



**HAL**  
open science

# Construction et analyse de mesures continues de la contrôlabilité pour une classe de systèmes à paramètres répartis

Philippe Benchimol

► **To cite this version:**

Philippe Benchimol. Construction et analyse de mesures continues de la contrôlabilité pour une classe de systèmes à paramètres répartis. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 1995. Français. NNT: . tel-00142504

**HAL Id: tel-00142504**

**<https://theses.hal.science/tel-00142504>**

Submitted on 19 Apr 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

préparée au

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS

en vue de l'obtention du

Doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse

Spécialité : Automatique

par

**Philippe BENCHIMOL**

Maître ès-sciences

---

## CONSTRUCTION ET ANALYSE DE MESURES CONTINUES DE LA CONTRÔLABILITÉ POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES À PARAMÈTRES RÉPARTIS

---

MM.	J.	BERNUSSOU	}	Président
	G.	MONTSENY		Directeur de thèse
	J.	BURGER	}	Rapporteurs
	J. P.	HUMEAU		
	J. P.	BABARY	}	Examineurs
	J. P.	RAYMOND		

Rapport LAAS N° : 95061

Cette thèse a été préparée au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS  
7, avenue du Colonel Roche 31 077 Toulouse Cedex

# Avant propos

Ce mémoire a été réalisé au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS dirigé par Monsieur Alain COSTES, au sein du groupe Contrôle des Systèmes Continus.

Je tiens tout d'abord à exprimer mes plus vifs remerciements à Gérard MONTSENY qui a assuré avec une grande compétence la direction de cette thèse. Par ses grandes qualités scientifiques et humaines, il a su parfaitement encadrer mon travail en ne ménageant pas son temps et ses efforts. Grâce à une disponibilité de tous les instants et à une grande patience, il a permis d'amener ce travail à son terme. Qu'il sache combien je lui dois et je le remercie.

Je tiens à remercier Monsieur Jacques BERNUSSOU, Directeur de Recherche au CNRS, responsable du groupe CSC, qui m'a fait l'honneur et le plaisir d'accepter la présidence du jury.

Je souhaite exprimer toute ma reconnaissance à Messieurs Jacques BURGER, Professeur à l'université d'Angers et Jean-Pierre HUMEAU, Professeur à l'Ecole Centrale de Nantes, qui ont bien voulu se charger de la tâche de rapporter mes travaux. Je les remercie pour le grand intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de mes recherches.

J'associe tout particulièrement à ces remerciements Messieurs Jean-pierre BARRY, Directeur de Recherche au CNRS, et Jean-Pierre RAYMOND, Professeur à l'université de Toulouse III qui m'ont fait l'honneur d'examiner mes travaux.

Je remercie aussi chaleureusement Monsieur Francis CONRAD, Professeur à l'université de Nancy I, pour sa contribution à certaines démonstrations mathématiques du chapitre 3.

Je voudrais réserver une attention particulière aux anciens camarades du DEA et aux amis du LAAS et notamment à Patricia, Sabine, Sylvie, Cyril, Denis, Fred, Gilles, JC, Laurent, Patrick, Philippe et les autres... Je remercie tout particulièrement Ghislaine qui n'a pas ménagé sa peine pour corriger les fautes d'orthographe éventuelles.

Il me serait difficile de ne pas associer à cette liste de remerciements, l'ensemble des personnes du Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes où chacun à un titre ou à un autre, m'a apporté son aide ou sa sympathie, et plus particulièrement

le personnel de l'imprimerie qui a contribué matériellement à la réalisation de ce mémoire.

C'est enfin à mes parents que j'adresse ma profonde reconnaissance pour le soutien constant qu'ils m'ont apporté durant toutes ces années d'études.

# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>0 Rappels mathématiques</b>	<b>11</b>
0.1 Espaces de Sobolev . . . . .	11
0.2 Systèmes aux dérivées partielles . . . . .	12
0.3 Existence et unicité de la solution . . . . .	14
0.4 Stabilité des systèmes dynamiques . . . . .	16
0.5 Notion de problème mal posé et régularisation . . . . .	17
0.6 Produit tensoriel . . . . .	18
<b>I Contrôlabilité et contrôle des systèmes aux dérivées partielles</b>	<b>21</b>
I.1 Contrôlabilité des systèmes dynamiques . . . . .	21
I.1.1 Contrôlabilité en dimension finie . . . . .	21
I.1.2 Contrôlabilité en dimension infinie . . . . .	22
I.2 Méthode H.U.M. . . . .	23
I.3 Exemple : contrôle interne ponctuel d'une corde vibrante . . . . .	26
I.3.1 Position du problème . . . . .	26
I.3.2 Contrôlabilité et contrôle optimal en présence d'incertitude sur un paramètre . . . . .	28
I.4 Conclusion . . . . .	34
<b>II Degré de contrôlabilité "actif" pour corde vibrante (et poutre)</b>	<b>37</b>
II.1 Degré de contrôlabilité actif : $F_\epsilon$ . . . . .	37
II.1.1 Définition . . . . .	37
II.1.2 Cas de la corde avec contrôle interne : expressions des fonc- tions $f_\epsilon$ , $g_\epsilon$ et $F_\epsilon$ . . . . .	40
II.2 Analyse de $F_\epsilon$ en fonction de $a$ . . . . .	41
II.2.1 Comportement lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ . . . . .	42
II.2.2 Régularité de $F_\epsilon$ , $\epsilon > 0$ . . . . .	44
II.2.3 Cas particulier : $s_n = \frac{1}{n}$ . . . . .	46
II.3 Conditions aux limites de type Neumann . . . . .	49
II.4 Cas de la poutre avec contrôle interne . . . . .	50
II.5 Conclusion . . . . .	52

<b>III</b>	<b>Degré de contrôlabilité “passif” pour corde vibrante</b>	<b>53</b>
III.1	Contrôle par impédance . . . . .	53
III.2	Analyse du modèle . . . . .	55
III.3	Degré de contrôlabilité passif : $G_T$ . . . . .	58
III.4	Analyse de $G_T$ . . . . .	59
III.4.1	Comportement lorsque $T \rightarrow +\infty$ . . . . .	59
III.4.2	Continuité . . . . .	62
III.4.3	Différentiabilité . . . . .	66
III.4.4	Calcul et tracé de $G_T$ . . . . .	68
III.5	Comparaison de $G_T$ avec $F_\epsilon$ . . . . .	70
III.5.1	Comparaison expérimentale . . . . .	70
III.5.2	Comparaison “mathématique” . . . . .	72
III.6	Conclusion . . . . .	73
<b>IV</b>	<b>Mise en œuvre - Application à la membrane vibrante</b>	<b>75</b>
IV.1	Approximation probabiliste de la distribution initiale . . . . .	75
IV.2	Exemple : approximation de $G_T$ dans le cas de la corde . . . . .	77
IV.2.1	Définition de l’approximation . . . . .	77
IV.2.2	Lien avec l’approche modale . . . . .	79
IV.2.3	Vitesse de convergence . . . . .	81
IV.2.4	Comparaison avec la méthode de Monte-carlo . . . . .	83
IV.3	Application : cas de la membrane vibrante . . . . .	84
IV.3.1	Degré de contrôlabilité actif . . . . .	86
IV.3.2	Degré de contrôlabilité passif . . . . .	94
IV.4	Conclusion . . . . .	99
<b>V</b>	<b>Autres types de contrôle</b>	<b>101</b>
V.1	Contrôle viscoélastique . . . . .	101
V.2	Contrôle non linéaire . . . . .	103
	<b>Conclusion</b>	<b>105</b>
	<b>A Schémas numériques utilisés</b>	<b>107</b>
	<b>B Adaptation d’impédance</b>	<b>109</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>111</b>

# Introduction

La notion de contrôlabilité pour les systèmes linéaires en dimension finie est très simple à énoncer et à caractériser sous forme d'inversibilité d'une matrice construite à partir des paramètres du système. En ce sens, elle est intrinsèque et ne nécessite aucune information supplémentaire comme par exemple la description des perturbations affectant le système. Elle est de plus très satisfaisante de prime abord, car sa définition mathématique ne souffre d'aucune ambiguïté.

Pourtant, en y regardant d'un peu plus près, on s'aperçoit très vite que tout en étant contrôlable, un tel système peut présenter des défauts de conditionnement. C'est le cas lorsque la matrice de contrôlabilité est *mal conditionnée*, ce qui du point de vue physique peut la plupart du temps s'interpréter comme une influence trop faible (mais non nulle) des actionneurs sur certains modes propres du système. Si l'on considère que l'opérateur d'entrée est fonction d'un paramètre (comme par exemple une position d'actionneur), on pourrait alors exprimer le nombre de conditionnement de la matrice de contrôlabilité en fonction de ce paramètre. Cette fonction présenterait généralement un nombre fini de points sur lesquels, le système n'étant plus contrôlable, elle serait singulière (par exemple nulle). Néanmoins, du fait qu'en dimension finie cette fonction serait continue, il apparaîtrait clairement qu'au voisinage de ces points, le système ne peut raisonnablement plus être considéré comme contrôlable du point de vue physique, tout au moins, le système serait dit "mal contrôlable", par opposition aux autres zones du paramètre où le nombre de conditionnement serait "bon". Cette façon non plus *binnaire* mais *continue* d'envisager la contrôlabilité avait d'ailleurs dès le début été proposée par Kalman [23] et d'autres auteurs qui ont introduit le concept de "degré de contrôlabilité" pour traduire ce genre de nuances en termes mathématiques. Les définitions et propriétés de ces fonctions sont aussi très satisfaisantes et intrinsèques dans le cas de la dimension finie et peuvent facilement être rapprochées du problème de l'optimisation des paramètres du système. Remarquons toutefois que les problèmes soulevés par une mauvaise contrôlabilité sont assez facilement dominés en pratique (commande robuste), ce qui explique sans doute le peu de succès qu'ont obtenu par la suite ces concepts.

Dans le cas des systèmes à paramètres répartis, la situation est tout autre. En effet, la première caractéristique de ces systèmes est qu'ils ont un état de *dimension infinie*. Or le contrôle s'effectue la plupart du temps au moyen d'un nombre *fini* d'actionneurs. Ce déséquilibre est souvent la source de graves problèmes concernant le concept même de contrôlabilité. Ainsi, si l'on considère par exemple l'équation de la corde vibrante contrôlée par une force en un point de la corde (à l'intérieur

du domaine), l'analyse de la contrôlabilité (quelle que soit la définition de celle-ci, car il en existe plusieurs) conduit à une conclusion tout à fait inadmissible d'un point de vue pratique : ce système est contrôlable si et seulement si la force d'action est sur un point d'abscisse irrationnelle. Intuitivement, ceci est dû au fait que tout rationnel est un noeud de vibration pour certains modes propres, qui ne peuvent donc pas être *influencés* par le contrôle. Ce résultat est manifestement le corollaire de deux particularités conjointes : la dimension infinie de l'espace d'état et la nature binaire de la contrôlabilité aux sens classiques. Outre le fait qu'il n'a aucun sens physique (il s'agit en fait d'une vision mathématique caricaturale du problème), la difficulté persiste même sous approximation : en effet, une troncature en dimension finie de l'équation de départ conduit à une suite de systèmes dont les points de non contrôlabilité remplissent progressivement le domaine à mesure que l'ordre d'approximation augmente.

Pourtant, l'expérience simple qui consiste à arrêter les vibrations d'une corde (par exemple d'instrument de musique) avec un doigt (assimilable à un contrôle ponctuel) suggère une analyse beaucoup plus subtile. En effet, on met en évidence que les positions  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots$  sont moins "efficaces" que les "autres", celles ne correspondant pas à  $\frac{p}{q}$  avec  $q$  "petit". Passés les premiers rationnels, il n'est plus possible de distinguer une différence significative concernant l'efficacité de l'amortissement. Cela vient de ce que le système réel s'éloigne de plus en plus à mesure que l'on considère des modes de vibration d'ordre de plus en plus élevé, de son idéalisation mathématique : la dissipation interne dans la corde elle-même devient importante, le doigt n'est plus ponctuel mais devient un système viscoélastique réparti couplé à la corde, etc. Il pourrait être facile de construire expérimentalement une fonction traduisant l'efficacité de l'amortissement. On obtiendrait alors une fonction *continue* du point d'action présentant une variation importante autour des premiers rationnels, ceux qui correspondent à un noeud de vibration *visible*.

Plus généralement, tout modèle à paramètres répartis devient de plus en plus imparfait pour les modes propres d'ordre élevé. Il va de soi par ailleurs qu'un contrôle élaboré sur le modèle mathématique qu'on aurait considéré comme exact, risquerait fort de conduire à un manque total de robustesse pour peu que l'on soit trop exigeant sur les modes d'ordre élevé. Au contraire, on préfère la plupart du temps stabiliser un système vibrant au moyen de dispositifs "passifs" ce qui, bien que théoriquement moins efficace qu'un contrôle "actif" basé sur le modèle mathématique, garantit en revanche une totale stabilité vis-à-vis des incertitudes sur les paramètres et les comportements non modélisés.

On pourrait donc penser utiliser dans le cas réparti, les outils développés dans le cas de la dimension finie et concernant les mesures quantitatives de la contrôlabilité. Malheureusement, on s'aperçoit très vite que c'est sans issue pour plusieurs raisons plus ou moins équivalentes. D'une part, le déterminant d'un opérateur sur un espace de Hilbert n'est généralement pas défini. Si l'on calcule la suite de déterminants obtenus sous approximation, elle n'a pas de limite ou bien conduit à une limite inutilisable (par exemple non nulle seulement sur tout irrationnel). Ceci est dû au



fait que le problème associé à la notion de contrôlabilité, à savoir le problème de contrôle avec contrainte sur l'état final (on cherche à atteindre exactement un état au moyen d'un contrôle admissible), n'a plus de sens réel en dimension infinie : vouloir atteindre exactement un état dans un espace de dimension infinie nécessite une connaissance parfaite, c'est à dire un modèle exact, ce qui n'est jamais le cas.

A notre connaissance, les tentatives de définition d'un degré de contrôlabilité pour les systèmes répartis (notamment les systèmes vibrants) sont toutes basées sur des approximations du système de départ et ne permettent pas le passage à la limite pour revenir à l'objet initial [15], [18], [21], [22], [35], [41] et [42]. Plus grave, les résultats sont très dépendants de l'approximation considérée. Il semblerait pourtant intéressant de pouvoir d'une certaine manière définir un tel concept directement sur le système initial, quitte à considérer le problème sous un angle légèrement différent, afin de réconcilier les observations expérimentales et les conclusions mathématiques, faute de quoi, la théorie du contrôle des systèmes répartis présenterait une lacune profonde qui ne pourrait qu'affaiblir sa crédibilité.

C'est le parti (difficile) que nous avons pris dans ce travail. Il consiste à mettre à profit d'une part le fait que dans le cas du contrôle de systèmes répartis, les exigences sont généralement plus "floues" que pour les systèmes de petite dimension : on ne cherche jamais à trouver les solutions avec une précision énorme du fait que le modèle lui-même est toujours extrêmement approximatif. D'autre part, le problème de contrôle exact n'ayant plus de sens physique, il sera remplacé soit par un problème plus réaliste, basé sur un compromis entre précision et coût du contrôle comme c'est systématiquement le cas en pratique (même en dimension finie) soit par un problème de contrôle "passif", obtenu par un retour de sortie choisi *a priori*. Enfin, la représentativité des modes d'ordre élevé étant toujours plus faible (ne serait-ce que par la nécessité d'énergie finie pour le système), il sera possible de construire des approximations efficaces permettant d'envisager l'analyse des systèmes par la voie numérique, même dans des cas complexes. Remarquons à ce sujet que l'étude de la contrôlabilité classique d'un système vibrant un tant soit peu complexe pose des problèmes très difficiles (connaissance des valeurs et modes propres, etc), qui de toute manière n'ont aucune chance de correspondre à la réalité avec suffisamment de précision pour être considérés.

Bien entendu, une telle tâche aurait été beaucoup trop ambitieuse dans le cas général. C'est pourquoi cette étude a principalement été réalisée autour du modèle le plus simple qui présente déjà des caractéristiques suffisamment complexes pour être significatif : la corde vibrante. Il est montré comment peuvent être définis deux types de degrés de contrôlabilité nommés "actif" et "passif" car faisant référence à des contrôles respectivement actif (sur la base du modèle et problème d'optimisation) et passif (couplage au système d'un "amortisseur visqueux", caractéristique de l'amortissement passif). On étudie plus sommairement quelques modèles voisins pour lesquels l'adaptation ne présente que quelques différences techniques (poutres notamment), ou plus conséquentes (membranes). La généralisation de ce travail à un cadre plus abstrait pourrait constituer la suite logique de cette étude,

mais n'a pas été abordée pour l'instant.

L'approche quantitative de la contrôlabilité que nous avons développée dans ce mémoire est à cheval entre les notions mathématiques, simples et rigoureuses mais souvent insatisfaisantes, et les considérations physiques, souvent moins esthétiques et plus délicates à formuler, mais néanmoins souveraines lorsqu'il s'agit d'Automatique autre que théorique. Il est apparu dès le début nécessaire d'essayer de concilier les deux aspects sous peine d'impossibilité de recoupements entre les développements théoriques et les expérimentations dans le domaine de la stabilisation des systèmes vibrants. Nous avons donc autant que possible essayé de conserver un maximum de rigueur mathématique, tout en obéissant aux nécessités de l'interprétation physique qui souvent simplifie les problèmes malgré une perte de simplicité apparente. Le présent mémoire n'est certes pas exhaustif, mais doit plutôt être considéré comme une tentative de définition d'une méthodologie pour l'analyse de la contrôlabilité *physique* des systèmes à paramètres répartis considérés *en tant que tels*, et *insensible* au choix d'une approximation en dimension finie dont il est toujours très difficile de prédire *a priori* l'effet sur les problèmes de contrôle.

Le mémoire est organisé comme suit.

Dans un premier chapitre, sont rappelés les principes classiques de la contrôlabilité des systèmes répartis, notamment la méthode H.U.M. qui fait autorité dans le cas des systèmes vibrants (qui constituent en fait la classe de référence pour notre étude). On met ensuite en évidence les défauts de robustesse consécutifs au problème de la contrôlabilité et du contrôle avec atteinte d'un état (l'état nul en l'occurrence), en présence d'incertitude sur les paramètres, défauts qui peuvent s'interpréter en termes mathématiques de *problème mal posé* au sens de Hadamard.

Dans le deuxième chapitre, on définit le degré de contrôlabilité "actif", à partir du problème de contrôle *régularisé*, et d'une distribution aléatoire supposée connue de l'état initial. Cet "artifice" est justifié pour trois raisons : la première est que le contrôle des vibrations d'un système linéaire suppose que ce système est soumis à des perturbations de nature forcément inconnue (sinon elles seraient incluses au modèle) donc *a priori* aléatoires. La deuxième est que la description probabiliste de ces perturbations peut être plus ou moins "raffinée" sur la base de considérations physiques par exemple, mais nécessite toujours un minimum d'hypothèses mathématiquement nécessaires (énergie finie par exemple). Ici, dans un souci de simplification, l'aléa porte sur la *condition initiale* du système, mais cela n'a rien de limitatif, une perturbation de type temporel pouvant parfaitement être décrite dans le cadre des processus stochastiques. La troisième raison est que cela permet de retrouver un degré de contrôlabilité plus "intrinsèque" car non dépendant de l'état initial du système. Insistons toutefois sur le fait que la prise en compte de l'influence de la distribution probabiliste initiale reste très réaliste. Ce degré de contrôlabilité présente l'avantage de pouvoir, dans le cas de la corde, être calculé analytiquement, ce qui autorise ensuite son analyse très détaillée. Il sera alors possible de mettre en évidence son lien mathématique avec le concept classique de contrôlabilité sous la forme d'une perte de régularité sur les points de non-contrôlabilité. Cette propriété

remarquable renforce la légitimité de l'approche, en ce sens qu'elle transforme en quelque sorte les points de non contrôlabilité en "zones de mauvaise contrôlabilité", exactement comme dans l'expérience simple décrite ci-dessus, tout en restituant "au second ordre" la notion mathématique binaire.

La première définition du degré de contrôlabilité étant encore basée sur la connaissance des fonctions propres du système, donc d'emploi peu pratique dans le cas de systèmes plus complexes, on définit au chapitre suivant un degré de contrôlabilité basé sur l'amortissement passif du système au moyen d'un amortisseur ponctuel visqueux qui engendre en boucle fermée un contrôle admissible facile à établir par simples simulations numériques (permettant de ce fait l'extension aux systèmes complexes). On montre divers résultats de régularité de la fonction obtenue qui est comparée ensuite avec la précédente. Il s'avère que ces deux fonctions (d'un même paramètre : la position de l'action dans le domaine) présentent une grande analogie. En considérant qu'en pratique le modèle est toujours assez imprécis, il ne semble pas déraisonnable que l'une puisse être substituée à l'autre dans l'analyse de la contrôlabilité. Afin de renforcer cette analogie, on montre que le contrôle engendré par un amortissement passif ponctuel est en fait solution d'un problème de contrôle optimal assez proche du problème considéré dans le chapitre précédent.

Dans un souci d'efficacité pratique est développée au chapitre suivant une méthode d'approximation de la distribution probabiliste initiale permettant de réduire considérablement le volume de calculs nécessaire à l'analyse du système par la voie numérique. En d'autres termes, l'aléa initial considéré au cours des deux chapitres précédents est remplacé par un aléa très simplifié suffisant pour garantir la convergence vers l'objet initial, tout en se prêtant à une description simple au moyen d'une variable aléatoire discrète. A titre d'illustration, cette méthode est appliquée au cas de la corde et on montre la ressemblance quasi-parfaite avec les fonctions précédentes. Puis on l'applique au cas beaucoup plus complexe de la membrane vibrante qu'il devient dès lors possible de traiter sans utiliser les modes propres (qui dans ce cas sont encore connus) et avec des moyens de calcul raisonnables. On peut noter qu'à ce stade, il devient tout à fait envisageable de développer le degré de contrôlabilité passif (via l'approximation probabiliste) pour quasiment n'importe quel système vibrant, du moment que l'on sait le simuler numériquement (il est même possible d'envisager le cas non linéaire bien que les notions classiques de contrôlabilité soient encore mal définies au plan théorique).

Enfin, dans le dernier chapitre, sont présentés d'autres types de contrôles en boucle fermée et l'analogue correspondant du degré de contrôlabilité passif : cas viscoélastique, caractérisé par un couplage avec une équation de diffusion auxiliaire, cas non linéaire où l'effet d'amortissement est unilatéral et ne peut donc être linéarisé aux petits mouvements. Les fonctions obtenues sont là encore très ressemblantes et tendent à confirmer la nature quasi intrinsèque de *l'efficacité du contrôle en fonction du point d'action*, bien que cette propriété intuitive reste pour l'instant difficile à formaliser au plan mathématique.



# Chapitre 0

## Rappels mathématiques

Le but de ce chapitre est d'exposer succinctement le cadre mathématique des systèmes à paramètres répartis pour l'Automatique, concernant en particulier les espaces de Hilbert (de dimension infinie). Plus précisément on s'intéresse aux espaces de Sobolev qui présentent l'avantage d'être mieux adaptés aux problèmes d'évolutions de la physique.

Pour plus de précisions, on pourra consulter des ouvrages spécialisés tels que [3], [25], [26], [44].

### 0.1 Espaces de Sobolev

L'état d'un système, en dimension finie, peut être généralement vu comme un élément d'un espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^n$ . Dans le cas des systèmes à paramètres répartis, l'état est représenté, à chaque instant, par une *fonction* définie sur une région spatiale donnée : l'état devient un élément d'un espace vectoriel de dimension infinie. Parmi ces espaces de dimension infinie, les espaces  $L^p$  jouent un rôle privilégié.

Soit une région spatiale  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mu$  une mesure définie sur  $\Omega$  et  $\partial\Omega$  sa frontière (supposée suffisamment régulière). On définit l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  des fonctions indéfiniment continûment différentiables à support compact sur  $\Omega$  et  $\mathcal{D}'(\Omega)$  le dual topologique de  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

**Définition 1** *On appelle espace (des classes) de fonctions  $L^p(\Omega; \mu)$  ou  $L^p(\Omega)$ , l'espace de Banach tel que :*

$$\left( \int_{\Omega} f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \quad 1 \leq p < +\infty,$$

*et ayant pour norme :*

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Cas particulier : l'espace des fonctions de carré sommable  $L^2(\Omega)$ . En munissant  $L^2(\Omega)$  du produit scalaire défini par :

$$(f | g)_{L^2} = \int_{\Omega} f g d\mu,$$

on montre que  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

On définit les espaces de Sobolev d'ordre  $m$ ,  $H^m(\Omega)$ , à partir des espaces  $L^2(\Omega)$ .

**Définition 2** On appelle espace de Sobolev d'ordre  $m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ),  $H^m(\Omega)$ , le sous-espace de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  ayant la propriété suivante :

$$H^m(\Omega) = \{f \in \mathcal{D}'(\Omega) : f \in L^2(\Omega), \partial^q f \in L^2(\Omega), |q| \leq m\},$$

avec  $\partial^q = \partial_{x_1}^{q_1} \dots \partial_{x_m}^{q_m}$  et  $|q| = \sum_{i=1}^m q_i$ .

La norme définie par :

$$\|f\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{|q| \leq m} \|\partial^q f\|_{L^2(\Omega)}^2$$

munit l'espace  $H^m$  d'une structure d'espace de Hilbert avec le produit scalaire :

$$(f | g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|q| \leq m} (\partial^q f | \partial^q g)_{L^2(\Omega)}.$$

Par le biais du théorème de représentation de Riesz-Fréchet, on peut identifier un espace de Hilbert à son dual. Si l'on considère par exemple l'espace  $L^2$  identifié à son dual, on obtient les relations d'inclusions suivantes :

$$\mathcal{D} \subset H_0^m \subset L^2 \cong (L^2)' \subset H^{-m} \subset \mathcal{D}',$$

où  $H^{-m}$  désigne l'espace dual de  $H_0^m$ . Dans le cas de suites de fonctions, il est possible de définir l'espace de hilbert  $h^m$  tel que :

$$h^m = \{(u_n)_{n \geq 1} \in l^2, \sum_{n \geq 1} n^{2m} u_n^2 < +\infty\}.$$

## 0.2 Systèmes aux dérivées partielles

Les systèmes aux dérivées partielles recouvrent un large champ de phénomènes physiques : propagation d'ondes, vibrations, diffusions, écoulements ... Les équations correspondantes peuvent être classées suivant des critères mathématiques : système hyperbolique, parabolique, elliptique.

Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse aux systèmes vibrants tels que : cordes, membranes, poutres, plaques, ... Les modèles utilisés correspondant à ces systèmes sont les modèles classiques tirés de la mécanique, à savoir :

- vibration transversale d'une corde ou d'une membrane (poutre en torsion) :

$$\partial_t^2 \theta = \frac{T}{\rho} \Delta \theta, \quad (0.1)$$

où  $\Delta$  est le laplacien,  $T$  désigne la tension de la corde et  $\rho$  la densité massique. La vitesse de propagation est constante et égale à  $\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ .

- Vibration en flexion d'une poutre ou d'une plaque de masse  $m$  :

$$m \partial_t^2 \theta = E I \Delta^2 \theta , \quad (0.2)$$

avec :  $E$  le module de Young,  $I$  le moment d'inertie ( $I = r^2 S$  où  $r$  est le rayon de giration et  $S$  la section de la poutre).

Contrairement au cas de la corde, la vitesse de propagation n'est pas constante et dépend de la longueur d'onde de vibration : le milieu est dit dispersif.

Ces deux types d'équations peuvent être mis sous forme abstraite. Dans le cas général, on ajoute un second membre à l'équation, qui physiquement, correspond à une action extérieure sur le système. On obtient alors :

$$\begin{cases} \ddot{Y} &= A Y + f \\ Y(0) &= Y_0 \\ \dot{Y}(0) &= Y_1 , \end{cases} \quad (0.3)$$

où  $(Y(t), \dot{Y}(t))$  représente l'état du système considéré à l'instant  $t$ ,  $f$  l'action extérieure.  $A$  est un opérateur différentiel d'ordre  $2m$  ( $m = 1$  correspondant au laplacien  $\Delta$ ), ayant les propriétés suivantes [3] :

$$\begin{aligned} A \text{ est non borné, fermé, coercif et auto-adjoint sur} \\ \text{un espace de Banach } \mathcal{H} . \end{aligned} \quad (0.4)$$

Il est important de connaître, notamment pour l'étude de la stabilité du système, la trajectoire au cours du temps. A cet effet on introduit des espaces spécifiques aux problèmes d'évolutions : les espaces  $L^p(0, T; \mathcal{H})$ .

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Banach et  $1 \leq p < +\infty$

**Définition 3** On appelle  $L^p(0, T; \mathcal{H})$  l'ensemble (des classes modulo l'égalité presque partout) de fonctions mesurables

$$\begin{aligned} f : (0, T) &\longrightarrow \mathcal{H} \\ t &\longmapsto f(t) \end{aligned}$$

telles que  $\|f(t)\|_{\mathcal{H}} \in L^p(0, T)$ .

Si on munit  $L^p(0, T; \mathcal{H})$  de la norme définie par :

$$\|f\|_{L^p(0, T; \mathcal{H})} = \left[ \int_0^T \|f(t)\|_{\mathcal{H}}^p dt \right]^{\frac{1}{p}} ,$$

l'espace  $L^p(0, T; \mathcal{H})$  est un espace de Banach.

**Remarque :** Si  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert, on montre que  $L^2(0, T; \mathcal{H})$  est aussi un espace de Hilbert avec pour produit scalaire :

$$(f | g) = \int_0^T (f(t) | g(t))_{\mathcal{H}} dt .$$

L'analyse des systèmes (0.1) et (0.2), (la contrôlabilité, etc ...) nécessite au préalable l'existence et unicité de la solution.

### 0.3 Existence et unicité de la solution

On peut démontrer l'existence et l'unicité du système (0.3) de plusieurs manières. On rappelle ici les grandes lignes des deux méthodes les plus couramment utilisées : la méthode variationnelle (approche fonctionnelle) [28] et la méthode par la théorie des semi-groupes [25], [36].

#### Méthode variationnelle

On considère le système (0.3) avec  $A$  un opérateur linéaire différentiel d'ordre  $2m$  ayant les propriétés (0.4) et  $\mathcal{H}$  l'espace d'état de Hilbert. La méthode est basée sur l'existence d'une solution *faible* à partir d'un triplet d'espace  $(V, \mathcal{H}, V')$  défini comme suit.

Soit  $D_{\mathcal{H}}(A)$  le domaine de définition de l'opérateur  $A$ . On construit un espace de Hilbert  $V$  tel que :

$$V = D(A^{\frac{1}{2}}), \text{ avec } A^{\frac{1}{2}} : V \longrightarrow \mathcal{H},$$

où  $A^{\frac{1}{2}}$  est un opérateur différentiel d'ordre  $m$  et  $D_{\mathcal{H}}(A)$  dense dans  $V$  ;  $V$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\forall (v, w) \in V, \quad (v | w)_V = (A^{\frac{1}{2}}v | A^{\frac{1}{2}}w)_{\mathcal{H}}.$$

En notant  $V'$  l'espace dual de  $V$  et par le même symbole  $A = (A^{\frac{1}{2}})^* A^{\frac{1}{2}}$ , l'unique opérateur appartenant à  $\mathcal{L}(V, V')$ , on a la relation suivante :

$$\forall (v, w) \in V, \quad (v | w)_V = \langle A v, w \rangle_{V', V}.$$

Ainsi l'opérateur  $A$ , qui n'est pas borné de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$ , le devient de  $V$  dans  $V'$ . En identifiant  $\mathcal{H}$  et son dual, on obtient la relation d'inclusion :

$$D(A) \subset V \subset \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}' \subset V',$$

avec injections continues et denses.

**Remarque :** Le fait de définir le triplet  $(V, \mathcal{H}, V')$  permet de considérer des éléments du système (0.3)  $f \in V'$  (en particulier  $f$  pourra être une mesure de Dirac).

Ayant défini le triplet, on donne une formulation faible du système (0.3), à savoir :

$$\forall \varphi \in V, \quad \langle \ddot{Y}, \varphi \rangle_{V', V} = \langle A Y, \varphi \rangle_{V', V} + \langle f, \varphi \rangle_{V', V}. \quad (0.5)$$

La formulation faible du problème permet *d'immerger* le système dans un espace *plus gros* de façon à identifier une solution dite faible.

Le théorème suivant garantit l'existence et unicité de la solution faible du problème (0.3) :



**Théorème 1** [29] Soit le système (0.3) avec :  $f \in L^2(0, T; V')$ ,  $(Y_0, Y_1) \in \mathcal{H} \times V'$  et  $A$  un opérateur linéaire différentiel auto-adjoint et coercif [3]. Si la famille de formes bilinéaires continues  $\langle A u, v \rangle_{V', V} = a(u, v)$  sur  $V$  est telle que :

(i)  $\forall u, v \in V$   $a(u, v)$  est symétrique,

(ii)  $a(u, v)$  est coercif,

alors il existe une solution unique au problème (0.3) telle que  $Y \in C^0(0, T; \mathcal{H})$  et  $\dot{Y} \in C^0(0, T; V')$ .

On montre que cette solution faible est suffisamment régulière de telle sorte que  $Y \in C^0(0, T; V)$  et  $\dot{Y} \in C^0(0, T; \mathcal{H})$ .  $\square$

### Semi-groupe et générateur infinitésimal

La théorie des semi-groupes permet notamment de généraliser dans le cas d'opérateurs non bornés, la notion d'exponentielle de matrice.

Soit  $\mathcal{L}(E)$  l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach  $E$ .

**Définition 4** On appelle semi-groupe de classe  $C^0$  une famille  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  d'opérateurs de  $E \rightarrow E$  telle que :

$$(i) \quad S(0) = I_E \quad (I_E \text{ opérateur identité de } E) ,$$

$$(ii) \quad S(t+s) = S(t)S(s) \quad \forall t, s \geq 0 , \quad (0.6)$$

$$(iii) \quad \forall x \in E \quad \|S(t)x - x\|_E \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 .$$

**Proposition 1** Si  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  est un semi-groupe sur  $E$  alors il existe  $M$  et  $w$ , deux constantes, telles que :

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M e^{wt} \quad \forall t \geq 0 .$$

Lorsque  $M = 1$  et  $w = 0$ , le semi-groupe est appelé semi-groupe de contraction.

**Définition 5** Soit  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  un semi-groupe sur  $E$ . On appelle générateur infinitésimal de  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  l'opérateur linéaire  $A$  défini par :

$$D(A) = \left\{ u \in E / \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ lorsque la limite existe} \right\} ,$$

et

$$A u = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)u - u}{t} \quad u \in D(A) .$$

**Proposition 2** [25] Soit le problème :

$$\begin{cases} \dot{X} &= A X + f \\ X(0) &= X_0 \end{cases} \quad (0.7)$$

avec  $f(t)$  et  $X(t)$  appartenant à un espace de Banach  $E$ . Si  $A$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  continûment différentiable sur  $]0, T[$ , alors il existe une solution unique au problème (0.3) telle que :

- (i)  $X(t) \in C^1(0, T; E) \cap C^0(0, T; D(A))$
- (ii)  $X(t) = S(t)X_0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau) d\tau$
- (iii)  $\frac{d}{dt}S(t)X_0 = A S(t)X_0 = S(t)A X_0$

Le théorème suivant, de Hille-Yosida, donne une caractérisation des opérateurs générateurs infinitésimaux d'un semi-groupe, notamment lorsque l'opérateur est non borné (cas des opérateurs différentiels).

