



**HAL**  
open science

# Etude expérimentale et numérique de la propagation d'ondes de gravité en zone de déferlement

Déborah Drevard

► **To cite this version:**

Déborah Drevard. Etude expérimentale et numérique de la propagation d'ondes de gravité en zone de déferlement. Océan, Atmosphère. Université du Sud Toulon Var, 2006. Français. NNT: . tel-00141744

**HAL Id: tel-00141744**

**<https://theses.hal.science/tel-00141744>**

Submitted on 16 Apr 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université du Sud Toulon-Var

Spécialité : Océanographie Physique

présentée par

**Déborah DREVARD**

---

**Etude expérimentale et numérique de la  
propagation d'ondes de gravité  
en zone de déferlement**

---

soutenue le 4 mai 2006 devant le jury composé de :

<b>M. F. Ardhuin</b>	Rapporteur	SHOM, Brest
<b>M. J. Brossard</b>	Rapporteur	LMPG, Université du Havre
<b>M. Ph. Fraunié</b>	Directeur de thèse	LSEET-LEPI, Toulon
<b>M. C. Kharif</b>	Examineur	IRPHE, Marseille
<b>M. R. Marcer</b>	Examineur	Principia, La ciotat
<b>M. V. Rey</b>	Directeur de thèse	LSEET-LEPI, Toulon

**Laboratoire de Sondages Electromagnétiques de l'Environnement  
Terrestre**



THESE

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université du Sud Toulon-Var

Spécialité : Océanographie Physique

présentée par

**Déborah DREVARD**

---

**Etude expérimentale et numérique de la  
propagation d'ondes de gravité  
en zone de déferlement**

---

soutenue le 4 mai 2006 devant le jury composé de :

<b>M. F. Ardhuin</b>	Rapporteur	SHOM, Brest
<b>M. J. Brossard</b>	Rapporteur	LMPG, Université du Havre
<b>M. Ph. Fraunié</b>	Directeur de thèse	LSEET-LEPI, Toulon
<b>M. C. Kharif</b>	Examineur	IRPHE, Marseille
<b>M. R. Marcer</b>	Examineur	Principia, La ciotat
<b>M. V. Rey</b>	Directeur de thèse	LSEET-LEPI, Toulon

**Laboratoire de Sondages Electromagnétiques de l'Environnement  
Terrestre**



# Préface

La mer, élément mystérieux, apaisant et tourmenté, enchante comme elle effraie. Malgré tout, elle reste l'une des sources d'inspiration majeure de bons nombres d'artistes et de créateurs. Son mouvement, le son des vagues, son infatigable va et vient développent l'éclat de la pensée.

Sait-elle seulement l'impact qu'elle provoque sur l'humain, inlassable chercheur dans l'étude de son fond et de sa surface. Vous, scientifiques, vous aspirez à connaître son trésor, et ce trésor nourrit profondément l'âme des artistes.

Laure POSTIC



## Une page sur la plage

Que les vents vous soufflettent !  
Qu'une dérisoire poignée d'air  
Vous soit poing contondant !  
Que les vagues vaquent vite  
A leurs voltes, à leur valse,  
A leurs fatras d'embruns !  
    Qu'elles scandent  
La cadence de l'ode marine  
Et de l'alexandrine éloquence !  
    Que l'éloge du flux flatte  
    La fureur des flots  
Et la ferveur des flaques !  
    Que la plage les jalouse,  
    Elle qui rumine sa rage  
Dans son abominable remuement !  
Que la lame la charme et l'attise !  
    Que l'onde se garde  
    De cette rumeur étale  
    Qui fourbit son ressentiment !  
Que le sable ressasse sa rancœur  
A chaque envoi de la vague !  
    Que le sarcasme et le sel  
    Rongent la digue !  
    Qu'elle serre, la mer,  
    Une pierre dans son poing,  
Au point que le poing soit pierre  
Et qu'il n'y ait de pierre point !  
    Que la rudesse des mots  
Soit autant coup qu'offrande !  
Que cet entêtement de langue  
Et de houle soit frappant !  
    Qu'il n'y ait d'autre lyrisme  
Que ce mouvement tournant !  
    Que la rime vous berce !  
    Et que ça ne s'arrête pas !

Jean-Louis Roux





# Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Sondages Electromagnétiques de l'Environnement Terrestre en collaboration avec la société Principia R&D. J'exprime alors mes premiers remerciements aux directions de ces deux structures qui m'ont accueillie dans leurs locaux et donnée les moyens d'accomplir mon projet.

Un grand merci à mes deux directeurs de thèse, Philippe Fraunié pour ses excellents conseils et Vincent Rey pour m'avoir laissée libre de mes choix scientifiques, ainsi qu'à Richard Marcer, ingénieur au sein de Principia R&D pour son aide, ses conseils à la compréhension du code et sa disponibilité.

J'adresse également mes sincères remerciements aux rapporteurs Jérôme Brosard et Fabrice Ardhuin pour leurs remarques et points de vue extérieurs, ainsi qu'aux examinateurs Christian Kharif et Richard Marcer.

J'exprime toute ma gratitude à Stephan Grilli et Ib Svendsen pour leur collaboration scientifique et leurs conseils qui m'ont énormément apporté au niveau scientifique.

Je tiens aussi à remercier tout le personnel du LSEET-LEPI pour les discussions enrichissantes qui m'ont permis d'avancer dans mon projet, et plus particulièrement Fabienne Chan pour son travail efficace et les nombreux éclats de rire, Sylvain Corcoral pour sa disponibilité ainsi que tous les thésards Anne, Sabrina, Clothilde, David, Guillaume, Vincent et Christine. Merci à toutes les personnes que j'ai rencontrées lors des réunions PATOM ou lors de conférences qui m'ont permis d'avoir une vision différente de mon travail, et plus particulièrement Pierre

Lubin pour son aide sur le numérique ou lors de mes moments de doute. Merci également aux membres du laboratoire MNC, Frédéric Golay et Philippe Helluy pour leur aide, leurs conseils et leur accueil pour l'utilisation de leur machine.

Je remercie également mes colocos Clothilde, David, Yasmine et Fabrice pour leur soutien, leurs conseils et leur grande capacité à me supporter dans des moments difficiles tels que la rédaction. Un merci plus particulier à Laure pour l'aide en écriture et la relecture de quelques parties de mon manuscrit.

Un dernier remerciement pour Michel Petrucciani, grand pianiste français, qui a su m'apaiser dans les instants où le moral n'était pas forcément au rendez-vous, avec entre autres, sa reprise de *besame mucho*, *caravan*.... J'en profite également, pour remercier toutes les personnes qui m'ont accompagnée dans mes escapades musicales : Elisabeth Monterrains, prof remarquable, Thomas et Sylvie Hermans, Olivier Padovani, Odette Piolet et Yves Barbin pour ses enregistrements.

Finalement, merci à tous ceux qui m'ont permis de m'évader le temps d'un week-end ou lors de voyages : Florence, Xavier, Nicolas et Manon, JP et Sonia, Rudy, Seb (Houston ça cartonne!), Marie, Cécile et Steph, Gilles, la ptite flo... Et un grand grand merci à ma famille, mes parents Christine et Claude, mes beaux-parents Jean-Marie et Pomme ainsi qu'à mes grands-parents, tant pour leur soutien financier tout au long de mes études que moral. Une grosse pensée pour mes soeurs Diane, Manon, Camille et mon frère Simon, je leur souhaite réussite et bonheur dans tous les projets qu'ils entreprendront.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>23</b>
<b>2</b>	<b>Présentation générale</b>	<b>29</b>
2.1	Généralités sur la houle . . . . .	29
2.2	La propagation . . . . .	31
2.2.1	Définition . . . . .	31
2.2.2	Approche déterministe . . . . .	32
2.2.3	Approche spectrale . . . . .	34
2.3	Instruments de mesures . . . . .	35
2.4	Le déferlement . . . . .	39
2.4.1	Le déferlement glissant . . . . .	41
2.4.2	Le déferlement plongeant . . . . .	41
2.5	Le soliton . . . . .	45
2.6	La réflexion . . . . .	46
<b>I</b>	<b>Mesure de houles partiellement stationnaires en zones côtière et littorale</b>	<b>49</b>
<b>3</b>	<b>Théories des ondes</b>	<b>53</b>
3.1	Théories de Stokes . . . . .	53
3.1.1	Théorie linéaire . . . . .	54
3.1.2	Théories non linéaires . . . . .	57
3.2	Interactions onde-onde . . . . .	64
3.2.1	Houle partiellement stationnaire . . . . .	64
3.2.2	Interaction onde-onde . . . . .	68
3.3	Houle réelle et analyse spectrale . . . . .	70

3.4	Méthodes de calcul des caractéristiques de la houle à partir de données de pression et de vitesses . . . . .	74
3.4.1	Onde progressive . . . . .	75
3.4.2	Onde partiellement stationnaire . . . . .	76
3.4.3	Influence du courant . . . . .	78
3.4.4	Houle réelle . . . . .	79
3.4.5	Limites d'applicabilité . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Applications</b>	<b>83</b>
4.1	Mesures en bassin pour l'étude des effets non linéaires . . . . .	83
4.1.1	Dispositif expérimental . . . . .	83
4.1.2	Résultats . . . . .	86
4.1.3	Conclusion . . . . .	92
4.2	Mesures en bassin pour l'étude de l'influence du courant et applications in situ . . . . .	93
4.2.1	Introduction . . . . .	95
4.2.2	Wave reflection measurement . . . . .	96
4.2.3	Validation from experiment with strong reflection . . . . .	100
4.2.4	Application to the nearshore . . . . .	106
4.2.5	Conclusions . . . . .	113
4.3	Conclusion . . . . .	124
<b>II</b>	<b>Modélisation du déferlement</b>	<b>125</b>
<b>5</b>	<b>Description des modèles utilisés</b>	<b>129</b>
5.1	Modèle BIEM . . . . .	129
5.1.1	Formulation mathématique . . . . .	129
5.1.2	Résolution numérique des équations . . . . .	131
5.2	Modèle Navier-Stokes/VOF . . . . .	132
5.2.1	Formulation mathématique . . . . .	132
5.2.2	Résolution numérique des équations . . . . .	134
5.2.3	Méthode de suivi d'interface SL-VOF . . . . .	137
5.3	Couplage BIEM/Navier-Stokes/VOF . . . . .	142

---

<b>6</b>	<b>Validation des modèles sur des cas d'études</b>	<b>145</b>
6.1	Propagation d'une onde solitaire sur fond plat . . . . .	145
6.1.1	Description du calcul . . . . .	145
6.1.2	Dissipation d'énergie . . . . .	146
6.2	Validation expérimentale . . . . .	147
6.2.1	Introduction . . . . .	149
6.2.2	BEM Model . . . . .	150
6.2.3	VOF-NS Model . . . . .	151
6.2.4	Applications . . . . .	153
6.2.5	Conclusions . . . . .	159
6.3	Complément : comparaison du champ de vitesses . . . . .	161
6.4	Conclusion . . . . .	166
<b>7</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>167</b>
<b>8</b>	<b>Annexe</b>	<b>173</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>191</b>



# Table des figures

2.1	Origine des ondes et fréquences caractéristiques. . . . .	30
2.2	Grandeurs caractéristiques de la houle. . . . .	30
2.3	Schéma de la zone côtière (Abadie 1998) . . . . .	31
2.4	Champ de vitesses dans l'écoulement obtenue par technique PIV. Expériences menées à l'ESIM (Kimmoun et al. 2004) . . . . .	36
2.5	Courantomètre-Houlographe S4 . . . . .	37
2.6	Vélocimètre Acoustique Doppler . . . . .	38
2.7	Profileurs de courant . . . . .	38
2.8	Déferlement glissant (Bonnetille 1992) . . . . .	40
2.9	Déferlement plongeant (Bonnetille 1992) . . . . .	40
2.10	Déferlement frontal (Bonnetille 1992) . . . . .	40
2.11	Déferlement glissant . . . . .	41
2.12	Déferlement plongeant . . . . .	42
2.13	Les étapes successives d'un processus de déferlement. La numérotation correspond à l'ordre des étapes mentionnées dans le texte (Basco 1984) . . . . .	44
3.1	Spectre d'énergie obtenue à partir de la déformée de la surface libre (rouge) et du potentiel des vitesses (bleu) pour deux ondes se propageant aux fréquences 0.15 et 0.2 Hz. . . . .	69
3.2	Direction de propagation de l'onde incidente et réfléchi par rapport à la normale à la plage. . . . .	80
4.1	Bassin d'essai de l'ISITV . . . . .	84
4.2	Dispositif expérimental pour les mesures de houle en bassin : vue du dessus (a) et vue transversale (b). . . . .	85



4.3	Signal temporel obtenu à partir des données de vitesses $u$ (rouge) et $w$ (bleu) pour le cas de profondeur infinie. . . . .	86
4.4	Spectres de la déformée de la surface libre obtenus à partir des données de vitesses et de pression de l'ADV. . . . .	87
4.5	Spectres de la déformée de la surface libre obtenus avec les sondes résistives (S1 et S2) pour le cas de profondeur infinie. . . . .	87
4.6	Signal temporel obtenu à partir des données de vitesses $u$ (rouge) et $w$ (bleu) pour le cas de profondeur finie. . . . .	89
4.7	Spectres de la déformée de la surface libre obtenus à partir des données de vitesses et de pression de l'ADV. . . . .	90
4.8	Spectres de la déformée de la surface libre obtenus avec les sondes résistives (S1 et S2) pour le cas de profondeur finie. . . . .	91
4.9	Experiments in BGO-FIRST. . . . .	100
4.10	Reflection coefficient calculated from wave gauge results (dash line) and ADV results (solid line) without (up) and with (down) current.	101
4.11	Amplitude of regular wave with a 1.89 s period calculated from progressive wave assumption : with horizontal velocity ( $\cdot$ ) and vertical velocity ( $+$ ); and from partially standing wave assumption : incident wave ( $*$ ) and reflected wave ( $o$ ). The black solid line represents the error we can expect considering a progressive wave assumption.	102
4.12	Wave energy evolution for a $T = 1.3s$ peak period without current calculated from ADV data with a progressive assumption : vertical velocity (black dash line) and horizontal velocity (grey dash line), and a partially standing wave assumption : incident wave (black solid line) and reflected wave (grey solid line). . . . .	103
4.13	Wave energy evolution for a $T = 1.3s$ peak period with wave gauges (solid line) and ADV (dash line) without (up) and with (down) current with a partially standing wave assumption : incident wave (black) and reflected wave (grey). . . . .	104
4.14	Wave energy for a $T = 1.813s$ peak period without current calculated from ADV data with a progressive assumption : vertical velocity (black dash line) and horizontal velocity (grey dash line), and a partially standing wave assumption : incident wave (black solid line) and reflected wave (grey solid line). . . . .	105

4.15	Wave energy evolution for a $T = 1.813s$ peak period with wave gauges (solid line) and ADV (dash line) without (up) and with (down) current with a partially standing wave assumption : incident wave (black) and reflected wave (grey). . . . .	106
4.16	Energy spectra measured by the ADV A2, calculated from progressive wave assumption : with horizontal velocity (black dot line), vertical velocity (grey dash line) and pressure (black dash line); and from partially standing wave assumption with $(u_h, p)$ method : incident wave (black solid line) and reflected wave (grey solid line). . . . .	108
4.17	Wave energy evolution from two ADV A2 (up) and A3 (down) with a partially standing wave assumption (using the two different methods $(u_h, p)$ (solid line) and $(u_h, w)$ (dash line)) : incident wave (black) and reflected wave (grey). . . . .	109
4.18	Reflection coefficient calculated from the two methods $(u_h, p)$ (solid line) and $(u_h, w)$ (dash line) for the two ADV A2 (black) and A3 (grey) with the evolution of water depth (black solid line). . . . .	110
4.19	Experiments in Sète. . . . .	111
4.20	Energy spectrum of S4 H2 calculated from horizontal velocity data (solid line) and pressure sensor data (dash line) for a progressive wave assumption. . . . .	112
4.21	Energy spectra for the three S4 disposed on the inner trough (down), the outer trough (middle) and the glacis (up) : with a progressive assumption with horizontal velocity (grey dash line) and pressure sensor data (black dash line); and with a partially standing wave assumption : incident wave (black solid line) and reflected wave (grey solid line). . . . .	115
4.22	Energy spectrum of S4 H3 calculated without current and with a normal incidence (solid line); and calculated with current (up), with oblique incidence (middle) and with both current and oblique incidence (down) (dash line) : incident wave (black) and reflected wave (grey). . . . .	116

4.23	Energy spectrum of S4 H1 calculated without current and with a normal incidence (solid line); and calculated with current (up), with oblique incidence (middle) and with both current and oblique incidence (down) (dash line) : incident wave (black) and reflected wave (grey). . . . .	117
4.24	Energy spectra of the the three S4 H3 (up), H2 (middle) and H1 (down) calculated from progressive wave assumption : with horizontal velocity (grey dash line) and pressure sensor (black dash line); and from partially standing wave assumption : incident wave (black solid line) and reflected wave (grey solid line). . . . .	118
4.25	Energy spectrum of the ADV calculated from a progressive wave assumption with horizontal velocity data (grey solid line), vertical velocity data (black dash line) and pressure sensor data (black solid line). . . . .	119
4.26	Energy spectrum of the ADV calculated from progressive wave assumption : with horizontal velocity data (grey dash line) and pressure sensor data (black dash line); and from partially standing wave assumption : incident wave (black solid line) and reflected wave (grey solid line). . . . .	120
4.27	Energy spectrum for two S4 disposed on the inner trough (down) and the glacis (up) : with a progressive assumption with horizontal velocity (grey dash line) and pressure sensor data (black dash line); and with a partially standing wave assumption : incident wave (black solid line) and reflected wave (grey solid line). . . . .	121
4.28	Wave direction relative to North for the S4 located on the glacis. . . . .	122
4.29	Energy spectrum of the S4 H3 calculated without current and with an angle of incidence normal to the beach (solid line); and calculated with current and with the effective direction of the wave (dash line) : incident wave (black) and reflected wave (grey). . . . .	123
5.1	Domaine de calcul pour le modèle BIEM . . . . .	130
5.2	Domaine de calcul pour le modèle Navier-Stokes/VOF . . . . .	136
5.3	Représentation du VOF et de la normale à l'interface . . . . .	139
5.4	Fractions volumiques critiques . . . . .	140
5.5	Actualisation du champ de VOF . . . . .	141

6.1	Configuration of Yasuda's (1997) experiments. . . . .	153
6.2	Evolution of the solitary wave over the step until splash-up/overturning : (a) VOF-NS; (b) BEM (last profile is at $t = 1.35$ s). . . . .	154
6.3	Comparison of computed surface elevations (—) with Yasuda et al.'s (1997) experiments (- - - -) at gages gages P1 ( $x=2$ m), P2 ( $x=2.52$ m), and P3 ( $x=3.02$ m) (Fig. 6.1) : (a) VOF-NS; (b) BEM.	155
6.4	Velocity field in VOF-NS model, for time $t=$ (a) 0.35 s, (b) 0.56 s, and (c) 0.63 s. . . . .	156
6.5	Configuration of ESIM's experiments for solitary wave shoaling and breaking, with gages located at $x= 13.85$ (S4) and 14.20 m (S6). .	157
6.6	Comparison of measured breaker shapes (black line) with numerical simulations, with I2 (blue line), and I3 (red line), at three different times. . . . .	158
6.7	Comparison of VOF-NS (—) and BEM (— - —) results with ESIM's experimental data (- - - -), for initial solutions : I2 (a); I3 (b), at wave gages : S4 and S6. . . . .	159
6.8	Vitesses obtenues par une mesure PIV. Les zones entourées en rouge correspondent aux vitesses physiquement incorrectes. . . . .	161
6.9	Comparaison des champs de vitesses en trois instants obtenus expérimentalement (colonne de gauche) et numériquement (colonne de droite). . . . .	162
6.10	Comparaison des modules de la vitesse aux trois instants (a), (b) et (c) entre les résultats expérimentaux (colonne de gauche) et les simulations numériques (colonne de droite). . . . .	164
6.11	Evolution du champ de vitesses pour les nouvelles expériences - Mesure PIV . . . . .	165
7.1	Rapport des termes du second ordre par rapport aux termes du premier ordre pour la surface libre (rouge), la vitesse horizontale (bleu) et la vitesse verticale (vert), mesurées en $z = -\lambda/8$ (a) et en $z = -\lambda/4$ (b) pour une onde incidente de fréquence $f = 0.5$ Hz et d'amplitude $a = 0.1$ m. . . . .	169
7.2	Evolution de la pression obtenue pour deux profondeurs $z = -0.1$ m (trait plein) et $z = -0.2$ m (tiret), 2 m avant la marche. . . . .	170

7.3	Evolution des vitesses horizontale (noir) et verticale (rouge) pour deux profondeurs données $z = -0.1$ m (trait plein) et $z = -0.2$ m (tiret), 2 m avant la marche. . . . .	171
-----	---	-----

# Liste des tableaux

4.1	Tableau récapitulatif des résultats obtenus à partir des données des sondes à houle et de l'ADV en profondeur infinie avec l'hypothèse d'une onde progressive. . . . .	88
4.2	Tableau récapitulatif des résultats obtenus à partir des données des sondes à houle et de l'ADV en profondeur infinie avec l'hypothèse d'une onde partiellement stationnaire. . . . .	88
4.3	Tableau récapitulatif des résultats obtenus à partir des données des sondes à houle et de l'ADV en profondeur intermédiaire avec l'hypothèse d'une onde progressive. . . . .	91
4.4	Tableau récapitulatif des résultats obtenus à partir des données des sondes à houle et de l'ADV en profondeur intermédiaire avec l'hypothèse d'une onde partiellement stationnaire. . . . .	91
6.1	Différents cas étudiés. . . . .	145
6.2	Pertes d'énergie, de volume et d'amplitude pour les quatre cas étudiés.	146



# Chapitre 1

## Introduction

L'immensité des océans inspire aux hommes, à la fois, crainte et fascination. De tout temps, ils leur ont permis de se nourrir, de développer le commerce (Égyptiens, Phéniciens, Grecs), et de conquérir des territoires (Vikings). Ainsi émergent les premières acquisitions de connaissance concernant les océans et les premières analyses des phénomènes observés en mer. Cela aboutit, à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, à la définition d'un nouveau champ d'investigation scientifique, l'océanographie. Il se divise en plusieurs spécialités au cours du 20<sup>ème</sup> siècle : chimie, géologie, biologie et physique.

Notre problématique concerne l'océanographie physique et plus particulièrement les ondes de gravité. L'océanographie physique est l'étude des mouvements dans les océans, à toutes les échelles, des courants océaniques jusqu'aux vagues en passant par les courants côtiers et les courants de marée. Ces ondes de gravité sont formées de crêtes et de creux et sont d'origines diverses (vent, tempête, glissement de terrain, attraction lunaire et solaire,...). Ainsi, de l'énergie est transmise aux particules fluides, puis se propage de proche en proche. Les crêtes sont espacées d'une distance pouvant aller d'une dizaine de centimètres, à plusieurs milliers de kilomètres (comme pour la marée par exemple).

Les vagues contiennent de l'énergie difficile à maîtriser. A l'approche du littoral, elles induisent des courants très intenses, de la turbulence, du transport sédimentaire par la mise en suspension de sédiments, etc. Les ouvrages côtiers et le littoral sont en permanence soumis à ces efforts par des événements ponctuels



comme le tsunami du 26 Décembre 2004 qui a marqué nos mémoires pour ses violents dégâts tant au niveau humain que matériel ou par des phénomènes récurrents comme l'érosion des plages. Ce dernier constitue un des meilleurs exemples de l'action de la houle sur le littoral et est observable par exemple dans les Landes avec un recul de la côte de 1 à 3 mètres par an. Les ouvrages côtiers tels que les digues subissent l'action de la houle et peuvent être partiellement affectés. Mais la présence de ces structures artificielles modifie également l'équilibre dynamique en provoquant des zones d'accrétion et d'érosion. Les ports de Bormes-les-mimosas et du Lavandou dans le Var en sont un parfait exemple : la construction des digues de protection a entraîné un ensablement régulier de l'entrée des deux ports. Cependant, les aménagements littoraux sont nécessaires, en raison d'une constante augmentation de la population en bord de mer. En effet, plus de la moitié de la population mondiale (environ 3,2 milliards d'habitants) est concentrée le long de côtes et de vallées qui occupent à peine 10 % de la surface des terres.

La connaissance de l'état de mer est donc nécessaire pour une meilleure compréhension de la dynamique côtière et sédimentaire. Ainsi, les études de l'hydrodynamique nous permettent de mieux appréhender les problèmes de stabilité de plage, d'ensablements de ports et la tenue des ouvrages côtiers.

Plusieurs types d'approche peuvent être employés afin d'étudier la transformation de la houle du large jusqu'à l'approche du littoral.

L'étude analytique permet de donner une description assez précise de la propagation de la houle du large vers la côte jusqu'au point de déferlement. La houle réelle est un phénomène ondulatoire complexe composé de la superposition d'ondes dispersives et non linéaires. Sa description la plus élémentaire consiste à supposer l'onde monochromatique et d'amplitude suffisamment faible pour se ramener à un problème linéaire. La solution est une onde sinusoïdale appelée houle d'Airy ou houle de Stokes au premier ordre (Bonnefille, 1992 ; Horikawa, 1988). La houle réelle peut alors être décrite comme la somme de sinusoïdes et caractérisée par un spectre d'énergie. Lorsque son amplitude est plus importante, la déformée de la surface libre n'est plus sinusoïdale. En profondeur infinie, Gerstner a montré qu'elle était trochoïdale, forme pouvant être approchée pour des cambrures

"réelles" par la méthode par petites perturbations de Stokes aux ordres supérieurs à un. En profondeur finie, et en particulier à l'approche du littoral, les effets non linéaires deviennent de plus en plus importants et les modèles de Stokes ne sont plus applicables. Ces méthodes sont décrites dans la littérature pour une onde monochromatique, or l'intérêt de ce travail est l'étude des houles en zone littorale. Ces méthodes ont alors été développées pour des houles partiellement stationnaires.

L'étude expérimentale reste un bon moyen pour mesurer des grandeurs fondamentales dans les écoulements fluides. Grâce aux récents progrès des techniques d'instrumentation, les appareils fournissent un plus grand nombre de mesures et sont de plus en plus précis. On distingue deux types d'instruments : les instruments mesurant directement la déformée de la surface libre comme les sondes de type résistive ou capacitive, et ceux mesurant le champ de vitesses engendré par le passage de l'onde. Ces mesures indirectes s'effectuent à partir de données de pression, d'accélération pour les bouées de surface et de vitesses pour les instruments de type électromagnétique (S4) ou acoustique (ADV). Ce type d'instrument est actuellement le plus utilisé puisqu'il permet de recueillir un grand nombre de données (vitesse horizontale, vitesse verticale et parfois la pression) et d'obtenir le plus souvent des mesures synchrones de vitesses et de pression. Cependant, ils sont fournis avec des logiciels permettant d'obtenir des caractéristiques d'une houle progressive, avec en particulier le calcul des grandeurs caractéristiques  $T_p$ ,  $H_s$  et  $\theta_s$ . Or, en zone littorale, les plages sont classifiées comme dispersive, réfléchive ou intermédiaire (Wright and Short, 1984), et la réflexion est rarement mesurée. Walton (1992) a mesuré la réflexion des vagues par la plage au moyen des données synchronisées de vitesse horizontale et de pression enregistrées en un seul point. Cette technique a été également récemment appliquée dans des expériences en laboratoire au moyen de données synchrones de vitesses horizontale et verticale (Drevar et al., 2003). L'objectif est de valider ces mesures de réflexion en bassin et in situ à partir de mesures synchrones de vitesses horizontale et verticale et/ou de pression.

L'étude numérique s'est développée depuis une vingtaine d'années grâce aux développements récents de la capacité de calcul des ordinateurs. Elle permet une description détaillée de la forme de la surface libre, et du champ de vitesses et

de pression à l'intérieur du fluide. Notamment, cette approche permet de modéliser des phénomènes difficiles à étudier expérimentalement et analytiquement, tels que le déferlement plongeant. Une revue des différentes méthodes existantes, basées soit sur les équations de Boussinesq, soit sur la théorie des écoulements potentiels, ou sur les équations de Navier-Stokes, est proposée par Christensen et al. (2002). Le choix de la méthode utilisée ici, basée sur les équations de Navier-Stokes, s'inscrit dans le cadre d'une longue collaboration entre le LSEET (Laboratoire de Sondages Electromagnétiques de l'Environnement Terrestre) et la société Principia R&D. Elle a fait l'objet de deux précédentes thèses, où une méthode de suivi d'interface d'ordre élevé de type Volume Of Fluid (VOF) dans le cas bi-dimensionnel (Guignard 2001b), puis tri-dimensionnel (Biausser 2003), a été développée. L'étape suivante concerne alors la validation de ces méthodes avec des expériences en laboratoire.

L'objectif de cette thèse consiste donc tout d'abord en une étude analytique et expérimentale de la transformation des houles par effets bathymétriques ou par des structures, puis en une étude numérique de leur évolution en zone de déferlement, dans l'hypothèse d'ondes solitaires.

Le document se compose de trois parties.

La première partie expose les généralités sur la houle, en insistant sur le déferlement et la réflexion, aspects longuement développés dans ce travail.

La seconde partie traite des approches analytiques développées et utilisées pour la mesure de la transformation de la houle. Plusieurs séries de mesures effectuées en bassin sont présentées dans le but de comparer d'une part les caractéristiques obtenues avec différents moyens de mesures : vélocimètre acoustique Doppler (Vector), vélocimètre électromagnétique (S4) et capteurs de pression piézoélectriques, et d'autre part de confronter les théories non-linéaires de transformations de houles aux méthodes spectrales. Enfin, des mesures in situ permettent d'étudier l'influence de différents paramètres tels que le courant ou l'angle d'incidence de la houle sur les résultats.

La troisième partie consiste en une étude numérique de la propagation d'une onde solitaire y compris dans la zone de déferlement. Les modèles utilisés pour l'approche numérique, le code BEM développé par S. Grilli (Université de Rhode Island) et le code EOLE (développé par la société Principia R&D), sont présentés. Le couplage des deux modèles est détaillé. Enfin, deux applications sont présentées afin de valider le code numérique avec des résultats expérimentaux par comparaison de la forme et de l'élévation de la surface libre, et du champ de vitesses.



# Chapitre 2

## Présentation générale

Cette première partie permet de poser le problème physique considéré dans cette étude tout en définissant les notions utilisées. On définit d'abord le cadre général, pour arriver aux phénomènes observés et étudiés durant cette thèse.

### 2.1 Généralités sur la houle

L'onde de gravité est un phénomène de propagation d'une perturbation n'engendrant pas de déplacement moyen du milieu lui-même, mais qui se traduit par un transport d'énergie ayant une certaine vitesse, pas forcément identique à celle de la perturbation. Les crêtes se propagent à la vitesse de phase  $C$  alors que l'énergie se propage à la vitesse de groupe  $C_g$ . L'origine des ondes de gravité est diverse (vent, tempête, glissement de terrain, attraction lunaire...). La Fig. 2.1 propose un classement des ondes en fonction de leur fréquence et de leur énergie. L'observation des houles montre qu'elles ne se propagent pas toutes dans la même direction, ni à la même vitesse et que leur amplitude varie au cours du temps.

La houle et les vagues, de période comprise généralement entre 3 et 20 s, peuvent être caractérisées par des spectres d'énergie, qui font apparaître des grandeurs caractéristiques telles que la hauteur  $H$  crête à creux, la longueur d'onde  $\lambda$ , la profondeur d'eau locale  $h$ , ainsi qu'une direction de propagation (Fig. 2.2).

La vitesse de propagation de l'onde dépend de sa longueur d'onde, de son amplitude (ou demi-hauteur) et, à l'approche du littoral de la profondeur d'eau. Il est donc nécessaire de distinguer des conditions de profondeur en utilisant le paramètre  $\frac{h}{\lambda}$  :

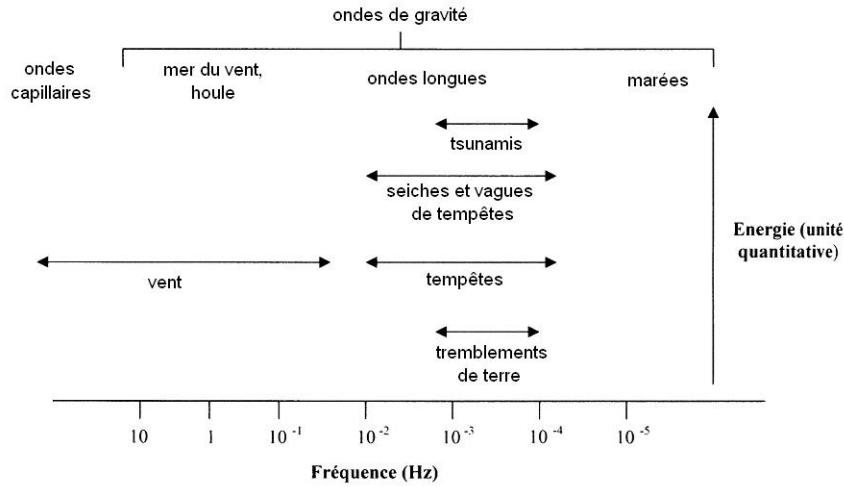


FIG. 2.1 – Origine des ondes et fréquences caractéristiques.

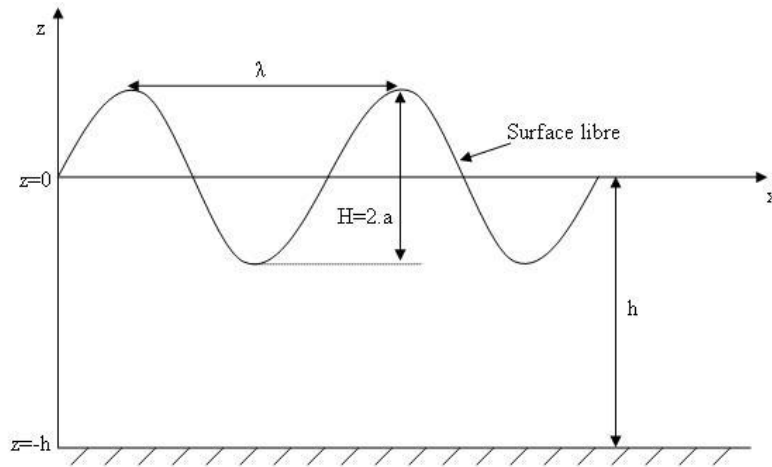


FIG. 2.2 – Grandeurs caractéristiques de la houle.

- $\frac{h}{\lambda} \leq \frac{1}{10}$  : eau peu profonde,
- $\frac{1}{10} \leq \frac{h}{\lambda} \leq \frac{1}{2}$  : profondeur intermédiaire ou finie,
- $\frac{h}{\lambda} \geq \frac{1}{2}$  : profondeur infinie.

Une des caractéristiques de la houle en zone littorale est son caractère non linéaire, important pour les houles de grande amplitude et en eau peu profonde. Au cours de sa propagation, la houle va subir plusieurs transformations par effets bathymétriques : à l'approche de la côte, elle devient de plus en plus cambrée jusqu'à déferler. Une partie de l'énergie peut être par ailleurs partiellement réfléchi

par le fond ou la plage.

## 2.2 La propagation

### 2.2.1 Définition

Les vagues sont générées par le vent. En l'absence de vent, les vagues continuent à se propager librement, c'est ce qu'on appelle la houle. Aux abords des côtes, ces vagues sont modifiées par la présence du fond (pour des profondeurs inférieures à leur demi-longueur d'onde) et en particulier par la topographie du fond. Enfin les vagues déferlent sur la plage ou les hauts-fonds, récifs et autres, perdant toute ou en partie leur énergie par dissipation, génération de courants et surélévation du niveau moyen de la surface libre. Ces courants et les vagues sont en partie responsables de l'essentiel des mouvements de sédiments sur les plages : érosion, formation de barres...et des forçages hydrodynamiques sur les structures.

La zone côtière peut ainsi se diviser en quatre parties (Fig. 2.3) :

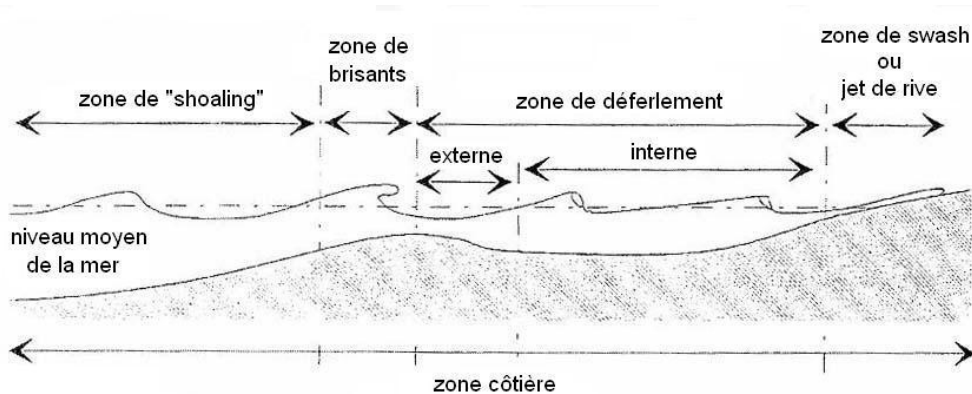


FIG. 2.3 – Schéma de la zone côtière (Abadie 1998)

- La zone de levée (shoaling zone) : la vague est affectée par le fond et commence à se déformer. L'écoulement est considéré irrotationnel et les effets visqueux du fluide peuvent être négligés.

- La zone de brisants s'étend du point où le profil aval de la vague devient vertical au point d'impact du jet. Des études montrent que l'écoulement dans cette



zone peut être encore considéré comme irrotationnel (Grilli et al. 1997), (Grilli and Horillo 1998).

- La zone de déferlement correspond à la propagation de la vague déferlante jusqu'à la zone de swash. On distingue parfois deux zones différentes par la nature de l'écoulement. La zone de surf externe où l'écoulement est rotationnel, fortement instationnaire et turbulent dans toute la colonne d'eau. La zone de surf interne correspondant à un écoulement quasi-stationnaire comparable à un ressaut hydraulique.

- La zone de "swash" ou jet de rive est la zone d'écoulement oscillant observé sur les plages.

Lorsque les vagues se propagent sur de longues distances, l'hypothèse de la conservation de l'énergie totale n'est plus valable. Les effets de la dissipation d'énergie, due à la viscosité en volume et au frottement sur le fond, atténuent la hauteur de la houle.

Il existe différentes approches pour étudier la propagation de la houle. L'approche déterministe décrit le phénomène de manière cinématique par la période et la longueur d'onde de la houle alors que l'approche spectrale conduit à superposer des ondes sinusoïdales et à en déduire une répartition d'énergie en fréquence et en direction. Ceci permet une meilleure représentation des houles réelles, par contre l'information sur les phases est perdue (on les appelle également méthodes à phases moyennées).

### 2.2.2 Approche déterministe

Les modèles de propagation de la houle sont un moyen d'investigation pour comprendre les processus physiques induits par la propagation et le déferlement des vagues.

Christensen et al. (2002) proposent une revue des différentes méthodes numériques actuellement utilisées pour l'étude du déferlement. Ainsi, on distingue les méthodes issues de la théorie cinétique, les modèles basés sur les équations de Boussinesq, les modèles basés sur la théorie des écoulements potentiels et ceux basés sur les équations de Navier-Stokes.

Les méthodes issues de la théorie cinétique sont adaptées à l'étude des écoulements à phases dispersées où le fluide est représenté par un ensemble de particules en mouvement. En particulier, les méthodes SPH (Smooth Particle Hydrodynamics, Lucy 1977), récemment développées, ont été appliquées entre autres au déferlement (Monaghan 1994, Fontaine et al. 2000) et à la propagation de vagues (Shao and Yat-Man 2001). Elles sont simples à mettre en oeuvre et ne nécessitent pas de maillage, toutefois un grand nombre de particules est nécessaire pour une description précise de l'écoulement.

Les modèles reposant sur les équations de Boussinesq sont basés sur les équations de continuité et d'Euler (pas de viscosité) intégrées sur la verticale. Ces modèles donnent une bonne description de la propagation du soliton, cependant le déferlement n'est pas paramétrisé à ce stade. Le déferlement génère de la vorticité et de la dissipation d'énergie qui peut être modélisé par l'ajout d'un terme dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Cependant, ces modèles ne permettent pas de décrire l'écoulement avec précision. Les équations utilisées sont intégrées sur la verticale, il en résulte des difficultés à représenter les profils verticaux des champs de vitesses.

Une autre façon de modéliser le déferlement est de simuler l'écoulement avec une méthode numérique basée sur la théorie des écoulements potentiels. Le principe de cette méthode sera abordé dans le chapitre 5.1. On considère un fluide irrotationnel, non visqueux et incompressible. Les travaux pionniers de Longuet-Higgins and Cokelet (1976) sont consacrés aux développements d'une approche Lagrangienne-Eulérienne (Mixed Eulerian-Lagrangian, MEL) de suivi de surface libre combinée avec une formulation intégrale aux frontières (Boundary Integral Equation, BIE). Cokelet (1979) et Peregrine et al. (1980) ont utilisé la même méthode pour détailler l'écoulement interne avant le déferlement. Grilli et al. (1997) ont repris ce modèle et l'ont appliqué à la propagation d'une onde solitaire, générée par un piston dans un canal numérique sur une pente de 1/35. Yasuda et al. (1997) l'ont appliqué au déferlement d'une vague au-dessus d'un récif immergé. Cependant, ces méthodes sont uniquement applicables pour des configurations bi-dimensionnelles. Les problèmes de propagation d'ondes fortement non-linéaires requièrent des méthodes plus stables et adaptées. Des méthodes d'éléments frontières d'ordre élevées ont été développées pour résoudre les équations de l'approche

MEL. Grilli et al. (2001) ont développé une méthode numérique en 3D pour la description de ces ondes fortement non linéaires au-dessus de topographies complexes. D'autres travaux (Guyenne and Grilli 2003), (Fochesato 2004) ont prouvé son efficacité.

Ces méthodes sont précises et donnent des résultats satisfaisants jusqu'à l'impact du jet sur la surface libre. Ensuite, l'écoulement devient rotationnel, fortement visqueux, turbulent et diphasique. Ainsi les hypothèses de ces modèles ne sont plus valables.

Une des meilleures façons de modéliser l'écoulement dans la zone de surf est de résoudre les équations de Navier-Stokes. Ces méthodes sont capables de modéliser des écoulements complexes tels que le déferlement et donnent de nombreuses informations comme le champ de vitesses, de pression et d'accélération sous la vague déferlante. Il existe plusieurs méthodes de suivi de surface libre appliquées au déferlement, détaillées dans le paragraphe 2.4.2.

Pour modéliser la propagation d'une vague de la zone de levée jusqu'à la zone de swash, l'utilisation d'une méthode numérique basée sur la théorie des écoulements potentiels jusqu'à la zone de déferlement couplée avec une méthode numérique de type VOF permet de combiner les avantages des deux modèles.

### 2.2.3 Approche spectrale

L'approche spectrale concerne la description des états de mer par une répartition d'énergie en fréquence et en direction. Pour cela, différentes théories de houle ont été étudiées (Horikawa 1988), (Bonnefille 1992).

En profondeur infinie, le modèle de Stokes au premier ordre ou d'Airy est le plus utilisé. Il repose sur l'hypothèse d'une onde de "faible" amplitude ce qui revient à négliger les termes non linéaires. Ainsi pour une houle réelle, la déformée de la surface libre s'exprime comme une somme de modes linéaires se propageant à leur propre vitesse (onde dispersive en fréquence). Cette méthode est la plus classique car elle est relativement simple et offre une information globale intéressante. De plus, pour des houles réelles, elle permet une représentation de l'état de mer par une superposition de ces houles par une description spectrale.

Cependant, en zone littorale, la houle devient de plus en plus cambrée, ainsi les effets non linéaires ne peuvent plus être négligés et cette méthode n'est alors plus valable. Les formulations de Stokes aux ordres supérieurs pour les profondeurs intermédiaires, infinies ou celles en "eau peu profonde" prennent en compte ces effets non linéaires tant qu'ils restent assez faibles. Par exemple, la théorie de Stokes au troisième ordre fait apparaître que l'onde est aussi dispersive en amplitude (voir section 3.1, page 57).

En eau peu profonde, les effets non linéaires sont de plus en plus importants. Bien que la dissipation par frottement au fond augmente à l'approche de la côte, les modèles analytiques supposent encore que le fluide est parfait et l'écoulement, dans les conditions eau peu profonde, reste quasi-hydrostatique jusqu'au déferlement.

Cette approche est donc bien adaptée tant que les effets non linéaires restent peu importants. Pour des houles fortement cambrées ou en eau peu profonde, une approche déterministe sera plutôt utilisée.

## 2.3 Instruments de mesures

De nombreux instruments ont été développés pour mesurer la cinématique de la houle en bassin :

- Les sondes à houle permettent de mesurer la variation de la surface libre en un point donné.
- La vélocimétrie par images de particules (PIV : Particule Imaging Velocimetry) pour des mesures en canal (Fig. 2.4). Cette technique consiste à disperser des traceurs dans l'écoulement éclairés par un plan laser, puis à enregistrer des images successives des traceurs par une caméra. Le déplacement des traceurs est ensuite mesuré par corrélation croisée de fenêtres et l'on obtient le champ de vitesses de l'écoulement.

D'un point de vue des mesures in situ, plusieurs types d'appareils ont été

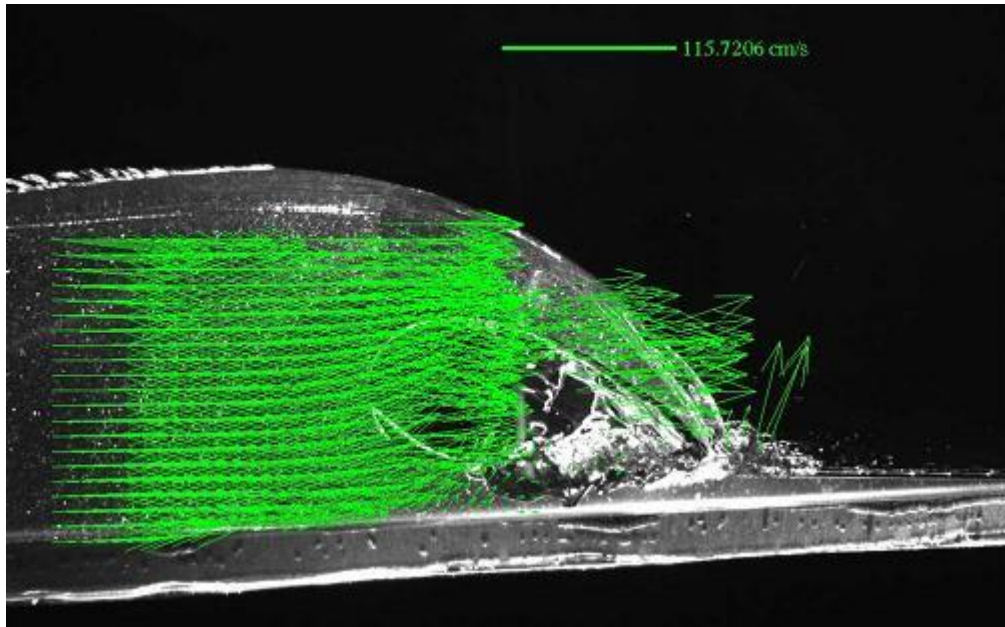


FIG. 2.4 – Champ de vitesses dans l'écoulement obtenue par technique PIV. Expériences menées à l'ESIM (Kimmoun et al. 2004)

développés pour décrire l'état de mer, le but étant de retrouver les grandeurs caractéristiques de la houle telles que son amplitude, sa direction, et sa fréquence.

