



HAL
open science

Optimisation de forme des structures électromagnétiques

Joao Antonio Vasconcelos

► **To cite this version:**

Joao Antonio Vasconcelos. Optimisation de forme des structures électromagnétiques. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 1994. Français. NNT: . tel-00139127

HAL Id: tel-00139127

<https://theses.hal.science/tel-00139127>

Submitted on 29 Mar 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée devant

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

spécialité: Génie Electrique

préparée au sein de

L'ECOLE DOCTORALE DE LYON DES SCIENCES POUR L'INGENIEUR:
ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE

par

João Antônio DE VASCONCELOS

Optimisation de forme des structures électromagnétiques

soutenue le 4 juillet 1994 devant la Commission d'Examen:

J.L. Coulomb	Professeur	INP-Grenoble	<i>Président et rapporteur</i>
A. Konrad	Professeur	Univ. de Toronto (Canada)	
L. Krähenbühl	C.R. (CNRS)	EC-Lyon	
G.G. Molinari	Professeur	Univ. di Genova (Italie)	
A. Nicolas	Professeur	EC-Lyon	
A. Razek	D.R. (CNRS)	LGE-Paris	<i>Rapporteur</i>

à ma femme, Patrícia et mes enfants Pedro et João Eduardo.

REMERCIEMENTS

J'adresse mes sincères remerciements à:

Monsieur A. Nicolas, Professeur et Directeur du Laboratoire d'Electrotechnique de Lyon, pour m'avoir accueilli au sein de son équipe de modélisation en électromagnétisme et d'avoir assuré la direction de cette thèse.

Monsieur L. Krähenbühl, Chargé de Recherche au CNRS, que je tiens tout particulièrement à remercier pour ses conseils éclairés et sa grande disponibilité. Monsieur L. Krähenbühl a su par sa compétence scientifique et ses qualités humaines de simplicité et d'amitié me motiver pour surmonter les difficultés et mener à terme ce travail.

Monsieur Ph. Auriol, Professeur et Directeur de la Formation Doctorale en Génie Electrique à l'ECL, qui m'a accueilli au sein du Laboratoire dont il était le Directeur au début de mon travail.

Monsieur J. L. Coulomb, Professeur à l'Institut Polytechnique de Grenoble et Président du jury, ainsi que
Monsieur A. Razek, Directeur de Recherche au CNRS,

pour avoir accepté de rédiger un rapport sur ce travail et pour l'honneur qu'ils me font en participant à ce jury.

Monsieur A. Konrad, Professeur au Dept. of Electrical Engineering, University of Toronto, Canada et

Monsieur G. Molinari, Professeur à l'Università di Genova, Italie,

pour l'honneur qu'il me font en acceptant de participer à ce jury de thèse.

Enfin, il m'est agréable de remercier tous ceux qui m'ont aidé et soutenu tout au long de ces années passées au sein du Centre de Génie Electrique de Lyon. Que tous, sans exception, trouvent ici le témoignage de ma plus profonde reconnaissance.

Je tiens aussi à remercier la CAPES - Coordination d'Apperfeccionement du Gouvernement Brésilien - pour son soutien financier durant tous ces années, ainsi que l'Universidade Federal de Minas Gerais, Brésil, pour m'avoir donné l'autorisation de venir faire ce travail.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
I. METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES DE FRONTIERE.....	5
Introduction.....	5
I.1. Formulation des phenomenes physiques en électromagnetisme.....	6
I.1.1. Cas général.	6
I.1.2. Problèmes statiques.	9
I.1.3. Conditions de passage entre des milieux différents.	11
I.2. Formulation de la méthode d'élément de frontière.....	11
I.2.1. Généralités.....	11
I.2.2. Formulation intégrale de l'équation de Poisson et de Laplace.	14
I.2.3. Fonctions de Green.....	14
I.2.4. Cas des problèmes bidimensionnels.....	14
I.2.5. Cas des problème axisymétriques.	16
I.2.6. Résumé.	17
I.2.7. Problèmes ouverts.	18
I.3. Discretisation de la frontière.....	19
I.4. Calcul du potentiel et du champ a l'interieur du domaine W.....	21
I.5. Integration numerique.....	22
I.5.1 Intégration classique et problèmes de singularité.....	22
I.5.2 Intégration adaptative.	25
I.5.3 Validation des procédures d'integration numérique.	28
I.5.3.1. Intégrale singulière.	28
I.5.3.2. Intégrale quasi singulière - Intégration adaptative.	28
I.6. Validation du code de calcul de champ (Bem2d).	34
I.6.1. Validation analytique.	35
I.6.1.1. Problème bidimensionnel.....	35
I.6.1.2. Problème axisymétrique.....	37
I.6.2. Validation par rapport à d'autres logiciels.....	39
Conclusion	43

II . ALGORITHMES D'OPTIMISATION	44
Introduction.....	44
II.1. Formulation du problème d'optimisation.	47
II.2. Méthodes de transformation.....	48
II.3. Méthode déterministe.....	48
II.3.1. Méthodes de pénalités intérieure et extérieure.....	49
II.3.2. Méthode du Lagrangien augmenté.....	51
II.3.2.1. Problème sous contrainte d'égalité (Powell - Hestenes).	51
II.3.2.2. Formules pour réactualisation de lk.....	53
II.3.2.3. Paramètres de pénalité.....	54
II.3.2.4. Problème sous contrainte d'inégalité (Rockafellar - Fletcher).	55
II.3.2.5. Réactualisation des multiplicateurs de Lagrange lk.....	56
II.3.2.6. Problème non contraint: méthode de la région de confiance.	57
II.3.3. Algorithme simplifié.....	59
II.4. Méthodes stochastiques.....	59
II.4.1. Algorithme génétique.....	59
II.4.1.1. Représentation des Paramètres.....	61
II.4.1.2. Reproduction.....	62
II.4.1.3. Croisement.....	63
II.4.1.4. Mutation.....	66
II.4.1.5. Inversion.....	67
II.4.1.6. Choix de la fonction coût.....	69
II.4.1.7. Algorithme GA simplifié.....	69
II.4.2. Algorithme de recuit simulé (Simulated Annealing Algorithm).....	71
II.4.2.1. Algorithme de recuit simulé.....	71
II.4.2.2. Schéma de refroidissement (Cooling Schedule).....	73
II.4.2.3. Algorithme de recuit simulé avec variables continues.....	74
II.4.2.4. Algorithme TABU (TABU Search algorithm).....	76
II.4.2.5. Méthode de Recuit Simulé Modifié (MSA).....	76
II.4.2.6. Couplage de l'Algorithme MSA avec BEM2D.....	78
II.5. Méthodes hybrides.....	78
II.5.1. Algorithme génétique / Lagrangien Augmenté (GA/ALM).....	79
II.5.2. Algorithme recuit simulé / Lagrangien augmenté (MSA/ALM).....	80
Conclusion.....	81
III . ANALYSE DE SENSIBILITE.....	82
Introduction.....	82
III.1. Dérivation des fonctions par rapport aux paramètres.....	82
III.2. Validation de l'analyse de sensibilité.....	86
III.2.1. Condensateur cylindrique.....	87
III.2.2. Condensateur sphérique.....	88
Conclusion	90

IV . METHODES D'OPTIMISATION -	91
Introduction.....	91
IV.1. Fonctions testées.	91
IV.1.1. Fonction de Rosenbrock (FR) [28].....	91
IV.1.2. Problème de Rosen-Susuki (FRS) [81].....	92
IV.1.3. Fonction de Rastrigin (FRA) [56].	93
IV.2. Comportement des méthodes d'optimisation étudiées.....	94
IV.2.1. Algorithme du Lagrangien augmenté.	94
IV.2.2. Algorithme génétique.	96
IV.2.3. Algorithme de recuit simulé modifié.	99
IV.2.3.1. Problème de Rosen-Susuki	100
IV.2.3.2. Fonctin de Rastrigin (FRA).....	102
IV.3. Validation et problèmes de commutation.	104
IV.3.1. Méthodes déterministes et stochastiques.....	104
IV.3.1.1. Méthode du Lagrangien augmenté (ALM).....	104
IV.3.1.2. Algorithme génétique (GA).	105
IV.3.1.3. Algorithme de recuit simulé modifié (MSA).	107
IV.3.2. Méthodes hybrides.....	111
IV.3.2.1. Présentation des fonctions-test.....	111
IV.3.2.2. Génétique / Lagrangien augmenté (GA-ALM).	112
IV.3.2.3. Recuit simulé modifié / Lagrangien augmenté (MSA-ALM).....	116
Conclusion.	117
V . OPTIMISATION DES STRUCTURES	118
Introduction.....	118
V.1. Algorithme de Lagrangien augmenté - Isolateur cas Cigre.....	118
V.2. Algorithme génétique - Isolateur type rigide	123
V.3. Algorithme de recuit simulé modifié - Isolateur capot tige.....	128
V.4. Algorithmes hybrides: Optimisation de forme d'un connecteur H.T.....	130
V.4.1. Optimisation.....	132
V.4.2. Paramètres et critères de commutation.	134
V.4.2.1. Algorithme génétique.	134
V.4.2.2. Algorithme du recuit simulé modifié.....	134
V.4.3. Résultats.....	135
Conclusion.	138
CONCLUSION GENERALE	139
ANNEXE I.....	141
A.1.1. Densité volumique de charge fonction quelconque des coordonnées.	141
A.1.2. Densité volumique de charge est une fonction harmonique.	142
A.1.3. Densité volumique de charge uniforme.	142

INTRODUCTION

Dans tous les domaines de la technique, les ingénieurs sont amenés à concevoir des dispositifs nouveaux, ou à améliorer des dispositifs existants. Il est très rare que des méthodes de *synthèse* permettent de définir un objet technique par le seul raisonnement, même assisté par l'ordinateur. Le plus souvent, il faut s'appuyer sur l'expérience, qui permet de définir un premier projet, qu'on *analyse* par le calcul numérique: les résultats du calcul montrent généralement que l'ensemble du cahier des charges n'est pas respecté. On apporte alors quelques modifications au pré projet pour arriver, par itérations successives, à une solution réalisable respectant le cahier des charges.

Ce processus itératif a permis de réaliser une certaine optimisation du dispositif de départ. L'objet de notre travail est de proposer des *méthodes d'optimisation* automatiques, plus particulièrement destinées à l'*optimisation des formes* dans le domaine de l'électrostatique (*définition des profils idéaux d'électrodes et de diélectrique dans un disjoncteur, par exemple, en fonction de critères à préciser*). De telles méthodes, bien entendu associées à des méthodes de calcul du champ électrique, constituent un véritable outil de conception assistée par ordinateur.

Le CEGELY ayant développé un logiciel de calcul de champ dans les dispositifs tridimensionnels (Phi3d), fondé sur la méthode des intégrales de frontière, il nous a été proposé de développer les outils d'optimisation de forme qui pourraient lui être associés. La lourdeur des calculs en trois dimensions (*chaque variante d'un dispositif un peu complexe demandant le plus souvent plus d'une heure de calcul*) et les besoins du laboratoire en ce domaine nous ont conduit à développer un programme "2D" fondé sur la même méthode numérique (BEM2D), mettant en oeuvre quelques idées originales présentées au chapitre I:

traitement des noyaux singuliers ou quasi-singuliers associés à la méthode intégrale, intégration adaptative. C'est ce programme qui a servi aux essais des méthodes d'optimisation, dont certaines pourront néanmoins être utilisées telles quelles avec tout autre programme de calcul de champ (*si on fait abstraction des temps de calcul encore aujourd'hui prohibitifs en "3D"*): on verra en effet dans la suite de l'exposé que, si les méthodes d'optimisation doivent être *associées* à un logiciel de calcul qui permette d'évaluer chaque variante du dispositif, elles en restent cependant relativement indépendantes. Dans le même ordre d'idées, il est vrai que nous nous sommes restreints pour nos applications à l'électrostatique, et que le titre de notre travail suggère un domaine plus vaste: nous sommes convaincus qu'une partie des méthodes d'optimisation que nous proposons est directement transposable à d'autres sous-domaines de l'électromagnétisme, et même à d'autres domaines de la physique des milieux continus, et qu'il suffit pour cela de remplacer le code BEM2D par le code de calcul adéquat. Au lecteur de se faire son opinion ... et d'essayer!

Notre choix de la méthode intégrale n'est pas seulement lié à la culture de notre laboratoire d'accueil! En matière d'optimisation de forme, il est en effet intéressant que la nécessaire discrétisation géométrique porte uniquement sur le *profil* à optimiser, et ne soit pas alourdie par une discrétisation de l'espace environnant qu'il faudrait régulièrement réactualiser en fonction des modifications apportées au profil (*"re"-maillage*). Avec la méthode des intégrales *de frontière*, seule cette frontière doit, éventuellement, être remaillée (*faire de l'optimisation avec un programme d'éléments finis est évidemment possible, c'est seulement moins élégant*). Le code que nous avons développé est compatible avec les pré- et post-processeurs de FLUX2D [75] qui est en France et dans quelques autres pays une référence solide, et qui offre la possibilité, indispensable pour notre application, de définir des géométries *paramétrées* de façon même complexe.

La présentation des méthodes d'optimisation fait l'objet du chapitre II. Certaines de ces méthodes, dites *déterministes*, s'appuient sur le calcul qui peut être fait d'une *direction* de recherche, liée à la dérivée de certains résultats par rapport aux paramètres géométriques du dispositif: on saura alors que, pour faire varier tel résultat dans tel sens, il faut agir plutôt sur tel paramètre que sur tel autre, et dans quel sens, et avec quelle intensité. Pour réaliser ces calculs de dérivées (*appelés* analyse de sensibilité, *chapitre III*) en même temps que la résolution classique du problème, il est bien sûr nécessaire d'intervenir au plus profond du code. Il est d'autre part nécessaire d'avoir une certitude quant à la grande précision de ce calcul, de façon à ce que les jugements portés sur les méthodes d'optimisation ne soient pas brouillés par des imprécisions des calculs associés: ce sont là deux raisons complémentaires qui nous ont conduit à développer BEM2D. Disposer d'un module de calcul de sensibilité au sein du programme de calcul de champ est une condition nécessaire pour pouvoir utiliser une méthode d'optimisation déterministe: cela peut donc être un obstacle lorsque l'on souhaite utiliser un outil commercial disponible, et c'est l'une des raisons pour lesquelles nous nous sommes intéressés à d'autres méthodes d'optimisation.

Il est d'autre part recommandé d'utiliser des méthodes d'optimisation *déterministes* lorsque la solution cherchée est réputée proche d'une solution connue, point de départ de cette recherche et nous avons plus particulièrement étudié la *méthode du lagangien augmenté*, à laquelle nous avons apporté quelques améliorations. Mais, dans bien des applications en électromagnétisme, la fonction à optimiser a *plusieurs* minima ce qui signifie par exemple qu'il existe pour une électrode plusieurs géométries très différentes avec des valeurs très voisines du champ maximum. Une méthode déterministe est forcément attirée par la bonne solution *la plus proche* de la première solution essayée, mais cette solution-là n'est pas forcément *la meilleure*.

Nous avons donc étudié une seconde classe de méthodes d'optimisation.

Les méthodes *stochastiques* sont l'alternative à la fois pour résoudre ces problèmes à *plusieurs minima* et pour pouvoir se passer des *calculs de sensibilité*. Ils consistent dans leur principe à essayer un certain nombre de solutions, définies par des choix aléatoires des

paramètres, à les évaluer, puis à les faire évoluer en privilégiant des solutions proches des meilleures, sans jamais abandonner complètement des solutions moins satisfaisantes (*ce qui évite de se trouver "bloqué" dans un extremum relatif de la fonction d'évaluation*). Nous avons surtout retenu pour notre étude les algorithmes génétiques (*genetic algorithm*) [34,44,89,90] et de recuit simulé (*simulated annealing*) [2,49,58,77,92]: la facilité de programmation et les bases théoriques passionnantes de ces deux algorithmes nous ont beaucoup motivés. Nous avons aussi étudié de près les algorithmes de stratégie d'évolution [35,56,69] et Tabu [33,46]: les solutions que nous proposons finalement s'inspirent peu ou prou de chacune de ces méthodes.

Mais les outils les plus efficaces (*lorsqu'ils peuvent être mis en oeuvre, c'est-à-dire lorsqu'on dispose du calcul des sensibilités*) se trouvent probablement parmi ceux qui *couplent* des méthodes stochastique et déterministe: il s'agit d'utiliser dans un premier temps une méthode stochastique dans le but de définir un bon *point de départ* pour lancer la méthode déterministe qui converge alors rapidement. La question difficile dans ce couplage est celle du critère de commutation entre algorithmes: quel est *le bon moment* pour passer à la méthode déterministe, puisqu'il faut laisser le temps à l'aléatoire de repérer la région de la meilleure solution, mais que trop attendre est coûteux en temps de calcul. Pour l'instant, il semble malheureusement que la réponse dépend du problème!

Les deux derniers chapitres sont consacrés aux tests des méthodes que nous proposons - *lagrangien augmenté, génétique, recuit simulé modifié et méthodes mixtes* - au chapitre IV à partir de fonctions analytiques difficiles dont il s'agit de trouver le minimum absolu, au chapitre V en association avec notre programme de calcul de champs appliqué à des configurations industrielles. Ces tests sont l'occasion de discuter largement les caractéristiques de ces divers algorithmes dans le cadre particulier de notre application.

I. METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES DE FRONTIERE

INTRODUCTION

L'application des méthodes numériques à la résolution des problèmes en électromagnétisme remonte au début de l'utilisation des ordinateurs (*les années 50*). Parmi les principales méthodes, nous rencontrons la méthode des éléments finis (FEM) [17,19,93], différences finies (FDM) [61], charges équivalentes (CEM) [78] et des équations intégrales de frontière (BEM) [12,51,62]. Toutes ces méthodes présentent des avantages et des inconvénients liés à la méthode elle-même, ou aux caractéristiques nécessaires des pré- et post-processeurs associés: FEM et FDM sont des méthodes applicables aux problèmes linéaires et non-linéaires; par contre, elles sont moins adéquates pour traiter des problèmes ouverts. CEM et BEM sont applicables à la résolution des problèmes linéaires et ouverts, mais ne sont pas appropriées aux problèmes non-linéaires. Ainsi, le choix d'une méthode se fait à notre avis soit parce qu'elle est la meilleure pour résoudre tel problème, soit le plus souvent par simple préférence.

Dans le cadre de l'optimisation de forme, les modifications constantes de la géométrie conduisent à la nécessité de la remailler fréquemment. Si on utilise des méthodes comme FEM ou FDM, le remaillage de tout le domaine est nécessaire. Par contre, la méthode des équations intégrales de frontière, comme son nom le suggère, exige seulement le remaillage de la frontière, ce qui est sans doute un grand avantage. De plus, dans le cas tridimensionnel, les éléments finis sont des éléments de surface et en bidimensionnel, ce sont simplement des éléments linéiques. Nous avons choisi cette méthode numérique pour servir de base à l'optimisation de forme des structures en électrostatique.

Nous commencerons ce chapitre par un rappel de la formulation des phénomènes en électromagnétisme. Puis nous présenterons la formulation de la méthode des équations intégrales de frontière pour la résolution des problèmes d'électrostatique (*ou de magnétostatique*) en 2D, 3D-axisymétrique et vrai 3D. Les problèmes ouverts, les intégrations numériques singulières et quasi-singulières seront aussi étudiés. Une contribution originale sur l'intégration adaptative sera présentée pour le calcul des intégrales quasi-singulières. Nous validerons ensuite toutes les procédures d'intégrations et, finalement, le code de calcul de champ lui même, que nous avons développé sur ces bases. Cette dernière validation est réalisée d'une part en utilisant des problèmes à solution analytique connue, d'autre part en faisant des comparaisons de résultats avec trois codes de calcul de champ (*fondés sur des méthodes d'éléments finis, de charges équivalentes et d'équations intégrales de frontières*) dans la solution d'un problème test.

I.1. FORMULATION DES PHENOMENES PHYSIQUES EN ELECTROMAGNETISME.

I.1.1. Cas général.

Les phénomènes physiques en électromagnétisme, qu'ils soient statiques ou variables dans le temps, sont décrits par un ensemble de quatre équations, connues comme les équations de Maxwell. Cet ensemble d'équations peut être écrit soit sous forme différentielle, soit sous forme intégrale, comme le montrent les équations (1).

EQUATIONS DE MAXWELL

Forme différentielle		Forme Intégrale	
$\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$	(1.a)	$\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$	(1.a')
$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	(1.b)	$\oiint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iiint_v \rho dv$	(1.b')
$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t$	(1.c)	$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_s \vec{D} \cdot d\vec{s}$	(1.c')
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	(1.d)	$\oiint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$	(1.d')

où:

- \vec{E} - champ électrique (V/m);
- \vec{D} - densité de flux électrique (C/m²);
- \vec{H} - intensité du champ magnétique (A/m);
- \vec{B} - densité de flux magnétique (Tesla=Weber/m²);
- \vec{J} - densité du courant (A/m²);
- ρ - densité volumique de charge (C/m³)

A l'ensemble des équations de Maxwell, il faut ajouter les équations constitutives qui relient les champs et les densités de flux. Pour les milieux linéaires et isotropes (*lorsqu'il est isotrope, le milieu a les mêmes caractéristiques physiques selon toutes les directions, le vecteur du champ (\vec{E} et/ou \vec{H}) et la densité de flux correspondante (\vec{D} et/ou \vec{B}) sont parallèles*) ces équations sont écrites comme les montrent les équations (2).

EQUATIONS CONSTITUTIVES

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.a)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.b)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.c)$$

où ϵ - permittivité diélectrique (F/m);
 μ - perméabilité magnétique (H/m);
 σ - conductivité électrique (S/m).

A cet ensemble formé des équations de Maxwell et des équations constitutives, nous pouvons ajouter les relations qui relient les champs et densités de flux aux potentiels scalaires et potentiels vecteurs. Nous appelons cet ensemble les équations auxiliaires.

EQUATIONS AUXILIAIRES

$$\vec{E} = -\nabla V - \partial \vec{A} / \partial t \quad (3.a)$$

$$\vec{H} = -\nabla V_m \quad (\vec{J} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \partial \vec{D} / \partial t = \mathbf{0}) \quad (3.b)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (3.c)$$

où: \vec{A} - potentiel vecteur magnétique (Weber/m);
 V - potentiel scalaire électrique (V=volt);
 V_m - potentiel scalaire magnétique (A);

L'utilisation directe des équations de Maxwell pour la résolution des problèmes en électromagnétisme est parfois déconseillée, puisque nous devrions prendre en compte ces quatre équations différentielles simultanément. Une façon généralement plus aisée consiste à résoudre les problèmes à l'aide d'un potentiel, puis à calculer en fonction de ce potentiel les champs ou densité de flux qui nous intéressent.

La résolution d'un problème en électromagnétisme à l'aide du potentiel scalaire électrique V et du potentiel vecteur magnétique \vec{A} est possible soit sous forme intégrale (par l'intégration directe des sources), soit sous forme différentielle. Pour la résolution sous forme différentielle, nous devons trouver les équations différentielles découplées décrivant les phénomènes physiques en fonction des potentiels V et \vec{A} .

Essayons d'abord de trouver une expression différentielle pour le potentiel vecteur magnétique: les substitutions de l'équation (3.c) dans l'équation (2.b), puis dans (1.c), nous permettent d'écrire:

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \vec{A}}{\mu} \right) = \vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t \quad (4)$$

Pour les milieux uniformes, μ n'est pas fonction des coordonnées, ce qui nous permet d'écrire à l'aide des identités vectorielles usuelles et des équations (2.a) et (3.a):

$$\nabla^2 \vec{A} - \nabla(\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \partial \mathbf{V} / \partial t) - \mu\epsilon \partial^2 \vec{A} / \partial t^2 = -\mu \vec{J} \quad (5)$$

L'analyse vectorielle nous apprend qu'une fonction vectorielle quelconque est complètement définie lorsque sont connues les expressions de son rotationnel et de sa divergence. Par exemple, les équations de Maxwell donnent le rotationnel et la divergence du champ électrique et du champ magnétique. Dans les équations auxiliaires données ci-dessus, nous avons écrit l'expression du rotationnel du potentiel vecteur magnétique \vec{A} sans écrire l'expression de sa divergence. D'autre part, ce vecteur n'a pas de sens physique, il est simplement un artifice mathématique pour simplifier la formulation en électromagnétisme. De ce point de vue, nous sommes donc libres de choisir l'expression de la divergence du potentiel vecteur magnétique. Le choix le plus simple, c'est d'annuler l'expression sous le gradient dans l'équation (5). Cette condition est appelée jauge de Lorentz et elle est donnée par l'équation (6).

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\epsilon \partial \mathbf{V} / \partial t \quad (6)$$

Ainsi, l'équation (5) peut être simplifiée si nous choisissons pour la divergence du potentiel vecteur magnétique l'expression (6), dont la substitution dans l'équation (5) nous permet d'écrire l'équation (7), connue comme l'équation de Helmholtz:

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \partial^2 \vec{A} / \partial t^2 = -\mu \vec{J} \quad (7)$$

Bien sûr, nous pouvons trouver une équation similaire pour le potentiel scalaire. Pour cela, commençons par remplacer le champ électrique donné par (3.a) dans (2.b):

$$\vec{D} = -\epsilon(\nabla \mathbf{V} + \partial \vec{A} / \partial t) \quad (8)$$

En prenant la divergence de l'équation (8) et en utilisant l'identité vectorielle de la divergence appliquée au produit entre un scalaire et un vecteur, nous arrivons à:

$$\nabla \cdot \vec{D} = -(\nabla \epsilon) \cdot (\nabla \mathbf{V} + \partial \vec{A} / \partial t) - \epsilon \left(\nabla^2 \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) \right) \quad (9)$$

En séparant d'un côté le Laplacien du potentiel et en remplaçant la divergence de la densité de flux par l'équation (1.b), nous obtenons:

$$\nabla^2 \mathbf{V} = - \left[(\nabla \epsilon) \cdot (\nabla \mathbf{V} + \partial \vec{A} / \partial t) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) + \rho \right] / \epsilon \quad (10)$$

L'équation (10) est l'équation générale du Laplacien appliqué au potentiel scalaire électrique en électromagnétisme. Dans le cas où le milieu est uniforme (*la permittivité diélectrique ϵ est constante*), le gradient de la permittivité s'annule:

$$\nabla^2 \mathbf{V} = -\rho / \epsilon - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) \quad (11)$$

Finalement, remplaçant la divergence du potentiel vecteur par la condition de Lorentz, nous obtenons:

$$\nabla^2 \mathbf{V} - \mu\epsilon \partial^2 \mathbf{V} / \partial t^2 = -\rho / \epsilon \quad (12)$$

Nous avons réduit les quatre équations de Maxwell aux deux équations (7) et (12) (*la première pour le potentiel vecteur magnétique et la deuxième pour le potentiel scalaire électrique*), lesquelles ont été découplées en utilisant la condition de Lorentz. Ces équations sont en réalité les équations d'onde non homogènes, avec une vitesse de propagation donnée par $\mathbf{c} = \mathbf{1} / \sqrt{\mu\epsilon} = \mathbf{c}_0 / \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$, où \mathbf{c}_0 est la vitesse de propagation dans le vide (*vitesse de la lumière*). La résolution d'un problème peut donc être simplifié en utilisant ces équations par rapport à la solution directe utilisant les équations de Maxwell. Pour cela, on peut utiliser l'équation (7) pour trouver le potentiel vecteur, puis on peut déterminer le potentiel scalaire par la condition de Lorentz et finalement on peut calculer $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ en employant les équations (3.a) et (3.c).

I.1.2. Problèmes statiques.

Pour les problèmes invariables dans le temps, les termes en $\partial/\partial t$ sont nuls et les champs électriques et magnétiques ne sont plus reliés. Dans ce cas, il faut deux équations de Maxwell pour décrire chaque type de champ. Ces équations, sous leur forme différentielle, sont données ci-dessous avec les équations auxiliaires, pour les phénomènes en électrostatique et magnétostatique:

Electrostatique		Magnétostatique	
$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$	(13.a)	$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}}$	(13.a')
$\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho$	(13.b)	$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$	(13.b')
Equations Auxiliaires		Equations Auxiliaires	
$\vec{\mathbf{E}} = -\nabla V$	(13.c)	$\vec{\mathbf{H}} = -\nabla V_m \quad (\vec{\mathbf{J}} = \mathbf{0})$	(13.c')
		$\vec{\mathbf{B}} = \nabla \times \vec{\mathbf{A}}$	(13.d')

Les équations (7) et (12) se résument respectivement aux équations (14) pour la magnétostatique et (15) pour l'électrostatique, lesquelles sont valables pour des milieux linéaires, isotropes et uniformes. L'équation (15) est connue comme l'équation de Poisson pour l'électrostatique; chaque composante du potentiel vecteur magnétique doit aussi la satisfaire comme le montre l'équation (14).

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} = -\mu \vec{\mathbf{J}} \quad (14)$$

$$\nabla^2 \mathbf{V} = -\rho/\epsilon \quad (15)$$

Dans le cas où il n'existe ni densité volumique de charge, ni densité de courant, les équations (14) et (15) se résument aux équations (16) et (17). L'équation (17) est appelée équation de Laplace.

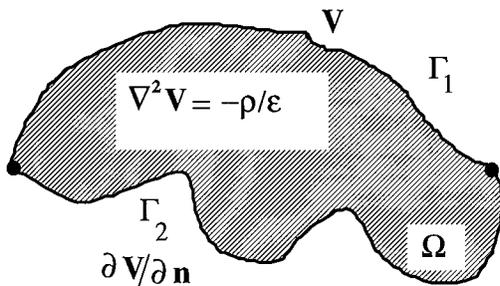
$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{0}} \quad (16)$$

$$\nabla^2 \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (17)$$

Dans l'équation (16), le Laplacien est appliqué à chaque composante du potentiel vecteur $\vec{\mathbf{A}}$. Cependant, pour les problèmes en magnétostatique sans courant, une équation plus simple peut être obtenue en utilisant le potentiel scalaire magnétique \mathbf{V}_m . Pour l'obtenir, faisons d'abord la substitution dans l'équation (13.b') de la densité de flux $\vec{\mathbf{B}}$, donnée par (2.b) et remplaçons l'intensité du champ magnétique $\vec{\mathbf{H}}$ par l'équation (13.c'). Nous obtenons alors l'équation (18), qui est l'équation de Laplace pour le potentiel scalaire magnétique, valable pour les milieux linéaires, isotrope et uniforme. Bien sûr, l'équation (18) peut être plus aisément résolue que l'équation (16).

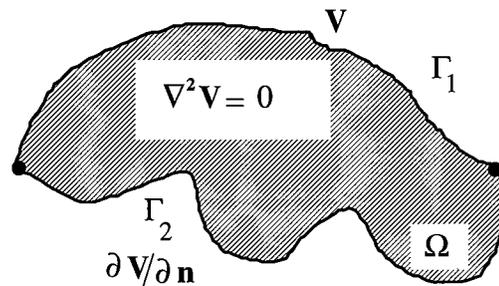
$$\nabla^2 \mathbf{V}_m = \mathbf{0} \quad (18)$$

Pour être unique, la solution d'un problème d'électrostatique doit obéir à l'équation de Poisson ou à celle de Laplace (*suivant que l'on a, ou pas, de distribution de charge ρ dans le volume étudié*) et le potentiel doit en plus satisfaire certaines conditions aux limites. Ces conditions peuvent être du type Dirichlet (potentiel connu sur toute la frontière Γ du problème), Neumann (*dérivée normale du potentiel connue sur toute la frontière Γ du problème*) ou mixtes (*potentiel connu sur une partie de la frontière Γ_1 , et sa dérivée normale sur l'autre partie Γ_2*), comme le montrent la Fig. 1 dans le cas du problème de type Poisson, et la Fig. 2 pour celui de type Laplacien.



$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

Fig. 1: Problème de type Poisson
(Γ : contour de la région Ω).



$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

Fig. 2: Problème de type Laplacien
(Γ : contour de la région Ω).

Le potentiel scalaire, pour qu'il puisse être la solution d'un problème quelconque, doit satisfaire l'équation qui décrit le problème et toutes les conditions aux limites.

I.1.3. Conditions de passage entre des milieux différents.

Lorsqu'on a des milieux différents, on doit imposer certaines conditions de continuité aux champs électrique et magnétique. Ces conditions sont bien connues: à l'interface de deux milieux (respectivement caractérisés par $\mu_1, \epsilon_1, \sigma_1$ et $\mu_2, \epsilon_2, \sigma_2$), où la normale à l'intérieur du milieu 1 est \vec{n}_1 et celle du milieu 2 est $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$ (Fig. 3), les relations suivantes sont vérifiées:

Electrostatique		Magnétostatique	
$\vec{n}_1 \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$	(19.a)	$\vec{n}_1 \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$	(19.a')
$\vec{n}_1 \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$	(19.b)	$\vec{n}_1 \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$	(19.b')

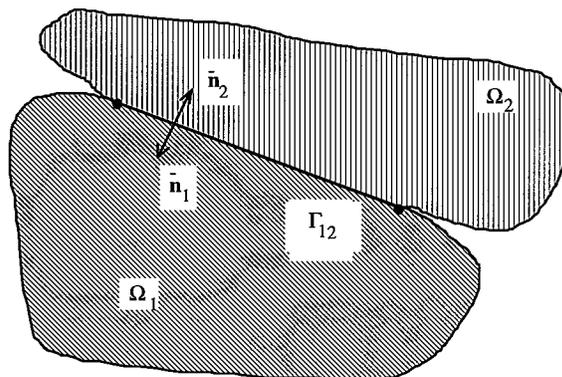


Fig. 3: Interface entre régions 1 et 2.

Dans l'équation (18), ρ_s et \vec{J}_s sont les densités surfaciques de charge et courant sur l'interface Γ_{12} .

I.2. FORMULATION DE LA METHODE D'ELEMENT DE FRONTIERE.

I.2.1. Généralités.

Nous allons développer dans la suite la formulation de la méthode d'élément de frontière (BEM) appliquée à la solution de l'équation type Poisson. Pour cela, nous rappelons d'abord quelques notions fondamentales, comme la seconde identité de Green et les fonctions du même nom.

En appliquant le théorème de la divergence (aussi appelé théorème d'Ostrogradsky):

$$\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{K}) d\Omega' = \iint_{\Gamma} \vec{K} \cdot d\vec{r}' \quad (20)$$

au vecteur \vec{K} défini par $\vec{K} = \Phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \Phi$ et en utilisant l'identité vectorielle de la divergence appliquée au produit d'un scalaire par un vecteur, nous obtenons la seconde identité de Green:

$$\iiint_{\Omega} (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) d\Omega' = \iint_{\Gamma} (\Phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \Phi) \cdot d\vec{r}' \quad (21)$$

Une fonction G , telle que:

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (22)$$

où δ est la distribution de Dirac, est appelée fonction de Green. Elle est définie en fonction de deux points: le premier est le point d'observation \vec{r} et le deuxième est le point d'intégration \vec{r}' , où sont localisées les sources du champ (Fig. 4).

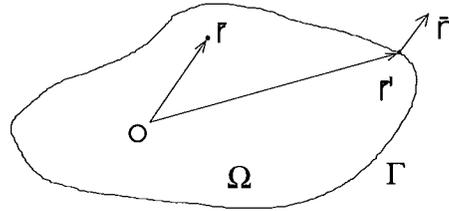


Fig. 4 Définition des points d'observation et d'intégration.

En faisant:

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}') &= V(\vec{r}') \\ \Phi(\vec{r}, \vec{r}') &= G(\vec{r}, \vec{r}') \end{aligned} \quad (23)$$

et en remplaçant (23) dans (20), nous avons:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \left(G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla'^2 V(\vec{r}') - V(\vec{r}') \nabla'^2 G(\vec{r}, \vec{r}') \right) d\Omega' = \\ \iint_{\Gamma} \left(G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla' V(\vec{r}') - V(\vec{r}') \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') \right) \cdot d\vec{r}' \end{aligned} \quad (24)$$

En ne laissant du coté gauche que le terme potentiel scalaire multiplié par le Laplacien de la fonction de Green, et en faisant le produit scalaire du gradient par le vecteur unitaire normal à la surface du domaine d'intérêt, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} V(\vec{r}') \nabla'^2 G(\vec{r}, \vec{r}') d\Omega' = \iiint_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla'^2 V(\vec{r}') d\Omega' \\ + \iint_{\Gamma} \left(\partial G(\vec{r}, \vec{r}') / \partial \mathbf{n} \cdot V(\vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \partial V(\vec{r}') / \partial \mathbf{n} \right) d\vec{r}' \end{aligned} \quad (25)$$

Avant de continuer pour obtenir une équation générale pour les problèmes de type Poisson, nous avons besoin de rappeler quelques caractéristiques de la distribution de Dirac. Elle est définie de telle sorte que:

$$\iiint_{\Omega} \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\Omega' = \begin{cases} 0 & (\vec{r} \notin \Omega) \\ 1 & (\vec{r} \in \Omega) \end{cases} \quad (26)$$

Les propriétés de cette distribution qui nous intéressent sont données par les équations (27). Cette distribution est symétrique par rapport à son point singulier (27.a) et son produit par une fonction finie sera toujours égal à zéro, sauf pour le point singulier, ce que montre l'équation (27.b).

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(\vec{r}' - \vec{r}) \quad (27.a)$$

$$f(\vec{r}')\delta(\vec{r} - \vec{r}') = f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (27.b)$$

Reprenant l'intégrale du coté gauche dans l'équation (25) et en utilisant les équations (22) et (27.b), nous déduisons:

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{V}(\vec{r}') \nabla'^2 \mathbf{G}(\vec{r}, \vec{r}') d\Omega' = \mathbf{V}(\vec{r}) \iiint_{\Omega} \nabla'^2 \mathbf{G}(\vec{r}, \vec{r}') d\Omega' \quad (28)$$

En remplaçant dans l'équation (28), coté droit, le Laplacien par la divergence appliquée au gradient et utilisant le théorème d'Ostrogradsky, nous obtenons l'équation (29), laquelle fait la liaison entre l'intégrale volumique à celle surfacique, où Γ' est la surface que borde le volume Ω .

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \mathbf{V}(\vec{r}') \nabla'^2 \mathbf{G}(\vec{r}, \vec{r}') d\Omega' &= \mathbf{V}(\vec{r}) \oint_{\Gamma'} \nabla' \mathbf{G}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot d\vec{r}' \\ &= \mathbf{V}(\vec{r}) \oint_{\Gamma'} \partial \mathbf{G}(\vec{r}, \vec{r}') / \partial \mathbf{n} d\Gamma' \end{aligned} \quad (29)$$

Le terme $\oint_{\Gamma'} \partial \mathbf{G}(\vec{r}, \vec{r}') / \partial \mathbf{n} d\Gamma'$ représente l'angle solide d'où le point d'observation \vec{r} voit la région Ω .

Ainsi, l'équation (25) s'écrit:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\vec{r}) \oint_{\Gamma'} \partial \mathbf{G}(\vec{r}, \vec{r}') / \partial \mathbf{n} d\Gamma' &= \iiint_{\Omega} \mathbf{G}(\vec{r}, \vec{r}') \nabla'^2 \mathbf{V}(\vec{r}') d\Omega' \\ &+ \oint_{\Gamma'} (\partial \mathbf{G}(\vec{r}, \vec{r}') / \partial \mathbf{n} \mathbf{V}(\vec{r}') - \mathbf{G}(\vec{r}, \vec{r}') \partial \mathbf{V}(\vec{r}') / \partial \mathbf{n}) d\Gamma' \end{aligned} \quad (30)$$

Ce résultat est général; le point d'observation peut être à l'intérieur ou sur la frontière du domaine étudié. Bien sûr, il n'est applicable qu'à la solution de problèmes en électrostatique et en magnétostatique pour lesquels le milieu est linéaire, isotrope et uniforme. Pour les problèmes en magnétostatique, l'équation (30) doit être écrite pour chaque composante du potentiel vecteur magnétique, le Laplacien du potentiel scalaire étant remplacé par le produit de la composante correspondante de la densité de courant par la perméabilité magnétique du milieu, changé de signe.

I.2.2. Formulation intégrale de l'équation de Poisson et de Laplace.

L'avantage de la méthode des équations intégrales de frontière est en principe de ne pas conduire à des calculs d'intégrales de volume. On en voit pourtant une dans le membre de droite de l'équation (30), que nous allons essayer d'éliminer. Cette intégrale volumique représente en fait, d'après l'équation (15), le potentiel électrique d'une densité de charge présente dans ce volume. Il y a trois cas à étudier selon que cette densité est: (a) *une fonction quelconque des coordonnées*, (b) *une fonction harmonique des coordonnées* ou (c) *une constante*. Nous traitons en détail ces trois cas en Annexe I.

Finalement, pour les problèmes de type "Laplace", la densité de charge est nulle et l'équation (30) se résume à:

$$V(\bar{r}) \oint_{\Gamma} \partial G(\bar{r}, \bar{r}') / \partial n d\Gamma' = \oint_{\Gamma} (\partial G(\bar{r}, \bar{r}') / \partial n V(\bar{r}') - G(\bar{r}, \bar{r}') \partial V(\bar{r}') / \partial n) d\Gamma' \quad (31)$$

Pour les problèmes de magnétostatique, il faut simplement remplacer le potentiel scalaire électrique V par le potentiel magnétique V_m .

I.2.3. Fonctions de Green.

La fonction de Green (32) pour les problèmes tridimensionnels, solution de l'équation (22), est bien connue:

$$G(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{4\pi|\bar{r} - \bar{r}'|} \quad (32)$$

Nous allons ci-dessous essayer de trouver les expressions correspondantes pour les problèmes bidimensionnel d'une part, tridimensionnel avec symétrie axiale (axisymétrique) d'autre part. Pour ces problèmes, l'équation (30) sera bien simplifiée, les intégrales volumiques pouvant être remplacées par des intégrales surfaciques, les intégrales surfaciques par des intégrales linéiques. L'intégration par rapport à la variable de symétrie peut en effet être réalisée analytiquement.

I.2.4. Cas des problèmes bidimensionnels.

Dans ce cas, les quantités physiques (*le potentiel et sa dérivée normale*) sont invariables par rapport à la variable de symétrie du problème z' . Reprenant l'équation (30) nous pouvons écrire:

$$V(\bar{r}) \oint_{\Gamma} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \partial G(\bar{r}, \bar{r}') / \partial n dz' \right] d\Gamma' = \iint_{\Omega} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(\bar{r}, \bar{r}') dz' \right] \nabla'^2 V(\bar{r}') d\Omega' \quad (33)$$

$$\oint_{\Gamma} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} \partial G(\bar{r}, \bar{r}') / \partial n dz' \right] V(\bar{r}') - \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(\bar{r}, \bar{r}') dz' \right] \partial V(\bar{r}') / \partial n \right\} d\Gamma'$$

où Ω et Γ (*contour fermé qui borde la surface ouverte Ω*) définissent le domaine et son contour. Evidemment, les intégrales sur Ω sont maintenant surfaciques, et celles sur Γ linéiques.

Les expressions entre crochets dans (34) peuvent être intégrées analytiquement. Notons ces expression $\mathbf{G}_{2d}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')$ et $\partial\mathbf{G}_{2d}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')/\partial\mathbf{n}$ respectivement. Pour simplifier les calculs, et sans perte de généralité, choisissons le point d'observation sur l'origine du système de référence. Ainsi, nous pouvons écrire en coordonnées cylindriques, pour la première expression:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{2d}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') dz' = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|} dz' \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{z_{\infty} \rightarrow \infty} \int_0^{z_{\infty}} \frac{1}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|} dz' = \frac{1}{2\pi} \lim_{z_{\infty} \rightarrow \infty} \int_0^{z_{\infty}} \frac{1}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}} dz' \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{z_{\infty} \rightarrow \infty} \int_0^{z_{\infty}} \frac{1}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}} dz' = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{2z_{\infty}}{\rho'}\right) \end{aligned} \quad (35)$$

En faisant $2z_{\infty}$ égal à \mathbf{r}_{∞} , et reprenant le cas général nous obtenons:

$$\mathbf{G}_{2d}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{\mathbf{r}_{\infty}}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|}\right) \quad (35)$$

L'équation (35) est la fonction de Green pour les problèmes bidimensionnels. La deuxième expression $\partial\mathbf{G}_{2d}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')/\partial\mathbf{n}$ peut être intégrée d'une façon semblable à celle-ci. Ainsi, l'équation intégrale (30) devient (36), où les intégrales volumique et surfacique ont été respectivement remplacées par des intégrales surfacique et linéique.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}) \oint_{\Gamma} \partial\mathbf{G}_{2d}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')/\partial\mathbf{n} d\Gamma' &= \iint_{\Omega} \mathbf{G}_{2d}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \nabla'^2 \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') d\Omega' \\ \oint_{\Gamma} \{ \partial\mathbf{G}_{2d}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')/\partial\mathbf{n} \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') - \mathbf{G}_{2d}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \partial\mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}')/\partial\mathbf{n} \} d\Gamma' & \end{aligned} \quad (36)$$

Dans la solution d'un problème fermé, l'équation (35) peut être simplifiée en faisant \mathbf{r}_{∞} égal à l'unité, le potentiel donné par cette équation étant simplement le potentiel relatif par rapport à une référence en \mathbf{r}_{∞} . Dans le cas d'un problème ouvert, il y a deux solutions possibles: a) Faire \mathbf{r}_{∞} beaucoup plus grand que la plus grande dimension du problème, ce qui garantit que le système obtenu sera non singulier [51];

b) Laisser \mathbf{r}_{∞} inconnu et ajouter une équation forçant la charge totale à zéro [12].

I.2.5. Cas des problème axisymétriques.

D'une façon tout à fait analogue au cas précédent, les quantités physiques (*potentiel et dérivée normale*) sont invariables par rapport à la variable de symétrie du problème ϕ' . En utilisant les coordonnées cylindriques, l'équation (30) devient:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}) \oint_{\Gamma} \left[\int_0^{2\pi} \partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n} \rho' d\phi' \right] d\Gamma' = \iint_{\Omega} \left[\int_0^{2\pi} \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \rho' d\phi' \right] \nabla^2 \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') d\Omega' \\ \oint_{\Gamma} \left\{ \left[\int_0^{2\pi} \partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n} \rho' d\phi' \right] \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') - \left[\int_0^{2\pi} \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \rho' d\phi' \right] \partial \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n} \right\} d\Gamma' \end{aligned} \quad (37)$$

où les intégrales sur Ω sont maintenant surfaciques, et celles sur Γ linéiques.

En appelant les expressions entre crochets $\mathbf{G}_{ax}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')$ (*l'intégrale en ϕ' dont le noyau est la fonction de Green*) et $\mathbf{G}'_{ax}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')$ (*l'intégrale en ϕ' dont le noyau est la dérivée normale de la fonction de Green*) d'une façon similaire au cas précédent et en considérant (*sans perte de généralité*) le point d'observation situé sur le plan défini par $\Phi=0$ nous obtenons pour la première expression:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{ax}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') = \int_0^{2\pi} \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \rho' d\phi' = \frac{\rho'}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|} \\ = \frac{\rho'}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi') + \rho'^2 + (\mathbf{z} - \mathbf{z}')^2}} \end{aligned} \quad (38)$$

En faisant la transformation de variables $\phi' = 2\theta + \pi$ et en observant que le noyau est une fonction paire dans l'intervalle $\{-\pi/2, \pi/2\}$, nous avons:

$$\mathbf{G}_{ax}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') = \frac{\rho'}{\pi \sqrt{(\rho + \rho')^2 + (\mathbf{z} - \mathbf{z}')^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta')}} \quad \text{où:} \quad (39)$$

$$k^2 = \frac{4\rho\rho'}{(\rho + \rho')^2 + (\mathbf{z} - \mathbf{z}')^2} \quad (40)$$

Finalement, observant que l'intégrale du membre de droite est l'intégrale elliptique complète de première espèce, l'équation (39) devient [3]:

$$\mathbf{G}_{ax}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') = \frac{\rho'}{\pi \sqrt{(\rho + \rho')^2 + (\mathbf{z} - \mathbf{z}')^2}} \mathbf{K}(k^2) \quad (41)$$

L'équation (41) est la "*fonction de Green*" pour les problèmes tridimensionnels avec symétrie axiale. Ainsi, l'équation intégrale (30), après intégration du terme $\mathbf{G}'_{ax}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')$ correspondant à la dérivée normale de la fonction de Green en 3D, devient:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}) \oint_{\Gamma} \mathbf{G}'_{ax}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') d\Gamma' = \iint_{\Omega} \mathbf{G}_{ax}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \nabla^2 \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') d\Omega' + \\ \oint_{\Gamma} \left\{ \mathbf{G}'_{ax}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') - \mathbf{G}_{ax}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \partial \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n} \right\} d\Gamma' \end{aligned} \quad (42)$$

I.2.6. Résumé.

Les fonctions de Green que nous venons de trouver sont résumées ci-dessous. Les fonctions de Green pour d'autres types de problèmes et les équations intégrales correspondantes peuvent être trouvées dans la littérature spécialisée, comme par exemple [12].

⇒ *Problèmes Bidimensionnels:*

$$\mathbf{G}_{2d}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') = \frac{1}{2\pi} \ln(r_\infty / |\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|) \quad (43)$$

⇒ *Problèmes Axisymétriques (tridimensionnels avec symétrie axiale):*

$$\mathbf{G}_{ax}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') = \frac{\rho'}{\pi [(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \mathbf{K}(k^2) \quad \text{où:} \quad (44)$$

$$k^2 = \frac{4\rho\rho'}{(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2} \quad (45)$$

⇒ *Problèmes Tridimensionnels:*

$$\mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') = \frac{1}{4\pi |\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|} \quad (46)$$

Les expressions des dérivées normales de ces fonctions (*en 2D et 3D, et $\mathbf{G}'_{ax}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')$ pour le cas axisymétrique*) sont résumées ci-dessous:

⇒ *Problèmes Bidimensionnels:*

$$\partial \mathbf{G}_{2d}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n} = \frac{(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}') \cdot \bar{\mathbf{n}}}{2\pi |\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|^2} \quad (47)$$

⇒ *Problèmes Axisymétriques (tridimensionnels avec symétrie axiale):*

$$\mathbf{G}'_{ax}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') = - \frac{\mathbf{n}_{\rho'}}{2\pi [(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \mathbf{K}(k^2) + \frac{\mathbf{n}_\rho [\rho^2 - \rho'^2 + (z - z')^2] + 2\mathbf{n}_z \rho' (z - z')}{2\pi [(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2]^{1/2} [(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2]} \mathbf{E}(k^2) \quad (48)$$

où $\mathbf{E}(k^2)$ est l'intégrale elliptique complète de seconde espèce [3].

⇒ *Problèmes Tridimensionnels:*

$$\partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n} = \frac{(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}') \cdot \bar{\mathbf{n}}}{4\pi |\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|^3} \quad (49)$$

I.2.7. Problèmes ouverts.

Nous allons montrer ci-dessous que la méthode des équations intégrales de frontière est bien adaptée pour résoudre les problèmes dit ouverts. Pour cela, considérons tout d'abord la Fig. 5, où la région Ω est bordée par deux surfaces Γ_{int} et Γ_{ext} .

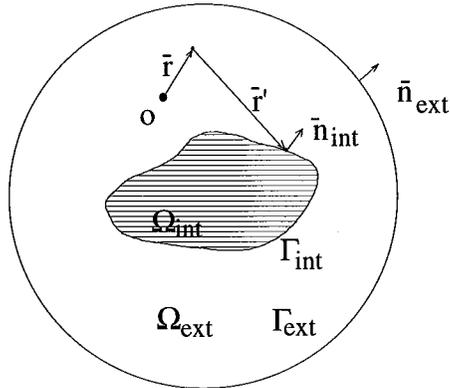


Fig. 5 Région Extérieure

Reprenant l'équation (30) et considérant la surface $\Gamma = \Gamma_{\text{int}} + \Gamma_{\text{ext}}$, nous pouvons écrire l'équation (50):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}) \left[\iint_{\Gamma_{\text{ext}}} \frac{\partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')}{\partial \mathbf{n}_{\text{ext}}} d\Gamma' - \iint_{\Gamma_{\text{int}}} \frac{\partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')}{\partial \mathbf{n}_{\text{int}}} d\Gamma' \right] = \\ \iiint_{\Omega_{\text{ext}}} \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \nabla'^2 \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') d\Omega' \\ + \iint_{\Gamma_{\text{ext}}} \left(\frac{\partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')}{\partial \mathbf{n}_{\text{ext}}} \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') - \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \frac{\partial \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}')}{\partial \mathbf{n}_{\text{ext}}} \right) d\Gamma' \\ - \iint_{\Gamma_{\text{int}}} \left(\frac{\partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')}{\partial \mathbf{n}_{\text{int}}} \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') - \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \frac{\partial \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}')}{\partial \mathbf{n}_{\text{int}}} \right) d\Gamma' \end{aligned} \quad (50)$$

Analysons maintenant ce qui arrive lorsque le rayon de la surface Γ_{ext} tend vers l'infini. Considérons d'abord l'intégrale surfacique, coté droit: l'aire de la surface extérieure variera proportionnellement à \mathbf{r}^2 ; dans le même temps, les termes $\frac{\partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')}{\partial \mathbf{n}_{\text{ext}}} \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}')$ et $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \frac{\partial \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}')}{\partial \mathbf{n}_{\text{ext}}}$ varieront proportionnellement à \mathbf{r}^{-3} . En faisant donc les produits pertinents, nous aurons globalement une variation proportionnelle à \mathbf{r}^{-1} , ce qui donne une valeur nulle pour la limite lorsque $\bar{\mathbf{r}}$ tend vers l'infini.

