Disques analytiques et problèmes au bord en géométries complexe et presque complexe

Léa Blanc-Centi

Sous la direction du Pr. Bernard Coupet

Marseille, le 11 décembre 2006

Historique - 1

- Construction d'une "application de Riemann"

Historique - 1

- Construction d'une “application de Riemann”
  - ⋆ 1981 : L. Lempert introduit la notion de disque stationnaire, et construit un *analogue multidimensionnel de l'application de Riemann.*
  - ⋆ 2001 : A. Sukhov et A. Tumanov obtiennent un analogue local de la représentation circulaire de L. Lempert en *codimension supérieure.*
  - ⋆ 2003 : B. Coupet, H. Gaussier et A. Sukhov obtiennent un analogue local de la représentation circulaire de L. Lempert pour une hypersurface proche de la sphère, pour de *petites déformations de la structure complexe standard.*

Historique - 2

- Prolongement au bord pour un biholomorphisme

Historique - 2

- Prolongement au bord pour un biholomorphisme
  - ⋆ 1965 : méthode introduite E. Bishop.
  - ⋆ 1981 : L. Lempert montre à l'aide des disques analytiques qu'un biholomorphisme entre domaines fortement convexes à bords lisses se prolonge de façon lisse au bord.
  - ⋆ 2001 : A. Tumanov redémontre le théorème de Fefferman à l'aide des disques analytiques.
  - ⋆ 2005 : B. Coupet, H. Gaussier et A. Sukhov démontrent l'analogue du théorème de Fefferman dans le cadre *presque complexe*.

Plan

I. Paramétrisation explicite des disques holomorphes réguliers attachés à différents types d'hypersurfaces non-dégénérées :

- disques analytiques, disques réguliers ;
- hypersurface quasi-circulaire ;
- déformation d'une hyperquadrique non-dégénérée.

II. Prolongement au bord d'applications pseudo-holomorphes propres :

- énoncé des résultats ;
- rappels de géométrie presque complexe ;
- idées de démonstrations.

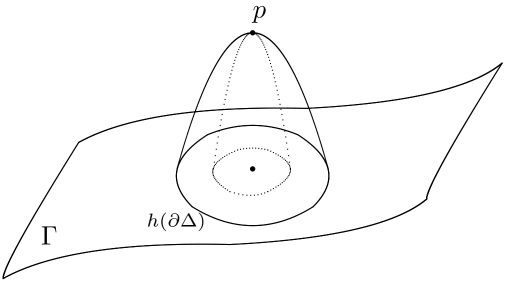
III. Perspectives

Hypersurfaces et disques holomorphes réguliers

Disques analytiques

Définition

Un disque analytique h attaché à une sous-variété réelle $\Gamma \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est une fonction holomorphe du disque unité Δ dans $\mathbb{C}^{n+1}$, continue jusqu'au bord et telle que $h(\partial\Delta) \subset \Gamma$.



Intérêts

Exemple Les fonctions $\zeta \mapsto \lambda\zeta,\ \lambda \in \mathbb{S}^{2n+1}$ sont des disques analytiques attachés à la sphère $\mathbb{S}^{2n+1}$.

Intérêts

Exemple Les fonctions $\zeta \mapsto \lambda\zeta,\ \lambda \in \mathbb{S}^{2n+1}$ sont des disques analytiques attachés à la sphère $\mathbb{S}^{2n+1}$.

- Les disques analytiques sont invariants par biholomorphisme :

  si F est un biholomorphisme entre deux ouverts tel que $F(\Gamma) \subset \Gamma'$, alors F transforme tout disque analytique attaché à Γ en un disque analytique attaché à Γ'.

- Si Γ est le bord d'un domaine D, l'étude des disques analytiques attachés à ∂D permet de relier le comportement d'une application définie dans D à son comportement au bord.

Sous-variétés totalement réelles

Définition

Une sous-variété réelle N de $\mathbb{C}^n$ est totalement réelle maximale si $\dim N = n$ *et*

$$\forall p \in N,\ T_pN \cap i\,T_pN = \{0\}.$$

Exemple $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}^n$.

Sous-variétés totalement réelles

Définition

Une sous-variété réelle N de $\mathbb{C}^n$ est totalement réelle maximale si $\dim N = n$ *et*

$$\forall p \in N,\ T_pN \cap i\,T_pN = \{0\}.$$

Exemple $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}^n$.