La méthode la plus directe consiste à mesurer les variations du niveau de la mer. Pour ce faire, différents types d'appareils ont été utilisés :

- Mâts de houle : observation directe de la hauteur d'eau à l'aide d'une règle graduée placée verticalement sur une plage avant le point de déferlement.
- Les sonars : posés au fond et dirigés vers la surface. Ils permettent la mesure de la hauteur d'eau en mesurant le temps de parcours des impulsions ultrasons réfléchies par la surface libre.

Mais il existe des méthodes indirectes pour obtenir les caractéristiques de la houle. Lors de son passage, la houle engendre un mouvement dans le fluide. Des mesures de vitesses et de pression à une profondeur donnée, et d'accélération à la surface peuvent alors être envisagées. De nombreux appareils de mesures plus ou moins récents sont basés sur ce principe de mesure :

*Mesure des accélérations*

- Bouée de surface dotée d'accéléromètre (par exemple bouée Datawell) : le principe de ces bouées permet de donner l'élévation verticale de la surface libre à partir de la mesure de l'accélération verticale.

*Mesure de pression*

- Les capteurs de pression. Ces appareils immergés, correspondant aux premières techniques utilisées, mesurent la pression différentielle entre la surface et la position du capteur immergé.

*Mesure de vitesses*

- Instruments de type électromagnétique. Le courantomètre-Houlographe S4 (Fig. 2.5) associe un courantomètre et un capteur de pression. Cet appareil mesure les deux composantes de la vitesse du courant horizontal à son équateur et enregistre les fluctuations de pression à 7 cm de ce dernier. Il est équipé d'un système d'acquisition et de stockage, le rendant autonome. Une description plus détaillée de cet appareil est faite par Certain (Certain 2002).



FIG. 2.5 – Courantomètre-Houlographe S4

- Instruments de type acoustique. Ces systèmes mesurent les vitesses du courant par effet Doppler. Les plus courants sont les vélocimètres acoustiques Doppler (ADV) (Fig. 2.6) qui mesurent les trois composantes de la vitesse dans un petit volume de fluide ( $1\text{ cm}^3$ ) et les profileurs de courant (ADCP) (Fig. 2.7) mesurant la vitesse dans la direction de trois ou quatre faisceaux divergents pour en

déduire des profils de vitesses. Une mesure de pression peut parfois être synchronisée aux mesures de vitesses. Ces appareils présentent l'avantage d'être autonomes. Une description plus détaillée de l'ADV, en particulier du Vector développé par Nortek, est proposée par (Drevard 2002) et (Meuret 2004).



FIG. 2.6 – Vélocimètre Acoustique Doppler



FIG. 2.7 – Profileurs de courant

- Certains satellites ont été conçus pour des mesures océanographiques. Ils peuvent mesurer entre autres la topographie de la surface de la mer par altimétrie (Feddersen et al. 2003), et la hauteur significative  $H_s$  peut par exemple en être

déduite (Prevosto et al. 2000).

- Les radars au sol permettent également d'obtenir la direction de la houle par spectre directionnel.

## 2.4 Le déferlement

Après un long voyage, la houle arrive sur la côte et est prête à déferler sur notre rivage et à faire le bonheur de tous les adeptes des sports de glisse. Mais elle induit également des processus tels que la turbulence, la mise en suspension de sédiments et des courants côtiers.

Une vague déferle lorsque sa courbure devient très accentuée, c'est-à-dire lorsque l'amplitude crête à creux dépasse 14 % de la longueur d'onde (critère de Miche, 1951). Cette situation peut arriver en mer. C'est le cas des déferlantes rencontrées au large. Mais quelle est la cause du déferlement des vagues sur nos côtes ?

Lorsque la profondeur diminue à l'approche de la côte, le profil de la houle se modifie. L'amplitude du mouvement augmente alors en même temps que la hauteur de crête, jusqu'à atteindre une courbure limite et provoquer un basculement de la masse d'eau vers l'avant : c'est le déferlement. La puissance du déferlement et la projection de la lèvre prennent des proportions d'autant plus impressionnantes que la houle est plus haute et la pente du plateau continental plus abrupte.

Suivant la pente de la plage, il existe plusieurs types de déferlement. Le nombre d'Irribarren permet de les classer :

$$\xi_b = \frac{\tan \beta}{\sqrt{\frac{H_b}{L_0}}} \quad (2.1)$$

avec  $\tan \beta$  le gradient bathymétrique,  $H_b$  l'amplitude de la houle au point de déferlement et  $L_0$  sa longueur d'onde au large (Fredsoe and Deigaard 1992).

Ainsi, le déferlement est :



- glissant pour des pentes faibles ( $\xi_b \leq 0.4$ ) (Fig. 2.8),

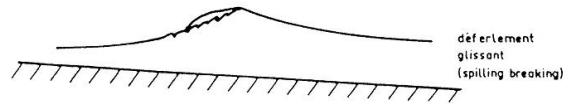


FIG. 2.8 – Déferlement glissant (Bonnefille 1992)

- plongeant pour des pentes un peu plus importantes ( $0.4 \leq \xi_b \leq 2$ ) (Fig. 2.9),

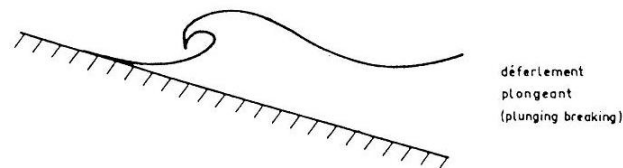


FIG. 2.9 – Déferlement plongeant (Bonnefille 1992)

- à effondrement pour des pentes encore plus importantes ( $\xi_b = 2$ ),
- frontal pour des pentes abruptes ( $2 \leq \xi_b \leq 4$ ) (Fig. 2.10).

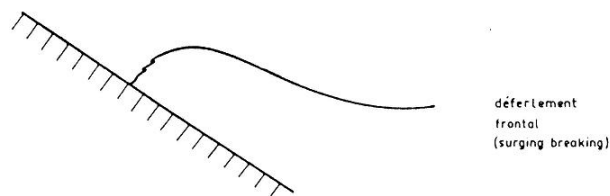


FIG. 2.10 – Déferlement frontal (Bonnefille 1992)

On n'observe pas de déferlement pour  $4 \leq \xi_b$ .

Nous nous intéressons ici aux déferlements glissant et plongeant.

### 2.4.1 Le déferlement glissant

Le déferlement glissant (Fig. 2.11) est caractérisé par une vague à peine dissymétrique et dont la crête s'accompagne d'une petite cascade d'eau. Ce phénomène prend naissance avant la côte à cause d'une plus grande vitesse de la lame d'eau de la crête par rapport à la vague elle-même. Un tel déferlement est caractéristique d'un rivage peu pentu. La transition du mouvement irrotationnel en mouvement rotationnel sur la colonne d'eau est lente.



FIG. 2.11 – Déferlement glissant

Lors du déferlement, l'écoulement reste encore bien décrit par une onde. Une approche analytique et expérimentale reste alors envisageable pour retrouver les grandeurs caractéristiques de la houle. C'est donc ce type de déferlement que nous étudierons dans la première partie.

### 2.4.2 Le déferlement plongeant

Le déferlement plongeant est caractérisé par la formation et le plongeon d'une lèvre consécutive au devant de la vague. Le jet plongeant forme également un tube. L'air piégé est rapidement comprimé par le mouvement du mur d'eau au voisinage de la crête. La figure 2.12 montre un cas typique de déferlement plongeant.



FIG. 2.12 – Déferlement plongeant

L'évolution du déferlement a été décrite par D.H. Peregrine et al. (1980) qui ont détaillé le mécanisme du système d'éclabousses mentionné par R.L. Miller (1976). D.H. Peregrine a montré que l'existence du système d'éclabousses est possible car lorsqu'un jet plongeant pénètre complètement dans l'eau, il se comporte comme une masse solide qui pousse une partie de la surface libre à former un nouveau jet ascendant, nommé "splash-up".

La structure de l'écoulement dans le déferlement a été étudiée par D.R. Basco (1984). L'évolution d'un processus de déferlement peut être résumée par les étapes suivantes (Fig. 2.13) :

- 1- La houle commence à lever.
- 2- Le jet plonge au dessus du creux qui se déplace en sens inverse.
- 3- Le jet plongeant heurte la surface libre, c'est l'éclabousses.
- 4- Le jet plongeant pénètre dans l'eau, sous le creux. L'écoulement de l'eau qui revient en sens inverse détourne le jet submergé, à la fois vers l'aval et vers l'amont, par rapport à la direction de la houle. C'est le début du mouvement rotationnel (tourbillon).
- 5- L'air piégé est comprimé par le mur d'eau situé sous la crête qui se déplace horizontalement avec formation de bulles d'air à l'intérieur de la masse d'eau.
- 6- La masse d'eau de l'éclabousses retombe en formant à la surface un rouleau comparable à celui d'un ressaut hydraulique.
- 7- Le tourbillon issu du jet plongeant se déplace horizontalement en créant une onde de perturbation secondaire, et fait augmenter la dimension ainsi que l'intensité du rouleau de surface.

8- La base du rouleau de surface glisse en descendant dans le creux de la vague qui revient en sens inverse pour arriver à une position d'équilibre. Le rouleau de surface se développe.

9- Le tourbillon issu du jet plongeant se déplace vers l'amont tandis que l'onde secondaire continue de se propager.

10- Le déferlement touche à sa fin quand le rouleau de surface atteint une position d'équilibre et quand le transfert horizontal du tourbillon issu du jet plongeant cesse de générer l'onde secondaire. C'est ici que commence la zone après le déferlement.

Après déferlement, l'écoulement devient chaotique et fortement turbulent, et à ce stade, il ne peut plus être décrit par une onde. L'intérêt est alors d'étudier ce phénomène avec des modèles numériques basés sur la résolution des équations de la mécanique des fluides (équations de Navier-Stokes) (paragraphe 2.2.2). Il existe plusieurs méthodes de suivi de surface libre appliquées au déferlement.

La première méthode développée pour l'étude du déferlement est la méthode MAC (the lagrangian Marker-And-Cell) de Harlow et Welch (1965). Elle a été améliorée par la suite par la méthode SMAC (Simplified Marker-And-Cell) (Takikawa et al. 1997) et par la méthode SM (Surface Marker) (Christensen and Deigaard 2001). Ces méthodes utilisent une distribution de particules sans masse (marqueurs) pour identifier une interface. Pour décrire correctement l'interface, la méthode nécessite un nombre important de marqueurs ce qui est coûteux en temps de calcul.

Ainsi, Hirt et Nichols (1981) ont remplacé les particules marqueurs par la fraction volumique  $F$ , vallant 1 dans l'un des fluides et 0 dans l'autre. Cette méthode est la base des méthodes VOF (Volume Of Fluid). L'interface est localisée dans les cellules où  $F$  est strictement comprise entre 0 et 1. Différentes méthodes ont été développées pour la reconstruction d'interface. La méthode originale utilise une reconstruction de l'interface constante par morceaux. L'interface ne peut alors prendre que deux directions dans une cellule, verticale ou horizontale. Cette méthode a été améliorée en modélisant l'interface par des fonctions affines par morceaux. C'est le principe des méthodes PLIC (Picewise Linear Interface Construction) (Li 1995), (Abadie 1998) et SL-VOF (Semi-Lagrangian) (Guignard et al. (2001a) pour le 2D ; Biauxser et al. (2004a) et (2004b) pour le 3D).

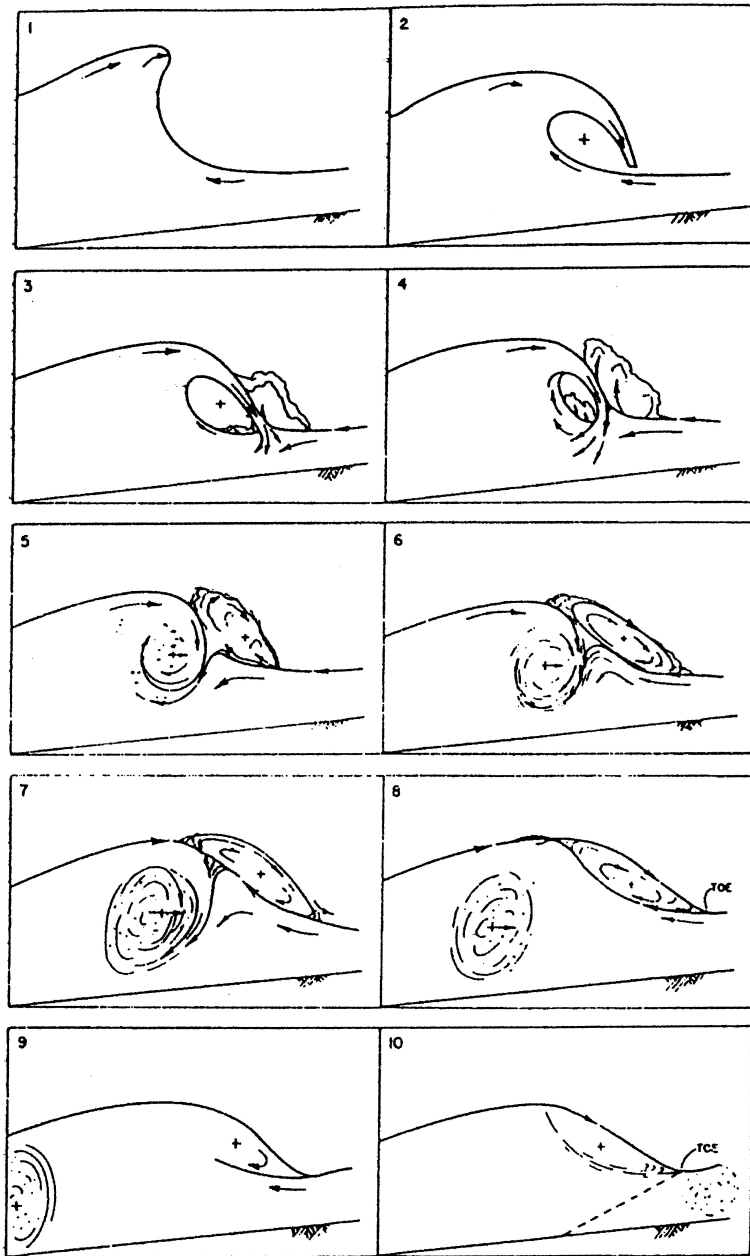


FIG. 2.13 – Les étapes successives d'un processus de déferlement. La numérotation correspond à l'ordre des étapes mentionnées dans le texte (Basco 1984)

D'autres méthodes ont été récemment développées pour éviter une reconstruction d'interface : la méthode Level Set (Osher and Fedkiw 2001) et la méthode TVD (Lax-Wendroff Total Variation Diminishing) (Lubin et al. 2003) capturent l'interface. Elles consistent à introduire une fonction régulière positive dans l'une

des phases et négative dans l'autre.

Dans le chapitre 2, nous avons utilisé la méthode SL-VOF, développée en 2D par Guignard (2001) et en 3D par Biauxser (2003), pour étudier le déferlement plongeant d'un soliton.

## 2.5 Le soliton

Pour étudier le déferlement, le cas d'étude le plus simple et le plus répandu est l'onde solitaire (ou soliton). Le soliton est une vague non linéaire non périodique qui se propage en conservant ses propriétés sur de longues distances.

Deux raisons justifient ce choix.

D'une part, à l'approche de la côte, deux vagues successives n'ont pas le temps d'interagir et se comportent plutôt comme deux vagues isolées (ou ondes cnoïdales). Ces dernières sont une solution classique aux équations de Boussinesq et l'onde solitaire est une forme limite de ces solutions périodiques. On peut souvent remarquer que les vagues de grande période qui arrivent sur les plages ressemblent à des ondes solitaires. C'est donc une approximation raisonnable d'un champ de vagues de grande longueur d'ondes.

D'autre part, les tsunamis sont des ondes solitaires de plus en plus étudiées par simulation numérique. Provoquées par une soudaine variation du niveau de l'eau à la suite d'un glissement de terrain ou d'un tremblement de terre, les vagues générées ont une très grande longueur caractéristique (quelques dizaines de km) et se propagent à très grande vitesse (quelques centaines de km/h par quelques 3000 m de fond). Ces ondes se comportent donc toujours comme étant en milieu peu profond, même en pleine mer. A l'approche des côtes, alors que la profondeur diminue, l'amplitude de l'onde augmente fortement pouvant dépasser 35 m de hauteur, et sa vitesse diminue à quelques dizaines de km/h. Cependant, elles arrivent avec une très grande énergie sur les côtes pouvant causer de nombreux dégâts, la masse d'eau envahissant le littoral.

## 2.6 La réflexion

La réflexion caractérise une énergie se propageant dans le sens opposé de l'onde incidente. Elle peut être due à des obstacles ou à des variations bathymétriques.

La réflexion d'une houle sur un obstacle semi-absorbant conduit à une réduction de l'amplitude des ondes réfléchies et transmises, et à un déphasage. Ce procédé peut être appliqué en génie côtier pour la protection du littoral et de ses aménagements tels que les ports en plaçant des ouvrages immergés ou émergés (digues "réfléchissantes").

La houle peut également être réfléchi par effets bathymétriques, soit par des fonds en pente, soit par des fonds présentant des modulations.

Le mouvement du fluide, engendré par le passage de l'onde, interagit avec les fonds modulés pour une profondeur d'eau inférieure ou égale à la demi-longueur d'onde de l'onde. Heathershaw (1982) a montré pour un fond sinusoïdal une amplification de la réflexion lorsque la longueur d'onde des vagues est égale à deux fois la longueur d'onde du fond. Ce phénomène est appelé résonance de Bragg. D'autres travaux ont étudié la réflexion partielle par la topographie naturelle (Ardhuin and Herbers, 2002 ; Magne and Ardhuin, 2006 ; Walton, 1992 ; Elgar et al., 1994).

Pour de faibles pentes du fond, l'onde est généralement peu réfléchi (Booij 1983), on peut donc supposer l'onde uniquement progressive. Par contre, pour des fonds plus abrupts comportant de fortes discontinuités ou des limites spatiales (quai, digue, falaise, plage...), l'onde peut être partiellement réfléchi vers le large.

Miche (1951) a déterminé le coefficient de réflexion empiriquement à partir de mesures en laboratoire pour une onde monochromatique :

$$\begin{aligned}
 R^2 &\approx 1 && \text{pour } M \geq 1 \\
 R^2 &\approx M && \text{pour } M < 1
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

avec  $M = \frac{16g^2 \tan^2(\beta)}{(2\pi)^5 H_\infty^2 f^4}$ , nombre de Miche

où  $\beta$  est la pente de la plage,  $H_\infty$  la hauteur de la houle en profondeur infinie et  $f$  sa fréquence.

D'autres expériences en laboratoire ont permis de vérifier ce résultat tels que les travaux de Mansard and Funke (1980). Cependant, ce phénomène a été jusqu'ici peu étudié in situ. Elgar et al. (1994) et Freilich and Guza (1984) ont mesuré la réflexion ainsi que la direction de propagation de l'onde pour des plages naturelles à partir de données de capteurs de pression. Tatavarti et al. (1988) et Walton (1992) ont mesuré la réflexion sans mesures de la direction de propagation en utilisant des données synchrones de pression et de vitesse horizontale en un point. Cette technique a été récemment appliquée en bassin à partir de données de vitesses horizontale et verticale (Drevard et al. 2003). Un des objets de notre travail consiste à utiliser ces appareils récemment développés dans le but d'étudier la réflexion dans plusieurs situations en bassin et in situ : avec ou sans courant, en incidence normale ou oblique.





## Première partie

Mesure de houles partiellement  
stationnaires en zones côtière et  
littorale



---

## Introduction

L'étude de la houle en zone littorale présente un grand intérêt pour la compréhension de la dynamique littorale, avec en particulier les problèmes d'érosion des plages. D'un point de vue de l'ingénierie, la connaissance de l'hydrodynamique est indispensable pour un dimensionnement adéquat des structures côtières, et les études d'impact d'ouvrage sur l'équilibre dynamique du littoral. L'information sur le caractère partiellement stationnaire de la houle présente un intérêt particulier pour l'étude de plages réfléchives ou d'agitation au voisinage de structures.

L'objet de cette partie est d'étudier analytiquement et expérimentalement la propagation et la transformation de la houle en zone littorale. Les études récentes (Drevard et al. 2003) montrent que, d'un point de vue analytique en profondeur infinie, la déformée de la surface libre fait apparaître des harmoniques liés contrairement au potentiel des vitesses. L'objectif est l'étude :

- des effets non linéaires par une analyse linéaire (Transformée de Fourier),
- de la propagation et de la transformation de la houle en zone de déferlement en ne considérant que les composantes fondamentales, travail effectué dans le cadre du programme national PATOM (Programme Atmosphère Océan Multi-échelles).

Tout d'abord les théories de Stokes linéaire et non linéaire sont présentées pour une onde progressive, puis développées pour une onde partiellement stationnaire. Puis des méthodes de calcul à partir de données de vitesses et de pression sont exposées. Enfin, plusieurs applications en bassin et in situ sont décrites où l'on discutera des effets non linéaires, de l'influence du courant, de la profondeur d'immersion des appareils et de l'influence de l'angle d'incidence des houles.



# Chapitre 3

## Théories des ondes

Les théories des ondes, développées par Airy, Stokes et Gerstner (Bonnefille 1992) ou Mei, supposent une onde monochromatique. Après un récapitulatif de ces différentes méthodes, leur développement pour des houles partiellement stationnaires est proposé.

### 3.1 Théories de Stokes

Les modèles de Stokes permettent d'établir les équations de propagation à partir des expressions des potentiels de vitesses. En effet, l'hypothèse "écoulement irrotationnel et incompressible" permet de définir dans tout le fluide un potentiel des vitesses  $\Phi(x, y, z, t)$ , tel que  $\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$ , et qui satisfait l'équation de Laplace (on se limite dans la suite au cas bidimensionnel dans le plan  $xOz$ ) :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1)$$

La déformation de la surface libre due à la perturbation, notée  $\eta(x, t)$  dépend des coordonnées horizontales de l'espace et du temps, l'axe  $Oz$  est choisi vertical orienté vers le haut. On suppose que la seule force de rappel est la force de gravité  $\vec{g}$ . La condition limite cinématique à la surface libre est donnée par

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{d\eta}{dt} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

et la condition dynamique (Bernoulli) par

$$\frac{p}{\rho} + g\eta + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = c(t) \quad (3.3)$$

En théorie de houle, le terme  $c(t)$  est absorbé par le potentiel de vitesses (Dingemans 1997). L'équation de Bernoulli devient alors :

$$\frac{p}{\rho} + g\eta + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \quad (3.4)$$

en remplaçant  $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$  par  $\frac{\partial\Phi}{\partial t} - c(t)$ .

Sachant que  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial\vec{v}^2}{\partial t}$ , et en supposant la pression constante et égale à zéro à l'interface air-eau, on déduit de la dérivée totale de (3.3) la condition limite, non linéaire, en  $z = \eta$  pour le potentiel  $\Phi$  :

$$g \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\vec{v}^2}{\partial t} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\vec{v}^2) = 0 \quad (3.5)$$

Pour une mer de profondeur "finie", la condition d'imperméabilité au fond est donnée par :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad (3.6)$$

où  $\vec{n}$  est la normale au fond. Lorsque l'écoulement induit par la houle n'affecte pas le fluide au voisinage du fond, on est dans le cas appelé "profondeur infinie". La condition (3.6) devient :

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad (3.7)$$

Des solutions analytiques sont trouvées par fond plat ou en profondeur infinie en apportant certaines simplifications à la condition de surface libre (3.5). La solution la plus simple mais la plus restrictive est obtenue après linéarisation (voir paragraphe 3.1.1). Des solutions plus réalistes sont obtenues par des développements en perturbations (voir paragraphe 3.1.2) de la solution.

### 3.1.1 Théorie linéaire

On suppose que l'amplitude de l'onde est "infinitement petite", c'est-à-dire qu'on peut négliger dans (3.5) les termes qui sont proportionnels au carré de l'ampli-

tude de surface, et écrire la condition en  $z = 0$  (développement de Taylor au premier ordre). La houle irrotationnelle "infiniment petite" est aussi appelée "houle d'Airy" (d'après les travaux de Airy, en 1844) ou "houle de Stokes au 1er ordre". On recherche des solutions en fond plat, ou en profondeur infinie. La condition limite (3.5) devient

$$g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.8)$$

et celle du fond, en  $z = -h$ ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (3.9)$$

La périodicité du mouvement suggère d'écrire le potentiel  $\Phi(x, z, t)$  exprimé par commodité en complexe (la solution est en fait sa partie réelle) sous la forme :

$$\Phi(x, z, t) = \phi(x, z) e^{i\omega t} \quad (3.10)$$

La recherche de solutions harmoniques pour  $\phi(x, z)$ , tel que  $\Phi(x, z, t)$  satisfait aux conditions limites (3.8) et (3.9) permet d'obtenir

$$\phi(x, z) = [A^- e^{-ikx} + A^+ e^{+ikx}] \cosh k(z + h) \quad (3.11)$$

où  $k$ , nombre d'onde de l'onde, vérifie la relation de dispersion

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (3.12)$$

La vitesse de propagation de l'onde, ou vitesse de phase  $C$ , est donnée par

$$C = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \quad (3.13)$$

La vitesse  $C$  dépend de la fréquence  $\omega$ , la propagation de la houle est un phénomène dispersif, et sa longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = CT$  diminue avec la profondeur d'eau. En profondeur infinie, l'expression de  $\phi(x, z)$  devient

$$\phi(x, z) = [A^- e^{-ikx} + A^+ e^{+ikx}] e^{kz} \quad (3.14)$$

la relation de dispersion (3.12) devient



$$\omega^2 = gk \quad (3.15)$$

et la vitesse de phase  $C = \sqrt{\frac{g}{k}}$ .

Pour une onde d'amplitude  $a$  (ou de hauteur crête à creux  $H = 2a$ ) se propageant dans le sens des  $x$  croissants, la déformée de la surface libre et le potentiel des vitesses sont donnés respectivement par :

$$\eta(x, t) = a \sin(\omega t - kx) \quad (3.16)$$

et

$$\Phi(x, z, t) = \frac{a\omega}{k} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \cos(\omega t - kx) \quad (3.17)$$

Le champ de vitesses se déduit de  $\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$ ,  $u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$  et  $w = \frac{\partial\Phi}{\partial z}$ , soit :

$$u = a\omega \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \sin(\omega t - kx) \quad (3.18)$$

$$w = a\omega \frac{\sinh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \cos(\omega t - kx) \quad (3.19)$$

Le champ de pression dans le fluide, pour une houle d'Airy, est donné par :

$$p = -\rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (3.20)$$

soit

$$p = \frac{\rho a \omega^2}{k} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \sin(\omega t - kx) \quad (3.21)$$

La solution "houle infiniment petite", qui provient de la linéarisation du problème, présente l'inconvénient de ne s'appliquer en toute rigueur qu'à des houles de très faible amplitude, ce qui n'est pas très physique, et ne permet pas des calculs suffisamment précis des efforts de houle sur les structures, dont la connaissance est primordiale en génie océanique et côtier.

### 3.1.2 Théories non linéaires

Lorsqu'une onde n'est plus d'amplitude très faible, la déformée n'est pas sinusoïdale mais décrit une courbe de forme trochoïdale en profondeur infinie, dont une approximation correcte peut être obtenue par un développement en perturbation.

De façon générale, pour de tels développements, on appelle  $\varepsilon$  le petit paramètre (ici,  $\varepsilon$  représente la cambrure  $ka$ ), et on écrit :

$$\eta = \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \varepsilon^3\eta_3 + O(\varepsilon^4) \quad (3.22)$$

$$\Phi = \varepsilon\Phi_1 + \varepsilon^2\Phi_2 + \varepsilon^3\Phi_3 + O(\varepsilon^4) \quad (3.23)$$

$O(\varepsilon^n)$  englobe les termes dont la contribution dans les expressions de  $\eta$  et de  $\Phi$  sont d'ordre supérieur ou égal à  $\varepsilon^n$ .

En écrivant  $\eta$  et  $\Phi$  sous les formes respectives (3.22) et (3.23), dans les expressions (3.1) et (3.5), et en utilisant un développement de Taylor pour (3.5), on en déduit la condition de Laplace, la condition limite en profondeur infinie ou finie et la condition limite pour la surface libre en  $z = 0$ , aux ordres  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2$  et  $\varepsilon^3$ .

\*Condition de Laplace : A chaque ordre  $\varepsilon^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  :

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (3.24)$$

\*Condition en "profondeur infinie" :

A chaque ordre  $\varepsilon^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  :

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} = 0 \quad (3.25)$$

ou

\*Condition en "profondeur finie" :

A chaque ordre  $\varepsilon^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  :

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (3.26)$$

\*Condition de surface libre :

A l'ordre  $\varepsilon$  :

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \quad (3.27)$$

A l'ordre  $\varepsilon^2$  :

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_2}{\partial z} + \eta_1 \left( \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial t^2 \partial z} + g \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.28)$$

A l'ordre  $\varepsilon^3$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_3}{\partial z} + \eta_1 \left( \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial t^2 \partial z} + g \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} \right) + \eta_2 \left( \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial t^2 \partial z} + g \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2} \eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right) \\ + \eta_1 \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left[ \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right] \\ + 2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.29) \end{aligned}$$

\*L'expression de la déformée de la surface libre est obtenue à partir de la condition de Bernoulli (3.3). Elle est calculée aux différents ordres en  $z = 0$ .

A l'ordre  $\varepsilon$  :

$$-g\eta_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \quad (3.30)$$

A l'ordre  $\varepsilon^2$  :

$$-g\eta_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3.31)$$

A l'ordre  $\varepsilon^3$  :

$$\begin{aligned} -g\eta_3 = \frac{\partial \phi_3}{\partial t} + \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2} \eta_1^2 \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial z^2 \partial t} + \frac{1}{2} \eta_1 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right] \\ + \eta_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial t} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right) \quad (3.32) \end{aligned}$$

Les expressions de  $\Phi$  et  $\eta$  sont alors recherchées en résolvant successivement les équations aux ordres  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2$  et  $\varepsilon^3$ .

**Houle de Stokes du 3ème ordre en profondeur infinie :**

Les solutions pour  $\Phi$  et  $\eta$  sont obtenues à partir des solutions aux différents ordres en utilisant (3.22) et (3.23).

Les solutions à l'ordre  $\varepsilon$  sont celles du cas "houle infiniment petite" ou houle d'Airy en profondeur infinie :

$$\eta_1(x, t) = a \sin(\omega t - kx) \quad (3.33)$$

et

$$\Phi_1(x, z, t) = \frac{a\omega}{k} e^{kz} \cos(\omega t - kx) \quad (3.34)$$

avec la relation de dispersion

$$\omega^2 = gk \quad (3.35)$$

Les solutions à l'ordre  $\varepsilon^2$  sont obtenues à partir des équations (3.24), (3.25), (3.28) et (3.31). Puis on remplace  $\eta_1$  et  $\phi_1$  par leurs expressions données respectivement par (3.33) et (3.34) dans l'équation (3.28) qui devient :

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0 \quad (3.36)$$

On reconnaît ici l'équation à résoudre à l'ordre 1. Le développement à l'ordre 2 n'apporte alors aucun terme supplémentaire à l'expression de  $\phi$ . En écrivant  $\phi_2 = 0$  et en utilisant les expressions de (3.33) et (3.34), on obtient pour  $\eta_2$  :

$$\eta_2 = \frac{-a^2 \omega^2}{2g} \cos 2(\omega t - kx) \quad (3.37)$$

On procède de la même façon pour l'ordre  $\varepsilon^3$  en résolvant les équations (3.24), (3.25), (3.29) et (3.32). Après calcul, il reste pour la condition (3.29) :

$$\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} = -a^3 \omega^3 k \cos(\omega t - kx) \quad (3.38)$$

On remarque que le terme du membre de droite de l'expression (3.38) est proportionnel à  $\cos(\omega t - kx)$  et donc que la solution doit être proportionnelle à  $\cos(\omega t - kx)$ . Donc par un raisonnement identique à celui du calcul de  $\Phi_2$ , on

en déduit  $\Phi_3 = 0$ . La différence est ici que le " $\Phi_1$ " trouvé précédemment, avec la relation de dispersion  $\omega^2 = gk$  n'est plus solution de l'équation (3.38) à cause du terme non nul du membre de droite.

En remplaçant  $\Phi_1$  par l'expression (3.34) dans (3.38), on en déduit qu'à l'ordre  $\varepsilon^3$ ,  $\Phi = \varepsilon\Phi_1 + O(\varepsilon^4)$ , mais avec la relation de dispersion  $k = (\omega^2/g)(1 - k^2a^2)$ .

On remarque que l'amplitude  $a$  de l'onde intervient dans la relation de dispersion, la célérité de l'onde est alors donnée par :

$$c^2 = \frac{g}{k}(1 + k^2a^2) \quad (3.39)$$

En écrivant  $\Phi_2 = \Phi_3 = 0$ , et en utilisant les expressions de  $\phi_1$ ,  $\eta_1$  et  $\eta_2$ , on en déduit :

$$\eta_3 = -\frac{3}{8}a^3k^2[\sin 3(\omega t - kx) + \sin(\omega t - kx)] \quad (3.40)$$

Les solutions pour  $\Phi$  et  $\eta$  sont obtenues à partir des solutions aux différents ordres en utilisant (3.22) et (3.23), et en posant  $\varepsilon = 1$ .

On a donc finalement :

$$\Phi = \frac{\omega}{k}ae^{kz} \cos(\omega t - kx) \quad (3.41)$$

avec la relation de dispersion

$$\frac{\omega^2}{g} = k(1 + k^2a^2) \quad (3.42)$$

et

$$\eta = a \left( 1 - \frac{3}{8}a^2k^2 \right) \sin(\omega t - kx) - \frac{a^2k}{2} \cos 2(\omega t - kx) - \frac{3}{8}a^3k^2 \sin 3(\omega t - kx) \quad (3.43)$$

Le champ de vitesses se déduit de  $\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$ ,  $u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$  et  $w = \frac{\partial\Phi}{\partial z}$ . Comme le potentiel des vitesses n'a pas changé par rapport à (3.17), les vitesses sont encore données par (3.18) et (3.19).

Lorsqu'on prend en compte les effets non linéaires, le champ de pression devient :

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \vec{v}^2 \quad (3.44)$$

avec  $\vec{v}^2 = u.u + w.w$ . Le champ de pression se simplifie en :

$$p = -\frac{\omega^2}{k} a e^{kz} \sin(\omega t - kx) - (\omega a e^{kz})^2 \quad (3.45)$$

\* Remarque :

L'amplitude  $a$  de l'onde intervient dans la relation de dispersion ce qui signifie que l'onde est dispersive en amplitude. De plus, le potentiel de vitesses est inchangé par rapport à (3.17) ainsi que le champ de vitesses ; par contre, l'expression de la déformée de la surface libre fait apparaître des harmoniques. L'onde se propage sans se déformer, donc le mode fondamental (de fréquence  $f$ ) et ses harmoniques ( $2f$ ,  $3f$ ) se propagent à la même vitesse. On dit que les modes sont liés. D'un point de vue du traitement de Fourier, ceci signifie qu'en théorie, pour une onde progressive de fréquence  $f$ , le spectre de Fourier fera apparaître des pics harmoniques pour la déformée  $\eta$ , alors que les spectres des vitesses et de la pression ne feront apparaître que la fréquence du fondamental  $f$ .

### Houle de Stokes du 2ème ordre en profondeur finie :

On suppose que la profondeur d'eau est constante et égale à  $h$ . Pour le calcul des expressions aux différents ordres du potentiel des vitesses et de la déformée de la surface libre, il suffit de procéder comme dans le paragraphe précédent. Nous nous limiterons ici au développement à l'ordre 2. Comme précédemment, les expressions de  $\Phi$  et  $\eta$  sont alors recherchées en résolvant successivement les équations aux ordres  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2$ .

Les solutions à l'ordre  $\varepsilon$  sont celles du cas "houle infiniment petite" ou houle d'Airy en profondeur finie :

$$\eta_1(x, t) = a \sin(\omega t - kx) \quad (3.46)$$

et

$$\Phi_1(x, z, t) = \frac{a\omega \cosh[k(z+h)]}{k \sinh(kh)} \cos(\omega t - kx) \quad (3.47)$$

avec la relation de dispersion

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (3.48)$$

On procède de la même façon pour l'ordre  $\varepsilon^2$ , en résolvant le système d'équations (3.24), (3.26), (3.28) et (3.31). On trouve après calculs :

$$\Phi_2(x, z, t) = \frac{3}{8} \frac{a^2\omega}{\sinh^4(kh)} \cosh[2k(z+h)] \sin 2(\omega t - kx) \quad (3.49)$$

puis,

$$\eta_2(x, t) = -\frac{a^2k}{2 \sinh(2kh)} - \frac{a^2k (3 - \tanh^2 kh)}{4 \tanh^3(kh)} \cos 2(\omega t - kx) \quad (3.50)$$

Cependant, avec cette formulation, la condition au repos  $\int_0^{\lambda} \eta_2 dx = 0$  n'est pas vérifiée. Pour cela,  $\eta_2$  doit s'écrire sous la forme :

$$\eta_2(x, t) = -\frac{a^2k (3 - \tanh^2(kh))}{4 \tanh^3(kh)} \cos 2(\omega t - kx) \quad (3.51)$$

Or,  $\eta_2$  et  $\phi_2$  doivent toujours vérifier la condition de Bernoulli (3.3). On en déduit  $\phi_2$  :

$$\Phi_2(x, z, t) = \frac{3}{8} \frac{a^2\omega}{\sinh^4(kh)} \cosh[2k(z+h)] \sin 2(\omega t - kx) - \frac{ga^2k}{2 \sinh(2kh)} t \quad (3.52)$$

On a donc finalement :

$$\Phi(x, z, t) = \frac{a\omega \cosh[k(z+h)]}{k \sinh(kh)} \cos(\omega t - kx) + \frac{3}{8} \frac{a^2\omega}{\sinh^4(kh)} \cosh[2k(z+h)] \sin 2(\omega t - kx) - \frac{ga^2k}{2 \sinh(2kh)} t \quad (3.53)$$

et,

$$\eta(x, t) = a \sin(\omega t - kx) - \frac{a^2 k (3 - \tanh^2(kh))}{4 \tanh^3(kh)} \cos 2(\omega t - kx) \quad (3.54)$$

Ainsi, le champ de vitesses devient :

$$u = a\omega \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \sin(\omega t - kx) - \frac{3}{4} \frac{a^2 \omega k}{\sinh^4(kh)} \cosh[2k(z+h)] \cos 2(\omega t - kx) \quad (3.55)$$

$$w = a\omega \frac{\sinh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \cos(\omega t - kx) + \frac{3}{4} \frac{a^2 \omega k}{\sinh^4(kh)} \sinh[2k(z+h)] \sin 2(\omega t - kx) \quad (3.56)$$

et la pression :

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \vec{v}^2 \quad (3.57)$$

avec  $\vec{v}^2 = u.u + w.w$ .

\* Remarques :

→ On vient de voir que pour des ondes d'amplitude "finie", le potentiel  $\Phi$  s'exprime comme la somme de la solution linéaire  $\Phi_1$  et de la correction  $\Phi_2$ , qui reste faible mais non négligeable devant  $\Phi_1$ . La solution linéaire n'est donc correcte que si  $|\Phi_2| \ll |\Phi_1|$ , c'est-à-dire :

$$\left| \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right| = \left| ak \frac{\cosh[2k(z+h)]}{\cosh[k(z+h)]} \frac{1}{\sinh^3(kh)} \right| \ll 1 \quad (3.58)$$

En eau profonde ( $kh \gg 1$ ), le rapport  $\left| \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right| \simeq \frac{ak}{e^{2kh}}$ . Il tend donc vers 0 quand  $h \rightarrow \infty$ , ce qui était prévisible puisque  $\Phi_2 = 0$  en profondeur infinie (voir paragraphe précédent).

En eau peu profonde ( $kh \ll 1$ ), le rapport  $\left| \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right| \simeq \frac{a}{k^2 h^3} = \frac{a\lambda^2}{4\pi h^3} = \frac{1}{4\pi} Ur$ , où  $Ur = \frac{a\lambda^2}{h^3}$  est le nombre d'Ursell.

Le nombre d'Ursell doit donc rester petit pour que l'approximation de Stokes reste correcte. En toute rigueur, dans les conditions "eau peu profonde", la solution de Stokes n'est donc plus valable.

→ Contrairement au cas profondeur "infinie", les expressions des vitesses font



apparaître des fréquences harmoniques.

## 3.2 Interactions onde-onde

Les théories précédentes sont valables dans l'hypothèse d'une onde progressive. Dans l'hypothèse d'une onde partiellement stationnaire, les termes correspondant aux ondes incidente et réfléchie peuvent interagir si l'on mène les calculs jusqu'au second ordre. Nous élargissons la théorie non linéaire à l'interaction onde-onde soit entre une onde incidente et réfléchie soit entre deux ondes se propageant à deux fréquences différentes. Cette étude a été effectuée en collaboration avec le Pr. Ib Svendsen de l'Université de Delaware.

### 3.2.1 Houle partiellement stationnaire

Considérons maintenant une houle partiellement réfléchie par la plage ou des structures,  $\eta$  s'écrit alors sous la forme :

$$\eta_1(x, t) = a_i \sin(\omega t - kx) + a_r \sin(\omega t + kx) \quad (3.59)$$

où  $a_i$  correspond à l'amplitude de l'onde incidente et  $a_r$  à celle de l'onde réfléchie.

Cherchons alors les solutions aux ordres  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^2$  du potentiel de vitesses et de la surface libre pour le cas d'une profondeur infinie puis finie.

#### Profondeur infinie :

Comme précédemment (voir section 3.1.2), les expressions de  $\Phi$  et  $\eta$  sont alors recherchées en résolvant successivement les équations aux ordres  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2$ .

A l'ordre  $\varepsilon$ , on détermine  $\phi_1$  à partir des équations (3.30),(3.25) et de l'expression de  $\eta_1$  définie ci-dessus. Après calculs, on obtient :

$$\Phi_1(x, z, t) = \frac{a_i \omega}{k} e^{kz} \cos(\omega t - kx) + \frac{a_r \omega}{k} e^{kz} \cos(\omega t + kx) \quad (3.60)$$

A l'ordre  $\varepsilon^2$ , on résout le système d'équations (3.24), (3.25),(3.28) et (3.31). En remplaçant  $\eta_1$  et  $\phi_1$  par leurs expressions respectives (3.59) et (3.60), on trouve

après calculs :

$$\Phi_2(x, z, t) = -\omega a_i a_r \sin(2\omega t) \quad (3.61)$$

puis,

$$\eta_2(x, t) = k a_i a_r \cos(2kx) - \frac{k a_i^2}{2} \cos 2(\omega t - kx) - \frac{k a_r^2}{2} \cos 2(\omega t + kx) \quad (3.62)$$

On a donc finalement :

$$\Phi(x, z, t) = \frac{a_i \omega}{k} e^{kz} \cos(\omega t - kx) + \frac{a_r \omega}{k} e^{kz} \cos(\omega t + kx) - \omega a_i a_r \sin(2\omega t) \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \eta(x, t) = & a_i \sin(\omega t - kx) + a_r \sin(\omega t + kx) + k a_i a_r \cos(2kx) \\ & - \frac{k a_i^2}{2} \cos 2(\omega t - kx) - \frac{k a_r^2}{2} \cos 2(\omega t + kx) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Les vitesses horizontale et verticale sont alors données respectivement par les expressions suivantes :

$$u(x, z, t) = (a_i \sin(\omega t - kx) - a_r \sin(\omega t + kx)) \omega e^{kz} \quad (3.65)$$

$$w(x, z, t) = (a_i \cos(\omega t - kx) + a_r \cos(\omega t + kx)) \omega e^{kz} \quad (3.66)$$

\* Remarques :

→ On vérifie aisément qu'en absence de réflexion, soit  $a_r = 0$ , on obtient bien les mêmes formulations pour le potentiel de vitesses et la déformée de la surface libre obtenues dans la section 3.1.2 page 58.

→ On remarque que les vitesses sont uniquement proportionnelles à  $\cos(\omega t -$

$kx$ ). Les termes du second ordre n'interviennent pas dans l'expression finale des vitesses.

### Profondeur finie :

A l'ordre  $\varepsilon$ , on détermine  $\phi_1$  à partir des équations (3.30),(3.26) et de l'expression de  $\eta_1$  définie par (3.59). Après calculs, on obtient :

$$\Phi_1(x, z, t) = \frac{a_i \omega \cosh[k(z+h)]}{k \sinh(kh)} \cos(\omega t - kx) + \frac{a_r \omega \cosh[k(z+h)]}{k \sinh(kh)} \cos(\omega t + kx) \quad (3.67)$$

avec la relation de dispersion en profondeur finie (3.48).

A l'ordre  $\varepsilon^2$ , on résout le système d'équations (3.24), (3.26),(3.28) et (3.31). En remplaçant  $\eta_1$  et  $\phi_1$  par leurs expressions respectives (3.59) et (3.67), on trouve après calculs :

$$\Phi_2(x, z, t) = \frac{3}{8} \frac{\omega}{\sinh^4(kh)} \cosh[2k(z+h)] [a_i^2 \sin 2(\omega t - kx) + a_r^2 \sin 2(\omega t + kx)] - \frac{\omega a_i a_r}{4} [3 + \coth^2(kh)] \sin(2\omega t) \quad (3.68)$$

puis,

$$\eta_2(x, t) = \frac{k \coth(kh)}{4} [1 - 3 \coth^2(kh)] (a_i^2 \cos 2(\omega t - kx) + a_r^2 \cos 2(\omega t + kx)) + k a_i a_r \cos(2kx) \coth(2kh) - \frac{k}{2 \sinh(2kh)} \quad (3.69)$$

Cependant, avec cette formulation, la condition au repos  $\int_0^{\lambda} \eta_2 dx = 0$  n'est pas vérifiée. Pour cela,  $\eta_2$  doit s'écrire sous la forme :

$$\eta_2(x, t) = \frac{k \coth(kh)}{4} [1 - 3 \coth^2(kh)] (a_i^2 \cos 2(\omega t - kx) + a_r^2 \cos 2(\omega t + kx)) + k a_i a_r \cos(2kx) \coth(2kh) \quad (3.70)$$

Or,  $\eta_2$  et  $\phi_2$  doivent toujours vérifier la condition de Bernoulli (3.31); ainsi, on en déduit  $\phi_2$  :

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, z, t) = & \frac{3}{8} \frac{\omega}{\sinh^4(kh)} \cosh[2k(z+h)] [a_i^2 \sin 2(\omega t - kx) + a_r^2 \sin 2(\omega t + kx)] \\ & - \frac{\omega a_i a_r}{4} [3 + \coth^2(kh)] \sin(2\omega t) - \frac{gk}{2 \sinh(2kh)} (a_i^2 + a_r^2) t \quad (3.71) \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\begin{aligned} \Phi(x, z, t) = & \frac{a_i \omega \cosh[k(z+h)]}{k \sinh(kh)} \cos(\omega t - kx) + \frac{a_r \omega \cosh[k(z+h)]}{k \sinh(kh)} \cos(\omega t + kx) \\ & + \frac{3}{8} \frac{\omega}{\sinh^4(kh)} \cosh[2k(z+h)] [a_i^2 \sin 2(\omega t - kx) + a_r^2 \sin 2(\omega t + kx)] \\ & - \frac{\omega a_i a_r}{4} [3 + \coth^2(kh)] \sin(2\omega t) - \frac{gk}{2 \sinh(2kh)} (a_i^2 + a_r^2) t \quad (3.72) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(x, t) = & a_i \sin(\omega t - kx) + a_r \sin(\omega t + kx) + k a_i a_r \cos(2kx) \coth(2kh) \\ & + \frac{k \coth(kh)}{4} [1 - 3 \coth^2(kh)] (a_i^2 \cos 2(\omega t - kx) + a_r^2 \cos 2(\omega t + kx)) \quad (3.73) \end{aligned}$$

avec la relation de dispersion  $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ .

Les vitesses horizontale et verticale sont alors données par :

$$\begin{aligned} u(x, z, t) = & [a_i \sin(\omega t - kx) - a_r \sin(\omega t + kx)] \omega \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \\ & - \frac{3}{4} \frac{\omega k}{\sinh^4(kh)} \cosh[2k(z+h)] [a_i^2 \cos 2(\omega t - kx) - a_r^2 \cos 2(\omega t + kx)] \quad (3.74) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(x, z, t) = & [a_i \cos(\omega t - kx) + a_r \cos(\omega t + kx)] \omega \frac{\sinh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \\ & + \frac{3}{4} \frac{\omega k}{\sinh^4(kh)} \sinh[2k(z+h)] [a_i^2 \sin 2(\omega t - kx) + a_r^2 \sin 2(\omega t + kx)] \quad (3.75) \end{aligned}$$

\* Remarques :

→ On vérifie aisément qu'en absence de réflexion, soit  $a_r = 0$ , on obtient bien les mêmes formulations pour le potentiel de vitesses et la déformée de la surface libre, obtenues dans la section 3.1.2 page 61.

→ Lorsque on se place en profondeur infinie ( $kh \rightarrow \infty$ ) à partir des expressions de la déformée de la surface libre et le potentiel de vitesses données respectivement par (3.73) et (3.72), on retrouve bien les expressions obtenues dans le paragraphe "profondeur infinie" données par (3.64) et (3.63).

### 3.2.2 Interaction onde-onde

On se limite ici au cas "profondeur infinie". Pour deux ondes se propageant dans la même direction à deux fréquences différentes, la surface libre s'écrit alors :

$$\eta_1(x, t) = a_1 \sin(\omega_1 t - k_1 x) + a_2 \sin(\omega_2 t - k_2 x) \quad (3.76)$$

où l'indice 1 correspond à l'onde se propageant à la fréquence  $f_1$  et l'indice 2 à celle se propageant à la fréquence  $f_2$ .

Cherchons alors les solutions aux ordres  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^2$  du potentiel de vitesses et de la surface libre pour le cas d'une profondeur infinie.

Comme précédemment (voir section 3.1.2), les expressions de  $\Phi$  et  $\eta$  sont alors recherchées en résolvant successivement les équations aux ordres  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2$ .

À l'ordre  $\varepsilon$ , on détermine  $\phi_1$  à partir des équations (3.30),(3.25) et de l'expression de  $\eta_1$ . Après calculs, on obtient :

$$\Phi_1(x, z, t) = \frac{a_1 \omega_1}{k_1} e^{k_1 z} \cos \varphi_1 + \frac{a_2 \omega_2}{k_2} e^{k_2 z} \cos \varphi_2 \quad (3.77)$$

avec  $\varphi_1 = \omega_1 t - k_1 x$  et  $\varphi_2 = \omega_2 t - k_2 x$ .

À l'ordre  $\varepsilon^2$ , on résout le système d'équations (3.24), (3.25),(3.28) et (3.31). En remplaçant  $\eta_1$  et  $\phi_1$  par leurs expressions respectives (3.76) et (3.77), on trouve après calculs :

$$\Phi_2(x, z, t) = \frac{2a_1 a_2 \omega_1 \omega_2 (\omega_1 - \omega_2)}{|\omega_1^2 - \omega_2^2| - (\omega_1 - \omega_2)^2} e^{|k_1 - k_2|z} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (3.78)$$

puis,

$$\eta_2(x, t) = \left[ \frac{4\sqrt{k_1 k_2}(\sqrt{k_1} - \sqrt{k_2})^2}{(\sqrt{k_1} - \sqrt{k_2})^2 - |k_1 - k_2|} - 2\sqrt{k_1 k_2} + k_1 + k_2 \right] \frac{a_1 a_2}{2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{a_1 a_2}{2} (k_1 + k_2) \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{a_1^2}{2} k_1 \cos 2\varphi_1 - \frac{a_2^2}{2} k_2 \cos 2\varphi_2 \quad (3.79)$$

\* Remarque :

On remarque que les termes du second ordre sont proportionnels à  $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$  pour le potentiel des vitesses, et  $\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$ ,  $\cos 2\varphi_1$  et  $\cos 2\varphi_2$  pour la déformée de la surface libre. D'un point de vue du traitement de Fourier, cela signifie que le spectre de Fourier de la déformée de la surface libre  $\eta(x, t)$  fera apparaître des pics harmoniques aux fréquences fondamentales  $f_1$  et  $f_2$ , harmoniques  $2f_1$  et  $2f_2$ , et également à la fréquence  $f_1 + f_2$  tandis que le potentiel des vitesses  $\phi(x, z, t)$  n'en fera apparaître qu'à la fréquence  $f_1 - f_2$  (en plus des fondamentaux) (Fig. 3.1).

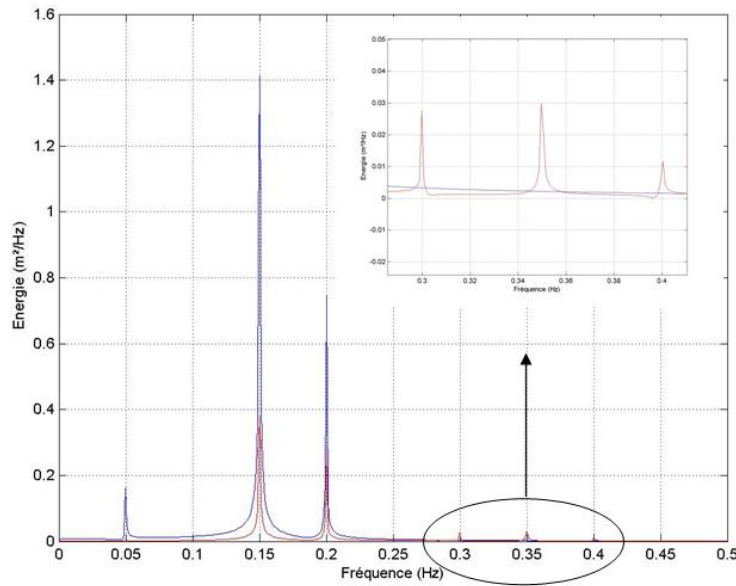


FIG. 3.1 – Spectre d'énergie obtenue à partir de la déformée de la surface libre (rouge) et du potentiel des vitesses (bleu) pour deux ondes se propageant aux fréquences 0.15 et 0.2 Hz.

### 3.3 Houle réelle et analyse spectrale

#### Houle réelle

De façon générale, la houle réelle est représentée par une superposition de houles d'Airy (approximation linéaire) :

$$\eta(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t - k_n \cos \theta_n x - k_n \sin \theta_n y + \varphi_n) \quad (3.80)$$

où  $\vec{k}_n(k_n \cos \theta; k_n \sin \theta)$ ,  $\theta$  angle d'incidence par rapport à l'axe  $0x$ , et  $(\omega_n, k_n)$  vérifient (3.12). En conséquence, le potentiel des vitesses et ses dérivées peuvent être également exprimés selon une série de composantes monochromatiques indépendantes. Les houles réelles sont caractérisées par leur énergie et sa répartition. On définit alors leur spectre (discret) de densité d'énergie (EDS : Energy Density Spectrum)  $E(f)$  (en  $m^2/Hz$ ), correspondant à l'énergie divisée par  $\rho g$  dans l'intervalle de fréquence  $[f, f + df]$  :

$$E(f)df = \frac{1}{\rho g} \left[ \sum_n e_n \right]_f^{f+df} = \frac{1}{2} \left[ \sum_n a_n^2 \right]_f^{f+df} \quad (3.81)$$

où  $e_n = \frac{1}{2} \rho g a_n^2$  est l'énergie pour la composante  $n$  donnée.

L'énergie totale  $E_0$  est obtenue après sommation sur tout le spectre d'énergie et est donnée par :

$$E_0 = \int_0^{+\infty} 2S(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)df = m_0 \quad (3.82)$$

où  $S(f)$  est appelée la fonction densité spectrale. C'est une fonction paire réelle. Le spectre directionnel de la houle  $E_d(f, \theta)$  s'écrit :

$$E_d(f, \theta) = S(f)D(\theta, f) \quad (3.83)$$

où  $D$  est la répartition angulaire, dépendante de la fréquence et normalisée sur l'intervalle  $[-\pi, +\pi]$ .

Les paramètres directionnels peuvent être déduits des coefficients de Fourier de la fonction de distribution angulaire  $D(\theta, f)$  à fréquence donnée (pour plus de détails, voir Stansberg (2002) ). On suppose qu'à fréquence donnée, la distribution

angulaire de l'énergie  $D(\theta)$  peut être écrite en terme de ses coefficients de Fourier complexes  $C_m$  :

$$D(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} C_m e^{im\theta} \quad (3.84)$$

La direction moyenne de propagation  $\theta_0$  est alors égale à l'angle du premier coefficient complexe  $C_1$ . Les coefficients  $C_i$ ,  $i \geq 1$  peuvent être calculés en fonction du nombre de données disponibles.

### Analyse spectrale

La majeure partie des techniques d'analyses des enregistrements des appareils de mesures sont basées sur une analyse spectrale. La méthode la plus utilisée est la Transformée de Fourier. Celle-ci permet de représenter la densité spectrale d'énergie en fonction de la fréquence. On peut ainsi obtenir l'amplitude, la fréquence et la phase de chaque composante du signal, en particulier celles du pic d'énergie.

L'analyse spectrale d'une série de données temporelles,  $x(t)$ , comprenant  $N$  données mesurées avec un pas de temps  $\Delta t$  (soit une fréquence d'échantillonnage  $f = 1/\Delta t$ ) pendant un intervalle de temps  $T$ . L'estimation du spectre non directionnel se fait le plus généralement par Transformée de Fourier rapide (FFT, Fast Fourier Transform). La transformée de Fourier  $X(f)$  d'une séquence  $x(t)$  est :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (3.85)$$

En utilisant le carré des modules de la transformée de Fourier, on obtient la fonction de densité spectrale  $S(f)$  :

$$S(f) = X(f)X^*(f) = |X(f)|^2 \quad (3.86)$$

où  $X^*(f)$  représente le complexe conjugué.

Pour une séquence de  $N$  données, la FFT de la séquence  $x$ ,  $X = FFT(x)$ , peut être calculée de la façon suivante :



$$X(k) = \sum_{j=1}^N x(j) \omega_N^{(j-1)(k-1)} \quad (3.87)$$

où  $\omega_N = e^{-2i\pi/N}$  est la racine  $N^{ieme}$  de l'unité. Après FFT de la séquence discrète  $x(t)$ , on obtient alors pour la bande de fréquence  $[f_i - \Delta f/2, f_i + \Delta f/2]$ , de largeur  $\Delta f = 1/(N\Delta t)$ , et centrée sur  $f_i = [i - 1] \frac{1}{N\Delta t}$  le module (amplitude) et la phase pour  $f_i$  sont respectivement :

$$a_i = \frac{2}{N} |X_i| \quad (3.88)$$

$$\varphi_i = \arg(X_i) \quad (3.89)$$

et la formulation de l'énergie peut s'écrire :

$$E(f_i) = \frac{1}{2} a_i^2 = \frac{2}{N^2} |X_i|^2 \quad (3.90)$$

où  $E(f_i)$  est un estimateur de la densité  $S(f)$ . Cependant, on peut montrer que ce n'est pas un estimateur consistant de la fonction de densité d'énergie  $S(f)$ , et des techniques de lissage sont donc nécessaires. Deux types de moyennes peuvent être utilisés : les moyennes sur les fréquences, ou sur les énergies.

Les moyennes sur les fréquences (Daniells 1946) sont obtenues en pondérant l'énergie d'une bande spectrale avec les  $(2m + 1)$  valeurs voisines. La fonction de densité d'énergie est alors estimée par :

$$W(f_i) = \frac{1}{2m + 1} \sum_{j=-m}^{j=+m} E(f_{i+j}) \quad (3.91)$$

Une valeur classique est  $m = 1$ , elle correspond à la fenêtre de Hamming.

Une méthode utilisée classiquement sur les moyennes sur des segments est celle proposée par Welch (1967).

Ces techniques sont discutées en détails dans Rodriguez et al. (1999).

La largeur du spectre  $\varepsilon$  (Cartwright and Longuet-Higgins 1956) s'exprime de

la façon suivante :

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}} \quad (3.92)$$

avec  $m_n$  les moments d'ordres  $n$  tels que :

$$m_n = \int_0^\infty f^n S_f(f) df \quad (3.93)$$

Le spectre est dit étroit lorsque la largeur de spectre  $\varepsilon$  est très petite ( $\varepsilon \leq 0.4$ ), ce qui est généralement le cas pour les spectres de houle au large et  $\varepsilon$  tend vers 1 lorsqu'il s'agit d'un spectre large.

Les principaux paramètres réduits sont (Rodriguez et al. 1999) :

- la période de pic  $T_p$  :

$$T_p = \frac{1}{f_p} \quad (3.94)$$

- la hauteur significative :

$$H_s = 4\sqrt{m_0} \quad (3.95)$$

\* Remarque :

La hauteur significative permet de caractériser les trains de houles par la hauteur des plus grandes vagues. Ce sont celles que note un observateur et qui sont prises en compte pour le dimensionnement des ouvrages en mer. En profondeur infinie,  $H_s \approx H_{1/3}$  où  $H_{1/3}$  représente la hauteur moyenne du tiers supérieur du train de houles obtenu après une analyse statistique.

Pour des houles multidirectionnelles, on peut définir le spectre énergétique dans chacune des directions moyennes. En particulier, les spectres des houles incidente et réfléchie peuvent être différenciés.

### 3.4 Méthodes de calcul des caractéristiques de la houle à partir de données de pression et de vitesses

Les instruments de mesures utilisés nous fournissent des données de vitesses et de pression :  $u^{(m)}, v^{(m)}, w^{(m)}$  et  $p^{(m)}$  (où  $(m)$  fait référence aux grandeurs mesurées). Nous voulons, à partir de ces données, retrouver les grandeurs caractéristiques de la houle à savoir l'amplitude de l'onde incidente  $a_i$ , sa fréquence  $f$  et l'amplitude de l'onde réfléchie  $a_r$ . On se limitera alors pour le calcul des houles à l'approche "linéaire" pour  $u$ ,  $w$  et  $p$ . Les effets non linéaires seront discutés dans la section 4.1 en fonction des mesures analysées par Transformée de Fourier.

Les mesures sont effectuées à une profondeur donnée  $z_v$  pour les vitesses et  $z_p$  pour la pression. Par transformée de Fourier rapide, on obtient, pour chaque composante fréquentielle  $f_i$ ,  $u^{(m)}$ ,  $w^{(m)}$ ,  $p^{(m)}$ , écrits sous la forme (on omet pour simplifier l'indice  $i$ ) :

$$u^{(m)} = |u| e^{i\varphi_u} \quad (3.96)$$

$$w^{(m)} = |w| e^{i\varphi_w} \quad (3.97)$$

$$p^{(m)} = |p| e^{i\varphi_p} \quad (3.98)$$

On en déduit donc  $k$ ,  $\omega$  et  $a$  à l'aide des expressions du champ de vitesses et de pression définies dans le chapitre 3.1. Ainsi, on remarque que dans le cas d'une onde progressive, un seul paramètre suffit pour retrouver les grandeurs caractéristiques de la houle. Or, en milieu côtier, il peut être intéressant d'avoir une information sur le taux d'onde stationnaire. En effet, pour des plages de forte pente, ou en présence de structures, l'onde est partiellement réfléchie vers le large. Les mesures synchronisées de vitesses et de pression permettent d'obtenir le coefficient de réflexion à partir de deux des trois paramètres.

Nous présentons donc ici les méthodes de calcul basées successivement sur les hypothèses d'onde progressive et d'onde partiellement stationnaire en se limitant au calcul minimal (le nombre d'inconnues est égal au nombre de mesures) ; pour

une meilleure précision, des méthodes par moindres carrés peuvent être envisagées. Puis des méthodes de calcul sont présentées pour l'étude de houle partiellement stationnaire en présence de courant, et enfin pour des houles réelles.

### 3.4.1 Onde progressive

On se place dans le cas d'une onde se propageant dans un sens donné, soit :

$$\eta = ae^{i(\omega t - kx)} \quad (3.99)$$

Le champ de vitesses et de pression est donné par les équations (3.18), (3.19) et (3.20). Et on résout successivement les équations :

$$\begin{aligned} u_{theorique}(z_v) &= u^{(m)} \\ w_{theorique}(z_v) &= w^{(m)} \\ p_{theorique}(z_p) &= p^{(m)} \end{aligned} \quad (3.100)$$

Par transformée de Fourier, on obtient pour chaque composante fréquentielle  $f_i$ , les amplitudes  $|u|$ ,  $|w|$  et  $|p|$ .

L'amplitude  $a$  peut être définie soit en fonction de l'amplitude de  $u$  :

$$a = \frac{|u|}{c_v} \quad (3.101)$$

où  $c_v = \frac{\omega \cosh[k(z_v+h)]}{\sinh(kh)}$ .

soit en fonction de l'amplitude de  $w$  :

$$a = \frac{|w|}{s_v} \quad (3.102)$$

où  $s_v = \frac{\omega \sinh[k(z_v+h)]}{\sinh(kh)}$ .

soit en fonction de l'amplitude de  $p$  :

$$a = \frac{k|p|}{c_p} \quad (3.103)$$

$$\text{où } c_p = \frac{\rho\omega^2 \cosh k(z_p+h)}{k \sinh(kh)}.$$

Le nombre d'onde  $k$  est calculé à partir de la relation de dispersion en profondeur finie :  $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ .

### 3.4.2 Onde partiellement stationnaire

Désormais, on considère qu'il y a de la réflexion, ainsi  $\eta$  s'écrit sous la forme :

$$\eta = a_i e^{i(\omega t - kx)} + a_r e^{i(\omega t + kx + \varphi)} \quad (3.104)$$

où  $a_i$  est l'amplitude de l'onde incidente,  $a_r$  l'amplitude de l'onde réfléchie et  $\varphi$  le déphasage à l'origine.

Le potentiel de vitesses devient alors :

$$\Phi = (a_i e^{i(\omega t - kx)} + a_r e^{i(\omega t + kx + \varphi)}) \frac{i\omega \cosh[k(z+h)]}{k \sinh(kh)} \quad (3.105)$$

Et le champ de vitesses et de pression :

$$u = (-a_i e^{i(\omega t - kx)} + a_r e^{i(\omega t + kx + \varphi)}) c_v \quad (3.106)$$

$$w = (a_i e^{i(\omega t - kx)} + a_r e^{i(\omega t + kx + \varphi)}) i s_v \quad (3.107)$$

$$p = (a_i e^{i(\omega t - kx)} + a_r e^{i(\omega t + kx + \varphi)}) c_p \quad (3.108)$$

Nous avons désormais deux inconnues  $a_i$  et  $a_r$ , il nous faut donc deux équations en utilisant le système (3.100), soit :

$$-a_i e^{i(\omega t - kx)} + a_r e^{i(\omega t + kx + \varphi)} = \frac{|u| e^{i\varphi_u}}{c_v} \quad (3.109)$$

$$a_i e^{i(\omega t - kx)} + a_r e^{i(\omega t + kx + \varphi)} = \frac{|w| e^{i\varphi_w}}{i s_v} \quad (3.110)$$

$$a_i e^{i(\omega t - kx)} + a_r e^{i(\omega t + kx + \varphi)} = \frac{-|p| e^{i\varphi_p}}{c_p} \quad (3.111)$$

On remarque que les équations (3.110) et (3.111) sont redondantes, on peut alors utiliser soit les équations (3.109) et (3.110) soit les équations (3.109) et

(3.111) pour le calcul de  $a_i$  et  $a_r$ .

Après combinaison de (3.109) et (3.110), on obtient :

$$2a_i e^{i(\omega t - kx)} = \left( \frac{|u| e^{i\varphi_u}}{c_v} + \frac{|w| e^{i\varphi_w}}{s_v} \right) \quad (3.112)$$

En prenant le module de (3.112) et sachant que  $a_i = |a_i e^{i(\omega t - kx)}|$ , on obtient :

$$a_i = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{|u|}{c_v} \right)^2 + \left( \frac{|w|}{s_v} \right)^2 + \frac{2|u||w|}{c_v s_v} \sin(\varphi_w - \varphi_u) \right]^{1/2} \quad (3.113)$$

On procède de la même façon pour le calcul de  $a_r$ ,

$$a_r = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{|u|}{c_v} \right)^2 + \left( \frac{|w|}{s_v} \right)^2 - \frac{2|u||w|}{c_v s_v} \sin(\varphi_w - \varphi_u) \right]^{1/2} \quad (3.114)$$

Le coefficient de réflexion  $R$  est donné par :

$$R = \frac{a_r}{a_i} \quad (3.115)$$

Après combinaison des équations (3.109) et (3.111), et en procédant de la même façon que ci-dessus, on en déduit  $a_i$  :

$$a_i = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{|u|}{c_v} \right)^2 + \left( \frac{|p|}{c_p} \right)^2 + \frac{2|u||p|}{c_v c_p} \cos(\varphi_u - \varphi_p) \right]^{1/2} \quad (3.116)$$

et  $a_r$ ,

$$a_r = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{|u|}{c_v} \right)^2 + \left( \frac{|p|}{c_p} \right)^2 - \frac{2|u||p|}{c_v c_p} \cos(\varphi_u - \varphi_p) \right]^{1/2} \quad (3.117)$$

### 3.4.3 Influence du courant

On s'intéresse ici à l'influence du courant. L'expression de la surface libre  $\eta$  est donnée par :

$$\eta(x, t) = a_i e^{i(\omega t - k^- x)} + a_r e^{i(\omega t + k^+ x + \varphi)} \quad (3.118)$$

où  $k^+$  et  $k^-$  correspondent au nombre d'onde respectivement de l'onde incidente et réfléchie et vérifient la relation de dispersion suivante :

$$(\omega \pm |U|k^\pm)^2 = (\sigma^\pm)^2 = gk^\pm \tanh(k^\pm h) \quad (3.119)$$

et le potentiel de vitesses devient :

$$\phi(x, z, t) = \frac{ia_i c_v^-}{k^-} e^{i(\omega t - k^- x)} + \frac{ia_r c_v^+}{k^+} e^{i(\omega t + k^+ x + \varphi)} + Ux \quad (3.120)$$

où  $c_v^\pm = \frac{\sigma^\pm \cosh(K^\pm)}{\sinh(k^\pm h)}$ ,  $K^\pm(z) = k^\pm(z + h)$  et  $U$ , courant uniforme sur la verticale se propageant dans la même direction que l'onde incidente.

Le champ de vitesses est encore donné par  $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$ , et la pression par  $p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ .

On cherche à résoudre le système d'équations (3.100), en combinant soit les données de vitesse horizontale et de pression soit les données de vitesses horizontale et verticale.

A partir de  $u$  et  $w$ , les amplitudes des ondes incidente et réfléchie sont données par :

$$a_i = C_{uw} \left[ (s_v^+ |u|)^2 + (c_v^+ |w|)^2 + 2s_v^+ c_v^+ |u||w| \sin(\varphi_w - \varphi_u) \right]^{1/2} \quad (3.121)$$

$$a_r = C_{uw} \left[ (s_v^- |u|)^2 + (c_v^- |w|)^2 - 2s_v^- c_v^- |u||w| \sin(\varphi_w - \varphi_u) \right]^{1/2} \quad (3.122)$$

avec  $C_{uw} = s_v^- c_v^+ + s_v^+ c_v^-$  et  $s_v^\pm = \frac{\sigma^\pm \sinh(K^\pm(z_v))}{\sinh(k^\pm h)}$ .

A partir de  $u$  et  $p$ , les amplitudes des ondes incidente et réfléchie s'écrivent :

$$a_i = C_{up} \left[ (c_p^+ |u|)^2 + (c_v^+ |p|)^2 + 2c_p^+ c_v^+ |u||p| \cos(\varphi_u - \varphi_p) \right]^{1/2} \quad (3.123)$$

$$a_r = C_{up} \left[ (c_p^- |u|)^2 + (c_v^- |p|)^2 - 2c_p^- c_v^- |u||p| \cos(\varphi_u - \varphi_p) \right]^{1/2} \quad (3.124)$$

avec  $C_{up} = c_p^- c_v^+ + c_p^+ c_v^-$ , et  $c_p^\pm = \frac{\rho \omega \sigma^\pm \cosh(K^\pm(z_p))}{k^\pm \sinh(k^\pm h)}$ .

### 3.4.4 Houle réelle

Lorsque l'on dispose de données de vitesse horizontale, l'angle d'incidence "moyen"  $\theta$  peut être calculé pour chaque composante spectrale.

$$\theta(f) = \arctan \left( \frac{|v|}{|u|} \right) \text{ si } |u| \neq 0 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ si } |u| = 0 \quad (3.125)$$

La vitesse horizontale  $u_h$  (pour une fréquence  $f$  donnée) dans la direction  $\theta$  est donnée par  $|u_h|^2 = |u|^2 + |v|^2$  :

$$u_h = \sqrt{|u|^2 + |v|^2} \quad (3.126)$$

Le problème est désormais bidimensionnel dans le plan ( $xoz$ ) où  $u_h$  est dans la direction  $x$  donné par  $\theta$ . Cependant, si on fait l'hypothèse d'une onde partiellement stationnaire, l'angle d'incidence de l'onde réfléchie n'est pas forcément connu.

Pour une houle d'incidence oblique, une hypothèse doit être faite sur la direction de l'onde incidente ou sur l'angle entre les ondes incidente et réfléchie (Walton 1992; Drevard et al. 2003; Certain et al. 2005). Ainsi, deux cas de figure peuvent être envisagés. Le premier correspond au cas où seule la direction de l'onde incidente est connue, et le deuxième où la direction de la normale à la plage par rapport au Nord est connue en plus de la direction de l'onde incidente.

Dans le premier cas, une hypothèse doit être faite sur la direction de l'onde réfléchie. On suppose généralement que l'onde réfléchie se propage dans la direction opposée à l'onde incidente,  $\theta_r = \pi + \theta_i$ . Ce qui est en particulier le cas



pour des plages de pente faible où la houle atteint la plage avec une direction quasi-normale. Les amplitudes des ondes incidente et réfléchie sont alors données par leurs expressions trouvées dans le paragraphe 3.4.2, ou 3.4.3 en présence de courant.

Dans le deuxième cas, la normale à la plage et la direction de propagation de l'onde incidente sont connues. On suppose alors que la direction de l'onde réfléchie est donnée par  $\theta_r = \pi - \theta_i$  (Fig. 3.2).

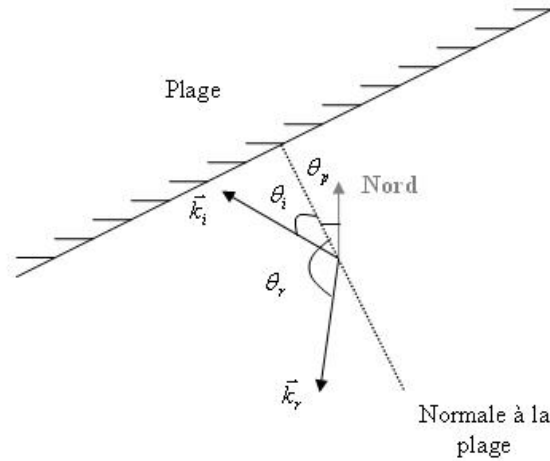


FIG. 3.2 – Direction de propagation de l'onde incidente et réfléchie par rapport à la normale à la plage.

La surface libre s'écrit alors :

$$\eta(x, y, t) = a_i e^{i(\omega t - k \cos \theta x - k \sin \theta y)} + a_r e^{i(\omega t + k \cos \theta x - k \sin \theta y + \varphi)} \quad (3.127)$$

où  $\theta = \theta_i$ , direction de propagation de l'onde incidente par rapport à la normale à la plage.

En résolvant le système d'équations (3.100), l'amplitude de l'onde incidente et réfléchie est donnée par :

- à partir des données de vitesse horizontale et de pression :

$$a_i = C_{up} \left[ \left( \frac{|u_h|c_p^+}{\cos\theta} \right)^2 + (|p|c_v^+)^2 + \frac{2c_p^+c_v^+|u_h||p|}{\cos\theta} \cos(\varphi_u - \varphi_p) \right]^{1/2} \quad (3.128)$$

$$a_r = C_{up} \left[ \left( \frac{|u_h|c_p^-}{\cos\theta} \right)^2 + (|p|c_v^-)^2 - \frac{2c_p^-c_v^-|u_h||p|}{\cos\theta} \cos(\varphi_u - \varphi_p) \right]^{1/2} \quad (3.129)$$

- à partir des données de vitesses horizontale et verticale :

$$a_i = C_{uw} \left[ \left( \frac{s_v^+|u_h|}{\cos\theta} \right)^2 + (c_v^+|w|)^2 + \frac{2s_v^+c_v^+|u_h||w|}{\cos\theta} \sin(\varphi_w - \varphi_u) \right]^{1/2} \quad (3.130)$$

$$a_r = C_{uw} \left[ \left( \frac{s_v^-|u_h|}{\cos\theta} \right)^2 + (c_v^-|w|)^2 - \frac{2s_v^-c_v^-|u_h||w|}{\cos\theta} \sin(\varphi_w - \varphi_u) \right]^{1/2} \quad (3.131)$$

### 3.4.5 Limites d'applicabilité

Si on considère l'hypothèse d'une onde progressive, l'amplitude totale de l'onde incidente peut être calculée soit à partir du champ de vitesses horizontale  $u^{(m)}$  ou verticale  $w^{(m)}$ , soit à partir du champ de pression  $p^{(m)}$ . Cependant, si l'onde est partiellement stationnaire, l'amplitude totale de l'onde (amplitudes des ondes incidente plus réfléchie) varie entre  $a_i - a_r$  et  $a_i + a_r$ . Cela peut impliquer alors une erreur maximum de  $R$  entre l'amplitude réelle de l'onde incidente et l'amplitude obtenue à partir de l'hypothèse d'une onde progressive. Cela correspond à une erreur maximum de  $R^2 + 2R$  en énergie. Pour avoir des résultats cohérents, on devra vérifier :

$$\left| \frac{a_p - a_i}{a_i} \right| \leq |R| \quad (3.132)$$

où  $a_p$  correspond à l'amplitude calculée à partir de l'hypothèse d'une onde progressive et  $a_i$  à l'amplitude de l'onde incidente obtenue à partir de l'hypothèse d'une onde partiellement stationnaire.

Si aucune réflexion est observée, les amplitudes obtenues à partir des deux différentes hypothèses doivent être égales.

# Chapitre 4

## Applications

### 4.1 Mesures en bassin pour l'étude des effets non linéaires

Cette partie consiste à étudier les capacités d'un appareil de type PUVW à mesurer les caractéristiques d'une houle partiellement stationnaire en bassin et d'estimer les effets non linéaires (Drevard et al. 2003).

#### 4.1.1 Dispositif expérimental

Les mesures ont été réalisées dans le bassin à houle de l'ISITV (Fig. 4.1). Ses dimensions sont de 10 m de long, 1,20 m de profondeur et 3 m de large. A une extrémité du bassin, un batteur à houle permet de générer des houles régulières ou aléatoires à partir des spectres de type Pierson-Moskovitz ou JONSWAP (Hasselmann et al. 1973). Elles sont unidirectionnelles dans le sens longitudinal, d'une hauteur maximale crête à creux de 0.2 m avec une période comprise entre 0.3 et 3 s. A l'autre extrémité du bassin se trouve une plage parabolique recouverte d'un caillebotis jouant le rôle d'un amortisseur de houle. L'inclinaison de la plage permet d'obtenir différents coefficients de réflexion.

Les essais ont été réalisés pour des houles régulières avec le dispositif complet de l'ADV (la tête mesurant les trois composantes de vitesses et le corps mesurant la pression) et trois sondes à houle résistives synchronisées (Fig. 4.2). Cependant, la sonde 3 nous a posé problème tout au long de l'expérience et ses résultats ne sont pas exploitables. La profondeur d'eau est de  $h = 1.06$  m. Le corps du vélocimètre



FIG. 4.1 – Bassin d'essai de l'ISITV

est posé sur le fond à l'intérieur d'une cage en acier pour qu'il reste totalement immobile. Le capteur de pression est donc situé à une profondeur  $z_p = 1.01$  m de la surface libre. La tête est située sur le bord du bassin. Le volume d'échantillonnage est à une profondeur  $Z_v = 0.317$  m, et la tête est verticale, dirigée vers le haut.

L'ensemble des séries a nécessité un ensemencement de particules de sable fin régulier pour avoir un écho suffisamment important pour les mesures de vitesses par effet Doppler. Chaque série de mesures, effectuée à une fréquence d'échantillonnage de 32 Hz, a une durée minimale de 2 minutes .

Ces résultats ont été étudiés selon deux hypothèses : onde progressive (voir paragraphe 3.4.1) puis onde partiellement stationnaire (voir paragraphe 3.4.2) pour deux configurations : "profondeur infinie" et "profondeur intermédiaire", présentés ci-après.

Les mesures des hauteurs d'eau sont obtenues par des sondes à houle résistives. Leurs signaux varient de manière linéaire avec le niveau de la surface libre. La conversion entre la tension mesurée et la hauteur d'eau s'obtient par une calibration préalable des sondes que l'on doit effectuer avant chaque série de mesures.

La séparation des ondes incidente et réfléchie s'effectue à partir de deux mesures simultanées de la déformée de la surface libre en deux points 1 et 2 distants de  $\Delta x$ . Les amplitudes des ondes incidente  $a_i$  et réfléchie  $a_r$  sont alors données par :

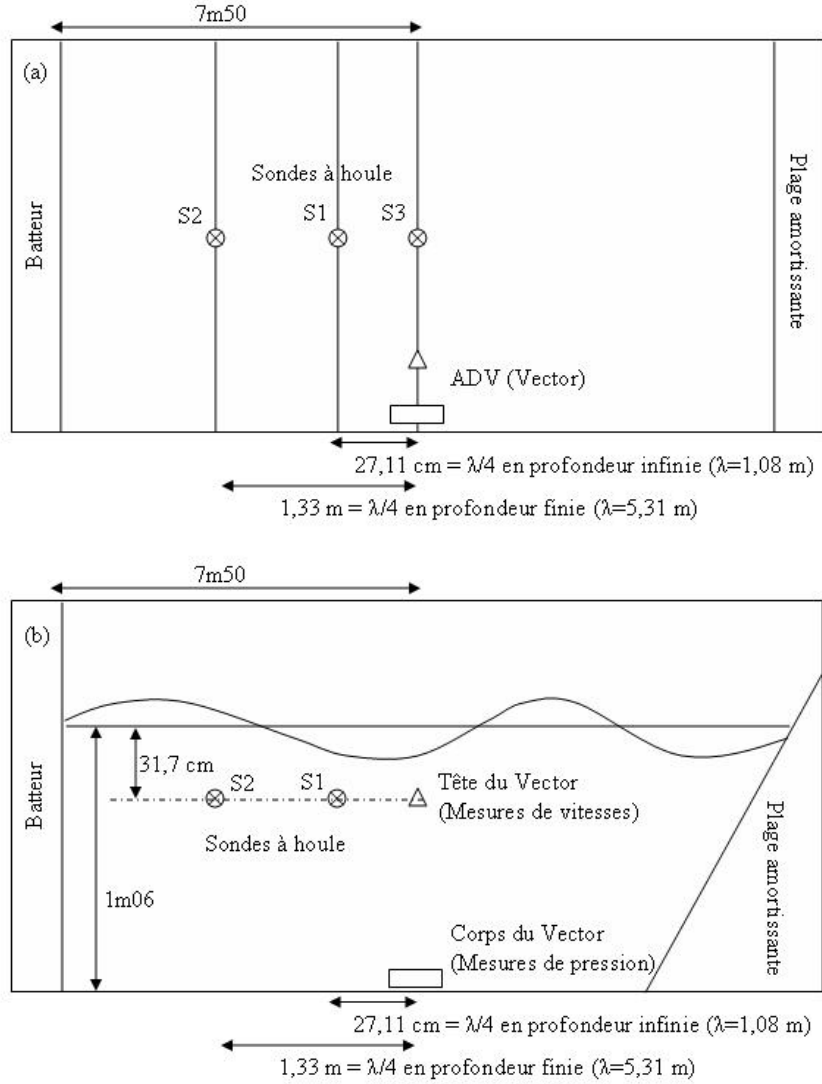


FIG. 4.2 – Dispositif expérimental pour les mesures de houle en bassin : vue du dessus (a) et vue transversale (b).

$$a_i = \frac{[a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\varphi_{12} + \Delta)]^{1/2}}{2 |\sin \Delta|} \quad (4.1)$$

$$a_r = \frac{[a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\varphi_{12} - \Delta)]^{1/2}}{2 |\sin \Delta|} \quad (4.2)$$

où  $\varphi_{12}$  est le déphasage entre les deux sondes et  $\Delta = -k \Delta x$ . Le coefficient de réflexion est défini comme le rapport de  $a_r$  sur  $a_i$ .

## 4.1.2 Résultats

### Profondeur infinie

L'exemple étudié dans cette partie est obtenu avec les caractéristiques du batteur suivantes :  $f = 1.1$  Hz,  $\lambda = 1.29$  m et  $a = 0.03$  m.

Une représentation temporelle des vitesses  $u$  et  $w$  nous donne une bonne information sur le mouvement (Fig. 4.3).

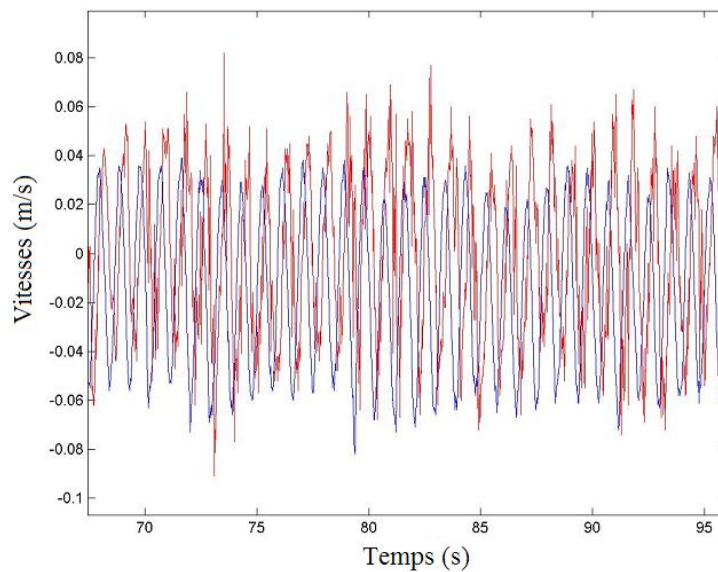


FIG. 4.3 – Signal temporel obtenu à partir des données de vitesses  $u$  (rouge) et  $w$  (bleu) pour le cas de profondeur infinie.

On observe que l'amplitude de la vitesse  $u$  (sens de l'écoulement) est environ égale à l'amplitude  $w$  ce qui correspond aux caractéristiques de profondeur infinie pour une onde progressive. En effet, dans ces conditions les particules fluides décrivent un cercle.

Pour analyser ces vitesses et pour retrouver les grandeurs caractéristiques de la houle, nous avons vu précédemment qu'une méthode était de calculer la transformée de Fourier de ces signaux (Fig. 4.4). Nous avons également utilisé cette méthode pour les ondes monochromatiques (voir paragraphe 4.2.3).

On trouve un pic à une fréquence de 1,1 Hz pour les vitesses  $u$  et  $w$  (Fig. 4.4). Le capteur de pression étant posé au fond et sachant qu'on se trouve en cas de profondeur infinie, il ne peut pas "voir" la surface libre. Pour qu'il puisse mesurer

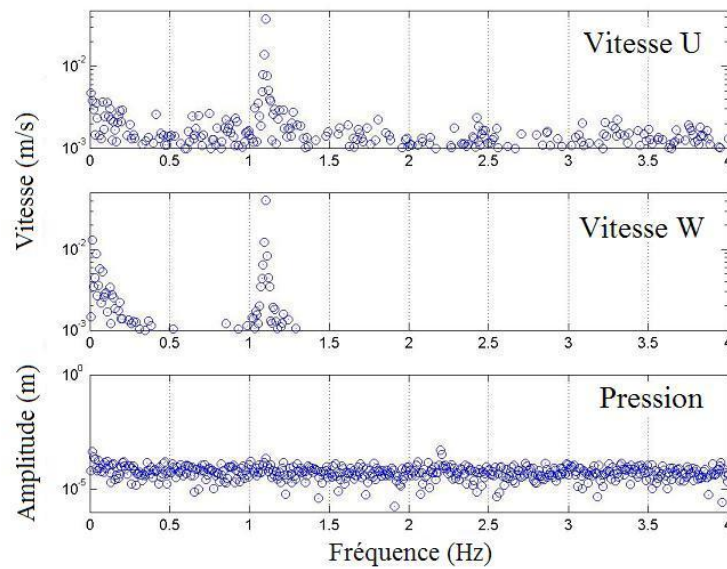


FIG. 4.4 – Spectres de la déformée de la surface libre obtenus à partir des données de vitesses et de pression de l'ADV.

les grandeurs caractéristiques de la houle, il faut qu'il soit placé à une distance maximale de la surface libre inférieure à  $\frac{\lambda}{2}$ .

Quant à la transformée de Fourier des signaux des sondes à houle, elle nous donne directement l'information sur la fréquence et l'amplitude de l'onde de surface (Fig. 4.5).

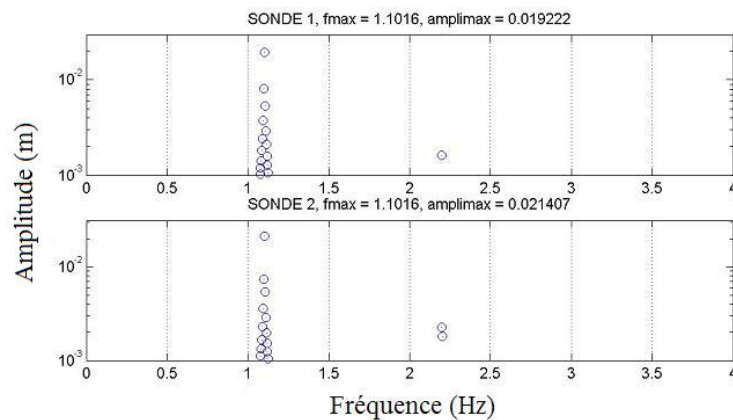


FIG. 4.5 – Spectres de la déformée de la surface libre obtenus avec les sondes résistives (S1 et S2) pour le cas de profondeur infinie.



On constate la présence de pics aux fréquences harmoniques  $2f$  et  $3f$  qu'on ne voyait pas apparaître lors de la transformée de Fourier des vitesses. En effet, en profondeur infinie, d'un point de vue du traitement de Fourier, pour une onde de fréquence  $f$ , le spectre de Fourier fait apparaître des pics harmoniques pour la déformée  $\eta$  et la pression  $p$ , alors que les spectres des vitesses ne font apparaître que la fréquence du fondamental  $f$  (voir paragraphe 3.1.2, Stokes 3ème ordre en profondeur infinie). Ces observations sont également valables pour une onde partiellement stationnaire (section 3.2.1).

Les tableaux (4.1) et (4.2) récapitulent les résultats obtenus à partir des données des sondes à houle et de l'ADV avec l'hypothèse d'une onde progressive puis d'une onde partiellement stationnaire.

	sondes		ADV		
	sonde 1	sonde 2	vitesse u	vitesse w	pression p
f (Hz)	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1
a (m)	0,019	0,021	0,024	0,025	/

TAB. 4.1 – Tableau récapitulatif des résultats obtenus à partir des données des sondes à houle et de l'ADV en profondeur infinie avec l'hypothèse d'une onde progressive.

	sonde 1-2	ADV u-w
f (Hz)	1,1	1,1
$a_i$ (m)	0,021	0,024
$a_r$ (m)	0,004	0,003
R (%)	17,9	10,74

TAB. 4.2 – Tableau récapitulatif des résultats obtenus à partir des données des sondes à houle et de l'ADV en profondeur infinie avec l'hypothèse d'une onde partiellement stationnaire.

Les sondes à houle sous-estiment l'amplitude de la houle ce qui explique la différence entre les coefficients de réflexion trouvés avec les sondes à houle et l'ADV.

Pour utiliser l'hypothèse "onde progressive", l'inégalité (3.132) doit être vérifiée :

\* Pour l'ADV :

$$\left| \frac{a_{p_u} - a_i}{a_i} \right| = 0 \quad \text{et} \quad R = 0.107 \quad (4.3)$$

$$\left| \frac{a_{p_w} - a_i}{a_i} \right| = 0.042 \quad (4.4)$$

\* Pour les sondes :

$$\left| \frac{a_{p_1} - a_i}{a_i} \right| = 0 \quad \text{et} \quad R = 0.179 \quad (4.5)$$

$$\left| \frac{a_{p_2} - a_i}{a_i} \right| = 0.095 \quad (4.6)$$

L'hypothèse onde progressive est alors applicable.

### Profondeur intermédiaire

L'exemple étudié dans cette partie est obtenu avec les caractéristiques du batteur suivantes :  $f = 0.5 \text{ Hz}$ ,  $a = 0.03 \text{ m}$  et  $\lambda = 5.30 \text{ m}$ .

Une représentation temporelle des vitesses nous donne une bonne information sur le mouvement (Fig. 4.6).

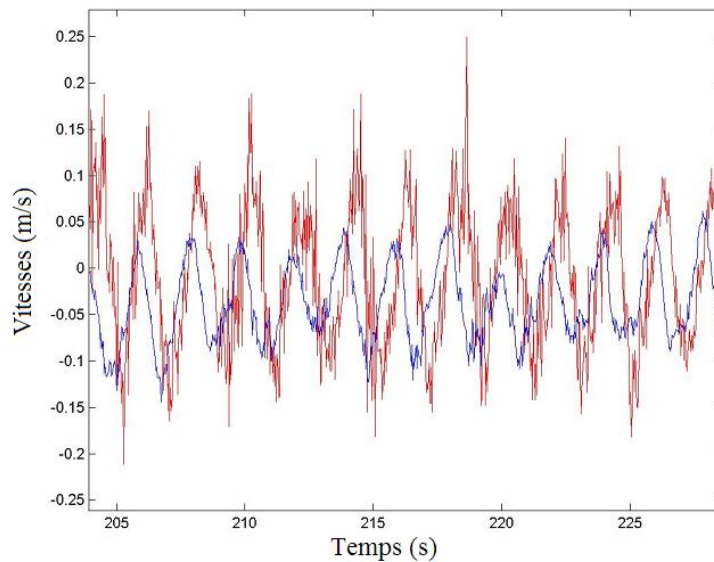


FIG. 4.6 – Signal temporel obtenu à partir des données de vitesses  $u$  (rouge) et  $w$  (bleu) pour le cas de profondeur finie.

On observe que l'amplitude de la vitesse  $u$  est supérieure à l'amplitude  $w$  ce qui correspond aux caractéristiques de profondeur finie. En effet, les particules de

la surface libre ne décrivent plus un cercle mais une ellipse de grand axe dans le sens de l'écoulement.

Une première analyse par transformée de Fourier nous donne une information supplémentaire intéressante sur le signal (Fig. 4.7).