Dans l'intégrale surfacique extérieure restante, le produit $\frac{\partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')}{\partial \mathbf{n}_{\text{ext}}} d\Gamma'$ restera invariable, car le terme $\frac{\partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')}{\partial \mathbf{n}_{\text{ext}}}$ variera avec \mathbf{r}^{-2} et $d\Gamma'$ en proportion inverse. En considérant les problèmes tridimensionnels, avec le point d'observation $\bar{\mathbf{r}}$ placé à l'origine du système de coordonnées, cette intégrale peut être aisément calculée:

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma_{\text{ext}}} \partial G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n}_{\text{ext}} \, d\Gamma' &= \iint_{\Gamma_{\text{ext}}} \left(\frac{-\bar{\mathbf{r}}' \cdot \bar{\mathbf{n}}_{\text{ext}}}{4\pi r'^3} \right) r'^2 \sin(\theta') \, d\theta' \, d\phi' \\ &= \int_{\phi'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \left(\frac{-r'}{4\pi r'^3} \right) r'^2 \sin(\theta') \, d\theta' \, d\phi' = -1 \end{aligned} \quad (51)$$

Ainsi, l'équation (50) devient:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}) \left[1 + \iint_{\Gamma_{\text{int}}} \partial G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n}_{\text{int}} \, d\Gamma' \right] &= - \iiint_{\Omega_{\text{ext}}} G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \nabla'^2 \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') \, d\Omega' \\ &+ \iint_{\Gamma_{\text{int}}} (\partial G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n}_{\text{int}} \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') - G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \partial \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n}_{\text{int}}) \, d\Gamma' \end{aligned} \quad (52)$$

En comparant les équations (30) et (52) on peut tirer la conclusion suivante: pour la résolution d'un problème ouvert, on peut toujours utiliser l'équation (30), modifiée en changeant le signe de l'intégrale volumique et en ajoutant **1** au coefficient du potentiel (*angle solide*). Bien entendu, le sens de parcours de la surface Γ_{int} (Fig. 5) est déterminé par la normale $\bar{\mathbf{n}}_{\text{int}}$. Il est clair que tout cela est aussi valable pour les problèmes en magnétostatique.

1.3. DISCRETISATION DE LA FRONTIERE.

La résolution numérique de l'équation intégrale donnée par l'équation (31) est possible après la division de la surface Γ en éléments de frontière $\Gamma_{\mathbf{k}}$. Les fonctions physiques et géométriques sont approchées sur ces éléments par des fonctions d'interpolation, nommées fonctions de forme, ayant comme paramètres leurs valeurs nodales. Ainsi, les fonctions physiques $\mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}')$ et $\partial \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n}$ sont directement approchées, cependant pour l'approximation géométrique, il est d'abord nécessaire de faire l'approximation des coordonnées du point d'intégration (x', y', z') .

Pour les problèmes bidimensionnel et axisymétrique, l'intégration de l'équation intégrale est faite sur le contour fermé Γ qui borde la surface ouverte Ω . Ainsi, nous pouvons approcher les coordonnées (x', y', z') et les fonctions physiques comme le montrent les expressions suivantes:

$$\mathbf{x}' = \sum_{j=1}^n N_j(\mu) \mathbf{x}'_j \quad \mathbf{y}' = \sum_{j=1}^n N_j(\mu) \mathbf{y}'_j \quad (53.a)$$

$$\mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') = \sum_{j=1}^n N_j(\mu) \mathbf{V}_j \quad \partial \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n} = \sum_{j=1}^n N_j(\mu) \partial \mathbf{V} / \partial \mathbf{n}_j \quad (53.b)$$

où $N_j(\mu)$ est la $j^{\text{ème}}$ fonction de forme, μ est la coordonnée curviligne locale et \mathbf{V}_j , $\partial \mathbf{V} / \partial \mathbf{n}_j$, \mathbf{x}'_j , \mathbf{y}'_j et \mathbf{z}'_j sont respectivement les valeurs du potentiel, de sa dérivée normale et des coordonnées du point d'intégration sur le noeud \mathbf{j} .

Les fonctions de forme $N_j(\mu)$, pour un élément de deuxième ordre, sont:

$$N_1(\mu) = .5\mu(\mu - 1) \quad N_2(\mu) = 1 - \mu^2 \quad N_3(\mu) = .5\mu(\mu + 1) \quad (54)$$

où: $-1 \leq \mu \leq 1$.

L'équation intégrale (31), après division de la frontière Γ en éléments du deuxième ordre Γ_k et transformation des variables globales en variables locales, et en discrétisant les fonctions physiques et géométriques suivant les expressions (53) et (54), peut être réécrite comme:

$$\mathbf{0} = \sum_{k=1}^{n_{el}} \sum_{j=1}^n \int_{-1}^1 N_j(\partial G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n} (\mathbf{V}_j - \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}})) - G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \partial V / \partial \mathbf{n}_j) \mathbf{J}_k(\mu) d\mu \quad (55)$$

où $\mathbf{J}_k(\mu)$ est le Jacobien de transformation des coordonnées globales en coordonnées locales pour le $k^{\text{ème}}$ élément et pour la valeur μ de la coordonnée curviligne.

Les valeurs nodales \mathbf{V}_j et $\partial V / \partial \mathbf{n}_j$ ne dépendent pas de la variable d'intégration μ et les fonctions $G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')$ et $\partial G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n}$ sont des fonctions uniquement géométriques. Toutes les fonctions apparaissant sous le signe intégral peuvent ainsi être évaluées.

L'expression discrétisée de l'équation (55) pour le noeud i est donnée ci-dessous:

$$\sum_{k=1}^{n_{el}} \sum_{j=1}^n \left[\begin{array}{c} (\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i) \int_{-1}^1 N_j(\partial G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n}) \mathbf{J}_k(\mu) d\mu \\ - \partial V / \partial \mathbf{n}_j \int_{-1}^1 N_j G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \mathbf{J}_k(\mu) d\mu \end{array} \right] = \mathbf{0} \quad (56)$$

Dans l'évaluation de (56) interviennent le point i d'une part, l'élément d'intégration d'autre part; quand le point i est sur cet élément lui-même, les intégrands peuvent devenir singuliers: l'estimation correcte de l'intégrale exige alors des techniques d'intégrations spécifiques. La discussion détaillée de cette question sera présentée plus loin, dans la section consacrée à l'intégration numérique.

L'équation (56) est appliquée à tous les noeuds de la frontière Γ , ce qui conduit à un système d'équations linéaires, dans lequel on introduit les valeurs connues de \mathbf{V} ou de $\partial V / \partial \mathbf{n}$ qui nous sont données par les conditions aux limites. La résolution de ce système fournira les valeurs inconnues du potentiel et du champ électrique normal sur toute la frontière Γ du domaine étudié.

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{b}\} \quad (57)$$

I.4. CALCUL DU POTENTIEL ET DU CHAMP A L'INTERIEUR DU DOMAINE Ω .

Une fois résolu ce système d'équations, nous connaissons les valeurs du potentiel et du champ normal sur toute la frontière Γ du domaine étudié. En utilisant ces valeurs, le potentiel et le champ électrique peuvent donc être calculés en n'importe quel point à l'intérieur du domaine Ω . Pour le calcul du potentiel, l'équation (56) réécrite en explicitant le potentiel sur le point \mathbf{i} , donne:

$$\mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}_i) = \frac{1}{C_i} \sum_{k=1}^{n_{el}} \sum_{j=1}^n \left[\begin{array}{l} \mathbf{V}_j \int_{-1}^1 \mathbf{N}_j (\partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}_i, \bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n}) \mathbf{J}_k(\mu) d\mu \\ - \partial \mathbf{V} / \partial \mathbf{n}_j \int_{-1}^1 \mathbf{N}_j \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}_i, \bar{\mathbf{r}}') \mathbf{J}_k(\mu) d\mu \end{array} \right] \quad (58)$$

où C_i est l'angle solide sous lequel le point \mathbf{i} voit la région Ω .

$$C_i = \sum_{k=1}^{n_{el}} \sum_{j=1}^n \left[\int_{-1}^1 (\partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}_i, \bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n}) \mathbf{J}_k(\mu) d\mu \right] \quad (59)$$

L'évaluation par la même méthode du champ électrique est possible en prenant le gradient de l'expression (58), changé de signe. La composante du champ dans la direction \mathbf{x} est déduite en prenant le produit scalaire du gradient du potentiel par le vecteur unitaire $\bar{\mathbf{a}}_x$:

$$\mathbf{E}_x(\bar{\mathbf{r}}) = -\nabla \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}) \cdot \bar{\mathbf{a}}_x \quad (60)$$

Pour le point \mathbf{i} , à l'intérieur de la région Ω , la substitution de l'équation (58) dans l'équation (60) donne comme résultat l'expression pour le calcul de la composante \mathbf{x} du champ électrique, conforme l'équation (61).

$$\mathbf{E}_x(\bar{\mathbf{r}}_i) = \frac{-1}{C_i} \sum_{k=1}^{n_{el}} \sum_{j=1}^n \left[\begin{array}{l} (\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i) \int_{-1}^1 \mathbf{N}_j (\partial^2 \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}_i, \bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{x} \partial \mathbf{n}) \mathbf{J}_k(\mu) d\mu \\ - \partial \mathbf{V} / \partial \mathbf{n}_j \int_{-1}^1 \mathbf{N}_j (\partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}_i, \bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{x}) \mathbf{J}_k(\mu) d\mu \end{array} \right] \quad (61)$$

Soulignons que l'équation (61) a été obtenue en appliquant le gradient aussi au terme C_i (équation (59)), ce qui limite les conséquences des erreurs d'ordre numérique. La composante du champ dans la direction \mathbf{y} est calculée de façon tout à fait analogue.

Dans l'évaluation des expressions (58), (59) et (61), les positions du point \mathbf{i} les plus proches des éléments de frontière peuvent conduire à des difficultés d'intégration. Si la distance entre le point \mathbf{i} est trop petite par rapport à la longueur de l'élément de frontière le plus proche, les intégrands deviennent en effet presque singuliers. Une solution pour résoudre ce type de problème consiste à employer une technique d'intégration adaptative [87].

I.5. INTEGRATION NUMERIQUE.

I.5.1 Intégration classique et problèmes de singularité.

Les intégrales qui doivent être calculées, d'après l'équation (56), sont:

$$\mathbf{I}_1 = \int_{-1}^1 \mathbf{N}_j (\partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}_i, \bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n}) \mathbf{J}_k(\mu) d\mu \quad (62)$$

$$\mathbf{I}_2 = \int_{-1}^1 \mathbf{N}_j \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}_i, \bar{\mathbf{r}}') \mathbf{J}_k(\mu) d\mu$$

Les intégrales \mathbf{I}_1 et \mathbf{I}_2 représentent respectivement les coefficients du potentiel et de sa dérivée normale. Pour les éléments du deuxième ordre, elles peuvent être calculées par intégration numérique en utilisant n'importe quel type de quadrature, par exemple la quadrature de Gauss [3]:

$$\int_{-1}^1 \mathbf{h}(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i \mathbf{h}(\tau_i) \quad (63)$$

On rencontrera le problème d'intégration singulière lorsque le point d'intégration sera sur le point d'observation. Dans ce cas, l'emploi tel quel des formules de quadrature de Gauss conduirait le plus souvent à des résultats imprécis, surtout quand un faible nombre de points d'intégration est utilisé. La solution la plus efficace consiste à calculer l'intégrale en faisant d'abord l'extraction de la singularité de l'intégrant [21,51,86].

Pour les problèmes bidimensionnels, on vérifie facilement que la singularité de $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')$, lorsque $\bar{\mathbf{r}}'$ tend vers $\bar{\mathbf{r}}$, est logarithmique (équation (43)). L'expression correspondant à $\partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') / \partial \mathbf{n}$ présente quant à elle une indétermination apparente du type zéro divisé par zéro (0/0) (équation (47)) mais dont la limite lorsque $\bar{\mathbf{r}}'$ tend vers $\bar{\mathbf{r}}$ est bien entendu régulière [21].

Pour les problèmes axisymétriques, une singularité de l'intégrale elliptique de première espèce $\mathbf{K}(\mathbf{k}^2)$ se présente lorsque \mathbf{k}^2 tend vers 1 dans (44) et (48). Cette singularité est aussi du type logarithmique [3,21,51]. De manière analogue aux problèmes bidimensionnels plans, on peut montrer que le terme $\mathbf{G}'_{ax}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')$ (équation (48)) est aussi régulier [21].

En résumant; on peut dire que, pour les problèmes plan, l'intégrant de la deuxième intégrale \mathbf{I}_2 présente une singularité logarithmique. Dans le cas des problèmes axisymétriques, les deux intégrands des intégrales \mathbf{I}_1 et \mathbf{I}_2 présentent une singularité due à l'intégrale elliptique complète de première espèce $\mathbf{K}(\mathbf{k}^2)$. La singularité de $\mathbf{K}(\mathbf{k}^2)$ est aussi de nature logarithmique comme le montre le développement limité proposé par [3]:

$$\mathbf{K}(\mathbf{k}^2) = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i (1-\mathbf{k}^2)^i - \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i (1-\mathbf{k}^2)^i \ln(1-\mathbf{k}^2) \quad (64)$$

où \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i sont constantes et \mathbf{k}^2 est donné par (45): quand le point d'intégration (ρ', \mathbf{z}') s'approche du point d'observation (ρ, \mathbf{z}) , la variable \mathbf{k}^2 tend vers $\mathbf{1}$, ce qui donne bien une singularité logarithmique.

Ainsi, que le problème soit plan ou axisymétrique, l'intégrand de (62) présente une singularité de type logarithmique.

Pour extraire cette singularité des intégrands, on considère l'intégrale \mathbf{I} donnée par:

$$\mathbf{I} = \int_{-1}^1 \ln(1/f(\mu)) d\mu \quad (65)$$

où μ est la coordonnée curviligne locale, $f(\mu)$ est égale à $|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|$ ou $(1-\mathbf{k}^2)$ selon le type du problème (plan ou axisymétrique).

L'intégrale (65) peut être écrite comme:

$$\mathbf{I} = \int_{-1}^1 \ln(1/f(\mu)) d\mu = \int_{-1}^1 \ln(g(\mu)/f(\mu)) d\mu - \int_{-1}^1 \ln(g(\mu)) d\mu \quad (66)$$

où $g(\mu)$ est une fonction choisie de telle sorte que:

$$\lim_{\bar{\mathbf{r}}' \rightarrow \bar{\mathbf{r}}} g(\mu)/f(\mu) = \mathbf{M}(\mu) \quad (67)$$

avec $\mathbf{M}(\mu)$ finie et non nulle.

Ainsi, la première intégrale dans (66) a un intégrand régulier et peut être calculée par la quadrature de Gauss classique. La deuxième intégrale peut être estimée en employant la quadrature pondérée par une fonction de type logarithmique [2,80]:

$$\int_0^1 \ln 1/\tau h(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^{n_i} w_i h(\tau_i) \quad (68)$$

où τ est la variable d'intégration, w_i est le poids correspondant au i -ème point τ_i et où n_i désigne le nombre de points d'intégration.

La fonction $g(\mu)$ doit respecter la condition (67). Pour montrer comment trouver cette fonction, considérons la première intégrale au membre de droite de (66), par exemple pour le cas bidimensionnel. Nous pouvons écrire:

$$\mathbf{I}_3 = \int_{-1}^1 \ln(g(\mu)/f(\mu)) d\mu = .5 \int_{-1}^1 \ln(g^2(\mu)/|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|^2) d\mu \quad (69)$$

où $f(\mu)$ pour le point d'observation i est:

$$f(\mu) = |\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}'| = [(x_i - x')^2 + (y_i - y')^2]^{1/2} \quad (70)$$

En écrivant les coordonnées d'intégration x' et y' en fonction des valeurs nodales, nous avons:

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|^2 = \left[\sum_{j=1}^n N_j (x_i - x_j')^2 + \sum_{j=1}^n N_j (y_i - y_j')^2 \right]^{1/2} \quad (71)$$

Quand le point d'observation i coïncide avec le noeud **1** de l'élément de frontière, (Fig. 6), la fonction $f(\mu)$ est nulle et μ vaut **-1**. Ainsi, nous pouvons choisir $g(\mu) = (1+\mu)/2$ car, dans $g(\mu)/f(\mu)$, les deux fonctions $f(\mu)$ et $g(\mu)$ s'approchent de zéro lorsque μ tend vers **-1**.

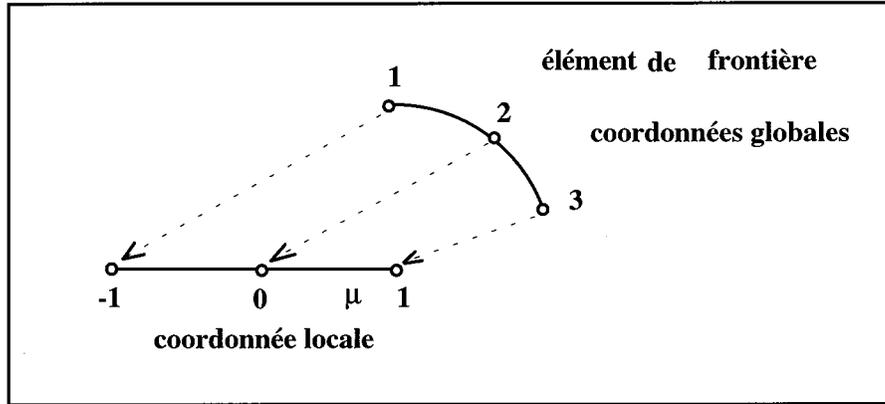


Fig. 6: Élément de frontière de deuxième ordre.

On fait ce choix pour éliminer la singularité de l'argument de la fonction logarithme, mais aussi pour permettre le changement adéquat de variable dans la deuxième intégrale en (66), conformément à (68).

En considérant le terme qui est à droite dans (69), on obtient d'après l'application du théorème de l'Hospital, lorsque $\mu \rightarrow -1$:

$$\begin{aligned} \lim_{r' \rightarrow r} g^2(\mu) / |\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'|^2 &= \lim_{r' \rightarrow r} (\mu + 1)^2 / 4 \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 \right] \\ &= 1/4 \left[(\partial x' / \partial \mu)_{\mu=-1}^2 + (\partial y' / \partial \mu)_{\mu=-1}^2 \right] \end{aligned} \quad (72)$$

c'est-à-dire une valeur finie qui peut être intégrée par la quadrature de Gauss classique pour le calcul numérique de la première intégrale en (66).

Si le point i coïncide avec le noeud **2** (ou **3**) de l'élément de frontière, on peut montrer de façon analogue que l'expression $g(\mu) = \mu$ (ou $g(\mu) = (1-\mu)/2$) satisfait les conditions d'élimination de singularité, et permet le changement adéquat de la variable imposée par (66).

Dans le cas des problèmes tridimensionnel avec symétrie axiale, on peut montrer que les mêmes fonctions sont encore valables pour les noeuds **1, 2** et **3**.

I.5.2 Intégration adaptative.

Les intégrales apparaissant dans les équations (58), (59) et (61), pour chaque élément de frontière Γ_k , sont évaluées pour le point d'observation i , qui est le point où le potentiel et le champ électrique sont à calculer. Pour un élément de frontière quelconque, nous avons besoin de connaître si ce point est *sur* l'élément, *proche* ou *loin* de l'élément pour mieux maîtriser l'intégration. Quand le point est *sur* l'élément, les valeurs du potentiel et du champ peuvent être simplement calculées par interpolation de leurs valeurs nodales. Quand le point est loin, l'intégration classique est normalement employée. Cependant, quand le point est proche, les noyaux des intégrales deviennent presque singulier et l'intégration classique exige, pour donner des résultats satisfaisants, un nombre de points d'intégration trop important [21]. Une solution efficace est alors l'intégration adaptative.

L'intégration adaptative consiste à diviser l'élément en sous éléments jusqu'à ce que le point i puisse être considéré comme *loin* de chacun d'eux, au sens d'un critère à définir. Après, l'intégration classique est exécutée sur les sous éléments.

Michel Defourny a utilisé comme critère pour diviser l'élément le principe de la zone protégée [21]. Ce principe consiste simplement à définir une zone, contenant l'élément et dont la taille est liée à celle de l'élément, de telle sorte que, pour tout point situé *hors* de cette zone, l'intégration normale puisse être utilisée et donne à coup sûr des résultats précis. Si un point se trouve *dans* cette zone, la qualité de l'intégration n'est plus garantie: on divise alors l'élément en sous éléments; la zone de protection de l'élément d'origine se trouve remplacée par des zones plus petites, propres à chacun des sous éléments. On répète ce processus jusqu'à ce que le point de calcul se trouve à l'extérieur de toutes les zones de protection de chacune des subdivisions, ce qui garantit un résultat correct pour l'intégration.

Le problème qui se pose est bien sûr *comment* définir cette zone protégée. Michel Defourny a employé des cercles et une ellipse pour définir la région protégée d'un élément du deuxième degré. Dans le cas des éléments linéiques, ce critère donne une bonne protection. Par contre, l'élément courbe, représenté par un demi-arc de cercle, est mal protégé [21].

Nous proposons une manière originale pour définir la zone de protection, à l'aide d'une équation du quatrième degré [87]. L'équation que nous avons choisie est celle qui décrit les courbes appelées "ovales de Cassini", dont l'expression mathématique est donnée en coordonnées polaires $(\rho;\theta)$ par [79]:

$$\rho^4 - 2a^2\rho^2 \cos 2\theta + a^4 = b^4 \quad (73)$$

Il s'agit de l'ensemble des points dont le produit des distances à deux points fixes (1 et 3 Fig. 7.a) est constante (b^2). La Fig. 7.b montre deux ovales pour deux valeurs de b/a , où les points 1 et 3 sont fixes.

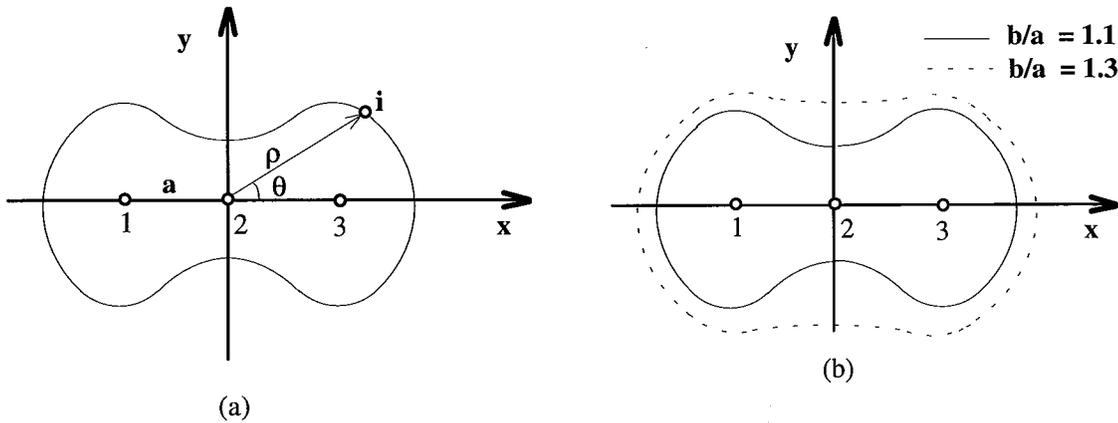


Fig. 7: (a) Ovale de Cassini et ses paramètres
(b) Deux ovales avec b/a égal à 1.1 et 1.3.

Avec l'équation (73), il est clair qu'un point j sera à l'intérieur d'une ovale, par exemple celle pour $b/a=1.1$, si la valeur correspondante de b_j/a est inférieure à 1.1. Ainsi, nous pouvons choisir une valeur pour b/a égale à b_0 , ce qui fixera la zone protégée. L'élément sera divisé si la valeur de b_{0i} pour le point i est inférieure à b_0 . La valeur de b_0 définissant la zone de protection doit être choisie en fonction de la précision requise dans l'intégration: c'est pour définir cette valeur que le calcul de l'angle solide (59) est employé.

L'équation (73), réécrite pour un élément quelconque devient:

$$\left(d^2 + a^2\right)^2 - 4a^2d^2 \cos 2\alpha = b^4 \quad (74)$$

où a est le carré de la distance entre noeuds, donné par:

$$\begin{aligned} a^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \end{aligned}$$

d la distance entre le point i et le noeud milieu de l'élément et α l'angle entre \vec{d} et \vec{a}' (Fig. 8).

Pour un élément courbe, les noeuds de l'extrémité sont moins protégés (Fig. 9). Dans ce cas, nous pouvons faire la translation du centre de la courbe du noeud 2 sur le point B, qui définit la demi-distance entre la droite que relie les noeuds de l'extrémité et le noeud 2 (Fig. 10).

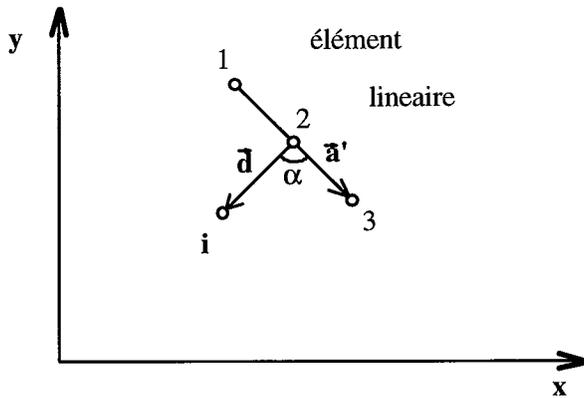


Fig 8: Élément linéaire quelconque.

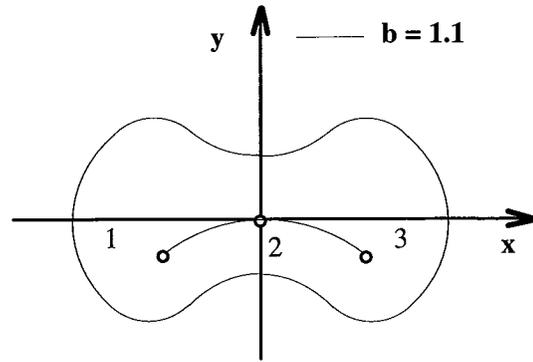


Fig. 9: Mauvaise protection pour les noeuds de l'extrémité courbe.

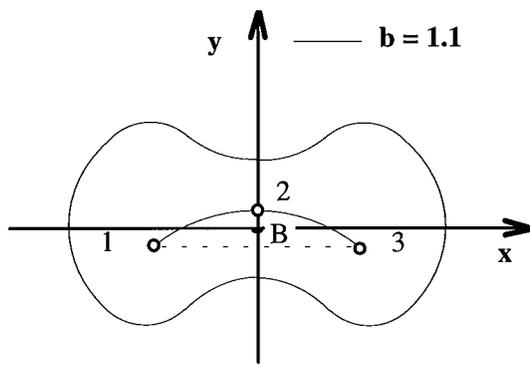
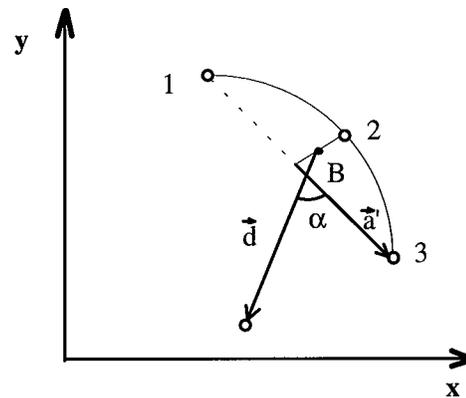


Fig. 10: Translation de l'ovale de Cassini pour mieux protéger les noeuds de l'extrémité.



La valeur de b_0 définissant l'ovale de Cassini pour un élément quelconque doit encore être déterminée. Le problème qui se pose est qu'une valeur trop grande conduit à une région de protection trop large et à un gaspillage de temps de calcul. Une valeur trop petite conduit à un gain de temps de calcul mais à des résultats imprécis. Pour trouver le bon compromis, nous avons utilisé une information précieuse que nous avons déjà dans le calcul des équations intégrales de frontière: l'angle solide. La précision du calcul de ce paramètre peut être utilisée pour définir la zone où l'évaluation des intégrales de frontière nécessite une intégration adaptative.

En effet, prenons une valeur initiale de b_0 et calculons l'erreur de calcul de l'angle solide en utilisant l'intégration adaptative par rapport au calcul analytique. Si l'erreur

maximale obtenue trop importante, nous augmentons la valeur de b_0 et ce jusqu'à ce qu'elle devienne plus petite que la valeur maximale imposée.

Par cette procédure, nous avons par exemple trouvé une erreur inférieure à 10^{-3} pour $b_0 = 1.3$. La validation de cette procédure est présentée ci-dessous, avec les courbes d'erreur pour des éléments linéaires et pour des éléments courbes.

1.5.3 Validation des procédures d'intégration numérique.

1.5.3.1. Intégrale singulière.

Pour valider la procédure d'intégration employée dans ce travail, dans le cas des singularités de type logarithmique, nous avons pris comme exemple l'intégrale [86]:

$$I = \int_0^1 \ln(1/|x - x'|) dx' \quad (75)$$

Nous avons évalué cette intégrale sur trois points x (0,0.5,1) en utilisant différents nombres de points d'intégration. Ces trois points peuvent être considérés comme les noeuds de l'élément du deuxième ordre placé sur l'axe des x . Le Tableau I montre les résultats obtenus, en particulier l'erreur par rapport aux résultats analytiques.

L'analyse de ces résultats montre que la procédure d'intégration numérique utilisée est extrêmement précise, et qu'elle pourra être utilisée dans un code de calcul de champ basé sur la méthode des équations intégrales de frontière.

1.5.3.2. Intégrale quasi singulière - Intégration adaptative.

Pour valider la procédure d'intégration adaptative, l'angle solide donné par l'intégrale (76) a été évalué pour deux éléments de frontière du deuxième degré: un élément linéique et un demi-arc de cercle. Ces deux éléments sont montrés en Fig. 11.

$$I = \int_{\Gamma} \left(\frac{|\vec{r} - \vec{r}'| \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d\Gamma' \quad (76)$$

Tableau I Intégration singulière.

Intégrale	Calcul Analytique	Calcul Numérique	Erreur Absolue (10^{-7})	Nombre de points de Gauss
$\int_0^1 \ln(1/x') dx'$	1.0	0.9999999702	-0.298	2
		1.0000000075	0.075	3
		1.0000000149	0.149	4
		1.0000000112	0.112	5
		1.0000000000	0.000	6
		1.0000000088	0.088	7
$\int_0^1 \ln(1/ 0.5-x') dx'$	1.6931471806	1.6931471508	-0.298	2
		1.6931472087	0.281	3
		1.6931471955	0.149	4
		1.6931471917	0.111	5
		1.6931471806	0.000	6
		1.6931471894	0.088	7
$\int_0^1 \ln(1/ 1-x') dx'$	1.0	0.9999999702	-0.298	2
		1.0000000075	0.075	3
		1.0000000149	0.149	4
		1.0000000112	0.112	5
		1.0000000000	0.000	6
		1.0000000088	0.088	7

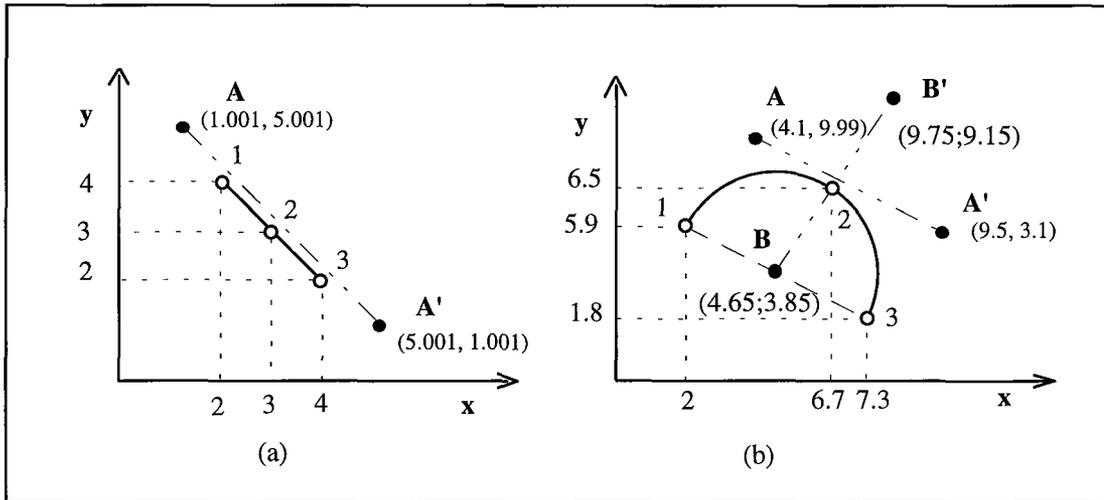


Fig. 11 (a) Elément linéique, (b) Elément courbe - Demi-arc de cercle.

Les résultats numériques ont été comparés aux résultats analytiques: l'angle solide d'où un point quelconque i voit l'élément de frontière peut en effet être calculé analytiquement par les expressions (77):

$$\Omega = \alpha + \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \arcsin \left(\frac{\vec{R}_1 \times \vec{R}_2}{|\vec{R}_1| |\vec{R}_2|} \right) \\ \beta = \arcsin \left(\frac{\vec{R}_2 \times \vec{R}_3}{|\vec{R}_2| |\vec{R}_3|} \right) \end{cases} \quad (77)$$

où R_1, R_2 et R_3 sont les distances entre le point i et les noeuds de l'élément étudié.

Précisons que les calculs ont été faits en utilisant la simple précision et avec quatre points d'intégrations de Gauss. Nous présentons en Fig. 12.a et 12.b les régions protégées pour les éléments choisis, en utilisant $b_0 = 1.3$ dans (81).

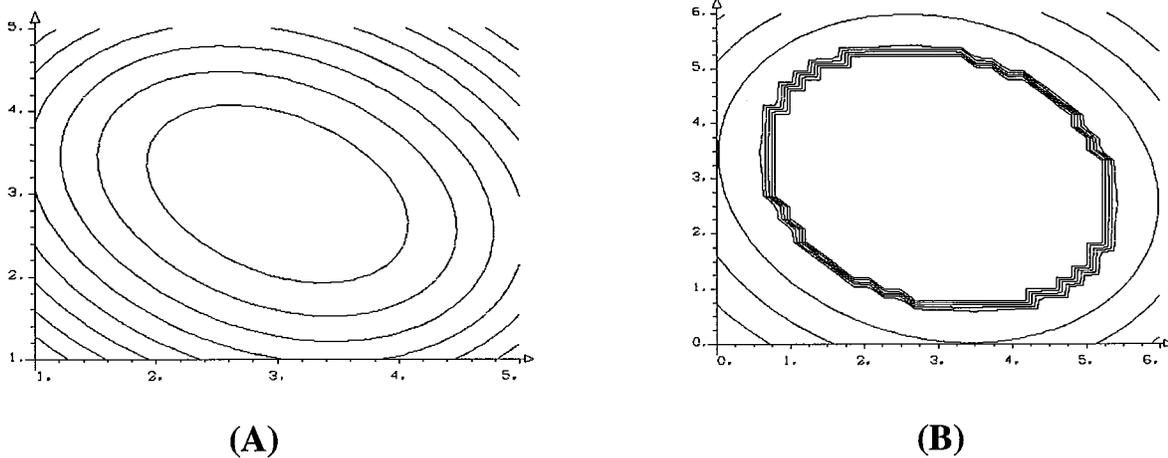


Fig. 12: Région de protection pour $b/a = 1.3$

- (a) Élément linéique;
- (b) Élément courbe.

La Fig. 13-a présente les valeurs de l'angle solide obtenues respectivement par méthodes analytique et numérique. La Fig. 13-b montre l'erreur absolue et l'erreur relative calculées pour l'élément linéique sur le segment AA' (Fig. 11-a).

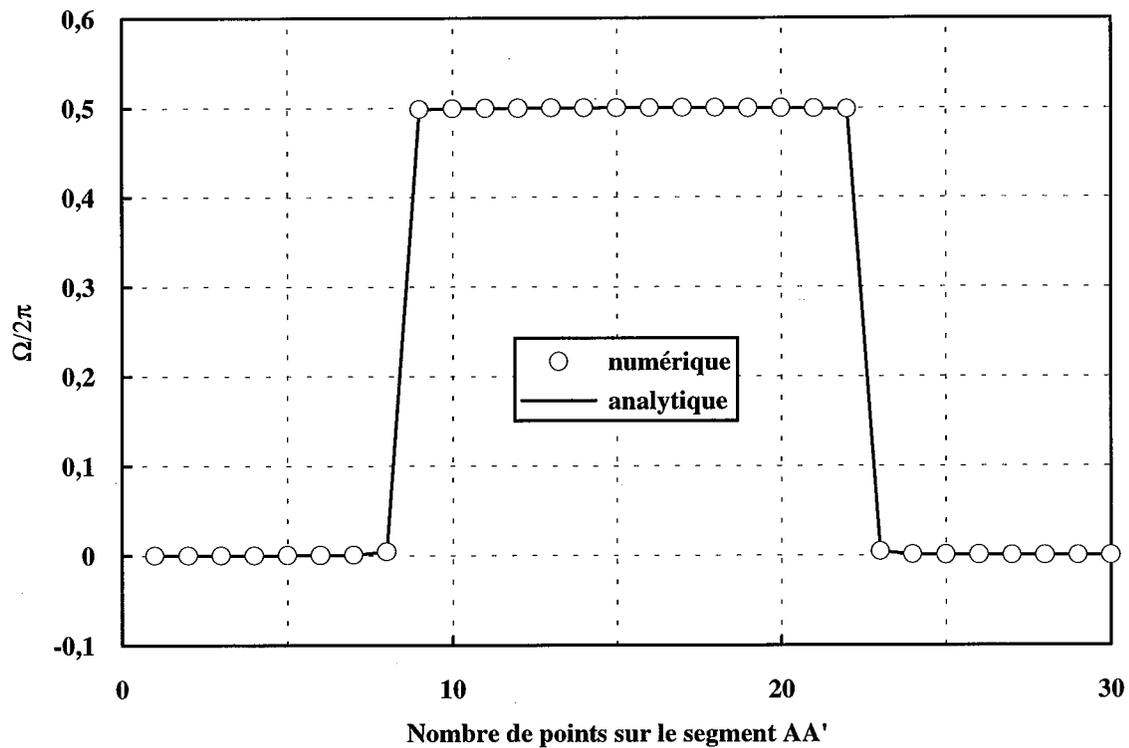


Fig. 13 (a): Élément linéique: valeur de l'angle solide - résultats analytique et numérique.

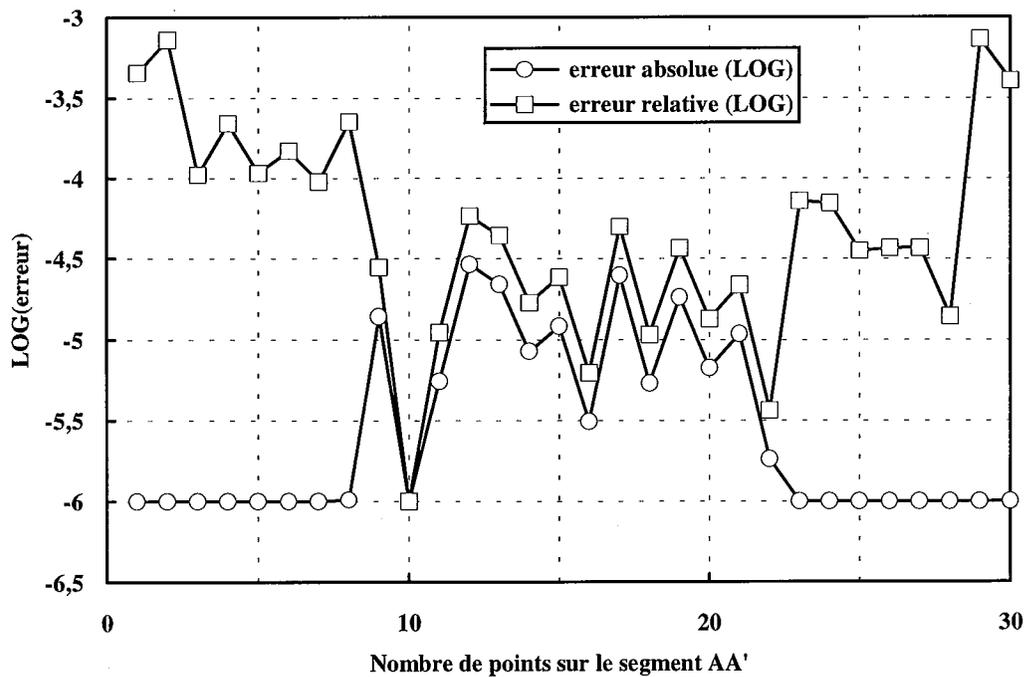


Fig. 13 (b): Élément linéique: valeurs des erreurs absolue et relative.

Les courbes montrées ci-dessus montrent clairement la bonne concordance des résultats analytiques et numériques (*erreur relative et absolue inférieures à 10^{-4}*). Néanmoins,

il faut remarquer que l'erreur *relative* pour les plus petites valeurs de l'angle solide perd sa signification (*division par un nombre trop faible*).

Les résultats pour l'élément courbe sont présentés par les figures 13-c à 13-d pour le segment AA' et 13-e à 13-f pour les résultats calculés sur le segment BB' (Fig. 11.b).

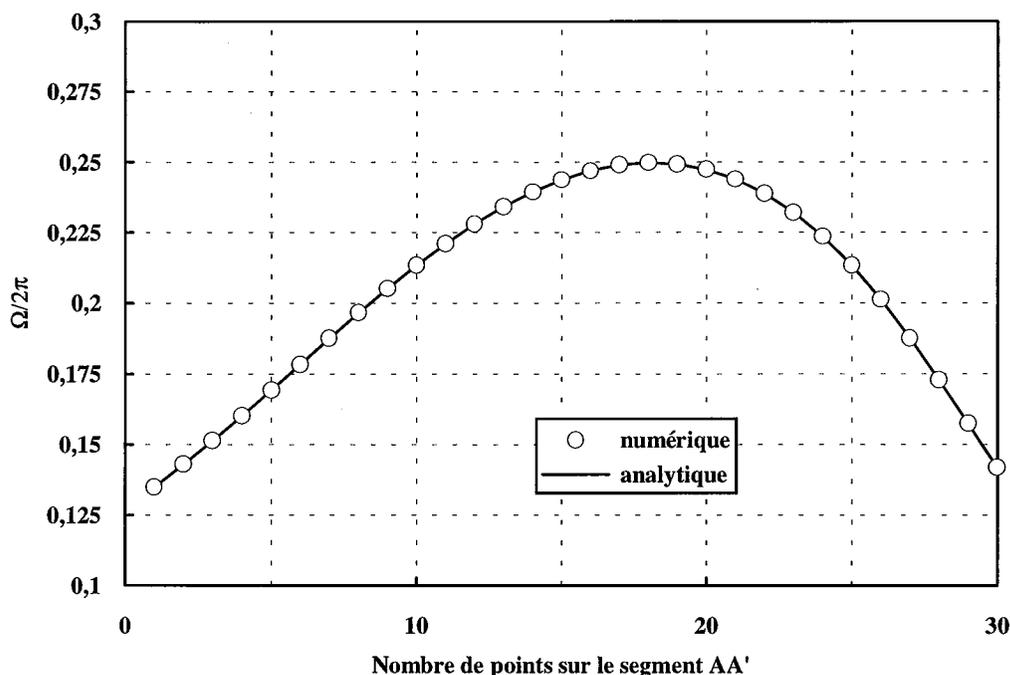


Fig. 13 (c): Elément courbe: valeur de l'angle solide - résultats analytique et numérique.

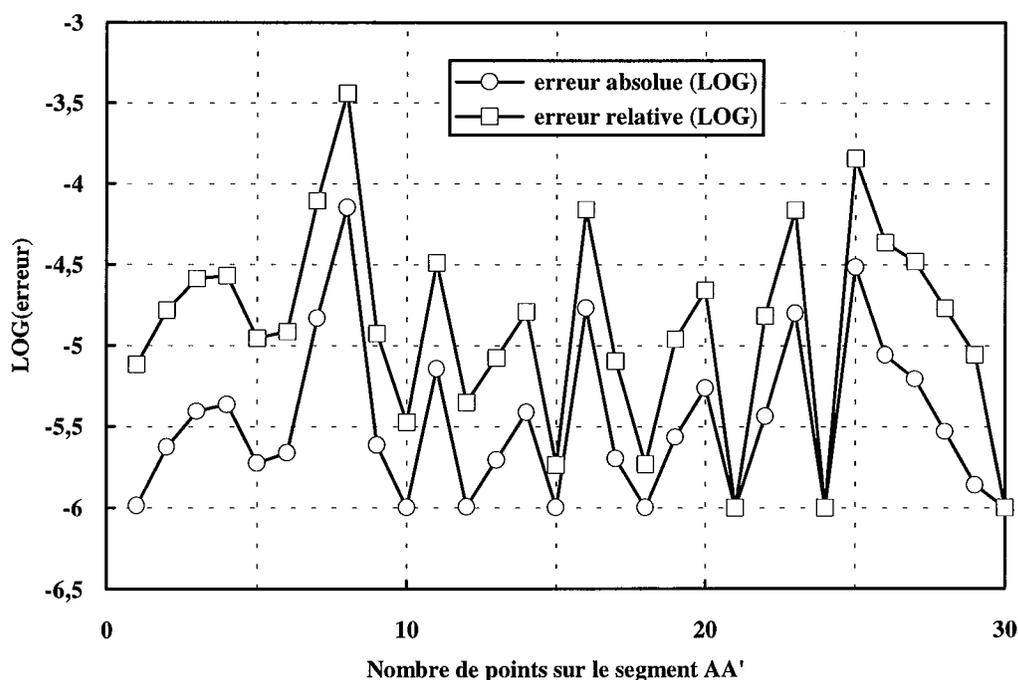


Fig. 13 (d): Elément courbe: valeurs des erreurs absolue et relative.

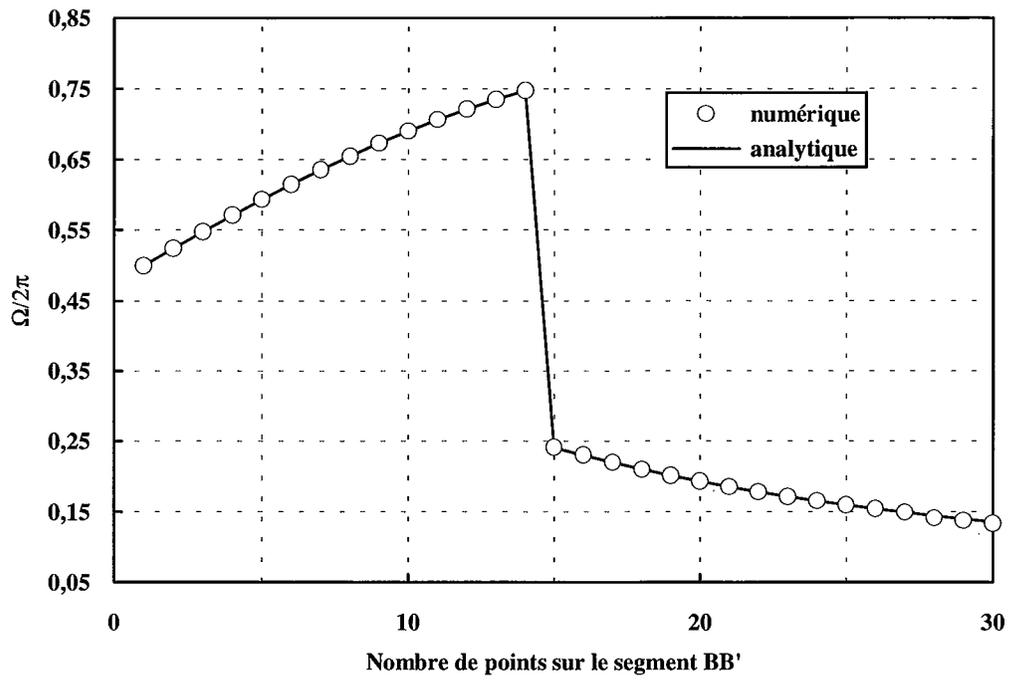


Fig. 13 (e): Élément courbe: valeur de l'angle solide - résultats analytique et numérique.

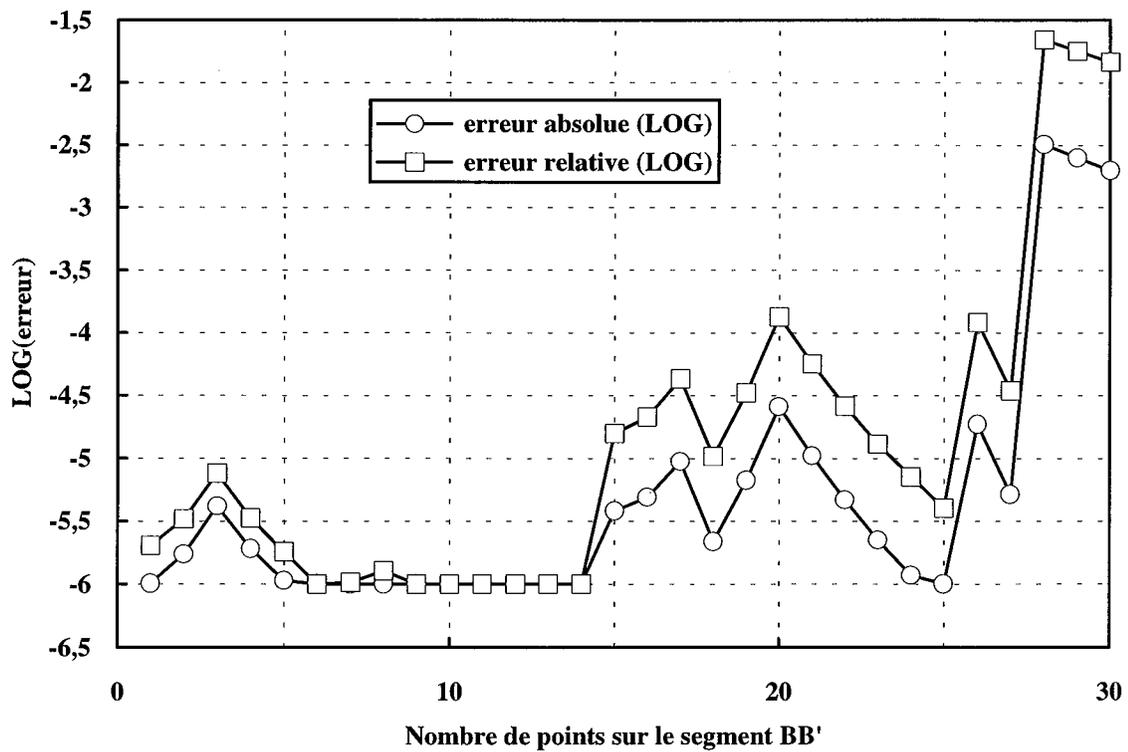
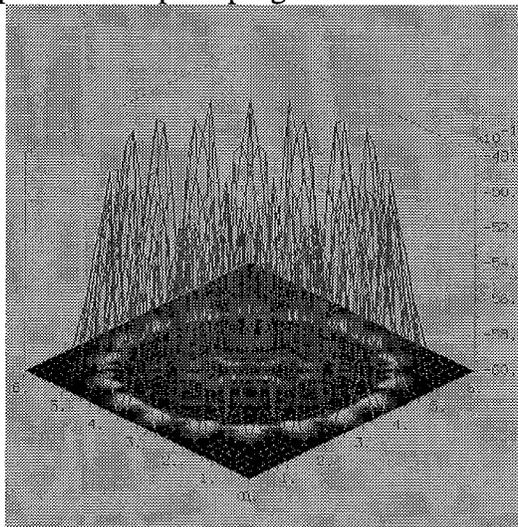


Fig. 13 (f): Élément courbe: valeurs des erreurs absolue et relative.

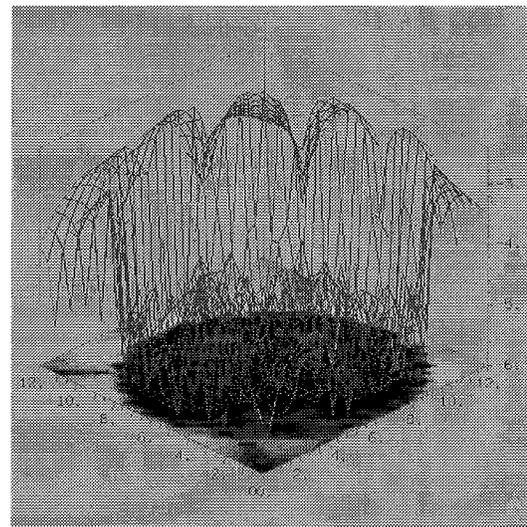
Comme dans le cas précédent, ces résultats montrent la bonne précision des résultats numériques (*erreurs relative et absolue inférieures à 10^{-4} dans la région protégée*). Il faut noter que les trois derniers points du segment BB' se trouvent en dehors de la région protégée, ce qui conduit à des erreurs plus importantes (Fig. 13-f).