**Théorème 2** (Hille-Yosida) [25]. Soit  $E$  un espace de Banach. Un opérateur non borné  $A$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i)  $A$  est fermé,
- (ii) le domaine de  $A$  est dense dans  $E$ ,
- (iii)  $\forall \lambda > 0$  l'opérateur linéaire  $(\lambda I - A)^{-1}$  est borné et  $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$ .

**Remarque :** Si  $E$  est un espace de Hilbert, la condition (iii) du théorème devient :

- (iii)  $\exists \lambda > 0$  pour lequel l'opérateur linéaire  $(\lambda I - A)^{-1}$  est borné et  $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$ .

## 0.4 Stabilité des systèmes dynamiques

Le comportement au cours du temps de l'énergie d'un système dynamique permet de conclure sur sa stabilité. Mathématiquement, on généralise la notion d'énergie d'un système physique en introduisant une fonction dite fonction de Lyapunov ayant les mêmes caractéristiques que la fonction énergie.

Soit  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  un semi-groupe défini sur un espace de Banach  $E$ .

**Définition 6** Une fonction  $\mathcal{E} \in C^0(E, \mathbb{R}^+)$  est appelée fonction de Lyapunov pour le système dynamique  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  si :

$$\mathcal{E}(S(t)z) \leq \mathcal{E}(z), \quad \forall z \in E, \quad \forall t \geq 0.$$

**Théorème 3** (Principe de LaSalle). [16] Soit  $\mathcal{E}$  une fonction de Lyapunov pour  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  et soit  $z \in E$  tel que  $\bigcup_{t \geq 0} \{S(t)z\}$  soit relativement compact dans  $E$  ; alors :

$$l = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(S(t)z) \text{ existe ,}$$

$$\mathcal{E}(y) = l, \quad \forall y \in \omega(z) ,$$

où  $\omega(z)$  est l'ensemble  $\omega$ -limite de  $z$  défini par :

$$\omega(z) = \{y \in E : \exists t_n \rightarrow +\infty \ S(t_n)z \rightarrow y \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty\} .$$

**Définition 7** Un semi-groupe  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  de classe  $C^0$  dans un espace de Banach  $E$  est dit exponentiellement stable si :

$$\exists M > 0, \exists w_0 > 0, \quad \|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M e^{-w_0 t}, \quad t \geq 0 .$$

On peut caractériser un semi-groupe exponentiellement stable grâce au théorème de Datko-Pazy.

**Théorème 4** (Datko-Pazy). Un semi-groupe  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  de classe  $C^0$  dans un espace de Banach  $E$  est exponentiellement stable si et seulement si :

$$\exists p \in [1, +\infty) \text{ tel que } \forall z \in V \quad \int_0^T \|S(t)z\|_V^p dt < +\infty .$$

On termine ce chapitre de rappels par une notion importante pour l'analyse des systèmes physiques : la notion de problème mal posé.

## 0.5 Notion de problème mal posé et régularisation

En pratique, un système physique subit différentes perturbations. Un problème bien posé (inverse d'un problème mal posé) garantit la continuité de la solution d'un problème physique par rapport à des petites variations des paramètres.

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Hilbert. On considère le problème d'inconnue  $y$  :

$$\begin{aligned} H y &= b, \\ \text{avec } H &: E \longrightarrow F \text{ et } b \in D(Q), \end{aligned} \tag{0.8}$$

dont la solution supposée unique s'écrit :

$$y = Q(b), \quad Q : F \longrightarrow E . \tag{0.9}$$

**Définition 8** Le problème (0.8) est dit bien posé au sens de Hadamard si  $Q$  est continu, sinon il est mal posé.

En pratique, un problème mal posé correspond à une solution infiniment sensible aux perturbations. Un exemple classique de problème mal posé est l'équation "rétrograde" de la chaleur. [30]

Dans le cadre de la théorie de l'optimisation, certains problèmes d'optimisation avec contraintes de type égalité sont mal posés [40] :

$$\min_u \{ \|u\|^2, u \in E, H u = b \}, \quad (0.10)$$

où  $E$  est un espace de Hilbert et  $H$  un opérateur linéaire continu sur  $E$ .

Dans de tels cas, on peut définir une famille de problèmes bien posés destinée à approcher le problème initial mal posé. On considère la famille de problèmes supposés bien posés :

$$\text{avec} \quad \begin{aligned} & H_\alpha y = b, \\ & H_\alpha : E \longrightarrow F, \alpha \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (0.11)$$

de solution  $y_\alpha$ .

**Définition 9** La famille (0.11) est une famille régularisante pour le problème (0.8) lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i)  $y_\alpha = Q_\alpha b_\alpha$  est solution de (0.11),
- (ii) si  $y = Q b$  est solution de (0.8),  
alors  $\exists \alpha_0$  tel que  $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \|y_\alpha - y\| = 0$ .

Une régularisation par pénalisation est un exemple de famille régularisante [30]. Le problème de contrôle optimal (0.10) devient :

$$\min_u \{ \|H u - b\|^2 + \epsilon \|u\|^2, u \in E \} \quad \epsilon > 0 \quad (0.12)$$

avec  $\epsilon \|u\|^2$  terme de pénalisation. Ce problème est bien posé pour tout  $\epsilon > 0$ .

**Remarque :** La troncature d'un système de dimension infinie correspond à une régularisation [30]. Seulement, si le problème initial est mal posé, bien que la troncature du système rende l'opérateur (matrice)  $Q$  continu,  $Q$  reste en pratique mal conditionnée.

## 0.6 Produit tensoriel

Soient  $E, F$  deux espaces de Hilbert de produits scalaires respectifs  $(\cdot | \cdot)_E, (\cdot | \cdot)_F$ . Pour tout  $(X, Y) \in E \times F$ , on définit le produit tensoriel :

$$X \otimes Y = (X | \cdot)_E Y \in \mathcal{L}(E, F)$$

et

$$G = \{ K \in \mathcal{L}(E, F), K = \sum_{i=1}^N X_i \otimes Y_i, (X_i, Y_i) \in E \times F \}.$$

Sur  $G$  on définit le produit scalaire induit par :

$$((X \otimes Y | X' \otimes Y') = (X | X')_E (Y | Y')_F = (X | X')_E \cdot (Y | Y')_F ,$$

qui en fait un espace préhilbertien. L'espace de Hilbert complété de  $G$  est noté  $E \otimes F$ . Il est inclus dans  $\mathcal{L}(E, F)$  et :

$$\|X_n\|_{E \otimes F} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \implies \|X_n\|_{\mathcal{L}(E, F)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 .$$

Cas particulier :  $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^m$ .

L'espace  $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$  s'identifie à l'espace  $\mathcal{M}_{m,n}$  des matrices  $m \times n$ , muni du produit scalaire :

$$(A | B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij} B_{ij} .$$

Soient  $X \in \mathbb{R}^n$  et  $Y \in \mathbb{R}^m$  :

$$X \otimes Y = Y \cdot X^T .$$

Cas particulier :  $E = F = L^2(D)$ .

Le produit tensoriel a alors pour expression :

$$\begin{aligned} \forall h \in L^2(D) \quad f \otimes g \cdot h &= \int_D f(x)h(x) dx g(y) = \int_D f(x)g(y)h(x) dx \\ &= \int_D (f \otimes g)(x, y)h(x) dx , \end{aligned}$$

et

$$(f \otimes g | h \otimes k) = \int \int_D f \otimes g \cdot h \otimes k dx dy .$$

**Remarque** :  $L^2(D) \otimes L^2(D)$  s'identifie à  $L^2(D \times D)$  mais est strictement inclus dans  $\mathcal{L}(L^2(D))$ . Par exemple, l'opérateur de translation est dans  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ , mais non dans  $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$ .



# Chapitre I

## Contrôlabilité et contrôle des systèmes aux dérivées partielles

La notion de contrôlabilité d'un système est étroitement liée aux problèmes de contrôle optimal. Dans le cas des systèmes à paramètres répartis, il existe plusieurs définitions de la contrôlabilité, généralisant le cas de la dimension finie, mais qui s'avèrent souvent peu utilisables dès que l'on considère des incertitudes sur certains paramètres, comme on le montre ci-après.

Tout ce qui suit se transpose aisément, par dualité, à la notion d'observabilité que nous ne développons pas ici. Il est à noter que certains résultats de ce chapitre seront utilisés dans les chapitres suivants.

### I.1 Contrôlabilité des systèmes dynamiques

La définition première de la contrôlabilité d'un système dynamique peut être énoncée comme suit :

**Définition 10** *Un système dynamique (S) est contrôlable sur l'intervalle  $[0, T]$ , s'il existe un contrôle (admissible)  $u(t)$  qui amène le système (S) de l'état initial  $X(0) = X_0$  à l'état final  $X(T) = X_T$ , quel que soit le couple  $(X_0, X_T)$ .*

On considère dans la suite un système dynamique linéaire mis sous forme de représentation de Kalman :

$$\begin{cases} \dot{X} = A X + B u \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

avec  $X \in \mathcal{H}$ , où  $\mathcal{H}$  est l'espace d'état (espace de Hilbert).

#### I.1.1 Contrôlabilité en dimension finie

En dimension finie ( $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ ), la contrôlabilité est caractérisée comme suit :

**Proposition 3** *Le système (I.1) est contrôlable si et seulement si la matrice :*

$$\Gamma = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$$

*est de rang  $n$ .*

**Remarque :** Dans le cas de systèmes plus généraux (coefficients variables), on peut généraliser la propriété précédente par la contrôlabilité uniforme [37].

### I.1.2 Contrôlabilité en dimension infinie

Soit  $H$  l'opérateur linéaire qui à tout contrôle  $u \in L^2(0, T)$  fait correspondre l'état final du système  $X(T)$  pour un état initial nul :

$$\begin{aligned} H : L^2(0, T) &\longrightarrow \mathcal{H} \\ u &\longmapsto H u = X(T) . \end{aligned}$$

**Définition 11** *Le système (I.1) est dit (fortement) contrôlable sur l'intervalle  $[0, T]$ , s'il existe un contrôle  $u \in L^2(0, T)$  permettant d'atteindre exactement tout état final (désiré)  $X_d \in \mathcal{H}$  à partir de l'état initial nul, i.e.  $\text{Im}(H) = \mathcal{H}$ .*

En pratique cette définition est la plupart du temps *inutilisable*, car elle est trop forte. On peut alors lui substituer la contrôlabilité faible.

**Définition 12** *Le système (I.1) est dit faiblement contrôlable (ou approximativement contrôlable) si tout état désiré peut être approché avec une précision arbitraire :*

$$\forall \epsilon > 0 , \quad \exists u \in L^2(0, T) , \quad \|X(T)\|_{\mathcal{H}} \leq \epsilon ,$$

*i.e.  $\overline{\text{Im}(H)} = \mathcal{H}$ .*

**Remarques :**

1. L'état désiré  $X_d$  peut être approché avec une précision de plus en plus grande, généralement au prix d'une énergie qui *croît indéfiniment*.
2. Dans le cas des systèmes hyperboliques (corde vibrante, membrane, ...) où la vitesse de propagation est finie, la contrôlabilité nécessite un temps  $T$  suffisamment grand.
3. Il existe aussi une définition quasiment équivalente d' $\epsilon$ -contrôlabilité.

Pour les systèmes réversibles, il existe une méthode générale permettant de caractériser la contrôlabilité d'un système dynamique de façon systématique : la méthode H.U.M. dont le principe est rappelé ci-après.



## I.2 Méthode H.U.M.

Le principe général de la méthode est basé sur un théorème d'unicité qui permet par complétion de construire une structure Hilbertienne d'états initiaux exactement contrôlables [28].

La méthode étant similaire dans le cas d'un contrôle aux frontières ou à l'intérieur du domaine, on rappelle ici les grandes lignes pour un contrôle interne, cas qui sera plus particulièrement examiné dans la suite.

On considère un système général *réversible* du type :

$$(S) \begin{cases} \ddot{X} = A X + B u \\ X(0) = X_0 \\ \dot{X}(0) = X_1 \end{cases} \quad (I.2)$$

avec  $(X_0, X_1) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ , auquel on ajoute des conditions aux limites convenables ;  $A$  étant un opérateur différentiel elliptique d'ordre  $2m$ . Dans le cas irréversible, on utilise une méthode similaire, R.H.U.M., méthode que l'on applique pour les systèmes de type parabolique comme par exemple l'équation de la chaleur.

En utilisant la méthode variationnelle (par exemple), on peut vérifier que le système (S) admet une solution unique.

Le problème de *contrôlabilité exacte* peut s'énoncer, pour le système (S), comme suit : existe-t-il un contrôle  $u$  (admissible) tel que  $X(T) = \dot{X}(T) = 0$  ?

La méthode H.U.M., permettant de résoudre ce problème peut se décomposer en 3 étapes :

1. Soit le système autonome (H), extrait du système initial (S) :

$$(H) \begin{cases} \ddot{Y} = A Y \\ Y(0) = Y_0 \\ \dot{Y}(0) = Y_1 \end{cases}$$

Ce système (H) admet une solution unique, notée  $Y$ . On définit le système rétrograde (R) sur  $t \in [0, T]$ , (puisque le système (S) est réversible) de la manière suivante :

$$(R) \begin{cases} \ddot{Z} = A Z + B u \\ Z(T) = 0 \\ \dot{Z}(T) = 0 \end{cases}$$

et ayant pour solution unique  $Z$ .

2. On définit un opérateur linéaire  $\Lambda$  reliant les données initiales de (H) aux états *atteignables*  $(Z(0), \dot{Z}(0)) = (Z_0, Z_1)$  pour (R) :

$$\Lambda(Y_0, Y_1) = (Z_1, -Z_0) \quad \forall (Z_1, Z_0) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) ; \quad (I.3)$$

de plus :

$$\begin{aligned} \forall (Y_0, Y_1) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) , \\ \langle \Lambda(Y_0, Y_1), (Y_0, Y_1) \rangle = \int_0^T \int_{\Omega} \|Y\|^2 d\Omega dt \end{aligned} \quad (I.4)$$

définit une *semi-norme* sur  $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$  .

3. On cherche un théorème *d'unicité* adapté au problème (par exemple le théorème de Holmgren dans le cas d'un contrôle aux frontières avec des conditions aux limites de Dirichlet), de manière à ce que (I.4) définisse une norme ; on note alors  $F$  l'espace de Hilbert, complété de  $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$  pour cette norme.

**Définition 13** *Le système est exactement contrôlable si (I.4) définit une norme.*

**Remarque :** Dans ce cas, toutes les directions propres du système sont *accessibles* par le contrôle  $u$  via l'opérateur d'entrée  $B$ .

Ainsi, par construction, l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \Lambda : F &\longrightarrow F' \\ (Y_0, Y_1) &\longmapsto \Lambda(Y_0, Y_1) , \end{aligned} \quad (I.5)$$

est un isomorphisme de  $F$  dans  $F'$ , et l'équation :

$$\Lambda(Y_0, Y_1) = (X_1, -X_0) , \quad (I.6)$$

admet une solution unique  $(Y_0, Y_1) \in F, \forall (X_1, -X_0) \in F'$ .

Par conséquent, si l'on considère un contrôle  $u = B^*Y$  où  $Y$  est la solution de (H) pour les données  $(Y_0, Y_1)$  vérifiant l'équation (I.6), alors la solution du système (S) est  $X(u) = Z$  et le contrôle  $u$  est tel que  $X(T) = \dot{X}(T) = 0, \forall (X_1, -X_0) \in F'$ .  $\square$

On peut résumer la méthode H.U.M. par le théorème suivant [28] :

**Théorème 5** *Si le théorème d'unicité est vérifié et si  $F$  est défini comme précédemment, alors :*

$$\forall (X_1, -X_0) \in F', \exists u \in L^2(0, T) , \quad X(T) = \dot{X}(T) = 0,$$

où  $X = X(u)$  est la solution unique du système (S).

**Commentaires :**

1. Dans le cas où  $\|\cdot\|$  n'est pas une norme, il est néanmoins possible de considérer l'espace  $F$  complété de l'espace *quotient* par le noyau de  $\Lambda$ . Bien que le système ne soit pas exactement contrôlable,  $F$  reste l'espace des états initiaux "exactement contrôlables".

2. La méthode H.U.M. s'applique aussi pour caractériser la contrôlabilité faible [5] qui est en fait équivalente à la contrôlabilité exacte, du fait de la densité des états atteignables. Il suffit de reprendre le même raisonnement que précédemment en se posant le problème de contrôlabilité faible, à savoir :

$$\forall \epsilon > 0, \exists u \quad \| ( X(T), \dot{X}(T) ) \| \leq \epsilon ?$$

Généralement, il existe une infinité de contrôles solutions du problème. Il est donc naturel de se poser le problème en terme d'optimisation d'une fonctionnelle de manière à obtenir une solution unique.

Par exemple, le problème de contrôlabilité exacte peut être mis sous la forme d'un problème de contrôle optimal avec contrainte de type *égalité*, i.e. :

$$(P_0) \quad \min_u \{ \|u\|_{L^2(0,T)}^2, ( X(T), \dot{X}(T) ) = 0 \}; \quad (I.7)$$

notons  $u^*$  la solution du problème quand elle existe.

**Proposition 4** *Le contrôle défini par la méthode H.U.M.  $u = B^*Y$  est solution du problème de contrôle optimal  $(P_0)$ .*

Preuve : La solution  $u^*$  du problème  $(P_0)$  a pour expression [9] :

$$u^*(t) = B^* \Phi^*(T-t) \left[ \int_0^T \Phi(T-\tau) B B^* \Phi^*(T-\tau) d\tau \right]^{-1} \Phi(T) ( -(X_0, X_1) ),$$

où  $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est le semi-groupe engendré par  $A$  ; d'autre part, le contrôle  $u$  s'écrit :

$$u(t) = B^* Y(t) = B^* \Phi(t) (Y_0, Y_1) = B^* \Phi(t) \Lambda^{-1} ( -X_1, X_0 );$$

en utilisant (I.3) et le système (R) pour déterminer  $\Lambda$ , on obtient :

$$\begin{aligned} u(t) &= B^* \Phi(t) \left[ \int_T^0 \Phi(-\tau) B B^* \Phi(\tau) d\tau \right]^{-1} (X_0, X_1) \\ &= B^* \Phi(t) \left[ \int_0^T \Phi(-\tau) B B^* \Phi(\tau) d\tau \right]^{-1} ( -(X_0, X_1) ); \end{aligned}$$

d'après la propriété d'additivité d'un semi-groupe (  $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$  ), on a :

$$u(t) = B^* \Phi(-T+t) \left[ \int_0^T \Phi(T-\tau) B B^* \Phi(-T+\tau) d\tau \right]^{-1} \Phi(T) ( -(X_0, X_1) ).$$

Finalement, on conclut que les deux contrôles  $u^*$  et  $u$  sont identiques si on a la propriété suivante (en identifiant l'espace d'état et son dual) :

$$\Phi^*(t) = \Phi(-t);$$

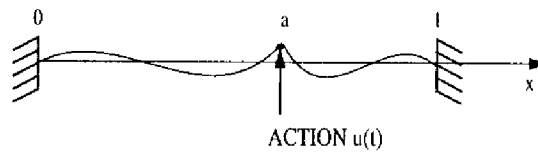
cette propriété est vérifiée pour un opérateur  $A$  elliptique symétrique d'ordre  $2m$  (cas des systèmes vibrants).  $\square$

Malheureusement, ce problème de contrôle optimal est souvent un problème mal posé (au sens de Hadamard) comme dans le cas traité dans la suite. Ceci est dû au fait que l'espace de contrôlabilité exacte  $F$  est strictement inclus (et dense) dans l'espace d'état (d'énergie), ce qui physiquement s'interprète comme la nécessité de mise en œuvre d'une énergie considérable pour le contrôle de certains états *mal atteignables*. On va le vérifier sur un exemple simple et montrer comment la notion de contrôlabilité exacte peut entraîner des *incohérences* d'un point de vue physique.

## I.3 Exemple : contrôle interne ponctuel d'une corde vibrante

### I.3.1 Position du problème

On considère le système linéaire monodimensionnel représentant l'évolution d'une corde vibrante de longueur unité soumise à une action ponctuelle, avec des conditions aux limites de type Dirichlet.



L'équation de la corde est :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta - \partial_x^2 \theta = u \delta_a \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) \\ \partial_t \theta(x, 0) = \theta_1(x) \\ \theta(0, t) = \theta(1, t) = 0, \end{cases} \quad (I.8)$$

où  $\delta_a \in H^{-1}(0, 1)$  est la mesure de Dirac au point  $a \in ]0, 1[$  et  $\theta(., t)$  l'élongation de la corde à l'instant  $t$ . Le couple d'états initiaux  $(\theta_0, \theta_1)$  et le contrôle  $u$  sont supposés appartenir aux espaces suivants :  $\theta_0 \in H_0^1(0, 1)$ ,  $\theta_1 \in L^2(0, 1)$  et  $u \in L^2(0, T)$ .

L'énergie du système  $\mathcal{E}(t)$  (somme des énergies cinétique et potentielle) s'écrit :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} (\|\partial_x \theta(., t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\partial_t \theta(., t)\|_{L^2(0,1)}^2) = \frac{1}{2} \|(\theta, \partial_t \theta)\|_{H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)}^2. \quad (I.9)$$

On transforme le système (I.8) en calculant les valeurs propres  $\lambda_n$  et les fonctions propres  $\varphi_n(x)$  associées à l'opérateur  $\partial_x^2$  avec les conditions aux limites. On obtient après projection sur la base des fonctions propres  $\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x)$ , un système diagonal équivalent :

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = \Upsilon \xi + \gamma u \\ \xi(0) = \rho \\ \dot{\xi}(0) = \eta, \end{cases} \quad (I.10)$$

où

$$\begin{aligned}\xi &= (\xi_n(t))_{n \geq 1}, & \xi_n(t) &= (\theta(t), \varphi_n)_{L^2(0,1)}, \\ \rho &= (\rho_n)_{n \geq 1}, & \rho_n &= (\theta_0, \varphi_n)_{L^2(0,1)}, \\ \eta &= (\eta_n)_{n \geq 1}, & \eta_n &= (\theta_1, \varphi_n)_{L^2(0,1)}, \\ \gamma &= (\gamma_n)_{n \geq 1}, & \gamma_n &= \varphi_n(a), \\ \Upsilon &= \underset{n}{diag}(\lambda_n), & \lambda_n &= -n^2 \pi^2.\end{aligned}$$

Finalement, en augmentant l'état du système, le système initial (I.8) se met sous la forme d'un système du premier ordre. En posant :

$$X = \begin{bmatrix} \xi \\ \xi \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Upsilon & 0 \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} \rho \\ \eta \end{bmatrix}, \quad (\text{I.11})$$

on obtient le système sous forme du premier ordre en temps :

$$\begin{cases} \dot{X} &= A X + B u \\ X(0) &= X_0. \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

D'après (I.11) et (I.12),  $\theta(x, t)$  s'écrit :

$$\theta(x, t) = \sum_{n \geq 1} \xi_n(t) \sin(n\pi x),$$

et

$$\partial_x \theta(x, t) = \sum_{n \geq 1} n\pi \xi_n(t) \cos(n\pi x) \quad \partial_t \theta(x, t) = \sum_{n \geq 1} \dot{\xi}_n(t) \sin(n\pi x).$$

Ainsi les énergies potentielle et cinétique deviennent :

$$\|\partial_x \theta(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 \left[ \sum_{n \geq 1} n\pi \xi_n(t) \cos(n\pi x) \right]^2 dx$$

$$\|\partial_t \theta(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 \left[ \sum_{n \geq 1} \dot{\xi}_n(t) \sin(n\pi x) \right]^2 dx ;$$

sachant que  $\sin(n\pi x) \cup \cos(n\pi x)$  forment une base de  $L^2(0, 1)$ , on obtient :

$$\|\partial_x \theta(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{n \geq 1} n^2 \pi^2 \xi_n^2(t) \int_0^1 \cos^2(n\pi x) dx = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} n^2 \pi^2 \xi_n^2(t),$$

et

$$\|\partial_t \theta(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{n \geq 1} \dot{\xi}_n^2(t) \int_0^1 \sin^2(n\pi x) dx = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \dot{\xi}_n^2(t).$$

Finalement, l'énergie du système (I.12) s'écrit :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (n^2 \pi^2 \xi_n^2(t) + \dot{\xi}_n^2(t)) = \frac{1}{2} (\pi^2 \|\xi(t)\|_{\mathcal{H}^1}^2 + \|\dot{\xi}(t)\|_{\mathcal{H}^0}^2) \equiv \frac{1}{2} \|X(t)\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (\text{I.13})$$

où  $\mathcal{H} = h^1 \times l^2$  désigne l'espace d'état du système (I.12). Dans le cas où le contrôle est nul (système autonome), l'énergie  $\mathcal{E}(t)$  est constante pour tout  $t \in [0, T]$  et égale à l'énergie initiale  $\mathcal{E}(0)$ .

**Remarque :** On a la relation :  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, l^2 \times h^{-1})$ .

On applique dans le paragraphe suivant la méthode H.U.M. au système (I.8) afin de caractériser la contrôlabilité. Dans le cas où il existe une incertitude sur la position  $a$  de l'actionneur (ce qui est *physiquement* inévitable), on montre que ce critère de contrôlabilité entraîne des *incohérences* physiques.

### I.3.2 Contrôlabilité et contrôle optimal en présence d'incertitude sur un paramètre

Remarquons tout d'abord que les développements de cette partie seront utilisés dans les chapitres suivants.

#### Un problème mal posé

Le critère de contrôlabilité exacte du système (I.10) est en fait similaire au critère classique des systèmes de dimension finie de ce type, c'est à dire à matrice diagonale, à savoir [28] :

$$\sin(k\pi a) \neq 0 \quad \forall k \geq 1. \quad (\text{I.14})$$

c'est à dire dans notre cas  $a \notin \mathbb{Q}$ .

**Définition 14** *Un point  $a \in ]0, 1[$  vérifiant la condition de contrôlabilité est appelé point stratégique [28].*

Par la méthode H.U.M., on retrouve la contrôlabilité exacte sur tout point  $a$  stratégique en construisant l'espace de Hilbert  $F_a$  des états initiaux exactement contrôlables. Dans le cas du contrôle ponctuel d'une corde, l'espace  $F_a$  est caractérisé de la manière suivante pour  $a \notin \mathbb{Q}$  [20] :

$$F_a = \left\{ X_0 = (\rho_n, \eta_n)_{n \geq 1}, \sum_{n \geq 1} \frac{n^2 \rho_n^2 + \eta_n^2}{\sin^2(n\pi a)} < +\infty \right\}. \quad (\text{I.15})$$

On montre facilement que l'espace  $F_a$  est *dense* dans l'espace d'état  $\mathcal{H}$ . Donc, lorsque  $a \notin \mathbb{Q}$ , le système (I.12) est exactement contrôlable :

$$\forall X_0 \in F_a, \quad \exists u \in L^2(0, T), \quad X(T) = 0.$$

#### Remarques :

1. L'espace  $F_a$  est fonction de la position du contrôle : pour 2 positions différentes  $a$  et  $a_0$ , les espaces  $F_a$  et  $F_{a_0}$  seront différents.

2. Lorsque  $a \in \mathbb{Q}$ ,  $F_a$  peut être défini par un quotient : on peut continuer à parler d'états initiaux exactement contrôlables. Cependant, il existe alors des directions *non contrôlées* dans l'espace d'état ( $F_a$  n'est plus dense). Ici, l'espace des états initiaux exactement contrôlables est l'espace défini par (I.15), en considérant que  $\rho_n = \eta_n = 0$  lorsque  $\sin(n\pi a) = 0$ .

Dans la pratique, il existe toujours une incertitude sur les paramètres du système de telle sorte que l'on ne puisse pas connaître avec précision la position de l'actionneur, c'est à dire  $a$ . Il est donc intéressant de voir le comportement de l'espace  $F_a$  pour une position  $a \in [a_1, a_2]$ , où  $a_1$  et  $a_2$  définissent un intervalle d'incertitude.

**Proposition 5**

$$\dim\left(\bigcap_{a \in [a_1, a_2]} F_a\right) < +\infty . \quad (\text{I.16})$$

Preuve :

On a la relation d'inclusion suivante :

$$\bigcap_{a \in [a_1, a_2]} F_a \subset \bigcap_{a \in [a_1, a_2] \cap \mathbb{Q}} F_a .$$

Un état initial  $X_0 = (\rho, \eta)$  est dans  $F_a$  avec  $a \in \mathbb{Q}$ , si et seulement si, d'après (I.15) :

$$(\rho_n, \eta_n) = 0 \quad \text{lorsque} \quad \sin(n\pi a) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} . \quad (\text{I.17})$$

Par conséquent  $X_0 \in \bigcap_{a \in [a_1, a_2] \cap \mathbb{Q}} F_a$  si (I.17) est vérifiée pour tout  $a \in [a_1, a_2] \cap \mathbb{Q}$ . Or, ceci est vérifié si la période spatiale  $T_n$  de  $\sin(n\pi x)$  est telle que :

$$T_n = \frac{2}{n} > a_2 - a_1 \iff n < \frac{2}{a_2 - a_1} ; \quad (\text{I.18})$$

l'ensemble des indices  $n$  vérifiant (I.18) est évidemment fini.  $\square$

En conséquence, l'espace  $\bigcap_{a \in [a_1, a_2]} F_a$  devient *pauvre* : en cas d'incertitude sur  $a$ , l'espace de contrôlabilité exacte n'est plus de dimension infinie. On pourrait penser que physiquement  $a \notin \mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q}$  étant un ensemble de mesure nulle. Mais on montre ci-après, qu'une incertitude sur  $a$  peut conduire à un contrôle optimal totalement *aberrant*, c'est à dire que la dépendance entre  $a$  et le contrôle optimal  $u^*$  n'est pas continue, même en ne considérant que des points stratégiques.

Comme signalé au paragraphe précédent, le problème de contrôlabilité exacte peut se déduire du problème de contrôle optimal ( $P_0$ ). Pour le système (I.12), il est possible de déterminer la solution  $u^*$  du problème ( $P_0$ ) de manière explicite.

On considère le système (I.12) et  $\{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  le groupe de transformation sur  $\mathcal{H}$  associé à l'opérateur  $A$ , possédant les propriétés :

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} &= 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \Phi^*(t) &= \Phi(-t), \quad (\text{pour } \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}'), \\ \Phi(t + 2k) &= \Phi(t) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (\text{groupe périodique}). \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

La solution  $X(t)$  s'écrit :

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)B_a u(\tau) d\tau . \quad (I.20)$$

**Théorème 6** [27] Pour  $u \in L^2(0, T)$  et  $X_0 \in \mathcal{H}$ ,  $X \in C^0([0, T]; \mathcal{H})$  et l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \times L^2(0, T) &\longrightarrow L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \\ (X_0, u) &\longmapsto X , \end{aligned}$$

est continue.

**Corollaire 1** L'opérateur linéaire  $H_a$  défini par :

$$\begin{cases} H_a : L^2(0, T) \longrightarrow \mathcal{H} \\ u \longmapsto H_a u = \int_0^T \Phi(T-\tau)B_a u(\tau) d\tau ; \end{cases} \quad (I.21)$$

est borné.

**Remarque** Bien que  $B$  ne soit pas un élément de l'espace d'état ( $\delta_a \in H^{-1}(]0, 1[)$ ), l'énergie "apportée" par le contrôle est finie.

Le problème  $(P_0)$  s'écrit en utilisant (I.21) :

$$(P_0) \quad \min_u \{ \|u\|_{L^2(0, T)}^2, H_a u + \Phi(T)X_0 = 0 \} ; \quad (I.22)$$

sa solution  $u^*$  s'écrit :

$$u^* = -H_a^*(H_a H_a^*)^{-1} \Phi(T)X_0 , \quad (I.23)$$

$u^*$  étant défini lorsque  $(H_a H_a^*)$  est inversible ; ceci est vérifié pour tout  $T \geq 2$  et  $a \notin \mathbb{Q}$ .

**Proposition 6** Soit le problème  $(P_0)$  et  $F_a$  l'espace des états initiaux exactement contrôlables pour un point stratégique  $a$ . L'opérateur  $Q$  défini par :

$$\begin{aligned} Q : F_a &\longrightarrow L^2(0, T) \\ X_0 &\longmapsto Q X_0 = -H_a^*(H_a H_a^*)^{-1} \Phi(T)X_0 , \end{aligned} \quad (I.24)$$

n'est pas continu pour la topologie induite par  $\mathcal{H}$  sur  $F_a$ .

Preuve : Si l'opérateur  $Q$  était continu, il serait prolongeable par continuité-densité à tout l'espace d'état  $\mathcal{H}$  ; mais alors le problème de contrôlabilité exacte serait déterminé pour tout état initial  $X_0 \in \mathcal{H}$ , ce qui est contradictoire puisque  $F_a \neq \mathcal{H}$ .  $\square$

La conséquence immédiate est que le problème  $(P_0)$  est mal posé. Il serait possible de rendre le problème  $(P_0)$  bien posé en considérant comme nouvel espace d'état du système (I.12), l'espace des états initiaux exactement contrôlables  $F_a$ . Dans ce cas, non seulement l'espace d'état varie en fonction de la position  $a$  du contrôle qui est mal connue mais la mesure de l'erreur sur l'état n'est pas basée sur l'énergie physique, ce qui présente de graves inconvénients en pratique.



