Etude asymptotique et simulation numérique de la propagation laser en milieu inhomogène

Marie Doumic
Directeurs de thèse : François Golse et Rémi Sentis

vendredi 20 mai 2005

Plan

Introduction : Cadre physique et obtention des équations

Partie I : Approximation de l'équation de Klein-Gordon

1. Problème exact et estimation d'énergie
2. Approximation WKB et analyse asymptotique
3. Résultats d'approximation dans divers cas

Partie II : Problème aux limites pour la propagation oblique

1. Problème considéré
2. Problème sur le demi-espace
3. Problème sur le quart d'espace

Partie III : Simulation numérique de l'équation d'advection-Schrödinger

1. Présentation du schéma
2. Propriétés du schéma
3. Résultats numériques

Prolongements et perspectives

Introduction : cadre physique et obtention des équations

1. Principaux ordres de grandeur

durée de l'impulsion	$\tau = 19\ ns$
vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3.10^{10}\ cm.s^{-1}$
longueur d'onde du laser	$\lambda_0 = 0,35\ \mu m$
pulsation laser	$\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0 = 5,4.10^{15}\ s^{-1}$
densité électronique critique à λ_0	$n_{cr} = 1.1.10^{21} cm^{-3}$
largeur typique d'un faisceau	$600\ \mu m$
largeur typique d'un speckle	$L = 3\ \mu m$
temps caractéristique de variation de l'intensité globale du laser	$10^{-10} s$.
temps caractéristique de variation locale de l'intensité laser	$10^{-12} s$.
densité électronique des plasmas étudiés	quelques $10^{20} cm^3$.
températures électroniques	quelques $10^7 K$.

2. Description bifluide d'un plasma

Hypothèses : plasma neutre non collisionnel et non relativiste, 2 espèces de particules : électrons et ions.

• Equations de conservation de la masse pour chaque fluide (n_e, n_i)

• Equation de conservation de l'impulsion pour chaque fluide ($n_e\mathbf{u}_e$, $n_i\mathbf{u}_i$)
Terme d'absorption lié à la collision électron-ion : fréquence de collision électron-ion ν_{ei}

• Equations de Maxwell :

$$\nabla.\mathbf{E} = -4\pi e(n_e - Zn_i)$$

$$\nabla.\mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

avec $\mathbf{J} = e(Zn_i\mathbf{u}_i - n_e\mathbf{u}_e)$, Z degré d'ionisation du plasma.

3. Obtention d'une fermeture pour $\partial_t \mathbf{J}$

Hypothèses :

- $|\mathbf{u}_i| \ll |\mathbf{u}_e|$,

- Polarisation linéaire en $\mathbf{e}_{tr}$:

$$\mathbf{E} = E^r \mathbf{e}_{tr} + \mathbf{E}^s, \quad \mathbf{u}_i^r = 0, \quad |\mathbf{E}^s| \ll |\mathbf{E}^r|.$$

- $\nu_{ei} \ll \omega_0$, $\mathbf{E}^r = \mathbf{E}_1^r e^{-i\omega_0 t} \quad + \; C.C.$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E}^r - \Delta \mathbf{E}^r + (\frac{\omega_0}{c})^2 \frac{n_e}{n_{cr}}\mathbf{E}^r + \frac{\nu_{ei}}{c^2}\frac{n_e}{n_{cr}}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}^r = 0.$$

Avec $N = \frac{n_e}{n_{cr}}$ et $\nu = \frac{\nu_{ei} N}{c}$.

Equation de base de l'ensemble de notre étude :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E}^r - \Delta \mathbf{E}^r + (\frac{\omega_0}{c})^2 N \mathbf{E}^r + \frac{\nu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}^r = 0.$$

4. Comparaison des ordres de grandeur

$c = \frac{\overline{x}}{\overline{t}}$ et $\widehat{t} = \frac{t}{\overline{t}}$, $\qquad \widehat{x} = \frac{x}{\overline{x}}$, $\qquad \widehat{\nu} = \nu \overline{x}$, $\qquad \epsilon = \frac{1}{k_0 \overline{x}}$

Equation de Maxwell adimensionnée :

$$\epsilon^2 (\partial_{\widehat{t}\widehat{t}} \Psi - \Delta_{\widehat{x}} \Psi) + N(\widehat{x})\Psi + \epsilon^2 \widehat{\nu} \partial_{\widehat{t}} \Psi = 0 \,.$$

On prend $\overline{x} = \frac{L_{speck}}{2\pi}$ donc $\epsilon = \frac{\lambda_0}{L_{speck}} \simeq 0.1$

$N = N_0 + \delta N$, $\delta N = O(\epsilon^2)$ si $\epsilon \simeq 0.1$

Donc on prend $\delta N = 0$ pour l'étude théorique et $N_0 = \tilde{N}(\epsilon \widehat{x})$.

$$\frac{\nu_{ei}}{\omega_0} \ll \epsilon, \quad \text{donc} \quad \widehat{\nu} \ll 1.$$

On note $\widehat{\nu} = \epsilon \nu_1$, avec $\nu_1 = O_\epsilon(1)$.