La figure 14 montre l'exploitation en surface gauche de l'erreur absolue, pour les deux éléments. On peut bien vérifier l'influence de la région de protection sur les résultats dans la projection sur le plan $Z = 0$.

Les deux éléments traités ci-dessus étant relativement généraux (*ils ne possèdent aucune caractéristique particulière facilitant le calcul numérique*), les résultats obtenus nous permettent de dire que l'intégration adaptative est très précise. L'avantage de son utilisation est que le processus est tout à fait automatique, le nombre de points d'intégration de Gauss reste toujours le même (*il n'y a donc pas besoin de recalculer les fonctions de forme*); elle est en plus très simple à programmer.



(A)



(B)

Fig. 14 (a) Élément linéique; (b) Élément courbe.

I.6. VALIDATION DU CODE DE CALCUL DE CHAMP (BEM2D).

Nous avons écrit un code de calcul de champ basé sur la méthode des équations intégrales de frontière, appelé BEM2D. Ce code a été développé pour résoudre des problèmes en électrostatique bidimensionnelle et tridimensionnelle à symétrie axiale, avec un ou plusieurs milieux diélectriques différents. Il a été validé d'une part en traitant des problèmes (bidimensionnels, axisymétriques) dont la solution analytique est connue, d'autre part en

comparant ses résultats avec ceux obtenus par d'autres logiciels comme FLUX2D [75], PHI3D [52] et DIEL [36]. Comme problème de référence pour la comparaison entre codes, nous avons choisi le "Cas CIGRE" [63] pour lequel des résultats ont déjà été présentés dans la référence [38].

I.6.1. Validation analytique.

I.6.1.1. Problème bidimensionnel

Nous allons comparer ici les résultats obtenus par BEM2D à la solution analytique pour un problème bidimensionnel plan dont la géométrie, les conditions aux limites et les différentes caractéristiques diélectriques sont présentées en Fig. 15. En raison des symétries du problème, nous n'avons traité par modélisation numérique qu'un quart de la géométrie. Les contours courbes ont été discrétisés respectivement en 3, 4 et 5 éléments de frontière (*en allant de l'intérieur vers l'extérieur*). Les résultats numériques sont présentés sur le segment AA'.

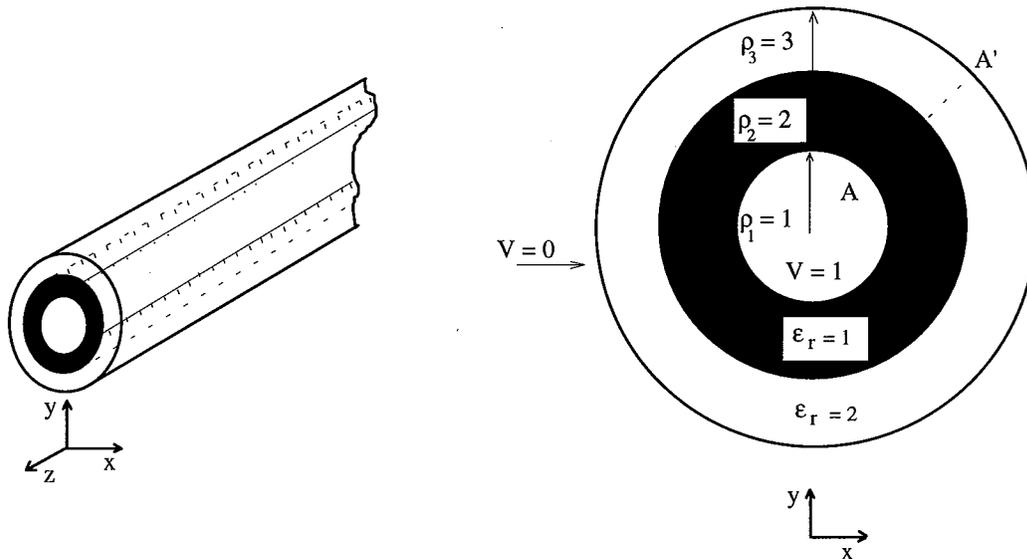


Fig. 15 (a): Câble coaxial (b): Paramètres géométriques et conditions aux limites.

La Fig. 16 présente les valeurs de potentiel et de champ électrique sur le segment AA'; la Fig. 17 donne l'erreur relative par rapport à la solution analytique.

Nous constatons la bonne performance du calcul numérique dans la résolution de ce problème, même en discrétisant peu la géométrie. De plus, nous pouvons remarquer que la précision des résultats numériques obtenus pour le calcul du champ (*l'erreur relative est inférieure à 10^{-4}*) concorde avec celle que nous avons obtenue lors de la validation de l'intégration adaptative.

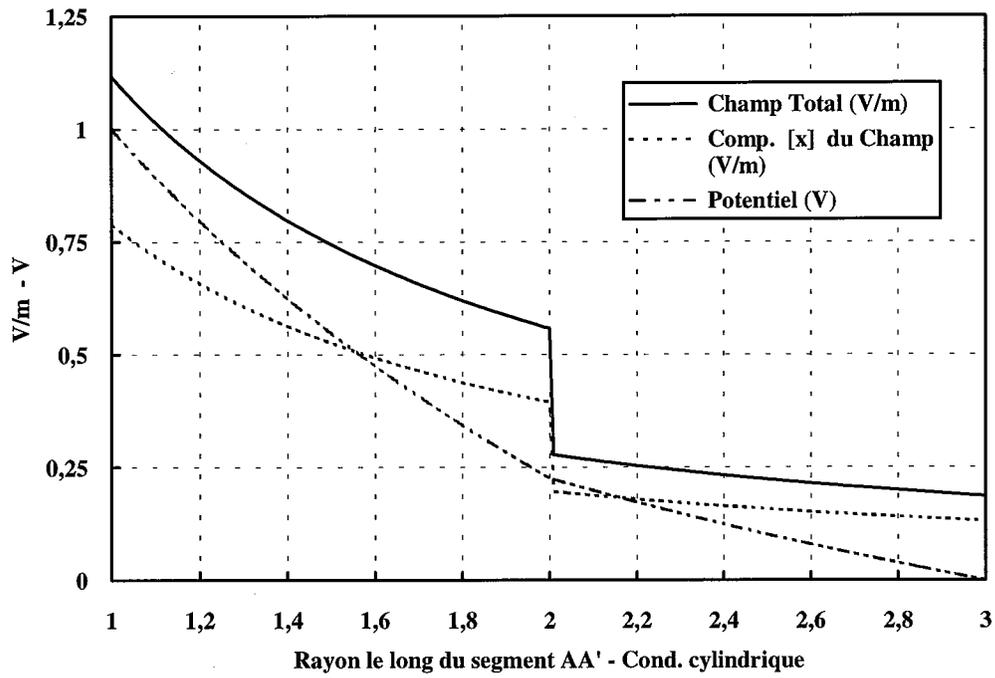


Fig. 16: Potentiel et champ électrique sur le segment AA'.

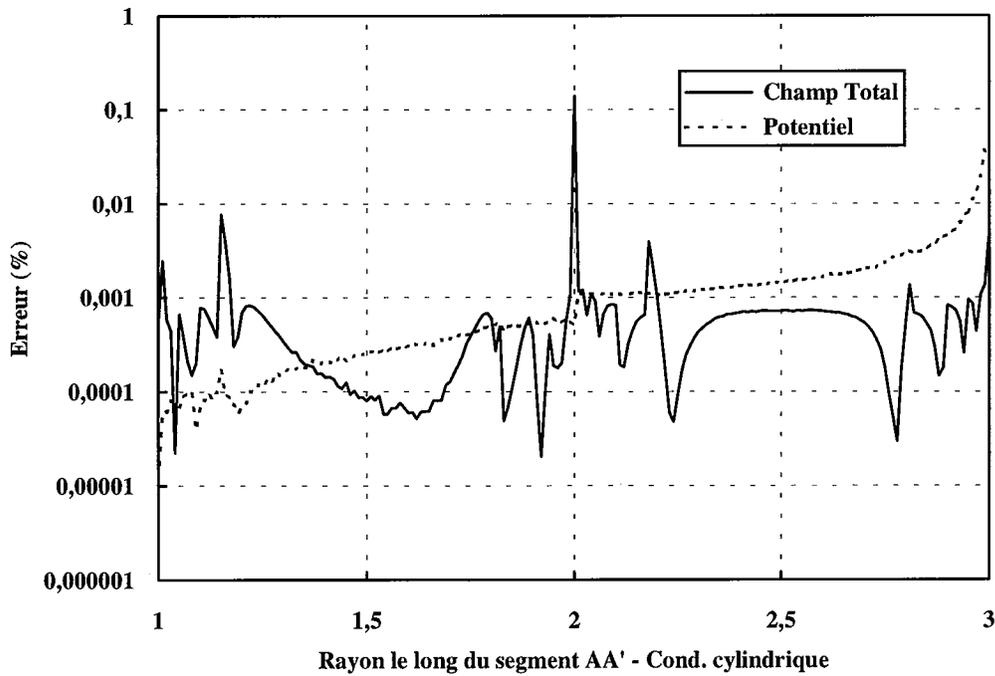


Fig. 17: Erreur [%] par rapport à la solution analytique.

1.6.1.2. Problème axisymétrique

Le problème choisi comme test est un condensateur sphérique à deux diélectriques. La géométrie, les conditions aux limites et les caractéristiques des différents milieux sont présentés en Fig. 18.

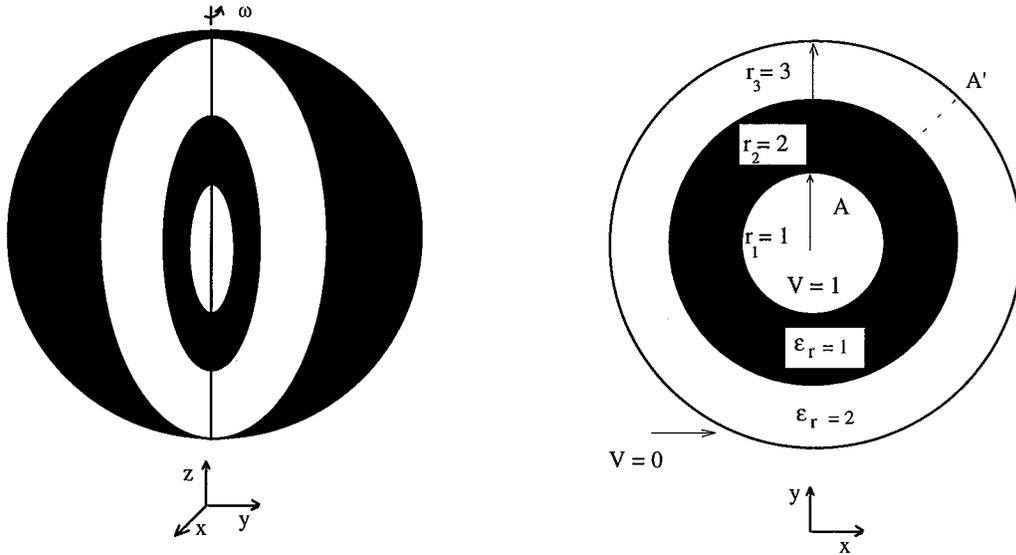


Fig. 18 (a): Condensateur sphérique
(b): Paramètres géométriques et conditions aux limites ($z = 0$).

Comme dans le cas précédent, nous n'avons pris qu'un quart de la géométrie et nous avons discrétisé les contours courbes en 3, 4 et 5 éléments de frontière respectivement.

La Fig. 19 montre les résultats numériques (potentiel et champ) sur le segment AA' et la Fig. 20 les courbes de l'erreur relative par rapport à la solution analytique. Nous ne pouvons là encore que constater la bonne concordance des résultats de la simulation numérique, avec pourtant une discrétisation géométrique grossière.

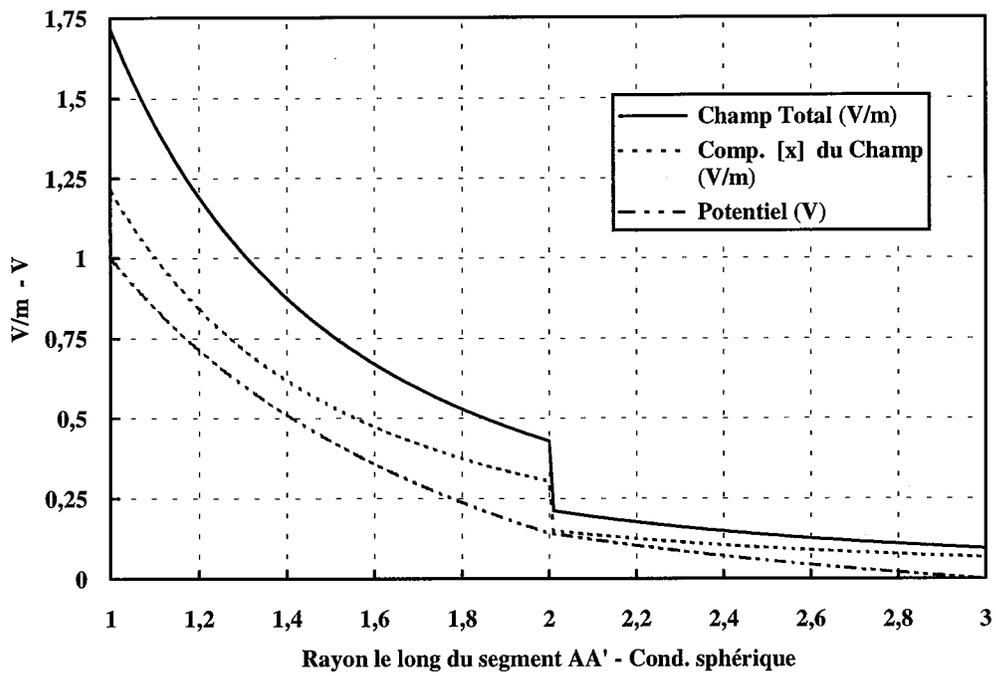


Fig. 19: Champ électrique et potentiel sur le segment AA' (condensateur sphérique).

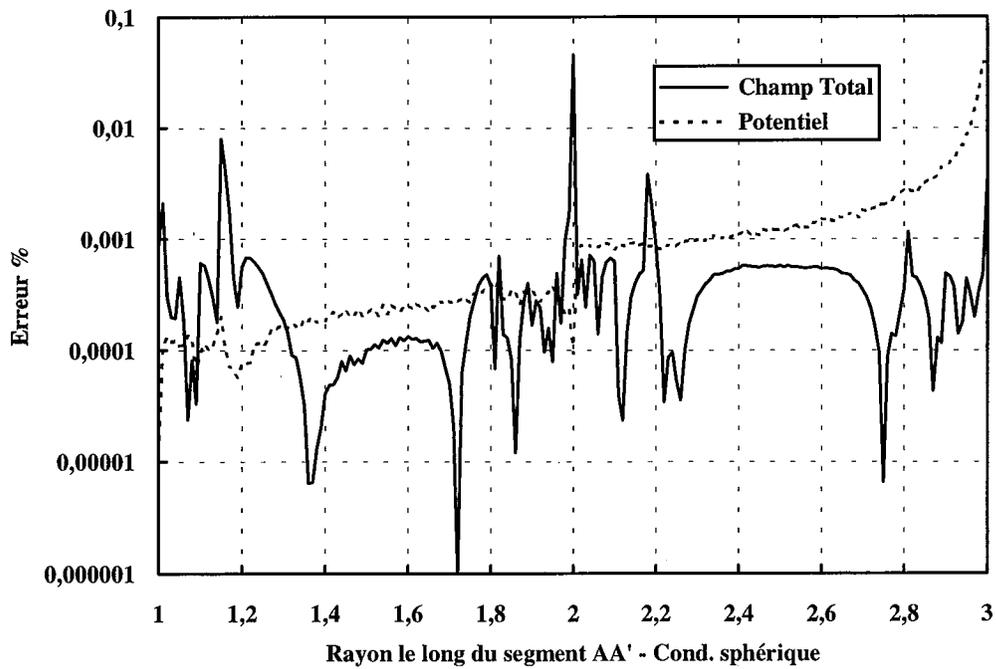


Fig. 20: Erreur [%] par rapport à la solution analytique (condensateur sphérique)

I.6.2. Validation par rapport à d'autres logiciels.

Le problème que nous avons traité pour comparer BEM2D avec d'autres logiciels a été proposé par le groupe de travail CIGRE 22.03 [63] justement dans le but de comparer des codes de calcul de champ électrostatique. La géométrie considérée est montrée par la Fig. 21, avec ses conditions aux limites. Les valeurs du potentiel et du champ sont à calculer sur le segment AA'.

Les résultats ont déjà été publiés par [38]: cet auteur a présenté les courbes d'erreur sur le potentiel et le champ électrique obtenus par différents codes de calcul du champ le long de la ligne AA', en prenant comme valeur de référence la moyenne entre les divers résultats. Les codes comparés pour cette étude étaient: PHI3D [52], FLUX2D [75], DIEL [36], BEM2D [87] et HYBRID (*PHI3D-DIEL*) [38].

Les résultats que nous présentons diffèrent peu, nous avons seulement modifié la valeur de référence, en prenant la valeur moyenne entre les codes cités, sauf HYBRID.

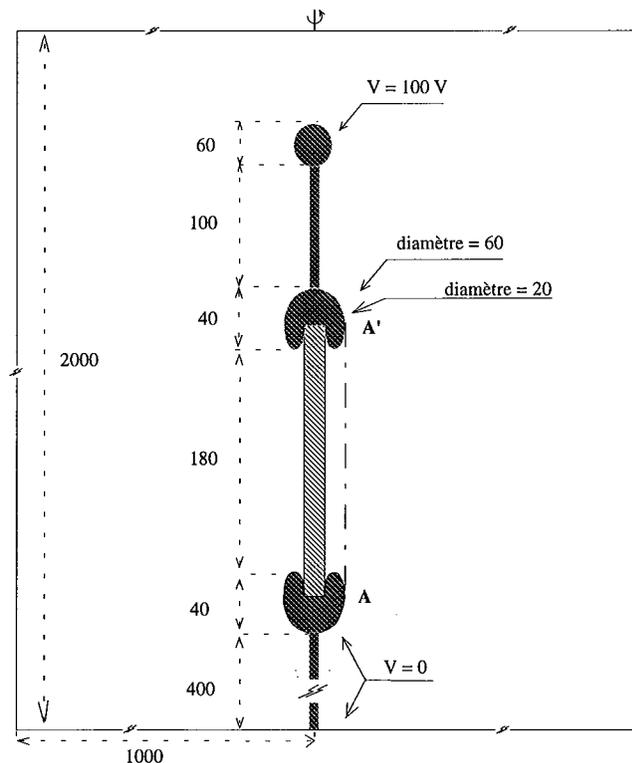


Fig. 21: Géométrie du cas teste CIGRE [CIGRE 22.03].

Ces résultats montrent que la différence majeure entre les moyennes se situe sur les extrémités du segment AA', elle est de l'ordre de 1%. Les résultats obtenus par BEM2D sont montrés en Fig. 22.

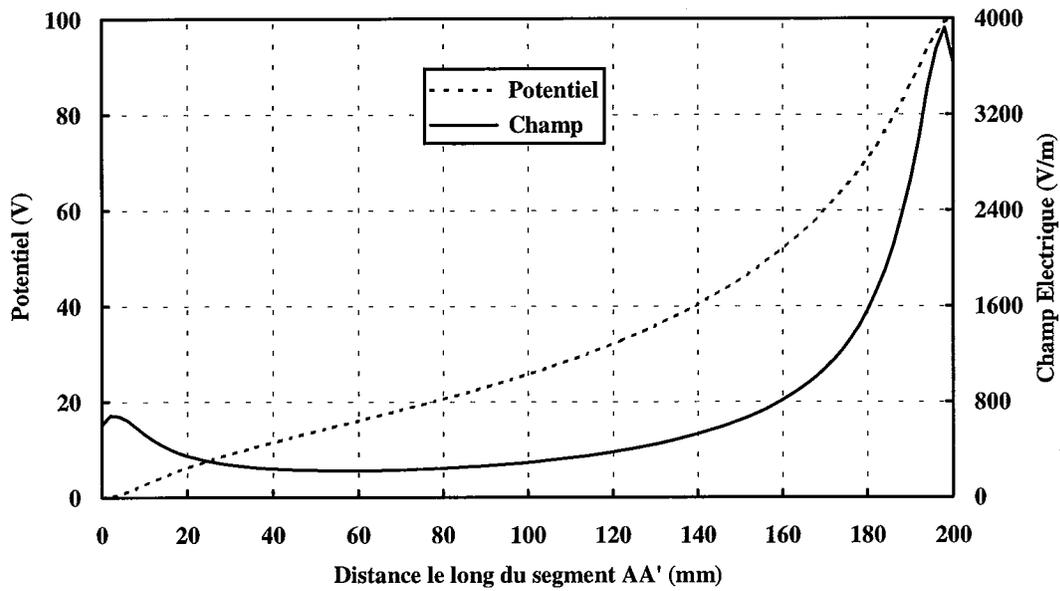
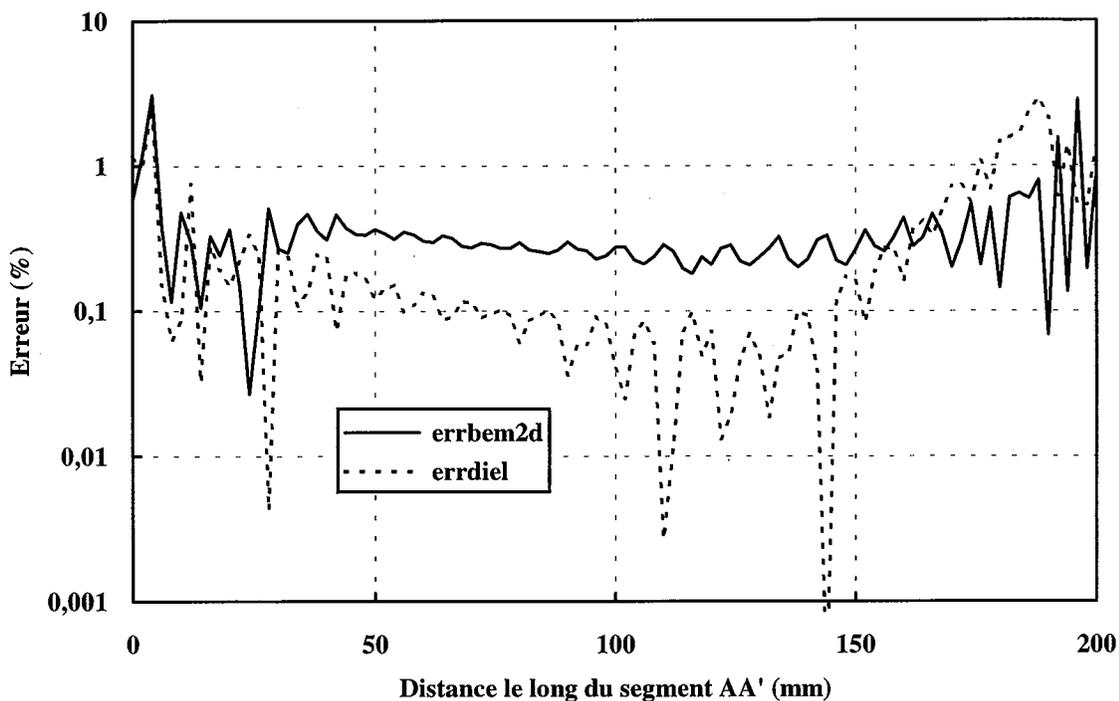


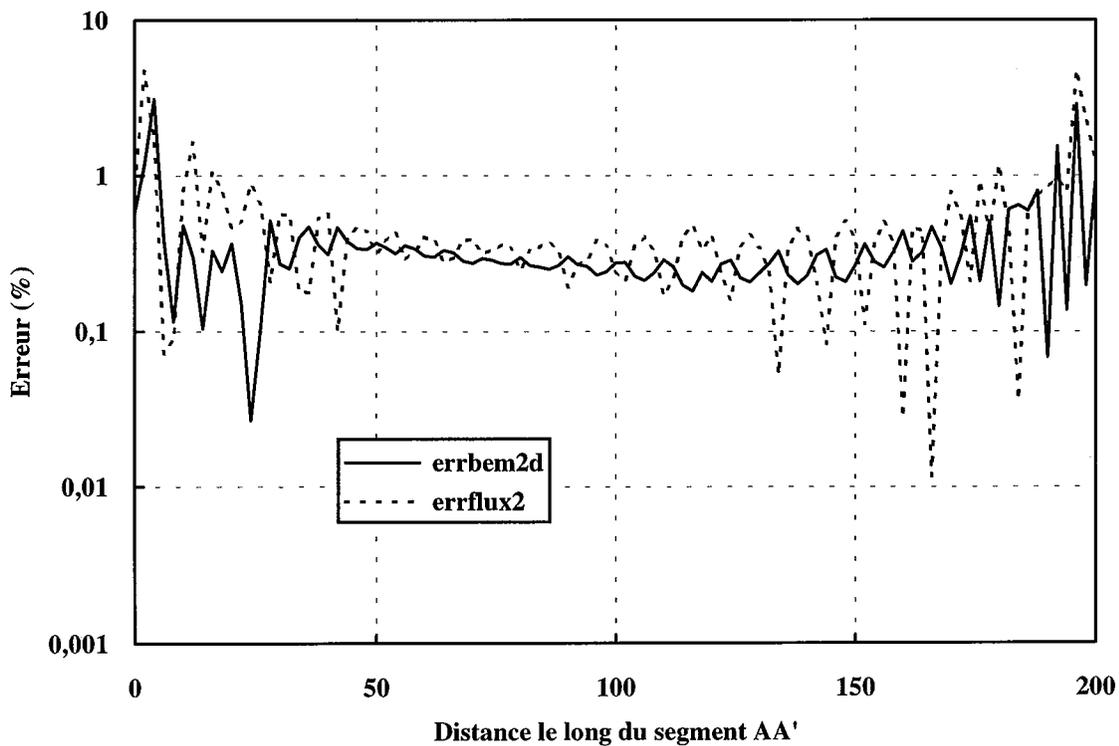
Fig. 22: Potentiel et champ électrique sur le segment AA' (BEM2D).

Enfin, la valeur absolue de l'erreur entre les différents résultats de calcul du champ électrique, sur le segment AA', par rapport à la valeur moyenne est montrée en échelle logarithmique par les figures qui suivent. Les Fig. 23.a à 24.c montrent successivement les résultats entre BEM2D et les codes DIEL, FLUX2D et PHI3D. La Fig. 23.d récapitule les différents résultats.

L'analyse des graphiques montre la bonne concordance entre les résultats obtenus par les différents codes de calcul de champ et ainsi la bonne précision des résultats obtenus par le code BEM2D. Il faut remarquer la grande similitude entre les résultats des logiciels BEM2D et FLUX2D: elle peut être attribuée à l'utilisation de la même géométrie (*le même pré processeur 2D set dans les deux cas*). Les nombres d'inconnues et les temps de calcul correspondant à chaque logiciel sont rapportés dans la référence [38].

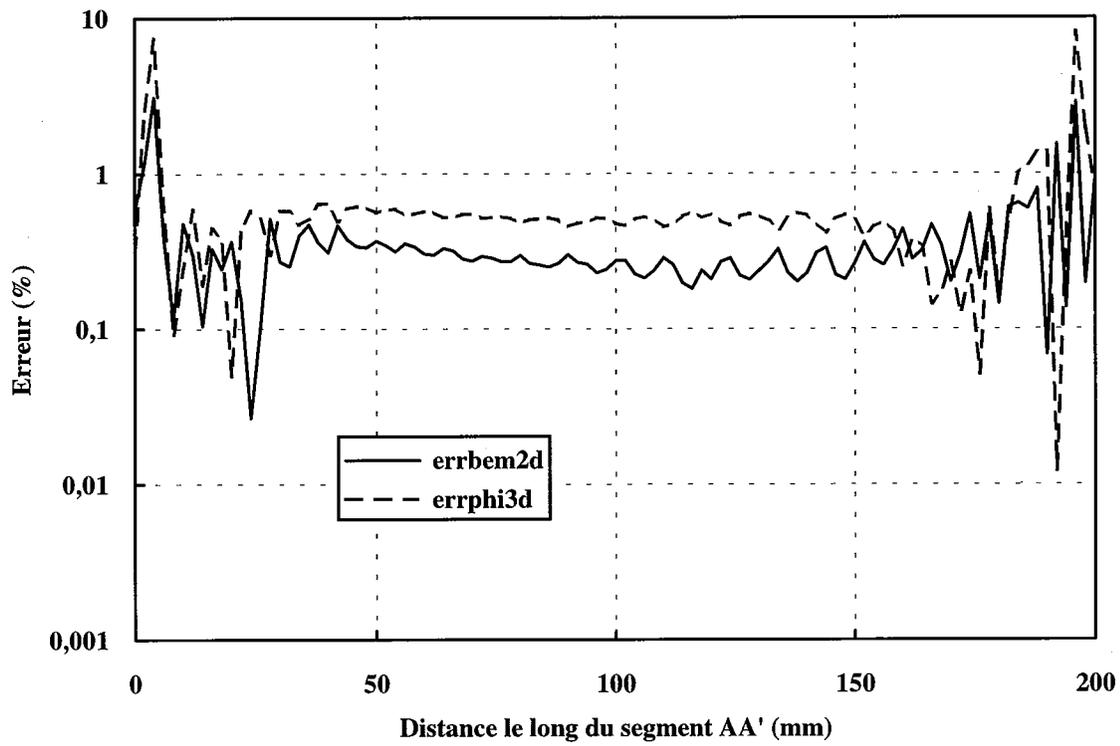


(a)

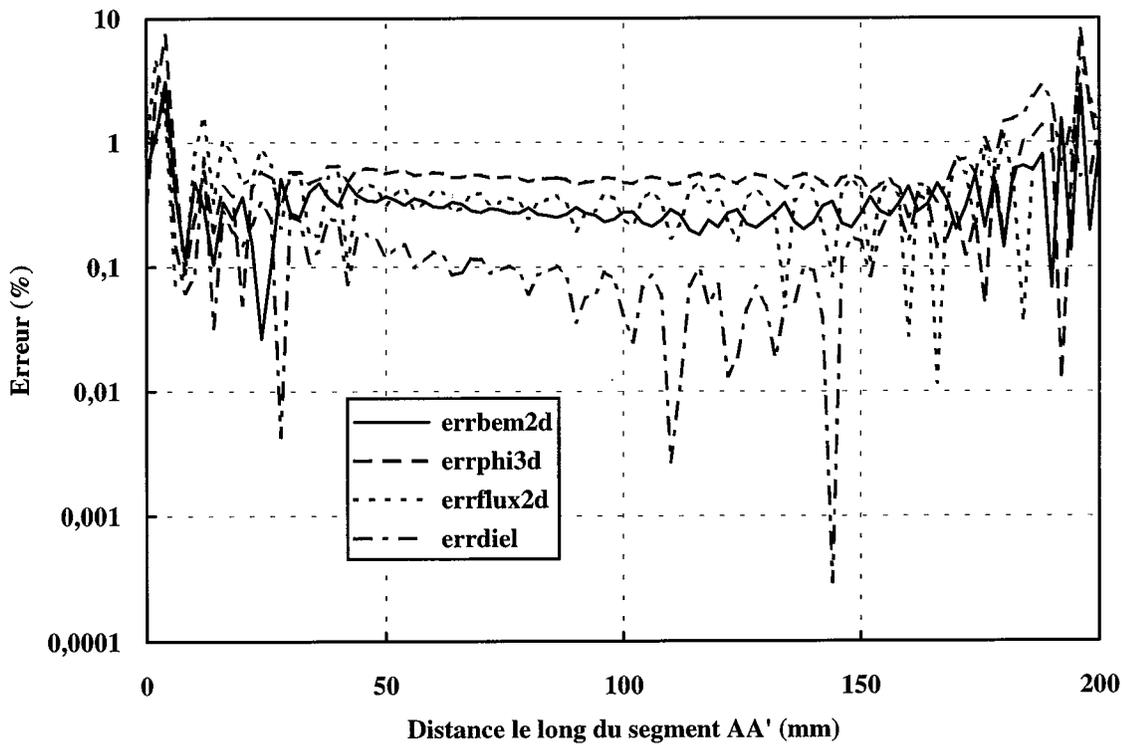


(b)

Fig. 23: Erreurs sur les valeurs du champ électrique sur le segment AA'.
Comparaison entre BEM2D et: a) DIEL; b) FLUX2D.



(c)



(d)

Fig. 23: Erreurs sur les valeurs du champ électrique sur le segment AA'.
Comparaison entre BEM2D et: c) PHI3D; 2. d) L'ensemble des résultats.

CONCLUSION

Nous avons consacré ce chapitre à la méthode des équations intégrales de frontière, formulation directe.

Les questions d'intégration numérique, souvent délicates pour cette méthode, ont été étudiées en détail et ont conduit en particulier à la mise au point d'une procédure originale pour le calcul des intégrales quasi-singulières. Le code de calcul de champ BEM2D ainsi développé a été validé sur des problèmes analytiques bidimensionnel et axisymétrique. L'étude comparative des résultats obtenus par BEM2D et différents autres codes de calcul de champ pour l'isolateur du cas test CIGRE a montré que ce code donne des résultats au moins aussi précis que les autres.

C'est bien sûr la conséquence de l'emploi des techniques d'extraction de singularité et d'intégration numérique très performantes que nous avons développées!

II . ALGORITHMES D'OPTIMISATION

INTRODUCTION.

Durant ces dernières années, de nombreuses études ont été menées dans le domaine de l'optimisation, comme le montre le nombre important de publications sur ce thème dans les revues spécialisées. L'optimisation est aujourd'hui une réalité. Elle s'applique à tous les domaines de la science et même à notre vie quotidienne: on cherche souvent à mieux gérer notre temps, notre argent, à minimiser la consommation d'essence de notre voiture, etc. Ce sont là bien sûr des exemples d'optimisation. Dans le domaine de l'automobile, l'optimisation de forme pour arriver à des voitures plus aérodynamiques est bien connue. Dans l'industrie électronique, on cherche à minimiser la distance entre les connexions dans les circuits à très haute échelle d'intégration (*plusieurs centaines de millions de transistors par puce n'excédant pas le centimètre carré - VLSI circuit design*). En électromagnétisme, on cherche à modifier la forme d'un appareil de façon à obtenir une distribution donnée du champ magnétique ou électrique (*uniforme, harmonique, ...*), ou encore de façon à réduire les valeurs extrêmes du champ: en électrostatique par exemple, il s'agira de modifier le profil d'un isolateur pour augmenter sa tension de claquage; en imagerie par résonance magnétique, il faudra concevoir le système magnétique pour que le champ magnétique soit le plus homogène possible [35,77].

Nombreuses sont les méthodes d'optimisation. On peut cependant les classer en deux grandes catégories: les méthodes *déterministes* et méthodes *stochastiques*. Dans la première classe, on rencontre toutes les méthodes qui cherchent le minimum d'une fonction (*représentant le coût de la solution courante*) en se basant sur la connaissance d'une direction de recherche, donnée par le gradient de cette fonction coût. Bien sûr, ces méthodes seront toujours applicables et même recommandées pour la résolution des problèmes d'optimisation, lorsque la solution cherchée est réputée proche de la solution connue (*point de départ*). Dans bien des applications en électromagnétisme, la fonction à optimiser a plusieurs minima [37,35,45,77]. Dans ces cas, ce type de méthode ne peut conduire à la solution recherchée, sauf quand le point de départ est par hasard voisin de la solution globale. C'est sans doute là une très belle coïncidence!

Les méthodes stochastiques sont l'alternative pour résoudre ces problèmes à plusieurs minima. Nous avons étudié de près les algorithmes génétiques (*genetic algorithm*) [34,44,89,90], de recuit simulé (*simulated annealing*) [2,49,58,77,92], de stratégie d'évolution [35,56,69] et Tabu [33,46]: ils sont capables de trouver le minimum global d'une fonction même dans des cas très difficiles, alors que la fonction considérée présente des milliers de minima relatifs. Il y a un prix à payer, en *temps de calcul*, qui peut être élevé: ceci est particulièrement vrai dans notre domaine, puisque le calcul de la performance de chaque

nouvelle solution proposée par le processus aléatoire (*évaluation de la fonction coût*) nécessite la résolution du problème d'électrostatique associé. Heureusement ces méthodes, et plus particulièrement l'algorithme génétique, se prêtent bien à la programmation parallèle.

Nous allons dans ce chapitre étudier les deux types de méthodes. Parmi les méthodes déterministes, nous avons choisi la méthode du lagrangien augmenté, qui est une technique d'optimisation basée sur la transformation du problème d'origine (*problème d'optimisation non linéaire sous contraintes*). Nous résolvons à chaque itération le problème transformé (*problème non linéaire sans contraintes*) en employant la méthode de la région de confiance (*trust region method*). Dans la littérature, ces deux méthodes ont été employées ensemble pour la première fois il y a peu du temps par Sunar et Belegundu, en mécanique des structures [81]. La contribution originale de notre travail à cette configuration est double: son application en électromagnétisme (*plus précisément en électrostatique*) et l'emploi de l'algorithme de Heben-Moré [28] pour la résolution du sous problème quadratique sans contraintes dans l'algorithme de la région de confiance [88,89].

En ce qui concerne les algorithmes stochastiques, nous avons choisi l'algorithme génétique et l'algorithme du recuit simulé. La facilité de programmation et les bases théoriques passionnantes de ces deux algorithmes nous ont beaucoup motivé.

L'algorithme génétique, développé à partir de l'analogie entre l'optimisation et l'évolution naturelle, est très puissant. En employant des opérations de base très simples (*reproduction, croisement, mutation et inversion*), il est capable de trouver le minimum global, ou au moins un minimum local qui en est très proche. Nous pensons être parmi les premiers à employer cet algorithme pour optimiser des dispositifs en électromagnétisme, où l'évaluation de la fonction coût est faite à partir des résultats fournis par un code de calcul de champ [89,90].

L'algorithme de recuit simulé est davantage connu en électromagnétisme. Néanmoins, rares sont les applications où le calcul de la fonction objectif est coûteux. C'est sans doute lié au grand nombre de calculs de fonction qui est normalement nécessaire pour atteindre le minimum. Cet algorithme a été développé par analogie entre le processus du recuit d'un solide en thermodynamique et le processus d'optimisation. Au début du processus une "température" élevée est admise et des mouvements (*variations*) aléatoires sont réalisés pour chaque paramètre d'optimisation. Pour chacun de ces mouvements, la fonction objectif est évaluée et comparée avec la valeur antérieure. S'il y a un gain, les valeurs courantes des paramètres sont sauvegardées. Sinon, ils peuvent l'être quand même, à condition que la probabilité de Boltzmann ($\exp(-DE/TEMP)$, où *DE* est la différence entre les valeurs courante et précédente de la fonction objectif, et *TEMP* est le paramètre qui simule la température) soit supérieure à un nombre aléatoire généré uniformément entre 0 et 1. Ce processus est répété pendant un nombre donné de cycles, puis la "température" est réactualisée et de nouveaux cycles sont réalisés. La séquence des points générés converge normalement vers le

minimum global. Cet algorithme très simple a été développé au départ pour résoudre des problèmes d'optimisation *discrets*. Son application à la résolution de problèmes des milieux continus pose un problème majeur: le mouvement aléatoire, qui était simplement la permutation des solutions possibles dans une liste de valeurs, est maintenant remplacé par des mouvements qui sont des *pas* de déplacements. La question se pose alors de la taille de ce pas. Bien sûr, à mesure que le minimum s'approche, il faut faire des pas de plus en plus petits. Il faut donc trouver une procédure adéquate pour la mise à jour des pas de déplacement durant le refroidissement. Nous apportons ici une contribution originale, qui consiste à faire le couplage entre l'algorithme de recuit simulé classique et la méthode appelée TABU: c'est notre *algorithme du recuit simulé modifié MSA* [92].

Finalement, le couplage entre les algorithmes stochastiques et l'algorithme du lagrangien augmenté seront proposés (GA-ALM et MSA-ALM). Les deux algorithmes hybrides ont pour objet la recherche du minimum global sans payer le prix élevé d'un algorithme stochastique isolé. Ce couplage présente bien entendu un inconvénient majeur, qui est la perte d'une caractéristique très séduisante des algorithmes stochastiques: pas de calcul des dérivées! Comme nous le verrons, la grande question liée à ce couplage est de trouver le bon critère de commutation entre les deux algorithmes. Il semblerait malheureusement que la réponse dépende du problème!

Avant de commencer l'étude même des méthodes d'optimisation, nous ferons un rappel de la formulation des problèmes non-linéaires sous contraintes et de leur transformation en des problèmes non linéaires *sans* contraintes, car toutes les techniques que nous allons étudier nécessitent d'une façon ou d'une autre la transformation de ce problème.

II.1. FORMULATION DU PROBLEME D'OPTIMISATION.

L'optimisation en ingénierie consiste à résoudre un problème d'optimisation non linéaire avec des contraintes d'égalité et d'inégalité, les paramètres d'optimisation (*variables de projet*) étant limités entre des valeurs minimales et des valeurs maximales (*contraintes de projet*). Ce problème d'une façon général peut être formulé par le problème \mathbf{P}_1 [31,55,85]:

$$\mathbf{P}_1 \Rightarrow \begin{cases} \min_{\mathbf{p}} & f(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \\ \text{avec} & \mathbf{g}_i(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0} & \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{l} \\ & \mathbf{g}_i(\mathbf{p}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} & \mathbf{i} = \mathbf{l} + \mathbf{1}, \mathbf{m} \\ & \mathbf{p}_{j\min} \leq \mathbf{p}_j \leq \mathbf{p}_{j\max} & \mathbf{j} = \mathbf{1}, \mathbf{k} \end{cases} \quad (78)$$

où \mathbf{p} est un $\mathbf{k} \times \mathbf{1}$ vecteur de paramètres d'optimisation, \mathbf{y} est un $\mathbf{N} \times \mathbf{1}$ vecteur de variables (*par exemple: champ électrique, potentiel, etc.*), fonction parfois implicite des paramètres d'optimisation, qui peuvent provenir d'un code d'analyse des milieux continus. Le nombre \mathbf{N} est un entier désignant le nombre des points test pour vérification de la fonction objectif $f(\mathbf{p}, \mathbf{y})$ et les fonctions $\mathbf{g}_i(\mathbf{p}, \mathbf{y})$ représentent les contraintes d'inégalité pour $\mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{l}$ et d'égalité pour $\mathbf{i} = \mathbf{l} + \mathbf{1}, \mathbf{m}$.

Le lagrangien ou la fonction lagrangienne pour le problème \mathbf{P}_1 , défini en [85] est:

$$\mathbf{L}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{p}, \mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (\mathbf{g}_i(\mathbf{p}, \mathbf{x})) \quad (79)$$

où λ_i est le multiplicateur de Lagrange associé à la fonction contrainte $\mathbf{g}_i(\mathbf{p}, \mathbf{y})$. Les conditions nécessaires au première ordre pour qu'un point réalisable \mathbf{p}^* soit un minimum relatif du problème \mathbf{P}_1 sont connues comme les conditions nécessaires de Kuhn et Tucker [54,55]:

$$\lambda_i \geq \mathbf{0} \quad \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{l} \quad (80.a)$$

$$\nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{L}(\mathbf{p}^*, \lambda) = \nabla_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{g}_i(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0} \quad (80.b)$$

$$\lambda_i \mathbf{g}_i(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0} \quad \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{l} \quad (80.c)$$

où les variables \mathbf{y} ont été omises pour simplifier l'écriture des équations.

L'équation (80.a) impose que les multiplicateurs de Lagrange associés aux fonctions contraintes d'inégalités aient des valeurs positives. Ceux associés aux fonctions contraintes d'égalité peuvent avoir des valeurs positives ou négatives.

L'équation (80.b) impose simplement la condition du gradient nul sur le point \mathbf{p}^* , solution du problème \mathbf{P}_1 . Enfin, la dernière condition, qui impose la nullité du produit entre le multiplicateur de Lagrange et la contrainte d'inégalité correspondante, est équivalente à dire que le multiplicateur a une valeur non nulle seulement si la contrainte est active ($\mathbf{g}_i(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$).

Dans la suite, pour simplifier la présentation de la méthode basée sur la transformation du problème originel, le problème d'optimisation \mathbf{P}_1 sera remplacé pour le

problème P_2 , lequel est le problème P_1 réécrit en omettant la variable y et les contraintes de projet:

$$P_2 \Rightarrow \begin{cases} \min_{\mathbf{p}} & f(\mathbf{p}) \\ \text{avec} & \mathbf{g}_i(\mathbf{p}) \leq \mathbf{0} \quad i = 1, l \\ & \mathbf{g}_i(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad i = l+1, m \end{cases} \quad (81)$$

II.2. METHODES DE TRANSFORMATION.

Dans toutes les méthodes de transformation, la fonction objectif et les contraintes sont rassemblées dans une fonction de transformation Φ [4,6,7,85]:

$$\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = f(\mathbf{p}) + \mathbf{P}(\mathbf{g}(\mathbf{p}), \mathbf{r}) \quad (82)$$

\mathbf{P} est la fonction de pénalité, dont l'action et l'amplitude de pénalisation sont contrôlées par le paramètre de pénalités \mathbf{r} [7,74,85]. L'intérêt dans ce type de transformation est clair: si Φ et \mathbf{r} sont bien choisis, le problème pourrait être résolu en utilisant un algorithme d'optimisation sans contrainte, pour lequel dans la limite de κ tendant vers l'infini, le vecteur des variables de projet \mathbf{p}^κ tendra vers la solution optimale du problème \mathbf{p}^* , où κ est un nombre entier désignant un processus séquentiel.

II.3. METHODE DETERMINISTE.

La méthode des multiplieurs, aussi appelée méthode de la fonction lagrangienne augmentée (ALM), est basée sur une transformation du problème d'origine, où la fonction objectif et les fonctions contraintes sont rassemblées (*incluses*) dans une seule fonction appelée fonction de transformation. Le problème originel d'optimisation non linéaire contraint est donc remplacé par un problème d'optimisation non linéaire sans contrainte. La suite des minimaux, solution du problème non contraint, tend vers le minimum du problème originel. Ainsi la solution est-elle trouvée en cherchant le minimum d'une suite de fonctions sans contrainte.

Ce type d'algorithme a été développé pour éviter quelques uns des inconvénients des méthodes de pénalités. Ces méthodes, faciles à programmer, donnent généralement de bons résultats, mais elles conduisent à un mauvais conditionnement numérique au voisinage des limites entre domaines admissibles (*ou réalisables*) et non admissibles (*ou non réalisables*). Cette caractéristique est surtout liée à la nécessité d'un facteur de pénalisation très élevé et à la discontinuité du gradient de la fonction de pénalisation [55, 83, 85].

La méthode **ALM** a simultanément été proposée par Hestenes et Powell à la fin des années 60, pour résoudre le problème d'optimisation non linéaire avec contraintes d'égalité

(PNLCE) [42,65]. Plus tard, Rockafellar a ajouté à cette méthode le terme de pénalité pour les problèmes PNL avec contraintes d'inégalité (PNLCI) [70]. Ensuite, plusieurs auteurs l'ont étudiée et plusieurs modifications ont été suggérés. D'excellentes synthèses des développements apportés à ces méthodes ont été publiées par Arora *et al* et Fletcher [4,26,27]. Le travail d'Arora est beaucoup plus récent; il a été écrit en ayant en vue l'application de cette méthode pour résoudre des problèmes en ingénierie.

Nous présenterons d'abord la formulation du problème d'optimisation; puis les méthodes de transformation, en particulier les méthodes de pénalité intérieure et extérieure, qui sont à l'origine de la méthode des multiplieurs. Le but est de mieux les connaître pour comprendre, par rapport à elles, les avantages de la méthode des multiplieurs que nous étudierons ensuite.

II.3.1. Méthodes de pénalités intérieure et extérieure.

Les méthodes de transformation séquentielle sont habituellement appelées SUMT (*Sequentiel Unconstrained Minimization Techniques*) [25,74].

Dans la première classe, dite de pénalité intérieure, la fonction de pénalisation est choisie de telle façon que la possibilité de réalisation soit garantie dans tous les processus de recherche du minimum. Cette caractéristique est très importante, en cas d'arrêt prématuré de l'algorithme d'optimisation, la solution est toujours dans le domaine admissible.

Dans la seconde classe, dite de pénalité extérieure, la recherche du point minimum a lieu aussi dans le domaine interdit [4,74,83]. L'avantage de cette méthode est que le point de départ peut être défini dans n'importe quelle région.

La fonction de transformation est bien sûr définie selon le type de méthode employé. Dans le cas de la pénalité intérieure, on cherche à définir la fonction $\Phi(\mathbf{p},\mathbf{r})$ de telle sorte que, plus la contrainte devient active, c'est-à-dire plus le point \mathbf{p}^k se rapproche de la frontière, plus la fonction de pénalisation $\mathbf{P}(\mathbf{g}(\mathbf{p}),\mathbf{r})$ croit et par conséquent, moins $\Phi(\mathbf{p},\mathbf{r})$ a des chances d'être au minimum. Cette caractéristique montre que cette technique ne convient pas pour résoudre les problèmes contraints par égalité [74,83].

Les fonctions de pénalisation intérieure les plus employées dans la littérature sont:

a) **Fonction inverse** [14,74]:

$$\mathbf{P}(\mathbf{g}(\mathbf{p}),\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathbf{r}} \sum_{i=1}^l \frac{-1}{\mathbf{g}_i(\mathbf{p})} \quad (83)$$

b) **Fonction logarithmique** [30,74]:

$$\mathbf{P}(\mathbf{g}(\mathbf{p}),\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathbf{r}} \sum_{i=1}^l -\log(-\mathbf{g}_i(\mathbf{p})) \quad (84)$$

La fonction de pénalisation extérieure la plus populaire est:

$$P(\mathbf{g}(\mathbf{p}), \mathbf{r}) = \mathbf{r} \sum_{i=1}^l [\mathbf{g}_i(\mathbf{p})]_+^2 \quad (85)$$

où $[\mathbf{g}_i(\mathbf{p})]_+ = \max(\mathbf{g}_i(\mathbf{p}), 0)$ [7,74,85].

Dans les deux techniques présentées ci-dessus, on peut montrer que, lorsque \mathbf{r}^k tend vers l'infini, \mathbf{p}^k tend vers \mathbf{p}^* , \mathbf{p}^* étant un minimum du problème [7,74,85].

La fonction de pénalisation intérieure présente l'avantage de toujours conduire à une séquence de solutions réalisables. Néanmoins, elle a l'inconvénient majeur d'être discontinue sur l'interface entre les domaines admissibles et interdits. En plus, le point de départ doit obligatoirement être dans la région admissible, ce qui conduit à la nécessité d'un algorithme supplémentaire pour le trouver.

La fonction de pénalisation extérieure est continue dans les deux domaines et aussi sur l'interface entre eux, mais elle présente l'inconvénient de conduire à l'optimum réalisable seulement quand \mathbf{r} tend vers l'infini [85].

Une fonction de pénalisation, continue dans tous les domaines, qui conduise à une séquence de solutions réalisables meilleure que les précédentes, a été suggérée par Kavlie et Moe [48*,74]:

$$P(\mathbf{g}(\mathbf{p}), \mathbf{r}) = \frac{1}{\mathbf{r}} \sum_{i=1}^l \mathbf{p}_i(\mathbf{g}(\mathbf{p})) \quad (86.a)$$

avec:

$$\mathbf{p}_i(\mathbf{g}(\mathbf{p})) = \begin{cases} -1 & \text{si } \mathbf{g}_i(\mathbf{p}) < \varepsilon_0 \\ \mathbf{g}_i(\mathbf{p}) & \\ -\frac{2\varepsilon_0 - \mathbf{g}_i(\mathbf{p})}{\varepsilon_0^2} & \text{si } \mathbf{g}_i(\mathbf{p}) > \varepsilon_0 \end{cases} \quad (86.b)$$

où ε_0 est un petit nombre négatif qui désigne le point de transition entre les deux fonctions dans l'équation (86.b). La première équation (membre de droite) est une fonction de pénalisation intérieure; la seconde est celle qui permet de dépasser l'interface entre les domaines. Les techniques employant cette méthode sont dites de pénalités intérieure étendue [15,39,83,85].

Haftka et Starnes ont proposé un paramètre ε_0 qui présente l'intérêt de garantir une pente positive pour la fonction de transformation au passage de la frontière entre les domaines admissible et interdit [39]. D'autres modifications importantes y ont été apportées, par exemple l'introduction d'une fonction de pénalisation étendue quadratique [39] ou d'une fonction de pénalisation variable [68,85].

Le fait que la fonction de transformation n'a qu'un paramètre de pénalité pour toutes les contraintes peut conduire à des difficultés numériques, car les contraintes peuvent avoir des amplitudes et des variations complètement différentes. La normalisation des contraintes

permet d'éviter ce problème, puisqu'elle conduit à des amplitudes de variation des contraintes de l'ordre de l'unité. Outre le fait d'avoir un seul paramètre de pénalité, Vanderplaats remarque la difficulté pour choisir sa valeur initiale. Ce choix est très important car de lui dépend l'efficacité de tous les processus d'optimisation [85].

Les méthodes de transformation (*SUMT*) sans les multiplicateurs de Lagrange ont fait l'objet de nombreux développements ces dernières années. Cela n'a pas empêché Powell d'affirmer qu'elles sont obsolètes [66,85].

