination des solutions aux conditions initiales se ramène à la résolution du système $\Lambda y=\Theta$. Si l'on construit une base (ν_i), duale à la base de vecteurs propres (λ_i), le vecteur ν_m appartiendra à l'orthogonal de l'hyperplan engendré par $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1}, \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n)$:

$$\nu_m ☻ vect(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1}, \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n)^t$$

Si ν désigne la matrice des vecteurs colonnes (ν_i) alors :

$$\nu\Lambda y = \nu\Theta.$$

Mais $\nu\,\Lambda$ est une matrice diagonale car, par orthogonalité :

$$\nu\,{}^t\Lambda = diag(Q_1,\ldots Q_n)$$

et donc

$$y = diag(Q_1^{-1},\ldots,Q_n^{-1})\nu\Theta.$$

Les vecteurs ν sont des vecteurs propres de la matrice transposée ${}^tA$, ce qui donne une méthode pratique pour déterminer les ν_i et Q_i uniquement à l'aide du polynôme caractéristique du système.

$$\xi = E'\sin(t\sqrt{K'}+\varepsilon') + E''\sin(t\sqrt{K''}+\varepsilon'') + E'''\sin(t\sqrt{K'''}+\varepsilon''') + \&c,$$
$$\psi = f'E'\sin(t\sqrt{K'}+\varepsilon') + f''E''\sin(t\sqrt{K''}+\varepsilon'') + f'''E'''\sin(t\sqrt{K'''}+\varepsilon''') + \&c,$$
$$\varphi = g'E'\sin(t\sqrt{K'}+\varepsilon') + g''E''\sin(t\sqrt{K''}+\varepsilon'') + g'''E'''\sin(t\sqrt{K'''}+\varepsilon''') + \&c,$$
&c,

[Lagrange,1788, 244].

Reste la détermination des valeurs de *K*. Ces valeurs apparaissent, par usage des méthodes d'élimination, comme racines d'une équation résultante de degré *n* :

> Le nombre de ces équations est, comme l'on voit, égal à celui des inconnues *f, g, &c, K* ; par conséquent elles déterminent exactement ces inconnues ; & comme en retenant pour premier membre le terme *K*, le multipliant respectivement par le dénominateur du second, on a des équations linéaires en *f,g, &c*, il sera facile de les éliminer par les méthodes connues, & il n'est pas difficile de voir par les formules générales d'élimination, que la résultante en *K* sera d'un degré égal à celui des équations, & par conséquent égal à celui des équations différentielles proposées ; de sorte que l'on aura pour *K* un pareil nombre de différentes valeurs, dont chacune étant substituée dans les expressions de *f, g, &c*, donnera les valeurs correspondantes de ces quantités.
> [Lagrange,1788, 245].

Ouvrant la section V, premier exemple de mise en œuvre de la *Dynamique* de Lagrange, le problème des "petites oscillations" occupe une place de choix dans la *Mécanique Analytique* dont il illustre la portée générale. La question des oscillations est caractérisée par Lagrange comme relevant d'une méthode "générale", applicable à un système "quelconque", cette généralité de la méthode justifie la place tenue par le problème des petites oscillations dans le traité de synthèse de Lagrange dont l'architecture ne peut être dissociée d'une certaine forme d'histoire, faite d'un jeu de postérité, portée par une idée de "révolution" de la science et du rôle primordial des modernes. Cette histoire fait les belles pages de l'exposé préliminaire à l'ouvrage:

> La dynamique est la science des forces accélératrices ou retardatrices, & des mouvements variés qu'elles peuvent produire. Cette science est due entièrement aux Modernes, & Galilée est celui qui en a jeté les premiers fondements [...] il fallait un génie extraordinaire pour démêler les lois de la nature dans des phénomènes que l'on avoit toujours eu sous les yeux, dont l'explication avait toujours échappée aux recherches des philosophes.
> [Lagrange, 1788, 158].

La *Méchanique Analytique,* qui se présente comme une œuvre de synthèse du siècle écoulé, a prétention à participer de cette "révolution" :

> La Mécanique devint une science nouvelle entre les mains de Newton, & ses *Principes Mathématiques* qui parurent pour la première fois en 1687, furent l'époque de cette révolution [...]. Enfin l'invention du calcul infinitésimal mit les Géomètres en état de réduire à des équations analytiques les lois du mouvement des corps ; & la recherche des forces & des mouvements qui en résultent est devenue depuis le principal objet de leurs travaux.

- **Expression des solutions en fonction des conditions initiales.**

Lagrange note ρ_1^2, ρ_2^2, ρ_3^2,… les racines, supposées réelles et distinctes, de l'équation $P = 0$. Si les conditions initiales pour $t = 0$ sont $y' = Y'$, $y'' = Y''$,…, $dy'/dt = V'$, $dy''/dt = V''$, …., l'équation (b) s'écrit :

$$\lambda' \frac{dy'}{dt} + \lambda'' \frac{dy''}{dt} + \lambda''' \frac{dy'''}{dt} + \ldots + \lambda^{(n)} \frac{dy^{(n)}}{dt} \quad -\rho \quad [\lambda' y' - \lambda'' y'' - \ldots - \lambda^{(n)} y^{(n)}]$$
$$= [\lambda' V' + \lambda'' V'' + \lambda''' V''' + \ldots. + \lambda^{(n)} V^{(n)} - \rho \, (\lambda' Y' + \lambda'' Y'' + \ldots + \lambda^{(n)} Y^{(n)})] \, e^{-\rho t}$$

Cette dernière équation permet d'écrire les conditions initiales (Y) et (V) en relation avec le système de coefficients (λ) des solutions particulières $\lambda e^{\rho t} dt$. Les racines de $P = 0$ s'écrivant ρ_i^2 et l'équation intégrale (b) étant vérifiée pour ρ et −ρ, sommer les deux équations intégrales obtenues pour ρ et $-\rho$ permet d'écrire la relation :

$$(d) \quad \lambda' y' + \lambda'' y'' + \ldots + \lambda^{(n)} y^{(n)} = [\lambda' Y' + \lambda'' Y'' + \ldots + \lambda^{(n)} Y^{(n)}] \, \frac{e^{\rho t} + e^{-\rho t}}{2}$$
$$+ [\lambda' V' + \lambda'' V'' + \lambda''' V''' + \ldots. + \lambda^{(n)} V^{(n)}] \, \frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2\rho}$$

On note θ le membre de droite qui exprime les conditions initiales (Y) et (V) dans le système de variables *(λ),*

$$\theta = [\lambda' Y' + \lambda'' Y'' + \ldots + \lambda^{(n)} Y^{(n)}] \, \frac{e^{\rho t} + e^{-\rho t}}{2} \quad + [\lambda' V' + \lambda'' V'' + \lambda''' V''' + \ldots. + \lambda^{(n)} V^{(n)}] \, \frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2\rho}$$

Aux n valeurs de l'indéterminée ρ², c'est-à-dire aux n racines ρ_1^2, ρ_2^2, ρ_3^2, … , s'associent, par le système (c), n systèmes de valeurs

$$(\lambda'_1, \lambda''_1, \ldots, \lambda^{(n)}_1), \ (\lambda'_2, \lambda''_2, \ldots, \lambda^{(n)}_2), \ \ldots., (\lambda'_n, \lambda''_n, \ldots, \lambda^{(n)}_n)$$

des coefficients des solutions particulières et n valeurs correspondantes des conditions initiales θ_1, θ_2,…[2].

Déterminer les solutions aux conditions initiales revient alors résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned}
&\lambda'_1 y' + \lambda''_1 y'' + \ldots. + \lambda^{(n)}_1 y^{(n)} = \theta_1, \\
&\lambda'_2 y' + \lambda''_2 y'' + \ldots. + \lambda^{(n)}_2 y^{(n)} = \theta_2, \\
&\ldots\ldots \\
&\lambda'_n y' + \lambda''_n y'' + \ldots. + \lambda^{(n)}_n y^{(n)} = \theta_n,
\end{aligned}$$

En un *jeu sur les primes et les indices,* la méthode spécifique élaborée par Lagrange en 1766 vise à résoudre ce dernier système, c'est-à-dire à renverser le système de n équations à n inconnues afin d'exprimer les y en fonction des (λ_i) et (θ_i) .

[2] En termes contemporains : les coefficients θ expriment les vecteurs conditions initiales Y dans la base de vecteurs propres *(λ)* de la matrice associée au système (a) $: \Theta = \Lambda Y$

> Je me suis proposé ici de leur offrir un nouveau moyen de faciliter cette recherche [...].
> [Lagrange, 1788, 159].

C'est le terme "facilité" - on trouve plus loin "simplicité"- qui manifeste la nouveauté du traité de Lagrange. La *Méchanique analytique* revendique un caractère révolutionnaire par son architecture qui présente tous les principes de la Statique et de la Dynamique comme déduits d'un unique principe "simple", "primitif" ; une "demande" de la mécanique : le principe des travaux virtuels ([14]):

> Nous avons donné dans la première partie (Sect. V), la solution de plusieurs problèmes sur l'équilibre des corps. Rien n'est plus facile que d'appliquer au mouvement des mêmes corps les formules trouvées pour leur équilibre ; car d'après ce qu'on a démontré dans la seconde section (art.4), il ne faut qu'ajouter aux forces accélératrices $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, dirigées suivant les lignes *x, y, z* en nommant *t* le temps écoulé, & faisant *dt* constant. [...]. De cette manière les équations trouvées pour l'équilibre, donneront immédiatement celles du mouvement, & les mêmes problèmes se trouveront résolus également pour les deux états de repos & de mouvement.
> [Lagrange, 1788, 233].

"Rien n'est plus facile" : l'introduction historique du traité met en valeur la simplicité du principe primitif en contraste des difficultés et confusions suscitées par l'étude des systèmes de corps aux XVII^e et XVIII^e siècles. En ce sens, le principe primitif, énoncé par d'Alembert, vient clore une histoire par sa capacité à offrir une "méthode directe et générale" pour mettre en équation tous les problèmes de la dynamique :

> Le traité de Dynamique de M. d'Alembert qui parut en 1743, mit fin à ces espèces de défis, en offrant une méthode directe & générale pour résoudre, ou du moins pour mettre en équations tous les problèmes de Dynamique que l'on peut imaginer. Cette méthode réduit toutes les lois du mouvement des corps à celles de leur équilibre, & ramène ainsi la dynamique à la statique. [...] Si plusieurs corps tendent à se mouvoir avec des vitesses & des directions qu'ils soient forcés de changer à cause de leur action mutuelle, on peut regarder ces mouvements comme composés de ceux que les corps prendront réellement, & d'autres mouvements qui sont détruits ; d'où il suit que ces derniers doivent être tels que les corps animés de ces seuls mouvements se fassent équilibre.
> [Lagrange, 1788, 179-180].

---

[14] Le principe des vitesses virtuelles, en tant que réunion de la règle statique et du principe dynamique dit "de d'Alembert", apparaît chez Lagrange dans le mémoire "Recherches sur la Libration de la Lune dans les quelles on tâche de résoudre la Question proposée par l'Académie Royale des Sciences, pour le Prix de l'Année 1764", voir à ce sujet [Fraser, 1983].
Voir plus généralement [Dahan Dalmedico, 1992], [Dugas, 1950], [Comte et Barroso-Filip, 1988], [Panza, 1990] à propos la nouveauté de l'approche de Lagrange sur les traités de d'Alembert et Euler et le dépassement du débat antérieur sur les fondements de la mécanique en une synthèse éludant l'alternative force-masse.

- **Une première application de la méthode des coefficients indéterminés.**

L'introduction d'indéterminées *μ', μ''* , …. permet une première expression des solution $y^{(s)}$ [Lagrange, 1766, 523] ([3]) :

> Pour en venir à bout, je multiplie la première de ces équations par *μ',* la seconde par μ'', la troisième par *μ'''*, et ainsi de suite, *μ', μ'', μ''',…* étant des coefficients indéterminés, puis je les ajoute ensemble, ce qui me donne [...] la valeur d'une *y* quelconque, comme $y^{(s)}$, en égalant à zéro chacun des coefficients des autres *y* ; ainsi l'on aura
>
> $$(e)\quad y^{(s)} = \frac{\mu'\theta_1 + \mu''\theta_2 + \mu'''\theta_3 + \ldots + \mu^{(n)}\theta_n}{\mu'\lambda_1^{s} + \mu''\lambda_2^{(s)} + \mu'''\lambda_3^{(s)} + \ldots + \mu^{(n)}\lambda_n^{(s)}},$$
>
> et ensuite ces équations de condition :
>
> $$(f)$$
> $$\mu'\lambda'_1 + \mu''\lambda'_2 + \ldots + \mu^{(n)}\lambda'_n = 0$$
> $$\mu'\lambda''_1 + \mu''\lambda''_2 + \ldots + \mu^{(n)}\lambda'_n = 0$$
> $$\ldots$$
> $$\mu'\lambda_1^{(n)} + \mu''\lambda^{(n)}{}_2 + \ldots + \mu^{(n)}\lambda'_n{}^{(n)} = 0$$
>
> à l'exception seulement de celle qui répondrait à l'exposant *s*.

L'expression donnée à la solution $y^{(s)}$ par la formule (*e*) n'est pas satisfaisante car les primes et les indices se trouvent mélangés. et les coefficients présents au dénominateur n'ont pas de signification par rapport au problème considéré. Le tableau suivant représente l'affectation des $\lambda_i^{(j)}$ aux racines ρ_i : le dénominateur de la formule (*e*) mêle λ_1^{s}, le s^e coefficient associé à ρ_1 à λ_2^{s} le s^e coefficient associé à ρ_2 etc. Les indices de $\lambda^{(s)}$ varient là où l'expression attendue présenterait une variation des primes de λ_s ([4])

ρ_1^2	ρ_2^2	…	ρ_n^2
$(\lambda'_1, \lambda''_1, \ldots, \lambda^{(n)}{}_1)$	$(\lambda'_2, \lambda''_2, \ldots, \lambda^{(n)}{}_2)$	…	$(\lambda'_n, \lambda''_n, \ldots, \lambda^{(n)}{}_n)$
θ_1	θ_2	…	θ_n

La méthode des coefficients indéterminés inverse le rôle des primes et des indices. Afin de rétablir l'ordre initial, Lagrange recourt à un second emploi de la méthode des indéterminées sur le système (f), qui comprend *n* équations, dont *n-1* de second membre nul (les équations f), et une de second membre non nul (e).

[3] La méthode des coefficients indéterminés s'interprète en termes contemporains comme une recherche de la solution $y^{(s)}$ par des combinaisons sur les lignes annulant les coefficients des autres inconnues. Le système (f) donne les conditions sur les coefficients indéterminées *(μ),* c'est-à-dire les combinaisons à effectuer sur les lignes afin d'isoler $y^{(s)}$. La solution $(y^{(s)})$ donnée par l'équation (e) est analogue à celle exprimée par la règle de Cramer comme quotient de deux déterminants. L'emploi de déterminants pour exprimer la méthode de Lagrange sera d'abord effectué par [Laplace, 1775], le rôle joué par les déterminant sera discuté dans la suite de ce travail lorsque sera discutée la méthode de [Cauchy, 1829].

[4] En termes contemporains, $(\lambda_1', \ldots, \lambda_1^{(n)})$ est un système de cordonnées du vecteur propre de ρ_1^2. $\lambda_1^{(i)}$ est la i^e coordonnée du vecteur propre. La méthode de l'élimination appliquée au système (c) conduit à des relations que l'on interpréterait aujourd'hui comme des conditions d'orthogonalités duales. En termes contemporains, si les (λ_i) sont les vecteurs propres de *A* alors les (v_m) sont construit comme appartenant à l'orthogonal de l'hyperplan$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n)$ et sont dont les vecteurs propres de la matrice ${}^tA$.

C'est en particulier pour les problèmes mettant en jeu des systèmes de corps que le traité vient clarifier les difficultés et confusions d'un passé dont la querelle des cordes vibrantes est exemplaire. Pour la mise en équation de ces problèmes, de nouveaux principes sont nécessaires et la nouveauté du traité s'affirme dans une architecture qui déduit tous ces principes (conservation du mouvement du centre de gravité, conservation des forces vives, principe des aires et principe de moindre action) du seul principe de d'Alembert. Le traité est révolutionnaire car il résout tous les problèmes de la statique et de la dynamique par une même méthode "simple", "directe" et "générale":

> Mais si on cherche le mouvement de plusieurs corps, qui agissent les uns sur les autres par impulsion ou par pression, soit immédiatement comme dans le choix ordinaire, ou par le moyen de fils ou de leviers inflexibles, auxquels ils soient attachés, ou en général par quelqu'autre moyen que ce soit, alors la question est d'un ordre plus élevé, & les principes précédens sont insuffisants pour la résoudre. Car ici les forces qui agissent sur les corps sont inconnues, & il faut déduire ces forces de l'action que les corps doivent exercer entr'eux, suivant leur disposition mutuelle. Il est donc nécessaire d'avoir recours à un nouveau principe qui serve à déterminer la force des corps en mouvement, eu égard à leur masse & à leur vitesse.
> [Lagrange, 1788, 179-180].

Le choix de Lagrange de présenter le problème des petites oscillations comme première application de sa mécanique relève d'un enjeu historique, ce choix est caractéristique de ce que l'architecture du traité est indissociable de l'histoire présentée dans son introduction. L'importance de la question des petites oscillations provient tout à la fois d'enjeux mécaniques et historiques qui en font un problème exemplaire de la méthode "simple" et "générale" développée par Lagrange pour un problème que Daniel Bernouilli pensait trop irrégulier pour les méthodes analytiques [Truesdell 1960] et dont d'Alembert [1743] n'était parvenu à traiter que le cas particulier d'un système restreint à deux masses. En associant *généralité* et *simplicité*, Lagrange met en avant la nouveauté du caractère uniforme de sa procédure de résolution ([15]). Pour le comprendre, il faut aborder les premières contributions de d'Alembert [1743] et Lagrange [1766] au problème des petites oscillations et de préciser de quelle façon la méthode de Lagrange se présente comme une résolution *générale* d'un problème *particulier* énoncé par d'Alembert.

[15] Synthèse, méthodes générales, formalisme des procédures les plus uniformes possibles sont les aspects relevés par l'historiographie [Fraser, 1983] comme caractéristiques de la *Méchanique Analytique* et qu'Amy Dahan Dalmedico résume par la qualification de "double mouvement de réduction de la Mécanique à l'Analyse, et de l'Analyse à l'Algèbre" [Dahan Dalmedico, 1992, 44].

- **Une seconde application de la méthode des coefficients indéterminés.**

Supposons que l'on ait en général

$\mu'\lambda'_1 + \mu''\lambda'_2 + ... + \mu^{(n)}\lambda'_n = \Delta'$
$\mu'\lambda''_1 + \mu''\lambda''_2 + ... + \mu^{(n)}\lambda'_n = \Delta''$
....
$\mu'\lambda_1^{(n)} + \mu''\lambda^{(n)}{}_2 + ... + \mu^{(n)}\lambda'_n{}^{(n)} = \Delta^{(n)}$,

et qu'il faille trouver la valeur d'une μ quelconque comme $\mu^{(m)}$. On multipliera ces équations par des coefficients indéterminés $\nu', \nu'', \nu''',...,\nu^{(n)}$, et, après les avoir ajoutées ensemble, on fera les coefficients des quantités $\mu', \mu'', \mu''',...$ chacun égal à zéro, excepté celui de la quantité $\mu^{(m)}$; de cette manière on aura

$$\text{(g)}\quad \mu^{(m)} = \frac{\nu'\Delta' + \nu''\Delta'' + \nu'''\Delta''' + ... + \nu^{(n)}\Delta^{(n)}}{\nu'\lambda'_m + \nu''\lambda''_m + \nu'''\lambda'''_m + ... + \nu^{(n)}\lambda_m^{(n)}},$$

et la détermination des quantités $\nu', \nu'', \nu''',...$ dépendra de cette condition que

$$\text{(h)}\ \nu'_m\lambda' + \nu'_m{}'\lambda'' + ... + \nu^{(n)}{}_m\lambda^{(n)} = 0$$

lorsque $\rho = \rho_1, \rho_2, \rho_3, ...,\rho_n$ excepté ρ_m

La double inversion du rôle des primes et des indices permet un retour à la configuration d'origine. L'expression (g) obtenue par l'introduction des nouvelles indéterminées (ν) permet à présent d'exprimer les solutions $\mu^{(m)}$ à l'aide des coefficients $(\lambda'_m, \lambda''_m,....,\lambda^{(n)}{}_m)$ associés à une même racine ρ_m. La formule (g) permet de déterminer μ^m puis, en remontant les calculs, la solution $y^{(s)}$ cherchée ; elle ne permet cependant pas une expression directe des solutions $y^{(s)}$.

- **La construction d'une méthode propre.**

Le caractère *propre* de la méthode de Lagrange se développe à partir d'une explicitation du jeu sur les primes et les indices qu'implique chaque utilisation de la méthode des coefficients indéterminés. Si l'on applique les coefficients indéterminés ν' ; ν'',.. au système (c), on obtient une équation (i) et des conditions sur les (ν) données par un nouveau système (k):

$$(c)\begin{cases} \rho^2\lambda' + A'\lambda' + A''\lambda'' + A'''\lambda''' + ... + A^{(n)}\lambda^{(n)} = 0, \\ \rho^2\lambda'' + B'\lambda' + B''\lambda'' + B'''\lambda''' + ... + B^{(n)}\lambda^{(n)} = 0, \\ \rho^2\lambda''' + C'\lambda' + C''\lambda'' + C'''\lambda''' + ... + C^{(n)}\lambda^{(n)} = 0, \\ ... \\ \rho^2\lambda^{(n)} + N'\lambda' + N''\lambda'' + N'''\lambda''' + ... + N^{(n)}\lambda^{(n)} = 0, \end{cases} \leftrightarrow \quad (i)\begin{cases} [\rho^2\upsilon' + A'\upsilon' + B'\upsilon'' + C'\upsilon''' + ... + N^{(n)}\upsilon^{(n)}]\lambda' \\ +[\rho^2\lambda'' + A''\upsilon' + B''\upsilon'' + C''\upsilon''' + ... + N''\upsilon^{(n)}]\lambda'' \\ +[\rho^2\lambda''' + A'''\upsilon' + B'''\upsilon'' + C'''\upsilon''' + ... + N'''\upsilon^{(n)}]\lambda''' \\ ... \\ +[\rho^2\upsilon^{(n)} + A^{(n)}\upsilon' + B^{(n)}\upsilon'' + C^{(n)}\upsilon''' + ... + N^{(n)}\upsilon^{(n)}]\lambda^{(n)} = 0, \end{cases}$$

$$(k)\begin{cases} \rho^2\upsilon' + A'\upsilon' + B'\upsilon'' + C'\upsilon''' + ... + N^{(n)}\upsilon^{(n)} = 0, \\ \rho^2\lambda'' + A''\upsilon' + B''\upsilon'' + C''\upsilon''' + ... + N''\upsilon^{(n)} = 0, \\ \rho^2\lambda''' + A'''\upsilon' + B'''\upsilon'' + C'''\upsilon''' + ... + N'''\upsilon^{(n)} = 0, \\ ... \\ \rho^2\upsilon^{(n)} + A^{(n)}\upsilon' + B^{(n)}\upsilon'' + C^{(n)}\upsilon''' + ... + N^{(n)}\upsilon^{(n)} = 0, \end{cases}$$

Les deux jeux de coefficients indéterminés (λ) et (ν) sont respectivement déterminés par les systèmes (c) et (k), ces deux systèmes entretiennent une relation due à l'inversion des primes et des indices. Par exemple le troisième coefficient de la deuxième équation de (c), *B'''*, est le même que le deuxième coefficient de la troisième équation de (k). Le système (c) entretient le même type de relation avec le système initial (a), Lagrange explicite cette relation de la manière suivante :

2. Le problème de d'Alembert et sa représentation mécanique.

Le *Traité de dynamique* de 1743 réalise une unification de la mécanique des corps solides autour du *principe de d'Alembert* ([16]). Un des succès de ce principe se manifeste dans la mise en équation du mouvement vibratoire d'une corde sans poids, chargée de deux masses ([17]):

> Problème V.
> 115. Un fil *CmM* fixe en *C*, & chargé de deux poids *m, M*, étant infiniment peu éloigné de la verticale *CO*, trouver la durée des oscillations de ce fil.
> [...]
>
> $$(K)\ -ddx = [\ \frac{px}{l} - \frac{M.P}{m}\ (\ \frac{y}{L} - \frac{x}{l}\ )]\ dt^2$$
>
> $$\&\ -\ ddy = [\ \frac{yP}{L}.\ \frac{M+m}{m} - \frac{x}{L}.(p+ \frac{M.P}{m}\ )]dt^2\ (N).$$
>
> [d'Alembert, 1758 , 139-142].

Sous la simplification $M = m,\ l = L,$ notant T le temps pendant lequel la force accélératrice fait parcourir au corps un espace d'une unité, les équations du mouvement obtenues par d'Alembert sont les suivantes :

> $$(P) - \quad ddx = (2x-y).\ \frac{2dt^2}{T^2},$$
>
> $$\&\ (Q) - \quad ddy = (2y-2x)\ \frac{2dt^2}{T^2}.$$
>
> [1758, 144]

d'Alembert recourt à la méthode des coefficients indéterminées pour exprimer le système des équations du mouvement par deux équations indépendantes, pouvant s'intégrer séparément. La méthode consiste à introduire un coefficient indéterminé ν permettant de combiner les deux équations et d'obtenir, comme condition sur ce coefficient indéterminé une équation algébrique du second degré dont les deux solutions, $\nu = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$, permettent d'obtenir les variables indépendantes recherchées : $u = x+\nu y$ *et* $u' = x+\nu y$, et de réduire l'intégration d'un système différentiel à celle de deux équations indépendantes:

> Je multiplie la seconde par un coefficient indéterminé ν, & ensuite je les ajoute ensemble, ce qui donne $-ddx-\nu ddy = \frac{2dt^2}{T^2} \times (\ \overline{2-2\nu}\ .x + \ \overline{2\nu-1}\ .y)$…(R).

---

[16] Je prendrai mes citations de la deuxième édition de 1758.

[17] La notation *x* désigne le déplacement vertical du corps *m*, *y* celui du corps *M*, *l* le déplacement parcouru pendant le premier instant par *m* et *L* par *M*. *P* est la pesanteur du corps *M* et *p* celle de *m*.

les systèmes (c) et (k) sont différents mais l'équation $P=0$ qui permet de trouver ρ par élimination est identique pour les deux systèmes ([5]):

Et il est bon de remarquer qu'en éliminant de ces équations les quantités *ν', ν'', ν''',...,* on aura une équation finale en ρ^2 qui sera nécessairement la même que celle qui résulte des équations (c) par l'évanouissement des quantités *λ', λ'', λ''',... ;* ce qui peut se voir aisément à *priori*.

L'équation algébrique $P=0$ permet donc de déterminer les coefficients *ν* directement à partir du système (a) sans nécessiter le double emploi de la méthode des coefficients indéterminés et la condition (i) sur les indéterminées ν s'identifie, à un coefficient multiplicatif prêt, à l'équation algébrique $P=0$:

Faisons maintenant $\rho=\rho_m$, nous aurons

$$\begin{cases} A'\upsilon'+B'\upsilon''+C'\upsilon'''+...+N^{(n)}\upsilon^{(n)}=-\rho_m^2\upsilon', \\ A''\upsilon'+B''\upsilon''+C'''\upsilon'''+...+N''\upsilon^{(n)}=-\rho_m^2\upsilon'', \\ A'''\upsilon'+B'''\upsilon''+C'''\upsilon'''+...+N'''\upsilon^{(n)}=-\rho_m^2\upsilon''', \\ ... \\ A^{(n)}\upsilon'+B^{(n)}\upsilon''+C^{(n)}\upsilon'''+...+N^{(n)}\upsilon^{(n)}=-\rho_m^2\upsilon^{(n)}, \end{cases}$$

et l'équation (i) deviendra

$$(\rho^2-\rho^2_m)\ [\nu'\lambda'+\nu''\lambda''+\nu''\lambda'''+....+\nu^{(n)}\lambda^{(n)}]=0$$

laquelle devra être vraie pour toutes les valeurs de ρ qui satisfont aux équations (e), d'où celle-ci est tirée, on aura en général

$$[\nu'\lambda'+\nu''\lambda''+\nu''\lambda'''+....+\nu^{(n)}\lambda^{(n)}]=0,$$

lorsque $\rho=\rho_1, \rho_2, \rho_3,...,\rho_n$ excepté ρ_m, auquel cas l'équation se vérifie d'elle-même, à cause du facteur $\rho^2-\rho^2_m$.

Les *n-1* conditions (h) qui définissent les (ν) sont vérifiées pour $\rho=\rho_1,...,\rho_n$, excepté ρ_m :

$$(h)\ \nu'_m\lambda'+\nu'_m{}'\lambda''+...+\nu^{(n)}_m\lambda^{(n)}=0$$

Ces conditions s'expriment par une équation polynomiale de degré *n-1* dont les racines coïncident avec *n-1* racines de $P=0$ et qui s'identifie donc, à un coefficient multiplicatif près, à une factorisation de *P* par le coefficients $(\rho^2-\rho_m^2)$:

$$(\rho^2-\rho^2_m)\ [\nu'_m\lambda'+\nu''_m\lambda''+\nu'''_m\lambda'''+....+\nu^{(n}{}_m{}^{)}\lambda^{(n)}]=\xi\ P=(I-\frac{\rho^2}{\rho_1^2})(I-\frac{\rho^2}{\rho_2^2})....(I-\frac{\rho^2}{\rho_n^2});$$

$$[...]\ \upsilon_m^{'}\lambda'+\upsilon_m^{''}\lambda''+\upsilon_m^{'''}\lambda'''+...+\upsilon_m^{(n)'}\lambda^{(n)}=\chi(I-\frac{\rho^2}{\rho_1^2})(I-\frac{\rho^2}{\rho_2^2})....(I-\frac{\rho^2}{\rho_n^2})$$

en prenant tous les facteurs hormis $(1-\rho^2/\rho_m^2)$

L'expression $Q_m=\nu'_m\lambda'+...+\nu_m^{(n)}\lambda^{(n)}$ qui permet, via la condition (h) de déterminer les *μ* s'obtient par conséquent en factorisant l'équation algébrique $P=0$ par $\rho-\rho_m$ ([6]). En remontant les étapes du calcul, il est alors possible d'exprimer la solution aux conditions initiales $y^{(s)}$ par une formule ne nécessitant aucun emploi de la méthode des coefficients indéterminées :

$$y^{(s)}=\frac{\nu_1^{(s)}}{Q_1}\theta_1+\frac{\nu_2^{(s)}}{Q_2}\theta_2+...+\frac{\nu_n^{(s)}}{Q_n}\theta_n$$

---

[5] En termes contemporains, les déterminants (ou les polynômes caractéristiques) de deux matrices transposés sont égaux. Cette propriété n'est pas vraie pour les vecteurs propres de deux matrices transposées et les systèmes (λ) et (ν) ne coïncident pas même si les ρ coïncident.

[6] D'un point de vue contemporain, la nature des coefficients indéterminées λ est changeante, ils désignent le plus souvent des polynômes en ρ, et permettent donc d'exprimer le polynôme caractéristique (ils correspondent alors à une écriture générale des vecteurs propres du système). La signification change lorsqu'un indice est attribué à λ et λ_m correspond alors à un nombre (le coefficient du vecteur propre associé à ρ_m).

> Je fais en sorte *que* $(2\text{-}2\nu)x+(2\nu\text{-}1)y$ soit un multiple de $-x\text{-}\nu y$, ce qui donne $2\text{-}2\nu = \frac{2\nu-1}{\nu}$; & $\nu = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$; donc faisant $x+\nu y = u$, ou plutôt $x + \frac{y}{\sqrt{2}} = u$, & $x\text{-}\frac{y}{\sqrt{2}} = u'$, on aura les deux équations
>
> $$-ddu = (2\text{-}\sqrt{2})\ 2u\ \frac{dt^2}{T^2},\quad \&\ \text{-}ddu' = (2+\sqrt{2}).\ \frac{2u'dt^2}{T^2}.$$
>
> *[1758, 145].*

L'intégration de ces équations linéaires à coefficients constants, basée sur la solution d'Euler [1743] ([18]), est présentée par d'Alembert dans un mémoire adressé à l'académie de Berlin en 1747 [d'Alembert, 1750] et fournit des "intégrales qui sont complètes" ([19]) :

> [...] multipliant la 1ere par du, on a l'intégrale $\frac{du^2}{\sqrt{AA\text{-}uu}} = \frac{dt}{T}\ \sqrt{4\text{-}2\sqrt{2}}$, parceque t croissant, u diminue ; donc $u = A\cos \frac{t\sqrt{4\text{-}2\sqrt{2}}}{T}$, & $u' = B\cos. \frac{t\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{T}$, intégrales qui sont complètes, [...] ; de là on tirera les valeurs de x & de y, & on déterminera les constantes A&B par les valeurs connues & données de x & de y lorsque $t = 0$.
>
> [1758, 145].

La méthode de d'Alembert ne se réduit pas au seul détail technique d'une application de la méthode des coefficients indéterminés. Elle est sous-tendue par une représentation mécanique du problème explicitée dans le *Traité de dynamique.* Le principe directeur de la méthode, celui qui justifie et guide l'emploi de la méthode des coefficients indéterminés et ramène le problème à la résolution d'une équation algébrique de degré 2, est basé sur une observation mécanique attribuée à Daniel Bernoulli:

> Je me contenterai de dire que l'on remarque aisément dans les valeurs de x & de y trouvées ci-dessus, la double oscillation que M. Bernouilli a observée dans le mouvement du pendule dont il s'agit ; chacune de ces oscillations est

---

[18] Au sujet des travaux d'Euler et de D. Bernouilli sur les petites oscillations d'une corde et de la solution d'Euler de 1743, consulter [Gilain, 2003, 443].

[19] Ci-dessous, un exemple avec des notations contemporaines : si on considère des oscillateurs harmoniques couplés, de même masse m, reliés à des points A et B par des ressorts de même raideur k_0 et reliés entre eux par un ressort de raideur k, glissant sans frottement sur (AB), les équations du mouvement s'écrivent :

$$md^2x_1/dt^2 = -k_0x_1 - k(x_1\text{-}x_2)$$
$$md^2x_2/dt^2 = -k_0x_2 - k(x_2\text{-}x_1)$$

Le changement de variable : $u = x_1+x_2$ et $v = x_1\text{-}x_2$ donne les deux équations indépendantes :

$$md^2u/dt^2 = -k_0u$$
$$md^2v/dt^2 = -k_0\,v\text{-}2kv$$

Les solutions $u = a\cos\omega' t$ et $v = a\cos\omega'' t$ peuvent s'interpréter comme deux oscillateurs indépendants, tandis que les solutions du système feront apparaître un phénomène de battement :

$$x_1 = (a/2)(\cos\omega' t + \cos\omega'' t)$$
$$x_2 = (a/2)(\cos\omega' t - \cos\omega'' t)$$

Dans cette dernière formule, les Q_m sont obtenus directement par factorisation de P et les (ν) sont obtenues à partir du système (k) déduit directement du système différentiel (a). Dans la pratique, les facteurs Q_m sont déterminés par de simples différentiations de P :

Prenons les différences de part et d'autre, en faisant varier ρ, et supposons ensuite $\rho = \rho_m$, [...]

$$\frac{\chi dP}{d\rho} = -\frac{2}{\rho_m}[\nu'_m\lambda_m' + \nu''_m\lambda_m'' + \ldots \nu^{(n)}_m\lambda_m^{(n)} = \frac{2Q_m}{\rho_m}$$

donc on aura en général,

$$Q = -\frac{1}{2}\chi\rho\,\frac{dP}{d\rho},$$

Ce qui pourra servir à abréger le calcul de la valeur de Q dans plusieurs occasions.

- **Application de la méthode à l'exemple des oscillations d'un fil.**

Lagrange illustre sa méthode en développant l'exemple des "*oscillations d'un fil fixe par une de ses extrémités, et chargé d'un nombre quelconque de poids*" [Lagrange, 1766, 535] :

Soit n le nombre de poids, que nous supposerons, pour plus de simplicité, égaux entre eux et également éloignés les uns des autres ; imaginons que le fil ne fasse que des oscillations infiniment petites et dans le même plan : et soient nommées $y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$ les distances des corps à la verticale, à commencer par le plus bas, et a la distance d'un corps à l'autre : on aura [...]

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{y' - y''}{a} = 0$$

$$\frac{d^2y''}{dt^2} + \frac{-y' + y'' - 2y'''}{a} = 0$$

$$\frac{d^2y'''}{dt^2} + \frac{-2y'' + 5y''' - 3y^{iv}}{a} = 0$$

$$\frac{d^2y^{iv}}{dt^2} + \frac{y^{iv} - y^{v}}{a} - 3\,\frac{y''' - 2y^{iv} + y^{v}}{a} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^2y^{iv}}{dt^2} + \frac{-(n-1)y^{(n-1)} + (2n-1)y^{(n)}}{a}$$

La résolution nécessite la détermination des indéterminés ν, de l'équation $P=0$, de ses racines ρ et de ses facteurs Q_m. Dans ce cas particulier, le système d'équations différentielles est cependant très simplifié et Lagrange remarque que, "à l'égard des quantités ν, on les trouvera de la même manière" que les quantités λ. Les (λ) et les (ν) coïncident car les systèmes (c) et (k) sont identiques, en effet les coefficients du système (c), disposés en miroir, ne sont pas affectés par le *jeu sur les primes et les indices.* La seule détermination de l'équation $P = 0$ permet donc une résolution générale du système :

$$\lambda'' = (1 + a\rho^2)\lambda''$$

$$\lambda''' = \frac{-\lambda' + (3 + a\rho^2)\lambda''}{2} = (1 + 2a\rho^2 + \frac{a^2\rho^4}{2})\lambda'$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda^{iv} = (1 + 3a\rho^2 + \frac{3a^2\rho^4}{2} + \frac{a^3\rho^6}{2.3})\lambda',$$

$$\lambda^{v} = (1 + 4a\rho^2 + \frac{6a^2\rho^4}{2} + \frac{4a^3\rho^6}{2.3} + \frac{a^4\rho^8}{2.3.4})\lambda',$$

et ainsi de suite ; de sorte qu'on aura en général

$$\lambda^{(m)} = [I + (m-1)a\rho^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{4}a^2\rho^4 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{4.9}a^3\rho^6 + \ldots]\lambda'.$$

représentée par chacun des deux termes de la valeur de x & de celle de y. En effet, l'équation du mouvement d'un pendule simple de longueur λ, est $-ddz = \frac{2azdt^2}{\lambda T^2}$, ou $z = K \times cof. \frac{1}{T}\sqrt{\frac{2a}{\lambda}}$; d'où il est facile de voir que les mouvemens des corps M, m sont composées de deux mouvemens, synchrones chacun à celui d'un pendule simple.
[1758, 152].

Les mouvements d'un fil lesté de deux masses m et M peuvent se "représenter" mécaniquement comme "composés" des deux oscillations indépendantes d'un "pendule simple". De la même manière que "chacune des oscillations est représentée" par x et y, la méthode des coefficients indéterminés va représenter mathématiquement l'observation de Bernouilli. Le coefficient indéterminé ν bénéficie d'une double signification : signification mathématique d'abord comme solution d'une équation du second degré, signification mécanique également comme représentant une période propre des petites oscillations d'un "pendule simple". Les deux "intégrales" u et u' représentent mécaniquement les oscillations des deux pendules simples et la combinaison algébrique $x+\nu y = u$, permet d'exprimer le mouvement composé par les variables x et y.
Lorsque Lagrange, dans ses "*Solutions de différents problèmes de calculs intégral*" écrites entre 1762 et 1765, se propose de généraliser le problème de d'Alembert à un système de n corps, sa méthode mathématique traduit toujours la représentation mécanique selon laquelle le mouvement d'une corde lestée de n masses se représente comme la composition des oscillations indépendantes de n cordes chargées d'une seule masse ([20]) :

Ainsi le mouvement des corps sera le même, dans ce cas que s'ils étaient pesans et qu'ils fussent suspendus chacun à un fil de longueur $1/r_m^2$ [([21])], la gravité étant prise pour l'unité des forces accélératrices ; d'où l'on voit que le système est susceptible d'autant de différents mouvements isochrones que l'équation $P = 0$ a de racines réelles négatives et inégales.
[Lagrange, 1766, 534].

La représentation mécanique se traduit par une méthode mathématique consistant à ramener l'intégration d'un système de n équations différentielles linéaires à coefficients constants à l'intégration de n équations indépendantes intégrables séparément. Pour déterminer les équations indépendantes, Lagrange fait un usage de sa méthode de réduction de l'ordre d'une équation différentielle dont des solutions particulières sont connues. Ces solutions particulières représentent les oscillations des pendules simples, $\xi = E\sin(t\sqrt{K} + \varepsilon)$, dont la composition mathématique permet d'écrire la solution "générale" du problème. Reste la résolution du problème aux conditions initiales, c'est-à-dire l'explicitation de la manière dont les solutions particulières se combinent en fonction des données initiales. Lagrange élabore une méthode propre, par

[20] Pour la représentation mécanique qui sous tend les méthodes mathématique, voir, de manière générale les conclusions faites par d'Alembert [1758, 152-160], ou Lagrange [1766, 532-539] en matière de fréquences d'oscillations.

[21] $1/r^2$ désigne une racine de l'équation.

Or il est visible que, pour satisfaire à la dernière équation

$$\rho^2\lambda^{(n)} + \frac{-(n-1)\lambda^{(n-1)}+(2n-1)\lambda^{(n)}}{a} = 0$$

il faut supposer $\lambda^{(n+1)} = 0$,

ce qui donne

$$1+na\rho^2+ {}^2+ \frac{n(n-1)a^2}{4}\rho^4+ \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4.9}\rho^6+\ldots. = 0$$

équation d'où 'on tirera n valeurs de ρ² […].

$$P = 1+na\rho^2+ \frac{n(n-1)a^2}{4}\rho^4+ \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4.9}\rho^6+\ldots.$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{2}\rho\ \frac{dP}{d\rho} = na\rho^2+ \frac{n(n-1)a^2}{2}\rho^4+ \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4.3}\rho^6+\ldots.$$

[...]

$$Q = -\frac{1}{2}\chi\rho\ \frac{dP}{d\rho}$$

[...] Faisons donc ces substitutions dans la dernière formule du n°30, on aura l'expression générale des quantités y, et le problème sera résolu.

opposition à la méthode des coefficients indéterminés, qui lui permet d'écrire une solution "générale" permettant, dans la pratique, de résoudre "facilement" la question des oscillations d'un système de n corps par la seule résolution d'une équation algébrique de degré n associée au système d'équations différentielles (la méthode de Lagrange est étudiée en encart 1.a.). La généralisation impliquée par le passage du problème de d'Alembert, limité à deux ou trois masses, au problème "général" de n masses, pose cependant de nouvelles questions : l'équation algébrique, "$P = 0$", à laquelle l'intégration du système différentiel est ramenée, est de degré n, elle ne peut donc pas être résolue algébriquement "en général", contrairement à l'équation particulière de d'Alembert. Or la méthode nécessite que les racines de cette équation soient toutes inégales afin de permettre l'obtention des n solutions indépendantes $\xi = E\sin(t\sqrt{K} + \varepsilon)$ et cette difficulté propre à la *généralité* du problème posé par Lagrange est à l'origine d'une discussion qualitative sur la nature des racines de l'équation des petites oscillations.

La représentation mécanique mise en évidence dans cette partie explique également que la méthode du XVIII^e siècle soit irréductible au point de vue contemporain de la théorie des matrices : le problème ne peut pas être posé en termes de l'existence d'une *transformation* permettant de passer du système (*) (première citation de Lagrange) au système (**) de n équations indépendantes $\frac{d^2\xi}{dt^2} + K\xi = 0$. Ce changement de *forme* n'a de sens qu'en tant qu'il est pensé comme l'expression du mouvement de n corps (*) par la composition de n mouvements simples (**). La méthode des petites oscillations ne peut donc pas contenir la question, qui semble si naturelle aujourd'hui, de la forme que peut prendre (*) dans le cas où l'on ne peut exprimer ce système par (**), c'est-à-dire en cas de racines multiples. Au XVIII^e siècle, la possibilité de ce passage est assurée par la représentation mécanique implicite. Je montrerai que c'est aussi en ce sens que l'article de Weierstrass [1858] clôt la discussion en exprimant le problème comme un problème de changement de "forme" beaucoup plus proche de sa formulation contemporaine comme problème de réduction d'une matrice.

- **Conclusion.**

En 1766, par un double emploi de la méthode des coefficients indéterminés, Lagrange élabore une méthode qui donne une expression générale des solutions aux conditions initiales d'un système d’équations différentielles à coefficients constants ([1]). La méthode s’affirme comme une méthode propre au problème considéré et se caractérise par :

- Un affranchissement des méthodes des coefficients indéterminés ([2]).
  "Mais voici un moyen fort simple de déterminer ces inconnues et sans les embarras de l’élimination." [Lagrange, 1788, 251].

- Un jeu sur les primes et les indices.
  L’examen de cas particuliers comme les oscillations d’un fil révèle que, dans le cas où les inversions de primes et d’indices impliquées par les coefficients indéterminées laissent inchangés les systèmes d’équations, la méthode se simplifie considérablement. Lagrange en déduit une propriété générale des systèmes mécaniques, due aux expressions quadratiques des formules de conservation d’énergie et formulée dès 1774 par l’élaboration d’une notation très efficace pour représenter ce que Laplace dénommera les "rapports remarquables" :

Notation de 1766

$$(c)\begin{cases} \rho^2\lambda' + A'\lambda' + A''\lambda'' + A'''\lambda''' + \ldots + A^{(n)}\lambda^{(n)} = 0, \\ \rho^2\lambda'' + B'\lambda' + B''\lambda'' + B'''\lambda''' + \ldots + B^{(n)}\lambda^{(n)} = 0, \\ \rho^2\lambda''' + C'\lambda' + C''\lambda'' + C'''\lambda''' + \ldots + C^{(n)}\lambda^{(n)} = 0, \\ \ldots \\ \rho^2\lambda^{(n)} + N'\lambda' + N''\lambda'' + N'''\lambda''' + \ldots + N^{(n)}\lambda^{(n)} = 0, \end{cases}$$

Notation de 1774

$$0 = (\text{I})\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + (\text{I},2)\,\frac{d^2\psi}{dt^2} + (\text{I},3)\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \&\text{c} + [\text{I}]\,\xi + [\text{I},2]\,\psi + [\text{I},3]\varphi + \&\text{c}.$$

$$0 = (2)\,\frac{d^2\psi}{dt^2} + (\text{I},2)\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + (2,3)\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \&\text{c} + [2]\psi + [\text{I},2]\xi + [2,3]\varphi + \&\text{c}$$

$$0 = (3)\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} + (\text{I},3)\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + (2,3)\,\frac{d^2\psi}{dt^2} + \&\text{c} + [3]\varphi + [\text{I},3]\xi + [2,3]\psi + \&\text{c}$$

&c.

- Le rôle essentiel donné à une certaine équation algébrique associée au système différentiel. D’une part les racines de l’équation permettent de déterminer les petites oscillations propres ρ des solutions particulières, d’autre part les factorisations de l’équation permettent d’obtenir les systèmes de solutions (λ) envisagées comme des polynômes en ρ.

[1] Dans le cas où les racines caractéristiques sont distinctes.

[2] Dans cette même contestation des méthodes d’élimination, Laplace apportera une innovation importante. Ses "*Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde*" [Laplace, 1776, 395-406], utilisent un calcul de *déterminant* pour déterminer l’équation de degré *n* des petites oscillations .

> Si l’on voulait faire usage des méthodes ordinaires d’élimination, on tomberait dans des calculs extrêmement compliqués ; mais M. de Lagrange a donné dans le Mémoire cité une très belle méthode pour éliminer dans ce cas et dans d’autres semblables. [Laplace, 1775, 361]

3. La discussion de Lagrange sur la nature des racines d'une équation algébrique.

Les méthodes de d'Alembert et Lagrange emploient des coefficients indéterminés afin de ramener un système à une succession d'équations indépendantes. La condition sur les coefficients indéterminés s'exprime par une équation algébrique, $P=0$, dont le degré est égal au nombre de corps considérés et dont chaque racine est associée à une équation différentielle indépendante. Le problème mécanique considéré attend une conclusion qualitative sur la nature des oscillations, ces oscillations restent-elles bornées ou s'amplifient-elles sans limite ? Comme on l'a vu au paragraphe 2, la représentation mécanique sous jacente à la méthode algébrique interprète les racines de l'équation $P=0$ comme les périodes des petites oscillations et la question de la stabilité se traduit alors par une discussion qualitative sur les racines d'une équation algébrique : le système est stable, les oscillations bornées, à condition que les racines soient réelles, négatives et inégales. Dans cette conclusion, il faut distinguer entre les deux qualités des racines que sont leurs natures (réelles, négatives) et leurs multiplicités. Dans le cas où les racines sont imaginaires ou réelles positives, la méthode s'applique et les oscillations s'expriment par une exponentielle réelle : elles ne sont donc pas bornées. En cas d'occurrence de racines multiples, la méthode ne permet plus l'obtention de n équations indépendantes et l'expression des solutions n'est plus valable. C'est dans ce deuxième cas que la discussion sur la nature des racines prend de l'ampleur avec le caractère général donné au problème par Lagrange. Le cas particulier traité par d'Alembert ne nécessite aucune discussion puisqu'il permet une détermination effective de l'équation algébrique et de ses racines et c'est pour les besoins de la généralité voulue par Lagrange que la discussion se développe. La première généralisation provient de d'Alembert lui-même qui, après avoir développé un cas particulier caractérisé par des hypothèses simplificatrices comme nous l'avons vu au paragraphe 2, traite du cas "général" des oscillations de deux corps où "l'on n'a ni $P=p$, ni $M=m$, ni $L=l$". Les équations (K) et (N) doivent alors être exprimées sous une forme générale:

$$ddx=(ax+by).dt^2, \ \& \ ddy=(cx+ey).dt^2.$$

[d'Alembert, 1758, 147].

L'équation du second degré dont la quantité indéterminée v est solution a-t-elle toujours deux solutions réelles distinctes ? d'Alembert répond par un argument mécanique : selon le principe des forces vives, les deux corps M et m arrivent tous deux en même temps à la verticale, ce qui implique que les termes dans les équations (36) entretiennent la relation de proportionnalité suivante:

$$(\mathrm{O}) \quad \frac{px}{l} + \frac{MPx}{lm} - \frac{MPy}{lm} : \frac{yP}{L}\left(\frac{M+m}{m}\right) - \frac{x}{L}.\left(p+\frac{M.P}{m}\right) :: x:y$$

[1758, 142].

et cette "analogie étant réduite en équation" donne :

$$\frac{y}{x} + \frac{M+m}{2M} - \frac{pLm}{2Mpl} - \frac{L}{2l} = \pm\sqrt{[}\frac{pLm}{MPl} + \frac{L}{l} + (\frac{M+m}{2M} - \frac{pLm}{2MPl} - \frac{L}{2l})^2]$$

Cette dernière équation permet à d'Alembert de conclure que les valeurs de *x* et *y* doivent être distinctes car le terme sous le radical est toujours positif :

> [...], il s'ensuit que ν n'aura jamais deux racines égales. On peut voir très aisément que la quantité radicale est toujours plus grande que l'autre ; d'où il s'ensuit que jamais $\frac{y}{x}$ n'aura une valeur = 0, ni par conséquent $\frac{1}{\nu}$.
> [1758, 148].

Lorsqu'il envisage l'étude d'un système comportant un nombre quelconque de corps, d'Alembert illustre la portée générale de sa méthode en traitant le cas des oscillations de trois corps qui repose sur la détermination d'une équation du troisième degré ([22]) :

> D'où l'on tire l'équation $8/\nu^3 + 3/\nu^2 - 12/\nu + 4 = 0$.
> [...] elle a toutes ses racines réelles ; ce que nous prouverons d'ailleurs d'une autre manière dans l'article suivant.
> Soient donc ν, ν', ν'' les trois racines de cette équation, on aura [...] les trois équations
> $-ddu = (5-2\nu).\ \frac{2udt^2}{T^2}$; $-ddu' = (5-2\nu').\ \frac{2u'dt^2}{T^2}$; $-ddu'' = (5-2\nu'').\ \frac{2u''dt^2}{T^2}$;
> d'où l'on tire comme dans l'article 118, les valeurs de *u, u', u'',* & par conséquent celles de *x, y, z.*
> [1758, 165].

Il est cependant plus délicat de statuer "en général" sur la nature des racines. La discussion se développe sur le plan mécanique et vise à démontrer que, parmi tous les cas possibles, seule l'occurrence de racines réelles, négatives et distinctes correspond à des oscillations bornées. La discussion sur la réalité des racines mobilise le principe de conservation des forces vives en une généralisation, "quel que soit le nombre des corps", des arguments développés pour le cas de deux corps et selon lesquels, "si on veut qu'ils arrivent tous en même tems à la verticale", les oscillations *x, y, z* sont nécessairement des expressions réelles de *t* [d'Alembert, 1758, 163]. Ces expressions sont déterminées à l'aide des racines de l'équation algébrique en ν et, dans le cas où ces racines sont imaginaires, s'expriment comme combinaisons d'intégrales de la forme :

$$u = Ae(\delta+\varepsilon\sqrt{-1})t + Be-(\delta+\varepsilon\sqrt{-1})t$$

La nature, réelle, *de x, y, z* implique alors que les "parties imaginaires "des racines de "l'équation en ν" se "détruisent mutuellement" [1758, 165-166]. Mais d'Alembert va plus loin en affirmant que les oscillations devant "toujours être extrêmement petites, par la nature du problème", l'occurrence de racines

[22] d'Alembert se contente en réalité d'une étude pour le cas de trois masses égales.

imaginaires doit être rejeté car elle imposerait la présence de termes exponentielles, croissant à l'infini ([23]) :

> Mais on peut prouver aisément par la valeur même de *u* qu'il n'y aura jamais d'imaginaires. [...] En effet les valeurs de *x,* de *y* & de *z* &c. doivent toujours être extrêmement petites, par la nature du Problême, puisqu'il est clair que chacun des corps ne peut faire que des oscillations de peu d'étendue ; ainsi les valeurs de *x, y, z* &c ne peuvent renfermer des quantités de l'espèce eδt, parcequ'alors elles croîtront à l'infini ; donc u ne doit pas en renfermer non plus : donc $\delta = 0$. Donc $u = (A+B)cos.\varepsilon t \pm (A-B)\sqrt{-1}sin.\varepsilon t$; & comme u ne doit point avoir de valeur imaginaire, il s'ensuit que $(A-B)\sqrt{-1}sin.\varepsilon t = 0$, donc $A = B$. Donc puisque $u = (A+B)cos.\varepsilon t$, on aura $ddu/udt^2 = -\varepsilon^2$; donc l'équation différentielle en u ne contiendra jamais d'imaginaires ; & comme le coefficient de *u* dans cette équation ne renferme d'indéterminée que ν, il s'ensuit que la valeur de ν sera toujours réelle.
> [d'Alembert, 1758, 167].

Il reste alors à traiter les cas d'occurrence de racines multiples, dans lesquels la méthode est mise en échec et ne permet pas d'obtenir la forme générale des solutions. d'Alembert évoque alors qu'il suffit de faire subir une variation infiniment petite α aux coefficients de l'équation afin de se ramener au cas des racines inégales, la quantité α disparaissant à l'issu du calcul. Lorsqu'il entreprend en 1766 de généraliser la méthode de d'Alembert en déterminant explicitement les oscillations d'un système quelconque de *n* corps, Lagrange reprend à son compte l'argument de d'Alembert et propose un calcul effectif pour le cas d'une racine double ρ_1 ([24]). Posant : $\rho_2 = \rho_1 + \omega$, ω étant une "quantité évanouissante", Lagrange conclut :

> [...] il est évident que les termes de la valeur de $y^{(s)}$ qui répondent aux racines égales contiendront toujours l'angle *t*, et de plus des exponentielles ordinaires si ces racines sont positives, et des sinus et des cosinus si elles sont négatives.
> [Lagrange, 1766, 529].

L'occurrence d'une racine multiple est interprétée comme engendrant une solution de la forme $P(t)e^{\delta t}$, $P(t)$ contenant des puissances de l'arc *t* d'un degré égal à la multiplicité de la racine. Les différents cas discutés par d'Alembert et Lagrange -racines imaginaires ou multiples,- donnent finalement lieu à une conclusion homogène qui qualifie les solutions associées de mécaniquement incorrectes puisque impliquant des oscillations croissantes à l'infini ([25]). Cette

---

[23] L'argument donné par d'Alembert sur la croissance à l'infini de *eδt* est faux si *δ* est négatif.

[24] Cauchy produit encore en [1839a] un raisonnement reposant sur l'introduction d'infiniment petits pour traiter le cas des racines multiples. Un tel raisonnement peut être rendu mathématiquement rigoureux (et par conséquent arriver à des conclusions opposées à celles de Lagrange) par un raisonnement sur les limites, utilisant le théorème de Bolzano Weierstrass sur l'ensemble des matrices orthogonales, fermé et borné dans M_n(Ë). Voir Hawkins [1975].

[25] Ce type de solutions peut effectivement intervenir dans la résolution d'un système d'équations différentielles d'ordre *n* dont la *matrice* aurait des *valeurs propres* multiples. Il n'intervient cependant pas dans l'hypothèse *symétrique* ou plus généralement *diagonalisable*. Les solutions de Lagrange peuvent provenir, comme le pense Yvon Villarceau [1870], d'une extrapolation de la résolution l'équation différentielle linéaire d'ordre *n* : dans ce cas, l'existence d'une racine multiple

conclusion homogène donne lieu à l'énoncé par Lagrange d'une "méthode générale" pour caractériser la stabilité d'un système mécanique par la nature des racines de l'équation algébrique associée:

> De là on tire une méthode générale pour voir si l'état d'équilibre d'un système quelconque donné de corps est stable, c'est-à-dire si, les corps étant infiniment peu dérangés de cet état, ils y reviendront d'eux-mêmes, ou au moins tendront à y revenir. [...]
> 1° Si toutes les racines de cette équation sont réelles négatives et inégales, l'état d'équilibre sera stable en général, quel que soit le dérangement initial du système.
> 2° Si ces racines sont toutes réelles, positives ou toutes imaginaires ou en partie positives, et en partie imaginaires, l'état d'équilibre n'aura aucune stabilité, et le système une fois dérangé de cet état ne pourra le reprendre ;
> 3° Enfin, si les racines sont en partie réelles négatives et inégales, et en partie réelles négatives et égales ou réelles et positives, ou imaginaires, l'état d'équilibre aura seulement une stabilité restreinte et conditionnelle [...].
> [1766, 532].

A l'issu du mémoire publié par Lagrange en 1766, le problème des petites oscillations donne lieu à un seul type de solution mécaniquement correcte correspondant à l'occurrence de racines réelles, négatives et toutes distinctes. Pour une centaine d'années, le problème est considéré comme résolu : la conclusion de Lagrange ne sera pas remise en cause avant le mémoire de Weierstrass de 1858 et l'intervention d'Yvon-Villarceau à l'Académie parisienne en 1870 ([26]). Pendant la centaine d'année qui sépare la conclusion de Lagrange de sa remise en cause pour le cas des racines multiples, la discussion sur la nature qualitative des racines de l'équation des petites oscillations se poursuit cependant sous des formes différentes et assure la postérité de la discussion des petites oscillations.

à l'équation caractéristique implique systématiquement une solution de la forme donnée par Lagrange (la matrice associée à une équation d'ordre n n'est jamais diagonalisable si elle à des racines multiples).

L'absence de notion d'indépendance linéaire ne permet pas d'imaginer deux solutions s'exprimant à partir d'une même fonction $e^{\delta t}$ et tout de même "indépendantes". D'un point de vue contemporain, il y a ici deux familles indépendantes : celle des fonction $(e^{\delta i t})$ dans l'espace des fonctions dérivables et celle des vecteurs de Ën auquel est isomorphe l'espace des solutions de l'équation. C'est l'indépendance de cette dernière famille qui est nécessaire et qui peut donc être réalisée pour des racines multiples.

[26] Comme Thomas Hawkins l'a montré, avant Weierstrass les mathématiciens ne semblent pas croire à la possibilité d'une solution "générale" exprimable algébriquement et valable de manière homogène quelle que soit la multiplicité des racines. Cauchy donne une solution générale en 1839 dans le cadre de l'analyse complexe mais ne revient pas sur la conclusion de Lagrange.

4. La discussion de Laplace sur la stabilité des variations séculaires.

Si le système mécanique est stable alors les racines de l'équation algébrique associée sont réelles, négatives et inégales. Cette implication qui se présente comme une conclusion du traitement par Lagrange du problème des petites oscillations, marque un point d'origine pour la discussion des petites oscillations qui se développe, chez différents auteurs, dans différentes théories, sur une durée d'un siècle. La discussion change de nature au cours de son histoire et sa première mutation est due à la mathématisation des variations séculaires des planètes réalisée par Lagrange dans les années 1770. Le problème des petites oscillations des planètes sur leurs orbites est abordé par la méthode développée en 1766 pour les petites oscillations d'une corde. La stabilité du système solaire ne pouvant être prise comme hypothèse, la généralisation de la méthode des petites oscillations au problème d'astronomie inverse la logique de la discussion sur la nature des racines qui se focalise sur l'implication réciproque : les racines sont réelles donc le système est stable.
Depuis Berlin, Lagrange adresse en 1778 à l'académie de Paris, dont il est lauréat de deux prix de mécaniques célestes (1764, satellites de Jupiter, et 1766, libration de la lune), un mémoire intitulé "Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds et des inclinaisons des planètes" [1774]. Ce mémoire construit une théorie mathématique des variations séculaires des planètes par la méthode développée en 1766 pour intégrer les systèmes d'équations différentielles des petites oscillations d'une corde:

> Si les Planètes étaient simplement attirées par le Soleil, et n'agissaient point les unes sur les autres, elles décriraient autour de cet astre, des ellipses variables suivant les lois de Kepler, comme Newton l'a démontré le premier, et une foule d'Auteurs après lui. Mais les observations ont prouvé que le mouvement elliptique des Planètes est sujet à de petites oscillations, et le calcul a démontré que leur attraction mutuelle peut en être la cause. Ces variations sont de deux espèces : les unes périodiques et qui ne dépendent que de la configuration des Planètes entre elles ; celles-ci sont les plus sensibles, et la calcul en a déjà été donné par différents Auteurs ; les autres séculaires et qui paraissent aller toujours en augmentant, ce sont les plus difficiles à déterminer tant par les observations que par la Théorie. Les premières ne dérangent point l'orbite primitive de la Planète ; ce ne sont, pour ainsi dire, que des écarts passagers qu'elle fait dans sa course régulière, et il suffit d'appliquer ces variations au lieu de la Planète calculé par les Tables ordinaires du mouvement elliptique. Il n'en est pas de même des variations séculaires. Ces dernières altèrent les éléments mêmes de l'orbite, c'est-à-dire la position et le dimensions de l'ellipse décrite par la planète ; et quoique leur effet soit insensible dans un court espace de temps, il peut néanmoins devenir à la longue très considérable.
> [Lagrange, 1781, 125].

Il s'agit là d'une véritable construction : les paramètres déterminant les orbites planétaires (excentricités et angles d'inclinaisons sur le plan de l'écliptique) n'ont pas de lien intrinsèque avec les systèmes d'équations linéaires et ce n'est qu'à des approximations bien choisies que l'on doit une même mathématisation de la théorie des variations séculaires et des petites oscillations d'une corde. L'analogie est portée par une représentation mécanique selon laquelle les deux problèmes relèvent de "petites oscillations" ([27]) :

> [...] comme les orbites des planètes sont fort peu inclinées à l'écliptique, les quantités θ, θ_1, ..., et par conséquent aussi les quantités u, s, u_1, s_1,... seront nécessairement des quantités très petites ; de sorte qu'on pourra, du moins dans le premier calcul, négliger les termes affectés de ces quantités dans les expressions des distances (TS), (T_1S),...
> [Lagrange, 1778, 644].

Moyennant des approximations sur les paramètres mécaniques du problème ([28]), Lagrange déduit les équations différentielles des paramètres des orbites qui mettent désormais en évidence les "rapports remarquables" (0,1), (0,2),... construits par la méthode de 1766 (consulter l'encart 3_a) ([29]):

$$\frac{ds}{dt} + \frac{T_1 r_1 (r,r_1)_1}{4\mu r}(u-u_1) + \frac{T_2 r_2 (r,r_2)_1}{4\mu r}(u-u_2) + \ldots + \Pi = 0,$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{T_1 r_1 (r,r_1)_1}{4\mu r}(s-s_1) + \frac{T_2 r_2 (r,r_2)_1}{4\mu r}(s-s_2) + \ldots + \Psi = 0,$$

> [...]

$$(0,1) = \frac{T_1 r_1 (r,r_1)_1}{4\mu r},\ (0,2) = \frac{T_2 r_2 (r,r_2)_1}{4\mu r}, \ldots ;$$

$$(1,0) = \frac{Tr(r_1,r)_1}{4\mu_1 r_1},\ (1,2) = \frac{T_2 r_2 (r_1,r_2)_1}{4\mu_1 r_1}, \ldots ;$$

$$(2,0) = \frac{Tr(r_2,r)_1}{4\mu_2 r_2},\ (2,1) = \frac{T_1 r_1 (r_3,r_1)_1}{4\mu_2 r_2}, \ldots ;$$

> et ainsi de suite, [...].
> [1778, 646-647].

La méthode présentée par Lagrange pour l'intégration des équations reprend celle de 1766 : à partir de solutions particulières de la forme $s_i = A_i \sin(at+\alpha)$, $u_i = A_i \cos(at+\alpha)$, la méthode d'élimination appliquée au système différentiel conduit à une "*équation finale du degré $n^{ième}$, laquelle servira par conséquent à déterminer la constante a*" et permet de donner l'expression générale des solutions :

---

[27] Notations. Les paramètres des orbites sont $s = \theta \sin \omega$ et $u = \theta \cos\omega$.
ω l'angle de la ligne des nœuds, θ la tangente de l'inclinaison du plan de l'orbite avec celui des coordonnées *x* et *y* de la position du corps.

[28] Notations. Les planètes T_1, T_2,....ont pour coordonnées $(r_i \cos q_i,\ r_i \sin q_i\ r_i(u \operatorname{in} q_i - s_i \cos q_i))$, les distances au soleil et entre planètes sont (T_iS) et (T_iT_j), les forces d'attractions sont $S/(T_iS)^2$ et $T_j/(T_iT_j)^2$:

> De plus on pourra regarder, du moins dans la première approximation, les orbites comme circulaires, et par conséquent les rayons r, r_1,r_2,.... Comme constants, et les angles q,q_1,q_2,... comme proportionnels au temps, en sorte que l'on ait $q = \mu t$, $q_1 = \mu_1 t$, $q_2 = \mu_2 t$,....., μ, μ_1, μ_2,... étant des constantes telles que μt, $\mu_1 t$, $\mu_2 t$,.... Soient les mouvements moyens des planètes T, T_1,T_2,... qui répondent au temps.
> [Lagrange, 1778, 645]

[29] Les $(r\,;ri)_j$ désignent un coefficient du développement de l'expression quadratique donnant la distance des planètes entre elles.

Si donc on dénote par $a, b, c, \ldots$, les n racines de l'équation en a, et qu'on prenne n coefficients arbitraires $A, B, C, \ldots$ et autant d'angles arbitraires α, β, γ,..., on aura

$$s = A \sin(at+\alpha) + B \sin(bt+\beta) + C \sin(ct+\gamma) + \ldots,$$
$$s_1 = A_1 \sin(at+\alpha) + B_1 \sin(bt+\beta) + C_1 \sin(ct+\gamma) + \ldots,$$
$$s_2 = A_2 \sin(at+\alpha) + B_2 \sin(bt+\beta) + C_2 \sin(ct+\gamma) + \ldots,$$

[1778, 656].

Si la méthode d'intégration est similaire à celle de 1766, la représentation mécanique du problème a changé. L'application de la mathématisation développée pour les vibrations d'une corde aux variations séculaires des planètes n'est pas sans conséquence pour la méthode mathématique elle-même. La première conséquence importante est la nouvelle effectivité que requiert de la méthode son usage en astronomie : Lagrange développe une nouvelle méthode pour la détermination des constantes A_i B_i, $C_i, \ldots$, (c'est-à-dire des solutions aux conditions initiales) consistant en un procédé d'itération permettant de mener effectivement les calculs pour les planètes du système solaire [1778,634] ([30]). La seconde conséquence est l'inversion de la discussion sur la nature qualitative des racines. Dans la situation des petites oscillations de cordes, les présupposés de stabilité du problème mécanique impliquaient des propriétés des racines de l'équation associée- les oscillations sont petites donc les racines sont réelles -, dans le cadre de l'astronomie au contraire, la stabilité du système du monde n'est pas assurée ([31]) :

> Avant de terminer cet Article, nous devons encore remarquer que, quoique nous ayons supposé que les racines *a, b, c,...* de l'équation en *x* soient réelles et inégales, il peut néanmoins arriver qu'il y en ait d'égales ou d'imaginaires ; mais il est facile de résoudre ces cas par les méthodes connues : nous

---

[30] Cette méthode, dont la description dépasse l'objet de ce travail, est parfois désignée comme "méthode de Le verrier" en algèbre linéaire [Gantmacher, 1958]. La demande d'effectivité provenant de l'application de la méthode de Lagrange à l'astronomie se fait particulièrement ressentir pour le cas des variations séculaires qui nécessitent la prise en compte d'observations sur une très longue période [Lagrange, 1778, 634] :

> J'invite les Astronomes à faire usage de ces formules et à examiner si, par leur moyen, on peut rendre raison du peu d'accord que je trouve entre les observations anciennes et les modernes, les formules que d'autres Auteurs ont données pour cet objet étant insuffisantes, puisqu'elles ne représentent que les variations différentielles des lieux des nœuds et des inclinaisons ; de sorte que ces formules cessent d'être exactes au bout d'un certain nombre d'années, au lieu que les nôtres peuvent s'étendre à tant d'années qu'on voudra.

La conclusion de Lagrange n'est pas définitive et la question de l'extension des prévisions mathématiques des variations séculaires à un temps indéterminé restera très débattue au XIX^e^ siècle pour finalement recevoir une réponse négative chez Poincaré. Voir [Laskar, 1992].

[31] En termes contemporains, tout le problème de la stabilité du système solaire se résume donc au calcul des valeurs propres de deux matrices réelles (7×7 à l'époque car Neptune n'était pas encore découverte) A et B. Si ces valeurs propres sont toutes réelles et distinctes, alors les solutions sont quasi-périodiques, et les excentricités et inclinaisons ne présentent que des variations périodiques autour de leurs valeurs moyennes, mais si l'une des valeurs propres a une partie imaginaire non nulle, on obtient une instabilité exponentielle, une excentricité peut alors devenir très grande et entraîner la possibilité de rencontre de deux planètes [Laskar, 1992, 182].

observerons seulement que, dans le cas des racines égales, les valeurs de s, s_1, s_2,…, u, u_1, u_2,… contiendront des arcs de cercle, et que dans celui des racines imaginaires ces valeurs contiendront des exponentielles ordinaires ; de sorte que, dans l'un et l'autre cas, les quantités dont il s'agit croîtront à mesure que t croît ; par conséquent la solution précédente cessera d'être exacte au bout d'un certain temps ; mais heureusement ces cas ne paraissent pas avoir lieu dans le Système du monde.
[1778, 665].

En s'inversant, la problématique de la discussion sur la nature des racines prend une nouvelle ampleur : comment s'assurer de l'occurrence de racines réelles, négatives et inégales ? En 1781, Lagrange aborde la question de la stabilité du système solaire par un calcul effectif des solutions pour les planètes du système solaire. Le cas de Saturne et Jupiter est traité séparément en raison de leur éloignement ; l'étude des orbites des planètes Mars, Terre, Vénus et Mercure conduit à une équation du 4[e] degré :

Etant développée, elle montera au quatrième degré, et donnera par conséquent quatre valeurs de w, qui pourront être également employées pour c ; et c'est de la réalité et de l'inégalité de ces racines que dépend l'exclusion des arcs de cercle dans les variables des orbites des Planètes que nous considérons.
Il importe donc de résoudre cette équation rigoureusement.
[1781, 311].

Pour prouver la stabilité du système des quatre planètes, il faut démontrer l'existence de quatre racines distinctes et réelles d'une équation de degré 4. Ces racines sont obtenues par application de la méthode de réduction du degré par substitutions [1781, 311-316], et l'application numérique, basée sur les tables astronomiques et trigonométriques, fournit quatre racines réelles distinctes, *-6,9076 ; -4,6848, -4,9869 ; -6,6055*, ce qui assure la stabilité du système des quatre planètes :

Telles sont les racines de l'équation qui détermine la quantité c ; d'où l'on voit que cette quantité peut avoir quatre valeurs différentes toutes réelles, que nous désignerons par c, d, e, f, et qui donneront par conséquent autant de sinus et de cosinus dans les expressions des variables du Problème. Ainsi nous sommes déjà assurés que ces expressions ne sauraient contenir des arcs de cercle, et que par conséquent leur exactitude ne sera pas bornée à un temps limité, mais aura toujours lieu à l'infini.
[Lagrange, 1781, 316].

Pour Lagrange, cette conclusion ne permet pas de lever le "doute" sur la stabilité tant le calcul des valeurs numériques des racines est tributaire des valeurs attribuées aux masses des planètes. Lever le doute nécessiterait une démonstration "générale" de l'inégalité des racines:

Mais, comme les racines que nous venons de trouver dépendent des valeurs supposées aux masses des Planètes, on pourrait douter si, en changeant ces valeurs, on ne tomberait peut être pas dans les racines égales ou imaginaires. Pour lever tout à fait ce doute, il faudrait pouvoir démontrer, en général, que, quelles que soient les valeurs des masses, pourvu seulement qu'elles soient

> positives, les racines de l'équation dont il s'agit sont toujours réelles et inégales. Cela est facile lorsqu'on ne considère à la fois que l'action mutuelle de deux Planètes [...] ; mais cette équation se complique et s'élève à mesure que le nombre des Planètes augmente ; c'est pourquoi il devient de plus en plus difficile de juger à priori de la qualité des racines. Cependant il ne parait pas impossible de parvenir, par quelque artifice particulier, à décider cette question d'une manière générale ; et comme c'est un objet également intéressant pour l'analyse et pour l'Astronomie physique, je me propose de m'en occuper. En attendant, je me contenterai de remarquer que, dans le cas présent, les racines trouvées sont trop différentes entre elles pour qu'un petit changement dans les masses adoptées puisse les rendre égales, et encore moins imaginaires.
> [1781, 316].

La question de la stabilité du système du monde inverse la problématique de la discussion des petites oscillations. Ce qui se présentait comme général en 1766 ne l'est plus en 1781 pour des raisons propres à la représentation mécanique sous jacente au problème. La méthode élaborée par Lagrange en 1766 n'est cependant pas remise en cause et conserve sa portée générale puisque l'occurrence de racines multiples qui la mettrait en défaut doit être rejeté pour des questions de stabilité. L'évolution de l'exigence de généralité tient à ce que le rejet de ce cas particulier doit désormais s'appuyer sur une démonstration. Or la nature du problème - la résolution d'une équation algébrique générale- condamne à abandonner l'ambition d'une démonstration "générale" pour s'orienter vers un "artifice particulier".

L'"artifice particulier" évoqué par Lagrange est construit par Laplace qui, dans une suite de mémoires publiés dans les années 1770-1780, donne une nouvelle importance à la question de la stabilité du système du monde et donc à la démonstration de la réalité des racines de l'équation des petites oscillations. Dans le mémoire intitulé *Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes* [1775], Laplace s'approprie les méthodes de la mathématisation des variations séculaires des planètes construite par Lagrange et se propose d'étendre les résultats de ce dernier à la détermination de l'excentricité et des aphélies des orbites (Lagrange n'a traité en 1778 que les mouvements des nœuds et des inclinaisons des orbites des planètes) :

> J'ai donné dans un autre Mémoire (Tome VII des Savants étrangers) les expressions des inégalités séculaires des planètes [...] Celles que j'ai donné n'en sont que les différentielles ; je m'étais proposé depuis longtemps de les intégrer ; mais le peu d'utilité de ce calcul pour les besoins de l'Astronomie, joint aux difficultés qu'il présentait, m'avait fait abandonner cette idée , et j'avoue que je ne l'aurais pas reprise, sans la lecture d'un excellent Mémoire *Sur les inégalités séculaires du mouvement des nœuds et de l'inclinaison des orbites des planètes* que M. de Lagrange vient d'envoyer à l'Académie, et qui paraîtra dans un des Volumes suivants. Cet illustre géomètre, au moyen d'une transformation heureuse, réduit le problème à l'intégration d'autant d'équations linéaires du premier ordre qu'il y a d'inconnues ; il donne ensuite une méthode fort ingénieuse pour les intégrer, et pour déterminer les constantes que renferme l'intégrale, quelque soit le nombre de planètes. En employant la même transformation, j'ai tiré les mêmes équations de mes formules ; j'ai de plus

cherché si l'on ne pourrait pas déterminer d'une manière analogue les inégalités séculaires de l'excentricité et du mouvement de l'aphélie [...] on aura ainsi une théorie complète et rigoureuse de toutes les inégalités séculaires des orbites des planètes.
[Laplace, 1775, 354].

Laplace donne au problème de la nature des racines une importance inédite en raison d'un idéal déterministe qui se propose de donner une méthode permettant de prévoir les positions des corps célestes pour une durée "extrêmement longue" ([32]):

Les équations précédentes en donnent une en *f*, du degré *n*, s'il y a *n* planètes ; or, si cette équation renferme des racines imaginaires, il entre nécessairement des quantités exponentielles dans les valeurs de *p, q, …* et comme ces quantités peuvent aller croissantes à l'infini, la solution précédente ne peut avoir lieu que

[32] Dans son éloge de Lagrange, Delambre souligne l'ambition de Laplace d'obtenir des prédictions sur une durée très longue :

Mais un travail, grand dans son objet, utile par ses applications continuelles, et digne en tout de son génie, c'est celui dans lequel il a calculé les changements successifs qui s'opèrent dans les dimensions et les positions des orbites planétaires. Tous les géomètres, depuis Newton, s'étaient occupés de ce problème ; leurs formules différentielles, appliquées successivement à chaque planète, pouvaient, jusqu'à un certain point, et pendant un certain temps, satisfaire aux besoins de l'Astronomie ; mais, après quelque intervalle, elles se trouvaient insuffisantes, et les calculs étaient à recommencer sur de nouvelles données. M. Lagrange considère la question sous un point de vue qui l'embrasse tout entière, et en permet la solution la plus complète. Au lieu de combiner les orbites deux à deux, comme ses prédécesseurs, il les considère toutes ensemble, et, quel qu'en soit le nombre, il parvient à donner à l'équation une forme qui permet l'intégration [...]. M. Laplace a tiré du travail de M. Lagrange une solution plus bornée, mais plus facile, et qui, permettant de remonter aux premiers temps de l'Astronomie, s'étend dans l'avenir au même nombre de siècles, c'est-à-dire à 2000 en avant comme en arrière.
[Delambre, 1812, xxxi-xxxiii].

Et Delambre ajoute, au sujet de la stabilité du système solaire :

M. Laplace était parvenu par induction à ce théorème important de l'invariabilité des grands axes et des mouvements moyens, qui assure la stabilité du système planétaire, et dissipe pour toujours la crainte qu'on aurait pu concevoir que les planètes, continuellement attirées vers le Soleil, ne dussent finir un jour par se précipiter sur cet astre. [...] ; M. Poisson a depuis étendu la démonstration aux quantités du second ordre ; il est à présumer qu'elle s'étendrait de même aux produits de tous les ordres. Au reste, ce qui est fait suffit pour nous démontrer que toute crainte à cet égard serait désormais bien folle et bien chimérique.

Laplace, comme Lagrange, fait effectivement deux approximations dans ses calculs :

Tous les calculs sont effectués à l'ordre 1 des masses, en négligeant dans les développements les termes qui dépendraient du carré des masses des planètes. Le théorème de l'invariance des demi grands axes est obtenu pour toutes les excentricités ou inclinaisons ; par contre, le résultat sur les faibles variations quasi-périodiques de l'excentricité et de l'inclinaison est obtenu en négligeant les termes de degré supérieur à 2 dans le développement des perturbations planétaires. Ces approximations imposent donc de limiter la durée de validité des théories de Laplace.
[Laskar, 1992, 184].

Le Verrier montrera en 1856 l'influence des termes non linéaires, c'est-à-dire des termes de degré 3 dans les équations séculaires :

Le Verrier émet ici une nouvelle formulation du problème de la stabilité du système solaire. L'étude de Laplace ne suffit plus. Elle ne représente que le premier terme d'un développement en série infinie. Cette solution de Laplace est sans doute la part la plus importante de la solution, mais encore faut-il s'assurer que les termes suivants ont bien un effet négligeable par rapport à ce premier terme.
[Laskar, 1992, 187].

> pour un temps limité : il serait donc très important de s'assurer si l'équation en *s* peut renfermer des racines imaginaires, et en quel nombre elles peuvent y exister. Cette discussion me parait digne de toute l'attention des géomètres ; je me conterai ici d'observer que, lorsqu'on ne considère que deux planètes, comme on l'a déjà fait de Jupiter et de Saturne, l'équation en *f* a toujours deux racines réelles ; car on a alors
>
> $$fb = (0,1)b - \overline{(0,1)}\, b'$$
>
> $$fb' = (1,0)b' - \overline{(1,0)}\, b,$$
>
> d'où l'on tire
>
> $$f^2 - [(1,0) + (0,1)]f = \overline{(1,0)}\;\overline{(0,1)} - (1,0)(0,1)$$
>
> équation dont il visible que les deux racines sont toujours réelles.
> [Laplace, 1776,464].

"Il serait donc très important de s'assurer si l'équation en *s* peut renfermer des racines imaginaires, et en quel nombre elles peuvent y exister. Cette discussion me parait digne de toute l'attention des géomètres". La "discussion" de la stabilité du système des planètes est entreprise par Laplace par la publication de deux mémoires successifs. Le *Mémoire sur les inégalités séculaires des planètes et des satellites* [Laplace, 1787] entreprend de démontrer mathématiquement, en "dehors toute hypothèse" numérique sur la masse des planètes, la stabilité des inégalités séculaires:

> Mais les excentricités et les inclinaisons sont-elles renfermées constamment dans d'étroites limites ? C'est un point important du système du monde qui reste encore à éclaircir, et dont la discussion est la seule chose que laisse maintenant à désirer la théorie des inégalités séculaires. [...] l'incertitude où l'on et encore à l'égard de plusieurs de ces masses peut laisser quelques doutes sur ce résultat, et il est nécessaire de s'assurer par une méthode indépendante de toute hypothèse, que, en vertu de l'excentricité des planètes, les excentricités et les inclinaisons de leurs orbites sont toujours peu considérables. Je me propose encore de remplir cet objet dans ce Mémoire, en établissant d'une manière générale que les inégalités séculaires des excentricités et des inclinaisons des orbites des planètes ne renferment ni arcs de cercle, ni exponentielles, d'où il suit que, en vertu de l'action de ces corps, leurs orbites s'aplatissent plus ou moins, mais en ne s'écartant que très peu de la forme circulaire et en conservant toujours les mêmes grands axes. Les positions respectives de leurs plans et de leurs aphélies varient sans cesse ; elles s'inclinent plus ou moins les unes aux autres, mais elles sont toujours renfermées dans une zone d'un petit nombre de degrés.
> [Laplace, 1787, 61].

La stabilité des inégalités séculaires, donc la réalité et l'inégalité des racines de l'équation associée au système différentiel, est démontrée par Laplce au moyen d'un "artifice particulier" consistant à représenter la stabilité physique par une condition mathématique portant sur les coefficients du système différentiel et traduisant la constance du moment cinétique, il s'agit alors de démontrer que

ENCART 4.

L'artifice de Laplace pour la démonstration de la réalité des racines.

Laplace déduit des "*équations générales d'un système de corps qui s'attirent mutuellement*" une équation intégrale qui, dans le cas d'un mouvement elliptique, est incompatible avec des solutions contenant des exponentielles ou des "puissances de l'arc", [1787, 62-69] ([1]) :

$$0 = m\,\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} + m'\,\frac{x'd^2y' - y'd^2x'}{dt^2} - \frac{mx + m'x' + \ldots}{1 + m + m' + \ldots}\,\frac{d^2y + m'd^2y' + \ldots}{dt^2} + \frac{my + m'y' + \ldots}{1 + m + m' + \ldots}\,\frac{d^2x + m'd^2x' + \ldots}{dt^2}$$

équation dont l'intégrale est

$$(5)\quad c = m\,\frac{xdy - ydx}{dt} + m'\,\frac{x'dy' - y'dx'}{dt} + \ldots - \frac{mx + m'x' + \ldots}{1 + m + m' + \ldots}\,\frac{mdy + m'dy' + \ldots}{dt} + \frac{my + m'y' + \ldots}{1 + m + m' + \ldots}\,\frac{mdx + m'dx' + \ldots}{dt}$$

c étant une constante arbitraire.

[...] Si l'on nomme ea l'excentricité de l'orbite de *m*, et si l'on néglige *m* vis-à-vis de l'unité, l'aire que son rayon vecteur trace autour de M, durant l'instant dt, sera, par la théorie du mouvement elliptique, $\frac{1}{2}dt\sqrt{a(1-e^2)}$. Cette aire projetée sur le plan des *x* et des *y* est diminuée dans le rapport du cosinus de l'inclinaison de l'orbite de *m* sur ce plan au rayon. Soit θ la tangente de cette inclinaison, l'aire projetée sera $\frac{1}{2}\,dt\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{1+\theta^2}}$; ce sera, dans l'hypothèse elliptique, la valeur de $\frac{1}{2}(xdy\text{-}ydx)$. [...] et en négligeant les quantités constantes ou périodiques de l'ordre m^2.

$$(9)\quad c = m\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{1+\theta^2}} + m'\sqrt{\frac{a'(1-e'^2)}{1+\theta'^2}} + m''\sqrt{\frac{a''(1-e''^2)}{1+\theta''^2}} + \ldots ;$$

En supposant dans que, après un temps considérable, les excentricités et les inclinaisons des orbites subissent des changements remarquables, elles doivent toujours satisfaire à l'équation précédente dans laquelle la constance *c* est invariable.

Laplace écrit une expression générale des solutions du système différentiel, incluant la possibilité d'exponentielles et d'arcs de cercle et, remplaçant cette expression dans l'équation (***) déduite de (9), démontre que les facteurs d'instabilités portés par les exponentielles et arcs de cercles sont nuls. L'hypothèse sur les paramètres *e* et θ utilisée pour déduire (***) de (9) rend la démonstration de Laplace circulaire : supposer ces paramètres petits ([2]), c'est déjà supposer le système stable [1787, 89] :

Reprenons l'équation (9) de l'article IV ; si l'on suppose *e* et θ très petits et que l'on néglige les quantités d'ordre e^4, $e^2\theta^2$ et θ^4, elle donnera

$$(***)\quad c = m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'} + \ldots - \frac{1}{2}m(e^2+\theta^2)\sqrt{a} - \frac{1}{2}m'(e'^2+\theta'^2)\sqrt{a'} - \ldots ;$$

[...] quelle que soit la nature des racines de ces équations, les valeurs de *esinV, ecosV, e'sinV', e'cosV'*,... seront toujours comprises dans les formes suivantes :

$$e\sin V = \alpha f^{it} + \beta f^{i't} + \ldots + \gamma\, t^r + \lambda t^{r-1} + \ldots + h$$
$$e\cos V = \mu f^{it} + \varepsilon f^{i't} + \ldots + \Phi\, t^r + \psi t^{r-1} + \ldots + l$$
$$e'\sin V' = \alpha' f^{it} + \beta' f^{i't} + \ldots + \gamma' t^r + \lambda' t^{r-1} + \ldots + h'$$
$$e'\cos V' = \mu' f^{it} + \varepsilon' f^{i't} + \ldots + \Phi' t^r + \psi' t^{r-1} + \ldots + l',$$

f étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Les coefficients *α, β, μ, ε,...[...]* des exponentielles sont des quantités réelles sans exponentielles, mais qui peuvent être fonctions de l'arc *t* et de sinus et de cosinus d'angles proportionnels à cet arc ; les quantités *γ, λ, Φ, ψ, ...[...]* sont réelles, sans arcs de cercle ni exponentielles, et par conséquent constantes ou périodiques.

[1] Notation : *x,y,z* sont les coordonnées rectangles de *m*, *r* sa distance au corps *M* dont la masse est prise pour unité.

[2] Voir à ce sujet [Hawkins, 1975].

l'occurrence de solutions instables est contradictoire à cette condition ([33]) (cette démonstration est détaillée en encart 4). Une nouvelle méthode est présentée en 1789 dans le *Mémoire sur les variations séculaires des orbites des planètes* [1789], tout entier consacré à une démonstration directe de la stabilité du système à partir des seuls "rapports remarquables" des équations différentielles :

> Je suis parvenu à ces différentes équations dans mon *Mémoire de 1784*, en les déduisant d'équations plus générales, que le principe des aires donne entre les grands axes, les excentricités et les inclinaisons. J'ai cru que l'on verrait avec plaisir ces mêmes équations résulter directement des équations différentielles qui déterminent les variations séculaires des orbites.
> [Laplace, 1789, 297].

Les rapports remarquables permettent de démontrer "directement" que le "temps ne peut sortir des sinus" et que les oscillations restent stables. En 1858, Weierstrass démontrera que l'occurrence de racines multiples n'affecte en rien la stabilité du système. Si l'on se place du point de vue de Weierstrass, la démonstration de Laplace permet uniquement de démontrer la réalité des racines, et non leur inégalité. La forme particulière des solutions associées au cas des racines multiples, dans lesquelles le temps sort du sinus, s'avère en effet inexacte (encart 2). La représentation mécanique sous jacente aux méthodes de Laplace et Lagrange ne permet cependant pas d'envisager que l'occurrence de racines multiples permette des solutions stables et l'éventuelle multiplicité des racines de l'équation caractéristique n'est pas un cas particulier qui limiterait la généralité d'une méthode mais doit être rejetée en raison de la stabilité du système.

Thomas Hawkins [1975] s'est interrogé sur la faible postérité de la démonstration de Laplace pourtant reproduite dans la *Mécanique celeste* [1799, 318] et qui, mettant en évidence un lien entre les rapports remarquables et la nature des solutions du système sous jacente, devrait indiquer une "théorie sous jacente" ([34]). Dans le cadre de ma problématique, j'interrogerai à l'inverse

[33] La méthode de Laplace est proche de l'idée de conservation de l'intégrale première donnant l'énergie mécanique d'un système : $L - V = C$. C'est sous cette forme que cette idée apparaît dans la *Mécanique Céleste* [1788] et surtout dans la nouvelle preuve de Dirichlet apparaissant dans la troisième édition de la Mécanique [1753].

[34] [Hawkins, 1975, 15] :

> Laplace had thus exhibited the first purely mathematical theorem, complete with demonstration, on the nature of the eigenvalues of an extensive and important class of matrices. [...] Some historians [F. Klein 1927, 26-27 Jammer 1966, 215f] seem to have assumed it did play an important role on the subsequent development of spectral theory. As we have seen, Laplace had discovered that properties of the roots of the characteristic equation, no matter how high its degree is, can be deduced from symmetry properties of the corresponding system of coefficients. Previously it had appeared necessary to appeal to physical context. Laplace's work thus indicated the possibility of an underlying math theory. However, the actual historical process seems not to have followed the expected rational course.

La question de la postérité de Laplace est posée par Thomas Hawkins dans le cadre d'une interrogation sur le rôle des travaux mécaniques du XVIII[e] siècle sur la constitution de la théorie spectrale des matrices. La question du rôle de la méthode de la discussion des petites oscillations dans l'origine de la théorie spectrale est discutée dans la partie III de ce chapitre.

- **La nouvelle méthode de 1789.**

En 1789, Laplace élabore une méthode usant des seules équations différentielles pour démontrer la stabilité du système. Les "rapports remarquables" *(i,r)* et $\boxed{i,r}$ qui caractérisent le problème des petites oscillations sont employés par Laplace pour déduire la relation (***) sans nécessiter aucune hypothèse physique sur la petitesse des valeurs des excentricités et orbites ([3]) [1789, 297-300]:

$$\frac{mr,ni}{4}\ ai^2ar(ai,ar) = (i,r),$$

$$\frac{mr,ni}{2}\ [ai^2+ar^2(ai,ar)1-3aiar(ai,ar) = \boxed{i,r},$$

Ces deux fonctions (i,r) et $\boxed{i,r}$ sont telles que l'on a

$$(A)\ \begin{cases} m_i\sqrt{a_i}\,(i,r) = m_r\sqrt{a_r}\,(r,i) \\ m_i\sqrt{a_i}\,[i,r] = m_r\sqrt{a_r}\,[r,i] \end{cases}$$

[...] Cela posé, les quantités $p_0,q_0,\ p_1,q_1,\ldots$ seront déterminées par les équations différentielles

$$(B)\ \frac{dp_i}{dt} = q_i\Sigma(i,r) - \Sigma q_r\ \boxed{i,r},$$

$$\frac{dq_i}{dt} = -p_i\Sigma(i,r) + \Sigma p_r\ \boxed{i,r},$$

[...] Les équations (B) et (C) présentent des rapports très remarquables que nous allons développer. Si l'on multiplie la première des équations (B) par p_i, et qu'on ajoute à la seconde multipliée par q_i, on aura

$$p_i\frac{dp_i}{dt} + \frac{q_idq_i}{dt} = \Sigma\,(q_ip_r-p_iq_r)\ \boxed{i,r}$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $m_i\sqrt{a_i}$ et en les intégrant par rapport au nombre variable i, on aura

$$\Sigma'\,m_i\sqrt{ai}\,(p_i\frac{dp_i}{dt} + \frac{q_idq_i}{dt}) = \Sigma'\Sigma(q_ip_r-p_iq_r)m_i\sqrt{ai}\ \boxed{i,r},$$

Σ' étant la caractéristique des intégrales finies relatives à *i*. Si l'on prend ces intégrales depuis $i=0$ jusqu'à $i=n-1$, dans la somme des termes que renferme le second membre de cette équation, un terme quelconque

$$(q_ip_r - p_iq_r)\,m_i\sqrt{ai}\ \boxed{i,r}$$

sera détruit par le terme

$$(q_rp_i - p_rq_i)\,m_r\sqrt{a_r}\ \boxed{r,i}$$

qui , affecté d'un signe contraire, lui est égal en vertu de la seconde des équations (A) de l'article précédent. Ce second membre se réduira donc à zéro, ce qui donne

$$\Sigma'\,m_i\sqrt{ai}\,(p_i\frac{dp_i}{dt} + \frac{q_idq_i}{dt}) = 0,$$

et, en intégrant par rapport au temps t,

$$\Sigma'\,m_i\sqrt{ai}\,(p_i^2+q_i^2) = const.$$

ou, à cause de $e_i^2 = p_i^2+q_i^2$,

$$\Sigma'\,m_i\sqrt{ai}\,e_i^2 = const.$$

[3] Notation : m_i les masses des planètes, celle du Soleil étant prise pour unité ; n_it les moyens mouvements, a_i les moyennes distances au Soleil ; e_i les rapports des excentricités des orbites aux demi grands axes ; $\grave{\omega}_i$, les longitudes des aphélies, θ_i, les tangentes des inclinaisons des orbites sur un plan fixe, I_i les longitudes de leurs nœuds ascendants sur ce plan.

$$e_0\sin\grave{\omega}_0 = p_0,\ \ e_0\cos\grave{\omega}_0 = q_0,$$
$$e_1\sin\grave{\omega}_1 = p_1,\ \ e_1\cos\grave{\omega}_1 = q_1,$$

$(a_i,a_r) + (a_i,a_r)_1\cos V$ les deux premiers termes du développement de $(a_i^2-2a_ia_r\cos V+a_r^2)^{-\frac{3}{2}}$.

ce qui rend possible une poursuite de la discussion des petites oscillations alors même que les travaux de Laplace et Lagrange semblent clore toute discussion. Dans le cadre de la mécanique, la solution de Lagrange n'est pas remise en cause avant le mémoire de Weierstrass de 1858 et la note d'Yvon-Villarceau de 1870. En mécanique, la discussion sur la stabilité se poursuit essentiellement par une mathématisation plus précise des variations séculaires nécessitant la prise en compte de systèmes non linéaires ([35]). La postérité de la discussion des petites oscillations passe par la géométrie analytique. Le passage de la mécanique à la géométrie implique un bouleversement de la représentation sous jacente au problème des petites oscillations, ainsi qu'un renouvellement de la perception de ce qui tient du général et du particulier.

[35] Voir [Laskar, 1992].

5. La discussion des petites oscillations dans un cadre géométrique chez Cauchy.

La discussion des petites oscillations change de nature lorsque, en 1829, la représentation mécanique sous-jacente est supplantée par une représentation issue de la *géométrie analytique* ([36]). Dans un mémoire intitulé "Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes" [1829], Cauchy propose de traiter par une même méthode le problème des petites oscillations et celui de la classification des coniques, des quadriques et, plus généralement des fonctions homogènes du second degré. Aucune mention n'est faite, avant 1829, d'une relation entre la géométrie analytique et les petites oscillations de la mécanique, ni dans le cadre des travaux sur les quadriques ([Hachette-Poisson, 1802], [Cauchy, 1826], [Biot, 1826]), ni dans le traitement du théorème des axes principaux d'une solide en rotation par Lagrange en 1775 ([37]).

[36] Dans son étude de la mathématisation chez Cauchy, Amy Dahan Dalmedico a mis en évidence l'influence de représentations propres à la géométrie analytique sur les méthodes algébriques développées pour la théorie de l'élasticité, méthodes aujourd'hui perçues comme appartenant à l'*algèbre linéaire* :

> Nous avons souligné les parentés épistémologiques entre les '"styles" de mathématisation du premier Cauchy et de Fourier. Elles peuvent se résumer dans :
> - L'importance de l'approche physico-géométrique,
> - Le point de vue de la description mathématique qui consiste à rechercher, non une explication physique causale, mais un ensemble articulé de concepts présentant une forte cohérence mathématique, ensemble qui puisse rendre compte du domaine.
>
> C'est le cas de la conceptualisation de la première théorie à partir des ellipsoïdes de contraintes et des déformations. De plus ce mode de représentation géométrique a le grand avantage sur la représentation strictement analytique qui prévalait antérieurement (chez Navier ou Poisson par exemple) et qui reprendra ensuite le pas après l'adoption du modèle moléculaire, de manifester déjà les caractères d'invariance de la théorie. Ces caractères ne seront tout à fait élucidés qu'au début du XX^{e} siècle avec le développement autonome de l'Algèbre linéaire et l'apparition de la notation tensorielle explicite. C'est d'ailleurs à partir de Cauchy que les ellipsoïdes vont jouer un rôle fondamental de représentation, non seulement dans le domaine de l'élasticité, mais dans bien d'autres de la physique mathématique (comme les ellipsoïdes de conductibilité de Lamé en théorie de propagation de la chaleur).
>
> [Dahan Dalmedico, 1992, 296].

[37] Sur les développements de la théorie des quadriques dans le cadre de l'application de l'algèbre à la géométrie –la géométrie analytique- qui caractérise le programme de l'école polytechnique voulu par Monge, voir [Hawkins, 1975] et [Dahan Dalmedico, 1992, 240-242]. La méthode de Hachette et Poisson de 1802 est notamment très diffusée, c'est celle qu'emploi Fresnel dans sa théorie de double réfraction des cristaux optiques de 1821-1822.

a. Les analogies formelles entre la classification des quadriques, la rotation d'un solide et les variations séculaires des planètes.

Le titre du mémoire de Cauchy de 1829 a déjà une histoire. Le mémoire est annoncé, trois ans avant sa publication, par une note à l'Académie des sciences dont ni l'intitulé, "Mémoire sur l'équation qui a pour racines les moments d'inertie principaux d'un corps solide et sur diverses équations du même genre" [1826], ni le contenu ne font mention des petites oscillations. La note de 1826 propose pourtant déjà une analogie entre mécanique et géométrie, elle a en effet pour objet de résoudre par une même méthode de recherche d'"axes principaux" le problème mécanique de la rotation d'un solide et celui de la classification géométrique des "fonctions homogènes du second degré" ([38]). Lorsque Cauchy aborde le problème de la recherche des axes principaux d'un solide en rotation, il fait référence à un mémoire publié par Lagrange en 1775 et intitulé "Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque" ([39]). En 1775, Lagrange propose une "réduction à l'analyse" [Lagrange, 1775, 338] du résultat mécanique d'Euler [1758 et 1765] sur l'existence, pour un corps solide en rotation, de trois axes orthogonaux par rapport auxquels le moment d'inertie est nul ([40]). La question de la rotation d'un solide, bien que mettant en jeu un système de trois équations différentielles dont l'intégration passe par la résolution d'une équation cubique, n'a, chez Lagrange, aucune relation avec le problème des petites oscillations d'un système de corps. D'une part, La considération d'un solide limite l'étude au cas de trois variables et permet une démonstration par l'absurde, restée classique, de la réalité des racines de l'équation cubique associée [Lagrange, 1888, 399] ; la discussion sur la nature des racines qui caractérise la question des petites oscillations est par conséquent étrangère au problème de la rotation d'un solide. D'autre part, les représentations sous jacentes au problème des axes principaux de rotation sont très différentes de celles des petites oscillations. La recherche des axes principaux s'appuie en effet sur des changements de variables interprétés dans un cadre *géométrique* comme des *changements d'axes orthogonaux* [Lagrange, 1888, 395]. Cette représentation géométrique sous-jacente porte l'analogie annoncée par Cauchy en 1826 entre le problème de la rotation d'un solide et celui de la recherche des axes principaux des coniques et quadriques.

Comment les deux problèmes mécaniques des petites oscillations et de la rotation d'un solide, distincts chez Lagrange et chez Cauchy jusqu'en 1826, sont ils présentés comme analogues en 1829 ? Le mémoire de Cauchy de 1829, s'il annonce dans son titre un travail sur les variations séculaires des planètes, ne porte pas réellement sur un sujet mécanique, son véritable objet est une

---

[38] Les axes principaux sont les vecteurs propres des matrices associées aux formes quadratiques dans une base orthonormée.

[39] Je citerai également la version donnée par *la Mécanique Analytique* [1788, 389-428]

[40] Pour la physique contemporaine, le théorème des axes principaux d'un solide en rotation revient à énoncer que le mouvement de l'oscillateur spatial se décompose en trois oscillateurs harmoniques indépendants par projection sur trois axes.

généralisation à *n* variables d'une méthode développée pour la classification des coniques et quadriques. Selon Thomas Hawkins [1975, 21], entre la note de 1826 et le mémoire de 1829, Charles Sturm attire l'attention de Cauchy sur *l'analogie formelle* entre les équations algébriques se présentant dans la discussion des petites oscillations et celles employées pour la recherche des axes principaux des coniques ([41]). La similitude formelle reconnue entre des équations algébriques utilisées en mécanique et en géométrie tient à une caractéristique commune de ces équations : leurs racines doivent être réelles.

> Parmi les méthodes employées par les géomètres pour discuter les surfaces représentées par des équations du second degré, l'une des plus simples est celle qui consiste à couper ces surfaces par des droites parallèles. En suivant cette méthode, on peut facilement déterminer la nature des surfaces dont il s'agit, leurs centres, s'il en existe, leurs axes principaux etc. ; et l'on reconnaît, en particulier, que pour fixer la direction de ces axes, il suffit de résoudre une équation du troisième degré. Cette équation qui se représente dans diverses questions de Géométrie ou de Mécanique, et, en particulier, dans la théorie des moments d'inertie, a cela de remarquable que ses trois racines sont toujours réelles. [Cauchy, 1828, 9].

L'analogie entre les différents problèmes – petites oscillations, rotation d'un solide et classification des coniques - n'implique pas la reconnaissance d'une même signification sous jacente, c'est une analogie formelle justifiée par l'efficacité d'une méthode qui permet de donner une même démonstration *directe* de la réalité des racines des équations associées aux trois problèmes au contraire des "moyens indirects" de la démonstration par l'absurde utilisée par Lagrange pour la rotation d'un solide (l'encart 5. est consacré à la démonstration de Cauchy) . L'importance du rôle joué par les analogies formelles chez Cauchy a été mise en évidence par l'étude de Amy Dahan Dalmedico sur les analogies entre mathématisations de phénomènes physiques divers [Dahan Dalmedico, 1992] ([42]).

[41] Les problèmes de conduction de la chaleur abordés par Sturm dans la tradition de Fourier conduisent à l'étude de systèmes d'équations différentielles linéaires identiques à ceux des petites oscillations. Sturm s'intéresse à la multiplicité des racines des équations caractéristiques de ces systèmes en appliquant son théorème de dénombrement des racines réelles des équations [Hawkins, 1975, 22].

[42] Ainsi [Dahan Dalmedico, 1992, 262] rattache le "style de mathématisation de Cauchy à une tradition Eulérienne qui se caractérise par l'importance d'analogies formelles :

> Un style de mathématisation dans la tradition eulérienne.
> Ainsi pour Cauchy, si la similitude de structure des équations différentielles est un élément décisif pour souligner l'analogie entre des phénomènes divers, elle n'est pas corrélée à la nature physique des phénomènes et peut coexister avec des hypothèses très distinctes. [....] L'analogie des phénomènes divers (son, calorique, élasticité...) repose, non sur un modèle unique d'explication physique comme c'est le cas dans le modèle laplacien des forces attractives et répulsives, mais sur une similitude dans la mathématisation du phénomène dont on cherche à écrire les lois de propagation.

En 1829, le problème des petites oscillations et celui de la classification des surfaces du second degré sont formulés comme relevant d'une même question de recherche d'extremum d'une fonction homogène du second degré ([43]) :

> Soit
>
> $$(1)\ s = f(x,y,z,\ldots.)$$
>
> une fonction homogène et du second degré. Soient de plus
>
> $$(2)\ \varphi(x,y,z,\ldots.),\ \chi(x,y,z,\ldots.),\ \psi(x,y,z,\ldots.),\ \ldots$$
>
> les dérivées partielles de *f(x,y,z,...)* prises par rapport aux variables *x,y,z,...* Si l'on assujettit ces variables à l'équation de condition
>
> $$(3)\ x^2+y^2+z^2+\ldots. = 1$$
>
> les maxima et minima de la fonction *s* seront déterminées (voir les Leçons sur le Calcul infinitésimal, p.252) par la formule [...]
>
> $$(6)\ \frac{1}{2}\varphi(x,y,z,\ldots.) = sx,\ \frac{1}{2}\chi(x,y,z,\ldots.) = sy,\ \frac{1}{2}\psi(x,y,z,\ldots) = sz$$
>
> Soit maintenant
>
> $$(7)\ S = 0$$
>
> l'équation que fournira l'élimination des variables $x,y,z,\ldots$ entre les formules (6). Les *maxima et minima* de la fonction
>
> $$s = f(x,y,z,..)$$
>
> ne pourront être que des racines de l'équation (7). D'ailleurs cette équation sera semblable à celle que l'on rencontre dans la théorie des inégalités séculaires des mouvements des planètes, et dont les racines, toutes réelles, jouissent de propriétés dignes de remarque. Quelques unes de ces propriétés étaient déjà connues : nous allons les rappeler ici, et en indiquer des nouvelles.
> [Cauchy, 1829, 173].

La discussion sur les petites oscillations fait passer ses problématiques propres dans l'œuvre de Cauchy. Les "rapports remarquables" de Laplace sont présents dans la nouvelle notation adoptée :

Notation de [Cauchy, 1829, 176]:	Notation de [Cauchy, 1828,19] :
$(9)\begin{cases} A_{xx}x + A_{xy}y + A_{xz}z + \ldots = sx, \\ A_{xy}x + A_{yy}y + A_{yz}z + \ldots = sy, \\ A_{xz}x + A_{yz}y + A_{zz}z + \ldots = sz, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$	$(28)\begin{cases} (A-s)p + Fq + E = 0, \\ Fp + (B-s)q + D = 0, \\ Ep + Dq + C - s = 0; \end{cases}$

[43] En termes contemporains, si *q* est une forme quadratique et *φ* sa forme polaire alors

$$dq_x(y) = 2\varphi(x,y)$$

On peut déterminer un vecteur propre *e* de *q* par une recherche d'extremum sur la sphère unité *S* . Il suffit de démontrer qu'il existe *e* ☻ *E* tel que

//e// = 1

< e,x > = 0 ð φ(e,x) = 0

(< > désigne le produit scalaire, // // la norme de l'espace euclidien). Soit la fonction *f* définie par

f : E-{0} ↔ R, x ↔ q(x)/ //x//

S est compact donc *f/S* a un maximum atteint en *e*, alors :

$$q(e) = 1 \text{ et } df_{e1} = 0.$$

Mais

dq$_x$*(y) = 2 φ(x,y)* donc *df*$_{e1}$*(x) = 0 ñ 2 < e,x > – 2q(e)φ(e,x)* = 0.

On a bien

< e,x > = 0 ð φ(e,x) = 0

ENCART 3.

Les méthodes de la discussion des petites oscillations (suite).

2. La méthode de Cauchy : transformations géométriques et déterminants.

La méthode mise en œuvre par Cauchy en 1829 pour généraliser au cas de *n* variable la recherche des axes principaux des surfaces du second degré témoigne d'une postérité des caractéristiques propres à la méthode élaborée par Lagrange en 1766. L'utilisation de l'équation $S=0$ pour exprimer les solutions du problème mécanique est reformulée par Cauchy dans le cadre du calcul des déterminants en une méthode qui associe aux factorisations de *S* par les facteurs $s\text{-}s_i$ des extractions de déterminants du système.

Dans le cadre de la mécanique, la méthode de Lagrange et sa reformulation par Laplace ne sont pas remis en cause avant un siècle ([Weierstrass 1858] et [Yvon Villarceau, 1870]). La postérité de la méthode de Lagrange passe par la géométrie analytique avec la généralisation par Cauchy de la recherche des axes principaux des surfaces du second degré au cas de *n* variables. Le problème général formulé par Cauchy est celui de la recherche des extremums d'une "fonction réelle homogène et du second degré" $s = f(x,y,z,....)$ sur ce que nous désignerions en termes contemporains comme la sphère unité de Ë^n [Cauchy, 1829, 176] :

Si l'on assujettit ces variables à l'équation de condition

$$(3)\ x^2+y^2+z^2+\ .... = 1$$

Par les considérations développées dans les *Leçons sur le Calcul infinitésimal*, les conditions sur les dérivées partielles de *s* se traduisent par la résolution d'un système linéaire dont l'équation algébrique associée est reconnue comme formellement analogue à celle des systèmes de Lagrange [Cauchy, 1829, 176] :

$$(10)\begin{cases} (A_{xx}-s)x+A_{xy}y+A_{xz}z+...=0, \\ A_{xy}x+(A_{yy}-s)y+A_{yz}z+...=0, \\ A_{xz}x+A_{yz}y+(A_{zz}-s)z+...=0, \\ ...., \end{cases}$$

- **L'équation algébrique associée au système (10).**

Le détail du texte de Cauchy témoigne d'une influence de la méthode élaborée par Lagrange en 1766 (encart 3_a). Les caractères spécifiques de la résolution de Lagrange sont préservés et en premier lieu le rôle donné à l'équation algébrique $S=0$. Cette équation avait permis à Lagrange d'exprimer les oscillations $\lambda e^{\rho t}$ du système mécanique, le coefficient ρ étant une racine de l'équation $S=0$ et λ un polynôme en ρ, facteur du polynôme *S*. Chez Cauchy, les racines, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de l'équation $S=0$ permettent d'exprimer l'équation d'une surface dans le repère formé de ses axes principaux, $s_1x_1^2+s_2x_2^2+\ldots+s_nx_n^2=0$.
La définition du "premier membre de l'équation *S*" comme "une fonction alternée" (un déterminant) des quantités "comprises dans le Tableau" associé au système (10) généralise les méthodes développées en 1828 pour les coniques et quadriques [Cauchy, 1829, 176] :

En opérant ainsi, on trouvera, par exemple, pour $n=2$,

$$(12)\ S = (A_{xx}-s)(A_{yy}-s)-A_{xy}^2;$$

pour $n=3$

$$(13)\ S = (A_{xx}-s)(A_{yy}-s)(A_{zz}-s) - A_{yz}^2(A_{xx}-s) - A_{xz}^2(A_{yy}-s) - A_{xy}^2(A_{zz}-s) + 2A_{xy}A_{xz}A_{yz};$$

[...] et, généralement, on obtiendra pour *S* une fonction de *s*, qui sera entière et du degré *n*.

La discussion sur la multiplicité des racines apparaît pour la première fois chez Cauchy qui n'avait jusqu'alors traité que de problèmes menant à des équations cubiques. Le problème de la multiplicité des racines apparaît comme une conséquence de la généralisation des méthodes de géométrie analytique de 3 à *n* variables.

- **Les conditions sur les coefficients indéterminés de Lagrange et les changements d'axes orthogonaux de Cauchy.**

A chacune des racines $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de l'équation $S=0$ correspond un "système de valeurs" solution de (10). Les n systèmes de valeurs sont notés x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ; … ; x_n, y_n, z_n. Cauchy caractérise alors les relations entretenues par ces systèmes deux à deux. Afin de déterminer les solutions aux conditions initiales (y) de son problème mécanique, Lagrange avait introduit en 1766 (encart 3a), outre les systèmes (λ_i) correspondants aux $(x_i, y_i, z_i, \ldots)$ de Cauchy, des systèmes indéterminées (ν_i) permettant la résolution du système d'équations :

$$\begin{array}{l} \lambda'_1\, y' + \lambda''_1\, y'' + \ldots + \lambda^{(n)}_1\, y^{(n)} = \theta_1, \\ \lambda'_2\, y' + \lambda''_2\, y'' + \ldots + \lambda^{(n)}_2\, y^{(n)} = \theta_2, \\ \ldots\ldots \\ \lambda'_n\, y' + \lambda''_n\, y'' + \ldots + \lambda^{(n)}_n\, y^{(n)} = \theta_n, \end{array}$$

C'est-à-dire l'obtenir des (y) en fonction des conditions initiales (θ) :

$$y^{(s)} = \frac{\nu_1^{(s)}}{Q_1}\,\theta_1 + \frac{\nu_2^{(s)}}{Q_2}\,\theta_2 + \ldots + \frac{\nu_n^{(s)}}{Q_n}\,\theta_n$$

Lagrange avait ensuite déduit de la condition remarquable $A_{xy} = A_{yx}$ du système que les systèmes (λ_i) et (ν_i) sont déterminés par un même système d'équation. Ce que Cauchy définit comme deux systèmes de valeurs solutions de (10), par exemple x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 correspond chez Lagrange aux deux suite de coefficients indéterminées $\lambda_1', \lambda_1'', \lambda_1'', \ldots$ et $\nu_2', \nu_2'', \nu_2''', \ldots$ Les méthodes de Lagrange sont reprises par Cauchy qui multiplie la première ligne de (10) par x_2, la seconde par x_1, etc. puis ajoute les lignes de manière à "éliminer le coefficient A_{xx}" comme le montre le tableau suivant .

Relations entre les (x_i) et (x_j) établies par Cauchy [1829,177-178].	Relations entres les (λ_i) et (λ_j) de Lagrange.
$(s_2-s_1)x_1x_2 + A_{xy}(x_2y_2-x_1y_2)+A_{xz}(x_2z_1-x_1z_2)+\ldots=0.$ $A_{xy}(y_2x_1-y_1x_2)+(s_2-s_1)y_1y_2 + A_{yz}(y_2z_1-y_1z_2)+\ldots=0.$ *[…]* etc. Enfin, si l'on ajoute membre à membre les équations (17), (18), (19), etc., on trouvera (20) $(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+\ldots)(s_2-s_1)=0.$ Donc, toutes les fois que les racines s_1, s_2 seront inégales entre elles, on aura (21) $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+\ldots=0$;	(i) $\left\{\begin{array}{c} \nu'_m\lambda'_1+\nu''_m\lambda''_1+\ldots+\nu^{(n)}_m\lambda^{(n)}_1=0 \\ \nu'_m\lambda'_2+\nu''_m\lambda''_2+\ldots+\nu^{(n)}_m\lambda^{(n)}_2=0 \\ \ldots \\ \nu'_m\lambda'_{m-1}+\nu''_m\lambda''_{m-1}+\ldots+\nu^{(n)}_m\lambda^{(n)}_{m-1}=0 \\ \nu'_m\lambda'_m+\nu''_m\lambda''_m+\ldots+\nu^{(n)}_m\lambda^{(n)}_m=Q_m \\ \nu'_m\lambda'_{m+1}+\nu''_m\lambda''_{m+1}+\ldots+\nu^{(n)}_m\lambda^{(n)}_{m+1}=0 \\ \ldots \\ \nu'_m\lambda'_n+\nu''_m\lambda''_n+\ldots+\nu^{(n)}_m\lambda^{(n)}_n=0 \end{array}\right.$ relations qui se résument par l'équation : $(\rho^2-\rho^2_m)\,[\nu'\lambda'+\nu''\lambda''+\nu'''\lambda'''+\ldots+\nu^{(n)}\lambda^{(n)}]=0$

De la relation (21), Cauchy déduit les relations entretenues par deux séries de variables correspondants à deux racines distinctes [Cauchy, 1829, 178] :

$$(22)\left\{\begin{array}{lll} x_1^2+y_1^2+z_1^2+\ldots=1, & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+\ldots=0 & x_1x_n+y_1y_n+z_1z_n+\ldots=0, \\ x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1+\ldots=0, & x_2^2+y_2^2+z_2^2+\ldots=1, & x_2x_n+y_2y_n+z_2z_n+\ldots=0, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\ x_nx_1+y_ny_1+z_nz_1+\ldots=0, & x_nx_2+y_ny_2+z_nz_1+\ldots=0, & x_n^2+y_n^2+z_n^2+\ldots=1, \end{array}\right.$$

Ces dernières relations expriment que les systèmes $(x_i, y_i, z_i, \ldots)$ correspondants aux racines s_i de l'équation $P=0$ sont les coordonnées d'axes orthonormés. Elles interprètent donc les relations (i) déduites par Lagrange de la méthode des coefficients indéterminées dans le cadre de la géométrie analytique ([1]).

[1] En termes contemporains, les relations d'orthogonalité duale entre les ν et les λ données par Lagrange donnent lieu à des relations d'orthogonalité euclidienne chez Cauchy.

b. La généralisation à *n* variable d'une méthode de géométrie analytique.

Le problème mécanique des petites oscillations permet à Cauchy de généraliser à *n* variables une méthode élaboré dans le cadre de la géométrie analytique et publiée en 1828 dans un mémoire intitulé "Sur les centres, les plans principaux, et les axes des surfaces du second degré". Les travaux de Cauchy sur la classification des surfaces du second degré sont d'une part motivés par la charge d'enseignement de géométrie analytique à l'Ecole Polytechnique dans la tradition algébrique de Monge et d'autre part par le développement de la théorie de l'élasticité à partir des recherches de Fresnel sur la double réfraction de la lumière [Cauchy, 1823, 1827a,b] ([44]). La théorie de l'élasticité élaborée par Cauchy nécessite la description des "surfaces représentées par des équations du second degré" pour décrire les variations directionnelles de l'élasticité d'un solide:

> Du théorème énoncé plus haut, il résulte que la pression ou tension en chaque point est équivalent à l'unité divisée par le rayon vecteur d'un ellipsoïde. Aux trois axes de cet ellipsoïde correspondent trois pressions ou tensions que nous nommerons principales, et l'on peut démontrer que chacun d'elles est perpendiculaire au plan contre lequel elle s'exerce [([45])]. Parmi ces pressions ou tensions principales se trouvent la pression ou tension *maximum*, et la pression ou tension *minimum*. les autres pressions ou tensions sont distribuées symétriquement autour des trois axes ; De plus, la pression ou tension normale à chaque plan, c'est-à-dire la composante, perpendiculaire à un plan, de la pression ou tension exercée contre ce plan est réciproquement proportionnelle au carré du rayon vecteur d'un second ellipsoïde. Quelquefois ce second ellipsoïde se trouve remplacé par deux hyperboloïdes, l'un à une nappe, l'autre à deux nappes, qui ont le même centre, les mêmes axes, et sont touchés à l'infini par une même surface conique du second degré, dont les arêtes indiquent les directions pour lesquelles la pression ou tension normale se réduit à zéro.
> [Cauchy, 1823].

La méthode de classification des surfaces du second degré repose sur une recherche d'axes principaux, c'est-à-dire sur un repère en plans orthogonaux

[44] Voir [Dahan Dalmedico, 1992, 236] :

> Cauchy reprend et poursuit l'analogie de Fresnel entre corps solides et fluides. Comme lui, il fait appel aux ellipsoïdes en annonçant que l'on peut faire la double hypothèse suivante :
> a) réduire les contraintes autour d'un point à trois contraintes principales s'exerçant suivant les axes d'une certaine quadrique. Il pourra alors démontrer que ces trois contraintes là sont perpendiculaires aux plans contre lesquels ils s'exercent et que parmi elles figurent la contrainte maximum, et la contrainte minimum. Toutes les autres contraintes sont distribuées symétriquement autour des trois axes.
> b) réduire les déformations autour du même point à trois déformations principales s'exerçant suivant les axes d'une autre quadrique. Il montrera alors comment les trois coefficients différentiels des trois composantes de déplacement peuvent être utilisés pour approximer la déformation de chaque élément linéaire.

[45] Cauchy fait ici référence à [Fresnel 1822].

- **La factorisation de l'équation algébrique du système de Lagrange et les sous déterminants de Cauchy.**

La spécificité principale de la méthode de Lagrange tient au rôle donné à l'équation $S = 0$ pour la détermination des valeurs (λ_i) correspondant aux (x_i, y_i, z_i, ...) de Cauchy : les relations (i) entre deux systèmes de solutions (λ_i) et (ν_i) associés à deux racines de $S = 0$ sont résumées en une unique équation identique, à un facteur multiplicatif près, à l'équation $S = 0$:

$$(\rho^2-\rho^2_m)\ [\nu'\lambda'+\nu''\lambda''+\nu'''\lambda'''+\ldots.\ +\ \nu^{(n)}\lambda^{(n)}] = 0,$$

L'expression $Q_m = \nu'\lambda'+\nu''\lambda''+\nu'''\lambda'''+\ldots.\ +\ \nu^{(n)}\lambda^{(n)}$ s'identifie à une factorisation de $S = 0$ par l'expression $\rho^2-\rho^2_m$, c'est-à-dire à la valeur de $S/(s-s_m)$ pour $s = s_m$. Cette factorisation permet à Lagrange d'expliciter en une unique formule les oscillations du système mécanique :

$$y^{(s)} = \frac{\nu_1^{(s)}}{Q_1}\,\theta_1 + \frac{\nu_2^{(s)}}{Q_2}\,\theta_2 + \ldots + \frac{\nu_n^{(s)}}{Q_n}\,\theta_n.$$

Cauchy reformule la *factorisation* donnée par Lagrange au polynôme S comme une *extraction de sous déterminant* du système (10) : les factorisations de S par $(s-s_1)$, $(s-s_2)$,.... sont alors associées à des sous déterminants de S notés P_{xy} [Cauchy, 1829, 178] :

> Soit maintenant R ce que devient la fonction S, lorsque, dans le Tableau (11), on supprime tous les termes appartenant à la première colonne horizontale, ainsi qu'à la première colonne verticale ; et Q ce que devient la même fonction, quand on supprime, en outre, les termes renfermés dans les deuxièmes colonnes horizontale et verticale. Enfin, désignnons par P_{uv} ce que devient S, lorsque'on supprime dans le Tableau (11) les termes qui appartiennent à la même colonne horizontale que le binôme $A_{uu}-s$ avec ceux qui appartiennent à la même colonne verticale que $A_{vv}-s$ [...] on aura évidemment
>
> $$(23)\quad R = P_{xx}$$

"*en faisant abstraction de la première*" équation du système (10), c'est-à-dire en fixant sa valeur comme arbitraire, le calcul des déterminants permet de déterminer *x, y, z* par des formules qui correspondent aux solutions $y_i = \frac{\nu i}{Qi}$ de Lagrange (l'expression $X^2+Y^2+Z^2+\ldots$ correspond au terme noté par Lagrange Q_i^2) ([2]) [1829, 179] :

> et l'on conclura des équations (10), en faisant abstraction de la première,
>
> $$(24)\quad \frac{x}{P_{xx}} = -\frac{y}{P_{xy}} = -\frac{z}{P_{xz}} = -\ldots$$
>
> Posons d'ailleurs, pour abréger,
>
> $$(25)\ X = P_{xx} = R,\quad Y = -P_{xy},\ \ Z = -P_{xz}\,,\ldots$$
>
> La formule (24), combinée avec la formule (3) , donnera
>
> $$(26)\quad \frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \ldots = \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2+\ldots.}}$$

[2] En termes contemporains, Si $B(s)$ est la matrice des mineurs de la matrice caractéristique $A-sI$, alors $B(s)(A-sI) = \Delta(s)I$ et donc si D est un vecteur colonne, $(A-sI)X = D$ ñ $X = B(s)D$

dans lesquels les termes en produits de plusieurs coordonnées disparaissent de l'équation cartésienne. Elle est formulée, dans les "Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie" publiées en 1826 :

> Problème U. – Trouver, s'il y a lieu, le centre et les axes de la surface du second degré représentée par l'équation
>
> $$(15)\ Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy+Gx+Hy+Iz=K$$
>
> [Cauchy, 1826, 248].

La recherche des axes principaux passe par des changements de repères orthogonaux dont les coordonnées sont déterminées par une équation cubique invariante par transformations orthogonales:

> Lorsque la surface (15) a un centre ou une infinité de centres, et que l'un d'eux est pris pour origine, l'équation (15) se trouve ramenée à la forme
>
> $$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy = K$$
>
> [...] Si l'on suppose d'ailleurs que les coordonnées x, y, z soient rectangulaires, ces coordonnées vérifieront l'équation (14) réduite à la formule
>
> $$(21)\ \frac{Ax+Fy+Ez}{x} = \frac{Fx+By+DZ}{y} = \frac{Ex+Dy+Cz}{z} = \frac{K}{r^2}$$
>
> Toutes les fois que le rayon vecteur r, mené de l'origine au point (x,y,z), deviendra normal à la surface proposée. On aura donc alors
>
> $$(22)\ \begin{cases} (A-\frac{K}{r^2})x+Fy+Ez=0, \\ Fx+(B-\frac{K}{r^2})y+Dz=0 \\ Ex+Dy+(c-\frac{K}{r^2})z=0 \end{cases}$$
>
> En éliminant de ces dernières équations x,y,z, on obtiendra la suivante [...] si l'on fait pour abréger $\frac{K}{r^2}=s$, l'équation (23) deviendra
>
> $$(25)\ (A-s)(B-s)(C-s) - D^2(A-s)-E^2(B-s)-F^2(C-s)+2DEF=0$$
>
> Il est encore facile de s'assurer que l'équation (25) ne sera point altérée, si l'on remplace les constantes A, B, C, D, E, F, par d'autres quantités [...] en substituant au système de coordonnées rectangulaires x ,y ,z un autre système de coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ.
>
> [1826, 250].

Les méthodes algébriques employées par Cauchy sont indissociables d'une représentation d'orthogonalité issue de la géométrie analytique. Comme le montre la comparaison des procédés de Cauchy et Lagrange dans l'encart 3_b., lorsque Cauchy généralise sa méthode de recherche d'axes principaux à *n* variables en 1829, il interprète les procédés algébriques de la méthode des coefficients indéterminées de Lagrange comme portant sur des changements d'axes orthogonaux [1829, 178] ([46]). Le cadre de la géométrie analytique bouleverse les méthodes employées et la conclusion de l'étude. Le théorème de

[46] En termes contemporains, les conditions de Lagrange portent sur orthogonalité duale, celles de Cauchy sur une orthogonalité euclidienne (voir pour tout approfondissement les détails proposés en encart 3_b).

Ces expressions permettent à Cauchy de donner explicitement les formules de changements d'axes orthonormés permettant d'obtenir l'écriture de la fonction homogène dans son système d'axes principaux ([3]) :

et, si l'on désigne par

(27) $X_1, Y_1, Z_1,\ldots,X_2, Y_2, Z_2,\ldots,X_n, Y_n, Z_n,\ldots,$

les systèmes de valeurs de $X, Y, Z, \ldots$ correspondants aux racines $s_1, s_2, \ldots,s_n$ de l'équation (7),

$$(28)\begin{cases} \dfrac{x_1}{X_1}=\dfrac{y_1}{Y_1}=\dfrac{z_1}{Z_1}=\ldots.=\dfrac{1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2+\ldots}}, \\ \dfrac{x_2}{X_2}=\dfrac{y_2}{Y_2}=\dfrac{z_2}{Z_2}=\ldots.=\dfrac{1}{\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2+\ldots}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{x_n}{X_n}=\dfrac{y_n}{Y_n}=\dfrac{z_n}{Z_n}=\ldots.=\dfrac{1}{\sqrt{X_n^2+Y_n^2+Z_{n1}^2+\ldots}}, \end{cases}$$

Ces dernières formules donnent une solution générale au problème "à moins que des racines de l'équation (7) ne vérifient en même temps la formule (29)", c'est-à-dire à moins que l'équation $S = 0$ possède des racines multiples [Cauchy, 1829, 179] :

Les valeurs de $x_1, y_1, z_1, \ldots$ seront complètement déterminées, aux signes près, par la première des formules (28), à moins que la supposition $s = s_1$ ne fasse évanouit simultanément les fonctions $X = R, Y,Z,\ldots$; et comme on peut faire un semblable raisonnement à l'égard de de $x_2, y_2, z_2,\ldots ; \ldots ; x_n, y_n, z_n,\ldots,$ il est clair que les expressions (16) seront, aux signes près, complètement déterminées par les formules (28), à moins que des racines de l'équation (7) ne vérifient en même temps la formule

(29) $R = 0$.

L'occurrence des racines multiples dans l'équation $S = 0$ se présente comme un cas particulier qui vide les formules (28) de toutes signification. Les solutions générales s'écrivant [Cauchy, 1829, 183] :

$$(44)\ x = \frac{Pxx}{s},\ y = -\frac{Pxy}{S},\ z = -\frac{Pxz}{S},$$

L'occurrence d'une racine s_1 double s'interprète alors comme l'occurrence éventuelle de facteurs $(s-s_1)^2$ dans l'expression de S qui ne seraient pas annulés par le facteur $(s-s_1)$ de P_{xx} et induirait une forme "0/0" pour la formule (44). La difficulté posée par l'occurrence de racines multiples est alors déplacée et interprétée comme vidant les expressions $\frac{Pxx}{s}$ de toute signification en raison de la présence de racines d'ordre plus élevé dans le déterminant S que dans le mineur P_{xx}.

[3] Par exemple, pour un déterminant $\begin{vmatrix} 0-s & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 2-s & 0 \\ 1 & 0 & 1-s \end{vmatrix}$ d'équation caractéristique $S = (s+1)(s-3)(s-1)$ et $X = (2-s)(1-s)$, $Y = (1-s)(-s) -1$ $Z = (-s)(2-s) -3$ et pour $s = -1$, $X_1 = (3)(2) = 6$, $Y_1 = 2$ et $Z_1 = 0$. $X_1^2+Y_1^2+Z_1^2 = 40$

Les coordonnées du vecteur propre normé associé à la valeur propre -1 sont $(3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}, 0)$.

En termes contemporains, les coordonnées des vecteurs propres sont obtenues par les colonnes non nulles de la matrice adjointe de la matrice caractéristique $Ad(A-sI)$, c'est-à-dire la matrice des cofacteurs de $A-sI$.

Cauchy est très éloigné des intégrales données par Lagrange aux variations séculaires des planètes, il concerne les différentes *formes* revêtues par l'équation d'une surface homogène sujette à des *changements d'axes*. Parmi ces formes, il en existe une et une seule qui "renferme seulement les carrés" des coordonnées :

> Théorème II. – Etant donnée une fonction homogène et du second degré de plusieurs variables *x,y,z,...,* on peut toujours leur substituer d'autres variables ξ, η, ζ, ...liées à *x, y, z, ...* par des équations linéaires tellement choisies que la somme des carrés de *x, y, z, ...* soit équivalente à la somme des carrés de ξ, η, ζ, ... , et que la fonction donnée de x*, y, z...* se transforme en une fonction de ξ, η, ζ,... homogène et du second degré mais qui renferme seulement les carrés de ξ, η, ζ,... [...] dans le cas particulier où les variables *x, y, z,* sont au nombre de trois seulement, l'équation (7) se réduit à celle qui se représente dans diverses questions de Géométrie et de Mécanique, par exemple, dans la théorie des moments d'inertie ; et le théorème I fournit les règles que j'ai données dans le III^e^ volume des *Exercices* comme propres à déterminer les limites des racines de cette équation. Alors aussi les équations (22) sont semblables à celles qui existent entre les cosinus des angles que forment trois axes rectangulaires quelconques avec les axes coordonnés, supposés eux-mêmes rectangulaires, et le théorème II correspond à une proposition de Géométrie, savoir que, par le centre d'une surface, on peut mener trois plans perpendiculaires l'un à l'autre, et dont chacun la divise en deux parties symétriques.
> [Cauchy, 1829, 20].

L'expression d'une fonction homogène comme une somme de carrés "correspond", dans le cas de deux ou trois variables, à une "proposition de Géométrie". Pour la déterminer il faut obtenir les *n* racines réelles d'une équation algébrique ; dans le cas de trois variables ces racines "correspondent" à trois "plans perpendiculaires l'un à l'autre, et dont chacun divise [la surface] en deux parties symétriques".

> Donc l'équation [...] a ses trois racines réelles. A ces trois racines correspondent trois droites qui sont autant d'axes de la surface proposée.
> [Cauchy, 1828, 251].

ENCART 5.

La démonstration de Cauchy la réalité des racines de l'équation caractéristique.

La démonstration de 1828 de l'existence des 3 axes principaux d'une surface du second degré est basée sur un encadrement des racines de l'équation caractéristique, d'ordre 3, par les racines de l'équation caractéristique d'ordre 2 du premier mineur principal du système. La démonstration repose donc une méthode de réduction de degré de l'équation caractéristique par extraction de sous déterminants du système, méthode que Cauchy généralise en 1829 au degré *n*. Plus précisément, pour démontrer l'existence des trois axes principaux d'une surface du second degré, c'est-à-dire l'existence de trois racines réelles de l'équation cubique *S* associée , Cauchy remarque que, dans le cas, où dans le système

$$(28)\begin{cases}(A-s)p+Fq+E=0,\\ Fp+(B-s)q+D=0,\\ Ep+Dq+C-s=0;\end{cases}$$

E et *F* s'évanouissent, la cubique se partage en deux équations : $A-s=0$ et $(B-s)(C-s)-D^2=0$ dont on extrait facilement trois racines réelles notées *s, s', s''*. La cubique *S* changeant de signe dans chacun des intervalles $]-\tilde{o}, s']$, $]s',s'']$, $]s'', +\tilde{o}[$, doit donc s'annuler exactement trois fois *:*

> $S_{-\tilde{o}}$, S', S'', $S_{\tilde{o}}$ les valeurs réelles qu'acquiert la fonction [...] quand on attribue successivement à la variable s les quatre valeurs
>
> (37) $s = -\tilde{o}$, $s=s'$, $s=s''$, $s= \tilde{o}$,
>
> rangées, comme on le voit ici, par ordre de grandeur, on aura
>
> $S_{-\tilde{o}} = \tilde{o} > 0$, $S' = P - \sqrt{P^2+Q^2} < 0$, $S'' = P+\sqrt{P^2+Q^2} > 0$, $S_{\tilde{o}} = -\tilde{o} < 0$
>
> Donc si, dans le premier membre de l'équation (26), on attribue successivement à la variable s les quatre valeurs $-\tilde{o}$, s', $s'' > s'$ *et* $+\tilde{o}$, on obtiendra quatre résultat alternativement positifs et négatifs. Il est permis d'en conclure que l'équation (26) aura toujours trois racines réelles, la première inférieure à la limite *s'*, la deuxième comprise entre *s'* et *s''*, la troisième supérieure à la limite *s''*.

Pour étendre sa méthode de 3 à *n* variables, Cauchy définit en 1829 les deux équations extraites de l'équation (2) comme correspondant à des sous déterminants du système. L'équation $(B-s)(C-s)-D^2 =0$ correspondant au cas où *E* et *F* s'évanouissent s'interprète comme associée à un *mineur* extrait du système ([1]). La méthode de 1828 donne alors lieu à un raisonnement de récurrence permettant de traiter le cas général d'une équation de degré *n* dont le degré est abaissé par des extractions successives de déterminants : si P_{uv} désigne "*ce que devient S, lorsqu'on supprime dans le tableau (II) les termes qui appartiennent à la même colonne horizontale que le binôme A_{uu}-s, avec ceux qui appartiennent à la même colonne verticale que le binôme A_{vv}-s* " et si R désigne le mineur P_{xx}, alors le résultat de 1828 se généralise en un encadrement des racines de l'équation de degré *n* ([2]) [1829, 186] :

> Théorème I.- Quel que soit le nombre n des variables *x,y,z,...* l'équation *(7)* $S=0$ et les équations de même forme (76*)* $R = 0$, $Q=0$,...
>
> auront toutes leurs racines réelles. De plus, si l'on nomme (77) $s', s'', s''', \ldots, s^{(n-1)}$
>
> les racines de l'équation (29) $R=0$
>
> rangées par ordre de grandeur, les racines réelles de l'équation (7) seront respectivement comprises entre les limites (78) $-\tilde{o}, s', s'', \ldots, s^{(n-1)}, \tilde{o}$

---

[1] Le terme mineur, de Sylvester, n'est pas employé par Cauchy. Cauchy fait une description soigneuse du procédé d'extraction des "mineurs" [1829, 178] ce qui tend à montrer que le mémoire de 1829 est aussi, pour son auteur, une occasion de publicité de sa théorie des déterminants.

[2] $R =0$, $Q=0$ ... sont les premiers mineurs extrait de (28). Il faut aussi préciser, au vu de la forme du théorème I, que l'année 1829 est celle du résultat de Sturm sur les racines des équations par la méthode de la division euclidienne avec les dérivées sucessives. On pourra à ce sujet consulter Hourya Sinaceur [1988] et [1992].

c. L'occurrence de racines multiples comme *cas particulier* limitant la portée d'une méthode *générale*.

Cauchy généralise à *n* variables la démonstration de la réalité des racines élaborée dans le cadre de la géométrie analytique en 1828. Cette généralisation représente le véritable enjeu du mémoire de 1829. Son succès est dû au calcul des "fonctions alternées", c'est-à-dire des déterminants, développé par Cauchy depuis 1815 (consulter l'encart 3_b) ([47]), la généralisation à *n* variables pose cependant d'une façon nouvelle la question de la multiplicité des racines. La démonstration du théorème de Cauchy, soit l'écriture de la fonction homogène comme somme de carrés, nécessite en effet l'utilisation de formules de changements d'axes ([48]) :

$$x_i = X_i \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + \dots}}$$

dans lesquelles le terme de droite peut donner "une forme 0/0" en cas de racine multiple de l'équation caractéristique $S = 0$. Dans le cadre du calcul des fonctions alternés, l'occurrence d'une racine multiple se formule comme l'existence d'une racine commune entre l'équation $S = 0$ et une des équations caractéristiques $R = 0$, $Q = 0$, associées aux sous déterminant X_i extraits du système S (encart 3_b), c'est alors un *cas particulier* de non validité d'une *formule algébrique* '"générale" X_i/S. Cauchy, qui critique les méthodes qui tendent "à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que [...] la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions", n'esquive pas la difficulté et précise la limite de validité de sa méthode :

> D'après ce qui a été dit ci-dessus, il ne peut rester de doutes sur l'exactitude du théorème I, si ce n'est dans le cas où quelques valeurs de *s* vérifieraient à la fois les deux équations
>
> (36) $S = 0, R = 0, Q = 0, \dots$
>
> prises consécutivement.
> [Cauchy, 1829, 35].

Les "formules algébriques" de la méthode "générale" ne "subsistent" pas à la "condition" de multiplicité des racines. Hors de tout débat sur la stabilité mécanique des petites oscillations d'un système, l'occurrence de racines multiples est présentée comme un cas particulier limitant l'"étendue" d'une méthode algébrique et nécessitant pas conséquent un raisonnement *spécifique* que Cauchy mène par l'introduction d'infiniment petits ([49]). Face au cas

---

[47] Sur le calcul des fonctions alternées de Cauchy et le mémoire de 1815 dans le cadre de la genèse du concept de groupe, voir la thèse de doctorant de Amy Dahan Dalmedico : [Dahan Dalmedico, 1979]

[48] En termes contemporains, ces formules de changements d'axes correspondent à la définition d'une transformation orthogonale

[49] J'ai déjà abordé dans le paragraphe 2. de ce chapitre, à l'occasion de la discussion des méthodes de d'Alembert et Lagrange, la manière dont un tel raisonnement sur les infiniment petits peut être rendu rigoureux à l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass.

En termes contemporains, Cauchy déduit d'une itération du procédé ayant permit l'expression des solutions *x,y,z,…* en fonction des mineurs P_{xy} et du déterminant S, une démonstration directe de la réalité des racines de $S = 0$. L'identification, au facteur S près, des solutions *x,y,z,…* aux mineurs P_{xx}, P_{xy}, P_{xz},… permet d'itérer le procéder en écrivant la relation (38) :

$$(38)\ (A_{xx}-s)P_{xx}-A_{xy}P_{xy}-A_{xz}P_{xz}-\ldots = 0.$$

qui implique le système suivant :

$$(A_{xx}-s)P_{xx}-A_{xy}P_{xy}-A_{xz}P_{xz}-\ldots = S.$$
$$A_{xy}P_{xx}-(A_{yy}-s)P_{xy}-A_{xz}P_{xz}-\ldots = 0.$$
$$A_{xz}P_{xx}-A_{yz}P_{xy}-(A_{zz}-s)P_{xz}-\ldots = 0.$$

Le même procédé qui avait permis d'exprimer *x,y,z,…* permet d'exprimer P_{xx}, P_{xy},… à l'aide, cette fois, des seconds mineurs Q : $P_{xy} = -\dfrac{QS}{P_{xy}}$. L'itération du procédé permet, par extraction successive de déterminer de baisser le degré de l'équation $S = 0$ et de démontrer la réalité de ses racines par récurrence. [1829, 182] :

$$P_{xy} = -\frac{QS}{P_{xy}}$$

Donc, pour les valeurs de s propres à vérifier l'équation (29), on aura

$$(42)\ QS = -P^2_{xy} = -Y^2,$$

et par conséquent, les quantités Q, S seront affectées de signes contraires, si l'une et l'autre diffèrent de zéro. Cette remarque fournit une nouvelle démonstration de la réalité des racines de l'équation (7), et permet, en outre, de fixer des limites entre lesquelles ces racines se trouvent comprises, ainsi qu'on va le faire voir.

La relation $QS = -P^2_{xy}$ permet d'établir une preuve de la réalité des racines de l'équation $S = 0$ [Cauchy, 1829, 182-187].

particulier des racines multiples, Cauchy formule une nouvelle exigence de *généralité* consistant à élaborer une méthode *homogène*, indépendante de la considération de tout cas particulier et donc la nature des racines. Les événements politiques de 1830 sont proches et ce n'est qu'à son retour d'exil que Cauchy élabore, dans les années 1839-1840, une nouvelle méthode *homogène*, indépendante de la nature des racines et basée sur le calcul des résidus [Cauchy, 1839b] ([50]). Ce renouvellement de la signification de la généralité, cette exigence d'homogénéité, va porter la discussion des petites oscillations de Cauchy à Weierstrass, en passant par de nombreux auteurs comme Jacobi, Sylvester et Borchardt ([51]).

[50] Cette méthode sera abordée lors de la discussion sur la démonstration algébrique de Weierstrass [1858].

[51] Ces différents développements de la discussion ne seront pas abordés dans ce travail. Je renvoie à l'étude détaillé de Thomas Hawkins [1977] qui a notamment émis l'hypothèse que le mémoire de Carl Borchardt [1846], intitulé "Neue Eigenschaft der Gleichung, mit deren Hälfe man die seculären Störungen der Planeten bestimmt" pourrait être à l'origine de l'intérêt de Weierstrass pour la question. Hawkins fait référence à une lettre de Weierstrass, citée par Dugac [1972,158] mettant en évidence la relation privilégiée entre les deux hommes dans les années 1850.

d. Le calcul des résidus, une méthode homogène.

Le calcul des résidus est élaboré par Cauchy à partir de 1826 comme une méthode homogène de résolution des équations différentielles ordinaires à coefficients constants, le qualificatif *homogène* s'oppose ici aux *cas particuliers* qui "encombrent" les méthodes de l'algèbre en limitant l'"étendue" de la "subsistance" des *formules algébriques*. Dans le "Mémoire sur l'analogie des puissances et des différences et sur l'intégration des équations linéaires" [1825], Cauchy avait publié une solution des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre *n* de la forme ([52])

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

par l'emploi de "l'analogie du calcul des puissances et des différences", une méthode de calcul symbolique associant à une factorisation du polynôme

$$F(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n$$

une factorisation symbolique de l'équation différentielle. La méthode symbolique de 1825 perd cependant toute validité en cas d'occurrence de racines multiples dans l'équation $F(r) = 0$ ([53]). Au contraire, le calcul des résidus permet de donner une résolution homogène indépendante de la nature des racines de l'équation $F(r) = 0$ ([54]) :

$$y = \Re es \frac{\Phi(r) e^{rx}}{((F(r))}$$

$\Phi(r)$ étant un polynôme arbitraire

Comme nous l'avons vu au paragraphe c., le problème posé par l'occurrence de racines multiples se pose de manière analogue dans les formules algébriques de changements d'axes obtenues par Cauchy en 1829. A l'occasion de deux mémoires, publiés en 1839-1840 dans un contexte de travaux sur la propagation des ondes, l'élasticité et la théorie de la lumière, Cauchy revient

---

[52] Les coefficients a_i sont constants.

[53] Cauchy écrit l'équation différentielle sous la forme :

$$(D-r_1)(D-r_2)\ldots(D-r_n)y = -f(x)/a_0$$

où les r_i sont les racines réelles du polynôme *F*. Alors :

$$(D-r_1)y_{n-1} = f(x)/a_0$$
$$(D-r_2)y_{n-2} = y_{n-1}$$
$$\ldots$$
$$(D-r_n)y = y_1$$

et comme $(D-r)y = f(x)$ implique $y = e^{rx} \int e^{-rx} f(x)dx$, Cauchy obtient la formule suivante :

$$y = \frac{e^{r_n x}}{a_0} \int e^{(r_n - r_{n-1})x} (\int e^{(r_{n-1} - r_{n-2})x} (\ldots \int e^{(r_2 - r_1)x} f(x)dx \ldots)dx)dx$$

et cette formule nécessite l'occurrence de racines r_i toutes distinctes.
Pour tout complément, consulter [Dahan Dalmedico, 1992, 197].

[54] C'est-à-dire par l'intégrale curviligne $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\phi(r) e^{rx}}{F(r)} dr$ prise autour des racines de F.

sur sa méthode de 1829 et développe une solution homogène du problème des petites oscillations par le calcul des résidus. A cette époque, les préoccupations de Cauchy ont changées et le recours à la géométrie qui caractérisait l'approche de 1829 fait place à de nouvelles méthodes développées pour le traitement de problèmes de physique mathématique. Cette évolution des méthodes de Cauchy a été mise en évidence par Amy Dahan Dalmedico pour le cas de la théorie de l'élasticité, à une première approche des années 1820-1830, basée sur une représentation géométrique des ellipsoïdes de pressions, succède une seconde méthode, basée sur un point de vue moléculaire, et développée par Cauchy à partir de 1839. "Dans le cadre de la deuxième théorie moléculaire de Cauchy, l'appareil conceptuel qui avait favorisé la figuration géométrique des pressions et des déformations locales, en particulier par le biais des quadriques de pressions et de déformations est quelque peu perdu de vue" [Dahan Dalmedico, 1992, 285], "le calcul des résidus et le calcul symbolique sur les opérateurs différentiels prend une place prédominante" [Dahan Dalmedico, 1992, 211] ([55]). En 1839, Cauchy ne se préoccupe plus de la classification analytique des surfaces, le calcul de résidus lui permet d'élaborer une méthode *générale*, car *homogène* et indépendante des cas particuliers qui limitent les méthodes algébriques, permettant l'intégration des systèmes d'équations différentielles à l'origine de la discussion des petites oscillations ([56]) :

> Les équations différentielles qui représentent l'équilibre ou le mouvement d'un système de points matériels, [...] peuvent être appliquées, non seulement à la théorie du son et des corps élastiques, mais encore, ainsi que je l'ai montré dès l'année 1829, à la théorie de la lumière. Ces équations aux différences mêlées deviennent linéaires lorsque les mouvements sont infiniment petits et se transforment, quand on développe les différences finies des inconnues, à l'aide du théorème de Taylor, en équations aux dérivées partielles. [...] Partant de ce

---

[55] La théorie de la lumière de Cauchy qui décrit la lumière comme vibration de molécules ponctuelles d'éther sera abordée dans le chapitre III par sa postérité chez [Christoffel, 1861].

[56] Sur les mémoires de Cauchy de 1839-1840, voir [Dahan-Dalmedico, 1992, 206] :

> Dans une série de notes aux *C.R.* de Mai à Juin 1839, Cauchy considère le cas d'un système d'équations différentielles linéaires ordinaires du premier ordre que l'on peut écrire
>
> $$dx/dt = Ax$$
>
> où x est un n vecteur et A une application linéaire.
>
> Cauchy, qui domine parfaitement les techniques spectrales et les utilise maintenant très librement, considère la fonction principale Θ, comme solution de
>
> $$S(d/dt)\Theta = 0$$
>
> telle que $\Theta^{(i)}(0) = 0$ pour tout i Â $n-2$ et $\Theta^{(n-1)}(0) = 1$
>
> Θ est donnée comme une intégrale obtenue par calcul des résidus :
>
> $$\Theta = Res\, e^{st}/((S))$$
>
> c'est-à-dire en langage moderne
>
> $$1/2\pi i \int e^{st}/S(s)ds$$
>
> a partir de l'expression de Θ, la solution du système avec le vecteur initial $(\alpha_1\ldots,\alpha_n)$ est obtenue de façon particulièrement élégante en utilisant la matrice
>
> $$Q(s) = det(A-s)(A-s)^{-1}$$
>
> et en appliquant l'opérateur $Q(d/dt)$ au vecteur $(-1)^n(\alpha_1\Theta, \alpha_2\Theta,\ldots,\alpha_n\Theta)$
>
> Cauchy a donc exhibé un théorème qui ramène l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires ordinaires et à coefficients constants, du premier ordre, à la recherche de la fonction principale Θ.
>
> Ensuite Cauchy étend la méthode à un système d'équations différentielles ordinaires du second ordre, de la forme $d^2x/dt^2 = Ax$. L'équation caractéristique devient dans ce cas $S = det(A-s^2)$, et la fonction principale est déterminée de manière analogue [Cauchy, 1840].

> principe, on reconnaît que les actions exercées sur les atomes de l'éther par les molécules des corps produisent, dans les mouvements vibratoires du fluide lumineux, des perturbations analogues à celles que subit le mouvement d'une planète autour du Soleil, en vertu de l'action exercée sur elle par une autre planète.[...] Si maintenant on suppose qu'une seconde planète se meuve autour du Soleil, elle produira, dans le mouvement de la première, des inégalités ou perturbations de deux espèces, savoir des inégalités périodiques qui s'évanouiront, à des époques équidistantes, sans modifier les éléments de l'ellipse décrite, et des inégalités séculaires qui altèreront sensiblement les éléments du mouvement elliptique. Or ces divers phénomènes se reproduisent en petit dans la théorie de la lumière.
> [Cauchy, 1850,202].

La généralité de la méthode de Cauchy s'accompagne de l'attribution du nom d'*équation caractéristique* à l'équation algébrique au cœur des analogies formelles entre divers problèmes de physique mathématique et de géométrie analytique.

6. Clore la discussion : les "formes" et "transformations" de Weierstrass.

Selon l'histoire écrite par Kronecker en 1874 , un mémoire de Karl Weierstrass, publié en 1858 sous le titre "Ueber ein die homogenen functionen zweiten grades betreffendes Theorem, nebst anwendung desselben auf die theorie der kleinen schwingungen", clôt la discussion des petites oscillations. L'apparition dans le titre de l'expression "kleinen schwingungen" est significative : le mémoire vient répondre tout à la fois au problème de la stabilité des petites oscillations posé par Lagrange et Laplace et aux difficultés rencontrées par les formules algébriques de Cauchy en cas d'occurrence de racines multiples dans l'équation caractéristique. Le théorème principal de Weierstrass, énoncé ci-dessous, est formulé en termes contemporains dans l'encart 6 ci-contre.

> Soit deux fonctions homogènes du second degré Φ, Ψ de n variables $x_1, x_2, \ldots$, alors il est en général possible, de les représenter de cette même forme
> $$\Phi = \theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n$$
> $$\Psi = s_1\theta_1+s_2\theta_2+\ldots+s_n\theta_n,$$
> $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ étant des expressions quadratiques homogènes des $x_1, \ldots x_n$ et $s_1, \ldots$, s_n des constantes.
> Si, on note par s une grandeur arbitraire, le déterminant de $s\Phi\text{-}\Psi$ par $f(s)$, alors les valeurs s_i sont des valeurs de s pour lesquelles $f(s) = 0$.
> [Weierstrass, 1858, 233, traduction F.B.].

Une "transformation" opérée sur les variables du couple Φ, Ψ permet de "représenter" ce dernier sous une "même forme". Par la fin qu'elle donne à la discussion des petites oscillations, la solution de Weierstrass en change l'histoire qui devient pour Kronecker "l'histoire de la transformation des faisceaux de formes quadratiques". Les différents problèmes de la discussion des petites oscillations, de natures mécaniques ou géométriques, sont présentés par Weierstrass comme participant d'une même théorie générale des *transformations* d'un couple (Φ,Ψ) de fonctions homogènes du second degré ([57]). L'encart 7 présente la manière dont Weierstrass reformule les travaux de Lagrange et Cauchy comme des problèmes de transformations d'un couple de fonctions homogènes.

> Diese Transformation von Φ, Ψ ist eine der interessanten und wichtigsten algebraischen Aufgaben, welcher man bei den verschiedenartigsten Untersuchungen begegnet.
> [1858, 233].
>
> [Traduction, F.B] :
> Cette transformation de Φ, Ψ est une des tâches algébriques des plus intéressantes et importantes, on la rencontre dans le cadre de problèmes de natures très différentes.

[57] La forme Φ ayant un déterminant non nul.

ENCART 3.

Les méthodes de la discussion des petites oscillations (suite).

3. L’algèbre des formes de Weierstrass.

Le mémoire de Weierstrass de 1858 est célébré par Kronecker pour la solution générale qu’il donne au problème des petites oscillations par une méthode algébrique homogène indépendante de l’occurrence de racines multiples de l’équation caractéristique. Le succès de Weierstrass tient à l’expression du problème comme une question de "transformation d’un paire de formes" Φ, Ψ. Dans la pratique de sa démonstration, le notion de "transformation" donne lieu à une algèbre des *formes* qui combine les variables x_i, y_i en *formes linéaires*. Partant de l’écriture du couple de formes $s\Phi$-Ψ, Weierstrass cherche à rassembler les variables x_i en groupes de formes linéaires θ_i [Weierstrass, 1858, 235, traduction F.B.] :

> On pose, si $\alpha, \beta, \gamma,$ sont des nombres appartenant à $1,2,\ldots, n$
>
> $$\frac{1}{2}\ \frac{d\Phi}{dx\alpha} = \Phi\alpha,\quad \frac{1}{2}\ \frac{\delta\Psi}{\delta x\alpha} = \Psi_\alpha$$
>
> [...]
>
> On aura
>
> $$(5)\quad \Phi = \Sigma_\alpha\ \Phi_\alpha x_\alpha$$
> $$\Psi = \Sigma_\alpha\ \Psi_\alpha x_\alpha,$$

Weierstrass exprime les variables x_α par les formes linéaires Φ_α de manière à représenter l’écriture de Φ et Ψ comme combinaisons linéaires des formes quadratiques $\Phi_\alpha\Phi_\beta$ ([1]) :

> et si on sort $x_1, x_2, \ldots x_n$ de
>
> $$s\Phi_1\text{-}\Psi_1,\ s\Phi_2\text{-}\Psi_2, \ldots,\ s\Phi_n - \Psi_n$$
>
> On obtient :
>
> $$(1)\ x_\alpha = \Sigma_\beta \left\{ \frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)} (s\Phi_\beta\text{-}\ \Psi_\beta) \right\}$$
>
> où $f(s)_{\alpha\beta}$ est une fonction entière de degré inférieur au $(n\text{-}1)^s$ [...]
>
> $$(2)\quad f(s)_{\alpha\beta} = f(s)_{\beta\alpha}$$

La relation $x_\alpha = \Sigma_\beta \left\{ \frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)} (s\Phi_\beta\text{-}\ \Psi_\beta) \right.$ reprend les spécificités des méthodes de Lagrange et Cauchy (encarts 3_a et 3_b) en exprimant les x_α à l’aide de factorisations $f(s)_{\alpha\beta}$ du déterminant $f(s$ ([2]). Weierstrass, par des transformations de fonctions homogènes par regroupement des variables et l’emploi systématique de méthodes de la théorie des déterminant, démontre que l’expression algébrique $\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}$ (analogue au $\frac{Pxx}{S}$ de Cauchy) est, contrairement à ce que pensait Cauchy toujours définie, même en l’occurrence de racines multiples de $f(s) = 0$.

---

[1] Les Φ_α sont des formes linéaires qui constituent une base du dual E^*. Il s’agit d'onc d’exprimer les variables x_α dans cette base duale de manière à avoir une écriture des formes quadratiques comme somme de produits de formes linéaires : $\Phi = \Sigma\ k_{s-1}\Phi_\alpha\Phi_\beta,$

[2] D'un point de vue contemporain, si on note $B(s)$ la matrice des cofacteurs de la matrice caractéristique $sA\text{-}B$, alors

$$(sA\text{-}B)B(s) = f(s)\ I \quad ð \ \lnot\ \alpha\ f(s)x_\alpha = \Sigma_\beta\ b_{\alpha\beta}(s)\ [sA\text{-}B]_{\beta\alpha}$$

Dans le cas où la forme Φ est définie, positive et où les coefficients de Φ et Ψ sont réels, le théorème de Weierstrass énonce que les racines s_i de l'équation $f(s) = 0$ sont réelles. Ce théorème fondamental s'inscrit dans la théorie des formes quadratiques développée par les travaux récents de Jacobi, Sylvester et Hermite ([58]). Il se présente comme une généralisation de la loi d'inertie aux couples de formes et donne un *cadre théorique général* qui englobe les travaux géométriques de Cauchy et les recherches mécaniques de Lagrange et Laplace (voir encart 7) ([59]). La nouveauté de cette approche théorique tient à ce que, contrairement à Cauchy, Weierstrass résout le problème par une méthode à la fois *homogène* et *algébrique* qui permet l'énoncé d'un théorème général indépendant de la nature des racines s_i :

> Für den Fall, dass unter den Grössen $s_1, s_2, ..., s_n$ keine zwei gleiche sich finden, ist sie von Cauchy, Jacobi u.A. so vollständig behandelt worden, dass wohl nicht zu wünschen übrig bleibt. Dagegen scheint es nicht, als ob den eigentümlichen Umständen, die eintreten, wenn die Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ nicht alle von einander verschieden sind, besondere Beachtung geschenkt, und die Schwierigkeit, die sich alsdann darbieten, und auf die ich bei einer nachher näher zu besprechenden Frage aufmerksam geworden bin, schon gehörig aufgeklärt sein. Auch glaubte ich anfangs, es würde dies bei der Grössen Zahl verschiedener Fälle, die vorkommen können, nicht ohne weitläufige Erörterungen möglich sein. Um so erwünschter war es mir, zu finden, dass sich die von den genannten Mathematikern gegebene Lösung der Aufgabe in einer Weise modificiren lässt, bei der ein ganz gleichgültig ist, ob unter den Grössen $s_1, s_2, ... s_n$ gleiche vorkommen oder nicht.
> [1858, 233].
>
> [Traduction, F.B.] :
> [Le problème] a été complètement résolu par Cauchy, Jacobi etc. pour le cas où l'on ne trouve aucune grandeur égale parmi $s_1, s_2, ..., s_n$. Il n'est pas encore résolu en revanche dans les circonstances exceptionnelles où les racines de l'équation $f(s) = 0$ ne sont pas différentes l'une de l'autre, la difficulté qui se présente alors aurait déjà du être éclaircie et je propose de l'examiner attentivement plus en détail. Je ne pensais pas initialement qu'une solution serait possible sans des discussions spécifiques aux nombreux cas différents qui peuvent se produire. Il me fallait espérer que la résolution du problème soit susceptible d'une méthode indifférente à la multiplicité des grandeurs $s_1, s_2, ..., s_n$.

La portée générale du théorème de Weierstrass se manifeste dans la conclusion homogène donnée à la question de la stabilité mécanique des variations séculaires. La multiplicité des racines, puisqu'elle n'intervient pas dans

[58] La relation entre les travaux de Weierstrass et l'arithmétique des formes quadratiques sera développée en conclusion de ce chapitre.

[59] Le courant arithmétique de la théorie des formes quadratiques – et en particulier les travaux d'Hermite- est abordé dans la conclusion de ce chapitre et développé dans la première partie du chapitre II.

La variable x_α ne contenant pas de puissance de s, un développement "en puissances décroissantes" de l'expression Σ_β { $\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}$ ($s\Phi_\beta$- Ψ_β) } présente uniquement un terme constant. D'un autre côté, le développement de $\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}$ ne contient que des termes de degré inférieurs à s^{-1} car *deg(f(s))* = *n* (le déterminant de Φ n'est pas nul). Ne peuvent donc subsister dans le développement que des termes provenant du développement de $s\Phi_\beta$, et par conséquent (la notation $[\ldots]_{s-1}$ représente le coefficient de s^{-1} dans le développement) :

$$(3)\ \ x_\alpha = \Sigma_\beta\, [\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\,]_{s\text{-}1}\Phi_\beta$$

et comme les coefficients de s^{-1} disparaissent :

$$(4)\ \Sigma[f\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\,_{s\text{-}1}\Psi_\beta \ = \ \Sigma[s\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\,]_{s\text{-}1}\Phi_\beta$$

Ces deux identités, combinées à (4) et (2) permettent d'écrire :

$$(6)\ \Phi \ = \ \Sigma\, [\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\,)]_{s\text{-}1}\Phi_\alpha\Phi_\beta,$$

$$(7)\ \Psi \ = \ \Sigma\, [\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\,]_{s\text{-}1}\Psi_\alpha\Phi_\beta \ = \ \Phi \ = \ \Sigma\, [\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\,]_{s\text{-}1}\Phi_\alpha\Psi_\beta,$$

[...]

$$(8)\Psi = \Sigma[s\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\,]_{s\text{-}1}\Phi_\alpha\Phi_\beta$$

Les fonctions Φ et Ψ sont exprimées comme sommes des mêmes formes quadratiques $\Phi_\alpha\Phi_\beta$. Pour obtenir la transformation désirée des fonctions Φ et Ψ, il ne reste qu'à réorganiser l'écriture par regroupement des variables en groupes de formes θ_i et Θ_i pour lesquelles $\Theta_i = s\theta_i$

Le regroupement des variables x_i en formes θ_i est structuré par le développement en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}$ en une méthode renvoyant au traitement analytique des systèmes d'équations différentielles par Cauchy dans la fin des années 1830. L'expression $\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}$ s'interprète depuis le mémoire de Cauchy de 1829 (encart 3_b) comme le quotient d'un mineur par le déterminant *f(s)* dont il est extrait. Si s_i est une racine de *f(s)* qui n'est pas commune au mineur $f(s)_{\alpha\beta}$, la fraction rationnelle $\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}$ n'a qu'un pole d'ordre 1 en s_i qui sera compensé par le produit de $s\Phi_\beta$- Ψ_β. Si, par contre, s_i est une racine multiple de $f(s)$, l'expression $\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}$ n'a plus de signification pour $s = s_i$ et cette difficulté semble indiquer que le cas des racines multiples est hors de porté d'une solution algébrique générale et condamné à un traitement par des méthodes spécifiques. La résolution proposée par Cauchy en 1839 est formulée dans le cadre du calcul des résidus [1839b, 81] :

> On vérifiera les équations (1) en prenant
>
> $$(11)\ \xi \ = \ \int \frac{(L\alpha+M\beta+\ldots)e^{st}}{((S))}\ ,\ \eta \ = \ \int \frac{(P\alpha+Q\beta+\ldots)e^{st}}{((S))}\ ,\ldots.$$
>
> On remarquera maintenant que, dans les formules (9), les facteurs *L, M,.. P, Q,...*
> considérés comme fonctions de s, sont tous du degré *n-2*, à l'exception de ceux qui servent de coefficients, dans la valeur de *A* à α, dans la valeur de *B* à β,... c'est-à-dire à l'exception des coefficients *L, Q*,...,qui seront du degré n-1, et qui, étant développés suivant les puissances descendantes de s, donneront chacun pour premier terme s^{n-1}

l'énoncé du théorème, ne joue aucun rôle dans la question de la stabilité des variations séculaires ([60]) :

> Nachdem Lagrange die Form der Integral angegeben und gezeigt hat, wie die willkürlichen Constanten derselben durch die Anfangswerthe von x_1, $\frac{dx_1}{dt}$, u.s.w. stets unendlich klein bleiben, wenn sie es ursprünglich sind, auch die an, dass die genannte Gleichung keine gleiche Wurzeln haben dürfe, weil sonst in den Integralen Glieder vorkommen würden, die mit der Zeit beliebig gross werden könnten. Dieselbe Behauptung findet sich bei Laplace wiederholt, da wo er in der Mécanique céleste die Säcular-Störungen der Planeten behandelt, und ebenso, so viel mir bekannt ist, bei allen übrigen diesen Gegenstand behandelnden Autoren, wenn sie überhaupt den Fall der gleichen Wurzeln erwähnen, was z.B. bei Poisson nicht geschieht. Aber sie ist nicht begründet. [...], wenn nur die Function Ψ stets negativ bleibt, und ihre Determinante nicht Null ist, was stattfinden kann, ohne dass die Wurzeln der Gleichung *f(s) = 0* alle von einander verschieden sind ; wie man denn auch wirklich besondere Fälle der obige, Gleichungen, bei denen die Bedingung nicht erfüllt ist, mehrfach behandelt und doch keine Glieder von der angegebene Beschaffenheit gefunden hat.
> [1858, 244].
>
> [Traduction, F.B.] :
> Après avoir indiqué et énoncé la forme des intégrales, Lagrange a conclu que, comme les oscillations x_1, $\frac{dx_1}{dt}$ restent toujours petites si elles le sont à l'origine, l'équation ne peut pas avoir de racines égales car les intégrales pourraient devenir arbitrairement grandes avec le temps. La même affirmation se trouve répétée chez Laplace lorsqu'il traite dans la *Mécanique céleste* des variations séculaires des planètes. Beaucoup d'autres auteurs, comme, par exemple, Poisson, mentionnent cette même conclusion. Mais cette conclusion n'est pas fondée [...] et, si la fonction Ψ reste négative et de déterminant non nul, on peut énoncer le même résultat, que les racines de l'équation *f(s) = 0* soient ou non toutes distinctes ; l'homogénéité de cette conclusion n'a pas pu être découverte car on a toujours envisagé ce cas [des racines multiples] par des approches particulières.

A près d'un siècle de distance, Weierstrass répond à la "méthode générale"' énoncée par Lagrange pour décider de la stabilité d'un système de corps et conteste pour la première fois la forme des solutions données pour le cas des racines multiples. Que l'équation *f(s) = 0* ait des racines multiples ou non, la stabilité mécanique du système est assurée par la présence d'une "circonstance remarquable" ("bemerkenswerther*")* propre aux fonctions Φ définies positives (ou négatives) et selon laquelle une racine s_μ de multiplicité λ*-1* de toutes les

[60] L'attention de Weierstrass sur la question de stabilité pourrait provenir d'un article de Dirichlet [1846] (qui viendra en appendice à la troisième édition de la mécanique analytique [1853]). Dirichlet reprend la démonstration de Lagrange selon lequel un état d'équilibre d'un système est stable si la fonction de potentiel *V* y atteint un minimum strict. Thomas Hawkins [1977] a proposé une reconstruction rationnelle d'une démonstration partant du résultat de Dirichlet et de Laplace et impliquant la stabilité des solutions des systèmes différentiels des variations séculaires même en cas de racine multiple.

Dans l'expression de Cauchy , $\xi = \int \frac{Ae^{st}}{((s))}$ représente le résidu relatif "aux diverses racines de l'équation caractéristique". Les termes au numérateur représentent les "fonctions entières" de degré *n-1* qui permettent d'exprimer les valeurs *A, B, C* telles que :

$$(8)\ (s+l)A + mB + ... = \alpha S$$
$$pA + (s+qB) + ... = \beta S$$

Ces valeurs sont donc identiques aux mineurs principaux du système, notés $\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}$ par Weierstrass et le calcul des résidus de Cauchy invite à examiner les pôles de ces quotients pour les racines s_i de $f(s)$ ([3]).

Pour réorganiser l'écriture par groupes de variables θ_i et Θ_i pour lesquelles $\Theta_i = s\theta_i$, Weierstrass a recours aux pôles des fractions $\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}$, c'est à dire aux racines de l'équation $f(s) = 0$, $s_1, ..., s_m$:

$$(7)\ \Psi = \Sigma \left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s\text{-}1}\Psi_\alpha\Phi_\beta = \Phi = \Sigma \left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s\text{-}1}\Phi_\alpha\Psi_\beta,$$

[...]

$$(8)\Psi = \Sigma\left[s\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s\text{-}1}\Phi_\alpha\Phi_\beta$$

La décomposition de ces fractions en éléments simples donne ([4]) :

$$\left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)})\right]_{s\text{-}1} = \Sigma_\mu \left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)})\right]_{(s\text{-}s\mu)\text{-}1}$$

Les variables sont structurées en groupes caractérisés, pour chaque racine s_μ, par les termes comportant son résidu $\left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)})\right]_{(s\text{-}s\mu)\text{-}1}$ ([5]):

---

[3] Thomas Hawkins [1975, 131] a proposé une interprétation de l'origine de la "circonstance remarquable de Weierstrass par les solutions données par Cauchy en 1839 :

> Although Cauchy never pointed it out, his mode of expressing the solutions reveals that the boundedness of the solution [...] depends upon the nature of the poles of the rational functions $f_{ij}(s)/f(s)$. Suppose for example, that such a function has a pole of order *m* at $s= s_k$. By Cauchy residue formula
>
> $$Res_{s=sk}\ [f_{ji}(s)/f(s)e^{st}] = \frac{1}{(m-1)!}\ d^{m-1}/ds^{m-1}\ [(s\text{-}sk)^{m-1}f_{ji}(s)/f(s)e^{st}]_{s=sk}$$
>
> Powers of *t* will thus occur in the solution from the differentiation of e^{st} unless $m=1$ i.e. unless all poles are simple. [...] powers of *t* never arise to destroy stability provided every root of $f(s)$ of multiplicity *m* is a root of multiplicity *m-1* of each minor $f_{ji}(s)$.

[4] Je donne l'exemple suivant pour illustrer la notation de Weierstrass :

$$\frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\left[\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2}\right]$$

signife :

$$\left[\frac{x+1}{x^2+x-2}\right]_{s\text{-}1} = 2/3 + 1/3$$

[5] La méthode est toujours utilisée dans la pratique des calculs d'exponentielles de matrices intervenant dans la résolutions des systèmes différentiels. Exemple : calculer l'exponentielle de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est: $P_M = -(X\text{-}2)^2(X\text{-}3)$

On décompose 1/F en éléments simples ,avec $\frac{1}{F} = \frac{1}{X-3} - \frac{X-1}{(X-2)^2}$

Pour déterminer les projecteurs sur les sous espaces caractéristiques, on utilise le théorème de Bezout :

$$(X\text{-}2)^2 - (X\text{-}1)(X\text{-}3) = 1$$

et donc

$$U_1 = (-X\text{-}1) \text{ et } U_2 = 1,\ P_1 = U_1Q_1 = -(X\text{-}1)(X\text{-}3) \text{ et } P_2 = (X\text{-}2)^2$$

Les projecteurs sont $p_1 = P_1(M)$ et $p_2 = P_2(M)$, $exp(M) = e^\lambda (I_3 + 1/1!\ (M\text{-}2I_3)\ p_1{}^{+\ e\lambda 2}\ (M\text{-}I_3)p_2$

équations obtenues par les mineurs $f(s)_{\alpha\beta} = 0$, sera nécessairement une racine de multiplicité λ de l'équation $f(s) = 0$. Autrement dit, le quotient $f(s)/pgcd(f_{\alpha\beta}(s))$ ne peut pas prendre la valeur 0 au dénominateur et les formules algébriques énoncées par Cauchy en 1829 sont toujours valables. Appliqué aux "petites oscillations", le théorème clôt la discussion sur la stabilité des systèmes dynamiques [1858, 244].

> So ist nun dass folgende Theorem begründet.
> Es seien Φ, Ψ homogene ganze Functionen zweiten Grades von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit reellen Coefficienten, und die erstere überdies so beschaffen, dass sie für reelle Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$ stets dasselbe Zeichen behält und nur Null wird, wenn dies Grössen sämtlich verschwinden. Die Determinante der Function
> $$s\Phi - \Psi$$
> is dann eine ganze Function n^{ten} Grades der willkürlichen Grösse s, welche nur für eine Anzahl reeller Werthe der letzteren Null wird. Sind diese $s_1, s_2, \ldots, s_m$ und daher die Determinante, abgesehen von einem s nicht enthaltenden Factor, gleich
> $$(s-s_1)^{\lambda 1} (s-s_2)^{\lambda 2} \ldots (s-s_m)^{\lambda m},$$
> wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ ganze positive Zahlen bedeuten, deren Summe n ist ; so giebt es ebenso viel völlig bestimmte homogene Functionen zweiten Grades $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, durch welche sich Φ, Ψ in der Form
> $$\Phi = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m$$
> $$\Psi = s_1\theta_1 + s_2\theta_2 + \ldots + s_m\theta_m$$
> ausdrücken lassen, während θ_μ, oder $-\theta_\mu$, je nachdem Φ stets positive oder stes negative bleibt, al Summe der Quadrate von λ_μ reellen linearen Functionen der Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dargestellt werden kann, und zwar, wenn $\lambda_\mu > 1$ ist, auf unendlich viele Arten.
> [1858, 242]
>
> [Traduction, F.B.] :
> Le théorème suivant est donc démontré.
> Soit Φ, Ψ des fonctions entières homogènes du deuxième degré de n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, à coefficients réels et dont la première conserve un signe constant et ne s'annule pas identiquement pour les valeurs réelles de $x_1, x_2, \ldots x_n$.
> Le déterminant de la fonction :
> $$s\Phi - \Psi$$
> est une fonction entière de degré n de la grandeur variable s qui ne s'annule que pour des valeurs réelles. Soit $s_1, s_2, \ldots, s_m$ ces valeurs, alors le déterminant ne contient que les facteurs suivant :
> $$(s-s_1)^{\lambda 1} (s-s_2)^{\lambda 2} \ldots (s-s_m)^{\lambda m,}$$
> où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ sont des nombres positifs dont la somme est n ;
> il existe alors des fonctions homogènes parfaitement déterminées, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$, de degré deux et de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, telles que Φ et Ψ s'expriment sous la forme :
> $$\Phi = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m$$
> $$\Psi = s_1\theta_1 + s_2\theta_2 + \ldots + s_m\theta_m$$
> où θ_μ, ou $-\theta_\mu$ selon que Φ reste positive ou négative, représente une somme quadratique de λ_μ fonctions linéaires réelles des grandeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$(10)\ \Sigma_{\alpha\beta}\left\{\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s\mu)-1}\Phi_\alpha\Phi_\beta = \theta_\mu$$

$$\Sigma_{\alpha\beta}\left\{\frac{sf(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s\mu)-1}\Phi_\alpha\Phi_\beta = \Theta_\mu$$

de sorte que

$$\Phi = \theta_1 + \ldots + \theta_m,$$
$$\Psi = \Theta_1 + \ldots + \Theta_m$$

Ces regroupements des variables par la structure du développement en éléments simples de la fraction $\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}$ permet d'obtenir la transformation désirée pour le couple de fonctions (Φ,Ψ), autrement dit il reste à démontrer que pour tout μ de *{1,2,…m}*, $\Theta_\mu = s_\mu\theta_\mu$.

- **Le cas des racines distinctes.**

La démonstration est d'abord menée dans le cas traditionnel des racines distinctes (qui implique ici $m = n$) ([6]). Dans ce cas :

$$s\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)} = s_\mu\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)} + (s-s_\mu)\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}$$

et $\frac{s-s_\mu}{f(s)}$ *ne devient pas õ si* $s = s_\mu$

Par conséquent [1828, 236-237] :

$$\left\{s\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s\mu)-1} = \frac{f(s_\mu)_{\alpha\beta}}{f'(s_\mu)}$$

Ce qui permet de déduire :

$$(13).\ \Phi = \theta_1 + \ldots + \theta_m,$$
$$\Psi = s_1\theta_1 + \ldots + s_m\theta_m,$$

- **Le cas des racines multiples.**

Le problème posé par la signification de l'expression algébrique $\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}$ en cas d'occurrence de racines multiples est levé par l'utilisation de la "circonstance remarquable" [1828, 240] lorsque la forme Φ est définie positive (ou négative):

> Hier tritt nun aber sehr bemerkenswerter Umstand ein. Wenn nämlich Φ, Ψ relle Coefficienten haben, und überdies Φ fur reelle Werte von $x_1, x_2,\ldots,x_n$ stets dasselbe Zeichen behält, so folgt hieraus allein, dass s_μ stets eine (λ-1) fache Wurzel sämtlicher Gleichungen
>
> $f(s)_{\alpha\beta} = 0$
>
> wird, sobald sie eine λ fache der Gleichung $f(s) = 0$ sind.

En effet, cette circonstance remarquable implique :

$$(21).\ \frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)} = \frac{f_{\alpha\beta}^{(1)}}{s-s_1} + \frac{f_{\alpha\beta}^{(2)}}{s-s_{21}} + \ldots + \frac{f_{\alpha\beta}^{(m)}}{s-s_m}$$

Et la relation précédente permet de reprendre la démonstration du cas des racines distinctes.

[6] Ce traitement du cas des racines distinctes semble inspiré du mémoire de Jacobi [1834,eq.36] qui avait utilisé une forme similaire à $\frac{f(s_\mu)_{\alpha\beta}}{f'(s_\mu)}$ pour exprimer la décomposition d'une équation homogène en somme de carré Voir [Hawkins, 1977].

Suivre le fil de la discussion des petites oscillations, le jeu des postérités, les différentes lectures d'un même texte de Lagrange, a permis de mettre en valeur les différences de *représentations* attachées à des méthodes algébriques et l'évolution du qualificatif de *général* au sein d'une discussion mathématique. La revendication de généralité est une caractéristique de la discussion des petites oscillations dès son origine chez Lagrange en 1766. C'est aussi par une revendication de généralité que se clôt la discussion avec le mémoire de Weierstrass en 1858. Pour Lagrange, la méthode des petites oscillations est générale car elle permet de traiter un problème mécanique pour un système quelconque de corps et, si la méthode nécessite l'obtention de racines caractéristiques distinctes, cela n'en diminue pas la généralité de la méthode car seul ce cas de figure est considéré comme compatible avec la situation des petites oscillations. Ce qui était général en 1788 ne l'est plus chez Cauchy en 1829 lorsque l'occurrence de racines multiples apparaît comme un cas particulier qui, conduisant à des expressions de la forme $\frac{0}{0}$, limite la généralité d'une résolution algébrique et nécessite des méthodes spécifiques. L'exigence de généralité s'identifie désormais avec une nouvelle ambition d'homogénéité pour laquelle Cauchy abandonne les méthodes algébriques au profit de celles du calcul des résidus. Le mémoire de Weierstrass de 1858 démontre la possibilité d'apporter une résolution à la fois algébrique et homogène au problème des petites oscillations et, aux yeux de Kronecker, atteint une "généralité véritable" qui clôt la discussion des petites oscillations.
Quelle est la méthode de Weierstrass ? Les procédés, détaillés dans l'encart 3c, procèdent d'une *mathématique des transformations de formes.* Si la méthode de Lagrange consistait bien à ramener l'intégration d'un système d'équations différentielles à celle de *n* équations indépendantes, le changement de la *forme* du système n'est pas dû à un procédé de transformation mais à une représentation mécanique implicite selon laquelle le mouvement d'une corde chargée de *n* masses se décompose mécaniquement en oscillations de *n* cordes chargées d'une seule masse. Chez Cauchy, si le problème est énoncé comme portant sur la transformation d'une fonction homogène, le changement de forme est supporté par des représentations issues de la géométrie analytique, c'est-à-dire des changements d'axes orthogonaux. Dans les méthodes de Weierstrass, les anciennes représentations implicites disparaissent au profit d'une notion mathématique explicite, la notion de *forme*. Qu'est ce que cette *mathématique des formes* ? C'est une des questions fortes posée par la querelle Jordan-Kronecker de 1874 que la conclusion de chapitre propose d'éclairer sous l'angle des petites oscillations.

- **La démonstration de la circonstance remarquable.**

La démonstration use de la théorie des déterminants : il s'agit d'exprimer les $f(s)_{\alpha\beta}$ comme des mineurs du déterminant f(s). Si on développe le quotient $f(s)_{\alpha\gamma}/f(s)$ en puissances croissantes de $(s\text{-}s_\mu)$: $f(s)_{\alpha\gamma}/f(s) = h_{\alpha\gamma}(s\text{-}s_\mu)^l + \ldots$, alors la théorie du déterminant implique :

$$\frac{d\left(\frac{f(s)_{\gamma\gamma}}{f(s)}\right)}{ds} = -\sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\frac{f(s)_{\alpha\gamma}}{f(s)}\frac{f(s)_{\beta\gamma}}{f(s)},$$

$$l h_{\gamma\gamma}(s-s_\mu)^{l-1}+\ldots = -\sum_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}h_{\alpha\gamma}h_{\beta\gamma}(s-s_\mu)^{2l}+\ldots$$

Mais, comme Φ est supposée définie, ne s'annulant pas pour des valeurs réelles des variables x_i, non toutes nulles, le coefficient de $(s\text{-}s_\mu)^{2l}$ ne peut pas être nul et *2l Ã l-1* donc *l Ã -1.* Chaque terme $f(s)_{\alpha\gamma}$ doit par conséquent être divisible par $(s\text{-}s_\mu)^{\lambda\text{-}1}$ ce qui démontre la propriété remarquable.

Conclusion, une histoire de formes.

A Paris, où le mémoire de Weierstrass de 1858 sur les couples de fonctions homogènes est inconnu jusqu'en 1872, c'est Jordan qui répond à la remise en cause par Yvon Villarceau de la méthode de Lagrange pour l'intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants (partie I de ce chapitre) :

> Dans une des séances de l'hiver dernier, M. Yvon Villarceau a signalé une lacune dans le procédé généralement indiqué pour la solution d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants [...]. On sait en effet, que l'intégration de ce système dépend de l'équation caractéristique [...] mais le cas où cette équation a des racines égales présente une légère difficulté. On connaît en gros le moyen de la résoudre ; mais on n'a pas donné, que nous sachions, une analyse complète et embrassant tous les cas de la question. [...]
>
> $$(I)\quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1x_1+\ldots+l_1x_n,\ldots, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_2x_1+\ldots+l_2x_n,\ldots, \\ &\ldots\ldots. \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_nx_1+\ldots+l_nx_n, \end{aligned}$$
>
> Ce problème peut cependant se résoudre très simplement par un procédé identique à celui dont nous nous sommes servi, dans notre Traité des substitutions, pour ramener une substitution linéaire quelconque à sa forme canonique. Nous allons ramener de même le système (I) à une forme canonique qui puisse s'intégrer immédiatement. [...]
>
> Les équations différentielles prendront la forme
>
> $$(5)\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \sigma y_1, .., \dfrac{dy_\nu}{dt} = \sigma y_\upsilon \\ \dfrac{dx_{\nu+1}}{dt} = a'_1\, x_{\nu+1} + \ldots + k'_1\, x_n + \mathit{fonct}.(y_1,\ldots,y_\nu), \\ \ldots. \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a'_1\, x_{\nu+1} + \ldots + k'_{n-\nu}\, x_n + \mathit{fonct}.(y_1,\ldots,y_\nu), \end{cases}$$
>
> et l'on aura $\Delta = (\sigma - s)^\nu\, \Delta'$, Δ' désignant le déterminant
>
> $$\begin{vmatrix} a'_1 - s & \ldots & k'_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{n-\nu} & \ldots & k'_{n-\nu} - s \end{vmatrix}$$
>
> Poursuivant ainsi, on voit que les variables indépendantes peuvent être choisies de telle sorte qu'aux μ racines égales à σ que possède l'équation $\Delta = 0$ correspondent μ variables nouvelles formant un certain nombre de séries contenant respectivement $r, r', \ldots$ variables, $r + r' + \ldots$ étant égal à μ, et les variables d'une même série étant liées par une suite de relations de la forme
>
> $$(6)\quad \frac{dy_1}{dt} = \sigma y_1,\quad \frac{dz_1}{dt} = \sigma z_1 + y,\quad \frac{du_1}{dt} = \sigma u_1, + z_{1,\ \ldots,}\quad \frac{dw_1}{dt} = \sigma w_1 + v_1$$
>
> [...]

> Soit r le nombre de variables de la série $y_1,\ldots,w_1$; le système des équations (6) aura évidemment pour intégrales le système suivant :
>
> $$w_1 = e^{\sigma t}\psi(t),\ v_1 = e^{\sigma t}\psi'(t),\ldots,\ y_1 = e^{\sigma t}\psi^{r-1}(t),$$
>
> $\psi(t)$ étant une fonction entière arbitraire du degré $r-1$.
> [Jordan, 1871, 787].

Le problème général de l'intégration des systèmes d'équations linéaires à coefficients constants est résolu par application de la forme canonique des substitutions. L'interprétation mécanique sous-jacente à la méthode de Lagrange est remplacée par des notions de la théorie des groupes. Les variables du système d'équations sont interprétées comme sujettes à l'action d'une substitution du groupe linéaire. Une caractéristique de la substitution (la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme caractéristique) permet de regrouper les variables en "un certain nombre de séries" et de "ramener" le système d'équations à une "suite" de "formes simples" dont l'intégration est connue.

Peu après la résolution "complète et embrassant tous les cas de la question" des systèmes linéaires à coefficients constants, Jordan consacre une seconde note, en 1872, au cas spécifique de la discussion des petites oscillations. A la note de 1871, intitulée "Sur la résolution des équations différentielles linéaires", succède en 1872 la note « Sur les oscillations infiniments petites des systèmes matériels », dont l'objet est de discuter la stabilité d'un système matériel :

> Nous avons montré, dans une précédente communication, à quelles conditions doit satisfaire un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, dans le cas où son équation caractéristique a des racines égales, pour que la variable indépendante ne figure pas dans les intégrales hors des signes trigonométriques.
> [...] l'équation caractéristique de ce système n'a que des racines réelles, ce que l'on savait déjà, mais qu'elle peut avoir des racines égales, et que, néanmoins, si elle n'a pas de racine nulle, le temps ne figurera jamais dans l'intégrale hors des sinus et des cosinus.
> Ce résultat intéressant peut s'établir très simplement, comme on va le voir.
> [1872, 318-320].

Par rapport au cas général des systèmes différentiels, le cas des petites oscillations se caractérise par l'occurrence de ce que Laplace appelait les "rapports remarquables" et que Jordan interprète dans le cadre de la théorie des formes quadratiques. La réduction canonique des substitutions, après avoir été appliquée aux systèmes d'équations différentielles, est employée pour "réduire" un couple de formes quadratiques :

> Le système à intégrer est le suivant
>
> $$\text{(I)} \quad \frac{d^2}{dt^2}\frac{dT}{dq_1} = \frac{dU}{dq_1}, \ldots, \frac{d^2}{dt^2}\frac{dT}{dq_n} = \frac{dU}{dq_n}$$
>
> où $T = \Sigma a_{rs} q_r q_s$, $U = \Sigma b_{rs} q_r q_s$ sont des fonctions entières et du second degré des variables $q_1,\ldots q_n$ (on suppose $a_{rs} = a_{sr}$, $b_{rs} = b_{sr}$). La forme T est définie e positive ; enfin le déterminant des quantités a_{rs} ,n'est pas nul.[...].
> Donc enfin, on pourra choisir les variables de manière à ramener le système (I) à la forme canonique

$$\frac{d^2q_1}{dt^2}=\sigma_1 q_1,\ldots,\frac{d^2q_n}{dt^2}=\sigma_n q_n$$

> [...] Il est clair que la question de la réduction du système (1) à la forme canonique (7) est identique à ce problème connu : *Faire disparaître les angles des variables à la fois dans les deux formes quadratiques* T *et* U.
> [1872, 318-320].

L'appel lancé par Villarceau à l'Académie en 1870 suscite un premier point de contact entre le théorème de Jordan de réduction canonique des substitutions linéaires et le théorème de Weierstrass sur les couples de formes quadratiques. Envisagée sous cet angle, la controverse Jordan-Kronecker de 1874 oppose deux théorèmes qui se présentent comme deux façons de clore la discussion des petites oscillations. Comment comprendre le désaccord entre Jordan et Kronecker au vu d'une histoire commune, celle de la discussion des petites oscillations ?

Le premier trait caractéristique de la discussion des petites oscillations est la diversité. Diversité d'auteurs, de problèmes étudiés, de cadres théoriques : mécanique, géométrie, théorie des fonctions homogènes du second degré. L'histoire de la discussion des petites oscillations n'est pas l'histoire d'une théorie avant 1874 et c'est précisément avec la controverse qu'elle le devient. Quelle est la théorie dont il est question ? C'est bien là tout l'enjeu de la controverse, il s'agit de définir et d'organiser les objets et les méthodes d'une certaine *mathématique des formes* qui permet de clore la discussion des petites oscillations. En effet, le théorème de Weierstrass de 1858 énonce un résultat portant sur la "transformation" de deux fonctions homogènes et le terme de "réduction" employé par Jordan, renvoie à une idée similaire de "transformation" d'un système différentiel interprété comme une substitution [Jordan, 1871] ou un couple de formes quadratiques [Jordan, 1872]. Aux diverses représentations, souvent implicites, qui donnent leurs significations aux méthodes de Lagrange, Laplace et Cauchy, répond une mathématique portant sur la représentation même, une mathématique dont la "forme", la "transformation" est l'objet. Mais qu'est-ce qu'une forme en mathématiques ?

Lagrange emploie déjà le terme "forme" en 1788 lorsqu'il présente la "simplicité" et la "généralité" de sa synthèse sur la dynamique. Si la simplicité revendiquée par l'auteur de la *Mécanique Analytique* (partie II_1 de ce chapitre) semble contredite par les équations et symboles qui noircissent les pages du traité, la difficulté passe du domaine mécanique à la recherche de "formes" intégrales:

> Il est vrai que dans le cas du mouvement, les équations étant différentielles du second ordre, elles demandent ensuite des intégrations relatives aux différentes variables *t, x, z, x', y',* &c : mais c'est au calcul intégral à s'en charger ; & la Dynamique a fait tout ce qu'on étoit en droit de s'attendre d'elle, en donnant les équations fondamentales.
> [Lagrange, 1788].

"Au calcul intégral de s'en charger" : cette charge consiste pour l'essentiel en des transformations, changements d'écritures, manipulations de formes. Les manipulations de formes sont d'abord les opérations faites sur les variables pour en substituer d'autres, indépendantes entre elles ou mieux adaptées à la situation considérée :

> La formule générale à laquelle nous avons réduit dans la seconde section toute la théorie de la Dynamique, n'a besoin que d'être développée, pour donner les équations nécessaires à la solution de quelque problème de cette science que ce soit ; ce développement, qui n'est qu'une affaire de pur calcul, peut encore être simplifié à plusieurs égards par les moyens que nous allons exposer dans cette section.
> [...] Comme tout consiste à réduire les différentes variables qui entrent dans la formule dont il s'agit, au plus petit nombre possible par le moyen des équations de condition données par la nature de chaque problème ; une des principales opérations est de substituer à la place de ces variables des fonctions d'autres variables.
> [Lagrange, 1788].

Ces changements de variables permettent de manipuler des équations pour leur donner une "forme" bien déterminée et que l'on saura intégrer. Se pose donc une question de représentation, un problème de forme, qui, ne renvoyant pas à une notion mathématique explicite, n'en est pas moins normé par un critère de simplicité qui lui donne une certaine signification :

> Cependant comme ces équations peuvent avoir différentes formes plus ou moins simples, & surtout plus ou moins propres pour l'intégration, il n'est pas indifférent sous quelle forme elles se présentent d'abord ; & c'est peut-être un des principaux avantages de notre méthode, de fournir toujours les équations de chaque problème sous la forme la plus simple relativement aux variables qu'on y emploie, & de mettre en état de juger d'avance quelles sont les variables dont l'emploi peut en faciliter le plus l'intégration. Nous allons donner ici pour cet objet quelques principes généraux, dont on verra ensuite l'application dans la solution de différens problèmes.
> [Lagrange, 1788].

Quel sens attribuer à l'expression "forme la plus simple" ? Pour Lagrange, ce sera une "forme" différentielle intégrable. Pour Jordan, ce sera une forme algébrique bien définie à laquelle se réduit toute substitution linéaire. La différence entre les notions de formes de Lagrange et Jordan est manifeste dans les méthodes employées pour les systèmes d'équations différentiels : pour Lagrange, l'existence d'une forme intégrable du système est garantie par une représentation physique du problème. Lagrange ne cherche en effet pas à "transformer" le système initial en un système simple mais à trouver les paramètres d'une forme intégrable, déjà connue "en général". Pour Jordan au contraire, on "réduit", on "transforme" une substitution linéaire à sa forme canonique.
Entre Lagrange et Jordan, la discussion des petites oscillations est l'occasion d'observer une mutation de la notion de forme qui, avec Cauchy se nourrit d'une représentation géométrique associée à la méthode de transformation des axes de coordonnées d'une conique. Le mémoire de Weierstrass de 1858 enrichit encore la notion de forme en mêlant la discussion des petites oscillations à l'histoire déjà riche de l'arithmétique des formes quadratiques. Dans le cadre de l'arithmétique, la notion de forme est définie

mathématiquement par Gauss en 1801, comme le rappelle Hermite en 1853, cette définition est indissociable du concept arithmétique de classe d'équivalence ([61]) :

> Deux formes sont dites *équivalentes* lorsqu'on peut obtenir l'une d'elles en faisant dans l'autre une substitution linéaire et homogène, à coefficients entiers et au déterminant *un*. C'est cela du moins que consiste l'*équivalence arithmétique.* En admettant des quantités quelconques pour les coefficients de la substitution, on aura la notion de ce qu'on peut appeler l'*équivalence algébrique.* Dans le cas des formes quadratiques à un nombre quelconque n d'indéterminées, et des formes du n^{ieme} degré, décomposables en n facteurs linéaires, un seul et même fait analytique simple découle de cette notion. Ces formes, en effet, sont toujours algébriquement équivalentes ; les premières comme réductibles à une somme de n carrés $x_0^2+x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2$, les secondes comme réductibles à un produit de n variables $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. De là résulte, pour ces deux genres de formes, l'existence d'un seul *invariant*, c'est-à-dire d'une seule fonction des coefficients, qui la reproduit dans une transformée obtenue par une substitution algébrique, multipliée par une puissance donnée du déterminant de cette substitution.
> [Hermite, 1853]

La caractérisation des classes d'équivalences est l'objet même de la théorie mathématique des formes. C'est ainsi qu'Hermite interprète le théorème de Cauchy de 1829 de transformation de l'équation d'une surface du second degré comme un résultat portant sur l'équivalence des formes quadratiques:

> Pour les formes quadratiques, M. Cauchy a donné l'expression suivante de ces conditions [pour qu'une forme soit réductible à un type donné]. Soient
> $f(x_0, x_1,\ldots,x_{n-1})$ la forme proposée, Δ_i l'invariant de la forme à i indéterminées, qu'on obtient en faisant
> $$x_i = 0,\ x_{i+1} = 0,\ x_{i+2} = 0,\ \ldots,\ x_{n-1} = 0\,;$$
> le nombre des termes négatifs de la suite
> $$\Delta_1,\ \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ \frac{\Delta_3}{\Delta_2},\ldots\Delta_n/\Delta_{n-1}$$
> donnera immédiatement l'indice du type auquel appartient la forme proposée. Le premier terme Δ_1 est le coefficient de x_0^2, et il faut remarquer que, si l'une des quantités Δ, Δ_i, par exemple, vient à s'évanouir, on devra considérer les deux termes Δ_{i-1}/Δ_i et Δ_i/Δ_{i+1} comme donnant, l'un un signe *plus* et l'autre un signe *moins.* Remarquons qu'en appliquant la même règle à une transformée de f les quantités Δ_1, Δ_2, … changent toutes en général mais de manière que le nombre des termes positifs et négatifs de la nouvelle suite soit exactement le nombre des termes positifs et négatifs de l'ancienne.
> [Hermite, 1853].

Pour caractériser ces classes d'équivalence, deux approches sont envisageables: transformer les formes à des formes *canoniques*, ou calculer un système *d'invariants*. Si les deux notions de formes canoniques et d'invariants sont

[61] Gauss introduit le terme forme pour désigner une fonction homogène à coefficient entier ou rationnels (Disq, Arith. Art. 266)

intrinsèquement mêlées dans la théorie des formes, les *formes* canoniques étant définies comme les formes qui ne contiennent que des coefficients *invariants* par substitutions, elles renvoient cependant à des méthodes distinctes. La forme canonique porte l'idée de "réduction", de "transformation", d'une forme en une autre, la recherche d'invariants renvoie au calcul numérique de paramètres propres.

> Une proposition élémentaire et fondamentale dans la théorie arithmétique des formes consiste en ce que, pour un degré donné, et pour un nombre donné d'indéterminées, toutes les formes à coefficients entiers qui possèdent les mêmes *invariants* sont réductibles à un nombre fini de classes distinctes. Ce théorème a été démontré par Lagrange et Gauss pour les formes quadratiques à *deux* et à *trois* indéterminées ; je l'ai étendu ensuite aux formes quadratiques *générales*, et à toutes celles qui sont décomposables en facteurs linéaires ; ainsi il paraît bien vrai dans toute sa généralité. Mais, pour arriver à l'établir de cette sorte, il faudrait résoudre, dans toute leur étendue, les problèmes suivants, aussi beaux que difficiles.
>
> Le premier, qui appartient à l'Algèbre, consiste à obtenir la notion complète de ces fonctions rationnelles entières des coefficients, nommées *invariants* par M. Sylvester, dans le sens primitivement attribuée par M. Gauss au mot de déterminant.
>
> Le second, qui est du ressort de l'Arithmétique, consiste à découvrir par quelles substitutions à coefficients entiers on peut transformer une forme donnée en une autre dont les coefficients aient des limites, fonctions seulement des *invariants.* Enfin, il faut une méthode propre à donner le système complet des formes réduites représentant la totalité des classes distinctes pour des valeurs assignées *a priori* aux invariants.
>
> [Hermite, 1854].

La mathématique des formes est-elle une algèbre ou une arithmétique ? C'est précisément du côté des méthodes que se développe la controverse Jordan-Kronecker et si cette opposition peut avoir lieu en 1874, c'est que, au-delà de leurs oppositions, Jordan et Kronecker se réfèrent à une histoire commune. Cette histoire commune est définie par les éléments de cohérences internes de la discussion des petites oscillations dégagés en encart 3a, 3b et 3c. Elle se manifeste dans la postérité d'une méthode, élaborée par Lagrange comme propre au problème des petites oscillations en 1766 et qui se développe sur la durée d'un siècle et cristallise des éléments propres aux différentes représentations implicites mises en œuvres. Décomposition mécanique du mouvement d'une corde, changements d'axes géométriques, extractions de sous déterminants, décomposition d'une substitution linéaire viennent s'articuler à la décomposition polynomiale d'une équation algébrique et former la spécificité d'une méthode héritée des petites oscillations. Cette méthode donne un caractère opératoire à la "forme" d'un système en articulant la factorisation d'une équation algébrique à une extraction de déterminants. Elle permet d'opérer sur la représentation elle-même, de "transformer" la forme du système. Un exemple en est la manière dont Cauchy mêle son calcul des déterminants aux méthodes polynomiales héritées de la solution donnée par Lagrange au problème des petites oscillations :

Il est facile de vérifier le théorème I dans le cas où les quantités A_{xx}, A_{xy}, $A_{xz}, \ldots, A_{yy}$, $A_{yz}, \ldots$, $A_{zz}, \ldots$ s'évanouissent toutes à l'exception de celles qui, dans le second membre de la formule (8), sont multipliées par la variable *x* ou par le carré de l'une des variables *x, y, z, ...* Alors, en effet, l'équation (29), réduite à

(81) $(A_{yy}-s)(A_{zz}-s)(A_{uu}-s)\ldots = 0,$

aura pour racines A_{yy}, A_{zz}, $A_{yy}, \ldots$ Donc si, pour fixer les idées, on suppose

(82) $A_{yy} < A_{zz} < A_{uu}, \ldots,$

on pourra prendre

(83) $s' = A_{yy}$, $s'' = A_{zz}$, $s''' = A_{uu}, \ldots$

D'un autre côté, comme, dans l'hypothèse admise, le Tableau (II) se réduira au suivant

$$(84)\begin{cases} A_{xx}-s, & A_{xy}, & A_{xz}, & A_{xu}, & \ldots, \\ A_{xy}, & A_{yy}-s, & 0, & 0, & \ldots, \\ A_{xz}, & 0, & A_{zz}-s, & 0, & \ldots, \\ A_{xu}, & 0, & 0, & A_{uux}-s & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{cases}$$

on aura évidemment

(83) $S = (A_{yy}-s)(A_{zz}-s)(A_{uu}-s)\ldots(A_{xx}-s- A^2_{xy}/(A_{yy}-s) - A^2_{xz}/(A_{zz}-s) - A^2_{xu}/(A_{uu}-s)-\ldots$

$= (A_{yy}-s)(A_{zz}-s)(A_{uu}-s)\ldots -A^2_{xy}(A_{zz}-s)(A_{uu}-s)\ldots -A^2_{xz}(A_{yy}-s)(A_{uu}-s)\ldots)\ldots$

$-A^2_{xy}(A_{yy}-s)(A_{zz}-s)\ldots$;

puis on en conclura, en désignant par *S', S'', S''',...* les valeurs de *S* correspondantes aux valeurs $s' = A_{yy}$, $s'' = A_{zz}$, $s''' = A_{uu}$ de la variable *s*,

$$(86)\begin{cases} S' = -A_{xy}^2(A_{zz}-A_{yy})((A_{uu}-A_{yy})\ldots < 0, \\ S'' = +A_{xy}^2(A_{zz}-A_{yy})((A_{uu}-A_{yy})\ldots > 0, \\ S'' = -A_{xu}^2(A_{uu}-A_{yy})((A_{uu}-A_{zz})\ldots < 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Donc l'équation (7) offrira, dans l'hypothèse admise, *n* racines réelles qui, prises consécutivement et deux à deux, renfermeront entre elles les racines de l'équation (29).

Dans le cas que nous venons de considérer, les quantités *S', S'' S''',...* ne s'évanouiront jamais et, par conséquent, une même valeur de s ne pourra vérifier simultanément les équations (7) et (81), à moins que l'un des coefficients A_{xy}, A_{xx}, $A_{xu}\ldots$

[Cauchy, 1829, 188].

Les deux théorèmes de Jordan et Weierstrass sont identifiés comme résolvant un même problème de la théorie des couples de *formes* par des méthodes basées toutes deux sur des *décompositions polynomiales* articulées à des *décompositions d'un déterminant*. C'est sur la question de ce qu'est une *forme* ou une *décomposition* que les théorèmes et les méthodes s'opposent. A une culture commune reconnue par Jordan et Kronecker dans la discussion des petites oscillations, s'ajoutent des différences dues aux contextes spécifiques dans lesquels sont élaborés les deux théorèmes dans les années 1860-1870. Ces différences, qui impliquent deux perceptions opposées de ce que doit être la théorie des formes et se manifestent dans la tension *formes canoniques – invariants* qui caractérise la querelle de 1874, sont étudiées dans le chapitre 3.

ENCART 1.

Un état civil de Camille Jordan.

Les informations ci-dessous sont extraites du "rapport particulier sur Jordan. Génie / Ec. Pol. Inspection de 1880" et d'un acte d'état civil rempli par Jordan [VI, 2.a. 2.X1855] :

Marié le 14 mai 1862.
Elève de l'école polytechnique. 1/10/55
Service des mines. 1/10/57
Examinateur à l'Ecole Polytechnique. 4/6/73 à 7500 francs
Examinateur à l'Ecole Polytechnique. 1/7/75 à 7503,16 francs
Professeur d'analyse à l'école polytechnique. 27/12/76 à 7503,16 francs.
Professeur d'analyse à l'école polytechnique. 1/1/80 à 10004,21 F francs.
Chevalier la légion d'honneur le 15/4/75.
Officier de légion d'honneur le 12/7/80.
Officier d'académie le 27/12/1885.
Officier de l'institut public le 28/1/1900.
Jordan est nommé membre du conseil de perfectionnement de l'école lors du départ à la retraite de Bertrand en 1894 (art 38 du décret du 13/3/94).

Jordan sera admis à faire valoir ses droits à une pension de retraite le 22/ 5/ 1911 (Lettre de la 4e direction du ministère de la guerre (génie) au général commandant de l'Ecole Polytechnique du 13/06/1911 et lettre du général Joffre, inspecteur des écoles au conseil de l'instruction de l'école polytechnique du 28/9/1911 [VI, 2.a. 2.X1855]). Il restera cependant professeur honoraire (nomination du 17/7/1912) puis élu le 7/5/1917 pour représenter l'Académie des sciences au conseil de perfectionnement de l'école en remplacement du décès de Leaute.

Chapitre 3.

La controverse comme rencontre de deux cultures mathématiques.

ENCART 2.
Les candidatures de Jordan à l'académie des sciences.

[Comptes Rendus, 1871, t. 73, p. 58].

A 4 heures et demie, l'Académie se forme en Comité secret.

COMITÉ SECRET.

La Section de Géométrie présente, par l'organe de son doyen, **M. Chasles**, la liste suivante de candidats à la place devenue vacante dans son sein, par suite du décès de *M. Lamé* :

En première ligne.	**M. Puiseux.**
En deuxième ligne et par ordre alphabétique. . .	**M. Bouquet.** **M. Briot.** **M. Jordan.**
En troisième ligne.	**M. Darboux.**
En quatrième ligne.	**M. Mannheim.**

Les titres de ces candidats sont discutés.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

[Comptes Rendus, 1871, t. 73, p. 85].

NOMINATIONS.

L'Académie procède, par la voie du scrutin, à la nomination d'un Membre qui doit remplir, dans la Section de Géométrie, la place laissée vacante par le décès de M. *Lamé*.

Au premier tour de scrutin, le nombre des votants étant 49,

M. Puiseux obtient...... 49 suffrages.

M. Puiseux, ayant réuni l'unanimité des suffrages, est proclamé élu. Sa nomination sera soumise à l'approbation du Chef du pouvoir exécutif.

[Comptes Rendus, 1875, t. 80, p. 979].

COMITÉ SECRET.

La Section de Géométrie, par l'organe de son doyen, M. Chasles, présente la liste suivante de candidats, pour la nomination d'un membre, en remplacement de M. *Bertrand*, élu Secrétaire perpétuel.

En première ligne.	**M. Bouquet.**
En deuxième ligne et par ordre alphabétique. . .	**M. Darboux,** **M. Jordan,** **M. Laguerre.**
En troisième ligne, par ordre alphabétique. . .	**M. Mannheim,** **M. Moutard.**

Les titres de ces candidats sont discutés.
L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

[Comptes Rendus, 1875, t. 80, p. 996] :

NOMINATIONS.

L'Académie procède, par la voie du scrutin, à la nomination d'un Membre dans la Section de Géométrie, en remplacement de M. *Bertrand*, élu Secrétaire perpétuel.

Au premier tour de scrutin, le nombre des votants étant 60,

M. Bouquet obtient.	31	suffrages.
M. Mannheim.	24	»
M. Jordan.	5	»

M. Bouquet, ayant réuni la majorité absolue des suffrages, est proclamé élu.

Introduction.

Dans ce chapitre, la querelle de 1874 est étudiée comme la rencontre de deux cultures mathématiques renvoyant à des travaux indépendants des années 1860-1870, il s'agit donc de détailler les contextes dans lesquelles s'élaborent les théorèmes de Jordan et de Weierstrass.

La conclusion du précédent chapitre a mis en évidence une question essentielle à la controverse de 1874, celle de la signification de la notion de *forme* en mathématiques. Si Weierstrass utilise en 1858 le terme de "fonction homogène du 2^e^ degré" et Christoffel en 1864 le terme de "fonction bilinéaire", la dénomination de "forme bilinéaire" de Kronecker s'impose à partir de 1874 et apparaît dans les travaux de Jordan à l'occasion de la controverse. La mathématique des formes s'élabore en un filage de la théorie arithmétique des classes d'équivalences et de la théorie algébrique des groupes, elle a pour objet la description de *classes d'équivalences* sous l'*action de l'opération d'un groupe*. On distingue alors une *algèbre des formes* portant sur la relation d'*équivalence* des formes bilinéaires pour l'action du groupe linéaire et une *arithmétique des formes* étudiant l'action du groupe orthogonal. Comment la notion arithmétique de classe d'équivalence des formes quadratiques qui se développe des travaux de Gauss trouve-t-elle une signification pour les *polynômes* de formes bilinéaires $s\Phi-\Psi$ par lesquels Weierstrass clôt la discussion des petites oscillations ? Comment un théorème de réduction des substitutions linéaires à une "forme canonique", énoncé dans le cadre de la théorie des groupes, se trouve-t-il investi par Jordan dans divers domaines comme celui des formes bilinéaires et quadratiques ? Pour répondre à ces questions, la première partie de ce chapitre précise le contexte des travaux de Camille Jordan sur la théorie des substitutions dans les années 1860-1870.

La signification de la notion de forme chez Kronecker sera précisée dans la deuxième partie de ce chapitre par une histoire de l'origine de la théorie des formes bilinéaires dans les années 1860-1875. En 1860, les formes bilinéaires, bien qu'utilisées depuis quelques dizaines d'années par les méthodes de transformations par polaires réciproques de la géométrie projective, ne font pas l'objet d'une théorie propre ([1]). Dans les années 1870, la théorie des formes bilinéaires est l'objet de la controverse entre Jordan et Kronecker et de premiers cours comme ceux de Christoffel à Strasbourg ou de Jordan au Collège de France.

La troisième partie de ce chapitre est consacrée à la construction d'une identité entre les deux théorèmes opposés en 1874 et met en évidence ce que cette construction nécessite d'analogies, d'adaptations, de précisions, de synthèses, de définitions, bref de travail mathématique et de communication. La communication joue un rôle essentiel dans la construction d'une équivalence mathématique entre les théorèmes de Jordan et Weierstrass ; communication entre des savants comme Jordan, Weierstrass, Kronecker, Darboux et

[1] Et ce, malgré un mémoire de Jacobi, consacrée aux formes bilinéaires générales mais qui procède surtout d'une généralisation formelle de la loi d'inertie des formes quadratiques. Dans le contexte de la géométrie projective, les formes bilinéaires sont *duales* des formes quadratiques et toujours *symétriques*.

Jordan est élu en 1881 à la succession de Chasles, [Comptes Rendus, 1881, t. 93, p. 801] :

COMITÉ SECRET.

La Section de Géométrie, par l'organe de son doyen, M. Hermite, présente la liste suivante de candidats à la place laissée vacante dans son sein par le décès de M. *Chasles*.

En première ligne.	M. CAMILLE JORDAN.
En deuxième ligne.	M. GASTON DARBOUX.
En troisième ligne.	M. LAGUERRE.
En quatrième ligne, ex æquo *et par ordre alphabétique*.	M. HALPHEN. M. MANNHEIM.
En cinquième ligne, ex æquo *et par ordre alphabétique*.	M. APPELL. M. ÉMILE PICARD. M. POINCARÉ.

[Comptes Rendus, 1881, t. 93, p. 849] :

NOMINATIONS.

L'Académie procède, par la voie du scrutin, à la nomination d'un Membre qui remplira, dans la Section de Géométrie, la place laissée vacante par le décès de M. *Chasles*.

Au premier tour de scrutin, le nombre des votants étant 55,

M. Jordan	obtient.	33 suffrages.
M. Mannheim	»	21 »
M. Darboux	»	1 »

M. JORDAN, ayant réuni la majorité absolue des suffrages, est proclamé élu. Sa nomination sera soumise à l'approbation du Président de la République.

En 1883, Jordan est nommé au collège de France au poste laissé vacant par le décès de Liouville, [Comptes Rendus, 1883, t. 96, p. 221] :

NOMINATIONS.

L'Académie procède, par la voie du scrutin, à la formation d'une liste de deux candidats, qui doit être présentée à M. le Ministre de l'Instruction publique, pour la chaire de Mathématiques devenue vacante au Collège de France, par suite du décès de M. *Liouville*.

Au premier tour de scrutin, destiné à la désignation du premier candidat, le nombre des votants étant 49,

M. C. Jordan obtient	41	suffrages
M. Laguerre »	5	»

Il y a trois bulletins blancs.

Au second tour de scrutin, destiné à la désignation du second candidat, le nombre des votants étant 41,

M. Laguerre obtient . . . . . 41 suffrages.

En conséquence, la liste adressée par l'Académie à M. le Ministre de l'Instruction publique comprendra :

En première ligne.	M. C. JORDAN
En seconde ligne.	M. LAGUERRE

Frobenius, communication entre des théories comme l'arithmétique et la théorie des groupes. L'étude d'une communication entre des cultures mathématiques est indissociable du contexte historique plus général des relations franco-allemandes à l'époque des canons Krupps et de fusils Chassepots et l'ambition sera de saisir tout à la fois les questions mathématiques suscitées par la controverse et les facteurs culturels qui les accompagnent. Les idéaux disciplinaires de Jordan et de Kronecker mis en évidence au chapitre premier sont étudiés dans le contexte d'une époque où "les conditions propres à chaque pays et la prise en charge par les Etats de la formation des mathématiciens à une échelle bien plus grande qu'auparavant expliquent aussi l'existence de spécificités régionales ou nationales dans le développement mathématique" [Goldstein, 1996, 17]. L'ambition de Jordan de réorganiser une théorie développée par des "géomètres berlinois" fera l'objet d'une réflexion sur les spécificités locales du développement mathématique. D'un point de vue institutionnel, la description historique des travaux berlinois sur les formes bilinéaires participe de celle de l'identité d'une communauté, héritière de réformes universitaires dont la nouveauté tient surtout au fonctionnement des séminaires portant un enseignement par la recherche et favorisant l'abandon du domaine des mathématiques élémentaires et des mathématiques appliquées [Schubring, 1996] ; l'opposition des idéaux disciplinaires de Jordan et Kronecker porte un éclairage sur ce qui est souvent décrit comme le programme d'arithmétisation de "l'école de Berlin" dans le contexte d'un déplacement du centre de gravité de la production scientifique de Paris à Berlin dans les années 1840-1860 ([2]).

[2] De nombreux acteurs contemporains comme Hermite ou Smith font état de ce déplacement. Voir à ce sujet Gispert [1991].

ENCART 3.

Quelques éléments sur la famille Jordan.

Né le 5 janvier 1838 à la Croix Rousse, Jordan est issu d'une famille de notables lyonnais [Lebesgue, 1922, XV-XVI] ([1]) :

> Camille entra au lycée de Lyon dans la classe de mathématiques spéciales ; en 1885, à 17 ans et demi, il fut reçu premier à l'Ecole Polytechnique. Le jury était composé de Didion, Hermite, Lefébure de Fourcy, Serret et Wertheim ; Serret en particulier, avait la réputation d'être fort difficile, il donna cependant la note de 19,8 sur 20 au jeune Camille. Ceci nous montre la valeur exceptionnelle du candidat Jordan, et aussi les illusions que se faisaient Serret sur la précision de ses examens.

A sa sortie de l'école des mines et après la soutenance de sa thèse de doctorat en 1861, Jordan débute une carrière d'ingénieur, d'abord à proximité de Lyon puis à Paris, sur la ligne de chemin de fer d'Orléans.

Cet encart aborde le contexte familial de Jordan, contexte volontiers mis en valeur par les biographes ([2]), et qui n'est pas sans lien avec la métaphore familiale employée par l'historiographie des années 1960 qui voit en Jordan l'un des pères de la théorie des groupes ([Dieudonné, 1961], [Julia, 1961]). Le père de Camille Jordan, Esprit Alexandre, est polytechnicien et ingénieur des ponts et chaussées. Sa mère, Joséphine, est la fille d'un ingénieur en chef des mines et la sœur du peintre symboliste Pierre Puvis de Chavannes. [Bertin, 1922] :

> Jordan a été un honnête homme, un grand honnête homme dans toutes les acceptions du mot. Il a continué à Paris, dans le même quartier de Paris, la tradition des philosophes chrétiens et des penseurs, auxquels est due la renaissance du catholicisme parisien au commencement du siècle dernier.

La forte tradition catholique de la famille Jordan est représentée par la figure du grand oncle, également nommé Camille Jordan (1771-1821), politicien de la restauration et champion des libertés religieuses. Dès son élection au conseil des cinq-cent, assemblée législative de la convention de l'an III, le grand oncle se fait l'ennemi de la constitution civile du clergé, il prendra part au soulèvement de Lyon contre la convention [Sainte Beuve, 1884, 258]. Sous la restauration, C. Jordan sera appelé au conseil d'état par Louis XVIII et élu député. Dans le portrait qu'il dresse de C. Jordan, au travers de sa correspondance avec Mme de Staël, Sainte Beuve illustre le catholicisme du grand oncle par son action en faveur du rétablissement des sonneries des églises [Sainte Beuve, 1884, 256] :

> Il eut beau dire, le lendemain de son Rapport l'incrédulité philosophique prit sa revanche : on le chansonna, on attacha à son nom des sobriquets burlesques, des refrains et des carillons en manière de charivaris.
>
> Par exemple, il y eut le *Din, din, dindon, vaudeville,* dédié à Camille Jordan. En voici le dernier couplet :
>
> Tu vas donc pour ta récompense,
> Jordan-bourdon,
> Te dire : Il n'est clocher en France,
> Ni clocheton,

[1] Une étude détaillée de la famille Jordan, du XVI^{e} au XX^{e} siècle, a été réalisée sous la forme d'une monographie par Augustin Jordan, petit fils de Camille Jordan, voir [A. Jordan, 1983] .

[2] Voir en particulier la biographie prononcée à l'occasion de l'élection de Lebesgue au siège de Jordan à l'Académie [Lebesgue, 1922], l'hommage de Henri Villat qui prend la succession de Jordan à la direction du Journal de Mathématiques [Villat, 1922, 1]. Voir également l'éloge prononcé par Bertin, président de l'Académie à la mort de Jordan [Bertin, 1922], celui de Hardy à l'Académie de Londres [Hardy, 1922] et l'introduction de Julia aux œuvres complètes de Jordan [Julia, 1961].

I. SIMPLICITE ET REDUCTION CHEZ JORDAN.

L'objet de cette partie est d'expliciter l'argument de simplicité employé par Jordan lors de la querelle de 1874 à l'aide des méthodes élaborées pour l'étude des groupes de substitutions dans les années 1860-1870. Les encarts 4, 5 et 6 proposent des études détaillées de travaux de Jordan et viennent appuyer les arguments portés dans le corps du texte. L'encart 5 est notamment consacré à la démonstration par Jordan du théorème de la réduction canonique des substitutions.

1. Un contexte d'"application" par Jordan des méthodes de la théorie des groupes entre 1870 et1880.

La querelle de 1874 intervient à une charnière de la carrière de Jordan qui, dans les années 1870, se détache progressivement de sa profession d'ingénieur des mines pour venir occuper des positions institutionnelles clés des mathématiques parisiennes (un état civil de Jordan est inséré en encart 1 et l'encart 2 donne quelques éléments sur la famille Jordan). Délégué suppléant du département des travaux publics aux examens de fin de cours de l'école impériale polytechnique à l'été 1870 ([3]), Jordan est nommé examinateur d'analyse le 26 juin 1873 ([4]), il succède à Hermite dans sa charge de professeur d'analyse le 24 novembre 1876 ([5]) et cesse officiellement son service d'ingénieur en chef sur le Paris-Orléans le 4 août 1886 ([6]). Jordan postule à l'académie des

---

[3] Lettre de la 4e direction du ministère de la guerre (génie) au général commandant de l'école polytechnique du 20/6/1870 [VI, 2.a. 2.X1855].
Durant la guerre de 1870, Jordan est mobilisé comme capitaine du génie, [A. Jordan, 1983, 178] :

> [….] il demande et obtient de son ministre, en février 1871, l'autorisation de prendre la direction d'un des ballons à hélice de l'amiral Labrousse pour tenter un voyage aller et retour entre Paris assiégé et la province. A son vif regret, ce projet n'eut pas de suite du fait de la mauvaise volonté et de la grossièreté d'un certain M. Godard dont le concours était indispensable.