Partie I : Approximation de l'équation de Klein-Gordon

I.1. Problème exact et estimation d'énergie

Problème de base de la partie I : équation de Klein-Gordon :

$$\epsilon^2(\partial_{tt}\Psi - \Delta_x\Psi) + N(x)\Psi + \epsilon^2\nu\partial_t\Psi = 0,\ \Psi_{|t=0} = \Psi^{in},\ \partial_t\Psi_{|t=0} = \chi^{in}. \quad (1)$$

Théorème 1 (Théorème 2.1.3.) *Soit* $S_\epsilon,\ R_\epsilon \in L^\infty\Big(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)\Big)$.
Soit $\Psi_\epsilon \in L^\infty\Big(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^n)\Big) \cap \mathcal{C}_b^1\Big(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^n)\Big)$ *solution de :*

$$\epsilon^2(\partial_{tt}\Psi_\epsilon - \Delta_x\Psi_\epsilon) + N(x)\Psi_\epsilon + \epsilon^2\nu\partial_t\Psi_\epsilon = \epsilon S_\epsilon, \quad (2)$$

$$\Psi_{\epsilon|t=0} = 0 \ dans\ \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

$$\partial_t\Psi_{\epsilon|t=0} = R_\epsilon \ dans\ \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Soit $E_\epsilon(t) = \epsilon^2||\partial_t\Psi_\epsilon||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \epsilon^2||\nabla\Psi_\epsilon||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2||\sqrt{N(.)}\Psi_\epsilon||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

L'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sqrt{E_\epsilon(t)} \leq ||S_\epsilon||_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}t + \epsilon||R_\epsilon||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (5)$$

I.2. Approximation WKB et analyse asymptotique

$$\Psi(t,x) = A(t,x)e^{i\frac{\phi(x)-t}{\epsilon}} + C.C., \quad \Psi_{|t=0} = A^{in}(x)e^{i\frac{\phi(x)}{\epsilon}}, \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned}&\left(|\nabla\phi|^2 - 1 + N\right)A + i\epsilon\left(-2\partial_t A - \nabla\phi\cdot\nabla A - \nabla\cdot(A\nabla\phi)\right)\\&+\epsilon^2\left(\partial_{tt}A - \Delta A - i\nu_1 A + \epsilon\nu_1\partial_t A\right) = 0\,.\end{aligned} \tag{6}$$

On développe asymptotiquement l'amplitude sous la forme :

$$A = A_0 + \epsilon A_1 + ...$$

I.2.Ordre 0 en ϵ. Equation de la phase ϕ : équation eikonale

$$|\nabla\phi(y)|^2 = 1 - N(y)\cdot \tag{7}$$

$$2i[\partial_t A + \nabla\phi\cdot\nabla A + \tfrac{1}{2}(\Delta\phi)A] + i\epsilon\nu_1 A = \epsilon(\partial_{tt}A - \Delta A + \epsilon\nu_1\partial_t A)\,. \tag{8}$$

I.2.Ordre 1 en ϵ. Problème d'advection pour A_0 :

$$\partial_t A_0 + \nabla\phi\cdot\nabla A_0 + \tfrac{1}{2}(\Delta\phi)A_0 = 0, \quad A_{0|t=0} = A^{in}. \tag{9}$$

I.2. On suppose désormais $N \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 < N_0 < N(x) < 1$ (absence de caustique) et ϕ solution régulière univaluée de l'équation eikonale sur l'espace entier.

Théorème 2 (théorème 2.3.1.) *Soit $A^{in} \in H^2(\mathbb{R}^n)$ et $f^{in} \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Soit Ψ solution du problème de Klein-Gordon (1) avec :*

$$\Psi_{|t=0} = A^{in} e^{i\frac{\phi(x)}{\epsilon}} + C.C. \tag{10}$$

$$\partial_t \Psi_{|t=0} + \nabla\phi \cdot \nabla\Psi_{|t=0} + i\frac{N(x)}{\epsilon}\Psi_{|t=0} = f^{in}(x) e^{i\frac{\phi(x)}{\epsilon}} + C.C. \tag{11}$$

Soit A_0 la solution du problème d'advection (9). Soit $\Psi_\epsilon = A_0 e^{i\frac{\phi(x)-t}{\epsilon}}$. On a, pour $0 \le t \le T$:

$$\epsilon||\partial_t(\Psi - \Psi_\epsilon)||_{L^2}(t) + \epsilon||\nabla(\Psi - \Psi_\epsilon)||_{L^2}(t) + ||\sqrt{N}(\Psi - \Psi_\epsilon)||_{L^2}(t)$$

$$\le \epsilon C(\phi, T)\Big(||A^{in}||_{H^2} T + ||f^{in}||_{L^2}\Big).$$

Cela signifie (cf. théorème 1) : $\sqrt{E_\epsilon} = O(\epsilon)$.

On suppose dans toute la suite que dans la condition (11) on a $f^{in} = \epsilon f_1^{in}$.