II.3.2. Méthode du Lagrangien augmenté.

La principale motivation dans l'étude des méthodes de transformation a sans doute été de réduire la dépendance de ces algorithmes par rapport aux paramètres de pénalisation. La méthode du Lagrangien augmenté, qui converge vers l'optimum sans nécessiter un paramètre de pénalisation tendant vers l'infini, est l'aboutissement de cette étude.

Nous présenterons cette méthode d'abord en prenant les problèmes sous contraintes d'égalité, puis les problèmes sous contraintes d'inégalité et, finalement, les deux algorithmes couplés pour résoudre le problème général d'optimisation non linéaire sous contraintes.

II.3.2.1. Problème sous contrainte d'égalité (Powell - Hestenes).

Le problème d'optimisation concernant cette étude est formulé comme:

$$P_3 \Rightarrow \begin{cases} \min_{\mathbf{p}} & f(\mathbf{p}) \\ \text{avec} & \mathbf{g}_i(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad i = 1, l \end{cases} \quad (87)$$

Le nombre de contraintes doit être inférieur au nombre de paramètres d'optimisation pour que le problème ait une signification. Si $l = n$, il s'agit simplement de résoudre le système d'équations non linéaires défini par les contraintes $\mathbf{g}_i(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$. Si $l > n$, on aura un problème avec un nombre d'équations plus grand que le nombre d'inconnues, par conséquent il aura un nombre infini de solutions.

Pour résoudre le problème P_3 ci-dessus, Powell a suggéré la fonction de pénalisation [67]:

$$P(\mathbf{p}, \theta, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l r_i [\mathbf{g}_i(\mathbf{p}) + \theta_i]^2 \quad (88)$$

où $\theta \in \mathbf{R}^l$ et $\lambda_i = r_i \theta_i^*$ ($i = 1, l$) sont les multiplicateurs de Lagrange correspondant au point de minimum \mathbf{p}^* (le facteur 1/2 a été ajouté par Fletcher à l'équation ci-dessus [26, 27]).

La fonction de transformation pour le problème P_3 s'écrit:

$$\Phi(\mathbf{p}, \theta, \mathbf{r}) = f(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l r_i [\mathbf{g}_i(\mathbf{p}) + \theta_i]^2 \quad (89)$$

Cette fonction est la fonction lagrangienne augmentée, comme on peut clairement vérifier si on l'écrit autrement:

$$\Phi(\mathbf{p}, \theta, \mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^1 \lambda_i \mathbf{g}_i(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^1 r_i [\mathbf{g}_i^2(\mathbf{p}) + \theta_i^2] \quad (90)$$

où les deux premiers termes à droite correspondent à la fonction lagrangienne classique (équation (79)) et le dernier terme correspond à la pénalisation extérieure.

Dans la même année, Hestenes a suggéré pour résoudre le problème \mathbf{P}_3 , la fonction de transformation [42,43]:

$$\Psi(\mathbf{p}, \lambda, \mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^1 \lambda_i \mathbf{g}_i(\mathbf{p}) + \frac{\mathbf{r}}{2} \sum_{i=1}^1 [\mathbf{g}_i^2(\mathbf{p})] \quad (91)$$

où $\lambda \in \mathbf{R}^1$. Fletcher a observé que les deux fonctions Φ et Ψ sont équivalentes, sauf que Hestenes a supposé a priori que les contraintes sont normalisées [26, 27]. Ainsi, on peut écrire:

$$\Phi(\mathbf{p}, \theta, \mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{p}, \lambda, \mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^1 r_i \theta_i^2 \quad (92)$$

La différence entre les deux fonctions proposées par Powell et Hestenes ne dépend pas du paramètre d'optimisation \mathbf{p} . Donc, la solution \mathbf{p}^* est la même, mais avec des valeurs différentes pour Φ et Ψ .

La condition nécessaire, au première ordre, pour que \mathbf{p}^* soit un minimum local, est d'après Powell [67]:

$$\nabla \Psi(\mathbf{p}^*, \lambda^*, \mathbf{r}) = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{p}^*) + \sum_{i=1}^1 \lambda_i^* \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{p}^*) + \sum_{i=1}^1 r_i \mathbf{g}_i(\mathbf{p}^*) \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0} \quad (93)$$

où le gradient a été appliqué à fonction lagrangienne proposée par Hestenes, et le paramètre de pénalisation \mathbf{r} remplacé par un vecteur \mathbf{r}_i de paramètres de pénalisation.

Il a montré aussi que, si \mathbf{p}^* satisfait au deuxième ordre les conditions suffisantes pour un minimum, il y a un \mathbf{r}' tel que $\mathbf{r} \geq \mathbf{r}'$ où $\nabla^2 \Psi(\mathbf{p}^*, \lambda^*, \mathbf{r})$ est définie positive: \mathbf{p}^* n'est donc pas seulement un point stationnaire mais aussi un point de minimum local de $\Psi(\mathbf{p}, \lambda^*, \mathbf{r})$.

L'importance d'un choix judicieux du paramètre λ_i est mis en évidence par les deux conditions suivantes:

- Si $\lambda_i = \mathbf{0}, i=1,1$ la fonction de pénalisation proposée par Hestenes devient la fonction de pénalisation extérieure classique (la fonction de pénalisation proposée par Powell devient la fonction de pénalisation extérieure au terme quadratique en θ près);

- Si $\lambda_i = \lambda_i^*, i=1,1$ l'équation (93) se vérifie pour \mathbf{p}^* , et on peut noter qu'elle n'est pas fonction du paramètre de pénalisation \mathbf{r} (problème \mathbf{P}_3).

Cette dernière condition, l'indépendance de l'équation (93) par rapport à \mathbf{r} , conduit à deux très importantes conséquences [83,85]:

- 1- Si λ^* est connu a priori, alors la solution peut être obtenue en une seule minimisation sans contraintes pour un \mathbf{r} fixé;
- 2- Comme $\Psi(\mathbf{p}^*, \lambda^*, \mathbf{r})$ ne dépend pas de \mathbf{r} , ce paramètre n'a pas besoin d'être modifié pendant la minimisation sans contraintes, ce qui permet d'éviter un mauvais conditionnement numérique.

Le problème qui se pose est que nous ne connaissons pas le vecteur λ^* a priori. Néanmoins, on peut envisager une formule itérative pour la réactualisation de $\lambda^{\kappa+1}$ à l'itération $\kappa+1$ par rapport à λ^κ dans l'itération κ .

II.3.2.2. Formules pour réactualisation de λ^k

De nombreuses études ont déjà été effectuées pour trouver quelle est la façon la plus efficace pour corriger les multiplicateurs de Lagrange à l'itération $\kappa+1$. Les propriétés de convergence des algorithmes basés sur cette méthode sont dépendantes de la procédure sur laquelle leur réactualisation est basée [4,26,27].

La façon la plus usuelle de programmer la méthode du lagrangien augmenté consiste à faire la minimisation de la fonction lagrangienne à l'itération κ en laissant fixes les valeurs des multiplicateurs de Lagrange et des paramètres de pénalités. Suite à la minimisation à l'itération κ , les valeurs sont réactualisées. Cette façon de faire est intéressante car n'importe quelle méthode efficace pour la minimisation sans contrainte peut être employée.

La formule la plus simple pour réactualiser les multiplicateurs de Lagrange a été suggérée indépendamment par Powell (équation (94.a)) et Hestenes (équation (94.b)).

$$\theta_i^{\kappa+1} = \theta_i^\kappa + \mathbf{g}_i(\mathbf{p}^\kappa) \quad \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{l} \quad (94.a)$$

$$\lambda_i^{\kappa+1} = \lambda_i^\kappa + \mathbf{r}_i \mathbf{g}_i(\mathbf{p}^\kappa) \quad \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{l} \quad (94.b)$$

Ces deux formules sont bien sûr équivalentes car $\lambda_i = \mathbf{r}_i \theta_i$.

Une procédure de réactualisation basée sur la méthode de Newton peut être envisagée si les dérivées première et seconde sont faciles à calculer. La formule basée sur cette méthode s'écrit [26,27]:

$$\lambda^{\kappa+1} = \lambda^\kappa + [\nabla \mathbf{g}^T \mathbf{H}^{-1} \nabla \mathbf{g}]^{-1} \mathbf{g} \quad \mathbf{g} = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_l]^T \quad (95)$$

où λ^κ est le $\mathbf{l} \times \mathbf{1}$ vecteur des multiplicateurs de Lagrange à l'itération κ , \mathbf{g} est le $\mathbf{l} \times \mathbf{1}$ vecteur des contraintes d'égalité et $\mathbf{H} = \nabla^2 \Psi(\mathbf{p}, \lambda, \mathbf{r})$ est la matrice hessienne. On peut noter que toutes les dérivées sont prises par rapport aux paramètres d'optimisation \mathbf{p} . L'inconvénient de cette

procédure réside dans la nécessité de calculer les dérivés, ce qui devient très défavorable pour des applications en ingénierie, la fonction lagrangienne augmentée étant dans la plupart des cas une fonction implicite de ces paramètres.

La procédure de Hestenes-Powell peut sans doute être dérivée de celle basée sur la méthode de Newton. En effet, pour une valeur très élevée des paramètres de pénalité \mathbf{r} , l'approximation ci-dessous est valable:

$$[\nabla \mathbf{g}^T \mathbf{H}^{-1} \nabla \mathbf{g}]^{-1} \approx \mathbf{R} \quad (96)$$

où \mathbf{R} est une matrice diagonale dont l'élément \mathbf{R}_i tend vers \mathbf{r}_i [26,27].

Le fait que la procédure de Hestenes-Powell ne nécessite pas de calcul de dérivée la rend parfaitement adéquate pour des applications en ingénierie, comme a remarqué Arora [4].

Plusieurs procédures ont été développées dans les années 80. Nous ne les présenterons pas toutes, mais nous allons quand même en lister quelques unes, qui ont été répertoriées par Arora. Les noms indiqués à gauche des formules indiquent ceux qui, dans la littérature, sont reconnus comme les probables auteurs [4]:

$$(Hestenes-Powell [42,65]): \quad \lambda^{k+1} = \lambda^k + \mathbf{R} \mathbf{g} \quad (97.a)$$

$$(Rosen [73]): \quad \lambda^{k+1} = -[\nabla \mathbf{g}^T \nabla \mathbf{g}]^{-1} \nabla \mathbf{g}^T \nabla \mathbf{f} \quad (97.b)$$

$$(Miele et al [60]): \quad \lambda^{k+1} = [\nabla \mathbf{g}^T \nabla \mathbf{g}]^{-1} [\mathbf{g} - \nabla \mathbf{g}^T \nabla \mathbf{f}] \quad (97.c)$$

$$(Buys [13]): \quad \lambda^{k+1} = \lambda^k + [\nabla \mathbf{g}^T \mathbf{H}^{-1} \nabla \mathbf{g}]^{-1} \mathbf{g} \quad (97.d)$$

$$(Tapia [82]): \quad \lambda^{k+1} = [\nabla \mathbf{g}^T \mathbf{D}^{-1} \nabla \mathbf{g}]^{-1} [\mathbf{g} - \nabla \mathbf{g}^T \mathbf{D}^{-1} \nabla \mathbf{f}] - \mathbf{R} \mathbf{g} \quad (97.e)$$

$$(Tapia [82]): \quad \lambda^{k+1} = \lambda^k + [\nabla \mathbf{g}^T \mathbf{D}^{-1} \nabla \mathbf{g} + \mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{g} - \nabla \mathbf{g}^T \mathbf{D}^{-1} \nabla \Psi] \quad (97.f)$$

Dans les équations ci-dessus, λ , \mathbf{g} , \mathbf{H} et \mathbf{R} sont définis comme dans les équations (95) et (96). La matrice \mathbf{D} est la matrice hessienne approchée, obtenue par exemple par une méthode de quasi-Newton (BFGS ou DFP). La matrice \mathbf{A} est une matrice $|\mathbf{x}|$, par exemple la matrice identité [4].

Dans les procédures de réactualisation \mathbf{b} et \mathbf{c} , il faut connaître les dérivées premières; pour \mathbf{d} , \mathbf{e} et \mathbf{f} , il faut en plus les dérivées secondes. La procédure proposée par Powell-Hestenes est la seule qui n'exige pas de calcul des dérivées: pour cette raison, elle est considérée comme la meilleure pour les applications de l'ingénieur.

II.3.2.3. Paramètres de pénalité

Les paramètres de pénalité jouent un rôle important dans l'algorithme basé sur la méthode du lagrangien augmenté, car la convergence globale pour ces algorithmes est assurée par la réactualisation des paramètres \mathbf{r}_i . On peut normalement envisager l'utilisation d'un scalaire \mathbf{r} pour remplacer le vecteur des paramètres de pénalité. Néanmoins, l'utilisation d'un

paramètre de pénalité associé à chaque contrainte est avantageuse car les fonctions peuvent avoir des valeurs très différentes (*elles peuvent ne pas être normalisées*). En plus, on peut envisager le développement de schémas de réactualisation dépendants des valeurs des contraintes.

Les principaux critères pour le choix et la réactualisation des paramètres de pénalité trouvés dans la littérature sont résumés ci-dessous [4,11,26]:

- ◆ Les paramètres doivent être supérieurs à une certaine limite, de façon à garantir des conditions suffisantes du deuxième ordre;
- ◆ Leurs valeurs initiales ne doivent pas être trop grandes, pour éviter un mauvais conditionnement numérique;
- ◆ La réactualisation doit permettre une augmentation significative de leurs valeurs, pour éviter un faible taux de convergence.

Une stratégie permettant de réactualiser les paramètres de pénalisation tout en assurant la convergence globale a été suggéré par Powell. Cette stratégie peut être résumée ainsi:

- ◆ Si $\|g^{k+1}\|_{\infty} / \|g^k\|_{\infty} > 0.25$, alors quelques r_i 's doivent être augmentés (*par exemple par un facteur de 10*);
- ◆ Quand $g_i < \epsilon$ et $r_i > r_{\infty}$ ($i=1, \dots, l$), il est possible de montrer que les résultats de la convergence locale donnent toujours des valeurs $\|g^{k+1}\|_{\infty} / \|g^k\|_{\infty} < 0.25$. Dans ce cas, les r_i sont laissés constants et seuls les multiplicateurs de Lagrange sont réactualisés.

II.3.2.4. Problème sous contrainte d'inégalité (Rockafellar - Fletcher).

La généralisation de la méthode du lagrangien augmenté a été en premier suggérée par Rockafellar pour traiter les problèmes d'optimisation avec contraintes d'inégalité [70,71].

La fonction lagrangienne proposée par Rockafellar est en réalité une modification de la fonction proposée par Hestenes pour les problèmes avec contrainte d'égalité. Cette fonction s'écrit:

$$\Psi(\mathbf{p}, \lambda, \mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^l \begin{cases} \lambda_i g_i(\mathbf{p}) + 0.5 r_i g_i^2(\mathbf{p}) & \text{Si } g_i(\mathbf{p}) \geq -\lambda_i / r_i \\ -0.5 \lambda_i^2 / r_i & \text{Si } g_i(\mathbf{p}) < -\lambda_i / r_i \end{cases} \quad (98)$$

Plus tard, Fletcher a proposé une fonction lagrangienne augmentée pour les problèmes à contraintes d'inégalité très proche de celle proposé par Rockafellar [26,27]:

$$\Phi(\mathbf{p}, \theta, \mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l r_i [g_i(\mathbf{p}) + \theta_i]_+^2 \quad (99)$$

où $[g_i(\mathbf{p})+\theta_i]_+ = \max(g_i(\mathbf{p})+\theta_i, 0)$.

Comme dans le cas précédent, la différence entre les lagrangiens Φ et Ψ (équation (92)) est:

$$\Phi(\mathbf{p}, \theta, \mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{p}, \lambda, \mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l r_i \theta_i^2 \quad (100)$$

Il est facile voir que, si $\mathbf{p}^*(\lambda, \mathbf{r})$ est la solution de Ψ , alors $\mathbf{p}^*(\lambda, \mathbf{r}) = \mathbf{p}^*(\theta, \mathbf{r})$ où $\mathbf{p}^*(\theta, \mathbf{r})$ est la solution de Φ .

II.3.2.5. Réactualisation des multiplicateurs de Lagrange λ^k

La mise à jour des multiplicateurs de Lagrange peut être réalisée en employant une procédure basée sur la méthode de Newton, d'une manière tout à fait analogue au cas du problème à contrainte d'égalité. Nous pouvons donc écrire:

$$\begin{aligned} \lambda^{k+1} &= \lambda^k + (\nabla \mathbf{g}^T \mathbf{H}^{-1} \nabla \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g} & \text{Si } i \in \mathbf{I}_{\text{ineg}}(\lambda^k) \\ \lambda_i^{k+1} &= \lambda_i^k + \max(\mathbf{r}_i \mathbf{g}_i, -\lambda_i^k) & \text{Si } i \notin \mathbf{I}_{\text{ineg}}(\lambda^k) \end{aligned} \quad (101)$$

où $\mathbf{I}_{\text{ineg}}(\lambda^k)$ est l'ensemble de contraintes actives [26].

L'équation (96) est encore valable dans le cas de paramètres de pénalités très élevés. Ainsi, la procédure de réactualisation ci-dessus se résume à:

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \max(\mathbf{r}_i \mathbf{g}_i, -\lambda_i^k) \quad i = 1, \dots, l \quad \text{ou:} \quad (102.a)$$

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + \max(\mathbf{g}_i, -\theta_i^k) \quad i = 1, \dots, l \quad (102.b)$$

Cette procédure est simplement l'adaptation de la procédure de Powell-Hestenes pour les problèmes à contraintes d'inégalité.

Il y a d'autres procédures de réactualisation possibles, mais il ne s'agit que de variantes de celles déjà présentées pour les problèmes à contraintes d'égalité.

L'avantage de la formule (102) est sa simplicité, et le fait de ne pas avoir besoin de calculer la dérivée d'une contrainte individuelle.

Dans la littérature on ne trouve pas de comparaisons suffisantes entre ces divers types de procédures de mise à jour des multiplicateurs de Lagrange pour nous permettre d'arriver à des conclusions définitives. Néanmoins, Fletcher a comparé la procédure basée sur la méthode de Newton et celle de Hestenes-Powell, dans la solution des problèmes analytiques. Comme prévu, il a trouvé une performance meilleure pour la première procédure.

II.3.2.6. Problème non contraint: méthode de la région de confiance.

Récemment, Belegundu et Arora ont fait une étude comparative entre plusieurs méthodes d'optimisation, parmi lesquelles la *méthode de directions admissibles*, *méthode de pénalité extérieure quadratique*, *méthode de programmation quadratique récursive* et *méthode du lagrangien augmenté*. Ils sont arrivés à la conclusion que la méthode du lagrangien augmenté est parmi les plus fiables et les plus précises [8]. Par contre, les méthodes de linéarisation, telles que la méthode des directions admissibles et de programmation quadratique récursive (*RQP*), se sont montrées plus efficaces.

La moindre efficacité des méthodes du lagrangien augmenté a été attribuée plus tard par Sunar et Belegundu à la nécessité d'une minimisation précise du problème sans contrainte. Sunar et Belegundu ont montré que l'utilisation de la *méthode de la région de confiance* (ou *méthode des pas restreints*) augmentait son efficacité [81]. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi cette méthode pour la résolution du problème de minimisation sans contraintes.

Cette méthode est caractérisée par une région de confiance, au voisinage du point \mathbf{p}^k à l'itération k , dans laquelle on peut avoir une bonne approximation (*par série de Taylor quadratique*) de la fonction à minimiser. La fonction approchée est donc minimisée et la région est augmentée (*si la qualité est bonne*) ou réduite (*si la qualité est mauvaise*) selon la qualité de l'approximation [28].

En reprenant notre problème d'optimisation, on peut écrire que, à l'itération k , ce problème consiste à résoudre le problème sans contrainte ci-dessous:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{p}} \quad & \Phi(\mathbf{p}^k) \\ \text{avec} \quad & \mathbf{p}_{j\min} \leq \mathbf{p}_j^k \leq \mathbf{p}_{j\max} \quad \mathbf{j} = 1, k \end{aligned} \tag{103}$$

Les paramètres de pénalité \mathbf{r}_i et les multiplicateurs de Lagrange λ_i ont été omis pour simplifier l'écriture de l'équation, puisque ces paramètres ne sont pas touchés pendant l'optimisation sans contrainte.

Le problème ci-dessus peut être approché par une séquence de sous problèmes quadratiques, qui doivent être résolus à chaque itération k . L'approximation quadratique de Φ en employant la série de Taylor nous permet remplacer le problème par:

$$\begin{aligned} \min_{\delta} \quad & q^k(\delta) = \Phi(\mathbf{p}^k) + \nabla\Phi^k\delta + \frac{1}{2}\delta^T\mathbf{H}^k\delta \\ \text{avec} \quad & \|\delta\| \leq \mathbf{h}_t^k \end{aligned} \tag{104}$$

où $\delta = \mathbf{p}^{k+1} - \mathbf{p}^k$, \mathbf{H} est la matrice hessienne et \mathbf{h}_t est la taille de la région de confiance à l'itération k . Le paramètre \mathbf{h}_t doit avoir une taille telle que l'approximation de Taylor soit valable tout en prenant en compte les contraintes de projet.

Ainsi, la détermination de ce paramètre dépend de la validité de l'approximation quadratique, qui peut être mesurée par le facteur r_t défini comme:

$$\begin{aligned}
 r_t^k &= \frac{\Delta\Phi(\mathbf{p}^k)}{\Delta q^k(\delta)} \\
 &= \frac{\Phi(\mathbf{p}^k) - \Phi(\mathbf{p}^k + \delta)}{\Phi(\mathbf{p}^k) - q^k(\delta)}
 \end{aligned}
 \tag{105}$$

Ainsi, le paramètre r_t mesure la qualité de l'approximation quadratique. Plus il est proche de l'unité, meilleure est l'approximation. En pratique, si la valeur de ce paramètre est proche de l'unité, nous sommes en train de chercher le minimum dans une région très petite, ce qui gaspille du temps de calcul. Par contre, si la valeur de r_t est proche de zéro, nous sommes en dehors de la région de validité de la série de Taylor. Dans la première situation, il faut augmenter la taille de la région et dans la seconde, la réduire.

L'algorithme basé sur cette méthode a été proposé par Fletcher [28]. Postérieurement, Sunar et Belegundu l'ont utilisé pour résoudre des problèmes d'optimisation en mécanique des structures [81], en prenant un hypercube pour la définition de la taille de la région de confiance \mathbf{h}_t . Cet algorithme est donné ci-dessous.

Les constantes **0.25**, **0.75** sont arbitraires et l'algorithme ci-dessus est peu sensible à leurs valeurs. Un avantage de cette méthode est qu'elle converge pour n'importe quelle définition de la norme $\|\delta^k\|$. A la différence de Sunar et Belegundu, nous avons pour notre part pris la norme euclidienne $\|\delta^k\|_2$ pour la définition de \mathbf{h}_t , ce que nous a permis d'essayer l'algorithme très efficace de Heben-Moré dans la solution du sous-problème à l'étape 2 [28].

ETAPES	PROCEDURES
1	Etant donné \mathbf{p}^k et \mathbf{h}_t^k , déterminer $\nabla\Phi(\mathbf{p}^k)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{p}^k)$;
2	Résoudre le problème: $ \min_{\delta} \quad q^k(\delta) = \Phi(\mathbf{p}^k) + \nabla\Phi^k\delta + \frac{1}{2}\delta^T\mathbf{H}^k\delta $ avec $\ \delta\ \leq \mathbf{h}_t^k$
3	Calculer $\Phi(\mathbf{p}^k+\delta)$ et r_t ;
4	Si $r_t < 0.25$ faire $\mathbf{h}_t^{k+1} = \frac{\ \delta^k\ }{4}$. (<i>mauvaise approximation quadratique</i>) Si $r_t > 0.75$ et $\ \delta^k\ = \mathbf{h}_t^k$ faire $\mathbf{h}_t^{k+1} = 2\mathbf{h}_t^k$. (<i>bonne approximation quadratique</i>) Sinon faire: $\mathbf{h}_t^{k+1} = \mathbf{h}_t^k$. (<i>moyenne approximation quadratique</i>)
5	Si $r_t \leq 0$ faire: $\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k$ Si $r_t > 0$ faire: $\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + \delta^k$

II.3.3. Algorithme simplifié.

Nous avons programmé la méthode du Lagrangien augmenté pour l'optimisation des problèmes continus non linéaires avec contraintes. L'algorithme employé est basé sur les considérations théoriques que nous venons d'étudier. La mise à jour des multiplicateurs de Lagrange est faite en employant la procédure de Powell-Hestenes.

Cet algorithme a été proposé par Powell [65] et il a été étudié par un nombre considérable de personnes, parmi les quelles Fletcher [26], Arora *et al*[4] et Sunar et Belegundu [81] (voir page suivante).

II.4. METHODE STOCHASTIQUES.

II.4.1. Algorithme génétique.

L'analogie entre l'optimisation et les mécanismes naturels a permis le développement d'algorithmes d'optimisation appelés algorithmes génétiques (*GA's*). Ils utilisent quelques opérateurs similaires à ceux de l'évolution naturelle et de la génétique. Comme dans les mécanismes naturels, les principaux opérateurs qui affectent la constitution d'un "chromosome" (*qui peut être représenté comme une chaîne des caractères*) sont le croisement, la mutation et l'inversion.

Les *GA's* agissent sur une population (*par exemple: un ensemble de configurations géométriques réalisables*) de telle façon que les individus d'une nouvelle génération accomplissent mieux leurs missions que leurs ancêtres. Pendant le processus de reproduction, la probabilité de survie est strictement liée à la performance de chaque individu. Ceux qui ont bien accompli leurs missions ont une grande probabilité de transmettre leur matériel génétique à la génération suivante. La performance d'un individu est mesurée par une fonction que nous appellerons fonction coût, car l'algorithme génétique est naturellement formulé en terme de maximisation. Cela permet de faire la différence par rapport à la fonction objectif des méthodes lagrangien augmenté et de recuit simulé, qui sont normalement formulées en terme de minimisation.

Dans les processus de croisement, les couples de parents sont choisis aléatoirement. Des échanges de matériel génétique sont réalisés et les deux individus générés sont donc porteurs d'une partie des caractéristiques génétiques de leurs parents. De nouveaux points dans l'espace admissible sont donc testés.

ETAPES	PROCEDURES
1	<p align="center">Faire: $\kappa=0, K_{\max}=K_{\infty}$.</p> <p align="center">Choisir: $\mathbf{p}^0, \theta^1, \mathbf{r}^1$ et les scalaires $\alpha > 1, \beta > 1$ et $\varepsilon > 0$ <i>(α est employé pour forcer la convergence de l'algorithme; β est le facteur de multiplication pour augmenter les paramètres de pénalité),</i></p>
2	Faire: $\kappa=\kappa+1$;
3	Déterminer \mathbf{p}^κ que minimise $\Phi(\mathbf{p}, \theta^\kappa, \mathbf{r}^\kappa)$ <i>(minimisation sans contrainte);</i>
4	<p align="center">Calculer $\mathbf{g}_i(\mathbf{p}^\kappa) \quad i = 1, \dots, m$;</p> <p align="center">Faire: $\bar{K}_{\max} = \max \left\{ \max_{i=1, l} \left \max(\mathbf{g}_i, -\theta_i^\kappa) \right ; \max_{i=l+1, m} \mathbf{g}_i \right\}$</p>
5	<p align="center">Si $\bar{K}_{\max} \leq \varepsilon$ et $\ \nabla \Phi(\mathbf{p}^\kappa, \theta^\kappa, \mathbf{r}^\kappa)\ \leq \varepsilon$, fin. <i>(Test d'arrêt)</i> <i>(\mathbf{p}^κ est la solution);</i></p> <p align="center">Sinon détermine:</p> <p align="center">$I_{\text{ineg}} = \{i: \max(\mathbf{g}_i, -\theta_i^\kappa) > K_{\max}/\alpha, i=1, l\}$ $I_{\text{eg}} = \{i: \mathbf{g}_i > K_{\max}/\alpha, i=l+1, m\}$</p>
6	<p align="center">Si $\bar{K}_{\max} \geq K_{\max}$ <i>(pas de convergence)</i> faire:</p> <p align="center">$\mathbf{r}_i^{\kappa+1} = \beta \mathbf{r}_i^\kappa \quad i = I_{\text{eg}} + I_{\text{ineg}}$ $\theta_i^{\kappa+1} = \theta_i^\kappa / \beta \quad i = I_{\text{eg}} + I_{\text{ineg}}$</p> <p align="center">Retour en 2</p> <p align="center">Sinon <i>(convergence)</i> détermine:</p> <p align="center">$\theta_i^{\kappa+1} = \theta_i^\kappa + \max(\mathbf{g}_i, -\theta_i^\kappa) \quad i = 1, \dots, l$ $\theta_i^{\kappa+1} = \theta_i^\kappa + \mathbf{g}_i \quad i = l+1, m$</p>
7	<p align="center">Si $\bar{K}_{\max} \leq K_{\max} / \alpha$ <i>(taux de convergence souhaité)</i> faire:</p> <p align="center">$K_{\max} = \bar{K}_{\max}$</p> <p align="center">Retour en 2</p> <p align="center">Sinon <i>(taux de convergence inférieur au taux souhaité)</i> détermine:</p> <p align="center">$\mathbf{r}_i^{\kappa+1} = \beta \mathbf{r}_i^\kappa \quad i = I_{\text{eg}} + I_{\text{ineg}}$ $\theta_i^{\kappa+1} = \theta_i^\kappa / \beta \quad i = I_{\text{eg}} + I_{\text{ineg}}$ $\bar{K}_{\max} \geq K_{\max}$</p> <p align="center">Retour en 2</p>

La mutation est caractérisée pour des perturbations génétiques aléatoires. En absence de mutation, aucune caractéristique génétique nouvelle (*qui n'était pas présente précédemment dans la population*) ne pourrait apparaître.

Bien sûr, si nous envisageons d'utiliser ces opérateurs en vue de l'optimisation, nous devons avoir une représentation chromosomique des solutions possibles de notre problème, par exemple une chaîne de caractères binaires: concrètement, une chaîne **A** de longueur $l = 5$ peut être écrite comme **A = 01010**; l'ensemble des chaînes (*chromosomes*) à la génération κ est appelé population **A**(κ).

Cette méthode repose donc sur la représentation chromosomique des paramètres, le processus de reproduction et les trois principaux opérateurs croisement, mutation et inversion. Comme nous le verrons, les opérations réalisées sont très simples et nous pouvons poser la question de savoir si, en utilisant des opérations aussi simples, on peut vraiment arriver à la solution optimale d'un problème. Pour essayer de répondre à cette question et formuler mathématiquement ces opérations, Holland a introduit la notion de schéma [44] que nous présentons maintenant.

Un schéma **H** est défini comme un sous-ensemble de chaînes qui ont en commun des caractéristiques génétiques. Il peut être représenté en utilisant le symbole * pour les caractéristiques qui ne sont pas communes (*Par exemple, $H = 1*1*0$ est un schéma qui représente toutes les chaînes de longueur $l=5$ avec un 1 sur la première et la troisième positions et un 0 sur la dernière position*).

Il y a deux paramètres qui caractérisent bien les schémas: leur longueur et leur ordre. La longueur d'un schéma **H**, représenté par $l(H)$, est la distance entre la première et la dernière position occupée par l'un des caractères binaires (*0 ou 1*). Pour le schéma ci-dessus, $l(H) = 5 - 1 + 1 = 4$.

L'ordre d'un schéma **H**, représenté par $o(H)$, est défini comme le nombre de positions fixes, c'est à dire le nombre de caractères binaires existants dans **H**. Pour le schéma ci-dessus, $o(H) = 3$.

II.4.1.1. Représentation des Paramètres.

Avec ce choix de représentation, l'ensemble des variables de projet ou de paramètres d'optimisation sont donc représentés par une chaîne des caractères, sur laquelle les opérations naturelles seront faites.

Par exemple, le paramètre *rayon d'une courbe* peut être représenté par une chaîne **A** de longueur $l=5$, dont la limite supérieure est $A_s=11111$ et la limite inférieure $A_i=00000$; les valeurs réelles correspondantes sont simplement calculées en utilisant une règle de trois.

La longueur de la chaîne est évidemment choisie selon la précision requise pour la représentation des paramètres. Dans l'exemple ci-dessus, si le rayon est **A=01010** et les

limites sont **1** et **110** cm, nous avons pour **r** la valeur **1+(109/31)*10** cm car **A=01010** est égal à **10** dans la base dix et les limites **A_i** et **A_s** sont égales à **0** et **31** respectivement. La *résolution* pour cette représentation est le rapport de la différence entre les limites de la variable rayon et de la différence entre **A_i** et **A_s** (**109/31**).

S'il y a plusieurs paramètres, ils peuvent être enchaînés dans une seule séquence [34]: le premier paramètre occupe les **10** premières places, le deuxième occupe les **10** places suivantes, etc. ... L'avantage est qu'une chaîne représente une solution possible du problème, sur laquelle toutes les opérations peuvent être faites. Néanmoins, on peut envisager aussi de laisser chaque paramètre indépendant et de faire les opérations séparément. Ainsi, le premier paramètre du premier individu peut être croisé avec le premier paramètre du dernier individu, en même temps que le deuxième paramètre du premier individu peut être croisé avec le deuxième paramètre du deuxième individu. Cela nous semble présenter quelques avantages car la possibilité de tester de nouvelles solutions est grandement augmentée. L'inconvénient est que nous avons besoin d'un *vecteur* pour représenter une solution.

II.4.1.2. Reproduction.

Dans un code génétique, la reproduction consiste à sélectionner les individus d'une population **A(κ)** selon leurs performances pour participer ou non à la suite du processus. Le critère utilisé pour mesurer la performance d'un individu est la valeur d'une *fonction coût*.

Considérons la valeur **f_j** de la fonction coût pour la **j^{ème}** chaîne de caractères (**j = 1, m**) et la somme **f_s** de toutes les valeurs **f_j**. Le rapport **f_j/f_s** donne la place occupée par la **j^{ème}** chaîne dans la population. Une façon très simple de sélectionner les chaînes qui participeront à la suite du processus consiste à procéder à un tirage aléatoire pondéré, où chaque chaîne a une probabilité d'être tirée proportionnelle à cette valeur **f_j/f_s** [34].

L'importance du rôle de la reproduction dans un code génétique peut être mesurée par son effet sur la propagation d'un schéma **H** dans une population de **n** individus, entre la génération **κ** et **κ+1**. Pendant la reproduction, une chaîne est sélectionnée selon la probabilité **p_j = f_j/f_s**. Ainsi, le nombre attendu de schémas **H** à la génération **κ+1**, représenté ici par **N(H,κ+1)**, est estimé comme:

$$N(H, \kappa + 1) = \frac{f(H)}{\bar{f}_s} N(H, \kappa) \quad (106)$$

où **f(H)** et **\bar{f}_s** sont les valeurs moyennes de **f** pour les individus du schéma **H** et de la population **A(κ)** totale, respectivement.

En considérant que le schéma représente m chaînes, ces valeurs moyennes sont données par:

$$\mathbf{f}(\mathbf{H}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{f}_i \quad \text{et:} \quad (107.a)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_s = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_j \quad (107.b)$$

L'équation (106) montre que la probabilité qu'un individu à la génération $\kappa+1$ soit de type \mathbf{H} augmente comme le rapport entre les moyennes des coûts des schémas de type \mathbf{H} et de la population totale $\mathbf{A}(\kappa)$. Les schémas qui ont des coûts moyens supérieurs à celui de la population seront donc mieux représentés dans la génération . Ceux qui ont un coût moyen inférieur à la moyenne le seront moins.

La propagation d'un schéma \mathbf{H} entre les générations κ et $\kappa+K$ peut (*avec quelques hypothèses*) être estimé en utilisant l'équation (106). Pour cela, considérons sa moyenne $\mathbf{f}(\mathbf{H}) = (1+d)\bar{\mathbf{f}}_s$, où d est une constante et $\bar{\mathbf{f}}_s$ est laissée fixe entre κ et $\kappa+K$. Nous avons donc pour une valeur d stationnaire:

$$\mathbf{N}(\mathbf{H}, \kappa + K) = (1 + d)^K \mathbf{N}(\mathbf{H}, \kappa) \quad (108)$$

Ainsi la reproduction seule augmente (*ou diminue*) exponentiellement le nombre de schémas qui ont des performance au-dessus (*ou au-dessous*) de la moyenne. Mais elle n'explore pas de nouveaux points (concrètement, de nouvelles géométries) dans l'espace admissible. En ce sens, rien de nouveau n'est testé. Ce sont les autres processus de *croisement* et *mutation* qui vont vraiment permettre d'introduire de nouvelles géométries.

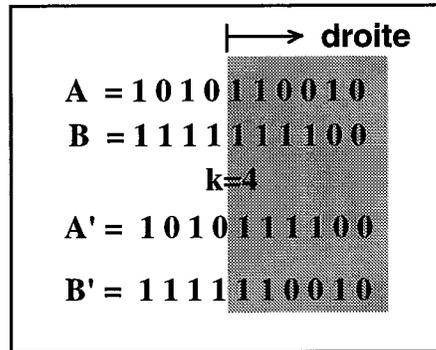
II.4.1.3. Croisement.

Les chaînes qui ont été sélectionnées dans le processus de reproduction peuvent maintenant participer à l'opération croisement. Cet opérateur agit sur deux chaînes reproductrices (*ou parents*) en échangeant des matériels génétiques, avec pour résultat deux nouvelles chaînes (*ou enfants*).

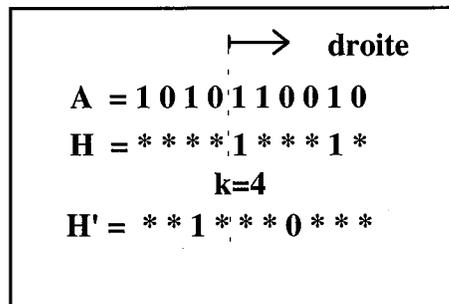
Le croisement est un processus aléatoire de probabilité p_c . La décision pour l'exécuter est prise par l'utilisation d'un générateur de nombres aléatoires à densité de probabilité uniforme entre 0 et 1 . Si le nombre généré est inférieur à p_c , l'opération a lieu. Un second nombre aléatoire compris entre 1 et $l-1$ doit être généré pour déterminer l'endroit de la chaîne où se produira le croisement. Finalement, le matériel génétique placé à la droite de la position de croisement est échangé entre les parents, ce qui donne les enfants.

Pour illustrer ce processus, considérons que les deux chaînes \mathbf{A} et \mathbf{B} , représentées en code binaire avec dix caractères chacune ($l=10$), ont été sélectionnées pour exécuter l'opération de croisement. Un nombre k est généré pour déterminer la position du croisement

($1 \leq k < 10$), par exemple $k=4$. Les matériels génétiques qui se trouvent à la droite de k sont alors échangés, ce qui donne les deux nouvelles chaînes A' et B' .



Une opération aussi simple peut-elle contribuer à la recherche de l'optimum d'un problème? Comme dans le cas précédent, essayons de voir comment un schéma particulier H est affecté par le croisement. Pour cela, considérons la chaîne A de l'exemple précédent et deux schémas H et H' qui la représentent. Admettons que la position de croisement $k = 4$ a été choisie aléatoirement.



Dans ce cas, le schéma H' pourra être détruit car les allèles sont séparés; par contre, le schéma H survivra obligatoirement parce que les deux allèles fixes se trouvent sur le même coté par rapport à la position de croisement. Par ailleurs, il est intéressant voir que le schéma H sera présent dans une seule des deux nouvelles chaînes.

Nous pouvons ainsi quantifier l'effet du croisement sur le nombre d'un schéma particulier. La probabilité p_d pour qu'un schéma soit détruit est donnée par la probabilité d'avoir la position de croisement entre la première et la dernière position fixes (*entre 1 et 0 pour H'*), c'est à dire $p_d = l(H)/(l-1)$. Si l'opération est faite avec une probabilité de croisement p_c , la probabilité d'être détruit est donc $p_d \leq p_c l(H)/(l-1)$. Si le croisement se fait entre deux chaînes qui représentent le même schéma, il ne sera jamais détruit: considérons la proportion $P(H, \kappa)$ de représentants du schéma H dans la population $A(\kappa)$.

Donc, comme le schéma ne sera détruit que si le croisement se fait entre chaînes représentatives de schémas différents, la probabilité de destruction est inférieure à:

$$p_d \leq p_c [l(\mathbf{H}) / (l-1)] (1 - P(\mathbf{H}, \kappa)) \quad (109)$$

Bien entendu, la probabilité de survie p_s du schéma \mathbf{H} sera donnée par:

$$p_s \geq 1 - p_c [l(\mathbf{H}) / (l-1)] (1 - P(\mathbf{H}, \kappa)) \quad (110)$$

En considérant que la reproduction et le croisement sont des opérations indépendantes, nous pouvons estimer le nombre de représentants du schéma \mathbf{H} dans la génération $\kappa+1$ par rapport à la génération κ comme le nombre attendu par la reproduction seule, multiplié par la probabilité de survie p_s :

$$N(\mathbf{H}, \kappa + 1) \geq \frac{f(\mathbf{H})}{\bar{f}_s} \{1 - p_c [l(\mathbf{H}) / (l-1)] (1 - P(\mathbf{H}, \kappa))\} N(\mathbf{H}, \kappa) \quad (111)$$

L'équation (111) montre (*nous le détaillerons plus bas*) que les schémas de longueur $l(\mathbf{H})$ faible et de coût moyen $f(\mathbf{H})$ supérieur à la moyenne \bar{f}_s verront leur nombre augmenter à la génération $\kappa+1$ par rapport à κ .

D'une façon analogue à la reproduction et en considérant les mêmes hypothèses, l'équation pour la propagation d'un schéma \mathbf{H} après K générations peut être estimée. En prenant les deux opérations combinées, nous obtenons:

$$N(\mathbf{H}, \kappa + K) = (1 + d)^K \{1 - p_c [l(\mathbf{H}) / (l-1)] (1 - P(\mathbf{H}, \kappa))\}^K N(\mathbf{H}, \kappa) \quad (112)$$

Cette équation montre que, si le produit des deux termes à la puissance K est supérieur à l'unité, le nombre de représentants du schéma \mathbf{H} aura des taux de croissance exponentielle. Dans le cas contraire, le nombre diminuera exponentiellement.

Par ailleurs, il est intéressant de voir quelle est la valeur de la moyenne $f(\mathbf{H})$ nécessaire pour garantir l'augmentation du nombre de représentants du schéma \mathbf{H} . Comme nous le savons, elle doit être supérieure à la moyenne de la population \bar{f}_s , mais on ne sait pas de combien. De l'équation (111), on peut voir que le nombre de schéma augmentera si l'inégalité ci-dessous est vérifiée:

$$\frac{f(\mathbf{H})}{\bar{f}_s} \{1 - p_c [l(\mathbf{H}) / (l-1)] (1 - P(\mathbf{H}, \kappa))\} \geq 1 \quad \text{c'est-à-dire:} \quad (113)$$

$$f(\mathbf{H}) \geq \frac{\bar{f}_s}{1 - p_c [l(\mathbf{H}) / (l-1)] (1 - P(\mathbf{H}, \kappa))} \quad (114)$$

Le cas plus défavorable arrive quand $p_c = 1$ et $P(\mathbf{H}, \kappa) \ll 1$, nous avons alors:

$$f(\mathbf{H}) \geq \frac{\bar{f}_s}{1 - l(\mathbf{H}) / (l-1)} \quad (115)$$

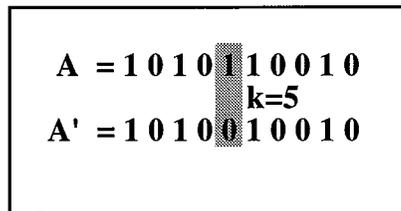
On peut voir que l'inégalité $0 \leq l(\mathbf{H}) / (l-1) \leq 1$ se vérifie pour n'importe quel schéma \mathbf{H} . Donc, dans le cas où les allèles ne sont pas fortement liés ($l(\mathbf{H}) \cong (l-1)$) la performance

moyenne $f(\mathbf{H})$ doit être beaucoup plus grande que la moyenne de la population pour que le nombre de schéma \mathbf{H} puisse augmenter (*dans le cas hypothétique où $l(\mathbf{H})/(l-1)=1$ le nombre de schémas n'augmentera jamais!*). Dans le cas contraire ($l(\mathbf{H}) \ll (l-1)$) il faut que la performance moyenne $f(\mathbf{H})$ soit légèrement supérieur à \bar{f}_s , pour garantir que \mathbf{H} augmente.

II.4.1.4. Mutation.

La mutation est simplement une perturbation aléatoire de la valeur d'une allèle (*bit*) dans une chaîne de caractères (*binaires*) avec une probabilité de mutation p_m . Ce processus protège la recherche du minimum contre la perte de caractéristiques génétiques, pendant la reproduction et le croisement, par l'introduction de nouveaux matériels.

Ce processus est exécuté bit par bit. Pour l'illustrer, reprenons la chaîne \mathbf{A} de l'exemple précédent avec $k=5$. Un nombre aléatoire (probabilité uniforme) est généré entre 0 et 1 et il est comparé avec une *probabilité de mutation* p_m choisie a priori. S'il est inférieur, on exécute la mutation, qui consiste simplement à changer la valeur du bit k de 1 par 0 .



Pour qu'un schéma \mathbf{H} survive, il faut que toutes les positions fixes survivent. Comme la probabilité de survie d'un simple bit est $(1-p_m)$ et comme la mutation est une opération réalisée bit par bit, la probabilité de survie à la mutation d'un schéma \mathbf{H} est:

$$p_s = (1 - p_m)^{o(\mathbf{H})} \tag{116}$$

L'effet combiné des trois opérateurs - *reproduction, croisement et mutation* - sur le nombre de schéma \mathbf{H} , à la génération $\kappa+1$ par rapport à κ , peut être estimé comme:

$$N(\mathbf{H}, \kappa + 1) \geq \frac{f(\mathbf{H})}{\bar{f}_s} \left\{ 1 - p_c \left[\frac{l(\mathbf{H})}{(l-1)} \right] (1 - P(\mathbf{H}, \kappa)) \right\} (1 - p_m)^{o(\mathbf{H})} N(\mathbf{H}, \kappa) \tag{117}$$

Pour des valeurs de $p_m \ll 1$, $(1 - p_m)^{o(\mathbf{H})} \approx (1 - o(\mathbf{H})p_m)$. Nous pouvons donc écrire:

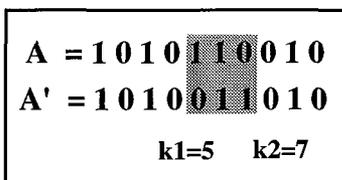
$$N(\mathbf{H}, \kappa + 1) \cong \frac{f(\mathbf{H})}{\bar{f}_s} \left\{ \begin{aligned} &1 - p_c \left[\frac{l(\mathbf{H})}{(l-1)} \right] (1 - P(\mathbf{H}, \kappa)) - o(\mathbf{H})p_m \\ &+ p_c p_m o(\mathbf{H}) \left[\frac{l(\mathbf{H})}{(l-1)} \right] (1 - P(\mathbf{H}, \kappa)) \end{aligned} \right\} N(\mathbf{H}, \kappa) \tag{118}$$

Cette équation est tellement importante dans l'étude des algorithmes génétiques que Goldberg l'appelle *théorème fondamental de l'algorithme génétique* [34]. Elle montre qu'un schéma \mathbf{H} , dont la performance moyenne est supérieure à la moyenne de la population, qui est de faible

longueur de définition $l(\mathbf{H})$ et d'ordre faible verra son nombre augmenter d'une génération à l'autre.

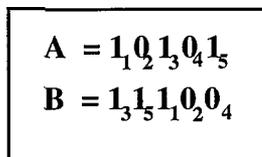
II.4.1.5. Inversion.

Dans ce processus aléatoirement décidé avec une probabilité p_{inv} choisie a priori, on sélectionne une partie de la chaîne à l'aide de deux nombres aléatoires k_1 et k_2 , avec $1 \leq k_1 < k_2 \leq l$ et on inverse (retourne) cette partie de la chaîne. Ce processus est illustré ci-dessous pour la chaîne A et deux points $k_1 = 5$ et $k_2 = 7$.



Nous avons vu que l'effet du croisement dans un code génétique conduit à l'augmentation exponentielle du nombre de représentants des schémas \mathbf{H} qui ont une faible longueur $l(\mathbf{H})$ et une performance moyenne supérieure à la moyenne de la population. C'est à dire qu'à long terme, il y aura une augmentation sélective du nombre de représentants des schémas fortement liés entre eux et présentant une performance $f(\mathbf{H}) > \bar{f}_s$.

L'inversion est un opérateur qui peut être employé pour augmenter la liaison entre les allèles d'une chaîne sans affecter sa performance. Bien sûr, s'il s'agit simplement de changer la liaison entre les caractères, nous devons représenter les chaînes de telle façon que la valeur d'un caractère soit indépendante de sa position dans la chaîne. Une méthode simple de représentation consiste à associer à chaque caractère un indice, qui a pour but de pointer sa véritable position au moment de décoder la chaîne. Par exemple, les deux chaînes A et B ci-dessous ont la même valeur ($2^0+0*2^1+2^2+0*2^3+2^4=21$) car elles ont les mêmes allèles associées à des indices identiques:



Ainsi, une chaîne A représentée par m paires de caractères $\{(1,\delta_1),(2,\delta_2),\dots,(m,\delta_m)\}$, où le premier caractère est l'indice et le deuxième δ est la valeur de l'allèle (0 ou 1 dans le cas de l'alphabet binaire) peut être écrite de plusieurs façons, sachant que les permutations ne changent pas sa valeur.

En plus, les schémas $\mathbf{H}=\{*(2,\delta_2),*,\dots,*(n,\delta_n),*,\dots,*\}$ et $\mathbf{H}'=\{(n,\delta_n),(2,\delta_2),*,\dots,*\}$ désignent le même sous-ensemble, sauf que le deuxième est plus lié: il aura plus de chance de survivre à l'opération de croisement.

En utilisant ces définitions et l'équation (111), il est possible montrer que, si le processus d'inversion a produit un schéma \mathbf{H}' , où $l(\mathbf{H}') < l(\mathbf{H})$, le nombre de schéma \mathbf{H}' dans la prochaine génération augmentera plus vite que celui de \mathbf{H} :

$$N(\mathbf{H}', \kappa + 1) = \frac{l-1-l(\mathbf{H}')}{l-1-l(\mathbf{H})} \cdot \frac{N(\mathbf{H}', \kappa)}{N(\mathbf{H}', \kappa)} \cdot N(\mathbf{H}, \kappa + 1) \quad (119)$$

(nous avons pris dans l'équation (111) $p_c=1$ et $P(\mathbf{H},k) \ll 1$). Nous pouvons estimer qu'après K générations, le nombre de schémas \mathbf{H}' par rapport à \mathbf{H} est:

$$N(\mathbf{H}', \kappa + K) = \left[\frac{l-1-l(\mathbf{H}')}{l-1-l(\mathbf{H})} \right]^K \frac{N(\mathbf{H}', \kappa)}{N(\mathbf{H}', \kappa)} \cdot N(\mathbf{H}, \kappa + K) \quad (120)$$

Cette équation montre que les schémas faiblement liés ($l(\mathbf{H}) \approx l-1$) avec des performances au-dessus de la moyenne vont se multiplier moins vite que les schémas fortement liés ($l(\mathbf{H}) \approx l$). Ainsi, si l'inversion fournit un schéma \mathbf{H}' avec $l(\mathbf{H}') < l(\mathbf{H})$ de performance au-dessus de la moyenne, il prédominera rapidement et il y aura une pression vers la formation de liaisons fortes (*longueur du schéma faible*) entre les allèles du schéma (*caractères*).

La probabilité de transformation d'un schéma \mathbf{H} de longueur $l(\mathbf{H})$ en un schéma \mathbf{H}' de longueur $l'(\mathbf{H})$ par le processus d'inversion peut être estimée comme la probabilité d'avoir une position d'inversion *entre* les positions fixes extrêmes du schéma et l'autre *en dehors*. Ainsi, nous pouvons écrire que le schéma sera transformé avec une probabilité:

$$p_d \leq 2p_{inv} \left[1 - \frac{l(\mathbf{H})}{(l-1)} \right] \frac{l(\mathbf{H})}{(l-1)} \quad (121)$$

La valeur maximale de cette probabilité arrive pour $l(\mathbf{H}) = (l-1)/2$, d'où $p_d = .5p_{inv}$. La probabilité pour le schéma \mathbf{H} de survivre à cette opération est:

$$p_s \geq 1 - 2p_{inv} \left[1 - \frac{l(\mathbf{H})}{(l-1)} \right] \frac{l(\mathbf{H})}{(l-1)} \quad (122)$$

En conclusion, la reproduction, le croisement (*qu'on ne laisse agir qu'entre individus ordonnés de la même façon [44]*) et l'inversion opèrent ensemble pour élargir la liaison du schéma qui présente des performances supérieures à la moyenne. La mutation est la seule opération introduisant de nouvelles caractéristiques génétiques au sein de la population.

II.4.1.6. Choix de la fonction coût.