### Non continuité du contrôle par rapport à $a$

On détermine tout d'abord l'expression du contrôle optimal  $u^*$  en choisissant  $T = 2$ , ce qui correspond au temps minimum pour avoir l'inversibilité de  $(H_a H_a^*)$ . Dans ce cas, l'ensemble des fonctions :

$$\{\sin(n\pi t)\}_{n \geq 1} \cup \{\cos(n\pi t)\}_{n \geq 1} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, \quad (\text{I.25})$$

forme une base orthonormée de  $L^2(0, T)$  ; donc l'application :

$$\begin{cases} S : l^2 \times l^2 \times \mathbb{R} & \longrightarrow L^2(0, T) \\ (\alpha, \beta, \beta_0) & \longmapsto u(t) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \sin(n\pi t) + \sum_{n \geq 1} \beta_n \cos(n\pi t) + \frac{\beta_0}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad (\text{I.26})$$

est isométrique, c'est à dire :

$$\|(\alpha, \beta, \beta_0)\|_{l^2 \times l^2 \times \mathbb{R}}^2 = \|\alpha\|_{l^2}^2 + \|\beta\|_{l^2}^2 + |\beta_0|^2 = \|u\|_{L^2(0, T)}^2. \quad (\text{I.27})$$

Le semi-groupe  $\{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  est périodique :  $\Phi(T) = \Phi(0) = I$  ( d'après (I.19)). En définissant l'opérateur  $K$  par :

$$\begin{aligned} K : l^2 \times l^2 \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathcal{H} \\ (\alpha, \beta, \beta_0) & \longmapsto K(\alpha, \beta, \beta_0) = H_a \cdot S(\alpha, \beta, \beta_0), \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

l'expression du contrôle  $u^*$  devient :

$$\begin{cases} u_0^* & = S(\alpha, \beta, \beta_0) \\ (\alpha, \beta, \beta_0) & = -R_0(\rho, \eta), \end{cases} \quad (\text{I.29})$$

avec :

$$\begin{aligned} R_0 : \mathcal{H} & \longrightarrow l^2 \times l^2 \times \mathbb{R} \\ (\rho, \eta) & \longmapsto R_0(\rho, \eta) = K^*(K K^*)^{-1}(\rho, \eta). \end{aligned} \quad (\text{I.30})$$

**Lemme 1** *L'opérateur  $K$  défini par (I.28) est une matrice (infinie) de la forme :*

$$K = \begin{bmatrix} \text{diag}\left\{-\frac{\sqrt{2} \sin(n\pi a)}{n\pi}\right\} & 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}\{\sqrt{2} \sin(n\pi a)\} & \vdots \end{bmatrix}. \quad (\text{I.31})$$

Preuve : On considère la solution du système (I.12) pour  $u = 0$  (système autonome) :

$$\xi_n(t) = \rho_n \cos(n\pi t) + \frac{\eta_n}{n\pi} \sin(n\pi t). \quad (\text{I.32})$$

Sachant que la solution du système (I.12) est de la forme  $X(t) = \Phi(t)X_0$ , on en déduit par identification de (I.11) et (I.32) l'expression du semi-groupe  $\{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  :

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \text{diag}\{\cos(n\pi t)\} & \text{diag}\{\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\} \\ \text{diag}\{-n\pi \sin(n\pi t)\} & \text{diag}\{\cos(n\pi t)\} \end{bmatrix}. \quad (\text{I.33})$$

De la définition de l'opérateur  $H_a$  (I.21) et en utilisant (I.28), on a :

$$\begin{aligned} K(\alpha, \beta, \beta_0) = \int_0^T & \begin{bmatrix} (-\sqrt{2} \frac{\sin(n\pi\tau)}{n\pi})_{n \geq 1} \\ (\sqrt{2} \cos(n\pi\tau))_{n \geq 1} \end{bmatrix} \sin(n\pi a) [\sum_{k \geq 1} \alpha_k \sqrt{2} \sin(k\pi\tau) + \\ & + \sum_{k \geq 1} \beta_k \sqrt{2} \cos(k\pi\tau) + \frac{\beta_0}{\sqrt{2}}] d\tau; \end{aligned} \quad (\text{I.34})$$

Le système (I.25) étant une base orthonormée, on obtient après calcul :

$$K(\alpha, \beta, \beta_0) = \begin{bmatrix} (\frac{\sin(n\pi a)}{n\pi} \alpha_n)_{n \geq 1} \\ (\sin(n\pi a) \beta_n)_{n \geq 1} \end{bmatrix}. \quad \square \quad (\text{I.35})$$

**Lemme 2** L'opérateur  $R_0 : \mathcal{H} \rightarrow l^2 \times l^2 \times \mathbb{R}$  défini par (I.30), s'écrit :

$$R_0 = \begin{bmatrix} \text{diag}\{-\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}n\pi}{\sin(n\pi a)}\} & & 0 \\ & & \text{diag}\{\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sin(n\pi a)}\} \\ 0 & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (\text{I.36})$$

Preuve : Il suffit de remplacer l'expression de  $K$  (I.31) dans (I.30).  $\square$

**Remarque** : Il est à noter que l'opérateur adjoint  $K^*$  n'est pas le transposé de  $K$  au sens classique des matrices car la composante  $\alpha$  est définie de  $l^2$  dans  $h^1$ , espaces pour lesquels les normes ne sont pas les mêmes. En effet, en considérant uniquement la première composante  $\alpha$ , la matrice (infinie)  $K^*$  se détermine par la relation suivante :

$$\forall \xi \in h^1 \quad (K \alpha \mid \xi)_{h^1} = (\alpha \mid K^* \xi)_l;$$

on obtient après calcul, en posant  $K = (K_{i,j})_{i,j \geq 1}$  et  $K^* = (K_{i,j}^*)_{i,j \geq 1}$  :

$$\forall i, j \geq 1 \quad K_{i,j}^* = j^2 K_{i,j}.$$

Finalement, l'expression du contrôle optimal  $u^*$  s'écrit dans la base (I.25) :

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{n\pi\rho_n}{\sqrt{2}\sin(n\pi a)} \right)_{n \geq 1} \\ \left( \frac{\eta_n}{\sqrt{2}\sin(n\pi a)} \right)_{n \geq 1} \end{bmatrix}, \quad (I.37)$$

ou encore :

$$u^*(a, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 1} \frac{n\pi\rho_n \sin(n\pi t) + \eta_n \cos(n\pi t)}{\sin(n\pi a)}. \quad (I.38)$$

L'expression de  $u^*$  nous permet d'énoncer la proposition suivante :

**Proposition 7** *Pour  $a = a_0 + \alpha$ ,  $\alpha = \frac{1}{2q}$ ,  $a \notin \mathbb{Q}$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ , on a la propriété :*

$$\forall K > 0, \exists X_0 \in F_a \cap F_{a_0}, \|X_0\|_{\mathcal{H}} = 1, \|u_a^* - u_{a_0}^*\|_{L^2(0,T)}^2 \geq K.$$

La démonstration repose sur le lemme :

**Lemme 3** *Il existe une suite d'entiers strictement croissante  $(k_n)$  telle que :*

$$\left| \frac{\sin(k_n \pi a)}{\sin(k_n \pi a_0)} \right| \sim n.$$

Preuve : Soit  $n' = (2n + 1)q$  et  $a' = qa_0$  :

$$\frac{\sin(n' \pi (a_0 + \alpha))}{\sin(n' \pi a_0)} = \frac{\sin(n' \pi a_0 + (2n + 1) \frac{\pi}{2})}{\sin(n' \pi a_0)} = \pm \frac{\cos(n' \pi a_0)}{\sin(n' \pi a_0)};$$

$a' \notin \mathbb{Q}$  ; par conséquent,  $\{e^{i(2n+1)\pi a'}\}_{n \in \mathbb{N}}$  est dense dans le cercle unité. On peut donc choisir une suite  $(k'_n)$  d'entiers impairs tous différents telle que :

$$\frac{1}{n+1} \leq |\sin(k'_n \pi a')| \leq \frac{1}{n};$$

il est clair qu'alors  $|\cos(k'_n \pi a')| \sim 1$ . Par conséquent, en posant  $k_n = qk'_n$  :

$$\left| \frac{\sin(k_n \pi a)}{\sin(k_n \pi a_0)} \right| \sim n. \quad \square$$

Démonstration de la proposition 7 :

Il suffit de considérer  $X_0$  défini par  $\rho = 0$  et  $\eta_n = \sigma \frac{\sin(k_n \pi a)}{n}$  pour les  $n$  premiers termes de  $(k_n)$ ,  $\eta_n = 0$  pour les autres termes.

1.  $\|\eta\|_{l^2}^2 \leq \sigma^2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = 1$  pour  $\sigma$  convenable.

2.  $X_0 \in F_a \cap F_{a_0}$  car  $\eta$  est à support fini.
3.  $\|u_a^*\|_{L^2(0,T)}^2 = \sigma^2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \frac{\sin^2(k_n \pi a)}{\sin^2(k_n \pi a_0)} \leq 1$ .
4.  $\|u_{a_0}^*\|_{L^2(0,T)}^2 = \sigma^2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \frac{\sin^2(k_n \pi a)}{\sin^2(k_n \pi a_0)} \sim \sum_{n=1}^N 1 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$ .  $\square$

**Remarque :** Il est probable (mais la démonstration est plus difficile) que ce résultat soit encore valable pour tout  $(a, a_0) \notin \mathbb{Q}^2$ ,  $a \neq a_0$ .

Ainsi, pour deux positions (même stratégiques) voisines de l'actionneur, les contrôles optimaux peuvent être très différents : le problème  $(P_0)$  n'est pas *robuste* pour de petites variations du paramètre, ce qui constitue un inconvénient inadmissible du point de vue pratique.

**Remarque :** La contrôlabilité ne pose pas de problème pour un contrôle aux frontières. En effet, soit le système :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta - \partial_x^2 \theta & = 0 \\ \theta(x, 0) & = \theta_0(x) \\ \partial_t \theta(x, 0) & = \theta_1(x) \\ \theta(0, t) & = 0 \\ \theta(1, t) & = u(t) ; \end{cases} \quad (\text{I.39})$$

on montre dans ce cas [28] :

$$\forall (\theta_0, \theta_1) \in \mathcal{H}, \forall T \geq 2, \exists u \in L^2(0, T), \mathcal{E}(T) = 0, \\ \|u\|_{L^2(0,T)}^2 \leq K \|(\theta_0, \theta_1)\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Intuitivement, on peut comprendre facilement qu'il est plus difficile de contrôler le système (I.8) : lorsque l'actionneur est à l'intérieur du domaine, il existe deux phénomènes physiques : transmission et réflexion avec atténuation (l'actionneur perturbe le système), alors que si l'actionneur est placé à la frontière, seule la réflexion demeure (propriété physique d'une impédance en bout de ligne).

## I.4 Conclusion

Par cet exemple simple, on vient de montrer que la notion de contrôlabilité exacte conduisait à une perte de continuité du contrôle par rapport aux paramètres structuraux du problème. Ceci est d'autant moins acceptable que le problème (I.8) semble *physiquement* bien posé. En effet, de petites variations sur la position  $a$  de l'actionneur ne doivent pas entraîner un changement de comportement significatif du système, ni du contrôle. De plus, une distinction entre les rationnels et les irrationnels n'est pas réaliste en pratique.

D'autre part, le problème de contrôle optimal  $(P_0)$  étant mal posé, si l'on désire approcher un état désiré avec une précision de plus en plus grande, l'énergie du contrôle  $\|u\|_{L^2(0,T)}^2$  nécessaire pour atteindre cet état tendra généralement vers l'infini.

Enfin si l'on souhaite définir une fonction représentant le critère de contrôlabilité en fonction de la position de l'actionneur  $a$ , on choisira naturellement la fonction caractéristique  $\mathcal{X}_{\mathbb{Q} \cap ]0,1[}$  (le système étant contrôlable lorsque  $\mathcal{X}_{\mathbb{Q} \cap ]0,1[}$  est nulle). Cette fonction est nulle *presque partout* ; ce paradoxe est essentiellement dû à la notion *binaire* de contrôlabilité et à la *dimension infinie* de l'espace d'état.

Pour toutes ces raisons, il serait judicieux de définir et d'analyser un critère de contrôlabilité qui pourrait être *continu* par rapport aux paramètres structuraux du système, ce qui implique que le concept de contrôlabilité soit défini comme une *mesure* de contrôlabilité et non plus comme une notion binaire.

En dimension finie, ce concept de *degré* (ou de mesure) de contrôlabilité a été introduit, dès les années 1960 par Kalman [23]. Il définit deux types de mesures appelées "critère de mérite" à partir de la matrice grammienne  $W(0, T)$  :

- $\mu_1 \propto \text{trace}(W^{-1}(0, T))$  ,
- $\mu_2 \propto ( \det(W(0, T)) )^{\frac{1}{2}}$  .

Ces deux mesures possèdent les propriétés suivantes :

- elles sont continues par rapport aux paramètres du système,
- elles sont indépendantes de l'état initial,
- elles prennent la valeur zéro lorsque le système n'est pas contrôlable.

Ces mesures ont été étudiées par [15], [18], [21], [35], [41], [42] dans le but d'obtenir une *certaine qualité* de contrôlabilité, en vue par exemple d'un placement *optimal* d'actionneurs.

Malheureusement, en dimension infinie, les notions de *trace* et *déterminant* d'un opérateur perdent leur sens.

Juang et Rodriguez ont défini un autre type de mesure, basé sur la résolution du problème de contrôle optimal (en boucle fermée) pour un critère quadratique [22]. Cette mesure est utilisée pour établir le placement "optimal" d'actionneurs le long d'une poutre. Ici, le système est considéré en dimension finie et la poutre est représentée par les premiers modes uniquement. Bien que ce type de mesure soit séduisant pour le passage à des systèmes en dimensions infinies, il existe trois obstacles majeurs :

- le calcul du retour optimal implique la résolution de l'équation de Riccati, équation non linéaire difficile à résoudre,
- La mesure de contrôlabilité dépend de l'ordre d'approximation du système réparti initial, ce qui élimine tout caractère intrinsèque vis-à-vis du système.
- en décomposant suivant les modes propres du système, le degré de contrôlabilité est du même type au passage à la limite, que la fonction caractéristique  $\mathcal{X}_{\mathbb{Q} \cap ]0,1[}$  qui est nulle presque partout.

On va définir dans le chapitre suivant un degré de contrôlabilité pour le système (I.8), assez proche de celui de Juang et Rodriguez, mais permettant d'éviter les difficultés citées ci-dessus.

A cet effet, on exploitera la nature infinidimensionnelle du système dans le sens où en pratique, les modes de rang élevé sont de moins en moins significatifs, tant par leur présence que par la qualité de leur modélisation, ce qui rend illusoire une trop grande précision dans leurs descriptions et permet par là même d'effectuer certaines hypothèses *d'ensemble*. Cette propriété est propre aux systèmes répartis et compense en quelque sorte la difficulté liée à la dimension infinie.

Ce degré sera appelé degré de contrôlabilité "actif" afin de le différencier d'un autre type que nous définirons au chapitre III.

## Chapitre II

# Degré de contrôlabilité “actif” pour corde vibrante (et poutre)

Le but de ce chapitre est de définir et d'étudier pour le système (I.8) (ainsi que pour deux autres systèmes voisins), un *degré de contrôlabilité* possédant notamment les trois propriétés suivantes :

1. continuité par rapport aux paramètres du système,
2. indépendance par rapport à l'état initial,
3. compris entre 0 et 1.

Ce degré de contrôlabilité est défini à partir d'un problème de contrôle optimal bien posé pour une classe d'états initiaux physiquement *réaliste*. Il permettra de caractériser la contrôlabilité du système par un nombre compris entre 0 et 1. Le qualificatif “actif” fait référence au contrôle “actif” obtenu par minimisation d'une fonctionnelle faisant intervenir l'équation d'état.

### II.1 Degré de contrôlabilité actif : $F_\epsilon$

On a vu au chapitre précédent que la contrôlabilité exacte (ou faible) correspondait à un problème de contrôle optimal souvent mal posé ( $P_0$ ). On considère dans la suite, une régularisation du problème ( $P_0$ ) par *pénalisation*. Par ailleurs, l'état initial du système sera supposé aléatoire, le degré de contrôlabilité étant alors défini par une espérance mathématique, ce afin de préserver le caractère intrinsèque des propriétés. Ceci est en accord avec la problématique de l'Automatique dont un des objectifs est le contrôle des perturbations, objets par nature aléatoires.

#### II.1.1 Définition

On considère un espace probabilisé de référence  $(\Omega, \Sigma, p)$  et le système :

$$\begin{cases} \dot{X} &= A X + B u \\ X(0) &= X_0 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

avec  $X(t) \in \mathcal{H}$ , l'espace d'état (espace de Hilbert). L'état initial est supposé être une variable aléatoire de variance finie, à valeurs dans  $\mathcal{H}$  :

$$X_0 \in L^2(\Omega; \mathcal{H}) . \quad (\text{II.2})$$

Il en découle que l'état du système (II.1) ainsi que son énergie définie par :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \|X(t)\|_{\mathcal{H}}^2$$

sont *a priori* des variables aléatoires. Pour  $\omega \in \Omega$  fixé,  $X_0(\omega) \in \mathcal{H}$  ; on retrouve donc le système (I.12) étudié au chapitre I.

On considère le problème de contrôle optimal avec pénalisation :

$$(P_\epsilon) \quad \min_u \{ \mathcal{E}(T) + \epsilon \|u\|_{L^2(0,T)}^2 \} , \quad \epsilon > 0 , \quad (\text{II.3})$$

ayant pour solution (unique)  $u_\epsilon^*$ . Ce problème est bien posé pour tout  $\epsilon > 0$ . Étant donné que le contrôle optimal  $u_\epsilon^*$  dépend de l'état initial  $X_0$ ,  $u_\epsilon^*$  est *a priori* une variable aléatoire définie sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $L^2(0, T)$ . Le paramètre  $\epsilon$  correspond concrètement au "prix à payer" sur l'énergie du contrôle.

Il est classique que (pour  $\omega$  fixé), le problème  $(P_\epsilon)$  est une régularisation du problème  $(P_0)$ , c'est à dire :

**Proposition 8** *Pour  $X_0(\omega) \in \mathcal{H}$ , si  $u_0^*(\omega)$  est solution du problème  $(P_0)$ , alors l'unique solution  $u_\epsilon^*(\omega)$  du problème  $(P_\epsilon)$  vérifie :*

$$\|u_\epsilon^*(\omega) - u_0^*(\omega)\|_{L^2(0,T)}^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 .$$

**Remarques :**

1. En termes de convergence probabiliste, ce résultat s'écrit:

$$\|u_\epsilon^*\|_{L^2(0,T)}^2 \longrightarrow \|u_0^*\|_{L^2(0,T)}^2 \quad \text{presque - sûrement .}$$

2. Si  $(P_0)$  n'a pas de solution, alors la solution  $u_0^*(\omega)$  diverge lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Hypothèses fondamentales :

le degré de contrôlabilité se définit à partir du problème  $(P_\epsilon)$ , en considérant l'espérance mathématique de la valeur du coût pour le contrôle optimal. Afin que cette quantité soit *normalisée*, il est naturel de la diviser par l'énergie initiale. L'état initial étant défini par les coefficients  $\rho_n$  et  $\eta_n$ , pour  $n = 1, +\infty$ , nous supposons que ces quantités sont des variables aléatoires supposées indépendantes centrées et de variances finies :



$$\begin{cases} E[\rho_n] = E[\eta_n] = 0 \\ E[\rho_n^2] \equiv r_n^2 < +\infty \\ E[\eta_n^2] \equiv s_n^2 < +\infty . \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Dans le but d'éviter des difficultés techniques, on suppose que l'énergie initiale est déterminée *a priori*.

$$\forall \omega \in \Omega , \quad \mathcal{E}(0, \omega) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (n^2 \pi^2 \rho_n^2(\omega) + \eta_n^2(\omega)) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (n^2 \pi^2 r_n^2 + s_n^2) , \quad (\text{II.5})$$

avec

$$(r_n)_{n \geq 1} \in h^1 , \quad (s_n)_{n \geq 1} \in l^2. \quad (\text{II.6})$$

Les relations (II.4) et (II.6) décrivent le contenu harmonique de l'état initial. En pratique, il sera intéressant de choisir par exemple :  $r_n = 0$  et  $s_n = \frac{1}{n}$ . En effet, cette décroissance des modes harmoniques impose à  $\theta(x, t)$  d'être à chaque instant différentiable presque partout, avec au plus des points anguleux lipschitziens.

On définit alors :

**Définition 15** *Le degré de contrôlabilité actif  $F_\epsilon$  relatif au système (II.1) et au problème  $(P_\epsilon)$  est défini par :*

$$F_\epsilon = \frac{f_\epsilon + \epsilon g_\epsilon}{\mathcal{E}(0)} , \quad (\text{II.7})$$

avec :

$$f_\epsilon = E[ \mathcal{E}(T) ] , \quad (\text{II.8})$$

$$g_\epsilon = E[ \|u_\epsilon^*\|^2 ] . \quad (\text{II.9})$$

**Remarque :** Les quantités,  $f_\epsilon$ ,  $g_\epsilon$  correspondent respectivement à l'énergie moyenne du système (II.1) et à l'énergie moyenne du contrôle optimal  $u_\epsilon^*$ .

De cette définition, il découle que  $F_\epsilon \in [0, 1]$  ;  $F_\epsilon = 1$  lorsque  $u_\epsilon^* \equiv 0$ , c'est à dire lorsque le système n'est pas du tout contrôlable (puisque le contrôle optimal est nul). Le système (II.1) est *bien contrôlable* lorsque la valeur de la fonction  $F_\epsilon$  est petite.

**Remarque :** Il est possible de définir un degré de contrôlabilité *inversé* :  $1 - F_\epsilon$  ; il s'annule lorsque le système n'est *pas du tout* contrôlable, c'est à dire lorsque le contrôle  $u$  n'a aucun effet sur l'état du système.

## II.1.2 Cas de la corde avec contrôle interne : expressions des fonctions $f_\epsilon$ , $g_\epsilon$ et $F_\epsilon$

L'expression de  $F_\epsilon$  nécessite la résolution du problème  $(P_\epsilon)$ . Nous reprenons pour cela les mêmes notations qu'au chapitre I.

Soit  $H_a$  l'opérateur défini par (I.21) ; le problème  $(P_\epsilon)$  s'écrit :

$$(P_\epsilon) \quad \min_u \left\{ \frac{1}{2} \|H_a u + \Phi(T)X_0\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon \|u\|_{L^2(0,T)}^2 \right\}, \quad \epsilon > 0, \quad (\text{II.10})$$

et sa solution notée  $u_\epsilon^*$  prend la forme :

$$u_\epsilon^* = -(H_a^* H_a + 2\epsilon I)^{-1} H_a^* \Phi(T) X_0, \quad \epsilon > 0. \quad (\text{II.11})$$

En décomposant  $u_\epsilon^*$  dans la base (I.25), on obtient :

$$\begin{cases} u_\epsilon^* &= S(\alpha, \beta, \beta_0) \\ (\alpha, \beta, \beta_0) &= -R_\epsilon(\rho, \eta), \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

où  $S$  est défini par (I.26) et  $R_\epsilon$  par :

$$\begin{aligned} R_\epsilon : \mathcal{H} &\longrightarrow l^2 \times l^2 \times \mathbb{R} \\ (\rho, \eta) &\longmapsto R_\epsilon(\rho, \eta) = (K^* K + 2\epsilon I)^{-1} K^*(\rho, \eta), \quad \epsilon > 0, \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

avec  $K$  défini par (I.28). Le lemme suivant nous donne l'expression de l'opérateur  $R_\epsilon$  :

**Lemme 4** *L'opérateur  $R_\epsilon : \mathcal{H} \longrightarrow l^2 \times l^2 \times \mathbb{R}$  défini par (II.13), s'écrit :*

$$R_\epsilon = \begin{bmatrix} \text{diag}\left\{-\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} n \pi \sin(n\pi a)}{\sin^2(n\pi a) + \epsilon}\right\} & & & & 0 \\ & 0 & & & \\ & & \text{diag}\left\{\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(n\pi a)}{\sin^2(n\pi a) + \epsilon}\right\} & & \\ & 0 & & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad \epsilon \geq 0. \quad (\text{II.14})$$

la démonstration est similaire à celle utilisée pour l'opérateur  $R_0$ .

On en déduit :

**Lemme 5** *L'énergie du contrôle optimal est donnée par :*

$$\|u_\epsilon^*\|_{L^2(0,T)}^2 = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n\pi a)}{(\sin^2(n\pi a) + \epsilon)^2} (n^2 \pi^2 \rho_n^2 + \eta_n^2), \quad \epsilon \geq 0. \quad (\text{II.15})$$

Preuve : Il suffit d'utiliser (II.12) et (I.27).  $\square$

**Lemme 6** L'énergie "résiduelle"  $\mathcal{E}(T, \omega)$  s'écrit :

$$\mathcal{E}(T, \omega) = \frac{1}{2} \left( \sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon^2}{(\sin^2(n\pi a) + \epsilon)^2} (n^2 \pi^2 \rho_n^2 + \eta_n^2) \right), \quad \epsilon \geq 0. \quad (\text{II.16})$$

Preuve : De la définition de l'énergie (I.13),

$$\mathcal{E}(T, \omega) = \frac{1}{2} (\pi^2 \|\xi(T)\|_{h^1}^2 + \|\dot{\xi}(T)\|_{L^2}^2); \quad (\text{II.17})$$

de plus, de (I.32), (I.21), (II.11), on obtient :

$$X(T) = \begin{bmatrix} \xi(T) \\ \dot{\xi}(T) \end{bmatrix} = (-K \ R_c + \Phi(T)) \begin{bmatrix} \rho \\ \eta \end{bmatrix}. \quad (\text{II.18})$$

En utilisant (I.31), (II.14) et (II.17), on obtient le résultat par simple calcul.  $\square$

**Proposition 9** Les fonctions  $F_\epsilon$ ,  $f_\epsilon$  et  $g_\epsilon$  définies par (II.7), (II.8) et (II.9) s'expriment :

$$f_\epsilon = \frac{1}{2} \left( \sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon^2}{(\sin^2(n\pi a) + \epsilon)^2} (n^2 \pi^2 r_n^2 + s_n^2) \right), \quad (\text{II.19})$$

$$g_\epsilon = \frac{1}{2} \left( \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n\pi a)}{(\sin^2(n\pi a) + \epsilon)^2} (n^2 \pi^2 r_n^2 + s_n^2) \right), \quad (\text{II.20})$$

et

$$F_\epsilon = \epsilon \frac{\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 \pi^2 r_n^2 + s_n^2}{\sin^2(n\pi a) + \epsilon}}{\sum_{n \geq 1} (n^2 \pi^2 r_n^2 + s_n^2)}. \quad (\text{II.21})$$

Preuve : Il suffit d'utiliser les équations (II.15) et (II.16).  $\square$

## II.2 Analyse de $F_\epsilon$ en fonction de $a$

Dans un but de simplification, on suppose que l'état initial est nul en position, c'est à dire :  $\forall n \geq 1, r_n = 0$ . Il s'ensuit que les fonctions  $f_\epsilon$ ,  $g_\epsilon$  et  $F_\epsilon$  prennent la forme :

$$f_\epsilon(a) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon^2}{(\sin^2(n\pi a) + \epsilon)^2} s_n^2, \quad (\text{II.22})$$

$$g_\epsilon(a) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n\pi a)}{(\sin^2(n\pi a) + \epsilon)^2} s_n^2, \quad (\text{II.23})$$

et

$$F_\epsilon(a) = \epsilon \frac{\sum_{n \geq 1} \frac{s_n^2}{\sin^2(n\pi a) + \epsilon}}{\sum_{n \geq 1} s_n^2}. \quad (\text{II.24})$$

Il est à noter que tous les résultats qui vont suivre peuvent être facilement étendus au cas général, à savoir :  $(r_n) \in h^1$  et  $(s_n) \in l^2$ .

### II.2.1 Comportement lorsque $\epsilon \longrightarrow 0$

Dans ce cas limite, on retrouve la contrôlabilité au sens classique, correspondant au problème  $(P_0)$ , ainsi que son caractère mal posé. Soit  $I$  l'ensemble défini par :

$$I = \{n \in \mathbb{N}^* , \sin(n\pi a) = 0\} , \forall a \in ]0, 1[ . \quad (\text{II.25})$$

**Proposition 10** *En utilisant la notation précédente,*

$$f_0(a) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(a) = \frac{1}{2} \sum_{n \in I} s_n^2 , \quad (\text{II.26})$$

$$g_0(a) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_\epsilon(a) = \frac{1}{2} \sum_{n \notin I} \frac{s_n^2}{\sin^2(n\pi a)} , \quad (\text{II.27})$$

$$F_0(a) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_\epsilon(a) = \frac{f_0(a)}{\mathcal{E}(0)} . \quad (\text{II.28})$$

Preuve :

1.  $f_\epsilon(a) \leq \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} s_n^2 < +\infty$  ; on peut donc permuter *lim* et  $\sum$ .
2. De l'expression (II.9),  $g_\epsilon(a) \leq \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{s_n^2}{\sin^2(n\pi a)}$ . Si cette somme est finie, on peut permuter *lim* et  $\sum$ . Si ce n'est pas le cas,  $g_\epsilon(a) \rightarrow +\infty$  nécessairement  $\epsilon \rightarrow 0$ .
3.  $\sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon s_n^2}{\sin^2(n\pi a) + \epsilon} \leq \sum_{n \geq 1} s_n^2 < +\infty$  ; on peut donc permuter *lim* et  $\sum$ .  $\square$

L'énergie moyenne du contrôle pour le problème  $(P_\epsilon)$  a une limite finie quand  $\epsilon \rightarrow 0$  si  $(\frac{s_n}{\sin(n\pi a)})_{n \notin I} \in l^2$ . Lorsque  $a \notin \mathbb{Q}$ , nous retrouvons la caractérisation de la contrôlabilité exacte, citée au chapitre I, dans le cas particulier où l'état initial  $\theta_0 = 0$ , *i.e.*  $r_n = 0$ . La contrainte du problème  $(P_0)$  est alors satisfaite si  $a \notin \mathbb{Q}$  et  $g_0(a) < +\infty$ . On peut généraliser l'espace de contrôlabilité exacte  $F_a$ , lorsque  $a \in \mathbb{Q}$ , en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_n = 0 \quad \text{si } n \in I , \\ (\frac{s_n}{\sin(n\pi a)})_{n \notin I} \in l^2 . \end{array} \right. \quad (\text{II.29})$$

Cette relation signifie en particulier que les modes incontrôlables doivent être initialement nuls.

D'un autre côté, le résultat (II.26) n'est pas surprenant :  $f_0(a)$  est égale à l'énergie moyenne des modes incontrôlés. En effet, cette fonction est nulle pour  $a \notin \mathbb{Q}$ . Si  $a \in \mathbb{Q}$ ,  $f_0(a)$  est généralement différent de zéro et représente la valeur minimale possible de l'énergie résiduelle, indépendamment du contrôle  $u_\zeta^*$ . Ainsi, la fonction  $F_0(a)$  peut être considérée comme un critère de contrôlabilité : lorsque la fonction est nulle, le système est contrôlable. Il est à noter qu'un tel critère est plus précis que la fonction caractéristique  $\mathcal{X}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$  : il fournit une information *quantitative* sur les points de non contrôlabilité. De plus, la fonction  $F_0(a)$  est continue presque partout, contrairement à la fonction caractéristique  $\mathcal{X}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ . Cependant, bien que l'on puisse "tracer" le graphe de la fonction  $F_0(a)$ , en pratique, cette courbe n'est pas exploitable. Pour  $(s_n) = \frac{1}{n}$ , on donne sur la figure (II.1) le graphe de la fonction  $F_0(a)$ .

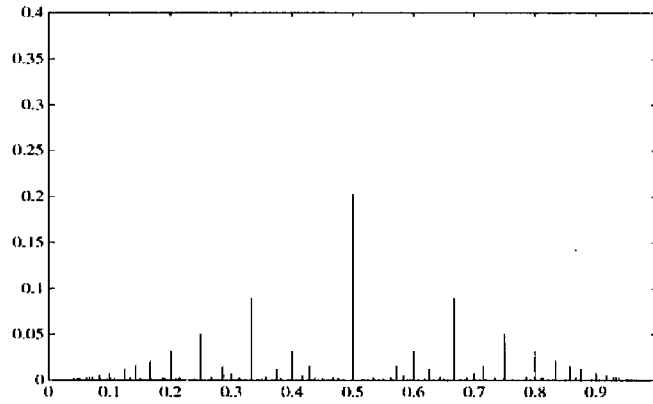


Figure II.1 : Fonction  $F_0$

**Théorème 7** Pour  $a \in ]0, 1[$ , et  $g_0$  définie par (II.27),

$$\forall a \in \mathbb{Q}, \forall (s_n) \in l^2, \quad g_0(a) < +\infty, \quad (\text{II.30})$$

$$\forall a \notin \mathbb{Q}, \exists (s_n) \in l^2, \quad g_0(a) = +\infty. \quad (\text{II.31})$$

Preuve :

1.  $a \in \mathbb{Q}$ .

L'ensemble  $E = \{\sin^2(n\pi a)\}_{n \notin I}$  est fini. Soit  $\mu = \min_{n \notin I}(E)$  ; de la définition de  $I$ ,  $\mu > 0$ ,

$$g_0(a) \leq \sum_{n \notin I} \frac{s_n^2}{\mu} < +\infty. \quad (\text{II.32})$$

2.  $a \notin \mathbb{Q}$ .

On utilise un lemme établi dans [20] : pour tout point  $a \in ]0, 1[$ , il existe une suite strictement croissante d'entiers  $(q_m)$ , telle que :

$$0 < |\sin(q_m \pi a)| \leq \frac{\pi}{q_m}. \quad (\text{II.33})$$

On considère l'ensemble  $J = \{q_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  et  $s = (s_n)$  défini par :

$$\begin{cases} s_n = 0 & \text{si } n \notin J \\ s_n = \frac{1}{n} & \text{si } n \in J \end{cases}; \quad (\text{II.34})$$

$s \in l^2$  ; de (II.33), (II.34), on déduit :

$$g_0(a) = \frac{1}{2} \sum_{n \in J} \frac{s_n^2}{\sin^2(n\pi a)} \geq \sum_{n \in J} \frac{1}{\pi^2} = +\infty,$$

puisque  $J$  est infini.  $\square$

Ce résultat traduit le caractère mal posé du problème  $(P_0)$ . La formule (II.30) peut être interprétée comme suit : si  $a \in \mathbb{Q}$ , la solution  $u_\epsilon^*$  du problème  $(P_\epsilon)$  converge fortement dans  $L^2(0, T)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , pour tout état initial  $(\theta_0, \theta_1) \in H_0^1 \times L^2$  ; ce qui n'est pas le cas si  $a \notin \mathbb{Q}$ . Ainsi, si l'énergie des modes d'ordre élevé de l'état initial est petite, il est préférable de considérer le problème  $(P_0)$  avec un point  $a$  *non stratégique*, la contrainte étant réduite aux seuls modes contrôlables.

Ces comportements dégénérés confirment qu'en pratique, seul le problème  $(P_\epsilon)$  doit être considéré.

## II.2.2 Régularité de $F_\epsilon$ , $\epsilon > 0$

L'analyse du paragraphe précédent a montré comment la fonction  $F_\epsilon$  dégénère lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . On va maintenant étudier ses propriétés de régularité par rapport au paramètre structurel qu'est la position de l'actionneur. Il est auparavant nécessaire de démontrer le lemme :

**Lemme 7** Soit  $\varphi$  une fonction continue 1-périodique, de graphe symétrique par rapport au point  $(\frac{1}{2}, 0)$  :  $\varphi(\frac{1}{2} - x) = -\varphi(\frac{1}{2} + x)$  et  $\alpha = (\alpha_n)$  une suite appartenant à  $l^2$ . Alors la fonction  $g$  définie sur  $]0, 1[$  par :

$$g(x) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \varphi(nx) \quad \text{presque partout}, \quad (\text{II.35})$$

appartient à  $L^2(0, 1)$ .