Intérêt Un disque analytique attaché à N hérite de la régularité de N (principe de réflexion).

Sous-variétés non-dégénérées

Soit $h : \Delta \to \mathbb{C}^{n+1}$ un disque holomorphe attaché à une hypersurface Γ. On cherche à se ramener au cas d'un disque attaché à une sous-variété totalement réelle maximale.

Sous-variétés non-dégénérées

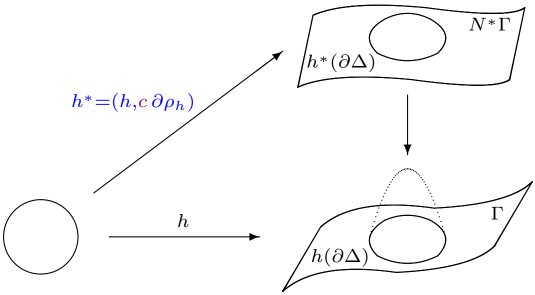
Soit $h : \Delta \to \mathbb{C}^{n+1}$ un disque holomorphe attaché à une hypersurface Γ. On cherche à se ramener au cas d'un disque attaché à une sous-variété totalement réelle maximale.

Définition

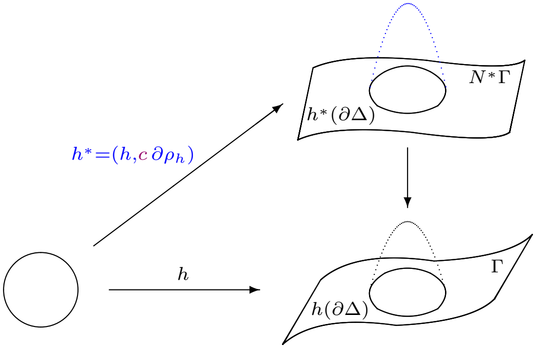
Une hypersurface réelle $\Gamma = \{\rho = 0\}$ est dite non-dégénérée si la restriction de sa matrice hessienne $\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial \bar{z}}\right)$ au fibré tangent est non-dégénérée.

- (S. Webster, 1978) Si Γ est non-dégénérée, son fibré conormal $N = N^*\Gamma$ est totalement réel (hors de la section nulle).

Disques réguliers



Disques réguliers



Détermination des disques réguliers

Définition

Une hypersurface réelle $\Gamma \subset \mathbb{C}^{n+1}$ *sera dite quasi-circulaire si :*

- Γ *est définie dans un voisinage de 0 par*
  $0 = \rho(z) = |z_0|^2 + \phi(|z_1|^2, \ldots, |z_n|^2)$, où ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$;
- Γ *n'intersecte pas le plan complexe* $\{z_0 = 0\}$ *;*
- Γ *est fortement convexe : la restriction de* $\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial \bar{z}}\right)$ *au fibré tangent est définie positive.*

Exemple : la sphère.

Détermination des disques réguliers

Définition

Une hypersurface réelle $\Gamma \subset \mathbb{C}^{n+1}$ sera dite quasi-circulaire si :

- Γ *est définie dans un voisinage de 0 par* $0 = \rho(z) = |z_0|^2 + \phi(|z_1|^2, \ldots, |z_n|^2)$, où ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$;
- Γ *n'intersecte pas le plan complexe* $\{z_0 = 0\}$ *;*
- Γ *est fortement convexe : la restriction de* $\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial \bar{z}}\right)$ *au fibré tangent est définie positive.*

Exemple : la sphère.

Théorème

Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}^{n+1}$ quasi-circulaire. Alors les disques réguliers attachés à Γ et centrés en 0 sont exactement les disques linéaires.

Propriété d'unicité

Corollaire

Soit D et D' deux domaines de $\mathbb{C}^{n+1}$ contenant 0, dont les bords sont des hypersurfaces quasi-circulaires. Tout biholomorphisme $F : D \to D'$, fixant 0 et de classe $\mathcal{C}^1$ jusqu'au bord, est linéaire.