[4] Décision du président de la république du 26 juin 1873. Lettre de la 4e direction du ministère de la guerre (génie) au général commandant de l'école polytechnique du 27/6/1873 [VI, 2.a. 2.X1855].

[5] Décret du président de la république du 24/11/1876. Lettre de la 4e direction du ministère de la guerre (génie) au général commandant de l'école polytechnique du 27/11/1876 [VI, 2.a. 2.X1855].

[6] Lettre de la 4e direction du ministère de la guerre (génie) au général commandant de l'école polytechnique du 4/8/1886 [VI, 2.a. 2.X1855] :

> Général, Mr le Ministre des travaux publics vient de m'informer que, par suite de la réorganisation du service du contrôle de l'exploitation de chemins de fer de Paris à Orléans en prolongements, M. Jordan ingénieur en chef des mines cessera d'être attaché à ce service.

D'où ne retentisse mon nom…
Din din, din din / dindon dindon.

> Il courut contre lui nombre de chansons pareilles, également plates, et qui n'avaient que le refrain. J'en fais grâce.

La tradition catholique reste forte au sein du foyer fondé par Camille Jordan et Isabelle Munet. [Villat, 1922, 1] :

> Sans aucune ambition autre que celle de la Science et l'enseignement, c'est dans la vie intime de la famille, que l'illustre savant sut trouver le vrai et durable bonheur. Il s'était marié en 1862 avec M[lle] Isabelle Munet, dont il eut huit enfants, six fils et deux filles ; vingt-cinq petits enfants et trois arrière-petits-fils étaient venus accroître cette grande et belle famille ; le dernier né datait du 12 janvier 1922 […]. [Jordan] avait vu disparaître une fille en 1912. D'autre part, on devine qu'à une telle famille, où le sentiment du devoir et le culte de la Patrie trouvaient un foyer nombreux et ardent, la guerre qui nous fut imposée devait faire payer un lourd tribut : trois fils et l'aîné de ses petits-fils sont tombés au champ d'honneur pour le triomphe de la liberté ! Le capitaine d'artillerie Charles Jordan, tué en septembre 1914 ; le capitaine de zouaves Pierre Jordan, en novembre de la même année ; le sergent Louis Jordan, en juin 1915 ; l'aspirant Camille Jordan en février 1916 ; tous les quatre dans des circonstances héroïques. En 1918, enfin, Jordan eut la douleur de perdre la compagne qui avait été l'âme de son foyer. Dans ses convictions religieuses, auxquelles il était depuis son enfance profondément attaché, il sut trouver un réconfort et un appui […].

Parmi les nombreuses œuvres catholiques de C. Jordan, on peut citer l'exemple du don de l'hôtel de Rambuteau, propriété de la famille d'Isabelle Munet, à l'archevêque de Paris [A. Jordan, 1983, 184]. Isabelle Munet est issue d'une famille enrichie par le commerce de coton dans les colonies et ayant diversifié ses investissement dans la banque, la construction de ponts et la propriété d'un domaine de 300 hectares dans le Gard, le domaine de Reyranglade. Le domaine sera par Camille Jordan qui obtient de la compagnie de navigation du Rhône la permission de pomper dans le fleuve avec une machine à vapeur afin de constituer un vignoble [A. Jordan 1983, 184].
L'attachement de Jordan à sa famille s'illustre encore par la manière dont il use de sa position d'académicien pour publier les *Icones,* œuvres de son oncle botaniste, Alexis Jordan [Comptes Rendus, 1902, 94] :

> M. C. **Jordan** présente à l'Académie un exemplaire des « Icones » de M. *Alexis Jordan,* Ouvrage en partie posthume, qui vient d'être édité par ses soins :
>
> « Les études de M. Alexis Jordan sur la Botanique systématique l'avaient amené à ce résultat : qu'un grand nombre d'espèces linnéennes sont, en réalité, des agrégats de types distincts, dont les différences, peu sensibles à première vue, sont néanmoins constantes et héréditaires.
>
> » Cette conclusion était fondée sur une série d'expériences de culture, poursuivies avec persévérance pendant plus de cinquante ans. A chaque génération, les plantes étaient dessinées et décrites. Ces dessins, au nombre de plus de douze mille, et les diagnoses qui les accompagnent, sont actuellement dans la bibliothèque de la Société botanique de France, à la disposition des savants qui désireraient les consulter.

sciences dès 1871 et est élu à la suite du décès de Chasles en 1881 ; en 1883 il remplace Liouville au Collège de France. En 1885 Jordan prend la direction du *Journal de mathématiques pures et appliquées* à la suite de Résal ([7]).

Cette évolution de carrière est indissociable d'une évolution profonde des travaux mathématiques de Jordan. Après une première période consacrée à la théorie des substitutions et à quelques autres domaines comme la géométrie algébrique ou la topologie, les années 1870-1880 voient les recherches de Jordan prendre une nouvelle envergure par une diversification qui se nourrit de la capacité du savant à appliquer les notions et méthodes développées pour la théorie des groupes à des domaines variés comme les systèmes d'équations différentielles linéaires [1871], la théorie des formes bilinéaires et quadratiques [1872-1875] et l'intégration algébrique des équations différentielles [1875-1878]. Or les notions et méthodes de la théorie des groupes ne viennent pas seules dans les applications et le regard critique de Kronecker révèle les idéaux implicites qui les accompagnent sur le rôle de l'algèbre. La "simplicité" est le terme clef qui caractérise les idéaux issus des travaux de théorie des groupes de Jordan.

Paradoxalement, alors que Jordan revendique constamment la simplicité de ses méthodes, Hermite qualifie en 1874 de "tellement difficile et tellement pénible" la lecture des travaux de Jordan ([8]). Malgré le succès rencontré par la publication du *Traité des Substitutions*, félicité par les plus grands savants européens comme Borchardt dont un extrait d'une lettre adressée à Jordan le 9/4/1870 est cité ci-dessous :

> C'est un monument "aereperennius" que vous vous êtes érigé dans lequel l'immense travail nécessaire pour réunir dans un seul ensemble toutes ces recherches et la sagacité que vous y avez déployé se disputent la préférence [….]. [Borchardt, 1870, VI, 2.a. 2.X1855, N12].

Malgré l'attribution du prix Poncelet au traité par l'Académie en 1873 ([9]), la scène parisienne résonne de "bruits défavorables" sur les travaux mathématiques de Jordan, critiqués comme "inintelligibles" et comme n'ayant " sans doute pas la portée qu'on leur attribue". En témoignent les inquiétudes nourries par Jordan pour sa candidature de 1875 à la section de géométrie et qui font l'objet d'une lettre adressée à Hermite le 2 décembre 1874 (les différentes candidatures de Jordan à l'Académie sont présentées en encart 2) :

---

[7] Jordan joue un rôle dans l'examen des mémoires publiés par le *Journal de mathématiques* dès l'évincement de Liouville et la prise de fonction de Résal en 1874 (lettre de Resal à Jordan du 19/3/1875 [VI, 2.a. 2.X1855, N42]). L'évincement de Résal en 1881, semble une conséquence du mécontentement de Bertrand, voir à ce sujet [Zerner, 1991].

[8] C'est d'ailleurs de l'étranger que viennent les premières distinctions attribuées à Jordan, comme la nomination le 27/1/1870 comme correspondant de l'Institut Lombard des sciences et des lettres sous la pression de Brioschi, Casorati et Cremona (lettre de Cremona à Jordan du 9/2/70 [VI, 2.a. 2.X1855])

[9] Voir [*Comptes Rendus,* 1873, t. 76, 1302] et, dans la correspondance Jordan, les félicitations de Cremona le 19/12/1869, de Borchardt le 9/4/1870, de Puiseux, de Clebsch et de Cayley [VI, 2.a. 2.X1855].

ENCART 4.

La forme canonique et le groupe linéaire dans la synthèse du *Traité des substitutions* de Jordan.

La forme canonique des substitutions linéaires est énoncée en 1870 pour les groupes linéaires opérant sur p^n variables ou "lettres" modulo *p* (3). Elle doit son origine à une suite de travaux publiés par Camille Jordan à la fin des années 1860, s'inscrivant dans le programme impulsé par les travaux de Galois [Julia,1961, 1]. Les recherches de Jordan des années 1860 montrent une élaboration progressive de la pensée de Camille Jordan et donneront lieu à la synthèse présentée par le *Traité des substitutions* de 1870 et dans laquelle, à l'inverse de la chronologie historique, les propriétés des groupes sont développées en premier et les problèmes de résolubilité des équations présentés comme domaine d'application dans le dernier livre du traité (4). Cet encart est consacré au rôle de la forme canonique des substitutions et du groupe linéaire dans l'entreprise de synthèse des travaux éparts de théorie des groupes qu'est le *Traité des substitutions* (5). L'encart 5 s'attache quant à lui à préciser le contexte antérieur des travaux de Jordan des 1860 et s'attache à la genèse des notions et méthodes présentées dans le traité de 1870.

La manière dont est introduite le groupe linéaire au deuxième chapitre du "Livre II, Des substitutions" est l'exemple parfait du caractère synthétique du *Traité* de 1870 : la structure abstraite du groupe linéaire bénéficie d'une étude systématique, Jordan détermine son ordre, ses éléments générateurs, ses facteurs de compositions et ses classes de similitudes. Le théorème principal du chapitre est la réduction d'une substitution linéaire à sa forme canonique.

- **L'"origine" du groupe linéaire dans le *Traité :* un problème de représentation.**

La notion de substitution est introduite au livre deuxième du *Traité des substitutions* après un court préliminaire sur les congruences [Jordan, 1870, 21] (6) :

> On donne le nom de *substitution* à l'opération par laquelle on intervertit un certain nombre de choses que l'on peut supposer représentées par des lettres *a b,…*.

La première représentation des substitutions proposée par Jordan consiste à écrire une substitution *S* comme un produit de **cycles** [1870, 21] :

> Mettant les cycles en évidence, on pourra désigner la substitution *S* par la notation
> $$S = (ab\ldots k)(a'b'\ldots k')(a''\ldots.k'')\ldots$$

Deux substitutions dont les représentations ne coïncident pas ne seront pas dites identiques mais "semblables" [1870, 23]

> Soient *A* et *B* deux substitutions. Formons la substitution $B^{-1}AB$; nous l'appellerons la transformée de *A* par *B*.

3 En termes contemporains, les substitutions sont définies sur un *corps* fini et le *Traité des substitutions* donne le premier énoncé général de la forme canonique des automorphismes d'un espace vectoriel de dimension fini sur F_p.

4 Un groupe, pour Jordan, est ce que nous appellerions un groupe de permutations et désigne donc toujours, en 1870, un groupe fini.

5 Les termes en gras sont définis de manière contemporaine dans le glossaire de théorie des groupes donné en annexe 2.

6 Par rapport à la définition contemporaine des substitutions -éléments du groupe **symétrique** σ_n des bijections d'un ensemble de cardinal *n*- la définition de Jordan considère toujours à la fois une substitution et son action sur un ensemble fini, cet ensemble représentera les racines d'une équation algébrique lorsque seront abordés les problèmes de résolubilité par radicaux.

> Veuillez m'excuser si je prends la liberté de vous importuner encore en vous renouvelant ma demande d'audience malgré le désir que m'aviez manifesté de ne vous occuper de cette affaire que lorsque les cours de l'école polytechnique seraient terminés. J'apprends en effet de M. Fremy [le président de l'Académie pour l'année 1875] qu'il a l'intention de proposer à l'académie de pourvoir à la vacance [du poste de Bertand à l'Académie] dans les délais strictement réglementaires, c'est-à-dire très prochainement. D'autre part, je n'ai pas pu encore obtenir un soutien d'aucun des membres de la section auxquels je me suis adressé, bien qu'ils déclarent tous qu'ils ne sont pas au courant de mes titres. Enfin j'apprends que l'on commence à dire ça et là que mes travaux sont inintelligibles, et n'ont sans doute par la portée qu'on leur attribue. Vous m'avouerez qu'une semblable condamnation sans examen serait un procédé trop commode pour se débarrasser d'un candidat. Permettez-moi donc de faire appel à votre bienveillante équité. Vous seul avez l'autorité nécessaire en ces sujets difficiles, pour imposer silence à ces bruits défavorables, et me faire rendre la justice qui est due à tous. si vous avez la bonté de m'accorder deux heures d'entretien sérieux, je ne doute pas qu'il me soit facile de vous édifier pleinement sur l'authenticité et la valeur de mes découvertes.
> Je n'ai d'ailleurs pas besoin d'ajouter que je resterais à votre disposition pour tous les éclaircissements ultérieurs que vous voudriez bien me demander.
> Veuillez agréer, Monsieur, l'expression de mon respect.
> [Jordan, 1874, VI, 2.a. 2.X1855, N36].

La réponse d'Hermite est restée célèbre :

> Monsieur,
> L'étude de vos travaux est tellement difficile et tellement pénible que mes devoirs présents me la rendent impossible. Votre mise en demeure de l'entreprendre cependant, sur le champ m'oblige de vous déclarer que si vous récidivez à me la faire parvenir par ceux de vos amis qui sont membres de l'Académie j'y réponds en envoyant immédiatement ma démission de membre de l'Institut.
> [Hermite, 1874, VI, 2.a. 2.X1855, N37].

En cette fin d'année 1874, la controverse avec Kronecker qui s'achève jette une ombre sur la carrière de Jordan. Elle constitue notamment une des origines des relations tendues entre Jordan et Hermite et ce dernier refuse d'accéder à la demande de Jordan de traduire les mémoires de Weierstrass de 1858 et 1868, cette tâche sera attribuée à Laugel (traducteur de Riemann en 1898) ([10]) :

> Monsieur et cher Confrère, Je m'empresse de vous faire savoir que c'est au fils de M. Laugel dont vous avez du lire les nombreux et intéressants articles publiés dans la Revue des deux mondes [.....] qu'a été confié la traduction des articles de M. Weierstrass.
> [Hermite, VI, 2.a. 2.X1855].

[10] La lettre d'Hermite n'est pas datée et la traduction de Laugel n'a pas été retrouvée. Une autre origine des relations tendues entre Jordan et Hermite est probablement à attribuer au soutien apporté par Bertrand à Jordan dès la candidature de 1875 à l'Académie. Voir les critiques portées par Hermite sur Bertrand citées par Martin Zerner *in* [Zerner, 1991].

> THEOREME. – *Les cycles de la transformée $B^{-1}AB$ sont respectivement composés du même nombre de lettres que ceux de A, et chacun d'eux s'obtiendra en remplaçant chacune des lettres du cycle correspondant de A par la lettre que B lui fait succéder.*

La représentation d'une substitution comme produit de cycles $\sigma = \Pi_i \gamma_i$ ne rend pas directement compte de la définition même des substitutions comme bijections d'un ensemble à *n* éléments ; au contraire de la "représentation analytique" à laquelle Jordan consacre le premier paragraphe du chapitre II intitulé "Des substitutions linéaires" [1870, p.88] ([7]) :

> Soit *S* une substitution quelconque entre *k* quantités, que nous supposerons désignées par une même lettre *l*, affectée des indices *0,1,..., k-1 ;* si *S* remplace, en général, la lettre l_x par une lettre $l_{\varphi(x)}$ [$\varphi(x)$ étant une certaine fonction de *x*], on pourra convenir de désigner *S* par le symbole suivant :
>
> $$S = |x\ \varphi(x)|$$

Jordan ne se satisfait pas d'une représentation analytique définie par une "certaine fonction" φ de *x* et recourt à la formule d'interpolation de Lagrange pour représenter φ par une "fonction entière du degré *k-1*". Le problème de représentation n'est pas résolu pour autant car "si l'on fait le produit de deux substitutions [...] le polynôme $\psi[\varphi(x)]$ ne se réduit plus au degré *k-1*". La représentation des substitutions par des polynômes pose problème car le degré, que l'on aimerait fixer à *k-1* -le nombre d'éléments à permuter- n'est pas stable pour le produit des substitutions. La résolution de ce problème, attribuée par Jordan à Hermite, consiste à décomposer *k* en facteurs premier et "lorsque *k* est un nombre premier *p*, on pourra remédier à ce défaut" (p.89) en considérant la lettre *x* non pas comme appartenant à [*0,...,p-1*] mais comme congrue à *0,..,p-1* modulo *p* ([8]). La relation $x^p \equiv x\ [p]$ permet alors de réduire les degrés des produits de polynômes à des degrés inférieurs à *p-1* [1870, p.91] :

> Une substitution quelconque, remplaçant $l_{x,y,\ldots}$ par une nouvelle lettre $l_{\varphi(x,y,\ldots),\ \psi(x,y,\ldots),\ldots,}$ pourra se mettre sous la forme
>
> $$|x,y,\ldots\ \varphi(x,y,\ldots),\ \psi(x,y,\ldots.),\ldots.|,$$
>
> φ et ψ étant des polynômes du degré *p-1* au plus relativement à chacun des indices *x,y,...*
> Cette méthode pourrait s'étendre, mais non sans complication, au cas où *k* contiendrait plusieurs facteurs premiers différents.

Le problème de la représentation des substitutions vise à introduire les substitutions linéaires auxquelles la "représentation analytique" donne une "forme" particulièrement "simple" puisque caractérisée par la seule donnée d'un système de coefficients *a,b...a',b',....* [1870, 92] :

> Ces dernières substitutions, que nous représenterons indifféremment par l'une ou l'autre des deux notations suivantes :
>
> $$\left|\begin{array}{ll} x & ax + bx' + \ldots \\ x' & a'x + b'x' + \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{array}\right| , \quad |x,x',\ldots\ ax+bx'+\ldots,a'x+b'x'+\ldots|$$
>
> forment évidemment un groupe, que nous appellerons le groupe linéaire au degré m^n et dont nous allons étudier les propriétés.

---

[7] . Pour le mathématicien contemporain, la représentation fonctionnelle des substitutions est portée par leur notation même, noter σ une permutation de σ_n fait référence à une fonction σ● Bij([1,...,n]) et sous entend la relation fonctionnelle : σ : i ↔ σ(j), parfois notée également :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

[8] C'est-à-dire comme un élément de *Z/pZ*.

L'année 1874 est une année de querelles et année charnière pour Camille Jordan. Des travaux incompris, des méthodes contestées, des démonstrations du *Traité* remises en cause (Jordan est tout prêt d'entamer une seconde querelle avec Netto, un élève de Kronecker, dont un mémoire publié dans le journal de Borchardt remet en cause la démonstration de Jordan du théorème de décomposition des groupes [Netto, 1874]) ([11]), la situation de Jordan est critique. Par contraste, au début des années 1880 Jordan devient l'un des patrons des mathématiques parisiennes ; dans l'intervalle, et par opposition à l'abstraction que ses contemporains associent à ses recherches sur les substitutions, Jordan a diversifié ses travaux à des champs d'applications, souvent par emploi de la forme canonique des substitutions ([12]). L'application de la forme canonique des substitutions aux formes bilinéaires, qui fonde la querelle de 1874 est donc indissociable de l'évolution de carrière de Jordan et de sa volonté de voir ses recherches reconnues par la scène parisienne.

[11] Il s'agit du théorème de *Jordan – Hölder.* La querelle est évitée par la médiation de Borchardt, le directeur du journal qui a vu la publication du mémoire de Netto. Lorsque Jordan adresse à Borchardt sa réponse aux critiques de Netto, il se plaint également des jugements portés par Netto sur ses travaux dans les *Fortschritte.* Portant donc en partie sur des critiques publiées dans les *Fortschritte*, la lettre de Jordan ne sera pas publiée dans le journal de Borchardt :

> La seconde partie de votre note qui commence avec les mots "ce n'est pas d'ailleurs la première fois que M. Netto s'occupe de moi" se rapporte à une critique contenue dans les *Fortschritte des Mathématiques* qui m'est parfaitement étrangère.
> [Borchardt, 18/9/74, VI, 2.a. 2.X1855, N35].

[12] Les travaux de Jordan sur la période 1880-1905 seront notamment abordés au sein de l'étude d'un corpus de travaux arithmétiques menée au chapitre 8.

Des systèmes de coefficients différents sont cependant susceptibles de représenter une "même" substitution linéaire ou plus précisément, des substitutions linéaires "semblables", le groupe linéaire pose donc un problème de représentation spécifique consistant à déterminer les conditions sous lesquelles deux systèmes de coefficients *a, b,...a', b',...* et *α, β,...,α', β',...* représentent des substitutions semblables [1870, p.97]:

> Ces derniers coefficients étant en grande partie arbitraires, on pourra se proposer de les déterminer de manière à simplifier autant que possible l'expression de la substitution *A*.

La méthode de résolution du problème de la représentation des substitutions linéaires est de "simplifier autant que possible l'expression de la substitution". Au sein de l'architecture synthétique du *Traité*, la question de représentation et sa méthode de résolution apparaissent comme "toutes naturelles", elles sont développées dès le premier paragraphe de la rubrique intitulée *Transformation des indices* qui ouvre le chapitre consacré au groupe linéaire[1870, 97-99].

- **La forme canonique comme représentation la plus simple.**

L'énoncé de la forme canonique, sa démonstration et ses applications représentent l'essentiel du contenu du chapitre consacré au groupe linéaire. Comme on l'a vu, cet énoncé est motivé par un problème de représentation dû à la non unicité de la "forme" d'une substitution, la notion de "forme" d'une substitution correspondant à la notion de transformation linéaire : [1870, 137] :

> On vient de voir que si deux substitutions *A, A'* sont transformées l'une de l'autre par une substitution linéaire, on peut donner à l'une d'elles la forme de l'autre par une transformation d'indices convenable.

Parmi les différentes "formes" possibles d'une même substitution linéaire *A*, Jordan recherche celle permettant de "simplifier autant que possible l'expression de la substitution" [1870, 97 et 115] :

> Soient *G* un groupe linéaire de degré p^n (*p* étant premier) ; *A* [...] l'une de ses substitutions. Proposons nous de la ramener, par une transformation d'indices, à une forme aussi simple que possible.

La forme la plus simple est celle par laquelle *A* opère sur tous les "indices des lettres" comme une multiplication par une "simple constante". La recherche d'une transformation linéaire des indices "*x, x', x'', ...*" en nouveaux indices *y, y', ...* sur lesquels *A* opère comme une multiplication par une constante *K* passe par la définition de la "caractéristique" de la substitution dont Jordan démontre le caractère *invariant* par substitutions linéaires, elle "n'est altérée par aucune substitution des indices" [1870, p.98 et 114] :

> Nous donnerons le nom de caractéristique de la substitution *A* au déterminant
>
> $$\begin{vmatrix} a-K & a' & \ldots \\ b & b-K & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \equiv 0 (\mathrm{mod}.p)$$
>
> où *K* est une quantité arbitraire.
>
> [...] Cette congruence, que nous appellerons *congruence caractéristique* de *A*, est du degré *n*, et peut avoir jusqu'à *n* solutions différentes, $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$. Soient dans ce cas $\alpha_0, \beta_0, \ldots ; \alpha_1, \beta_1, \ldots ; \ldots$ les systèmes de valeurs correspondantes des $\alpha, \beta, \ldots$, on verrait aisément que les fonctions
>
> $$y_0 = \alpha_0 x + \beta_0 y + \ldots .., \; y_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \ldots .$$
>
> sont distinctes. En les prenant pour indices indépendants, on ramènerait la substitution *A* à la forme simple
>
> $$|y_0, y_1, \ldots . \; K_0 y_0, \; K_1 y_1, \ldots|$$

2. Un regard rétrospectif sur les travaux de Jordan sur la résolubilité des équations.

La note de 1873 qui déclenche la querelle s'inscrit au sein d'une entreprise de diversification des travaux de Jordan par une application des méthodes de théorie des groupes à différents domaines. Expliciter la position de Jordan sur la théorie des formes nécessite donc un regard rétrospectif sur les recherches sur les substitutions des années 1860 qui vont permettre à Jordan d'être considéré par ses successeurs comme un "grand algébriste" [Picard, 1922, VIII], un précurseur incompris en son temps et isolé sur la scène parisienne [Julia, 1961, VI] et, d'ailleurs, presque Allemand [Klein, 1928] ([13]).
A la mort de Jordan, en 1922, ses successeurs voient dans la publication du *Traité des substitutions* de 1870 la consécration d'un "grand algébriste" :

> Mais c'est surtout dans la théorie des substitutions et des équations algébriques que Jordan laisse une trace profonde. Dans un ouvrage considérable sur les Substitutions, il a fait une étude approfondie des idées de Galois, en y ajoutant des résultats fondamentaux [...] dont un des plus importants est relatif aux facteurs de composition d'un groupe. Ces études ont permis à Jordan de résoudre un problème posé par Abel, celui de rechercher les équations de degré donné résolubles par radicaux et de reconnaître si une équation rentre ou non dans cette classe [...]. Tous les travaux de Jordan dénotent une rare profondeur d'esprit et une extraordinaire puissance d'abstraction. Il se jouait au milieu des discussions les plus subtiles sur des concepts comme ceux de groupes ou de substitutions, se plaisant à aborder les questions dans toute leur généralité, comme s'il craignait que quelque particularité l'empêchât de voir les vraies raisons des choses. Jordan a été vraiment un grand algébriste ; [...].
> [Picard 1922, VIII].

---

[13] Dans son introduction aux *Œuvres de* Jordan, Julia écrit ainsi :

> Longtemps Jordan a travaillé dans une solitude presque totale. Rares étaient ceux qui pouvaient apprécier la valeur de son œuvre. Aujourd'hui ses travaux sont plus actuels que lorsqu'ils ont été écrits, on les voit dans leur vraie lumière et avec leur véritable portée. Dans cette lumière, Jordan nous apparaît, avec Galois et Sophus Lie, comme un des trois grands créateurs de la théorie générale des groupes.
> [Julia, 1961, VI].

Hélène Gispert précise ce constat, dans son étude de la production mathématique française à la création de la SMF :

> Les travaux français en algèbre et en géométrie sont pour une grande part, et quelle que soit leur qualité, dans le droit fil de la grande tradition française de la première moitié du siècle. Mis à part Jordan, dont les recherches sont d'une nouveauté et d'un apport essentiel à la constitution de l'algèbre moderne et des nouvelles branches de la géométrie.
> [Gispert, 1991, 37].

Hélène Gispert cite également les cours de Felix Klein sur le développement des mathématiques au XIX^e siècle :

> In his book, Jordan wandered through all of algebraic geometry, number theory and function theory in search of interesting permutation groups. His exposition is remarkably unFrench, ponderous, almost German.
> [Klein 1928, cité par Gispert 1991,37].

(traduction anglaise : *Developpement. of Mathematics in the 19^th century,* 1979, Math. Sci. Press).

Cette forme simple $|y_0, y_1, \ldots\ K_0 y_0,\ K_1 y_1, \ldots|$ ne peut cependant être obtenue qu'à la condition que le nombre de racines, y compris "les racines imaginaires", soit égal à *n*. Jordan démontre cependant qu' il existe néanmoins toujours une forme canonique ou "forme la plus simple" des substitutions même en cas d'occurrence de racines multiples,1870, 127] :

THEOREME. –*Soit*

$$A = |x, x', \ldots\ ax+bx'+\ldots,\ a'x+b'x'+\ldots, \ldots|$$

une substitution linéaire quelconque à coefficients entiers entre n indices variables chacun de 0 à p-1. Soient F, F', … les facteurs irréductibles de la congruence de degré n

$$\begin{vmatrix} a-K & a' & \ldots \\ b & b-K & \ldots \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. \end{vmatrix} \equiv 0 (\mathrm{mod.}\, p)$$

l,l',…leurs degrés respectifs ; m, m', … leurs degrés de multiplicité ;

On pourra remplacer les n indices indépendants x, x', … par d'autres indices jouissant des propriétés suivantes :

1° Ces indices se partagent en systèmes correspondants aux divers facteurs F, F',… et contenant respectivement lm, l'm',… indices ;

2° Soient $K_0, K_1, \ldots, K_{t-1}$ *les racines de la congruence irréductible* $F \equiv 0$ *(mod.p) ; les n indices du système correspondant à F se partagent en l séries correspondants aux racines* $K_0, K_1, \ldots, K_{l-1}$ *;*

3° Les indices de la première série de ce système sont des fonctions linéaires des indices primitifs, dont les coefficients sont des entiers complexes formés avec l'imaginaire K_0 *; ils constituent une ou plusieurs suite* $y_0, z_0, u_0, \ldots, y'_0, z'_0, \ldots ; \ldots$ *(*) telles que A remplace les indices* $y_0, z_0, u_0, \ldots$ *d'une même suite respectivement par* $K_0 y_0, K_0(z_0+y_0), K_0(u_0+z_0), \ldots$ *;*

4° Les indices de la r+1[ième] série sont les fonctions $y_r, z_r, u_r, \ldots ; y'_r, z'_r, \ldots ; \ldots$ *respectivement conjuguées des précédentes, que l'on forme en y remplaçant* K_0 *par* K_r *; A les remplace respectivement par* $K_r y_r, K_r(z_r+y_r), K_r(u_r+z_r, \ldots ; \ldots)$

Cette forme simple

$$\begin{vmatrix} y_0, z_0, u_0, \ldots, y'_0, \ldots & K_0 y_0, K_0(z_0+y_0), K_0(u_0+z_0), \ldots, K_0 y'_0 \\ y_1, z_1, u_1, \ldots, y'_1, \ldots & K_1 y_1, K_1(z_1+y_{10}), K_1(u_1+z_1), \ldots, K_1 y'_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \upsilon_0 & K'_0 \upsilon_0, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

à laquelle on peut ramener la substitution *A* par un choix d'indice convenable, sera pour nous sa forme *canonique*.

Qu'est ce qu'un "grand algébriste" en 1870 ? Le discours de Picard donne quelques mots clés : "Galois", "Abel", "groupes", "équations", "abstraction", "généralité". On pourrait ajouter le terme "méthode géniale de Galois" utilisé par Henri Lebesgue pour caractériser la charnière dans l'histoire de l'algèbre que représente le passage d'une science des équations à une étude "abstraite" des "groupes":

> Dans ses recherches, Jordan utilise la géniale méthode de Galois, dont le point essentiel est l'introduction d'un certain nombre de substitutions, déjà aperçu par Lagrange, que l'on peut attacher à chaque équation algébrique et dans lequel les propriétés des équations se reflètent fidèlement. Mais pour savoir observer dans ce miroir, il faut avoir appris à distinguer les diverses qualités des groupes de substitutions et à raisonner sur elles. C'est ce qu'à fait Jordan avec une habile ténacité et un rare bonheur ; dans son *Traité des Substitutions* et des Equations algébriques, où il a réuni et coordonné ses recherches, les propriétés des équations dérivent tout de suite de celles des groupes de substitutions.
> Les principales qualités des groupes qui servent à Jordan son caractérisées par les qualités transitif ou intransitif, primitif ou imprimitif, simple ou composé. Le théorème de Jordan sur la composition des groupes est le plus connu de tous ses résultats, il entraîne cette conséquence fondamentale : il n'y a pas lieu de choisir entre les différents procédés de résolution algébrique d'une équation ; ils sont tous équivalents et conduisent aux mêmes calculs, à l'ordre près.
> [...]
> Les résultats obtenus ont attiré l'attention de ceux qui avaient antérieurement travaillé sur les différents sujets ainsi touchés par Jordan. Pour retrouver autrement ces résultats, ou pour les prolonger, Klein, Geiser, Brioschi, Clebsch, Cremona, Sylvester ont écrit des Mémoires qui ont hâté la diffusion des théorèmes de Jordan et ont manifesté leur importance ; aussi avant même qu'il n'ait quarante ans, Camille Jordan est-il universellement considéré comme l'un des tout premiers géomètres de son temps.
> [Lebesgue, 1923, XX-XXI].

Ce qui permet de voir les "vraies raisons des choses", c'est un "miroir" qui "reflète" l'étude quantitative des équations en une algèbre des "qualités", comparée à une science de la nature [Lebesgue, 1923, XXIII]. Le *Traité* de Jordan est présenté, dans l'histoire écrite par ses successeurs, comme matérialisant le "miroir" métaphorique symbolisant la mutation de l'algèbre par le "reflet" de deux théorèmes:

> Galois a démontré dans un mémoire célèbre [...], que chaque équation algébrique est caractérisée par un certain groupe de substitutions dans lequel se reflètent ses principales propriétés : proposition capitale qui fait dépendre la théorie toute entière des équations de celle des substitutions.
> [...]
> THEOREME II. – Pour qu'une équation soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit que sa résolution se ramène à celle d'une suite d'équations abéliennes de degré premier. [...] Autre énoncé du même théorème:
> THEOREME III. – Pour qu'une équation soit résoluble par radicaux il faut et il suffit que ses facteurs de composition soient tous premiers.
> [Jordan, 1870, 385].

ENCART 5.

La méthode de réduction de Jordan :

la démonstration de la forme canonique des substitutions dans le *Traité.*

La méthode de Jordan est basée sur la correspondance suivante : à la *décomposition d'un polynôme*, la "caractéristique", *en facteurs irréductibles* est associée une *décomposition de l'ensemble des "indices" par transformations linéaires*.

Un point de vue contemporain préalable à l'étude de la démonstration de Jordan.

En termes contemporains, cette correspondance s'interprète comme une décomposition d'un espace vectoriel fini sous l'action d'un opérateur linéaire. La notion vectorielle contemporaine impose cependant une interprétation géométrique absente de la pensée de Jordan en 1870. Je recours cependant à l'interprétation géométrique contemporaine pour introduire rapidement les calculs de Jordan. Première étape : aux racines du premier des facteurs irréductibles du polynôme caractéristique, Jordan associe les sous espaces propres maximaux et obtient par un changement de base une nouvelle écriture de la substitution. La méthode est itérée à la restriction de l'opérateur au sous espace stable égal au complémentaire de la somme des sous espaces propres déterminés à la première étape. On obtient par itération une forme « triangulaire », il faut alors poursuivre la réduction en regroupant les vecteurs de base par valeurs propres, pour former ce que nous appellerions les sous espaces caractéristiques.

Je propose d'illustrer pas à pas la démonstration de Jordan par l'exemple d'une matrice à coefficients dans F_{11} ayant des valeurs propres simples, multiples, réelles et complexes.
Le polynôme caractéristique , $P(K) = (K^2+4K+5)^3(K+8)^2(K+6,$ n'admet pas 5 racines distinctes dans F_{11}

Soit A l'automorphisme de $GL_9(F_{11})$ dont la matrice dans la base canonique $(e_1,\ldots,e_9)$ de $(F_{11})^9$ est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 9 & 3 & 10 & 3 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 6 & 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 8 & 6 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 & 5 & 9 & 9 & 9 & 8 & 7 \\ 10 & 0 & 3 & 10 & 0 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 2 & 7 & 0 & 7 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 8 & 7 & 0 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 8 & 8 & 0 & 6 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Il faut alors considérer les racines du polynôme caractéristique, déterminant de :

$$\begin{pmatrix} 2-K & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 9-K & 3 & 10 & 3 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1-K & 6 & 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 8 & 6-K & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 & 5 & 9-K & 9 & 9 & 8 & 7 \\ 10 & 0 & 3 & 10 & 0 & 8-K & 8 & 0 & 8 \\ 2 & 7 & 0 & 7 & 0 & 1 & 3-K & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 8 & 7 & 0 & 5 & 3 & 3-K & 3 \\ 2 & 7 & 8 & 8 & 0 & 6 & 3 & 3 & 3-K \end{pmatrix}$$

Jordan en vient, aux yeux de ses successeurs, à représenter lui-même, à l'age de 32 ans, la nouvelle algèbre de 1870 ([14]) :

> La théorie des groupes finis a été le sujet de prédilection de Jordan [...]. Son œuvre dans ce domaine est immense par le volume comme par l'importance, et son influence sur les développements ultérieurs de la théorie ne peut guère se comparer qu'à celle des travaux de Galois lui-même. [...] Au moment où Jordan commence à écrire, la théorie des groupes est encore dans l'enfance, et en fait ce n'est guère qu'avec la publication des son *traité* qu'elle accèdera au rang de discipline autonome.
> [Dieudonné 1961, XVII].

Jordan fait sortir la théorie des groupes de l'enfance, et, si l'on file la métaphore familiale de Dieudonné, il est perçu comme second père de la théorie des groupes ; après Galois, le géniteur, Jordan serait le guide qui fait gagner l'âge adulte [Julia, 1961, 1]. Mais au-delà de l'effet de style, que signifie que, avant Jordan, la théorie des groupes "est encore dans l'enfance" ? Il s'agit de célébrer la synthèse du *Traité des substitutions* qui fait émerger des recherches éparses inspirées par Galois les notions et méthodes essentielles d'une théorie *autonome* des groupes (cette synthèse est détaillée en encarts 4 et 6) *([15])*. Par exemple, le chapitre II du *Traité* est consacré au groupe linéaire, dont la structure abstraite bénéficie d'une étude systématique (ordre, éléments générateurs, facteurs de composition etc.). Cette importance accordée au groupe linéaire ne surprendra pas le mathématicien contemporain tant elle paraît naturelle et, précisément, faire accéder la théorie des groupes "au rang de discipline autonome", c'est construire ce naturel qui fera tradition dans les manuels du XX^e siècle ([16]). Avant la synthèse de Jordan, les propriétés du groupe linéaire ne sont que des méthodes particulières et éparses élaborées pour la recherche des équations résolubles par radicaux, les substitutions linéaires interviennent en effet dans un résultat essentiel, énoncé par Galois sans démonstration :

> Il [Galois] a partagé les équations irréductibles en deux grandes classes : équations primitives et non primitives.
> Puis il a énoncé à l'égard des premières :
> Le degré de toute équation primitive et soluble par radicaux est une puissance d'un nombre premier.
> Les substitutions de son groupe sont toutes linéaires.
> [Jordan, 1867].

---

[14] Jean Dieudonné donne un résumé en termes contemporains des travaux algébriques de Jordan à l'occasion de la publication des œuvres de Jordan en 1961.Voir aussi [Julia, 1961, I-IV].

[15] La capacité de Jordan à rassembler des recherches éparses en un traité synthétique se manifeste également dans ses *Cours d'analyse* de 1893 dont Hélène Gispert a analysé le rôle dans le développement des fondements de l'analyse en France. Voir [Gispert, 1982]. C'est dans ce contexte qu'est énoncé, dans le supplément au dernier tome de la première édition de 1887, le *théorème de Jordan* sur les courbes qui assure à Jordan une postérité d'analyste mise en valeur par la biographie de Hardy [1922, XLV]. Au sujet de cet autre théorème de Jordan, voir [Guggenheimer, 1977].

[16] Jordan est le premier à consacrer une étude théorique au groupe linéaire dont l'importance provient de problèmes de résolubilité des équations et de fonctions modulaires. Le groupe linéaire acquiert un rôle central dans les mathématiques au début du XXe siècle comme en témoigne la parution du traité de Dickson en 1900, *Linear groups*. Voir à ce sujet le chapitre 7.

- **1^{re} étape de la démonstration.**
  Recherche d'une décomposition associée au premier facteur irréductible.

Jordan [1870, p.115] :

Décomposons le premier membre de la congruence en facteurs irréductibles. Soient F un des ces facteurs, l son degré : F étant égalé à $0\ (mod.\ p)$ donnera l racines imaginaires distinctes, K_0, $K_0^p = K_1$, …, $K_0^{p^{l-1}} = K_{l-1}$, satisfaisant toutes la congruence $K^{p^l} \equiv K\ (mod.\ p)$

Exemple.
Le premier facteur irréductible de P est $F(K) = K^2+4K+5$. Il faut se placer dans l'extension de corps de degré 2, $F_{11}(i)$.
Les deux racines conjuguées de F sont alors :
$K_0 = -2-i$ et le de $K_1 = -2+i = \underline{K_0}$.

Aux l racines "distinctes" d'un des facteurs irréductibles de degré l (tout polynôme irréductible à coefficient dans un corps fini est **séparable)**, Jordan associe l "fonctions linéaires" y_0, y'_0,…

A chaque valeur de K, tel que K_0, correspondront un ou plusieurs systèmes de valeurs pour les rapports des quantités α_0, β_0,…, en vertu des relations (2). Si ces rapports sont complètements déterminés, les diverses fonctions

$$y_0 = \alpha_0 x + \beta_0 x' + \ldots$$

correspondantes à la valeur $K = K_0$ sont toutes des multiples de l'une quelconque d'entre elles […].

Il s'agit de chercher une base de l'espace propre associé à chaque valeur propre K racine de F. Pour K_0 et K_1 les espaces propres sont de dimension 2.
A $\boldsymbol{K_0}$ on associe les vecteurs propres :

$$\boldsymbol{y_0}\ (4, 2+K_0, 7, 7, 0, 0, 7, 7, 0).$$

$$\boldsymbol{y'_0}\ (0, 9-K_0,\ 2-K_0,\ 2+K_0,\ -2+K_0,\ 9-K_0, 0, 2+K_0,\ 9+K_0)$$

A $\boldsymbol{K_1}$ on associe les vecteurs propres :

$$\boldsymbol{y_1}\ (4,\ 2+\underline{K_0}\ , 7, 7, 0, 0, 7, 7, 0)$$

$$\boldsymbol{y'_1}\ (0, 9-\underline{K_0},\ 2-\underline{K_0},\ 2+\underline{K_0},\ 2+\underline{K_0},\ 9-\underline{K_0}, 0, 2+\underline{K_0},\ 9+\underline{K_0})$$

Le changement d'indices donné par les systèmes de λ fonctions y_0, y'_0,… correspondant chacun à une racine de F^λ permet une première étape de la réduction et l'écriture d'une "forme réduite" [1870, p.117] :

Les fonctions y_0, y'_0,… ;… ; y_ρ, y'_ρ,… ;… étant toutes distinctes, peuvent être prises pour indices indépendants à la place d'un nombre égal des indices primitifs $x, x', \ldots, x^{n-1}$. Cela fait, et m étant le nombre de ces fonctions, la substitution se trouvera réduite à la forme :

$$A = \left| \begin{array}{lc} y_0 & K_0 y_0 \\ y'_0 & K_0 y'_0 \\ \ldots & \ldots \\ y_1 & K_1 y_1 \\ \ldots & \ldots \\ x^m & a_1^m x^m + b_1^m x^{m+1} + \ldots + c_1^m x^{n-1} + d_1^m y_0 + e_1^m y'_0 + \ldots + f_1^m y_1 + \ldots \\ x^{m+1} & a_1^{m+1} x^m + b_1^{m+1} x^{m+1} + \ldots + c_1^{m+1} x^{n-1} + d_1^{m+1} y_0 + e_1^{m+1} y'_0 + \ldots + f_1^{m+1} y_1 + \ldots \\ \ldots. & \ldots \\ x^{n-1} & a_1^{n-1} x^m + b_1^{n-1} x^{m+1} + \ldots + c_1^{n-1} x^{n-1} + d_1^{n-1} y_0 + e_1^{n-1} y'_0 + \ldots + f_1^{n-1} y_1 + \ldots \end{array} \right|$$

Exemple. Un changement de base permet d'écrire la matrice de la substitution A sous la forme :

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} K_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_0 & 0 & 8 & 10+8(K_0-\overline{K}_0) & 10 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & K_1 & 8 & 10+3(K_0-\overline{K}_0) & 10 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 9 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 9 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 6 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} y \\ y \\ y \\ y \\ e \\ e \\ e \\ e \\ e \end{array} \end{array}$$

On sait depuis Galois et Abel à quelles conditions l'équation générale du n^e degré est résoluble par radicaux et les travaux de Jordan concernent la question de la détermination de *toutes* les équations résolubles particulières, question que les mathématiques contemporaines sont loin d'avoir résolues. Jordan développe une méthode théorique de construction des groupes résolubles maximaux du groupe des substitutions. Cette méthode, une "machinerie", une "gigantesque récurrence sur le degré N de l'équation" [Dieudonné, 1970, 168] procède d'une réduction du "genre" du groupe du général au particulier : la recherche des groupes résolubles généraux est réduite à celle de groupes particuliers définis par des "qualités", ce sont successivement les groupes "transitifs", "primitifs" puis "linéaires" (les méthodes et travaux de Jordan sont présentés en encart 6). Le groupe linéaire doit son "origine" à son rôle dans la suite de réductions du problème général et le traité de 1870 organise les propriétés des substitutions linéaires dégagées par Jordan en un tout théorique et autonome (le caractère de synthèse du *Traité* est illustré en encart 4 par le rôle qu'y jouent la forme canonique et le groupe linéaire, l'encart 6 présente l'origine du groupe linéaire dans le contexte de la recherche des équations résolubles). Parmi ces propriétés, l'exposé de la forme canonique des substitutions illustre le nouveau caractère théorique de la notion de groupe : d'abord élaborée comme une méthode particulière pour les recherches sur la résolubilité des équations, la forme canonique est présentée par le *Traité* comme une réponse à une question *naturelle* de la théorie du groupe linéaire : "simplifier autant que possible l'expression d'une substitution" [Jordan, 1870, 97] (la démonstration du théorème de réduction canonique est commentée en encart 5).

- **Une lacune dans la démonstration de Jordan.**

La discussion qu'entreprend Jordan sur les fonctions linéaires y_0, y'_0 est ambiguë et la question de la multiplicité des racines crée des difficultés et des confusions. Jordan prévoit la possibilité d'associer plusieurs "fonctions indépendantes" y_i, y'_i,..." à une même racine K_i, ce qui permet d'envisager la présence de racines multiples [1870, p. 115] :

> [...] mais il peut arriver que le système des relations (2) présente quelque indétermination ; même en cas, il est clair que les diverses fonctions *y* relatives à cette valeur *K* seront toutes des fonctions linéaires d'un certain nombre d'entre elles, y_0, y'_0,... qui soient distinctes, c'est à dire qui ne soient liées entre elles par aucune relation linéaire
>
> $$r_0y_0+r'_0y'_0+\ldots\equiv 0 \ (mod.p),$$

Dans le même temps, le polynôme *F* dont K_i est une racine est irréductible et par conséquent ses racines sont distinctes ([9]). Implicitement, le polynôme considéré n'est donc pas *F* mais une puissance de *F* de la forme F^λ. Mais quelle est alors la valeur de λ ? Contrairement à la méthode des diviseurs élémentaires de Weierstrass, la démonstration de Jordan ne répond pas à cette question (l'encart 8 présente la manière dont Hamburger emploie les notions de Weierstrass pour remédier aux ambigüités de la démonstration de Jordan). Jordan ne peut déterminer la valeur de λ qu'*a posteriori* ce qui implique un raisonnement circulaire car la démonstration de Jordan suppose la bonne puissance F^λ donnée *a priori* par la décomposition en facteurs irréductibles. Jodan définit la valeur de λ, *a posteriori* donc, en utilisant la propriété selon laquelle "les fonctions que *A* multiplie par K_p sont les conjuguées de celles qu'elle multiplie par K_0" [Jordan, 1870, 116] ([10]), qui implique que le nombre des systèmes de "fonctions indépendantes" " y_i, y'_i,..." est le même pour chaque racine K_i d'un même facteur F^λ de la "caractéristique" [1870, 118] :

> Soit λ le nombre de fonctions distinctes y_0, y'_0, ... la substitution *A* a pour congruence caractéristique
>
> $$(K_0-K)^\lambda(K_1-K)^\lambda\ldots \begin{vmatrix} a_1^m-K & b_1^m & \ldots & c_1^m \\ a_1^{m+1} & b_1^{m+1}-K & \ldots & c_1^{m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & b_1^{n-1} & \ldots & c_1^{n-1}-K \end{vmatrix} \equiv 0.$$
>
> [...] donc son premier membre était divisible par F^λ

En termes contemporains.
Pour l'exemple par lequel j'illustre le texte de Jordan, deux espaces de dimensions deux $<y_0, y'_0>$ et $<y_1, y'_1>$ correspondant aux racines K_0 et K_1 du facteur irréductible $F(K) = K^2+4K+5$. Pour suivre la démonstration de Jordan, il est nécessaire de prendre pour premier facteur, non pas *F(K)* mais

$$F^2(K) = (K^2+4K+5)^2$$

En termes contemporains, λ est la dimension caractéristique de la racine K_i et ne correspond pas nécessairement à la multiplicité de K_i. La structure de la décomposition en puissances de facteurs irréductibles n'est en effet pas donnée par la structure arithmétique du polynôme caractéristique *F* mais par l'action de l'opérateur sur l'espace.

[9] Tout polynôme irréductible à coefficient dans un corps fini est séparable.

[10] En termes contemporains, les sous espaces propres correspondants à des valeurs propres distinctes sont conjugués entre eux.

3. Un idéal de simplicité et une méthode de réduction.

L'expression "simplifier autant que possible" associée par Jordan au problème de la réduction canonique des substitutions manifeste déjà l'idéal de simplicité qui sera opposé à Kronecker en 1874 et qui s'avère une composante essentielle de cette *mathématique des qualités* qui, pour Lebesgue, caractérise le *Traité des substitutions*. Si le traité de 1870 est encore structuré par la question de la résolubilité des équations qui constitue son aboutissement, il manifeste également le caractère autonome de la théorie des groupes par la synthèse avec laquelle Jordan élabore les notions et méthodes venant appuyer sa recherche des groupes résolubles généraux. Face à une question si *générale*, Jordan met en œuvre une méthode de *décomposition*, de "réductions" successives du problème, normée par un critère de *simplicité*. Les *qualités* attribuées aux groupes correspondants aux étapes successives de la réduction - transitifs-primitifs-linéaires-symplectiques etc.- correspondent aux maillons les plus *simples* de la chaîne de réduction. Cette idée de *décomposition en une "suite" de maillons les "plus simples"* est au cœur des deux résultats essentiels que sont le théorème de décomposition des groupes (Jordan-Hölder) et le théorème de réduction à une forme canonique (la méthode de réduction de Jordan est commentée sur l'exemple de la démonstration de forme canonique en encart 5) :

> Soient G un groupe linéaire de degré p^n (p étant premier) ; A [...] l'une de ses substitutions. Proposons nous de la ramener, par une transformation d'indices, à une forme aussi simple que possible.
> [...] Cette forme simple
>
> $$\left|\begin{array}{ll} y_0, z_0, u_0, \ldots, y'_0, \ldots & K_0 y_0, K_0(z_0+y_0), K_0(u_0+z_0), \ldots, K_0 y'_0 \\ y_1, z_1, u_1, \ldots, y'_1, \ldots & K_1 y_1, K_1(z_1+y_{10}), K_1(u_1+z_1), \ldots, K_1 y'_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \upsilon_0 & K'_0 \upsilon_0, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right|$$
>
> à laquelle on peut ramener la substitution A par un choix d'indice convenable, sera pour nous sa forme *canonique*.
> [1870, 115 et 127].

Lorsque, comme nous l'avons vu au chapitre 2, Jordan répond aux questions posées par l'astronome Yvon-Villarceau sur la stabilité des petites oscillations, sa résolution de l'intégration des systèmes d'équations linéaires à coefficients constants participe de la même méthode de *décomposition d'un problème général en une suite de problèmes simples* ([17]) :

[17] Cet extrait du mémoire de Jordan de 1871 a déjà été cité au chapitre 2, une seconde citation est proposé ici afin den appuyer une nouvelle lecture.

- **2e étape. Itérations successives de la méthode précédente.**

La forme par laquelle Jordan représente les substitutions linéaires contient en elle-même la nouvelle substitution *C* sur laquelle il faut itérer la méthode de réduction [Jordan, 1870, 118] :

$$c = \begin{vmatrix} x^m & a_1^m x^m + b_1^m x^{m+1} + \ldots + c_1^m x^{n-1} \\ x^{m+1} & a_1^{m+1} x^m + b_1^{m+1} x^{m+1} + \ldots + c_1^{m+1} x^{n-1} \\ \ldots & \ldots \\ x^{n-1} & a_1^{n-1} x^m + b_1^{n-1} x^{m+1} + \ldots + c_1^{n-1} x^{n-1} \end{vmatrix}$$

Soit *F'* une facteur irréductible de la caractéristique de *C* (éventuellement identique à F). L'écriture

$$A = \begin{vmatrix} y_0 & K_0 y_0 \\ y'_0 & K_0 y'_0 \\ \ldots & \ldots \\ y_1 & K_1 y_1 \\ \ldots & \ldots \\ x^m & a_1^m x^m + b_1^m x^{m+1} + \ldots + c_1^m x^{n-1} + d_1^m y_0 + e_1^m y'_0 + \ldots + f_1^m y_1 + \ldots \\ x^{m+1} & a_1^{m+1} x^m + b_1^{m+1} x^{m+1} + \ldots + c_1^{m+1} x^{n-1} + d_1^{m+1} y_0 + e_1^{m+1} y'_0 + \ldots + f_1^{m+1} y_1 + \ldots \\ \ldots. & \ldots \\ x^{n-1} & a_1^{n-1} x^m + b_1^{n-1} x^{m+1} + \ldots + c_1^{n-1} x^{n-1} + d_1^{n-1} y_0 + e_1^{n-1} y'_0 + \ldots + f_1^{n-1} y_1 + \ldots \end{vmatrix}$$

représente, contient dans sa forme, la façon dont la substitution *A* agit sur les "lettres", regroupées en groupes par des changements de variables linéaires [1870, 118] :

> Soient *K'₀*, ... les racines de la congruence $F' \equiv 0$, la substitution *C* [...] pourrait, d'après ce qui précède se mettre sous la forme
>
> $$\begin{vmatrix} z_0 & K'_0 z_0 \\ z'_0 & K'_0 z'_0 \\ \ldots & \ldots \\ z_1 & K'_1 z_1 \\ \ldots & \ldots \\ x^{m+m'} & a_2^{m+m'} x^{m+m'} + \ldots + c_2^{m+m'} x^{n-1} + \mathit{fonct.lin.de}(z_0, z'_0, \ldots z_1 \ldots) \\ \ldots. & \ldots \\ x^{n-1} & a_2^{n-1} x^{m+m'} + \ldots + c_2^{n-1} x^{n-1} + d_1^{n-1} y_0 + \mathit{fonct.lin.de}(z_0, z'_0, \ldots z_1 \ldots) \end{vmatrix}$$
>
> [...] z_0, z'_0,... : z_1, z'_1,... : ... étant les fonctions linéaires distinctes que la substitution *C* multiplie respectivement par K'_0, K'_1,....[...].

$$(I)\quad \begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1x_1 + \ldots + l_1x_n, \ldots, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_2x_1 + \ldots + l_2x_n, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_nx_1 + \ldots + l_nx_n, \end{array}$$

Ce problème peut cependant se résoudre très simplement par un procédé identique à celui dont nous nous sommes servi, dans notre Traité des substitutions, pour ramener une substitution linéaire quelconque à sa forme canonique. Nous allons ramener de même le système (I) à une forme canonique qui puisse s'intégrer immédiatement. [...] on voit que les variables indépendantes peuvent être choisies de telles sorte qu'aux μ racines égales à σ que possède l'équation $\Delta = 0$ correspondent μ variables nouvelles formant un certain nombre de séries contenant respectivement r,r',... variables, $r + r' + \ldots$ étant égal à μ, et les variables d'une même série étant liées par une suite de relations de la forme

$$(6)\quad \frac{dy_1}{dt} = \sigma y_1,\quad \frac{dz_1}{dt} = \sigma z_1 + y,\quad \frac{du_1}{dt} = \sigma u_1, + z_{1,\ \ldots,}\quad \frac{dw_1}{dt} = \sigma w_1 + v_1$$

[...] le système des équations (6) aura évidemment pour intégrales le système suivant :

$w_1 = e^{\sigma t}\psi(t)$, $v_1 = e^{\sigma t}\psi'(t),\ldots$, $y_1 = e^{\sigma t}\psi^{r-1}(t)$, $\psi(t)$ étant une fonction entière arbitraire du degré $r-1$.

[Jordan, 1871].

.

Le problème général peut se résoudre "très simplement" par application de la méthode de "réduction" mise en œuvre pour la théorie des groupes. Les variables du système d'équations sont interprétées comme sujettes à l'action d'une substitution du groupe linéaire qu'une caractéristique, la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme caractéristique, permet de regrouper en "un certain nombre de séries" et de "ramener" le système à une "suite" de "formes simples" dont l'intégration est connue.

La méthode de *réduction* de Jordan supporte une perception de la *généralité* indissociable d'un idéal de *simplicité* qui s'incarne dans la notion de forme canonique et dont Jordan fait une application systématique dans les années 1870. L'application de cette méthode s'accompagne du transfert d'idéaux issus de la théorie des groupes comme la simplicité et l'abstraction. La réduction de Jordan ne permet pas, dans la pratique, d'intégrer le système différentiel et son application à un problème de mécanique a d'emblé un caractère théorique et abstrait qui, pour Lebesgue est caractéristique des raisonnements synthétiques de la théorie des groupes :

> Lorsqu'il ne peut recourir au calcul, le mathématicien doit explorer le domaine où il travaille, observer le rôle des différents êtres mathématiques qu'il y rencontre, les regarder vivre, pourrait-on dire, afin d'en discerner les qualités et de reconnaître les apports de chacune de ces qualités [...] bref, le mathématicien se transforme en naturaliste [...] si, dans la principale de ses oeuvres Jordan a utilisé presque uniquement les raisonnements synthétiques, c'est qu'il a suivi la voie et l'exemple de Galois. [...] Le mathématicien qui n'use guère du calcul substitue à la mathématique des quantités une mathématique des qualités.
>
> [Lebesgue, 1921, xxii].

La méthode s'applique aux facteurs successifs de la caractéristique et s'enchaîne, entrainant une décomposition de la *forme* représentant la substitution [1870, p.120] :

Continuant ainsi, on arrivera finalement à ramener la substitution A à la forme suivante :

$$
\left|\begin{array}{ll}
y_0, y'_0, \ldots & K_0 y_0, K_0 y'_0, \ldots \\
y_1, y'_1, \ldots & K_1 y_1, K_1 y'_1, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_0, \ldots & K'_0\, z_0 + \varphi(y_0, y'_0, \ldots, y_1, y'_1, \ldots, \ldots) \\
z_1, \ldots & K'_1\, z_1 + \varphi_1(y_0, y'_0, \ldots, y_1, y'_1, \ldots, \ldots) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_0, \ldots\ldots & K''_0\, u_0 + \psi(y_0, y'_0, \ldots, y_1, y'_1, \ldots, z_0, \ldots, z_1, \ldots) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_0, \ldots\ldots & K'''_0\, v_0 + \chi(y_0, y'_0, \ldots, y_1, y'_1, \ldots, z_0, \ldots, z_1, \ldots, u_0, \ldots) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right|
$$

où, pour plus de netteté, nous avons mis sur une même ligne les indices analogues.

Exemple.

Soit V la somme des sous-espaces propres déterminés lors de la première étape.

$$V = vect(y_0, y_1, y'_0, y'_1)$$

est un sous espace stable par S. La matrice ci-dessous correspond à la restriction C de A au complémentaire de V.

$$
\begin{pmatrix}
1 & 8 & 9 & 8 & 7 \\
8 & 9 & 8 & 0 & 8 \\
0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\
3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\
8 & 6 & 8 & 2 & 2
\end{pmatrix}
$$

La première étape a pris en compte le facteur $F(K) = (K^2+4K+5)^2$ de la décomposition du polynôme caractéristique. Le second polynôme à considérer est donc $F'(K) = K^2+4K+5$. On note de la même façon K_0, K_1 les valeurs propres de C, les vecteurs propres associés sont

$$z_0\ (2-K_0, 2+K_0, 2+K_0, 9+K_0, 0, 2+K_0, 9-K_0)$$

et son conjugué z_1. (z_0 et z_1 sont des vecteurs propres de C mais non de A).

Ce processus peut s'itérer aux restrictions successives de A en considèrant successivement :

- $F''(K) = K+8$ et la valeur propre $K''_0 = -8$ et le vecteur u_0.
- $F'''(K) = K+8$, $K'''_0 = -8$ et le vecteur v_0
- $F^4(K) = K+6$, $K^4_0 = -6$ associé à w_0

Dans la nouvelle base $(y_0, y_1, y'_0, y'_1, z_0, z_1, u_0, v_0, w_0)$, l'automorphisme A s'écrit :

$$
\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
K_0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(y_0) & \varphi_1(y_0) & \psi(y_0) & \chi(y_0) & \beta(y_0) \\
 & K_1 & 0 & 0 & \varphi(y_1) & \varphi_1(y_1) & \psi(y_1) & \chi(y_1) & \beta(y_1) \\
 & & K_0 & 0 & \varphi(y'_0) & \varphi_1(y'_0) & \psi(y'_0) & \chi(y'_0) & \beta(y'_0) \\
 & & & K_1 & \varphi(y'_1) & \varphi_1(y'_1) & \psi(y'_1) & \chi(y'_1) & \beta(y'_1) \\
 & & & & K_0 & \varphi_1(z_0) & \psi(z_0) & \chi(z_0) & \beta(z_0) \\
 & & & & & K_1 & \psi(z_1) & \chi(z_1) & \beta(z_1) \\
 & & & & & & 3 & \chi(u_0) & \beta(u_0) \\
 & & & & & & & 3 & \beta(v_0) \\
 & & & & & & & & 5
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
y_0 \\ y_1 \\ y'_0 \\ y'_1 \\ z_0 \\ z_1 \\ u_0 \\ v_0 \\ w_0
\end{array}
\end{array}
$$

- **3e étape.**
Réorganisation des "lettres" selon la multiplicité des racines.

Jordan réorganise à présent les groupements de lettres pour tenir compte de l'occurrence de mêmes racines dans la suite de puissances de facteurs irréductibles F^{λ}, F'^{λ},…qui interviennent dans la factorisation de la caractéristique [Jordan, 1870, 120] :

> La réduction ne s'arrête pas là. Supposons en effet, pour fixer les idées que les deux facteurs F', F'' soient égaux à F, mais que le suivant F''' diffère de F. On aura $K_0 = K'_0 = K''_0$: au contraire, les racines de $F''' = 0$ seront essentiellement distinctes de celles de $F = 0$.

Si les racines K_0 et K'''_0 sont distinctes, Jordan montre qu'il existe une "fonction linéaire des lettres" w_0 sur laquelle A agit comme une multiplication par K'''_0 :

$$Aw_0 = K'''_0 w_0.$$

La forme obtenue à la réduction précédente donne pour l'action de A sur v_0 :

$$Av_0 = K'''_0 v_0 + \psi(y_0, y'_0,\dots, y_1, y'_1,\dots,z_0, \dots, z_1,\dots,u_0\dots)$$

Jordan élimine par des combinaisons linéaires la fonction $\psi(y_0, y'_0,\dots, y_1, y'_1,\dots,z_0, \dots, z_1,\dots,u_0\dots)$ et détermine la "fonction linéaire" des indices w_0 telle que $Aw_0 = K'''_0 w_0$ [1870, 122] ([11]) :

> La substitution A sera ainsi ramenée à la forme
>
> $$\left| \begin{array}{ll} y_0, y'_0,\dots & K_0 y_0, K_0 y'_0,\dots \\ y_1, y'_1,\dots & K_1 y_1, K_1 y'_1,\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \\ z_0,\dots & K'_0 z_0 + \varphi(y_0, y'_0,\dots, y_1, y'_1,\dots,\dots) \\ z_1,\dots & K'_1 z_1 + \varphi_1(y_0, y'_0,\dots, y_1, y'_1,\dots,\dots) \\ \dots\dots & \dots\dots \\ u_0,\dots\dots & K''_0 u_0 + \psi(y_0, y'_0,\dots, y_1, y'_1,\dots, z_0,\dots, z_1,\dots) \\ \dots\dots & \dots\dots \\ w_0,\dots\dots & K'''_0 w_0,\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{array} \right|$$
>
> où les indices sont répartis en systèmes tels que les indices de chaque système soient remplacés par des fonctions linéaires des indices du même système : le premier système comprenant les indices $y_0,y'_0,\dots,y_1,y'_1,\dots,z_0,z_1,\dots,u_0,\dots$ relatifs au facteur irréductible F ; le second comprenant les indices $w_0,\dots$ relatifs au facteur F''', etc.

Exemple. Pour l'exemple de la matrice A, la valeur 3 est seule racine présentant une occurrence dans deux facteurs irréductibles successifs *: K-3* et *K-3* mais associée à un unique vecteur propre. Les calculs de Jordan consistent, dans cet exemple, à éliminer par des combinaisons linéaires les termes des 6 premières lignes de la 7e colonne (correspondant à la valeur $K''_0 = 3$). Pour ce faire il faut résoudre un système linéaire dont le déterminant $(K'''_0-K_0)(K'''_0-K_0)\dots(K'''_0-K_1)\dots$ est non nul. On obtient ainsi :

$$\begin{pmatrix} K_0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(y_0) & \varphi_1(y_0) & 0 & 0 & 0 \\ & K_1 & 0 & 0 & \varphi(y_1) & \varphi_1(y_1) & 0 & 0 & 0 \\ & & K_0 & 0 & \varphi(y'_0) & \varphi_1(y'_0) & 0 & 0 & 0 \\ & & & K_1 & \varphi(y'_1) & \varphi_1(y'_1) & 0 & 0 & 0 \\ & & & & K_0 & \varphi_1(z_0) & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & K_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 3 & \chi(u_0) & 0 \\ & & & & & & & 3 & 0 \\ & & & & & & & & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} y_0 \\ y_1 \\ y'_0 \\ y'_1 \\ z_0 \\ z_1 \\ u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{array}$$

[11] En termes contemporains ; à deux valeurs propres distinctes correspondent deux vecteurs propres distincts de A.

- **4e étape.**
  Regroupement des lettres en fonction des racines de la caractéristique.

Dans les différentes formes données à la substitutions A, les différents systèmes de "fonctions" *{y}, {z}, {u}* etc., correspondent à des regroupements associés à la décomposition de la caractéristique en puissances des facteurs irréductibles respectifs F^{λ} , $F'^{\lambda'}$, $F''^{\lambda''}$, ….Jordan réorganise à présent les indices en regroupements associés aux racines de la caractéristique ([12]). La nouvelle forme de A sera alors [1870, 123] :

$$\left|\begin{array}{lc}
y_0, y'_0, \ldots & K_0 y_0, K_0 y'_0, \ldots \\
y_1, y'_1, \ldots & K_1 y_1, K_1 y'_1, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_0, \ldots & K'_0 z_0 + \varphi(y_0, y'_0, \ldots, y_1, y'_1, \ldots, \ldots) \\
z_1, \ldots & K'_1 z_1 + \varphi_1(y_0, y'_0, \ldots, y_1, y'_1, \ldots, \ldots) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_0, \ldots\ldots & K''_0 u_0 + \psi(y_0, y'_0, \ldots, y_1, y'_1, \ldots, z_0, \ldots, z_1, \ldots) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
w_0, \ldots\ldots & K'''_0 w_0, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right|$$

On voit que les indices du système considéré se partagent en l séries conjuguées,

$y_0, y'_0, \ldots, z_0, \ldots, u_0, \ldots\ ;\ y_1, y'_1, \ldots z_1, \ldots, u_1, \ldots\ ; \ldots$

respectivement correspondantes à chacune des l racines $K_0, K_1, \ldots$ du facteur irréductible F.

Exemple, on cherche à exprimer l'action de la matrice A sur la troisième "fonction" Z_0 uniquement à l'aide de z_0 et y_0. Si $Z_0 = z_0 + ay_1 + y_0$, alors

$$A(Z_0) = K_0 z_0 + \varphi(y_1)y_1 + \varphi(y_0)y_0 + aK_1 y_1 + K_0 y_0 = K_0 Z_0 + [a(K_1 - K_0) + \varphi(y_1)]y_1 + \varphi(y_0)y_0$$

Il suffit de choisir a tel que $a(K_1-K_0) + \varphi(y_1) = 0$, ce qui est possible car K_1-K_0 est différent de 0 (De manière générale il faudra résoudre un système linéaire de déterminant non nul.). On obtient

$$A(Z_0) = K_0 z_0 + \varphi(y_0)y_0$$

Dans la nouvelle base, A s'écrit :

$$\left(\begin{array}{ccccccccc}
K_0 & 0 & \varphi(y_0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & K_0 & \varphi(y'_0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & K_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & K_1 & 0 & \varphi_1(y_1) & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & K_1 & \varphi_1(y'_1) & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & K_1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 3 & \chi(u_0) & 0 \\
 & & & & & & & 3 & 0 \\
 & & & & & & & & 5
\end{array}\right)\begin{array}{l} y_0 \\ y'_0 \\ z_0 \\ y_1 \\ y'_1 \\ z_1 \\ u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{array}$$

La réduction à la forme canonique sera achevée par un dernier changement de base, $K_0\, Y_0 = \psi(z_0)y'_0 + \chi(y_0)y_0$ alors $A(z_0) = K_0(u_0 + Y_0)$ et la matrice prend la forme :

$$\left(\begin{array}{ccccccccc}
K_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & K_0 & K_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & K_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & K_1 & K_1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & K_1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 3 & 3 & 0 \\
 & & & & & & & 3 & 0 \\
 & & & & & & & & 5
\end{array}\right)\begin{array}{l} y_0 \\ Y_0 \\ z_0 \\ y_1 \\ Y_1 \\ z_1 \\ u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{array}$$

[12] En termes contemporains, les *espaces* engendrés par les regroupements de *vecteurs* associés à chaque racine du polynôme caractéristique sont les *sous espaces caractéristiques*.

ENCART 6.

"Origines" du groupe linéaire et de la forme canonique dans les recherches sur les équations résolubles des années 1860.

Si le caractère synthétique du *Traité* cache la construction historique du groupe linéaire, il ne la fait pas entièrement disparaître, les premières lignées consacrées au groupe linéaire dans le *Traité* prennent place dans un paragraphe intitulé *Origine du groupe linéaire* [1870, p.91] :

> *Origine du groupe linéaire*
>
> Soient m et n deux entiers quelconques, $l_{0,0,\ldots}$, $l_{x,x,\ldots,\ldots}$ des lettres en nombre m^n caractérisées pas n indices, variables chacun de 0 à $m-1$ *(mod m).* Désignons par la notation
>
> $A_{\alpha,\alpha',\ldots} = |x,x',\ldots x+\alpha,x'+\alpha',\ldots|$,
>
> la substitution qui remplace la lettre dont les indices sont $x, x',\ldots$ par celle dont les indices sont $x+\alpha,x'+\alpha',\ldots$*(mod.m).* Les substitutions de cette forme constituent évidemment un groupe F transitif et ayant pour ordre m^n.
>
> Cherchons la forme générale des substitutions qui sont permutables à ce groupe.

"Cherchons la forme générale des substitutions qui sont permutables à ce groupe" ([13]), on trouve les substitutions linéaires. Pourquoi le groupe linéaire doit-t-il son "origine" à cette question ? Cet encart propose un éclairage sur la forme de Jordan complémentaire aux encarts 4, 5 et 6 en réalisant une déconstruction de l'architecture synthétique du *Traité de substitution* afin de présenter *l'origine* du caractère *naturel* du questionnement mathématique qui y est présenté pour introduire la forme canonique (voir encart 4). Il s'agit donc de présenter l'"origine" de la notion de groupe linéaire et de réduction canonique dans les travaux de Jordan des années 1860: le *Mémoire sur la résolution algébrique des équations* [1867a]. paru dans les comptes rendus de l'Académie des sciences ainsi que deux articles du journal de Liouville, la *Lettre à M. Liouville sur la résolution algébrique des équations* [1867b] et *Sur la résolution algébrique des équations primitives de degré p^2 (p étant premier impair)* [1868].

Le résultat fondateur de la théorie de Galois énonce la non résolubilité par radicaux de l'équation algébrique générale de degré supérieur ou égal à cinq. Si l'on sait depuis Galois et Abel à quelles conditions l'équation générale du n^e degré est résoluble par radicaux, la résolubilité d'une équation cesse d'être un problème absolu qui appelle d'emblée une réponse définitive. Elle est conçue comme un lien entre un certain être algébrique, l'équation, et son milieu, le corps ou domaine de rationalité auquel on la rapporte. Une des principales questions du programme de Galois est alors de déterminer parmi les équations algébriques particulières celles qui sont **résolubles** ([14]) [Jordan, 1870, 385] :

> THEOREME II. – Pour qu'une équation soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit que sa résolution se ramène à celle d'une suite d'équations abéliennes de degré premier.

La théorie de Galois déplace l'étude des équations vers celle des groupes [Jordan, 1867b] :

> Galois a démontré dans un mémoire célèbre [...], que chaque équation algébrique est caractérisée par un certain groupe de substitutions dans lequel se reflètent ses principales propriétés : proposition capitale qui fait dépendre la théorie toute entière des équations de celle des substitutions.

[13] Je formule la question en termes contemporains : étant donné le groupe cyclique additif *Z/mZ* opérant par translations sur lui-même, quel est le **normalisateur** de ce groupe ?

[14] Les termes en gras sont définis dans le glossaire de l'annexe 2.

Une équation est résoluble si et seulement si son groupe est résoluble [Jordan, 1870, 385] ([15]) :

> Autre énoncé du même théorème
>
> THEOREME III. – Pour qu'une équation soit résoluble par radicaux il faut et il suffit que ses facteurs de composition soient tous premiers.

L'objet des recherches de Jordan de la fin des années 1860 est la détermination de tous les groupes résolubles. Il faut pour cela, un groupe étant donné, déterminer ses suites de compositions, donc ses sous groupes. La recherche des équations résolubles revient à la détermination de tous les sous groupes résolubles du groupe symétrique ([16]). Le problème est énoncé par Jordan dans le *Mémoire sur la résolution algébrique des équations* paru en 1867 dans le *Journal de Liouville* [1867a] ([17]) .

> [...] déterminer, pour chaque degré donné, les divers types généraux d'équations irréductibles et résolubles par radicaux ; les distribuer en genres, classes, etc. ; construire les groupes de substitutions qui les caractérisent respectivement ; trouver le nombre des substitutions de ces groupes.

Jean Dieudonné caractérise la méthode élaborée par Jordan de

> gigantesque récurrence sur le degré *N* [de l'équation *f*], qui procède par une série de réductions successives [...], il semble aujourd'hui sans espoir d'obtenir une classification complète de "tous les groupes résolubles, par exemple par des systèmes d'invariants numériques. Peut être Jordan l'a-t-il réalisé, il se contenta de mettre en place une machinerie [...], donnant les groupes résolubles de l'ordre *n* si l'on suppose connus les groupes résolubles dont les ordres sont des puissances de nombres premiers. Ceci a une valeur uniquement théorique, mais en développant ses méthodes, Jordan fut conduit à d'importants nouveaux concepts [...].
>
> [Dieudonné, 1970, 168].

Le groupe linéaire doit son "origine" historique à la recherche des groupes des équations primitives résolubles par radicaux. L'utilisation de transformations linéaires pour représenter de tels groupes finis remonte aux travaux de Galois qui énoncent sans démonstration [Jordan, 1870]:

> (*) Toute équation primitive résoluble a pour degré une puissance de *p*, et correspond à un groupe de substitutions linéaires.

Les réductions successives de la méthode de Jordan permettent de démontrer l'énoncé (*) de Galois en ramenant le problème général de la détermination des équations résolubles au cas particulier des équations primitives dont le groupe est linéaire [Jordan, 1867b, .] :

> Il [Galois] a partagé les équations irréductibles en deux grandes classes : équations primitives et non primitives.
>
> Puis il a énoncé à l'égard des premières :
>
> 1. Le degré de toute équation primitive et soluble par radicaux est une puissance d'un nombre premier.
> 2. Les substitutions de son groupe sont toutes linéaires.

[15] Le théorème de la **correspondance de Galois** assure une bijection entre les corps intermédiaires d'une **extension galoisienne** finie et les sous-groupes de son groupe de Galois.

[16] Jordan se limite au cas des sous groupes résolubles maximaux.

[17] En termes contemporains, on peut plonger par un homomorphisme injectif tout groupe de Galois d'une équation séparable $f = 0$ dans le groupe symétrique de l'ensemble des n racines de f. Le groupe de Galois s'identifie alors par isomorphisme à un sous groupe de σ_n.

- **Des groupes transitifs aux groupes primitifs**

Le *Mémoire sur la résolution algébrique des équations* de 1867 débute par une réduction du problème général de la recherche des sous groupes résolubles maximaux du groupe symétrique à celui de la recherche des groupes **transitifs**. Jordan s'appuie sur le résultat selon lequel "Pour qu'un groupe caractérise une équation irréductible, il faut et il suffit qu'il soit transitif."

En termes contemporains

Si le groupe G est résoluble intransitif, si l'on désigne par C_i ses classes d'intransitivité, G est isomorphe au produit direct des sous groupes résolubles $G_i = G/C_i$. Je ne rentre pas dans les détails techniques de cette étape et renvoie pour tout complément à l'analyse de Dieudonné insérée en introduction des *Œuvres* de Jordan.

Le problème ramené à la recherche des sous groupes maximaux des groupes transitifs, la réduction suivante de la "machinerie" de Jordan consiste à montrer « comment à partir de la connaissance des groupes résolubles et primitifs, on peut trouver tous les groupes résolubles généraux » [1867.]. D'abord exposée dans le mémoire de 1867, cette réduction est remaniée à deux reprises dans la l*ettre à M. Liouville sur la résolution algébrique des équations* [18.] et le *Traité des substitutions* [1870]. La notion de groupe **primitif** est définie dans le *Traité* par opposition à celles de groupe imprimitif [1870, 34] :

> Un groupe transitif est dit *non primitif* lorsque les lettres peuvent y être réparties en systèmes contenant le même nombre de lettres, et tels que dans toutes les substitutions du groupe les lettres de chaque système soient remplacées par les lettres d'un même système : de la sorte, toutes les substitutions du groupes résulteront de déplacements d'ensemble entre les systèmes, considérés chacun comme tout d'une pièce, combinés avec des déplacements convenables opérés en même temps dans l'intérieur de chaque système entre les lettres qui le composent.
> Les groupes dans lesquels les lettres ne sont pas susceptibles d'être réparties en semblables systèmes seront appelés par opposition *groupes primitifs.*

Soit donc un groupe imprimitif, transitif et résoluble L opérant sur un *ensemble* V. La propriété d'imprimitivité permet d'établir une correspondance entre une décomposition de *l'ensemble* V en sous *ensembles* $V_1, \ldots V_n$ et une décomposition, un *dévissage*, du groupe L en sous groupes normaux $\Gamma, \Gamma', \ldots$ Je poursuis sur quelques lignes un discours moderne sur la méthode de réduction de Jordan. Si l'on choisit une décomposition maximale en systèmes d'imprimitivités $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ de V, on peut considérer :
- les sous-groupes $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \ldots$ laissant respectivement stable chaque système V_i, ces groupes sont tous isomorphes à un groupe Γ.
- le groupe Δ, de permutation des ensembles V_i, isomorphe au groupe quotient G/Γ^n.
Le choix d'une décomposition maximale garantit la primitivité des groupes Δ et Γ qui permettent de dévisser L c'est-à-dire d'écrire L comme le **produit semi-direct** de Δ *et* $/\Gamma^n$ ([18]). Quelle pertinence pour cette retranscription moderne de la méthode de Jordan ? Si le terme produit semi direct est commode car il évoque rapidement au lecteur contemporain les longs calculs de compositions menés par Jordan, la méthode de Jordan procède à l'opposé de la méthode contemporaine de dévissage du groupe L en produit semi-direct des sous groupes primitifs Δ et Γ ; Jordan montre en 1867 comment la connaissance de tous les sous groupes primitifs permet la *composition* de tous les groupes *imprimitifs* L opérant transitivement sur un ensemble de cardinal M donné. Cette construction repose sur une décomposition en puissances de nombres premiers du cardinal $M = p^n p'^{n'} p''^{n''}$ des groupes imprimitifs ([19]).

---

[18] Produit semi direct pour la conjugaison : si σ est une permutation de Δ et $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ un élément de Γ:
$\sigma(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)\sigma^{-1} = (\gamma_{\sigma(1)}, \gamma_{\sigma(2)}, \ldots, \gamma_{\sigma(n)})$

[19] Il ne s'agit pas obligatoirement de la décomposition canonique.

Le résultat (*) suivant de Galois [Jordan, 1867a, 94] :

> Dans tout groupe résoluble et primitif, le nombre de lettres est une puissance d'un nombre premier ([20]).

permet d'associer à la factorisation arithmétique $M = p^n p'^{n'} p''^{n''}$, une décomposition de l'ensemble V en systèmes d'imprimitivités $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$. Les groupes primitifs Γ, Γ', Γ'' correspondant à ces systèmes d'imprimitivité sont associés aux facteurs premiers p, p', $p', \ldots'$ [1867a, 96] :

> Si l'on adopte successivement diverses décompositions du nombre M en facteurs, et si pour chacune de ces décompositions on varie autant qu'on le pourra la forme des groupes $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$, on obtiendra une suite de groupes parmi lesquels se trouveront tous les groupes transitifs, résolubles et généraux cherchés. [...]
>
> La question se trouve ainsi réduite à la détermination des groupes $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$, autrement dit au problème suivant : *Construire les groupes résolubles, généraux et primitifs entre p^n lettres, p étant un nombre premier.*

En termes contemporains.

On peut faire correspondre un système d'imprimitivité à la donnée d'un sous groupe normal d'un groupe imprimitif L [Dixon, 1971, pp 65-77]:

Définition. Si W est un sous espace stable par Γ, le Γ-espace homogène V_W est le sous espace de V formé de la somme de tous les Γ-espaces minimaux W' qui sont isomorphes à W

Théorème. Soit L un sous groupe irréductible de $GL(V)$. Γ un sous groupe normal de L. Soit $V_1, \ldots V_m$ les Γ-espaces homogènes de V et $W_1, .., W_m$ les sous espaces minimaux correspondants.

Alors $V = \oplus V_i$ et tout x définit une permutation de

$$\{V_1, \ldots V_m\} : V_i \rightarrow V_i x .$$

En particulier si $m > 1$, L est imprimitif.

Et réciproquement :

Théorème. Soit L un sous-groupe irréductible et imprimitif de $GL(V)$. Soit $V = \oplus V_i$ où $V_1, \ldots V_m$ sont m sous-espaces permutés par L. Soit Γ_i le stabilisateur de V_i :

$$\Gamma_i = \{x \in G,\ V_i x = V_i\}.$$

Soit $\Gamma = \cap \Gamma_i$ et soit x^f la permutation : $V_i \rightarrow V_i x$.

L'homomorphisme $f : x \rightarrow x^f$ envoie L dans un groupe de permutation $\sigma(m)$.

$$Ker f = \Gamma.$$

Les sous groupes ΓB_i sont conjugués dans L, $|L/\Gamma_i| = m$ et

$$dim V_i = d \text{ où } d = \frac{n}{m}.$$

[20] Jordan, *Mémoire sur la résolution algébrique des équations*. Ce résultat est démontré par Jordan dans la *lettre à M. Liouville.* La démonstration sera donnée lors de l'étude de l'étape suivante de réduction : des groupes primitifs aux groupes linéaires.

- **Des groupes primitifs aux groupes linéaires.**

Le problème ramené à la recherche des groupes primitifs résolubles, l'entrée en scène du groupe linéaire (sur un *corps fini*) permet de poursuivre les réductions successives de Jordan [1870, .] :

> Le problème initial : *Déterminer les groupes de toutes les équations irréductibles, solubles par radicaux et de degré m* (que nous appellerons pour abréger le problème A), est ainsi ramené au suivant :
>
> Problème B.- *Déterminer les groupes de substitutions linéaires qui caractérisent des équations primitives, solubles par radicaux et d'un degré tel que p^n.*

En termes contemporains, si F est un sous groupe normal minimal d'un groupe fini résoluble et primitif L [1870, 398] :

> Soit L un groupe résoluble et primitif. Nous avons vu qu'on peut y déterminer une faisceau F formé de substitutions échangeables entre elles et permutables aux substitutions de L.

L étant résoluble, le sous groupe F est donc un groupe abélien élémentaire d'ordre $q = p^n$. F est alors isomorphe à $F_q = Z/qZ$.

> F contient des substitutions d"ordre premier (30). Soient Λ l'une d'elles ; p son ordre ; $A, B,\dots$ ses transformées par les substitutions de L. Le groupe $(A, B, \dots)$, contenu dans F, ases substitutions échangeables entre elles ; il est évidemment permutable aux substitutions de L. Il se confond donc avec F ; sans quoi l'ordre de F ne serait pas le minimum supposé.

En termes contemporains.

Propriété. Soit L un groupe résoluble fini. Tout sous groupe normal minimal de L est abélien élémentaire.

Démonstration. Soit F un sous groupe normal minimal de L.

– F est abélien :

Soit $F' = D(F)$ le groupe des commutateurs de F. F' est distingué dans L. Mais F étant un sous groupe normal minimal, $F' = F$ ou $F' = \{e\}$.

En tant que sous groupe normal d'un groupe résoluble, F est résoluble. Son groupe de commutateur F' ne peut donc lui être égal et par conséquent $F' = \{e\}$.

Le groupe de commutateurs de F est réduit à l'unité : F est abélien.

- F est un p-groupe élémentaire :

Soit p un nombre premier divisant l'ordre de F. Soit P un *p-groupe* de Sylow de F. Comme F est abélien, P est un sous groupe caractéristique de F : $P = F$. F est donc un *p-groupe* abélien. Il existe donc un nombre premier p tel que

$$\{x \in F,\ x^p = e\} \text{ est distingué dans } F,$$

$$F = \{x \in F,\ x^p = e\},\ F \text{ est donc un p-}\textit{groupe}\text{ élémentaire.}$$

Le groupe F étant primitif agit transitivement et fidèlement sur l'ensemble V des racines de l'équation, qui sont donc en nombre p^n comme l'avait énoncé Galois [Jordan, 1867] :

> Théorème I.- Dans tout groupe résoluble primitif, le nombre des lettres est une puissance, telle que p^n, d'un nombre premier p.

En termes contemporains.

Propriété. Soit L un groupe primitif opérant transitivement sur un ensemble V. Soit F un sous groupe distingué de L. F opère transitivement sur V.

Démonstration. Soit V' l'image de l'action de F sur V, $V' = F.V = \{f.v : f \in F, v \in V\}$. Il suffit de montrer que pour tout élément l de L, $l.V' \subset V'$, en effet comme L est primitif cette relation impliquera : $V' = V$: F sera donc transitif sur V. Soit $l \in L$.

Soit $v' \in V'$. Il existe alors un élément $v \in V$ et $f \in F$, $v' = f.v$. Alors $lf.v = lfl^{-1} l.v$.

Mais $lfl^{-1} \in$ F *et* $l.v \in V$ donc

$$l.v' = lf.v = lfl^{-1}\, l.v \in F.$$

l..$V' \subset V'$ pour tout l de L.

Jordan identifie le sous groupe F avec l'ensemble des p^n racines de l'équation primitive. Les substitutions de F prennent donc la forme :

$$|x,y,\ldots,x+\alpha,\ y+\beta,\ldots|.$$

Les groupes primitifs résolubles L sont alors construits par Jordan comme l'ensemble des substitutions "permutant avec F" (en termes contemporains il s'agit de l'ensemble des groupes dans lesquels F est un sous groupe distingué minimal). Rechercher de tels groupes consiste à répondre à la question par laquelle Jordan a introduit le groupe linéaire dans le livre II du *Traité* [1870, p. 91] :

Origine du groupe linéaire

> Soient m et n deux entiers quelconques, $l_{0,0,\ldots}$, $l_{x,x',\ldots}$,... des lettres en nombre m^n caractérisées pas n indices, variables chacun de 0 à m-1 (mod m). Désignons par la notation
> $A_{\alpha,\alpha',\ldots} = |x,x',\ldots x+\alpha,x'+\alpha',\ldots|$,
> la substitution qui remplace la lettre dont les indices sont x, x',... par celle dont les indices sont $x+\alpha,x'+\alpha'$,...(mod.m). Les substitutions de cette forme constituent évidemment un groupe F transitif et ayant pour ordre m^n.
> Cherchons la forme générale des substitutions qui sont permutables à ce groupe.

Le groupe "permutant" à F est le groupe linéaire. La linéarité des substitutions cherchée se démontre de la mabière suivante : si S transforme $x, x',\ldots$ en $\varphi(x, x',\ldots), \varphi'(x, x',\ldots,),\ldots$ alors $S^{-1}A_{1,0}S$ transforme $\varphi(x,x',\ldots), \varphi'(x, x',\ldots,),\ldots$ en $\varphi(x+1, x',\ldots), \varphi'(x+1,x',\ldots)$ et appartient à F donc s'écrit $A_{al,a'}$. On en déduit que $\varphi(x+1,x',\ldots) = \varphi(x,x',\ldots)+a$, $\varphi'(x+1,x',\ldots) = \varphi'(x,x',\ldots)+a'$ etc. [1870, p.93] :

> Ces dernières substitutions [...] forment évidemment un groupe, que nous appellerons le groupe linéaire au degré m^n et dont nous allons étudier les propriétés.

La recherche des groupes primitifs L se réduit donc à celle des groupes linéaires sur un corps finis $Gl_n(F_p)$ [1870, 399] :

> [...]; et celles de L, étant permutables à F résulteront de la combinaison de F avec de substitutions de la forme linéaire $[x,y,\ldots\ ax+by+\ldots,\ a'x+b'y+\ldots,\ldots|$.

En termes contemporains.

Le groupe L agit sur son sous groupe F - identifié à un *espace vectoriel de dimension n* sur F_q - comme un groupe de transformations linéaires.

Propriété. Si F est un sous groupe normal minimal d'un groupe fini résoluble G, G agit sur F comme un groupe de transformations linéaires.

Démonstration. F est un p-groupe élémentaire donc isomorphe à un espace vectoriel sur Fp (voir ci-dessous). Tout homomorphisme sur F est alors une transformation linéaire de cet espace.

Soit alors :

$G\to GL(F)$ où $\varphi_a(g) = aga^{-1}$. φ_a est une injection, donc une bijection en dimension finie.

$a\to\varphi_a$

La méthode consistant à définir une opération linéaire de $Gln(F_p)$ sur F, s'inscrit dans une méthode générale de la théorie des groupes contemporaine, dévisser un groupe à partir de son **socle**. Si F est un sous groupe normal minimal de L, le **centralisateur** $C_L(F)$ est normal (il s'agit du socle de G) et $L/C_L(F)$ est isomorphe à un sous groupe de $Aut(F)$. En particulier si N est un *p-groupe* d'odre p^n, il se comporte comme un espace vectoriel de dimension n sur un corps à p éléments et $AutN$ est isomorphe au groupe linéaire sur cet espace. $L/C_L(F)$ est alors isomorphe à un sous groupe du groupe linéaire. Ce cas particulier est celui étudié par Jordan, le groupe F, abélien élémentaire, est son propre centralisateur, il s'identifie donc avec le socle de L. L/F s'identifie avec un sous groupe maximal I de L laissant fixe une lettre (en effet le sous groupe F est en bijection avec l'ensemble V sur lequel il opère. Le sous groupe I opère sur F par conjugaison, par identification il laisse un élément x de V fixe ($I = Stab(x)$), l'élément x s'identifie à l'unité e du groupe F).

- **La forme canonique des substitutions linéaires**

Jordan expose la réduction de la recherche des groupes résolubles maximaux aux sous groupes du groupe linéaire dans le *Mémoire sur la résolution algébrique des équations* [1867a] puis dans la *Lettre à M. Liouville sur la résolution algébrique des équations* [1867b]. En 1868 il entreprend de poursuivre la réduction du problème pour le cas particulier des substitutions à deux variables. En termes contemporains, il s'agit de déterminer les sous groupes résolubles maximaux de $GL_2(F_p)$ et les sous groupes sont classés en trois catégories, selon trois '"types" de *classes d'équivalences* de substitutions par *similitudes*. Les trois types sont associés à trois "formes canoniques" déterminées par la nature des racines de l'équation "caractéristique" $|S-kI| \equiv 0$ *[p].* Jordan précise dès 1868 que sa méthode s'applique "aux équation primitives d'un degré quelconque", cette généralisation étant réservée à un "ouvrage spécial", le *Traité des substitutions,* il s'agit ici "de la mettre en évidence sur un exemple simple" [Jordan, 1868, 171]. En 1870, le T*raité des substitutions* donnera l'énoncé général de la forme canonique d'une substitution générale de $GL_n(F_p)$, appliqué à la recherche des sous groupes résolubles du groupe linéaire (encart 5).

- Les formes canoniques des substitutions de $GL_2(F_p)$.

Dans le mémoire *Sur la résolution algébrique des équations primitives de degré p^2 (p étant premier impair),* Jordan classe les sous groupes résolubles en trois "types" [1868, p.171] :

> Nous démontrerons ici que les groupes des équations cherchées se ramènent tous à l'un des trois types suivants :
>
> *Premier type.* – Il contient $2(p-1)^2p^2$ substitutions dérivées des suivantes :
>
> $$E=\begin{vmatrix} x & x+\alpha \\ y & y+\alpha' \end{vmatrix},\quad F=\begin{vmatrix} x & mx \\ y & m'y \end{vmatrix} \text{ et } G=\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}, [\ldots]$$
>
> *Deuxième type.* - Il contient $2(p^2-1)p^2$ substitutions dérivées des suivantes :
>
> $$E=\begin{vmatrix} x & x+\alpha \\ y & y+\alpha' \end{vmatrix}, F=\begin{vmatrix} x & \gamma x+\delta ey \\ y & \delta x+\gamma y \end{vmatrix} \text{ et } G=\begin{vmatrix} x & -x \\ y & -y \end{vmatrix}$$
>
> *e* étant un résidu quadratique de p choisi arbitrairement ; [...].
>
> *Troisième type.*- Il contient $24(p-1)p^2$ substitutions, et change de forme suivant que $p\equiv 1$ *ou* $\equiv 3$ *(mod.4).*
>
> 1° Si $p \equiv 1$ *(mod.4),* il est dérivé des substitutions suivantes :
>
> $$E=\begin{vmatrix} x & x+\alpha \\ y & y+\alpha' \end{vmatrix},\quad M_1=\begin{vmatrix} x & jx \\ y & -jy \end{vmatrix},\quad P=\begin{vmatrix} x & x-jy \\ y & x+jy \end{vmatrix}$$
>
> $$F=\begin{vmatrix} x & ax \\ y & ay \end{vmatrix},\quad M_2=\begin{vmatrix} x & jy \\ y & jx \end{vmatrix},\ Q=\begin{vmatrix} x & x+y \\ y & x-y \end{vmatrix}$$
>
> j étant racine de la congruence $j^2\equiv -1$ *(mod. p) ;* [...].
>
> 2° *Si* $p\equiv 3$ *(mod. 4),* il est dérivé des substitutions suivantes :
>
> $$E=\begin{vmatrix} x & x+\alpha \\ y & y+\alpha' \end{vmatrix},\quad M_1=\begin{vmatrix} x & y \\ y & -x \end{vmatrix},$$
>
> $$F=\begin{vmatrix} x & ax \\ y & ay \end{vmatrix},\quad M_2=\begin{vmatrix} x & sx+ty \\ y & tx-sy \end{vmatrix},$$
>
> $$P=\begin{vmatrix} x & -(1+st)x+(s-t^2)y \\ y & (t+s^2)x+(st-s-t)y \end{vmatrix},$$
>
> $$Q=\begin{vmatrix} x & sx+(t+1)y \\ y & (t-1)x-sy \end{vmatrix}$$
>
> *s* et *t* étant deux entiers arbitrairement choisis parmi ceux qui satisfont à la congruence $s^2+t^2\equiv -1$ *(mod. p)* ; [...].

Ces trois "types" des groupes résolubles maximaux de $GL_2(F_p)$ sont déterminés par la définition d'une "forme canonique" des substitutions linéaires S à deux variables [1868, p.174] :

> Or il existe en général deux fonctions distinctes, que S multiplie chacune par un simple facteur constant.

Il est donc possible "en général", d'écrire la substitution $S = |x\ y\ ,\ ax+by\ a'x+b'y|$ sous une forme particulièrement simple, par un "changement d'indice" $z = mx+ny$, de façon à ce que $Sz \equiv kz$ *mod.p*. Un tel changement d'indices est déterminé par les équations linéaires $ma+na' \equiv km$ et $mb+nb' \equiv km$ [1868, 174] :

> [...] qui détermineront le rapport $\frac{m}{n}$ pourvu que l'on prenne pour k une racine de la congruence
>
> $$\begin{vmatrix} a-k & a' \\ b & b'-k \end{vmatrix} \equiv 0 \text{ (mod. p).}$$

Jordan distingue trois cas selon le nombre de solutions de cette dernière équation algébrique :

- **1er cas**. L'équation a deux racines réelles dans F_p : α et β [1868, 174] :

  > [...] il existera deux fonctions z,u, que S multipliera respectivement par α et β. ; en les prenant pour indices [...] on aura ramené S à la forme
  >
  > $$\begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta u \end{vmatrix}$$

- **2e cas.** Les racines sont « imaginaires », il faut étendre le corps de base pour écrire ces racines $\alpha+\beta i$ *et* $\alpha+\beta i^p$ où $i^2 \equiv e[p]$ (i est racine d'une « congruence irréductible quelconque ») et [1868,175]

  > [...] S, rapporté à ces nouveaux indices, sera de la forme
  >
  > $$\begin{vmatrix} z & (\alpha+\beta i)z \\ u & (\alpha+\beta i^p)u \end{vmatrix},$$

- **3e cas**. Les racines sont égales [1868, 174] :

  > [...] il n'existe qu'une seule fonction z que S multiplie par un facteur constant. Soit u une autre fonction quelconque de x et y, S prendra la forme
  >
  > $$\begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta z+\gamma u \end{vmatrix}$$

Jordan démontre que dans ce troisième cas, $\gamma = \alpha$, puis énonce l'expression de la "forme canonique" des substitutions [1868, 174] :

> Toute substitution linéaire S peut être ramenée par un choix d'indices convenables à l'une des trois formes canoniques suivantes :
>
> $$\begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta u \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & (\alpha+\beta i)z \\ u & (\alpha+\beta i^p)u \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta z+\alpha u \end{vmatrix}.$$

- **Les deux premiers types de groupes résolubles.**

Les p^2 substitutions $E = \begin{vmatrix} x & x+\alpha \\ y & y+\alpha' \end{vmatrix}$, interviennent dans les trois types de groupes résolubles donnés par Jordan Comme on l'a vu précdemment, c'est en effet par la composition des groupes linéaires à ce type de substitutions que l'on obtient les groupes résolubles primitifs. Les autres formes canoniques caractérisent les trois types de groupes linéaires résolubles. Soit F un groupe distingué abélien maximal du groupe linaire résoluble L. et soit S une substitutions de F. Si S est "réductible" à l'une des deux premières formes canoniques, Jordan démontre que toutes les autres substitutions de F le sont également, les substitutions du groupe L sont alors engendrées par les substitutions $F = \begin{vmatrix} x & mx \\ y & m'y \end{vmatrix}$ et les substitions G qui, en termes contemporains, permutent les *vecteurs propres.* Ce sont les deux premiers types de groupes résolubles.

Le parallèle d'un exemple contemporain : les sous groupes de Sylow de $Gl_2(F_5)$.

L'ordre de $G = Gl_2(F_5)$ est 480 = $2^5\times3\times5$

- **Recherches des 2-Sylow (sous groupes d'ordre 2^5 de G)**

Le premier théorème de Sylow assure que les 2-Sylow sont tous conjugués et que leur nombre divise $3\times5 = 15$.

On remarque que le groupe des matrices diagonales inversibles $F = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m' \end{pmatrix}$ est d'ordre 16 (il est isomorphe à $F_5^*\times F_5^*$). Le groupe obtenu en composant à ces matrices diagonales la matrice $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est donc d'ordre 32. A toute base $e = (e_1,e_2)$ correspond donc un *2-Sylow :* le groupe des automorphismes $f \in G$ tels que

$$Mat_e(f) = F = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m' \end{pmatrix} \text{ ou } Mat_e(f) = G = \begin{pmatrix} 0 & n' \\ n & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Mais } \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m' \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & m'^2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & n' \\ n & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} nn' & 0 \\ 0 & nn' \end{pmatrix}.$$

Les carrés des deux matrices ont une forme diagonale, donc deux vecteurs propres. On en déduit que, inversement, à tout 2-Sylow S correspond une base vectorielle : celle des vecteurs propres aux f^2, $f \in S$.

On a $5^2-1 = 24$ vecteurs non nuls dans F_5^2 , et $cardF_5^* = 4$ donc chaque vecteur non nul donne lieu à 4 vecteurs non nuls colinéaires. On en déduit l'existence de 24/4 = 6 droites vectorielles donc $C_6^2 = 15$ paires de telles droites donc 15 bases de F_5^2 . Il y a finalement 15 *2-Sylow* dans *G.* Ces 15 *2-Sylow* correspondent aux groupes résolubles de premier type chez Jordan qui sont bien des groupes de $2(p-1)^2 = 2\times16 = 32$ substitutions comme annoncé par Jordan en 1868.

- **Recherche des 3 Sylows (sous groupes de G d'ordre 3).**

Ils sont tous conjugués, leur nombre divise $2^5\times5$ et est congru à 1 modulo 3.

La matrice $F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est d'ordre 3 (c'est la matrice compagnon du polynôme minimal X^2+X+1)

$$\text{Si } Mat_e(f) = F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ alors } Mat_e(f^2) = G = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit alors un *3-Sylow* $\{I, f, f^2\}$, X^2+X+1 est le polynôme minimal de f, il n'est pas scindé dans F_5 donc aucun vecteur n'est propre. Le *3-Sylow* opère sur l'ensemble des vecteurs et les orbites sont de cardinal 3 (aucun vecteur n'est stable). Tout *3-Sylow* correspond donc à une partition des 6 vecteurs de $P(E)$ en orbites de 3 droites. Il y a $CB_6^3/2 = 10$ telles partitions. .On peut alors démontrer qu'il existe bien 10 3-Sylow.

Les 3-Sylow correspondent au deuxième type de groupes donnés par Jordan (c'est-à-dire le cas pour lequel l'équation caractéristique a deux racines j, j^2, dans une extension de F_5). Jordan annonce le nombre des substitutions de ces groupes $2(p^2-1) = 48$ car il compose les éléments des 3-*Sylows* à ceux des 2-*Sylows* ; c'est-à-dire les deux formes matricielles F et G aux 4×4 matrices diagonales $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ pour obtenir des groupes de 4×4×3 éléments.

- **Le troisième type de groupes résolubles.**

Si S est réductible à la troisième forme canonique, Jordan démontre que les éléments de la forme $S = \begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta z + \alpha u \end{vmatrix}$ ne forment pas un groupe primitif. Le seul cas de racine double de l'équation caractéristique à considérer est le cas dans lequel S est réductible à la forme $F = \begin{vmatrix} x & ax \\ y & ay \end{vmatrix}$, c'est-à-dire le cas dans lequel le sous groupe F ne contient que "des subsitutions qui multiplient les deux indices x et y par un même facteur constant" [Jordan, 1868, 116] ([21]). Dans ce cas, le sous groupe F ne suffit pas à la description de L et il est nécessaire, pour construire une chaine ascendante correspondant à une suite de composition de L, de rechercher un autre sous groupe minimal G de L contenant F. Ce groupe est construit comme le groupe des commutateurs de F, "ses substitutions sont echangeables entre elles aux F près", $D(G) = F$. De la propriété $D(G) = F$, Jordan déduit que G contient deux éléments M_1 et M_2, ne commutant pas, de déterminant 1 et dont la forme canonique dans une même base dépend du nombre de solutions de $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Deux cas doivent être distingués, leur traitement est similaire et je ne présenterai donc que le premier :
Si p est de la forme $4n+1$, l'équation $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$ a deux racines réelles j et $-j$:

$$M_1 = \begin{vmatrix} x & jx \\ y & -jy \end{vmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{vmatrix} x & jy \\ y & jx \end{vmatrix}$$

En écrivant alors l'opération d'une substitution de G avec M_1 ou M_2 Jordan montre que

$$G = \{ M_1^{\varepsilon} M_2^{\varepsilon'} f,\ f \in F,\ \varepsilon \in \{0 ; 1\} \}$$

La structure de L est alors obtenue par combinaisons des substitutions de G et de F. Si U est une substitutions quelconque de L, le conjugué UM_1U^{-1} appartient à G et par conséquent :

$$UM_1U^{-1} = M_1^{\varepsilon} M_2^{\varepsilon'} f,$$

Jordan déduit de cette égalité la forme de U et conclut :

> [...], U résultera de la combinaison de F, M_1, M_2 avec la substitution $P = \begin{vmatrix} x & x - jy \\ y & x + jy \end{vmatrix}$, qui transforme M_1 en M_2 et M_2 en M_1M_2, la substitution $Q = \begin{vmatrix} x & x + y \\ y & x - y \end{vmatrix}$, qui les transforme en M_2 et M_1.

On obtient le troisième "type" de groupes résolubles tel qu'énoncé par Jordan..

- **Un exemple contemporain : recherche des *5 Sylow* (sous groupes de G d'ordre 5)**

Ils sont tous conjugués et leur nombre divise $2^{5\times 3} = 96$ et est congru à 1 modulo 5.

On remarque que le groupe additif des matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est isomorphe à F_5 d'ordre 5. Une telle matrice revient à la donnée d'un vecteur propre e et il y a autant de *5-Sylow* que de vecteurs non colinéaires de F_5^2. Il existe 6 5-Sylows.
Les 5-Sylows correspondent au troisième type de groupes donné par Jordan, celui correspondant au cas de racines multiples de l'équation caractéristique qui est rejeté car ne donnant pas de groupe primitif.

[21] Le troisième type de sous groupes résolubles correspond donc au cas où F est réduit au centre de GL2 (Fp) : le sous groupe des homothéties.

II. LA THEORIE DES FORMES BILINEAIRES (1858-1868), PRELUDE AU THEOREME DES DIVISEURS ELEMENTAIRES.

Pour les mathématiques contemporaines, le résultat de Weierstrass de 1858 sur les couples de fonctions homogènes repose sur une réduction à une forme *diagonale* et cette réduction n'est pas possible en général. *En général* sous entend dans le cas *non symétrique* des *formes bilinéaires*, par opposition *au cas particulier* qui caractérise les *formes quadratiques* ([18]). Il existe néanmoins une forme normale unique des couples de formes bilinéaires et ce résultat est énoncé par Karl Weierstrass en 1868. Cette partie est consacrée à l'histoire du théorème de Weierstrass est marquée par l'héritage des méthodes de la discussion des petites oscillations dans la construction de la théorie des formes bilinéaires par l'école de Berlin dans les années 1860.
L'année 1858 voit le mémoire de Karl Weierstrass clore la discussion des petites oscillations Comme nous l'avons vu en conclusion du chapitre 2, les méthodes de Weierstrass proviennent de la théorie des *formes quadratiques*, un domaine des mathématiques bien constitué en 1860 et qui, pour reprendre l'expression de Jean Dieudonné [1978, 97] forme "un thème constant de l'algèbre depuis le milieu du dix-huitième siècle". Des quadriques d'Euler aux recherches arithmétiques d'Hermite, cette mathématique de ce que Gauss désigne comme des *formes* est déjà, en 1858, forte de recherches nombreuses et importantes. Son problème fondateur est de classifier les *formes quadratiques*, c'est-à-dire d'exhiber les conditions sous lesquelles une forme se transforme en une autre par des transformations linéaires des variables. Les recherches se confinent longtemps à l'étude des formes à deux ou trois variables, susceptibles d'interprétations géométriques en termes de coniques ou quadriques. Lorsque les coefficients des formes sont réels ou complexes, le problème de la classification est totalement résolu dans les années 1850-1860 par les travaux indépendants de Jacobi [1855], Sylvester [1855] et Hermite [1855]. Le résultat, connu sous le nom de *loi d'inertie*, énonce une *forme réduite* exprimée par une somme de carrés de formes linéaires dont les coefficients sont des *invariants* ([19]). C'est ainsi que le mémoire de Weierstrass de 1858 dissout la discussion des

---

[18] Par exemple, la forme bilinéaire $B(X,U) = ux+uy+vy$ ne peut pas être transformée en une forme *diagonale* car B, qui n'est pas la forme identité, n'a qu'une seule valeur propre 1.

[19] La loi d'inertie énonce que pour toute forme quadratique Φ sur un espace vectoriel E de dimension finie sur Ë, il existe une base Φ-orthogonale (e_i) telle que

$$\Phi(x) = \Sigma |x_i|^2 \Phi(e_i) = \Sigma \lambda_i |e_i{}^*(x)|^2 \text{ où } \lambda_i = \Phi(e_i).$$

Ce résultat s'énonce plus communément sous la forme :

$$\Phi(x) = |g_1(x)|^2 + \ldots + |g_{p'}(x)|^2 - |g_{p+1'}(x)|^2 \ldots - |g_{p'+q'}(x)|^2$$

où f_i, g_i sont des formes linéaires linéairement indépendantes.
Le couple (p,q) s'appelle la signature de Φ, il constitue un invariant de la forme quadratique Φ.

petites oscillations et la plonge dans le nouveau monde de la mathématique des formes, les variables, assimilées à des formes linéaires sont regroupées par des opérations algébriques de manière à *transformer* un couple (Φ,Ψ) de fonctions homogènes en une *forme réduite* (la méthode est détaillée dans le chapitre 2).
Toutes à leurs dissolutions, les "petites oscillations" ne sont pas sans donner un peu de sel à la théorie des formes quadratiques, elles nécessitent en effet de rechercher la forme réduite, non pas d'une, mais tout à la fois de deux formes quadratiques Φ et Ψ. C'est là la signification que prend chez Weierstrass l'expression $s\Phi-\Psi$ que Kronecker désignera en 1868 par le terme "schaaren" [Kronecker, 1868, 166] et que Jordan traduira en 1874 par l'expression de "faisceau" de formes. L'expression $s\Phi-\Psi$ permet de *mêler* deux formes quadratiques, mais s'agit-il alors de la donnée de deux formes ou de celle d'un seul *polynôme* de formes ? Si Weierstrass se réfère toujours à cette expression comme à un couple de formes, le procédé qu'il emploie (chapitre 2, encart 3_c) est une méthode *polynômiale* héritée de la postérité de la méthode propre développée par Lagrange en 1766 pour le problème des petites oscillations (chapitre 2, encart 3_a). Cette méthode, telle qu'elle est développée par Weierstrass, permet d'obtenir la structure de la *forme réduite* d'un couple de formes à partir de la *structure polynomiale* de *l'invariant* donné par le déterminant $|s\Phi-\Psi|$, sa postérité marquera les origines de la théorie des formes bilinéaires dans les années 1860.

1. Des fonctions homogènes du second degré aux formes bilinéaires.

Lorsqu'il donne en 1864 une première suite au mémoire de Weierstrass de 1858, Elwin Bruno Christoffel n'est pas encore le mathématicien qui, appelé par Bismarck en 1872 pour réorganiser l'institut de mathématiques de Strasbourg, sera célébré pour ses recherches en mathématiques théoriques et appliquées ([20]). Christoffel a succédé en 1862 à Richard Dedekind à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich et c'est de Suisse qu'est envoyé le mémoire "Verallgemeinerung einiger Theoreme des Herrn *Weierstrass*" [1864a]. Si Christoffel n'a pas compté Weierstrass parmi ses professeurs pendant ses études à Berlin dans les années 1850 – à cette époque Weierstrass enseigne au Gymnasium de Braunsberg et les maîtres de Christoffel sont les grands noms de la "première école de Berlin" [Biermann, 1973] comme Borchardt, Eisenstein, Steiner et Dirichlet -, c'est à l'occasion de son retour à Berlin dans les années 1858-1862 pour son examen de qualification de professeur d'université que Christoffel entretient une collaboration mathématique avec Weierstrass.

Ce sont en réalité deux mémoires de Christoffel qui paraissent en 1864, le premier se présentant comme un développement mathématique du second, consacré à des problèmes physiques dans le cadre de la théorie de la lumière de Cauchy et intitulé "Ueber die kleinen Schwingungen eines periodisch Eingerichten Systems materieller Punkte" [1864b]. Les petites oscillations dont il est question dans le titre du mémoire sont issues de la théorie de la lumière de Cauchy, fondée sur la notion d'éther portant des ondes élastiques et selon laquelle la lumière correspond aux petites vibrations de molécules ponctuelles d'éther soumises à des forces attractives et répulsives ([21]) :

---

[20] Les informations biographiques sont issues de l'article de M. A. Knuss [1981] dans l'ouvrage collectif consacré à Christoffel et édité par [Butzer, L. et Feher F., 1981].

[21] Sur les relations entre la deuxième théorie (moléculaire) de l'élasticité de Cauchy et la théorie de la lumière, voir [Dahan Dalmedico, 1992, 388 et 422] :

> Il est simple de résumer le point de vue de Cauchy, car il est clair et net : obtenir, à partir des équations aux dérivées partielles exprimant la dynamique d'un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent à de très petites distances, les équations du mouvement de la lumière ; c'est-à-dire les équations aux dérivées partielles de propagation des ondes qui puissent être appliquées à tous les phénomènes optiques, réflexion et réfraction simple, biréfringence des cristaux optiques, et aussi dispersion qui échappait jusque là à l'explication par les seules principes de la théorie de Fresnel.
> [...]
> L'objectif constant de Cauchy depuis 1829 et jusqu'à la fin des années 1840 reste identique à lui-même : déduire toutes les propriétés de la lumière d'une théorie des solides élastiques, ou plus précisément, trouver un système mathématique cohérent qui puisse être appliqué à tous les phénomènes optiques. Ce programme de recherche étant intimement lié à la nature physique du milieu dans lequel la lumière se propage, Cauchy va donc élaborer une théorie dite de l'éther moléculaire ou ponctiforme, qui est essentiellement issue de la dynamique des treillis tridimensionnels de masses ponctuelles. Et Cauchy va intégrer les équations différentielles trouvées selon les techniques spectrales qu'il a lui-même mises au point.

ENCART 7.

La généralisation par Christoffel des méthodes de Weierstrass aux "fonctions bilinéaires".

La démonstration de Christoffel de la réalité des racines de l'équation caractéristique $\Delta(t) = 0$ d'un couple de formes bilinéaires généralise la preuve donnée par Weierstrass en 1858 pour le cas quadratique. La difficulté tient à l'occurrence d'éventuelles racines multiples et Christoffel étend au cas bilinéaire la "circonstance remarquable" selon laquelle le développement en éléments simples de la fraction $\frac{\Delta_{ik}(t)}{\Delta(t)}$ d'un *mineur* $\Delta_{ik}(t)$ et du déterminant caractéristique $\Delta(t)$ ne contient que des termes du premier degré [Christoffel, 1864, 255] :

> Ist $\Delta_{ik}(t)$ irgend eine erst Unterdeterminante von $\Delta(t)$, so ist die Zerfallung von $\frac{\Delta_{ik}(t)}{\Delta(t)}$ in Partialbrüche stets frei von allen Gliedern, deren Nenner in Bezug auf t den ersten Grad übersteigt.

La "circonstance remarquable" de Weierstrass est démontrée par des passages à la limite. Chritoffel reprend les méthodes de Weierstrass et écrit la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{\Delta_{ik}(t)}{\Delta(t)}$ [1864, p.259] :

$$(6.)\quad \frac{\Delta_{ik}(t)}{\Delta(t)} = \Sigma_{\delta} \frac{A_{ik}{}^{\delta}}{s_{\delta} - t}$$

Christoffel qualifie de point de départ ("Ausgangspunkt ") de la démonstration de Weierstrass le "retournement" de ce système qui, considérant implicitement les variables u_g et v_h comme des polynômes en s, permet de rassembler les variables en groupes pour réduire le couple de formes quadratiques à une forme normale [1864, p. 260] :

> Deise Formelnsysteme sind in den folgenden Gleichungen enthalten, welche den Ausganspungt der Untersuchungen des Herrn Weierstrass bilden. Aus der Definition der Determinanten $\Delta(x)$ und $\Delta_{ik}(x)$ ergibt sich

$$(8)\begin{cases} u_g = \sum_h \frac{\Delta_{gh}(x)}{\Delta(x)} . \frac{\partial(\psi - x\varphi)}{\partial v_h} \\ v_h = \sum_h \frac{\Delta_{gh}(x)}{\Delta(x)} . \frac{\partial(\psi - x\varphi)}{\partial u_g} \end{cases}$$

Les formules (6) et (8) impliquent :

$$\begin{cases} u_g = \sum_{\partial} \frac{1}{s_{\partial} - x} \sum_h A_{gh}^{\partial} . \frac{\partial(\psi - x\varphi)}{\partial v_h} \\ v_h = \sum_{\partial} \frac{1}{s_{\partial} - x} \sum_h A_{gh}^{\partial} . \frac{\partial(\psi - x\varphi)}{\partial u_g} \end{cases}$$

Ce qui permet d'obtenir les regroupements de variables donnant la forme normale :

$$(9)\begin{cases} u_g = \sum_{\partial} \sum_h A_{gh}^{\partial} . \frac{\partial\varphi}{\partial v_h} \\ \sum_h A_{gh}^{\partial} . \frac{\partial\psi}{\partial v_h} = s_{\partial} \sum_h A_{gh}^{\partial} . \frac{\partial\varphi}{\partial v_h} \end{cases},$$

$$(10)\begin{cases} v_h = \sum_{\partial} \sum_g A_{gh}^{\partial} . \frac{\partial\varphi}{\partial u_g} \\ \sum_g A_{gh}^{\partial} . \frac{\partial\psi}{\partial u_g} = s_{\partial} \sum_g A_{gh}^{\partial} . \frac{\partial\varphi}{\partial u_g} \end{cases}$$

Durch Untersuchungen über die kleinen Schwingungen eines zuerst von *Cauchy* behandelten Systems materieller Punkte bin ich zur Verallgemeinerung einiger wichtigen Theoreme des Herrn *Weierstrass* gelangt, welche ich jenen Untersuchungen voranschicke da sie auch unabhängig von denselben von algebraischem Interesse zu sein scheint.
[Christoffel, 1864a, p.255].

[Traduction, F.B.] :
Je suis arrivé à la généralisation d'un théorème important de Monsieur Weierstrass par l'examen des petites oscillations d'un système de points matériels déjà traitées par Cauchy. En raison de son intérêt algébrique, je consacre à cette généralisation un développement indépendant.

Le modèle – pour reprendre le terme employé par Amy Dahan Dalmedico - de la lumière de Cauchy fait intervenir des systèmes d'équations différentielles dont les coefficients ne sont pas constants. Le mémoire de Christoffel [1864b] développe les méthodes d'intégrations données par Cauchy en 1850 ([22]). Le procédé nécessite l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des constantes complexes [Mawhin, 1981] et ont, pour reprendre l'expression de Laplace, des "propriétés remarquables" dont les conséquences mathématiques sont développées dans un mémoire séparé [1864a] ([23]).

Ich bezeichne durch

$$\varphi = \Sigma[gh]\, u_g v_h,\ \psi = \Sigma\,(gh)\, u_g v_h$$
$$g,h = 0,1,....n$$

zwei bilineare Functionen der Variabeln

$$\begin{vmatrix} u & u_1 & \ldots & u_n \\ v & v_1 & \ldots & v_n \end{vmatrix},$$

und durch Φ und Ψ der Werthe, welche sie annehmen, wenn jedem Paare von Variabeln conjugirte Werthe

$$u_g = x_g + i\, y_g,\ v_g - iy_g$$

ertheil werden.

Sind alsdann folgende Voraussetzungen erfüllt,

1) dass die Coefficienten *[gh]* und [*hg],* sowie *(gh)* und *(hg)* für alle Werthe von *g* und *h* zu einander conjugirt sind, und
2) dass Φ nur dann verschwinden, kann, wenn die reellen Variabeln *x* und *y* sich alle zugleich auf Null reduciren,

[1864a, 255].

[22] Cette perspective mécanique de la lumière sera bientôt remplacée par la théorie électromagnétique mais les recherches de Christoffel ne sont pas sans postérité en physique des solides et en électronique ainsi que pour la théorie non linéaire correspondante pour les solutions de type *soliton* d'équations aux dérivées partielles comme celle de Korteweg-De Vries Voir l'article de Jean Mawhin [1981] .

[23] Il s'agit de ce que l'on appellerait aujourd'hui la *symétrie hermitienne*

ENCART 8.

La généralisation du théorème de Jacobi [1857] au cas complexe.

La démonstration de Christoffel de la loi d'inertie pour une *forme hermitienne* φ généralise celle donnée par Jacobi pour les "fonctions bilinéaires" à coefficients réels [Jacobi, 1857, 589] :

> Theorem
>
> Es sei
>
> $$f = \sum_{i=0}^{i=n}\sum_{k=0}^{k=n} a_{k,i} x_i y_k$$
>
> eine lineare homogene Funktion sowohl von $x, x_1, \ldots, x_n$ als von $y, y_1, \ldots, y_n$ so kann dieselbe, und zwar nur auf *eine* Weise, unter Form
>
> $$f = AUV + A_1U_1V_1 + \ldots. A_mU_mV_m + \ldots AB_nU_nV_n$$
>
> so dargestellt werden, dass (für jedes m) U_m und V_m zwei resp. nur die Variabeln $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ und $y_m, y_{m+1}, \ldots, y_m$ enthaltende lineare Funktionen sind.

[Jacobi, 1857, p.590] :

> Theorem
>
> Eine quadratische Form
>
> $$f = \sum_{i=0}^{i=n}\sum_{k=0}^{k=n} a_{k,i} x_i y_k$$
>
> (wo $a_{ki} = a_{ik}$ ist) lässt sich, und zwar nur auf *eine* Weise, in der Form der Quadratsumme
>
> $$f = AU^2 + A_1U_1^2 + \ldots. + A_mU_m^2 + \ldots A_nU_n^2$$
>
> so darstellen dass (für jedes m) U_m eine lineare homogene Funktion nur von den Variablen $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ ist.

La méthode de réduction est la suivante : soit un coefficient $a_{ij} = [00]$ non nul, alors la forme $\varphi_1 = [00]\varphi - \frac{\delta\varphi}{\delta u}\cdot\frac{\delta\varphi}{\delta v}$ est une forme bilinéaire des variables $(u_{1\ldots}u_n, v_1, \ldots, v_n)$, le choix d'un coefficient $[11]_1$ non nul permet d'obtenir la même façon la forme φ_2 indépendant des variables (u_1, v_{i1}) et l'itération du processus aboutit à la forme réduite [Christoffel, 1864a,263] :

> Folglich hat man die bereits von Jacobi (Bd.53, p269 dieses Journals) gegebene Transformation :
>
> $$\varphi = \frac{1}{[00]}\frac{\delta\varphi}{\delta u}\frac{\delta\varphi}{\delta v} + \frac{1}{[00][11]_1}\frac{\delta\varphi_1}{\delta u_1}\frac{\delta\varphi_1}{\delta v_1} + \ldots + \frac{1}{[00][11]\ldots[nn]}\frac{\delta\varphi_n}{\delta u_n}\frac{\delta\varphi_n}{\delta v_n}$$
>
> Ersetzt man aber in den linearen Funktionen
>
> $$\frac{\delta\varphi_g}{\delta u_g} = \Sigma_h\,[gh]_g\, v_h,\quad \frac{\delta\varphi_g}{\delta v_g} = \Sigma_h[hg]_g u_h$$
>
> die Paare u_h, v_h durch die conjugirten Werthe x_h+iy_h, x_h-iy_h, so erlangen sie conjugierte Werthe f_g+if_g', f_g-if_g', wo f_g, f_g' lineare Functionen von x_g, y_g x_{g+1}, ..., y_n mit reellen Coefficienten bedeuten. Mittelst der im art.1 eingeführten Bezeichnung erhält man also aus der vorigen Gleichung
>
> $$\Phi = \frac{1}{[00]}(f^2+f'^2) + \frac{1}{[00][11]_1}(f_1^2+f_1'^2) + \ldots. + \frac{1}{[00][11]\ldots[nn]}(f_n + f'^2_n)$$

En termes contemporains,

Théorème. Soit Φ une forme quadratique ou hermitienne sur un espace vectoriel E de dimension finie. Il existe une base Φ-orthogonale de E.

Démonstration. La démonstration consiste à construire une base φ-orthogonale par récurrence sur la dimension n de E. Pour $n = 1$, il n'y a rien à montrer. Supposons alors le résultat vrai au rang n-1 et montrons le au rang n. Si Φ est identiquement nulle, alors toute base de E est Φ-orthogonale. Sinon, il existe $v \in E$ tel que Φ(v) ý 0. Dans ce cas, l'application $f = \varphi(v,.)$ définie par $f(x) = \varphi(v,x)$ est une forme linéaire non nulle sur E. Son noyau H est un hyperplan de E, et comme v n'appartient pas à H, E est somme directe de H et $Vect(V)$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\dim H = n$-1 donc il existe une base $(e_1,\ldots,e_{n-1})$ orthogonale pour $\Phi_{/H}$. de H. On voit alors facilement que $(e_1,\ldots,e_{n-1},v)$ est une base Φ-orthogonale.

[Traduction, F.B.]
Je désigne par

$$\varphi = \Sigma[gh]\, u_g v_h,\ \psi = \Sigma\,(gh)\, u_g v_h$$
$$g,h = 0,1,....n$$

deux fonctions bilinéaires des variables

$$\begin{vmatrix} u & u_1 & \dots & u_n \\ v & v_1 & \dots & v_n \end{vmatrix},$$

prenant les valeurs Φ et Ψ lorsque chaque paire de variables sont remplacées par les valeurs conjuguées

$$u_g = x_g + i\, y_g,\ v_g - iy_g$$

On supposera remplies les conditions suivantes,
1. les coefficients *[gh]* et [*hg],* ainsi que *(gh)* et *(hg)* sont conjugués l'un de l'autre pour toutes les valeurs de *g* et *h*.
2. Φ ne s'annule que lorsque les valeurs réelles de *x* et *y* sont toutes nulles.

L'expression "fonction bilinéaire" est employée par Christoffel dans une perspective de généralisation des résultats sur les fonctions homogènes obtenus pas Weierstrass. La propriété 1), $(gh) = \overline{(hg)}$ (la symétrie hermitienne) généralise en effet au cas complexe examiné par Christoffel le cas *(gh)* = *(hg)* de la théorie classique des formes quadratiques :

[...] so finden folgende Lehrsätze statt :
I. Φ ist reel und von unveränderlichem Zeichen.
II. Die Determinante der bilinearen Function φ ist von Null verschieden.
III. Die Determinante $\Delta(s)$ der bilinearen Function ψ-$s\varphi$ verschwindet nur für reel Werthe von *s*.
[1864, 255].

[Traduction, F.B.] :
[…] on obtient alors les énoncés suivants.
I. Φ est réelle et de signe constant.
II. Le déterminant de la fonction bilinéaire φ ne s'annule pas .
III. le déterminant $\Delta(s)$ de la fonction bilinéaire ψ-$s\varphi$ s'annule uniquement pour des valeurs réelles de *s.*

La démarche de généralisation du réel au complexe de Christoffel pousuit les travaux de Clebsch qui, également dans le cadre de la théorie de la lumière de Cauchy, a étudié en 1860 un système d'équation différentielles dont les coefficients complexes "ont des propriétés remarquables car ils […] apparaissent comme des extensions de ces équations qui interviennent dans la théorie des perturbations séculaires des planètes et dans tant d'autres recherches" [Clebsch, 1860, 326] et démontré le contenu de la propriété III de Christoffel. Cette propriété a été démontrée indépendamment par Hermite à l'occasion de ses travaux sur les résidus biquadratiques. Développant les recherches de Gauss de 1832, Hermite a étudié les propriétés arithmétiques des nombres complexes du type *a+bi* (*a* et *b* entiers), la recherche d'une démonstration de la décomposition de tout entier en somme de 4 carrés [Hermite, 1854] est en particulier à l'origine de l'étude des propriétés des

ENCART 9.

Les fonctions bilinéaires et la géométrie projective.

Christoffel n'est pas l'inventeur des fonctions bilinéaires et qu'il puisse en faire l'objet de son article de 1864 sans davantage de précision témoigne que la notion est familière à cette époque.
La notion de transformation par polaire réciproque de la géométrie projective est à l'origine de la définition des formes bilinéaires associées aux formes quadratiques [Dieudonné 1878, p 86]. Pour une quadrique d'équation homogène $Q(x,y,z,t) = 0$ dans $P_3(\hat{E})$, on associe au point M de coordonnées *(x, y ,z, t)* la forme bilinéaire définissant le plan d'équation

$$X\frac{\delta Q}{\delta x} + Y\frac{\delta Q}{\delta y} + Z\frac{\delta Q}{\delta z} + T\frac{\delta Q}{\delta t} = 0.$$

Les travaux successifs de Monge et Poncelet [1822] sont à l'origine de cette association qui, pour Jean Dieudonné va "donner naissance à une des idées fondamentales qui dominent l'Algèbre, l'Analyse et la Topologie modernes, le concept de *dualité*" [Dieudonné, 1878, p 86], concept pour lequel il faut encore citer les travaux de Gergone, Plücker et Möbius.
La notion de forme bilinéaire issue de la géométrie, par son caractère dual, n'a de sens qu'associée à une forme quadratique (ou hermitienne). C'est en tant que telles que les formes bilinéaires sont utilisées par Weierstrass en 1858 comme méthodes comme nous l'avons vu dans l'encart 3c. du chapitre 2. Lorsque Christoffel propose, en 1864, une application des résultats de Weierstrass à une "théorie des fonctions bilinéaires" [Christoffel, 1864a, 261], le nouveau caractère théorique et autonome est donné à la notion de forme bilinéaire annonce la théorie qui sera développée à Berlin dans les années à venir, notamment par la publication en 1866 des mémoires "Theorie der bilinearen functionen" de Christoffelet "Uber bilinearen formen" de Kronecker.

formes qui seront dénommées à la fin du siècle *formes hermitiennes* [Hermite, 1855 et 1856] ([24]) :

> C'est à M. Cauchy qu'on doit la première démonstration générale de la réalité des racines de l'équation remarquable à l'aide de laquelle se déterminent les inégalités séculaires des éléments du mouvement elliptique des planètes. Cette équation s'obtient, comme on sait, en égalant à zéro le déterminant du système [...] dont les éléments $a_{\mu,\nu}$ sont des quantités réelles soumises à cette condition,
>
> $$a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}$$
>
> [...] Supposons que les éléments $a_{\mu,\nu}$ du déterminant cessent d'être réels et prennent des valeurs imaginaires quelconques, mais avec la condition que $a_{\mu,\nu}$ et $a_{\nu,\mu}$ soient des quantités conjuguées. [...] l'équation $\Omega = 0$ conserve la propriété remarquable [...], elle a toutes ses racines essentiellement réelles.
> [Hermite, 1855, 459].

En "appliquant" les méthodes de Weierstrass de 1858, l'objet de Christoffel [1864a] n'est donc pas de présenter un résultat nouveau mais de donner un cadre général aux résultats de Clebsch et Hermite [Christoffel, 1864, p.256]. Le terme "général" prend ici un double sens, il s'agit d'abord de donner une formulation "générale" du problème comme relevant d'une transformation d'un couple de fonctions bilinéaires et indépendant des contextes particuliers de la théorie de la lumière ou de la théorie des nombres ([25]) ; il s'agit ensuite de faire référence à la méthode algébrique *homogène* de Weierstrass ne laissant de côté aucun cas particulier comme l'occurrence de racines multiples dans l'équation caractéristique (la méthode de Christoffel est détaillée en encart 7).
Le terme "fonctions bilinéaires" est employé par Christoffel en référence à un mémoire de 1857 dans lequel Jacobi généralisait la loi d'inertie des formes quadratiques aux "fonctions bilinéaires" $\Sigma a_{ij}x_i y_j$. L'encart 8 détaille la généralisation au cas complexe donnée par Christoffel de la formule "générique" $\Sigma a_i u_i v_i$, [Hawkins 1977, 132] énoncée par Jacobi en 1857 [Jacobi, 1857, 589]. Le terme "fonction bilinéaire" n'a cependant pas le même sens chez Jacobi et Christoffel, pour le premier la caractérisation de bilinéaire désigne des expressions polynomiales quelconques à deux variables et de coefficients réels ; pour le second, les coefficients des "fonctions bilinéaires" satisfont aux "rapports remarquables" pour la conjugaison complexe qui permettent d'appliquer la méthode de Weierstrass. L'association, réalisée par Christoffel, du "bilinéaire" non *symétrique*, de Jacobi, et de la méthode *homogène* du mémoire de Weierstrass va avoir des répercussions rapides sur le développement théorique de la notion de forme bilinéaire. En effet, dans la tradition de la géométrie projective, les fonctions bilinéaires sont employées

[24] Hermite déduit la décomposition d'un entier pair en somme de quatre carrés de l'écriture d'une somme de 4 carrés comme somme des carrés de deux entiers de Gauss :

$$x^2+y^2+u^2+v^2 = z\bar{z}+w\bar{w}$$

Soit la forme

$$f = m z \bar{z} + (a+bi) z \bar{w} + (a-bi) \bar{z}w + [(a^2+b^2+1)/m]w \bar{w} \text{ où } a^2+b^2+1 \equiv 0 \bmod m$$

Alors $f = m$ si $z = 1$ et $w = 0$, Hermite prouve que f est équivalente à une forme $Z\bar{Z}+W\bar{W}$.
Hermite développe d'abord sa théorie pour deux variables puis discute le cas de n variables en 1855 et 1856.

[25] Hermite et Clebsch n'ont traité que le cas particulier ou Φ est la forme identité ; tout comme Weierstrass, Christoffel traite le cas général des couples (Φ,Ψ), Φ de déterminant non nul.

ENCART 10.

Un élément de contexte : les origines de la théorie des invariants.

La théorie des invariants est développée par Cayley et Sylvester à la suite des travaux de George Boole dans les années 1840. La théorie des invariants concerne des expressions algébriques, des formes, son objet est, pour Cayley, de "trouver toutes les dérivations [les invariants] d'un nombre quelconque de fonctions [des formes algébriques], qui ont la propriété de conserver une forme inchangée par changement de variables" ([22]). Les exemples les plus simples sont donnés par les formes binaires comme la forme binaire quadratiques $ax^2+bxy+cy^2$ dont l'expression $ac-b^2$ est un invariant car elle est inchangée par des transformations linéaires des variables x et y. La théorie des invariants est un domaine de recherche "promis à une fortune extraordinaire dans la seconde moitié du dix-neuvième siècle" [Dieudonné, 1977]. A la suite de Cayley, Sylvester et Eisenstein, elle bénéficie des recherches des mathématiciens continentaux, parmi lesquels Hermite, Hesse, Clebsch, Gordan, Hermite, Jordan et Hilbert.
Plus généralement, le problème consiste, étant données p formes n-aires $P_j(x_1,\dots,x_n) = \sum a_{j\alpha}x_\alpha$ (des polynômes homogènes en n variables), à déterminer [Dieudonné, 1977] :

> [...] les polynômes $I((a_{j\alpha}))$ homogènes par rapport à chacun des systèmes $(a_{j\alpha})$ pour $1 < j < p$, ayant la propriété suivante : pour toute substitution linéaire $x = U.x'$, si l'on pose
> $$P'_j(x') = P_j(U.x') = \sum a'_{j\alpha}x'^{\alpha},$$
> on doit avoir
> $$I((a'_{j\alpha}) = (det(U))^g I((a_{j\alpha}))$$
> [...] ; on dit alors que I est un invariant de poids g des formes P_j.

La théorie des invariants joue un rôle important dans les recherches berlinoises sur les formes bilinéaires. Les méthodes de Christoffel [1864, 1866] et Kronecker [1866] sont ainsi basées sur des calculs de déterminants et le mémoire de Weierstrass [1868] donne par des invariants – les diviseurs élémentaires – la caractérisation des couples de formes *équivalentes.*

[22] Cayley, cité par [Crilly, 1988]. Le chapitre 3 propose une description plus détaillée des travaux de Cayley et Sylvester sur la théorie des invariants.

comme une méthode au service de l'étude des formes quadratiques (consulter à ce sujet l'encart 9.). Weierstrass, par exemple, emploie implicitement des fonctions bilinéaires en 1858 pour traiter la transformation des fonctions homogènes du second degré. La référence de Christoffel à une "théorie des fonctions bilinéaires" de Jacobi dans laquelle "les résultats du mémoire de M. Weierstrass trouvent leurs application " [Christoffel, 1874a, 261] témoigne d'une nouvelle perception du cas bilinéaire, non plus comme une simple méthode, mais comme une généralisation théorique des formes quadratiques.

ENCART 11.

Un éclairage historique sur les fonctions thêta de plusieurs variables.

Il faut remonter au cas particulier des intégrales elliptiques pour esquisser une histoire des fonctions thêta. Je renvoie à l'article de référence de C. Houzel [1978] et à l'exposé plus ancien de A. Brill et M. Noether [1893] pour tout complément.

- **Intégrales elliptiques.**

La formulation générale des intégrales elliptiques est donnée par Lagrange [1784], elle correspond à l'énoncé contemporain suivant :

> Définition: soit R une fonction rationnelle, P un polynôme de degré 4 et $y=\sqrt{P(x)}$. Une intégrale elliptique est une intégrale de la forme $\int R(x,y)dx$

Pour résoudre les problèmes de mécanique et de rectification de courbes, caractéristiques de la seconde moitié du XVII^e siècle, les méthodes géométriques de l'époque usent souvent de sections coniques et font intervenir un type particulier d'intégrales [Cooke, 1994]. Les problèmes de la période du pendule et de la longueur d'un arc d'ellipse [Wallis 1655] comptent parmi les exemples les plus célèbres. La classe des intégrales elliptiques doit son nom à la ectification de l'arc d'ellipse [Legendre, 1793] nécessitant l'intégration suivante :

> Si a et b désignent les demi-axes de l'ellipse, l'élément d'arc s'écrit
>
> $$ds = (dx^2+dy^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{a^2-ex^2}{a^2-x^2}}\,dx$$
>
> où $e = 1-b^2/a^2$

Les intégrales elliptiques fournissent les exemples les plus simples d'intégrales non élémentaires. Elles sont d'abord étudiées par les techniques classiques de développements en séries (Newton 1669, Euler 1733, Mac Laurin 1742, Lambert 1772, Lagrange 1784) puis des *méthodes spéciales* se développent pour ces intégrales *spéciales* à la suite du théorème d'addition d'Euler [1752]. Poursuivant les travaux de Fagnano [1716] sur les arcs de lemniscate, Euler considère l'équation différentielle [Cooke, 1994] :

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

à laquelle il donne une équation intégrale sous la forme d'une relation algébrique entre x et y :

$$x^2+y^2 = c^2+2xy(1-c^4)^{1/2}-c^2x^2y^2$$

La généralisation de ce résultat pour l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{P(y)}}$$

énonce l'existence d'une équation intégrale de la forme $f(x,y) = 0$, où f est un polynôme symétrique de degré 2 dont les coefficients contiennent une constante arbitraire c. Ce résultat est nommé *théorème d'addition* d'Euler et peut s'énoncer par la formule suivante [Houzel, 1978] :

> Par intégration, l'équation différentielle implique la formule d'addition sur les bornes de l'intégrale :
>
> $$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} + \int_0^c \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}$$

- **Les fonctions elliptiques.**

L'intégrale $\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ sur]-1 ; 1[, considérée comme une fonction de sa borne d'intégration t, est la fonction trigonométrique inverse *arcisinus*. Euler développe en 1764 une analogie entre les fonctions trigonométriques inverses et les intégrales elliptiques, ces dernières sont considérées à leur tour comme fonction de la borne d'intégration.

2. Les invariants de la "théorie des formes bilinéaires" de Kronecker et Christoffel.

Dans les années 1860, la notion de forme bilinéaire acquiert une dimension théorique signalée par la publication conjointe de deux mémoires par Christoffel et Kronecker en 1866, suivie de près par une nouvelle publication conjointe de deux mémoires de Weierstrass et Kronecker en 1868. La théorie développée en l'espace de quatre années est immédiatement appliquée dans un cadre géométrique par la thèse de Klein [1868] ([26]). La description historique de cette constitution théorique nécessite la prise en compte du contexte, implicite mais prégnant, des recherches sur les fonctions elliptiques et abéliennes. Il faut en effet prendre au mot le jugement émis par Kronecker lors de son discours d'entrée à l'académie berlinoise en 1861 et selon lequel "l'algèbre n'est pas une discipline en soi" [Kronecker, 1861, 387], la théorie des formes bilinéaires ne se développe pas uniquement pour satisfaire des ambitions théoriques ou des idéaux de généralité, d'autres motivations sont à chercher dans le grand sujet de recherche du moment qu'est la théorie des fonctions spéciales et plus précisément la transformation des fonctions thêta à plusieurs variables. Un éclairage historique sur les fonctions spéciales et la fonction thêta est proposé en encarts 11 et 12.

L'historiographie attribue à Léopold Kronecker la distinction d'"arithméticien hors pair" [Dieudonné, 1977]. Dès sa thèse soutenue en 1845, Kronecker se préoccupe des unités cyclotomiques et élabore des méthodes proches des nombres idéaux de Kummer. Les résultats les plus célèbres de Kronecker, comme son "Jurgendtraum" de 1857, sont du domaine de la théorie des nombres et, à l'occasion de son discours inaugural à l'académie de Berlin, Kronecker décrit son travail comme centré sur théorie des nombres et l'algèbre [Kronecker, 1861, 387]. Mais qu'est ce que la théorie des nombres dans les années 1860-1870 ? A la suite des travaux fondateurs de Gauss, les méthodes de l'arithmétique évoluent tout au long du XIX^e siècle, la collaboration des recherches de Kronecker et d'Hermite sur la résolution de l'équation du cinquième degré donne un rôle fondamental aux fonctions elliptiques en théorie des nombres. Les fonctions elliptiques sont perçues comme permettant le lien entre les trois domaines essentiels des mathématiques que sont l'algèbre, la théorie des nombres et l'analyse :

> Selbst ein Seitenweg derselben war uns gemeinsam [Kronecker et Hermite] und führte uns gleichzeitig zur Behandlung der complexen Multiplication der elliptischen Functionen, zu Arbeiten, deren Gegenstand der Analysis entnommen, für welche aber die Anregung durch die Algebra gegeben, Richtung und Ziel durch die Zahlentheorie bezeichnet ist. Die Verknüpfung

[26] Il s'agit de la classification des faisceaux de surfaces du second degré. Voir le chapitre 9.

Les méthodes de calcul numérique des intégrales développées par Lagrange [1784] et Legendre [1793] démontrent la possibilité d'écrire toute intégrale elliptique comme combinaison linéaire de trois intégrales de références [Houzel 1978, p.295] :

$$\text{première espèce } F(t,k) = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\, dx$$

$$\text{deuxième espèce } E(t,k) = \int_0^t \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\, \mathrm{dx}$$

$$\text{troisième espèce } \Pi(n,t,k) = \int_0^t \frac{dx}{(1+n^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Sur le modèle de la définition de la fonction *Arcsin*, les travaux successifs de Gauss et Abel [1827] définissent la fonction réciproque des intégrales elliptiques de première espèce [Houzel, 1978] :

Proposition : soit $\varphi(\alpha)$ la fonction réciproque de l'intégrale de première espèce

$$\alpha(t) = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$$

$$\text{(c'est-à-dire } \alpha°\varphi(t) = \int_0^{\varphi(t)} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}} = t)$$

La fonction φ est définie sur l'intervalle $[-\frac{\omega}{2}\ ;\ \frac{\omega}{2}]$ où $\frac{\omega}{2} = \int_0^{1/c} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$

Le théorème d'addition d'Euler se traduit en une "formule d'addition" pour la fonction elliptique φ et deux fonctions axillaires f et F :

$$\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varphi(\alpha)f(\beta)F(\beta)+\varphi(\beta)f(\alpha)F(\alpha)}{1+c^2e^2\varphi(\alpha)^2\varphi(\beta)^2}$$

$$\text{où } f = \sqrt{1-c^2\varphi^2} \text{ et } F = \sqrt{1+e^2\varphi^2}$$

Cette formule d'addition permet d'étendre le domaine de définition des fonctions φ, *f* et *F* en des fonctions de période 2ω définies sur Ë/{k $\frac{\omega}{2}$,k● Î}. La substitution de la variable *x* en *ix* donne une extension supplémentaire des trois fonctions en des fonctions méromorphes sur Ê, de pôles $k\frac{\omega}{2}$ et $k\frac{\dot{\omega}}{2}$, doublement périodiques et de périodes 2ω et $2\dot{\omega}$ avec :

$$\frac{\dot{\omega}}{2} = \int_0^{1/e} \frac{dx}{\sqrt{(1+c^2x^2)(1-e^2x^2)}}$$

- **La représentation des fonctions elliptiques.**

Les fonctions elliptiques sont méromorphes et la question de leur représentation comme quotients de fonctions entières béneficie, à la suite des travaux de Gauss [1800] et Abel [1828], des progrès de l'analyse complexe [Grattan Guiness, 1994]. Jacobi [1828] parvient à exprimer les fonctions elliptiques φ, f et ψ, (auxquelles il donne la notation *sinam, cosam* et Δ*am*,) comme quotients de combinaisons de quatre fonctions, les fonctions thêta, définies en 1838 de la façon suivante :

$$V(x) = \Sigma_{n\bullet Î}\, (-1)^n q^{n^2} e^{2nix}$$

$$V_1(x) = \Sigma_{n\bullet Î}\, i^{2n+1} q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)ix}$$

$$V_2(x) = \Sigma_{n\bullet Î}\, q^{(n+1)^2} e^{(2n+1)ix}$$

$$V_3(x) = \Sigma_{n\bullet Î}\, q^{n^2} e^{2nix}$$

dieser drei Zweige der Mathematik erhöhte den Reiz und die Frucht barkeit der Untersuchung [...].
[Kronecker 1861, 389].

[Traduction ,F.B] :
Nous avons été conduit [Kronecker et Hermite] par, une même approche indirecte commune sur le traitement algébrique d'un problème de théorie des nombres à des travaux d'analyse sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques. Le lien entre trois branches des mathématiques augmentait l'intérêt et le fruit de la recherche.

C'est dans le contexte des travaux sur les fonctions abéliennes qu'intervient, en 1866, la première contribution de Kronecker à la "théorie des formes bilinéaires" par la communication à l'Académie de Berlin d'un mémoire intitulée "Ueber bilineare formen". Le terme "fonction" employé par Weierstrass et Christoffel est remplacé par l'expression de "forme" issue de l'arithmétique dans la tradition de Gauss. L'objet du mémoire est de résoudre un problème relatif à la transformation des fonctions thêta de plusieurs variables, les fonctions thêta sont des fonctions transcendantes qui permettent l'inversion des intégrales abéliennes et, si Kronecker développe en 1866 des idées générales et théoriques sur les formes bilinéaires, le contexte des fonctions thêta porte des significations implicites qui structurent les raisonnements et les résultats. Les travaux de Kronecker sur la transformation des fonctions thêta de plusieurs variables développent les résultats énoncés par Hermite en 1855 pour le cas de deux variables [Hermite, 1855b].
Une intégrale abélienne pour un polynôme φ du 5^{e} degré (de genre $p = 2$) peut s'exprimer par la somme de deux intégrales :

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\varphi x}} + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{\varphi y}}$$

Les fonctions inverses $F_i(u,v$ de ces intégrales sont des fonctions de deux variables, s'exprimant toutes comme des fonctions rationnelles de 15 fonctions $f_i(u,v)$ par des changements de variables linéaires :

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{\alpha + \beta x}{\sqrt{\psi x}} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\alpha + \beta y}{\sqrt{\psi y}} dy$$

Maintenant je poserai, comme il suit le problème de la transformation des fonctions abéliennes du premier ordre :
Le polynôme φx étant donné, déterminer les coefficients de ψx et les constantes α, β, γ, δ, de telle sorte que les quinze fonctions $F(u,v)$ puissent s'exprimer rationnellement par les quinze fonctions $f(u,v)$.
[Hermite 1855b, 249].

La question générale de la transformation des fonctions thêta de n variables, abordée par Kronecker en 1866, nécessite l'examen d'une "fonction entière G de $2n$ variables" :

- **Fonctions abéliennes.**

Les méthodes de la théorie des fonctions elliptiques sont étendues par Abel [1826] à la classe plus vaste des intégrales dites abéliennes, de la forme $\int R(x,y)dx$, pour une fonction R rationnelle. Le théorème d'addition d'Euler ne s'étend pas sans difficulté à cette classe d'intégrales et la relation algébrique entre y et x n'est désormais définie de façon unique que localement [Cooke, 1994].

> Définition. Une intégrale abélienne est une intégrale sur un contour complexe γ :
>
> $$\int_\gamma R(x,y)dx,$$
>
> où $R(x,y)$ est une fonction rationnelle des variables complexes x et y.
>
> Proposition : la fonction y est exprimée localement comme une fonction de x par une relation algébrique $f(x,y) = 0$.

Globalement, plusieurs équations algébriques sont en général nécessaires à l'expression de la relation entre y et x. Pour les intégrales elliptiques $F(x)$ de premier espèce le théorème d'Euler assure la possibilité de pouvoir toujours exprimer une somme $F(x_1)+F(x_2)$ par une intégrale du même type $F(x_3)$; le théorème d'Abel énonce que toute somme d'intégrales abéliennes peut d'exprimer comme la somme d'un nombre p (le genre) d'intégrales abéliennes. [Houzel 1978, p.311] :

> Dans ce cas [le cas des intégrales hyperelliptiques étudiées par Abel], Jacobi (1832) interprète le théorème d'Abel comme un théorème d'addition algébrique pour des sommes de p intégrales de premières espèces
>
> $$F_k(x) = \int \frac{x^k}{\sqrt{\varphi(x)}}dx \ (0 \leq k \leq p-1) \ ;$$
>
> si
>
> $$u_k = \Sigma_{j=0;\,p-1} F_k(x'_j), \text{ on a } u_k+u'_k = \Sigma_{j=0,p-1} F_k(y_j)$$
>
> avec des y_j fonctions algébriques de $x_0 \ldots x_{p-1}$, $x'_0 \ldots x'_{p-1}$

Le cas particulier des intégrales hyperelliptiques donne une exemple d'intégrales abéliennes pour lequel il existe une relation algébrique globale entre y et x. Cette relation est donnée par un polynôme de degré 5 (le cas des fonctions elliptiques correspond au degré 4) :

$$f(x,y) = y^2 - (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)(x-r_5).$$

Le genre est alors égal à $p=2$ et le problème de l'inversion posée par Jacobi consiste, si $u_1 = \int_{[a1,x1]} 1/y\ dx + \int_{[a2,x2]} 1/y\ dx$ et $u_2 = \int_{a1,x1]} x/y\ dx + \int_{[a2,x2]} x/y\ dx$ à exprimer x_1 et x_2 comme fonctions de deux variables u_1 et u_2. Généraliser les fonctions elliptiques, c'est-à-dire inverser les intégrales abéliennes, nécessite donc de généraliser les fonctions thêta de Jacobi en des fonctions complexes de p variables $(u_1,...,u_p)$; les p variables étant interprétées comme les paramètres des p intégrales abéliennes indépendantes. Cette théorie, introduite par Rosenhaim et Göpel dans les années 1840, est développée par Riemann dans la deuxième partie de son mémoire consacré aux surfaces à plusieurs feuillets [1857] permettant de représenter les fonctions de variables complexes. La définition des fonctions thêta de Riemann se traduit par l'énoncé contemporain suivant :

$$V(v) = \Sigma_{m \in \mathbb{Z}^p}\ e^{Q(m)+2<m,v>} \quad (v \in \mathbb{C}^p)$$

> où Q est une forme quadratique de partie réelle définie négative.

Toute fonction abélienne peut s'exprimer comme quotient de polynômes homogènes de fonctions thêta de Riemann.

Durch mündliche Mitteilungen meines Freundes *Weierstrass* habe ich seit längerer Zeit Kenntnis von seinen Untersuchungen über die allgemeinen Θ-Functionen d.h. über *n*-fach unendliche aus Gliedern von der Form

$$e^{G(u1,u2,\dots,un\,;\ v1,v2,\dots vn)}$$

zusammengesetzte Reihen, in welchen *G* eine ganze Function zweiten Grades der *n* Variablen *u* und der *n* Summationsbuchstaben *v* bedeutet.
[Kronecker, 1866, 145].

[Traduction, F.B.] :
Des discussions avec mon ami Weierstrass, m'ont amené, il y longtemps déjà, à examiner les fonctions Θ générales de *n* variables de la forme

$$e^{G(u1,u2,\dots,un\,;\ v1,v2,\dots vn)}$$

où *G* est une fonction entière de 2[e] degré en *n* variables *u*.

Kronecker et Christoffel développent les propriétés de la fonction *G* dans deux mémoires publiés en 1866 et dans lesquels "on s'autorisera à voir une même motivation". Cette "même motivation" [Kronecker, 1866, 145], le titre du mémoire de Christoffel en témoigne, c'est la construction, d'une "Théorie des fonctions bilinéaires". Quel est l'objet de la théorie des formes bilinéaires ? Kronecker le définit comme l'étude des transformations des formes $\tau = \Sigma_{jk,}\tau_{jk}.x_j y_k$ lorsque de mêmes substitutions m_{pq} sont appliquées aux deux systèmes de variables x_j et y_k , les substitutions m_{pq} vérifiant des conditions particulières propres à la théorie des fonctions thêta ([27]) :

$$(1)\ m_{p,n+q} + \sum_r m_{n+r,n+q}\tau_{pr} = m_{pr}\tau'_{rq} + \sum_r m_{n+r,s}\tau_{pr}\tau'_{sq}$$

[27] On dirait en termes contemporains, déterminer la classe d'équivalence d'une forme bilinéaire par congruence. Le point de vue arithmétique des classes d'équivalences sera développé par Kronecker en 1874 et le problème de la transformation des fonctions thêta est formulé par Frobenius en 1880 de la manière suivante :

> Die Theorie der Transformation der Thetafunctionen von ρ Variabeln führt auf lineare Substitutionen mit ganzen Coefficienten
> $x_\alpha = a_{\alpha 1}x_1' + a_{\alpha 2}x_2' + \dots + a_{\alpha 2\rho}x_{2\rho}'$ ($\alpha = 1,2,\dots, 2\rho$),
> durch welche die alternierende bilineare Form von der Determinante 1
> $$J = \sum_\nu {}_1^\rho (x_\upsilon y_{\rho+\nu} - x_{\rho+\nu} y_\upsilon) = \sum i_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$
> in sich selbst, mit einer ganzen Zahl *n* multiplicirt, übergeführt wird. (*Kronecker*, dieses Journal Bd. 68, S. 273 ; Weber, Annali di Mat. Ser. II[a], tom. Ix p.126.)
> [Frobenius, 1880, 1].

En termes contemporains, les conditions (1) et (2) reviennent à assurer l'existence d'une transformation linéaire appartenant au groupe symplectique *P* telle que ${}^tP\tau P = \tau'$.
Kronecker définit en 1866 une forme bilinéaire alternée, $\varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$, qui ne peut être non dégénérée que si $n=2\nu$ est pair. Il existe alors une base (e_i), $1 \hat{A}\, i\, \hat{A}\, 2\nu_i$ de *E* (dite base symplectique) telle que $\Phi(e_i,e_{i+\nu}) = 1$ *pour* $1 \hat{A}\, i\, \hat{A}\, \nu$ *et* $\varphi(e_i,e_j) = 0$; pour tout autre couple d'indices, de sorte que l'on a:

$$\varphi(x,y) = \Sigma_{[1,\nu]}(\xi_i\eta_{i+\nu} - \xi_{i+\nu}\eta_i)$$

Toutes les formes alternées non dégénérées sont équivalentes.
On appelle groupe symplectique sur K le sous groupe formé des $u \in GL(E)$ tel que

$$\varphi(u(x),u(y)) = \varphi(x,y)$$

Les formes recherchées par Kronecker 1866 sont celles laissant invariants deux espaces isotropes

(A0)
(0A)

Voir au sujet des formes alternées. J. Dieudonné. *Sur les groupes classiques*. 1948

ENCART 12.

La représentation des fonctions elliptiques de Weierstrass.

Le théorème d'Euler d'addition des intégrales elliptiques (encart 11) peut s'interpréter comme un résultat de multiplication. Appliqué, par exemple, à l'intégrale de l'arc de lemniscate de Fagnano, il permet d'obtenir une *multiplication par 2* de l'intégrale elliptique :

$$2\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \text{ avec } y(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}$$

Le problème général de la multiplication d'une intégrale elliptique par un entier *n* consiste à rechercher une équation algébrique exprimant *y* en fonction de *x* de manière à obtenir :

$$n\,\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{P(y)}}.$$

L'équation algébrique, de degré n^2, ne peut avoir plus de *n* racines réelles. Une interprétation géométrique en est la division de la courbe de la lemniscate en *n* parties réelles réalisée par Gauss. Abel exploite la double périodicité des fonctions elliptiques pour montrer que l'équation de la division est résoluble par radicaux [Houzel 1978, p.299] :

> Si $x=\varphi(\alpha)$ est l'une de ses solutions [de l'équation de la division], les autres sont de la forme $\varphi(\alpha+\frac{w}{n})$ où $w\in\Gamma$ [le réseau des périodes] est une période *et w/n* parcourt $(\frac{1}{n}\Gamma)/\Gamma$ isomorphe *à* (Î /n Î)², isomorphe au groupe de Galois de l'équation (sur le corps engendré par les racines n^e de 1 et les valeurs des fonctions elliptiques aux points *w/n*).

Illustrons par les travaux de Jacobi [1829] l'exemple d'une transformation d'ordre 3 [Gray, 1996, p.13]. Pour l'intégrale de 1[re] espèce,

$$F(t,k) = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx,$$

chercher une transformation d'ordre 3, c'est changer le module k^2 de l'intégrale en λ^2 de manière à ce que $\frac{\Lambda'}{\Lambda} = 3\,\frac{K'}{K}$ (où les périodes de la fonction de module *k* sont *K'* et *K* et celles de la fonction de module λ sont Λ et Λ') *.* Jacobi utilise la transformation :

$$y = \frac{x(a+'x^2)}{1+b'x^2} \text{ où } a = 1+2\alpha,\ a' = \alpha'^2, \text{ et } b' = \alpha(2+\alpha)$$

de manière à transformer, pour λ bien choisi :

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}}$$

$$\text{en } \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

pour une certaine constante *M.*

L'équation algébrique (équation modulaire) entre les modules *k* et λ est :

$$u^4-v^4+2uv(1-u^2v^2)$$

- **Kronecker : la multiplication complexe**

Le problème général de la multiplication par un réel –donner la valeur d'une intégrale elliptique en *z* par rapport à sa valeur en *mz* - conduit à considérer la divisibilité des périodes des fonctions elliptiques. Ces recherches introduisent des équations algébriques, les équations modulaires, que Kronecker [1858] et Hermite [1858] emploient pour démontrer la résolubilité de l'équation générale de degré 5 au moyen des fonctions elliptiques [voir Gray, 1996, 122-125]. Le problème de la multiplication par une constante complexe [Vladut 1991] –déterminer le nombre complexe *w* tel que *f(wz)* a même période que la fonction elliptique *f(z)*- est lié à l'arithmétique des corps quadratiques imaginaires (*w* doit être un entier algébrique d'une extension algébrique de Í). Les entiers de Gauss fournissent l'exemple simple des

(2) la substitution de coefficient $m_{p,q}$ laisse la forme $\Sigma(x_r y_{n+r} - x_{n+r} y_r)$ invariante.
[...] [Kronecker, 1866, 146, traduction F.B.].

Il s'agit donc de caractériser les conditions sur les coefficients $m_{p,q}$ des substitutions de *2n* variables pour lesquelles une forme τ se transforme en une forme τ' :

> Ich suchte nämlich die Bedingungen zu ermitteln, unter denen die transformierten Parameter τ' den ursprünglichen oben mit τ bezeichneten gleich werden, und bin dadurch auf die allgemeine Untersuchung derjenigen Transformationen bilinearen Formen von je *2n* variabeln *x* und *y* geführt worden, bei welchen die Substitutionscoefficienten für beide Systeme von Variabeln identisch sind.
> [Kronecker, 1866, 146].
>
> [Traduction, F.B.] :
> J'ai cherché à déterminer les conditions auxquelles les paramètres de la forme transformée τ' s'obtiennent à partir de ceux de la forme primitive τ. J'ai par conséquent été conduit à l'étude générale des transformations des formes bilinéaires de *2n* variables par des substitutions identiques appliquées aux deux séries de variables *x* et *y* .

Kronecker définit une "nouvelle forme normale" caractérisée par un "invariant", le "déterminant caractéristique" auquel il donne la dénomination de "déterminant adjoint" [Kronecker, 1866, 147], et dont la signification essentielle ("wesentlichsten bedeutung") est de permettre une méthode du problème fondateur de la théorie : deux formes peuvent se transformer l'une en l'autre si est seulement si elles ont même forme normale [1866, 148] :

$$\sum_{k=1}^{k=2n} \lambda_k x_k y_{n+k},$$

Les *invariants* λ_k caractérisent la forme normale, et sont définis comme les racines de l'équation caractéristique. Les élaborations théoriques de Kronecker et Christoffel reposent en effet sur la définition d'invariants propres à la nouvelle théorie des formes bilinéaires (L'encart 10 détaille comment l'organisation théorique proposée par Christoffel expose un répertoire des invariants de la théorie des formes bilinéaires [Christoffel, 1866, 271]). L'invariant le plus simple, le "déterminant adjoint" d'une forme n'est cependant pas suffisant pour caractériser les transformations linéaires des couples de formes, deux couples de formes de même déterminant ne se transforment pas nécessairement l'une en l'autre. Kronecker recourt alors à l'étude de couples de "faisceaux" de formes $uA+v^tA$ sur le modèle des couples de fonctions homogènes $s\Phi-\Psi$ étudiés par Weierstrass, il démontre qu'une forme A a mêmes invariants que sa transposée ${}^tA$ ce qui implique donc que le déterminant adjoint du faisceau de formes $uA+v^tA$ est un invariant de la forme A. Le recours aux faisceaux de formes permet l'emploi de méthodes polynomiales par lesquelles Kronecker démontre la proposition essentielle de son mémoire : "deux formes bilinéaires A et B ont même forme normale si et multiplicateurs des intégrales lemniscatiques qu'Eisenstein [1845] utilise pour démontrer la loi de réciprocité biquadratique :

> La multiplication par $1+i$ correspond au changement de variable imaginaire, $x^2 = 2iy^2/(1-y^4)$:
>
> $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = (1+i)\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

En 1853, Kronecker montre que toute équation abélienne sur *Í (i)* est une équation de division des périodes des fonctions lemniscatiques et formule son "jurgendtraum", rêve de jeunesse, qui énonce que toute équation abélienne sur Í se ramène aux équations de divisions des périodes [Kronecker 1853, p.10] :

> [...] ergiebt nämlich das bemeurkenswerthe Resultat: 'daβ die Wurzel *jeder Abelschen* Gleichung mit ganzzahligen Coëffizienten als rationale Function von Wurzeln der Einheit dargestellt werden kann'.

Remanié par Weber [1897-98], l'énoncé du théorème de Kronecker-Weber exprime que toute extension abélienne de *Í* est contenue dans un corps cyclotomique, c'est-à-dire un corps obtenu par extension de Í par des racines de l'unité. Ce problème figure en 12e position de la liste des problèmes de Hilbert et conduit à la théorie des corps de classes. Le 12e problème de Hilbert énonce en réalité une généralisation du théorème de Kronecker-Weber qui conjecture que les extensions abéliennes d'un corps de nombres et les extensions des corps quadratiques imaginaires sont engendrées par les valeurs des fonctions modulaires et elliptiques liées aux courbes elliptiques à multiplication complexe [Hilbert, 1901, .311, *in* Schappacher, 1996, 243] :

> Kronecker selbst hat die Behauptung ausgesprochen, daβ die Abelschen Gleichungen im Bereiche eins imaginären quadratischen Körpers durch die Transformationsgleichungen der elliptischen Funktionen mit singulären Moduln gegeben werden, so daβ hiernach die elliptische Funktion die Rolle der Exponentialfunktion im vorigen Falle übernimmt.([23]).

Norbert Schappacher a montré que cette conjecture doit être comprise de la manière suivante ([24]) [Schappacher 1996, 249] :

> Si le corps de base est Í, la fonction analytique $x \leftrightarrow e^{\pi ix}$ a la propriété que si l'on substitue à x les éléments du corps Í, les valeurs $e^{\pi ix}$ engendrent toutes les extensions abéliennes de Í.
>
> Si le corps de base K est quadratique imaginaire. Alors la fonction $\tau \leftrightarrow j(\tau)$ à la propriété que si l'on substitue pour τ les éléments du corps K, les valeurs de $j(\tau)$ et les racines de l'unité engendrent toutes les extensions abéliennes de K.

Cette conjecture de Hilbert est fausse et il faut recourir à d'autres fonctions comme la fonction P de Weierstrass pour obtenir toutes les extensions abéliennes de K.

- **La représentation des fonctions elliptiques de Weierstrass.**

La théorie de la représentation des fonctions elliptiques élaborée par Weierstrass se distingue de celle de Jacobi qui exprime ces fonctions comme quotients de fonctions thêta. Weierstrass fait jouer le rôle principal aux développements tayloriens. C'est le célèbre point *de vue de Weierstrass* selon lequel l'holomorphie est synonyme d'analyticité, par opposition au point de vue de Cauchy pour qui l'holomorphie est la différentiabilité pour la structure complexe [Dugac, 1973]. S'inspirant des travaux d'Eisenstein sur les séries $\Sigma\ 1/(x+\alpha m+\beta n^2)g$ [Cooke,1994], Weierstrass

[23] Kronecker lui-même a conjecturé que les équations abéliennes dans le domaine des corps quadratiques imaginaires sont données par les transformations des fonctions elliptiques à module singulier de sorte que, la fonction elliptique joue le rôle de la fonction exponentielle dans le cas considéré précédemment.

[24] Norbert Schappacher a montré [1996] qu'il faut comprendre pour "fonction elliptique", la "fonction elliptique modulaire" $j(q) = 1/q + 744q + 196884q + 21493760q^2 + \ldots$ ayant un pôle simple en *i õ*

seulement si le déterminant $|B||uA+v^tA|$ est égal au déterminant $|A||uB+v^tB|$" [Kronecker, 1866, 149]. La démonstration de la première implication de la condition nécessaire et suffisante de Kronecker, c'est-à-dire la propriété d'invariance par transformation linéaire, ne pose pas de difficulté [Kronecker 1866, 149] ([28]). La démonstration de la condition suffisante –si les déterminants sont égaux alors les deux formes bilinéaires ont même forme normale- est plus délicate et Kronecker se contente de traiter le cas pour lequel le déterminant caractéristique du faisceau se factorise en produits d'expressions linéaires toutes distinctes, c'est-à-dire dans le cas d'occurrence de racines distinctes.
En 1866 Kronecker rencontre des difficultés analogues au problème de la multiplicité des racines sur lequel s'est développée la discussion des petites oscillations entre 1766 et 1858. Kronecker ne parvient pas à dépasser le traitement de ce qu'il caractérisera lui-même en 1874 comme un cas singulier, en 1866 il n'évoque la multiplicité des racines qu'en dehors de sa théorie des formes bilinéaires, dans la seconde partie du mémoire consacrée au problème de la transformation des fonctions thêta [Kronecker, 1866, 156-162]. A la manière de Lagrange et Laplace qui abandonnaient le terrain de l'analyse et évoquaient des arguments mécaniques contre l'occurrence de racines multiples, l'éventuelle occurrence de racines multiples est balayée par des arguments propres aux fonctions thêta : il doit y avoir *n* racines distinctes correspondants aux *n* intégrales indépendantes permettant de représenter toutes les intégrales elliptiques [Kronecker, 1866, 157].

Par sa méthode d'utilisation de faisceaux de formes et de techniques polynomiales, le mémoire de Weierstrass de 1858 est un modèle pour le développement de la théorie des formes bilinéaires à Berlin dans les années 1860. La généralisation du quadratique au bilinéaire ne permet cependant plus de recourir à une "forme normale" aussi simple que celle de la loi d'inertie en cas d'occurrence de racines caractéristiques multiples. C'est à Weierstrass qu'il revient, de parfaire la théorie des formes bilinéaires par la définition d'un système complet d'invariants, les diviseurs élémentaires, donnant une solution générale et homogène au problème de la transformation des couples de formes bilinéaires posé comme fondateur de la théorie des formes bilinéaires par Kronecker et Christoffel en 1866 .

[28] En termes contemporains, si $B = {}^tPAP$ alors $|uB+v^tB| = |{}^tP(uA+v^tA)P|$.

[1882] déduit tous les résultats de la théorie des fonctions elliptiques d'une seule fonction $\sigma(u)$. Cette architecture de la théorie des fonctions elliptiques bénéficie de la publicité active de nombreux étudiants de Weierstrass comme H.A. Schwartz qui publie un manuel en 1883. Weierstrass définit une fonction elliptique comme s'annulant sur un réseau :

> Théorème : soit H un sous groupe discret de R^n, alors H est engendré par *r Â n* vecteurs linéairement indépendants.
>
> Définition: on appelle réseau tout sous groupe additif discret de rang maximal de R^n. Conséquence : Si Λ est un réseau de *Ê,* il existe ω_1, ω_2 de Ê tels que Λ = *Î* $\omega_1 + Z\omega_2$.
>
> Définition: on appelle fonction elliptique une fonction méromorphe qui admet tous les éléments de Λ comme périodes.

Comment trouver une fonction entière dont les zéros (simples) sont des éléments d'un réseau Λ ? On peut, par analogie avec les polynômes, penser à un produit $\Pi_{\omega \bullet \lambda}(1-z/\omega)$. Le théorème de Weierstrass [1841], d'après lequel une limite uniforme de fonctions holomorphes fournit une fonction holomorphe, permet d'établir les conditions de convergences du produit infini par lequel Weierstrass exprime l'inverse de la fonction Γ d'Euler dont les zéros sont les entiers négatifs :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n} ;$$

Le terme $e^{-x/n}$ joue le rôle de facteur de convergence en assurant la convergence uniforme du produit infini sur toute partie bornée du plan complexe. Le même principe est utilisé pour la construction des fonctions s'annulant sur un réseau de Ê, la convergence du produit infini est assurée par des facteurs primaires $E_{pn}\,(x/a_n)$ (p est un entier convenablement choisi) :

$$E_0(x) = 1 - x ;$$

$$E_p(x) = (1 - x) \exp\left(x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^p}{p}\right),$$

> Définition : pour tout z de *Ê*-Λ :
>
> $$\sigma(z,\lambda) = \sigma(z,\omega_1,\omega_2) = z\, \Pi_{\omega \bullet \lambda}\, (1-z/\omega)\exp(z/\omega + z^2/\omega^2)$$

La fonction σ n'est pas elle même elliptique. Deux autres fonctions s'en déduisent et toutes trois forment ce que l'on nomme le *formulaire de Weierstrass* :

> Pour tout z de Ê-Λ :
>
> $$\sigma(z,\lambda) = \sigma(z,\omega_1,\omega_2)$$
> $$\zeta(z,\lambda) = \sigma'(z)/\sigma(z) = d/dz\, \log\sigma(z)$$
> $$P(z,\lambda) = -\zeta'(z) = 1/z^2 + \Sigma\, (1/(z-\omega)^2 - 1/\omega^2)$$

La fonction P est doublement périodique par rapport à ω_1 et ω_2 et donc elliptique sur Λ :

> Proposition fondamentale :
>
> $$\neg\, \omega \bullet \Lambda,\ P(z+\omega^*) = P(z)$$
>
> La fonction P est une fonction périodique par rapport à Λ.

Cette proposition se démontre par l'intermédiaire de la fonction dérivée $P\,'(z) = \Sigma_{\omega \bullet \Lambda} 1/(z-\omega)^3$, trivialement elliptique sur Λ. Les fonctions P et P ' engendrent le corps des fonctions elliptiques sur Λ :

> Théorème : l'ensemble Ê(Λ) des fonctions elliptiques est un corps et Ê(Λ) = Ê(P, P'')
>
> Pour toute fonction elliptique f sur Λ, il existe donc une fonction rationnelle F telle que
>
> $$f(z) = F(P(z), P'(z)).$$

Enfin, selon l'architecture de cette théorie qui va à rebours de l'histoire, on obtient le lien entre les fonctions elliptiques et les intégrales elliptique de première espèce par les résultats suivants :

3. Le théorème des diviseurs élémentaires des couples de formes bilinéaires.

La théorie des formes bilinéaires, initiée par les mémoires conjoints de Christoffel et Kronecker de 1866 se constitue comme une généralisation de la théorie des formes quadratiques par une recherche d'invariants caractéristiques de la transformation linéaire des formes. Le premier de ces invariants, le "déterminant adjoint" d'une forme, s'avère insuffisant à caractériser la transformation des couples de formes. Par une généralisation des méthodes mises en œuvre en 1858, Weierstrass définit en 1868 un système complet d'invariants des couples de formes bilinéaires de déterminant non nul, une communication conjointe de Kronecker traitant du cas singulier.
Dans la liste suivante présentant l'ensemble des travaux de Weierstrass, le théorème des diviseurs élémentaires, placés en toute fin de liste est le seul à être qualifié par une dénomination anachronique d'"algèbre linéaire".

> Weierstrass [...] laid the foundations of the theory of entire functions, polished the theory of elliptic functions to a high degree of perfection, and crowned the entire edifice of the theory of Abelian functions, which was the most impressive achievement of nineteenth century analysis. As a by product he laid the foundations of the theory of analytic functions of several complex variables. Finally he made great achievements in the calculus of variations [...], the theory of minimal surfaces, and linear algebra (theory of elementary divisors).
> [...DSB].

L'intervention de Weierstrass dans la théorie des formes bilinéaires semble source d'un certain malaise pour les biographes. La figure de Weierstrass est classiquement dépeinte par l'historiographie comme celle d'un père de l'analyse moderne, la métaphore de la paternité tenant à caractériser la figure d'un savant qui éduque une rigueur nouvelle à l'analyse [Yushkevitch, 221]. L'anachronisme relevé dans la liste ci-dessus révèle une certaine gêne à concilier le portrait du grand analyste aux deux contributions de 1858 et 1868 à la théorie des formes. Le mémoire de 1868 ne s'inscrit pas moins dans un contexte historique et il ne doit pas être décrit comme isolé de l'ensemble de l'œuvre de Weierstrass et notamment des recherches sur les fonctions elliptiques et abéliennes. Dans les biographies de Weierstrass, les fonctions abéliennes jouent le rôle romantique de l'éveil d'un jeune étudiant à la passion des mathématiques, comme dans les abondants commentaires de la citation suivante extraite d'une lettre adressée à Sophus Lie le 10 avril 1882 ([29]):

[29] La lettre d'Abel dont il est question établit la représentation de la fonction inverse de l'intégrale elliptique de 1re espèce comme quotient de séries de puissances.

Théorème : étant donné $P(t)$ de degré 3 ou 4, il existe une fonction elliptique f pour un réseau Λ convenable, inversible sur tout ouvert D de $\hat{E}$, et de fonction inverse $g : f(D) \leftrightarrow C$ telle que

$$g'(z) = 1/\sqrt{P(z)}$$

Théorème : la fonction inverse de

$$E(x) = \int dt/\sqrt{P(t)} \text{ où } P(t) = 4t^3-g_2t-g_3$$

admet un prolongement au plan complexe et y représente la fonction $P(z,L)$.

La démonstration se ramène au cas d'un polynôme

$$P(t) = 4t^3+bt+c$$

et utilise la propriété fondamentale reliant les fonctions P et P' :

$$P'(z)^2 = 4P(z)^3 - g_1P(z)-g_2$$

avec

$$g_1 = 60\,\Sigma\, 1/w^4 \text{ et } g_2 = 140\,\Sigma\, 1/w^6$$

Cette propriété se déduit du développement de Laurent de P et P' et exprime que P et P' sont une paramétrisation de la courbe elliptique

$$y^2 = 4x^3-g_2x-g_3$$

g_1 et g_2 sont des formes modulaires qui dépendent uniquement du réseau Λ.

Corollaire : La fonction inverse de $E(x) = \int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}$ où $x > x_0$ et $P(t) = 4t^3-g_2t-g_3$ admet un prolongement au plan complexe et représente la fonction $P(z,\Lambda)$ où Λ est le réseau correspondant aux constantes g_2, g_3.

Enfin, la formule suivante de Weierstrass exprime le théorème d'addition d'Euler comme une propriété des fonctions P :

Propriété :

$$P(u_1+u_2) = 1/4\,[\,(P'(u_1)-P''(u_2))/\,(P(u_1)-P(u_2)\,]^2 - P(u_1) - P(u_2)$$

Corollaire : l'équation

$$\int_{x_1}^\infty \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} + \int_{x_2}^\infty \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} = \int_{x}^\infty \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}$$

est satisfaite pour x donné en termes de x_1, x_2, g_1, g_2.

La représentation de Weierstrass par les fonctions P et P ' entraîne une architecture nouvelle de la théorie des fonctions elliptiques.

> Cette lettre [une lettre de Abel à Jacobi] fut pour moi de la plus haute importance, lorsque, étudiant, j'en pris connaissance dans le journal de Crelle [6, 1830 73-80]. La déduction immédiate, de la forme de représentation de la fonction désignée par Abel *λ(x)* depuis l'équation différentielle la définissant fut la première tache mathématique que je me fixais ; et la fortune de sa résolution me détermina à me dévouer entièrement aux mathématiques. Je pris cette décision dans le 7e semestre [hivers 1837-1838], alors que j'avais entrepris à l'origine des études de finance publique et d'administration.
> [N.H. Abel, Mémoria (1902), 108, cité dans K-R. Biermann 1990, 219].

Weierstrass étudie les *Fundamenta nova theoritia functionum ellipticarum* de Jacobi [1829] et bénéficie des cours de Gudermann sur les fonctions elliptiques à l'université de Bonn. Ce sont les publications sur les problèmes d'inversion des intégrales hyper elliptiques ([Weierstrass 1854 et 856]) qui permettent à Weierstrass de quitter sa position de professeur au *Gymnasium* de Braunsberg et d'entrer en 1856 au *Gewerbeinstitut* et à l'Académie de Berlin. La théorie des fonctions elliptiques est le sujet principal des recherches de Weierstrass. Lors de son discours d'investiture à l'Académie de Berlin, Weierstrass proclame son ambition de donner une nouvelle "représentation" aux fonctions elliptiques :

> Depuis que j'ai été initié à la théorie des fonctions elliptiques sous la direction de mon professeur Gudermann, cette branche relativement nouvelle de l'analyse mathématique a exercé sur moi une puissante attraction, qui reste le facteur déterminant de l'ensemble de mon développement mathématique.
> [...] Donner une représentation de ces quantités [les fonctions elliptiques] d'un type complètement nouveau et unique en analyse et étudier leurs propriétés plus avant est devenu un des problèmes généraux des mathématiques que j'ai décidé d'étudier.
> [Weierstrass, 1857].

La théorie de la représentation des fonctions elliptiques élaborée par Weierstrass se distingue de celle de Jacobi qui exprime ces fonctions comme quotients de fonctions thêta. Elle constitue la toile de fond des recherches de Weierstrass dans les années 1860-1870 et motive son intervention dans la théorie des formes bilinéaires. Les encarts 11 et 12 de ce paragraphe sont consacrés à une description de cette théorie ([30]). C'est dans ce contexte que Weierstrass intervient, en 1868, pour répondre aux difficultés rencontrées par Kronecker pour traiter le cas singulier de l'occurrence de racines multiples pour la transformation des fonctions thêta de plusieurs variables. Ce sont en réalité deux communications successives qui sont prononcées en 1868 devant l'Académie de Berlin. La première, intitulée "*Zur theorie der bilinearen und quadratischen formen*" et signée Karl Weierstrass ésout le problème de la transformation des couples $pP+qQ$ de formes bilinéaires, dont le déterminant

---

[30] Consulter également les cours de Weierstrass dont le contenu d'un cycle est par exemple : introduction à la théorie des fonctions analytiques, introduction à la théorie des nombres réels, théorie des fonctions elliptiques, applications des fonctions elliptiques aux problèmes de géométrie et mécanique, théorie des intégrales et fonctions abéliennes, calcul des variations [Biermann, 1966, 77].

ENCART 13.

Diviseurs élémentaires de Weierstrass, diviseurs élémentaires de Kronecker.

Dans la théorie arithmétique des faisceaux de formes, élaborée par Kronecker en 1874, la notion change de signification, d'abord définie par une décomposition polynomiale en 1868, elle est désormais associée aux p.g.c.d. des mineurs successifs du déterminant caractéristique. Cet encart commente la notion originelle de diviseur élémentaire introduite par Weierstrass en 1868 afin de mettre en évidence les transformations apportées par Kronecker en 1874. La notion de "forme normale" des couples de formes bilinéaires est notamment issue par Kronecker d'une formule de Weierstrass afin de contester la priorité de la forme canonique de Jordan.
Weierstrass démontre en 1868 que deux couples non singuliers de formes *(P',Q')* et *(P,Q)* se transforment l'un en l'autre si et seulement si leurs diviseurs élémentaires coïncident. La première implication ne pose pas de difficulté et Weierstrass reprend la preuve déjà donnée par Kronecker en 1866 ([25]). Pour l'implication réciproque, Weierstrass reprend la méthode mise en œuvre par Kronecker en 1866 et définit, pour tout faisceau de formes bilinéaires, une certaine forme, unique, en laquelle il peut se transformer par substitutions non singulières. C'est ce que Kronecker désignera en 1874 comme la forme normale du faisceau, mais pour Weierstrass, cette forme ne constitue pas un résultat mathématique et ne doit sa raison d'être qu'en tant qu'elle est une étape nécessaire à la démonstration. :

> Der Beweis für den zweiten Theil des aufgestellten Satzes beruht darauf, dass ein Formen paar *P,Q* durch eine bestimmte lineare Transformation in ein anderes verwandelt werden kann, dessen Coefficienten Gegeben sind, wenn man die einzelnen Elementar-Theiler der Determinante *[P,Q]* kennt.

Il ne restera qu'à démontrer que deux faisceaux de même diviseurs élémentaires ont même *forme normale* pour prouver que ces faisceaux se transforment l'en un l'autre. La démonstration de Weierstrass généralise la preuve élaborée en 1858 pour le cas quadratique (encart 3c du chapitre 2), la première étape ramène l'étude du polynôme homogène $pP+qQ$ à celle d'un polynôme en une variable $s\Phi$-Ψ [Weierstrass, 1868, 24] :

> Dann folgt aus den Gleichungen

$$(20.)\ p\,\frac{\delta P}{\delta x_\alpha}+q\,\frac{\delta Q}{\delta x_\alpha}=s\,\frac{\delta \Phi}{\delta x_\alpha}-\frac{\delta \Psi}{\delta x\alpha}\ =\Sigma_\alpha\,(s\,a_{\alpha\beta}-b_{\alpha\beta})y_\beta$$

$$(21.)\ p\,\frac{\delta P}{\delta y_\beta}+q\,\frac{\delta Q}{\delta y_\beta}=s\,\frac{\delta \Phi}{d y_\beta}-\frac{\delta \Psi}{\delta y_\beta}\ =\Sigma_\alpha\,(s\,a_{\alpha\beta}-b_{\alpha\beta})x_\alpha$$

Un *retournement* permet d'exprimer les variables x_α et y_β en fonctions des coefficients $\delta\Phi/\delta x_\alpha$ et $\delta\Phi/dy_\beta$ des formes bilinéaires, c'est ce que Christoffel désignait en 1864 comme les "premiers pas", de la démonstration de 1858 (encart 9) ([26]). [Weierstrass, 1868,24]:

$$(22.)\left\{\begin{array}{c} y_\beta=\sum_\alpha\left(s\frac{\delta\Phi}{\delta x_\alpha}-\frac{\delta\Psi}{\delta x_\alpha}\right)\\ x_\beta=\sum_\beta\left(s\frac{\delta\Phi}{\delta y_\beta}-\frac{\delta\Psi}{\delta y_\beta}\right)\\ \Phi=\sum_\beta\frac{\delta\Phi}{\delta y_\beta}y_\beta=\sum_{\alpha\beta}\frac{S_{\alpha\beta}}{S}\left(s\frac{\delta\Phi}{\delta x_\alpha}\frac{\delta\Phi}{\delta y_\beta}-\frac{\delta\Phi}{\delta y_\beta}\frac{\delta\Psi}{\delta x_\alpha}\right)\\ \Psi=\sum_\beta\frac{\delta\Psi}{\delta x_\alpha}x_\alpha=\sum_{\alpha\beta}\frac{S_{\alpha\beta}}{S}\left(s\frac{\delta\Phi}{\delta y_\beta}\frac{\delta\Psi}{\delta x_\alpha}-\frac{\delta\Psi}{\delta x_\alpha}\frac{\delta\Psi}{\delta y_\beta}\right)\\ s\Phi+\Psi=\sum_{\alpha\beta}\frac{S_{\alpha\beta}}{S}\left(s^2\frac{\delta\Phi}{\delta x_\alpha}\frac{\delta\Phi}{\delta y_\beta}-\frac{\delta\Psi}{\delta x_\alpha}\frac{\delta\Psi}{\delta y_\beta}\right) \end{array}\right.$$

[25] En termes contemporains, si $H(pP'+qQ') = K(pP+qQ)$, où H et K désignent les automorphismes de $GL_n(\hat{E})$ correspondants aux changements de variables, alors l'identité $[P',Q'] = H^{-1}K\,[P,Q]$ permet de tirer les propriétés arithmétiques de divisibilité suivantes : chaque diviseur de *[P,Q],* est un diviseur de *[P',Q']* et de même pour les diviseurs des mineurs. L'identité des diviseurs élémentaires des deux faisceaux est donc établie.

[26] L'écriture Φ comme combinaison de formes linéaires $\Phi_\alpha = \delta\Phi/\delta x_\alpha$, $\Phi = \Sigma\Phi_\alpha x_\alpha$, revient, en termes contemporains, à écrire la forme linéaire $x \leftrightarrow \Phi(.,x)$ dans la base duale Φ_α

[P,Q] est non identiquement nul ([31]). La seconde publication, de Kronecker, traite le cas des couples singuliers et se présente comme la deuxième partie du mémoire de Weierstrass.

Les couples de formes bilinéaires *(P,Q),*

$$P = \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$
$$Q = \Sigma_{\alpha,\beta} B_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

> où *α, β,* appartiennent à *{1,2,…n}.*
> [1868, 19].

sont caractérisés par des invariants définis par une décomposition en facteurs linéaires de polynômes définis par le déterminant *[P,Q]* et ses *mineurs* successifs ([32]). La seule décomposition en facteurs linéaires du déterminant *[P,Q]* ne permet en effet pas de définir un système complet d'invariants et il faut aller au-delà du déterminant en considérant les suites décroissantes d'exposants de chaque diviseur linéaire dans les "sous déterminants" successifs de [*P,Q]*. A l'aide de la propriété ci-dessous de la théorie des déterminants, énonçant les relations de divisibilité des facteurs linéaires d'un déterminant et de ses mineurs, Weierstrass démontre que tous les mineurs d'ordre *n-x+1* du système peuvent s'écrire comme une somme de produits des mineurs d'ordre *n-x* et d'éléments de *[P,Q]* ([33]) :

> Jede Determinante *(n-x+1)*^ter^ Ordnung des Systems (2.) kann dargestellt werden als ein Summe, in welcher jedes einzelne Glied das Product aus einer Determinante *(n-x)*^ter^ Ordnung und einem Elemente von *[P,Q]* ist.
> [Weierstrass, 1868, 20].
>
> [Traduction ,F.B.] :
> Chaque déterminant d'ordre *(n-x+1)* du système (2) peut s'exprimer comme une somme, dans laquelle chaque terme est un produit d'un déterminant d'ordre *(n-x)* et d'un élément de *[P,Q].*

Un diviseur commun aux *mineurs* d'ordre *n-x* sera également un diviseur des *mineurs* d'ordre *n-x+1* et divisera par conséquent tous les mineurs d'ordre supérieur. Cette propriété des déterminants se représente immédiatement comme une propriété de la décomposition polynomiale des mineurs de *[P,Q]* . Si

---

[31] La résolution de Weierstrass fait apparaitre comme un cas particulier le résultat de 1858 sur les paires de formes quadratiques pour lesquelles les "mêmes substitutions" sont faites aux deux systèmes de variables x_α et y_β [Weierstrass, 1868, 30].

[32] En termes contemporains, le corps est implicitement algébriquement clos.

[33] Les méthodes de Weierstrass et Kronecker sont largement tributaires de la théorie du déterminant. Kronecker en fait un des sujets principaux de ces cours d'université dans les années 1880. Selon le témoignage de Frobenius, Weierstrass utilise depuis 1864 une définition "quasi axiomatique" des déterminants dans laquelle [Knobloch, 1994] voit l'origine de la définition contemporaine. La théorie du déterminant est essentielle dans les recherches sur les invariants de la seconde moitié du XIX^e^ siècle. Voir l'encart 10 et, pour un exposé historique écrit au début du XX^e^ siècle, consulter [Muir, 1906].

La différence essentielle avec le cas des couples de formes quadratiques étudié en 1858 est qu'il n'y a plus ici de "rapports remarquables", c'est-à-dire de *symétrie*, des coefficients. La conséquence est qu'il n'est plus possible d'écrire simultanément les deux formes Φ et Ψ comme combinaisons linéaires des produits des formes linéaires $\Phi_\alpha\Phi_\beta$ (comparer à [Weierstrass, 1858, .235]) ce que traduisent les 3e et 4e ligne de la formule (22).

Weierstrass généralise la méthode de 1858 à la 5e ligne de la formule (22), il s'intéresse au développement en éléments simples des fractions $S_{\alpha\beta}/S$, dans le cas *symétrique*, ce développement ne contenait aucun terme d'ordre inférieur à -1, dans le cas général il est nécessaire de déterminer l'écriture du polynôme homogène de *2n* variables *F* :

$$(23).\ F(\xi_1,\ldots,\xi_n/\ \eta_1,\ldots\eta_n) = \sum_{\alpha\beta}\frac{S_{\alpha\beta}}{S}\eta_\alpha\xi_\beta,$$

Si le développement de *F* par rapport à $S_{\alpha\beta}/S$ est $F = s^{-1}F_1 + s^{-2}F_2 + \ldots$, la ligne 5 de la formule (22) sur l'écriture de $s\Phi+\Psi$ permet d'identifier

- les termes de degré s^{-1} de F à $\Phi = F_1(\frac{\delta\Phi_i}{\delta y_i}, \frac{\delta\Phi_i}{\delta x_i})$
- les termes de degré s^{-2} à $\Psi = F_2(\frac{\delta\Phi_i}{\delta y_i}, \frac{\delta\Phi_i}{\delta x_i})$.

Il faut donc étudier une forme bilinéaire *polynomiale* dont les coefficients sont des fractions rationnelles données par le développement en série de $S_{\alpha\beta}/S$. Le développement en série de $S_{\alpha\beta}/S$ est obtenu par une propriété de théorie des déterminants liant les mineurs $S_{\alpha\beta}$ au déterminant S par des relations en cascade, si $(-1)^{\alpha+\beta}S^{(x)}_{\alpha\beta}$ désigne le mineur d'ordre *n-x-1* obtenu à partir du mineur principal $S^{(x)}$ en supprimant la $(\alpha-x)^e$ colonne et la $(\beta-x)^e$ ligne (p. 25) :

$$(28).\ \begin{cases} S_{11}S_{\alpha\beta} - S_{\alpha1}S_{1\beta} = SS'_{\alpha\beta} \\ S'_{22}\,S'_{\alpha\beta} - S'_{\alpha2}\,S'_{2\beta} = S'S''_{\alpha\beta} \\ S'_{33}\,S'_{\alpha\beta} - S'''_{\alpha3}\,S'_{3\beta} = S''S'''_{\alpha\beta} \\ u.s.w. \end{cases}$$

Ces relations permettent de développer le quotient $S_{\alpha\beta}/S$ par une relation mettant en évidence les divisions de mineurs successifs (p.26) :

$$(29.)\ \frac{S_{\alpha\beta}}{S} = \frac{S_{\alpha1}S_{1\beta}}{SS'} + \frac{S'_{\alpha2}S'_{2\beta}}{S'S''} + \frac{S''_{\alpha3}S''_{3\beta}}{S''S'''} + \ldots$$

Si l'on note,

$$\begin{cases} X = & S_{11}\xi_1 + & S_{12}\xi_2 + & S_{13}\xi_3 + & \ldots + & S_{1n}\xi_n \\ X' = & & S'_{22}\,\xi_2 + & S'_{23}\,\xi_3 + & \ldots + & S'_{2n}\,\xi_n \\ X'' = & & & S''_{33}\,\xi_3 + & \ldots + & S''_{3n}\,\xi_n \\ Y = & S_{11}\eta_1 + & S_{12}\eta_2 + & S_{13}\eta_3 + & \ldots + & S_{1n}\eta_n \\ Y' = & & S'_{22}\,\eta_2 + & S'_{23}\,\eta_3 + & \ldots + & S'_{2n}\,\eta_n \\ Y'' = & & & S''_{33}\,\eta_3 + & \ldots + & S''_{2n}\,\eta_{n1} + \end{cases}$$

le changement de variable donne une décomposition partielle ("*Partial-Brüche*") de *F* ([27]) :

$$(30).\ F(\xi_1,\ldots,\xi_n/\ \eta_1,\ldots\eta_n) = \frac{XY}{SS'} + \frac{X'Y'}{S'S''} + \frac{X''Y''}{S''S'''} + \ldots$$

[27] En termes contemporains, on a écrit la forme bilinéaire polynomiale F sous forme diagonale par le changement de variable polynomial donnée par les formules 31.

on désigne, comme Weierstrass, par $ap+bq$ un facteur linéaire homogène d'exposant l du polynôme homogène $[P,Q]$ et si $l^{(x)}$ désigne le plus grand exposant pour lequel tous les mineurs d'ordre $n-x$ sont divisibles par $(ap+bq)^{l(x)}$ alors, soit $l^{(x-1)} > l^{(x)}$, soit $l^{(x)} = 0$. Si r désigne le plus petit nombre tel que $l^{(r)} = 0$, Weierstrass appelle $r-1$ l'index de $ap+bq$ et la suite $l,\ l',\ l'', \ldots, l^{(r-1)}$ est alors une suite strictement positive décroissante. Avec ces notations, et si l'on note $e = l-l'$, $e' = l'-l''$, $\ldots, e^{(r-1)} = l^{(r-1)}$, les relations de divisibilité entre le déterminant et ses mineurs successifs sont traduites par la décomposition suivante du facteur $(ap+bq)^l$ de $[P,Q]$:

$$(ap+bq)^l = (ap+bq)^e(ap+bq)^{e'}\ldots(a+bq)^{e(r-1)}$$

[Weierstrass, 1868, 21].

L'ensemble des termes de cette décomposition, étendue à tous les facteurs linéaires du déterminant

$$[P,Q] = C(a_1p+b_1q)^{l_1}(a_2p+b_2q)^{l_2}\ldots(a_\rho p+b_\rho q)^{l_\rho}$$

est appelé "ensemble des *diviseurs* élémentaires de $[P,Q]$ "et noté ([34]) :

$$(a_1p+b_1q)^{e1}, (a_2p+b_2q)^{e2}, \ldots, (a_\rho p+b_\rho q)^{e\rho}$$

Cette structure de décomposition du polynôme $[P,Q]$ traduit les relations de divisibilité entre le déterminant et ses mineurs successifs ([35]) :

> Jeder einzelne der so definierten r Factoren von
> $$(ap+bq)^l,$$
> [...] möge ein Elementar-Theiler der Determinante von $pP+qQ$ heissen – ein Name, dessen Einführung die folgenden Untersuchungen rechtfertigen werden.
> Hiernach ist, wenn
> $$(a_1p+b_1q)^{e1}, (a_2p+b_2q)^{e2}, \ldots, (a_\rho p+b_\rho q)^{e\rho}$$
> sämtliche Elementar-Theiler von [P,Q] sind,
> $$[P,Q] = C\,(a_1p+b_1q)^{e1}(a_2p+b_2q)^{e2}\ldots(a_\rho p+b_\rho q)^{e\rho}.$$
> [Weierstrass, 1868, 21].
>
> [Traduction, F.B.] :
> Chacun des r facteurs de $(ap+bq)^l$ sera désigné comme un diviseur élémentaire du déterminant de $pP+qQ$.
> On désigne
> $$(a_1p+b_1q)^{e1}, (a_2p+b_2q)^{e2}, \ldots, (a_\rho p+b_\rho q)^{e\rho}$$
> Comme l'ensemble des diviseurs élémentaires de $[P,Q]$,
> $$[P,Q] = C\,(a_1p+b_1q)^{e1}(a_2p+b_2q)^{e2}\ldots(a_\rho p+b_\rho q)^{e\rho}$$

---

[34] Il y a ici une ambiguïté dans la notation de Weierstrass. Les diviseurs élémentaires pour une même racine c_1 avaient d'abord été notés e_1, e'_1, e''_1 etc. Ils sont à présent notés e_1, e_2, e_3. De sorte qu'un diviseur élémentaire e_i n'est pas forcément associé à la racine c_i.

[35] Par exemple, le même polynôme $P(X = (X-3)^3(X-2)$ peut être polynôme caractéristique pour deux faisceaux de formes bilinéaires non équivalentes, donc n'ayant pas les même diviseurs élémentaires. Il y a en réalité 3 classes d'équivalence de formes bilinéaires associées à P, qui correspondent aux trois décompositions de P en diviseurs élémentaires :

$$(X-3)^3(X-2)\ ;\ (X-3)^2(X-3)(X-2)\ ;\ (X-3)(X-3)(X-3)(X-2).$$

Chaque terme de la décomposition est un quotient d'un déterminant S_i et du facteur commun à la somme des mineurs *Xi,* que Kronecker interprétera en 1874 comme le plus grand diviseur commun des mineurs. Le quotient *XY/SS'* s'exprime comme une fraction dont le quotient est le produit des premiers diviseurs élémentaires et qui se décompose en éléments simples :

$$(33)\frac{X^{(x-1)}Y^{(x-1)}}{S^{(x-1)}S^{(x)}} = \sum_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu}Y_{\lambda\nu}(s-c_\lambda)^{\mu+\nu-e_\lambda}$$

Il est ainsi possible de décomposer *F* en regroupant les variables en *groupes* $(X_\lambda Y_\lambda)_e$, chacun des *groupes* étant déterminé par un diviseur élémentaire, c'est à dire par les coefficients de la fraction $1/(s-c_\lambda)$ [1868, 28] :

$$(37)F(\xi_1,...,\xi_n/\eta_1,...,\eta_n) = \sum_\lambda [\frac{(X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda}}{s-c_\lambda} + \frac{(X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda -1}}{(s-c_\lambda)^2} + ...]$$

Et cette décomposition de la forme bilinéaire polynomiale *F* donne ce que Kronecker désignera comme la *forme normale* du couple de formes (Φ,Ψ) (on a vu que les termes de Φ s'identifient aux termes de degré s^{-1} et ceux de Ψ aux termes de degré s^{-2}) :

$$(38).\begin{cases} \Phi = \sum_\lambda (X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda} \\ \Psi = \sum_\lambda c_\lambda (X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda} + \sum_\lambda (X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda -1} \end{cases}$$

Un exemple en termes contemporains,

Si $S = (s-c_1)^3(s-c_2)^2(s-c_3)^5$ a pour diviseurs élémentaires

$(s-c_1)^2$; $(s-c_1)$; $(s-c_2)$; $(s-c_2)$; $(s-c_3)^2$; $(s-c_3)^2$; $(s-c_3)$; 1

Alors :

les termes de X ont pour facteurs communs : $(s-c)(s-d)(s-e)^3$

les termes de X' ont pour facteurs communs $s-e$

Donc

$$\frac{X}{\sqrt{SS'}} = \frac{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)^3\sum a_i\xi_i}{\sqrt{(s-c_1)^4(s-c_2)^3(s-c_3)^8}}, \quad \frac{X}{\sqrt{SS'}} = \frac{\sum a_i\xi_i}{(s-c)(s-c_1)^{1/2}(s-c_2)}$$

$$XY/SS' = \frac{\sum b_{ji}\xi_i\eta_j}{(s-c_1)^2(s-c_2)(s-c_3)^2}$$

Le développement de cette fraction en élément simple donne, avec les notations de Weierstrass :

$$XY/SS' = \frac{X_{10}Y_{10}}{(s-c_1)^2} + \frac{X_{11}Y_{11}}{s-c_1} + \frac{X_{21}Y_{21}}{s-c_2} + \frac{X_{30}Y_{30}}{(s-c_3)^2} + \frac{X_{31}Y_{31}}{s-c_3}$$

$$X'Y'/S'S'' = \frac{X'_{11}Y'_{11}}{s-c_1} + \frac{X'_{21}Y'_{21}}{s-c_2} + \frac{X'_{30}Y'_{30}}{(s-c_3)^2} + \frac{X'_{31}Y'_{31}}{s-c_3}$$

$$X''Y''/S'S'' = \frac{X''_{31}Y''_{31}}{s-c_3}$$

Les regroupements de Weierstrass s'interprète comme des changements de bases mais toute interprétation géométrique est absente de chez Weierstrass. Soit f un endomorphisme et soit S un polynôme annulateur de f, $S(f) = 0$ (par exemple le polynôme caractéristique). On décompose $1/S$ en éléments simples :

$$\frac{1}{S} = \sum_i \sum_{j=1}^{ri} \frac{x_{ij}}{(X-\lambda_j)^j}$$

$$u_i = \sum_{j=1}^{ri} x_{ij}(X-\lambda_i)^{ri-j} \text{ donc } \frac{1}{S} = \sum_i \frac{u_i}{(X-\lambda_i)^{ri}}$$

Soit alors $Q_i = \prod_{i\neq j}(x-\lambda_j)^{r_i}$ les $p_i = u_iQ_i(M)$ sont les projecteurs sur les sous espaces caractéristiques de f

Les diviseurs élémentaires de *[P,Q]* forment un système complet d'invariants. Deux faisceaux de formes bilinéaires *pP+qQ* et *pP'+qQ'* sont transformables l'un en l'autre par des permutations non singulières sur les variables si et seulement si leurs ensembles de diviseurs élémentaires sont identiques ([36]) :

Es werde durch die Substitutionen

$$(7)\begin{cases} x_1 = \sum_\gamma h_{1\gamma} u_\gamma, \ldots, x_n = \sum_\gamma h_{n\gamma} u_\gamma \\ y_1 = \sum_\gamma k_{1\gamma} v_\gamma, \ldots, y_n = \sum_\gamma k_{n\gamma} v_\gamma \end{cases}$$

wo $u_1, \ldots, u_n$ und $v_1, \ldots, v_n$ neue Veränderliche bedeuten, $h_{11}, \ldots, h_{nn}, k_{11}, \ldots, k_{nn}$ aber Constanten, welche keiner anderen Beschränkung unterworfen sind, als dass die Determinanten

$$(8.)H = \begin{vmatrix} h_{11},\ldots,h_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{n1},\ldots,h_{nn} \end{vmatrix}, K = \begin{vmatrix} k_{11},\ldots,k_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{n1},\ldots,k_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null sein dürfen, die Form $P(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$ in eine andere $P'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$; und zugleich $Q(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$ in eine $Q'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$ verwandelt ; so stimmen die Determinanten der beiden Formen

pP+qQ, pP'+qQ'

in ihren Elementar-Theilern überein.

Und umgekehrt, wenn zwei Formen-Paare $P(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$, $P'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$; und $Q(x_1,\ldots,x_n/y_1,\ldots,y_n)$, $Q'(u_1,\ldots,u_n/v_1,\ldots,v_n)$ gegeben sind, und es stimmen die beiden Determinanten

$[P,Q]$, $[P',Q']$

in ihren Elementar-Theilern überein ; so können auch stets die Coefficienten $(h_{11}, \ldots, h_{nn})$ und $(k_{11}, \ldots, k_{nn})$ so bestimmt werden, dass durch die unter (7.) angegebenen Substitutionen *P* in *P*' und zugleich *Q* in *Q*' übergeht.
[Weierstrass, 1868, 21].

[Traduction, F.B.] :
Si par les substitutions

$$(7)\begin{cases} x_1 = \sum_\gamma h_{1\gamma} u_\gamma, \ldots, x_n = \sum_\gamma h_{n\gamma} u_\gamma \\ y_1 = \sum_\gamma k_{1\gamma} v_\gamma, \ldots, y_n = \sum_\gamma k_{n\gamma} v_\gamma \end{cases}$$

où $u_1, \ldots, u_n$ et $v_1, \ldots, v_n$ sont des nouvelles variables et $h_{11}, \ldots, h_{nn}, k_{11}, \ldots, k_{nn}$ des constantes, qui ne sont soumises à aucune condition sauf que les déterminants suivants ne sont pas nuls

$$(8.)H = \begin{vmatrix} h_{11},\ldots,h_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{n1},\ldots,h_{nn} \end{vmatrix}, K = \begin{vmatrix} k_{11},\ldots,k_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{n1},\ldots,k_{nn} \end{vmatrix}$$

[36] Par exemple si $S = (s-c_1)^3(s-c_2)^2(s-c_3)^5$ et si
- les diviseurs communs aux premiers mineurs sont : $(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)^3$
- Le diviseur commun aux seconds mineurs est $(s-c_3)$
- les troisièmes mineurs ont pour pgcd 1.

Alors les diviseurs élémentaires sont :

$(s-c_1)^2$; $(s-c_1)$; $(s-c_2)$; $(s-c_2)$; $(s-c_3)^2$; $(s-c_3)^2$; $(s-c_3)$; 1

Avec les notations de Weierstrass :

$e_1 = 2$; $e_1' = 1$; $e_2 = 1$; $e_2' = 1$; $e_3 = 2$; $e_3' = 2$; $e_3'' = 1$

Ramené au cas des formes $pP+qQ$, la forme (38) permet d'écrire :

$$\boldsymbol{P = \Sigma_\lambda [a_\lambda(X_\lambda Y_\lambda)_{e\lambda} - h(X_\lambda Y_\lambda)_{e\lambda-1}]}$$
$$\boldsymbol{Q = \Sigma_\lambda\, b_\lambda(X_\lambda Y_\lambda)_{e\lambda} + g(X_\lambda Y_\lambda)_{e\lambda-1}\,]}$$

Dans la formule (38), $(X_\lambda Y_\lambda)_{e-1} = 0$ si $e = 1$, et la *forme normale* ne s'identifiera à la loi d'intertie du cas quadratique (la forme *diagonale*) que dans la situation où $e_\lambda = 1$ pour tout λ, c'est-à-dire dans le cas où tous les diviseurs élémentaires sont linéaires ([28]). Deux formes P et Q, se transforment par des substitutions linéaires en :

$$P = a_1X_1Y_1 + a_2X_2Y_2 + \dots + a_nX_nY_n$$
$$Q = b_1X_1Y_1 + b_2X_2Y_2 + \dots + b_nX_nY_n$$

si et seulement si tous les diviseurs élémentaires du déterminant $[P,Q]$ sont linéaires [Weierstrass, 1858, 34], ce qui équivaut à dire que tout facteur linéaire divisant le déterminant doit diviser les mineurs d'ordre $(n-l+1)$. Dans la partie 7 de son mémoire (pp. 38-43), consacrée aux couples de formes quadratiques (B, D), Weierstrass présente son résultat de 1858 sur le cas quadratique comme un cas particulier où les diviseurs élémentaires sont linéaires.

- **Peut-on trouver un couple de formes de diviseurs élémentaires donnés ?**

Etant donnés ρ entiers $e_1 + \dots e_\rho = n$ et des constantes a_i, b_i α_i, β_i, existe-t-il un couple de forme quadratiques dont les facteurs $(a_1p+b_1q)^{e1}, \dots, (a_\rho p+b_\rho q)^{ep}$ sont les diviseurs élémentaires ? Pour répondre à cette question, Weierstrass (p.34), remarque que les couples de formes suivants :

$$P_\lambda = a_\lambda(X_\lambda Y_\lambda)_{e\lambda} - h(X_\lambda Y_\lambda)_{e\lambda-1}$$
$$Q_\lambda = b_\lambda(X_\lambda Y_\lambda)_{e\lambda} + g(X_\lambda Y_\lambda)_{e\lambda-1}$$

Correspondent à un unique diviseur élémentaire (Weierstrass note $a_\lambda p + b_\lambda q = u$ et $gq - hp = v$)

$$[P_\lambda, Q_\lambda] = \begin{vmatrix} 0, & 0, & \dots, & 0, & v, u \\ 0, & 0, & \dots, & v, & u, 0 \\ . & . & . & . & . \; . \\ v, & u, & \dots & 0, & 0, 0 \\ u, & 0, & \dots & 0, & 0, 0 \end{vmatrix} = \pm u^{e_\lambda}$$

Le facteur, $u^{e\lambda} = (a_\lambda p + b_\lambda q)^{e\lambda}$ est l'unique diviseur élémentaire du couple (P_λ, Q_λ) car le mineur du déterminant $[P_\lambda, Q_\lambda]$ obtenu en supprimant la dernière colonne et la première ligne, $\pm v^{e\lambda-1}$, n'a aucun facteur commun avec $u^{e\lambda}$. Ces formes seront appelées formes élémentaires par Kronecker en 1874.

[28] On dirait aujourd'hui : une matrice est diagonalisable si et seulement si ses diviseurs élémentaires sont linéaires.

la forme $P(x_1,...,x_n/y_1,...,y_n)$ se transforme en une autre $P'(u_1,...,u_n/v_1,...,v_n)$;
et de même $Q(x_1,...,x_n/y_1,...,y_n)$ en $Q'(u_1,...,u_n/v_1,...,v_n)$; alors les diviseurs élémentaires des déterminants de chaque forme

$$pP+qQ, \ pP'+qQ'$$

coïncident.
Et inversement, quand deux couples de formes $P(x_1,...,x_n/y_1,...,y_n)$,$P'(u_1,...,u_n/v_1,...,v_n)$; et $Q(x_1,...,x_n/y_1,...,y_n)$, $Q'(u_1,...,u_n/v_1,...,v_n)$ sont donnés et dont les diviseurs élémentaires des déterminants

$$[P,Q], [P',Q']$$

coïncident ; alors il toujours est possible de déterminer les coefficients $(h_{11}, ..., h_{nn})$ et $(k_{11}, ..., k_{nn})$, tels que par les substitutions (7.) P va sur P' et Q sur Q'.

Le théorème des diviseurs élémentaires énonce un système complet d'invariants qui caractérise les couples non singuliers de formes bilinéaires. Il permet, selon les termes qu'utilisera Kronecker en 1874, de "jeter une nouvelle lumière" sur le problème des racines multiples de l'équation caractéristique. La conclusion de Weierstrass de 1868 fait écho à celle de 1858, l'occurrence de racines multiples n'est pas déterminante et la forme normale simple (la forme *diagonale*) qui caractérise les couples de formes quadratiques ou les formes *symplectiques* considérées par Kronecker en 1866, peut être obtenue si et seulement si les diviseurs élémentaires sont "simples", c'est-à-dire si le degré de chaque facteur linéaire décroît d'une et une seule unité à chaque extraction de sous déterminant. Dans ce cas, la décomposition en facteur linéaire de $[P,Q]$ (ou de manière équivalente, la suite des racines caractéristiques comptées avec leurs multiplicités) suffit à donner un système complet d'invariants du couple de formes. Au contraire, si le degré d'un facteur linéaire décroît de plus d'une unité à une étape de l'extraction de sous déterminants, il faut alors recourir à la suite complète des diviseurs élémentaires, dans ce cas, il existe également une "forme normale". La démonstration de Weierstrass, détaillée en encart 13, est basée, de manière analogue au mémoire de 1858, sur des regroupements des variables en sous groupes par des méthodes polynomiales. Ces regroupements permettent d'écrire le couple (P,Q) comme une juxtaposition de couples (Φ,Ψ) :

$$(38).\begin{cases} \Phi = \sum_{\lambda}(X_{\lambda}Y_{\lambda})_{e_{\lambda}} \\ \Psi = \sum_{\lambda} c_{\lambda}(X_{\lambda}Y_{\lambda})_{e_{\lambda}} + \sum_{\lambda}(X_{\lambda}Y_{\lambda})_{e_{\lambda}-1} \end{cases}$$

[Weierstrass, 1868, 29].

C'est cette dernière formule que Kronecker dénommera en 1874 la "forme normale" des couples de formes bilinéaires et qui suscitera la controverse de 1874 lorsque Jordan démontrera le lien mathématique entre la formule (38) de Weierstrass et la forme canonique des substitutions linéaires.

ENCART 14.

Meyer Hamburger et les équations de Fuchs.

[Jordan, 1902, 467] :

> Les intégrales de ces équations jouissent de la propriété fondamentale de se transformer par une substitution linéaire lorsque la variable indépendante tourne autour d'un point critique. M. Fuchs en déduit l'expression de ces intégrales au moyen de séries de puissances entières, positives et négatives, multipliées par une puissance convenable de la variable, et, dans certains cas exceptionnels, par un facteur logarithmique.

En 1873, Hamburger applique la forme canonique de Jordan à la recherche des solutions des équations fuchsiennes d'ordre n dont les coefficients sont des fonctions méromorphes ayant une singularité en un point a (voir [Gray, 1966, 61]. Si l'on considère les solutions $y_1, y_2, \dots, y_n$ d'une telle équation dans le voisinage d'un point singulier comme des fonctions de z et si l'on fait faire un tour à z autour du point singulier, $z \leftrightarrow: z+2i\pi$, alors les nouvelles solutions s'obtiennent par une transformation linéaire U de déterminant non nul :

$$(y)'_1 = a_{11}y_1+\dots+a_{1n}y_n,\ \dots,\ (y)'_n = a_{n1}y_1+\dots+a_{nn}y_n.$$

La transformation U ne dépend que du point singulier a, elle est indépendante des variables x et y et la structure des solutions dépend de la nature des racines de l'équation caractéristique $P=0$ associée à U. La solution donnée par Fuchs est limitée au cas où la multiplicité de chaque racine est égale à la dimension du sous espace propre correspondant ([29]). Hamburger étend la solution de Fuchs au cas des racines multiples. Par un lemme, qui témoigne d'une influence des diviseurs élémentaires de Weierstrass, Meyer Hamburger démontre l'existence d'une valeur ν telle que les ν^e mineurs de P sont nuls et les $\nu\text{-}1^e$ ne sont pas tous nuls pour une valeur de ω. La valeur ν donne le nombre de solutions indépendantes

$$\alpha A = \alpha\omega_1.$$

Hamburger applique alors la méthode de Jordan de réduction d'une substitution à sa forme canonique, si "ω_1 est également une racine de $\Delta'=0$" et si Δ' désigne le facteur intervenant dans $P=(x-\omega_1)^\nu\Delta'$, il suffit de réitérer la méthode précédente en recherchant les ν' "fonctions" indépendantes associées à $\Delta'=0$. Pour une racine ω_1 de multiplicité μ, on obtient une suite décroissante $\nu, \nu', \nu'', \dots \nu^{(\lambda)}$. Lorsque $\nu+\nu'+\dots\nu^{(\lambda)} = \mu$, on aura alors "formé tous les groupes correspondant à la racine ω_1" et "les m éléments $y_1, \dots y_m$ d'un des groupes" sont reliés par la relation [Hamburger, 1873, 121]

$$(20)\ (y_1)'=\omega y_1,\ (y_2)'=\omega y_2+y_1,\ (y_m)'=\omega y_m+y_{m-1}.$$

La relation (20) donne la forme de Jordan des équations fuchsiennes, soit $u = log(x-a)/2\pi i$ (u se transforme *en* $u+1$ par un tout autour du point singulier a)*;* et soit $f(u)$ une fonction entière de degré $m-1$ de u, les m solutions associées à ω seront de la forme [1873, p.122] :

> (21) $y_m = (x-a)^r f(u),\ y_{m-1} = (x-a)^r \omega\Delta f(u),\ \dots,\ y_{m-k} = (x-a)^r \omega^k\Delta^k f(u),\ \dots,\ y_1 = (x-a)^r \omega^{m-1}\Delta_{m-1} f(u),$
> wo der Exponent r, wie bereits im Eingang erwähnt, durch die Gleichung
>
> $$e^{2ri\pi} = \omega$$
>
> definirt ist, $\Delta f(u)$ die Differenz $f(u+1)-f(u)$ [...]
>
> $$(y_{m-k})' = (x-a)^r\omega^{k+1}\Delta^k f(u+1)$$
> $$= (x-a)^r\omega^{k+1}(\Delta^k f(u)+\Delta^{k+1}f(u))$$
> $$= \omega y_{m-k} + y_{m-k-1}$$

[29] Si l'on prend l'exemple de n racines distinctes, soit ω_1 l'une de ces racines, et u la "fonction linéaire homogène" qui satisfait à $(u)'=\omega_1 u$ alors la solution correspondante de l'équation fuchsienne aura la forme $(x-a)^r\varphi$ aux environs du point singulier a, où r est tel que $e^{2\pi ir}=\omega_1$ et φ est une fonction définie dans le voisinage de a par $ln(z-a)^{\mu-1}$.

4. Des analogies entre deux théorèmes dans le champ des applications (1870-1873).

Dans une période courte de trois ans, de 1870 à 1873, le théorème de Weierstrass sur les formes bilinéaires et celui de Jordan sur les substitutions sont reconnus comme susceptibles d'"applications" à la résolution de mêmes problèmes. Une première étape dans la mise en relation des deux théorèmes peut se caractériser comme une phase de mise en évidence d'analogies dans le champ des applications.

Comme nous l'avons vu au paragraphe premier de ce chapitre, les années 1870-1880 sont une période charnière dans la carrière de Jordan marquée par une entreprise d'application à des domaines variés des notions et méthodes développées pour la théorie des substitutions dans les années 1860. C'est dans ce contexte que, en 1871, Jordan donne une résolution *générale* au problème de l'intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Nous avons vu au chapitre 2 que Jordan, dans une note de 1872 intitulée « Sur les oscillations infiniment petites des systèmes matériels », Jordan démontre que la stabilité des petites oscillations des systèmes mécaniques est indépendante de la multiplicité des racines de l'équation caractéristique. La démonstration de Jordan est basée sur une remarque, déjà formulée dans le mémoire de 1871 et selon laquelle la stabilité n'est pas déterminée par la multiplicité des racines mais par une relation entre le déterminant caractéristique et ses mineurs ([37]) :

> *Remarque I.* Pour que t ne figure pas dans l'intégrale en dehors de l'exponentielle, il sera nécessaire et suffisant que chaque série ne contienne qu'une variable, d'où la condition $\mu = \nu$. Donc les relations (4) doivent se réduire à n-μ distinctes, ce qui exige que, *non seulement* Δ*, mais tous ses mineurs d'ordre* ν*-1 s'annulent pour* $s = \sigma$.
> [Jordan, 1871, 315].

Cette remarque de Jordan est analogue à la "circonstance remarquable" par laquelle, comme nous l'avons vu au chapitre 2, Weierstrass avait déjà résolu en 1858 le problème de la stabilité des petites oscillations. Il semble d'ailleurs que les travaux de Weierstrass de 1858 aient influencé Jordan de manière indirecte, par l'intermédiaire d'un mémoire publié à l'Académie de Saint Petersbourg par Somof [1859] ; ce mémoire, porté à l'attention de Jordan par Yvon-Villarceau en 1872, est en réalité un exposé de la méthode de Weierstrass appliquée au problème des petites oscillations. En 1871, Jordan interprétait les coefficients d'un s*ystème différentiel* comme ceux d'une

---

[37] En termes contemporains, μ est le degré de multiplicité d'une valeur propre et ν la dimension du sous espace propre associé. Cette remarque caractérise les endomorphismes diagonalisables par la condition que leurs diviseurs élémentaires sont simples.

substitution linéaire ; en 1872, les *systèmes spécifiques des petites oscillations* sont représentés par des *formes quadratiques* et la méthode de réduction canonique des substitutions est alors "appliquée" à la théorie des formes quadratiques :

> Il est clair que la question de la réduction du système (1) à la forme canonique (7) est identique à ce problème connu : *Faire disparaître les angles des variables à la fois dans les deux formes quadratiques* T *et* U.
> [Jordan, 1872, 320].

Les deux notes de Jordan sur la mécanique des petites oscillations mettent en évidence des analogies entre certaines méthodes de la théorie des groupes et de la théorie des formes quadratiques et bilinéaires. En 1873, un mémoire du géomètre berlinois Meyer Hamburger met en relation de manière explicite le théorème de Jordan et de celui de Weierstrass. Ce mémoire, publié dans le *Journal de Crelle* et intitulé "Bemerkung über die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten", généralise les méthodes de réduction canonique de Jordan à l'intégration des équations différentielles linéaires *à coefficients non constants*, dites *équations de Fuchs* :

> Das Verfahren des Herrn *Jordan* lässt sich nun, wie wir zeigen wollen, mit Erfolg anwenden auf die Bildung des nach der Bezeichnung der Herrn *Fuchs* zu einem singulären Punkte gehörigen Fundamentalsystems von n linear unabhängigen Integralen einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen x und y, von der Gestalt :
>
> $$(1)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0,$$
>
> wo $p_1, p_2, \ldots, p_n$ Functionen von x allein sind.
> [...] Herr *Jordan* hat in den Comptes rendus (année 1871, 2. semestre, p.787) eine Note "Sur la résolution des équations différentielles linéaires" veröffentlicht, in welcher das System linearer Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten für den Fall gleicher Wurzeln der zugehörigen algebraischen Gleichung einer Reihe von Substitutionen auf eine sogenannte canonische Form bringt. Die Differentialgleichungen finden sich darin in gewisse Gruppen gesondert, die sich unmittelbar integrieren lassen.
> [Hamburger, 1873, 113].
>
> [Traduction, F.B.]. La méthode de M. Jordan se généralise aux expressions que M. Fuchs a désigné comme les systèmes fondamentaux de n intégrales indépendantes et qui sont les solutions aux voisinages d'un point singulier d'une équation différentielle d'ordre n entre x et y de la forme :
>
> $$(1)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0,$$
>
> où $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des fonctions de x.
> [...] M. *Jordan* a publié une note dans les Comptes rendus (année 1871, 2. semestre, p.787), intitulée "Sur la résolution des équations différentielles linéaires", dans laquelle le système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants est ramené à une forme canonique pour le cas où l'équation algébrique a des racines multiples. Sous cette forme, les équations sont alors rassemblées en certains groupes dont l'intégration est immédiate.