I.2. Ordre 2 en ϵ : approximation paraxiale. A_1 est solution de :

$$2i[\partial_t A_1 + \nabla\phi(\epsilon x)\cdot\nabla A_1] + i(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1)A_0 = (\partial_{tt} - \Delta)A_0, \quad A_{1|t=0} = 0.$$

Pour $A_\epsilon = A_0 + \epsilon A_1$ il vient :

$$\boxed{\text{“équation d'advection-Schrödinger” :}}$$

$$2i(\partial_t A_\epsilon + \nabla\phi\cdot\nabla A_\epsilon) + \epsilon\nabla\cdot\left[\left(I - (\nabla\phi)^{\otimes 2}\right)\nabla A_\epsilon\right] =$$
$$[-i(\Delta\phi + \epsilon\nu_1) + \tfrac{1}{4}\epsilon\left(\Delta\phi\right)^2 + \tfrac{1}{2}\epsilon\nabla\phi\cdot\nabla\Delta\phi]A_\epsilon \quad \text{mod } O(\epsilon^2), \quad A_{\epsilon|t=0} = A^{in}. \tag{12}$$

I.3. Résultats d'approximation dans divers cas

On note dans toute la suite Ψ l'unique solution du problème (1)(10)(11).

I.3.a. Rayons droits.

$$\nabla\phi \equiv \overrightarrow{k} \quad \text{où} \quad |\overrightarrow{k}| = \sqrt{1 - N_0} = \text{cste} \in]0,1[.$$

(12) devient : $2i(\partial_t A_\epsilon + \overrightarrow{k}\cdot\nabla A_\epsilon) + \epsilon\nabla\cdot\left[\left(I - \overrightarrow{k}^{\otimes 2}\right)\nabla A_\epsilon\right] + i\epsilon\nu_1 A_\epsilon = 0.$

En écrivant $A_\epsilon(t,x) = \mathcal{A}_\epsilon(T = \epsilon t, x - t\overrightarrow{k})$, le problème (12) devient :

I.3.a

$$2i\partial_T \mathcal{A}_\epsilon + \nabla_y \cdot \left[\left(I - \overrightarrow{k}^{\otimes 2} \right) \nabla_y \mathcal{A}_\epsilon \right] + i\nu_1 \mathcal{A}_\epsilon = 0, \quad \mathcal{A}_{\epsilon|T=0} = A^{in}. \qquad (13)$$

Théorème 3 (Théorème 3.3.1.)
*Soit $\nu_1 \geq 0$, soit $0 < |\overrightarrow{k}| < 1$ un vecteur fixé de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la condition $\frac{\epsilon^4 \nu_1^2}{4} < 1 - |\overrightarrow{k}|^2 = N$ et tel que $|\nabla \phi| = \overrightarrow{k}$.
Soit $A^{in} \in H^3(\mathbb{R}^n)$ et $f_1^{in} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Soit $\mathcal{A}_\epsilon$ l'unique solution du problème (13). Cette solution s'exprime de façon exacte par transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}_y \Big(\mathcal{A}_\epsilon(T,.) \Big)(\xi) = \mathcal{F}_y(A^{in}) e^{-\frac{\nu_1}{2} T - \frac{iT}{2} \left(|\xi|^2 - |\overrightarrow{k} \cdot \xi|^2 \right)}.$$

Soit $\Psi_\epsilon = \Psi - \mathcal{A}_\epsilon(\epsilon t, x - t\overrightarrow{k}) e^{i \frac{\overrightarrow{k} \cdot x - t}{\epsilon}} + C.C.$ L'estimation suivante est vérifiée :

$$||\Psi_\epsilon||_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \epsilon^2 C t \Big(||f_1^{in}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} + ||A^{in}||_{H^3(\mathbb{R}^n)} \Big) \qquad (14)$$

Cela signifie (cf. théorème 1) : $\sqrt{E_\epsilon} = O(\epsilon^2)$.

I.3.b. Rayons faiblement courbes.

On fait dans toute la suite l'hypothèse suivante :
$N = \tilde{N}(\epsilon x)$, avec $0 < N_0 < \tilde{N}$ et $\phi(x) \to \phi(\epsilon x)/\epsilon$ est solution univaluée régulière sur tout le domaine de l'équation eikonale $|\nabla\phi(y)|^2 = 1 - \tilde{N}(y)$.

Théorème 4 (Théorème 4.3.5.)
Soit $A^{in} \in H^8(\mathbb{R}^n)$. Soit $A_\epsilon \in L^\infty\Big(\mathbb{R}_+; H^8(\mathbb{R}^n)\Big)$ l'unique solution du problème approché (12) :

$$2i[\partial_t A_\epsilon + \nabla\phi(\epsilon x) \cdot \nabla A_\epsilon] + i\epsilon\Big(\Delta\phi(\epsilon x) + \nu_1\Big)A_\epsilon + \epsilon\nabla \cdot \Big[(I - \nabla\phi^{\otimes 2}(\epsilon x))\nabla A_\epsilon\Big] = 0\,,$$
$$A_{\epsilon|t=0} = A^{in}\; dans\, \mathbb{R}^n.$$

Soit $\Psi_\epsilon = \Psi - A_\epsilon\Big(t,x)e^{i\frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}} + C.C.$
Pour $T > 0$ fixé, l'inégalité suivante est vérifiée, indépendamment de ν_1 :

$$||\Psi_\epsilon||_{L^\infty\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^n)\big)} + \epsilon||\partial_t\Psi_\epsilon||_{L^\infty\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^n)\big)} + \epsilon||\nabla\Psi_\epsilon||_{L^\infty\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^n)\big)}$$
$$\leq C(N_0,\phi)\Big(\epsilon^2||f_1^{in}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \epsilon^2 Max(1,T^5)||A^{in}||_{H^8(\mathbb{R}^n)}\Big). \qquad (15)$$

Cela signifie (cf. théorème 1) : $\sqrt{E_\epsilon} = O(\epsilon^2)$.