Propriété d'unicité

Corollaire

Soit D et D' deux domaines de $\mathbb{C}^{n+1}$ contenant 0, dont les bords sont des hypersurfaces quasi-circulaires. Tout biholomorphisme $F : D \to D'$, fixant 0 et de classe $\mathcal{C}^1$ jusqu'au bord, est linéaire.

- Ces disques $\zeta \mapsto \lambda\zeta,\ \lambda \in \Gamma$ forment une famille à $2n+1$ paramètres.
- L'application $h(1) \mapsto h'(0)$ est un difféomorphisme de Γ sur son indicatrice $I(\Gamma) = \{h'(0)\}$.

Paramétrisation des disques réguliers

On suppose Γ non-dégénérée.

But : paramétrer la famille des disques réguliers attachés à Γ.

Paramétrisation des disques réguliers

On suppose Γ non-dégénérée.

But : paramétrer la famille des disques réguliers attachés à Γ.

- $Q = \{0 = \operatorname{Re} z_0 - \sum_{i,j\geq 1} a_{i,j}\bar{z}_i z_j\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ une hyperquadrique où $A = (a_{i,j})$ est hermitienne non-dégénérée ;
- $p = (p_0, 0, \ldots, 0) \notin Q$ "du bon côté" de Q ;
- Γ une hypersurface proche de Q (au sens $\mathcal{C}^3$).

Paramétrisation des disques réguliers

On suppose Γ non-dégénérée.
But : paramétrer la famille des disques réguliers attachés à Γ.

- $Q = \{0 = \operatorname{Re} z_0 - \sum_{i,j\geq 1} a_{i,j}\bar{z}_i z_j\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ une hyperquadrique où $A = (a_{i,j})$ est hermitienne non-dégénérée ;
- $p = (p_0, 0, \ldots, 0) \notin Q$ "du bon côté" de Q ;
- Γ une hypersurface proche de Q (au sens $\mathcal{C}^3$).

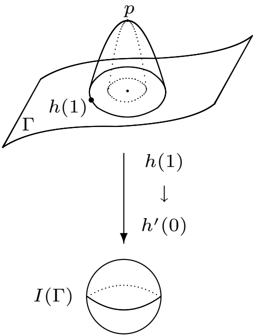
Théorème

Les disques réguliers attachés à Γ et centrés en p forment une famille à $2n+1$ paramètres. Plus précisément,

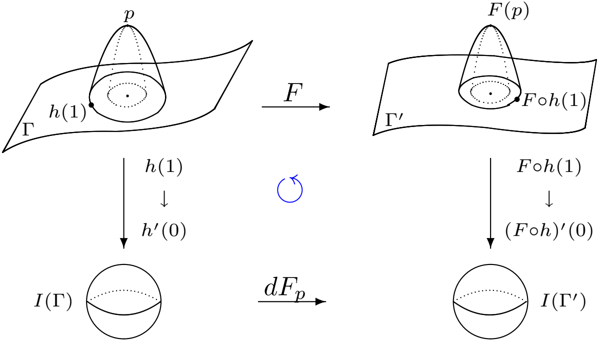
$$h \mapsto h(1) \quad \text{et} \quad h \mapsto h'(0)$$

sont des difféomorphismes locaux.

Autrement dit : Γ est représentée *localement* de façon circulaire par son indicatrice $I(\Gamma) = \{h'(0)\}$.



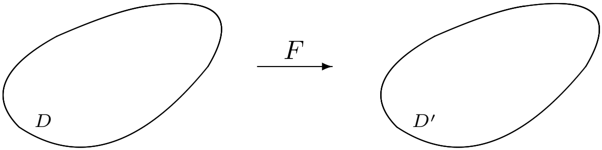
Autrement dit : Γ est représentée *localement* de façon circulaire par son indicatrice $I(\Gamma) = \{h'(0)\}$.



Corollaire

Le diagramme précédent est commutatif : F ne dépend que de sa différentielle en p.

Prolongement au bord d'applications pseudo-holomorphes propres



En complexe

* D, D' domaines bornés strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$.
* $F : D \to D'$ holomorphe propre.

$n = 1$

∂D, $\partial D'$ de classe $\mathcal{C}^r$ $(r > 1) \Longrightarrow \bar{F} : \bar{D} \to \bar{D}'$ de classe $\mathcal{C}^{r-0}$.