La méthode donnée par Fuchs pour l'intégration des équations (1), dont le détail est proposé en encart 14, est incomplète en cas d'occurrence de racines multiples de l'équation caractéristique. Afin d'élaborer une méthode générale et indépendante de la multiplicité des racines, Hamburger généralise la méthode de réduction canonique de Jordan qu'il présente comme consistant à "rassembler les équations différentielles en certains groupes dont l'intégration est immédiate". Il met en évidence le point clé de la réduction de Jordan, à savoir de d*istinguer entre l'ordre de multiplicité μ d'une racine de l'équation caractéristique et le nombre ν de solutions indépendantes associées*, les *μ* fonctions associées à une racine *ω* se "répartissent en différents groupes et non pas toutes ensembles" [Hamburger, 1873, 114]. Or, comme le montre l'encart 5, Jordan ne donne pas de méthode permettant de déterminer la valeur de ν donnant le nombre de fonctions indépendantes à associer à chaque racine caractéristique et c'est d'ailleurs une lacune de sa démonstration du théorème de réduction canonique. Au contraire, dans le théorème de Weierstrass l'*invariant* ν est un diviseur élémentaire bien déterminé et mis en valeur car il permet de caractériser le cas *diagonalisable* du cas *non diagonalisable* (encart 13) ([38]). Pour cette raison, dans son mémoire de 1873, Hamburger mêle les méthodes Jordan à celles de Weierstrass pour la résolution des équations de Fuchs (encart 14).

La parution du mémoire d'Hamburger attire l'attention de Jordan sur la théorie des formes bilinéaires développée à Berlin. La publication, dans les années 1873-1874, d'une série de notes et mémoires sur différents problèmes de réductions des formes bilinéaires, des formes quadratiques et des équations de Fuchs [Jordan, 1874f] caractérise une seconde phase dans la mise en relation des théorèmes de Jordan et de Weierstrass. Un travail mathématique s'engage sur l'*identité* des deux théorèmes et Jordan démontre que le théorème des diviseurs élémentaires des couples de formes bilinéaires *(P,Q)* "se ramène identiquement à celui de la réduction des substitutions linéaires à leur forme canonique":

> M. Weierstrass, en traitant ce problème par une autre méthode, s'est borné au cas où le déterminant de $\omega P+Q$ n'est pas identiquement nul. Nous allons montrer que, dans ce cas, le problème se ramène identiquement à celui de la réduction des substitutions linéaires à leur forme canonique, question dont nous avons donné ailleurs la solution.
> [Jordan, 1874a, 52] .

Jordan reprend l'approche de Weierstrass consistant à mêler *P* et *Q* en un seul "polynôme" de "polynômes bilinéaires" $\mathcal{P} = \omega P+Q$:

> Soient ω et ω' deux constantes quelconques, telles que les polynômes
> $$\mathcal{P} = \omega P+Q,\ \mathcal{L} = \omega' P+Q$$
> Aient leurs déterminants différents de zéro. On exprimera aisément *P* et *Q* en fonction de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$. Reste à assigner une forme simple à ces deux derniers polynômes.
> [Jordan, 1874, 52].

[38] Ces conditions correspondent aux égalités ν = μ pour chaque racine, tous les diviseurs élémentaires sont alors égaux à 1.

Comme nous l'avons vu dans les trois premiers paragraphes, méthode qui caractérise la théorie des formes bilinéaires développée à Berlin est une recherche d'invariants. Jordan, de son côté, approche le problème des polynômes de formes de Weierstrass par la méthode développée pour l'étude des substitutions et consistant à "assigner une forme simple à ces deux derniers polynômes".
Quelle relation entre ces "polynômes" de formes bilinéaires et les substitutions linéaires ? Choisissant deux valeurs ω et ω' de la variable et posant $P=\omega P+Q$ et $L=\omega' P+Q$, Jordan réduit la forme bilinéaire P à sa "forme canonique" (ce qui est toujours possible par *équivalence)* et désigne par S la substitution permettant de transformer la forme bilinéaire P en L ([39]) :

> Nous choisirons d'abord les variables indépendantes, de manière à ramener P à sa forme canonique :
> $$P = x_1y_1+\ldots+x_ny_n$$
> Quand à L il sera de la forme
> $$L = x_1f_1+\ldots+x_nf_n,$$
> $f_1,f_2,\ldots,f_n$ étant des fonctions linéaires de $y_1,\ldots,y_n$, dont le déterminant n'est pas nul. On voit qu'on passera de P à L en opérant sur les y la substitution
> $$S = /y_1,\ldots,y_n,\ f_1,\ldots,f_n/,$$
> que nous appellerons la substitution correspondante à L.
> [Jordan, 1874, 52].

En termes contemporains, si
$$P = {}^tXY, \text{ alors } P.S = L = {}^tXSY,$$
cela revient à faire opérer à droite le groupe linéaire sur l'ensemble des formes bilinéaires
$$\{\omega P+Q/\ \omega\in\mathbb{C}, |\omega P+Q| \neq 0\}.$$
Jordan développe les propriétés de cette substitution S "correspondante" à un couple de formes.

- si T est une substitution "opérée sur les variables $x_1,\ldots,x_n$" (opération à gauche) alors la substitution correspondante sera ${}^tTS$ car
$$T.L = {}^t(LX)SY = {}^tX^tTSY = {}^tTS.P\ ).$$

- si T est une substitution opérant sur les "variables" x_i (à gauche) et si U est une substitution opérant sur les variables y_i (à droite) alors la substitution correspondante sera ${}^tTSU$.

- pour que l'opération de T et U n'altère pas la forme de P, il faut que ces substitutions soient inverses l'une de l'autre, ${}^tT = U^{-1}$.

---

[39] Thomas Hawkins [1977, 148] a proposé la reconstruction mathématique suivante de la méthode de Jordan :

> Weierstrass' proof of his main theorem had hinged upon showing that the family of forms $s\Phi-\Psi$, $|\Phi|\neq 0$ is equivalent to $sI-J$ where J is in Jordan canonical form. By Jordan's theorem, applied to the linear substitution $\Psi\Phi^{-1}$, there exists a non singular substitution U such that $U^{-1}(\Psi\Phi^{-1})U = J$. Thus $H(sPh-\Psi)K = SI-J$, where $H = U^{-1}$ and $K = \Phi^{-1}U$.

Ces propriétés permettent d'expliciter l'identité mathématique des problèmes de transformations de formes et de réduction des substitutions : l'opération sur "les deux séries de variables" qui laisse la forme P invariante correspond à l'opération de conjugaison des substitutions linéaires, $S \leftrightarrow U^{-1}SU$, définie dans le *Traité des substitutions* [Jordan, 1874,53]. La question de la transformation des couples de formes "se réduit" alors à celle de la composition des substitutions et il suffit, pour obtenir la réduction simultanée des formes P et L à leurs formes canoniques, de choisir la substitution U de telle sorte que la substitution USU^{-1} associée à L soit réduite à sa forme canonique [Jordan, 1874, 54] ([40]).

En montrant que le problème traité par Weierstrass en 1868 est un "problème identique" à celui de la réduction des substitutions linéaires, Jordan met-il fin à la question d'identité posé par la mise en relation des deux théorèmes ? Ni la reconnaissance d'analogies, ni l'explicitation d'une relation mathématique n'épuisent la question d'identité posée par la mise en relation de deux théorèmes, de deux théories, car des questions, implicites, tiennent à des représentations, des méthodes, des idéaux disciplinaires et des cultures mathématiques locales.

[40] En termes contemporains, la forme P est réduite à l'*identité* et la forme L à une forme réduite, dite *forme de Jordan* des formes bilinéaires. Jordan ne donne pas explicitement la forme réduite des couples de formes et se contente de ramener le problème à la réduction des substitutions.

ENCART 15.

Quelques précisions sur le calcul symbolique des formes de Frobenius.

On trouve la structure du mémoire de Frobenius de 1878 presque inchangée dans le traité de Mac Duffee de 1933 sur la théorie des matrices.

1. Multiplication.
   Définition du "produit" des formes bilinéaires.
   Propriétés du produit : distributivité, associativité, non commutativité.
   Conjugaison. Définition de la conjuguée d'une forme bilinéaire.
   Décomposition d'une forme en somme de forme sysmétrique et alternée.

2. Division.
   Définition de la forme adjointe. Définition de la forme réciproque.

3. Fonctions rationnelles.
   Polynômes et fractions rationnelles de formes bilinéaires.
   Polynôme minimal. Théorème de *Cayley Hamilton ;*
   Détermination de formes d'équation caractéristique donné : diviseurs élémentaires.

4. Différentiation.

5. Formes décomposables.

6. Equivalence.

Le mémoire débute par l'établissement des propriétés algébriques du produit symbolique des formes bilinéaires : associativité, distributivité, commutativité. La deuxième partie est consacrée à l'existence de la "réciproque" d'une forme bilinéaire, c'est-à-dire, une forme A étant donnée, des solutions de l'équation $AX = 0$ ([1]). Si le déterminant de A est non nul alors $AX = 0$ implique $X = 0$ et il est possible de définir la réciproque de la forme A pour le produit symbolique, notée A^{-1} et telle que $AA^{-1} = E$. La forme réciproque est déterminée explicitement à l'aide de la notion de forme adjointe définie par les "sous déterminants" de $|A|$: "soit $b_{\alpha\beta}$ le coefficient de $a_{\beta\alpha}$ dans le déterminant de la forme A", la forme $B = \sum b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ est appelée forme adjointe de A" [Frobenius, 1878, 349] ([2]). Soit $E = \sum x_\alpha y_\beta$, alors $AB = BA = |A|E$ et, "lorsque le déterminant de A ne disparaît pas, $X = B/|A|$ est la solution unique de l'équation $AX = E$, cette forme est appelée forme réciproque de A et notée A^{-1}" [1878, 350].
La notion de forme réciproque est appliquée à la résolution des systèmes d'équations linéaires. L'équation $AX = B$ aura pour solution, si $|A|$ ý 0, $X = A^{-1}B$; *si* $|A| = 0$, les solutions sont obtenues en extrayant le plus grand sous déterminant non nul et en ajoutant les solutions de $AX = 0$ ([3])
Si A et B commutent et si $|B|$ ý 0, le quotient de A par B, noté $\frac{A}{B}$, est défini comme correspondant à la forme AB^{-1}.

---

[1] Dans les années 1880, ce développement de Frobenius sera considéré comme précurseur de l'étude théorique des diviseurs de zéros dans les systèmes hypercomplexes.

[2] Il s'agit, en termes contemporains, de la matrice des cofacteurs.

[3] Ce résultat, qui porte aujourd'hui le nom de théorème de Rouché-Fontenay a été publié indépendamment dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* par Georges Fontenay et dans les *Comptes Rendus* par Eugène Rouché, professeur au conservatoire des arts et métiers [Rouché 1875 et 1880]. Frobenius attribuera la priorité du résultat à Rouché et Fontenay dans un mémoire publié dans le *Journal de Crelle* en 1902, "Zur Theorie der linearen Gleichungen".

III. ISSUES D'UNE QUERELLE: COMMUNICATION ET ORGANISATION THEORIQUE DE SAVOIRS MATHEMATIQUES (1874-1880).

Le choix de la date de 1880 pour clore la périodisation de ce chapitre tient à la publication de deux mémoires très influents de Frobenius qui fixent la théorie des formes bilinéaires pour plusieurs décennies. Le premier mémoire s'ouvre par les références à Kronecker et Weierstrass, le second se clôt par une référence à Jordan. Comme l'indique l'intitulé du premier mémoire, "Sur les substitutions linéaires et les formes bilinéaires" [Frobenius, 1878], les substitutions linéaires de Jordan et les formes bilinéaires de Kronecker sont traitées au sein d'une même théorie qui se présente donc comme une issue à la querelle de 1874 ([41]). La construction de cette théorie est une conséquence de la communication scientifique impulsée par la querelle de 1874 et dont les acteurs principaux sont Darboux et Frobenius ([42]).

---

[41] Un résumé de la théorie est donné par Frobenius par une communication lue à Zurich en 1881 et publiée en 1896 [Frobenius, 1896].

[42] La constitution d'une synthèse théorique par Frobenius vient également répondre à une remise en cause d'une propriété des déterminants utilisée par Weierstrass en 1868 dans sa démonstration du théorème des diviseurs élémentaires [Stickelberger, 1874 et 1879]. Cette motivation des mémoires de Frobenius a été mise en évidence par Thomas Hawkins [Hawkins, 1877].

> Another problem was caused by a lacuna in a proof by Weierstrass. His reduction to a canonical form rested upon a lemma and his proof of the lemma was based on a property of determinants that he subsequently discovered was insufficiently proved. Stickelberger's 1874 dealt with this problem. Kronecker believed he had a method for resolving it directly, which, on several occasions, he sought to defend in the fact of the criticisms offered by Stickelberger and Frobenius. The apparent difficulty of patching up Weierstrass' argument along the lines originally intended finally prompted Stickelberger [1879] to derive Weierstrass' main theorem by an ingenious rearrangement of the parts of the original proof, although at the expense of diminishing its formal appeal.

ENCART 16.

Les approches de Darboux et Frobenius sur le problème de Pfaff.

Pour une bibliographie et un éclairage historique des recherches sur le problème de Pfaff, consulter Forsyth, *Theory of differential equations,* 1re partie, chapitre III, ainsi que l'article de Weber dans *l'Encyclopédie des Sciences Mathématique*, pp. 322-333, tome II. Analyse, et de Cartan, "Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff", p. 239 :

> Le problème de Pfaff a été l'objet de nombreux travaux [....] ; les plus saillants sont ceux de Pfaff lui-même, puis de Grassmann, Natani, Clebsch, Lie, Frobenius et Darboux. Le problème dont il s'agit est, en somme, la résolution d'une équation aux différentielles totales, et il s'y est joint plus tard celui de la réduction d'une expression linéaire aux différentielles totales, ou *expression de Pfaff*, à une forme canonique au moyen d'un changement de variables convenable.
>
> [….] Frobenius, dans son beau Mémoire du Journal de Crelle, emploie une méthode toute nouvelle. Elle est fondée sur la considération de ce qu'il appelle le covariant bilinéaire associé à l'expression de Pfaff. Les conditions d'équivalences, c'est-à-dire la réduction possible à la même forme, de deux expressions de Pfaff sont alors les conditions d'équivalence algébrique de deux formes, linéaire et bilinéaire, par rapports aux éléments différentiels. [….] M. Darboux part du même covariant bilinéaire dont les propriétés d'invariance lui permettent de déduire du premier système auxiliaire commun à toutes les méthodes de réduction la classe de l'expression de Pfaff.

[Darboux ,1882, 1] ([4]) :

> La méthode que Pfaff a fait connaître en 1814, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, pour l'intégration d'une équation aux dérivées partielles à un nombre quelconque de variables indépendantes, a été longtemps négligée ; les belles découvertes de Jacobi et de Cauchy ont seules attiré l'attention des géomètres qui s'occupent de cette théorie.

La méthode de Pfaff transforme une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre en un système d'équations différentielles [Darboux, 1881, p. 2] :

> Considérons l'expression différentielle
>
> $$(1)\ X_1dx_1+...+X_ndx_n,$$
>
> où $X_1, \ldots, X_n$ sont des fonctions données de $x_1,\ldots,x_n$.
>
> Nous la désignerons par la notation θ_d […].

En 1876, Darboux pose le problème de transformation de l'équation de Pfaff comme relevant de la recherche d'une "forme canonique" sous l'opération d'une substitution linéaire [1881, 3] :

> Supposons maintenant que dans l'expression différentielle (1) on remplace les variables x_i par d'autres variables y_i ; en effectuant la substitution définie par les formules $x_i = \psi_i(y_1,\ldots y_n)$, […]

La méthode de transformation en des "formes réduites" auxquelles on peut ramener l'expression différentielle Θ_d repose sur l'expression des variables x_i comme fonctions d'un "paramètre indépendant *t*" et comme solutions d'un système différentiel "invariant" par les substitutions linéaires ψ_i [1881, p.5] :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = \lambda X_1 dt \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n = \lambda X_2 dt \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda X_n dt \end{cases}$$

C'est également pour la recherche de "formes canoniques intégrables" que Frobenius, en 1875, applique la théorie des formes bilinéaires de Kronecker [1874] à l'équation aux dérivées partielles $a_1dx_1+\ldots+a_ndx_n = \Sigma adx$ [Frobenius, 1875,250].

[4] La première partie du mémoire de Darboux [1882] est écrite en 1876 pour les cours aux collèges de France de Bertrand. Elle ne sera cependant pas publiée avant 1882 et Darboux reconnaît la priorité de Frobenius.

1. Le calcul symbolique de Frobenius comme unifiant l'algèbre des substitutions de Jordan et l'arithmétique des formes de Kronecker.

La synthèse de Frobenius déclare explicitement rechercher l'achèvement de la théorie arithmétique de Kronecker [1874] et y parvient paradoxalement en développant une idée propre à Jordan. Par la construction d'un calcul symbolique qui doit beaucoup à la postérité d'auteurs anglais comme Sylvester, Cayley et Smith, la théorie de Frobenius permet en 1880 de penser comme *équivalents* deux points de vues qui s'opposaient radicalement en 1874. D'une part, le mémoire écrit en mai 1877 et publié dans le tome 84 du *Journal de Crelle*, reprend l'ambition formulée par Kronecker en 1874 de développer une approche homogène de tous les problèmes relatifs à la théorie des formes, ou des faisceaux non singuliers de formes, quadratiques et bilinéaires [Frobenius, 1878, 343] ; d'autre part, le titre donné au mémoire, "Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen" reprend l'ambition qu'avait Jordan en 1874 de traiter formes et substitutions au sein d'une même théorie en exprimant la transformation des formes comme une combinaison de substitutions ([43]) :

> Wird zunächst nur die eine Reihe der Variabeln einer bilinearen Form einer linearen Substitution unterworfen, so gehen in die Ausdrücke Coefficienten der transformierten Form die Coefficienten der ursprünglichen Form in der nämlichen Weise ein wie die Substitution als eine Operation, die mit der Form vorgenommen wird, so erscheint in dem Resultate der Unterschied zwischen *Operandus* und *Operator* in derselben Weise verwischt, wie beim Multipliciren der zwischen dem *Multiplicandus* und dem *Multiplicator* oder bei der Rechnung mit Quaternionen der zwischen einem System zweier Strecken im Räume und der Operation des Streckens und Drehens, welche ein solches System in ein anderes überführt. Diese Erwägungen leiteten mich darauf, statt der Transformation der bilinearen Formen die Zusammensetzung der linearen Substitutionen zu behandeln.
> [Frobenius, 1878, 343].

[43] La référence aux quaternions de Hamilton conduit Frobenius a évoquer une généralisation de son calcul symbolique des formes à d'autres algorithmes de produits de "systèmes de nombres complexes", voir à ce sujet la partie II de ce travail.

ENCART 17.

Sur l'influence des travaux d'Hermite sur les formes quadratiques.

Le théorème suivant de Darboux, présenté dans le corps du texte [Darboux, 1874, 367],

> *Le nombre de carrés positifs de la forme ne peut changer que si λ passe par une racine de l'équation obtenue en égalant l'invariant à zéro, et dans ce cas le nombre de carrés positifs de la forme ne peut varier d'une quantité supérieure à l'ordre de multiplicité de la racine considérée.*

se présente comme une généralisation des travaux d'Hermite publiés dans le *Journal de Crelle* en 1857, "Sur l'invariabilité du nombre des carrés positifs et des carrés négatifs dans la transformation des polynômes homogènes du second degré". Ce mémoire est extrait d'une lettre adressée à Borchardt le 24 avril 1856, en réponse au mémoire de ce dernier sur l'équation des variations séculaires [Hermite, 1857, 429] :

> ....Dans le cas où vous le jugeriez convenable, vous pourriez publier la démonstration suivant, du principe découvert par Jacobi, et employé par lui à la démonstration des belles formules pour les conditions de réalité des racines des équations algébriques, que vous avez données dans votre Mémoire sur l'équation à l'aide de laquelle, etc. Rien d'ailleurs n'est plus simple que d'établir ce principe que j'énoncerai ainsi :
> *Quelque substitution réelle que l'on emploie pour réduire un polynôme homogène du second degré à une somme de carrés, le nombre des coefficients de ces carrés qui auront un signe donné sera toujours le même.*

Dans le mémoire intitulé, "Sur la théorie des formes quadratiques" [Hermite, 1853a], publié dans le *Journal de Crelle*, Hermite mêle la notion de mineurs d'une matrice élaborée par Sylvester en 1851 et les méthodes développées par Cauchy en 1829 pour les fonctions homogènes du second degré (voir l'encart 3_b du chapitre 2) afin de caractériser les substitutions "semblables" qui transforment en elle-même (la reprise de ce problème par Jordan dans les années 1880 sera abordée au chapitre 8). [Hermite, 1853a, 220] :

> Nous venons de résumer tout ce que nous avons pu jusqu'à présent tirer de l'étude algébrique des formules générales de substitutions par lesquelles une forme ternaire quelconque se change en elle-même. Si nous nous sommes un peu étendus sur ces considérations, c'est dans l'espoir de les lier un jour par de nouvelles recherches à l'étude arithmétique des substitutions semblables, que nous avons entreprises sous un point de vue si différent en le faisant dépendre de la réduction continuelle d'une forme ternaire définie à paramètres variables. Afin qu'on puisse mieux saisir ce qu'il y a de général dans ce point de vue, nous réunirons ici les deux questions d'équivalence des formes quadratiques indéfinies, traitées par le même principe arithmétique. [...].
> Deux formes sont dites *équivalentes* lorsqu'on peut obtenir l'une d'elles en faisant dans l'autre une substitution linéaire et homogène, à coefficients entiers et au déterminant *un*. C'est cela du moins que consiste l'*équivalence arithmétique.* En admettant des quantités quelconques pour les coefficients de la substitution, on aura la notion de ce qu'on peut appeler l'*équivalence algébrique.* Dans le cas des formes quadratiques à un nombre quelconque n d'indéterminées, et des formes du n^{ieme} degré, décomposables en n facteurs linéaires, un seul et même fait analytique simple détoule de cette notion. Ces formes, en effet, sont toujours algébriquement équivalentes ; les premières comme réductibles à une somme de n carrés $xB_0^2+x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2$, les secondes comme réductibles à un produit de n variables $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. De là résulte, pour ces deux genres de formes, l'existence d'un seul *invariant*, c'est-à-dire d'une seule fonction des coefficients, qui la reproduit dans une transformée obtenue par une substitution algébrique, multipliée par une puissance donnée du déterminant de cette substitution. S'il s'agit d'une forme quadratique à n indéterminées
> $$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}),$$
> nous définirons cet invariant comme le déterminant du système linéaire
> $$\frac{1}{2}\,\frac{df}{dx_0}, \frac{1}{2}\,\frac{df}{dx_1}, \frac{1}{2}\,\frac{df}{dx_2}, \ldots, \frac{1}{2}\,\frac{df}{dx_n}$$

[Traduction, F.B.]. Si l'on applique une substitution sur une seule suite de variables d'une forme bilinéaire, on obtient de nouveaux coefficients qui définissent une forme transformée comme si la substitution était une opération entreprise sur la forme elle-même. Il apparaît donc que la distinction entre *operandus* et *opérateur* s'efface dans le résultat de la même manière que, dans le cas de la multiplication, *multiplicandus* et *multiplicateurs* sont confondus ou encore de la même façon que, dans le calcul des quaternions, les systèmes de coordonnées de l'espace se confondent avec les opérations sur ces systèmes. Ces considérations m'ont conduit traiter la transformation des formes bilinéaires comme une composition de substitutions linéaires.

En référence au calcul des quaternions, la transformation linéaire des formes est traitée comme une opération symbolique de multiplication et Frobenius développe un "calcul symbolique", détaillée en encart 15, applicable aux formes comme aux substitutions puisque portant sur des "systèmes de n^2 valeur" :

Unter dem Bilde einer bilinearen Form fasse ich eine System von n^2 Grössen zusammen, die nach n Zeilen und n Colonnen geordnet sind.
[1878, 344].

[Traduction, F.B.] Sous l'appellation de forme bilinéaire j'entends un système de n^2 valeurs, ordonnées dans un système de n lignes et n colonnes.

Le "produit" de deux formes bilinéaires A et B, $P = \sum \frac{dA}{dy_\gamma} \cdot \frac{dB}{dx_\gamma}$, est une forme bilinéaire dont les coefficients "mêlent ensemble" ceux de A et B [Frobenius, 1878, 344] :

Ich werde z.B. eine Form mit einer Constanten (..) multipliciren, zwei Formen addieren, eine Form, deren Coefficienten von einem Parameter abhängen, nach demselben differentiren. Ich werde aber nicht zwei Formen mit einander multipliciren. aus diesem Grunde kann kein Missverständnis entstehen, wenn ich die aus A und B zusammengesetzte Form P [...] das *Product* der Formen A und B, diese die *Factoren* von P nenne.
[Frobenius, 1878, 344].

[Traduction, F.B.]. Je vais ici multiplier une forme par une constante, additionner deux formes et différentier une forme dont les coefficients dépendent d'un paramètre. Je ne vais cependant pas multiplier deux formes l'une par l'autre. Il ne doit donc pas y avoir d'ambiguïté, lorsque je désigne la forme P qui met ensemble A et B comme le produit des formes A et B, qui seront appelées des facteurs de P.

Le calcul symbolique permet de représenter les relations arithmétiques d'équivalence des formes définies par Kronecker en 1874 ([44]), la transformation

[44] Frobenius reprend la caractérisation de Kronecker [1874] des différents types de relations d'équivalence qui seront autant de cas particulier de la théorie arithmétique générale :

- On peut poser pour cette réduction que P doit être égal à Q.
- ou $P = Q'$ on dit que les substitutions sont cogredientes.
- ou $P = Q^{-1}$ on dit que les substitutions sont contragredientes et on dit alors que les formes sont semblables.

II.

On peut particulariser la nature de l'équivalence algébrique de deux formes, en exigeant que les coefficients de la substitution soient des quantités réelles. Sous ce point de vue, les formes dont nous nous occupons n'offrent plus une seule espèce chacune, et en supposant leurs coefficients des quantités réelles, on a les propositions suivantes : [...]

2° Les formes quadratiques à n indéterminées sont réductibles par des substitutions réelle à $n+1$ types distincts, dont l'un est la somme $x_0^2+x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2$ des carrés des indéterminées, les autres s'en déduisant en faisant précéder du signe *moins* le carré de l'une, de deux, etc. ou de toutes les indéterminées. Nous nommerons *indice* d'un type quadratique le nombre de carrés qui sont ainsi précédés du signe moins.

La proposition relative à l'équivalence réelle des formes décomposables en facteurs revient à la notion élémentaire des racines réelles ou imaginaires des équations algébriques ; celle qui concerne les formes quadratiques, à la distinction géométrique des diverses courbes ou surfaces du second degré, dans les cas de trois ou quatre indéterminées.

III.

[...] la recherche des conditions qui doivent être remplies par une forme pour qu'elle soit réductible à un type donné. Pour les formes quadratiques, M. Cauchy a donné l'expression suivante de ces conditions. Soient $f(x_0, x_1,\ldots,x_{n-1})$ la forme proposée, Δ_i l'invariant de la forme à i indéterminées, qu'on obtient en faisant

$$x_i=0,\ x_{i+1}=0,\ x_{i+2}=0,\ \ldots,\ x_{n-1}=0\,;$$

le nombre des termes négatifs de la suite

$$\Delta_1,\ \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ \frac{\Delta_3}{\Delta_2},\ldots\Delta_n/\Delta_{n-1}$$

donnera immédiatement l'indice du type auquel appartient la forme proposée. Le premier terme Δ_1 est le coefficient de x_0^2, et il faut remarquer que, si l'une des quantités Δ, Δ_i, par exemple, vient à s'évanouir, on devra considérer les deux termes Δ_{i-1}/Δ_i et Δ_i/Δ_{i+1} comme donnant, l'un un signe *plus* et l'autre un signe *moins.* Remarquons qu'en appliquant la même règle à une transformée de *f* les quantités Δ_1, Δ_2, ... changent toutes en général mais de manière que le nombre des termes positifs et négatifs de la nouvelle suite soit exactement le nombre des termes positifs et négatifs de l'ancienne.

de la forme A par les substitutions linéaires $x_\alpha = \sum p_{\alpha\beta} X_\beta$, et $y_\alpha = \sum q_{\alpha\beta} Y_\beta$ s'exprime en effet comme un produit symbolique de trois formes $P'AQ$ où $P = \sum p_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ et $Q = \sum q_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ ([45]) :

> Eine Form B heisst einer Form A *äquivalent*, wenn zwei Formen P und Q von nicht verschwindender Determinante bestimmt werden können, welche der Gleichung
>
> $$PAQ = B$$
>
> genügen, [....] P und Q heissen die *Substitutionen*, durch welche A in B übergeht. Alle Formen, die einer bestimmten äquivalent sind, bilden eine *Klasse* von Formen.
> [Frobenius, 1878, 361].
>
> [Ttraduction, F.B.]. On dit qu'une forme B est équivalente à la forme A, si il existe deux formes P et Q de déterminants non nuls vérifiant l'équation
>
> $$PAQ = B$$
>
> [...]. On dit que P et Q sont les *substitutions* par lesquelles A se transforme en B. Toutes les formes équivalentes entre-elles constituent une *classe* de formes.

Exprimés de manière symbolique, le problème de l'équivalence des faisceaux de formes $P(rE-A)Q = rE-B$,d'une part, et celui de la similitude des substitutions $P^{-1}AP = B$, d'autre part, sont susceptibles d'une même approche :

> Ich will nun kurz die Resultate zusammenstellen, welche die Herren Weierstrass und Kronecker für einige besonders wichtige Arten der Aequivalenz erhalten haben (B.M. 1868 und 1874.)
> Ist r ein veränderlicher Parameter, der in den Formen A und B nicht vorkomme, so heisst die Gesamtheit der Formen $rA-B$ eine *Formenschaar.* Zwei Schaaren $rA-B$ und $rC-D$ heissen äquivalent, wenn zwei von r unabhängige Substitutionen P,Q (von nicht verschwindender Determinante) so bestimmt werden können, dass
>
> $$P(rA-B)Q = rC-D;$$
>
> Oder dass gleichzeitig
>
> $$PAQ = C, PBQ = D$$
>
> ist.
> [Frobenius, 1878, 362].
>
> [Traduction, F.B.]. Je vais à présent réunir brièvement les résultats établis pour un cas particulier d'équivalence par messieurs Weierstrass et Kronecker. Soit r un paramètre variable indépendant des paramètres de A et B, on appelle *faisceau de formes* une expression de la forme $rA-B$. Deux faisceaux sont dits équivalents si l'on peut déterminer deux substitutions P et Q indépendantes de r et telles que
>
> $$P(rA-B)Q = rC-D$$
>
> ou que simultanément :
>
> $$PAQ = C, PBQ = D.$$

[45] La notation P' désigne la transposée ${}^tP$.

ENCART 18.

Le "calcul des systèmes linéaires" de Laguerre [1867].

Un mémoire par Laguerre en 1867 est présenté, à partir des années 1890, comme l'un des précurseurs de l'étude des systèmes hypercomplexes (cette historiographie des années 1890 est détaillé dans le chapitre 4). C'est notamment le point de vue de Poincaré dans sa notice sur la vie et les travaux de Laguerre [Poincaré, 1898, IX] :

> [...] et j'ai hâte d'arriver à un mémoire trop peu connu et dont la portée philosophique est très grande. Ce Mémoire, qui a pour titre : "Sur les systèmes linéaires", a été publié en 1867 dans le *Journal de l'Ecole Polytechnique*. Les substitutions linéaires ont acquis dans l'Analyse une telle importance qu'il nous semble aujourd'hui difficile de traiter une seule question sans qu'elles s'y introduisent. Laguerre devinait déjà, sans doute, l'avenir réservé à cette théorie et il en développait en quelques pages tous les points essentiels. Mais il ne se bornait pas là. Depuis le commencement du siècle, de grands efforts ont été faits pour généraliser le concept de grandeur ; des quantités réelles, on s'est élevé aux quantités imaginaires, aux nombres complexes, aux idéaux, aux quaternions, aux imaginaires de Gallois. Le domaine de l'analyse s'agrandissait ainsi sans cesse et de tous côtés ; Laguerre s'élève à un point de vue d'où l'on peut embrasser d'un coup d'œil tous ces horizons. Toutes ces notions nouvelles, et en particulier les quaternions, sont ramenées aux substitutions linéaires. Pour faire comprendre la portée de cette vue ingénieuse, qu'il me suffise de rappeler les beaux travaux de M. Sylvester sur ce sujet [c'est-à-dire les travaux des années 1880 sur les matrices, voir le chapitre 7]. Laguerre applique ces principes à la théorie des formes quadratiques et à celle des fonctions abéliennes, et il retrouve et complète sur divers points les résultats de M. Hermite. Sans doute, il n'y a dans tout cela qu'une notation nouvelle ; mais qu'on ne s'y trompe pas : dans les Sciences mathématiques, une bonne notation a la même importance philosophique qu'une bonne classification dans les Sciences naturelles. Le Mémoire que je cite en est d'ailleurs la meilleure preuve. Laguerre touche à toutes les branches de l'Analyse et force, pour ainsi dire, une multitude de faits sans aucun lien apparent à se grouper suivant leurs affinités naturelles.

Les "tableaux" utilisés par Cauchy et Hermite pour les systèmes linéaires ou les formes quadratiques, sont considérés par Laguerre "comme de véritables quantités soumises à toutes les opérations algébriques" [Laguerre, 1867, 221] :

> J'appelle, suivant l'usage habituel, *système linéaire* le tableau des coefficients d'un système de *n* équations linéaires à *n* inconnues. Un tel système sera dit *système linéaire d'ordre n* et, sauf une exception dont je parlerai plus loin, je le représenterai toujours par une seule lettre majuscule, réservant les lettres minuscules pour désigner spécialement les éléments du système linéaire.
> Ainsi par exemple, le système linéaire
> $$\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix}$$
> sera représenté par une seule lettre majuscule *A*. Dans tout ce qui suit, je considérerai ces lettres majuscules représentant les systèmes linéaires comme de véritables quantités, soumises à toutes les opérations algébriques.

Les "opérations algébriques" sont développées par Laguerre au sein d'un "préliminaire" exposant un "calcul des systèmes linéaires" devant servir à "diverses applications" comme des problèmes relatifs aux formes quadratiques, aux fonctions abéliennes et à la transformation des fonctions thêta. La seconde partie du mémoire, consacrée aux "fonctions numériques" de systèmes, contient le théorème dit de Cayley-Hamilton pour l'ordre 2 [Laguerre, 1867, 229] permettant d'exprimer la réciproque d'un système à l'aide de la fonction caractéristique :

$$(A-\rho)_0 = \frac{\varphi(\rho)}{A-\rho} \text{ ou bien comme } \varphi(A) \text{ est nulle,} \rho)_0\ ) \ \frac{\varphi(\rho)-\varphi(A)}{A-\rho}$$

Ce procédé sera repris par Frobenius en 1878 qui développera notamment la remarque de Laguerre selon laquelle "le degré de la fonction entière annulatrice peut être moindre que l'ordre du système."

Zwei Formen A und B heissen ähnlich, wenn sie durch *contragrediente* Substitutionen in einander transformiert werden können, wenn also eine Substitution P so bestimmt werden kann, dass

$$P^{-1}AP = B$$

[...] Da

$$P^{-1}EP = E$$

ist, so auch

$$P^{-1}(rE-A)P = rE-B.$$

Damit also, A und B ähnlich seien, ist nothwendig und hinreichend, dass die Schaaren $rE-A$ und $rE-B$ äquivalent sind, oder dass die Elementartheiler der charakteristischen Functionen von A und B übereinstimmen.
[1878, 363].
.

[Traduction, F.B.]. Deux formes A et B sont dites *semblables* si l'on peut transformer l'une en l'autre par des substitutions *contragredientes,* donc quand on peut déterminer une substitution P telle que :

$$P^{-1}AP = B.$$

[...] et comme

$$P^{-1}EP = E$$

on a également :

$$P^{-1}(rE-A)P = rE-B$$

Il est nécessaire et suffisant pour que A et B soient semblables que les faisceaux $rE-A$ et $rE-B$ soient équivalents, et donc que les diviseurs élémentaires des fonctions caractéristiques de A et B coïncident.

Comme nous l'avons vu au chapitre premier, la question de l'architecture de la théorie des formes bilinéaires était un des points de désaccord entre Jordan et Kronecker. Frobenius reprend le point de vue de Kronecker en présentant le principal problème de la théorie comme concernant les faisceaux de formes dont la caractérisation des formes semblables est un corollaire immédiat. Cette organisation théorique restera prédominante jusque dans les années 1905-1930, elle est indissociable du caractère primordial joué par les invariants et du rôle secondaire donné aux formes canoniques.

ENCART 19.

Une méthode essentielle de la théorie des formes bilinéaires : les fonctions rationnelles de formes de Frobenius.

Si *g(r)* est une "fonction entière" de *r*, les opérations symboliques de produit et de division permettent de définir la notion de fonction entière d'ordre *m* d'une forme *A*:

$$g(A) = a_0A^0 + \ldots + a_mA^m$$

et, de la même façon, d'introduire la notion de *"fonction rationnelle de A"*, $\frac{g(A)}{h(A)} = f(A)$ [Frobenius, 1878, 351]. La notion de "fonction entière" permet d'appliquer les méthodes polynomiales à la théorie des formes. Deux fonctions entières de formes jouent un rôle fondamental par la relation de divisibilité arithmétique qui les lient : la fonction caractéristique et la fonction *minimale*.

- La "fonction caractéristique" de A est définie comme le déterminant de la fonction entière de formes de degré 1, $rE\text{-}A$ [Frobenius, 1878, 352].

- La "fonction de plus petit degré" annulant *A* tient son existence de la propriété selon laquelle "il y au plus n^2 formes indépendantes, les puissances d'une forme ne sont donc pas toutes indépendantes" et il existe donc une fonction entière, ψ, de plus petit degré", telle que $\psi(A) = a_0A^0 + \ldots a_pA^p = 0$ [Frobenius, 1878, 356]. En termes contemporains, l'anneau des polynômes de formes est principal, l'idéal $\{\psi(A) = 0/ \psi \in K[X]\}$ a donc un élément minimal ψ que l'on nomme polynôme minimal de *A*.

Les exemples suivants illustrent l'effectivité de la méthode portée par la notion de fonction entière de formes :

- **La caractérisation des formes dont une puissance s'annule (les formes *nilpotentes*).**

Soit $\psi(X) = 0$ l'équation de degré minimale qui annule la forme *A*, $\psi(r)$ est un diviseur de rP^p, les racines de ψ et de φ sont communes et $\varphi(r = r^n$ [1878, p. 357] :

> Damit eine Potenz einer Form verschwinde, ist northwendig und hinreichend, dass ihre charakterisitche Function gleich r^n ist.

- **La caractérisation des formes *X* dont les puissances sont en nombre fini.**

Si il existe λ tel que $X^{x+\lambda} = X^x$, alors $X^x(X^\lambda\text{-}E) = 0$, la fonction de degré minimale divise $r^x(r^\lambda\text{-}1)$ et s'annule pour $r = 0$ et les racines λ^e de l'unité. Si *a* est une racine de l'unité, caractéristique d'ordre α, alors cette racine sera d'ordre $\alpha\text{-}1$ pour les mineurs de $\varphi(r)$: "Pour que les puissances d'une forme soient en nombre fini, il est nécessaire et suffisant que le déterminant caractéristique ait pour racines O et les racines de l'unité et de même pour ses diviseurs élémentaires**.**" [1878, p. 358].

- **La détermination des coefficients de la forme adjointe, et par là de la forme réciproque, par les seuls coefficients de la fonction caractéristique.**

Si

$$\frac{\varphi(r) - \psi(s)}{r - s} = \varphi_0(r)s^{n-1} + \varphi_1(r)s^{n-2} + \ldots + \varphi_{n-1}(r)$$

alors comme $\varphi(A) = 0$:

$$\frac{E}{rE - A} = \frac{\varphi_0(r)}{\varphi(r)}A^{n-1} + \frac{\varphi_1(r)}{\varphi(r)}A^{n-2} + \ldots$$

la forme adjointe s'écrit : $\frac{\varphi(r)E}{rE - A} = \varphi_0(A)r^{n-1} + \varphi_1(A)r^{n-2} + \ldots + \varphi_{n-1}(A)$.

[Frobenius, 1878, 358].

2. Des héritages mêlés, une théorie unificatrice : la communication Darboux-Frobenius.

Les références bibliographiques des travaux de Frobenius témoignent du caractère unificateur de la nouvelle théorie des formes bilinéaires. Des travaux longtemps considérés comme distincts apparaissent désormais dans le champ des applications d'une même théorie, Frobenius fait ainsi référence à la mécanique des variations séculaires des planètes (Cauchy, Borchardt, Weierstrass), à la géométrie analytique (Cauchy), aux substitutions linéaires (Hesse, Jordan), aux formes bilinéaires (Jacobi, Christoffel, Weierstrass, Kronecker, Jordan), aux formes quadratiques (Kronecker, Rosanes, Darboux), à la théorie des invariants (Bachmann, Hermite, Cayley, Laguerre) et aux équations aux dérivées partielles (Darboux). Le nom de Gaston Darboux intervient en référence aux premiers travaux de Frobenius des années 1875-1880 sur des questions relatives aux équations aux dérivées partielles, très proches de ceux de Darboux ([46]). Le problème de Pfaff, problème d'équations aux dérivées partielles linéaires nommé d'après les travaux publiés en 1814 par Johann Pfaff et détaillé en encart 16 ([47]), suscite notamment des publications simultanées de résultats similaires par les deux savants [Darboux, 1882], [Frobenius, 1875] ([48]). La théorie des formes bilinéaires donne une "nouvelle façon de formuler le problème de Pfaff" [Frobenius, 1875, 230] et Frobenius définit notamment la relation arithmétique "d'expressions différentielles équivalentes" et les travaux sur les classes d'équivalence des expressions différentielles sont à l'origine de la synthèse théorique de la théorie des formes bilinéaires publiée en 1878 - 1879.
Darboux présente un "Mémoire sur la théorie algébrique des formes quadratiques" à la séance du 11 mars 1874 de la *Société Mathématique de France.* Ce mémoire est publié dans le *Journal de Mathématiques* à la suite du mémoire de Jordan [1874a] qui est au cœur de la controverse avec Kronecker ; les deux mémoires se complètent et tous deux concernent des théorèmes de Weierstrass, d'une part Jordan propose une nouvelle théorie des faisceaux de formes bilinéaires abordés par Weierstrass en 1868, d'autre part Darboux propose une nouvelle démonstration du résultat de 1858 sur les faisceaux de formes quadratiques. Darboux élabore une "méthode qui lui est propre" [Drach et Meyer, 1907, 426], en mêlant les influences de travaux d'Hermite [1853] sur

[46] Les premiers travaux d'analyse de Frobenius sont rarement pris en compte par l'historiographie qui retient surtout la première publication de théorie des groupes de 1879 [Wussing, 1970, 198], [Curtis, 1999], [Haubrich, 1998]. Consulter Frobenius [1875] (problème de Pfaff), [1891] (fonction potentielle), [1893] (paramètre différentiel des surfaces) et, de manière générale, l'essentiel du premier tome des *Œuvres* de Frobenius.
Au sujet des travaux d'analyse de Darboux, consulter [Gispert, 1983].

[47] Voir J Dhombres, "La méthode fonctionnelle chez J F Pfaff : une filiation leibnizienne", *in Un parcours en histoire des mathématiques : travaux et recherches* (Nantes, 1993), 97-147.

[48] La monographie de Darboux sur le problème de Pfaff n'est publiée qu'en 1882, son contenu est cependant écrit et communiqué dès 1876.

ENCART 20.

La généralisation par Frobenius du lemme de Smith et l'effectivité du calcul symbolique des formes.

Le résultat clé qui permet la généralisation du lemme de Smith des formes entières aux faisceaux de formes, énonce que, lorsque la forme polynomiale A est de degré 1, les formes bilinéaires polynomiales P et Q qui assurent la réduction à la forme normale $PAQ = F$ peuvent être remplacés par des formes P_0 et Q_0 dont les coefficients sont "indépendants des paramètres" [1879, 541] :

> Wenn zwei Formen von nicht verschwindender Determinante, welche einen Parameter im ersten Grade enthalten, dieselben Elementartheiler besitzen, so können sie durch Substitutionen in einander transformiert werden, deren Coefficienten von dem Parameter unabhängig sind.
>
> [Traduction, F.B.]. Quand deux formes de déterminants non nuls, fonctions de premier degré d'un paramètre, ont les même diviseurs élémentaires, alors on peut les transformer l'une en l'autre par des substitutions dont les coefficients ne dépendant pas des paramètres.

La preuve de Frobenius illustre la portée démonstrative du calcul symbolique. Soit $A = A_0r + A_1$ et $B = B_0r + B_1$ deux formes polynomiales du premier degré de rang n. Si les formes ont mêmes diviseurs élémentaires alors elles sont équivalentes et on peut poser $P_0AQ_0 = B$ où les coefficients de P_0 et Q_0 sont des fonctions entières de r. Les coefficients des substitutions inverses $R_0 = P_0^{-1}$, $S_0 = Q_0^{-1}$, sont des fonctions entières *de r* et on a les équations *:*

$$P_0A = BS_0 \text{ et } AQ_0 = R_0 B.$$

La *division euclidienne* permet de déterminer P, P_1, R, R_1, S, S_1 tels que :

$$P_0 = BP_1 + P,\ Q_0 = Q_1B + Q\ ,\ R_0 = AR_1 + R \text{ et } S_0 = S_1A + S$$

Et ces nouveaux *polynômes* de formes P, P_1, R, R_1, S, S_1 sont de degré inférieur à 1, ils ne contiennent donc plus le paramètre r. Or

$$P_0A = BS_0 = BP_1A + PA = BS_1A + BS$$

et

$$B(P_1\text{-}S_1)A = BS\text{-}PA$$

Frobenius démontre l'égalité $P_1 = S_1$. Si P_1-S_1 n'était pas nul, l'équation précédente mettrait en relation un polynôme de degré deux (à gauche) et de degré 1 à droite. On en déduit que

$$BS = PA$$

Enfin $QS = E$ car

$$E = Q_0S_0 = Q_0S_1A + Q_0S = Q_0S_1A + Q_1BS + QS$$

donc

$$E\text{-}QS = Q_0S_1A + Q_1PA = (Q_0S_1 + Q_1P)A$$

Si $Q_0S_1 + Q_1P$ n'était pas nul cette dernière équation mettrait en relation un terme de premier degré et un terme indépendant de r. Enfin, comme S est la forme réciproque de Q :

$$PAQ = B.$$

les formes quadratiques et de travaux sur les intersections de surfaces ([Sylvester, 1851], [Painvin, 1868]) ([49]). Les travaux d'Hermite dont il est question ici sont marqués par une forte influence des premières recherches de Sylvester et Cayley sur les invariants (encart 17), en 1874, Darboux voit notamment un germe la notion de diviseur élémentaire de Weierstrass dans les invariants introduits par Sylvester en 1851 pour caractériser les intersections de coniques et quadriques et, en général, des couples de formes quadratiques

$$(f(x_1,\dots,x_n),\ x_1^2+\dots+x_n^2).$$

L'invariant qu'est le déterminant

$$|f(x_1, x_2,\dots,x_n)-\lambda(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)|$$

ne permet pas de distinguer les différents types d'intersections et il faut donc aller au-delà du déterminant en considérant les "mineurs" d'une "matrice" ([50]). Sylvester introduit en 1851 la notion de *matrice* comme *mère des mineurs*, un tableau dont sont extraits les sous déterminants ; en 1874, Darboux reprend la notion de mineur de Sylvester qui, "seule permet d'écarter la difficulté relative aux racines multiples" ([51]) :

> Le nombre de carrés positifs de la forme ne peut changer que si λ passe par une racine de l'équation obtenue en égalant l'invariant à zéro, et dans ce cas le nombre de carrés positifs de la forme ne peut varier d'une quantité supérieure à l'ordre de multiplicité de la racine considérée.
> C'est le théorème qu'il s'agissait d'établir ; mais il donne lieu à une remarque essentielle : c'est que, dans son énoncé, on pourrait entendre par ordre de multiplicité d'une racine, non plus le nombre des dérivées, mais le nombre des fonctions $\Phi,\dots,\Phi_n$ qu'annule cette racine, quels que soient les arbitraires figurant dans ces fonctions. Ainsi une racine multiple pourra être considéré comme simple si elle n'annule pas tous les mineurs du premier ordre ; comme double si, annulant tous les mineurs du premier ordre, elle n'annule pas tous ceux du second et ainsi de suite.
> Faisons quelques applications de ce théorème. Soit d'abord la forme quadratique
>
> $$f(x_1, x_2,\dots,x_n)-\lambda(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2).$$
>
> L'équation qu'on obtient en égalant l'invariant à zéro a été traitée d'abord par Cauchy, puis par une foule de géomètres : MM. Borchardt, Sylvester, etc. On déduit la réalité de ses racines du théorème que nous venons d'établir [....]. De plus, si elle a des racines multiples, une racine d'ordre p devra annuler tous les mineurs d'ordre $p-1$ de l'invariant. La méthode de M. Sylvester seule permet de

---

[49] Le mémoire de Darboux concerne avant tout les surfaces, et sa méthode est insérée par Gundelfinger dans la troisième édition de la géométrie analytique de Hesse [Hesse, 1876]. Une description détaillée du travail de Darboux sort de la problématique de ce travail. Voir la description donnée par Meyer et Drach dans *L'encyclopédie des sciences mathématiques*, [Drach et Meyer, 1907, 426-435].

[50] Les travaux de Sylvester de 1851 sont détaillés dans le cadre d'une étude des travaux anglais des années 1850-1860 proposée au chapitre 4.

[51] Les fonctions Φ_p sont des invariants définis par [Darboux, 1874, 349] à partir des mineurs de la forme quadratique. L'emploi de la notion de mineur est indissociable de l'originalité de la méthode de Darboux qui associe une décomposition de la forme quadratique à des extractions de déterminants. Voir à ce sujet la conclusion de la deuxième partie pour une discussion sur les méthodes de décompositions associées aux représentations par tableaux.

ENCART 21.

Les travaux d'Henry John Stephen Smith sur les systèmes de congruences à coefficients entiers.

Le mémoire intitulé « *On systems of linear indeterminate equations and congruences* », communiqué par Smith à la Royal Society le 31 Janvier 1861, paraît en septembre dans les *Philosophical Transactions* [1861] et énonce une condition de résolubilité des systèmes linéaires de congruences à coefficients entiers. Le passage suivant est extrait du résumé paru dans les *Proceedings of the Royal Society,* vol. xi, pp 87-89 :

> [...], the following criterion is obtained for the resolubility or irresolubility of indeterminate linear systems :
>
> A linear system is, or is not, resoluble in integral numbers, according as the g.c.d. of the determinants of the matrix of the system is, or is not, equal to the corresponding g.c.d. of its augmented matrix'.
>
> [The matrix of a linear system of equations is, of course, the rectangular matrix formed by the coefficients of the indeterminates ; the augmented matrix is the matrix derived from that matrix, by adding to it a vertical column composed of the absolute terms of the equations.]
>
> [...] A system of linear congruences may, of course be regarded as a system of linear indeterminate equations of a particular form ; and the criterion for its resolubility is implicitly contained in that just given for any indeterminate system. But its criterion may be expressed in a form in which its relation to the modulus is clearly seen.
>
> Let $A_{i,1}x_1+....+A_{i,n}x_n \equiv A_{i,n+1} \text{ mod } M,\ i = 1,2,3,...,n$ represent a system of congruences ; let us denote by $\nabla_n, \nabla_{n-1}, ..., \nabla_1, \nabla_0$, the greatest common divisors of the determinant, first minors, &c., of the matrix of the system [so that, in fact, ∇_n is the determinant itself, ∇_1 the greatest common divisor of the coefficients $A_{i,j}$ and $\nabla_0 = 1$] ; by $D_n, D_{n-1},..., D_1, D_0$ the corresponding members for the augmented matrix ; let also δ_i and d_i respectively represent the greatest common divisors of M with $\frac{\nabla_i}{\nabla_{i-1}}$ and of M with $\frac{D_i}{D_{i-1}}$ and put
>
> $$m = d_n \times d_{n-1} \times ... \times d_1$$
> $$\mu = \delta_n \times \delta_{n-1} \times ... \times \delta_1$$
>
> Then the necessary and sufficient condition for the resolubility of the system is
>
> $$M = \mu$$

La postérité du mémoire de Smith dans la théorie des formes bilinéaires de Frobenius sera due à un résultat intermédiaire, le *lemme de Smith*, énoncé pour exprimer un critère de résolubilité et la forme générale des solutions des systèmes de congruences. Si le cas des systèmes linéaires se résout par l'introduction des invariants que sont l'"index" d'un système et les premiers mineurs du déterminant ([5]), ces invariants sont insuffisants pour le cas des systèmes de congruences , qui nécessite l'introduction d'"invariants arithmétiques" :

> The consideration of sets of fundamental solutions of linear systems is also in use in the theory of indeterminate systems containing terms not affected by any indeterminate.
>
> Let $A_{i,0} + A_{i,1}\, x_1 + ... + A_{i,n+m}\, x_{n+m} = 0$ (56)
>
> $i = 1,2...n$ represent such a system.
>
> Its general solution will assume the form $x_k = a_k + \sum \mu_\theta a_\kappa$

---

[5] L'index de Smith est ce que Frobenius appellera le *rang* d'un système. Il est défini comme l'ordre du déterminant non nul maximal extrait d'une matrice :

> 4. Let
>
> $$A_{i,1}x_1 + A_{i,2}\, x_2 + ... + A_{i,n+m}x_{n+m} = 0$$
>
> $i = 1,2,3,....,r$
>
> represent a system of indeterminate equations in which the matrix is $\|A\|$. We shall suppose that the determinants of $\|A\|$ are not all equal to zero, i.e ; that the system is independent; so that its index of indeterminates (or the excess of the number of indeterminates above the number of really independent equations) is m.

démontrer ce dernier point et d'écarter la difficulté relative aux racines multiples, qui se présente dans la méthode de Cauchy et de M. Borchardt. [Darboux, 1874, 367].

S'inspirant des méthodes d'Hermite ([Hermite, 1853a et 1857]), Darboux présente le problème de l'étude d'un couple de formes comme une généralisation de la loi d'inertie et considère donc un couple comme une unique forme quadratique polynomiale ([52]:

Considérons une forme quadratique homogène à n variables

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n),$$

que nous écrirons aussi de la manière suivante :

$$\Sigma_i\ \Sigma_j\ a_{ij}x_ix_j,$$

[…] Nous supposerons, suivant l'usage $a_{ji} = a_{ij}$; par suite un terme rectangle se trouvera deux fois dans la somme précédente avec les même coefficient, et l'expression développée de la forme sera

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\dots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+\dots$$

[…]

Cela posé, réduisons, par les procédés connus, f à une somme de carrés de la forme suivante :

$$f=\varepsilon_1\,(x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n)^2+\ \varepsilon_2\,(x_2+\beta_3x_3+\beta_nx_n)^2+\dots+\varepsilon_{n-1}(x_{n-1}+\ \lambda_nx_n)^2\ +\varepsilon_nx_n^2$$

on trouvera, comme l'a prouvé M. Hermite,

$$\varepsilon_1 = \Delta_{n-1},\ \dots,\ \varepsilon_{n-i} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}\ ,\ \varepsilon_n = \frac{\Delta}{\Delta_1}$$

et par suite on aura

$$f = \Delta_{n-1}\,X_1^2 + \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}}\,X_2^2+\dots+\frac{\Delta}{\Delta_1}X_n^2$$

$X_1,\ X_2,\dots,X_n$ étant des fonctions linéaires des n variables $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$. Il résulte de cette décomposition de f que le nombre des carrés positifs de la forme est égal à celui des permanences de la suite

$$\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \dots,\ \Delta_{n-1},\ 1\ ;$$

quant aux fonctions linéaires X_i elles ont été mises sous la forme de déterminants par divers géomètres et notamment par M. Weierstrass. [Darboux, 1874, 347-348].

En 1874, Darboux mêle au théorème de Weierstrass sur les formes bilinéaires des méthodes issues d'un courant de travaux sur les formes quadratiques représenté par Hermite et portant la postérité d'idées propres aux auteurs anglais comme les mineurs des matrices de Sylvester ([53]). L'héritage d'Hermite amène les références d'autres auteurs comme Laguerre [1867], qui sera présenté par Frobenius comme ayant élaboré le "calcul symbolique pour les substitutions et les formes bilinéaires" (encart 18) [Frobenius, 1880, 1] et les anglais Cayley, Sylvester et Smith dont Frobenius généralise aussi bien les résultats que les méthodes de calcul symbolique des matrices.

[52] Notation : $\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \dots,\ \Delta_{n-1},\ 1$ sont les mineurs du déterminant caractéristique.

[53] Ce rôle essentiel de Darboux, et par conséquent d'Hermite, n'est pas mentionné par l'histoire des diviseurs élémentaires de [Hawkins, 1977]. Il est pourtant à l'origine de la mise en relation des formes bilinéaires berlinoises et des travaux sur les matrices de Cayley et Smith.

[...] Whenever therefore the proposed system is resoluble, its complete solution involves m indeterminates, but in order that it should be resoluble, a certain condition must be satisfied by its coefficients. This condition is that the greatest divisors of its augmented and unaugmented matrices must be equal. We shall call these divisors D and D_0 respectively, representing $\|A\|$ and $\|A_0\|$. [...]This criterion is not immediately applicable if the system (56) [le cas de la congruence] be not independant, *i.e* ; if the determinants of its augmented matrix $\|A\|$ be all equal to zero. But it may be applied to any independent system equivalent to the proposed system and deduced from it. If we represent by D_k the greatest divisor of the matrix deduced from the matrix of (59) by omitting from it the column $A_{1,k}$, $A_{2,k}$,...., $A_{n,k}$, we may enunciate the following proposition :

« In every solution of the system (59), the value of x_k is divisible by $\frac{D_k}{D}$ and, conversely, a solution of that system can always be assigned in which x_k shall have any given value divisible by $\frac{D_k}{D}$ '.

Smith a été récemment nommé « Savilian professor of geometry » à Oxford [Pearson, 1888, XXV] et, occupant la chaire fondée en 1617 par Henry Savile, l'ancien étudiant du Balliol College tiend une position institutionnelle importante dans un climat tendu de réformes de l'enseignement, presque une "guerre" [Bowen, 1888, xlviii] ([6]). La carrière de Smith est marquée par son rôle actif dans la réforme du système éducatif anglais [Robinson, 1888, IIV] ([7]). Les travaux de théorie de nombre de Smith sont indissociables d'efforts de réforme visant à ce que les "mathématiques pures" en Angleterre n'aient pas à "rougir" de celles du continent [Smith, cité dans Glaisher, 1888, lxxxv]:

I am perhaps a little more willing than you are to consider favourably attempts to improve Euclide, though I have a great dread of the Association for the Improvement of Geometrical Teaching. Further [...], I am for having more professors, with more work, and more pay. [...]. All that we have, one may say, comes to us from Cambridge ; from Dublin has not at late quite kept up the promise she once gave. Further, I do not think that we have anything to blush for in comparison with France ; but France is at the lowest ebb, is conscious that she is so, and is making great efforts to recover her lost place in Science.

Again, in Mixed Mathematics, I do not know whom we need fear : Adams, Stokes, Maxwell, Tait, Thomson will do to put against any list, even though it may contain Helmholtz and Clausius. But in

[6] Lord Bowen résume la situation à Oxford dans le *Spectator* du 17 fevrier 1883 [Bowen, 1888, xlviii] :

These were the days when Oxford, always passing through some phase or other, was entering on a new situation. The tractarian movement had subsided, but the University was not at rest. A reforming Parliamentary Commission was troubling the waters. The old system of close Scholarships and Fellowships was slowly giving way, and like the rotten boroughs of a past political period, the close preserves of the colleges were being either extinguished, or thrown open to public competition. But Oxford was still conservative at heart. Leaders of the old school and their followers held the university pulpits, dominated congregation, monopolized the best preferment, resisted to the best of their powers all local change, and were ready on provocation to ostracize unorthodox reformers for being, like Socrates, the corrupters of youth. Married Fellows were as yet unknown; it had not become necessary to build whole suburbs of semi detached villas to receive the feminine colonists of the future. But there was a stir and an agitation throughout the Academic world which the sense of changes, present and to come had produced. University politics and polemics were, as always, of absorbing interest. Mansel and Goldwin Smith tilted against each other in debate before an admiring and competent academic audience. Oxford was in fact, at war – a war, it is true, polite, polished, and courteous.

[7] Membre de la "Royal Comission on Scientific Education" de 1870 à 1874 [Pearson, 1888, p. XXVII], Smith fait de la réforme de l'enseignement le thème de son adresse à la British association dont il préside la section mathématique en 1873. Smith milite pour une réforme devant mener à un enseignement de la géométrie plus accessible à l'étudiant et s'inspirer des mathématiques contemporaines sans perdre la rigueur euclidienne, [Smith, 1873b, 686] :

[...] a middle course between the views of the innovators who would uphold the absolute monarchy of Euclid, or, more properly, of Euclid as edited by Simpson, and the radicals who would dethrone him altogether. One thing at least they have not forgotten, that geometry is nothing if it be not rigorous, and that the whole educational value of the study is lost if strictness of demonstration be trifled with.

3. Les procédés rationnels de Frobenius comme achèvement de l'idéal d'effectivité de Kronecker.

Dans sa publication de 1879, intitulée "Theorie der linearen Formen mit ganzen coefficienten", Frobenius caractérise les classes de formes par des invariants polynomiaux dont la détermination ne nécessite que des "opérations rationnelles" et se présente donc comme un achèvement de l'idéal d'effectivité de Kronecker mis en évidence au chapitre premier ([54]).

> Durch rationale Operationen kann man also entscheiden, ob zwei gegebene Formen äquivalent sind oder nicht, und durch rationale Operationen kann man im ersteren Falle alle Substitutionen finden, welche die eine in die andere transformieren. Dagegen gehen die Beweise, die mir für den Satz des Herrn Weierstrass bekannt sind, sämtlich durch irrationale Operationen hindurch; denn sie beruhen auf der Transformation von A in eine reducirte Form, deren Coefficienten von den Wurzeln der Gleichung $|a_{\alpha\beta}| = 0$ abhängen. Ich hatte mir daher schon vor langer Zeit die Aufgabe gestellt, für jenen Satz einen Beweis zu finden, in welchem nur rationale Operationen vorkommen.
> [1879, 482].
>
> [Traduction, F.B.]. On peut déterminer par des opérations rationnelles si deux formes sont équivalentes ou non, et dans le premier cas déterminer toutes les substitutions qui les transforment l'un en l'autre. Toutes les démonstrations qui me sont connues du théorème de Weierstrass emploient cependant des opérations irrationnelles, elles reposent effet sur la réduction à une forme normale dont les coefficients sont des racines de l'équation $|a_{\alpha\beta}| = 0$. Je me suis fixé depuis longtemps déjà la tâche de trouver une démonstration employant uniquement des opérations rationnelles.

La démonstration de Frobenius généralise un énoncé arithmétique de Smith sur les systèmes linéaires d'équations à coefficients entiers [Smith, 1861], ce résultat, tel que le reformule Frobenius, énonce que toute forme bilinéaire A à coefficients entiers de rang l est équivalente à la forme :

$$F = f_1x_1y_1 + f_1f_2x_1y_2 + \ldots + f_1f_2f_3\ldots f_lx_ly_l.$$

La similitude des propriétés arithmétiques des entiers et des polynômes permet une généralisation du résultat de Smith aux formes à coefficients polynomiaux ([55]). L'encart 21 détaille la manière dont les quotients successifs des invariants

---

[54] Les preuves auxquelles fait allusion Frobenius dans l'extrait suivant sont celles de Weierstrass [1868], Kronecker [1874], Jordan [1871 et 1874], Hamburger [1871] et Darboux [1874].

> [55] La généralisation des propriétés arithmétiques des entiers se développe à la suite des travaux de Gauss pour la démonstration de la loi biquadratique [1832] dans laquelle la factorisation d'un entier en facteurs premiers et la division euclidienne sont appliqués aux *entiers de Gauss* $a+ib$. L'extension des propriétés arithmétiques des entiers à d'autre quantités est développée pour l'étude arithmétique des nombres algébriques [Dirichlet, 1841] et les propriétés arithmétiques des polynômes sont utilisées par Dedekind pour la

Pure Mathematics I must say that I think we are beaten out of sight by Germany ; and I have always felt that the *Quaterly Journal* is a miserable spectacle, as compared with Crelle or even Clebsch and Neumann. Cayley and Sylvester have had the lion's share of the modern Algebra (but even in Algebra the whole of the modern theory of equations, substitutions, &c., is French and German). But what has England done in Pure Geometry, in the Theory of Numbers, in the Integral Calculus ? What a trifle the symbolic methods, which have been developed in England are compared with such work as that of Riemann and Weierstrass ?

Les rapports sur la théorie des nombres présentés par Smith à la British Association entre 1859 et 1865 participent d'un effort visant à rendre disponible aux savants anglais l'essentiel des travaux développés sur le continent au XIX[e] siècle, selon une démarche qui n'est pas sans rappeler les efforts du "network" de Cambridge pour combler qui s'était creusé au XVIII[e] siècle entre mathématiques anglaises et mathématiques européennes. C'est dans ce contexte qu'est publié en 1861 le mémoire sur les congruences linéaires, afin d'appuyer par des développements techniques des résultats arithmétiques publiés dans les rapports sur la théorie des nombres [Smith, 1861] :

The present communication relates to the theory of the solution in positive and negative integral numbers, of systems of linear indeterminate equations, having integral coefficients. In connexion with this theory, a solution is also given of certain problems relating to rectangular matrices, composed of integral numbers, which are of frequent use in the higher arithmetic. Of this kind are the two following :

'Given (in integral numbers) the values of the determinants of any rectangular matrix of given dimensions, to find all the matrices, the constituents of which are integers, and the determinants of which have those given values.

'Given any rectangular matrix, the determinants of which have a given number D for their greatest common divisor, to find all the supplementary matrices, which, with the given matrix form square matrices, of which the determinant is D.

L'originalité du mémoire de Smith, par rapport aux travaux des mathématiciens continentaux auxquels ils se réfèrent comme Gauss et Hermite, tient à l'emploi de la "théorie des matrices de Cayley" de 1858 pour représenter les systèmes linéaires (voir au sujet de la théorie de Cayley, le chapitre 4). La première partie du mémoire expose la théorie des matrices et la généralise aux "matrices rectangulaires". Entre les mains de Smith, la théorie des matrices se présente comme une méthode de calcul symbolique permettant d'exprimer les transformations d'un système linéaire - opérations sur les lignes et les colonnes - comme des multiplications symboliques de systèmes :

Let $\|P\|$ be a square matrix of the type $n\times n$, and $\|Q\|$ a matrix of the type $n\times(n+m)$ (where $m\geq 0$) we shall understand by the matrix compounded of $\|P\|$ and $\|Q\|$, the matrix $\|X\|$ of the same type as $\|Q\|$, the constituents of which are defined by the equations

$$X_{i,j} = P_{i,1}Q_{1,j} + P_{i,2}Q_{2,j} + \dots + P_{i,n}Q_{n,j} \ ,$$

And we shall write

$$\|X\| = \|P\| \times \|Q\|$$

In this equation $\|Q\|$ is said to be premultiplied by $\|P\|$, and $\|P\|$ to be postmultiplied by $\|Q\|$.

Le calcul symbolique permet de généraliser la décomposition arithmétique en facteurs premiers des nombres aux systèmes linéaires. Des considérations arithmétiques, attribuées à Gauss pour le cas $n = 2$ (*Disq. Arit*. 234) permettent la décomposition d'une matrice K donnée, de type $n(n+m)$, en un produit d'une "matrice première" ("prime matrix") A de même type et d'une matrice carrée k de type $n.n$ telles que $|K| = k|A|$. Cette décomposition arithmétique des matrices est au cœur de la démonstration du lemme qui fera la postérité du mémoire de Smith chez Frobenius.

arithmétiques introduits par Smith s'identifient aux diviseurs élémentaires tels que définis par Kronecker comme *p.g.c.d.* de sous déterminants ([56]) :

> Die Sätze, welche ich über System A entwickelt habe, deren Elemente $a_{\alpha\beta}$ ganze Zahlen sind, gelten auch für solche, deren Elemente ganze Functionen eines Parameters r sind. [Frobenius, 1879, 538] .
>
> [Traduction, F.B.]. La proposition que j'ai énoncée pour un système dont les $a_{\alpha\beta}$ sont à coefficients entiers s'applique également aux systèmes dont les éléments sont des fonctions entières d'un paramètre *r.*

Comme Darboux en 1874, Frobenius considère un faisceau de formes comme une seule forme polynomiale. Les faisceaux sont alors présentés comme cas particulier d'une notion plus générale de f*onction entière de formes* dont la définition découle des opérations symboliques introduites par Frobenius en 1878. L*'arithmétique des polynômes de formes de Frobenius donne alors une formulation théorique des méthodes polynomiales qui ont marqué l'histoire de la discussion petites oscillations de Lagrange à Weierstrass* comme nous l'avons vu au chapitre 2. L'encart 19 détaille la manière dont la *fonction caractéristique* et la *fonction minimale* sont introduites comme des fonctions entières particulières en raison de la relation de divisibilité arithmétique qui les lient.

> Sind die bilinearen Formen A und B in Bezug auf den Parameter r von den Graden α und $\beta < \alpha$, und ist die Determinante der Form, welche den Coefficienten von r^{β} in B bildet, von Null verschieden, so gibt es eine und nur eine Form Q vom Grade α-β und eine Form C von niedrigerem als dem βten Grade, welche der Gleichung
>
> $$A = QB + C \text{ oder } A = BQ + C$$
>
> Genüge leisten. [Frobenius, 1879, 539].
>
> [Traduction, F.B.] Considérons deux formes A et B fonctions d'un paramètre r d'ordre α et $\beta < \alpha$, et telles que le déterminant du coefficient de plus haut degré de B soit différent de 0. Il existe alors une forme Q d'ordre $\alpha\text{-}\beta$ et une forme C de degré inférieur à β telles que :
>
> $$A = QB + C \text{ ou } A = BQ + C.$$

Les encarts 20 et 21 présentent la manière dont le "lemme de Smith", tel que généralisé par Frobenius [1879, 493] permet le calcul rationnel des diviseurs élémentaires définis comme des p.g.c.d. Si les coefficients entiers ou polynomiaux $a_{\alpha\beta}$ de la forme bilinéaire A ont pour p.g.c.d. f_1, la résolution du

---

théorie des systèmes linéaires de congruences modulo *p*. Dedeknid applique l'algorithme d'Euclide à des polynômes à des coefficients entiers *mod.p.* [Dedekind, 1857, 40]. Smith envisage déjà en 1861 la généralisation de ses résultats des entiers aux "nombres complexes" :

The methods employed in the present paper are without exception such as to be immediately applicable to any species of complex numbers which admit of resolution into actual or ideal prime factors. And the greater part of the results at which we have arrived may be transferred, *mutatis, mutandis,* to the theories of such numbers. [...]

[56] Ce sont, en termes contemporains, les facteurs invariants d'une matrice dont les coefficients appartiennent à un anneau principal. Ces facteurs invariants d_λ sont les pgcd des mineurs d'ordre λ de A : $d_{\lambda-1}/d_\lambda$ et si le terme e_λ désigne un diviseur élémentaire de Weierstrass alors $e_\lambda = d_\lambda/d_{\lambda-1}$.

The demonstration of this result (which seems to exhaust the theory of these systems) is obtained by means of the following theorem :

'If $\|A\|$ represent any square matrix on integral numbers, ∇_n its determinant, ∇_{n-1} , ∇_{n-2} , ..., ∇_1 , ∇_0 the greatest common divisors of its successive orders of minors, it is always possible to assign two unit matrices $\|\alpha\|$ and $\|\beta\|$, of the same dimensions as $\|A\|$, and satisfying the equation

$$\|A\| = \|\alpha\| \times \begin{Vmatrix} \frac{V_n}{V_{n-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{V_{n-1}}{V_{n-2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V_{n-2}}{V_{n-3}} & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{V_1}{V_0} \end{Vmatrix} \times \|\beta\|$$

The following result (among many which may be deduced from this transformation of a square matrix) admits of frequent applications :

'If D be the greatest common divisor of the determinants of the matrix of any system of n independent linear equations ; of the D^n sets of values (incongruous mod D) that may be attributed to the absolute terms of the equations the system is resoluble for D^{n-1}, and irresoluble for $D^{n-1}(D-1)$

As an example of the use that may be made of this result, it is shown, in conclusion, that it supplies an immediate demonstration of a fundamental principle in the general theory of complex integral numbers, composed of the root of any irreducible equation having its first coefficient unity and all its coefficient integral ; viz that the number of incongruous residues, for any modulus, is always represented by the norm of the modulus. A demonstration of this principle has, however, already been given in the 'Quaterly Journal of Pure and Applied Mathematics' in a paper signed *Lanavicensis* [Sylvester].

- **Les invariants du calcul matriciel et les formes réduites.**

Le calcul matriciel permet de représenter sous forme symbolique les opérations sur les lignes et colonnes de systèmes linéaires ou des systèmes de congruences et Smith cherche à caractériser ce qui reste invariant lorsque l'on transforme de la sorte un système linéaire. Il pose le problème de la détermination des matrices rectangulaires dont la suite des sous déterminants est donnée. Pour Smith, ce problème a été traité par Gauss (disq. Art 279) par une démonstration synthétique et le calcul matriciel permet de retrouver l'analyse de la résolution. Pour le cas particulier des matrices de type $n(n+1)$, il s'agit donc de déterminer toutes les matrices dont les mineurs s'identifient à une suite de n déterminants donnés C_1, ..., C_{n+1}. Le problème est résolu par l'introduction des plus grands diviseurs communs des suites partielles $C_1, C_2, \dots, C_k$, notés Δ_k et les matrices recherchées auront la forme :

$$\begin{Vmatrix} r_{1,1}, & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & 0 & \dots\dots & 0 \\ r_{2,1}, & r_{2,2}, & \frac{\Delta_2}{\Delta_3} & \dots\dots & 0 \\ r_{3,1}, & r_{3,2}, & r_{3,3}, & \frac{\Delta_3}{\Delta_4} & 0 \\ \dots & \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & 0 \\ r_{n,1}, & r_{n,2}, & r_{n,3}, & \dots\dots & \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \end{Vmatrix}$$

système linéaire $A = f_1$, c'est-à-dire $\Sigma \frac{a_{\alpha\beta}}{f_1} p_{1\alpha} q_{\beta 1} = 1$, permet de déterminer m coefficients $x_\alpha = p_{1\alpha}$, et n coefficients $y_\beta = q_{\beta 1}$ de deux substitutions *unimodulaires* P et Q, $|p_{\alpha\beta}| = 1$ et $|q_{\alpha\beta}| = 1$, telles que

$$PAQ = f_1 G\ ,\ g_{11} = 1$$

et

$$G = \frac{dG}{dy_1} \frac{dG}{dx_1} + A_1$$

où A_1 ne contient pas la variable $x_1 y_1$. Une substitution unimodulaire permet encore de transformer $\frac{dG}{dy_1}$ en x_1 et $\frac{dG}{dx_1}$ en y_1 et cette première étape de la démonstration de Frobenius aboutit à l'obtention d'une forme équivalente à A,

$$f_1 x_1 y_1 + f_1 A_1.$$

L'itération du procédé permet, si la forme A_1 n'est pas nulle et en notant f_2 le *pgcd* des ses coefficients, d'obtenir la forme réduite F [Frobenius, 1879, 494] :

$$F = f_1 x_1 y_1 + f_1 f_2 x_2 y_2 + f_1 f_2 f_3 x_3 y_3 + \ldots + f_1 f_2 \ldots f_l x_l y_l$$

et, si l'on pose $e_\lambda = f_1 f_2 \ldots f_\lambda$:

$$F = e_1 x_1 y_1 + e_2 x_2 y_2 + \ldots + e_l x_l y_l$$

Le rang de F est l et si d_λ désigne le *pgcd* des déterminants d'ordre λ de F,

$$d_\lambda = e_1 e_2 \ldots e_\lambda = f^\lambda{}_1 f^{\lambda-1}{}_2 \ldots f_\lambda$$

$$F = d_1 x_1 y_1 + \frac{d_2}{d_1} x_2 y_2 + \frac{d_3}{d_2} x_3 y_3 + \ldots \frac{d_l}{d_{l-1}} x_l y_l$$

L'invariant $e_\lambda = d_\lambda / d_{\lambda-1}$ est le λ^e diviseur élémentaire de la forme A ([57]) :

> Ist in einem System von ganzen Zahlen, die nach Zeilen und Colonnen geordnet sind, d_λ der grösste gemeinsame Divisor aller Determinanten λ ten Grades, so sind nicht nur die Quotienten $\frac{d_\lambda}{d_{\lambda-1}} = e_\lambda$, sondern auch die Quotienten $\frac{e_\lambda}{e_{\lambda-1}} = f_\lambda$ ganze Zahlen.
> [Frobenius, 1879, 495].
>
> [Traduction, F.B.]. Soit un système de nombres entiers, organisés en lignes et en colonnes, d_λ le pgcd des déterminants d'ordre λ, alors les quotients $\frac{d_\lambda}{d_{\lambda-1}} = e_\lambda$ sont des nombres entiers ainsi que les quotients $\frac{e_\lambda}{e_{\lambda-1}} = f_\lambda$.

Les valeurs $e_1, e_2, \ldots e_l$ forment un système complet d'invariants de la forme A : deux formes à coefficients entiers sont équivalentes par des substitutions *unimodulaires* si et seulement si les suites de leurs diviseurs élémentaires se correspondent ([58]). [Frobenius, 1879, 495].

---

[57] Frobenius démontre en particulier la propriété établie par Weierstrass sur la relation d'ordre vérifiée par les diviseurs élémentaires successifs. Si $d_1 = d_2 = \ldots = d_x = 1$ et *si* $d_{x+1} = e_{x+1} = f_{x.+1}$ est différent de 1, alors

$$d_l > d_{l-1} > \ldots > d_{x+1} > d_x = d_{x-1} = \ldots d_1 = 1$$
$$e_l \tilde{A}\, e_{l-1} \tilde{A} \ldots \tilde{A}\ e_{x+1} \tilde{A}\ e_x = \ldots = e_1 = 1$$

[58] Frobenius applique successivement son procédé de réductions aux formes quadratiques [1879, 501] et alternées [1879. 504], aux systèmes linéaires [1879, 509], aux congruences linéaires [1879, 523] et à l'équivalence des formes bilinéaires à coefficients dans un module (au sens de Dedekind) [1879, 530].

Les pgcd des k premiers mineurs, Δ_k sont des invariants pour la multiplication matricielle :

> We shall now indicate an important transformation of which any square matrix of integral numbers is susceptible. We begin with the following theorem :
>
> 'If a given matrix be premultiplied by a unit matrix, the greatest common divisor of any vertical column of minor determinants is the same in the resulting as in the given matrix.'
>
> [...] If $\nabla_n, \nabla_{n-1}, \nabla_{n-2}, \ldots, \nabla_1$ represent the greatest common divisors of all the minors of order $n, n-1,\ldots,1$, respectively, which can be formed out of a given square matrix, the numbers will remain unchanged, when the given matrix is premultiplied by any unit-matrix and postmultiplied by any prime matrix whatsoever.'

Smith recherche alors une forme "réduite" par post multiplication, c'est-à-dire par opérations sur les colonnes d'un système ([8]) :

> «To show this, let $v_{1,1}, v_{2,1},\ldots,v_{n,1}$ be the integral and relatively prime numbers which satisfy the equations
>
> $$a_{i,1}v_{i,1} + a_{i,2}v_{i,2} + \ldots + a_{i,n}v_{n,1} = 0$$
> $$i = 2,3,\ldots,n$$
>
> an the inequality $a_{1,1}v_{1,1} + a_{1,2}v_{2,1} + \ldots + a_{1,n}v_{n,1} > 0$
>
> Then it is evident that, if $\|v\|$ be a unit matrix of which $v_{1,1}, v_{2,1},\ldots,v_{n,1}$ form the first column, the matrix $\|a\|\times\|v\|$ will assume the form
>
> $$\begin{Vmatrix} \mu_1, & b_{1,2}, & b_{1,3}, & \ldots, & b_{1,n} \\ 0, & b_{2,2}, & b_{2,3} & .., & b_{2,n} \\ 0, & b_{3,2}, & b_{3,3} & .., & b_{3,n} \\ 0, & \ldots & \ldots & .., & \ldots \\ 0, & b_{n,2}, & b_{n,3}, & .., & b_{n,n} \end{Vmatrix},$$
>
> where
>
> $$\mu_1 = a_{1,1}v_{1,1} + a_{1,2}v_{2,1} + \ldots . a_{1,n}v_{n,1}$$
>
> If this matrix be postmultiplied by the unit
>
> $$\begin{Vmatrix} 1, & k_2, & k_3, & \ldots, & k_n \\ 0, & 1, & 0 & .., & 0 \\ 0, & 0 & 1 & .., & 0 \\ 0, & \ldots & \ldots & .., & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & .., & 1 \end{Vmatrix}$$
>
> the constituents $b_{1,i}$ will be changed into $b_{1,i}+\mu_1 k_i$, while all the other constituents will remain unaltered ; so that, by assigning proper values to the numbers $k_2, \ldots, .k_n$, we may bring the given matrix $\|a\|$ into the form
>
> $$\begin{Vmatrix} \mu_1, & r_{1,2}, & r_{1,3}, & \ldots, & r_{1,n} \\ 0, & b_{2,2}, & b_{2,3} & .., & b_{2,n} \\ 0, & b_{3,2}, & b_{3,3} & .., & b_{3,n} \\ 0, & \ldots & \ldots & .., & \ldots \\ 0, & b_{n,2}, & b_{n,3}, & .., & b_{n,n} \end{Vmatrix}$$
>
> where $r_{1,i}$ verifies the inequality
>
> $$0 \le r_{1,i} < \mu_1$$

From this it is easy to infer that if a matrix of the type $(n-1) \times (n-1)$ can be reduced to the form (62),

[8] Ce résultat est appliqué par Smith aux formes quadratiques à coefficients entiers dans la partie III des "Report on the Theory of Numbers" [1861b], il s'agit de traiter un problème de représentation des nombres entiers exprimé comme un problème d'équivalence de formes quadratiques [1861b, p. 162]. Le problème est résolu en décomposant la matrice de la forme quadratique en produits de matrices unités et triangulaires.

4. La tension formes canoniques – invariants et la place relative des idéaux de Jordan et Kronecker dans la théorie de Frobenius.

Le mémoire de Frobenius de 1879 s'achève sur la première démonstration de l'implication du théorème de réduction canonique Jordan par le théorème des diviseurs élémentaires. Comme chez Weierstrass en 1868, et chez Kronecker en 1874, la recherche de la "forme normale" d'un faisceau est introduite par Frobenius pour la détermination des faisceaux de formes correspondant à un système de diviseurs élémentaires donnés [Frobenius, 1879, 541]. Frobenius démontre que la "forme élémentaire",

$$R = (r-a)(x_1y_1+\ldots+x_\varepsilon y_\varepsilon)-(x_1y_2+\ldots+x_{\varepsilon-1}y_\varepsilon)$$

a un unique diviseur élémentaire

$$(r-a)^\varepsilon$$

égal à son déterminant car les mineurs d'ordre $\varepsilon-1$ sont égaux à 1. Les diviseurs élémentaires de la forme $R+R'+\ldots$ sont "ceux de chaque forme mis en commun" et à une suite de diviseurs élémentaires données correspond donc une "forme normale" obtenue par des compositions de formes du type R.
Comme nous l'avons vu au chapitre premier, Kronecker avait insisté en 1874 sur la dépendance de la forme normale à la décomposition en facteurs irréductibles du déterminant caractéristique, les formes élémentaires sont en effet relatives au domaine de rationalité auquel appartiennent leurs coefficients. Frobenius présente par conséquent la question de la réduction à une forme normale comme relative à la donnée d'un corps ("Körper"), au sens des travaux de Dedekind sur les nombres algébriques et auquel appartiennent les coefficients des formes polynomiales. La nature de ce corps détermine la décomposition du polynôme caractéristique en facteurs irréductibles $\varphi(r)$, $\varphi_1(r)$,.. Frobenius énonce l'existence d'une forme polynomiale du premier degré, ayant pour diviseurs élémentaires les fonctions $(\varphi(r))^\varepsilon$, $(\varphi_1(r))^{\varepsilon'}$,... :

> Ist
>
> $$\varphi(r) = r^\alpha+a_1r^{\alpha-1}+\ldots+a_\alpha,$$
>
> so ist
>
> $$\varphi(r) = \begin{vmatrix} r+a_1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & r & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & 0 & r & -1 & \ldots & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & r & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ a_\alpha & 0 & 0 & 0 & \ldots & r \end{vmatrix}$$
>
> also gleich der Determinante der Form
>
> $$r(x_1y_1+\ldots+x_\alpha y_\alpha)+y_1(a_1x_1+\ldots+a_\alpha x_\alpha)-(x_1y_2+\ldots+x_{\alpha-1}y_\alpha).$$
>
> [1879, 542].

La nouvelle synthèse de Frobenius présente les approches opposées en 1874 par Jordan et Kronecker comme participant d'une même théorie arithmétique the same reduction is possible for a matrix of the type n×n, i.e. since that reduction is possible when n = 1, n = 2,..., it is possible for every value of n."

[...] Let θ, the determinant of the square matrix a be a positive number different from 0. It may be shown that by postmultiplication with a properly assumed unit ||α||, the matrix ||*a*|| can be reduced to the form

$$\begin{Vmatrix} \mu_1 & r_{1,2} & & r_{1,n} \\ 0 & \mu_2 & & r_{2,n} \\ ... & 0 & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & \mu_n \end{Vmatrix}$$

where μ_i are positive numbers, such that $\mu_1.\mu_2....\mu_n = \theta$

and the constituents $r_{i,k}$ satisfy the inequalities

$$0 \leq r_{ik} < \mu_i$$

this was first observed by Gauss (disq Arih Art 213) for the case $n=2$, by Seeber for $n=3$ ('Untersuchungen uber die Eigenschaften der positiven ternaren quadratischen formen' Manheim 1831) and the general theorem has been enunciated by M. Hermite (Crell vol xli p 192). Its precise statement is :

'Every matrix of the type *n.n* is equivalent (by postmultiplication) to one and only one, of the reduced matrices included in the formula (62)

La forme réduite des matrices par "postmultiplication" (opération sur les colonnes) est une forme triangulaire. Si l'on autorise des pré-multiplication (opérations sur les lignes), la réduction peut être poussée plus loin :

The transformation to which we have referred in Art 12 is obtained by employing simultaneously a premultiplying and a postmultipliying unit matrix. It is expressed by the equation

$$||a|| = ||\alpha|| \frac{||\nabla_n}{\nabla_{n-1}}, \ldots \frac{\nabla_1}{\nabla_0} || \, ||\beta||$$

[...] $\nabla_n, \ldots V_0$ are the determinant and g.c.d.of the minor determinants of ||*a*||, so that in particular ∇_n is the determinant of ||*a*||, ∇_{n-1} is the g.c.d. of its minor determinants of order *n-1*, ∇_1 the g.c.d. of its constituents, and $\nabla_0 = 1$. The units ||α|| and ||β|| are not absolutely determined, but admit when $n > 1$, of an infinite number of different values. »

Les propriétés des quotients des p.g.c.d des mineurs, que Smith appellera « *arithmetical invariants of the matrix* », seront développées à l'occasion d'un nouveau mémoire du professeur d'Oxford en 1873, intitulé « *Arithmetical Notes* ». Dès 1861 Smith énonce deux propriétés, qui dans la lecture qu'en fera Frobenius, identifient les invariants arithmétiques aux diviseurs élémentaires de Kronecker :

It thus appear that in the series of numbers

$$\frac{\nabla_n}{\nabla_{n-1}}, \ \frac{\nabla_{n-1}}{\nabla_{n-2}}, \ldots \ \frac{\nabla_2}{\nabla_1}, \ \frac{\nabla_1}{\nabla_0}$$

each term is divisible by that which come after it.

[...] To show still more clearly the nature of the quotients ∇s/∇s-1, we add the following proposition :

'If in any rectangular matrix, we divide each minor determinant of order s by the g.c.d. of its own minors, the g.c.d. of all the quotients thus obtained is ∇_s / ∇_{s-1}.

By this proposition ∇_s / ∇_{s-1} is itself defined as a g.c.d. instead of being defined as the quotient of one g.c.d. divided by another.

[...] Since the greatest common divisor of any vertical column of minors in ||*A*|| is not altered by premultiplication with a unit matrix it is evident that ω as well as $\frac{\nabla_n}{\nabla_{n-1}}$ will remain unchanged by that operation. If, therefore,

$$||A|| = ||v|| \times || \ \frac{\nabla_n}{\nabla_{n-1}}, \ \frac{\nabla_{n-1}}{\nabla_{n-2}}, \ldots, \ \frac{\nabla_1}{\nabla_0} || \times ||V||$$

where ||*v*|| is a unit and ||*V*|| a prime matrix, we may consider instead of ||*A*|| the simpler matrix

$$|| \ \frac{\nabla_n}{\nabla_{n-1}}, \ \frac{\nabla_{n-1}}{\nabla_{n-2}}, \ldots, \ \frac{\nabla_1}{\nabla_0} || \times ||V||$$ »

des formes. L'exigence d'effectivité de Kronecker est respectée et donne lieu à l'articulation de la théorie autour d'un théorème énonçant des invariants – les diviseurs élémentaires – obtenus de manière rationnelle par la décomposition arithmétique d'un polynôme dans un corps de base donné. Contrairement aux arguments de Kronecker de 1874, il est cependant toujours possible d'associer des formes normales à ces diviseurs élémentaires. Dans le cas général d'un corps de base quelconque, des procédés rationnels permettent la forme normale est définie comme composition de formes élémentaires associées aux invariants polynomiaux *φ(r)* par le déterminant :

$$\varphi(r) = \begin{vmatrix} r+a_1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & r & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & 0 & r & -1 & \ldots & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & r & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ a_\alpha & 0 & 0 & 0 & \ldots & r \end{vmatrix}$$

La forme canonique de Jordan est un cas particulier de cette forme normale correspondant au cas où les coefficients du corps de base sont congruents par un nombre premier *p (mod.p)* ([59]). Dans ce cas, "les nombres complexes de Galois sont permis", les facteurs irréductibles du polynôme caractéristique sont linéaires et la forme normale du faisceau de formes associée est la forme *rI-J,* énoncée par Jordan en 1874 :

> Bedient man sich der von *Galois* eingeführten complexen Zahlen, so kann man auch die Potenzen der verschiedenen Linearfactoren
>
> $$(r-a)^{\varepsilon},\ (r-a')^{\varepsilon'},\ldots,$$
>
> in die sich die Functionen e_λ zerlegen lassen, die complexen einfachen elementartheiler von *A* nennen und die bilineare Form *A*, falls die Determinante von A_0 nicht durch *p* theilbar ist, in
>
> $$\Sigma\,((r-a)(x_1y_1+\ldots+x_\varepsilon y_\varepsilon)-(x_1y_2+\ldots+x_{\varepsilon-1}y_\varepsilon))$$
>
> transformieren. Mit einer geringen Modification (welche ermöglicht, dass die Determinante von *A*, durch *p* theilbar sein kann) ist die Normalform, auf welcher Herr *Camille Jordan (Traité des substitutions,* p.114-126) die Form
>
> $$A_0r+A_1$$
>
> reducirt hat.[Frobenius, 1879, 544].

Les deux théorèmes, dont l'opposition nourrit la querelle de 1874, participent d'une identité dans la structure théorique de Frobenius. Il n'y a désormais plus deux théorèmes distincts mais un seul théorème, basé sur celui de Weierstrass, dont le résultat de Jordan apparaît comme un corollaire pour la donnée d'un corps de base particulier.

[59] C 'est à dire lorsque le corps de base est un corps fini, cas étudié par Jordan en 1870.

[…] We may add that the theorem of this article is precisely equivalent to the following, which may be demonstrated by a different method :

'If P^{ls} be the highest power of a given prime that divide all the minors of order *s* in a given matrix, and if all the minors of order *s-1* contained in one particular minor of order s are divisible by P^{ls-1+m}, that minor is itself divisible by P^{ls+m}

La forme réduite des matrices par multiplication à gauche et à droite est permet l'énoncé de la condition de résolubilité des systèmes de congruences :

These results admit of immediate applications to the theory of systems of linear congruences. The general type of such systems is

$$A_{i,1}x_1+....+A_{in}x_n \equiv A_{i,n+1} \, mod M.$$

And to construct a complete theory of them it is requisite, first to assign a criterion for their resolubility or irresolubility, secondly, when they are resoluble to investigate the number of incongruous solutions of which they are susceptible ; and, lastly, to exhibit a method for obtaining all these solutions.

We shall first suppose that $n' = n$; ie that the proposed system is neither defective nor redundant. Let

$$D_n, D_{n-1}... \nabla_n, \nabla_{n-1}, ...$$

respectively, denote the g.c.d. of the determinants and minors of the augmentted and unaugmented matrices of the system (82) ; also let $\delta_n, \delta_{n-1},..., \delta_1$ denote the g.c.d. of *M* with $\frac{\nabla_n}{\nabla_{n-1}}$, of *M* with $\frac{\nabla_{n-1}}{\nabla_{n-2}}$ … ; and let $\frac{d_n}{d_{n-1}}$, …similarly represent the g.c.d. of M with $\frac{D_n}{D_{n-1}}$, of M with $\frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}$, … , then, if

$$d = d_n. d_{n-1}......d_1, \delta = \delta_n. \delta_n.1....\delta_1,$$

we have the two following theorems :

'The necessary and sufficent condition for the resolubility of the system is $d = \delta$.

When this condition is satisfied, the number of its incongruous solutions is *d.*

La démonstration emploie la forme réduite pour déterminer le nombre de solutions du système :

« To investigate the number of solutions of the system (82), supposed to be resoluble, let $\|\alpha\|$ and $\|\beta\|$ be two unit matrices satisfying the equation

$$\|\alpha\|\times\|A\|\times\|\beta\| = \| \frac{\nabla_n}{\nabla_{n-1}}, \frac{\nabla_{n-1}}{\nabla_{n-2}}..., \frac{\nabla_1}{\nabla_0} \|$$

also let

$$x_i = \beta_{i,1}v_1 + \beta_{i,2}v_2+...+\beta_{i,n}v_n$$
$$i = 1,2,3....,n$$

and

$$c_i = \alpha_{i,1}A_{1,n+1} + \alpha_{i,2}A_{2,n+1}+....+a_{i,n}A_{n,n+1}$$
$$i = 1,2,....,n$$

Then it is evident that the proposed system of congruences is precisely equivalent to the system

$$\frac{\nabla_{n-i+1}}{\nabla_{n-i}} v_i \equiv c_i \text{ , mod } M$$

$$i = 1,2,3,...n$$

in such a manner that the two systems are simultaneously resoluble or irresoluble ; and that from any number of incongruous solutions of the one an equal number of incongruous solutions of the other is deducible. But the whole number of incongruous solutions of (88) is $\delta_1\times\delta_2\times...\delta_n = \delta$; i.e. the number of solutions of the proposed system is δ

Conclusion de la première partie.

> J'ai publié, en 1873, un procédé pour opérer la réduction simultanée de deux formes bilinéaires. M. Kronecker a critiqué ce travail, en faisant observer que j'avais admis implicitement une hypothèse restrictive qui détruisait la généralité de la démonstration.
> Cette hypothèse pouvant aisément se justifier au point du Mémoire où elle avait été signalée par notre éminent Correspondant, je ne me suis pas rendu compte, à cette époque, de la portée de son objection ; mais, étant revenu récemment sur cette question à l'occasion de mon Cours au Collège de France, j'ai reconnu qu'une hypothèse analogue, et cette fois non motivée, se retrouve dans la suite de la démonstration. Les critiques dont celle-ci a été l'objet sont donc parfaitement fondées.
> Une objection toute pareille s'applique, si je ne me trompe, aux considérations par lesquelles M. Kronecker a essayé de déduire la solution du problème de ses anciennes recherches contenues dans les *Monatsberichte* de 1868. La première solution exacte et complète de la question serait dont celle qu'il a donnée à la fin de 1873.
> [Jordan, 1881a, 1437 – 1438].

Le rapport écrit par Jordan pour sa candidature à l'Académie de 1881 reconnaît la priorité de Kronecker sur la classification des faisceaux de formes bilinéaires. Pour les 25 ans à venir, le mémoire de 1874 qui a déclenché la querelle n'est plus que très rarement cité dans le cadre de la théorie des formes bilinéaires, les travaux de Kronecker de 1868 et 1874 sont au contraire célébrés pour leurs résultats fondateurs sur l'équivalence des faisceaux singuliers. La querelle de 1874 semble se solder par la victoire de Kronecker, d'autant que la synthèse de Frobenius de 1879 place les invariants arithmétiques définis par des procédés effectifs au centre et les formes canoniques en corollaires.
Loin des représentations particulières, diverses et souvent implicites qui ont marqué la discussion des petites oscillations depuis Lagrange, la notion de forme bénéficie chez Frobenius d'une définition arithmétique et d'une opérationnalité calculatoire. Le calcul symbolique donne une représentation explicite aux procédés de manipulations des formes et s'avère une méthode de démonstration efficace qui en fait le succès et la postérité ([1]), il concentre des méthodes diverses de la seconde moitié du XIX^e^ siècle, il mêle ainsi l'héritage de méthodes polynômiales propres à la discussion des petites oscillations, les travaux arithmétiques de Kronecker, les idées propres à Jordan d'une théorie unifiant les formes bilinéaires et les substitutions linéaires et une postérité d'Hermite qui emmène avec elle les travaux d'auteurs comme Laguerre, Sylvester, Cayley et Smith. Cette concentration, cette unification est rendue possible par une communication, dans les années 1874-1878, entre des auteurs, des théories et des centres comme Paris, Berlin et Londres. La querelle de 1874 est le premier temps fort de cette communication qui va ensuite dépasser l'opposition Jordan-Kronecker pour englober d'autres auteurs, dans le temps comme dans l'espace comme Hermite, Sylvester et Smith.
Comme nous l'avons vu au chapitre 2, l'histoire de la discussion des "petites oscillations" est marquée par la réduction au même de problèmes distincts :

[1] On retrouve ainsi presque inchangées les démonstrations de Frobenius [1878,1879] dans les traités des années 1960 sur la théorie des matrices comme celui de [Gantmacher, 1967].

Lagrange mathématise les variations séculaires par les équations des cordes vibrantes ; Cauchy traite en un même problème la classification des quadriques, le théorème des axes principaux de la mécanique et les équations des variations séculaires ; Weierstrass construit une théorie des fonctions homogènes dont tous les problèmes de ses prédécesseurs deviennent des cas particuliers. La théorie des formes de Frobenius de 1879 distingue ce qui tient de l'identité et de la différence, les différentes classes d'équivalence, de congruence et de similitude permettent de penser ce qui est semblable sans être le même. Cette même théorie donne une réponse mathématique à la question *d'identité* posée par l'opposition des théorèmes de Jordan et de Weierstrass en 1874. Chez Frobenius, le problème de *l'équivalence* des faisceaux de formes est équivalent à celui de la *similitude* des substitutions et les théorèmes de Jordan et Weierstrass sont donc *mathématiquement équivalents.* La démonstration d'une équivalence mathématique n'épuise cependant pas la question posée par la mise en relation de deux théorèmes élaborés dans des contextes distincts et dont les identités sont également portées par des représentations implicites, des idéaux particuliers qui tiennent à des cultures mathématiques locales. La théorie de Frobenius, si elle est le résultat d'une forte communication et si elle mêle des idées de Jordan et de Kronecker, favorise implicitement des méthodes et des idéaux propres à la communauté berlinoise comme le calcul des invariants caractéristique de l'origine de la théorie des formes bilinéaires chez Christoffel et Kronecker, l'idéal d'homogénéité de Weierstrass et le critère d'effectivité de Kronecker. L'influence de la théorie de Frobenius à la fin du XIX^{e} siècle donnera un caractère global à un certain nombre d'idéaux et de représentations propres à l'école de Berlin et, ce faisant, fait disparaît pour les trente ans à venir l'existence d'un *théorème de Jordan de réduction canonique* dans le cadre de la théorie des formes bilinéaires.

La théorie de Frobenius n'est cependant pas la fin de l'histoire. La théorie des formes bilinéaires laisse ouvertes certaines questions posées par l'opposition de Kronecker et de Jordan en 1874. A l'idéal d'effectivité de Kronecker répondait le point de vue de Jordan selon lequel une résolution "générale" n'a de sens qu'en tant qu'elle procède de la "réduction" d'un problème jusqu'à son expression ultime qualifiée de "simple" et, même lorsqu'il reconnaît la priorité de Kronecker en 1881, Jordan ne renonce pas à son idéal de simplicité :

> Plusieurs géomètres se sont occupés de la réduction à une forme canonique d'un système de deux formes quadratiques simultanées ; mais la première solution complète de cette question a été donnée par M. Kronecker.
>
> J'ai simplifié cette méthode et j'en ai déduit la solution des deux questions suivantes :
>
> *Trouver les conditions d'équivalence de deux systèmes quadratiques.*
>
> *Trouver les transformations d'un système en lui-même.*
>
> On démontre aisément qu'il est nécessaire et suffisant pour l'équivalence que les deux systèmes aient des réduites identiques. [Jordan, 1881b, 567].

Le critère de réduction de Jordan présente un caractère abstrait, il demande que soient extraites toutes les racines d'une équation algébrique pour l'obtention d'une "réduite", définie par une "qualité", sa simplicité. L'idéal de simplicité et la méthode de réduction de Jordan ne se transmettent que très

partiellement dans la théorie de Frobenius qui met les invariants au centre et dans laquelle, si la forme canonique peut s'employer comme représentant d'une classe d'équivalence, on ne manipule pas directement les formes. Le calcul symbolique qui donne à la théorie sa principale méthode généralise aux formes les méthodes polynomiales permettant les calculs d'invariants. A l'opposée de celle de Jordan la forme canonique de Frobenius est *statique*, c'est un déterminant, une manière de *représenter une suite d'invariants*. La réponse de Frobenius à la tension formes canoniques – invariants qui est au cœur de la querelle de 1874 n'épuise donc pas l'originalité et la spécificité de la forme de Jordan.
Le théorème de Jordan sous tend une méthode originale de manipulation des formes qui ne se laisse pas caractériser comme un calcul symbolique ou une recherche d'invariants. La méthode de réduction des "indices" en sous groupes qui caractérise la méthode de Jordan de réduction canonique est indissociable de la représentation des substitutions inventée par Jordan (encart 5, chapitre 3). Cette représentation, cette *forme*, permet de "voir" tout à la fois les *regroupements d'indices en sous groupes et l'action de la substitution A* sur ces *groupes* ([2]) :

> Les fonctions y_0, $y'_0, \dots ; \dots ; y_\rho$, $y'_\rho, \dots ; \dots$ étant toutes distinctes, peuvent être prises pour indices indépendants à la place d'un nombre égal des indices primitifs $x, x', \dots x^{n-1}$. Cela fait, et m étant le nombre de ces fonctions, la substitution se trouvera réduite à la forme.

$$A = \left| \begin{array}{ll} y_0 & K_0 y_0 \\ y'_0 & K_0 y'_0 \\ \dots & \dots \\ y_1 & K_1 y_1 \\ \dots & \dots \\ x^m & a_1^m x^m + b_1^m x^{m+1} + \dots + c_1^m x^{n-1} + d_1^m y_0 + e_1^m y'_0 + \dots + f_1^m y_1 + \dots \\ x^{m+1} & a_1^{m+1} x^m + b_1^{m+1} x^{m+1} + \dots + c_1^{m+1} x^{n-1} + d_1^{m+1} y_0 + e_1^{m+1} y'_0 + \dots + f_1^{m+1} y_1 + \dots \\ \dots & \dots \\ x^{n-1} & a_1^{n-1} x^m + b_1^{n-1} x^{m+1} + \dots + c_1^{n-1} x^{n-1} + d_1^{n-1} y_0 + e_1^{n-1} y'_0 + \dots + f_1^{n-1} y_1 + \dots \end{array} \right|$$

> [Jordan, 1870, 117].

Jordan démontre que "les fonctions que A multiplie par K_ρ sont les conjuguées de celles qu'elle multiplie par K_0". En termes contemporains, les sous espaces propres correspondants à des valeurs propres distinctes sont conjugués entre eux ; la somme de ces espaces constitue donc un sous espace stable U par l'action de A et la restriction C de A à U permet de poursuivre la réduction. S'il ne faut pas chercher, dans la pensée de Jordan, de notion de stabilité d'un espace sous l'action d'un opérateur, le recours à des notions de l'algèbre linéaire des années 1930-1940 permet de mettre en évidence *l'originalité d'une méthode indissociable d'un mode de représentation des substitutions.* La notation de Jordan associe en un même tableau les indices et leurs images, elle

[2] En termes contemporains, ces regroupements sont les deux *sous espaces stables* que constituent la somme des *espaces propres* et son complémentaire.

ENCART 22.

Sur l'opérationnalité de la forme canonique de Jordan : application à des "questions diverses" sur le groupe linéaire.

Le dernier paragraphe du chapitre consacré par le *Traité des substitutions* au groupe linéaire, intitulé "*VI Questions diverses*", propose des applications de la forme canonique à la description théorique du groupe linéaire. Le dernier livre du *Traité* fera usage des propriétés énoncées pour la détermination des sous groupes résolubles maximaux des groupes symétriques (voir encart 6).

- "**PROBLEME I.** ***Former à priori la puissance λ dune substitution donnée A."***

La forme canonique est bien adaptée à résoudre des problèmes mettant en jeu la composition des substitutions et permet une résolution immédiate de ce premier problème : si *A* est ramenée à sa forme canonique, une "*induction immédiate et facile à vérifier de proche en proche*" permet de "*voir*" que A^λ est égale à [1870, p.126]:

$$\left| \begin{array}{ll} y_0, z_0, u_0, \ldots, y'_0, \ldots & K_0^\lambda y_0, K_0^\lambda (z_0 + \lambda y_0), K_0^\lambda \left(u_0 + \lambda z_0 + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} y_0\right), \ldots, K_0^\lambda y'_0, \ldots \\ y_1, z_1, u_1, \ldots, y'_1, \ldots & K_1^\lambda y_1, K_1^\lambda (z_1 + \lambda y_1), K_1^\lambda \left(u_1 + \lambda z_1 + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} y_1\right), \ldots, K_1^\lambda y'_1, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \upsilon_0 & K_0^\lambda \upsilon_1, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right|$$

- "**PROBLEME II. -** ***Trouver l'ordre de la substitution*** **A**."

Le problème revient à chercher la "plus petite valeur de *λ*, telle que A^λ se réduise à l'unité" (p. 127). Les développements binomiaux dans la forme canonique de A^λ doivent être congru à *0 mod.p* [1870, p.127] :

$$\lambda \equiv 0, \ \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}, \ldots, \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-\rho+2)}{1.2\ldots(\rho-1)} \ (mod.p)$$

Soit *ρ* le "nombre d'indices contenu dans le plus nombreuse des suites y_0, z_0, u_0 ,… ; y'_0,….", Jordan démontre que *λ* est alors égal à la valeur p^{q+1} où *q* est le plus grand entier tel que $p^q < \rho$ ([1]).

[1] En termes contemporain *ρ* est la plus grande dimension des sous espaces caractéristiques associés à *A*, c'est-à-dire le degré de nilpotence du polynôme d'automorphismes *A-KI*.

donne *forme* à la méthode de démonstration car elle montre l'interdépendance de la décomposition de la "substitution" et de la décomposition des "indices". Il n'est pas possible de dissocier *forme* et *méthode* et les étapes successives de la réduction se *voient* dans la forme que prend la substitution A qui contient en elle-même la nouvelle substitution C sur laquelle il faut itérer la méthode de réduction :

$$c = \begin{vmatrix} x^m & a_1^m x^m + b_1^m x^{m+1} + \ldots + c_1^m x^{n-1} \\ x^{m+1} & a_1^{m+1} x^m + b_1^{m+1} x^{m+1} + \ldots + c_1^{m+1} x^{n-1} \\ \ldots & \ldots \\ x^{n-1} & a_1^{n-1} x^m + b_1^{n-1} x^{m+1} + \ldots + c_1^{n-1} x^{n-1} \end{vmatrix}$$

[Jordan, 1870, 118].

L'action de la substitution A sur les "lettres", regroupées progressivement en groupes par des changements de variables linéaires, se représentent comme autant de *blocs* s'emboîtant chacun dans le précédent et donnant une représentation de la méthode d'itérations successives elle-même :

Soient K'_0, ... les racines de la congruence $F' \equiv 0$, la substitution C [...] pourrait, d'après ce qui précède se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} z_0 & K'_0 z_0 \\ z'_0 & K'_0 z'_0 \\ \ldots & \ldots \\ z_1 & K'_1 z_1 \\ \ldots & \ldots \\ x^{m+m'} & a_2^{m+m'} x^{m+m'} + \ldots + c_2^{m+m'} x^{n-1} + \mathit{fonct.lin.de}(z_0, z'_0, \ldots z_1 \ldots) \\ \ldots. & \ldots \\ x^{n-1} & a_2^{n-1} x^{m+m'} + \ldots + c_2^{n-1} x^{n-1} + d_1^{n-1} y_0 + \mathit{fonct.lin.de}(z_0, z'_0, \ldots z_1 \ldots) \end{vmatrix}$$

[...] z_0, z'_0,... : z_1, z'_1,... : ... étant les fonctions linéaires distinctes que la substitution C multiplie respectivement par K'_0, K'_1,....[...]. Continuant ainsi, on arrivera finalement à ramener la substitution A à la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} y_0, y'_0, \ldots & K_0 y_0, K_0 y'_0, \ldots \\ y_1, y'_1, \ldots & K_1 y_1, K_1 y'_1, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_0, \ldots & K'_0 z_0 + \varphi(y_0, y'_0, \ldots, y_1, y'_1, \ldots, \ldots) \\ z_1, \ldots & K'_1 z_1 + \varphi_1(y_0, y'_0, \ldots, y_1, y'_1, \ldots, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_0, \ldots\ldots\ldots & K''_0 u_0 + \psi(y_0, y'_0, \ldots, y_1, y'_1, \ldots, z_0, \ldots, z_1, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_0, \ldots\ldots\ldots & K'''_0 v_0 + \chi(y_0, y'_0, \ldots, y_1, y'_1, \ldots, z_0, \ldots, z_1, \ldots, u_0, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

- **" PROBLEME III. – Déterminer la forme générale et le nombre des substitutions linéaires échangeables à une substitution linéaire donnée *A*."**

Ce problème est important dans le cadre de la recherche des sous groupes résolubles du groupe symétrique menée dans le livre X du *Traité* (encart 6). En effet, pour "composer" un sous groupe résoluble du groupe linéaire *G* à partir de la donnée d'un sous groupe **normal** *N*, on recherche le groupe des **commutateurs** *D(N),* c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes qui commutent avec tous les automorphismes de *N* : $D(N) = \{g \in G, \forall f \in N, fg = gf\}$. Jordan pose d'abord la question de la détermination du **commutant** d'un automorphisme, le problème est étendu dans les pages suivantes au [1870, p.137] :

> PROBLEME V.- Trouver la forme générale des faisceaux contenus dans le groupe linéaire et dont les substitutions sont échangeables entre elles.

Jordan démontre que pour qu'une substitution *B* commute avec une substitution *A* écrite sous sa forme canonique, il est nécessaire "qu'elle remplace les indices y_0, z_0 d'une même série par des fonctions de ces seuls indices". La substitution *B* s'écrit donc comme un produit de substitutions *B', B'',...*commutant chacune avec les *blocs* de la forme canonique de *A*. [1870, 131] :

> THEOREME. – *Une substitution linéaire* A, *étant ramenée à sa forme canonique, peut être considéré comme étant le produit d'un certain nombre d'opérations partielles* A_0, A_1,...,A'_0,..., *consistant chacune à altérer les indices d'une seule série, en les remplaçant respectivement par certaines fonctions linéaires de ces mêmes séries.*
> *Toute substitution linéaire B échangeable à A sera de même le produit d'opérations partielles altérant chacun des indices d'une seule série, qu'elle remplace par des fonctions linéaires de ces mêmes indices.*

Ce résultat est appliqué par Jordan à la recherche des groupes résolubles, la forme canonique joue à un rôle théorique en permettant toujours d'écrire simultanément de la "façon la plus simple" les substitutions qui commutent entre elles, ce qui permet la construction de *groupes de commutateurs.*. Elle permet également de démontrer qu un groupe de substitutions est constitué de substitutions *diagonalisables*, c'est-à-dire qu'il n'existe, dans les termes de Jordan, qu'un seul système de valeurs sous l'action de la substitution :

> Prenons pour indices indépendants ceux qui ramènent toutes ses substitutions à la forme canonique ; puis groupons dans une même série ceux des nouveaux indices qui sont multipliés par un même facteur dans chacune des substitutions de *F*, et dans un même système les diverses séries conjuguées. Les indices ne formeront qu'un seul système car s'il en était autrement [...] ce groupe serait non primaire, si ses substitutions ne permutaient pas transitivement les systèmes, mais décomposable, si elles les permutaient transitivement.

La réduction de Jordan permet de partager "les indices de la série" en "suites distinctes Y_0, Z_0, u_0,... ; Y'_0,Z'_0,... ;... que A altère séparément suivant une loi "simple" [1870, 127] :

> [...] A les remplacera respectivement par les fonctions K_1Y_1, $K_1(Z_1+Y_1)$, $K_1(u_1+Z_1)$, ... ; .... conjuguées de K_0Y_0, $K_0(Z_0+Y_0)$, $K_0(u_0+Z_0)$,... ; ...

A cette loi *simple*, en un sens *la plus simple*, Jordan associe une forme canonique qui donne permet de *voir* la structure de la substitution A. La forme canonique est employée pour résoudre diverses questions de la théorie des groupes linéaires, comme par exemple celui du calcul de la puissance d'une substitution : si A est ramenée à sa forme canonique, une "*induction immédiate et facile à vérifier de proche en proche*" permet de "*voir*" A^λ et d'obtenir l'ordre d'une substitution:

$$\left| \begin{array}{ll} y_0, z_0, u_0, \ldots, y'_0, \ldots & K_0^\lambda y_0, K_0^\lambda(z_0+\lambda y_0), K_0^\lambda\left(u_0+\lambda z_0+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}y_0\right), \ldots, K_0^\lambda y'_0, \ldots \\ y_1, z_1, u_1, \ldots, y'_1, \ldots & K_1^\lambda y_1, K_1^\lambda(z_1+\lambda y_1), K_1^\lambda\left(u_1+\lambda z_1+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}y_1\right), \ldots, K_1^\lambda y'_1, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \upsilon_0 & K_0^\lambda \upsilon_1, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right|$$

[Jordan, 1870, 126].

L'écriture canonique permet de "voir" la solution de certains problèmes, la représentation par blocs de la forme de Jordan porte une opérationnalité que l'encart 22 met en évidence en présentant la méthode de Jordan pour "Déterminer la forme générale et le nombre des substitutions linéaires échangeables à une substitution linéaire donnée A".
La forme canonique de Jordan est l'invention simultanée d'une *image* et de *procédés opératoires* sur cette image qui *montrent* la logique des étapes successives de la méthode de réductions successive de Jordan

> Cette forme simple
>
> $$\left| \begin{array}{ll} y_0, z_0, u_0, \ldots, y'_0, \ldots & K_0 y_0, K_0(z_0+y_0), K_0(u_0+z_0), \ldots, K_0 y'_0 \\ y_1, z_1, u_1, \ldots, y'_1, \ldots & K_1 y_1, K_1(z_1+y_{10}), K_1(u_1+z_1), \ldots, K_1 y'_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \upsilon_0 & K'_0 \upsilon_0, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right|$$
>
> à laquelle on peut ramener la substitution A par un choix d'indice convenable, sera pour nous sa forme *canonique*. [Jordan , 1870, p.237].

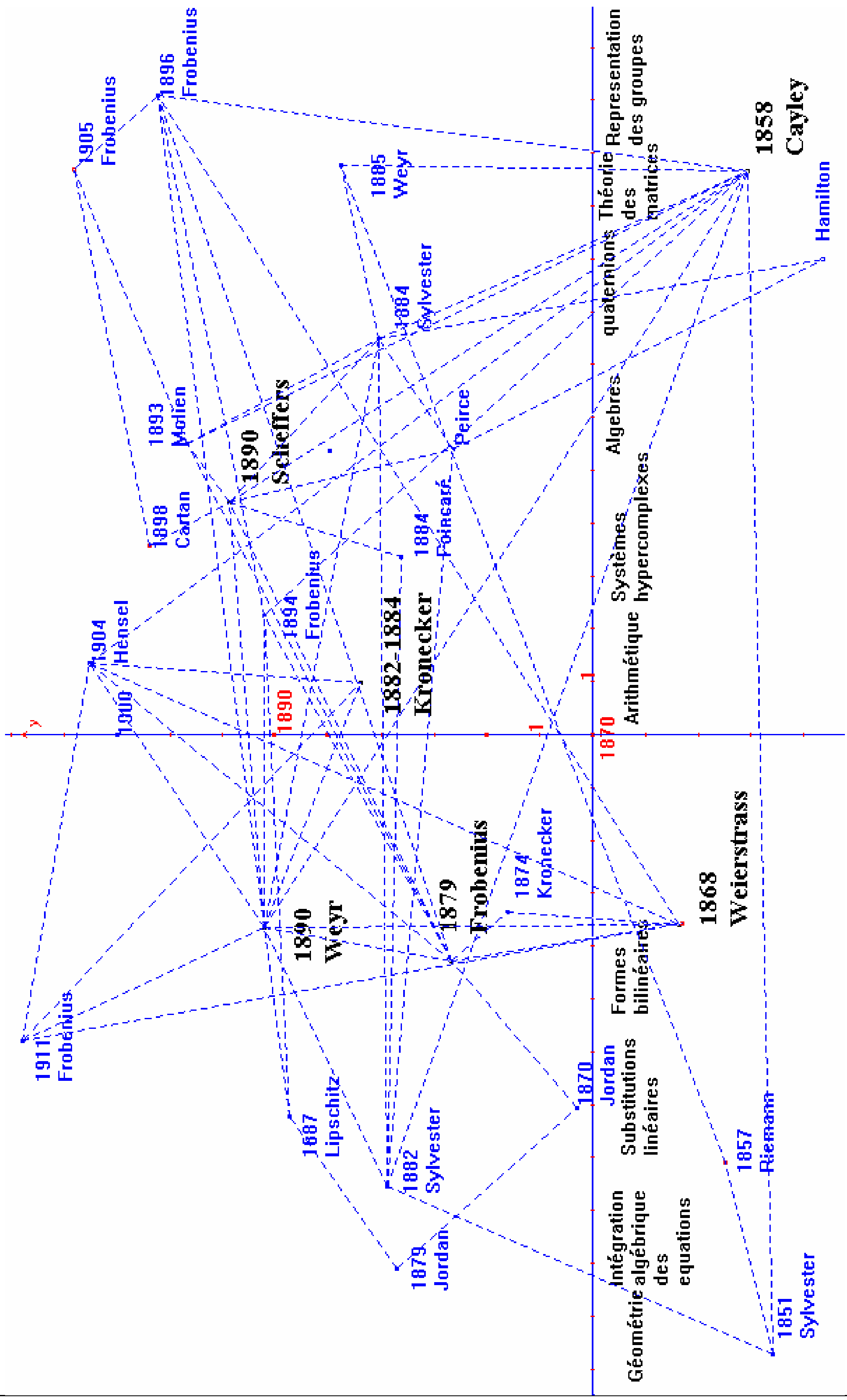
L'histoire du théorème de Jordan est indissociable de l'histoire d'une forme particulière de représentation. Cette histoire n'est pas close en 1880 et offre l'occasion de porter un regard orienté par la tension formes canoniques invariants sur les mathématiques de la période 1880-1930 .

DEUXIEME PARTIE.

UN point de convergence de differents reseaux de recherches :

La décomposition des matrices d'Eduard Weyr (1880-1907).

ENCART 1. Convergences de réseaux de recherches (1880-1907).



INTRODUCTION

L'identité du théorème de Jordan est abordée sous angle particulier dans cette partie consacrée à la période 1880-1907 durant laquelle le théorème disparaît du paysage des formes bilinéaires ([1]). La théorie des formes de Frobenius ouvre la période étudiée qui se clôt au moment de la parution, au début du XX^{e} siècle, de nombreux traités d'algèbre et de l'encyclopédie franco-allemande des sciences mathématiques. Les bornes de la périodisation choisie sont fixées en référence à ces deux moments particulièrement propices à un état des lieux de l'organisation du savoir mathématique. Comme la montré la conclusion de la première partie, l'identité du théorème de Jordan est indissociable d'un mode particulier de représentation associé à l'opérationnalité d'une méthode de *réduction* par opposition aux méthodes de calculs *d'invariants*. L'étude de la dynamique de la tension *formes canoniques/ invariants* permet un regard original sur la période 1880-1907 et ce regard s'attardera plus particulièrement sur les auteurs qui, comme Jordan, élaborent des méthodes mathématiques de manipulation de formes de représentations pour chercher et démontrer.

La question de la représentation dans les mathématiques de la période 1880-1907 constitue la problématique centrale dans cette deuxième partie, mais la *représentation* des *formes* n'étant pas perçue comme relevant d'un problème mathématique avant le début du XX^{e} siècle et les travaux sur la décomposition matricielle, comment alors en aborder l'histoire ? Une réponse possible et souvent employée par l'historiographie consiste à recourir à des théories mathématiques postérieures –comme l'algèbre linéaire ou la théorie des matrices canoniques- pour découper le champ mathématique de la fin du XIX^{e} siècle. Par sa définition même, un tel découpage ne permet cependant pas une perception de l'évolution historique de l'organisation du savoir mathématique et cette deuxième partie poursuit donc la méthodologie différente consistant à étudier la manière dont les textes et acteurs de la période considérée s'organisent en réseaux. Une recherche bibliographique a été menée sur tous les textes de la période 1880-1907 citant comme référence l'un des mémoires principaux liés à la querelle Jordan-Kronecker de 1874 (Jordan [1870, 1874], Weierstrass [1868], Kronecker [1868,1874], Darboux [1874] et Frobenius [1878,1879]). L'épuisement des références bibliographiques de ce premier groupe de textes – dans la limite de la périodisation choisie– a permis de former un corpus général et sa décomposition en trois sous réseaux que reflète la décomposition en trois chapitres de cette deuxième partie. Ces trois réseaux sont essentiellement distincts les uns des autres et ne correspondent pas globalement à une théorie ; les représentations graphiques des réseaux de textes mettent cependant en évidence l'existence de points de convergences, de nœuds, dans l'entremêlement des références bibliographiques ([2]). Certains de

[1] Le choix du découpage de la périodisation en trois parties est justifié en introduction de cette thèse par les différentes manifestations de l'identité du théorème de Jordan dans l'histoire.

[2] Une représentation graphique simplifiée est proposée en encart 1, les représentations détaillées de chaque corpus sont insérées dans les introductions des chapitres associés.

ENCART 2.

La caractéristique de Weyr en 1885.

La "caractéristique" de Weyr est un invariant permettant la détermination de l'"équation de degré minimum" satisfaite par une matrice [Weyr, 1885b, 966] :

> Soient M une matrice quelconque d'ordre n et μ_α une racine αuple de M. En formant les puissances de M-μ_α, on tombe nécessairement sur une puissance $(M-\mu_\alpha)^\rho$ qui est nullité α ; les puissances plus élevées sont de la même nullité. Désignons par
>
> $$\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2, \ldots,\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\rho\ =\ \alpha$$
>
> les degrés de nullité des matrices
>
> $$M-\mu_\alpha,\ (M-\mu_\alpha)^2, \ldots, (M-\mu_\alpha)^\rho\ ;$$
>
> alors je dis que *la suite des nombres* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho$ *ne peut jamais croître, c'est-à-dire qu'on a toujours*
>
> α_1 Ã $\alpha_2\ldots$ Ã α_ρ.
>
> Pour abréger, je dis que la racine M- μ_α a pour *caractéristiques* les nombres
>
> $$(\alpha,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho).$$
>
> Soient maintenant
>
> $$\mu_\alpha,\ \mu_\beta, \ldots, \mu_\lambda$$
>
> les racines de M, et soient leurs caractéristiques respectives
>
> $$(\alpha,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_\rho),\ (\beta,\ \beta_1, \ldots, \beta_\sigma), \ldots,\ (\lambda,\ \lambda_1, \lambda_\tau).$$
>
> Alors l'*équation de degré minimum, satisfaite par M, est la suivante :*
>
> $$(M-\mu_\alpha)^\rho (M-\mu_\beta)^\sigma \ldots (M-\mu_\lambda)^\tau = 0.$$

Cet invariant permet de caractériser les matrices semblables [Weyr, 1885b, 966] :

> Je dis, de deux matrices d'ordre n, qu'elles sont de même espèce si elles possèdent les mêmes racines aux mêmes caractéristiques.
>
> *M et N étant deux matrices de même espèce, on peut toujours assigner des matrices Q, de nullité zéro, telles qu'on ait* $N = Q^{-1}MQ$.
>
> Et, réciproquement, deux matrices M et N, liées par une telle équation, sont de même espèce. Les entiers
>
> $$\alpha,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_\rho\ ;\ \beta,\ \beta_1, \ldots, \beta_\sigma, \ldots\ ;\ \lambda,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_\tau$$
>
> ayant été choisis de manière que chacun d'eux soit au moins égal à 1, et que les suites
>
> $$(\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho),\ (\beta_1, \ldots, \beta_\sigma),\ \ldots,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_\tau),$$
>
> ne soient jamais croissantes, et que, de plus,
>
> $$\alpha\ =\ \alpha_1+\ldots+\alpha_\rho\ ,\ \beta = \beta_1+\ldots+\beta_\sigma,\ \ldots,\ \lambda = \lambda_1+\ldots+\lambda_\tau,\ \ n = \alpha+\beta+\ldots+\lambda,$$
>
> je dis qu'il existe toujours des matrices d'ordre n, ayant les racines $\mu_\alpha, \mu_\beta, \ldots, \mu_\lambda$ aux caractéristiques respectives
>
> $$(\alpha,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_\rho),\ (\beta,\ \beta_1, \ldots, \beta_\sigma), \ldots,\ (\lambda,\ \lambda_1, \lambda_\tau),$$
>
> [...].

ces nœuds sont une conséquence de la méthodologie adoptée pour la formation du corpus, c’est le cas des mémoires de Weierstrass [1868] et de Frobenius [1878] ([3]).

Un troisième point de convergence correspond à un mémoire publié en 1890 par Eduard Weyr sur les formes bilinéaires. La position du mémoire de Weyr à la croisée des réseaux étudiés, la place centrale de sa date de parution dans la périodisation, ont décidé de la structure de cette deuxième partie : chaque chapitre se présente comme une lecture suivie du texte de Weyr dans la perspective de chacun des trois principaux réseaux de textes qui s’y réfèrent (l'encart 5 propose des informations biographiques sur Eduard Weyr). En 1890, Weyr propose une réorganisation de la théorie des formes bilinéaires de Frobenius par l'introduction d’un nouvel invariant, la "caractéristique d'une matrice" (encart 2) ([4]), et dont le caractère spécifique tient au rôle donné à la représentation matricielle que Weyr est le premier mathématicien du continent à employer dans des publications successives aux Académies de Paris [1884-1885], de Prague [1886-1889] puis dans le mémoire de 1890 qui parait dans le premier numéro des *Monatsberichte für Mathematik und Physik*. Les travaux d’Eduard Weyr élaborent une *synthèse originale* entre *invariants* et *formes de représentations* et, sans aucune référence aux travaux de Jordan de 1870, aboutissent à une approche qui, dans les années 1930-1940, deviendra la méthode la plus répandue de démonstration du théorème de Jordan (encart 3). La "caractéristique de Weyr" [Mac Duffy, 1933] permet une caractérisation de ce que les mathématiques contemporaines désignent comme les blocs de Jordan et que Weyr dénomme les "compartiments" d’une matrice (encart 2) ([5]).

---

[3] Que les travaux de Jordan [1870,1874] et de Kronecker [1866, 1874] ne figurent pas au nombre des points de convergence est une première information importante à prendre en compte et qui sera développée dans la troisième partie lorsque sera posée la question de la postérité de Jordan.

[4] En termes contemporains, Weyr introduit la suite des dimensions des sous espaces caractéristiques d’un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in L(E)$ et λ une valeur propre de f, il existe un unique entier naturel r tel que :

$$\{0\} = Ker(f-\lambda I)^0 \subsetneq Ker(f-\lambda I) \subsetneq \dots \subsetneq Ker\,(f-\lambda I)^r = Ker\,(f-\lambda I)^{r+1}$$

[5] Consulter également l’annexe 1 pour un résumé de l’approche "géométrique" de Gantmacher qui propose une démonstration du théorème de Jordan basée sur la notion d’espace cyclique. La démonstration du théorème de Jordan par une décomposition de l’espace est celle la plus couramment présentée dans l’enseignement supérieur en France, voir par exemple [Gourdon, 1994, 189] et [Goblot, 1995, 139].

La démonstration de Weyr construit par des compositions de "compartiments" une matrice de caractéristique donnée. [1885b, 967] :

Pour cet effet, désignons par $G_{\rho\text{-}1\text{-}\mu\alpha}$ la matrice zéro, et d'ordre α_ρ,, et posons successivement

$$G_{\rho-2-\mu\alpha} = \left\{ \begin{array}{c|c} \dfrac{G_{\rho-1-\mu_\alpha}}{A_{\rho-1}} & \begin{matrix} \overbrace{0 \quad \dots \quad 0}^{(\alpha_{\rho-1}).} \\ . \quad \dots \quad . \\ 0 \quad \dots \quad 0 \end{matrix} \end{array} \right\}, \quad G_{\rho-3-\mu\alpha} = \left\{ \begin{array}{c|c} \dfrac{G_{\rho-2-\mu_\alpha}}{A_{\rho-2}} & \begin{matrix} \overbrace{0 \quad \dots \quad 0}^{(\alpha_{\rho-2}).} \\ . \quad \dots \quad . \\ 0 \quad \dots \quad 0 \end{matrix} \end{array} \right\},$$

……………………………………………………………………………………,

$$G_{1-\mu\alpha} = \left\{ \begin{array}{c|c} \dfrac{G_{2-\mu_\alpha}}{A_2} & \begin{matrix} \overbrace{0 \quad \dots \quad 0}^{(\alpha_2).} \\ . \quad \dots \quad . \\ 0 \quad \dots \quad 0 \end{matrix} \end{array} \right\}, \quad H_{-\mu\alpha} = \left\{ \begin{array}{c|c} \dfrac{G_{1-\mu_\alpha}}{A_1} & \begin{matrix} \overbrace{0 \quad \dots \quad 0}^{(\alpha_1).} \\ . \quad \dots \quad . \\ 0 \quad \dots \quad 0 \end{matrix} \end{array} \right\}.$$

[…] Les compartiments $A_{\rho\text{-}1}$, $A_{\rho\text{-}2}$, …, A_1 sont formés de la manière suivante :

$$A_{\rho-1} = \left\{ \begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}^{(\alpha_\rho)} \\ \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} . & . & \dots & . \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} . & . & \dots & . \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \end{matrix} \right\} (\alpha_{p-1}), \quad A_{\rho-2} = \left\{ \begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \end{matrix}}^{(\alpha_\rho)} & \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots 0 \end{matrix}}^{(\alpha_{\rho-1})} \\ \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} . & \dots & . \end{matrix} & \begin{matrix} . & . & \dots . \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & \dots 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & \dots 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} . & \dots & . \end{matrix} & \begin{matrix} . & . & \dots . \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & \dots 0 \end{matrix} \end{matrix} \right\} (\alpha_{p-2}),$$

……………………………………………………………………………………,

Un inventaire des autres points de convergence des réseaux de textes étudiés permet de dresser un rapide plan de cette partie :

- A partir de 1890, le mémoire de Cayley [1858] sur la théorie des matrices devient une référence presque automatique des textes des trois réseaux considérés. La notion de matrice est une notion forte des réseaux de textes étudiés dans cette partie et le chapitre 4 propose tout à la fois une étude de son évolution historique entre 1880 et 1890 et un regard critique sur son histoire telle qu'elle est écrite par les mathématiciens de cette période.

- Un second réseau de textes s'organise autour de la référence à la théorie arithmétique des grandeurs algébriques de Kronecker [1881]. En son sein, des méthodes arithmétiques de composition des systèmes de nombres élaborent une combinatoire de la représentation en tableau par des opérations sur les lignes et les colonnes. La rencontre de ces méthodes arithmétiques et des développements issus de la théorie des matrices fait l'objet du chapitre 4.

- Un troisième réseau correspond à l'émergence de la théorie des systèmes hypercomplexes dont le chapitre 5 questionne l'histoire sous l'angle du rôle qu'y joue la représentation matricielle ([6]).

L'histoire de la théorie des systèmes hypercomplexes a déjà fait l'objet de plusieurs études détaillées et sur lesquelles ce travail s'appuie largement ([7]). Dans son histoire du théorème de structure des algèbres de Wedderburn [1907], Karen Parshall [1985] reprend la distinction introduite par Thomas Hawkins [1972] entre deux courants de recherches indépendants dont la rencontre dans les années 1880 signale l'origine de la théorie des systèmes hypercomplexes (des extraits des travaux de K. Parshall et T. Hawkins sont proposés en encart 4). La distinction est d'abord géographique et matérialisée par l'Atlantique. D'une part, une première "tradition anglo-américaine" regroupe les travaux d'auteurs comme Cayley, Sylvester, B. et C.S. Peirce , autour d'un acte fondateur, la "découverte" des quaternions par Hamilton en 1843, et d'une posture épistémologique commune consistant à "considérer leurs algèbres comme des objets mathématiques satisfaisant certaines propriétés" [Parshall, 1985]. D'autre part, un second courant, la "tradition de la théorie de Lie" désigne des recherches effectuées sur le continent "dans le but d'une meilleure compréhension des groupes de transformations et non des

[6] En termes contemporains, un système hypercomplexe est une algèbre associative unitaire sur le corps des nombres complexes.

[7] Ces études portent sur les premiers théorèmes de Killing, Scheffers, Molien, Cartan et Wedderburn sur la structure des algèbres associatives. De plus amples détails sont proposés en encart 4 à partir des travaux de [Hawkins, 1971, 1982, 2000] et [Parshall, 1983, 1985].

ENCART 3.

Plan d'une démonstration contemporaine du théorème de Jordan.

La démonstration contemporaine la plus répandue de la décomposition de Jordan d'un endomorphisme f ☻$End_K(E)$ de polynôme caractéristique scindé découle d'une décomposition d'un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps K en sous espaces caractéristique sous l'action de l'opérateur f. Le plan suivant s'inspire du traité de [Goblot, 1995].

- **Théorème de décomposition des noyaux.**

  Soit $F(x)$ un polynôme tel que $F(f) = 0$; on suppose que $F(X) = F_1(X)\ldots\ F_k(X)$ où les F_i sont 2 à 2 premiers entre eux. On pose $E_i = KerF_i(f)$. Alors les sous espaces E_i sont stables par f, on a

  $$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_k$$

  et les projecteurs $p_i : E$ ↔ E tels que $Imp_i = E_i$ sont dans $K[f]$, c'est-à-dire polynomiaux en f.

- **Application aux polynômes minimal et caractéristique.**

  Soit $\chi_f(X)$ le polynôme caractéristique de f et $M(X)$ le polynôme minimal.

  $$\chi_f(X) = \prod_{1\le i\le k}(X-\lambda_i)^{n_i},\ M(X) = \prod_{1\le i\le k}(X-\lambda_i)^{m_i}$$

  où m_i Â n_i. Alors $E_i = Ker(f-\lambda_i I)^{n_i} = Ker(f-\lambda_i I)^{m_i}$ et $(X-\lambda_i I)^{m_i}$ est le polynôme minimal de l'endomorphisme f_i induit par f.

  $$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_k .$$

  Pour que f soit diagonalisable, il faut et il suffit que les valeurs propres λ_i soient racines simples du polynôme minimal $M(X)$.

- **Endomorphismes nilpotents.**

  On suppose f^m ý 0 et $f^{m+1} = 0$. Soit $E_i = Kerf^i = \{x/ f^i(x) = 0\}$. On a la suite d'inclusions strictes :

  $$E_0 = \{0\} ┤ E_1 ┤ E_2 ┤ \ldots┤ E_{m+1} = E.$$

  Pour tout i,

  $$f(E_{i+1}) ┤ E_i \text{ et } F \cap E_{i+1} = \{0\} \text{ ð } f(F)\cap E_i = \{0\}.$$

  Soit F_m le supplémentaire de E_m dans $E_{m+1} = E$: $E = E_{m+1} = F_m + E_m$ et par récurrence, ayant F_i tel que : $E_{i+1} = F_i + E_i$, $f(F_i)$ ┤ E_i, on a $f(F_i) \cap E_{i+1} = \{0\}$. On forme F_{i-1} le supplémentaire de E_{i-1} dans E_i *contenant* $f(F_i)$.

  $$E = F_0 + F_1 + \ldots + F_m$$

  et f induit une injection F_i ↔ F_{i-1}, 1 Â i Â m.

  Soit e_n , un vecteur non nul de F_m, on forme les vecteurs

  $$e_{n-1} = f(e_n),\ \ldots,\ e_{n-m} = f^m(e_n).$$

  Si $dimF_m > 1$, on prend e_{n-m-1}, non colinéaire à e_n et on recommence.

  Une fois les vecteurs de F_m épuisés, si $f(F_m)$ est strictement contenu dans F_{m-1}, on continue en prenant un vecteur dans $F_{m-1} - f(F_m)$ puis ses images successives. On recommence le processus jusqu'à épuisement de tous les vecteurs de F_0 et on obtient ainsi une base e de E dans laquelle la matrice a la forme suivante : $M = (x_{ij})$ où $x_{ij} = 0$ sauf pour les termes de la forme : $y_i = x_{i,i+1}$ qui valent 1 ou 0.

- **Forme matricielle de Jordan.**

  Il existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de f soit diagonale par blocs, chaque bloc étant somme d'une matrice scalaire et d'une matrice du type précédent. Cette réduction est la forme réduite de Jordan de l'endomorphisme f.

  Exemple : dim $F_3 = 1$, $dimD_2 = 2$, $dimF_1 = 3$, $dimF_0 = 3$.
  $$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

entités algébriques étudiées pour elles mêmes." La rencontre de ces deux courants signale l'émergence de la théorie des systèmes hypercomplexes avec la parution des recherches de Scheffers de 1891] puis les travaux indépendants de Molien [1893] et Cartan [1898] qui marquent l'avènement de "l'étude de ces objets [les algèbres] pour leur intérêt propre et des découvertes significatives de la théorie de leurs structure" [Parshall, 1985]. La période 1884-1893 est donc décrite comme une période charnière qui voit des courants de recherches distincts s'unir en ce qui sera une même théorie des systèmes hypercomplexes:

> By the late 1890's, as a result of the research efforts on both sides of the Atlantic, hypercomplex number systems came to define a distinct area of math investigation. [Parshall, 1985].

L'éclairage apporté à l'histoire des systèmes hypercomplexes par Karen Parshall et Thomas Hawkins est largement repris dans ce travail. L'étude de la tension forme canonique-invariants nécessite cependant d'aborder cette période selon un angle différent et complémentaire. Une critique que l'on peut adresser à l'historiographie des algèbres associatives est que, tout en soulignant le rôle joué par la notion de matrice dans la rencontre des deux courants de recherches distincts (rôle détaillé en encart 4), elle ne questionne pas l'évolution de la notion de matrice elle même. L'identification entre la théorie des matrices de Cayley et la théorie des formes bilinéaires de Frobenius est notamment présentée comme non problématique et même préexistante à son énoncé par les mathématiciens ([8]). Selon cette perspective, la notion de matrice serait fixée par le mémoire de Cayley de 1858 et ne nécessiterait plus que la publicité que lui offrent les travaux de Sylvester de 1882-1885 pour être acceptée par tous. Le mémoire d'Eduard Weyr malgré les références que lui accordent ses contemporains est alors considéré comme se limitant à des "développements techniques" [Parshall, 1985] ou à l'exposé sur le continent des idées de Cayley et Sylvester [Hawkins, 1972]. Or, avant le mémoire de Weyr de 1890, aucune relation n'est faite entre les théories de Cayley et de Frobenius et, dans les années qui suivent la publication de Weyr, les matrices envahissent les textes mathématiques publiés en Allemagne, elles seront présentes dans tous les traités d'algèbre publiés au début du XX^{e} siècle. Comprendre la nouvelle popularité des matrices sur le continent après 1890 nécessite de suivre une approche complémentaire aux travaux de Thomas Hawkins et Karen Parshall, en s'attachant à étudier l'évolution de la notion de matrice dans le temps. Cette partie a donc aussi pour objet de porter un nouvel éclairage sur l'histoire de la notion de matrice.

[8] Exemple significatif : le théorème de Cayley Hamilton est présenté par l'historiographie comme démontré par Cayley dans un cas particulier et par Frobenius dans le cas général.

ENCART 4.

A propos du rôle des matrices dans les origines de la théorie des systèmes hypercomplexes.

Karen Parshall et Thomas Hawkins distinguent trois étapes principales dans l'avènement de la théorie des systèmes hypercomplexes :

1. Les nombreuses interventions de Sylvester à l'Académie des Sciences de Paris, en 1884-1885, attirent l'attention sur les quaternions d'ordre supérieur 4 et, plus généralement, sur les matrices. Elles provoquent une réponse de Poincaré [1884] qui "reconnaît le lien entre les recherches de Sylvester et le large corps de recherches se développant sur le continent autour de l'œuvre de Lie" :

   > Thus Poincaré recognized that (1) the algebras analogous to the quaternions which Sylvester was studying were algebras of matrices, (2) each element in these algebras defined a linear transformation, and (3) the theory of continuous transformation groups developed by Lie could be applied to these linear transformations. This last connection generated quite a bit of activity on hypercomplex numbers from the end of the 1880's through the 1890's.
   > [Parshall, 1985].

2. Des recherches se développent sur le lien entre les nombres hypercomplexes et les groupes continus. Les grands noms retenus par Parshall et Hawkins sont Killing [1888], Study [1889], Scheffers [1891] et Molien [1893].

3. Les énoncés de "théorèmes de structure des algèbres" de Cartan [1898] et Wedderburn [1907].

Dans le cadre son histoire de la représentation de groupes, Thomas Hawkins [1972] insiste sur le rôle joué par les matrices dans la rencontre de courants de recherches distincts qui caractérise l'élaboration de la théorie des systèmes hypercomplexes dans les années 1890.

> Also of particular importance is the recognition of the special class of hypercomplex systems which we shall term complete matrix algebras. By this we mean systems whose elements can be expressed in the form
> $$\Sigma a_{ij}\, e_{ij}$$
> where the n^2 basis elements e_{ij} multiply according to the rule
> $$e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$$
> Interest in complete matrix algebras and recognition that the (complex) quaternions are of this type was a necessary preliminary to, and instrumental in, the discovery of the important role they play in the general structure theory of hypercomplex systems.
> [Hawkins,1972].

ENCART 5.

Quelques éléments biographiques sur Eduard Weyr.

- **Sur la carrière de Weyr.**

Après sa dissertation donnée à Göttingen en 1873 sur le thème "Ueber algebraische Raumkurven", Eduard Weyr débute sa carrière en suivant les traces de son frère ainé, Emil Weyr, qui travaille essentiellement sur la géométrie et notamment sur les involutions. Emil inaugure la première séance de la *S.M.F* en 1870 [Gispert, 1991, 20], devient membre du conseil non résident et fait don de ses mémoires mathématiques à la société en 1873. Eduard est membre de la société à partir de 1873 et les *bulletins de la SMF* permettent d'obtenir quelques informations sur sa carrière :

- 1873-74. Etudiant à l'université de Karl Ferdinand de Prague (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, 2).

- 1878. Professeur à l'université de Prague (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, 6 (1878), 13).

- 1880-1904. Professeur à l'école polytechnique de Prague à partir de 1880 (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, 23 (1895), 13).

A partir de 1878, Weyr est rédacteur de la société savante *Casopis pro mathematiky a fysiky*, cette société publie un journal dans lequel Weyr intervient le plus souvent sur des questions de géométrie ou d'analyse.

- **Travaux mathématiques et implication internationale de Weyr.**

Dans les années 1880, Eduard Weyr communique publie mémoires de géométrie sur les places de Paris et de Vienne (plans tangents et courbes osculatrices). Ces travaux l'amènent à traiter dans les *Casopis* des questions de calcul des déterminants [Muir, 1906, 5 et 100] . A partir de 1884, Weyr débute des travaux sur les quaternions à la suite des récentes communications de Sylvester à l'Académie de Paris. Les premières notes dans les *Comptes Rendus* sont développées par des mémoires sur les systèmes hypercomplexes publiés dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques* et à l'Académie de Prague [Weyr, 1887a,b,c]. Les travaux de la période 1884-1890 sont réorganisés sous forme synthétique par la mémoire de 1890 sur les formes bilinéaires dont il est question dans cette partie.

Weyr participe au congrès de Chicago de 1893 par un exposé "Sur l'équation des lignes géodésiques".

Weyr est le correspondant de Hermite à Prague. Les deux savants ont des échanges portant sur les fonctions de variables réelles (voir la correspondance de Hermite - Œuvres II 393-400, 496-499) qui aboutissent à l'énoncé d'un théorème dit de Hermite-Weyr.

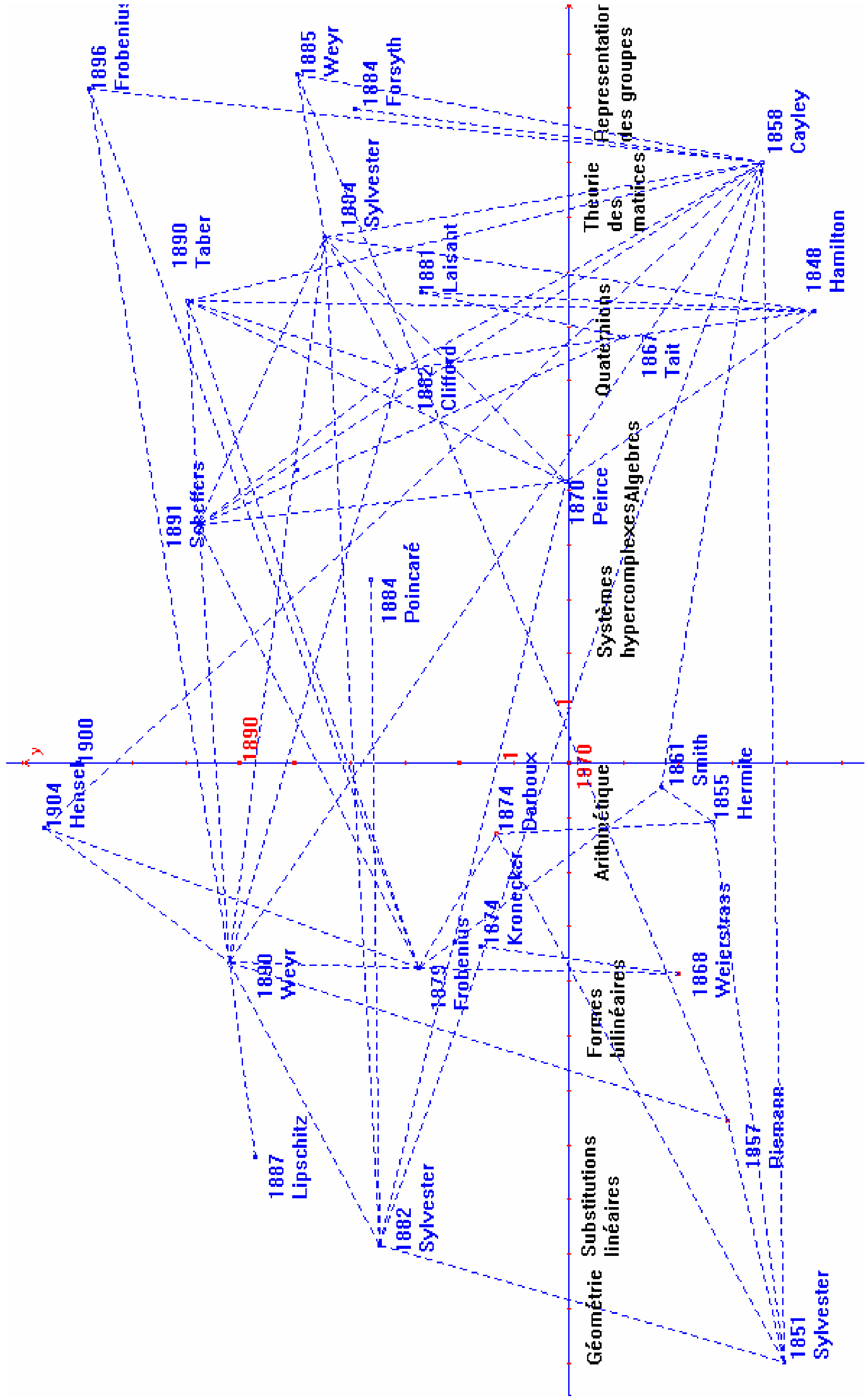
CHAPITRE 4.

Etude d'un mouvement en histoire des mathématiques :

La dynamique de la notion de matrice sur la décennie 1880-1890.

ENCART 1. Représentation graphique du corpus considéré.

A partir de Weyr [1890], les références à Cayley [1858] et Frobenius [1878] vont ensemble.



INTRODUCTION

La notion de matrice est une des notions fortes des réseaux de textes étudiés dans cette partie. Elle se trouve au cœur de méthodes mathématiques qui établissent des liens entre des théories et des réseaux distincts. Tour d'horizon rapide : Sylvester [1884-1885] inclut les quaternions dans la théorie des matrices, Weyr [1890] remplace la notion de forme bilinéaire par celle de matrice et reformule la théorie de Frobenius, Scheffers [1891] puis Molien, [1893] présentent les "systèmes de matrices" comme un cas particulier fondamental de la théorie des systèmes hypercomplexes, Frobenius [1896] adopte la notion de matrice pour ses travaux sur la représentation des groupes et Hensel [1904] élabore une théorie arithmétique des "corps" de matrices influencée par la théorie arithmétique des grandeurs algébriques de Kronecker. Que les matrices jouent un tel rôle dans les réseaux étudiés dans cette partie alors même que, dans les années 1880-1900, leur popularité reste encore très limitée, nécessite de consacrer une étude historique détaillée à la notion de matrice dans le cadre d'un corpus et d'une périodisation bien déterminés.
Qu'est ce qu'une matrice en 1890 ? Une première réponse est donnée par les mathématiciens, les auteurs qui emploient la notion de matrice entre 1890 et 1900 citent systématiquement un texte qu'ils considèrent comme fondateur. Ce texte, un mémoire publié par Arthur Cayley en 1858, est célébré pour sa définition des opérations algébriques sur les matrices et l'énoncé d'un théorème qui, dans les années 1880-1890, prend le nom de "théorème de Cayley-Hamilton". A ce rôle fondateur attribué au mémoire de Cayley dans les années 1890, il faut opposer l'absence quasi complète de la notion de matrice sur le continent durant la trentaine d'années qui suit la publication du mémoire de 1858 (encart 1) ([1]). Comment le texte de Cayley acquiert-il une postérité si forte dans les années 1880-1890 après des décennies d'indifférence ? En quoi est-il considéré comme fondateur par des textes mathématiques participant de théories différentes ? Ces deux questions se mêlent en une seule : la notion de matrice de 1890 est elle la même que celle de Cayley de 1858 ? Il faut en fait reconnaître une double origine historique de la notion de matrice. A la première théorie élaborée par Cayley en 1858 succèdent les années 1880-1890 qui voient s'écrire une histoire qui fait de Cayley un fondateur, un précurseur. Définition de 1858, postérité de 1890 : aborder cette double origine revient à considérer la dynamique de la notion de matrice comme indissociable de l'histoire écrite en direct par les acteurs de la période considérée (et dont des extraits sont proposés en encart 2.).
Le mémoire, intitulé "A memoir on the theory of matrices" [1858], publié dans les *Philosophical transactions*, suit de quelques années la définition de la notion de matrice par Sylvester [1851b] comme "tableau dont on extrait les mineurs d'un déterminant" et les développements de cette notion par Cayley [1855] comme "notation commode" [Hawkins, 1975] pour les systèmes linéaires

[1] Même en Angleterre, la notion de matrice est peu utilisée, son emploi par quelques mathématiciens comme Smith [1861] (chapitre 3) est sans commune mesure avec la postérité des matrices dans les années 1890.

ENCART 2.

Une histoire de la théorie des matrices écrite par les mathématicienss en 1890.

L'histoire de la théorie des matrices telle que la présente l'historiographie classique repose sur la reconnaissance d'une équivalence mathématique entre le calcul matriciel de Cayley [1858] et le calcul symbolique des formes de Frobenius [1878]. Cette histoire est indissociable de l'organisation en une théorie des travaux sur les systèmes hypercomplexes dans les années 1890. La première relation entre les mémoires de Cayley et de Frobenius est établie par un résultat mathématique d'Eduard Weyr [1890 161-235] (traduction F.B.) :

> Soit $M = \{a_{hk}\}$ une matrice quelconque donnée, si on peut déterminer une matrice scalaire μ de telle manière, que la différence $M - \mu$ possède une nullité au moins égale à 1, c'est-à-dire :
>
> $$|M - \mu| = 0$$
>
> Cette équation se met sous la forme :
>
> $$\begin{vmatrix} a_{11}-\mu, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-\mu, & \ldots, & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}-\mu \end{vmatrix} = 0$$
>
> ou
>
> $$(-1)^n\mu^n + c_1\mu^{n-1} + c_2\,\mu^{n-2} + \ldots + c_n = 0,$$
>
> où c_n est manifestement égal au déterminant Δ de M. Cette équation s'appelle l'équation caractéristique de M, sa partie gauche, notée $f(\mu)$, est la fonction caractéristique de M *).
>
> [...] Les racines $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ de l'équation caractéristique s'appellent les racines de la matrice M, d'après le terme similaire de racines latentes de Sylvester. [...]
>
> Soit $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les racines de la matrice du n^e ordre M et $\varphi(M)$ une fonction entière de M, alors $\varphi(M)$ a pour racines $\varphi(\mu_1), \ldots \varphi(\mu_n)$. **)
>
> **) Frobenius, 1.c. §.3, Satz III.
>
> [...]
>
> $$f(M) = \begin{vmatrix} a_{11}-M, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-M, & \ldots, & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}-M \end{vmatrix} = 0$$
>
> Cette équation vérifiée par toute matrice du n^e ordre est établie par Cayley, 1.c. pag. 24, [...]

Ce théorème par lequel Weyr met en relation Cayley-Frobenius est à la base d'une écriture de l'histoire de la théorie des matrices qui sera reprise et développée par les mathématiciens qui organisent les recherches sur les systèmes hypercomplexes en une synthèse théorique comme [Scheffers,1891, 386] [Weyr, 1890, 163] (traductionF.B.) :

> Les règles pour le calcul avec les matrices données par Cayley dans son article "A memoir on the Theory of Matrices", Philos. Transactions of the R. Society, London 1859, vol 148, s'appliquent directement pour la composition des formes bilinéaires (Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen, Journal für Mathematik. Bd. LXXXIV, §1 sqq) ; [...].

et les formes quadratiques. Le mémoire de 1858 a été largement commenté et la structure de l'histoire de la théorie des matrices peut sembler aujourd'hui bien établie. A la suite des travaux de Thomas Hawkins [1977], l'historiographie distingue différents courants dans "l'histoire de la théorie des matrices", le mémoire de Cayley prenant place dans une "théorie conceptuelle" [Grattan-Guiness, 2003] caractérisée par la définition d'une "algèbre symbolique" des matrices mais qui n'acquiert de la "substance" qu'après sa fusion avec ce qui est désigné comme la théorie des "matrices canoniques" [Hawkins, 1977] et caractérise des travaux se développant à partir de la théorie des formes bilinéaires de Frobenius [1878] et du théorème des diviseurs élémentaires de Weierstrass [1858]. La théorie des matrices se développe donc de la rencontre de deux mémoires fondateurs, le mémoire de Cayley de 1858 définissant une '"algèbre symbolique" des matrices et le mémoire de Frobenius de 1878 introduisant un calcul symbolique des formes que Thomas Hawkins qualifie d'"équivalent" au calcul de Cayley mais aussi "supérieur" puisque contenant la théorie des diviseurs élémentaires ([2]) :

> The theory of elementary divisors does not explicitly involve matrices, and the question therefore arises as to the role of matrix algebra in the history of what is now referred to as the theory of matrices. Cayley's memoir was unknown outside England until the 1880 's. By that time the content of the theory of matrices has been developed extensively in the continent within the framework of quadratic and bilinear forms and linear transformations. Furthermore, in 1878 Frobenius introduced the equivalent of the symbolical algebra of matrices without knowledge of Cayley's memoir. Frobenius' treatment of matrix was vastly superior to Cayley's because he was able to apply the results of his teachers, Weierstrass and Kronecker. Matrix algebra acquired substance and became of general interest for mathematicians only after it was fused with the theory of canonical matrix.
> [Hawkins, 1977, 119].

Pourtant Frobenius, contrairement à ce qui est souvent affirmé, connaît le mémoire de Cayley et c'est donc sciemment qu'il n'adopte pas la notion de matrice ([3]). Comment les formes bilinéaires et les matrices se trouvent elles alors considérés comme participant d'une même théorie en 1890 ? L'historiographie aborde le plus souvent la question de l'origine de la notion de

---

[2] La citation suivante de Karen Parshall précise sur le plan mathématique l'équivalence du calcul des matrices de Cayley et de l'algèbre symbolique de Frobenius :

> As Frobenius realized, these bilinear forms were in one to one correspondence with matrices, that is, the bilinear form $A\ [=\Sigma_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}x_iy_j]$ defined the matrix $[a_{ij}]$, and the multiplication of forms P defined the matrix multiplication of $[a_{ij}]$ and $[b_{ij}]$. From this we immediately see that all of the facts and theorems Frobenius proved in his paper of 1878 about bilinear forms applied equally well to matrices. In effect, then, Frobenius, developed a symbolic calculus of matrices in working out his calculus of bilinear forms. In so doing, he demonstrated the sheer calculational and conceptual ease of the single letter notation at which Cayley before him had only hinted.
> [Parshall, 1985, 288]

[3] Frobenius, cite les travaux de Cayley [1855] et de Sylvester [1851] qui développent la notion de matrice sans encore employer d'expression symbolique. Surtout, comme nous l'avons vu au chapitre 3, le mémoire de Frobenius [1879] est largement inspiré de Smith [1861] qui propose un exposé complet du calcul symbolique des matrices avec des références précises à Cayley.

ENCART 3.

Comparaison du calcul des matrices de Weyr et de la théorie des matrices de Cayley.

Structure du mémoire de Cayley

Définition des matrices.

Opérations sur les matrices.

Enoncé du "théorème remarquable" : "une matrice satisfait une équation algébrique de son propre ordre".

Equations en matrices.

Matrices périodiques.

Matrices permutables.

Matrices alternées et symétriques

Puissances de matrices.

Structure de la première partie du mémoire de Weyr

1. Le calcul avec les matrices
2. La composition des systèmes de quantités.
3. Sur la nullité des matrices.
4. Les racines d'une matrice et les nombres caractéristiques.
5. L'équation fondamentale d'une matrices.

La seconde partie du mémoire de Weyr ne présente aucune référence à celui de Cayley et concerne des questions étrangères à la théorie de Cayley comme la transformation des formes bilinéaires et son application aux équations différentielles linéaires (numéros 7, 9, 10, 11).

matrice dans le cadre d'une histoire des algèbres associatives, ainsi Thomas Hawkins distingue les premiers travaux de Cayley de 1855 qui emploient la notion de matrice comme "notation commode" du mémoire de 1858 qui définirait un "système hypercomplexe" :

> [...] shortly thereafter, in "A memoir on the Theory of Matrices" [1858] he showed that they form a hypercomplex system, although he did not use such terminology (independently of Cayley, E. Laguerre (1867) and G. Frobenius (1878) studied what amounts to the algebra of matrices and also indicated the connection with hypercomplex numbers. But in his memoir on matrices, Cayley did not bring out the connection between the algebra of matrices and hypercomplex numbers ; he did not express his matrices in the form $\Sigma x_i e_i$ of a hypercomplex system
> [Hawkins 1972].

Or c'est précisément dans le cadre de la constitution de la théorie des systèmes hypercomplexes que les matrices de Cayley et le calcul symbolique de Frobenius vont être considérés comme équivalents par les mathématiciens dans les années 1885-1890. L'histoire qui voit dans les matrices de Cayley et les formes de Frobenius deux notions mathématiques équivalentes est donc indissociable de l'organisation des travaux sur les systèmes hypercomplexes en une théorie mathématique dans les années 1885-1890.

La problématique de ce chapitre est d'expliciter la construction, entre 1880 et 1890, d'une relation entre les formes bilinéaires et les matrices. Elle implique de distinguer ce qui est propre à la représentation matricielle par rapport au calcul symbolique des formes bilinéaires. L'originalité du mémoire de Cayley se limite-t-elle à un rôle précurseur des systèmes hypercomplexes, souvent résumé comme "pas supplémentaire vers l'abstraction" [Grattan-Guiness, 1994] ou réduit à la première définition de l'"addition des matrices" [Dieudonné, 1977] ([4]) ? A quelles fins Cayley élabore-t-il son calcul des matrices ? Dans quel réseau de textes le mémoire de 1858 s'inscrit-il ? Cayley définit-il, en 1858 l'algèbre associative des matrices ? La réponse à cette dernière question doit être reconnue comme double : d'une part Cayley définit l'algèbre associative des matrices, c'est objectivement la réponse qu'il faut apporter après 1890 ; et d'autre part Cayley ne définit pas une algèbre, c'est tout aussi objectivement la réponse qu'il faut apporter avant 1890. Il faudra décrire la double origine de la théorie des matrices par les lectures que feront du mémoire de Cayley des mathématiciens des années 1880-1890 parmi lesquels Sylvester et Weyr.

---

[4] L'historiographie souligne souvent que Cayley n'est pas le premier à employer des opérations sur les tableaux, quelle est alors sa nouveauté ? Dans la problématique de recherche de précurseurs des algèbres associatives, l'accent est souvent porté sur les premières définitions des *opérations* sur des tableaux [Dieudonné, 1977] :

> Eisenstein fait sien le symbolisme de Gauss, mais il va plus loi en notant $S{\times}T$ la composée de deux substitutions linéaires notées *S, T,* et observe (comme Gauss) qu'il s'agit de notions et notations valables pour un nombre quelconque de variables. Il signale qu'il faut distinguer soigneusement entre $S{\times}T$ et $T{\times}S$, et introduit aussi la notation *1/S* lorsque *S* a un déterminant non nul. En somme il a l'essentiel de la conception des matrices carrés, et Hermite, dans ses travaux sur la Théorie des nombres et les fonctions abéliennes, utilise couramment le même symbolisme

Comparaison des définitions des matrices.

La définition des matrices par Weyr.

Eine Matrix n^{ter} Ordnung $\{a_{hk}\}$ oder A auf ein System von n Werten $x_1,\ldots,x_n$ oder kürzer (x) applicieren, heiβt ein Werthsystem $y_1,\ldots,y_n$ mittelst der n linearen Gleichungen

$$y_h = a_{h1}x_1 + \ldots + a_{hn}x_n, \ (h = 1,2,\ldots,n)$$

ableiten. Diese n Gleichungen mögen durch die symbolische Gleichung

$$(y) = A(x)$$

ausgedrückt werden.

La définition des matrices par Cayley.

The term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, [...] ; in this restricted sense, a set of quantities arranged in the form of a square, e.g.

$$\begin{matrix} (a & b & c) \\ |a' & b' & c'| \\ |a'' & b'' & c''| \end{matrix}$$

is said to be a matrix. [...]

The notation

$$\begin{matrix} (a & b & c) \\ |a' & b' & c'| \\ |a'' & b'' & c''| \end{matrix}(x, y, z),$$

represents the set of linear functions

((a,b,c)(x,y,z), (a',b',c')(x,y,z), (a'',b'',c'')(x,y,z),

so that calling these *(X,Y,Z),* we have

$$(X, Y, Z) = \begin{matrix} (a & b & c) \\ |a' & b' & c'| \\ |a'' & b'' & c''| \end{matrix}(x, y, z),$$

I. UNE POSTERITE DES MATRICES DE CAYLEY (1858) DANS LES ANNEES 1880-1890.

1. "Le calcul des matrices" : Eduard Weyr [1890] lit Arthur Cayley [1858] et Georg Frobenius [1878].

"Sur les formes bilinéaires", le titre du long mémoire publié par Eduard Weyr dans le premier numéro des *Monasberichte für Mathematik und Physik* peut surprendre. Il faut en effet patienter une bonne soixantaine de pages pour que soient abordés des problèmes relatifs aux formes bilinéaires. Le titre n'en est pas moins révélateur de ce que le mémoire de Weyr se définit par une ambition de donner un "nouveau moyen d'action" pour le problème de la caractérisation des classes d'équivalences des "faisceaux de formes bilinéaires" en présentant comme une alternative aux invariants définis par Weierstrass en 1868 et une nouvelle représentation du problème par la "considération de systèmes de valeurs associés à 'une matrice" :

> Die nachfolgenden Betrachtungen [...] haben den Zweck, ein neues Hilfsmittel in die Theorie der bilinearen Formen einzuführen. Dasselbe besteht in gewissen einer Matrix zugeordneten Werthsystemen, deren Betrachtung die Lösung mancher Probleme ermöglicht, insbesondere des von Weierstrass gelösten Problems der gleichzeitigen Transformation zweier bilinearen Formen, wie dies aus dem Nachfolgenden hervorgeht.
> [Weyr, 1890, 163].
>
> [Traduction, F.B.] L'objectif des considérations qui suivent [...] est d'introduire un nouveau moyen d'action dans la théorie des formes bilinéaires par la considération de systèmes de valeurs associés à une matrice, cette méthode permet la solution de plusieurs problèmes et, en particulier, du problème de la transformation simultanée de deux formes bilinéaires, résolu par Weierstrass.

Le mémoire de Weyr est publié en deux parties, la première développe une théorie du "concept abstrait" de matrice que la seconde "applique" aux problèmes classiques de la théorie des formes bilinéaires de Frobenius comme la caractérisation des formes semblables et l'équivalence des faisceaux de formes :

> Eine bilineare Form
> $$\sum_{(h,k)} a_{hk} x_h y_k, (h,k = 1,2,...,n)$$
> ist durch die Matrix n^{ter} Ordnung $\{a_{hk}\}$ d.h. durch das System der nn in n Zeilen und n Colonnen geordneten Coefficienten a_{hk} vollkommen bestimmt ; [...] Wir

Comparaison du calcul des matrices de Weyr et des opérations sur les matrices de Cayley.

Calcul des matrices de Weyr.

Als summe zweier Matrizen n^{ter} Ordnung

$$A = \{a_{hk}\},\ A' = \{a'_{hk}\}$$

wird jene Matrize $B=\{b_{hk}\}$ bezeichnet, die auf ein beliebiges System *(x)* appliciert das System *(y+y')* ergibt, wobei *(y)* und *(y')* die aus (*x*) durch *A* und *A'* abgeleiteten Systeme bezeichnen.

Hieraus folgt sofort

$$b_{hk} = a_{hk}+a'_{hk},$$

d.h. die Elemente der Summe sind Summen der correspondieren Elemente der Summanden.

Eine Matrix, deren Elemente durchwegs gleich Null sind, möge Nullmatrix heiβen und mit O bezeichnet werden.

Definiert man analog die Differenz zweier Matrizen, so findet man

$$A\text{-}A' = B$$

falls

$$a_{hk}\text{-}a'_{hk} = b_{hk}\ (h,k = 1,2,\ldots,n).$$

Offenbar gilt

$$A\text{-}A'+A' = A,\ A\text{-}A = 0.$$

Dans Symbol *-A* möge die Differenz *0-A* bedeuten ; es hat demnach *–A* die Elemente $-a_{hk}$

Opérations sur les matrices de Cayley.

The equations

$$(X,Y,Z)=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}(x,y,z),$$

$$(X',Y',Z')=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}(x,y,z),$$

give

$$(X+X',Y+Y',Z+Z')=\begin{pmatrix} a+\alpha & b+\beta & c+\gamma \\ a'+\alpha' & b'+\beta' & c'+\gamma' \\ a''+\alpha'' & b''+\beta'' & c''+\gamma'' \end{pmatrix}(x,y,z),$$

and this lead to

$$\begin{pmatrix} a+\alpha & b+\beta & c+\gamma \\ a'+\alpha' & b'+\beta' & c'+\gamma' \\ a''+\alpha'' & b''+\beta'' & c''+\gamma'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a''' & b'' & c'' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha & \beta & c+\gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

as a rule for the addition of matrices ; that for their subtraction is of course similar to it.

5. A matrix is not altered but the addition or subtraction of the matrix zero, that is, we have

$$M\pm 0 = M.$$

the equation $L=M$, which expresses that the matrices *L, M* are equal may also be written in the form $L\text{-}M=0$, i.e. the difference of two matrices is the matrix zero.

6. the equation $L=\text{-}M$, written in the form $L+M=0$, expresses that the sum of the matrix L, *M* is equal to the matrix zero, the matrices so related are said to be *opposite* to each other ; in other words, a matrix the terms of which are equal but opposite in sign to the terms of a given matrix is said to be opposite to the given matrix.

Les deux mémoires présentent la définition des éléments neutres 0 et 1, des propriétés de commutativité de l'addition, de l'associativité de l'addition et de la multiplication, et de la distributivité de la multiplication sur l'addition. Eduard Weyr définit la matrice nulle après la définition de l'addition, comme élément neutre ; la même remarque s'applique à la matrice unité [Weyr, 1890, 165], définie comme unique solution de l'équation $AI=A$ pour tout *A*. Cayley, au contraire, définit les matrices nulles et unités avant de donner les règles d'opérations ; la définition procède de la représentation sous jacente chez Cayley d'une matrice comme une fonction linéaire : la matrice nulle est la fonction qui transforme les quantités *(X,Y,Z)* en (0,0,0) et la matrice unité la fonction qui laissent des quantités inchangées. Cette différence dans l'organisation des propriétés du calcul symbolique manifeste une différence de conception de la notion de matrice : pour Cayley, une matrice est une représentation qui a "la forme d'un carré", c'est une notion qui se "dégage naturellement de la notation abrégée d'un ensemble d'équations linéaires" [Cayley, 1858, 475] ; pour Weyr, c'est un symbole dont il faut définir les propriétés opératoires.

werden im folgenden mit dem abstrakteren Begriffe der Matrizen anstatt mit jenem der bilinearen Form operieren.
[Weyr, 1890, 163].

[Traduction, F.B.]. Une forme bilinéaire

$$\sum_{(h,k)} a_{hk} x_h y_k, (h, k = 1,2,..., n)$$

est parfaitement déterminée par une matrice du n^e ordre $\{a_{hk}\}$, c'est à dire par un système de *nn* coefficients ordonnés en *n* lignes et *n* colonnes ; [...] Dans la suite nous considérerons le concept de forme bilinéaire avec celui plus abstrait de matrice.

Le mémoire de 1890 est le premier exposé consacré aux matrices sur le continent et se réfère explicitement à la "théorie des matrices" de Cayley de 1858. Les matrices de Weyr et de Cayley sont-elles les *mêmes* ? Ce sont, d'une part les mêmes, selon Weyr lui-même qui, dès le premier paragraphe de son mémoire consacré aux "règles pour le calcul avec les matrices" attribue la notion de matrice à Cayley. Mais ce sont également des notions différentes d'autre part, puisque la référence à Cayley se mêle à la citation de nombreux travaux récents comme le calcul symbolique des formes bilinéaires de Frobenius. La question de l'identité des notions de matrice de Cayley et de Weyr ne se satisfait pas d'une réponse simple car le mémoire de 1890 construit une nouvelle identité entre matrices et formes bilinéaires par laquelle la notion de matrice de Cayley, évolue, s'enrichit, change de signification. La lecture que fait Weyr de Cayley est indissociable d'une lecture simultanée du calcul symbolique des formes de Frobenius par lequel, pour reprendre l'expression de Sylvester [1884, 220], "une matrice se fait dérober ses dimensions spatiales et représentée comme une somme linéaire" ([5]). Dans le premier paragraphe intitulé "calcul avec les matrices", Weyr mêle les influences de Cayley et Frobenius en une théorie originale d'un calcul symbolique des "matrices de systèmes de valeurs" :

Die von Cayley in seiner Abhandlung "A memoir on the Theory of Matrices", Philos. Transactions of the R. Society, London 1859, vol 148, gegebenen Regeln für das Rechnen mit Matrizen gelten unmittelbar für die Zusammensetzung von bilinearen Formen (Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen, Journal für Mathematik. Bd. LXXXIV, §1 sqq) ; [...].
[Weyr, 1890, 163].

[Traduction, F.B.]. Les règles du calcul avec les matrices données par Cayley dans son exposé "A memoir on the Theory of Matrices", Philos. Transactions of the R. Society, London 1859, vol 148, s'appliquent directement pour la composition des formes bilinéaires (Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen, Journal für Mathematik. Bd. LXXXIV, §1 sqq) ; [...].

[5] Dans la perspective qui voit les calculs symboliques des mémoires de Cayley [1858] et Frobenius [1878] comme "équivalents", la différence de représentation, c'est-à-dire l'utilisation par Frobenius de lettres et non de tableaux, a été interprétée par Hawkins [1971] comme un progrès du "calcul symbolique". A cette interprétation, Parshall [1985] a opposé le fait que Cayley [1858] employait également des lettres à certaines occasions.

ENCART 4. Une postérité de Cayley et Weyr chez Frobenius [1894].

La factorisation des polynômes de matrices.

A la suite du mémoire de Weyr, l'adoption par Frobenius de la notion de matrice entre 1894 et 1896 implique l'apparition dans son calcul symbolique de la notion de matrice scalaire et de la méthode de factorisation de polynômes de matrices. Le mémoire de Frobenius de 1894 dont il est question dans cet encart prend place dans le cadre de la théorie des systèmes hypercomplexe décrite au chapitre 5. Frobenius démontre que tout polynôme χ tel que $\chi(A) = 0$ est divisible par le polynôme minimal de A est identifié à l'équation de degré minimum annulant une forme bilinéaire introduite en 1878. La notation $(rE\text{-}A)F(r) = \varphi(r)E$ pour la factorisation des polynômes de matrices manifeste la postérité des idées et méthodes de Cayley et Weyr [Frobenius, 1894] :

> Den speziellen Fall, wo $\psi(r)$ ein theiler von $r^m\text{-}1$ ist, den ich L.§3, VIII auch besonders hervorgehoben habe, hat Lipschitz in der Arbeit Beweis eines Satzes aus der Theorie der Substitutionen, Acta Math Bd. x, durch Betrachtungen bewiesen, die im Wesentlichen mit den obigen [...]. Auch Kronecker hat diesen Satz in der Arbeit Uber die Composition der Systeme von n^2 Grössen mit sich selbst, Stizunsber. 1890 [...]. Auch den englischen und amerikanischen Algebraikern, die sich so viel mit der Theorie der Matrizen beschäftigt haben, ist mit wenigen Ausnahmen (Young, Taber) meine Arbeit ebenso unbekannt geblieben, wie die gro e Arbeit von Laguerre, *Sur le calcul des systèmes linéaires*, Joun. de l'école polyt. tom. 25 cah. 42 p. 215. Einen anderen, aber weniger einfachen Beweis des Satzes VI giebt E. Weyr, *Zur Theorie der bilinearen Formen*, Monatshefte für Math. und Physik, Bd. I S. 187.

La forme adjointe d'une forme bilinéaire A de déterminant non nul avait été définie en 1878 comme $\grave{A} = aA\text{-}1$ où $a = det|A|$. $A\grave{A} = aE$ et en particulier, si l'on prend pour matrice $rE\text{-}A$, la forme adjointe est une forme notée $F(r)$"dont les éléments sont des fonctions entières de r de degré $n\text{-}1$" (p.709). Cette forme adjointe permet d'écrire, si $\varphi(r) = |rE\text{-}A|$ est l'équation caractéristique de A , les relations suivantes [Frobenius, 1896, 708] :

$$(4)\ (rE\text{-}A)\,F(r) = F(r)\,(rE\text{-}A)$$
$$(5)\ (rE\text{-}A)\,F(r) = \varphi(r)\,E$$

L'équation (5) donne une factorisation de l'équation caractéristique $\varphi(r)E$ à l'aide de la notion de matrice scalaire rE et permet l'écriture d'une relation entre les coefficients (matriciels) de $F(r)$ et les coefficients scalaires de $\varphi(r)$ [Frobenius, 1896, 709]. Si

$$F(r) = F_0 + F_1r + F_2r^2 + \ldots$$

alors chacune des formes $F_0, F_1, F_2, \ldots$ commute avec A. Si l'équation caractéristique s'écrit

$$\varphi(r) = a_0+a_1r+a_2r^2+\ldots+a_nr_n,$$

on a les équations :

$$\begin{aligned}
&\text{-}AF_0 = a_0E,\\
&\text{-}AF_1+F_0 = a_1E,\\
&\text{-}AF_2 + F_1 = a_2E,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\text{-}AFn_{-1} + F_{n-2} = a_{n-1}E\\
&\ F_{n-1} = a_n E
\end{aligned}$$

Ces relations permettent une démonstration restée classique du théorème de Cayley Hamilton. Si B est une forme bilinéaire, et que l'on multiplie ces équations à droite par B_0, B_1, …, B_n puis qu'on ajoute les équations obtenues alors :

$$F(B) = F_0 + F_1B + \ldots + F_{n-1}B_{n-1},$$

et donc :

$$(6.)\ -AF(B) = +F(B)B = \varphi(B)$$

et, quand B commute avec les $F_0, F_1, \ldots$

$$(7)\ (B\text{-}A)F(B) = \varphi(B) :$$

Décrire l'évolution que donne à la notion de matrice le mémoire de Weyr nécessite une étude de la façon dont le texte de Cayley est lu en même temps que d'autres auteurs comme Frobenius [1878], Riemann [1857], Sylvester [1885] et Kronecker [1881]. Comment Weyr lit-il Cayley ? La comparaison de la première partie du mémoire de Weyr [1890] et du mémoire de Cayley [1858], proposée en encart 3, met en évidence une organisation parallèle des deux textes. La structure des deux mémoires vise la démonstration de ce que Weyr désigne comme le "théorème fondamental de M. Cayley" selon lequel "une matrice satisfait une équation algébrique de son propre ordre" (encart 3). A cette similitude des deux textes répond une différence essentielle que mettent en évidence les définitions de la notion de matrice chez les deux auteurs. Tandis que Cayley définit les matrices comme des "quantités arrangées en forme de carré", la définition de Weyr est basée sur l'écriture d'une "équation symbolique", ce n'est pas là une différence de pure forme et il est tout à fait significatif que, dans le mémoire de Weyr, la première représentation d'une matrice par un tableau n'intervient qu'après une vingtaine de pages comme méthode de résolution d'un problème précis ([6]). Qu'est-ce alors qu'une matrice pour Weyr, et qu'elle différence avec la notion de Cayley ? Selon la définition de Weyr, une matrice applique un "système de valeurs" sur un autre, elle n'est donc pas définie seule mais relativement à un "système de valeurs" et cette association met en évidence l'influence des travaux de Kronecker des années 1880, détaillés au chapitre 5, sur la lecture que fait Weyr de Cayley. Si Weyr utilise une notation symbolique *(x)* pour désigner les matrices, c'est, au-delà de l'influence de Frobenius déjà mentionnée, que la "représentation en carré" de Cayley est relative à la donnée d'un système de valeur pose donc une véritable difficulté de représentation que le mémoire de Weyr n'escamote pas.

La comparaison des mémoires de Cayley et Weyr conduit à une conclusion inattendue : si l'influence d'auteurs comme Frobenius ou Kronecker apparaît clairement, la postérité de Cayley lui-même n'apparaît explicitement que dans la structure adoptée par la première partie du mémoire de Weyr. La caractéristique la plus reconnaissable de la matrice de Cayley, sa forme, sa représentation en tableau, ne joue aucun rôle dans le "calcul des matrices" de Weyr. Quelle est alors la postérité de Cayley ? En quoi la notion de matrice enrichit-elle la théorie des formes bilinéaires de Frobenius ?

[6] Il s'agit de démontrer que la donnée de l'invariant qu'est la "caractéristique" détermine une classe de matrices unique (voir l'encart 2 de l'introduction de la deuxième partie).

La citation ci-dessous présente des extraits de la démonstration de Frobenius qui illustre l'effectivité de la notion de matrice scalaire dans son calcul symbolique :

> d.h. aus der Gleichung (5.) geht wieder eine richtige Gleichung hervor, wenn man darin die Unbestimmte r durch irgend eine mit A und f(r) vertauschbare Form B ersetzt, ein Prinzip, von dem ich der Arbeit L. ausgiebig Gebrauch gemacht habe. Setzt man B = A, so erhält man die Gleichung
>
> $$(8.)\ \varphi(A) = 0$$
>
> Dieser Fundamentalste der Formentheorie ist von Cayley gefunden und, wie ich glaube, zuerst in A Memoir on the Theory of Matrices, Phil. Trans. vol 148 veröffentlicht worden, aber ohne allgemeinen Beweis. In der oben angegebenen Gestalt wurde er von Pasch, Uber bilinearen Formen und deren geometrische Anwendung, Math. Ann. Bd. 38, S ; 48 bewiesen. Auf demselben Wege kann man nun auch zu dem zweiten Fundamentaltheorem der Theorie gelangen :
>
> [...]
>
> VI. Ist ɘ(r) der grösste gemeinsame Divisor aller Unterdeterminanten (n-1)ten Grades der Form rE-A, und ist
>
> $$\frac{\varphi(r)}{\text{ɘ}(r)} = \psi(r)$$
>
> die Gleichung niedrigsten Grades, der die Form *A* genügt, und wenn $\chi(A) = 0$ irgend eine andere Gleichung ist, der A genügt, so ist χ(r) dur $\psi(r)$ theilbar.
>
> Durch die Gleichung
>
> $$\frac{\varphi(r)-\varphi(s)}{r-s} = F(r,s) = F(s,r)$$
>
> wird eine ganze Function *F* der beiden variablen *r* und *s* definiert.
>
> Aus der Gleichung
>
> $$\varphi(r) - \varphi(s) = (r-s)F(s,r),$$
>
> folgt
>
> $$\varphi(R)E-\varphi(A) = (rE-A)\ F(A,r)$$
>
> und mithin ist nach (8.)
>
> $$(10.)\ (rE-A)F(A,r) = \varphi(r)E$$
>
> und
>
> $$(11.)\ (rE-A)-1 = \frac{F(A,r)}{\varphi(r)}$$
>
> Die adjungirte Form von *rE-A* ist demnach gleich *F(A,r),* ist also eine ganze Function von *A,* deren Elemente ganze Functionen von r sind Folglich sind auch F_0, F_1, F_2,... ganze Function von *A,* und damit *B* mit jeder dieser Formen vertauschbar sei, genügt es, dass B mit A vertauschbar ist. . Unter dieser Bedingung gilt also die Gleichung
>
> $$(7^*.)\ (B-A)F(A,B) = \varphi(B)$$
>
> Die Elemente der Form *F(A,r)* sind die Unterdeterminanten $(n-1)^{ten}$ Grades von *rE-A*, sind also sämmtlich durch ɘ(r) theilbar. Entwickelt man die Determinant (3.à nach den Elementen einer Zeile, so erkennt man, dass auch φ(r) durch ɘ(r) theilbar ist. Demnach sind die Elemente der Form
>
> $$\frac{F(A,r)}{\text{ɘ}(r)} = G(A,r),$$
>
> die eine ganze Function von *A* ist, ganze Functionen von r, und nach (10.) ist
>
> $$(rE-A)\ G(A,r) = \psi(r)E.$$
>
> Nach dem oben ausführlich entwickelten Princip erhält man daraus eine richtige Gleichung, wenn man für *r* irgend eine mit *A* vertauschbare Form *B* setzt. Ist *B* = *A*, so ergiebt sich die Gleichung (9.)

2. La postérité de Cayley : la notion de "single quantity".

La notion de matrice n'apporte à la théorie des formes bilinéaires ni un mode de représentation par "carrés", ni un calcul symbolique sur des quantités abstraites. Ce qui est propre à la théorie des matrices de Cayley et qui en fait la postérité est aussi l'aspect qui parait le plus étrange au lecteur contemporain : la notion de "single quantity" ou "Scalarmatrizen" chez Weyr ([7]). Dans la notion de matrice scalaire se condensent des idées originales de Cayley comme la représentation des matrices comme des "carrés" et des "rectangles" qui joue à plein de l'analogie géométrique avec les notions de "diagonales", "triangles", "symétriques". C'est en effet avec la définition de la notion de "matrice scalaire" que les analogies géométriques, étrangères au calcul symbolique de Frobenius, apparaissent dans le texte d'Eduard Weyr:

> Die Null und Einheitsmatrix sind offenbar spezielle Fälle jener Matrizen, bei welchen die Elemente in der Hauptdiagonale den gleichen Wert etwa a. besitzen, während die übrigens Elemente gleich Null sind : solche Matrizen mögen Scalarmatrizen heiβen und mit dem Symbol a bezeichnet werden. Demgemäβ werden wir die Matrizen I und 0 mit 1, resp. 0 bezeichnen.
> [Weyr, 1890, 165].
>
> [Traduction, F.B.]. La matrice nulle et la matrice unité sont manifestement des cas particuliers de ces matrices, dont les éléments de la diagonale principale possèdent la même valeur *a* : de telles matrices seront appelées matrices scalaires et désignées par le symbole *a*. Par conséquent les matrices I et 0 seront désignées par 1 et 0 respectivement.

La notion de matrice scalaire, associée à l'idée géométrique de diagonale, est essentielle dans la théorie des matrices de Cayley (ou dans le calcul des systèmes linéaires de Laguerre de 1867 détaillé en encart 18 du chapitre 3) ([8]), elle porte l'originalité de la représentation en "carré" ou en "tableau" de Cayley par rapport au calcul symbolique de Frobenius et, comme le montre l'encart 4, représente un des apports essentiels et durable de Weyr à la théorie des formes bilinéaires. En quoi cette notion est-elle si spécifique et si essentielle ? Une *matrice scalaire* est à la fois un *nombre a* (un scalaire), et une matrice, un *système de nombres*, réduite à une *diagonale* composée de la succession d'une même valeur scalaire ; dans cette diagonale se manifeste toute la dualité propre à la représentation matricielle, une quantité à la fois simple et multiple. De cette dualité, Cayley, et Weyr à sa suite, élaborent une méthode généralisant l'écriture polynomiale classique aux polynômes de matrices du

[7] Cette notion est qualifiée d'étrange en référence à l'article de [Crilly,1978] qui souligne toute l'ambiguïté pour les mathématiques contemporaines de l'emploi qu'en fait Cayley. Cette ambigüité sera mise en évidence dans la suite de ce chapitre.

[8] Cayley et Laguerre ne se citent pas. Une influence de Cayley sur Laguerre, éventuellement indirecte par l'entremise d'Hermite ne peut pas être prouvée.

ENCART 5.

Origine des matrices comme mères des mineurs :
les travaux de Sylvester [1850-1851] sur les intersections de deux coniques.

Le mémoire intitulé "On the intersections, contacts and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates", publié par J.J. Sylvester dans le volume V du *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* (Novembre 1850) a pour objet l'étude des différents types d'intersections de deux coniques. Le travail ne se présente pas comme innovant sur le terrain des résultats, la caractérisation des intersections de coniques atant déjà a été traitée par Plucker [1828]. L'originalité réside dans la méthode employée : efficacité de l'emploi des coordonnées homogènes, innovation surtout du recours au cadre du calcul des déterminants par rapport à la méthode analytique développée par les savants français de l'Ecole Polytechnique ([Hachette-Poisson, 1802], [Cauchy, 1826], [Biot, 1826]) : « the nature of the contacts was there assumed and translated into the language of determinants», [Sylvester, 1851] :

> [...] these analytic conditions will depend upon the signs of certain functions of the coefficients of the given and the assumed equations being of an assigned character; my endeavour has been to obtain conditions of a character perfectly symmetrical and free from the coefficient arbitrarily introduced.
>
> In this research I have only partially succeeded, but the method employed, and some of the collateral results, will, I think be found of sufficient interest to justify their appearance in the page of this Journal.

La méthode analytique traditionnelle présente des défauts de symétrie, la caractérisation des différents types de contacts des coniques est encombrée de la considération d'équations "arbitraires". Par contraste, la nouvelle méthode de Sylvester se veut intrinsèque et symétrique car caractérisant tous les cas d'intersections par l'emploi d'une même technique mathématique. Intrinsèque, la méthode représente les coniques par des formes quadratiques notées symboliquement U et V sans recours à des équations "arbitraires" car relatives aux systèmes de coordonnés. Symétrique, la méthode exprime tous les types d'intersection par l'étude d'une seule et même expression $U+\mu V$ en fonction des valeurs de μ La *multiplicité* des racines du déterminant de $U+\mu V$ caractérise les *types d'intersection* des coniques. Si le cas de trois racines distinctes s'identifie à un premier type d'intersection, les occurrences de racines doubles et triples nécessitent chacune l'examen de deux sous cas caractérisés par l'étude des facteurs communs du déterminants et de ses premiers *mineurs*. Sylvester étudie la relation entre les décompositions en facteurs linéaires d'un déterminant et de ses mineurs, décomposition dans laquelle Darboux puis M. Noether verront une première définition des diviseurs élémentaires ([1]). Ses recherches mènent, pour reprendre les termes de l'auteur, à une série de "résultats collatéraux intéressants", objets des publications 1850a, 1850b, 1851a et 1851b. Parmi ces résultats "collatéraux", la première définition et manipulation des termes "*matrice*" et "*mineurs*".

[1] M. Noether [1898, 133-156] :
Für die Theorie der *Elementartheiler* finden sich schon 1850 Vorstufen [....], indem Sylvester die discrimante Δ eines Büschel $\varphi+\lambda\psi$ quadratischer, ternärer und quaternärer, Formen auf Realitäts-, Contact- etc. Eigenschaften geometrisch und algebraisch discutirt, zunächst in speziellen Fällen, aber von 1851 enthalten nun die Theorie selbst : Sylvester erkennt, dass die vielfachen Faktoren von Δ mittelst der gemeinsamen Faktoren je der Unterdeterminanten der verschiedenen Ordnungen in ihre Elementartheiler zerlegt werden müssen, und weiter, dass diese Theiler unabhängig von linearer Transformation von φ und ψ sind ; er sucht, von diesen Theilern ausgehen, den Überblick, indem er daraus eine Tabelle der zugehörigen *kanonischen* Formenpaare φ, ψ sind construirt. Sicherlich bedeutet dieses die Entdeckung der Elementartheiler und einen Vorläufer der Theorie von Weierstrass [...], welcher übrigens Sylvester nicht citirt ; denn Sylvester hat sowohl die Existenz der Elementartheiler, als ihre Invarianz.

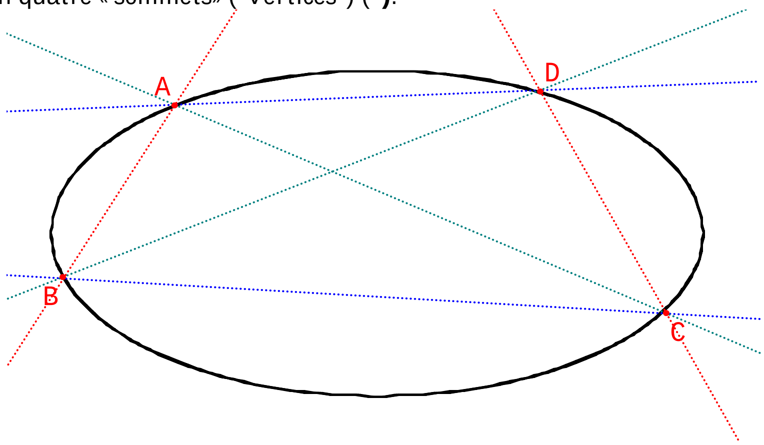
type $a_0A^\nu+a_1A^{\nu-1}+\ldots+a_\nu$. Contrairement aux fonctions entières de formes employées par Frobenius comme nous l'avons vu au chapitre 2, les a_i ne sont pas des nombres mais des matrices scalaires ce qui permet de factoriser les polynômes de matrices en facteurs linéaires sur le modèle des polynômes de nombres, opération étrangère au calcul symbolique de Frobenius ([9]):

> Ist nun $A = \{a_{hk}\}$ eine beliebige Matrix, so hat man
> [...]
> Die Matrix
> $$a_0A^\nu+a_1A^{\nu-1}+\ldots+a_\nu,$$
> wo $a_0, a_1,\ldots,a_\nu$ Scalarmatrizen bezeichnen und ν ganzzahlig und positive ist, nennen wir eine ganze Function der Matrix *A.*
> Hat man, $\alpha_0, \alpha_1,\ldots,\alpha_\nu$ und x als gewöhnliche complexe Größen aufgefasst, für jedes x die Gleichheit
> $$a_0x^\nu+a_1x^{\nu-1}+\ldots+a_\nu = a_0(x-\rho_1)\ldots(x-\rho_\nu),$$
> so gilt, in Rücksicht auf die vorhergehenden Rechnungsregeln, offenbar auch
> $$a_0A^\nu+a_1A^{\nu-1}+\ldots+a_\nu = a_0\,(A-\rho_1)\ldots(A-\rho_\nu),$$
> mit A eine beliebige Matrix bezeichnet.
> [Weyr, 1890, 165].
>
> [Traduction, F.B.]. Soit à présent $A = \{a_{hk}\}$ une matrice quelconque [...]. La matrice
> $$a_0A^\nu+a_1A^{\nu-1}+\ldots+a_\nu,$$
> où $a_0, a_1,\ldots,a_\nu$ désignent des matrices scalaires et ν un nombre entier positif, sera dénommée fonction entière de la matrice A.
> Si $\alpha_0, \alpha_1,\ldots,\alpha_\nu$ et x sont des grandeurs complexes, on a pour tout x l'identité
> $$a_0x^\nu+a_1x^{\nu-1}+\ldots+a_\nu = a_0(x-\rho_1)\ldots(x-\rho_\nu),$$
> qui donne, par la considération de la règle de calcul précédente, également la relation
> $$a_0A^\nu+a_1A^{\nu-1}+\ldots+a_\nu = a_0\,(A-\rho_1)\ldots(A-\rho_\nu),$$
> où A désigne une matrice quelconque.

La notion de matrice scalaire, et la méthode de factorisation des polynômes de matrices qui lui est associée en postérité directe du calcul des matrices de Cayley, fonde la nouvelle théorie des formes bilinéaires proposée par Weyr en 1890. Il s'agit à présent de préciser cette postérité de Cayley par un déplacement en aval et en amont dans les textes du corpus. En amont d'une part, avec l'étude des travaux de Weyr et de Sylvester publiés dans les Comptes rendus dans les années 1882-1885, en aval d'autre part avec l'histoire écrite au sein de travaux mathématiques d'auteurs comme Scheffers, Taber, Molien, Frobenius et Hensel dans les années 1890-1900.

[9] Lorsque Frobenius recourt à une factorisation, par exemple pour exprimer les diviseurs élémentaires de Weierstrass, cette factorisation concerne le déterminant du polynôme de formes et non le polynôme de formes lui-même.

La méthode de Sylvester prend sa source dans des considérations géométriques : l'intersection de deux coniques *U* et *V,* nommée par Cayley un « *quadrangle* », comporte trois paires de cotés se coupant en quatre « sommets» ("Vertices") ([2]).



Caractériser l'intersection des coniques c'est expliciter la nature (réels-imaginaires, distincts-confondus) des sommets ou des paires de côtés du « *quadrangle* **»** :

> If all the points of the quadrangle of intersection are real, the three vertices and the three pairs of sides are all real. If only two points of the quadrangle are real, one vertex and one of the three pairs of sides will be real ; the other two vertices and two pairs of sides being imaginary. If all four points of the quadrangle are unreal, one pair of sides will be real and the other two pairs imaginary, as in the last case ; but all the three vertices will remain real, as in the first case.

Si la recherche des sommets est représentée, dans la méthode analytique, par des systèmes d'équations critiqués comme "arbitraires", la considération des paires de cotés permet un critère "direct" et "simple" reposant sur la théorie du déterminant. La méthode de Sylvester caractérise les paires de côtés du quadrangle, donc le type géométrique d'intersection par l'examen des racines du déterminant de l'expression $\lambda U+\mu V$:

> Hence we have a direct and simple criterion for distinguishing the case of mixed intersection from intersection wholly real or wholly imaginary; namely, that the cubic equation of the roots of which coordinates of the vertices are real linear functions shall have a pair of imaginary roots. This is the sole and unequivocal condition recquired. The equation in question is, or ought to be, well known to be the determinant in respect to ξ, η, ζ of $\lambda U+\mu V$.

Quelle est la signification de l'expression symbolique $\lambda U+\mu V$? La méthode de Sylvester repose sur une représentation implicite : l'expression $U+\mu V$ est interprétée comme représentant une conique 'variable' selon la valeur donnée à μ et les paires de côtés caractéristiques de l'intersection correspondent aux valeurs de μ pour lesquelles cette conique $U+\mu V$ est une paire de droites (*coniques dégénérées du faisceaux*) ([3]). Le problème de l'intersection des coniques se trouve lié à l'examen des racines de l'expression $\lambda U+\mu V$ et à un procédé qui en déduit une équation algébrique par un calcul de déterminant. La caractérisation du contact par l'équation $|\lambda U+\mu V|=0$ est considérée par Sylvester comme objective car recourant à une équation intrinsèque, contrairement aux équations aux "coefficients arbitraires" de la méthode analytique. L'occurrence de trois racines distinctes pour l'équation $|\lambda U+\mu V|=0$ se traduit par l'existence de trois paires de droites distinctes pour le quadrangle et permet de caractériser un premier type de contact entre deux coniques.

---

[2] Deux coniques projectives de $P_2(\hat{E})$, C et C ', se coupent en quatre points, c(est un cas particulier du théorème de Bézout sur les courbes projectives complexes de degré *m* et *n* se coupant en *mn* points.

[3] Si l'on suppose C propre et que l'on appelle *Q* et *Q'* les formes quadratiques associées aux deux coniques, leur intersection est celle de C avec n'importe quelle conique du faisceau défini par : $\lambda Q(x,y,z)+\mu Q'(x,y,z) = 0$. Il s'agit en particulier de l'intersection de C avec une conique dégénérée C'' du faisceau (paire de droites), conique correspondant à des valeurs de λ et μ telles que $D(\lambda) = det(\lambda Q(x,y,z)+\mu Q'(x,y,z)) = 0$.

II. LES LECTURES DE CAYLEY (1858) PAR SYLVESTER (1882) : LA DYNAMIQUE DE LA NOTION DE MATRICE ENTRE 1882 ET 1885.

Les premiers travaux de Weyr viennent en réponse à un problème posé par Sylvester en 1885 : trouver l'"équation de plus petit degré" qui annule une matrice M :

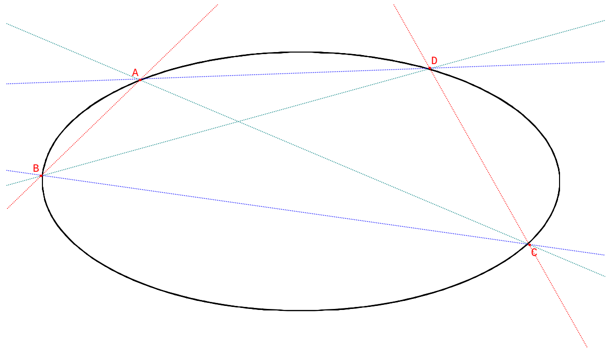
> On sait que toute matrice de l'ordre n satisfait à une équation de degré n ; c'est l'équation fondamentale de M. Cayley. Il y a cependant des matrices qui satisfont à une équation de degré moindre que n : ce sont les matrices que M. Sylvester nomme *dérogatoires*.
> [Weyr, 1885a, 787].

Entre 1882 et 1885, Sylvester publie une longue série de notes aux *Comptes Rendus* qui sont l'occasion d'une réapparition, pour la première fois depuis 185, de la notion de matrice dans son œuvre. Ces notes ont suscité de nombreux commentaires dans le cadre de l'historiographie des algèbres associatives [Parshall, 1985] ou des systèmes hypercomplexes [Hawkins, 1972 à 1999]. Selon la problématique de cette historiographie, la notion d'algèbre associative des matrices serait déjà en germe chez Cayley en 1858 et la période de 25 ans qui précède les publications de Sylvester est présentée comme le temps nécessaire à cette notion pour éclore en une théorie des systèmes hypercomplexes:

> For the first time in his published work, then, Sylvester portrayed matrices not merely as notational devices or "schemata" but as complex quantities subject themselves to the usual laws of algebra. In other words *matrix algebra* was possible.
> [Parshall, 1985, 245].

Cette éclosion serait la conséquence de la publicité de la théorie des matrices aux "mathématiciens du continent" assurée par les publications de Sylvester dans les *Comptes Rendus* [Hawkins, 1972, 248], [Parshall, 1985, 237] ([10]). Pour expliquer le nouvel intérêt de Sylvester pour le mémoire de Cayley de 1858, l'historiographie présente différents arguments comme les cours de Sylvester sur les quantités multinômes donnés à partir de 1881 à la John

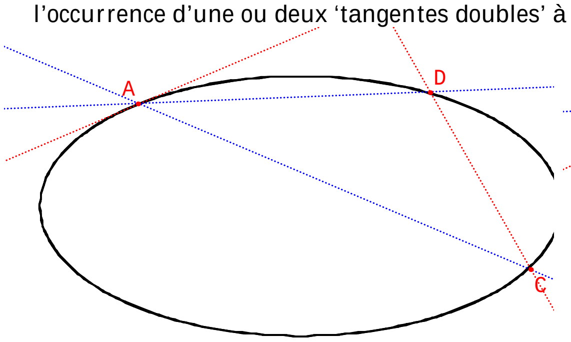
[10] En opposant à cette idée le fait que les travaux de Cayley sur les matrices semblent connus, il faut encore ajouter que Cayley lui-même publie dans les années 1880 des mémoires employant et présentant son calcul des matrices, ces mémoires concernent d'ailleurs des sujets de préoccupations de Frobenius comme la transformation des fonctions thêta multiples, voir [Cayley, 1880].

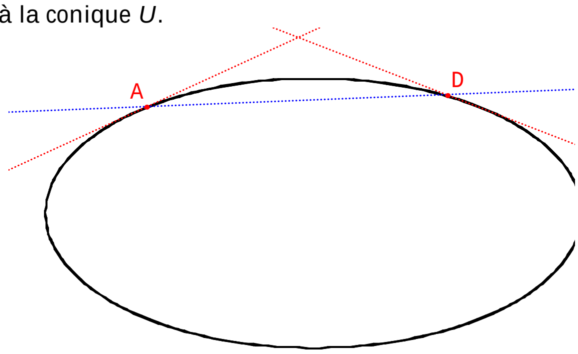


L'occurrence de racines doubles ou triple nécessite une analyse plus fine, le seul degré de multiplicité des racines du déterminant de $U+\mu V$ s'avérant un critère insuffisant pour distinguer le premier et le deuxième type de contact de second degré ([1]) :

> The classification of contacts between two conics may be stated as follows :
> Simple contact = one case.
> Second degree contact = 2 cases: common curvature or double contact.
> Third degree contact = one case, namely, contact in four consecutive points
> These four cases of course correspond to the several suppositions of there being two equal roots, three equal roots, two pairs of equal roots, or four equal roots in the biquadratic equation obtained between two variables by elimination performed in any manner between the given equations in the two conics.
> The first species and the first case of the second species have already been disposed of. I proceed to assign the conditions appertaining to the second case of the 2de species when U and V have a double contact .

Les deux types de contacts du second degré se distinguent géométriquement l'un de l'autre par l'occurrence d'une ou deux 'tangentes doubles' à la conique U.





[1] Le type d'intersection de deux coniques étant caractérisé par le type de coniques dégénérées se trouvant dans le faisceau, il dépend donc de la nature des racines (valeurs propres) de $det(\lambda Q+\mu Q')=0$. La multiplicité de ces racines permet de distinguer entre contacts de premier, second et troisième ordre. Mais il y a deux types de points de contacts pour les second et troisième ordres et, pour les différencier il est nécessaire d'étudier le pgcd des mineurs du déterminant $D(\lambda)$ de $\lambda Q(x,y,z)+\mu Q'(x,y,z)$ (facteurs invariants $D_i(\lambda)$).

Hopkins University ([11]), la publication des travaux de Peirce sur les algèbres dans le journal de Sylvester (*American Journal of Mathematics*), la visite de Cayley à Baltimore au printemps 1882 ou encore un "retour subconscient" de la lettre de 1857 dans laquelle Cayley annonçait à Sylvester le contenu de sa théorie des matrices [Parshall, 1885, 241-242]. La problématique de la recherche des précurseurs de la théorie des systèmes hypercomplexes qui caractérise cette historiographie présuppose que la notion de matrice est essentiellement la même chez Cayley en 1858 et chez Sylvester en 1884, les deux auteurs participant d'une même théorie intemporelle des algèbres associatives. L'historiographie n'explicite cependant jamais quels sont les questions mathématiques auxquelles Cayley répond en 1858, et explique difficilement les motivations de Sylvester en 1882. L'étude menée dans cette partie démontre que la notion de matrice passe, dans les travaux de Sylvester, par deux conceptions très distinctes entre 1882 et 1884 et que le passage d'une conception à l'autre est dû à une postérité directe du mémoire de Cayley et que cette postérité n'est pas directement liée à une perception des matrices comme formant une algèbre. La lecture de Cayley par Sylvester en 1882 est motivée par un problème mathématique précis et la postérité de la théorie des matrices de 1858 est d'abord celle d'une méthode résumée dans l'équation suivante dont l'écriture est rendue possible par la notion de "single quantity" de Cayley :

$$(M-\mu_\alpha)^{\alpha-\alpha_1+1}(M-\mu_\beta)^{\beta-\beta_1+1}...(M-\mu_\lambda)^{\lambda-\lambda_1+1}=0$$

où M est une matrice et μ_α un nombre.
[Weyr, 1885a, 787].

[11] Les premiers papiers de Sylvester sur les matrices sont envoyés aux *Comptes Rendus* depuis les Etats-Unis. Sylvester séjourne à Baltimore à partir de 1876 où il prend le premier poste de professeur de mathématiques de la nouvelle université John Hopkins. Il y développe sa nouvelle théorie des matrices et de l'algèbre multiple qu'il publie en partie dans les circulaires de l'université. En 1883, Sylvester quitte Baltimore pour occuper la chaire Savile à Oxford. Pour une étude de la fondation de l'université dans le cadre de l'origine des premières écoles de recherches américaines voir [Parshall, 1998].

Cette représentation géométrique permet de raffiner la méthode, Sylvester transpose la configuration géométrique de l'existence de deux tangentes doubles dans un cadre analytique: il existe une valeur de μ permettant d'écrire $U+\mu V$ comme carré d'une fonction linéaire. Sylvester traduit cette condition analytique comme l'occurrence de facteurs communs dans le développement d'un déterminant :

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2W}{d\xi^2} & \frac{d^2W}{d\xi d\eta} & \frac{d^2W}{d\xi d\varsigma} & p \\ \frac{d^2W}{d\eta d\xi} & \frac{d^2W}{d\eta^2} & \frac{d^2W}{d\eta d\varsigma} & q \\ \frac{d^2W}{d\varsigma d\xi} & \frac{d^2W}{d\varsigma d\eta} & \frac{d^2W}{d\varsigma^2} & r \\ p & q & r & 0 \end{vmatrix}$$

$= Ap2+Bq2+Cr2+2Fqr+2Grp+2Hpq,$

where all the coefficients are quadratic functions of μ, and make

$A = 0,\ B = 0,\ C = 0,\ F = 0,\ G = 0,\ H = 0,$

each of these six equations in μ will have one and the same root in common.

Cet énoncé établit une relation entre le type d'intersection et les facteurs communs de ce qui sera bientôt nommé par Sylvester les «mineurs» intervenant dans le développement du déterminant. L'existence de deux tangentes doubles est interprétée comme la possibilité de factoriser le déterminant par un facteur de degré 2 :

I must observe that besides the equations involved in the condition that *A, B, C, F, G, H,* or which is the same thing, that any three of them shall all have a factor in common, we must have $\square(U+\lambda V)$ containing the square of such common factor. In the memoir before adverted to a general theorem will be given and proved, which shows that this latter condition is involved in the former one ; [...] When the two conics have four consecutive points in common, the characters of double point contact and of contact in three consecutive points must exist simultaneously ; and consequently the factor common to *A, B, C, F, G, H*, will enter not as a binary but as a ternary factor into $\square(U+\lambda V)$.

Si le mémoire de 1850 se contente de conclusions analytiques, il est à la genèse de la définition des "mineurs" et des "matrices" donnée en 1851 afin de caractériser les trois types d'intersections des coniques à l'aide de la nature des racines de l'équation $|U+\mu V| = 0.$

1. Quand Sylvester (1882) lit Sylvester (1851) : la matrice comme mère des mineurs d'un déterminant.

Les encarts 5, 6 et 7 détaillent la manière dont la notion de matrice est introduite par Sylvester en 1851 pour distinguer du déterminant d'un système le tableau dont sont extraits les mineurs. Trente années séparent l'introduction de la matrice comme mère des mineurs et sa réapparition dans l'œuvre de Sylvester à l'occasion d'une note aux *Comptes Rendus* datée de février 1882. Il s'agit de résoudre un problème déjà présenté dans une note publiée le 9 janvier de la même année et intitulée "Sur les puissances et les racines des substitutions linéaires". Le problème est une généralisation d'un problème classique, traité par Babbage et Serret ([12]) : déterminer une fonction homographique φ de "périodicité donnée" [Sylvester, 1883a, 110], c'est-à-dire déterminer

$$\varphi(x) = \frac{ax+\alpha}{bx+\beta}$$

telle que

$$\varphi^{\mu}(x) = x.$$

Sylvester généralise le problème aux fonctions homographiques d'un nombre quelconque de variables, sa méthode de résolution consiste à écrire les fonctions puissances et racines de la substitution linéaire associée à φ comme une fonction numérique des "racines lambdaiques" de l'équation $det(\varphi-\lambda I)$:

> Soit un déterminant quelconque donné, et ajoutons le terme - λ à chaque terme diagonal ; on obtient ainsi une fonction de λ ; je nomme 1es racines de cette fonction racines *lambdaiques* du déterminant donné [...]. i étant une quantité commensurable quelconque, les i^{emes} puissances des racines lambdaïques d'un déterminant de substitution sont identiques avec les racines lambdaïques de $i^{ème}$ puissance du déterminant.
> [Sylvester, 1882a, 56]

La note de janvier, qui ne fait aucune référence à la notion de matrice, est suivie par la parution, au mois de février, d'une seconde note intitulée "Sur les racines des matrices unitaires" dans laquelle le problème est reformulé de la manière suivante :

> Extraire la racine $\mu^{ième}$, ou plus généralement trouver la puissance $i^{ème}$ d'une matrice donnée.[1882a, 57].

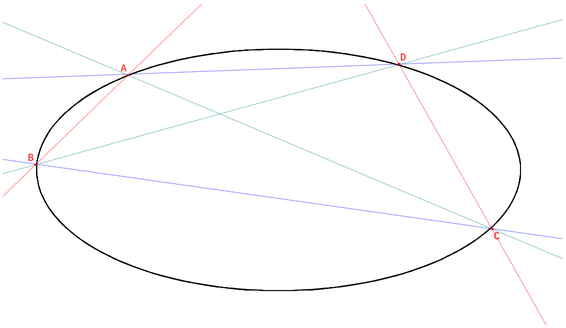
[12] L'intérêt de Sylvester pour ce problème provient de ses récents travaux, parus dans le *Journal de Mathématiques* [1881a], sur l'inégalité de Tchebycheff [1852] donnant des bornes aux nombres de nombres premiers $\pi(x)$ inférieurs à un nombre donné x :

$$A_1 < \pi(x)/x/log(x) < A_2$$

où $0,922 < A_1 < 1$ et $1 < A_2 < 1,105.$

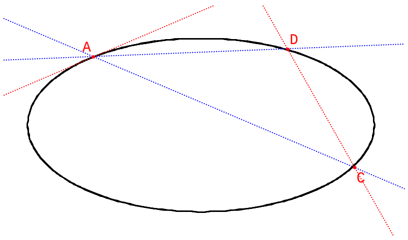
Les calculs de Sylvester nécessitent des systèmes d'équations linéaires dont les solutions reviennent à rechercher les racines d'une fonction homographique. Voir à ce sujet [Parshall, 1985].

1er type : 3 racines distinctes

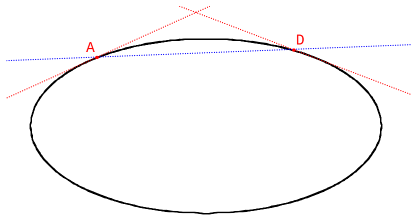


2^{e} type d'intersections : 2 racines confondues.

Déterminant et premiers mineurs sans facteur commun

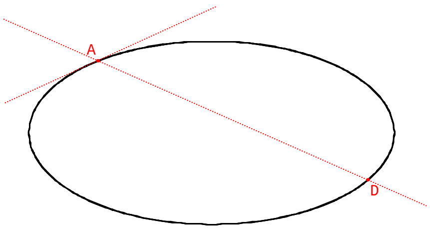


Déterminant et premiers mineurs ayant un facteur commun



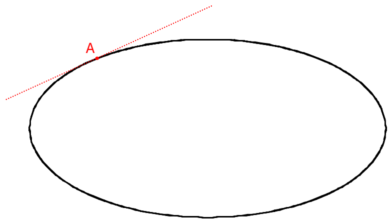
3^{e} type d'intersection : 3 racines confondues

Déterminants et mineurs sans facteurs communs



.

Déterminants et mineurs ayant un facteur commun



La notion de matrice apparaît en février 1882 afin de corriger une erreur commise par Sylvester dans sa note de janvier, la formule donnée pour exprimer les fonctions de substitutions comme fonctions numériques des "racines lambdaïques" est en effet fausse dans le cas où les "racines lambdaïques" ne sont pas toutes distinctes ([13]) :

$$K_i = \sum \frac{K_{n-1} - S_1.K_{n-2} + S_2.K_{n-3} - \ldots \pm S_{n-2}.K_1 \mp S_{n-1}.K_0}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\ldots(\lambda_1-\lambda_n)} \lambda_1^i,$$

Dans la note de janvier, Sylvester pense pouvoir traiter l'occurrence de *racines multiples* par la simple "introduction de différences infinitésimales", mais la formule obtenue est en contradiction avec un résultat donné par Cayley en 1858 pour la résolution de l'équation en matrices $M^3 = 1$ [Cayley, 1858, 487-488]. La seconde note de février 1882 vient corriger le résultat erroné de janvier, et la méthode employé se présente comme un réinvestissement des travaux de Sylvester des années 1850 sur les déterminants et les invariants ([14]). Les difficultés rencontrées en 1882 présentent en effet des similitudes avec celles résolues par l'introduction des notions de *matrices* et de *mineurs* en 1851 [Sylvester, 1851b] ; dans les deux cas, la difficulté provient de l'occurrence de *racines multiples* dans l'équation $det(\varphi-\lambda I)$. En 1851, Sylvester avait montré qu'il était nécessaire d'aller au-delà de l'examen du déterminant et de

---

[13] Au sujet de la formule de Sylvester, voir l'exposé de [Cartan et Study, 1908, 438] dans *l'Encyclopédie des sciences mathématiques* sur l'expression des "fonctions analytiques" dont les variables sont hypercomplexes (par exemple les exponentielles de matrices). Voir aussi les traités de théorie des matrices des années 1930 et notamment la formulation donnée au problème par Wedderburn. Il s'agit alors de déterminer un polynôme de matrices et, dans le cas où la matrice x n'a que des valeurs propres simples, des polynômes numériques suffisent à caractériser le polynôme $g(x)$; l'occurrence de racines multiples nécessite l'emploi de la forme de Jordan. Wedderburn expose d'abord le cas particulier d'occurrence d'une seule racine multiple [Wedderburn, 1931, 27]:

> Suppose in the first place that x has only one distinct root and that its reduced characteristic function is
>
> $$\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\nu},$$
>
> and set
>
> $$\eta_1^i = \eta_i = (x-\lambda_1)^i = (x-\lambda_1)\eta_{i-1}$$
>
> then
>
> $$\eta_1^{\nu} = 0,\ x\eta_{\nu-1} = \lambda_1\eta_{\nu-1},\ x\eta_i = \lambda_1\eta_i + \eta_{i+1}.$$
>
> $$[\ldots] g(x) = g(\lambda_1+\eta_1) = g(\lambda_1) + g'(\lambda_1)\eta_1 + \ldots + \frac{g^{(\upsilon-1)}(\lambda_1)}{(\nu-1)!}\eta_1^{\nu-1}.$$
>
> Dans le cas général où la fonction caractéristique est
>
> $$\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^{r}(\lambda-\lambda_i)^{\nu_i}$$
>
> $(\Sigma\nu_i = \nu,\ r > 1)$, alors :
>
> $$g(x) = \sum_1^r [g(\lambda_i)\varphi_i + g'(\lambda_i)\eta_i + \ldots + \frac{g^{(\nu_i-1)}(\lambda_i)}{(\nu_i-1)!}^{\upsilon_i-1}\ \eta_i^{\nu_i-1}(\lambda)]$$

[14] C'est aussi au cours des années 1850 que Sylvester contribue à la question de la multiplicité des racines dans le problème des variations séculaires si A est une matrice symétrique, les racines de l'équation caractéristique de A^p sont les puissances des racines. Ce mémoire, publié dans les *Nouvelles annales* est le premier papier de Sylvester dans un journal étranger. Sur la carrière internationale de Sylvester voir [Parshall, 1997].

ENCART 6.

Généralisation de la méthode de Sylvester aux quadriques et introduction des mineurs et matrices.

L'expression $U+\mu V$ etait au cœur de la nouvelle méthode que présentait le mémoire de 1850 de Sylvester pour caractériser les types d'intersections de deux coniques. Ce qui n'était d'abord présenté que comme un procédé intervenant dans une méthode mathématique acquiert, par l'association d'interprétations géométriques aux propriétés algébriques des racines de l'équation $|U+\mu V| = 0$, le statut d'objet d'étude en soi. Par une articulation du cadre géométrique et d'une expression symbolique, Sylvester emploie ce nouvel objet à la généralisation de deux de ses résultats antérieurs, parus dans le volume XXXVII du Philosophical Magazine sous le titre: « Additions to the articles « On an new class of theorems » and on Pascal theorem»" [1850b]. Le premier résultat énoncé met en relation la structure polynomiale du déterminant de $U+\mu V$ et ce que Sylvester nomme l'"ordre" de la forme quadratique (ce que Frobenius dénommera le rang d'une forme bilinéaire). Le problème est désormais considéré dans sa généralité, pour « *n* lettres » :

> Let *U* and *V* be functions each of the same m letters, and suppose that the determinant in respect of those letters of $U+\mu V$ contains i pairs of equal linear factors of μ ; then it is possible, by means of *i* linear equations instituted between the letters, to make *U* and *V* each become functions of the same *m-2i* orders ; and conversely, if by *i* equations between the letters *U* and *V* may be made functions of the same *m-2i* orders, the determinant of $U+\mu V$ considered as a functions of μ will contain *i* square factors.

Si $m=2n$ et $i=n$, le déterminant de $U+\mu V$ est donc un carré, et sous ce cas particulier se retrouve énoncé le résultat de1850a pour l'occurrence de deux tangentes doubles dans le quadrangle d'intersection de coniques :

> So for example if *U* and *V* be quadratic functions of four letters, and therefore the characteristics of two conoids, $\square U+\mu V$ being a perfect square, expresses that these conoids have a straight line in common lying upon of their surfaces.
>
> If *U* and *V* be quadratic functions of three letters only, and admit therefore of being considered as the characteristics of two conics, $\square(U+\mu V)$containing a square factor, is indicative of these conics having a common tangent at a common point, that is, of their rouching each other at some point.