Les algorithmes génétiques sont naturellement développés sous une forme de maximisation (voir par exemple la manière avec laquelle les individus sont sélectionnés dans les processus de reproduction), avec des valeurs de fonctions positives sur tout l'espace de recherche de l'optimum. Dans certains cas, les fonctions objectif ne peuvent pas être employées. Si on considère le problème de l'optimisation non linéaire contraint \mathbf{P}_1 comme donné par l'équation (78), nous pouvons utiliser une transformation comme dans le cas de la méthode de pénalisation extérieure classique. Ainsi, le problème d'optimisation se résume à la minimisation de la fonction $\Psi(\mathbf{p})$ ci-dessous:

$$\Psi(\mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \frac{1}{2}\mathbf{r} \left\{ \sum_{i=1}^l [\mathbf{g}_i(\mathbf{p})]_+^2 + \sum_{i=1}^m [\mathbf{g}_i(\mathbf{p})]^2 \right\} \quad (123)$$

où \mathbf{r} est le paramètre de pénalité et où le terme $[\mathbf{g}_i(\mathbf{p})]_+$ signifie que seules les contraintes qui ont été violées sont prises en compte.

Le problème de minimisation de l'équation (123) doit être remplacé par celui de la maximisation d'une fonction coût, pour que le problème puisse être résolu par un code génétique. Ainsi, nous pouvons écrire à la place du problème classique de minimisation, le problème de maximisation donné par l'équation (124). Si la fonction $\mathbf{f}(\mathbf{p})$ est partout positive (cas courant en électromagnétisme lorsqu'on minimise une fonction quadratique), nous pouvons faire $\mathbf{F}_{\max} = 1$; dans le cas contraire, \mathbf{F}_{\max} doit être choisi supérieur à la valeur absolue maximal de $\mathbf{f}(\mathbf{p})$.

$$\begin{aligned} \max \Phi(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\mathbf{F}_{\max} + \Psi(\mathbf{p})} \\ &= \frac{1}{\mathbf{F}_{\max} + \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \frac{1}{2}\mathbf{r} \left\{ \sum_{i=1}^l [\mathbf{g}_i(\mathbf{p})]_+^2 + \sum_{i=1}^m [\mathbf{g}_i(\mathbf{p})]^2 \right\}} \end{aligned} \quad (124)$$

II.4.1.7. Algorithme GA simplifié.

L'organigramme simplifié de l'algorithme génétique pour l'optimisation des problèmes continus non linéaires sous contraintes, est présenté ci-dessous. L'algorithme réalisé est basé sur les considérations théoriques que nous venons d'étudier.

ETAPES	PROCEDURES
1	Choisir: NBPOP , NBGEN , P_c , P_m et P_{inv} Faire: $\kappa=0$ Choisir: p^i , $i \in \{1, \dots, \text{NBPOP}\}$ (<i>Génération de la population initiale</i>)
2	Faire: $\kappa=\kappa+1$; (<i>Compteur des générations</i>)
3	Calculer $\Phi_i(p^\kappa)$ $i = 1, \text{NBPOP}$; (<i>Calcul des fonctions coûts Φ_i pour tous les individus</i>)
4	Sélectionner $\Phi_\kappa(p^\kappa) \geq \Phi_i(p^\kappa)$ pour $i = 1, \text{NBPOP}$; (<i>Sélection de l'individu de meilleur performance</i>) Si $3 < \kappa \leq \text{NBGEN}$ et $\left \Phi_\kappa - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \Phi_{\kappa-1} \right \leq \varepsilon$ ou si $\kappa > \text{NBGEN}$ fin. (p^κ est la solution); (<i>Test d'arrêt</i>)
5	Si $\kappa > 1$: Remplacer le moins performante des individus par le plus performante de la génération antérieure. Sélectionner $\Phi_m(p^\kappa) \leq \Phi_i(p^\kappa)$ pour $i = 1, \text{NBPOP}$; (<i>Sélection de l'individu de performance moins bonne</i>) Remplacer $\Phi_m(p^\kappa)$ pour $\Phi_\kappa(p^{\kappa-1})$.
6	Reproduction (<i>Sélection des survivants</i>)
7	Croisement (<i>Opération entre couples choisi aléatoirement avec la probabilité p_c</i>)
8	Mutation (<i>Opération aléatoire sur chaque bit avec la probabilité p_m</i>)
9	Inversion (<i>Opération aléatoire sur chaque individu avec la probabilité p_{inv}</i>)
10	Retour en 2.

II.4.2. Algorithme de recuit simulé (Simulated Annealing Algorithm).

Dans cette section, nous allons étudier l'algorithme de recuit simulé pour l'optimisation des problèmes en milieux continus, en ayant comme priorité la détermination du minimum global. Cette méthode a été déjà appliquée pour résoudre des problèmes d'optimisation en électromagnétisme, comme l'optimisation de forme et l'optimisation du positionnement de conducteurs [10,24,77].

II.4.2.1. Algorithme de recuit simulé.

Cet algorithme a été introduit par Kirkpatrick *et al* pour résoudre des problèmes complexes d'analyse combinatoire, comme par exemple le problème de l'optimisation des positionnements dans la conception des ordinateurs et des circuits intégrés. Dans ce domaine, le critère majeur est la minimisation des longueurs des connexions entre circuits pour obtenir de faibles temps de propagation des signaux, et par là même de grandes vitesses de fonctionnement du système [49]. Les contraintes associées à ce problème de positionnement cherchent à éviter la congestion des conducteurs (*film métallique très fin fait en utilisant des procédés comme la photolithographie*), et à limiter les sources de bruit telles que le croisement des conducteurs. Les méthodes directes pour chercher la solution sont tout à fait impraticables en raison du trop grand nombre de variables.

Les concepts fondamentaux de cette technique ont été tirés de l'analogie entre l'optimisation et la thermodynamique du recuit d'un solide. Ce processus consiste à chauffer le solide jusqu'à la fusion, puis à le refroidir jusqu'à la cristallisation dans un état de crystal parfait. Pour obtenir un crystal parfait, le refroidissement doit être conduit de façon à éviter des minima locaux (*de l'état énergétique*) qui provoqueraient des imperfections [2,49].

Le comportement du corps solide pendant les variations de la température peut seulement être expliqué par le comportement le plus probable du système dans l'équilibre thermique, car le nombre des atomes est très élevé, d'ordre $10^{23}/\text{cm}^3$. L'équilibre thermique est caractérisé par la distribution de Boltzmann, qui donne la probabilité pour un solide d'être dans l'état (*énergétique*) i avec l'énergie E_i à la température T [2]:

$$P_T(\mathbf{X} = i) = \frac{1}{Z(T)} \exp\left(\frac{-E_i}{K_B T}\right) \quad (125)$$

où \mathbf{X} est une variable stochastique qui désigne l'état actuel du solide et $Z(T)$ est une fonction appelée fonction de partition, définie par:

$$Z(T) = \sum_{j=1}^n \exp\left(\frac{-E_j}{K_B T}\right) \quad (126)$$

où n représente tous les états énergétiques possibles.

Pour simuler l'évolution d'un solide vers l'équilibre thermique pour une température donnée T , Metropolis *et al* ont introduit un algorithme très simple basé sur la technique de Monte Carlo [2,49,59]. A l'itération $\kappa+1$ une petite perturbation est imposé au système, par exemple par le déplacement d'une particule. Le changement énergétique ΔE est calculé.

- Si $\Delta E \leq 0$, le déplacement est accepté et la configuration est sauvegardée comme point de départ pour la prochaine itération.
- Si $\Delta E > 0$, la décision est traitée en termes probabilistiques: la configuration est acceptée pour initialiser la prochaine itération seulement si $P(\Delta E) > \delta$, où $P(\Delta E) = \exp(-\Delta E/k_B T)$ et δ est un nombre aléatoire uniformément généré dans l'intervalle $[0,1]$. Cela est très intéressant puisque des minima locaux sont évités. En répétant cette procédure plusieurs fois, le mouvement thermique des particules (*atomes ou molécules*) est simulé et pour un nombre d'itérations très élevé on attend l'équilibre thermique. Le choix de $P(\Delta E)$ signifie simplement que le système évolue avec la distribution de Boltzmann: par conséquent on tend vers l'équilibre thermique.

Kirkpatrick *et al*, en faisant l'analogie entre l'optimisation et le processus physique de recuit, ont tiré les correspondances suivantes [49]:

- ♦ La détermination de l'état de basse énergie d'un système est un problème d'optimisation, bien sûr différent de ceux habituellement rencontrés. Ainsi, la solution d'un problème d'optimisation à l'itération κ est équivalente à l'état énergétique d'un système physique à l'itération κ dans l'algorithme de Metropolis. la fonction coût ou objectif joue donc le rôle de l'énergie;
- ♦ Normalement, dans l'optimisation, il n'y a pas le paramètre température. Mais, la température peut être simulée, par exemple, simplement en utilisant un paramètre de contrôle qui jouera son rôle.

En utilisant ces correspondances, il est très simple programmer l'algorithme de Metropolis en ayant comme but de résoudre un problème d'optimisation. On parle alors de l'algorithme de recuit simulé, ou simplement **SA** (*Simulated annealing method*).

Dans l'algorithme classique de recuit, le processus commence avec une température élevée et des perturbations aléatoires sont réalisés sur chaque variable de projet. Pour chaque perturbation aléatoire, une fonction coût est évaluée et comparée avec sa valeur antérieure. Si un gain est obtenu, la solution courante et la valeur de la fonction coût sont sauvegardées. Dans le cas contraire, la solution courante n'est sauvée que si la probabilité de Boltzmann est plus grande qu'un nombre aléatoire à probabilité uniforme généré dans l'intervalle $[0,1]$. Cette procédure est répétée pendant un nombre spécifié de cycles jusqu'à ce que le quasi équilibre

soit atteint. Après, la température est réduite et une nouvelle itération est exécutée. On peut montrer que la séquence des points générés converge vers le minimum global du problème quand la température atteint une valeur très petite [2,40].

II.4.2.2. Schéma de refroidissement (Cooling Schedule).

Le principal problème rencontré dans la résolution d'un problème d'optimisation par cette méthode, trouver le minimum global dans un temps fini, est lié à la détermination du schéma de refroidissement. On entend par là l'ensemble des paramètres qui gouvernent la convergence de l'algorithme. Ces paramètres sont:

- ◆ valeur initiale du paramètre de contrôle \mathbf{TEMP}_0 (*température initiale*);
- ◆ facteur de réduction de la température \mathbf{F}_r ;
- ◆ nombre d'itérations sur chaque valeur de température (*longueur de la chaîne de Markov*) \mathbf{L}_M ;
- ◆ critère d'arrêt.

Cet ensemble de paramètres est appelé en anglais "*cooling schedule*" [2,49].

Paramètre de contrôle initial (température)

Dans le processus physique, le solide doit être chauffé jusqu'à ce qu'il fonde pour que, dans la phase liquide, les atomes ou particules puissent se déplacer et atteindre l'équilibre thermique. Dans l'algorithme SA, le paramètre de contrôle initial doit être suffisamment élevé pour permettre à toutes les transitions d'être acceptées, c'est-à-dire pour permettre la localisation de la région où se trouve le minimum global. Evidemment, cette température n'est pas la même pour tous les problèmes. Le taux d'acceptation des transitions dans le premier cycle proche de l'unité peut être pris comme un critère pour la détermination du facteur \mathbf{TEMP}_0 [49]. Dans la pratique, on commence par une petite valeur et on la multiplie par un facteur supérieur mais proche de l'unité jusqu'à obtenir un taux d'acceptation proche de l'unité. Bien sûr, le taux doit être calculé après un nombre minimum d'itérations.

Facteur de réduction

La valeur du facteur \mathbf{F}_r responsable de la réduction du paramètre de contrôle entre les itérations κ et $\kappa+1$ doit être inférieure à l'unité, mais proche d'elle. Le refroidissement doit être conduit comme dans le processus physique, pour éviter des minima locaux. Dans la littérature, on rencontre des valeurs de \mathbf{F}_r entre **0.8** et **0.99** [2,49].

Chaîne de Markov

Le nombre d'itérations (*longueur de la chaîne de Markov*) doit être suffisamment grand pour que l'équilibre thermique, c'est-à-dire le rapport entre le nombre des acceptations n_a et le nombre des rejets n_r devienne égal à l'unité ($n_a/n_r=1$). Sinon, on risque de tomber sur des minima locaux ou, comme dans le processus physique, d'être rattrapé par des structures en cristal présentant des imperfections locales.

Normalement, le critère d'équilibre thermique est trop sévère et il est remplacé par la notion de quasi équilibre, car dans le premier cas le nombre d'itérations est très élevé. Dans la notion de quasi équilibre, on cherche à faire la mise à jour du paramètre de contrôle, après une nombre minimal d'itérations n_i et quand le rapport n_a/n_r est dans l'intervalle **[0.8,1.25]**.

Critère d'arrêt

Finalement, on arrête le processus de recherche du minimum quand des améliorations sensibles ne sont plus réalisées, ou quand le paramètre de contrôle est inférieur à une certain limite. Vanderbilt et Louie ont suggéré comme critère d'arrêt l'expression suivante:

$$\frac{\langle E \rangle - E_{\min}}{\langle E \rangle} < \epsilon \quad (127)$$

où $\langle E \rangle$ est la valeur moyenne de la fonction objectif, E_{\min} est la solution courante et $\epsilon \ll 1$ est la précision requise [84].

II.4.2.3. Algorithme de recuit simulé avec variables continues.

L'algorithme SA a été proposé par Kirkpatrick *et al* pour résoudre des problèmes d'optimisation combinatoire, avec une fonction objectif définie comme fonction de variables discrètes. Dans ce cas, les mouvements aléatoires correspondent à des permutations dans la liste des mouvements possibles. Comme un exemple, nous pouvons citer le problème que pose la détermination du meilleur itinéraire (le plus court) pour parcourir un ensemble de villes dont connaît les coordonnées. Pour ce problème, les mouvements aléatoires correspondent à des permutations dans la liste des villes.

Pour l'application de cet algorithme en électromagnétisme, où normalement les fonctions sont fonctions des variables continues, les mouvement aléatoires sont remplacés par des perturbations aléatoires sur les variables de projet. La perturbation consiste en fait à modifier la variable courante en ajoutant un pas Δp (*incrément ou décrément*), qui doit être déterminé en utilisant une stratégie efficace. Cette stratégie doit être indépendante du

problème traité et se régler automatiquement pour permettre à l'algorithme d'être numériquement efficace. Vanderbilt et Louie ont proposé [84]:

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{Q} \mathbf{u} \quad (128)$$

où \mathbf{Q} est une matrice qui contrôle la distribution du pas et \mathbf{u} est un vecteur de nombres aléatoires $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ avec chaque \mathbf{u}_i choisi indépendamment. Ils ont proposé deux procédures pour calculer la matrice \mathbf{Q} . La première est plus simple et la matrice générée est une distribution des valeurs efficaces de la longueur des pas; dans la seconde, la matrice générée prend en compte la topographie local du problème. Cette stratégie a été testée dans l'optimisation des fonctions analytiques de 2 à 6 dimensions.

Une autre stratégie, proposée par Corana *et al* [18] consiste à ajuster le vecteur des pas selon l'information sur le rapport entre le nombre des mouvements acceptés et rejetés. Cette idée consiste à modifier la longueur du pas de façon que la valeur du rapport entre les mouvements acceptés et rejetés soit proche de l'unité. Une petite valeur signifie qu'un nombre élevé de mouvements est rejeté et que la recherche a été réalisée dans une région trop large. Une grande valeur signifie qu'un nombre élevé de mouvements est accepté et la recherche a été faite dans une région trop petite. Dans les deux cas, on gaspille du temps de calcul. Ils ont proposé deux équations pour la mise à jour du vecteur des pas:

$$\Delta \mathbf{p}_i' = \Delta \mathbf{p}_i [1 + \mathbf{C}_i (\mathbf{P}_i - .6) / .4] \quad \text{si } \mathbf{P}_i > .6 \quad (129)$$

$$\Delta \mathbf{p}_i' = \Delta \mathbf{p}_i [1 + \mathbf{C}_i (.4 - \mathbf{P}_i) / .4]^{-1} \quad \text{si } \mathbf{P}_i < .4$$

où \mathbf{P}_i est le rapport entre les mouvements acceptés et rejetés et \mathbf{C}_i est le paramètre de contrôle pour la i -ème direction. Pour le cas limite, quand $\mathbf{P}_i = 1$ (ou $\mathbf{P}_i = 0$) on a $\Delta \mathbf{p}_i' = \Delta \mathbf{p}_i (1 + \mathbf{C}_i)$ (ou $\Delta \mathbf{p}_i' = \Delta \mathbf{p}_i / (1 + \mathbf{C}_i)$). Ainsi, pour $\mathbf{P}_i = 1$ and $\mathbf{C}_i = 0.1$, le i -ème pas est $1.1 \Delta \mathbf{p}_i$ dans la prochaine itération. Dans le début du processus, ils utilisent $\Delta \mathbf{p}_i = 0.5(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)$, où \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i sont les limites inférieure et supérieure pour le i -ème pas.

Nous avons pour notre part employé la stratégie proposé par Corana *et al*. Nous nous sommes aperçus que cette stratégie donne de bons résultats pour la plupart des problèmes testés (voir chapitre suivant), mais il y a eu quand même des cas où la solution minimale globale n'a pas été atteinte. La cause principale en était la difficulté de l'autoadaptation des pas à mesure que la région de recherche devenait plus petite. Nous avons alors proposé de remplacer le vecteur de pas $\Delta \mathbf{p}$ par une matrice, générée comme dans la méthode heuristique appelé **TABU** appliqué à l'optimisation des fonctions dans des milieux continus [46].

II.4.2.4. Algorithme TABU (TABU Search algorithm).

TABU est un algorithme heuristique qui a été proposé par Glover pour résoudre des problèmes d'optimisation combinatoire [33]. Cet algorithme a été récemment étendu à l'optimisation des fonctions continues par Hu [46]. Dans l'algorithme TABU avec des mouvements aléatoires, un ensemble de pas \mathbf{h}_k , $\mathbf{H} = \{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{nd}\}$ est initialement donné. Pour un point réalisable \mathbf{p} , les mouvements de recherche sont faits sur un ensemble de pas actifs \mathbf{k} , où $\mathbf{k} \in \{1, nd\}$ et le pas $\mathbf{h}_k \in \mathbf{H}-\mathbf{T}$. Le tableau \mathbf{T} contient la liste des pas acceptés, lequel est initialement vide. Pour chaque pas actif un mouvement réalisable est généré. Si nous avons un décrétement dans la valeur de la fonction coût, le mouvement aléatoire est sauvegardé comme la solution courante \mathbf{p} et le pas \mathbf{h}_k est ajouté à \mathbf{T} . Quand $\mathbf{H}-\mathbf{T}$ est vide, \mathbf{T} est mis à jour et le processus total est réinitialisé, sinon la procédure ci-dessus est répétée.

II.4.2.5. Méthode de Recuit Simulé Modifié (MSA).

L'organigramme de l'algorithme MSA que nous avons proposé est montré ci-dessous [88]. Cet algorithme est une variante de l'algorithme proposé par Corana *et al* et repris par Simkin et Trowbridge avec la proposition faite par Hu d'un tableau des pas réalisables par l'algorithme TABU.

La principale différence entre l'algorithme MSA et l'algorithme décrit par Corana *et al* est que, dans le premier, le vecteur de pas \mathbf{v} du second est remplacé par \mathbf{ND} vecteurs de pas, stockés dans une matrice \mathbf{H} et les \mathbf{NC} cycles auxiliaires du second sont exécutés pour chaque vecteur active \mathbf{h}_k , $\mathbf{k} \in \{1, \dots, \mathbf{ND}\}$. Après $\mathbf{NC} \times \mathbf{ND}$ cycles, la matrice \mathbf{H} est ajustée, en utilisant le même critère décrit en [18] et la température \mathbf{TEMP} est réduite par un facteur inférieur mais proche de l'unité.

La procédure utilisée pour calculer la matrice \mathbf{H} comme décrit par Hu est:

- ♦ Nous considérons d'abord que la fonction coût est définie comme une fonction de \mathbf{n} variables continues \mathbf{p}_i , $\mathbf{i} \in \{1, \dots, \mathbf{n}\}$, avec chaque $\mathbf{p}_i \in \{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i\}$.
- ♦ Les \mathbf{ND} vecteurs de \mathbf{H} peuvent alors être calculés:
 - ♦ $\mathbf{h}_{i,1} = (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)/\mathbf{c}$
 - ♦ $\mathbf{h}_{i,2} = \mathbf{h}_{i,1}/\mathbf{c}$
 - ♦
 - ♦ $\mathbf{h}_{i,nd} = \mathbf{h}_{i,nd-1}/\mathbf{c}$

où \mathbf{c} est un facteur plus grand que 1, par exemple $\mathbf{c}=2$.

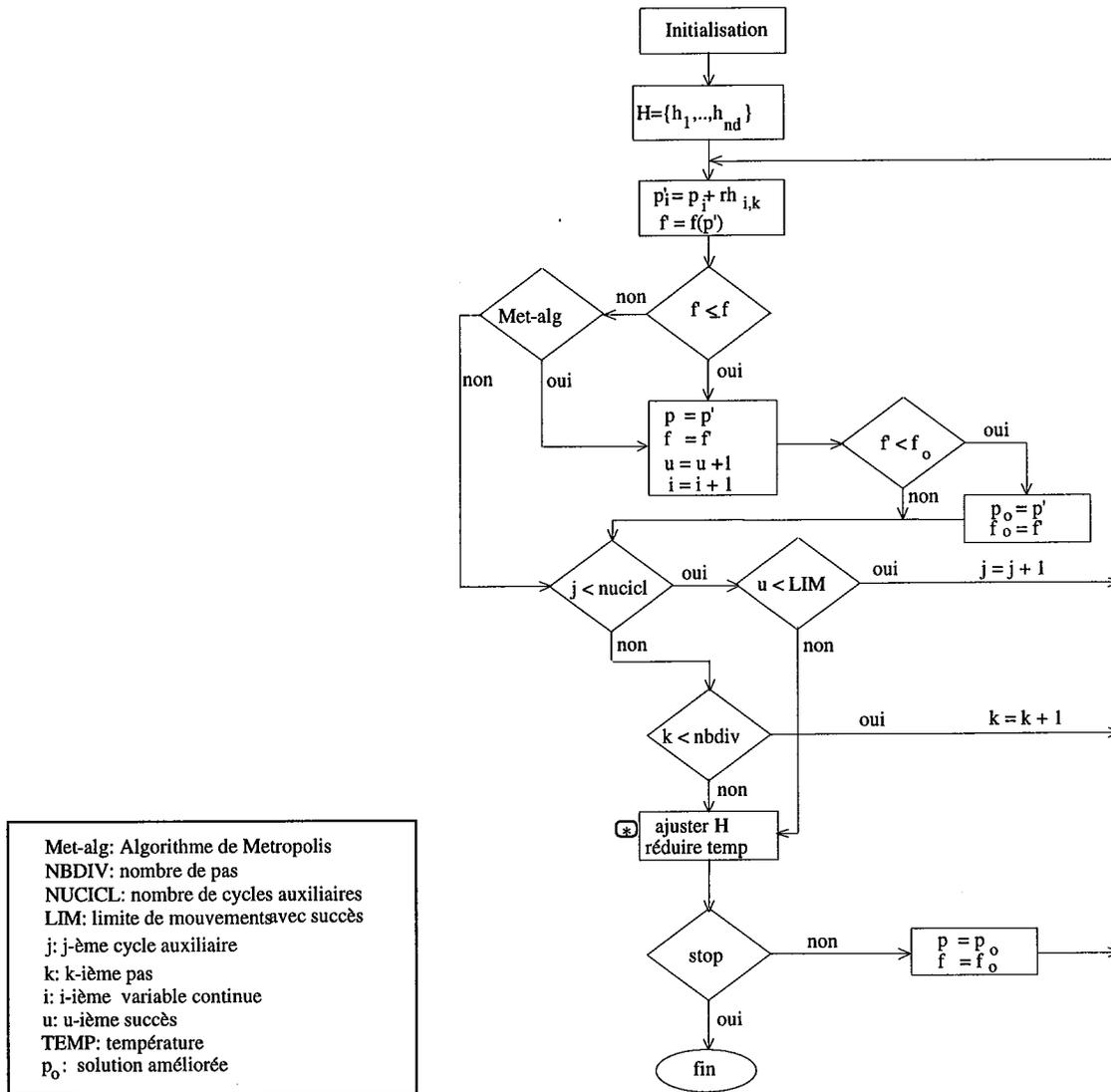


Fig. 24: Organigramme pour l'algorithme MSA.

L'avantage de cet algorithme par rapport à l'algorithme de recuit simulé pour traiter des problèmes continus est surtout qu'il est moins sensible à la correction des pas proposée par Corana *et al.* On commence la recherche du minimum d'abord avec des pas suffisamment grands pour couvrir tout le domaine. Dans cette étape, l'amplitude des variations de la fonction objectif sont vérifiés. A mesure que nous réduisons la température et le tableau des pas, la recherche est faite dans des régions plus petites [92].

II.4.2.6. Couplage de l'Algorithme MSA avec BEM2D.

La méthode des équations intégrales de frontière peut être couplée avec l'algorithme MSA via la fonction coût. Le problème \mathbf{P}_1 de l'optimisation non linéaire sous contraintes (éq. 78) doit être transformé pour pouvoir être résolu par MSA.

En utilisant une transformation du type de celles rencontrées dans les méthodes de pénalité extérieure, le problème originel peut être ramené au problème de minimisation sans contrainte:

$$\min \quad \Psi(\mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \mathbf{r} \left\{ \sum_{i=1}^l [\mathbf{g}_i(\mathbf{p})]_+^2 + \sum_{i=l+1}^m [\mathbf{g}_i(\mathbf{p})]^2 \right\} \quad (130)$$

Comme dans l'étude des méthodes déterministes, \mathbf{r} est le paramètre de pénalité et le terme $[\mathbf{g}_i(\mathbf{p})]_+$ assure que seulement les contraintes qui sont actives sont considérées. Le problème peut maintenant être résolu par MSA.

II.5. METHODES HYBRIDES.

La solution d'un problème d'optimisation obtenue par les méthodes déterministes dépend d'une façon générale du point de départ, car ces méthodes font la recherche du minimum à partir de l'information donnée par le calcul du gradient, lequel est évalué au point courant. Ainsi, si la direction donnée par le gradient conduit vers un minimum local, l'algorithme ne s'arrêtera pas sur le minimum global. Obtenir le minimum global ne peut être que le fruit d'une heureuse coïncidence.

Néanmoins, certaines méthodes déterministes, d'ordre un ou deux, présentent de bonnes caractéristiques pour l'optimisation de problèmes réels: en particulier, l'effort de calcul est faible par rapport aux méthodes stochastiques.

Les méthodes stochastiques ont deux grands avantages: la capacité à trouver le minimum global, et l'absence des calculs de dérivées. L'inconvénient majeur est l'effort de calcul qu'il faut fournir dans la plupart des cas pour arriver à des solutions précises.

On peut alors envisager le *couplage* entre méthodes stochastiques et déterministes pour tirer parti des avantages:

- ♦ un algorithme globalement convergent (*capacité de trouver le minimum global*);
- ♦ moins coûteux en termes d'effort de calcul que les algorithmes uniquement stochastiques. Dans le cas où la méthode déterministe est d'ordre zéro un avantage supplémentaire très important est assuré: pas de calcul de dérivées.

Dans la suite nous allons présenter les méthodes hybrides qui nous avons proposé:

- ♦ l'algorithme génétique couplé avec la méthode du lagrangien augmenté;
- ♦ l'algorithme de recuit simulé couplé avec ALM.

Dans le deux cas, l'idée est de lancer la procédure de recherche de la région de minimum global par une méthode stochastique (**GA** ou **MSA**). Après localisation de cette région, l'algorithme **ALM** est lancé, avec pour but une convergence rapide au point de minimum global. La question à trancher est de déterminer le bon moment pour faire la commutation entre les deux méthodes. Mais, comment identifier ce moment? Nous essayerons dans la suite de répondre à cette question en rappelant les analogies qui ont été faites pour arriver aux méthodes stochastiques que nous avons présentées ci-dessus.

II.5.1. Algorithme génétique / Lagrangien Augmenté (GA/ALM).

La commutation dans le cas de l'algorithme génétique peut être faite en utilisant les procédures suivantes:

- ♦ *Nombre des générations.* C'est le cas le plus simple. L'inconvénient est surtout le fait de que les problèmes ne présentent pas tous la même nature. Par exemple, les problèmes où la fonction objectif est telle que le minimum global se trouve dans une vallée très étroite auront certainement besoin d'un nombre de calculs de fonction coût (*nombre de génération multiplié par le nombre des individus*) plus grand que si la vallée ne l'était pas;
- ♦ *Différence entre les valeurs moyennes de la fonction coût, aux générations $k+1$ et k , inférieure à une certaine limite.* L'inconvénient est que le comportement de la moyenne normalement présente de grandes variations entre deux générations comme nous pouvons le voir dans le prochain chapitre.
- ♦ *Différence entre les deux meilleures valeurs de la fonction coût, aux générations $k+1$ et k , inférieure à une certaine limite.* Cette procédure est moins sensible au type de problème (*dans l'algorithme GA nous gardons toujours la meilleur solution*) et nous la préférons pour cette raison. Cette procédure est applicable et donne de bons résultats, comme nous le verrons dans le chapitre de validation.

La comparaison entre la première et la dernière procédure dont nous venons de parler sera présentée dans le chapitre de validation des résultats.

L'algorithme hybride **GA-ALM** réalisé est d'une manière très proche des algorithmes génétique et du lagrangien augmenté déjà présentés. La différence est, qu'une fois atteinte la condition de commutation, l'algorithme génétique est stoppé et le meilleur résultat est sauvegardé pour lancer l'algorithme du lagrangien augmenté. L'algorithme hybride est donc simplement l'algorithme génétique, plus la condition de commutation choisie, plus

l'algorithme du lagrangien augmenté, les deux premiers servant seulement à trouver le meilleur point de départ possible pour commencer l'algorithme déterministe.

II.5.2. Algorithme recuit simulé / Lagrangien augmenté (MSA/ALM).

Drago *et al* ont abordé la question du moment adéquat pour faire la commutation dans le couplage de l'algorithme de recuit simulé avec l'algorithme de "Pattern Search" [24]. Ils ont discuté trois possibilités pour la commutation:

- ◆ *Selon la taille du pas*: si le pas est inférieur à une certaine limite, on arrête l'algorithme de recuit simulé et on lance l'algorithme déterministe. Ils ont remarqué que cette possibilité est très liée au type de problème car les paramètres n'ont pas le même comportement pendant le processus itératif. Pourtant, elle est difficile à mettre en oeuvre efficacement.
- ◆ *Nombre d'itérations*: c'est le cas plus simple. L'inconvénient est surtout le fait de que les problèmes ne présentent pas tous la même nature. On peut dire que ce critère est similaire à celui du nombre des générations pour l'algorithme génétique, et présente les mêmes inconvénients.
- ◆ *Nombre de réductions de la température (passages au point marqué * dans l'algorithme Fig. 24)*: ils ont remarqué que cette procédure est la meilleure pour l'algorithme de recuit simulé, car la température est faible quand l'équilibre est atteint.

Des trois, la dernière procédure nous semble aussi la plus adaptée. Néanmoins, il y a une autre procédure qu'on peut envisager en faisant appel à l'analogie entre l'optimisation et le processus physique: la solidification en thermodynamique, changement de la phase liquide vers phase solide, est caractérisée par une grande variation d'énergie. Kirkpatrick *et al* ont remarqué que, pendant les grande variations d'énergie, commence le processus de *freezing* et que le refroidissement doit être conduit pour ne pas être bloqué par un minimum local [49]. Si on admet l'hypothèse que l'équilibre énergétique est atteint aux itérations κ et $\kappa+1$, et que la différence entre les valeurs de la fonction objectif entre ces itérations est inférieure à une certaine limite, on peut faire la commutation. Du point de vue du processus physique, cette procédure nous semble apporter de meilleurs résultats.

La comparaison de cette procédure avec celle du nombre de réductions sera présentée dans le chapitre de validation des résultats.

Les remarques pour l'algorithme hybride réalisé MSA-ALM sont tout à fait similaires à celles déjà faites pour GA-ALM, sauf que le résultat pour lancer l'algorithme ALM est simplement le résultat courant.

CONCLUSION.

Nous avons présenté la méthode du lagrangien augmenté ALM, couplée avec l'algorithme de la région de confiance pour la résolution des problèmes non-linéaires sous contrainte. Parmi les avantages de cette méthode, nous trouvons l'absence du mauvais conditionnement numérique habituellement lié aux méthodes de pénalités (*qui exigent, pour atteindre l'optimum, des valeurs de paramètres de pénalisation tendant vers l'infini quand le point d'optimum se trouve sur la frontière du domaine admissible*). Nous avons signalé que, pour être efficace, la méthode ALM exige une minimisation précise du problème sans contraintes. Cela a été obtenu en employant la méthode de la région de confiance et l'algorithme de Heben-Moré pour sa résolution. Ainsi, l'algorithme complet finalement obtenu est fiable, précis et efficace. Nous confirmerons cette allégation dans le chapitre suivant.

L'algorithme génétique présenté, développé à partir de l'analogie entre l'optimisation et les phénomènes de l'évolution et de la sélection naturelles, montre que les opérations de croisement, mutation et inversion sont très simple à mettre en oeuvre. Il suffit de représenter l'ensemble des variables de projet à l'aide d'un codage approprié sous forme d'une chaîne binaire; chaque chaîne imaginable représente alors une solution possible du problème, ou, dans le langage couramment employé en statistiques et probabilités, un individu. La théorie génétique associée permet, grâce au concept de schéma, de montrer la propagation privilégiée des meilleures solutions d'une génération à la suivante jusqu'au minimum cherché.

Un algorithme nouveau, basé sur la méthode du recuit simulé couplée avec l'algorithme TABU a également été proposé. L'avantage qu'il présente par rapport à l'algorithme du recuit simulé classique est l'amélioration apportée à la mise à jour du vecteur de pas de déplacement, amélioration nécessaire pour traiter les problèmes des milieux continus. Une autre caractéristique remarquable apparaîtra dans le chapitre suivant: peu de cycles de température sont nécessaires pour atteindre le minimum. Parmi les avantages de l'algorithme MSA comme de l'algorithme génétique, répétons qu'ils ne nécessitent pas de calcul des dérivées des solutions du calcul de champ par rapport aux variations des paramètres d'optimisation, et que leur programmation est très simple.

Nous avons en plus proposé dans ce chapitre deux algorithmes hybrides: GA-ALM et MSA-ALM. Ces algorithmes présentent, eux, l'inconvénient de nécessiter le calcul de ces dérivées, dans la seconde phase (*déterministe*) du processus d'optimisation. Néanmoins, la possibilité de trouver le minimum global sans payer un prix trop élevé nous semble séduisante. Le critère de *commutation* entre les algorithmes stochastique puis déterministe est la question fondamentale à discuter pour ce couplage. En théorie, on devrait faire la commutation dès que la *région* du minimum global est atteinte, de façon à minimiser le nombre de calcul de fonctions nécessaire pour atteindre le minimum. Mais comment savoir que cette région est atteinte? Cela sans doute n'est pas évident. Les critères que nous avons discutés sont simples, et seront testés au chapitre suivant.

III . ANALYSE DE SENSIBILITE

INTRODUCTION

L'optimisation des formes des structures en électromagnétisme consiste en l'application conjointe de méthodes d'optimisation et de calcul de champ. L'optimisation s'appuyant sur des programmes de calcul de champs par voie numérique a une caractéristique particulière: parmi les fonctions à calculer, certaines proviennent de ces programmes et par conséquent, elles sont non linéaires.

L'avantage de la méthode du lagrangien augmenté pour résoudre tel problème est que le problème d'optimisation originel est transformé en une suite de problèmes sans contraintes, cette suite convergeant vers l'optimum du problème initial.

Pour l'optimisation du problème sans contraintes, nous devons choisir une méthode qui donne des résultats précis, car l'efficacité de la méthode du Lagrangien augmenté en dépend. Pour cette raison, nous avons choisi la *méthode de la région de confiance* [28], ce qui a été dit précédemment. En utilisant cette technique, le problème sans contrainte est transformé en un problème quadratique, pour lequel le calcul des dérivées est indispensable. Cela conduit à l'analyse de sensibilité que nous montrerons dans ce chapitre.

III.1. DERIVATION DES FONCTIONS PAR RAPPORT AUX PARAMETRES.

Pour simplifier les équations que nous développerons dans la suite, considérons le problème d'optimisation général suivant:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{y}(\mathbf{p})) \\ \text{avec} \quad & \mathbf{g}_j(\mathbf{p}) \leq \mathbf{0} \quad j = 1, \dots, n_c \\ & \mathbf{p}_{\min}^k \leq \mathbf{p}_k \leq \mathbf{p}_{\max}^k \quad k = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (131)$$

où n_c est le nombre de contraintes et m le nombre de paramètres d'optimisation. La fonction $f(\mathbf{y}(\mathbf{p}))$ ou simplement $f(\mathbf{p})$ est la fonction objectif, que nous considérons comme fonction explicite des variables provenant d'un code de calcul de champ: le vecteur $\{\mathbf{y}\}$; ces variables sont à leur tour des fonctions des paramètres d'optimisation, mais de manière très indirecte. Les fonctions $\mathbf{g}_j(\mathbf{p})$ sont les contraintes d'inégalité, nous supposons a priori qu'elles ne dépendent pas des variables \mathbf{y} .

La fonction objectif $f(\mathbf{p})$ est par exemple du type:

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{NT} (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_{oi})^2 \quad (132)$$

où NT est le nombre de points *test* ou *de contrôle*, E_i et E_{oi} sont les valeurs du champ, calculées et souhaitées, sur les NT points. Les valeurs du champ E_i (*qui sont les composantes du vecteur {Y}*) sont dans ce travail calculées par la méthode des équations intégrales de frontière. Cette méthode donne, après la résolution d'un système d'équations $[A]\{x\} = \{b\}$, le vecteur $\{x\}$ qui contient les valeurs du champ normal et du potentiel sur les noeuds des éléments de frontière. Si la fonction objectif est écrite en fonction du champ total, du champ tangentiel, d'une valeur extrême, etc., des calculs ou traitements supplémentaires doivent être fait.

L'emploi de la méthode du Lagrangien augmenté couplé avec la méthode de la région de confiance (*trust region method*) pour résoudre le problème ci-dessus exige l'évaluation du gradient de la fonction lagrangienne augmentée. Les contraintes étant indépendantes des valeurs provenant du code de calcul de champ, leurs dérivations ne posent aucun problème. C'est donc le calcul du gradient de la fonction objectif qui demande des calculs importants, car elle est pour sa part une fonction *implicite* des paramètres d'optimisation. Le gradient de la fonction objectif par rapport aux paramètres de dimensionnement $\{p\}$ peut être calculé comme:

$$\left. \frac{df}{d\{p\}} \right|_{M \times 1} = \left. \frac{\partial f}{\partial \{p\}} \right|_{M \times 1} + \left. \frac{\partial \{y\}}{\partial \{p\}} \right|_{M \times NT}^T \left. \frac{\partial f}{\partial \{y\}} \right|_{NT \times 1} \quad (133)$$

où les indices donnent les dimensions des vecteurs et matrice et :

$$\left. \frac{df}{d\{p\}} \right|^T = \left(\left. \frac{df}{dp_1}, \frac{df}{dp_2}, \dots, \frac{df}{dp_m} \right) \right|^T$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \{p\}} \right|^T = \left(\left. \frac{\partial f}{\partial p_1}, \frac{\partial f}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_m} \right) \right|^T$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \{y\}} \right|^T = \left(\left. \frac{\partial f}{\partial E_1}, \frac{\partial f}{\partial E_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial E_{NT}} \right) \right|^T$$

$$\left. \frac{\partial E_i}{\partial \{p\}} \right|^T = \left(\left. \frac{\partial E_i}{\partial p_1}, \frac{\partial E_i}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial E_i}{\partial p_m} \right) \right|^T$$

La dérivée $\left. \frac{\partial \{y\}}{\partial \{p\}} \right|^T$ est obtenue en dérivant le système d'équations $[A]\{x\} = \{b\}$,

puisque $\{y\}$ provient d'un sous-vecteur de $\{x\}$:

$$[A] \left. \frac{\partial \{x\}}{\partial \{p\}} \right|^T = \left. \frac{\partial \{b\}}{\partial \{p\}} \right|^T - \left. \frac{\partial [A]}{\partial \{p\}} \right|^T \{x\} \quad (134)$$

En analysant l'équation (134), nous pouvons remarquer que [21]:

1. La matrice A est pour tous les paramètres la même matrice, déjà obtenue par la méthode des équations intégrales de frontière (*la matrice A est pleine, sauf dans le cas où le problème à résoudre est constitué de plusieurs régions et qu'au moins une frontière n'appartient pas à toutes ces régions*). On n'a donc pas besoin de la réévaluer;
2. Le second membre de l'équation (134) doit bien sûr être évalué. Cependant, la matrice $\frac{\partial[A]}{\partial\{p\}}$ sera plus creuse que A car seules les lignes et les colonnes correspondants respectivement à des inconnues sur des noeuds mobiles et à des éléments mobiles (*c'est-à-dire dont la position dépend du paramètre d'optimisation considéré*), auront des termes non nuls;
3. Le calcul du second membre nécessite la connaissance de $\{x\}$, qui est la solution du système $[A]\{x\}=\{b\}$. L'expression (134) doit donc être calculée dans un second temps;
4. L'utilisation de la décomposition LU de la matrice [A] évitera de répéter tout le processus de décomposition dans la résolution de l'équation (134) par la méthode de Gauss;
5. Finalement, si on observe que le système d'origine $[A]\{x\}=\{b\}$, avant assemblage et introduction des conditions aux limites, était écrit comme $[G]\{V\}-[H]\{\partial V / \partial n\}=\{0\}$ ([G] et [H] sont les matrices de coefficients du potentiel et sa dérivée normale (equ. (56)) pour chaque région, nous pouvons éviter le processus d'assemblage et surtout le stockage de la matrice dérivée. Le second membre [b'] de l'équation (134):

$$[b'] = \left[\frac{\partial\{b'\}}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial\{b'\}}{\partial p_m} \right] \quad (135)$$

peut être calculé par l'équation (136):

$$[b']_{N \times M} = \frac{\partial\{b\}}{\partial\{p\}}_{N \times M} - \frac{\partial[A]}{\partial\{p\}}_{N \times M} \{x\}_{N \times M} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial[H]}{\partial\{p\}}\{V\} - \frac{\partial[G]}{\partial\{p\}}\{\partial V / \partial n\} \right)_{reg. 1} \left| \begin{array}{l} NN_1 \times M \\ \vdots \\ \vdots \\ NN_{NR} \times M \end{array} \right. \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial[H]}{\partial\{p\}}\{V\} - \frac{\partial[G]}{\partial\{p\}}\{\partial V / \partial n\} \right)_{reg. NR} \left| \begin{array}{l} NN_{NR} \times M \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (136)$$

où NN_1, \dots, NN_{NR} sont les nombres de lignes associées à chaque région. Bien entendu, la somme des nombres de lignes de toutes les régions doit être égale au nombre total d'inconnues, N.

Si l'emploi de toutes ces manipulations (*les quatre premières étaient déjà proposées en [21]*) permet d'économiser du temps de calcul, l'ensemble reste lourd car le système (134) doit être résolu pour chaque paramètre de projet.

La technique de la variable adjointe évite la résolution du système d'équation (134) pour chaque paramètre d'optimisation et réduit encore considérablement la quantité d'opérations à effectuer pour le calcul du gradient. Cette technique est bien connue dans les applications où le système d'équations provient d'un code d'éléments finis [5,6,32].

Considérons le vecteur $\{\lambda\}$, qu'on appellera vecteur adjoint, solution du système ci-dessous:

$$[\mathbf{A}]_{N \times N}^T \{\lambda\}_{N \times 1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \{\mathbf{y}\}} \right|_{N \times 1} \quad (137)$$

où le second terme peut facilement être évalué car la fonction objectif (*ou la fonction Lagrangienne augmentée si les contraintes sont fonction de $\{\mathbf{y}\}$* : nous considérons ici, pour simplifier les équations, que les contraintes ne dépendent pas de ce vecteur) est fonction explicite des variables \mathbf{y} . Si l'équation (133) est réécrite en fonction du vecteur $\{\mathbf{x}\}$ à la place de $\{\mathbf{y}\}$, qui est inclus en $\{\mathbf{x}\}$, nous écrivons:

$$\left. \frac{\mathbf{d}\mathbf{f}}{\mathbf{d}\{\mathbf{p}\}} \right|_{M \times 1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \{\mathbf{p}\}} \right|_{M \times 1} + \left. \frac{\partial \{\mathbf{x}\}}{\partial \{\mathbf{p}\}} \right|_{M \times N}^T \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \{\mathbf{x}\}} \right|_{N \times 1} \quad (138)$$

En réécrivant l'équation (134) avec les dimensions des vecteurs et des matrices, nous avons:

$$[\mathbf{A}]_{N \times N} \left. \frac{\partial \{\mathbf{x}\}}{\partial \{\mathbf{p}\}} \right|_{N \times M} = \left. \frac{\partial \{\mathbf{b}\}}{\partial \{\mathbf{p}\}} \right|_{N \times M} - \left. \frac{\partial [\mathbf{A}]}{\partial \{\mathbf{p}\}} \right|_{N \times N} \{\mathbf{x}\}_{N \times 1} \Big|_{xM} = [\mathbf{b}']_{N \times M} \quad (139)$$

ou simplement:

$$\left. \frac{\partial \{\mathbf{x}\}}{\partial \{\mathbf{p}\}} \right|_{N \times M} = [\mathbf{A}]_{N \times N}^{-1} [\mathbf{b}']_{N \times M} \quad (140)$$

En remplaçant dans (138) l'équation (137) et (140) nous obtenons:

$$\left. \frac{\mathbf{d}\mathbf{f}}{\mathbf{d}\{\mathbf{p}\}} \right|_{M \times 1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \{\mathbf{p}\}} \right|_{M \times 1} + [\mathbf{b}']_{M \times N}^T \left. [\mathbf{A}]_{N \times N}^{-1} \right|^T [\mathbf{A}]_{N \times N}^T \{\lambda\}_{N \times 1} \quad (141)$$

En observant que:

$$\left. [\mathbf{A}]_{N \times N}^{-1} \right|^T [\mathbf{A}]_{N \times N}^T = [\mathbf{I}], \quad (142)$$

nous écrivons finalement l'équation (143).

$$\left. \frac{\mathbf{d}\mathbf{f}}{\mathbf{d}\{\mathbf{p}\}} \right|_{M \times 1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \{\mathbf{p}\}} \right|_{M \times 1} + [\mathbf{b}']_{M \times N}^T \{\lambda\}_{N \times 1} \quad (143)$$

Le gradient donné par l'équation (143) nécessite une seule résolution du système donné par l'équation (137). C'est le grand avantage de cette façon de procéder, surtout quand le nombre de paramètres d'optimisation est important. L'inconvénient est qu'on ne dispose

plus des valeurs de gradient du champ, ni des valeurs de gradient des contraintes (*si elles sont fonctions des variables $\{x\}$*) par rapport aux paramètres d'optimisation. Nous n'avons pas à ce jour intégré cette procédure dans nos programmes.

Il reste maintenant à déterminer le second terme [b'] (Equ. 136). Pour cela il faut calculer les matrices dérivées $\frac{\partial[\mathbf{G}]}{\partial\{\mathbf{p}\}}$ et $\frac{\partial[\mathbf{H}]}{\partial\{\mathbf{p}\}}$. La meilleure façon de calculer ces dérivées est

de reprendre à la base l'équation intégrale de frontière et de la dériver analytiquement. Bien sûr, nous devons prendre tous les noyaux des équations, en bidimensionnel et axisymétrique, les dériver et les intégrer. Heureusement, tous les problèmes de singularité des intégrales sont semblables à ceux que nous avons déjà eu pour le calcul de champ en bidimensionnel et axisymétrique [21]. Les calculs détaillés des dérivées des noyaux étant longs et parfois compliqués (*en axisymétrique*), ils ne seront pas présentés ici. La précision obtenue en procédant ainsi est excellente comme nous le montrerons dans la suite.

III.2. VALIDATION DE L'ANALYSE DE SENSIBILITE.

Nous avons pris deux problèmes simples pour illustrer le calcul de sensibilité. Le premier est un condensateur cylindrique, le second un condensateur sphérique, formés de deux électrodes et un diélectrique. Les rayons des électrodes intérieure (1) et extérieure (2) sont respectivement R_1 et R_2 (Fig. 25):

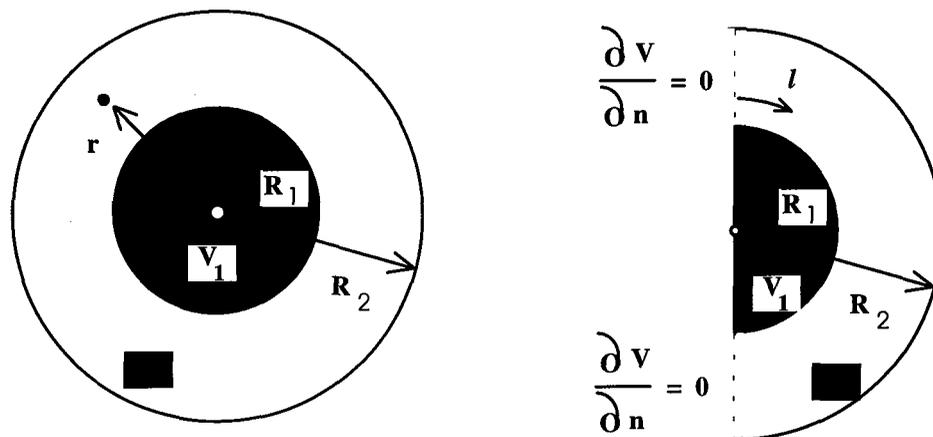


Fig. 25: Géométrie des condensateurs (*cylindrique ou sphérique*) et conditions aux limites. (*l* désigne le chemin pour les graphiques des Fig. 26 et 27).

III.2.1. Condensateur cylindrique.

L'expression analytique pour le champ électrique en fonction du rayon r est donnée ci-dessous:

$$E = \frac{(V_1 - V_2)}{r \ln \left[\frac{R_2}{R_1} \right]} \quad (144)$$

En faisant $r = R_1$ dans l'équation ci-dessus nous aurons l'expression du champ E_1 sur l'électrode 1, en fonction des rayons R_1 et R_2 . En dérivant E_1 par rapport à R_1 et R_2 nous obtenons:

$$D E_{R_1}^1 = \frac{-(V_1 - V_2) \left[\ln \left[\frac{R_2}{R_1} \right] - 1 \right]}{\left\{ R_1 \ln \left[\frac{R_2}{R_1} \right] \right\}^2} \quad (145)$$

$$D E_{R_2}^1 = \frac{-(V_1 - V_2)}{R_1 R_2 \left\{ \ln \left[\frac{R_2}{R_1} \right] \right\}^2} \quad (146)$$

où l'exposant en $D E_{R_i}^1$ désigne l'électrode et l'indice le rayon par rapport auquel la dérivée à été faite.

Les résultats sont montrés dans les Tableaux 2 et 3 pour une différence de potentiel de 1V entre les électrodes.

Tableau 2: dérivation de E_1 par rapport à R_1 (résultats sur l'électrode intérieure).

Van: Valeur de la dérivée calculée par l'équation (145)

Vnum_i: Valeur de la dérivée calculée par BEM2D sur le point i .

R_1 (m)	R_2 (m)	ANALYTIQUE (Van)	NUMERIQUE $(\bar{Vnum} = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^{NT} Vnum_i)$	ERREUR $((\bar{Vnum} / Vanal) - 1)$
1.00000	3.0	-0.0817	-0.0817	$< 10^{-4}$
1.09942	3.0	-0.0031	-0.0031	$< 10^{-4}$
1.50000	3.0	0.2839	0.2840	0.0004
2.00000	3.0	0.9041	0.9041	$< 10^{-4}$
1.25000	3.0	0.1040	0.1040	$< 10^{-4}$
2.25000	3.0	1.7001	1.7000	-0.0001
0.75000	3.0	-0.3573	-0.3577	0.0011

Tableau 3: dérivation de E_1 par rapport à R_2 (résultats sur l'électrode intérieure)*Van*: Valeur de la dérivée calculée par l'équation (146)*Vnum_i*: Valeur de la dérivée calculée par BEM2D sur le point *i*.

R_1 (m)	R_2 (m)	ANALYTIQUE (V_{an})	NUMERIQUE ($\bar{V}_{num} = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^{NT} V_{num_i}$)	ERREUR ($(\bar{V}_{num} / V_{anal}) - 1$)
1.0	3.0	-0.2762	-0.2762	$< 10^{-4}$
1.0	2.5	-0.4764	-0.4764	$< 10^{-4}$
1.0	2.25	-0.6759	-0.6759	$< 10^{-4}$
1.0	2.0	-1.0407	-1.0408	0.0001
1.0	1.75	-1.8247	-1.8249	0.0001
1.0	3.5	-0.1821	-0.1820	-0.0005
1.0	4.0	-0.1301	-0.1301	$< 10^{-4}$

III.2.2. Condensateur sphérique.