En complexe

* D, D' domaines bornés strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$.
* $F : D \to D'$ holomorphe propre.

$n = 1$

∂D, $\partial D'$ de classe $\mathcal{C}^r$ $(r > 1) \Longrightarrow \bar{F} : \bar{D} \to \bar{D}'$ de classe $\mathcal{C}^{r-0}$.

$n \geq 2$

1973 (G. Henkin) prolongement $C^{1/2}$ jusqu'au bord.

1974 (Ch. Fefferman)

$$\left.\begin{array}{ll} F & \text{biholomorphisme} \\ \partial D,\ \partial D' & \text{lisses} \end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{F} : \bar{D} \to \bar{D}' \text{ lisse.}$$

En complexe

* D, D' domaines bornés strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$.
* $F : D \to D'$ holomorphe propre.

$n = 1$
∂D, $\partial D'$ de classe $\mathcal{C}^r$ $(r > 1) \Longrightarrow \bar{F} : \bar{D} \to \bar{D}'$ de classe $\mathcal{C}^{r-0}$.

$n \geq 2$
1973 (G. Henkin) prolongement $C^{1/2}$ jusqu'au bord.

1974 (Ch. Fefferman)

$$\left.\begin{array}{ll} F & \text{biholomorphisme} \\ \partial D,\ \partial D' & \text{lisses} \end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{F} : \bar{D} \to \bar{D}' \text{ lisse.}$$

70'-90' (G. Margulis, S. Pinchuk, H. Lewy, S. Bell, E. Ligocka, L. Nirenberg, S. Webster, P. Yang, L. Lempert, B. Coupet,...)

∂D, $\partial D'$ de classe $\mathcal{C}^r$ $(r \geq 2) \Longrightarrow \bar{F} : \bar{D} \to \bar{D}'$ de classe $\mathcal{C}^{r-1/2}$.

En presque complexe

* $D \subset (M, J)$, $D' \subset (M', J')$ domaines bornés strictement pseudoconvexes de variétés presque complexes de même dimension.
* $F : D \to D'$ pseudo-holomorphe.

$\boldsymbol{n = 1}$ cas standard.

$\boldsymbol{n \geq 2}$ 2005 (B. Coupet, H. Gaussier, A. Sukhov)

$$\left.\begin{array}{ll} F & \text{pseudo} - \text{biholomorphisme} \\ \partial D,\ \partial D' & \text{lisses} \end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{F} : \bar{D} \to \bar{D}' \text{ lisse.}$$

En presque complexe

* $D \subset (M, J)$, $D' \subset (M', J')$ domaines bornés strictement pseudoconvexes de variétés presque complexes de même dimension.
* $F : D \to D'$ pseudo-holomorphe.

$\boldsymbol{n = 1}$ cas standard.

$\boldsymbol{n \geq 2}$ 2005 (B. Coupet, H. Gaussier, A. Sukhov)

$$\left.\begin{array}{ll} F & \text{pseudo} - \text{biholomorphisme} \\ \partial D,\ \partial D' & \text{lisses} \end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{F} : \bar{D} \to \bar{D}' \text{ lisse.}$$

Question : cas d'une application pseudo-holomorphe propre ?

* (M, J) et (M', J') des variétés presque complexes orientées de même dimension.
* $D \subset M$, $D' \subset M'$ des régions strictement pseudoconvexes.
* $F : D \to D'$ pseudoholomorphe propre.

Théorème

Il existe un compact $K \subset D$ et une constante $c > 0$ tels que :

$$|\mathrm{Jac} F| \geq c$$

preuve

* (M, J) et (M', J') des variétés presque complexes orientées de même dimension.
* $D \subset M$, $D' \subset M'$ des régions strictement pseudoconvexes.
* $F : D \to D'$ pseudoholomorphe propre.

Théorème

Il existe un compact $K \subset D$ et une constante $c > 0$ tels que :

$$|\mathbf{Jac}\boldsymbol{F}| \geq \boldsymbol{c}$$

preuve

Théorème

F se prolonge en $\bar{F} : \bar{D} \to \bar{D}'$ de classe $\mathcal{C}^1$.