Preuve : On considère la série de Fourier de  $\varphi$  ; des propriétés de  $\varphi$ , on déduit :

$$\varphi(x) = \sum_{k \geq 1} c_k \sin(2\pi kx), \quad (c_k)_{k \geq 1} \in l^1; \quad (\text{II.36})$$

donc :

$$\varphi(nx) = \sum_{k \geq 1} c_k \sin(2\pi knx) = \sum_{k \geq 1} C_{n,k} \sin(2\pi kx), \quad (\text{II.37})$$

avec :

$$\begin{cases} \forall n, \quad \|C_{n, \cdot}\|_l = \|c\|_l, \\ C_{1, \cdot} = (c_1, c_2, c_3, \dots) \\ C_{2, \cdot} = (0, c_1, 0, c_2, \dots) \\ C_{3, \cdot} = (0, 0, c_1, 0, 0, c_2, \dots) \\ \vdots \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

D'où :

$$g(x) = \sum_n \alpha_n \sum_k C_{n,k} \sin(2\pi kx) = \sum_k \left( \sum_n C_{n,k} \alpha_n \right) \sin(2\pi kx). \quad (\text{II.39})$$

L'ensemble  $\{2 \sin(2\pi kx)\}_{k \geq 1}$  constitue une base orthonormée de  $L^2(0, \frac{1}{2})$  ; en notant  $C$  la matrice infinie  $(C_{n,k})_{n,k \geq 1}$ , et en utilisant le fait que la fonction  $g$  est symétrique par rapport au point  $(\frac{1}{2}, 0)$ , on obtient après calcul :

$$\|g\|_{L^2(0,1)}^2 = 2 \|g\|_{L^2(0,\frac{1}{2})}^2 = \frac{1}{2} \|C^* \alpha\|_{l^2}^2. \quad (\text{II.40})$$

Il reste donc à montrer que l'opérateur  $C^*$  est borné. Une condition suffisante est de prouver que  $C$  est borné sur un sous-ensemble dense de  $l^2$ . Pour toute suite  $\alpha$  à support fini, on a :

$$C \alpha = \left( \sum_{n=1}^K c_n \alpha_n, \sum_{n=1}^K c_n \alpha_{2n}, \dots, \sum_{n=1}^K c_n \alpha_{Kn}, 0, 0, \dots \right); \quad (\text{II.41})$$

donc :

$$\begin{aligned} \|C \alpha\|_{l^2}^2 &= \sum_k \left( \sum_n c_n \alpha_{kn} \right)^2 \\ &= \sum_k \sum_{n,m} c_n c_m \alpha_{kn} \alpha_{km} = \sum_{n,m} c_n c_m \sum_k \alpha_{kn} \alpha_{km} \\ &\leq \sum_{n,m} |c_n c_m| \left| \langle (\alpha_{kn})_{k \geq 1}, (\alpha_{km})_{k \geq 1} \rangle_{l^2} \right| \\ &\leq \sum_{n,m} |c_n| |c_m| \|(\alpha_{kn})_{k \geq 1}\|_{l^2} \|(\alpha_{km})_{k \geq 1}\|_{l^2} \\ &\leq \left( \sum_n |c_n| \right)^2 \|\alpha\|_{l^2}^2 = \|c\|_{l^1}^2 \|\alpha\|_{l^2}^2. \quad \square \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

On peut maintenant énoncer un résultat important de ce chapitre :

**Théorème 8** Pour tout  $\epsilon > 0$ , la fonction  $F_\epsilon$  est continue. De plus, si  $|s_n| \leq \frac{k}{n^{\frac{3}{4}+\nu}}$ ,  $\nu > 0$ , alors  $F_\epsilon$  est différentiable presque partout.

Preuve :

1.

$$F_\epsilon(a) = \frac{\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{\epsilon s_n^2}{(\sin^2(n\pi a) + \epsilon)}}{\sum_{n \geq 1} s_n^2}; \quad (\text{II.43})$$

cette série converge uniformément par rapport à  $a$  ; donc  $F_\epsilon$  est continue sur  $[0,1]$ .

2. Nous allons montrer que  $F'_\epsilon \in L^2(0,1)$ . L'opérateur différentiel étant fermé dans  $L^2(0,1)$ , il suffit de prouver que la série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{d}{da} \left[ \frac{\epsilon s_n^2}{(\sin^2(n\pi a) + \epsilon)} \right] \equiv S(a) \quad (\text{II.44})$$

appartient à  $L^2(0,1)$ . On vérifie après calcul que  $S(a)$  prend la forme :

$$S(a) = \sum_{n \geq 1} n\pi s_n^2 \varphi(na), \quad (\text{II.45})$$

avec  $\varphi$  possédant les propriétés du lemme 7. De plus, si  $|s_n| \leq \frac{k}{n^{\frac{3}{4}+\nu}}$ ,  $\nu > 0$ ,  $(n\pi s_n^2)_{n \geq 1} \in l^2$ .  $\square$

Ce dernier résultat est particulièrement satisfaisant. D'une part, la continuité de  $F_\epsilon$  signifie que le coût du contrôle ne présente pas de variation brutale en fonction de la position de l'actionneur : de petites variations de ce paramètre n'entraînent pas d'effet *significatif* sur le contrôle  $u_\epsilon^*$ , ni sur son coût. Ceci est en conformité avec l'idée intuitive que l'on peut se faire du phénomène. Évidemment, en pratique,  $\epsilon$  ne devra pas être trop petit. Mais, pour  $\epsilon$  fixé, on peut interpréter  $F_\epsilon$  comme une mesure continue de contrôlabilité relativement au problème  $(P_\epsilon)$  : "lorsque  $F_\epsilon(a)$  est petit, le système (II.1) est *bien contrôlable* même pour de petites variations de  $a$ ".

D'autre part, avec une hypothèse supplémentaire peu restrictive,  $F_\epsilon$  est différentiable presque partout. Cette propriété renforce la légitimité de  $F_\epsilon$  ( $F_\epsilon$  peut être tracée facilement).

### II.2.3 Cas particulier : $s_n = \frac{1}{n}$

Ce cas particulier correspond à un état initial "régulier", avec au plus des points anguleux de type lipschitzien. Sous cette hypothèse, on peut décrire simplement ces points anguleux et retrouver une caractérisation de la contrôlabilité classique.

Pour  $s_n = \frac{1}{n}$ , la fonction  $F_\epsilon$  s'écrit :



$$F_\epsilon(a) = \epsilon \frac{\sum_{n \geq 1} \frac{\frac{1}{n^2}}{\sin^2(n\pi a) + \epsilon}}{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}} . \quad (\text{II.46})$$

**Lemme 8** La fonction  $F_\epsilon$  prend la forme :

$$F_\epsilon(a) = 8\pi^2 \epsilon^2 \frac{\sum_{k \geq 0} \frac{\gamma^k(\epsilon)}{1 - \gamma^2(\epsilon)} \varphi(ka)}{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}} , \quad (\text{II.47})$$

où :

$$\gamma(\epsilon) = (1 + 4\epsilon) - \sqrt{4\epsilon(4\epsilon + 2)} , \quad 0 < \gamma(\epsilon) < 1 , \quad (\text{II.48})$$

et  $\varphi$  est une fonction 1-périodique définie par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{6} - 2x(1 - x) \quad \text{si } x \in [0, 1]. \quad (\text{II.49})$$

Preuve : La fonction  $h_\epsilon(x) = \frac{1}{(\sin^2(\pi x) + \epsilon)}$  peut être décomposée en série de Fourier [39] :

$$h_\epsilon(x) = 8\pi^2 \epsilon^2 \sum_{k \geq 0} \frac{\gamma^k(\epsilon)}{1 - \gamma^2(\epsilon)} \cos(2k\pi x) ,$$

avec  $\gamma$  défini par (II.48). Cette série est normalement convergente ; on peut donc permuter les ordres de sommation :

$$F_\epsilon(a) = 8\pi^2 \epsilon^2 \frac{\sum_{k \geq 0} \frac{\gamma^k(\epsilon)}{1 - \gamma^2(\epsilon)} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2kn\pi a)}{n^2}}{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}} ;$$

sachant que [39] :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2kn\pi x)}{n^2} = \varphi(kx) ,$$

avec  $\varphi$  définie par (II.49), on obtient le résultat.  $\square$

**Théorème 9** La fonction  $F_\epsilon$  admet des points anguleux (avec des concavités négatives) au point  $a$ , si et seulement si  $a \in \mathbb{Q} \cap ]0, 1[$ .

Preuve : Soit  $a = \frac{p}{q} \in ]0, 1[$  avec  $p, q \in \mathbb{N}$  ; on vérifie facilement que :

$$\varphi'_-(ka) = -\varphi'_+(ka) = 2k\pi^2 , \quad k = nq , \quad n \in \mathbb{N} , \quad (\text{II.50})$$

où  $\varphi'_-$ ,  $\varphi'_+$  représentent respectivement les demi-dérivées à droite et à gauche de  $\varphi$ . Dans le cas où  $a \notin \mathbb{Q}$ ,  $\varphi(kx)$  est différentiable au point  $a$ . Par conséquent, il est clair que  $F_\epsilon$  est aussi différentiable au point  $a$  ; de plus,  $\frac{\gamma^k(\epsilon)}{1 - \gamma^2(\epsilon)} > 0$ , donc si  $a \in \mathbb{Q} \cap ]0, 1[$ , il vient en utilisant (II.50) :

$$F'_{\epsilon_-}(ka) > F'_{\epsilon_+}(ka), \quad (\text{II.51})$$

ce qui complète la démonstration.  $\square$

On en déduit le corollaire :

**Corollaire 2** *Le système (II.1) est contrôlable aux sens classiques si et seulement si son degré de contrôlabilité est différentiable au point  $a$ .*

On donne, figures (II.3) , (II.2) et (II.4), les graphes de la fonction  $F_\epsilon$  pour deux valeurs de  $\epsilon$  :  $\epsilon = 5.10^{-4}$  et  $\epsilon = 5.10^{-2}$ .

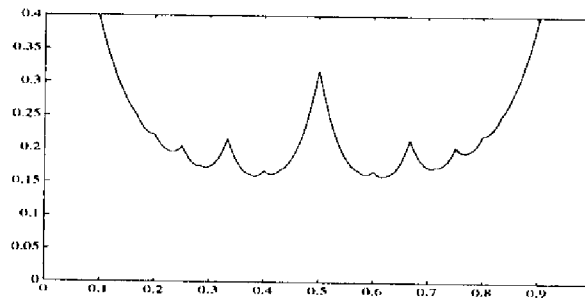


Figure II.2 : fonction  $F_\epsilon$  pour  $\epsilon = 0.05$

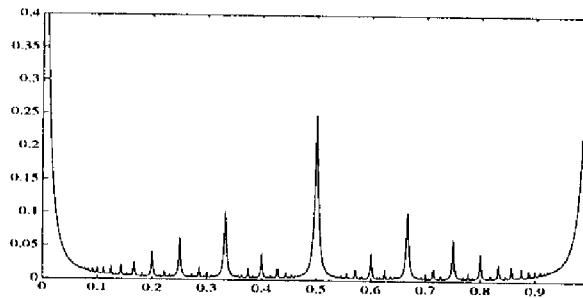


Figure II.3 : fonction  $F_\epsilon$  pour  $\epsilon = 5.10^{-4}$

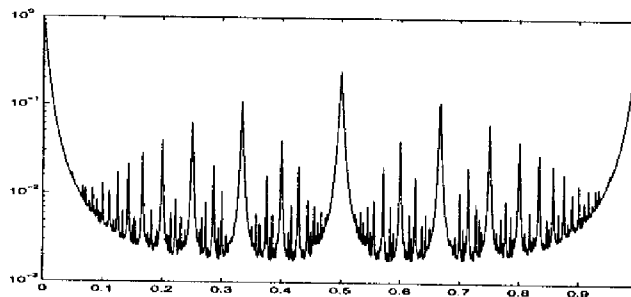


Figure II.4 : fonction  $F_\epsilon$  pour  $\epsilon = 5.10^{-4}$  en coordonnées semi-log

Ces graphes montrent clairement les différents points anguleux, correspondant aux valeurs rationnelles de  $a$ . Il est à noter que ces singularités sont plus ou moins visibles et deviennent négligeables lorsque  $a = \frac{p}{q}$ , avec  $q \rightarrow \infty$  (ce qui est nécessaire puisque  $F_\epsilon$  est différentiable presque partout). En fait, la question de contrôlabilité (à laquelle répond le corollaire 2) devient en pratique *floue* lorsque  $a$  est proche d'un rationnel  $\frac{p}{q}$  avec  $q$  "trop grand" : le point anguleux n'est plus visible. Ceci est en conformité avec le fait qu'il existe, pour les problèmes physiques, des incertitudes sur les paramètres du système : les modes d'ordre élevé (dont l'énergie est généralement petite et décroissante à cause notamment de l'amortissement interne) ne seront pas pris en compte d'un point de vue pratique et la question de leur contrôle est sans objet. Bien évidemment, lorsque  $\epsilon$  est plus petit, les points anguleux visibles sont plus nombreux.

Finalement, il existe un point  $a_0 \in ]0, 1[$  tel que  $F_\epsilon(a_0)$  soit minimum. Sur un tel point,  $F_\epsilon$  est différentiable ; par conséquent, le système (II.1) est contrôlable au sens de  $(P_0)$ . Cette remarque constitue un lien naturel entre les problèmes d'optimisation et les notions de contrôlabilité. On peut remarquer par ailleurs que ce point est à peu près indépendant de  $\epsilon$  (figure (II.5)).

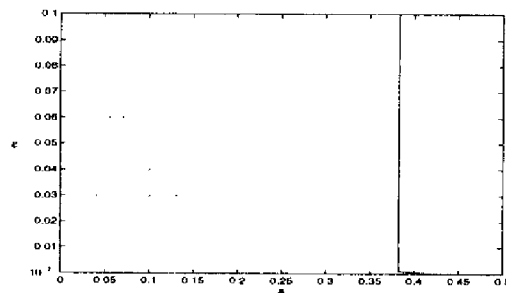


Figure II.5 : Position optimale de l'actionneur en fonction de  $\epsilon$

### II.3 Conditions aux limites de type Neumann

On considère maintenant le même système avec conditions aux limites de type Neumann :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta = \partial_x^2 \theta + u \delta_a \\ \partial_x \theta(0, t) = 0 \\ \partial_x \theta(1, t) = 0 \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) \\ \partial_t \theta(x, 0) = \theta_1(x) \end{cases} \quad (\text{II.52})$$

Dans les mêmes conditions, la fonction  $F_\epsilon$  se détermine de la façon analogue ; il suffit de reprendre les calculs précédents en prenant pour nouvelles fonctions propres :

$$\varphi_n(x) = \cos(n\pi x), \quad \forall n \geq 1 \text{ et } x \in ]0, 1[ ;$$

on obtient alors :

$$F_\epsilon(a) = \epsilon \frac{\sum_{n \geq 1} \frac{s_n^2}{\cos^2(n\pi a) + \epsilon}}{\sum_{n \geq 1} s_n^2} .$$

La figure (II.6) représente la fonction  $F_\epsilon$  pour  $s_n = \frac{1}{n}$  et  $\epsilon = 5.10^{-3}$ .

**Remarques :**

- Les rationnels du type  $\frac{2p+1}{2q+1}$  ne correspondent pas à des noeuds des fonctions propres : par conséquent, contrairement aux conditions aux limites de type Dirichlet, il n'existe pas de remontée de  $F_\epsilon$  en ces points.
- on retrouve un résultat classique, à savoir que la plus grande efficacité du contrôle correspond à un contrôle sur le bord du domaine (contrôle frontière). En ces points ,  $F_\epsilon$  a pour valeur :

$$F_\epsilon(0) = F_\epsilon(1) = \epsilon = 5.10^{-3} .$$

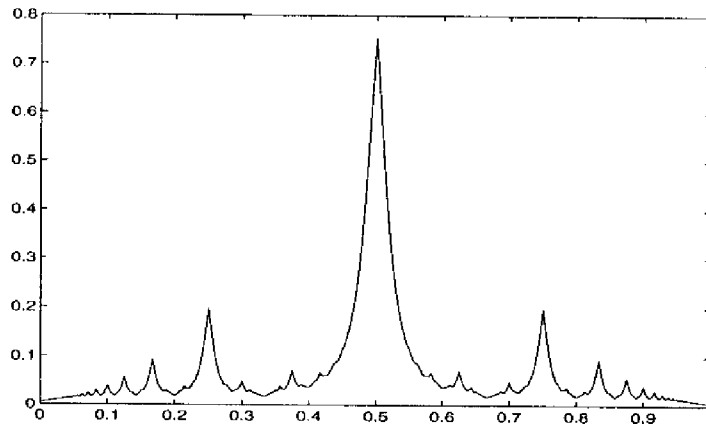


Figure II.6 : fonction  $F_\epsilon$  avec conditions de Neumann

## II.4 Cas de la poutre avec contrôle interne

On considère l'équation d'une poutre attachée (non encastree) aux deux bords :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta + \partial_x^4 \theta = u \delta_a \\ \theta(0, t) = \theta(1, t) = 0 \\ \partial_x^2 \theta(0, t) = \partial_x^2 \theta(1, t) = 0 \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) \\ \partial_t \theta(x, 0) = \theta_1(x) , \end{cases} \quad (\text{II.53})$$

avec :

$$\begin{cases} \theta_0 \in L^2(\Omega; H(0,1)), \\ \theta_1 \in L^2(\Omega; L^2(0,1)), \end{cases}$$

où  $H(0,1)$  est l'espace de Hilbert (d'énergie potentielle) défini par :

$$H(0,1) = \{f \in H^2(0,1), f(0) = f(1) = 0\},$$

ayant pour produit scalaire :

$$(f | g)_H = \int_0^1 \partial_x^2 f \partial_x^2 g \, dx.$$

L'opérateur  $-\partial_x^4$  associé aux conditions aux limites a pour fonctions propres et valeurs propres :

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x) \quad \lambda_n = -n^4 \pi^4;$$

on retrouve donc les mêmes fonctions propres que dans le cas de la corde avec conditions de type Dirichlet. En exprimant le système (II.53) dans la base des fonctions propres, il se met sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} &= A X + B u \\ X(0) &= X_0, \end{cases} \quad (\text{II.54})$$

avec  $X_0, X(t) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ . La démarche pour déterminer  $u_c^*$  et la fonction  $F_c$  est similaire au cas de la corde étudié précédemment.

**Remarque :** Bien que dans le cas de la poutre, il ne soit pas nécessaire d'avoir  $T \geq 2$  (vitesse de propagation non constante), on choisit  $T = 2$  de manière à simplifier les calculs.

On choisit comme base orthonormée de  $L^2(0,T)$  l'ensemble de fonctions :

$$\{\sin(n^2 \pi^2 t)\}_{n \geq 1} \cup \{\cos(n^2 \pi^2 t)\}_{n \geq 1} \cup \{\sin(n\pi t)\}_{n \in M} \cup \{\cos(n\pi t)\}_{n \in M} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\},$$

où :

$$M = \{k \in \mathbb{N}, k \neq n^2, n \in \mathbb{N}\}.$$

On définit  $\mathcal{K} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2(M) \times \mathbb{R}^2(M) \times \mathbb{R}$  et l'opérateur  $S$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} S : \mathcal{K} \longrightarrow L^2(0,T) \\ (\alpha, \beta, \lambda, \mu, \mu_0) \longmapsto u(t) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \sin(n^2 \pi^2 t) + \sum_{n \geq 1} \beta_n \cos(n^2 \pi^2 t) + \\ \quad + \sum_{n \in M} \lambda_n \sin(n\pi t) + \sum_{n \in M} \mu_n \cos(n\pi t) + \frac{\mu_0}{\sqrt{2}}. \end{array} \right.$$

Il suffit alors, en utilisant l'espace  $\mathcal{K}$ , de reprendre les calculs effectués dans le cas de la corde avec conditions de Dirichlet. Après calcul, on obtient un opérateur  $K$  identique au cas précédent ; il s'ensuit que la fonction  $F_\epsilon$  a pour expression [4] :

$$F_\epsilon(a) = \epsilon \frac{\sum_{n \geq 1} \frac{s_n^2}{\sin^2(n\pi a) + \epsilon}}{\sum_{n \geq 1} s_n^2} .$$

## II.5 Conclusion

La fonction  $F_\epsilon$  reflète l'efficacité de l'actionneur par rapport à sa position, relativement au problème ( $P_\epsilon$ ). De même qu'en analyse numérique le nombre de conditionnement mesure l'inversibilité d'une matrice, la fonction  $F_\epsilon$  peut être légitimement considérée comme une *mesure (continue) de la contrôlabilité* du système ; elle varie entre deux valeurs extrêmes :

- $F_\epsilon \simeq 0$  si le système est *parfaitement* contrôlable, *i.e.* s'il existe un contrôle d'énergie finie tel que l'énergie résiduelle soit quasi-nulle.
- $F_\epsilon = 1$  lorsque le système n'est *pas du tout* contrôlable ; cela correspond, par exemple, au cas (dégénéré) où l'actionneur est placé au bord du domaine dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet pour la corde.

Au contraire, le concept binaire de contrôlabilité ne permet aucune souplesse lorsqu'il existe une incertitude sur les paramètres. En effet, quelles que soient les propriétés physiques d'un système, elles doivent être *robustes* par rapport à de petites variations des paramètres. Dans le cas d'une corde ou poutre vibrante, avec contrôle interne ponctuel, la robustesse de la propriété de contrôlabilité est retrouvée à la seule condition de définir une mesure de la contrôlabilité, à partir par exemple d'un problème de contrôle optimal bien posé.

Bien que le degré de contrôlabilité actif soit satisfaisant, il est souvent difficile dans la réalité de déterminer les fonctions propres d'un système. On va donc définir et analyser, dans le chapitre suivant, un autre type de degré de contrôlabilité qui ne sera plus tributaire de la connaissance des fonctions propres du système et de la solution d'un problème de contrôle optimal et qui présentera néanmoins de grandes analogies avec  $F_\epsilon$ .

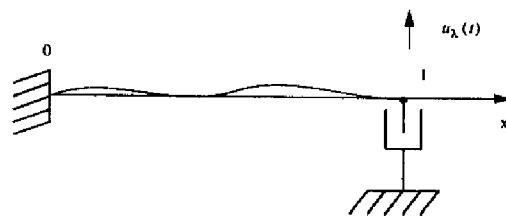
# Chapitre III

## Degré de contrôlabilité “passif” pour corde vibrante

Dans ce chapitre, on définit un autre type de degré de contrôlabilité plus facilement utilisable du point de vue pratique, basé sur une extension du contrôle par *impédance* dans le cas d'une corde vibrante [12], [38]. Le qualificatif “passif” fait référence à la nature du contrôle obtenu en boucle fermée par un dispositif “passif” (amortisseur visqueux). Contrairement au cas d'un contrôle optimal, le contrôle passif ne fait pas intervenir explicitement le modèle, mais le comportement dynamique local du système, ce qui lui confère une très grande robustesse. On se restreint dans ce chapitre au cas de la corde avec conditions aux limites de Dirichlet ; l'extension aux poutres ne présente pas de difficulté majeure. Introduisons tout d'abord la notion de contrôle par impédance.

### III.1 Contrôle par impédance

On considère une corde vibrante de longueur unité ; à un bord est fixé un amortisseur visqueux, comme l'indique le schéma ci-dessous :



Ce système est modélisé par :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta &= \partial_x^2 \theta \\ \theta(x, 0) &= \theta_0(x) \\ \partial_t \theta(x, 0) &= \theta_1(x) \\ \theta(0, t) &= 0 \\ \partial_x \theta(1, t) &= u_\lambda(t) , \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

où  $u_\lambda(t)$  est la force de rappel exercée par l'amortisseur :

$$u_\lambda(t) = -\lambda \partial_t \theta(1, t), \quad \lambda > 0,$$

$\lambda$  étant le coefficient caractéristique (impédance) de l'amortisseur. Dans le cas de "l'adaptation d'impédance", on a le résultat :

**Proposition 11** *Si l'impédance de l'amortisseur est adaptée ( $\lambda = 1$ ), alors l'énergie  $\mathcal{E}(T)$  du système (III.1) est nulle, pour tout temps  $T \geq 2$ .*

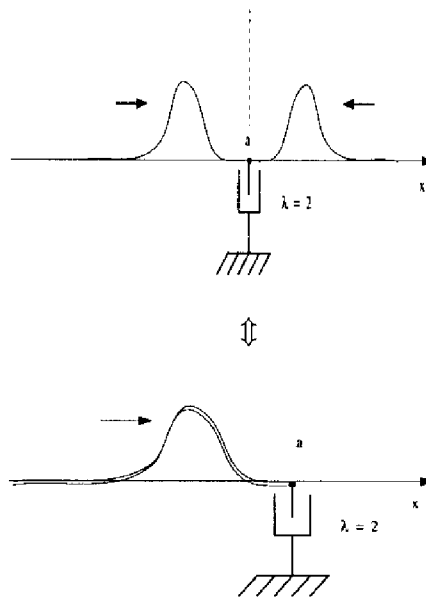
En effet, dans ce cas, il n'y a plus aucune réflexion [38] à la frontière  $x = 1$  : toute onde incidente est totalement absorbée. Par ailleurs, si l'on considère le problème  $(P_0)$  associé au système (III.1), on montre grâce à la méthode H.U.M. par exemple que la solution  $u_0^*$  de  $(P_0)$  vérifie :

$$u_0^* = u_\lambda. \quad (\text{III.2})$$

Ainsi, lorsque l'adaptation d'impédance est réalisée, il y a équivalence, pour un contrôle aux frontières, entre le contrôle optimal *actif*  $u_0^*$  et le contrôle *passif*  $u_\lambda$  pour le système (III.1).

**Remarque :**  $u_\lambda$  est en fait la version "boucle fermée" de  $u_0^*$ .

On obtient le même résultat, pour des contrôles ponctuels internes, mais seulement pour des états initiaux particuliers. Soit en effet un amortisseur en  $a \in ]0, 1[$ , et un état initial *symétrique* par rapport à  $a$ . Tout se passe comme si l'amortisseur était placé au bout d'une corde d'impédance caractéristique deux fois plus grande (corde deux fois "plus lourde"). Il y a alors adaptation d'impédance pour  $\lambda = 2$  et l'égalité (III.2) est à nouveau satisfaite (voir annexe B) :

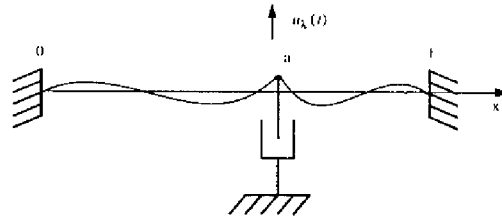




Partant de cette remarque simple, on va étudier l'énergie d'une corde vibrante en fonction de la position  $a$  d'un amortisseur visqueux, lorsque l'état initial est quelconque, en fait aléatoire. Ainsi, on définira une mesure de contrôlabilité appelée degré de contrôlabilité passif. Il sera alors intéressant de le comparer avec le degré de contrôlabilité actif étudié au chapitre II.

### III.2 Analyse du modèle

On considère une corde vibrante, fixée aux deux bords, avec un amortisseur ponctuel placé en  $a$  :



décrite par le système :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta &= \partial_x^2 \theta + \delta_a u_\lambda(t) \\ u_\lambda(t) &= -\lambda \partial_t \theta(a) \quad \lambda > 0 \\ \theta(x, 0) &= \theta_0(x) \\ \partial_t \theta(x, 0) &= \theta_1(x) \\ \theta(0, t) &= 0 \\ \theta(1, t) &= 0. \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

En posant :

$$X = \begin{bmatrix} \theta \\ \partial_t \theta \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \partial_x^2 & -\lambda \delta_a \end{bmatrix},$$

le système (III.3) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{X} &= \mathcal{A} X \\ X(0) &= X_0. \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

**Remarque :**  $\mathcal{A}$  est un opérateur linéaire non borné sur  $H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$  de domaine :

$$D(\mathcal{A}) = \{(\theta, \varphi) \in H_0^1 \times L^2 ; \partial_x^2 \theta - \lambda \varphi(a) \delta_a \in L^2 \text{ et } \varphi \in H_0^1\}.$$

Afin d'être complet, on montre rapidement que le problème (III.3) est bien posé. Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du système (III.3) on s'appuie au préalable sur la proposition :

**Proposition 12** *L'opérateur linéaire  $(-\mathcal{A})$  est maximal monotone, de domaine dense.*

Preuve :

1.  $(-\mathcal{A})$  est monotone

En effet, si  $(\theta, \varphi) \in D(\mathcal{A})$  on a :

$$\begin{aligned} (-\mathcal{A}(\theta | \varphi), (\theta | \varphi))_{H_0^1 \times L^2} &= -(\varphi | \theta)_{H_0^1} + (-\partial_x^2 \theta + \lambda \varphi(a) \delta_a | \varphi)_{L^2} \\ &= -\int_0^1 \partial_x \varphi \partial_x \theta \, dx + \langle -\partial_x^2 \theta + \lambda \varphi(a) \delta_a, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ &= -\int_0^1 \partial_x \varphi \partial_x \theta \, dx + \int_0^1 \partial_x \theta \partial_x \varphi \, dx + \lambda \varphi^2(a) = \lambda \varphi^2(a) \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

2.  $(-\mathcal{A})$  est maximal si et seulement si :

$$\forall (f, g) \in H_0^1 \times L^2 \exists ! (\theta, \partial_t \theta) \in D(\mathcal{A}), (I + \mathcal{A})(\theta, \partial_t \theta) = (f, g).$$

De l'expression de  $\mathcal{A}$ , on déduit :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \theta - \partial_t \theta & = f \\ \partial_t \theta - \partial_x^2 \theta + \lambda \partial_t \theta(a) \delta_a & = g \end{cases} &\iff \begin{cases} \theta \in H_0^1 \\ \theta - \partial_x^2 \theta + \lambda \partial_t \theta(a) \delta_a & = f + g \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \theta \in H_0^1 \\ \theta - \partial_x^2 \theta + \lambda \theta(a) \delta_a & = f + g + \lambda f(a) \delta_a. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Ainsi,  $(-\mathcal{A})$  est maximal monotone si et seulement si le système (III.6) admet une solution dans  $H_0^1$ . On considère la forme bilinéaire  $\alpha(\cdot, \cdot)$  définie par :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in H_0^1 \quad \alpha(\theta, \varphi) &= \int_0^1 \theta \varphi \, dx + \int_0^1 \partial_x \theta \partial_x \varphi \, dx + \lambda \theta(a) \varphi(a) \\ &\implies \alpha(\theta, \varphi) = \int_0^1 (f + g) \varphi \, dx + \lambda f(a) \varphi(a); \end{aligned}$$

$\alpha(\theta, \varphi)$  est continue et coercive car :

$$\begin{aligned} \forall \theta, \varphi \in H_0^1 \quad |\alpha(\theta, \varphi)| &\leq (1 + \lambda) \|\theta\|_{H_0^1} \|\varphi\|_{H_0^1}, \\ \forall \theta \in H_0^1, \quad |\alpha(\theta, \theta)| &\geq \|\theta\|_{H_0^1}^2. \end{aligned}$$

Donc, en appliquant le théorème de Lax-Milgram le système (III.6) admet une solution dans  $H_0^1$ .  $\square$

3. L'ensemble de définition  $D(\mathcal{A})$  est tel que :

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) &\supset \{(\theta, \partial_t \theta) \in H_0^1 \times H_0^1; \partial_x^2 \theta \in L^2; \partial_t \theta(a) = 0\} \\ &= H^2 \cap H_0^1 \times \{\partial_t \theta \in H_0^1 / \partial_t \theta(a) = 0\}; \end{aligned}$$

l'ensemble  $H^2 \cap H_0^1$  est dense dans  $H_0^1(0,1)$  et l'ensemble :

$$\{\partial_t \theta \in H_0^1 / \partial_t \theta(a) = 0\} = H_0^1(0, a) \oplus H_0^1(a, 1)$$

est dense dans  $L^2(0, 1)$ , donc  $H_0^1 \times L^2 \subset \overline{D(\mathcal{A})}$ . De plus on a :

$$D(\mathcal{A}) \subset H_0^1 \times L^2 \implies \overline{D(\mathcal{A})} \subset \overline{H_0^1 \times L^2} = H_0^1 \times L^2 ;$$

par conséquent  $\overline{D(\mathcal{A})} = H_0^1 \times L^2$ .  $\square$

On déduit que  $\mathcal{A}$  engendre un semi-groupe continu de contractions sur  $D(\mathcal{A})$  ; par conséquent, pour tout  $(\theta_0, \theta_1) \in D(\mathcal{A})$ , le système (III.3) admet une solution unique au sens classique *i.e.* :

$$(\theta, \partial_t \theta) \in C^1([0, +\infty[ ; H_0^1 \times L^2) \cap C([0, +\infty[ ; D(\mathcal{A})) ; \quad (\text{III.7})$$

les solutions (faibles) sont étendues par densité à tout état initial  $(\theta_0, \theta_1) \in H_0^1 \times L^2$ .

Concernant la stabilité du système (III.3) :

**Lemme 9** *L'énergie  $\mathcal{E}(t)$  du système (III.3) définie par :*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} ( \|\partial_x \theta\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\partial_t \theta\|_{L^2(0,1)}^2 ) , \quad \forall (\theta_0, \theta_1) \in D(\mathcal{A}) , \quad (\text{III.8})$$

*est décroissante pour tout  $t \in [0, T]$ .*

Preuve : En effet, en dérivant par rapport à la variable  $t$  (III.8) et en intégrant par parties, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = (\partial_t \theta \mid \partial_t^2 \theta - \partial_x^2 \theta)_{L^2(0,1)} + [\partial_x \theta \mid \partial_t \theta]_0^1 ;$$

les conditions aux limites étant du type Dirichlet, on a pour  $t \in [0, +\infty[$  :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = (\partial_t \theta \mid \delta_a u_\lambda)_{L^2} = -\lambda \langle \partial_t \theta, \delta_a \rangle_{H_0^1, H^{-1}} \leq \langle \partial_t \theta, \delta_a \rangle_{H_0^1, H^{-1}}$$

$$\implies \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = -\lambda (\partial_t \theta(a))^2 \leq 0 \quad (\text{III.9})$$

pour tout  $\lambda > 0$ . Par densité on étend le résultat pour  $(\theta_0, \theta_1) \in H_0^1 \times L^2$ .  $\square$

On déduit que  $\mathcal{E}(t)$  est une fonction de Lyapunov et par conséquent le système est stable. Dans le cas où l'énergie initiale  $\mathcal{E}(0)$  du système est finie *i.e.*  $X_0 \in \mathcal{H}$ , on a de plus :

**Proposition 13** *Le contrôle passif vérifie  $u_\lambda \in L^2(0, T)$  et :*

$$\|u_\lambda\|_{L^2(0, T)} \leq k \|X_0\|_{\mathcal{H}} . \quad (\text{III.10})$$

*pour tout  $T > 0$  et  $X_0 \in \mathcal{H}$ .*

Preuve : Il suffit d'intégrer sur l'intervalle  $[0, T]$  l'équation (III.9).  $\square$

L'énergie du contrôle  $u_\lambda$  est donc finie quel que soit  $t \in [0, T]$ .

### III.3 Degré de contrôlabilité passif : $G_T$

On s'intéresse au problème de la dissipation en fonction de la position  $a$  de l'amortisseur. On choisit comme coefficient de l'amortisseur :

$$\lambda = 2 ,$$

ce qui correspond à l'adaptation d'impédance pour un état initial symétrique. De manière générale, le choix du paramètre  $\lambda$  pourrait être optimisé en résolvant le problème :

$$\min_{\lambda} \{ \mathcal{E}(T) \} .$$

On ne développera pas cet aspect dans le cadre de cette étude. On signale simplement que la valeur  $\lambda = 2$  est optimale en un certain sens. En effet, localement, tout état peut se décomposer en une partie symétrique par rapport à  $a$  et une partie anti-symétrique par rapport à  $a$ . La partie symétrique disparaît, la partie anti-symétrique n'est pas modifiée par l'amortisseur car celui-ci reste immobile. Ceci peut se généraliser en considérant des intervalles de temps successifs.