D'une façon tout à fait analogue au cas précédent, nous écrivons l'équation pour le champ électrique sur l'électrode 1 (147) et calculons les dérivées par rapport aux rayons R_1 (148) et R_2 (149). Les trois expressions sont données par les équations suivantes:

$$E = \frac{(V_1 - V_2)R_1 R_2}{r^2 [R_2 - R_1]} \quad (147)$$

$$D E_{R_1}^1 = \frac{-(V_1 - V_2)R_2 [R_2 - 2R_1]}{\{R_1 [R_2 - R_1]\}^2} \quad (148)$$

$$D E_{R_2}^1 = \frac{-(V_1 - V_2)}{[R_2 - R_1]^2} \quad (149)$$

Les Tableaux 4 et 5 montrent les résultats pour différentes valeurs du rayon et pour les dérivations par rapport à R_1 et R_2 .

Tableau 4: dérivation par rapport à R_1 (résultats sur l'électrode intérieure) V_{an} : Valeur de la dérivée calculée par l'équation (148) V_{num_i} : Valeur de la dérivée calculée par BEM2D sur le point i .

R_1 (m)	R_2 (m)	ANALYTIQUE (V_{an})	NUMERIQUE ($\bar{V}_{num} = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^{NT} V_{num_i}$)	ERREUR ($(\bar{V}_{num} / V_{anal}) - 1$)
1.0000	3.0	- 0.7500	-0.7500	$< 10^{-4}$
1.3977	3.0	- 0.1224	-0.1223	-0.0008
0.2500	3.0	-15.8678	-15.8677	$< 10^{-4}$
1.5000	3.0	0.0000	0.0000	$< 10^{-4}$
2.0000	3.0	0.7500	0.7500	$< 10^{-4}$
2.5000	3.0	3.8400	3.8403	< 0.0001

Tableau 5: Dérivation par rapport à R_2 (résultats sur l'électrode intérieure) V_{an} : Valeur de la dérivée calculée par l'équation (149) V_{num_i} : Valeur de la dérivée calculée par BEM2D sur le point i .

R_1 (m)	R_2 (m)	ANALYTIQUE (V_{an})	NUMERIQUE ($\bar{V}_{num} = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^{NT} V_{num_i}$)	ERREUR ($(\bar{V}_{num} / V_{an}) - 1$)
1.0000	4.0	-0.1111	-0.1111	$< 10^{-4}$
1.0000	3.5	-0.1600	-0.1600	$< 10^{-4}$
1.0000	3.0	-0.2500	-0.2500	$< 10^{-4}$
1.0000	2.5	-0.4444	-0.4444	$< 10^{-4}$
1.0000	2.0	-1.0000	-1.0000	$< 10^{-4}$
1.0000	1.5	-4.0000	-4.0000	$< 10^{-4}$

Les résultats des Tableaux I à IV montrent la bonne concordance des résultats numériques et analytiques. Cependant ces résultats ne montrent pas les oscillations des dérivées le long de l'électrode. Pour illustrer ces oscillations nous avons pris les valeurs de la dérivée calculée par rapport à R_1 (condensateur sphérique - Tableau III) et tracé les courbes le long du parcours l sur l'électrode intérieure pour $R_1=1.3977$ (cas où les résultats sont les moins bons) et $R_1=2.0$ (Fig. 26 et 27). On peut voir que le résultat le moins bon correspond à une erreur d'environ 0.23 % pour la Fig. 26 ($V_{an} = -0.12238$, $V_{num} = -0.1221$) et à 0.053% pour la Fig. 27.

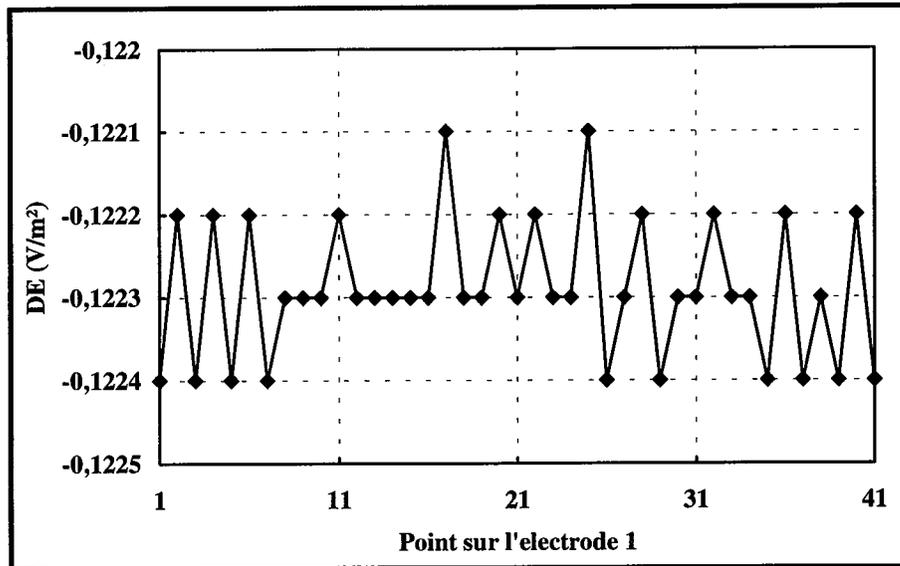


Fig. 26: Dérivée numérique du champ électrique par rapport au rayon R_1 (1.3977) sur l'électrode 1 du condensateur sphérique.

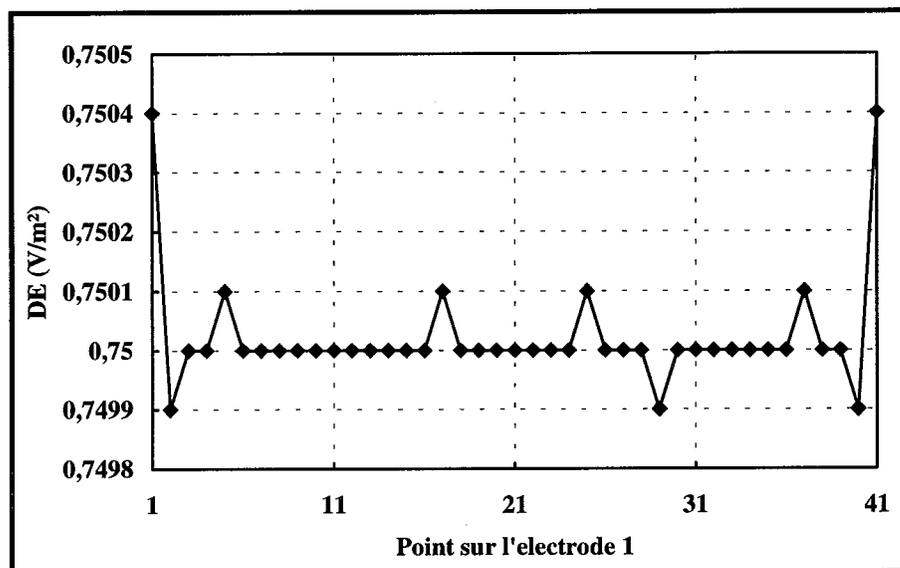


Fig. 27: Dérivée numérique du champ électrique par rapport au rayon R_1 ($R_1=2.0000$) sur l'électrode 1 du condensateur sphérique.

CONCLUSION

En analysant ces résultats nous pouvons apprécier la bonne précision obtenue dans l'analyse de sensibilité. C'est sans aucun doute le fruit de la dérivation analytique et du traitement adéquat des problèmes des singularités liés aux équations intégrales.

IV . METHODES D'OPTIMISATION - COMPORTEMENT, VALIDATION, ET PROBLEME DE COMMUTATION DANS LE CAS HYBRIDE.

INTRODUCTION.

L'étude du comportement des algorithmes d'optimisation peut être faite en utilisant des fonctions test choisies de telle sorte que la recherche du point de minimum soit difficile. Notre but dans cette étude est d'une part de voir comment les algorithmes d'optimisation se comportent par rapport aux paramètres dont ils sont dépendent, d'autre part d'analyser les résultats pour essayer de déterminer quand faire la commutation pour les algorithmes hybrides GA-ALM et MSA-ALM.

L'algorithme génétique GA, nous l'avons déjà dit, est naturellement formulé pour résoudre des problèmes de maximisation définis en termes de fonctions coût positives.

La façon avec laquelle nous avons programmé l'algorithme exige en plus des variables (*paramètres*) positives: nous avons donc fait les transformations de variables nécessaires (*en fait, cette restriction n'est pas nécessaire et pourrait être abandonnée*).

IV.1. FONCTIONS TESTEES.

IV.1.1. Fonction de Rosenbrock (F_R) [28].

Cette fonction est caractérisée par un seul point de minimum. La difficulté pour la recherche de ce point est liée au fait qu'il se trouve à l'intersection de deux vallées de pentes très faibles (Fig. 28).

Nous avons formulé le problème de minimisation comme ci-dessous:

$$\begin{aligned} \min \quad F_R(\mathbf{p}) &= 100(p_1^2 - p_2)^2 + (1 - p_1)^2 \\ -5 \leq p_k &\leq 5 \quad p'_k = p_k + 5 \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (150)$$

Le point de minimum est $p^* = (1, 1)$ avec $F_R(p^*) = 0$. Cette fonction est normalement formulée avec les variables $p \in \{-2.048, 2.048\}$ [56]. Nous avons agrandi l'espace de définition pour introduire plus de difficulté et nous avons fait la transformation $p' = p + 5$ pour pouvoir utiliser tous les algorithmes pour traiter ce problème. Ainsi, les résultats seront donnés en fonction de p' , ce qui donne $p'^* = (6, 6)$ comme point de minimum.

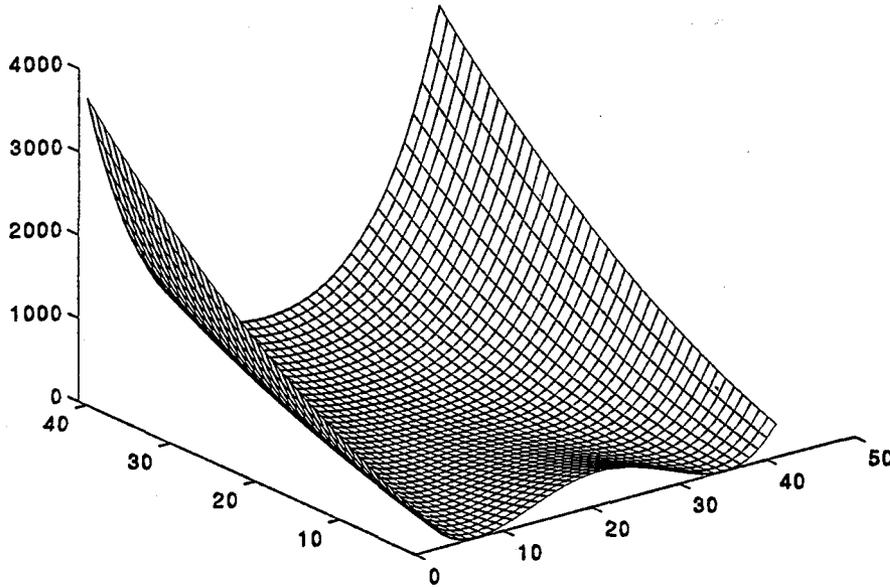


Fig. 28: Fonction de Rosenbrock.

IV.1.2. Problème de Rosen-Susuki (F_{RS}) [81].

Il est caractérisé par trois contraintes non-linéaires. La difficulté rencontrée ici est d'avoir des contraintes actives sur le point de minimum.

Le problème de minimisation a été formulé comme:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & F_{RS}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + 2\mathbf{p}_3^2 + \mathbf{p}_4^2 - 5\mathbf{p}_1 - 5\mathbf{p}_2 - 21\mathbf{p}_3 + 7\mathbf{p}_4 + 100 \\
 \text{avec} \quad & \mathbf{g}_1(\mathbf{p}) = \mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2 + \mathbf{p}_4^2 + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4 - 8 \leq 0 \\
 & \mathbf{g}_2(\mathbf{p}) = \mathbf{p}_1^2 + 2\mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2 + 2\mathbf{p}_4^2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4 - 10 \leq 0 \\
 & \mathbf{g}_3(\mathbf{p}) = 2\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2 + 2\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4 - 5 \leq 0 \\
 & 0 \leq \mathbf{p}_k \leq 10 \quad \mathbf{p}'_k = \mathbf{p}_k \quad k = 1, 2, 3 \\
 & \mathbf{p}'_4 = \mathbf{p}_4 + 1
 \end{aligned} \tag{151}$$

La valeur de la fonction objectif pour le point de minimum est $F_{RS}(\mathbf{p}^*) = 56$ avec $\mathbf{p}^* = (0, 1, 2, -1)^T$. Les contraintes \mathbf{g}_1 et \mathbf{g}_3 en \mathbf{p}^* sont actives. Nous avons fait la transformation de la variable $\mathbf{p}'_4 = \mathbf{p}_4 + 1$ pour ne pas avoir de valeurs négatives et exploiter les résultats de la même façon pour tous les algorithmes. Ainsi, $\mathbf{p}^{*'} = (0, 1, 2, 0)^T$.

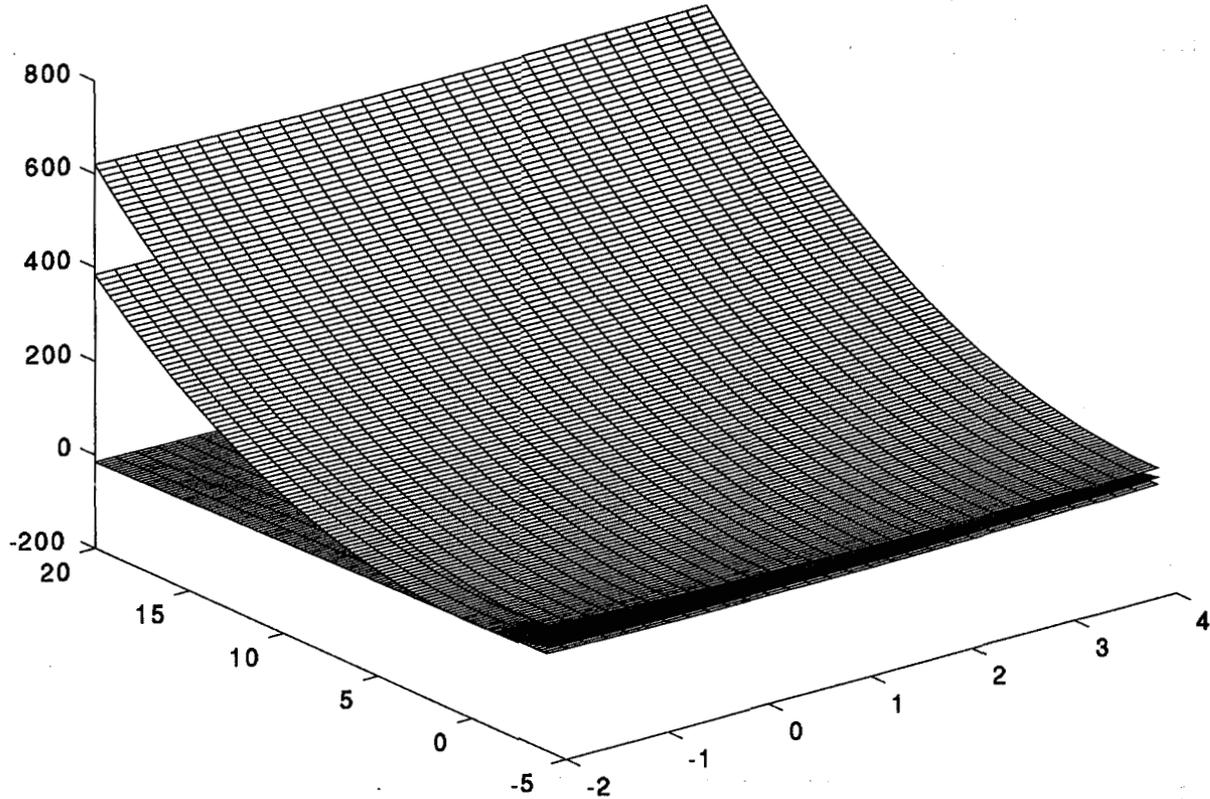


Fig. 29: Problème de Rosen-Susuki:
fonction objectif F_{RS} entre les fonctions g_1 et g_3 contraintes pour $p_1 = 0$ et $p_3 = 2$.

IV.1.3. Fonction de Rastrigin (F_{RA}) [56].

L'intérêt est de tester les algorithmes stochastiques GA et MSA en utilisant une fonction multimodale. Cette fonction a été définie dans l'intervalle $[0,10]$ avec dix variables, ce qui donne 10^{10} minima. Evidemment, on attend que cette fonction pose problème pour n'importe quelle méthode d'optimisation stochastique à cause du nombre très élevé de minima. En réalité et pour nos problèmes en électromagnétisme, nous n'attendons pas un nombre si élevé de minima. Mais, comme les méthodes stochastiques sont réputées pour leur capacité à trouver le minimum global, cette fonction est sûrement un bon test.

Le problème de minimisation a été formulé ici comme:

$$\begin{aligned} \min \quad F_{RA}(\mathbf{p}) &= 10n + \sum_{i=1}^n [(p_i - 2.5)^2 - 10 \cos 2\pi(p_i - 2.5)] \\ \mathbf{n} &= 10 \quad \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{10})^T \quad 0 \leq p_i \leq 10 \end{aligned} \quad (152)$$

La solution globale est évidemment $\mathbf{p}^* = (2.5; \dots; 2.5)^T$ et la fonction objectif a comme valeur $F_{RA}(\mathbf{p}^*) = 0$.

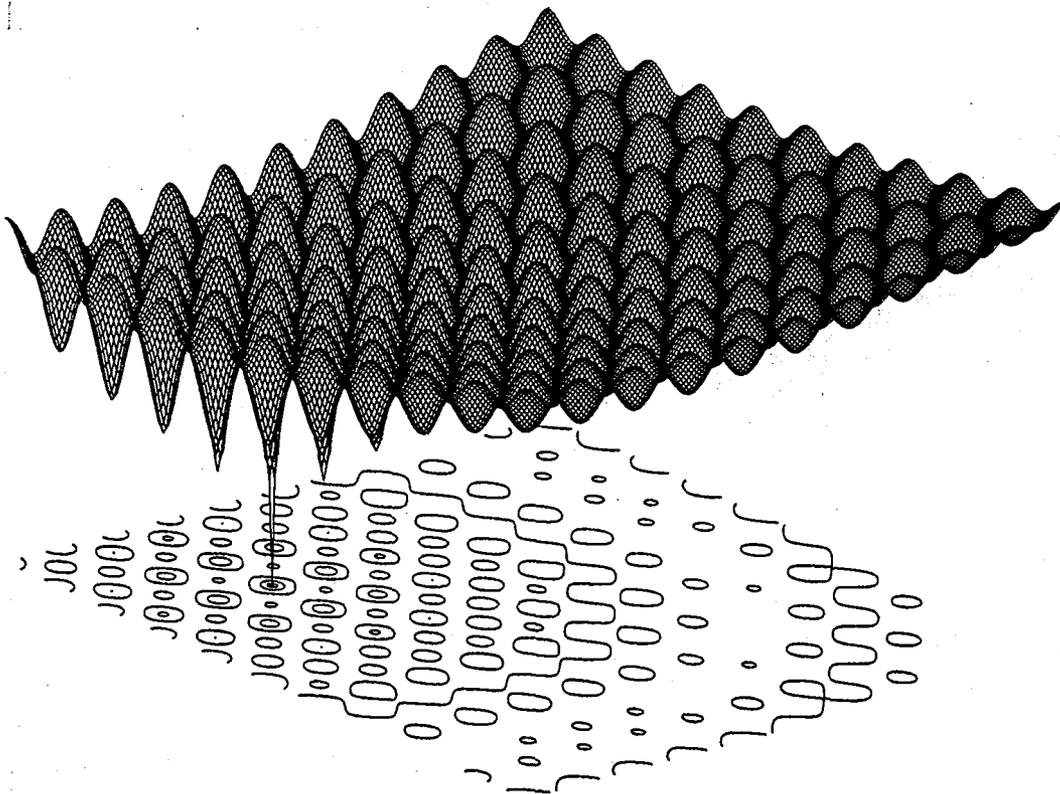


Fig. 30 Fonction de Rastrigin.

IV.2. COMPORTEMENT DES METHODES D'OPTIMISATION ETUDIEES.

IV.2.1. Algorithme du Lagrangien augmenté.

Les Fig. 31 et 32 ci-dessous montrent les tracés de la fonction objectif pour différents points initiaux en fonction du nombre d'itérations qui ont été acceptées. Ces courbes ont été obtenues dans la solution des problèmes de minimisation des fonctions de Rosenbrock et de Rosen-Susuki.

Les résultats numériques obtenus pour la fonction de Rosenbrock ont été tous justes. Cela montre que l'algorithme réalisé pour l'optimisation sans contrainte (*méthode de la région de confiance avec l'algorithme Heben-Moré*) donne de très bons résultats.

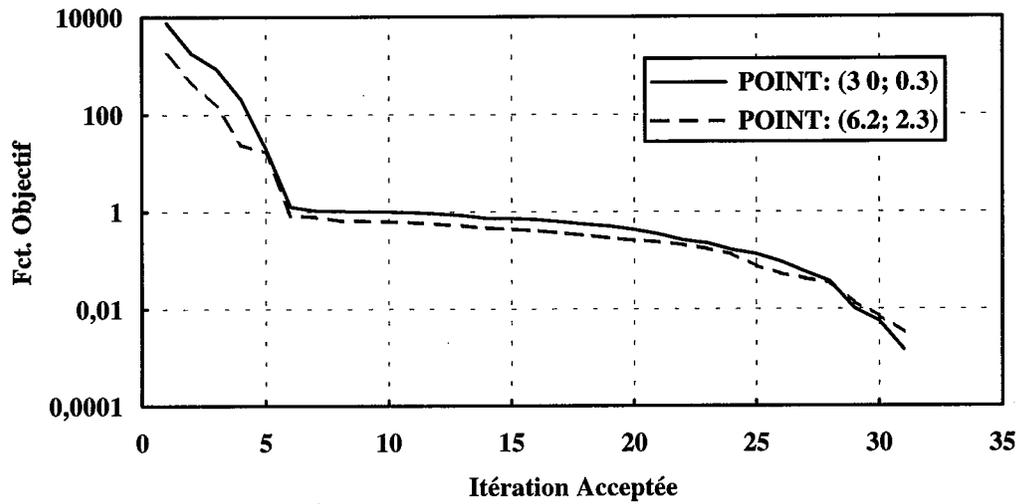


Fig 31: Evolution de la fonction de Rosenbrock en fonction des itérations acceptées.

Dans la solution du problème de Rosen-Susuki, nous pouvons voir l'intégralité de l'algorithme déterministe réalisé (*ALM+algorithme de la région de confiance+algorithme de Heben-Moré*) en fonctionnement. Cela montre que l'algorithme réalisé pour l'optimisation sous contrainte non-linéaire donne lui aussi de très bons résultats.

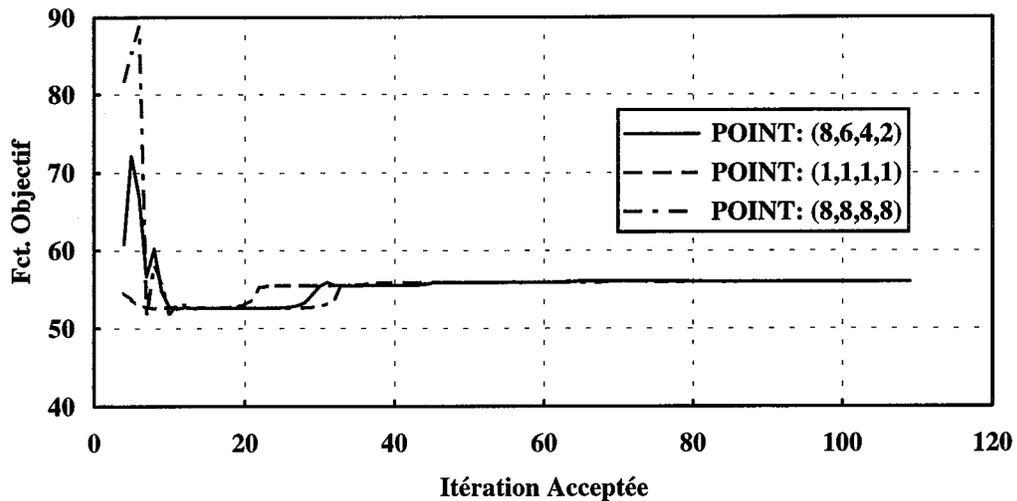


Fig 32 Fig: Evolution de la fonction de objectif pour le problème de Rosen-Susuki en fonction des itérations acceptées.

IV.2.2. Algorithme génétique.

L'algorithme génétique GA appartient à la classe des algorithmes stochastiques et parmi ses caractéristiques nous trouvons la capacité de trouver des points très proches du minimum global, même en traitant des fonctions très complexes pouvant avoir des milliers de minima locaux. Nous avons choisi le problème de minimisation de la fonction de Rastrigin F_{RA} (10^{10} minima) pour montrer ces caractéristiques et voir comment il se comporte par rapport aux probabilités de croisement, mutation et inversion.

L'algorithme GA dépend d'un nombre considérable de paramètres et, naturellement, la solution obtenue dépend aussi d'eux. Ces paramètres sont:

- ◆ Nbgen: nombre de générations;
- ◆ Nbpop: nombre des individus dans la population;
- ◆ P_{mut} : probabilité de mutation;
- ◆ P_{inv} : probabilité d'inversion;
- ◆ P_{cros} : probabilité de croisement;

Nous allons montrer quelques graphiques choisis pour illustrer le comportement de l'algorithme génétique GA.

La Fig. 33 montre l'évolution de la fonction objectif F_{RA} (*valeur de la fonction de Rastrigin, axe gauche des ordonnées*) en fonction du nombre de générations. Sur la même figure, les évolutions pour les valeurs moyenne, maximale et minimale de la fonction coût (*défini conforme chap. II*) sont aussi montrées (*axe droit des ordonnées, en échelle logarithmique*).

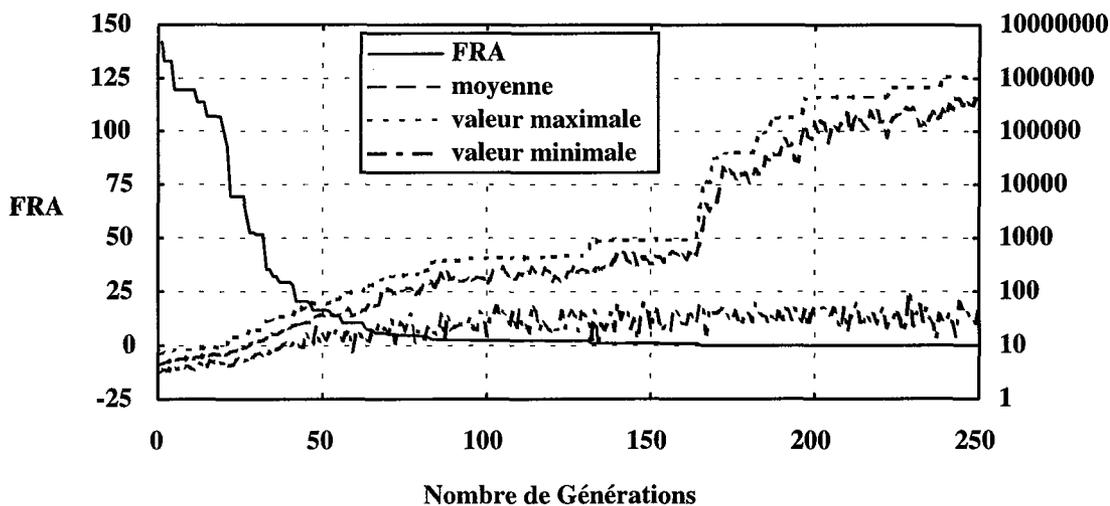


Fig. 33: Fonction de Rastrigin (F_{RA}):
Nbgen=250, Nbpop=20, P_{mut} =0.01, P_{inv} =0.01, P_{cros} =1.0, NOPT=10, P_{min} =0, P_{max} =10

Ces résultats ne sont pas surprenants. L'évolution de la fonction objectif (F_{RA}) subit de grandes variations au début du processus de recherche du minimum et tend vers sa valeur minimale au voisinage de l'optimum. L'évolution de la valeur moyenne de la fonction coût de la population montre clairement la concentration des individus au voisinage du minimum (*elle suit l'évolution de la valeur maximale, laquelle est ici l'inverse de la valeur de la fonction de Rastrigin - conforme chap. II*). Enfin, l'évolution de la valeur minimale de la fonction coût montre qu'il y a toujours de nouvelles régions testées pour la recherche continue des meilleurs points.

Les évolutions de la fonction de Rastrigin pour différentes valeurs de probabilité de croisement, en fonction du nombre de générations, sont montrées en Fig. 34.

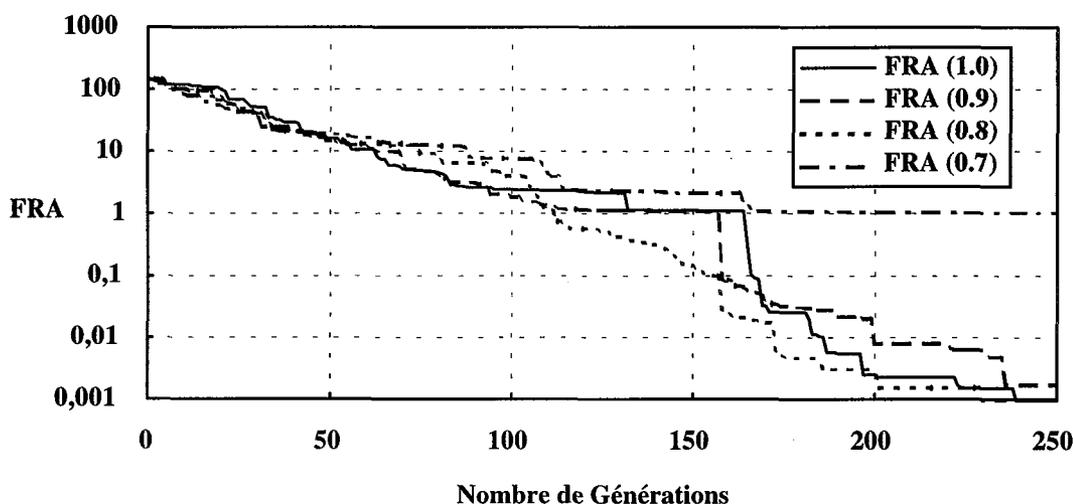


Fig. 34: Evolution de la fonction objectif (F_{RA}) pour différentes valeurs de probabilité de croisement. (Nbgen=250, Nbpop=20, P_{mut} =0.01, P_{inv} =0.01, P_{cros} =1.0,0.9,0.8,0.7, NOPT=10, P_{min} =0, P_{max} =10)

Ces résultats montrent grosso modo des évolutions similaires de la fonction objectif vers le minimum, pour des valeurs de probabilité 1, 0.9 et 0.8. Pour $P_{cros} = 0.7$ la recherche du minimum s'est arrêtée sur un minimum local.

Les évolutions de la fonction de Rastrigin pour différentes valeurs de probabilité de mutation, en fonction du nombre de générations, sont montrées en Fig. 35.

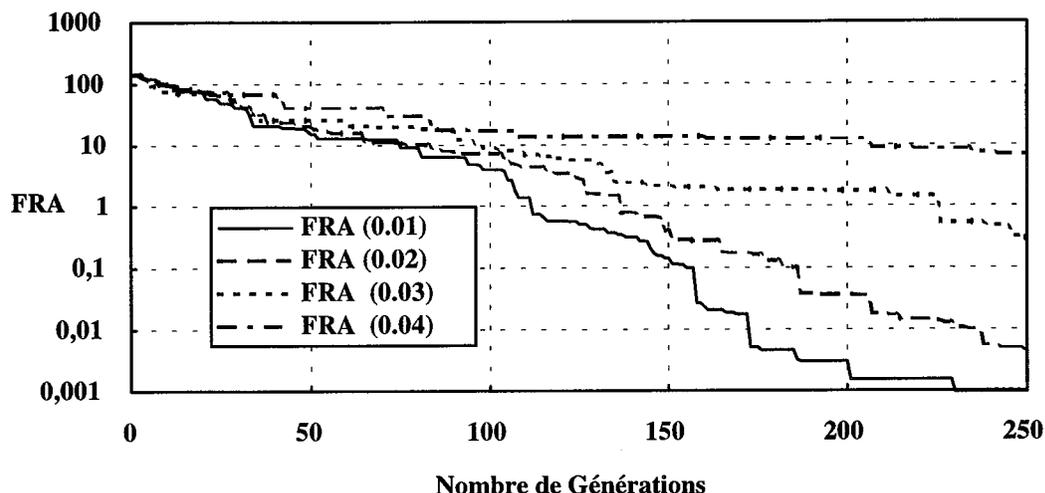


Fig. 35: Fonction objectif (F_{RA}) pour différentes valeurs de probabilité de mutation. $Nbgen=250$, $Nbpop=20$, $P_{mut}=0.01,0.02,0.03,0.04$, $P_{inv.}=0.01$, $P_{cros}=0.8$, $NOPT=10$, $NUFU=0$, $P_{min}=0$, $P_{max}=10$

Il est intéressant de noter la grande dépendance de l'algorithme génétique GA par rapport au processus de mutation. Comme nous l'avons vu, dans la mutation chaque bit d'une chaîne est candidat à la mutation selon la probabilité P_{mut} . Si cette valeur est trop grande, la propagation dans les générations suivantes des schémas représentatifs des individus de meilleure qualité est mise en péril, ce qui augmente la difficulté pour arriver avec précision au minimum. C'est pour cela que la probabilité de mutation doit être très petite, ce qui permet à de nouvelles caractéristiques d'être introduites sans porter préjudice à la convergence de l'algorithme.

Enfin, les évolutions de la fonction de Rastrigin pour différentes valeurs de probabilité d'inversion, en fonction du nombre de générations, sont montrées en Fig. 36:

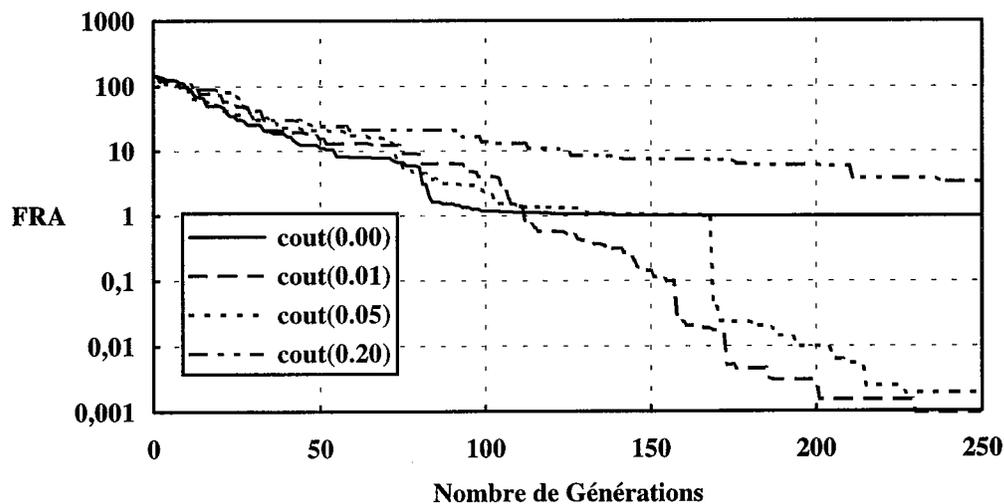


Fig. 36: Fonction objectif (F_{RA}) pour différentes valeurs de probabilité d'inversion. ($Nbgen=250$, $Nbpop=20$, $P_{mut}=0.01$, $P_{inv.}=0.00,0.01,0.05,0.10,0.20$, $P_{cros}=0.8$, $NOPT=10$, $P_{min}=0$, $P_{max}=10$)

Nous avons vu dans le chapitre II comment doit être faite l'inversion, c'est-à-dire en utilisant un type de représentation des variables où la valeur de chaque bit (*du codage binaire de cette variable*) n'est pas dépendante de sa position. Dans cette procédure orthodoxe, l'inversion ne change pas la valeur des paramètres, ni la valeur de la fonction coût, mais elle agit pour augmenter la liaison entre les caractères des schémas de performance moyenne supérieure à la moyenne de la population.

Nous avons procédé différemment: chaque paramètre est codé indépendamment des autres, chaque chaîne étant indépendamment soumise au processus génétique. Dans ce cas, nous pensons qu'il est plus efficace de conserver l'ordre des bits et d'utiliser l'inversion pour générer de nouveaux individus à travers la permutation des bits dans la structure d'une chaîne. Les résultats ci-dessus montrent que le processus d'inversion tel comme nous l'avons utilisé est effectivement efficace dans la recherche du minimum global.

IV.2.3. Algorithme de recuit simulé modifié.

Nous allons montrer les résultats de cet algorithme dans la résolution du problème de Rosen-Susuki et de la fonction de Rastrigin. Cela nous permettra mieux voir le comportement de l'algorithme de recuit simulé classique (*un seul pas de déplacement*) et celui de l'algorithme de recuit simulé modifié (*un vecteur de pas de déplacement - SA couplé avec TABU*).

L'algorithme MSA dépend lui aussi d'un nombre considérable de paramètres, très différents de ceux de l'algorithme génétique GA. Nous donnons ci-dessous les noms des paramètres et leur signification:

- ◆ P: point initial
- ◆ NOPT: nombre de variables du problème
- ◆ P_{\min} , P_{\max} : valeurs minimale et maximale de la variable d'optimisation
- ◆ COEF: facteur de division de l'espace d'optimisation
- ◆ $C_i = 0.1$ facteur employé pour la réactualisation du pas de déplacement ($i=1, NBDIV$) (eq. 129)
- ◆ NBDIV: nombre de pas de déplacement
- ◆ NUCICL: nombre de cycles auxiliaires
- ◆ LIM: nombre de mouvements avec succès
- ◆ TEMP0: température initiale
- ◆ $TEMP = 0.95 * TEMP$: mise à jour de la température
- ◆ TOLTEMP: critère d'arrêt (valeur minimale de température au dessous de laquelle MSA est stoppé)

IV.2.3.1. Problème de Rosen-Susuki

Pour la solution de ce problème, les valeurs de paramètres suivantes ont été utilisées:

- ◆ P: (4 4 4 4)
- ◆ NOPT: 4
- ◆ P_{\min}, P_{\max} : (0,10...0,10)
- ◆ COEF: 2.
- ◆ NBDIV: 1,5,10
- ◆ NUCICL: 100/NBDIV
- ◆ LIM: 50
- ◆ TEMPO: 1
- ◆ TEMP: $0.95 * TEMP$
- ◆ TOLTEMP: 0.001

La Fig. 38 montre l'évolution de la fonction objectif du problème de Rosen-Susuki (F_{RS}), le nombre de calculs de fonction et le décroissement de la température, en fonction du nombre de cycles. Au début du processus, entre les dix premiers cycles de température, la fonction objectif présente de grandes variations, après quoi elle se stabilise. Cela est en accord avec la théorie, car au début la température élevée permet de grandes variations de la fonction objectif pour la recherche de la région où se trouve le minimum global (*algorithme de Metropolis*). Le nombre de calculs de fonctions pour les dix premiers cycles de température a été inférieur à 300.

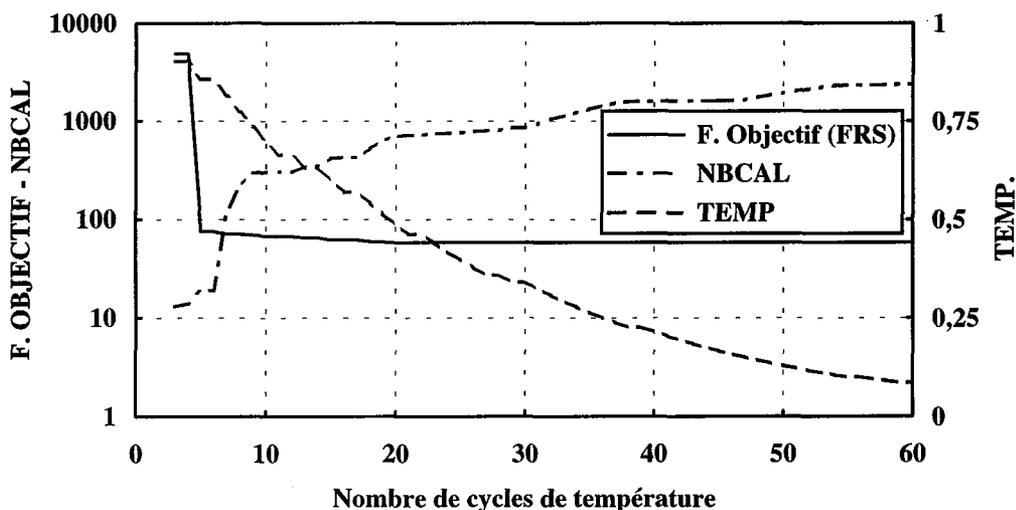


Fig. 38: Prob. de Rosen-Susuki. Fonction objectif (F_{RS}), nombre de calculs de fonction et de la température, en fonction du nombre de cycles de température (NBDIV=1).

Les Fig. 39 et 40 montrent les évolutions de la fonction objectif et du nombre de calculs de fonction pour différents nombre de pas de déplacement. Ces résultats montrent clairement que l'utilisation de plusieurs pas de déplacement (*MSA*) réduit les inconvénients de la mise à jour de ce pas (il n'en utilise qu'un) dans le cas de l'algorithme SA classique.

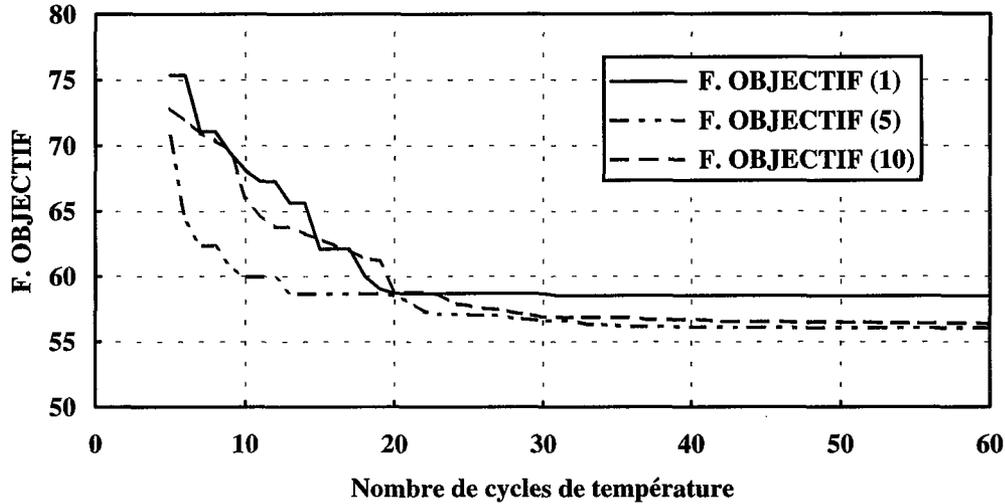


Fig. 39: Problème de Rosen-Susuki (F_{RS}). Fonction objectif pour différents nombres de pas de déplacement, en fonction du nombre de cycles de température.

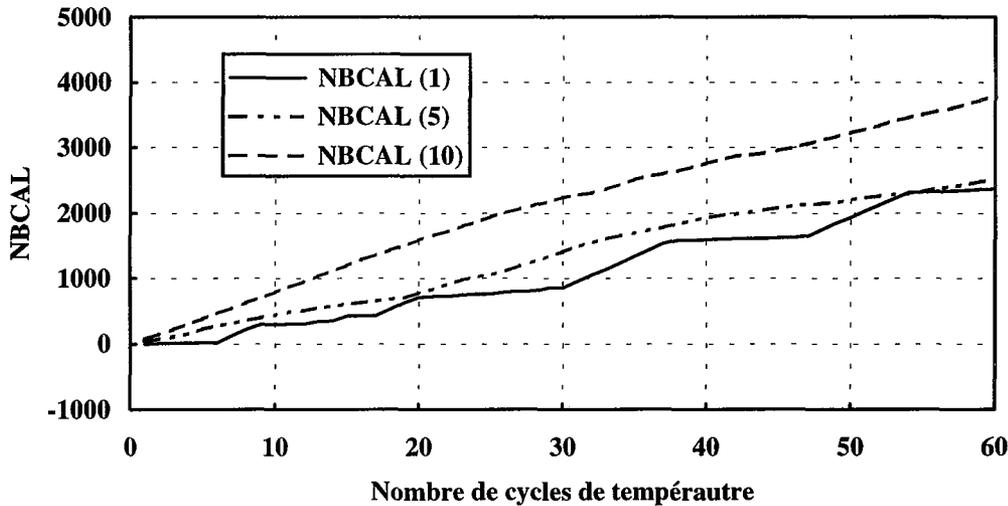


Fig. 40: Problème de Rosen-Susuki (F_{RS}). Nombre de calculs de fonction pour différents nombres de pas de déplacement, en fonction du nombre de cycles de température.

IV.2.3.2. Fonction de Rastrigin (F_{RA}).

Les valeurs des paramètres utilisés dans la solution de ce problème sont:

- ♦ P: (1 2 3 4 5 6 7 8 9 10)
- ♦ NOPT: 10
- ♦ P_{min}, P_{max} : (0,10,...0,10)
- ♦ COEF: 2.
- ♦ NBDIV: 1,5,10
- ♦ NUCICL: 100/NBDIV
- ♦ LIM: 50
- ♦ TEMPO: 1
- ♦ TEMP: 0.95*TEMP
- ♦ TOLTEMP: .001

Les Fig. 41.a et 41.b montrent l'évolution de la fonction objectif (F_{RA}) pour différents nombres de pas de déplacement en fonction du nombre de cycles de température, respectivement en échelles linéaire et logarithmique. Ces résultats montrent la capacité pour l'algorithme réalisé de trouver le minimum global; en même temps, il est possible de voir que les résultats sont meilleurs pour des nombres de pas de déplacement supérieur à l'unité (*SA classique*).

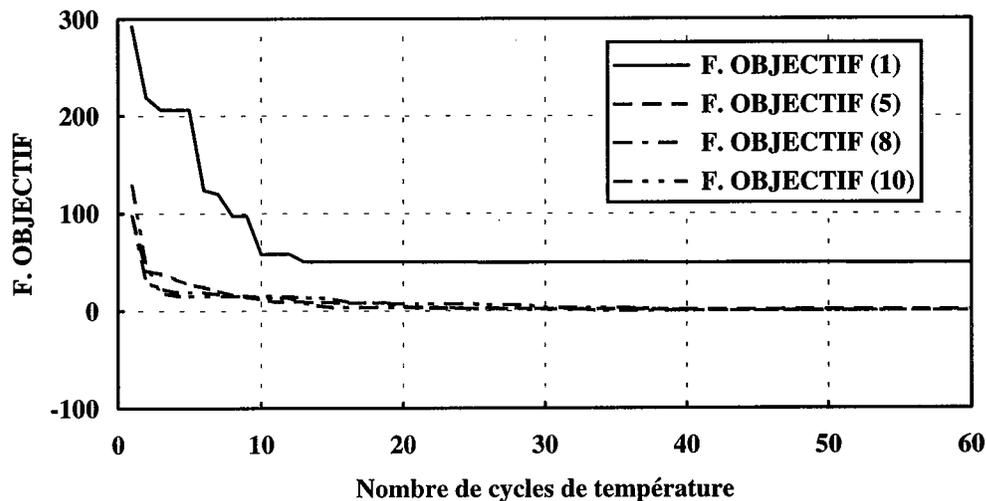


Fig. 41-a: Fonction de Rastrigin (F_{RA}). Fonction objectif pour différents nombres de pas de déplacement en fonction du nombre de cycles de température.

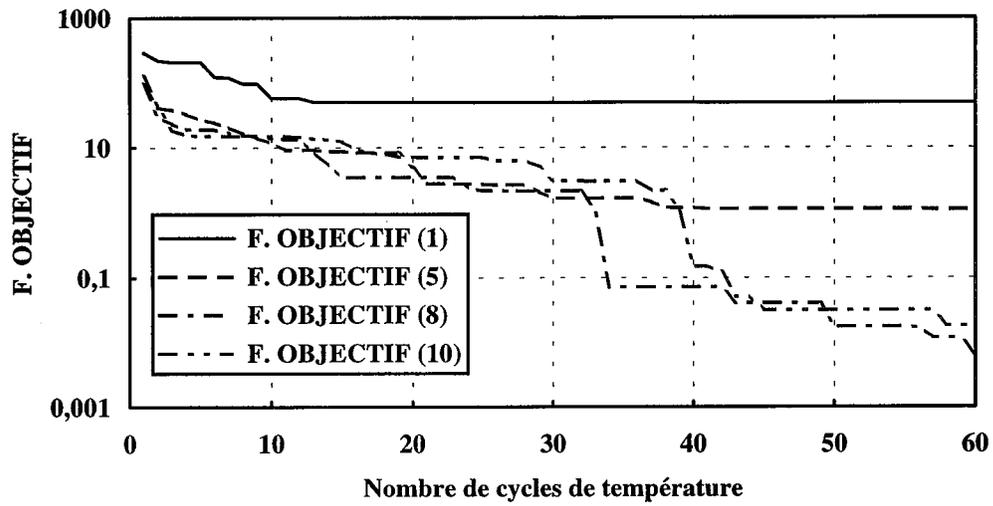


Fig. 41-b: Fonction de Rastrigin (F_{RA}). Fonction objectif pour différents nombres de pas de déplacement en fonction du nombre de cycles de température.

La Fig. 42 montre l'évolution du nombre de calculs de la fonction objectif (F_{RA}) pour différents nombres de pas de déplacement, en fonction du nombre de cycles de température.

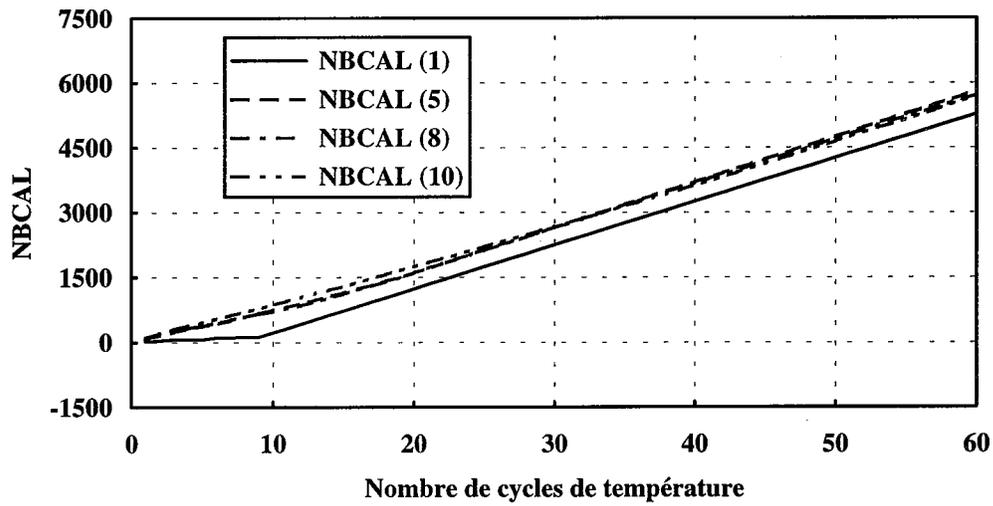


Fig. 42: Fonction de Rastrigin (F_{RA}). Nombre de calculs de fonction pour différents nombres de pas de déplacement en fonction du nombre de cycles de température.

IV.3. VALIDATION ET PROBLEMES DE COMMUTATION.

La validation des méthodes d'optimisation sera réalisée par la résolution de problèmes représentés par des fonctions analytiques. Des chiffres tels que les valeurs des coordonnées du point de minimum trouvés, la valeur correspondante de la fonction objectif et surtout le nombre associé de calculs de fonctions, sont très important pour nous donner la puissance réelle d'une méthode. Nous utiliserons ici les mêmes fonctions qui ont été déjà utilisées dans l'étude du comportement des algorithmes par rapport aux paramètres dont ils dépendent.

Des résultats numériques dans l'optimisation des fonctions analytiques par les méthodes hybrides (GA-ALM et MSA-ALM) seront aussi présentés. Les critères de commutation pour ces algorithmes, comme nous le verrons, sont très simples à mettre en oeuvre. Néanmoins, des problèmes sont rencontrés car les algorithmes ont des comportements très dépendants de la fonction objectif. Par conséquent il n'y aura pas de critère unique.

IV.3.1. Méthodes déterministes et stochastiques.