* (M, J) et (M', J') des variétés presque complexes orientées de même dimension.
* $D \subset M$, $D' \subset M'$ des régions strictement pseudoconvexes.
* $F : D \to D'$ pseudoholomorphe propre.

Théorème

Il existe un compact $K \subset D$ et une constante $c > 0$ tels que :

$$|\mathrm{Jac}\boldsymbol{F}| \geq \boldsymbol{c}$$

preuve

Théorème

F se prolonge en $\bar{F} : \bar{D} \to \bar{D}'$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème

Si J est $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ et J' est $\mathcal{C}^{k',\alpha'}$:

- *$\bar{F}$ est de classe $\mathcal{C}^s$ où $s = \min(k - 1 + \alpha/2, k' + \alpha'/2)$;*
- $||\bar{F}||_{\mathcal{C}^{s-1}} \leq c(s)\left(1 + \frac{c'}{\sqrt{\lambda}}\right) \cdot ||(F, dF^{-1})||_\infty$.

perspectives

Variétés presque complexes

Définition

Soit M une variété réelle lisse. Une structure presque complexe J sur M est la donnée de :

$$\forall p \in M,\ J_p : T_pM \to T_pM \quad \text{tel que } J^2 = -id_{T_pM}.$$

Exemples :

- $M = \mathbb{R}^{2n}$, J="multiplication par i"$= \mathcal{J}_{st}^{(n)}$.

Variétés presque complexes

Définition

Soit M une variété réelle lisse. Une structure presque complexe J sur M est la donnée de :

$$\forall p \in M,\ J_p : T_pM \to T_pM \quad \text{tel que } J^2 = -id_{T_pM}.$$

Exemples :

- $M = \mathbb{R}^{2n}$, J="multiplication par i"$= \mathcal{J}_{st}^{(n)}$.
- M une variété complexe

  $\Longleftrightarrow$ il existe un système de coordonnées locales dans lequel J coïncide avec $\mathcal{J}_{st}$ en tout point.

Structures presque complexes

Définition

J est intégrable $\Longleftrightarrow$ (M, J) est une variété complexe.

Newlander-Nirenberg : J intégrable $\Longleftrightarrow \forall X, Y,\ N_J(X, Y) \equiv 0$

où $N_J(X, Y) := [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]$.

Structures presque complexes

Définition

J est intégrable $\Longleftrightarrow$ (M, J) est une variété complexe.

Newlander-Nirenberg : J intégrable $\Longleftrightarrow \forall X, Y,\ N_J(X,Y) \equiv 0$

où $N_J(X,Y) := [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]$.

Exemple : $(\mathbb{R}^6, J)$ est presque complexe mais pas complexe, pour

$$J(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & x_1 & -y_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -y_1 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

J est une structure modèle.

Pseudo-holomorphie

(M, J) et (M', J') deux variétés presque complexes orientées.

Définition

$F : M \to M'$ de classe $\mathcal{C}^1$ est (J, J')-holomorphe si

$$\forall p \in M,\ dF_p \circ J_p = J'_{F(p)} \circ dF_p.$$

Si (M, J) est le disque unité de $\mathbb{C}$ muni de la structure standard, on dit que F est un disque J'-holomorphe (ou pseudo-holomorphe).

Pseudo-holomorphie

(M, J) et (M', J') deux variétés presque complexes orientées.

Définition

$F : M \to M'$ de classe $\mathcal{C}^1$ est (J, J')-holomorphe si

$$\forall p \in M, \; dF_p \circ J_p = J'_{F(p)} \circ dF_p.$$

Si (M, J) est le disque unité de $\mathbb{C}$ muni de la structure standard, on dit que F est un disque J'-holomorphe (ou pseudo-holomorphe).

Remarques

- Ou bien F conserve l'orientation en tout point, ou bien F inverse l'orientation en tout point.
- Si dF_p n'est pas inversible, alors $\operatorname{rg} dF_p \leq 2n - 2$.

Régions strictement pseudoconvexes

Définition

La fonction $\rho : M \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est strictement J-plurisousharmonique si

Régions strictement pseudoconvexes

Définition

La fonction $\rho : M \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est strictement J-plurisousharmonique si sa forme de Levi est définie positive.

Conséquence Pour tout disque J-holomorphe $h : \Delta \to M$, la fonction $\rho \circ h$ est sous-harmonique, donc vérifie le principe du maximum.