Dans les mêmes conditions que pour le degré de contrôlabilité actif, *i.e.* pour un état initial aléatoire (II.2), on définit le degré de contrôlabilité passif par l'énergie moyenne du système (III.3) pour un temps  $T$  fixé :

**Définition 16** *Le degré de contrôlabilité passif  $G_T$  pour le système (III.3) est défini par :*

$$G_T = \frac{E[\mathcal{E}(T)]}{\mathcal{E}(0)} .$$

**Commentaires :**

- $G_T \in [0, 1]$  car le système est dissipatif d'après (III.5),
- la fonction  $G_T$  correspond à l'énergie résiduelle moyenne du système, pour une énergie initiale fixée ;
- le système est *bien contrôlable* si la valeur de la fonction  $G_T$  est petite, *i.e.* si l'énergie résiduelle tend vers zéro ;
- lorsque la fonction  $G_T = 1$  on retrouve, comme pour la fonction  $F_e$  étudiée au chapitre II, que le système n'est *pas du tout* contrôlable, l'amortisseur n'ayant aucune action puisque :

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{E}(T) \leq \mathcal{E}(0) \\ E[\mathcal{E}(T)] = \mathcal{E}(0) \end{array} \right\} \implies \mathcal{E}(T) = \mathcal{E}(0) \quad \text{presque - sûrement .}$$

### III.4 Analyse de $G_T$

Tout comme pour l'étude de la fonction  $F_\varepsilon$ , on suppose dans un souci de simplification, que l'état initial est nul en position, *i.e.* :

$$\forall n \geq 1 \quad r_n = 0 .$$

Évidemment, tous les résultats qui vont suivre peuvent être facilement étendus au cas général, c'est à dire :  $(r_n) \in h^1$  et  $(s_n) \in l^2$ .

#### III.4.1 Comportement lorsque $T \longrightarrow +\infty$

L'étude asymptotique de la fonction  $G_T$  va permettre de retrouver, tout comme au chapitre II, la contrôlabilité sur tout irrationnel.

**Théorème 10** *Soit l'ensemble  $I = \{n \in \mathbb{N}^* , \sin(n\pi a) = 0\}$  ; pour tout point  $a \in ]0, 1[$  :*

1.  $\forall a \notin \mathbb{Q} , \forall \omega \in \Omega$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(T, \omega) = 0 ,$$

2.  $\forall a \in \mathbb{Q} , \forall \omega \in \Omega$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(T, \omega) = \sum_{n \in I} \eta_n^2(\omega) ,$$

3.

$$\forall a \notin \mathbb{Q} \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} G_T(a) = \lim_{T \rightarrow +\infty} E[\mathcal{E}(T)] = 0 ,$$

$$\forall a \in \mathbb{Q} \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} G_T(a) = \lim_{T \rightarrow +\infty} E[\mathcal{E}(T)] = \sum_{n \in I} s_n^2 .$$

La démonstration se base sur les lemmes ci-après :

**Lemme 10** *Les trajectoires  $\bigcup_{t \geq 0} \{(\theta, \partial_t \theta)\}$  du système (III.3) sont précompactes dans  $H_0^1 \times L^2$ .*

Preuve : Il suffit de montrer que la résolvante  $(I + \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(H_0^1 \times L^2)$  est compacte. On considère une suite de fonctions  $(f_n, g_n)$  bornée dans  $H_0^1 \times L^2$ , définie par :

$$(f_n, g_n) = (I + \mathcal{A})(\theta_n, \partial_t \theta_n) ;$$

montrons que  $(\theta_n, \partial_t \theta_n)$  converge fortement dans  $H_0^1 \times L^2$ . De la définition de l'opérateur  $(-\mathcal{A})$ , on a :

$$\begin{cases} \theta_n - \partial_t \theta_n & = f_n \\ \partial_t \theta_n - \partial_x^2 \theta_n + \lambda \partial_t \theta_n(a) \delta(a) & = g_n , \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \partial_t \theta_n & = \theta_n - f_n \\ \partial_t \theta_n - \partial_x^2 \theta_n + \lambda \theta_n(a) \delta(a) & = g_n + f_n + \lambda f_n(a) \delta(a) . \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

En multipliant le système (III.11) par  $\theta_n \in H_0^1([0,1])$  et en intégrant sur  $[0,1]$  on obtient :

$$\int_0^1 \theta_n^2 + \int_0^1 (\partial_x \theta_n)^2 + \lambda \theta_n^2(a) = \int_0^1 (f_n + g_n) \theta_n + \lambda f_n(a) \theta_n(a) ,$$

$$\iff \|\theta_n\|_{H_0^1}^2 = -\lambda \theta_n^2(a) + \int_0^1 g_n \theta_n + \int_0^1 f_n \theta_n + \lambda f_n(a) \theta_n(a) .$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\theta_n\|_{H_0^1}^2 &\leq (g_n, \theta_n)_{L^2} + (f_n, \theta_n)_{H_0^1} + \lambda |f_n(a) \theta_n(a)| \leq \\ &\leq (g_n, \theta_n)_{L^2} + (f_n, \theta_n)_{H_0^1} + \lambda | \langle f_n, \delta_a \rangle_{H_0^1, H^{-1}} | \cdot | \langle \theta_n, \delta_a \rangle_{H_0^1, H^{-1}} | . \end{aligned}$$

Sachant que  $(f_n, g_n)$  est bornée dans  $H_0^1 \times L^2$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \|\theta_n\|_{H_0^1}^2 &\leq \|g_n\|_{L^2} \|\theta_n\|_{L^2} + \|f_n\|_{H_0^1} \|\theta_n\|_{H_0^1} + \|f_n\|_{H_0^1} \|\theta_n\|_{H_0^1} \\ &\iff \|\theta_n\|_{H_0^1}^2 \leq ( \|g_n\|_{L^2} + 2 \|f_n\|_{H_0^1} ) \|\theta_n\|_{H_0^1} \\ &\iff \|\theta_n\|_{H_0^1} \leq K . \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

$\theta_n$  est donc bornée dans  $H_0^1$  et on peut extraire une sous-suite encore notée  $\theta_n$  faiblement convergente dans  $H_0^1$ , donc fortement convergente dans  $L^2$  (injection compacte). On applique le même raisonnement pour la suite  $f_n$  ; il s'ensuit que :

$$\|\partial_t \theta_n - \partial_t \theta\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 .$$

Il reste à montrer que  $\theta_n$  converge (fortement) dans  $H_0^1$ . Comme  $H_0^1[0,1] \subset C^0[0,1]$  avec injection compacte :

$$\begin{cases} \theta_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \theta(a) \\ f_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a) , \end{cases}$$

et l'équation :

$$\theta_n - \partial_x^2 \theta_n = \lambda \theta_n(a) \delta_a - \lambda f_n(a) \delta_a + g_n + f_n ,$$

converge vers  $\theta - \partial_x^2 \theta$  fortement dans  $H^{-1}$ . Par continuité de la solution de  $\theta - \partial_x^2 \theta = C$  par rapport à  $C$  dans  $H^{-1}$ , on obtient :

$$\|\theta_n - \theta\|_{H_0^1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 . \quad \square$$

**Lemme 11** Soit  $a \notin \mathbb{Q}$  et le système :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta - \partial_x^2 \theta &= -\lambda \partial_t \theta(a, t) \delta_a \\ \theta(0, t) = \theta(1, t) &= 0 \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

tel que l'énergie associée vérifie :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = 0 ;$$

alors pour tout  $t \in [0, +\infty[$  le système (III.13) admet pour seule solution :

$$\theta(x, t) = 0 .$$

Preuve : Par la méthode de Fourier le système (III.13) a pour solution :

$$\theta(x, t) = \sum_{n \geq 1} a_n(t) \sin(n\pi x) ,$$

où  $a_n(t)$  sont les coefficients de Fourier. Sachant que  $\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = 0 = (\partial_t \theta(a, t))^2$ , on a :  $\theta(a, t) = 0$  ;  $\theta(x, t)$  s'écrit alors :

$$\theta(x, t) = \sum_{n \in I} a_n(t) \sin(n\pi x) ;$$

or dans ce cas  $I = \emptyset$  , d'où  $\theta(x, t) = 0$ .  $\square$

Démonstration du théorème 10 :

1. D'après les lemmes 10 et 11 et le principe de LaSalle, on conclut que le système (III.3) est asymptotiquement stable (fortement) pour tout  $a \notin \mathbb{Q}$ .  $\square$
2. Le système (III.3) peut se décomposer en deux sous-systèmes  $S$  et  $S'$  correspondant respectivement aux ensembles de fonctions propres :

$$\{\varphi_n , n \in I\} \text{ et } \{\varphi_n , n \notin I\} .$$

Le système  $S$  est conservatif ; pour le système  $S'$ , il suffit de reprendre la démonstration 1.  $\square$

3.

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathcal{E}(T, \omega) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_\infty(\omega) ;$$

sachant que  $\mathcal{E}(T, \omega) \leq \mathcal{E}(0) \in L^1(\Omega)$ , on en déduit en utilisant le théorème de la convergence dominée :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \mathcal{E}(T, \omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} \lim_{T \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(T, \omega) dP(\omega) = E[ \mathcal{E}_\infty ] . \square$$

On en déduit immédiatement :

**Corollaire 3**

$$\forall a \in ]0, 1[ , \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} G_T(a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_\epsilon(a) = F_0(a) .$$

Asymptotiquement, les degrés de contrôlabilité actif et passif sont identiques. L'étape suivante consiste à montrer la régularité de la fonction  $G_T$  pour un temps  $T$  fixé.

**III.4.2 Continuité**

On montre, comme dans le cas du degré de contrôlabilité actif, la propriété de continuité par rapport à  $a$  pour la fonction  $G_T$ .

Énonçons tout d'abord un résultat relatif à la continuité "entrée-sortie". On considère le système :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta &= \partial_x^2 \theta + u \delta_{a_0} , & u \in L^2(0, T) , \\ \theta(0, t) &= \theta(1, t) = 0 \\ \theta(x, 0) &= \theta_0(x) \\ \partial_t \theta(x, 0) &= \theta_1(x) , \end{cases} \quad (III.14)$$

avec la sortie :

$$y = \langle \delta_a, \partial_t \theta \rangle = \partial_t \theta(a, t) . \quad (III.15)$$

**Lemme 12** *L'application linéaire :*

$$\begin{aligned} H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2(0, T) &\longrightarrow L^2(0, T) \\ (\theta_0, \theta_1, u) &\longrightarrow y , \end{aligned}$$

*est bornée uniformément par rapport à  $a$ .*

Preuve :

1. Lorsque  $(\theta_0, \theta_1) = 0$

Soit  $h_a$  la réponse impulsionnelle de (III.14) ; du fait de la vitesse finie de propagation,  $y$  prend la forme :

$$h_a(t) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i(a) \delta_{t_i(a)}(t) , \quad \epsilon_i(a) = \pm 1 ,$$

$N$  indépendant de  $a$  ; d'où :

$$y = h_a * u = \sum_{i=1}^N \epsilon_i(a) u(t - t_i(a)) ,$$

et

$$\|y\|_{L^2(0, T)} \leq \sum_{i=1}^N \|u(\cdot - t_i(a))\|_{L^2(0, T)} \leq N \|u\|_{L^2(0, T)} .$$



2. Le cas  $u = 0$  et  $(\theta_0, \theta_1) \neq 0$  est traité dans [27].
3. On conclut par superposition linéaire.  $\square$

**Théorème 11** *Pour tout  $T > 0$ , la fonction  $a \mapsto G_T(a)$  est continue.*

Preuve :

1. Montrons tout d'abord que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \|X(T, a, \omega) - X(T, a_0, \omega)\|_{\mathcal{H}}^2 \xrightarrow{a \rightarrow a_0} 0.$$

En posant :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \partial_x^2 & 0 \end{bmatrix} \quad B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_a \end{bmatrix} \quad B_a^* = [0 \quad \langle \cdot, \delta_a \rangle],$$

l'opérateur  $\mathcal{A}$  s'écrit :

$$\mathcal{A} = A - \lambda B_a B_a^* ;$$

le système (III.4) devient alors :

$$\begin{cases} \dot{X} &= A X - B_a \lambda B_a^* X & \lambda > 0 \\ X(0) &= X_0, \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

avec  $X(t) \in \mathcal{H} \equiv h^1 \times l^2$ .

On considère deux systèmes  $(S_1)$  et  $(S_2)$  de type (III.16) pour  $a \neq a_0$  et ayant même condition initiale :

$$(S_1) \begin{cases} \dot{x}_1 &= A x_1 - B_a \lambda B_a^* x_1 \\ x_1(0) &= X_0 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} \dot{x}_2 &= A x_2 - B_{a_0} \lambda B_{a_0}^* x_2 \\ x_2(0) &= X_0. \end{cases}$$

En posant  $\tilde{X} = x_1 - x_2$ , on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}} &= A \tilde{X} - \lambda B_a B_a^* \tilde{X} - \lambda B_a [B_a^* x_2 - B_{a_0}^* x_2] - \lambda [B_a - B_{a_0}] B_{a_0}^* x_2 \\ \tilde{X}(0) &= 0. \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

Le système (III.17) est la superposition linéaire de 3 systèmes (a), (b) et (c) :

$$(a) \quad \begin{cases} \dot{X}_1 &= A X_1 - \lambda B_a [B_a^* x_2 - B_{a_0}^* x_2] \\ X_1(0) &= 0. \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

$$(b) \quad \begin{cases} \dot{X}_2 &= A X_2 - \lambda B_a B_a^* X_2 \\ X_2(0) &= 0 \end{cases} \quad (III.19)$$

$$(c) \quad \begin{cases} \dot{X}_3 &= A X_3 - [B_a - B_{a_0}] \lambda B_{a_0}^* x_2 \\ X_3(0) &= 0 . \end{cases} \quad (III.20)$$

Etude de (a) :

i) D'après la proposition 13,  $\forall X_0 \in \mathcal{H}$ ,  $\forall a$ ,  $\lambda B_{a_0}^* x_2 \in L^2(0, T)$  et :

$$\|B_{a_0}^* x_2\|_{L^2(0, T)}^2 \leq k \|X_0\|_{\mathcal{H}}^2 .$$

D'après le lemme 12 :

$$\|B_a^* x_2\|_{L^2(0, T)}^2 \leq N \|\lambda B_{a_0}^* x_2\|_{L^2(0, T)} + k' \|X_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq k'' \|X_0\|_{\mathcal{H}}^2 ,$$

uniformément par rapport à  $a$ .

ii) Considérons :

$$\begin{aligned} K_a : \mathcal{H} &\longrightarrow L^2(0, T) \\ X_0 &\longmapsto \lambda (B_a^* - B_{a_0}^*) x_2 ; \end{aligned}$$

$K_a$  est un opérateur linéaire et uniformément borné :

$$\|K_a X_0\|_{L^2(0, T)}^2 \leq 2 \sup(k, k'') \|X_0\|_{\mathcal{H}}^2 .$$

iii) En notant  $V = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$  (muni de la norme du graphe) :

$$B_a^* , B_{a_0}^* \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) = V'$$

et

$$\|B_a^* - B_{a_0}^*\|_{V'} \xrightarrow{a \rightarrow a_0} 0 ,$$

car

$$\|\delta_a - \delta_{a_0}\|_{H^{-1}} \xrightarrow{a \rightarrow a_0} 0 .$$

Pour  $X_0 \in \mathcal{D}(A) \subset V$ , on déduit de (III.7) que  $x_2 \in L^\infty(0, T; \mathcal{D}(A)) \subset L^\infty(0, T; V)$ , d'où,  $\forall X_0 \in \mathcal{D}(A)$  :

$$\begin{aligned} \|K_a X_0\|_{L^2(0, T)}^2 &= \lambda^2 \int_0^T |(B_a^* - B_{a_0}^*) x_2|^2 dt \\ &\leq \lambda^2 \int_0^T \|B_a^* - B_{a_0}^*\|_{V'}^2 \|x_2\|_V^2 dt \\ &\leq \lambda^2 T \|B_a^* - B_{a_0}^*\|_{V'}^2 \|x_2\|_{L^\infty(0, T; V)}^2 \xrightarrow{a \rightarrow a_0} 0 \end{aligned}$$

iv)  $\mathcal{D}(A)$  dense dans  $\mathcal{H}$  avec ii) iii) entraînent que :

$$\|K_a X_0\|_{L^2(0,T)} \xrightarrow{a \rightarrow a_0} 0, \quad \forall X_0 \in \mathcal{H}.$$

v) Par le corollaire 1, on déduit :

$$\|X_1(T, \omega)\|_{\mathcal{H}} \leq k \|K_a X_0\|_{L^2(0,T)} \xrightarrow{a \rightarrow a_0} 0.$$

Etude de (b) :

La solution du système (III.19) est identiquement nulle pour tout  $a$  et  $a_0$ .

Etude de (c) :

On pose  $u = B_{a_0}^* x_2 \in L^2(0, T)$ , on pose  $K_a = B_a - B_{a_0}$  et :

$$H_a X_0 = \int_0^T \Phi(T - \tau) u(\tau) d\tau K_a;$$

d'après le théorème 6, pour tout  $X_0 \in \mathcal{H}$  :

$$\|H_a X_0\|_{\mathcal{H}} \leq k \|X_0\|_{\mathcal{H}}.$$

Pour  $X_0 \in \mathcal{D}(A^2)$ ,  $x_2 \in C^1([0, T]; \mathcal{D}(A))$  [25]. Donc  $u = B_{a_0}^* x_2 \in C^1([0, T])$  et  $u' \in C^0([0, T])$ . On déduit :

$$\begin{aligned} H_a X_0 &= \int_0^T \Phi(T - \tau) u(\tau) d\tau K_a \\ &= [-\Phi(T - \tau) u(\tau) d\tau]_0^T A^{-1} K_a + \int_0^T \Phi(T - \tau) u'(\tau) d\tau A^{-1} K_a \\ &= (-I u(T) + \Phi(T) u(0) + \int_0^T \Phi(T - \tau) u'(\tau) d\tau) A^{-1} K_a; \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \|H_a X_0\|_{\mathcal{H}} &\leq (|u(T)| + |u(0)| + \int_0^T \|\Phi(T - \tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} |u'(\tau)| d\tau) \|A^{-1} K_a\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq k \|A^{-1} K_a\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Or  $A^{-1}$  est borné de  $V'$  dans  $\mathcal{H}$ , d'où :

$$\|A^{-1} K_a\|_{\mathcal{H}} \leq \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(V', \mathcal{H})} \|K_a\|_{V'} \xrightarrow{a \rightarrow a_0} 0.$$

Comme pour (a), on étend par densité le résultat à  $X_0 \in \mathcal{H}$ . Par conséquent :

$$\|X_3(T, \omega)\|_{\mathcal{H}} = \|H_a X_0\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{a \rightarrow a_0} 0.$$

Finalement par superposition linéaire des 3 systèmes :

$$\|\widetilde{X}(T, \omega)\|_{\mathcal{H}} \leq \|X_1(T, \omega)\|_{\mathcal{H}} + \|X_2(T, \omega)\|_{\mathcal{H}} + \|X_3(T, \omega)\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{a \rightarrow a_0} 0 . \quad (\text{III.21})$$

2. De l'expression (III.21), on déduit :

$$0 \leq | \|X(T, a, \omega)\|_{\mathcal{H}} - \|X(T, a_0, \omega)\|_{\mathcal{H}} | \leq \|X(T, a, \omega) - X(T, a_0, \omega)\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{a \rightarrow a_0} 0 ;$$

d'où

$$\|X(T, a, \omega)\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{a \rightarrow a_0} \|X(T, a, \omega)\|_{\mathcal{H}} .$$

3. Sachant que :

$$\|X(T, a, \omega)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \mathcal{E}(0) ,$$

on déduit par le théorème de la convergence dominée :

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow a_0} (G_T(a) - G_T(a_0)) &= \lim_{a \rightarrow a_0} \left( \frac{E[\|X(T, a)\|_{\mathcal{H}}^2]}{\mathcal{E}(0)} - \frac{E[\|X(T, a_0)\|_{\mathcal{H}}^2]}{\mathcal{E}(0)} \right) \\ \implies \lim_{a \rightarrow a_0} (G_T(a) - G_T(a_0)) &= E \left[ \lim_{a \rightarrow a_0} \frac{\|X(T, a)\|_{\mathcal{H}}^2}{\mathcal{E}(0)} - \frac{\|X(T, a_0)\|_{\mathcal{H}}^2}{\mathcal{E}(0)} \right] = 0 . \quad \square \end{aligned}$$

La fonction  $G_T$  étant continue, il est naturel d'étudier la différentiabilité.

### III.4.3 Différentiabilité

Il n'a pas été possible de montrer comme dans le cas actif et bien que les résultats expérimentaux abondent dans ce sens, la dérivabilité de  $G_T$  uniquement sur les irrationnels. Nous avons néanmoins pu établir que dans l'hypothèse où le support de l'amortisseur n'est plus ponctuel (c'est à dire lorsque l'opérateur  $B_a$  est borné) la fonction  $G_T$  est différentiable. La démonstration repose sur le théorème :

**Théorème 12** [24] *Soit  $A \in \mathcal{L}(H_0^1, H^{-1})$  un opérateur non borné dans  $\mathcal{H}$  et générateur infinitésimal du semi-groupe  $\Phi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Si l'on considère une perturbation  $BB^*$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , alors le semi-groupe  $\Phi_{A+BB^*} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  et  $\Phi_{A+BB^*}$  est holomorphe par rapport à  $BB^*$ .*

On a alors le théorème suivant :

**Théorème 13** *Pour  $f \in H_0^1(0, 1)$  et le système :*

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta - \partial_x^2 \theta &= \lambda \int_0^1 f(\xi - a) \partial_t \theta(\xi, t) d\xi \cdot f(x - a) \\ \theta(x, 0) &= \theta_0 \\ \partial_t \theta(x, 0) &= \theta_1 \\ \theta(0, t) &= 0 \\ \theta(1, t) &= 0 , \end{cases}$$

la fonction :

$$G_T^f(a) = \frac{E[\|X(T)\|_{\mathcal{H}}^2]}{\|X_0\|_{\mathcal{H}}^2}$$

est dérivable par rapport à  $a$ .

Preuve : La démonstration se décompose en 4 étapes.

1. la fonction  $G_T$  a pour expression :

$$G_T^f(a) = \frac{E[\|\Phi_{A+B_a B_a^*}(T) X_0\|_{\mathcal{H}}^2]}{\|X_0\|_{\mathcal{H}}^2},$$

où  $\Phi_{A+B_a B_a^*}$  est le semi-groupe engendré par l'opérateur  $A + B_a B_a^*$ . Comme  $B_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$  alors  $\Phi_{A+B_a B_a^*}$  est holomorphe par rapport à  $B_a B_a^*$  et en particulier différentiable par rapport à  $B_a B_a^*$ .

2. Il suffit alors de montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ a &\longmapsto B_a B_a^* \end{aligned}$$

est dérivable, ou de façon plus précise que :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{L}(L^2(0,1)) \\ a &\longmapsto \langle f(\xi - a), \cdot \rangle f(x - a) \end{aligned}$$

est dérivable. Décomposons l'application  $\Psi$  :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R} &\xrightarrow{S} \mathcal{L}(\mathbb{R}, L^2) \times \mathcal{L}(L^2, \mathbb{R}) \xrightarrow{T} \mathcal{L}(L^2) \\ a &\longmapsto (B_a, B_a^*) \longmapsto B_a B_a^* ; \end{aligned}$$

$T$  est dérivable, de même que l'opération de transposition.

3. Il reste à montrer que :

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R} &\longrightarrow L^2(0,1) \\ a &\longmapsto f(\cdot - a) \end{aligned}$$

est dérivable. Par définition :

$$S'(a) = \frac{f(x - a - h) - f(x - a)}{h} = -f'(x - a) \quad \forall x \in [0, 1] ;$$

or comme  $f(\cdot - a) \in H^1(0,1)$ , alors  $S'(a) = f'(\cdot - a) \in L^2(0,1)$ . On en déduit que :

$$\forall \omega \in \Omega \quad (a, \omega) \longmapsto \|X(T, \omega)\|_{\mathcal{H}}^2$$

est dérivable par rapport à  $a$ .

4. L'espérance mathématique de la dérivée étant égale à la dérivée de l'espérance, on a finalement :

$$\frac{d}{da}G_T(a) = E\left[ \frac{d}{da}(\|X(T)\|_{\mathcal{H}}^2) \right] . \quad \square$$

**Remarque :** Ce résultat signifie que  $G_T(a)$  est dérivable (partout) si l'on remplace dans le problème,  $\delta_a$  par une approximation dans  $H^1$  (par exemple une fonction affine par morceaux à support dans  $[a - \epsilon, a + \epsilon]$ ).

Dans le cadre général c'est à dire lorsque  $B \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$  la différentiabilité de  $G_T$  semble plus difficile à établir.

### III.4.4 Calcul et tracé de $G_T$

Tout comme la fonction  $F_c$  (étudiée au chapitre II), la fonction  $G_T$  est continue par rapport à  $a$  ; il est donc possible de tracer cette fonction pour des temps  $T$  fixés. Afin de pouvoir comparer les deux degrés de contrôlabilité, il est nécessaire de choisir un état initial aléatoire ayant les mêmes caractéristiques *i.e.* ayant même loi de probabilité.

Le contenu harmonique de  $X_0 = [\rho \ \eta]^T \in \mathcal{H}$  est défini comme pour  $F_c$ , à savoir :

$$\begin{cases} E[\rho_n] = E[\eta_n] = 0 \\ E[\rho_n^2] \equiv r_n^2 < +\infty \\ E[\eta_n^2] \equiv s_n^2 < +\infty . \end{cases}$$

L'énergie initiale est supposée déterministe et a pour expression :

$$\|X_0\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (n^2 \pi^2 \rho_n^2 + \eta_n^2) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (n^2 \pi^2 r_n^2 + s_n^2) ;$$

ainsi la fonction  $G_T$  s'écrit :

$$\begin{aligned} G_T &= \frac{E[\|X(T)\|_{\mathcal{H}}^2]}{\|X_0\|_{\mathcal{H}}^2} = \frac{E[(\Phi(T)X_0 | \Phi(T)X_0)_{\mathcal{H}}]}{\|X_0\|_{\mathcal{H}}^2} \\ &= \frac{E[(\Phi^*(T)\Phi(T)X_0 | X_0)_{\mathcal{H}}]}{\|X_0\|_{\mathcal{H}}^2} = \frac{E[(\Phi^*(T)\Phi(T) | X_0 \otimes X_0)_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}}]}{\|X_0\|_{\mathcal{H}}^2} ; \end{aligned}$$

d'où :

$$G_T = \frac{(\Phi^*(T)\Phi(T) | E[X_0 \otimes X_0])_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}}}{\|X_0\|_{\mathcal{H}}^2} . \quad (\text{III.22})$$

Cette expression montre que la détermination de  $G_T$  nécessite d'une part la connaissance de  $\Phi(T)$ , d'autre part la connaissance de la matrice de corrélations de  $X_0$  (c'est à dire en fait les espérances mathématiques des produits  $\eta_n \eta_m$ ,  $\rho_n \rho_m$  et  $\eta_n \rho_m$ ). En décomposant  $X_0$  dans une base  $(\epsilon_i)_{i \geq 1}$  :

$$X_0 = \sum_i \alpha_i e_i ,$$

$G_T$  prend la forme :

$$G_T = \frac{E[ (\Phi(T)X_0 | \Phi(T)X_0)_{\mathcal{H}} ]}{(X_0 | X_0)_{\mathcal{H}}} = \frac{E[ (\Phi(T) \sum_i \alpha_i e_i | \Phi(T) \sum_j \alpha_j e_j)_{\mathcal{H}} ]}{\sum_{i,j} E[ \alpha_i \alpha_j ] (e_i | e_j)_{\mathcal{H}}} ,$$

ou encore :

$$G_T = \frac{\sum_{i,j} E[ \alpha_i \alpha_j ] (\Phi(T)e_i | \Phi(T)e_j)_{\mathcal{H}}}{\sum_{i,j} E[ \alpha_i \alpha_j ] (e_i | e_j)_{\mathcal{H}}} .$$

**Remarque :**  $i$  et  $j$  peuvent être tronquées à un ordre  $N$  (il y a convergence) et les  $\Phi(T)e_i$  peuvent être déterminés par une méthode numérique quelconque.

Cas particulier : On choisit comme dans le cas du degré de contrôlabilité actif (chapitre II) :  $r_n = 0$  et  $s_n = \frac{1}{n}$  ; de plus, pour plus de simplicité, on prendra aussi :

$$E[ \eta_n \eta_m ] = 0 \quad n \neq m ,$$

c'est à dire l'indépendance des composantes harmoniques. En posant :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} ,$$

la fonction  $G_T$  s'écrit :

$$G_T = \frac{(\Phi_{22}^*(T)\Phi_{22}(T) + \Phi_{12}^*(T)\Phi_{21}(T) | E[ \eta \otimes \eta ] )_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}}}{(X_0 | X_0)_{\mathcal{H}}} = \frac{\sum_{i,j \geq 1} K_{i,j} E[ \eta_i \eta_j ]}{\sum_{i,j \geq 1} E[ \eta_i \eta_j ]} ,$$

c'est à dire :

$$G_T = \frac{\sum_{i \geq 1} \frac{K_{ii}}{i^2}}{\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^2}} ,$$

avec  $K = \Phi_{22}^*(T)\Phi_{22}(T) + \Phi_{12}^*(T)\Phi_{21}(T)$  ( $K_{ii}$  représente les termes diagonaux),  $\Phi(T)$  étant le semi-groupe (dépendant de  $a$ ) qui est déterminé numériquement en simulant le système avec pour état initial chaque vecteur de la base modale  $e_i(x) = \varphi_i(x)$ . On a choisi pour  $N = 60$  ;  $\Phi_T^i = \Phi(T)e_i$  est déterminé par un schéma aux différences finies (voir annexe A) sur 360 points de  $]0, 1[$ . L'état initial est défini par :

$$\Phi_0^i(x_j) = e_i(x_j) = \sqrt{2} \sin(i\pi j \Delta x) .$$

Les figures (III.1) et (III.2) représentent la fonction pour les temps  $T = 4$  s et  $T = 25$  s. Il est à noter que l'on retrouve, comme pour  $F_c$  une remontée sur les rationnels sous forme de points anguleux ( la démonstration mathématique semble toutefois plus difficile que dans le cas actif).

**Remarque :** Pour les faibles valeurs de  $G_T$  (III.2), les erreurs numériques deviennent non négligeables.

A titre d'illustration, la figure (III.3) représente la fonction  $G_T$  pour  $T = 28$  s avec des conditions de type Neumann : on retrouve, comme pour la fonction  $F_c$  correspondante (figure (II.6)), des remontées anguleuses seulement sur les rationnels de la forme  $\frac{1}{2k}$ .

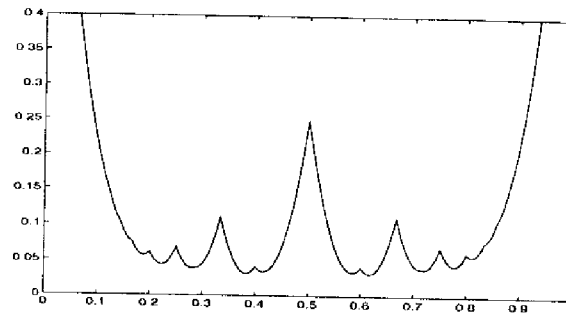


Figure III.1 : fonction  $G_T$  pour  $T = 4$  s

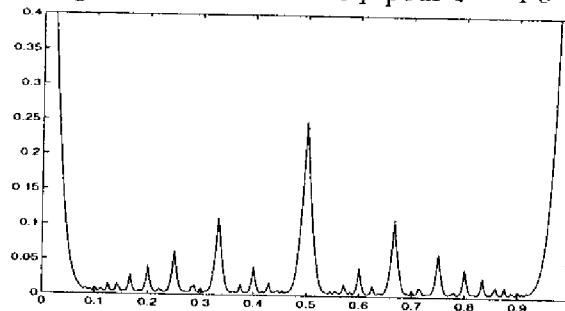


Figure III.2 : fonction  $G_T$  pour  $T = 25$  s

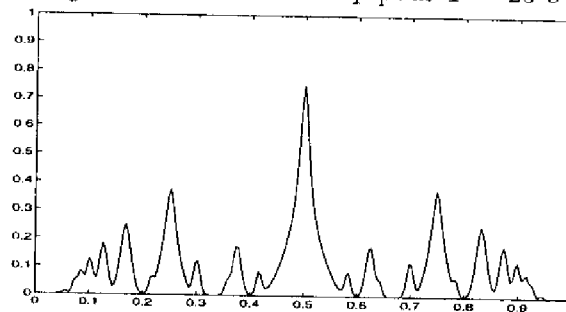


Figure III.3 : fonction  $G_T$  pour  $T = 28$  s avec condition de Neumann

### III.5 Comparaison de $G_T$ avec $F_\epsilon$

Dans ce paragraphe, on compare les deux degrés de contrôlabilité en tant que fonction du paramètre  $a$ .

#### III.5.1 Comparaison expérimentale

Les figures (III.4) et (III.5) montrent les deux fonctions  $F_\epsilon$  et  $G_T$  pour différentes valeurs de  $\epsilon$  et de  $T$ .

Au vu de ces courbes, il existe une ressemblance certaine entre les deux degrés de contrôlabilité. Il semble exister une relation entre les paramètres  $\epsilon$  et  $T$  de la forme  $T \sim \frac{1}{\epsilon}$  ; lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro (ou  $T \rightarrow +\infty$ ), il y a équivalence asymptotique entre les deux fonctions (théorème 10). Cette ressemblance nous suggère de chercher s'il existe un couple de paramètres  $(\epsilon, T)$  tel que les fonctions soient *équivalentes*.



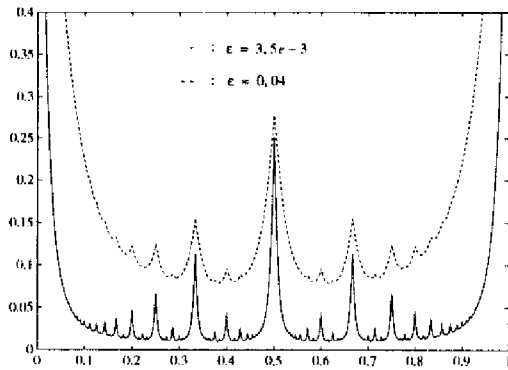


Figure III.4 : Fonction  $F_\epsilon$

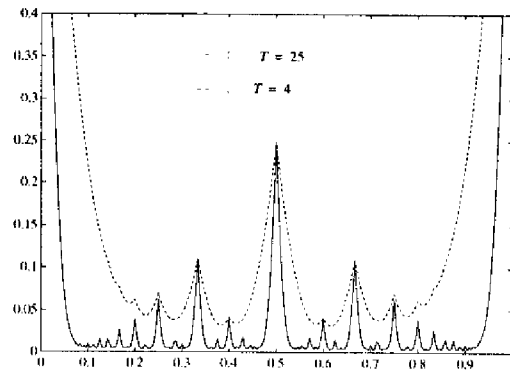


Figure III.5 : Fonction  $G_T$

Afin de pouvoir correctement comparer  $G_T$  et  $F_\epsilon$ , il est nécessaire de modifier au préalable la fonction  $G_T$ . En effet, dans la définition de la fonction  $F_\epsilon$ , on “pénalise” le contrôle  $u_\epsilon^*$  (afin de considérer un problème de contrôle optimal bien posé) ; il est donc légitime de pénaliser aussi le contrôle passif  $u_\lambda$  du système (III.3) dans la définition de la fonction  $G_T$  afin de pouvoir comparer avec  $F_\epsilon$ .