IV.3.1.1. Méthode du Lagrangien augmenté (ALM).

a) Fonction de Rosenbrock (F_R):

Point Initial (p')	$F_R(p')$	Point Final (p'^*)	$F_R(p'^*)$	Nbcal
(0,0)	90036	(6,6)	0.000000	43
(1,1)	40025	(6,6)	0.000000	38
(8,8)	3604	(6,6)	0.000000	30
(5,5)	1	(6,6)	0.000000	27

b) Problème de Rosen-Susuki (F_{RS}):

Point initial (p')	$F_{RS}(p')$	Point Final (p'^*)	$F_{RS}(p'^*)$	Nbcal
(5,7,7,7)	143	(0.008,1.003,2.003,0.033)	56.071	112
(4,4,4,4)	70	(0.010,1.004,2.002,0.035)	56.079	137
(8,6,4,2)	86	(0.011,1.000,2.000,0.036)	56.082	121
(1,1,1,1)	73	(0.009,1.008,2.003,0.038)	56.082	164

Ces résultats montrent que l'algorithme ALM est globalement convergent (*il converge pour n'importe quel point de départ*). Bien sûr, dans le premier cas (*fonction de Rosenbrock*)

c'est plutôt l'algorithme de la région de confiance avec l'algorithme de Heben-Moré car il n'existe pas de contraintes. Nous pouvons aussi voir que le nombre de calculs de fonction pour atteindre le minimum dépend du point de départ, surtout dans le cas du problème de Rosen-Susuki. En plus, la performance de l'algorithme réalisé, mesurée par le nombre de calcul de fonctions (*nbc*) peut être considérée comme assez bonne en comparaison avec des résultats publiés par d'autres auteurs [28].

IV.3.1.2. Algorithme génétique (GA).

a) Fonction de Rosenbrock (F_R):

(NBGEN,NBPOP)	Probabilités ($P_{mut}, P_{cros}, P_{inv}$)	Point final (p^{**})	$F_R(p^{**})$	Nbcal
(20,20)	(0.01,0.8,0.01)	(4.9814,4.9824)	1.0696	400
(100,20)	(0.01,0.8,0.01)	(4.999,4.999)	1.0020	2000
(20,20)	(0.08,0.8,0.01)	(5.7480,5.5586)	0.0636	400
(20,20)	(0.2,0.8,0.01)	(5.8359,5.6973)	0.0271	400

Les deux premiers résultats du tableau ci-dessus montrent que cette fonction pose des difficultés à l'algorithme génétique en raison des valeurs de probabilités qui ont été prises. Même dans le second test, en prenant un nombre de générations égal à 100, et en laissant inchangées les probabilités de mutation, croisement et inversion, l'algorithme GA n'a pu trouver le minimum. Le deuxième résultat montre qu'en augmentant le nombre de générations, on a eu un gain sur la fonction objectif, mais que le minimum n'a pas été atteint car ses caractéristiques génétiques n'étaient pas présentes, et la probabilité de mutation était trop petite pour permettre à ses caractéristiques d'être introduites. Cela est confirmé par les deux derniers résultats.

b) Fonction de Rosen-Susuki (F_{RS}):

(NBGEN, NBPOP)	Probabilités ($P_{mut}, P_{cros}, P_{inv}$)	Point Final (p^{**})	$F_{RS}(p^{**})$	Nbcal
(50,20)	(0.01,0.8,0.01)	(0.090,0.952,1.955,0.177)	56.381	1000
(100,20)	(0.01,0.8,0.01)	(0.023,0.998,1.992,0.016)	56.069	2000
(50,20)	(0.04,0.8,0.01)	(0.113,0.804,1.944,0.112)	57.378	1000
(50,20)	(0.04,1.0,0.01)	(0.101,1.063,1.930,0.022)	56.336	1000

Les deux premiers résultats montrent que, en augmentant le nombre de générations NBGEN (tous les autres paramètres étant fixes), on obtient une meilleure précision. On peut aussi observer que le prix payé pour avoir une meilleure précision est élevé. On a eu besoin de doubler le nombre de calculs de fonction pour réduire la valeur de la fonction objectif de 56.381 à 56.069. Les deux derniers résultats ont été obtenus en laissant tous les paramètres fixes, sauf la probabilité de croisement. Pour $P_{\text{cros}} = 0.8$ le résultat est assez mauvais; il devient acceptable pour $P_{\text{cros}} = 1.0$. On peut dire que, avec ces paramètres, la probabilité de croisement du troisième test n'était pas assez grande pour permettre que des régions proches du minimum soient testées.

c) Fonction de Rastrigin (F_{RA}) avec $n=10$ (10^{10} minima):

(NBGEN, NBPOP)	Probabilités ($P_{\text{mut}}, P_{\text{cros}}, P_{\text{inv}}$)	Point Final p^*	$F_{\text{RA}}(p^*)$	Nbcal
(250,20)	(0.01,0.8,0.01)	.499,2.500,2.499,2.500,2.499,2.499,2.500,2.499,2.500	0.00114	5000
(250,20)	(0.02,0.7,0.02)	.499,2.491,2.500,2.500,2.500,2.497,2.499,2.498,2.500,2.499	0.01835	5000
(250,20)	(0.02,0.8,0.02)	.495,2.499,2.497,2.500,2.499,2.500,2.505,2.496,2.499,2.505	0.01949	5000
(125,40)	(0.02,0.8,0.02)	.497,2.499,2.500,2.502,2.499,2.499,2.497,2.491,2.500,2.499	0.0204	5000
(100,50)	(0.02,0.8,0.02)	.492,2.509,2.539,2.493,2.500,2.500,2.524,2.500,2.508,2.470	0.6380	5000
(84,60)	(0.02,0.8,0.02)	.482,2.496,2.467,2.464,2.460,2.452,2.561,2.509,1.479,2.467	4.4987	5040

Ces résultats montrent clairement la caractéristique majeure de l'algorithme GA: *être capable de trouver le minimum global*. Cette fonction, avec son nombre élevé de minima, ne peut pas être considérée comme facile à minimiser. Dans les trois premiers résultats, nous avons changé simplement les probabilités en gardant fixes les nombres de générations et d'individus. Les trois points obtenus sont très proches du minimum global. Dans les trois derniers résultats, nous avons laissé à peu près fixe le nombre de calculs de fonction (c'est-à-dire le produit $\text{NBGEN} \times \text{NBPOP}$), en changeant les nombres d'individus et générations. On voit que, parmi eux, les deux premiers donnent de bons résultats ($F_{\text{ra}}(p^*) = 0.0$) et le troisième a certainement conduit à un minimum local, proche du minimum global. L'échec dans le dernier résultat est surtout dû au nombre de générations, insuffisant pour permettre à la région du minimum global d'être testée.

IV.3.1.3. Algorithme de recuit simulé modifié (MSA).

a) Fonction de Rosenbrock (F_R):

Les paramètres qui nous avons employé pour résoudre ce problème sont:

- ♦ NBDIV = 1,5,10
- ♦ NUCICL = 20/NBDIV
- ♦ LIM = 10
- ♦ TEMPO = 0.5
- ♦ TEMP = 0.9*TEMP
- ♦ TOLTEMP = 0.001
- ♦ P_{min}, P_{max} = (0,10...0,10)
- ♦ COEF = 2

NBDIV	Temp. finale (Temp)	Pas final (ΔP)	P initial (p')	$F_R(p')$	P final (p'*)	$F_R(p'^*)$	Nbcal
1	0.000998	0.00428	2	3616.0	7.0000	1.00055	1271
		0.00507	8		8.99766		
5	0.000998	0.00897	2	3616.0	5.78214	0.04770	1452
		0.00825	8		5.61020		
10	0.000998	0.00665	2	3616.0	5.69653	0.09235	1708
		0.00519	8		5.48356		
1	0.000998	0.00120	2.341	9479.278	5.88847	0.01262	1361
		0.00267	2.341		5.78803		
5	0.000998	0.02432	2.341	9479.278	6.01401	0.00029	1518
		0.02318	2.341		6.02921		
10	0.000998	0.00103	2.341	9479.278	6.04841	0.00235	1867
		0.00088	2.341		6.09932		

Le premier résultat, pour un seul pas, montre la difficulté normalement rencontrée dans la mise à jour du pas dans l'algorithme de recuit simulé classique (SA). Les résultats suivants montrent que la qualité des solutions est constante, et que l'algorithme MSA (pour un nombre de pas supérieur à l'unité) est plus fiable.

b) Fonction de Rosen-Susuki (F_{RS}):

Les paramètres employés pour résoudre ce problème sont:

- ♦ NBDIV = 1,5,10
- ♦ NUCICL = 100/NBDIV
- ♦ LIM = 50
- ♦ TEMPO = 1.
- ♦ TEMP = 0.95*TEMP
- ♦ TOLTEMP = 0.001
- ♦ P_{min}, P_{max} = (0,10...0,10)
- ♦ COEF = 2

(NBDIV)	Temp. Final (Temp)	Pas Final ($\Delta P'$)	P. Init. (p')	$F_{RS}(p')$	P. Final (p'^*)	$F_{RS}(p'^*)$	Nbcal
1	0.0009833	0.0000009	1	73.0	0.1090906	57.024239	2985
		0.0000007	1		1.3448609		
		0.0000004	1		1.8149999		
		0.0000008	1		0.0000009		
5	0.0009833	0.0001096	1	73.0	0.0598263	56.325962	8118
		0.0001390	1		1.1735196		
		0.0000893	1		1.9157060		
		0.0001236	1		0.0003864		
10	0.0009833	0.0001527	1	73.0	0.0586899	56.401199	8883
		0.0001372	1		1.2091793		
		0.0001232	1		1.9033644		
		0.0001953	1		0.0000097		
1	0.0009833	0.0000012	5	143	0.2262904	58.548988	1936
		0.0000041	7		1.4946383		
		0.0000039	7		1.6449006		
		0.0000032	7		0.0000006		
5	0.0009833	0.0004959	5	143	0.0614273	56.365154	6448
		0.0013017	7		1.1898522		
		0.0006044	7		1.9088212		
		0.0003851	7		0.0000162		
10	0.0009833	0.0224324	5	143	0.0797157	56.213165	8631
		0.0181566	7		1.0561993		
		0.0224277	7		1.9412532		
		0.0255054	7		0.0000428		

Les résultats pour NBDIV = 1 montrent que la procédure de mise à jour du pas a été plus rapide que le refroidissement. Pour NBDIV égal à 5 et 10, les résultats sont à peu près les mêmes. Comme dans le problème précédent, ces résultats montrent que l'algorithme de recuit simulé modifié (MSA) est supérieur à l'algorithme classique.

c) Fonction de Rastrigin (F_{RA}):

Les paramètres qui nous avons employés pour résoudre ce problème sont:

- ♦ NBDIV = 1,5,10
- ♦ NUCICL = 200/NBDIV
- ♦ LIM = 100
- ♦ TEMPO = 3.
- ♦ TEMP = 0.9*TEMP
- ♦ TOLTEMP = 0.001
- ♦ P_{min}, P_{max} = (0,10...0,10)
- ♦ COEF = 2

(NBDIV)	Temp. final (Temp)	Pas final (ΔP)	P.init. (p)	$F_{RA}(p)$	P. final (p^*)	$F_{RA}(p^*)$	Nbcal
1	0.000990	0.0142564	1	222.5	1.4979883	21.052475	14383
		0.0163285	1		0.5151026		
		0.0199249	1		2.5100658		
		0.0216613	1		1.5155647		
		0.0170346	1		1.5139278		
		0.0136575	1		0.5030417		
		0.0170371	1		1.4961772		
		0.0208093	1		1.5152206		
		0.0187329	1		0.5005869		
		0.0207558	1		0.4995511		
5	0.000990	0.1120085	1	222.5	2.5031836	2.0120621	14108
		0.0508444	1		2.4984715		
		0.0873664	1		2.5029063		
		0.0780608	1		2.5009365		
		0.0696390	1		3.4975550		
		0.0657493	1		2.5019269		
		0.1016653	1		2.4971168		
		0.1884426	1		2.5065646		
		0.0945749	1		2.5032916		
		0.1186200	1		3.4908149		
10	0.000990	0.4238111	1	222.5	2.4999952	0.0003433	15016
		0.3972011	1		2.5003557		
		0.2740839	1		2.4999561		
		0.4725709	1		2.4995842		
		0.3163724	1		2.5003002		
		0.4222912	1		2.4999409		
		0.3393733	1		2.4997194		
		0.3743728	1		2.5000565		
		0.3985126	1		2.4996099		
		0.2531831	1		2.4989500		

1	0.0009990	0.0168444	1	372.5	0.5188457	124.64750	13813
		0.0187842	2		1.5144522		
		0.0255861	3		1.4918253		
		0.0277971	4		4.4766679		
		0.0212081	5		5.4687490		
		0.0301962	6		4.5006027		
		0.0222476	7		6.4681306		
		0.0146855	8		7.4672122		
		0.0252424	9		7.4613175		
		0.0254040	10		8.4820976		
5	0.0009990	0.0348920	1	372.5	2.4990728	0.0019531	15308
		0.0234799	2		2.5010786		
		0.0166878	3		2.5000148		
		0.0207559	4		2.4994867		
		0.0182710	5		2.5009010		
		0.0512640	6		2.5012419		
		0.0502541	7		2.4984639		
		0.0695523	8		2.5010784		
		0.0504185	9		2.5012472		
		0.0361304	10		2.4996152		
10	0.0009990	0.5216485	1	372.5	2.5005503	0.0004578	14098
		0.7047930	2		2.4995413		
		0.4843590	3		2.5002978		
		0.3611947	4		2.4999475		
		0.5452703	5		2.4989877		
		0.7930351	6		2.5006237		
		0.5792831	7		2.5002193		
		0.5661463	8		2.4996738		
		0.4795951	9		2.4995944		
		0.5424546	10		2.5000539		

Ces résultats montrent que l'algorithme MSA peut trouver le minimum global de fonctions très complexes (10^{10} minima). L'échec pour NBDIV = 1 (ce qui correspond à l'algorithme SA classique) montre encore une fois la difficulté de faire la mise à jour du pas de déplacement. Cet exemple montre que l'emploi d'un vecteur de pas de déplacement aide beaucoup dans la recherche du minimum global, et que la méthode est alors moins sensible à l'actualisation de ce vecteur après chaque cycle de température.

IV.3.2. Méthodes hybrides.

IV.3.2.1. Présentation des fonctions-test.

Nous avons choisi deux fonctions pour tester les algorithmes hybrides GA-ALM et MSA-ALM:

a) Fonction de Rastrigin (F_{RA}):

Nous l'avons prise avec deux variables seulement $p = [p_1, p_2]$, définies dans l'intervalle $[0, 10]$, ce qui donne 100 minima. La difficulté de cette fonction est surtout liée au nombre de minima qu'elle présente. Nous n'avons pris que deux variables, car nous avons remarqué lors de tests que la méthode hybride n'apporte pas de gain quand le nombre de minima est très grand. Les problèmes réels de électromagnétisme n'ont en général que peu de minima locaux, ainsi nous espérons que les algorithmes hybrides pourront apporter une réduction sensible du nombre de calculs de fonctions par rapport au nombre normalement nécessaire en n'utilisant que des algorithmes stochastiques. Dans le cas de problèmes connus pour présenter un nombre élevé de minima, nous considérons que la meilleure solution est l'application d'une méthode stochastique, seule ou couplée avec un autre algorithme stochastique.

b) Fonction exponentielle (F_{EXP}).

Elle est définie dans l'intervalle $[0, 10]$. Cette fonction est caractérisée par une valeur de minimum local très proche de la valeur du minimum global, ce qui devrait conduire à des difficultés avec les algorithmes stochastiques. En plus, cette fonction est très plate pour des points éloignés des minima, ce qui empêche la recherche du minimum par une méthode déterministe basée sur le calcul du gradient (*quand le point de départ se situe sur cette zone plate*);

$$F_{EXP}(\mathbf{p}) = 20 - \exp(-\sum (p_i - 1.5)^2 + 1) + \exp(-\sum (p_i - 2.5)^2 + 1.05) - \exp(-\sum (p_i - 3.5)^2 + 1.1) \quad 0 \leq p_i \leq 10 \quad i = 1, 2 \quad (153)$$

La solution globale est $p^* = (3.59585; 3.59585)^T$ avec $F_{EXP}(p^*) = 17.30889$.

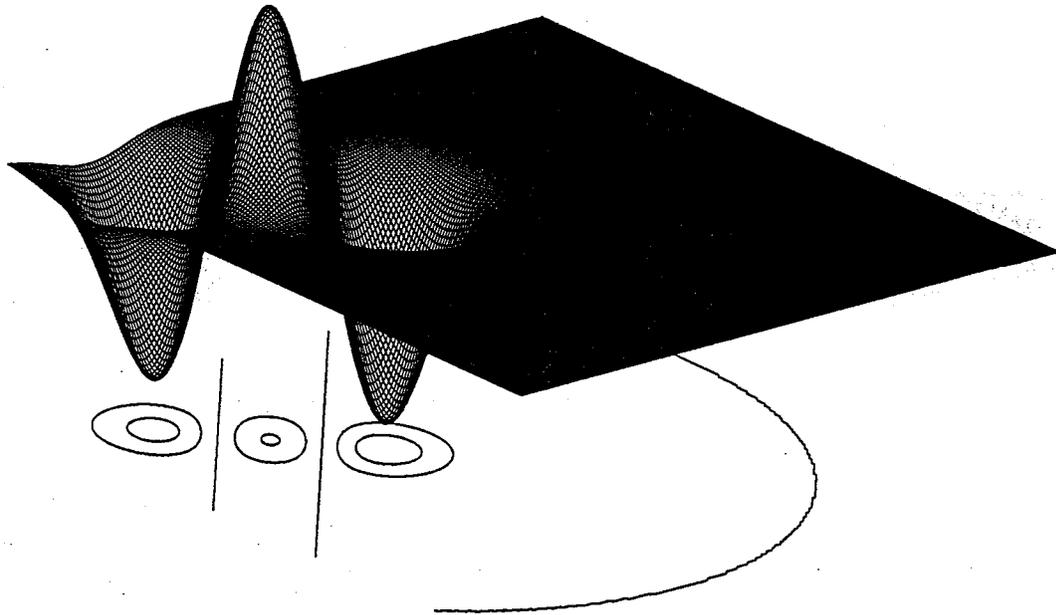


Fig. 43 Fonction exponentielle.

IV.3.2.2. Génétique / Lagrangien augmenté (GA-ALM).

Nous avons dit dans le chapitre II que le problème qui se pose pour coupler deux méthodes d'optimisation est de savoir quand arrêter la première pour lancer la seconde. Nous allons montrer quelques résultats, en utilisant deux procédures différentes de lancement de la méthode ALM.

La première est basée sur le nombre de génération. C'est la plus simple et peut-être la plus naturelle. Le problème est que les fonctions à optimiser sont parfois très différentes et le nombre de générations ne peut pas être le même dans tous les cas.

La deuxième procédure utilise comme critère la différence entre les meilleurs résultats de deux générations consécutives $T+1$ et T : la méthode déterministe est lancée lorsque cette différence est inférieure à une certaine limite ($|F^*(T+1) - F^*(T)| < 0.001F^*(T)$). Cette procédure donne les meilleurs résultats et est évidemment aussi très simple.

Sauf mention contraire, les probabilités de mutation, croisement et inversion dans les résultats présentés ci-dessous sont respectivement 0.01, 0.8, et 0.01.

a) GA / ALM: Fonction de Rastrigin (F_{RA}).

a.1) F_{RA} et GA / ALM: Critère sur le nombre de générations.

Les résultats dans le tableau ci-dessous montrent le type de difficulté rencontré si on veut utiliser cette procédure. Comment peut-on savoir a priori quel est le nombre de générations qui garantit le minimum global? Le problème est bien sûr l'absence d'un critère mathématique. Pour le test sur la fonction de Rastrigin, en laissant tous les paramètres fixes et en ne changeant que le nombre de générations, nous avons eu de bons résultats pour tout NBGEN supérieur ou égal à 4. Pour d'autres valeurs de NBGEN, l'algorithme GA a donné des résultats proches d'un minimum local, après quoi l'algorithme ALM a trouvé le minimum local le plus proche.

(NBGEN, NBPOP)	Meilleur Point GA (p_{GA})	$F_{RA}(p_{GA})$	Point Final (p^*)	$F_{RA}(p^*)$	Nbcal (GA+ALM)
(10,20)	(2.497,2.450)	0.48984	(2.500,2.500)	0.00000	200+12
(8,20)	(2.485,2.448)	0.56936	(2.500,2.500)	0.00000	160+12
(6,20)	(2.460,2.448)	0.84320	(2.500,2.500)	0.00000	120+16
(4,20)	(2.450,2.443)	1.11795	(2.500,2.500)	0.00000	80+16

a.2) F_{RA} et GA / ALM:

Critère sur la différence entre les meilleurs résultats des générations $T+1$ et T .

Le critère choisi est $|F^*(T+1)-F^*(T)| < 0.001F^*(T)$. Pour montrer l'avantage de cette procédure, nous présentons deux résultats dans le tableau ci-dessous. Dans le premier cas, on a choisit NBGEN = 10. Bien entendu, cette valeur est maintenant le nombre *maximum* de générations que l'algorithme peut exécuter. Il s'est arrêté à la sixième génération, et la meilleure des valeurs a été passée à l'algorithme ALM, qui a eu besoin de 12 calculs de fonction objectif pour arriver au minimum global avec une précision supérieure à 10^{-5} .

(NBGEN, NBPOP)	Meilleur Point GA (p_{GA})	$F_{RA}(p_{GA})$	Point Final (p^*)	$F_{RA}(p^*)$	Nbcal (GA+ALM)
(10*,20)	(2.485,2.444)	0.6510	(2.500,2.500)	0.00000	120+12
(5*,20)	(2.485,2.444)	0.6511	(2.500,2.500)	0.00000	100+16

(*) Nombre maximum de générations.

Pour le deuxième résultat, on a donné 5 comme valeur maximale du nombre de génération, en gardant tous les autres paramètres. Le critère n'a pas été satisfait à la cinquième génération; l'algorithme a passé le meilleur résultat à ALM, qui a encore fait 16 calculs de fonction objectif pour arriver à l'optimum global.

Dans le tableau suivant, nous montrons quelques résultats pour la fonction de Rastrigin définie avec trois et quatre variables dans le même espace, ce qui donne respectivement 1000 et 10000 minima. Le but est montrer la difficulté pour décider la commutation quand le nombre de minima devient important. Nous avons utilisé ici le critère $|2F^*(T+1)-F^*(T)-F^*(T-1)| < 0.001F^*(T)$ à la génération T+1, où $F^*(T)$ est le meilleur résultat à la génération T. Ce critère est plus sévère que le précédent, puisqu'il demande trois générations successives avec des (*meilleurs*) résultats très proches pour permettre la commutation des algorithmes.

(NBGEN, NBPOP)	P_{mut}, P_{cros} P_{inv}	Meilleur Point GA (p_{GA})	$F_{RA}(p_{GA})$	Point Final (p^*)	$F_{RA}(p^*)$	Nbcal (GA+ALM)
(20*,20)	(0.02,0.8, 0.02)	(2.489,2.498, 2.476)	0.1417	(2.500,2.500, 2.500)	0.00000	320+12
(20*,20)	(0.02,0.8, 0.02)	(3.457,2.450, 2.490,4.504)	5.785	(3.495,2.500, 2.500,4.490)	4.9748	360+22
(40*,20)	(0.02,0.8, 0.02)	(2.467,2.483, 1.478,2.567)	2.3049	(2.500,2.500, 1.505,2.500)	0.9946	600+23
(40*,20)	(0.01,0.8, 0.01)	(2.481,2.920, 2.496,2.498)	0.0841	(2.500,2.500, 2.500,2.500)	0.00000	560+21

(*) Nombre maximum de générations.

Le premier résultat concerne la fonction de Rastrigin avec trois variables, les trois suivants avec quatre variables. Pour le premier résultat, on peut voir que la commutation s'est produite très près du minimum global, et que l'algorithme ALM n'a pas amélioré grand chose. Les deuxième et troisième résultats montrent des commutations qui ont transmis à ALM des points proches d'un minimum local. Finalement, le quatrième résultat, obtenu en changeant les probabilités P_{mut} , P_{cros} et P_{inv} , montre que le point passé à ALM après la commutation est très proche du minimum global (comme dans le premier cas). Ces résultats justifient ce qu'on a dit plus haut à propos des méthodes hybrides, pour résoudre des problèmes d'optimisation à très grand nombre de minima: le gain apporté par le couplage est peut être très petit!

b) GA / ALM: Fonction "exponentielle" (F_{EXP}).

b.1) F_{EXP} et GA / ALM: Critère sur le nombre de générations.

(NBGEN, NBPOP)	Meilleur Point GA (p_{GA})	$F_{RA}(p_{GA})$	Point Final (p^*)	$F_{RA}(p^*)$	Nbcal (GA+ALM)
(6,20)	(3.7549,3.3584)	17.52336	(3.59583,3.59586)	17.308895	120+11
(2,20)	(3.7549,3.3584)	17.52336	(3.59586,3.59585)	17.308893	40+13
(2,6)	(4.2852,2.9639)	18.87840	(3.59588,3.59585)	17.308893	12+11
(1,6)*	(7.14258,2.85645)	20.00000	(7.14258,2.85645)	20.00000	6+2

(* Ce dernier résultat n'a pas été soumis aux opérations naturelles(croisement, inversion et mutation). Il est simplement le meilleur individu généré aléatoirement au début de l'algorithme GA.

b.2) F_{EXP} et GA / ALM:

Critère sur la différence entre les meilleurs résultats des générations $T+1$ et T

(NBGEN, NBPOP)	Meilleur Point GA (p_{GA})	$F_{RA}(p_{GA})$	Point Final (p^*)	$F_{RA}(p^*)$	Nbcal (GA+ALM)
(20*,20)	(3.809,3.333)	17.60098	(3.59586,3.59585)	17.308893	40+13
(10,10)	(3.536,3.022)	18.35068	(3.59585,3.59585)	17.308895	50+18
(10,6)	(4.285,2.964)	18.87840	(3.59586,3.59579)	17.308895	18+18
(10,4)	(4,4)	18.20960	(3.59585,3.59589)	17.308893	8+21

Le critère choisi est à nouveau $|F^*(T+1)-F^*(T)| < 0.001F^*(T)$. Les résultats du tableau montrent que la commutation a été bien faite. Cette fonction ne pose aucun problème à l'algorithme génétique GA, surtout en raison du nombre très faible de minima.

IV.3.2.3. Recuit simulé modifié / Lagrangien augmenté (MSA-ALM).

Nous allons maintenant montrer quelques résultats de l'algorithme hybride MSA-ALM et nous en profiterons pour faire quelques commentaires sur la question de la commutation entre eux. Nous avons choisi deux procédures différentes de commutation entre MSA et ALM, tout à fait comparables à celles que nous venons de voir.

La première est basée sur le nombre de cycles de température, par analogie avec le nombre de générations utilisé dans le cas GA - ALM: les mêmes commentaires sont encore applicables.

La deuxième procédure fondée sur la différence entre les meilleurs résultats de deux cycles de températures consécutifs $T+1$ et T ($|F^*(T+1)-F^*(T)| < 0.001F^*(T)$), donne de meilleurs résultats au prix d'un nombre de calculs de fonction plus élevé.

Nous avons choisi la fonction de Rastrigin, définie en fonction de deux variables, et les principaux paramètres employés sont pour l'algorithme MSA ont été:

- ◆ NBDIV = 10
- ◆ NUCICL = 1
- ◆ LIM = 5
- ◆ TEMPO = 1.
- ◆ TEMP = 0.95*TEMP
- ◆ TOLTEMP = 0.1
- ◆ P_{min}, P_{max} = (0,10...0,10)
- ◆ COEF = 2

a) MSA-ALM: Critère sur le nombre de cycles de température.

Le tableau ci-dessous montre les résultats pour différents points de départ. Dans tous les cas, on a fixé à dix le nombre de cycles de température. Ce nombre (magique) à été choisi en regardant le graphique des Fig. 41.a et 41.b. Ces résultats montrent que, pour ce problème et avec ces paramètres, la commutation à été faite judicieusement. Néanmoins, pour le même problème, mais défini pour un nombre de variables plus grand, la commutation tombe souvent sur des points proches de minima locaux.

Point Initial (P)	$F_{RA}(P)$	P^*_{MSA}	$F_{RA}(P^*_{MSA})$	P^*_{ALM}	$F_{RA}(P^*_{ALM})$	NBCAL
3.0 0.3	31.99983	2.5089719 2.5472767	0.456158	2.5000319 2.4999831	0.000002	211+14
6.0 0.2	50.63016	2.5023105 2.5026898	0.002495	2.4999852 2.4999831	0.000002	229+10
9.0 0.0	88.5	2.5009742 2.4942634	0.006718	2.5000119 2.4999297	0.000004	223+12

b) MSA-ALM: Critère sur la différence entre les meilleurs résultats des générations $T+1$ et T .

Le critère choisi est $(|F^*(T+1)-F^*(T)| < 0.001F^*(T))$. Les résultats pour différents points de départ, avec la fonction de Rastrigin définie avec deux, trois et cinq variables (10^2 , 10^3 et 10^5 minima) montrent que cette procédure peut être employée au prix d'un nombre de calculs de fonction parfois plus élevé que dans le cas précédent (*dans le cas d'un faible nombre de cycles de température*).

Point initial (P)	$F_{RA}(P)$	P^*_{MSA}	$F_{RA}(P^*_{MSA})$	P^*_{ALM}	$F_{RA}(P^*_{ALM})$	NBCAL
3.0 0.3	31.99983	2.4981184 2.5001054	0.000706	2.4998360 2.5000091	0.000008	841+10
6.0 0.2	50.63016	2.5023105 2.5026841	0.002489	2.4999764 2.4999726	0.000002	247+10
1.0 2.0 3.0	62.75	2.5013256 2.5016818 2.5028365	0.002506	2.5000145 2.5000176 2.5000300	0.000004	854+12
1.0 2.0 3.0 4.0 5.0	111.25	2.4993863 2.4949477 2.4986012 1.5046210 2.4979348	1.001366	2.4999638 2.5000124 2.5000792 1.5050203 2.4999318	0.994965	801+8

CONCLUSION.

En utilisant un code hybride, on espère pouvoir atteindre le minimum global sans payer un prix trop élevé. Les résultats présentés montrent que ce but peut être atteint lorsque le nombre de minima n'est pas très grand. On est donc en droit d'espérer que, dans le cas de l'optimisation en électromagnétisme, ces méthodes seront applicables et avantageuses. Dans la littérature en effet, des problèmes d'électromagnétisme ayant plus d'un minimum sont fréquemment cités [35,69,77], mais on n'en connaît pas qui en présente des centaines.

V . OPTIMISATION DES STRUCTURES

INTRODUCTION.

Pour tenir compte des problèmes liés à la tenue diélectrique des matériaux, on fait appel, lors de la conception des appareillages à haute tension:

- ◆ à la connaissance de la valeur disruptive du champ électrique, qui dépend de la nature du milieu diélectrique;
- ◆ aux méthodes de calcul de la distribution du champ.

Le premier point est acquis par l'expérience du fabricant. Le second semble facilité par le développement des logiciels qui sont aujourd'hui capables de calculer précisément le champ électrique en 3D. Néanmoins, le travail d'ingénieur qui reste à faire n'est pas facile: il doit imaginer et modifier les formes géométriques des zones les plus sensibles de son dispositif, de façon à obtenir des valeurs de champ inférieures à la valeur disruptive, tout en tenant compte d'autres contraintes, comme par exemple des contraintes mécaniques, d'encombrement ou de coût. Sur la zone critique (là où le champ est maximum), le champ électrique est très sensible aux variations des paramètres géométriques.

L'amélioration de la structure par l'ingénieur utilisant un logiciel de calcul de champ dépourvu de module d'optimisation peut exiger une grande quantité de calculs, sans qu'on puisse être finalement assuré que la solution obtenue est la meilleur possible.

V.1. ALGORITHME DE LAGRANGIEN AUGMENTE - ISOLATEUR CAS CIGRE

Deux problèmes concrets d'optimisation ont été choisis dans le domaine de l'électrostatique pour illustrer l'application du logiciel BEM2D couplé avec l'algorithme d'optimisation ALM. Le premier concerne une structure formée par deux plaques en L (Fig.44) et le second, l'électrode haute tension d'un isolateur qui a servi à la CIGRE de cas test [63] pour la validation de logiciels de calcul de champ (Fig. 48).

Le premier problème a été optimisé en ayant comme but l'uniformisation du champ normal sur la plaque en L inférieure. Le problème a été formulé comme:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{NT} (E_j^2 - E_{oj}^2)^2 \\ \text{avec} \quad & \mathbf{p}_{\min}^k \leq \mathbf{p}^k \leq \mathbf{p}_{\max}^k \quad \mathbf{k} = 1, \mathbf{nv} \end{aligned} \quad (154)$$

où p^k est la distance entre l'origine O du système de coordonnées et le k-ème point sur le contour mobile (Fig. 44). E_j et E_{oj} sont les champs normaux respectivement *calculé* et *souhaité* sur le j-ème point test du contour mobile. On a choisit:

- | | |
|--|--|
| $nv = 11$ | <i>nombre de variables de projet</i> |
| $E_{oj} = 1.2 \text{ V/m}$ | <i>constant pour tout point test j</i> |
| $p_{\min}^k = 0.936\text{m}$ et $p_{\max}^k = 1.144\text{m}$ | <i>limites de projet</i> |

On peut facilement voir que la géométrie initiale est en dehors du domaine réalisable au sens de l'optimisation.

La Fig. 45 montre les variations du champ normal le long du contour mobile avant et après son optimisation. On peut vérifier que l'optimisation, qui débute avec une valeur "infinie" du champ électrique sur le coin, conduit à une distribution de champ électrique quasi uniforme, le but est donc atteint.

L'évolution géométrique du contour pendant l'optimisation est présentée en Fig. 46.

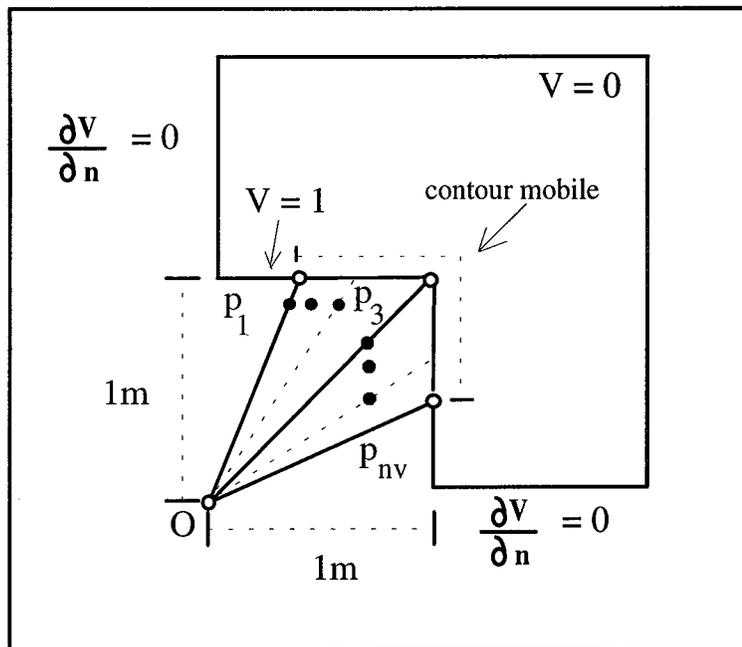


Fig. 44: Géométrie en "L" et définition des variables de projet.

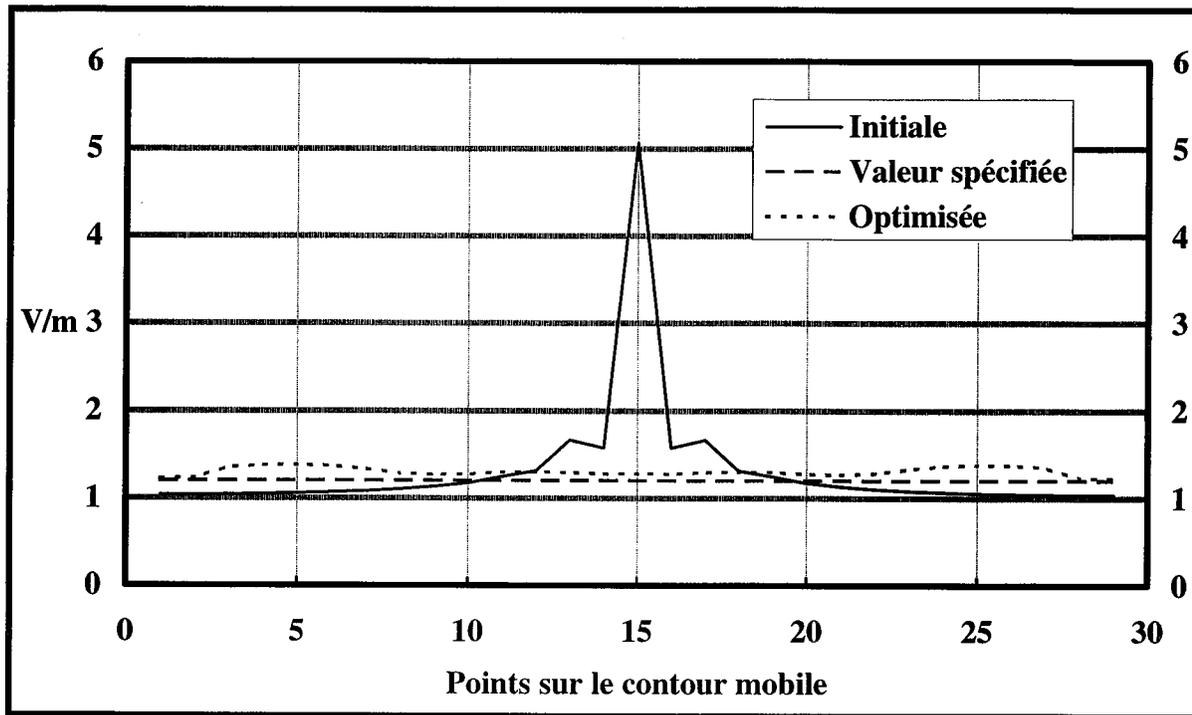


Fig. 45: Champ électrique le long du contour mobile.

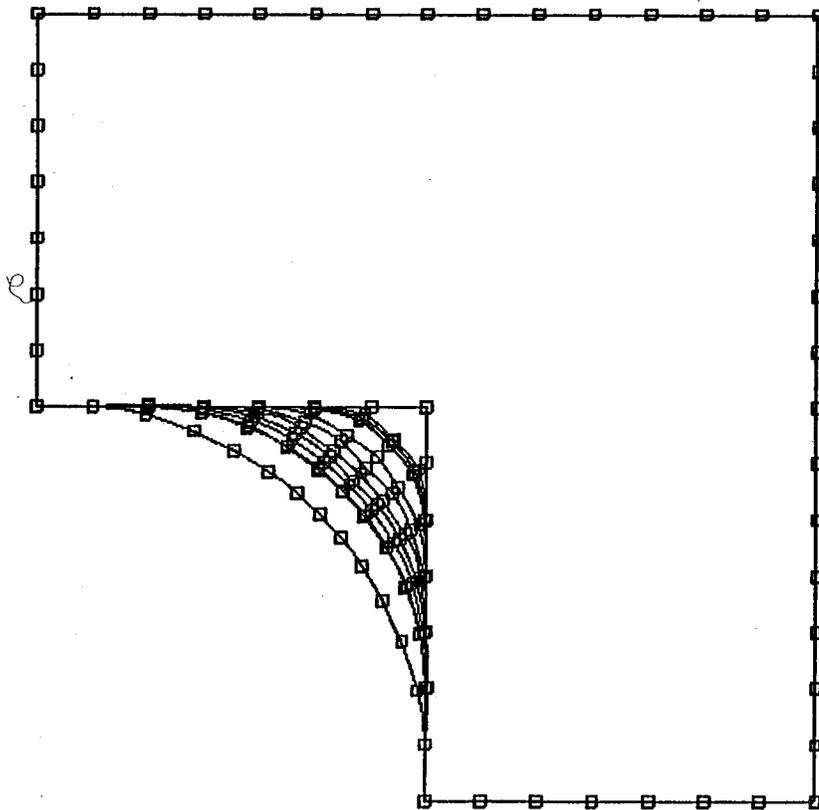


Fig. 46: évolution du profil pendant le processus d'optimisation.

Il faut souligner dans la résolution de ce problème le choix particulier des paramètres d'optimisation, qui correspondent à la distance entre l'origine O et les noeuds des éléments définissant la partie mobile du contour (*le segment OP_i gardant une direction constante*): la forme finale de ce contour est ainsi tout à fait libre. La difficulté rencontrée dans ce cas est liée au nécessaire processus de remaillage entre deux itérations, qui doit laisser la géométrie aussi lisse que possible. Nous avons utilisé, pour interpoler les points dans le processus d'optimisation, un algorithme très efficace proposé par Akima [1].

La géométrie du deuxième problème (Fig. 48) est celle de l'isolateur test de la CIGRE [63]. Le but est de ramener la valeur maximale du champ électrique de 41,5V/m à 30 V/m sur la zone modifiée. Le contour mobile à été représenté à l'aide de cinq paramètres d'optimisation $\{p\} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)^T$.

Le problème à été formulé par l'équation suivante:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{p}) = (\mathbf{E}_{\max}^2 - \mathbf{E}_o^2)^2 \\ \text{avec} \quad & g(\mathbf{p}) = \mathbf{E}_{\max}^2 - (\mathbf{E}_{o_{\min}} + \mathbf{E}_{o_{\max}}) \mathbf{E}_{\max} + \mathbf{E}_{o_{\min}} \mathbf{E}_{o_{\max}} \leq 0 \\ & \mathbf{p}_{\min}^k \leq \mathbf{p}^k \leq \mathbf{p}_{\max}^k \quad k = 1, n_v \end{aligned} \tag{155}$$

où $\mathbf{E}_o = 30\text{V/m}$ est la valeur maximale souhaitée,
 \mathbf{E}_{\max} est la valeur maximale trouvée sur les points testés du contour mobile,
 $g(\mathbf{p})$, fonction de \mathbf{E}_{\max} , définit la contrainte; c'est une parabole (Fig. 48) dépendant de:
 $\mathbf{E}_{o_{\min}} = 0.\text{V/m}$ et $\mathbf{E}_{o_{\max}} = 30.03\text{V/m}$, limites inférieure et supérieure pour la valeur maximale du champ électrique dans $g(\mathbf{p})$.

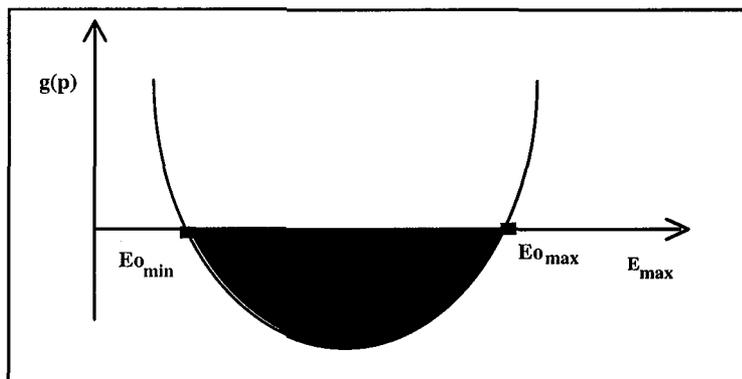


Fig. 47: Contrainte définissant la région réalisable.

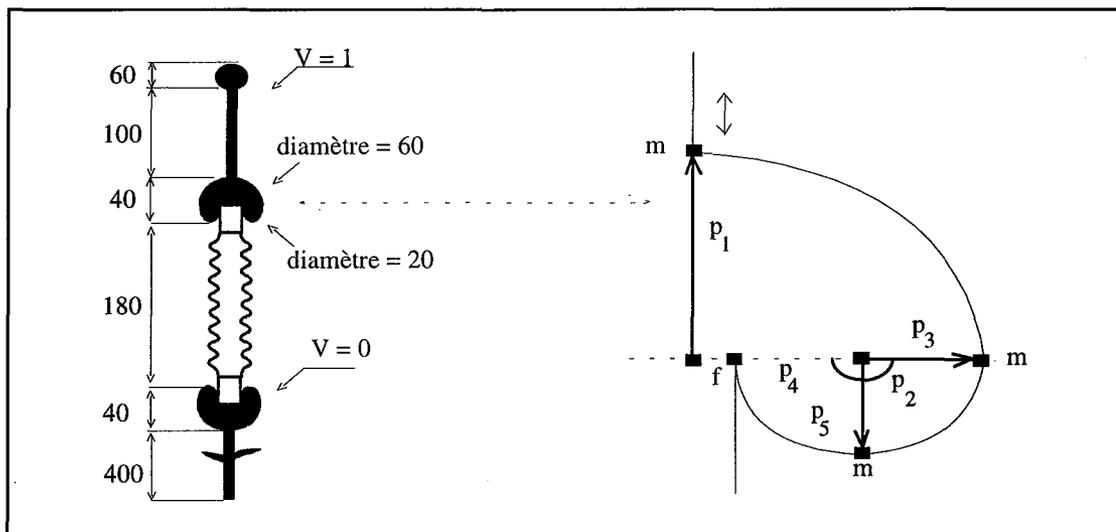


Fig. 48: Isolateur complet et agrandissement de la région contenant le contour mobile; définition des cinq paramètres d'optimisation (p_1, p_5). f et m désignent respectivement des points *fixes* et *mobiles*.

La valeur maximale (voir Tableau 6) du champ normal calculé avant et après l'optimisation a bien été ramenée de 41.54 à 29.997 V/m.

Tableau 6: valeurs des paramètres et du champ normal *avant* et *après* l'optimisation.

Paramètres	Géométrie initiale	Géométrie optimisée
p_1 (mm)	30.0	30.5
p_2 (degrés)	90.0	90.0
p_3 (mm)	10.0	15.8
p_4 (degrés)	90.0	90.0
p_5 (mm)	10.0	19.4
E_{max} (V/m)	41.54	29.997

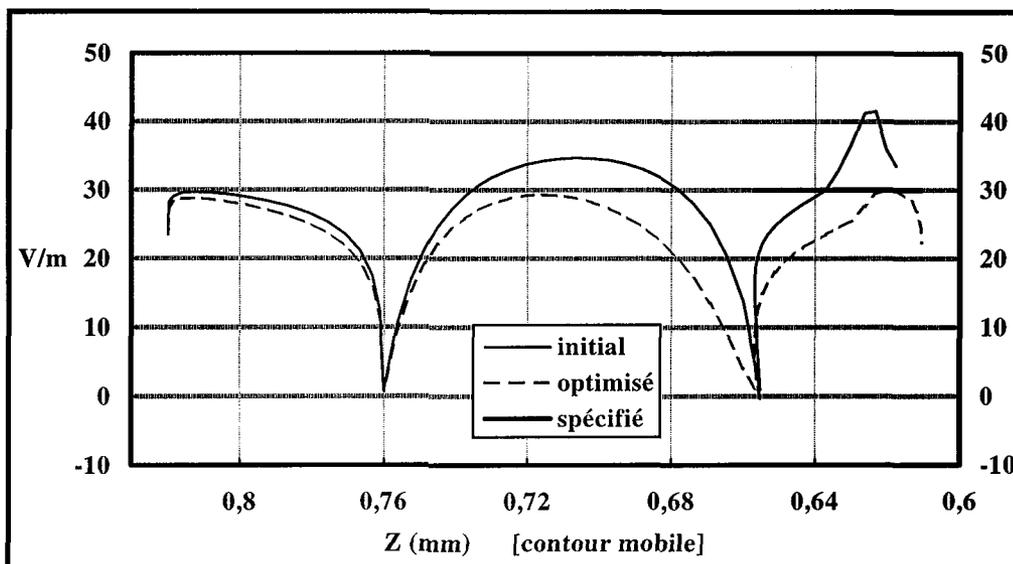


Fig. 49: Champ électrique normal sur l'électrode H.T.

On a ainsi obtenu une baisse de 28% de la valeur maximale du champ normal, avec seulement neuf calculs de champ.

Les résultats présentés pour ces deux problèmes d'électrostatique montrent la fiabilité et la robustesse du code ALM-BEM, avec pourtant des paramètres géométriques relativement nombreux et de types très différents (*position de noeuds ou éléments de courbes: rayon, angle, etc.*).

V.2. ALGORITHME GENETIQUE - ISOLATEUR TYPE RIGIDE

L'optimisation de la forme des éléments diélectriques des dispositifs à haute tension est habituellement réalisée avec des critères comme:

- ◆ l'uniformisation du champ tangentiel ($E_{tan-un.}$);
- ◆ l'uniformisation du champ total ($E_{tot-un.}$);

Däumling et Singer ont conclu que le premier critère donne de meilleurs résultats au niveau de la tension de rupture du diélectrique que le second [20]. Nous avons introduit le troisième critère:

- ◆ la minimisation de la valeur maximale du champ total ($E_{tot-max.}$) [90].

Nous allons employer successivement ces trois critères pour l'optimisation d'un isolateur PE type rigide (Fig. 50).

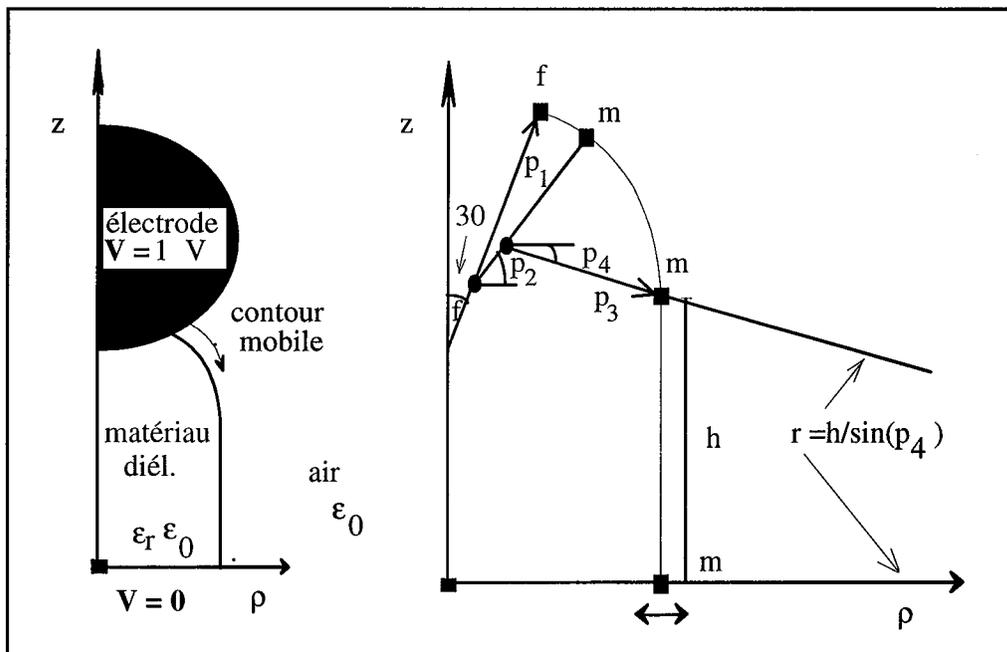


Fig. 50: Isolateur type rigide et paramètres d'optimisation (p_1, p_4)
 f et m désignent respectivement des points *fixes* et *mobiles*.

Le problème d'optimisation a été formulé de la façon suivante:

$$\min \quad f(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{NT} (E_j^2 - E_{0j}^2)^2 \quad (156)$$

avec $\mathbf{p}_{\min}^k \leq \mathbf{p}^k \leq \mathbf{p}_{\max}^k \quad k = 1, 4$

où NT est le nombre des points test sur le contour mobile,
 p est le vecteur des variables de projet (Fig. 50),

E_j et E_{0j} sont les intensités de champ électrique (*tangentiel* ou *total* suivant le critère) respectivement *calculé* et *spécifié* sur le j^{ème} point test.

Les valeurs choisies des paramètres génétiques pour résoudre ce problème sont:

NBPOP = 10	<i>nombre des individus dans la population,</i>
NBGEN = 12	<i>nombre de générations,</i>
P _{cros} = 0.9, P _{mut} = 0.025 et P _{inv} = 0.025	<i>probabilités.</i>

Trois optimisations ont donc été effectuées: pour les deux premiers cas, le but était l'uniformisation du champ tangentiel, puis du champ total le long du contour. Dans le troisième cas, le but était la minimisation du champ maximum: on a donc pris un seul point test, celui pour lequel le champ calculé est le plus grand ($NT = 1$ dans (157)), et un champ spécifié nul ($E_{0j} = 0$). Le Tableau 7 montre les résultats obtenus, et les Fig. 51.a-d présentent les variations des champs normal, tangentiel et total le long du contour mobile pour la région extérieure au diélectrique, c'est-à-dire du côté de l'air, avant et après les optimisations.

Tableau 7. Valeurs initiale et finale des paramètres d'optimisation et des intensités maximales de champ électrique.

[()²⁰ désigne le résultat obtenu par Däumling et Singer pour l'isolateur PE].

	p ₁ [mm]	Angle p ₂ [°]	p ₃ [mm]	Angle p ₄ [°]	Etan. Max. [V/m]	Etot. Max. [V/m]
limite inf.	0.01	36	0.01	0.8		
limite sup.	0.09	54	0.09	60		
Initial	0.06	45	0.06	1	23.35 (24.9) ²⁰	23.35 (24.9) ²⁰
Etan-un.	0.0100	36.51	0.0392	1.24	14.25 (13.7) ²⁰	19.92 (22.8) ²⁰
Etot-un.	0.0313	40.27	0.0396	22.87	18.78 (18.5) ²⁰	18.78 (19.1) ²⁰
Etot-max.	0.0139	45	0.0464	3.45	17.42	18.30

Dans tous les cas, le nombre de calculs de champ a été laissé à 100. Pour le premier cas, critère $E_{\text{tan-un}}$. (Fig. 51.b), le résultat obtenu représente une réduction de 39% et 15% sur les valeurs maximales de champs *normal* et *total*, respectivement. Pour le critère $E_{\text{tot-un}}$. (Fig. 51.c), ces gains ont été 20%. Finalement, pour le critère $E_{\text{tot-max}}$. (Fig. 51.d), ces gains sont respectivement de 25 et 22%.