Régions strictement pseudoconvexes

Définition

La fonction $\rho : M \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est strictement J-plurisousharmonique si sa forme de Levi est définie positive.

Conséquence Pour tout disque J-holomorphe $h : \Delta \to M$, la fonction $\rho \circ h$ est sous-harmonique, donc vérifie le principe du maximum.

Définition

Un domaine $D \subset M$ est appelé région strictement pseudoconvexe si

$$D = \{\rho < 0\}$$

où ρ est de classe $\mathcal{C}^2$, strictement J-plurisousharmonique dans un voisinage de $\bar{D}$.

▸ Théorème

Prolongement 1/2-höldérien

$D = \{\rho < 0\} \subset M$, $D' = \{\rho' < 0\} \subset M'$.

- lemme de Hopf $\Longrightarrow \begin{cases} |\rho' \circ F(p)| \geq c \operatorname{dist}(p, \partial D) \\ |\rho \circ \text{“}F^{-1}\text{”}(q)| \geq c' \operatorname{dist}(q, \partial D'). \end{cases}$

Prolongement 1/2-höldérien

$D = \{\rho < 0\} \subset M$, $D' = \{\rho' < 0\} \subset M'$.

- lemme de Hopf $\Longrightarrow \begin{cases} |\rho' \circ F(p)| \geq c\,\mathrm{dist}\,(p, \partial D) \\ |\rho \circ \text{“}F^{-1}\text{”}(q)| \geq c'\,\mathrm{dist}\,(q, \partial D'). \end{cases}$
- conservation des distances au bord :

$$\boxed{c \leq \frac{\mathrm{dist}\,(F(p), \partial D')}{\mathrm{dist}\,(p, \partial D)} \leq c'}$$

$$\Downarrow$$

$$||dF_p|| \leq \frac{c}{\sqrt{\mathrm{dist}\,(p, \partial D)}}$$

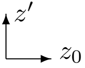
$$\Downarrow$$

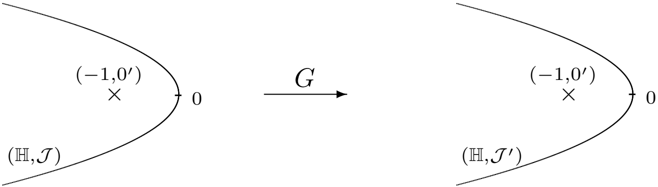
F se prolonge en $\bar{F} : \bar{D} \to \bar{D}'$ de classe $\mathcal{C}^{1/2}$.

Méthode de dilatation des coordonnées

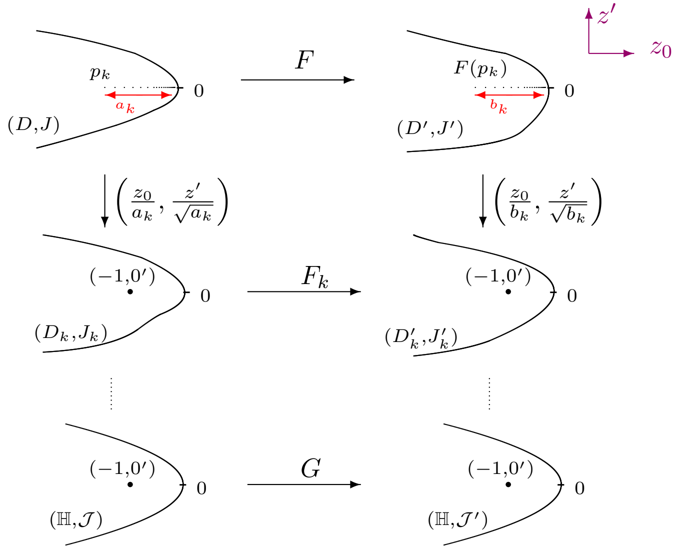
Idée Se ramener au cas $D = D' = \mathbb{H}$, où

$$\mathbb{H} = \{\mathrm{Re}\, z_0 + ||z'||^2 < 0\} \subset \mathbb{C}_{z_0} \times \mathbb{C}^n_{z'}.$$





Méthode de dilatation des coordonnées



Étude de la fonction limite

- G se prolonge à $\bar{\mathbb{H}}$ de façon 1/2-hölderienne.