On note  $H_{T,\alpha}$  le degré de contrôlabilité passif *pénalisé*, défini par :

$$H_{T,\alpha} = \frac{E[ \|X(T)\|_{\mathcal{H}} ] + \alpha E[ \|u\|_{L^2(0,T)} ]}{E[ \|X_0\|_{\mathcal{H}} ]}.$$

Le coefficient  $\alpha$  joue le même rôle que le coefficient  $\epsilon$  défini pour la fonction  $F_\epsilon$ . A partir de la définition de  $G_T$  et en utilisant (III.9),  $H_{T,\alpha}$  s’écrit :

$$H_{T,\alpha} = G_T + \alpha(1 - G_T) = G_T(1 - \alpha) + \alpha.$$

La figure (III.6) représente la superposition des fonctions  $F_\epsilon$  pour  $\epsilon = 0.04$  et  $H_{T,\alpha}$  pour  $T = 4$  et  $\alpha = 0.05$ . Les points anguleux de la fonction  $F_\epsilon$  coïncident avec ceux de  $G_T$ , et bien que n’étant pas tout à fait identiques, les 2 fonctions présentent une grande ressemblance.

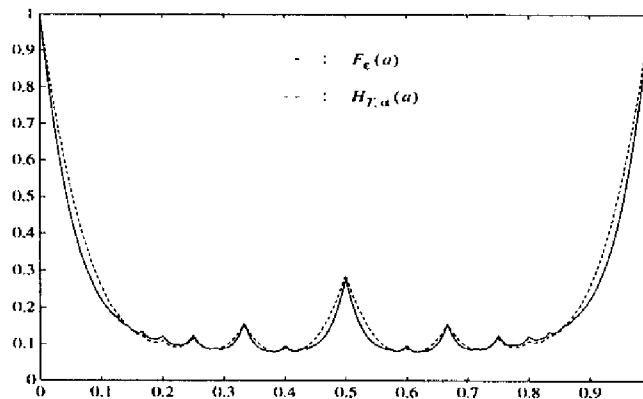


Figure III.6 : Comparaison entre  $F_\epsilon$  et  $H_{T,\alpha}$

### III.5.2 Comparaison “mathématique”

On montre, en s'appuyant sur le fait qu'il existe une fonctionnelle quadratique pour laquelle le contrôle obtenu par l'amortisseur visqueux est optimal, qu'il y a “ressemblance mathématique” entre les deux degrés de contrôlabilité.

**Proposition 14** *Le contrôle engendré par un amortisseur visqueux est solution du problème à horizon de temps infini :*

$$\min_u \{ \alpha \|u\|_{L^2(0,+\infty)}^2 + \int_0^{+\infty} (X | Q X)_{\mathcal{H}} dt \}, \quad (\text{III.23})$$

sous la contrainte :

$$\begin{cases} \dot{X} &= A X + B u \\ X(0) &= X_0, \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

où l'opérateur  $Q$  est :

$$Q = -\lambda \alpha (A + A^*) + \lambda^2 \alpha B B^* .$$

Preuve : La solution  $u^*$  du problème s'écrit classiquement :

$$u^*(t) = -\frac{1}{\alpha} B^* P(t) ,$$

où  $P(t)$  est la solution du système adjoint de (III.24), *i.e.* :

$$\begin{cases} \dot{P} &= -A^* P - Q X \\ P(T) &= X(T), \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

avec  $P(t) \in \mathcal{H}' \equiv \mathcal{H}$ . D'après (III.25), l'état adjoint  $P$  est fonction de l'état  $X$ . Si l'on cherche une solution de la forme  $P(t) = K(t)X(t)$ , on déduit de (III.24) et (III.25) que  $K(t)$  est solution de l'équation de Riccati :

$$\dot{K}(t) + K(t)A + A^*K(t) - \frac{1}{\alpha}K(t)BB^* = -Q . \quad (\text{III.26})$$

Finalement le retour d'état optimal s'écrit :

$$u^*(t) = -\frac{1}{\alpha} B^* K(t) X(t) . \quad (\text{III.27})$$

En comparant (III.27) avec  $u_\lambda = -\lambda B^* X$ , on a donc égalité entre les deux contrôles si la solution  $K(t)$  de l'équation de Riccati est :

$$K(t) \equiv \lambda \alpha I \quad \forall t \in [0, T], \quad (\text{III.28})$$

où  $I$  est l'opérateur identité dans  $\mathcal{H}$ . L'expression (III.28) implique que  $K(t)$  doit être indépendant de  $t$  ; on montre que lorsque  $T$  tend vers l'infini, la solution  $K(t) = K$  vérifie l'équation de Riccati algébrique [14] :

$$K A + A^* K - \frac{1}{\alpha} K B B^* K + Q = 0 ; \quad (\text{III.29})$$

soit encore puisque  $K = \lambda \alpha I$  :

$$-\lambda \alpha (A + A^*) + \lambda^2 \alpha BB^* = Q . \quad \square \quad (\text{III.30})$$

**Remarque :** On vérifie aisément que  $Q$  ainsi défini est bien un opérateur symétrique positif sur  $\mathcal{H}$ , de domaine de définition  $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(BB^*)$ , dense dans  $\mathcal{H}$ .

Le problème (III.23) peut donc être comparé avec le problème du chapitre II, à savoir :

$$\min_u \left\{ \epsilon \|u\|_{L^2(0,T)}^2 + (X(T) \mid \frac{1}{2} X(T))_{\mathcal{H}} \right\} .$$

## III.6 Conclusion

L'analyse expérimentale précédente montre que ces deux problèmes, quoique différents, conduisent cependant à des comportements voisins en ce sens que  $u_\lambda$  n'est pas très éloigné quant au résultat de coût (avec pénalisation) de  $u_\epsilon^*$ , pour un choix convenable des paramètres. Néanmoins, une comparaison plus élaborée sur le plan mathématique paraît pour l'instant illusoire.



# Chapitre IV

## Mise en œuvre - Application à la membrane vibrante

On étudie dans ce chapitre le problème de la mise en œuvre pratique du calcul du degré de contrôlabilité. En effet, sa détermination a été effectuée au cours des chapitres précédents sur un cas simple, celui de la corde vibrante pour lequel d'une part on connaît les fonctions propres et d'autre part le semi-groupe est périodique. Dans des cas plus complexes comme par exemple la membrane vibrante étudiée ultérieurement, il est nécessaire d'élaborer une méthodologie d'approximation notamment de la distribution initiale, afin de se ramener à un volume de calculs pouvant être réalisés avec des moyens raisonnables. Pour cela, on montre par l'analyse, puis l'expérience qu'il est possible de réduire considérablement la dimension de l'aléa sans modifier notablement l'allure du degré de contrôlabilité.

### IV.1 Approximation probabiliste de la distribution initiale

Pour calculer les degrés de contrôlabilité, on se base sur la connaissance *a priori*, de la loi de probabilité de  $X_0$ , la détermination de la loi pouvant se faire au cours de la modélisation du système ou sur la base des considérations *physiques*. Une première méthode consisterait à effectuer  $N$  "tirs aléatoires" suivant cette loi de probabilité et de construire par simulations numériques et moyenne statistique une estimation de la fonction  $G_T$ . Cependant, une estimation correcte nécessiterait un nombre  $N$  très grand (loi des grands nombres). Ainsi, le calcul deviendrait très lourd, notamment dans le cas bidimensionnel. Ceci est principalement dû à la double infinité de  $X_0$  : non seulement l'espace d'état  $\mathcal{H}$  est de dimension infinie, mais aussi l'espace des épreuves  $\Omega$ .

Afin de réduire cet inconvénient, on va approcher la distribution initiale par une loi discrète. Cette approximation est *déterministe*, car on approche en fait la fonction de répartition de  $X_0$ .

Considérons le système abstrait :

$$\begin{cases} \dot{X} &= A X \\ X(0) &= X_0, \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

où  $X_0 \in L^2(\Omega; \mathcal{H})$ ,  $\mathcal{H}$  étant l'espace d'état (espace de Hilbert) et ayant pour solution :

$$X(t) = \Phi(t)X_0 \in L^2(\Omega; \mathcal{H}) .$$

La fonction  $G_T$  s'écrit :

$$G_T = \frac{E[ \|X(T)\|_{\mathcal{H}}^2 ]}{\|X_0\|_{\mathcal{H}}^2} ;$$

en posant  $P = \Phi^*(T)\Phi(T)$ , on obtient :

$$G_T = \frac{(P | E[ X_0 \otimes X_0 ] )_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}}}{\|X_0\|_{\mathcal{H}}^2} ;$$

La fonction  $G_T$  est donc parfaitement déterminée si l'on connaît la loi de  $X_0$  qui permet (en théorie) de déterminer  $E[ X_0 \otimes X_0 ]$  ; il en est de même pour  $F_\epsilon(a)$ . Supposons que  $X_0$  ait pour loi de probabilité  $P_{X_0}$  ; si l'on note  $P_{X_0}^N$  une approximation probabiliste (en pratique plus simple) de  $P_{X_0}$ , on va montrer que les fonctions approchées  $G_T^N$  et  $F_\epsilon^N$ , résultant de  $P_{X_0}^N$ , convergent respectivement vers  $G_T, F_\epsilon$ .

**Définition 17** [6] Une suite de variables aléatoires  $X_n$  à valeurs dans un espace topologique  $B$  converge faiblement vers  $X$  si et seulement si :  $\forall f \in C(B, \mathbb{R})$ ,  $f$  bornée,

$$\int_B f dP_{X_n} \longrightarrow \int_B f dP_X ,$$

où  $P_{X_n}, P_X$  désignent les probabilités images de  $X_n$  et  $X$ .

**Théorème 14** Soit l'état initial aléatoire  $X_0 \in L^2(\Omega; \mathcal{H})$  du système (IV.1) ; si la suite de variables aléatoires  $X_0^N$ , supposées uniformément bornées dans  $\mathcal{H}$ , converge faiblement vers  $X_0$  bornée, alors :

$$F_\epsilon^N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} F_\epsilon ,$$

$$G_T^N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} G_T ,$$

au sens de la convergence simple.

Preuve : En posant  $g(X_0) = \|\Phi(T)X_0\|_{\mathcal{H}}^2$ , la fonction  $G_T$  s'écrit :

$$G_T = E[ g(X_0) ] , \quad G_T^N = E[ g(X_0^N) ] ;$$

de même pour  $F_\epsilon$  en posant :

$$g(X_0) = \|\Phi(T)X_0\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon \|u_\epsilon^*\|_{L^2(0,T)}^2 ;$$

où  $u_\varepsilon^*$  est solution de  $(P_\varepsilon)$ . Il est clair que  $g$  est dans les deux cas une application continue de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathbb{R}$ . Par conséquent [6] :

$$g(X_0^N) \longrightarrow g(X_0) \text{ faiblement .}$$

D'autre part, notons  $B$  la boule de centre 0, de rayon  $\sup_{N,\omega} \|X_0^N(\omega)\|_{\mathcal{H}}$ .  $g$  est continue et bornée de  $B$  dans  $\mathbb{R}$ . De la propriété de convergence faible de  $X_0^N$ , on déduit :

$$E[g(X_0^N)] = \int_{\Omega} g(X_0^N) dP = \int_B g(x) dP_{X_0^N}(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_B g(x) dP_{X_0}(x),$$

ou encore :

$$E[g(X_0^N)] \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} g(X_0) dP = E[g(X_0)] . \quad \square$$

## IV.2 Exemple : approximation de $G_T$ dans le cas de la corde

### IV.2.1 Définition de l'approximation

On utilise le résultat précédent afin de déterminer une fonction approchée  $G_T^N$  dans le cas particulier de la corde vibrante. Soit le système décrit au chapitre III, *i.e.* :

$$\begin{cases} \dot{Y} &= \mathcal{A} Y \\ Y(0) &= Y_0, \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

avec :

$$Y = \begin{bmatrix} \theta \\ \partial_t \theta \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \partial_x^2 & -\lambda < \cdot, \delta_a > \delta_a \end{bmatrix};$$

ayant pour solution  $Y(T) = \Phi(T)Y_0 \in H_0^1 \times L^2$ . On considère comme état initial un *pincement ponctuel* de la corde à une position *aléatoire*  $x \in ]0, 1[$  ; plus précisément  $x$  est une variable aléatoire de loi supposée uniforme, c'est à dire de densité de probabilité  $p$ , définie par :

$$\begin{cases} p(\xi) = 1 & \forall \xi \in [0, 1] \\ p(\xi) = 0 & \forall \xi \notin [0, 1]. \end{cases}$$

On définit ainsi un état initial aléatoire  $Y_0 \in L^2(\Omega, H_0^1 \times L^2)$  correspondant à la variable  $x$  :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{x} & ]0, 1[ \\ \omega & \mapsto & x(\omega) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\mathcal{R}} & H_0^1 \times L^2 \\ & \mapsto & \mathcal{R}(x(\omega)) = Y_0, \end{array}$$

où  $\mathcal{R}(x(\omega))$  est l'état initial correspondant à la figure (IV.1) ayant pour énergie (potentielle) la valeur normalisée 1 et  $\partial_t \theta(x, 0) = 0$ . Notons que l'ensemble  $\{Y_0(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$  est infini, comme le segment  $]0, 1[$ .

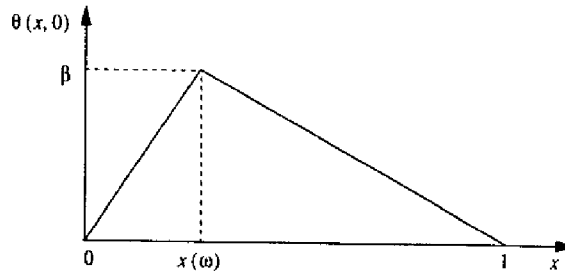


Figure IV.1 : Etat initial en position

**Remarque :** Le choix de ce type d'états initiaux (caractérisés par un point anguleux) en remplacement de l'aléa sur les fonctions propres considéré précédemment, permet à la fois une grande richesse harmonique et une économie considérable au plan calculs numériques.

On définit une approximation de  $p$  par :

$$p^N(\xi) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \delta_{\xi_i}(\xi) ,$$

où  $\xi_i \in ]0, 1[$ , pour  $i = 1, \dots, N$ , constitue un réseau de  $N$  points équidistants sur  $]0, 1[$ , ce qui conduit à une variable aléatoire réelle *discrète* notée  $x^N$ . On vérifie aisément que  $x^N$  converge en loi vers  $x$ .

De même, on définit  $Y_0^N \in L^2(\Omega, H_0^1 \times L^2)$ , l'approximation de  $Y_0$  définie précédemment en remplaçant  $x$  par  $x^N$  (figure IV.2).

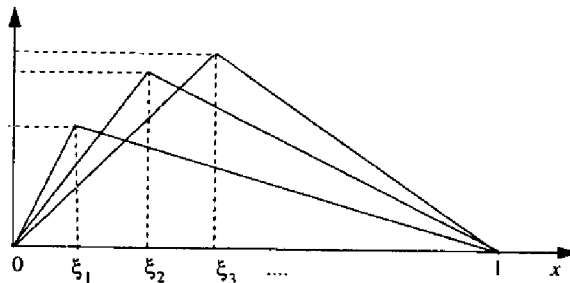


Figure IV.2 : Etats initiaux pour chaque  $x^N(\omega) \in \{\xi_i\}_{i=1, \dots, N}$

$\{Y_0^N(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$  est donc un ensemble fini, c'est l'ensemble correspondant aux  $N$  valeurs que peut prendre la variable  $x^N = \{\frac{1}{N+1}, \frac{2}{N+1}, \dots, \frac{N}{N+1}\}$ .

Par ailleurs, la fonction  $\mathcal{R}$  qui à un réel  $x \in ]0, 1[$  associe la fonction définie par la figure (IV.1) est continue et bornée de  $]0, 1[$  dans  $H_0^1 \times L^2$ . Par conséquent :

$$Y_0^N \longrightarrow Y_0 , \text{ faiblement .}$$

L'expression exacte de  $\mathcal{R}(x)$ ,  $x \in ]0, 1[$  doit vérifier l'hypothèse d'énergie constante que l'on fixe arbitrairement égale à 1 ; ceci va permettre de déterminer la valeur de  $\beta$  (figure (IV.1)). L'énergie initiale du système s'écrit :



$$\begin{aligned}\mathcal{E}(0) &= \|\partial_x \theta(0)\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^x \left(\frac{\beta}{x}\right)^2 d\xi + \int_x^1 \left(\frac{\beta}{1-x}\right)^2 d\xi = 1 \\ &\implies \beta = \sqrt{x(1-x)}.\end{aligned}$$

La fonction approchée  $G_T^N$  a pour expression (rappelons que  $\mathcal{E}(0) = 1$ ) :

$$G_T^N = E[ \|Y^N(T)\|_{H_0^1 \times L^2}^2 ] = E[ \|\Phi(T)\mathcal{R}(x^N)\|_{H_0^1 \times L^2}^2 ] = E[ \|\Phi(T)\mathcal{R}(x^N)\|_{H_0^1 \times L^2}^2 ] .$$

L'application :

$$\begin{aligned}\Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \|\Phi(T)\mathcal{R}(x^N(\omega))\|_{H_0^1 \times L^2}^2 ,\end{aligned}$$

est une variable aléatoire discrète à valeurs dans l'ensemble fini :

$$\{ \|\Phi(T)\mathcal{R}(\xi_i)\|_{H_0^1 \times L^2}^2 , i = 1, \dots, N \} .$$

Par définition de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète :

$$G_T^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\Phi(T)\mathcal{R}(\xi_i)\|_{H_0^1 \times L^2}^2 .$$

La fonction  $G_T^N$  peut donc être déterminée par  $N$  *simulations numériques* du système (IV.2), pour toutes les positions  $\xi_i$  avec  $i = 1$  à  $N$ . Par ailleurs, on pourra, du fait de la continuité de  $G_T$ , ne considérer qu'un nombre réduit de valeurs de  $a$ .

**Remarques :**

1. La détermination de la fonction exacte  $G_T$ , définie par :

$$G_T = E[ \|\Phi(T)\mathcal{R}(\xi)\|_{H_0^1 \times L^2}^2 ] = \int_0^1 \|\Phi(T)\mathcal{R}(\xi)\|_{H_0^1 \times L^2}^2 d\xi ,$$

nécessiterait une *infinité non dénombrable* de simulations !

2. Tout ce qui vient d'être développé dans le cas d'une loi uniforme pour la variable aléatoire  $x$ , peut être étendu à une loi de probabilité quelconque. Il suffit de reprendre le même raisonnement en modifiant l'approximation (déterministe) de la fonction  $p(\xi)$ .

## IV.2.2 Lien avec l'approche modale

Il est possible de relier l'état initial développé dans la base des fonctions propres (décomposition harmonique) au chapitre II et III et l'approximation élaborée précédemment : il suffit d'exprimer l'état initial  $Y_0$  du système (IV.2) dans la base des fonctions propres. On obtient le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{x} & ]0, 1[ & \xrightarrow{\mathcal{R}} & H_0^1 \times L^2 & \xrightarrow{\mathcal{J}} & \mathcal{H} = h^1 \times l^2 \\ \omega & \mapsto & x(\omega) & \mapsto & \mathcal{R}(x(\omega)) = Y_0 & \mapsto & X_0 = (\rho, \eta)^T . \end{array}$$

Les  $\rho_n$  et  $\eta_n$  sont déterminés dans le cas de la figure(IV.1) en calculant :

$$\begin{cases} \rho_n = (\mathcal{R}(x) | \varphi_n)_{L^2(0,1)} \\ \eta_n = 0 , \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\rho_n = \int_0^x \frac{\beta}{x} y \sin(n\pi y) dy + \int_0^x \frac{\beta}{1-x} (1-y) \sin(n\pi y) dy .$$

On obtient après calcul :

$$\rho_n = \frac{\beta \sin(n\pi x)}{n^2 \pi^2 x(1-x)} = \frac{1}{n^2 \pi^2} \frac{\sin(n\pi x)}{\sqrt{x(1-x)}} .$$

Si l'on considère que l'on peut pincer la corde indifféremment vers le *haut* ou vers le *bas*, cela n'entraîne aucune modification de l'énergie initiale  $\mathcal{E}(0)$  et permet de considérer pour plus de simplicité, des variables centrées :

$$E[\rho_n] = E[\eta_n] = 0 .$$

Il reste à calculer la variance de  $\rho_n$ ,  $E[\rho_n^2]$  et d'étudier sa décroissance.

### Proposition 15

$$E[\rho_n^2] \sim \frac{\text{Log}(\sqrt{n\pi})}{n^4} .$$

Preuve :

$$\begin{aligned} E[\rho_n^2] &= \int_{\Omega} \rho_n^2 p(\xi) d\xi = \frac{1}{n^4 \pi^4} \int_0^1 \frac{\sin^2(n\pi\xi)}{\xi(1-\xi)} d\xi = \\ &= \frac{1}{n^4 \pi^4} \left\{ \int_0^1 \frac{\sin^2(n\pi\xi)}{\xi} d\xi + \int_0^1 \frac{\sin^2(n\pi\xi)}{1-\xi} d\xi \right\} ; \end{aligned}$$

En effectuant les changements de variables  $r = n\pi\xi$  et  $s = n\pi(1-\xi)$ , les deux intégrales deviennent :

$$E[\rho_n^2] = \frac{1}{n^4 \pi^4} \left( \int_0^{n\pi} \frac{\sin^2(s)}{s} ds + \int_0^{n\pi} \frac{\sin^2(r)}{r} dr \right) = \frac{2}{n^4 \pi^4} \int_0^{n\pi} \frac{\sin^2(s)}{s} ds .$$

Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on peut donner un équivalent de l'intégrale, *i.e.* :

$$\int_0^{n\pi} \frac{\sin^2(s)}{s} ds \sim \int_1^{n\pi} \frac{1}{2s} ds \sim \frac{1}{2} \text{Log}(n\pi) ;$$

d'où le résultat.  $\square$

La suite  $\text{Log}(\sqrt{n\pi})$  croît très *lentement* : on retrouve donc en première approximation une décroissance harmonique comparable aux cas précédents.

**Remarque :** Les variables aléatoires  $\rho_n$  et  $\eta_n$  ne sont pas indépendantes, mais on remarquera qu'aucune hypothèse d'indépendance n'a été nécessaire pour l'analyse des degrés de contrôlabilité. C'est cette propriété qui est mise à profit pour remplacer de manière quasi-équivalente un aléa constitué d'une infinité de variables aléatoires par une seule variable aléatoire réelle. On constatera plus loin l'efficacité de cette approximation.

### IV.2.3 Vitesse de convergence

On considère principalement le cas  $G_T$ . Notons  $g$  la fonction :

$$\begin{aligned} g : ]0, 1[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|\Phi(T) \mathcal{J} \circ \mathcal{R}(x)\|_{H_0^1 \times L^2}^2 . \end{aligned}$$

**Proposition 16** *Si  $g$  vérifie l'hypothèse :*

$$\int_0^1 |g'(x)| dx = k < +\infty , \quad (\text{IV.3})$$

alors :

$$|G_T^N - G_T| \leq \frac{k}{N} .$$

Preuve :

$x$  et  $x^N$  étant définies comme au paragraphe V.1.2, de fonctions de répartition respectives  $F$ ,  $F^N$  ; on pose  $g(x) = \|\Phi(T)X_0\|_{H_0^1 \times L^2}^2$  :

$$|G_T^N - G_T| = |E[g(x^N)] - E[g(x)]| = \left| \int_0^1 g(\xi) [dF^N(\xi) - dF(\xi)] \right| .$$

En remarquant que  $F^N(\xi_i) = F(\xi_i)$ , on déduit par intégration par parties sur  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$  et en utilisant le fait que :  $F^N(\xi) = \xi_i$  :

$$|G_T^N - G_T| = \left| \sum_i \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} g'(\xi) [F^N(\xi) - F(\xi)] d\xi \right| = \left| \sum_i \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} g'(\xi) [\xi_i - \xi] d\xi \right| ;$$

on obtient pour un maillage régulier,  $\xi_{i+1} - \xi_i = \frac{1}{N}$  :

$$|G_T^N - G_T| \leq \frac{1}{n} \int_0^1 |g'(\xi)| d\xi \leq \frac{k}{N} . \square$$

La démonstration de l'hypothèse (IV.3) n'a pu être établie. En effet, l'application  $\mathcal{R}$  n'est pas dérivable (plus précisément,  $\mathcal{R}'(x) \notin H_0^1 \times L^2$ ). Cela n'implique bien sûr pas que  $\|\Phi(T) \mathcal{J} \circ \mathcal{R}(x)\|_{H_0^1 \times L^2}^2$  ne soit pas dérivable (ainsi par exemple,  $\|\Phi(0) \mathcal{J} \circ$

$\mathcal{R}(x) \|_{H_0^1 \times L^2}^2$  est dérivable puisque  $\|\mathcal{J} \circ \mathcal{R}(x)\|_{H_0^1 \times L^2}^2 = 1, \forall x$ . Les résultats expérimentaux semblent par ailleurs confirmer la lipschitzité de  $g$  (qui est plus forte que (IV.3)), comme le montrent les courbes (IV.3) et (IV.4).

Moyennant une hypothèse régularisante sur la fonction  $\mathcal{R}$ , on peut obtenir l'hypothèse (IV.3). Ainsi, si la fonction  $\mathcal{R}$  est remplacée par  $\widetilde{\mathcal{R}} = P_K \circ \mathcal{R}$ , où  $P_K$  est la projection de  $H_0^1 \times L^2$  sur l'espace engendré par les  $K$  premières fonctions propres.

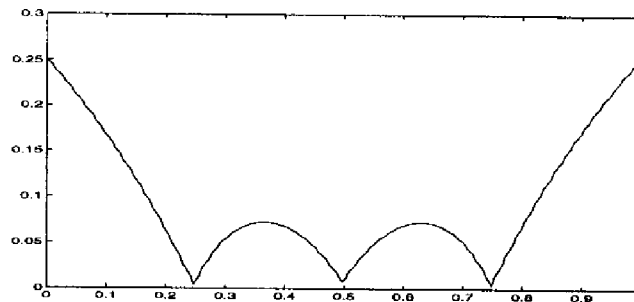


Figure IV.3 : fonction  $g$  pour  $a = \frac{1}{4}$  et  $T = 4$  s

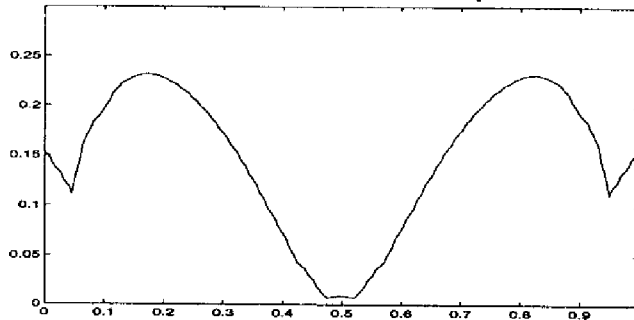


Figure IV.4 : fonction  $g$  pour  $a \sim \frac{\pi}{6}$  et  $T = 4$  s

**Proposition 17** Soit  $\tilde{g}$  la fonction :

$$\tilde{g}(x) = \|\Phi(T) \mathcal{J} \circ \widetilde{\mathcal{R}}(x)\|_{\mathcal{H}}^2 ;$$

$\tilde{g}$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et  $|\tilde{g}'(x)|$  est bornée sur  $]0, 1[$ .

Preuve :

Par définition de  $\widetilde{\mathcal{R}}$  :

$$\begin{aligned} \rho_n &= 0 & \forall n > K \\ \rho_n &= \frac{1}{n^2 \pi^2} \frac{\sin(n\pi x)}{\sqrt{x(1-x)}} & \forall n \leq K ; \end{aligned}$$

d'où :

$$\tilde{g}(x) = (\Phi(T)X_0 | \Phi(T)X_0)_{h^1 \times l^2} = (\Phi_{11}(T)\rho | \Phi_{11}(T)\rho)_{h^1} + (\Phi_{21}(T)\rho | \Phi_{21}(T)\rho)_{l^2} ,$$

et

$$\tilde{g}'(x) = 2(\Phi_{11}(T)\rho \mid \Phi_{11}(T)\frac{d}{dx}\rho)_{h^1} + 2(\Phi_{21}(T)\rho \mid \Phi_{21}(T)\frac{d}{dx}\rho)_{l^2} .$$

Or,

$$\frac{d}{dx}\rho_n(x) = \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi\sqrt{x(1-x)}} - \frac{\sin(n\pi x)(1-2x)}{n^2\pi^2[x(1-x)]^{3/2}}, \quad \forall n \leq K ;$$

on en déduit les équivalents au voisinage de 0 :

$$\rho_n(x) \sim \frac{x}{n\pi\sqrt{x}},$$

et

$$\frac{d}{dx}\rho_n(x) \sim \frac{2}{n\pi\sqrt{x}} ;$$

par symétrie, on ferait de même au voisinage de 1. D'où :

$$\begin{aligned} |\tilde{g}'(x)| &\leq 2 \|\Phi_{11}(T)\rho\|_{h^1} \|\Phi_{11}(T)\frac{d}{dx}\rho\|_{h^1} + 2\|\Phi_{21}(T)\rho\|_{l^2} \|\Phi_{21}(T)\frac{d}{dx}\rho\|_{l^2} \\ &\leq k \|\rho\|_{h^1} \|\frac{d}{dx}\rho\|_{h^1} \leq k' \sum_{i=1}^K (\sqrt{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^K (\frac{1}{\sqrt{x}})^2 = k' K^2 . \quad \square \end{aligned}$$

**Remarques :**

1. Cette majoration est certainement très grossière.
2. Il s'agit en fait de la *dérivabilité presque-partout* : plus précisément  $\tilde{g}$  est lipschitzienne.
3. L'approximation étant *déterministe*, on obtient immédiatement :

$$\|G_T^N - G_T\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{k}{N}, \quad p \leq +\infty .$$

4. La démonstration se généralise sans problème à d'autres types de fonctions de répartition pour la variable  $x$ .

#### IV.2.4 Comparaison avec la méthode de Monte-carlo

Il est intéressant de comparer cette approximation avec la méthode de Monte-Carlo qui consiste à calculer au moyen de  $N$  "tirs aléatoires" de  $x$ , la moyenne *expérimentale* :

$$\overline{G_T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_{T,i} ,$$

$G_{T,i}$  étant défini par :

$$G_{T,i}(\omega) = \|\Phi(T)\mathcal{R}(x_i(\omega))\|_{H_0^1 \times L^2}^2, \quad \omega \in \Omega ,$$

$x_i$  constituant une suite de variables indépendantes de même loi que  $x$ . Cette quantité constitue alors une approximation de l'espérance mathématique, pour laquelle on peut montrer, par la loi des grands nombres, que l'écart-type tend (dans tous les cas !) vers 0 en  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  :

$$\| \overline{G_T} - G_T \|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{k}{\sqrt{N}} .$$

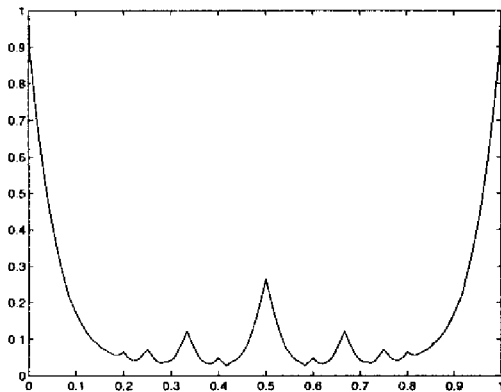


Figure IV.5 : Fonction  $G_T^N$  :  
 $N = 12$

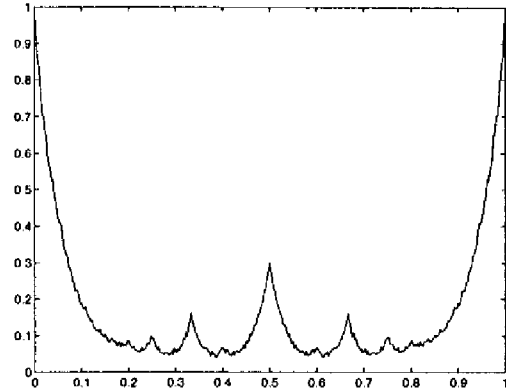


Figure IV.6 : Fonction  $\overline{G_T}$  (méthode de Monte-carlo) :  $N = 200$

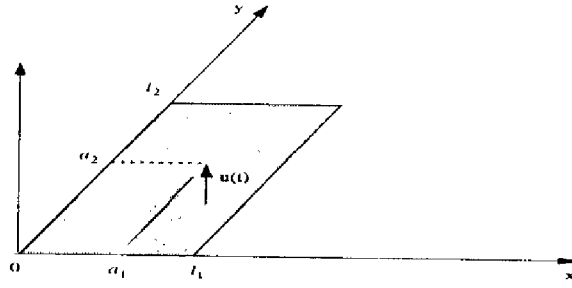
Les figures (IV.5) et (IV.6) représentent la fonction  $G_T^N$ , avec  $T = 4$  s, pour les deux méthodes : dans le cas de l'approximation précédente, on a effectué seulement 12 simulations ( $N = 12$ ) du système (IV.2), alors que par la méthode de Monte-Carlo, il a été nécessaire d'effectuer au moins 200 simulations pour obtenir un résultat comparable. On comparera ces deux courbes avec la figure (II.2).

**Remarque :** Le cas de l'approximation de  $F_c$  se traite de façon similaire, bien que présentant quelques difficultés techniques supplémentaires, dues à la résolution de  $(P_c)$ .

### IV.3 Application : cas de la membrane vibrante

Dans le cas d'un système bidimensionnel (de nature beaucoup plus complexe), on va utiliser l'approximation fonctionnelle décrite ci-dessus afin d'obtenir des fonctions  $F_c$  et  $G_T$  avec des coûts de calcul beaucoup moins lourds, l'utilisation des fonctions propres et surtout la mise en œuvre pratique devenant alors très défavorable au calcul du degré de contrôlabilité actif.