I.3.c. Cas quasi-statique. Dans la suite, on note $\overrightarrow{k} = \nabla\phi(\epsilon x)$, $T = \epsilon t$ et on suppose $\nu_1 > 0$ constant. Le problème (12) devient :

$$2i\left[\epsilon\partial_T \tilde{A}_\epsilon + \overrightarrow{k}\cdot\nabla\tilde{A}_\epsilon\right] + i\epsilon(\Delta\phi(\epsilon x)+\nu_1)\tilde{A}_\epsilon + \epsilon\Delta_\perp\tilde{A}_\epsilon = 0, \quad \tilde{A}_{\epsilon|T=0} = A^{in}. \tag{16}$$

où le laplacien orthogonal aux rayons, noté $\Delta_\perp$, est défini par :

$$\Delta_\perp = \nabla\cdot\left[\left(I - \frac{\overrightarrow{k}^{\otimes 2}}{|\overrightarrow{k}|^2}\right)\nabla\right].$$

Théorème 5 (Théorème 5.3.2.)
Soit $A^{in}\in H^8(\mathbb{R}^n)$ et $f_1^{in}\in H^1(\mathbb{R}^n)$. Soit $\tilde{A}_\epsilon$ l'unique solution du problème approché (16).On suppose de plus que A^{in} vérifie l'hypothèse :

$$||\overrightarrow{k}\cdot\nabla A^{in}||_{H^2(\mathbb{R}^n)} = O(\epsilon).$$

Soit $\Psi_\epsilon(t,x) = \Psi - \tilde{A}_\epsilon(\epsilon t, x)e^{i\frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}}$. L'estimation suivante est vérifiée :

$$||\Psi_\epsilon||_{L^\infty(0,T_0;L^2(\mathbb{R}^n))} \le \epsilon^2||f_1^{in}||_{L^2} + \epsilon^2 Max(1,T_0^5)\left(||A^{in}||_{H^8(\mathbb{R}^n)} + \frac{||\overrightarrow{k}\cdot\nabla A^{in}||_{H^2}}{\epsilon}\right).$$

I.3.d. Demi-espace $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}},\ \mathbf{x_1} \geq \mathbf{0}\}$.

Soit $\Gamma = \partial\mathcal{D} = \{x_1 = 0\}$, $N_{|\Gamma} = N_b < 1$, $\overrightarrow{k}_{|\Gamma} = \nabla\phi_{|\Gamma} = \overrightarrow{k}^b$ constants et $k_{x_1} \geq k_{x_1}^{inf} > 0$. Soit Ψ l'unique solution du problème (1)(10)(11) sur $\mathcal{D}$ complété par une condition au bord de type onde entrante :

$$(k_{x_1}^b\partial_t - \partial_{x_1})\Psi_{|x_1=0} = \Big(-\frac{2ik_{x_1}^b}{\epsilon}A^b + g^b\Big)e^{i\frac{\overrightarrow{k}^b\cdot x - t}{\epsilon}}. \tag{17}$$

On complète (12) par une condition de Dirichlet déduite de (17) :

$$2ik_{x_1}^b(A_{\epsilon|x_1=0} - A^b) = -\epsilon g^b + \epsilon\Big((k_{x_1}^b + \frac{1}{k_{x_1}^b})\partial_t + \frac{\overrightarrow{k}^b_\perp}{k_{x_1}^b}\cdot\nabla_\perp\Big)A^b. \tag{18}$$

Théorème 6 (Théorème 6.4.7.)
Soit $A^b, g^b \in \mathcal{C}_b^\infty\Big(\mathbb{R}_t^+; \mathcal{C}_c^\infty(\Gamma)\Big)$, *avec* $Supp(A^b,\ g^b) \subset \mathbb{R}_t^{+*} \times B_\Gamma(0, R)$, $R > 0$.
Soit A_ϵ *l'unique solution du problème approché (12) complété par (18).*
Soit $\Psi_\epsilon = \Psi - A_\epsilon\Big(t, x\Big)e^{i\frac{\phi(\epsilon x)/\epsilon - t}{\epsilon}} + C.C.$ *L'inégalité suivante est vérifiée :*

$$E_\epsilon(t) \leq \epsilon^4 C(\phi, N_0)(e^t - 1)(1 + t^{10})\Bigg(||g^b||^2_{\mathcal{C}_b^6(\mathbb{R}_t^+\times\Gamma)} + ||A^b||^2_{\mathcal{C}_b^7(\mathbb{R}_t^+\times\Gamma)}\Bigg).$$

Partie II : Problème aux limites pour la propagation oblique

II.1. Problème considéré

Rappel : modèle d'origine : équation de Klein-Gordon (1) :

$$\epsilon_I^2(\partial_{tt}\Psi - \Delta_x\Psi) + N(x)\Psi + \epsilon_I^2\nu_I\partial_t\Psi = 0.$$

Equation de Helmholtz : cas stationnaire de l'équation de Klein-Gordon :

$$\epsilon^2\Delta\psi + \psi + i2\nu_t\epsilon\psi = 0.$$

Lien avec la partie I et les coefficients ν_I et ϵ_I.