Étude de la fonction limite

- G se prolonge à $\bar{\mathbb{H}}$ de façon 1/2-hölderienne.
- Le jacobien de G ne s'annule pas.
  - ⋆ Si $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ sont *intégrables*, G est un automorphisme de $\mathbb{H}$.
  - ⋆ *Cas général :*
    - → si $\mathrm{Jac}_p G = 0$, alors $\mathrm{Jac} G \equiv 0$;
    - → stricte plurisousharmonicité + principe du maximum.

Étude de la fonction limite

- G se prolonge à $\bar{\mathbb{H}}$ de façon 1/2-hölderienne.
- Le jacobien de G ne s'annule pas.
  - ⋆ Si $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ sont *intégrables*, G est un automorphisme de $\mathbb{H}$.
  - ⋆ *Cas général :*
    - → si $\mathrm{Jac}_p G = 0$, alors $\mathrm{Jac} G \equiv 0$;
    - → stricte plurisousharmonicité + principe du maximum.
- Forme de $G = (G_0, G')$:
  - ⋆ $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ intégrables : $G(z_0, z') = (z_0, z')$.
  - ⋆ $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ non-intégrables : $G(z_0, z') = (z_0 + g(z'), G'(z'))$.

donc pour tout z, $\dfrac{\partial G_0}{\partial z_0}(z) = 1$.

Preuve du Théorème 1

Par construction, $\mathrm{Jac}_{p_k} F \xrightarrow[+\infty]{} \mathrm{Jac}_{(-1,0')} G$.

$$\Downarrow$$

$\mathrm{Jac} \boldsymbol{F}$ reste loin de zéro près du bord.

Prolongement de classe $\mathcal{C}^1$

Pour pouvoir raisonner comme dans le cas d'un pseudo-biholomorphisme, il suffit de montrer :

i. dF est inversible près du bord ;

ii. il existe une constante $A > 0$ telle que toute "valeur d'adhérence λ de $\frac{\partial F_0}{\partial z_0}(z)$ quand $z \to \partial D$" vérifie :

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ et } |\lambda| \geq A.$$

Prolongement de classe $\mathcal{C}^1$

Pour pouvoir raisonner comme dans le cas d'un pseudo-biholomorphisme, il suffit de montrer :

i. dF est inversible près du bord ;

ii. il existe une constante $A > 0$ telle que toute "valeur d'adhérence λ de $\frac{\partial F_0}{\partial z_0}(z)$ quand $z \to \partial D$" vérifie :
$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ et } |\lambda| \geq A.$$

$$\Downarrow$$

F se prolonge en $\bar{F} : \bar{D} \to \bar{D}'$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Régularité d'ordre supérieur

Méthode *On se ramène à étudier la régularité et les estimations a priori pour un disque h: $\Delta^+ \to T^*M'$ tel que*

$$h(]-1;1[) \subset N' \text{ totalement réelle maximale.}$$

- h est de classe $\mathcal{C}^{1/2}$ jusqu'au bord ;
- principe de réflexion

Régularité d'ordre supérieur

Méthode On se ramène à étudier la régularité et les estimations a priori pour un disque $h\colon \Delta^+ \to T^*M'$ tel que

$$h(]-1;1[) \subset N' \text{ totalement réelle maximale.}$$

- h est de classe $\mathcal{C}^{1/2}$ jusqu'au bord ;
- principe de réflexion $\Longrightarrow$ h hérite de la régularité de la structure presque complexe sur T^*M' ;
- les normes hölderiennes de h sont majorées uniformément par $||h||_\infty$.

▸ Théorème : régularité et estimations

Perspectives

Quelques questions :

Perspectives

Quelques questions :

Régularité optimale ?

Perspectives

Quelques questions :

Régularité optimale ?

Étude du lieu des points critiques :

- géométrie du lieu des points critiques ?
- propre $\Longrightarrow$ pseudo-biholomorphisme local ?

Perspectives

Quelques questions :

Régularité optimale ?

Étude du lieu des points critiques :

- géométrie du lieu des points critiques ?
- propre $\Longrightarrow$ pseudo-biholomorphisme local ?

Un peu plus loin...

δ-hyperbolicité au sens de Gromov.