Sylvester généralise ses résultats de 1850 au cas des quadriques :

> I now proceed to develop more particularly certain analogies between the theory of the mutual contacts of two conics, and that of the tangencies to the intersection of two conoids

Développer ces analogies, synthétiser et généraliser les résultats de 1850a pour plus de trois variables, suscite l'introduction de notions de théorie des déterminants: les premiers, seconds et r^e «mineurs» du déterminant $|U+\mu V|$, dont l'étude fera l'objet d'un nouveau mémoire en 1851 [1851b**]**, l'occurrence de deux tangentes doubles se caractérise désormais par « *l'annulation simultanée de mineurs* » ([1]) [1850b] :

> In the application I am about to make of these principles, we shall have only to deal with a system of first minors and of symmetrical determinant. If three of these properly selected be zero, from the foregoing it appears that all must be zero.
>
> Now let *U* and *V* be characteristics of two conics, that is, let each be a function of only three letters, it mays be shown that the different species of contacts between these two conics will correspond to peculiar properties of the compound characteristic $U+\mu V$.
>
> If the determinant of this function have two equal roots, the conics simply touch ; if it have three

[1] Le premier résultat sur la nouvelle notion de mineur, nommé par Sylvester « homoloidal law » consiste à déterminer le nombre d'équations à résoudre pour s'acquitter de l'« annulation simultanée des mineurs » : en général $(r+1)^2$ équations sont nécessaires mais dans le cas où le « déterminant est formé d'une fonction quadratique » et donc symétrique, $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ équations suffisent.

considérer les mineurs de la matrice associée (encart 6) ([15]). Si Sylvester lit Cayley en 1882, il se relit donc d'abord lui-même et réinvestit sa propre notion de matrice comme mère des mineurs :

> On peut demander quelle est la forme d'une autre matrice M du même ordre n, telle que la $i^{ème}$ puissance de M soit une matrice unitaire.
> [...] Je vais à présent donner toutes les solutions dont la question est susceptible. Soient ν_1, ν_2, ν_3,...,ν_k des nombres entiers et positifs quelconques dont la somme est n, et ρ_1, ρ_2, ..., ρ_k, k quelconques des $i^{ème}$ racines de l'unité. *Soit* M_λ la matrice affectée de l'indice λ, c'est-à-dire modifiée par l'addition de −λ à chacun des n termes de la diagonale.
> Considérons les systèmes de matrices mineurs de M, de l'ordre $n-\nu_1+1$, $n-\nu_2+1$, ..., $n-\nu_k+1$ respectivement ; et prenons M tel que $\lambda-\rho$, $\lambda-\rho_2$,..., $\lambda-\rho_k$ soient facteurs de chaque mineur du premier, du second, ..., du k^e de ces systèmes respectivement : alors M sera une racine $i^{ème}$ de la matrice unitaire de l'ordre n.
> [1882b, 396].

En cas d'occurrence de racines multiples le problème n'a pas une solution unique, la notion de matrice comme génératrice des mineurs permet cependant de donner toutes les solutions et de distinguer, sur le modèle des genres d'intersections de coniques de 1851 (encarts 5, 6 et 7), entre le "genre principal" (summum genus) "qui correspond à l'occurrence de racines distinctes" et le "genre le plus bas" ("infimum genus") pour lequel " n est laissé sans décomposition, et le nombre de conditions pour ce cas sera n^2". La solution proposée par Sylvester s'accorde alors avec le cas particulier traité par Cayley en 1858 :

> Ainsi, pourvu que i soit égal ou supérieur à n, il y aura autant de genres de racines $i^{èmes}$ de cette matrice qu'il a de partition indéfinies de n.
> [...] En effet, la matrice trouvée par M. Cayley, dans son Mémoire sur les matrices (*Philosophical Transactions*, 1858),
>
> $$\begin{matrix} \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}, & \dfrac{-(\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}\dfrac{\nu}{\mu}, & \dfrac{-(\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}\dfrac{\nu}{\mu}, \\ \dfrac{-(\gamma+\alpha)}{\alpha+\beta+\gamma}\dfrac{\mu}{\nu}, & \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, & \dfrac{-(\gamma+\alpha)}{\alpha+\beta+\gamma}\dfrac{\lambda}{\mu}, \\ -\dfrac{(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta+\gamma}\dfrac{\mu}{\upsilon}, & \dfrac{-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta+\gamma}\dfrac{\nu}{\lambda}, & \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}, \end{matrix}$$
>
> sera la matrice M, telle que chaque mineur de M_ρ contiendra $(\rho-1)$; de même chaque mineur de $(-M)_\rho$ contiendra $\rho+1$; on remarquera que 1 et -1 sont les racines carrées de l'unité, et l'on vérifiera aisément que M^2 ou, ce qui revient au même, $\Phi(-M)^2$ ont tous les deux la forme
>
> $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
>
> [Sylvester, 1882b, 397].

---

[15] Voir aussi l'influence de ce travail sur [Darboux, 1874] détaillée au chapitre 2. Darboux identifie les notions introduites par Sylvester comme analogues aux diviseurs élémentaires de Weierstrass.

> equal roots, the conics have a single contact of a higher order, that is, the same curvature; if its six first minors become zero simultaneously for the same value of μ, which makes all these first minors zero, be at the same time not merely a double root (as of analytical necessity it always must be) but a triple root of $\square(U+\mu V) = 0$. Then the conics have a single contact of the highest possible order short of absolute coincidence, that is, they meet in four consecutive points.

L'extraction effective des mineurs d'un déterminant d'ordre n s'appuie sur une représentation en tableaux rectangulaires:

> This homoloidal law has not been stated in the above commentary in its form of greatest generality. For this purpose we must commence, not with a square, but with an oblong arrangement of terms consisting, suppose, of m lines and n columns. This will not in itself represent a determinant, but is, as it were, a Matrix out of which we may form various systems of determinants by fixing upon a number p and selecting at will p lines and p columns, the square corresponding to which we may be termed determinants of the p^{th} order.

Matrice : la mère des mineurs. La notion n'a encore aucune des propriétés opératoires qui caractériseront l'approche de Cayley, elle est proche des tableaux utilisés sur le continent depuis Cauchy (voir le chapitre 7). Dans un nouveau mémoire de Sylvester, intitulé "An enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second order » [1851a], les recherches géométriques initiales cèdent le pas à l'étude algébrique de la "forme condensée" $U+\lambda V$, un objet algébrique considéré pour lui-même et dont les propriétés s'"appliquent" désormais à la géométrie [Sylvester, 1851b] :

> Wishing to subject it to analytical test, he found it necessary to obtain the condensed forms which serve to characterize the confluent contact of conics. In this way he became aware of the great utility of these condensed forms, and of the desideratum to be supplied in obtaining a complete list of them applicable to all varieties of contact. The happy thought then occurred to him of inverting the process which he had applied in the treatment of the contacts of conics, in the November Number of the Cambridge and Dublin Mathematical Journal ; for whereas the nature of the contacts was there assumed and translated into the language of determinants, he soon discovered that it was the more easy and secure course to assume the relations of every possible immutable kind that could exist between the complete and minor determinants corresponding to characteristics, by aid of these relations to construct the characteristics, and from the characteristics so obtained, determine the geometrical character of each resulting species of contact.
>
> [...]
>
> It is easily seen that to every relation of equality between the roots of the determinant of $U+\lambda V$ must correspond a particular species of contact between the loci which U and V characterize. But we should make a great mistake were we to suppose that every such relation of equality between the roots of the determinant *of* $U+\lambda V$ must correspond a particular species of contact ; for instance, the characteristics of U and V of two conics are functions of three letters, and $\square(U+\lambda V)$ will be a cubic function of λ. Such a function may have two roots, or all its roots equal : this would seem to give but two species of contact, whereas we well know that there are no less than fours species of contact possible between two conics. Accordingly we shall find, that, in order to determine the distinctive characters of each species of contact, we must look beyond the complete determinant, and examine into the relations of the several systems of minor determinants that can be formed from $U+\lambda V$.
>
> [...]
>
> If U and V are characteristics of the two loci whose contacts are to be considered, $U+\lambda V$ will be the function, the properties of whose complete determinant, and of minor systems of determinants belonging to it, will serve to specify the nature of the contact.

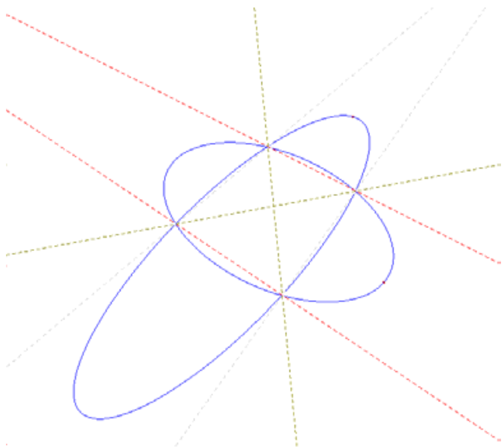
La réapparition de la notion de matrice dans l'œuvre de Sylvester est avant tout le résultat d'une relecture par Sylvester de ses propres travaux de 1851. La référence à Cayley a le même statut que les références à Babbage et Serret, elle vient citer le travail d'un prédécesseur sur le problème du calcul des puissances d'une substitution. La postérité de Cayley n'est donc en aucun cas portée, en 1882, par son calcul symbolique des matrices qui n'est d'ailleurs pas adopté par Sylvester. La lecture de Cayley par Sylvester en 1882 jette un éclairage sur la motivation originale de la théorie des matrices de Cayley qui vient donner une méthode pour déterminer des fonctions rationnelles d'une substitution, le cas de la racine carrée $\sqrt{M}$ correspondant à l'exemple le plus classique associé au nom de Babbage, comme le montre l'encart 8, c'est l'élaboration de cette méthode qui suscite la définition des opérations sur les matrices ([16]).

[16] Voir également les deux autres mémoires consacrés par Cayley aux matrices et aux racines des fonctions homographiques : [Cayley, 1872] et [Cayley, 1880a].

Ce qui caractérise la nature du contact de deux coniques ou deux quadriques, c'est le "système complet" formé du déterminant D et des plus grands communs diviseurs de ses mineurs D_1, D_2, D_3,.. A chaque type d'intersection, Sylvester associe la décomposition "systèmes de mineurs" de l'expression $U+\lambda V$

1er type :

$D(\lambda) = (\lambda\text{-}a)(\lambda\text{-}b)(\lambda\text{-}c)$ et $D_1(\lambda) = 1.$

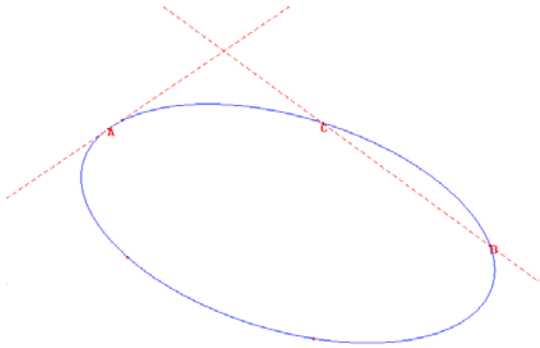


3 points d'intersection ($|U+\lambda V|=0$ a trois racines distinctes).

Le faisceau contient 3 paires de coniques dégénérées distinctes représentées par les trois couples de droites ci contre

2e type (simple contact) :

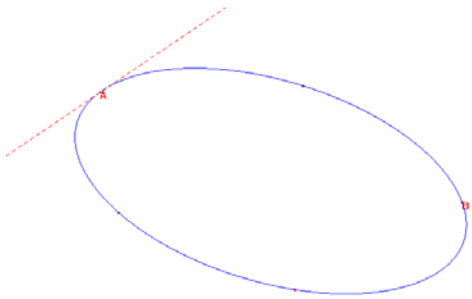
$D(\lambda) = (\lambda\text{-}a)^2(\lambda\text{-}b)$ et
$D_1(\lambda) = 1$



Un point d'intersection double et 3 points simples. Le faisceau contient 2 paire de coniques dégénérées distinctes : la tangente D et (BC) ainsi que (AB) ($U+\lambda V$ a deux valeurs propres distinctes).

3e type (confluent contact):

$D(\lambda) = (\lambda\text{-}a)^3$ et $D_1(\lambda) = 1$



1 point d'intersection triple.

Le faisceau contient une paire de coniques dégénérées : la tangente et la droite (AB). ($U+\lambda V$ a une valeur propre distincte).

2. Quand Sylvester (1882) lit Cayley (1858) : un problème et sa résolution, le calcul de $\sqrt{M}$.

La partie du mémoire de Cayley consacrée aux "matrices périodiques", et plus généralement aux équations de matrices, malgré sa postérité directe sur les travaux de Sylvester, n'a pas été commentée par l'historiographie qui s'est toujours concentrée sur la définition des opérations sur les matrices dans les premières pages du mémoire. Il s'agit pourtant là de l'objet même du mémoire de Cayley : montrer que toute fonction rationnelle d'une matrice, en particulier $\sqrt{M}$, peut s'exprimer comme une "fonction entière" de degré inférieur à celui de la matrice elle-même. Ce problème renvoie à des préoccupations classiques des prédécesseurs de Cayley de l'"école algébrique anglaise" (encart 8). C'est pour le résoudre que Cayley définit les opérations sur les matrices qui s'avèrent nécessaires pour exprimer les fonctions comme $\sqrt{M}$ par des fonctions entières. Plus précisément, l'objet du mémoire de 1858 est l'énoncé d'un "théorème remarquable" - le théorème dit de Cayley Hamilton-, qui fonde la méthode pour déterminer les fonctions de matrices (encart 8).

> It may be remarked that if
>
> $$M^2 = \begin{matrix} (1, & 0)^2 \\ |0 & 1| \end{matrix} = 1$$
>
> The last-mentioned formula fails [...]; it will be seen presently that the equation $L^2=1$ admits of other solutions besides $L=\pm 1$. The example shows how the values of the fractional powers of a matrix are to be investigated.
> [Cayley, 1858, 485].

L'équation $M^2=1$ admet d'autres solutions que ± 1. C'est pour l'étude de cette propriété très particulière des équations en matrices que, dans le cadre des "matrices périodiques", Cayley développe une méthode basée sur l'emploi du théorème qui énonce qu'une matrice satisfait une équation de son propre degré:

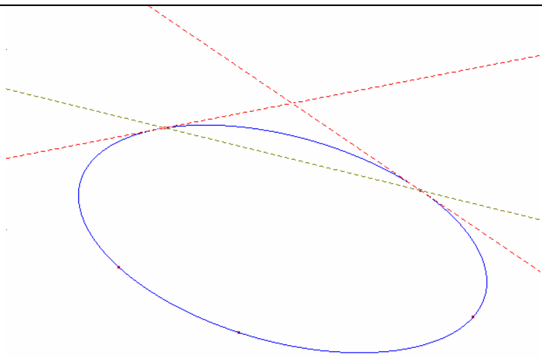
> But suppose it is recquired to find a matrix of the order 3,
>
> $$M = \begin{matrix} (a, & b, & c) \\ |d, & e, & f| \\ |g, & h, & i| \end{matrix}$$
>
> which shall be periodic of the second order. Writing for shortness
>
> $$\begin{vmatrix} a-M, & b, & c \\ d, & e-M, & f \\ g, & h, & i-M, \end{vmatrix} = (-M^3-AM^2+BM-C),$$
>
> the matrix here satisfies
>
> $$M^3-AM^2+BM-C=0$$

4^e type (diploidal contact):

Les mineurs et le déterminant ont un facteur commun :

$D(\lambda) = (\lambda\text{-}a)^2(\lambda\text{-}b)$ et $D_1(\lambda) = \lambda\text{-}a$

2 points d'intersections doubles. Le faisceau contient 2 paire de coniques dégénérées distinctes : les deux tangentes et une droite double. $(U+\lambda V$ a deux valeurs propres distinctes).

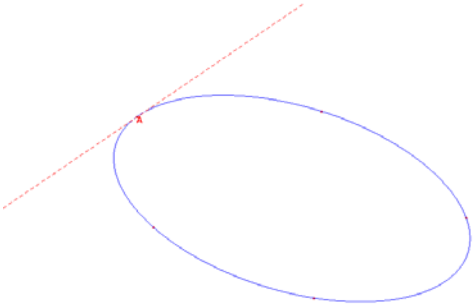


5^e type (confluent contact):

Les mineurs et le déterminant ont un facteur commun

$D(\lambda) = (\lambda\text{-}a)^3$ et $D_1(\lambda) = (\lambda\text{-}a)$

1 point d'intersection quadruple. Le faisceau contient 1 paire double de coniques dégénérées : la tangente en A ($U+\lambda V$ a une valeur propre).



Le mémoire intitulé « On the relations between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions » [1851b] a pour objet de démontrer l'invariance des mineurs par transformation linéaire, il est l'occasion d'une précision de la notion de matrice comme mère des mineurs dans la tradition de la théorie du déterminant :

> I have in previous papers defined a « Matrix » as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered, as from the womb of a common parent ; these cognate determinants being by no means isolated in their relations to one another, but subject to certain simple laws of mutual dependence and simultaneous deperition. The condensed representation of any such matrix, according to my improved Vandermondian notation, will be
>
> $$\begin{Bmatrix} a_1, a_2, \ldots a_n \\ \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{Bmatrix}.$$

Pour Sylvester, par la nouveauté des méthodes qu'elle permet, la notation participe du "progrès de l'analyse" et annonce une "algèbre de l'algèbre" :

> It is wonderful that a theory so purely analytical should originate in a geometrical speculation. My friend M. Hermite has pointed out to me, that some faint indications of the same theory may be found in the *Recherches Arithmétiques* of Gauss. The notation which I have employed for determinants is very similar to that of Vandermonde, with which I have become acquainted since writing the above, in Mr Spottiswoode's valuable treatise *On the elementary Theorems of Determinan*ts. Vandermonde was evidently on the right road. I do not hesitate to affirm, that the superiority of his and my notation over that in use in the ordinary methods is as great and almost as important to the progress of analysis, as the superiority of the notation of the differential calculus over that of the fluxional system. For what is the theory of determinants? It is an algebra upon algebra; a calculus which enables us to combine and foretell the results of algebraical operations, in the same way as algebra itself enables us to dispense with the performance of the special operations of arithmetic. All analysis must ultimately clothe itself under this form.

La méthode de Cayley consiste à factoriser l'équation $M^3-AM^2+BM-C=0$ par M^2-1. Si $1+B=0$ et $A+C=0$, on obtient :

$$(M^2-1)(M+C)=0$$

Comme le fait remarquer Cayley, on aimerait déduire de cette dernière équation la conclusion $M^2-1=0$ et $M^2=1$. Or, et c'est tout l'objet de la dernière partie du mémoire de Cayley [1858, 482-496], on ne peut déduire de l'équation en matrices $(M^2-1)(M+C)=0$, l'équation $M^2-1=0$ que dans le cas où la matrice $M+C$ a un déterminant non nul:

> There is an apparent difficulty connected with the equation satisfied by a matrix, which it is proper to explain. Suppose, as before,
>
> $$M = \begin{matrix} (a, & b) \\ |c, & d| \end{matrix},$$
>
> so that M satisfies the equation
>
> $$\begin{vmatrix} a-M, & b \\ c, & d-M \end{vmatrix} = 0$$
>
> or
>
> $$M^2-(a+d)M+ad-bc=0$$
>
> and let $X_{'}$, $X_{''}$ be the single quantities, roots of the equation
>
> $$\begin{vmatrix} a-X, & b \\ c, & d-X \end{vmatrix} = 0$$
>
> or
>
> $$X^2-(a+d)X+ad-bc=0.$$
>
> The equation satisfied by the matrix may be written
>
> $$(M-X_{'})(M-X_{''})=0,$$
>
> in which $X_{'}$, $X_{''}$ are to be considered as respectively involving the matrix unity, and it would at first sight seem that we ought to have one of the simple factors equal to zero ; this is obviously not the case, for such equation would signify that the perfectly indeterminate matrix M was equal to a single quantity, considered as involving the matrix unity. The explanation is that each of the simple factors is an indeterminate matrix ; in fact [...] the determinant of this matrix is equal to zero. the product of the two factors is thus equal to zero without either of the factors being equal to zero.
> [1858, 485].

La possibilité, pour les matrices, de réaliser un "produit de deux facteurs égal à zéro sans qu'aucun des facteurs s'annule" suscite une série de publications que Sylvester annonce dès 1882 [Sylvester 1882b, 398] :

> Il y a une théorie analogue pour l'extraction des racines de la matrice *zéroidale*, c'est à dire où tous les termes de la matrice sont des zéros, ce qui constitue encore un nouveau cas de porisme dans la théorie de l'extraction des racines de matrices.
> Je n'entrerai pas dans les détails de cette question : il suffit de l'indiquer par le cas le plus frappant ; je dis que, si M est une matrice de l'ordre n telle que le déterminant de M_ρ soit de la forme ρ^n [...], M^n sera une matrice zéroidale.

Encart 7.

Premiers travaux de Cayley [1855] sur les matrices de Sylvester.

La généralisation de la méthode de Sylvester aux quadriques ou, plus généralement, à des situations comportant davantage de variables, nécessite de dénombrer les différents types de contacts. A cette fin, Sylvester explicite les relations entre les décompositions en facteurs linéaires des mineurs successifs par une relation de récurrence permettant de lier un mineur aux deux précédents : " If any factor K enter into all the r^{th} minors of W, and if K^i be the highest power of K common to all the $(r+1)^{th}$ minors, then K^{2e-i} will be a common factor to all the $(r-2)^{th}$ minors". Cette relation permet de dénombrer les différentes décompositions possibles des mineurs en facteurs linéaires relativement à la factorisation du déterminant de la matrice initiale. Sylvester applique d'abord ce dénombrement à la caractérisation de l'intersection des quadriques qui nécessite la prise en compte des seconds mineurs et le dénombrement pour le cas général de n variables est à l'origine de l'intérêt de Cayley pour la notion de matrice [Cayley, 1855c]. Le mémoire, "Recherches sur les matrices dont les termes sont des fonctions linéaires d'une seule indéterminée", publié par Cayley dans le *Journal de Crelle* en [1855c] est le premier d'une série de trois articles consacrés à la notion de matrice. Cayley y reformule les résultats de Sylvester sur le dénombrement des décompositions des déterminants [1851a].

> [...] ce déterminant sera une fonction de s du n^e degré qui généralement ne contiendra pas de facteurs multiples. On voit donc qu'un facteur simple du déterminant ne peut pas entrer comme facteur dans les premiers mineurs (c'est à dire dans tous les premiers mineurs) ; mais en supposant que le déterminant ait des facteurs multiples, un facteur multiple peut entrer dans les premiers mineurs . Il importe de trouver le degré selon lequel un facteur multiple peut entrer comme facteur dans un des mineurs d'un ordre quelconque donné.

Cayley considère une matrice carrée dont « les termes (n^2 en nombre) sont des fonctions linéaires d'une quantité s, et considère le déterminant formé avec cette matrice et les déterminants mineurs [...] » et rectifie une erreur dans le dénombrement de Sylvester :

> Cela se fait très facilement au moyen d'une propriété générale des déterminants : si les mineurs du $(r+1)^e$ ordre contiennent le facteur $(s-a)a$ c(est à dire si tous les mineurs de cet ordre contiennent le facteur $(s-a)a$, mais non pas tous les facteurs $(s-a)a+1$) ; et si de même les mineurs du r-^{ième} ordre contiennent le facteur $(s-a)\beta$ alors les mineurs du $(r-1)^{ième}$ ordre contiendront au moins le facteur $(s-a)2\beta-\alpha$. Autrement dit : les mineurs du $(r-1)$ième ordre contiendront le facteur $(s-a)\gamma$ où $\gamma \geq 2\beta-\alpha$.

Cayley donne alors les différentes factorisations du déterminant et de ses mineurs :

> [...] en formant la suite des indices des puissances selon lesquelles le facteur $(s-a)$ entre dans les mineurs premiers, seconds, &c. (il va sans dire que cette suite sera une suite décroissante), les différences secondes seront positives [...]. Je représente par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ la suite dont il s'agit ; je suppose, pour fixer les idées, que δ soit le dernier terme qui ne s'évanouisse pas et j'écris
>
> $$\begin{array}{llllll} \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & 0, & 0, \ldots. \\ \alpha-\beta, & \beta-\gamma & \gamma-\delta & \delta, & 0,\ldots.. & \\ \alpha-2\beta+\gamma & \beta-2\gamma+\delta & \gamma-2\delta & \delta, & 0,\ldots. & \end{array}$$
>
> Ici, quel que soit le nombre des termes, tous les nombres de la troisième ligne seront positifs, et en représentant ces nombres par $\int, \int', \int''$, &c., on obtient :
>
> $$\begin{aligned} \alpha &= \int + 2\int' + 3\int'' + 4\int''' + \ldots. ; \\ \beta &= \int' + 2\int'' + 3\int''' + \ldots ; \\ \gamma &= \int'' + 2\int''' + \ldots ; \\ \delta &= \int''' + \ldots. ; \end{aligned}$$
>
> Il y a ici à considérer que le nombre α, indice de la puissance selon laquelle le facteur $(s-a)$ entre dans le déterminant, est donné ; il sera donc permis de prendre pour $\int, \int', \int''$, ... des valeurs entières et positives quelconques (zéro y compris) qui satisfont à la première équation [...] on forme de cette manière une table des particularités que peut présenter un facteur multiple $(s-a)\alpha$ du déterminant ; [...]

Par les difficultés de la résolution des équations en matrices, les notions et méthodes propres à la théorie de Cayley trouvent leur postérité chez Sylvester, la notion de "single quantity" de Cayley (encart 8) suscite notamment une évolution de la conception de Sylvester sur les matrices :

> Je terminerai en ajoutant que j'ai établi une théorie fonctionnelle générale des matrices, et que je ne regarde plus celles-ci comme des schemata d'éléments, mais comme des communautés ou, si l'on veut, comme des quantités complexes. [Sylvester, 1882b, 398].

Cayley donne la table explicite des différentes factorisations pour $n < 6$ et associe la suite de nombres aux coefficients d'un développement en série entière de $(1-x^n)^{-1}$. La question semble épuisée et la méthode de Cayley permet de corriger l'erreur de décompte commise par Sylvester pour $n = 7$ et $n = 8$. Dès 1855 Cayley fait cependant allusion à une généralisation possible des résultats de Sylvester au cas non symétrique et aux fonctions homographiques dont le calcul des racines sera l'objet du mémoire de 1858 :

> Mais tout cela s'applique à une autre théorie géométrique, savoir à la théorie des figures homographes. Pour fixer les idées, je ne considère que les figures dans le plan. En supposant que x, y, z soient les coordonnées d'un point, et en prenant pour (X, Y, Z) des fonctions linéaires de (x, y, z) on aura on aura (X, Y, Z) comme coordonnées d'un point homographe au point (x, y, z). En cherchant les points qui sont homographes chacun à soi même, on est conduit aux équations
>
> $$X-sx = 0,\ Y-sy = 0,\ Z-sz = 0.$$
>
> Les quantités à gauche $X-sx, Y-sy, Z-sz$ sont des fonctions linéaires de x, y, z ayant pour coefficients des fonctions linéaires de s. On a ainsi une matrice dont les termes sont des fonctions linéaires de s ; la théorie entière se rattache aux propriétés de cette matrice. [...]
>
> Je reviendrai à cette théorie à une autre occasion.

3. Une première postérité de Cayley : la notion de "single quantity" (1858) et la deuxième loi du mouvement algébrique de Sylvester (1883).

La lecture par Sylvester du mémoire de Cayley et sa conception de la notion de matrice évoluent radicalement entre 1882 et 1883. Alors qu'en février 1882, Sylvester conservait sa définition d'une matrice comme mère des mineurs d'un déterminant, c'est une "théorie des matrices" participant d'une "algèbre universelle" qui est présentée dans le mémoire adressé en 1883 au *Philosophical Magazine* et intitulé "On the equation to the secular inequalities in the planetary theory". Le mémoire présente une "nouvelle méthode" pour extraire la racine μ^e d'une substitution donnée permettant l'énoncé d'un "théorème général" participant d'une théorie d'un caractère "universel" car provoquant le "rapprochement inattendu" de questions diverses comme la théorie des invariants, lla réalité des racines de l'équation des inégalités séculaires, la détermination de fonctions homographiques de périodicité donnée et le calcul des quaternions :

> Of the many unexpected results which I have obtained by my new method , not the least striking is the *rapprochement* which it establishes between the theory of Matrices and that of Invariants. The theory of invariance relative to associated Matrices includes and transcends that relative to algebraical functions.
> [...]
> Babbage's famous investigation of the form of the homographic function of $\frac{px+q}{rx+s}$ of *x,* which has a periodicity of any given degree *q*, is in fact (surprising as such a statement would have appeared to Babbage and Hamilton) one and the same thing as to find the *qth* root of unity under the form of a quaternion !
> [Sylvester 1883a, 111-114].

La "nouvelle méthode" est basée sur l'introduction d'invariants, les "racines lambdaiques" de 1882 rebaptisées "racines latentes", qui permettent de caractériser des *fonctions de matrices* par des *fonctions numériques des racines latentes* :

> It will be convenient to introduce here a notion (which play a conspicuous part in my new theory of multiple algebra), namely that of the *latent roots* of a matrix – latent in a somewhat similar sense as vapour may be said to be latent in water or smoke in a tobacco leaf. If from each term in the diagonal of a given matrix, λ be subtracted, the determinant to the matrix so modified will be a rational integer function of λ ; the roots of that function are the latent roots of the matrix, and there results the important theorem that the latent roots of any function of a matrix are respectively the same functions of the latent roots of the matrix itself: for example, the latent roots of the square of a matrix are the square of its latent roots.[1883a, 110].

ENCART 8.

**Le "théorème remarquable" de Cayley et sa postérité,
les matrices comme quantités : une notion et une méthode.**

La nouvelle conception de Sylvester, en 1885, d'une matrice comme quantité complexe vérifiant une équation algébrique est la véritable postérité du calcul symbolique des matrices de Cayley [1858]. Si Sylvester interprète les matrices comme une quantité dès 1883, ce n'est qu'en 1885 qu'il incorpore à ses propres travaux la méthode qui fait l'originalité de Cayley et donne à la matrice quantité son efficacité: l'équation identique [Cayley,1858] :

> I obtain the remarkable theorem that any matrix whatever satisfies an algebraical equation of its own order, the coefficient of the highest power being unity, and those of the other powers functions of the terms of the matrix, the last coefficient being in fact the determinant; the rule for the formation of this equation may be stated in the following condensed form, which will be intelligible after a perusal of the memoir, viz. The determinant formed out of the matrix diminished by the matrix considered as a single quantity involving the matrix unity , will be equal to zero.

Si le théorème est "remarquable", c'est qu'il répond à des préoccupations précises, à savoir l'expression des fonctions rationnelles des fonctions homographiques de Babbage. La généralisation de fonctions rationnelles à des expressions symboliques est une préoccupation traditionnelle de l'"école algébrique anglaise" [Novi 1971, 146] ([2]), [Cayley, 1858] :

> The theorem shows that every rational and integral function (or indeed every rational function) of a matrix may be considered as a rational and integral function, the degree of which is at most equal to that of the matrix, less unity: it even shows that in a sense, the same is true with respect to any algebraical function whatever of a matrix. One of the applications of the theorem is the finding of the general expression of the matrixes which are convertible with a given matrix.

Le mémoire de Cayley peut être mis en perspective des travaux de la génération de mathématiciens qui précède Cayley et Sylvester. La traduction du *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral* de Lacroix [1802] par Peacock est souvent présentée comme révélatrice des efforts du "network"(selon le terme introduit par W.F. Cannon, 1964), qui se développe après la fondation à Cambridge en 1812 de *l'Analytical Society* par un groupe d'étudiants autour de Babbage, pour introduire en Angleterre les méthodes de l'algèbre analytique de Lagrange, critiquée pour le mécanisme de ses procédures et les paradoxes sur les quantités impossibles qu'elles impliquent. Pour parvenir à leurs fins, les membres du "network" de Cambridge élaborent une philosophie de l'algèbre qui se caractérise par l'importance donnée aux opérations sur les objets. L'"algèbre symbolique" de Peacock [1833] en est bien représentante par sa distinction entre signification et symboles qui rompt avec "le réalisme mathématique du XVIII^e siècle selon lequel à tout objet mathématique correspond dans la réalité un élément essentiel qui en constitue la légitimité" [Durand-Richard, 1990, 131]. Pour les historiens structuralistes des années 1970, l'Algèbre s'orienterait alors sur le chemin de la profonde mutation qui verra son objet passer de la théorie de la résolubilité des équations algébriques à l'étude d'opérations abstraites portant sur des *ensembles* d'éléments. H. Freudental relativisait déjà la perspective structuraliste de Novi et Dieudonné lors du XII^e congrès international d'histoire des sciences de 1971 [Freudenthal, 1971, 148] :

> Il semble utile de prolonger la ligne de l'école algébriste anglaise à la fois vers l'arrière et vers l'avant. Ses méthodes appelées symboliques sont beaucoup plus anciennes. Ce n'était pas une algèbre non commutative quelconque qui fut à sa base, mais celle, très spéciale, des expressions $\Sigma a_i D_i$; où les a_i sont des fonctions de x et D l'opérateur de différentiation par rapport à x. [...] Le terme "symbolique" s'explique par le fait qu'on considère la différenciation effective comme symbolique.

[2] L. Novy [1968, 211-222] a le premier qualifié d'école algébrique anglaise le courant de pensé qu'il a isolé autour d'acteurs principaux qui sont C. Babbage, G Peacock, D. Gregory, A. de Morgan, W.R. Hamilton et G. Boole.

La "seconde loi du mouvement algébrique" de Sylvester exprime toute fonction de matrices, *φ(m)*, comme une fonction des racines latentes de *m*, φ(λ) [Sylvester 1883b, 114] ([17]) :

$$\phi m = \Sigma \frac{(m-\lambda_2)(m-\lambda_3)\dots(m-\lambda_i)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\dots(\lambda_1-\lambda_i)}\phi\lambda.$$

Sylvester considère désormais une matrice comme "une quantité complexe" [Sylvester, 1882b] au sens de la "single quantity" de Cayley qui permet de concevoir les symboles λ_i tout à la fois comme des nombres (les racines latentes de *m*) et des matrices (diagonales). L'encart 8 détaille la manière dont la nouvelle conception des matrices de Sylvester est indissociable de l'efficacité d'une méthode, inspirée du mémoire de Cayley de 1858, et qui nécessite l'introduction du calcul symbolique des matrices, et notamment de la règle d'addition:

> This theorem of course presupposes the rule first stated by Prof. Cayley *(Phil. Trans.* 1857) for the addition of matrices.
> [1883, 111].

L'application de la loi du mouvement algébrique au calcul des racines de quaternions appuie la revendication d'universalité [Sylvester, 1883b, 394-396] de la nouvelle théorie, l'"algèbre multiple", à laquelle sera consacrée la publication d'une nouvelle série de notes aux Comptes Rendus en 1884 et qui suscitera la première entrée d'Eduard Weyr sur la scène de la théorie des matrices :

> Qu'il me soit permis, avant de conclure, d'ajouter encore une petite réflexion sur l'importance de la question traitée ici. Elle constitue, pour ainsi dire, un canal qui, comme celui de Panama, sert à unir deux grands océans, celui de la théorie des invariants et celui des quantités complexes ou multiples : dans l'une de ces théories, en effet, on considère l'action des substitutions sur elles-mêmes, et dans l'autre, leur action sur les formes ; de plus, on voit que la théorie *analytique* des quaternions, étant un cas particulier de celle des matrices, cesse d'exister comme une science indépendante ; ainsi, de trois branches d'analyse autrefois regardées comme étant indépendantes, en voilà une abolie ou absorbée, et les deux autres réunies en une seule de substitution algébrique.
> [Sylvester, 1884l].

En 1884, le mémoire de Cayley est entre mathématiques et histoire. Déjà reconnu comme précurseur par Sylvester, il est encore source d'inspiration et les recherches sur les quaternions de 1884 vont susciter une nouvelle lecture de Cayley et une nouvelle évolution de la conception de Sylvester sur les matrices.

[17] La conception dynamique de Sylvester des matrices et son "algèbre universelle" n'est pas approfondie plus avant dans ce chapitre car elle ne suscite pas de postérité dans le corpus étudié et est, en grande partie, publiée dans les *Circulars* de l'université John Hopkins que Weyr n'a pas eu la possibilité de lire. La discussion sur cet aspect de l'œuvre de Sylvester sera reprise dans la conclusion générale de ce travail.

Plus récemment, Marie-Josée Durand-Richard a éclairé la spécificité conceptuelle de l'approche symbolique anglaise qui, à la suite de l'adoption de la notation différentielle de Leibniz, implique une séparation radicale entre calcul et signification, par le contexte historique de l'Angleterre de la révolution industrielle et de la philosophie de Locke [Durand Richard, 1996, 447].

La définition par Cayley des opérations des matrices ne procède pas davantage de la formulation d'un système d'axiomes que les travaux de ses prédecesseurs. Sur le modèle du mémoire de de Morgan, *On the foundations of Algebra* [1841], Cayley explore des propriétés de procédés symbolique et l'importance que prennent dans le mémoire de 1858, les préoccupations relatives aux puissances et racines de matrices renvoie à la tradition des travaux de l'école anglaise sur la notation des opérateurs différentiels comme ceux de J.F.W Herschel sur la propriété $f^n(f(x)) = f^{n+1}(x)$ [Herschel1813, 34], [Cayley, 1858] :

> [...] it is nevertheless possible to form the powers (positive or negative, integral or fractional, of a matrix, and hence to arrive at the notion of a rational and integral function , or generally of any algebraical function, of a matrix. I obtain the remarkable theorem that any matrix whatever satisfies an algebraical equation of its own order [...]

Alors que ses prédécesseurs ont appliqué les opérations de l'arithmétique aux fonctions, Cayley définit les règles opératoires qui donnent à la matrice-mère des mineurs de Sylvester un statut de symbole algébrique, de "single quantity" [1858] :

> It will be seen that matrices (attending to those of the same order) comport themselves as single quantities; they may be added, multiplied or compounded together, etc. : the law of addition of matrices is precisely similar to that for the addition of ordinary algebraical quantities ; as regards to their multiplication (or composition) there is the peculiarity that matrices are not in general convertible.

Soulignant la non commutativité de la multiplication, Cayley, se fait successeur des travaux de de Morgan lors de sa tentative de construire une algèbre triple dans la lignée des recherches de Hamilton sur les quaternions [De Morgan, 1844, 241]. Les travaux de Peacock et de Morgan, si ils affirment l'universalité de l'algèbre symbolique, revendiquent l'importance de la signification de l'algèbre par une distinction entre signification du calcul et règles de manipulation des symboles. La distinction de Peacock entre algèbre symbolique et arithmétique en témoigne, cette dernière doit se préoccuper de la signification des écritures symboliques comme $a-b$ ou $\sqrt{a}$ lorsque l'on remplace les lettres par des quantités. Chez de Morgan les "processus" de l'algèbre symbolique sont toujours réciproques, afin de permettre de penser les nombres négatifs comme action d'un processus inverse du processus additif. La définition de la multiplication des matrices par Cayley s'accompagne d'une définition du processus inverse. Et la remarque suivante de Cayley à la suite de sa définition du processus inverse au produit de matrice en 1858 n'est pas sans renvoyer à la question de la signification des symboles chez Peacock [Cayley, 1858]:

> The formula shows, what is indeed clear à priori, that the notion of the inverse or reciprocal matrix fails when the determinant vanishes : the matrix is in this case said to be indeterminate, and it must be understood that in the absence of express mention, the particular case in question is frequently excluded from consideration. It may be added that the matrix zero is indeterminate ; and that the product of two matrices may be zero, without either of the factors being zero, if only the matrices are one or both of them indeterminate.

4. Quand Sylvester (1884) relit Cayley (1858) : un problème et sa résolution, l'équation en matrice *mn = nm*.

En cherchant à "absorber" la théorie des quaternions dans celle des matrices, Sylvester est amené à donner un nouveau rôle à la représentation matricielle. Il s'avère en effet nécessaire de représenter par des matrices les "quaternions fondamentaux" et c'est la *forme des matrices* elle-même qui permet de caractériser les éléments de base d'un système de "grandeurs généralisées". A ce nouveau rôle de la représentation matricielle est associée une méthode : pour déterminer la *forme matricielle* des éléments de base, il suffit de résoudre des *équations* données par les "lois" définissant un système de grandeurs généralisées.

> THE subject-matter of quaternions is really nothing more nor less than that of *substitutions* of the second order, such as occur in the familiar theory of quadratic forms. A linear substitution of the second order is in essence identical with a square matrix of the second order, the law of multiplication between one such matrix and another being understood to be the same as that of the composition of one substitution with another, and therefore depending on the order of the factors; but as regards the multiplication of three or more matrices, subject to the same associative law as in ordinary algebraical multiplication.
>
> Every matrix of the second order may be regarded as representing a quaternion, and *vice versa;* in fact if, using *i* to denote $\sqrt{-1}$, we write a matrix *m* of the second order under the form
>
> $$\begin{matrix} a+bi, & c+di, \\ -c+di, & a-bi, \end{matrix}$$
>
> we have by definition,
>
> $$m = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta,$$
>
> where $$\alpha = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}, \quad \beta = \begin{matrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{matrix}, \quad \gamma = \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}, \quad \delta = \begin{matrix} 0 & i \\ i & 0 \end{matrix}.$$
>
> Now $$\alpha^2 = \alpha, \quad \beta^2 = \gamma^2 = \delta^2 = -\alpha,$$
> $$\alpha\beta = \beta\alpha = \beta, \quad \alpha\gamma = \gamma\alpha = \gamma, \quad \alpha\delta = \delta\alpha = \delta,$$
> $$\beta\gamma = -\gamma\beta = \alpha, \quad \gamma\delta = -\delta\gamma = \beta, \quad \delta\beta = -\beta\delta = \gamma;$$
>
> so that we may for α, β, γ, δ, substitute *1*, *h, k, l,* four symbols subject to the same laws of self-operation and mutual interaction as unity and the three Hamiltonian symbols.
>
> [Sylvester, 1884b, 394-396].

Chez Cayley, les opérations symboliques supportent avant tout une méthode indissociable de la nature duale de la notion de matrice et qui se manifeste dans la démonstration du "théorème remarquable" ([3]). Cette démonstration est l'occasion de la première utilisation d'une notation des matrices par un symbole *M* qui vient appuyer le caractère duale d'un tableau (système de nombres) – quantité (symbolique). Cayley considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

et forme le déterminant

$$\begin{vmatrix} a-M & b \\ c & d-M \end{vmatrix}.$$

Le calcul effectif des puissances de *M* permet de montrer que le développement de ce déterminant, $M^2 - (a+d)M^1+(ad-bc)M^0$, est nul. Mais que signifie ce déterminant où se trouvent ajoutés un symbole-nombre *a* et un symbole-matrice *M* ? Pour Cayley, il s'agit du déterminant dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par cette dernière écriture la notation *M* acquière une double signification : d'une part elle désigne une matrice, quantité multiple, d'autre par elle s'identifie au produit d'une "single quantity" *M* par la matrice unité [Crilly, 1977]. La notion de matrice unité est présentée dans le cadre de la définition des processus de l'algèbre symbolique pour laquelle Cayley reprend l'ordre d'exposition de De Morgan [1841] qui définit les symboles 0 et 1 comme action d'une paire d'opérations opposées (×,÷), (-,+) [De Morgan, 1841, p.288] :

> The signs × and ÷ (or any substitutes for them) are opposite in effect : and 1 is the symbol of a pair of such opposite operations having been performed.

Cayley nomme "single quantity" la matrice du membre de droite de l'égalité résultant du produit d'une quantité *m* par la matrice unité :

$$m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

Le symbole $\tilde{M}$ permet de distinguer la "quantité" de la matrice "single quantity" correspondante [Cayley, 1858] :

> [...] let the matrix *M*, considered as a single quantity, be represented by $\tilde{M}$, then writing 1 to denote the matrix unity, $\tilde{M}$ .1 will represent the matrix M, considered as a single quantity involving the matrix unity. [...]

Tony Crilly a montré que la notation ~ permet à Cayley d'associer à la notion de matrice une signification autre que celle de forme quadratique ou de déterminant [Crilly, 1978, p. 211]

> Cayley does not elaborate this symbolism further and the exact meaning of T$\tilde{M}$ by itself is unclear. The ~~ notation appears to associate a matrix with a way of considering it ; in particular $\tilde{M}$ is not the determinant of M although Cayley treats $\tilde{1}$ .M as representing M, the symbol $\tilde{1}$ is not stated to be unity or the identity matrix.

Que cette notion paraisse étrange au mathématicien contemporain comme l'a souligné Crilly, n'enlève rien au fait que Cayley en fait une méthode dont l'efficacité fait la postérité de son mémoire chez Sylvester dans les années 1880.

[3] Pour une histoire de ce théorème, consulter [Crilly, 1977]

Plutôt que de traduite le texte de Sylvester, l'extrait ci-dessous présente une version écrite en français par Sylvester dans les *Comptes Rendus* [Sylvester, 1883c, 1337] :

ON sait qu'on peut tout à fait (et très avantageusement) changer la base de la théorie des quaternions en considérant les trois symboles *i, j, k* de Hamilton comme des matrices binaires.

Si *h, j* sont des matrices binaires qui satisfont à l'équation $hj = - jh$, on démontre facilement que, en écartant le cas ou $hj = jh = 0$, A^2 et k^2 seront de la forme

$$\begin{matrix} c & 0 \\ 0 & c \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{matrix}$$

c'est-à-dire cu, γu, où u est l'unité binaire

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

On peut ajouter, si l'on veut, les deux conditions $c^2 = \grave{1}$, $y^2 = \grave{1}$; alors, en supprimant, pour plus de brièveté, le u_y qui jouit de propriétés tout à fait analogues à celles de l'unité ordinaire, on obtient facilement les équations connues

$$h^2 = \bar{1}, \quad j^2 = \bar{1}, \quad k^2 = \bar{1},$$
$$hj = -jh = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

[...]

Une solution, parmi les plus simples des équations $ij = -ji$; $i^2 = \grave{\mathbf{O}}$, $j^2 = \grave{\mathbf{O}}$, est la suivante :

$$i = \begin{vmatrix} \theta & 0 \\ 0 & -\theta \end{vmatrix}, \quad j = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

et conséquemment

$$k = ij = \begin{vmatrix} 0 & -\theta \\ -\theta & 0 \end{vmatrix},$$

où $\theta = \sqrt{-1}$

La série de notes publiées aux *Comptes Rendus* entre 1884 et 1885 a pour objet de définir des "nonions" dont les éléments de base sont définis par des matrices d'ordre 3 ([18]) :

On peut construire d'une manière tout à fait analogue un système de nonions en considérant l'équation $m = \rho n$, où m, n sont des matrices ternaires et ρ une racine cubique primitive de l'unité [...], en prenant pour les nonions fondamentaux u (l'unité ternaire)

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

[18] Je ne rentrerai pas dans le détail de ces travaux qui ont fait l'objet d'une étude précise de K. Parshal [1985] dans le cadre de l'histoire des algèbres associatives.

L'assimilation par Sylvester de la théorie de Cayley prend corps dans les notions de nullité et de vacuité d'une matrice qui font le lien entre le point de vue Sylvester d'une matrice dont on extrait les mineurs (la nullité) et la matrice comme simple quantité (vacuité) [Sylvester, 1884b, 133] :

> To make what follows intelligible I must premise the meaning and laws of vacuity and nullity.
>
> A matrix is said to be vacuous when its content (the determinant of the matrix) is zero, but it may have various degrees of vacuity from 0 up to ω the order of the matrix.
>
> Again the nullity is said to be i when *every* minor of the order ($\omega-i+1$), and consequently of each superior order, is zero. It follows therefore that it means the same thing to predicate a vacuity *1* and a nullity *1* of any matrix, but for any value of i greater than *1*, a nullity i implies a vacuity i but not *vice versa* ; the vacuity may be i, whilst the nullity may have any value from *1* up to i inclusive.

La nature duale du symbole λ permet de le considérer à la fois comme un nombre (racine latente) et comme une matrice. Si λ est considéré comme un nombre, c'est une racine de l'équation identique et si λ est considéré comme une matrice, l'équation identique matricielle doit se factoriser par $(m-\lambda)$, en ce sens la notion de vacuité reflète parfaitement la nature duale des matrices. Pour l'étude des matrices dérogatoires, dont Sylvester cherche le polynôme anulateur de plus bas degré, Sylvester décompose l'équation identique en facteurs linéaires $(m-\lambda)^i$ et est amené à étudier la nullité de $m-\lambda$. L'extrait ci-dessous d'un mémoire de Sylvester de 1884 permet d'illustrer la méthode employée en écho de la démonstration du théorème de Cayley de 1858. [1884b, 134] :

> The law of nullity which I am about to enunciate is one of paramount importance in the theory of matrices.
>
> The law is that the nullity of the product of *two* (and therefore of any number of) matrices cannot be less than the nullity of any factor nor greater than the sum of the nullities of the several factors which make up the product.
>
> [...] Suppose now that $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\lambda_\omega$ are the latent roots of any matrix with unequal roots of the order ω. It is obvious that any such term as $m-\lambda_1$, will have the nullity 1, for its latent toots will be
>
> $$0,\ \lambda_2-\lambda_1,\ \lambda_3-\lambda_1,\ \ldots,\lambda_\omega-\lambda_1$$
>
> and consequently its *vacuity* 1.
>
> Moreover we know from Cayley's famous identical equation that the nullity of the product of all the ω factors is ω.
>
> [...] Furthermore we know that the latent roots of $(m-\lambda_1)^\alpha$ are
>
> $$(\lambda_1-\lambda_1)^\alpha\ ;\ (\lambda_2-\lambda_1)^\alpha\ ;\ \ldots\ ;(\lambda_\omega-\lambda_1)^\alpha.$$
>
> Hence if the latent roots of m are all distinct, the nullity of $(m-\lambda_1)^\alpha$ is unity and consequently by the same reasoning as that above employed it follows that the nullity of
>
> $$(m-\lambda_1)^{\alpha 1}\,.\,(m-\lambda_2)^{a2}\ldots(m-\lambda_i)^{\alpha i}$$
>
> is exactly i.

> et les huit matrices *m, m²; n, n²; m²n; mn; m²n²* construites avec les valeurs les plus simples de *m, n* qui satisfont aux équations
>
> $$nm = \rho mn,\ m^3 = u,\ n^3 = u.$$
>
> Les valeurs
>
> $$m = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{vmatrix} \text{ et } n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \\ \rho^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
>
> [Sylvester, 1884c, 1337].

La construction des nonions nécessite la résolution d'"équations en matrices" du type $nm = \rho mn$ et Sylvester pense intialement que ces équations impliquent que les matrices m et n sont "fonctionnellement liées ensemble". Cette condition n'est cependant pas nécessaire en cas d'occurrence de racines latentes multiples ([1]):

> Nommons, pour le moment, $mn = u$, $nm = v$; on aura, comme auparavant $uv = vu$ [...], on trouvera le moyen d'établir qu'en général cette équation amène à la conclusion que ou u doit être un *scalar* , c'est-à-dire de la forme
>
> $$\begin{matrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{matrix},$$
>
> ou bien v un scalar, ou sinon que nm, mn doivent être fonctions l'un de l'autre : mais on remarquera (ce qui m'avait échappé) que, si $Fu = 0$ est l'équation identique en u et que la dérivée fonctionnelle $F'u$ est une matrice vide (vacuous), c'est-à-dire dont le déterminant est zéro, le raisonnement est en défaut, cette vacuité a lieu dans le cas, et seulement dans le cas où deux des racines latentes (lambdaïques) de m sont égales. [...] Par exemple, si l'on fait
>
> $$u = \begin{vmatrix} 0 & \rho & \rho^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ \rho^2 & \rho & 0 \end{vmatrix},\ v = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \rho & 0 & \rho^2 \\ \rho & \rho^2 & 0 \end{vmatrix},$$
>
> on trouvera
>
> $$uv = \begin{vmatrix} -\rho & \rho & 1 \\ \rho & -\rho & 1 \\ \rho^2 & \rho^2 & -\rho \end{vmatrix} = vu$$

[1] Dans un lettre adressée à Arthur Cayley et datée du 3 février 1884, Sylvester aborde la question des matrices échangeables mais non fonctions l'une l'autres :

> Have you received my note about *xy=yx* (*x,y* matrices). I had long supposed that this was a perfect criterion of *y* being a function of *x* subject to the obvious exception in the case of *y* or *x* being multinomial unity or a multiple thereof. But this as shown in my note is not true inasmuch as when equal latent roots belong to *x* or *y* (and I rather think that if to one then necessarily to the other) *xy=yx may* (I do not say *must*) hold good even when *y* and *x* are not functions of one another and neither of them is a scalar. To me this seems a wonderful and utterly unexpected phenomenon. […]
> I am inclined to believe that when *xy=yx* under the conditions stated, the *Identical Equation* in one of the matrices (possible in *both* of the matrices *x,y* as a consequence of its being true for *one*) loses a factor i.e. the Identical equation $(x-\lambda)^2Fx=0$ is supersedable by $(x-\lambda)Fx=0$ which you will notice implies much more than the bare facts of *w* having two equal latent roots λ.
> [Sylvester, cité dans Parshall 1998, 244].

La mise en paralléle des deux résolutions par Sylvester d'un même problème -extraire la racine μ^e d'une substitution - permettent de mettre en évidence ce que la notion-méthode de "single quantity" de Cayley implique comme évolution de méthodes entre 1882 et 1883:

La formule donnée dans la note de 1882 [1882a, 57] :

» Extraire la racine $\mu^{ème}$, ou plus généralement trouver la puissance $i^{ième}$ d'une substitution donnée , i étant un nombre commensurable quelconque.

» Voici la solution. Soit *n* l'ordre du déterminant de substitution donné.

» Soient *K* un terme quelconque dans ce déterminant, K_θ le terme qui occupe, dans la puissance $\theta^{ième}$ du déterminant, la même position que *K* dans le déterminant lui-même. De plus, soient $K_0 = 1$ quand K est un terme dans la diagonale, et $K_0 = 0$ dans tout autre cas. Alors je dis que, pour une valeur commensurable quelconque de *i*, positive ou négative, en nommant la somme des quantités $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, S_1 leur produit S_{n-1} et en général la somme de leurs combinaisons binaires, ternaires, etc., S_2, S_3, on aura

$$K_i = \sum \frac{K_{n-1} - S_1.K_{n-2} + S_2.K_{n-3} - \ldots \pm S_{n-2}.K_1 \mp S_{n-1}.K_0}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\ldots(\lambda_1-\lambda_n)} \lambda_1^i,$$

.

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ sont les racines lambdaïques du déterminant donné.

La formule donnée dans le mémoire de 1883 [1883, 111] :

I may take this opportunity of stating the important theorem that *if* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ are the latent roots of any matrix m, then

$$\phi m = \Sigma \frac{(m-\lambda_2)(m-\lambda_3)\ldots(m-\lambda_i)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\ldots(\lambda_1-\lambda_i)} \phi\lambda.$$

This theorem of course presupposes the rule first stated by Prof. Cayley (Phil. Trans. 1857) for the addition of matrices.

When any of the latent roots are equal, the formula must be replaced by another obtained from it by the usual method of infinitesimal variation. If $\varphi m = m^{1/\omega}$, it gives the expression for the ωth root of the matrix ; and we see that the number of such roots is ω^i where i is the order of the matrix. When, however, the matrix is unitary, that is, all its terms except the diagonal ones are zeros, or zeroidal, that is, when all its terms are zeros, this conclusion is no longer applicable, and a certain definite number of arbitrary quantities enter into the general expressions for the roots.

Eduard Weyr utilise la méthode de Sylvester afin d'étudier la périodicité de la fonction exponentielle et de donner les valeurs que prend la fonction inverse en supposant que les arguments soient des quaternions" [Weyr, 1884b, 1320]:

M étant une matrice binaire quelconque aux racines latentes μ_1, et μ_2, on a, d'après la seconde loi de mouvement algébrique de M. Sylvester *(Comptes rendus,* 28 avril 1884) :

$$e^M = \frac{e^{\mu_1} - e^{\mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} M + \frac{\mu_1 e^{\mu_2} - \mu_2 e^{\mu_1}}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Nous appellerons L une période de la fonction exponentielle si l'on a, M étant arbitraire,

$$e^{M+L} = e^M$$

A l'aide de la formule ci-dessus, cette équation prend la forme

$$\alpha(M + L) + \beta = \gamma M + \delta,$$

α, *β, γ, δ* étant des quantités scalaires. Puisque *M* est arbitraire, cette matrice ne peut être exprimée algébriquement par *L*, ce qui exige qu'on ait $\alpha = \gamma$; donc *L* se réduit à la quantité scalaire $\frac{\delta - \beta}{\alpha}$.

Maintenant l'équation (i) peut être écrite

$$e^M e^L = e^M$$

ce qui donné

$$e^L = 1$$

d'où

$$L = 2k\pi\sqrt{-1} ;$$

> Mais on peut démontrer sans difficulté que *v* ne peut pas s'exprimer comme somme de puissances de *u*, ni *vice versa* *v* comme somme de puissances de *u*.
> [1884e, 274].

L'absence de fonction rationnelle liant les solutions *y* et *x* de l'équation $xy = yx$, est d'abord interprétée comme une manifestation de l'occurrence de racines latentes multiples ; dans un second temps, Sylvester déplace la question à l'étude de l'équation algébrique dont les racines latentes sont issues :

> Avant de considérer l'équation $xy = yx$, il importe d'avoir une idée nette d'une certaine classe de matrices que je nomme *privilégiées* ou *dérogatoires,* en tant qu'elles dérogent à la loi générale que toute matrice est assujettie à satisfaire à une équation identique dont le degré ne peut pas être moindre que l'ordre de la matrice.
> Les matrices dérogatoires sont justement celles qui satisfont à une équation d'un ordre inférieur à leur ordre propre ; on peut les nommer *simplement, doublement, triplement, ... dérogatoires,* selon que le degré de l'équation identique à laquelle elles satisfont diffère par une, deux, trois, ... unités du degré minimum ordinaire.
> [1884f, 471].

Le problème est ainsi déplacé de l'occurrence de racines multiples à l'examen des matrices dérogeant à la règle de satisfaire une équation de degré identique à leur ordre ([2]). Si les matrices *x* et *y* sont non dérogatoires, la relation $xy = yx$ impliquera l'existence d'une relation fonctionnelle entre *x* et *y* même en cas d'occurrence de racines multiples:

> En réservant les détails du calcul, voici le résultat général que j'ai démontré rigoureusement (en m'aidant de la notation des nonions) pour les matrices du troisième degré qui satisfont à l'équation $xy = yx$.
> A moins que *x* ne soit une matrice privilégiée ou dérogatoire, *y* sera toujours une fonction rationnelle et entière quadratique de *x,* et de même, à moins que *y* ne soit privilégiée, *x* sera une fonction pareille de *y.*
> [...] Il est bon de remarquer que nulle matrice ne peut être dérogatoire, sauf pour le cas où il existe des égalités entres ses racines latentes ; mais ces égalités peuvent parfaitement subsister sans que la matrice à laquelle elles appartiennent soit dérogatoire.
> [...] Il est à peine nécessaire d'ajouter que rien n'empêche, dans le cas où l'un ou l'autre de *x* et *y* où tous les deux sont dérogatoires, qu'on puisse satisfaire à $xy = yx$, en supposant que *x* et *y* soient des fonctions explicites chacune l'une de l'autre : tout ce qu'on affirme, c'est que, dans le cas admis, cette supposition cesse d'être obligatoire ; c'est un cas très semblable à ce qui arrive dans le cas de défaut (failing case) du théorème de Maclaurin ; c'est celui où une variable

[2] En termes contemporains, il s'agit de déterminer le commutant d'un endomorphisme *f* d'un espace *E* de dimension finie : c'est-à-dire le sous espace Γ_f de *E* défini par $\Gamma_f = \{g \text{ de } L(E) / f \circ g = g \circ f\}$. Si *f* est diagonalisable, *g* appartient à Γ_f si et seulement si chaque sous espace propre E_λ de *f* est stable par *g*. Les matrices des *g* sont donc des matrices par blocs de tailles $\dim E_\lambda$ et $\dim \Gamma_f = \Sigma \dim E_\lambda^2$. Si de plus les valeurs propres de f sont toutes distinctes, alors $E_\lambda = vect(x_\lambda)$ est stable par *g* de Γf, il existe μ_λ tel que $g(x_\lambda) = \mu_\lambda x_\lambda$. La théorie des polynômes d'interpolations de Lagrange assure l'existence d'un polynôme *P* tel que $P(\lambda_i) = \mu_i$ et

$$\Gamma_f = \{P(f) / P \text{ de } K[X]\}.$$

Le même polynôme peut être obtenu si le polynôme minimal Π_f est de degré *n*.

> est une fonction sans pouvoir être développée dans une série de puissance d'une autre variable.
> [1884f, 473].

Les conclusions de Sylvester manifestent une nouvelle lecture du mémoire de Cayley de 1858, c'est désormais le théorème de l'"équation identique" de Cayley qui fait l'intérêt principal de ce qui n'était jusqu'alors qu'une équation permettant de déterminer les racines latentes. A partir de 1884, une matrice devient, chez Sylvester, non seulement une *quantité*, mais une *quantité* qui vérifie une équation *algébrique*, "l'équation identique". La caractérisation des matrices dont l'équation identique est de degré moindre que l'équation caractéristique est l'objet principal des travaux de Sylvester à partir de 1884 ([3]). Ce même problème suscite les premières contributions de Weyr à partir de 1885 et qui seront présentées dans le chapitre 5 :

> On sait que toute *matrice* de l'ordre n satisfait à une équation de degré *n* ; c'est l'équation fondamentale de *M*. Cayley. Il y a cependant des matrices qui satisfont à une équation de degré moindre que *n* : ce sont les matrices que *M*. Sylvester nomme *dérogatoires*. Je suis parvenu à établit un théorème qui jette du jour sur ce sujet, et que je me permets de communiquer à l'Académie
> [Weyr, 1885a, 787].

[3] En particulier, dans la "loi" de Sylvester pour l'expression d'une fonction de matrice par une fonction entière des racines il faut, en cas de valeurs propres multiples, considérer non pas le polynôme caractéristique mais le polynôme minimal. Voir [Turnbul et Aitken,1932]

Conclusion.

Le mémoire de Cayley et l'écriture d'une histoire.

Dans les années 1880-1890, une histoire de la théorie des matrices est écrite en direct par les mathématiciens et s'étoffe à mesure que la notion de matrice évolue, dans cette évolution la notion de matrice et son histoire sont indissociables. Ce chapitre a abordé la dynamique de la notion de matrice entre 1882 à 1885. En quelques années, Sylvester abandonne sa conception originelle d'une matrice comme mère des mineurs d'un déterminant pour définir une matrice comme une quantité complexe satisfaisant une certaine équation algébrique. La théorie de Sylvester d'une "algèbre universelle" englobant les substitutions linéaires, les homographies de Babbage et les quaternions de Hamilton fait participer des notions jusqu'alors distinctes d'une même théorie et implique un effet rétroactif sur l'histoire des mathématiques. La dénomination de "théorème de Cayley-Hamilton" illustre la façon dont l'adoption par Sylvester d'une conception des matrices comme quantité complexe vérifiant une équation algébrique, s'accompagne de la reconnaissance d'une priorité double sur l'énoncé d'un théorème :

> C'est dans les *Lectures,* publiées en 1844 que pour la première fois a paru la belle conception de l'équation identique appliquée aux matrices du troisième ordre, enveloppée dans un langage propre à Hamilton, après lui mise à nu par M. Cayley dans un très important Mémoire sur les matrices dans les *Philosophical Transactions* pour 1857 ou 1858, et étendue par lui aux matrices d'un ordre quelconque, mais sans démonstration ; [...].
> [Sylvester,1884j, 202].

L'évolution de la notion de matrice de Sylvester entre 1882-1885 entraîne une évolution parallèle du rôle historique du mémoire de Cayley. La première lecture de Cayley par Sylvester est due à la postérité d'un mathématicien lu pour sa méthode de résolution d'un problème précis : le calcul des racines des substitutions. En 1884, Sylvester réévalue le rôle historique de Cayley désormais considéré comme précurseur de l'"algèbre universelle", science de la "quantité multiple" :

> C'est là, pour la première fois dans l'histoire des Mathématiques, qu'on rencontre la conception de l'équation identique (voir *Lectures,* p. 566-667) qui est la base de tout ce qu'on a fait depuis et de tout ce qui reste à faire dans l'évolution de la Science vivante et remuante de la quantité multiple, c'est-à-dire l'*Algèbre universelle,* née à peu près a5o ans après l'organisation définitive de sa sœur aînée *l'Arithmétique universelle,* dans le Mémoire de M. Cayley sur les matrices, dans les *Philosophical Transactions,* vol. 148.
> [Sylvester 1884k].

C'est à ce moment des travaux de Sylvester que le rôle historique de Cayley n'est plus perçu comme attaché à l'énoncé d'une méthode de calcul des racines de substitutions mais à la définition des opérations -et singulièrement de l'addition - des matrices ([4]) :

> I had seen the memoir [...] and indeed forced itself to my attention as a means of giving simplicity to and generality to my formula for the powers or roots of matrices (1882) [...] I was led to the discovery of the properties of the latent roots of matrices and had made considerable progress in developing the theory of matrices considered as quantities, when on writing to Prof Cayley upon the subject he referred me to the memoir in question, all this only proves how far the discovery of the quantitative nature of matrices is removed from being artificial or factitious, but on the contrary, was bound to be evolved, in the fullness of time, as a necessary sequel to previously acquired cognitions .
> [Sylvester, 1885].

Les premières lignes de l'histoire qui voit dans le calcul des matrices de Cayley une origine de l'étude théorique des algèbres associatives sont écrites par Sylvester lui même. Cette histoire s'étoffe à mesure que l'on avance dans la lecture chronologique des textes du corpus. Eduard Weyr y ajoute un chapitre lorsque, dans l'introduction de son mémoire de 1890, il fait participer les matrices de Cayley et les formes bilinéaires de Frobenius d'une même théorie et, du même coup, partage les priorités. Quelques exemples : la "seconde loi du mouvement" de Sylvester qui a suscité les premiers travaux de Weyr sur les matrices en 1884-1885 est attribuée à Frobenius ; l'équation aux racines latentes de Sylvester est identifiée à l'équation caractéristique de [Cauchy, 1829]. Par une réorganisation du savoir mathématique du moment, Weyr réorganise aussi l'histoire. La manifestation la plus exemplaire en est qu'a partir du mémoire de Weyr, Frobenius est considéré comme ayant donné la première démonstration générale du théorème de Cayley Hamilton.
L'émergence de la théorie des systèmes hypercomplexes dans le monde anglo-saxon ([Taber, 1889, 337], [Bucheim, 1885]) comme sur le continent ([Study, 1889], [Scheffers, 1891], [Molien, 1893] et [Frobenius, 1894]), donne à l'histoire des matrices sa structure quasi-définive. Aux références à Cayley et Hamilton se trouvent associés les travaux des Peirce et de Clifford sur les algèbres associatives ainsi que les travaux géométriques de Grassmann ([5]).

---

[4] Comparer la citation suivante de Sylvester à l'importance que donne [Dieudonné, 1977] à la définition par Cayley de l'addition des matrices [Sylvester, 1885]

> Much as I owe in the way of fruitful suggestion to Cayley's immortal memoir, the idea of subjecting matrices to the additive process and of their consequent amenability to the laws of functional operation was not taken from it, but occurred to me independently before

[5] Pour la théorie des grandeurs complexes de Sylvester, l'influence principale semble provenir des Peirce. Benjamin Peirce (1809-1880) publie en 1870, dans la tradition de la théorie des quaternions qu'il enseigne à Harvard [Newton, 1881], une centaine de copies de son traité, intitulé "Linear associative Algebra" qui détermine 162 algèbres associatives sur le corps complexe de dimension inférieur ou égale à 6 et introduit les notions d'éléments idempotents et nilpotents. Charles Sander Peirce (1839-1914) réalise des travaux de logique influencée par les algèbres associatives (voir à ce sujet [Hawkins, 1971, 246]) et annote les travaux de son père qu'il publie dans le journal de Sylvester en 1881. Le mémoire de Cayley n'exerce cependant aucune influence sur les travaux des Peirce [Parshall, 1985].

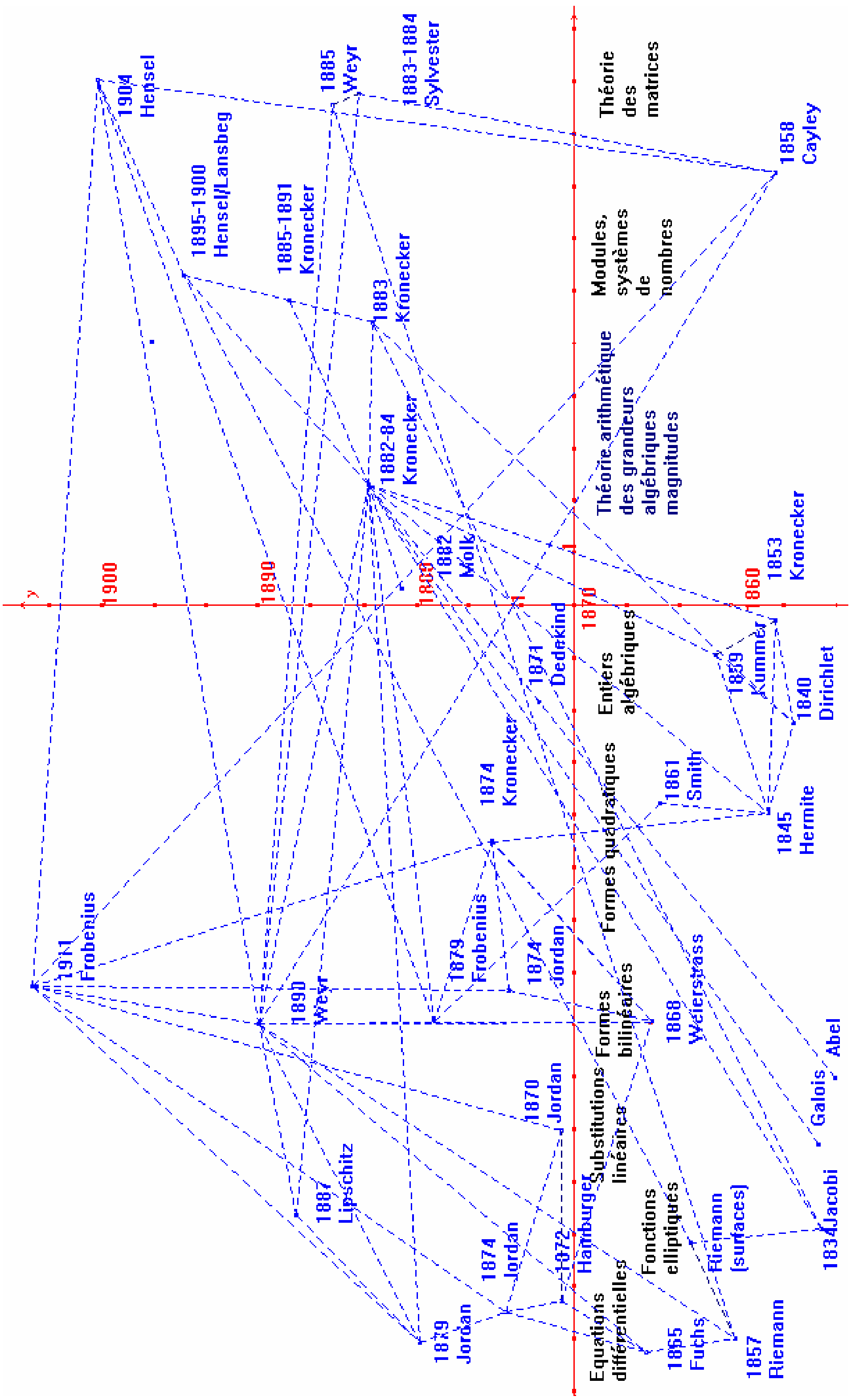
Accordingly, Cayley laid down the laws of combination of matrices upon the basis of the combined effect of the matrices as operators of linear transformation upon a set of scalar variables or carriers. The development of the theory, as contained in Cayley's memoir, was the development of the consequences of these primary laws of combination. Before Cayley's memoir appeared, Hamilton had investigated the theory of such a symbol of operation as would convert three vectors into three linear functions of those vectors, which he called a linear vector operator. Such an operator is essentially identical with a matrix as defined by Cayley ; and some of the chief points in the theory of matrices were made out by Hamilton and published in his *Lectures on Quaternions* (1852). [...] Hamilton must be regarded as the originator of the theory of matrices, as he was the first to show that the symbol of a linear transformation might be made the subject-matter of a calculus. [...] the identity of the two theories was explicitly mentioned by Clifford in a passage of his *Dynamic*, and was virtually recognized elsewhere by himself and by Tait. Sylvester carried the investigation much farther, developing the subject on the same basis as that which Cayley had adopted. Subsequent to Cayley, but previous to Sylvester, the Peirces, especially Charles Peirce, were led to the consideration of matrices from a different point of view ; namely, from the investigation of linear associative algebra involving any number of linearly independent units. [...] In the present paper I regard a matrix s a linear unit operator, operating upon the linearly independent units of an algebra, without reference to any meaning of such units, or to any properties which these units may have in combination with each other ; and I have in this way endeavoured to develop the theory of matrices.
Taber [1889, 337].

Geschichtlige und literarische Nachweise.
Die Theorie der complexen Zahlensysteme hat ihren Ursprung in der durch Gauss 1831 bewirkten definitiven Aufnahme der gewöhnlich complexen Zahlen in die Wissenschaft. [...] Auch W.R. Hamilton ging zunächst von der geometrischen Deutung der Zahlen als Punkte und zwar als Punkte des Raumes aus und gelangte so 1843 zu seinen Quaternionen, deren Studium er si zur Lebensaufgabe machte.
Da erste, der die Zahlensysteme in allgemeinstem Umfang einführte, ist H. Grassmann in seiner zweiten Ausdehnungslehre von 1862. [...]. In der Folgezeit treten nun immer deutlicher in den vielen einzelnen, namentlich englisch-amerikanischen Abhandlung, wie in denen von Cayley, Clifford, Peirce und Sylvester zwei Gesichtspunkte hervor : Einmal die Bedeutung des assoziativen Gesetzes der Multiplikation, das von nun an überall beibehalten wird, anderseits die Auffassung der Multiplikation als lineare Substitution .Der Zusammenhang zwischen complexen Zahlen und linearen Substitutionen ist alsdann namentlich von Frobenius 1878 erfolgreich verwertet worden. [...] Poincaré bemerkte zuerst, dass jedem Zahlensystem eine lineare Gruppe entspricht, deren Parameter linear auftreten. Verbindet man hiermit jene von Lie und Engel herrührenden Sätze aus der Theorie der Transformationsgruppen, so kennt man, dass jedem System complexer Zahlen *zwei einfach transitive reciproke projective Gruppen* zugehören.
[Scheffers, 1891, 386-388] :

> [Traduction, F.B.]. La théorie des systèmes de nombres complexes a son origine dans les travaux de Gauss de 1831 qui provoquèrent l'admission définitive des nombres complexes dans la science. [...] Aussi Hamilton est d'abord allé vers une interprétation géométrique [des nombres complexes] comme points de l'espace et est arrivé en 1843 à ses quaternions [...]. Le premier à introduire une étude d'ampleur générale des systèmes de nombres, est H. Grassmann dans son *Ausdehnungslehre* de 1862. [...] Les développements anglo-américains, comme ceux de Cayley, Clifford, Peirce et Sylvester [...] montrent l'importance de l'associativité de la loi de multiplication [...], de plus ils considèrent la multiplication comme une substitution linéaire. Un traitement semblable des nombres complexes et des substitutions linéaires est alors donné avec succès par Frobenius en 1878.

Entre 1880 et 1890 s'élabore une culture commune par la réunion de courants de recherches indépendants qui caractérise l'émergence de la théorie des systèmes hypercomplexes. La présentation d'une histoire dans les traités mathématiques participe de la légitimité d'une théorie qui se présente à la fois comme nouvelle et comme prenant place dans une histoire déjà longue de précurseurs. Le rôle de précurseur des algèbres associatives attribué à Cayley est indissociable de l'organisation de la nouvelle théorie qui présente les matrices comme cas particulier de la théorie des systèmes hypercomplexes [Scheffers, 1891, 386-388].

ENCART 1. Représentation graphique du corpus étudié.



Chapitre 5.

Une méthode de décomposition des matrices à l'intersection de réseaux de recherches en analyse, algèbre et arithmétique

(1880-1904).

ENCART 2.

La nullité des matrices de Sylvester.

L'introduction par Sylvester de la notion de nullité dans le cadre du calcul des matrices de Cayley est détaillée dans l'encart 8 du chapitre 3.

[Sylvester, 1884b, 133] :

> To make what follows intelligible I must premise the meaning and laws of vacuity and nullity.
> A matrix is said to be vacuous when its content (the determinant of the matrix) is zero, but it may have various degrees of vacuity from 0 up to ω the order of the matrix.
> Again the nullity is said to be *i* when *every* minor of the order *(ω-i+1),* and consequently of each superior order, is zero. It follows therefore that it means the same thing to predicate a vacuity 1 and a nullity 1 of any matrix, but for any value of *i* greater than 1, a nullity *i* implies a vacuity *i* but not *vice versa* ; the vacuity may be *i,* whilst the nullity may have any value from 1 up to *i* inclusive.
> If from each term in the principal diagonal of a matrix λ be subtracted, the content of the resulting matrix is a function of degree ω in λ ; the ω values of λ which make this content vanish are called its latent roots, and if *i* of these roots are zero, the vacuity (treated as a number) is said to be *i.* This comes to the same thing as saying that the vacuity is *i* when the determinant, and the sums of the determinants of the principal minors of the orders *ω-1, ω-2, ..., (ω-i+1)* are each zero. A principal minor of course means one which is divided into 2 [equal] triangles by the principal diagonal of the parent matrix.

INTRODUCTION.

> On sait que toute *matrice* de l'ordre n satisfait à une équation de degré n ; c'est l'équation fondamentale de M. Cayley. Il y a cependant des matrices qui satisfont à une équation de degré moindre que n : ce sont les matrices que M. Sylvester nomme *dérogatoires*. Je suis parvenu à établir un théorème qui jette du jour sur ce sujet, et que je me permets de communiquer à l'Académie.
> [Weyr, 1885a, 787].

Ce chapitre est consacré à la mise en perspective historique d'un théorème énoncé par Eduard Weyr en 1885 à la suite des travaux de Sylvester sur les matrices. Comme nous l'avons vu au chapitre 4, les difficultés posées par l'occurrence de racines caractéristiques multiples étaient associées à la notion de matrice depuis sa première définition comme mère des mineurs d'un déterminant, ces mêmes difficultés amènent Sylvester à développer une méthode matricielle entre 1882 et 1885 dans laquelle le calcul symbolique des matrices de Cayley trouve une postérité. Une matrice est alors perçue comme une quantité qui permet de généraliser la méthode de *décomposition* d'un polynôme en facteurs linéaires aux polynômes de matrices (encart 8, chapitre 4). A partir de 1885, la notion de matrice tire sa signification principale de l'existence d'un polynôme annulateur et les difficultés posées par les racines caractéristiques multiples sont déplacées vers l'examen de la structure polynômiale de l'"équation de degré minimum" satisfaite par une matrice donnée ([1]), le problème principal est alors de caractériser les "matrices dérogatoires" qui satisfont une "équation de degré moindre que n". Dans une note publiée aux *Comptes Rendus* le 6 avril 1885, Eduard Weyr donne la caractérisation complète des matrices dérogatoires par la définition d'un invariant, la *caractéristique* ([2]), développant la notion de *nullité* d'une matrice récemment introduite par Sylvester et présentée en encart 2:

> Soient M une matrice quelconque d'ordre n et μ_α une racine α^{uple} de M. En formant les puissances de $M\text{-}\mu_\alpha$, on tombe nécessairement sur une puissance $(M\text{-}\mu_\alpha)^\rho$ qui est de nullité α ; les puissances plus élevées sont de la même nullité.
> Désignons par
> $$\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\dots,\ \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\rho=\alpha$$
> les degrés de nullité des matrices
> $$M\text{-}\mu_\alpha,\ (M\text{-}\mu_\alpha)^2,\dots,(M\text{-}\mu_\alpha)^\rho\ ;$$
> alors je dis que *la suite des nombres $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\rho$ ne peut jamais croître, c'est-à-dire qu'on a toujours*
> $$\alpha_1\ \text{Ã}\ \alpha_2\dots\ \text{Ã}\ \alpha_\rho.$$

[1] Voir le chapitre 4 pour le contexte dans lesquels se présentent les difficultés posées les racines multiples : expression d'une fonction rationnelle de matrice et caractérisation des matrices qui commutent deux à deux pour la généralisation du calcul des quaternions.

[2] Consulter l'introduction de la partie II et ses encarts pour des commentaires mathématiques sur la notion de caractéristique.

ENCART 3.

La référence de Weyr à Riemann

Le mémoire de Riemann cité par Weyr porte sur "deux énoncés généraux sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques" [Riemann, 1857], c'est-à-dire sur l'étude des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions entières des variables. "On sait que chaque solution d'une équation différentielle linéaire homogène du n^e ordre s'exprime par n solutions particulières indépendantes d'équation linéaires à coefficients constants", Riemann considère $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des "fonctions de x, qui sont définies pour chaque valeur complexe de ces quantités, à l'exception de $a, b\ c, \ldots, g$ [...]" ; par une "rotation de x autour d'une des valeurs de ramification" la fonction y_i se transforme en une fonction obtenue par transformation linéaire de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ([1]). Par une rotation de x autour de a, $a\ (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, la fonction y se transforme en $(A)(p)$ [Riemann, 1857, 380] :

> Bezeichnet man nun zur Abkürzung des System der n Werthe ($y_1, y_2, \ldots, y_n$) durch (y), das System der nn Coefficienten
>
> $$\begin{array}{cccc} A_1^{(1)} & A_2^{(1)} & \ldots & A_n^{(1)} \\ A_1^{(2)} & A_2^{(2)} & \ldots & A_n^{(2)} \\ . & . & . & . \\ A_1^{(n)} & A_2^{(n)} & \ldots & A_n^{(n)} \end{array}$$
>
> durch (A), das System der B durch (B), ..., der G durch (G), und die aus (y) mittelst des coefficientensystems (A) gebildeten Werthe $\Sigma A_i^{(1)} y_i$, $\Sigma A_i^{(2)} y_i$, ..., $\Sigma A_i^{(n)} y_i$ durch
>
> $$(A)(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (A)(y)\ [\ldots]$$

Riemann réduit les substitutions $(A), (B), \ldots,$ à une forme "diagonale" :

> Nach einem leicht zu beweisenden, von Jacobi vielfach angewandten Satze lässt sich jede Substitution, allgemein zu reden, in drei Substitutionen zerlegen, von denen die letzte die inverse der ersten ist, und in der mittleren die Coefficienten ausser der Diagonale sämtlich $=0$ sind, so dass durch sie jede von den Grössen, auf welche sie angewandt wird, nur einen Factor erhält. Es lässt sich also z.B.
>
> $$(A) = (\alpha)\left\{\begin{array}{cccc} \lambda_1, & 0, & .. & 0 \\ 0, & \lambda_2 & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0, & 0, & .. & \lambda_n \end{array}\right\}(\alpha)^{-1}$$
>
> setzen, wenn $(\alpha)^{-1}$ die inverse Substitution von (α) bezeichnet. Die Grössen λ werden dabei die n Wurzeln einer durch (A) völlig bestimmten Gleichung n^{ten} Grades. Für den Fall, dass die Gleichung gleiche Wurzeln hätte, müsste man der mittleren Substitution eine etwas abgeänderte Form geben ; wir wollen aber zur Vereinfachung diesen Fall vorläufig ausschliessen und annehmen, dass er bei der Zerlegung der Substitutionen $(A), (B), \ldots, (G)$ nicht eintritt.

La forme "diagonale" de A permet de réduire la substitution à une action simple : si on note $(z_1,\ldots,z_n) = (\alpha)^{-1}(y)$ alors $A(z_1,\ldots,z_n) = (\lambda_1 z_1,\ldots,\lambda_n z_n)$ et, par une rotation de la variable autour de la valeur singulière, la fonction z est transformée en λz. Riemann en déduit que le produit de cette fonction par une certaine puissance de $(x-a)$ est défini en a [1857, 381] :

> Wenn eine Function z durch einen positiven Umlauf des x um a den constanten Factor λ erhält, so kann sie durch Multiplication mit einer Potenz von $(x-a)$ in eine Function verwandelt werden, die in der Umgebung von a einhändrig ist. In der That erhält $(x-a)^\mu$ durch einen positiven Umlauf des x um a den Factor $e^{\mu 2\pi i}$; bestimmt man also muss so, das $e^{\mu 2\pi i} = \lambda$, oder setzt man $\mu = \log\lambda/2\pi i$, so wird $z\ (x-a)^{-\mu}$ eine für $x = a$ einänrige Function.

[1] Ce principe est à la base de l'étude des équations de Fuchs. Voir la description du mémoire de Hamburger [1872], qui emploie la forme de Jordan (encart 15, chapitre 3).

Pour abréger, je dis que la racine μ_α a pour *caractéristiques* les nombres

$$(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho).$$

Soient maintenant $\mu_\alpha, \mu_\beta, \ldots, \mu_\lambda$ les racines de M, et soient leurs caractéristiques respectives

$$(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_\rho), (\beta, \beta_1, \ldots, \beta_\sigma), \ldots, (\lambda, \lambda_1, \lambda_\tau).$$

Alors *l'équation de degré minimum, satisfaite par M,* est la suivante :

$$(M-\mu_\alpha)^\rho (M-\mu_\beta)^\sigma \ldots (M-\mu_\lambda)^\tau = 0.$$

[Weyr, 1885b, 966].

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, la factorisation des équations de polynômes de matrices en "facteurs latents" M-μ manifeste la signification duale du symbole μ, à la fois nombre et système de nombre et la relation entre le "degrés de nullité" du facteur matriciel M-μ et la multiplicité de la racine latente μ jette un éclairage sur les difficultés posées par la multiplicité des racines :

M étant une matrice d'ordre n aux racines latentes

$$\mu_\alpha, \mu_\beta, \ldots, \mu_\gamma$$

et

$$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$$

étant des degrés de multiplicité de ces racines, soient

$$\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$$

les degrés de nullité des matrices

$$M-\mu_\alpha, M-\mu_\beta, \ldots, M-\mu_\gamma;$$

alors M satisfait à l'équation

$$(M-\mu_\alpha)^{\alpha-\alpha_1+1}(M-\mu_\beta)^{\beta-\beta_1+1}\ldots(M-\mu_\lambda)^{\lambda-\lambda_1+1} = 0$$

Les nombres

$$\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$$

dont chacun est au moins égal à 1, ne peuvent pas surpasser les nombres respectifs

$$\alpha, \beta, \ldots, \lambda.$$

Dans le cas de

$$\alpha_1 = \beta_1 = \ldots = \lambda_1 = 1,$$

on tombe sur l'équation de M. Cayley. Dans tout autre cas, la matrice M est dérogatoire.

[Weyr, 1885a, 788].

La solution donnée par Weyr au problème de la multiplicité des racines de l'équation caractéristique, dont nous avons vu l'ancienneté dans le chapitre 2 consacré à la discussion des petites oscillations, est à l'intersection du sillage de Sylvester et de courants jusqu'alors indépendants comme les travaux de Riemann [1857] sur les équations différentielles à coefficients algébriques. Le terme "caractéristique" a été en effet introduit par Riemann comme un invariant des classes de *similitudes* des *substitutions linéaires* en 1857 ; par sa référence à Riemann, Weyr se propose donc en 1885 de résoudre des problèmes identiques à ceux traités par Jordan en 1870 par l'emploi de sa forme canonique: caractérisation des classes de similitudes des substitutions linéaires, problème de la commutativité des substitutions et application aux équations différentielles.

La fonction $z(x-a)^{-\mu}$ étant définie pour $x = a$, elle se laisse développer en puissances entières de $(x-a)$ et, par conséquent, la fonction z se laisse développer en puissances de $(x-a)$ d'exposants la différence d'un entier et de μ (2). Riemann considère alors les plus petites puissances μ_1, $\mu_2,\ldots, \mu_n$ telles que :

$$z_1(x-a)^{-\mu_1},\ldots,\ z_n(x-a)^{-\mu_n}$$

aient des valeurs finies. La suite de ces puissances, les valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\lambda_n$, et de $a, b,\ldots g$, permettent de caractériser les classes de systèmes de fonctions $y_1,\ldots,y_n$, et, pour cette raison, Riemann nomme ces suites la "caractéristique" des systèmes $(y_1,\ldots,y_n)$:

> Diese Exponenten können dazu dienen, die verschiedenen Functionen Systeme derselben Klasse von einander zu unterschieden, oder doch sie zu gruppieren, und es genügt, wenn sie bekannt sind, statt (*A*) die Substitution (α) anzugeben, da die Grössen $\lambda_1, \lambda_2,..,\lambda_n$ schon durch sie bestimmt sind : wir werden uns daher zur genaueren Charakteristik des Systems ($y_1, y_2, \ldots,y_n$) des Ausdrucks
>
> $$Q\left\{\begin{matrix} a & b & \ldots & g \\ (\alpha) & (\beta) & \ldots & (\vartheta) \\ \mu_1 & \upsilon_1 & \ldots & \rho_1 \\ . & . & . & . \\ \mu_n & \nu_n & \ldots & \rho_n \end{matrix}\right\}$$
>
> bedienen, in welchen die Grössen der übrigen Verticalreihen für die Verzweigungswerthe *b,...,g* die analoge Bedeutung haben sollen, wie die der ersten für *a*.Es liegt dabei auf der Hand, dass jede System als ein spezieller Fall eines andern betrachtet werden kann, in welchem die entsprechenden Exponenten zum Theil oder sämtlich niedriger sind.

Riemann démontre ensuite la réciproque de cet énoncé, une équation linéaire homogène dont les coefficients sont des fonctions entières de x peut être associée à la donnée de systèmes appartenant à une même classe [1857, 383].

(2) C'est un développement que nous appellerions un développement en séries de Laurent.

De 1885 à 1890, Eduard Weyr est à la fois le premier et le seul géomètre du continent à employer la notion de matrice. En conséquence de la mise en relation de méthodes anglo-saxonnes et continentales, la notion de matrice s'enrichit comme le manifeste la nouvelle définition que donnera Weyr à la notion de nullité dans son mémoire de 1890 sur les formes bilinéaires :

> Wir sagen, nach Sylvester, eine Matrix von *nn* Elementen *A* besitze die Nullität
>
> $$\nu\ (0 < \nu < n),$$
>
> falls alle Minoren n-$\nu+1^{ten}$ Grades von $|A|$ gleich Null sind, während zum mindesten ein Minor n-ν^{ten} Grades von Null verschieden ist : ferner sagen wir, *A* besitze die Nullität 0, wenn die Determinante von *A* von Null verschieden ist, und *A* besitze die Nullität *n*, wenn alle Elementen von *A* gleich Null sind.
> Nach Kronecker heiβt *A* vom Range
>
> *r (0 < r Â n)*
>
> wenn es unter den nicht verschwindenden Minoren von $|A|$, welche höchstens vom Grade *r* gibt ; *A* hat ferner den Rang *0*, wenn alle Elemente von *A* gleich Null sind.
> Hieraus sieht man, dass zwischen dem Range *r* und der Nullität ν einer Matrix von *nn* Elementen die Beziehung besteht
>
> $$r + \nu = n.$$
>
> [Weyr, 1890, 172].
>
> [Traduction, F.B.]. Nous dirons, d'après Sylvester, qu'une matrice *A* de *nn* éléments a pour nullité
>
> $$\nu\ (0 < \nu < n),$$
>
> lorsque tous les mineurs d'ordre n- $\nu+1$ de $|A|$ sont nuls, et qu'au moins un mineur d'ordre n-ν n'est pas nul. Nous dirons de plus que *A* à pour nullité 0, quand le déterminant de A n'est pas nul, et que A à pour nullité *n* lorsque tous les éléments de *A* sont nuls.
> D'après Kronecker, une matrice *A* est dite de rang
>
> *r (0 < r Â n)*
>
> lorsque *r* est l'ordre maximal des mineurs non nuls parmi tous les mineurs de $|A|$; *A* à le rang 0 lorsque tous les éléments de *A* sont identiquement nuls.
> Nous avons donc la relation suivante entre le rang *r* et la nullité ν d'une matrice de *nn* éléments :
>
> $$r + \nu = n.$$

Caractéristique de Riemann, nullité de Sylvester, rang de Kronecker, entre 1885 et 1890, la notion de matrice s'enrichit de lectures croisées. Weyr complète l'articulation des deux notions primitives de Sylvester [1851] et Cayley [1858] : le *calcul symbolique* est associé à l'idée de matrice *mère des mineurs* dans la construction d'un *calcul sur la représentation* elle-même, la *méthode de décomposition matricielle*.

I. LA CONSTRUCTION PAR WEYR D'UNE METHODE DE DECOMPOSITION MATRICIELLE (1885-1890).

1. Les lectures croisées de Weyr (1885) : décomposition de Riemann (1857), extraction de mineurs de Sylvester (1885) et calcul symbolique de Cayley (1858).

En 1885, Weyr se propose d'employer les méthodes matricielles de Sylvester afin de "rectifier" la solution donnée par Riemann au problème de la caractérisation des substitutions linéaires. Comme le montre l'encart 3, en 1857 Riemann formule le problème de la caractérisation des substitutions linéaires comme une question de "décomposition" [Riemann, 1857, 380],

$$(A) = (\alpha)\begin{Bmatrix} \lambda_1, & 0, & .. & 0 \\ 0, & \lambda_2 & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0, & 0, & .. & \lambda_n \end{Bmatrix}(\alpha)^{-1}$$

> (1) [Note : Riemann, dans le Mémoire *Zwei allgemeine Sätze über lineäre Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten (Oeuvres complètes,* p. 359), attribue cette manière de décomposer une substitution linéaire à Jacobi. Son assertion cependant, que la possibilité d'une telle décomposition exige l'inégalité des racines μ, doit être rectifiée dans le sens de notre énoncé.
> [Weyr, 1885a, 788].

Comment les travaux de Riemann se trouvent-ils associés aux matrices de Sylvester ? Cette association est en réalité réalisée par Riemann lui-même dont le mémoire de 1857 emploie la notion de matrice introduite par Sylvester en 1851 comme mère des mineurs d'un déterminant [Riemann, 1857, 389] ([3]). La matrice de Sylvester, indissociable de la théorie du déterminant, porte en

[3] La notion primitive de matrice mère des mineurs est, par opposition à la matrice de Cayley, la seule qui soit utilisée sur le continent avant les travaux de Weyr de 1890. La notion de mineur est notamment utilisée par Hermite puis Jordan et Darboux (chapitre 2). Le "traité élémentaire sur les déterminants" de Charles Dogson [1867], mieux connu sous le nom de Lewis Carol, est un autre témoignage de l'influence de la notion de matrice de Sylvester.

elle l'idée d'un calcul sur la représentation elle-même et consistant en des extractions de mineurs, ou tels que les désigne Charles Dogson, plus connu sous le nom de Lewis Carol, de "blocs" [Dogson, 1867, 63]. Dans un cadre géométrique, la méthode d'extraction de sous blocs d'une matrice avait permis à Sylvester de résoudre les difficultés posées par l'occurrence de racines latentes multiples en 1851 (chapitre 3, encart5), elle avait ensuite conduit à l'introduction de la notion de nullité en 1884 pour des problèmes de même nature et est appliquée par Weyr à la résolution du problème de Riemann en cas de racines multiples ([4]):

> Si l'on a
>
> $$\alpha = \alpha_1,\ \beta = \beta_1, \ldots,\ \lambda = \lambda_1,$$
>
> ce qui arrive, par exemple, quand les racines latentes sont toutes distinctes, on peut mettre M sous la forme
>
> $$M = A^{-1} M_0 A,$$
>
> M_0 étant une matrice dont la diagonale principale contient α termes μ_α, β termes μ_β,…, enfin λ termes μ_λ et dont les autres termes sont nuls, et A désignant une matrice de nullité zéro ; et ce n'est que dans le cas de
>
> $$\alpha = \alpha_1,\ \beta = \beta_1, \ldots,\ \lambda = \lambda_1,$$
>
> qu'on peut mettre M sous cette forme.
>
> [Weyr, 1885a, 788].

---

[4] Dans sa première publication de mars 1885, Weyr ne parvient pas à surmonter les difficultés posées par les racines multiples [1885a, 788] :

> Pour montrer l'utilité de cette décomposition de M, je vais démontrer un théorème que M. Sylvester a bien voulu me communiquer. Représentons M_0 par $(\mu_\alpha, \mu_\beta, \ldots, \mu_\lambda)$; nous aurons pour un entier positif quelconque ε
>
> $$M^\varepsilon = A^{-1} (\mu_\alpha^\varepsilon, \mu_\beta^\varepsilon, \ldots, \mu_\lambda^\varepsilon) A,$$
>
> d'où l'on conclut immédiatement qu'un terme quelconque $m_{ik}^{(\varepsilon)}$ de M^ε est mis sous la forme
>
> $$m_{ik}^{(\varepsilon)} = a_{ik}\mu_\alpha^\varepsilon + b_{ik}\mu_\beta^\varepsilon + \ldots. + l_{ik}\mu_\lambda^\varepsilon.$$
>
> C'est la forme de M. Sylvester, qui ainsi se trouve démontrée dans le cas de $\alpha = \alpha_1, \ldots, \lambda = \lambda_1$. Je ne suis pas parvenu à la démontrer pour les autres cas.

2. La formation des "espèces" de matrices: une méthode de décomposition de la *forme* matricielle.

Dans une note communiquée aux *Comptes Rendus* en avril 1885, Weyr applique les méthodes matricielles de Sylvester au problème de la caractérisation des substitutions de Riemann, formulé comme relevant d'une "répartition des matrices en espèces":

> Je dis, de deux matrices d'ordre *n*, qu'elles sont de même espèce si elles possèdent les mêmes racines aux mêmes caractéristiques.
> *M* et *N* étant deux matrices de même espèce, on peut toujours assigner des matrices Q, de nullité zéro, telles qu'on ait
> $$N = Q^{-1}MQ.$$
> Et, réciproquement, deux matrices *M* et *N*, liées par une telle équation, sont de même espèce.
> [Weyr, 1885b, 966].

Weyr définit un nouveau système d'invariants qui associe la "caractéristique" des substitutions de Riemann à la nullité des matrices de Sylvester :

> Soient *M* une matrice quelconque d'ordre *n* et μ_α une racine α^{uple} de *M*. En formant les puissances de $M-\mu_\alpha$, on tombe nécessairement sur une puissance $(M-\mu_\alpha)^\rho$ qui est de nullité α ; les puissances plus élevées sont de la même nullité. [...] Désignons par
> $$\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\rho = \alpha$$
> les degrés de nullité des matrices
> $$M-\mu_\alpha,\ (M-\mu_\alpha)^2,\ \ldots,\ (M-\mu_\alpha)^\rho\ ;$$
> [...] α_1 Ã α_2 ... Ã α_ρ.
> Pour abréger, je dis que la racine μ_α a pour *caractéristiques* les nombres
> $$(\alpha,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho).$$
> [Weyr, 1885b, 966].

Deux matrices de même espèce ont même caractéristique. Pour la démonstration de la réciproque de cette propriété, Weyr élabore sa méthode décomposition matricielle qui nécessite d'articuler la *forme* matricielle à l'*invariant* qu'est la caractéristique :

> Les entiers
> $$\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_\rho\ ;\ \beta, \beta_1, \ldots, \beta_\sigma, \ldots\ ;\ \lambda,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_\tau$$
> ayant été choisis de manière que chacun d'eux soit au moins égal à 1, et que les suites
> $$(\alpha_1, \ldots,\alpha_\rho), (\beta_1,\ldots,\beta_\sigma), \ldots, (\lambda_1,\ldots,\lambda_\tau),$$
> ne soient jamais croissantes, et que, de plus,
> $$\alpha = \alpha_1+\ldots+\alpha_\rho,\ \beta = \beta_1+\ldots+\beta_\sigma,\ \ldots,\ \lambda = \lambda_1+\ldots+\lambda_\tau,$$
> $$n = \alpha+\beta+\ldots+\lambda,$$
> je dis qu'*il existe toujours des matrices d'ordre n, ayant les racines μ_α, $\mu_\beta,\ldots,\mu_\lambda$ aux caractéristiques respectives*

$(\alpha, \alpha_1,\ldots,\alpha_\rho)$, $(\beta, \beta_1,\ldots,\beta_\sigma)$, …, $(\lambda, \lambda_1,\lambda_\tau)$,

les valeurs μ_α, μ_β, …, μ_λ étant arbitraires, mais distinctes entre elles.

[Weyr, 1885, 966].

La démonstration propose une "formation de toutes les espèces" de matrices par une itération qui construit une matrice d'ordre α associée à la racine μ_α, de multiplicité α et de caractéristique $(\alpha, \alpha_1,\ldots,\alpha_\rho)$. Dans cette démonstration, Weyr mêle la méthode propre au calcul des matrices de Cayley de décomposition d'équations de matrices en *facteurs linéaires* à la méthode d'*extraction de mineurs* de Sylvester et ce dans le cadre de la problématique de Riemann de *décomposition* de la *forme* d'une substitution (encart 3). En cas d'occurrence de racines multiples, cette forme n'est pas toujours diagonale, Weyr articule la décomposition de la *forme* polynomiale de l'équation minimale et de la *forme* de la matrice comme mère des mineurs et obtient une décomposition en "compartiments" de la forme matricielle.

Pour cet effet, désignons par $G_{\rho\text{-}1\text{-}\mu\alpha}$ la matrice zéro, et d'ordre α_ρ,, et posons successivement

$$G_{\rho-2-\mu\alpha} = \left\{ \begin{array}{c|c} \dfrac{G_{\rho-1-\mu_\alpha}}{A_{\rho-1}} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix}}^{(\alpha_{\rho-1}).} \end{array} \right\},\ G_{\rho-3-\mu\alpha} = \left\{ \begin{array}{c|c} \dfrac{G_{\rho-2-\mu_\alpha}}{A_{\rho-2}} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix}}^{(\alpha_{\rho-2}).} \end{array} \right\},$$

…………………………………………………………………………………….,

$$G_{1-\mu\alpha} = \left\{ \begin{array}{c|c} \dfrac{G_{2-\mu_\alpha}}{A_2} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix}}^{(\alpha_2).} \end{array} \right\},\ H_{-\mu\alpha} = \left\{ \begin{array}{c|c} \dfrac{G_{1-\mu_\alpha}}{A_1} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix}}^{(\alpha_1).} \end{array} \right\}.$$

[…] Les compartiments $A_{\rho\text{-}1}$, $A_{\rho\text{-}2}$, …, A_1 sont formés de la manière suivante :

$$A_{\rho-1} = \left\{ \begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}}^{(\alpha_\rho)} \\ \begin{matrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \end{matrix} \right\} (\alpha_{p-1}),\ A_{\rho-2} = \left\{ \begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} 0 & \ldots & 0 \end{matrix}}^{(\alpha_\rho)} & \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \ldots 0 \end{matrix}}^{(\alpha_{\rho-1})} \\ \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \ldots 0 \\ . & . & \ldots . \\ 0 & 0 & \ldots 1 \\ 0 & 0 & \ldots 0 \\ . & . & \ldots . \\ 0 & 0 & \ldots 0 \end{matrix} \end{matrix} \right\} (\alpha_{p-2}),$$

…………………………………………………………………………

Dans le cas de $\alpha_\rho = \alpha_{\rho\text{-}1}$, le compartiment $A_{\rho\text{-}1}$ aura la forme d'un carré et ne contiendra pas les lignes remplies entièrement de zéros ; les mêmes lignes manqueront dans $A_{\rho\text{-}2}$, si $\alpha_{\rho\text{-}1} = \alpha_{\rho\text{-}2}$, et ainsi de suite.

A l'aide de *H* on peut former une matrice *K* d'ordre $\alpha+\beta$ ayant les racines μ_α et μ_β aux caractéristiques $(\alpha, \alpha_1,\ldots,\alpha_\rho)$, $(\beta, \beta_1,\ldots,\beta_\sigma)$.
[Weyr, 1885b, 967].

Eduard Weyr réalise la pleine portée de l'alliance des deux notions distinctes des matrices comme mères des mineurs [Sylvester, 1851] et des matrices comme quantité objet d'un calcul symbolique [Cayley, 1858]. En appliquant la méthode de Sylvester à la caractérisation des substitutions linéaires envisagée par Riemann en 1857 comme relevant d'une "décomposition" fondée sur l'introduction d'un invariant, la "caractéristique" (encart 3), Weyr élabore une méthode de "décomposition" des matrices dans laquelle le calcul symbolique et l'extraction de mineurs de la représentation en tableau sont indissociables, la méthode de décomposition d'une matrice en "compartiments" est en effet une méthode d'itération qui joue à plein de la représentation matricielle : un calcul de *puissances* de matrices donne une *décomposition* en *compartiments* qui reflète la *décomposition polynomiale* de l'équation minimale.

3. La nouvelle caractéristique de Weyr en 1890 et les systèmes de valeurs de Kronecker.

Le théorème de Weyr, qui caractérise les matrices par un invariant, la "caractéristique", est au cœur de la réorganisation de la théorie des formes bilinéaires proposée en 1890. Son contenu s'enrichit de la rencontre des travaux anglo-américains sur les matrices et d'un corpus de textes a dominante arithmétique et dont la figure centrale est Leopold Kronecker.

Chez Weyr, en 1890, une matrice n'a plus d'existence autonome, elle est associée à un système de valeurs et à la notion essentielle d'indépendance linéaire des systèmes [Weyr, 1890, 168]. Le nombre maximum de systèmes linéairement indépendants que l'on peut extraire d'un système de n valeurs données est un invariant, dénommé rang r du système en référence à Kronecker [Weyr, 1890, 172]. Cet invariant s'avère complémentaire de la notion de nullité de Sylvester, le rang correspond en effet à l'ordre du plus grand mineur non nul du déterminant $|A|$ et si ν est la nullité de A, alors

$$r + \nu = n.$$

La nouvelle définition donné par Weyr à la nullité d'une matrice manifeste l'influence de Kronecker, la nullité d'une matrice M est ν si et seulement si il existe ν systèmes (et pas plus) indépendants (x_i) tels que $A(x_i) = 0$ ([5]) .

> Sind n lineare homogene Gleichungen mit n Unbekannten vorgelegt
>
> $$a_{h1}\, x_1 + \ldots + a_{hn} x_n = 0 \; (h = 1,2,\ldots,n),$$
>
> so kann man Folgendes zeigen:
>
> "Besitzt die aus den Coefficienten a_{hk} gebildete Matrix die Nullität ν, so kann den gegebenen Gleichungen durch ν lineare unabhängige Lösungen (x) angeben, so ist die Nullität von $\{a_{hk}\}$ entweder gleich ν_1 oder größer, so dass die größte Anzahl linear unabhängiger Lösungen (x) genau die Nullität ν von $\{a_{hk}\}$ angibt. Jede Lösung der vorgelegten Gleichungen ist aus jeden ν unabhängigern Lösungen zusammengesetzt".
>
> [Weyr, 1890, 173].
>
> [Traduction, F.B.] Soit n équations linéaires homogènes de n inconnues
>
> $$a_{h1}\, x_1 + \ldots + a_{hn} x_n = 0 \; (h = 1,2,\ldots,n),$$
>
> on peut démontrer l'énoncé suivant :
>
> "Si les coefficients a_{hk} forment une matrice de nullité ν, alors les solutions des équations données peuvent s'exprimer par la donnée de ν solutions linéaires indépendantes (x) [...]. Chaque solution des équations données est composée de ν solutions indépendantes.

Cette association de la nullité des matrices et de la notion de rang caractérisant les systèmes linéairement indépendant sous tend un outil de démonstrations dont Weyr fait un usage constant dans son mémoire de 1890.

[5] Ce qu'on appelerait la dimension du noyeau d'un opérateur.

ENCART 4.

Le degré des systèmes de diviseurs de Kronecker.

Des précisions sur la théorie des grandeurs algébriques seront proposées en encart 6, les termes mis en gras ci-dessous y seront en particulier définis. Soit r **entiers algébriques** $x, x', x'', \ldots,$ appartenant à un **genre** (G) sur un **domaine de rationalité** (R) donné, leur diviseur algébrique est défini comme une classe d'équivalence sur les formes rationnelles de r indéterminées: $mod[x+u'x'+u''x''+\ldots]$ $(u','u'',\ldots$ étant r indéterminées). La notion de "diviseur algébrique" "généralise" la notion de plus grand diviseur commun ([3]), de la "sphère des nombres entiers rationnels" à la "sphère des **grandeurs algébriques**" [Kronecker, 1882, 70]. Soit M, un entier algébrique de (G) - un polynôme de n variables pour Kronecker - et soit un nombre fini k de polynômes $M_1,\ldots,M_k$ tels que :

$M = X_1M_1+\ldots+X_k M_k$ (les X_i sont des polynômes entiers),

Kronecker dit que M contient, ou est **divisible** par, le système de diviseurs $(D) = (M_1,\ldots,M_k)$, c'est-à-dire par l'ensemble

$$\{X_1M_1+X_2M_2+\ldots+X_kM_k \,/\, X_i \text{ pol entier}\}.$$

Si l'on affecte aux indéterminées $u, u', u''\ldots$ des valeurs correspondant à tous les entiers algébriques de l'espèce principale, la "forme" du diviseur algébrique décrit une sous **espèce** du genre (G) que Kronecker nomme "système de diviseurs" ou "système de modules" du n^e degré et dont les éléments sont des fonctions de n indéterminées ([4]), [Kronecker, 1882, 72] :

> [Traduction, F.B.] : $G(x_1,x_2,\ldots,x_n) \equiv 0$ $(modd.F_1, F_2,\ldots,F_n)$ est l'ensemble des fonctions entières $G(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ qui s'écrivent comme des fonctions linéaires homogènes de $F_1, F_2,\ldots F_n$ dans lesquelles les coefficients sont des fonctions entières de $x_1,\ldots x_n$:
>
> $$G(x_1, x_2,\ldots,x_n) = \Sigma_{1 Â h Â n}\, P_h(x_1,x_2,\ldots,x_n)F_h(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$
>
> où P_i sont des fonctions entières des n variables x.

Les éléments de toute espèce définie par des grandeurs algébriques entières χ, χ', χ'',... du genre (G) sont des polynômes de degré n-1 en (χ) et peuvent s'écrire comme des fonctions linéaires de r entiers $\chi'_0, \chi_0'',\ldots$ [Kronecker, 1882, 99]. Il existe donc un "système fondamental" de grandeurs algébriques entières $x', x'', \ldots, x^{-(n+m)}$ tel que toutes les grandeurs de l'espèce s'écrivent [Kronecker, 1882, 20]:

$$\varphi'x'+\varphi''x''+\ldots+\varphi^{(n+m)}x^{(n+m)}$$

où $\varphi',, \varphi'',\ldots$ sont des fonctions entières à cœfficients entiers de R', R'',...([5])

Le déterminant formé avec les grandeurs (x) et leurs conjuguées est appelé discriminant du système fondamental, c'est une grandeur entière de (R) qui est invariante lorsqu'on change de système fondamental et qui caractérise donc l'espèce [Kronecker, 1882, 267-74].

---

[3] Elle correspond en ce sens à la notion d'idéal de Dedekind.

[4] Par exemple, si $R=1$, chaque grandeur algébrique entière d'un genre donné (G) sur (R) peut s'écrire comme fonction linéaire de n grandeurs données $x',\ldots, x^{(n)}$ [Kronecker, 1882, 99]. En termes contemporains, une extension de corps algébrique $K(\xi)$: Í définit un espace vectoriel de dimension fini (au contraire de $K(\pi)$:K, par exemple, qui n'est pas de dimension finie). Le corps $K(\xi)$ est donc de type fini et il existe $\eta_1,\ldots,\eta_n$ dans $K(\xi)$ tels que tout élément y de $K(\xi)$ s'écrit

$$y = u_1\eta_1+\ldots+u_n\eta_n.$$

Les η_i forment pour Dedekind [1877, 150] une base du corps $K(\xi)$.

[5] Kronecker démontre en particulier que l'on peut trouver m grandeurs entières $y_1,\ldots,y_m$ dans le genre (G) telles que toute grandeur entière y s'écrive $y = u_1 y_1+\ldots+u_my_m$, où $u_1,\ldots,u_m$ sont des entiers de (R).
Le système fondamental $(y_1,\ldots,y_m)$ correspond à la notion de "base" des quantités entières du corps K chez Dedekind.

Elle permet notamment de démontrer la "3e loi du mouvement algébrique" de Sylvester sur la nullité d'un produit de matrice : si A est de nullité α, M de nullité μ, alors $P=AM$ est de nullité ω telle que ω Ã α, ω Ã μ et μ+α Ã ω [Weyr, 1890, 176-177]. Cette propriété permet d'encadrer la nullité d'un polynôme de matrices décomposé en facteurs linéaires ([6]), les nullités des puissances d'une matrice forment alors une suite croissante :

> Ist M eine Matrix n^{ter} Ordnung, welche die α-fache Wurzel *0* und die Nullität α_1 besitz, so kann
> 1. $\alpha_1=\alpha$ sein und dann haben alle positiven Potenzen M^k die Nullität α_1 ; oder kann
> 2. $\alpha_1<\alpha$ sein, dann hat M^2 eine Nullität $\alpha_1+\alpha_k$, wobei α_1 Ã $\alpha_2>0$ und gleichgültig α_2 Â $\alpha-\alpha_1$ ist. Ist $\alpha_2 = \alpha-\alpha_1$ d.h. hat M^2 die Nullität α, so haben alle weitere Potenzen M^k $(k>2)$ ebenfalls die Nullität α.
> [Weyr, 1890, 186].
>
> [Traduction, F.B.]. Soit M une matrice d'ordre n, dont la racine 0 à pour multiplicité α et pour nullité α_1 alors,
> 1. soit $\alpha_1=\alpha$ et toutes les puissances positives M^k ont pour nullité α_1 ;
> 2. soit $\alpha_1<\alpha$ et M^2 a pour nullité $\alpha_1+\alpha_k$, où α_1 Ã $\alpha_2>0$ et α_2 Â $\alpha-\alpha_1$ où $\alpha_2=\alpha-\alpha_1$. Si M^2 a pour nullité α, alors toutes les puissances successives M^k $(k>2)$ ont pour nullité α.

L'examen de la suite des puissances des matrices $M-\mu$, apporte un éclairage sur les relations entre la multiplicité d'une racine caractéristique μ, le nombre de solutions de l'équation $M(x)=\mu_\alpha x$ (égal au rang de la matrice $M-\mu_\alpha$), le polynôme minimal de M et son polynôme caractéristique:

[6] Weyr définit d'abord la suite croissante des nullités des puissances des matrices, puis d'un produit de deux polynômes premiers entre eux de matrices (Weyr démontre que la nullité d'un produit de deux polynômes premiers entre eux est le produit des nullités de chaque terme du produit)

$$D(x', x'', ..., x^{(n)}) = \begin{vmatrix} x_1' & x'_1 & ... & x'_n \\ x_1'' & x'_2 & ... & ... \\ ... & ... & ... & \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & ... & x_n^n \end{vmatrix}^2$$

Chaque système de diviseurs peut être défini comme l'ensemble de fonctions linéaires d'un système fondamental de fonctions à plusieurs indéterminées $M_1, M_2, \ldots, M_k$ *(k* est le degré du système de diviseurs), c'est-à-dire que chaque fonction de la forme ([6]) :

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma_{1 Â h Â n} P_h(x_1, x_2, \ldots, x_n) F_h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

où P_i sont des fonctions entières des n variables x

peut s'écrire :

$$G(x_1, x_2, .., x_n) = \Sigma R_h M_h$$

où les R_h sont des grandeurs rationnelles entières de (R).

Le système de diviseurs (D) peut s'écrire sous la forme $(M_1, \ldots, M_k)$ où $M_1, \ldots, M_k$ sont des polynômes linéaires homogènes de $\varphi', .., \varphi^{(n+m)}$.

$$M_i = a_{i1} x' + a_{i2} x'' + \ldots + a_{in+m} x^{(n+m)}.$$

Le degré du système de diviseurs est le nombre d'éléments du système fondamental du genre. [Kronecker, 1882, 103] :

> So sind ein einfaches Beispiel aus der durch $\sqrt{-31}$ bezeichneten Species ganzer algebraischer Formen anzuführen, die drei Formen
>
> $$5u + 2(+\sqrt{-31})u', \ (1+3\sqrt{-31})v + (1-2\sqrt{-31})v', \ 5w+\sqrt{-31}\, w'$$
>
> einander absolut äquivalent. Nur die ersten beiden sind Grundformen der Species, die dritte gehört einer darin enthaltenen Species an ; deshalb sind auch die Substitutions-Coefficienten bei den Transformationen der ersten beiden in einander und in die dritte gewöhnliche ganze Zahlen, aber bei der Transformation der dritten in eine der beiden ersten sind es ganze algebraische Zahlen der Species. In der That sind
>
> $$u = -v+v', \ v = 2u+u', \quad u = w+w', \ w = u + 2(6+\sqrt{-31})u'$$
> $$u' = 3v-2v', \ v' = 3u + u', \ u' = -2w', \quad w' = (4-\sqrt{-31})\, u'$$
>
> die betreffenden Substitutionen, und die Gleichung
>
> $$\frac{5u+(2+\sqrt{-31})u'}{5v+(1-2\sqrt{-31})v'} = \frac{5uv+(2+\sqrt{-31})u'v+(1+2\sqrt{-31})uv'-(12-\sqrt{-31})u'v'}{5v^2+2vv'+25v^2}$$
>
> legt den Quotienten der ersten und dritten Form als Quotienten von zwei primitiven Formen dar.

Exemple : (R) = (1) est le domaine de rationalité naturel correspondant à l'ensemble des nombres rationnels. Le genre (G) d'ordre 5 est obtenu par ajout des indéterminées x_1 et x_2 telles que $x_1^3 - 2 = 0$ et $x_2^2 + x_2 + 1 = 0$. Tout entier algébrique de l'espèce principale peut s'écrire à l'aide d'une système fondamental de 9 éléments : $\eta = u_1 x_1 + u_2 x_1^2 + u_3 x_2 + u_4 x_2^2 + u_5 x_1 x_2 + u_6 x_1 x_2^2 + u_7 x_1^2 x_2 + u_8 x_1^2 x_2^2 + u_9 .1$

Soit un entier algébrique $\eta = 2 x_1^2(2x_2 + 5x_9 + 7x_1^2 x_2) + (x_1^2 - x_2)^2 + 5(x_1 + x_2)^2 + x_1(x_2 + 3x_2^2 + x_9)$

η divise le système de diviseur $(D) = (M_1 = 2x_2 + 5x_9 + 7x_1^2 x_2, \ M_2 = x_1^2 - x_2, \ M_3 = x_1 + x_2, \ M_4 = x_2 + 3x_2^2 + x_9)$

Ce système de diviseur s'obtient à l'aide du système fondamental de l'espèce principale par le système

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 2 & -1 & 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & & 3 & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 7 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 5 & 0 & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 4. Le système de diviseur (D) est de rang 4.

[6] En terme contemporains : *si* I est un idéal d'un corps K de type fini, il existe toujours α, β, γ, entiers de K tels que

$$I = \{\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma / \alpha, \beta, \gamma \text{ entiers de } K\}.$$

Mais il existe également r entiers $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ de I qui en forment une base de Z-module :

$$I = \{u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \ldots + u_n\eta_n / u_i \in Z\}$$ [Dedekind, 1877,23]

Hieraus ist ersichtlich, dass man bei der Bildung der Potenzen $M, M^2, M^3, \ldots$ endlich zu einer gewissen Potenzen M^ρ gelangen muss, welche die Nullität α besitzt, und dass dann alle höheren Potenzen dieselbe Nullität α besitzen müssen. Bedeuten nun die Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \ldots, \alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_\rho = a$$

die Nullitäten der Matrizen $M, M^2, M^3, \ldots, M^\rho$, so hat man

$$\alpha_1 \text{ Ã } \alpha_2 \text{ Ã } \alpha_3 \text{ Ã } \ldots. \text{ Ã } \alpha_\rho > 0$$

Besitzt die Matrix M die α-fache Wurzel μ_α, so besitzt nach Art. 15 die Matrix M-μ_α die α-fache Wurzel 0 ; sind dann

$$\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \ldots, \alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_\rho = a$$

die Nullitäten der Matrizen $M-\mu_\alpha, (M-\mu_\alpha)^2, (M-\mu_\alpha)^3, \ldots, (M-\mu_\alpha)^\rho$, so mögen die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\rho$ die zur Wurzel μ_α gehörigen charakteristischen Zahlen heiβen. [...]

Es seien ferner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho$ die charakteristischen Zahlen der Wurzel μ_α, ebenso $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma$ jener der Wurzel μ_β, u.s.f., endlich $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\tau$ jene von μ_λ. Dann hat $(M-\mu_\alpha)^\rho$ die Nullität α, $(M-\mu_\beta)^\sigma$ die Nullität β, u.s.f., endlich $(M-\mu_\lambda)^\tau$ die Nullität $\alpha+\beta+\ldots+\lambda$, d.i. : n besitzt, d.h. dass

$$(M-\mu_\alpha)^\rho (M-\mu_\beta)^\sigma \ldots (M-\mu_\lambda)^\tau = 0.$$

Diese Gleichung ist die Gleichung niedrigsten Grades mit scalaren Coefficienten, der die Matrix M genügt ; sie möge die Grundgleichung der Matrix M heiβen. [...]

$$f(M) = 0$$

Dies ist die von Cayley, 1.c. pag. 24, aufgestellte Gleichung der jede Matrix n^{ter} Ordnung genügt ; denn hat M allgemein die Wurzeln $\mu_\alpha, \mu_\beta, \ldots, \mu_\lambda$, und sind die Grade ihrer Vielfachheit, resp. $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, so hat das Polynom

$$f(M) = (-1)^n (M-\mu_\alpha)^\alpha (M-\mu_\beta)^\beta \ldots (M-\mu_\lambda)^\lambda$$

offenbar den Theiler $\varphi(M)$, woraus sich sofort (6) ergibt Natürlich muss die Cayley'sche Gleichung nicht die Grundgleichung der Matrix ein ; dies ist dann und nur dann der Fall, wenn man hat *)

$$\rho = \alpha, \sigma = \beta, \ldots, \tau = \lambda.$$

[Weyr, 1890, 186-188].

ENCART 5.

Quelques précisions sur les travaux de Kronecker de 1883 sur le rang des systèmes de diviseurs.

En 1883 Kronecker précise la notion de degré d'un système fondamental que nous avons vu en encart 4 en reformulant dans le cadre de sa théorie des grandeurs algébriques, un ancien problème de Lejeune- Dirichlet [1840] sur les unités complexes [Kronecker, 1883a] : si *P* est une équation irréductible, unitaire, de degré *n* et à coefficients entiers sur un d**omaine de rationalité** naturel, et si on considère **l'espèce** principale des entiers algébriques du "genre z_α" associé à *P* ($P(z_\alpha) = 0$), alors $z_\alpha^0, z_\alpha, z_\alpha^2, \ldots, z_\alpha^{n-1}$ est un **système fondamental** de l'espèce [Kronecker, 1883a, 216, traduction, F.B.] ([7]) :

> [...] nous supposerons que les coefficients de $P(z)$ sont des nombres entiers, le coefficient de z^n étant égal à l'unité, et nous prendrons pour $z_\alpha', z_\alpha'', \ldots, z_\alpha^{(n)}$ les puissances successives $z_\alpha^{n-1}, z_\alpha^{n-2}, \ldots z_\alpha^0$ de z_α, ou plus généralement un système fondamental d'une *espèce* de nombres algébriques entiers du *genre* z_α ; nous savons alors (*Crelle*, t. XCII, p. 13, 20 et 99) que chaque fonction entière à coefficients entiers de pour $z_\alpha', z_\alpha'', \ldots, z_\alpha^{(n)}$ peut s'exprimer en fonction homogène linéaire à coefficients entiers de ces mêmes pour $z_\alpha', z_\alpha'', \ldots, z_\alpha^{(n)}$.

Par des considérations sur la norme des racines z_α de *P*, Kronecker démontre la généralisation suivante du résultat de Dirichlet :

> Dans chaque espèce de nombres algébriques, il y a un nombre infini d'unités ayant chacune, en valeur absolue, toutes ses conjuguées, à l'exception de deux, comprises entre des limites finies. » C'est la démonstration de ce théorème que j'avais en vue. Le résultat de Lejeune-Dirichlet (1846) s'en déduit à l'aide des considérations bien simples que j'ai développées dans ma Thèse de 1845.

Si *h* est le nombre des racines z_α de *P*, si r_1 est le nombre de racines réelles et $2r_2$ le nombre de racines imaginaires et $h = r_1 + r_2$, Kronecker énonce le résultat suivant :

> 1° Qu'il n'y a qu'un nombre fini d'unités dont plus de (h-2) valeurs absolues conjuguées sont comprises entre des limites finies ;
>
> 2° Qu'il y a donc, parmi les unités complexes (α_ρ, z_α) du théorème précédent, (h-1) qui sont *indépendantes* (Lejeune-Dirichlet, 1846) ;
>
> 3° Que, parmi les systèmes indépendants, il y une infinité de systèmes *fondamentaux*.
>
> Rappelons que l'on nomme *indépendantes* les unités complexes
>
> $$(A) \quad |(a_1, z_\alpha)|, |a_2, z_\alpha)|, \ldots, |(a_g; z_\alpha)| \; (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$
>
> lorsque le produit
>
> $$(\mathrm{B}) \quad \left| (a_1, z_\alpha)^{m_1} (a_2, z_\alpha)^{m_2} \ldots (a_g, z_\alpha)^{m_g} \right| \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$
>
> est différent de l'unité pour *tous* les systèmes $m_1, m_2, \ldots, m_g$ différents de zéro, et que la suite (*A*) représente, pour $g = h-1$, un système *fondamental* lorsque l'expression (*B*) nous donne toutes les unités de l'espèce $(z_\alpha', z_\alpha'', \ldots, z_\alpha^{(n)})$, les *m* étant entiers.

Ce résultat permet de décrire les unités d'une espèce donnée, en général en nombre infini, mais pouvant toutes s'exprimer par la donnée de h-1 unités fondamentales ([8]). Une unité dont le nombre de conjugués est *h* peut être représentée par un produit de puissances entières de (h-1) unités fondamentales et d'une racine de l'unité.

---

[7] Ce résultat décrit le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau des entiers d'un corps de nombres algébriques.

[8] En termes contemporains, ce théorème concerne les unités contenues dans les corps de nombres. Soit *P* un polynôme irréductible à coefficients entiers sur Í, soit r_1 le nombre de ses racines réelles et $2\,r_2$ le nombre de ses racines conjuguées imaginaires. Les unités du corps *Í [X]/P(X)* forment un Î-module de rang $r = r_1 + r_2 - 1$. C'est-à-dire que tout unité s'écrit $\varepsilon = \varepsilon_0^{h_0} \varepsilon_1^{h_1} \varepsilon_2^{h_1} \ldots \varepsilon_r^{h_r}$ / $h_0, h_1, \ldots, h_r$ ☻ Î.

[Traduction, F.B.]. Il s'en suit que les expressions des puissances

$$M,\ M^2,\ M^3,\ldots$$

s'achèvent à une puissance donnée M^ρ *de* nullité α et que toutes les puissances supérieures ont pour nullité α. Désignons par les nombres

$$\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \ldots,\ \ \alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_\rho\ =\ a$$

les nullités des matrices $M,\ M^2,\ M^3,\ldots,\ M^\rho$, on a alors

$$\alpha_1\ \text{Ã}\ \alpha_2\ \text{Ã}\ \alpha_3\ \text{Ã}\ \ldots.\ \text{Ã}\ \alpha_\rho\ > 0$$

Si la racine μ_α de la matrice M a pour multiplicité α, alors, d'après l'Art. 15, la matrice $M\text{-}\mu_\alpha$ a pour racine 0 à la multiplicité α. Soit alors

$$\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ldots,\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_\rho = a$$

les nullités des matrices $M\text{-}\mu_\alpha,\ (M\text{-}\mu_\alpha)^2,\ (M\text{-}\mu_\alpha)^3,\ldots,\ (M\text{-}\mu_\alpha)^\rho$, on appelle nombres caractéristiques de la racine μ_α les nombres $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_\rho$. [...]

Soit $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_\rho$ les nombres caractéristiques de la racine μ_α, et de même $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_\sigma$ ceux de la racine μ_β, …, $\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\lambda_\tau$ ceux de μ_λ. Alors $(M\text{-}\mu_\alpha)^\rho$ a pour nullité α, $(M\text{-}\mu_\beta)^\sigma$ a pour nullité β, ..., et enfin $(M\text{-}\mu_\lambda)^\tau$ a pour nullité $\alpha+\beta+\ldots+\lambda$. On a donc

$$(M\text{-}\mu_\alpha)^\rho\ (M\text{-}\mu_\beta)^\sigma \ldots (M\text{-}\mu_\lambda)^\tau\ = 0.$$

et cette équation est l'équation de plus bas degré à coefficients scalaires vérifiée par la matrice M ; elle sera dénommée équation fondamentale de *M.* [...]

$$f(M) = 0$$

Il s'agit là de l'équation énoncée par Cayley, 1.c. pag. 24, et que chaque matrice d'ordre n vérifie ; si M à pour ensemble de racines $\mu_\alpha,\ \mu_\beta,\ \ldots,\mu_\lambda$, de multiplicités α, β, ..., λ, alors le polynôme

$$f(M)\ =\ (-1)^n\ (M\text{-}\mu_\alpha)^\alpha (M\text{-}\mu_\beta)^\beta \ldots (M\text{-}\mu_\lambda)^\lambda$$

a pour diviseur $\varphi(M)$, et il s'ensuit de (6) que l'équation de Cayley est identique à l'équation fondamentale d'une matrice si et seulement si

$$\rho\ =\ \alpha,\ \sigma\ =\ \beta,\ldots,\ \tau\ =\ \lambda.$$

C'est à l'occasion de la démonstration du théorème fondamental de Weyr que la représentation matricielle fait sa première apparition dans le mémoire de 1890. Cette remarque manifeste la caractéristique opératoire que donne à la représentation matricielle la notion de rang des systèmes de Kronecker. Si la matrice M a pour nullité α_1, il existe α_1 systèmes indépendants $(x^{(\alpha_1+1)}),\ldots,(x^{(n)})$ vérifiant l'équation $M(x) = 0$. Ces systèmes peuvent être complétés en n systèmes indépendants formant une nouvelle matrice $\{(x'),\ (x''),\ldots,(x^{(n)})\}$. Le produit $M\{(x'),\ (x''),\ldots,(x^{(n)})\}$ est une matrice dont les α_1 premières colonnes sont nulles et la matrice $M_1\ =\ \{(x'),\ (x''),\ldots,(x^{(n)})\}^{-1}\ M\{(x'),\ (x''),\ldots,(x^{(n)})\}$ a la forme :

$$M_1 = \left\{ \begin{array}{ccc|c} 0 & \ldots & 0 & \\ . & . & . & S \\ \hline . & . & . & G \\ 0 & \ldots & 0 & \end{array} \right\}$$

Weyr considère alors successivement les matrices :

$$M_2^1 = \left\{ \begin{array}{ccc|c} 0 & \ldots & 0 & \\ . & . & . & S_1 \\ \hline . & . & . & G^2 \\ 0 & \ldots & 0 & \end{array} \right\} \text{ de nullité } \alpha_1 + \textit{null. } G$$

ENCART 6.

Les systèmes de diviseurs de la théorie arithmétique des grandeurs algébriques de Kronecker.

Les bases de la théorie arithmétiques des grandeurs algébriques sont jetées par Kronecker à l'occasion du jubilé de Kummer, dans une communication publiée dans le *journal de Crelle* en 1882 et structurée en deux parties. La première vise à "fixer les sphères d'existences des grandeurs algébriques", il s'agit de définir les grandeurs algébriques et de les réunir en "genres" ("Gattungen") qui leur donnent une "représentation" et une "expression concrète". Cette partie s'achève par la justification arithmétique de l'existence des grandeurs algébriques (p.42-44). La deuxième partie développe les "qualités arithmétiques des grandeurs algébriques", c'est-à-dire la notion de divisibilité sur les "genres" de grandeurs algébriques [1882, 2] :

> Während im ersten Theile von der unendlichen Menge algebraischer Grössen einer Sphäre ausgegangen wird und ihre zunächst, nur begriffliche Zusammenfassung in Gattungen und Arten durch eine gemeinschaftliche Darstellung concreten Ausdruck erhält, wird in zweiten Theile von einer beliebigen endlichen Anzahl ganzer algebraischer Grössen ausgegangen und dem zunächst nur durch Analogie mit dem ganzen rationalen Grössen geforderten Begriffe des gemeinsamen Theilers durch einen algebraischen Ausdruck entsprochen.

Kronecker formule l'ambition de clarifier ce qui relève de considérations arithmétiques dans la théorie des grandeurs algébriques. La théorie des grandeurs algébriques consiste à étudier les grandeurs obtenues par des extensions d'un domaine donné, comme l'ensemble des nombres rationnels. Une extension, correspond à la donnée d'une équation irréductible sur un domaine initial qui se trouve étendu par l'ajout des grandeurs algébriques que sont les "racines" de cette équation. Dans la théorie de Dedekind, la donnée d'une équation irréductible sur un *corps* donné "engendre" un corps dérivé dont l'étude constitue la théorie des grandeurs algébriques. Kronecker, critique cette approche car rien ne permet, sur un corps général, de déterminer de manière *effective*, c'est-à-dire en *un nombre fini d'étapes* si une équation est réductible ou *irréductible*. Clarifier ce qui relève de considérations arithmétiques dans la théorie des grandeurs algébriques nécessite, pour Kronecker, deux développements qui correspondent aux deux parties de son mémoire. D'une part il faut donner une justification arithmétique de l'existence de grandeurs algébriques, ce qui revient à élaborer une théorie dans laquelle l'irréductibilité des équations algébriques peut être déterminée par un nombre fini d'opérations. D'autre part, il faut élaborer l'arithmétique des domaines de grandeurs algébriques, c'est-à-dire définir des éléments entiers, les notions de division, de plus grand diviseur commun, d'éléments irréductibles, premiers etc.

Si certaines propriétés de la divisibilité s'étendent sans modification aux grandeurs algébriques entières d'un genre quelconque, comme la propriété selon laquelle toute grandeur entière en divise une autre ou que toute grandeur qui en divise deux autres divise leur somme, il n'est pas possible en général d'étendre l'unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers ou l'existence d'un plus grand diviseur commun ([9]). Cette

[9] L'exemple suivant de "corps" dont les entiers n'ont pas de décomposition unique en facteurs premiers est donné par Dedekind [1877,73]. Dans le corps obtenu en joignant au corps des rationnels l'irrationnelle $\sqrt{-5}$, les nombres 9 et $3\,(1-2\sqrt{-5})$ ont des diviseurs communs autres que 1 (à savoir 3 et $2-\sqrt{-5}$) mais n'ont pas de p.g.c.d. ; 3 et $2-\sqrt{-5}$ n'ont pas de p.p.c.m., le nombre 9 admet deux décompositions distinctes en facteurs premiers :

$$9 = 3^2 = (2+\sqrt{-5})\,(2-\sqrt{-5})$$

Le nombre $3-6\sqrt{-5}$ admet les deux décompositions :

$$3\,(1-2\sqrt{-5}) = (2-\sqrt{-5})\,(4-\sqrt{-5})$$

Le nombre 3 qui est premier dans le corps considéré et qui ne divise ni $2+\sqrt{-5}$ ni $2-\sqrt{-5}$, ni $4-\sqrt{-5}$, divise cependant le produit des deux premier et celui des deux derniers.

En termes contemporains, 3 et $2-\sqrt{-5}$ sont des éléments irréductibles mais non premiers de Î[$i\sqrt{5}$]

$$M_1^3 = \left\{ \begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & \\ . & . & . & S_2 \\ \hline . & . & . & G^3 \\ 0 & \dots & 0 & \end{array} \right\}$$

La suite des nullités des puissances de M est donc une suite de nombres entiers croissante et bornée par la multiplicité de la racine caractéristique 0 difficulté avait été mise en évidence par Kummer dans sa tentative d'étendre l'arithmétique des "entiers de Gauss" $a+b\sqrt{-1}$ à d'autres racines de l'unité. Kummer était parvenu à étendre la divisibilité aux "espèces" obtenues par adjonction d'une racine de l'unité au domaine des nombres rationnels ([10]). Pour généraliser la notion de p.g.c.d. d'un système d'entiers d'une telle espèce, Kummer avait introduit un être fictif, le nombre idéal ([11]), cette notion ne peut cependant s'étendre au problème des corps algébriques quelconques considéré par les théories concurrentes de Kronecker et Dedekind ([12]).

- **Les domaines de grandeurs.**

Un domaine de rationalité (R', R'', R'''...) est défini comme l'ensemble des fonctions rationnelles à coefficients rationnels de"grandeurs" données R', R'', R''',...([13]). Si R, R', R'', ... sont *n* grandeurs "indépendantes les unes des autres, le domaine (R', R'', R'''...) s'identifie à l'ensemble des fonctions rationnelles à coefficients rationnels de *n* variables, c'est alors un "domaine naturel de rationalité". Si l'on ne se donne qu'un seul symbole R = 1, le domaine naturel de rationalité (R) correspond à l'ensemble des nombres rationnels. La différence essentielle entre la notion de domaine de rationalité et celle de corps chez Dedekind tient à la signification donnée à la notion de "grandeur" ([14]), Kronecker définit une "grandeur" comme une "forme de plusieurs indéterminées" ([15]) [Kronecker, 1882, 4] :

> Der Ausdruck "Grössen" ist hierbei in der weitesten arithmetisch-algebraischen Bedeutung, zu nehmen, und es sind im Allgemeinen auch Grössengebilde wie "rationale Functionen unbestimmter Grössen", sogenannte "Formen beliebig vieler Veränderlicher" u.s.w. mit darunter zu verstehen, denen der Begriff der Maassgrösse, der des "grösser oder kleiner Seins" gänzlich fremd ist.

Exemple :

$$F(x_1, x_2) = \frac{3x_1x_2 + x_2^7}{x_1^2 + 4}$$

est une fonction rationnelle à deux indéterminées, c'est une grandeur du domaine de rationalité naturel *(1,x_1,x_2)*.

L'approche de Kronecker permet d'éviter d'introduite la notion de nombre irrationnel dans les travaux, qualifiés d'"arithmético-algébriques", dans lesquels la relation d'ordre n'intervient pas et où l'on ne s'intéresse qu'à "la façon dont les éléments du domaine se

[10] En termes contemporains, ce sont les corps cyclotomiques.

[11] Pour un exposé de la théorie de Kummer, voir [Landsberg, 1911, 279-282]

[12] Pour une présentation historique de la théorie de Dedekind voir [Landsberg, 1911, 283-285].

[13] Une fonction rationnelle de *R* est un quotient de deux fonctions entières de la forme (a_i coefficients rationnels).

$$f(R) = a_0 R^n + a_1 R^{n-1} + \ldots + a_n$$

[14] Dedekind emploie, dans la seconde édition de leçons de Dirichlet [1871, 423-497], le terme corps pour désigner un système de quantités telles qu'en additionnant, soustrayant, multipliant ou divisant deux quelconques d'entre elles on retombe sur une quantité appartenant au système initial. Il en développe par la suite les principes [1876, 1877, 1894]. Par exemple, l'ensemble des quantités de la forme $a+b\sqrt{-5}$ où l'on donne à *a* et *b* toutes les valeurs rationnelles possible est un corps obtenu par l'adjonction au corps des quantités rationnelles de l'irrationnelle $\sqrt{-5}$. Ce corps peut être considéré comme l'ensemble des quantités qui deviennent rationnellement connues quand on considère connue, outre les rationnels, l'irrationnelle $\sqrt{-5}$. Il correspond, dans la théorie de Kronecker au domaine de rationalité *(R, R')* avec *R' = 5 R,* ce n'est donc pas un domaine de rationalité naturel.

[15] Ainsi, le corps Í (π) s'identifie au domaine de rationalité naturel (*R, R'*) au sens de Kronecker, c'est à dire à l'ensemble des fonctions rationnelles de deux variables indépendantes à coefficients rationnels.

II. UNE COMBINATOIRE SUR LA REPRESENTATION : LA COMPOSITION DES SYSTEMES DE KRONECKER (1880-1890).

Par le rôle qu'il donne à la notion de rang et à la composition des systèmes, Weyr inscrit son mémoire de 1890 dans un réseau de travaux arithmétiques dont les grands noms sont Dedekind, Dirichlet, Hermite, Kronecker et Hensel. Ce chapitre se propose a présent de suivre ce réseau, représenté en encart 1, en amont et en aval du mémoire de Weyr de 1890.

1. La notion de rang, d'une induction à la théorie arithmétique des grandeurs algébriques.

Kronecker consacre deux mémoires, communiqués à l'Académie de Berlin les 20 novembre et 11 décembre 1874, à la mise en valeur de la notion de rang [Kronecker, 1884b, 1884c]. L'approche de Kronecker est inductive, par l'étude de cas particuliers et de deux problèmes spécifiques, la notion de rang émerge comme permettant le passage du particulier au général. Le mémoire de décembre 1884, intitulé "Nahärungweise ganzzahlige auflösung linearer gleichungen" [1884c], porte sur la résolution approchée des équations linéaires par des nombres entiers et celui de novembre, "Die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln" [1884b], est consacré aux systèmes de périodes des fonctions de variables réelles. Les problèmes traités par Kronecker sont les suivants, étant donné un système de grandeurs (a_{ik}), $i = 1,2,\ldots,p$; $k = 1, 2,\ldots,q$:

Problème de décembre	Problème de novembre.
Le problème de la résolution approchée des équations linéaires par des entiers consiste à déterminer la possibilité d'approcher des nombres réels quelconques donnés (ξ_k) par des combinaisons entières des coefficients a_{ik} : $u'a_{i1} + u''a_{i2} + \ldots. u^{(q)}a_{iq} = \xi_i - \varphi_i$, 1 Â i Â p. avec φ_i "aussi petit que l'on veut".	Le problème posé est celui de la caractérisation de l'infinité des systèmes de périodes d'une fonction. Soit F de p variables, admettant le "système de nombres réels" (a_{ik}) comme système de périodes [Kronecker, 1884b, 1071] : (A) $F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = F(x_1 + a_{1k}, x_2 + a_{2k}, \ldots, x_p + a_{pk})$ Le système de périodes (a_{ik}) n'est pas unique et peut être remplacé par tout système : $(u'a_{i1} + u''a_{i2} + \ldots. u^{(q)}a_{iq})$, où $u', u'', ..u^{(q)}$

composent par addition et multiplication" [Kronecker, 1882, 7] ([16]). La théorie des grandeurs algébriques prend place dans une théorie plus générale des fonctions rationnelles de plusieurs variables [Kronecker, 1882, 2] :

> Aus der Vereinigung dieser beiden Darstellung-Principien werden im Schlussparagraphen die Fundamentalgleichungen hergeleitet, mit Hülfe deren sich die gestammte Theorie der algebraischen Grössen auf die der rationalen Functionen von Variabeln reduciren lässt, und dabei dieser Reduction sich die Anzahl der Variabeln und die Stufenzahl der Formen erholt, so zeigt sich, dass jener mit den Formen selbst zugleich eingeführte Begriff ihrer verschiedenen Stufen den Begriff der algebraischen Irrationalität zu ersetzen geeignet ist.

Une grandeur algébrique est définie par la donnée d'une équation irréductible sur un domaine de rationalité. Chaque "racine" d'une telle équation, $f(z) = 0$ de degré n, est désignée comme une fonction algébrique du n^e ordre des grandeurs R', R'', ... ; les n racines d'une même équation sont appelées des fonctions algébriques conjuguées. La donnée d'une équation irréductible définit un nouveau domaine et que Kronecker nomme un "genre" G (Gattung) d'ordre n de fonctions algébriques du n^e ordre "contenant" (R', R'', R'''...) ([17]).

> Exemple :
>
> L'équation $X^2+X+1 = 0$ définit un genre d'ordre 2 sur le domaine de rationalité des nombres rationnels. G est l'ensemble de toutes les fonctions rationnelles en une indéterminée x_1 telle que $x_1^2+x_1+1 = 0$. Par exemple, $F(x_1) = \frac{x_1^4+5x_1}{x_1^2+3}$ est une grandeur algébrique du genre.

La définition des grandeurs algébriques est dépendante de la notion d'équation irréductible. Or la définition d'une équation $f(z) = 0$ d'un domaine donné comme étant irréductible si il

---

[16] Pour cette raison, le domaine de rationalité de Kronecker est cité comme exemple de "domaine orthoïde", c'est-à-dire de corps au sens généralisé et abstrait, dans *l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques* [Landsberg, 1907, 249] qui précise :

> Toutes les recherches concernant la réductibilité des fonctions rationnelles entières dont les coefficients sont des éléments d'un domaine orthoïde K ne dépendent finalement que de la façon dont les éléments du domaine K se composent par addition et multiplication. *Dans ces recherches* on peut donc toujours remplacer chaque domaine orthoïde par un quelconque des domaines orthoïdes qui lui sont identiques, abstraitement parlant, à la seule condition de remplacer les éléments de l'ancien domaine par les éléments correspondants du nouveau domaine envisagé.
>
> *Dans toute recherche algébrique,* on peut ainsi, en particulier, comme l'a fait observer *L. Kronecker,,* éviter l'emploi des nombres transcendants. Soit, en effet, K un domaine orthoïde ayant pour éléments des nombres algébriques et soient $\eta_1, \eta_2, \eta_3,...$ des nombres transcendants entre lesquels nous supposerons d'abord qu'il n'y ait aucune relation algébrique à coefficients rationnels. Désignons par
>
> $$K' = (K, \eta_1, \eta_2, \eta_3,...)$$
>
> le domaine orthoïde formé en adjoignant aux éléments de K les nombres transcendants $\eta_1, \eta_2, \eta_3,...$ Envisageons une relation de la forme
>
> $$F(\eta_1, \eta_2,... ; x,y,...) = F_1(\eta_1, \eta_2,... ; x,y,...)\, F_2(\eta_1, \eta_2,... ; x,y,...)$$
>
> où F, F_1, F_2 désignent des fonctions rationnelles entières de x,y,... dont les coefficients sont des éléments du domaine K' ; toute relation de cette forme continuera à avoir lieu quand on remplace $\eta_1, \eta_2, \eta_3,...$ par des variables indépendantes. Rien n'est donc changé aux recherches concernant la réductibilité des fonctions rationnelles entières si l'on envisage les nombres transcendants η_1, η_2, η_3, ... comme s'ils étaient des variables indépendantes.

[17] Dans le cadre de la théorie de Dedekind, on dira que l'on a obtenu un nouveau corps K' noté $(K,\eta_1, \eta_2,...)$ dont K est un "diviseur" [1894, 453]. Le domaine obtenu par Kronecker à les mêmes propriétés que le corps de Dedekind : en termes contemporains, le corps obtenu par extension du corps des rationnels par l'ajout du nombre algébrique $j = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ au sens de Dedekind correspond au genre $(1, x_1)$ de Kronecker où 1 et x_1 sont assujetties à la relation donnée $x_1^2+x_1+1 = 0$. Les corps $Í(\frac{-1+\sqrt{3}}{2})$ et $Q[X]/(X^2+X+1)$ sont isomorphes.

Kronecker explicite les relations entre les deux problèmes. Par exemple, pour $p=2$ et $q=1$, si (a, a') est un système de périodes d'une fonction F d'une variable x :

$$F(x+a) = F(x+a') = F(x)$$

alors :

$$F(x+aw+a'w') = F(x).$$

La possibilité de la résolution de l'équation $aw+a'w' = \xi-\varphi$ où a ,a', ξ sont réels et a, a' entiers revient à déterminer si le réel ξ est une période de la fonction F ([7]).

Les deux problèmes s'inscrivent dans des préoccupations classiques de théorie des nombres, dune part, le problème de la résolution approchée des équations linéaires est associé aux travaux de Dirichlet ; d'autre part, celui des systèmes de périodes fait référence à Jacobi, qui "en a traité des cas particuliers simples, il y a un demi siècle" [Kronecker, 1884b, 1071]. Le "cas particulier simple" est celui des fonctions de périodes quadruples ([8]). Kronecker critique la manière dont Jacobi énonce des résultats généraux par induction de solutions particulières, et développe la manière par laquelle doit se mener une véritable induction mathématique : le traitement de cas particuliers permet, par la mise en évidence de régularités, de faire émerger une notion, le rang, dont la théorisation réalise le passage du particulier au général.

- **Première étape de l'induction.**

Le mémoire de décembre débute par l'étude détaillée de deux cas particuliers. Le premier cas traité est celui de la résolution approchée par des entiers w, w' de l'équation :

$aw+a'w' = \xi$, a, a' et ξ étant des valeurs réelles quelconques.

Deux cas sont alors possibles :

- 1[er] cas : le rapport a/a' est rationnel et il n'est pas possible de s'approcher aussi près que l'on veut de ξ.
  En effet, si $\frac{a}{a'} = \frac{n}{n'}$ alors $\frac{a}{n} = \frac{a'}{n'}$ et
  $$aw+a'w' = a\,w + \frac{n'}{n}aw = \frac{a}{n}(nw+n'w').$$
  Soit $nw_0 = nw+n'w'$, alors $aw+a'w' = a/n\ w_0$. On ne peut donc pas s'approcher plus près de la moitié de $\frac{a}{n}$ d'une grandeur quelconque ξ.

[7] En particulier, si cette équation est résoluble pour tout réel ξ, la fonction F doit être constante.

[8] Une fonction à deux variables de périodes quadruple sur Ë² est une fonction doublement périodique sur Ê, il s'agit d'une fonction elliptique.

n'existe aucune fonction rationnelles entières f_1, f_2 telles que $f = f_1 \times f_2$, ne donne aucun moyen effectif de déterminer si une équation est réductible ou non ([18]). Pour Kronecker [1882, 5], la condition de pouvoir déterminer par un nombre fini d'essais si une équation est irréductible, ou dans le cas contraire de la décomposer en facteurs irréductibles, est indispensable à la légitimité de la notion d'équation irréductible. Au contraire de la théorie des corps de Dedekind, dans laquelle la notion d'irréductibilité "manque de fondement" [1882, 10] ([19]), Kronecker donne une méthode effective permettant de déterminer l'irréductibilité d'une fonction rationnelle entière $f(z)$ (à coefficients rationnels) [Kronecker, 1882, 11] ([20]), il légitime ainsi cette la distinction entre grandeurs algébriques et grandeurs rationnelles d'un domaine donné ([21]).

- **La théorie arithmétique des grandeurs algébriques.**

Kronecker étend la notion de nombre entier aux "genres" de grandeurs. Une grandeur algébrique entière est une grandeur G associée à une équation irréductible unitaire dont tous les coefficients sont entiers dans (R). L'ensemble des fonctions entières des grandeurs algébriques entières d'un genre en constitue l'"espèce principale" ([22]), la désignation d'"espèce" fait ici référence à la classification donnée par Dirichlet des formes quadratiques en "formes de 1re et deuxième espèces". L'espèce principale contient toutes les grandeurs algébriques entière d'un genre donné ; une "espèce" sera, plus généralement, formée à partir de la donnée de k grandeurs algébriques entières G', G'' , ...$G^{(k)}$.

> Exemple : Le domaine de rationalité (R) est l'ensemble des rationnels.
> soit (G) le genre correspondant à l'ajout de deux indéterminées x_1 et x_2 vérifiant les équations irréductibles : $x_1^2+x_1+1=0$ et $x_2^2+5=0$.
> Alors l'espèce principale de (G) est l'ensemble des polynômes à coefficients entiers à deux variables x_1, x_2.

---

[18] Il faut supposer que f_1 et f_2 ne sont pas des unités. Par exemple $f_1 = c$ et $f_2 = \frac{1}{c} f$ ne sont pas ici considérés comme des diviseurs de f.

[19] Dedekind réfute la nécessité d'exhiber des algorithmes finis pour légitimer une définition [Dedekind, 1888, 2] .

[20] Voir [Molk, 1885, 8] et [Netto, 19.., 208-212, 222-226]. La méthode de Kronecker est perfectionnée par C. Runge [1886, 93] qui la rend pratiquement réalisable. Je résume ci dessous la méthode pour déterminer l'irréductibilité d'une fonction rationnelle d'une variable à coefficients rationnels.
Si $F(x)$ est une fonction rationnelle entière de degré donné n et dont les coefficients sont des nombres rationnels entiers donnés, il s'agit de montrer que l'on peut former un nombre fini de fonctions rationnelles entières $f(x)$ à coefficients (rationnels) entiers hors desquelles il ne saurait y avoir de diviseurs à coefficients entiers de $F(x)$.
Si $n = 2m$ ou $2m+1$, il suffit d'envisager les fonctions de degrés inférieurs à m.
Soit $a_1,\ldots,a_m$ des nombres entiers quelconques.
Soit $\varphi(x) = (x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_m)$ et les $m+1$ fonctions rationnelles entières :

$$g_i(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-a_i)\varphi'(a_i)} \quad (i = 0,1,2,\ldots,m).$$

Toute fonction rationnelle entière de x à coefficients rationnels entiers dont le degré ne dépasse pas m peut être mise sous la forme : $f(x) = A_0g_0(x) + A_1(x) + A_2g(x) + \ldots + A_mg_m(x)$ où $A_i = f(\alpha_i)$
Si f divise F, alors A_i divise $F(\alpha_i)$, or $F(\alpha_i)$ est rationnel entier et connu, un nombre fini d'opérations donne donc tous les A_i possibles.

[21] En d'autres termes, Kronecker [1887] refuse l'énoncé du théorème fondamental de l'algèbre, l'énoncé: toute équation algébrique $f(z)=0$ a une racine dans Ê doit être remplacé par l'énoncé selon lequel il est possible, étant donnée une fonction rationnelle entière, pour chaque nombre positif ε, de déterminer un intervalle dans lequel $|f(x)| < \varepsilon$ et $f(x)$ prend des signes contraires aux deux extrémités de l'intervalle.
La théorie de Kronecker doit se passer du théorème fondamental de l'algèbre pour caractériser les fonctions rationnelles irréductibles sur Í. Elle y parvient pour les fonctions d'une variable comme le montre la note précédente. Pour les cas des fonctions rationnelles de plusieurs variables, Kronecker donne en [1883, 344-348], une méthode pour caractériser l'irréductibilité à condition de savoir décomposer une fonction rationnelle d'une variable en fonctions linéaires, c'est-à-dire de supposer donné le théorème fondamental de l'algèbre. Aux yeux de Kronecker, le recours à une telle méthode ne doit qu'être temporaire.

[22] Dedekind emploi le terme d'ordre d'un module fini [1894, 237] et Hilbert utilisera le terme d'anneau [1897, 237].

Pour le problème des périodes, cela signifie que si $F(x+a) = F(x+a') = F(x)$ alors $F(x) = F(x+a/n\ w_0)$ [1884c, 52] ([1]).

- 2e cas : *a/a'* est irrationnel et la résolution approché est alors toujours possible. Pour tout réel ξ, pour un réel φ "aussi petit que l'on veut'", il existe toujours deux entiers *w, w'*, tels que $aw+a'w'=\xi-\varphi$. Pour le problème des périodes, pour tout réel ξ, $F(x) = F(\xi-\varphi)$ où φ est aussi petit que l'on veut, par conséquent $F(x) = F(\xi)$ et la fonction *F* est constante.

Le problème de la résolution approché des équations linéaires

$$aw+a'w' = \xi$$

a donc une solution pour tout réel ξ si *a:a'* n'est pas rationnel ([2]), ce qui implique que les fonctions à une variable périodiques et non constantes ont un système de période de la forme (wa_0) : toutes les périodes sont multiples d'une seule.

- **Deuxième étape de l'induction.**

La question est ensuite abordée pour deux systèmes de trois grandeurs [Kronecker, 1884c, 53]. Soit *a, a', a', b, b', b', ξ, η* des réels, la résolution approchée revient à déterminer des entiers *w,w',w''* tels que :

$$aw+a'w'+a''w'' = \xi-\varphi$$
$$bw+b'w'+b''w'' = \eta-\psi$$
$$\text{avec } |\varphi| < \tau \text{ et } |\psi| < \tau$$

Et ceci revient à caractériser les systèmes de périodes d'une fonction de deux variables :

$$F(x_1+a,\ x_2+b) = F(x_1,\ x_2)$$
$$F(x_1+a',\ x_2+b') = F(x_1,\ x_2)$$
$$F(x_1+a'',\ x_2+b'') = F(x_1,\ x_2)$$

Deux cas de figures se présentent à nouveau :

---

[1] Exemple : Soit $F(x) = \cos(3x)$. Alors $a = 2\pi$ et $a' = \frac{8\pi}{3}$ sont des périodes de *F*. $\frac{a}{a'} = \frac{3}{2}$ est rationnel, l'ensemble de toutes les périodes est donné par $\frac{a}{3}w = \frac{2\pi}{3}w$ où *w* est un entier.

[2] En termes contemporains : tout réseau, sous groupe additif discret de Ë, s'écrit sous la forme *a Î*, *a* ☻ Ë. Exemple : $\{2\pi w + \frac{8\pi}{3}w' / w, w'$ ☻ Î$\} = \{\frac{2\pi}{3} w / w$ ☻ $Z\}$ est un sous groupe discret de Ë.
Par conséquent, si *H = a Î + a' Î'* est un sous groupe de Ë tel que *a:a'* n'est pas rationnel, *H* n'est pas discret.
Par exemple, *H = {3w+w'π/ w,w'* ☻ *Î}* n'est pas discret dans Ë .
Pour tout voisinage *U* de 0, il existe ε ☻ $H \cap U$, c'est-à-dire, qu'il existe *w* et *w'* de Î tels que $w + w'\pi = \varepsilon$. On en déduit que pour tout réel ξ, pour tout ε > 0 il existe deux entiers *w* et *w'*, tels que $w+w'\pi = \xi-\varepsilon$. Cet argument est la base de l'approximation diophantienne.
Une conséquence est qu'une fonction de variable réelle ayant pour période 3 et π est constante.

La seconde partie du mémoire de 1882 est consacrée à l'arithmétique des espèces, c'est-à-dire à divisibilité des grandeurs entières, c'est-à-dire des formes entières algébriques F du genre (G) des polynômes entiers en un certain nombre d'indéterminées $x_1, x_2, \ldots$, dont les coefficients sont des grandeurs entières de (R). Une forme F divise une forme G si le quotient $\frac{G}{F}$ est lui-même une grandeur algébrique entière. [Kronecker, 1882, 45] :

> Mit dem Begriffe der ganzen algebraischen Grössen ist der Begriff der Theilbarkeit unmittelbar gegeben. Eine ganze algebraischen Grösse x ist durch eine ander x' theilbar, wenn der Quotient der Division von x durch x' wiederum eine ganze algebraischen Grösse ist.

Pour Kronecker, cette définition doit être supportée par une méthode effective, constructive, permettant d'obtenir "les diviseurs de grandeurs algébriques données". Si $u', u'', \ldots$ sont des indéterminées et $x, x', x'', \ldots$ des grandeurs algébriques de l'espèce, le produit

$$N_m(x+u'x'+u''x''+\ldots) = \Pi(x+u'x'+u''x''+\ldots)$$

pris sur l'ensemble de conjugués des grandeurs algébriques $x, x', x'', \ldots$, est une fonction entière des grandeurs u appelée la norme de $x+u'x'+u''x''$. Les coefficients de la norme sont des grandeurs rationnelles entières du domaine de rationalité naturel (R), ce sont donc des nombres entiers ayant un plus grand diviseur commun P. Ce diviseur commun caractérise les diviseurs des grandeurs algébriques $x', x'', \ldots$ ([23]), en généralisant les nombres idéaux de Kummer pour les racines de l'unité [Kronecker, 1882, 47] ([24]). Plus précisément, toute suite de grandeurs algébriques entières x, x', x'' est représentée par la forme

$$F(x,x',x'',\ldots) = xu+x'u'+x''u''+\ldots$$

Le "diviseur algébrique", qui généralise la notion de p.g.c.d. aux grandeurs algébriques $x,x',x'',\ldots$ est défini par la donnée de F , de $N(F)$ et de P. Kronecker définit la forme "primitive du n^e degré en $u', u'', \ldots$ par :

$$P.F_m(x+u'x'+u''x''+\ldots) = N_m(x+u'x'+u''x''+\ldots)$$

$$F_m(F) = \frac{N(F)}{P}$$

et désigne le quotient

$$\frac{F}{F_m(F)} = \frac{x+u'x'+u''x''+\ldots}{F_m(x+u'x'+u''x''+\ldots)}$$

par le terme de "diviseurs algébrique" de F.
Un diviseur algébrique est une classe d'équivalence, les formes unités étant définies comme les formes de norme 1 ([25]), deux diviseurs algébriques dits équivalents lorsqu'ils sont entre eux comme deux formes unités (les formes unités sont donc équivalentes à 1) ([26]) [Kronecker, 1882, 48] :

[23] Kronecker précise que sa notion de diviseur algébrique ne nécessite par de "diviseur commun abstrait ou symbolique". Dans le cadre de la théorie de Dedekind, on dirait que $\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ a pour diviseur $\sqrt{2}$ mais l'approche de Kronecker a pour but précisément d'éviter l'emploi des "symboles" relatifs aux irrationnelles "abstraites".

[24] Pour une approche comparée des méthodes de Kummer et Kronecker voir [Landsberg,1911 23-26]

[25] Une grandeur algébrique entière est une unité si son inverse est encore une grandeur algébrique entière. Par exemple, sur Î les unités sont ±1, sur Í les unités sont Í*. De manière générale une unité correspond à une équation algébrique dans laquelle les coefficients extrêmes sont égaux à ±1, autrement dit la norme est égale à ±1.

[26] En termes contemporains : deux éléments a et b d'un anneau A tels que $b = ac$ avec c ☻ A^* sont dits associés. Du point de vue de la divisibilité deux éléments associés jouent le même rôle. A tout diviseur algébrique de Kronecker correspond, dans la théorie de Dededind, l'idéal défini par les coefficients du numérateur. A des diviseurs algébriques équivalents correspondent un même idéal.
Dans l'exemple donné ci-dessus, la classe de diviseur algébrique correspond à l'idéal

$$(\lambda(2-\sqrt{-5})+\mu(4-\sqrt{-5}) \;/\; \lambda, \mu ☻ Q(\sqrt{-5})$$

de Dedekind.

- 1^{er} cas : *a:a':a''* = *b:b':b'* l'équation n'est pas résoluble.
- 2^{e} cas : le système est résoluble.

Le rôle tenu par la nature des proportions *a:a'* et *a:a':a* manifeste une régularité dans les deux cas particuliers traités et l'induction du particulier au général repose sur la mise en évidence de la notion théorique qui sous tend la régularité. Kronecker reformule les propriétés des proportions sous une forme générale, s'appliquant indifféremment quel que soit le nombre de variables sous la forme de l'équivalence arithmétique de deux systèmes de valeurs :

> Für die Frage der Auflösung des Systems der Gleichungen (B) sind offenbar zwei Coefficienten-Systeme :
>
> $$\begin{pmatrix} a, & a', & a'', \\ b, & b', & b'', \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_0, & a_0', & a_0'', \\ b_0, & b_0', & b_0'', \end{pmatrix}$$
>
> einander aequivalent, wenn jedes aus dem andern duch lineare Transformation der *Zeilen* mit *beliebigen* Coefficienten und durch lineare Transformation der *Colonnen* mit *ganzahligen* Coefficienten hervorgeht.
> [Kronecker, 1884c, 54].
>
> [Traduction, F.B.]. Pour la question de la résolution des systèmes de l'équation (B), les systèmes
>
> $$\begin{pmatrix} a, & a', & a'', \\ b, & b', & b'', \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_0, & a_0', & a_0'', \\ b_0, & b_0', & b_0'', \end{pmatrix}$$
>
> seront dits équivalents si l'un se déduit de l'autre par des transformations linéaires des *lignes* avec des coefficients quelconques et des transformations des *colonnes* avec des coefficients *entiers*.

Si *a:a':a' = b:b':b''* alors *ab'-a'b = ab''-a''b = a'b''-a''b' = 0.* Cette dernière égalité s'interprète, dans le cadre de l'équivalence des systèmes, comme la possibilité d'obtenir un système équivalent par "transformation linéaire " de la deuxième ligne multipliée par *a''* soustraite de la première multipliée par *b''* :

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'', \\ b, & b', & b'', \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

La résolubilité de l'équation (B) se formule comme la manifestation d'une notion théorique, le rang, qui caractérise les systèmes équivalents ; cette notion n'émerge encore que par induction: si *a:a':a'' = b:b':b'*, le rang est inférieur à 2 [Kronecker, 1884c, 54 et 63](1) .

---

1 En termes contemporains, Kronecker a démontré ici que les réseaux de Ë² sont de la forme *a Î + b Î, a,b ●Ë* ou bien *a Î.* C'est-à-dire qu'il n'existe pas de réseau de rang supérieur à 2. Appliqué aux fonctions périodiques, cet énoncé signifie qu'une fonction de deux variables a au plus un système de deux périodes propres ω_1, ω_2 de Ë² de la forme $\{a\omega_1 + b\omega_2$, *a,b* dans Î}.
Par exemple :

- une fonction elliptique est définie comme une fonction méromophe doublement périodique sur Ê (donc quadruplement périodique au sens de Jacobi), c'est-à-dire périodique par rapport à un réseau *Î*ω_1 + *Î*ω_2 de Ê.

Und nämlich nicht jedes Mal für die *Form* eines linearen Ausdrucks $x+u'x'+u''x''+...$ ein besonderes Zeichen zu benutzen soll unter dem "Modul [$x+u'x'+u''x''+..$]" oder 'dem Divisor [$x+u'x'+u''x''+...$]' der linear Ausdruck selbst, dividirt durch die daraus enstehende primitive Form, verstanden und mit

$$mod[x+u'x'+u''x''+...] \text{ oder } div[x+u'x'+u''x''+..]$$

bezeichnet werden. Im sinne des in dieser Arbeit vielfach benutzen "methodischen Hülfsmittels der unbestimmten Coefficient, welches zu der obigen Bildungsweise der Divisoren geführt hat, sind die Ausdrücke $x+u'x'+u''x''+...$ dabei als lineare Functionen der Grössen x mit unbestimmten Coefficienten u bezeichnet worden ; doch ist es von allgemeinerem Gesichtspunkte aus geeigneter, die Grössen x als die Coefficienten der Unbestimmten u und also jene algebraischen Ausdrücke als "lineare Formen'" mit ganzen algebraischen Coefficienten aufzufassen.

Kronecker définit la classe de diviseur algébrique $F_m(x_1)$ associée à la forme $F(x_1)$ par la condition suivante: deux diviseurs algébriques sont équivalents si ils sont entre eux comme une forme unité dont la norme est égale à 1. Une unité divise toute grandeur algébrique entière mais n'est divisible par aucune autre grandeur algébrique entière, les grandeurs qui ne sont divisibles par aucune autre sont celles pour lesquelles $P=1$, elles son dénommées "formes primitives" [Kronecker, 1882, 50].

Exemple 1 : Le domaine de rationalité (R) est l'ensemble des rationnels.
Soit (G) le genre correspondant à l'ajout de l'indéterminées x_1 vérifiant l'équation irréductible $x_2^2-2=0$
x_1+3 divise $2+3x_1$ car leur quotient est un polynôme à coefficients entiers :

$$\frac{3x_1+2}{x_1+3}=\frac{(3x_1+2)(\overline{x_1}+3)}{N(x_1+3)}=\frac{7x_1}{7}=x_1$$

Mais $2x_1-1$ est aussi un diviseur de $3x_1+2$:

$$\frac{3x_1+2}{2x_1-1}=\frac{(3x_1+2)(2\overline{x_1}-1)}{N(2x_1-1)}=\frac{7x_1}{7}=x_1$$

Le diviseur algébrique x_1+3 est équivalent à $2x_1-1$ car leur rapport est comme celui de deux formes unités. x_1-1 est une forme unité car $N(x_1-1)= -1$ donc x_1-1 est inversible, $(x_1-1)(x_1+1) = 1$, en tant que diviseur algébrique, cette forme est équivalente à 1.
Les considérations sur les normes permettent d'exprimer la divisibilité :
$F_m(x_1) = x_1+3$ est un diviseur de $G(x_1) = 3x_1+2$ et $N(F)=7$ divise $N(G)=14$.

Pour le cas particulier des systèmes de la forme $\begin{pmatrix} a, & a', & a'', \\ b, & b', & b'', \end{pmatrix}$; un rang inférieur à deux se caractérise par les trois équations,

$$ab'-a'b = ab''-a''b = a'b''-a''b' = 0.$$

L'induction de cette caractérisation à un système quelconque (a_{ik}) passe par l'utilisation de la théorie des déterminants, si n est l'ordre maximal des sous déterminants non nul extraits de $|a_{ik}|$, il existe un système (a'_{gh}), le système "réciproque" de a_{gh}, tel que ([2]) :

$$\Sigma_g\, a'_{fg}\, a_{gh} = \Sigma_g\, a_{fg} a'_{gh} = \delta_{fh}$$

Ce système définit un changement de variables qui transforme la fonction F en une fonction G qui n'est périodique que des n premières variables :

$$y_g = \Sigma_h a'_{gh} x_h \ (g, h = 1, 2, \ldots, n) \text{ et } y_i = x_i - \Sigma_g \Sigma_h a_{ig} a'_{gh} x_h$$

$$G(y_1, y_2, \ldots, y_p) = G(y_1 + b_{1k}, \ldots, y_n + b_{nk}, y_{n+1}, \ldots, y_p)$$

Le nombre n est le "degré" ("Stufenzahl"), ou rang, qui caractérise les systèmes de périodes de la fonction F [Kronecker, 1884b, 43].

- **La théorique arithmétique des grandeurs algébriques.**

Pour Kronecker, une véritable induction, une véritable généralisation, nécessite d'"éclairer" la relation entre les deux types de problèmes envisagés – systèmes linéaires et systèmes de périodes- par une théorie générale. La seconde partie du mémoire de décembre 1884 est consacré à cette théorie, la théorie arithmétique des grandeurs algébriques dont les bases ont été posées à l'occasion du jubilé de Kummer le 10 septembre 1881 [Kronecker, 1882]. Une description détaillée du rôle du rang des systèmes diviseurs dans la théorie arithmétique des grandeurs algébriques est proposée dans les encarts 5 et 6. Les termes mis en gras dans le corps du texte font tous référence à cette théorie et sont détaillés en encarts.
Si l'expression générale

$$(*)\ (\Sigma_i\, a_{i1} R_i, \Sigma_i\, a_{ik} R_i, \ldots, \Sigma_i\, a_{iq} R_i)\ (i = 1, 2, \ldots, p)$$

où (a_{ij}) est un système de valeurs et R_k des entiers variables.

- La fonction de deux variables $F(x_1 x_2) = (\cos(x_1 + \frac{x_2}{2}), \cos(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4})$ a pour système de périodes $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Le système est de rang 1.
  Le réseau de période est donné par 2π Î $\times 4\pi$ Î┤ Ë², la fonction peut être considéré comme une fonction en une seule variable $y = x_1 + \frac{x_2}{2}$. $G(y) = (\cos y, \cos 2y)$.

[2] Cette méthode a été développée par Kronecker en [1873].
En termes contemporains : Soit A une matrice inversible. Soit B la matrice adjointe, c'est-à-dire la matrice des cofacteurs de $|A|$, alors $AB = detA$ ð . $A \frac{B}{detA} = I$.

Exemple 2 : Le domaine de rationalité (R , R') est l'ensemble des fonctions rationnelles à une variable x_2 ([27]). Soit (G) le genre correspondant à l'ajout de l'indéterminées x_2 vérifiant l'équation irréductible $x_1^2-2=0$.
Soit la grandeur algébrique entière $F(x_1,x_2) = 3x_1x_2+2x_2+2x_1+6$.
En tant que diviseur algébrique, F est caractérisé par sa norme qui est une forme entière sur (R, R') :

$$F(x_1,x_2) = (3x_2+2)x_1 + 2x_2+6$$
$$F'(x_1,x_2) = (3x_2+2)x'_1 + 2x_2+6$$
$$N(F) = FF' = -((3x_2+2)^2+(2x_2+6)^2$$
$$N(F) = -14\,x_2^2+28.$$

Les coefficients de $N(F)$ appartiennent à (R), on peut donc déterminer leur p.g.c.d. $P : P=14$. $F_m(F) = 2x_1^2+1$. Le diviseur algébrique associé à F est :

$$\frac{F}{F_m(F)} = \frac{3x_1x_2+2x_2+2x_1+6}{x_1^{\;2}+2}$$

Soit $U(x_1,x_2)=x_1x_2+1$, $N(U)=-2x_2^2+1$. $P=1$ et U est une unité. En effet, comme x_1 est une indéterminée du domaine de rationalité (R), x_2, comme 1, est une unité : $1/x_2$ appartient à (R) :

$$U(x_1,x_2)(-\frac{x_1}{x_2}+1) = 1$$

La notion de diviseur algébrique permet de jeter les bases de la théorie arithmétique des entiers algébriques ([28]). Une forme algébrique entière est dite divisible par un diviseur algébrique lorsque le quotient est une forme algébrique entière. Le plus grand diviseur commun de deux diviseurs algébriques est un diviseur qui contient les éléments des deux premiers, chaque diviseur algébrique est donc le pgcd de ses éléments ([29]). [Kronecker, 1882, 54] :

$$mod[x+u'x'+u''x''+\ldots+y+v'y'+v''y''+\ldots]$$
est le pgcd de
$$mod[x+u'x'+u''x''+\ldots] \text{ et } mod\,[y+b'y'+v''y''+\ldots]$$

[27] Dans la théorie de Dedekind, ce type de domaine de rationalité correspond par exemple au corps *Í (π).*

[28] Pour des exposés de la théorie de Kronecker, voir [Hilbert, 1894, 186-188], Weber [1898, 553-95], [König, 1901, 461-552] et [Landsberg, 1911, 285-288]

[29] Si le pgcd est équivalent à l'unité, les diviseurs sont dits premiers entre eux.
La définition de la divisibilité s'accompagne de celle du produit de deux diviseurs :

$$mod[x+u'x'+u''x''+\ldots]mod[y+v'y'+v''y''+\ldots] \sim mod[xy+w'xy'+w''w'y+\ldots]$$

Un diviseur algébrique est irréductible ou premier quand il n'est divisible par aucun autre diviseur du genre donné [Kronecker, 1882, 56].
Ces propriétés sont à rapprocher de celles qui caractérisent les idéaux de Dedekind :

- Une quantité qui fait partie d'un idéal est dite divisible par cet idéal.
- Un idéal b est divisible par a si tout élément de b est divisible par a.
- Un idéal apparaît comme le pgcd des éléments qui le définissent.
- Le pgcd de deux idéaux est défini par l'ensemble des quantités qui définissent les deux premiers.
- Le produit de deux idéaux $a=(a_1,\ldots,a_r)$ et $b=(b_1,\ldots,b_s)$ est $c=ab=(a_1b_1, a_1b_2, \ldots, a_ib_k, \ldots, a_rb_s)$.
- Un idéal qui n'est pas le produit de deux idéaux dont l'un au moins serait l'idéal principal est un idéal premier
- Dans ces conditions tout idéal est décomposable, d'une seule manière en idéaux premiers.
- Si $c=ab$, c est divisible par a et b mais la proposition réciproque, si c est divisible par a il existe b tel que $c=ab$, est fausse si on ne considère pas l'espèce principale

intervient aussi bien dans le problème des systèmes de périodes que dans celui de la résolution approchée des équations linéaires, c'est que les deux problèmes font partie d'une même théorie arithmétique qui permet de les interpréter comme une même question de divisibilité de grandeurs algébriques. Par exemple dans le cas particulier où l'expression (*) a la forme $aw+a'w'$, Kronecker a montré que la solution du problème relève de la nature de la divisibilité des grandeurs a et a'. Si a et a' ont un rapport rationnel, elles ont un p.g.c.d a_0 et l'expression $aw+a'w'$ s'écrit a_0w. Si a et a' n'ont pas de rapport rationnel, c'est l'expression $aw+a'w'$ elle-même qui généralise la notion de p.g.c.d. et définit ce que Kronecker dénomme un "**diviseur algébrique**" des grandeurs a et a' sur le **domaine** des nombres rationnels ([3]). Si l'expression (*) a la forme

$$(aw+a'w'+a''w'' , bw, b'w', b''w''),$$

alors :

- soit le rang du système est 1, les grandeurs $(a,a',a'' ; b,b',b'')$ ont un p.g.c.d. (a_0, b_0) et l'expression (*) prend la forme (a_0w,b_0w).

- soit le rang du système est 2, l'expression (*) prend la forme $(aw+a'w', bw+b'w')$ et définit un **diviseur algébrique** qui s'interprète comme une extension de la notion de p.g.c.d. ([4]).

---

[3] En termes contemporains : un système de périodes (a,a') d'une fonction F définit un sous groupe additif $(a,a') = \{wa+w'a'/ w,w'$ ☻ $\hat{I}\}$, il y a deux cas possibles :

1er cas. $\frac{a}{a'} = \frac{n}{n'}$ est rationnel et $a_0 = \frac{a}{n}$, le module est de rang 1 : $(a,a') = (a_0)$.

Exemple : $a = 12\pi$ et $a' = 14\pi$ alors $a_0 = 2\pi$ est le p.g.c.d. de 12π et 14π car l'idéal $(12\pi, 14\pi)$ est principal, égal à (2π).

2e cas (a,a') est de rang 2.

Exemple : Dans $\hat{I}[i\sqrt{5}]$, $a = 3-6i\sqrt{5}$ et $b = 9$. a et b ont des diviseurs communs : 3 et $2-i\sqrt{5}$ car $a = 9 = 3 \times 3 = (2+i\sqrt{5})(2-i\sqrt{5})$ et $b = 3-6i\sqrt{5} = 3(1-2i\sqrt{5}) = (2-i\sqrt{5})(4-i\sqrt{5})$

Pourtant a et b n'ont pas de pgcd . L'idéal $\{9A + (3-6i\sqrt{5})B/ A, B$ ☻ $\hat{I}[i\sqrt{5}]\}$ *n'est* pas principal, car il est identique au module fini $\{3w + i\sqrt{5}w'/ w,w'$ ☻ $\hat{I}\}$ de rang 2.

L'idéal lui-même constitue une généralisation de la notion de p.g.c.d. dans l'anneau $\hat{I}[i\sqrt{5}]$.

[4] Exemples :

$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 15 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$. Le système est de rang 1. Le module de $\ddot{E}^2$ défini par

$$\{(2w+6w'+4w'')e_1 + (5w+15w'+10w'')e_2/ w,w',w'' \text{ ☻ } \hat{I}\},$$

est équivalent au module de rang 1 $(2e_1+5e_2)\ \hat{I}$.

Autre interprétation : le module de $\hat{I}[\sqrt{2}]$ défini par

$$\{((2w+6w'+4w) + (5w+15w'+10w'')\sqrt{2} / w,w',w'' \text{ ☻ } \hat{I}\},$$

c'est) dire $((2+5\sqrt{2})\ \hat{I} + (4+10\sqrt{2})\ \hat{I} + (6+15\sqrt{2})\ \hat{I}$ est équivalent au module de rang 1, $(2+5\sqrt{2})\ \hat{I}$. Ceci peut s'interpréter encore ainsi: $2+5\sqrt{2}$ est le p.g.c.d. des grandeurs $2+5\sqrt{2}$, $4+10\sqrt{2}$, et $6+15\sqrt{2}$.

$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 15 & 25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Le système est de rang 2. Le module défini sur $\hat{I}[\sqrt{2}]$ par

$(2+5\sqrt{2})\ \hat{I} + (4+10\sqrt{2})\ \hat{I} + (6+25\sqrt{2})\ \hat{I}$ est équivalent au module de rang 2: $2\ \hat{I} + 5\sqrt{2}\ \hat{I}$

$\begin{pmatrix} 2 & 4 & \sqrt{2} \\ 10 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Le système est de "rang relatif" 0, il ne définit pas un sous groupe discret de $\ddot{E}$.

Exemple 3 : Le domaine de rationalité (R , R') est l'ensemble des fonctions rationnelles à une variable x_2 ([30]). Soit (G) le genre correspondant à l'ajout de l'indéterminées x_2 vérifiant l'équation irréductible $x_1^2-2=0$.
Soit la grandeur algébrique entière $F(x_1,x_2) = 3x_1x_2+2x_2+2x_1+6$.
et $G(x_1,x_2) = x_I+3$. $P_F=14$, $P_G=7$ et G/F :

$$F(x_1,x_2/G(x_1,x_2) = x_1x_2+2 = C(x_1,x_2)$$

- **Les systèmes de diviseurs.**

La notion de "diviseur algébrique" "généralise" la notion de plus grand diviseur commun, de la "sphère des nombres entiers rationnels" à la "sphère des grandeurs algébriques", sans pour autant que la notion de division se "transfère réellement"[Kronecker, 1882, 70].

> Der Uebergang aus der Sphäre der ganzen rationalen Zahlen oder der ganzen rationalen Functionen von Variabeln in die Sphäre der ganzen algebraischen Grössen einer Gattung macht eben keine Erweiterung des Begriffes der Division erforderlich.

La notion de diviseur algébrique de r grandeurs a été introduite comme une forme de r indéterminées des grandeurs $x, x', x'', \ldots$, notée $mod[x+u'x'+u''x''+\ldots]$, les $u', u'', \ldots$ étant indéterminées. Si à présent on donne aux indéterminées $u, u', u''\ldots$ des valeurs correspondant à tous les entiers algébriques de l'espèce principale, la "forme" du diviseur algébrique décrit une sous espèce du genre (G) que Kronecker nomme "système de diviseurs" ou "système de modules" du n^e degré et dont les éléments sont des fonctions de n indéterminées : [Kronecker, 1882, 72]. Diviseur algébrique et système de diviseurs sont deux notions différentes dans le sens où la première est une notion arithmétique par laquelle est définie la divisibilité, le p.g.c.d., etc., la seconde est une sous espèce du genre (G). On retrouve ici les deux significations du terme division en arithmétique : diviser un élément a par un élément b, c'est d'une part former le quotient a/b, d'autre part le p.g.c.d. de a et b ([31]).
Soit M, un entier algébrique de (G) et soit un nombre fini k de polynômes $M_1,\ldots,M_k$ tels que :

$$M = X_1M_1+\ldots+X_k M_k \text{ (les } X_i \text{ sont des polynômes entiers),}$$

Kronecker dit que M est divisible par, le système de diviseurs $(D)=(M_1,\ldots,M_k)$, c'est-à-dire l'ensemble $\{X_1M_1+X_2M_2+\ldots+X_kM_k \,/\, X_i \text{ pol entier}\}$ ([32]). Il définit alors une relation de divisibilité entre les systèmes de diviseurs ([33]):

> Un système de diviseur (D) contient le système de diviseur (D') ou est divisible par ce système si tout élément de (D) contient le système (D').
>
> Deux systèmes de diviseurs dont chacun est divisible par l'autre sont dits équivalents.

---

[30] Dans la théorie de Dedekind, ce type de domaine de rationalité correspond par exemple au corps Í (π).

[31] Ainsi le couple diviseur algébrique / système de diviseurs est analogue au couple idéal / ensemble des éléments de l'idéal. L'ensemble des fonctions à n indéterminées à cœfficient entier est un anneau : on peut y définir une relation de divisibilité, c'est aussi un anneau euclidien : on peut définir une division euclidienne sur les fonctions de plusieurs variables par extension de la division euclidienne des polynômes.

[32] Le système de diviseur $\{M_1,\ldots,M_k\}$ correspond chez Dedekind à l'idéal $(M_1,\ldots,M_k)$

[33] L'équivalence des systèmes correspond à la divisibilité des diviseurs algébrique :

$$mod\,[u'x'+u''x''+\ldots u^{(n)}x^{(n)}] \sim mod\,(v'y'+v''y''+\ldots v^{(n)}y^{(n)})]$$

et équivaut aux relations de divisibilité :

$$(u'x'+u''x''+\ldots u^{(n)}x^{(n)}y / F_m\,(u'x'+u''x''+\ldots u^{(n)}x^{(n)}) \text{ et}$$
$$(u'y'+u''y''+\ldots u^{(n)}y^{(n)}) / F_m\,(u'y'+u''y''+\ldots u^{(n)}y^{(n)})$$

Selon la théorie arithmétique des grandeurs algébriques, l'expression (*) est un "**système de diviseurs**" de p "grandeurs algébriques" (a_{ij}) considérées comme faisant partie d'une "**espèce**" de grandeurs algébriques sur un "**domaine de rationalité**" (R) donné ([5]). Le rang du système introduit par l'induction de Kronecker prend sa signification pleinement générale en tant que "**degré**" ("Stufe") d'un diviseur algébrique, tel que le définit la théorie arithmétique des grandeurs algébriques de 1881 :

> Es sei (a_{ik}) für $i = 1, 2, \ldots, p$ und $k = 1, 2,\ldots, q$ ein System reeller Grössen, und r sei die Grösste Zahl von der Beschaffenheit, dass nicht sämmtliche aus den Elementen a_{ik} zu bildenden Determinanten r^{ter} Ordnung verschwinden. Alsdann ist r die "Stufenzahl" oder der "Rang" des aus den linearen Functionen von p Variabeln $R_1, R_2,\ldots,R_p$ gebildeten Divisorensystems :
>
> $$(D) \quad (\Sigma_i\, a_{i1} R_i, \Sigma_i\, a_{ik} R_i, \ldots, \Sigma_i\, a_{iq} R_i) \quad (i = 1,2,\ldots p)$$
>
> und solle auch [...] als der Rang des Grössensystems (a_{ik}) selbst bezeichnet werden.
>
> [Kronecker, 1884, 67].

> [Traduction, F.B.]. Soit (a_{ik}), $i = 1, 2, \ldots, p$ et $k = 1, 2, \ldots, q$ un système de grandeurs réelles, et r la plus grandeurs valeur telle qu'un déterminant du r^e ordre formé des éléments a_{ik} ne soit pas nul, alors r est le "degré" ou "rang" des fonctions linéaires de p variables qui forment les systèmes de diviseurs $R_1, R_2,\ldots,R_p$:
>
> $$(D) \quad (\Sigma_i\, a_{i1} R_i, \Sigma_i\, a_{ik} R_i, \ldots, \Sigma_i\, a_{iq} R_i) \quad (i = 1,2,\ldots p)$$
>
> et je l'appellerai le rang du système de grandeurs (a_{ik}).

La notion théorique de rang d'un système de diviseurs réalise l'induction du particulier à une théorie arithmétique générale des grandeurs algébriques :

> Die ganze Theorie charakerisirt sich dann als eine solche der Proportionen von n Zahlen der festgesetzten Species, welche begrifflich in Systeme zusammen zu fassen sind. Ich beabsichtige in einer nächsten Abhandlung, und welcher ich die speziellere Theorie der ganzen algebraischen Zahlen entwickeln werde, auch auf diese Theorie der Proportionen näher einzugehen, und bemerke hier nur noch, dass ich durch meine Untersuchungen über die singulären Modulen der elliptischen Functionen zuerst auf den hier angegeben Gesichtspunkt aufmerksam geworden bin ; denn dort drängten sich mir die (im Allgemeinen) gebrochenen, durch Gleichungen $ax^2+bx+c=0$ definierten algebraischen Zahlen x, als Gegenstand arithmetischer Behandlung auf, und zwar in der Weise, dass die Aequivalenz-Bestimmung zweier durch die Gleichungen $ax^2+bx+c=0$, $a_0x_0^2+b_0x+c_0=0$ erklären algebraischen Zahlen x und x_0 mit derjenigen der quadratischen Formen (a,b,c), (a_0, b_0, c_0) übereinkommt.

---

[5] En termes contemporains : si (R) est un corps donné, le "domaine de rationalité", les "grandeurs réelles" (a_{ik}) peuvent être considérée comme appartenant au corps $R(a_{11},\ldots,a_{pq})$ des fractions rationnelles de p,q, variables sur (R). Etant donné p "grandeurs réelles", l'expression de Kronecker $\{R_1a_{1k} + R_2a_{2k} + \ldots . R_pa_{pk} / R_k \in (R)\}$ correspond à l'idéal $(a_{1k}, \ldots a_{pk})$.
L'affirmation de Kronecker selon laquelle les cas particuliers traités s'insère dans une théorie arithmétique générale peut s'exprimer par le point de vue contemporain sur la théorie des idéaux.

Exemple, soit le domaine de rationalité $(R, R') = (1, X)$ et le genre engendré par les indéterminées x_1 et x_2 telles que $x_1^2-2 = 0$ et $x_2^2+x_2+1=0$
Soit $M = 3x_1+2 + Xx_2^3$ et $M_1 = 3x_1+2$ *et* $M_2 = x^3_2$, alors M est divisible par (D) $= (M_1, M_2)$. Mais $3x_1+2=x_1(x_1+3)$
Soit $M'_1=x_1+3$ et $M'_2=x_2$ alors M est aussi divisible par (D') $= (x_1+3, x_2)$
Le système (D') divise le système (D).
Tous les systèmes de diviseurs qui divisent $M=1$ sont équivalents entre eux.
Par exemple, $(x+1, x^2+x+1)$ équivalent à 1 car $1=(x+1)(-x) + (x^2+x+1).1$

Le pgcd de deux systèmes de diviseurs : $M = (M_1, M_2,..,M_k)$ et $N = (N_1,\ldots,N_h)$ est $MN = (M_1,\ldots,M_k, N_1,\ldots,N_k)$. Le produit de deux systèmes de diviseurs

$$M N = (M_1N_1, M_1N_2,\ldots,M_1N_h, M_2N_1,\ldots,M_kN_h).$$

Le produit de deux systèmes est divisible par chacun des deux systèmes mais le fait que B soit divisible par M n'implique pas l'existence d'un système de diviseur N tel que B = MN [Kronecker, 1882, 70-83].

Par exemple (x^2, y^2) contient le système de diviseurs (x,y) mais il n'existe pas de système (D) tel que

$$(x^2,y^2) = (x,y)D$$ ([34])

- **La caractérisation des systèmes de modules.**

Kronecker caractérise la sous espèce de (G) correspondant à un système de modules donné par les fonctions rationnelles entières $F_1, F_2, \ldots F_n$ en interprétant la notion de plus grand diviseur commun des fonctions F_i, dans le cadre de la géométrie algébrique. "Des fonctions rationnelles de plusieurs variables, peuvent être composées en systèmes ayant un diviseur commun, mais elles peuvent en outre être considérés comme définissant une variété algébrique". Par exemple, si le nombre de variables se réduit à 3, le système de diviseurs peut être caractérisé (de manière non identique) comme l'ensemble des fonctions G s'annulant sur les racines communes de $F_1,\ldots, F_n$ c'est-à-dire sur la variété définie comme l'ensemble des points (x_1, x_2, x_3) de l'espace à trois dimensions défini par ([35]):

$$F_1(x,y,z)=0,\ F_2(x,y,z)=0,\ \ldots,F_n(x,y,z) = 0$$

Cette variété est définie comme une caractéristique propre des fonctions F_i, ne nécessitant pas le recours au "système des valeurs des variables pour lesquelles les fonctions s'annulent." Kronecker développe une théorie de l'élimination consistant à grouper les "points" de la variété en différents ensembles de dimensions décroissantes. Pour l'exemple de $n=3$, ces ensembles correspondront à des surfaces, des courbes et des points isolés.

[34] iL'anneau $\hat{I}[x,y]$ n'est pas factoriel.

[35] Par exemple, si f est une fonction rationnelle à deux variables, $f(x,y)=0$ définit une courbe algébrique plane. Si deux courbes $\varphi(x,y)=0$ et $\psi(x,y)=0$ ne se coupent en aucun point coïncidant avec un des points multiples de l'une ou l'autre, chaque courbe algébrique plane passant par tous les points d'intersection des deux courbes s'écrit $f=A\varphi+B\psi$; où A et B sont des fonctions rationnelles entières de x et y.
Si φ et ψ sont sans diviseur commun à chaque point d'intersection de $\varphi(x,y)=0,\ \psi(x,y)=0$ correspondent deux fonctions rationnelles A et B telles que $f = A\varphi+B\psi$ [Nöther, 1870, 314 et 1873, 351]. Pour chaque point tel que $\psi=0,\ f=A\varphi,\ f$ est donc divisible par A modulo ψ. Netto [1885, 101] démontre que si f s'annule pour tous les systèmes de valeurs annulant une autre fonction g, alors il existe une puissance r de f telle que g/f^r (f est divisible par chaque facteur irréductible de g) . Plus généralement, si $f=0$ pour tous les systèmes de valeurs annulant $g_1, g_2,\ldots,g_r$, Netto montre qu'il existe r, tel que $f^r = a_1g_1+\ldots+a_rg_r$

[Kronecker, 1882, 104].

[Traduction, F.B.]. La théorie entière se caractérise comme portant sur les proportions de *n* nombres d'espèces données que je désigne par la notion de système. Dans la suite de ce mémoire, je développe la théorie des nombres entiers algébriques dont cette théorie des proportions est un cas particulier auquel j'ai d'abord été mené par mes études sur les modules singuliers des fonctions elliptiques ; dans le cas général, les nombres algébriques x définis par les équations $ax^2+bx+c=0$ sont l'objet d'un traitement algébrique qui s'est imposé à moi par la similitude de l'équivalence des équations $ax^2+bx+c=0$, $a_0x_0^2+b_0x+c_0=0$ et des formes carrées (a,b,c), (a_0, b_0, c_0).

ENCART 7.

Systèmes unités et opérations élémentaires sur les lignes et colonnes

Pour les systèmes de 2² valeurs, les opérations élémentaires – systèmes unités - sont les suivantes [Kronecker, 1889, 317] :

(A) $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$

(A') $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$

(B) $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 1 \end{pmatrix},$

(B') $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix},$

(C) $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix},$

(C') $\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix},$

Le caractère d'unité de ces systèmes élémentaires se manifeste dans les relations :

$$\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

(D) $\begin{pmatrix} t, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & t \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$

(D') $\begin{pmatrix} t, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & -t \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$

(D'') $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ t', & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & t \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ t, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t, & 0 \\ 0, & -t \end{pmatrix},$

les systèmes unités correspondent à des opérations élémentaires sur les lignes des systèmes résumées dans le tableau suivant (le produit à droite donne des résultats analogues sur les colonnes) :

Système unité (U)	(A) $\begin{pmatrix} 1, & \pm 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$	(B) $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \pm 1, & 1 \end{pmatrix}$	(C) $\begin{pmatrix} 0, & \pm 1 \\ \pm 1, & 0 \end{pmatrix}$
Résultat du produit à gauche par (U) sur les lignes d'un système $\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} L_1 \pm L_2 \\ L_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} L_1 \\ \pm L_1 + L_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \pm L_2 \\ \pm L_1 \end{pmatrix}$

2. Le degré des systèmes de Kronecker et le rang des formes bilinéaires de Frobenius

Dans la théorie arithmétique des grandeurs algébriques, un système de diviseurs - ou système de modules- est caractérisé par son degré *k* et, dans le cas particulier où le domaine de rationalité est "naturel", le "degré *k*" s'identifie au nombre d'éléments d'un **système fondamental** dont les combinaisons engendrent le système de modules (encart 4) ([6]). Entre 1883 et 1884, les recherches conjointes de Kronecker et de Molk précisent la notion de degré des systèmes de diviseurs d'entiers algébriques en la mettant en relation avec la notion de rang définie par Frobenius (1879) à la suite de Smith (1861), comme nous l'avons vu au chapitre 3, pour les formes bilinéaires ([7]) :

> Der Begriff der Stufenzzahl verdankt weit hôheren Gesichtpunkten meine Entstehung.Nach den Definitionen, welche ich in meiner oben citirten Festschrift aufgestellt habe, ist die Stufenzahl *n* des Systems a_{ik} nichts Anderes als die Stufenzahl des aus den *q* Functionen von p Variabeln : $\Sigma a_{ik}\, x_i$ gebildeten Divisorensystem. Hr. J. Molk hat den Ausdruck "Stufe'" in seine *Thèse* : *"Sur*

[6] En termes contemporains : tout entier η d'un corps $K(\xi)$ est défini à l'aide d'une base $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ des nombres entiers du corps et *n* entiers rationnels de Î $u_1, u_2, \dots, u_n$:

$$\eta = u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + \dots + u_n\xi_n,$$

un module *a* formé à l'aide de nombres entiers de *K* est de type fini de rang inférieur ou égal à *n*. Soit $(\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_r)$ est une base de *a* et si $a_i = a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \dots + a_{in}\,\xi_n$ $(i = 1,2,\dots,r)$, et la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre η appartienne au module *a* est que l'on puisse déterminer *r* nombres rationnels entiers $v_1,\dots,v_r$ tels que les $u_1,\dots,u_r$ de η s'expriment sous la forme

$$u_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \dots + a_{rj}v_r \ (j = 1,2,\dots,n)$$

Si *b* est un autre module correspondant à une matrice *B* à *r'* ligne, et si *a* est divisible par *b*, les matrices *A* et *B* ont entre elles une relation de divisibilité: il existe une matrice *C* telle que *A = BC.* C'est d'une manière similaire que Dedekind [1877, 20], dans sa dernière version de la théorie des idéaux traite le problème fondamental de déterminer si, un idéal *a* étant divisible par un idéal *b,* il existe un idéal *c* tel que *a = b c*

[7] Dans le cas où le système de diviseur défini par des polynômes à *n* variables $F_1,..,F_m$ est associé à une système algébrique de nombres défini par un système fondamental de degré *n*, les polynômes $F_1, \dots, F_m$ sont des polynômes homogènes linéaires des *n* éléments du système fondamental, le degré du résolvant de Kronecker est le rang du déterminant des coefficients :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\delta F_1}{\delta x_1}, & \dfrac{\delta F_m}{\delta x_2}, & \dots & \dfrac{\delta F_m}{\delta x_n} \\ . & & & \\ . & & & \\ \dfrac{\delta F_m}{\delta x_1} & \dfrac{\delta F_m}{\delta x_2} & & \dfrac{\delta F_m}{\delta x_n} \end{vmatrix}$$

Extraits de la méthode de Kronecker de 1889 pour transformer un système en un système diagonal (comparer à la méthode de Smith donnée en encart 21 du chapitre 3) :

Ist η_{1r} das erste von Null verschiedene Element der ersten Horizontalreihe, so hat man durch Vertauschung der ersten und r^{ten} Verticalreihe, also durch Composition mit einem System $(c_{ik}^{(r)})$, ein neues System (η'_{ik}) zu bilden, in welchem $\eta'_{11} >< 0$ ist. Alsdann hat man dieses durch Composition mit einem Systeme $(a_{ik}^{(r)}(t))$, wenn t durch die Gleichung :

$$t\eta'_{11}+\eta'_{1r} = 0$$

bestimmt wird, in ein solches zu transformiren, in welchem dar r^{te} Element der ersten Horizontalreihe gleich Null ist. Man gelangt daher dur Composition von (η_{ik}) mit einem Systeme $(c_{ik}^{(r)})$ und höchstens n-1, den Werthen $r=2,3,...,n$ entprechenden Systemen $(a_{ik}^{(r)}(t))$ zu einem Systeme (η''_{ik}), in welchem

$$\eta''_{12} = \eta''_{13} = ... = \eta''_{1k} = 0$$

ist. Wird nun ein system $(c_{ik}^{(n)})$ mit (η''_{ik}) zusammengesetzt, so ist die n^{te} Horizontalreihe des aus der Composition :

$$(c_{ik}^{(n)})\ (\eta''_{ik})$$

resultierenden Systems (η'''_{ik}) eben jene erste Horizontalreihe de System (η''_{ik}), in welche alle Elemente ausser dem ersten gleich Null sind, und die fernere Composition :

$$(a_{ik}^{(n)}(t))\ (\eta''_{ik})$$

liefert also, wenn t durch die Gleichung :

$$t\,\eta'''_{n1} + \eta'''_{11} = 0$$

bestimmt wird, ein System $(\eta_{ik}^{(iV)})$, in welchen das erste Element der ersten Horizontalreihe, so wie sämtliche Elemente der n^{ten} Horizontalreihe, mit Ausnahme des ersten, gleich Null sind.

[...]so liefert die composition [...] ein System $(\eta_{ik}^{(VI)})$, in welchen die ersten Elemente der *beiden* ersten Horizontalreihen, so wie sämtliche Elemente der n^{ten} Horizontalreihe, mit Ausnahme des ersten, gleich Null sind.

Durch Fortsetzung diese Compositionsverfahrens gelangt man offenbar zu einem System, in welchen die ersten Elemente der n-1 ersten Horizontalreihen, sowie sämtliche n-1 auf das erste Element folgenden Elemente der n^{ten} Horizontalreihe gleich Null sind, und wenn man dieses System mit einem System $(c_{ik}^{(n)})$ componirt, so wird die erste Verticalreihe mit der letzen vertauscht, und es entsteht daher ein System $(\eta_{ik}^{(0)})$, in welchem die Elemente der letzten Verticalreihe und der letzten Horizontalreihe, mit alleiniger Ausnahme des letzten Elementes $(\eta_{nn}^{(0)})$ sämtlich gleich Null sind.

Das Ergebnisse der Bisherigen Entwickelungen kann durch die '(symbolische) Compositionsgleichung :

$$(a_{ik}^{(0)})\ (\eta_{ik})\ (\beta_{ik}^{(0)}) = (\eta_{ik}^{(0)}) \quad (i,k = 1,2,\ldots,n)$$

dargestellt werden, in welcher $(a_{ik}^{(0)})$ und $(\beta_{ik}^{(0)})$ Systeme bedeuten, welche aus der Composition von Systemen :

$$(a_{ik}) \text{ und } (c_{ik})$$

resultiren.

[...] Bei weitere Anwendung dieses Verfahrens gelangt man schliesslich zu einem Diagonalsystem (d_{ik}). Setzt man dann ein solches mit einem Systeme $(c_{ik}^{(r)})^2$ zusammen, so geht es in ein Diagonalsystem (d'_{ik}) über, in welchem

$$d'_{11} = -d_{11},\ d'_{rr} = -d_{rrr},\ d'_{kk} = d_{kk}$$

ist.

une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination" mit "*rang*" übersetzt. Vgl. auch die Bedeutung des Wortes 'Rang" in den Arbeiten des Hrn. Frobenius.
[1884, 43].

[Traduciton, F.B.]. La notion de degré doit son origine profonde aux définitions données dans ma publication citée plus haut [la théorie des grandeurs algébriques], le degré *n* des systèmes a_{ik} n'est rient d'autre que le degré du système de diviseurs des *q* fonctions de *p* variables $\Sigma a_{ik} x_i$. M. J. Molk le désigne par le terme "rang" dans sa thèse *"Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination".* C.f. également l'importance prise par le terme "rang" dans le travail de M. Frobenius.

Le lien entre le degré des diviseurs algébriques et le rang des formes bilinéaires ou des substitutions s'accompagne d'une postérité chez Kronecker des procédés de transformations linéaires des formes bilinéaires élaborés par Smith et Frobenius. La divisibilité d'un système de modules par un autre peut se formuler comme une transformation linéaire : si $(R_1,\ldots,R_n)$ est un système fondamental du genre *(G)* et *(D)* : $\Sigma_i\, a_{i1} R_i, \Sigma_i\, a_{ik} R_i, \ldots, \Sigma_i\, a_{iq'} R_i)$ $(i = 1,2,\ldots,p)$ est un système de diviseur de rang *p*, alors le système de diviseurs (D) divise un autre système de diviseur *(D')* $(\Sigma_i\, b_{i1} R_i, \Sigma_i\, b_{ik} R_i, \ldots, \Sigma_i\, b_{iq'} R_i)$ $(i = 1,2,\ldots p)$ si chaque élément de (D') peut s'exprimer comme une fonction homogène linéaire à coefficients entiers des éléments de (D):

$$b_{ik'} = \Sigma_k a_{ik} g_{ik'} \ (g_{ik} \text{ entiers})$$

(D') est donc divisible par (D) si il existe une substitution à coefficients entiers qui transforme le système (b_{ik}) en (a_{ik}).
Les questions de la divisibilité des systèmes de diviseurs et de la décomposition en élément premier se formulent alors comme des problèmes d'équivalence de systèmes de grandeurs par transformations linéaires. Kronecker développe une méthode arithmétique de manipulation des systèmes par opérations sur les lignes et les colonnes [Kronecker, 1884c, 72], proche de la méthode mise en œuvre par Smith en 1861 que nous avons vu au chapitre 3 ([8]), et à laquelle Kronecker consacre l'essentiel de la partie théorique qui suit l'induction mise en œuvre au début du mémoire de 1884 [Kronecker, 1884c, 73].

[8] La notion de rang permet également à Kronecker de distinguer en 1884 entre éléments premiers et éléments irréductible [Kronecker, 1884c, 111], voir aussi [Kronecker, 1886] et [Landsberg, 1911].

ENCART 8.

Les corps de matrices de Hensel.

Un corps $K(A)$ de matrices est défini comme l'ensemble des fonctions entières d'une matrice A [Hensel, 1904, 116] :

> [...] die Untersuchung dieser "Körper von Matrizen" fällt vollständig mit der Theorie der rationalen Funktionen eine Variablen r zusammen, wenn man sie für eine beliebige ganze Funktion von *r* als Modul betrachtet. Dieser Theorie ist aber längst vollständig bekannt und sehr leicht zu entwickeln ; und infolgessen bietet auch die Betrachtung der rationalen Funktionen von A bei dieser Behandlung nicht die geringste Schwierigkeit.
>
> [...]Bei der Vorbereitung für den zweiten Band der Kroneckerschen Determinantentheorie habe ich diese Untersuchungen wieder aufgenommen, und ihren Inhalt, soweit er mir noch nicht bekannt zu sein schien, in der nachfolgenden Arbeit niedergelegt. Bei dem hier gewählten Eingange ergeben sich die schönen Resultate, welche Eduard Weyr in seiner großen Abhandlung "Zur Theorie der bilinearen Formen" [...] hergeleitet, aber nicht ohne beträchtliche Schwierigkeiten bewiesen hat, selbstverständliche Folgerungen, wenn man den zu untersuchungenden Körper von Matrizen durch den ihm äquivalenten reduzierten Körper ersetzt.

Hensel associe à $K(A)$ un nouveau corps $K(1,A)$:
Si $|A| \neq 0$, alors $K(1)$, le corps des systèmes diagonaux est un "diviseur" de $K(A)$.
Si $|A| = 0$ alors Hensel démontre que $K(1,A) = K(\overline{A})$ avec

$$\overline{A} = r + A = \begin{pmatrix} a_{11}+r & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+r & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+r \end{pmatrix}$$

[Hensel, 1904, 121-122] :

> Hieraus folgt daβ der Körper K(1,A) aus der Gesamtheit aller rationalen Funktionen $\frac{g(A)}{h(A)}$ von *A* besteht, deren Nenner *h(A)* zu *f(A)* theilerfremd ist, oder, was dasselbe ist, daβ *K(1,A)* eindeutig der Gesamtheilerfremd ist, oder, was dasselbe ist, daβ *K(1,A)* eindeutig der Gesamtheit *K(r)* aller rationalen Functionen $\frac{g(r)}{h(r)}$ entspricht, wenn man diese für den Modul *f(r)* betrachtet, und wenn man nur diejenigen Brüche betrachtet, deren Nenner *h(r)* in der reduzierten Form zum Modul teilfremd ist.
>
> [...] Alle systeme des Körpers *K(1,A)* können auf eine und nur eine Weise in der Form :
>
> $$u_0 + u_1 A + \dots + u_{\nu-1} A^{\nu-1}$$
>
> dargestellt werden. Die ν Systeme $(1, A, \dots, A^{\nu-1})$ bilden also ein Fundamentalsystem für *K(1,A).*

Le polynôme minimal d'une matrice est identifié au système fondamental du corps $K(1,A)$ et sa détermination est assurée par une méthode polynomiale ([36]) :

> Ein solches Fundamentalsystem, welches die Behandlung des Körpers *K(1,A)* ganz auβerordentlich vereinfacht, ergibt sich durch die folgenden Betrachtungen : Wir betrachten wieder den Bereich *K(r)* modulo *f(r)* und denken uns den Modul in seine gleichen und verschiedenen Linearfaktoren zerlegt. Es sei
>
> $$(5.)\ f(r) = (r-1)^{d_1}(r-r_2)^{d_2}\dots(r-r_h)^{d_h}$$
>
> diese Zerlegung ; dann sei allgemein $f_i(r)$ der komplementäre Faktor zu $(r-r_i)^{d_i}$, so daβ $f_1(r), \dots, f_h(r)$ durch die Gleichungen definiert sind :

[36] Cette méthode est souvent désignée dans les manuels contemporains sous le nom de "décomposition de Dunford d'une matrice" [Goblot, 1995, 141].

3. Une méthode associée à la notion de rang : la manipulation arithmétique des systèmes de valeurs.

A l'issu de son mémoire sur les systèmes de périodes des fonctions de plusieurs variables [1884b], Kronecker énonce un résultat "général" sur la "réduction éventuelle" du nombre de systèmes de périodes d'une fonction. Ce résultat repose sur la notion de rang du "système de grandeurs" (a_{ij}) associé aux systèmes de périodes de la fonction $F(x_1, x_2,\ldots,x_p)$. [Kronecker, 1884b, 43]. Si ce "rang" caractérise les systèmes de périodes, c'est qu'il est inchangé lorsque l'on ajoute au système (a_{ij}) un nombre quelconque de "lignes" ou de "colonnes" obtenues par fonction linéaires des lignes ou colonne de (a_{ij}) [Kronecker, 1884c, 67]. Un système (a_{ik}) caractérise un système de diviseurs (D) sans qu'il soit nécessaire de préciser le système fondamental de fonctions de plusieurs variables (R_i) associé et le degré du système de diviseurs (tel qu'introduit en 1882) est identique au rang du système (a_{ik}) [Kronecker, 1884c, 67]. Les notions de divisibilité et d'équivalence des systèmes de diviseurs élaborées par la théorie de 1882 donnent naissance à une arithmétique des systèmes linéaires : le système (a_{ik}) est contenu dans, ou divise, le système $(b_{ik'})$ si (b_{ik}) résulte d'une "transformation entière" des colonnes de (a_{ik}), soit de la composition de (a_{ik}) par un système à coefficients entiers $(g_{kk'})$. Deux systèmes contenus l'un dans l'autre sont équivalents. Tout système de rang r est équivalent à un système dont seules r colonnes sont non identiquement nulles [Kronecker, 1884c, 73] ([9]).

Kronecker développe progressivement sa méthode arithmétique d'opérations sur les lignes et les colonnes des systèmes linéaires dans les années 1884-1891 dans le cadre de problèmes relatifs à la divisibilité des systèmes de valeurs. Le problème arithmétique fondamental de la décomposition d'un système de diviseurs en produit de systèmes premiers est notamment abordé par une méthode de "décomposition d'un système de n^2 grandeurs" exposée par Kronecker dans ses cours d'algèbre à l'université [Kronecker, 1889b, 313] et communiquée à l'académie de Berlin en 1889 sous la forme de deux mémoires parus en avril [1889a] (cas des systèmes symétriques) et juin [1889b]. Deux systèmes de diviseurs sont équivalents si l'un est égal au produit de l'autre par des '"unités". La combinaison par des systèmes unités correspond à des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes répertoriées par le mémoire de juin 1889 (encart 5) :

Bedeutet nun :

$$\left(c_{ik}^{(r)}\right) \quad (i,k = 1,2,\ldots,n)$$

---

[9] Il s'agit de la forme de Smith des matrices (voir chapitre 2).
Kronecker définit en réalité trois relations d'équivalences selon que l'on opère sur les lignes, les colonnes, ou les deux simultanément [Kronecker, 1884c, 94].

(6) f(r) = $(r-r_1)^{d_1} f_1(r) = (r-r_2)^{d_2} f_2(r) = \ldots = (r-r_h)^{d_h} f_h(r)$.

Jede Function $f_i(r) = \dfrac{f(r)}{(r-r_i)^{d_i}}$ enthält dann jeden Linearfaktor $(r\text{-}r_k)$ außer dem i-ten genau so oft, als $f(r)$ selbst, während sie $(r\text{-}r_i)$ gar nicht enthält ; es ist also stets :

$$f_i(r)f_k(r) \equiv 0 \ (mod(f(r)) ;$$

Da somit die h Funktionen $(f_1(r),...,f(_h(r))$ keinen allen gemeinsamen Teiler haben, so kann man h Multiplikatoren $(g_1(r),...,g_h(t))$ so bestimmen, daß

$$f_1g_1 + f_2g_2 + \ldots + f_hg_h = 1$$

ist. Setzen wir nun allgemein $f_i(r)g_i(r) \equiv E_i(r) \ (mod\ f(r)),$

so besteht für die h ganzen Funktionen $E_1(r)...,E_h(r)$die Kongruenz :

$$(7.)\ E_1(r) + E_2(r) + \ldots + E_h(r) \equiv 1 \ (mod(fr))$$

und es ist auch für sie, sobald $i \gtrless k$ ist,

$$(8)\ E_i(r)E_k(r) \equiv 0 \ (mod\ f(r)),$$

da sie Multiple von $f_1,...,f_h$ sind.

Multipliziert man also die obige Kongruenz (7.) z.B. mit E_i und läßt alle Produkte E_iE_k fort, so ergibt sich für $i = 1,2,...,h$

$$(8^a)\ E_i^2(r) \equiv E_i(r) \ (mod\ f(r)).$$

Wir setzen zweitens :

$$(9)\ E_i(r)(r\text{-}r_i) = A_i(r)$$

Dann ist ebenfalls für $i \gtrless k$

$$(10)\ A_i(r)A_k(r) \equiv 0 \ (mod\ f(r))$$

und wegen (8^a)

$$(10^a)\ A_i(r)^2 \equiv E_i(r)^2(r\text{-}r_i)^2 \equiv E_i(r)(r\text{-}r_i)^2 \ (mod\ f(r))$$

und hieraus folgt durch sukzessives Weiterschließen, daß

$$(10^b)\ A_i^{d_i}(r) \equiv E_i(r)(r-r_i)^{d_i} \equiv 0 \qquad (mod\ f(r))$$

ist, und daß dies die Kongruenz niedrigsten Grades ist, der $A_i(r)$ *modulo* $f(r)$ genügt.

Wir wollen der Gleichmäßigkeit wegen :

$$(11)\ E_i(r) = A_i^0(r)$$

setzen, und jede Funktion von der Form

$$\varphi(A_i) = a_0 A_i^0 + a_1 A_i^1 + \ldots + a_{di\text{-}1} A_i^{d_i-1}$$

eine ganze Funktion des (d_i-1) ten Grades von A_i nennen. Wegen der Kongruenz (10^b) kann jede ganze Funktion höheren Grades dadurch auf den *(d_i-1)-ten* Grad reduziert werden, daß man alle höheren Potenzen von A_i einfach fortlässt. Für zwei beliebige ganze Funktionen von A_i und A_k besteht ferner die Kongruenz :

$$\varphi(A_i)\varphi(A_k) \equiv 0 \ (mod\ f(r)),$$

weil sie bzw, die Funktionen E_i und E_k als Faktoren enthalten.

Hiernach beweisen wir leicht, daß die $d_1 + d_2 + \ldots + d_h = \nu$ ganzen Funktionen von r.

$$(12.)\ \begin{cases} A_1^0, A_1, A_1^2, \ldots, A_1^{d_1-1}, \\ A_2^0, A_2, A_2^2, \ldots, A_2^{d_1-1} \\ \ldots \\ A_h^0, A_h, A_h^2, \ldots, A_h^{d_1-1} \end{cases}$$

ein Fundamentalsystem für den Bereich $K(r)$ modulo $f(r)$ bilden.

[...]

$$A_1^i \equiv E_1(r-r_1)^i \equiv A_1^0(r-r_1)^i \quad (\text{mod}\,(r-r_1)^{d_1})$$

[...]Mit Hülfe des soeben bestimmen "*normalen Fundamentalsystemes*" für den Körper *$K(r)$ modulo $f(r)$* ergibt sich nun eine sehr einfache Darstellung aller Elemente von $K(r)$ dasselbe.

ein System für welches :

$$c_{1r}^{(r)} = -1,\ c_{r1}^{(r)} = 1,$$
$$c_{kk}^{(r)} = 1,\ c_{ik}^{(r)} = 0,$$
$$(i <\ > k\ ;\ i,k = 2,3,\ldots,r-1,\ r+1,\ \ldots,n)$$
$$c_{11} = c_{rr} = 0$$

[...]
Mit $\delta_{ik}(t)$ ist hier, [...], ein Diagonalsystem bezeichnet, in welchem das erste Element gleich t, jedes folgende aber gleich Eins ist.
[...] An die vorstehenden Compositionsformeln möge noch die Bemerkung geknüpft werden, dass für ein beliebiges System (y_{ik}) die Composition :

$$(y_{ik})\ (c_{ik}^{(r)})$$

eine Vertauschung der ersten und r^{ten} Verticalreihe des Systems (y_{ik}) und zugleich die Zeichenänderung der neuen r^{ten} Verticalreihe, aber die Composition

$$(c_{ik}^{(r)})\ (y_{ik})$$

eine Vertauschung der ersten und r^{ten} Horizontalreihe nebst einer Zeichenänderung der neuen ersten Horizontalreihe bewirkt, während von den beiden aus der composition :

$$(y_{ik})\ (a_{ik}^{(r)}(t)),\ (a_{ik}^{(r)}(t))\,(y_{ik})$$

resultierenden Systemen das erstere aus dem ursprünglichen System (y_{ik}) entsteht, wenn darin die erste Verticalreihe mit t multiplicirt und alsdann zur r^{ten} Verticalreihe addiert wird, das letztere, wenn in dem ursprünglichen System (y_{ik}) die r^{te} horizontalreihe mit t multiplicirt und zur ersten addiert wird.
[Kronecker, 1889b, 318].

[Traduction, F.B.]. Considérons :

$$(c_{ik}^{(r)}) \quad (i,k = 1,2,\ldots,n)$$

un système pour lequel :

$$c_{1r}^{(r)} = -1,\ c_{r1}^{(r)} = 1,$$
$$c_{kk}^{(r)} = 1,\ c_{ik}^{(r)} = 0,$$
$$(i <\ > k\ ;\ i,k = 2,3,\ldots,r-1,\ r+1,\ \ldots,n)$$
$$c_{11} = c_{rr} = 0$$

[...] $\delta_{ik}(t)$ désigne ici un système diagonal, dans lequel le premier élément est égal à t et les suivants égaux à 1. [...] La composition suivante appliquée à un système arbitraire (y_{ik}):

$$(y_{ik})\ (c_{ik}^{(r)})$$

résulte en une permutation des premières et r^e lignes verticales du système (y_{ik}), la composition

$$(c_{ik}^{(r)})\ (y_{ik})$$

est une permutation des premières et r^e lignes horizontales ; la composition simultanée :

$$(y_{ik})\ (a_{ik}^{(r)}(t)),$$

résulte en un système obtenu à partir du système primitif par multiplication de la première ligne verticale par t ajoutée à la r^e ligne verticale.

[...] Jedes System

$$B = \varphi(A)$$

des Körpers *K(1,A)* läßt sich dann auf eine und nur eine Weise durch das *normale Fundamentalsystem :*

$$(19.)\quad \begin{cases} A_1^0, A_1, A_1^2, \ldots, A_1^{d_1-1}, \\ A_2^0, A_2, A_2^2, \ldots, A_2^{d_1-1} \\ \ldots \\ A_h^0, A_h, A_h^2, \ldots, A_h^{d_1-1} \end{cases}$$

mit konstanten Koeffizienten darstellen, und zwar ist allgemein :

$$(20.)\ B = \varphi(A) = [\ldots] = B_1 + B_2 + \ldots + H_h$$

wo allgemein $B_i = \varphi_i(A_i)$ eine rationale Funktion von dem Elemente A ist, also dem *primitiven* Körper

$$K(A_i^0, A_i)$$

angehört, dessen zugehörige Gleichung die einfachste Gestalt :

$$A_i^{d_i} = 0$$

hat. Die Untersuchung des allgemeinsten Körpers *K(1,A)* ist somit vollständig auf die Betrachtung dieser Primitivkörper K(A_i^0, A_i) reduziert, in welchem an die Stelle des Einheitssystems 1 nur das Einheitsystem A_i^0 getreten ist, welches aber innerhalb jenes Primitivkörpers genau dieselben Eigenschaften besitz, wie das System 1 innerhalb *K(1,A).*

Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permettent une "décomposition rationnelle" de tout système en un produit de systèmes unités et d'un système "diagonal", ce dernier système pouvant encore se décomposer en un produit de *r* systèmes dont tous les termes diagonaux sauf un sont égaux à 1 :

> Das Ergebnisse der vorstehenden Auseinandersetzung lässt sich nunmehr durch die (symbolische) Compositionsgleichung :
>
> $$(\alpha_{ik})\,(\eta_{ik})\,(\beta_{ik}) = (d_{ik})$$
>
> darstellen, in welcher (α_{ik}) und (β_{ik}) Systeme bedeuten, welche aus der Composition von Systemen :
> (a_{ik}) und (c_{ik}) resultieren, während (d_{ik}) ein "Diagonalsystem" d.h. ein solches bedeutet welches nur in der Diagonale von Null verschieden Elemente enthält, und in welchem überdies die n-1 Elemente d_{22}, d_{33},...,d_{nn} sämtlich positiv sind. [Kronecker, 1889b, 324].
>
> [Traduction, F.B.] Les résultats de l'argumentation précédente peuvent se formuler par l'équation (symbolique) de composition :
>
> $$(\alpha_{ik})\,(\eta_{ik})\,(\beta_{ik}) = (d_{ik})$$
>
> dans laquelle (a_{ik}) et (β_{ik}) désignent des systèmes résultant des compositions des systèmes (a_{ik}) et (c_{ik}), et (d_{ik}) est un "système diagonal" c'est à dire tel que tous les éléments sont nuls sauf ceux contenus dans la diagonale dans laquelle se trouvent *n-1* éléments tous positifs d_{22}, d_{33},..., d_{nn}.