On a $\Psi = \psi e^{-i\frac{t}{\epsilon_I}}$ avec Ψ solution de Klein-Gordon. D'où, en notant $N = N_0 + \delta N$ et en supposant N_0 constante :

$$\epsilon_I = \epsilon\sqrt{1 - N_0},$$

$$\nu_t = \nu + i\mu = \frac{1}{2}\frac{\nu_I}{\sqrt{1 - N_0}} + \frac{i}{2\epsilon}\frac{\delta N}{1 - N_0}.$$

II.1. Hypothèse : propagation droite le long du vecteur unitaire $\overrightarrow{k}$.

On a aussi $\overrightarrow{k} = \frac{\overrightarrow{k}_I}{|\overrightarrow{k}_I|}$. On note

$$z = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{k} \quad X = \overrightarrow{x} - (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{k})\overrightarrow{k}, \quad \nabla_\perp = \nabla - \overrightarrow{k}(\overrightarrow{k}.\nabla).$$

Avec $\psi = u \exp(\frac{i\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{x}}{\epsilon})$, l'équation devient :

$$\epsilon(2i\nu_t u + 2i\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{\nabla} u) + \epsilon^2 \Delta_\perp u = -\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} u.$$

Hypothèse qui sera vérifiée a posteriori : u varie lentement selon z.

Equation de base des parties II et III : équation de Schrödinger oblique :

$$i\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{\nabla} u + \frac{\epsilon}{2}\Delta_\perp u + i\nu_t u = 0. \tag{19}$$

Objectif : étudier le problème ci-dessus avec un angle d'incidence avec le bord du domaine $\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{e}_x$ quelconque.

II.2. Problème sur le demi-espace $\mathcal{D} = \{x \geq 0,\ y \in \mathbb{R}\}$

On cherche u solution du problème suivant :

$$i\overrightarrow{k} \cdot \nabla u + \frac{\epsilon}{2}\Delta_{\perp} u + i\nu_t u = 0 \ \ \forall x > 0, \ \ y \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

$$(\epsilon \overrightarrow{n} \cdot \nabla_{\perp} + 2i\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{n})(u - u^{in})_{|x=0} = 0. \tag{21}$$

$\nu_t = \nu + i\mu$ et $\overrightarrow{k} = k_x \overrightarrow{e}_x + k_y \overrightarrow{e}_y$.

II.2.a. Estimation d'énergie.

Théorème 7 (Théorème 7.2.1.) . *Si $u \in H^1_{x,loc}(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}))$ est solution, elle est unique. Il existe C indépendant de ν et μ tel que :*

$$\iint_{\mathcal{D}} 2\nu |u|^2 + \int_{\{x=0\}} |\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{n}||u|^2 \leq C \int_{\{x=0\}} |(i\epsilon \overrightarrow{n} \cdot \nabla_{\perp} - 2\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{k})u^{in}|^2.$$

Preuve : Produit scalaire de l'équation par u et intégration par parties.

II.2.b. Transformée de Fourier.

On suppose dans toute la suite $\nu > 0$ constant et $\mu = 0$.
On pose $2k_x g = (-i\epsilon \overrightarrow{e}_x \cdot \nabla_\perp + 2k_x)u^{in}$.
Le problème (20)(21) s'écrit :

$$i(k_x\partial_x + k_y\partial_y)u + \frac{\epsilon}{2}(k_x^2\partial_{yy}^2 - 2k_xk_y\partial_{xy}^2 + k_y^2\partial_{xx}^2)u + i\nu u = 0 \ \ sur \ \ \mathcal{D}, \quad (22)$$

$$(-i\epsilon k_x(k_x\partial_y - k_y\partial_x) + 2k_x)u_{|x=0} = 2k_x g \ \ sur \ \ \{0\} \times \mathbb{R}. \quad (23)$$

On factorise le polynôme caractéristique de l'équation :

$$P(X,Y) = i(k_xX + k_yY) + \frac{\epsilon}{2}(k_x^2Y^2 - 2k_xk_yXY + k_y^2X^2) + i\nu.$$

$$P(X,Y) = \frac{\epsilon k_y^2}{2}\Big(X - R_+(Y)\Big)\Big(X - R_-(Y)\Big).$$

Soit $\mathcal{F}(U;\xi,\eta)$ transformée de Fourier totale d'une fonction U, avec :

$$x \rightarrow \xi \qquad \text{et} \qquad y \rightarrow \eta.$$

II.2.b On note v l'extension $v = u\mathbf{1}_{x\geq 0}$. v vérifie :

$$\Big(i\xi - R_+(i\eta)\Big)\Big(i\xi - R_-(i\eta)\Big)\mathcal{F}(v;\xi,\eta) = \frac{2ik_x}{\epsilon k_y^2}\mathcal{F}_y(g;\eta) - i(\frac{k_x}{k_y}\eta - \xi)\mathcal{F}(u|_{x=0}),$$

avec :

$$R_\pm(i\eta) = i\frac{k_x}{k_y}\eta - i\frac{k_x}{\epsilon k_y^2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 2\frac{\epsilon k_y \eta}{k_x^2} + 2i\nu\frac{\epsilon k_y^2}{k_x^2}}\right).$$

Comme $\nu > 0$, $\mathcal{R}e(R_+) > 0$ pour tout η.