Soit l'équation de la membrane vibrante sur le domaine  $D = ]0, l_1[ \times ]0, l_2[$ , de rapport entre les longueurs  $\frac{l_1}{l_2} \notin \mathbb{Q}$ , avec conditions aux limites de type Dirichlet, et contrôle ponctuel en  $a = (a_1, a_2) \in D$  :



$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta - \Delta \theta = \delta_a u(t) \\ \theta(x, y, 0) = \theta_0(x, y) \\ \partial_t \theta(x, y, 0) = \theta_1(x, y) \\ \theta|_{\partial D} = 0. \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

On suppose comme précédemment que  $(\Omega, \Sigma, p)$  est un espace probabilisé et que l'état initial est une variable aléatoire  $(\theta_0, \theta_1) \in L^2(\Omega; H_0^1(D) \times L^2(D))$ ; on suppose de plus que  $u \in L^2(0, T)$ . L'énergie du système (IV.4) est définie par :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \{ \|\partial_t \theta\|_{L^2(D)}^2 + \|\partial_x \theta\|_{L^2(D)}^2 + \|\partial_y \theta\|_{L^2(D)}^2 \}. \quad (\text{IV.5})$$

Pour déterminer les fonctions propres  $\varphi_n(x, y)$  et valeurs propres  $\lambda_n$  de l'opérateur Laplacien  $\Delta$ , on considère l'équation aux valeurs propres :

$$\Delta \varphi(x, y) = \lambda \varphi(x, y); \quad (\text{IV.6})$$

en posant :

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \varphi_2(y),$$

on cherche une solution séparée sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_x^2 \varphi_1(x) = \lambda_1 \varphi_1(x) \\ \partial_y^2 \varphi_2(y) = \lambda_2 \varphi_2(y), \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2. \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

Le système (IV.7) a pour solution :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = A_1 \sin(n_1 \pi \frac{x}{l_1}) \\ \lambda_1 = -\frac{n_1^2 \pi^2}{l_1^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_2(y) = A_2 \sin(n_2 \pi \frac{y}{l_2}) \\ \lambda_2 = -\frac{n_2^2 \pi^2}{l_2^2}, \end{cases}$$

$A_1$  et  $A_2$  étant des constantes. On en déduit après normalisation :

$$\begin{cases} \varphi_n(x, y) = \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \sin(n_1 \pi \frac{x}{l_1}) \sin(n_2 \pi \frac{y}{l_2}) \\ \lambda_n = -(\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{n_2^2}{l_2^2}) \pi^2 \equiv -w_n^2 \pi^2. \end{cases} \quad n = (n_1, n_2),$$

**Lemme 13** Les valeurs propres  $\lambda_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  sont toutes distinctes.

Preuve : Si deux valeurs propres étaient égales, on aurait l'égalité :

$$\begin{aligned} \frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{n_2^2}{l_2^2} &= \frac{m_1^2}{l_1^2} + \frac{m_2^2}{l_2^2} \\ \implies \frac{n_1^2 - m_1^2}{n_2^2 - m_2^2} &= \frac{l_1^2}{l_2^2} ; \end{aligned}$$

or c'est impossible car  $\frac{l_1}{l_2} \notin \mathbb{Q}$  et  $n_i, m_i \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Il est bien connu que cette suite de fonctions propres constitue dans ce cas une base orthonormée de  $L^2(D)$ . En exprimant le système (IV.4) dans cette base, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} &= A X + B u \\ X(0) &= X_0 , \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

avec :

$$X = \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_n(a) \end{bmatrix} , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \text{Diag}(-w_n^2 \pi^2) & 0 \end{bmatrix} , \quad X_0 = \begin{bmatrix} \rho \\ \eta \end{bmatrix} ,$$

et

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_n(t))_{n \geq (1,1)} , & \xi_n(t) &= (\theta(t) | \varphi_n)_{L^2(D)} \\ \rho &= (\rho_n)_{n \geq (1,1)} , & \rho_n &= (\theta_0 | \varphi_n)_{L^2(D)} \\ \eta &= (\eta_n)_{n \geq (1,1)} , & \eta_n &= (\theta_1 | \varphi_n)_{L^2(D)} ; \end{aligned}$$

Si l'on note :

$$\mathcal{H} = \{x_n \in l^2 , \quad \sum_{n \geq (1,1)} w_n^2 \pi^2 x_n^2 < +\infty\} \times l^2 , \quad n = (n_1, n_2) ,$$

l'espace d'état du système (IV.8), l'énergie  $\mathcal{E}(t)$  du système devient :

$$\mathcal{E}(t) = \|X(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n \geq (1,1)} \dot{\xi}_n^2(t) + w_n^2 \pi^2 \xi_n^2(t) .$$

### IV.3.1 Degré de contrôlabilité actif

#### a) Expression de $F_c$

La solution  $u_c^*$  du problème ( $P_c$ ) s'écrit :

$$u_c^* = (H_a^* H_a + 2\epsilon I)^{-1} H_a^* \Phi(T) X_0 ,$$

où l'opérateur  $H_a$  est défini par (I.21). La démarche pour déterminer  $u_c^*$  est analogue à celle du chapitre II : on décompose le contrôle  $u$  dans la base orthonormée de  $L^2(0, T)$  :

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(k\pi \frac{t}{T}) \right\}_{k \geq 1} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(k\pi \frac{t}{T}) \right\}_{k \geq 1} . \quad (\text{IV.9})$$



**Remarque :** L'instant  $T$  doit être suffisant pour que l'action  $u(t)$  puisse avoir une influence en tout point du domaine ; cela correspond à deux fois la diagonale de la membrane *i.e.* :

$$T \geq 2 \sqrt{l_1^2 + l_2^2} .$$

On définit alors  $S$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} S : l^2 \times l^2 \longrightarrow L^2(0, T) \\ (\alpha, \beta) \longmapsto u(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \left[ \sum_{k \geq 1} \alpha_k \sin(k\pi \frac{t}{T}) + \sum_{k \geq 1} \beta_k \cos(k\pi \frac{t}{T}) \right] , \end{array} \right.$$

et

$$\|u\|_{L^2(0, T)}^2 = \|\alpha\|_{l^2}^2 + \|\beta\|_{l^2}^2 .$$

Sachant que le semi-groupe  $\Phi(t)$  a pour expression avec  $w_n = \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{n_2^2}{l_2^2}}$  :

$$\Phi(t) = \left[ \begin{array}{cc} \text{diag}\{\cos(w_n t)\} & \text{diag}\{\frac{\sin(w_n t)}{w_n}\} \\ \text{diag}\{-w_n \sin(w_n t)\} & \text{diag}\{\cos(w_n t)\} \end{array} \right] \quad n = (n_1, n_2) ,$$

on obtient la matrice  $K = H_a S$  :

$$K \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\varphi_n(a)}{w_n} \sqrt{\frac{2}{T}} \left[ \sum_{k \geq 1} \alpha_k A_k(w_n) + \beta_k B_k(w_n) \right] \\ \varphi_n(a) \sqrt{\frac{2}{T}} \left[ \sum_{k \geq 1} \alpha_k C_k(w_n) + \beta_k D_k(w_n) \right] \end{bmatrix} ,$$

avec :

$$\begin{aligned} A_k(w_n) &= \int_0^T \sin(w_n(T-\tau)) \sin(k\pi \frac{\tau}{T}) d\tau , & B_k(w_n) &= \int_0^T \sin(w_n(T-\tau)) \cos(k\pi \frac{\tau}{T}) d\tau , \\ C_k(w_n) &= \int_0^T \cos(w_n(T-\tau)) \sin(k\pi \frac{\tau}{T}) d\tau , & D_k(w_n) &= \int_0^T \cos(w_n(T-\tau)) \cos(k\pi \frac{\tau}{T}) d\tau . \end{aligned}$$

On en déduit que  $u_c^*$  s'écrit dans la base (IV.9) :

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = (K^* K + 2\epsilon I)^{-1} K^* \Phi(T) X_0 .$$

**Remarques :**

1. Contrairement au cas monodimensionnel, le semi-groupe  $\Phi$  n'est plus périodique ( $\Phi(T) \neq I$ ) ; on parle à ce moment-là de système presque périodique [16]. Ceci implique que la matrice  $K$  n'est plus diagonale (contrairement au cas de la corde) et il n'est pas possible de donner de manière explicite l'inverse de la matrice  $(K^* K + 2\epsilon I)$  qui doit être déterminée par voie numérique.

2. En toute rigueur, il serait nécessaire d'ajouter à la base (IV.9) la constante  $\{\frac{1}{\sqrt{T}}\}$  ; mais le calcul étant similaire au cas de la corde, on s'aperçoit que cette constante disparaît dans l'expression de  $K$ .

Connaissant  $u_c^*$  et donc  $\mathcal{E}(T)$ , on peut calculer (numériquement) la fonction  $F_c$  qui s'écrit :

$$F_c = \frac{1}{\mathcal{E}(0)} \{ E[ \sum_{n \geq (1,1)} \xi_n^2(T) + w_n^2 \pi^2 \xi_n^2(T) ] + \epsilon E[ \|\alpha\|_{L^2}^2 + \|\beta\|_{L^2}^2 ] \} .$$

### b) Continuité de $F_c$

Contrairement au cas monodimensionnel où l'on avait l'expression analytique de la solution, on utilise ici une démonstration plus générale qui pourrait s'appliquer à la plupart des systèmes du type :

$$\begin{cases} \dot{X} &= A X + B u \\ X(0) &= X_0 , \end{cases}$$

avec  $A$  un opérateur elliptique. On considère l'espace :

$$V = \mathcal{D}(A) = H^2(D) \cap H_0^1(D) \times H_0^1(D) ,$$

de dual  $V'$ , et  $W = \mathcal{D}(A^2)$  de dual  $W'$ . On a les relations d'inclusions avec injections continues et denses :

$$W \subset V \subset \mathcal{H} \subset V' \subset W' .$$

De plus :

$$B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_a \end{bmatrix} \in W' ,$$

car  $\delta_a \in H^{-2}(D)$  et l'application :

$$\begin{array}{ccc} ]0, 1[ & \longrightarrow & W' \\ a & \longmapsto & B_a \end{array}$$

est continue. On considère alors la fonctionnelle définie sur  $L^2(0, T)$  :

$$J(u) = \epsilon \|u\|_{L^2(0,T)}^2 + \|H_a u + b\|_{\mathcal{H}}^2 , \quad (\text{IV.10})$$

où

$$H_a u = \int_0^T \Phi(T - \tau) B_a u(\tau) d\tau , \quad b = \Phi(T) X_0 \in \mathcal{H} ,$$

et la fonctionnelle "perturbée" :

$$J_\nu(u) = \epsilon \|u\|_{L^2(0,T)}^2 + \nu ( \|\partial_t^2 u\|_{L^2(0,T)}^2 + \int_0^T p(t) u^2(t) dt ) + \|H_{a+\alpha(\nu)} u + b\|_{\mathcal{H}}^2 , \quad (\text{IV.11})$$

où :

- $\nu$  est une suite de réels positifs tendant vers 0,
- $\alpha(\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} 0$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,
- $p(t) = \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi t}{T})} \quad t \in ]0, T[$ .

A ces fonctionnelles, on associe les problèmes :

$$(P) \quad \min_{u \in L^2(0,T)} J(u) ,$$

$$(P^\nu) \quad \min_{u \in L^2(0,T)} J_\nu(u) ,$$

qui ont tous, du fait de la coercivité de la fonctionnelle, une solution unique. On va montrer tout d'abord que les solutions respectives vérifient :

$$u_\nu^* \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} u^* ,$$

et

$$J_\nu(u_\nu^*) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} J(u^*) .$$

Pour cela, il est tout d'abord nécessaire d'établir quelques lemmes. Notons :

$$H_0^2 = \{u \in H^2(0,T) , u(0) = u(T) = \partial_t u(0) = \partial_t u(T) = 0\} ;$$

muni du produit scalaire :

$$(u | v)_{H_0^2} = \int_0^T \partial_t^2 u \partial_t^2 v \, dt ,$$

$H_0^2$  est un espace de Hilbert. D'autre part, on note :

$$\mathcal{U}_a = \{u \in L^2(0,T) , \|H_a u\|_{\mathcal{H}}^2 < +\infty\} .$$

**Lemme 14**  $H_0^2 \subset \mathcal{U}_a \subset L^2(0,T)$  .

Preuve : Soit  $u \in H_0^2$  :

$$\|H_a u\|_{\mathcal{H}} = \left\| \int_0^T \Phi(T-\tau) B_a u(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{H}} = \left\| \int_0^T \Phi(T-\tau) \partial_t^2 u(\tau) \, d\tau \, A^{-2} B_a \right\|_{\mathcal{H}} ;$$

or  $A^{-2} B_a \in \mathcal{H}$  car  $A^{-2}$  est continue de  $W'$  dans  $\mathcal{H}$ , donc :

$$\begin{aligned} \|H_a u\|_{\mathcal{H}} &\leq \left\| \int_0^T \Phi(T-\tau) \partial_t^2 u(\tau) \, d\tau \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|A^{-2} B_a\|_{\mathcal{H}} \leq \int_0^T |\partial_t^2 u(\tau)| \, d\tau \|A^{-2} B_a\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq T \|\partial_t^2 u(\tau)\|_{L^2(0,T)} \|A^{-2} B_a\|_{\mathcal{H}} = T \|u\|_{H_0^2} \|A^{-2} B_a\|_{\mathcal{H}} < +\infty . \quad \square \end{aligned}$$

**Lemme 15**  $\mathcal{U}_a$  muni de la norme :

$$\|u\|_{\mathcal{U}_a}^2 = \epsilon \|u\|_{L^2(0,T)}^2 + \|H_a u\|_{\mathcal{H}}^2$$

est un espace de Hilbert.

Preuve : Soit une suite de Cauchy  $(u_n)_{n \geq 1}$  dans  $\mathcal{U}_a$  :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \quad \text{dans } L^2(0, T)$$

et

$$H_a u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z \quad \text{dans } \mathcal{H}$$

L'opérateur  $H_a$  est continu de  $L^2(0, T)$  dans  $W'$ , d'où :

$$H_a u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} H_a u, \quad \text{dans } W';$$

par ailleurs,

$$H_a u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z \quad \text{dans } W',$$

car  $\mathcal{H} \subset W'$  est continue. On en déduit par unicité de la limite dans  $W'$ ,  $z = H_a u \in \mathcal{H}$ , donc  $u \in \mathcal{U}_a$  et  $\mathcal{U}_a$  est complet.  $\square$

**Lemme 16** Il y a équivalence des problèmes :

$$\min_{u \in L^2(0,T)} J(u) \iff \min_{u \in \mathcal{U}_a} J(u), \quad (\text{IV.12})$$

et

$$\min_{u \in L^2(0,T)} J_\nu(u) \iff \min_{u \in \mathcal{U}_a} J_\nu(u) \iff \min_{u \in H_0^2} J_\nu(u). \quad (\text{IV.13})$$

Preuve : (IV.12) est évident. Pour (IV.13) :

- si  $u \notin H^2$ , alors  $\|\partial_t^2 u\|_{L^2}^2 = +\infty$  ;
- si  $u(T), u(0), \partial_t u(T)$  ou  $\partial_t u(0) \neq 0$  alors  $\int_0^T p(t) u^2(t) dt = \infty$  ;

donc :

$$J_\nu(u) = +\infty \quad \forall u \notin H_0^2. \quad \square$$

**Lemme 17** La famille d'opérateurs  $\{H_a\}_{a \in ]0,1[}$  est uniformément bornée de  $H_0^2$  dans  $\mathcal{H}$  i.e. :

$$\|H_a u\|_{\mathcal{H}} \leq k \|u\|_{H_0^2}.$$

Preuve : De la définition de  $H_a$  et en intégrant deux fois par parties, on obtient :

$$H_a u = \int_0^T \Phi(T - \tau) u(\tau) d\tau \quad B_a = \int_0^T \Phi(T - \tau) \partial_t^2 u(\tau) d\tau \quad A^{-2} B_a ;$$

or  $A^{-2} B_a \in \mathcal{H}$  et  $\|A^{-2} B_a\|_{\mathcal{H}} \leq k_1$  uniformément. Donc :

$$\|H_a u\|_{\mathcal{H}} \leq k_1 \|\partial_t^2 u\|_{L^1(0,T)} \leq k_1 T \|\partial_t^2 u\|_{L^2(0,T)} \leq k \|u\|_{H_0^2} . \quad \square$$

On peut démontrer maintenant le “pivot” de la démonstration de la continuité de  $F_\epsilon(a)$ .

**Lemme 18** *La fonctionnelle  $J_\nu$   $\Gamma$ -converge vers  $J$  sur  $\mathcal{U}_a$ , i.e. :*

$$\forall u \in \mathcal{U}_a , \quad J(u) \leq \liminf_{\nu \rightarrow 0} J_\nu(u) , \quad (\text{IV.14})$$

$$\forall u \in \mathcal{U}_a , \quad \exists (u_\nu) , \quad u_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} u \quad \mathcal{U}_a , \quad \limsup_{\nu \rightarrow 0} J_\nu(u_\nu) \leq J(u) . \quad (\text{IV.15})$$

Preuve :

1. propriété (IV.14) :

(a) Si  $u \notin H_0^2$ ,  $J_\nu = +\infty \implies \liminf_{\nu \rightarrow 0} J_\nu(u) \geq J(u)$ .

(b) Si  $u \in H_0^2$ , montrons que  $\lim_{\nu \rightarrow 0} J_\nu(u) = J(u)$ . Tout d'abord :

$$\nu ( \|\partial_t^2 u\|_{L^2(0,T)}^2 + \int_0^T p(t) u^2(t) dt ) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} 0 .$$

Par ailleurs :

$$H_{a+\alpha(\nu)} u = \int_0^T \Phi(T - \tau) \partial_t^2 u(\tau) d\tau \quad A^{-2} B_{a+\alpha(\nu)} = K u \quad A^{-2} B_{a+\alpha(\nu)} \in \mathcal{H} ;$$

de plus,  $A^{-2} B_{a+\alpha(\nu)} \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} A^{-2} B_a$  car  $A^{-2}$  est continu de  $W'$  dans  $\mathcal{H}$  et  $B_a$  est continu par rapport à  $a$  dans  $W'$ . Donc :

$$H_{a+\alpha(\nu)} u \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} K u \quad A^{-2} B_a = H_a u ;$$

d'où  $J_\nu(u) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} J(u)$ .

2. propriété (IV.15) :

(a) Si  $J(u) = +\infty$ , c'est vrai pour  $u_\nu = u$ .

(b) Si  $J(u) < +\infty$ , on considère  $\mathcal{U}_n$  une suite de sous-espaces de  $\mathcal{U}_a$  telle que :

- $\mathcal{U}_n \subset H_0^2$  (ceci est possible par densité de  $H_0^2$  dans  $L^2$ , donc dans  $\mathcal{U}_a$ ),
- $\bigcup_n \mathcal{U}_n$  est dense dans  $L^2$ ,
- $\mathcal{U}_n$  ne dépend pas de  $a$ ,
- $\dim \mathcal{U}_n < +\infty$ .

Soit  $u_n \in \mathcal{U}_n$  et  $u_n$  convergeant vers  $u$  dans  $\mathcal{U}_a$  (donc dans  $L^2(0, T)$ ) ; il vient puisque  $J$  est continue de  $\mathcal{U}_a$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$J(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} J(u) .$$

Montrons que :

$$J_\nu(u_n) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} J(u_n) .$$

En effet,

$$\begin{aligned} H_{a+\alpha(\nu)} u_n - H_a u_n &= \int_0^T \Phi(T - \tau) u_n d\tau (B_{a+\alpha(\nu)} - B_a) = \\ & \int_0^T \Phi(T - \tau) \partial_t^2 u_n d\tau A^{-2} (B_{a+\alpha(\nu)} - B_a) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} 0 , \text{ dans } \mathcal{H} , \end{aligned}$$

car  $B_a$  est continu dans  $W'$  par rapport à  $a$  et  $A^{-2}$  est continu de  $W'$  dans  $\mathcal{H}$ . Considérons :

$$|J(u) - J_\nu(u_n)| \leq \underbrace{|J(u) - J(u_n)|}_{(i)} + \underbrace{|J(u_n) - J_\nu(u_n)|}_{(ii)} ;$$

et soit  $\eta$  quelconque ; d'après ce qui précède, (i)  $\leq \frac{\eta}{2}$  si  $n(\eta)$  est assez grand, (ii)  $\leq \frac{\eta}{2}$  si  $\nu(n(\eta))$  assez petit. Par conséquent :

$$|J(u) - J_{\nu(n)}(u_{n(\eta)})| \leq \eta .$$

Il s'ensuit, en posant  $u_\nu = u_{n(\eta)}$  :

$$J_\nu(u_\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} J(u) . \square$$

On peut maintenant énoncer :

**Théorème 15** *La fonction  $F_\epsilon(a)$  est continue par rapport à  $a$ .*

Preuve : Du lemme précédent, on déduit d'après le théorème sur la  $\Gamma$ -convergence [10], la convergence des optimaux, c'est à dire :

$$u_\nu^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u^* \text{ dans } \mathcal{U}_a ,$$

donc dans  $L^2(0, T)$  ; Par conséquent, par continuité de  $J$  pour la topologie de  $\mathcal{U}_a$  :

$$J(u_\nu^*) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} J(u^*) .$$

Choisissons alors pour  $a \neq a'$  et  $\alpha(\nu(a, a')) = \frac{a' - a}{2}$ ,

$$\begin{aligned} J_\nu^a(u) &= \epsilon \|u\|_{L^2(0,T)}^2 + \nu( \|\partial_t^2 u\|_{L^2(0,T)}^2 + \int_0^T p(t)u^2(t)dt ) + \|H_{a+\alpha(\nu)}u + b\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \epsilon \|u\|_{L^2(0,T)}^2 + \nu( \|\partial_t^2 u\|_{L^2(0,T)}^2 + \int_0^T p(t)u^2(t)dt ) + \|H_{a'-\alpha(\nu)}u + b\|_{\mathcal{H}}^2 = J_\nu^{a'}(u) . \end{aligned}$$

D'après ce qui précède :

$$|J_\nu^a(u_\nu^{*a}) - J^a(u^{*a})| \leq \frac{\eta}{2} ,$$

et

$$|J_\nu^{a'}(u_\nu^{*a'}) - J^{a'}(u^{*a'})| \leq \frac{\eta}{2} ,$$

pour  $\nu$  suffisamment petit, donc pour  $|a - a'|$  suffisamment petit. De plus,  $J_\nu^{a'}(u_\nu^{*a'}) = J_\nu^a(u_\nu^{*a})$  ; d'où :

$$|J^a(u^{*a}) - J^{a'}(u^{*a'})| \leq \eta ,$$

avec  $\eta$  arbitrairement petit. Donc  $J^a(u^{*a})$  est continue par rapport à  $a$ . Il est facile de majorer  $J^a(u^{*a})$  par  $2\|X_0\|_{\mathcal{H}}^2$ ,  $X_0$  étant l'état initial du système. On en déduit par le théorème de la convergence dominée et passage à la limite sous espérance :

$$\lim_{a \rightarrow a_0} (F_\epsilon(a) - F_\epsilon(a_0)) = 0 . \quad \square$$

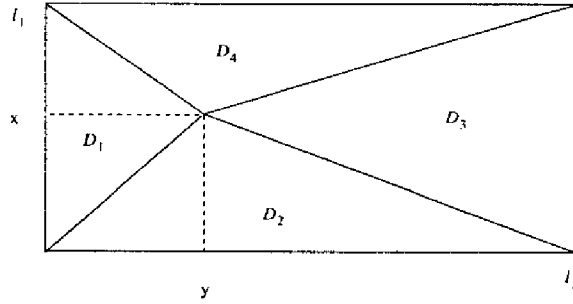
### c) Résultats expérimentaux

Pour le tracé de  $F_\epsilon$ , on choisit les quantités  $l_1 = 1$  et  $l_2 = \pi$ .

**Remarque :** L'hypothèse sur le rapport des longueurs ( $\frac{l_1}{l_2} \notin \mathbb{Q}$ ) n'est pas restrictive : elle permet uniquement d'obtenir une fonction  $F_\epsilon$  avec des modes propres au moindre coût. En effet, dans le cas contraire ( $\frac{l_1}{l_2} \in \mathbb{Q}$ ), les valeurs propres  $\lambda_n$  sont multiples, ce qui complique le problème. Par ailleurs, le problème ( $P_\epsilon$ ) est bien posé et on pourrait montrer qu'il y a continuité des solutions par rapport à  $(l_1, l_2)$ .

On suppose que l'état initial est une variable aléatoire, nul en vitesse, de position  $\theta_0$  définie par la fonction continue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0(\xi, \zeta) = \beta \frac{\xi}{x} \text{ sur } D_1 , \\ \theta_0(\xi, \zeta) = \beta \frac{\zeta}{y} \text{ sur } D_2 , \\ \theta_0(\xi, \zeta) = \beta \frac{l_2 - \zeta}{y - l_2} \text{ sur } D_3 , \\ \theta_0(\xi, \zeta) = \beta \frac{\xi - l_1}{l_1 - x} \text{ sur } D_4 , \end{array} \right. \quad (\text{IV.16})$$



où  $(x, y)$  est une variable aléatoire uniforme sur  $[0, l_1] \times [0, l_2]$ ,  $\beta$  étant déterminé de manière à ce que l'énergie (potentielle) initiale soit égale à 1. Afin de réduire le volume de calcul, on utilise l'approximation fonctionnelle étudiée au paragraphe précédent : la variable aléatoire  $(x, y)$  est remplacée par une variable aléatoire discrète à valeurs dans le réseau  $(\xi_i, \zeta_j)$ ,  $i = 1, \dots, N$  et  $j = 1, \dots, M$ .

La figure (IV.7) représente la fonction  $F_\epsilon$  en coupe pour  $a_2 = \frac{l_2}{2} = \frac{\pi}{2}$ , ( $N = 2$ ,  $M = 2$ ) : on retrouve comme dans le cas de la corde vibrante des points anguleux visibles sur les premiers rationnels.

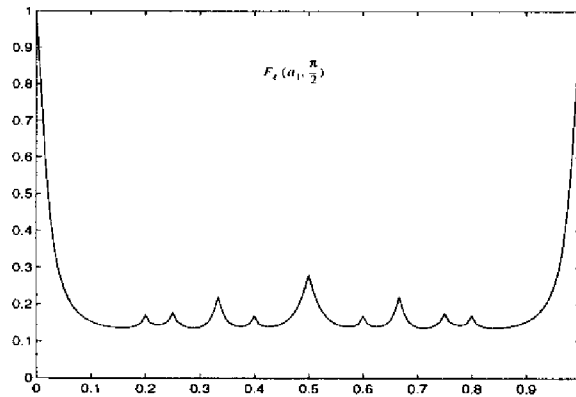


Figure IV.7 : fonction  $F_\epsilon$  pour  $\epsilon = 0.01$  et  $a_2 = \frac{l_2}{2} = \frac{\pi}{2}$

### IV.3.2 Degré de contrôlabilité passif

On considère le système (IV.4) avec amortisseur ponctuel visqueux :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta - \Delta \theta = -\lambda \delta_a \partial_t \theta(a, t) & a = (a_1, a_2) \in D, \quad \lambda > 0, \\ \theta(x, y, 0) = \theta_0(x, y) \\ \partial_t \theta(x, y, 0) = \theta_1(x, y) \\ \theta|_{\partial D} = 0; \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

L'état initial est supposé être une variable aléatoire définie comme au paragraphe IV.3.1. En posant :



$$X = \begin{bmatrix} \theta \\ \partial_t \theta \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & -\lambda < \cdot, \delta_a > \delta_a \end{bmatrix},$$

le système (IV.17) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{X} &= -\mathcal{A} X \\ X(0) &= X_0; \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

le domaine de définition de l'opérateur  $\mathcal{A}$  étant défini par :

$$D(\mathcal{A}) = \{(\theta, \partial_t \theta) \in H_0^1(D) \times H_0^1(D); -\Delta \theta - \lambda \partial_t \theta(a) \delta_a \in L^2(D)\}.$$

### a) Analyse

Concernant l'établissement de l'existence et l'unicité de la solution, la même démarche que dans le cas monodimensionnel pourrait être employée. On se borne ici à établir la dissipativité du système qui conduit, grâce à la fermeture de l'opérateur  $\mathcal{A}$  et à la densité de  $D(\mathcal{A})$ , à l'existence et l'unicité de la solution.

**Proposition 18** *Le système (IV.17) est dissipatif, i.e. :*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) \leq 0.$$

Preuve : En dérivant l'énergie définie par (IV.5), on obtient l'estimation *a priori* :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) &= (\partial_t \theta | \partial_t^2 \theta)_{\mathcal{H}} + \int \int_D \partial_x \theta \partial_x \partial_t \theta \, dx dy + \int \int_D \partial_y \theta \partial_y \partial_t \theta \, dx dy \\ &= (\partial_t \theta | \partial_t^2 \theta)_{\mathcal{H}} + \int_0^{t_2} \left[ - \int_0^{t_1} \partial_x^2 \theta \partial_t \theta \, dx \right] dy + \int_0^{t_1} \left[ - \int_0^{t_2} \partial_y^2 \theta \partial_t \theta \, dy \right] dx \\ &= (\partial_t \theta | \partial_t^2 \theta - [\partial_x^2 \theta + \partial_y^2 \theta])_{\mathcal{H}} = \langle \partial_t \theta, -\lambda \partial_t \theta(a, t) \delta_a \rangle = -\lambda (\partial_t \theta(a, t))^2. \quad \square \end{aligned}$$

On en déduit l'existence d'un semi-groupe continu de contractions  $\{\Psi_a(t)\}_{t \geq 0}$ . On définit alors le degré de contrôlabilité passif par :

$$G_T = \frac{E[\|X(T)\|_{\mathcal{H}}^2]}{\|X_0\|_{\mathcal{H}}^2}.$$

**Corollaire 4** *La fonction  $G_T$  vérifie :  $0 \leq G_T \leq 1$ .*

Preuve : En effet, le système étant dissipatif :

$$\|X(T)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|X_0\|_{\mathcal{H}}^2,$$

et il en est de même sous espérance.  $\square$

La continuité de  $G_T$  par rapport à  $a$ , bien que très probable, n'a pu être établie. La difficulté majeure vient de ce que la correspondance "entrée-sortie" du système :

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \theta - \Delta \theta &= u \delta_a \\ y &= \partial_t \theta(a, t), \end{aligned}$$

ne possède pas, dans le cas bidimensionnel, la propriété de réponse impulsionnelle à transformée de Fourier bornée. Ceci est dû à la présence de singularités de type  $\frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{t}}$  dans la réponse impulsionnelle. Une démonstration de la continuité pourrait être basée sur la continuité du semi-groupe  $\Psi_a(t)$  par rapport à  $a$ . Malheureusement, l'opérateur  $B_a$  n'est pas dans  $\mathcal{H}$ , ce qui rend le problème très difficile. On a néanmoins le résultat par régularisation de  $B_a$  :

**Proposition 19** *Soit le système :*

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta - \Delta \theta &= \lambda \int \int_D f((\xi, \zeta) - a) \partial_t \theta(\xi, \zeta, t) d\xi d\zeta \cdot f((x, y) - a) \\ \theta(x, y, 0) &= \theta_0 \\ \partial_t \theta(x, y, 0) &= \theta_1 \\ \theta|_{\partial D} &= 0 ; \end{cases}$$

la fonction :

$$G_T^f = \frac{E[\|X(T)\|_{\mathcal{H}}^2]}{\|X_0\|_{\mathcal{H}}^2}$$

est continue par rapport à  $a$  si  $f \in L^2(D)$  et dérivable si  $f \in H_0^1(D)$ .

Preuve : On considère l'opérateur  $\mathcal{A}$  du système abstrait (IV.18).  $\mathcal{A}$  est une perturbation bornée d'un générateur infinitésimal de semi-groupe. D'après le théorème 12, le semi-groupe  $\Psi_a(t)$  est holomorphe par rapport à  $\lambda$   $B_a B_a^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . De plus,  $a \rightarrow B_a$  est clairement une application continue de  $]0, 1[$  dans  $(\mathcal{H})$ , dérivable si  $f \in H_0^1(D)$ , et l'application  $X \rightarrow \|X\|_{\mathcal{H}}^2$  est dérivable. On en déduit que l'application :

$$\begin{aligned} ]0, 1[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longrightarrow \|\Psi_a(t)X_0\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

est continue, dérivable si  $f \in H_0^1(D)$ . Le passage sous l'espérance mathématique s'effectue par application du théorème de Lebesgue (voir démonstration du théorème 13).  $\square$

## b) Résultats expérimentaux

Le système est simulé numériquement pour les mêmes conditions que dans le cas précédent, c'est à dire  $l_1 = 1$ ,  $l_2 = \pi$  et  $X_0$  défini par (IV.16) (le reste est analogue au cas monodimensionnel). Afin de comparer les deux degrés de contrôlabilité, on pénalise, comme dans le cas monodimensionnel, la fonction  $G_T$  pour obtenir  $H_{T,\alpha}$  définie au chapitre III, à savoir :

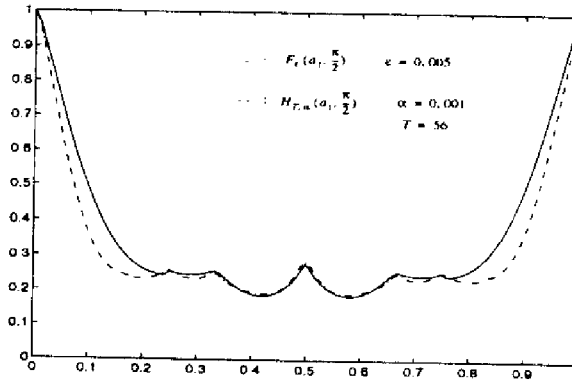


Figure IV.8 : Comparaison de  $H_{T,\alpha}$  et  $F_\epsilon$  suivant la largeur

$$H_{T,\alpha} = G_T + \alpha(1 - G_T) .$$

La figure (IV.8) représente une coupe suivant la largeur pour  $a_2 = \frac{\pi}{2}$  des fonctions  $F_\epsilon$  et  $H_{T,\alpha}$  : on retrouve une bonne correspondance. On peut remarquer que l'exploration complète de  $F_\epsilon$  en fonction de  $a \in [0, l_1] \times [0, l_2]$  pour un maillage suffisamment fin représente un volume de calculs considérable qui n'a pu être envisagé. Au contraire, dans le cas passif, cette exploration a pu être effectuée, montrant l'efficacité de l'approche.

La figure (IV.9) représente la fonction  $G_T$  pour :  $x \in [0, 1]$  et  $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$  ; les figures (IV.10) et (IV.11) permettent de visualiser, par des lignes de niveau, les zones de "bonne contrôlabilité" sur toute la membrane.

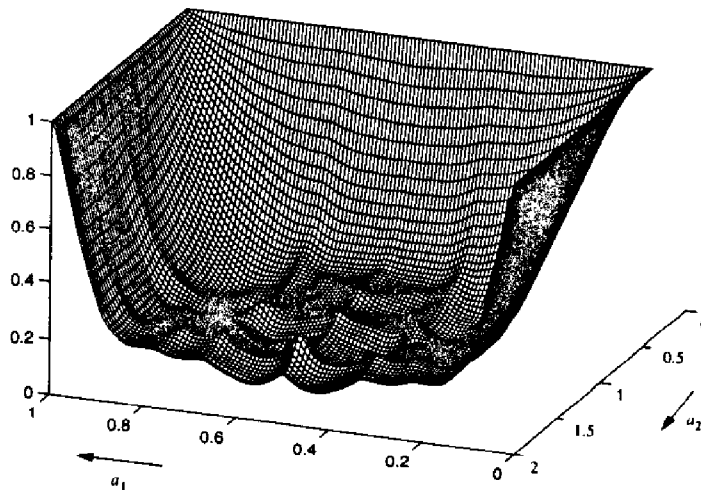


Figure IV.9 : fonction  $G_T$  pour  $T = 56$  s

**Remarques :**

1. Il existe un minimum absolu (4 par symétrie) pour  $G_T$ , d'argument :

$$(a_1^*, a_2^*) \simeq (0.4250, 1.3541) \implies \frac{a_1^*}{l_1} \simeq \frac{a_2^*}{l_2} \simeq 0.4 ,$$

ces valeurs étant quasiment indépendantes de  $T$ .