Dans un nouveau mémoire, paru dans le *Journal de Crelle* en 1891 et intitulé "Sur la réduction des systèmes à n^2 éléments entiers", Kronecker démontre que "chaque système de n^2 éléments entiers peut se réduire par une suite de transformations élémentaires (échanges de lignes parallèles et addition d'une ligne et d'une parallèle) en un système diagonal dont chaque élément diagonal divise le suivant" ([1]). Les éléments de la diagonale sont des invariants. Le produit des *m* premiers termes de la diagonale est égal au pgcd des sous déterminant du *m*^e ordre. Cette dernière décomposition est menée par Kronecker [1891, 135] en référence au mémoire de Frobenius [1879] qui généralise la réduction de Smith de 1862 comme nous l'avons vu au chapitre 3. Les systèmes de diviseurs de l'arithmétique de Kronecker sont alors liés à la théorie des formes bilinéaires et c'est ce lien qu'explore Weyr en 1890.

[1] La preuve provient de la possibilité d'obtenir par des transformations élémentaires le premier élément du système comme pgcd des n^2 eléments. On peut ainsi rendre nul tous les éléments, sauf un, de la première ligne et de la première colonne. Voir la partie consacrée au mémoire de Smith [1861] dans le chapitre 3.

ENCART 9.

La décomposition matricielle chez Hensel.

a. Relation entre diviseurs élémentaires et caractéristique de Weyr.

[Hensel, 1904, .150-151] :

Da ferner für ein in Partialsystem zerlegbares System die Elementarteiler gleich dem Produkte der entsprechenden Elementarteiler von den einzelnen Partialsystemen sind, so können wir uns auf den Fall beschränken, daβ das zu untersuchende System n-ter Ordnung der einfachen Gleichung

$$A^{\rho} = 0$$

genügt, und die Form hat :

$$A = E_{12} + E_{23} + \dots + E_{\rho-1,\rho}.$$

Wir haben dann die Elementarteiler des Systemes

$$r\text{-}A = r(E_{11}+\dots+E_{\rho\rho}) - (E_{12} + \dots + E_{\rho-1,\rho})$$

zu untersuchen , dessen charakteristische Zerlegung also gleich

$$|r\text{-}A| = r^n = r^{e_1} r^{e_2} \dots r^{e_\rho}$$

ist.

Für dieses System können nun die Elementarteiler sehr leicht dadurch berechnet werden, daβ man das System *(r-A)* in ein Diagonalsystem transformiert, dessen Diagonalelemente Potenzen

$$r^{d_1} r^{d_2} \dots r^{d_n}$$

von r sind, deren Exponenten $d_1, d_2,\dots,d_n$ ihrer Gröβe nach auf einander folgen. dann sind diese Potenzen von r die gesuchten Elementarteiler des Systeme *(r-A).*

Diese Transformation ergibt sich nun leicht mit Hülfe der folgenden einfache Bemerkung : Wir betrachten ein Partialsystem :

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cc} \quad e_1 \quad & \quad e_2 \quad \end{array} \\ r^iE_{11}+R^kE_{22}-E_{12} = & & \left[\begin{array}{ccccc|ccc} r^i & & & & & -1 & & \\ & r^i & & & & & \cdot & \\ & & \cdot & & & & & -1 \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & r^i & & & \\ \hline & & & & & r^k & & \\ & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & r^k \end{array}\right] \\ & e_2 & \end{array}$$

wo die freigelassenen Stellen durch Nullen aufzufüllen sind ; addieren wir hier zuerst die e_2 mit r^k multiplizierten ersten Zeilen zu den e_2 letzten, und addieren wir hierauf die e_2, mit r^i multiplizierten letzten Kolonnen zu den e_2 ersten, so fallen in der Diagonalreihe die e_2 ersten Elemente r^i und die e_2 letzten Elemente r^k fort, während in dem Partialsystem A_{21} noch die e_2 Diagonalelemente r^{i+k} hinzutreten. Vertauschen wir also noch die e_2 ersten Kolonnen bzw. mit den negativ genommenen e_2 letzten, so ergibt sich, daβ das obige System äquivalent ist dem folgenden Diagonalsysteme :

I. INTERSECTIONS DE LA COMPOSITION DES SYSTEMES DE KRONECKER ET DE LA DECOMPOSITION DES MATRICES DE WEYR.

1. Kronecker et les systèmes de nombres complexes (1888).

Comment Weyr lit-il, en 1890, Kronecker et associe-t-il les préoccupations arithmétiques qui marquent sa méthode de décomposition des systèmes de valeurs à la notion de nullité de Sylvester pour élaborer son théorème fondamental de décomposition matricielle ? Une partie du chemin est parcouru par Kronecker lui-même qui applique en 1888 la théorie arithmétique des grandeurs algébriques est aux problèmes de la théorie des grandeurs complexes, une des origines des préoccupations de Weyr et Sylvester pour les matrices.

Le mémoire de 1888 est publié en réponse à un problème formulé par Weierstrass en 1883 et ayant suscité des développements récents de Dedekind et Petersen : trouver les règles générales de calculs sur les systèmes commutatifs de nombres complexes ([2]). Aux travaux de ses prédécesseurs, Kronecker oppose les "méthodes simples et complètes" de sa théorie arithmétique des grandeurs algébriques [Kronecker, 1888,3]. Un "nombre complexe" général s'écrit sous la forme $a_0+a_1i_1+a_2i_2+\ldots+a_\nu i_\nu$. Le produit de deux nombres complexes est donné comme fonction linéaire, à coefficients réels ou complexes, des seuls symboles $i_1, i_2, \ldots i_\nu$. Le problème de la détermination des systèmes (commutatifs) de "nombres complexes" revient à déterminer les produits i_hi_k, c'est-à-dire les coefficients

$$c_0^{(h,k)}, c_1^{(h,k)}, \ldots, c_\upsilon^{(h,k)}$$

vérifiant les $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$ relations suivantes [Kronecker, 1888, 4] :

$$i_hi_k - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} i_1 - \ldots - c_\upsilon^{(h,k)} i_\nu = 0$$

Pour Kronecker, "si l'on vide ce problème de toute sa symbolique", la question s'exprime "en général" comme la détermination de $\nu+1$ fonctions entières *de* ν variables, $1, y_1, \ldots, y_n$, formant un système de diviseurs au sens de la théorie des grandeurs algébriques [Kronecker, 1888, 4]. Il existe un système fondamental de rang $\nu+1$, suite "minimale" de fonctions entière, $f_0, f_1, \ldots, f_\nu$, qui

[2] Ces questions sont discutées en détail dans le chapitre 5.

$$
\left|\begin{array}{cccc|ccc}
1 & & & & & & \\
 & \cdot & & & & & \\
\cdot & & 1 & & & & \\
 & & & r^{i} & & & \\
 & & & \cdot & & & \\
 & & & r^{i} & & & \\
\hline
 & & & & r^{i+k} & & \\
 & & & & & \cdot & \\
 & & & & & & r^{i+k}
\end{array}\right|
$$

Zur Abkürzung setzen wir das aus den e_2 ersten Elementen Eins von E_{11} bestehende Einheitsystem gleich E_{11}, [...]. Man erkennt so, daβ die Anzahl der Elementarteiler : 1 gleich $n\text{-}e_1 = e_2 + e_3 + ... + e_\rho$

r " $e_1\text{-}e_2$
r^2 " $e_2\text{-}e_3$
....
$r^{\rho\text{-}1}$ " $e_{\rho\text{-}1} - e_\rho$
r^ρ " e_ρ

ist.

[...]Hieraus folgt endlich, daβ die charakteristische Zerlegung von $D_n = |r\text{-}A|$ des Systemes $r\text{-}A$ die folgenden Darstellung der sämtlichen Determinantenteiler D_n, $D_{n\text{-}1}$,... liefert :

$$D_n = r^{e_1} r^{e_2} ... r^{e_\rho}$$
$$D_{n-1} = r^{e_1-1} r^{e_2-1} .. r^{e_\rho-1}$$
....
$$D_{n-i} = r^{e_1-i} r^{e_2-i} ...$$

[...] Man erkennt so, daβ die Elementarteiler und auch die Determinantenteiler des Systemes $r\text{-}A$ durch die charakteristische Zerlegung der Determinante $|r\text{-}A|$ in höchst einfacher Weise bestimmt sind, und umgekehrt.

[...] Der $s^{\text{-te}}$ Determinantenteiler von $(r\text{-}A)$ ist das Produckt der $s^{\text{-ten}}$ Ableitungen aller Faktoren von D_n in der charakteristischen Zerlegung.

engendre le système de diviseurs [Kronecker, 1888, 5], pour chaque fonction $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ du système de diviseurs, il existe donc des coefficients c_i tels que :

$$f \equiv c_0+c_1f_1 + \ldots + c_\nu f_\nu \; (modd.\ M', M'', M''', \ldots)$$

Comme pour toute fonction entière F de $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$, cette propriété s'applique en particulier à la simple fonction qui réalise le produit de deux grandeurs :

$$(A)\quad F(f_1, f_2, \ldots, f_\nu) \equiv C_0 + C_1f_1 + C_2f_2 + \ldots + C_\nu f_\nu \; (modd.\ M', M'', M''', \ldots),$$

[…]

$$(B)\quad f_hf_k \equiv c_0^{(h,k)} + c_1^{(h,k)} f_1 + \ldots + c_\upsilon^{(h,k)} f_\nu \; (modd.\ M', M'', M''',\ldots)$$

La notion de système de diviseur "contient" donc le problème de la détermination des "nombres complexes", c'est à dire des fonction y_i qui définissent les règles de produits des éléments d'un système fondamental et qui correspondent à des "grandeurs algébriques" sur un domaine de rationalité [Kronecker, 1888, 13]. La notion de système de valeurs du mémoire de Weyr reprend le point de vue de Kronecker sur les nombres complexes et l'applique aux matrices et aux formes bilinéaires. La notion de rang permet de caractériser l'indépendance des systèmes de valeurs, non seulement du point de vue de l'addition mais également et surtout de la multiplication ([3]), elle est au cœur de l'élaboration du procédé itératif de décomposition matricielle par calcul de puissances successives comme nous l'avons vu dans la partie I.

[3] En termes contemporains, c'est la notion de rang d'un idéal et non d'un simple système linéaire.

ENCART 9.

La décomposition matricielle chez Hensel.

b. Le problème des matrices échangeables.

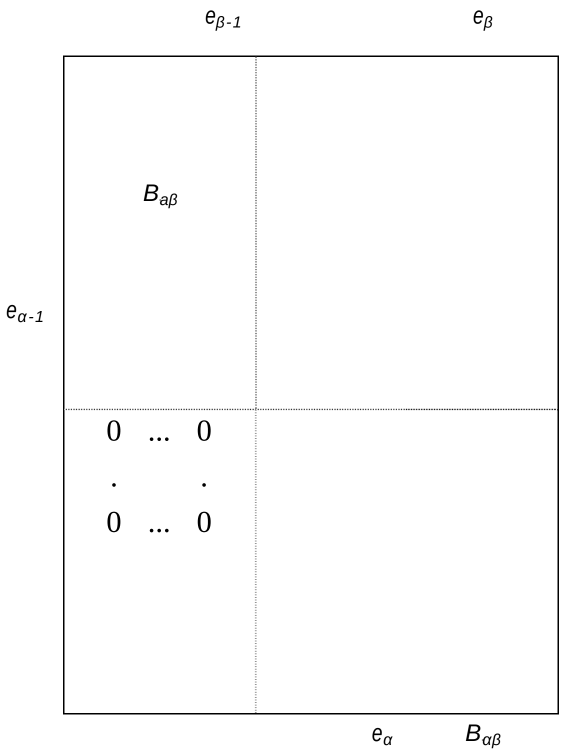
Si *A* et *B* sont échangeables, il en est de même des polynômes de matrices formés de *A* et *B*, la résolution du problème se ramène donc à l'examen d'un "corps réduit"

$$A = E_{12} + E_{23} + \ldots + E_{\rho-1,\,\rho}.$$

Si on écrit de la même façon la décomposition de *B* en ρ² systèmes partiels :

$$B = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\rho} B_{\alpha\rho}$$

$AB = BA$ ñ $E_{\alpha-1,\alpha}B_{\alpha,\beta} = B_{\alpha-1,\beta-1}\,E_{\beta-1,\,\beta}$ pour tout α ; $\beta = 1,2,\ldots,\rho,\rho+1.$
[Hensel, 1904, 156-158] :



Das Produkt $E_{\alpha-1,\alpha}B_{\alpha,\beta}$ ist nämlich das System $\grave{B}_{\alpha-1,\beta}$, welches aus $B_{\alpha\beta}$ dadurch entsteht, daβ man es in das überihm liegende (längere) system von e_{a-1} Zeilen und e_β Kolonnen verschriebt und die dann übrig bleibenden e_{a-1}-e_a letzten Zeilen durch Nullen ersetzt.

Ferner ist das Produkt $B_{\alpha-1,\beta-1}E_{\beta-1,\beta}$ das System $\overline{\overline{B}}_{\alpha-1,\beta-1}$, welches erhalten wird, wenn man die e_β ersten Kolonnen von $B_{\alpha-1,\,\beta-1}$ in das rechts benachbarte System $B_{\alpha-1,\beta}$ hineischiebt.

Dan nun nach (5.) diese Systeme $\grave{B}_{\alpha-1,\beta}$ und $\overline{\overline{B}}_{\alpha-1,\beta-1}$ identisch sein müssen, so ergibt sich zwischen je zwei in derselben Diagonalreihe unmittelbar aufeinander folgenden Systemen $B_{\alpha-1,\beta-1}$ und $B_{\alpha,\beta}$ die folgende einfache Beziehung : Jedes System $B_{\alpha-1,\beta-1}$ entsteht aus dem schräge unter ihm befindlichen $B_{\alpha\beta}$ dadurch, daβ diesem unten *($e_{\alpha-1}$-e_α)* Zeilen mit den Elementen Null, und dem so sich ergebenden Systeme noch *($e_{\beta-1}$-e_β)* Kolonnen mit ganz beliebigen Elementen hinzugefügt werden. Ist also $B_{\alpha\beta}$ gegeben, so ist $B_{\alpha-1,\,\beta-1}$ bis auf ($e_{\beta-1}$-e_β)$e_{\alpha-1}$ willkürliche Elemente vollständig bestimmt. Ist umgekehrt das obere System $B_{\alpha-1,\beta-1}$ bekannt, so ist durch dieses das schräge unter ihm stehende System $B_{\alpha,\beta}$ eindeutig bestimmt.
[...] also *B* die Form hat :

2. Un mouvement vers l'avant dans le corpus : les travaux de Kurt Hensel (1890-1904).

Un mouvement vers l'avant dans l'ordre chronologique du corpus étudié dans ce chapitre permet de questionner la postérité de la méthode de décomposition matricielle de Weyr au sein des développements arithmétiques des travaux de Kronecker. Dans les années 1890, Kurt Hensel développe les méthodes composition des systèmes de Kronecker dans la perspective d'une théorie arithmétique des fonctions algébriques pour l'étude des intégrales algébriques, des fonctions abéliennes et des surfaces de Riemann [Hensel, 1895] ([4]). L'extension de la notion de plus grand diviseur commun des fonctions rationnelles aux fonctions algébriques [Hensel, 1895, 250-259] nécessite la définition, comme dans la théorie de Kronecker de 1882, de systèmes de diviseurs

$$(a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2m} \\ ... & ... & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles. L'approche d'Hensel sur les questions d'équivalence des systèmes linéaires de grandeurs algébriques est d'abord marquée par l'influence de la théorie des formes bilinéaires de Frobenius : des systèmes A et B de grandeurs peuvent être considérés comme les systèmes des coefficients de deux formes bilinéaires [Hensel, 1894, 104] et, les relations d'équivalences de systèmes étant identifiées aux relations d'équivalences des formes, Hensel emploie le théorème des diviseurs élémentaires pour caractériser les conditions de divisibilité d'un système par un autre : les invariants de la forme diagonale des systèmes de grandeurs donnés par Kronecker en 1891 (encart 5) sont identifiés aux diviseurs élémentaires des couples de formes bilinéaires [Hensel, 1884, 110]. La démonstration d'Hensel reprend la méthode de composition des systèmes de Kronecker qui vise à décomposer les systèmes en un produit de systèmes élémentaires et de systèmes diagonaux [Hensel, 1894, 111] :

$$(p) = \begin{pmatrix} p & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & & & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

[4] Pour un exposé synthétique du début du XX^{e} siècle sur ces questions voir [Hensel et Landsberg, 1902] et [Landsberg, 1911]

$$B = \begin{pmatrix} B_{11}, & B_{12}, & \dots & B_{1\rho} \\ 0, & B_{22}, & \dots & B_{2\rho} \\ \dots & & & \\ 0, & 0, & \dots & B_{\rho\rho} \end{pmatrix}$$

[...]

So ergibt sich für die Konstruktion des allgemeinsten mit den reduzierten Körper $K(1,A)$ vertauschbaren Systemes B die folgende einfache Vorschrift :

Ist

$$A = E_{12}+E_{23}+\dots+E_{\rho-1,\rho},$$

so fülle man in B den ganzen letzten Vertikalstreifen :

$$B_{1\rho}+B_{2\rho}+\dots+B_{\rho\rho}$$

mit beliebigen Elementen aus. Um aus ihm den $(\rho-1)^{\text{-ten}}$ Vertikalstreifen

$$B_{1,\rho-1}+B_{2,\rho-1}+\dots+B_{\rho,\rho-1}$$

zu erhalten, verschiebe man jedes Partialsystem $B_{i\rho}$ nach dem links oben befindlichen Nachbarsystem $B_{i-1,\rho-1}$, nachdem man es zuerst unten mit Nullen, und alsdann hinten mit beliebigen Elementen geändert hat. Das dann noch übrig bleibende letzte Partialsystem $B_{\rho,\rho-1}$ is mit Nullen auszufüllen. Fährt man in derselben Weise fort bis zum ersten Vertikalstreifen so erhäl man das allgemeinsten mit A vertauschbarem System B.

Cette approche est développée dans le cadre de la théorie arithmétique des fonctions algébriques:

> Jedes System (a_{ik}) ist dem aus seinen Elementartheilern $E_1,...,E_n$ gebildeten Diagonalsysteme
>
> $$(E_i) = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & E_2 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & E_n \end{pmatrix}$$
>
> äquivalent.
> Dasselbe besitzt also dann und nur dann ganze Elementartheiler, wenn alle Elemente *(a_{ik})* ganze Grössen sind.
> [Hensel, 1895, 260].
>
> [Traduction, F.B.]. Tout système *(a_{ik})* est équivalent à un système diagonal composé de ses diviseurs élémentaires $E_1,...,E_n$:
>
> $$(E_i) = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & E_2 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & E_n \end{pmatrix}$$

Hensel associe la décomposition polynomiale des diviseurs élémentaires et la méthode de composition des systèmes de Kronecker, les relations arithmétiques entre les systèmes sont exprimées directement par des relations arithmétiques polynomiales sur les diviseurs élémentaires :

> Jedes quadratische System ($Y_k^{(i)}$) ist [...] äquivalent einem Diagonalsysteme von Wurzelfunctionen ($d_i(x)$), dessen Elemente durch die Elementartheiler von ($Y_k^{(i)}$) bestimmt sind .
> Sind nämlich:
>
> $$(1.) \quad \begin{cases} (x-a)^{\delta_1}, (x-a)^{\delta_2}, ..., (x-a)^{\delta_n}, \\ (x-a')^{\delta'_1}, (x-a')^{\delta'_2}, ..., (x-a')^{\delta'_n}, \\ .... \end{cases}$$
>
> die gebrochenen Potenzen aller Linearfactoren *x-a, x-a',..,* welche bezw. in dem ersten, zweiten,..., n^{ten} Elementartheiler des Systemes ($Y_k^{(i)}$) enthalten, und welche also rational bestimmbare Invarianten jenes Systemes sind, so bilden speciell die *n* Elementartheiler :
>
> $$e_i(x) = (x-a)^{\delta_i}(x-a')^{\delta'_i} .... \qquad i = 1,2,...n$$
>
> ein System von *n* Wurzelfunction, welchem ($Y_k^{(i)}$) äquivalent ist. Jedes andere äquivalente System *($d_1(x),...,d_n(x)$)* wird aus ($e_1(x),...,e_n(x)$) dadurch gewonnen, dass die Elemente der einzelnen Horizontalreihen des Systems (1.) beliebig unter einander vertauscht werden.
> [Hensel, 1895, 274].

[Traduction, F.B.]. Tout système quadratique $(Y_k^{(i)})$ est équivalent à un système diagonal de fonctions rationnelles *($d_i(x)$),* dont les éléments sont composés des diviseurs élémentaires de $(Y_k^{(i)})$. Soit

$$(1.)\quad \begin{cases} (x-a)^{\delta_1},(x-a)^{\delta_2},...,(x-a)^{\delta_n}, \\ (x-a')^{\delta'_1},(x-a')^{\delta'_2},...,(x-a')^{\delta'_n}, \\ .... \end{cases}$$

la décomposition en puissances des facteurs linéaires *x-a, x-a',...*, correspondant aux premier, deuxième, ..., n^e diviseur élémentaire du système $(Y_k^{(i)})$, les *n* diviseurs élémentaires :

$$e_i(x)=(x-a)^{\delta_i}(x-a')^{\delta'_i}.... \qquad i=1,2,...n$$

Forment un système de *n* fonctions rationnelles auquel $(Y_k^{(i)})$ est équivalent. Tout autre système équivalent $(d_1(x),...,d_n(x))$ s'identifie à $(e_1(x),...,e_n(x))$ par permutation des lignes horizontales.

Les analogies entre la théorie des formes bilinéaires et l'arithmétique des grandeurs algébriques sont développées et théorisées par Georg Landsberg dans un mémoire intitulé "Sur les système fondamentaux et les formes bilinéaires" et publié en 1896 dans le *journal de Crelle*. Landsberg développe une théorie générale des systèmes fondamentaux des "modules" qui unifie et généralise de nombreuses notions parmi lesquelles les systèmes de diviseurs de Kronecker, la '"base canonique" formée par les polynômes d'interpolation de Lagrange et les polynômes de formes de Frobenius [Landsberg, 1896, 333] ([5]). Le premier paragraphe du mémoire est consacré à expliciter la relation entre les systèmes fondamentaux des modules et les formes bilinéaires [Landsberg, 1896, 335]. Etant donné un module, noté *ModF(z),* de système fondamental (u_k), le produit d'un élement quelconque *z* par u_i donne une expression de la forme $zu_i \equiv \Sigma\alpha_{ik}u_k\ (mod.F(z))$; à chaque système fondamental il est donc possible d'associer identiquement une forme bilinéaire $A=\Sigma\alpha_{ik}x_iy_k$ ([6]). La décomposition des formes en "formes élémentaires" par les procédés basés sur l'emploi des diviseurs élémentaires développés par Hensel donne une méthode de décomposition des systèmes fondamentaux ([7]).
Dans les années 1890-1900, des auteurs comme Hensel et Landsberg développent, comme Weyr, des méthodes basées sur l'analogie entre la décomposition arithmétique des systèmes et la théorie des formes bilinéaires. La postérité de Weyr n'est pourtant pas immédiate, la référence reste la théorie des formes de Frobenius [1879] et on s'efforce d'associer les invariants que sont les diviseurs élémentaires à la méthode de Kronecker de composition de la forme des systèmes de valeurs.

---

[5] Une autre motivation de Landsberg, qui avait déjà suscité des travaux de Maurer et Voss dans les années 1880, est la détermination de l'ensemble des substitutions permettant le passage d'une forme bilinéaire donnée à une forme équivalente, l'énoncé de Frobenius relativement à cette question [1879, 28] étant resté non démontrée. Voir à ce sujet la conclusion du chapitre 5.

[6] Il s'agit là d'idée à la base de l'étude des systèmes hypercomplexes, notamment dans les travaux de Cartan, et de la représentation des groupes. Voir le chapitre 5.

[7] C'est-à-dire le théorème fondamental des modules de types finis.

CONCLUSION.

Dans les années 1890-1905 une méthode de décomposition matricielle apparaît à la rencontre de réseaux de recherches distincts. Weyr, le premier, donne à la représentation matricielle un caractère opératoire en associant, en 1890 les idées propres aux matrices-déterminants de Sylvester, au calcul symbolique des matrices de Cayley, aux polynômes de formes de Frobenius et à la décomposition arithmétique des systèmes de Kronecker. Les méthodes de décompositions polynomiales guident des procédés d'extractions de mineurs ou de compartiments des matrices qui résultent en une décomposition d'un système de valeurs en sous systèmes linéairement indépendants. Si la méthode de Weyr manifeste l'influence de la combinatoire arithmétique des systèmes de Kronecker, elle ne connaît pas de postérité immédiate dans le cadre du réseau de travaux arithmétiques qui se développe à la suite de Kronecker.
A l'extrême borne de la périodisation fixée pour cette partie est publié un mémoire d'Hensel intitulé "théorie des corps de matrices" [1905] en référence au "mémoire fondamental de Cayley" dont il s'agit de "simplifier la curieuse façon de procéder" par une "méthode arithmétique" (encart 7). Les "beaux résultats" d'Eduard Weyr sont responsables de l'adoption de la notion de matrice par Hensel. Plus précisément, c'est la reconnaissance de l'efficacité des méthodes polynomiales de Weyr pour l'étude de l'arithmétique des systèmes de valeurs qui conduit Hensel à l'étude des corps de fonctions entières de matrices et, comme le montre l'encart 7, le polynôme minimal d'une matrice est identifié à la donnée d'un système fondamental d'un corps de matrices rationnelles. La postérité de Weyr se manifeste dans l'adoption par Hensel de la notion de "systèmes partiels" d'une matrice, notion correspondante aux compartiments de Weyr et qui fonde une méthode de décomposition matricielle permettant de caractériser les corps de matrices équivalents par "transformations contragredientes" [Hensel, 1905, 128]. Les propriétés des systèmes partiels (rang, composition,...) sous l'action des opérations élémentaires de Kronecker permettent de donner à la représentation matricielle un caractère opératoire [Hensel, 1904, 135] qui, comme chez Weyr, prend la forme d'un procédé d'itération de calculs de puissances permettant de réduire toute matrice polynomiale de degré 1 à la forme :

$$\begin{pmatrix} 0, & E_{12}, & 0, & ..., & 0, \\ 0, & 0, & E_{23}, & ..., & 0, \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & E_{\rho-1,\rho}, \\ 0, & 0, & 0, & ..., & 0, \end{pmatrix}$$

qui correspond à la "forme réduite d'un corps de matrices " par transformation contragredientes" [Hensel, 1904, 147] :

> In dem transformierten Körper, den wir jetzt wieder mit *K(1,A)* bezeichnen wollen, ist also das Element *A*, und außerdem, wie man leicht sieht, seine Potenzen folgendermaß dargestellt :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & E_{11}+E_{22}+E_{33}+\ldots+E_{\rho\rho}, \\ A & = & E_{12}+E_{23}+\ldots+E_{\rho-1,\rho}, \\ A^2 & = & E_{13}+\ldots+E_{\rho-2,\rho}, \\ \ldots & & \\ A^{\rho-1} & = & E_{1\rho}, \\ A^{\rho} & = & 0, \end{array}\right. \tag{6.}$$

Si *[A]* désigne le rang de *A* :

$$\left\{\begin{array}{lcl} [1] & = & e_1+e_2+e_3+\ldots+e_\rho=n, \\ [A] & = & e_2+e_3+\ldots+e_\rho \\ [A^2] & = & e_3+\ldots+e_\rho \\ \ldots & & \\ [A^{\rho-1}] & = & e_\rho \end{array}\right.$$

Deux corps de matrices polynomiales sont équivalents si et seulement si leurs caractéristiques, au sens de Weyr, coïncident [Hensel, 1904, 149].

Le caractère opératoire de la méthode de décomposition matricielle qui accompagne la postérité de la caractéristique de Weyr se manifeste dans la manière dont Hensel explicite les relations entre les deux invariants que sont les diviseurs élémentaires et la caractéristique d'une matrice ainsi que dans la résolution d'un problème fondateur de la théorie des matrices puisqu'à l'origine des travaux de Sylvester et Weyr de 1885 : la recherche d'un ensemble complet de matrices *B* qui commutent avec une matrice *A* donnée (encart 8) ([8]). Hensel donne l'exemple suivant [1904, 158-159] : on cherche les systèmes *B* échangeables au corps réduit *K(1,A)* où $A = E_{12}+E_{23}+E_{34}$, c'est-à-dire $A^4=0$ et $e_1=4$, $e_2=3$, $e_3=1$, $e_4=1$. Le système cherché du 9e ordre à la forme suivante :

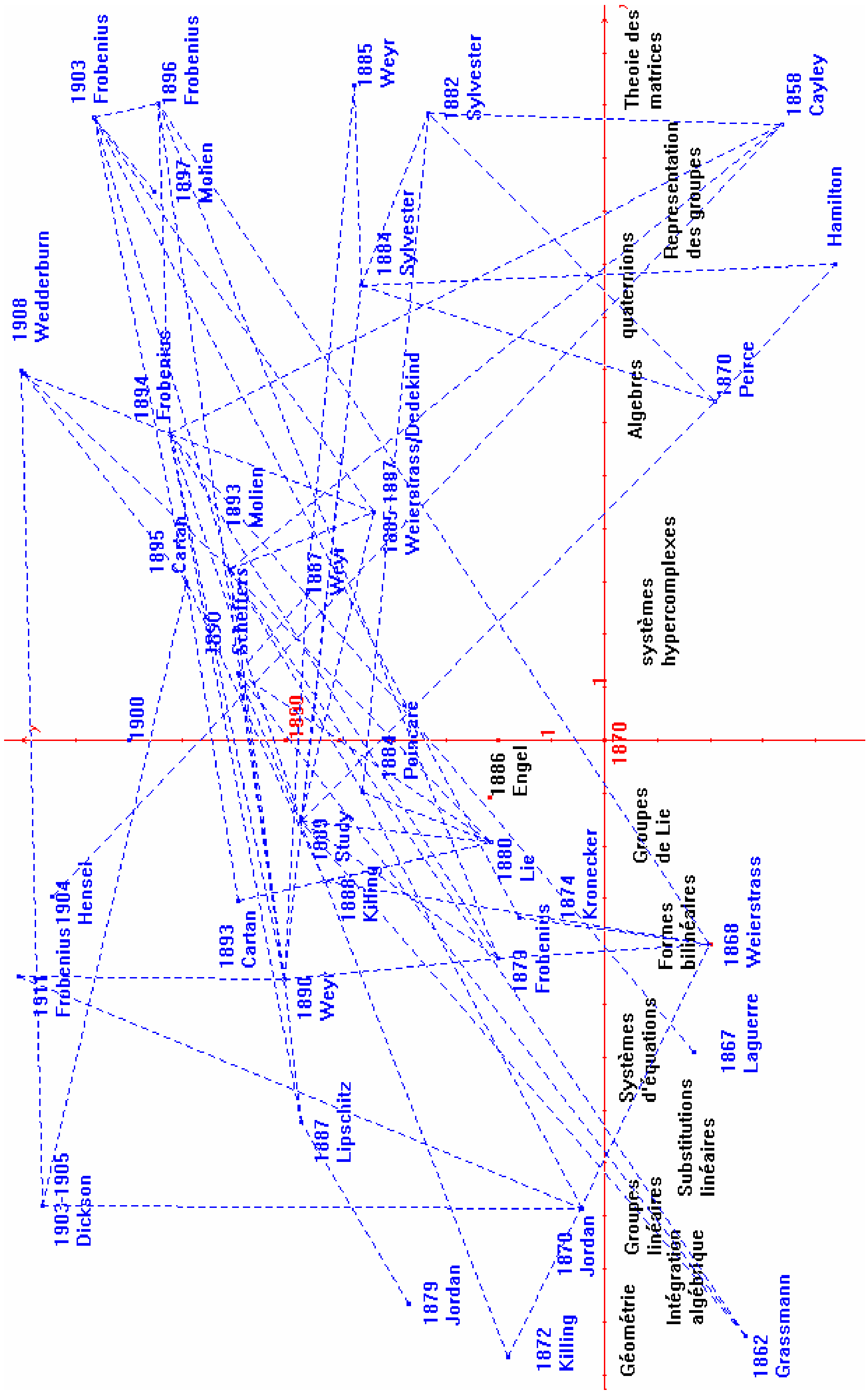
$$B = \left(\begin{array}{cccc|ccc|c|c} a_9 & b_{51} & b_{52} & c_1 & a_8 & b_{11} & b_{12} & a_5 & a_1 \\ 0 & b_{61} & b_{62} & c_2 & 0 & b_{21} & b_{22} & a_6 & a_2 \\ 0 & b_{71} & b_{72} & c_3 & 0 & b_{31} & b_{32} & a_7 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & b_{41} & b_{42} & 0 & a_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & a_9 & b_{51} & b_{52} & a_8 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{61} & b_{62} & 0 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{71} & b_{72} & 0 & a_7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_9 & a_8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_9 \end{array}\right)$$

[8] La caractéristique de Weyr permet notamment à Hensel de démontrer une conjectrure de Frobenius [1879] sur le nombre de formes commutant avec une forme donnée. Voir à ce sujet la conclusion du chapitre 5.

La postérité du mémoire de Weyr chez Hensel s'identifie à l'introduction d'une méthode de décomposition matricielle permettant de résoudre un certain nombre de problèmes en raisonnant sur la représentation elle même. Parmi ces problèmes, la méthode de Weyr s'applique à des problèmes traités par Jordan à l'aide de sa forme canonique : caractérisation des substitutions semblables, équations de Fuchs, recherche de l'ensemble des substitutions commutant à une substitution donnée. Le corpus de textes étudié dans ce chapitre ne fait pourtant aucune référence à la forme canonique de 1870. Si, Weyr cite le mémoire de Jordan [1878] sur l'intégration algébrique des équations différentielles qui fait un usage constant à de la forme canonique des substitutions (et qui sera présenté au chapitre 8), la référence ne porte par sur la forme canonique mais sur la caractérisation des substitutions linéaires d'ordre fini. La méthode décomposition matricielle de Weyr est considérée comme objectivement différente du procédé de Jordan de réduction à une forme canonique. A quoi tient cette différence ? Cette question sera détaillée dans la partie III lorsque sera mise en valeur la longue construction d'une identité entre les théorèmes de Weyr et de Jordan entre 1900 et 1930. Un élément fondamental peut cependant déjà être apporté et offre une conclusion à ce chapitre : pour Weyr, comme pour Hensel, la décomposition matricielle ne sort pas du statut de méthode et ne se justifie que par son caractère opératoire. La notion fondamentale de la théorie des formes bilinéaires de Weyr ou de la théorie des corps de matrices de Hensel reste la notion d'invariant. Forme canonique comme méthode, invariants pour l'organisation théorique, cet argument donné par Kronecker lors de la querelle de 1874 reste d'actualité chez Weyr en 1890 ou chez Hensel en 1905.

ENCART 1.

Représentation graphique du corpus étudié.



Chapitre 6.

Forme typique et système normal de Weyr :

dynamique d'une articulation ENtre décomposition et représentation

(1884-1907).

ENCART 2.

A propos du mémoire de Poincaré de 1884 et des matrices.

Karen Parshal écrit au sujet de la note de Poincaré [1985, 262] :

> Thus Poincaré recognized that (1) the algebras analogous to the quaternions which Sylvester was studying were algebras of matrices, (2) each element in these algebras defined a linear transformation, and (3) the theory of continuous transformation groups developed by Lie could be applied to these linear transformations.

Et Thomas Hawkins [197., 249]

> It was undoubtly Sylvester's matrix representation of quaternions and nonions that prompted Poincaré's remark. In fact, the examples that Poincaré gave of "bilinear groups'" (as we shall call them following E. Cartan) were presented in matrix form.

Pourtant Poincaré n'emploie dans sa note ni "matrice", ni "algèbre" associative. La notion de matrice telle qu'elle se présente chez Sylvester n'est pas identique à la représentation en tableaux utilisée par Poincaré pour caractériser les groupes de transformations :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix}$$

Cette représentation en tableaux s'insère dans un corpus de textes largement indépendants des réseaux étudiés dans cette partie (voir la présentation autobiographique de Poincaré en 1903 [Poincaré, 1934]), s'unifiant par l'emploi d'une méthode de réduction à des formes réduites ou canoniques pour des questions diverses allant de l'arithmétique à l'intégration algébrique des équations différentielles, et dont les grandes références sont Hermite et Jordan. Dans ce corpus, étudié au chapitre 8, s'exerce une postérité directe de la forme canonique de Jordan dont Poincaré donne, en 1884, une représentation en tableau pour caractériser les groupes de substitutions.

Si la note de Poincaré est citée par les auteurs qui fondent la théorie des systèmes hypercomplexes comme Scheffers [1890] et Molien [1893], les méthodes de Poincaré, qui se caractérisent par l'emploi de la forme de Jordan, n'ont pas de postérité. La référence à Poincaré est davantage la reconnaissance d'une priorité qu'un témoignage de postérité.

INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à la postérité de la méthode de décomposition matricielle d'Eduard Weyr sur la période 1880-1907. Une recherche bibliographique sur les mémoires de mathématiques publiés entre 1890 et 1907 permet d'établir le corpus de textes représenté par le graphe de l'encart 1. La majorité des textes du corpus s'insèrent dans un même cadre théorique et participent à l'émergence de la théorie des systèmes hypercomplexes. L'ensemble des textes faisant référence à Weyr ne s'identifie cependant que partiellement à la théorie des systèmes hypercomplexes, il se limite en effet à des publications d'auteurs allemands, anglais et américains et les contributions d'auteurs français comme Cartan à la théorie des systèmes hypercomplexes en sont absentes ([1]). Une référence à Weyr s'accompagne presque systématiquement de l'emploi de la notion de *matrice* pour *représenter* une méthode de *décomposition* d'un système de grandeurs en systèmes partiels, elle permet d'isoler un sous groupe dans les travaux consacrés aux systèmes hypercomplexes dont la cohérence est due à l'emploi d'une méthode spécifique. S'interroger sur les différences de méthodes se manifestant au sein d'un même corpus de textes manifestant l'émergence de la théorie des systèmes hypercomplexes permet d'une part de suivre la postérité de Weyr et, d'autre part, de caractériser la spécificité de la méthode de *décomposition* associée à la *représentation* matricielle.

Le corpus étudié dans ce chapitre correspond à une période particulière de l'histoire de la théorie des systèmes hypercomplexes ; cette période a un début que l'on peut fixer à 1884 en référence à une note publiée par Poincaré dans les *Comptes Rendus* (encart 2) et une fin correspondant à la publication, en 1907 d'une nouvelle approche de la théorie des algèbres associatives par

[1] Dans sa théorie des systèmes hypercomplexes, Cartan [1898] complète les approches d'auteurs allemands comme Scheffers dont il maitrise parfaitement les méthodes. Cartan fait pourtant le choix de ne pas reprendre la méthode matricielle employée par Scheffers en référence à Weyr. Comme nous aurons l'occasion de la voir au chapitre 8, la notion de matrice n'est pas utilisée en France avant le début du XX[e] siècle. En 1898, Laurent propose par exemple de créer un algorithme pour :

> [...] exposer la théorie générale des substitutions ; à la considération de la notion de produits et de puissances de substitutions, on peut joindre les notions de somme, de différence, et en général de fonctions de substitutions. Les substitutions deviennent ainsi de véritables quantités imaginaires dans le sens le plus large du mot ; elles jouent dans le calcul le même rôle que les clefs ; ce sont les clefs. Les clefs imaginaires reçoivent ainsi une interprétation concrète ; elles auront désormais une signification précise.
> [Laurent, 1898].

Le calcul symbolique sur les substitutions proposé par Laurent est similaire au calcul symbolique des matrices. Ce dernier n'est cependant pas utilisé en France et, en 1898, Laurent pense que les substitutions qui commutent à une substitution donnée sont exprimables comme des fonctions rationnelles, une erreur pourtant mise en évidence par Sylvester dans les *Comptes Rendus* en 1884 mais dans le cadre de travaux sur les matrices (chapitre 4).

ENCART 3.

Sur les algèbres de Wedderburn et la postérité des idées de Weyr.

La postérité des idées de Weyr dépasse les limites de la périodisation étudiée dans cette partie. La théorie des algèbres de Wedderburn de 1907 marque la fin de l'approche de la théorie des systèmes hypercomplexes fondée sur la considération de polynômes caractéristiques (voir [Parshall, 1985]) et la citation suivante d'un énoncé de Wedderburn permet de mettre en évidence la postérité des procédés d'itération de Weyr et de la notion de caractéristique, désormais associés aux éléments nilpotents des algèbres [Wedderburn, 1908, 87] :

> If some integer *a*, $A^a = 0$, *A* is said to be *nilpotent*. Nilpotent algebras are of great importance in the discussion of the structure of algebras.
>
> Theorem 11. *If a is the index of A, the elements of A can be divided into* a-1 *complexes* $B_1, B_2, \ldots, B_{a-1}$, such that
>
> B_pB_q Â $B_{p+q} + B_{p+q+1} + \ldots + B_{a-1}$
>
> *i.e., such that the product of two elements, belonging to complexes with subscripts p and q respectively, lies entirely in the sum of the complexes with subscripts greater than* p+q-1.
>
> For let
>
> $$A = B_1 + A^2 = B_1 + B_2 + A_3 = \ldots = B_1 + B_2 + \ldots B_{a-1},$$
>
> where
>
> $$A^\beta = B_\beta + A^{\beta+1},\ A^{a-1} = B_{a-1}\ ;$$
>
> then
>
> B_pB_q Â A^pA^q Â A^{p+q},
>
> which proves the theorem.
>
> This theorem is evidently considerably stronger than the similar theorems enunciated by Scheffers and others (Scheffers [1891] , Cartan [1898]).
>
> [...]
>
> If *a* is the index of a nilpotent algebra, we have A^{a-1} ý 0, $A^a = 0$; and hence the product of any element of *A* and any element of A^{a-1} is zero. This is a simple proof of a theorem by Cartan to the effect that there is at least one element in a nilpotent algebra whose product with any other element is zero.

Wedderburn (encart 3) ([2]). Comme nous l'avons vu au chapitre 5, à partir du mémoire de Weyr de 1890, une matrice (a_{ij}) est associée à une forme bilinéaire $\Sigma a_{ij}e_{ij}$, et n'est donc plus définie seule mais relativement à un système de valeurs (e_{ij}) ([3]) ; les méthodes de compositions-décompositions des "systèmes" [Kronecker, 1890] et des "matrices" en sous "compartiments" [Weyr, 1890] ou "systèmes partiels" [Hensel, 1904], impliquent des *décompositions* de systèmes de valeurs et aboutissent à une *représentation* par "un système normal" [Weyr, 1890] ou "système fondamental" [Hensel, 1905]. Ce principe, *décomposer* pour *représenter*, fait la spécificité de la méthode par laquelle est menée, dans le cadre du corpus étudié ici, la classification des systèmes hypercomplexes par une décomposition d'un système en sous systèmes "simples".

[2] Il ne sera cependant pas possible de présenter tous les travaux s'insérant dans la théorie des systèmes hypercomplexes. La problématique étant de suivre la postérité de la notion de matrice de Weyr, l'accent est mis sur les développements continentaux au détriment des travaux anglais. Dans la conclusion générale de la thèse, nous aurons l'occasion de revenir sur les travaux des auteurs anglais à l'occasion d'une discussion des méthodes propres à Sylvester. Parmi ceux-ci, Metzler [1892], donne un exposé détaillé de la caractéristique de Weyr, présente tous les types de matrices nilpotentes d'ordre 3 à 10 et construit toutes les matrices canoniques jusqu'à l'ordre 17 ; Taber [1885] développe la notion de nullité des matrices de Sylvester pour le calcul des quaternions.

[3] En termes contemporains, la représentation des formes bilinéaires $\Sigma a_{ij}e_{ij}$ porte en elle la question du choix de la *base* d'un *espace vectoriel.*

ENCART 4.

La présentation de la théorie par Cartan et Study dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques.*

Cet encart propose des extraits de l'article écrit à deux mains par Cartan et Study pour l'encyclopédie franco-allemande. Il permet de donner un aperçu synthétique de la théorie des systèmes complexes abordée dans ce chapitre. La citation de l'article de Cartan et Study vient appuyer la description faite dans ce chapitre d'une méthode de décomposition, de réduction à une forme normale comme caractéristique de la théorie des systèmes hypercomplexes. L'article de 1908 donne également un aperçu de ce qu'est la notion de matrice en 1908, question qui sera développée par la conclusion de cette partie.

[Cartan et Study, 1908, 413-425] :

> Les systèmes de nombres complexes et le calcul des formes bilinéaires.
>
> Le calcul des transformations linéaires, ou des matrices, ou des formes bilinéaires, fondé par *A.* Cayley, fournit des systèmes de nombres particuliers à multiplication associative.
>
> [...]Cette transformation détermine une matrice carrée
>
> $$\| a_{ik} \|$$
>
> dont les éléments sont les coefficients de la transformation, et une *forme bilinéaire*
>
> $$A = \Sigma_{i=1,m}\Sigma_{k=1,m}\, a_{ik}\, x_i u_k \;;\; [...]$$
>
> L'unité relative e_{ik} correspond à la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf celui qui est à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et la $k^{ième}$ colonne, qui est égal à 1 ; elle correspond aussi à la forme bilinéaire $x_i u_k$.
>
> L'unité principale du système est donnée par la transformation linéaire identique
>
> $$y_k = x_k \ (k = 1,2,\dots,m) \,;$$
>
> Par la matrice dont tous les éléments sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale, qui sont égaux à 1 ; enfin par la forme bilinéaire
>
> $$x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_mu_m \,,$$
>
> appelée par F. Frobenius la forme unité.
>
> [...]La composition des matrices est aussi ancienne que la théorie des transformations linéaires elle-même ; le système particulier de nombres complexes dont il est question ici se présente partout où l'on a affaire à des transformations linéaires. L'essentiel, dans le point de vue du texte, est que l'ensemble complet des m^2 quantités a_{ik} est regardé comme un objet individuel et représenté par un signe. Le point de vue est déjà indiqué dans W.R. Hamilton (...) qui opérait sur les transformations linéaires effectuées sur les coordonnées d'un vecteur : et est clair et explicite dans A. Cayley qui doit être regardé comme le vrai fondateur de la théorie. Après A. Cayley, de nombreux mathématiciens se sont servis des mêmes notions. Nous citerons en particulier E. Laguerre ; G. Frobenius : ce mémoire a un caractère fondamental et est le plus important qui ait été publié sur ce sujet ; J.J Sylvester ; Ed. Weyr ; H. Taber [...]. Les différents auteurs qui viennent d'être nommés ont en partie travaillé indépendamment les uns des autres ; aussi les principaux théorèmes de cette théorie ont-ils été trouvés par plusieurs d'entre eux.
>
> [...]
>
> L'équation de plus bas degré à laquelle satisfait une forme *A* à coefficients a_{ik} [...]
>
> $$\Psi(A) = A^p + a_1A^{p-1} + \dots + a_pA^0 = 0$$
>
> est appelée par Ed. Weyr l'*équation fondamentale (Grundgleichung)* par d'autres *l'équation caractéristique réduite* de la forme *A* ou de la matrice $\| a_{ik} \|$.
>
> [...]
>
> Si l'on considère un système de nombres complexes d'ordre *n* avec les constantes de multiplication γ_{iks}, tout nombre a de ce système satisfait, d'après ce qui précède, à l'équation $\varphi(a) = 0$, où $\varphi(r)$ est le déterminant de la forme bilinéaire
>
> $$rE - \Sigma\gamma_{iks}a_ix_iu_k$$
>
> [...] Le nombre *a* satisfait aussi à une équation $\varphi(a) = 0$ déduite de la même façon du déterminant caractéristique du système [...] on l'appelle l'*équation caractéristique du système.*

I. CULTURE COMMUNE ET DIFFERENCES AU SEIN D'UNE MEME THEORIE DES SYSTEMES HYPERCOMPLEXES.

1. Présentation franco-allemande de la théorie et de ses méthodes en 1908.

Si ce chapitre se propose d'utiliser les différences de méthodes mises en œuvres dans la théorie des systèmes hypercomplexes pour mettre en évidence la spécificité de la représentation matricielle, la présentation franco-allemande de la théorie qu'offre l'article conjoint de Cartan et Study publié dans l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques* permet tout d'abord d'expliciter ce qui est commun:

> [...] le problème général des systèmes de nombres complexes peut s'énoncer de la manière suivante.
> "Indiquer pour chaque type de systèmes de nombres complexes d'ordre *n* un représentant particulier".
> [Cartan et Study, 1908, 396].

Ce problème s'accompagne de l'énoncé d'une "notion nouvelle" à la base d'une méthode spécifique et dont les termes clés sont "réductibilité", "sous systèmes" et "décomposition":

> Le problème ainsi posé admet encore une simplification en introduisant une notion nouvelle, celle de *réductibilité*.
> Un système de nombres complexes d'ordre *n* à coefficients réels [ou complexes ordinaires] est dit *réductible* si l'on peut trouver deux *sous-systèmes* de nombres complexes à coefficients réels [ou complexes ordinaires] faisant tous les deux partie du système donné, n'ayant en commun d'autre nombre que zéro, tels que tout nombre du système donné soit la somme d'un nombre du premier sous-système et d'un nombre du second, tels enfin que les deux produits obtenus en multipliant un nombre quelconque du premier sous système par un nombre quelconque du second soient nuls. On dit alors aussi que le système donné est *décomposable* dans les deux sous systèmes, ou encore qu'il est la *somme* de ces deux sous-systèmes. [...] D'après ce qui précède les problèmes énoncés plus haut pour un entier donné *n* se ramènent aux problèmes suivants :
>
> I. Déterminer tous les types irréductibles d'ordre inférieur ou égal à *n*
> II. Déterminer toutes les formes distinctes de ces types.
> III. Déterminer toutes les formes irréductibles appartenant à des types réductibles d'ordre inférieur ou égal à *n*.
>
> [Cartan - Study, 1908, 396].

[…] Le degré et la nature de l'équation algébrique entière de degré minimé à laquelle satisfait un nombre *arbitraire a* d'un système donné peuvent servir de base à la classification des systèmes de nombres complexes. Cette équation $\psi(a) = 0$ peut se déduite de chacun des équations caractéristiques [..] en cherchant le plus grand commun diviseur de chacun des déterminants caractéristiques du nombre $r\varepsilon\text{-}a$ […]. L'équation $n\psi(r) = 0$ s'appelle d'après Molien, l'équation au rang du système ; G. Scheffers l'appelle l'équation caractéristique du système. le degré de cette équation s'appelle le rang du système.
Ainsi le système d'ordre m^2 formé de toutes les matrices à m lignes et m colonnes est de rang m. Les systèmes irréductibles d'ordre 3 sont : I de rang 3, II et III de rang 2 […].
Si l'on pose

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

l'équation au rang du système des quaternions est :

$$r^2\text{-}2a_0 r + a_0^{2h+a}{}_1^{2} + a_3^2.$$

[…]
Classification des systèmes de nombres complexes.
[…] G. Scheffers, s'appuyant sur des considérations tirées de la théorie des groupes finis et continus de transformations, a partagé les systèmes de nombres complexes admettant une unité principale en deux grandes *catégories*. […]. La classification des systèmes de la première catégorie repose sur l'existence d'une *base normale* jouissant des propriétés importantes suivantes. les unités de cette base se partagent en deux groupes $(e_1, e_2, .., e_q)$, $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s)$; les unités du premier groupe forment un système commutatif deR. Dedekind avec

$$e_i^2 = e_i \text{ et } e_i e_k = 0$$

les unités η du second groupe forment un système sans unité principale tel que le produit de deux quelconques de ces unités ne dépende que des unités à indices supérieurs ; enfin tous les produits des unités e_i par une unité donnée η_{ik} sont nuls, sauf deux d'entre eux pour lesquels on a

$$e_i \eta_k = \eta_k e_j = \eta_k.$$

[…] l'on appelle caractère de l'unité η_k, l'ensemble (i,j) des deux indices i et j définis précédemment […].
Le système sans unité principale formé des unités η est enfin bien déterminé, […] tous ses nombres sont des racines de zéro, le système lui-même est nilpotent, au sens de B. Peirce, on l'appelle le radical du système donné.
[…] *Ce théorème ramène la détermination et la classification des systèmes de la première catégorie à la détermination et à la classification des systèmes nilpotents.*
[…] C'est à Th. Molien qu'on doit les principes d'une classification s'étendant aux systèmes de la seconde catégorie ; sa théorie, dont les démonstrations ne sont pas toujours à l'abri de toute critique, a été reprise par une tout autre méthode et complétée par E. Cartan.
[…] Un système (Σ) qui n'admet aucun sous-système invariant est dit *simple*. […]. Un système réductible dont toutes les parties irréductibles sont *simples* est dit *semi-simple*.
Th.Molien a montré que l'ordre de tout système simple est un carré parfait m^2 et que tous les systèmes simples d'ordre donné m^2 appartiennent au même type ; […]. Ces systèmes ne sont autres que ceux qui ont été considérés plus haut et qui sont fournis par l'ensemble des formes bililinéaires à $2m$ variables, ou par l'ensemble des matrices de degré m, ou par l'ensemble des transformations linéaires à m variables.
Le cas où $m = 1$ correspond au système des nombres complexes ordinaires, le cas où $m = 2$ correspond aux systèmes qui appartiennent au type des quaternions.
Les systèmes simples d'ordre 3 ont été considérés par W.K. Clifford et JJ. Sylvester sous le nom de *nonions* […].
Un système simple d'ordre m^2 est de rang m, si

$$A = \Sigma_{ik}\, a_{ik} e_{ik}$$

désigne un nombre arbitraire du système, l'équation au rang est

$$\Psi(r) = |\delta_{ik} r\text{-}a_{ik}| = 0$$

Les équations caractéristiques sont toutes les deux données par la formule

$$\varphi(r) = [\psi(r)]^m = 0.$$

Pour un système de nombres complexes défini de la façon suivante par Cartan en 1897:

> On sait qu'on appelle *système de nombres complexes* d'ordre r, dans le sens le plus habituellement attribué à cette expression, un système de nombres dont chacun est l'ensemble de r nombres ordinaires, réels ou imaginaires, rangés dans un certain ordre et sur lesquels on a défini les opérations fondamentales de l'*addition* et de la *multiplication*, la première opération étant *commutative* et *associative*, la seconde étant *distributive* et *associative*, mais pouvant ne pas être commutative. On suppose de plus possible en général l'opération inverse de la multiplication ou, ce qui revient au même, l'existence d'un *module*, c'est-à-dire d'un nombre qui, multiplié à droite ou à gauche par un nombre quelconque du système, reproduit ce nombre.
> On peut toujours supposer, et d'une infinité de manières, que la somme de deux nombres $(x_1, x_2,\ldots,x_r)$ et $(y_1, y_2,\ldots,y_r)$ est le nombre $(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_r+y_r)$, et que le produit des deux mêmes nombres est formé des r formes bilinéaires des x et des y. Cela permet de mettre un nombre quelconque sous la forme
> $$x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_re_r,$$
> les x étant des nombres ordinaires et les e des nombres du système qu'on appelle unités et qui ne sont au fond que r nombres particuliers de ce système. La loi de multiplication est alors définie par les produits de ces unités deux à deux. [Cartan, 1897, 1217].

La méthode fondamentale qui caractérise les développements de la théorie à partir de 1890 et prend fin avec la théorie des algèbres de Wedderburn de 1907, se caractérise comme une méthode de décomposition d'un système en sous-systèmes associée à la décomposition polynomiale d'une équation algébrique, l'"équation caractéristique" du système :

> On dit qu'un système σ est un *sous-système* de Σ si tous les nombres de σ font partie de Σ. [...]
> 2. Etant donné un nombre x d'un système, l'équation qui a pour racines les nombres ordinaires ω, tels qu'il existe un nombre complexe y satisfaisant à la relation
> $$xy = \omega y,$$
> peut être appelée l'équation caractéristique du système. L'étude de cette équation m'a fourni des résultats très généraux que j'énonce rapidement :
> *Tous les systèmes simples rentrent dans un même type ; ils sont d'ordre p^2, p étant un entier quelconque ; on peut choisir les p^2 unités d'un tel système, de façon qu'en les désignant par e_{ik}, on ait*
> $$e_{ij}e_{jk} = e_{ik}$$
> $$(i,j,k = 1,2,\ldots,p)$$
> *les produits non écrits étant tous nuls.*
> [Cartan, 1897, 1218].

Menée à son terme, la décomposition permet l'énoncé d'une "forme typique" [Weyr, 1890], d'une "forme normale" [Molien, 1893] ou encore d'un "représentant" [Cartan, 1898] permettant la classification des systèmes hypercomplexes. Cette méthode de classification par décomposition est la méthode forte qui unie les textes du corpus. Son origine est indissociable de celle de la théorie des systèmes hypercomplexe elle-même et provient de la

L'équation au rang est irréductible et par suite les systèmes simples appartiennent tous à la second catégorie, sauf si *m* est égal à 1.

[...]

Si un système *(Σ)* n'est ni simple ni semi simple, il admet toujours un sysytème homomorphe simple ou semi simple (Σ'), tel que le sous système invariant (σ) de (Σ) qui correspond au nombre zéro de (Σ') soit *nilpotent*. [...] E Cartan a démontrée de plus qu'on peut toujours prendre [...] une base telle que les unités se partagent en deux groupes $(e_1, e_2,\ldots,e_r)$, $(\eta_1, \ldots\eta_s)$, les unités du premier groupe déterminant un système simple ou semi simple, les unités du second gruope déterminant un système nilpotent invariant dans le système totale ; c'est la généralisation de la théorie de G. Scheffers relative aux systèmes de la première catégorie [..].

Th. Molien et E. cartan ont démontré un théorème fondamental qui ramène la théorie des systèmes de nombres complexes de la seconde catégorie à celle des systèmes de la première catégorie. tout système (Σ) de la seconde catégorie peut se déduire d'un certain système $(\grave{\Sigma})$ de la première catégorie de la manière suivante : on choisit une base normale quelconque $e_1, e_2,\ldots,e_q$; $\eta_1, \eta_2,\ldots,\eta_s$ de $(\grave{\Sigma})$; à chacun des indices $1,2,\ldots,q$ on fait correspondre un entier quelconque $p_1, p_2,\ldots,p_q$, le système (Σ) est alors formé des nombres

$$a_1e_1 + a_2e_2 +\ldots+a_qe_q + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 +\ldots+b_s\eta_s ,$$

en convenant de regarder les coordonnées $a_1, a_2,\ldots,a_q$ respectivement comme des matrices carrées quelconques de degrés respectivement égaux à $p_1, p_2,\ldots,p_q$, les coordonnées $b_1, b_2,\ldots,b_s$ étant des matrices rectangulaires, la matrice b_ρ étant à i lignes et j colonnes si l'unité η_ρ appartient au caractère *(i,j)*. Ces matrices s'ajoutent et se multiplient entre elles [...] et doivent être regardées comme commutables avec les unités e_i et η_ρ [....].

La détermination de tous les systèmes de nombres complexes dépend de la détermination de tous les systèmes de la première catégorie, c'est-à-dire, en fin de compte, de tous les systèmes nilpotents.

[...]

Les facteurs irréductibles des fonctions caractéristiques.

Les propriétés des équations caractéristiques d'un système de nombres complexes peuvent servir de base à la démonstration des théorèmes précédents, c'est la voie suivie par Th. Molien et G. Frobenius ; elles peuvent aussi être déduites de ces théorèmes supposés établis directement, c'est la voie suivie par E. Cartan. Elles ont dans tous les cas une grande importance pour la résolution du problème suivant:

Déterminer le système réduit d'un système donné et trouver une base normale de ce système réduit.

* Supposons qu'un système donné (Σ) de nombres complexes soit tel que le plus grand sous système semi simple auquel il est homorphe soit formé de q parties irréductibles d'ordre $p_1^2, p_2^2,\ldots,p_q^2$ [...] le premier membre de chacune des équations caractéristiques, considéré comme une fonction rationnelle entière de r et des n coordonnées d'un nombre arbitraire de (Σ), contient q facteurs irréductibles distincts ; chacun de cas facteurs est le premier membre de l'équation au rnag de l'un des systèmes simples $(S_1), (S_2), \ldots, (S_q)$; ils sont respectivement de degrés $p_1, p_2, \ldots,p_q$.

reconnaissance d’une même mathématique dans les travaux sur les nombres complexes attachés au nom d’Hamilton et les recherches sur les groupes infinitésimaux qui se développent à la suite de Lie. Les méthodes de classification des substitutions linéaires par la décomposition polynomiale de l’équation caractéristique se transfèrent alors au problème de la caractérisation des systèmes de nombres complexes et, avec elles, se posent les difficultés classiques posées par l'occurrence de racines multiples (encart 6). Les différences de méthodes développées au sein d’une même théorie des systèmes hypercomplexes manifestent les postérités de deux théorèmes distincts permettant la classification des substitutions, le théorème de Jordan de 1870 d’une part et le théorème de Weyr de 1890 d’autre part.

ENCART 5.

Sur les travaux de Lie et Killing.

Les travaux d'abord indépendants de Lie et Killing seront reconnus dans les années 1880 comme participant d'une même théorie des groupes continus de transformations ([1]). Les travaux de Lie sont motivées par la recherche d'une méthode générale pour déterminer les solutions d'équations aux dérivées partielles [Picard, 1883b, 1131] :

> Les analogies entre les équations différentielles linéaires et les équations algébriques ont été depuis longtemps signalées et poursuivies dans des directions différentes. On n'a pas cependant, je crois, cherché à développer pour les équations linéaires une théorie analogue à celle qui a été donnée par Galois pour les équations algébriques. En employant une méthode présentant la plus grande analogie avec celle dont a fait usage l'illustre géomètre, on arrive à une proposition qui semble correspondre au théorème fondamental de Galois, et l'on est ainsi conduit à la notion de ce que j'appellerai le groupe de transformations linéaires correspondant à l'équation différentielle. J'emploie cette expression de groupe de transformations déjà employée par M. Sophus Lie dans son Mémoire si remarquable [Théorie der Transformations-Gruppen (Math. Annal._, t. XVI)], afin de distinguer ce groupe de celui que l'on appelle généralement le groupe de l'équation linéaire.

La méthode de Lie se développe par analogie avec la technique classique pour l'intégration des fonctions qui consiste à manipuler la forme d'une fonction par transformations linéaires afin d'obtenir une forme intégrable. Lie introduit la notion de groupe de transformations qui préserve les solutions des équations différentielles et réduit le problème de l'intégration des équations à l'analyse des groupes de transformations associés. Lorsque qu'il rencontre Lie à Paris et à Berlin en 1870, Klein interprète les méthodes de ce dernier comme une généralisation du programme de Galois des équations algébriques aux équations différentielles [Engel, 1899, xviii]. A un groupe continu G d'ordre n , Lie associe un "groupe infinitésimal" L ([2]). Le groupe G détermine n "transformations infinitésimales" linéairement indépendantes $e_1,\dots e_n$ et des constantes c_{ij}^k qui définissent le "groupe infinitésimal" dont la multiplication est définie par :

$$[e_i,e_j] = \Sigma c_{ij}^k e_k$$

et satisfait $[x,y] = -[y,x]$

ainsi que l'identité de Jacobi

$$[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0.$$

Le problème essentiel qui se développe alors de l'approche de Lie est la caractérisation de ces "groupes infinitésimaux" et notamment des groupes simples. La relation entre le problème de Lie et la caractérisation des systèmes complexes est développée par [Engel, 1886], [Lie, 1889], [Study, 1889b] et [Scheffers, 1889a].

[1] Pour un exposé détaillé des travaux de Killing, leurs liens avec les recherches de Lie et la thèse de Cartan, consulter [Hawkins, 1982].

[2] La notion de groupe infinitésimal s'interprète comme l'algèbre de Lie contemporaine.

2. Un premier point d'origine : les formes canoniques de Poincaré (1884).

L'émergence de la théorie des systèmes hypercomplexes dans les années 1880-1890 manifeste la rencontre de la théorie des groupes de transformations, développée à la suite des travaux de Lie et Killing et détaillée en encart 5, et des travaux anglo-américains sur les quaternions et les algèbres associatives ([4]). La propriété qui permet de mettre en relation les groupes continus de transformations et les systèmes hypercomplexes est énoncée par Poincaré dans une note communiquée aux *Comptes Rendus* en 1884 : tout élément *x* d'un système de nombres complexes définit une substitution linéaire ([5]).

> Les remarquables travaux de M. Sylvester sur les matrices ont attiré de nouveau l'attention dans ces derniers temps sur les nombres complexes analogues aux quaternions de Hamilton. Le problème des nombres complexes se ramène facilement au suivant :
> *Trouver tous les groupes continus de substitutions linéaires à n variables dont les coefficients sont des fonctions linéaires de n paramètres arbitraires.*
> [Poincaré, 1884, 740].

Poincaré saisit à la volée des idées présentées par Sylvester dans ses récentes notes sur l'application de la théorie des matrices au calcul de quaternions (chapitre 4), et les relie à ses préoccupations du moment sur les groupes de transformations et les fonctions fuchsiennes. La note de 1884 sera considérée comme fondatrice de la théorie des systèmes hypercomplexes par Scheffers en 1890 mais restera sans lendemain dans l'œuvre de Poincaré lui-même [Poincaré, 1903, 167]. Ce qui est fondateur, c'est de "ramener" le problème des nombres complexes associé au nom de Hamilton aux travaux sur les groupes de transformations continus se développant à la suite de Lie [Parshall, 1985, 262]

---

[4] Voir les travaux de Thomas Hawkins et Karen Parshall déjà cités en introduction, ainsi que la synthèse faite par Dieudonné sur l'"algèbre linéaire" au XIX[e] siècle sous l'angle de la notion d'espace vectoriel [Dieudonné, 1977] :

> D'une façon générale, pour définir un « calcul » associatif sur les vecteurs de $\ddot{E}^n$, il suffit de connaître les produits de deux quelconques de vecteurs de la base canonique. [...] Ce point de vue est déjà clair pour Hamilton, et à partir de 1870, sous l'impulsion de B. et C.S. Peirce, commence la recherche des tables de multiplication possibles : bien entendu on ne distingue pas deux systèmes hypercomplexes isomorphes. En fait ces tentatives ne dépassent guère la dimension $n = 5$, car on s'aperçoit rapidement de la grande diversité des cas possible : aussi, à partir de 1889 environ, on s'oriente plutôt (surtout parmi les élèves de S. Lie) vers l'étude de systèmes hypercomplexes assujettis à des conditions plus restreintes, liées à des propriétés intrinsèques et non plus dépendantes du choix de la base particulière.

[5] En termes contemporains, on définit une action, la translation à gauche par *x*, qui permet de représenter le système de nombres complexes comme un sous groupe du groupe de Lie *Gln(Ê)*. Voir [Parshall, 1985, 262].

Les travaux de Wilhelm Killing (1847-1923) sont motivés par les questions que posent les découvertes des géométries non euclidiennes, il s'agit de déterminer tous les types de géométrie "acceptables" de l'espace. Dans une série de travaux publiés alors qu'il est professeur au Lyceum Hosianum de Braunsberg, et intitulés "Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen" [1888, 1889a, 1889b, 1890]. Killing cherche à déterminer systématiquement toutes les géométries de "Raumformens" (formes spatiales") satisfaisant certains axiomes essentielles formulés par Helmhotz pour l'étude des déplacements des corps rigides. Une "forme spatiale' à r degrés de mobilité est définie par la donnée de r mouvements infinitésimaux linéairement indépendants [Hawkins, 1982, 129]

$$x \leftrightarrow x+dx$$

où x est un point d'un espace de dimension n. Tout mouvement infinitésimal est représenté par des combinaisosn de r mouvements indépendants $u_i(x)dt$:

$$dx = U_{ij}(x)dt \text{ où } U_{ij}^{(\rho)} = \Sigma c_{ijk}u_k^{(\rho)}$$

L'objet des travaux de Killing est de déterminer les différentes possibilités pour le choix des coefficients c_{ijk} ([3]), c'est-à-dire de classifier tous les groupes de transformations d'ordre n ([4]).

Killing [1889a] démontre que, en plus des 4 types généraux de groupes simples indiqués par Lie, il a seulement 6 autres possibilités. Dans le cas du groupe déterminé par un système hypercomplexe H, le groupe infinitésimal G s'identifie à H avec $[x,y]=xy-yx$ et ce groupe n'est jamais simple car l'identité de H engendre un sous groupe propre stable. On peut alors considérer un autre groupe infinitésimal associé à H et qui peut être simple, en termes contemporains, Killing montre qu'il est possible de choisir une base $e_0,\ldots,e_{n-1}$ telle que $tr(e_i)_R = 0$ et qui forme une sous algèbre de Lie de G notée G_{n-1}. Lie [1889, 326] attire l'attention sur tous les systèmes de nombres complexes pour lesquels le groupe G_{n-1} est simple et montre que les quaternions sont le seul exemple de tels systèmes pour $n=4, 5, 6, 7,8$ (pour $n=9$ il y a les nonions de Sylvester). En termes contemporains, les nonions et les quaternions ont cette propriété car ce sont des algèbres de matrices : G_{n-1} est l'ensemble des matrices de trace 0 donc l'algèbre de Lie du groupe spécial linéaire et Lie a prouvé que de tels algèbres de Lie sont simples. Thomas Hawkins a montré que le résultat de Killing implique que si G_{n-1} est simple alors, comme c'est un sous groupe de du groupe spécial linéaire qui est un des groupes simples de Lie, il doit correspondre au groupe entier et par conséquent H est simple. L'implication selon laquelle tous les systèmes simples sont des algèbres de matrices sera saisie par Molien et Cartan [Hawkins, 1971, 255] :

> Thus, Killing's result made it appear likely that the hypercomplex systems singled out by Lie were simply the complete matrix algebras.

Molien démontre en effet en 1893 que G_{n-1} est simple si et seulement si H est simple et H est simple si et seulement si c'est une algèbre de matrices. Par conséquent G_{n-1} est simple si et seulement si il correspond au groupe spécial linéaire.

---

[3] C'est-à-dire une algèbre de Lie réelle de dimension r et dérivée du groupe de Lie initial:

Soit les opérateurs différentiels

$$X_i = \Sigma u_i^{(\rho)}\delta/\delta x_\rho \text{ et } X_j = \Sigma u_j^{(\rho)}\delta/\delta x_\rho$$

Alors

$$[X_i,X_j] = \Sigma U_{ij}^{(\rho)}\delta/\delta x_\rho = \Sigma c_{ijk}X_k$$

[4] C'est-à-dire la classification de toutes les algèbres de Lie simples. L'ambition d'une classification complète n'est pas, par contre recherchée par Lie dont les préoccupation sont davantage centrées sur des questions analytiques liées aux équations différentielles [Engel,1930,147].

([6]), la classification des "types" de systèmes hypercomplexes bénéficie alors des méthodes de classifications des substitutions développées par Poincaré au début des années 1880 et inspirées de la forme canonique de Jordan ([7]) :

> Voici maintenant quelques-uns des résultats auxquels on peut arriver par cette considération.
> Convenons d'écrire les coefficients d'une substitution quelconque sous la forme d'un Tableau à double entrée. Nous trouverons d'abord que les faisceaux qui donnent naissance à des nombres complexes à multiplication commutative rentrent tous dans des types analogues à ceux qui suivent, pourvu que les variables soient convenablement choisies
>
> $$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 \\ d & c & b & a & 0 \\ e & d & c & b & a \end{vmatrix}$$
>
> $$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix},$$
>
> *a, b, c, d, e* désignant cinq paramètres arbitraires.
> [...] Si l'on considère ensuite un groupe donnant naissance à des nombres complexes à multiplication non commutative, et une substitution quelconque *S* de ce groupe ; si l'on forme l'équation aux multiplicateurs de cette substitution (équation aux racines latentes des matrices de M. Sylvester), cette équation aura toujours des racines multiples.[Poincaré, 1884, 740].

Les quatre "types" donnés par Poincaré correspondent aux quatre types de formes de Jordan des substitutions de quatre variables. La note de 1884 est donc l'occasion d'une première rencontre entre la forme canonique de Jordan et la théorie des matrices, pourtant, si la forme de Jordan donne à la méthode de Poincaré une spécificité qui sera reprise par Cartan (encart 7), elle restera absente des travaux d'auteurs comme Scheffers [1890] ou [Molien, 1893] qui emploieront une méthode de classification des matrices inspirée des travaux de Weyr et qui est détaillé dans le paragraphe suivant.

---

[6] K. Parshall voit dans le mémoire de Poincaré la première reconnaissance que "tout élément *x* d'un système de nombres hypercomplexes définit une transformation linéaire ou substitution, à savoir la translation à gauche par *x*. Le système de nombres hypercomplexes, considéré comme une collection de translations à gauche, Poincaré cherche à déterminer tous les groupes continus de tels transformations. En termes modernes, il recherche tous les sous groupes du groupe de Lie $Gl_n(\hat{E})$" [Parshall, 1985, traduction F.B.].

[7] Cette idée de classer des ensembles donnés par des formes typiques ou des formes canoniques, très utilisée par Poincaré dans les années 1880, provient des travaux de Jordan [1878]. Le lien entre les travaux de Poincaré et de Jordan sera détaillé au chapitre 8 lorsque sera examinée la question de la postérité de Jordan au sein d'un corpus particulier regroupant des travaux de théorie des nombres.

3. Un second point d'origine : système normal et forme typique des matrices chez Weyr (1890).

Le mémoire de Weyr de 1890 est organisé en deux parties. La première, détaillée aux chapitres 4 et 5, s'achève par la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton. La seconde applique la notion de caractéristique d'une matrice aux problèmes classiques de la théorie des formes bilinéaires : classes d'équivalences des faisceaux de formes, classes de similitudes des formes, caractérisation des formes commutatives à une forme donnée, équations différentielles et aux dérivées partielles. Les diverses applications proposées sont résolues par la décomposition d'un système de valeurs en un "système normal" représenté par une "matrice typique". Soit *M* une matrice donnée, de caractéristique $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, Weyr considère les systèmes de valeurs solutions des équations $M(x) = 0$, $M^2(x) = 0$, $M^3(x) = 0$:

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_\alpha};$$
$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_{\alpha+\beta}};$$
$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_{\alpha+\beta+\gamma}}.$$

Des combinaisons linéaires des ces sous systèmes permettent d'obtenir un "système normal" associé à la racine caractéristique 0 et sur lequel la matrice *M* agit d'une manière particulière [Weyr, 1890, 196] :

$$(z'),\ldots,(z^{(\gamma)}) \; ; \; (y'),\ldots,(y^{\beta}) \; ; \; (x'),\ldots,(x^{(\alpha)}),$$
tel que
$$M(z^{(\nu)}) = (y^{(\nu)}),\; M(y^{(\nu)}) = (x^{(\nu)})$$

La même méthode permet d'associer un système normal à chacune des racines caractéristiques μ_α, μ_β,... de *M* par la considération des matrices $M\text{-}\mu_\alpha$, $M\text{-}\mu_\beta$, etc :

> Es sei *M* eine beliebige Matrix n^{ter} Ordnung, welche die resp. α, β, ..., λ-fache Wurzel $\mu_\alpha, \mu_\beta, \ldots, \mu_\lambda$ haben möge. Dann haben die Matrizen
>
> $$M\text{-}\mu_\alpha,\; M\text{-}\mu_\beta, \ldots,\; M\text{-}\mu_\lambda$$
>
> die Null zur α, β, ... λ-fachen Wurzel, und es gehört somit zu jeder von ihnen ein Normalsystem. Bezeichnen wir diese Normalsysteme in der Art, dass den Systemen höherer Ordnung auch größere Accente zukommen und es seien
>
> $$(17)\quad \begin{array}{lllll} (a'),(a''),\ldots, & \textit{Normalsysteme} & \textit{der} & \textit{Matrix} & M-\mu_\alpha, \\ (b'),(b''),\ldots, & " & " & " & M-\mu_\beta, \\ . & . & . & . & . \\ (l'),(l''),\ldots, & " & " & " & M-\mu_\lambda. \end{array}$$

Wir wollen nun den Begriff der Normalsysteme dahin erweitern, dass wir die Gestammtheit der *n* Systeme (17) Normalsysteme der Matrix *M* nennen. [Weyr, 1890, 199].

[Traduction, F.B.]. Soit *M* une matrice quelconque d'ordre *n*, dont les racines μ_α, μ_β, ..., μ_λ ont pour multiplicités respectives α, β,..., λ. Alors, la racine caractéristique 0 a respectivement pour multiplicités α, β, ... λ dans les matrices $M-\mu_\alpha$, $M-\mu_\beta$,..., $M-\mu_\lambda$, à chacune de ces matrices, il correspond un système normal. Soit

$$
(17)\quad
\begin{array}{lccccc}
(a'),(a''),..., & systeme & normal & de & la\ matrice & M-\mu_\alpha, \\
(b'),(b''),..., & " & & " & " & M-\mu_\beta, \\
. & . & & . & . & . \\
(l'),(l''),..., & " & & " & " & M-\mu_\lambda.
\end{array}
$$

L'ensemble des *n* systèmes (17) sera dénommé système normal de la matrice *M.*

La notion de système normal permet de caractériser les classes de similitudes de matrices, "il y a une relation simple entre les systèmes normaux de deux matrices semblables" [Weyr, 1890, 202] : si

$$(\xi), (\xi'), (\xi''),\dots ;\ (\eta), (\eta'), (\eta''),\dots, (\zeta), (\zeta'), (\zeta'')\dots,$$

compose le système normal de la matrice $M'-\mu_\alpha$ alors :

$$
\begin{aligned}
(M'-\mu_\alpha)(\xi^{(\nu)}) &= (0)\\
(M'-\mu_\alpha)(\eta^{(\nu)}) &= (\xi^{(\nu)})\\
(M'-\mu_\alpha)(\zeta^{(\nu)}) &= (\eta^{(\nu)})\\
&\textit{etc.}
\end{aligned}
$$

Et si M est une matrice semblable à *M'*, $M' = Q^{-1}MQ$, Weyr pose :

$$
\begin{aligned}
Q(\xi') &= (x'),\\
Q(\xi'') &= (x''),\dots,\\
Q(\eta') &= (y'),\\
Q(\eta'') &= (y''),\dots,\\
Q(\zeta') &= (z'),\\
Q(\zeta'') &= (z''),\dots,
\end{aligned}
$$

Et le système $(x'), (x''),\dots,(y'), (y''),\dots, (z'), (z''),\dots$ est un système normal de la matrice $M-\mu_\alpha$:

$$
\begin{array}{ccc}
(M'-\mu_\alpha)(\xi^{(\nu)}) = (0) & (M'-\mu_\alpha)(\eta^{(\nu)}) = (\xi^{(\nu)})) & (M'-\mu_\alpha)(\zeta^{(\nu)}) = (\eta^{(\nu)})\\
Q^{-1}(M-\mu_\alpha)Q(\xi^{(\nu)}) = (0) & Q^{-1}(M-\mu_\alpha)Q(y^{(\nu)}) = (\xi^{(\nu)})) & Q^{-1}(M-\mu_\alpha)Q(z^{(\nu)}) = (\eta^{(\nu)})\\
(M-\mu_\alpha)(x^{(\nu)}) = (0) & (M-\mu_\alpha)(y^{(\nu)}) = (x^{(\nu)}) & (M-\mu_\alpha)(z^{(\nu)}) = (y^{(\nu)})
\end{array}
$$

Par conséquent, les systèmes normaux de deux matrices semblables se correspondent et Weyr en déduit que deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont même racines et mêmes caractéristiques [Weyr, 1890, 203-204]. Chaque classe de similitude de matrices est alors caractérisée par une "forme typique", correspondant à l'écriture d'une matrice dans son système normal [Weyr, 1890, 204-208]. La forme typique est obtenue par la méthode de composition des compartiments correspondant à chaque racine caractéristique que nous avons vu au chapitre 5. La forme typique d'une matrice est alors définie par son action sur le système normal associé ([8]) :

$$(M'-\mu_\alpha)(\xi^{(\nu)}) = (0)$$
$$(M'-\mu_\alpha)(\eta^{(\nu)}) = (\xi^{(\nu)})$$
$$(M'-\mu_\alpha)(\zeta^{(\nu)}) = (\eta^{(\nu)})$$

[8] D'un point de vue contemporain, la forme typique de Weyr est la même que la forme canonique de Jordan d'une matrice.

II. DECOMPOSITION DES SYSTEMES HYPERCOMPLEXES, DECOMPOSITION POLYNOMIALE.

1. Groupes de transformations et systèmes hypercomplexes.

La relation entre systèmes hypercomplexes et groupes de transformations établie par Poincaré en 1884 et que nous avons vu dans le paragraphe II n'a pas d'écho immédiat. C'est surtout à la suite d'une publication de Weierstrass dans les *Göttingen Nachrichten* que des travaux sur les systèmes hypercomplexes se développent sur le continent. Dans une lettre adressée à son étudiant H.A. Schwartz, Weierstrass présente les "quantités complexes formées avec n unités" comme une extension des quantités complexes $a+ib$ de Gauss, et considère l'"arithmétique" des quantités a, b définies à l'aide de n "unités de base" par la forme $\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+\ldots\xi_n e_n$:

$$a+b = \Sigma(\alpha_i+\beta_i)e_i$$
$$si\ e_ie_j = \Sigma\varepsilon_{ijk}ek \text{ alors } ab = \Sigma(\varepsilon_{ijk}\alpha_i\beta_j)e_k$$

[Weierstrass, 1884, 395].

Contrairement aux systèmes de Poincaré, la multiplication est toujours considérée comme commutative chez Weierstrass et dans les développements arithmétiques de Hölder, Dedekind, Petersen et Kronecker qui suivent la publication de la lettre de 1884 ([9]) ; Dedekind, notamment, explicite les conditions auxquelles les unités e_r et e_s commutent [Dedekind, 1885] ([10]). C'est dans le cadre de l'étude des groupes de transformations continus que les idées de Poincaré de 1884 trouvent une postérité. La relation entre les groupes infinitésimaux et les systèmes hypercomplexes est étudiée par Engel et Killing et développée par Study et Scheffers (encarts 5 et 6). Scheffers étudie à l'université de Leipzig (1884-1888) à l'époque où Lie y succède à Klein (1886). Il consacre, sous la direction de Lie, sa pre-dissertation [1889a,b], sa dissertation [1891a] et son habilitation [1891b] aux relations entre la théorie

[9] Voir [Parshall, 1885, 267].

[10] Voir le chapitre 4 pour la réponse de Kronecker [1888] à Weierstrass.

ENCART 6.

Un exemple de la méthode de décomposition des systèmes chez Scheffers.

[Scheffers, 1891, 322-323] :

Ein Beispiel zu unseren Sätzen mag zweckdienlich sein:

Das System in fünf Einheiten (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5):

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ e_1 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & e_5 \end{array}$$

ist reducibel. Nach Satz (2) oder (3) nämlich hat man, um dies zu erkennen, eine Zahl

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_5 e_5$$

zu suchen, deren Quadrat gleich x selbst ist. Hier ist nun

$$x^2 = 2x_1 x_4 e_1 + x_2{}^2 e_2 + 2x_3 x_5 e_3 + x_4{}^2 e_4 + x_5{}^2 e_5.$$

Soll dies gleich x sein, so muss

$$2x_1 x_4 = x_1, \;\; x_2{}^2 = x_2, \;\; 2x_3 x_5 = x_3, \;\; x_4{}^2 = x_4, \;\; x_5{}^2 = x_5$$

sein. Entweder ist also $x_5 = 1$ oder 0. Ist $x_5 = 1$, so kommt $x_3 = 0$. Dasselbe kommt für $x_5 = 0$. Ferner ist $x_4 = 1$ oder 0 und beide Male kommt $x_1 = 0$. Endlich kann $x_2 = 1$ oder 0 sein. Das System kann also in drei Theilsysteme zerlegt werden, deren Moduln e_2, e_4, e_5 sind. Da alle Producte mit e_2 nur e_2, alle mit e_4 nur e_1 und e_4, alle mit e_5 nur e_3 und e_5 enthalten, so sind (e_2), (e_1, e_4) und (e_3, e_5) die drei Theilsysteme. Dies tritt in Evidenz, wenn e_1 mit e_2 und e_3 mit e_4 vertauscht wird, in der Form der Tafel:

$$\begin{array}{c|cc|cc} \boxed{e_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & e_5 \end{array}$$

Die Umrahmungen sollen die Theilsysteme hervorheben. Alle Stellen der Tafel, die keinem Theilsystem angehören, sind, wie es sein muss, mit Nullen besetzt.

Die charakteristische Gleichung von (e_1) lautet:

$$x - x_1 e_1 = 0,$$

die von (e_2, e_3):

$$(x - x_3 e_3)^2 = 0,$$

die von (e_4, e_5):

$$(x - x_5 e_5)^2 = 0,$$

wenn nämlich x_1, x_3, x_5 die Coefficienten der resp. Moduln e_1, e_3, e_5

des groupes de transformations continus et la théorie des nombres hypercomplexes ([11]) :

> So gelingt es im Zusammenhang mit der Lie'schen Theorie der Transformationsgruppen, die allgemeine Theorie der Zahlensysteme weiter auszubauen. Der Begriff der endlichen continuirlichen Transformationsgruppe umfasst den des Zahlensystems und daher fliessen aus den viel allgemeineren Sätzen der Gruppentheorie ohne weiters eine Reihe wichtiger Folgerungen in betrefft der Zahlensysteme.
> [Scheffers, 1891, 293].
>
> [Traduction, F.B.]. C'est en rapport avec la théorie des groupes de transformations de Lie que sera développée dans la suite de ce travail la théorie générale des systèmes de nombres. La notion de groupe fini de transformations continu englobe celle de système de nombre et ne série de résultats importants sur les systèmes de nombres se déduisent donc des énoncés généraux de la théorie des groupes .

Chez Scheffers, si l'addition des grandeurs hypercomplexes doit suivre les règles de l'arithmétique la multiplication ne doit pas être réduite au cas de la commutativité qui "ne joue aucune rôle fondamental" et "réduit la nouvelle notion de nombre" [Scheffers, 1891, 295]. Seules l'associativité et la distributivité de la multiplication jouent un rôle "fondamental" puisqu'elles impliquent une "relation intime avec la théorie des groupes" [Scheffers, 1889, 290]. La théorie de Scheffers déplace l'étude des "nombres complexes" de l'arithmétique à l'étude des groupes de transformations, le produit est interprété comme définissant une transformation linéaire homogène sur les systèmes $x_1, \dots x_n$, interprétés comme des coordonnées homogènes de l'espace à n dimensions :

> Jede Productbildung in unserem Systeme $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ lässt sich als eine *lineare Transformation* in einem Raume n^{ter} Stufe auffassen.
> Multipliciren wir nämlich
> $$x = \Sigma x_i e_i \text{ mit } y = \Sigma y_k e_k,$$
> so kommt eine Zahl
> $$s' = \Sigma s'_s e_s,$$
> für die
> $$x'_s = \Sigma_i \Sigma_k \gamma_{iks} x_i y_k$$
> $$(s = 1,2,\dots n).$$
> ist, und diese n Gleichungen stellen eine lineare homogene Transformation von $x_1, x_2,\dots,x_n$ in $x'_1, x'_2,\dots,x'_n$ dar $y_1, y_2,\dots,y_n$ spielen dabei die Rolle von blossen Parametern. Versteht man unter $x_1, x_2,\dots,x_n$ homogene Punktcoordinaten in einem Raume n^{ter} Stufe, so kann x als ein Punkt $(x_1, x_2,\dots,x_n)$ desselben gedeutet werden, ebenso wie x'. Die Gleichung
> $$x' = xy$$

[11] S'appuyant sur les travaux de lie sur les groupes projectifs à deux variables [Lie, 1884], Scheffers détermine les groupes de transformations continus à trois variables [Scheffers, 1889a, 290] et les cinq systèmes hypercomplexes de dimension 3 [Scheffers, 1889a].

der Theilsysteme vorstellen. Demnach ist die charakteristische Gleichung des ganzen Systemes nach Satz (5):

$$(x - x_1 \varepsilon)(x - x_3 \varepsilon)^2 (x - x_5 \varepsilon)^2 = 0,$$

wo $\varepsilon = e_1 + e_3 + e_5$ ist, also die des ganzen Systems in seiner ursprünglichen Form:

$$(x - x_2 \varepsilon)(x - x_4 \varepsilon)^2 (x - x_5 \varepsilon)^2 = 0.$$

Die Zusammensetzung mehrerer Systeme $A, B, C \ldots$ zu einem einzigen S hat grosse Aehnlichkeit mit der Addition der elementaren Mathematik. Denn wie dort gilt hier das commutative und das associative Gesetz, nach denen die Reihenfolge der einzelnen Systeme $A, B, C \ldots$ in der Zusammensetzung zum System S völlig gleichgültig ist. Dies berechtigt uns, die Zusammensetzung mehrerer Systeme $A, B, C \ldots$ zu einem einzigen S, wie sie in diesem Paragraphen betrachtet wurde, symbolisch als *Addition* zu bezeichnen:

$$S = A + B + C + \cdots.$$

So werden wir das obige als Beispiel gebrachte System $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ in seiner letzten Form symbolisch so bezeichnen:

$$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = (e_1) + (e_2, e_3) + (e_4, e_5).$$

Zwei oder mehrere Zahlensysteme addiren heisst also, das Zahlensystem bilden, das in jene Systeme zerfällt.

Augenscheinlich gelten die Sätze:

(6) *Kennt man alle irreducibelen Zahlensysteme in* $1, 2 \ldots n$ *Einheiten, so kennt man überhaupt alle Zahlensysteme in* $1, 2 \ldots n$ *Einheiten.*

Ferner:

(7) *Der Grad eines reducibelen Zahlensystems ist gleich der Summe der Grade seiner Theilsysteme.*

Endlich:

(8) *Ist ein Zahlensystem reducibel, so ist es dann und nur dann ein Nichtquaternionsystem, wenn keines seiner Theilsysteme ein Quaternionsystem ist.*

Somit gilt auch der folgende Satz:

(9) *Kennt man alle irreducibelen Nichtquaternionsysteme in* $1, 2 \ldots n$ *Einheiten, so kennt man ohne Weiteres überhaupt alle Nichtquaternionsysteme in* $1, 2 \ldots n$ *Einheiten.*

ist, alsdann der kürzeste analytische Ausdruck für die durch (4) dargestellte lineare Transformation de Punkte x dieses Raumes.
[Scheffers, 1891, 298].

[Traduction, F.B.]. Chaque équation produit d'un système $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ s'exprime comme une *transformation linéaire* sur un espace de degré n.
Si l'on multiplie

$$x = \Sigma x_i e_i \text{ et } y = \Sigma y_k e_k,$$

on obtient le nombre

$$s' = \Sigma s'_s e_s,$$

avec

$$x'_s = \Sigma_i \Sigma_k \gamma_{iks} x_i y_k$$
$$(s = 1,2,\ldots n).$$

et ces n équations définissent une transformation linéaire homogène de $x_1, x_2,\ldots,x_n$ en $x'_1, x'_2,\ldots,x'_n$ et $y_1, y_2,\ldots,y_n$ jouent le rôle de paramètres. On interprète $x_1, x_2,\ldots,x_n$ comme des coordonnées homogènes d'un point d'un espace homogène de degré n ; x peut lui même s'interpréter comme le point $(x_1, x_2,\ldots,x_n)$, et de même pour x'. L'équation

$$x' = xy$$

est donc une expression analytique abrégée pour la transformation linéaire (4) des points x de l'espace.

Cette identification permet à Scheffers d'employer les méthodes développées par Lie pour les groupes à paramètres [Scheffers, 1891, 298-300] auxquelles sont mêlées de nouvelles considérations propres à la classification des transformations linéaires et témoignant de la postérité des idées de Weyr.

ENCART 7.

La réponse de Cartan aux difficultés posées par les racines multiples :

une postérité diffuse de la forme de Jordan.

[Cartan, 1894, 639]

> Lorsqu'on a à intégrer un système d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre qui admet un certain ensemble de transformations dépendant de paramètres arbitraires, ou, pour traiter un problème plus précis auquel la méthode d'intégration ramène toujours le précédent, lorsqu'on a à intégrer une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre à $n+1$ variables, $x, x_1, x_2,\ldots, x_n$ admettant un groupe fini et continu G, simplement transitif en $x_1, x_2,\ldots,x_n$ don on connaît les équations finies, on réduit le problème, en suivant la méthode de M. Lie, à l'établissement d'un certain nombre d'équations auxiliaires *irréductibles*, à groupes *simples* et qui rentrent toutes dans un certain nombre d'équations auxiliaires de types connus. Ce dernier fait, qu'on sait d'avance sur quels types d'équations auxiliaires on tombera, est dû à ce qu'on connaît toutes les structures de groupes simples et, correspondant à chacune de ces structures, un groupe effectif échangeant entre elles le moindre nombre possible de variables.
>
> Mais, pour arriver à l'établissement de ces équations auxiliaires, il faut, abstraction faite de quelques opérations dont la nature n'est pas susceptible d'être précisée, résoudre les problèmes suivants :
>
> 1° *Décomposer un groupe donné G en une série normale de sous groupes*
>
> $$G, G_1, G_2,\ldots, G_p,$$
>
> chacun des groupes de cette série étant un sous-groupe invariant de celui qui le précède immédiatement, et le dernier G_p se réduisant à la transformation identique.
>
> 2° Etant donné un groupe simple, réduire la structure de ce groupe à sa forme canonique

Les travaux de Cartan et Molien sur les systèmes hypercomplexes sont tous deux inspirés des recherches de Killing et Scheffers. Les méthodes développées par les deux mathématiciens sont cependant distinctes. L'une de ces différences est portée par la postérité, chez Molien des méthodes de décomposition matricielle de Weyr pour résoudre les difficultés posées par l'occurrence de racines caractéristiques multiples. Pour mettre en évidence les différences d'approches que cette postérité implique, il est nécessaire de résumer succinctement les résultats et méthodes de Cartan (l'encart 8 donne une description par Poincaré des travaux de Cartan). Dès 1895, Cartan [1895, 545] développe les implications de sa thèse consacrée aux groupes de transformations pour l'étude des systèmes hypercomplexes. Il se propose alors d'établir les résultats de Scheffers [1891] par des méthodes indépendantes de la théorie des groupes de Lie [Cartan, 1931, 371]. Ses conclusions sont annoncées dans les *Comptes Rendus* [1897a et b] et apparaissent avec les preuves détaillés dans le mémoire de [1898]. Cartan reprend la notion de caractère d'un élément de Scheffers, qu'il appelle type, pour obtenir le résultat selon lequel un système H est composé d'un système invariant "pseudo nul" et d'un système semi simple, c'est-à-dire qui ne contient pas de sous système invariant ([5]).

Les résultats principaux de Cartan sont les suivants :

- Tous les systèmes simples de nombres hypercomplexes sont du même type, formés de p^2 éléments de base e_{ij} et par loi de multiplications donnés par $e_{ij}e_{jl} = e_{il}$, $e_{ij}e_{\lambda l} = 0$ $(j \text{ ý } \lambda)$
- Tout système est formé par un sous système simple ou semi simple et un sous système invariant pseudo nul. La nature du système semi simple est parfaitement déterminée.

---

[5] Le résultat de Scheffers énonce que tout système de non quaternions a une base $(e_1,\ldots,e_r, \eta_1,\ldots,\eta_s)$ telle que

$$e_ie_j = \delta_{ij}e_i$$

et chaque η_i a un caractère défini (k,l) tel que

$$e_k\eta_i = \eta_ie_l = \eta_i \text{ et } e_p\eta_i = \eta_ie_q = 0 \text{ si } p \text{ ý } k \text{ et } q \text{ ý } l$$

et le polynôme minimal $q_u(\omega)$ a la forme

$$q_u(\omega) = \Pi_{1 \text{Â} i \text{Â} r}(\omega-x_i)^{ki} \text{ où } u = \Sigma_{1 \text{Â} i \text{Â} r}\, x_ie_i + \Sigma_{1 \text{Â} i \text{Â} s}\, \xi_i\eta_i$$

En termes contemporains ; Scheffers montre que $H = H_1+\ldots+H_r+R$ où H_i est le système engendré par e_i et R par η_i tel qur pour tout u de R le polynôme caractéristique $q_u(\omega) = \omega^k$ et $p_u(\omega) = \omega^n$.

2. Décomposition de l'équation caractéristique et décomposition des systèmes chez Scheffers (1891).

La propriété selon laquelle, pour tout nombre complexe u, il existe un entier k minimal tel que u^k est une combinaison linéaire de $1, u, u^2, \ldots, u^{k-1}$, mise en évidence par Weierstrass [1885], donne lieu à une méthode d'étude des systèmes hypercomplexes par la considération de *polynômes* associés [Study, 1889a] ([12]). Scheffers met cette propriété en relation avec la notion d'"équation de plus petit degré des théories des formes bilinéaires de Frobenius [1878] et de Weyr [1890] ([13]). Pour tout nombre complexe u, la relation de dépendant linéaire

$$u^k + \varphi_1 u^{k-1} + \ldots + \varphi_{k-1} u + \varphi_{k1} = 0$$

définit une équation polynomiale

$$q_u(x) = x^k + \varphi_1 x^{k-1} + \ldots + \varphi_{k-1} x + \varphi_{k1} = 0$$

dénommée "équation caractéristique du système" et, si l'on interprète u comme une transformation linéaire, $q_u(x)$ est l'équation de degré minimale au sens de la théorie des formes bilinéaires de Frobenius et de Weyr [Scheffers, 1891, 304]. Les tables de calculs de l'équation caractéristique réalisées par Scheffers en 1889, font apparaître qu'à l'exception des systèmes contenant les quaternions comme sous système, q_u se factorise en facteurs linéaires [Scheffers, 1891, 314]. Si $u_1,\ldots,u_n$ sont les "racines caractéristique" de l'équation caractéristique de u :

$$q_u(x) = det(x - u)$$

l'équation caractéristique d'un système de "non quaternions" se factorise en facteurs linéaires interprétés comme des diviseurs de 0 :

$$(x-u_1\varepsilon)\ldots(x-u_k\varepsilon) = 0$$

Thomas Hawkins a mis en évidence la manière dont l'étude des décompositions polynomiales des équations caractéristiques des systèmes hypercomplexes de dimension 5 [Scheffers, 1889b, 446b] amène Scheffer à distinguer entre deux

[12] Le travail de Study, étudiant d'Engel le bras droit de Lie et suivant de Grassmann, généralise les approches de Weierstrass et Dedekind. Consulter [Hawkins, 1972 et 2000] :

[13] Pour une description détaillée des travaux de Scheffers entre 1889 et 1891 voir [Parshall, 1985,272] :

> Indeed, many new tools and definitions had found their way into Scheffer's work by 1991. For the first time, he picked up on the notion of the minimum polynomial of a hypercomplex number system which had already been developed in the works of Sylvester and Frobenius. Scheffers recognized the importance of the factorizaion of this polynomial and he explored the meanings of the factor relative to the structure of the algebra.

- **Les difficultés de Killing face aux racines multiples des équations des groupes.**

La méthode de Killing consiste à chercher une simplification des équations de la composition des mouvements (encart 5) sous la forme $U_{ij} = \omega u_k$. Cette approche implique de considérer une équation algébrique, que Molien dénommera "équation de Killing" ([6]), analogue à l'équation caractéristique de la théorie des formes bilinéaires et à laquelle Killing applique la théorie des diviseurs élémentaires. Killing est familier de la théorie de Weierstrass : sa dissertation de 1873 est consacrée à une application géométrique des diviseurs élémentaires à la classification des faisceaux de quadriques et coniques. Contrairement à Lie qui traite l'"équation caractéristique" d'une manière "générique" [Hawkins, 1985, 133], c'est-à-dire en négligeant l'occurrence de racines multiples, "par son approche de la classification par l'équation caractéristique et la théorie de Weierstrass des diviseurs élémentaires, Killing était en position de faire des observations conséquentes que Lie ne fait apparemment jamais" [Hawkins, 1971] ([7]).
La grande diversité des décompositions possibles de l'équation caractéristiques en diviseurs élémentaires oblige cependant Killing à imposer des conditions particulières [Hawkins, 1985].

Les méthodes de Cartan, sont, comme celles de Molien, basées sur la définition des équations caractéristiques d'un système hypercomplexe et la décomposition en sous systèmes associés aux racines de ces équations. Les succès des méthodes de Molien et Cartan sont dus à une même capacité à associer de manière générale la décomposition de l'équation caractéristique à la décomposition des systèmes. En termes contemporains, ils se basent sur un équivalent de la forme canonique de Jordan de la décomposition matricielle [Hawkins, 1982, 179] :

> [...] Killing had been relatively successful in l analyzing the structure of simple groups [...], but his approach was primitive from a methodological standpoint. It consisted in choosing a basis $X_1,...,X_r$ for g which put adX_1 in its Jordan-Weierstrass canonical form, where X_1 is the regular elementt generating g_0 : $g_0 = g_0(X_1)$. Thus the form of the products $[X_1,X_i]$ was known, and the object was to determine sufficiently the form of the products $[X_i, X_j]$ so that general structure theorems should emerge. The form of the products $[X_i, X_j]$ was to be determined by sheer calculation involving repeated use of the Jacobi identity. For a completely general canonical form these calculations proved unmanageable to Killing, who was thus forced to carry them out under restrictive assumptions such as the assumption that the canonical form was relatively simple.

[6] C'est-à-dire l'équation le polynôme caractéristique de l'algèbre de Lie : $[X,Y] = \omega Y$
Si

$$X = \Sigma e_i X_i \text{ et } Y = \Sigma y_j X_j$$

alors l'équation $[X,Y] = \omega Y$ se ramène à l'équation algébrique

$$\Delta(\omega) = |\gamma_{kj} - \omega\delta_{kj}| = (-1)^r[\omega h r^{-\psi}{}_1(e)\omega^{r-1} + \psi_2(e)\omega^{r-2} - \ldots] = 0$$

[7] [Hawkins, 1971] :
If ω_α and ω_β denote non zero characteristic roots and X_α, X_β satisfy $[X_1,X_\beta] = \omega_\alpha X_\alpha$ $[X_1,X_\beta] = \omega_\beta X_\beta$, then the Jacobi identity $[X_1 X_\alpha X_\beta] = 0$ shows that

$$[X_1, [X_\alpha,X_\beta]] = (\omega_\alpha + \omega_\beta)[X_\alpha,X_\beta].$$

Hence if $[X_\alpha, X_\beta]$ ý 0 either $\omega_\beta = -\omega_\alpha$ and $[X_\alpha, X_\beta]$ is a linear combination of $X_1,\ldots,X_k$ or $\omega_\gamma = \omega_\alpha + \omega_\beta$ is another root of the characteristic equation. This is of course fundamental to the structural analysis of Lie algebras catégories de systèmes qu'il appelle d'abord "systèmes coniques" et "non coniques" [Scheffers, 1889b, 457], puis "systèmes de quaternions" et de "non quaternions" [Scheffers, 1891, 293] ([14]). Cette distinction établie, Scheffers met en œuvre une méthode de réduction détaillé en encart 7. Un système de nombres est dit réductible si ses éléments de bases peuvent être arrangés en deux "collections " $e_1, e_2, \ldots$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ telles que :

- le produit d'un élément e_i et d'un élément ε_i est nul.
- le produit de deux éléments e_i et e_j appartient à la collection $e_1, e_2, \ldots$

Il s'agit alors de *décomposer* les systèmes hypercomplexes en systèmes réduits dont on détermine explicitement les éléments de base et les lois de multiplication ([15]). La méthode de Scheffers est reprend la technique de Weyr qui associe la décomposition de l'équation minimale q_u d'une matrice et la décomposition d'un système de valeurs en sous systèmes établie. Si un système réductible H est décomposé en deux sous systèmes H_1 et H_2 :

$$H = H_1 + H_2,$$

l'équation caractéristique de H est le produit des équations de H_1 et H_2. Cette propriété permet une décomposition d'un système de nombres en sous systèmes associée à la décomposition polynomiale de q_u en un produit de facteurs du type $det(x\text{-}u_s)$ où u_s est une racine caractéristique [Scheffers, 1891, 314]. Comme le montre l'encart 8, la réduction d'un système à un système normal analogue à celui de Weyr permet à Scheffers d'obtenir des résultats partiels sur la classification des systèmes hypercomplexes de dimensions inférieures à 8 [Scheffers, 1891, 300-322].

---

[14] Ces catégories renvoient à la division établie par Lie entre groupes intégrables et non intégrables [Scheffers, 1891, 293].
En termes contemporains, un système de nonquaternions est de la forme

$$\hat{E} \oplus \hat{E} \oplus \ldots \oplus \hat{E} \oplus N,$$

où N est le radical de l'algèbre, un système de quaternions est composé de :

$$M_{n1}(\hat{E}) \oplus M_{n2}(\hat{E}) \oplus \ldots . \oplus M_{nj}(\hat{E}) \oplus N,$$

où $M_{nj}(\hat{E})$ est l'algèbre des $n_i \times n_i$ matrices sur Ê [Parshall , 1985, 272].

[15] La caractérisation des lois de multiplication des systèmes réduits sera reprise par Cartan comme le montre l'encart 9. Voir [Hawkins, 1972].

> On the more theoretical side, Scheffers also showed that every non quaternion system have a basis $e_1, \ldots ; , e_n$ such that e_ie_j is a linear combination of $e_1 .. e_k$ where k is the smaller of i and j. In this basis the matrix of u_R factors into linear factors. It follows immediately that the characteristic polynomial $p_u(\omega)$ of u_R also has a linear factorisation over $C(u_1 \ldots u_n)$

Etant donné un groupe continu *G,* Killing choisit une base $X_1,\ldots,X_r$ de manière à écrire la transformation X_1 sous sa "forme normale de Weierstrass". De cette manière, la forme des produits $[X_1,X_i]$ est parfaitement connue. La difficulté tient à exprimer une forme normale générale, représentant toutes les possibles décomposition du polynôme caractéristique en diviseurs élémentaires. Killing est forcé d'imposer des conditions restrictives [Hawkins, 1971, 179]. et doit supposer la forme normale suffisamment simple [Killing, 1889a,60]

> Um die Entwicklung recht übersichtlich zu gestalten und denjenigen Fall zunächst zu erörtern, wo alle Formeln sich vollständig hineinschreiben lassen, machen wir vorläufig die beiden Voraussetzungen...

C'est par l'étude de cas particuliers correspondant à des formes normales simples que Killing induit des résultats généraux sans pour autant conduire les raisonnements et calculs qui permettraient de les établir en général [Killing, 1889a, 58] :

> Es kann aber nicht geleugnet werden, dass die Betrachtung der mehrfachen Wurzeln manches Lästige mit sich leicht auf einen einheitlichen Typus zurückführen lassen. Bei der Northwendigkeit, stets mehrere Fälle zu unterscheiden, liegt die Befürchtung ausserordentlich nahe, dass ich eine Möglichkeit könnte übersehen haben. Schon aus diesem Grunde verhehle ich mir nicht, dass ess wünschenwerth wäre, die von mir gewonnenen Ergebnisse auf einen directeren oder, vielleicht besser gesagt, einem einheitlicheren Wege zu erweisen.

En recourant à l'énoncé d'une forme canonique parfaitement générale, Cartan surmonte les difficultés qu'imposent les arguments de théorie des déterminants des raisonnements de Killing. Il construit une méthode pour caractériser les groupes continus indépendamment de la nature de la forme canonique [Hawkins, 1971] :

> Cartan did not have to resort to the determinant theoretic arguments that Killing explored with reluctance and trepidation. He was able to work under the hypothesis of a completely general Jordan-Weierstrass canonical form because he did not need to become embroiled in the details required to work out explicitely simple forms for $[X_i, X_j]$.
>
> Of course, both he and Killing, relied upon the relation $[g_\alpha\ g_\beta] \dashv g_{\alpha+\beta}$. But the function ψ_2 provided Cartan with the means of circumventing such details. The non degeneracy of ψ_2 enabled Cartan to concentrate his calculational skill to more effective use. It provided a focus that Killing lacked.
>
> Cartan perceived that Killing line of reasoning leading to 1.15 could be carried without the aid of any special assumptions about the nature of the Jordan-Weierstrass canonical form or the nature of g_0. That is, if ω_α and ω_β are any 2 roots such that $\omega_{\alpha'} = -\omega_\alpha$ is also a root, then if X_α☻g_α, $X_{\alpha'}$☻$g_{\alpha'}$, $\tau_\alpha = [X_\alpha, X_{\alpha'}]$ [...]thus $\omega_\beta(\tau_\alpha)$ is a rational multiple of $\omega_\alpha(\tau_\alpha)$

III. DECOMPOSITION ET REPRESENTATION (1893-1904).

1. Représentation des systèmes hypercomplexes par des formes bilinéaires chez Molien (1893).

Theodor Molien (1861-1941), originaire de Riga, effectue ses études à l'université de Yurev en Estonie et à Leipzig (1884-1885). Sa thèse de 1892 sur les systèmes hypercomplexes est publiée en 1893 dans les *Mathematische Annalen* sous le titre "Ueber Systeme höherer complexer Zahlen" [Molien, 1893a]. Les résultats de Molien sur la structure des systèmes hypercomplexes seront considérés par Frobenius en 1904, comme équivalents à ceux de Cartan de 1898 détaillés en encart 8. Cartan et Molien puisent une inspiration commune dans les travaux de Lie, Killing, Study et Scheffers. La méthode développée par Molien n'en est pas moins originale et inspirera les travaux de Frobenius sur la représentation de groupes en 1897 ([16]). Cette section se concentre sur la postérité des idées de Weyr qui fait l'une des originalités du mémoire de Molien de 1893, pour tout complément, sur les travaux de Molien, consulter Parshall [1985] et Hawkins [1971 et 1986] ([17]). L'originalité de l'approche de Molien par rapport aux travaux de Scheffers et Cartan tient à l'emploi des matrices pour "représenter" les systèmes hypercomplexes, la représentation matricielle s'accompagnant d'une méthode de décomposition à une "forme normale" permettant la classification des systèmes :

> Meine Untersuchungen ergeben nun den Satz, *dass jedes ursprüngliche Zahlensystem nur eine quadratische Anzahl von Grundzahlen besitzt, und weiter, dass die einer solchen zugeordneten Gruppe identisch mit der Parametergruppe der allgemeinen linearen und homogenen Gruppe ist.* In anderer Ausdrucksweise heisst dies: jedes ursprüngliche Zahlensystem wird durch eine quadratische Matrix repräsentiert, deren Elemente von einander unabhängig sind. Ein weiteres Hauptergebnis meiner Arbeit besteht in der Auffindung einer *Normalform* für jedes Zahlensystem. Diese Normalform gestattet *alle Zahlensysteme* derart *in Classen einzutheilen*, dass alle, unendlich vielen, Systeme jeder Classe durch ein System der Classe bestimmt sind.
> *Jeder Classe gehört ein einziges nach Scheffer'scher Terminologie "Nichtkegel-schnittsystem" an, so dass die Nichtkegelschnittsysteme Repräsentanten aller Classen von Zahlensystemen werden*

[16] Voir Frobenius [1897] puis la synthèse par Frobenius des travaux de Cartan et Molien, [Frobenius, 1903b, 1903c, 1903d].

[17] Thomas Hawkins [1971] a, le premier, mis en evidence le rôle de Molien dans la création de la théorie de la représentation des groupes. L'historiographie n'a cependant jamais évoquée l'influence des travaux de Weyr sur les recherches de Molien, ni considéré le rôle de la représentation matricielle, et de la méthode de décomposition dans la création de la théorie de la représentation.

- **La méthode de Cartan.**

Cartan considère les nombres hypercomplexes y d'un système Σ satisfaisant l'équation ([8]) :

$$xy = \omega y$$

ce qui implique la considération de deux équations caractéristiques déduites des relations $xy = \omega y$ et $yx = \omega y$. Si l'équation caractéristique à h racines distinctes $\omega_1 \ldots \omega_h$, alors il existe un élément α_1 tel que :

$$a\alpha_1 = \omega_1\alpha_1$$

et il existe a'_1 tel que :

$$a\alpha'_1 = \omega\alpha'_1 + \lambda_{11}\alpha_1$$

A une racine ω_1 de multiplicité m_1, correspond un système de m_1 éléments linéairement indépendants $a_1, a'_1, \ldots, a^{m1-1}$ tels que les produits de a et $a_1^{(i)}$ s'expriment comme combinaisons de produits d'éléments d'indices inférieurs. Le procédé permet une première décomposition du système en sous systèmes $A_1 + A_2 + \ldots + A_h$ qui sont tous, en termes contemporains, des idéaux à droite : le produit d'un élément associé à la racine ω_1 par un élément quelconque du système est encore un élément associé à ω_1. Cartan décompose alors l'unité ε en unités partielles, $\varepsilon = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_h$ (les ε_i sont des éléments idempotents orthogonaux) afin de poursuivre la décomposition de chaque sous système en choisissant une nouvelle base telle que :

$$a_1\varepsilon_1 = a_1 \qquad a_1^{(p)}\varepsilon_1 = 0$$
$$a'_1\varepsilon_1 = a'_1 \qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots.$$

Le procédé se poursuit par multiplication des $(a_1^{(i)})$ par ε_2 et Cartan montre finalement que l'on peut choisir r_h éléments linéairement indépendants, $\eta_1, \ldots, \eta_{rh}$, tels que, pour tout η, il existe des indices α et β Â h, tels que

$$\varepsilon_\alpha\eta = \eta\varepsilon_\beta = \eta$$
$$\varepsilon_i\eta = 0 \text{ et } \eta\eta_j = 0 \text{ si } i \text{ ý } \alpha \text{ et } j \text{ ý } \beta$$

L'élément η est dit de type (α, β), la décomposition en "types" de Cartan est analogue à la décomposition de Scheffers en "caractéristiques" (voir encart 6).

Cartan considère alors l'ensemble de tous les éléments de même type (α, β) et sa *dimension* notée $m_{\alpha\beta}$. L'ensemble des éléments de type (1,1) est un sous système Σ_1 de Σ, stable par multiplication à droite et à gauche par ε_1 et son équation caractéristique a une seule racine de multiplicité égale à m_{11}. Cartan démontre que l'ensemble des éléments dont la racine caractéristique a pour unique racine 0 est de dimension $m_{11}-1$, ces éléments sont désignés par le terme de "pseudo nuls" ([9]). Cartan décompose alors l'étude des systèmes hypercomplexes en deux classes : les systèmes de classe 1 sont ceux dont l'équation caractéristique se décompose en facteurs linéaires de la forme

$$(-\omega + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1r}x_r)\ldots(-\omega + \alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_2 + \ldots + \alpha_{rr}x_r).$$

Les systèmes de classes 2 contiennent quant à eux toujours un système de quaternions (comparer avec la distinction entre systèmes de quaternions et de non quaternions chez Scheffers).

---

[8] En termes contemporains, Cartan recherche les vecteurs propres y de l'opérateur L_x, agissant par translation à gauche sur le système et ceci implique la considération de l'équation $det(L_x - \omega I) = 0$

[9] La notion d'élément pseudo nul revient à la définition moderne d'élément nilpotent :

$$(L_\alpha)^m = 0 \;\leftrightarrow L_\alpha^m = 0 \leftrightarrow \alpha^m = 0.$$

Voir [Parshal, 1985, 298] pour l'origine de ces idées chez Killing et la définition que donnera Wedderburn en 1907 d'élément nilpotent.

In dieser Classification repräsentiert das gewöhnliche Zahlensystem die Classe der ursprünglichen Zahlensysteme.
[Molien, 1893, 86].

[Traduction, F.B.] Mes travaux conduisent à énoncer que chaque système primitif de nombres ne contient qu'un nombre carré de nombres de bases, et par conséquent qu'un groupe associé à un tel système est identique au groupe de paramètres du groupe linéaire général. Exprimé autrement, ceci implique que chaque système de nombres est représenté par une matrice carrée dont les éléments sont indépendants l'un l'autre. Une autre conclusion de mon travail consiste à la découverte d'une forme normale pour chaque système de nombre. Cette forme normale permet de répartir les systèmes de nombres en classes.

Etant donnés n "nombres de base" (Grundzahlen) $e_1, \ldots, e_n$, un "nombre x" d'un "système de nombres" est caractérisé par la donné de "paramètres" $x_1, \ldots, x_n$:

$$(I) \qquad x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$$

[Molien ,1893, 88].

La notion de "nombres de bases" est adoptée en référence aux travaux de Weyr sur les formes bilinéaires et les matrices : la donnée d'une base permet de ne se préoccuper que des paramètres qui "représentent" identiquement les éléments du système hypercomplexe. La multiplication, $cx' = xu$, de deux éléments x et u correspond "identiquement" à la donnée des "équations produits" sur les paramètres :

$$(II) \qquad x'_i = \Sigma_{k,l}\, a^i_{kl}\, x_k u_l$$

avec la propriété d'associativité :

$$\Sigma a^i_{sm} a^s_{kl} = \Sigma a^i_{ks} a^s_{lm}.$$

[Molien, 1893, 91]

Cette "représentation" identifie un système hypercomplexe à une *équation produit* sur des paramètres et fonde l'approche de Molien. Un changement des "nombres de bases" se traduit par une "transformation linéaire des paramètres" ; un même système de nombres est par conséquent susceptible de représentation distinctes et l'objet du mémoire de Molien est de définir, parmi tous les choix de bases possibles, une "forme normale" [Molien, 1893, 92]. La méthode de réduction d'un système à une forme normale, présentée dans la première partie du mémoire intitulée "Zahlensystems und bilineare Formen", investit les techniques de décomposition matricielles de Weyr.
Développant la notion de réductibilité de Scheffers [1891, 306], Molien démontre d'abord que la base de tout système de nombres se décompose en des sous groupes de r_1, r_2,… éléments, définissant des bases de systèmes "compagnons" ("begleitenden Zahlensysteme") "primitifs" ("ursprunglich") et indépendants ([18]) :

---

[18] Si les équations produits du système sont données par $x'_i = \Sigma_{k,l} a^i_{kl}\, x_k u_l$ et si il existe une base pouvant être ordonnée de telle façon que les premiers r coefficients de chaque produits dépendent uniquement des r premiers éléments de base, alors Molien définit le système compagnon du système original, comme le système d'ordre r vérifiant les mêmes équations produits et dont les paramètres satisfont l'équation $a^i_{kl} = 0$ pour *1 Â i Â r* sauf si k et l appartiennent aussi à *1…r* .
Si le système n'admet pas de système compagnon, il est dit primitif.

La décomposition des systèmes de classe II associée au type de leurs éléments :

$e_1, \eta_1, \ldots, \eta_\alpha, \eta_{\alpha+1}, \ldots, \eta_\beta, \eta_{\beta+1}, \ldots$

(type 1,1), type(2,1),…type (h,1),…

$e_2, \eta_\gamma, \ldots$

type (1,2)…

donne, si l'on note,

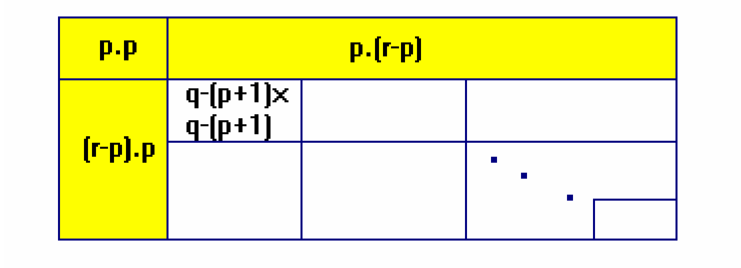
$$\xi_1 = e_1,\ \xi_2 = \eta_1, \ldots,\ \xi_{n1+1} = e_2,\ \xi_{n1+2} = \eta_\gamma, \ldots$$

une décomposition de l'équation caractéristique de l'élément $z = z_1\xi_1 + \ldots$ sous la forme :

$$\Delta = det\ (blocs\ n_1 \times n_1,\ n_2 \times n_2, \ldots) = \Delta_1\Delta_2 \ldots \Delta_h = P_1^{q1} P_2^{q2} \ldots P_l^{ql}$$
$$\text{et } \Delta_1 = P_1^{q'1}$$

la décomposition donnée pour les systèmes de classe 1 peut alors s'appliquer à chacun des facteurs de la décomposition polynômiale ci-dessus. Lors de son analyse du mémoire de Cartan, Karen Parshall conclut alors [Parshall, 1985 , 307] :

> In terms of matrices these two subspaces $e_i\Sigma e_\lambda$ and $e_\lambda\Sigma e_i$ of Σ are isomorphic to spaces of $p \times (r-p)$ and $(r-p) \times p$ matrices, respectively. Pictorially, then, the construction in the two preceding paragraphs represents subspaces of Σ isomorphic to the shaded matrix subspaces below. Repeating this construction process for the remaining blocks down the diagonal, we get a basis for the entire subspace of $r \times r$ matrices which corresponds to a basis for the entire algebra Σ.



Pourtant, Cartan, contrairement à Molien, ne représente pas la décomposition polynomiale de l'équation caractéristique par une décomposition matricielle. Cette différence de méthode se manifeste dans la notion d'éléments pseudo nuls : pour Cartan, d'une part, il s'agit d'éléments correspondants à la racine caractéristique 0, pour Molien, d'autre part, et à la suite de Weyr, la notion est associée à ce qui sera appelé par Wedderburn en 1907 un élément nilpotent, c'est-à-dire un élément dont une certaine puissance s'annule, $x^n = 0$. Le traitement de Molien, comme celui de Wedderburn de 1907, généralise le procédé de Weyr de construction d'un système normal par considération des puissances successives des matrices $A-\lambda I$, où λ est une racine caractéristique. Si σ est un système nilpotent de degré m alors :

$$(0) \dashv \sigma^{m-1} \dashv \ldots \dashv \sigma^2 \dashv \sigma$$

et il existe un base de σ construite par les choix successifs de bases de σ^{m-1}, de σ^{m-2}, etc. L'encart 3 propose la démonstration de Wedderburn de 1907 de cette propriété.

$$(*)\quad \begin{aligned} x'_i &= \sum_{k,l=1}^{n_1} a^i_{kl} x_k u_l & i &= 1,\ldots,n_1 \\ x'_i &= \sum_{k,l=n_1+1}^{n_2} a^i_{kl} x_k u_l & i &= n_1+,\ldots,n_2 \\ &\;. \\ x'_i &= \sum_{k,l=r+1}^{n} a^i_{kl} x_k u_l & i &= r+1,\ldots,n \end{aligned}$$

[Molien, 1893, 92-96].

Il suffit donc, pour caractériser tous les systèmes hypercomplexes, de caractériser tous les systèmes primitifs ([19]). C'est là qu'interviennent les méthodes de la théorie des formes bilinéaires de Weyr : à chaque système primitif, Molien associe une forme bilinéaire symétrique, nommée "forme à propriété polaire" ("Formen mit Polareigenschaft") [Molien, 1893, 96-100]. Etant donnée une forme linéaire g sur les paramètres du système :

$$g(x) = g_1x_1 + \ldots + g_nx_n \text{ avec } x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$$

L'équation de multiplication (II) définit une forme bilinéaire $g(xu)$:

$$g(xu) = \sum_{i,k,l} g_i a^i_{kl} x_k u_l \quad (i,k,l = 1,\ldots,n)$$

Et cette forme peut être choisie symétrique pour tout système non trivial [Molien, 1893, 97] ([20]) :

En termes contemporain : soit H l'algèbre associative correspondant au système de Molien et I le sous espace vectoriel engendré par la base $e_{r+1},\ldots,e_n$. I est un idéal bilatère de s. Le système compagnon H_1 est isomorphe à H/I. La notion de système compagnon de Molien est un point de vue paramétrique équivalent à la notion de sous système invariant de Cartan [1898] (encart 8) ou de sous algèbre invariante de Wedderburn [1907].

[19] On dirait en termes contemporains : toute algèbre semi simple (sans idéal nilpotent) est somme directe d'algèbres simples (sans idéal non trivial). De ce point de vue, Cartan et Molien démontrent indépendamment que tout algèbre semi-simple sur les nombres réels ou complexes est une somme directe d'algèbres simples, et ce résultat est généralisé par Wedderburn en 1907. Voir [Parshall, 1985, 278] et consulter également Hawkins [1971, 257] pour la méthode de Molien.
La notion de semi simplicité est cependant absente des travaux de Molien (tout comme de ceux de Cartan) en raison de l'absence de la notion de radical (le radical d'un idéal a dans un anneau R est l'idéal intersection de tous les idéaux premiers contenant a : $r(a) = \{x \,/\, \exists n > 0,\ x^n \in a\}$; par exemple dans $Ê[x]$ l'idéal $a = (x^2)$ a pour radical $r(a) = (x)$.
La méthode de Molien consiste à considérer la relation entre deux systèmes H_1^* et H_2^* qui accompagnent un système H. Si des bases de H, H_1^* et H_2^* sont choisies, si x_i sont les paramètres de $h \in H$ dans la base, y_i et z_i les paramètres de l'élément correspondant à h, hi^* dans H_i^* (par l'isomorphisme implicite $H_i = H/F_i$) alors y_i et z_i sont des formes linéaires de $x_1 \ldots x_n$. Dans le cas où les y_i et z_i sont indépendants (Molien donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que ce soit le cas) cela permet de dire que si $H_1^* \ldots H_k^*$ est une suite maximale de système primitifs accompagnant H telle que l'ensemble des paramètres soiennt linéairement indépendants alors cette suite doit inclure tout système primitif H^* accompagnant H.
De plus, une base de H peut être choisie telle que si $n_i = \dim H_i^*$ et $r = n_1 + \ldots + n_k$ alors les équations définissant H deviennent :

$x'_i = \Sigma_{1 \ldots n1} a^i_{kl}\, x_k u_l$ $i = 1 \ldots n_1$ (équations définissant H_1^*)
$x'_i = \Sigma_{n1+1 \ldots n2} a^i_{kl} x_k u_l$ $i = n_1+1, \ldots, n_2$ (équations définissant H_2^*)
etc.

[20] En termes contemporains, il s'agit de la forme trace de l'algèbre H dite aussi forme de Killing des algèbres de Lie.

ENCART 8.

Les relations entre les systèmes hypercomplexes de Cartan et la représentation des groupes de Frobenius : le mémoire de Poincaré de 1903.

Dans un mémoire intitulé "Sur l'intégration algébrique des équations linéaires et les périodes des intégrales abéliennes" et publié en 1903 dans le *Journal de Jordan,* Poincaré établit une relation entre la théorie de la représentation des groupes et celle des systèmes hypercomplexes. [Poincaré, 1903, 139] :

> Le présent Mémoire est le développement d'une Note que j'ai présentée à l'Académie des Sciences en 1883.
>
> Quand une fonction algébrique satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, les intégrales abéliennes jouissent de certaines propriétés curieuses et il y a entre leurs périodes quelques relations intéressantes.
>
> On est conduit en passant, à ce résultat, qu'*étant donné un groupe fini H quelconque, on peut toujours trouver* (sauf un nombre fini d'exceptions) *un groupe fini de substitutions linéaires isomorphes à H, et dont les coefficients soient entiers*.
>
> M. Frobenius, en 1896 et dans les années suivantes, a publié une série de Mémoires sur les *caractères* des groupes. Ses résultats peuvent être utilement appliqués à la question qui nous occupe et je crois devoir les rappeler rapidement ; je profite d'ailleurs de l'occasion pour les rapprocher d'autres résultats obtenus par M. Cartan et pour faire voir combien les théories de ces deux savants mathématiciens s'éclairent mutuellement.

[Poincaré, 1903, 143] :

> La question de i'intégrabilité algébrique des équations linéaires est liée à celle des groupes finis contenus dans le groupe linéaire. M. Klein a résolu complètement la question en ce qui concerne le deuxième ordre. M. Jordan, dans le Tome 84 du *Journal de Crelle,* puis dans les *Mémoires de L'Académie de Naples,* a donné une méthode générale pour la recherche des groupes finis contenus dans le groupe linéaire et a appliqué sa méthode au troisième ordre.
>
> Une question se pose toutefois. Etant donné un groupe fini contenu clans le groupe linéaire à *n* variables, existe-t-il toujours une équation linéaire intégrable algébriquement et correspondant à ce groupe? Cette question, comme on devait s'y attendre, doit être résolue affirmativement.

[Poincaré, 1903, 180] :

> § 5. Théorèmes de Cartan et Frobenius.
>
> Nous aurons besoin dans la suite de divers résultats obtenus par M. Cartan dans un Mémoire intitulé : *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes (Annales de la Faculté de Toulouse,* t. XII) et par M. Frobenius dans une série de Mémoires publiés dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin de 1896 à 1901.
>
> Rappelons ces résultats succinctement en insistant un peu sur certains points pour faire voir comment s'éclairent mutuellement les théorèmes de M. Cartan, d'une part, ceux de MM. Dedekind et Frobenius, d'autre part. Considérons un système d'unités complexes
>
> $$e_1, e_2, \ldots, e_r,$$
>
> dont la multiplication soit associative et non commutative ; ces unités donneront naissance à un système *S* de nombres complexes. Je supposerai qu'il y a dans ce système un *module*, c'est-à-dire un nombre complexe
>
> $$a = \Sigma a_i e_i$$
>
> tel que l'on ait
>
> $$ax = xa = x$$
>
> quel que soit le nombre complexe *x*. Soient maintenant
>
> $$x = \Sigma x_i e_i \,,\ y = \Sigma y_i e_i$$
>
> deux nombres complexes quelconques, et soit $z = xy = \Sigma ziei.$ Il est clair que les z_i seront des fonctions linéaires des y_i, de sorte qu'à chaque nombre complexe *x* correspondra une transformation linéaire *T(x)* qui transformera les y_i en z_i et dont les coefficients seront des fonctions linéaires et homogènes de x_i.

$$\sum_{i,k,l} a^l_{si} a^s_{kl} x_k u_l$$

Réciproquement, à la donnée d'une telle forme polaire correspondent les équations produits d'un unique système primitif dont la dimension est égale au rang de la forme bilinéaire. La recherche des systèmes compagnons primitifs se trouve donc réduite à la détermination des "formes à propriété polaires" [Molien , 1893, 100-103] ([1]).
La structure d'un système primitif donné est obtenue par l'étude de la forme bilinéaire associée et passe par la définition de trois équations algébriques : l'équation caractéristique, l'équation de rang (équation minimale) et l'équation de Killing :

- **Les deux équations caractéristiques d'un système de nombres** donnent la "condition à laquelle le produit de deux nombres *x* et *u* est proportionnel à l'un des facteurs" : il existe une quantité ω telle que $\omega x = xu$, ω est racine de l'équation [Molien 1893, 106]:

$$\left| \sum_i a^i_{kl} u_l - \delta_{ik}\omega \right| = 0 \quad (i,k,l = 1,\dots,n)$$

  C'est une des "équations caractéristiques" du système, la seconde correspondant à l'équation $\omega x = ux$ ([2]).

- **L'équation de rang** correspond à l'équation de degré minimale déjà étudiée par Scheffers comme nous l'avons vu au paragraphe précédent. Il doit exister "une puissance positive de *u*, s'exprimant linéairement par toutes les puissances de *u* inférieures [...], une telle relation formée avec la plus petite puissance de *u*, soit $u^m - h_1 u^{m-1} + \dots \pm h_m u^0 = 0$ définit l'équation algébrique $\omega^m - h_1 \omega^{m-1} + \dots \pm h_m = 0$" nommée équation de rang [Molien, 1893, 113] ([3]).

- **L'équation de Killing** est définie par $\rho x = xu - ux$ en référence aux travaux de Killing présentés en encart 5. Ses racines sont les différences des racines des équations caractéristiques [Molien, 1893, 114].

Molien démontre, à l'aide de sa notion de forme à propriété polaire, que les équations caractéristiques et l'équation de rang associées à des systèmes

---

[1] En termes contemporains il s'agit de la détermination de tous les idéaux bilatères maximaux d'une algèbre associative *H*.

[2] Parmi les propriétés de cette équation auxquelles Molien consacre un paragraphe de son mémoire, la propriété selon laquelle les coefficients de *ω* sont des fonctions homogènes des coordonnées dans la base, le coefficient de ω lui même définissant une forme à propriété polaire (la forme trace).

[3] Une discussion sur les diviseurs des équations caractéristiques est l'occasion de démontrer que l'équation de rang divise chacune des équations caractéristiques [Molien, 1893, 114].

[…] L'équation $\Delta(x\text{-}\omega a) = 0$ est une équation de degré r en ω que M. Cartan appelle l'équation caractéristique.

[Poincaré, 1903, 182] :

On peut choisir les nouvelles unités complexes de façon à réduire le système S à sa forme la plus simple. C'est ce que M. Cartan a réussi à faire.

Pour cela, il introduit la notion de sous-système ; l'ensemble des combinaisons linéaires de q nombres complexes appartenant à S formera un sous-système σ de S si $q < r$ ce sous-système sera semi-invariant à droite si le produit (à droite) d'un nombre quelconque de Σ par un nombre quelconque de S appartient à σ ; on définit de même la semi-invariance à gauche ; enfin on dit qu'un système est invariant s'il est semi-invariant à la fois à droite et à gauche.

Cela posé, M. Cartan a montré qu'un système simple, c'est-à-dire un système qui ne contient aucun sous-système invariant, ne peut être que ce qu'il appelle un p^2 ion, c'est-à-dire un système à p^2 unités e_{ij} $(i,j = 1,2,\ldots,p)$ avec la loi de multiplication

$$e_{ij}e_{jl} = e_{il},\ e_{ij}e_{lh}\ (j\ ý\ l).$$

Parmi les systèmes qui ne sont pas simples, il distingue d'abord les systèmes semi-simples qui admettent toutes les unités de plusieurs p^2 ions, et cela de telle façon que le produit de deux nombres complexes appartenant à deux p^2 ions différents soit toujours nul.

Enfin les systèmes qui ne sont ni simples, ni semi-simples, admettront toutes les unités d'un système semi-simple et, en outre, un certain nombre d'unités pseudonulles, dont les combinaisons linéaires forment un sous-système invariant dont tous les nombres sont pseudonuls.

Reprenons le déterminant $\Delta(x)$ que nous avons défini plus haut, et décomposons-le en facteurs irréductibles. A chacun des p^2 ions correspondra un de ces facteurs, qui sera de degré p et qui sera élevé à une puissance égale à p si le système est semi-simple et supérieure à p dans le cas contraire.

Tels sont les résultats de M. Cartan. Voyons comment ils peuvent être appliqués à la théorie des groupes.

Considérons un groupe d'ordre fini G ; aux différentes substitutions faisons correspondre des unités complexes, dont la loi de multiplication soit la même que celle des substitutions. Je veux dire que, si les unités e_i, e_j, e_k correspondent respectivement aux substitutions σ_i, σ_j, σ_k, on ait

$$e_ie_j = e_k$$

Cette loi est évidemment associative. Envisageons le système de nombres complexes S engendré par ces unités et, d'abord, formons l'équation caractéristique et le déterminant $\Delta(x)$ correspondant, ainsi que la substitution linéaire $T(x)$.

Soit

$$x = \Sigma x_ie_i,\ y = \Sigma y_ke_k,\ z = xy = \Sigma z_je_j,$$

il vient

$$z = \Sigma x_iy_ke_j,\ z_j = \Sigma x_iy_k\ (e_j = e_ie_k)$$

Convenons d'adopter la notation si commode de M. Frobenius et de poser

$$x_i = x_{j,k}\ si\ e_j = e_k^{-1e}{}_j\,;$$

la transformation $T(x)$ s'écrira

$$z_j = \Sigma x_{i,k}y_k,$$

de telle sort que l'élément de la $k^{\text{ième}}$ colonne et de la $j^{\text{ième}}$ ligne de $\Delta(z)$ sera $x_{j,k}$.

Ce déterminant $\Delta(x)$ sera donc sera donc un de ceux que M. Frobenius appelle *déterminants de groupe ;* […]. Ainsi l'on voit déjà apparaître un lien entre les travaux de M. Cartan, ceux de M. Frobenius et la question qui nous occupe ici. Observons qu'il y a dans le système S certains nombres ξ qui jouissent de la propriété d'être *commutables* à tous les nombres du système ; […] Ces nombres commutables formeront évidemment un sous-système de nombres complexes à multiplication commutative. C'est ce sous-système que M. Frobenius a étudié dans son premier Mémoire [*Ueber Gruppencharaktere (Sitzungsberichte* de Berlin, t. II, 1896)]. Cela posé, on peut se demander si le système S est semi-simple au sens de M. Cartan. La réponse doit être affirmative ; […] *le système S est semi-simple et réductible à un certain nombre de p² ions.* Or on en conclura immédiatement que chaque facteur irréductible du déterminant $\Delta(x)$ est affecté d'un exposant égal à son degré. c'est le théorème fondamental établi d'une manière un peu différente par M. Frobenius dans son second Mémoire [*Ueber die Primfactoren der Gruppendeterminante* (Sitz. de Berlin, t. II, 1896)].

compagnons divisent les équations du système initial [Molien, 1893, 118]. Les propriétés arithmétiques des équations polynomiales permettent d'exprimer la primitivité des systèmes : un système et primitif si et seulement ses équations caractéristiques sont des puissances d'une équation irréductible ce qui revient à dire que son équation de rang est irréductible. Surtout, les facteurs irréductibles des équations caractéristiques d'un système sont les équations de ses systèmes compagnons primitifs, ce dernier résultat permet d'associer la décomposition d'un système en sous systèmes à une décomposition de ses polynômes caractéristiques en facteurs irréductibles : à chaque diviseur des polynômes caractéristiques correspond une forme de polarité et donc un système compagnon engendré ([24]).

[24] Si $p_u(\omega) = \omega^n - f_1(u)\omega^{n-1} + \dots$ est l'équation minimale, alors $f_1 = tru_R$
Les systèmes compagnons déterminent les facteurs du polynôme caractéristique et minimal et si r_u est un diviseur de ces polynômes alors la fonction trac $r_1(uv)$ est une forme à propriété polaire qui engendre un système compagnon. Molien en déduit que si le polynôme minimal est irréductible alors la forme $h_1(uv)$ est non singulière et H est primitif et réciproquement. Voir [Hawkins, 1971].

[Poincaré, 1903, 191] :

Dans ses derniers Mémoires parus dans les *Sitzungsberichte* de Berlin de 1899 à 1901 et intitulés *Darslellung der Gruppen durch lineare Transformalionen,* M. Frobenius cherche à former les groupes de substitutions linéaires isomorphes à un groupe fini donné. Ce problème pourrait être résolu en s'appuyant sur les principes suivants :

Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ des variables indépendantes et φ un polynôme linéaire et homogène par rapport à ces variables. Soit σ_i une substitution quelconque de G et e_i l'unité complexe correspondante. Soit G' un groupe de substitutions linéaires entre les n variables ξ, isomorphe à G, et σ'_i ; la substitution de G' correspondant à σ_i soit φe_i ce que devient le polynôme φ par cette substitution.

S'il n'y avait entre les fonctions linéaires φe_i aucune relation linéaire, le groupe G' pourrait être ramené à un groupe de permutations entre les φe_i, et, plus généralement, l'étude du groupe G' peut se ramener à celle des relations linéaires entre les φe_i.

Soit $X = \Sigma X_i e_i$ un nombre complexe quelconque ; nous poserons

$$\varphi X = \Sigma X_i \varphi e_i,$$

et alors les relations linéaires cherchées seront de la forme

$$\varphi X = 0.$$

Il nous suffira de remarquer que l'ensemble des nombres X qui satisfont à cette relation forme un sous-système semi-invariant à gauche, et que, inversement, étant donné un sous-système semi-invariant à gauche, on peut s'en servir de cette façon pour définir un groupe linéaire G' isomorphe à G.

2. Représentation matricielle des systèmes primitifs, forme typique et système normal.

L'équation de Killing d'un système primitif est une puissance de l'équation de rang "aux différences" ([25]), ce qui implique que le nombre d'éléments de base d'un système primitif est égal à la racine du degré de son équation de rang ([26]) [Molien, 1893, 123]. Cette dernière propriété est interprétée par Molien comme la possibilité de représenter tout système primitif par un système de matrices ([27]) : les équations produits des systèmes primitifs sont identiques à celles définissant les produits matriciels. La démonstration de Molien de cette propriété fondamentale est basée sur la détermination d'une forme normale des équations produits d'un système de nombres. Si l'équation $\omega.x = xu$ a un maximum de r solutions indépendantes, $x^{(1)}\ldots x^{(r)}$, alors tout autre système complet de solutions, $vx^{(1)}\ldots vx^{(r)}$, s'écrit comme combinaison linéaire de $x^{(1)}\ldots x^{(r)}$:

$$vx^{(i)} = \Sigma_k\, v_{ki}\, x^{(k)}.\ (i,k,\ = 1\ldots r)$$

De la même façon, en remplaçant v par le produit vw :

$$vwx^{(i)} = \Sigma_k\, (vw)_{ki}\, x^{(k)}\ (i,k,\ = 1\ldots r)$$

et

$$vwx^{(i)} = \Sigma_{k,l}\, v_{ki}\, w_{li}\, x^{(k)}\ (i,k,l\ = 1\ldots r)$$

Par conséquent

$$(vw)_{kl} = \Sigma_l\, v_{ki}\, w_{li}$$

Or, si le système considéré est un système primitif de m nombres de bases, la primitivité implique que l'équation de rang doit avoir exactement m solutions indépendantes [Molien 1893, 124]. Par conséquent les équations des systèmes primitifs ont la "forme normale" suivante ([28]):

---

[25] Si H est primitif d'équation de Killing $k_u(\omega) = 0$
Alors $k_u(\omega) = \Sigma[\omega - (\omega_i - \omega_j)]^s = 0$ où ω_i sont les racines de l'équation de rang

[26] La démonstration de Molien est basée sur un théorème selon lequel, en termes contemporains, la multiplicité de la racine 0 de l'équation de Killing est égale à la dimension du centralisateur de u dans H. Ce théorème est valable pour les systèmes primitifs uniquement comme le montre Frobenius en 1903. Voir [Parshalll, 1985].

[27] Un système primitif a donc une représentation comme algèbre de matrices.

[28] Hawkins a commenté ce théorème de Molien dans son histoire de la création de la théorie de représentation des groupes [Hawkins, 1971]. L'objet de l'étude de Hawkins est démêler les contributions de Burnside [1911] et Molien [1893] de celle de Frobenius.

ENCART 9.

Sur le rôle des matrices dans la théorie de représentation des groupes de Frobenius [1903].

[Frobenius, 1903, 303] :

Um dies einzusehen, transformiere man die Basis so, daβ V_1, V_2,... die Grundzahlen ε_{m+1}, ..., ε_n werden. Dann wird die Untergruppe (V) durch die m linearen Gleichungen $x_1 = 0,..., x_m = 0$ zwischen den Koordinaten bestimmt. Damit (*VT*) eine Untergruppe es ist notwendig und hinreichend, daβ $a_{\alpha\beta\gamma} = 0$ ist, falls α Â m, $\beta > m$ oder $\gamma > m$ ist (Mol. Satz 2). [...] In den beiden Matrizen $S(x)$ und $T(x)$ verschwinden daher alle Elemente, welche die ersten m Zeilen mit den letzten n-m Spalten gemeinsam haben. demnach ist

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ S_{21} & S_3 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ T_{21} & T_3 \end{pmatrix},$$

wo z.B. die Teilmatrix S_1 nur die ersten m Zeilen und Spalten von S enthält. Aus $S(y)S(z) = S(yz)$ folgt daher $S_1(y)S_1(z) = S_1(yz)$, und da $S_1(x) = x_1E_1 + \ldots + x_mE_m$ nur von $x_1,...,x_m$ abhängt, so definieren die Gleichungen

$$\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma = \sum_\alpha {}_1^m a_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_\alpha \ (\beta, \gamma = 1,2,...,m)$$

eine Gruppe *(η)*, die aus *(ε)* hervorgeht, indem man $\varepsilon_{m+1} = \ldots = \varepsilon_n = 0$ setzt. Weil $|S| = |S_1|\,|S_2|$ und $|T| = |T_1|\,|T_2|$ [...]. Ferner ist die Determinante der Gruppe *(ε)* durch die Determinante jeder mit (ε) Homomorphen Gruppe (η) teilbar, und dasselbe gilt von den mit *(ε)* und (η) antistrophen Gruppen.

Aux k facteurs premiers $\Phi_1, \Phi_2, \ldots\Phi_k$ du déterminant de groupe $\Theta = |S|$, sont associés k groupes homorphes à *(ε)*, chacun d'ordre $m_i = r_i^2$ où r_i est le degré de Φ_i [Frobenius, 1903, 307-308] :

In der Gruppendeterminate S verschwinden alle Elemente $s_{\alpha\beta}$, welche die ersten m_1 Zeilen mit den letzten n-m_1 Spalten gemeinsam haben, ebenso alle Elemente, welche die folgenden m_2 Zeilen mit den ersten m_1 und den letzten n-m_1-m_2 Spalten gemeinsam haben, ferner die, welche die folgenden m_3 Zeilen mit den ersten m_1+m_2 und den letzten n-m_1-m_2-m_3 Spalten gemeinsam haben usw., währen über die letzten n-m_1-...-m_k Zeilen nichts bekannt ist. [...] Bilden die ersten m_1 Zeilen und Spalten von S (T) die Matrix (S_1) (T_1), die folgenden m_2 Zeilen und Spalten die Matrix S_2 (T_2),..., so sei

$$U = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & S_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & S_k \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & T_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & T_k \end{pmatrix}.$$

dann ist

$$S = \begin{pmatrix} U & 0 \\ U_0 & S_0 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} V & 0 \\ V_0 & T_0 \end{pmatrix},$$

[...]

Da S_x die Matrix einer einfachen Gruppe ist [...].

Satz 30. Die Basis jedes ursprünglichen Zahlensystems von m^2 Grundzahlen kann so gewählt werden, dass die Productgleichungen die Gestalt

$$x'_{ik} = \Sigma_l\, x_{il}\, u_{lk}\ (i,k = 1...m)$$

annehmen.
[Molien, 1893, 125].

[Traduction, F.B.]. Enoncé 30. Tout système primitif de nombres peut se ramener à une base de m^2 éléments fondamentaux, de manière à ce que les équations produits prennent la forme

$$x'_{ik} = \Sigma_l\, x_{il}\, u_{lk}\ (i,k = 1...m).$$

La détermination de la forme normale des équations produits des systèmes généraux est traitée par Molien dans la troisième partie de son mémoire par l'introduction d'un groupe bilinéaire de transformations associé au système ([29]). A tout élément u du système, Molien associe la transformation

$$T_u : x \leftrightarrow x' = ux = \Sigma_k\, b_{ik}(u) x_k\ (i,k = 1,\ldots m)\ ([30]).$$

L'ensemble des transformations T_u est un "groupe" (un semi groupe en termes contemporains) qui est dit "appartenir" au système : $T_{uv} = T_u\, T_v$ ([31]). La méthode consiste à rechercher une forme normale pour les équations définissant T_u afin d'en déduire la définition d'une forme normale du système lui-même ([32]), elle passe par une décomposition du "groupe" des transformations T_u en une suite de "groupes" compagnons primitifs [Molien, 1893, 129]. Molien démontre alors que, pour tout groupe $\{T_u\}$, les variables x_i et les paramètres u_j de $\{T_u\}$ peuvent être choisis de telle manière que [Molien, 1893, 143] :

(***)

$$\begin{array}{llll}
x'_i = \sum_{k=1}^{p_1} b_{ik}(u).x_k & & & (i = 1...p_1) \\
x'_{p_1+1} = \sum_{k=1}^{p_1} b_{p_1+ik}(u).x_k & + \sum_{k=1}^{p_2-p_4} b_{p_1+ip_2+k}(u).x_{p_1+k} & & (i = 1...p_2 - p_1) \\
\quad\ldots & \quad\ldots & & \\
x'_{p_d+i} = \sum_{k=1}^{p_1} b_{p_d+ik}(u).x_k & + \sum_{k=1}^{p_2-p_4} b_{p_d+ip_2+k}(u).x_{p_1+k} & \ldots + \sum_{k=1}^{m-p_d} b_{p_d+ip_d+k}(u).x_{p_d+k} & (i = 1...m - p_1)
\end{array}$$

---

[29] D'un point de vue contemporain l'objet de cette partie du mémoire de Killing est équivalent à la recherche par Cartan des systèmes hypercomplexes de classe II à partir des systèmes de classe I.

[30] Molien suppose u choisi de façon à ce que les "paramètres $b_{ik}(u)$ soient essentiels", c'est-à-dire ne peuvent pas être exprimés par moins de n variables. Il suppose également $det(T_u)$ non identiquement nul.

[31] Voir [Hawkins, 1971, 262] pour une discussion détaillée de la méthode de Molien dans le cadre de la représentation des groupes.

[32] $u \leftrightarrow T_u$ est un isomorphisme du système sur son groupe (c'est une représentation fidèle du système de degré m) ce qui permet de déduire les propriétés du système de celles du groupe.

ENCART 10.

Décomposition et représentation dans un exposé de synthèse sur les systèmes hypercomplexes : extraits du mémoire de Hawks [1905].

On Quaternion Number-Systems.

By

H. E. HAWKES of New Haven, Conn.

Introduction.

This paper continues and concludes the solution of the general enumeration problem of hypercomplex number-systems which are associative and have a modulus. The enumeration of non-quaternion systems is given in Mathematatische Annalen vol. 58. The problem consists in finding all non-equivalent, non-reciprocal, irreducible number-systems with moduli, where the terms used are defined as follows.

Def. 1. Two systems having the units

$$e_1, e_2, \cdots, e_n \quad \text{and} \quad e_1', e_2', \cdots, e_n'$$

respectively are *equivalent* if linear relations exist of the type

$$e_k' = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} e_i \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

where the determinant

$$|a_{ki}| \neq 0 \qquad (k, i = 1, 2, \cdots, n).$$

The a's are assumed to be ordinary complex numbers.

Def. 2. A system is *reducible* if its units may be divided into two or more subsystems such that the product of two units in the same subsystem is in that subsystem, while the product of units in different subsystems vanishes.

Def. 3. Two systems are *reciprocal* to each other when the multiplication table of one can be obtained from that of a system which is equivalent to the other by an interchange of rows and columns.

Def. 4. The *modulus* of a system is a number μ such that for an arbitrary number x of the system,

$$\mu x = x \mu = x.$$

Tout groupe général de la forme ci-dessus contient comme sous groupes, les groupes d'équations :

$$x'_{p_q+i} = \sum_{k=1}^{p_1} b_{p_q+ip_q+k}(u).x_{p_q+k} \quad (i,k = 1...p_{q+1}\text{-}p_q)$$

Ces groupes sont primitifs et Molien démontre que tout groupe primitif à des équations de ce type [Molien, 1893, 144-147]. La quatrième et dernière partie du mémoire de Molien, intitulée "Zahlensysteme und Matrices", énonce une représentation matricielle à la forme normale donnée aux systèmes: "Les résultats des paragraphes précédents seront éclaircis, quand ils seront réprésentés par l'emploi des groupes de matrices" :

> So bildet das System der Coefficienten der Formen
>
> $$(1) \quad y_i = \Sigma_k\, a_{ik} x_k \; (i = 1...m \; ; \; k = 1...n).$$
>
> eine Matrix
>
> $$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{Vmatrix},$$
>
> oder kürzer geschrieben
>
> $$(2) \quad A = \| a_{ik} \| \; (i = 1...m \; ; \; k = 1...n).$$
>
> [Molien, 1893, 148].

Après un exposé des "règles de calculs sur les matrices" [Molien, 1893, 148-150], Molien se consacre à une "représentation des groupes appartenant à un système de nombres à travers les matrices" [Molien, 1893, 150-152]. La forme (***) sous laquelle peuvent être écrites les équations d'un groupe de paramètres est écrite à l'aide de "matrices élémentaires" correspondantes à chaque sous groupes primitifs:

$$s_{gh}(u) = \left\| b_{p_g+ip_h+k}(u) \right\| \qquad \begin{pmatrix} i = 1...p_{g+1} - p_g \\ k = 1...p_{h+1} - p_h \end{pmatrix}$$

> jede solche Matrix soll eine Elementarmatrix genannt werden.
> [Molien, 1893, 150].

En notant ξ_g la matrice :

$$\xi_g = \begin{Vmatrix} x_{p_g+1} \\ ... \\ x_{p_{g+1}} \end{Vmatrix}$$

The division of number-systems into quaternion and non-quaternion classes is due to Scheffers*) who defines a quaternion system as one in which three numbers independent of the modulus and of each other exist which satisfy the following equations:

$$(1)\qquad \begin{aligned} e_1e_2 - e_2e_1 &= 2e_3,\\ e_2e_3 - e_3e_2 &= 2e_1,\\ e_3e_1 - e_1e_3 &= 2e_2. \end{aligned}$$

The simplest quaternion system is Hamilton's quaternions which is symbolized by (H). The necessary and sufficient condition that a given system is quaternion, is that (H) occurs in it as a subsystem, that is, that four independent numbers of the system may be so chosen that their multiplication table is identical with that of (H). That this condition is sufficient is evident, since the three units of (H) that are distinct from the modulus fulfil equations (1) when the multiplication table for (H) is taken in the form

	1	2	3	4
1	−4	−3	2	1
2	3	−4	−1	2
3	−2	1	−4	3
4	1	2	3	4

where k is written for e_k. That this condition is necessary was proved by Scheffers for $n \leq 8$, and appears for general n from a memoir by Molien.**)

§ 1.

Normal Forms.

In order to enumerate the various systems of distinct types it is necessary to find a normal form into which any quaternion system may be thrown and from an inspection of which its characteristic properties appear. Normal forms for any system, whether quaternion or not, have been given by Molien***) and the writer†) and will be symbolized by (M) and (P) respectively. A normal form for the multiplication table of non-quaternion

*) Mathematische Annalen, Vol. 39.

**) Mathematische Annalen, Vol. 41.

***) loc. cit.

†) Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 3.

Les équations (***) de la forme normale du groupe s'écrivent :

$$\begin{array}{llll} \xi'_0 = & s_{00}(u)\xi_0, & & \\ \xi'_1 = & s_{10}(u)\xi_0 & +s_{11}(u)\xi_1, & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \xi'_d = & s_{d0}(u)\xi_0 & +s_{d1}(u)\xi_1 & +\dots+s_{dd}(u)\xi_d \end{array}$$

Chaque groupe primitif a pour forme normale ([33]) :

$$\begin{array}{ll} \xi'_0 = & s_{00}(u)\xi_0, \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \xi'_d = & s_{dd}(u)\xi_d \end{array}$$

et la forme normale d'un groupe de paramètres permet de définir la forme normale d'un système de nombres ([34]):

> Von der Normalform einer Gruppe ausgehend kann man eine Normalform des zugehörigen Zahlensystems definieren. Nach den letzten Sätzen bilden die Elemente eines vollständigen Systems linear unabhängiger Elementarmatrices ein vollständiges System linear unabhängiger Formen der Parameter der Gruppe. Man wird also die Wahl der Basis des Zahlensystems so treffen können, dass die Elemente des vollständigen Systems unabhängiger Elementarmatrices direkt den Parametern einer Zahl des Zahlensystems gleich werden.
> [Molien, 1893, 152].
>
> [Traduction, F.B.]. A partir de la forme normale d'un groupe on peut définir une forme normale du système de nombre correspondant. D'après les derniers énoncés, les éléments d'un système complet de matrices élémentaires linéairement indépendantes forment un système complet de paramètres du groupe. On pourra ainsi choisir la base du système de nombre de telle sorte que les éléments du système complet des matrices élémentaires indépendantes deviennent directement les paramètres d'un système de nombres.

La représentation de Molien des systèmes hypercomplexes par des groupes à paramètres développe les méthodes de décompositions matricielles de Weyr afin d'obtenir une classification des systèmes de nombres par la donnée d'un représentant particulier, la forme normale qui, dans le cas particuliers des systèmes "simples" s'identifie à la forme typique des matrices de Weyr.

---

[33] D'un point de vue contemporain, les algèbres simples ont une *représentation* correspondant à un groupe de matrices diagonales. La représentation des algèbres semi simples par une forme normale, est un groupe de matrices triangulaires qui contient un sous groupe primitif correspondant à la matrice formée par la diagonale, une algèbre semi simple est somme d'algèbres de matrices.

[34] D'un point de vue contemporain, cette forme normale est équivalente à celle de Cartan (encart 8).

systems has been given by **Scheffers***), which will be symbolized by (S). The features of these normal forms will now be given, followed by proofs that these three forms are compatible, that is, the multiplication table of a given system may be thrown into all three forms simultaneously, thus affording a form which comprises the advantages of all. This generalized normal form is called (N).

1. Normal Form (M).

Def. 5. A *primitive* system is one in m^2 units,

$$e_{11}, e_{12}, \cdots, e_{1m}, \quad e_{21}, e_{22}, \cdots, e_{2m}, \cdots, e_{mm}$$

such that the units obey the multiplicative law

$$e_{jh} e_{lk} = 0 \qquad \text{when} \qquad h \neq l,$$
$$e_{jh} e_{lk} = e_{jk} \qquad \text{when} \qquad h = l.$$

For $m = 1$ we have the system

$$e_1^2 = e_1.$$

For $m = 2$ we have the system which is equivalent to (H),

1	2	0	0
0	0	1	2
3	4	0	0
0	0	3	4

where

$$e_{11} = e_1, \; e_{12} = e_2, \; e_{21} = e_3, \; e_{22} = e_4.$$

When $m = 3$ we have the multiplication tables of nonians. **Molien****) shows that if a system S contains several primitive subsystems

$$P_1, P_2, \cdots, P_\lambda,$$

the units of S may be so chosen that all these subsystems appear in the multiplication table, showing that the units which comprise

$$P_1, P_2, \cdots, P_\lambda$$

are independent of each other. The product of units one or more of which is not a unit of a primitive system can contain no unit of a primitive system.

*) loc cit.
**) loc. cit.

3. La représentation des groupes, de Molien à Frobenius.

Deux nouvelles publications de Molien viennent développer en 1897 les méthodes originales de 1893 et sont souvent considérées comme une des origines des théories des représentations des groupes de Frobenius et Burnside ([35]). Dans sa première note soumise à l'Université de Yurev, Molien se propose d'énoncer "quelques théorèmes généraux sur la représentation d'un groupe discret donné par un groupe de substitutions linéaires" [1897a]. A tout groupe fini $G=\{S_1,\ldots,S_n\}$ est associé un système H de nombres hypercomplexes $x=x_1S_1+\ldots+x_nS_n$ dont la multiplication est donnée par la loi de groupe de G. Les travaux de 1893 sur les systèmes hypercomplexes permettent d'écrire la base de H sous forme normale :

$$x'_{ik} = \Sigma_{1\hat{A}j\hat{A}\nu1} u_{ij}x_{jk} \; (i=1\ldots\nu_1)$$
$$\grave{x}_{ik} = \; = \Sigma_{1\hat{A}j\hat{A}\nu1} \grave{u}_{ij}x_{jk}$$
etc.

Et le groupe de paramètres associé, défini par les formes linéaires $u_{ij}=b_{ij}(u)$ de $u_1\ldots u_n$, est la représentation irréductible de G par une somme de groupes finis de transformations linéaires T_k associées à chaque sous système de la forme normale.

L'origine de l'intérêt de Frobenius pour les travaux de Molien tient aux méthodes développées par ce dernier pour la décomposition des équations minimales et caractéristiques. Une lettre de Frobenius à Dedekind expose

---

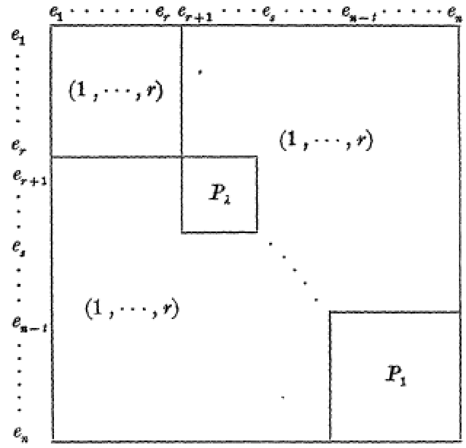
35 Les travaux de Molien peuvent être considérés rétrospectivement comme contenant les théorèmes fondamentaux de la théorie de la représentation des groupes. Ils présentent en effet des résultats sur des invariants et sur les degrés des représentations irréductibles analogues aux caractères de Frobenius. Hawkins [1971] a placé les travaux de Molien dans le contexte du programme de [Klein 1879] sur les '"problèmes des formes" : représenter les éléments d'un groupe fini G de substitutions sur des variables $x_1,\ldots,x_n$, par des formes (polynômes) en $x_1, \ldots, x_n$ laissés invariantes par les substitutions de G. [Hawkins, 1971,272] :

> The work of Molien and Burnside thus represented two possible approaches to the creation of group representation theory via the group algebra. Molien's consisted in applying the structure theorems for hypercomplex systems directly to the group algebra. Here Molien's or Cartan's criterion for semi simplicity played an important role. Burnside's approach involved looking at the group algebra as a Lie algebra. Here Cartan' criterion for semi simplicity [...] is important because it shows that L' is semi simple and, hence, a direct sum of simple algebras. Considerations such as those in Cartans note 1895 could have indicated that the simple components of L' are made up of all matrices of a given size with 0 trace – a fact that could also have led to the realization that the group algebra is a sum of complete matrix algebras and hence to group representation theory.

[Hawkins 1971 , 272-273] :

> Molien [1897a] showed how all finite groups of linear transformations are built up out of irreducible representations and in the second [1897b] he concentrated on the properties of the degrees of the latter. [...] Molien's approach to representation theory (via the structure and representation theory of algebras which is then specialized to group algebras) was again taken up by Emmy Noether in her influential paper "Hypercomplexe Grössen und Darstellungstheorie".

These theorems we may display in a table as follows.



where $(1, \cdots, r)$ indicates a number involving the units $e_1, \cdots, e_r$ and all the subsystems $P_1, \cdots, P_\lambda$ contain a square number of units whose multiplication table is given on page 439.

The order of these primitive systems along the principal diagonal is immaterial. It is convenient to assume that the primitive systems in one unit appear first, followed by those of higher order. When a system is thrown in any way into normal form (M) the same set of primitive systems appears, showing that they are an invariant of the system. We can now see that the necessary and sufficient condition that a system is a quaternion system is that at least one of its primitive systems is of order $\geqq 2$. The necessity of the condition follows since any four units $e_{\lambda\lambda}, e_{\lambda\tau}, e_{\tau\lambda}, e_{\tau\tau}$ of a primitive system have (H) for a multiplication table.

2. Normal form (P).

Def. 6. A number α is called *idempotent* if $\alpha^2 = \alpha$.

Def. 7. A number α is called *nilpotent* if $\alpha^2 = 0$.

If a system contains an idempotent number, this number may be taken as the unit e_n and the other units of the system so chosen as to fall into the following groups: —

Group I contains only units e_k such that

$$e_k e_n = e_n e_k = e_k.$$

l'intérêt des méthodes de Molien pour la théorie du "déterminant de groupe"' développée par Dedekind en 1896 [Hawkins, 1974, 240-241] ([36]) Le déterminant de Dedekind est analogue au polynôme caractéristique d'un système hypercomplexe associé à un groupe, la structure polynomiale du déterminant donne des informations sur la structure du système hypercomplexe qui, à son tour, donne des informations sur la structure du groupe. A tout groupe G d'ordre n, Dedekind associe une forme H de degré n : si 1, 2, ... dénotent les éléments de G écrits dans n'importe quel ordre, Dedekind associe à chaque élément r du groupe G, une variable x_r et le déterminant $H = (x_{ii'})$ où i' est l'inverse de r dans G ([37]).

La recherche par Frobenius d'une méthode pour déterminer les facteurs irréductibles du déterminant de Dedekind conduit à la création de la théorie des caractères en 1896, puis à la théorie de la représentation linéaire des groupes en 1897. Les relations entre la représentation des groupes et la structure des systèmes hypercomplexes sont mises en évidence par Poincaré (encart 8) ([38]), puis par Frobenius en 1903. "Les méthodes de mon travail sur les caractères d'un groupe fini, s'appliquent aussi à l'examen des systèmes de quantités hypercomplexes à n nombres de base" [Frobenius, 1903, 284]. Le mémoire de Frobenius, intitulé "Theorie der hypercomplexen Groβen" ([39]), se présente comme une unification par la théorie de la représentation de groupes des résultats indépendants de Cartan et Molien sur les systèmes hypercomplexes. Il s'agit, contrairement aux développements de Molien [1897], de bâtir une théorie d'"algèbre pure", c'est-à-dire n'employant pas les "méthodes de Lie". Frobenius définit les coordonnées d'une grandeur hypercomplexes par rapport à n nombres de base $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ par

$$x = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \dots + \varepsilon_n x_n.$$

L'ensemble de ces grandeurs obtenues par addition et multiplication associative est appelé un "groupe" (ε) dont la loi de multiplication est donnée par :

$$\varepsilon_\beta \varepsilon_\alpha = \Sigma_\alpha a_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_\alpha ,$$

$$et, si\ y = \Sigma \varepsilon_\lambda y_\lambda\ et\ z = \Sigma \varepsilon_\lambda z_\lambda, : x = yz, avec\ x_\alpha = \Sigma_{\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} y_\beta z_\gamma ,$$

[36] Lettre à Dedekind du 24 fevrier 1898 citée dans Hawkins [1971, 240-241]
En termes contemporains, le déterminant de groupe est le déterminant de la matrice de la représentation régulière de l'algèbre complexe d'un groupe [Parshall, 1985, 286].

[37] Traduction contemporaine : soit G un groupe fini d'ordre n, $C[G]$ l'algèbre de groupe complexe de

$$G = \{\Sigma_{i\,\hat{A}\,n} c_i g_i / c_i \bullet \hat{E}\} \text{où } G = \{g_1, \dots, g_n\}$$

Si on définit l'élément générique de $C[G]$ par $z = x_1 g_1 + \dots + x_n g_n$,
où les x_i sont des variables correspondantes à chaque g_i, si on regarde la représentation régulière à gauche L_z de z sur $C[G]$, alors pour écrire une représentation matricielle de L_z, il faut simplement figurer l'action de L_z sur les éléments de base g_i de $C[G]$.

$$L_z[G_i] = \Sigma xigigj$$

et pour chaque i il existe un unique k tel que $gigj = gk$. Si on note x_{kj} la variable correspondante à $g_k g_j^{-1}$

$$L_z(g_i) = \Sigma x_{kj} g_k$$

La matrice de L_z a pour déterminant le déterminant de Dedekind.

[38] Ce mémoire de Poincaré établit les relations entre deux théories fondamentales du début du XXe siècle. Il semble cependant inconnu de l'historiographie de la représentation des groupes ou des algèbres qui attribue à Frobenius [1905] seul l'établissement de ce lien. Des extraits du mémoire sont présentés en encart 8.

[39] Pour une synthèse en français de la théorie de Frobenius, voir [Autonne, 1912].

Group II contains only units e_k such that

$$e_k e_n = 0;\ e_n e_k = e_k.$$

Group III contains only units e_k such that

$$e_k e_n = e_k;\ e_n e_k = 0.$$

Group IV contains only units e_k such that

$$e_k e_n = e_n e_k = 0.*)$$

When the transformation bringing the system into this form has been performed, the system is called regular with respect to e_n. The four groups are symbolized respectively by (dd), (dn), (nd), (nn). Evidently e_n itself is in group I. The following multiplication table shows the group to which the non-vanishing product of units of any two groups must belong.

	(dd)	(dn)	(nd)	(nn)
(dd)	(dd)	(dn)	0	0
(dn)	0	0	(dd)	(dn)
(nd)	(nd)	(nn)	0	0
(nn)	0	0	(nd)	(nn)

If an idempotent number independent of e_n remains in any group it may be táken as a unit, say e_{n-1}, and the system made regular with respect to it without disturbing the regularity with respect to e_n. This process may be continued until no two idempotent numbers occur in the same group with respect to any unit. A system in which every unit is in one of the four groups with respect to each and every idempotent unit is called *regular*, or in normal form (P). The modulus of a system in form (P) is the sum of its idempotent units.

Theorem I. *Normal forms (M) and (P) are compatible.*

Assume that the system S is in form (M). We must show that without destroying form (M) the system may be thrown simultaneously into form (P). The idempotent units in the primitive systems of (M) are all in group IV with respect to each other, and no idempotent unit independent of these units exists else it would appear as a primitive system of order 1. The nilpotent units of the primitive subsystems are already in either group II, III or IV with respect to each idempotent unit. It only remains to regularize the units $e_1, \cdots, e_r$ which are not in

*) For proofs of this and the following theorems see my paper in Transactions, loc. cit.

Si $\xi=\{\xi_1, \xi_2,\dots, \xi_n\}$ désigne un "système de variables" nommé un "paramètre" alors

$$\xi(x) = \Sigma_\alpha \xi_\alpha x_\alpha = F(x,y,z) = \Sigma_{\alpha,\beta,\gamma} a_{\alpha,\beta\gamma} \xi_\alpha y_\beta z_\gamma$$

définit une forme trilinéaire F qui permet de définir "trois systèmes de fonctions linéaires" qui forment trois matrices d'ordre n ([40]) :

$$R(\xi) = R_\xi = (r_{\alpha\beta}(\xi)) = (\Sigma_\chi a_{\chi\alpha\beta}\xi_\chi)$$
$$S(y) = S_y = (s_{\alpha\beta}(y)) = (\Sigma_\lambda a_{\alpha\lambda\beta}y_\lambda)$$
$$T(z) = T_z = (t_{\alpha\beta}(z)) = (\Sigma_\mu a_{\alpha\beta\mu}z_\mu)$$

> [...]
> Ich nenne $S(x)$ und $|S(x)|$ die *Gruppenmatrix* und die *Gruppendeterminante*, $T(x)$ und $|T(x)|$ die *antistrophe Gruppenmatrix* und *Gruppendeterminante*, $R(\xi)$ und $|R(\xi)|$ die *parastrophe Matrix* und *Determinante*.
> [...]Die Gruppenmatrix $S(x)$ ist mit der antistrophen Matrix $T(y)$ vertauschbar. Verschwindet die parastrophe Determinante nicht identisch, so läβt sich jede von x unabhängige Matrix, die für jeden Wert von x mit $S(x)$ $(T(x))$ vertauschbar ist, auf die Form $T(y)(S(y))$ bringen.
> [Frobenius, 1903, 287].
>
> [Traduction, F.B.]. J'appelle $S(x)$ et $|S(x)|$ *matrice* du *groupe* et *déterminant* du *groupe*, $T(x)$ et $|T(x)|$ *matrice* et *déterminant antistrophe* du groupe , $R(\xi)$ et $|R(\xi)|$ *matrice* et *déterminant parastrophe* du groupe.
> [...] La matrice du groupe $S(x)$ commute avec la matrice antistrophe $T(y)$.

Frobenius montre que les équations produits $x=yz$ impliquent $S(yz)=S(y)S(z)$ et $T(yz)=T(y)T(z)$. En notant $S(x)=x_1E_1+ x_2E_2+\dots+x_nE_n$ avec $E_\beta E_\gamma = \Sigma_\alpha a_{\alpha\beta\gamma}E_\alpha$, les "matrices constantes" $E_1, E_2, \dots ,E_n$ sont linéairement indépendantes et forment une "représentation" du "groupe" (ε). De même l'écriture $T(x)=x_1F_1+x_2F_2+\dots+x_nF_n$ forme la base $F_1, F_2,\dots,F_n$ d'un groupe, le "groupe antistrophe" (ε') dont la matrice T' donne une représentation. Frobenius démontre qu'à la condition que le paramètre ζ soit choisi tel que le déterminant R_ζ ne soit pas identiquement nul, les trois types de déterminants de groupes ont même types de diviseurs élémentaires, dans les développements de $|S(x)|$ et $|T(x)|$ les mêmes facteurs premiers interviennent:

> Jeder Primfaktor $\Phi(x)$ der Gruppendeterminante $|S(x)|$ ist daher auch in der antistrophen Determinante $|T(x)|$ enthalten und umgekehrt. In den beiden Zerlegungen
> $$|S(x)| = \Pi\Phi(x)^s,\ |T(x)| = \Pi\Phi(x)^t$$
> treten genau dieselben Primfactoren $\Phi(x)$ auf, doch können die Exponenten s und t verschieden sein, aber nur wenn identisch $|R(\xi)|=0$.
> [Frobenius, 1903, 291].
>
> [Traduction, F.B.]. Chaque facteur premier $\Phi(x)$ du déterminant du groupe $|S(x)|$ est contenu dans le déterminant antistrophe $|T(x)|$. Les deux développements

[40] Par l'écriture $f(x)$, Frobenius désigne une fonction des coordonnées x_i, par $S(x)$ une matrice dont les éléments sont des fonctions des coordonnées, par $f((x))$ une fonction de la grandeur hypercomplexe elle-même. La condition d'associativité $\Sigma_\chi\ a_{\chi\alpha\beta}a_{\gamma\chi\delta}=\Sigma_\chi a_{\chi\beta\delta}a_{\gamma\alpha\chi}$ implique des propriétés de commutativité entre les trois matrices et déjà développées par [Frobenius, 1896].

any primitive subsystem. That this can be accomplished without affecting the form (M), but by linear transformations involving only the units $e_1, \cdots, e_r$ appears from the method of regularizing a system.*)

3. Normal Form (S).

For a non-quaternion system which, as we have seen, is a system containing no primitive subsystem of order greater than 1, Scheffers has given a normal form, and the explicit enumeration of distinct systems for $n \leqq 5$ has been given by him. The enumeration of systems in one idempotent unit has been carried out for the general case by Starkweather.**) Explicit enumeration for the case where the system contains more than one idempotent unit will be found for $n = 6$ in vol. 58 of these Annalen, page 370, and for $n = 7$ in the American Journal of Mathematics vol. 26.

Theorem II. *Normal form (M) and normal form (S) are compatible.*

If in any quaternion system the nilpotent units of the primitive sub-systems are deleted we have an associative non-quaternion system which may by a transformation T which involves only the remaining nilpotent units, be thrown into normal form (S), all the distinct types of which for a given order are known. Since such a transformation does not involve the idempotent units it might properly have been applied to the undeleted system thus throwing the non primitive portion of the system together with the corresponding idempotent units into form (S). Since a non quaternion system in form (S) is also in form (P) this transformation does not affect the regularity.

We can now restate the results as follows: —

If a system is in form (M) it may be transformed so as to fall simultaneously in form (P). The units exclusive of the nilpotent units in the primitive subsystems form a non-quaternion system and may be assumed in form (S). A system in this form is said to be in form (N).

$$|S(x)| = \Pi\Phi(x)^s,\ |T(x)| = \Pi\Phi(x)^t$$

ont mêmes facteurs premiers $\Phi(x)$.

L'étude des "groupes" de grandeurs complexes est ainsi ramenée par Frobenius à celle des matrices qui les "représentent". Pour expliciter les relations entre les trois matrices, Frobenius donne l'exemple de l'unique "groupe non commutatif d'ordre 3", les nonions de Sylvester que nous avons vu au chapitre 4 :

Das einfachste Beispiel für diese Möglichkeit liefert, wie mir Molien mitgeteilt hat, die einzige nicht kommutative Gruppe der Ordnung $n = 3$ für die

$$x_1 = y_1z_1,\ x_2 = y_2z_2,\ x_3 = y_1z_3+y_3z_2$$

Demnach ist

$$R(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_3 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & \xi_3 & 0 \end{pmatrix},\ S(y) = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & y_3 & y_1 \end{pmatrix},\ T(z) = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ z_3 & 0 & z_2 \end{pmatrix}$$

also, in Elementarteiler zerlegt,

$$|S(x)| = x_1x_1x_2\ ,\ |T(x)| = x_1x_2x_2,\ |uR(\xi) + vR'(\xi)| = -(\xi_1+\xi_2)\xi_3^2uv(u+v).$$

[Frobenius, 1903, .291].

[Traduction, F.B.]. Un exemple simple permet d'illustrer cet énoncé de Molien, celui du groupe non commutatif d'ordre $n = 3$ pour lequel

$$x_1 = y_1z_1,\ x_2 = y_2z_2,\ x_3 = y_1z_3+y_3z_2.$$

On a alors :

$$R(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_3 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & \xi_3 & 0 \end{pmatrix},\ S(y) = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & y_3 & y_1 \end{pmatrix},\ T(z) = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ z_3 & 0 & z_2 \end{pmatrix}$$

et les diviseurs élémentaires,

$$|S(x)| = x_1x_1x_2\ ,\ |T(x)| = x_1x_2x_2,\ |uR(\xi) + vR'(\xi)| = -(\xi_1+\xi_2)\xi_3^2uv(u+v).$$

Les outils élaborés par Frobenius pour la représentation des groupes en 1896 permettent de déduire les résultats de Molien sur la classification des groupes de l'étude des invariants de la représentation que sont le déterminant, les diviseurs élémentaires et la trace de matrices :

$$(7.)\ R(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \xi_2 & \xi_4 & \xi_4 & 0 \\ \xi_3 & -\xi_4 & c\xi_4 & 0 \\ \xi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

so sind jene Elementarteiler

$$(8.)\ \xi_4^2\xi_4(u+v)(u+v)((u-v)^2+c(u+v)^2).$$

worin der letzte Faktor für $c = 0$ ein quadratischer Elementarteiler ist, sonst in zwei verschieden lineare Elementarteiler zerfällt. Diese Formel zeigt, daβ c eine (nicht numerische) Invariante der Gruppe ist.

Ist ferner

$$(9.)\ R(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \xi_2 & 0 & \xi_4 & 0 \\ \xi_3 & -\xi_4 & 0 & 0 \\ \xi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

so sind die Elementarteiler von $|uR(\xi)+vR'(\xi)|$

$$(10.)\ \xi_4^2\xi_4^2(u+v)(u+v)(u-v)(u-v)$$

also wesentlich von den obigen (für $c=0$) verschieden. Doch will ich hier auf die Klassifikation der Gruppen nicht näher eingehen.
[Frobenius, 1903, 302-303].

Postérité des formes normales de Weyr et Molien, le principe de classification emploie la représentation matricielle pour caractériser un "groupe" par une forme particulière. Cette forme n'est cependant utilisée que dans des exemples précis (comme dans la citation ci-dessus) et le traitement du cas général relève de la définition d'invariants comme les diviseurs élémentaires. La nouveauté portée par la postérité des méthodes de Weyr et Molien chez Frobenius est que les invariants s'articulent à des formes : dans le mémoire de 1903, Frobenius met en relation, pour la première fois, les diviseurs élémentaires et la forme d'une matrice. La nouveauté de cette articulation *formel invariant* dans la représentation des groupes peut être mise en évidence par le contraste de la théorie des formes de 1879 dans laquelle les formes normales ou canoniques n'intervenaient que pour exhiber des formes bilinéaires de diviseurs élémentaires donnés ; en 1903 au contraire, les formes matricielles sont dotées d'une opérationnalité, la décomposition d'une matrice en sous systèmes est une supporte une méthode de décomposition d'un groupe en sous groupes par opérations linéaires sur les éléments de base, et cette décomposition s'articule de manière essentielle à la décomposition polynomiale correspondant aux diviseurs élémentaires (voir à ce sujet l'encart 10 qui détaille les travaux de Frobenius) [Frobenius, 1903, 303-308].
Les méthodes de décomposition matricielle de Weyr et Molien trouvent une postérité dans la théorie de la représentation des groupes de Frobenius. Cette postérité est indissociable de l'adoption progressive en Allemagne de la notion de matrice et implique une nouvelle *articulation* des notions *d'invariants* et de *formes canoniques*. Associées à la représentation matricielle, les formes canoniques jouent un rôle essentiel dans l'émergence de la théorie des systèmes hypercomplexes. La notion d'invariant n'en reste pas moins centrale et la nouveauté tient surtout à ce que les invariants ne sont plus uniquement *représentés* par des *suites polynomiales* mais par des *formes matricielles* qui caractérisent des ensembles d'objets : groupes, systèmes hypercomplexes ou formes bilinéaires.

ENCART 1

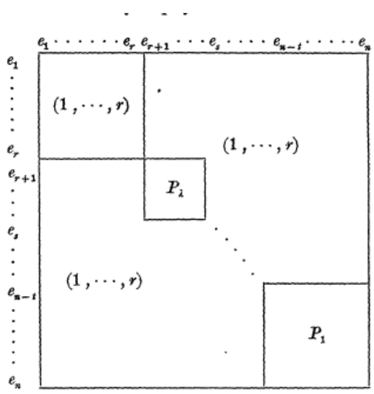
Extraits de différents théorèmes énoncés dans des réseaux de recherches distincts.

[Hensel, 1903, 158-159]

$$B = \left|\begin{array}{cccc|ccc|c|c}
a_9 & b_{51} & b_{52} & c_1 & a_8 & b_{11} & b_{12} & a_5 & a_1 \\
0 & b_{61} & b_{62} & c_2 & 0 & b_{21} & b_{22} & a_6 & a_2 \\
0 & b_{71} & b_{72} & c_3 & 0 & b_{31} & b_{32} & a_7 & a_3 \\
0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & b_{41} & b_{42} & 0 & a_4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & a_9 & b_{51} & b_{52} & a_8 & a_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{61} & b_{62} & 0 & a_6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{71} & b_{72} & 0 & a_7 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_9 & a_8 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_9
\end{array}\right|$$

H.E. Hawks [1903, 437-439]

This paper continues and concludes the solution of the general enumeration problem of hypercomplex number-systems which are associative and have a modulus. [...]
Def. 2. a system is reducible if its units may be divided into two or more subsystems [...]
In order to enumerate the various systems of distinct types it is necessary to find a normal form [...].
These theorems we may display in a table as follows



[Frobenius, 1903, 307-308].

$$U = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & S_k \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & T_k \end{pmatrix}.$$

dann ist

$$S = \begin{pmatrix} U & 0 \\ U_0 & S_0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} V & 0 \\ V_0 & T_0 \end{pmatrix},$$

[...]
Da S_x die Matrix einer einfachen Gruppe ist [...]

CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE.

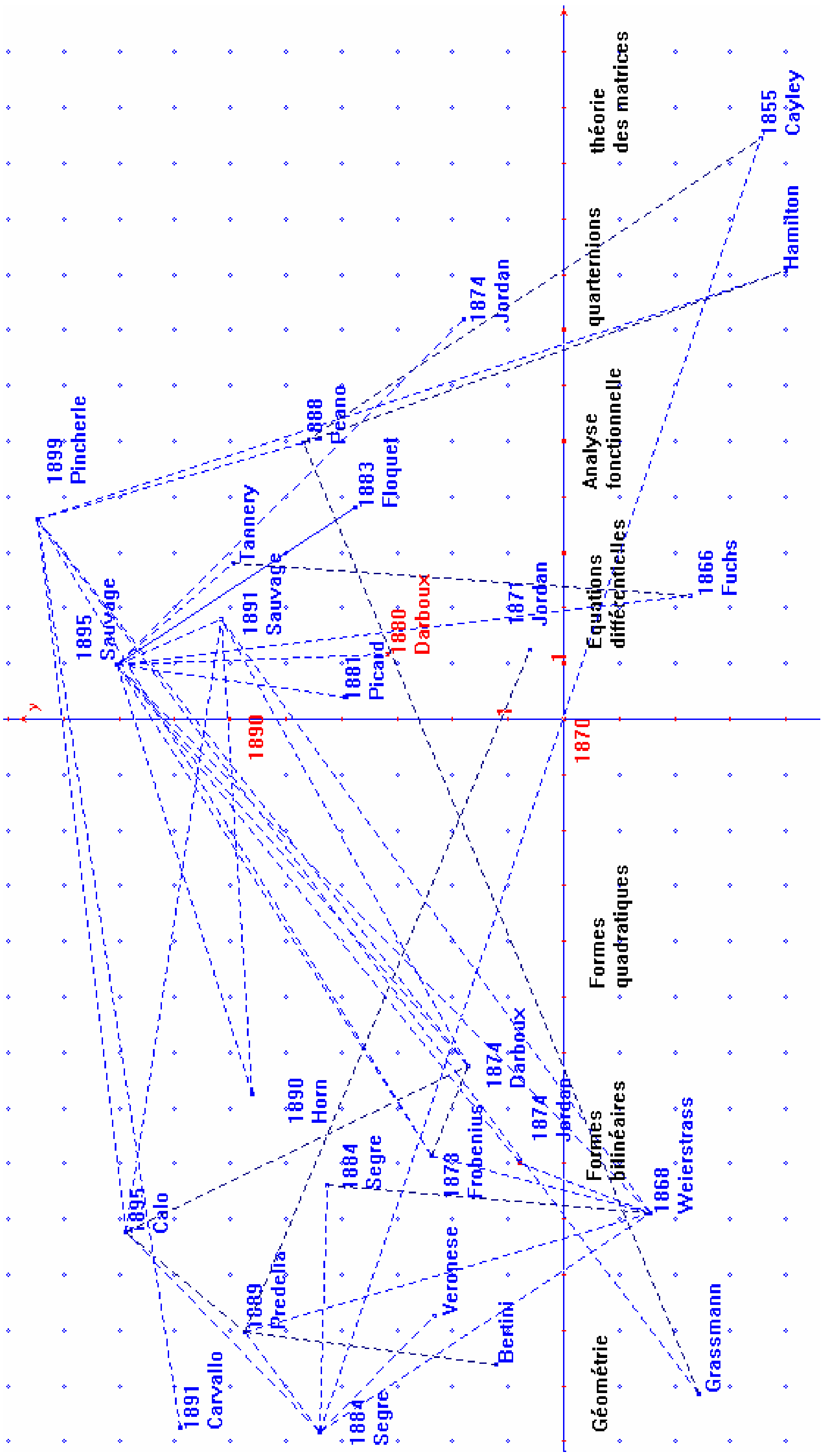
Forme canonique ou invariants ? Question de méthode, question d'identité entre les théorèmes de Jordan et Weierstrass. La théorie des formes bilinéaires de Frobenius [1879] apporte une première réponse à ces deux questions posées par la querelle Jordan-Kronecker de 1874, l'identité est réalisée par l'énoncé d'un unique théorème dont le résultat de Jordan est un corollaire et qui met l'accent sur les invariants au détriment de la notion de forme canonique. La réponse de Frobenius est-elle définitive ? Les réseaux de textes étudiés dans cette partie témoignent du contraire. Différents théorèmes sont énoncés au sein de différentes théories et, de la théorie arithmétique des grandeurs algébriques à la représentation des groupes, la question d'identité se démultiplie. Les trois réseaux de textes présentés par les chapitres 4, 5 et 6 entretiennent cependant des liens qui tissent une certaine identité et dont les nœuds sont les références à deux mémoires portant sur la théorie des formes bilinéaires, le mémoire de Frobenius de 1879 et celui de Weyr de 1890. Quelle identité entre les différents théorèmes présentés en encart 1 ? Une identité se manifeste dans l'emploi d'une méthode transversale aux différents réseaux étudiés et qui se présente comme une méthode de *décomposition* indissociable d'une *forme* de *représentation* : la décomposition matricielle. La composition des matrices par des sous matrices se présente comme une *combinatoire* sur la représentation matricielle à la suite des travaux arithmétiques de Kronecker (chapitre 5) et sous-tend, notamment dans la théorie des systèmes hypercomplexes (chapitre 6), une méthode de décomposition des problèmes qui semble faire résonner l'écho des idéaux de réduction et de simplicité opposés par Jordan à Kronecker en 1874. Pourtant, et c'est un autre point commun des textes étudiés dans cette partie, la forme canonique de Jordan n'est jamais citée par les auteurs qui développent des méthodes matricielles ([1]). Comment interpréter cette disparition de la forme canonique de Jordan dans les années 1880-1905 ? Répondre à cette question permettra, en conclusion de cette partie, de questionner le statut de la combinatoire des matrices dans l'organisation de la théorie des formes au tournant du siècle.

Les nombreux traités d'algèbre publiés au tournant des XIX^e^ et XX^e^ siècles donnent un point de vue privilégié sur la signification donnée à la notion de matrice à cette époque. Première constatation : à la suite des travaux de Weyr, la notion de matrice jouie d'une popularité croissante sur le continent et en Allemagne en premier lieu. D'abord confinées à la théorie des systèmes hypercomplexes dans les premières années de la décennie 1890 (chapitre 6), les matrices se popularisent réellement lorsque Frobenius les emploie dans la théorie des formes bilinéaires en 1894 (chapitre 4, encart 4). On trouve alors la notion de matrices dans la plupart des traités publiés en Allemagne à la fin du siècle, aussi bien dans les ouvrages qualifiés de "haute algèbre" [Pund, 1899, 1]

[1] Voir les représentations graphiques des réseaux de textes. La référence à Jordan se limite au mémoire de 1878 sur l'intégration algébrique des équations différentielles (chapitre 7) et au résultat selon lequel une substitution linéaire d'ordre fini est diagonalisable.

ENCART 2.

Représentation graphique du corpus considéré.



comme ceux de Netto [1896] ou de Weber [1899] que dans des manuels d'"initiation" à la théorie des nombres de Dedekind et à la théorie des groupes comme celui de [Pund, 1899]. Les matrices sont définies dès les premières pages des traités d'algèbre comme donnant une représentation commune aux formes bilinéaires et aux substitutions linéaires. Dans la tradition de la théorie de Frobenius [1879] (chapitre 3), formes bilinéaires et substitutions linéaires sont présentées comme participant d'une même théorie et la notion de matrice est employée pour représenter l'identité entre les deux notions distinctes que sont les formes bilinéaires et les substitutions. Ni forme bilinéaire, ni substitution, la matrice permet d'exposer une théorie générale. Quelle est cette théorie et quelles sont ses méthodes ? D'une part, le contenu présenté par les traités est essentiellement fondé sur le théorème des diviseurs élémentaires notamment popularisé par le traité de Muth de 1899 et donc sur des calculs *d'invariants* ; d'autre part, le caractère opératoire de la représentation matricielle supporte une *combinatoire* des *formes* et une décomposition en *formes canoniques* ou typiques (chapitre 6). Quelle est la conséquence de la popularisation de la notion de matrice sur la tension forme canonique-invariants que l'étude de la querelle entre Jordan et Kronecker avait mis en évidence ? Les trois réseaux de textes étudiés dans cette partie s'organisent autour des deux pivots que sont les mémoires de Frobenius [1879] et Weyr [1890], élargir le corpus à des travaux qui se réfèrent directement au théorème des diviseurs élémentaires de Weierstrass de 1868 et dont la notion de matrice est absente permettra, par comparaison de mettre en évidence les implications de l'assimilation des matrices à la théorie des formes bilinéaires. Cette conclusion d'une partie largement consacrée au mémoire de Weyr de 1890 considère donc un réseau de travaux qui en est indépendant, formé par une recherche bibliographique des travaux faisant une référence directe au mémoire de Weierstrass de 1868. Le corpus obtenu, représenté en encart 2, mêle des recherches sur les systèmes d'équations différentielles linéaires homogènes - équations de Fuchs - et des travaux de géométrie projective et vectorielle. Comme nous l'avons vu au chapitre 3, le problème des équations de Fuchs est celui par lequel les théorèmes de Weierstrass et Jordan ont été pour la première fois mis en relation et le corpus considéré ici permettra tout à la fois de s'interroger sur la spécificité de la représentation matricielle et sur la postérité de Jordan.

C'est dans le contexte des équations de Fuchs qu'est publié le premier exposé en français de la théorie des diviseurs élémentaires au sein d'un traité de Jean Louis Sauvage présenté en encart 4. Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure, professeur à l'université de Marseille, Sauvage a consacré sa thèse aux "propriétés des fonctions définies par un système d'équations différentielles linéaires et homogènes à une ou plusieurs variables indépendantes" (encart 3). Au début des années 1890, Sauvage publie deux mémoires successifs dans les *Annales de l'école normale* intitulés "Théorie des diviseurs élémentaires et applications" ([1891] et [1893]). L'objet de ces mémoires est de "reproduire" une théorie présentée comme "due entièrement à M. Weierstrass" ; il s'agit donc, en passant par-dessus le calcul symbolique des formes de Frobenius, de remonter aux sources du théorème des diviseurs élémentaires afin d'"éclaircir" la théorie des formes bilinéaires :

ENCART 3.

Extraits du rapport d'Hermite sur la thèse de Sauvage soutenue le 17 janvier 1882.

[Hermite *in* Gispert, 1983, 334] :

> *Sur les propriétés des fonctions définies par un système d'équations différentielles linéaires et homogènes à une ou plusieurs variables indépendantes.*
>
> La thèse présentée à la Faculté des sciences par M. Sauvage, ancien élève de l'Ecole normale a pour objet l'étude des fonctions de plusieurs variables indépendantes qui sont définies par un système d'équations linéaires aux différentielles totales entre ces variables. C'est là une question difficile et d'un grand intérêt que notre collègue M. Bouquet a traité le premier en considérant le cas spécial des relations qui définissent la fonction de plusieurs variables introduites par Jacobi dans l'analyse, comme les inverses des intégrales hyperelliptiques. [...] L'auteur a réussi, autant que semble le permettre la maîtrise des fonctions de plusieurs variables, a généraliser les principes découverts et établis par M. Fuchs pour les équations différentielles ordinaires à une seule variable indépendante [...].

ENCART 4.

Quelques extraits des mémoires de Sauvage.

Le mémoire de Sauvage de [1891] est le premier exposé en français de la théorie des diviseurs élémentaires. Les extraits en sont reproduits ici mettent en évidence la façon dont l'occurrence de racine multiple, identifiée lors de la querelle Jordan-Kronecker, comme portant un enjeu de généralité, se traduit chez Sauvage par une approche didactique.

[Sauvage, 1891, 286-288] :

> M . Weierstrass a donné le nom de *diviseurs élémentaires* du déterminant *[P,Q]* (*Elementarteiler)* aux éléments qui résultent d'un certain groupement que nous allons exposer, lorsque l'on considère les diviseurs $ap+bq$ du déterminant *[P,Q].*
>
> [...]Soit $ap+bq$ un quelconque des *diviseurs linéaires* de *[P,Q].* Nous opposerons cette expression à celle de *diviseur élémentaire* de *[P,Q]* [...]. Dans les théories que nous étudierons, chaque diviseur élémentaire jouera un rôle indépendant. Nous pourrons représenter tous les diviseurs élémentaires dans un ordre quelconque par la notation
>
> $$(a_1p+b_1q)^{e1},\ (a_2p+b_2q)^{e2},\ \dots,(a_np+b_nq)^{en}.$$
>
> Mais les indices *1, 2, ..., ρ* n'indiqueront plus que les diviseurs linéaires a_1p+b_1q, $a_2p+b_2q,\dots$, $a_\rho p+b_\rho q$ soient nécessairement distincts. Plusieurs pourront être égaux entre eux [....]. On voit par là qu'il est bien indispensable de distinguer la multiplicité du diviseur $ap+bq$, considéré comme *diviseur linéaire*, de la multiplicité du même diviseur considéré comme *diviseur élémentaire.*

[Sauvage, 1891, 291] :

> Si deux couples de formes bilinéaires s'envoient l'un sur l'autres ils ont même diviseurs élémentaires. [...]. La réciproque de cette proposition, qui fera l'objet de plusieurs parties de ce Mémoire, est une question très considérable. La première solution est de M. Weierstrass. L'une des autres solutions données est de M. Darboux. Il est vrai que M. Darboux s'est contenté d'étudier les formes quadratiques, mais notre Maître n'a laissé au lecteur que la peine d'étendre lui-même le procédé aux formes bilinéaires. C'est ce que nous avons fait dans ce qui suit.

[Sauvage, 1891, 293] :

> VII Cas d'une équation différentielle homogène d'ordre *n*
>
> Considérons maintenant un système fondamental d'intégrales $y_1, \dots, y_n$ d'une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre *n*. le système d'intégrales $y'_1,\dots,y'_n$ déterminé par les équations
>
> $$y'_1 = C_{i1}y_1+\dots+C_{in}y_n \ (i=1,2,\dots,n)$$
>
> sera aussi fondamental si le déterminant des constantes *C* est différent de zéro.

Quand la variable fait le tour d'un point singulier, les nouvelles valeurs Y des intégrales y sont

La théorie des *diviseurs élémentaires* est due entièrement à M. Weierstrass : nous la reproduisons dans ce Travail ; mais de plus nous éclaircissons, nous l'espérons du moins, la théorie des formes bilinéaires, qui est intimement liée à celle des diviseurs élémentaires, en faisant usage de la méthode employée par M. Darboux dans la théorie des *formes quadratiques*. Enfin nous appliquons les théories précédentes à l'étude des équations différentielles linéaires.
[Sauvage, 1891, 285].

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, Darboux avait proposé en 1874 une nouvelle démonstration du théorème de Weierstrass de 1858 sur les couples de formes quadratiques à l'aide des méthodes d'Hermite. Sauvage généralise l'approche de Darboux au cas des formes bilinéaires et au théorème des diviseurs élémentaires de 1868 ([2]). Si l'"application" des formes bilinéaires aux équations de Fuchs nécessite l'introduction d'une forme intégrable identique à celle donnée par Jordan en 1874, cette "forme canonique" est déduite du théorème des diviseurs élémentaires sans aucune référence à Jordan :

Composons un déterminant *R(ω)* ayant même diviseur élémentaire que lui (*R'(ω)*) et de la forme

$$R(\omega)=\left\|\begin{array}{cc}\begin{vmatrix}\omega_1-\omega & 0 & & \\ 1 & \omega_1-\omega & & \\ & & \cdots & \\ & & 1 & \omega_1-\omega\end{vmatrix} & \\ & \begin{vmatrix}\omega_2-\omega & 0 & & \\ 1 & \omega_2-\omega & & \\ & & \cdots & \\ & & 1 & \omega_2-\omega\end{vmatrix}\end{array}\right\|$$

Ce déterminant se ramène immédiatement à la forme du déterminant *[P,Q]* du §V, au moyen d'échanges faciles entre les lignes. A ce déterminant *R(ω)* correspond un choix d'intégrales pour lequel on aura

$$(8)\begin{cases} Y_1 = \omega_1 y_1, \\ Y_2 = \omega_1 y_2 + y_1 \\ \cdots \quad \cdots, \\ Y_{k_1} = \omega_1 y_{k_1} + y_{k_1-1}, \\ Y_{k_1+1} = \omega_2 y_{k_1+1}, \\ Y_{k_1+2} = \omega_2 y_{k_1+2} + y_{k_1+1} \\ \cdots \quad \cdots, \\ Y_{k_1+k_2} = \omega_2 y_{k_1+k_2} + y_{k_1+k_2-1} \\ \cdots \quad \cdots \end{cases}$$

Sauvage cite les travaux de Jordan de 1874 pour le cas des faisceaux singuliers et la caractérisation de la "forme canonique" (8) comme "une forme des plus simples" manifeste l'influence des idées de Jordan, l'absence de référence de

[2] Pour un exposé des approches de Sauvage et Darboux, voir [Vachy, 1893] et [Vessiot, 1901].

déterminées par les équations

$$Y_i = a_{i1}\, y_1 + \dots a_{in} y_n \ (i = 1,2,\dots,n),$$

[...]

54. Cela posé, considérons les deux formes linéaires

$$P = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$
$$P' = x'_1 y'_1 + \dots + x'_n y'_n,$$

On peut ramener *P'* à *P* par la substitution (1) et par la substitution inverse qui ramène les *x'* aux *x*. Considérons de même les deux formes bilinéaires

$$Q = x_1 Y_1 + \dots + x_n Y_n,$$
$$Q' = x_1 Y'_1 + \dots + x_n Y'_n,$$

et remarquons que l'on a

$$Y'_i = C_{i1} Y_1 + \dots + C_{in}\, Y_n$$

[...] Donc le même calcul qui ramène *P'* à *P* ramène aussi *Q'* à *Q*.

Or [...] si l'on exprime *Q* et *Q'* respectivement au moyen des y et des y', on aura

$$Q = \Sigma_{ij}\, a_{ij} x_i y_j\,,$$
$$Q' = \Sigma_{ij}\, a'_{ij} x'_i y'_j\,,$$

[...] on voit que les mêmes substitutions ramènent à la fois les deux formes *P'* et *Q'* aux deux formes *P* et *Q,* et, par suite, que les deux déterminants [*P,Q]* et *[P",Q']* ont les mêmes diviseurs élémentaires.[...] de là ce théorème

Les diviseurs élémentaires de R(ω) ne dépendent pas du choix du système fondamental d'intégrales d'où l'on est parti, et qui fournit les coefficients a q quand la variable tourne autour du point singulier.

5[...] Composons un déterminant *R(ω)* ayant même diviseur élémentaire que lui (*R'(ω)*) et de la forme

$$R(\omega) = \left| \begin{array}{cc} \left\| \begin{array}{cccc} \omega_1-\omega & 0 & & \\ 1 & \omega_1-\omega & & \\ & & \dots & \\ & & 1 & \omega_1-\omega \end{array} \right| & \\ & \left| \begin{array}{cccc} \omega_2-\omega & 0 & & \\ 1 & \omega_2-\omega & & \\ & & \dots & \\ & & 1 & \omega_2-\omega \end{array} \right\| \end{array} \right|$$

Ce déterminant se ramène immédiatement à la forme du déterminant [*P,Q]* du §V, au moyen d'échanges faciles entre les lignes. A ce déterminant *R(ω)* correspond un choix d'intégrales pour lequel on aura

$$(8)\begin{cases} Y_1 & = \omega_1 y_1, \\ Y_2 & = \omega_1 y_2 + y_1 \\ \dots & \dots, \\ Y_{k_1} & = \omega_1 y_{k_1} + y_{k_1-1}, \\ Y_{k_1+1} & = \omega_2 y_{k_1+1}, \\ Y_{k_1+2} & = \omega_2 y_{k_1+2} + y_{k_1+1} \\ \dots & \dots, \\ Y_{k_1+k_2} & = \omega_2 y_{k_1+k_2} + y_{k_1+k_2-1} \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Les diviseurs linéaires ω_1-ω, ω_2-ω,... ne sont pas nécessairement distincts.

[Sauvage, 1891, 326] :

58. Il est intéressant de considérer tous les groupements d'intégrales qui correspondent à un même diviseur linéaire $\omega_1-\omega$ de *R(ω).* Soit *l* le degré de multiplicité de ce diviseur considéré comme linéaire. Supposons qu'il y ait *r+1* diviseurs élémentaires

$$(\omega_1-\omega)^{e0}, (\omega_1-\omega)^{e1}, \dots, (\omega_1-\omega)^{er},$$

on aura

$$e_0 + e_1 + \dots + e_r = l$$

Sauvage au *Traité de Substitutions* montre cependant qu'il n'existe pas, dans l'organisation du savoir mathématique des années 1880-1890, de théorème identifié comme portant sur la réduction des couples de formes bilinéaires à une forme canonique ([3]) :

> Le théorème général auquel nous parvenons est le suivant :
> *Pour qu'une même substitution double de la forme*
> $$y'_i = C_{i1}y_1 + \dots + C_{in}y_n,$$
> $$x_i = C_{1i}x'_1 + \dots + C_{ni}x'_n,$$
> *amène à la fois les formes*
> $$P = x_1y_1 + \dots + x_ny_n,$$
> $$Q = \Sigma a_{ij}x_iy_j$$
> *aux deux formes*
> $$P' = x'_1y'_1 + \dots + x'_ny'_n,$$
> $$Q' = \Sigma a'_{ij}x'_iy'_j$$
> *Il faut et il suffit que les déterminants des deux formes*
> $$Q - \omega P,\ Q' - \omega P'$$
> *aient mêmes diviseurs élémentaires en ω.*
> *En outre, et cette remarque est des plus importantes, il existe une forme canonique des expressions P' et* Q' *pour lesquelles le déterminant* Q'- *ωP' a une forme des plus simples.* Nous utilisons cette forme dans nos théories sur les équations (*A)* [les équations de Fuchs].
> [Sauvage, 1893, 2].

La forme canonique donnée aux couples de formes bilinéaires par Jordan n'est plus, après la querelle de 1874, identifiée comme relevant d'un théorème, elle est un simple corollaire du théorème des diviseurs élémentaires attribué à Weierstrass. Le fait qu'un auteur français comme Sauvage ne reconnaisse pas au théorème de forme canonique de Jordan d'originalité par rapport à la théorie des diviseurs élémentaires est révélateur de ce que la théorie des formes est, à la fin du siècle, une théorie des *invariants* et non des *formes canoniques*.

Comment comprendre alors, dans ce contexte d'une théorie des invariants, l'importance croissante, mise en évidence au chapitre 6, de la notion de forme canonique alliée à une combinatoire des matrices ? Les travaux de Sauvage, indépendants de la théorie des matrices, permettent, par contraste, de mettre en évidence ce que l'adoption des matrices par d'autres auteurs implique comme évolution de la tension formes canoniques - invariants. Plus précisément, c'est du calcul symbolique des matrices de Cayley dont le mémoire de Sauvage est indépendant, la référence à Darboux [1874] s'accompagne en effet de l'adoption de la notion de matrice originalement définie comme mère des mineurs par Sylvester, comme nous l'avons vu au chapitre 4, et qui se manifeste lorsque Sauvage introduit la forme canonique des couples de formes bilinéaires. Comme chez Weierstrass en 1868, la forme canonique est introduite pour la résolution du problème consistant à déterminer un faisceau de formes de diviseurs élémentaires donnés (voir, au

[3] Le théorème de Jordan se limite à la théorie des groupes, voir chapitre 6.

Posons $l_r = e_r$,

$$l_{r-1} = = e_r + e_{r-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$l = e_r + e_{r-1} + \ldots + e_0$$

les nombres l satisfont aux conditions

$$l > l_1 > \ldots > l_r,$$

[...] Appelons groupe de m intégrales l'ensemble des intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ qui satisfont aux conditions

$$Y_1 = \omega y_1,$$
$$Y_2 = \omega y_2 + y_1,$$
$$\ldots$$
$$Y_m = \omega y_m + y_{m-1}.$$

Nous voyons qu'au diviseur linéaire ω_1-ω d'un ordre de multiplicité l, se décomposant en diviseurs élémentaires $(\omega_1\text{-}\omega)^{eo}$, $(\omega_1\text{-}\omega)^{e1}$, ..., $(\omega_1\text{-}\omega)^{er}$, il correspondra un groupe de e_0 intégrales, un groupe de e_1 intégrales, ..., un groupe de e_r intégrales, [...]

59. Pour qu'il y ait un seul groupe d'intégrales, il faut que les nombres e se réduisent à un seul, c'est à dire que le diviseur ω_1-ω ait le même degré de multiplicité comme diviseur linéaire et comme diviseur élémentaire.

60. Au contraire, pour qu'il n'y ait que des intégrales satisfaisant à la seule condition $Y = \omega_1 y$, il faut que chaque nombre e soit égal à 1, ou encore que ω_1-ω soit un diviseur de tous les mineurs de l'ordre l-1 dans $R(\omega)$.

ENCART 5.

Les cours sur les équations différentielles de Schlesinger.

Schlesinger [1908,123-129] :

Dann besteht also das Teildifferentialsystem (Q_α), das der Wurzel r_α entspricht, aus i_α gesonderten Teildifferentialsystemen, die den einzelnen Elementarteilern entsprechen, und zwar hat das zu dem Elementarteiler $(t\text{-}r_\alpha)^\sigma$ gehörige Teildifferentialsystem die Form :

$$(Q^{(\alpha,\sigma)})\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = & r_\alpha u_1 \quad +u_2, \\ \dfrac{du_2}{dt} = & \qquad\quad r_\alpha u_2 \quad +u_3, \\ \ldots & \qquad\qquad . \qquad\quad . \\ \dfrac{du_{\sigma-1}}{dt} = & \\ \dfrac{du_\sigma}{dt} = & \qquad\qquad\qquad\quad r_\alpha u_\sigma. \end{cases}$$

Die Koeffizientenmatrix dieses Teildifferentialsystems hat also die Form

$$\rho_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} r_\alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & r_\alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_\alpha & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & r_\alpha \end{pmatrix},$$

und die Integration von $(Q^{(\alpha,\sigma)})$ läßt sich nunmehr auch sofort vollziehen.

sujet du mémoire de Weierstrass, l'encart 13 du chapitre 3). Weierstrass avait démontré en 1868 qu'a toute suite de polynômes

$$(a_1p+b_1q)^{e1}, \ldots, (a_{\rho p}+b_{\rho q})^{e\rho}$$

dont les puissances satisfont la relation d'ordre des diviseurs élémentaires, est associé un couple de formes bilinéaires :

$$P = \Sigma_i\, [a_i(\xi_\eta)_{ei} - h(\xi_\eta)_{ei-1}]$$
$$Q = \Sigma_i\, [b_i(\xi_\eta)_{ei} - g(\xi_\eta)_{ei-1}]$$

Sauvage cherche à représenter ce couple, qu'il désigne comme la "forme canonique" du faisceau $pP+qQ$, par un déterminant. Si l'on note

$$a_ip+b_iq = u_i,\ gp-hp = v_i,$$

à chaque diviseur élémentaire correspond un couple

$$pP_i+qQ_i$$

dont le déterminant,

$$[P_i,Q_i] = \pm\, u^{ei}$$

peut s'écrire : :

$$[P_i,Q_i] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & vu_i \\ 0 & 0 & \ldots & vu_i & 0 \\ . & . & \ldots & . & . \\ v & u_i & \ldots & 0 & 0 \\ u_i & v & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

[Sauvage, 1891,310].

La *composition* des *mineurs* $[P_i,Q_i]$ associée à la *composition polynomiale* des diviseurs élémentaires $[P,Q] = \Pi_i\, [P_i,Q_i]$ donne la "forme canonique" du déterminant $[P,Q]$:

$$[P,Q] = \begin{vmatrix} 00 & \ldots & \upsilon u_1 & 00 & \ldots & 00 & \ldots \\ 00 & \ldots & u_1 0 & 00 & \ldots & 00 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \upsilon u_1 & \ldots & 00 & 00 & \ldots & 00 & \ldots \\ u_1 0 & \ldots & 00 & 00 & \ldots & 00 & \ldots \\ 00 & \ldots & 00 & 00 & \ldots & \upsilon u_2 & \ldots \\ 00 & \ldots & 00 & 00 & \ldots & u_2 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 00 & \ldots & 00 & \upsilon u_2 & \ldots & 00 & \ldots \\ 00 & \ldots & 00 & u_2 & \ldots & 00 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots_1 \end{vmatrix},$$

Afin d'obtenir cette représentation de la forme canonique d'un faisceau, il faut décrire la manière dont les mineurs $[P_i,Q_i]$ se "composent" en un même déterminant $[P,Q]$. La méthode de "composition" des mineurs de Sauvage articule la composition polynomiale des diviseurs élémentaires à une

ENCART 6.

La caractéristique de Segre et la classification des homographies.

L'approche de Segre développe celle de Stephanos [1883] qui fait correspondre aux "formes algébriques" des "ensembles organisés" de points sur lesquels il définit un calcul symbolique.

[Stephanos, 1883, 229-302] :

> Il y a déjà quelque temps que l'idée de représenter, par des points du plan ou de l'espace, les diverses formes algébriques qui appartiennent à un même système linéaire, à deux ou à trois paramètres (non homogènes) a pris une place importante dans le domaine des considérations algébrico-géométriques. [...] Dans les représentations de ce genre il y a ceci de remarquable, que les formes représentées ne définissent plus des êtres géométriques inertes, en quelque sort, comme le sont les groupes de points etc., mais plutôt des ensembles organisés, des correspondances. Cela ne fait qu'ajouter à l'intérêt qui doit s'attacher à de représentations de ce genre. C'est l'étude d'une pareille représentation qui fait l'objet du présent Mémoire. La représentation dont nous allons nous occuper sera celle des formes bilinéaires binaires, ou bien celle des homographies définies par ces formes, par des points de l'espace. A toute forme bilinéaire binaire
>
> $$A_{xy} = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$$
>
> on peut faire correspondre un point A de l'espace ayant pour coordonnées homogènes les quantités
>
> $$a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}.$$
>
> aux formes bilinéaires d'un faisceau
>
> $$\lambda A_{xy} + \mu B_{xy}$$
>
> correspondent ainsi des points situés sur une droite AB [...]

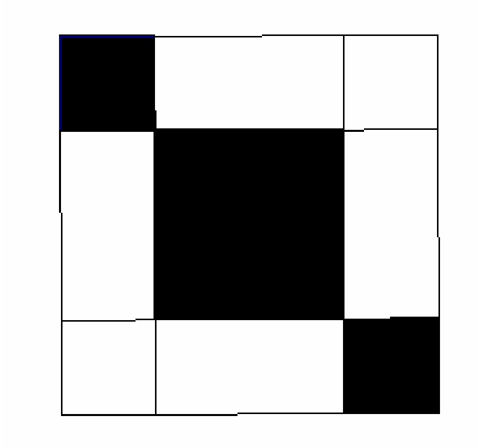
Segre, [1884, 129-136] :

> Rappresentino le x_i $(i = 1,2,\dots,n+1)$ coordinate homogenee di punti x in uno spazio lineare ad n dimensioni S, e le ξ'_k $(k = 1,2,\dots,n+1)$ coordinate omogenee di *piani* (spazi lineari ad n-*1* dimensioni) ξ' in un altro spazio lineare ad n dimensioni S'. Allora un' equazione bilineare qualunque nelle x_i e ξ'_k, $\Sigma_{ik}\ a_{ik}x_i\xi'_k = 0$ reppresenta un *omografia*, vale a dire una corripondenza in cui ad un punto qualunque x di S corrisponde in S' il punto x' avente per equazione in coordinate ξ'_k di piani la (1), cio'é il punto di coordinate :
>
> $$\rho x'_k = \Sigma_i a_{ik} x_i,$$
>
> e similmente ad un piano qualunque ξ' di S' corrisponde in S il piano ξ avente la (1) per equazione in coordinate x_i di punti, cioé il piano di coordinate :
>
> $$(3)\quad r\xi_i = \Sigma_k a_{ik} \xi'_k$$
>
> [...] Due equzioni bilineari tra le x_i e le ξ'_k :
>
> $$(1)\ A_{x\xi'} = \Sigma_{i,k}\ a_{ik}x_i\xi'_k = 0, \quad B_{x\xi'} = \Sigma_{i,k}\ x_i\xi'_k = 0$$
>
> rappresentano due omografie tra gli spazi S ed S' e quindi nache un'omografia tra gli elementi dello spazio S.
>
> [...] Ora il Weierstrass ha dimostrato che la condizione necessarie e sufficiente perchè si possa effetuare questa transformazione è che i divisori elementari del determinate $|a_{ik} - \rho b_{ik}|$ conincidano con quelli del determinante $|p_{ik} - \rho q_{ik}|$. Dicendo $e_l;\ e'_l,\ \dots,\ e_k^{(hl-1)}$ i gradi (in ordine decrescente di grandezza) dei divisori elementari del determinante $|a_{ik} - \rho b_{ik}|$ correspondenti ad una stessa radice ρ_i, e chiamando *caratteristica* l'insieme di questi gradi cosi raggruppati :
>
> $$[(e_1, e_1^{'}, \dots, e_1^{(h_1-1)}), (e_2, e_2^{'}, \dots, e_2^{(h_2-1)}), \dots (e_r, e_r^{'}, \dots, e_r^{(h_r-1)})],$$
>
> no idivideremo le omografie in *classi* a seconda dei loro corrispondenti raggruppamenti dei divisori elementari, vale a dire intenderemo che due omografie siano della stessa classe quando hanno la stessa caratteristica. [...] La condizione necessaria e sufficiente affinche due omografie siano projettivemente identiche sara dunque :
>
> 1° che esse appartengano alla stessa classe,
>
> 2° che esse abbiano gli stessi valori per gl' invarianti assoluti.

composition géométrique en "carrés", "rectangles" et "diagonale" de la représentation par tableau du déterminant :

40. Cherchons les déterminants d'ordre $\hat{\omega}$ de *[P,Q].* Chacun d'eux correspond à une succession de $\hat{\omega}$ lignes et de $\hat{\omega}$ colonnes dans le déterminant principal. Celui-ci peut être représenté schématiquement par la fig. 1 composée :
1° de carrés noirs ayant une diagonale commune avec le carré principal ;
2°de carrés et de rectangles blancs (*fig. 1).*

Fig.1



Les parties blanches correspondent à des éléments tous nuls du déterminant *[P,Q]* et les carrés noirs correspondent aux déterminants $[P_i, Q_i]$. Cela posé, si l'on supprime $\hat{\omega}$ lignes et $\hat{\omega}$ colonnes de *[P,Q],* on aura un mineur que l'on pourra représenter schématiquement par la *fig. 2*, analogue à la précédente.

Fig. 2

Mais, dans cette nouvelle figure, il pourra se présenter des *rectangles noirs.* Supposons que cette circonstance se produise, et, pour fixer les idées, imaginons que la première partie noire soit un rectangle renfermant k lignes et k' colonnes, et allongé dans le sens horizontal, c'est à dire que l'on a $k' > k$.
Dans un élément quelconque du déterminant représenté par la *fig. 2* entreront forcément un élément non nul de la première ligne, un élément non nul de la seconde ligne…un élément non nul de la $k^{ième}$ ligne, et à cause de la forme de la *fig. 2*, ces éléments devront appartenir à k des k' premières colonnes. Mais il restera encore $k'-k$ des premières colonnes dans chacune desquelles il faudra prendre un élément, et cet élément, devant être pris en dehors des k premières lignes, appartiendra à une partie blanche de la *fig. 2* et ne pourra être qu'un

La forme de la suite caractéristique permet à Segre de caractériser les classes d'homographies du plan et de l'espace. Quelques extraits de la méthode développée par Segre pour les homographies du plan sont donnés ci-dessous. [Segre, 1884, 143] :

> In paricolare supponiamo $r=2$, cioé consideriamo l'omografia avente per caratteristica $[(\overbrace{1,1,\ldots,1}^{h_1})(\overbrace{1,1,\ldots,1}^{h_2})]$ (essendo $h_1+h_2=n+1$). Ai due gruppi di divisori elementary che in essa compaiono, corrispondano risp. le radici ρ_1, ρ_2 ; allora a ρ_1 corrispondera uno spazio fondamentale di piani, il cui sostegno (ad $n\text{-}h_1=h_1\text{-}1$ dimensioni) dovra contenere lo spazio fondamentale di punti ad $h_2\text{-}1$ dimensioni che corrisponde a ρ_2 e quindi coindera con esso ; e similmente il sostegno dello spazio fondamentale di piani corrispondente a ρ_2 coincide collo spazio fondamentale di punti corrsipondente a ρ_1. Vi sono dunqu in question omografia due spazi di punti risp. ad $h_1\text{-}1$ e $h_2\text{-}1$ dimensioni talin che tutti I loro punti e tutti I pinai passanti per essi sono elementi uniti dell' omografia. La congiungente di due punti corrispondenti qualunque taglia quei due spazi in due punti determinanti con quelli un rapporto anarmonico fisso. Questa quantita costante (ρ_1: ρ_2) è l'unico invariante assoluto delle omografia considerata.
>
> […] I casi che presenta un'omografia di due piani ordinary sovrapposti sono I 5 seguenti.
>
> *[111].* Questa è l'homografia generale : hessa ha 3 rette e 3 punti uniti [….]
>
> [21]. Due punti uniti e le due rette unite corrispondenti del caso precendente coincidono, sichhè vi è un punto unito che sta sulla corrispondente retta unita cooripondentemente all' incice 2 della caratteristica, e vi è un altro punto unito su questa rettta, e una retta unita corrispondente per quel primo punto. Sulla prima retta unita i punti hanno una corrispondenza projettiva rappresentabile con [11] e il cui invariante assoluto (rapporto anaormonico di due punti corrispondenti qualunque coi due punti uniti) è l'invariante assoluto dell' homografia del piano ; invece sull' altra retta unita l'omografia tra i suoi punti è rappresentata da [2] cioè ha i due punti uniti coincenteti. L'invariante assoluto unico dell' omografia che si condera sul piano, si determia anche come rapporto anarmonico di 2 punti corrispondenti qualunque coi 2 punti d'intersezione della loro conjuungente colle due rette unite ecc.

> zéro. Nous en concluons que, dans le développement du mineur considéré, tous les éléments sont nuls et, par suite, que ce mineur lui-même est identiquement nul.
> 41. Nous sommes donc autorisés à ne considérer que les mineurs de *[P,Q]* tels que, dans la *fig. 2* correspondante, il n'y ait que des *carrés noirs*. [...].
> [Sauvage, 1891, 312] .