On peut diviser l'équation par $P(i\xi, i\eta)$:

$$\mathcal{F}(v;\xi,\eta) = \frac{M_+(\eta)\mathcal{F}_y(u_{|x=0};\eta) + N(\eta)\mathcal{F}_y(g;\eta)}{i\xi - R_+(i\eta)} + \frac{M_-(\eta)\mathcal{F}_y(u_{|x=0};\eta) - N(\eta)\mathcal{F}_y(g;\eta)}{i\xi - R_-(i\eta)}.$$

II.2.b

Théorème 8 (Théorème 7.2.2.) *Il existe une unique distribution u solution du problème (22)(23). Elle s'écrit :*

$$\mathcal{F}_y(u)(x,\eta) = \frac{2\mathcal{F}_y(g)(\eta)}{1+\sqrt{1-2\frac{\epsilon k_y \eta}{k_x^2}+2i\nu\frac{\epsilon k_y^2}{k_x^2}}} e^{R_-(i\eta)x}.$$

De plus, elle vérifie : $\Big(\partial_x - R_-(i\eta)\Big)\mathcal{F}_y(u)(x,\eta) = 0.$

Preuve : si V est une distribution tempérée qui s'écrit $V(\xi,\eta) = \frac{\alpha_+(\eta)}{i\xi - r_+(i\eta)}$ avec α_+ distribution tempérée et $\mathcal{R}e(r_+) > 0$, alors :

$$V(\xi,\eta) = \mathcal{F}_x\Big(\alpha_+(\eta)e^{r_+(i\eta)x}\mathbf{1}_{x\leq 0}\Big).$$

Rem. : on vérifie que le terme $\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}u$ est négligeable.

Corollaire : Si $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{C}_x^b(\mathbb{R}_+, L_y^2(\mathbb{R}))$, et on a pour C indépendant de ν :

$$||u||_{L_x^\infty(\mathbb{R}_+,L_y^2(\mathbb{R}))} \leq C||g||_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}.$$

II.3. **Problème sur le quadrant** $\mathcal{Q} = \{x \geq 0,\ y \geq 0\}$

On cherche U solution du problème (22)(23) sur le quadrant :

$$i(k_x\partial_x + k_y\partial_y)U + \frac{\epsilon}{2}(k_x^2\partial_{yy}^2 - 2k_xk_y\partial_{xy}^2 + k_y^2\partial_{xx}^2)U + i\nu U = 0 \ \ sur\ \mathcal{Q}, \quad (24)$$

$$i\epsilon k_y(k_x\partial_y - k_y\partial_x)U_{|x=0} + 2k_xU_{|x=0,\,y\geq 0} = g_+ \quad sur\ \{0\} \times \mathbb{R}_+. \quad (25)$$

On a toujours $\nu > 0$ constant et $\overrightarrow{k} = k_x\overrightarrow{e}_x + k_y\overrightarrow{e}_y$.

Il faut compléter le problème par une condition au bord $y = 0$.

On note u la solution sur le demi-espace du problème (22)(23), avec g le prolongement de g_+ par 0 sur $\mathbb{R}_-$.

2 cas : $k_y > 0$ ou $k_y < 0$.

II.3.a. Condition au bord y=0

On peut factoriser $P(X,Y)$ par rapport à Y :

$$P(X,Y) = i(k_x X + k_y Y) + \frac{\epsilon}{2}(k_x^2 Y^2 - 2k_x k_y XY + k_y^2 X^2) + i\nu.$$

$$P(\partial_x, \partial_y) = \frac{\epsilon k_y^2}{2}\Big(\partial_y - A_+(\partial_x)\Big)\Big(\partial_y - A_-(\partial_x)\Big),$$

avec :

$$A_\pm(\partial_x) = \frac{k_y}{k_x}\partial_x - i\frac{k_y}{\epsilon k_x^2}\left(1 \pm \sqrt{1 + 2i\frac{\epsilon k_x}{k_y^2}\partial_x + 2i\nu\frac{\epsilon k_x^2}{k_y^2}}\right).$$

On prend comme condition en $y = 0$:

$$\Big(\partial_y - A_+(\partial_x)\Big)U_{|y=0,x>0} = 0. \tag{26}$$

Cette condition est dite :

1. *transparente* si $U = u_{|y>0}$,
2. *absorbante* si $U \approx u_{|y>0}$.

II.3.b. Existence, unicité, lien avec le problème sur le demi-espace.

Théorème 9 (Théorème 7.3.2.) *Soit $g_+ \in H^{-1/2}(\mathbb{R}_+)$ à support dans $\mathbb{R}_+^*$. Le problème (24)(25) posé sur le quadrant $\mathcal{Q} = \{x \geq 0,\ y \geq 0\}$ et complété par la condition (26) admet une unique solution $U \in C_b(\mathbb{R}_x^+; L^2(\mathbb{R}_y^+))$. De plus, U s'écrit, avec $u_0(y) = u(0,y)$:*

$$U(x,y)\mathbf{1}_{y\geq 0} = \mathcal{F}_y^{-1}\left(\left\{\widehat{K}(\eta)\mathcal{F}_y(u_0\mathbf{1}_{y\geq 0})(\eta) + \widehat{G}(\eta)\right\}e^{R_-(i\eta)x}\right)\mathbf{1}_{y\geq 0},$$

où $\widehat{K} = -\frac{R_- - i\frac{k_x}{k_y}\eta}{R_+ - R_-}$ et $\widehat{G} = -\frac{2ik_x}{\epsilon k_y^2}\frac{\mathcal{F}_y(g)}{R_+ - R_-}$.