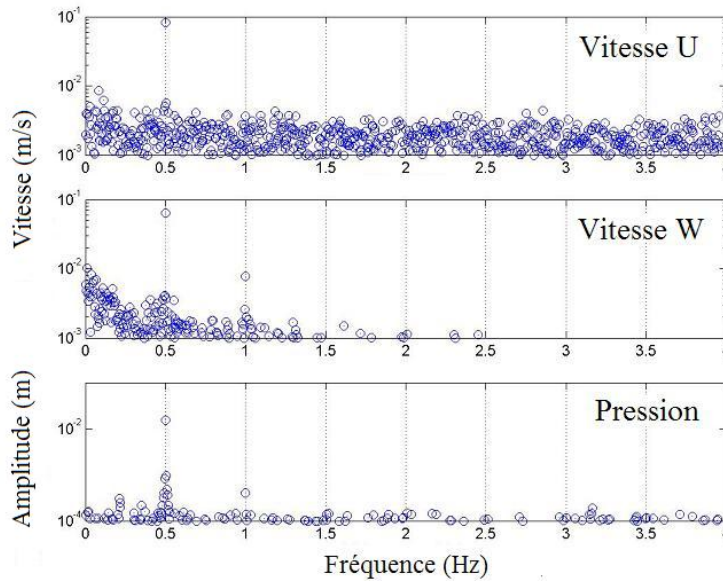


FIG. 4.7 – Spectres de la déformée de la surface libre obtenus à partir des données de vitesses et de pression de l'ADV.

On trouve une fréquence de 0.5 Hz. On remarque un pic secondaire à la fréquence  $2f$  pour la vitesse  $w$ . En effet, en théorie non linéaire (voir paragraphe 3.1.2, Stokes 2ème ordre en profondeur finie), les expressions des vitesses font apparaître des fréquences harmoniques contrairement au cas de profondeur "infinie".

On a également comparé ces données aux données des sondes à houle (Fig. 4.8).

Les tableaux (4.3) et (4.4) récapitulent les résultats obtenus à partir des données des sondes à houle et de l'ADV avec l'hypothèse d'une onde progressive puis d'une onde partiellement stationnaire.

Nous obtenons de bons résultats que ce soit avec les sondes à houle ou l'ADV. Cependant, le coefficient de réflexion à partir des données de vitesse verticale et de pression est sous-estimé. Cela peut être dû au fait que le capteur de pression est posé au fond et par conséquent la quantité mesurée reste moins importante que celle mesurée au niveau des vitesses. Lorsque le capteur de pression est positionné

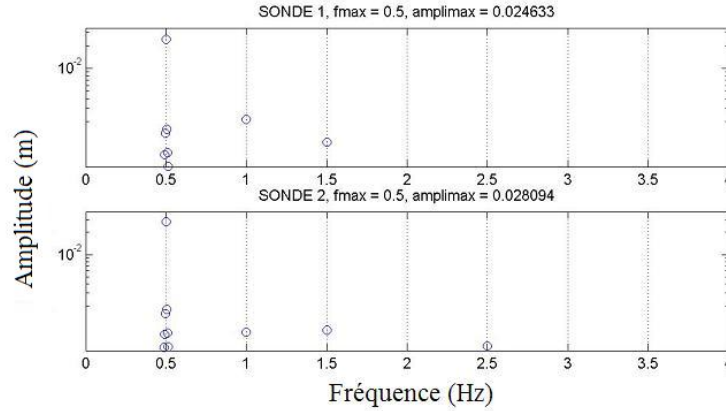


FIG. 4.8 – Spectres de la déformée de la surface libre obtenus avec les sondes résistives (S1 et S2) pour le cas de profondeur finie.

	sondes		ADV		
	sonde 1	sonde 2	vitesse u	vitesse w	pression p
f (Hz)	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
a (m)	0,025	0,028	0,029	0,033	0,028

TAB. 4.3 – Tableau récapitulatif des résultats obtenus à partir des données des sondes à houle et de l'ADV en profondeur intermédiaire avec l'hypothèse d'une onde progressive.

	sonde 1-2	ADV u-w	ADV u-p
f (Hz)	0,5	0,5	0,5
$a_i$ (m)	0,027	0,031	0,029
$a_r$ (m)	0,002	0,0023	0,0013
R (%)	7,47	7,47	4,56

TAB. 4.4 – Tableau récapitulatif des résultats obtenus à partir des données des sondes à houle et de l'ADV en profondeur intermédiaire avec l'hypothèse d'une onde partiellement stationnaire.

au fond, on utilisera plutôt les données de vitesses horizontale et verticale pour le calcul du coefficient de réflexion.

Pour utiliser l'hypothèse "onde progressive", l'inégalité (3.132) doit être vérifiée :

\* Pour l'ADV :

$$\left| \frac{a_{p_u} - a_i}{a_i} \right| = 0.06 \quad \text{et} \quad R = 0.075 \quad (4.7)$$

$$\left| \frac{a_{p_w} - a_i}{a_i} \right| = 0.06 \quad (4.8)$$

$$\left| \frac{a_{p_p} - a_i}{a_i} \right| = 0.03 \quad (4.9)$$

\* Pour les sondes :

$$\left| \frac{a_{p_1} - a_i}{a_i} \right| = 0.07 \text{ et } R = 0.075 \quad (4.10)$$

$$\left| \frac{a_{p_2} - a_i}{a_i} \right| = 0.04 \quad (4.11)$$

On constate des pics aux fréquences harmoniques  $2f$  et  $3f$ . Tout comme en profondeur infinie, la transformée de Fourier de la déformée de la surface libre fait apparaître des harmoniques (voir paragraphe 3.1.2, Stokes 2ème ordre en profondeur finie).

### 4.1.3 Conclusion

Ces expériences avaient pour objectif d'étudier les capacités de l'ADV à mesurer des houles partiellement stationnaires. Les résultats trouvés pour les deux configurations, profondeurs infinie et intermédiaire, sont en bon accord avec ceux calculés à partir des sondes à houle.

On a ainsi montré que lorsque le capteur de pression est posé au fond, les données ne seront pas exploitables en profondeur infinie. Pour une houle monochromatique, nous avons observé des pics aux fréquences harmoniques pour la surface libre et les vitesses en profondeur finie et uniquement pour la surface libre en profondeur infinie. Ce résultat est important d'un point de vue de la mesure in situ puisqu'il permet de s'affranchir du problème de mode lié et mode libre en profondeur infinie. Le mode lié correspond aux harmoniques  $2f, 3f...$  liés à la houle se propageant à la fréquence  $f$  alors que le mode libre correspond à une onde se propageant à une fréquence  $2f$ . Pour un mode lié, l'estimation de la perte d'énergie répartie sur les harmoniques pourrait être étudiée. Pour des houles spectrales, l'interaction entre les composantes spectrales est non nulle (section 3.2.2). Il serait alors intéressant de comparer la proportion de ces interactions entre les données de surface libre et de vitesses.

## 4.2 Mesures en bassin pour l'étude de l'influence du courant et applications in situ

Dans ce travail, nous avons décrit des méthodes pour la mesure de houles partiellement stationnaires en présence de courant à partir de données synchrones de vitesse et/ou de pression. Des expériences en bassin ont été menées pour des houles régulières et irrégulières en présence de courant. Les coefficients de réflexion calculés à partir des données synchrones de vitesses horizontale et verticale à partir d'un vélocimètre Doppler (ADV) et avec la méthode classique à trois sondes ont été comparés avec succès. Des applications in situ en zone de shoaling ou de déferlement sont présentées pour des courantomètres S4 (vitesse horizontale et pression) et des ADV (vitesses horizontale et verticale, pression).

PARTIALLY STANDING WAVE MEASUREMENT IN THE  
NEARSHORE IN THE PRESENCE OF CURRENT BY THE USE  
OF COINCIDENT VELOCITY AND/OR PRESSURE DATA

soumis au Journal of Atmospheric and Oceanic Technology  
Décembre 2005

DREVARD D.

*LSEET-LEPI, Université du Sud-Toulon Var, BP 132, 83957 La Garde cedex,  
France, drevard@lseet.univ-tln.fr*

REY V.

*LSEET-LEPI, Université du Sud-Toulon Var, BP 132, 83957 La Garde cedex,  
France, rey@univ-tln.fr*

FRAUNIE Ph.

*LSEET-LEPI, Université du Sud-Toulon Var, BP 132, 83957 La Garde cedex,  
France, fraunie@lseet.univ-tln.fr*

**Abstract**

In recent years, instrumentation for field flow measurements has become more and more sophisticated. In particular, local pressure and velocity are measured at frequency rates up to at least 2 Hz, that allow information on wave energy. In the present paper, methods for partially standing wave measurements in the presence of current by use of coincident measurements of both horizontal velocity and pressure or vertical velocity are described. Taking advantage of experiments carried out in an ocean wave basin for both regular and irregular waves in the presence of current, comparisons are made for reflections calculated from either coincident horizontal and vertical velocities or three gauge methods. Application to field measurements outside and in the breaking zone are then presented. It is shown that the use of coincident horizontal velocity and pressure, or coincident horizontal and vertical velocities far from the bottom, give relevant information concerning partially standing waves nearshore.

**Keywords :** water wave ; reflection ; nearshore measurements.

### 4.2.1 Introduction

For maritime navigation and offshore engineering purposes, ocean wave characteristics are generally obtained from surface buoys. In deep water, surface gravity waves in the ocean generally exhibit an energy spectrum distributed in both frequency and direction of propagation. They are characterized by parameters as the significant wave height  $H_s$  and period  $T_s$ , and the mean direction  $\theta$ , with a spreading depending on the wave age.

When waves approach coastal areas, the spreading may increase due to bottom effects, and part of the energy may also be partially reflected by bathymetric effects like steep slopes, underwater breakwaters, steep upper beaches or along-shore breakwaters. The instruments generally deployed in the coastal zone give pressure and/or velocity data based on acoustic or electromagnetic devices. In the last decades, data sampling has become more and more rapid, and a frequency sampling of at least  $2Hz$  is now classical, which allows calculation of progressive wave characteristics through either velocity or pressure measurements.

Although beaches may be classified as dissipative, reflective or intermediate (Wright & Short, 1984), the reflection is rarely measured. Walton (1992) measured wave reflection from natural beaches by use of synchronized horizontal velocity and pressure data recorded at a single point. This technique was also recently applied in laboratory experiments by use of coincident horizontal and vertical velocities (Drevard et al., 2003).

In addition in the nearshore, either tide or breaking wave induced current may be strong enough to have influence on the wave propagation. In the presence of a given current, doppler effects must be included in the technique used to separate incident and reflected waves, as done in laboratory experiments for wave reflection measurements, from three synchronized wave probes (Rey et al, 2002; Magne et al, 2005).

In the present paper, the accuracy of partially reflected wave measurement by use of synchronized horizontal velocity and pressure or vertical velocity data recorded at a single point is investigated. Data are collected by use of the now classical instruments deployed in the nearshore (Electromagnetic instrument (S4), for horizontal velocities and pressure; acoustic instrument ADV, for horizontal and vertical velocities and pressure). Comparison with results from three wave probes are made through laboratory experiments. Results in the nearshore outside the



breaking zone and in the surf zone are then presented.

After a description of the wave theory in section 2, validation tests in a wave basin are presented in section 3. In section 4, applications to the nearshore in non breaking and breaking wave conditions are presented. Discussions follow in section 5.

## 4.2.2 Wave reflection measurement

### Partially standing wave (1D case)

The surface elevation  $\eta(x, t)$  for a wave (or wave component) of frequency  $f = \omega/2\pi$  resulting from two plane waves, traveling in opposite directions along the  $x$ -axis is of the form :

$$\eta(x, t) = a_i e^{i(\omega t - k^- x)} + a_r e^{i(\omega t + k^+ x + \varphi)} \quad (4.12)$$

where  $a_i$  and  $a_r$  are complex amplitudes, and  $\varphi$  the phase lag at origin.  $k^\mp$  are the wavenumbers of the incident and reversed running waves, given by

$$(\omega \pm |U|k^\pm)^2 = (\sigma^\pm)^2 = gk^\pm \tanh(k^\pm h) \quad (4.13)$$

where  $h$  is the water depth, and  $\sigma^\pm$  are the relative frequencies in a coordinate system, traveling with velocity  $U$ .

The corresponding velocity potential is then of the form :

$$\phi(x, z, t) = \frac{ia_i c_v^-}{k^-} e^{i(\omega t - k^- x)} + \frac{ia_r c_v^+}{k^+} e^{i(\omega t + k^+ x + \varphi)} + Ux \quad (4.14)$$

with  $z$ -axis vertical upwards,  $c_v^\pm = \frac{\sigma^\pm \cosh(K^\pm)}{\sinh(k^\pm h)}$  and  $K^\pm(z) = k^\pm(z + h)$ . Velocity fields are then given by  $\vec{u}(u, w) = \vec{\nabla} \phi$ , and the pressure by  $p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ .

Measurements are made at given location  $x_0$ , at depth  $z_v$  for velocity components and  $z_p$  for pressure. Incident and reflected components are calculated by using synchronized horizontal velocity and pressure (S4), or horizontal and vertical velocities (3D Velocimeter) and the following equations may be solved :

$$u(x_0, z_v, t) = u^{(m)} \quad (4.15)$$

$$w(x_0, z_v, t) = w^{(m)} \quad (4.16)$$

$$p(x_0, z_p, t) = p^{(m)} \quad (4.17)$$

where superscript  $(m)$  indicates the measured values. After Fourier transform analysis, measured velocity components  $u^{(m)}$ ,  $w^{(m)}$  and pressure  $p^{(m)}$  can be written  $u^{(m)} = |u|e^{i\varphi_u}$ ,  $w^{(m)} = |w|e^{i\varphi_w}$ ,  $p^{(m)} = |p|e^{i\varphi_p}$ .

Eq. (4.16) and (4.17) are redundant, and incident and reflected wave amplitudes may be calculated either from the couple of data  $(u, w)$  or  $(u, p)$ .

\*From  $(u, w)$ , one obtains :

$$a_i = C_{uw} \left[ (s_v^+ |u|)^2 + (c_v^+ |w|)^2 + 2s_v^+ c_v^+ |u||w| \sin(\varphi_w - \varphi_u) \right]^{1/2} \quad (4.18)$$

$$a_r = C_{uw} \left[ (s_v^- |u|)^2 + (c_v^- |w|)^2 - 2s_v^- c_v^- |u||w| \sin(\varphi_w - \varphi_u) \right]^{1/2} \quad (4.19)$$

with  $C_{uw} = s_v^- c_v^+ + s_v^+ c_v^-$  and  $s_v^\pm = \frac{\sigma^\pm \sinh(K^\pm(z_v))}{\sinh(k^\pm h)}$ .

\*From  $(u, p)$ , one obtains :

$$a_i = C_{up} \left[ (c_p^+ |u|)^2 + (c_v^+ |p|)^2 + 2c_p^+ c_v^+ |u||p| \cos(\varphi_u - \varphi_p) \right]^{1/2} \quad (4.20)$$

$$a_r = C_{up} \left[ (c_p^- |u|)^2 + (c_v^- |p|)^2 - 2c_p^- c_v^- |u||p| \cos(\varphi_u - \varphi_p) \right]^{1/2} \quad (4.21)$$

with  $C_{up} = c_p^- c_v^+ + c_p^+ c_v^-$ ,  $c_p^\pm = \frac{\rho\omega\sigma^\pm \cosh(K^\pm(z_p))}{k^\pm \sinh(k^\pm h)}$ .

Irregular waves are considered as a linear superposition of Airy waves of frequency  $f_p$ , discrete energy density spectra (EDS) for both incident and reflected waves can be defined by  $E_{i,r}(f_p) = \frac{1}{2}a_{i,r}^2(f_p)$  (in  $m^2/Hz$ ). The smooth estimate of

the spectral density function is then

$$W(f_p) = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=-m}^{j=+m} E(f_{p+j}) \quad (4.22)$$

where  $m = 5$  for the present study.

For the monochromatic case, frequency wave is also found through Fast Fourier Transform and the reflection coefficient  $R$  is then given by  $R = \frac{|a_r|}{|a_i|}$ . Incident and reflected wave energy are calculated from an integration of the total energy spectrum between frequencies  $f_p - \frac{\Delta f}{2}$  and  $f_p + \frac{\Delta f}{2}$ , with  $f_p$  the frequency peak of the incident wave energy spectrum.

### Partially reflected wave (2D case)

In the 2D case, an assumption must be made on the direction of the incident and reflected wave components of frequency  $f$ , respectively  $\theta_i(f)$  and  $\theta_r(f)$ . For normally incident waves, reflection from the beach or a structure occurs in opposite direction, and  $\theta_r(f) = \pi + \theta_i(f)$ . The direction of propagation is then :

$$\theta(f) = \arctan\left(\frac{|v|}{|u|}\right) \text{ if } |u| \neq 0 \text{ and } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ if } |u| = 0 \quad (4.23)$$

where  $u$  and  $v$  are the horizontal wave components for the frequency  $f$ . The horizontal velocity  $u_h$  corresponding to the wave direction is then

$$u_h = \sqrt{|u|^2 + |v|^2} \quad (4.24)$$

Evidently, the calculation reduces to the 1D case. If no information on wave propagation is available, we can still assume incident and reflected waves to travel in opposite directions, with  $\theta(f)$  given by (3.125), but reflection may be underestimated. Walton (1992) calculated the reflected energy assuming a reflected wave direction given by  $\theta_r(f) = \pi - \theta_i(f)$ , when the beach shoreline is normal to the  $x$ -axis. In the presence of current, the free surface elevation can be written as :

$$\eta(x, y, t) = a_i e^{i(\omega t - k^- \cos \theta x - k^- \sin \theta x)} + a_r e^{i(\omega t + k^+ \cos \theta x - k^+ \sin \theta x + \varphi)} \quad (4.25)$$

After solving the system of equations (4.15) and (4.16), the amplitude of the incident and reflected waves are then given by :

$$a_i = C_{uw} \left[ \left( \frac{s_v^+ |u_h|}{\cos\theta} \right)^2 + (c_v^+ |w|)^2 + \frac{2s_v^+ c_v^+ |u_h| |p|}{\cos\theta} \cos(\varphi_u - \varphi_p) \right]^{1/2} \quad (4.26)$$

$$a_r = C_{uw} \left[ \left( \frac{s_v^- |u_h|}{\cos\theta} \right)^2 + (c_v^- |w|)^2 - \frac{2s_v^- c_v^- |u_h| |p|}{\cos\theta} \cos(\varphi_u - \varphi_p) \right]^{1/2} \quad (4.27)$$

From equations (4.15) and (4.17), amplitudes are given by :

$$a_i = C_{up} \left[ \left( \frac{|u_h| c_p^+}{\cos\theta} \right)^2 + (|p| c_v^+)^2 + \frac{2c_p^+ c_v^+ |u_h| |p|}{\cos\theta} \cos(\varphi_u - \varphi_p) \right]^{1/2} \quad (4.28)$$

$$a_r = C_{up} \left[ \left( \frac{|u_h| c_p^-}{\cos\theta} \right)^2 + (|p| c_v^-)^2 - \frac{2c_p^- c_v^- |u_h| |p|}{\cos\theta} \cos(\varphi_u - \varphi_p) \right]^{1/2} \quad (4.29)$$

### Test of accuracy

If we assume a progressive wave for calculation, the total amplitude is a function of either  $u^{(m)}$ ,  $w^{(m)}$ , or  $p^{(m)}$  :

$$a = a_i = \frac{|u|}{c_v^-} = \frac{|w|}{s_v^-} = \frac{|p|}{c_p^-}$$

If the wave is partially reflected, the total amplitude ranges between  $|a_i - a_r|$  and  $a_i + a_r$ , corresponding to a maximum error of  $R$  (in %) in the value of the incident wave amplitude, and of  $R^2 + 2R$  in terms of energy. To have relevant results, the following test has to be verified :

$$\left| \frac{E_p - E_i}{E_i} \right| \leq |R^2 + 2R| \quad (4.30)$$

where  $E_p$  corresponds to the energy calculated from the progressive wave assumption and  $E_i$  is the energy of the incident wave assuming a partially standing wave.

If no reflection is observed, wave amplitudes obtained in the two different assumptions may be the same. Let us note that for the  $x$ -axis oriented onshore,

if  $a_i < a_r$ , the direction for  $\theta_r$  may correspond to a wave component generated in shallow waters and propagating offshore. For progressive waves, this method overcomes the uncertainty  $\pi$  in the wave direction.

### 4.2.3 Validation from experiment with strong reflection

Measurement of wave scattering over a sinusoidal bottom in the presence of current was carried out in the Ocean Engineering basin BGO-FIRST, La Seyne-sur-Mer, France. The detailed experimental set-up is presented in Magne et al. (2005). We here focus on the wave reflection measurement upwave from the modulated bottom, on a flat section of the bottom at  $1.9m$  depth. Comparisons are made between measurements at a  $16Hz$  frequency using a method based on least squares fit to three probes (Mansard and Funke, 1980; Rey et al, 2002) and from an ADV deployed for velocity measurements at water depth  $h = 0.5m$  (see Fig. 4.9). Spacing between gauges G1 to G3 was such, that  $x_2 - x_1 = 0.8$  m,  $x_3 - x_2 = 0.45$  m, and ADV was placed at the same abscissa as G2. Experiments were carried out either without current or with a current in the incident wave direction of intensity  $U = 0.32m/s$  upstream from the modulated bottom.

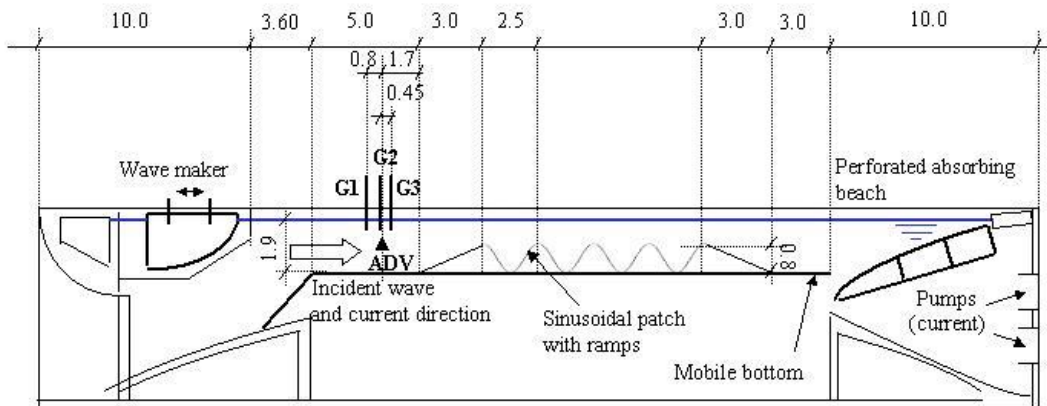


FIG. 4.9 – Experiments in BGO-FIRST.

The reflection coefficient with and without current for monochromatic waves is presented in Fig 4.10 as a function of the frequency  $f$ .

Results between wave gauges and the ADV are generally in good agreement, except for a weaker magnitude predicted by the ADV at frequency  $f = 0.52Hz$  between the two main peaks. Oscillations that are observed around the main

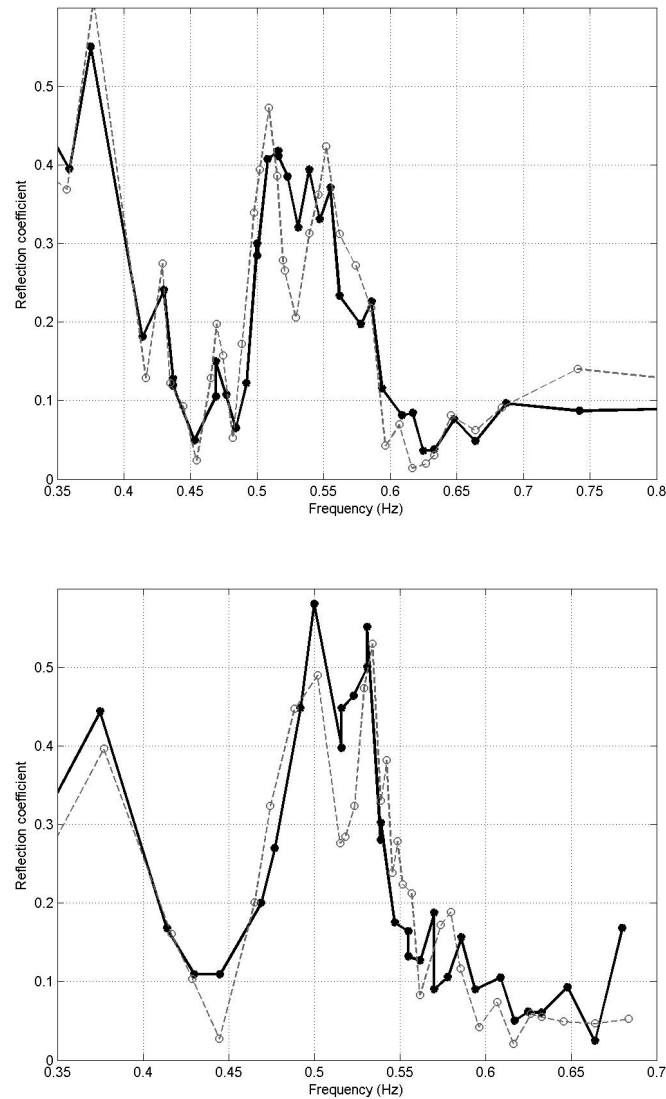


FIG. 4.10 – Reflection coefficient calculated from wave gauge results (dash line) and ADV results (solid line) without (up) and with (down) current.

resonant peak were found to be due to the beach reflection and the gap between the two resulting peaks was explained by a focusing of the wave over the modulated bottom of finite transversal extent (see Magne et al, 2005).

In order to verify the accuracy (or at least the coherence for strong reflection) of the calculated incident and reflected amplitudes, comparisons were made for the incoming wave between either progressive and partially standing wave assumptions. As an example, amplitudes calculated from both progressive and

partially standing wave assumptions for a regular wave of frequency  $f = 0.529Hz$  ( $T = 1.89$  s) are presented in Fig. 4.11.

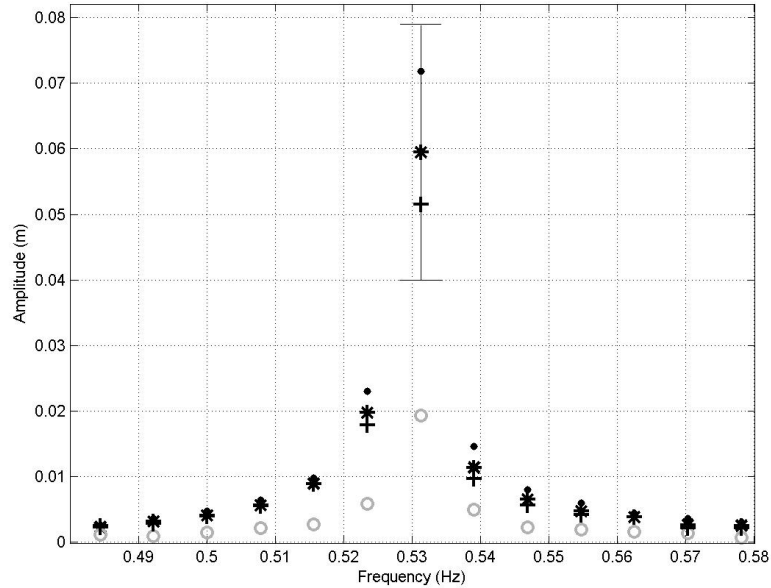


FIG. 4.11 – Amplitude of regular wave with a 1.89 s period calculated from progressive wave assumption : with horizontal velocity (.) and vertical velocity (+); and from partially standing wave assumption : incident wave (\*) and reflected wave (o). The black solid line represents the error we can expect considering a progressive wave assumption.

The black "error bar" for the incident wave amplitude that corresponds for this frequency to  $\pm R = 0.326$ , represents the interval within which the amplitude, calculated assuming progressive assumption, must be found. As shown in Fig.4.11, both horizontal and vertical velocities are within the interval, and we can conclude that the method is applicable.

For irregular waves, the generated incident wave spectrum follows a Jonswap shape ( $\gamma = 3.3$ ). Two peak periods are considered here,  $T_p = 1.3$  s ( $f_p = 0.770Hz$ ) and  $T_p = 1.813$  s ( $f_p = 0.551Hz$ ).

For  $T_p = 1.3$  s, energy spectra calculated assuming either a progressive wave from vertical and horizontal velocity data or a partially standing wave without current are presented in Fig. 4.12. A 3.6 % reflection in energy is observed, it is very weak for this frequency range as observed in Fig. 4.10 for regular waves. The accuracy test (Eq. 3.132) gives :

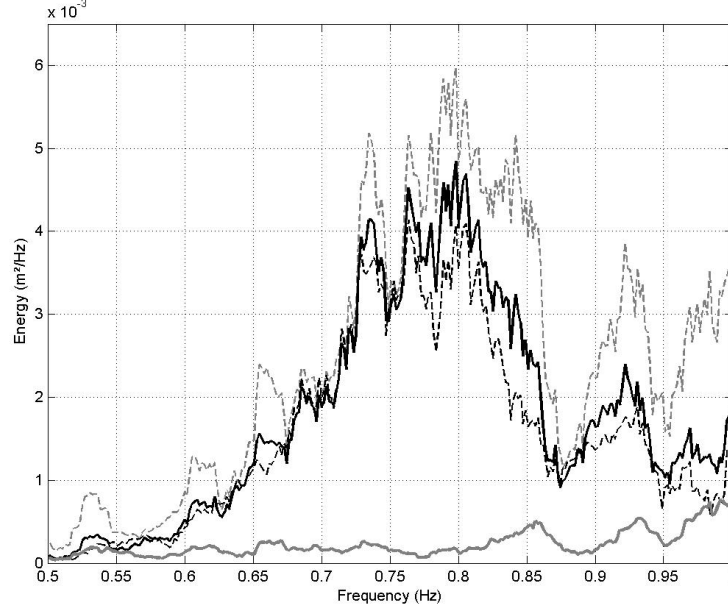


FIG. 4.12 – Wave energy evolution for a  $T = 1.3s$  peak period without current calculated from ADV data with a progressive assumption : vertical velocity (black dash line) and horizontal velocity (grey dash line), and a partially standing wave assumption : incident wave (black solid line) and reflected wave (grey solid line).

$$\left| \frac{E_{p_u} - E_i}{E_i} \right| = 0.25 \quad \text{and} \quad |R^2 + 2R| = 0.07 \quad (4.31)$$

$$\left| \frac{E_{p_w} - E_i}{E_i} \right| = 0.14 \quad \text{and} \quad |R^2 + 2R| = 0.07 \quad (4.32)$$

The progressive wave assumption is not as relevant as expected because of a weak reflection, in particular in the higher frequency band ( $f > 0.90Hz$ ) in the presence of current. However, the comparison of the incident and reflected wave with wave gauge data (Fig. 4.13) gives similar results without current, with a negligible calculated reflection. With current, the incident wave energy is slightly over predicted by the wave gauges.

For  $T_p = 1.813 s$ , energy spectra calculated assuming a progressive wave from vertical and horizontal velocity data and assuming a partially standing wave without current are presented in Fig. 4.14 . A 10.74 % reflection in energy is observed, which corresponds to the  $R = 0.326$  in amplitude for this frequency range for re-



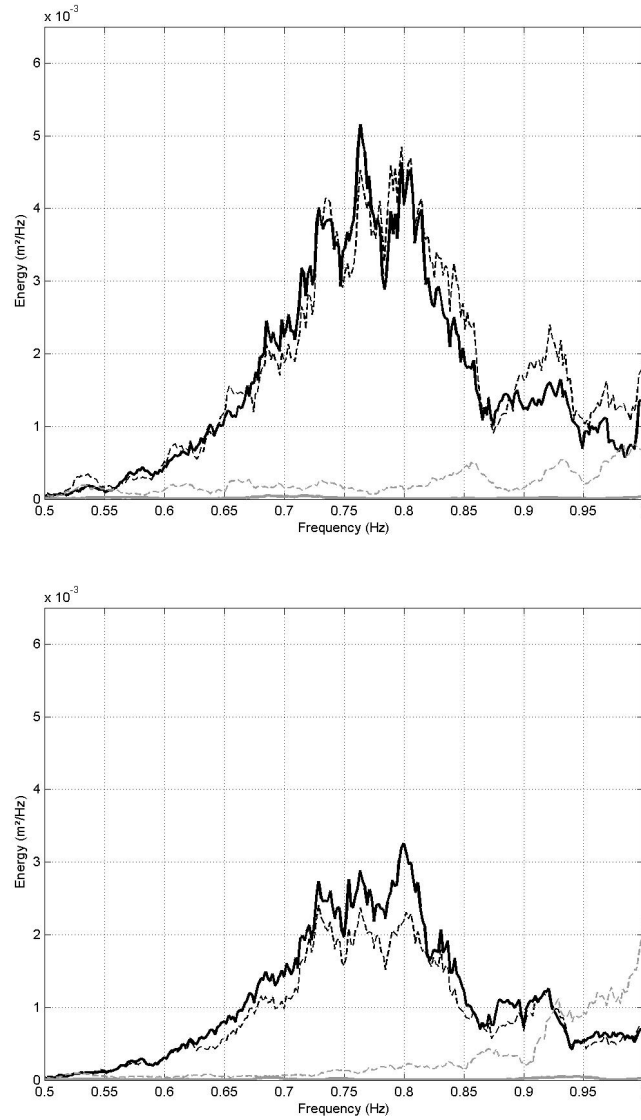


FIG. 4.13 – Wave energy evolution for a  $T = 1.3s$  peak period with wave gauges (solid line) and ADV (dash line) without (up) and with (down) current with a partially standing wave assumption : incident wave (black) and reflected wave (grey).

gular waves. The progressive assumption gives relevant results and the accuracy test is verified :

$$\left| \frac{E_{pu} - E_i}{E_i} \right| = 0.12 \quad \text{and} \quad |R^2 + 2R| = 0.22 \quad (4.33)$$

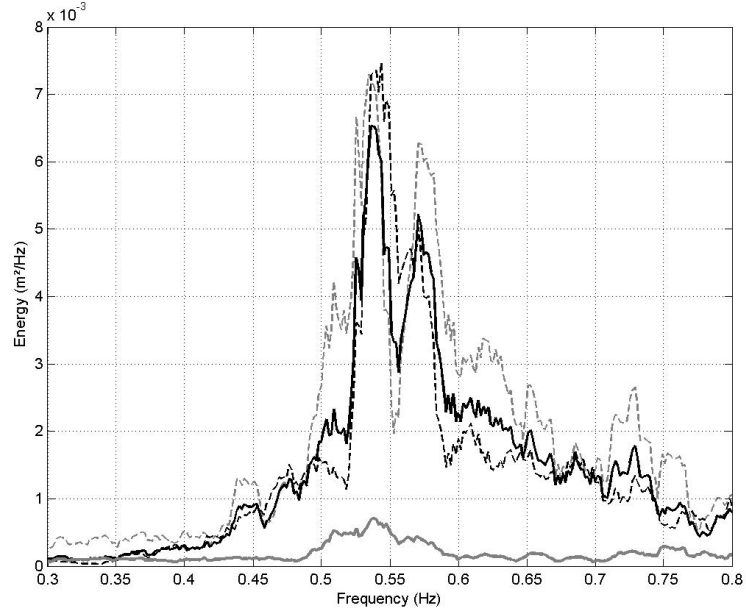


FIG. 4.14 – Wave energy for a  $T = 1.813s$  peak period without current calculated from ADV data with a progressive assumption : vertical velocity (black dash line) and horizontal velocity (grey dash line), and a partially standing wave assumption : incident wave (black solid line) and reflected wave (grey solid line).

$$\left| \frac{E_{pw} - E_i}{E_i} \right| = 0.11 \quad \text{and} \quad |R^2 + 2R| = 0.22 \quad (4.34)$$

Comparison of incident and reflected waves with wave gauge data (Fig. 4.15) gives similar results without current. But as observed for  $T_p = 1.3s$  with current, the incident wave energy is over-predicted by the wave gauges.

Despite the weak discrepancies found especially in the presence of current, there is a good agreement between energy spectra for partially standing waves given by wave gauges and the ADV. In the following, applications to partially standing waves in the nearshore are considered.

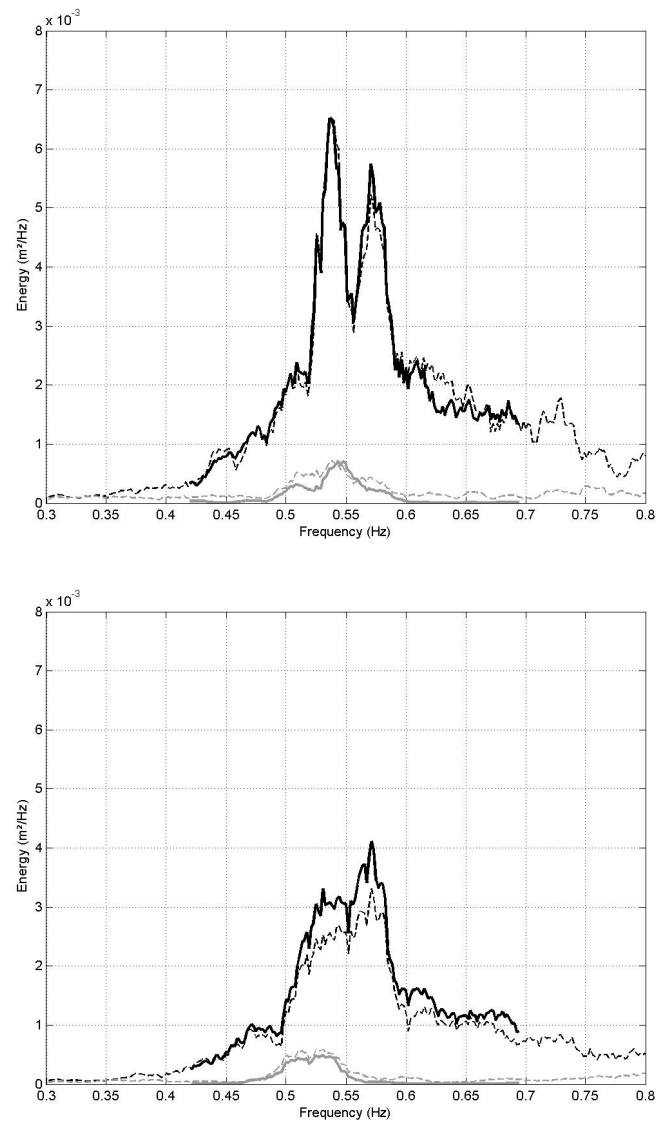


FIG. 4.15 – Wave energy evolution for a  $T = 1.813s$  peak period with wave gauges (solid line) and ADV (dash line) without (up) and with (down) current with a partially standing wave assumption : incident wave (black) and reflected wave (grey).

#### 4.2.4 Application to the nearshore

##### Influence of ADV immersion

During three days (22-24 June 2005), experiments were carried out on the Truc Vert beach (Gironde, France) to study the turbulent flow near the free surface in

presence of the waves. In this area, the tidal range is of about 3 m, details on the site can be found in Sénéchal et al (2004).

To collect wave data, four ADV's, labeled A1 to A4 respectively, were disposed on a vertical line at 0.13 m, 0.73 m, 1.32 m and 2.05 m above the bottom in the intertidal zone. Every 30 min, data acquisition at frequency 8 Hz were made during 20 min. At the beginning the system was not submerged, but progressively water level increased to reach a maximum water depth of 2.5 m at high tide at the location of the apparatus.

In this part, we look at the influence of the depth of immersion of the ADV for the measurement of reflection coefficients according to two different methods, the use of either  $(u_h, w)$  or  $(u_h, p)$ .

A 0.2 m/s current was observed during measurements, and its influence was found to be negligible on the results, since wave periods are much higher ( $T > 4s$ ) than for the laboratory experiments described above. A discussion on the effect of current is presented in the next section 4.2. Discussion will here be focused on the accuracy of the reflection coefficient, calculated for two different immersion depths (ADV A2 and A3) by use of either  $(u_h, w)$  or  $(u_h, p)$ . In Fig. 4.16, energy spectra versus frequency are presented for the ADV A2, for a water depth  $h = 2.50$  m. Energy calculated from  $u_h, w$  and  $p$  assuming a progressive wave are similar except for the vertical velocity for  $f < 0.1$  Hz. Indeed, for lower frequencies, because of shallow water conditions, the vertical velocity is weak, especially near the bottom. A reflection of about 30%, corresponding to 10% for the energy, is observed for the main peak,  $f_p = 0.11$  Hz.

Energy spectra for both incident and reflected waves measured with ADV A2 and A3 are presented in Fig. 4.17.

Observe that both ADV's give similar results for the  $(u_h, p)$  method. Similar results are also observed for the  $(u_h, w)$  method for ADV A3, located far from the bottom. We can conclude that both methods give relevant results when measurements are made far from the bottom, however it is only the  $(u_h, p)$  method that gives relevant results when the instrument is situated near the bottom. This result is confirmed by the calculation of the reflection coefficient for  $f_p = 0.11$  Hz, which varies slightly with the tide (see Fig. 4.18).

In particular, we note that when water depth varies from 2m to 2.5m, no significant changes are observed in the coherence of the results : with the  $(u_h, w)$  method for ADV A2, we find incorrect results.

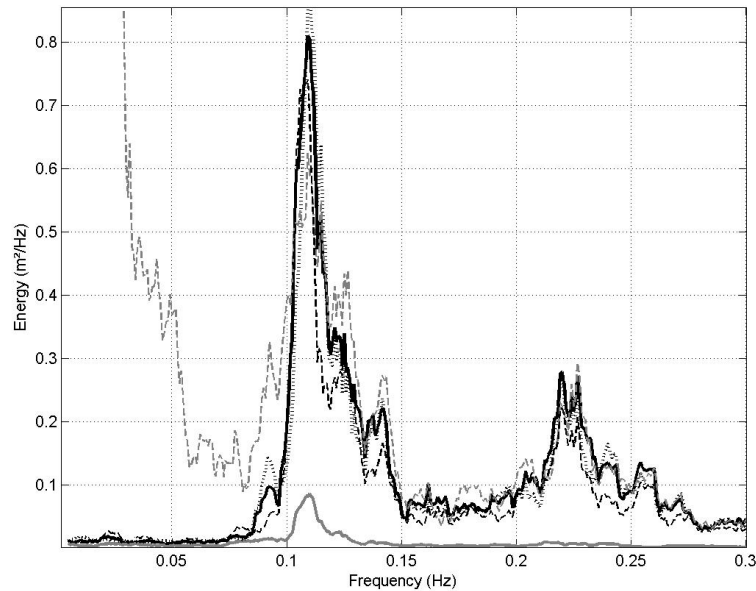


FIG. 4.16 – Energy spectra measured by the ADV A2, calculated from progressive wave assumption : with horizontal velocity (black dot line), vertical velocity (grey dash line) and pressure (black dash line) ; and from partially standing wave assumption with  $(u_h, p)$  method : incident wave (black solid line) and reflected wave (grey solid line).

We can conclude that for nearshore studies, and especially in shallow waters,  $(u_h, p)$  methods are to be preferred.

### Application to the nearshore and the breaking zone

During one month, in November 2000, experiments were carried out on the barred beach of Sete, on the Mediterranean, in order to study the wave action on offshore bar formation and migration (Certain et al., 2001) and the role of the bars in the dissipative process in the breaking zone (Certain et al, 2005).

In order to collect hydrodynamic data, three current meters S4 (denoted H1 to H3 on Fig. 4.19), at respectively 2.5 m, 4 m and 6 m depth were deployed respectively on the inner trough, the outer trough and the glaucis. Every three hours, data acquisitions of horizontal velocity components  $(u, v)$  and pressure  $p$  at frequency  $2Hz$  were done during either 18 or 36 *min*. Moreover, an ADV (C1) was placed at 1.4 m depth in the inner trough near the swash zone, and a series of five synchronous pressure sensors P1 to P5 were in the cross-shore direction on

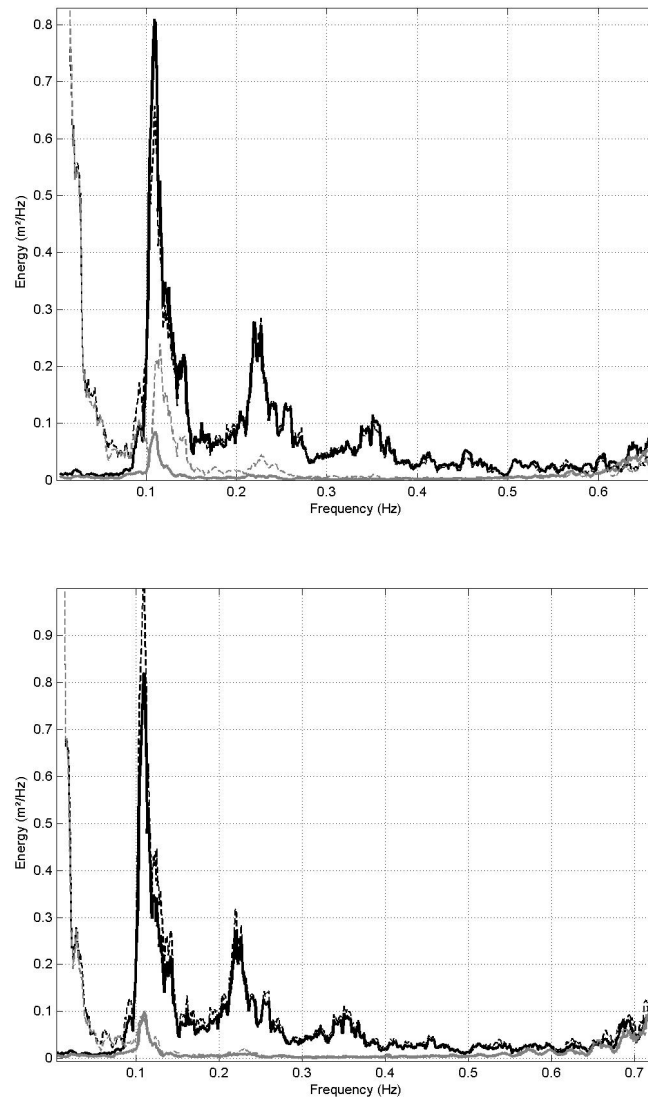


FIG. 4.17 – Wave energy evolution from two ADV A2 (up) and A3 (down) with a partially standing wave assumption (using the two different methods  $(u_h, p)$  (solid line) and  $(u_h, w)$  (dash line)) : incident wave (black) and reflected wave (grey).

the inner bar crest. The frequency of acquisition was either 8 or 16 Hz. Details of the experiment are presented in Certain (Certain, 2002).

In this study, we focus on the capability of the S4 instruments to measure partially standing waves for different weather conditions in the presence of current : storm, fair weather, long wave travelling with wind wave.

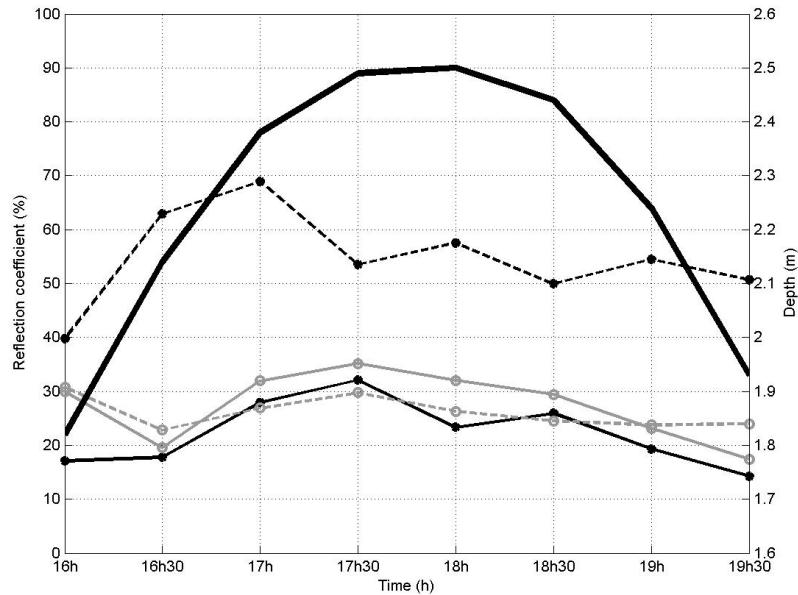


FIG. 4.18 – Reflection coefficient calculated from the two methods  $(u_h, p)$  (solid line) and  $(u_h, w)$  (dash line) for the two ADV A2 (black) and A3 (grey) with the evolution of water depth (black solid line).