Si la méthode de composition des mineurs de Sauvage semble proche de la combinatoire des compartiments de Weyr que nous avons vu au chapitre 5, les deux approches sont en réalité très différentes. Tandis que Sauvage s'appuie sur une analogie entre la forme du tableau et des formes géométriques, Weyr développe un processus d'itération par le calcul des puissances successives de compartiments d'une matrice associée à des systèmes de valeurs. Cette différence met en évidence la spécificité de la combinatoire des matrices telle qu'elle se manifeste chez Weyr [1890] en un héritage mêlé des calculs symboliques de Cayley et Frobenius et des manipulations arithmétiques des systèmes de nombres de Smith et Kronecker : la représentation matricielle a un caractère opératoire et ce sont des opérations qui font émerger les sous matrices et les articulent les unes par rapport aux autres. La spécificité de la combinatoire des matrices tient à son aspect *dynamique* par opposition à la méthode *statique* de Sauvage qui s'appuie sur une représentation géométrique de composition de carrés et rectangles. Dynamique, la combinatoire des matrices est un calcul qui met la représentation en mouvement comme le manifeste Sylvester dans un discours de 1885 qui compare la "loi du mouvement algébrique" sur les fonctions entières de matrices à la mécanique de Newton ([4]). Ce dynamisme est indissociable de l'importance donné à la notion de formes typiques, canoniques ou normales par laquelle la composition des matrices représente une composition particulière des "systèmes de valeurs" sous jacents essentielle pour les méthodes de la théorie des systèmes hypercomplexes (chapitre 6). Chez Sauvage au contraire, la forme canonique est immobile car définie par les invariants que sont les diviseurs élémentaires. La décomposition matricielle transforme la tension formes canoniques – invariants en une tension statique- dynamique.

L'approche de Sauvage est-elle exemplaire de la survivance de méthodes anciennes, statiques, par opposition à la modernité du caractère dynamique de la composition matricielle ? Au contraire. La nouveauté de la composition des matrices de Weyr n'est pas perçue comme un progrès qui doit remplacer les méthodes du calcul symbolique des formes de Frobenius et n'a pas de postérité immédiate comme l'a montré le chapitre 5. L'examen des traités d'algèbre publiés au tournant du siècle révèle que le calcul des matrices est essentiellement assimilé au calcul symbolique de formes bilinéaires. Sitôt définies, les matrices sont représentées par des lettres *A, B,* etc., et sont donc assimilées aux formes bilinéaires et c'est en particulier la formulation du théorème des diviseurs élémentaires dans un cadre matriciel par Frobenius en 1896 qui fait la nouvelle popularité des matrices en Allemagne. La représentation par tableaux des matrices est essentiellement assimilée au calcul des déterminants et employée pour exposer l'arithmétique des lignes et

[4] L'aspect dynamique des matrices et le point de vue mécanique de Sylvester seront détaillés dans la conclusion générale de la thèse.

ENCART 7.

Extrait de l'exposé par Frobenius [1911] de la méthode de Weyr.

Résumons d'abord la manière dont Frobenius expose la méthode de Weyr :
Si $\psi(s) = (s-a)^{x} (s-b)^{\lambda}...$ est l'équation minimale de la matrice A et $n-\alpha'$ le rang de $(A-aE)^{x}$, ρ_{τ} le rang de $(A-aE)^{\tau}$, alors $\rho_0 > \rho_1 > ... > \rho_{x-1} > \rho_x = \rho_{x+1} = ... = n-\alpha$.

$A^{\nu}x = 0$ a $\rho_{\nu-1} - \rho_{\nu} = \lambda_{\nu}$ solutions u', u'', u'''

$A^{\nu-1}x = 0$ a $\rho_{\nu-2}-\rho_{\nu-1} = \lambda_{\nu-1}$ solutions v', v'', v'''

....

Les solutions u', u'', u''' sont dites primitives, de mêmes que les $\lambda_{\nu} - \lambda_{\nu-1}$ solutions parmi les v', v'', v''' ... qui ne sont pas liées aux $Au', Au'', Au''',...$ Frobenius forme ainsi les "solutions normales", à savoir μ chaines $\chi_1, \chi_2, ...,\chi_{\mu}$ et dans chaque chaine les solutions prennent la forme $Ap, A^2p, ...$ Il donne l'exemple suivant, basé sur une représentation combinatoire, pour faire comprendre la formation des solutions normales à partir des solutions primitives.

[Frobenius, 1911, 486] :

Dies kann man am einfachsten graphisch einsehen. Denn ist z. B. $\mu = 3$ und

$$x_1 = 5 = 1+1+1+1+1$$
$$x_2 = 3 = 1+1+1$$
$$x_3 = 2 = 1+1$$

so ist $\nu = 5$ und $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_5$ sind die Summen der Elemente der Spalten des obigen Schemas.

Frobenius [1911, . 489] :

Wenn die Matrix n^{ten} Grades

$$A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$$

in die beiden Matrizen A' und A'' der Grade n' und n'' vollständig *zerfällt*, so ist

$$A^{\chi} = \begin{pmatrix} A'^{\chi} & 0 \\ 0 & A''^{\chi} \end{pmatrix}.$$

und mithin in leicht verständlicher Bezeichnung $\rho_{\chi} = \rho'_{\chi} + \rho''_{\chi}$, $\lambda_{\chi} = \lambda'_{\chi} + \lambda''_{\chi}$, $\delta = \delta' + \delta''$.
Den Zerlegungen $\delta' = \lambda'_1 + \lambda'_2 + ...$, $\delta'' = \lambda''_1 + \lambda''B_2 + ...$ seien assoziiert die Zelegungen

$$\delta' = \chi'_1 + \chi'_2 + ..., \quad \delta'' = \chi''_1 + \chi''_2 + ...$$

Unter den μ Zahlen $\chi'_1, \chi'_2,...$ befinden sich daher λ'_{χ}, die $\tilde{A}\ \chi$ sind, and unter den μ'' Zahlen $\chi''_1, \chi''_2, ..., \chi''_2,...$ befinden sich λ''_{χ} solche Zahlen. Unter den $\mu'+\mu''$ Zahlen $\chi'_1, \chi'_2,...,\chi''_1, \chi''_2,...$ gibt es folglich $\lambda'_{\chi}+\lambda''_{\chi} = \lambda_{\chi}$, die $\tilde{A}x$ sind. Demnach ist der Zerlegung $\delta = \lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_{\nu}$ assoziiert die Zerlegung $\delta\ \chi'_1+\chi'_2+...+\chi''_1+\chi''_2+...$ worin die Summanden noch nicht der Größe nach geordnet sind. Die für $s = 0$ verschwinden Elementarteiler von $|A-sE|$ haben daher die Exponenten $\chi'_1, \chi'_2,..., \chi''_1, \chi''_2,...$, d.h. es sind die Elementarteiler von $|A'-sE'|$ und $|A''-sE''|$ zusammengenommen.
[...] Die charakteristische Determinante der Elementarform

$$C = a\ (x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n) + (x_2y_1 + x_3y_2 + ... + x_{\chi}y_{\chi-1})$$

hat folglich nur den einen Elementarteiler der charakteristischen Determinante der Normalform B, die in eine Anzahl von Elementarformen der Gestalt C vollständig zerfällt.

des colonnes de Kronecker, appliquée à la réduction des systèmes fondamentaux des modules [Pund, 1899, 23], [Netto, 1896, 282]. La popularisation de la théorie des matrices en Allemagne s'accompagne donc d'une identification à la théorie des formes bilinéaires de Frobenius qui se manifeste dans l'histoire écrite par les mathématiciens de l'époque, qui voit en Cayley [1858] et Frobenius [1879] deux origines indépendantes du calcul matriciel comme nous l'avons vu au chapitre 4. Les matrices, notées par des symboles alphabétiques, s'insèrent dans le calcul symbolique des formes et dans une théorie des invariants, la représentation matricielle n'est que rarement employée et toujours pour représenter un déterminant statique dont la forme normale est définie par des invariants. Lorsque, par exemple, Schlesinger [1908,123] emploie la notion de matrice dans son traité de 1908 sur les équations différentielles, le calcul des invariants prime et la "matrice canonique" est donnée a posteriori pour exhiber, comme chez Sauvage, un déterminant dont les invariants sont donnés (encart 5). Une suite de diviseurs élémentaires étant donnée, comment *recomposer* les mineurs associés en une matrice canonique ? Dans le cadre de la théorie des formes bilinéaires, les matrices sont employées pour *représenter* la *composition* des suites d'invariants élémentaires et cette composition n'est pas obtenue par le caractère dynamique qu'à donné Weyr à la représentation matricielle mais par le calcul d'une suite d'invariants introduits par Segre sous le nom de "caractéristique" d'un couple de formes bilinéaires.

Les travaux de Sauvage s'insèrent dans un corpus réduit de textes concernant la démonstration du théorème des diviseurs élémentaires, ils sont associé par Calo [1895, 159] à la notion de "caractéristique" introduite par Segre en 1884 dans le cadre de la géométrie projective. La thèse de doctorat de Corrado Segre [1883] sous la direction d'Ovidio à Turin est consacrée à la géométrie projective des hyperespaces : "la géométrie projective des homographies d'un espace coïncide avec la théorie des invariants analytiques d'un couple de formes bilinéaires" [Segre, 1884a, 104, traduction F.B.]. Un mémoire de Segre intitulé "Sulla Teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazion lineare ad un numera qualunque di dimensioni" et publié en 1884 dans les actes de l'Academia dei Lincei, donne une classification des homographies dans les espaces de dimension quelconque afin de résoudre des questions liées au problème de Pfaff posées par Rosanes [1881] et Stephanos [1883] ([5]). La

[5] Une homographie est une application

$$\pi : \hat{E}^2 \setminus \{0\} \leftrightarrow P^1(\hat{E})$$
$$(z_1, z_2) \leftrightarrow < (z_1, z_2) >$$

telle que

└ ȍ ● GL($\hat{E}^2$), hoπ = πoȍ

(le diagramme commutatif).

où $P^1(\hat{E})$:= {droites vectorielles de $\hat{E}^2$} (isomorphe à la sphère de Riemann, ÊU{õ})

En terme d'abscisse projective :

$$h : z \leftrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$$

et ȍ s'identifie à la matrice *(a,b ; c, d)*

$$õ \leftrightarrow \frac{a}{c}$$

$$-\frac{d}{c} \leftrightarrow õ$$

ENCART 8.

Un problème paradigmatique de la théorie des matrices au tournant du siècle : la détermination des matrices échangeables à une matrice donnée.

Une matrice M étant donnée, il s'agit de déterminer les matrices Q qui lui sont "échangeables", c'est-à-dire de résoudre l'équation $MQ = QM$. Le problème est traité dans l'avant dernier paragraphe du mémoire de Weyr de 1890 [Weyr, 1890, 214-218]. Dans le cas où le déterminant de Q ne s'annule pas, l'équation est équivalente à ([1]):

$$(1)\ M = Q^{-1}MQ$$

Le problème se ramène à celui de la détermination de toutes les matrices semblables à une matrice donnée, résolu par la notion de système normal (voir le chapitre 6). Si $\{(x),\ldots,(y),\ldots\}$ est le système normal associé à la matrice M, Weyr définit le système normal "général", noté $\{(\xi),\ \ldots,\ (\eta),\ \ldots\}_\lambda$ obtenu à partir de combinaisons linéaires de déterminant non nul sur $\{(x),\ldots,(y),\ldots\}$ $(\Lambda, \Lambda',\ldots)$, toutes les solutions de (1) sont alors données par les matrices de la forme :

$$(2)\ Q = \{(\xi), \ldots, (\eta), \ldots\}_\lambda \{(x),\ldots,(y),\ldots\}^{-1}$$

L'application au problème de Sylvester – dans quels cas deux matrices qui commutent sont elles fonctions l'une de l'autre (chapitre 4)– conduit Weyr à considérer le "cas spécial" des matrices n'ayant que des racines distinctes [Weyr, 1890, 217] ([2]) :

> Ist M eine Matrix mit durchwegs einfachsten Wurzeln, so ist jede mit M vertauschbare Matrix eine ganze Function von M, dass das Umgekehrte gilt, ist unmittelbar klar. Es gibt in diesem Falle genau n linear unabhängige, mit M vertauschbare Matrizen. In der That, wählt man n linear unabhängige Systeme (g_1,..,g_n), so erhält man n linear unabhängige Lösungen Q von (1), und jede weiter Lösung setzt sich aus diesen linear zusammen ; da ja jedes weitere System (g) aus jenen n Systemen zusammengesetzt werden kann.

Ce problème fait référence à une proposition énoncé par Frobenius dans le paragraphe 7, consacré à la similitude des formes bilinéaires, du mémoire de 1878 [Frobenius, 1878, 370] :

> XIII. Wenn die ersten Unteredeterminanten der charakteristischen Determinante einer Form keinen Theiler gemeinsam haben, so sind die ganzen Functionen der Form die einzigen Formen, mit dem sie vertauschbar ist.

Frobenius revient sur cette proposition dans un mémoire intitulé "Uber vertauschbare Matrizen" et publié à l'Académie de Berlin en 1896. Ce mémoire est l'occasion d'une des premières utilisations par Frobenius de la notion de matrice, ainsi que de la première référence aux travaux de Weyr ; il s'inscrit dans le contexte des travaux de Weierstrass [1884], Dedekind [1885] et [Study, 1889] sur les systèmes hypercomplexes commutatifs (chapitre 5). Pour Frobenius, ces travaux ont pour "point d'angle" un énoncé que l'on peut énoncer sous une "forme purement algébrique" [Frobenius, 1896, 705] :

---

[1] Dans le cas où le déterminant s'annule, Weyr introduit le "faisceau" de matrice $\varepsilon P+Q$, ε étant destiné à tendre vers 0 et P étant une matrice commutant avec M de déterminant non nul. [Weyr, 1890, 216].

[2] Weyr détaille le "cas spécial" dans lequel la matrice M a des racines simples $\mu_1, \mu_2,\ldots,\mu_n$. Alors le système normal $X = \{(x'), (x''), \ldots, (x^{(n)})\}$ vérifie :

$$(M-\mu_\nu)(x^{(\nu)}) = 0 \quad (\nu = 1,2,\ldots,n)$$

et le système normal général $(\xi^{(\nu)})$ s'écrit : $(\xi^{(\nu)}) = g_\nu(x^{(\nu)})$. Par conséquent la solution général de l'équation (1) est :

$$Q = \{g(x'),\ldots g_n(x^{(n)})\}\ \{(x'), \ldots, (x^{(n)})\}^{-1},$$

c'est-à-dire $Q = XGX^{-1}$ où G est la matrice diagonale d'éléments $g_1,\ldots,g_n$. Mais $M(x^{(\nu)}) = \mu_\nu(x^{(\nu)})$ donc $MX = XH$ où H est la matrice diagonale contenant les éléments $\mu_1,\ldots,\mu_n$
Par conséquent $M = XHX^{-1}$ et ceci permet de répondre au problème de Sylvester : il existe dans ce cas une fonction de degré $n-1$, $\varphi(\xi)$, telle que $\varphi(\mu_\nu) = g_\nu$
et $\varphi(M) = X\varphi(H)X^{-1} = X \begin{Bmatrix} \varphi(\mu_1), & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \varphi(\mu_2), & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & \ldots, & \varphi(\mu_n) \end{Bmatrix} X^{-1}$, c'est-à-dire : $\varphi(M) = Q$

classification de Segre procède d'une "traduction géométrique" du théorème de Weierstrass et de la définition d'un "invariant absolu", la "caractéristique", se présentant comme une suite numérique dont la forme permet la répartition des homographies en classes [Segre, 1884, 129-136] (encart 6). La caractéristique de Segre est définie par la suite des exposants des facteurs linéaires des diviseurs élémentaires. A la décomposition polynomiale de l'équation caractéristique sont associées des propriétés géométriques des homographies (encart 6) et à chaque décomposition de la suite d'invariants correspond une forme canonique représentant une classe d'homographies, par exemple ([6]):

3.[a] classe	*[11]*	$x_1 = ay_1$
		$x_2 = \quad ay_2$
		$x_3 = \qquad by_3$
		$x_4 = \qquad\quad by_4$
	[(11)]	$x_1 = ay_1 + \lambda_1 y_3$
		$x_2 = \qquad ay_2 + \lambda_2 y_4$
		$x_3 = \qquad\quad ay_3$
		$x_4 = \qquad\qquad ay_4$

La caractéristique de Segre est exemplaire des méthodes qui marquent la postérité du théorème de Weierstrass. Le rôle essentiel est joué par les invariants et les formes canoniques ne sont qu'une représentation de la suite des invariants ; l'articulation entre donnée des diviseurs élémentaires sous formes polynomiales et celle des formes canoniques est assurée par l'invariant qu'est la caractéristique de Segre. Au début du XX[e] siècle, la notion de matrice est assimilée par la théorie des formes bilinéaires et les méthodes de calculs d'invariants. Quelle est alors la postérité de Weyr ? La réponse est double. D'une part Weyr apparaît comme le principal responsable du développement de la notion de matrice sur le continent dans les années 1890. D'autre part, la popularisation de notion de matrice dans le cadre de la théorie des formes bilinéaires manifeste une disparition des méthodes originales de Weyr. Un auteur comme Molien qui fait un large usage de la combinatoire des matrices de Weyr reste marginal et lorsque ses travaux seront repris par Frobenius en 1905, ils seront reformulés dans le cadre du calcul symbolique des formes et de la théorie des diviseurs élémentaires (chapitre 6). Le mémoire de Weyr lui-même fera l'objet d'une communication de Frobenius à l'Académie de Berlin en 1911 intitulée "Ueber den Rang einer Matrix" et dans laquelle, comme le montre l'encart 7, Frobenius réduit la composition des matrices de Weyr à la composition des invariants polynomiaux articulés par la caractéristique de Segre [Frobenius, 1911, 488-489]. La réorganisation de la théorie des formes bilinéaires proposée par Weyr en 1890 se heurte donc à l'existence d'une méthode paradigmatique, s'attachant à la tradition de Frobenius, reposant sur un calcul d'invariants polynomiaux et popularisée par de nombreux traités comme celui de Muth [1899].

Dans le cadre de la théorie des formes bilinéaires, la postérité des méthodes de composition matricielle de Weyr se limite à la résolution d'un problème bien

[6] Voir [Meyer et Drach, 1911, 410] pour un exposé synthétique de la classification des faisceaux de formes bilinéaires par la caractéristique de Segre.

Sind $a_{\alpha\beta\gamma}$ *($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n$; $\gamma = 1, 2, \ldots m$)* irgend mn^2 Grössen , die den Bedingungen

$$\Sigma_\lambda a_{\alpha\lambda\gamma} a_{\lambda\beta\delta} = \Sigma_\lambda a_{\alpha\lambda\delta} a_{\lambda\beta\gamma}$$

genügen, und setz man

$$a_{\alpha\beta} = \Sigma_\gamma a_{\alpha\beta\gamma} x_\gamma,$$

so ist die Determinante n^{ten} Grades $|a_{\alpha\beta}|$ ein Product von n linearen Functionen der m unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m$.

Les équations $\Sigma_\lambda a_{\alpha\lambda\gamma} a_{\lambda\beta\delta} = \Sigma_\lambda a_{\alpha\lambda\delta} a_{\lambda\beta\gamma}$ formulent la condition donnée par Dedekind [1885] pour la commutativité des systèmes de valeurs à n unités complexes. Le "calcul symbolique pour la composition des matrices", permet de généraliser cet énoncé par le théorème suivant :

Dieser Satz lässt sich noch etwas verallgemeinern. Schon Study hat in seiner Arbeit *Uber Systeme von complexen Zahlen* (Gottinger Nachrichten, 1889) darauf hingewiesen, dass viel der in diesem Zusammenhage abgeleiteten Resultate sich von bekannten Sätzen der Theori der linearen Transformationen nur in der Ausdrucksweise unterscheiden.

Ich werde mich daher hier der symbolischen Bezeichnung für die Zusammensetzung der Matrizen (Formen) bedienen, die ich in meiner (im Folgenden mit L. citirten) Arbeit *Uber lineare Substitutionen und bilineare Formen* [...] auseinandergesetzt habe. Mit ihrer Hülfe kann dann der Satz so formuliert werden :

II. *Ist $f(x,y,z,\ldots)$ eine beliebige Funktion der m Variabeln $x,y,z,\ldots$, sind A, B, C, ... m Formen, von denen je zwei vertauschbar sind, und sind a_1 , a_2, a_3,... (resp. b_1, b_2, b_3,... : c_1,c_2, c_3,...) die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von A (resp. B, C, ...), so lassen diese Wurzeln sich einander, und zwar unabhängig von der Wahl von f, so zuordnen, dass die Determinante der Form f(A, B, C, ...) gleich dem Producte*

$$f(a_1, b_1, c_1,\ldots)\, f(a_2, b_2, c_2,\ldots) f(a_3, b_3, c_3,\ldots)\ldots$$

wird

La revendication de Frobenius d'avoir introduit en 1878 le "calcul symbolique pour la composition des matrices", n'est pas une revendication de priorité sur Cayley, Sylvester ou Weyr mais une affirmation de nature mathématique : pour Frobenius, le "calcul symbolique des matrices" est "identique" au calcul symbolique des formes bilinéaires. La représentation matricielle est cependant quasiment absente du mémoire de 1896 qui emploie des procédés "identiques" à ceux du calcul symbolique des formes, elle n'intervient que pour la résolution du problème de la commutativité des matrices [1896, 706] :

III. Die Grössen $f(a_1, b_1, c_1,\ldots)$, $f(a_2, b_2, c_2,\ldots)$, $f(a_3, b_3, c_3,\ldots)\ldots$ sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Form f(A, B, C, ...).

Frobenius montre qu'il suffit de démontrer le cas particulier suivant [1896, 707] :

V. Sind A und B zwei mit einander vertauschbare Formen, und sind x und y zwei Variabeln, so sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der form $Ax+By$ ganze lineare Functionen von x und y.

Il faut distinguer, parmi les matrices qui commutent deux à deux, celles qui sont fonctions entières l'une de l'autre (voir la discussion de Sylvester sur ce problème au chapitre 4) :

Sind die Formen $A, B, C, \ldots$ alle Functionen einer und derselben Form R, so sind je zwei von ihnen vertauschbar. Für diesen Fall ergeben sich die augestellten Sätze alle aus dem Satze IV. Sie würden also von trivialem Inhalte sein, würde der Satz gelten: Sind je zwei der Formen A, B ; C, ... vertauschbar, so lassen sie ich alle als Functionen einer und derselben form R darstellen. Dieser Satz wäre ein Analogon eines bekannten ABEL'schen Satzes aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. Während man aber bei dem algebraischen Satze für R eine Function von A, B, C, ... wählen kann, ist dies, wie das einfachste Beispiel zeigt, hier nicht der Fall. Denn ist

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

so ist $A^2 = B^2 = AB = BA = 0$. Also ist jede Function von A und B von der Form $F = aA+bB+cE$, und jede Function von F von der Form $pE+qF$.

précis : déterminer l'ensemble des matrices commutant avec une matrice donnée (encart 8). Ce problème, qui a suscité les travaux de Sylvester et Weyr sur les matrices dérogatoires, est historiquement fondateur de la théorie des matrices sur le continent (chapitre 4). Il apparaît à la fin du siècle comme le problème paradigmatique de la théorie des matrices à la suite des résultats et méthodes développées par Frobenius dans le cadre de la représentation de groupes (chapitre 6) [Frobenius, 1896, 1898] ([7]). La véritable postérité des idées de Weyr chez Frobenius tient alors à la considération des facteurs linéaires de formes $rE\text{-}A$ qui participent de la postérité de l'idée de matrice scalaire de Cayley (chapitre 3, encart 4).

Au début du XX^{e} siècle, le développement de méthodes de décompositions à des formes normales se fait en dehors de la théorie des formes bilinéaires. Il y a par exemple le "Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif" dans lequel Pincherle reprend la méthode par laquelle Peano en 1888 avait abordé les systèmes d'équations différentielles linéaires homogènes par la définition d'espaces vectoriels de fonctions en référence à la géométrie de Grassmann et auxquels il donne une définition axiomatique dans un contexte géométrique ([8]). Pincherle met en avant la notion d'opération sur des "espaces" de fonctions analytiques :

> Le même point de vue se retrouve dans un travail étendu de M. Carvallo dont la première partie considère les substitutions linéaires comme des opérations (l'auteur dit *opérateurs*) appliquées aux vecteurs de l'espace ordinaire [...]. Au même ordre d'idées, bien que le concept vectoriel n'y soit pas explicitement énoncé, se rattachent d'autres travaux importants : pour n'en citer qu'un, le mémoire de M. Frobenius sur les formes bilinéaires et les nombreuses recherches que ce beau mémoire à inspirées.
> [...] L'objet de ce mémoire est l'étude des opérations distributives qu'on peut appliquer aux fonctions analytiques, plus particulièrement aux séries de puissances entières et positives de la variable x [...]. Nous considérons l'ensemble de ces séries comme une variété ou espace (que nous appelons espace fonctionnel) à un nombre infini de dimensions : chaque série est un élément ou point de cet espace, et le système des coefficients de la série peut se regarder comme le système de ses coordonnées.
> [....] après quelques généralités sur les opérations distributives, on traite des racines de ces opérations, puis des opérations appliquées aux variétés linéaire à un nombre fini de dimensions, et au moyen du concept de racines d'une opération, on retrouve d'une façon tout à fait simple et naturelle la décomposition d'une homographie par les diviseurs élémentaires de Weierstrass.
> [Pincherle, 1899]

---

[7] Lorsque les matrices commutent, il est possible de les réduite simultanément à une forme normale ce qui permet une représentation de l'ensemble des matrices par les valeurs propres. Voir [Curtis, 1999] pour tout développement sur le problème des matrices qui commutent dans la théorie de la représentation linéaire des groupes finis.

[8] Il s'agit de la première axiomatisation de Peano par opposition à son approche de 1898 qui, au contraire, axiomatise la géométrie par les vecteurs.

Dans le cadre du calcul symbolique des formes de Frobenius, les conditions sur la commutativité des systèmes hypercomplexes sont données par une fonction linéaire de matrices échangeables deux à deux. En effet, si dans les équations de l'énoncé I :

$$\Sigma_\lambda a_{a\lambda\gamma} a_{\lambda\beta\delta} = \Sigma_\lambda a_{\alpha\lambda\delta} a_{\lambda\beta\gamma}$$

La matrice ($a_{\alpha\beta}$) définie par $a_{\alpha\beta} = \Sigma_\gamma a_{\alpha\beta\gamma} x_\gamma$, est une fonction des variables $x_1, x_2, \ldots x_m$. Par exemple, pour le cas $n = m = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{111}x_1 + a_{112}x_2 & a_{121}x_1 + a_{122}x_2 \\ a_{211}x_1 + a_{2112}x_2 & a_{221}x_1 + a_{222}x_2 \end{pmatrix}.$$

Dans l'écriture à trois indices $a_{\alpha\beta\gamma}$, les deux premiers indices α et β définissent m matrices

$$A_\gamma = (a_{\alpha\beta\gamma})_{\alpha,\beta} \ (1 \hat{A} \gamma \hat{A} m)$$

et le troisième, γ, définit une fonction linéaire des m matrices. Par exemple :

$$A = A_1x_1 + A_2x_2 = \begin{pmatrix} a_{111} & a_{121} \\ a_{211} & a_{221} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{112} & a_{122} \\ a_{212} & a_{222} \end{pmatrix} x_2$$

Les équations sur la commutativité du système hypercomplexe s'interprètent alors comme provenant du produit de la fonction linéaire $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_mx_m$ par elle-même :

Membre de gauche

$a_{a\lambda\gamma}$	$a_{\lambda\beta\delta}$
Coefficient de la a^e ligne, λ^e colonne de la γ^e matrice de la fonction : celle de coefficient x_γ	Coefficient de la λ^e ligne, β^e colonne de la δ^e matrice de la fonction : celle de coefficient x_δ

Membre de droite

$a_{\alpha\lambda\delta}$	$a_{\lambda\beta\gamma}$
Coefficient de la a^e ligne, λ^e colonne de la δ^e matrice de la fonction : celle de coefficient x_δ	Coefficient de la λ^e ligne, β^e colonne de la γ^e matrice de la fonction : celle de coefficient x_γ

Le terme $\Sigma_\lambda a_{a\lambda\gamma} a_{\lambda\beta\delta}$ est le coefficient *de* $x_\gamma x_\delta$ dans le développement de $(A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_mx_m)^2$ et $\Sigma_\lambda a_{a\lambda\gamma} a_{\lambda\beta\delta}$ le coefficient de $x_\delta x_\gamma$ dans ce même développement. Il faut donc poser $x_\gamma x_\delta = x_\delta x_\gamma$, alors $A_\gamma A_\delta = A_\delta A_\gamma$ et les matrices sont permutables deux à deux.
En 1910, un nouveau mémoire de Frobenius intitulé "Uber die mit einer Matrix verauschbaren Matrix" donne une synthèse de l'ensemble de travaux sur la détermination des matrices échangeables à une matrice donnée [Frobenius, 1910, 415] :

> Ist C eine Matrix des Grades n, so ist die Anzahl r der linear unabhängigen Matrizen R, die mit C vertauschbar sind,
>
> $$r = n + 2\,(n_1 + n_2 + n_3 + \ldots),$$
>
> wo n_k der Grad des gröβten gemeinsamen Divisors aller Determinanten $(n\text{-}k)^{ten}$ Grades der Matrix
>
> $$xE - C = B$$
>
> ist. Diese Formel habe ich am Ende des §7 meiner Arbeit *Uber lineare Substitutionen und bilineare Formen, CRELLES Journal, Bd. 84,* ohne Beweis angegeben.

Les preuves de l'énoncé ci-dessus se basent sur l'emploi de la forme normale de Weierstrass (Vogt [1887], Maurer [1887]) ou sur la forme normale rationnelle de Frobenius ([Landsberg 1899], Hensel [1904]). Frobenius propose une nouvelle démonstration "naturelle" et "simple", c'est-à-dire détachée du cadre de l'étude des domaines de "rationalité" de Kronecker qui marquait les preuves de Hensel [1904] et Landsberg [1899] (chapitre 5, encart 9b). Il s'agit de transformer la fonction entière de matrice $B = xE - C$ en une forme normale A par composition par des matrices entières [Frobenius, 1910, 416].

> Die Form $B = xE - C$ gehe furch die Substitutionen L und M^{-1} in A über, so daβ
>
> $$(1)\ LB = AM, \quad LBM^{-1} = A$$
>
> ist.

Pour Pincherle, le problème de la "décomposition d'une homographie par les diviseurs élémentaires de Weierstrass" correspond à la recherche de variétés indépendantes pour une opération donnée :

> Etant données l'opération A et la variété $V(a_1, a_2,\ldots,a_n)$, invariante par rapport à A et qui ne renferme pas de racines de A, existe-t-il, dans cette variété, une fonction ω invariante par rapport à A ?
> [...] Soit donc
> $$\omega = h_1a_1 + h_2a_2 + \ldots + h_na_n$$
> une fonction invariante par rapport à A ; on aura
> $$A(\omega) = z\omega$$
> [...] d'où suit pour z la condition nécessaire et suffisante d'être racine de l'équation caractéristique ou fondamentale de l'opération A par rapport à la variété donnée
> [...] On démontre immédiatement que si $V_n(a)$ contient une variété $V_m(b)$, $m < n$, qui est aussi invariante par rapport à A, et $g(t)$ est le premier membre de l'équation fondamentale de A par rapport à $V_m(b)$, $g(t)$ est diviseur de $f(t)$.
> [...] A côté de l'opération A considérons l'opération
> $$(11)\quad B = E_1^{r_1}E_2^{r_2}\ldots E_q^{r_q};\ (E_i = A - z_i,\ i = 1, 2, \ldots, q).$$
> Nous savons que sa variété racine est la somme des variétés racines de $E_1^{r_1}, E_2^{r_2},\ldots, E_q^{r_q}$. De plus nous pouvons dire qu'à cette variété appartiennent toutes les fonctions invariantes par rapport à A.
> Nous nous proposons maintenant d'étudier les racines de l'opération B, et pour cela, celles de l'opération E^r, où $E = A - z$, et z désigne l'une quelconque des racines de (10).
> [...] si l'opération $E^p = (A-z)^p$ admet, dans la variété $V_n(a)$, une racine propre $\omega^{(p-1)}$ on aura :
> $$E(\omega^{(p-1)}) = \omega^{(p-2)}, E(\omega^{(p-2)}) = \omega^{(p-3)},\ldots,E(\omega^{(1)}) = \omega,\ E(\omega) = 0,$$
> d'où l'on tire :
> $$(12)\left\{\begin{array}{ccc} A(\omega) & = & z\omega, \\ A(\omega^2) & = & z\omega^{(1)} + \omega, \\ \ldots. & \ldots & \ldots \\ A(\omega^{p-1}) & = & z\omega^{(p-1)} + \omega. \end{array}\right.$$
> Les fonctions ω, $\omega^{(1)}$, ..., $\omega^{(p-1)}$ ainsi déterminées sont linéairement indépendantes [...]. Si donc E^p admet dans la variété $V_n(a)$ une racine propre $\omega^{(p-1)}$, il existe une variété d'ordre p,
> $$V_p(\omega, p\omega^{(1)},\ldots,\omega^{(p-1)})$$
> également invariante par rapport à A, contenue dans $V_n(a)$, et sur laquelle A opère la substitution linéaire (12). Le tableau (12) montre que le premier membre de l'équation caractéristique correspondante est
> $$g(t) = (t-z)^p,$$
> d'où il suit que z est racine de $f(t)$ de l'ordre p au moins.
> [...]*
> *Le lecteur a sans doute déjà remarqué que la théorie des opérations distributives nous a permis d'obtenir le concept des diviseurs élémentaires de Weierstrass, et cela, d'une façon excessivement simple.
> [Pincherle, 1899, 341] .

Si P et Q sont des matrices entières telles que :

$$(2)\ PA = AQ$$

Alors $A^{-1}PA = Q$ et les éléments de P et Q sont de fonctions entières de x. Mais $LBM^{-1} = A$ donc la relation (2) implique

$$P(LBM^{-1}) = (LBM^{-1})Q \text{ soit } (L^{-1}PL)B = B\,(M^{-1}QM).$$

Mais, comme la forme B est polynomiale de degré 1, on en déduit que l'on peut écrire :

$$L^{-1}PL = BU + R$$

où U est une matrice entière et R une matrice constante. Cette dernière équation s'interprète comme une "division" dont U est le quotient et R le reste. Frobenius démontre que la matrice constante R vérifie $CR = RC$, la donnée des matrices entières P et Q détermine donc une matrice constante R échangeable avec C. Réciproquement, Frobenius démontre qu'à toute matrice R échangeable avec C sont associées deux matrices P et Q telles que $PA = AQ$ et conclut [Frobenius, 1910, 417] :

> Der Matrix R entsprechen also unzählig viele Paare P, Q.

Pour dénombrer les matrices échangeables à une matrice donnée, il suffit donc de dénombrer les matrices P, Q ayant cette propriété. Les coefficients $a_{\alpha\beta}$ de la forme normale A étant nuls si $\alpha ý \beta$ et les coefficients sur la diagonale s'identifiant aux diviseurs élémentaires de $|B|$: $a_1, \ldots, a_m, 1, \ldots, 1$, $PA = AQ$ s'écrit : $p_{\alpha\beta}\ a_\beta = a_\alpha\ q_{\alpha\beta}$. Le dénombrement des solutions de cette dernière équation (p. 417, 418) achève la démonstration.

La matrice R s'obtient par un procédé simple de division. R est donc une fonction entière de C dans le cas où $P = Q = g(x)E$. Cette conclusion résout la question posée par Sylvester en 1884 sur le lien entre relation fonctionnelle et matrices échangeables [Frobenius, 1910, 418] :

> Wenn man eine ganze Funktion $p(x)$ durch eine lineare Funktion $x-c$ dividiert, $p(x) = (x-c)u(x)+r$, so kann man den konstanten Rest r auch finden, indem man $x = c$ setzt , $r = p(c)$. Ihn ähnlicher Weise kann man aus der Bedingung
>
> $$L^{-1}PL = (xE-C)E+R$$
>
> die konstante Matrix R bestimmen. Ist, nach Potenzen von x entwickelt,
>
> $$L^{-1}PL = P_0+P_1x+P_2x^2+\ldots,$$
> $$U = U_0 + U_1x+U_2x^2+\ldots,$$
>
> so ist
>
> $$P_0 = R-CU_0,$$
> $$P_1 = U_0-CU_1,$$
> $$P_2 = U_1-CU_2,$$
> $$\ldots;$$
>
> Mithin ist
>
> $$R = P_0 + CP_1 + C^2P_2 + \ldots$$
>
> und
>
> $$U = P_1 + (C+rE)P_2 + (C^2+rC+r^2E)P_3+\ldots$$
>
> Ist speziell $P = Q = g(x)E$, wo $g(x)$ eine ganze Funktion von x ist, so wird $L^{-1}PL = g(x)E$ und $R = g(C)$.

La division euclidienne montre comment associer un couple P, Q à R, $g(x)P$ et $g(x)Q$ sont alors associées à $g(x)R$. Le nombre de matrices linéairement indépendantes échangeables avec A étant égal à r, Frobenius exprime la forme d'une matrice échangeable générale comme combinaisons de r éléments [Frobenius, 1910, 419] :

> Die allgemeinste mit C vertauschbare Matrix R haben wir aus r linear unabhängigen Matrizen R_ρ zusammengesetzt,
>
> $$R = \Sigma g_\rho R_\rho$$
>
> mit r willkürlicher Konstanten g_ρ. Läβt man dür die Factoren g ganze Funktionen $g(C)$ von C, so kann man R aus nur m^2 Matrizen R_μ, aber nicht aus weniger, in der Form
>
> $$R = \Sigma g_\mu(C)R_\mu$$
>
> zusammensetzen.

La décomposition donnée par Pincherle est, d'un point de vue contemporain équivalente à celle de Weyr. Les deux méthodes donnent une décomposition des systèmes de valeurs ou variétés associés aux puissances successives de chaque facteurs linéaires $(A\text{-}z)^p$; la "structure de V_n dépend de la composition de B en facteurs" :

> Les propositions établies aux deux derniers §§ nous conduisent à cette conclusion que chaque facteur $E_i^{r_i}$ de l'opération
>
> $$(11)\quad B = E_1^{r_1} E_2^{r_2} ... E_q^{r_q} ;$$
>
> donne lieu à une variété W_{ri} d'ordre r_i , invariante par rapport à l'opération A, comprise dans la variété donné $V_m(a)$ et constituée par les racines de E_i et des puissances qui appartiennent à cette variété $V_n(a)$. La variété W_{ri} peut elle même se décomposer en d'autres variétés invariantes : ce sont celles données par les colonnes verticales des tableaux (14) [...] les racines de l'opération B sont données, et exclusivement, par la somme des variétés W_{r1}, W_{r2}, ..., W_{rq}, et puisque $r_1 + r_2 + ... + r_q = n$, cette variété coïncide avec la variété donnée $V_n(a)$.
> [...] Le résultat que nous venons d'obtenir peut encore s'exprimer sous la forme suivante : toutes les fois qu'une opération distributive A admet une variété invariante V_n, il existe une opération de la forme
>
> $$B = a_0 + a_1A + a_2A^2 + ... + a_nA^n$$
>
> qui, appliquée à une fonction quelconque de la variété, donne zéro comme résultat et les §§ précédents nous apprennent de quelle façon la structure de V_n dépend de la composition de B en facteurs.
> [Pincherle, 1899, 345] .

La méthode de Pincherle annonce déjà le succès futur de la méthode de Weyr, en tant que contrairement à toutes les méthodes basées sur les déterminants cette méthode est valable pour les problèmes d'analyse fonctionnelle qui nécessitent le recours à la dimension infinie (noter l'expression racine propre de Pincherle qui manifeste l'un des premier points de contacts des travaux considérés dans cette thèse avec ce qui constituera la théorie spectrale). Si, contrairement aux méthodes des invariants cette méthode participe d'une décomposition, d'une dynamique de la transformation conjointe de l'opérateur et la variété sur laquelle il agit, la méthode de Pincherle ne permet cette fois aucune recomposition, c'est-à-dire aucun aperçu global de la décomposition de l'espace en sous variétés que permet la représentation en tableaux des matrices.

Au tournant du XIX[e] siècle la tension forme/invariants oppose une théorie paradigmatique des invariants, bien organisée dans la tradition de la théorie des formes bilinéaires de Frobenius [1879] et relayée par la publication de nombreux traités d'algèbres aux méthodes développées par des travaux épars, comme ceux de Jordan, Weyr, Pincherle, ou encore Taber (encart 9). Ces différents travaux sont à la croisé de réseaux de recherches distincts, ils se reconnaissent souvent une origine commune dans la notion d'espace vectoriel de Grassmann et proposent une méthode de décomposition des problèmes sous tendue par le caractère opératoire d'une représentation sous forme de tableaux. *Décomposer* ou *recomposer* ? La théorie des *invariants recompose* des *formes* à partir de formes élémentaires (encart 10), la combinatoire des matrices est un

ENCART 9.
Décomposition et représentation. L'exemple du théorème de Taber,

Taber [1889, 363] :

If the greatest extension [extension au sens de Grassmann] annuled by any matrix is *m*, its nullity is *m*, and conversely.This I call the first branch of the law of nullity. Let $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ be any *m* linearly independent quantities in the greatest extension *A* annulled by Φ ; and let $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ be any $n = \omega - m$ quantities in the extension *B* complementary to *A* with respect to the ground ; the α's and β's may then be chosen to represent the ground, and any quantity ρ in the ground may be expressed by

$$\rho = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_m\alpha_m + y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \ldots + y_n\beta_n,$$
$$\Phi\rho = y_1\Phi\beta_1 + y_2\Phi\beta_2 + \ldots + y_n\Phi\beta_n,$$

If

$$\Phi\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \ldots + a_{m1}\alpha_m + b_{11}\beta_1 + b_{21}\beta_1 + b_{21}\beta_2 + \ldots + b_{n1}\beta_n,$$
$$\Phi\beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{m2}\alpha_m + b_{12}\beta_1 + b_{22}\beta_1 + b_{22}\beta_2 + \ldots + b_{n2}\beta_n,$$
……………………………………………………………………………
$$\Phi\beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_m + b_{1n}\beta_1 + b_{2n}\beta_1 + b_{2n}\beta_2 + \ldots + b_{nn}\beta_n,$$

then Φ is represented by the form

	$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{matrix}$

where the blank square and rectangle consist of m columns of zeros. […]

If the matrix Φ transforms every quantity in the ground into in an extension of order ω-m, the nullity of Φ is m, and conversely. [..] If, as in the preceding section, *A* denote the total extension annuled by Φ, and *B* the complementary extension, it will not in general happen that *B* is the extension into which Φ transforms any quantity of the ground. As will appear later, this is only true when the vacuity of Φ does not exceed its nullity. Let B_1 *d*enote that part of *B* transformed by *PH* into *A.* There must exist such an extension unless no extension but *A* is annulled by any power of Φ. Let B_2 denote that part of the extension $B\text{-}B_1$ which is transformed by Φ into B_1. […] Finally, let B_p denote that part of the extension $B-(B_1 + B_2 + \ldots + B_{p-1} + B_{p-1})$ which is transformed by Φ into B_{p-1} ; and suppose no portion of the remaining extension $B_{p+1} = B\text{-}(B_1 + B_2 + \ldots + B_{p-1} + B_p)$ is transformed by Φ *into* B_p. Then all the extension $A, B_1, B_2, \ldots, B_{p-1}, B_p$ are annulled by some power of Φ, but no part of the extension B_{p+1} complementary to their aggregate is annulled by any power of Φ. The following multiplication table shows the effect of Φ upon these mutually exclusive extensions:

	A	B_1	B_2	*etc.*	B_{p-1}	B_p	B_{p+1}
Φ	0	*A'*	B'_1	…	B'_{p-2}	B'_{p-1}	B'_{p+1}
Φ^2	0	0	*A''*	…	B''_{p-3}	B''_{p-2}	B''_{p+1}
Φ^3	0	0	0	…	B''''_{p-4}	B'''_{p-3}	B'''_{p+1}
etc.	.	…	…	…	…	…	…
Φ^{p-1}	0	0	0	…	$A^{(p-1)}$	$B_1^{(p-1)}$	$B_{p+1}^{(p-1)}$
Φ^p	0	0	0	…	0	$A^{(p)}$	$B_{p+1}^{(p)}$

calcul sur la forme, sur la représentation même qui permet une *décomposition* en formes canoniques (encart 9). Décomposition, recomposition, les méthodes distinctes du calcul des invariants et de la décomposition à des formes canoniques seront reconnues comme complémentaires dans les années 1900-1930 et c'est en les mêlant que se construira une culture commune, la théorie des matrices canoniques.

In this table the accented letters denote extensions included each in the extensions denoted by the same letter with fewer accents or unaccented.
The total extension *A* of order *m* annulled by Φ I shall term the null extension or *null region* of the matrix, and the aggregate of the extensions exclusive of *A* annulled by some power of Φ the *vacuous region* of the matrix. [...]
By what has just been proved, each latent region in respect to Φ constitutes a subordinate ground ; for the effect of the matrix Φ upon any one of these extensions is to convert a set of linearly independent quantites, equal in number to its order, into other quantities in the same extenstion. It would thus seem that Φ might be regarded as an aggregate of subordinate matrices corresponding to and equal in number to the distinct latent roots, each of which would have upon the latent region corresponding to it the effect of Φ, and would have a null effect upon any other extension. [...] Let the latent roots of Φ be I in numbers, namely $g_1, g_2,\ldots,g_i$, occurring severally *m,n,...p* times ; let the latent regions corresponding to theg's be *A, B, ..., L* respectively [...] then the form of Φ becomes

$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix}$			
	$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{matrix}$		
		...	
			$\begin{matrix} l_{11} & l_{12} & \ldots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & l_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{p1} & l_{p2} & \ldots & l_{pp} \end{matrix}$

In this form all the constituents except those in the squares along the diagonal are zero. It is obvious from this form that the array of the *a*'s forms a matrix by itself, and that its effect upon any region other than that of the latent root g_1 is to annul it, etc. Whence, if Φ_1 denote the matrix formed from the *a's* and Φ_2 that formed from the *b's* etc., than Φ_1, Φ_2, etc., are nil-factorial together, and

$$\Phi = \Phi_1+\Phi_2+\ldots+\Phi_i$$

$$\Phi^2 = \Phi_1^2+\Phi_2^2+\ldots+\Phi_i^2$$

ENCART 10.

Invariants et recompositions : la théorie arithmétiques des formes dans l'*Encyclopédie* franco-allemande*.*

Le point de vue paradigmatique des invariants, porté par le théorème des diviseurs élémentaires reste prédominant dans la théorie arithmétique des formes présentée par Vahlen [1901] dans la première versions allemande de l'Encyclopédie. Il est de même pour la "théorie des formes et des invariants" de [Meyer et Drach, 1911]. Pour la classification des faisceaux, les formes normales sont obtenues par la donnée des invariants de Weierstrass et de la caractéristique de Segre p [Meyer et Drach, 1911, 410]:

> Par exemple, pour $n = 1$ on a un seul type
>
> $$e_1 = 1$$
>
> de caractéristique *[1].*
>
> [...]
>
> Pour $n = 3$, on a six types, caractérisés par
>
> *[111], [(11), 1], [(111)], [2,1], [(21)], [3]*
>
> que l'on peut représenter avec des variables à un seul indice, sous la forme suivante :
>
> $$[111] : A' = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,\ B' = c_1x_1y_1 + c_2x_2y_2 + c_3x_3y_3\ ;$$
>
> *[(11)1]* : même forme $c_1 = c_2$; [(111)] : même forme $c_1 = c_2 = c_3$;
>
> $$[21] : \quad A' = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3,\ B' = c_1(x_1y_2 + x_2y_1) + c_3x_3y_3 + x_1y_1\ ;$$
>
> [*(21)] :* se déduit de la forme précédente en faisant $c_1 = c_3$;
>
> $$[3]\ A' = x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1,\ B' = c_1(x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1) + x_1y_2 + x_2\,y_1\ ;$$

Ces résultats sur les faisceaux de formes s'appliquent à la classification des formes semblables donnée par la "forme type de Weierstrass" [Meyer et Drach, 1911, 476] :

> La transformation d'une forme *A* en la forme type de Weierstrass est ainsi une *réduction* à une somme de forme irréductibles.
>
> Il est possible de classer les formes *A* à variables contragrédientes d'après la nature des *réduites* qui leur sont semblables ; appelons *caractéristique* de la forme *A* celle du faisceau $(\lambda_1E + \lambda_2A)$;
>
> nous aurons pour $n = 1,2,3$, les types suivants :

$n = 1$	*[1]*	$c_1x_1y_1$
$n = 2$	*[11]*	$c_1x_1y_1 + c_2x_2y_2$
	[(11)]	$c_1\,(x_1y_1 + x_2y_2)$
	[2]	$c_1\,(x_1y_1 + x_2y_2) + x_1y_2$
$n = 3$	*[111]*	$c_1x_1y_1 + c_2x_2y_2 + c_3x_3y_3$
	[(11)1]	$c_1\,(x_1y_1 + x_2y_2) + c_3x_3y_3$
	[(111)]	$c_1\,(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$
	[21]	$c_1\,(x_1y_1 + x_2y_2) + c_2x_3y_3 + x_1y_2$
	[(21)]	$c_1\,(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + x_1y_2$
	[3]	$c_1\,(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + x_1y_2 + x_2y_3$

L'application de ce résultat aux substitutions linéaires est l'occasion d'une première référence à la forme canonique Jordan au sein d'une remarque rajoutée par Drach (p.477-478) :

> La détermination de la *forme normale* d'une substitution linéaire remonte aux travaux de *A.L. Cauchy* sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants.
>
> *C. Jordan* a également obtenu cette forme normale et l'a appliquée dans son Trait des substitutions.
>
> *Remarque.* Ceci nous amène à remarquer que C. Jordan s'est occupé à diverses reprises depuis 1873 de la *réduction* des formes bilinéaires et quadratiques au moyen des substitutions linéaires ou particulières. Quelques uns de ses travaux ont donné lieu à des observations de L. *Kronecker*. Comme *C. Jordan* a également étudié les transformations linéaires qui n'altèrent pas une forme bilinéaire ou quadratique (transformations *automorphes*) ce n'est qu'après l'étude de ces transformations automorphes faites par la méthode de *G. Frobenius* que nous donnerons un exposé d'ensemble des recherches de ce géomètre.

Troisième Partie.

Le théorème de Jordan de décomposition matricielle comme construction d'une culture commune.

INTRODUCTION.

Les nombreux traités sur "la théorie des matrices canoniques" publiés dans les années trente énoncent un "théorème de Jordan de la décomposition matricielle". Ce théorème se réfère à des travaux développés au sein de réseaux distincts entre 1870 et 1930 et le rôle essentiel que lui donne la théorie des matrices canoniques manifeste la construction d'une *culture commune* qui permet de percevoir comme *même* ce qui était auparavant considéré comme distinct. Les traités des années trente donnent une nouvelle identité au théorème de Jordan fondée sur une *dualité* qui résout l'opposition de deux théorèmes qui caractérisait la controverse de 1874 entre Jordan et Kronecker. A l'énoncé d'un *unique théorème* de décomposition canonique correspondent *deux formes* de représentations, deux types de matrices canoniques :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & . \\ . & \lambda & 1 \\ . & . & \lambda \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} . & 1 & . \\ . & . & 1 \\ \lambda^3 & -3\lambda^2 & 3\lambda \end{bmatrix}, (13)$$

> we may prove in the following manner that there exists a matrix J such that
>
> $HAH^{-1} = B.$
>
> [Turnbull et Aitken, 1932].

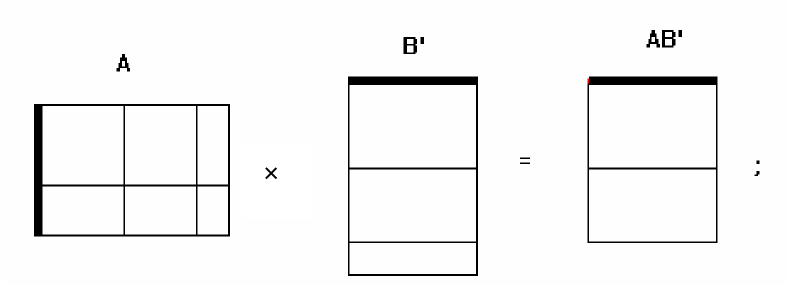
.

La forme A est désigné selon les traités de "forme canonique classique" [Wedderburn, 1932], ou de "forme de Jordan" [Mac Duffy, 1933]. La forme B est dénommée "forme canonique rationnelle". Il y a donc deux formes, répondant aux deux idéaux opposés par Jordan et Kronecker en 1874, d'une part la forme A est la f*orme la plus simple* et donne la d*écomposition maximale* qui pour Jordan devait caractériser les formes canoniques ; d'autre part la forme B est obtenue par des *procédés rationnels* et satisfait les exigences qu'avait formulé Kronecker en 1874. Aux deux théorèmes opposés en 1874, au théorème unique de la théorie de Frobenius, répondent désormais *deux formes canoniques* associées à un *unique théorème de décomposition*. La question d'identité se décline alors sous une forme mathématique au sein des traités des années trente, on apprend à passer d'une forme canonique à l'autre par une méthode spécifique de combinatoire sur la représentation, sur la forme des matrices. Le caractère opératoire de la représentation matricielle est présenté dans les premières pages des traités de la théorie des matrices canoniques, il se présente comme un combinatoire fondée sur des procédés d'extractions de sous matrices :

> 6. Matrices partitioned into Submatrices.
>
> It is convenient to extend the use of the fundamental laws of combination for matrices to the case where a matrix is regarded as constructed not so much from elements as from submatrices, or minor matrices, of elements. For example, the matrix

$$A=\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hdashline 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$$

[...]



$$\begin{bmatrix} C_4(\alpha) & . \\ . & C_3(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & . & . & & & \\ & \alpha & 1 & . & & & \\ & & \alpha & 1 & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & \alpha & 1 & . \\ & & & & & \alpha & 1 \\ & & & & & & \alpha \end{bmatrix}.$$

[...] It is a help to form a staircase graphs of these chains as follows:

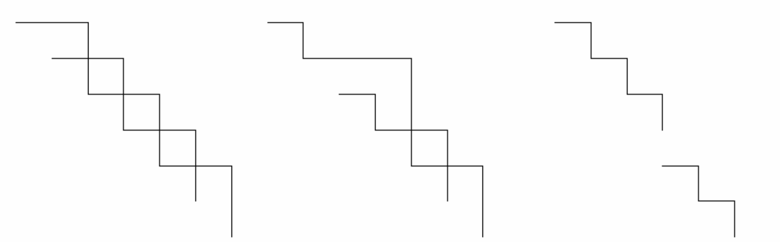


Fig. I Fig. 2 Fig.3

[...]

$$C = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|} \alpha & 1 & & & & & \\ & \alpha & 1 & & & & \\ & & \alpha & & & & \\ \hline & & & \alpha & 1 & & \\ & & & & \alpha & & \\ \hline & & & & & \beta & 1 \\ & & & & & & \beta \\ \hline \end{array}\right]$$

[Turnbull et Aitken, 1932].

Dans les années trente, des images envahissent les traités de mathématiques. Une combinatoire des formes de représentations permet de chercher et démontrer.

Ce chapitre est consacré à l'histoire du théorème de décomposition matricielle qui donne à la forme canonique de Jordan une nouvelle identité en 1930 et il s'avère donc nécessaire d'étudier la construction des caractères opératoires de la représentation matricielle. Si la notion de matrice est déjà ancienne en 1900, la conclusion de la deuxième partie a montré que sa popularité sur le continent passe par une perte relative de son identité. Les matrices sont essentiellement interprétées comme des formes bilinéaires, la représentation en tableau n'est que rarement employée et les techniques de la théorie des matrices sont essentiellement celles du calcul symbolique dans la tradition de Frobenius. A l'opposé, dans les années trente, la notion de forme bilinéaire disparaît et la représentation matricielle envahit les traités mathématiques :

> We have preferred to follow the lead of Cullis, who develops the theory in terms of the structure and properties of matrices – in matrix idiom, as it were, rather than in terms of bilinear and quadratic forms, or of linear substitutions. [...], we have, at the same time, aimed at certain compactness in the formulae and demonstrations. This has been achieved in the first place by a systematic use of the matrix notation [...].
> [Turnbull et Aitken, 1932] :

Cette évolution s'accompagne d'une perte d'influence des méthodes du calcul du déterminant. Les traités des années trente instaurent un nouveau rapport de force dans la tension formes canoniques – invariants, les procédés de décompositions des formes sont au centre des préoccupations et le calcul des invariants apparaît secondaire. L'accent porté sur les procédés de décompositions à des formes canoniques s'accompagne du retour des idéaux de simplicités qui caractérisaient la position de Jordan en 1874 :

> The theory of canonical matrices is concerned with the systematic investigation of types of transformation which reduce matrices to the simplest and most convenient shape.
> [Turnbul et Aitken, 1932].

Dans la deuxième partie de ce travail nous avons rencontré plusieurs théorèmes énoncés par différents auteurs comme Weyr, Segre, Sauvage, Molien, Cartan, Hensel, etc. au sein de réseaux de recherches distincts renvoyant à des théories différentes comme les théories des formes bilinéaires, des matrices, des systèmes hypercomplexes, des représentations des groupes, des équations différentielles et aux dérivées partielles linéaires etc. Cette troisième partie est consacrée à la construction de liens entre ces développements distincts entre 1907-1930. Cette construction se présente comme celle d'une culture commune, indissociable d'une nouvelle identité donnée au théorème de Jordan par la résolution de l'opposition entre les idéaux d'effectivité de Kronecker et de simplicité de Jordan qui avait marqué la querelle de 1874.

Chapitre 7.

Postérité de La forme canonique de Jordan dans la théorie des groupes linéaires au tournant du siècle (1896-1907).

INTRODUCTION.

:

> In volume XXII of the A*merican Journal of Math*, the writer investigated the canonical form of a linear homogeneous transformation in a finite field (necessary a Galois Field). It was shown that the type of canonical form obtained by M. Jordan for the case of the field of integers taken modulo *p* is capable of immediate generalization to an arbitrary Galois Field. Instead of the direct, but lengthy, method of proof employed by M. Jordan, the paper cited gives proof by induction from a smaller to a greater number of irreducible factors of the characteristic determinant. The latter method leads to a canonical form of a linear transformation in an arbitrary field *F*. The formal process of reduction is the same […]
> Dickson, [1902a, 101].

> A canonical form to which any linear substitution of non vanishing determinant may be reduced, was first given by M. Jordan in his *Traité des Substitutions §c.* M. Jordan's investigation applies directly to linear substitutions of the form
> $$x'_s = a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n, \ (mod.\ p),$$
> $$(s = 1, 2, \dots)$$
> where *p* is a prime ; but the canonical form at which he arrives is known to hold equally when the congruences are replaced by equations.
> […] The necessary and sufficient conditions that two linear substitutions *A* and *B* in the same number of variables should be capable of being transformed the one into the other, *i.e.,* that it should be possible to find a third linear substitution *C* such that
> $$C^{-1}AC = B,$$
> were first given by Weierstrass […].
> Burnside, [1899, 180-182].

Dans la tradition de la théorie de Frobenius, le résultat énoncé par Jordan en 1874 de réduction canonique des couples de formes bilinéaires n'a plus le statut d'un théorème sur la période 1880-1907 (partie II). Il n'existe pas de forme canonique de Jordan dans les nombreux réseaux de textes et organisations théoriques abordés dans la deuxième partie de ce travail ([1]). Les travaux sur les matrices, en particulier, sont indépendants de la forme canonique des substitutions linéaires et ce bien qu'ils abordent souvent des problèmes identiques à ceux traités par les publications de Jordan des années 1870-1880 (classes de similitudes des substitutions, équations de Fuchs, couples de formes bilinéaires, etc.). Que le théorème de Jordan soit inexistant dans de nombreux réseaux ou cadres théoriques ne peut pas s'interpréter comme la manifestation

[1] A l'exception notable d'un mémoire de Bucheim [1884] qui fait le lien entre les travaux de Sylvester sur les matrices et la forme canonique de Jordan. Consulter à ce sujet la conclusion de cette partie.

d'une ignorance ou d'un défaut de communication ([2]). Il faut au contraire reconnaître que si le théorème de Jordan de réduction à une forme canonique est objectivement inexistant dans la théorie des matrices du tournant du siècle, c'est parce qu'il est perçu comme relevant d'un domaine différent. Dans les années 1870-1907, la désignation de forme canonique de Jordan accolée à l'énoncé d'un théorème est confinée à la théorie des groupes. Dans l'organisation du savoir mathématique, le théorème de la forme canonique des substitutions linéaires occupe la place précise que lui a donné Jordan en 1870 : c'est un énoncé fondamental dans la description théorique des groupes linéaires (chapitre 3). L'histoire du théorème de Jordan est indissociable de celle du groupe linéaire. L'importance que prennent les propriétés théoriques du groupe linéaire au début du XX[e] siècle donne à la réduction canonique des substitutions une nouvelle actualité, de jeunes mathématiciens comme Dickson ou Burnside voient alors en Jordan un précurseur dont leurs travaux font la postérité. Comment un énoncé déjà vieux de 30 ans est-il perçu comme précurseur par l'avant-garde d'un monde mathématique nouveau ?

[2] Le *Traité des substitutions* de 1870, comme le *Cours d'Analyse* de Jordan sont des œuvres influentes qui toutes deux énoncent le théorème de réduction canonique dans le cadre de l'étude des substitutions linéaires. Dans la cadre des formes bilinéaires, Sauvage cite explicitement les travaux de Jordan de 1870 et 1874 sans pour autant attribuer de statut de théorème à la forme canonique (partie II, conclusion). Weyr fait référence à l'énoncé par Jordan de la forme canonique des substitutions d'ordre finies (diagonalisables) dans le mémoire de 1878 sur l'intégration algébrique des équations différentielles. Il n'envisage cependant pas de relation entre sa "forme typique" des matrices et la forme canonique de Jordan (chapitre 6).

I. POSTERITES ET NOUVEAUTES.
LE GROUPE LINEAIRE, DE JORDAN A L'ECOLE DE CHICAGO (1895-1905)

1. *Linear groups* et *Traité des substitutions.*

> Since the appearance in 1870 of the great work of Camille Jordan on substitutions and their applications, there have been many important additions to the theory of finite groups. The books of Netto, Weber and Burnside have brought up to date the theory of abstract and substitution groups. On the analytic side, the theory of linear groups has received much attention in view of their frequent occurrence in mathematical problems both of theory and of application. The theory of collineation groups will be treated in a forthcoming volume by Loewy. There remains the subject of linear groups in a finite field (including linear congruence groups) having immediate application in many problems of geometry and function-theory and furnishing a natural method for the investigation of extensive classes of important groups. The present volume is intended as an introduction to this subject. While the exposition is restricted to groups in a finite field (endliche Körper), the method of investigation is applicable to groups in an infinite field ; corresponding theorems for continuous and collineation groups may often be enunciated without modification of the text.
> [...] The linear groups investigated by Galois, Jordan and Serret were defined for the field of integers taken modulo *p* ; the general galois field entered only incidentally in their investigation.
> The linear fractional group on a general Galois Field was partially investigated by Mathieu, and exhaustively by Moore, Burnside and Witman. The work of Moore first emphasized the importance of employing in group problems the general Galois Field in place of the special field of integers, the results being almost as simple and the investigations no more complicated. In this way the systems of linear groups studied by Jordan have all be generalized by the author and in the investigation of new systems the Galois Field has been employed *ab initio.*
> [Dickson, 1901,1].

Le rôle fondateur qu'attribue au *Traité des substitutions* de Jordan la préface du traité *Linear Groups* de Dickson reflète l'attribution d'une place centrale au groupe linéaire dans la théorie des groupes finis ([3]). Historiquement fondateur,

[3] Il est d'ailleurs remarquable que Jordan et Klein sont souvent perçus tous deux comme fondateurs de la théorie du groupe linéaire, des rôles différents leurs sont cependant attribués (voir l'histoire présentée par [Blichfedt, 1917, 174]).

puisque le premier à exposer une description théorique du groupe linéaire, le *Traité* de Jordan est aussi d'une nouvelle actualité dans la théorie des groupes finis du tournant du siècle et notamment pour les recherches sur les groupes simples. La monographie que Dickson consacre au groupe linéaire, la première du genre, se présente donc tout à la fois comme une nouveauté et une succession directe d'un traité déjà vieux de 30 ans. Succession, postérité, quel sens prêter à ces termes au regard de trois décennies de travaux mathématiques qui ont modifié considérablement la théorie des groupes ? La postérité de Jordan implique un transfert dans le temps et dans l'espace, non seulement de résultats mathématiques, mais également d'idéaux sur les méthodes de l'algèbre. La posture de successeur prise par Dickson renvoie à ses premiers travaux des années 1895-1902 qui se présentent comme des "généralisations" au "corps de Galois général" de résultats énoncés par Jordan dans le seul cas du "corps des entiers modulo *p*". C'est en particulier par une généralisation de la forme canonique que Dickson fait son entrée sur la scène mathématique internationale entre 1899 et 1901. L'œuvre de généralisation de Dickson est indissociable du contexte historique très particulier de la création de l'université de Chicago. Le groupe de mathématiciens fondateurs ce que Karen Parshall a désigné comme l'"école de Chicago" se caractérise par une méthodologie d'obtention de nouveaux résultats algébriques par la généralisation d'énoncés connus ([4]).

[4] Pour des informations biographiques sur Dickson, consulter [Albert, 1955], [Parshall, 1991] et [Fenster, 1997]

2. Les idéaux de l’école de Chicago.

L’université de Chicago, fondée en 1892, est, à l’époque où Dickson y fait son doctorat sous la direction de Moore, la plus grande faculté des U.S.A.. K. Parshall et D. Rowe ont étudié son rôle dans le développement des mathématiques aux Etats-Unis [Parshall et Rowe, 1994, 372-375]. Karen Parshall a caractérisé l’activité mathématique à Chicago dans cette période comme une "école de recherches mathématique" [Parshall, 2004] qui se distingue par une orientation originale donnée par ses fondateurs, l’Américain Moore formé à Yale, Göttingen et Berlin et les Allemands Maschke et Bolza. Cette orientation se caractérise d’abord par l’importance donnée à la théorie des groupes, objet de l’enseignement de Bolza dès 1893, des recherches théoriques de Moore sur les groupes simples et des travaux de Maschke sur les groupes finis linéaires:

> Moore, too, moved into the theory of finite groups and immediately began proving new results. Perhaps his most notable early result and the work that may be said to mark the beginning of a tradition in algebra at Chicago was his contribution to the Chicago Mathematical Congress held in conjunction with the World’s Columbian Exposition in August of 1893. Entitled "A Doubly-Infinite System of Simple Groups," Moore’s Congress paper reflected the abstract point of view then increasingly characteristic of trendsetting German mathematics, namely, the methodology of identifying and classifying mathematical objects.
> [...] An abstract and structural approach came to characterize much of the algebraic work that issued from the University of Chicago over the course of the first five decades of the 20th century.
> [Parshall, 2004, 264-265]

Les qualifications d’"abstraite" et "structurale" données par Karen Parshall à l’orientation des travaux mathématiques de Chicago caractérisent une méthodologie commune d’identification et de classification des objets mathématiques visant l’obtention de nouveaux résultats comme général-isations de théorèmes existants. Le principe est d’isoler, d’identifier, un objet mathématique susceptible de généralisation et une importance particulière est donc donnée à la classification des objets mathématiques. Le premier résultat fondamental de Moore donne un exemple de cette méthodologie. A l’occasion du congrès tenu à au cours de l’exposition universelle de Chicago de 1893, Moore définit une nouvelle classe de groupes finis simples. Depuis la fin des années 1870, quatre classes de groupes simples étaient connues, en plus des groupes cycliques et alternés, Klein avait en effet déterminé en 1878 les groupes simples d’ordre $(1/2)q(1/2)q\ (q^2-1)$ pour q premier ($PSL_2(q)$) [Klein, 1879]. En 1892, Moore énonce un nouveau groupe simple d’ordre 360 [Moore, 1892, 62] et, en 1893, Cole définit un groupe simple d’ordre 504 [Cole, 1893, 40]. Moore insère ces deux nouveaux groupes simples au sein d’une classe de groupes d’ordre $(1/2)q^n\ (q^{2n}-1)$ pour q premier et (q,n) ý $(3,1)$ ($PSl_2(q^n)$) [Moore, 1893,238-242]. Cette nouvelle classe de groupes simples est présentée comme une *généralisation* des travaux de Klein. La généralisation revient ici à passer de la considération de corps particuliers au cas général des corps finis à q^n éléments, elle est supportée par l'identification d'un objet, le corps fini, et son étude abstraite et la classification de Moore est basée sur l'énoncé d'un théorème fondamental des corps finis à q^n elements : "tout corps $F(s)$ est la forme abstraite d'un corps de Galois $GF(q^n]$; $s = q^n$" [Moore, 1893, 211] ([5]).

> His isomorphism theorem then enabled Moore to bring the theory of Galois fields, as developed particularly by researchers like Joseph Serret and Camille Jordan, to bear successfully in his group-theoretic setting.
> [Parshall, 2004, 365].

L'"approche structurale de Moore" [Parshall, 2004, 265] impulse des travaux sur la caractérisation des objets mathématiques comme les corps finis. Après 1900, cette approche se mêle à l'axiomatique de Hilbert et constitue ce que Karen Parshall désigne comme "the Amercian school of postulate theory perhaps the first geographically extended, thematically oriented, research level "school" of mathematics to be supported within the context of the emergent American mathematical community" [Parshall, 2000, 384].

[5] Le cardinal d'un corps fini est nécessairement de la forme $q = p^n$, p premier. Pour tout q de cette forme, il existe un corps fini de cardinal q unique à isomorphisme près.Exemple :

$$F_2[X]/(X^2+X+1).$$

ENCART 1.

Une nouvelle classe de groupes simples.

A new system of simple groups.

By

Leonard Eugene Dickson of Chicago.

Introduction.

One of the five isolated simple continuous groups not occurring in Lie's four systems is the group of 14 parameters studied by Killing, Cartan, and Engel. This group is a special case of a linear group on 7 variables with coefficients in an arbitrary field or domain of rationality. The structure of the latter has been determined*) by the writer for fields not having modulus 2. The problem for modulus 2, which requires a different analysis, is solved in the present paper. For $q > 1$, we obtain a simple group of order $2^{6q}(2^{6q}-1)(2^{2q}-1)$. For $q=1$, the group has a simple subgroup of index 2 and order 6048. The latter is shown to be holoedrically isomorphic with the simple group**) of all ternary hyperorthogonal substitutions of determinant unity in the Galois Field of order 3^2. The generational relations of the isomorphic abstract group are determined and a transitive representation on 36 letters exhibited.

For $q=1$, the group of order 12096 is shown to be simply isomorphic with a subgroup of index 120 of the senary Abelian group modulus 2, of order $2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$. The latter is known***) to be simply isomorphic with the group of the equation for the 28 bitangents to a quartic curve without double points. It therefore has resolvents of degrees $63 = 2^6 - 1$ and 120, the latter not hitherto noticed.

Definition of the group G_q.

Consider the linear homogeneous transformations S on 7 variables with coefficients in the Galois Field of order 2^q which leave invariant

$$(1)\qquad \xi_0^2 + \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3.$$

*) *Transactions Amer. Math. Soc.*, vol. 2 (1901), pp. 383—391.

**) *Annalen*, Bd. 52, pp. 561—581.

***) Jordan, Traité, pp. 229—242; a simpler proof by the writer, *Transactions*, vol. 3, pp. 377—382.

3. La méthode de décomposition de Dickson et la postérité de l'idéal de simplicité de Jordan.

En 1894, Leonard Eugene Dickson débute, sous la direction de Moore, le premier doctorat de l'université de Chicago. La thèse de Dickson, intitulée "The Analytic Representation of Substitutions on a Power of a Prime Number of Letters with a discussion of the Linear Group" [Dickson, 1897], développe les travaux de Moore sur les corps finis. Dickson complète sa formation par un séjour en Europe, où il étudie avec Lie et Jordan, puis, après un bref passage à Berkeley et à l'université du Texas, il obtient un poste à l'université de Chicago en 1900. Toutes les premières recherches de Dickson sont influencées par le résultat fondamental de Moore de 1893 sur la relation entre groupes de Galois et corps finis. La méthodologie consiste à "généraliser" les travaux de Jordan aux corps à p^n éléments [Dickson, 1897, 67] et la thèse de doctorat est consacrée à la représentation des substitutions sur un corps $F = [p^n]$ comme des polynômes $\Phi(X) \in F[X]$. Les lignes de recherches de la thèse de Dickson donnent lieu à près de trente articles publiés dans les trois ans qui suivent son doctorat. Ces publications témoignent du succès de la méthodologie de généralisation de Moore. Dickson généralise notamment les résultat de Moore sur les groupes simples et définit une nouvelle classe de groupes simples de trois paramètres : si Z est le centre de $SL_m(F)$, $SL_m(F)/Z$ est simple si $(m,n,p) \neq (2,1,2)$ ou $(2,1,3)$ (encart 1) [Dickson, 1897, 128-138].
Synthèse des travaux des années 1895-1900, le traité de Dickson sur les groupes linéaires de 1901 applique un traitement systématique des corps finis à une exploration de la structure des groupes linéaires. Dickson établit des tables donnant les groupes simples d'ordre inférieur à 1 milliard qui fixent les groupes simples connus jusqu'aux travaux de Chevalley de 1955.

> The other known systems of finite simple groups have been discovered by Jordan in his study of the general linear, the abelian, and the two hypoabelian groups, the field of reference being the set of residues of integers with repect to a prime modulus p. Generalisations may be made by employing the Galois field of order p^n (designated $GF[p^n]$), composed of the p^n Galois complexes formed with a root of a congruence of degree n irreducible modulo p. Groups of linear substitutions in a Galois field were studied by Betti, Mathieu and Jordan ; but the structure of such groups has been determined only in the past decade. The simplicity of the group of unary linear fractional substitutions in a Galois field was first proved by Moore and shortly afterwards by Burnside. The complete generalization of Jordan's four systems of simple groups and the determination of three new triply –infinite systems have been made by the writer.
> [Dickson, 1900c, 126] .

C'est dans ce contexte de recherche et de classification des groupes simples que les résultats de Jordan sont systématiquement généralisés par Dickson. L'un des premiers résultats publiés par Dickson est la généralisation de la forme canonique aux "corps de Galois" publiée dans l'*American Journal of*

ENCART 2.

La démonstration de la forme canonique de Dickson.

Il s'agit, comme chez Jordan, de rechercher, pour une substitution linéaire S sur un corps de Galois, la forme la "plus simple possible" par une récurrence sur le degré des facteurs irréductibles du déterminant caractéristique [Dickson, 1900a, 124] :

> We will prove the general theorem by induction, supposing it true for every substitution to the $GF[p^n]$ whose characteristic determinant has no irreducible factors other than $F_k(K)$, $F_l(K)$,..., and has these to a degree at most α-1, β,... respectively. We will prove that the theorem is true for any substitution S for which these factors occur to the degree α, β, ... respectively, where α > 1.

Pour une racine K_i d'un facteur irréductible F_k, il existe une "fonction" λ_i telle que la substitution prenne la forme :

$$S'\begin{cases} \lambda_i' = K_i\lambda_i & (i=0,1,...,k-1) \\ \xi_i' = \sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}\xi_j + \sum_{j=0}^{k-1}\gamma_{ij}\lambda_{ij}. & (j=1,...,m-k) \end{cases}$$

La substitution $S_1 = \sum_{j=1}^{m-k}\beta_{ij}\xi_j \quad (i=1,...,m-k)$ a un déterminant caractéristique égal à $\Delta(K)/F_k(K)$, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et ramener S_1 à une forme canonique [Dickson, 1900a, 126-128]. Je renvoie au texte original pour le détail de la démonstration que je me contente d'illustrer par l'exemple donné par Dickson [1900a, 129] :

> Consider as an example the substitution in the $GF[p^n]$, p^n of the form $4l-1$,
>
> $$s: \xi'_1 = -2\xi_2-\xi_4,\ \xi'_2 = \xi_1,\ \xi'_3 = \xi_2,\ \xi'_4 = \xi'_3,$$
>
> having the characteristic determinant
>
> $$\Delta(K) = (K^2+1)^2,$$
>
> where K^2+1 is irreducible in the field. A root of $i^2 = -1$ belongs to the $GF[p^{2n}]$ but not to the $GF[p^n]$. The functions which S multiplies by i and $-i$ are found to be respectively
>
> $$\lambda_1 \equiv -ix_1 + x_2 - ix_3 + x_4,\ \lambda_2 \equiv ix_1 + x_2 + ix_3 + x_4.$$
>
> Introducing λ_1, λ_2 in places of the indices x_2, x_3, S takes the form
>
> $$x'_1 = x_4 - \lambda_1 - \lambda_2;\ x'_4 = -x_1 + i/2\,\lambda_1 - i/2\,\lambda_2,\ \lambda'_1 = i\lambda_1,\ \lambda'_2 = -i\lambda_2.$$
>
> The partial substitution of determinant unity,
>
> $$x'_1 = x_4,\ x'_4 = -x_1$$
>
> multiplies $y_1 \equiv x_1 - ix_4$ by i and multiplies $y_2 \equiv x_1 + ix_4$ by $-i$. Introducing y_1 and y_2 as new indices in place of x_1 and x_4, S takes the form
>
> $$y'_1 = iy_1 - \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_2;\ y'_2 = -iy_2 - \frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{3}{2}\lambda_1,\ \lambda'_1 = i\lambda_1,\ \lambda'_2 = -i\lambda_2.$$
>
> Introducing as new indices,
>
> $$\grave{\varnothing}_1 \equiv i/2\,\lambda_1,\ \grave{\varnothing}_2 \equiv -i/2\,\lambda_2,\ \grave{\phi}_1 \equiv y_1 + \frac{3i}{4}\lambda_2,\ \grave{\phi}_2 \equiv y_2 - \frac{3i}{4}\lambda_1,$$
>
> S takes the canonical form
>
> $$\grave{\varnothing}'_1 = i\,\grave{\varnothing}_1,\ \grave{\phi}'_1 = i(\grave{\phi}_1 + \lambda_1),\ \grave{\varnothing}'_2 = -i\,\grave{\varnothing}_2,\ \grave{\phi}'_2 = -(\grave{\phi}_2 + \grave{\varnothing}_2),$$
>
> where $\grave{\varnothing}_1$ and $\grave{\varnothing}_2$ are conjugate linear functions of ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, and likewise for $\grave{\phi}_1$, $\grave{\phi}_2$.

Mathematics de 1900 sous le titre "Canonical Form of a linear Homogeneous Substitution in a Galois Field" [Dickson, 1900a] (encart 2).

> A simple canonical form of the general *m*-ary homogeneous substitution with integral coefficients taken modulo *p*, a prime, has been obtained by *M*. Jordan by a rather lengthy analysis. The method may be readily generalized to apply to substitutions in an arbitrary Galois field. The present paper, however gives a short proof by induction of the generalized theorem. That the new method is of practical value in actually reducing a given substitution to its canonical form is illustrated by the example of §3.
> In §4-7, the explicit form of all substitutions in the $Gf[p^n]$ commutative with a given substitution in that field is set up. In particular, the number of such substitutions is deduced, the result being in accord with that of Jordan for the case $n = 1$.
> In §8 is given a simple criterion for the conjugacy of two linear homogeneous substitutions in a Galois field [...].
> These results find constant application in the problem of the determination of the subgroups of the simple groups of all linear fractional substitutions of determinant unity in two or three non-homogeneous variables with coefficients in an arbitrary Galois field..[Dickson, 1900a, 121].

"Forme canonique simple", détermination des "groupes simples". L'idéal de simplicité que Jordan associait en 1870 à sa forme canonique se mêle à la nouvelle méthodologie de l'école de Chicago. A l'idéal structural de Moore se mêle la méthode propre à Jordan de "réduction" des problèmes à leurs éléments les plus simples et Dickson élabore une méthode de "décomposition" indissociable d'un idéal de simplicité et qu'il expose au congrès international des mathématiciens de 1900. La "décomposition" en une chaine de "composantes" "simples" est alors présentée comme une activité scientifique essentielle, analogue aux travaux d'un chimiste recherchant les composantes élémentaires de la matière ([6]) :

> The widespread interest taken in the group-theory seems to be due to its ready application to many problems in geometry, function theory and number-theory, as well as in the theory of algebraic and differential equations. When a problem has been exhibited in group phraseology, the possibility of a solution of a certain character or the exact nature of its inherent difficulties is determined by a study of the group of the problem. For example, the question of the solution of an algebraic equation by radicals or of the integration of a differential equation by quadratures is answered by knowledge of the group of the equation. Ultimately it is a question of the structure of the group, as determined by the chain of simple groups arising from its decomposition. As the chemist analyzes a compound to determine the ultimate elements composing it, so the group-theorist decomposes the group of a given problem into a chain of simple groups. While the chemist is concerned with about seventy elements and their various compounds, the mathematician has to study a universe formed from an infinite number of elements, the simple groups. [Dickson, 1900c, 125].

[6] Kummer proposait la même analogie entre activité mathématique et recherche de composantes élémentaires de la matière lors de sa définition des nombres idéaux.

ENCART 3.

Articulation des formes canoniques et des invariants chez Dickson :

le rôle des matrices.

Le groupe G_4 d'ordre

$$N = (p^{4n}-1)(p^{4n}-p^{n})(p^{4n}-p^{2n})(p^{4n}-p^{3n})$$

contient une substitution de déterminant caractéristique

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 - a_1\lambda^3 - a_2\lambda^2 - a_3\lambda - a_4$$

où les a_i sont arbitraires. En effet, toute équation de la forme

$$(-1)^m (\lambda^m - a_1\lambda^{m-1} - a_2\lambda^{m-2} - \ldots - a_{m-1}\lambda - a_m),$$

est l'équation caractéristique d'une substitution, à savoir :

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{m-1} & a_m \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Selon les factorisations possibles de $\Delta(\lambda)$ dans $GF[p^n]$, on distingue les différents types de formes canoniques suivants [Dickson, 240-241] :

4. Une première rencontre de la méthode de réduction de Jordan et de la représentation matricielle.

La tension formes canoniques – invariants se présente sous une forme particulière dans le traité de Dickson sur les groupes linéaires. La recherche de forme canonique est première, les invariants ne viennent qu'en second comme outils pour la classification des substitutions par des formes (encart 3). Reprenant la structure du traité de Jordan de 1870, Dickson emploie la forme canonique des substitutions pour résoudre le problème de la recherche des substitutions commutatives avec une substitution donnée. La résolution de ce problème est publiée dans les *Proceedings of the London Mathematical Society* en 1900 :

> The object of this note is to determine the explicit form of all m-ary linear homogeneous substitutions T with coefficients in the $GF[p^n]$ which are commutative with a particular one S. For the case $n=1$, the number of such substitutions T has been determined by M. Jordan whose method of proof was, however, limited to the consideration of a particular example. [...] Following M. Jordan, I first give to S its canonical form S_1 [...]. To determine the most general m-ary linear homogeneous substitution T with coefficients in the $GF[p^n]$ which is commutative with a particular one S, we give to S its canonical form S_1, which may be expressed as a product,
>
> $$S_1 \equiv y_0 y_1 \dots y_{k-1} z_0 z_1 \dots z_{l-1} \dots,$$
>
> y_i, z_i denoting the respective substitutions –
>
> $$y_i : \eta_{ie} = K_i \eta_{ie}, \ \eta_{i,E} = K_i(\eta_{iE} + \eta_{iE-1}),$$
> $$z_i : \zeta_{ib} = L_i \zeta_{ib}, \ \zeta_{iB} = L_i(\zeta_{iB} + \zeta_{i,B-1}).$$
>
> Then must T_1 written in the indices (η_{ij}, ζ_{ij}) be expressible as a product
>
> $$T_1 \equiv Y_0 Y_1 .. Y_{k-1} Z_0 Z_1 \dots Z_{l-1} \dots,$$
>
> where Y_0 affects only the indices $\eta_{0u,}$ the coefficients being given by the law explained at the end of §3, and where Y_i is obtained from Y_0 by raising its coefficients to the power p^{ni}; with similar remarks for the substitutions Z_i.
> [Dickson, 1900b, 170].

La forme canonique permet d'exprimer une substitution S comme un produit

$$S \equiv Y_0 Y_1 .. Y_{k-1} \ Z_0 Z_1, \dots Z_{l-1} \dots$$

où Y_i est associée à la racine K_i du facteur irréductible $[F_K(K)]^\alpha$. Pour que B soit commutative avec A il est nécessaire et suffisant que B puisse se développer de manière semblable et que les termes des développements respectifs soit commutatifs :

$$B = y_0 y_1 \dots y_{k-1} z_0 z_1 \dots z_{l-1} \dots$$

où y_0 et Y_0 sont commutatifs etc.

Type	Canonical substitutions[1])				Number M of distinct canonical forms
I	$\lambda_4 x$	$\lambda_4^{p^n} y$	$\lambda_4^{p^{2n}} z$	$\lambda_4^{p^{3n}} w$	$\frac{1}{4}(p^{4n}-p^{2n})$
II	$\lambda_3 x$	$\lambda_3^{p^n} y$	$\lambda_3^{p^{2n}} z$	$\lambda_1 w$	$\frac{1}{3}(p^{3n}-p^n)(p^n-1)$
III	$\lambda_2 x$	$\lambda_2^{p^n} y$	$\mu_2 z$	$\mu_2^{p^n} w$	$\frac{1}{8}(p^{2n}-p^n)(p^{2n}-p^n-2)$
IV_1	$\lambda_2 x$	$\lambda_2(y+x)$	$\lambda_2^{p^n} z$	$\lambda_2^{p^n}(w+z)$	$\frac{1}{2}(p^{2n}-p^n)$
IV_2	$\lambda_2 x$	$\lambda_2 y$	$\lambda_2^{p^n} z$	$\lambda_2^{p^n} w$	$\frac{1}{2}(p^{2n}-p^n)$
V	$\lambda_1 x$	$\mu_1 y$	$\lambda_2 z$	$\lambda_2^{p^n} w$	$\frac{1}{4}(p^{2n}-p^n)(p^n-1)(p^n-2)$
VI_1	$\lambda_1 x$	$\lambda_1(y+x)$	$\lambda_2 z$	$\lambda_2^{p^n} w$	$\frac{1}{2}(p^{2n}-p^n)(p^n-1)$
VI_2	$\lambda_1 x$	$\lambda_1 y$	$\lambda_2 z$	$\lambda_2^{p^n} w$	$\frac{1}{2}(p^{2n}-p^n)(p^n-1)$
VII	αx	βy	γz	δw	$\frac{1}{24}(p^n-1)(p^n-2)(p^n-3)(p^n-4)$
VIII_1	αx	βy	γz	$\gamma(w+z)$	$\frac{1}{2}(p^n-1)(p^n-2)(p^n-3)$
VIII_2	αx	βy	γz	γw	$\frac{1}{2}(p^n-1)(p^n-2)(p^n-3)$
IX_1	αx	βy	$\beta(z+y)$	$\beta(w+z)$	$(p^n-1)(p^n-2)$
IX_2	αx	βy	$\beta(z+y)$	βw	$(p^n-1)(p^n-2)$
IX_3	αx	βy	βz	βw	$(p^n-1)(p^n-2)$
X_1	αx	$\alpha(y+x)$	$\alpha(z+y)$	$\alpha(w+z)$	p^n-1
X_2	αx	$\alpha(y+x)$	$\alpha(z+y)$	αw	p^n-1
X_3	αx	$\alpha(y+x)$	αz	$\alpha(w+z)$	p^n-1
X_4	αx	$\alpha(y+x)$	αz	αw	p^n-1
X_5	αx	αy	αz	αw	p^n-1
XI_1	αx	$\alpha(y+x)$	γz	$\gamma(w+z)$	$\frac{1}{2}(p^n-1)(p^n-2)$
XI_2	αx	$\alpha(y+x)$	γz	γw	$(p^n-1)(p^n-2)$
XI_3	αx	αy	γz	γw	$\frac{1}{2}(p^n-1)(p^n-2)$

1) The notation αx, βy, γz, $\gamma(w+z)$, for example, is used for the substitution

$$x' = \alpha x, \quad y' = \beta y, \quad z' = \gamma z, \quad w' = \gamma(w+z).$$

While investigating the conditions under which T_0 is commutative with y_0 we write Y_0 *i*n the form

$$Y_0 \quad \begin{cases} \eta_j^{'} = K_0 \eta_j, & j = 1, a_1+1, a_1+a_2+1, \ldots, a_1+a_2+\ldots+a_r+1 \\ \eta_j^{'} = K_0(\eta_j + \eta_{j-1}). \quad j = 2, \ldots, \alpha; & j \neq a_1+1, a_1+a_2+1, \ldots, a_1+a_2+\ldots+a_r+1 \end{cases}$$

[...] Hence y_0 takes the form

	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	η_7	η_8	η_9	η_{10}
$\eta_1^{'} =$	a_{11}	0	0	0	a_{15}	0	0	0	0	0
$\eta_2^{'} =$	a_{21}	a_{11}	0	0	a_{25}	a_{15}	0	0	0	0
$\eta_3^{'} =$	a_{31}	a_{21}	a_{11}	0	a_{35}	a_{25}	a_{15}	0	a_{39}	0
$\eta_4^{'} =$	a_{41}	a_{31}	a_{21}	a_{11}	a_{45}	a_{35}	a_{25}	a_{15}	a_{49}	a_{39}
$\eta_5^{'} =$	a_{51}	0	0	0	a_{55}	0	0	0	0	0
$\eta_6^{'} =$	a_{61}	a_{51}	0	0	a_{65}	a_{55}	0	0	0	0
$\eta_7^{'} =$	a_{71}	a_{61}	a_{51}	0	a_{75}	a_{65}	a_{55}	0	a_{79}	0
$\eta_8^{'} =$	a_{81}	a_{71}	a_{61}	a_{51}	a_{85}	a_{75}	a_{65}	a_{55}	a_{89}	a_{79}
$\eta_9^{'} =$	a_{91}	0	0	0	a_{95}	0	0	0	a_{99}	0
$\eta_{10}^{'} =$	a_{101}	a_{91}	0	0	a_{105}	a_{95}	0	0	a_{109}	a_{99}

[...] For the general case, the matrix of y_0 may be considered to be made up of $(r+1)^2$ rectangles, the general one of which R_{ij} includes $a_i a_j$ coefficients $a_{\tau l}$.
If a_i Â a_j, this rectangle includes a square array S_i of coefficients, a_i to a side. The coefficients in its diagonal are all equal, likewise those in any parallel to the diagonal. All coefficients of the rectangle R_{ij} which lie above or to the right of the diagonal of the square S_i are zeros.
[Dickson, 1900a, 131-132].

Comme nous l'avons vu dans la conclusion de la deuxième partie, la question de la détermination des matrices échangeables à une matrice donné est le problème paradigmatique de la théorie des matrices telle qu'elle se développe en Allemagne dans les années 1890, chez Dickson, il est mis en relation avec les travaux de Jordan de 1870 sur les substitutions commutatives. La représentation matricielle, utilisée par Dickson afin de "représenter une classe d'objets" (encart 2) ([7]), se mêle à la notation de Jordan des substitutions utilisée pour représenter la méthode de "décomposition" des problèmes en une "chaine" de "composantes simples". Deux notations cohabitent donc et revêtent des rôles différents, la représentation matricielle, d'une part, donne forme à des invariants caractérisant une classe d'objets ; la notation de Jordan, d'autre part, est utilisée comme la représentation *dynamique* d'une méthode de décomposition simultanée des variables et de la forme d'une substitution. *Matrices* et *substitutions* ne s'identifient donc pas l'une à l'autre, ce sont des notions distinctes.

[7] Consulter la partie du traité de Dickson consacrée à la recherche des substitutions commutatives [Dickson, 1901, 230] et le chapitre II consacré au groupe spécial linéaire où les matrices sont employées pour représenter des classes de substitutions.

Table giving the form and number C of the substitutions of the group G_4 commutative with the various types of canonical forms:

I	λx	$\lambda^{p^n} y$	$\lambda^{p^{2n}} z$	$\lambda^{p^{3n}} w$	$p^{4n}-1$
II	μx	$\mu^{p^n} y$	$\mu^{p^{2n}} z$	aw	$(p^{3n}-1)(p^n-1)$
III	ϱx	$\varrho^{p^n} y$	σz	$\sigma^{p^n} w$	$(p^{2n}-1)^2$
IV_1	ϱx	$\sigma x+\varrho y$	$\varrho^{p^n} z$	$\sigma^{p^n} z+\varrho^{p^n} w$	$(p^{2n}-1)\,p^{2n}$
IV_2	$\sigma x+\varrho y$	$\varkappa x+\tau y$	$\sigma^{p^n} z+\varrho^{p^n} w$	$\varkappa^{p^n} z+\tau^{p^n} w$	$(p^{4n}-1)(p^{4n}-p^{2n})$
V	ax	by	ϱz	$\varrho^{p^n} w$	$(p^{2n}-1)(p^n-1)^2$
VI_1	ax	$bx+ay$	ϱz	$\varrho^{p^n} w$	$(p^{2n}-1)(p^{2n}-p^n)$
VI_2	$ax+by$	$cx+dy$	ϱz	$\varrho^{p^n} w$	$(p^{2n}-1)^2(p^{2n}-p^n)$
VII	ax	by	cz	dw	$(p^n-1)^4$
VIII_1	ax	by	cz	$dz+cw$	$(p^n-1)^3 p^n$
VIII_2	ax	by	$cz+dw$	$ez+fw$	$(p^{2n}-p^n)(p^{2n}-1)(p^n-1)^2$
IX_1	ax	by	$cy+bz$	$dy+cz+bw$	$(p^n-1)^2 p^{2n}$
IX_2	ax	by	$cy+bz+ew$	$fy+dw$	$(p^n-1)^2 p^{3n}$
IX_3	ax	$by+cz+dw$	$ey+fz+gw$	$hy+iz+jw$	$(p^{3n}-1)(p^{2n}-1)(p^n-1)^2 p^{3n}$
X_1	ax	$bx+ay$	$cx+by+az$	$dx+cy+bz+aw$	$(p^n-1)\,p^{3n}$
X_2	ax	$bx+ay$	$cx+by+az+ew$	$fx+dw$	$(p^n-1)^2 p^{4n}$
X_3	$ax+ez$	$bx+ay+fz+ew$	$gx+cz$	$hx+gy+dz+cw$	$(p^{2n}-1)(p^{2n}-p^n)\,p^{4n}$
X_4	ax	$bx+ay+fz+ew$	$gx+cz+kw$	$hx+dz+lw$	$(p^{2n}-1)(p^{2n}-p^n)(p^n-1)\,p^{5n}$
X_5			arbitrary		N
XI_1	ax	$bx+ay$	cz	$dz+cw$	$(p^n-1)^2 p^{2n}$
XI_2	ax	$bx+ay$	$cz+dw$	$ez+fw$	$(p^{2n}-1)(p^{2n}-p^n)(p^n-1)\,p^n$
XI_3	$ax+by$	$gx+hy$	$cz+dw$	$ez+fw$	$(p^{2n}-1)^2(p^{2n}-p^n)^2$

Here λ belongs to the $GF[p^{4n}]$, μ to the $GF[p^{3n}]$, ϱ, σ, $\varkappa$, τ to the $GF[p^{2n}]$, and $a, b, c, \ldots, j$ belong to the $GF[p^n]$. If M denote the number of distinct canonical forms in a general type, and C the number of substitutions of G_4 commutative with each, the number of substitutions of G_4 reducible to that type is MN/C. The sum of these numbers is found to equal N, the total number of the substitutions of G_4.

II. LE GROUPE LINEAIRE ET LA TENSION FORMES CANONIQUES – INVARIANTS.

1. Evolution du rôle du groupe linéaire dans l'organisation du savoir mathématique.

Linear groups with an exposition of the Galois field theory : le titre de la monographie de Dickson témoigne du changement de statut du groupe linéaire dans l'organisation du savoir mathématiques au début du XX^e siècle. La recherche des groupes simples, bien que formulée de façon abstraite par Dickson en 1901 mêle les travaux successifs de Galois, Serret, Jordan etc. aux développement des années 1880-1890 sur les groupes continus et les systèmes hypercomplexes qui se rattachent aux noms de Lie, Killing et Cartan (chapitre 6) ([8]). Le groupe linéaire ouvre à des auteurs comme Dickson un grand champ d'intervention, de la théorie des représentations à l'étude des systèmes hypercomplexes. La synthèse de Dickson ne concerne donc pas seulement la théorie des groupes finis mais également la géométrie, la théorie des formes bilinéaires, la théorie de la représentation etc. Pour cette raison, Dickson, sous les conseils de Moore, vise une plus grande audience que la seule communauté américaine et, par l'intermédiaire de Klein, obtient une publication chez Teubner [Parshall, 1991, 9]. Pour illustrer le rôle essentiel que donne Dickson au groupe linéaire dans la théorie des groupes finis, Karen Parshall a comparé les deux éditions du traité de Burnside intitulé *Theory of Groups of Finite Order*, tandis que la première édition de 1897 aborde à peine le groupe linéaire, la seconde édition de 1911 développe les résultats de Dickson et la théorie de la représentation de Frobenius.

---

[8] Au sujet des travaux de Dickson sur les systèmes hypercomplexes et les algèbres, de 1900 à 1925 consulter [Moore, 1995] et [Parshall, 1983]. Je cite ci-dessous l'introduction de Wilhelm Magnus à la nouvelle édition du traité de Dickson [Magnus, *in* Dickson, 1958] :

> E. Galois established that "group theory" to quote C. Jordan "is the metaphysics of the theory of equations". A basic concept of Galois theory was the invariant subgroup or normal divisor of a given group, which involved the concept of simple group.
>
> The importance of this may be seen from Jordan Holder which shows that the simple groups of finite order are the elements which when compound give all groups of finite order. It is therefore a fundamental problem to find all the simple groups, the most important tool is the existence of finite field.
>
> [...] The idea that simple groups could be discovered by studying linear groups was stimulated by Lie, Cartan, Killing and Engel.who had discovered and discussed all simple continuous groups of a finite number of parameters. In two later papers (theory of linear Groups in Arbitrary Field" in *Trans. Amer. Soc* II(1901) 383-91 and "A new system of Simple Groups", in Math Ann, Lx (1905) 137-50") Dickson refers to the work of Lie when describing the discovery of a new system of finite simple groups of composite order which are closely related to the exceptional simple continuous group of 14 parameters (ie Cartan). It is a remarkable fact that after these 2 papers of Dickson's no new simple groups of finite order were discovered for half a century

ENCART 4.

Forme canonique et diviseurs élémentaires chez Netto [1893]

[Netto, 1893, 266]:

Es sei

(I) $\Delta(\rho) = \pm \left(\rho - \rho_1\right)^{\sigma_1} \left(\rho - \rho_2\right)^{\sigma_2} \ldots \left(\rho - \rho_\tau\right)^{\sigma_\tau}$ (ρ_α ý ρ_β ; $\Sigma\sigma = n$)

die charakteristche Function der Substitution

(2) $X_\lambda = \Sigma_\mu c_{\lambda\mu} x_\mu$ $(\lambda, \mu = 1,2,\ldots,n)$;

dann lässt diese sich durch die Einführung linearer homogener Verbindungen der x_μ als neuer Veränderlichen auf die Form bringen

$$
(3)\quad
\begin{array}{llll}
U_1^{'} = \rho_1 u_1^{'}, & U_1^{''} = u_1^{'} + \rho_1 u_1^{''}, & \ldots.., & U_1^{(\pi)} = u_1^{(\pi-1)} + \rho_1 u_1^{(\pi)}, \\
U_2^{'} = \rho_1 u_2^{'}, & U_2^{''} = u_2^{'} + \rho_1 u_2^{''}, & \ldots., & U_2^{(\pi_2)} = u_2^{(\pi_2-1)} + \rho_1 u_2^{(\pi_2)}, \\
\ldots & \ldots & \ldots., & \ldots \\
U_{h_1}^{'} = \rho_1 u_{h_1}^{'}, & U_{h_1}^{''} = u_{h_1}^{'} + \rho_1 u_{h_1}^{''}, & \ldots., & \\
V_1^{'} = \rho_2 v_1^{'}, & V_1^{''} = v_1^{'} + \rho_2 v_1^{''}, & \ldots., & V_1^{(\tau)} = v_1^{(\tau-1)} + \rho_2 v_1^{(\tau)}, \\
\multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}
\end{array}
$$

$(\pi + \pi_2 + \ldots + \pi_{h1} = \sigma_1 ,\ \tau + \tau_2 + \ldots + \tau_{h2} = \sigma_2, \ldots)$

[...]

[Netto, 1893, 271]:

Die Determinante Δ(ρ) erscheint, in ihre Elementarteiler aufgel st, unter der Form

$$
\begin{aligned}
\Delta(\rho) = \quad & \pm(\rho_1 - \rho)^{\pi}(\rho_1 - \rho)^{\pi_2}(\rho_1 - \rho)^{\pi_3}\ldots. \\
& (\rho_2 - \rho)^{\tau}(\rho_2 - \rho)^{\tau_2}(\rho_2 - \rho)^{\tau_3}\ldots. \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

so dass die Ordnungen der Ketten über Grösse nach geordnet, als exponenten der aufeinanderfolgenden Elementarteiler auftreten.

Le traité de Dickson est l'un des rares ouvrages d'algèbre de son époque à ne pas employer les diviseurs élémentaires et, plus généralement, à donner un rôle secondaire aux invariants par rapport aux formes canoniques. Les méthodes de réduction canonique de Dickson sont, par exemple, très différentes de celles développées par Netto [1893], dans un mémoire intitulé "Zur Theorie des linearen Substitutionen" et qui, bien que se présentant comme consacré à la forme canonique de Jordan [Netto, 1893, 265], propose en réalité une reformulation du théorème de Jordan sous l'angle du théorème des diviseurs élémentaires comme le montre l'encart 4. L'autonomisation du groupe linéaire comme objet d'étude en soi s'accompagne donc d'une postérité de la forme canonique de Jordan par opposition aux diviseurs élémentaires de Weierstrass. La réduction canonique est une méthode essentielle de la théorie des groupes linéaires que Dickson emploie pour caractériser les classes de conjugaisons du groupe linéaire, du groupe orthogonal [Dickson, 1902] et, comme nous le verrons au chapitre 7, Dickson reformule le problème de la classification des couples de formes quadratiques d'une manière analogue à la méthode que Jordan opposait à Kronecker en 1874 [Dickson, 1901, 197-218].

ENCART 5.

Procédé d'itération et formation de chaînes dans la méthode effective de réduction à une forme canonique de Burnside.

[Burnside, 1899, 183-185] :

Let

$$x'_s = \Sigma a_{st} x_t, \ (s,t = 1,2,\ldots,n),$$

be a linear substitution *S,* on *n* variables, whose determinant is not zero.
Let

$$y_1 = \sum_1^n A_r x_r$$

be a homogenous linear function of the variables with arbitrary coefficients ; and let

$$y_1, \ y_2, y_3, \ldots$$

be a series of homogeneous linear functions of the variables, each of which is derived from the preceding one by carrying out the substitution *S* on the variables. Since there are only *n* variables, not more than *n y's* can be linearly independent ; but it may happen that, though the coefficients in y_1 are arbitrary, the number of linearly independent *y's* is less than *n*.
Suppose that y_{m+1} is the first of the *y's* that can be expressed linearly in terms of those that precede it, and that

$$y_{m+1} + a_m y_1 + a_{m-1} y_2 + \ldots + a_1 y_m = 0$$

The constants $a_1, a_2, \ldots, a_m$ are functions of the coefficients of the substitution *S* ; and every one of the *y's* can be expressed linearly in terms of the first m.
So far as it affects the y's, the substitution *S* takes the form

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\ldots \ \ldots \\ y_{m-1}' &= y_m, \\ y_m' &= -a_m y_m - a_{m-1} y_2 - \ldots - a_1 y_m \end{aligned}\right\}$$

Burnside exprime alors les *z* tels que $Sz = \lambda z$ a l'aide des *y* :

Let

$$z = \sum_1^m c_r y_r$$

be a linear function of the *y's*, which is changed into a multiple, λz, of itself by the substitution *S*. Then

$$\lambda \sum_1^m c_r y_r = \sum_1^{m-1} c_r y_{r+1} - c_m (a_m y_1 + a_{m-1} y_2 + \ldots + a_1 y_m);$$

so that the *c's* and λ are determined by

$$\begin{array}{llllll} 0 = & c_m(\lambda + a_1) & -c_{m-1}, & & & \\ 0 = & c_m a_2 & +c_{m-1}\lambda & -c_{m-2} & & \\ 0 = & c_m a_3 & & +c_{m-2}\lambda - c_{m-3} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 = & c_m a_{m-1} & & & +c_2\lambda & -c_1 \\ 0 = & c_m a_m & & & & +c_1\lambda \end{array}$$

2. Le procédé effectif de Burnside de réduction à la forme de Jordan des substitutions linéaires.

Les travaux de Burnside sont un autre exemple de la postérité de Jordan, ils prennent place dans un contexte général d'étude de la structure du groupe continu de n paramètres [Burnside, 1898a] dans le cadre des travaux de Lie, Killing, Study, Scheffers et Cartan (chapitre 6) et dans lequel Burnside développe une théorie de la représentation des groupes à la suite des travaux de [Molien, 1893, 1898] et [Frobenius, 1896] ([9]) :

> Burnside interest in Study's results (as expounded in Lie's Vorlesungen [1893b] not only prompted him to compose [1898a] but also another paper "On linear Homogeneous Continuous Groups whose Operations Are Permutable" [1898b]. Two such groups in the same number of variables are said to be conjugate if they are isomorphic by an inner automorphism $\Phi_S : A \leftrightarrow S^{-1}AS$ of the general linear group in which they are contained. Burnside's objective was to determine the "conjugate classes" into which these groups divide. His method of attacking the problem was based upon the theory of elementary divisors and Camille Jordan's canonical form for the equations of a linear transformation. The elementary divisors of a congruence class of transformations can be read off immediately from the canonical form introduced by Jordan as E Netto had pointed out in a paper [1893] that Burnside read.
> Burnside idea was to determine the classification of the above described groups by looking at their elementary divisors, after putting the transformations in a canonical form induced by putting a fixed member of the group in its Jordan form. Using this tactic he showed that the transformations T_y of an Abelian linear group G can be defined by equations with coefficient matrix.
> [Hawkins, 1971].

En 1894, Burnside consacre un mémoire à l'étude d'une classe de groupes simples d'ordre $(p^2+p+1)p^3\,(p+1)(p-1)^2$ ou $\frac{1}{3}(p^2+p+1)p^3\,(p+1)(p-1)^2$ et définie par les congruences

$$x' \equiv \frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{\alpha'' x+\beta'' y+\gamma''},\quad y' \equiv \frac{\alpha' x+\beta' y+\gamma'}{\alpha'' x+\beta'' y+\gamma''}\ \ (\mathrm{mod.}p)$$

---

[9] Consulter [Hawkins, 1971]. Burnside [1898a] est consacré à l'étude de la structure du groupe continu à n paramètres G associé à un groupe fini g d'ordre n : le groupe des transformations $y_R : x \leftrightarrow xy$ déterminées part l'algèbre de groupe H de g. Si $g = \{S_1,\ldots S_n\}$, $x = \Sigma x_i S_i$ et $y = \Sigma y_i S_i$ Burnside considère l'algèbre de Lie associée $(H, [..])$ et applique le critère de Cartan de semi simplicité pour conclure que G est intégrable si et seulement si g est abélien.
Six mois plus tard, Burnside [1898c] poursuit sont analyse en prouvant que G est le produit direct de r groupes linéaires généraux (H est la somme directe de r algèbres de matrices). Hawkins détaille comment la méthode de Burnside se développe a partir des travaux de Frobenius [1896a,b,c] et Molien [1893a, 1898b] et explique le lien de [Burnside, 1898b] avec le problème de la représentation.

The equation for λ, obtained by eliminating the *c's*, is

$$\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + a_2\lambda^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m = 0 \ ; (ii)$$

and the ratios of the *c's* are given by

$$\frac{c_r}{c_m} = \lambda^{m-r}{}_{+a}1_{\lambda}{}^{m-r-1} + \ldots + a_{m-r-1}\lambda + a_m = 0 \ ;$$

$$(r = 1,2,\ldots,m-1)$$

These ratios are definite functions of the roots of (ii.), so that corresponding to any root λ of the equation there is a single linear function of the *y's* which is changed into λ times itself by *S*. If unity be written for c_m, this function is given by

$$z = \sum_1^m (\lambda^r + a_1\lambda^{r-1} + \ldots + a_{r-1}\lambda + a_r) y_{m-r},$$

Consider next the linear function defined by

$$z^{(s)} = \frac{1}{s!}\frac{\delta^s z}{\delta\lambda^s}$$

[...] then

$$\begin{aligned} z' &= \lambda z, \\ z'^{(1)} &= \lambda z^{(1)} + z, \\ z'^{(2)} &= \lambda z^{(2)} + z^{(1)}, \\ &\ldots \\ z'^{(s)} &= \lambda z^{(s)} + z^{(s-1)}, \end{aligned}$$

A chaque racine λ, μ, ..., Burnside associe une suite $z,..,$ $w,...$ de fonctions "linéairement indépendantes" et obtient ainsi la forme canonique de la substitution limitée à son application sur les y [Burnside, 1899, 186] :

Finally then, the substitution *S*, so far as it affects the *y's*, *i.e.* the substitution (i), can be expressed in the form

$$\left.\begin{array}{ccc} z' = \lambda z, & w' = \mu w & u' = \nu u, \\ z'^{(1)} = \lambda z^{(1)} + z, & w'^{(1)} = \mu w^{(1)} + w, & \ldots \\ z'^{(2)} = \lambda z^{(2)} + z^{(1)}, & \ldots & \\ \ldots & w'^{(t)} = \mu w^{(t)} + w^{(t-1)}, & \\ z'^{(s)} = \lambda z^{(s)} + z^{(s-1)}, & & \end{array}\right\}$$

La suite de la démonstration itère le procédé ci-dessus afin d'btenir la forme canonique générale [Burnside, 1899, 186-191].

où les déterminants des substitutions sont égaux à 1. Burnside utilise la forme canonique de Jordan pour déterminer les classes de conjugaisons et les substitutions permutables à une substitution donnée. La recherche des substitutions permutables à une substitution donnée figure parmi les questions importantes des premiers travaux sur la représentation [Burnside, 1898a,b]. Burnside critique l'approche de Frobenius [1896] qui, comme nous l'avons vu au chapitre 6, utilise les diviseurs élémentaires et, en 1899, il publie un mémoire consacré à la forme canonique de Jordan. Le mémoire, intitulé "On the reduction of a linear Substitution to its Canonical Form", est une réponse au mémoire de Netto de 1893 (encart 4) qui proposait une reformulation du théorème de Jordan par un calcul d'invariants.

> A canonical form to which any linear substitution of non vanishing determinant may be reduced, was first given by M. Jordan in his *Traité des Substitutions §c.* M. Jordan's investigation applies directly to linear substitutions of the form
>
> $$x'_s = a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n, \ (mod.\ p),$$
> $$(s = 1,2,\ldots,)$$
>
> where p is a prime ; but the canonical form at which he arrives is known to hold equally when the congruences are replaced by equations.
> [...] The necessary and sufficient conditions that two linear substitutions A and B in the same number of variables should be capable of being transformed the one into the other, *i.e.,* that it should be possible to find a third linear substitution C such that
>
> $$C^{-1}AC = B,$$
>
> were first given by Weierstrass [...]. The conditions are that, for each value of t from 0 to $n-1$, the greatest common measure of all the r^{th} minors of the characteristic determinant ($r = 0, 1, \ldots, n-1$) must be expressible in terms of the various constants which enter into the canonical form. This identification has been carried out by Netto [...]. It is clear that, for the actual reduction of a substitution to its canonical form, the roots $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ of the characteristic equation must be known ; in other words, the operations necessary must be carried out in a region of rationality which contains $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ as well as the coefficients of the substitution. [Burnside, 1899, 180-182].

Burnside remarque que, en dehors du cas "général" où toutes les racines caractéristiques sont différentes, ou du cas où la substitution est d'ordre finie, il n'existe pas de méthode effective de réduction canonique. Il fait alors la distinction entre ce qui tient de la preuve, "pour laquelle la résolution de l'équation est en quelque sorte immatérielle", et ce qui tient d'une réduction pratique qui nécessite la mise en place d'un algorithme effectif d'obtention de la forme canonique :

> In the general case, *i.e.,* when all the roots of the characteristic equations are different, the operation presents no difficulty. If this case and that in which the substitution is of finite order are put on one side, no general method has hitherto been given, so far as I know, for effecting the reduction.
> A method always effective for this purpose might be regarded from two points of view. Formally, it is equivalent to an independent proof of the accuracy of the canonical form ; and, thence, on the lines of Herr Netto's determination just quoted, *a posteriori* to a verification of Weierstrass' conditions of equivalence for two substitutions. From this point of view it is quite immaterial whether the

characteristic equation can be solved arithmetically or not. On the other hand, if the roots of the characteristic equation can be actually obtained by the four rules of arithmetic and the extraction of roots, such a method is an actual and feasible process of calculation by which the canonical can be arrived at. It is the object of the present paper to give such a method.
[Burnside, 1899, 182].

Burnside élabore une méthode basée sur des regroupement des systèmes de variables en sous systèmes (chapitre 2) :

The leading idea is to consider the effect of the substitution on a linear function of the substitution on a number of variables which cannot be greater than *n*, but may be less. The reduction of this new substitution to its canonical form can be carried out by a process which is the same in all cases ; and on the reduction of this substitution that of the original substitution is made to depend.
[Burnside, 1899, 182].

La méthode repose sur une itération de l'action de la substitution sur les variables pour constituer des "chaines" de fonctions linéaires qui permettent une "décomposition" de l'ensemble des variables (encart 5). Le caractère effectif du procédé de Burnside est illustré par l'exemple suivant :

Since, as stated above, the method of reduction here explained is put forward as a practicable one whenever the characteristic equation of the substitution can be actually solved, it seems proper to give a numerical example in which the reduction is really carried out.
Let *S* be

$$\begin{aligned}
x_1' &= -2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5\\
x_2' &= -4x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5\\
x_3' &= x_1 + x_2 - 3x_4 - 2x_5\\
x_4' &= -4x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5\\
x_5' &= 4x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4
\end{aligned}$$

The linear functions $y_1, y_2, y_3, \ldots$, as obtained by direct calculation are given by the following table [...]. No linear relation connects the first two, three, or four *y*'s, but between the first five the relation

$$y_5 - 2y_4 - 3y_3 + 4y_2 + 4y_1 = 0$$

holds. The equation for λ is therefore

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+1)^2(\lambda-2)^2 = 0$$

The coefficients in $z, w, z^{(1)}, w^{(1)}$ are given by the table :

	$\lambda = -1$	$\lambda = 2$
$\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda+4$	4	-2
$\lambda^2-2\lambda-3$	0	-3
$\lambda-2$	-3	0
$3\lambda^2-4\lambda-3$	4	1
$2\lambda-2$	-4	2

Hence

$$z = 4y_1 - 3y_3 + y_4$$

[...]

$$z^{(1)} = 4y_1-4y_2+y_3$$

[…]

$$w = -2y_1-3y_2+y_4$$

[…]

$$w^{(1)} = y_1+2y_2+y_3$$

[…]

Finally then, if

$$\xi_1 = -9\ (x_1+x_3)$$
$$\xi_2 = 15x_1+6x_3-9x_4-9x_5,$$
$$\xi_3 = -9\ (x_2+x_5),$$
$$\xi_4 = -6x_2+9x_4+3x_5,$$
$$\xi_5 = x_1-x_2,$$

the substitution *S* can be expressed in the form

$$\xi'_1 = -\ \xi_1,$$
$$\xi_2 = \xi_1-\xi_2$$
$$\xi'_3 = 2\xi_3,$$
$$\xi'_4 = \xi_3+2\xi_4\ ;$$
$$\xi'_5 = 2\ \xi_5.$$

[Burnside, 1899, 191].

Burnside démontre que l’obtention d’une forme canonique explicite n’est pas incompatible à une méthode effective ne recourant qu'à des procédés rationnels. Il contredit donc l'argument qu'opposait Kronecker à Jordan en 1874 pour imposer des calculs d'invariants rationnels sur les réductions à des formes canoniques critiquées comme formelles. Comme le montre Burnside, l’exigence de procédés effectifs n’implique pas l'abandon de la notion de forme canonique pour un système d’invariants.

ENCART 6.

Formes canoniques ou invariants ?

La note de Baker à l'article de Burnside.

La note intitulée "Note to the foregoing paper" de H.F. Baker joint un commentaire au mémoire de Burnside visant à expliciter la relation entre la méthode effective de réduction canonique proposée et les méthodes de calcul des invariants de la théorie des formes bilinéaires de Frobenius [1878]. Baker reprend la démonstration donnée par Frobenius à l'énoncé selon lequel l'équation minimale d'une matrice est le quotient de l'équation caractéristique et du *pgcd* des premiers mineurs [Baker, 1898, 195] :

Let

$$M = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots \\ c_{21} & c_{22} & \dots \\ .. & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

be a matrix, such that the determinant Δ, of the matrix *D*, given by

$$D = M\text{-}\theta = \begin{pmatrix} c_{11}-\theta & c_{12} & \dots \\ c_{21} & c_{22}-\theta & \dots \\ .. & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

contains a factor $(\theta\text{-}\theta_1)^l$. Suppose that the highest power of this factor which divides the determinants of all first minors of *D* is

$$(\theta-\theta_1)^{l_1}.$$

It is required to show that the equation satisfied by the matrix *M* can be obtained by forming the product of all the factors

$$(\theta-\theta_1)^{l-l_1}$$

for all the different roots of $\Delta = 0$, and then replacing θ by *M*.

[…]

Let

$$a_{ii} = c_{ii}\text{-}\theta,\ a_{rs} = c_{rs}$$

be the elements of the matrix *D*, and A_{rs} the determinants of its first minors. Then […]

$$D^{-1} = \left(\frac{A_{sr}}{\Delta}\right),$$

[…], suppose that we have

$$\psi(M) = M_m + c_1 M_{m\text{-}}1 + \dots + C_m = 0,$$

M not satisfying an equation of lower order,

$$C_1, \dots, C_m$$

being numerical quantities which are functions of the elements in *M* ; let

$$\chi(M, \theta) = M_{m\text{-}1} + (\theta+C_1)M_{m\text{-}2} + (\theta^2+C_1\theta+C2)M_{m\text{-}3} + \dots + (\theta_{m\text{-}1} + C_1\theta_{m\text{-}2} + \dots + C_{m\text{-}1})\ ;$$

[..]

We immediately verify the identity

$$(M\text{-}\theta)\chi(M,\theta) = \psi(M) - \psi(\theta) = -\psi(\theta)$$

so that

$$\psi(\theta)D\text{-}1 = -\chi(M, \theta)$$

is a matrix of which every element is an integral function of θ.

[…] it follows, […]that $\psi(\theta)$ divides by

$$(\theta-\theta_1)^{l-l_1}$$

This proof is modified from Frobenius , *Crelle*, LXXXIX. (1878), pp. 12, 26.

CONCLUSION.

Le référé de l'article de Burnside de 1899, H.F. Baker, souligne les liens entre la méthode de réduction en chaines de Burnside et les méthodes effectives d'obtention d'invariants développées par Kronecker [1874] et Frobenius [1879] (encart 6). L'intervention de Baker amène Burnside à rajouter un commentaire à l'introduction de son mémoire sur relation entre son procédé consistant à décomposer une substitution et décomposition arithmétique du polynôme caractéristique. A la chaine de sous substitutions de Burnside correspond la "chaine"' de diviseurs élémentaires de Netto :

> It may be pointed out, as arising from the final result of the reduction, that the characteristic determinant of the new substitution spoken of is the result of dividing the characteristic determinant of the original substitution by the greatest common measure of its first minors ; *i. e.* its first "invariant factor" (*Elementar-theiler*) of the characteristic determinant of the original substitution. This is the same as saying that the characteristic equation of the new substitution is the equation of lowest degree which the matrix of the original satisfies.
> This Introduction has been recast at the suggestion of one of the referees ; no other alteration has been made.
> [Burnside, 1899, 182].

H.F. Baker ajoute une note au mémoire de Burnside [Baker, 1899] dont il reformule le contenu par un recours à la méthode "presque intuitive" de la théorie des formes bilinéaires de Frobenius (encart 6). Baker explicite la relation entre la décomposition des variables en sous systèmes réalisée par Burnside et la décomposition en facteurs irréductibles de l'équation minimale. Comme le révèle la note de Baker, les travaux sur le groupe linéaire d'une nouvelle génération de mathématiciens comme Burnside et Dickson, sautent par-dessus la théorie paradigmatique des formes bilinéaires et des matrices pour se référer directement à Jordan. Les méthodes de réductions canoniques de Dickson et Burnside se développent, indépendamment de la théorie des formes bilinéaires par la maturation de procédés de réductions propres à la théorie des groupes. Elles seront appliquées à différents domaines comme les systèmes hypercomplexes [Dickson, 1900-1905] ou la représentation des groupes [Burnside, 1896-1900]. Sorti du seul cadre de la théorie des groupes, le théorème de Jordan se trouve alors à nouveau confronté à celui de Weierstrass sur les diviseurs élémentaires et les rapports de force dans la tension forme canonique – invariants s'inversent. Mettant en avant les formes canoniques, les travaux de Burnside et Dickson remettent en question une certaine organisation du savoir mathématique.

With this notation the fundamental solutions

$$z,\ z^{(1)},\ \ldots,\ z^{(s)}$$

of the foregoing paper are almost intuitive.

[...] with

$$A_1,\ \ldots,\ A_n$$

arbitrary, put

$$z^{(s)} = \frac{1}{s!}\left(\frac{\delta^s}{\delta\theta_1^s}\chi(M,\theta_1)(A_1,\ldots,A_n)(x_1,\ldots,x_n\right),$$

Which is a bilinear form [...] hence we immediately have from these equations the following

$$D_1 z = 0,\ D_1 z^{(1)} = z,\ \ldots,\ D_1 z^{(s)} = z^{(s-1)},$$

where

$$D_1 = M - \theta_1:$$

thus

$$Mz = \lambda z,\ Mz_1 = \lambda z^{(1)} + z, \ldots,\ Mz^{(s)} = \lambda z^{(s)} + s^{(s-1)}.$$

[...] Thus the functions

$$z,\ z^{(1)},\ \ldots, z^{(s)}$$

of the paper are those given by formula (I.) above, provided the matrix of the linear substitution of the paper be the transposed of that here denoted by *M.*

Chapitre 8.

Décompositions des tableaux et réduction canonique :

Construction d'une méthode "naturelle" au sein d'un réseau de travaux arithmétiques

(1878-1907).

INTRODUCTION

Un écho de la controverse Jordan-Kronecker de 1874 résonne au début du XX^{e} siècle. S'il n'est plus question de controverse ou de conflit, les théorèmes de Jordan et de Weierstrass s'opposent à nouveau. Comme nous l'avons vu au chapitre 7, la postérité directe de la forme de Jordan pour l'étude du groupe linéaire inverse les rapports de forces dans la tension formes canoniques – invariants et pose des questions relatives à l'organisation du savoir mathématique. Pour une nouvelle génération de mathématiciens dont la carrière débute par des recherches sur la théorie des groupes, comme Burnside, Dickson, Wedderburn, Schur, de Séguier ou Autonne, la notion de groupe doit jouer un rôle central dans l'organisation du savoir mathématique. Or les méthodes les plus récentes de théorie de groupes donnent une importance inédite au groupe linéaire, y compris dans les applications aux autres théories mathématiques comme l'intégration algébrique des équations différentielles, les systèmes hypercomplexes ou encore la géométrie algébrique. La même théorie des groupes linéaires qui confine pendant trente ans le théorème de Jordan à un cadre limité lui donne, au XX^{e} siècle, une postérité directe et la promesse d'un rôle central dans l'organisation du savoir mathématique ([1]). L'objet de ce chapitre est d'expliciter les jeux d'influences et de postérités par lesquelles les rapports de forces de la tension formes canoniques – invariants s'inversent au début du XX^{e} siècle. Un éclairage particulier sera porté sur le rôle des travaux de Jordan lui-même, dont une postérité s'exerce au sein d'un corpus de textes relevant de l'arithmétique et de la théorie des nombres et qui se caractérise par l'importance donnée à une méthode de *réduction* des formes indissociable d'un caractère opératoire d'une représentation en *tableaux*.

Une préoccupation constante des mathématiciens du début du XX^{e} siècle est la mise en valeur des "vraies raisons des choses", des "analogies", bref de ce qui doit être au cœur de l'organisation du savoir mathématique, notamment en algèbre ([2]). De nombreux mémoires sont publiés dans l'objet de faire ressortir des méthodes ou notions "naturelles" autour desquelles bâtir les théories. La présentation d'un mémoire de Dickson sur la réduction rationnelle des couples de formes bilinéaires permet de préciser les questions d'organisation du savoir mathématique que pose la mise en relation de la forme de Jordan et des diviseurs élémentaires de Weierstrass au début du XX^{e} siècle. Le mémoire publié en 1909 sous le titre "Equivalence of pairs of bilinear and quadratic form under rational Transformations" a pour objet de généraliser les travaux de Weierstrass [1868], Kronecker [1874, 1890] et Frobenius [1878 et 1890] aux couples de formes bilinéaires définis sur des corps quelconques [Dickson, 1909, 347]. Dans la tradition des travaux sur les formes bilinéaires, Dickson ne fait aucune référence aux travaux de Jordan de 1874 et il se place dans le cadre de

---

[1] Ce type de jeu de postérité se traduit dans les éloges et biographies données de Jordan par une nouvelle génération de mathématiciens qui insistent sur le rôle de précurseur, de visionnaire incompris de Jordan en théorie des groupes. Consulter à ce sujet le chapitre 3 ainsi que [Lebesgue, 1922], [Julia, 1961], et [Dieudonné, 1961].

[2] La nouvelle génération de mathématicien est aussi une génération d'enseignants et le chapitre 8 abordera le rôle de l'enseignement dans la réorganisation du savoir mathématique.

la théorie des diviseurs élémentaires telle que la présente le traité de [Muth, 1899] ([3]). L'approche poursuivie par Dickson pour sa généralisation ne doit pourtant rien à la théorie des formes bilinéaires telle qu'elle s'est développée à partir de 1870. En affirmant que "des différentes méthodes pour traiter des formes bilinéaires dans le corps des nombres complexes, celle de Weierstrass est la mieux adaptée à la généralisation à un corps arbitraire *F*", Dickson ne reprend pas les méthodes de calcul symbolique de Frobenius ou le calcul des invariants arithmétiques de Kronecker. Il propose au contraire, pour décider de l'équivalence des couples de formes sur un corps quelconque *F*, de comparer des "formes normales" sur une extension de *F* [Dickson, 1909, 347]. Le problème de la classification des couples de formes bilinéaires est donc formulé comme relevant de la recherche d'une forme normale dont les résultats classiques sur les diviseurs élémentaires apparaissent comme des corollaires. Cette méthode, et la justification qu'en donne Dickson comme permettant une "simplification" du problème, font résonner un écho des débats entre Jordan et Kronecker, Dickson adopte en effet la même approche sur la théorie des couples de formes que Jordan en 1874 et applique la généralisation de la forme canonique de Jordan aux corps finis arbitraires (chapitre 7).

> Ultimately we obtain the following result:
> If *A* and *B* are bilinear forms on *2n* variables with coefficients in the field *F*, and $|A|$ *ý 0,* and if the elementary divisors of $|\lambda A-B|$ are
>
> $$(1)\quad (\lambda-c_1)^{e_1},\ldots,(\lambda-c_m)^{e_m} \quad (e_1+\ldots+e_m=n)$$
>
> there exist *2n* independent linear homogeneous functions $X_{\sigma\mu}$, $Y_{\sigma\nu}$ of the initial variables such that f_σ and the coefficients of $X_{\sigma\mu}$, $Y_{\sigma\nu}$ are rational integral functions of c_σ in *F*, and such that
>
> $$(2)\quad A=\sum_{\sigma=1}^{m} f_\sigma Z_{e_\sigma},\ B=\sum_{\sigma=1}^{m} f_\sigma (c_\sigma Z_{e_\sigma}+Z_{e_{\sigma-1}}),\ Z_{e_\sigma}=\sum_{\sigma=1}^{m} X_{\sigma\mu} Y_{\sigma e_\sigma-1-\mu}$$
>
> where the second *Z* in *B* is to be deleted if $e_\sigma=1$. If *A* and *B* are quadratic forms, $Y_{\sigma\mu} = X_{\sigma\mu}$. [...]
> Hence in the non singular case, two pairs of bilinear forms with coefficients in the field *F* are equivalent in *F* if and only if their characteristic determinants have the same elementary divisors (or the same invariant factors). We have therefore obtained by a modification of Weierstrass's method a proof of the theorem due to Frobenius. [Dickson, 1909, 350].

La volonté de donner le rôle principal à la notion de "forme normale" associée à la méthode initiale donnée par Weierstrass en 1868 (chapitre 3) implique un saut par-dessus 40 ans de développement de la théorie des formes bilinéaires. Une question est posée à l'organisation du savoir mathématique.

---

[3] [Dickson, 1909, 348] :

> The same device [la reduction à une forme normale pour caractériser l'équivalence] is employed to reduce the singular case to the non singular case. We here make use of the rational normal type obtained by Kronecker in his fundamental paper of 1890. This classic work of Kronecker, exposing the very heart of the subject and applicable in complete generality to any domain of rationality, has not been in the least superseded by subsequent work, as claimed by Muth. It is not necessary to discredit the work of the master Kronecker, writing in the spirit of general algebra, in order to honour Frobenius for his later elegant proof for the special case of the domain of all complex numbers.

ENCART 1.

La note de Séguier de 1907.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie des matrices.* Note de M. DE SÉGUIER, présentée par M. Jordan.

1. Plusieurs des résultats acquis depuis quelques années dans la théorie des matrices peuvent s'obtenir d'une façon à la fois plus naturelle et plus complète en partant de la forme canonique de M. Jordan.

Soient α une matrice ou substitution (dont le déterminant peut être nul) prise sous forme canonique; s_0, s_1, ... les racines distinctes de $|\alpha - s\varepsilon|$, ε étant la matrice unité de l'ordre n de α; α_{jk} l'action de α sur les variables $y_{j1}, y_{j2}, \ldots$ de la $j^{\text{ième}}$ suite relative à s_k; $\varphi(x)$ un polynome. On aura, en posant $\frac{\varphi^{(i)}(s_k)}{1\ldots i} = \varphi_{ki}$,

$$\varphi(\alpha_{jk}) = \left|\begin{array}{ll} y_{j1} & \varphi_{k0}y_{j1} \\ y_{j2} & \varphi_{k1}y_{j1} + \varphi_{k0}y_{j2} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{jr} & \varphi_{k,r-1}y_{j1} + \ldots + \varphi_{k,r-i}y_{ji} + \ldots + \varphi_{k0}y_{jr} \end{array}\right|.$$

On en déduit immédiatement l'équation $\psi(x) = 0$ de degré minimum que vérifie α et, très simplement aussi, les diverses propositions obtenues en 1901 par M. Bromwich (*Proceedings of the Cambridge Phil. Soc.*, t. XI, p. 75).

$\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ *étant des matrices d'ordre n permutables deux à deux*, α étant prise sous forme canonique, la considération de $|\alpha + \alpha' - s\varepsilon|$ et de $|\alpha^{\pm 1}\alpha' - s\varepsilon|$ montre facilement que l'*on peut établir entre les racines* ρ_1, $\rho_2, \ldots$ *de* $|\alpha - s\varepsilon|$, *celles* $\rho'_1, \rho'_2, \ldots$ *de* $|\alpha' - s\varepsilon|$, ... *une correspondance telle que, si, par exemple,* $\rho_i, \rho'_i, \rho''_i, \ldots$ *se correspondent, les racines de*

$$|f(\alpha, \alpha', \ldots) - s\varepsilon|,$$

f étant une fonction rationnelle, soient $f(\rho_i, \rho'_i, \ldots)$, *et la correspondance est indépendante de la forme de f.* La proposition a été établie autrement par M. Frobenius, puis par M. Schur, pour le cas où f est un polynome (*S. A. B.*, 1896, p. 601; 1902, p. 120).

I. LA THEORIE DES MATRICES DE SEGUIER ET LA POSTERITE DE JORDAN EN 1907.

> ANALYSE MATHEMATIQUE. – *Sur la théorie des matrices.*
> Note de M. De Séguier, présentée par M. Jordan.
> 1. Plusieurs des résultats acquis depuis quelques années dans la théorie des matrices peuvent s'obtenir d'une façon à la fois plus naturelle et plus complète en partant de la forme canonique de M. Jordan.
> [De Séguier, 1907, 1259].

C'est plus de trente ans après le mémoire de Jordan de 1874, que paraît une nouvelle publication sur l'application de la forme canonique des substitutions à la théorie des formes bilinéaires. Par sa référence directe au mémoire de Jordan de 1874 l'approche de Séguier implique une remise en cause radicale de l'organisation de la théorie des matrices. Pour la première fois, le nom de Jordan est associé à la notion de matrice et cette association implique une réorganisation complète de la théorie autour de la notion de forme canonique.

On en déduit que *le premier diviseur élémentaire* de $f(\alpha, \alpha', \ldots) - s\varepsilon$ *relatif à la base* $s - f(\rho_i, \rho'_i, \ldots)$ *a un exposant* $\mu_{f(\rho_i, \rho'_i, \ldots)}$ *au plus égal à* $\mu_{x\rho_i + x'\rho'_i + \ldots}$, *les x restant arbitraires*. Le théorème a été établi autrement par M. Schur pour le cas où f est un polynome (*S. A. B.*, 1902, p. 122).

2. *Soient* $\alpha = \alpha_0 t + \alpha_1 s$ *un faisceau de matrices symétriques réelles ou de matrices hermitiennes; u et v deux matrices constantes telles que* $u\alpha v$ *soit une somme de matrices élémentaires* $\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu$ *de la forme*

$$\varphi = \begin{vmatrix} t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ s & t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & t & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & s & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & s & 0 \end{vmatrix},$$

des matrices $\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_\nu$ ($\bar{x}$ *étant la transposée de* x) *et d'une matrice* α' *invertible.* $(as - bt)^\mu$ *désignant en général un diviseur élémentaire de* α', *supposons que* m'' *parcoure les valeurs de* μ *répondant aux cas où* $b : a$ *est fini et imaginaire,* m' *celles répondant aux cas où* $b : a$ *est réel et* $\neq 0$ (*fini ou non*), m^0 *celles répondant au cas où* $b : a$ *est nul, et que q parcoure les ordres des* φ_i. *L'inégalité obtenue par M. Lœwy* (*Cr.*, t. 122) *pour la caractéristique c de* α_0 *peut se généraliser sous la forme*

$$c \geqq \frac{1}{2} \Sigma m'' + \Sigma \mathrm{E}\left(\frac{m'}{2}\right) + \Sigma \mathrm{E}\left(\frac{m^0 - 1}{2}\right) + \Sigma(q - 1)$$

[$\mathrm{E}(x)$ *étant le plus grand entier* $\leqq x$]. On la démontre d'abord pour le cas où α est symétrique réelle, puis pour le cas où α est hermitienne, en observant que, *si* α *et* β *sont deux matrices hermitiennes telles que* $\beta = \xi\alpha\eta$, *il existe une matrice* w *indépendante de* α, β *telle que* $\beta = \dot{w}\alpha w$, $\dot{w}$ *étant la matrice conjuguée de* w.

1. La vision du progrès mathématique chez de Séguier comme d'une "fonte" de travaux distincts en une même théorie fondamentale.

La note de 1907 communiquée aux *Comptes Rendus* et le mémoire publié dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques* [1908] n'ont pas pour objet de résoudre un problème mathématique nouveau. De Séguier revendique la nouveauté d'une méthode à la fois plus "naturelle" et plus "complète" dans la théorie des matrices. C'est donc de l'exposé d'une méthode qu'il s'agit, en relation directe avec l'organisation d'une théorie. Plus précisément, de Séguier propose de "fondre" en une théorie générale les développements jusqu'à présents distincts de la théorie des matrices et du groupe linéaire. Dans l'introduction des *Eléments de groupes abstraits,* son traité de synthèse de 1904, de Séguier exprime une conception du progrès mathématique comme relevant d'une évolution de recherches distinctes venant se "fondre" en une même théorie "générale" :

> Des divers groupes particuliers rencontrés en Algèbre, en Analyse et en Géométrie devaient nécessairement se dégager l'idée du groupe abstrait, c'est à dire du groupe considéré en lui-même, indépendamment de la nature de ses éléments. Beaucoup de recherches déjà faites dans divers domaines vinrent alors se fondre en une théorie plus générale qui depuis n'a cessé de se développer.
> [de Séguier, 1904, 1].

L'histoire de la théorie des groupes donne l'exemple d'un mouvement de fonte de recherches distinctes et particulière en une même théorie générale qui se présente aussi comme un mouvement du concret vers l'abstrait. Cette perception de l'histoire du progrès mathématique accompagne une organisation du savoir mathématique faisant apparaître la notion "générale" et "abstraite" de groupe comme "fondamentale en Mathématiques":

> On trouvera ici, sous le titre d'Eléments, la partie de cette théorie qui n'exige aucune représentation concrète. [....] La notion de groupe apparaissant de plus en plus comme fondamentale en Mathématiques, je n'ai voulu supposer chez le lecteur aucune connaissance théorique préalable. D'ailleurs, une fois les nombres naturels définis, c'est comme éléments de groupes que se présentent immédiatement les nombres négatifs et rationnels, les imaginaires de Galois et les nombres algébriques.
> [de Séguier, 1904, 1].

Pour ce qui est de fondre les méthodes jusqu'alors distinctes relevant de la théories des groupes - la forme canonique- et de la théorie des matrices –les diviseurs élémentaires des formes bilinéaires - en une même théorie "plus naturelle et plus complète", de Séguier est idéalement placé. Au regard de sa carrière, Joseph Pierre Arthur de Séguier (1872-1940), polytechnicien (X1892)

ENCART 2.

Les applications de la forme de Jordan à la théorie des matrices réalisée par de Séguier.

Outre la reprise du point de vue de Jordan de 1874 qui met la forme canonique au centre la question de la caractérisation de l'équivalence des faisceaux de matrice et de la similitude des matrices, le mémoire de Séguier [1908] emploie la forme canonique pour démontrer les propriétés classiques des diviseurs élémentaires et de la théorie des formes bilinéaires ou des matrices [de Séguier, 1907, 36-40]. Par exemple, ci-dessous de Seguier démontre le résultat de [Frobenius, 1879] selon lequel tout polynôme annulateur d'une matrice est divisible par le polynôme minimal [de Séguier, 1908, 28] :

> Soit maintenant α une substitution d'ordre n invertible ou non. Convenons que, si $f(x)$ est un polynôme ou une série entière, convergente sur tout le plan, $f(\alpha)$ se forme en remplaçant x par α et en multipliant le terme constant par $\varepsilon_n = \varepsilon$. Le sens de $f(\alpha)$ est alors évident par lui-même.
> soient $s_{l0} = s_0,\ldots,\ s_{l\nu_l} = s_{\nu_l}$ les racines d'un facteur f_l de $|\alpha - s\varepsilon| = \Delta(s)$, irréductible dans le champs considéré ; $y_{j_1},\ldots,y_{jm_j}$ $(m_j = m_{jl})$ les variables de la j[ième] suite relative à s_0 d'après la terminologie du Traité de M. Jordan) ; α_{ljo} l'action de α sur $y_{j_1},\ldots,y_{jm_j}$. Prenons α sous forme canonique. D'après l'expression connue de α^λ, on aura, $\varphi(x)$ étant un polynôme, en posant
> $\varphi^{(i)}(s_0)/(1\ldots i) = \varphi_i$,
>
> $$\varphi(\alpha_{ljo}) = \begin{vmatrix} y_{j1} & \varphi_0 y_{j1} \\ y_{j2} & \varphi_1 y_{j1} + \varphi_0 y_{j2} \\ \ldots & \ldots \\ y_{jr} & \varphi_{r-1} y_{j1} + \ldots + \varphi_{r-i} y_{ji} + \ldots + \varphi_0 y_{jr} \end{vmatrix};$$
>
> φ(α) est le produit des substitutions analogues à φ_{ljo}.
> Pour que φ(α) soit nul, il faut et il suffit, si m_j Ã m_{j+1}, que $\varphi(s_k)$, $\varphi'(s_k),\ldots,\varphi^{(m1-1)}(s_k)$ soient nuls (l prenant toutes ses valeurs), c'est-à-dire que s_k soit racine m_1^{uple} de φ. Or $(s-s_k)^{m1}$ est le premier diviseur élémentaire de $\Delta(s)$ relatif à $s-s_k$. Donc, pour que $\varphi(\alpha) = 0$, il faut et il suffit que $\varphi(s)$ soit divisible par le quotient d'ordre $n-1$ de $\Delta(s)$.

et officier de l'armée, peut sembler presque anachronique dans le paysage institutionnel des mathématiques du XX^{e} siècle. Ses travaux mathématiques sont pourtant bien de leur temps. Après deux premières publications concernant des questions d'arithmétiques en 1894 et 1896 ([4]), de Séguier se consacre à la théorie des groupes finis à laquelle il consacre la publication d'une vingtaine de mémoires entre 1900 et 1925 dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France*, et les *Comptes Rendus*. Le premier de ces mémoires, intitulé "Sur la forme canonique des substitutions linéaires" [de Séguier, 1902], est motivé par la récente généralisation donnée à la forme de Jordan par Dickson (chapitre 7) et son application au dénombrement des substitutions conjuguées entre elles (encart 3). Entre 1902 et 1907, la forme de Jordan apparaît au carrefour d'un certain nombre de préoccupations de Séguier : la théorie de groupes linéaires avec les travaux de Dickson, la représentation des groupes avec les travaux de Schur [1904] développant l'emploi des matrices (voir de Séguier [1907b]) ([5]), et enfin la théorie des formes quadratiques et bilinéaires avec la parution d'un mémoire de Jordan lui-même en 1905 (voir de Séguier [1908]). C'est dans ce contexte que de Séguier propose en 1907 une nouvelle organisation de la théorie des matrices qui met la forme de Jordan au centre par opposition à la théorie classique des diviseurs élémentaires que de Séguier lui-même expose encore dans son traité de 1904 dans la tradition de Frobenius, Kronecker et Hensel [de Séguier, 1904, 159- 162].

[4] Voir "L'expression du nombre des classes déduite de la transformation des fonctions elliptiques ", *Comptes Rendus,* 1894, t. 118, 1407 poursuivant des travaux de Kronecker et "Sur les sommes de Gauss", *Comptes Rendus,* 1896, t123, 166.

[5] Les travaux de Schur peuvent a peine être évoqués ici et il faut renvoyer à l'historiographie de la représentation des groupes : [Haubrich 1998] et [Curtis 1999]. Elève de Frobenius et Hensel, Schur consacre sa thèse de 1901 aux fonctions rationnelles de matrices dans le cadre de la représentation des groupes finis par des substitutions linéaires. Il est amené à caractériser les matrices semblables par leurs polynômes minimaux auxquels il associe des matrices particulières, les matrices compagnons. Le rôle de ces matrices gagnera en importance après la guerre et sera abordé au chapitre 9.
Le mémoire, "Ueber die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene linear Substitutionen," [Schur, 1904] développe la théorie de la représentation de Molien et Frobenius et se fixe pour ambition "l'un des problèmes les plus difficiles de l'Algèbre" [Schur, 1904, 20]. Il s'agit de déterminer tous les groupes finis de substitutions linéaires, problème pour lequel les résultats de Jordan [1879] restent d'actualité. En 1905 Schur étudie les groupes de matrices commutatives à la suite des travaux de Frobenius sur les systèmes hypercomplexes (chapitre 6).

Un autre exemple est l'utilisation de la forme canonique pour le problème le plus caractéristique de la théorie des matrices : la caractérisation des matrices permutables à une matrice donnée (partie II, conclusion). La résolution du problème est rétrospectivement attribuée au traité de Jordan de 1870, [de Séguier, 1907, 34] :

> La forme canonique d'une matrice à termes constants obtenue au n°2 fournit très aisément plusieurs propositions importantes.
>
> [...] toute substitution α' permutable à la substitution α (invertible ou non, prise sous forme canonique) remplace $y_{j'1}, \ldots$; par des fonctions de la forme
>
> $$y'_{j'1} = \sum_1^{\mu} u_{j1}^{j'1} y_{j1},$$
> $$y'_{j'2} = \sum_1^{\mu} (u_{j1}^{j'2} y_{j1} + u_{j1}^{j'1} y_{j2}).$$
> ……………………………………,
> $$y'_{j'h'} = \sum_1^{\mu} (u_{j1}^{j'h'} y_{j1} + \ldots + u_{j1}^{j'h'-h+1} y_{jh} + \ldots + u_{j1}^{j'1} y_{jh'}),$$
> ………………………………………………………………
> $(u_{j1}^{j'h'} = 0$ pour $h' = 1, \ldots, m_{j'} - m_j$, si $m_{j'} > m_j)$,
>
> où μ est le nombre de suites relatives à la racine s_0.
>
> Pour avoir une idée plus nette de la forme de α', numérotons les suites relatives à s_0 de manière que m_j soit Ã m_{j+1} (2) [...]
>
> (2) Le nombre des $u_{j1}^{j'h'}$ non nécessairement nuls étant, pour chaque couple j, j', le plus petit $m_{jj'}$ des deux nombres m_j, $m_{j'}$, on voit alors que le nombre $\Sigma_{jj'} m_{jj'} = 2\, \Sigma_{j' Ã j} m_{jj'} - m_{jj}$ des coefficients est égal à $\Sigma(2j-1)m_j$. Ce nombre a été retrouvé sous une autre forme par M. Frobenius (cr., t.84, p.29) après les travaux de M. Jordan (*Traité*, p. 128-136) et indépendamment d'eux.

2. Des méthodes propres à Jordan et Kronecker venant se "fondre" dans la décomposition matricielle.

C'est une véritable restructuration de la théorie des matrices que propose de Séguier en 1907 en plaçant la forme canonique de Jordan au centre et les diviseurs élémentaires comme corollaires. Les résultats classiques de la théorie des formes bilinéaires du traité de Muth [1899], de la théorie du déterminant de Rados [1898] ([6]) et de la théorie des matrices du début du siècle sont déduits de la forme canonique de Jordan (encart 2). Parmi ces résultats, de Séguier aborde en particulier la question de la détermination des matrices qui commutent à une matrice donnée, question développée, comme nous l'avons vu au chapitre 6, dans le cadre des systèmes hypercomplexes (Frobenius [1894-1896], de la représentation des groupes [Frobenius, 1898], Schur [1902]) et des des fonctions rationnelles de matrices (Bromwhich [1901]). Surtout, de Séguier applique la méthode de réduction canonique à la théorie arithmétique des formes quadratiques et hermitiennes étudiée par Loewy ([7]), et à la théorie des systèmes de nombres de Kronecker [1891] :

> On connait la méthode si simple de Kronecker (CR., t. 107) pour la réduction (par additions, échanges, multiplications de lignes et de colonnes) des matrices dont les éléments sont entiers ou fonctions entières d'un paramètre variable. α_1 et α_0 étant deux matrices d'ordre n à éléments constants et $\alpha = t\alpha_0 + s\alpha$ un faisceau dont le déterminant peut être nul, on obtient ainsi deux matrices ξ, η (pouvant dépendre de s, t) telles que, dans $\xi\alpha\eta$, les seuls éléments ý 0 soient dans la diagonale et soient les diviseurs élémentaires de α. Mais on sait aussi que l'on peut obtenir deux matrices u et v indépendantes de s et t telles que $u\alpha v$ ait une forme canonique complètement déterminée par certains éléments invariants de α. C'est cette autre réduction que je voudrais effectuer ici par une méthode semblable. On reconnaîtra d'ailleurs, sous l'exposition du n°1, la marche indiquée récemment par M. Jordan (J.M., 1907, p. 6-15). Dans le cas où α est réelle et symétrique, les mêmes procédés fournissent très simplement une généralisation du théorème de M. Loewy (CR., t. 122) sur la limite supérieure de la caractéristique d'une forme quadratique ou d'une forme hermitienne. Dans le cas où $\alpha_1 = \varepsilon_n$ (je désignerai en général par ε_n la matrice unité d'ordre N), on obtient la forme canonique de α_0. Je montrerai pour terminer comment cette forme canonique permet d'établir simplement aussi et de généraliser en partie certains résultats dus à MM. Frobenius, Schur, Bromwich et Rados.
> [de Séguier, 1908, 20].

---

[6] Rados [1898] emploie les matrices –essentiellement interprétées comme des déterminants – pour aborder des problèmes relatifs aux substitutions linéaires. Son mémoire est souvent cité pour son étude des racines caractéristiques d'une matrice et son adjointe, et surtout pour son association d'un déterminant à tout polynôme [Rados, 1898, 423] (il s'agit du déterminant compagnon, ce résultat avait déjà été obtenu par [Laisant, 1889]).

[7] Loewy, polytechnicien et ingénieur des ponts, est ici cité pour deux mémoires de 1896 et 1900 concernant les formes hermitiennes et les faisceaux de formes hermitiennes. Ses méthodes s'insèrent dans le cadre de la théorie des diviseurs élémentaires en référence à Frobenius [1878] et Klein [1868].

ENCART 3

de Séguier et la forme canonique en 1902.

SUR LA FORME CANONIQUE DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES;

Par M. DE SÉGUIER.

On peut établir simplement comme il suit la forme canonique des substitutions linéaires et quelques-unes de ses conséquences :

1. On démontrera d'abord, comme M. Jordan dans son *Cours d'Analyse* (t. III, p. 173), le théorème suivant :

Étant donnée une substitution linéaire $\alpha = (\alpha_{ik})$ *des variables* $x_1, \ldots, x_n$, *on peut toujours trouver n fonctions linéaires indépendantes des x formant une ou plusieurs suites* $y_1, \ldots, y_m; y'_1, \ldots, y'_m; \ldots$ *telles que* α *remplace les y d'une même suite* $y_1, \ldots, y_\mu, \ldots, y_m$ *respectivement par* $s_i y_1, \ldots, s_i(y_\mu + y_{\mu-1}), \ldots, s_i(y_m + y_{m-1})$ $(\mu \geqq 2)$, s_i *étant racine du déterminant caractéristique* Δ_α *de* α, *qu'il y ait au moins une suite répondant à chaque racine et que le nombre des y figurant dans les suites répondant à une racine coïncide avec la multiplicité de cette racine.*

Considérons maintenant le corps C résultant de l'adjonction des α_{ik} au corps des nombres rationnels ou au corps des nombres $0, 1, \ldots, p-1$ mod. p (p premier). Il s'agit de démontrer la proposition suivante :

Soit $\Delta_\alpha = \Pi_l f_l(s)^{\sigma_l}$ $(l = 1, \ldots, \delta)$ *la décomposition de* Δ_α *en facteurs irréductibles dans* C, f_l *étant de degré* ν_l *et ayant les racines* s_{lk_l} $(k = 0, \ldots, \nu_l - 1)$. *On peut faire :* 1° *qu'il y ait une suite* $y_1, \ldots, y_{m_l}$ *où les coefficients des x dans* y_l *appartiennent au corps* C_l *résultant de l'adjonction de* s_{l0} *à* C; 2° *qu'il y ait* ν_l *suites* S_{lk_l} *conjuguées* $y_{l1k_l}, \ldots, y_{lm_lk_l}$ $(y_{li0} = y_i)$; 3° *que s'il y a plusieurs suites* $S_{lj_lk_l}$ $(j_l = 1, \ldots, \mu_l;\ S_{l1k_l} = S_{lk_l})$, $y_{lj_l1k_l}, \ldots, y_{lj_lh_{lj_l}k_l}, \ldots, y_{lj_lm_{lj_l}k_l}$ $(y_{l1m_{l_1}k_l} = y_{lm_lk_l})$, *formées avec la même*

Etant donné un faisceau de matrices, *A-sI,* la méthode d'opérations sur les lignes et colonnes développée par Kronecker permet de réduire ce faisceau à une matrice diagonale et ces opérations reviennent à effectuer des multiplications par des matrices élémentaires polynomiales (chapitre 5). Mais si on se limite à la multiplication par des matrices élémentaires constantes, il n'est plus possible en général de réduire le faisceau à une forme diagonale et la forme obtenue est celle de Jordan. Supposer les matrices élémentaires constantes revient à élaborer une théorie dans laquelle l'équivalence des faisceaux de formes apparaît comme un corollaire de la relation de similitude des matrices, et peut donc également être résolue par la forme de Jordan, c'est ainsi que Jordan appliquait en 1874 sa forme canonique à la question de l'équivalence des couples de formes bilinéaires (chapitre 3).

Soit donc $\alpha = \alpha_0 t + \alpha_1 s$ un faisceau de matrices dont le déterminant $|\alpha|$ peut être nul. Il s'agit de trouver deux matrices u et v de déterminant ý 0, indépendantes de s, t, telles que

$$u\alpha v = A = A_0 t + A_1 s$$

soit la somme des matrices carrées composantes, dites *élémentaires*, des types suivants :

$$\varphi = \left\{\begin{matrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ s & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & t & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s & 0 \end{matrix}\right\} = \varphi_0 t + \varphi_1 s,$$

$$\psi = \left\{\begin{matrix} t & s & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & s & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & s \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\} = \psi_0 t + \psi_1 s,$$

$$\chi = \left\{\begin{matrix} s-ts_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ t & s-ts_i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & s-ts_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s-ts_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & s-ts_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & s-ts_i \end{matrix}\right\} = \chi_0 t + \chi_1 s,$$

$$\omega = \begin{Bmatrix} t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ s & t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & t & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & s & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & s & t \end{Bmatrix} = \omega_0 t + \omega_1 s,$$

> [...] et éventuellement de matrices nulles [...].
> [de Séguier, 1908,21].

Parmi les formes élémentaires ci-dessus, la forme χ est la forme de Jordan et dénommée par de Séguier "première forme canonique". Cette forme suffit à caractériser l'équivalence des faisceaux $A+sI$:

> Je dis que A est la *première forme canonique* ou simplement la *forme canonique* de α. Si $\alpha_1 = \varepsilon_n$, A ne contient évidemment que des matrices χ^i, c'est-à-dire que, si $u\alpha v = A$, uv est égal à ε_n ; alors $A_0 = v^{-1}\alpha_0 v$ est la *forme canonique* de α_0. [...] Il est clair que, si $\beta = \beta_0 t + \beta_1 s$ (β_0 et β_1 étant constantes) a la même forme canonique que α, β est de la forme $\xi\alpha\eta$, ξ et η étant des matrices inversibles constantes d'ordre n, et réciproquement. α et β sont alors dit équivalents.
> [de Séguier, 1908, 26-27].

Lorsque de Séguier oppose, en 1907, la méthode de Jordan à celle de Kronecker, c'est la querelle de 1874 qui résonne à 30 ans de distance en un écho qui, pour la première fois, favorise le point de vue de Jordan et fait reposer toute la théorie sur une recherche de formes canoniques et non d'un système complet d'invariants. Pour autant, l'heure n'est plus à la controverse entre les méthodes de Jordan et de Kronecker et, au contraire, les procédés de réductions propres à Jordan (chapitre 3) et la combinatoire arithmétique des lignes et colonnes développée par Kronecker pour l'obtention d'invariants par des opérations effectives (chapitre 5) viennent se fondre dans les méthodes de Séguier. En alliant la méthode de décomposition d'un problème en ses étapes les plus simples qui caractérisait la position de Jordan en 1874 à la combinatoire des systèmes de Kronecker, de Séguier élabore un algorithme de résolution de problèmes par décompositions successives. Les matrices de Séguier donnent *formes* au raisonnement par *réductions* des problèmes qui, comme nous l'avons vu au chapitre 1 était propre à Jordan ; le passage d'une étape à la suivante dans la décomposition du problème prend la forme algorithmique d'une "transformation" de matrice par la combinatoire des lignes et des colonnes de Kronecker. Les étapes de la réduction sont représentées par des matrices extraites successivement de la matrice initiale : les "matrices composantes". Ces réductions successives d'une matrice à ses composantes se poursuivent jusqu'à l'obtention de ce que Jordan désignait en 1874 comme la "forme la plus simple". La réduction de Jordan en suite de problèmes simples alliée à la combinatoire arithmétique des systèmes de Kronecker donne un caractère à la représentation matricielle comme l'illustre le raisonnement suivant de Séguier:

Supposons d'abord que l'une des deux matrices α_0, α_1, par exemple α_0, soit de rang r inférieur à l'ordre n de α. Opérons sur α les *transformations* (j'entendrai par là des échanges, des multiples, des additions à multiplicateur constant) de lignes et de colonnes qui réduisent α_0 à la forme diagonale $(0,0,\ldots,0, 1,1,\ldots,1)$, le nombre des zéros étant $n-r$, et soit

$$\begin{pmatrix} sa & sb \\ sc & d \end{pmatrix}$$

la matrice obtenue, a étant une matrice constante d'ordre $n-r$ et d une matrice d'ordre r. Par des transformations de lignes et de colonnes on peut ramener sa à la forme diagonale $(0,\ldots,0,s,\ldots,s)$, le nombre des zéros étant $n-r-\rho$. Soit alors

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & sb' \\ 0 & s\varepsilon_\rho & sb'' \\ sc' & sc'' & d \end{pmatrix}$$

la matrice obtenue, les matrices b', b'', c', c'' et les matrices nulles indiquées par des zéros ayant des types évidents. Si ρ est > 0, on peut, par des additions et des échanges de lignes et de colonnes, annuler b'' et c'', puis réduire α à la somme de deux matrices composantes dont l'une est $s\,\varepsilon_1$, de la forme χ pour $s_i = 0$, $q = 1$. Soit donc $\rho = 0$, c'est-à-dire $a = 0$.
On peut ramener b, par des transformations de lignes et de colonnes à la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s\varepsilon_\sigma & 0 \end{pmatrix},$$

puis d par des transformations de lignes seulement à la forme

$$t\varepsilon_r + sd',$$

et faire passer les lignes nulles tout en bas du tableau.
[1908, 22].

Si de Séguier ne résout pas de problème nouveau en 1907, sa démarche n'est pas pour autant dénuée d'originalité. S'inscrivant dans le courant de réorganisation des connaissances algébriques du début du XX^{e} siècle, de Séguier poursuit d'abord un idéal consistant à exhiber les notions les plus "naturelles" qui permettent de "fondre" ensemble des courants de recherches distincts. La forme de Jordan permet de fondre des travaux d'arithmétiques et d'algèbres. Mais la démarche n'est pas que théorique, la mise en valeur d'une notion "naturelle" qui suscite les analogies va de pair avec l'élaboration d'une méthode de décomposition matricielle à la fois nouvelle et ancienne puisque résultant de la fonte en un même de travaux différents, voire opposés pour le cas de Jordan et Kronecker. C'est de cette analogie, de cette fonte que cette méthode tire son efficacité. Diverses origines de méthodes de décomposition matricielle ont été abordées à la partie II, il reste à examiner le caractère particulier que donne à la méthode de Séguier la postérité de Jordan.

II. LA REDUCTION CANONIQUE COMME METHODE.
LA POSTERITE DE JORDAN AU SEIN D'UN CORPUS ARITHMETIQUE (1878-1913).

La réorganisation de la théorie des matrices que propose de Séguier se présente explicitement comme la mise en relation de recherches distinctes en une théorie "plus naturelle et plus complète". Que trente ans après la controverse, de Séguier associe à nouveau la forme de Jordan à la théorie des formes bilinéaires est assez spectaculaire. Que d'autre part la méthode de réduction à une forme canonique soit immédiatement reliée aux travaux de Kronecker suggère que la nouvelle popularité de la forme de Jordan doit beaucoup aux publications de Jordan des années 1870-1874 (chapitres 1 et 3). Il y a en effet deux facteurs distincts qui doivent être démêlées dans la postérité de Jordan. D'une part, la postérité de l'énoncé de la forme canonique comme relevant de la théorie des groupes linéaires bénéficie de la publicité de deux traités influents de Jordan, le *Traité des substitutions* et les *Cours d'analyse*, ainsi que des travaux de Dickson et Burnside au tournant du siècle. D'autre part, la question de l'application de la forme canonique à la théorie des formes bilinéaires renvoie directement à la querelle de 1874 et aux travaux arithmétiques de Jordan sur la période 1880-1907. de Séguier lui-même, bien qu'ayant publié un premier mémoire sur la forme de Jordan en 1902, ne fait, avant 1907, aucun rapport avec la théorie des matrices qu'il expose dans son traité de 1903 en suivant la théorie classique des diviseurs élémentaires. Le retour de la forme de Jordan dans le paysage des formes bilinéaires en 1907 implique la construction d'un lien plus profond que la simple reconnaissance d'une analogie. Ce lien dépasse d'ailleurs la forme de Jordan elle-même, pour toucher à des enjeux plus importants portés par une méthode très générale de la théorie arithmétique des formes. Il s'agit ici, de mettre en évidence une tradition qui joue un rôle essentiel sur de Séguier et beaucoup de ses contemporains. Cette tradition correspond à un corpus de textes qui, sur la période 1880-1910, est associé à des travaux arithmétiques essentiellement menés en France.

ENCART 4.

Extrait de la note aux Comptes Rendus de [Jordan, 1904, 537]

Cette note annonce le "Mémoire sur les formes quadratiques, suivant un module premier p, invariantes par une substitution linéaire donnée" [Jordan, 1905].

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les formes quadratiques invariantes par une substitution linéaire donnée* (mod p). Note de M. CAMILLE JORDAN.

« Soit S une substitution linéaire (mod p) : 1° quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe des formes quadratiques Φ de discriminant $\gtrless 0$ (mod p) que S laisse invariantes (mod p)? 2° quelle est l'expression générale de ces formes? 3° à quels types simples peut-on les réduire par les changements de variables qui n'altèrent pas l'expression de S? 4° quel est le nombre de ces types?

» On peut répondre comme il suit à ces questions :

» Ramenons S à sa forme canonique. Les variables se répartiront en séries telles que S remplace les variables $x_0, \ldots, x_m$ de l'une d'elles respectivement par ρx_0, $\rho(x_1 + x_0)$, $\ldots$, $\rho(x_m + x_{m-1})$, le multiplicateur ρ étant une racine (réelle ou complexe) de la congruence caractéristique.

» Groupons dans une même sous-classe les séries qui ont même multiplicateur et même nombre de variables, dans une même classe les sous-classes qui ont le même multiplicateur; dans un même système les classes dont les multiplicateurs sont des quantités conjuguées ρ, ρ^p, ...

» Les conditions pour l'existence des fonctions invariantes Φ sont les suivantes :

» 1° A chaque classe C dont le multiplicateur ρ diffère de ± 1 mod p

1. La référence de Séguier aux travaux de Jordan et l'écho de la querelle de 1874.

La référence de Séguier aux travaux de Jordan donne un premier accès au corpus considéré dans cette partie. Un texte publié par Jordan en 1905 sous le titre "Mémoire sur les formes quadratiques, suivant un module premier *p*, invariantes par une substitution linéaire donnée," [Jordan, 1905], est une référence constante chez de Séguier, aussi bien pour la théorie des matrices de 1907 que pour les travaux sur les formes bilinéaires et quadratiques qui en découlent (encart 4) [de Séguier, 1908b, 1247]. C'est en effet dans le mémoire de 1905 et les deux publications qui le suivent [Jordan, 1906, 1907] que de Séguier reconnaît une méthode originale dans les travaux de Jordan sur la théorie des formes par opposition aux "résultats trouvés tout autrement" par Kronecker et Frobenius [de Séguier, 1908b, 1248] ([8]). C'est cette originalité qui suscite la nouvelle organisation donnée à la théorie des matrices en 1907 et il y a donc une influence directe de Jordan dans la postérité de sa propre forme canonique au XX[e] siècle. L'influence de Jordan remonte en ligne directe à la querelle de 1874 et c'est en suivant ce fil que l'écho de la controverse raisonne en 1907.

Le mémoire de Jordan publié en 1905 concerne les formes invariantes par une substitution donnée et renvoie aux nombreux travaux de Jordan sur les formes algébriques, quadratiques et bilinéaires qui, depuis 1874, mettent en œuvre une application systématique de la forme canonique des substitutions. Il s'agit en 1905 de généraliser d'anciens résultats énoncés en 1888 pour les formes à coefficients complexes au cas plus général des formes "suivant un module premier *p*" (encart 4). La méthode de Jordan s'inspire de la généralisation donnée par Dickson de la forme canonique à tout corps fini (chapitre 7) ([9]) :

---

[8] Le mémoire de Séguier [1908b] sur les formes bilinéaires a pour objet la recherche, étant données deux substitutions *n*-aires α, β dans un champ *e*, des formes $a = \Sigma a_{ik}x_iy_k$ telles que $\beta a \grave{\alpha} = a$, $\grave{\alpha}$ étant la transposée de *a* (le cas $\beta = \grave{\alpha}^{-1}$ fournit toutes les substitutions permutables à α). La méthode consiste à supposer que *e* est "le champ des nombres complexes ordinaires" et à mettre α et β sous forme canonique. On en déduit une décomposition de *a* par rapport aux "suites de variables" associées aux "multiplicateurs s_1" de α et β.

[9] Pour une description, en termes contemporains, des travaux de Jordan, voir Dieudonné [1962, XII-XIV] :

> Dans les mémoires (107) [c'est-à-dire [1888]] et (118) [c'est-à-dire [1905]], Jordan aborde un problème voisin : étant donné un automorphisme u_n d'un espace vectoriel *E* de dimension *n*, existe-t-il des formes quadratiques non dégénérées sur *E* pour lesquelles u_n est une transformation orthogonale, et si oui caractériser ces formes. Jordan traite dans (107) le cas où le corps de base *K* est algébriquement clos et dans (118) le cas où *K* est un corps premier fini. De façon générale, la solution résulte de l'étude des sous espaces propres d'une transformation orthogonale *u* pour une forme quadratique donnée Φ. Pour cela il faut considérer les facteurs irréductibles du polynôme minimal de *u*, et, pour chacun de ces facteurs *p*, le sous espace *F(u,p)* des $x \in E$ annulés par une puissance de *p(u)*.

doit être associée une autre classe C′ au multiplicateur ρ^{-1}. Le nombre des variables et leur répartition en séries doivent être les mêmes dans ces deux classes.

» 2° A un multiplicateur $\rho \equiv 1 \mod p$ correspondrait une classe singulière, réelle et qui est sa propre associée. Dans chacune des sous-classes qui la composent le nombre $l(m+1+p)$ doit être pair (l désignant le nombre des séries, $m+1$ le nombre des variables dans chacune d'elles).

» Supposons ces conditions remplies.

» Groupons dans une même famille toutes les classes qui sont soit conjuguées, soit associées. Toute forme invariante sera une somme de formes invariantes partielles, ne contenant chacune que les variables d'une famille. Le problème est ainsi ramené au cas où il n'y a qu'une famille. Ici trois cas pourront se présenter.

» *Premier cas.* — La famille comprend deux systèmes S, S′ dont le premier contient ν classes conjuguées $C_0, \ldots, C_{\nu-1}$ et le second leurs associées respectives $C'_0, \ldots, C'_{\nu-1}$; Φ sera la somme de ν formes complexes $[C_0 C'_0], \ldots, [C_{\nu-1} C'_{\nu-1}]$ dont chacune est bilinéaire par rapport aux variables de deux classes associées. Ces formes partielles sont conjuguées les unes des autres; il suffira donc de construire, puis de réduire l'une d'elles, telle que $[C_0 C'_0]$.

» Soient $s_1, \ldots, s_l$ les séries qui forment la classe C_0; $(x_0^\alpha, \ldots, x_{m_\alpha}^\alpha)$ les variables de la série s_α. Soient de même $s'_1, \ldots, s'_l$ les séries qui forment la classe associée C'_0; $(y_0^\beta, \ldots, y_{m_\beta}^\beta)$ les variables de la série s'_β. Soit enfin r un entier quelconque qui ne surpasse ni m_α ni m_β. Posons

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta r} = x_0^\alpha y_r^\beta - x_1^\alpha y_{r-1}^\beta + (x_2^\alpha + x_1^\alpha) y_{r-2}^\beta - \ldots \\ + (-1)^k [x_k^\alpha + C_{k-1}^1 x_{k-1}^\alpha + C_{k-1}^2 x_{k-2}^\alpha + \ldots + x_1^\alpha] y_{r-k}^\beta + \ldots. \end{aligned}$$

» L'expression générale de la fonction $[C_0 C'_0]$ sera

$$[C_0 C'_0] = \sum_{\alpha, \beta, r} a_r^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta r},$$

où les coefficients a sont des entiers complexes quelconques satisfaisant à la condition $a^{p^\nu} \equiv a \mod p$.

» Par des changements de variables qui n'altèrent pas la forme canonique de S, on peut réduire toute expression de ce genre, si son discriminant n'est pas nul, à la forme type unique

$$\sum_\alpha f_{\alpha\alpha m_\alpha}.$$

I. Dans un précédent Mémoire *(Journal de Liouville,* 1888) nous avons indiqué les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une substitution linéaire S étant donnée, il existe des formes quadratiques (de discriminant non nul) que S n'altère pas.

Nous avons en outre montré que ces formes invariantes Φ appartiennent à un type unique, car on peut les transformer les unes dans les autres par des substitutions linéaires qui n'altèrent pas l'expression de S.

Si les coefficients de la substitution et de la forme, au lieu d'être des quantités quelconques, sont des entiers réduits à leur reste suivant un module premier p, on pourra se poser un problème analogue au précèdent, mais de nature arithmétique. Il se résout à l'aide des mêmes principes ; il est toutefois plus compliqué et les résultats sont sensiblement différents.

Avant de l'aborder, il conviendra de rappeler brièvement quelques résultats connus dont nous aurons à faire usage. Nous les empruntons en partie à notre *Traité des Substitutions,* en partie au bel Ouvrage dans lequel M. Dickson a récemment élargi et complété, sur plusieurs points essentiels, l'étude des groupes linéaires.

[Jordan, 1905, 217].

La forme canonique des substitutions est au cœur de la méthode développée par Jordan. La caractérisation des formes invariantes par une substitution donnée repose en effet sur une discussion des "substitutions fondamentales" déduites de la réduction canonique :

Les substitutions linéaires de déterminant Ã *0 mod. p* entre n variables $x_1, \ldots, x_n$ dérivent toutes de la combinaison des substitutions fondamentales suivantes, qui n'altèrent chacune qu'une variable

$$|x_i \; \lambda x_i|$$
$$|x_i \; x_i+x_k|.$$

[...] Une substitution linéaire [...] peut être ramenée par un changement de variables à une expression canonique que nous allons indiquer. Formons la congruence caractéristique [...] et décomposons Δ en facteurs irréductibles suivant le module p. Soient P l'un de ces facteurs, ν son degré, μ son ordre de multiplicité.

La congruence $P \equiv 0$ *modp* admettra ν racines conjuguées,

$$\rho, \rho^p, \ldots, \rho^{p\nu-1}$$

Parmi les nouvelles variables qui donnent à S sa forme canonique, il y en aura précisément $\mu\nu$ correspondant au facteur P.

Ce système de $\mu\nu$ variables se partage en ν classes correspondant aux diverses racines conjuguées. [...] La substitution S remplace les variables $x_0, x_1, \ldots, x_m$ de l'une de ces séries respectivement par

$$\rho x_0, \rho(x_1+x_0), \ldots, \rho(x_m+x_{m-1}).$$

[Jordan, 1905, 218].

Deux nouveaux mémoires de Jordan sur les formes quadratiques paraissent en 1906 et 1907. La question porte cette fois sur l'étude des réseaux de formes

$$R = \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_m\varphi_m$$

(φ_i : formes quadratiques à n variables).

ENCART 5.

Les faisceaux de formes quadratiques et bilinéaires chez Jordan en 1906.

Le mémoire de 1906 débute par une reformulation des résultats de 1874 sur les faisceaux de formes bilinéaires, les énoncés sont désormais généralisés pour tenir compte également des faisceaux de formes quadratiques, ce qui revient à mêler les travaux de Kronecker au point de vue de Jordan de réduction à des formes canoniques [Jordan, 1906, 406] :

> Le faisceau F peut être *simple* ou *composé*. On dit qu'il composé, si les variables peuvent être choisies de manière à se répartir en plusieurs séries
>
> $$x_1, x_2, \dots ; y_1, y_2, \dots ; \dots,$$
>
> telles que l'on ait
>
> $$\varphi_1 = X_1 + Y_1 + \dots, \varphi_2 = X_2 + Y_2 + \dots,$$
>
> X_1, X_2 étant des fonctions des x seules ; Y_1, Y_2 des fonctions des y seuls, etc.
>
> *Faisceaux simples.* Si un faisceau simple F contient des formes de déterminant ý 0 (ce qui arrivera nécessairement si le nombre n des variables est pair), soit $\psi_1 = l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2$ l'une d'elles choisie à volonté ; F contiendra d'autres formes de déterminant nul ; soit ψ_2 l'une d'elles, choisie à volonté. On pourra réduire simultanément $-\psi_1$ et ψ_2 aux expressions suivantes :
>
> $$\psi_1 = A_x^n, \psi_2 = B_x^n$$
>
> en posant pour abréger :
>
> 1° Si n est pair,
>
> $$A_x^n = 2(x_1x_2 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n),$$
> $$B_x^n = 2(x_2x_3 + x_4x_5 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}) + x_n^2$$
>
> 2° Si n est impair,
>
> $$A_x^n = 2(x_1x_2 + x_3x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}) + x_n^2$$
> $$B_x^n = 2(x_2x_3 + x_4x_5 + \dots + x_{n-1}x_n)$$
>
> Les formes du faisceau ont pour expression générale
>
> $$\lambda_1 A_x^n + \lambda_2 B_x^n,$$
>
> et l'on voit immédiatement que le déterminant de cette forme sera nul si $\lambda_1 = 0$, ý 0 dans le cas contraire.

étudiés par des réductions à des formes canoniques ([10]). Le traitement du cas particulier des faisceaux $F=\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2$ voit Jordan reproduire ses arguments et résultats de 1874 selon une démarche qui sera reprise par la nouvelle organisation de la théorie des matrices proposée par de Séguier (encart 5) :

> Réduction d'un faisceau de deux formes quadratiques à n variables.
> Soit $F=\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2$ le faisceau considéré. Le problème de la réduction simultanée des deux fonctions φ_1, φ_2 (par une substitution linéaire opérée sur les x) a fait l'objet de nombreux travaux. Il est aujourd'hui entièrement résolu. Nous allons résumer rapidement les résultats acquis (1), en y ajoutant un léger complément nécessaire pour notre objet actuel ; car ici nous effectuons des substitutions linéaires, non seulement sur les x mais aussi sur les λ (cette dernière opération revient à remplacer φ_1, φ_2 comme formes génératrices du faisceau par deux de leurs combinaisons linéaires).
> [...]
> (1) Voir Weierstrass, Werke, t. II, 19-44, Kronecker, Werke, t. I, 349-372, Darboux, Journal de Liouville, 1874, 347-396, Jordan, Ibid, 397-423.
> [Jordan, 1906, 405].

Comme le montre l'encart 5, le mémoire de 1906 reprend les résultats de 1874, qu'il complète en ajoutant une série d'exemples visant à expliciter la classification des faisceaux de formes quadratiques à deux ou trois variables par leurs formes canoniques, avec notamment une application géométrique aux faisceaux de coniques.

[10] Pour une description en termes contemporains de ces deux mémoires, voir [Dieudonné, 1961, XIV] :

Jordan propose un certain nombre de calcul explicite des différents types de faisceaux obtenus pour deux ou trois variables [Jordan, 1906 ; 411] :

10. Il est aisé, en partant de ces principes, de former le Tableau suivant des divers types réduits pour $n = 2, 3, 4, \ldots$

1° $n = 2$.

On a deux types distincts :

$$(a) \qquad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2,$$
$$(b) \qquad \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2 x_2^2.$$

Donc $N_{22} = 2$.

2° $n = 3$.

On a les six types suivants :

$$(c) \qquad \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2 2x_2x_3,$$
$$(d) \qquad \lambda_1(x_1^2 + x_3^2) + \lambda_2(x_2^2 + x_3^2),$$
$$(e) \qquad \lambda_1(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_2 x_3^2,$$
$$(f) \qquad \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2(x_2^2 + x_3^2),$$
$$(g) \qquad \lambda_1(2x_1x_2 + x_3^2) + \lambda_2 x_2^2,$$
$$(h) \qquad \lambda_1(2x_1x_2 + x_3^2) + \lambda_2 2x_2x_3,$$

d'où $N_{23} = 6$.

3° $n = 4$.

On aura quatorze types :

$$\lambda_1(x_1^2 + x_3^2 + x_4^2) + \lambda_2(x_2^2 + x_3^2 + sx_4^2),$$
$$\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + x_4^2) + \lambda_2(x_3^2 + x_4^2),$$
$$\lambda_1(2x_1x_2 + x_4^2) + \lambda_2(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2),$$
$$\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \lambda_2 x_4^2,$$
$$\lambda_1(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_2(x_3^2 + x_4^2),$$
$$\lambda_1(2x_1x_2 + x_3^2) + \lambda_2(x_2^2 + x_4^2),$$
$$\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + x_4^2) + \lambda_2 2x_3x_4,$$
$$\lambda_1(2x_1x_2 + x_3^2) + \lambda_2(2x_2x_3 + x_4^2),$$
$$\lambda_1(2x_1x_2 + x_4^2) + \lambda_2(x_2^2 + 2x_3x_4),$$
$$\lambda_1(2x_1x_2 + x_4^2) + \lambda_2 2x_2x_3,$$
$$\lambda_1(2x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2) + \lambda_2 x_2^2,$$
$$\lambda_1(2x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2) + \lambda_2 2x_2x_3,$$
$$\lambda_1(2x_1x_2 + 2x_3x_4) + \lambda_2(x_2^2 + x_4^2),$$
$$\lambda_1(2x_1x_2 + 2x_3x_4) + \lambda_2(2x_2x_3 + x_4^2).$$

Donc $N_{24} = 14$.
On trouverait de même $N_{25} = 29$, etc.

Le cas des faisceaux de formes ternaires et l'application géométrique aux coniques [Jordan, 1906, 412] :

Premier cas : m = 3

Soit $R = \lambda_1\varphi_1 \ \lambda_2\varphi_2 \ \lambda_3\varphi_3$.

Une substitution linéaire opérée sur les λ revient évidemment à remplacer φ_1, φ_2, φ_3 par de nouvelles formes génératrices, combinaisons linéaires des précédentes.A chaque système de valeurs des λ (ou plutôt de leurs rapports) correspond une forme du réseau (définie à un facteur près), laquelle, égalée à zéro, représentera une conique. Pour abréger le langage nous appellerons celle-ci la *conique du point* $P = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,)$.

2. La forme canonique comme méthode de classification (1874-1878).

Les mémoires de Jordan de 1905, 1906 et 1907 sont en droite ligne des travaux de 1874 sur les formes bilinéaires. Expliciter la construction par de Séguier d'un lien entre la forme canonique et la théorie des matrices en 1907 nécessite un regard rétrospectif sur les travaux de Jordan qui suivent la querelle de 1874. Ces travaux sont nombreux, certains sont très influents comme le mémoire publié dans le *Journal de Crelle* sur l'intégration algébrique des équations différentielles (encart 6) [Jordan, 1878]. Ils ont cependant un point commun, le développement par Jordan de son idéal de simplicité conjugué à sa méthode de réduction des problèmes. Le "Mémoire sur une application de la théorie des substitutions à l'étude des équations différentielles linéaires" [1874c] aborde ainsi la résolution des équations de Fuchs par la méthode de réduction canonique (voir à ce sujet les travaux de Hamburger de 1872 décrits au chapitre 3). La question de l'intégration algébrique des équations différentielles est une des préoccupations principales de Jordan dans la fin des années 1870 [Jordan, 1876a,b ; 1877 a, b, 1878]. Les travaux de Jordan sur les "équations différentielles linéaires à intégrale algébrique" sont publiés dans le *Journal de Crelle* en 1878 et donnent, à la suite des travaux de Klein [1876], une classification des sous groupes finis du groupe linéaire (encart 6) ([11]):

> Il y a donc identité entre le deux questions suivantes :
> 1° Enumérer les divers types d'équations différentielles linéaires d'ordre *m* dont toutes les intégrales soient algébriques.
> 2° Construire les divers groupes d'ordre fini que contient le groupe linéaire à *m* variables.
> [Jordan, 1878, 89].

La méthode de classification des groupes finis du groupe linéaire repose sur la réduction des substitutions à leurs formes canoniques:

> Cette question a été résolue pour la première fois, dans le cas de deux variables par M. Klein (Math. Annalen, t.IX) à l'aide de considérations géométriques.

---

[11] Dans sa première classification, Jordan ne mentionne pas le groupe des 168 colinéations découvert par Klein. Pour la question de l'intégration algébrique des équations différentielles, consulter [Gray, 2000, 69-99]. Voir aussi la biographie de Jordan par Lebesgue [1923] :

> [...] quelques mots sur les travaux relatifs à l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires. Frobenius avait montré le lien entre cette question et la théorie des substitutions linéaires. La formation des divers types d'équations à intégrale algébriques résulte de la construction des groupes finis contenus dans le groupe linéaire. M. Klein avait ainsi montré les cinq types possibles d'équations du second ordre ; Jordan montra que, pour tout ordre le nombre de types d'équations est fini, et il entreprit l'énumération de ces types pour les équations du troisième et du quatrième ordre.

Cette interprétation permet une classification par rapport aux types de formes canoniques et les facteurs de Δ, le déterminant caractéristique [Jordan, 1906, 427] :

Nos des types.	FORMES GÉNÉRATRICES. φ_1.	φ_2.	φ_3.	NATURE DE Δ.	RELATIONS entre les facteurs de Δ.	RELATIONS entre les coniques du réseau.	NOMBRE des droites doubles.
I....	$x_1^2-x_3^2$	$x_3^2-x_2^2$	$2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_1+\sigma x_3^2$ $\sigma \gtrless 2$	Indécomposable, sans rebroussement.	″	″	0 en général. 1 si $\sigma = 3$.
II...	$2x_1x_2$	x_3^2	$x_1^2+2x_2x_3$	Indécomposable, un rebroussement.	″	Un point commun.	1
III..	$2x_1x_2$	$x_2^2+x_3^2$	$2x_1x_3+x_2^2$	Indécomposable, un rebroussement.	″	Un point commun.	0
IV...	x_1^2	x_2^2	$x_3^2+2x_1x_2$	Droite (a), conique.	Sécantes.	″	2
V....	x_1^2	x_2^2	x_3^2	Trois droites (a).	Non concourantes.	″	3
VI...	x_1^2	x_2^2	$2x_1x_3+2x_2x_3$	Droite double (a). Droite simple (c).	″	Deux points communs confondus.	2
VII..	x_1^2	x_2^2	$2x_1x_3$	Droite double (a). Droite simple (b).	″	Trois points communs confondus.	2
VIII.	$2x_1x_2$	x_3^2	$x_1^2+x_3^2$	Droite (b), conique.	Tangentes.	Deux points communs.	1
IX...	$2x_1x_2$	x_2^2	$2x_1x_3$	Droite double (b). Droite simple (c).	″	Deux points communs.	1
X....	$2x_1x_2$	x_2^2	$2x_2x_3+x_1^2$	Droite triple (b).	″	Deux points communs confondus.	1
XI...	$2x_1x_2$	x_2^2	$2x_2x_3$	Nul.	″	Une droite commune	1
XII..	$2x_1x_2$	$2x_2x_3$	$2x_1x_3+x_2^2$	Droite (c), conique.	Sécantes.	Deux points communs.	0
XIII.	$2x_1x_2$	$2x_2x_3$	$2x_1x_3$	Trois droites (c).	Non concourantes.	Trois points communs.	0

Elle se rattache d'ailleurs étroitement à cet autre problème du Calcul Intégral ; *déterminer les divers types d'équations linéaires dont les intégrales sont algébriques*. [....] Soit *G* l'un des groupes qu'il s'agit de construire. On peut répartir ses substitutions en classes, en groupant ensemble celles qui seraient réduites simultanément à la forme canonique par un même changement linéaire opéré sur les variables.
[Jordan, 1878, 89].

Par exemple, pour les équations différentielles du second ordre, donc le groupe des substitutions linéaires à deux variables, Jordan classe les substitutions en trois "espèces" selon leurs forme canoniques et la multiplicité des racines caractéristiques :

1° 2 racines distinctes.
2° 1 racine double et la forme $|x,y\ ax, ay)|$
3° 1 racine double et la forme $|x,y\ ax, a(y+\lambda x)|$

Jordan démontre alors que si le groupe est d'ordre fini, aucune substitution n'est de 3e espèce ([12]) :

Soit *f* la fonction définie sur

$$S = |u_1, u_2\ \alpha u_1+\beta u_2, \gamma u_1+\delta u_2|$$

une substitution linéaire à deux variables. Elle multipliera la fonction linéaire mu_1+nu_2 par une facteur constant *s*, si l'on a identiquement [...] $\Delta=0$. L'équation $\Delta=0$ étant du second degré, aura en général deux racines distinctes *a* et *v*. Il existera donc deux fonctions linéaires *x, y* des variables primitives [....] que *S* multiplie respectivement par *a* et *b*. En les prenant pour variables, *S* sera réduite à la forme canonique

$$|x, y\ \ ax, by|\ \text{où } a\ ý\ b.$$

Nous dirons dans ce cas que *S* est une substitution de *première espèce.*
Si les deux racines de l'équation en *S* se confondent en une seule, *a*, soient *x* une fonction linéaire que *S* multiplie par *a*, *y* une autre fonction linéaire. Prenant *x* et *y* pour variables, *S* sera réduite à la forme

$$|x, y\ \ ax, cx+dy|.$$

[...] *S* prendra la forme

$$|x, y\ \ ax, a(y+\lambda x)|.$$

Nous dirons que S est de *seconde espèce* si $\lambda=0$; de *troisième espèce*, si λ ý 0.

---

[12] En termes contemporains, les endomorphismes d'ordre finis sont diagonalisables. Ce théorème sera très cité dans les années 1880-1890, notamment par Eduard Weyr (partie II).

Camille Jordan proved in 1878' Crelle that every finite group of linear transformations, say *G*, has an abelian normal subgroup *H* such that the index *I* does not exceed a bound depending only on the number of variables. The subgroup *H* can be diagonalized, that is, its matrices consist of blocks, each block being a multiple λI of a unit matrix *I*. Explicit limits for the index *I* were given by Bieberbach (1911), Frobenius (1911), Blichtfeldt (1916) and Speiser (1927). In 1898, E.H. Moore proved a theorem of fundamental importance : every finite group of linear transformations with complex coefficientsleaves invariant a positive Hermitian form

$$\Sigma a_{ik}\bar{x}_i x_k$$

The same result has already been obtained in 1896 by A. Loewy.
[Van der Waerden, 1977, 158]

ENCART 6.

La classification des sous groupes finis du groupe linéaire et l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires par Jordan en 1878.

[Jordan, 1878, 89] :

M. Fuchs s'est proposé (ce Journal, T. 81) de déterminer les divers types d'équations linéaires du second ordre

$$\frac{d^2u}{dz^2} + f(z)\frac{du}{dz} + f_1(z)u = 0$$

dont l'intégrale générale est algébrique.

A cet effet, après avoir transformé l'équation proposée en une autre ne contenant plus la dérivée $\frac{du}{dz}$, il établit, par des considérations fondées sur la théorie des covariants, qu'en désignant par *x,y*, deux intégrales particulières de l'équation transformée , il existe une fonction entière et homogène φ(*x,y*), d'un degré non supérieur à 12, qui soit racine d'une équation binôme ayant pour second membre une fonction rationnelle de la variable.

M. Klein a confirmé et précisé ces résultats (Sitz. der physikalisch – medicinischen Societät zu Erlangen, 26 juin 1876) en s'appuyant sur la détermination qu'il avait faite précédemment (Math . Ann. IX) des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire à deux variables.

Il est aisé en effet de rendre compte de l'identité des deux problèmes :

Soit

$$\frac{d^mu}{dz^m} + f_1(z)\frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}} + ... + f_m(z)u = 0$$

une équation différentielle linéaire ayant pour coefficients des fonctions monodromes de z.

elle a un nombre infini de fonctions intégrales, chacune d'elles étant déterminée par les valeurs que prennent la fonction et ses *m-1 p*remières dérivées pour la valeur initiale de *z*. Ces intégrales sont toutes des fonctions linéaires de m d'entre elles, $u_1, u_2,\ldots,u_m$.

Supposons que la variable *z* décrive un contour fermé arbitraire. Lorsqu'elle reviendra au point de départ, les fonctions $u_1, u_2,\ldots$ pourront redevenir les mêmes, ou plus généralement, auront été transformées en $\alpha_1u_1+\beta_1u_2+\ldots.$, $\alpha_2u_1+\beta_2u_2 +\ldots.$, $\alpha_1, \beta_1,\ldots\alpha_2,\beta_2,\ldots$ étant des constantes dont le déterminant est Ã0.

L'ensemble des substitutions

$$|u_1, u_2,\ldots.\ \alpha_1u_1 + \beta_1u_2+\ldots., \alpha_2u_2+\beta_2u_2 +\ldots., \ldots|$$

correspondantes aux divers contours fermés que l'on peut tracer dans le plan, formera le *groupe* de l'équation différentielle proposée.

Si les diverses intégrales $u_1, u_2,\ldots$ satisfont à des équations algébriques ayant pour coefficients des fonctions monodrones de *z*, une intégrale quelconque

$$c_1u_1+c_2u_2+\ldots$$

n'aura qu'un nombre fini de valeurs distinctes ; et par suite le groupe de l'équation ne contiendra qu'un nombre fini de substitutions.

Il y a donc identité entre le deux questions suivantes :

1° Enumérer les divers types d'équations différentielles linéaires d'ordre *m* dont toutes les intégrales soient algébriques.

2° Construire les divers groupes d'ordre fini que contient le groupe linéaire à *m* variables.

Soit maintenant G un groupe formé d'un nombre limité de substitutions linéaires. Il ne peut contenir aucune substitution S de troisième espèce. Car il contiendrait ses puissances, qui ont pour formule générale

$$S^m = |\, x\ y\ \ a^m x,\ a^m(y+m\lambda x)|$$

et sont évidemment en nombre illimité. Quant aux substitutions de première espèce, leurs puissances ont pour formule

$$S^m = |x\ \ y\ \ a^m x,\ b^m y|$$

et seront en nombre limité, lorsque a et b seront des racines de l'unité.
[Jordan, 1878, 93-84].

Par la répartition qu'elle permet des substitutions en trois espèces, la forme canonique des substitutions linéaires est l'une des méthodes essentielles employées par Jordan pour sa construction des sous groupes finis du groupe linéaire, à commencer par les 5 types d'ordre 2 [Jordan, 1878, 111] ([13]).

[13] D'autres méthodes sont essentielles, comme les théorèmes de Sylow dont les travaux sont l'objet d'une vive correspondance avec Jordan à cette époque. Une étude du mémoire de [1878] dépasse le cadre de ce travail.

ENCART 7.

Jordan, "Sur l'équivalence des formes", [1880a].

[1880a, 1427] :

Considérons, avec M. Hermite, les formes de l'espèce suivante :

$$F = \text{norme}\ (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n) + \ldots . + \text{norme}\ (a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n)$$

où les variables *x* et les coefficients *a* sont des quantités complexes, de la forme $\alpha + i\beta$. Nous pourrons énoncer les propositions suivantes:

I. Toute forme F *de déterminant* ý 0 *est équivalente à une réduite de même espèce, où les modules des coefficients sont limités en fonction de la norme* Δ *du déterminant de* F *et du minimum* μ, *de cette forme,*

IL *Les formes* F *à coefficients entiers et de même déterminant se répartissent en un nombre limité de classes.* .

III. *Les substitutions linéaires à coefficients entiers qui transforment une réduite en elle-même ou en une autre réduite ont les modules de leurs coefficients limités. La limite ne dépend que du nombre des variables,*

Ces résultats permettent d'étendre aux formes de degré > *2* et à coefficients complexes les méthodes employées par M. Hermite dans ses recherches sur l'équivalence des formes quadratiques. Nous établissons en effet les théorèmes suivants :

IV. *Toute forme* F *à coefficients entiers est équivalente à une réduite dont les coefficients ont leurs modules limités en fonction entière des modules de invariants de* F. (Si F *avait des covariants identiquement nuls, ce qui n'arrivera certainement que dans certains cas particuliers, la limite dépendrait également des entiers numériques qui figurent dans l'expression des coefficients de ces covariants}.*

V. Les *formes à coefficients entiers algébriquement équivalentes à une forme donnée quelconque se distribuent en un nombre limité de classes.*

VI. *Soient* F, *G deux formes à coefficients entiers, à n variables et de degré m. Le nombre des substitutions distinctes qui transforment^ en* G *sera limité en fonction de m et de n, et tes modules de leurs coefficients seront limités en fonction des mêmes quantités et des modules des coefficients de* F *et de* G.

On pourra donc, par un nombre limité d'essais, reconnaître si *F* et *G* sont équivalentes et déterminer toutes les substitutions à coefficients entiers qui transforment *F* en *G.*

Les théorèmes IV, V, VI peuvent se trouver en défaut dans les deux cas suivants : 1° si les formes considérées sont quadratiques ; 2° si leur discriminant est nul. Dans ces cas exceptionnels, une nouvelle étude est nécessaire. M. Poincaré, dont les travaux sur ce sujet concordent avec les nôtres, vient d'effectuer cette discussion pour les formes cubiques ternaires *(Comptes rendus,* séance du 7 juin 1880).

3. La réduction comme méthode générale de la théorie des formes (1878-1888).

Une autre direction de recherche programmée dès 1874 concerne la théorie des formes qui fait l'objet de la polémique avec Kronecker. Des questions relatives à l'"équivalence des formes algébriques" sont développées par une série de mémoires publiés par Jordan entre 1879 et 1882, puis en 1888. Ces publications témoignent de l'évolution considérable des connaissances arithmétiques de Jordan. Alors qu'à l'occasion de la controverse avec Kronecker, Jordan n'employait pas encore les notions d'équivalence ou de congruence des formes, dans la note de 1879 intitulée "Sur l'équivalence des formes algébriques", Jordan maîtrise parfaitement les travaux d'Hermite sur les formes binaires et les récents résultats de Korkine et Zolotarelf [1873] sur les maximums et minimums des ensembles de formes quadratiques ([14]). Jordan se propose de généraliser les résultats de ses prédécesseurs aux formes de degré supérieur à 2(encart 7) ([15]) :

> Deux formes $F\ (x_1,\ ...,\ x_n)$ et $\Phi(x_1,\ ...,\ x_n)$ à n variables et de degré m, à coefficients réels ou complexes, sont dites *algébriquement équivalentes* si F peut être transformé en Φ par une substitution linéaire de déterminant 1.
>
> L'équivalence sera *arithmétique* et les deux formes appartiendront à la même *classe* si les coefficients de la substitution sont des entiers réels ou complexes.
>
> THEOREME. *Les formes à coefficients entiers (réels ou complexes) algébriquement équivalentes à une même forme* F, *de discriminant* ý 0, *ne forment qu'un nombre limité de classes.*
>
> Cette proposition a été établie par Lagrange et Gauss pour les formes quadratiques binaires et ternaires. Dans ses profondes recherches sur la théorie des nombres, M. Hermite a étendu ce résultat à toutes les formes quadratiques, puis à toutes les formes binaires, et plus généralement à celles qui sont décomposables en facteurs linéaires. Enfin, MM. Korkine et Zolotareff en ont

[14] [Korkine et Zolotarev, 1873, 366] :

> Ne considérant d'abord que les formes quadratiques positives et faisant abstraction de la valeur zéro qu'elles obtiennent quand toutes les variables s'annulent, on voit facilement que de toutes les autres valeurs d'une telle forme il existe la plus petite. Ce minimum est complètement déterminé lorsque les coefficients de la forme sont donnés ; par conséquent il en est une fonction. Considérons l'ensemble de toutes les formes positives à n variables de déterminant $-D$. On les obtient toutes en faisant varier d'une manière continue les coefficients de l'une d'elles. Le minimum de cette forme, comme fonctions des coefficients variera aussi d'une manière continue, et reviendra aux mêmes valeurs pour toutes les formes équivalentes. Il est évident, qu'il peut avoir des valeurs aussi petites qu'on voudra. Il atteindra en variant un ou plusieurs maxima, qui correspondent aux formes non équivalentes et dont le nombre dépend essentiellement de n.

[15] Pour une description de la méthode de Jordan dans le cadre des mathématiques des années 1960 et de la théorie des matrices unimodulaires, voir [Dieudonné, 1962, XV] :

> Dans l'espace de toutes les formes de degré m à n variables et à coefficients complexes, il considère une orbite Σ pour le groupe $SL(n,C)$; le théorème principal affirme que dans Σ, le nombre des classes de formes à coefficients entiers, équivalentes par $SL(n,Z(i))$, est fini, pourvu que $m > 2$ et que le discriminant des formes de Σ ne soit pas nul.

Le théorème VI se démontre par l'emploi de la forme canonique et s'applique à la théorie des substitutions linéaires [Jordan, 1880b, 133] :

> Nous pouvons donc énoncer ce théorème :
>
> THEOREME. – *Les substitutions à coefficients entiers et de déterminant 1 qui sont susceptibles de transformer une forme réduite r en une autre forme réduite ont les modules de tous les coefficients limités. La limite ne dépend que du nombre des variables.*
>
> On voit par là qu'on n'aura qu'un nombre limité d'essais à fait pour constater l'équivalence de deux formes réduites et trouver les transformations de l'une dans l'autre.
>
> [...]
>
> La théorie qui précède est immédiatement applicable à l'étude des substitutions linéaires.
>
> Soit en effet
>
> $$S = \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ .. & \ldots \\ x_n & a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{vmatrix}$$
>
> une semblable substitution, et soit Δ la norme de son déterminant. Nous ferons correspondre à la substitution *S* la forme
>
> $$g = N(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n) + \ldots + N(a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n)$$
>
> [...]
>
> et, si cette forme est réduite, nous dirons que la substitution *S* est-elle-même réduite.
>
> [...]
>
> Cela posé, les modules des coefficients de *S* seront limités supérieurement en fonction de Δ et de μ_1.
>
> [....]
>
> Nous remarquerons enfin que, si *S* n'est pas réduite, onn pourra déterminer une substitution *T* à coefficients entiers et de déterminant 1 telle que *ST* soit une réduite. [....]

Le théorème VI, valable si le déterminant de la forme n'est pas nul, permet de limiter à un nombre fini le nombre d'essais nécessaires à décider de l'équivalence de deux formes algébriques [Jordan, 1880b, 143] :

> THEOREME.- Soient *F*,*G* deux formes de degré *m* à *n* variables algébriquement équivalentes et à coefficients entiers, *l* le nombre des formes à coefficients entiers algébriquement équivalentes à *G* et réduites par rapport à *G*.
>
> Toute substitution qui transforme *F* en *G* sera le produit d'une substitution analogue AP_μ, où les modules des coefficients sont limités en fonction de *l,m,n* et des modules des coefficients de *F* et de *G*, par une substitution $T_{\mu-1} \ldots T_1$ à coefficients entiers, résultant de la combinaison des substitutions infinitésimales qui transforment *G* en elle-même.
>
> Cette dernière substitution peut elle-même être décomposée en un produit de substitutions de même nature $T_{\mu-1,\ldots,}T_1$ où les modules des coefficients sont limités en fonction de *l* et de *n*.
>
> Ce théorème permet de réduire en général à un nombre limité d'opérations la recherche des substitutions à coefficients entiers qui transforment *F* en *G*.
>
> [...]
>
> La méthode précédente se simplifie lorsqu'il n'existe aucune substitution infinitésimale qui transforme *G* en elle-même.
>
> Dans ce cas, chacune des suites de substitutions qui transforment *F* en *G* se réduit à une seule substitution *A*. Le nombre des substitutions qui transforment *F* en *G* sera dont limité. Les modules de leurs coefficients sont d'ailleurs limités en fonction entière des modules des coefficients de *F* et de *G*. Une série limitée d'essais suffira donc pour trouver celles de ces substitutions dont les coefficients seraient entiers.

> donné récemment, pour le cas des formes quadratiques, une démonstration nouvelle et d'une simplicité remarquable.
> Il reste à démontrer ce théorème pour les formes de degré > 2 et à n variables.
> [Jordan, 1879, 906].

La méthode d'Hermite à laquelle fait référence Jordan consiste, étant donnée une forme quelconque $\Phi(x_1,\ldots,x_n) = F(a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n, \ldots, a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n)$ algébriquement équivalente à F, à lui associer une "forme bilinéaire de déterminant 1 " $\varphi = \Sigma_k (a_{k1}x_{10}+\ldots+a_{kn}x_n)(a'_{k1}x_1+\ldots+a'_{kn}x_n)$ où les quantités a' sont les conjuguées des quantités a." ([16]). La méthode d'Hermite, et ses généralisations par Korkine et Zolotarelf puis Jordan, consiste à associer à chaque classe d'équivalence une forme réduite permettant de résoudre les questions relative à l'équivalence des formes. La majoration et la minoration des coefficients des formes réduites permettent de conclure sur la finitude du nombre de classes:

> $$\psi = \mu_1 (x_1 + \varepsilon_{12}x_2+\ldots+\varepsilon_{1n}x_n(x'_1+\varepsilon'_{12}x_2+\ldots\varepsilon'_{1n}x_n) + \mu_2(x_2+\ldots+\varepsilon_{2n}x_n)(x'_2+\ldots+\varepsilon'_{2n}x'_n) + \ldots\mu_n x_n x_n$$
> où les quantités ε et leurs conjuguées ε' ont leurs normes non supérieures à $\frac{1}{2}$,
> tandis que $\mu_1, \mu_2,\ldots,\mu_n$ sont réels et satisfont aux relations
> $$\mu_{k+1} \text{ Ã } \frac{1}{2}\mu_k,\ \mu_1\ldots,\mu_n = 1$$
> [Jordan, 1879, 906].

La généralisation des théorèmes de finitude du nombre de classes d'Hermite aux formes de degrés supérieurs à deux mobilise les travaux de Jordan et les premières recherches de Poincaré en 1880-1882 :

> Considérons, avec M. Hermite, les formes de l'espèce suivante:
> $$F = \text{norme}\ (a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n) + \ldots + \text{norme}\ (a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n)$$
> où les variables x et les coefficients a sont des quantités complexes, de la forme $\alpha + i\beta$. [Jordan, 1880,a, 1422].

La reconnaissance de l'influence d'Hermite manifeste la postérité d'une méthode consistant à employer, en théorie des nombres, des raisonnements de majorations et minorations. Cette méthode est indissociable d'une idée plus

[16] A la fin du siècle, on dira que φ est une forme hermitienne. Du point de vue mathématique de 1962, le problème de Jordan revient au suivant [Dieudonné, 1962, XV] :

> Jordan commence à mettre en lumière que la méthode d'Hermite se propose en fait d'étudier ce que nous appelons maintenant l'espace homogène $GL(n,C)/SL(n,Z(i))$ autrement dit les classes de matrices inversibles qui se déduisent les unes des autres par multiplication à droite par une matrice unimodulaire à cœfficients entiers complexes ; pour cela Hermite associe à une matrice S à coefficients complexes la matrice hermitienne positive $U = S^*S$, et à la multiplication $S \leftrightarrow ST$ par une matrice unimodulaire à coefficients entiers correspond la transformation $U \leftrightarrow T^*UT$. A la classe de toutes les matrices T^*UT ainsi obtenues, Hermite associe deux invariants : leur déterminant commun Δ et la plus petite valeur μ_1 prise par la forme hermitienne correspondante aux points distincts de l'origine et ayant leurs coordonnées entières. La "grandeur" de la classe est alors en quelque sorte "mesurée" par Δ et $1/\mu_1$, et le résultat fondamental d'Hermite est qu'il y a toujours une matrice de la classe (dite réduite) dont les éléments sont bornés en valeurs absolue par des nombres ne dépendant que de Δ, μ_1 et l'ordre n des matrices considérées.

La forme canonique intervient pour démontrer que c'est bien ce cas de figure qui se produit – l'absence de substitutions infinitésimale qui transforme *G* en elle-même – lorsque le discriminant de *G* n'est pas nul et le degré *m* de la forme est supposé différent de 2. Jordan démontre d'abord que si le discriminant n'est pas nul, il n'existe pas de substitution infinitésimale *S* qui transforme *G* en elle-même [1880b , 145-147]. Réciproquement, Jordan démontre que si il existe des substitutions infinitésimales qui transforment *G* en elle-même, le discriminant de G est nécessairement nul [Jordan, 1880b, 145-148] ([1]):

> Supposons, en effet, que *G* soit transformée en elle-même par une substitution infinitésimale
>
> $$S = \begin{Bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ .. & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Bmatrix}.$$
>
> [...] soient *S'* et *G'* les transformés de la substitution *S* et de la forme *G* par une substitution linéaire quelconque *T*. Puisque, par hypothèse, *S* transforme *G* en elle-même, *S'* transformera évidemment *G'* en elle-même, et, pour démontrer que le discriminant de *G* ne peut être différent de zéro, il suffit évidemment de montrer que le discriminant de *G'*, qui lui est égal, à une puissance près du déterminant de *T*, est lui-même nécessairement nul.
>
> On peut d'ailleurs profiter de l'indétermination de la substitution *T* pour ramener *S'* à la forme canonique. Si les racines $s_1,\dots,s_n$ étaient toutes distinctes, cette forme canonique serait, comme on sait, la suivante :
>
> $$|x_1, x_2, \dots, x_n\ s_1x_1, s_2x_2, \dots, s_nx_n|.$$
>
> Mais, s'il y a des racines égales, la forme canonique pourra être un peu plus compliquée. son expression générale sera de l'espèce suivante :
>
> $$\begin{vmatrix} x_1, x_2, \dots, x_\alpha & s_1(x_1+x_2), s_1(x_2+x_3), \dots, s_1x_\alpha \\ x_{\alpha+1}, \dots, x_\beta & s_{\alpha+1}(x_{\alpha+1}+x_{\alpha+2}), \dots, s_{\alpha+1}x_\beta \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}$$
>
> (les racines s_1, $s_{\alpha+1}$, n'étant pas nécessairement inégales).
>
> Nous supposerons, pour fixer les idées et simplifier les écritures, que l'on a simplement

[1] C'est-à-dire, du point de vue des matrices unimodulaires [Dieudonné, 1962, XV] :

> Le même lemme permet ensuite à Jordan de montrer que si une forme *G* est degré $m > 2$ et a son discriminant non nul, le sous groupe de *GL(n,C)* qui laisse invariant *G* est fini ; tout revient, à prouver que ce groupe est discret ; si $s_1,..s_n$ sont les racines de l'équation caractéristique d'une matrice de groupe supposé arbitrairement voisine de l'identité, le lemme montre que si les s_i ne sont pas tous égaux à 1, alors on…contredisant l'hypothèse que le discriminant de *G* est non nul
>
> Les formes canoniques que considère Jordan pour les matrices voisines de l'identité ne sont d'ailleurs pas tout à fait correctes ; par exemple, au lieu de $s_1(x_1+x_2)$ (s_1 voisin de 1) dans la transformation *S'* de la page 458, il faut $s_1(x_1+\varepsilon x_2)$, ε étant très voisin de 0 ; mais cela ne change rien aux raisonnements qui suivent.
>
> Bien entendu ce dernier résultat n'est plus valable lorsque le discriminant de G est nul (comme le montre par exemple la forme $x_1x_2\dots x_n$) Le théorème sur la finitude des classes de formes équivalentes peut aussi se trouver en défaut, comme le montrera aussitôt après le Mémoire de Jordan H. Poincaré, en étudiant en détail le cas des formes cubiques ternaires ($m = n = 3$). Par contre, l'autre cas d'exception du théorème de finitude, celui des formes quadratiques, n'est qu'apparent, et Jordan devait y revenir peu après ans (103) : il montre qu'effectivement le procédé d'Hermite peut alors donner une infinité de formes réduites se répartissant cependant encore en un nombre fini de classes d'équivalence. Son procédé est assez complique et il ne l'expose en détail que sur un cas particulier ; il serait sans doute assez pénible de lui donner une forme général, mais en fait Minkowski découvrit quelques années plus tard une méthode plus élégante conduisant au même résultat et susceptible d'extension aux corps de nombres algébriques

générale, elle-même attribuée à Hermite, consistant à caractériser l'équivalence arithmétique ou algébrique des formes par l'emploi de formes types ou *formes réduites* ([17]), souvent définies comme minimisant une certaine fonction numérique. La volonté de caractériser l'équivalence des formes par une forme canonique était déjà au cœur des arguments opposés par Jordan à Kronecker en 1874. Elle s'allie désormais à une idée plus générale renvoyant à une méthode réduction dont la forme canonique des substitutions se présente comme cas particulier. Parmi les théorèmes de finitude énoncés par Jordan en 1880 (encart 8), l'énoncé numéro VI cité ci-après nécessite l'emploi de la forme canonique des substitutions ([18]) :

> VI. Soient F, G deux formes à coefficients entiers, à n variables et de degré m. Le nombre des substitutions distinctes qui transforment en G sera limité en fonction de m et de n, et les modules de leurs coefficients seront limités en fonction des mêmes quantités et des modules des coefficients de F et de G.
> [Jordan, 1880,a, 1422].

Cet énoncé n'est pas valable pour le cas des formes quadratiques de discriminant nul. Ce cas "exceptionnel" est abordé par un mémoire de Poincaré de la même année sur les formes cubiques ternaires [Poincaré, 1880a].

---

[17] Hermite [1854¸318] définit une forme type comme une forme font les coefficients sont des invariants. Formes réduites et invariants sont deux notions qui naissent ensemble dans les années 180 (chapitre I).

[18] C'est-à-dire que si deux formes sont réduites, il n'y a qu'un nombre fini de matrices unimodulaires à coefficients entiers qui transforment l'une en l'autre.

$$S' = \begin{vmatrix} x_1, x_2, \ldots & s_1\,(x_1 + x_2), s_1 x_2 \\ x_3 & s_2 x_3 \\ .. & \ldots \\ x_n & s_n x_n \end{vmatrix}.$$

On verra aisément que la démonstration est générale.

Soit

$$G' = \sum a_{\lambda_1 \ldots. \lambda_n} x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n}.$$

Egalons le coefficient du terme général dans cette expression et dans sa transformée

$$G'' = \sum s_1^{\lambda_1+\lambda_2} s_3^{\lambda_3} \ldots s_n^{\lambda_n} a_{\lambda_1 \ldots. \lambda_n} (x_1 + x_2)^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n};$$

La comparaison des coefficients de *G* et *G'* permet d'obtenir une équation entre les coefficients qui implique la nullité du discriminant de *G* [1880b, 149-150].

III. FORME CANONIQUE ET REPRESENTATION GEOMETRIQUE CHEZ POINCARE (1880-1886).

1. La "notion de réduite" dans les premiers travaux de Poincaré sur les formes.

Les premières publications mathématiques de Poincaré concernent la théorie des formes. A un premier mémoire abordant les formes quadratiques par l'arithmétique des réseaux des fonctions elliptiques [Poincaré, 1879], succèdent les travaux sur les formes cubiques menés dans les années 1880 en relation étroite avec les recherches de Jordan. Poincaré développe notamment le cas "exceptionnel" laissé de côté par l'approche très générale de Jordan [1880], et démontre notamment que, selon la famille de cubiques considérée, le nombre de classes peut être infini, ainsi que le nombre de réduites dans chaque classe (encart 8). Encouragées par Hermite [Poincaré, 1880b, 844], les recherches de Poincaré sur les cubiques se poursuivent et sont essentielles pour le développement à venir de la théorie des fonctions fuchsiennes. Elles manifestent une influence directe des travaux de Jordan, notamment par le rôle donné à la forme canonique pour la classification des substitutions. La citation ci-dessous est extraite du résumé donné par Poincaré de ses propres travaux au sein d'une analyse autobiographique écrite en 1901 à la demande de Mittag Leffler ([19]) :

> Passons maintenant aux formes d'ordre supérieur au second. Le premier problème à résoudre est la réduction de ces formes et l'étude des conditions de leur équivalence. La solution a été trouvée par M. Hermite ; bien que le savant géomètre n'ait parlé que des formes binaires et des formes quadratiques, sa méthode s'applique, sans qu'on ait rien à y changer, à une forme tout à fait quelconque. C'est ainsi que M. Jordan, étendant à un cas très général un théorème de M. Hermite, a démontré que, toutes les fois que le discriminant n'est pas nul, toutes les formes qui ont mêmes invariants algébriques se répartissent en un nombre fini de classes. J'ai moi-même généralisé le théorème de M. Jordan, en montrant qu'il subsiste, pourvu que certains invariants ne soient pas tous nuls à la fois.
> J'ai cherché ensuite à appliquer la méthode générale aux formes cubiques ternaires que j'avais déjà étudiées au point de vue algébrique dans un Mémoire précédent. Je suis arrivé à trouver les limites supérieures des coefficients d'une réduite dont les invariants sont donnés, pourvu que le discriminant ne soit pas nul. Le nombre des classes est alors limité et, dans chaque classe, il n'y a qu'une réduite.
> [Poincaré, 1921, 9].

[19] Cette analyse reprend en grande partie celle que H. Poincaré avait faite en 1884, à l'appui de sa candidature à l'Académie des Sciences.

ENCART 8.

La non finitude des classes d'équivalence et des réduites dans les cas "exceptionnels" étudiés par Poincaré.

[Poincaré, 1880] :

M. Jordan a démontré *(Comptes rendus, 5* mai 1879) que, si le discriminant n'est pas nul, il ne peut dériver d'une même canonique qu'un nombre fini de réduites à coefficients entiers. Je donne une démonstration nouvelle de ce théorème, et, l'appliquant aux formes des deux premières familles, je limite les coefficients de ces réduites en fonctions des invariants *S* et *T*.

Le nombre des classes dérivées de chaque canonique est fini dans la première et la deuxième famille (et aussi dans la cinquième famille, toutes les fois que *T* est négatif ou que 4*S* n'est pas puissance quatrième parfaite). Au contraire, le nombre des classes dérivées de chaque canonique est infini dans la troisième, la quatrième et la sixième famille (et aussi dans la cinquième famille, toutes les fois que *T* est positif et 4*S* puissance quatrième parfaite). Mais alors les classes se répartissent en genres, les réduites d'un même genre se déduisant aisément l'une de l'autre, et le nombre de ces genres est fini dans la troisième et la cinquième famille, infini dans la quatrième et la sixième.

J'étudie ensuite la distribution des réduites dans chaque classe. Les classes des trois premières familles contiennent une réduite et une seule en général. Celles de la quatrième famille ne contiennent qu'une réduite principale et un nombre fini de réduites secondaires ; celles de la cinquième famille contiennent un nombre fini de réduites principales ; enfin celles de la sixième famille contiennent un nombre infini de réduites principales et secondaires.

Quand une classe contient plusieurs réduites, il peut se faire qu'elles se disposent en une chaîne où chacune d'elles est contiguë à celle qui la précède et à celle qui -la suit. Si le nombre des réduites est infini, cette chaîne est indéfinie, et on peut la suivre indéfiniment sans retomber sur la même réduite (c'est ce qui arrive pour les réduites principales de la sixième famille). Si le nombre des réduites est fini, il peut arriver que la chaîne reste indéfinie et que les réduites s'y reproduisent périodiquement, comme dans le cas des formes quadratiques binaires (ce qui arrive pour la cinquième famille, toutes les fois que *T* est négatif ou que *4S* n'est pas puissance quatrième parfaite, et aussi pour certaines classes de cette même famille, quand *T* est positif et *4S* puissance quatrième parfaite). Il peut se faire aussi que la chaîne soit limitée (ce qui arrive pour les réduites secondaires de la quatrième famille et pour les réduites principales de certaines classes de la cinquième famille, quand *T* est positif et *S* puissance quatrième parfaite). Enfin, il peut arriver que les réduites, au lieu de former une chaîne, forment un réseau, comme dans le cas des formes quadratiques ternaires indéfinies (ce qui arrive pour les réduites secondaires de la sixième famille).

La méthode développée dans le mémoire intitulé "Sur les formes cubiques ternaires" est, comme celle de Jordan, basée sur la "notion de réduite" attribuée à Hermite et qu'il s'agit de généraliser aux formes cubiques ternaires :

> L'étude arithmétique des formes homogènes est une des questions les plus intéressantes de la théorie des nombres et une de celles qui ont le plus occupé les géomètres. Les divers problèmes qui se rattachent à la théorie des formes quadratiques binaires ont été résolus depuis longtemps, grâce à la notion de réduite [...]. La notion de réduite s'étend sans peine aux formes quadratiques définies par un nombre quelconque de variables.
> [...] Généraliser une idée aussi utile, trouver des formes jouant, dans le cas général, le même rôle que les réduites remplissent dans le cas des formes quadratiques définies, tel est le problème qui se pose naturellement et que M. Hermite a résolu de la façon la plus élégante dans divers Mémoires insérés dans les Tomes 44 et 47 du *Journal de Crelle* (1850 et 1853).
> M. Hermite s'est bornée à l'étude des formes quadratiques définies ou indéfinies et des formes décomposables en facteurs linéaires ; mais sa méthode peut s'étendre sans difficulté au cas le plus général. [...]. Les résultats auxquels je suis arrivé s'appliquent à une forme quelconque ; mais, ne voulant pas sacrifier la clarté à la généralité, je me suis restreint aux formes qui sont les plus simples parmi celles que M. Hermite avait laissé de côté. [...] Les plus simples de toutes les formes, après les formes quadratiques et les formes décomposables en facteurs linéaires, sont les formes cubiques ternaires.
> [Poincaré, 1881d, 28].

Le mémoire de Poincaré est divisé en deux parties traitant respectivement de l'équivalence algébrique [1881d] et arithmétique [1882a]. Pour l'étude de l'équivalence algébrique, Poincaré reprend, sans la citer, la méthode donnée par Jordan pour la classification des substitutions linéaires selon leurs formes canoniques. A chaque cubique est associée le groupe des "substitutions semblables" formé des substitutions linéaires qui la reproduisent. Le problème de la classification des cubiques se trouve ramené à celui de la classification des substitutions linéaires: aux quatre "catégories" de substitutions correspondent sept "familles" de cubiques. Les différentes classes sont représentées par une "forme canonique" ou "forme la plus simple du type considéré" [Poincaré, 1881, 31], notion qui désigne alors indifféremment la forme de Jordan des substitutions ou la forme réduite au sens plus général de la théorie des formes. Mais si la forme canonique de Jordan donne une méthode de classification algébrique des formes, les cubiques sont également susceptibles d'une interprétation géométrique (encart 9) ([20]). Si x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées d'un point du plan, la cubique $F = 0$ représente une surface C et une substitution semblable de F s'interprète comme une "relation homologique", ou homographie, entre deux points de la surface [Poincaré, 1881, 32]. Poincaré, à la suite des travaux de Hesse, Clebsch et Klein, propose

[20] Les interprétations géométriques marquent les débuts de l'œuvre scientifique de Poincaré dans les années 1878-1881, elles se manifestent notamment pour l'étude des courbes géométriques définies par des équations différentielles. Christian Gilain donne une analyse détaillée de la conception pluraliste de Poincaré dans son histoire de la théorie qualitative des équations différentielles de Poincaré [Gilain, 1991, 240] .

ENCART 9.

Les types de formes canoniques et leurs interprétations géométriques chez Poincaré.

[Poincaré, 1881, 36]

Les transformations ternaires (canoniques) de la troisième catégorie se classent en deux types :

$$\textit{Type A} \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix}, \quad \textit{Type B} \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix}$$

[...]

A ces deux types correspondent deux autre types de la seconde catégorie :

Type A' $(\alpha, \lambda_1\alpha, \beta)$, Type B' $(\alpha, \lambda_1\alpha, \lambda_2\alpha)$

λ_1 et λ_2 étant des racines $m^{ièmes}$ de l'unité.

On trouve de même pour les transformations quaternaires de la troisième catégorie, quatre types :

Type C $(\alpha, \alpha, \beta, \gamma)$, Type D $(\alpha, \alpha, \beta, \beta)$,

Type E $(\alpha, \alpha, \alpha, \beta)$, Type F $(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$,

auxquels correspondent, pour la deuxième catégorie, quatre autre types :

Type C' $(\alpha, \lambda_1\alpha, \beta, \gamma)$ Type D' $(\alpha, \lambda_1\alpha, \beta, \lambda_2 \beta)$

Type E' $(\alpha, \lambda_1\alpha, \lambda_2\alpha, \beta)$ Type F' $(\alpha, \lambda_1\alpha, \lambda_2\alpha, \lambda_3\alpha)$,

λ_1, λ_2, λ_3 étant des racines $m^{ièmes}$ de l'unité.

La question qui se pose est de trouver les points, les droites et les plans reproductibles par la transformation *T* et de discuter complètement le problème, mais il suffit pour notre objet de faire cette discussion pour les transformations ternaires, les résultats devant s'étendre aisément aux transformations quaternaires.

Appelons *triangle principal* le triangle de référence auquel il faut rapporter les équations de t pour réduire cette transformation à la forme canonique

$$S = \Sigma^{-1}.T.\Sigma;$$

on verra aisément :

1° Que si *T* est de la *première ou de la deuxième catégorie*, les seuls points ou droites reproductibles sont les sommets et les côtés du triangle principal.