1. *si $k_y > 0$, U est la restriction de u sur le quadrant : $U = u_{|\{y\geq 0\}}$.*
2. Si $k_y < 0$: *si on prend $g(y) = h(y-a)$ avec $a > 0$, on obtient :*

$$\lim_{a\to+\infty} ||(u-U)\mathbf{1}_{y\geq 0}||_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L_y^2(\mathbb{R}))} = 0.$$

Preuve : de même que pour le demi-espace, par transformée de Fourier de l'équation et division par P qu'on factorise, on obtient une équation de la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{x,y}(U\mathbf{1}_{x\geq 0}\mathbf{1}_{y\geq 0};\xi,\eta) &= \frac{B_+(\eta)}{i\xi - R_+(i\eta)} + \frac{B_-(\eta)}{i\xi - R_-(i\eta)} \\ &+ \frac{C_+(\xi)}{i\eta - A_+(i\xi)} + \frac{C_-(\xi)}{i\eta - A_-(i\xi)}.\end{aligned}$$

Cela nous permet de résoudre la question de l'existence et de l'unicité d'une solution. Puis on estime la différence entre u et U grâce à la formulation exacte de U en fonction de u obtenue dans le théorème 9.

Partie III : Simulation numérique

On prend $k_y > 0$. On souhaite modéliser le problème suivant :

$$\Big(k_x\partial_x + k_y\partial_y\Big)u - i\frac{\epsilon}{2}\Delta_\perp u + (\nu_0 + \nu_1)u + if(|u|)u = 0,$$

$$(i\epsilon\overrightarrow{n} \cdot \nabla_\perp - 2k_x)(u - u^{in}) = 0,$$

avec $f(w) = \gamma\Big(e^{-\xi w^2} - 1\Big)$ simulant l'interaction avec le plasma (ce terme remplace l'hydrodynamique).

Domaine de simulation :

$$x \in [x_{min}, x_{max}], \quad y \in [y_b, y_u].$$

Grille régulière

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 \quad avec \quad \nu_0 = \inf \nu, \quad \nu_1 = \nu_1(x).$$

$$x \ \rightarrow indice\ n, \quad y \ \rightarrow indice\ j : \ x^{n+1} = x^n + \delta x, \quad u_j^n \approx u(n\delta x, j\delta y).$$

III.1. Présentation du schéma

– Initialisation. On utilise le théorème 8 :

$$\mathcal{F}(u;0) = \frac{2\mathcal{F}(g)}{1+\sqrt{1-2\frac{\epsilon k_y \eta}{k_x^2}+2i\nu_{|x=0}\frac{\epsilon k_y^2}{k_x^2}}}. \tag{27}$$

$$FFT \longrightarrow multiplication\ par\ la\ fonction\ ci-dessus \longrightarrow IFFT$$

– *Etape A :* on passe de u^n à $u^{n,\flat}$ en résolvant sur $[x^n, x^n+\delta x]$ l'équation :

$$(k_x\partial_x + k_y\partial_y)u - i\frac{1}{2}\epsilon\Delta_\perp u + \nu_0 u = 0\,. \tag{28}$$

Grâce au théorème 8, on a :

$$\widehat{u^{n,\flat}}(\eta) = \widehat{u^n}(\eta)e^{R_-(i\eta)\delta x}.$$

– *Etape B :* on passe de $u^{n,\flat}$ à $u^{n,\sharp}$ en résolvant sur $[x^n, x^n+\delta x]$ l'équation :

$$k_x\partial_x u - k_y\partial_y u = 0\,.$$

En pratique on fait les étapes A et B simultanément :

$$\mathcal{F}(u^{n\#}) = \mathcal{F}(u^n)e^{(R_-(i\eta)+i\eta\frac{k_y}{k_x})\delta x}.$$

$$\mathbf{FFT \longrightarrow multiplication\ par\ la\ fonction\ ci-dessus \longrightarrow IFFT}$$

– *Etape C :* on passe de $u^{n,\sharp}$ à u^{n+1} en résolvant sur $[x^n, x^n+\delta x]$, l'équation :

$$k_x\partial_x u + k_y\partial_y u + \nu_1 u + if(|u|)u = 0\,.$$

III.1.a Schéma d'ordre 1 : schéma upwind classique décentré :

$$\frac{k_x}{\delta x}(u_j^{n+1} - u_j^{n\#}) + \frac{k_y}{\delta y}(u_j^{n\#} - u_{j-1}^{n\#}) +$$
$$\left(\nu_1(x^n) + if(|u_{\theta j}^{n\#}|)\right)\left(\frac{u_{\theta j}^{n\#} + u_j^{n+1}}{2}\right) + B_j^n u_j^{n+1} = 0,$$

avec $u_{\theta j}^{n\#} = \theta u_{j-1}^{n\#} + (1-\theta)u_j^{n\#}$ et $\theta = \frac{k_y}{k_x}\frac{\delta_x}{\delta_y}$. On initialise avec $u_{-1}^{n\#} = 0$.