### Storm condition

For the storm event of 12 November 2000, energy spectra, which exhibit a peak at frequency  $f = 0.13Hz$ , calculated from velocities or pressure data with a progressive wave assumption give similar results, as shown in Fig. 4.20 for the S4 H2.

In Fig. 4.21, results are presented for S4 H1, H2 and H3.

We can observe that the wave breaks on the outer bar, since wave energy decreases strongly from S4 H3 to H2 and then to H1. We observe also that reflection is very weak, the dissipative process is then predominant. In the inner trough (S4 H1), even if broken waves are present (the mean current is 0.41 m/s), the incoming wave signature with a peak period at  $f = 0.13Hz$  is still present, although the spectrum is somewhat noisy. The current intensity is about 0.24 m/s for the S4 located on the glacia (H3) and 0.41 m/s in the inner trough. As shown in Fig. 4.22, the current has little influence on the spectrum for the S4 located on the glacia (H3). The influence of wave incidence is also negligible as shown in Fig. 4.22, this is coherent with the small angle wave incidence in that case (under  $10^\circ$ ).

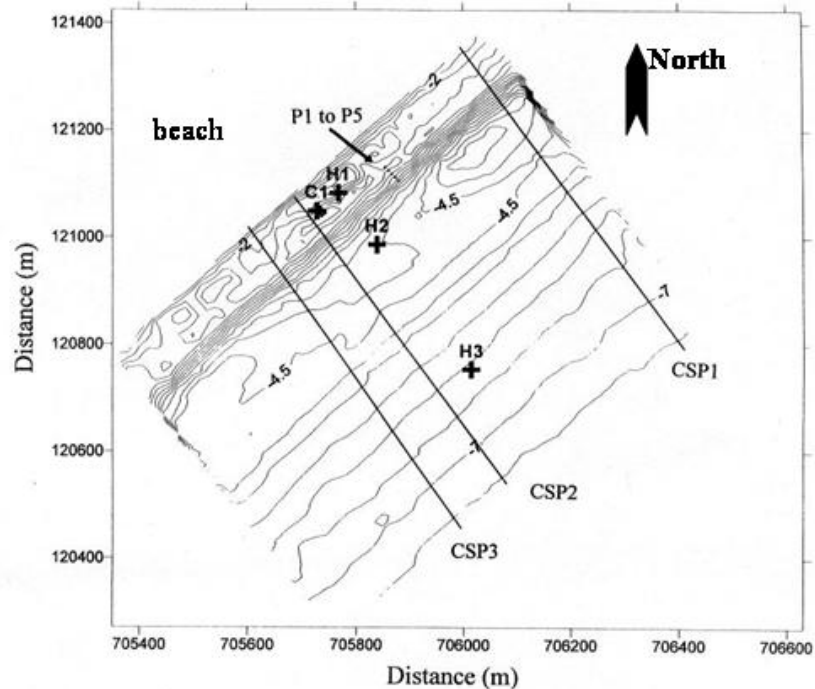


FIG. 4.19 – Experiments in Sète.

Even if the spectra are noisy because of broken waves, it follows from S4 H1 that current and wave incidence have minor influence also in the inner trough, expected at higher frequencies (see Fig 4.23).

### Fair weather condition

Fair weather is characterized by long waves of weak amplitude compared to storm event. Wave incidence is quasi-normal to the beach and currents remain negligible (0.029 m/s). As shown in Fig. 4.24, the waves do not break over the bars and the three S4 give nearly similar reflection coefficients in the range 40 – 50 % which corresponds to a reflection by the upper beach.

At the same time, an energy spectrum was obtained for the ADV. As shown in Fig. 4.25, and as concluded in the previous section 4.1, energy spectra in the progressive wave assumption are coherent (but somewhat different) as derivated



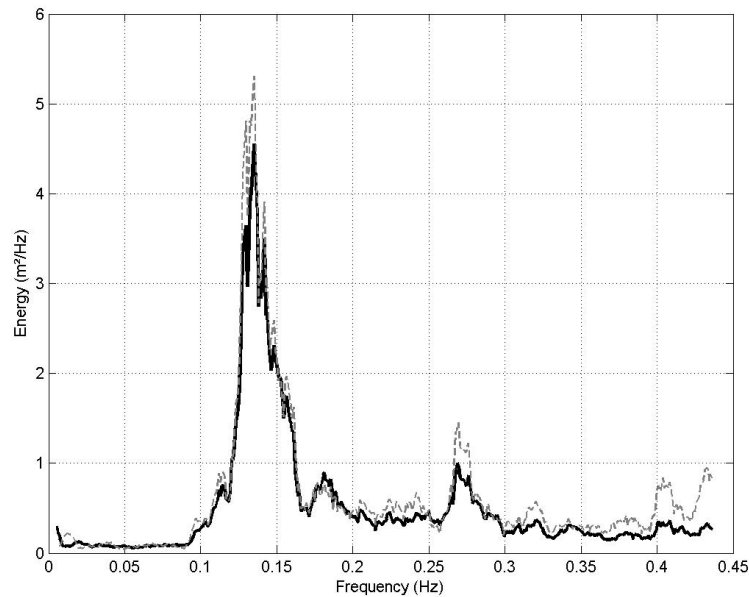


FIG. 4.20 – Energy spectrum of S4 H2 calculated from horizontal velocity data (solid line) and pressure sensor data (dash line) for a progressive wave assumption.

from the use of horizontal velocity or pressure, but results from the vertical velocity diverge, since the ADV is positioned near the bottom (20cm above the bottom).

The difference in the spectra assuming progressive waves is explained by a strong reflection, of relative amplitude 40 %, as shown in Fig. 4.26.

A small impact of current and oblique incidence on energy spectra, not presented here, was also observed, since weak currents (0.016 m/s) and quasi-normal incidence (about  $6^\circ$ ) were measured. Contrary to the S4, a peak appears on Fig. 4.26 at frequency  $2f$  corresponding to non-linear effects, since the ADV was placed near the swash zone.

### Swell and wind wave condition

During the field experiment, superposition of residual swell and wind waves was observed. Fig. 4.27 shows the energy spectrum calculated both with progressive wave and partially standing wave assumptions.

We observe two peaks corresponding to two waves travelling at different frequencies. The first one, located around  $f_p = 0.1 \text{ Hz}$  corresponds to a long wave, and the second one, located around  $f_p = 0.31 \text{ Hz}$ , corresponds to wind waves. For

both of them, the progressive wave assumption is relevant but this assumption could lead to misunderstanding for the wind wave reflection. Indeed, we could expect reflection for the wind waves to be weak due to an equal energy obtained from horizontal velocity and pressure sensor data. In fact, they break before the inner trough, their reflection coefficient is larger than the long wave and their direction of propagation is oblique (Fig. 4.28). Whereas the long wave arrives normal to the beach, without breaking, the wind waves make an angle of  $34^\circ$  with the normal to the beach.

Considering this parameter in our calculation for the S4 H3 for example (Fig. 4.29), it modifies the incident and reflected wave energy to result in a reflection of 34.7 % for the long wave instead of 34 % and 100 % for wind wave instead of 57 %.

An error of 43 % occurs for the wind wave, but note that the algorithm with current diverges for the highest frequencies for the reflected wave due to the strong current that not allows such waves to propagate.

#### 4.2.5 Conclusions

Wave measurement in deep and intermediate water has been widely studied. More and more sophisticated instruments based on either surface acceleration, pressure variation or fluid velocities are now available with software that gives information on directional spectra and significant wave characteristics. In the near-shore, particulars due to partially reflecting beaches or structures may be of great importance for the understanding of the dynamics.

The present paper shows that relevant information on partially reflected waves can be easily measured by use of coincident horizontal velocity and vertical velocity or pressure. Either vertical velocity or pressure can be used when instruments are deployed far enough from the bottom. This technique is often used in deep water, where wave induced movement does not affect the bottom layer, especially for the high frequency components of the spectral waves. If measurements are made near the bottom, as often in the nearshore, the use of pressure data is necessary, contrary to the vertical velocity which is not adequate.

The method is valid in the presence of a steady uniform current, however in

the field, and especially for breaking wave conditions, currents are inhomogeneous. We observed however that the influence of current remains limited. Applications could be made for ocean waves propagating in large tidal currents to verify such behaviour. In any case, recent laboratory experiments have shown that the wave seems to be much more sensitive to the mean current rather than local circulation (Magne et al, 2005).

Results presented here concerned coincident measurements at given location of two "independant" variables, the horizontal velocity and the pressure or the vertical velocity. This number of variables does not allow the calculation of both incident and reflected wave directions in the general case of a two dimensional surface. Expansion of the present technique could be made for synchronous measurements of velocity profiles.

*Acknowledgements.* The authors acknowledge the Conseil Général du Var for its financial support for the experiments carried out in the wave basin BGO FIRST in the framework of the GIS HYDRO. Field experiments in Sète and at Truc Vert beach were carried out respectively in the framework of the Scientific Programmes PNEC (Programme National d'Environnement Côtier) and PATOM (Programme Atmosphère-Océan Multi-Echelles), their financial supports and participants are acknowledged.

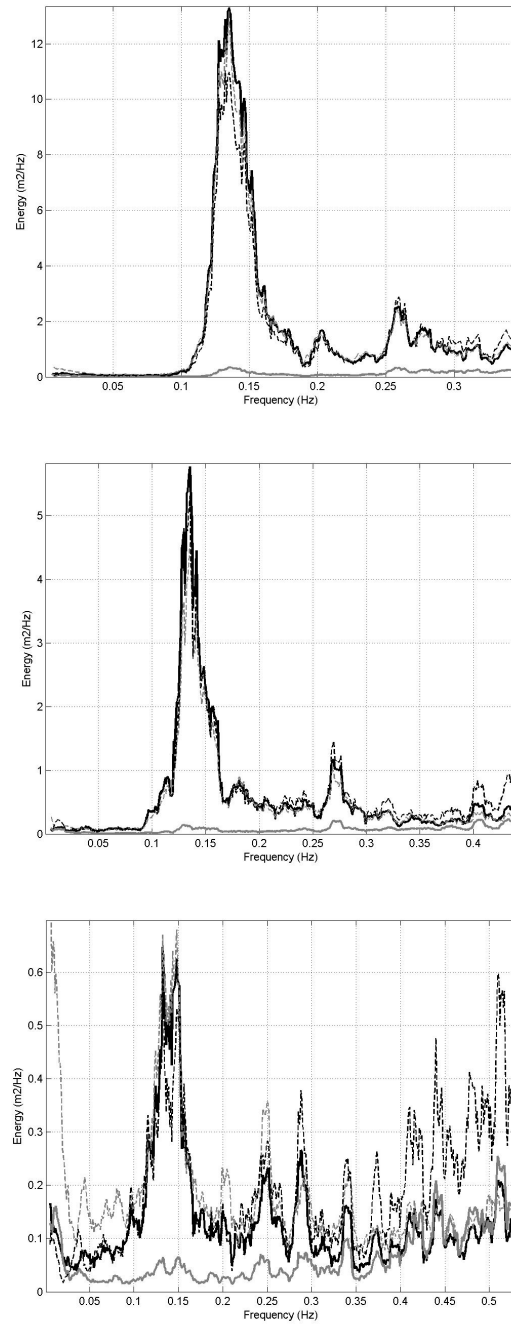


FIG. 4.21 – Energy spectra for the three S4 disposed on the inner trough (down), the outer trough (middle) and the glaciais (up) : with a progressive assumption with horizontal velocity (grey dash line) and pressure sensor data (black dash line) ; and with a partially standing wave assumption : incident wave (black solid line) and reflected wave (grey solid line).

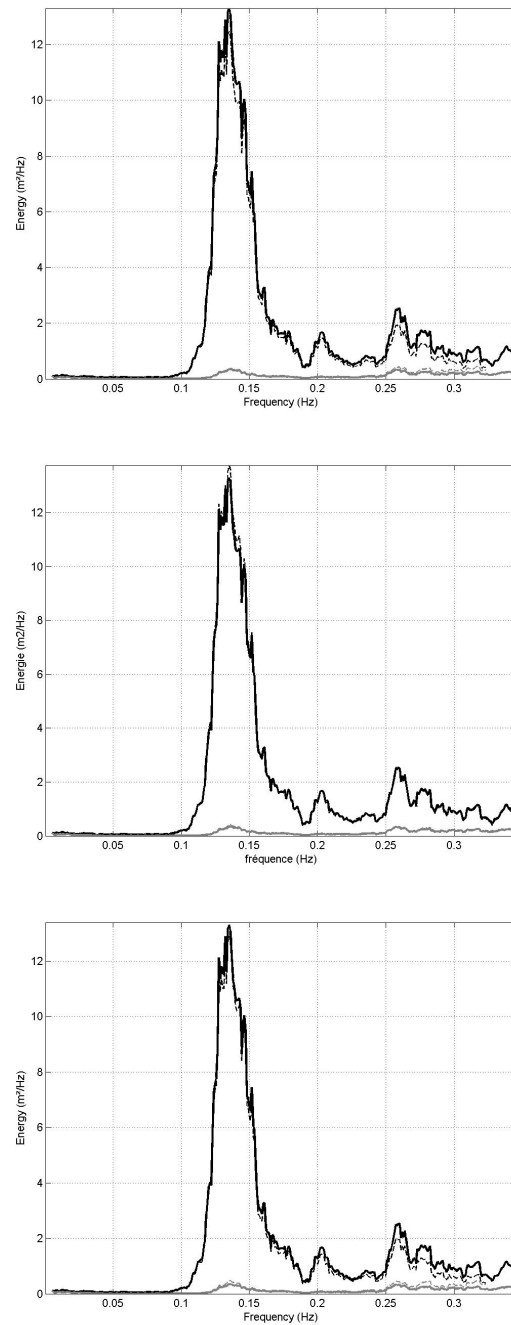


FIG. 4.22 – Energy spectrum of S4 H3 calculated without current and with a normal incidence (solid line) ; and calculated with current (up), with oblique incidence (middle) and with both current and oblique incidence (down) (dash line) : incident wave (black) and reflected wave (grey).

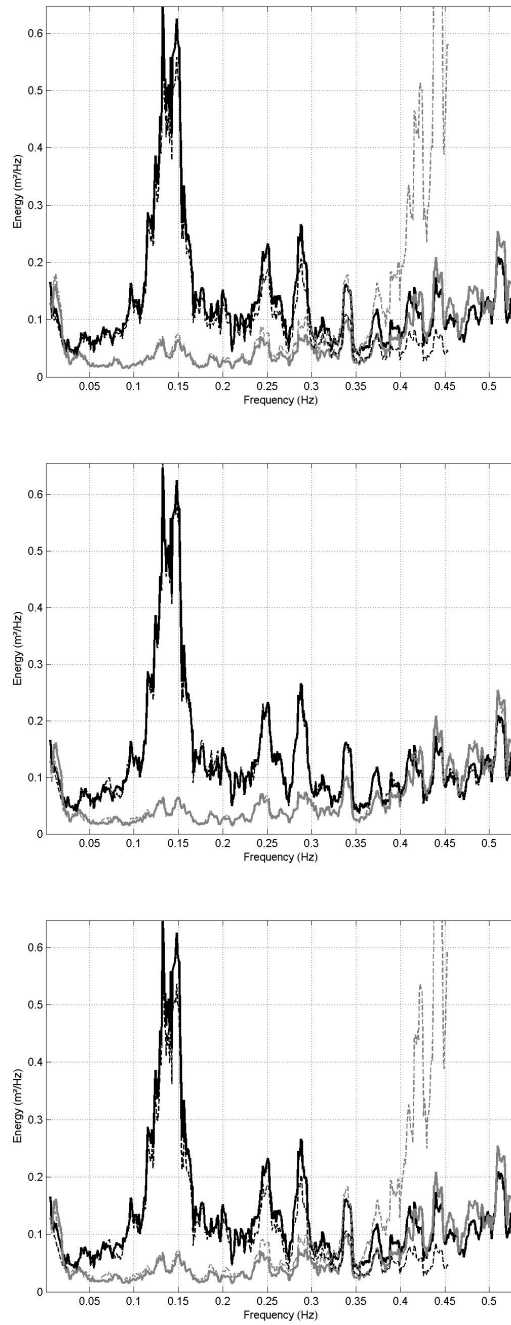


FIG. 4.23 – Energy spectrum of S4 H1 calculated without current and with a normal incidence (solid line) ; and calculated with current (up), with oblique incidence (middle) and with both current and oblique incidence (down) (dash line) : incident wave (black) and reflected wave (grey).

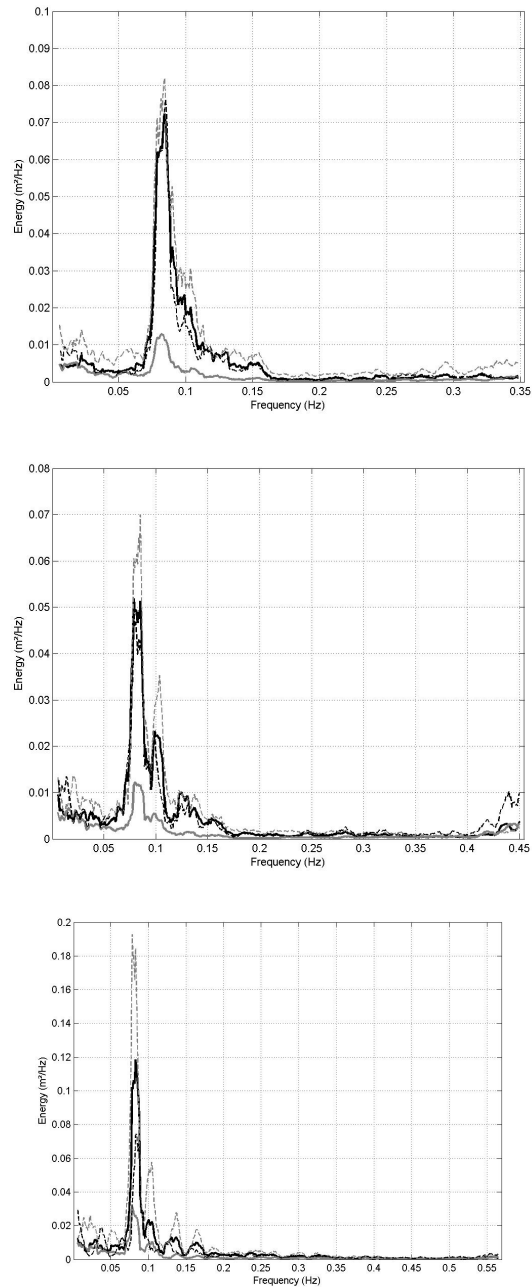


FIG. 4.24 – Energy spectra of the the three S4 H3 (up), H2 (middle) and H1 (down) calculated from progressive wave assumption : with horizontal velocity (grey dash line) and pressure sensor (black dash line) ; and from partially standing wave assumption : incident wave (black solid line) and reflected wave (grey solid line).

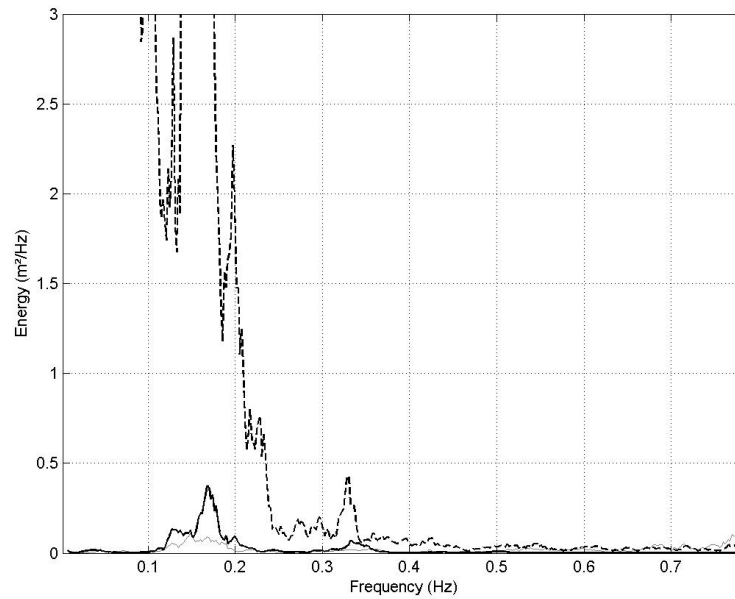


FIG. 4.25 – Energy spectrum of the ADV calculated from a progressive wave assumption with horizontal velocity data (grey solid line), vertical velocity data (black dash line) and pressure sensor data (black solid line).



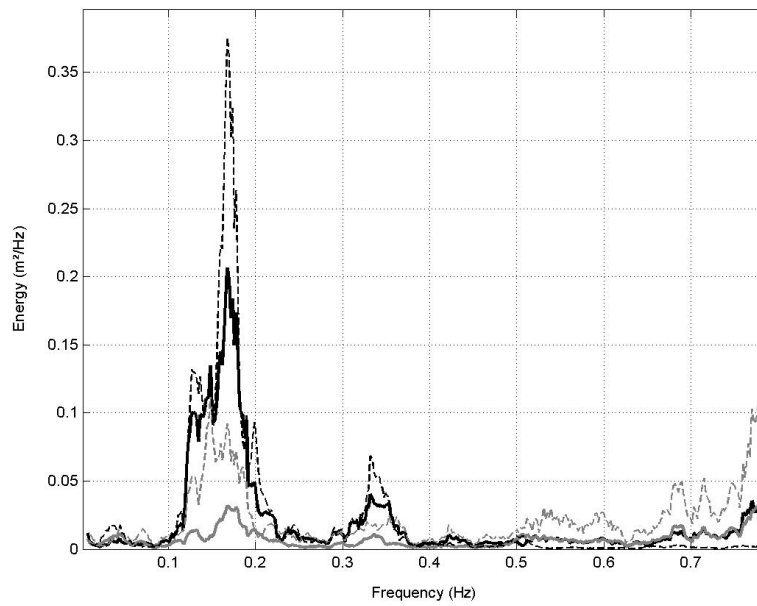


FIG. 4.26 – Energy spectrum of the ADV calculated from progressive wave assumption : with horizontal velocity data (grey dash line) and pressure sensor data (black dash line) ; and from partially standing wave assumption : incident wave (black solid line) and reflected wave (grey solid line).

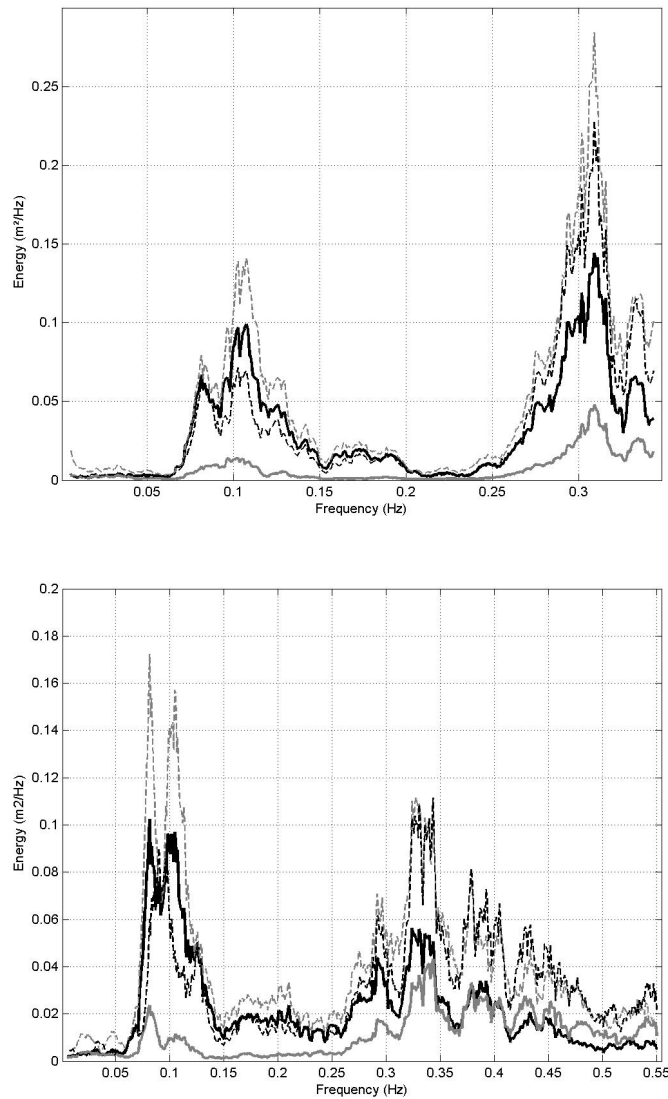


FIG. 4.27 – Energy spectrum for two S4 disposed on the inner trough (down) and the glaciais (up) : with a progressive assumption with horizontal velocity (grey dash line) and pressure sensor data (black dash line) ; and with a partially standing wave assumption : incident wave (black solid line) and reflected wave (grey solid line).

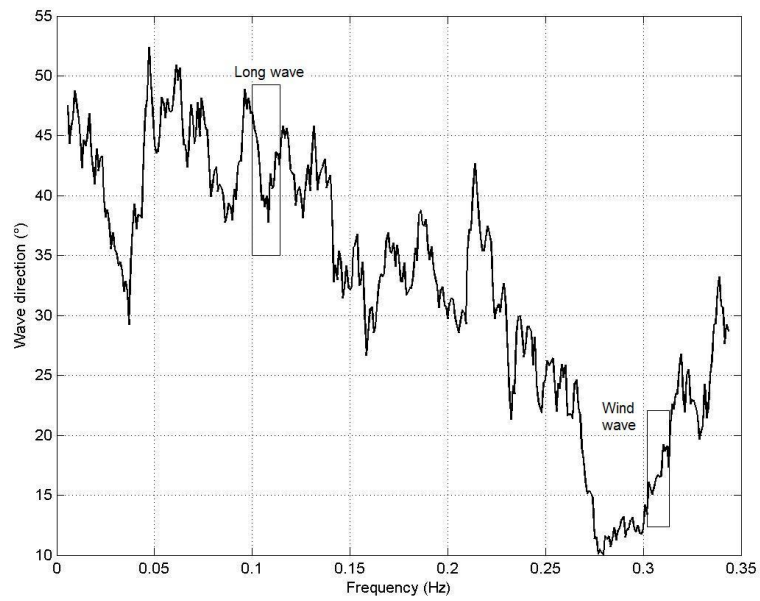


FIG. 4.28 – Wave direction relative to North for the S4 located on the glacier.

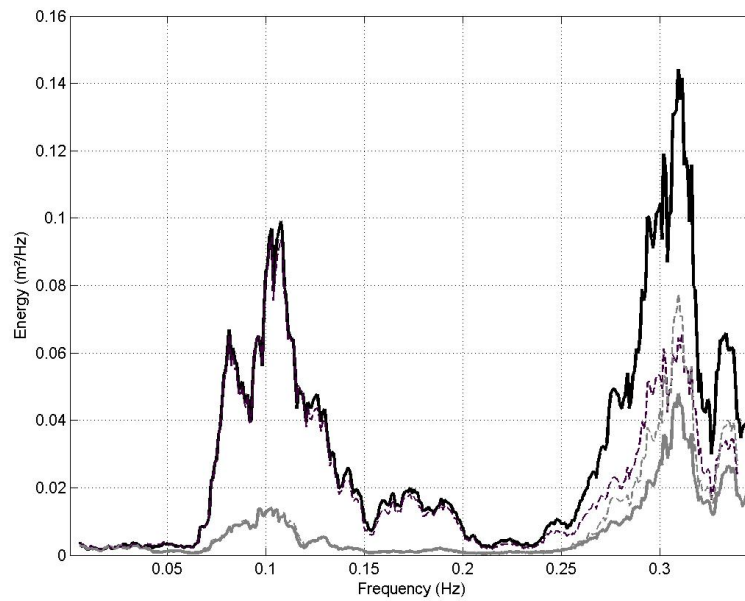


FIG. 4.29 – Energy spectrum of the S4 H3 calculated without current and with an angle of incidence normal to the beach (solid line) ; and calculated with current and with the effective direction of the wave (dash line) : incident wave (black) and reflected wave (grey).

### 4.3 Conclusion

Dans cette partie, nous montrons que l'information sur le caractère partiellement stationnaire d'une houle peut être facilement mesuré au moyen de données synchrones de vitesses horizontale et verticale (méthode  $(u_h, w)$ ) ou de pression (méthode  $(u_h, p)$ ) tant en bassin qu'in situ. Ces deux méthodes peuvent être utilisées lorsque les instruments sont déployés assez loin du fond, typiquement en eau profonde où le mouvement induit par la vague n'affecte que la couche supérieure ( $z < \lambda/2$ ). En zone côtière, les instruments sont souvent déployés au voisinage du fond, on utilisera alors des données synchrones de vitesse horizontale et de pression.

Ces méthodes restent valides en présence d'un courant uniforme et pour une houle oblique. Nous avons observé cependant que l'influence du courant reste limitée. Les expériences récentes ont prouvé que l'onde semble être beaucoup plus sensible au courant moyen qu'à la circulation locale (Magne et al. 2005). Par contre, la direction de propagation a une influence sur les résultats du coefficient de réflexion comme nous avons pu le voir pour la mer du vent.

Ces études ont été menées à partir d'une analyse linéaire par Transformée de Fourier. On a observé que pour une houle spectrale, l'interaction entre les composantes spectrales est non nulle. L'estimation de ces effets non linéaires en fonction du type de mesures effectuées (données de vitesses ou de pression) permettrait d'optimiser les mesures en zone littorale.

## Deuxième partie

### Modélisation du déferlement



## Introduction

Le chapitre précédent a permis de montrer que l'analyse linéaire à partir de mesures de vitesses et de pression permettait d'obtenir de bonnes informations sur les caractéristiques de la houle même après déferlement (déferlement glissant). Cependant, le déferlement plongeant, par son aspect chaotique, ne permet pas une telle approche. Dans ce chapitre, l'étude du déferlement plongeant est effectuée à partir de modèles numériques.

Ce type de déferlement constitue un des événements les plus énergétiques de l'environnement côtier entraînant turbulence, courant et mise en suspension de sédiments. Une meilleure compréhension de la cinématique du déferlement des vagues est d'une importance primordiale pour des problèmes d'ingénierie en zone côtière tels que les impacts sur les structures, le transport sédimentaire, l'évolution du trait de côte... Grâce aux développements récents des ordinateurs, les simulations de la dynamique des fluides (CFD : Computational Fluid Dynamics) peuvent être effectuées. Cependant, la validation expérimentale reste une étape nécessaire pour le développement des modèles. Après une description des modèles utilisés, deux applications de déferlement de vagues sont présentées et comparées avec des expériences.





# Chapitre 5

## Description des modèles utilisés

L'objet de ce chapitre est la présentation du couplage de deux modèles : BIEM et Navier-Stokes/SL-VOF. Le modèle BIEM est basé sur les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement résolues pour un écoulement irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux. Le modèle Navier-Stokes/SL-VOF est basé sur les équations de Navier-Stokes (NS) avec une méthode de suivi de surface libre de type SL-VOF (Semi-Lagrangian Volume Of Fluid) pour un écoulement rotationnel d'un fluide incompressible, visqueux ou non.

### 5.1 Modèle BIEM

Le modèle BIEM considéré a été développé par Grilli et al. (1989, 2001) pour l'étude de la propagation des ondes de gravité de surface au dessus de fonds de profondeur variable. Des validations expérimentales ont prouvé l'efficacité de la méthode pour des vagues périodiques ou des ondes solitaires, du shoaling jusqu'à l'impact de la crête de la vague sur la surface libre (Grilli et al. 2004).

#### 5.1.1 Formulation mathématique

La méthode BIEM (Boundary Integral Element Method) est une méthode dite intégrale aux frontières. Le potentiel de vitesse  $\phi(x, y, t)$  est introduit pour décrire des écoulements bi-dimensionnels, irrotationnels, non-visqueux et incompressibles, en coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ . Le champ de vitesse est donnée par  $\mathbf{u} = \nabla\phi$ . On cherche alors à résoudre les équations de conservation de la masse et

de conservation de la quantité de mouvement, dans un domaine  $\Omega$  bordé par une frontière  $\Gamma$  :

$$\Delta\phi = 0 \quad (5.1)$$

$$\phi_t = -gy - \frac{1}{2} (\phi_s^2 + \phi_n^2) - \frac{P_a}{\rho} \quad (5.2)$$

où  $\phi$  est le potentiel,  $\phi_s^2$  et  $\phi_n^2$  sont les dérivées tangentielles et normales par rapport à la frontière, et  $y$  est dirigée vers le haut ( $y = 0$  correspondant à la surface libre au repos). Cette frontière est discrétisée en  $N$  noeuds ou points de collocation.

En utilisant la fonction de Green donnée par  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) = -(1/2\pi) \log |\mathbf{x} - \mathbf{x}_l|$ , la seconde identité de Green transforme l'équation de Laplace en une équation intégrale aux frontières (BIE) :

$$\alpha(\mathbf{x}_l)\phi(\mathbf{x}_l) = \int_{\Gamma(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial n}(\mathbf{x})G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) - \phi(\mathbf{x})\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l)}{\partial n} \right\} d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (5.3)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à la surface et  $\alpha(\mathbf{x}_l) = \frac{\theta_l}{4\pi}$  avec  $\theta_l$  angle solide extérieur au point de collocation  $\mathbf{x}_l$ .

On distingue trois types de frontières : la surface libre, le fond et les frontières latérales sur lesquelles différentes conditions aux limites sont appliquées (Fig. 5.1).

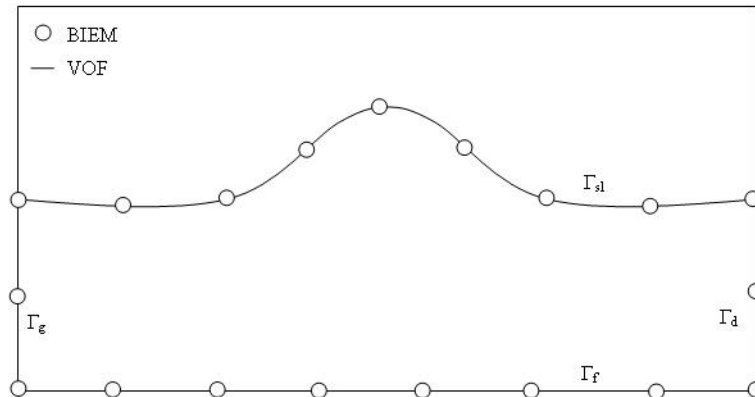


FIG. 5.1 – Domaine de calcul pour le modèle BIEM

Les conditions cinématique et dynamique sur la surface libre ( $\Gamma_{st}$ ) s'écrivent :

$$\frac{D\mathbf{R}}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{R} = \mathbf{u} = \nabla \phi \quad (5.4)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = -gy + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi - \frac{p_a}{\rho} \quad (5.5)$$

avec  $\mathbf{R}$  le vecteur position d'une particule fluide,  $g$  la constante de gravité,  $p_a$  la pression à la surface libre,  $\rho$  la densité du fluide et  $D/Dt$  la dérivée particulaire.

Au fond ( $\Gamma_f$ ) et pour les frontières fixes ( $\Gamma_g$  et  $\Gamma_d$ ), on applique la condition d'imperméabilité :

$$\phi_n = 0 \quad (5.6)$$

Une fois que l'équation (5.3) est résolue, la solution dans le domaine intérieur peut être calculée explicitement à partir des valeurs aux frontières. En utilisant (5.3), la vitesse au point intérieur  $\mathbf{X}_i$  est donnée par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_i) = \nabla \phi(\mathbf{x}_i) \quad (5.7)$$

### 5.1.2 Résolution numérique des équations

Des développements en série de Taylor au second ordre sont employés pour mettre à jour le vecteur position  $\mathbf{R}$  et le potentiel de vitesse à la surface libre  $\phi$  à chaque pas de temps :

$$\mathbf{R}(t + \Delta t) = \mathbf{R} + \Delta t \frac{D\mathbf{R}}{Dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{D^2\mathbf{R}}{Dt^2} + o(\Delta t^3) \quad (5.8)$$

$$\phi(t + \Delta t) = \phi + \Delta t \frac{D\phi}{Dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{D^2\phi}{Dt^2} + o(\Delta t^3) \quad (5.9)$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps adaptatif et tous les termes du membre de droite (eq. 5.9) sont évalués au temps  $t$ .

La frontière est discrétisée en  $N$  noeuds ou points de collocation, définissant des éléments bidimensionnels pour l'interpolation locale de la solution entre ces noeuds. Pour chaque élément, la géométrie de la surface libre et les champs physiques sont interpolés en utilisant des fonctions de forme polynômiales. Les intégrales aux frontières discrétisées sont évaluées en chaque point de collocation par intégration numérique. Le système linéaire issu de la discrétisation de l'équation intégrale est en général dense et non-symétrique. On utilise alors un algorithme de minimisation des résidus (GMRES) avec une technique de pré-conditionnement (Xü and Yue 1992). Cependant, le temps de calcul reste important. Pour palier à ce problème, Fochesato (2004) a introduit l'algorithme des Multipôles Rapides.

## 5.2 Modèle Navier-Stokes/VOF

Le déferlement des vagues a été simulé avec le logiciel Navier-Stokes EOLE, développé par la société Principia R&D. Après une présentation générale du modèle, la méthode SL-VOF, qui constitue en une approche originale de modélisation du suivi de la surface libre, est décrite.

### 5.2.1 Formulation mathématique

Le problème considéré est l'écoulement de deux fluides incompressibles non miscibles, instationnaires et rotationnels. Le modèle de turbulence utilisé est de type  $k - \epsilon$ . Deux approches peuvent être considérées :

- approche monophasique : seul l'écoulement liquide est modélisé, l'air étant pris en compte simplement pour une condition limite de pression sur l'interface. C'est l'approche retenue dans cette étude.
- approche diphasique : l'écoulement est également résolu dans l'air, ce qui permet de prendre en compte les interactions eau/air.

Dans EOLE, les équations de NS s'écrivent sous forme semi-conservative, et en coordonnées curvilignes de la manière suivante :

$$\frac{1}{J} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} + \frac{\partial H}{\partial \chi} = T \quad (5.10)$$

où  $F$ ,  $G$  et  $H$  sont les termes de flux convectif, diffusif et de pression, et  $T$  le terme source de tension superficielle (Brackbill et al. 1992) :

$$W = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{pmatrix}; T = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma K n_x \\ \sigma K n_y \\ \sigma K n_z \end{pmatrix}; F = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho \tilde{u} \\ \rho \tilde{u} u + \xi_x p - \vec{\nabla}(\xi) \cdot \vec{\tau}_x \\ \rho \tilde{u} v + \xi_y p - \vec{\nabla}(\xi) \cdot \vec{\tau}_y \\ \rho \tilde{u} w + \xi_z p - \vec{\nabla}(\xi) \cdot \vec{\tau}_z \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho \tilde{v} \\ \rho \tilde{v} u + \eta_x p - \vec{\nabla}(\eta) \cdot \vec{\tau}_x \\ \rho \tilde{v} v + \eta_y p - \vec{\nabla}(\eta) \cdot \vec{\tau}_y \\ \rho \tilde{v} w + \eta_z p - \vec{\nabla}(\eta) \cdot \vec{\tau}_z \end{pmatrix}; H = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho \tilde{w} \\ \rho \tilde{w} u + \chi_x p - \vec{\nabla}(\chi) \cdot \vec{\tau}_x \\ \rho \tilde{w} v + \chi_y p - \vec{\nabla}(\chi) \cdot \vec{\tau}_y \\ \rho \tilde{w} w + \chi_z p - \vec{\nabla}(\chi) \cdot \vec{\tau}_z \end{pmatrix}$$

avec,

$$\tilde{u} = \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w; \quad \tilde{v} = \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w; \quad \tilde{w} = \chi_x u + \chi_y v + \chi_z w; \quad J = \frac{\partial(\xi, \eta, \chi)}{\partial(x, y, z)}$$

$$\vec{\tau}_x = \bar{\tau} \cdot \vec{e}_x; \quad \vec{\tau}_y = \bar{\tau} \cdot \vec{e}_y; \quad \vec{\tau}_z = \bar{\tau} \cdot \vec{e}_z; \quad \bar{\tau} = \mu \left( \vec{\nabla} \vec{U} + \vec{\nabla}^t \vec{U} \right)$$

Dans ce système, on a  $(\xi, \eta, \chi)$  les coordonnées curvilignes,  $J$  le jacobien de la transformation de coordonnées,  $\sigma$  le coefficient de tension superficielle,  $K$  la courbure de la surface,  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à l'interface,  $(u, v, w)$  les composantes du vecteur vitesse cartésien,  $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$  les composantes contravariantes du vecteur vitesse,  $\rho$  la densité,  $\mu$  la viscosité dynamique et  $\bar{\tau}$  le tenseur des contraintes visqueuses.

On cherche donc à calculer le vecteur  $W$  à partir des quatre équations suivantes : la conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement donnée pour les trois composantes  $(x, y, z)$ .

## 5.2.2 Résolution numérique des équations

### Méthode de pseudo-compressibilité

Afin de résoudre les équations stationnaires d'Euler ou de Navier-Stokes, une approche "pseudo-instationnaire" a été développée par Crocco (1965) puis améliorée par Chorin (1966, 1967). Cette méthode permet de se rapprocher de la résolution des équations régissant les fluides compressibles. Elle consiste à introduire une densité fictive (pseudo-compressibilité) et des termes de dérivées fictives dans l'équation de continuité et dans l'équation de quantité de mouvement, ce qui permet de coupler le champ de vitesse et de pression. Dans EOLE, le système pseudo-instationnaire suivant est utilisé :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial \tau} + \text{div}(\rho \vec{U} \otimes \rho \vec{U} + p \vec{I} - \vec{\tau}) = p \vec{f} \end{cases}$$

où  $\vec{f}$  représente les forces extérieures, et  $p$  la pression.

Dans ce système, la pseudo-masse volumique  $\tilde{\rho}$  et le pseudo-temps  $\tau$  sont introduits simplement comme variable d'intégration. Les nouveaux termes rajoutés dans les équations (5.10) permettent d'obtenir la formulation semi-discrétisée suivante (on utilise ici un schéma du second ordre implicite en temps) pour le calcul de la solution au temps  $n + 1$  :

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \tilde{W}^{n+1}}{\partial \tau} + \frac{1}{J} \frac{3W^{n+1} - 4W^n + W^{n-1}}{2 \Delta t} + \left( \frac{\partial F}{\partial \xi} \right)^{n+1} + \left( \frac{\partial G}{\partial \eta} \right)^{n+1} + \left( \frac{\partial H}{\partial \chi} \right)^{n+1} = T^{n+1}$$

$$\text{avec } \tilde{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\rho}u \\ \tilde{\rho}v \\ \tilde{\rho}w \end{pmatrix} \text{ termes ajoutés de la méthode de pseudo-compressibilité.}$$

L'ajout de l'inconnue  $\tilde{\rho}$  nécessite une équation supplémentaire pour fermer le système. Cette équation est fournie par la pseudo-loi d'état, qui donne une relation entre la pression et la pseudo-masse volumique. Diverses pseudo-loi d'états ont été testées et numériquement optimisées par Viviand (1983) et De Jouët et al. (1991). La loi utilisée ici est :

$$p^{(n+1)} = \rho U_0^2 \ln\left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho}\right) + p^{(n)} \quad (5.11)$$

avec  $U_0$  paramètre (vitesse) constant de la pseudo loi d'état.

Le système complet est alors intégré pas à pas en pseudo-temps jusqu'à ce qu'il y ait convergence vers une solution indépendante de  $\tau$  qui est la solution numérique à l'instant  $n + 1$ . Le schéma d'intégration en pseudo-temps est un schéma de Runge-Kutta à 5 étapes dans lequel est introduite une technique de lissage des résidus. La valeur maximale du pas en pseudo-temps est fixé par le critère de stabilité (CFL) local (Viviand 1995), et pour chaque cellule, la valeur locale maximale est utilisée.

L'intégration spatiale repose sur une technique de volumes finis. Les maillages curvilignes peuvent également être multi-block, avec raccordements jointifs, ce qui permet de discrétiser des géométries complexes.

### Conditions aux limites

On distingue deux types de frontières : les frontières fixes et l'interface.

- *Frontières fixes :*

Pour appliquer les conditions aux limites au bord du domaine, une méthode dite de maille fictive est utilisée. Elle consiste à ajouter une rangée supplémentaire de mailles aux frontières du domaine dans laquelle les valeurs des champs physiques sont fixées comme conditions limites (Fig. 5.2). Celles-ci sont ainsi appliquées à chaque étape de Runge-Kutta du schéma en pseudo-temps.

Sur les parois, une condition de glissement est appliquée dans le cas où l'on résout les équations d'Euler et une condition d'adhérence pour les équations de Navier-Stokes. La condition de glissement traduit le fait que la vitesse normale à la paroi est nulle mais la vitesse tangentielle n'est pas affectée. En réalité, la condition de glissement n'est pas physique car la vitesse du fluide sur la paroi est nulle, ce qui correspond à une condition d'adhérence (modèle NS). Cependant, l'utilisation de la condition d'adhérence suppose un nombre suffisant de mailles



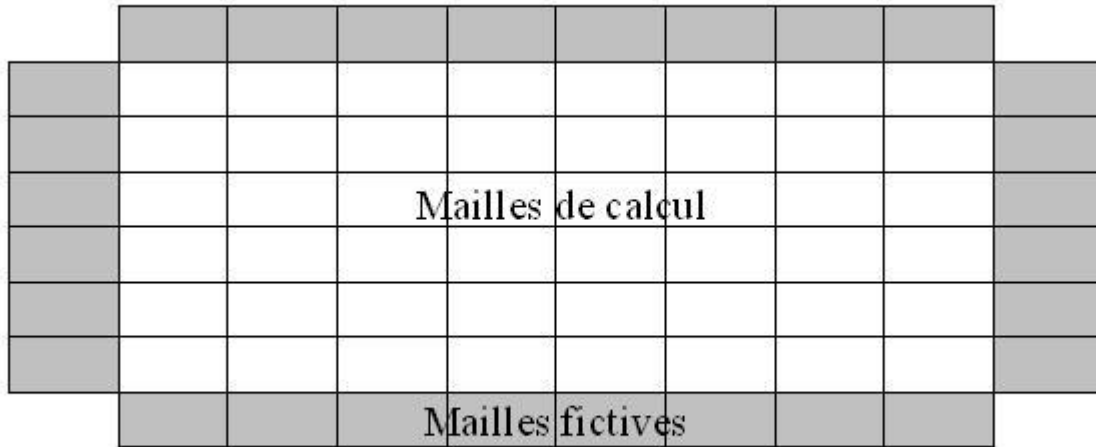


FIG. 5.2 – Domaine de calcul pour le modèle Navier-Stokes/VOF

proche de la paroi pour représenter la couche limite. Pour les deux applications traitées dans la section 6.2, nous avons utilisé une condition d'adhérence.

Sur les frontières ouvertes (ou libres), une condition de paroi (glissement) est appliquée. On prend soin de se placer suffisamment loin de celles-ci pour avoir la pression et la vitesse nulles aux frontières.

Dans le cas d'une configuration multidomaine, deux domaines échangent des informations à leur frontière commune où les mailles fictives de l'un correspondent aux mailles de calcul de l'autre. Ainsi, à chaque étape de Runge-Kutta, les valeurs des champs de vitesses, de pression et de la fonction VOF dans les mailles fictives d'un sous-domaine sont imposées aux mailles de calcul de l'autre sous-domaine. L'utilisation de plusieurs sous-domaines présente un double intérêt. Il permet tout d'abord d'affiner le maillage au niveau de la zone où le soliton va déferler, et d'autre part d'optimiser le temps de calcul, avec un ordinateur multiprocesseur, puisque le calcul dans chaque sous-domaine est alors effectué par un processeur différent.