2° Que si *T* est de la *troisième catégorie et du type A*, les points reproductibles sot le sommet $x_1 = x_2 = 0$, et les points du côté $x_3 = 0$, pendant que les droites reproductibles sont la droite $x_3 = 0$ et les droites qui passent par le sommet $x_1 = x_2 = 0$;

3° Que si *T* est de la *troisième catégorie et du type B*, tous les points et toutes les droites sont reproductibles.

une interprétation géométrique de la classification de cubiques et, par conséquent, des substitutions linéaires ([21]). A la classification algébrique de Jordan par les différents types de formes canoniques vient se superposer une classification géométrique, les deux représentations venant, de manière indissociable, composer la notion de forme canonique chez Poincaré ([22]). Poincaré démontre que si S est de première, deuxième ou troisième catégorie, on peut la transformer en une "transformation canonique". Par "forme canonique" Poincaré désigne les transformations de la forme

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix} \text{ ([23]).}$$

A chaque type de forme canonique, par exemple le type

$$A = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix}$$

$$\text{ou } B = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix},$$

est associée une interprétation géométrique :

[21] Au sujet de la géométrie de Clebsch, Hesse et Klein voir le paragraphe consacré aux travaux d'Autonne dans le chapitre 9. La thèse de doctorat de Klein [1868] porte sur une classification des homographies à l'aide du théorème des diviseurs élémentaires de Weierstrass. Voir également les travaux de Segre et Killing commentés à la partie II.
Que, contrairement à tous les autres travaux de la fin du XIX^{e} siècle, la classification de Poincaré ne se base pas sur les diviseurs élémentaires mais sur la forme de Jordan et que cette classification n'ait pas été reprise par des travaux postérieurs comme ceux de Segre, est un élément supplémentaire qui montre la relative indépendance des réseaux de textes étudiés dans cette thèse.

[22] Voir en particulier l'importance de la représentation géométrique dans la généralisation par Poincaré du théorème de Jordan de finitude des classes [Poincaré, 1882a].

[23] Le vocabulaire de Poincaré sur ces questions n'est pas toujours stable. La plupart du temps, Poincaré réserve l'expression forme canonique aux formes *diagonales*. Pourtant, dans le contexte des fonctions fuchsiennes, en 1884 Poincaré définit les formes canoniques suivantes :

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix};$$

Le fait que les formes de troisième catégorie soient réductibles à une forme diagonale est un théorème démontré par Jordan en 1878 mais, si Poincaré cite à plusieurs reprises le mémoire de Jordan en question, il n'attribue pas à Jordan la notion de forme canonique elle même.

L'articulation par la forme canonique de Poincaré
d'une classification géométrique et algébrique

Classification algébrique.	Classification géométrique.

Formes de 1re, 2e et 3e catégories.

[Poincaré, 1880a, 1337] :

Je classe d'abord les transformations linéaires en quatre catégories.

A l'égard de la substitution linéaire

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = \alpha_1\xi_1 + \beta_1\xi_2 + \gamma_1\xi_3 \\ x_2 = \alpha_2\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \gamma_2\xi_3 \\ x_3 = \alpha_3\xi_1 + \beta_3\xi_2 + \gamma_3\xi_3 \end{cases}$$

J'envisage l'équation en S

$$(2)\quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} - S & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_{22} - S & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_{11} - S \end{vmatrix} = 0$$

et je dis que la transformation (1) est de la première catégorie si les racines de cette équation et les puissances entières semblables de ces racines sont toutes distinctes, de la deuxième catégorie si les racines sont distinctes sans que les puissances semblables des racines le soient. Si les racines ne sont pas distinctes, la transformation sera de la troisième catégorie si elle peut être regardée comme une puissance entière d'une transformation de la deuxième catégorie, et de la quatrième catégorie dans le cas contraire.

Formes de 1re, 2e et 3e catégories.

[Poincaré, 1881, 35] :

Supposons que l'on se propose de rechercher les plans reproductibles par la transformation *T*.

Soit $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$

l'équation d'un tel plan ; [...] Il est clair que λ doit satisfaire à l'équation (3) et que, réciproquement [...] ces équations donneront pour les u au moins un système de valeurs et définissent par conséquent au moins un plan reproductible par la transformation *F*.

Supposons que *T* soit de la première ou de la deuxième catégorie, c'est-à-dire que l'équation (3) ait quatre racines distinctes, λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4. Il y a alors quatre plans reproductibles par *T*.

Imaginons que l'on fasse faire un changement de coordonnées Σ en prenant pour nouveau tétraèdre de référence le tétraèdre formé par ces quatre plans. Il est clair que la transformée de T par Σ est

$$\Sigma^{-1}.T.\Sigma = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix},$$

elle est par conséquent canonique [...].

Appelons *triangle principal* le triangle de référence auquel il faut rapporter les équations de t pour réduire cette transformation à la forme canonique

$$S = \Sigma^{-1}.T.\Sigma;$$

on verra aisément :

1° Que si *T* est de la *première ou de la deuxième catégorie*, les seuls points ou droites reproductibles sont les sommets et les côtés du triangle principal.

2° Que si *T* est de la *troisième catégorie et du type A*, les points reproductibles sot le sommet $x_1 = x_2 = 0$, et les points du côté $x_3 = 0$, pendant que les droites reproductibles sont la droite $x_3 = 0$ et les droites qui passent par le sommet $x_1 = x_2 = 0$;

3° Que si *T* est de la *troisième catégorie et du type B*, tous les points et toutes les droites sont reproductibles.

Formes de 4e catégorie.

Pour les transformations de la quatrième catégorie que "l'on ne peut pas réduite à la forme canonique", il est cependant possible d'obtenir des "formes les plus simples" et leurs représentations géométriques [Poincaré, 1881, 38] :

Passons maintenant aux transformations de la *quatrième catégorie* ; on ne peut pas les réduire à la forme canonique, mais on peut choisir Σ de façon à ramener $\Sigma^{-1}T\Sigma$ à sa forme la plus simple.
Ainsi les transformations ternaires de la quatrième catégorie se partagent en deux types, dont je donne ici les formes les plus simples :

$$\text{Type } A_1 \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha \end{vmatrix}, \text{ Type } B_1 \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \delta & \alpha \end{vmatrix},$$

$$\text{Type } C_1 \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \gamma \end{vmatrix}, \text{ Type } D_1 \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \beta \end{vmatrix},$$

$$\text{Type } E_1 \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \beta & 0 \\ 0 & \delta & \varepsilon & \beta \end{vmatrix}, \text{ Type } F_1 \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & \alpha & 0 \\ \varepsilon & \varsigma & \theta & \alpha \end{vmatrix},$$

Formes de 4e catégorie.

La classification géométrique permet à Poincaré de conclure que, en général, à part un nombre fini de points, tous les points ont une infinité de transformés successifs [Poincaré, 1881, 38] :

On voit aisément que les seuls points reproductibles sont les suivants :

Type A_1	$x_2 = x_3 = 0,$	$x_1 = x_2 = 0,$	
Type B_1	$x_1 = x_2 = 0,$		
Type C_1	$x_1 = x_2 = x_3 = 0,$	$x_1 = x_3 = x_4 = 0,$	$x_2 = x_3 = x_4 = 0,$
Type D_1	$x_1 = x_2 = x_3 = 0,$	$x_1 = x_3 = x_4 = 0,$	
Type E_1	$x_1 = x_2 = x_3 = 0,$	$x_1 = x_3 = x_4 = 0,$	
Type F_1	$x_1 = x_2 = x_3 = 0,$		

2. La forme canonique et les fonctions fuchsiennes.

Les fonctions fuchsiennes, "fonctions analytiques analogues aux fonctions elliptiques et permettant d'intégrer diverses équations différentielles linéaires à coefficients algébriques" [Poincaré, 1881e, 333], sont introduites pour le grand prix de mathématiques de 1881 - "Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante" ([24]). Elles forment la base d'une théorie de l'intégration algébrique qui se développe des travaux arithmétiques de Poincaré de 1878-1881, et plus particulièrement des recherches sur l'association de groupes de substitutions linéaires aux formes cubiques :

> C'est par un problème d'Arithmétique que j'ai été conduit à m'occuper d'Algèbre. La théorie des formes arithmétiques et des substitutions linéaires à coefficients entiers appliqués à ces formes est en effet intimement liée à l'étude algébrique de ces mêmes formes et des substitutions linéaires à coefficients quelconques qu'elles peuvent subir.
> C'est ainsi que j'ai été amené, à deux reprises différentes, à rechercher quelles sont les formes algébriques qui ne sont pas altérées par une substitution linéaire donnée et quels sont les groupes continus formés par ces substitutions. Après avoir classé [1880] les substitutions linéaires en quatre catégories jouissant de propriétés différentes, j'ai cherché quelles étaient les formes cubiques ternaires et quaternaires qui sont reproduites par une substitution linéaire donnée et par un *faisceau* (groupe abélien) de substitutions, c'est-à-dire par un groupe de substitutions permutables deux à deux. J'ai résolu également le problème inverse, c'est-à-dire que j'ai déterminé les substitutions qui reproduisent une forme cubique ternaire donnée, ce qui m'était nécessaire pour le but arithmétique que j'avais en vue. [...]
> L'un des problèmes les plus importants qui se posent au sujet des formes quadratiques ternaires indéfinies est l'étude des propriétés des groupes discontinus formés par les *substitutions semblables*, c'est-à-dire par les substitutions qui n'altèrent pas ces formes ([1881b), [1886]) [...] On sait que, lorsque l'on fait subir à une forme algébrique des substitutions linéaires *quelconques,* certaines fonctions des coefficients demeurent inaltérées : ce sont les *invariants.* En dehors de ces invariants *algébriques,* dont l'étude a été poussée très loin, il ya, ainsi que je l'ai démontré [1881] d'autres fonctions des coefficients qui sont altérées quand on applique à la forme une substitution à coefficients fractionnaires ou incommensurables, mais qui se reproduisent au contraire quand on lui fait subir une substitution à coefficients entiers. Ce sont les invariants *arithmétiques*. Les formes linéaires binaires qui n'ont pas d'invariants algébriques ont, au contraire, des invariants arithmétiques dont l'étude se rattache à la théorie des fonctions algébriques et à celles des fonctions modulaires et des fonctions fuchsiennes. Ces invariants peuvent être utilisés pour la solution des deux problèmes suivants :

[24] Consulter Gray [2000, 209-221] et [Gilain, 1991].

1° Trouver le plus petit nombre représenté par une forme quadratique indéfinie.
2° Reconnaître si deux formes quadratiques binaires indéfinies sont équivalentes.
[...] Ainsi l'étude des groupes de substitutions semblables des formes quadratiques est ramenée à celle des groupes fuchsiens, ce qui est un rapprochement inattendu entre deux théories très différentes et une nouvelle application de la Géométrie non euclidienne.
Les substitutions semblables sont celles qui reproduisent une forme quadratique et qui, en même temps, appartiennent au groupe *G* des substitutions à coefficients entiers. On peut rechercher alors les substitutions qui reproduisent la forme quadratique et qui en même temps appartiennent à un autre groupe, par exemple à un sous groupe du groupe *G*. Cela nous permet en même temps de généraliser la théorie de l'équivalence des formes et de leur réduction.
[Poincaré, 1921, 1-8].

La classification des substitutions en catégories définies par leurs formes canoniques est immédiatement appliquée par Poincaré aux premiers travaux sur les fonctions fuchsiennes. Les fonctions fuchsiennes sont définies comme des fonctions uniformes invariantes par des substitutions linéaires en une généralisation d'une propriété des fonctions modulaires associées aux fonctions elliptiques ([25]):

Les fonctions que je veux étudier dans ce travail ont les plus grandes analogies avec les fonctions elliptiques et modulaires qui n'en sont que des cas particuliers. On sait quels services les transcendantes à deux périodes ont rendus à l'analyse, et l'on comprend que tous les géomètres ont dû avoir l'idée qu'il y avait lieu de les généraliser. Les fonctions elliptiques ont pour propriété essentielle de se reproduire quand on augmente leur argument ζ de l'une des périodes. Le plan se trouve partagé en une infinité de parallélogrammes qui forment une sorte de damier dont l'ensemble ne varie pas, mais dont les cases se permutent quand on augmente ζ de l'une des périodes.

[25] L'analogie avec les fonctions elliptiques tient à ce que la fonction modulaire, module de la fonction elliptique envisagé comme fonction du rapport des périodes, a la propriété de rester invariante par l'action de substitutions fractionnaires à coefficients entiers de déterminant un, c'est-à-dire les substitutions étudiées par Poincaré et Jordan en 1880 dans le cadre de l'équivalence arithmétique des formes [Picard, 1882a, 579] :

La théorie des fonctions elliptiques a donné le premier exemple d'une fonction uniforme d'une variable ne changeant pas pour un groupe d'une infinité de substitutions linéaires faites sur cette variable : je veux parler de la fonction modulaire, c'est-à-dire du module considéré comme fonction du rapport des périodes. [...] Je me suis, depuis longtemps, proposé le problème de la recherche des fonctions de deux variables qui puissent être considérés comme les analogues des fonctions elliptiques modulaires ; j'espère en avoir trouvé une solution en étudiant un cas particulier des fonctions abéliennes du second genre (pour lesquelles $p = 3$).

Toute tentative de généralisation des fonctions elliptiques passe par la généralisation de cette propriété d'invariance. C'est cette propriété qui est généralisée par la considération de substitutions hyperboliques générales et qui permet à Poincaré de développer les premières tentatives de Picard [1882].

Nous allons rechercher s'il existe une fonction uniforme F(ζ) qui ne change pas quand on applique à ξ l'une des substitutions linéaires en nombre infini

$$s_i = (\zeta, \frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i})$$

[...]
En d'autres termes, je cherche s'il y a une fonction uniforme *F(ζ)* jouissant de la propriété

$$F(\zeta) = F(\frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i})$$

[Poincaré, 1882c, 553].

Selon les termes employés par Darboux, par la généralisation de la propriété d'invariance à des sous groupes quelconques du groupe linéaire, "la question se dédouble alors : il faut d'abord trouver tous les groupes discontinus formés de telles substitutions ; il faut ensuite former les fonctions qui demeurent invariables quand on applique ces substitutions à la variable indépendante de même forme, mais à coefficients quelconques" [Darboux, 1913, XXII]. Le "groupe fuchsien" est un sous groupe "discontinu" du groupe hyperbolique dont les substitutions laissent invariant le cercle fondamental :

J'appelle *cercle fondamental* le cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité ; *groupe hyperbolique,* le groupe des opérations qui consistent à changer z en $\frac{az+b}{cz+d}$ (*a, b, c, d* étant des constantes), et qui n'altèrent pas le cercle fondamental ; *groupe discontinu,* tout groupe qui ne contient pas d'opération infinitésimale, c'est-à-dire d'opération changeant z en une quantité infiniment voisine de z ; *groupe fuchsien,* tout groupe discontinu contenu dans le groupe hyperbolique.
J'appelle *fonction fuchsienne* toute fonction uniforme de z qui n'est pas altérée par les opérations d'un groupe fuchsien.
[Poincaré, 1881e, 333].

Les recherches sur les fonctions fuchsiennes sont donc fondées sur une étude des sous "groupes discontinus" des groupes linéaires à une ou deux variables qui prolongent les travaux de Jordan [1878] et Klein [1876], travaux dont Poincaré mêle les méthodes en reprenant tout à la fois l'approche géométrique de Klein et la classification algébrique des substitutions par des "formes simples" inspirée de Jordan :

M. Jordan. dans le *Journal de Crelle* (Bd. 84) et dans les *Mémoires de l'Académie de Naples,* a montré comment on peut former les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire. Il resterait à faire voir qu'à l'aide de tout groupe fini on peut former une équation linéaire à coefficients rationnels et à intégrales algébriques. J'ai cherché à démontrer ce théorème dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie au mois d'avril 1881 ; [...] Depuis, j'ai réussi à prouver qu'à tout groupe fini Γ on peut faire correspondre d'une infinité de manières un groupe fuchsien *G* auquel *Γ* est mériédriquement isomorphe, qu'à ces deux groupes correspond toujours une équation linéaire à intégrales algébriques et que, si l'on pose $x = f(z)$, $f(z)$ étant une fonction fuchsienne engendrée par le groupe *G*, les intégrales de cette équation sont des fonctions fuchsiennes engendrées par un sous-groupe g de G. Ainsi à *un groupe d'ordre fini correspond non pas une, mais une infinité d'équations à intégrales algébriques dont on peut même choisir arbitrairement les points singuliers.* [Poincaré, 1883, 984].

L'approche géométrique de Poincaré est proche de celle de Klein ([26]). Contrairement à ce dernier cependant, Poincaré ne recourt pas aux diviseurs élémentaires mais aux "formes simples" inspirées de Jordan [1878], [Poincaré, 1882b, 840]. C'est en ce sens que, pour reprendre les termes de Poincaré, la méthode se caractérise comme mêlant des "considérations arithmétiques, algébriques ou géométriques" ([27]).

[26] Pour les travaux de Klein, consulter [Gray, 2000, 152-166].

[27] Le rôle essentiel des points doubles dans la classification s'explique par l'association d'une suite de régions du plan à chaque substitution d'un groupe fuchsien [Poincaré, 1882c, 553] :

Il est clair que les substitutions S_i devront former un groupe et un groupe discontinu, c'est-à-dire que la portion du plan où la fonction F existe peu être divisée en une infinité de régions R_0, R_1, ..., R_i, ... telles que quand ζ parcourt R_0, $\dfrac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}$ parcourt R_i. Ces diverses régions formeront, comme dans le cas des fonctions elliptiques, une sorte de damier dont l'ensemble ne varie, pas, mais dont les cases se permuteront quand on appliquera à ζ l'une de substitutions S_i. A chacune des substitutions S_i correspond de la sorte une de régions R_i.

Si l'on appelle *points correspondants* les divers points $\dfrac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}$, la fonction F reprendra la même valeur en deux points correspondants et il y aura dans chacune des régions R_i un point correspondant à un point donné et un seul. Deux régions R seront dites *limitrophes* quand elles seront continues tout le long d'un arc de leur périmètre. Les substitutions qui correspondent aux régions limitrophes de R_0 sont des *substitutions fondamentales* dont toutes les substitutions S seront des combinaisons. Il en résulte que le groupe sera complètement déterminé quand on connaîtra ces substitutions fondamentales et par conséquent quand on connaîtra le polygone R_0 et les polygones limitrophes.

2. Je vais chercher d'abord à former tous les groupes discontinus formés de substitutions S_i où les coefficients α_i, β_i, γ_i, δ_i sont réels. Je les appelle *groupes fuchsiens.* Dans ce cas, il est aisé de voir que les régions R_i qui forment le *damier* peuvent être réduites à des polygones curvilignes situés tout entiers au-dessus de l'axe des quantités réelles (que j'appelle pour abréger X) et ayant des côtés de deux sortes ; ceux de la première sorte sont des arcs de cercle ayant leur centre sur X, ceux de la deuxième sorte sont des segments de l'axe X lui-même.

Classification géométrique.

Afin de caractériser les substitutions des groupes discontinus, Poincaré reprend la classification de Klein basée sur l'occurrence de points fixes [Poincaré, 1882d, 110]:

Les substitutions réelles ont été étudiées par différents géomètres et en particulier par M. Klein dans ses recherches sur les fonctions modulaires ; il les a partagées en substitutions elliptiques, paraboliques et hyperboliques.
Les substitutions elliptiques sont celles pour lesquelles

$$(a+d)^2 < 4$$

Les points doubles α et β sont imaginaires conjugués ; l'un d'eux est par conséquent au-dessus de *l'X*, l'autre au-dessous ; [...]. Si *z* décrit un cercle passant par α et β, *t* [l'image de *z* par la substitution] décrira également un cercle passant par α et β et coupant le premier sous un angle égal à l'argument de *K*.
La substitution (1) change en elle-même toute circonférence qui, ayant son centre sur le prolongement de αβ, coupe ce segment harmoniquement.
Les substitutions paraboliques sont celles pour lesquelles

$$(a+d)^2 = 4.$$

Les points doubles se confondent en un seul qui est situé sur *X*. La relation (1) se met sous la forme (4) et de telle sorte que α soit réel. Si z décrit un cercle passant par α, t décrira également un cercle passant par α et tangent au premier.
[...] Les substitutions hyperboliques sont celles pour lesquelles

$$(a+d)^2 > 4.$$

Les points doubles α et β sont distincts et situés sur *X*. La relation (1) se met sous la forme (3) et de telle sorte que *K* soit réel et positif. [...] Si z décrit un cercle passant par α ou β, *t* décrira également un cercle passant par α ou par β et tangent au premier.

Classification algébrique.

Poincaré allie, comme en 1880, une caractérisation algébrique à la classification géométrique en associant à chaque type de substitution une "forme canonique" ou "forme la plus simple". Cette classification est l'objet de la note communiquée à l'académie en 1884 intitulée "Sur les substitutions linéaires", [Poincaré, 1884a, 349] :

On sait quelle importance a, dans la théorie des substitutions linéaires de la forme $\left(x, \dfrac{ax+b}{a'x+b'}\right)$ et dans celle des groupes fuchsiens et kleinéens qu'elles peuvent former, la classification de ces substitutions en substitutions loxodromiques, hyperboliques, elliptiques et paraboliques. Cette classification peut s'étendre aux substitutions linéaires à deux variables

(1) $\left(x, y; \dfrac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''}, \dfrac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c'}\right),$

et spécialement à celles qui conservent l'hypersphère
(2) $xx_0+yy_0=1$, et qui, par conséquent peuvent engendrer ces groupes hyperfuchsiens dont M. Picard a donné des exemples. Dans l'équation (2), comme dans tout ce qui va suivre, j'ai représenté, à l'exemple de M. Hermite, par u_0 la quantité imaginaire conjuguée de u. Mettons la substitution (1) sous la forme homogène
(I *bis*) $(x,y,z\ ;\ ax+by+cz\ ,\ a'x+b'y+c'z,\ a''x+b''y+c''z).$
On peut, par un changement convenable de variables, amener cette substitution à l'une des formes suivante, que l'on peut appeler *formes canoniques* :

$(x,y,z\ ;\ \alpha x, \beta y, \gamma z)$, α ý β ý γ,
$(x,y,z\ ;\ \alpha x, \beta y+z, \beta z)$, α ý β,
$(x,y,z\ ;\ \alpha x, \beta y, \beta z)$, α ý β,
$(x,y,z\ ;\ \alpha x+y, \alpha y+z, \alpha z)$,
$(x,y,z\ ;\ \alpha, \alpha y+z, \alpha z)$.

Ne nous occupons pour le moment que de la forme (*A*) [...] Les quantités α, β, γ sont appelées *multiplicateurs*. De plus, la substitution (1) admet trois *point doubles* qu'elle laisse inaltérés. Quand on connaît les points doubles et les multiplicateurs d'une substitution, elle est entièrement déterminée. [...]
On voit aisément que toute substitution de la forme (I *bis*) change toute forme quadratique du faisceau
(3) $[Axx_0+Bxy_0+B_0yx_0+Cyy_0 + Dxz_0+D_0zx_0 + Eyz_0+E_0zy_0+Fzz_0$
en une autre forme du même faisceau. Pour que la substitution (*A*) reproduise, à un facteur constant près une des formes (3) dont le discriminant ne soit pas nul, [...] nous dirons alors que la substitution est *elliptique* [ou] *hyperbolique*.

Les différents types de groupes linéaires obtenus par Poincaré sont dénommés groupes fuchsiens, kleinéens, zétafuchsiens etc. A chaque type de groupe correspond un type d'équations différentielles linéaires dont il permet l'intégration algébrique [Poincaré, 1882 et 1884c]. La méthode de classification des groupes de Poincaré manifeste une influence directe de la forme canonique de Jordan. Paradoxalement, la représentation géométrique donnée par Poincaré à la forme canonique semble en partie responsable de la quasi-disparition de l'idée d'un théorème de Jordan entre 1880 et 1907. On retrouve en effet l'emploi de formes canoniques comme celles de Poincaré chez des auteurs comme Cartan (chapitre 6) sans aucune référence à Jordan. De nombreux traités d'algèbre de la fin du siècle reprennent également la désignation de Poincaré de "forme canonique" pour la forme diagonale. Deux raisons semblent expliquer ce phénomène : d'abord, le développement que réalise Poincaré des idées de Jordan en lui associant une représentation géométrique inspirée de Klein est tel que la relation entre la nouvelle forme canonique supportant une classification géométrique et celle de Jordan se distend. D'autre part, le style caractéristique de Poincaré qui, dans l'ambition d'une plus grande "clarté" et plus grande "simplicité", se contente d'exposer les résultats dans des cas particuliers d'un petit nombre de variables, fait disparaître le véritable enjeu associé à la forme de Jordan depuis son énoncé en 1870 : l'enjeu de généralité.

IV. LA METHODE DE REDUCTION DES FORMES ET LA COMBINATOIRE DE DECOMPOSITION DES TABLEAUX (1880-1910).

Les travaux de Jordan et Poincaré des années 1880 se basent sur une notion générale, la "notion de réduite" comme la désigne Poincaré. Cette notion ne bénéficie pas, en dehors de cas particuliers, d'une définition mathématique et repose sur une norme de simplicité: une forme réduite ou canonique est la "forme la plus simple". D'autres travaux que ceux du corpus étudié ici se consacrent à la recherche de formes réduites, mais ce qui est original ici est que l'idée de réduction au plus simple soit présentée par tous les textes d'un même réseau, comme une méthode de recherche et de démonstration. Au contraire, lorsque Kronecker [1890] par exemple, développe des méthodes de réductions des systèmes de nombres, son objet n'est pas l'obtention d'un système réduit, mais la possibilité qu'offre une telle réduction d'obtenir un système complet d'invariants par des opérations effectives (chapitre 5).
Il y a donc une "notion de réduite" commune a tous les textes du corpus étudié. Cette idée très générale et souvent vague s'accompagne de méthodes mathématiques précises, originales et efficaces qui se transmettent à l'intérieur du réseau et se présentent comme un héritage mêlé d'Hermite et Jordan. Ces méthodes sont fondées sur un caractère opératoire donné à la notation par tableaux qu'Hermite développe des travaux de Cauchy (chapitre 3) afin de représenter les formes réduites ou typiques caractérisant les classes d'équivalences.

1. La méthode de décomposition des tableaux de Jordan.

C'est en 1880, lorsque Jordan se propose de poursuivre les recherches d'Hermite, que la notation en tableau apparait dans son œuvre. Les tableaux cohabitent alors avec la notation employée par Jordan depuis les années 1860-1870 pour désigner les substitutions :

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \\ x_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \\ x_3 & \dots\dots\dots\dots\dots \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

[Jordan, 1880b, 117].

Avant l'adoption des tableaux, ce sont en réalité deux notations des substitutions qui cohabitent déjà chez Jordan :

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ .. & \dots \\ x_n & a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{vmatrix}$$

La notation par une lettre, *S* est dotée d'une opérativité algébrique : on peut multiplier deux substitutions notées par des lettres et exprimer en particulier la relation d'équivalence $S' = USV$. La notation en lignes,

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ .. & \dots \\ x_n & a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{vmatrix}$$

permet quant à elle de représenter tout à la fois les manipulations sur les variables x_i et les effets de ces manipulations sur les images de la substitution.
C'est surtout cette seconde représentation qui supporte les méthodes de décompositions de Jordan détaillées dans le chapitre 3 de ce travail. Elle représente en particulier la décomposition des variables en sous systèmes et de la substitution en substitutions partielles qui caractérise le théorème de réduction à une forme canonique :

$$\begin{vmatrix} x_1, x_2, \dots, x_\alpha & s_1(x_1 + x_2), s_1(x_2 + x_3), \dots, s_1 x_\alpha \\ x_{\alpha+1}, \dots, x_\beta & s_{\alpha+1}(x_{\alpha+1} + x_{\alpha+2}), \dots, s_{\alpha+1} x_\beta \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}$$

ENCART 10.

Sur l'opérativité de la notation par tableaux chez Jordan.

[Jordan, 1880c, 157] :

Soit donc δ la commune mesure des coefficients *a, b, …c''.* On aura :

$$S = \begin{Bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{Bmatrix} S',$$

i ayant pour coefficients des nombres entiers sans diviseur commun et pour déterminant i.[…]

$$U = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{Bmatrix},$$

jouissant de la propriété d'avoir un coefficient de norme aussi petite que possible, tout en restant >0. On peut admettre que ce coefficient est *a*. En effet, si c'était *b''*, par exemple, on pourrait remplacer la substitution *U* par son équivalente

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} U \begin{Bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b'' & -a'' & c'' \\ b' & -a' & c' \\ -b & a & -c \end{Bmatrix},$$

qui a *b''* pour premier coefficient. On pourra, en outre, supposer les coefficient *b ,c* nuls. En effet, il suffira, au besoin, de remplacer *U* par son équivalente

$$\begin{Bmatrix} a & b+\lambda a & c+\lambda' a \\ a' & b'+\lambda a' & c'+\lambda' a' \\ a'' & b''+\lambda a'' & c''+\lambda'' a'' \end{Bmatrix}$$

et de déterminer les entiers λ, λ' de telle sorte que *b+λa* et *c+λ'a* aient une norme inférieure à celle de a. cette norme devra être nulle par hypothèse. On voit de même qu'on peut rendre nuls les coefficients *a', a''. U* pourra donc être supposé de la forme

$$\begin{Bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & b'' & c'' \end{Bmatrix}.$$

Parmi les substitutions de cette forme équivalentes à S, choisissons l'une de celles où l'un des coefficients *b', c', b'', c''* a la plus petite norme, sans toutefois s'annuler. On verra, comme tout à l'heure, qu'on peut admettre qu *b'* est ce coefficient minimum, et que *c'* et *b''* sont nuls.
enfin chacun des coefficients restants *a,b', c''* divisera le précédent.En effet, la substitution

$$U = \begin{Bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0' & c'' \end{Bmatrix}$$

est équivalente à la suivante,

$$\begin{Bmatrix} a & \lambda a+b' & \lambda' a+c'' \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{Bmatrix},$$

et les entiers λ, λ' peuvent être choisis de telle sorte que *λa+b', λ'a+c''* aient une norme moindre que a*,* et par suite s'annulent. Donc *b'* et *c''* sont des multiples de *a*. On voit de même que *c''* est un multiple de *b'*.

Quel est le rôle joué par la nouvelle représentation par tableaux adoptée par Jordan en 1880 ? D'une part, cette notation est employée, comme chez Hermite, pour désigner le représentant canonique des classes d'équivalences. D'autre part, les tableaux permettent de représenter le procédé de décomposition lui-même. Jordan développe en 1880 une méthode qui donne aux tableaux à la fois l'opérativité algébrique de la notation par lettres et la capacité de la notation par lignes de représenter les manipulations sur les variables. La définition de l'opération de multiplication sur les tableaux donne à la méthode de décomposition des variables en sous systèmes une représentation mathématique (encart 10). Ainsi, pour démontrer le théorème suivant :

> Théorème. – Toute substitution linéaire *S* à *n* variables et de déterminant *D* peut être mise sous la forme *ETE*', *E* et *E'* étant des substitutions à coefficients entiers et de déterminant 1, et *T* une substitution dont les cœfficients ont leurs normes inférieures à $k_n^n\sqrt{\Delta}$, Δ désignant la norme de *D* et k_n une constante qui ne dépend que de *n*.
> [Jordan, 1880c, 151].

La méthode consiste à rechercher une forme réduite des substitutions de la classe d'équivalence. La forme réduite est caractérisée par une majoration de la norme :

> Nous allons démontrer que, si elle [la proposition] est vraie pour les substitutions à *n-1* variables, elle le sera pour celles à *n* variables.
> Pour plus de simplicité, nous supposerons *n = 3*.
>
> Soit $S = \begin{vmatrix} x & ax+by++cz \\ y & a'x+b'y++c'z \\ z & a''x+b''y++c''z \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{Bmatrix}$
>
> la substitution donnée. Désignons par *A, B, ...,C''* les mineurs
>
> $$\frac{dD}{da}, \frac{dD}{db}, \ldots, \frac{dD}{dc''}$$
>
> Nous considérerons comme équivalente à *S* toute substitution de la forme *ESE'* où *E, E'* sont des substitutions de déterminant 1 e à coefficients entiers. Si nous montrons que parmi ces substitutions il en est une *T* dont les coefficients ont leur normes inférieures à $k_n^n\sqrt{\Delta}$, le théorème sera démontré. [....].
> [Jordan, 1880c, 151].

La notation par tableaux permet de représenter les étapes successives du procédé de réduction. Les multiplications par des substitutions à coefficients entiers de déterminant 1 qui correspondent à des changements de variables à l'intérieur d'une même classe d'équivalence sont représentées par une combinatoire sur les lignes et colonnes:

> Les substitutions à coefficients entiers et de déterminant 1 résultent, comme on sait, de la combinaison de substitutions analogues à la suivante,
>
> $$F = \begin{Bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

où λ est un entier.
[...] "On a évidemment

$$FS = \begin{Bmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' & c+\lambda c' \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{Bmatrix}$$

$$SF = \begin{Bmatrix} a & b+\lambda a & c \\ a' & b'+\lambda a' & c' \\ a'' & b''+\lambda a'' & c'' \end{Bmatrix}$$

Les substitutions équivalentes à *S* s'obtiendront donc par la combinaison des opérations qui consistent à ajouter aux coefficients d'une même ligne ou d'une même colonne ceux d'une autre ligne ou d'une autre colonne, multipliés par un entier constant.
[Jordan, 1880c, 152].

L'étude des procédés analogues développés par Smith [1861] (chapitre 3) et par Kronecker [1884-1891] (chapitre 5) permet, par contraste, de mettre en valeur l'originalité des procédés de Jordan ([1]). Jordan ne se contente pas d'affecter à la notation en tableaux une opérativité sur les lignes et les colonnes, il en fait une véritable représentation de sa méthode de décomposition des problèmes en suite de problèmes simples par regroupement des variables en sous-systèmes :

La substitution *U* se réduira donc à la forme

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\rho} & a_{1,\rho+1} & \dots & a_{1\sigma} & a_{1\sigma+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\rho 1} & \dots & a_{\rho\rho} & a_{\rho,\rho+1} & \dots & a_{\rho\sigma} & a_{\rho,\sigma+1} & \dots & a_{\rho n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{\rho+1,\rho+1} & \dots & a_{\rho+1,\sigma} & a_{\rho+1,\sigma+1} & \dots & a_{\rho+1,n} \\ . & \dots & . & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{\sigma,\rho+1} & \dots & a_{\sigma\sigma} & a_{\sigma,\sigma+1} & \dots & a_{\sigma n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{\sigma+1,\sigma+1} & \dots & a_{\sigma+1,n} \\ . & \dots & . & . & \dots & . & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,\sigma+1} & \dots & a_{nn} \end{Bmatrix}$$

et son déterminant, qui est égal à 1, sera le produit des trois déterminants partiels

[1] L'épisode du scandale du grand prix de mathématiques de 1881 révèle l'ignorance complète des travaux de Smith chez les Académiciens organisateurs. La faute en a d'ailleurs souvent été attribuée à Jordan. Cela pourrait amener à conclure que Jordan ne connaît pas, en 1880, les travaux de Smith. Cependant, il faut observer qu'en 1881 Jordan n'est pas encore à l'Académie et qu'il ne participe donc pas à l'élaboration du sujet du concours qui va susciter le scandale. D'autre part, la correspondance de Jordan contient une lettre adressée par Smith dès 1875, la connaissance des travaux de Smith par Jordan pourrait alors expliquer la raison pour laquelle Jordan est chargé de trouver une issue au scandale de 1881 (voir les lettres échangées avec la veuve de Smith dans la correspondance de Jordan).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\rho} \\ .. & \ldots & .. \\ a_{\rho 1} & \ldots. & a_{\rho\rho} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{\rho+1,\rho+1} & \ldots & a_{\rho+1,\sigma} \\ .. & \ldots & .. \\ a_{\sigma,\rho+1} & \ldots. & a_{\sigma\sigma} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{\sigma+1,\sigma+1} & \ldots & a_{\sigma+1,n} \\ .. & \ldots & .. \\ a_{n,\sigma+1} & \ldots. & a_{nn} \end{vmatrix},$$

[Jordan, 1880b, 130].

Les tableaux donnent tout à la fois une représentation et une opérativité à la méthode de "réduction" propre à Jordan : les opérations de multiplications par des substitutions permettent de réduire un tableau à une suite de sous tableaux indépendants, ses "mineurs" [Jordan, 1880c, 152] (voir aussi les exemples placés en encart 10) [Jordan, 1880b, 130] :

> Il est facile de voir quelle sera l'influence de ces opérations sur les mineurs
>
> $$\begin{matrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{matrix}$$
>
> En effet, les mineurs de *FS* seront évidemment
>
> $$\begin{matrix} A & B & C \\ A'-\lambda A & B'-\lambda B & C'-\lambda C \\ A'' & B'' & C'' \end{matrix}$$
>
> [...]Le Tableau des mineurs subira donc des altérations de même nature que celui des coefficients.

2. Les tableaux chez Poincaré.

Les travaux de Poincaré de 1880 sont marqués, comme ceux de Jordan, par le caractère opératoire de la notation par tableau pour la recherche de formes réduites. Une note de Poincaré de 1884 est un premier contact de cette représentation par tableaux et de la théorie des matrices développée à cette époque par Sylvester (chapitres 4). Ce point de contact s'avère également la première mise en relation des recherches jusqu'alors indépendantes sur les groupes de transformations continus et les systèmes hypercomplexes, la note de Poincaré a, pour cette raison, été largement commentée par l'historiographie des algèbres associatives comme on l'a vu au chapitre 6. Poincaré, de par ses préoccupations sur l'intégration algébrique des équations différentielles, est amené à aborder la théorie des groupes continus de transformations développée par Lie. En 1884, il met en évidence la relation entre de tels groupes et les systèmes hypercomplexes comme les nonions étudiés par Sylvester comme cas particulier de matrices:

> Ayant indiqué la manière de former les groupes contenus dans le groupe linéaire à *n* variables, j'ai étudié les formes homogènes par rapport à ces variables, qui ne sont pas altérées par les substitutions d'un de ces groupes et j'ai reconnu que ces formes satisfont à un certain nombre d'équations aux dérivées partielles formant un *système complet*. […]
> Les plus simples des groupes continus en question jouissent de quelques propriétés que je vais énoncer succinctement. Si l'on forme le déterminant des coefficients d'une substitution linéaire à n variables, qu'on ajoute +S a chacun des termes de la diagonale principale, et qu'on égale à zéro le déterminant ainsi obtenu, on a une certaine *équation* en *S* de degré *n*.
> Un groupe continu contient toujours une infinité de faisceaux ; on démontre que, si il y a dans le groupe une substitution admettant une certaine équation en *S*, il y aura *dans tous les faisceaux du groupe* une substitution admettant cette même équation en *S*.
> Parmi les groupes continus dont je viens de parler, les plus intéressants sont ceux qui donnent naissance à un système de nombres complexes à multiplication non commutative (comme sont, par exemple, les quaternions). J'ai démontré que toutes les équations en *S* des substitutions de ces groupes ont des racines multiples.
> Je suis revenu depuis sur ces groupes particuliers [1884]. Les recherches de M. Sylvester sur les matrices avaient de nouveau attiré l'attention des savants sur les nombres complexes. On pouvait se demander s'il en existait d'autres que ces matrices et leurs combinaisons. J'ai montré qu'il y en avait encore d'autres classes parmi lesquelles j'ai signalé une classe de *ternions.*
> [Poincaré, 1921, 2].

Or, contrairement aux interprétations qu'en a fait l'historiographie des algèbres associatives (chapitre 6), la note de Poincaré de 1884 manifeste la différence essentielle des notions de matrices et de tableaux. Si en apparence les deux notations peuvent paraître identiques, elles renvoient à des méthodes très différentes, les matrices sont largement associées à un calcul symbolique (chapitre 4) et à des recherches d'invariants (partie II) tandis que les tableaux sont, dans un corpus de textes bien précis, employés en relation avec des méthodes de décomposition des formes en formes réduites:

> Voici maintenant quelques-uns des résultats auxquels on peut arriver par cette considération.
>
> Convenons d'écrire les coefficients d'une substitution quelconque sous la forme d'un Tableau à double entrée. Nous trouverons d'abord que les faisceaux qui donnent naissance à des nombres complexes à multiplication commutative rentrent tous dans des types analogues à ceux qui suivent, pourvu que les variables soient convenablement choisies
>
> $$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 \\ d & c & b & a & 0 \\ e & d & c & b & a \end{vmatrix}$$
>
> $$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix},$$
>
> *a, b, c, d, e* désignant cinq paramètres arbitraires.
>
> [...] Si l'on considère ensuite un groupe donnant naissance à des nombres complexes à multiplication non commutative, et une substitution quelconque *S* de ce groupe ; si l'on forme l'équation aux multiplicateurs de cette substitution (équation aux racines latentes des matrices de M. Sylvester), cette équation aura toujours des racines multiples.[...]
>
> Supposons maintenant que les variables aient été choisies de telle sorte qu'une substitution *S* du groupe, non parabolique, soit ramenée à la forme canonique
>
> $$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n)$$
>
> D'après ce que nous venons de voir, les λ ne pourront pas être tous distincts.
>
> Supposons qu'il y ait *p* valeurs distinctes de λ que nous appellerons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.
>
> Nous diviserons les *n* variables en systèm*p* es :
>
> $$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1\alpha}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2\beta} ; \ldots ; x_{p1}, x_{p2}, \ldots, x_{p\chi},$$
>
> $$\text{où } \alpha+\beta+\ldots+\chi = n$$
>
> et nous supposerons que la substitution S s'écrive sous la forme
>
> $$(x_{ik}, \lambda_i x_{ik})$$
>
> le multiplicateur étant ainsi le même pour toutes les variables d'un même système.
>
> Cela posé :
>
> 1° La substitution
>
> $$(x_{ik}, \mu_i x_{ik})$$
>
> fera partie du groupe quelles que soient les valeurs des *p* multiplicateurs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$:

> 2° Ecrivons le Tableau à double entrée des coefficients d'une substitution quelconque du groupe, en conservant les mêmes variables dont il vient d'être question.
> Dans ce Tableau, séparons par des traits verticaux les α premières colonnes, puis les β suivantes etc., puis les x dernières. Séparons de même par des traits horizontaux les α premières lignes, puis les β suivantes, etc., puis les x dernières. Nous avons partagé nos coefficients en p^2 systèmes. Si l'on choisit convenablement les n paramètres arbitraires en fonctions desquels tous les coefficients du groupe s'expriment linéairement, un quelconque d'entre eux ne pourra entrer que dans les coefficients *d'un seul* des p^2 systèmes.
> Il résulte de là :
> 1° Ou bien que les coefficients d'un des p^2 systèmes sont tous nuls :
> c'est ce qui arrive, par exemple, au groupe à trois variables et trois paramètres
> $$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix} ;$$
> 2° Ou bien qu'aucune des substitutions du groupe ne peut avoir plus de $\sqrt{n}$ multiplicateurs distincts. C'est ce qui arrive, par exemple, pour les quaternions. [Poincaré, 1884, 740].

Que la méthode mise en œuvre par Poincaré en 1884, n'ait suscité aucune postérité dans le développement de la théorie des systèmes hypercomplexes (chapitre 6), malgré les références qu'en font des auteurs fondateurs comme [Scheffers, 1891], témoigne de ce que tableaux et matrices participent, dans les années 1880-1900 de développements indépendants. On comprend alors la nouveauté de la note de Séguier de 1907 qui lie les travaux sur les matrices aux méthodes particulières de réductions canoniques et de décompositions de tableaux.

CONCLUSION

La forme canonique de Jordan bénéficie d'une postérité dans un courant de recherches arithmétiques. Les travaux de Poincaré sur les formes et les premiers travaux de Minkowski [1885, 1886] sur les formes quadratiques placent les références à Jordan [1870, 1878, 1880] aux cotés d'Hermite [1855], de Kronecker [1866, 1874, 1882], de Korkine et Zolotarelf [1873] ([1]). Cependant, à partir des travaux de Poincaré, l'idée d'un théorème spécifique de Jordan portant sur une forme canonique disparaît jusqu'à la note de Séguier de 1907. Le nom de Jordan est alors davantage attaché à l'idée générale de forme réduite et à la méthode des tableaux, en une postérité qui accompagne celle d'Hermite.
C'est donc une nouveauté qui se manifeste dans les années 1907-1913 lorsque de Séguier et Châtelet construisent une relation entre les tableaux et les matrices et revendiquent les postérités mêlées de Jordan et Hermite :

> J'ai essayé d'en faire [le traité de Châtelet de 1913] une sorte d'introduction à l'étude des notions et théories nouvelles introduites depuis une soixantaine d'années en Arithmétique supérieure, un peu comme conséquence des travaux de Gauss et sous l'influence des idées de Galois et d'Hermite. [...] J'ai rassemblé, dans le premier Chapitre, d'autres notions d'Algèbre et d'Analyse, moins universellement adoptées ; la notation des Tableaux, exposée surtout d'après les travaux de Laguerre et de M. Jordan ; le langage géométrique (espace à *n* dimensions) ; la généralisation de la notion de distance indiquée par M. Minkowski et le volume d'un corps convexe dans l'espace à *n* dimensions.
> Les quatre Chapitres suivants sont consacrés à l'exposition de la théorie des modules et de ses applications. [...] Dans les deux derniers Chapitres a été exposée, d'après les idées d'Hermite, la célèbre méthode de la réduction continuelle et son application toute naturelle aux formes décomposables et aux corps algébriques (unités, corps d'un discriminant donné, classes d'idéaux).
> [Châtelet, 1913, VII].

Le thème des premières publications de Châtelet, entre 1910 et 1913, peut être résumé par le titre du long mémoire publié en 1911 dans les *Annales de l'Ecole Normale* : "Sur certains ensembles de tableaux et leur application à la théorie des nombres". L'ambition des travaux de Châtelet rejoint l'idéal de réorganisation du savoir que nous avons vu chez de Séguier, elle est de montrer les "identités ou les relations que présentent les divers ensembles de tableaux réduits avec l'algorithme des fractions continues, la réduction continuelle d'Hermite, la chaîne des parallélogrammes extrêmes ou la suite des solutions primitives de Minkowski, etc." [Châtelet, 1911, 105]. L'ambition est double : il y a d'une part une ambition théorique de réorganisation du

[1] Ces travaux de Minkowski visent à ordonner les formes par la considération de leurs réduites – notamment dans les cas mis en évidence par Poincaré où ces réduites ne sont pas uniques pour chaque classe

Encart 11.

Les tableaux comme méthode de la théorie des nombres chez Chatelet (1910-1913).

"Sur quelques applications du calcul des Tableaux à la théorie des ordres d'entiers algébriques". [Chatelet, 1910, 925] :

> Tout Tableau T à termes réels, dont l'équation en λ, $\varphi(\lambda) = 0$ n'a ni racine double, ni racine double ,peut se mettre sous la forme :
>
> $$T = A \times [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] \times A^{-1}.$$
>
> $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ étant les zéros de $\varphi(\lambda)$ rangés dans un certain ordre.

A un tableau T correspond donc un ordre, "ou un anneau" d'entiers algébriques $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Or si le Tableau A est appelé un "opérateur" du tableau T, Châtelet démontre que l'ensemble des tableaux de même opérateur est un groupe abélien, les racines associées appartenant à un anneau et réciproquement [Chatelet, 1911, 927] :

> Réciproquement, étant donné un ordre d'entiers algébriques M, λ_p l'un d'entre eux et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les entiers conjugués rangés dans un certain ordre, on peut toujours trouver un tableau A tel que les tableaux correspondant aux diverses valeurs de λ_p
>
> $$A \times [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] \times A\text{-}^1,$$
>
> soient à termes entiers et constituent un domaine holoïde G de tableaux.

Cette correspondance des anneaux d'entiers algébriques et des tableaux se présente pour Chatelet comme une méthode permettant d'une part de "remplacer les calculs sur des entiers algébriques par des calculs sur des systèmes d'entiers rationnels". Elle permet d'expliciter une relation entre groupes abéliens et "modules types" [Chatelet, 1911, 186] :

> Considérons un tableau T à termes entiers [….] on peut mettre T sous la forme
>
> $$T = A \times [\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n] \times A^{-1};$$
>
> $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des entiers algébriques conjugués d'ordre n et $\Delta(T) = \lambda_1\lambda_2..\lambda_n$ est leur norme commune. […]. Etant donné un tel tableau T, considérons l'ensemble de tous les tableaux à termes entiers dont le produit par T soit commutatif. Ils admettent tous pour opérateur l'opérateur de T, soit A. Le produit de deux d'entre eux appartient à l'ensemble qui constitue par suite un groupe abélien G ; Mais, en plus, la somme de deux tableaux de G appartient encore à G qui est donc aussi un module de tableaux. En désignant par φ une fonction rationnelle à coefficients entiers [….] Pour obtenir tous les tableaux de G, il suffit donc de chercher tous les tableaux de la forme $\varphi(T)$. D'après une remarque du n°19, Chapitre I, il suffit de prendre pour φ toutes les fonctions de la forme
>
> $$a_0 + a_1T + \ldots + a_{n-1}T_{n-1};$$
>
> $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, sont des fractions et l'on peut constater aisément que leurs dénominateurs sont limités. Cette génération montre entre le groupe G et les modules types une relation que je vais essayer de préciser davantage. En désignant par $[\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_n]$ le tableau élémentaire d'un tableau quelconque de G, les nombres $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ définissent des points d'un espace à n dimensions qui constituent un module G. L'équation en λ de T n'ayant pas de racine double, G est de dimension n ; il est aussi d'ordre n, [….]. G est donc un module type, et d'après l'hypothèse de l'irréductibilité de l'équation en λ, de T, il y a isomorphisme holoédrique entre G et le module de tableaux G.D'après cette même hypothèse, il y aussi ismorphisme holoédrique entre G et le module de nombres M constitué par les premières coordonnées des points de G. Ce module est formé d'entiers algébriques d'un corps ; il contient tous les entiers rationnels […] c'est donc un ordre d(entier. M et G sont aussi isomorphes holoédriquement, considérés soit comme modules, soit comme groupes. […]. Réciproquement, considérons un ordre d'entiers algébriques M. En faisant correspondre à chacun des entiers de M le point de l'(espace à n dimensions ayant pour coordonnées ce nombre et ses n-1 entiers conjugués, on obtient un module type de points G, isomorphe holoédriquement à M. En faisant correspondre à chaque point $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de G le tableau élémentaire $E = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$, les tableaux forment encore un domaine holoïde, de même que tous les tableaux $AEA^{-1,}$ A étant un tableau quelconque.[…] Enfin, on déduit immédiatement de ces considérations une propriété indiquée par Dedekind. Etant donné un tableau a du module G, ce tableau est la base d'un idéal d'un certain ordre G_1, sous-module de G.

savoir mathématique en présentant, par les tableaux, un "rapprochement [...] fécond en suggestions " [Châtelet, 1922] et des "analogies avec des théories connues" [Châtelet, 1911, 105], d'autre part une question de méthode car "cette notation conduit à des procédés de calcul uniques [...] et, en général, conduit au minimum de calculs". [Châtelet, 1911, 105], elle permet de "résoudre pratiquement certains problèmes, encore peu précisés" [Châtelet, 1922]. Chez Châtelet, la notation des tableaux permet de faire le lien entre des théories distinctes et c'est par l'existence même de ce lien que les tableaux portent des méthodes efficaces, simples et qui permettent des généralisations :

> Pour rassembler divers résultats qu'on peut déduire, il m'a semblé commode d'introduire la notation des tableaux ou systèmes linéaires. De tels symboles ont en effet l'avantage de représenter des êtres mathématiques assez divers : systèmes de formes linéaires, forme bilinéaire, forme décomposable, substitution linéaire (on peut encore citer à un autre point de vue, la représentation des nombres hypercomplexes par de tableaux ou des matrices), etc.
> [Châtelet, 1911, 105].

C'est ainsi que Châtelet explicite la correspondance de certains tableaux et des "ordres", ou anneaux, d'entiers algébriques [Châtelet, 1910b, 927]. Les tableaux permettant de généraliser les résultats de la théorie des modules de Dedekind, Steinitz, Konig, Kronecker, Molk, Minkowski, Hurwitz et le théorème fondamental s'exprime par l'énoncé selon lequel "l'ensemble de toutes les bases d'un module constitue un système de tableaux équivalents entre eux" [Châtelet, 1911, 118]. Les tableaux permettent également d'exprimer une "relation" entre les groupes abéliens et les modules types [Châtelet, 1911, 186] (encart 11), entre la théorie des idéaux, la multiplication complexe des fonctions périodiques et les nombres algébriques [Châtelet, 1912,1913a] ou encore entre la théorie des groupes abéliens finis, celle des formes bilinéaires arithmétiques et des corps finis [Châtelet, 1922, 85] (encart 11). Ces nombreux développements marquent la volonté claire de réorganiser en les unifiant des champs mathématiques distincts, ambition particulièrement cruciale en théorie des nombres et qu'il faut replacer dans le contexte général de l'émergence des structures [Corry, 1996]. C'est dans ce contexte que les deux traditions distinctes du calcul des tableaux et de la théorie des matrices se mêlent au début du XX^{e} siècle.

Les notes et commentaires d'Albert Châtelet au tome 5 des Œuvres de Poincaré parues en 1950 offrent une conclusion à ce chapitre consacré a la méthode des tableaux et des réduites dans un corpus de théorie des nombres. Les commentaires de Châtelet portent en particulier sur les travaux de Poincaré des années 1880-1886 abordés dans ce chapitre. Quelques extraits en sont donnés ci-après et en encart 12. Les notes de Châtelet proposent une traduction systématique du texte de Poincaré dans le vocabulaire de la théorie des matrices. Elles témoignent de ce que la représentation matricielle s'est imposée comme unificatrice, comme une sorte de langage universel pour des domaines très variés des mathématiques. Le langage des matrices paraît alors naturel. Les parties II et III de ce travail démontrent au contraire la complexité de la construction de cette forme de représentation comme unificatrice de courants de recherches distincts et il reste à présent à faire

"Sur une représentation des idéaux," [Chatelet, 1912] et "Sur la multiplication complexe", [Chatelet, 1913a].

Le calcul des tableaux permet de retrouver les principales propriétés de la théorie des idéaux et de la multiplication complexe des fonctions elliptiques, il permet un même calcul pour obtenir la base des périodes, la base d'un idéal d'un anneau d'un corps quadratique imaginaire [Chatelet, 1913, 1386] :

> J'ai indiqué, dans de précédentes publications, l'intérêt que présente, pour une certaine représentation des nombres algébriques, la réduction d'une substitution linéaire à sa forme canonique. Cette même réduction permet de poser, de façon générale, le problème de la multiplication complexé des fonctions périodiques et met en évidence ses relations avec les nombres algébriques.
>
> 1. Soit une fonction de n variables imaginaires x_i ou un système de fonctions, admettant 2n périodes simultanées et indépendantes (fonctions entièrement périodiques de M. Esclangon) et considérons le Tableau *P* dont les *n* premières colonnes constituent une matrice de base du module des périodes, et dont les n dernières colonnes soient les imaginaires conjuguées des premières [*Δ(P) ý 0,* puisque les périodes sont indépendantes].
>
> Une multiplication complexe consiste à faire sur les xi une substitution, soit *U*, tableau d'ordre *n*. Cette opération multiplie à droite par *U* la matrice des périodes et remplace P par
>
> $$P \times \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \overline{U} \end{pmatrix},$$
>
> *Ù* imaginaire conjugué de *U*.
>
> Le problème se pose alors ainsi : Dans quel cas les nouvelles périodes appartiennent-elles au module des anciennes ? Ou, dans quel cas existe-t-il un tableau à termes entiers Σ tel que
>
> $$P \times \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \overline{U} \end{pmatrix} = \Sigma \times P \quad \text{ou} \quad P \times \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \overline{U} \end{pmatrix} \times P^{-1} = \Sigma$$

Si l'on remplace *U* par la forme canonique, on met aussi Σ sous sa forme canonique, on voit alors la relation avec les entiers algébriques.

l'histoire de la construction du caractère naturel et universel de la représentation matricielle dans les années 1900-1930.

"Groupes abéliens finis," [Chatelet, 1922, 1923].

[Chatelet, 1922,87] :

Dans leur mémoire fondamental de 1878 sur les groupes abéliens finis (j. reine angew. math., n°86.), MM. Frobenius et Stickelberger ont signalé les relations de cette théorie avec celle des formes bilinéaires arithmétiques et ils ont utilisé ces relations pour établir l'existence d'une base normale ou réduite d'un groupe, déjà reconnue avant eux par Schering et Kronecker. Il ne semble pas que ce rapprochement des deux théories ait été utilisé depuis ; il est cependant fécond en suggestions et il permet en particulier de résoudre pratiquement certains problèmes, encore peu précisés, comme la recherche des sous groupes, et l'étude du groupe des automorphismes. Je voudrais signaler quelques uns des résultats que j'ai pu obtenir dans cette voie : au lieu des notations des formes bilinéaires, j'ai employé de préférence celle des matrices et des modules de points. (Notation utilisée déjà dans mes *Leçons sur la Théorie des nombres* et diverses Notes aux *Comptes rendus* (1912-1914).

Un groupe abélien fini peut être construit "par multiplication" à partir d'un certain nombre de ses éléments : $A_1,...,A_h$. Tout autre élément est de la forme

$$B = A_1^{r_1} A_2^{r_2} ... A_h^{r_h} ,$$

les exposants x_i sont des entiers, mais la représentation des B est ainsi possible d'une infinité de façons. on peut caractériser cette indétermination en considérant les x_i comme les coordonnées d'un point M dans un espace à h dimensions ; ce point M n'est alors défini qu'à une congruence près, relativement à un certain module de points entiers P, ayant pour base un tableau P (de h lignes et colonnes) ; en particulier, si M est dans P, B est égal à l'élément unité. Ordinairement on choisi les A (base normale ou réduite du groupe) de façon que chaque entier x_i soit défini respectivement à un module entier p_i près ; le tableau B est alors un *système simple*, c'est-à-dire à termes non tous nuls, sauf ceux de la diagonale principale égaux aux p_i.

[...] 2. La recherche des automorphismes d'un groupe ainsi défini, c'est-à-dire de ses isomorphies holoédriques avec lui-même, revient à la recherche des tableaux T, définis à l'addition près d'un tableau $E.P$ (E à termes entiers) ; tels que $P.T.P^{-1}$ soit à termes entiers ; enfin *premiers à droite* avec P (c'est-à-dire tels qu'il existe des tableaux entiers U et V vérifiant l'égalité $U.T + V.P = 1$). Ces tableaux T forment un groupe, relativement à la multiplication ordinaire des tableaux, et à leur produit correspond la composition des automorphismes. En outre, si dans la définition des T, on supprime la dernière condition, on obtient un corps d'un nombre fini d'éléments (renfermant le produit et aussi la somme de deux d'entre eux). [...]. La question des *automorphismes* se trouve ainsi ramenée à celle des *corps non abéliens d'un nombre fini d'éléments*. Les automorphismes proprement dit sont les éléments non diviseurs de zéro.

Sur le problème des transformations semblables [Poincaré, 1950, 47-49] :

Texte de Poincaré.

V. Transformations semblables.

Nous allons maintenant nous occuper de rechercher les transformations qui reproduisent une forme donnée ; mais posons d'abord le problème de la manière suivante :

Etant donnée une transformation linéaire T, trouver les formes qu'elle reproduit.

Nous ne supposons pas ici que les coefficients de T soient entiers, de sorte que l problème qui nous occupe en ce moment est purement algébrique.

[…] Si la transformation T est de la première catégorie, elle peut s'écrire

$$\Sigma^{-1}.S.\Sigma,$$

S étant canonique.

Si une forme F est reproductible par S,la forme F.Σ est reproductible par T ; donc, pour trouver toutes les formes reproductibles par T, il suffit de trouver toutes les formes reproductibles par S et de leur appliquer la transformation Σ.

[…] Je donne les résultats pour le cas où la canonique est réelle, c'est à dire : $S = [e^{\mu 1},\ldots,e^{\mu 4}]$

Alors, si $p_1, \ldots, p_4$ sont les dérivées de F par rapport à x_1, x_2, x_3, x_4, […]

$$(16)\ \mu_1 x_1 p_1 + \mu_2 x_2 p_2 + \mu_3 x_3 p_3 + \mu_4 x_4 p_4 = 0.$$

[…] quelles sont maintenant les formes reproductibles par T ? Pour les trouver il suffit d'appliquer la substitution Σ aux formes reproductibles par S. Soient y_1, y_2, y_3, y_4 les nouvelles variables, q_1, q_2, q_3, q_4 les dérivées de F par rapport à ces nouvelles variables ; les y sont liés aux x et les q aux p par des équations linéaires ; de sorte que, par la transformation Σ, l'équation (16) devient ([1])

$$(18)\quad \begin{cases} q_1(a_1y_1+b_1y_2+c_1y_3+d_1y_4) \\ +q_2(a_2y_1+b_2y_2+c_2y_3+d_2y_4) \\ +q_3(a_3y_1+b_3y_2+c_3y_3+d_3y_4) \\ +q_4(a_4y_1+b_4y_2+c_4y_3+d_4y_4) \quad =0 \end{cases}$$

Donc les formes qui sont reproductibles par T doivent satisfaire à l'équation (18). Si T a sa canonique réelle, cette condition est suffisante.

Note de Châtelet :

(1) cette relation (18), bilinéaire entre les q_i et les y_i, peut être explicitée, par exemple, en notation matricielle :

$$\begin{Vmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{Vmatrix} \times \Sigma^{-1} \times S_1 \times \Sigma \times \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Vmatrix};$$

Σ substitution qui transforme les y en x ; S_1 partie réelle de la canonique T ; on a ainsi les valeurs des coefficients a_i, b_i, c_i, d_i.

ENCART 12.

Commentaires de Chatelet apposés au mémoire "Sur la représentation des nombres par les formes" de Poincaré [1950, 400].

Poincaré avait communiqué à l'Académie des Sciences, en 1881, un Mémoire sur la représentation des nombres (entiers) par les formes (à coefficients entiers). [...] un simple extrait du Mémoire, fait par lui-même, avait été publié dans les *Comptes rendus* et c'est seulement en 1886 qu'un exposé plus détaillé a paru dans le *Bulletin de la Société Mathématique.* Toutefois cet exposé ne s'occupe pas des *formes décomposables*, envisagées dans la première Partie de la Note aux *Comptes rendus*, et développe seulement la deuxième Partie de cette Note qui concerne les *formes binaires*. Il n'est lui-même qu'une *première partie* d'un travail dont la suite ne semble pas exister. D'ailleurs, après 1886, H. Poincaré parait avoir eu des préoccupations mathématiques très différentes.

Pour étudier la représentation d'un nombre par une forme binaire $f(x,y)$, H. Poincaré considère le corps engendré par un zéro du polynôme $\varphi(x) = f(x/B_m,1)$ où B_m est le coefficient du terme de plus haut degré en x, dans $f(x,y)$. Ce zéro est un *entier algébrique* α_1 et les nombres

$$x_0+\alpha_1 x_1+ a_1^2 x_2+\ldots+a_1^{m-1}x_{m-1}\ (x_i \text{ entiers})$$

constituent un anneau a d'entiers [...] isomorphe à un anneau de matrices à termes entiers, qui représentent les tables de multiplication des entiers par les m premières puissances de α_1. C'est ainsi qu'à α_1 correspond la matrice A définie par

$$\|1\ \alpha_1 \ldots \alpha_1^{m-1}\|\times\alpha_1 = \|1\ \alpha_1 \ldots \alpha_1^{m-1}\|\times A$$

et à l'expression $g(\alpha_1)$ d'un entier quelconque de a correspond g(A) [g(x) étant un polynôme à coefficients entiers de degré $m-1$ au plus].

H. Poincaré utilise les *idéaux de l'anneau* a, c'est-à-dire les sous-modules qui restent invariants par multiplication par un entier quelconque de l'anneau. Un sous module peut être défini par une base de *m* entiers, qu'on peut écrire

$$\|1\ \alpha_1 \ldots \alpha_1^{m-1}\|\times S,$$

S étant une matrice à termes entiers, définie à une équivalence près à droite. Pour que ce module soit un idéal, il est nécessaire que $S^{-1}\times A\times S$ soit à termes entiers et cette condition est suffisante [....]. Cette condition, ajoutée à la possibilité de multiplier *S* par une matrice unimodulaire à droite, permet d'étudier les formes de matrices *S*, pour les idéaux appelés par H. Poincaré *simples*, et *primitifs*, ou seulement, ce qui apparaît suffisant, *les idéaux premiers de divers degrés*.

On pourrait encore, comme semble l'avoir indiqué H. Poincaré (p. 423 à 427 et note p.431), utiliser, pour construire un tel idéal premier P, les classes dans lesquelles il répartit les entiers de l'anneau a. On constate ainsi aisément que sa norme est une puissance p^k d'un nombre premier (*k Â m)*. Dans chacune des p^k classes, il y a un (et un seul) nombre de laforme

$$a_0+\alpha_1 a_1+\alpha_1^2 a_2+\ldots+\alpha_1^{k-1}a_{k-1}\ (a_i \text{ défini mod.p}),$$

α_1 zéro du polynôme (1). [....] Le polynôme, à coefficients entiers (rationnels), définis mod p.

$$a(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - \ldots - a_0,$$

est (dans les corps des classes d'entiers, mod p) irréductible et il divise le polynôme (1).. On en conclut que l'idéal P est défini par les générateurs (que H. Poincaré appelle la trame)

$[p\ a(\alpha_1)]$,

On voit aussi aisément sous quelle forme on peut mettre la matrice *S* ; par exemple, pour $m = 4$ et $k = 2$ [p. 417, formule (30)]

$$S = \begin{Vmatrix} p & 0 & -a_0 & 0 \\ 0 & p & a_1 & -a_0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

Le calcul de ces idéaux : exponentiation, multiplication, décomposition d'un entier (rationnel) en produit de facteurs premiers, peut se faire en utilisant, soir les générateurs, soit les matrices *S*, par des calculs analogues à ceux qui sont indiqués par H. Poincaré et qu'on peut systématiser. [...]

Ceci acquis, le problème est de chercher si un entier (rationnel) est représentable par une forme binaire équivalente arithmétiquement à

Sur la représentation des nombres par les formes [Poincaré, 1950, 400-406].

Texte de Poincaré. — Notes de Châtelet.

Etant donnée une forme, c'est-à-dire un polynôme, homogène par rapport à plusieurs variables, et à coefficients entiers, donner à ces variables des valeurs entières, telles que la forme devienne égale à un nombre entier donné.

Représenter un nombre entier par la forme

$$\Psi = \text{norme } (x_0+\alpha_1 x_1 + a_1^2 x_2+\ldots+a_1^{m-1}x_{m-1})$$

qui contient m indéterminées $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$

[...]

Le problème est donc ramené au suivant :

Substituer à la place de $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ *des nombres entiers, tels que Ψ devienne égal à un nombre donné.*

où α_i sont des entiers et

$$x_0+\alpha_1 x_1 + a_1^2 x_2+\ldots+a_1^{m-1}x_{m-1}$$

envisagé comme un entier complexe.

[...]

Le problème est donc ramené aux deux questions suivantes :

1° Former tous les idéaux de normes donnée ;

2° Reconnaître si deux formes décomposables en facteurs linéaires sont équivalentes.(1)

(1)
Ce deuxième problème est équivalent à celui de la recherche des unités complexes dans l'ordre des entiers considéré.

La méthode de réduction continuelle d'Hermite (appliquée avec une forme quadratique, définie, ou avec tout autre mode de réduction d'une matrice déterminée) permet d'obtenir, au moins théoriquement, ces unités.

Cette construction reste cependant plus théorique que pratique (*Voir* cependant pour le troisième ordre. A. Châtelet, Ann. EC. Norm. Sup. 1911).

Un *module* est un système de nombres complexes

$$x^{(1)}m_1+ x^{(2)}m_2+\ldots+x^{(n)}m_n,$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_n$ peuvent prendre toutes les valeurs entières, positives ou négatives. Nous le représenterons par la notation (1)

$$(2)\quad \begin{vmatrix} x_0^{(1)} & x_0^{(2)} & \ldots & x_0^{(n)} \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m+1}^{(1)} & x_{m+1}^{(2)} & \ldots & x_{m+}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Si $n=m$, la norme de ce module est la valeur de l'expression (2) considérée comme un déterminant.

Un idéal est un module tel que $n=m$, et que le produit d'un nombre complexe quelconque appartenant au module, par un nombre entier complexe quelconque, appartienne également au module.

(1)
Cette matrice définit *n* entiers algébriques, à partir d'une base constituée par les *m* premières puissances de α. Ces *n* entiers définissent à leur tour, une base du module dont les nombres sont alors représenté par

$$\begin{Vmatrix} 1 & \alpha & \ldots & \alpha^{m-1} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} x_0^{(1)} & x_0^{(2)} & \ldots & x_0^{(n)} \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m+1}^{(1)} & x_{m+1}^{(2)} & \ldots & x_{m+}^{(n)} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} m_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ m_n \end{Vmatrix}$$

$$\Phi(x,y) = \Pi(x+\alpha_i y)$$

(α_i entiers complexes conjugués ; *i* de 1 à *m*) ; une méthode peut être de décomposer l'entier *N* en un produit d'idéaux premiers dans l'anneau 'd'entiers, défini par tous les α_i, puis d'utiliser cette décomposition pour chercher si *N* est la norme d'un idéal principal [....]. Ce procédé, comme le reconnaît lui-même H. Poincaré, est insuffisant, il s'appliquerait déjà mieux à la représentation d'une forme décomposable, de m variables. Une solution plus précise du problème serait sans doute fournie par une étude plus systématique des *classes* d'idéaux, qui peut, elle-même, être rattachée à la *réduction des matrices*.

On remarquera que le travail de H. Poincaré remonte au moins à 18881, alors que l'exposé *français* de Dedekind sur l'arithmétique des entiers algébriques (le seul que H. Poincaré semble avoir connu) est de 1877, et qu'il est resté ensuite pendant plus de 30 ans sans avoir inspiré en France de recherche d'une certaine importance.

Formation des idéaux.

Les nombres complexes $x^{(1)}, x^{(2)},\ldots,x^{(n)}$ forment ce que M. Dedekind appelle la base de ce module. [...] Il est clair qu'on pourrait donner au module une autre base, et par conséquent l'exprimer d'une infinité de manières sous la forme (2). On peut, par exemple, dans le tableau (2), ajouter à une colonne quelconque une autre colonne multipliée par un entier constant, ou bien encore supprimer une colonne entièrement formée de zéros.
On arrivera, à ramener l'expression du module à la forme simple (1)

$$(8)\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix}$$

J'ai écrit le Tableau (8) comme si *m* était égale à 4. Il m'arrivera fréquemment, quand j'écrirai l'expression d'un module, de donner à *m* une valeur particulière, afin de mieux me faire entendre. Mais il restera entendu que ce que je dirai sera vrai pour toute valeur de *m*.

Note de Châtelet

(1) Les changements, ainsi définis, sont équivalents au produit, à droite, dela matrice (2) des $x_i^{(j)}$ par une matrice unimodulaire. La *forme simple* a déjà été signalée sous le nom de *forme réduite de Hermite* (Œuvres, t.1, 166). On peut encore y réduire

a_2, a_3, a_4 (mod. a_1) ; b_3, b_4 (mod. b_2) ; c_4 (mod c_3).

Je dirai qu'un idéal est *simple* si le dernier chiffre significatif de chaque colonne, sauf la première, est l'unité ; par exemple, l'idéal suivant

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

est simple (1).

(1) La condition nécessaire précédente n'entraîne pas cette forme, mais seulement

$$A = \begin{Vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' & a_4' \\ 0 & 1 & b_3' & b_4' \\ 0 & 0 & 1 & c_4' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' & a_4' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \times S,$$

S unimodulaire. Un raisonnement complémentaire, permet de constater qe

$$a_3' = a_2'^2,\ a_4' = a_2'^3 \ (\text{mod. } a_1'),$$

d'où les formes 'équivalentes à droite) :

$$A = \begin{Vmatrix} a & -b & b^2 & b^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \times S' = \begin{Vmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \times S'',$$

S', *S''* unimodulaires.

Chapitre 9.

Une dynamique de va-et-vient entre enseignement et recherche.

Le développement de la théorie des matrices canoniques (1914-1945).

INTRODUCTION.

Les nombreux traités d'algèbre publiés dans les années trente du XX^e siècle désignent sous le nom de théorème de Jordan de la décomposition matricielle un résultat au cœur d'une nouvelle théorie, la "théorie des matrices canoniques" [Turnbul et Aiken, 1932]. La construction de la théorie des matrices canoniques entre 1915 et 1930 est indissociable d'une évolution de l'identité du théorème de Jordan impulsée par l'association de ce théorème à la représentation matricielle. Les théorèmes de décompositions matricielles énoncés dans les années trente sont inexistants au début du siècle, ils représentent la principale nouveauté de la théorie des matrices canoniques et indiquent que la constitution de cette théorie est indissociable de la nouvelle capacité de la représentation matricielle à supporter une méthode de décomposition. Ce chapitre aborde l'histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle dans le cadre de la constitution d'une théorie fondée sur un nouveau caractère opératoire donné à la représentation matricielle.

La forme canonique de Jordan est énoncée sous forme matricielle dans tous les traités de théorie des matrices des années trente. Par contraste, cette même forme canonique est absente des traités d'algèbre publiés au début du siècle. Ces derniers traités définissent le plus souvent, sous le nom de forme canonique, une forme diagonale [Netto, 1896], [Châtelet, 1913] ou triangulaire [Weber, 1899], [Hilton, 1909]. Le problème suscité par l'occurrence de racines distinctes est mentionné mais le plus souvent écarté comme relevant d'un "problème compliqué" et dépassant le cadre de l'exposé :

> Ensembles abéliens de tableaux.
>
> On peut se proposer de former des ensembles de tableaux où la *multiplication soit commutative.* La recherche de tous ces ensembles, que nous appellerons, pour abréger, *abéliens*, est un problème compliqué ; je me contenterai d'indiquer ici une catégorie très étendue de tels ensembles. Une première solution nous serait donnée par l'ensemble des systèmes simples ; une autre, plus générale, par les tableaux où tous les termes, sauf ceux de la diagonale principale, sont nuls, mais les termes non nuls n'étant plus nécessairement égaux. Par exemple,
>
> $$[\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n] = \begin{Vmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{Vmatrix}$$
>
> La notation adoptée est évidente : nous dirons qu'un tel tableau est élémentaire ou canonique.
>
> On montre que "en général" les ensembles abéliens sont formés de tableaux canoniques *E* et de PEP^{-1}. [...] Montrons d'abord que tout tableau *A* peut être, mis, en général, sous la forme précédente. C'est ce qui résulte d'un calcul bien

ENCART 1.

Méthodes de décompositions des tableaux dans les
L*eçons de la théorie des nombres* de Châtelet.

Châtelet distingue la notion de tableau – "système de nombres rangés en carré" – de la notion de matrice proche de la notion originelle de Sylvester de "tableaux rectangulaires dont on peut déduire des tableaux carrés par suppression de lignes ou de colonnes". Cette distinction tient à ce que les deux notions s'ancrent dans des développements historiques différents présentés aux chapitres 4 et 8 . Pour la notion de tableaux les références renvoient à un corpus de théorie des nombres et regroupent les noms d'Hermite, Minkowski, Kronecker, Jacobi, Dirichlet, Dedekind, Jordan, Smith et Hurwitz.

> 5. Un tableau dont tous les termes sont des entiers réels et dont le déterminant est égal à ±1 est dit unimodulaire (j'ai cru pouvoir attribuer sans inconvénient aux tableaux ce qualificatif des substitutions) ; il est dit modulaire si le déterminant est égal à + 1. [...]
>
> Deux tableaux *A* et *B* sont dits équivalent si l'un est le produit à gauche de l'autre par un tableau unimodulaire — (proprement équivalents, si le tableau est modulaire)
>
> $$A = \Sigma B,\ \Delta(\Sigma) = \pm 1$$
>
> La propriété est réciproque ; le système de formes, la forme et la fonction d'Hermite associés à *A* et *B* sont équivalents au sens ordinaire du mot. Cette notion de l'équivalence, transportée ainsi de la théorie des formes, a introduite pour la première fois par Hermite dans son célèbre Mémoire sur la transformation des fonctions abéliennes. Elle a été reprise par M. Jordan qui a étudié aussi le produit simultané à droite et à gauche d'un tableau par des tableaux modulaires. [...] Pour chercher si deux tableaux sont équivalents ou proprement équivalents, il y a lieu de distinguer, dans un système ou une classe, des tableaux réduits analogues aux formes ou aux suites de formes réduites imaginées par Gauss et Hermite. [...] Il y a souvent lieu, en Arithmétique supérieure, d'utiliser des résultats de l'algèbre (ou plus exactement du calcul algébrique), notamment de la théorie des formes et substitutions linéaires. Nous allons d'abord rappeler brièvement quelques principes de cette théorie et indiquer en même temps les notations que nous utiliserons dans la suite. Un système de *n* formes linéaires indépendantes de *n* variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$
>
> $$\xi_i = a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + \ldots + a_n^i x_n \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$
>
> ou encore la substitution représentée par les mêmes formules (ξ anciennes variables, *x* nouvelles), est complètement déterminé quand on se donne les coefficients ; pour rappeler leur place respective dans les formes, on a coutume de les ranger en un tableau carré
>
> $$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^1 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{Vmatrix}$$
>
> (les coefficients le $i^{ème}$ *forme* occupant la $i^{ème}$ *colonne*).
>
> Il y a souvent avantage à raisonner directement sur ce tableau, auquel on attribue ainsi une existence indépendante. [...] Nous désignerons donc un tel système de n^2 nombres par une seule lettre *A* et nous supposerons, sauf mention du contraire, que le déterminant $\Delta(A)$ formé par les n^2 nombres n'est pas nul ; le tableau sera dit alors *d'ordre* ou de *rang n.* Le système de formes, la substitution (1) seront dits *associés* au tableau ; leur donnée entraîne celle de *A* et réciproquement [pour cette réciproque, on conçoit la nécessité de l'hypothèse $\Delta(A)$ ý 0].[Chatelet, 1913, 1-2]

La méthode de décomposition des tableaux en matrices est associée à une représentation géométrique de décomposition d'un espace en sous espaces :

> En adoptant une définition de la théorie des vecteurs, nous appellerons *somme* et *différence* de deux points $(p_1, \ldots p_n)$, $(q_1, \ldots, q_n)$ les points $(p_1+q_1, \ldots, p_n+q_n)$, $(p_1-q_1, \ldots, p_n-q_n)$ .C'est une notion invariante pour les changements de coordonnées envisagés ; on voit, pour cette invariance, la nécessité de ne point changer d'origine. Enfin, en étendant la notion d'équation de plan et d'équations de droite de l'espace à trois dimensions, nous appellerons *sous-espace linéaire de dimension m, (m < n)* l'ensemble des points vérifiant les *n - m* équations

connu (on le trouve notamment dans le *Traité des substitutions* de M. Jordan) sur la réduction d'une substitution à sa forme canonique. [...]
Pour la discussion du cas général, je renvoie au *Traité* de M. Jordan ou à un Mémoire de H. Poincaré *(Journal de l'Ecole Polytechnique,* 1881) ou encore à l'article de MM. Meyer et Drach sur les invariants *(Encyclopédie,* t. I, vol. II). [Châtelet, 1913, 5].

Comment la forme de Jordan passe-t-elle du statut de "problème compliqué" au début du siècle à la "forme simple" énoncée par tous les traités des années trente ? L'une des nouveautés de la théorie des matrices canoniques des années trente est dans ce passage de la forme de Jordan dans l'enseignement. Une caractéristique forte de la théorie des matrices des années trente est son ambition unificatrice. Formes bilinéaires, formes quadratiques, équations différentielles, modules, anneaux, espaces vectoriels sont des notions distinctes mais toutes susceptibles d'une représentation matricielle et pour cette raison présentées au sein d'une même théorie unificatrice. La théorie des matrices canoniques est une réorganisation du savoir mathématique par un idéal d'unification, cet idéal renvoie au contexte plus général de recherches d'unité, d'explicitations d'interdépendances des domaines divisant le champ mathématique. La recherche d'une unité des mathématiques est une ambition caractéristique du début du XX^{e} siècle. Elle est explicite dans les discours de nombreux savants comme Hilbert ou Hardy, c'est aussi une des ambitions des sociétés mathématiques nationales et internationales [Dhombres, 2004, 92]. De nouveaux concepts, plus simples et plus effectifs permettent de réorganiser le savoir mathématiques en de vastes édifices conceptuels dans le cadre de l'essor de l'"algèbre abstraite" [Mac Lane, 1975, 3], du raisonnement axiomatique [Moore, 1995] et des structures [Corry, 1996]. La réorganisation du champ disciplinaire de l'algèbre dans les années 1900 à 1930 n'est cependant pas simplement la conséquence de l'apparition de nouvelles notions. Le rôle de l'enseignement mérite notamment un examen approfondi. Pour de Séguier et Châtelet, les matrices permettent de mettre en évidence les relations, analogies, unifications entre des théories distinctes (chapitre 8). Elles acquièrent par conséquent un rôle essentiel dans les traités d'enseignement dont l'ambition est de mettre " le plus possible en évidence les relations mutuelles des faits et ce qui m'a paru leur véritable raison d'être" [Châtelet, 1913].

La méthodologie suivie dans ce chapitre est de ne pas dissocier recherche et enseignement. Ce choix méthodologique s'appuie sur des revendications explicites d'auteurs de la période 1900-1930. Il est précisé dans cette introduction par l'exemple des *Leçons de théorie des nombres* de Châtelet [1913]. La volonté de "rassembler sous un même point de vue certains résultats classiques dans la théorie des nombres" [Picard, 1911] est une des ambitions de la thèse de Châtelet consacrée au calcul des tableaux. Mais cette ambition ne semble pas suffire à ce que l'on attend d'un mathématicien, à savoir être "créateur" en présentant des résultats "qui lui sont propres". C'est ce qui ressort d'une critique émise par Picard dans son rapport sur la thèse de Châtelet:

$$u_i^1 p_1 + u_i^2 p_2 + \ldots + u_i^n p_n = v_i \; (i = 1,2,\ldots,n-m) \;;$$

les premiers membres sont des formes linéaires indépendantes, en outre les coefficients des coordonnées imaginaires conjuguées sont aussi imaginaires conjugués ; nous continuerons d'appeler *droite* un sous-espace de dimension 1. La définition des sous-espaces est indépendante des coordonnées choisies, absolues ou relatives ; en passant d'un système à l'autre, les coefficients des équations se transforment par une substitution liée (1) simplement à *T*.

[Châtelet, 1913, 15-17].

Les procédé de décompositions des tableaux en sous matrices donnent une méthode générale s'appliquant à la caractérisation des modules et des groupes :

La question des tableaux ou des matrices est liée à celle des *sous-modules ;* nous appellerons ainsi tout module B dont les points font tous partie du module donné < A. Si A est type, il en est de même de tout sous-module B, car B n'a *a fortiori* qu'un nombre fini de points au voisinage de l'origine. Si B est de même dimension que A, sa base est un tableau ou une matrice de A, donc de la forme *SA.* S'il est de dimension $m_1 < m$, sa base est de la même forme, mais *S* est une matrice à termes entiers de type (m_1, m) ; la condition Δ *(S) ý 0* est remplacée cette fois par celle que *S* soit de rang m_1 ; on le vérifie sans difficulté en remarquant que les lignes de *S* sont les coordonnées relatives de certains points du sous-module par rapport à la matrice *A*.

Ces notions permettent d'expliciter la marche suivie dans la démonstration du théorème fondamental et en même temps de préciser la latitude possible dans le choix d'une base. Nous avons choisi d'abord une matrice arbitraire *M*. (de rang *m)* de *A* et envisagé les points des sous-espaces de dimension 1, *2, ..., m* définis par $OA_1, OA_1A_2, \ldots$ Les points de A situés dans ces sous-espaces forment des sous-modules types $A_1, A_2, \ldots$; chacun d'eux contient le précédent et le dernier A_m est identique à A. Ceci posé, examinons comment on obtient les m_1 premières lignes de la base $B \times M$; il suffît de multiplier la matrice formée des m_1 premières lignes de *B* par *M ;* mais cette matrice a ses $m-m_1$ dernières colonnes formées de zéro ; il suffît donc, finalement, de multiplier le mineur B_{m1} formé des m_1 premières lignes et colonnes de *B* par la matrice M_{m1} formée des m_1 premières lignes de *M*. D'autre part, dans les raisonnements faits pour déterminer les lignes de B_{m1} on ne s'est servi que des points de A appartenant au sous-espace défini par les lignes de M_{M1}, c'est-à-dire des points de A_{ml}. On peut donc recommencer sur $B_{M1} \times M_{m1}$ le raisonnement fait sur $B \times M$, et cette matrice est une base de A_{m1}. Donc, la marche suivie consiste à déterminer successivement des bases des sous-modules $A_1, A_2, \ldots, A_m$. L'intérêt de cette méthode est que chacune de ces bases est obtenue de façon unique en ajoutant une ligne convenablement déterminée à la précédente (1). On peut encore exprimer ce résultat : *on peut prendre pour m_j premières lignes, et par suite pour* m_1 *lignes quelconques, d'une base, m_1 points du module formant une matrice de rang m_1, pourvu que cette matrice soit la base du sous-module de dimension m_1 formé par les points du module contenus dans le sous-espace quelle définit.*

(1) On peut rapprocher cette manière de faire de la suite de composition d'un groupe.

[...] Les modules types sont, comme nous l'avons dit, les plus simples et tout autre module M de dimension *m* admet comme sous-modules les modules types ayant pour bases les tableaux le M ; il est donc nécessaire d'avoir plus de *m* points pour constituer M par seule addition et soustraction. On pourrait citer après les modules types les modules de dimension *m,* qui peuvent se construire à partir d'un nombre fini *p* de points, *p* étant supposé supérieur à *m.* Soit

$$(a_1^i, a_2^i, \ldots, a_n^i) \; (i = 1,2,\ldots,p)$$

Un tel module, que nous appellerons *fini et d'ordre p, est isomorphe holoédriquement à un module type P de dimension p ;* on peut, en supposant par exemple que la matrice formé par les *m* premiers points A_i est de rang *m*, prendre comme base de P la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ .. & .. & \ldots & \ldots & . & . & \ldots & . \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1^{m+1} & a_2^{m+1} & \ldots & a_n^{m+1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & . & \ldots & . \\ a_1^p & a_2^p & \ldots & a_n^p & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix},$$

de type *(p, n+p-m)* et de rang *p*. [Châtelet, 1913, 37].

Rapport de Picard (29 janvier 1911) sur la thèse de A. Châtelet, *Sur certains ensembles de tableaux et leur application à la théorie des nombres*, soutenue le 27 avril 1911.

M. Châtelet s'est efforcé de rassembler sous un même point de vue certains résultats classiques dans la théorie des nombres et d'autres qui lui sont propres. Il y parvient en faisant une étude systématique des tableaux ou des systèmes linéaires de *n* variables. [...] On avait déjà, au moins dans des cas particuliers (Hermite) rattaché cette question à la réduction des formes quadratiques [...] la comparaison entre les résultats donnés par Hermite et Minkowski termine l'étude des tableaux du second degré [...] .

En résumé, le mémoire de M. Châtelet est un très bon travail, qui montre tout d'abord une connaissance approfondie des théories les plus élevées de l'arithmétique supérieure. La forme y est personnelle. Pour les résultats, il est moins facile de caractériser l'œuvre de l'auteur ; on y trouve quelques théorèmes connus, ou des généralisations assez faciles de résultats connus, mais rattachés ingénieusement à des principes communs. Telle que la présente M. Châtelet, la réduction des tableaux lui est personnelle, et par suite un certain nombre de conséquences de cette réduction. [...] Nous regardons donc que le mémoire de M. Châtelet fait faire un intéressant progrès à cette partie de la théorie des nombres, où Hermite et après lui Minkowski ont été des créateurs.

[Picard, 1911, 409-410].

Pour Picard, si la thèse de Châtelet est un "très bon travail", il n'est pas facile d'en caractériser les résultats car "on y trouve quelques théorèmes connus, ou des généralisations assez faciles de résultats connus, mais rattachés ingénieusement à des principes communs". Si l'apport "personnel" de Châtelet, la "réduction des tableaux", permet une réorganisation du savoir mathématique par la mise en évidence de notions et méthodes unificatrices, il ne va pas de soi, en 1911, qu'un tel travail est une œuvre de mathématicien "créateur". Les efforts de Châtelet visant à convaincre de l'originalité de ses travaux conduisent Picard à communiquer une précision sur son rapport de thèse le 27 avril 1911:

Il nous a apporté de très intéressant compléments en nous présentant des dessins montrant l'enchaînement des tableaux réduits dans divers exemples numériques. Nous y attachons une grande importance car ils montrent que la méthode générale de réduction de M. Châtelet avec ses tableaux n'est pas d'un intérêt purement théorique mais est susceptible d'être réellement appliquée, et cela semble-t-il, avec un minimum de calculs par rapport à d'autres méthodes proposées [...] la thèse de M. Châtelet me paraît d'un très réel intérêt ; elle marquera dans la théorie des nombres, théorie trop peu cultivée en France.

[Picard, 1911, 410].

Pour Châtelet, les tableaux ne sont pas simplement une notation commode, ils explicitent une "idée "générale" de réduction qui se présente comme une méthode essentielle en théorie des nombres comme nous l'avons vu au chapitre 8 :

J'ai adopté les définitions ordinaires des opérations qui correspondent aux opérations sur les substitutions. J'ai repris une définition de l'équivalence, indiquée pour la première fois par Hermite dans son célèbre Mémoire sur la transformation des fonctions abéliennes, et reprise ensuite par M. Jordan, puis par d'autres auteurs, qui en ont étudié également une généralisation. La définition primitive d'Hermite m'a paru convenir, beaucoup mieux que ses généralisations, au but arithmétique poursuivi.
La méthode indiquée précédemment m'a permis alors de donner une définition générale de l'ensemble des tableaux réduits équivalents à un tableau donné, le mot réduit ayant la même signification que dans la théorie arithmétique des formes (Chap. I, § I et 4).
3. Quoique peut-être intéressante en soi, cette notion des tableaux réduits introduite a priori pourrait sembler inutile, si elle ne se rattachait à des sujets connus. J'ai essayé de justifier cette introduction le plus complètement possible dans le cas des tableaux du deuxième ordre et j'ai montré les identités ou les relations que présentent les divers ensembles de tableaux réduits [...] avec l'algorithme des fractions continues, la réduction continuelle d'Hermite, la chaîne des parallélogrammes extrêmes ou la suite des solutions primitives de Minkowski, etc. [...] Au point de vue général, l'introduction de cette notion m'a paru aussi justifiée par son application relativement simple au cas des nombres algébriques. Les tableaux réduits se déduisent alors d'un nombre fini d'entre eux, ce qui constitue un algorithme périodique (Chap. I, § 5).
[Châtelet, 1911, 105].

Les tableaux sont donc associés à une méthode qui vaut par sa simplicité, son efficacité, sa variété d'applications et surtout sa capacité à unifier par un "procédé de calcul unique" (encart 1). Pour Châtelet, ces qualités justifient de voir une nouveauté dans le calcul des tableaux :

Sans doute il n'y a pas là un fait nouveau, et, ainsi que l'a fait remarquer M. Poincaré dans la Préface des Oeuvres de Laguerre, l'introduction des tableaux dans cette question, comme dans beaucoup d'autres, ne constitue à proprement parler qu'une notation nouvelle. Je me permettrai de faire remarquer cependant que cette notation conduit à des procédés de calcul uniques - tandis qu'il n'en est pas de même des procédés basés plus ou moins sur les fonctions symétriques - et, en général, conduit au minimum de calculs.
[Châtelet, 1911, 105].

L'originalité de ce que Châtelet désigne comme des procédés de calcul et Picard comme des dessins provient d'une méthode de décomposition. Châtelet établit une distinction entre tableaux et matrices. Les matrices sont définies comme des sous tableaux sur lesquelles il est possible d'opérer et qui sous tendent une méthode de décomposition générale s'appliquant à la théorie des formes, aux "sous espaces linéaires de dimension *m*" et aux "sous modules":

Donnons, en terminant, quelques notions sur les *matrices.* Nous appellerons ainsi un tableau rectangulaire ou carré de nombres, d'où l'on peut déduire, par suppression de lignes et de colonnes, des tableaux carrés. On pourra distinguer dans une matrice : le *type (m, p), m* lignes et *p* colonnes ; le *rang r*, ordre du tableau d'ordre le plus élevé (à déterminant non nul) qu'on peut en déduire. Le -rang est au plus égal au plus petit des deux nombres *m, p.* Pour qu'on puisse

étendre à deux matrices la définition de la somme, il faut et il suffit qu'elles soient de même type. Pour étendre la définition du produit, il suffit que le nombre de colonnes de la première (matrice de gauche) soit égal au nombre de lignes de la deuxième : $p = m$. L'extension de la règle est alors immédiate, on obtient une matrice du type (m, p). La multiplication ainsi définie est encore associative ; on le vérifie aisément, c'est sa seule propriété utilisée, en général.
Cette définition du produit permet, par exemple, de représenter la substitution (1) par l'égalité

$$\| \xi_1 \, \xi_2 \ldots \xi_n \| = \| x_1 \, x_2 \, .. x_n \| \times A$$

A désigne le tableau (2) associé à la substitution. Nous écrirons les matrices et les tableaux, encadrées de deux doubles barres verticales, pour les distinguer des déterminants qui sont des *nombres.*
[Chatelelet, 1913, 4].

Au début du siècle, dans un contexte d'accroissement de la population étudiant, du nombre de chaires et de laboratoires [Telkes, 1991, 451], de jeunes enseignants chercheurs comme Autonne, de Séguier ou Châtelet prêtent aux matrices des vertus pédagogiques qui leur permettent d'exposer leurs recherches les plus récentes dans des traités d'enseignement. Dans le cadre de ces traités d'enseignement, ils élaborent une nouvelle opératoire de la représentation matricielle qui supporte une méthode générale et unificatrice de réduction ou décomposition. Ces préoccupations pédagogiques interrogent directement la recherche sur des questions nouvelles et impulsent le développement de la théorie des matrices canoniques. La construction de la théorie des matrices canoniques est le produit d'une dynamique de va-et-vient entre enseignement et recherche.

ENCART 2.

La "forme la plus simple" des substitutions et la construction des " groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire quaternaire régulier," [Autonne, 1900]

Dans sa communication au congrès international des mathématiciens de 1900, Autonne se propose de construire tous les groupes linéaires réguliers d'ordre fini :

Désignons par la notation (a_{ij}) ou

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; i,j = 1,2,\dots,.$$

la substitution linéaire *n*-aire

$$A_n = |x_i \; a_{ij}x_j|,$$

où le déterminant des constantes a_{ij} est ý 0.

Nommons S_n un groupe de A_n et P_n le problème qui consiste à construire tous les S_n d'ordre fini P_2 a été depuis longtemps résolu par MM. Klein, Jordan et Gordan [...] M Jordan a donné une Méthode générale pour la résolution de P_n et à montré que tous les S_n d'ordre fini appartenaient à un nombre limité de types. L'application de ces procédés généraux a permis de poursuivre assez loin la construction effective des S_4. Toutefois, M. Jordan s'est arrêté devant une interminable discussion arithmétique où les hypothèses à examiner se présentaient par milliers.

Nous croyons que le problème P_5 général continuera longtemps encore à défier les efforts de géomètres.

[...]

Toute A qui admet pour invariant l'expression

$$x_2dx_1 - x_1dx_1 - x_4dx_3 + x_3dx_4$$

sera *régulière* par définition. Les régulières forment un groupe *régulier.* Je m'occuperai de construire les *S* réguliers d'ordre fini.

Les régulières ont été introduites par moi dans le *Mémoire sur la théorie des équations différentielles du premier ordre et du premier degré*, présenté en 1890 à l'Académie des Sciences de Paris [...]. Plusieurs résultats relatifs aux régulières, dus à Lie ou à Knothe, se trouvent aussi dans le troisième Volume (p.258 et suivantes) de la *Theorie der Transformationsgruppen,* 1893, de Lie-Engel.

L'interprétation géométrique des régulières est simple quand on prend les *x* pour les coordonnées homogènes d'un point de l'espace.

Nommons *capital* un certain complexe linéaire et *capitale* toute droite complexe. *Le groupe régulier permute transitivement les* ω^3 *capitales.*

[Autonne, 1900, 155].

I. LA FORME TYPIQUE DES MATRICES D'AUTONNE (1900-1913).

1. La méthode de décomposition des tableaux d'Autonne.

Léon Cesar Antonne, dit Autonne (1859-1916), polytechnicien (1878), est ingénieur des Ponts et Chaussées et professeur de mathématiques à la faculté des sciences de Lyon ([1]). A partir de 1901, Autonne publie une série de traités développant l'utilisation d'invariants bilinéaires, quadratiques ou hermitiens pour l'étude des groupes ([2]). Le mode de publication des travaux d'Autonne est toujours le même et peut être illustré par l'exemple du traité intitulé *Sur la décomposition d'une substitution linéaire réelle et orhogonale en un produit d'inversions* [1903c]. De nouveaux résultats sont d'abord communiqués sous la forme d'une note aux *Comptes Rendus* [1903a] et d'un mémoire dans les *Nouvelles Annales* ("Sur la canonisation des formes bilinéaires," [1903b]). Ces résultats sont incorporés presque immédiatement dans un traité d'enseignement publié d'abord dans les *Annales de l'université de Lyon* (éditeur A. Rey), puis chez Gauthier-Villars. Ce qui permet à Autonne d'exposer ses recherches les plus récentes dans des traités d'enseignement, ce sont les longs préliminaires qu'il consacre systématiquement à des exposés détaillés de la théorie des matrices. Autonne prête aux matrices la vertu pédagogique de permettre un transfert quasi-immédiat d'énoncés mathématiques obtenus par la recherche à des traités d'enseignement.

Par le nombre et la popularité des traités d'enseignement qu'il publie entre 1900 et 1912, Autonne apparaît comme le premier responsable de la popularisation de la théorie des matrices en France ([3]). Les traités d'Autonne se réduisent-ils à exposer en français une synthèse de recherches essentiellement allemandes, à la manière de ce nouveau type de thèse qui se développe à partir des années 1880 et "dont l'objet est d'exposer les théories étrangères jugées particulièrement importantes mais méconnues" [Gispert, 1991,81] ? Au contraire, les exposés de la théorie des matrices d'Autonne

[1] Ingénieur des ponts et chaussés, Autonne est chargé des travaux de chemins de fer de la compagnie PLM, puis de la navigation sur le Rhône (Notice de l'école polytechnique, X1878).

[2] Suivant les travaux de Poincaré, de Moore et Maschke, Autonne utilise en effet des formes bilinéaires, hermitiennes et quadratiques comme invariants de groupes de substitutions [Autonne, 1902a, 641]. Le théorème des diviseurs élémentaires est utilisé pour l'étude des groupes de substitutions régulières [Autonne, 1903a, 1186]. Consulter *Sur l'hermitien* [1901], *Sur la décomposition d'une substitution linéaire réelle et orhogonale en un produit d'inversions* [1903], *Sur les formes mixtes* [1905], *Sur les groupes de matrices non invertibles* [1909], *Sur les matrices linéaires échangeables à une matrice donnée* [1910], et *Sur les matrices hypohermitiennes et sur les matrices unitaires* [1913].

[3] Autonne est le premier auteur à publier sur les matrices en France et reste le seul entre 1901 et 1907.

L'énumération des groupes réguliers décomposables d'ordre fini passe par l'utilisation de la "forme la plus simple des substitutions" qui associe 4 types de groupes à 4 formes canoniques :

Voici maintenant la théorie algébrique des régulières $\mathcal{A} = (a_{ij})$:

I.

Si l'on pose

$$(ij) = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}, \qquad (ij)' = \begin{vmatrix} a_{3i} & a_{3j} \\ a_{4i} & a_{4j} \end{vmatrix},$$

les conditions de régularité sont

$$\begin{matrix} (12)' = (34), & (23)' = (23), & (41)' = (41) \\ (34)' = (12), & (31)' = (31), & (42)' = (42) \end{matrix} \qquad (12) - (34) = 1.$$

II.

Si $\mathcal{A}' = (a_{ji})$ est la *transposée* de la régulière $\mathcal{A} = (a_{ij})$, *on a*

$$\mathcal{A}'^{-1} = \varepsilon^{-1}\mathcal{A}\varepsilon,$$

où ε *est la régulière*

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3 \end{vmatrix}.$$

III.

Toute régulière d'ordre fini peut être régulierement mise sous forme canonique

$$|x_i \quad r_i x_i|, \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

avec

$$r_1 r_2 = r_3 r_4 = 1.$$

Les r sont, bien entendu, des racines de l'unité.

J'ai construit aussi les groupes réguliers d'ordre fini *décomposables*. Voici dans quel cas M. Jordan dit qu'un groupe n — aire est décomposable : les n variables, convenablement choisies, peuvent être réparties en systèmes T, T′, ..., tels que toute substitution du groupe remplace les variables du système T, par exemple, par des fonctions linéaires homomanifestent une nouveauté essentielle car ils réalisent la rencontre du calcul des tableaux (chapitre 8) et du calcul symbolique des formes bilinéaires ou des matrices (partie II).

> Avant de passer à l'analyse que constitue le corps du Mémoire, je me propose, dans ce préambule, de faire trois choses.
> Expliquer en détail et une fois pour toutes les définitions et notations, auxquelles je me conformerai rigoureusement dans la suite.
> Rappeler brièvement les résultats déjà connus sur lesquels je m'appuierai [...].
> 1° Considérons le *Tableau* constitué par *np* lettres
>
> $$a_{ji}\ [j = 1,2,\ldots,p\ ;\ i = 1,2,\ldots,n]$$
>
> disposées sur *p* lignes et *n* colonnes
>
> $$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{nj} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{pl} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{pn} \end{matrix} \right\| = [a_{ji}].$$
>
> [Autonne, 1903b, 6].

Les "définitions et notations", les "résultats déjà connus" qu'Autonne attribue à Weierstrass forment en réalité un apport original qui organise en une synthèse cohérente les notions et méthodes principales extraites de réseaux de recherches indépendants. Dans cette synthèse, la notion de matrice est indissociable de la construction d'une méthode de décomposition héritée des procédés de réductions caractéristiques de la tradition du calcul des tableaux (chapitre 8) :

> On aura quelquefois à décomposer un Tableau *A* en Tableau partiels formés en prenant seulement certaines lignes et certaines colonnes. On emploiera alors les notations, comme celle-ci dessous, qui se comprend de suite

A	A'	A''	…	…	$\}\ p_1$
B	B'	B''	…	…	$\}\ p'_1$
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
$\underbrace{\qquad}_{n_1}$	$\underbrace{\qquad}_{n'_1}$	$\underbrace{\qquad}_{n''_1}$			

$$n = n_1 + n'_1 + n''_1 + \ldots,$$

gènes des variables d'un autre système, tel que T'. Alors T et T' contiennent évidemment le même nombre de variables.

Voici l'énumération des groupes réguliers décomposables d'ordre fini. On a omis, pour abréger, quelques groupes holoédriquement isomorphes à des groupes de permutations entre quatre lettres. Il va sans dire que tous les groupes ci-dessous ont été régulièrement mis sous leur forme la plus simple.

Type I.

Régulières de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = 1,$$

les groupes P et Q dérivés des binaires

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

étant d'ordre fini.

Type II.

S s'obtient en combinant avec un sous-groupe $\mathfrak{A}$ du type I la régulière

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} = -1.$$

$\mathfrak{B}^2$ fait partie de $\mathfrak{A}$, lequel est permutable à $\mathfrak{B}$ et contient la moitié des substitutions de S. Nommons λ et μ les binaires

$$\lambda = \begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}, \qquad \mu = \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix},$$

et P et Q les groupes qui figurent dans $\mathfrak{A}$. On a

$$P = \mu^{-1} Q \mu, \qquad Q = \lambda^{-1} P \lambda.$$

$$p = p_1 + p'_1 + \ldots,$$

où AT est un Tableau à p_1 lignes et n_1 colonnes, où B'' est un Tableau à p'_1 lignes et n''_1 colonnes, etc.

[…] On réservera le nom de *matrice* aux Tableaux *carrés* où $p = n$. Une pareille matrice A sera n-aire (primaire, binaire, ternaire, quaternaire, quinaire, etc.) et aura l'*ordre n.* Le déterminant de la matrice A, à n^2 éléments, s'écrira $|A|$. […] Il est évident que tout Tableau peut être envisagé comme une matrice où plusieurs lignes, où plusieurs colonnes ne contiennent que des zéros.

[Autonne, 1903b, 7].

En expliquant de manière didactique comment former les sous matrices d'un tableau, Autonne élabore une méthode de décomposition qui, et c'est un héritage de la théorie des matrices que nous avons vu dans la partie II, donne les opérations symboliques sur les matrices extraites :

La matrice A *fournit* immédiatement la *forme bilinéaire* n-aire

$$A(x,y) = A(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_n) \ \Sigma a_{jk} y_j x_k$$

[…] La matrice A *fournit* aussi la *substitution linéaire* n-aire (ou collinéation si $|A|$ ý 0)

$$A = [\ldots] \, |x_j, \Sigma \, a_{jk} x_k|$$

On posera souvent

$$\Sigma a_{jk} x_k = A[x_j]$$

ce qui permet d'écrire, pour la substitution

$$A = |x_1, A[x_j]|$$

ou plus simplement encore et d'une façon symbolique

$$A = |x, \ A[x]|.$$

[…] Habituellement aucune ambigüité n'étant à craindre entre trois objets essentiellement différents je désignerai par la même lettre, A par exemple, soit une matrice, soit la forme bilinéaire, soit la substitution que A fournit.

[…]

13 °Les règles de la multiplication symbolique sont les mêmes pour les matrices et pour les formes bilinéaires.

14. Les deux *substitutions A* et *B* ont pour produit, au sens de M. Jordan, la substitution obtenue en effectuant, sur les *x, d'abord* la substitution *A*, *puis* la substitution B […]. La conclusion est la même qu'au 13°

[...] Donc *les formules de calcul symbolique fondées sur la multiplication symbolique sont susceptibles d'une triple interprétation, en matrices, en formes bilinéaires, en substitutions linéaires.*

Il sera en général indifférent de prendre une certaine des trois interprétations et inutile de la spécifier. D'habitude, dans les démonstration et raisonnements, le langage sera en *matrices.*

[Autonne, 1903b, 8-10].

Type III.

Régulières de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 & B & 0 \\ 0 & rD & 0 & rC \\ C & 0 & D & 0 \\ 0 & rB & 0 & rA \end{pmatrix}, \qquad r^{-1} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix},$$

où le groupe binaire

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est d'ordre fini.

Type IV.

S s'obtient en combinant avec un sous-groupe $\mathfrak{L}$ du type III la régulière unique

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & \beta \\ \rho\delta & 0 & \rho\gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta \\ \rho\beta & 0 & \rho\alpha & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho^{-1} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

ω^2 figure dans $\mathfrak{L}$. $\mathfrak{L}$ est permutable à ω et contient la moitié des substitutions de S.

Il est remarquable que, dans la structure des groupes réguliers décomposables d'ordre fini entrent des groupes binaires, *mais jamais ternaires.* Cette circonstance est particulièrement heureuse dans la construction, que j'ai abordée, des groupes réguliers indécomposables. En effet, d'une part, d'après la méthode générale de M. Jordan, la recherche des groupes indécomposables repose sur celle des décomposables et, d'autre part, les groupes ternaires sont plus compliqués que les binaires, tout en présentant, jusqu'à ce jour, certaines incertitudes dans leur énumération complète (1).

2. Articulation entre formes et invariants chez Autonne.

Les influences mêlées du calcul des tableaux et des matrices impliquent une nouvelle articulation de la tension formes canoniques - invariants dans les traités d'Autonne. Si, au premier abord, Autonne présente ses méthodes pour résoudre la question d'équivalence des faisceaux de matrices, comme inspirées du théorème de Weierstrass :

> Le problème de l'équivalence a complètement été résolu par Weierstrass. Je me bornerai à résumer l'exposé de Frobenius [...] Je traduirai *Elementartheiler* par *sucessif* (sous entendant : *facteur* ou *diviseur*). Je nommerai les différences
> α_{k-1}-α_k *exposants successifs*. Je dirai que les successifs [...] font connaître la *structure* du faisceau $\rho A+B$.
> 20° L'admirable théorème de Weierstrass peut alors se formuler ainsi :
> *L'identité de structure pour deux faisceaux est la condition nécessaire et suffisante de leur équivalence.*
> [Autonne, 1903b, 12-13].

En réalité, dans la droite ligne de la tradition du calcul des tableaux, Autonne cherche à obtenir une "matrice canonique", au sens donné par Poincaré de matrice diagonale:

> 22° Une matrice est canonique si elle a tous ses éléments nuls, excepté ceux de la diagonale principale Si une matrice A est semblable à une canonique A_0, A est *canonisable.* Alors $A = L^{-1}A_0L$ et la matrice L est une *canonisante* de A.
> [Autonne, 1903b, 14].

La recherche d'une classification des groupes de substitutions régulières en relation avec l'étude des "connexes linéaires dans l'espace à *n-1* dimensions" [Autonne, 1904] (voir plus loin et encart 2) suscite la recherche par Autonne d'une "forme typique" des matrices non canonisables. Pour cela, Autonne met en relation les matrices extraites d'un tableau à la suite d'invariants provenant de la décomposition polynomiale de l'équation caractéristique. Cette articulation formes- invariants se fonde sur une représentation géométrique du procédé de décomposition :

> On a, comme un sait, un point *fondamental x,* si *x* et *p[x]* coïncident. Une définition analogue donne les plans fondamentaux. Mettant à profit quelques indications données, d'après Weierstrass, par M. Frobenius, dans son *Mémoire* [1878] j'ai pu mettre *p* sous une expression typique simple, grâce à laquelle les points ou plans fondamentaux s'obtiennent par une règle générale facile. Je me propose de généraliser cette notion de point fondamental. Une droite d_m de degré *m* sera fondamentale pour la substitution linéaire *n*-aire *p*, si d_m est invariantes vis-à-vis de *p*. Autrement dit *p* ne fait que permuter entre eux les différents points de d_m. La construction des fondamentales d_m est le principal objet du présent travail.
> [Autonne, 1905b, 1].

ENCART 3.

"Sommaire raisonné" du traité "Sur les formes mixtes", Autonne [1905,13].

Généralités	[...] Le *connexe* est lieu des éléments pour lesquels s'évanouit une forme mixte. L'intersection de N_0 connexes, c'est-à-dire la totalité des éléments communs aux N_0 connexes, est une variété à $2N-3-N_0$ dimensions. Deux éléments infiniment voisins (x,u) et $(x+dx,\ u+du)$ sont en situation réunie si $\Sigma udx = \Sigma xdu = 0$. les deux conditions n'en font qu'une à cause de $$d\omega = \Sigma xdu + \Sigma udx = 0$$ Une variété est intégrante si deux éléments infiniment voisins quelconques sont toujours en situation réunie.
Première Partie Connexe Linéaire	Dans un espace à $n-1$ dimensions, le connexe A linéaire ou linéo-linéaire a pour équation $$A(x,u) = \Sigma_i\, a_{ij}u_ix_j = 0 \quad \{i,j = 1,2,\ldots,n\}$$ et pour ordre et classe l'unité.
Chapitre 1 Formes Typiques.	Un choix approprié de coordonnées ramène A à une forme typique simple.[...] Au successif $(\rho\text{-}l)^\lambda$ correspondent 1° une matrice partielle ou *composante* λ aire L 2° 2λ variables z_j et w_j, {j = 1,2,...,λ}, choisies parmi les $2n$ variables x_i et u_i. On a $$L(z,w) = (\Sigma zw + \Sigma_j\, w_j\lambda_{j+1}\,\chi(\lambda-j-1),$$ où $\chi(s) = 0$ ou 1, suivant que s est < 0 ou Ã 0. la forme typique est $$A\,(x\,;u) = \Sigma L(z,w),$$ Σ s'étendant aux diverses composantes.
Chapitre II Points et plans fondamentaux distincts ou confondus.	Est par définition *fondamental* tout point ξ (plan η) qui forme un élément du connexe A avec tout plan passant par ξ (tout point situé sur η). Chaque fondamental ξ ou η se rattache à une racine de D. [...] A chaque fondamental ξ correspond un entier K et une courbe unicursale C de degré $K-1$. [...]
Chapitre III Courbes χ et développables D	Les courbes de *coincidence principale*, introduites par Clebsch dans le connexe plan, N = 3, se généralisent, pour N quelconque, en deux sortes de figures (variétés à une dimension) χ et D, qui se correspondent dualistiquement. La portion de la courbe χ, afférente à la composante L, s'écrit $$\Phi z_j = e^{it}\frac{\delta^{j-1}\varphi}{\delta t^{j}},\ \varphi(l) = \sum_{r=0}^{r-\lambda-1} c_r\frac{t^r}{r!},$$ où t est une variable, c_t un paramètre constant arbitraire, Φ un facteur, le même pour toutes les composantes, à définir par la condition $\chi_0 = 1$.
Chapitre IV Applications	On construit, pour $N=4$, les onze types du connexe A, avec les fondamentaux ξ, les courbes C. Pour $N=5$, on se borne à énumérer les vingt-quatre formes typiques de A.

La généralisation de la notion de point fondamental aux droites, plans et espaces de plus haute dimension permet à Autonne de donner une signification géométrique aux matrices extraites d'un tableau ([4]):

> Prenons (terminologie de Frobenius aujourd'hui classique) la matrice n-aire $A = [a_{\alpha\beta}]$, $a_{\alpha\beta} = const.$ $\{\alpha, \beta = 1,2,\ldots,n\}$ et le connexe linéaire A ayant pour équation
>
> $$A(x\,;u) = \Sigma_{\alpha\beta}\, a_{\alpha\beta} u_\alpha x_\beta = 0$$
>
> Nommons $a, b, c,\ldots$ les racines *distinctes* de l'équation caractéristique ; soit
>
> $$\Delta(r) = (r-a)^{\alpha_1}(r-a)^{\alpha_2}\ldots(r-a)^{\alpha_{l-1}}(r-a)^{\beta_0}\ldots = \Pi(r-l)^{\lambda}$$
>
> $$(\alpha_1\ \tilde{A}\ \alpha_1\ \tilde{A}\ldots\tilde{A}\,\alpha_{k-1}\ \tilde{A}\,\beta_0\tilde{A}\ldots\tilde{A}\,);$$
>
> $$\Sigma\lambda = \alpha_0 + +..+ \alpha_{k-1} + \beta_0 + \ldots = n$$
>
> la fonction caractéristique décomposée en *Elementertheiler* (Weierstrass).
> Un choix approprié des coordonnées met en évidence les propriétés suivantes :
> Au facteur $(r-l)^{\lambda}$ de Δ correspondent :
> 1° une matrice A λ aire composante ;
> 2° 2λ variables z_j et w_j $\{ j = 1,2,\ldots,\lambda\}$ choisies parmi les $2n$ variables x et u.
> On a $A(z,w) = l\,\Sigma zw + w_1 z_2 + \ldots + w_{\lambda-1} z_\lambda$ et $A(x\,;u) = \Sigma A(x\,;w)$,où la sommation s'étend à toutes les composantes A. Les diverses A, où l est égal à une même racine a, formeront l'hypersystème (a). Dans chaque A, on nommera *paramètre fondamental* la variable z_1 et la variable w_λ.
> Il y a $\tilde{o}^{k-1}$ points fondamentaux ξ_a, fournis par la racine a. On les obtient par la règle suivante :
> 1° Dans chaque A, qui n'appartient pas à (a), annuler toutes les variables z ;
> 2° dans chaque Λ de (a), annuler toutes les z, excepté le paramètre fondamental
> 3° prendre arbitrairement les k paramètres fondamentaux [...].
> [Autonne, 1904, 1148].

Une décomposition de l'espace géométrique en sous espaces fondamentaux associés à la substitution considérée permet d'articuler la décomposition polynomiale donnée par les invariants et la décomposition des tableaux en matrices. Cette nouvelle articulation entre formes et invariants permet à Autonne d'énoncer une "forme typique" des matrices pour la relation de similitude. Cette forme typique sera reconnue comme équivalente à la forme canonique de Jordan par Autonne en 1910, à la suite des travaux de Séguier que nous avons vu au chapitre 8 [Autonne, 1910, 82]. En 1904 cependant, l'ancrage de la forme typique d'Autonne dans la théorie des matrices en fait un énoncé totalement indépendant de la forme de Jordan et ce bien que la note d'Autonne aux *Comptes Rendus* soit présentée par Jordan lui-même.
La "forme typique particulièrement simple" des matrices est énoncée par une communication à l'Académie parisienne le 9 mai 1904 suivie d'un exposé au congrès de Heidelberg. Elle donne lieu à la publication d'un mémoire dans le *Bulletin de la SMF* [1905b] et d'un traité paraissant en 1905 sous le titre *Sur les formes mixtes* (encart 3) :

[4] En termes contemporains, la notion sous-jacente est celle de sous espace stable d'un endomorphisme.

ENCART 4.

Application de la forme typique des matrices aux connexes,

[Autonne, 1905, 71-73] :

Je me propose d'appliquer les méthodes générales qui ont été exposées dans les trois Chapitres précédents, à l'étude de quelques cas simples, où $n = 3, 4$ ou 5.

Le cas $n = 3$ est celui, bien connu, du connexe linéo-linéaire plan de Clebsch. Le cas $n = 4$ a été traité par moi dans le *Mémoire du Bruxelles*, mais par des procédés relativement élémentaires et assez laborieux. Les procédés généraux actuels permettront d'abréger et d'alléger la discussion.

Pour $n = 3$ ou 4, je considérerai successivement :

L'énumération des types ;

Les points fondamentaux ;

Les courbes C (Chapitre II) de degré $K - 1$;

Les courbes x ; (Chapitre III).

[...]

[dans le cas où] Il y a trois racines [à l'équation caractéristique] dont chacune ne fournit qu'un seul successif.

Enumération des types.

On voit qu'il y a seulement trois types

$\Delta = r(r-1)(r-a)$ 3 racines distinctes.

$= r^2(r-1)$ 2 " "

$= r^3$ 1 racine triple.

Type	A	A(x,u).
I.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ a ý 1 ou 0	$u_2x_2 + au_3x_3$
II.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$u_1x_2 + u_3x_3$
III.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$u_1x_2 + u_2x_3$

Points fondamentaux.

Pour le type I,

$$\xi^{(0)} = X_1, \xi^{(1)} = X_2, \xi^{(2)} = X_3$$

Pour le type II,

$$\xi^{(0)} = X_1,$$

car x_1 est la première variable de l'hypersystème (0).

$$\xi^{(1)} = X_3.$$

Pour le type III,

$$\xi^{(0)} = X_1,$$

Courbes C.

Le type I n'en comporte pas, ni la racine simple du type II.

La racine double nulle du type II donne la droite U_3

$$x_1 = Z. x_2 = Z_1, x_3 = 0 ;$$

Considérons un polynôme

$$F\begin{pmatrix} m & m' \\ x & u \end{pmatrix}$$

homogène, avec le degré *m* par rapport à *N* variables x_i, homogène avec le degré *m'*, par rapport à *N* variables u_i, $\{i = 1,2,..., N\}$. Supposons que les *2N* variables ne sont plus indépendantes, mais liées par la relation

$$\omega = \Sigma_i x_i u_i = 0$$

Suivant la terminologie employée au cours des présentes recherches, *F* sera une *forme mixte*, ayant *l'ordre m* et la *classe m'*.
Clebsch a étudié autrefois, pour $N=3$, de pareilles expressions, comme représentant, par leur évanouissement, la *coincidence principale* d'un *connexe* plan. Cela revient à considérer comme élément générateur du plan la figure *(x,u)* constituée par le point *x*, de coordonnées x_i et la droite u, de coordonnées u_i ; *u* passe par *x.* M'attachant à cet ordre d'idées, j'ai construit [Autonne, 1887] les substitutions*, entre éléments, crémoniennes, c'est-à-dire birationnelles et de contact.*
Il était naturel d'étendre les notions précédentes à l'espace ordinaire, $N=4$. [..;] Je me suis attaché surtout aux connexes linéaire ou linéo-linéaires [...] Mon objet actuel est d'étendre ces recherches au cas où *N* est quelconque. Alors on a un espace à *N-1* dimensions dont l'élément générateur *(x,u)* est constitué par un plan *u* et un point *x*, situé sur *u*. [...]
La *Première Partie* est consacrée au connexe linéaire, dont la théorie complète est faite en s'appuyant sur la notion des *Elementartheiler* due à Weierstrass. On met l'équation du connexe sous une forme *typique* particulièrement simple ; on construit les points et plans *fondamentaux* (définis suivant une généralisation de la définition donnée par Clebsch pour les points fondamentaux et droites fondamentales dans le connexe plan) distincts ou confondus.
[Autonne, 1905, 1].

Comme le montre l'encart 4, à toute matrice *n*-aire $A=[a_{jk}]$ $\{j,k = 1,2,...,n\}$ est associée un connexe linéaire, "lieu des éléments *(x,u)* qui satisfont à la condition

$$0 = A(x,u) = \Sigma_{jk}\, a_{jk}u_j x_k."$$

Les matrices *A* et $\lambda A+\mu E$ "fourniront le même connexe linéaire" et par conséquent, le "changement de coordonnées" linéaires *P* se traduit "sur les équations du connexe, par ce fait que la matrice *A* est remplacée par la matrice semblable $P^{-1}AP$" :

L'étude géométrique A se ramène donc uniquement à celle de la structure de la matrice *A* ; on n'aura qu'à examiner quels sont les successifs du faisceau caractéristique $\rho E-A$.
Soient un connexe *AT* et *A* la matrice correspondante. Il sera, en vertu de ce qui précède, licite, sans changer la nature géométrique ou la configuration de A, de remplacer *A* par une matrice *quelconque* A_0, de même structure que *A.*
Je choisirai bien entendu A_0 aussi simple que possible.
[Autonne, 1905, 2.].

Il s'agit donc de choisir, parmi les matrices semblables, une matrice "aussi simple que possible". Cette postérité de l'idéal de simplicité de Jordan est portée par la tradition du calcul des tableaux que nous avons vu au chapitre 8.

où Z est le paramètre fondamental. Il y a donc deux fondamentaux confondus *en* X sur la droite U_3.
La racine triple nulle du type III donne la conique C.

$$x_1 = Z,\ x_2 = tZ,\ x_3 = t^2Z \quad x_2^2-x_1x_3 = 0.$$

Il y a trois fondamentaux confondus en X_1 sur cette conique.

Courbes χ.

Type

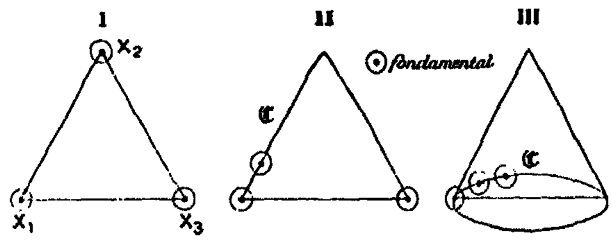
I.	$\Phi x_1 = c_{01},$	$\Phi x_2 = c_{02}e^t$	$\Phi x_3 = c_{03}e^{at}$;
II.	$\Phi x_1 = c_{01}+c_{11}t$;	$\Phi x_2 = c_{11},$	$\Phi x_3 = c_{03}e^t$;
III.	$\Phi x_1 = c_0+ c_1t+c_2\, t^2/3!$	$\Phi x_2 = c_1+ c_2t$	$\Phi x_3 = c_2$;

$$x_2^2-2x_1x_3 + 2x_3^2\,(c_0/c_2 - 1/2\, c_1^2/c_2^2) = 0$$

coniques tangentes en X_1 à la conique C du même type, et surosculatrices en X_1 à al conique fixe

$$x_2^2-2x_1x_2 = 0.$$

Fig. 2.



$n = 4, \quad k = 2.$

[...] Chaque racine distincte fournit un ou deux successifs.

Type	$\Delta(r) = \|rE-A\|$	Racines de l'équation caractéristique.
I.	$r(r-1)(r-a)(r*b)$	quatre racines distances *0,1,a,b*
II.	$r^2(r-1)(r-a)$	trois racines distinctes : racine double
III.	$r.r(r-1)(r-a)$	nulle ; unité et *a* racines simples.
IV.	$r^2(r-1)^2$	
V.	$r.r.(r-1)^2$	deux racines distinctes, dont chacune
VI.	$r.r(r-1)(r-1)$	est double.
VII.	$r^3(r-1)$	deux racines distinctes ; racine triple
VIII.	$r^2.r(r-1)$	nulle ; une racine simple.
IX.	r^4	
X.	r^3r	une racine quadruple nulle.
XI.	$r^2.r^2$	

[...] Enumération des types.

Type.	A_0	*A(x,u).*
I.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$	quatre hypersystèmes $u_2x_2+au_3x_4+bx_4u_4$ *a ý b.*
II.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	trois hypersystèmes ; (0), avec matrice binaire $u_1x_2+u_3x_3+au_4x_4.$

Elle est immédiatement associée par Autonne à la méthode par laquelle Frobenius construisait, en 1878, une forme bilinéaire de diviseurs élémentaires donnés (chapitre 3)

> Soit le déterminant caractéristique de A
>
> $$|\rho E-A| = (\rho-a)^{\alpha}(\rho-b)^{\beta}(\rho-c)^{\gamma}\ldots\ ;\ n = \alpha+\beta+\gamma+\ldots.$$
>
> décomposé en ses successifs, les racines a,b,c …étant distinctes ou non. D'après M. Frobenius, nous prendrons pour A_0 une matrice telle que
>
> $$A_0(x,u) = a(x_1u_1 + \ldots + x_\alpha u_\alpha) + x_2u_1 + \ldots + x_\alpha u_{\alpha-1} + b(x_{\alpha+1}u_{\alpha+1} + \ldots + x_{\alpha+\beta}u_{\alpha+\beta})$$
> $$+ x_{\alpha+2}u_{\alpha+1} + \ldots. + x_{\alpha+\beta}u_{\alpha+\beta-1} + \ldots$$
>
> A_0 a-t-elle la structure voulue ? M. Frobenius n'en produit pas la démonstration. Comme la question a une importance capitale dans les présentes recherches, je vais développer cette démonstration avec quelque détail.
>
> Lemme I. – *La matrice n-aire*
>
> $$A = \left\|\begin{matrix} a & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & a \end{matrix}\right\|,$$
>
> *[…] a un successif unique* $(\rho-a)^n$.
>
> [Autonne, 1905, 5].

L'opérationnalité de la représentation par tableaux définie par Autonne en 1903 permet de concilier le point de vue de Frobenius, qui favorise la donnée d'invariants, et celui de Jordan qui se caractérise par une méthode de décomposition à la forme la plus simple. La forme typique est obtenue par une articulation des méthodes de décomposition d'un tableau en sous matrices et du calcul symbolique de Frobenius :

> Lemme II. – Dans la matrice n-aire
>
> $$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} \overbrace{}^{\alpha} & \overbrace{}^{\beta} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \alpha\left\{\phantom{\begin{matrix}A\\A\end{matrix}}\right. \\ \beta\left\{\phantom{\begin{matrix}A\\A\end{matrix}}\right. \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|} \hline A & 0 \\ \hline 0 & B \\ \hline \end{array} \end{array} = P$$
>
> tout mineur P_m, $(n-m)$ième et m^2 éléments, m Â n, est donné, pourvu que P_m ý 0, par la formule
>
> $$P_m = \pm A_r B_s$$
> $$(r+s=m,\ r<\alpha,\ s<\beta)$$
>
> où
>
> *A_r est un $(\alpha-r)^{ième}$ mineur, r-aire de A ;*
> *B_s est un $(\beta-s)^{ième}$ mineur, s-aire de B.*
>
> [Autonne, 1905, 5].

III.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	trois hypersystèmes ; (0), avec deux matrices d'ordre un $u_3x_3+au_4x_4$.	
IV.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	deux hypersystèmes, chacun avec matrice binaire $u_1x_3+u_3x_3+ u_3x_4 +u_4x_3$.	
V.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	deux hypersystèmes, (0), avec deux matrices ; (1), avec matrice binaire chacun avec matrice binaire $u_3x_3+u_3x_4+ u_4x_4$.	
VI.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	les deux hypersystèmes ont chacun deux matrices $u_3x_3+ u_4x_4$.	
VII.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	deux hypersystèmes, (0), avec matrice ternaire $u_1x_2 +u_1x_3+u_4x_4$.	
VIII.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	deux hypersystèmes, (0), avec deux matrices, dont une binaire $u_1x_2 +u_4x_4$.	
IX.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	hypersystème (0), contenant une matrice partielle quaternaire $u_1x_2 +u_2x_3+u_2x_4$.	
X.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	hypersystème (0), contenant une matrice partielle ternaire et une matrice d'ordre un $u_1x_1 +u_2x_3$.	
XI.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	hypersystème (0), avec deux matrices binaires $u_1x_2 +u_3x_4$.	

Par l'emploi du lemme II, la démonstration d'Autonne procède de décompositions successives d'un tableau en "matrices partielles" ou "composantes" [Autonne, 1905, 36] et permet d'énoncer la première formulation matricielle de ce qui sera reconnue en 1910 comme la "forme canonique de Jordan". La structure de la matrice est donnée, non par des invariants comme chez Frobenius, mais par un tableau, une "dessin" pour reprendre le terme de Picard [1911, 409], une image qui représente à la fois la forme réduite et le procédé de décomposition employé :

> En vertu des explications précédentes, il sera licite, sans restreindre la généralité, d'attribuer à la matrice n-aire A l'expression simplifiée de M. Frobenius. Prenons le déterminant $\Delta = |\rho E - A|$ décomposé en ses successifs
>
> $$\Delta = (\rho - a)^{\alpha_0}(\rho - a)^{\alpha_1}\dots(\rho - a)^{\alpha_{l-1}}(\rho - b)^{\beta_0}\dots(\rho - b)^{\beta_{l-1}}(\rho - c)^{\gamma}\dots$$
>
> *a ýb ýc ý ....*
>
> $n = \alpha_0 + \dots + \alpha_{k-1} + \beta_0 + \dots + \beta_{k-1} + \gamma_0 + \dots,$
>
> $m = \alpha_0 + \dots + \alpha_{k-1}$, $m' = \beta_0 + \dots + \beta_{k'-1} \dots$
>
> On considèrera toujours pour A l'expression.
>
> | | α_0 | α_1 | | α_{k-1} | β_0 | | |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|
> | α_0 | A_0 | 0 | … | 0 | 0 | 0 | … |
> | α_1 | 0 | A_1 | … | 0 | 0 | 0 | … |
> | | … | … | … | … | … | … | … |
> | α_{k-1} | 0 | 0 | … | A_{l-1} | 0 | 0 | … |
> | β_0 | 0 | 0 | … | 0 | B_0 | 0 | … |
> | | … | … | … | … | … | … | … |
>
> où les matrices A_0 A_1, …, A_{k-1}, B_0,…. respectivement α_0-aire, α_1 – aire,…, α_{k-1}-aire, β_0-aire,… sont les *matrices partielles* ou *composantes* de la matrice *A*.
>
> Les matrices A_0, A_1,…, correspondent respectivement aux successifs $(\rho - a)^{\alpha_0}, (\rho - a)^{\alpha_1}, \dots$. Les k matrices A_0,…, A_{k-1} constituent *l'hypersystème* (*a*) afférent à la racine *a* de l'équation caractéristique D […].
>
> Soit une matrice partielle quelconque L, λ-aire, correspondant au successif $(\rho - l)^{\lambda}$. La matrice appartiendra à l'hypersystème afférent à la racine l de D.
>
> En vertu de ce qui précède on aura
>
> $$L = \left\| \begin{matrix} l & 1 & 0 & 0 & . & .0 \\ 0 & l & 1 & 0 & . & .0 \\ 0 & 0 & l & 1 & . & .0 \\ . & . & . & . & . & .. \\ 0 & 0 & . & . & 0 & l1 \\ 0 & 0 & . & . & . & .l \end{matrix} \right\|,$$
>
> [Autonne, 1905, 7].

ENCART 5.

"Sur les droites fondamentales et sur les collinéations de l'espace à *N-1* dimensions" [Autonne, 1905b]

Ce mémoire publié dans le *Bulletin de la SMF* est consacré à une application de la forme typique à la recherche des droites fondamentales des collinéations, généralisées aux espaces de *n* dimensions.

Si l'on considère 2*n* variables x_j et u_i $\{i = 1,2,\dots,n\}$ comme les coordonnées homogènes d'un point *x,* ou d'un plan *u*, dans un espace à $n - 1$ dimensions, la substitution linéaire *n*-aire, $\{j = 1,2,\dots,n\}$

$$p = |x_i\ \Sigma_j\ p_{ij}x_j| = |x_i\ p\ [x_i]|,$$

de déterminant $|p|$ ý 0, est une collinéation. Le point $p[x]$, ayant les $p[x_i]$ pour coordonnées, est le point-image par la collination *p* du point *x*.
Toutes ces théories peuvent recevoir de l'extension.
[...]
Une droite d_m sera *fondamentale* pour la collinéation *p*, si d_m est invariante par *p*, autrement dit : d_m est le lieu, à la fois du point *x* et du point $p[x]$.
Le travail ci-après résout complètement le problème relatif à la construction des droites fondamentales. On fait encore usage de la forme typique de *p*.
[Autonne, 1905b, 1].

Prenons une substitution *p* de déterminant $|p|$ ý 0. On sait qu'un point *x*, ou un plan *u*, est *fondamental* si son image par *p* se confond avec lui-même.

$$p(x] = \rho x \text{ ou } p[u] = \rho u.$$

Le point fondamental *x* est invariant par rapport à ρ. en vertu de la relation

$$\rho x\text{-}p[x] = 0,$$

on voit qu'il y a dépendance linéaire entre les deux points *x* et $p[x]$.
[...]
Considérons une d_m. Elle est définie par *m* quelconques de ses points, pourvu qu'ils soient linéairement indépendants. Réciproquement une d_m ne peut contenir plus de m points linéairement indépendants ou distincts.
Prenons maintenant la suite indéfinie de points

$$p^\sigma[x]\ ,\ \sigma = -õ, \dots,-1,0,1,2,\dots,\ õ.$$

Je montrerai plus loin qu'ils sont tous situés sur une droite $\grave{\otimes}$, de degré fini *h*.
[...]
Notre problème revient donc à la construction des droites $\grave{\otimes}$, de degré *h*.
[Autonne, 1905b, 4] :

Puisque dans la suite des points

$$p^\sigma[x]$$

il n'y a que *h* points linéairements distincts, c'est qu'entre différents points de la suite existent des relations telles que celle-ci

$$C_0p^\alpha[x] + C_1p^{\alpha+\alpha 1}[x] + \dots. = 0,$$

[...]
Désignons maintenant par $f(r)$ le polynôme

$$f(r) = C_0r^\alpha + C_1r^{\alpha+\alpha 1} + \dots,$$

car nous verrons plus loin que la relation (1) ne contient qu'un nombre fini de termes, et posons

$$P = f(p).$$

La condition (1) s'écrit

$$(2)\ P[x] = 0$$

Dans les traités d'enseignement d'Autonne publiés entre 1903 et 1905, une forme imagée devient une méthode de démonstration par le caractère opératoire d'une décomposition en images partielles appuyée par une interprétation géométrique de décomposition de l'espace en points et plans fondamentaux (encarts 4 et 5) [Autonne, 1905, 44-57].
Entre 1905 et 1913, Autonne raffine sa méthode de décomposition de tableaux par l'introduction de la notion de "canevas", inspirée d'une "notation commode" introduite par Kreis et permettant d'expliciter l'articulation entre la décomposition des tableaux et la décomposition polynomiale donnée par les invariants ([5]) :

> Un tableau *(m,n)* aire sera fréquemment décomposé en tableaux partiels, obtenus en répartissant, en un certain nombre de groupes, les m lignes et les *n* colonnes.
> On écrira alors
>
> $$A = \begin{array}{cc} \left\{ \begin{array}{ccccc} A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & A_{2N} \\ \cdots & \cdots & A_{\mu\nu} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{M1} & \cdots & \cdots & \cdots & A_{MN} \end{array} \right\} & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \cdots \\ n_\mu \\ \cdots \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} n_1 & \cdots & n_\upsilon & \cdots\cdot & n_N \end{array} & m_M \end{array}$$
>
> où
>
> A_{11} = *tableau* (m_1, n_1) *aire,*
> A_{12} = *tableau* (m_1, n_2) *aire,*
> ………………………..,
> $A_{\mu\nu}$ = *tableau* (m_μ, n_ν) *aire,*
> ………………………..,
> $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_\mu + \ldots + m_M$,
> $n = n_1 + \ldots. + n_\nu + \ldots. + n_N$.
>
> […] Empruntons à M. Kreis une notation commode. Si A, a_1, a_2,…sont respectivement des matrices n-aire, n_1-aire, …, avec
>
> $$n = n_1 + n_2 + \ldots.$$
>
> la relation
>
> $$A = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$
>
> exprimera que
>
> $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ldots \end{pmatrix}.$$
>
> Supposons que la matrice donnée A soit telle que son polynôme caractéristique $|\rho E - A|$, E = n-aire unité, Soit *f* la fonction définie soit
>
> $$|\rho E - A| = (\rho - a_1)^{n_1}(\rho - a_2)^{n_2}\ldots$$

[5] Référence à la thèse de Kreis soutenue à Zurich et intitulée, *Contribution à la théorie des matrices, les propriétés des canevas pour la multiplication matricielle.*

[Autonne, 1905b, 5] :
Dès lors notre problème se décompose en deux problèmes réciproques A et B.

A *Après avoir choisi, parmi les diviseurs du polynôme $\psi(r)$, le polynôme $f(r)$ de degré h, trouver à quelles conditions doit satisfaire un point x pour que l'on ait*

$$P[x] = 0,\ P = f(p).$$

sans avoir, pour ce même point x, pour un autre diviseur f_1 de $\psi(r)$

$$P_1[x] = 0,\ P_1 = f_1(p)$$

à moins que le diviseur f_1 ne soit divisible par f.

B Un point x étant donné, trouver parmi les diviseurs de $\psi(r)$ un polynôme $f(r)$ de degré minimum h, tel que l'on ait

$$P[x] = 0,\ P = f(p).$$

[…]Donc *le degré h du polynôme $f(r)$ est précisément aussi le degré de la droite X̀ issue du point x.*
[…]Parmi les diviseurs de degré h, que possède le polynôme $\psi(r)$, choisissons $f(r)$.
Le problème A, supposé résolu, donne tous les points x cherchés.
On a toutes les X̀ en passant en revue les degrés h et, pour chaque h, les différents diviseurs de $\psi(r)$ qui ont ce degré.
[…] en résumé : *si l'on sait résoudre les problèmes A et B, on saura construire toutes les droites X̀.*

Autonne [1905b, 9-10] :

Pour résoudre les problèmes A et B, je supposerai (ce qui ne restreint en rien la généralité) la n-aire p, de déterminant *p ý 0*, ramenée à l'expression *typique* dont j"ai fait usage ailleurs déjà […]. Reprenons le polynôme $f(r)$ et la *n-aire* $P = f(p)$, déjà considérés plus haut. Puisque, dans l'expression typique, $P = \Sigma L$, on a

$$P = f(p) = \Sigma A.\ A = f(L).$$

Les relations $P[x] = 0$ se traduisent, sur les variables z_α de la composante L, par les relations

$$A[z] = 0,$$

qu'on a à étudier.
On peut écrire

$$L = lE+S,$$

où la n-aire S est, $\{\alpha = 1,2,\ldots,\lambda\}$,

$$S = \{\, z_\alpha\, z_{\alpha+1}\, \chi(\lambda-1-\alpha)|,$$

tandis que E est la n-aire unité. De plus $S^\lambda = 0$.
Un calcul simple montre que

$$A = f(L) = f(lE+S)\ .$$

Autonne [1905b, 13-15] :

La solution du problème A se formule ainsi : *après avoir choisi le polynôme*

$$f(r) = \Pi(r-l)^\mu,\ h = \Sigma\mu,$$

c'est-à-dire l'exposant μ afférent à chaque hypersystème (l), on annule, dans la composante λ-aire L de (l), les

$$\lambda-\tau = \lambda - \{\mu + (\lambda-\mu)\chi(\mu-\lambda)\} = (\lambda-\mu)\,|1-\chi(\mu-\lambda)|$$

dernières variables z_α, en laissant aux

$$\tau = \mu + (\lambda-\mu)\,\chi(\mu-\lambda)$$

première des valeurs quelconques.

Autonne [1905b, 17] :

La solution du problème B se formule donc ainsi : *quand on se donne le point x,, c'est-à-dire pour chaque composante λ-aire L de l'hypersystème (l), les valeurs de z_α on possède le nombre σ tel que*

$$z_\sigma\ ý\ 0,\ z_{\sigma+1} = \ldots = z_\lambda = 0\,;$$

nommons σ_0 le maximum des σ pour les différentes L de (l) ; l'exposant du facteur $r-l$ dans le polynôme (fr) sera précisément $\mu = \sigma_0$.

(a_1 ý a_2, ý … ; $n = n_1+n_2+\ldots$).

Je trouve, d'accord avec M. Kreis, qu'on peut toujours choisir les variables de façon à avoir simultanément

$$A = a_1+a_2+a_3+\ldots$$
$$B = b_1+b_2+b_3+\ldots$$

a_1 *et* b_1, a_2 *et* b_2, … étant des n_1-aires, n_2-aires,… respectivement ; de plus les polynômes caractéristiques de a_1, a_2,… sont $(\rho - a_1)^{n_1}(\rho - a_2)^{n_2}\ldots$

[Autonne, 1909, 10-11] :

En exposant sa méthode de décomposition matricielle en préambule de ces ouvrages, Autonne parvient à transférer des résultats issus de ses recherches les plus récentes dans des traités d'enseignement. La méthode de décomposition des tableaux, présentée par une représentation particulièrement "simple", visuelle, s'applique à toutes les recherches d'Autonne. La présenter dès les préliminaires des traités d'enseignement permet de concentrer le corps du traité sur les difficultés particulières au problème considéré comme la géométrie des connexes [1905], les anneaux de matrices [1906, 1909], ou la commutativité des matrices [1910]. Les traités d'enseignements d'Autonne donnent au théorème de Jordan son premier énoncé sous forme matricielle. Ce faisant, ils élaborent une méthode de décomposition des tableaux qui procède d'un caractère opératoire donné à la représentation matricielle et implique une nouvelle articulation entre formes canoniques et invariants. Cette articulation doit beaucoup à une interprétation géométrique sous jacente en termes de décomposition d'un espace en sous *espaces stables* ([6]). Il s'agit à présent d'éclairer plus précisément le contexte qui amène Autonne à la construction de sa méthode décomposition matricielle qui se présente comme une rencontre de trois traditions distinctes que sont le calcul des tableaux, la théorie des matrices et la géométrie algébrique.

[6] Cette représentation géométrique est déjà présente dans le traité de Weber [1898, 164]. Weber ne construit cependant aucune opératoire de la représentation matricielle.

ENCART 6.

Quelques compléments sur les travaux d'Autonne.

"Sur les intégrales algébriques équations différentielles linéaires à coefficients rationnels", [Autonne, 1883a].

> Lorsqu'une équation différentielle linéaire *Y* d'ordre *p,* à coefficients rationnels, possède un système fondamental d'intégrales dont tous les termes sont racines d'une équation algébrique H*,* à coefficients rationnels et irréductible, il existera, entre les *m* racines de *H*, *n* et seulement *n* équations linéaires, homogènes, à coefficients constants *(n* désignant la différence *m -p* entre le degré *m* de *H* et l'ordre *p* de *Y).*
>
> On voit sans peine qu'une substitution quelconque *s* du groupe *G* de *H* équivaut à une substitution linéaire *σ* effectuée entre les *n* premiers membres des équations linéaires homogènes à coefficients constants, mentionnées plus haut. Le groupe *Γ* dérivé des substitutions σ est l'un des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire à *n* variables. Les groupes *G et* Γ sont évidemment isomorphes ; à l'aide des propositions que divers géomètres, notamment M. Jordan, ont fait connaître au sujet des groupes linéaires *Γ* d'ordre fini, il est possible de déterminer la nature du groupe *G*, et par suite celle des intégrales de *Y* [Autonne traite du cas *m* premier et $n < 4$].
>
> Autonne [1883a, 53]

"Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe des substitutions linéaires de contact," [1887a].

> Dans une série de Communications présentées à l'Académie des Sciences [...] j'ai énuméré et construit les groupes d'ordre fini, contenus dans les groupes quadratique et cubique Cremona. Je me propose actuellement d'étendre le même genre de recherches aux substitutions birationelles ; où ne figure plus une seule série de trois variables homogènes x_i (coordonnées d'un point *x* du plan), mais encore une seconde série de trois variables homogènes u_i (coordonnées d'une droite *u* du plan), $i = 1,2,3$.
>
> Parmi les substitutions de ce genre, les plus importantes sont, comme on le sait, les substitutions de contact (S. LIE, Math. Ann., t. VIII ; CLEBSCH-LINDEMANN, *Leçons sur la Géométrie*, t. III etc.), qui ont le contact des figures pour propriétés invariante. Ces substitutions- changeant une équation différentielle du premier ordre *H* en une autre *H'*, changent aussi les intégrales de *H* en les intégrales de *H'*.
>
> C'est là l'intérêt de ces substitutions en Analyse.
>
> [1887a, 63-64]

3. L'approche d'Autonne sur les équations différentielles : entre géométrie et théorie des groupes.

La thèse d'Autonne, soutenue le 28 juillet 1882, est consacrée aux "intégrales algébriques des équations différentielles linéaires à coefficient rationnels" à la suite des travaux de Jordan, Halphen, Picard et Poincaré :

> La thèse présentée à la Faculté par M. Autonne a pour objet la recherche des intégrales algébriques des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels ; l'auteur a pris pour base de son travail deux beaux et importants mémoires de M. Jordan dans lesquels cette partie difficile et importante a été prise en premier pour aborder ces recherches par les savants géomètres et les découvertes antérieures sur la théorie des substitutions. M. Autonne a complété des points essentiels de la théorie de M. Jordan. Il est parvenu par une analyse savante approfondie à plusieurs résultats nouveaux et a montré certes, un talent entièrement distingué. La Faculté a témoigné toute sa satisfaction au jeune ingénieur élève de l'Ecole des ponts et chaussées qui sut concilier les études d'un grand esprit analytique avec les autres travaux.
> [Hermite, *in* Gispert,1991, 336].

A la suite des travaux de Jordan, Autonne formule le problème de l'intégration algébrique comme se ramenant à la détermination des sous groupes du groupe linéaire (encart 6) [Autonne, 1883a, 53]. Autonne entreprend la recherche des "groupes d'ordre fini contenus dans le groupe des substitutions quadratiques homogènes à trois variables" [Autonne, 1883b] et, suivant les traces de Poincaré [Autonne, 1883b, 568], interprète ces groupes dans un cadre géométrique (encart 7) ([7]):

> On sait que M. Jordan a énuméré et construit les divers groupes d'ordre fini contenus dans le groupe des substitutions linéaires à trois variables (collinéations). Nous avons essayé de faire le même travail pour les substitutions unidéterminatives et réversibles du second ordre, c'est-à-dire pour les substitutions quadratiques Cremona.

---

[7] Plus précisément, étant données deux équations linéaires :

$$P = P_1y_1+P_2y_2+P_3y_3 = 0 \;;\; P_i = p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + p_{i3}x_3,$$
$$Q = Q_1y_1+Q_2y_2+Q_3y_3 = 0 \;;\; Q_i = q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + q_{i3}x_3,$$

$i = 1,2,3$, les p et les q désignant des constantes.

Autonne démontre que ces équations impliquent que y est déterminé par une fonction quadratique homogène des x_i, dont il donne une interprétation dans la géométrie de Clebsch : si les x_i sont les coordonnées homogènes dans le plan d'un point x, le point y correspondant aux y_i est obtenu par une "substitution quadratique S" de x définie par les équation $P = 0, Q = 0.$

L'ensemble des substitutions quadratiques forment un groupe qu'Autonne se propose de caractériser dans le cas où son ordre est fini en se ramenant à l'étude de "groupes linéaires fractionnaires à deux variables, qui a été complètement faite par plusieurs géomètres, notamment par MM. Jordan et Poincaré." [Autonne, 1883b, 568-670].

"Sur les substitutions cremoniennes quadratiques" [1887b].

Dans une Communication précédente (13 décembre 1886), j'ai étudié, dans un cas tout particulier, les groupes d'ordre fini contenus dans le group quadratique crémonien. Je me propose maintenant d'aborder le problème dans toute sa généralité [...] Tandis que, dans des recherches antérieures sur les groupes d'ordre fini, contenus dans les groupes quadratique et cubique Cremona [...], j'opérais sur des substitutions, telles que les propriétés d'une substitution isolée étaient bien connues et que les propriétés des groupes étaient seules à étudier, pour les substitutions crémoniennes (birationnelles et de contact), tout était à chercher : propriétés d'une substitution isolée et propriétés des groupes. On connaissait bien (MAYER, *Mathematische Annalen,* t.VIII) certaines équations aux dérivées partielles auxquelles devaient satisfaire les fonctions $\varphi_i(x,u)$ et $\psi_i(x,u)$ pour que les substitutions, telles que

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(\overset{u}{x},\overset{b}{u}) \\ u_i & \psi_i(\overset{c}{x},\overset{d}{u}) \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix},$$

fussent de contact ; mais personne, à ma connaissance au moins, n'avait donné les conditions de birationnalité et la forme explicite de ψ_i et φ_i

[...]

THEOREME II Toute crémonique quadratique est équivalente à l'une des trois substitutions quadratiques Cremona

$$\zeta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2x_3 \\ x_2 & x_3x_1 \\ x_3 & x_1x_2 \\ u_1 & x_1^2u_1 \\ u_2 & x_3^2u_2 \\ u_3 & x_3^2u_3 \end{vmatrix}, \quad \varpi = \begin{vmatrix} x_1 & x_1x_2 \\ x_2 & x_1^{\ 2} \\ x_3 & x_2x_3 \\ u_1 & -x_1r_1 \\ u_2 & x_2^2u_2 \\ u_3 & -x_1^2u_3 \end{vmatrix}, \quad \rho = \begin{vmatrix} x_1 & x_1x_2 \\ x_2 & x_2^{\ 2} \\ x_3 & A \\ u_1 & x_2r_2 \\ u_2 & x_1^2u_3 - x_2^2u_2 \\ u_3 & x_3^2u_3 \end{vmatrix}$$

$A = x_1^2 - x_2x_3$, $A_i = \frac{\delta A}{\delta x_i}$, $r_i = (Au)_i$, $r_1 = A_2u_3 - \ldots$

[Autonne, 1887b, 767-768].

Une substitution quadratique Cremona et son inverse sont définis par les symboles

$$S = |z_i, \varphi_i(z_1, z_2, z_3)| \quad S^{-1} = |z_i \ \theta_i(z_1, z_2, z_3)|, \ (i = 1,2,3),$$
$$\varphi_i(\theta_1\ \theta_2, \theta_3) = Mz_i, \ \theta_i(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = Nz_i$$

les équations

$$\varphi = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + u_3\varphi_3 = 0 \ (u_\mathrm{i} = \text{constante arbitraire})$$
$$\theta = v_1\theta_1 + v_2\theta_2 + v_3\theta_3 = 0 \ (v_i = \text{constante arbitraire})$$

représentant, en coordonnées homogènes z_i, deux réseaux de coniques à trois points fixes, dits *fondamentaux.*

[...]

THEOREME. *Pour que diverses substitutions quadratiques S, S', S", ... forment un groupe quadratique, il faut et il suffit que chaque substitution ait deux points fondamentaux communs avec chacune des autres.*

[Autonne, 1884, 565]

Aux influences des travaux de Jordan [1878] et de Klein [1876] qui se manifestent dans les travaux d'Autonne sur les groupes Cremona [Autonne, 1887b, 1425] et les équations de Ricatti [Autonne, 1900, 158], se mêle la référence à la géométrie de Clebsch –Lindemann pour l'étude des "substitutions de contacts" qui laissent invariant le contact des figures [Autonne, 1887a]. De ces influences mêlées, Autonne élabore des méthodes originales qui se manifestent dans le mémoire soumis au grand prix des sciences mathématiques de 1890 : "perfectionner en un point important la théorie des équations différentielles du premier ordre" ([8]). Le mémoire de 1891 a pour objet l'étude des équations de la forme:

$\Sigma P_i(xdx)_i = 0$

$i = 1,2,3$

$(xdx)_1 = x_2dx_3\text{-}x_3dx_2,$

$(xdx_2) = x_4dx_1\text{-} \ \text{-}x_1dx_4$

P_i = forme ternaire en x_i d'ordre m.

m sera la "dimension" de l'équation différentielle [...].

C'est à cette nature d'équations que M. Darboux a consacré, comme on sait, un important Mémoire dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, année 1878. Il a montré que la connaissance de l'intégrale générale était assurée par la connaissance d'un nombre suffisant d'intégrales particulières algébriques.

J'attaque le problème par une toute autre voie. Je cherche à mettre à profit deux ordres de faits différents, savoir :

Les relations qui existent entre les intégrales et certaines courbes tracées sur les surfaces unicursales ;

L'existence dans l'équation de singularités, soit ordinaires (points critiques, désignés au programme, soit exceptionnelles (points que je nomme polycritiques et hypercritiques).

Toute équation différentielle établit, si elle est du premier ordre, une relation entre trois quantités : variable, fonction, dérivée. Aussi les géomètres ont-ils depuis longtemps et de bien des façons cherché à représenter une pareille

[8] Le grand prix est décerné à Painlevé avec mention honorable pour Autonne [*Comptes Rendus,* 29 décembre 1890, 1021]. Poincaré reprendra les deux approches de Painlevé et Autonne en 1891 '("Sur l'intégration algébrique des équations différentielles," *Comptes rendus,* 112, 761-764.1891 et "Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré", R*endiconti del Circolo Matematico di Palermo,* 5, 161-191).

ENCART 7.
L'approche géométrique sur les équations du premier ordre
[Autonne, 1890].

Comptes Rendus, 1890, **t. 111**, 1021-1023.

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(Commissaires : MM. Hermite, Jordan, Poincaré, Darboux;
Picard, rapporteur).

L'Académie avait proposé la question suivante :

« *Perfectionner en un point important la théorie des équations différentielles* » *du premier ordre et du premier degré.* »

Trois Mémoires ont été envoyés au concours; la Commission a retenu le Mémoire inscrit sous le n° 1, avec la devise *Franco-Russe*, et le Mémoire n° 2 portant pour épigraphe : *In ratione verum.*

L'auteur du n° 1 prend pour point de départ une interprétation géométrique dont est susceptible toute équation différentielle du premier ordre. Il montre qu'une telle équation peut être considérée comme donnant les courbes situées sur une certaine surface algébrique et dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire convenable; la surface est unicursale si l'équation du premier ordre est en même temps du premier degré. La réciproque est d'ailleurs évidente : la connaissance des courbes situées sur une surface unicursale et satisfaisant à la condition géométrique indiquée entraînera l'intégration d'une équation du premier ordre et du premier degré. Prenant alors une surface unicursale, l'auteur forme l'équa-

équation par une surface. Les intégrales sont alors représentées par un faisceau (système à un paramètre) de courbes tracées sur la surface.
[Autonne, 1891, 35-36].

C'est à l'étude de surfaces, $\Sigma_i P_i u_i = 0$, associées aux équations différentielles, $P = \Sigma_i P_i (xdx)_i = 0$, qu'est consacrée la seconde partie, purement géométrique, du mémoire de 1891 (encart 7):

Considérons une équation différentielle du premier ordre, $p = \frac{d\eta}{d\xi}$,

$$F(\xi,\eta,p) = 0$$

F désignant un polynôme. Posons

$$\xi = x_1/x_2,\ \eta = x_2/x_3,\ p = u_1/u_2\,;$$

on sait que, d'après Clebsch, la recherche des intégrales de F = 0 se ramène à celle des *courbes de coïncidence principale* du connexe

$$F(x_1/x_2,\ x_2/x_3,\ -u_1/u_2) = 0$$

[...]
Il résulte de ce qui précède qu'il y a équivalence entre les deux problèmes suivants :
Intégration de l'équation différentielle du premier ordre

$$F(\xi,\eta,p) = 0,\ p = \frac{d\eta}{d\xi},$$

F désignant un polynôme ;
Recherche des intégrantes tracées sur les surfaces algébriques. ([9])
[Autonne, 1891, 58-63].

Le problème posé par Autonne nécessite l'étude des groupes de "transformations régulières" qui transforment les intégrantes les unes en les autres [Autonne, 1891, 74]. C'est à l'étude de ces groupes que sont consacrés l'essentiel des travaux d'Autonne jusqu'à 1905.

[9] Intégrante d'un connexe : courbe sur la surface telles que entre deux points consécutifs z et z+dz, il existe la relation (*zdz*) = 0.

tion qui lui correspond et qu'il appelle *réglementaire;* le fond de son travail consiste à faire une étude des équations du premier ordre et du premier degré considérées comme réglementaires.

Quand les surfaces unicursales employées sont du troisième degré, il est possible, dans quelques cas, d'intégrer les équations correspondantes. Ainsi, pour une surface réglée du troisième ordre, dont la droite double appartient au complexe, on n'a besoin d'effectuer que des quadratures; si la droite double est quelconque, on est ramené à une équation de Riccati. Pour la surface générale du troisième ordre, on se borne au cas où il existe sur la surface une infinité de points, formant une ligne dite *nodale*, par lesquels passe plus d'une courbe dont les tangentes appartiennent au complexe. C'est d'ailleurs un résultat élégant que cette nodale se compose nécessairement d'une ou de deux droites du complexe, ou encore d'une cubique gauche; dans les deux derniers cas, l'équation peut être intégrée.

La réglementaire correspondant à une surface du troisième ordre est, en général, de dimension *quatre*, quand on met l'équation sous la forme normale de Clebsch. Pour tirer parti des résultats qui précèdent, il faut pouvoir reconnaître, étant donnée une équation de cette dimension, si l'on peut la faire dériver d'une surface du troisième ordre. Ce problème, qui n'était pas sans difficulté, se trouve résolu en faisant intervenir la considération des points critiques de l'équation. L'auteur fait une classification de ces points; bornons-nous à citer, en dehors des points critiques ordinaires formant le cas général, les points qu'il appelle *dicritiques*, et par lesquels passent une infinité de branches simples d'intégrales avec une tangente arbitraire. Avec cette notion, la réponse au problème posé prend la forme suivante : Pour qu'une équation de dimension *quatre* puisse être considérée comme dérivant d'une surface du troisième ordre, il faut et il suffit qu'elle ait *six* points dicritiques. Outre cette intéressante proposition, nous pourrions signaler encore plusieurs théorèmes relatifs à l'abaissement de la dimension des équations réglementaires. Ce qui précède suffira pour donner une idée de ce travail fait avec beaucoup de soin et qui témoigne d'une grande habitude des transformations algébriques, mais où l'artifice employé ne pouvait guère conduire à des résultats de quelque généralité. La Commission propose de lui décerner une mention honorable.

4. Rencontre des méthodes des formes bilinéaires et de la réduction des tableaux chez Autonne.

L'approche géométrique d'Autonne conduit à une mise en relation des méthodes de réduction des formes et des tableaux héritées de Jordan et Hermite (chapitre 8) et des méthodes du calcul symbolique des formes de Frobenius associées au théorème des diviseurs élémentaires et à la théorie des matrices (partie II). C'est par un courant de recherches en géométrie algébrique qu'Autonne se familiarise avec le calcul symbolique des formes bilinéaires de Frobenius et le théorème des diviseurs élémentaires de Weierstrass ([10]). Les travaux de géométrie de Clebsch, Hesse, Aronhold, Gordan, etc. auxquels se réfère Autonne, se développent dans le contexte de la théorie des invariants [Clebsch, 1872, 374] ([11]). La classification des surfaces incite cependant à faire jouer un rôle particulier aux "formes typiques", "formes canoniques" ou "formes normales" représentant les classes d'équivalences définies par la donnée d'un système d'invariants. Cette articulation particulière des formes canoniques et des invariants implique un énoncé spécifique à la géométrie du théorème des diviseurs élémentaires. La première application géométrique du théorème des diviseurs élémentaires date de la thèse de Klein [1868] sous la direction de Plücker ([12]). Klein explicite les classes d'équivalences des homographies en articulant les différentes suites d'invariants, de diviseurs élémentaires, à la donnée de formes canoniques (encart 8). Dans un cadre géométrique, le théorème de Weierstrass s'énonce de manière spécifique, il est en effet perçu comme énonçant tout à la fois un système d'invariants et des "formes normales". Cette version de l'énoncé du théorème de Weierstrass est popularisée par Gundelfinger dans la troisième édition du traité de Hesse, S*ur les surfaces du deuxième ordre* [Hesse-Gundelfinger, 1876, 499, 518]. C'est dans cette tradition d'une articulation particulière des notions de formes canoniques et d'invariants en géométrie qu'Autonne élabore sa méthode de décomposition matricielle dans les années 1900-1905 (encart 9) :

> Conservant les définitions et notations de ma Communication du 11 mars 1901, employons aussi le calcul symbolique des formes bilinéaires (FROBENIUS,

[10] Sur le rôle des formes bilinéaires en géométrie, consulter par exemple le mémoire intitulé "Sur les formes bilinéaires et leurs applications géométriques" de [Pasch, 1891]. C'est en particulier dans ce mémoire que Pasch donne la démonstration du théorème de Cayley – Hamilton qui sera reprise par [Frobenius, 1894, 709] (partie II).

[11] Dans ce contexte, en particulier, la notion primitive de matrice de Sylvester, comme mère des mineurs d'un déterminant, est employée. Voir la traduction par Cremona du traité de Curtze sur la théorie des surfaces [[Curtze, 1870, 134].

[12] Consulter également la thèse de Killing [1872] et le développement des idées de Klein par Bocher [1894] pour la théorie du potentiel.

ENCART 8.

Une première application des diviseurs élémentaires à la géométrie : la thèse de Klein [1868].

La classification des surfaces du second degré proposée par Klein se base sur le théorème des diviseurs élémentaires de Weierstrass. Klein reformule le théorème de Weierstrass en énoncé qui articule les invariants et les formes canoniques.

> IV. Transformation der Gleichung des weiten Grades zwischen Linienkoordinaten auf eine kanonische Form.
>
> Es sei
>
> $$(19)\ \Omega = 0$$
>
> die allgemeine Gleichung der Komplexe des zweiten Grades ;
>
> $$P = 0$$
>
> bezeichne die Bedingung
>
> $$\Sigma_x p_x p_{x+3} = 0.$$
>
> Unsere Aufgabe ist, ein Tetraeder zu bestimmen, welches zu dem Komplex (19) in einer ausgezeichneten Beziehung steht, und die Form anzugeben, welcher die Gleichung des Komplex annimmt, wenn derselbe auf diese Tetraeder als Koordinatentetraeder bezogen wird.
>
> Die Aufgabe behandelt sich algebraisch als die lineare simultane Transformation der Form P in sich selbst und der Form Ω auf eine kanonische Gestalt. Wie definieren dabei die kanonische Gestalt der Form Ω als die einfachste, auf welche sich derselbe durch eine derartige Transformation um formen läβt.
>
> [...] Die algebraische Fassung dieses Problems ist insofern allgemeiner als die geometrische, als in derselben *P* und Ω als individuelle Formen auftreten, während bei der geometrischen Untersuchung neben P nur die zweigliedrige Gruppe
>
> $$\Omega + \lambda P,$$
>
> wo *λ* eine willkürliche Konstante bedeutet, in Betracht kommt.
>
> [...]
>
> Wir beginnen, im Anschluβ an die neueste Arbeit von Weierstraβ über die quadratischen Formen [...].
>
> Wir kennen zu den uns gegebenen Formen *P* und Ω zurück. Indem wir P als Form mit nicht verschwindender Determinante an die Stelle von Φ, Ω and ie von Ψ treten lassen, erhalten wir [...] die folgende Darstellung der Formen P und Ω :
>
> $$(24)\quad \begin{cases} P = \sum_\lambda (X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda} \\ Q = \sum_\lambda c_\lambda (X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda} (X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda - 1}. \end{cases}$$
>
> [Klein, 1868, 26-34].

Journal de Crelle, t. 84). La même lettre *A* désignera à la fois la forme bilinéaire $A = A(x,y) = \Sigma a_{jk} y_j x_k$ et la substitution

$$A = [a_{jk}] = |x_j \frac{\delta A}{\delta y}|$$

[...]Enfin la forme

$$T = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_{31} & y_4 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

est l'invariant absolu de définition pour tout régulière.

On sait d'après les travaux récents de divers auteurs (MM. Fuchs, Loewy, Moore, Maschke, Taber, etc., que tout groupe linéaire d'ordre fini, n-aire, possède un invariant absolu *H*. *H* est une forme d'Hermite

$$H = H(x, \dot{a}) = \Sigma \theta_{jh} x_j \bar{x}_h,\ \theta_{jk} = \dot{\theta}_{kj} = const.$$

toujours positive [...].

Ces préliminaires rappelés, revenons aux régulières *U* et aux groupes réguliers *G* d'ordre fini. *U* peut se mettre *régulièrement* sous une des quatre formes canoniques suivantes :

$$U_0 = |x_j b_j x_j| = [b_1, b_2, b_3, b_4],$$

où $i^2+1=0$ et α et β désignent des arcs réels dont le rapport à la circonférence est commensurable :

(I)	$[e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}, e^{i\beta}, e^{-i\beta}]$	La régulière *U* sera de
(II)	$[1, 1, e^{i\beta}, e^{-i\beta}]$	première,... , espèce, suivant
(III)	$[e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}, e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}]$	que U_0 est du type I, II,...
(IV)	$[1,1,-1,-1]$	

[Autonne, 1901, 1216-1217]

La classification des surfaces du second degré procède d'une articulation des diviseurs élémentaires et les formes canoniques des couples de formes :

Das Vorstehende liefert das vollständige Material zu einer *Einteilung der Komplexe des zweiten Grades*. Nach der Ordnung der Ω zugehörigen Elementarteilern bestimmt sich die Gestalt der Formen (24). Indem wir die Zahlen zusammenstellen, welche die Ordnungen der einzelenen Elementarteiler angeben, erhalten wit in dem folgenden Schema eine Einteilung sämtlicher Komplee zweiten Grades in *elf* unteschiedene Arten :

	Ordnung der Elementarteiler
I	1,1,1,1,1,1,
II	1,1,1,1,2,
III	1,1,1,3,
IV	1,1,2,2,
V	1,1,4,
VI	1,2,3,
VII	2,2,2,
VIII	1,5,
IX	2,4,
X	3,3,
XI	6,

[Klein, 1868, 35].

Es sei ein Komplex des zweiten Grades gegeben :

$$\Omega = 0$$

und es bezeichne :

$$P = 0$$

die Bedingungsgleichung zweiten Grades, welcher die Linienkoordinaten genügen müssen.
Es sei ferner $(s-c_\lambda)^{e_\lambda}$ ein beliebiger Elementarteiler der Determinante der Form $SP+\Omega$, und es bedeute μ_ν die Zahl, welche angibt, wie oft sich unter den Elementarteilern ν gleiche befinden. μ_2' and $\mu'_{2\nu+1}$ mögen diejenigen Zahlen bezeichnen, welche ausdrücken, wie oft unter den Elementarteilen ungerader Ordnung bezüglich 2ν und $2\nu+1$ gleiche vorkommen, μ_ν'' bedeute die Summe $\mu_{2\nu}'+\mu'_{2\nu+1}$. Endlich sei 2σ die Anzahl der reellen unter den Elementarteilern einer ungeraden Ordnung.
Dann lassen sich P und Ω durch eine Substitution mit nicht verschwinder Determinante, [...], simultan auf die folgende Gestalt transformieren :

$$(24)\quad \begin{cases} P = \sum_{\lambda} \sum_{(\mu+\nu=e_\lambda-1} X_{\lambda\mu} X_{\lambda\nu} \\ \Omega = \sum_{\lambda} \left\{ c_\lambda \sum_{(\mu+\nu=e_\lambda-1)} X_{\lambda\mu} X_{\lambda\nu} + \sum_{(\mu+\upsilon=e_\lambda-2} X_{\lambda\mu} X_{\lambda\upsilon} \right\} \end{cases}$$

wo $X_{\lambda,0},\ldots,X_{\lambda,e\lambda-1}$ die neuen Variabeln bedeuten, und die Summe

$$\sum_{(\mu+\nu=e_\lambda-1)} X_{\lambda\mu} X_{\lambda\nu}$$

gleich Null zu setzen ist, wenn e_λ den Wert der Einheit hat.
[Klein, 1868, 40].

II. DES REPERCUSSIONS DE PREOCCUPATIONS DIDACTIQUES SUR LA RECHERCHE MATHEMATIQUE: LA QUESTION DE LA DECOMPOSITION RATIONNELLE DES MATRICES (1914-1930).

La publication de nombreux traités d'enseignements en France par des auteurs comme Autonne et Châtelet, assure une publicité nouvelle à la théorie des matrices, désormais mêlée au calcul des tableaux. Cette théorie s'organise autour d'une méthode de décomposition qui articule les deux résultats fondamentaux que sont les diviseurs élémentaires de Weierstrass et la forme canonique de Jordan. Autonne et de Séguier consacrent des travaux mathématiques aux relations entretenues par deux théorèmes qui se rencontrent à nouveau près de 40 ans après la controverse de 1874. Les oppositions de 1874 sont elles pour autant résolues ? La critique opposée à Jordan par Kronecker en 1874 reste d'actualité : il n'est pas possible d'obtenir la réduction canonique par des procédés rationnels. Cette limitation du résultat de Jordan est déjà signalée par de Séguier [1908] qui, dans ce cas, emploie les procédés rationnels de la théorie des diviseurs élémentaires (détermination des facteurs invariants). Peut-on trouver une forme canonique rationnelle des matrices ? Cette question va jouer un rôle moteur pour la constitution de la théorie des matrices canoniques.

La thèse de Killing [1872] développe l'approche de Klein et insiste également sur la relation entre les différents types de suites de diviseurs élémentaires et les formes canoniques associées :

I. Wenn die Anzahl der Elementartheiler gleich vier ist, so dind die Gleichungen der beiden Flächen

$$a_0x_0^2 + a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0,$$
$$b_0x_0^2 + b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + b_3x_3^2 = 0,$$

II. Die Anzahl der Elementartheiler sei drei, einer habe somit den Exponenten zwei. Wenn die Elementarthiler sind :

$$a_0p+b_0q,\ a_1p+b_1q,\ (a_2p+b_2q)^2,$$

so haben die Gleichungen der Fläche die Gestalt :

$$a_0x_0^2 + a_1x_1^2 + 2a_0x_0x_3 + a'_2x_2^2 = 0,$$
$$b_0x_0^2 + b_1x_1^2 + 2b_0x_0x_3 + b'_2x_2^2 = 0$$

III. Die Anzahl der Elementartheiler sei drei, einer habe den Exponenten drei. Es seien dies $a_0p+b_0q,\ (a_1p+b_1q)^3$. Dann stellen sich die Flächen durch die Gleichungen dar :

$$a_0x_0^2 + a_1(x_2^2 + 2x_1x_3) + a'_1x_1x_2 = 0,$$
$$b_0x_0^2 + b_1(x_2^2 + 2x_1x_3) + b'_1x_1x_2 = 0$$

IV. Die Determinante habe zwei Elementartheiler, jeder von ihnen haben den Exponenten zwei, Wenn $(a_0p+b_0q)^2$ und $(a_1p+b_1q)^2$ die Elementartheiler sind, so sind die Gleichungen der Flächen :

$$2a_0x_0x_1 + a_1x_2x_3 + a'_1x_2^2 = 0,$$
$$2b_0x_0x_1 + b_1x_2x_3 + b'_1x_2^2 = 0,$$

IV. Wenn die Determinante nur den einen Elementartheiler hat, $(ap+bq)^4$ so erhalten die Gleichungen der Flächen die Gestalt :

$$2a(x_0x_3 + x_1x_2) + a'(x_1^2 + x_0x_3) = 0,$$
$$2b(x_0x_3 + x_1x_2) + b'(x_1^2 + x_0x_3) = 0,$$

[Killing, 1872, 4].

1. Origine d'une théorie dans des préoccupations pédagogiques.

> Je voudrais signaler dans cette Note une forme réduite qu'on peut donner à toute substitution linéaire ; cette nouvelle forme paraît être plus avantageuse, pour certaines questions d'analyse, que la forme classique bien connue. Cette dernière contient explicitement les *racines* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de l'équation caractéristique de la substitution. La nouvelle forme que je propose contient les *coefficients* de la même équation et elle peut être déduite de la substitution donnée par des opérations rationnelles.
> [...]
> $$\begin{cases} C_1 & X_1 = x_2, X_2 = x_3, \ldots, X_{m-1} = x_m, X_m = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m \\ C_2 & Y_1 = y_2, Y_2 = y_3, \ldots, Y_{p-1} = y_p, Y_p = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_p \\ C_3 & Z_1 = z_2, Z_2 = z_3, \ldots, Z_{q-1} = z_q, X_q = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_m z_q \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$
> [Lattès, 1912, 1482] :

L'examen des références des mémoires publiés entre 1915 et 1935 dans le cadre de la théorie des matrices canoniques permet de mettre en évidence la reconnaissance commune d'une même origine dans un mémoire publié par Lattès en 1914. Ce mémoire, publié dans les *Annales de l'université de Toulouse* et intitulé "Sur une forme canonique nouvelle des substitutions linéaires" [Lattès, 1914] semble aller à contre courant de l'évolution du moment, Lattès n'emploie en effet ni matrices, ni tableaux. Les références données par Lattès au début de son mémoire manifestent cependant une volonté de réorganiser un très grands nombre de travaux du passé, elles mentionnent la majorité des courants de recherches indépendants décrits dans les parties II et III de ce travail de doctorat. Sont ainsi cités : Goursat, Jordan, Pincherle, Sauvage, pour les systèmes d'équations différentielles, Landsberg pour la géométrie algébrique ; Burnside et Hilton pour la théorie des groupes ; Segre et Predella pour la classification des homographies ; Frobenius, Weierstrass et Drach pour les formes bilinéaires ([13]). En mêlant ces références, Lattès pose la première pierre d'une théorie, la théorie des matrices canoniques, se présentant comme une réorganisation de ce qui est désormais perçu comme une culture commune dans les méthodes et notions élaborées dans des réseaux de recherches distincts du tournant du siècle. Ce qui est reconnu comme commun dans les théories distinctes que sont la géométrie algébrique, la théorie des équations différentielles et la théorie des groupes c'est une même préoccupation de réduction à une forme canonique. C'est ainsi que Lattès explicite en détail la relation de sa nouvelle forme canonique (C) avec le déterminant donné par Frobenius pour exhiber un couple de formes

[13] La référence à Drach renvoie à son exposé de la théorie des diviseurs élémentaires dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques.*

ENCART 9.

Autonne et l'étude des connexes et des formes mixtes .

Le mémoire intitulé *Sur les formes quaternaires à deux séries de variables. Applications à la géométrie et au calcul intégral*" [Autonne, 1901e], primé par l'académie royale de Belgique, donne l'occasion d'expliciter dans cet encart les notions de connexes, de formes mixtes et l'influence des travaux de Clebsch sur Autonne.

> Le fond du présent travail est une étude des connexes à deux séries de quatre variables homogènes, dans le sens des recherches de Clebsch. [...] J'ai pris pour canevas de mon mémoire le chapitre « Connexes », lequel termine le troisième volume des « Leçons sur la géométrie de Clebsch », recueillies et complétées par F. Lindemann, traduites par A. Benoist, 1883. [...]. Résumons d'abord les idées de Clebsch. Soit un point x, dans un plan, défini par ses coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3 ; prenons de même une droite u définie par ses trois coordonnées homogènes u_i, $i = 1,2,3$. L'ensemble de x et de u constitue un *élément* (x,u) du plan, lequel élément devient *principal,* lorsque u passe par x :
>
> $$\Sigma ux = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$
>
> Envisageons la forme biternaire (homogène à deux séries de trois variables)
>
> $$f\binom{m \quad n}{x \quad ;u} = f(x_1,...,x_m,u_1,...,u_n),$$
>
> que l'on nomme forme mixte de degré m et de classe n.
>
> Clebsch traite, tout cela posé, les questions essentielles suivantes :
>
> QUESTION I. — Quelles sont les figures planes représentées par l'évanouissement d'une ou plusieurs formes mixtes? Ou, si l'on veut, quel est le lieu des éléments, dont les coordonnées sont liées par une ou plusieurs relations? S'il n'y a qu'une relation, c'est un *connexe ;* le connexe identique est celui qui est constitué par les õ^3 éléments principaux et a pour équation $\Sigma ux = 0$; deux relations fournissent une *coïncidence,* etc.
>
> Clebsch étudie surtout le connexe linéo-linéaire $m = n = = 1$.
>
> QUESTION II. - Soit
>
> $$f(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3) = 0$$
>
> un connexe A. Considérons l'équation différentielle ordinaire du premier ordre a.
>
> $$f(x,y,1 \ ; \ p, -1, u-px) = 0$$
>
> $$p = dy/dx$$
>
> Clebsch identifie les *courbes intégrales* de A avec les *courbes de coïncidence principales* de a. Cette manière de voir fournit de précieux renseignements, dans plusieurs cas, relativement au calcul intégral, lequel est ainsi étroitement rattaché à la théorie des connexes.
>
> QUESTION III. — Sont étudiées ensuite les transformations de contact. Ce sont celles qui, échangeant entre eux les éléments du plan, admettent, néanmoins, pour propriété invariante, le contact des courbes, ou, pour invariant, l'expression
>
> $$\Sigma udx = u_1dx_1 + u_2dx_2 + u_3dx_3.$$
>
> Une pareille transformation est importante dans le calcul intégral, car, changeant l'équation différentielle a, en une autre a', elle change les courbes intégrales de a en celles de a'.
>
> Sur les questions I et II, je ne connais pas de recherches plus récentes que celles citées dans *Clebsch-Benoist.* Sur la question III, il n'en est pas ainsi. Lie, dans un espace à N dimensions, a produit une étude d'ensemble des transformations de contact. L'éminent géomètre étudie d'ailleurs surtout les groupes finis continus ainsi que les transformations infinitésimales qui engendrent les groupes. C'est un ordre d'idées totalement étranger à mes présentes recherches. Je n'emprunte à Lie que peu de chose : quelques notions sur la classification des transformations de contact dans l'espace ordinaire.
>
> [Autonne, 1901e, 3-4]

bilinéaires de diviseurs élémentaires donnés (chapitre 3) ([14]). Lattès détaille également la manière dont la forme de Jordan se déduit de sa forme (*C*). La méthode de Lattès donne une nouvelle démonstration du théorème de Jordan et se revendique d'une nouveauté par sa capacité à "abandonner" les diviseurs élémentaires et les calculs du déterminant ([15]). Par rapport aux méthodes rationnelles de réduction canonique déjà élaborées par Landsberg (chapitre 5) et Burnside (chapitre 7), Lattès [1914,5] défend l'originalité de son approche par le caractère théorique qui, contrairement au procédé d'itération employé par Burnside comme "moyen auxiliaire" pour obtenir la forme de Jordan, donne à la forme *C* le statut de forme canonique à part entière, parfaitement générale et susceptible de refonder toute une culture commune.

La problématique de Lattès semble pourtant presque triviale. L'objet du mémoire porte sur la théorie des systèmes d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants, théorie passée dans l'enseignement depuis la solution générale donnée par Jordan [1871] par une application de sa forme canonique et exposée notamment dans le *Cours d'Analyse* de Jordan de 1893.

> Ce travail a son origine dans la théorie des systèmes d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants. On sait que la discussion d'un pareil système revient en définitive à la réduction d'une substitution linéaire à sa forme canonique (voir, par exemple, GOURSAT, Cours d'analyse

---

[14] La matrice que Loewy dénomme "matrice compagnon" renvoie, avant Lattès, à un énoncé de la théorie du déterminant remontant à Frobenius [1879] et permettant d'exhiber un déterminant dont la valeur correspond à un polynôme donné.

> Wir betrachten beispielsweise die Matrix
>
> $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & . & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & . & 0 & a_3 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 & a_n \end{pmatrix}$$
>
> deren charaketrische Gleichung lautet
> [Perron, 1907, 262].

[15] Le mémoire de Lattès est mis en concurrence avec un traité d'Hilton paru la même année et qui développe la méthode de Burnside et obtient la forme canonique (C), Lattès désamorce rapidement la question de priorité :

> Je signalerai pour terminer le livre récent de M. Harold Hilton sur la théorie des substitutions linéaires. Il contient un exposé de tous les résultats classiques avec quelques recherches de l'auteur. La théorie des diviseurs élémentaires y est développée très simplement. Dans ce livre, dont la publication est postérieure à celle de ma première Note, M. Harold Hilton indique la forme canonique (C) que j'ai proposé et qui fait l'objet de Mémoire : en même temps qu'il cite ma Note, M. Harold Hilton, d'après quelques références bibliographiques que j'avais eu l'occasion de lui communiquer, indique MM. Nicoletti, Landsberg et Burnside comme ayant fait usage de la forme canonique (C). En réalité, les travaux de ces auteurs ne touchent à la forme (C) que par les quelques points de contact que je viens de signaler, et cette forme ne se trouve indiquée explicitement dans aucun de ces travaux.
> [Lattès, 1914,5].

L'étude des formes mixtes quaternaires conduit sans doute à des recherches analogues à celles des questions planes I, II, III énumérées au paragraphe 1 ci-dessus, mais les faits mathématiques plans prennent dans l'espace une complication et une ampleur plus grandes.
Trois points de vue différents peuvent être développés.
ALGEBRE : s'attacher surtout aux formations invariantes, covariantes......
des systèmes de formes mixtes (problèmes analogues à ceux des pages 335 à 351 de *Clebsch-Benoist)* avec ou sans la notation symbolique.
GEOMETRIE : s'attacher surtout aux figures, lieux d'éléments, représentées par l'évanouissement d'une ou plusieurs formes mixtes (dans le sens des pages 351 à 379 de *Clebsch-Benoist],*
CALCUL INTEGRAL : s'attacher surtout aux équations aux dérivées partielles, qui s'introduisent à l'occasion des connexes de l'espace (dans le sens des pages 379 à 398 de *Glebsch-Benoist].*
[Autonne, 1901e, 7]

> mathématique, t.II, 2e edit, p.487). La forme canonique généralement adoptée à cet effet est la forme canonique de M. Jordan comprenant plusieurs groupes d'équations analogues au groupe suivant :
>
> $$X_1 = Sx_1 \ ; \ X_2 = x_1 + Sx_2, \ldots, X_p = x_{p-1} + Sx_p$$
>
> où S est une racine de l'équation caractéristique de la substitution ou du système d'équations différentielles donné.
>
> [Lattès, 1914, 1].

Parallèlement à la résolution "généralement adoptée", il est possible de recourir à une "méthode élémentaire d'intégration" par des "dérivations successives", c'est-à-dire par de simples manipulations du système ramenant l'intégration d'un système à celle d'une ou plusieurs équations "dépendant chacune d'une seule fonction inconnue" ([16]). Ce que propose Lattès, c'est de faire de ce procédé pratique de résolution des équations différentielles une méthode générale de réduction des substitutions à une "forme canonique nouvelle des substitutions linéaires". La méthode est présentée comme une généralisation aux systèmes d'équations de la technique de réduction d'une équation différentielle d'ordre m :

> Or, une équation différentielle linéaire d'ordre m se ramène immédiatement au système d'équations du premier ordre [...] et à ce système correspond la substitution linéaire
>
> $$X_1 = x_2, X_2 = x_3, \ldots X_{m-1} = x_m, X_m = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m.$$
>
> La comparaison des deux méthodes m'a suggéré l'idée que toute substitution linéaire devait pouvoir être ramenée à une forme canonique formée de plusieurs groupes analogues au groupe (1).
>
> [Lattès, 1914, 1]

Le mémoire de Lattès a donc pour objet une réorganisation de l'enseignement des équations différentielles par l'énoncé d'une nouvelle forme canonique susceptible d'une détermination effective et présentant l'avantage "pédagogique" de permettre une "discussion dans toute sa généralité" et "très simple" des solutions des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants :

> Parmi les applications pour lesquelles il a un avantage, tout au moins pédagogique, à utiliser la forme réduite (3) plutôt que la forme réduite classique, je citerai la discussion des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants. Un pareil système étant donné, la forme réduite (3) permettra de la ramener à la forme
>
> $$\frac{dy_1}{dx} = y_2 \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3, \quad \ldots, \quad \frac{dy_p}{dx} = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_py_p,$$
>
> $$\frac{dz_1}{dx} = z_2 \quad \frac{dz_2}{dx} = z_3, \quad \ldots, \quad \frac{dz_p}{dx} = c_1z_1 + c_2z_2 + \ldots + c_pz_p,$$
>
> $$\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots, \quad \ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
>
> c'est-à-dire, en définitive, à un système de k équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre $p, q, \ldots$ La discussion, dans toute sa généralité, d'un pareil système et la résolution deviennent très simples si l'on a les

[16] Il s'agit de la réduction triangulaire d'un système.

formules de passage permettant de transformer une substitution linéaire en sa forme canonique (3).
[Lattès, 1912, 1484].

2. La forme canonique rationnelle de Lattès.

En accolant les termes "canoniques" et "rationnels", Lattès vient résoudre, exactement 40 ans après la controverse de 1874, l'opposition de l'idéal de réduction de Jordan et de l'exigence d'effectivité de Kronecker:

> Le but principal de ce Mémoire est de démontrer la proposition suivante, relative à l'existence d'une pareille forme canonique :
> *Toute substitution linéaire, à déterminant non nul, peut être transformée en une substitution de la forme*
>
> $$(C)\begin{cases} C_1 \quad X_1 = x_2, X_2 = x_3, ..., X_{m-1} = x_m, X_m = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m \\ C_2 \quad Y_1 = y_2, Y_2 = y_3, ..., Y_{p-1} = y_p, Y_p = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_p \\ C_3 \quad Z_1 = z_2, Z_2 = z_3, ..., Z_{q-1} = z_q, X_q = c_1 z_1 + c_2 z_2 + ... + c_m z_q \\ ... \quad .... \end{cases}$$
>
> que nous appellerons forme canonique (C) et qui est formée d'un ou plusieurs groupes d'équations C_1, C_2, C_3 que nous appellerons groupes canonique.
> Chacun des polynômes
>
> $$\begin{aligned} \Delta_1(S) &= S^m - a_m S^{m-1} - ... - a_2 S - a_1, \\ \Delta_2(S) &= S^p - b_p S^{p-1} - ... - b_2 S - b_1, \\ \Delta_3(S) &= S^q - c_q S^{q-1} - ... - c_2 S - c_1, \\ &.................................... \end{aligned}$$
>
> formés à l'aide des coefficients de C_1, C_2, C_3 est divisible par le polynôme suivant (Sur la réduction des substitutions linéaires Comptes rendus tCLV, 1912, p. 1482)
> Ajoutons que les coefficients $a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ..., c_1, c_2, ...$ qui figurent dans (C) sont des fonctions rationnelles des coefficients de la substitution primitive et que cette forme canonique peut se déduire de la substitution primitive par des opération rationnelles. Au contraire, la forme canonique de M. Jordan contient comme coefficients les racines de l'équation caractéristique et il faut adjoindre ces racines au domaine de rationalité auquel appartiennent les coefficients de la substitution pour pouvoir transformer, à l'aide d'opérations rationnelles, la substitution donnée en la substitution canonique.
> Pour établir l'existence de la forme canonique (*C*), on peut avoir recours à la théorie classique des diviseurs élémentaires et au théorème fondamental de Weierstrass [...] ou bien chercher une démonstration directe qui permette en même temps de préciser la nature des opérations à faire pour effectuer la transformation.
> [Lattès, 1914, 1].

Lattès applique la méthode qui caractérisait l'approche de Jordan en 1874, la décomposition du système en "groupes d'équations", à la recherche d'une forme canonique rationnelle dont les composantes sont déterminés par un calcul effectif et correspondent, non pas aux diviseurs élémentaires de Weierstrass, mais aux facteurs invariants de Kronecker. Le procédé d'itération permettant la décomposition de la substitution implique une réduction du rôle du calcul des déterminants dans la théorie des substitutions :

> Dans les Chapitres II et III, à peu près complètement indépendants du Chapitre I, j'abandonne la théorie des diviseurs élémentaires et je déduis la forme canonique (C) de la substitution donnée par une méthode qui ne fait pas appel à au calcul du déterminant caractéristique et de ses mineurs. Dans cette méthode, le calcul des déterminants est remplacé en somme par un calcul d'itération de formes linéaires : pour obtenir le premier groupe canonique C_1, par exemple, on applique plusieurs fois de suite la substitution donnée à une forme linéaire P_1 à coefficients arbitraires et on obtient ainsi une suite de formes linéaires $P_1, P_2, P_3, \ldots$ dont chacune est l'*itérée(ou la conséquente)* de la précédente ; on s'arrête la première fois qu'on obtient une forme linéaire P_{m-1} dépendant des précédentes. La relation
>
> $$P_{m+1} = a_1P_1+a_2P_2+\ldots+a_mP_m$$
>
> qu'on obtient alors nous donne les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_m$ du premier groupe canonique C_1 qui contient précisément m variables. Les groupes canoniques suivants $C_2, C_3, \ldots$ s'obtiennent aussi par un procédé d'itération qui sera développé au Chapitre III.
>
> Cette méthode introduit directement les groupes canonique $C_1, C_2, C_3, \ldots$ sans qu'on ait à calculer au préalable ni le déterminant caractéristique, ni ses mineurs. Il en résulte qu'*elle pourrait constituer une méthode d'introduction des diviseurs élémentaires dans la théorie des substitutions linéaires sans recours au calcul des déterminants :* on pourrait, en effet, définir les produits élémentaires comme étant les polynômes $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$,..relatifs à la forme canonique (C) ; la méthode d'itération que nous venons d'indiquer montre comment sont définis ces polynômes ; on verra aussi qu'elle met en évidence le rôle d'invariants qu'ils jouent et les rapports qu'ils présentent avec les éléments géométriques (points, droites, multiplicités linéaires quelconques) invariants par la substitution. En se plaçant à ce point de vue, certaines propriétés des diviseurs élémentaires, qui n'ont pas été établies sans difficulté dans la théorie classique, se présenteraient tout naturellement comme conséquence des définitions.
>
> [Lattès, 1914, 2].

Contrairement à la méthode d'itération de Burnside, issue de la théorie des groupes, la démonstration de Lattès est surtout influencée par les travaux des "géomètres italiens" sur les homographies que nous avons vu dans la conclusion de la partie II. Elle s'inspire également de la méthode de décomposition d'Autonne qui influence les premiers travaux de Lattès sur les courbes invariantes par les transformations de Contacts [Lattès, 1906, 1909, 1911]. Comme Autonne, Lattès met au cœur de sa démarche la notion de point doubles et de multiplicités invariantes d'une homographie:

> Ainsi pour le choix du point de départ de la méthode d'itération on prend un plan qui ne contient aucun pole de la substitution
>
> Posons alors $y_1 = \alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n$,
>
> $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des nombres arbitraires, choisis seulement de façon que le plan qui a pour équation
>
> $$P_1 = \alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n = 0$$
>
> ne contienne aucun des pôles de la substitution.
>
> [...] Désignons par P_1 le premier membre de l'équation du plan précédent, ainsi que le plan lui-même. Nous appellerons *conséquent* ou *itéré* de ce plan le plan P transformé de P_1 par la substitution (1). [...] Nous désignerons de même en général par P_i le conséquent de P_{i-1}, de sorte que $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ désigneront les

conséquentes ou itérés successives de la forme linéaire P_1. [...] les formes linéaires $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont indépendantes. En langage géométrique, on peut prendre les plans $P_1, P_2, \ldots, P_n$ comme faces d'un polyèdre de référence. [...]
Mais les formes $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ sont dépendantes, puisqu'elles sont au nombre de $n+1$ et qu'il n'y a que n variables. On aura donc entre ces formes linéaires une identité de la forme

$$P_{n+1} = a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n$$

[...] $U_1 = y_1$, $Y_2 = y_2, \ldots, Y_{n-1} = y_n$, $Y_{n,} = a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n$.
ainsi se trouve établie par un procédé direct indépendant de la théorie des diviseurs élémentaires, la forme canonique (C) posée au chapitre I.
[Lattès, 1914, 22-24].

La mise en avant de la notion de multiplicités invariantes par une substitution linéaire donne à la décomposition des substitutions une représentation dans un cadre géométrique. Cette méthode sera développée par Lattès dans une note aux Comptes Rendus en 1915.

Exemples : 1° Soit à déterminer les multiplicités invariantes par la substitution canonique

$$X_1 = x_2 \ ; \ X_2 = x_3, X_3 = x_4 , X_4 = -x_1-4x_2-6x_3-4x_4.$$

On a ici :

$$\Delta(S) = S^4 + 4 S^3 6S^2 +4S+1 = (S+1)^4.$$

En appliquant le théorème du numéro 8, on voit qu'aux diviseurs $(S+1)(S+1)^2$, $(S+1)^3$ de $\Delta(S)$ correspondent respectivement :
un point invariant M_1 défini par les équations

$$x_2+x_1 = 0, x_3+x_2 = 0, x_4+x_3 = 0,$$

une droite invariante M_2 définie par les équations

$$x_3+2x_2 +x_1 = 0, x_4+2x_3+x_2 = 0,$$

un plan invariant M_3 défini par l'équation

$$x_4 + 3x_3+3x_2+x_1 = 0.$$

D'après les résultats du numéro précédent, le plan M_3 contient la droite M_2 qui contient elle-même le point M_1.
[Lattès, 1914, 38].

Cette interprétation permet en particulier de représenter les étapes essentielles de la décomposition d'une substitution en "substitutions sous canoniques" comme un changement de bases d'un espace géométrique. Les changements de bases permettent d'expliciter la relation entre la forme (C) et la forme de Jordan :

[12] Transformations permettant de décomposer la substitution (C) en substitutions sous-canoniques. Interprétation géométrique des substitutions sous-canoniques.
[...] Ainsi on obtient la transformation de (C) en ($C_1C_2C_3$) en prenant un nouveau polyèdre de référence [...] Ceci est général : *les substitutions sous canoniques s'obtiennent en prenant pour faces du polyèdre de référence des plans passant par certains des éléments doubles convenablement groupés.*
[...] [13] *Retour de la forme canonique (C) à la forme canonique de M. Jordan.*
La décomposition de $\Delta(S)$ en facteurs binômes de la forme $(S-a)^2$ donne une décomposition de (G) en substitutions sous canoniques d'où nous tirerons immédiatement la forme canonique classique de M. Jordan.

ENCART 10.
La formulation vectorielle de l'approche géométrique chez Weyl [1923].

Dans ses cours de 1923, *Mathematische Analyse des Raumproblems,* Weyl donne une formulation vectorielle à l'approche géométrique qui caractérisait les travaux d'Autonne, Lattès ou Chatelet. Le problème est posé comme celui de la représentation matricielle des opérateurs agissant sur des espaces de vecteurs [Weyl, 1923, 88]. La décomposition matricielle est supportée par une méthode de décomposition de l'espace en sous espaces invariants par l'action d'un opérateur [Weyl, 1923, 90] (texte cité page suivante).

$$[\ldots]\ \Delta(S) = (S-S_1)^{\alpha}\,(S-S_2)^{\beta}\ldots.$$

A chacun des facteurs $(S-S_1)^{\alpha}$, $(S-S_2)^{\beta}$,… correspond une substitution sous-canonique. Considérons par exemple une racine a d'ordre m. Au facteur $(S-a)^m$ correspond la substitution sous canonique

$$X_1 = x_2,\ X_2 = x_3,\ldots,\ X_{m-1} = x_m,\ X_m$$
$$= C_m^{\,1}ax_m - C_m^{\,2}a^2x_{m-1} + C_m^{\,3}a^3x_{m-3} + \ldots + (-1)^m a^m x_1,$$

$C_m^{\,1}$, $C_m^{\,2}$, étant les coefficients de la formule du binôme pour l'exposant m. il est facile de passer de cette substitution à la forme canonique de M.. Jordan. Employons la notation symbolique $[x-a]^m$ pour désigner la forme linéaire suivante :

$$[x-a]^m = x_{m-1} - C_m^{\,1}ax_{m-1} + C_m^{\,2}a^2x_{m-2} + \ldots + (-1)^m C_m^{\,n}a^m x_1,$$

[…] Posons alors

$$\begin{aligned} y_1 &= [x-a]^{m-1} \\ y_2 &= [x-a]^{m-2} \\ y_3 &= [x-a]^{m-3} \\ &\ldots \\ y_{m-1} &= [x-a]^1 = x_2 - ax_1 \\ y_m &= x_1 \end{aligned}$$

[…] Pour passer de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ à $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, il faut remplacer dans ces formules $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *par* $X_1, X_2, \ldots, X_m$; […]

$$Y_1 = ay_1$$
$$[\ldots]\ Y_2 = y_1 + ay_2,$$
$$[\ldots]\ Y_3 = y_2 + ay_3$$

[…]

On voit que la substitution est ainsi ramenée à sa forme canonique de M. Jordan.

Exemple :

Transformons de cette façon la substitution sous-canonique correspondant au diviseur $(S-1)^4$.

C'est la substitution

$$\begin{aligned} X_1 &= x_2, \\ X_2 &= x_3, \\ X_3 &= x_4, \\ X_4 &= 4x_4 - 6x_3 + 4x_2 - x_1. \end{aligned}$$

Il suffira, pour obtenir la forme canonique de M. Jordan, de poser

$$\begin{aligned} y_1 &= [x-1]^3 = x_4 - 3x_3 + 3x_2 - x_1, \\ y_2 &= [x-1]^2 = x_3 - 2x_2 + x_1, \\ y_1 &= [x-1]^1 = x_2 - x_1, \\ y_4 &= x_1, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} x_1 &= y_4, \\ x &= y_4 + y_3, \\ x_3 &= y_4 + 2y_3 + y_2, \\ x_4 &= y_4 + 3y_2 + y_1. \end{aligned}$$

la substitution transformée est :

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_4 - 3X_3 + 3X_2 - X_1 &&= x_4 - 3x_3 + 3x_2 - x_1 &&= y_1, \\ Y_2 &= X_3 - 2X_2 + X_1 &&= x_4 - 2x_3 + x_2 &&= y_1 + y_2, \\ Y_3 &= X_3 - X_1 &&= x_3 - x_2 &&= y_2 + y_3, \\ Y_4 &= X_1 &&= x_2 &&= y_3 + y_4. \end{aligned}$$

C'est bien là la forme canonique de M. Jordan.

[Lattès, 1914, 46-51]

Ist $\mathfrak{E}_p$ eine p-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit von Vektoren, die etwa von den p unabhängigen Vektoren $e_1 e_2 \ldots e_p$ aufgespannt wird, so soll eine Vektorgleichung wie

$$x = y \;(e_1 e_2 \ldots e_p) \quad \text{oder} \quad x = y \;(\operatorname{mod} \mathfrak{E}_p)$$

bedeuten, daß der Vektor $x - y$ sich aus $e_1 e_2 \ldots e_p$ linear zusammensetzt oder der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{E}_p$ angehört. Betrachten wir zwei Vektoren als gleich, wenn sie mod $\mathfrak{E}_p$ einander gleich sind, so verwandelt sich der n-dimensionale Vektorraum $\mathfrak{R}_n$ in einen $(n-p)$-dimensionalen $\mathfrak{R}_{n-p}$ »*durch Projektion nach* $\mathfrak{E}_p$«. Ist $\mathfrak{E}_p$ *invariant* gegenüber der Abbildung A, d. h. ist das Bild dx eines jeden zu $\mathfrak{E}_p$ gehörigen Vektors x in $\mathfrak{E}_p$ gelegen, so führt A je zwei Vektoren, welche mod $\mathfrak{E}_p$ einander gleich sind, wiederum in zwei miteinander mod $\mathfrak{E}_p$ übereinstimmende Vektoren über. Es definiert uns A also eine bestimmte Abbildung des Projektionsraumes $\mathfrak{R}_{n-p}$ auf sich selber, und außerdem natürlich eine Abbildung der invarianten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{E}_p$ auf sich. In Komponenten stellt sich das so dar. Ergänzen wir $e_1 e_2 \ldots e_p$ durch Hinzufügung von $q = n - p$ weiteren Vektoren $e_1^* e_2^* \ldots e_q^*$ zu einem vollständigen Koordinatensystem von $\mathfrak{R}_n$, so kann man $e_1^* e_2^* \ldots e_q^*$ als ein Koordinatensystem im $\mathfrak{R}_{n-p}$ verwenden, da jeder Vektor x sich mod $\mathfrak{E}_p$ als eine Kombination von ihnen darstellen läßt:

$$x = \xi_*^1 e_1^* + \xi_*^2 e_2^* + \cdots + \xi_*^q e_q^* \qquad (\operatorname{mod} e_1 e_2 \ldots e_p).$$

Ist $\mathfrak{E}_p$ invariant, so hat in dem Koordinatensystem $e_1, \ldots, e_p, e_1^*, \ldots, e_q^*$ die Matrix A die folgende Gestalt:

$$\begin{array}{|ccc|ccc|}
\hline
\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1p} & * & \cdots & * \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_{p1} & \cdots & \alpha_{pp} & * & \cdots & * \\
\hline
 & & & \alpha_{11}^* & \cdots & \alpha_{1q}^* \\
 & & & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \alpha_{q1}^* & \cdots & \alpha_{qq}^* \\
\hline
\end{array}$$

(Der Stern, $*$, dient uns hier wie immer zur Kennzeichnung von Zahlen im Matrixschema, welche nicht benannt zu werden brauchen; leere Felder soll man sich stets durch eine 0 ausgefüllt denken.) Die Abbildung A von $\mathfrak{E}_p$ ist dann gegeben durch die Gleichungen

$$d e_i = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ki} e_k \qquad [i = 1, 2, \ldots, p],$$

die Abbildung A des Projektionsraumes $\mathfrak{R}_{n-p}$ durch:

$$(1) \qquad d e_j^* = \sum_{h=1}^{q} \alpha_{hj}^* e_h^* \quad (\operatorname{mod} e_1 e_2 \ldots e_p) \quad [j = 1, 2, \ldots, q].$$

Bedeutet $\varphi_n(\omega)$ das zur Abbildung A gehörige charakteristische Polynom von $\mathfrak{R}_n$, $\varphi_p(\omega)$ dasjenige von $\mathfrak{E}_p$, $\varphi_q^*(\omega)$ das zur Abbildung (1) von $\mathfrak{R}_q$ gehörige charakteristische Polynom, so geht aus dem hingeschriebenen Matrixschema von A oder vielmehr dem von $\omega E - A$ ohne weiteres hervor, daß

$$(2) \qquad \varphi_n(\omega) = \varphi_p(\omega) \cdot \varphi_q^*(\omega)$$

ist.

3. La théorie des matrices canoniques.

Au début du XX^e siècle, les méthodes de décompositions matricielles sont exposées dans des traités d'enseignements de langues française, anglaise et allemande ([17]) ; elles se présentent comme une *culture commune* donnant un caractère *universel* à la représentation matricielle portant les valeurs pédagogiques d'une représentation simple et intuitive :

> From the outset the student is urged to work with the matrix form of a linear representation. The practice thus gained is of great advantage [...] ; in particular the more difficult sections of Chapter XIII [sur la représentation des groupes] will be mastered readily if the student has a clear mental image of the matrix form of the regular groups [...].
> [Blichfledt, 1916, vii].

En établissant une forme canonique des matrices par des procédés rationnels, Lattes réconcilie en 1914 deux termes opposés par Jordan et Kronecker en 1874 : formes canoniques d'une part, procédés rationnels d'autre part. Le problème de la *décomposition rationnelle des matrices* est fondateur de la *théorie des matrices canoniques* qui se développe à partir de 1914 et qui regroupe des travaux élaborant des procédés rationnels de décomposition d'une matrice "en chaînes" [Dickson, 1926] de "matrices compagnons" [Loewy, 1918] d'une part ([18]), et des procédés non rationnels de réduction à une suite de formes "canoniques classiques" [Aitken, 1928] appelées également "matrices de Jordan" [Mac Duffy, 1933] ([19]). Dans le cadre de la théorie des matrices canoniques, de nouvelles questions se posent et de nouvelles exigences sont formulées. On distingue par exemple entre preuves d'existence et preuves constructives et on cherche à reconnaître par une méthode effective si une chaine de réduction peut être obtenue ou non par une suite finie d'étapes, Bennett remarque ainsi en 1931 que la méthode de Lattès n'est pas constructive car elle nécessite la détermination des facteurs irréductibles du polynôme caractéristique. D'autres exemples de problèmes qui entrent dans le cadre de la théorie des matrices canoniques proviennent de la généralisation des résultats obtenus pour des matrices à coefficients rationnels à des structures particulières comme les anneaux principaux ([20]), de l'utilisation de

[17] Voir [Autonne, 1904], [Schur, 1909], [Cullis, 1913], [Châtelet, 1914], [Hilton, 1914], [Blichfeldt, 1917], [Weyl, 1923], [Dickson, 1926].

[18] Pour les recherches sur les réductions rationnelles, voir [Lattès, 1914], [Kowalewski, 1916], [Loewy, 1917, 1918], [Krull, 1921] , [Dickson, 1926], [Polya, 1928] , [Bennett, 1931], [Ingraham, 1933], [Mad Duffy, 1933], [Gantmacher, 1935], [Cavalluci, 1937], [Petr, 1940], [Smiley, 1942], [Rutherford, 1932], [Petr, 1940].

[19] Pour les travaux sur la réduction à la forme de Jordan et les diviseurs élémentaires, voir [Burgess, 1916], [Voghera, 1928], [Aitken, 1928] [Wellstein, 1930], [Bell, 1930], [Smale, 1930], [Turnbull, 1931], [Menge, 1932, 1933], [Browne, 1940].

[20] Voir [Wedderburn, 1931], [Mac Duffee, 1933], [Ingraham et Wolf, 1937], [Varineau, 1940].

[Weyl, 1923, 94] :

Ergebnisse fassen wir zusammen in dem folgenden grundlegenden

Theorem. Der Zerfällung des charakteristischen Polynoms $\varphi(\omega)$ *in die Potenzen seiner verschiedenen Linearfaktoren*

$$(\omega - \alpha_1)^{r_1}, \ (\omega - \alpha_2)^{r_2}, \ \ldots$$

entspricht eine additive lineare Zerlegung des willkürlichen Vektors x *in ebensoviele unabhängige, gegenüber der Abbildung* A *invariante Bestandteile:*

$$x = x_1 + x_2 + \cdots,$$

welche den Gleichungen genügen

$$(d - \alpha_1)^{r_1} x_1 = 0, \ (d - \alpha_2)^{r_2} x_2 = 0, \ \cdots. \tag{10}$$

x_1 *durchläuft, wenn* x *frei variiert, eine* r_1*-dimensionale invariante Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{E}_1$, *deren charakteristisches Polynom der korrespondierende Faktor* $(\omega - \alpha_1)^{r_1}$ *ist; Analoges gilt für* $\mathfrak{E}_2, \cdots$.

Da $\varphi(\omega)$ die sämtlichen Faktoren (5) enthält, folgt aus (10) für jeden Vektor x die Gleichung

$$\varphi(d)x = 0. \tag{11}$$

la décomposition matricielle pour les théories des groupes abéliens ([Châtelet, 1922, 1923], [de Séguier, 1925]) , des modules de types finis (Krull [1926], Van der Waerden [1931]) ou des algèbres associatives ([Dickson, 1926], [Rutherford, 1948]).

La thèse de Krull, publiée en 1921, est le premier traité consacré à la décomposition rationnelle des matrices. Krull explicite les relations entre la décomposition polynomiale des diviseurs élémentaires et la décomposition matricielle dans le cadre d'une théorie de la décomposition de l'espace géométrique sous l'action d'une transformation linéaire. La théorisation par la géométrie vectorielle des méthodes sous jacentes aux travaux d'Autonne et Lattès prend une importance croissante dans les années vingt et donne une nouvelle postérité à la méthode de décomposition des matrices de Weyr [1890] :

> Let A be an nxn matrix with coefficients in a field F. Let $L = L(\xi_1, ..., \xi_p)$ be the linear set consisting of the totality of vectors of the form $\Sigma_1^p f_i(A)\xi_i$ where the f's are polynomials with coefficients in f and the ξ's are $nx1$ matrices (vectors) with elements in F. If η is a vector, we say that $g(A)\eta = 0$ mod L if $g(A)\eta$ is in L. It is shown that for each vector η there is a function not identically 0 of minimum degree effective as g. This function divides all other polynomials effective as g. there is a η which maximizes the degree of the corresponding minimum function g, and the minimum function g_1, corresponding to any other vector η_1, divides g. From these considerations one readily develops the reduction of A to a canonical form by transformations in F.
> [Ingraham, 1932, 814].

Dans le cadre de la géométrie vectorielle, de nouvelles identités sont établies entre des théories auparavant distinctes comme la théorie des groupes et des formes bilinéaires ([Weyl, 1923], [Klein, 1926], [Wellstein, 1930, 167]), la représentation des groupes ([Schur, 1928], [Shoda, 1929]), et les développements de la physique théorique comme la mécanique des matrices [Heisenberg, 1925] ou la mécanique quantique [Dirac, 1926], [Born-Jordan, 1925], [Brillouin, 1926] ([21]).
Les différentes méthodes qui s'élaborent dans le cadre de la théorie des matrices canoniques portent l'héritage de différentes théories du passé comme les systèmes d'équations différentielles, les formes bilinéaires, les réductions des tableaux, les algèbres associatives, la géométrie vectorielle etc. L'adoption de la représentation matricielle comme un système de représentation universel permet désormais de considérer ce qui relevait auparavant de théories distinctes comme différents points de vue sur une même théorie. L'adoption d'une représentation commune dans le cadre d'une réorganisation du savoir mathématique doit être rattaché à l'idéal d'internationalisme scientifique du début du XX^e siècle qui porte l'ambition de la constitution d'un langage universel [Rasmussen, 1995] ainsi que d'une standardisation des notations et du vocabulaire mathématiques [Dhombres, 2004, 92] ([22]). Bénéficiant d'un

---

[21] La mécanique quantique associe de nouveaux enjeux à l'algèbre non commutative et aux equations en matrices $AX = XA$. Voir [Dirac, 1926, 412] ou [Turnbull et Aitken, 1932, 146-166].

[22] Jean Dhombres a notamment souligné le rôle de la commission internationale sur l'enseignement des mathématiques dans l'entreprise de standardisation du vocabulaire mathématique, voir [Dhombres, 2004, 92]

Es sei l der niedrigste Exponent, für den $d^l x = 0$ ist identisch in x. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_{l-1}, \mathfrak{E}_l$ die lineare Mannigfaltigkeit aller Vektoren x, für welche bzw. die Gleichungen gelten:

$$d^l x = 0\,; \quad d^{l-1} x = 0\,; \quad \ldots; \quad dx = 0\,; \quad x = 0\,.$$

$\mathfrak{E}_0$ ist der gesamte Vektorraum, $\mathfrak{E}_l$ besteht nur aus dem Vektor 0. $\mathfrak{E}_1$ ist in $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E}_2$ in $\mathfrak{E}_1$ enthalten usf. Die Mannigfaltigkeiten sind invariant gegenüber der Abbildung A; es gilt sogar schärfer: gehört x zu $\mathfrak{E}_0$ oder $\mathfrak{E}_1$ oder $\mathfrak{E}_2 \ldots$, so liegt sein Bild dx bzw. in $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3, \ldots$ Es bezeichne r_0 die Zahl der Dimensionen von $\mathfrak{E}_0$ relativ zu $\mathfrak{E}_1$, d. h. die Anzahl der mod. $\mathfrak{E}_1$ voneinander linear unabhängigen Vektoren in $\mathfrak{E}_0$, ebenso r_1 die Dimensionszahl von $\mathfrak{E}_1$ relativ zu $\mathfrak{E}_2, \ldots$ endlich r_{l-1} die Dimensionszahl von $\mathfrak{E}_{l-1}$ (relativ zu $\mathfrak{E}_l$). Dann ist

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{l-1} = n\,, \qquad r_0 \geqq 1\,.$$

Wir wählen r_0 Vektoren (e_0) in $\mathfrak{E}_0$, welche mod. $\mathfrak{E}_1$ voneinander linear unabhängig sind. Ihre Bilder $de_0 = e'_0$ liegen in $\mathfrak{E}_1$ und sind linear unabhängig mod. $\mathfrak{E}_2$; denn daß eine lineare Kombination dx der de_0 gleich Null ist mod. $\mathfrak{E}_2$, besagt ja, daß

$$d^{l-2}(dx) = 0 \quad \text{oder} \quad d^{l-1}x = 0\,,$$

d. h. daß $x = 0$ ist mod. $\mathfrak{E}_1$. Daraus geht hervor, daß $r_1 \geqq r_0$ sein muß. Wir fügen zu den r_0 Vektoren e'_0 weitere $s_1 = r_1 - r_0$ Vektoren von $\mathfrak{E}_1$ so hinzu, daß alle r_1 Vektoren zusammen linear unabhängig sind mod. $\mathfrak{E}_2$; wir nennen diese Reihe von Vektoren (e_1). So fortfahrend erkennen wir, daß

$$r_0 \leqq r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots \leqq r_{l-1}$$

ist und erhalten ein System von n Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_n$ mit folgenden Eigenschaften:

die ersten r_0 dieser Vektoren — Serie (e_0) — liegen in $\mathfrak{E}_0$ und sind linear unabhängig mod. $\mathfrak{E}_1$;

die darauf folgenden r_1 — Serie (e_1) — liegen in $\mathfrak{E}_1$ und sind linear unabhängig mod. $\mathfrak{E}_2$;

. . . .

die letzten r_{l-1} — Serie (e_{l-1}) — liegen in $\mathfrak{E}_{l-1}$ und sind linear unabhängig voneinander.

Daraus geht hervor, daß alle n Vektoren voneinander linear unabhängig sind und also ein Koordinatensystem für den ganzen Vektorraum bilden. Außerdem gilt:

die Bilder der r_0 Vektoren (e_0) gehören zur Serie (e_1);

die Bilder der r_1 Vektoren, welche die Serie (e_1) konstituieren, gehören zur Serie (e_2);

. . . .

die Bilder der r_{l-1} Vektoren, welche die Serie (e_{l-1}) konstituieren, sind Null.

langage universel porté par la représentation matricielle, la théorie des matrices canoniques est dès son origine une "mathématique internationale" au sens donné à ce terme par Jean Dhombres [Dhombres, 2004, 106], objet d'une coopération sans frontières et thème fréquent de communication dans les congrès. La communication de Dickson au congrès de Toronto de 1924 en donne un bon exemple. Dans le cadre de sa théorie des algèbres associatives, Dickson propose "une nouvelle théorie des transformations linéaires et des paires de forme bilinéaires". En partant du problème de la similitude des transformations linéaires et en présentant comme corollaire la classification des faisceaux de formes bilinéaires, Dickson renverse la structure qu'avait prise la théorie des couples de formes bilinéaires depuis le mémoire de Frobenius de 1878 :

> It is customary to develop the theory of pairs of bilinear forms having the matrices *M* and *N*, and by considering the special case in which *N* is the identity (or unit) matrix *I* to deduce the theory of canonical form of a linear transformation *T*. We here proceed in reverse order and first develop independently a simple theory of linear transformation and later deduce the theory of equivalence of pairs of matrices and hence of pairs of bilinear forms. We avoid the introduction of irrationalities and employ only rational processes, so that our theory holds for any given field (or domain of rationality). We obtain a simple interpretation of invariant factors.
> [Dickson, 1924, 361].

La "nouvelle théorie" de Dickson reprend l'organisation théorique déjà proposée par Jordan en 1874 : similitude des transformations linéaires et forme canonique au centre, équivalence des faisceaux et invariants comme corollaires. Ce qui est nouveau, en 1924, c'est que la théorie des matrices canoniques permet de considérer les méthodes de Jordan et Kronecker qui s'opposaient en 1874, comme deux points de vues différents et complémentaires au sein d'une même théorie qui articule formes canoniques et invariants.
Les traités sur la théorie des matrices canoniques se multiplient au début des années trente ([23]). Ils participent de la nouvelle organisation de l'"algèbre moderne" dont le traité de van der Waerden [1930] est paradigmatique ([24]). Si la réorganisation du champ disciplinaire de l'algèbre et l'adoption de la représentation matricielle comme universelle manifestent la constitution d'une culture commune, cette unification n'implique cependant pas une uniformisation de la pensée mathématique. Les traités des années trente présentent des différences importantes selon qu'ils mettent au centre des invariants dans la tradition de Frobenius [Mac Duffy, 1933] ou des formes canoniques [Turnbull et Aiken, 1932]. Comme nous le verrons en conclusion, l'examen des différences d'énoncés du "théorème de Jordan" dans les années trente permet de mettre en évidence l' identité d'une théorème placé au cœur d'une nouvelle organisation théorique .

[23] Voir [Krull, 1921], [Châtelet, 1924, 1925], [Dickson, 1926], [[Turnbull, 1928], [Turnbull et Aitken, 1932], [Schreier et Sperner, 1932], [Mac Duffee, 1933, 1940, et 1943], [Wedderburn, 1934], [Aitken, 1939].

[24] Voir [Jacobson, 1940], [Albert, 1941].

Ist z. B. $l = 3$; $r_0 = 2$, $r_1 = 3$, $r_2 = 5$, so sieht die 10-reihige Nullmatrix bei Verwendung des eben konstruierten normalen Koordinatensystems so aus, wie die nebenstehende Abbildung zeigt. In den schraffierten Quadraten von der Seitenlänge $r_0 = 2$, $r_1 = 3$ steht je eine 2- bzw. 3-reihige Einheitsmatrix; alle übrigen Felder sind mit Nullen besetzt. Wir sind offenbar am Ziel, da die gewonnene Normalform durch invariante Charaktere der Abbildung A, nämlich die Anzahlen $r_0, r_1, \ldots, r_{l-1}$, eindeutig bestimmt ist.

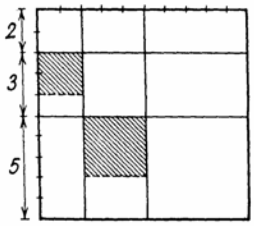


Abb. 7.

Oft gewährt eine andere Anordnung (»zweite Anordnung«) der n Grundvektoren e_i unseres Koordinatensystems ein übersichtlicheres Bild. Wir beginnen mit einem Vektor e der Serie (e_0); seine sukzessiven Bilder

$$e,\ de,\ d^2 e,\ \ldots,\ d^{l-1} e \qquad (d^l e \text{ ist } = 0)$$

bilden eine *Kette* von l Vektoren, die unter den e_i vorkommen. Von derartigen l-gliedrigen Ketten, welche in der ersten Serie (e_0) beginnen, existieren $r_0 = s_0$. Weiterhin sind $r_1 - r_0 = s_1$ Ketten von der Gliederzahl $l - 1$ vorhanden, welche in (e_1) beginnen, $s_2 = r_2 - r_1$ in (e_2) beginnende $(l - 2)$-gliedrige Ketten usf. In dieser Weise lassen wir die einzelnen Ketten aufeinanderfolgen; die Vektoren jeder Kette spannen eine Mannigfaltigkeit auf, welche gegenüber der Abbildung A invariant ist. Die Matrix für die Transformation einer solchen Mannigfaltigkeit hat die Gestalt S: nur die erste, auf die Hauptdiagonale nach links hin folgende Diagonale ist mit Einsen besetzt. In der der zweiten Anordnung entsprechenden Normalform von A reihen sich derartige S, deren Zeilenzahl zwischen l und 1 variiert, längs der Hauptdiagonale aneinander. Die Gesamtzahl der Ketten ist $s = r_{l-1}$. Der Rang der Matrix, d. i. die Dimensionszahl der Mannigfaltigkeit, welche dx bei frei variablem x durchläuft, oder die Anzahl der linear unabhängigen unter den Spalten von A, ist gleich $n - s$.

$$(14) \qquad S = \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{matrix}}$$

Entsprechend der Zerlegung der Reihe der n Einheitsvektoren $e_1\, e_2 \ldots e_n$ in s Ketten erhalten wir eine Einteilung der willkürlichen Matrix X in s^2 Parzellen

$$X_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, s) : X = \Sigma X_{\mu\nu}.$$

Die einzelnen Parzellen sind gegenüber der Abbildung D:

$$DX = [AX]$$

invariant. Haben wir z. B. eine Parzelle X_{12} von 4 Spalten und 3 Zeilen, so denken wir uns, um die Wirkung der Operation D auf sie in einfacher Weise schildern zu können, ihr Schema zu einem vollen Quadranten ergänzt und die dadurch neu eingeführten Felder (o in der Abbildung) mit Nullen besetzt. Der Prozeß besteht dann darin, daß von jeder in einer der gestrichelten Diagonalen stehenden Zahlenreihe die Diffenzenreihe zu bilden ist und in die nach links hin nächstfolgende Diagonale des Schemas hineinrückt. Von den $6 = (4 + 3) - 1$ Diagonalen, die in X nicht leer sind, wird so durch die Iteration des Prozesses D eine nach der andern entleert; man übersieht hier sehr schön, daß nach 6-maliger Wiederholung die ganze Parzelle zu o geworden ist.