III.1.b Schéma d'ordre 2 : méthode des limiteurs de flux avec fonction de Van Leer :

$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda|+\lambda}{1+|\lambda|}$, évaluée en $\lambda_j = \frac{|u_j^{\#}|^2 - |u_{j-1}^{\#}|^2}{|u_{j+1}^{\#}|^2 - |u_j^{\#}|^2}$.

En notant $F_j = u_j^{\#} + \frac{1}{2}(1-\theta)(u_{j+1}^{\#} - u_j^{\#})\phi(\lambda_j)$, on obtient le schéma :

$$\begin{aligned} &\frac{k_x}{\delta x}(u_j^{n+1} - u_j^{n\#}) + \frac{k_y}{\delta y}(F_j^n - F_{j-1}^n) + \\ &\Big(\nu_1(x^n) + if(|u_{\theta j}^{n\#}|)\Big)\Big(\frac{u_{\theta j}^{n\#} + u_j^{n+1}}{2}\Big) + B_j^n u_j^{n+1} = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

III.1.c Croisement de rayons : il faut évaluer $f(|u|)$. L'énergie laser est

$$|\Psi|^2 = |u^1 e^{i\frac{\overrightarrow{k}1.\overrightarrow{x}}{\epsilon}} + u^2 e^{i\frac{\overrightarrow{k}2.\overrightarrow{x}}{\epsilon}}| = |u^1|^2 + |u^2|^2 + 2\mathcal{R}e\Big(u^1 u^{2*} e^{i\frac{(\overrightarrow{k}1 - \overrightarrow{k}2)}{\epsilon}\cdot\overrightarrow{x}}\Big).$$

Mais l'approximation WKB implique qu'on ne modélise pas les fluctuations de la solution à l'échelle de la longueur d'onde. On prend donc $f(w)$ avec

$$w = \sqrt{|u^1|^2 + |u^2|^2}.$$

Soit le modèle suivant, pour $p = 1, 2$:

$$i\overrightarrow{k}^p \cdot \nabla u^p + \frac{\epsilon}{2}\Delta_\perp^p + i\nu u^p = f(\sqrt{|u^1|^2 + |u^2|^2})u^p.$$

Important : ν_0 ne doit pas être trop petit (explosion).

III.2. Propriétés du schéma

III.2.1. Stabilité

Théorème 10 (Théorème 8.3.1.) *Le schéma numérique du premier ordre est monotone décroissant pour la norme l^2,* i.e. *on a l'inégalité suivante :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \qquad ||(u_j^{n+1})_j||_{l_j^2} \leq ||(u_j^n)_j||||_{l_j^2}. \tag{30}$$

De plus, cette inégalité est stricte si $\nu \neq 0$.

III.2.2. Convergence vers l'équation de Schrödinger classique

Théorème 11 (Théorème 8.3.2) *Si $k_y \to 0$, le schéma converge vers la solution du problème de Cauchy suivant pour l'équation de Schrödinger :*

$$i\partial_x u + \frac{\epsilon}{2}\partial_{yy}^2 u + i\nu u - f(|u|)u = 0, \tag{31}$$

$$u_{|x=0} = g. \tag{32}$$

Petite bibliographie

Justification du modèle physique

[4] J.D. Benamou, O. Lafitte, R. Sentis, I. Solliec, *A Geometrical Optics based numerical Methods for high Frequency electromagnetic Fields Computations near fold Caustics* (part I). J. Comp. Applied Maths, t. 156 p. 93-125 (2003)

[36] W.L. Kruer, *The Physics of Laser-Plasma Interaction,* Addison-Wesley, New-York (1988).

[46] D. Pesme, in *La fusion par confinement inertiel,* Dautray-Watteau, ed. Eyrolles, Paris (1995) : tome I. Interaction laser-matière.

Partie I

[5] T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony, *Model Equations for long Waves in nonlinear dispersive Systems.* Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 272 47-78, 1972.

[18] P. Donnat, *Quelques contributions mathématiques en optique non linéaire.* Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 1994.

[26] E. Dumas, *Periodic multiphase diffractive optics with curved phases.*

Indiana University Mathematics Journal 52 (2003), no. 3, 769–810.
[45] A. Newell *Solitons in mathematics and physics*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia 1985.

Partie II

[3] A. Arnold, *Numerically Absorbing Boundary Conditions for Quantum Evolution Equations*.
[6] R.L. Berger, B.F. Lasinski and *al*, *Theory and three-dimensional simulation of light filamentation.* Phys. Fuids B 5 p2243-2258 (1993).
[27] H. Dym et H.P. McKean, *Fourier Series and Integrals*, 1972.
[29] M.D. Feit, J.A. Fleck, *Beam non paraxiality* J. Opt.Soc.Am. B 5 p633-640 (1988).
[32] V.A. Fock, *Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems.* Pergamon, London (1965)

Partie III

[30] J.L. Feugeas, M. Casanova, R. Sentis, *AMR method for the Simulation of Laser-plasma Ineraction with full nonlinear Hydrodynamics* Proc. IFSA Conf. (Kyoto, sept.2001) K.A. Tanaka, D.D. Meyerhofer, ed. Elsevier (2001)
[42] Lévêque, *Numerical Methods for Linear Equations.*
[48] H.A. Rose, *Laser beam deflection by flow.* Phys. Plasmas 3(1996).