- *Conditions aux limites d'interface :*

Une condition limite doit être appliquée dans le cas où l'on résout les équations uniquement dans la phase la plus dense (écoulement monophasique). Ainsi, la pression à l'interface est la pression atmosphérique, et la vitesse dans chaque cellule d'interface est interpolée à partir de la vitesse dans les cellules voisines, en prenant en compte le poids de chaque cellule (fraction volumique  $C$ , voir paragraphe suivant) :

$$\vec{U}_{i,j,k} = \frac{\sum_{(l1=i-1,i+1),(l2=j-1,j+1),(l3=k-1,k+1)} C_{l1,l2,l3} \vec{U}_{l1,l2,l3}}{\sum_{(l1=i-1,i+1),(l2=j-1,j+1),(l3=k-1,k+1)} C_{l1,l2,l3}} \quad (5.12)$$

où  $\vec{U}_{l1,l2,l3}$  est la vitesse dans la cellule voisine  $(l1, l2, l3)$  et  $\vec{U}_{i,j,k}$  est celle dans la cellule d'interface  $(i, j, k)$ .

### 5.2.3 Méthode de suivi d'interface SL-VOF

L'interface et son mouvement sont décrits par une méthode originale, appelée SL-VOF (Guignard et al., 2001a et 2001b pour le 2D; Biausser et al., 2001 et 2004b pour le 3D), combinant la méthode VOF (Hirt and Nichols 1981) avec la méthode PLIC (Piecewise Linear Interface Calculation) (Li 1995). La position de l'interface est ainsi calculée dans chaque cellule par une fonction discrète  $C$  dont la valeur (comprise entre 0 et 1) correspond à la fraction de liquide contenue dans une cellule (concept de la méthode VOF). La méthode originale SOLA-VOF (Hirt and Nichols 1981), basée sur la résolution d'une équation de conservation pour la fonction  $C$ , suppose assez grossièrement, pour le calcul des flux, que l'interface dans une cellule est parallèle à une des faces de la cellule. Cette simplification est imposée par le fait que la fonction est discontinue. En revanche, la méthode SL-VOF représente l'interface par des segments obliques (ou plans en 3D) d'orientation définie par  $\vec{n} = -\vec{\nabla}C / \|\vec{\nabla}C\|$  (concept PLIC). La description lagrangienne issue de la méthode PLIC permet de s'affranchir de résoudre une équation de conservation pour la fonction VOF. Les avantages principaux de cette méthode, par rapport à la méthode originale VOF, sont donc une description plus précise de l'interface et également la possibilité d'employer de plus grands pas de temps, permettant ainsi un gain significatif de temps de calcul.

La méthode SL-VOF se décompose en trois étapes principales :

- la reconstruction de l'interface
- l'advection de l'interface
- l'actualisation du champ de VOF.

### Etape de reconstruction de l'interface

Au début d'un pas de temps, la valeur du champ de VOF ( $C$ ) est utilisée pour définir une unique interface linéaire par cellule. Cela revient à calculer la normale à l'interface définie par  $-\vec{\nabla}C / \|\vec{\nabla}C\|$  et orientée du fluide vers l'air. Plusieurs méthodes existent pour calculer la normale  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  à l'interface. La méthode retenue est un schéma aux différences finies à 8 points (correspondant aux 8 centres des cellules voisines) (Fig. 5.3) :

$$n_x = \frac{1}{8h} [2(C_{i+1,j} - C_{i-1,j}) + C_{i+1,j+1} - C_{i-1,j+1} + C_{i+1,j-1} - C_{i-1,j-1}] \quad (5.13)$$

$$n_y = \frac{1}{8h} [2(C_{i,j+1} - C_{i,j-1}) + C_{i+1,j+1} - C_{i+1,j-1} + C_{i-1,j+1} - C_{i-1,j-1}] \quad (5.14)$$

où  $h$  est le pas de discrétisation en espace (le même en  $x$  et en  $y$ ).

Une fois la direction de la normale au segment obtenue, il nous faut positionner correctement ce segment dans la cellule. Pour cela, la fraction volumique délimitée par la face opposée à la normale doit être égale à la valeur de  $C$  dans cette cellule. L'équation du segment représentant l'interface est  $n_x x + n_y y = \alpha$ , où  $\alpha$  est le paramètre à déterminer pour ajuster la bonne fraction volumique sous le segment.

Considérons une cellule carrée de longueur unité, où  $0 \leq n_x \leq n_y$  (les autres cas s'obtiennent par symétrie). Les segments de direction normale  $(n_x, n_y)$  passant par les points  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  engendrent deux fractions volumiques critiques  $C_1 = n_x/(2n_y)$  et  $C_2 = 1 - C_1$  (Fig. 5.4(a)). On en déduit alors trois cas de figures :

- Si  $0 \leq C \leq C_1$  alors  $\alpha = \sqrt{2Cn_x n_y}$  (Fig. 5.4(b))
- Si  $C_1 \leq C \leq C_2$  alors  $\alpha = \frac{2Cn_y + n_x}{2}$  (Fig. 5.4(c))

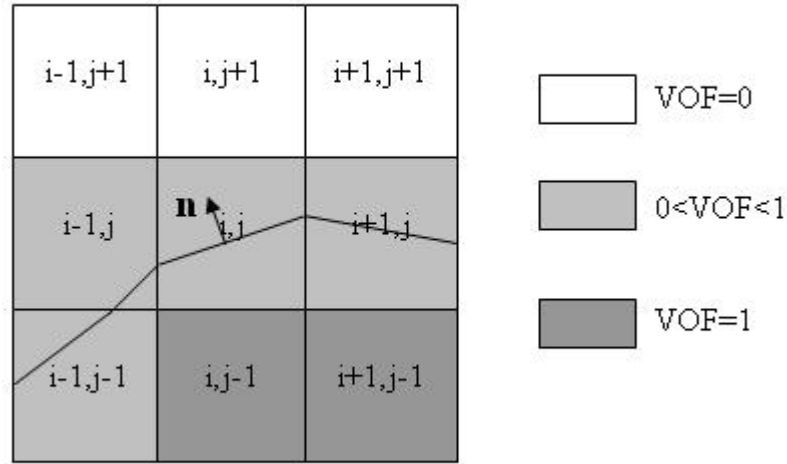


FIG. 5.3 – Représentation du VOF et de la normale à l'interface

- Si  $C_2 \leq C \leq 1$  alors  $\alpha = n_x + n_y - \sqrt{2(1-C)n_x n_y}$  (Fig. 5.4(d))

### Etape d'advection

Pour advecter l'interface, on utilise une méthode lagrangienne. Les vitesses aux noeuds des cellules sont calculées à partir des vitesses aux centres des mailles obtenues par le solveur Navier-Stokes. Puis, les vitesses des extrémités des segments (c'est-à-dire des intersections des segments avec les lignes de maillage) sont déduites des vitesses aux noeuds par interpolation bilinéaire.

L'advection des extrémités des segments s'effectue à partir d'un schéma du premier ordre en temps du type :

$$\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^n + \Delta t \mathbf{U} \quad (5.15)$$

où  $\mathbf{X}^n$  et  $\mathbf{X}^{n+1}$  correspondent aux vecteurs positions des extrémités avant et après advection,  $\Delta t$  est le pas de temps et  $\mathbf{U}$  le vecteur vitesse des extrémités.

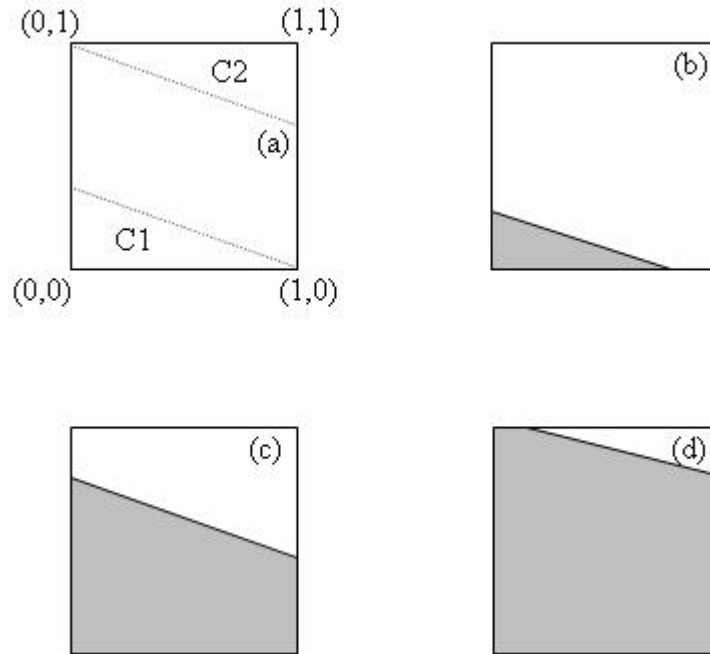


FIG. 5.4 – Fractions volumiques critiques

La nouvelle position des segments permet de déterminer les nouvelles valeurs de  $C$ .

### Etape d'actualisation du champ de VOF

Des marqueurs  $M_i$  sont placés uniformément sur chaque segment et dans chaque cellule et sont associés au vecteur normal  $\mathbf{n}_i$  de leur segment. On distingue deux types de cellules :

- type A : cellules contenant au moins un marqueur après advection
- type B : cellules ne contenant pas de marqueurs après advection.

#### - Cellules de type A :

Au marqueur  $M_i$  correspond une valeur de la fonction VOF  $C_i$  calculée à partir de la méthode PLIC. Pour déterminer la fonction VOF dans toute la cellule, on réalise un test sur le signe du produit scalaire  $pr = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j$  où  $i$  et  $j$  désignent les marqueurs de la cellule.

Il existe deux cas de figures :

Soit aucun des  $pr$  est négatif.  $C$  est alors une valeur moyenne des fractions volumiques  $C_i$  à laquelle on ajoute ou on soustrait les aires des polygones supplémentaires  $A(t)$  (Fig. 5.5).

Soit l'un des  $pr$  est négatif. On a soit une reconnection soit une déconnection des

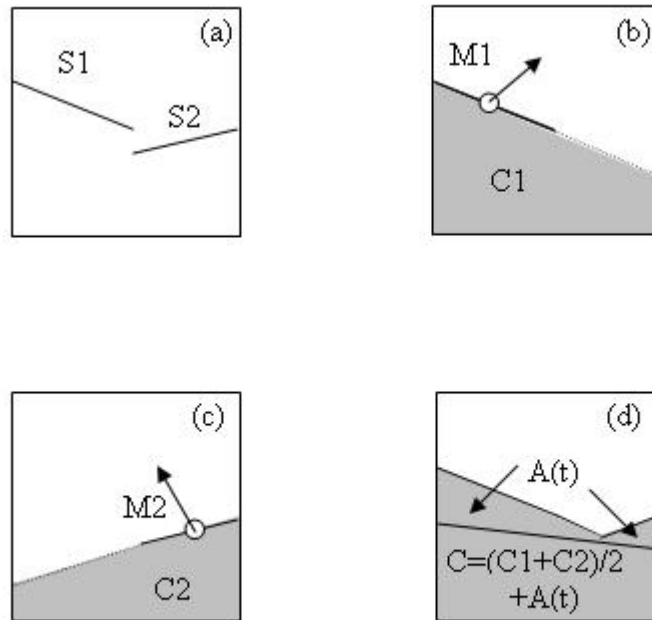


FIG. 5.5 – Actualisation du champ de VOF

segments de la cellule et la valeur de  $C$  est respectivement soit 1 soit 0. Pour estimer si il y a reconnection ou déconnection, on évalue le remplissage de la cellule sur les deux derniers pas de temps. Si elle a eu plutôt tendance à se remplir, il y a reconnection (VOF imposé à 1) sinon il y a déconnection (VOF imposé à 0).

- Cellules de type B :

On distingue encore deux cas :

Soit la cellule ne contient pas de marqueurs avant l'advection, et dans ce cas la valeur de  $C$  est inchangée.

Soit la cellule contient des marqueurs avant l'advection, et dans ce cas il faut

déterminer si cette cellule est vide ou pleine. Pour cela, on effectue un test sur le signe du produit scalaire  $p = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}$ , où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal au segment avant l'advection et  $\mathbf{d}$  le vecteur déplacement de son centre pendant l'advection. Si  $p > 0$ , la cellule est pleine après advection sinon elle est vide.

Le champ de VOF est donc actualisé et permet de représenter la nouvelle position de l'interface.

### 5.3 Couplage BIEM/Navier-Stokes/VOF

Le modèle VOF-NS peut simuler une vague durant sa propagation jusqu'à son déferlement pour des bathymétries complexes. Cependant, ce modèle exige un maillage suffisamment fin pour simuler convenablement les phénomènes physiques mis en jeu, ce qui devient très coûteux en temps de calcul. Une autre limitation est que le modèle VOF-NS peut dans certains cas induire une dissipation numérique non négligeable, pouvant entraîner une perte d'énergie non physique. Quant au modèle BIEM, les équations sont résolues dans l'hypothèse d'un écoulement irrotationnel et ne peut donc pas simuler le déferlement.

L'approche couplée du modèle BIEM-VOF-NS permet de surmonter ces limitations. Ainsi, le modèle BIEM est utilisé pour simuler la propagation de la vague dans la zone de shoaling, et un couplage avec le modèle VOF-NS permet de simuler la vague dans la zone de déferlement.

Nous avons utilisé ici un couplage faible (Guignard et al., 1999; Lachaume et al., 2003), qui consiste à utiliser les valeurs internes du champ de pression et de vitesse données par le modèle BIEM pour initialiser le modèle VOF-NS. Les valeurs internes du champ de vitesse sont données par l'équation (5.7). Le champ de pression est obtenu à partir de l'équation de Bernoulli. Les points de contrôles intérieurs de BIEM correspondent aux centres des cellules de VOF, de sorte qu'il est facile de transférer le champ de vitesse et de pression à la grille du modèle VOF-NS. Finalement, le champ de VOF est calculé par interpolation, à partir de la forme de la surface libre obtenue avec BIEM. Notons qu'avec cette méthodologie, aucune rétroaction du modèle VOF-NS sur le modèle BIEM n'est prise en compte. Ceci représenterait un couplage fort mais pose le problème de la descrip-

tion de l'écoulement irrotationnel par BIEM, cette hypothèse n'étant plus valide lorsque la vague commence à déferler.

Divers types de vagues incidentes peuvent être spécifiées dans le modèle BIEM (Grilli et al. 1997). Pour des ondes solitaires, l'algorithme de Tanaka est généralement utilisé (Tanaka 1986). Il propose une solution quasi-exacte de la forme de la surface libre et du champ de vitesses.





# Chapitre 6

## Validation des modèles sur des cas d'études

### 6.1 Propagation d'une onde solitaire sur fond plat

#### 6.1.1 Description du calcul

On considère ici la propagation d'une onde solitaire sur fond plat pour estimer la perte d'amplitude et d'énergie engendrée par le calcul VOF-NS. Les champs de vitesse et de pression sont fournis par BIEM où l'algorithme de Tanaka est utilisé pour générer une onde solitaire. Les caractéristiques du calcul sont les suivantes :

- amplitude de l'onde initiale :  $H_0 = 0.5$  m
- profondeur d'eau :  $h = 1$  m
- longueur du domaine : 20 m
- hauteur du domaine : 2 m.

Les calculs sont effectués en mode monophasique.

Ce calcul a été effectué pour quatre grilles différentes avec une résolution de plus en plus fine (Tab. 6.1) :

	CAS1	CAS2	CAS3	CAS4
$\Delta x$ (Discrétisation)	0.1 m	0.05 m	0.025 m	0.0125 m
$\Delta t$ (Pas de temps)	$7.5 \cdot 10^{-2}$ s	$3.75 \cdot 10^{-2}$ s	$1.875 \cdot 10^{-2}$ s	$9.375 \cdot 10^{-3}$ s
Nombre de pas de temps	20	40	80	160

TAB. 6.1 – Différents cas étudiés.

### 6.1.2 Dissipation d'énergie

Pour chaque maillage, la dissipation d'énergie a été estimée. Le tableau (6.2) présente les pertes d'énergie, d'amplitude de la vague et de volume total pour les quatre cas étudiés pour une propagation du soliton sur une distance de 6 m.

	CAS1	CAS2	CAS3	CAS4
$\Delta x$ (Discrétisation)	0.1 m	0.05 m	0.025 m	0.0125 m
$\Delta V$ (Volume)	1 %	0.5 %	0.2 %	0.2 %
$\Delta E$ (Energie)	1.64 %	0.9 %	0.53 %	0.35%
$\Delta H$ (Amplitude)	29 %	17 %	10.8 %	2 %

TAB. 6.2 – Pertes d'énergie, de volume et d'amplitude pour les quatre cas étudiés.

La perte de volume, inférieure à 1 %, reste faible quels que soient les maillages. La méthode SL-VOF n'engendre que peu d'erreurs lors de la reconstruction d'interface. Par contre, les erreurs commises sont surtout imputables à la convergence du solveur Navier-Stokes utilisé. Les variations de volume les plus importantes sont observées lorsque la convergence sur l'équation de conservation de la masse n'est pas optimale. En effet, il est difficile d'obtenir avec la méthode de compressibilité une divergence du champ de vitesse à  $10^{-4}$  sans pénaliser fortement le temps de calcul.

L'erreur commise sur la conservation de l'énergie totale est également faible (moins de 2%). On constate que plus le maillage est fin, plus la dissipation d'énergie est réduite. L'utilisation du mode monophasique peut expliquer cette perte d'énergie. En effet, dans ce cas, le bilan de quantité de mouvement prend en compte les cellules mixtes où les champs physiques sont des valeurs approchées (conditions limites) obtenues par interpolation à partir des cellules voisines (Eq. 5.12). L'approche diphasique permettrait d'éliminer ce problème.

Pour minimiser les pertes d'énergie, de volume et d'amplitude, il convient donc de définir un maillage suffisamment fin qui permettra également d'obtenir une meilleure description du déferlement. Pour optimiser les temps de calcul, le couplage des deux modèles est utilisé. Ainsi, le modèle BIEM est employé pour simuler la propagation du soliton dans la zone de shoaling, et le modèle VOF-NS pour simuler le soliton dans la zone de déferlement.

## 6.2 Validation expérimentale

La validation expérimentale reste nécessaire pour l'amélioration et le développement des modèles. Ainsi, le papier suivant, présenté à WAVES'05, expose la validation expérimentale de simulations numériques bi-dimensionnelles du déferlement des vagues. Deux applications différentes sont considérées. Le premier est le cas du déferlement d'un soliton au-dessus d'une marche, qui a été expérimentalement étudiée par Yasuda et al. (1997). Le deuxième cas est le shoaling et le déferlement d'une vague solitaire sur une pente douce constante (1/15). Les résultats sont comparés aux expériences menées à l'ESIM (Ecole Supérieure d'Ingénieur de Marseille) (Kimmoun et al. 2004).

EXPERIMENTAL VALIDATION OF A COUPLED  
BEM-NAVIER-STOKES MODEL FOR SOLITARY WAVE  
SHOALING AND BREAKING

D. Drevard<sup>1</sup>, R. Marcer<sup>2</sup>, S.T. Grilli<sup>3</sup>, M. ASCE,  
P. Fraunié<sup>1</sup> and V. Rey<sup>1</sup>

WAVES'05

**Abstract**

This paper studies the shoaling, breaking, and post-breaking of solitary waves, using a numerical model based on the coupling between a higher-order Boundary Element Method (BEM) and a Volume Of Fluids (VOF) solution of Navier-Stokes (NS) equations, having an improved interface tracking algorithm (SL-VOF). In the coupled model, the BEM solution is used to initialize the VOF-NS computations. The paper reports on the experimental validation of numerical simulations, for two-dimensional (2D) breaking waves. Two different applications are considered. The first one is the case of the breaking of a solitary wave over a step, which was experimentally tested by Yasuda et al. (1997). The second case is that of the shoaling and breaking of solitary waves on a constant mild slope. Results are compared to experiments performed at ESIM (Marseille, France).

---

<sup>1</sup>Laboratoire de Sondages Electromagnétiques de l'Environnement Terrestre, Université de Toulon et du Var - BP 132, 83957 La Garde cedex, France, deborah.drevard@lseet.univ-tln.fr

<sup>2</sup>Principia Z.I. Athélia 13705 La Ciotat Cedex, France

<sup>3</sup>Department of Ocean Engineering, University of Rhode Island, Narragansett, RI 02882, USA ; grilli@oce.uri.edu

### 6.2.1 Introduction

Breaking waves on beaches and over ocean bottom discontinuities, constitute one of the most energetic events in the coastal environment. A better understanding and modeling of the kinematics of breaking waves is of prime importance for coastal engineering problems. Significant progress in both the physical understanding and the numerical modeling of wave breaking have been made in recent years. In particular, due to the increasing power of modern computers, direct Computational Fluid Dynamics (CFD) simulations of wave breaking can now be carried out. Proper experimental validation of such simulations, however, is still a necessary step both for model development and in the analysis of model predictions.

Computational methods used to simulate wave breaking can be divided into two groups. The first one consists in following the free surface motion as a function of time, using an adapted or deformed grid. In such an approach, models based on fully nonlinear potential flow equations, usually solved with a Boundary Element Method (BEM), have proved very accurate and efficient, particularly for simulating wave overturning over constant depth (e.g., Longuet-Higgins and Cokelet, 1976, 1978) or wave transformations over an arbitrary bottom topography, up to overturning (e.g., Grilli et al. 1992, 1994, 1996, 1997). Such models, however, are unable to deal with interface reconnections and large deformations occurring during wave breaking, for which potential theory is invalid. In the second group of models, the solution is based on the computation of the interface motion in a fixed grid, using the full Navier-Stokes (NS) equations, which allows to simulate the full wave breaking. In this group, the Volume Of Fluids (VOF) method, first developed by Hirt and Nichols (1981), is likely one of the better adapted models to treat complex interface shapes, such as occurs during wave breaking. A key problem of the latter models, however, is their high computational cost as compared to BEM models. To combine the advantages of both types of models, a coupled approach was proposed in earlier work, in which pre-breaking waves are computed with the BEM method, and breaking and post-breaking waves are computed using the VOF model (Guignard et al., 1999; Lachaume et al., 2003; Biauxser et al., 2004a,b).

Although three-dimensional problems have been solved, in this study, the coupling of BEM and VOF-NS models is performed in two dimensions (2D). The

BEM solution, obtained with Grilli et al.'s (1996) and Grilli's (1997) model, is used as an initial solution for the VOF-NS model computations. The BEM model equations are summarized in the first section. The second section deals with the VOF-NS model. Then, two applications of breaking wave simulations are presented, with a comparison with experiments.

## 6.2.2 BEM Model

### Mathematical Formulation

Equations for fully nonlinear potential flows with a free surface are listed below. The velocity potential  $\phi(x, t)$  is introduced to describe inviscid irrotational 2D flows, in Cartesian coordinates  $(x, y)$ , with  $y$  the vertical upward direction ( $y = 0$  at the undisturbed free surface), and the fluid velocity is expressed as  $\mathbf{u} = \nabla\phi$ . Continuity equation in the fluid domain  $\Omega(t)$  with boundary  $\Gamma(t)$  is a Laplace's equation for the potential,  $\nabla^2\phi = 0$ . Using the free space Green's function,  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) = -(1/2\pi) \log |\mathbf{x} - \mathbf{x}_l|$ , Green's second identity transforms the latter equation into the Boundary Integral Equation (BIE),

$$\alpha(\mathbf{x}_l)\phi(\mathbf{x}_l) = \int_{\Gamma(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial n}(\mathbf{x})G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) - \phi(\mathbf{x})\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l)}{\partial n} \right\} d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (6.1)$$

The boundary is divided into various parts, over which different boundary conditions are specified. On the free surface,  $\phi$  satisfies the nonlinear kinematic and dynamic conditions,

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{r} = \mathbf{u} = \nabla\phi \quad ; \quad \frac{D\phi}{Dt} = -gy + \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi - \frac{p_a}{\rho} \quad (6.2)$$

respectively, with  $\mathbf{r}$  the position vector of a fluid particle on the free surface,  $g$  the gravitational acceleration,  $p_a$  the pressure at the free surface and  $\rho$  the fluid density. On the bottom and other fixed parts of the boundary, a no-flow condition is prescribed as,  $\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$ .

### Numerical method for the BEM Model

A Lagrangian second-order explicit scheme, based on Taylor series expansions, is used for the time updating of the position  $\mathbf{r}$  and velocity potential  $\phi$  on the

free surface. First-order coefficients are given by Eqs. (6.2) and second-order coefficients, by the Lagrangian time derivative of these. A higher-order BEM is used for the numerical solution of BIE (6.1) for  $\phi$ , and a similar BIE for  $\partial\phi/\partial t$  (Grilli and Subramanya, 1996). The boundary is discretized into collocation nodes, defining two-dimensional elements for the local interpolation of the solution in between these nodes. Within each element, the boundary geometry and field variables are interpolated using cubic polynomial shape functions (4-node “sliding” elements are defined, of which only the middle two nodes are used). The discretized BIEs are evaluated for each collocation node by numerical integration. A special treatment is applied for weakly singular integrals. The linear algebraic system resulting from the discretization of the BIE is in general dense and non-symmetric; for 2D problems, a direct solution based on Kaletsky’s method is used (for 3D problems, not reported here, a generalized minimal residual algorithm with preconditioning is used to solve the algebraic system). Accuracy is increased in regions of high variability by redistributing nodes using a regridding technique based on the BEM shape functions.

### 6.2.3 VOF-NS Model

#### Navier-Stokes/VOF Formulation

We consider a moving interface defined as the limit between two incompressible viscous fluids of different densities. The problem is to compute the pressure and velocity fields in the denser fluid and to track the interface motion.

The interface and its motion are described by an original method, called SL-VOF (Guignard et al., 2001a for 2D-flows; Biausser et al., 2004a for 3D-flows), which combines the VOF method (Hirt and Nichols, 1981) with a Piecewise Linear Interface Calculation (PLIC) (Li, 1995). The position of the interface is thus calculated in each cell by way of a discrete function  $C$  whose value, between 0 and 1, denotes the fraction of the cell space filled with the denser fluid (VOF concept). The original SOLA-VOF method (Hirt and Nichols, 1981), which is based on the resolution of a conservation equation for the VOF function, assumes that the interface is parallel to the grid sides. Hence, the resolution of this method is quite low, particularly for complex interfaces such as found in breaking waves. By contrast, the SL-VOF method allows for the interface to be represented by oblique segments (plans in 3D) of any orientation (PLIC concept). Moreover, due



to the Lagrangian description in the PLIC method, there is no need to solve a conservation equation for the VOF function. Thus, the main advantages of this method, as compared to the original VOF method, are a higher accuracy of the interface description and the capacity to use larger time steps, resulting in a significant gain in computational time.

### Numerical method for the VOF-NS Model

Time integration is based on a fully implicit second-order finite difference scheme. The solution of the nonlinear system is based on the “pseudo-compressibility method” (Viviand, 1980 ; De Jouët et al., 1991). In this method, a time-like variable  $\tau$ , called pseudo-time, is introduced in the equations, creating an additional pseudo-unsteady term, which involves a new unknown  $\tilde{\rho}$ , called pseudo-density (constrained to remain positive). The fluid pressure is calculated as a function of  $\tilde{\rho}$ . The choice of an optimal pseudo-state equation is discussed in Viviand (1995). The system of equations is integrated step-by-step in pseudo-time, with an explicit five step Runge-Kunta scheme.

### Coupling BEM-VOF-NS models

The VOF-NS model can simulate wave propagation, breaking, and post-breaking over slopes, or other complex bottom topography. However, to be accurate, this model requires a sufficiently fine numerical grid, as compared to the scale of variation of physical phenomena to be simulated. This makes computations over large domains prohibitive. Another limitation is that the VOF method may induce unwanted numerical dissipation, when applied to the simulation of wave propagation over a long distance, leading to non-physical loss of wave energy.

As discussed in the introduction, the coupled BEM-VOF-NS model approach allows to overcome these limitations. Thus, we use the very accurate and efficient BEM model to simulate wave propagation over constant depth and in the shoaling zone, and couple it to the VOF-NS model to simulate waves in the breaking region. Here, according to the method referred to as weak coupling (e.g., Guignard et al., 1999 ; Lachaume et al., 2003), model coupling is carried out by specifying the internal values of the dynamic pressure and velocity field computed with the BEM model over the VOF grid. The dynamic pressure field is obtained from Bernoulli equation, which requires also calculating the time derivative of the potential. The

interior control points of the BEM correspond to the centers of the VOF cells, so that it is easy to transfer velocity and pressure values to the NS mesh. The VOF field is finally computed by interpolation, based on the shape of the BEM free surface. Note that with this methodology, no VOF-NS results are fed back into the BEM model (this would represent a so-called strong coupling situation).

Various types of incident waves can be specified in the BEM model (Grilli and Horrillo, 1997). For solitary waves, Tanaka's (1986) algorithm has been implemented to compute numerically exact free surface shape, potential, and normal derivative of the potential at initial time (Grilli and Subramanya, 1996).

### 6.2.4 Applications

#### Breaking of a solitary wave over a step

The propagation of a solitary wave over a step or other submerged breakwaters, or reefs, has been the object of many studies, both experimental and numerical (e.g., Grilli et al., 1992, 1997; Yasuda et al., 1997). Solitary waves are a good model of extreme long waves, such as tsunamis, but also are both a simple and a good approximation for long nonlinear shallow water waves.

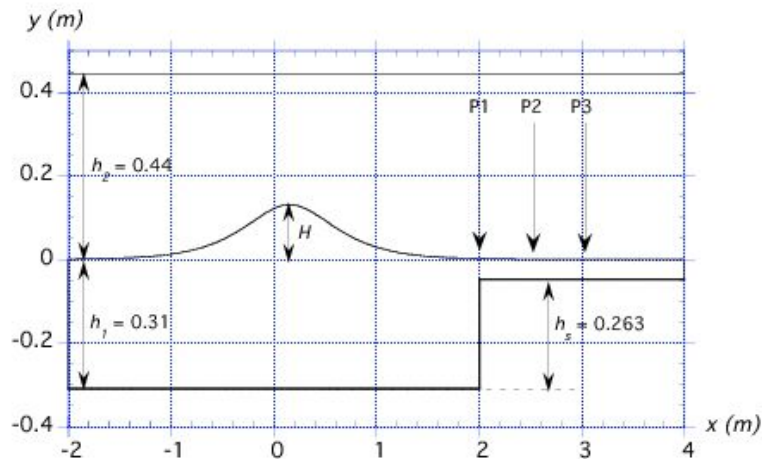


FIG. 6.1 – Configuration of Yasuda's (1997) experiments.

Here, the domain configuration of Yasuda et al.'s (1997) experiments is used to study solitary wave propagation over a submerged step, in both the BEM and the VOF-NS models (Fig. 6.1). This case was also recently used by Helluy et al. (2005),

as an experimental benchmark, to compare results of several numerical models. Experimental data include wave elevation measured at 3 wave gages P1, P2, P3, and visualizations of breaking wave shapes. The initial condition is specified as a numerically exact solitary wave, with its maximum elevation located at  $x = 0$ . The initial velocity and pressure fields for this wave are generated using the BEM model and used, together with wave shape, as an initial condition in the VOF-NS model. The wave height is  $H = 0.131$  m over constant depth  $h_1 = 0.31$  m, thus  $H/h_1 = 0.423$ . The wave propagates with an initial phase velocity of  $c_o = 1.18\sqrt{gh_1} = 2.06$  m/s. VOF computations are made in a rectangular domain, 8 meters long ( $x \in [-2, 6]$ ) and 0.75 meters high ( $y \in [-0.31, 0.44]$ ), using  $1000 \times 200$  computational cells. A rectangular step of height  $h_s = 0.26$  m is modeled on the bottom, 4 meters from the leftward boundary.

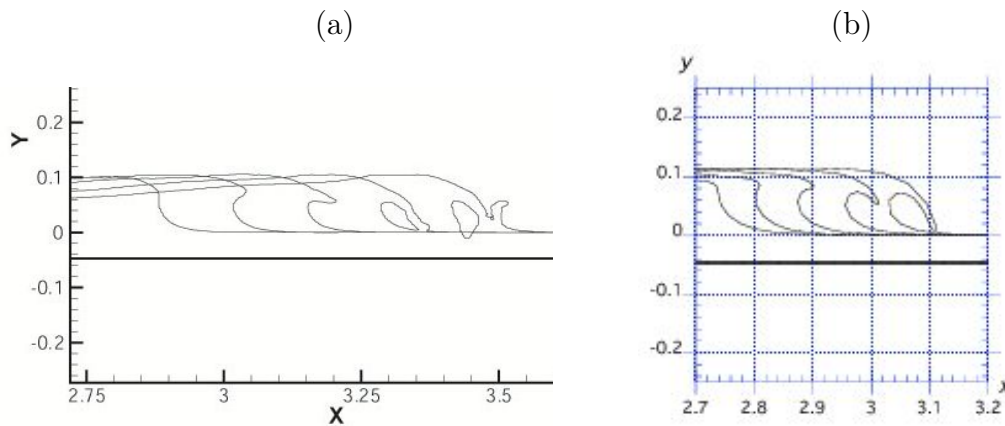


FIG. 6.2 – Evolution of the solitary wave over the step until splash-up/overturning : (a) VOF-NS ; (b) BEM (last profile is at  $t = 1.35$  s).

At the beginning of computations, the wave propagates on a flat bottom without deformation in both models. When it reaches the step, part of the wave is reflected and part of the wave is transmitted over the step (Fig. 6.2). The front of the transmitted wave steepens up and a jet starts forming at its crest, due to the reduced wave celerity in the shallower depth  $h_1 - h_s = 0.047$  m. Then, the wave overturns and break. The jet impacts at about 3.35 m from the initial condition in the VOF model, and 3.12 m in the BEM model. Fig. 6.2 shows that both models accurately describe those phases. The inviscid BEM model does not include any dissipation due to flow separation at the step and, hence, computes higher transmitted waves, which evolve faster. The last overturning profile computed in

the BEM model, slightly before jet impact, is at  $t = 1.35$  s. The VOF-NS model accurately simulates both jet impact and post-breaking phases during which a secondary jet ejection occurs. This phenomenon is usually referred to as splash-up.

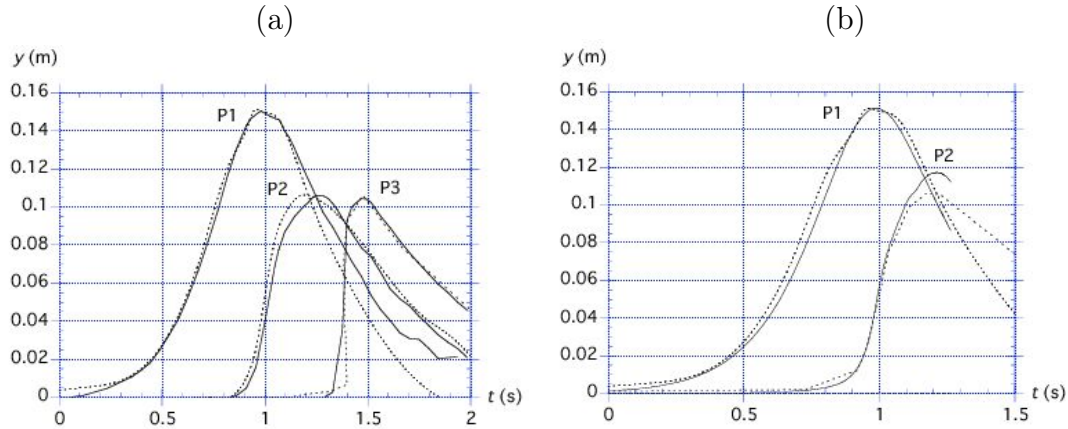


FIG. 6.3 – Comparison of computed surface elevations (—) with Yasuda et al.’s (1997) experiments (- - - -) at gages gages P1 ( $x=2$  m), P2 ( $x=2.52$  m), and P3 ( $x=3.02$  m) (Fig. 6.1) : (a) VOF-NS; (b) BEM.

Surface elevations computed in both models are compared with Yasuda et al.’s (1997) experimental data, at three different gage locations (Figs. 6.1 and 6.3). BEM computations are interrupted at  $t = 1.35$  s, when jet impact occurs. The first gage, P1, is located at the step, where we see that waves computed in both models agree well with experiments. At this instant, the solitary wave is not yet significantly affected by the effect of the step and it still has a shape close to its initial shape, except for a slight increase in amplitude due to reflection. For the two following gages, P2 and P3, located over the step, the wave begins and then intensifies its deformation. The front of the wave steepens up, reaching a vertical slope; then, a jet appears at the crest, initiating wave overturning. The comparison of measurements at gages shows that wave elevations computed in the VOF-NS model are still in good agreement with experimental results. In the BEM model, however, wave elevations are slightly overpredicted near the crest. This is due to the lack of energy dissipation at the step in the BEM model.

Figure 6.4 shows velocity fields computed in the VOF-NS model, for three different times. At  $t = 0.35$  s, flow velocities are seen to intensify in the shallower water at the beginning of the step, as compared to their values in front of the step, due to flow convergence. The latter phenomenon also causes strong vertical

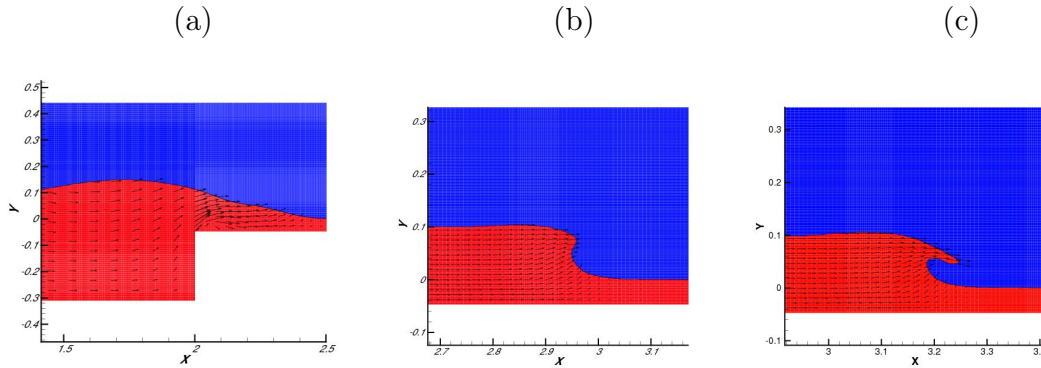


FIG. 6.4 – Velocity field in VOF-NS model, for time  $t =$  (a) 0.35 s, (b) 0.56 s, and (c) 0.63 s.

flow velocities. Flow separation is also visible at the step. Later on ( $t = 0.56$  s), transfer of the wave crest occurs from the deeper to the shallower region, and this phenomenon causes increased deformation of the wave crest, which steepens up. Flow convergence towards the crest follows and causes the wave profile to become even more asymmetric. The wave at this stage appears as having two regions : (i) a uniform flow over depth in the back, and (ii) a flow convergence at the crest, in the front. At the breaking point, when the wave front slope is vertical, the wave starts overturning and the crest plunges forward. >From this instant onward, flow velocities in the jet intensify and are directed horizontally and slightly downwards ( $t = 0.63$  s). The computed velocity field is similar to that observed in a plunging wave over a slope (Grilli et al., 2004).

### Breaking of a solitary wave over a sloping bottom

In this application, the VOF-NS model is validated based on experiments performed in the laboratory of the Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Marseille (ESIM). This work was carried out within the framework of the program PATOM ("Programme Atmosphère et Océan à Multi-échelles") of the French CNRS. Details of ESIM's laboratory experiments can be found in Kimmoun et al. (2004), as well as Grilli et al. (2004). Solitary waves were generated in a transparent wavetank, using a flap wavemaker whose axis of rotation was located below the tank bottom. The law of motion of the wavemaker was defined analytically such as to produce fairly clean solitary waves. Experiments were run for a solitary wave of initial height  $H = 0.1$  m in initial depth  $h_1 = 0.74$  m, which gives  $H/h_1 = 0.211$  (Fig.

6.5). Experimental data include wave elevation measured at 6 wave gages (S1-S6), visualizations of breaking wave shapes around the location of the shallower gage (S6), and flow velocities measured within the breaking wave area, using a Particle Image Velocimetry (PIV) method.

In VOF simulations, we use a 1 : 15 constant slope. Calculations are made in a domain 16 meters long ( $x \in [-0, 16]$ ) and 1.4 meters high ( $y \in [-0.74, 0.3]$ ). The initial solution is computed with the BEM model. The exact tank geometry, wavemaker shape, and motion were specified in the BEM model, and computations were started from still water. Details can be found in Grilli et al. (2004). Incident solitary waves, to be specified in the VOF-NS model, were selected at two different times  $t = 6.99$  s and  $t = 8.75$  s in the BEM model, for which waves crests were located at  $x = 10$  and 13.9 m, respectively. These waves are hereby referred to as I2 and I3 (Fig. 6.5). Internal velocity and pressure were computed for these waves in the BEM model, and used to initialize VOF-NS model computations. The computational cells used in the VOF-NS model were  $2076 \times 120$  for I3 and  $2160 \times 120$  for I2.

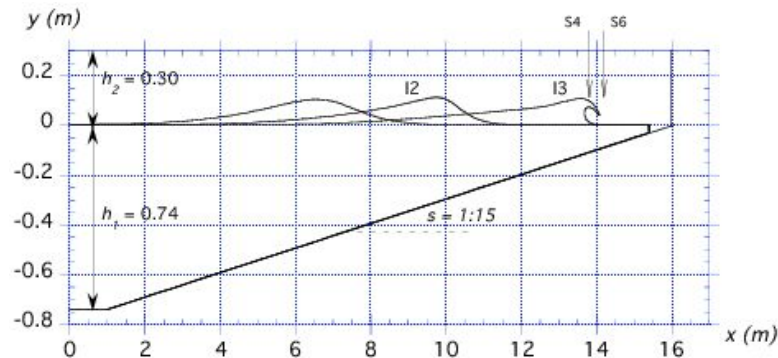


FIG. 6.5 – Configuration of ESIM's experiments for solitary wave shoaling and breaking, with gages located at  $x = 13.85$  (S4) and  $14.20$  m (S6).

Figure 6.6 shows the comparison of measured breaker shapes, with numerical wave profiles, for the two different initial waves, I2 and I3. With initial solution I3, computed wave profiles are in good agreement with experiments, although wave elevations are slightly higher in the numerical model than in experiments. The BEM solution on which these VOF computations are based, in fact, also shows similar slightly higher elevations than in experiments (Fig. 6.7). Grilli et al. (2004) give several sources of experimental errors that can help explain these discrepancies, the principal one being the paddle motion, which was poorly controlled in

experiments and hence quite difficult to reproduce exactly in the BEM model. Another source of errors is seiching in the tank during experiments.

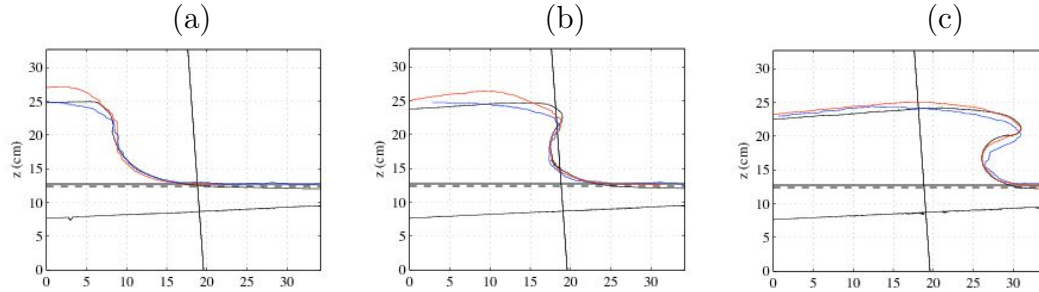


FIG. 6.6 – Comparison of measured breaker shapes (black line) with numerical simulations, with I2 (blue line), and I3 (red line), at three different times.

With initial solution I2, wave profiles are also well computed in Fig. 6.6, as compared to experimental results. Here, however, the amplitude of the computed wave is slightly lower than in experiments. Wave I2 is initialized further down the slope than I3, at  $x = 10$  m, and thus propagates over more than 4 m, which causes some numerical dissipation in the VOF-NS model, leading to a gradual decrease in wave amplitude during propagation. The difference between VOF-NS results and experiments is about  $-2.5\%$  at wave gage S4 and  $-10\%$  at gage S6 (Fig. 6.7). This loss of energy does not really affect the location where jet impact occurs in the VOF-NS model. With the initial solution I3, the breaking jet impacts the free surface at  $x = 14.68$  m, and at  $x = 14.72$  m with I2. In experiments, jet impact occurs between 14.50 and 14.55 m.

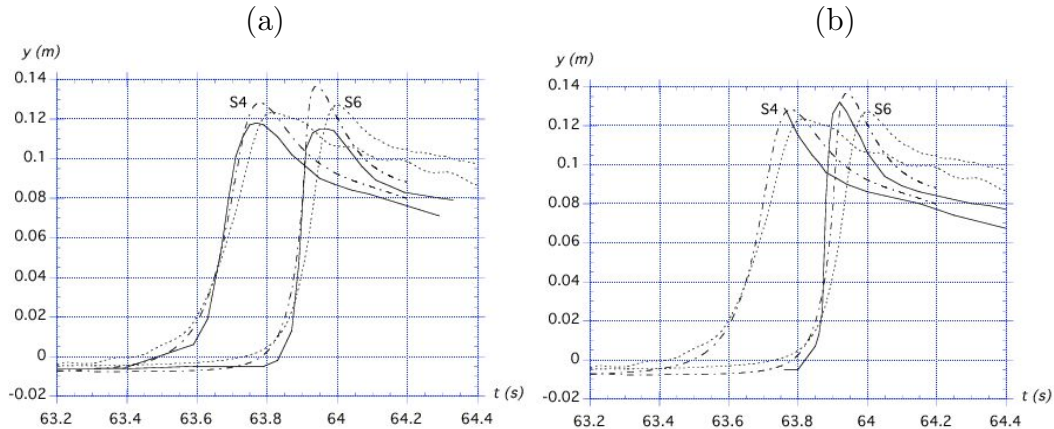


FIG. 6.7 – Comparison of VOF-NS (—) and BEM (---) results with ESIM's experimental data (- - -), for initial solutions : I2 (a) ; I3 (b), at wave gages : S4 and S6.

### 6.2.5 Conclusions

The validity of the coupled BEM-VOF-NS model to simulate complex wave propagation and breaking events has been tested by comparing results to experiments for the shoaling, breaking, and post-breaking of solitary waves. Two different applications were selected, corresponding to a step and a 1 :15 slope.

The coupled model produces satisfactory numerical simulations of these two physical wave experiments, with a good agreement of numerical results with experiments, for both wave elevations and breaking wave profiles. However, when using an initial BEM solution that is located too far from the breaking point in the VOF-NS model, which implies long propagation/shoaling distances for the solitary wave, a measurable loss of amplitude occurs. The coupling of the two models, BEM and VOF-NS, significantly reduces or even eliminates this type of problem.

In addition to the work presented here, further results supporting these conclusions will be presented during the conference, such as the comparison of internal velocities simulated in the VOF-NS model and measured in ESIM's experiments using the PIV method. Moreover, as part of the PATOM program, other VOF-NS models were used to simulate the same experimental cases, and results of these models will be compared with our results in work that will also be reported on during the conference.



## Acknowledgements

Financial support of the French CNRS PATOM program is gratefully acknowledged.

## 6.3 Complément : comparaison du champ de vitesses

Lors des expériences de l'ESIM, des mesures de champ de vitesses ont été effectuées à partir d'une technique PIV. Ceci permet de comparer les champs de vitesses obtenus expérimentalement et numériquement avec le modèle VOF-NS.