2. Il pourrait être très intéressant de considérer le cas plus réaliste d'un amortisseur non ponctuel, réparti sur un domaine  $d \subset D$ , défini par :

$$u(t) = -\lambda (\partial_t \theta | f)_{L^2(d)} , \quad f \in L^2(d) ;$$

cela ne présente aucune difficulté supplémentaire.

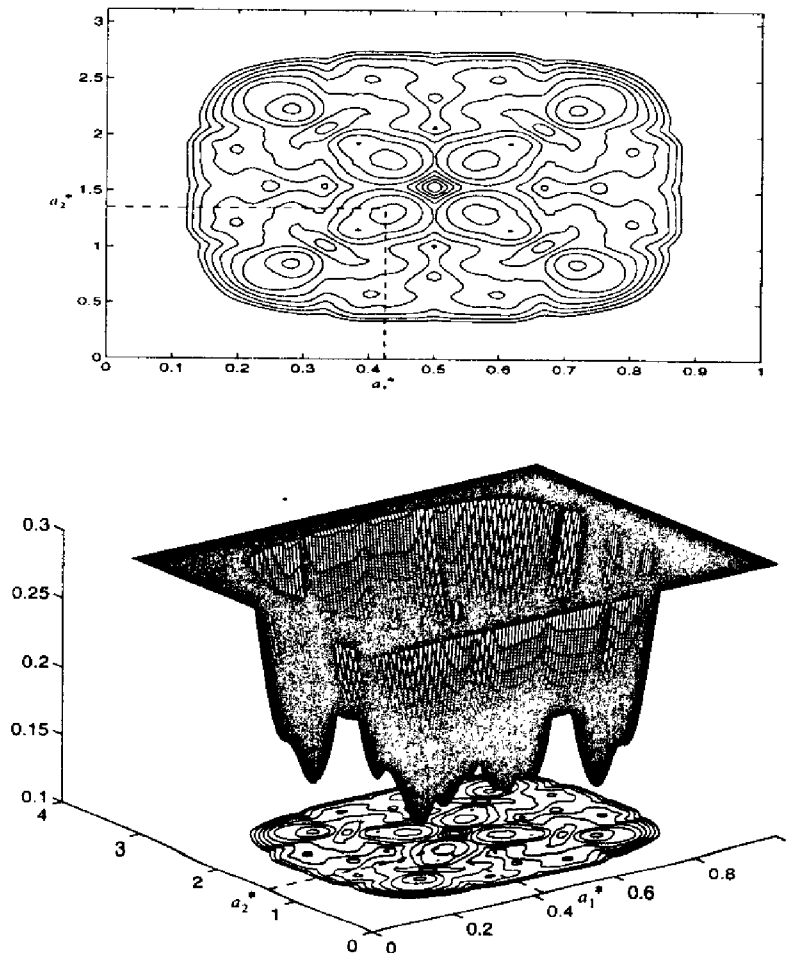


Figure IV.11 : fonction  $G_T$  (tronquée à 0.3) avec lignes de niveau

## IV.4 Conclusion

Le degré de contrôlabilité actif présente des limitations au-delà du cas monodimensionnel : d'une part la détermination de  $F_e$  nécessite la connaissance des fonctions propres ; d'autre part, pour obtenir une représentation équivalente entre les deux degrés de contrôlabilité, il est nécessaire d'en prendre un nombre *considérable* en compte. Par exemple, si l'on considère un maillage (discrétisation spatiale) de  $100 \times 100$  points, il faut considérer 10 000 fonctions propres !

Au contraire, le degré de contrôlabilité passif ne nécessite qu'un nombre raisonnable de simulations du système, ce qui permet *a priori* un champ d'application beaucoup plus vaste.

La généralisation à d'autres types de systèmes comme par exemple les plaques ne présenterait de difficultés supplémentaires qu'au niveau des simulations numériques, le reste de l'analyse restant valable aux adaptations techniques près.



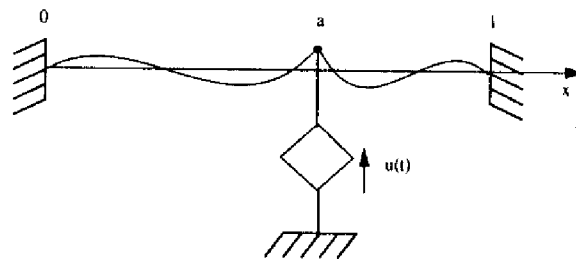
# Chapitre V

## Autres types de contrôle

Ce chapitre se propose de montrer à l'aide de deux exemples, que pour d'autres types de contrôle, à savoir un contrôle "viscoélastique" obtenu par un amortisseur (ponctuel) constitué d'un matériau ayant cette propriété [31], et un contrôle non linéaire *unilatéral* en vitesse (amortissement dissymétrique), les analogues du degré de contrôlabilité passif présentent encore une grande similitude avec  $G_T$ . Ceci permet de renforcer l'idée que, à quelques différences quantitatives près, il existe un caractère intrinsèque du degré de contrôlabilité.

### V.1 Contrôle viscoélastique

On considère une corde vibrante soumise à l'action ponctuelle en  $a$  d'un amortisseur viscoélastique de type fractionnaire [31], avec conditions de Dirichlet, schématisée par :



Ce type d'amortissement peut être modélisé par un opérateur fractionnaire :  $u(t) = \lambda \partial_t^{\frac{1}{2}} \theta(a, t) \delta_a$  [31], conduisant à l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta - \partial_x^2 \theta = -\lambda \partial_t^{\frac{1}{2}} \theta(a, t) \delta_a & \lambda > 0, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) \\ \partial_t \theta(x, 0) = \theta_1(x) \\ \theta(0, t) = 0 \\ \theta(1, t) = 0. \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

L'opérateur  $\partial_t^{\frac{1}{2}}$  peut être modélisé par une équation de diffusion sur  $\mathbb{R}$  de façon à obtenir le système équivalent [31] :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta - \partial_x^2 \theta = -\lambda \langle \delta_0, w \rangle \delta_a & x \in ]0, 1[ \\ \partial_t w - \partial_y^2 w = \langle \delta_a, \partial_t \theta \rangle \delta_0 & y \in ]-\infty, +\infty[ \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) \\ \partial_t \theta(x, 0) = \theta_1(x) \\ \theta(0, t) = 0 \\ w(y, 0) = 0 . \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

**Remarques :**

1. Le contrôle  $u(t)$  s'écrit pour le système (V.2) :  $u(t) = -\lambda w(0, t) = -\lambda \partial_t^{\frac{1}{2}} \theta(a, t)$ .
2. La condition  $w(y, 0) = 0$  signifie qu'à l'instant initial, l'amortisseur viscoélastique est au repos.

On définit l'énergie de la corde  $\mathcal{E}_c(t)$  par :

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} ( \|\partial_t \theta\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\partial_x \theta\|_{L^2(0,1)}^2 ) ,$$

et l'énergie  $\mathcal{E}_w(t)$  de l'amortisseur viscoélastique [31] :

$$\mathcal{E}_w(t) = \frac{\lambda}{2} \|w\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 .$$

L'énergie totale  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_w(t)$  est décroissante [31] :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = -\lambda \|\partial_y w(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq 0 ; \quad (\text{V.3})$$

on en déduit facilement l'existence et l'unicité de la solution de (V.2). De plus, comme dans le cas visqueux, le système est fortement asymptotiquement stable si  $a \notin \mathbb{Q}$  [31].

**Proposition 20** *Le contrôle  $u$  vérifie :  $u \in L^2(0, T)$  .*

Preuve : L'équation (V.3) entraîne :

$$\mathcal{E}(T) - \mathcal{E}(0) = - \int_0^T \lambda \|\partial_y w(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 d\tau ,$$

ce qui implique que  $\|\partial_y w\|_{L^2(\mathbb{R})} \in L^2(0, T)$ , ou encore  $w \in L^2(0, T; H_0^1(\mathbb{R}))$ . D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_0^T u^2(t) dt &= \lambda^2 \int_0^T w^2(0, t) dt = \lambda^2 \int_0^T \langle \delta_0, w \rangle_{H^{-1}, H_0^1}^2 dt \leq \lambda^2 \int_0^T \|\delta_0\|_{H^{-1}}^2 \|w\|_{H_0^1}^2 dt \\ &\implies \int_0^T u^2(t) dt \leq K \|w\|_{L^2(0, T; H^1)}^2 < +\infty . \quad \square \end{aligned}$$

On peut considérer comme analogue à  $G_T$ , la fonction :

$$a \mapsto \frac{E[ \mathcal{E}_c(T) ]}{\mathcal{E}(0)} .$$

Le système (V.2) a été simulé par discrétisation suivant un schéma aux différences finies pour  $\theta$  et d'éléments finis pour  $w$ . L'état initial étant défini comme précédemment, nous avons pu tracer figure (V.1) la fonction :  $a \mapsto \frac{E[ \mathcal{E}_c(T) ]}{\mathcal{E}(0)}$ , analogue à la fonction  $G_T$ .



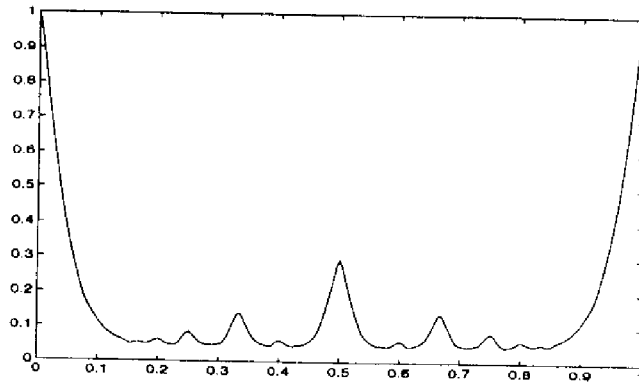
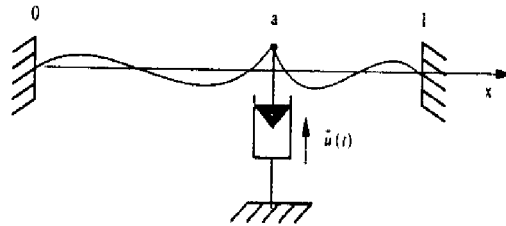


Figure V.1 : fonction  $a \mapsto \frac{E[\varepsilon_c(T)]}{\varepsilon(0)}$  pour  $T = 20$  s

## V.2 Contrôle non linéaire

On introduit ici un exemple de non linéarité portant sur le contrôle du système. Il faut bien remarquer que les définitions classiques de la contrôlabilité conduisent à des caractérisations utilisables dans les cas linéaires seulement. Ici, on suggère par un exemple simple que les cas non linéaires sont peut-être abordables par le biais de degrés de contrôlabilité de type passif.

Soit une corde vibrante avec un amortisseur *non linéaire*, schématisée par :



et modélisée par l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta &= \partial_x^2 \theta + \delta_a \tilde{u}(t) \\ \theta(x, 0) &= \theta_0(x) \\ \partial_t \theta(x, 0) &= \theta_1(x) \\ \theta(0, t) &= 0 \\ \theta(1, t) &= 0, \end{cases} \quad (\text{V.4})$$

avec :

$$\begin{cases} \tilde{u}(t) = -\lambda \partial_t \theta(a, t) & \text{si } \partial_t \theta(a, t) > 0 \quad \lambda > 0, \\ \tilde{u}(t) = 0 & \text{si } \partial_t \theta(a, t) \leq 0. \end{cases}$$

**Remarques :**

1. Ce type d'amortisseur correspond par exemple à un système à clapets.
2. Cette non-linéarité persiste pour les petits mouvements : il n'est donc pas possible de linéariser le problème.

On va vérifier succinctement que le système (V.4) est bien posé en établissant simplement sa dissipativité.

**Proposition 21** *L'énergie du système (V.4) est décroissante.*

Preuve : La démonstration est similaire au cas de la corde avec amortisseur visqueux (linéaire) du chapitre III. Soit l'énergie du système (V.4) :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} ( \|\partial_x \theta\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\partial_t \theta\|_{L^2(0,1)} ) .$$

On obtient en dérivant par rapport à  $t$  :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = \partial_t \theta(a, t) \tilde{u}(t) ;$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) &= 0 && \text{si } \partial_t \theta(a, t) \leq 0 \\ \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) &= -\lambda (\partial_t \theta(a, t))^2 \leq 0 && \text{si } \partial_t \theta(a, t) > 0 . \quad \square \end{aligned} \quad (\text{V.5})$$

On déduit que si l'énergie initiale est finie :

**Proposition 22** *Le contrôle  $\tilde{u}$  vérifie :  $\tilde{u} \in L^2(0, T)$ .*

Preuve : Il suffit d'intégrer sur l'intervalle  $[0, T]$  l'équation (V.5).  $\square$

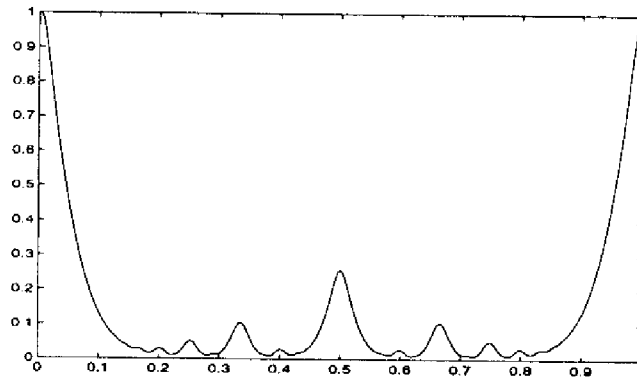


Figure V.2 : fonction  $a \mapsto \frac{E[\varepsilon(T)]}{\varepsilon(0)}$  pour  $T = 25$  s

On retrouve sur la figure (V.2) une courbe similaire au cas linéaire, quoique pour des valeurs de  $T$  plus grandes : le contrôle  $\tilde{u}$  agit seulement dans *un sens*. Bien que la continuité de  $a \mapsto \frac{E[\varepsilon(T)]}{\varepsilon(0)}$  semble incontestable, la démonstration mathématique n'a pas été abordée.

# Conclusion

L'étude des degrés de contrôlabilité actif et passif a révélé une certaine nature *intrinsèque* de la contrôlabilité sous son aspect quantitatif dans le cas de systèmes vibrants comme la corde, la poutre, la membrane. Le degré de contrôlabilité actif est basé sur la résolution d'un problème de contrôle optimal bien posé ; le degré de contrôlabilité passif repose sur une simple simulation du système. Ce dernier est mieux adapté à l'étude de problèmes complexes tels que des systèmes bidimensionnels ou non linéaires. Ces notions sont certes moins simples à énoncer que les notions classiques. Leurs propriétés s'avèrent cependant beaucoup plus conformes aux résultats que l'on peut attendre en pratique. Ainsi, si l'on considère à nouveau une corde vibrante dont on arrête les vibrations en posant un doigt dessus, l'efficacité en fonction de la position du doigt ressemble beaucoup aux degrés de contrôlabilité étudiés ici.

Le dilemme entre la dimension infinie et la nature binaire de la contrôlabilité a donc conduit à l'abandon de cette dernière au profit d'une mesure continue forcément plus subtile, plus complexe, mais surtout plus souple et représentative des phénomènes physiques. En particulier, la robustesse (continuité) par rapport aux paramètres a été retrouvée (tout au moins pour l'un d'entre eux). De nombreuses propriétés de continuité par rapport à d'autres grandeurs du système sont relativement faciles à établir, grâce aux outils de l'analyse mathématique, mais aussi, lorsque cette dernière s'avère trop délicate d'emploi, par l'expérimentation numérique qui constitue un outil d'exploration extrêmement puissant.

Il est important de remarquer ici, que l'approche proposée, qu'il s'agisse de l'un ou de l'autre des degrés de contrôlabilité, est compatible avec toute méthode d'approximation du système initial, du moment qu'elle est consistante : les résultats convergent vers une limite non dégénérée lorsque l'ordre d'approximation augmente. C'est d'ailleurs cela qui permet à la fois de "tracer" les fonctions  $F_t$  et  $G_T$  et de donner un sens au degré de contrôlabilité pour le système réparti en tant que tel.

Concernant le choix délibéré d'un actionneur de type ponctuel, on pourrait objecter qu'en pratique, un actionneur est toujours réparti au moins sur un petit domaine, et qu'ainsi, les démonstrations auraient beaucoup gagné en simplicité. Néanmoins, ce choix présente l'avantage de la simplicité de la description de l'action sur le système au moyen d'un objet idéal dont la définition se réduit à un simple point du domaine de la vibration. D'autre part et surtout, ce cas constitue en quelque sorte un cas limite pouvant certes être considéré comme inutile en pratique, mais tout de

même très satisfaisant dans l'optique d'une plus grande cohérence entre les analyses théoriques et les expérimentations. En particulier, il est très facile de montrer la continuité des degrés de contrôlabilité par rapport à une approximation de  $\delta$  par un élément de  $L^2(\Omega)$ .

Ce travail suggère de nombreuses extensions ; nous en citons quelques-unes ci-après.

Les analyses développées ont été centrées sur des cas particuliers typiques de systèmes vibrants. La suite logique serait de généraliser cette étude à des systèmes plus abstraits. La difficulté principale réside en fait dans la définition de la dépendance de l'opérateur d'entrée  $B$  par rapport à un paramètre abstrait défini sur une variété a priori régulière. Une autre difficulté concerne l'étude de la dépendance continue d'un semi-groupe par rapport à un paramètre, dans le cas du degré de contrôlabilité passif.

De façon plus concrète et plus technique, l'étude des degrés de contrôlabilité en présence d'actionneurs multiples et/ou de systèmes vibrants vectoriels pourrait aussi être très intéressante, ainsi que la prise en compte de paramètres d'actionneurs plus nombreux : position, largeur, paramètres de forme, etc.

L'extension au cas de systèmes non linéaires, dont nous avons ébauché un exemple très simple, devrait être envisageable. Il est à noter toutefois que les définitions classiques de la contrôlabilité sont alors très variées et non encore parfaitement au point, tout au moins en ce qui concerne leur caractérisation.

La prise en compte des aléas a volontairement été ramenée dans cette étude à une distribution sur l'état initial supposée connue, par exemple au travers d'une analyse physique. En fait, il serait beaucoup plus réaliste de considérer les perturbations du système au cours du temps, ce qui conduirait à une description au moyen d'équations différentielles stochastiques, les degrés de contrôlabilité devant alors être adaptés à cette situation. Hormis certaines difficultés techniques, la démarche pourrait rester analogue.

Enfin, un des points les plus intéressants mais a priori d'analyse très difficile, semble être l'étonnante ressemblance entre les degrés de contrôlabilité actif et passif, dans tous les cas que nous avons envisagés, et qui procure une certaine nature intrinsèque à la contrôlabilité "quantitative". Cette ressemblance n'est bien sûr pas exacte, ce qui complique considérablement le problème. En effet, il est difficile (hormis l'égalité asymptotique de  $F_\epsilon$  et  $G_T$  mise en évidence dans le théorème 10) de définir cette analogie par des moyens mathématiques ordinaires.

# Annexe A

## Schémas numériques utilisés

Pour le calcul du degré de contrôlabilité passif, on utilise dans le cas de la corde et de la membrane, le même type de schéma numérique, à savoir un schéma aux différences explicites.

On considère le système du chapitre III :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta &= \partial_x^2 \theta - \delta_a \lambda \partial_t \theta(a), & \lambda > 0, \\ \theta(x, 0) &= \theta_0(x) \\ \partial_t \theta(x, 0) &= \theta_1(x) \\ \theta(0, t) &= 0 \\ \theta(1, t) &= 0. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

On définit l'opérateur  $L$  par :

$$L \theta = \partial_t^2 \theta - \partial_x^2 \theta + \lambda \partial_t \theta(a) \delta_a.$$

On approche les dérivées partielles par des différences finies (développement de Taylor) ; on obtient alors, en discrétisant l'espace et le temps avec des pas réguliers  $h$  et  $\tau$  :

$$\begin{cases} x &= nh = x_n \\ t &= m\tau = t_m \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{N},$$

un opérateur approché  $L_h$  :

$$L_h \theta^{(h)} = \frac{\theta_{m+1}^n - 2\theta_m^n + \theta_{m-1}^n}{\tau^2} - \frac{\theta_m^{n+1} - 2\theta_m^n + \theta_m^{n-1}}{h^2} + \lambda \frac{\theta_{m+1}^k - \theta_{m-1}^k}{2\tau} \frac{\delta_k}{h} = 0, \quad (\text{A.2})$$

avec pour  $k = \frac{a}{h}$  :

$$\begin{cases} \delta_k &= 0 & n \neq k \\ \delta_k &= 1 & n = k; \end{cases}$$

$\theta^{(h)}$  étant la solution approchée de  $\theta$  et  $\theta_m^n = \theta^{(h)}(x_n, t_m)$ . Dans le cas de la membrane, en posant :

$$\begin{cases} x &= n_1 h_1 = x_{n_1}, & n &= (n_1, n_2), \\ y &= n_2 h_2 = y_{n_2}, & h &= (h_1, h_2), \\ t &= m\tau = t_m, & k &= (k_1, k_2), \end{cases}$$

on obtient un schéma similaire :

$$\frac{\theta_{m+1}^n - 2\theta_m^n + \theta_{m-1}^n}{\tau^2} - \frac{\theta_m^{n+1} - 2\theta_m^{n_1} + \theta_m^{n_1-1}}{h_1^2} - \frac{\theta_m^{n_2+1} - 2\theta_m^{n_2} + \theta_m^{n_2-1}}{h_2^2} + \lambda \frac{\theta_{m+1}^k - \theta_{m-1}^k}{2\tau} \frac{\delta_k}{h} = 0, \quad (\text{A.3})$$

avec :

$$\theta_m^n = \theta^{(h)}(x_{n_1}, y_{n_2}, t_m).$$

On peut montrer que ces schémas sont stables et consistants, donc convergent.

# Annexe B

## Adaptation d'impédance

Soit l'équation de la corde vibrante :

$$\begin{cases} \rho \partial_t^2 \theta & = T \partial_x^2 \theta \\ \theta(x, 0) & = \theta_0(x) \\ \partial_t \theta(x, 0) & = \theta_1(x) \\ \theta(0, t) & = 0 \\ T \partial_x \theta(1, t) & = u(t) , \end{cases} \quad u \in L^2(0, T) ,$$

où :

- $\rho$  est la densité massique de la corde,
- $T$  est la tension de la corde,
- $\sqrt{\frac{T}{\rho}}$  est la vitesse (constante) de propagation.

On pose  $y = (\theta \ T \partial_x \theta)^T$  ; en dérivant par rapport à  $x$  et en notant  $Y$  la transformée de Fourier en temps de  $y$ , on obtient :

$$\frac{d}{dx} Y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{T} \\ -\omega^2 \rho & 0 \end{bmatrix} Y = A Y .$$

En diagonalisant la matrice  $A$ , on peut écrire le système sous la forme :

$$\frac{d}{dx} W = \begin{bmatrix} -i \omega \sqrt{\frac{T}{\rho}} & 0 \\ 0 & i \omega \sqrt{\frac{T}{\rho}} \end{bmatrix} W ,$$

avec

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i \omega \sqrt{T \rho} & i \omega \sqrt{T \rho} \end{bmatrix} W . \quad (\text{B.1})$$

La condition à l'extrémité  $x = 1$  se traduit dans les coordonnées de  $Y$  par :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ T \partial_x \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

On pose  $W(\omega, 1) = (a_1, b_1)^T$  ; en utilisant (B.1), le système (B.2) devient :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -i \omega \sqrt{T \rho} & i \omega \sqrt{T \rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U(\omega) \end{bmatrix},$$

$$\implies b_1 = a_1 + \frac{1}{i \omega} \sqrt{\rho T} U(\omega). \quad (\text{B.3})$$

A l'extrémité de la corde, on a donc une relation entre l'onde réfléchie  $b_1$  et l'onde incidente  $a_1$ . Dans le cas d'un amortisseur visqueux, le contrôle  $U$  est du type :

$$U(\omega) = C(\omega) \Theta(1, \omega),$$

où  $U$  et  $\Theta$  sont respectivement les transformées de Fourier en temps de  $u(t)$  et  $\theta(1, t)$ .

Il y a adaptation d'impédance lorsqu'il n'existe plus d'onde réfléchie, c'est à dire lorsque  $b_1 = 0$ . On déduit de (B.3) :

$$C(\omega) = -i \omega \sqrt{\rho T},$$

et

$$u(t) = -\sqrt{\rho T} \partial_t \theta(1, t).$$

**Remarque :** Le terme  $\sqrt{\rho T}$  est l'impédance caractéristique de la corde [38], d'où la dénomination d'impédance adaptée.

Lorsque la corde est deux fois plus massique et si la vitesse de propagation est la même, la tension est elle aussi deux fois plus grande ; l'impédance devient :

$$\lambda = 2 \sqrt{\rho T}.$$



# Bibliographie

- [1] A.A ANDRONOV & L.S. PONTRYAGIN (1956). *Systèmes grossiers*. Œuvres complètes d'Andronov. Editions de l'académie des sciences d'URSS
- [2] M. J. BALAS (1978). *Modal control of certain flexible dynamic systems*. SIAM journal of control, vol 16, pp 450-462.
- [3] H. BREZIS (1983). *Analyse fonctionnelle*. Edition Masson.
- [4] P. BENCHIMOL & G. MONTSENY . *Degree of controllability for the beam equation*. Soumis à publication.
- [5] A. BENSOUSSAN (1992). *An introduction to Hilbert Uniqueness Method*. 10 th Conférence Internationale sur l'Analyse et l'Optimisation des systèmes, INRIA, Rocquencourt (France), juin 1992, pp 185-198.
- [6] P. BILLINGSLEY (1968). *Convergence of probability measures*. John Wiley & sons, New York.
- [7] H. CARTAN (1979). *Cours de calcul différentiel*. Edition Hermann
- [8] F. CONRAD (1990). *Stabilization of beams by pointwise feedback control*. SIAM journal of control and optimization, vol 28, No 2, pp 423-437.
- [9] R.F. CURTAIN & A.J. PRITCHARD (1978). *Infinite dimensional linear systems theory*. Lecture notes in control and information sciences. vol. 8. Springer-Verlag.
- [10] G. DAL MASO (1992). *An introduction to  $\Gamma$ -convergence*. Birkhäuser.
- [11] C. FABRE & J.P. PUEL. *Pointwise controllability as limit of internal controllability for the wave equation in one space dimension*. Preprint.
- [12] M. GÉRADIN & D. RIXEN (1993). *Théorie des vibrations*. Edition Masson
- [13] S. GODOUNOV & V. RIABENCKI (1977). *Schémas aux différences*. Edition MIR.
- [14] N. A. GREENBERG (1969). *Optimal pointwise feedback control of distributed parameter systems*. D. Thesis MIT.

- [15] X. GUANGQIAN & P.M. BAINUM (1992). *Actuator placement using degree of controllability for discrete-time systems*. Transaction of ASME, vol. 114, pp. 508-516.
- [16] A. HARAUX (1991). *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications*. Edition Masson, collection R.M.A.
- [17] A. J. HELMICKI & C. A. JACOBSON & C. N. NETT (1992). *Control-oriented modeling of distributed parameter systems*. Journal of dynamic systems, measurement and control, September, vol 114, pp 339-346.
- [18] P. C. HUGHES & R. E. SKELTON (1980). *Controllability and observability for flexible spacecraft*. Journal of guidance and control, vol 3, Sept-Oct pp 452-459.
- [19] C.A. JACOBSON & C.N. NETT (1988). *State-space systems in infinite-dimensional space : the role and characterization of joint stabilizability / detectability*. Lecture notes in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 33.
- [20] S. JAFFARD. *Sur le contrôle ponctuel des cordes vibrantes et des poutres*. Preprint.
- [21] C.D. JOHNSON (1969). *Optimization of a certain quality of complete controllability and observation for linear dynamical systems*. ASME journal of basic engineering, vol.191, pp. 228-238.
- [22] J. N. JUANG & G.RODRIGUEZ (1979). *Formulations and applications of large structure actuator and sensor placement*. Proceedings of 2nd VPI & SU/AIAA Symposium (Dynamics and Control of flexible spacecraft), Blacksburg, Va., june, pp 247-261.
- [23] R.E. KALMAN, Y.C. HO & K.S. NARENDRA (1961). *Controllability of linear dynamical systems*. Contributions to Differential Equations, vol. 1, No. 2, pp. 182-213.
- [24] T. KATO (1980). *Perturbation theory for linear operator*. 2nd édition Springer.
- [25] S. KESAVAN (1989). *Topics and applications in functional analysis*. Edition John & Wiley.
- [26] A. KOLMOGOROV & S. FOMINE (1977). *Éléments de la théorie des fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle*. MIR.
- [27] J. LEBLOND & J. P. MARMORAT (1991). *Boundary control and observation of some one-dimensional vibrating structures : regularity and stabilization*. I.N.R.I.A., Le Chesnay, France.
- [28] J.L. LIONS (1989). *Contrôlabilité exacte. Perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, tome 1 et 2. Masson
- [29] J. LIONS & MAGENES (1958). *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Tome 1, Dunod, Paris.

- [30] G. MONTSENY (1990). *Commande de systèmes à paramètres répartis : un exemple de problème mal posé*. RAIRO APH, 24, pp 323-336.
- [31] G. MONTSENY, J. AUDOUNET & B. MBODJE (1992). *A simple viscoelastic damper model. Application to the vibrating string*. 10<sup>th</sup> Conférence Internationale sur l'Analyse et l'Optimisation des systèmes, INRIA, Rocquencourt (France), juin 1992, pp 436-446.
- [32] G. MONTSENY, J. AUDOUNET & B. MBODJE (1993). *Optimal models of fractional integrators. Application to viscoelastic systems*. Conférence IEEE/SMC, Le Touquet (France), octobre 1993.
- [33] G. MONTSENY & P. BENCHIMOL (1992). *Quantitative criterion of controllability for point controlled vibrating string*. Rapport LAAS N° 92361.
- [34] G. MONTSENY, P. BENCHIMOL & L. PLANTIE (1993). *Characterization of controllability via a regular function : example of vibrating string*. 16<sup>th</sup> IFIP conference on system modelling and optimization, Université de Technologie de Compiègne (France), july 5-9, 1993.
- [35] P.C. MULLER & H.I. WEBER (1972). *Analysis and optimization of certain qualities of controllability and observability for linear dynamical systems*. Automatica, vol. 8, pp. 237-246.
- [36] A.J. PRITCHARD (1992). *Introduction to semi-group theory*. Proceeding of the 10<sup>th</sup> International Conference on Analysis and Optimization of systems. Sophia-Antipolis-France, june 9-12, 1992.
- [37] L.M. SILVERMAN & H.E. MEADOWS (1965). *Degrees of controllability in time-variable linear systems*. Proceeding NEC, vol 21, pp 689-693.
- [38] M. SOUTIF (1970). *Vibrations, propagation, diffusion*. Dunod Université.
- [39] M.R. SPIEGEL (1980). *Laplace transforms*. Mc Graw-Hill.
- [40] A.N. TIKHONOV & V.Y. ARSENIN (1976). *Solutions of ill-posed problems*. MIR.
- [41] R. TOMOVIC (1965). *Controllability, Invariancy, and sensitivity*. Proceedings third Allerton conference, pp. 17-26.
- [42] W.E. VELDE & C.R. CARIGNAN (1984). *Number and placement of control system components considering possible failures*. Journal of Guidance and Control, vol. 7, n° 6. pp. 703-709.
- [43] C.N. VISWANATHAN & R.W. LONGMAN (1979). *A definition of the degree of controllability-A criterion for actuator placement*. Proceedings of second VPI & SU/AIAA Symposium on dynamics and control of large flexible spacecraft, Blacksburg, VA, pp. 369-381.
- [44] K. YOSIDA (1965). *Functional analysis*. Springer.

- [45] E. ZUAZUA (1989). *Sur l'optimalité des feedbacks de stabilisation*. C. R. Acad. Sci. Paris, 309(1) : pp 547-552.

---

**“ Construction et analyse de mesures continues de la contrôlabilité  
pour une classe de systèmes à paramètres répartis ”**

---

**Résumé :**

Dans le cas des systèmes à paramètres répartis, il existe de nombreuses définitions de la contrôlabilité, plus ou moins équivalentes à la définition classique, et correspondant à différents concepts d'état atteignable. Malheureusement, ces notions sont souvent non-robustes en ce sens qu'elles peuvent ne plus être vérifiées pour des variations arbitrairement petites des paramètres du système. Cette non robustesse est due principalement à la nature binaire de la contrôlabilité et à la dimension infinie de l'espace d'état.

Nous définissons et analysons, dans le cas de systèmes vibrants du type corde, poutre, membrane, ..., deux mesures de la contrôlabilité par la voie quantitative permettant de retrouver la robustesse au sens de la continuité par rapport aux paramètres du système. La première définition (degré de contrôlabilité "actif") est liée à un problème classique de contrôle avec pénalisation considéré comme une régularisation du problème avec contrainte sur l'état final. La seconde définition (degré de contrôlabilité "passif") est liée à un contrôle passif correspondant à un retour de sortie statique dissipatif (analogue à un amortisseur visqueux). Le calcul de ce dernier est basé sur la seule simulation numérique du système, et donc facilement adaptable (par exemple au cas non-linéaire). Ces deux degrés de contrôlabilité présentent une très grande analogie, ce qui constitue un résultat particulièrement intéressant car d'une certaine manière intrinsèque. Nous développons enfin une méthodologie de mise en oeuvre basée sur des approximations dans l'objectif de l'applicabilité à des problèmes complexes comme la membrane vibrante.

**Mots-clés :** Système à paramètres répartis, contrôlabilité, degré de contrôlabilité, robustesse, contrôle optimal.

**Abstract :**

In the case distributed parameter systems, there exists various definitions of controllability, more or less similar to the finite dimensional one, and corresponding to different concepts for the reachable set. Unfortunately, they are often non-robust in the sense that they may no longer be verified for some arbitrarily small variation of system parameters. This lack of continuity is essentially due to the fact that controllability is a binary concept (together with the infinite-dimensionality of the state space).

We define and analyse, for vibrating systems like string, beam, membrane, ..., two quantitative measures of controllability which lead in a natural way to robust properties. The first definition (degree of active controllability) is associated to a classical control problem with weighted cost functional which is seen as a regularization of the final state control problem. The second definition (degree of passive controllability) is associated to a passive control corresponding to a static dissipative feedback (analogous to a viscous damper). In this case, The computation is only based on simple numerical simulations, which permits very easy adaptations to various systems situations. These two approaches lead to very close results. Finally, we present a methodology based on approximations in the aim of application to complex systems like the vibrating membrane one.

**Key-words :** Distributed parameter systems, controllability, degree of controllability, robustness, optimal control.

---