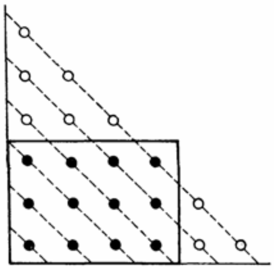


Abb. 8.

Unter den durch Iteration der »Ableitung« D aus X hervorgehenden Matrizen ist die erste, welche identisch verschwindet, offenbar die $(2l - 1)^{\text{te}}$:

$$D^{2l-1}X = 0\,.$$

Nullmatrizen sind die Ableitungen von der l^{ten} an; denn bedient man sich der ersten Anordnung, so sieht man, daß in $D^l X$ und den folgenden Ableitungen nur noch Felder besetzt sind, welche auf der linken Seite der Hauptdiagonale liegen. Diese Bemerkung wird uns hernach von Nutzen sein. Wir ergänzen sie durch die folgende. Ist A eine beliebige Matrix (nicht speziell eine Nullmatrix), so gehört zu A nach dem Obigen eine Ländereinteilung der willkürlichen Matrix X; A liege in seiner Normalform vor, d. h. zerfalle in die den verschiedenen Eigenwerten entsprechenden, sich längs der Hauptdiagonale aneinanderreihenden Quadrate $A_1, A_2, \ldots$ Wir unterscheiden das Hauptland mit dem Multiplikator o und die zu den Multiplikatoren $\lambda \neq 0$ gehörigen Nebenländer. Ich behaupte, daß die zu einem Nebenland gehörigen Matrizen (welche außerhalb des betr. Landes leer sind) stets Nullmatrizen sind. In der Tat kann man die Eigenwerte nach dem Prinzip anordnen, daß von zwei verschiedenen Eigenwerten α_1, α_2 derjenige mit dem kleineren Realteil dem andern voraufgeht; bei zwei verschiedenen Eigenwerten mit gleichem Realteil soll aber der kleinere Imaginärteil über den Vorrang entscheiden. Bei dieser Anordnung liegen alle Felder des Matrixschemas von X, die zu einem und demselben Nebenlande gehören, auf derselben Seite der Hauptdiagonale.

ENCART 1.

L'histoire de la théorie des matrices dans les traités des années trente.

Wedderburn ajoute à ses *Lectures on matrices* de 1932 une bibliographie chronologique. *The theory of canonical matrices* de Turnbull et Aitken propose une note historique en conclusion de chaque chapitre. Enfin, le traité de Mac Duffee de 1933 accompagne systématiquement les énoncés, définitions, propriétés et théorèmes mathématiques de notes historiques et bibliographiques.

- **Le traité de Turnbull et Aitken de 1932.**

> The theory of canonical matrices is concerned with the systematic investigation of types of transformation which reduce matrices to the simplest and most convenient shape. The formulation of these various types is not merely useful as a preliminary to the deeper study of the properties of matrices themselves ; it serves also to render the theory of matrices more immediate for numerous applications to geometry, differential equations, analytical dynamics, and the like. Quite early, for example, In co-ordinate geometry, when the equation of a general conic are referred to their common self-conjugate triangle, the procedure involved is really equivalent to the canonical reduction of a matrix.
> [Turnbul et Aitken, 1932, 1].
>
> 7. The highest common factor of two polynomial
> [...] Historical Note
> The process of successive residuation which leads to the H.C.F. of two numbers Φ and Ψ is given by Euclid in Book 7, Propositions 1-3 of the Elements. In Proposition 33 he finds the H.C.F. of "as many numbers as we please". In our next chapter we shall see how H.J.S. Smith made use of this process, by arranging the elements Φ, Ψ, ..., whose H.C.F. is to be found, in rows and columns. As Smith points out, his innovation was the introduction of the premultiplier *P*, to reinforce the effect of the postmultiplier Q in modifying a matrix A, in the form *PAQ*. He credits Gauss with the *Q* factor. [...] To Hermite is attributed the introduction of a matrix of Type II in the role of a factor *Q* modifying the columns of *A.*
>
> [...] Historical note.
> The form Γ [la forme triangulaire] was obtained by Jacobi in discussing bilinear forms *uAx,* which in effect, he reduced to canonical form *vΓy* ; J ; für Math, 53 (1857), 265-70 [...]. The classical form C [forme de Jordan] is first found in C. Jordan, *Traité des substitutions* (Paris, 1870) ; the matrices there were of positive integers modulo *p*, the determinants involved being "non singular", that is prime to *p*. Frobenius and Landsberg [...] obtain the bilinear form *vCy.* Dickson has extended the result to any field [1902]. The canonical reduction of bilinear forms has received new and thorough treatment recently by R.G.D. Richardson *Trans. Am. Math. Soc.* 26 (1924)
> The steps which we have used in reducing *Γ* to *C* were suggested in, part by an elementary exposition of H.E. Hawks *Am. J. Math.* 33 (1910) but the prescription there given is inadequate without some further principle, such as the formation of chains.
> [...] The theorem on the convergence of a matrix power series is due to Ed ; Weyr *Bull. sci. math,* 11 (1887), 205-15. The full statement for multiple latent roots is to be found in a paper by K. Hensel, J. für Math, 155 (1926), 107-10.
> [...] The transformation of *B* into c by the alternant matrix was indicated by I. Schur, for the case of distinct latent roots, *trans Am. Math Soc* 10 (1909 = , 159-175 ; and proved for the confluent case by A.C. Aitken, *Proc . Roy. Soc. Edin.* 51 (1930), 81-90.

Conclusion.

- **Le traité de Wedderburn de 1932.**

> The calculus of matrices was first used in 1853 by Hamiton under the name of "Linear and vector functions." Cayley used the term *matrix* in 1854 but merely for a scheme of coefficients, and not in connection with a calculus. In 1858 he developed the basic notions of the algebra of matrices without recognizing the relation of his work to that of Hamilton ; in some cases (e.g. the theory of the characteristic equation) Cayley gave merely a verification, whereas Hamilton had already used methods in three and four dimensions which extend immediately to any number of dimensions. The algebra of matrices was rediscovered by Laguerre in 1867, and by Frobenius in 1878.
> [Wedderburn, 1932, 169].

Wedderburn inclut dans son traité une bibliographie détaillée et classe par année de parution les références qui forment à ses yeux l'histoire de la théorie des matrices. Entre 1853 et 1878 les références de Wedderburn sont toutes anglaises (Hamilton, Cayley, Sylvester, Smith, Tait) à l'exception des trois noms de Grassman, Laguerre et Frobenius. Sur la période 1880-1900, Wedderburn fait essentiellement référence aux travaux sur les algèbres associatives et les quaternions, auxquels il faut rajouter les noms de Kronecker, de Hensel, de Landsberg, de Weyr et de Peano. A partir de 1900, Wedderburn site systématiquement tous les travaux portant sur les matrices et sur les tableaux.

- **Le traité de Mac Duffee de 1943.**

En 1943, Mac Duffe publie un traité, intitulé *Vectors and Matrices*. Ce traité débute par un historique de la théorie des matrices.

> The theory of matrices had its origin in the theory of determinants [...]. The early algebraists never successfully explained what a determinant was, and indeed they were not interested in exact definitions.
> It was Cayley who seems first to have noticed that "the idea of matrix precedes that of determinant." More absolutely, we can say that the relation of determinant to matrix is that of the absolute value of a complex number to the complex number itself, and it is no more possible to define determinant without the previous concept of matrix or its equivalent than it is to have the feline grin without the Cheshire cat.
> In fact, the importance of the concept of determinant has been, and currently is, vastly over-estimated.
> [...] One of the central problems in matric theory is that of similarity. This problem was first solved for the complex field by means of the elementary divisors theory of Weierstrass and for other rings by H.J.S. Smith and Frobenius. In the present century a number of writers have made direct attacks upon the problem of the rational reduction of a matrix by means of similarity transformations. S. Lattès in 1914 and G. Kowalewski in 1916 were among the pioneers. [...] The early reductions were short, requiring only a few pages. It is not prudent to say that any of the early papers is incorrect, for certainly a correct result was obtained in each case, but some of them contained arguments which were convincing only to their authors. the exposition in places was certainly too brief. Later writers subjected these difficult passages to closer scrutiny, as well as to the fierce fire of generalization, with the result that an adequate treatment was found to take many pages. The book of Schreier and Sperner, to which the present writer acknowledges indebtedness, contains 133 pages.
> [...] The present book is an attempt to set forth the new technique in matric theory which the writers on the rational reduction have developed. The long proofs have been broken down into simpler components, and these components have been proved as preliminary theorems in as great generality as it appeared possible. With the background developed in the first five chapters, the rational reduction if Chapter VI does not seem difficult of unnatural.
> That the vector technique will have other applications in matric theory than to the problem which brought it forth is quite certain.
> [Mac Duffee, 1943, v].

Les nombreux traités sur la théorie des matrices publiés dans les années trente du XX[e] siècle donnent une nouvelle identité à la forme canonique énoncée par Jordan en 1870. Les questions posées par la querelle entre Jordan et Kronecker de 1874 sont résolues au sein d'une organisation théorique, la théorie des matrices canoniques. A l'opposition de deux théorèmes qui marquait la controverse de 1874, répond l'articulation de deux formes canoniques, l'une qualifiée de rationnelle, l'autre de forme de Jordan. C'est dans les relations mathématiques entre d*eux formes canoniques* distinctes que prend corps *l'identité* d'un *unique* théorème de décomposition matricielle. L'apparition d'une même dénomination de "forme de Jordan" sur un plan international témoigne de la nouvelle identité qu'acquiert la forme canonique dans les années trente. Elle manifeste aussi ce que cette identité est indissociable de la construction d'une culture commune à partir de réseaux de recherches distincts. La théorie des matrices canoniques se présente en effet comme une unification au niveau global et international de méthodes, notions, idéaux, élaborés sur une longue période au sein de cultures mathématiques locales :

> Matric algebra is a mathematical abstraction underlying many seemingly diverse theories. Thus bilinear and quadratic forms, linear associative algebra (hypercomplex systems), linear homogeneous transformations and linear vector functions are various manifestations of matric algebra. Other branches of mathematics as number theory, differential and integral equations, continued fractions, projective geometry etc. make use of certain portions of this subject. Indeed , many of the fundamental properties of matrices were first discovered in the notation of a particular application, and not until much later recognized in their generality.
> [Mac Duffee, 1933].

Le caractère unificateur de la théorie des matrices canoniques se manifeste aussi dans le rôle joué par l'histoire des mathématiques dans les traités publiés dans les années trente. Les traités de Mac Duffee [1933], Turnbull et Aitken [1932], Wedderburn [1932], proposent tous trois une histoire de la théorie des matrices qui présente des travaux mathématiques distincts du passé comme participant d'une même théorie sous jacente (encart 1). L'énoncé du théorème de décomposition matricielle mêle ainsi des références sur une période longue allant de Lagrange à van der Waerden en passant par Jordan, Frobenius, Weyr et Lattès.

> It was Cayley who seems first to have noticed that "the idea of matrix precedes that of determinant." More absolutely, we can say that the relation of determinant to matrix is that of the absolute value of a complex number to the complex number itself, and it is no more possible to define determinant without the previous concept of matrix or its equivalent than it is to have the feline grin without the Cheshire cat.

ENCART 2.

Différences de présentation de la forme de Jordan dans les deux traités de Mac Dufffe de 1933 et 1943.

- **Sommaire du traité de 1933.**

Contents.

	page
I. Matrices, Arrays and Determinants	1
1. Linear algebra	1
2. Representation by ordered sets	1
3. Total matric algebra	2
4. Diagonal and scalar matrices	5
5. Transpose. Symmetric and skew matrices	5
6. Determinants	6
7. Properties of determinants	8
8. Rank and nullity	10
9. Identities among minors	12
10. Reducibility	14
11. Arrays and determinants of higher dimension	15
12. Matrices in non-commutative systems	16
II. The characteristic equation	17
13. The minimum equation	17
14. The characteristic equation	17
15. Determination of the minimum equation	20
16. Characteristic roots	22
17. Conjugate sets	24
18. Limits for the characteristic roots	25
19. Characteristic roots of unitary matrices	28
III. Associated Integral Matrices	29
20. Matrices with elements in a principal ideal ring	29
21. Construction of unimodular matrices	31
22. Associated matrices	31
23. Greatest common divisors	35
24. Linear form moduls	37
25. Ideals	38
IV. Equivalence	40
26. Equivalent matrices	40
27. Invariant factors and elementary divisors	43
28. Factorization of a matrix	44
29. Polynomial domains	45
30. Equivalent pairs of matrices	48
31. Automorphic transformations	50
V. Congruence	51
32. Matrices with elements in a principal ideal ring	51
33. Matrices with rational integral elements	54
34. Matrices with elements in a field	56
35. Matrices in an algebraically closed field	60
36. Hermitian matrices	62
37. Automorphs	65

	page
VI. Similarity	68
38. Similar matrices	68
39. Matrices with elements in a field	69
40. WEYR's characteristic	73
41. Unitary and orthogonal equivalence	75
42. The structure of unitary and orthogonal matrices	78
VII. Composition of matrices	81
43. Direct sum and direct product	81
44. Product-matrices and power-matrices	85
45. Adjugates	86
VIII. Matric equations	89
46. The general linear equation	89
47. Scalar equations	94
48. The unilateral equation	95
IX. Functions of Matrices	97
49. Power series in matrices	97
50. Functions of matrices	99
51. Matrices whose elements are functions of complex variables	101
52. Derivatives and integrals of matrices	102
X. Matrices of infinite order	104
53. Infinite determinants	104
54. Infinite matrices	106
55. A matric algebra of infinite order	106
56. Bounded matrices	108
57. Matrices with a non-denumerable number of rows and colums	110

> In fact, the importance of the concept of determinant has been, and currently is, vastly over-estimated.
> [Mac Duffee, 1943, v].
>
> The phenomenal development in algebra which has occurred in recent years has been largely the result of a changed point of view toward the subject, the displacement of formalism by generalization and abstraction The maxim so often emphasized by the late E.H. Moore that the existence of parallel theories indicates and underlying unifying theory has been thoroughly vindicated in modern algebra. Number theory, group theory, and formal algebra have been unified and abstracted to produce what is now known as abstract algebra. [MacDuffee, 1940, 251-296].

Le traité de Mac Duffee, qui était l'un des doctorants de Dickson à Chicago [Parshall, 2004, 266], est marqué par les principales caractéristiques que donne Dickson à l'école de Chicago comme l'accent porté sur la théorie des algèbres [Fenster, 1997] ([1]), des anneaux et des modules dans le sillage du traité de van der Waerden.

> A matrix is an instance of an array of n^2 elements, but it is much more than that, for it is a member of a total matric algebra for which the operations of addition and multiplication are defined. The importance of matric theory derives from the rules of combination of matrices, while the fact that they may be represented by square arrays is incidental.
> [...] The concept of matrix as a hypercomplex number is due in essence to Hamilton but more directly to Cayley.
> [Mac Duffee, 1933, 1].

En 1933, Mac Duffee ne fait qu'évoquer le point de vue vectoriel et ne développe pas le caractère opératoire de la représentation matricielle. Son traité se place dans la tradition de la théorie des formes bilinéaires de Frobenius et donne une place centrale aux invariants et aux déterminants. Dans son deuxième traité sur les matrices publié en 1943, Mac Duffee critiquera le calcul des déterminants comme périmé et adoptera le point de vue vectoriel (encart 2). L'exemple de l'évolution du point de vue de Mac Duffee sur les matrices montre que la théorie des matrices canoniques ne se résume pas au simple énoncé de propriétés sur des structures comme les anneaux ou les algèbres. Plus précisément, c'est la volonté de Mac Duffee de donner un caractère abstrait et structural à son traité de 1933 qui le conduit à négliger l'interprétation particulière des matrices comme des transformations linéaires sur des espaces vectoriels.

[1] Après son doctorat, Mac Duffe séjourne à Princeton en 1921 à l'époque où Wedderburn y travaille sur la théorie des algèbres et des matrices. Il prend ensuite un poste à l'université de l'Ohio [Parshal, 2004, 268] où il écrit sont traité intitulé *The theory of matrices*. A partir de 1935, Mac Duffee est à l'université du Wisconsin et publie un nouveau traité intitulé *an Introduction to Abstract Algebra*.

Le traité de 1933 se place dans la tradition de Frobenius en déduisant la forme canonique de Jordan de la donnée d'invariants (les diviseurs élémentaires et les facteurs invariants) :

Theorem 39. A necessary and sufficient condition that two matrices A and B with elements in a field F be similar is that, in the polynomial domain $F(l)$, $lI-A$ and $lI-B$ have the same invariant factors.

[...] Corollary 39.11 In an algebraically closed field :

$$A = {}^{S}J = J_n + J_{n-1} + \ldots + J_{n-k}$$

Where J_i is the Jordan matrix of the i-th invariant factor of A

[...] Corollary 39. 12. In any field $A = {}^{S}B = Bn + B_{n-1} + \ldots + B_{n\text{-k}}$ where B_i is the companion matrix of the i-th invariant factor of A.

[...] A very short derivation of this normal form using ideals and group theory was given by Van Der Waerden.

- **Le point de vue vectoriel de 1943.**

Le traité de 1943 se fonde sur la notion d'espace vectoriel, présentée comme une généralisation de l'espace géométrique et de la physique des forces [Mac Duffee, 1943, 15]. La notion de matrice est elle-même présentée comme une généralisation de la notion de vecteur. Contrairement au point de vue très abstrait de 1933, les matrices ne sont plus les objets formels d'une algèbre associative abstraites mais les représentations d'endomorphismes sur une espace vectoriel, cette évolution s'accompagne d'une nouvelle importance donnée à la méthode de décomposition matricielle :

The direct sum. Let A and B be two square matrices, A of order r and B of order s. the matrix

$$A+B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

of order $r+s$ is called their direct sum. [...] More generally, let us suppose that the $n\times n$ matrix A of rank r can be written

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_k = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & A_k \end{bmatrix}$$

where $A_i$is of order n_i and rank r_i. Let the row vectors of A span the space S, let the first n_1 rwo vectors of A span S_1, the next n_2 row vectors of A span S_2, etc. [...] Thus S is the supplementary sum $S_1+S_2+\ldots+S_k$ of the subspaces S_i. [...] A subspace S_0 of S is said to be an *invariant space* of the matrix A if, for every vector Φ of S_0, it is true that $A.\Phi$ is in S_0. [...] Much of the importance of invariant spaces derive from the following result

LEMMA . *Let the total vector space* S *be the supplementary sum of the subspaces*

$$S, S, \ldots, S_k$$

where each S_i *is of dimension* r_i *and has the basis* σ_i, σ_i, …, σ_{iri}. *Let P be the matrix whose column vectors are*

$$(31).\ \sigma_{11},\ldots,\sigma_{1r_{11}},\sigma_{21},\ldots,\sigma_{2r_2},\ldots,\sigma_{k1},\ldots,\sigma_{kr_k}.$$

If each space S_i *is an invariant space of the matrix A, then*

$$P^{-1}AP = B_1 + B_2 + \ldots + B_k$$

where B_i is matrix of order r_i

[...] In general M can be written

$$[\sigma_{11},\ldots,\sigma_{1r_{11}},\sigma_{21},\ldots,\sigma_{2r_2},\ldots,\sigma_{k1},\ldots,\sigma_{kr_k}]\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & B_k \end{bmatrix}$$

> A and B with elements in a principal ideal ring P are called similar ($A = {}^S B$) if there exists a unimodular matrix P such that $A = P^I BP$. More than this, every unimodular matrix P determines an automorphism of the ring of matrices with elements in P [...]. A matrix may be interpreted as a linear homogeneous transformation in a vector space. From this point of view similar matrices represent the same transformation referred to different bases. All the theorems of this chapter may be interpreted from this standpoint.
> [Mac Duffee, 1943, v].

Il y a plus dans la théorie des matrices canoniques que l'émergence d'une théorie abstraite, générale, bénéficiant de nouvelles structures comme les corps, les anneaux etc. La théorie se fonde sur une forme de représentation particulière indissociable d'une méthode de décomposition et d'un idéal de simplicité. Parmi les traités publiés dans les années trente, celui qui donne la plus grande place au caractère opératoire de la représentation matricielle est l'ouvrage de Turnbull et Aitken :

> The theory of canonical matrices is concerned with the systematic investigation of types of transformation which reduce matrices to the simplest and most convenient shape. [...] While we have tried to include all the principal features of the theory [...], we have, at the same time, aimed at a certain compactness in the formulae and demonstrations. This has been achieved in the first place by a systematic use of the matrix notation [...] ; in the second place, by confining the contents of each chapter almost entirely to general theorems, and by relegating corollaries and applications to the interspersed sets of examples. These examples are intended to serve not so much as exercises many being quite easy, but rather as points of relaxation, and running commentary ; they will, however, be found to contain many well-known and important theorems, which the notation establishes in the minimum of space. [...] The reader already familiar with the theory will also observe that certain established methods of dealing with the subject have hardly been touched upon, notably the methods of Weierstrass and Darboux, the theory of regular minors of the determinants and the treatment of quadratic forms by the method of Kronecker. We have, in fact, allowed ourselves a free hand in dealing with the results of earlier writers, in the belief that the outcome would prove to be an easier approach to a subject that has often failed to win affection ; and the methods of H.J.S. Smith, Sylvester, Frobenius and Dickson proved in themselves quite adequate without the inclusion of other parallel theories. A thorough assimilation of the algebraic implications of Euclid's H.C.F. process, and of the notion of linear dependence, furnishes the clue to many passages.
> [Turnbul et Aitken, 1932, 1].

Simplicité, concision et généralité, les valeurs prêtées à la notion de matrice sont supportées par l'efficacité d'une méthode de décomposition portée sur la représentation matricielle en une combinatoire des partitions d'une matrice en sous matrices :

where each submatrix B_i has r_i rows and columns.

[...] We are now prepared to prove an important theorem in the theory of similarity.

THEOREM 64. *Let A be any n ×n matrix with elements in a filed F, and let*

$$m(x) \,)\, m_1(x)m_2(x)\ldots m_k(x)$$

be its minimum function expressed as a product of polynomials which are relatively prime as pairs. Let the null space of $m_i(A)$ be of rank r_i. then A is similar to a direct sum

$$B_1+B_2+\ldots+_k$$

where B_i is of order r_i, and the minimum function of B_i is $m_i(x)$.

[...] Example : We have

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 5 & 5 & 3\\ 5 & 0 & -17 & -26\\ -10 & -2 & 32 & 51\\ 6 & 2 & -19 & -31\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 6 & 0 & 2\\ 1 & -4 & 1 & -3\\ 0 & 3 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

$$AP = A\,[\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}] = [\ldots] = [\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}]\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{19}{3} & 0 & 0\\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix} = PB$$

The minimum functions of the matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{19}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3}\end{bmatrix},\; B_2 = \begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

are, respectively,

$$m_1(x) = x+x+1,\; m_2(x) = x^2-x+1.$$

[Mac Duffee, 1943, 114-121]

La méthode de décomposition matricielle permet de définir deux formes canoniques pour la relation de similitude :

The concept of similarity is, in fact, one of the central ideas in matric theory. It appears in the study of groups of linear transformations, matric representations of algebra, pencils of quadratic forms, and in connection with various problems in projective geometry [...].

The non derogatory case.

Le the matrix A be non-deragotory of order and index n, and let its minimum function be

$$m(x) = m_0 + m_1x + \ldots + m_{n-1}x^{n-1} + x^n$$

Let Φ be a vector which is not annihilated by any matrix $m_0(A)$ where $m_0(x)$ is a proper divisor of $m(x)$. By theorem 58 such a vector exists. Consider the n vectors

$$(32)\; \Phi, A\Phi, A^2\Phi,\ldots,A^{n-1}\Phi.$$

[...] the vectors (32) are linearly independent.

Denote by P the matrix whose column vectors are given by (32). [...]

$$AP = A[\Phi\,;\, A\Phi, A^2\Phi,\ldots, A^{n-1}\Phi] = [\ldots] = [\Phi\,;\, A\Phi, A^2\Phi,\ldots, A^{n-1}\Phi]\begin{bmatrix}0 & 0 & \ldots & 0 & -m_0\\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -m_1\\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -m_2\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -m_{n-1}\end{bmatrix} = PC.$$

Thus $P^{-1}AP = C$ where C is the companion matrix of the minimum equation of A, and we have proved:

Matrices partitioned into Submatrices.

It is convenient to extend the use of the fundamental laws of combination for matrices to the case where a matrix is regarded as constructed not so much from elements as from submatrices, or minor matrices, of elements. For example, the matrix

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$$

can be written

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix},$$

where

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, R = [7, 8], S = [9].$$

Here the diagonal submatrices P and S are square, and the partitioning is diagonally symmetrical. In the general case there may evidently be n or fewer partitions row-wise or column-wise. Let B be a second square matrix of the third order similarly partitioned :

$$B = \begin{bmatrix} P_1 & Q_1 \\ R_1 & S_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & . & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & . \end{array}\right]$$

then by addition and multiplication we have

$$A+B = \begin{bmatrix} P+P_1 & Q+Q_1 \\ R+R_1 & S+S_1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} PP_1+QR_1 & PQ_1+QR_1 \\ RP_1+SR_1 & RQ_1+SS_1 \end{bmatrix},$$ as may

readily be verified. In each case the resulting matrix is of the same order, and is partitioned in the same way, as the original matrix factors. For example, in AB the first element, PP_1+QR_1, stands for a square submatrix of two rows and columns : and this is possible, since, by definition, both products PP_1 and QR_1 consist of two rows and two columns. [...]. Thus

$$PQ_1 + QS_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}[0] = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \end{bmatrix},$$

giving the proper rectangular shape for the upper right hand minor.

[Turnbull et Aiken, 5-6]

THEOREM 63. *Every non derogatory matrix is similar to the companion matrix of its minimum equation.*

Now suppose that we write

$$m(x) = m_1(x)m_2(x)\ldots m_k(x)$$

where the $m_i(x)$ are relatively prime in pairs, and the sum of their degrees is n. By theorem 62 we know that there exists a non-singular matrix P such that

$$P^{-1}AP = B_1 + B_2 + \ldots + B_k = B.$$

where $m_i(x)$ is the minimum function of B_i.

[...] THEOREM 64. *If the matrix A is non derogatory, and if its minimum function is*

$$m(x) = m_1(x)m_2(x)\ldots m_k(x)$$

where the factors are relatively prime in pairs, then A is similar to the direct sum of the companion matrix of the factors $m_i(x)$.

Example :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & -17 & -26 \\ -10 & -2 & 32 & 51 \\ 6 & 2 & -19 & -31 \end{bmatrix}$$

Let us choose $\Phi = (1,0,0,0)$. Then

$$P = (\Phi, A\Phi, A^2\Phi, A^3\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & -10 & 2 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

[...] We find that

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

which is the companion matrix of the minimum equation

$$m(x) = x^4 + x^2 + 1 = 0$$

The second canonical form can be obtained from the matrix

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{19}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Let

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix},\ Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

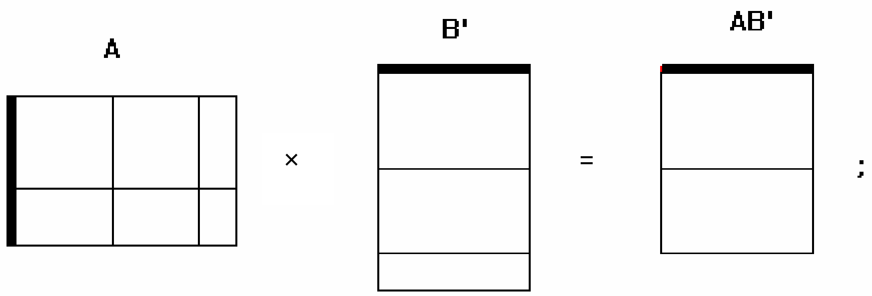
Then

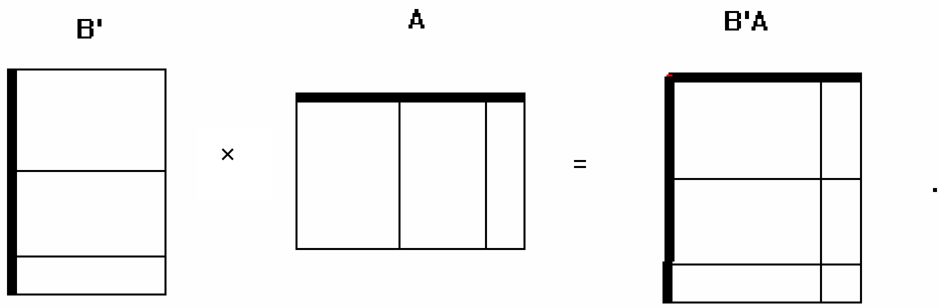
$$Q_1^{-1}B_1Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ Q_2^{-1}B_2Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

are the companion matrices of the equations obtained from the respective factors x^2+x+1 and x^2-x+1 of the minimum function of A. Then A is similar to the matrix

La décomposition matricielle articule des opérations symboliques à des intuitions géométriques pour et donne un caractère opératoire à des tableaux considérés comme des "formes". Les rectangles, diagonales, triangles etc, sont des formes sur lesquelles on opère et que l'on combine les unes avec les autres.

> Examples
> 1. If A and B are similarly unsymmetrically partitioned, with μ partitions into row groups and ν into column-groups, show that the product AB' is symmetrically partitioned according to the μ row-partitions of A ; and that $B'A$ is symmetrically partitioned according to the ν column groups of A.





> Distinguish by example between a symmetrical matrix and a symmetrically partitioned matrix.
> [Turnbull et Aitken, 1932, 7].

La définition des matrices de Jordan articule une forme *et* un calcul symbolique des puissances de matrices :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[...] THEOREM 65. *Every non derogatory matrix whose minimum function is $[l(x)]^h$ where $l(x)$ is irreductible of degree j is similar to a matrix of the type (35) with h blocks along the diagonal.*

$$(35)\quad \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & -l_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -l_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -l_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -l_2 \end{array}\right]$$

The case where F is the complex field, or in fact any algebraically closed field, deserves special mention. In this case we can write

$$m(x) = (x - x_1)^{h_1}(x - x_2)^{h_2} \ldots (x - x_k)^{h_k}$$

so that A is similar to a direct sum of matrices of the form

$$(36) \qquad B_i = \begin{bmatrix} x_i & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & x_i & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_i & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x_i \end{bmatrix},$$

of h_i rows and columns. This the familiar *Jordan normal form* of a matrix with complex elements.
[Mac Duffee, 1943, 114-121]

Les formes canoniques sont alors au centre de la théorie et les invariants en sont des coroollaires :

VII. Elementary Divisors.
In the plane case, which we have chosen,

$$|A - \lambda I| = 0$$

is a cubic equation and hence has at least oe real root. If the other rwo roots are complex, there is just one invariant point. But if all three roots are real, there are various possibilities depending upon the elementary divisors of $A - \lambda I$

Elementary Divisors	Segré Char.	Weyr Char.	Invariants.
λ-λ1, λ-λ2, λ-λ3,	[1,1,1]	[1,1,1]	3 distinct pts.
λ-λ1, λ-λ1, λ-λ2,	[(1,1),1]	[2,1]	line and pt.
λ-λ1, λ-λ1, λ-λ1,	[(1,1,1)]	[3]	the plane
(λ-λ1)², λ-λ2,	[2,1]	[(1,1),1]	2 distinct pts.
(λ-λ1)², λ-λ1,	[2,1)]	[(2,1)]	one line
(λ-λ1)3	[3]	[(1,1,1)]	one point.

[Mac Duffee, 1943, 133]

$$\text{If } A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & . & . & . \\ . & \lambda & . & . & . \\ . & . & \mu & 1 & . \\ . & . & . & \mu & . \\ . & . & . & . & \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & . & . \\ . & M & . \\ . & . & N \end{bmatrix},$$

where $L = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ . & \lambda \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ . & \mu \end{bmatrix}$, $N = \nu$, $(\lambda, \mu, \nu$ ý $0)$, find the values of A^2, A^p, A^{-1}, and of any rational function $f(A)$ in terms of L, M, N.
[Turnbull et Aitken, 1932, 7].

La combinatoire des sous matrices est un calcul sur une forme qui donne un caractère opératoire à ce que Picard désignait en 1911 comme un *dessin*. Elle permet à la fois d'obtenir les deux formes canoniques des matrices, la forme rationnelle B et la forme de Jordan ou forme classique C, et d'expliciter *l'identité* de ces deux formes en explicitant les matrices permettant de passer d'une forme à l''autre :

> The canonical form B of the previous chapter, though obtained by rational operations in the field of A, was not the earliest to be discovered. The most important of its precursors was a form C which, in the case where the latent roots of A were all distinct, was a purely diagonal matrix having those latent roots, in any prescribed order, in the diagonal ; so that $C = [\lambda_i \delta_{ij}]$. Such a form C is thus derivable in general only by irrational operations, since a necessary preliminary is the solution of the characteristic equation of A. When A has repeated roots it may happen, as we shall find, that C cannot be purely diagonal ; and perhaps the simplest way of ascertaining the requisite modifications will be to reverse the order of history, and deduce the classical form C from the rational canonical form B.
> The point at issue is : what kind of matrix H transforms B into C ?

L'identité entre les deux formes canoniques est d'abord explicitée pour l'exemple simple d'une matrice diagonale dont toutes les racines caractéristiques sont distinctes. Cet exemple permet de *montrer* les conséquences de calculs itérés de puissances successives sur les *formes* des matrices :

> Let us suppose, for example, that $B = HCH^{-1}$, where
>
> $$B = \begin{bmatrix} . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \alpha & . & . & . \\ . & \beta & . & . \\ . & . & \gamma & . \\ . & . & . & \delta \end{bmatrix},$$
>
> and, where the latent roots α, β, γ, δ are all distinct , and the characteristic function, common to A, B and C, is given by
>
> $\Phi(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^4 - b_1\lambda^3 - b_2\lambda^2 - b_3\lambda - b_4$

ENCART 3.

Les procédés d'itérations de la théorie des algèbres associatives dans les cours sur les matrices de Wedderburn.

Les *Lectures on matrices* de Wedderburn, synthèses de cours donnés à Princeton dans les années vingt, insistent sur les procédés d'itérations et les notions de matrices nilpotentes et idempotentes dans la tradition anglo saxonne de la théorie des algèbres associatives qui se réfère aux travaux fondateurs de Hamilton et à laquelle Wedderburn a donné un nouveau paradigme en 1907 [Parshall, 1983]. Dans le cadre de la théorie des matrices, les procédés d'itérations sont supportés par une interprétation vectorielle de décomposition de l'espace et la forme canonique est interprétée comme somme d'éléments nilpotents et idempotents. Pour ce qui est de l'organisation de sa théorie Wedderburn se place dans la tradition de Frobenius, la décomposition matricielle n'intervient alors que pour le problème de la détermination des matrices commutant à une matrice donnée [Wedderburn, 1933, 102].

[Wedderburn, 1933, 42-44] :

If we add the *f's* together in groups each group consisting of all the *f's* that correspond to the same value of λ_i, we get a set of idempotent matrices, say $\varphi_1, \varphi_2,\ldots, \varphi_r$, corresponding to the distinct roots of a, say $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_r$. these are the principal idempotent elements of *a* ; for

(i) $a\varphi_i = \varphi_i a$,

(ii) $(a-\alpha_i)\varphi_i$ is nilpotent,

(iii) $\Sigma\varphi_i = \Sigma f_i = 1$ *and* $\varphi_i\varphi_j = 0$ (i ý j) [...]

[...] If α is one of the roots of A, the form of A-α is sometimes important. Suppose that

$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = \alpha$, λ_i ý α (i > p)

and set

$$b_i = a_i-\alpha f_i$$

[...] In the case of the first *p* blocks $\lambda_i-\alpha = 0$ and the corresponding $b_1, b_2,\ldots, b_p$ are nilpotent, the index of b_i being ν_i and, assuming ν_1 Ã ν_2 Ã ... ν_p as before [...] the rank of $(A-\alpha)^k$, when *k* Ã ν_1, is exactly $n-\Sigma_1^p\ \nu_i = \Sigma_{p+1}^s\ \nu_i$ and the nullspace of $(A-\alpha)k$ is then the same as that of $(A-\alpha)^{\nu 1}$. Hence, if there exists a vector *z* such that $(A-\alpha)^k z = 0$ but $(A-\alpha)^{k-1}\mathbf{z}$ ý *0*, then

(i) *k* Â ν_1,

(ii) *z* lies in the nullspace of $(A-\alpha)^{\nu 1}$.

If we denote the unit vectors corresponding to the rows and columns of a_i in (10) by $e_1^i, e_2^i, \ldots, e_{\nu_i}^i$

and set

$$(18)\quad x_j^i = \begin{cases} Pe_j^i & (j = 1,2,\ldots,\nu_i;\ \ i = 1,2,\ldots,s) \\ 0 & (j < 1\ \ or\ \ i < 1\ \ or\ \ > s) \end{cases}$$

then

$$ae_1^i = \lambda_i e_1^i,\ \ ae_2^i = \lambda_i e_2^i + e_1^i, \ldots, ae_{\nu_i}^i = \lambda_i e_{\nu_i}^i + e_{\nu_i-1}^i$$

and hence

$$Ax_1^i = \lambda_i x_j^i + x_{j-1}^i \quad (j = 1,2,\ldots,\nu_i\ ;\ i = 1, 2, \ldots, s).$$

the vectors x_j^i are called a set of *invariant vectors* of *A*.

The matrix *A* can be expressed in terms of its invariant vectors as follows. We have from (10)

$$a_i = \sum_j (\lambda_i e_j^i + e_{j-1}^i) S e_j^i = \sum_j e_j^i S(\lambda_i e_j^i + e_{j+1}^i)$$

and hence, if

$$(20)\quad y_j^i = (P)'^{-1} e_j^i = (PP')^{-1} x_j^i;$$

then

$$(21)\quad A = \sum_{i,j} (\lambda_i x_j^i + x_{j-1}^i) S y_j^i = \sum_{i,j} x_j^i S(\lambda_i y_j^i + y_{j+1}^i)$$

where it should be noted that the *y's* form a system reciprocal to the *x's* and that each of these systems forms a basis of the vector space since |*P*| *ý 0.*

$= (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)(\lambda-\delta)$

If [...] we take an arbitrary vector $u = [u_1, u_2, u_3, u_4]$, where none of the components is zero, in order to generate the chain u, uC, uC^2, uC^3, and then take these four vectors to be the rows of H, we find at once that H is of the form

$$H = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1\alpha & u_2\beta & u_3\gamma & u_4\delta \\ u_1\alpha^2 & u_2\beta^2 & u_3\gamma^2 & u_4\delta^2 \\ u_1\alpha^3 & u_2\beta^3 & u_3\gamma^3 & u_4\delta^3 \end{bmatrix}$$

[...] If for simplicity we put $u = [1,1,1,1]$, we have at once that $B = HCH^{-1}$ or $BH = HC$, where the last relation , written out in full, appears as

$$\begin{bmatrix} . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & . & . & . \\ . & \beta & . & . \\ . & . & \gamma & . \\ . & . & . & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 \\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 & \delta^4 \end{bmatrix}$$

[Turnbull et Aitken, 1932, 57].

Un deuxième exemple permet ensuite de montrer ce qu'implique sur la forme des matrices l'occurrence d'une racine multiple, à savoir l'apparition d'unités dans le "triangle" supérieur qui caractérise l'"apparence typique" de la forme canonique recherchée :

[...]Considering still the elementary case of *B*, let us next suppose that certain of the latent roots are multiple. The alternant matrix *H* becomes singular, since two or more columns are identical. [...] For example, if the latent roots are α, α, α, β, β, γ, the modified matrix *H* appears as

$$H = \begin{bmatrix} 1 & . & . & 1 & . & 1 \\ \alpha & 1 & . & \beta & 1 & \gamma \\ \alpha^2 & 2\alpha & 1 & \beta^2 & 2\beta & \gamma^2 \\ \alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha & \beta^3 & 3\beta^2 & \gamma^3 \\ \alpha^4 & 4\alpha^3 & 6\alpha^2 & \beta^4 & 4\beta^3 & \gamma^4 \\ \alpha^5 & 5\alpha^4 & 10\alpha^3 & \beta^5 & 5\beta^4 & \gamma^5 \end{bmatrix}$$

If we set up again the equation $BH = HC$, provisionally placing the latent roots in the diagonal of *C* as before, with zeros below, but leaving the elements above the diagonal to be determined by inspecting the products, we find that *C* differs from the previous case only in having a *unit in the superdiagonal at every position adjacent to a pair of repeated roots.* We have in fact

[...] If the roots λ_i of the elementary divisors (12) are all different, the nullity of $(A\text{-}\lambda_i)$ is 1, and hence x_1^i is unique to a scalar multiplier. But the remaining x_j^i are not unique. In fact, if the x's denote one choice of the invariant vectors, we may take in place of x_1^i

$$z_j^i = k_1^i x_j^i + k_2^i x_{j-1}^i + \ldots + k_j^i x_1^i \quad (j = 1,2,\ldots,\nu_i)$$

where the k's are any constant scalars subject to the condition k_1^i ý 0. Suppose now that

$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = \alpha$, λ_i ý α $(i > p)$ and ν_1 Ã ν_2 Ã ... Ã ν_p [...].

We shall say that $z_1, z_2, \ldots, z_k$ is a *chain* of invariant vectors *belonging to the exponent* k if

(24) $z_i = (A\text{-}\alpha)^{k-i} z_k$ ý $0 \quad (i = 1,2,\ldots,k)$

$(A\text{-}\alpha)^k z_k = 0$

It is also convenient to set $z_i = 0$ for $i < 0$ or $> k$. We have already seen that k Â ν_1 and that z_k lies in the nullspace of $(A\text{-}\alpha)^{\nu 1}$; and from (17) it is seen that the nullspace of $(A\text{-}\alpha)^{\nu 1}$ has the basis

$(x_j^i ;\ j = 1,2,\ldots,\nu_i,\ i = 1,2,\ldots,p)$.

Since z_k belongs to the nullspace of $(A\text{-}\alpha)^{\nu 1}$, we may set

$$(25) \quad z_k = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{\upsilon_i} \zeta_{ij} x_j^i$$

and therefore by repeated applications of (15) with $\lambda_i = \alpha$

$$(26) \quad (A\text{-}\alpha)^r z_k = \sum_{i,j} \zeta_{ij} x_j^i$$

From this it follows that, in order that $(A\text{-}\alpha)^k z_k = 0$, only values of j which are less than or equal to k can actually occur in (25) and in order that $(A\text{-}\alpha)^{k-1} z_k$ ý 0 at least one ζ_{ik} must be different from 0 ; hence

$$z_k = \sum_i (\zeta_{ik} x_k^i + \zeta_{i,k-1} x_{k-1}^i + \ldots)$$

$$(27) \quad z_{k-1} = \sum_i (\zeta_{ik} x_{k-1}^i + \zeta_{i,k-1} x_{k-2}^i + \ldots)$$

....

$$z_1 = \sum_i \zeta_{ik} x_1^i.$$

Finally, if we impose the restriction that z_k does not belong to any chain pertaining to an exponent greater than k, it is necessary and sufficient that k be one of the numbers $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ and that no value of I corresponding to an exponent greater than k occur in (27).

The actual determination of the vectors x_j^i can be carried out [...] as follows. Suppose that the first s_1 of the exponents ν_i equals n_1, the next s_2 equal n_2, and so on, and finally the last s_q equal n_q. Let N_1 be the nullspace of $(A-\alpha)^{n_1}$ and N'_1 the nullspace of $(A-\alpha)^{n_1-1}$; then N_1 contains N'_1. If M_1 is a space complementary to N'_1 and N_1, then for any vector x in M_1 we have $(A\text{-}\alpha)^r x = 0$ only when r Ã n_1 Also, if $x_1, x_2, \ldots, x_{m1}$ is a basis of M_1, the vectors

(28) $(A\text{-}\alpha)^r x_i \quad (= 0,1,\ldots,n_1\text{-}1)$

are linearly independent ; for, if

$$\sum_{r=s}^{n_1-1} \sum_i \xi_{ir} (A-\alpha)^r x_i = 0,$$

some ξ_{ir} being different from 0, then multiplying by $(A\text{-}\alpha)$ [...] which is only possible if every $\xi_{is} = 0$ since $x_1, x_2, \ldots, x_{m1}$ form a basis of M_1 and for no other vector of M_1 is $(A-\alpha)^{n_1-1} x = 0$. The space defined by (28) clearly lies in N_1; we shall denote it by L_1. If we set $N_1 = N_2 + N_1$ where N_2 is complementary to L_1 in N_1 ,then N_2 contains all vectors which are members of sets belonging to the exponents n_2, n_3, ..., but no lying in sets with the exponent n_1. We now set $N_2 = N'_2 + M_2$ where N'_2 is the subspace of vectors x in N_2 such that $(A-\alpha)^{n_2-1} x = 0$. as before the elements of M_2 generate sets with exponents n_2 but are not members of sets with higher exponents ; and by a repetition of this process we can determine step by step the sets of invariant vectors corresponding to each exponent n_i [...] In particular, if f_i is a principal idempotent element of x [...] $\Sigma f_i = 1$ we may set $x = \Sigma f_i x = \Sigma x_i$ [...] and also $x_i = \lambda_i f_i + z_i$ where z_i is nilpotent.

$$\begin{bmatrix} . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ b_6 & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & . & . & 1 & . & 1 \\ \alpha & 1 & . & \beta & 1 & \gamma \\ \alpha^2 & 2\alpha & 1 & \beta^2 & 2\beta & \gamma^2 \\ \alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha & \beta^3 & 3\beta^2 & \gamma^3 \\ \alpha^4 & 4\alpha^3 & 6\alpha^2 & \beta^4 & 4\beta^3 & \gamma^4 \\ \alpha^5 & 5\alpha^4 & 10\alpha^3 & \beta^5 & 5\beta^4 & \gamma^5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & . & . & 1 & . & 1 \\ \alpha & 1 & . & \beta & 1 & \gamma \\ \alpha^2 & 2\alpha & 1 & \beta^2 & 2\beta & \gamma^2 \\ \alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha & \beta^3 & 3\beta^2 & \gamma^3 \\ \alpha^4 & 4\alpha^3 & 6\alpha^2 & \beta^4 & 4\beta^3 & \gamma^4 \\ \alpha^5 & 5\alpha^4 & 10\alpha^3 & \beta^5 & 5\beta^4 & \gamma^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 1 & . & . & . & . \\ . & \alpha & 1 & . & . & . \\ . & . & \alpha & 1 & . & . \\ . & . & . & \beta & 1 & . \\ . & . & . & . & \beta & 1 \\ . & . & . & . & . & \gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & 1 & . & \beta & 1 & \gamma \\ \alpha^2 & 2\alpha & 1 & \beta^2 & 2\beta & \gamma^2 \\ \alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha & \beta^3 & 3\beta^2 & \gamma^3 \\ \alpha^4 & 4\alpha^3 & 6\alpha^2 & \beta^4 & 4\beta^3 & \gamma^4 \\ \alpha^5 & 5\alpha^4 & 10\alpha^3 & \beta^5 & 5\beta^4 & \gamma^5 \\ \alpha^6 & 6\alpha^5 & 15\alpha^4 & \beta^6 & 6\beta^6 & \gamma^6 \end{bmatrix}$$

[...] the diagonally placed submatrices in the derived classical form are of typical appearance

$$C_1(\alpha) = \alpha,\ C_2(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ . & \alpha \end{bmatrix},\ C_3(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & . \\ . & \alpha & 1 \\ . & . & \alpha \end{bmatrix}, \ldots,$$

and there is one of these isolated submatrices for each distinct latent root of B_k. We may perhaps call them *simple classical submatrices.* Since each elementary submatrix B_k of the rational canonical form B is isolated it can be transformed independently of the rest, so that *the classical canonical form C is finally seen to consist of simple classical submatrices* $C_k(\lambda)$, *isolated along the diagonal, all other elements being zero.* It is to be observed that the same latent root α may be associated with several classical submatrices, the sum of the orders of these being the total multiplicity of α.

We shall write this form as

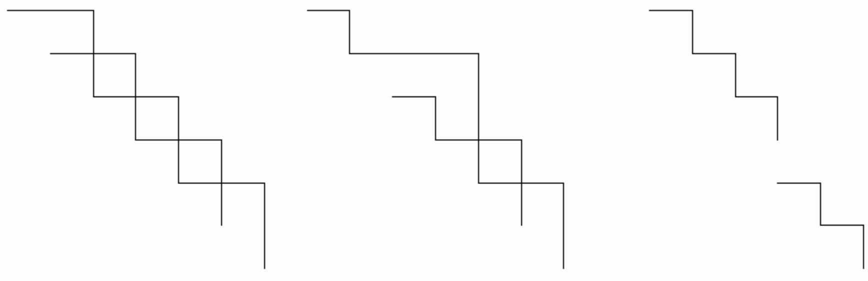
$$C = [C_k(\lambda)],$$

where $k = k_1, k_2, \ldots, k_\mu$; $\lambda = \alpha, \beta, \ldots$ [...] Using a convenient notation called by Segre the *characteristic* of the elementary divisors, we collect together the various suffixes k and write [321] to characterize *C*. If, however, *C* were to consist of $C_3(a)$, $C_2(a)$, $C_1(\gamma)$, *a* ý γ, we should collect together the suffixes belonging to a and write [(32)1]. The characteristic of an *elementary* matrix B_k accordingly differs from that of a more elaborate matrix *B* in having no enclosing roundbrackets ( ).

ENCART 4.

Une nouvelle articulation entre formes canoniques et invariants: la détermination de la "forme canonique classique" chez Turnbull etAitken.

Le traité de Turnbull et Aitken établit d'abord la forme rationnelle *B* et en déduit la forme classique *C*. Dans un second temps, il expose une méthode d'obtention directe de la forme *C* qui consiste à réduire la matrice à une forme triangulaire, dite de Jacobi [Turnbull et Aitken, 1933, 64-66] et dont il reste à "combiner" les éléments figurant "au dessus de la diagonale".

> A guiding principle in the later stages is the invariant property of *chains* formed by linking non-diagonal elements in a manner now to be described. Consider, for example, the following combination of two canonical submatrices corresponding to the same latent root α, namely
>
> $$\begin{bmatrix} C_4(\alpha) & . \\ . & C_3(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & . & . & & & \\ & \alpha & 1 & . & & & \\ & & \alpha & 1 & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & \alpha & 1 & . \\ & & & & & \alpha & 1 \\ & & & & & & \alpha \end{bmatrix}.$$
>
> The non-zero elements above the diagonal occupy places which fall into two chains *(1,2), (2,3), (3,4)* and (*5,6), (6,7),* the element *(1,2*), for example, being linked to (2,3) by the fact that the column-index of the former is the row-index of the latter. The two chains are *isolated*, in that they have no row-index or column-index in common ; and an isolated chain of length m-1 involves an isolated submatrix of order *m*. It is easy to see that collineatory substitutions of Type I leaves the properties of chain-length and isolation invariant ; for example, the chains *(1,3), (3,5), (5,7)* and (*2,4), (4,6)* agree in these respects with the two we have given above, and may be transformed into them. The steps are the interchanges I_{ij} where *ij = 23, 45, 34, 67, 56, 45* in this succession.
>
> [...] It is a help to form a staircase graphs of these chains as follows :
>
> 
>
> **Fig. I** **Fig. 2** **Fig.3**
>
> Fig. I indicates these chains before interchange: fig. 2 after the first interchange I_{23}: fig. 3 after the final interchange I_{45}. While geometrical length of a chain varies, chain-length – the number of steps – is fixed. The chains being isolated, the zigzags are never collinear. What the interchange process does is systematically to disentangle the chains.
>
> We consider then the Jacobian canonical form Γ. Suppose first that there is a certain non-zero element a_{ij} above the diagonal, where the latent roots aligned with it, λ_i and λ_j, are distinct. the collineatory operation $col_j\text{-}hcol_i$, row_i+hrow_j replaces a_{ij} by $a_{ij}\text{-}h(\lambda_i\text{-}\lambda_j)$, and in general also modifies elements in the ith row to the *right* of a_{ij}, and in the jth column above a_{ij} [...] and by operations like the above we can clear these row by row, beginning at the left of the lowest row. When this is done the submatrices of Jacobian shape corresponding to the single latent roots are isolated, and may therefore be considered separately.
>
> We consider then a submatrix Γ_m of order *m*, in a form such as

[...]

$$U=\begin{bmatrix} . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$$

The matrices $U, U^2, U^3, \ldots, U^{p-1}$ where U is of order p, each consist of units filling a single diagonal, respectively the first, second..., (p-1)th superdiagonal.

[...] EXAMPLES

If $U=\begin{bmatrix} . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$, then $U^2=\begin{bmatrix} . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$, $U^3=\begin{bmatrix} . & . & . & 1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$, $U^4 = 0$

[...]

The classical form corresponding to

$$B=\begin{bmatrix} . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \\ -4 & . & 4 & . \end{bmatrix} \text{ is } C=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & . & . \\ . & \sqrt{2} & . & . \\ . & . & -\sqrt{2} & 1 \\ . & . & . & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

L'articulation des deux formes canoniques construit l'identité mathématique du théorème de décomposition matricielle. La démonstration citée ci-dessus, celle de Mac Duffee de 1943 placée en encart 2, l'obtention directe de la "forme canonique classique" par Turnbull et Aitken détaillée en encart 4 ou encore l'application de la forme de Jordan au problème de la détermination des matrices commutant à une matrice donnée placée en encart 5 sont autant d'exemples de l'efficacité d'une méthode de démonstration recourant à des formes, des images. En citant ces nombreux exemples, le corps du texte de cette thèse reproduit l'envahissement des formes imagées dans les textes mathématiques qui manifeste la nouveauté des traités des années trente.

La construction de méthodes de décompositions matricielles est un élément important du processus d'unification des connaissances qui caractérise la période 1900-1930. Elle doit être prise en compte comme un des éléments qui amènent et accompagnent l'émergence de l'algèbre linéaire dans les années trente du XX^{e} siècle. Jean Dieudonné a décrit l'émergence de l'algèbre linéaire comme un "processus de linéarisation" [Dieudonné, 1978] ; processus long et complexe qui amène à une

> [...] remarquable synthèse conduisant à un vocabulaire et à des résultats qui s'appliquent presque universellement dans tous les domaines des mathématiques et de la physique contemporaine, tandis que le processus de

$$\Gamma_5 = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} \\ . & \alpha & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} \\ . & . & \alpha & \alpha_{34} & \alpha_{35} \\ . & . & . & \alpha & \alpha_{45} \\ . & . & . & . & \alpha \end{bmatrix}$$

If the non-zero elements above the diagonal are such that there is *not more than one in any row or column*, we may link them in chains, an by bringing them into superdiagonal position by operations of Type I, and transforming them into units by operations of Type III. [...] obtain simple classical submatrices. If, however, this is not the case we proceed by induction, the induction resting on the initial fact that for the case $m = 2$ the matrix Γ_2 can at once be transformed into classical shape by an operation of Type III. Let us take Γ_m in the form

$$\Gamma_m = \begin{bmatrix} \Gamma_{m-1} & A_1 \\ . & \alpha \end{bmatrix},$$

where Γ_{m-1} denotes the leading submatrix of order $m-1$, and A_1 denotes a column matrix of $m-1$ elements; and let us assume that Γ_{m-1} can be transformed into classical shape C_{m-1} by a matrix H_1. Then we must have

$$\begin{bmatrix} H_1 & . \\ . & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{m-1} & A_1 \\ . & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^{-1} & . \\ . & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{m-1} & D_1 \\ . & \alpha \end{bmatrix},$$

where $D_1 = H_1 A_1$ and where, written out in full, the right hand matrix has the appearance, e.g.,

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & . & . & . & . & d_{17} \\ . & \alpha & 1 & . & . & . & d_{27} \\ . & . & \alpha & . & . & . & d_{37} \\ . & . & . & \alpha & 1 & . & d_{47} \\ . & . & . & . & \alpha & 1 & d_{57} \\ . & . & . & . & . & \alpha & d_{67} \\ . & . & . & . & . & . & \alpha \end{bmatrix}, \; m = 7 \quad (20)$$

If any element d_{km} has a superdiagonal unit in the same row, the operation

$$col_m - d_{km} col_{k+1}, \; row_{k+1} + d_{km} row_m$$

simply removes d_{km} without further change. Hence we may remove any such elements d_{km}, so that now there is at most one non zero element, excluding the diagonal, in each row. For instance, in (20) we may at once take $d_{14} = d_{27} = d_{47} = d_{57} = 0$. If there still remains more than one non zero element in the mth column [...], we form chains and proceed in a manner exemplified without loss of generality by the chains (*1,2), (2,3), (3,7)* and (*4,5), (5,6), (6,7).* We shall show that the element (6,7), or d_{67}, can be annulled in three moves by the earlier chain. In fact the operation $row_6 - h\,row_3$, $col_3 + h\,col_6$, where $h = d_{67}/d_{37}$, annuls *(6,7),* but introduces a *(5,3)* because of the (*5,6)*. This (5,3) is similarly annulled by means of (2,3), but a (4,2) is introduced through the (4,5). Lastly the (4,2) is annulled by the (1,2), and no element is introduced, because the chain commencing with (4,5) gives out, having no earlier element. It thus appears in general that all elements in the last column may be removed by collineatory operations *except the one which belongs to the chain of greatest length,* an earlier chain being preferred to a later in the case of alternative chains of equal length. Lastly the isolated chains may be brought to classical superdiagonal position by operations of Type I, and if the element brought there from the last column is not unity, it can be made so by an operation of type III.

The induction is therefore complete, and, when carried out step by step and applied to the separate submatrices, it provides a means of bringing a matrix in Jacobian form Γ to classical form C by collineatory transformations. The number of Segre characteristics of order *n* without round brackets is *p(n),* the number o partitions of the integer *n*. The number of ways of inserting round brackets in a characteristic of m indices is *p(m)*. Hence the number of canonical types for a given order can be found by combinatory analysis.

> "linéarisation" apparaît comme essentiel dans de nombreuses branches de mathématiques pures et appliquées.
> [Dieudonné, 1978]

Synthèse renvoyant à des méthodes et des notions développées sur une histoire longue, l'algèbre linéaire a une histoire plurielle dont différents aspects ont été étudié par l'historiographie comme le concept de vecteur, les nombres complexes, les algèbres associatives, la méthode axiomatique, la théorie des ensembles, les structures, la représentation des groupes, etc. L'historiographie a cependant toujours abordé l'émergence de l'algèbre linéaire sous l'angle de l'histoire d'une théorie, d'une notion ou d'un mode de raisonnement. Dans ce cadre, la théorie des matrices des années trente n'a bénéficié d'un éclairage historique que pour la distinction qu'elle établie entre les concepts de matrices et de transformations linéaires et qui permet d'envisager les problèmes de représentations comme relatifs au choix de la base d'un espace vectoriel ([2]). L'histoire du théorème de Jordan permet de jeter un nouvel éclairage sur l'histoire de l'algèbre linéaire en mettant en évidence le rôle joué par une méthode de décomposition indissociable d'une forme de représentation. Ce travail de doctorat s'est attaché à décrire une histoire plurielle de méthodes élaborées au sein de réseaux distincts entre 1880 et 1905 puis l'entrelacement progressif de ces travaux au début du XX^{e} siècle. Dans la théorie des matrices canoniques, l'idéal de simplicité et la méthode de décomposition d'un problème en ses éléments les plus simples qui caractérisaient l'approche de Jordan en 1874 se trouvent alliés à l'exigence d'effectivité et aux méthodes combinatoires élaborées par Kronecker (chapitres 1 et 3). Les méthodes de décomposition des matrices articulent la décomposition polynomiale des invariants de Weierstrass, le calcul symbolique de Frobenius, des outils arithmétiques comme l'"algorithme d'Euclide", des procédés d'itérations développés par la théorie des algèbres associatives (encart 3) et des méthodes vectorielles de décomposition d'un espace en sous espaces stables. Elles se présentent comme une cristallisation de pratiques anciennes et diverses, de significations implicites et d'intuitions particulières renvoyant à des contextes variés et qui, sur une très longue durée, forgent une certaine notion de *forme* en mathématiques. Le théorème de décomposition matricielle articule les *formes* et les *invariants* pour *montrer* de façon *imagée* les étapes dune méthode de décomposition (encart 4). L'articulation des formes canoniques et des invariants donne à la décomposition matricielle un caractère dynamique

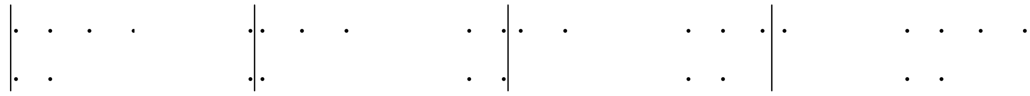
[2] Moore a attribué cette distinction à Emmy Noether, dans le cadre de son ambition d'unifier les théories algébriques par la théorie des représentations de groupes. [Moore, 1996, 670**]**

> The heart of Noether's approach to algebras was the notion of an Abelian group with operators ie a group of homorphisms on an Abelian group into itself, a notion she credited to Krull and Schmidt. In 1929 she pointed out that every module over a ring is an Abelian group with operators. Thus group theory began to be the framework within which the theory of modules and the theory of algebras over a field were treated.
> One striking feature of Noether's 1929 paper occurred in a footnote: "As B.L. van der Waerden has communicated to me, one can obtain an invariant connection independent of the specific choice of basis, by separating the concepts *linear transformation and matrix.* A linear transformation is a homorphism of two modules of linear forms ; a matrix is an expression (the representation) of this homorphism by a definite choice of basis".
> [...] Here we have the essential modern connection between the notions of linear transformation, matrix and module (or vector space).

[...] As we have seen, the Segre characteristic of a matrix A, with respect to a certain latent root λ_i, consist of the first differences of the powers to which the scalar factor $(\lambda\text{-}\lambda_i)$ occurs in the characteristic determinant $|A\text{-}\lambda I|$ and in the H.C.F.'s of its minors of descending order. But the characteristic can also be determined from the first differences of the ranks of the powers of the matrix $A\text{-}\lambda I$. Consider, for example, a matrix A of the ninth order with two distinct latent roots α and β, the characteristic of α being (4,2), that of β being (2,1). The canonical form of A is thus

$$C = \begin{bmatrix} A_4 & & & \\ & A_2 & & \\ & & B_2 & \\ & & & B_1 \end{bmatrix}, \text{ where e.g. } B_2 = \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ . & \beta \end{bmatrix}.$$

If we write $(A_4\text{-}\alpha I\ )\ U_4$, [...] we observe that $(a_4\text{-}\alpha I)^p$ has ranks 4,3,2,1,0,0,... for $p = 0,1,2,3,4,...$; [...]
It will be more convenient to consider not the rank but its complement with respect to the order, that is, the nullity, $\nu = n\text{-}r$. The changes in the nullity in our example may then be represented by a diagram, thus :



p = 0,	p = 1,	p = 2,	p = 3,	p = 4,
ν = 0	ν = 1	ν = 4	ν = 5	&c.,
				ν = 6

The number of dots in a row represents the order of A_q ; and the increase of the α-nullity with increase of p is intuitively seen to be given by making vertical sections of the diagram, one place farther to the right each time. But the diagram is a Ferrers diagram of *partitions* of the integer 6, the total multiplicity of the latent root α. Hence we have the following theorem :

If the successive differences in nullity (or rank) in the matrix powers $(A\text{-}\lambda_i I)^p$, $p = 0,1,2,...$, *are regarded as a partition (called the Weyr characteristic) of the total multiplicity of the latent root* λ_i, *then the conjugate partition is the Segre characteristic associated with* λ_i.

spécifique, lorsque l'on décompose une matrice, on met une image en mouvement et ce mouvement permet de chercher et de démontrer. Comme nous l'avons vu dans la conclusion de la deuxième partie, l'idée de mouvement est associée à la décomposition matricielle depuis son origine à la fin du XIX^{e} siècle. Elle est manifeste notamment dans l'idéal de Sylvester d'une théorie de l'"algèbre universelle" qui s'inscrirait dans l'héritage de Newton :

> Ce qui intéresse le plus dans les résultats nouvellement acquis que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, c'est l'union ou bien l'anastomose dont ils offrent un exemple frappant et tout à fait inattendu entre les deux grandes théories de *l'Algèbre moderne* et de *l'Algèbre nouvelle*, dont l'une s'occupe des transformations linéaires, et l'autre de la quantité généralisée, de sorte qu'au même titre que Newton définit l'Algèbre ordinaire comme étant l'Arithmétique universelle, on pourrait très bien caractériser cette Algèbre-ci comme étant l'Algèbre universelle, ou au moins une de ses branches les plus importantes.
> [Sylvester, 1884b, 199].

Comme le montre l'encart 6, lorsqu'il énonçait ses résultats principaux sur la matrice dans un mémoire de 1884 intitulé "Sur les trois lois du mouvement dans le monde de l'algèbre universelle" (chapitre 4), Sylvester associait une idée de mouvement aux opérations sur les matrices, "un mouvement est une opération dans le monde de l'espace, une opération est un mouvement dans le monde de l'ordre".

Si le théorème de Jordan décline des identités multiples entre 1870 et 1930, il porte cependant une identité intrinsèque définie par les trois caractères que sont

- une méthode de décomposition d'un problème général en une suite de problèmes simples.
- une forme de représentation imagée de la méthode de décomposition.
- Une idée de mouvement.

Ces trois caractéristiques du théorème de Jordan renvoient à des caractères de la modernité au début du XX^{e} siècle qui dépassent le seul champ des mathématiques. La mécanisation, le cinéma, la bande dessinée, le cubisme, sont autant d'exemples sortant du seul cadre de la science dans lesquels le *général* est atteint par une *décomposition* en des *images simples* que l'on met en *mouvement.* Un travail qui prolongerait cette thèse de doctorat serait alors d'étudier l'histoire de la décomposition matricielle dans le cadre de la modernité du début du XX^{e} siècle.

L'histoire du théorème de Jordan s'arrête-t-elle dans les années trente ? Pour ce qui est de la question d'identité qui fait la problématique de cette thèse, la réponse est affirmative. Les changements d'identités que connaîtra le théorème de Jordan après les années trente ne peuvent plus être analysé sous l'angle du moment historique de référence qu'était la querelle Jordan-Kronecker de 1874. D'autres moments de références devraient être choisis comme les travaux de Fourier sur les modes propres de la chaleur ; d'autres réseaux devraient être mis en avant dans le cadre de l'émergence de la théorie spectrale qui porte les notions de valeurs propres et de vecteurs propres. La théorie des opérateurs compacts élaborée par Riesz en 1916 pour les équations intégrales sera en effet perçue comme une généralisation du théorème de Jordan à la dimension

ENCART 5.

Efficacité et simplicité de la combinatoire des matrices : le problème de la détermination des matrices commutant à une matrice donnée.

[Turnbull et Aitken, 1932, 146] :

Problem I. To solve $AX = XA$.

Solution – Reduce A, which must be square, to classical form

$$HAH^{-1} = (AI_v + U) = C,$$

so that the given equation becomes

$$H^{-1}CHX = XH^{-1}CH \text{ : or } CY = YC$$

[…] For example, if there are two-by-two partitions, the equation $CY = YC$ becomes

$$\begin{bmatrix} \alpha I_p + U, & \\ & \beta I_q + U, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha I_p + U, & \\ & \beta I_q + U, \end{bmatrix}.$$

Hence, equating the appropriate submatrices, we have

$$(\alpha I_p + U)Y_{11} = Y_{11}(\alpha I_p + U), \ (\alpha I_p + U)Y_{12} = Y_{12}(\alpha I_p + U), \text{ and so on.}$$

These two equations are typical of the case in general, when there are ν×ν partitions. On cancelling out identically the first term on each side of the first equation, we have

$$UY_{11} = Y_{11}U,$$

[…]We have therefore obtained a general solution Y which can be epitomized by writing

$$Y = [I_{risj} f_{ij}(U_j)] = [f_{ij}(U_i) I_{risj}],$$

where f_{ij} is an arbitrary polynomial, unless i ý j, α ý β when it is zero.

EXAMPLES

If $AX = XA$, and $HAH^1 = C = diag\ (C_3(\alpha), C_2(\alpha), C_2(\beta), C_1(\beta))$, α ý β, then the Segre characteristic is $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, and we shall have

$$C = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c} \alpha & 1 & & & & & & \\ & \alpha & 1 & & & & & \\ & & \alpha & & & & & \\ \hline & & & \alpha & 1 & & & \\ & & & & \alpha & & & \\ \hline & & & & & \beta & 1 & \\ & & & & & & \beta & \\ \hline & & & & & & & \end{array}\right]$$

$$H^{-1}YH = H^{-1} \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c} x_0 & x_1 & x_2 & y_0 & y_1 & & & \\ & x_0 & x_1 & & y_0 & & & \\ & & x_0 & & & & & \\ \hline & z_0 & z_1 & t_0 & t_1 & & & \\ & & z_0 & & t_0 & & & \\ \hline & & & & & \xi_0 & \xi_1 & \eta_0 \\ & & & & & & \xi_0 & \\ \hline & & & & & & \zeta_1 & \tau_0 \end{array}\right] H$$

where $x_0, x_1, \ldots, \tau_0$ are 14 arbitrary parameters.

infinie. Ce point de vue est par exemple prédominant dans le traité de Schwertfeger [1938] sur les fonctions de matrices qui se base sur la théorie des opérateurs de von Neumann [1929]. Les travaux de la théorie des "matrices infinies" [Wintner, 1929], ou de la théorie des opérateurs accélèrent la marginalisation d'invariants polynomiaux obtenus par le calcul des déterminants comme les diviseurs élémentaires au profit d'une décomposition de l'espace vectoriel et d'un calcul d'invariants obtenus par des procédés itératifs comme la caractéristique de Weyr. Jean Dieudonné, dans un article paru au bulletin de la *SMF* en 1946 et intitulé "Sur la réduction canonique des couples de matrices", reformule de la manière suivante le problème de l'*équivalence* des *couples* de *matrices* qui était au cœur de la querelle Jordan-Kronecker de 1874 :

> Etant donnés deux couples de matrices (A,B), (A_1, B_1) à m lignes et n colonnes, dont les éléments appartiennent à un même corps commutatif K, le problème d'*équivalence* de ces couples consiste à trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une matrice carrée inversible P d'ordre m et une matrice carrée inversible Q d'ordre n, ayant leurs éléments dans K, et telles qu'on ait *simultanément* $A_1 = PAQ$ et $B_1 = PBQ$. Lorsque $m = n$ et que A est une matrice inversible, A_1 doit aussi être inversible et on a alors
>
> $$B_1A_1^{-1} = P(BA^{-1})P^{-1},$$
>
> autrement dit, les deux matrices BA^{-1} et $B_1A_1^{-1}$ doivent être semblables [...] ; on est donc ramené à la recherche des conditions pour que deux matrices carrées soient semblables, problème résolu par Weierstrass lorsque K est le corps des nombres complexes, à l'aide de la théorie des diviseurs élémentaires, qui a depuis été étendue au cas où K est un corps commutatif quelconque. En s'appuyant sur la solution de ce cas particulier, Kronecker a pu résoudre le problème général de l'équivalence de deux couples de matrices lorsque K est le corps des nombres complexes [...].Elle permet,pour tout *couple* (A,B) , de former un couple de matrices (A_0, B_0) (dit canonique) équivalent à (A,B), entièrement caractérisé par la donnée d'un nombre fini d'invariants qui sont les mêmes pour tout couple équivalent à (A,B) ; pour que deux couples soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient mêmes invariants ou (comme on dit encore) qu'ils puissent être réduits (par équivalence) au même couple canonique. [...] Mais, tandis qu'il ne semble pas qu'on ait beaucoup cherché à simplifier et à rénover la théorie de Kronecker, celle de Weierstrass a été l'objet de nombreux travaux (en raison de son utilité beaucoup plus grande). La plupart des présentations modernes de cette théorie en éliminent la théorie des déterminants à peu près complètement, mais conservent la liaison avec la théorie des polynômes : il s'agit d'ailleurs de polynômes par rapport à une matrice carrée, ce qui explique qu'on ne puisse songer à transporter ces méthodes à la théorie de Kronecker.
>
> On sait d'autre part qu'une des tendance de l'algèbre moderne est de formuler les résultats de l'algèbre linéaire, non plus en termes de matrices, mais en considérant directement les applications linéaires correspondant à ces matrices: c'est le seul point de vue qui se montre fécond quand on cherche à étendre l'algèbre linéaire aux espaces vectoriels de dimension infinie. De ce point de vue, la présentation la plus satisfaisante de la théorie de Weierstrass n'est pas celle à laquelle nous faisions allusion plus haut, mais bien une méthode dont la première idée remonte sans doute à E. Weyr ; elle ne s'applique d'ailleurs avec un plein succès que lorsque K est algébriquement fermé ; mais la théorie des déterminants et la théorie des polynômes n'y interviennent plus que pour

ENCART 6.

Les trois lois du mouvement de Sylvester.

[Sylvester, 1884c, 33].

IN the preceding *Circular* allusion was made to the three cardinal principles or conspicuous landmarks in Universal Algebra ; these may be called, it seems to me (without impropriety), its Laws of Motion, on the ground that as motion is operation in the world of pure space, so operation is motion in the world of pure order, and without claiming any exact analogy between these and Newton's laws, it will be seen that there is an element in each of the former which matches with a similar element in the latter, so that there is no difficulty in pairing off the two sets of laws and determining which in one set is to be regarded as related by affinity with which in the other. They may be termed the law of *concomitance* or *congruity,* the law of *consentaneity* and the law of *mutuality* or *community.*

The law of congruity is that which affirms that the latent roots of a matrix follow the march of any functional operation performed upon the matrix, not involving the action of any foreign matrix ; it is the law which asserts that any function of a latent root to a matrix is a latent root to that same function of the matrix ; in so far as it regards a matrix *per se,* or with reference solely to its environment, it obviously pairs off with Newton's first law.

The law of *consentaneity,* which is an immediate inference from the rule for combining or multiplying substitutions or matrices, is that which affirms that a given line (or parallel of latitude) can be followed out in the matrices resulting from the continued action of a matrix upon a fixed matrix of the same order, that is, in the series $M, mM, \ldots, m^sM, \ldots$ (which may be regarded as so many modified states of the original matrix) without reference to any other of the lines or parallels of latitude in the series, or again any column or parallel of longitude in the correlated series $M, Mm, Mm^2, \ldots$ without reference to any other such column or parallel of longitude.

[...] The law of *consentaneity* in so far as it relates to the decomposition of the motion of a matrix into a set of parallel motions, has an evident affinity with Newton's second law*.

Remains the law of *mutuality,* which is concerned with the effect of the mutual action upon one another of two matrices, and so claims kindred with Newton's third law.

This law branches off into two, one of which may be termed the law of reversibility, the other that of co-occupancy or permeability.

The law of reversibility affirms that the latent function of the product of two matrices is independent of the sense in which either of them operates upon the other, that is, is the same for *mn* as for *nm,* just as the kinetic energy developed by the mutual action of two bodies is not affected by their being supposed to change places.

As regards the second branch of the third law, the word co-occupancy refers to the fact that although the space occupied by two similarly shaped figures (say two spheres) is not absolutely determined (in the absence of other data) by the spaces occupied by them each separately (for they may intersect or one of them coincide with or contain the other), a superior as well as an inferior limit to such joint occupation is so determined ; the inferior limit being the space occupied by either such figure, that is, the *dominant* of these two given spaces, and the superior limit their arithmetical sum. So the nullity resulting from the action in either sense of two matrices upon one another is not given when their separate nullities are assigned, but has for an inferior limit the dominant of these two nullities and for a superior limit their sum ; the nullities of the two component matrices may also be conceived under the figure of two gases or other fluids which are mutually *permeable* and capable of occupying each other's pores.

[...]

Such then are the three primary Laws of Algebraical Motion ; but as Conservation of areas, *Vis viva,* D'Alembert's Principle, the principle of Synchronous Vibrations, of Least action, and various other general laws may be deduced from Newton's three ground laws, so, of course, various subordinate but very general laws may be deduced from the interaction of the above stated three ground laws, namely, the law of Congruity, the law of Consentaneity, and the law of Mutuality.

assurer l'existence d'une valeur propre au moins pour toute matrice carrée, ce qui permet d'adapter la méthode aux espaces de dimension infinie.

Nous avons insisté sur le caractère unificateur de la théorie des matrices canoniques des années trente qui tresse des travaux auparavant distincts en une même théorie, ce caractère ne doit pas être perçu comme la manifestation d'un progrès irréversible et il n'est pas intemporel. Dans les années 1940-1950, la tresse est démêlée et certaines notions qui participaient d'une même théorie en 1930 sont à présent perçues comme distinctes. On distingue notamment entre l'algèbre linéaire en dimension finie et la théorie des opérateurs, entre ce qui tient d'une approche arithmétique valable dans anneau principal (théorie arithmétique des invariants de similitudes) et ce qui tient d'une approche algébrique dans un corps algébriquement clos (décomposition de Jordan d'un endomorphisme), entre la géométrie vectorielle (décomposition en sous espaces caractéristiques) et la géométrie euclidienne (matrices orthogonales).

Annexe 1.

Une formulation contemporaine de la relation mathématique entre diviseurs élémentaires et forme de Jordan.

- Trois exemples de décompositions matricielles associées à la décomposition en diviseurs élémentaires d'un même polynôme caractéristique :

$$|A-\lambda I| = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^3\,(\lambda-3).$$

Forme de Jordan	$\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && 2 &&& \\ &&& 2 && \\ &&&& 2 & \\ &&&&& 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && 2 & 1 && \\ &&& 2 & 1 & \\ &&&& 2 & \\ &&&&& 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && 2 & 0 && \\ &&& 2 & 1 & \\ &&&& 2 & \\ &&&&& 3 \end{pmatrix}$
Diviseurs élémentaire	$(\lambda-1),(\lambda-1),$ $(\lambda-2),(\lambda-2),(\lambda-2),$ $(\lambda-3)$	$(\lambda-1),(\lambda-1),$ $(\lambda-2)^3,$ $(\lambda-3)$	$(\lambda-1),(\lambda-1),$ $(\lambda-2),(\lambda-2)^2,$ $(\lambda-3)$

- Extraits du traité de Gantmacher de 1959.

Chapitre 6. Transformations équivalentes des matrices polynomiales.
Théorie analytique des diviseurs élémentaires.

1. Transformations élémentaires d'une matrice polynômiale.

2. Forme canonique d'une λ matrice

3. Polynômes invariants et diviseurs élémentaires d'une matrice polynomiale.

   Dans la suite des mineurs $D_r(\lambda)$, $D_{r-1}(\lambda)$, …, $D_1(\lambda)$, chaque polynôme est divisible par le précédent. Les quotients correspondants seront désignés par $i_1(\lambda)$, $i_2(\lambda)$,… $i_r(\lambda)$.

   Définition. Les polynômes $i(\lambda)$ sont appelés les polynômes invariants de la matrice rectangulaire $A(\lambda)$. […] Décomposons les polynômes invariants de i(λ) en facteur irréductibles distincts sur K :

$$i_1(\lambda) = [\varphi_1(\lambda)]^{s1}\dots[\varphi_s(\lambda]^{cs}$$
$$i_2(\lambda) = [\varphi_1(\lambda)]^{d1}\dots[\varphi_s(\lambda]^{ds}$$
$$\dots$$
$$_{ir}(\lambda) = [\varphi_1(\lambda)]^{l1}\dots[\varphi_s(\lambda]^{ls}$$
$$(c_k > d_k > \dots > l_k)$$

   Définition. Toutes les puissances $[\varphi_1(\lambda)]^{c1},\dots,[\varphi_s(\lambda)]^{ls}$ sont appelées les diviseurs élémentaires de la matrice $A(\lambda)$ sur le corps K.

4. Equivalence des binômes linéaires.

5. Critère de similitude des matrices.

   On appelle polynômes invariants et diviseurs élémentaires d'une matrice A, ceux de sa matrice caractéristique $\lambda E-A$. […]

Théorème. Deux matrices A et B sont semblables si et seulement si elles ont les mêmes polynômes invariants ou, ce qui revient au même, les mêmes diviseurs élémentaires sur le corps K.

6. Forme normale d'une matrice.

Soit $g(\lambda) = \lambda^m + \alpha_1\lambda^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1}\lambda + \alpha_m$ un polynôme à coefficients appartenant à K.
Considérons la matrice carrée d'ordre m

$$L = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{m-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_{m-2} \\ \dots & \dots & \dots. & \dots & \dots \\ 0 & 0 & .. & 1 & -\alpha_1 \end{Vmatrix}$$

On vérifie aisément que $g(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de L
D'autre part, le mineur de l'élément α_m du déterminant caractéristique est égal à 1.
Par suite [...] L n'a qu'un seul polynôme invariant $i(\lambda)$ différent de 1, le polynôme $g(\lambda)$.
[...] Soit A une matrice ayant pour polynômes invariants

$$i_1(\lambda), \dots, i_t(\lambda), i_{t+1}(\lambda) = 1 \dots 1$$

La matrice quasi diagonale $L = \mathrm{diag}(L_1 \dots L_t)$ a pour polynômes invariants les polynômes de A. A et L sont donc semblables. [....] L' est dite première forme normale naturelle de la matrice A.
[...] Si on suppose que le corps de nombres K contient les valeurs caractéristiques de la matrice, alors les diviseurs élémentaires de A sont de la forme :

$$(\lambda-\lambda_1)^{p1}, (\lambda,\lambda_2)^{p\hat{}2} \dots (\lambda-\lambda_\mu)^{p\mu} \text{ avec } p_1+p_2+\dots p_\mu = n$$

On vérifie aisément que le bloc de Jordan :

$$\begin{Vmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{Vmatrix}$$

n'a qu'un seul diviseur élémentaire : $(\lambda-\lambda o)^p$ [...]
Forme normale de Jordan de A. [...]. Le schéma suivant décrit la matrice de Jordan J pour les diviseurs élémentaires $(\lambda-\lambda 1)^2, (\lambda-\lambda 2)^3, (\lambda-\lambda_3), (\lambda-\lambda_4)$

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & & & & & \\ & & \lambda_2 & 1 & 0 & & & \\ & & 0 & \lambda_2 & 1 & & & \\ & & 0 & & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ & & & & & & \lambda_4 & 1 \\ & & & & & & & \lambda_4 \end{Vmatrix}$$

Chapitre 7. Structure d'un opérateur linéaire dans un espace de dim. *n*.
(Théorie géométrique des diviseurs élémentaires)

L'existence d'une matrice de forme normale dans la classe des matrices semblables est étroitement liée à des propriétés importantes et profondes d'un opérateur linéaire dans un espace de dimension *n*.

1. Polynôme minimal d'un vecteur et d'un espace.

2. Décomposition en sous espaces invariants avec polynômes minimaux premiers entre eux.

3. Equivalence.Espace quotient.

4. Décomposition d'un espace en sous espaces invariants cycliques.
   Soit $\sigma(\lambda) = \lambda^p + \alpha_1\lambda^{p-1} + \ldots + \alpha_{p-1}\lambda + \alpha_p$ un polynôme minimal du vecteur *e*.
   Alors les vecteurs $e, Ae, \ldots, A^{p-1e}$ sont linéairement indépendants et
   $$A^pe = -\alpha_p e - \alpha_{p-1}Ae - \ldots - \alpha_1 A^{-1}e$$
   Les vecteurs forment une base du sous espace *I* de dimension *p*. Ce sous espace est cyclique par suite du caractère particulier de la base. L'opérateur *A* fait passer d'un vecteur au suivant et le dernier est transformé en une combinaison linéaire des autres.

5. Forme normale d'une matrice.
   On décompose *R* en sous espaces cycliques. On prend une base de *R* [...] . On obtient un matrice par blocs : $L_I = (L_1, L_2, \ldots)$ [...].
   $$L = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_m \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_{m-1} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_{m-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & .. & 1 & -\alpha_1 \end{Vmatrix}$$

6. Polynômes invariants. Diviseurs élémentaires.

7. Forme normale de Jordan d'une matrice.
   Dans le cas où toutes les valeurs caractéristiques appartiennent au corps [...]. La somme des sous espaces cycliques associés aux diviseurs élémentaires $(\lambda\text{-}\lambda o)^p$ est engendrée par
   $$e_1 = (A-\lambda oE)^{p-1e},\ e_2 = (A-\lambda oe)^{p-2e}, \ldots e_p = e$$
   Donc
   $$(A-\lambda o)\, e_1 = 0,\ (A-\lambda o)\, e_2 = e_1,\ (A-\lambda_0)\, e_3 = e_2, \ldots$$
   Où
   $$Ae_1 = \lambda o e_1,\ Ae_2 = \lambda o e_2 + e_1 \ldots .$$

Et la matrice de *A* dans cette base a la forme de Jordan.

Annexe 2.

Glossaire de théorie des groupes.

L'objet de ce glossaire est d'expliciter les notions de théorie des groupes signalées par des caractères gras dans le corps du texte et les encarts du chapitre 3.

- **Actions de groupes. Orbites. Stabilisateurs.**

Définition. Soit G un groupe et X un ensemble. Une action de G sur X est la donnée d'un homorphisme, $p : G \leftrightarrow \sigma(X)$
C'est donc la donné d'une application

$$\sigma \times X \leftrightarrow X$$
$$(g,x) \leftrightarrow g{*}x \text{ tq } 1{*}x = x \text{ et } g_1{*}(g_2x) = g_1g_2{*}x$$

Orbite de x ☻X : $\{gX, g$ ☻$G\} = G.x$
Relation d'équivalence : $x\ r\ y$ ñ Â $g, y = gx$
Stabilisateur de x ☻ X : $Gx = \{g$ ☻$G/ gx = x\}$
Propriété.

$$G.x \text{ isomorphe } G/Gx$$
$$yx \leftrightarrow \text{ classe de } y$$

- **Centre d'un groupe. Automorphismes intérieurs.**

Automorphismes intérieurs :
$Int(G) : G \leftrightarrow G$
$ig : x \leftrightarrow gxg^{-1}$
$Int(G)$ est un sous groupe de $Aut(G)$
Et $G \leftrightarrow IntG$
$g \leftrightarrow i_g$
se factorise à travers le centre de G : G/Z isomorphe $Int(G)$
Centre d'un groupe. On appelle centre du groupe G l'ensemble

$$Z(G) = \{g☻G/ ┐x ☻G, gx = xg\}.$$

C'est un sous groupe distingué dans G.
$Z(GL(E))$ est isomorphe à k^* (homothéties)
$Z(Sl(E))$ est isomorphe $\{\lambda / \lambda^n = 1\}$

- **Commutant d'un endomorphisme.**

Soit E de dimension finie, on note Γ_f le sev de $L(E)$ défini par
$F_f = \{g \text{ de } L(E)/ f°g = g°f\}$

- **Commutateurs, Groupe rendu abélien.**

Commutateurs : $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$
Le sous groupe $[G,G]$ des commutateurs est distingué dans G.
$G/[G,G]$ est abélien (classe de $xyx^{-1}y^{-1} = 1$), c'est le plus grand quotient abélien de G.
Soit A un groupe abélien, et $f\ G \leftrightarrow A$. f se factorise à travers $G/[GG]$
Exemple : $G = Gln(Ë)$ alors $det(commutateur = 1)$ et $[GG] = SlnË$. Le déterminant se factorise : $G \leftrightarrow R^*$ donc G/S isomorphe R^*

- **Dévissage.**

Si G est un groupe et H est distingué dans G, on ramene l'étude G à celle de H et de G/H. Les groupes simples, eux sont indévissables, d'où l'intérêt qu'on leur porte.

- **Normalisateur et centralisateur**

S ┤ G un S-ensemble.
Centralisateur. $C_G(S) = \{x \in G, xs = sx, \forall s \in S\}$
Normalisateur. $N_G(S) = \{x \in S, xS = Sx]$
N est distingué dans C
Soit N et H, 2 sous groupes de G. K est distingué dans H si et seulement si K ┤ $N_g(H)$
G est distingué dans H si et seulement si $N_G(H) = G$. $N_G(H)$ est le pus grand sous groupe K de G tel que K est distingué dans H.
Exemples.

- $G = Gln(Ë)$.
  H : matrices inversibles.
  $N_G(H) = \{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P$, avec P matrice de permutation.
  Soit $M \in N_G(H)$. Soit Δ dont les valeurs propres soient distinctes. Alors les vecteurs propres sont parfaitement ordonnés et $M\Delta M^{-1}$ revient à un changement de base, une permutation des vecteurs.
  $N_G(H)/H$ est isomorphe à σ_n

- G groupe fini. N sous groupe distingué minimal.
  Il existe F groupe simple et r Ã 1 tq N isomorphe F^r
  Démonstration. On suppose N non simple. Il existe $H1$ distingué dans N et minimal. donc non distingué dans G.
  └$a \in G, aH1a^{-1} = H_2$ isomorphe à H_1.
  On montre que H_2 distingué dans N et $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ alors $H_1.H_2$ iso $H_1 \times H_2$ etc.
  Le processus s'arrête. Le produit des Hi est distingué dans G, donc égal à N par minimalité.

- **Primitif**

Groupe imprimitif : G un groupe linéaire irréductible (ses seuls sous espaces stables sont $\{0\}$ et V) sur un espace vectoriel de dimension n. G est imprimitif si pour un entier m Ã 2 ; il existe des sous espaces $V_1, \dots, V_m$ dont la somme directe est égale à V tels que pour tout x de G, l'application : $V_i \leftrightarrow V_i x$ est une permutation de l'ensemble $\{V_1, \dots, V_m\}$
Exemple. G sous groupe de $Gl_2(Ê)$ engendré par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.
G permute $V_1 = <(1,0)>$ et $V_2 = <(0,1)>$.

Propriété. Soit G un groupe de permutations opérant transitivement sur un ensemble E.

On a équivalence :

a. Tout stabilisateur $Hx = \{g\in G/ gH = H\}$ est un sous groupe maximal

b. Tout partie F de E telle que pour $g \in G$, gF soit ou bien contenue dans F ou bien disjointe de F est égale à E ou est réduite à un seul élément.

Un groupe G différent de {e} vérifiant a) et b) est primitif.

On peut faire correspondre un système d'imprimitivité à la donnée d'un sous groupe normal d'un groupe imprimitif L [Dixon, 1971, pp65-77]:

Si W est un sous espace stable par Γ, le Γ-espace homogène V_W est le sous espace de V formé de la somme de tous les Γ-espaces minimaux W' qui sont isomorphes à W

Théorème. Soit L un sous groupe irréductible de $GL(V)$. Γ un sous groupe normal de L. $V_1,\dots V_m$ les Γ-espaces homogènes de V et $W_1,..,W_m$ les sous espaces minimaux correspondants.

Alors $V = \oplus V_i$ et tout x définit une permutation de $\{V_1,\dots V_m\} : V_i \to V_i x$.

En particulier si $m > 1$, L est imprimitif.

Et réciproquement :

Théorème. Soit L un sous-groupe irréductible et imprimitif de $GL(V)$. Soit $V = \oplus V_i$ où $V_1,\dots V_m$ sont m sous-espaces permutés par L. Soit Γ_i le stabilisateur de V_i : $\Gamma_i = \{x\in G, V_i x = V_i\}$.

Soit $\Gamma = \cap \Gamma_i$. Soit x^f la permutation $: V_i \to V_i x$.

L'homomorphisme $f : x \to x^f$ envoie L dans un groupe de permutation $\sigma(m)$.

$Kerf = \Gamma$.

Les sous groupes Γ_i sont conjugués dans L, $|L/\Gamma_i| = m$ et $dimV_i = d$ où $d = \dfrac{n}{m}$.

Propriété. Soit L un groupe primitif opérant transitivement sur un ensemble V. Soit F un sous groupe distingué de L. F opère transitivement sur V.

Démonstration. Soit V' l'image de l'action de F sur V : $V' = F.V = \{f.v : f\in F, v\in V\}$.

Il suffit de montrer que pour tout élément l de L, $l.V' \subset V'$, en effet comme L est primitif cette relation impliquera : $V' = V$: F sera donc transitif sur V.

Soit $l\in L$. Soit $v'\in V'$. Il existe alors un élément $v\in V$ et $f\in F$, $v' = f.v$.

Alors $lf.v = lfl^{-1}\, l.v$. Mais $lfl^{-1} \in$F et $l.v\in V$ donc $l.v' = lf.v = lfl^{-1}\, l.v \in F$.

$l..V'\subset V'$ et ce pour tout l de L.

- **Produit semi direct.**

Soit H et N deux groupes et $\varphi \in Hom(H,Aut(n))$

On définit une application $\alpha_\varphi : H\times N \leftrightarrow N$; $(h,n) \leftrightarrow \varphi(h)(n)$

Soit $N\times_\varphi H$ l'ensemble $N\times H$ muni de la loi de composition interne

$(x,h)(y,k) = (x\varphi_h(y), hk)$

$N\times_\varphi H$ est un groupe appelé produit semi direct de N et H

La multiplication n'est pas celle du produit direct : elle est tordue au moyen de l'opération de H sur N.

Exemple.

$N = Z/nZ$ et $H = (Z/2Z, \times)$

$\varphi : H \leftrightarrow Aut(N) : 1 \leftrightarrow id$; $-1 \leftrightarrow n \leftrightarrow n^{-1}$

$N_\varphi\times H$ est le groupe diédral :

$B = (b,1)$ élément d'ordre n

$A = (e,a)$ ordre 2 et $o(BA) = 2$

- **Résoluble.**

Définition. Une extension finie E/K est résoluble par radicaux si il existe $a_1,\ldots a_n$ tels que $E = K(a_1,\ldots a_n)$ et des entiers m_i tq $a_i^{mi} \in K(a_1.. a_{i-1})$
Définition : Un groupe fini G est résoluble si les quotients d'une suite de composition sont des Z/p_iZ, p_i premier.
Remarques :
- un groupe abélien est résoluble.
un p groupe est résoluble.

E et K sont deux corps. La correspondance de Galois énonce :
Théorème. Soit E:K une extension finie galoisienne et G = Gal(E/K).
Les applications
{sous groupes de G} $\leftrightarrow$ {sous corps de E contenant K}
H $\leftrightarrow$ E^H
Gal(E/F) $\longleftarrow$ F
sont des bijections réciproques.

Proposition. Soit G le groupe de Galois d'un corps de décomposition E de f séparable sur K.
L'application
$\psi : G \leftrightarrow sym(R)$
$\sigma \leftrightarrow \sigma/R$
est un homomorphisme de groupes injectif

Si le groupe G est résoluble intransitif, si l'on désigne par C_i ses classes d'intransitivité, G est isomorphe au produit direct des sous groupes résolubles $G_i = G/C_i$.

Propriété. Soit L un groupe résoluble fini. Tout sous groupe normal minimal de L est abélien élémentaire.
Démonstration. Soit F un sous groupe normal minimal de L.
– F est abélien :
Soit $F' = D(F)$ le groupe des commutateurs de F. F' est distingué dans L. Mais F étant un sous groupe normal minimal, $F' = F$ ou $F' = \{e\}$.
En tant que sous groupe normal d'un groupe résoluble, F est résoluble. Son groupe de commutateur F' ne peut donc lui être égal et par conséquent $F' = \{e\}$.
Le groupe de commutateurs de F est réduit à l'unité : F est abélien.
- F est un p-groupe élémentaire :
Soit p un nombre premier divisant l'ordre de F. Soit P un *p-groupe* de Sylow de F.
Comme F est abélien, P est un sous groupe caractéristique de F : $P = F$. F est donc un *p-groupe* abélien. Il existe donc un nombre premier p tel que
Enfin $\{x \in F, x^p = e\}$ est distingué dans F, $F = \{x \in F, x^p = e\}$, F est donc un p-*groupe* élémentaire.

- **Socle d'un groupe.**

Socle : sous groupe engendré par l'ensemble de tous les sous groupes normaux minimaux de G. Notation : $soc(G)$
Théorème. G un groupe fini non trivial
Il existe $K_1,\ldots K_m$ minimaux tels que $soc(G) = K_1 \times \ldots \times K_m$

Théorème. Tout sous groupe normal minimal K de G est un produit direct $K = T_1 \ldots T_k$ où les T_i sont des sous groupes simples, normaux de K qui sont conjugués par G.
Corollaire. Tout sous groupe normal minimal d'un groupe fini est soit un p-groupe soit un groupe dont le centre est égal à 1.
Théorème. Si G fini primitif alors $socG$ est un produit direct de groupes simples isomorphes.
Si G est primitif et K est un sous groupe normal minimal, $soc(G) = C_G(K)$

- **Symétrique. Groupe symétrique.**

Définition. $\sigma_n = Bij([1....n],°)$ est un groupe d'ordre $n!$
$\sigma \in \sigma_n$ est appelé permutation.
Définition. Le support d'une permutation $\sigma \in \sigma_n$ est $\{i \in [n], \sigma(i) \neq i\}$
Définition. Une permutation $\sigma \in \sigma_n$ est appelé k-cycle $(2 \leq k \leq n)$ si son support $supp(\sigma) = k$ et si on peut ordonner les éléments de $supp\sigma = \{x_1, \ldots x_n\}$ de telle sorte que $x_2 = \sigma(x_1), \ldots .x_k = \sigma(x_{k-1}), x_1 = \sigma(x_k)$.
La notation $(x_1, \sigma(x_1), \sigma^2(x_1) \ldots \sigma^{k-1}(x_1))$ n'est pas unique : il y a k telles notations possibles.
Théorème. Soit $\sigma \in \sigma_n$. Il existe des cycles $c_1, \ldots c_r$ a support deux à deux disjoints tels que $\sigma = c_1 ° \ldots ° c_n$.
L'écriture est unique à l'ordre près des c_i.

- **Suite centrale ascendante. Groupe nilpotent.**

G un groupe. $Z_0(G) = \{e\}$
$Z_1(G) = Z(G)$ distingué dans G
$\exists !$ $Z_2(G)$ distingué dans G tel que $Z(G/Z_1(G)) = Z_2(G)/Z_1(G)$
On continue par récurrence : $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G))$ et $Z_i(G) \; G$
Suite centrale ascendante : $Z_0 < Z_1 < \ldots < G$
Si $\exists$ n, $Z_n(G) =$ G on dit que G est nilpotent.
Exemples.
- Un p groupe est nilpotent.
- Tout groupe fini est produit de ses sous groupes de Sylow.

Lemme. $g \in G$ d'ordre mn avec $(m,n) = 1$ alors il existe 2 puissances de g, h et k, telle que $g = hk = kh$ (Bezout). On finit la démonstration en décomposant l'ordre de G : $|G| = p_1^{\alpha}\ldots\ldots = mn$
Si G est nilpotent et fini alors G est le produit direct de ses sous groupes de Sylow.

- **Suite de composition.**

Définition. Soit G un groupe fini, on appelle suite de composition de G une suite décroissante
$G < G_1 < G_2 < \ldots G_n = \{1\}$ de sous groupes distingués les uns dans les autres tels que tous les quotients G_{i+1}/G_i sont simples
Exemples.
$\sigma_n < A_n < \{1\}$ pour $n \geq 5$
$\sigma_4 < A_4 < V = \{1 ; (12)(34) ; (23)(24) ; (14)(23)\}$ D = {1, (12) (34)} {1}
Lemme : Soit $G < G_1$ alors G/G_1 est simple si et seulement si il n'existe pas de groupe G' tel que $G < G' < G_1$
(i.e. G_1 est maximal parmi les sous groupes distingués de G différents de G)

- Les groupes simples abéliens sont *les Z/pZ*, *p* premier.

- **Théorèmes de Sylow.**

G groupe d'ordre *n*. Soit *d* une diviseur de *n*. Contrairement au cas particulier des p-groupes, il n'existe pas nécessairement de sous groupe de *G* d'ordre *d.*
(exemple : un sous groupe d'ordre 6 de A_4 serait d'indice 2, donc contiendrait tous les 3 cycles donc engendrerait A_4
Premier théorème de Sylow. Si *G* est un groupe d'ordre *n* et si *d* est un diviseur de *n* de la forme $d = p^k$ alors *G* possède un sous groupe d'ordre *d* appelé *p* sous groupe de Sylow
Corollaire : *p/n*, G possède un élément d'ordre *p.*
Deuxième théorème de Sylow.
Tout *p* sous groupe de *G* est contenu dans un *p* sous groupe de Sylow
les *p* sous groupes de Sylow sont deux à deux conjugués et leur nombre est congru à 1 *mod p.*

- **Transitif.**

E un *G*-ensemble. L'opération de *G* sur *E* est dite libre si l'action est injective. Transitive sur $\forall x \in E, Gx = E$

Annexe 3.

LE "défaut" de generalite chez Jordan relevé par Kronecker.

Kronecker critique un défaut dans la méthode par laquelle Jordan a traité le problème II dans son mémoire sur les formes bilinéaires en 1874 (chapitre 1). En termes contemporains, il s'agit d'assurer la possibilité de réduire par *congruence* une forme quadratique dans un corps à la forme

$$g_1 x_1^2 + \ldots + g_p x_p^2$$

et une forme alternée à la forme

$$h_1(x_1y_2 - x_2y_1) + h_2(x_3y_4 - x_4y_3) + \ldots$$

> Il est d'ailleurs indifférent, pourvu qu'on opère convenablement, de prendre pour point de départ les formes quadratiques ou les formes bilinéaires. On peut, en effet, présenter la réduction de ces dernières formes de telle façon, que la substitution qui sert à l'opérer soit symétrique, par rapport aux deux systèmes de variables, si les formes considérées P et Q sont toutes deux symétriques (ou toutes deux gauches).
> [Jordan,1874b, 16].

Décomposant une forme bilinéaire en la somme d'une forme "symétrique" et d'une forme "alternée", $P = \Pi + \Pi_1$, Jordan cherche la forme réduite de la forme bilinéaire B. Il propose comme formes réduites les formes :

$$\Pi = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + \ldots$$
$$\Pi_1 = (x_2y_1 - x_1y_2) + \Delta_2(x_4y_3 - x_3y_4) + \ldots.$$

Et en déduit pour la forme P [Jordan,1874a, p.45] :

> *Poursuivant ces réductions jusqu'à la fin, on voit que la fonction $P = \Pi + \Pi_1$ pourra se mettre sous la forme*
> $$\begin{aligned} P = & [(x_1y_1 + x_2y_2 + \Delta_1(x_2y_1 - x_1y_2) + \ldots \\ & + [(x_{2\mu-1}y_{2\mu-1} + x_{2\mu}y_{2\mu} + \Delta_\mu(x_{2\mu}y_{2\mu-1} - x_{2\mu-1}y_{2\mu})] + \xi_{2\mu+1}\eta_{2\mu+1} + \ldots. \\ & + \xi_{m-q}\eta_{m-q-2\mu} + [X_1Y_1 + X_2Y_1 - X_1Y_2] + \ldots \\ & + [X_{2q-1}Y_{2q-1} + X_{2q}Y_{2q-1} - X_{2q-1}Y_{2q}] + [\Sigma_1H_2 - \Sigma_2H_1] + \ldots \\ & + [\Sigma_{2p-1}H_{2p} - \Sigma_{2p}H_{2p-1}]. \end{aligned}$$
> *On voit ainsi que, dans tous les cas, P est exprimé par une somme de fonctions partielles dont aucune ne contient plus de quatre variables.*

Kronecker conteste le résultat de Jordan au motif que le théorème sur l'équivalence des faisceaux de formes $uB + v^tB$ montre qu'il peut être nécessaire d'écrire ces faisceaux de formes comme "agrégats" de faisceaux élémentaires de plus de 4 variables de la forme $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots$. D'un point de vue contemporain, si il est bien possible de réduire, dans un *corps*, une forme bilinéaire comme indiqué par le résultat de Jordan, cette réduction pose difficulté pour la congruence des formes quadratiques dans un *anneau principal*, cas de figure à considérer pour le *polynôme* de formes $uB + v^tB$ utilisé par Kronecker.

Le point de vue contemporain est ici utile pour illustrer la critique de Kronecker.
Dans le cas de matrices à coefficients dans un corps.

Toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale. Toute matrice antisymétrique de rang $\rho = 2\mu$ avec est congruente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & h_1 \\ -h_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & h_2 \\ -h_2 & 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 & h_\mu \\ h_\mu & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots,$$

Corollaire : dans le corps réel toute matrice antisymétrique de rang $\rho = 2\mu$ est congruente à

Dans le cas de matrices à coefficients dans un anneau principal.

Il n'est pas possible d'écrire toute matrice A comme somme de matrices symétriques et antisymétrique mais il est possible de donner une telle décomposition à la matrice $2A$.

Théorème. Tout matrice antisymétrique Q de rang $\rho = 2\mu$ est congruente à la somme directe

$$\begin{pmatrix} 0 & h_1 \\ -h_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & h_2 \\ -h_2 & 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 & h_\mu \\ h_\mu & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots,$$

où $h_1/h_2/\ldots./h_\mu$

(Cahen, E. Théorie des nombres, Vol. i p . 282 Paris 1914)

Jordan propose comme formes canoniques, une compositions de formes symétriques réduites à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et de formes antisymétriques réduites à

$$\begin{pmatrix} 0 & -\Delta_1 \\ \Delta_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les formes réduites données par le théorème de Kronecker sont la somme de formes

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(notation matricielle pour l'écriture de Kronecker

$x_0y_3 - x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_0 + x_0y_2 - x_1y_1 + x_2y_0$ [1874c, p.400])

et de leurs conjuguées. J'ai donné l'exemple d'une forme pour quatre variables, mais de telles formes élémentaires peuvent présenter chez Kronecker autant de variables que nécessaires. Les deux formes ne coïncident pas si il y a plus de quatre variables.

[Jordan, 1874a, 46]

> Cherchons maintenant à quelle forme canonique on pourra ramener un système de deux polynômes bilinéaires $P = \Sigma A_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$, $Q = \Sigma B_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$.
> Nous commencerons par choisir les variables x,y, de telle sorte que P se trouve réduit à sa forme canonique
> $$P = x_1y_1+....+x_my_m$$
> Pour embrasser dans notre analyse tous les cas particuliers, nous supposerons $m < n$

Le principe consiste à débuter la réduction, par changements de variables, jusqu'à obtenir des formes de déterminant non nul [Jordan 1874a, 50] :

> On pourra donc enfin décomposer P et Q en une somme de parties
> $P = A_1+ A_2+....+ P$
> $Q = B_1+B_2+... + L$
> [...]
> Toute la question se trouve ainsi ramenée à simplifier l'expression des fonctions restantes P et L à $2(m-l)$ variables.

Jordan cherche à éliminer les "variables $x_{m+1},...,x_n$, $y_{m+1},...y_n$" qui figurent dans Q et pas dans P. Pour cela, il choisit x_ρ, ρ☻$[m+ +1,...n]$ et écrit [1874,p.46] :

> On aura $Q=Yx_\rho + Q_1$, Y étant une fonction linéaire de $y_1,...,y_n$ et Q_1 étant indépendant de x_ρ.

Jordan distingue alors deux cas :

Si "Y contient quelqu'une des variables y_{m+1}, ..., y_m" Jordan montre que l'on peut écrire $Q=XY+R$ "et le problème sera réduit à ramener à une forme simple P et R, qui ne contiennent plus les variables X et Y.

Si "Y se réduise à une fonction de $y_1,...y_m$ seulement. On pourra supposer qu'il se réduit à y_1" et Jordan écrit alors "$Q = x_\rho y_1+ X_1y_1 + x_1Y_1+R_1$, X_1 étant une fonction linéaire des x, sauf x_ρ, et Y_1 une fonction linéaire des y sauf y_1. Jordan aimerait alors écrire

$$Q= Xy_1+x_1Y_1+R''_1$$

de manière à ce qu'il "ne reste plus à réduire P_1 *et* R''_1 qui ne contiennent plus les variables X_1, Y_1, x_1, y_1 '(p48.). Pour cela, dans le cas où Y_1 n'est pas nul et contient les variables $y_{m+1},...,y_n$, Jordan écrit (p.47) :

(*) $Q = x_\rho y_1 + X_1y_1 + (x_1+a_2x_2+...+a_mx_m)Y_1+R'_1$.

Et, à partir de cette nouvelle forme, un changement de variable permet de conclure la question. Or c'est précisément cette formule (*) que critique Kronecker [1874a, 404] :

> Hrn. *Jordan* entwickelten Reductionsverfahren geltend, aber sie ist dort nicht wirklich behoben, sondern nur durch eine unausgeprochene und unzulässige Voraussetzung bei Seite geschoben. Hr *Jordan* stellt nämlich im 12. Abschnitte seines Aufsatzes "über bilineare Formen" eine Gleichung auf :
> $$Q = x_\rho y_1 + X_1y_1 + (x_1+a_2x_2+...+a_mx_m)Y_1+R'_1.$$

> welche auf der an sich unberechtigten Annahme beruht, dass die lineare Function der Variabeln x, welche mit Y_1 multiplicirt ist, keine der Variabeln $x_{m+1}, x_{m+2},\ldots,x_n$ enthält.

Le procédé de réduction de Jordan reposerait, selon Kronecker, sur une supposition implicite et fausse, selon laquelle le facteur de Y_1 ne contient pas les variables $x_{m+1},\ldots x_n$. Kronecker donne l'exemple de deux formes bilinéaires symétriques simples :

$$P = x_1y_1 + x_2y_2$$

et

$$Q = (x_2+x_3)y_1 + (x_1+x_4)y_2 + (x_1+x_3)y_3 + (x_2+x_4)y_4.$$

Kronecker applique le calcul de Jordan pour ces formes, ici $m = 2$, et prenant $x_\rho = x_3$ ou x_4 alors

$$R'_1 = (x_1+x_3)y_3 + (x_2+x_4)y_4 \text{ et}$$
$$x_\rho = x_3,$$
$$X_1 = x_2,$$
$$Y_1 = y_2,$$
$$Q = x_\rho y_1 + X_1y_1 + (x_1+x_4)Y_1 + R'_1$$

Donc le facteur de Y_1 contient les variables x, d'index plus grand que m. Et Kronecker conclut [1874, 407]

> Das *Jordan'*shce Reductionsverfahren ist also auf das System jener beiden Formen (P,Q) nicht anwendbar [...] Es ist nicht ein vereinzelter oder unwesentlicher Mangel der *Jordan*schen Analyse, den ich hier aufgezeigt habe ; derselbe kehrt vielmehr im Laufe des Reductionsverfahrens immerfort wieder und berührt die Grundlagen des gestammten Deduktion.

Jordan réfute l'attaque de Kronecker, prétendant que le "défaut" relevé par celui-ci relève en réalité d'un cas particulier traité d'une manière spécifique dans la première étape de son analyse.

> M. Kronecker passe ensuite au point principal de notre Mémoire, le problème de la réduction simultanée de deux formes bilinéaires *P* et *Q*. Il s'efforce d'établir que si nos résultats sont exacts, la démonstration en est absolument insuffisante. Nous aurions omis en effet, dans tout le cours notre analyse, le cas où *Q* contient les rectangles des variables qui ne figurent pas *dans P.*
> Notre illustre critique s'étend avec complaisance sur cette objection, qu'il croit décisive. Elle prouve simplement qu'il nous a lu un peu légèrement ; car le cas qu'il nous reproche d'avoir oublié est traité explicitement dans notre mémoire (n°9)? C'est le plus élémentaire de tous.
> [Jordan, 1874e, 18] :

Pour l'exemple donné par Kronecker *:*

$$P = x_1y_1 + x_2y_2 \text{ et}$$
$$Q = (x_2+x_3)y_1 + (x_1+x_4)y_2 + (x_1+x_3)y_3 + (x_2+x_4)y_4.$$

Si l'on prend pour $x_\rho = x_3$ comme le fait Kronecker, la première étape de la méthode de Jordan précise qu'il faut obtenir une factorisation complète par x_3 :

$$Q = x_3(y_3+y_1) + x_2y_1 + (x_1+x_4)y_2 + x_1y_3 + (x_2+x_4)y_4.$$
$$= x_3Y + (Y - y_1x_1) + R$$

Comme $Y = y_3+y_1$ contient y_3, il faut appliquer la première étape de la réduction :

$$Q = (x_3+x_1)Y - x_1y_1 + x_2y_1 + (x_1+x_4)y_2 + (x_2+x_4)y_4$$

En posant alors $X = x_3+x_1$

$$Q = XY - x_1y_1 + x_2y_1 + (x_1+x_4y_2) + (x_2+x_4)y_4$$

Et il faudrait alors répéter le processus pour $x_p = x_4$

$$Q = XY + x_4(y_4+y_2) - x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_4$$

$$Q = XY + X'Y' - x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 - y_2x_2$$

avec

$$Y' = y_4+y_2$$

$$X' = x_4+x_2$$

Ce n'est qu'après cette réduction que l'on peut employer la deuxième étape de la méthode de Jordan pour

$$R = - x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 - y_2x_2 = -(x_1-x_2)(y_1-y_2)$$

ce qui permet d'obtenir la forme réduite

$$Q = XY + X'Y'-(x_1-x_2)(y_1-y_2).$$

Et Jordan conclut :

> Notre méthode subsiste donc, et nous étions fondé à dire que la réduction des systèmes bilinéaires est un problème fort simple.
> [1874e, 18].

La méthode de Jordan présente portant un réel "défaut". Si l'on prend la forme

$$Q = (x_2+x_3)y_1+(x_1+x_4)y_2+(x_2+x_4)y_4$$

et $x_p = x_3$ pour obtenir

$$Q = x_3y_1 + x_2y_1 + (x_1+x_4)y_2 + (x_2+x_4)y_4.$$

Alors, comme le facteur de x_3 ne contient pas y_1 :

$$Q = x_3y_1 + X_1y_1 + x_1Y_1 + R_1 \text{ avec}$$

$$R_1 = x_4y_2 + (x_2+x_4)y_4.$$

$$Y_1 = y_2$$

$$X_1 = x_2$$

On obtient une expression contenant x_4 en facteur de Y_1 :

$$Q = x_3y_1 + X_1y_1 + (x_1+x_4)Y1 + R'_1$$

Et, pour une expression de ce type, la critique de Kronecker est justifiée.

Bibliographie.

ALBERT, A.A. 1937 *Modern higher algebra*. Univ. of Chicago Press.

1941 *Introduction to algebraic theories*. Univ. of Chicago Press.

1955 "Leonard Eugene Dickson 1874-1954," *Bulletin of the American Mathematical Society,* **61**, 331-345.

AITKEN, A.C. 1928a "On the latent roots of certain matrices," *Proc. Edimb. Math. Soc.* (**2**) **1**, 135-138.

1928b "Note on the elementary divisors of some related matrices," *Proc. Edimb. Math. Soc*. (**2**) **1**, 166-168.

1931 "Further studies in algebraic equations and matrices, *Proc. Roy. Soc. Edimb*. **51**, 80-90.

1939 *Determinants and matrices.* Olmer and Boyd : Edimbourg, Londres.

AITKEN, A.C. ET TURNBULL, H.W. 1932 *An introduction to the theory of Canonical Matrices*. Londres.

ANDOYER, H. 1900 *Leçons sur le théorie des formes et la géométrie analytique supérieure à l'usage des étudiants de la faculté des sciences*, Paris, Gauthier-Villars.

ARTIN, E. *1927* "Zur theorie der hypercomplexen Zahlen", *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgeischen Universität,* **5**, 215-260.

AUSEJO E. & HORMIGON M. (dir.). 1993 - *Messengers of mathematics: European journals (1800-1946)*. - Madrid : Siglo XXI de Espana Editores.

AUTONNE, L. 1883a "Sur les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires a coefficients rationnels", *Comptes Rendus,* **96**, 56-58.

1883b "Recherches sur les groupes d ordre fini contenus dans le groupe des substitutions quadratiques homogènes a trois variables", *Comptes Rendus*, **97**, 567-570.

1884 "Sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe des substitutions quadratiques Cremona ", *Comptes Rendus* **98**, 565-567.

1885a "Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe cubique Cremona," *Comptes Rendus*, **101**, 53-55.

1885b "Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona," *Jour. Math*. 4^e série, **I,** 431.

1886a "Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe des substitutions linéaires de contact," *Compte Rendus*, **102**, 313-315.

1886b "Sur les groupes irréductibles d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique cremonien," *Comptes Rendus*, **103**, 1176-1178

1887a "Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe des substitutions linéaires de contact," *Jour. Math*, 4^e série, **I**, 63.

1887b "Sur les substitutions cremoniennes quadratiques," *Comptes rendus*, **104**, 767-770

1887c "Sur les groupes quadratiques cremoniens," *Comptes Rendus*, **104**, 1422-1425.

1888a "Sur l'application des substitutions quadratiques cremoniennes a l'intégration de l équation différentielle du premier ordre," *Comptes Rendus*, **106**, 262-265.

1888b "Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique cremonien. *Jour. de Math*. 4^{e} série. **IV**, 177, 407.
1891a "Sur les intégrales algébriques de l' équation différentielle du premier ordre," *Comptes Rendus*, **113**, 632-635.
1891b *Sur la théorie des équation différentielles du 1er ordre et du 1er degré*, Gautier-Villars. Paris.
1894 "Sur la limitation du degré pour les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre," *Comptes Rendus*, **118**, 1184.
1895a "Sur les variétés unicursales a deux dimensions," *Comptes Rendus*, **121**, 673
1895b "Sur les varietes unicursales a trois dimensions," *Comptes Rendus*, **121**, 881 et 1129.
1900a "Sur les équations algébriques dont toutes les racines sont des intégrales d'une même équation de Riccati," *Jour. de Math*., 5 e série, **VI**, 157-214
1900b "Sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire quaternaire régulier," *Congrès int. des math.* 155-158.
1901a "Sur les groupes quaternaires réguliers d"ordre fini," *Comptes Rendus*, **132**, 624-626.
1901b "Sur les groupes quaternaires réguliers," *Jour. Math.* 5^{e} série, **VII**, 351-394.
1901c "Sur les groupes réguliers d'ordre fini," *Comptes Rendus*, **132**, 1216-1218.
1901d "Sur l'hermitien," *Comptes Rendus,* **133**, 209-210.
1901e *Sur les formes quaternaires à deux séries de variables. Applications à la géométrie et au calcul intégral,"* Hayz : Bruxelles.
1902a "Sur les groupes réguliers d ordre fini," *Comptes Rendus,* **134**, 640-642
1902b "Sur les groupes linéaires réels et orthogonaux. *Bull. Soc. Math. France* **30**, 121-134.
1903a "Sur la décomposition d'une substitution linéaire, réelle et orthogonale, en un produit d'inversions," *Comptes Rendus,* **136**, 1185-1186.
1903b "Sur la canonisation des formes bilinéaires," *Nouv. Ann*. (4) **3**, 57-64.
1903c "Sur la décomposition d'une substitution linéaire, réelle et orthogonale, en un produit d'inversions," *Ann. Univ. Lyon* I, fasc. 12.
1904 "Sur le connexe linéaire dans l'espace a *n-1* dimensions," *Comptes Rendus,* **138**, 1148-1149.
1905a *Sur les formes mixtes*. A.Rey, Lyon/ Gauthier-Villars, Paris.
1905b "Sur les droites fondamentales sur les collinéations de l'espace à *N-1* dimensions," *Bull soc. math. France*. **33**. 1-19
1906 "Sur certains groupes linéaires," *Comptes Rendus*, **143**, 670-672.
1909 *Sur les groupes de matrices linéaires non invertibles*, Ann. Univ. lyon I fasc. 25.
1910a "Sur les groupes commutatifs et pseudo-nuls des quantites hypercomplexes," *Comptes Rendus*, **151**, 1113
1910b *Sur les matrices linéaires échangeables à une matrice donnée,* Paris, Gauthier-Villars.

	1911a	"Sur une propriété des matrices linéaires," *Nouv. Ann*. (4) **12**, 118-127.
	1911b	"Sur certains groupes commutatifs et pseudo-nuls de quantites hypercomplexes," *Comptes Rendus,* **152**, 1370.
	1912	"Sur les substitutions cremoniennes," *Comptes Rendus,* **155**, 762.
	1913	*Sur les matrices hypohermitiennes et sur les matrices unitaires.* A. Rey, Lyon ; Gauthier-Villars, Paris.
BACHMAN, P.	1898	*Die Arithmetik der Quadratischen Formen*, Leipzig : Teubner.
BAKER, H.F.	1899	"Note to the foregoing paper," *Proc. London math. soc.* **30**, 195-198.
	1903a	"On some cases of matrices with linear invariant factors," *Proc. London math. Soc.* **33.** 100-121.
	1903b	"On the invariant factors of a determinant," *Proc. Cambr. Phil. soc*. **12**, 65-77.
BAILLAUD, R.	1957	*Yvon-Villarceau, sa vie, son oeuvre.* Mémoires de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Besançon.
BALTZER, R.	1857	*Theorie und Anwendungen der Determinanten.* Leipzig.
	1861	*Théorie et applications des déterminants.* Trad. J. Hoüel. Paris
BANACH, S.	1932	*Théorie des opérateurs linéaires*, Varsovie.
BELHOSTE, B.	1985	*Cauchy, 1789-1857. Un mathématicien légitimiste au XIX*[e] *siècle*. Paris. Belin.
	1998	" Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques ", *Revue d'histoire des mathématiques*, **4**, 289-304.
BELL, E.T.	1930	"A type of commutative matrices," *Bull. Calcutta Math. soc*. **22**, 53-60.
	1938	"Fifty Years of Algebra in America, 1888-1938", *Semicenteniial Addresses of the American Mathematical Society*, 1-35. Re.impr. 1980, New York : Arno Press.
BENNETT, A.A.	1931	"Construction of a rational canonical form for a linear transformation", *Amer. Math. Monthly*, **38** , 377-383.
BERTIN, E.	1922	"Décès des membres et de correspondants - De M. *Camille Jordan*, membre de la section de géométrie", *Comptes Rendus,* **174**, 209.
BIERMANN, K.R.	1960	"Vorschläge zur Wahl von Mathematikern in der Berliner Akademie" in Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschften zu Berlin, Klasse für Mathematik, Physic und Technik, no.**3**, 29-34.
	1966	"Karl Weierstrass", *Jl für die reine u. angew/ Math.* **223**, 191-220.
	1966	*Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität,* Berlin.
BILLOUX, C.	1985	"La correspondance mathématique de C. Jordan dans les archives de l'Ecole Polytechnique". *Hist. Mat*. **12**, 80-88.
BIOT, J.B.	1826	*Essai de géométrie analytique appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre.* 7[e] ed. Paris.
BIRKHOFF, G. MAC LANE, S.	1941	*A survey of Modern Algebra*. New York.
BLICHFELDT, H.F.	1917	*Finite collineation groups with an introduction to the theory of operators and substitution groups*, The University of Chicago Press.

BLICHFELDT, H.F. DICKSON, L.E. MILLER, G.A.	1916	*Theory and applications of finite groups*, *Wiley&Sons, Chapman&Hall,* New York, Londres.
BÖCHER, M.	1894	*Ueber die reihentwickelungen der Potentialtheorie,* Leipzig.
	1907	*Introduction to higher algebra*. New York.
	1912.	"The published and unpublished work of Charles Sturm on algebraic and differential equations," *Bull. Am. Math. Soc.* **18**, 1-18.
BOLLING, R.	1997	"Karl Weierstrass (1815-1897) in memoriam", *Jl für Math.,* **483,** i-iii
BONIFACE, J. SCHAPPACHER, N.	2001	"Sur le concept de nombre en mathématiques - Cours inédit de Leopold Kronecker à Berlin (1891)", *Revue d'histoire des mathématiques* **7** , 207-275 .
BORCHARDT, C.	1846	"Neue Eigenschaft der Gleichung, mit deren Hülfe man die saecularen Storungen der Planeten bestimmt," *Jl. für Math.* (Crelle) **30**, 38-45. Version française *Jl. de math.*(Liouville) **12** (1847), 50-67.
BOREL, E. ET DRACH, J.	1895	*Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'algèbre supérieure d'après les conférences de J. Tannery*, Paris.
BORN, M. ET JORDAN, P.	1925	"Zur Quantenmechanik", *Zeitschr. fur Physik*, **34**, 858-888.
	1930	*Elementare Quantenmechanik,* Berlin.
BORN, M W HEISENBERG, P. JORDAN	1926	"Zur Quantenmechanik II", *Zeitschr fur physik* **35**, 577-615
BOURBAKI, N.	1960	*Eléments d'histoire des mathématiques,* Paris (Hermann).
BRET, J.	1812.	"Détermination de la longueur des axes principaux dans les surfaces du second ordre qui ont un centre," *Ann. de math.* (Gergonne) **2**, 33-37.
BRILL, J.	1895	"On the application of the theory of matrices to the discussion of linear differential equations with constant coefficients," *Proc. Cambr. Phil. Soc.* (3) **8**, 201-210.
	1896	"Note on matrices," *Proc. London. Math. Soc*. **27**, 35-38.
	1897	"Supplementary note on matrices," *Proc.. London Math. Soc*. **28**, 368-370.
BRILL A. NOETHER M.	1893	'Die Entwiklung der Theorie des algebraischen Functionen in alterer und neuerer Zeit', Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinung, **3**, 109-566.
BRILLOUIN, M.	1926	"Les spectres de rotation dans la nouvelle mécanique des quanta, avec le calcul des matrices," *C.R*. **182**, 374-376.
BRIOCHI, F.	1854	"Note sur un théorème relatif aux déterminants gauches." *Jl. de Math. pures et appl.* **19**, 253-256 = *Opere.* **5** (Milan, 1909), 91-169.
BROSKIJ, M.	1913	*Triangular and Jordan representations of linear operators*, Danskin, J. trad. du russe Providence. 1971.
BROMWICH, T.J.	1901a	"Canonical reduction of linear substitutions and bilinear forms with a dynamical application," *Proc. London Math. Soc.* **32**, 79-118, 321-352.
	1901b	"Note on Weierstrass's reduction of a family of bilinear forms," *Proc. London Math. Soc*. **32**, 158-163.

	1901c	"On a canonical reduction of a bilinear forms with special consideration of congruent reductions," *Proc London math. Soc*. **32**, 321-352.
	1901d	"Theorems on matrices and bilinear forms," *Proc. Cambr. Phil. Soc*. **11**, 75-89.
	1906	*Quadratic forms and their classification by means of invariant factors*, New York.
BROWN, E.T	1940	On the reduction of matrix to a canonical form. *Amer Math Monthly*, **47**, 437-450.
BRUNEL, G.	1888	"Sur les racines des matrices zéroïdales," *C.R.,* **106**, 467-470.
BUCHEIM, A.	1884	"Proof of Professor Sylvester's "Third law of motion*." Phil Mag*. (5) **18**, 459-460.
	1885a	"On the theory of matrices", *Proc. London Math. Soc*. **16**, 63-82.
	1885b	"A theorem on matrices," Mess. of Math. **14**, 167-168.
	1886	"An extension of a theorem of Professor Sylvester's relating to matrices," *Phil. mag.* (5) **22**, 173-174.
	1887a	"On double algebra," *Mess of Math*. **16**, 62-63.
	1887b	"Note on triple algebra," *Mess of Math.* **16**, 111-114.
	1901	"Review : "Theorie und Anwendung der Elementartheiler," by Dr. P. Muth". *Bull. Amer Math. Soc.* **7**, 308-316.
BURGESS, H.T.	1911	"The simultaneous reduction of a quadratic and a bilinear form by the same transformation on both *x's* ans *y's*," *Bull. Amer. Math. Soc*. **17**, 65-66.
	1916a	"A practical method of determining elementary divisors," *Annals of math.* **18**, 4-6.
	1916b	"On the matrix equation $BX = X$," *Amer. Math. Monthly* **, 23**, 152-155.
BURNSIDE, W.	1894	"On a Class of Groups defined by Congruences," *Proc. London Math*. **26**, 58-106.
	1897	*Theory of Groups of Finite Order*, Cambridge : University Press. Re. ed. 1911.
	1898	"On linear Homogeneous Group whose Operations are Permutable," *Proc. London Math Soc.,* **29**, 325-352.
	1899	"On the Reduction of Linear Substitution to its Canonical Form," *Proc. London math. soc.* **30**, 180-194.
	1902	"On the characteristic equations of certain linear substitutions," *Quart. Journ. Math*. **33**, 80-84.
CALINGER, R.	1996	"The mathematics seminar at the University of Berlin : origins, foundings and the Kummer-Weierstrass years", *Vita mathematica* (Washington, DC) 153-176.
CALO, B.	1895	"Dimonstrazione algebrica del teorema di Weierstrass sulle forme bilineari," *Annali di Math*. II **23**, 159-179.
CARTAN, E.	1893a	"Sur la structure des groupes simples finis et continus," *C.R.,* **116**, 784-786 = *Œuvres I,* 1 [1952], 99-101.
	1893b	"Sur la structure des groupes finis et continus," *C.R.,* **116**, 962-964 = *Œuvres I,* 1 [1952], 103-105.
	1893c	"Ueber die einfachen Transformationsgruppen," *Ber. Verh, k. sächs, Ges. Wiss. Leipzig,* **45**, 395-420 = *Œuvres I,* 1 [1952], 107-132 .
	1894	*Sur la structure des groupes simples finis et continus*, Thèse, Paris = *Œuvres I,* 1 [1952], 137-287.
	1895	"Sur certains groupes algébriques," *C.R. ,* **124**, 545-8.

1896 "Sur la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe de transformations fini et continu", *Amr. Jl. Math.* **18**, 1-61 = *Œuvres I,* 1 [1952], 293-353.

1897a "Sur les systèmes de nombres complexes," *C.R.,* **124**, 1217-20.

1897b "Sur les systèmes de nombres complexes," *C.R,* **124**, 1296-7.

1898 "Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes," *Ann. fac. Sc. Toulouse,* **12B**, 1-99.

1908 "Nombres complexes, exposé d'après l'article allemand de E. Study," *Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées,* Tome **1**, vol. **1**, 329-468. 7 tomes en 28 vols. Paris : Gauthier-Villars ; Leipzig : B.G. Teubner, 1904-16.

1914 "Les groupes réels simples finis et continus", *Ann. Ec. Norm. Sup. Paris,* **3**1, 263-366 = *Œuvres I,* 1 [1952], 399-461

1952 *Oeuvres complètes,* Partie I, Tome 1, Paris.

CARTAN, E. ET STUDY E. 1908 "Nombres complexes ordinaires," in *Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées,* Tome **1**, vol. **5**, 366-445. 7 tomes en 28 vols. Paris : Gauthier-Villars ; Leipzig : B ; g ; Teubner, 1904-16.

CARVALLO, E. 1891 "Sur les systèmes linéaires," *Monat. für Math.* II, **177**, 225-311.

CAUCHY, A.L 1815 "Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions…," *Jl. Ec. Poly.* t. **10**, cah. 17 = *Œuvres* (2)1 (Paris 1905), 91-169.

1821 *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique,* Paris = *Œuvres* (2)3 (Paris 1897)

1823. "Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques," *Bull. des sci. soc. philomat. de Paris* (3) **10** = *Œuvres* (2)2, 300-304.

1826a. "Application du calcul des résidus à l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants," *Exer. de math.,***1** = *Œuvres* (**2**)**6** (Paris 1887), 252-255.

1826b. *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie,* Paris = *Œuvres* (**2**)**5**.

1827a. "De la pression ou tension dans un corps solide," *Exer. de math.* **2** = *Œuvres* (**2**)**7**, 60-78.

1827b. "Sur la condensation et la dilatation des corps solides," *Exer. de math.* ***2*** = Œuvres (**2**)**7**, 82-93.

1828. "Sur les centres, les plans principaux et les axes principaux des surfaces du second degré," *Exer. de math.****3*** = *Œuvres* (**2**)**8**, 8-35.

1829. "Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes," *Exer. de math.* ***4*** = *Œuvres* (**2**)**9**, 174-195.

1830. "L'équation qui a pour racines les moments d'inertie principaux d'un corps solide, et sur diverses équations du même genre," *Mem. Acad. des Sci.* **9** = *Œuvres* (**1**)**2**, 79-81.

1839a "Méthode générale propre à fournir les équations de condition relatives aux limites des corps dans les problèmes de physique mathématique," *Comptes rendus* **8** = *Œuvres* (**1**)4 (Paris 1884), 193-227.

1839b "Mémoire sur l'intégration des équations linéaires," *Comptes rendus Acad. Sci. Paris* **30** = *Œuvres* (**1**)**11** (Paris 1899), 202-211.

1850 "Mémoire sur les perturbations produites dans les mouvements vibratoires d'un système de molécules par l'influence d'un autre système." *Comptes rendus Acad. Sci. Paris* **30** = *Œuvres* (**1**)**11** (Paris, 1899), 202-211.

CAVALLUCCI, L. 1937 "Il Riduzione di una matrice alla forma canonical nel suo campo di razionalita". Rend. Semin. mat. Univ. Padova., **16** , 92-109.

CAYLEY, A 1846 "Mémoire sur les les Hyperdéterminants (Traduction d'un Mémoire anglais inséré dans le 'Cambridge Mathematical Journal' Avec Quelques Additions de l'Auteur)", *Crelle* **30** (1846) : 1-37.

1855a "Sur la Transformation d'une Fonction quadratique en elle-même par des Substitutions linéaires." *Crelle* **50**, 288-99.

1855b "Remarque sur le Notation des Fonctions algébriques," *Crelle* **50**, 282-85.

1855c "Recherches sur les matrices dont les termes sont des fonctions linéaires d'une seule indéterminée," *Crelle*. **50**, 313-317.

1858 "A Memoir on the Theory of Matrices.' *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **148**, 17-37.

1866 "A supplementary memoir on the theory of matrices", *Philos. Trans. Roy. Soc. London,* **ClVI**, *25-35.*

1872 "On the extraction of the square root of a matrix of the third order," *Proc. Roy. Soc. Edinb.* **7**, 675-682.

1880a "On the matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ and in connection therewith the function $\frac{ax+b}{cx+d}$," *Mess. of Math.* **9,** 104-10.

1880b "On a theorem relating to the multiple theta-function", *Math. Annalen*. **XVII**, 115-122.

1883 "Presidential Address to the British Association: September 1883." In *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley,* **11**, 429-59. Edited by Arthur Cayley & A.R. Forsyth. 14 vols. Cambridge : University Press, 1889-98.

1885 On the matrical equation **qQ-Qq** = 0", *Messenger of Mathematics,* **XIV**. *176-178. Oeuvres* ***12***. *311-313.*

1889-98 *The collected Mathematical Papers of Arthur Cayley,* **14** Vol.Cambridge.

CHARLE, C. 1994 *La République des universitaires 1870-1940*, Paris, Le Seuil.

CHARVE, L. 1881 "De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives,'" *Comptes Rendus*, **92**, 782-783.

CHATELET, A. 1910a "Sur le classement d'un système de tableaux équivalents entre eux," *C.R.* **150**, 1502-1505.

1910b "Sur quelques applications du calcul des Tableaux à la théorie des ordres d'entiers algébriques," *C.R***. 151**, 925-927.

1911 "Sur certains ensembles de tableaux et leur application à la théorie des nombres," *Ann. Ec. Norm*. **XXVIII**, 105-202.

1912 "Sur une représentation des idéaux," *C.R*., **154,** 502-504.

1913a "Sur la multiplication complexe," *C.R.* **157**, 1386-1389.

1913b *Leçons de théorie des nombres*. Gauthier Villars, Paris.

1922 "Groupes abéliens finis," *C.R.* **175**, 85-87.

1923 "Propriétés des groupes abéliens finis," *C.R.* **177**, 729-731.

1924 *Calcul vectoriel, théorie, applications géométriques cinématiques, destiné aux élèves de mathématiques spéciales*

		et aux étudiants en sciences mathématiques et physiques, Paris, Gauthier-Villars,
	1925	*Les groupes abéliens finis et les modules de points entiers.* Paris, Gauthier-Villars.
CHERN, S., C. CHEVALLEY	1952	"Elie Cartan and His Mathematical Work", *Bull. Amer. Math. soc,* **58**, 217-250.
CHRISTOFFEL, E.B.	1864a .	" Verallgemeinerung einiger Theoreme des Herrn Weierstrass," *Jl für Math.* **63**, 255-272 = *Abhandlungen* **1** (Leipzig & Berlin, 1910), 146-161,
	1864b	"Ueber die kleinen Schwingungen eines periodisch eingerichteten Systems materieller Punkte," *Crelle.* **63**, 255-272 = *Abhandlungen* **1** (Leipzig & Berlin, 1910), 146-161.
	1866	"Theorie der Bilinearen Formen,", *Crelle*, **68**, 253-272.
CLEBSCH, A.	1860	"Theorie der circularplarissirenden Medien," *Crelle.* **57**, 319-358.
	1863	"Ueber eine Classe von Gleichungen, welche nur reelle Wurzeln besitzen," *Crelle,* **62**, 232-245.
	1876	*Vorlesungen über Geometrie, von Alfred Clebsch. Bearbeitet und herausgegeben von dr. Ferdinand Lindemann, mit einem vorworte von Felix Klein,* B.G. Teubner, Leipzig.
CLEBSCH, A. GORDAN, P.	1869	"Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln," *Math. Ann*. **1**, 359-400 .
COLE, N.	1892	"On a certain simple group," 40-43, Congress Papers.
COMTE, C.& BARROSO-FILHO W.	1988	"La formalisation de la dynamique par Lagrange : L'introduction du Calcul des Variations et l'Unification à partir du Principe de moindre Action." in *Sciences à l'Epoque de la Révolution* éd. par R. Rashed. Lib. Blanchard.
COOKE, R.	1994	"Abelian Integrals" *in Companion Encyclopedia of the history and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Grattan-Guinness, I. (ed). 2 vol. Londres / New York, Routledge.
CORRY, L.	1996	*Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, (Science Networks Vol. 17), Basel and Boston, Birkhäuser Verlag (1996).
CRAMLET, C.M.	1938	"On the reduction of a representation to a classical canonical form." *Amer. math. monthly*, **45**, 178-180.
CREMONA, L.	1862	*Introduzione a una Teoria Geometrica delle Curve piane*. Bologne.
	1870	*Grundzüge einer Allgemeinen Theorie der Oberflächen in Synthetischer Behandlung.* Berlin. Trad. Curtze, M.
CRILLY, T.	1978	"Cayley's anticipation of a generalised Cayley-Hamilton theorem", *Historia Mathematica, **5,** 211-219.*
	1986	*The rise of Cayley's invariant theory* ", *Historia Mathematica,* **13,** *241-255.*
	1988	"The Declin of Cayley's invariant theory", *Historia Mathematica,* **15,** *33-348.*
	1999	"Arthur Cayley as Sadleirian Professor: A Glimpse of Mathematics Teaching at 19th-Century Cambridge", *Historia Mathematica,* **26**, **2**, 125-160.
	2004	"The Cambridge Mathematical Journal and its descendants: the linchpin of a research community in the early and mid-Victorian Age",*Historia Mathematica, **31,** 455-497.*
CULLIS, C.E.	1913	*Matrices and determinoids, vol 1.* Cambridge.
	1918	*Matrices and determinoids, vol 2.* Cambridge.
CURTIS, C W	1999	*Pioneers of representation theory : Frobenius, Burnside, Schur,*

and Brauer. Providence, Rhode Island.

D'ALEMBERT, J. 1743. *Traité de dynamique.* Paris

1750. "Suites des recherches sur le calcul intégral," *Histoire de l'Académie des Sciences,* Berlin 1748, 249-291.

1758 *Traité de dynamique.* 2de ed. Paris

DAHAN DALMEDICO. A. 1979 *Les recherches algébriques de Cauchy. Genèse du concept de groupe.* Thèse de 3e cycle. Université de Paris XIII.

1984-85 "La mathématisation des théories de l'élasticité par A.-L. Cauchy et les débats dans la physique mathématique française (1800-1840), *Sciences et techniques en perspective,* **IX**, 1-100.

1992a *Mathématisations. Augustin-Louis Cauchy et l'Ecole Française.* E.d.C., Blanchard.

1992b "L'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants dans les travaux de Cauchy (1821-1830)," *Rev. d'hist. des Sciences.* t.**XIV-1**. Paris.

DARBOUX, G. 1874 "Mémoire sur la théorie algébrique des formes quadratiques", *Journal de Liouville*, t. **XIX**, p.347

1880 "Sur les systèmes d équations linéaires a une seule variable indépendante, " *C.R.* **90**, 524 et 596.

1882 *Sur le problème de Pfaff*, Paris. Gauthier-Villars.

1913 "Eloge historique d'Henri Poincaré," lu dans la séance publique annuelle du 15 décembre 1913, Œuvres **II**, **VII**

DASTON, L. OTT, M. 1991 "Style in Science". N. spécial de *Science in Context*, vol **4** n2

DELAMBRE, 1812 "Notice sur la vie et les ouvrages de M. Le Comte J.-L. Lagrange," *Mémoires de la classe scientifique de l'Institut.* IIe part. 28-80 (*Œuvres de Lagrange,* I, ix-Li).

DEDEKIND, R., 1871 "Sur la théorie des nombres algébriques," in G. Lejeune Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie* (2e ed.) Brunswick, 423-97.

1885 "Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen," *Göttingen Nachr.,* 141-59.

1887 "Erläuterung zur Theorie der sogenannten allgemeinen complexen Grössen," *Göttingen Nachr.,* 1-7.

1894 "Sur la théorie des nombres algébriques," in G. Lejeune Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie* (4e ed.) Brunswick, 423-97.

1930-32 *Gesammelte mathematische Werke.* ED. R. Fricke, E. Noether. 3 vols. Braunschweig ; F. Vieweg und Sohn, Reed., Bronx, N.Y. : Chelsea Publishing Co., 1969.

DE SEGUIER, J.A. 1902 "Sur la forme canonique des substitutions linéaires," *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **30,** 247-252.

1904 *Eléments de groupes abstraits.* Paris.

1907a "Sur la théorie des matrices," *Comptes rendus*, **145**, 1259.

1907b "Sur les représentations linéaires homogènes des groupes finis," *Comptes Rendus*, **145**, 303-305.

1908a "Sur la théorie des matrices *," Bulletin de la Société Mathématique de France*, **36,** 20-40.

1908b "Sur les formes bilinéaires," *Comptes Rendus*, **146,** 1247-1248.

1909 "Sur les formes bilinéaires et quadratiques," *Journ .de math.* (6), **5**, 1-63.

1925 "Sur les diviseurs des produits directs abéliens finis," *C.R.* **181**, 901-902.

DEMIDOV, S.S.	1982	"Création et développement de la théorie des équations différentielles chez d'Alembert," Hist.Math. **35**.
DHOMBRES, J.	1986	"Mathématisation et Communauté scientifique française (1775-1825)" *Archives internationales d'Histoire des Sciences*. **36**, 249-293.
	1994	"Le journal professionnel au XIX^{e} siècle : enjeux généraux d'une enquête en cours", *Rivista di Storia della Scienza*, II, 2, 2, , 99-136.
	2002	"Réflexions intempestives sur l'enseignement et l'histoire : la composition des fonctions", in *Histoire de l'enseignement des mathématiques, Bulletin de l'APMEP*, **439**, mars-avril 2002, pp. 200-222.
	2004	"Vicissitudes in Internationalisation : International Networks in Mathematics up until the 1920s" *Transational Intellectual Networks, Forms of Academic Knowledge and the Search for Cultural Identities*, C. Charle, J. Schriewer, P. Wagner (eds). Campus Verlag, Frankfurt/New York. 81-114.
DHOMBRES, J. ET N.	1989	*Naissance d'un pouvoir : sciences et savants en France (1793-1824)*. Paris. Payot.
DHOMBRES, J (sous la direction de)	1992.	*L'école normale de l'an III. Leçons de mathématiques. Laplace-Lagrange-Monge.* Dunod. Paris.
DICKSON, L.E.	1897	"The Analytic Representation of Substitutions on a Power of a Prime Number of Letters with a Discussion of the Linear Group," *Annals of Mathematics*, **11**, 65-120, 161-183.
	1898	"Systems of simple groups derived from the orthogonal group," *Bull. Amer. Math Soc.* **4**, 382–89.
	1899a	"Sur plusieurs groupes linéaires isomorphes au groupe simple d'ordre 25920," *Cpt. Rend. Acad. Sci. Paris*, **128**, 873-875.
	1899b	"The Structure of the Linear Homogeneous Groups Defined by the Invariant... ," *Math. Ann.* **52,** 561-582.
	1900a	"Canonical Form of a linear Homogeneous Substitution in a Galois Field," *Amer. J. Math.* **22**, 121-137.
	1900b	"Linear Substitutions Commutative with a given Substitution," *Proc. London. math. soc.* 165-170.
	1900c	"The known systems of simple groups and their inter-isomorphisms," *Congrès international des mathématiciens,* 125-126
	1901a	*Linear groups wit an exposition of the Galois field theory*, Teubner, Leipzig, Re. ed. New York : Dover 1958.
	1901b	"Canonical forms of quaternary abelian substitutions in an arbitrary Galois field," Trans*. Amer. Soc.* **3**, 103-138.
	1902a	'"Canonical Form of a Linear Homogeneous Transformation in an Arbitrary Realm of Rationality, *Amer. J. Math.* **24**, 101-108.
	1902b	"The hyperorthogonal groups" *Math. Ann.* **55**, 521-573.
	1905	"A new System of simple groups", *Math. Ann.* **60**, 137-151.
	1907	"On commutative linear groups," *Quart. Journ. math*. **40**, 167-196.
	1909	"Equivalence of pairs of bilinear or quadratic forms under rational transformations," *Trans. Amer. Math. Soc.* **10**, 347-360.
	1919-1923	*History of the Theory of Numbers,* Carnegie Institution of Washington, Washington, DC ; Reimpr.: Chelsea, New york, 1952.

	1923	*Algebras and Their Arithmetics*, Chicago : University of Chicago Press.
	1924	"A new theory of linear transformations and pairs of bilinear forms," *Proceedings of the international mathematical congress.* Toronto, 361-363.
	1926	*Modern algebraic theories*. Sanborn, Chicago.
DIEUDONNE, J	1946	"Sur la réduction canonique des couples de matrices", *Bull. S.M.F.,* 130-146.
	1962	"Notes sur les travaux de Camille Jordan relatifs à l'algèbre linéaire et multilinéaire et la théorie des nombres," *Œuvres de C. Jordan*, **3** Paris, V-XX.
	1970	"Camille Jordan", *in* Gillispie, C. C., ed. *Dictionary of Scientific Biography* . 18 vols. New York: Scribner
	1978	*Abrégé d'histoire des mathématiques.* Hermann, Paris.
DIRAC, P.A.M.	1930	*Quantum Mechanics.* Oxford.
DIRICHLET, P.G.L.	1842	"Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes," *Jl. für Math.* **54** = *Werke* **1** (Berlin, 1889), 533-618.
	1846	"Ueber die Stabilität des Gleichgewichts," *Jl. für reine u. angew. Math.* **32** = *Werke* 2 (Berlin, 1897), 3-8.
DIXON, J.D.	1971	*The structure of linear groups.* Von Nostrand Reinhold.
DIXON, J.D. MORTIMER, B.	1996	*Permutation groups*. Springer.
DOGSON, C.L.	1867	*Elementary Treatise on Determinants*, London.
DORIER, J.L.	1992	"Emergence du concept de rang dans l'étude des systèmes d'équations linéaires ; " *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques,* 2ième série, vol.**3**, 159-190, Paris : Institut H. Poincaré.
	1995	"A general outline of the Genesis of Vector Space Theory," *Historia Mathematica*, **22**, 227-261.
	1996	"Basis and Dimension : from Grassmann to van der Waerden, in *Hermann Grassmann : Neohumanist Scholar and Visionary Innovator in Mathematics and Physics,* Boston Studies in the Philosophy of Science, Dordrecht : Kluwer Academic.
DRACH, J. ET MEYER, W.F.	1907	"Théorie algébrique des formes bilinéaires", *Encyclopédie des sciences mathématiques*, 426-487.
DUGAC, P.	1973.	"Eléments d'analyse de Karl Weierstrass," *Arch. Hist. Ex. Sci.* **10**, 41-176.
DUVINA, S.	1994	"Mathématiques pures et appliquées sous la férule de J. Liouville (1836-1874)," *Sciences et techniques en perspective,* **28**, 177-217.
ENGEL, F.	1886	"Der Zusammensetzung der endlichen continuirlichen transformationsgruppen," *Ber. k. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig,* 83-94.
	1887	"Kleine Beiträge zur Gruppentheorie," *Ber. k. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig,* 89-99.
	1899	"Sophus Lie." *Leipziger Berichte,* **51**, xi-lxi.
	1930	"Wilhelm Killing," *Jahresberichte der Deutschen-Mathematiker-Vereinung ,* **39**, 140-54.
	1931	"Eduard Study," *Jahresberichte der Deutschen-Mathematiker-Vereinung ,* **40**, 133-56.
EULER, L.	1765a .	"Recherches sur la connaissance mécanique des corps," *Mémoire de l'académie des sciences de Berlin,* 1758 = *Opera omnia* (2)**8**

(Zurich, 1964), 178-199.

1765b. "Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable," *Mémoire de l'académie des sciences de Berlin,* 1758 = *Opera omnia* (2)**8** (Zurich, 1964), 200-235.

FENSTER, D.D. 1997 "Mentoring in Mathematics : The Case of Leonard Eugene Dickson, *Historia Mathematica* **24** (1997), 7-24.

1998 "Leonard Eugene Dickson and His Work in the Arithmetics of Algebras," *Archive for History of Exact Sciences* **52**, 119-159.

FENSTER, D.D. PARSHALL, K.H. 1994 "A Profile of the American Mathematical Research Community : 1891-1906," in *The History of Modern Mathematics*, ed. Eberhardt Knoblch and David. E. Rowe, vol. 3. Boston : Academic Press, 179-227.

FLECK, L. 1979 *Genesis and Development of a Scientific Fact*, Chicago, The University of Chicago Press. (1re ed. 1935).

FORSYTH, A.R. 1884 "Proof of a theorem by Cayley in regard to matrices," *Mess. of Math*. **13**, 139-142.

1895 "Arthur Cayley." *Proceeding of the Royal Society of London* **58**, i-xliii.

FOUCAULT, M. 1969 *L'archéologie du savoir.* Gallimard. Paris.

FOURIER, J 1822 *La théorie analytique de la chaleur.* Paris.

FRASER, C. 1983 "J.L. Lagrange's Early Contributions to the Principles and Methods of Mechanics" *Arch. for Hist. of Ex. Sci., **2** n°3.*

1985 "J.L. Lagrange's Changing Approach to the Foundations of the Calculus of Variations" *Arch. for Hist. of Ex. Sci., **32** n°2.*

FREUDENTHAL, H. 1971 "Cauchy", in *in* Gillispie, C. C., ed. *Dictionary of Scientific Biography*. 18 vols. New York: Scribner.

FROBENIUS, G. 1875 "Uber das Pfaffsche Problem," *Crelle. **82***. 230-315.

1878 "Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen,'" *Crelle*, **84**, 343-405.

1879 "Theorie der linearen Formen mit ganzen coefficienten," *Crelle* **86**, 482-544.

1880a "Theorie der linearen Formen mit ganzen coefficienten (Forts)," *Crelle*, **88**, 591-611.

1880b "Sur Theorie der Transformation der Thetafunctionen," *Crelle,* **89** ; 40-46.

1883 "Ueber die principale Transformation der Thetafuncitonen mehrerer Variabeln," *Crelle.* **95**, 97-129.

1891 "Ueber Potentialfunctionen, deren Hessesche Determinante verschwindet," *Nach. Kön. Ges. Wiss. Göttingen*, **10**, 323-338.

1893 "Ueber die in der Theorie der Falachen auftretenden Differentialparameter," *Crelle*, **110**, 1-36.

1894 "Ueber die Elemtartheiler der Determinanten," *Sitz. Kon. Preuß. Ak. Wiss. Berlin*., 577-590.

1896a "Ueber vertauschbare Matrizen," *S'ber. Akad. d. Wiss. Berlin,* 601-14.

1896b "Zur Theorie der Scharen bilinearer Formen," *Vierteljahrsschrift der Naturfoschenden Gesellschat in Zurich,* **41**, 20-23.

1896c "Ueber die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen," *S'ber Akad. Wiss. Berlin.* 695-704.

1896d "Ueber Gruppencharaktere," *S'ber. Akad. d. Wiss. Berlin,* 985-1021.

1896e "Ueber die Primfactoren der Gruppendeterminante," *S'ber. Akad.*

d. Wiss. Berlin, 1342-82.
1897 "Ueber die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen,' *S'ber. Akad. d. Wiss. Berlin,* 994-1015.
1903a "Ueber die characteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe," *S'ber. Akad. d. Wiss. Berlin,* 328-58.
1903b "Ueber die Primfactoren der Gruppendeterminante II," *S'ber. Akad. d. Wiss. Berlin,* 401-9.
1903c "Theorie der hypercomplexen Grössen," *S'ber. Akad. d. Wiss. Berlin,* 504-37.
1903d "Theorie der hypercomplexen Grössen II," *S'ber. Akad. d. Wiss. Berlin,* 634-45.
1910 "Ueber die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen," *S'ber. Akad. d. Wiss. Berlin,* 3-15.
1911 "Ueber den rang einer Matrix," *S'ber. Akad. d. Wiss. Berlin,* 20-29, 128-129.
1968 *Gesammelte Abhandlungen*, Ed. J.P. Serre. 3 vols. Springer Verlag, Berlin.

FRUTON, J. 1990 *Contrast in Scientific Style : Research Groups in the Chemical and Biochemical Sciences*, Philadelphia, American Philosophical Society

FUCHS, L., 1866 "Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficiten," *Jl. für reine u. angew. Math.* **66** = *Werke* 1 (Berlin, 1904), 159-202.
1896a "Ueber eine Classe linearer homogener Differentialgleichungen," *S'ber. Akad. d. Wiss. Berlin,* 753-69.
1896b "Remarques sur une Note de M. Alfred Loewy intitulée : 'sur les formes quadratiques définies à indéterminées conjuguées de M.Hermite', *C.R. ac. d. Sc. Paris,* **123**, 289-90.

GALOIS, E. 1846. "Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois," *Jl de math. pures et appl.* **11**, 381-444

GANTMACHER, F. R. 1935 "The geometric theory of elementary divisors according to Krull," Trans. Univ. Odessa. Math. **1**, 89-108.
1959 *The theory of matrices.* 2 Vol. Chelsea, 1959. Trad. Française Ch. Sarthou, 1966.

GAYON, J. 1998 "De l'usage de la notion de style en histoire des sciences, in *La rhétorique. Enjeux d'une résurgence,* J. Gayon, J.C. Gens et J. Poirier (eds), Bruxelles, Ousia, 1998, 162-181.

GAUSS, C. F. 1805 *Disquitiones arithmeticae,* trad. allemande H. Haser, 1889, Chelsea.
1832 "Theoria residuorum biquadraticorum commentation secunda," *Comm. soc. sci. Gottingenesis,* **7** = *Werke* 2 (Göttingen, 1863), 93-149.

GILAIN, C. 1981 *Introduction au cours inédit de A-L. Cauchy Equations Différentielles ordinaires*. éd Etudes Vivants. Coll. Academic Press. Paris.
1983 "La théorie des équations différentielles au début du XIXe siècle". *Sciences et techniques en perspective*, **4**, 13-20.
1991a "La théorie qualitative de Poincaré et le problème de l'intégration des équations différentielles". *La France mathématique : La Société mathématique de France, 1872-1914*, éd. H. Gispert. Paris : SFHST-SMF, 1991, 215-242.
1991b "Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre : théorie des équations et calcul intégral", *Archive for History of Exact*

Sciences, **42**, 91-136.

1994 "Ordinary differential equations", *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, éd. I. Grattan-Guinness. Londres/New York : Routledge, vol. **1**, 440-451.

2002 "d'Alembert et l'intégration des expressions différentielles à une variable", *Analyse et dynamique. Etudes sur l'œuvre de d'Alembert*, éd. A. Michel et M. Paty. Québec : Presses de l'Université Laval, 207-235.

GISPERT-CHAMBAZ, H 1982 *Camille Jordan et les fondements de l'analyse : Comparaison de la 1ère édition (1882-1887) et de la 2ème (1893) de son cours d'analyse de l'école Polytechnique,* Orsay.

1983 "Sur les fondements de l'analyse en France," *Archive for History of Exact Sciences,* **28**, 37-83.

1991 *La France mathématique. La société mathématique deFrance (1870-1914).* Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences. N **34**.

GISPERT, H. TOBIES, R. 1996 "A comparative study on the French and German Mathematical Societies before 1914" *in L'europe mathématique*. C Goldstein. J. Gray, J. Ritter. Editions de la Maison des sciences de l'homme. Paris. 391-433.

GOLDSTEIN, C. 1987 "L'un est l'autre: pour une histoire du cercle", in *Éléments d'Histoire des Sciences*, sous la dir. de M. Serres, Bordas, Paris, 129-149.

1994 "La théorie des nombres dans les *Notes aux comptes rendus de l'Académie des sciences* (1870-1914) : un premier examen", *Rivista di Storia della scienza*, II, 2, 2, 137-160.

1995 *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Saint-Denis : PUV (Histoires de science).

1996 "A la recherche des origines : contenus, sources, communautés et histoire" *in L'europe mathématiques*. C Goldstein. J. Gray, J. Ritter. Editions de la Maison des sciences de l'homme. Paris. 15-33.

1997 "Sur quelques pratiques de l'information mathématique," *Solaris,* **4**, 12210.

1999 Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870-1914), *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum*, New series **3**, **28**, 187—214.

GOLDSTEIN, C., GRAY J. ET RITTER, J. (dir.) 1996 *L'Europe mathématique : Mythes, histoires, identités -- Mathematical Europe: Myth, History, Identity.* - Paris : Editions de la Maison des sciences de l'homme.

GORDAN, P. 1877 "Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen," *Math. Ann*. t. **XII**, 23-46

GRASSMAN, H. 1862 *Ausdehnungslehre,* Berlin.

GRATTAN-GUINNESS, I. 1981 "Mathematical Physics in France 1800-1840 ; Knowledge, Activity, and Historiography" in *Mathematical Perspectives.* Academic Press, Inc.

1986 "How it means: mathematical theories in physical theories. With examples from French mathematical physics of the early 19th century" Estratto dal Vol. **103**, *Memorie di Scienze Fisiche e Naturali,* serie **V**, vol. **IX**, partie II.

1994 Special functions" *in Companion Encyclopedia of the history and*

		Phylosophy of the Mathematical Sciences, Grattant-Guinness, I. (ed). 2 vol. Londres / New York, Routledge.
GRATTAN-GUINNESS, I ET LEDERMANN, W.	1994	"Matrix theory", in I. Grattan-Guinness, *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of Mathematical Sciences*. London, 775-786.
GRAY, J.	1980	"The History of the Concept of a Finite Dimensional Vector Space," Historia Mathematica **7**, 65-70.
	1981	"Les trois suppléments au Mémoire de Poincaré écrit en 1880 sur les fonctions fuchsiennes et les équations différentielles. *C.R.*, **293**, Vie Académique, 87-90.
	1982	"The three supplements to Poincaré's prize essay of 1880 on Fuchsian functions and differential equations," *Arch. Int. Hist. Sci*., **32**, 109, 221-235.
	1984	"Fuchs and the theory of differential equations," *Bull. A.M.S.,* **10**.1, 1-26.
	1992	"The nineteenth century Revolution in Mathematical Ontlology" , *in* D. Gillies (ed.), *Revolutions in Mathematics.* London, Clarendon Press : 226-248
	1996	*Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré.* Birkhauser, Boston.
	2000	*Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré*", 2de ed. Birkhäuser, Boston.
GUGGENHEIMER, H	1977	"The Jordan curve Theorem and an Unpublished Manuscript by Max Dehn," *Archive for History of Exact Sciences,* **17**, 193-200.
HACHETTE, J.N.P. ET S.D. POISSON	1802	"Addition au mémoire précédent," *Jl. Ec. Poly.* t.**4**. cah. **11**, 170-172.
HACHETTE, J.N.P.	1813	*Traité des surfaces du second degré.* Paris.
HAMBURGER, M.	1873	"Bemerkung über die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen mit veränderlicher Coefficienten," *Jl. für Math.* **76**, 113-125.
HAMILTON, W.R.	1848	"Researches Respecting Quaternions. First Series," *Trans. R. Irish Acad.,* **21**, 199-296.
	1853	*Lectures on quaternions,* Dublin.
	1866	*Elements of quaternsions*. London.
HANKEL, H.	1867	*Theorie der complexen Zahlensysteme*
HARDY, A.S.	1887	*Elements of Quaternions.* Boston.
HARDY, H.	1923	"Camille Jordan," *Proc. London Math, Soc.* **21**, 43-45.
HAUBRICH, R.	1998	"Frobenius, Schur, and the Berlin algebraic tradition"*, in Mathematics in Berlin* . Berlin. 83-96.
HAWKINS, T.	1971	"The Origins of the Theory of Groups Characters", *Arch. His. Ex. Sci.,* **7**, No. 2, 142-70.
	1972	"Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory", *Arch. History for Exact Sci.* **8***, 243-287.*
	1974	"New light on Frobenius' creation of group characters," *Arch. History Exact Sci.* **12***, 217-243.*
	1975	"Cauchy and the spectral Theory of Matrices." *Historia Math.* **2**, 1-20.
	1975b	"The theory of Matrices in the 19th Century." In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians : Vancouver, 1974,* **2** ; 561-70, n.p. : Canadian Mathematical Congress.

	1977a	"Another Look at Cayley and the Theory of Matrices", *Arch. int. hist. sci.*, **26**, 87-112.
	1977b	"Weierstrass and the Theory of Matrices", *Archive for History of Exact Science,* **17**, 119-163.
	1980	"Non Euclidean Geometry and Weierstrassian Mathematics : The Background to Killing's Work on Lie Algebras", *Historia Mathematica,* **7**, 289-342.
	1982	"Wilhelm Killing and the Structure of Lie Algebras", *Archive for History of Exact Science* **26**, 127-191.
	1996	"From general relativity to group representations. The background to Weyl's Papers of 1925-26," *SMF congrès de Nice.* 69-99.
	2000	*Emergence of the theory of Lie groups an essay in the history of mathematics, 1869-1926,* New York NY ; Berlin ; Barcelone. Springer.
HAWKS, H.B.	1905	"On quaternions Number Systems", *Math. An.* **60,** 437.
	1910	"The reduction of families of bilinear forms," *Amer. Jour. Math.* **32**, 101-114.
HEFFTER, L.	1886-87	*Theorie der bilinearen und quadratischen Formen von Prof. Weierstrass, ausgearbeitet von Dr. L. Heffter,* Manuscrit non publié, Institut Mittag-Leffler, Djursholm, Suède
HENSEL, K.	1894	"Ueber die Elementartheiler componirter Systeme," *Jl. f. Math.,* **114**, 109-115.
	1895	"Ueber einen neuen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variabeln," *Jl. f. Math.,* **115**, 254-294.
	1897a	"Ueber die Darstellung der Integrale erster Gattung durch ein Fundamentalsystem," *Jl. f. Math.,* **117**, 29-41.
	1897b	"Ueber die Elementartheiler zweier Gattungen, von denen die eine unter der anderen enthalten ist," *Jl. f. Math.,* **117**, 346-355.
	1904	"Theorie der Körper von Matrizen", *Jl. f. Math.,* **127**, 116-166.
HENSEL, K. LANDSBERG, G.	1902	*Theorie der Algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf Algebraische Kurven und Abelsche Integrale.* Teubner. Leipzig.
HERMITE, C.	1850	"Extraits de lettres à M. Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres," *Crelle* **40**, 312. Oeuvres 1, 160.
	1853a	"Sur la théorie des formes quadratiques", *Crelle* **47**, Œuvres I, 234-263.
	1853b	"Sur la décomposition d'un nombre en quatre carrés," *Comptes Rendus,* **37** = *Œuvres,* 1 (Paris, 1905), 200-233.
	1854a	"Sur la théorie des formes quadratiques. Premier mémoire." *Jl. für Math.* **47** = *Œuvres,* 1 (Paris, 1905), 200-233.
	1854b	"Sur la théorie des formes quadratiques. Second mémoire." *Jl. für Math.* **47** = *Œuvres,* 1 (Paris, 1905), 234-263.
	1854c	"Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées," *Crelle.* **52** = Œuvres 350-396.
	1855a	"Remarque sur un théorème de M. Cauchy," *Comptes rendus,* **4**1 = *Œuvres*, 1 (Paris 1905), 479-481.
	1855b	"Sur la théorie des transformations des fonctions abéliennes," *C.R.* **40**. 249-369, 427-489, 536-541, 704-707, 784-787.
	1857	Sur l'invariabilité du nombre des carrés positifs et des carrés négatifs dans la transformation des polynômes homogènes du second degré", *Crelle.* **53**, 271-274. Œuvres I. 429-433

	1864	"Sur les théorèmes de M. Kronecker relatifs aux fores quadratiques", *C.R.* **19**. Œuvres, 9, 145-159.
	1892a	"Note sur M. Kronecker," *C.R.,* **114**, 19-21, Œuvres IV, 340-342.
	1892b	"Discours prononcé par Hermite à son jubilé," *Œuvres IV*, 582-585.
HESSE, O. GUNDELFINGER, S.	1876	*Vorlesung über analytische geometrie des Raumes. Uber oberfalchen zweier ordnung.* 3ed. Gundelfinger. Leipzig : Teubner.
HILBERT	1899	*Grundlagen der Geometrie*. Teubner, Leipzig.
HILTON, H.H.	1908	*An introduction to the theory of groups of finite orders.* Oxford.
	1909	"On the canonical form of a linear substitution," *Mess. of Math.* **39**, 24-26.
	1912	"Substitutions permutable with a canonical substitution*," Mess. of Math.* **41**. 110-118.
	1914	*Homogeneous linear Substitutions*, Oxford.
HIRANO, Y.	1983	"Note sur la seconde thèse de C. Jordan," *H.M*. **36,** 173-174.
HÖLDER, O.,	1886	"Bemerkungen zu der Mitteilung des Herrn Weierstrass : 'Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen," *Göttingen Nachr.,* 241-4.
HORN, J.	1888	"Ueber ein System linearer partieller Differentialgleichungen," *Acta Math.* **133.**
HOUZEL, C.	1978	"Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes" *in Abrégé d'histoire des mathématiques*. Dieudonné, J. Hermann. Paris. 293-315.
INGRAHAM, M.H.	1933	"On the reduction of a matrix to its rational canonical form". Bull. *Amer. Math..Soc*. **39**, 379-382.
INGRAHAM, M.H. ET M.C. WOLF.	1937	"Relative linear sets and similarity of matrices whose elements belong to a division algebra," *Trans. Amer. Math soc*., **42**, 16-31.
ITARD, J.	1973	"Lagrange, Joseph-Louis," *Dictionary of scientific Biography,* **VII**, 559-573. New York.
JACOBI, C.G.J	1827a	"Uber die Hauptaxen der Flächen der zweiten Ordnung," *Jl. für Math.* **2** = *Werke* **3**, 45-53.
	1827b	"De singulari quadam duplicis integrali transformatione," *Jl. für Math.* (Crelle) **2** = *Werke* **3**, 55-66.
	1827c	"Uber die Pfaffsche Methode, eine gewhöliche lineare Differentialgleichung zwischen *2n* Variabeln durch ein System von *n* Gleichungen zu integriren," *Jl. für Math.* (Crelle) **2** = *Werke* **4**, 17-29.
	1831	"De transformatione integralis duplicis indefiniti," *Jl. für Math.,* **8** = *Werke* 3, 91-158.
	1832	"De transformatione et determinatione integralium duplicium commentatio tertia" *Jl. für Math.,* **10** = *Werke* **3**, 159-189.
	1834a	"De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares ...," *Jl. für Math.,* 12 = *Werke* **3**, 191-268.
	1834b	"De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianaram innititur," *Journal für Maht*. Bd. **XIII**, 55. Ges. Werke. Bd **II**, 23-50.
	1841	"De formatione et proprietatibus determinantum," *Jl. für Math.,* **22** = *Werke* **3**, 255-392.
JACOBSON, N.	1940	Notes on modern higher algebra. Univ. of North Carolina.
JENNINGS, A.	1977	"Matrices, ancient and modern," *Bull. Inst. Math. Appl.* **13** (5), 114-123.

JORDAN, A.	1983	*Une lignée de Huguenots Dauphinois et ses avatars. Les Jordan de Lesche en Diois du XVI*[e] *au XX*[e] *siècle. Etude généalogie et historique.* Soprep 1983.
JORDAN, C.	1867	"Mémoire sur la résolution algébrique des équations, " *Jl de math pure et appliquées*, **12**. (**2**), 109-157
	1867b	"Lettre à M. Liouville sur la résolution algébrique des équations," *J. de Math,* t **XII**.
	1868	"Sur la résolution algébrique des équations primitives de degré p^2" *Jl de math pure et appliquée* (2), **13**, 111-135.
	1870	*Traité des substitutions et des équations algébriques.* Paris.
	1871	"Sur la résolution des équations différentielles linéaires", *Comptes rendus Acad, Sci, Paris,* **73**, 787-791.Oeuvres **IV**, 313-318
	1872	'Sur les oscillations infiniment petites des systèmes matériels", *Comptes Rendus,* **74**, 1395-1399. Oeuvres **IV**, 318-323.
	1873	"Sur les polynômes bilinéaires, " *Comptes rendus Acad, Sci, Paris,* **74**, 1395-1399. Oeuvres **IV**, 318-323.
	1874a	"Mémoire sur les formes bilinéaires," *Jl. de math. pures et appl.* (**2**) **19**, 35-54.
	1874b	"Sur la réduction des formes bilinéaires," *Comptes rendus Acad, Sci, Paris,* **78**, 614-617.
	1874c	"Sur une application de la théorie des substitutions aux équations différentielles linéaires" *Comptes Rendus,* **78**, 614-617.
	1874d	"Mémoire sur une application de la théorie des substitutions à l'étude des équations différentielles linéaires," *Bull. Soc. Math France,* **2**, 1000-1027.
	1874e .	"Mémoire sur la réduction et la transformation des systèmes quadratiques," *Jl. de math. pures et appl.* (**2**) **19**, 397-422.
	1874f	"Sur les systèmes de formes quadratiques," *Comptes rendus Acad. Sci. Paris,* **78**, 1763-1767.
	1876a	"Sur les équations linéaires du second ordre dont les intégrales sont algébriques", *C.R.,* **82,** 1876.
	1876b	Sur la détermination des groupes formés d un nombre fini de substitutions linéaires *C.R.* , **83**, 1876, 1035-1037.
	1877a	"Détermination des groupes formes d un nombre fini de substitutions linéaires", *C.R.*, **84** ; 1877. 1446-1448.
	1877b	"Sur une classe de groupes d ordre fini contenus dans les groupes linéaires," *Bull soc math Fra* **V**, 1876-1877, 175-177 ;
	1878	"Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique," *Crelle.,* **84**, 89-215.
	1879	"Sur l'équivalence des formes algébriques," *Comptes Rendus,* **88**, 906-908.
	1880a	"Sur l'équivalence des formes," *Comptes Rendus*, **90**, 1422-1423.
	1880b	"Mémoire sur l'équivalence des formes," *Jour. ec. pol*. **XVIIIe** cahier, 111-150, Œuvres **III**, 421-460.
	1880c	"Sur la réduction des substitutions linéaires," *Jour. ec. pol.* **XVIIIe** cahier, 151-160, Œuvres **III**, 461-470.
	1881a	"Observation sur la réduction simultanée de deux formes bilinéaires," *Comptes rendus Acad. Sci. Paris,* **112**, 1881, 1437-1438 ; Œuvres **II**, 247-249.
	1881b	*Notice sur les travaux de M. Camille Jordan*. Œuvres **IV**
	1881c	"Sur l'équivalence des formes quadratiques " *Comptes rendus Acad. Sci. Paris,* t**XCIII**, 181-185, Œuvres II, 479-485.
	1882	"Sur la théorie arithmétique des formes quadratiques " *J. Ec. Pol*.,

		LI,, 1-43 Œuvres **III**, 489-533
	1887	*Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique,* v.3, Paris, 2de ed. Paris, 1896.
	1888	"Sur les transformations d'une forme quadratiques en elle-même," *J. de Math.* (4), t. **IV**, p. 349-368. Œuvres III.
	1901	"Notice sur Ch. Hermite," *J. de Math.* (5), t. **VII**, 91-95.
	1902	"Notice sur les travaux de M. Lazare Fuchs", *Comptes rendus Acad. Sci. Paris,* t.**134**, 1081-1083, Œuvres **IV**, 467-489.
	1904	"Sur les formes quadratiques invariantes par une substitution linéaire," *C.R.* **138**, 537-541.
	1905	"Mémoire sur les formes quadratiques, suivant un module premier p, invariantes par une substitution linéaire donnée," *Jour. de Math*. (6) **1,** 217-284.
	1906	"Réduction d'un réseau de formes quadratiques ou bilinéaires," *Jour. de Math*. 6e série, t. **2**, 4, 0euvres **III**, 438
	1907	"Réduction d'un réseau de formes qudratiques ou bilinéaires, *Jl. de math. pures et appl.* (6), t. **II**, 403-438 et t. **III**., 5-51, Œuvres **III**, 269-351.
	1914	" Des polynômes invariants par une substitution linéaire," Jour. de Math. (6) **10**, 97, 187.
	1916	*Discours prononcé à la séance du 18 décembre 1916*. Œuvres IV, 582-595.
KILLING, W.,	1872	*Der Flächenbüschel zweiter Ordnung*. Inaugural-Dissertation, Berlin.
	1888-1889	"Die Zusammentsetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen," *Math. Ann,* **31**, 252-290 : **33**, 1-48 ; **34**, 57-122 ; **36**, 161-189.
	1890a	"Erweiterung des Begriffes der Invarianten von Transformationgruppen," *Math. Ann.* **35**, 423-432.
	1880b	"Bestimmung der grössten Untergruppen von endlichen Transformationsgruppen", *Math. Ann,* **36**, 239-254.
KLEIN, F.	1868,	*Ueber die Transformation der allgemeinen Gelichung des zweiten Frades zwischen Linien Coordinaten auf aine canonische Form*, Bonn. Réimpression *in Math. Ann,* **23** (1884), 539-578 = *Abhandlungen* 1 (Berlin 1921), 5-49.
	1876	"Ueber binäre Formen mit linearen transformationen in sich selbst,' *Math. Ann.,* **9**, 183-208.
	1877	"Weitere Untersuchungen über das Ikosaëder," *Math. Ann*. t. **XVII**, 503-560.
	1879a	"Ueber die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades," *Mathematische Annalen* **14** (1879), 111-172.
	1879b	"Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade," *Math. Ann.,* **34**, 57-122.
	1884	*Vorlsungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade,* Leipzig.
	1926	*Vorlseungen über höhere Geometrie, 3.* Berlin.
KÖNIG, J.	1903	*Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen,* Leizig.
KÖNIGSBERG, L.	1879	*Zur Geschichte der elliptischen Transcendenten in den Jahren* 1826-1829, Leipzig : Teubner.
KORKINE ET ZOLOTAREV	1873	"Sur les formes quadratiques," *Math. Ann*. **VI**, 366-389.

KNESER, A.	1925	"Leopold Kronecker," *in Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-vereinigung,* **33**, 210-228.
KNOBLOCH, E.	1994	"From Gauss to Weierstrass : determinant theory and its historical evaluations, in *the intersection of history and mathematics*. Basel, 51-66.
KNUSS, M.A.	1981	"Christoffel und die Mathematik an der Polytechnischen Schule Zurich" *in E.B. Christoffel.* Butzer, L. Feher F. (eds) Aachen.
KOWALEWSKI, G.	1916	"Natürliche Normalformen linearer Transformationen". *Ber. Verh. sächs.* Akad. Leipzign vol (**68**) (1916), 325-335.
KRAWTCHOUK, M.	1927	"Ueber vertauschbare Matrizen," *Rend. Circ. Mat. Palermo* **51**, 126-130.
KREIS, H.	1906	*Contribution à la théorie des systèmes linéaires.* Zurich
KRONECKER, L.	1853	"Ueber die algebaraisch auflösbaren Gleichungen," *M'ber. Akad. Wiss. Berlin = Werke* **4** (Leipzig & Berlin, 1929), 1-11.
	1861	"Antrittsrede von L. Kronecker bei der Aufnahme in die Akademie der Wissenschaften am 4 Juli 1861...," ," *M'ber. Akad. Wiss. Berlin = Werke* **5** (Leipzig & Berlin, 1930), 385-393.
	1866	"Ueber bilineare Formen," ," *M'ber. Akad. Wiss. Berlin = Werke* **1** (Leipzig 1895), 145-162.
	1868	"Ueber Schaaren quadratischer Formen," ," *M'ber. Akad. Wiss. Berlin = Werke* **1** (Leipzig 1895), 163-174.
	1873	"Ueber die verschiedenen *Sturm*schen Reihen," *Monat. der Berl. Akad,* 122-123 Werke I, 303-348.
	1874a	"Ueber Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen," *M'ber. Akad. Wiss. Berlin = Werke* **1** (Leipzig & Berlin, 1895), 349-413.
	1874b	"Sur les faisceaux de formes quadratiques et bilinéaires," *Comptes rendus Acad. Sci. Paris.* **78** *= Werke* **1** (Leipzig 1895), 415-419
	1874c .	"Ueber die congruenten Transformationen des bilinearen Formen," *M'ber. Akad. Wiss. Berlin = Werke* **1** (Leipzig & Berlin, 1929), 421-483.
	1879a	"Ueber die schiefe Invariante einer bilinearen oder quadratischen formen," *J.f.r.am.* **86**, 454-481.
	1882	"Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen," *Festschrift zu Hernst Eduard Kuller's fünfzijgjährigem Dester Jubilänn am 10. September 1891. J. für Math.* **92**, 1-122. Werke **II**, 1-115.
	1883a	"Sur les unités complexes," *C.R. Ac. Sc. Paris.* **96**, 93-98, 148-152, 216-221. Werke **III**, 1-20.
	1883b	"Die Zerlegung der ganzen Grössen eines natürlichen Rationalitäts-Bereichs in ihre irreductibeln Factoren," *J.f.r.a.m.* **94**, 344-348, Werke **2**, 411-416.
	1884a	"Addition au mémoire sur les unités complexes," *C.R. Ac. Sc. Paris.* **99**, 765-771. Werke **III**, 21-30.
	1884b	"Die Periodensysteme von Functionen reller Variabeln," *Monatsberichte der K. Pr. Ak. der Wis. zu* Berlin 1071-1080. Werke. **III**. 31-46.
	1884c	"Nâherungsweise Ganzahlige Auflösung Linearer Gleichungen." *Monatsberichte der K. Pr. Ak. der Wis. zu Berlin* 1179-1193, 1271-1299, Werke. **III**. 47-111.
	1886	"Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen," *J.f.r.a.m.* **99**, 329-371.
	1887	"Ueber den Zahlbegriff," *J.f.r.a.m.* **101**, 337-355.

	1888a	"Zur Theorie der Allgemeinen Complexen Zahlen und der Modulsysteme," *Monatsberichte der K. Pr. Ak. der Wis. zu Berlin* . 429-438, 447-465, 557-578, 595-612, 983-1016. Werke **V**, 1-115.
	1888b	"Ueber symmetrische Systeme," *Monatsberichte der K. Pr. Ak. der Wis. zu Berlin* . 349-362. Werke **III**, 293-315.
	1889a	"Ueber summetrisches Systeme," *Monatsberichte der K. Pr. Ak. der Wis. zu Berlin* . Werke **III**, 294-314.
	1889b	"Die Decomposition der System von n^2 Grössen und ihre Anwendung auf die Theorie der Invarianten," *Monatsberichte der K. Pr. Ak. der Wis. zu Berlin* . 479-505, 603-614. Werke **III**, 316-461.
	1890	"Ueber die Composition der Systeme von n^2 Grössen mit sich selbst," *Monatsberichte der K. Pr. Ak. der Wis. zu Berlin* . 1081-1088. Werke **III**, 461-473.
	1891	"Reduction der Systeme von n^2 ganzzahligen Elementen," *J. fur Math*. **CVII**. 135-136. Werke V, 123-127.
KRULL	1921	*Ueber Begleitmatrizen und Elementarteilertheorie*. Freiburg.
	1926	*Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen,* S.-B. Heidelberg Akad. Wiss.
KUMMER, E.E.	1975	*Collected Papers*, 1 (A. Weyl, ed.) Berlin, Heidelberg, New York.
LAGRANGE, J.L.	1759a .	"Recherches sur la méthode des maximis et minimis," *Miscellanea Taurinensia* **1**, = Lagrange [1867-92, vol.1, 3-20].
	1759	"Recherches sur la nature et la propagation du son" *Miscellanea Taurinensia* **1**, = Lagrange [1867-92, vol.1, 39-148].
	1761	"Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique,' *Miscellanea Taurinensia* **2**, = Lagrange [1867-92, vol.1, 365-468].
	1766	"Solution de différents problèmes de calcul intégral…," *Miscellanea Taurinensia* **3**, = Lagrange [1867-92, vol.1, 471-668].
	1772-1773	"Réflexions sur la résolution algébrique des équations," *Nouv. Mem. Acad. Sci. Berlin* = *Œuvres* 3 (Paris, 1869), 205-421.
	1775	"Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice," *Nouv. mém. de l'acad. des sciences de Berlin,* = Lagrange [1867-92, vol. 3, 577-616].
	1778	"Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds, et des inclinaisons des orbites des planètes," *Hist. de l'acad. des sciences,* **177** = Lagrange [1867-92 vol. 6, 635-709]
	1783	"Théorie des variations séculaires des éléments des planètes ; Première Partie," *Nouv. mém. de l'acad. des sciences de Berlin,* = Lagrange [1867-92, vol. 5, 125-207].
	1784	"Théorie des variations séculaires des éléments des planètes ; Seconde Partie," *Nouv. mém. de l'acad. des sciences de Berlin,* = Lagrange [1867-92, vol. 5, 201-344].
	1788	*Méchanique analytique.* Paris. 2^{de} ed. Paris 1811-15.
	1775	" Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes," *Mem. de l'acad. des sciences de Paris,* Partie I = *Œuvres* 8 (Paris, 1891), 325-366.
	1776	" Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde," *Mem. de l'acad. des sciences de Paris,* Partie II = *Œuvres* 8 (Paris, 1891), 369-501.

	1787	" Mémoire sur les inégalités séculaires des planètes et des satellites," *Mem. de l'acad. des sciences de Paris,* = *Œuvres* 11 (Paris, 1895), 49-92.
	1788	*Méchanique analytique.* Paris. 2de ed. Paris 1811-15.
	1789	" Mémoire sur les variations séculaires des orbites des planètes," *Mem. de l'acad. des sciences de Paris,* = *Œuvres* 11 (Paris, 1895), 295-306.
	1799	*Traité de mécanique céleste.* Vol.1 Paris) *Œuvres* 1 (Paris, 1878).
LAGUERRE, E.	1867	"Sur le calcul des systèmes linaires", *Jour. Ec. Pol.* **LXII**. Œuvres I. 221-267.
LAISANT, C.A..	1881	*Introduction à la méthode des quaternions*. Paris.
LAPLACE, P.S.	1799	*Traité de mécanique céleste.* Vol.1 Paris = *Œuvres* 1 (Paris, 1878).
LANDSBERG, G.	1896	"Ueber Fundamentalsysteme und bilineare Formen," *Jl.f. Math.,* **116**, 331-349.
LANDSBERG, G., HADAMARD, J, KÜRSCHAK, J.	1910-1911	"Propriétés générales des corps et des variétés algébriques" *in Encyclopédie des sciences mathématiques*, Vol II, 233-385.
LASKAR, J.	1992	"La stabilité du système solaire," in *Chaos et déterminisme*, sous la direction de A. Dahan Dalmedico, J-L. Chabert, K. Chemla. p.170-212. Seuil.
LATTES, S.	1906	Sur les courbes qui se reproduisent périodiquement par une transformation, *Comptes Rendus*, **143**, 765.
	1909	Sur les transformations de contact, *Comptes Rendus*, **149**, 902.
	1911	Sur les formes réduites des transformations ponctuelles a deux variables Application a une classe remarquable de séries de Taylor, *Comptes Rendus,* **152**, 1566 .
	1912	"Sur la réduction des substitutions linéaires," *Comptes Rendus,* **155**, 1482-1484.
	1915	"Sur les multiplicités linéaires invariantes par une substitution linéaire donnée," *Comptes Rendus* **160**, 671-674.
	1914	"Sur une forme canonique des substitutions linéaires," *Ann. Toulouse* (**3**) **6**, 1-84.
	1915	Sur les multiplicités linéaires invariantes par une substitution lineaire donnée, *Comptes Rendus*, 155, 671.
LAURENT. H.	1896	"Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions linéaires", *Nouv. Annales, (***3**), **15**, 345-365.
	1897	"Applications de la théorie des substitutions linéaires à l'étude des groupes," *Nouv. Annales*, (**3**), **16**, 149-168.
	1898	"Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions," *J. de math.* **4**, 75-119.
LEBESQUE, V.A.	1837	"Thèses de mécanique et d'astronomie," *Jl. de Math.* (Liouville) 2, 337-355.
LEBESGUES , H.	1923	"Notices d'histoire des mathématiques. Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan". *L'enseignement mathématique,* 40-49.
LEGENDRE, A.M.	1825	*Traité des fonctions elliptiques*, 3 vols. Paris : Huzard-Courcier.
LEJEUNE-DIRICHLET, P.G.	1842	"Généralisation d'un théorème concernant les fractions continues et applications à la théorie des nombres" *Monat Berlin*, 93-95, Werke **1**, 627-632.
LIE, S.	1876	"Theorie der Transformationsgruppen. Erste Abhandlung," *Archiv for Math,* **1**, 19-67 = *Ges. Abh.,* **5** [1924], 9-41.
	1880	"Theorie der Transformationsgruppen. I," *Math. Ann.* **16**, 441-528

= *Ges. Abh.,* **6** [1927], 1-94.

1885 "Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine kontinuierliche, endliche Gruppe gestatten," *Math. Ann.*, **25**, 71-151 = *Ges. Abh.,* **6** [1927], 139-223.

1888 *Theorie der Transformationsgruppen. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engels.* **3** vols, Leipzig. 2*nd* ed. New York (Chelsea Pub. Co.), 1970.

1889 "Beiträge zur allgemeinen Transformationstheorie, "*Ber. Verh. k. sächs. Ges. Wiss. Leipzig,* **41***, 320-37 = Ges. Abh.,* **6** [1927], 260-266.

1890 "Ueber irreducible Berühungs-transformationsgruppen." *Ber. Verh. k. sächs. Ges. Wiss. Leipzig, **41**, 320-37 = Ges. Abh.,* **6** [1927], 260-266.

1924 *Gesammelte Abhandlungen,* Kristiania&Leipzig.

LIPSCHITZ, R. 1880 "Principes d'un calcul algébrique qui contient comme espèces particulières le calcul des quantités imaginaires et des quaternions.", *C.R. Ac.d.Sc. Paris.* **91**, 619-621.

1887 "Beweis des Satzes aus der Theorie des Substitutionen," *Acta. Math.* **10**, 137-144.

LOEWY, A. 1896 "Sur les formes quadratiques définies à indéterminées conjuguées de M. Hermite," *Comptes Rendus,* **123**, 168-170.

1897 "Bemerkung zur Theorie der konjugirten Transformation einer bilinearen Form in sich selbst," *Münch Ber.* **26**, 25-30.

1898 "Ueber bilineare Formen mit conjugirt imaginären Variablen," Math ann. **52**, 557-576.

1899 "Ueber die Charakteristik einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante" *Math ann*. **52**, 588-592.

1900 "Ueber Scharen reeller quadratischer und Hermitescher Formen," *Crelle*, **122**, 53-72.

1910 "Kombinatorik, determinanten und Matrices," ch 2 Repertorium der hoheren analysis, **V.1.** part.1. Epstein. Leipzig.

1913 "Ueber lineare homogene Differentialsysteme und ihre Sequenten," *Sitzb. Heidl. Akad*. 1913.

1917 "Die Begleitmatix eines linearen homogenen Differentialausdruckes", *Nachr.* , 255-263.

1918 "Ueber einen fundamentalsatz für Matrizen oder lineare homogene Differentialsysteme", *Sitzb Heidl. Akad*. 1918.

MACDUFFEE, C.C 1928 "A correspondence between matrices and quadratic ideals," *Annals of Math.* **29**, 199-214.

1929a "An introduction to the theory of ideals in linear associative algebras," *Trans. Amer. Math. Soc.* **31**, 71-90.

1929b "On the independence of the first and second matrices of an algebra," *Bull. Amer. Math. Soc.* **31**, 71-90.

1931a "The discriminant matrices of a linear associative algebra," *Annals of Math*, **32**, 60-66.

1931b "The discriminate matrix of a semi-simple algebra", *Trans. Amer. Math. Soc.* **33**, 425-432.

1933a "Matrices with elements in a principal ideal ring," *Bull. Amer. Math. Soc.* **39**, 564-584.

. 1933b *The Theory of Matrices*, Springer, Berlin.

1940 *An Introduction to Abstract Algebra*. Dover, New York.

1943 *Vectors and Matrices,* The Mathematical Association of America,

		The collegiate Press: Menasha, Wisconsin.
MAC LANE, S.	1975	"History of abstract algebra: origin, rise and decline of a movement," i*n American Mathematican Heritage : Algebra and Applied Math*., Texas Tech University, Mathematics Series, no. 13.
MAGNUS, W.	1958	"Introduction to the Dover Edition," *in Linear Groups,* L.E. Dickson, 1958. New York. Dover.
MALCOR, R.	1985	"Camille Jordan et sa famille", *Le jaune et la rouge*, **404** avril 1985.Revue mensuelle de la soc. amicale des anciens élèves de X.
MASCHKE, H.	1898	"Die Reduction linearer homogener Substitutionen von enlicher Periode auf ihre kanonische Form," *Math. Ann*. **50**, 220.
MAYER, A.	1875	"Directe Begründung der Theorie der Berührungstransformationen. Zusatz zur Lie'schen Abhandlung", *Math Ann*. **VIII**, 304-312.
MAURER, L.	1887	"Zur Theorie der linearen Substitutionen," *Dissertation,* Strasbourg.
MAWHIN, J.	1981	"Remarks on E.B. Christoffel's Paper : "Uber die kleinen Schwingungen eines periodisch eigerichteten Systems materieller Punkte"". *in E.B. Christoffel.* Butzer, L. Feher F. (eds) Aachen.
MEHRTENS, H. BOS, H. SCHNIEDER, I. (eds.)	1981	*Social history of Nineteenth Century Mathematics*. Bâle, Boston, Berlin, Birkhäuser.
MEHRTENS, H.	1996	"Modernism vs counter-modernism, nationalism vs internationalism : style and politics in mathematics 1900-1950" histoire *in L'europe mathématiques*. C Goldstein. J. Gray, J. Ritter. Editions de la Maison des sciences de l'homme. Paris. 501-519.
MENGE, W.O	1932	"On the rank of the product of certain square matrices," *Bull. Amer. math. soc.* vol. **38**, 88-94.
	1933	"Construction of transformations to canonical forms." *Amer. J. Math*., **55**, 671-682.
METZLER, W.H.	1892	"On the Roots of Matrices," *Amer. J. Math.* 326-377.
	1893	"Matrices which represent vectors*," Boston Tech. Quart*. **6.**
	1914	"On the rank of a matrix," annals of Math. (**2**) **15**, 161-165.
MEYER, W.F.	1905	"Invariantentheorie," *E.M.W.* IB2, 320-381.
MEYER, W.F. ET DRACH, J.	1911	"Théorie des formes et des invariants," *Enc. Sci. Math*. **I**.**11**., 386-520.
MINKOWSKI, H.	1881	"Sur la théorie des formes quadratiques à coefficients entiers," *Mémoires présentés à l'académie r. des sciences*, 1-180.
,	1883	"Sur la réduction des formes quadratiques positives," *Comptes Rendus*. **96**, 1205-1210.
	1886	"Ueber positive quadratische Formen," *Crelle*, **99**, 1-9.
	1887a	"Ueber den arithmetischen Begriff der Aequivalenz und über die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen," *Crelle*, **100**, 449.
	1887b	"Zur Theorie der positiven quadratischen Formen," *Crelle*, **101**, 196.
	1890	"Ueber Geometrie der Zahlen," Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
	1910	*Geometrie der Zahlen*, Teubner : Leipzig.
MITTAG-	1902	"Une page de la vie de Weierstrass", *Comptes rendus du deuxième*

LEFFLER, G.		*Congrès international des mathématiciens* (Paris) 135-153.
MIYAKE, K.	1989	"A note on the arithmetic background to Frobenius' theory of group characters", *Exposition. Math.* **7** (4), 347-358.
MOLK, J.	1884	*Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination*, Thèse de doctorat. Paris
MOLIEN, T.	1893a	"Ueber Systeme höherer complexer Zahlen," *Math. Ann.,* **41**, 83-156
	1893b	"Berichtigung zu dem Aufsatze 'Ueber Systeme höherer complexer Zahlen'," *Math. Ann.* **42**, 308-12.
	1897a	"Eine Bemerkung zur Theorie der homogenen substitutionsgruppe," *S'ber. Naturforscher-Ges. Univ. Jurjeff (Dorpat),* **11**, 259-74.
	1897b	"Ueber die Anzahl der Variabeln einer irreductibelen Substitutionsgruppe," *S'ber. Naturforscher-Ges. Univ. Jurjeff (Dorpat),* **11**, 277-88.
	1898	"Ueber die Invarianten der linearen Substitutionsgruppen," *S'ber. Akad. d. Wiss. Berlin*, 1152-6.
MONGE, G ET J.N.P. HACHETTE	1802	"Application d'algèbre à la géométrie," *Jl. Ec. Poly.* t.**4**. cah. 11, 143-169.
MOORE, E.H.	1892	"Concerning a congruence group of order 360 contained in the group of linear fractional substitutions," *Proceedings of the American Association for the Advancement of Science* **41**, 62.
	1893	"A doubly-infinite system of simple groups," *Mathematical Papers Read at tge International Mathematical Congress Held in Connection with the World's Columbian Exposition*: Chicago 1893, 208-242.
	1898	"An universal invariant for Finite Groups of linear Substitutions: with applications in the Theory of the Canonical Form of a linear Substitution of Finite Period," *Math. Ann*. **50**, 213, 219.
MUIR, T.	1885	"New relations between bipartite functions and determinants with a proof of Cayley's theorem in matrices," *Proc. London Math. Soc.* **16**, 276-286.
	1906	*The theory of determinants in the historical order of Development.* Vol. **1**. 2de ed. London et New York.
NETTO, E.	1874	"Zur Theorie der zusammengesetzten Gruppen.", *Jour. f. Math.* **LXXVIII**. 81-92.
	1893	"Zur Theorie der linearen Substitutionen," *Acta. Math.* **17**, 265-280.
	1896	*Vorlesungen über Algebra* . Leipzig.
	1904	*Elementare Algebra, Akademisch Vorlesungen für studierende der ersten semester*. Leipzig : Teubner.
NETTO, E., LE VAVASSEUR, R.	1907	"Fonctions rationnelles," *in Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées,* vol. **II**, 1-232. 7 tomes en 28 vols. Paris : Gauthier-Villars ; Leipzig : B ; g ; Teubner, 1904-16.
NEUENSCHWAN-DER, E.	1984	"Joseph Liouville (1809-1882) : correspondance inédite et documents biographiques provenant de différentes archives parisiennes," *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*. **IV**, fasc. **2**, 55-132.
NEWTON, H.A.	1881	"Benjamin Peirce," *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences,* n.s. **8** (1881) : 451
NÖTHER, M.	1870	"Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen," *Math. Ann.* **2***, 293-316.*
	1873	"Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen,"

Math. Ann. **4***, 351-360.*

ORY, H. 1928 "Sur l'équation $x^n = a$ où a est un tableau carré du deuxième ordre," *Comptes Rendus* **187**, 1012-1014.

PANZA, M. 1990 "The evolution of Lagrange's research programme in the analytical foundations of mechanics with paritcular respect to its realisation in the *Théorie des Fonctions analytiques*." *Historia Scientarum,* vol**. 1-2**, 1991 et **1-3,** 1992.

PARSHALL, K.H. 1983 'In Pursuit of the Finite Division Algebra Theorem and Beyond : Joseph H.M. Wedderburn, Leonard E. Dickson, and Oswald Veblen." *Archives internationals d'Histoire des Sciences,* **33**, 274-99.

1985 "Joseph H.M. Wedderburn and the Structure Theory of Algebras," *Arc. f. Hist. of. Ex. Sci.,* **32**, 223-349.

1988 "James Joseph Sylvester at Johns Hopkins University 1876-1883", *Archive for History of Exact Science* **38**, 153-196.

1991 "A Study in Group Theory : Leonard Eugene Dickson's *Linear Groups*," *The mathematical intelligencer*, **13**, 7-11.

1992 "New light on the life and work of Joseph Enry Maclagan Wedderburn (1882-1948)". *Folkerts, M. et Al. (eds.), Amphora : Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65. Geburstag. Birkhäuser Verlag, Basel/Boston/ Berlin, 523-537.*

1998 *James Joseph Sylvester, life and work in letters.* Clarendon Press

2000 "Perspectives on American Mathematics," *Bull. A.M.S.* **37**, 381-405.

2004 "Defining a mathematical research school : the case of algebra at the University of Chicago, 1892-1945," *Historia Mathematica*, **31**, 263-278.

PARSHALL, K.H. ROWE, D.E. 1994 *The Emergence of the American Mathematical Research Community, 1876-1900 : J.J. Sylvester, Felix Klein, and E.H. Moore*, Providence : American Mathematical Society et Londres : London Mathematical Society, 1994.

PARSHALL, K.H. SENETA, E. 1997 "Building an international reputation: the case of J.J. Sylvester (1814-1897), " *American Math. Monthly* ***104*** *(3). 210-277.*

PEANO, G. 1888 "Intégration par séries des équations différentielles," *Math. Ann.* **32**, 450-456.

PEIRCE, B., 1870 *Linear Associative Algebra*, lithographed.

PEIRCE, C.S. 1873 "Description of a Notation for the Logic of Relatives, Resulting from an Amplification of the Conceptions of Boole's Calculus of Logic", *Mem. Amer. Acad. Arts. and Sci.,* **9**, 317-89

PERRON, O. 1906 "Zur Theorie der Matrices," *Math. Ann*, **64**, 248-263.

PETERSEN, J. 1887 "Ueber *n*-dimensionale complexe Zahlen," *Göttingen Nachr,* 489-502.

PETR, L. 1940 "Rationale kanonische Form einer linearen Substitution"*. Cas. Math. fys*. vol **69**, 9-22.

PICARD, E. 1881 "Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. ," *Crelle* **90**, 281-302.

1882a "Sur certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes et sur un groupe de substitutions linéaires," *C.R.* **94**, 579-582.

1882b "Sur un groupe de substitutions linéaires*," C.R*. **94**, 837-840.

1883 Sur les groupes de transformations des équations différentielles linéaires, " *C.R. Acad. Sci. Paris*, **96**, 1131-1134.

PINCHERLE, S. 1899 "Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif," *Math. Annalen*, **49**, 325-383.

PLEMELJ, J. 1901 "Ein Satz über vertauschbare Matrizen und seine Anwendung in der Theorie linearer Differentialgleichungen," *Monatsh. f. Math. u. Phys*. **12**, 82-96.

PREDELLA, P. 1889 "Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni," *Annali di mat*. **17**, ser. 2, 113-159.

POINCARE, H. 1879a "Sur quelques propriétés des formes quadratiques," *Comptes rendus,* **89**, 344-346.

1879b "Sur les formes quadratiques," *Comptes rendus,* **89**, 897-899.

1880a "Sur les formes cubiques ternaires," *Comptes rendus*, **90**, 1336-1339.

1880b "Sur la réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme linéaire," *Comptes Rendus,* **91**, 844-846.

1880c "Sur un mode nouveau de représentation géométrique des formes quadratiques définies ou indéfinies," *Jour. Ec. Pol*. **XVLIIe** cahier, 177-245.

1881a "Sur les invariants arithmétiques," *Association française pour l'avancement des sciences.* Congrès d'Alger. X, 109-117.

1881b "Sur les applications de la Géométrie non-euclidienne à la théorie des formes quadratiques," *Association française pour l'avancement des sciences,* X, 132-138.

1881c "Sur la représentation des nombres par les formes," *Comptes Rendus*, **92**, 333-335.

1881d "Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires. Première partie" *Jour. Ec. Pol*. **L**^{e} cahier, 199-253. Œuvres **IV**, 28-75.

1881e "Sur les fonctions fuchsiennes," *Comptes Rendus*, **92**, 333-335.

1882a "Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires. Deuxième partie" *Jour. Ec. Pol*. **LI**^{e} cahier, 45-91.

1882b "Sur les groupes discontinus," *Comptes Rendus*, **94**, 840-843.

1882c "Sur les Fonctions Uniformes qui se reproduisent par des Substitutions Linéaire," *Math. Ann*. **19**, 553-564.

1882d "Théorie des groupes fuchsiens," *Acta Math*. **1**, 1-62.

1884a "Sur les nombres complexes," *C.R. Ac. d. Sc. Paris,* **99**, 740-42.

1884b "Sur les substitutions linéaires," *Comptes Rendus*, **98**, 349-352.

1884c "Sur les groupes hyperfuchsiens," *Comptes Rendus*, **98**, 503-504.

1884d "Sur les groupes des équations linéaires" *Acta Math*. **4**, 202-311.

1885 "Sur la représentation des nombres par les formes. *Bull. soc. math. France*,**XVIII**,162-194

1886a "Sur les fonctions fuchsiennes et les formes quadratiques indéfinies," *Comptes rendus,* Œuvres **II**, 64-66.

1886b "Réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme linéaire," *Jour. ec. pol*. **LVIe** cahier, 79-142.

1887 "Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique," *Jour. de Math*. 4^{e} s. t. **3**, 405-464.

1890 "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique,"*Acta Mathematica,* **13**, 1-270.

1897 "Notice sur M. Weierstrass," *C.R.*, t. **124**, 430-433.

1898 "Notice sur la vie et les travaux de Laguerre," *in Laguerre, Œuvres I.* I-XV.

1903 "Sur l'intégration algébrique des équations linéaires et les

		périodes des intégrales abéliennes," *Jour. math.* 5e série, t. **9**, 139-212.
	1908	"L'avenir des mathématiques," *Atti del Ive Congresso Internazionale dei Mathematici*. Rome. 19-23.
	1909	"L'oeuvre mathématique de Weierstrass", *Acta mathematica*, **22** .
	1921	"Analyse de ses travaux sur l'algèbre et l'arithmétique faite par H. Poincaré," *Acta Math*. **38**, 89, 90 ,92-100. Œuvres, 1-14.
	1950	"Œuvres de Poincaré, tome 5", Paris.
POLYA, G.	1928	"Ueber die Funktionalgleichung der Exponentialfunktionen im Matrizenkalkül", *Berlin. sitzb*. 96-99.
PLÜCKER, J.	1868	*Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, erste Abteilung,* Leipzig. Teubner.
PURKERT, W. ET WUSSING, H.	2004	"Fundamental concepts of abstract algebra," *in Companion Encyclopedia of the history and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Grattant-Guinness, I. (ed). 2 vol. Londres / New York, Routledge. 741-759.
PUND, O.	1899	*Algebra mit Einschlass der elementen Zahletheorie*, Leipzig.
RADOS, G.	1897	"Zur Theorie der adjungirten Substitutionen," *Math Ann* Vol **48** (1897), 417-424.
RASHED, R.	1997	" *L'Histoire des Sciences entre Epistémologie et Histoire" in Historia Scientiarum Vol. 7-1.*
RASMUSSEN, A.	1995	*L'internationale scientifique (1890-1914),* thèse de doctorat, Paris : EHESS, 1995.
RIEMANN, B.	1857	"Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten," *Oeuvres.* 379-389.
ROSANES, J.	1876	"Ueber die Transformation einer quadratischen Form in sich selbst," *Crelle*, **80**, 52.
	1881	"Zur Theorie der reciproken Verwandtschaft," *Journal für Math*. **90**, 312-321.
ROTMAN, J.J.	1995	*An introduction to the theory of groups*. Springer
RADOS, G.	1897	"Zur Theorie der adjungirten Substitutionen," *Math Ann*. **48,** 417-424.
RASMUSSEN, A.	1995	*L'internationale scientifique.* Thèse de doctorat. E.H.E.S.S. Paris.
RUNGE, C.	1886	"Ueber die Zerlegung ganzer ganzzahliger Functionen in irreductible Factoren," *J.f.r.a.m*. **99**, 89-97.
RUTHERFORD, D.E.	1932	"On the canonical form of a rational integral function of matrix," *Proc Akad. Wet. Amsterdam.* **35**, 870-875.
	1948	"On commutating Matrices and Commutative Algebras," *Proc. Roy. Soc. Edimburg.* **62**, 454-459.
SALMON, G.	1862	*A treatise on the analytic geometry*. Dublin.
SAINTE BEUVE, C.A.	1884	*Nouveaux Lundis*, t. ***12,*** Paris.
SAUVAGE, L.	1891a	*"Théorie des diviseurs élémentaires et applications*," *Ann. ec. Norm. III* **8**, 285-340.
	1891b	"Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles," *C.R*. 174-176.
	1893	"Compléments à la théorie des diviseurs élémentaires," *Ann. ec. norm.,* III, ***10****, 9-42.*
	1895	*Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes,* Paris : Gauthier-Villars.
SCHAPPACHER, N.	1996	"On the history of Hilbert's twelfth problem. A comedy of errors" *SMF colloque Dieudonné.* Nice

SCHEFFERS, G., 1889a "Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen," *Ber. k. Sächs. Ges.d.Wiss. Leipzig,* 290-307.

1889b "Ueber die Berechnung von Zahlensysteme," *Ber. k. Sächs. Ges.d.Wiss. Leipzig,* 400-507.

1891 "Zuruckführung complexer Zahelnsysteme," *Math. Ann.,* **39**, 292-390.

1893 "Ueber die Reducibilität complexer Zahlensysteme," *Math. Ann.* **41**, 601-4.

SCHLESINGER, L. 1905 "Beitrage zur Theorie der Systeme linearer homogener Differentialgleichungen," *Crelle* **128**, 263-297.

1908 *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*. Leipzig.

SCHNEIDER, H. 1977 " The concepts of irreducibility and full indecomposability of a matrix in the works of Frobeniu"s, König and Markov, *Linear Algebra and Appl.* **18** (2) , 139-162.

SCHREIER, O. SPERNER, E. 1932 *Vorlesungen über Matrizen.* Teubner, Leipzig.

SCHUBRING, G. 1989 "Pure and Applied Mathematics in Divergent Institutional Settings in Germany : The Role and Impact of Felix Klein", in : Rowe & Mc Cleary, 171-220

1996 "Changing cultural and epistemological views on mathematics and different institutional contexts in nineteenth century Europe" *in L'europe mathématique,* .C Goldstein. J. Gray, J. Ritter. Editions de la Maison des sciences de l'homme. Paris. 347-363.

SCOTT, R.F 1904 *The Theory of Determinants and their applications*, Cambridge University Press.

SCHUR, I. 1901 *Uber eine Klasse von Matrizen die sich einer gegeben Matrix zuordnen lassen*, Diss. Berlin.

1902 "Uber einen Satz aus der Theorie der vertauschbaren Matrizen," *Berlin Sitzb.* 120-125.

1904 "Ueber die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen," *Crelle Jl.f. Math.,* **127**, 20-50.

1905 "Zur theorie der vertauschbaren Matrizen," *Crelle,* **130**, 66-76.

1907 "Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen," *Crelle*, **132**, 85-137

1909 "Ueber die characteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mie einet Anwendung auf die Theorie der Integralgliechungen," *Math. Ann*. **66**, 488-510.

1927 "Ueber die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe," *Berlin Stzb*. 58-75.

SEGRE, C. 1884a "Sulla Teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni," *Atti della R. Acadademia dei Lincei, Memoire Seri terza*, **XIX**, 127-148. Œuvres III, 304-325.

1884a "Sur les invariants simultanés de duex formes quadratiques," *Math. Ann.* **24**, 152-156.

1887 "Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux," *J,f.r.a.m.* **100,** 317-330.

SHAPIN, S. « History of Science and its Social Recontruction », *History of science, **20**.*

SHODA, K. 1929 "Ueber die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen," *Math. zeits*. **29**, 696- 712.

SOMOF, J. 1859 "Sur l'équation algébrique à l'aide de laquelle on détermine les oscillations très-petites d'un système de points matériels," *Mém.*

Acad. Sci. St. Pétersbourg, (7) 1 no**.14.**

SINACEUR, H. 1988 Deux moments dans l'histoire du théorème d'algèbre de CH. F. Sturm", *Revue d'histoire des sciences*, Paris, PUF, tome **XLI**-2 , 99-132.

1992 "Cauchy, Sturm et les racines des équations", *Revue d'histoire des sciences*, **XLV**, 1, 51-67.

1988 Deux moments dans l'histoire du théorème d'algèbre de CH. F. Sturm", *Revue d'histoire des sciences*, Paris, PUF, tome **XLI**-2, 99-132.

SMALE, S. 1930 *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, New York.

SMILEY, M.F. 1942 "The rational canonical form of a matrix",. *Amer Math. Monthly*, **49**, 451-454.

STEPHANOS, C. 1883a "Mémoire sur la représentation des homographies binaries par des points del'espace avec l'application à l'étude des rotations sphériques, *Math. Ann.,* **22**, 299-367.

1883b "Sur la théorie des quaternions", *Math. An.* **22**, 329.

1883c "Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux" *Math. Ann*. **22**, 299-366.

1900 "Sur une extension du calcul des substitutions linéaires," *Journ. de Math.* (5), **6** , 73-128.

STEIN, J. 1914 *Beiträge zur Matrizenrechnung mit Anwendung auf die Relativitaätstheorie*, Leipzig.

STICKELBERGER, R. 1874 *De problemate quodam ad duarum formarum bilinearium vel quadraticarum transformationem pertinente*. Diss. Inaug. Berolini.

1879 "Ueber Schaaren von bilinearen und quadratischen Formen," *Crelle*. **86**, 20-43.

1881 *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen*. Leipzig.

STONE, M.H. 1929 "Linear transformations in Hilbert space", *Proc. of the national academy of science*.

STUDY, E. 1889a "Ueber Systeme von complexe Zahlen," *Göttingen Nachr.,* 237-68.

1889b "Complexe Zahlen und Transformationsgruppen," *Ber. k. Sächs. Ges.d.Wiss. Leipzig,* 177-227.

1891 "Recurrirende Reihen und bilineare Formen," *Monatshefte f. Math. u. Physik,* **2**, 23-54.

1896 "Altere und neuere Untersuchungen über systeme complexer Zahlen," *Mathematical Papers read at the International Mathematical Congress* (Chicago, 1893), New York, 387-81.

1898 "Theorie der gemeinen und höheren komplexer Grössen," *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften,* I, A, **4**, 147-183.

STURM, C ; 1829 "Extrait d'un mémoire sur l'intgération d'un système d'équation différentielles linéaires, présenté à l'Académie des Sciences le 27 Juillet 1829 par M. Sturm", *Bull. des sciences mathématiques* **12**, 313-322.

SYLVESTER, J.J. 1851 "Enumeration of the contects of lines and surfaces of the second order ; on the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions." *Phil. Mag.* **116**,295, 415,1851.

1881a "On Tchebycheff's Theory of the Totality of the Prime Numbers Comprised With Given Limits", *American Journal of Mathematics* 4 (1881) : 230-47, *Mat. Papers J.J.S.,* **3** : 530-45

1881b "Note on the Theory of Simultaneous Linear Differential or

		Difference Equations with Constant Coefficients," *American Journal of Mathematics* 4 : **324**, *Math Papers J.J,S,* **3** : 554
	1882a	"Sur les puissances et les racines de substitutions linéaires," *C.R. Ac. d. Sci. Paris,* **94**, 55-59.
	1882b	"Sur les Racines des Matrices unitaires." *C.R. Ac. d. Sci. Paris,* **94**, 396-99.
	1882c	"A word on Nonions." *John Hopkins University Circulars,* **1** ; 241-42.
	1883a	"On the equation to the Secular Inequalities in the Planetary Theory." *Phil. Mag.* **16** (Mars 1883): 267-69.
	1883b	"Sur les quantités formant un groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton,' *C.R. Ac. d. Sci. Paris,* **97**, 1336-40.
	1883c	"On Quaternions, Nonions, Sedenions, etc.," *John Hopkins University Circulars,* **2** ; 7-9.
	1883d	"Sur les quantités formant un groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton,' *C.R.,* **98**, 273-76, 471-75.
	1884a	"Sur les quantités formant un groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton,' *C.R.,* **98**, 273-76 ; 471-75.
	1884b	"On the Three Laws of Motion in the World of Universal Algebra." *John Hopkins University Circulars,* **3** ; 33-34.
	1884c	"On involutants and other allied species of invariants to matrix systems." *John Hopkins University Circulars,* **9-12** ; 34, 35.
	1884d	"Lectures on principles of universal algebra", *American Journal of Mathematics,* **VI***, 270-286.*
	1904-12	*The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester,* Ed. H.F. Baker. 4 vol.. Cambridge : University Press ; Reimpression ed., New York : Chelsea Publishing Co., 1973
TABER, H.	1889	"On the Theory of Matrices." *American Journal of Mathematics* **11** : 337-95.
	1891	"On the matrical equation $\varphi\Omega = \Omega\varphi$,". *Proc Amer. Acad. Boston*. **26**, 64-66.
	1893	"On a theorem of Sylvester's relating to non-degenerate matrices", *Proc. Amer. Acad. Boston,* **27**, 46-55.
	1894	"On the automorphic linear transformation of a bilinear form," *Proc. Amer. Acad. Boston*, **29**, 371-381.
	1897	"Notes on the theory of bilinear forms," *Bull. Amer. Math. Soc*. **3**, 156-164.
	1916	"Conditions for the complete reducibility of groups of linear substitutions" *Amer. Journ. Math*. **38**, 337-372.
TAIT, P.G.	1867	*An elementary treatise on quaternions*, Oxford. Trad. Fr. Plarr, 1882-1884.
TATON, R.	1986	"Les débuts de la carrière mathématique de Lagrange. La période turinoise (1736-1766). *Symposia mathematica,* **27** (Bologna) 123-146.
TELKES, E.	1991	"Présentation de la Faculté des sciences et de son personnel, à Paris (1901-1939)", *Rev. hist. sci.* 1991, **44**. 451-475.
TRUESDELL, C.	1960	"The rational mechanics of flexible or elastic bodies, 1638-1788," *Leonhardi Euleri Opera Omnia* (2) **11**, Part. II, Zurich.
TURNBULL, H.W.	1928a	*The theory of determinants, matrices, and invariants*. London.
	1928b	*"Non commutative algebra", Math. Gas*. **14**, 12-22.
	1928c	"On differentiating a matrix," *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2) **1**, 111-128.
	1931	"The invariant theory of a general bilinear form," *Proc. London*

		Math. Soc (2) **33**, 1-21.
	1932	*An introduction to the theory of Canonical Matrices*. London
TYRDA, J.	1971	"On the origin of the theory of matrices", *Acta Historiae Rerum Naturalium necnon technicarum,* Prague, 335-354.
VAHLEN, K.T	1901	"Arithmetische theorie der formen," *E.M.W.* I.1.C.2.
VASCHY	1893	"Intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants," *C.R*. **116**, 491-493.
VERDET, E.	1866	"Introduction aux Oeuvres de Fresnel" in Oeuvres de Fresnel, t. **I**, IX-XCIX.
VESSIOT	1901	"Gewohnliche Differentialgleichungen*," EMW*, t.**IIa**, 4b, 262-275.
VAN DER WAERDEN, B.L.	1930	*Moderne Algebra*. Springer.
	1977	*A history of algebra*, Springer.
VARINEAU, V.J.	1940	*An extension of the theory of matrices with elements in a principal ideal ring*. Univ. of Wisconsin Libraries
VILLAT, H.	1922	"Camille Jordan," *Journal de mathématiques*, **(9), 1**, 1-5.
VOGHERA, G.	1928	"Sulla forma canonical delle matrici," *Boll. Un. mat. Ital.* **7**, 32-34.
VOGT, H.	1919	"Réduction à une forme normale d'un système d'équations différentielles simultanées linéaires à coefficients constants," *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4^{e} série, **XIX**, 201.
	1923	"Sur les systèmes d'équations différentielles simultanées linéaires à coefficients constants," *Bull. soc. math. France*, **51**, 1-16.
VON NEUMANN	1929a	"Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren", *Math. Ann.,* **102**, 49-131.
	1929b	"Ueber analytische Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen", *Math. Zeitschr*. t. **XXX**, 3-42.
VOSS, J.	1889	"Uber die conjugirte Transformation einer bilinearen Form in sich selbst," *Münch. Ber*. **19**, 175-211.
	1890	"Uber die mit einer bilinearen Form vertauschabren Formen," *Münch. Ber*. **19**, 283-300.
WEBER, H.	1898	*Lehrbuch der Algebra*, 2e ed. Brunswick.
WEDDERBURN, J. H. M.	1903	"On the applications of quaternions in the theory of differential equations," *Trans. Roy. Soc. Edinb.* **40**, 709-721.
	1904	"A theorem on finite algebras. *Trans. Amer. Math. Sc*. **6**, 349-352.
	1907	"On hypercomplex number systems," *Proc. London Math. Soc*. **6**, 77-118.
	1913	"Note on the rank of a symmetrical matrix," *Annals of Math*. (2) **15** ,29.
	1915	"On matrices whose coefficients are functions of a single variable," *Trans. Amer. Math. Soc*. **16**, 328-322.
	1934	*Lectures on Matrices.* American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. **17**., American Mathematical Society, New York.
	1938	"The canonical form of a matrix," *Ann. of M*ath. IIs, vol. **39**, 178-180.
WELLSTEIN, J.	1903	"Ueber die Frobeniusschen Kovarianten einer Bilinearform," *Arch. der Math. u. Phys.* (3) **5,** 229-241.
	1909	"Die Dekomposition für Matrizen," *Gött. Nachr.* 77-99
	1930	"Uber summetrische, alternierende und orthogonale Normalformen von Matrizen," *Crelle* **163**, 166-182.
WEIERSTRASS, K.	1857	"Akademische Antrittsrede". *Monatsber. Preuss. Akad. Wiss.*

		Berlin, 348-351 ; Weierstrass, K. Mathematische Werke. Bd. 1. S. 223-226.
	1858	"Ueber ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem," *M'ber. Akad. der Wiss. Berlin,* 1858 = *Werke 1* (Berlin, 1894), 233-246.
	1868	"Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen," *M'ber. Akad. der Wiss. Berlin,* = Werke 1 (Berlin 1894) 233-246.
	1879	"Nachtrag zu der am 4. märz 1858 in der Königl. Akademie der Wissenschaften gelesen Abhandlung : über ein die homogenen functionen zweiten grades betreffendes theorem". Weierstrass Werke III 139-148,
	1895	"Bemerkungen zur Integration eines Systems linearer Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten," [Communiqué à l'académié de Berlin le 18 octobre 1875] *Werke 2* (Berlin, 1895), 75-76.
WEYL, H.	1918	*Raum, Zeit, Materie*. Vorlesung über allgemeine Relativitätstheorie. Berlin.
	1923	*Mathematische Analyse des Raumproblems,* Vorlesungen gehalten in barcelona und Madrid. Springer.
	1928	*Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Leipzig?
WEYR, E.	1880	"Verification der Multiplicationsformel für Determinanten, *Sitz. Ges. d. Wiss. Prag, 55-56*
	1884a	"Sur la théorie des quaternions," *C.R. Ac. d. Sci. Paris,* 98, 906-8, 1320-3.
	1884b	'"O reseni linearnich rovnic", *Casopis*, **XIV**, 101-110, 149-159.
	1884c	"O zakladni vete v theorii matric", *Sitzb. K. Böhm. Ges. d. Wissens*. 148-152.
	1885a	"Sur la théorie des matrices," *C.R. Ac. d. Sci. Paris,* **100**, 787-89.
	1885b	'"Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces," *C.R. Ac. d. Sci. Paris,* **100**, 966-69.
	1887a	"Notes sur la théorie des quantités complexes formées avec *n* unités principales". *Bull. sci. math.* **XVI** *(1887), 205-215.*
	1887b	"O binarnych matricich", *Vestnik kral. c. spolecnosti nak, r.*
	1887c	"Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices," *S'ber. d. K. Böhm. Ges.d.Wiss. Prag.,* 616-8.
	1889	"O theorii forem bilinearnych". *Spisu poctenych jubilejni cenou kral. c. spolecnosti nauk c. II. V Praze. 1889.*
	1890	"*Zur Theorie der bilinearen Formen," Monatshefte für Mathematik und Physik, 1. Jahrgang. 161-235.*
WHITEHEAD, A.N.	1898	*Universal algebra,* vol. 1. Cambridge.
WINTNER, A.	1929	*Spektraltheorie der unendlichen Matrizen*. Leipzig.
WIRTH, J.	1906	*Ueber die Elementarteiler einer linearen Substitution*, Freiburg.
WUSSING, H.	1970	"Frobenus, Georg Ferdinand*in* Gillispie, C. C., ed. *Dictionary of Scientific Biography* . 18 vols. New York: Scribner
YVON-VILLARCEAU, A.	1870	"Note sur les conditions des petites oscillations d'un corps solide de figure quelconque et la théorie des équations différentielles linéaires." *Comptes rendus Acad. Sci. Paris* **71**. 762-766.
ZERNER, M.	1991	"Le règne de Joseph Bertrand (1874-1900), *in* H. Gispert, *La France Mathématique. La société Mathématique de France (1870-1914)*, Paris, 1991.