On remarque cependant que les vitesses données par l'expérience au niveau de l'intérieur du creux et du jet ne sont pas physiquement représentatives d'un tel écoulement (Fig. 6.8).

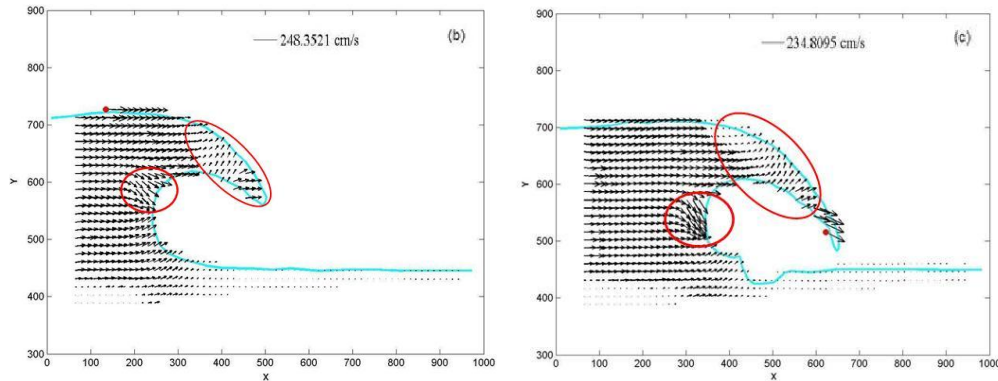


FIG. 6.8 – Vitesses obtenues par une mesure PIV. Les zones entourées en rouge correspondent aux vitesses physiquement incorrectes.

Deux raisons expliquent ce problème :

- L'écoulement était éclairé par en dessous, ainsi la partie inférieure de la vague a fait de l'ombre à la partie supérieure (le jet et la partie haute du creux).
- Des phénomènes de seiches ont été observées durant les expériences.

Quelques comparaisons ont toutefois été possibles. Nous disposons du champ expérimental de vitesses en trois instants différents (Fig. 6.9) : la crête de la vague commence à déferler (a), puis le jet plonge au dessus du creux (b), jusqu'à impacter la surface libre (c).

La comparaison du champ de vitesses est assez encourageante avec un champ uniforme à l'arrière de la vague, des vitesses dirigées vers le haut en bas du creux

et vers le bas en haut du creux. La vitesse maximale est indiquée par des points rouges et sa valeur est reportée en haut de chaque fenêtre. On observe une vitesse maximale sur la pointe du jet variant de 2.21 m/s à 2.34 m/s en ce qui concerne les résultats numériques. Ces derniers sont proches des résultats expérimentaux.

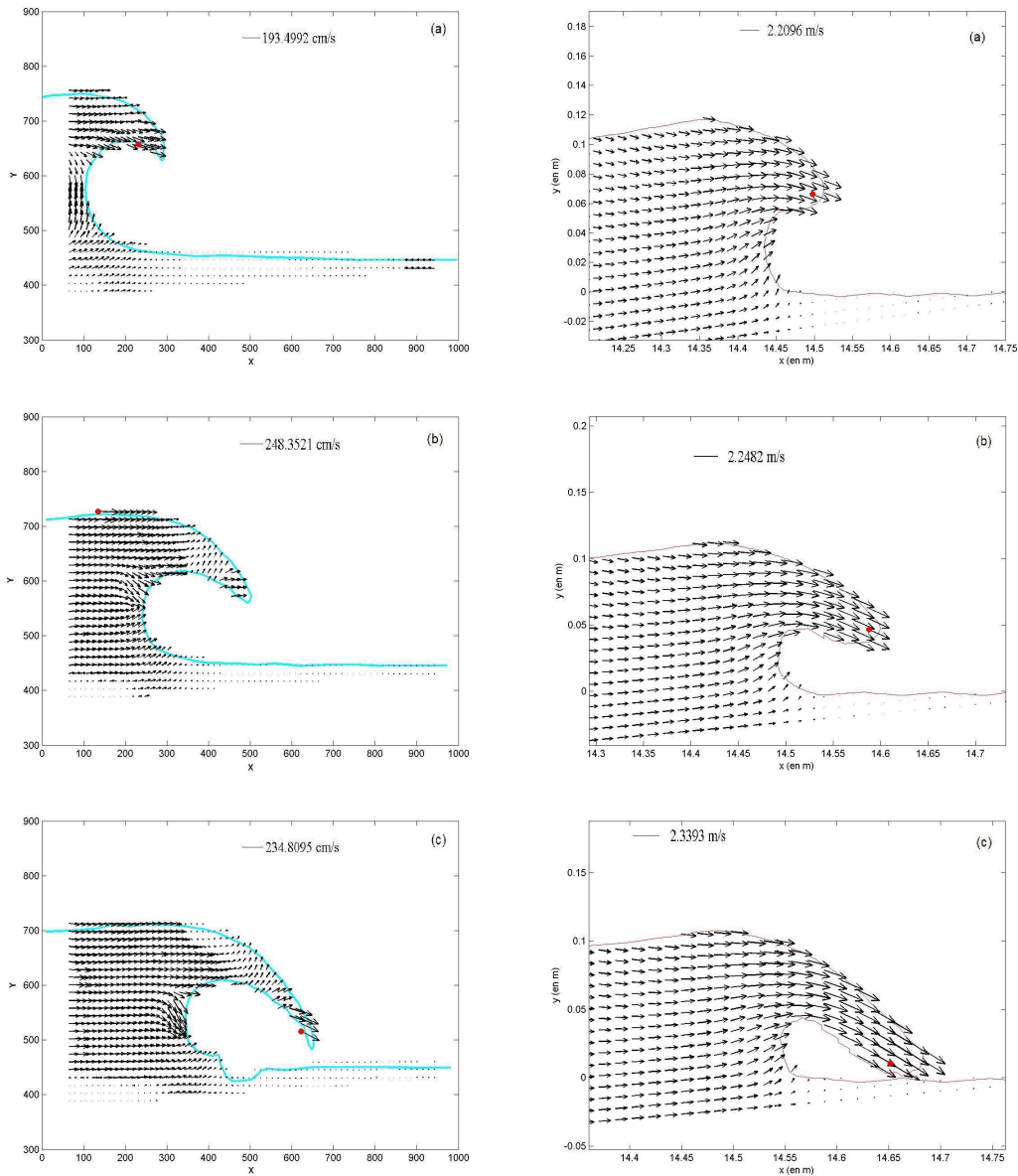


FIG. 6.9 – Comparaison des champs de vitesses en trois instants obtenus expérimentalement (colonne de gauche) et numériquement (colonne de droite).

La comparaison des modules de la vitesse donne les mêmes conclusions (Fig. 6.10). Les résultats pour la partie inférieure du soliton sont en bon accord ce qui

n'est pas le cas pour la partie supérieure, et notamment dans le jet plongeant, du fait de mesures fausses dans ces zones.

De nouvelles manipulations ont permis de pallier ces problèmes par un éclairage de l'écoulement par le dessus (Fig. 6.11). Les vitesses observées ainsi que le module de la vitesse semblent être plus proches de la réalité physique. Les simulations numériques correspondantes pour ces nouvelles configurations sont en cours.

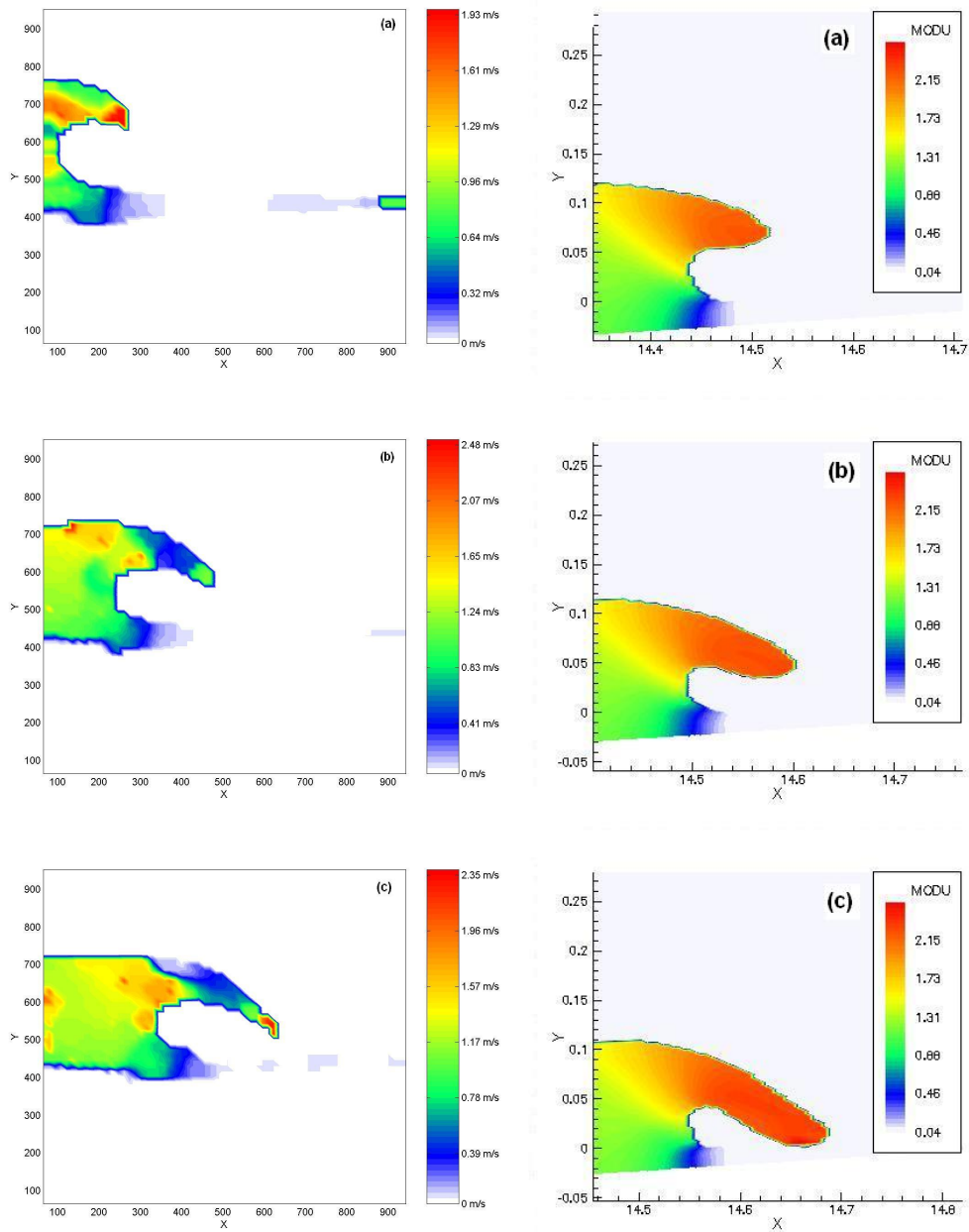


FIG. 6.10 – Comparaison des modules de la vitesse aux trois instants (a), (b) et (c) entre les résultats expérimentaux (colonne de gauche) et les simulations numériques (colonne de droite).

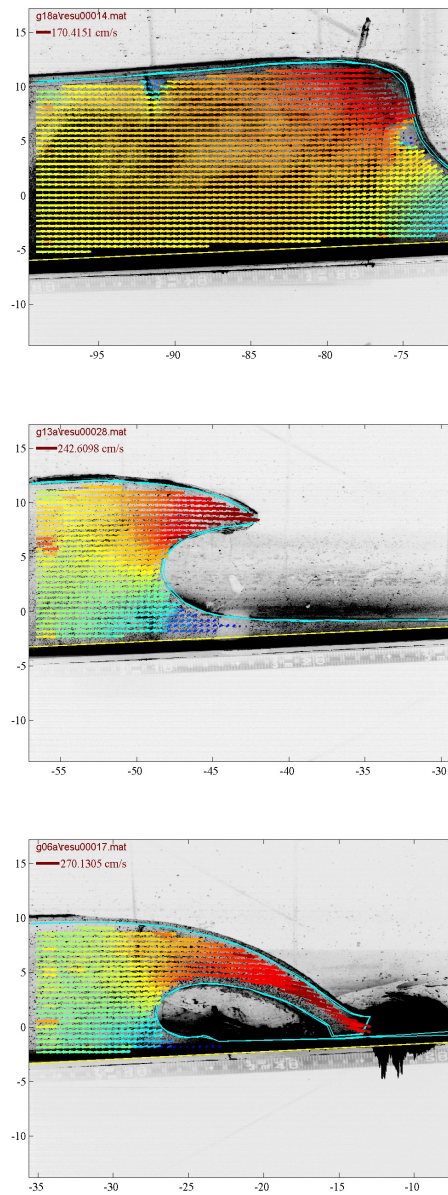


FIG. 6.11 – Evolution du champ de vitesses pour les nouvelles expériences - Mesure PIV

## 6.4 Conclusion

La validation du modèle VOF-NS couplé au modèle BIEM a été effectuée pour l'étude de la propagation et du déferlement d'une onde solitaire. Deux applications différentes ont été choisies correspondant au déferlement de vagues sur une marche, puis sur une pente de  $1/15$ .

Les résultats numériques comparés aux expériences donnent de bons résultats pour l'élévation de la surface libre et pour le profil de la vague lors du déferlement. Cependant, si le soliton est initialisé trop loin du point de déferlement, la propagation et le shoaling de l'onde, simulés par le modèle VOF-NS, induit une perte d'amplitude non physique. Le couplage des deux modèles, BIEM et VOF-NS, permet de réduire ce problème. Le modèle BIEM génère et propage le soliton, puis la phase de déferlement est simulée avec le modèle VOF-NS. La comparaison du champ de vitesses donne des résultats prometteurs. Les expériences récentes devraient permettre de compléter la validation du modèle sur la totalité du soliton (forme de la surface libre et champ de vitesses). De plus, dans le cadre du programme national PATOM, d'autres modèles ont été employés pour simuler le cas expérimental de l'ESIM. Les résultats de ces modèles serviront de base de comparaison supplémentaire pour le modèle VOF-NS. Dans ce cadre, des premières comparaisons ont déjà été effectuées sur le déferlement d'un soliton sur une marche (première application) (Helluy et al. 2005) (voir annexe 1).

# Chapitre 7

## Conclusion générale et perspectives

L'objectif de cette thèse était d'étudier la propagation d'ondes de gravité en zone de déferlement. L'étude expérimentale a permis de mesurer le caractère partiellement stationnaire de la houle à partir de données synchrones de vitesses horizontale et verticale et/ou de pression. Quant à l'étude numérique, la validation de la méthode de suivi de surface libre SL-VOF a été effectuée pour deux applications en laboratoire.

Dans la première partie, les descriptions classiques des houles réelles telles que les méthodes de Stokes ont été développées pour des houles partiellement stationnaires. Le taux de réflexion a été calculé par une approche spectrale à partir de divers appareils tels que le vélocimètre acoustique Doppler (Vector), le vélocimètre électromagnétique (S4) et les capteurs de pression piézoélectriques. Des mesures en bassin ont permis de confronter les théories non linéaires de transformations de houles aux méthodes spectrales. D'autres séries de mesures en bassin et des applications in situ ont permis d'étudier l'influence de différents paramètres, tels que la profondeur d'immersion des appareils, le courant ou l'angle d'incidence de la houle, sur les résultats. On a observé que l'information sur le caractère partiellement stationnaire d'une houle peut être facilement mesuré au moyen de données synchrones de vitesses horizontale et verticale ou de pression. Ces deux méthodes peuvent être utilisées lorsque les instruments sont déployés assez loin du fond, typiquement en eau profonde où le mouvement induit par la vague n'affecte que la couche supérieure ( $z \leq \lambda/2$ ). En zone littorale et en particulier en zone de "déferlement", les



mesures sont souvent effectuées au voisinage du fond, les données synchrones de vitesse horizontale et de pression sont alors utilisées. Pour les mesures in situ, ces méthodes restent valides en présence d'un courant uniforme. Nous avons observé cependant que l'influence du courant reste limitée et que l'onde est plus sensible au courant moyen qu'à ses fluctuations locales. La prise en compte de la direction de propagation a une influence notable sur le calcul des taux d'ondes réfléchies comme on a pu l'observer pour la mer du vent. Enfin, la perte d'énergie du large à la côte nous a permis de mettre en évidence la présence d'un déferlement glissant. Après ce type de déferlement, l'onde reste descriptible par les théories de Stokes malgré des conditions "théoriques" non respectées (eau peu profonde, dissipation par déferlement) et le caractère partiellement stationnaire de la houle peut encore être calculé. Pour une onde monochromatique partiellement stationnaire, la figure 7.1 permet de constater qu'en eau peu profonde ( $kh < \pi/5$  ( $\approx 0.63$ )), la méthode diverge puisque le nombre d'Ursell tend vers 1. En profondeur infinie ( $kh \geq \pi$ ), les effets non linéaires sont nuls à partir des données de vitesses, ce qui correspond aux résultats trouvés dans la section 3.2.1. Par profondeur intermédiaire, on remarque que pour des mesures effectuées proche de la surface libre, le poids des effets non linéaires est plus faible avec les données de vitesses alors que l'inverse est observé pour des mesures de vitesses effectuées près du fond. Pour les mesures en profondeur infinie ou intermédiaire, il serait intéressant de quantifier les effets non linéaires en comparant les données de surface et de vitesses pour des houles réelles.

Le déferlement plongeant reste quant à lui indescriptible par les théories de Stokes. Il génère turbulence, courants, mise en suspension de sédiments, et l'écoulement après déferlement est chaotique. Les investigations expérimentales sont difficiles à mettre en place et coûteuses dû fait de l'aspect tridimensionnel de ce phénomène. L'alternative est l'approche déterministe qui permet une description du champ de vitesses, de pression et de la surface libre. L'étude a été effectuée à partir du couplage du modèle BIEM et du modèle VOF-NS (inséré dans le code de CFD EOLE de Principia R&D). La validation de ce dernier est étudiée pour deux applications. La première est l'étude du déferlement d'un soliton sur une marche, comparée aux expériences de Yasuda et al.. L'élévation de la surface libre est en accord avec les résultats de l'expérience, et une comparaison entre différents modèles montrent une bonne concordance des simulations (Helluy et al.

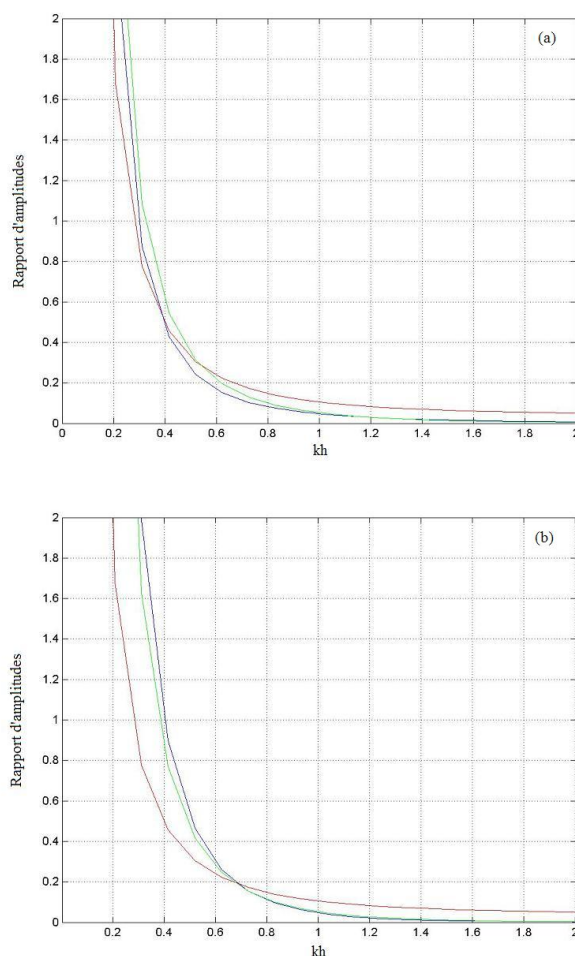


FIG. 7.1 – Rapport des termes du second ordre par rapport aux termes du premier ordre pour la surface libre (rouge), la vitesse horizontale (bleu) et la vitesse verticale (vert), mesurées en  $z = -\lambda/8$  (a) et en  $z = -\lambda/4$  (b) pour une onde incidente de fréquence  $f = 0.5$  Hz et d'amplitude  $a = 0.1$  m.

2005) (voir annexe). La deuxième application concerne l'étude de la propagation et du déferlement d'un soliton sur un fond de pente  $1/15$ , expériences menées dans le canal de l'ESIM. On observe une bonne représentation de l'évolution de la surface libre par le modèle ainsi que de l'élévation de la surface libre. Les comparaisons du champ de vitesse sont prometteuses avec une vitesse maximale au bout du jet du même ordre de grandeur que les résultats de l'expérience. Les manipulations récentes devraient permettre d'aller plus loin dans la validation du modèle sur la comparaison du champ de vitesses, ainsi que sur la comparaison des résultats avec d'autres modèles dans le cadre du programme national PATOM.

L'étude de la propagation et du déferlement d'un soliton peut être appliquée aux tsunamis. Suite au récent tsunami du 26 Décembre 2004, de nombreux projets de recherche ont vu le jour. L'objectif est une meilleure compréhension de leur propagation et de leur impact sur les côtes à partir de modèles numériques. Ces études devraient permettre alors de calculer la position adéquate de réseaux d'instruments pour la détection de ce phénomène. L'évolution du champ de vitesses et de la pression en un point donné nous donne une bonne information sur le signal en surface, illustré par les figures 7.2 et 7.3, dans le cas de la propagation et du déferlement d'un soliton sur une marche (section 6.2). Le soliton est en partie réfléchi par la marche et on observe une réflexion de l'ordre de 30 % en amplitude.

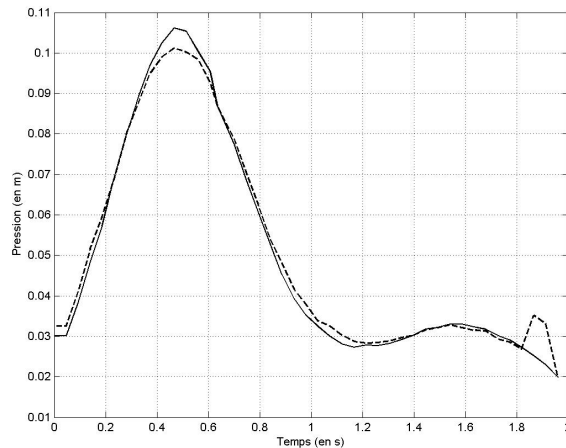


FIG. 7.2 – Evolution de la pression obtenue pour deux profondeurs  $z = -0.1$  m (trait plein) et  $z = -0.2$  m (tiret), 2 m avant la marche.

Les réseaux d'instrumentation sont encore peu nombreux en Méditerranée et présentent plusieurs avantages : la localisation de tsunamis et également des mesures systématiques de houle en zone littorale pour un suivi du niveau moyen de la mer et son évolution lors de fortes tempêtes. Pour l'analyse des données, l'approche spectrale n'est pas adaptée pour de telles ondes, non périodiques. Des algorithmes, basés sur la pente de la surface libre, sont à envisager.

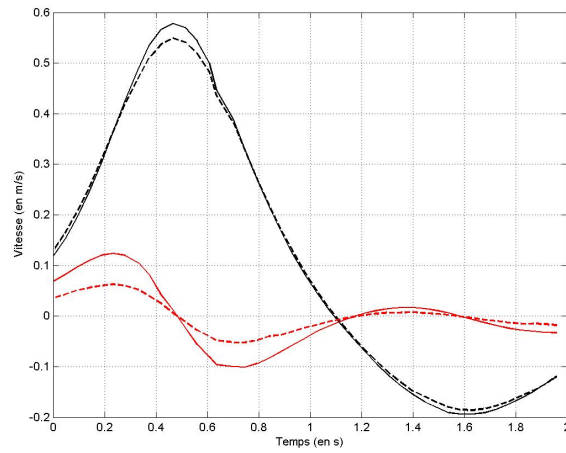


FIG. 7.3 – Evolution des vitesses horizontale (noir) et verticale (rouge) pour deux profondeurs données  $z = -0.1$  m (trait plein) et  $z = -0.2$  m (tiret), 2 m avant la marche.



# Chapitre 8

## Annexe

## NUMERICAL SIMULATIONS OF WAVE BREAKING

PHILIPPE HELLUY<sup>1</sup>, FRÉDÉRIC GOLAY<sup>1</sup>, JEAN-PAUL CALTAGIRONE<sup>2</sup>, PIERRE LUBIN<sup>2</sup>,  
STÉPHANE VINCENT<sup>2</sup>, DEBORAH DREVAR<sup>3</sup>, RICHARD MARCER<sup>4</sup>, PHILIPPE FRAUNIÉ<sup>3</sup>,  
NICOLAS SEGUIN<sup>5</sup>, STEPHAN GRILLI<sup>6</sup>, ANNE-CÉCILE LESAGE<sup>7</sup>, ALAIN DERVIEUX<sup>7</sup>  
AND OLIVIER ALLAIN<sup>8</sup>

**Abstract.** This paper is devoted to the numerical simulation of wave breaking. It presents the results of a numerical workshop that was held during the conference LOMA04. The objective is to compare several mathematical models (compressible or incompressible) and associated numerical methods to compute the flow field during a wave breaking over a reef. The methods will also be compared with experiments.

**Mathematics Subject Classification.** 65M12, 74S10.

Numerical workshop, Low Mach Number Flows Conference, June 21-25, 2004, Porquerolles, France.

## INTRODUCTION

In this paper, we present and compare several numerical methods to compute the breaking of a stable solitary wave over a submerged rectangular reef. This test case has been first proposed by Yasuda, Mutsuda and Mizutani in [39], together with physical experiments.

Generally, air and water are supposed incompressible in this kind of flows. However, for several reasons, it is interesting to envisage the more general compressible model.

- For physical reasons: in some parts of the flow, compressible effects may be not negligible. For example, at the reconnection point of the water, or in the trapped air bubble.
- For numerical reasons: incompressible solvers require an implicit resolution of the pressure equation. Compressible solvers can be completely explicit. Even if the starting model is incompressible it can thus be useful to add an artificial numerical compressibility.

---

*Keywords and phrases.* Wave breaking, finite volumes, low Mach compressible flows, multiphase flow.

<sup>1</sup> ISITV/MNC, BP 56, 83162 La Valette cedex, France.

<sup>2</sup> TREFLE - ENSCPB - UMR CNRS 8508, Bordeaux, France.

<sup>3</sup> LSEET, Université de Toulon, BP 132F, La Garde Cedex, France.

<sup>4</sup> Principia Z.I. Athélia 13705 La Ciotat Cedex, France.

<sup>5</sup> Laboratoire J.-L. Lions, Université Paris VI, France.

<sup>6</sup> Department of Ocean Engineering, University of Rhode Island, Narragansett, RI 02882, USA.

<sup>7</sup> INRIA, Sophia Antipolis, France.

<sup>8</sup> Société Lemma, La Roquette-Sur-Siagne, France.

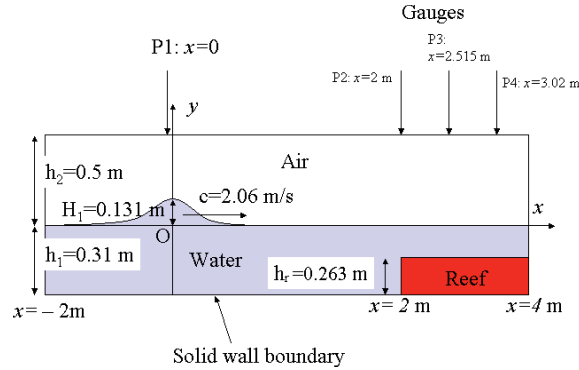


FIGURE 1. Boundary and initial conditions.

- For practical reasons: the all-purpose-solver is an utopia. But it is interesting to have one solver for all flow regime. There is less programming effort. Of course, it is probable that a compressible solver will be more expensive than specialized solvers in many situations. There is also a very important practical reason: a comparison between different solvers is crucial for the validation of the physical and numerical models.

Of course, a compressible solver has to face the well known loss of precision due to the low Mach number of the flow. About this subject we refer for example to [20, 31, 32] and included references. This loss of precision is mainly due to the upwinding of compressible solvers. The upwinding introduces an artificial viscosity proportional to the sound speed of the flow. If the Mach number is small, the low speed waves, moving with the material velocity, are too much damped and the precision becomes insufficient. The technique of preconditioning aims at diminishing the numerical viscosity, keeping the stability of the scheme.

This paper has been written in the context of a conference about low Mach number flows. But the computation of wave breaking has a long history. This history and the more general context are briefly recalled in section 5.

The objective here is to compare several models of wave breaking and their associated numerical methods, based on incompressible or compressible solvers. We present the results of the numerical workshop “Free Surface Flow” of the conference “Mathematical and Numerical aspects of Low Mach Number Flows” that was held in Porquerolles (France) in June 2004. The web site of the conference is at

<http://www-sop.inria.fr/smash/LOMA/> .

The web site of the numerical workshop is at

<http://helluy.univ-tln.fr/soliton.htm> .

The boundary and initial conditions of the proposed test case are sketched on Figure 1. The initial condition is a stable incompressible solitary wave computed thanks to the method of Tanaka [30]. The still water level is at  $h_1 = 0.31$  m over the bottom. The crest of the solitary wave is at  $H_1 = 0.131$  m over the still water level. It propagates at a phase velocity  $c = 2.06$  m/s, see Figure 1. The horizontal and vertical components of the velocity at time  $t = 0$  are plotted on Figures 2 and 3.

The programs that compute the free surface profile and the initial velocity field can be downloaded at

<http://helluy.univ-tln.fr/soliton.htm> .

More precise indications on the test case are given on the above mentioned web page.



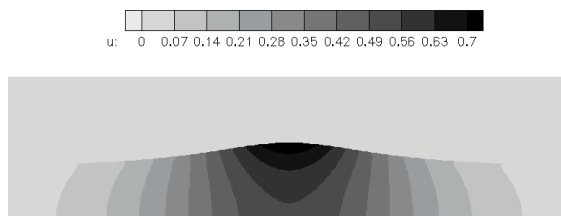


FIGURE 2. Component  $u$  of the velocity at time  $t = 0$ .

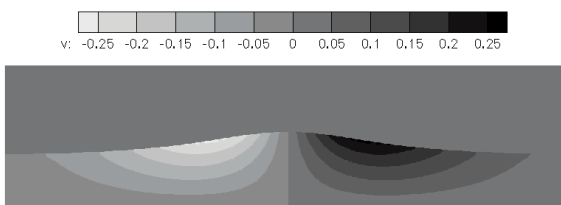


FIGURE 3. Component  $v$  of the velocity at time  $t = 0$ .

The organization of the paper is then as follows.

First, the participants to the workshop propose a short overview of the model and the numerical method they used (Sects. 1 to 6). The different contributors are:

- P. Helluy and F. Golay: the model is a compressible multi-fluid model. The method is the finite volume method with an exact Riemann solver. The preconditioning is obtained thanks to a modification of the physical sound speed.
- P. Lubin, S. Vincent and J.-P. Caltagirone: the model is made of the incompressible Navier-Stokes equations coupled with the advection of an indicator function in order to distinguish the two phases. The Navier-Stokes solver is based on the finite volume method on a staggered grid and an augmented Lagrangian approach. It is coupled with a TVD scheme for the advection of the indicator function.
- D. Drevard, R. Marcer and P. Fraunié: the model is made of the incompressible Navier-Stokes equations in the liquid phase coupled with a tracking of the free surface. The numerical method is based on a pseudo-compressibility formulation [37]. The interface is located with a second order version of the VOF method of Hirt and Nichols [21].
- N. Seguin: the model is made of the one-dimensional shallow water equations with topography. The numerical method uses a well-balanced finite volume scheme and can handle non-smooth topography.
- S. Grilli: the model is based on a non-stationary, non-linear boundary integral equation. It is discretized by the Boundary Integral Element Method. The breaking can be computed until the reconnection.
- A.-C. Lesage, A. Dervieux and O. Allain: the model is the incompressible Navier-Stokes equation coupled with the evolution of a level-set function. They are solved by a high order projection method and a high order convection scheme respectively. The mesh is 3D (with 2 mesh points in the third direction), with possibility of mesh refinement.

Obviously, the place was not sufficient to describe in detail all the methods. For more informations, we refer to the bibliographic references.

In Section 7, the different numerical methods will then be assessed through comparisons, including comparisons with experiments.

## 1. OVER-COMPRESSIBLE MULTIPHASE MODEL (GOLAY, HELLUY)

### 1.1. Mathematical model

We consider a 2D, compressible, two-fluids flow model. The unknowns depend on the spatial position  $(x, y)$ , the time  $t$  and are the density  $\rho(x, y, t)$ , the two components of the velocity  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$ , the internal energy  $\varepsilon(x, y, t)$ , the pressure  $p(x, y, t)$  and the fraction of water  $\varphi(x, y, t)$ . The fraction satisfies  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi = 1$  in the water and  $\varphi = 0$  in the air. Considering the gravity  $g$ , neglecting viscous effects and superficial tension, but keeping compressible effects, we propose to consider the following Euler equations:

$$\begin{aligned}
 \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y &= 0, \\
 (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x + (\rho uv)_y &= 0, \\
 (\rho v)_t + (\rho uv)_x + (\rho v^2 + p)_y &= -\rho g, \\
 (\rho E)_t + ((\rho E + p)u)_x + ((\rho E + p)v)_y &= -\rho g v, \\
 E &= \varepsilon + \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \\
 \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y &= 0, \\
 p &= p(\rho, \varepsilon, \varphi).
 \end{aligned} \tag{1}$$

In this model, the pressure depends on the fraction. In this way, it is possible to distinguish between the liquid and the gas. We have to provide an adequate Equation Of State (EOS). Let  $c(x, y, t)$  denotes the sound speed. It is usually admitted in physics that a flow is incompressible if the Mach number  $M = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{c}$  is lower than 0.1. Here, the real (physical) Mach number is much smaller, of the order of  $1/400 \sim 1/1600$ . This is very constraining if an explicit finite volume solver is used because the time step  $\Delta t$  has to satisfy a CFL condition of the form

$$\Delta t \leq \alpha \frac{\Delta x}{\sqrt{u^2 + v^2} + c}, \tag{2}$$

where  $\alpha$  is the CFL number,  $\Delta x$  the space step and  $c$  the sound speed. furthermore, it is known that numerical imprecision also arise due to the low Mach number of the flow. For those two reasons we have been led to chose an artificial pressure law where the sound speed is approximately fixed to  $20 \text{ m.s}^{-1}$ . A very simple choice of EOS is the so called stiffened gas EOS that reads

$$\begin{aligned}
 p &= (\gamma(\varphi) - 1)\rho\varepsilon - \gamma(\varphi)\pi(\varphi), \\
 \frac{1}{\gamma(\varphi) - 1} &= \varphi \frac{1}{\gamma_w - 1} + (\varphi - 1) \frac{1}{\gamma_a - 1}, \\
 \frac{\gamma(\varphi)\pi(\varphi)}{\gamma(\varphi) - 1} &= \varphi \frac{\gamma_w \pi_w}{\gamma_w - 1} + (\varphi - 1) \frac{\gamma_a \pi_a}{\gamma_a - 1}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

This EOS is very similar to the perfect gas EOS. It has been used by several authors for multi-fluid flows computations [1, 28], etc. The pressure law coefficients,  $\gamma$  and  $\pi$  depend on the fraction  $\varphi$ . The dependence in (3) will be justified below. The sound speed for this EOS is given by

$$c = \sqrt{\frac{\gamma(p + \pi)}{\rho}}. \tag{4}$$

We arbitrarily choose  $\gamma_w = \gamma_a = 1.1$  for the air (a) and water (w). On the other hand, if the sound speed is fixed to  $20 \text{ m.s}^{-1}$  for a pressure of  $p = 10^5 \text{ Pa}$ , we get

$$\begin{aligned} \pi_a &= -0.99636 \times 10^5 \text{ Pa}, \\ \pi_w &= 2.63636 \times 10^5 \text{ Pa}. \end{aligned} \tag{5}$$

1.2. Numerical method

The numerical method is a simple second order explicit MUSCL finite volumes method applied to the system (1) and (3). We used an *exact* Riemann solver because we experimented instabilities with several approximate solvers. It is known that the transport equation on  $\varphi$  in (1) has to be approximated with care in order to avoid pressure oscillations. Indeed, the transport equation in (1) and the EOS (3) can be written under many different forms on the continuous side. On the discrete side, these forms are not equivalent, and the one that is presented in (1), (3) plays a special role. We used the trick of Abgrall and Saurel described in [1, 28] in order to get a numerical scheme that preserves the constant velocity and pressure states.

2. INCOMPRESSIBLE SOLVER (LUBIN, VINCENT, CALTAGIRONE)

2.1. Single fluid formulation of the Navier-Stokes equations

Let us consider the wave propagation problem as a two-phase flow involving a liquid phase (water) and a gaseous phase (air).

A general Navier-Stokes model for all fluids is designed by convolving the incompressible Navier-Stokes equations in each phase and the jump conditions across the interface by an indicator function  $C$  and by filtering the set of equations thanks to a volume integral operator. This function characterizes one of the fluids, water for example, assuming the value 1 in the water phase and 0 in the others. The air phase is directly obtained as the complementary  $1 - C$  of the water phase. Assuming the interface between the fluids as the discontinuity of the indicator function, it is practically located by the  $C = 0.5$  isoline. Several correlation terms are discarded in the single fluid model by making the assumptions that the sliding between phases is negligible and that no phase change occurs. The corresponding free surface flow admits a continuous velocity field through the free surface and is locally isovolume even though  $\rho$  may be discontinuous.

Let  $\mathbf{u}$  be the velocity field,  $\mathbf{g}$  the gravity vector,  $p$  the pressure,  $\sigma$  the surface tension,  $\kappa$  the curvature,  $\mu$  the viscosity and  $\rho$  the density. The governing equations for the turbulence model in large eddy simulation of an incompressible fluid flow are classically derived by applying a convolution filter to the unsteady Navier-Stokes equations. In a uniform Cartesian coordinate system  $(x, z)$ , associated with a bounded domain  $\Omega$ , the one-fluid model can be expressed as follows:

$$\mu = \mu_1, \rho = \rho_1 \text{ if } C > 0.5, \tag{6}$$

$$\mu = \mu_0, \rho = \rho_0 \text{ if } C < 0.5, \tag{7}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{8}$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot [(\mu + \mu_t)(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})] + \sigma \kappa \delta_i \mathbf{n}_i, \tag{9}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = 0, \tag{10}$$

where  $\delta_i$  is a Dirac function indicating the interface,  $\mathbf{n}_i$  is the unit normal to the interface and  $\rho_0, \rho_1, \mu_0$  and  $\mu_1$  are the respective densities and viscosities in each phase. Equations (6) and (7) correspond to a discontinuous estimate of the physical characteristics. We proved this method to be less diffusive than the usual linear formula used in the literature [33].

The turbulent viscosity  $\mu_t$  is calculated with the Mixed Scale model, assuming the following relation (11):

$$\mu_t = \rho C_m \bar{\Delta}^{\frac{3}{2}} \sqrt{2(\nabla \mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{u})(q_c^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{11}$$

with  $C_m$  being a constant of the model and  $\overline{\Delta} = (\Delta_x \Delta_z)^{\frac{1}{2}}$  being the cut-off length scale of the filter, with  $(x, z)$  defined as, respectively, the longitudinal and vertical coordinates. The quantity  $q_c$  represents the kinetic energy of the test field extracted from the resolved velocity field through the application of a test filter associated to the cut-off length scale. All the details about large eddy simulation can be found in [27].

The evolution of the free surface and the physical characteristics of the fluids are simultaneously represented by means of equations (6)–(10). The free surface flow is analyzed in terms of an equivalent single fluid whose variable properties  $\rho$  and  $\mu$  are related to  $\rho_0, \rho_1, \mu_0$  and  $\mu_1$  of the two real phases by the color function  $C$ .

## 2.2. Numerical methods

### 2.2.1. Interface capturing method and surface tension discretization

All interface capturing methods are dedicated to solving the advection equation of a discontinuous indicator function  $C$  through the reformulation of the transport equation with a smooth function. We choose to implement the explicit Lax-Wendroff TVD (LWT) time-stepping scheme dedicated to volume fraction advection, thoroughly explained in Vincent and Caltagirone [34, 35]. This approach allows the accurate solution of free-surface flows with strong tearing and stretching of the interface which would occur in breaking water waves.

Due to the volumetric representation of the interface, the geometric interface properties  $\kappa$ ,  $\delta_i$  and  $\mathbf{n}_i$  are not directly accessible. To avoid explicitly calculating these free surface properties, they are modeled as a function of the volume fraction. The Continuum Surface Force (CSF) method of Brackbill *et al.* [4] is used to model the surface tension acting in the Navier-Stokes equations (9).

### 2.2.2. Navier-Stokes solver

A Finite-Volume method on a staggered mesh is carried out to discretize the Navier-Stokes equations and an augmented Lagrangian technique is employed to solve the coupling between pressure and velocity in the equations of motion (8)–(9).

The discretization of these equations is achieved through a second-order Euler scheme, or GEAR scheme, for the time derivatives while a second order Hybrid Centered-Upwind scheme is applied to the non-linear convective terms and a second order centered scheme is chosen for the approximation of the viscous and the augmented Lagrangian terms. The linear system resulting from the previous implicit discretization is solved with an iterative BiCGSTAB (Bi-Conjugate Gradient Stabilized) algorithm, preconditioned by a Modified and Incomplete LU (MILU) algorithm. References concerning these numerical techniques can be found in [34, 35].

## 3. PSEUDO-COMPRESSIBILITY (DREVAR, MARCER, FRAUNÍÉ)

### 3.1. Mathematical formulation

We consider a moving interface defined as the limit between two incompressible viscous fluids of different densities. The problem is to compute the pressure and velocity fields in the denser fluid and to track the interface. Then, the unsteady 3D Navier-Stokes equations are solved in the denser fluid and are written in the following semi-conservative form, in curvilinear formulation,

$$\frac{1}{J} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} + \frac{\partial H}{\partial \chi} = \frac{R}{J} + \frac{T}{J}, \quad (12)$$

where  $F$ ,  $G$  and  $H$  are respectively the convective, diffusive and pressure flux terms,  $R$  is the volumic force source term,  $T$  the surface tension source term and  $J$  the Jacobian of the co-ordinates transformation.

### 3.2. Numerical method

#### 3.2.1. Pseudo-compressibility method

Time discretization in the Navier-Stokes model is based on a fully implicit second-order finite difference scheme. The solution of the nonlinear system at time step  $n + 1$  is based on the “pseudo-compressibility method” (Viviand 1980 [37], De Jouët *et al.* 1991 [5]). In this method, a time-like variable  $\tau$ , called pseudo-time, is introduced in equation (12). This adds pseudo-unsteady terms, which are derivatives of the unknowns at time level  $n + 1$ , with respect to  $\tau$ . The pseudo-unsteady terms involve a new unknown  $\tilde{\rho}$ , called pseudo-density, which is constrained to remain positive. The pressure is calculated as a function of  $\tilde{\rho}$  through an additional pseudo-state equation,

$$p^{n+1} = f(\tilde{\rho}^{n+1}). \tag{13}$$

The choice of an optimal pseudo-state equation is discussed in Viviand (1995) [38]. The new system of equations is integrated step-by-step in pseudo-time variable, with an explicit five step Runge-Kunta scheme, associated with an implicit residual smoothing technique.

#### 3.2.2. Interface tracking method

For each time step the interface and its evolution are obtained by an original method, called SL-VOF (Guignard *et al.* 2001 [19] for 2D-flows, Biausser *et al.* 2004 [3] for 3D-flows), based on both VOF (Hirt and Nichols 1981 [21]) and PLIC (Li 1995 [23]) concepts.

The general algorithm contains three parts. (i) The interface tracking: a color function is defined within each cell of the VOF grid, as the volumic fraction (0 to 1) of the cell area filled with the denser fluid (VOF concept). Then, a multi-segmental representation of the interfaces is defined based on the values of the color function, according to PLIC concept. (ii) The interface advection: interface segments are advected, as a function of time, based on Lagrangian markers, following the velocity field obtained from the solution of NS equations. (iii) The reconstruction of the new VOF field: after the advection, new values of the color function are computed, which take into account the new position of the interface segments.

## 4. SHALLOW WATER MODEL (SEGUIN)

### 4.1. Mathematical model

In this section, we consider the shallow-water model with topography. This 1D model writes

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0, \\ (hu)_t + (hu^2 + gh^2/2)_x = -gha'(x), \end{cases} \tag{14}$$

where  $h$  is the height of water,  $u$  is the horizontal velocity of water and  $a'(x)$  is the slope of the bottom, see Figure 4.

This model is a simplification of the 2D Navier-Stokes equations. The water is considered as an incompressible fluid, the pressure is assumed to be hydrostatic and we suppose that the flow is stratified, which enables to average the 2D model with respect to  $y$ , leading to (14). It is clear that for the current test case, the latter assumption is only fulfilled until the wave breaks over the reef. Moreover, this model being fully nonlinear, the initial shape of the solitary wave cannot be preserved. In fact, the left part becomes a rarefaction wave and the right part turns to be a shock wave. Nonetheless, such a model can be very interesting if it is understood as a first approximation of the solution and for simple and very fast numerical simulations. As mentioned above, this model is one-dimensional and thus, the initial data must be adapted. Actually, the initial height of water  $h$

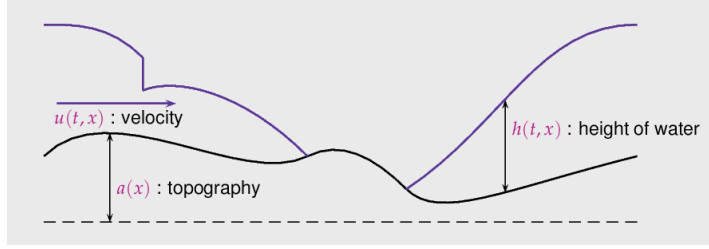


FIGURE 4. Description of the shallow-water model.

is given by the locus of the interface between water and air and the velocity  $u$  is null far from the initial wave and, inside the wave, we computed

$$u_0(x) = -2(\sqrt{gh_1} - \sqrt{gh_0(x)}).$$

At the limit of the domain, the classical mirror state method has been implemented to model solid wall boundaries. The results which are presented have been computed using a mesh with 500 cells.

#### 4.2. Numerical method

The numerical method used here has been presented in [7]. It is based on an approximate Riemann solver which includes the source term. Indeed, the numerical fluxes are computed using an approximate solution of each local Riemann problem

$$\begin{cases} a_t = 0, & t > t^n, x \in \mathbb{R}, \\ h_t + (hu)_x = 0, & t > t^n, x \in \mathbb{R}, \\ (hu)_t + (hu^2 + gh^2/2)_x + gha_x = 0, & t > t^n, x \in \mathbb{R}, \\ (a, h, hu)(t^n, x) = \begin{cases} (a_i, h_i^n, h_i^n u_i^n) & \text{if } x < x_{i+1/2}, \\ (a_{i+1}, h_{i+1}^n, h_{i+1}^n u_{i+1}^n) & \text{if } x > x_{i+1/2}. \end{cases} \end{cases} \quad (15)$$

Let us note that this method is well adapted to simulate steady states, as the flow is far from the solitary wave. The method is explicit and the time step is defined by

$$\Delta t^n = 0.4 \frac{\Delta x}{\max_i (|u_{i+1/2}^n| + \sqrt{gh_{i+1/2}^n})}, \quad (16)$$

where the values  $(\cdot)_{i+1/2}^n$  correspond to the approximate solution of each local Riemann problems (15). It is worth noting that the time step does not tends to zero when the source term becomes stiff.

### 5. INCOMPRESSIBLE INVISCID IRROTATIONAL FLOW SOLVER (GRILLI)

#### 5.1. Fully nonlinear potential flow in a BEM formulation

Numerical models based on the Boundary Element Method (BEM), combined to an explicit higher-order Lagrangian time stepping, have proved very efficient and accurate for solving fully nonlinear potential flow (FNPF) equations with a free surface, in two- (2D) and three-dimensions (3D) ([8–11, 14]). When applied to the modeling of surface wave generation and propagation over varying topography, such models have recently been referred to as *Numerical Wave Tanks* (NWT). Due to their simplicity as compared to periodic waves,

solitary waves have often been used for both model development and experimental validation. Grilli *et al.* [12, 13, 15–17], for instance, showed that the shape of shoaling and breaking solitary waves propagating over a step, a submerged trapezoidal obstacle, or a slope, could be simulated within a few percent of experimental measurements in a 2D-BEM-FNPF-NWT. Similar validations were repeated in 3D, *e.g.*, by Grilli *et al.* [11]. Both potential flow equations and BEM models, however, break down after impact of the breaker jet on the free surface.

Recently, Volume of Fluid (VOF) models solving Navier-Stokes (NS) equations with a free surface have been used to model breaking waves (*e.g.*, [19, 24, 34]). Such models, however, are much more computationally intensive than BEM models and suffer from numerical diffusion over long distances of propagation. Hence, a coupled approach was recently proposed, for both 2D and 3D problems, in which wave generation and shoaling is simulated in a BEM-NWT up to a point close to breaking, and a VOF model is initialized using results of the BEM model, to pursue computations beyond breaking over a finely discretized grid. Wave breaking and post-breaking were thus computed in the VOF model [2, 3, 18, 22].

The 2D-BEM-FNPF model developed by Grilli *et al.* [9, 10, 14] is used in these simulations. The velocity potential  $\phi(\mathbf{x}, t)$  is used to describe inviscid irrotational flows in the vertical plane  $(x, z)$  and the velocity is defined by,  $\mathbf{u} = \nabla\phi = (u, w)$ . Continuity equation in the fluid domain  $\Omega(t)$  with boundary  $\Gamma(t)$  is a Laplace’s equation for the potential,

$$\nabla^2\phi = 0 \quad \text{in } \Omega(t). \tag{17}$$

Using the free space Green’s function,  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) = -(1/2\pi) \log |\mathbf{x} - \mathbf{x}_l|$ , and Green’s second identity, equation (17) transforms into the Boundary Integral Equation (BIE),

$$\alpha(\mathbf{x}_l)\phi(\mathbf{x}_l) = \int_{\Gamma(\mathbf{x})} \left[ \frac{\partial\phi}{\partial n}(\mathbf{x})G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) - \phi(\mathbf{x})\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l)}{\partial n} \right] d\Gamma(\mathbf{x}), \tag{18}$$

in which  $\mathbf{x} = (x, z)$  and  $\mathbf{x}_l = (x_l, z_l)$  are position vectors for points on the boundary,  $\mathbf{n}$  is the unit outward normal vector, and  $\alpha(\mathbf{x}_l)$  is a geometric coefficient function of the exterior angle of the boundary at  $\mathbf{x}_l$ .

On the free surface  $\Gamma_f(t)$ ,  $\phi$  satisfies the kinematic and dynamic boundary conditions,

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{r} = \mathbf{u} = \nabla\phi \quad \text{on } \Gamma_f(t), \tag{19}$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = -gz + \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi - \frac{p_a}{\rho} \quad \text{on } \Gamma_f(t), \tag{20}$$

respectively, with  $\mathbf{r}$ , the position vector on the free surface,  $g$  the gravitational acceleration,  $z$  the vertical coordinate,  $p_a$  the pressure at the free surface, and  $\rho$  the fluid density. Along the stationary bottom  $\Gamma_b$ , the no-flow condition is prescribed as

$$\overline{\frac{\partial\phi}{\partial n}} = 0 \quad \text{on } \Gamma_b, \tag{21}$$

where the overline denotes specified values.

In the present applications, initial solitary waves are directly specified at time  $t = 0$  on the model free surface  $\Gamma_f$ , using the geometry, potential, and normal gradient of the potential, calculated with Tanaka’s method [30], for fully nonlinear solitary waves.

### 5.2. Numerical methods

The BIE (18) is solved by a BEM using  $N$  discretization nodes on the boundary and  $M$  higher-order elements to interpolate in between discretization nodes. In the present applications, quadratic isoparametric elements are used on lateral and bottom boundaries, and cubic elements ensuring continuity of the boundary slope are used on the free surface. In these elements, referred to as Mixed Cubic Interpolation (MCI) elements, geometry is

modeled by cubic splines and field variables are interpolated between each pair of nodes, using the mid-section of a four-node “sliding” isoparametric element. Expressions of BEM integrals (regular, singular, quasi-singular) are given in Grilli *et al.* [10, 14] and Grilli and Subramanya [9], for isoparametric and MCI elements.

Free surface boundary conditions (19) and (20) are time integrated in a mixed Eulerian-Lagrangian formulation (MEL) based on two second-order Taylor series expansions expressed in terms of a time step  $\Delta t$  and of the Lagrangian time derivative,  $D/Dt$ , for  $\phi$  and  $\mathbf{r}$ . First-order coefficients in the series correspond to free surface conditions (19) and (20), in which  $\phi$  and  $\partial\phi/\partial n$  are obtained from the solution of the BIE for  $(\phi, \partial\phi/\partial n)$  at time  $t$ . Second-order coefficients are expressed as  $D/Dt$  of equations (19) and (20), and are calculated using the solution of a second BIE for  $(\partial\phi/\partial t, \partial^2\phi/\partial t\partial n)$ , for which boundary conditions are obtained from the solution of the first problem. Detailed expressions for the Taylor series are given in Grilli *et al.* [14]. The time step is adaptively calculated at each time step to ensure a mesh Courant number of  $C_o = 0.45$  for the minimum spacing between nodes on the free surface [9], *i.e.*,  $\Delta t' = C_o \Delta x'$  (where dashes indicate nondimensional variables, with length divided by  $h_1$  and time by  $\sqrt{h_1/g}$ ).

In the MEL formulation, free surface discretization nodes represent fluid particles and, hence, drift in the direction of the mean mass flux of the flow, thereby affecting resolution of the discretization. To either add and redistribute nodes in regions of poor resolution of the free surface or to remove and redistribute nodes in regions of node concentration, a regridding technique was implemented in the model in combination with the MCI interpolation method. This technique redistributes nodes within a specified boundary section, based on a constant arc length interval, or adaptively regrids nodes two by two when they move too close from each other, causing quasi-singularities in the BEM integrals (*e.g.*, in the plunging jet of a breaking wave). Field variables are then re-interpolated using BEM elements, at the new locations of nodes in the regridded section.

The BEM solution for the flow kinematics and pressure is thus computed as a function of time at boundary nodes. Surface piercing numerical wave gages can be specified, at which free surface elevation is calculated as a function of time. Similarly, the model can provide the BEM solution at a specified distribution of (internal) points within the domain (*e.g.*, [9, 18, 22]). These points can be defined either on a fixed grid or on vertical lines, for a number of variable intervals between the free surface and the bottom boundaries. Velocity and pressure computed at such internal points are used to initialize the VOF models, as detailed in [18, 22].

### 5.3. Results for solitary waves over a step

Grilli *et al.* in [12] already compared predictions of a 2D-FNPF BEM model to experiments, for the propagation of solitary waves over a step. They found a very good agreement between these, up to the location of the step. Over the step, however, the FNPF model was found to slightly overpredict wave heights, likely due to energy dissipation resulting from flow separation over the step, not modeled in 2D-FNPFs.

The present computations were run for the case reported in the paper by Yasuda *et al.* [39], for which these authors both performed laboratory experiments and computations using a potential flow model similar to Dold and Peregrine’s (1986). In our computations, for the domain shown in Figure 1, we used 195 MCI elements on the free surface, with spacing  $\Delta x' = 0.1$  between nodes. We used 63 quadratic isoparametric elements on the rest of the boundary, for a total of 326 nodes on the boundary. The initial time step was  $\Delta t' = 0.045$ , which gradually reduced as nodes converged in the breaking jet. To mitigate this effect, we used adaptive node regridding on the free surface, with relative distance threshold of 0.5 and 2. We thus computed 582 varying time steps to reach the last computed surface profile, at  $t = 1.35$  s, just before impact of the plunging jet on the free surface (see Fig. 9). At this time, numerical errors on wave volume and energy are still less than 0.1%, as compared to initial values given by Tanaka’s model, for  $H'_o = 0.424$ . As in our earlier computations, we find very good agreement for wave elevation at the gauge located just at the step (P2; Fig. 5). Beyond the step, however, expectedly, wave elevation is slightly overpredicted (P3; Fig. 6). No adjustments of propagation times were made from the incident wave location at P1 to P3, which, hence, indicates that wave celerity and kinematics predicted in the model are also in agreement with experiments during these stages of propagation.



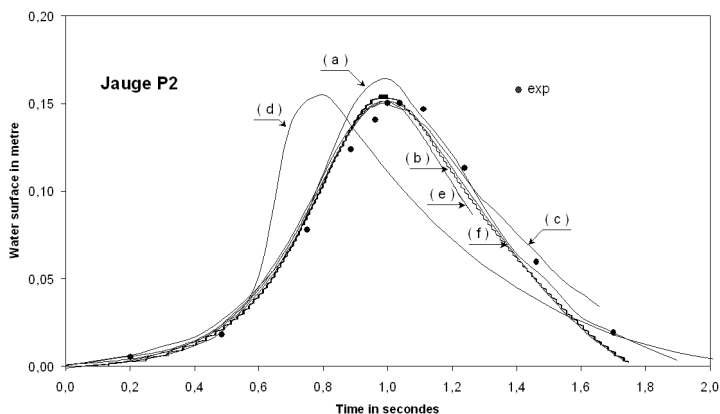


FIGURE 5. Time evolution of the water surface: gauge P2.

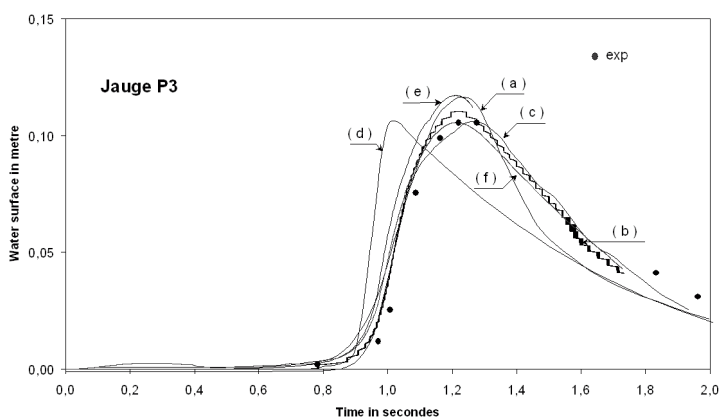


FIGURE 6. Time evolution of the water surface: gauge P3.

## 6. LEVEL-SET METHOD (LESAGE, DERVIEUX, ALLAIN)

### 6.1. Mathematical model

The computation is performed with a simplified model, *i.e.* an inviscid incompressible flow with two densities,  $\rho_g$  for the gas,  $\rho_l$  for the liquid, and no surface tension. We present this model in combination with a level set formulation:

$$\begin{cases} \rho(\phi) \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nabla p = \rho(\phi) \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\delta \phi}{\delta t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0, \end{cases} \quad (22)$$

where  $\rho(\phi) = \rho_g + (\rho_l - \rho_g)H(\phi)$ ,  $H(x)$  being equal to unity when  $x$  is positive, zero else. Symbol  $\mathbf{u}$  holds for the flow velocity and symbol  $\mathbf{g}$  holds for gravity. Typically  $\phi$  at time  $t = 0$  is a signed distance to initial interface. The level-set formulation tends to replace the interface discontinuity by a smooth function easier to advect.

High-order accuracy for the characteristic function of phases cannot be reached if the level set function involves the too small or too large gradients that can appear after integrating a few time steps. This event is independent of both time and space discretization. We apply the strategy proposed in [6] which consists in replacing the level set after a certain fraction  $\frac{T}{n}$  of the total time interval. The new value of level set is a signed distance to interface computed with a geometrical algorithm.

Although not necessary with any Navier-Stokes solver, a further smoothing of the coefficients is generally useful. We give a small thickness to the interface by replacing  $H(\phi)$  by:

$$H^\epsilon(\phi) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\phi}{\epsilon} + \frac{1}{\Pi} \sin \left( \frac{\Pi\phi}{\epsilon} \right) \right] \text{ if } |\phi| \leq \epsilon, \quad H(\phi) \text{ else.} \quad (23)$$

## 6.2. Numerical method

For the velocity and pressure, this is performed with the classical projection method:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \frac{1}{\rho(\phi^n)} \nabla p^{n+1} &= \nabla(\mathbf{u}^n - \Delta t h(\mathbf{u}^n)), \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} &= -h(\mathbf{u}^n) - \frac{\nabla p^{n+1}}{\rho(\phi^n)}, \end{cases} \quad (24)$$

with  $h(\mathbf{u}^n) = \nabla \cdot (\mathbf{u}^n \times \mathbf{u}^n) - \mathbf{g}$ .

For the time integration of the level set function equation, we use a third order accurate three-stage Runge-Kutta time advancing.

For the space integration, we use a mixed element-volume method. A continuous piecewise-linear finite element Galerkin approximation is applied to all terms of the model except the convective velocity terms and the advection of the level set function. For those convective and advective terms, we apply an upwind finite-volume method based on cells built from element medians. It is upwind-biased and third-order accurate for linear advection. We use an uniform 600 000 cells 3D mesh for  $t \in [0, 1 \text{ s}]$ . For  $t \in [1 \text{ s}, 1.8 \text{ s}]$ , we make a mesh adaptation thanks to an interpolation of the numerical result at  $t = 1 \text{ s}$  on a non-uniform 600 000 cells 3D mesh refined in the breaking area.

## 7. COMPARISON OF NUMERICAL RESULTS

In this section, we compare the results obtained with the six different methods. The methods will be shortly referred as follows:

- method (a): the compressible solver (Helluy, Golay);
- method (b): the incompressible solver (Caltagirone, Lubin, Vincent);
- method (c): the VOF solver (Drevard, Marcer, Fraunié);
- method (d): the shallow-water solver (Séguin);
- method (e): the boundary integral solver (Grilli);
- method (f): the level-set solver (Lesage, Dervieux, Allain).

### 7.1. Computation data

The Table 1 give the characteristics of the different computations.

### 7.2. Comparison with experiments

In order to assess our numerical results, we compared them with the experimental measurements of Yasuda, Mutsuda and Mizutani in [39]. The first measurements deal with the evolution of the water surface during time at the gauges P2, P3 and P4 (see Fig. 1). The experimental and numerical results are compared in Figures 5, 6 and 7.

TABLE 1. Computation costs.

Case	cells in $x$	cells in $y$	time	CPU type
(a)	1500	200	48 h	Alpha 666 Mhz 64 bits
(b)	1200	200	76 h	Itanium 1.4 Ghz 64 bits
(c)	1000	200	29 h	Alpha 666 Mhz 64 bits
(d)	500	none	1 min	Pentium 1 Ghz 32 bits
(e)	326	none	8 min	PowerPC G4 1.2 Ghz 32 bits
(f) 3D	1500	200	72 h	Pentium 4 3 Ghz 32 bits

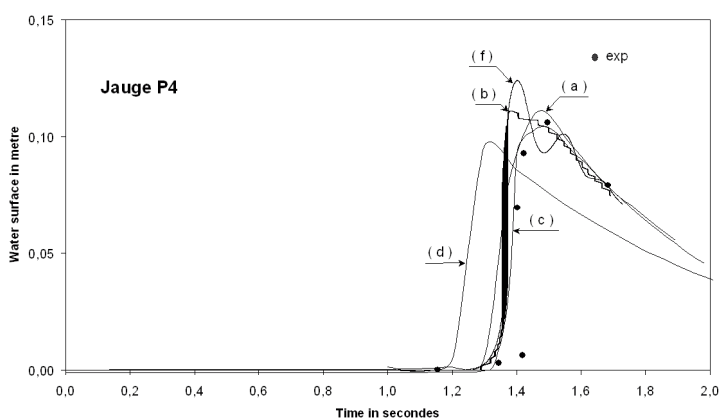


FIGURE 7. Time evolution of the water surface: gauge P4.

We can make the following comments:

- The shallow water model (d) clearly gives the worst results in all the cases: the waves are shifted in time and the amplitudes are lower than the experimental ones. Let us recall however that the computational cost is very low. The results could be improved by adding dispersive third order terms in the model.
- At the gauge P2 (Fig. 5), maybe due to an artificial compressibility effect, the compressible model (a) slightly overpredicts the wave height. Let us recall that the preconditioning of this solver is very rough. Maybe that a more sophisticated preconditioning would have improved the precision. The other methods (b, c, e, f) give more or less the same results and are very close to the experiments.
- At the gauge P3 (Fig. 6), the wave height is overpredicted at the highest point by the compressible model (a), then it is underpredicted. We observe also an overprediction by the boundary integral model (e). It is likely due to energy dissipation resulting from flow separation over the step, not modeled in a potential flow. The other methods (b, c, f) give more or less the same results and are very close to the experiments.
- At the gauge P4 (Fig. 7) we observe time shifts in the incompressible and level-set models (b, f). We observe slight oscillations of the water elevation in the level-set model (f). It is now the compressible model (a) and the VOF model (c) that are closer to experiments.

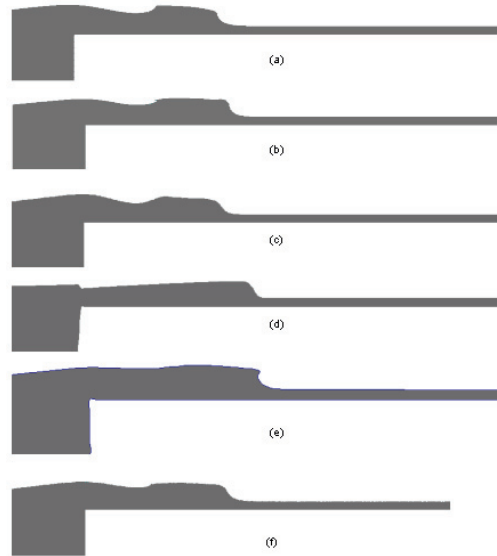


FIGURE 8. Free surface profiles at  $t = 1.2$  s.

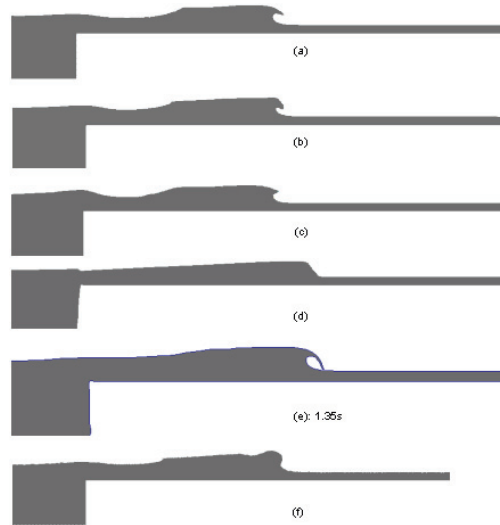


FIGURE 9. Free surface profiles at  $t = 1.4$  s. Warning: the profile (e) is plotted at time  $t = 1.35$  s.

### 7.3. Wave profiles

Then we compare the numerical profiles obtained by the previous methods at time  $t = 1.2$  s,  $t = 1.4$  s,  $t = 1.6$  s and  $t = 1.8$  s. The numerical profiles for the 6 methods are compared on Figures 8–11. Here, no experimental results were available and we observe some differences between the 6 methods, indicating that a further study would be interesting. The following remarks can be stated:

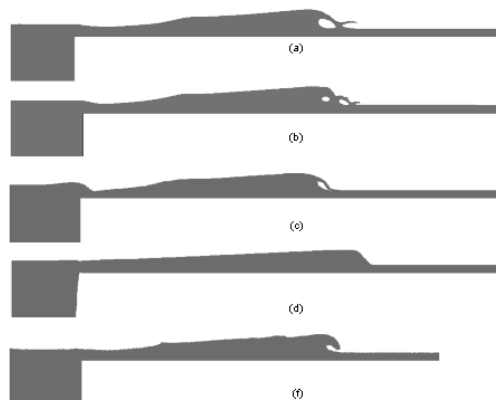


FIGURE 10. Free surface profiles at  $t = 1.6$  s.

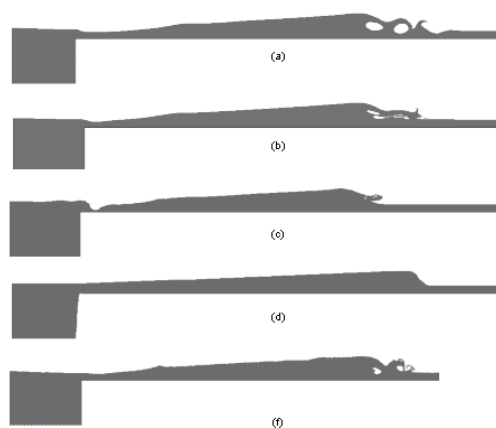


FIGURE 11. Free surface profiles at  $t = 1.8$  s.

- The boundary integral method (e) is not well adapted to this case because of the non-smooth geometry of the reef. The overprediction of the wave heights implies an exaggeration of the wave speed and the breaking occurs too early. The results would have been much more precise for a smooth reef. With the boundary integral method (e), let us recall that the computation cannot be continued after the reconnection.
- The compressible, incompressible, VOF and level-set solvers (a, b, c, f) give more or less the same wave profiles at time  $t = 1.2$  s (Fig. 8), with slight differences.
- At times  $t = 1.4$  s, the wave profiles start to be very different. The profile given by the level-set method (f) is not realistic. Maybe the (non-uniform) mesh should have been refined.
- At times  $t = 1.6$  s, the wave profiles are quantitatively very different between all the methods.
- At times  $t = 1.8$  s, the incompressible, VOF and level-set solver (b, c, f) show a turbulent-like behavior. Except for the compressible solver (a), we observe an excessive damping of the wave.

## CONCLUSION

We have compared in this paper several numerical methods to compute the wave breaking of a solitary wave over a reef.

Before the reconnection of the jet, the several methods give more or less the same results. In particular, the agreement with the experimental gauges measurements is satisfactory. This indicates that the incompressible mathematical model is justified in this case. This also justifies the several numerical methods. The preconditioned compressible solver is interesting because the method is very simple to implement (no implicit scheme, no particular treatment of the interface) and the cost is comparable, for a given precision, to the incompressible solvers. The precision could be improved by a more sophisticated preconditioner in order to compete with the best incompressible solvers.

Approaching the reconnection, several quantitative differences start to appear. It would be interesting to perform now larger computations, with finer meshes in order to verify that the different methods “converge” towards the same solution. It would have been also interesting to compare the velocity fields between the methods. All the numerical results are collected on the web site of the workshop: <http://helluy.univ-tln.fr/soliton.htm>.

After the reconnection, different behaviors are observed between the different methods. Here also, a further study is necessary to explain the differences. What are the influences of surface tension, viscosity (real or numerical), turbulence, compressibility, precision *etc.*? what happens with VOF methods or multiphase models when the topology of the interface becomes more complex?

It also appears, but it is not really a surprise, that the most realistic models are also the most expensive. It is possible that the 3D effects become more and more important after the reconnection. The current power of personal computers is not sufficient to envisage precise 3D computations (for a recent attempt, see [2, 3, 24]). Recall that these numerical simulations can be interesting for the calibrating of empirical models in coastal engineering.

## REFERENCES

- [1] T. Barberon, P. Helluy and S. Rouy, Practical computation of axisymmetrical multifluid flows. *Internat. J. Finite Volumes* **1** (2003) 1–34.
- [2] B. Biaisser, S.T. Grilli and P. Fraunié, Numerical Simulations of Three-dimensional Wave Breaking by Coupling of a VOF Method and a Boundary Element Method, in *Proc. 13th Offshore and Polar Engrg. Conf., ISOPE03*, Honolulu, USA (May 2003) 333–339.
- [3] B. Biaisser, S. Guignard, R. Marcer and P. Fraunié, 3D two phase flows numerical simulations by SL-VOF method. *Internat. J. Numer. Methods Fluids* **45** (2004) 581–604.
- [4] J.U. Brackbill, B.D. Kothe and C. Zemach, A continuum method for modeling surface tension. *J. Comput. Phys.* **100** (1992) 335–354.
- [5] C. De Jouët, H. Viviani, S. Wormon and J.M. Le Gouez, Pseudo compressibility method for incompressible flow calculation, in *4th Int. Symposium on computational Fluid Dynamics*, Davis, California, 9–12 September (1991).
- [6] A. Dervieux, *Résolution de problèmes à frontière libre*. Thesis, Paris VI (1981).
- [7] T. Gallouët, J.-M. Hérard and N. Seguin, Some approximate godunov schemes to compute shallow-water equations with topography. *Comput. Fluids* **32** (2003) 479–513.
- [8] S.T. Grilli, Fully Nonlinear Potential Flow Models used for Long Wave Runup Prediction, in *Long-Wave Runup Models*, H. Yeh, P. Liu and C. Synolakis Eds., World Scientific Pub (1997) 116–180.
- [9] S.T. Grilli and R. Subramanya, Numerical modeling of wave breaking induced by fixed or moving boundaries. *Comput. Mech.* **17** (1996) 374–391.
- [10] S.T. Grilli and I.A. Svendsen, Corner problems and global accuracy in the boundary element solution of nonlinear wave flows. *Engrg. Analysis Boundary Elements* **7** (1990) 178–195.
- [11] S.T. Grilli, P. Guyenne and F. Dias, A fully nonlinear model for three-dimensional overturning waves over arbitrary bottom, *Internat. J. Numer. Methods Fluids* **35** (2001) 829–867.
- [12] S.T. Grilli, M.A. Losada and F. Martin, The Breaking of a Solitary Wave over a Step: Modeling and Experiments, in *Proc. 4th Intl. Conf. on Hydraulic Engineering Software (HYDROSOFT92)*, Valencia, Spain, July 92), W.R. Blain and E. Cabrera Eds., Elsevier, Applied Science, Fluid Flow Modelling, Computational Mechanics Publications 1992575-586 (1992).
- [13] S.T. Grilli, M.A. Losada and F. Martin, Characteristics of solitary wave breaking induced by breakwaters, *J. Waterway Port Coastal Ocean Engrg.* **120** (1994) 74–92.

- [14] S.T. Grilli, J. Skourup and I.A. Svendsen, An Efficient Boundary Element Method for Nonlinear Water Waves. *Engrg. Analysis Boundary Elements* **6** (1989) 97–107.
- [15] S.T. Grilli, I.A. Svendsen and R. Subramanya, Breaking criterion and characteristics for solitary waves on slopes. *J. Waterway Port Coastal Ocean Engrg.* **123** (1997) 102–112.
- [16] S.T. Grilli, I.A. Svendsen and R. Subramanya, Closure of: Breaking criterion and characteristics for solitary waves on slopes. *J. Waterway Port Coastal Ocean Engrg.* **124** (1997) 333–335.
- [17] S.T. Grilli, R. Subramanya, I.A. Svendsen and J. Veeratomy, Shoaling of solitary waves on plane beaches. *J. Waterway Port Coastal Ocean Engrg.* **120** (1994) 609–628.
- [18] S. Guignard, S.T. Grilli, R. Marcer and V. Rey, Computation of Shoaling and Breaking Waves in Nearshore Areas by the Coupling of BEM and VOF Methods, in *Proc. 9th Offshore and Polar Engrg. Conf., ISOPE99*, Brest, France **3** (May 1999) 304–309.
- [19] S. Guignard, R. Marcer, V. Rey, C. Kharif and P. Fraunié, Solitary wave breaking on sloping beaches: 2D two phase flow numerical simulation by SL-VOF method. *Eur. J. Mech. B Fluids* **20** (2001) 57–74.
- [20] H. Guillard and C. Viozat, On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit. *Comput. Fluids* **28** (1999) 63–86.
- [21] C.W. Hirt and B.D. Nichols, Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.* **39** (1981) 323–345.
- [22] C. Lachaume, B. Biausser, S.T. Grilli, P. Fraunié and S. Guignard, Modeling of Breaking and Post-breaking Waves on Slopes by Coupling of BEM and VOF methods, in *Proc. 13th Offshore and Polar Engrg. Conf., ISOPE03*, Honolulu, USA (May 2003) 353–359.
- [23] J. Li, *Piecewise linear interface calculation*. Technical report, Fascicule B-Mecanique, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. II.* (1995).
- [24] P. Lubin, S. Vincent, J. Caltagirone and S. Abadie, Fully three-dimensional numerical simulation of a plunging breaker. *C. R. Mécanique* **331** (2003) 495–501.
- [25] P. Lubin, S. Vincent, J. Caltagirone and S. Abadie, Large eddy simulation of vortices induced by plunging breaking waves, in *Proc. ISOPE 2004, 14th Intl. Offshore and Polar Engineering Conference and Exhibition* **3** (2004) 306–312.
- [26] S. Osher and R. Fedkiw, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer-Verlag, New York (2002).
- [27] P. Sagaut, *Large eddy simulation for incompressible flows*. Springer-Verlag, New York (1998).
- [28] R. Saurel and R. Abgrall, A simple method for compressible multifluid flows. *SIAM J. Sci. Comput.* **21** (1999) 1115–1145.
- [29] J.A. Sethian, *Level Set Methods: Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Sciences*. Cambridge University Press (1996).
- [30] M. Tanaka, The stability of solitary waves. *Phys. Fluids* **29** (1986) 650–655.
- [31] E. Turkel, Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *J. Comput. Phys.* **72** (1987) 277–298.
- [32] E. Turkel, Review of preconditioning methods for fluid dynamics. *Appl. Numer. Math.* **12** (1993) 257–284.
- [33] S. Vincent, *Modélisation d'écoulements incompressibles de fluides non-miscibles*. Université Bordeaux I (1999).
- [34] S. Vincent and J.P. Caltagirone, Efficient solving method for unsteady incompressible interfacial flow problems. *Internat. J. Numer. Methods Fluids* **30** (1999) 795–811.
- [35] S. Vincent and J.P. Caltagirone, A one cell local multigrid method for solving unsteady incompressible multi-phase flows. *J. Comput. Phys.* **163** (2000) 172–215.
- [36] S. Vincent, J.P. Caltagirone, P. Lubin and T.N. Randrianarivelo, an adaptative augmented Lagrangian method for three-dimensional multi-material flows. *Comput. Fluids* (2004), under press.
- [37] H. Viviand, Pseudo-unsteady methods for transonic flow computations, in *19th Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Stanford*, Springer-Verlag, New-York **141** (1980).
- [38] H. Viviand, Analysis of pseudo-compressibility systems for compressible and incompressible flows. Technical report, *Comput. Fluids Dynamics Rev.* (1995).
- [39] T. Yasuda, H. Mutsuda and N. Mizutani, Kinematic of overtuning solitary waves and their relations to breaker types. *Coastal Engrg.* **29** (1997) 317–346.

# Bibliographie

- Abadie S. (1998) Modélisation numérique du déferlement plongeant par méthode vof. Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux I
- Ardhuin F., Herbers T. H. C. 2002 : Bragg scattering of random surface gravity waves by irregular seabed topography. *J. Fluid Mech.*, **451**,1–33
- Basco D. R. 1984 : Surfzone currents. *Coastal Engineering*, **8**, Issue 4,389–392
- Biausser B. (2003) Suivi d'interface tridimensionnel de type Volume Of Fluid : application au déferlement. Thèse de Doctorat, Université du Sud-Toulon Var
- Biausser B., Grilli S. T., Fraunié P., Marcer R. 2004a : Numerical analysis of the internal kinematics and dynamics of three-dimensional breaking waves on slopes. *Int. J. Offshore and Polar Engng.*, **14**(4),247–256
- Biausser B., Guignard S., Marcer R., Fraunié P. (2001) Numerical simulations of free surface flows using a new VOF method. In : Proc. 4th Seminar Euler and Navier-Stokes Equations. Institute of Thermomechanics , Prague
- Biausser B., Guignard S., Marcer R., Fraunié P. 2004b : 3D two phase flows numerical simulations by SL-VOF method. *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, **45**,581–604
- Bonnefille R. (1992) *Cours d'hydraulique maritime*. 3ème edn Masson
- Booij N. 1983 : A note on the accuracy of the mild-slope equation. *Coastal Engineering*, **7** (3),191–203
- Brackbill J., Kothe D., Zemach C. 1992 : A continuum method for modelling surface tension. *J. Comp. Phys.*, **100**,335–354
- Cartwright D., Longuet-Higgins M. (1956) The statistical distribution of the maxima of a random function. In : Proc. Royal soc. , A 237 pp 212–232



- Certain R. (2002) Morphodynamique d'une côte sableuse microtidale à barres : le golfe du lion (languedoc roussillon). Thèse de Doctorat, Université de Perpignan
- Certain R., Barusseau J., Capobianco R., Meuret A., Rey V., Dulou C., Stepanian A., Levoy F., Howa H. (2001) Bottom and shoreline evolutions under wave actions at a french Mediterranean site : The beach of Sète. In : MED-COAST01, The fifth International Conference on the Mediterranean Coastal Environment. , Hamammet, Tunisia
- Certain R., Meule S., Rey V., Pinazo C. 2005 : Swell transformation on a microtidal barred beach (Sète, France). *Journal of Marine Systems*, **38**,19–34
- Chorin A. 1966 : Numerical study of thermal convection in a fluid layer heated from below. *New-York University, A.E.C. Research and Development report NO NYO- 1480-61*
- Chorin A. 1967 : A numerical method for solving for solving incompressible viscous flows problems. *JCP*, **2**,12–26
- Christensen E. D., Deigaard R. 2001 : Large eddy simulation of breaking waves. *Coastal engineering*, **42**,53–86
- Christensen E. D., Walstra D.-J., Emerat N. 2002 : Vertical variation of the flow across the surf zone. *Coastal Engineering*, **45**,169–198
- Cokelet E. (1979) Mechanics of wave-induced forces on cykinders. Chapter Breaking waves, the plunging jet and interior flow-field
- Crocco L. 1965 : A suggestion for the solution of the steady Navier-Stokes equations. *AIAA Journal*, **3**,1824–1832
- Daniells P. 1946 : Discussion of, symposium on autocorrelation time series. *J. Roy. Statist. Soc.*, **8**,88–90v
- De Jouët C., Viviani H., Wormon S., Gouez J. L. (1991) Pseudo compressibility method for incompressible flow calculation. In : 4th Int. Symposium on computational Fluid Dynamics. , California, Davis
- Dingemans M. W. (1997) *Water wave propagation over uneven bottoms, Part I : Linear wave propagation*. World Scientific
- Drevard D. (2002) Mesure de la houle à l'aide d'un vélocimètre acoustique à effet doppler. Rapport de stage de DEA, Université du Sud-Toulon Var

- Drevard D., Meuret A., Rey V., Piazzola J., Dolle A. (2003) Partially reflected waves measurements using acoustic doppler velocimeter (ADV). In : 13th International Offshore and Polar Engineering Conference ISOPE'03. , Honolulu, Hawaii
- Elgar S., Herbers T., Guza R. 1994 : Reflection of ocean surface gravity waves from a natural beach. *Journal of Physical Oceanography*, **24(7)**,1503–1511
- Feddersen F., Gallagher E., Guza R., Elgar S. 2003 : The drag coefficient, bottom roughness and wave breaking in the nearshore. *Coastal Engineering*, **1**,828–845
- Fochesato C. (2004) Modèles numériques pour les vagues et les ondes internes. Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan
- Fontaine E., Landrini M., Tulin M. (2000) Breaking : splashing and ploughing phases. In : Intl. Workshop on Water Waves and Floating Bodies. p 4
- Fredsoe J., Deigaard R. 1992 : Mechanics of coastal sediment transport. *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*
- Freilich M., Guza R. 1984 : Nonlinear effects on shoaling surface gravity waves. *Pilos. Trans. Roy Soc. London A*, **311**,1–41
- Grilli S., Gilbert R., Lubin P., Vincent S., Legendre D., Duval M., Kimmoun O., Branger H., Drevard D., Fraunié P., Abadie S. (2004) Numerical modeling and experiments for solitary wave shoaling and breaking over a sloping beach. In : Proc. 14th Offshore and Polar Engng. Conf. ISOPE04 , Toulon, France, May 2004 pp 306–312
- Grilli S., Guyenne P., Dias F. 2001 : A fully non-linear model for three-dimensional overturning waves over an arbitrary bottom. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **35**,829–867
- Grilli S., Horillo J. (1998) Computation of periodic wave shoaling over barred-beaches in a fully nonlinear numerical wave tank. In : Proc. ISOPE98. Vol III pp 294–300
- Grilli S., Horrillo J. 1997 : Numerical generation and absorption of fully nonlinear periodic waves. *J. Engineering Mech.*, **123 (10)**,1060–1069
- Grilli S., Losada M., Martin F. (1992) The breaking of a solitary wave over a step : Modeling and experiments. In : Proc. 4th Intl. Conf. on Hydraulic

- Engineering Software. HYDROSOFT92 , Valencia, Spain, July 92 pp 575–586
- Grilli S., Losada M., Martin F. 1994 : Characteristics of solitary wave breaking induced by breakwaters. *J. Waterway Port Coastal and Ocean Engng.*, **120(1)**,74–92
- Grilli S., Skourup J., Svendsen I. 1989 : An efficient boundary element method for nonlinear water waves. *Eng. Analysis with Boundary Elements*, **6 (2)**,97–107
- Grilli S., Subramanya R. 1996 : Numerical modeling of wave breaking induced by fixed or moving boundaries. *Computational Mech.*, **17**,374–391
- Grilli S., Svendsen I. A., Subramanya R. 1997 : Breaking criterion and characteristics for solitary wave breaking on slopes. *J. Waterw. Port C-ASCE (3)*, pp 102–112
- Guignard S. (2001b) Suivi d'interface de type VOF : application au déferlement des ondes de gravité dû aux variations bathymétriques. Thèse de Doctorat, Université du Sud-Toulon Var
- Guignard S., Grilli S., Marcer R., Rey V. (1999) Computational of shoaling and breaking waves in nearshore areas by the coupling of BEM and VOF methods. In : Proc. 9th Offshore and Polar Engng. Conf. Vol III ISOPE , Brest, France pp 304–309
- Guignard S., Marcer R., Rey V., Kharif C., Fraunié P. 2001a : Solitary wave breaking on sloping beaches : 2D two phase flow numerical simulation by SL-VOF method. *European Journal of Mechanics B-Fluids*, **20**,57–74
- Guyenne P., Grilli S. 2003 : Numerical study of three-dimensional overturning waves in shallow water. *J. of Fluid Mechanics*, **20**,57–74
- Harlow F., Welch J. 1965 : Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids*
- Hasselmann K., Barnett T. P., Bouws E., Carlson H., Cartwright D. E., Enke K., Ewing J. A., Gienapp H., Hasselmann D., Krusemann P., Meerburg A., Muller P., Olbers D. J., Richter K., Sell W., Walden H. 1973 : Measurement of wind-wave growth and swell decay during the joint north sea wave project. *Deut. Hydrogr. Z.*, **8(12)**,1–95 suppl. A
- Heathershaw A. D. 1982 : Seabed-wave resonance and sand bar growth. *Nature*, **296**,343–345

- Helluy P., Golay F., Caltagirone J.-P., Lubin P., Vincent S., Drevard D., Marcer R., Seguin N., Grilli S., A.-C.Lesage, A.Dervieux 2005 : Numerical simulations of wave breaking. *Math. Modeling and Numer. Analys.*, **39(3)**,591–607
- Hirt C., Nichols B. 1981 : Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries. *J. Comp. Phys.*, **39**,323–345
- Horikawa K. (1988) *Nearshore dynamics and coastal processes*. Tokyo press
- Kimmoun O., Branger H., Zuchinni B. (2004) Laboratory piv measurements of wave breaking on a beach. In : Proc. 14th Offshore and Polar Engng. Conf. ISOPE04 , Toulon, France
- Lachaume C., Biaisser B., Grilli S., Fraunié P., Guignard S. (2003) Modeling of breaking and post-breaking waves on slopes by coupling of BEM and VOF methods. In : Proc. 13th Offshore and Polar Engng. Conf. ISOPE03 , Honolulu, USA pp 353–359
- Li J. (1995) Piecewise linear interface calculation. Technical report Comptes Rendus de l Academie des Sciences Serie II. Fascicule B-Mecanique
- Longuet-Higgins M., Cokelet E. (1976) The deformation of steep surface waves on water i. a numerical method of computation. In : Proc. R. Soc. London. pp 1–26
- Longuet-Higgins M., Cokelet E. (1978) The deformation of steep surface waves on water ii. growth of normal-mode instabilities. In : Proc. R. Soc. London. pp 1–28
- Lubin P., Vincent S., Caltagirone J.-P., Abadie S. 2003 : Fully three-dimensional direct simulation of a plunging breaker. *C.R. Mécanique*, **331**,495–501
- Lucy L. 1977 : A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The Astronomical Journal*, **82 (12)**,1013–1024
- Magne R., Arduin F. 2006 : Current effects on scattering of surface gravity waves by bottom topography. *Journal of Fluid Mechanics, en révision*
- Magne R., Rey V., Arduin F. 2005 : Measurement of wave scattering by topography in presence of currents. *Physics of Fluids* 17, 126 601
- Mansard E. P. D., Funke E. R. (1980) The measurement of incident and reflected spectra using a least square method. In : Proc. 17th Coastal Engrg. Conf. Vol 1

- Meuret A. (2004) Etude d'un système PUVW pour des mesures de houle et de turbulence en milieu littoral et côtier. Thèse de Doctorat, Université du Sud-Toulon Var
- Miche R. 1951 : Le pouvoir réfléchissant des ouvrages maritimes exposés à l'action de la houle. *Ann. Ponts Chaussées*, **121**,285–319
- Miller R. L. (1976) *Role of vortices in surf zone predictions : sedimentation and wave forces*. Soc. Econ. Paleontol. Mineral. Spec. Publ., R. A. davis and R. L. Ethington
- Monaghan J. 1994 : Simulating free surface flows with sph. *JCP*, **110**,399–406
- Osher S., Fedkiw R. 2001 : Level set methods : an overview and some recent results. *JCP*, **169**,463–502
- Peregrine D. H., Cokelet E. D., McIver P. (1980) The fluid mechanics of waves approaching breaking. In : Proc. 17th Conf. Coastal Eng. pp 512–528
- Prevosto M., Krogstad H. E., Robin A. 2000 : Probability distributions for maximum wave and crest heights. *Coastal Engineering*, **40(4)**,329–360
- Rey V., Capobianco R., Dulou C. 2002 : Wave scattering by a submerged plate in presence of a steady uniform current. *Coastal Engineering*, **47(1)**,27–34
- Rodriguez G., Soares C. G., Machado U. 1999 : Uncertainty of the sea state parameters resulting from the methods of spectral estimation. *Ocean Engineering*, **26**,991–1002
- Shao S., Yat-Man E. L. (2001) Numerical wave simulation by incompressible sph method. In : Inaugural Int. Conference on port and maritime R&D and technology. , Singapoure
- Sénéchal N., Dupuis H., Bonneton P. 2004 : Preliminary hydrodynamic results of a field experiment on a barred beach, Truc Vert beach on October 2001. *Ocean Dynamics*, **54**,408–414
- Stransberg C. 2002 : Directional wave parameter interpretation and related statistical uncertainties. *Journal of Hydraulic Res.*, **40 (3)**,253–263
- Takikawa K., Yamada F., Matsumoto K. 1997 : Internal characteristics and numerical analysis of plunging breaker on a slope. *Coastal Engineering*, **31(1-4)**,143–161
- Tanaka M. 1986 : The stability of solitary waves. *Phys. Fluids*, **29 (3)**,650–655

- Tatavarti V., Huntley D., Bowen A. (1988) Incoming and seaward going wave interactions on beaches. In : Proc. 21st Int. Conf. on Coastal Engineering. ASCE , Malaga, Spain pp 136–150
- Viviand H. (1980) Pseudo-unsteady methods for transonic flow computations. In : 19th Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Stanford. Vol 141 , Springer-Verlag, New-York
- Viviand H. (1983) Systèmes pseudo-instationnaires pour le calcul d'écoulements stationnaires de fluides parfaits. Technical report Publication ONERA 1983-4
- Viviand H. (1995) Analysis of pseudo-compressibility systems for compressible and incompressible flows. Technical report Comp. Fluids Dynamics Review
- Walton J. T. L. 1992 : Wave reflection from natural beaches. *Ocean Engineering*, **19**, (3),239–258
- Welch P. (1967) The use of the fast fourier transform for the estimation of power spectra : a method based on time averaging over short modified periodograms. In : IEEE Trans 1967.
- Wright L., Short A. D. 1984 : Morphodynamic variability of surf zone and beaches : a synthesis. *Marine Geology*, **56**,93–118
- Xü H., Yue D. (1992) Computations of fully nonlinear three-dimensional water waves. In : Proc. 19th Symp. On Naval Hydrodynamics. , Seoul, Korea
- Yasuda T., Mutsuda H., Mizutani N. 1997 : Kinematics of overturning solitary waves and their relations to breaker types. *Coastal Eng.*, **29**,317–346







## Résumé

---

En zone littorale, la houle subit de fortes transformations par effets bathymétriques. Une meilleure compréhension de ses modifications et des transferts d'énergie associés permet de mieux appréhender les problèmes de dimensionnement de structures côtières et d'aménagement du littoral (protection du littoral, influence des ouvrages sur la côte).

L'objectif de ce travail est d'étudier expérimentalement et numériquement la propagation et le déferlement d'ondes de gravité.

La première partie, expérimentale, propose des méthodes de calcul, basées sur les houles de Stokes, pour la mesure d'ondes partiellement stationnaires à partir d'instruments de type électromagnétique (S4) ou acoustique (ADV) donnant des mesures synchrones de vitesses et/ou de pression. Les influences du courant, de la direction de propagation, de la profondeur d'immersion des appareils ainsi que des effets non linéaires sont alors étudiés à partir de données en bassin et in situ.

La deuxième partie, numérique, consiste en la validation d'une méthode de suivi de surface libre de type SL-VOF (Semi-Lagrangian Volume Of Fluid), insérée dans un code de calcul industriel (code EOLE de la société Principia R&D). L'onde de gravité est modélisée par un soliton. L'étude de la propagation et du déferlement du soliton est effectuée pour deux applications : sur une marche (discontinuité du fond) puis sur un fond de pente constante 1/15. L'évolution de la surface libre, son élévation et le champ de vitesses sont alors comparés aux résultats expérimentaux.

## Abstract

---

### **Experimental and numerical study of gravity wave propagation in the breaking area.**

In coastal area, the swell is under strong transformations by bathymetric effects. A better understanding of its modifications and its associated energy transfers allow a better approach of environmental problems as coastal structures design, beach and harbour protections. The purpose of this work consists in studying experimentally and numerically the propagation and the breaking of gravity waves.

In the first part, calculations, based on Stokes wave theory, are proposed for the measurement of partially standing wave from electromagnetic (S4) or acoustic (ADV) instruments giving velocities and/or pressure synchronous measurements. Influences of current, wave propagation direction, immersion depth of instrument and nonlinear effects are then studied for both laboratory and nearshore experiments.

In the second part, an improved interface tracking algorithm (SL-VOF, Semi-Lagrangian Volume Of Fluid), inserted in an industrial code (EOLE, Principia R&D) is validated for gravity wave breaking in shallow water. Two applications are considered for the study of the shoaling and the breaking of a solitary wave : over a step (discontinuity of the bottom) and over a constant mild slope (1/15). The evolution of the free surface, its elevation and the velocity field are then compared with experimental results.

## Mots clés

---

houle, spectre, réflexion, littoral, mesures, déferlement, VOF

---