Les résultats obtenus sont en accord avec les résultats publiés par Däumling et Singer [20], sauf pour le critère $E_{\text{tan-un}}$, pour lequel ces auteurs sont parvenus à des valeurs maximales supérieures pour les champs *tangentiel* et *total*. Le petit nombre de paramètres employé pour décrire la géométrie, et l'arrêt du processus d'optimisation alors que le premier paramètre a sa valeur minimale sont les explications que nous pouvons avancer.

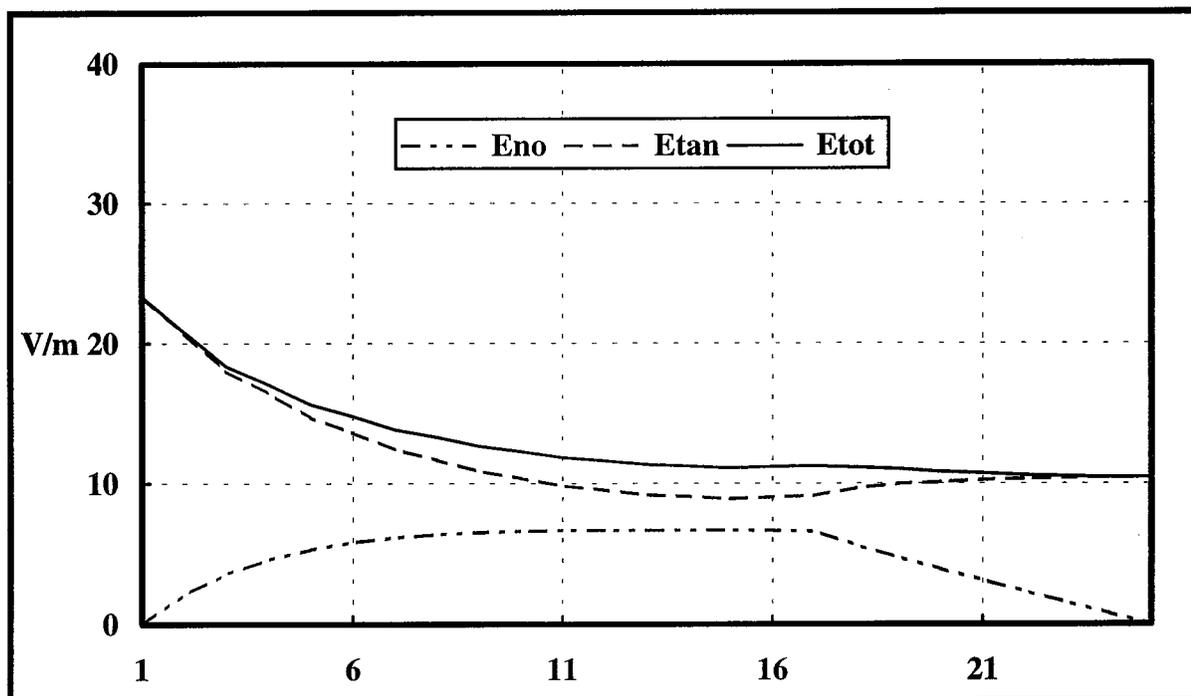


Fig. 51: Champ électrique le long du contour mobile pour les géométries initiale et optimisées. a) Géométrie initiale.

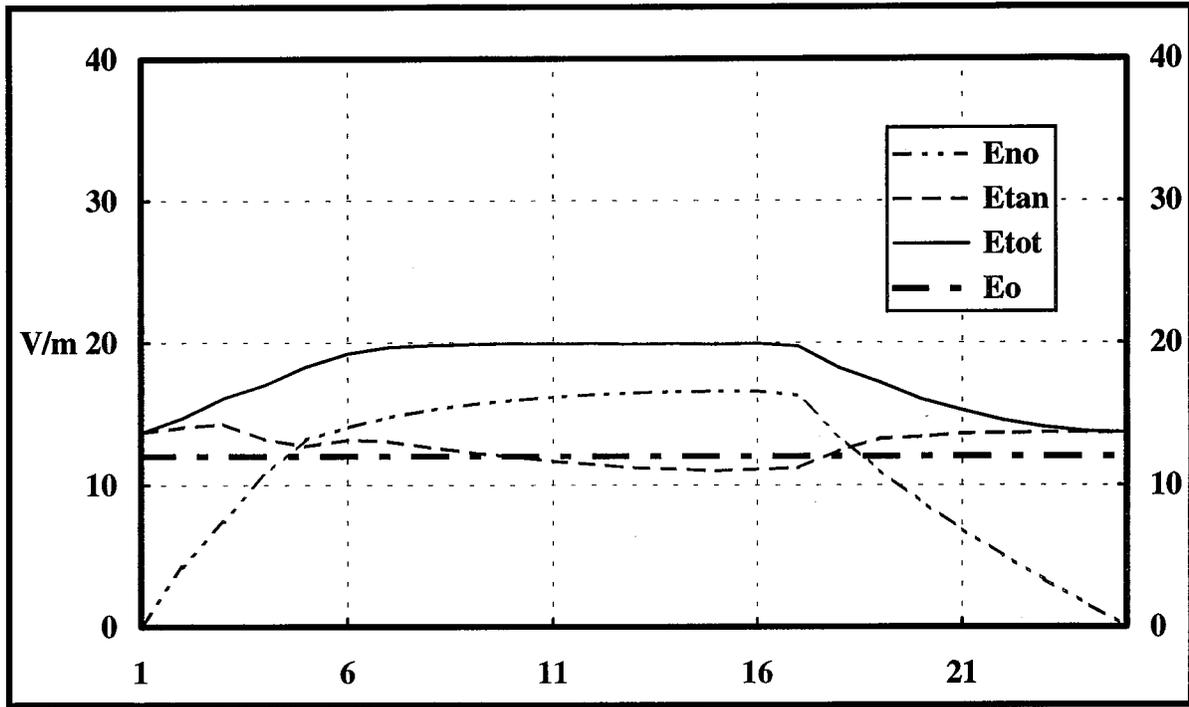


Fig. 51: Champ électrique le long du contour mobile pour les géométries initiale et optimisées. b) Critère E_{tan-un} .

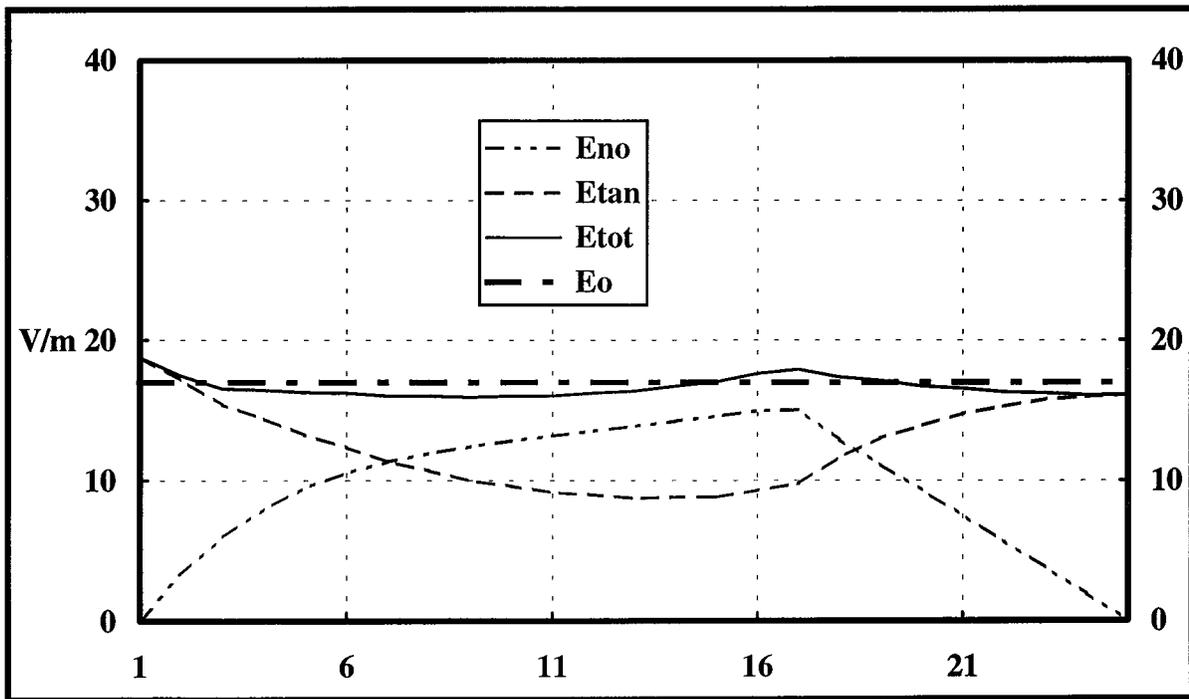


Fig. 51. Champ électrique le long du contour mobile pour les géométries initiale et optimisées. c) Critère E_{tot-un} .

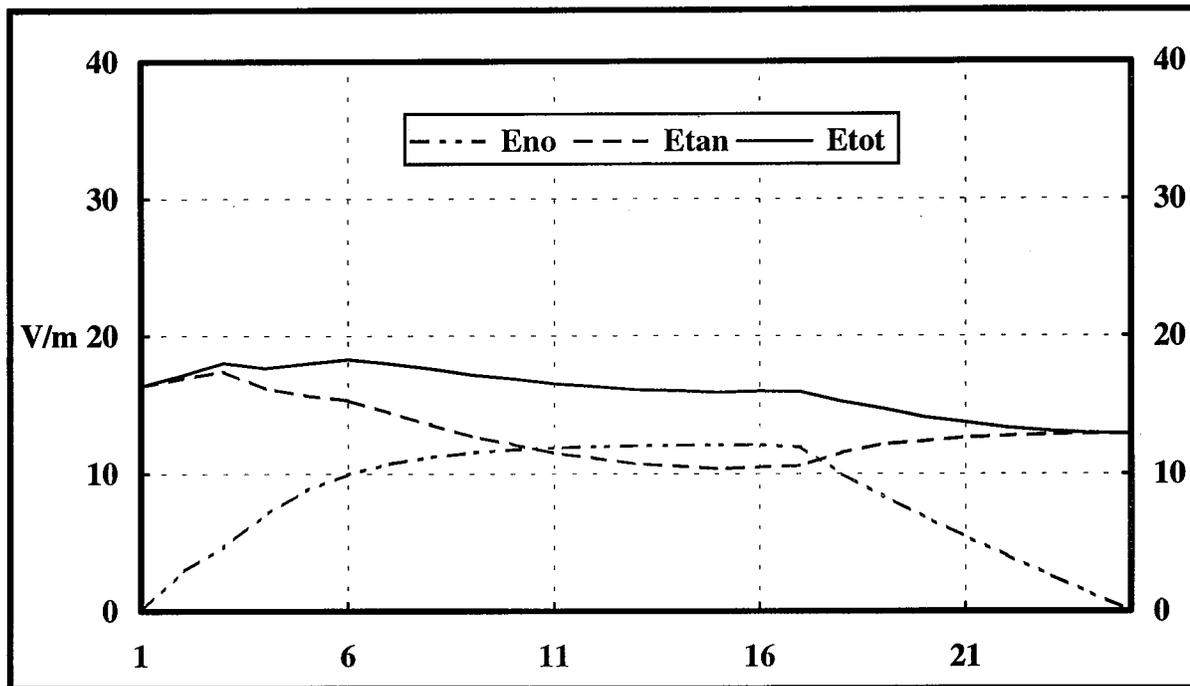


Fig. 51: Champ électrique le long du contour mobile pour les géométries initiale et optimisées. d) Critère $E_{\text{tot-max}}$.

Ces résultats, obtenus pour l'optimisation d'un contour diélectrique, montrent que l'algorithme génétique GA est un outil fiable pour l'optimisation des formes. L'utilisation de seulement quatre paramètres pour décrire le contour n'a pas empêché cet algorithme de donner des résultats très proches de ceux publiés par Däumling and Singer, qui avaient employé (pour le calcul de champ) la méthode des charges équivalentes, associée pour aboutir au contour optimum à une stratégie de changement du contour préservant la continuité de la tangente.

Nous avons en plus montré que l'optimisation de forme peut facilement être menée sous différents critères (*uniformisation du champ tangentiel, normal ou total, ou encore minimisation du champ maximum total, ou d'une de ses composantes*) en employant l'algorithme génétique couplé avec un programme de calcul de champ comme BEM2D.

V.3. ALGORITHME DE RECUIT SIMULE MODIFIE - ISOLATEUR CAPOT TIGE.

Le profil de l'isolateur *capot tige* de la Fig. 52 a été optimisé en utilisant la méthode de recuit simulé modifié MSA [88]. Le but étant de limiter le champ normal à une valeur donnée E_0 , le problème d'optimisation a été formulé de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{p}) = (E_{\max}^2 - E_0^2)^2 \\ \text{avec} \quad & \mathbf{p}_{\min}^k \leq \mathbf{p}^k \leq \mathbf{p}_{\max}^k \quad k = 1, 5 \end{aligned} \quad (158)$$

où \mathbf{p} est le vecteur de variables de projet, dont les composantes sont définies à la Fig. 52, E_{\max} est le champ normal *calculé* sur le contour mobile, et $E_0 = 130 \text{ V/m}$ est le champ normal *spécifié* sur le contour mobile.

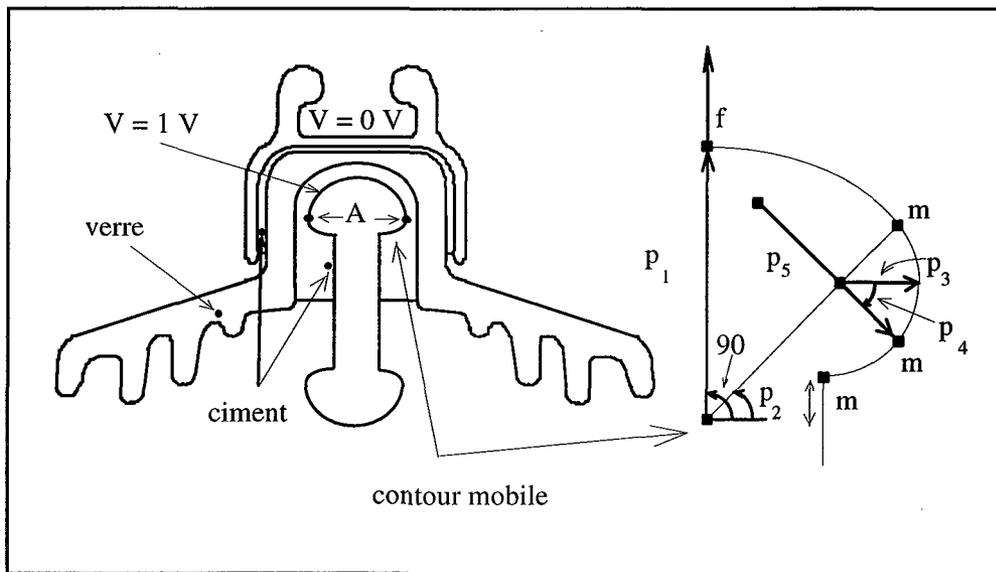


Fig. 52: Isolateur pour lignes de distribution type capot-tige; agrandissement du contour mobile avec les cinq paramètres de projet (P_1, P_5) f et m désignent des points fixes et mobiles.

Les valeurs des paramètres employés sont:

♦ NBDIV:	{ 10, 15, 20 }	nombre de vecteur de pas de déplacement
♦ COEF:	2	facteur de division
♦ NUCICL:	16*NOPT/NBDIV	nombre de cycles auxiliaires
♦ LIM:	40	limite de mouvements réussis
♦ TEMPO:	0.1	température initiale
♦ $TEMP^{t+1} =$	$0.95*TEMP^t$	mis-à-jour de la température
♦ TOLTEMP=	0.001	valeur limite pour le critère d'arrêt
♦ NBCAL _{max} =	50	valeur limite de calcul de fonction coût pour le critère d'arrêt (Fig. 24)

Les résultats sont montrés dans le Tableau 8 (les paramètres optimisés pour **NBDIV** égal à 10, 15 et 20 sont désignés l'indice correspondant). La valeur maximale du champ normal calculé avant l'optimisation était 188.61 V/m (point A du contour mobile).

Tableau 8: Valeurs des paramètres et du champ normal pour la géométrie initiale; valeurs optimisées et nombre de calcul de fonction (NBDIV égal à 10,15 puis 20).

Paramètres	P _{init}	P _{min}	P _{max}	P _{opt10}	P _{opt15}	P _{opt20}
rayon p ₁ (m)	.019	.010	.025	.01736	.01719	.01719
angle p ₂	48.0	40	60	54.88	54.73	54.73
rayon p ₃ (m)	.0025	.002	.010	.010	.010	.010
angle p ₄	-10.0	-20	0	-18.11	-18.69	-18.69
rayon p ₅ (m)	.019	.010	.025	.014	.01402	.01402
E _{max} (V/m)	188.61			132.99	132.97	132.97
NBC				80	90	138

Les paramètres des géométries optimisées obtenus pour les différentes valeurs de NBDIV ont des valeurs très proches. Il faut remarquer que le troisième paramètre p₃ atteint sa valeur maximale dans tous les cas et que l'algorithme n'a fait qu'un cycle de température dans le premier cas!.

Les Fig. 54 et 55 montrent les courbes de variation du champ normal le long du contour mobile en fonction de la coordonnée z, respectivement pour les géométries *initiale* et *optimisée pour des différentes valeurs de NBDIV*.

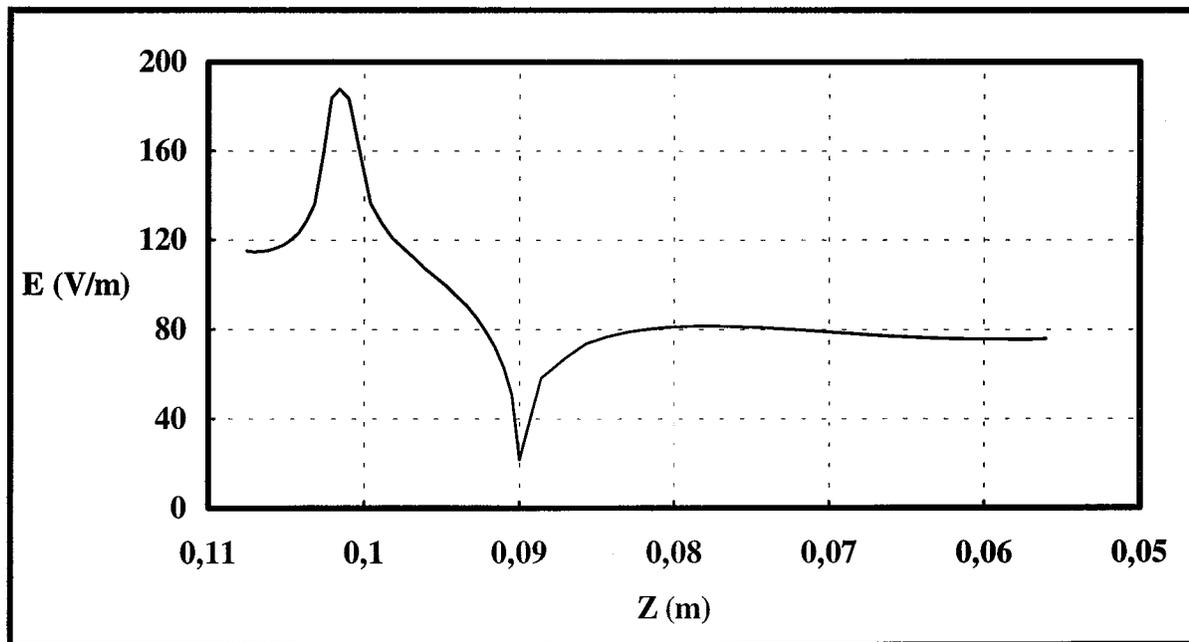


Fig. 54: Champ électrique normal le long du contour mobile, avant l'optimisation.

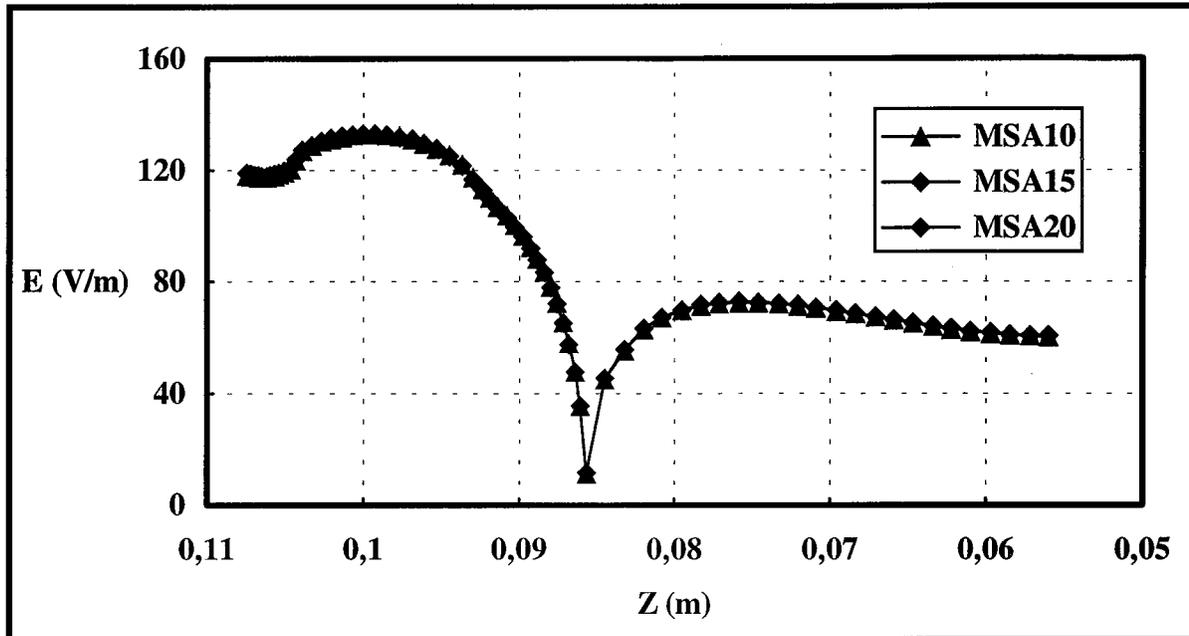


Fig. 55: Champ normal sur le contour mobile pour les géométries optimisées pour $NBDIV = 10, 15$ puis 20

Les résultats obtenus mettent en évidence une amélioration considérable de la valeur maximale du champ normal. Ils montrent que l'algorithme MSA est fiable et peut être employé pour résoudre des problèmes d'optimisation en électrostatique.

V.4. ALGORITHMES HYBRIDES: OPTIMISATION DE FORME D'UN CONNECTEUR H.T.

Nous allons montrer dans la suite des résultats obtenus dans l'optimisation d'un connecteur triphasé faisant partie d'un système à isolation gazeuse de haute tension (*145 KV GIS - gas insulated system*). Dans ce type d'appareil, les trois barres sont dans un cylindre mis à la terre qui est rempli d'un gaz sous pression (*généralement le gaz est le SF_6 ou un mélange à une pression de 0.3...0.6 MPa*). Pour optimiser cette structure, nous allons essayer trois algorithmes: un algorithme déterministe seul (Lagrangien augmenté ALM), puis deux algorithmes aléatoires couplés avec cet algorithme déterministe (*génétique* hybride GA-ALM puis *recuit simulé modifié* hybride MSA-ALM). Nous voulons ainsi montrer l'application des algorithmes hybrides ci-dessus dans un cas réel, les résultats de l'algorithme déterministe seul servant de comparaison. Notons que ce même appareillage avait déjà fait l'objet d'une étude d'optimisation par l'algorithme ALM, mais avec deux paramètres de moins [91]. Ces deux nouveaux paramètres d'optimisation (les angles P_2 et P_4 , Fig. 57) ont été introduits pour compliquer le problème (nous avons négligé les contraintes mécaniques, c'est-à-dire les distances minimales d_3 et d_4 , voir Fig. 58).

Nous nous intéressons à la partie du système qui connecte les différentes sections des barres (Fig. 56). Ce connecteur doit avoir de bons contacts électriques, permettre la dilatation thermique et prévenir les déformations dues aux forces électrodynamiques pendant un court-circuit. Il en résulte quelques contraintes de forme et de dimensionnement qui doivent être prises en compte pendant l'optimisation. La forme d'origine du connecteur est montrée en Fig. 56. Ce profil a été obtenu par des modifications géométriques successives, basées sur l'expérience du constructeur.

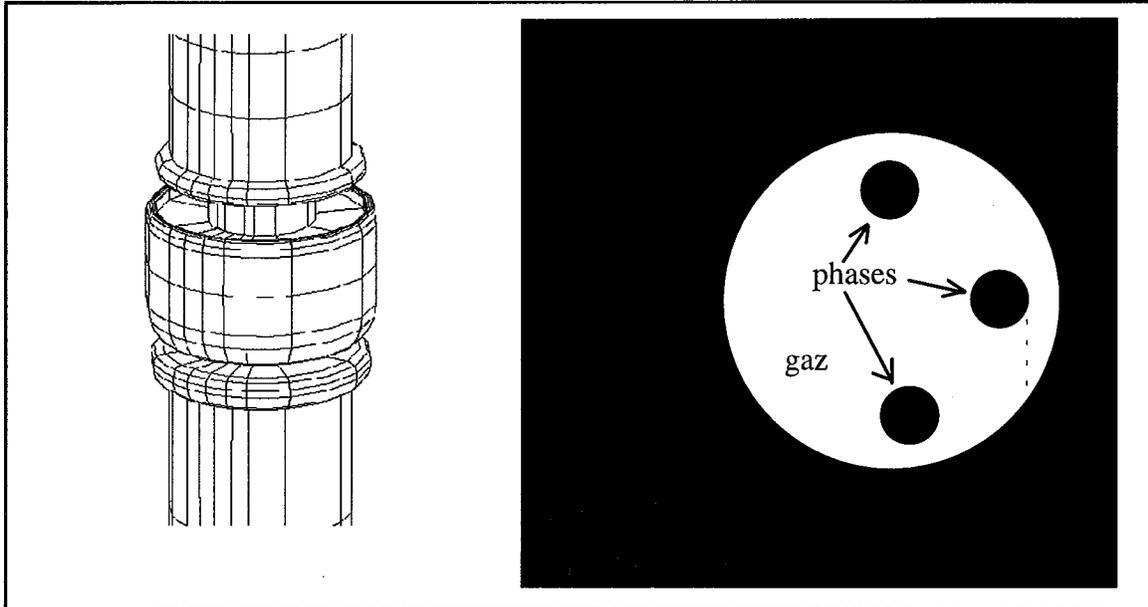


Fig. 56: Vue du connecteur en 3D et structure du système isolé.

Le champ électrique a été calculé pour la barre (a) sous tension, les deux autres (b et c) et le cylindre étant mis à la terre. Trois calculs ont été effectués:

- ◆ la configuration réelle modélisée par (PHI3D) [52], où les phases (b) et (c) ont été simplifiées, remplacées par des cylindres de même diamètre.
- ◆ la configuration axisymétrique, aussi modélisée par PHI3D. Cette structure est constituée de la phase (a), recentrée, et du cylindre mis à la terre (Fig. 56).
- ◆ la même configuration axisymétrique, modélisée par BEM2D [89].

Les valeurs maximales du champ électrique apparaissent au point B du connecteur (Fig. 56 et 58), en face de la gaine.

Le Tableau 9 donne les résultats en champ au point B pour les trois calculs. Clairement, en ce qui concerne la valeur maximale du champ électrique, ce problème peut être considéré avec raisonnable précision comme une configuration 2D axisymétrique. Il faut remarquer que, en 2D, le recentrage de la barre conduit à un diamètre extérieur plus petit que dans la configuration en 3D, ce qui peut expliquer un champ résultant plus élevé.

Tableau 9: Comparaison des valeurs maximales du champ normal. Potentiel de la phase (a) = 1 volt.

PHI3D	PHI3D	BEM2D
réel 3D	configuration axisymétrique	
46.0 V/m	48.3 V/m	49.0 V/m

La valeur maximale du champ électrique calculé correspond à une tension de rupture de 675 kV (*sous ondes de foudres avec SF₆ à 0.4 MPa*), ce qui est au-dessus du niveau demandé de 650 kV.

Mais il est toujours intéressant d'optimiser la forme et de réduire ainsi la valeur maximale du champ: cela permet en effet d'augmenter la sécurité de l'isolation ou de minimiser la taille de la structure.

V.4.1. Optimisation.

Ce problème a été formulé par:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{p}) = (\mathbf{E}_{\max}^2 - \mathbf{E}_o^2)^2 \\ & \mathbf{p}_{\min}^k \leq \mathbf{p}^k \leq \mathbf{p}_{\max}^k \quad \mathbf{k} = 1, 8 \end{aligned} \tag{159}$$

où les variables sont les mêmes que dans (158), et où les paramètres d'optimisation sont définis par la Fig. 57. La valeur \mathbf{E}_o a été choisie à 26 V/m (*c'est la valeur de champ entre les régions B et C en dessous de laquelle on ne peut descendre*).

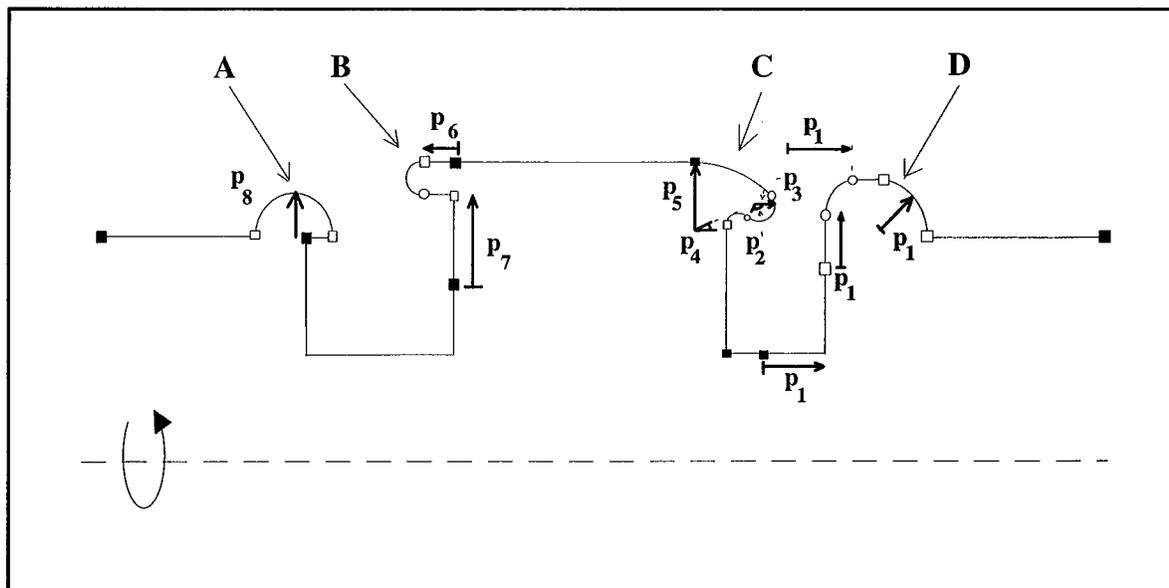


Fig. 57: Définition des paramètres d'optimisation.

La Fig. 57 montre aussi les quatre régions A, B, C et D du profil qui ont été paramétrées en vue de l'optimisation. Les valeurs maximales de champ calculées pour chacune de ces régions ont été respectivement 36.74, 49.00, 29.84 et 36.02 V/m. La région C ne jouera pas un grand rôle [91] mais servira à illustrer quelques différences entre les algorithmes employés.

Les fonctions que le connecteur doit remplir conduisent aux contraintes suivantes (Fig. 58) [91]:

- ◆ R, le rayon extérieur du connecteur est à sa valeur minimale dans la configuration initiale. Nous postulons que sa valeur ne peut pas être changée, et qu'aucune partie du connecteur ne peut avoir une dimension plus grande.

- ◆ d_1 est laissée invariable, d_2 peut être modifiée.
- ◆ d_3 et d_4 doivent être plus grand que 0.5 cm.

Les deux premières contraintes sont prises en compte au moment du paramétrage de la géométrie. Nous avons dans cette étude négligé la troisième contrainte.

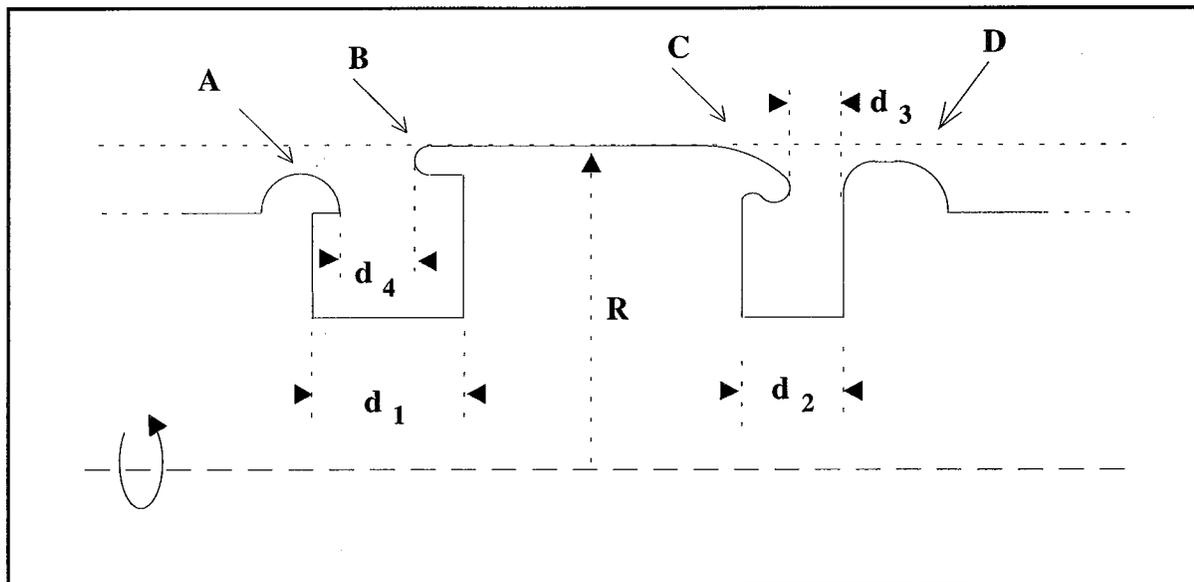


Fig. 58: Profil Initial du connecteur avec les contraintes de projet
section transversale définie en Fig. 56.

Les limites définissant la région réalisable sont donnés dans le Tableau 10 en accord avec la Fig. 57.

Tableau 10: Valeurs limites des paramètres de projet.

PARAMETRES	LIMITES	
	Inférieur (P _{min})	Supérieur (P _{min})
P ₁ (mm)	6	13
P ₂ °	-50	0
P ₃ (mm)	2	6
P ₄ °	25	45
P ₅ (mm)	25	35
P ₆ (mm)	4	10
P ₇ (mm)	15	30
P ₈ (mm)	4	12

V.4.2. Paramètres et critères de commutation.

V.4.2.1. Algorithme génétique.

Les paramètres naturels employés dans l'algorithme génétique ont été dans cette application:

- ◆ NBGEN (max.): 20 *nombre de générations*
- ◆ NBPOP : 10 *nombre des individus dans la population*
- ◆ P_{cross}: 0.9 *probabilité de croisement*
- ◆ P_{mut}: 0.025 *probabilité de mutation*
- ◆ P_{inv}: 0.025 *probabilité d'inversion*

Nous avons employé comme critère de commutation entre GA et ALM:

- ◆ Lancer ALM si $\left| 2 * f(\mathbf{p})_0^T - f(\mathbf{p})_0^{T-1} - f(\mathbf{p})_0^{T-2} \right| / \left[1 + |f(\mathbf{p})_0^T| \right] < 0.001$

où $f(\mathbf{p})_0^T$ est le meilleur résultat parmi les individus de la génération **T**.

V.4.2.2. Algorithme du recuit simulé modifié.

Nous avons employés dans l'algorithme MSA les valeurs des paramètres suivants:

- ◆ NBDIV: 10 *nombre de vecteur de pas de déplacement*
- ◆ COEF: 2 *facteur de division*
- ◆ NUCICL: 4 *nombre de cycles auxiliaires*
- ◆ LIM: 10 *limite de mouvements réussis*
- ◆ TEMP0: 0.1 *température initiale*
- ◆ $TEMP^{t+1} = 0.95 * TEMP^t$
- ◆ TOLTEMP=.001

Le critère de commutation entre MSA et ALM que nous avons employé est:

$$\diamond \quad \text{Lancer ALM si } \begin{cases} |2 * f(\mathbf{p})_0^T - f(\mathbf{p})_0^{T-1} - f(\mathbf{p})_0^{T-2}| / [1 + |f(\mathbf{p})_0^T|] < \mathbf{0.001} \\ \text{ou} \\ \text{NBCAL} \geq \mathbf{50} \end{cases}$$

où $f(\mathbf{p})_0^T$ est le meilleur résultat à la température T.

V.4.3. Résultats.

L'évolution du profil du connecteur pour l'optimisation en employant les algorithmes ALM, GA-ALM et MSA-ALM est montré en Figure 59a-d. Le Tableau 11 donne les valeurs maximales du champ pour chaque configuration axisymétrique optimisée.

Tableau 11: Valeurs maximales du champ normal. *Potentiel de la phase (a): 1 V*

	INITIAL	ALM	GA-ALM		MSA-ALM	
E_{\max} (V/m) Point (Fig. 57)	49.00 (B)	35.40 (A)	36.44 (B)	35.34 (A)	36.18 (B)	35.25 (A)
NBCAL (~13s/calcul)		14	28	16	67	16
P_1 (mm)	10	7.76	7.26	7.28	10.51	7.497
P_2°	-30	-30	-13.63	-13.64	-5.39	-5.39
P_3 (mm)	4	4	5.25	5.25	4.25	4.25
P_4°	35	35	34.13	34.14	36.38	36.39
P_5 (mm)	30	30.14	33.17	33.17	31.30	31.43
P_6 (mm)	6	10.00	8.36	10.00	7.68	10.00
P_7 (mm)	28	16.55	17.33	15.81	16.93	15.33
P_8 (mm)	7.5	10.72	9.80	10.60	10.13	10.34

Dans le Tableau 11 il faut remarquer la bonne concordance des valeurs maximales de champ électrique pour les trois optimisations. Le meilleur résultat (35.25 V/m) a été trouvé par MSA-ALM et le plus mauvais (35.40 V/m) par ALM tout seul. Dans tous les cas, la valeur maximale après optimisation a été trouvée dans la région A (alors qu'elle était à l'origine en B; ces régions sont définis en Fig. 57). Les deux valeurs maximales transférées par GA et MSA à l'algorithme ALM se trouvent aussi en B, et sont aussi très voisines (36.44 et 36.18 V/m).

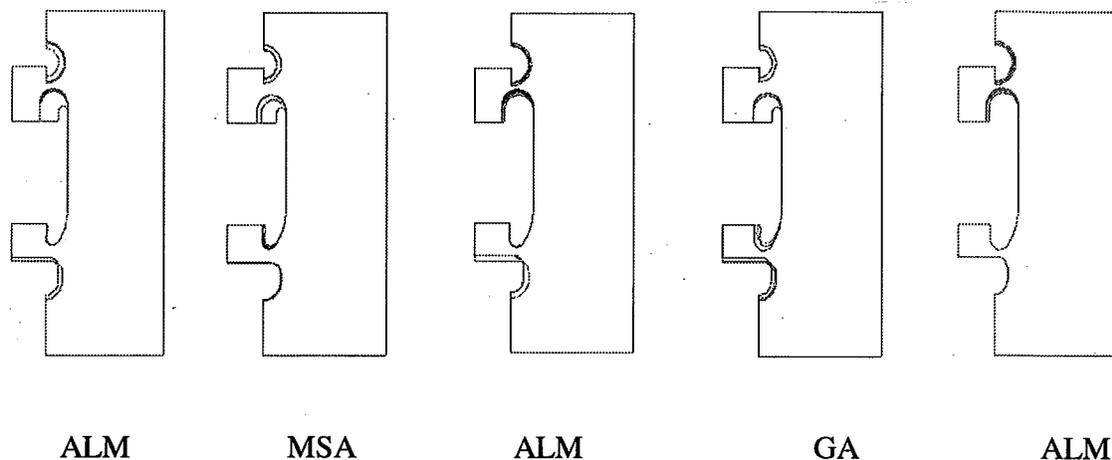


Fig. 59: Profil initial et profil optimisé.

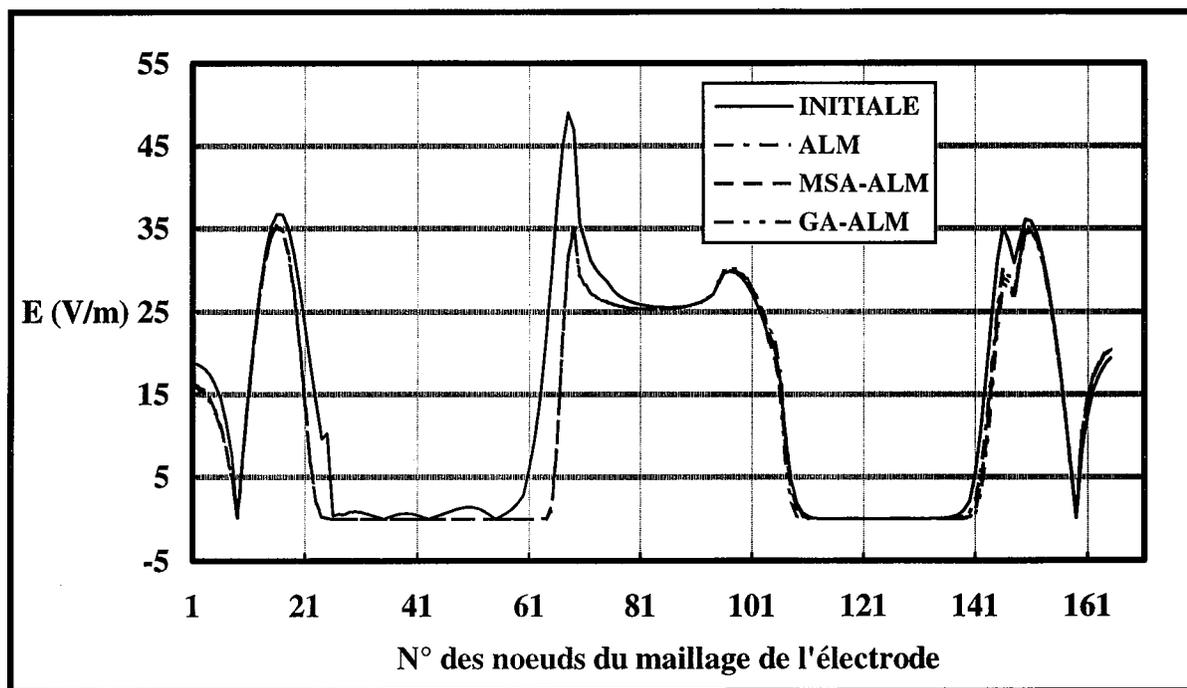


Fig. 60.a: Champs normal le long du connecteur avant et après l'optimisation.

- ◆ INITIALE: avant optimisation;
- ◆ ALM: optimisation par algorithme déterministe;
- ◆ MSA-ALM: algorithme hybride recuit simulé/lagrangien augmenté;
- ◆ GA-ALM: algorithme hybride génétique/lagrangien augmenté.

Le point O (Fig. 59) correspond au noeud 1.

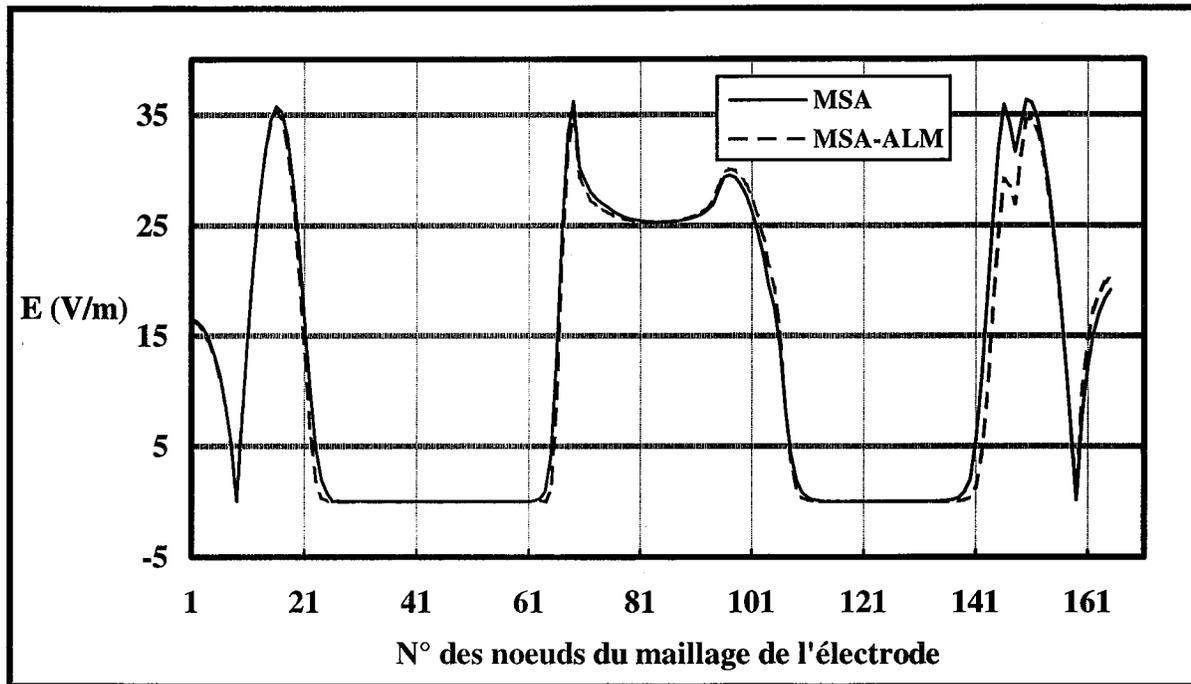


Fig. 60.b: Champs normal le long du connecteur par le code hybride MSA-ALM
 ♦ MSA : résultat à la commutation entre les deux algorithmes
 ♦ MSA-ALM : résultat final.

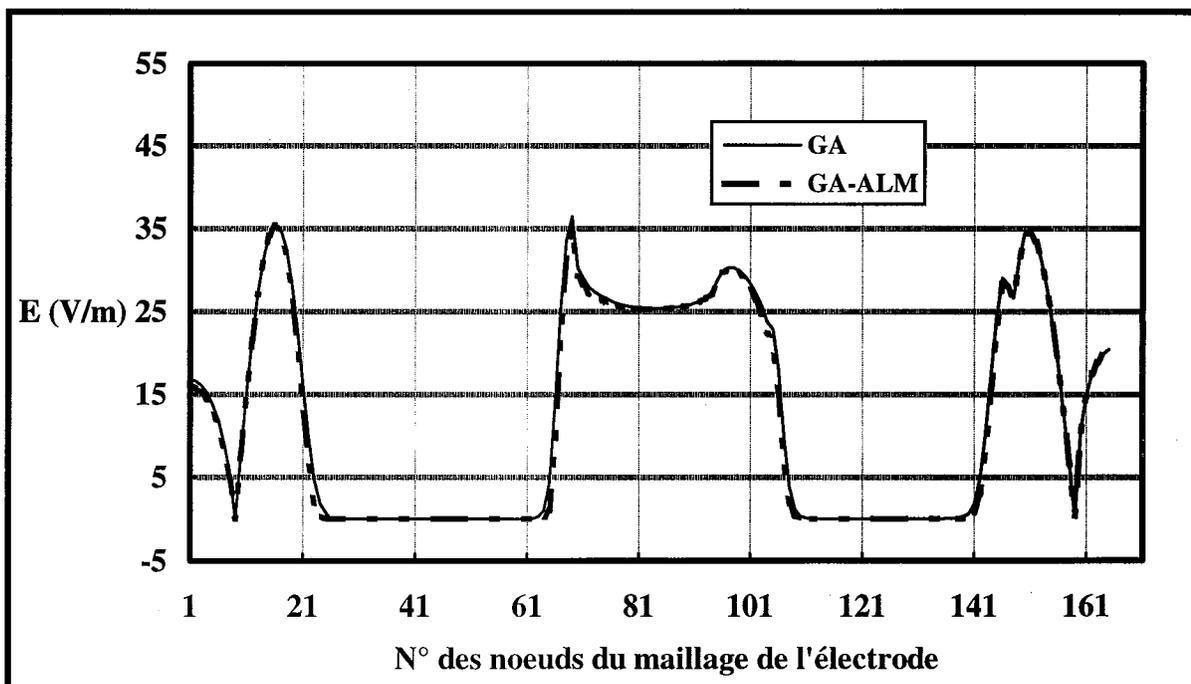


Fig. 60.c: Champ normal le long du connecteur par le code hybride GA-ALM.
 ♦ GA: résultat à la commutation entre les deux algorithmes
 ♦ GA-ALM : résultat final.

CONCLUSION.

Les résultats présentés dans ce chapitre illustrent quelques applications de l'optimisation en électrotechnique. Nous avons montré des résultats obtenus avec les cinq algorithmes d'optimisation que nous avons développés tout au long de ce travail. La robustesse des algorithmes du lagrangien augmenté, du recuit simulé, génétique et hybrides a été vérifiée par de multiples applications. Enfin, les nombreuses optimisations de forme de dispositifs réels en électrostatique, réalisées dans ce chapitre, illustrent la fiabilité des algorithmes présentés.

CONCLUSION GENERALE .

L'optimisation des appareillages en électrotechnique a donné naissance à de nombreux travaux de recherche scientifique au cours des dernières années. L'intégration d'outils d'optimisation dans un code de calcul de champ est une étape naturelle dans le développement de la modélisation en électromagnétisme. Cela devrait en tout cas représenter un apport appréciable pour les ingénieurs concepteurs d'équipements.

Le *choix* de la méthode d'optimisation est dans tous les domaines un problème très délicat. Le fait que, dans notre cas, les variables proviennent d'un code de calcul de champ ajoute à la difficulté, en raison du *coût* des calculs associés: on pencherait donc pour les méthodes déterministes qui donnent, à coût raisonnable, des améliorations. Mais l'incertitude pourra exister car on ne saura pas si la solution obtenue est la meilleure, ce qui redonne l'avantage aux méthodes stochastiques: la décision n'est pas facile.

Nous avons essayé tout au long de cet exposé de présenter et de valider toutes les procédures que nous avons développées. Cette façon de faire a été délibérément choisie pour faire mieux comprendre les divers paramètres que nous jugeons importants dans l'application d'un algorithme d'optimisation particulier. En raison de la diversité des algorithmes traités, nous sommes sûrs qu'il reste beaucoup à dire, surtout au niveau théorique, et que la recherche doit continuer.

Nous avons apporté quelques contributions originales pour le développement de l'optimisation en électromagnétisme. Nous pensons en particulier être responsables de l'introduction de l'*algorithme génétique* pour l'optimisation de formes en électromagnétisme (*calcul numérique de champ électromagnétique*). Cet algorithme commence à attirer l'attention des chercheurs dans tous les domaines. Les résultats obtenus montrent sa puissance, sa fiabilité et son efficacité. Nous pensons qu'il faut poursuivre cette recherche, et que la comparaison de cette technique avec d'autres méthodes stochastiques doit être un thème de recherche futur. Dans notre travail, nous avons évité cette comparaison entre les méthodes stochastiques MSA et GA développées, car nous n'avons pas trouvé les bons critères: MSA (*recuit simulé modifié*) a besoin d'un point de départ, et, comme c'est le cas avec les algorithmes déterministes, son efficacité en dépend.

Nous avons présenté la méthode du lagrangien augmenté ALM, couplée avec l'algorithme de la région de confiance pour la résolution des problèmes non-linéaires sous contrainte. L'algorithme complet finalement obtenu s'est montré fiable, précis et efficace.

L'algorithme génétique présenté, développé à partir de l'analogie entre l'optimisation et les phénomènes de l'évolution et de la sélection naturelles est très simple à mettre en oeuvre. La théorie génétique associée, confirmée par les bons résultats obtenus, permet de démontrer la propagation privilégiée des meilleures solutions d'une génération à la suivante jusqu'au minimum cherché.

Ces deux premiers algorithmes sont classiques, même s'il existe beaucoup de façons de les mettre en oeuvre, et même si la génétique n'avait pas (ou peu) jusqu'ici été appliquée à nos domaines. Nous avons aussi proposé trois algorithmes plus personnels: le recuit simulé *modifié* MSA, et deux algorithmes *hybrides* stochasto-déterministes: MSA-ALM et GA-ALM.

Nous avons vu que l'algorithme modifié MSA présente l'avantage d'être moins sensible que l'algorithme du recuit simulé classique au problème de mise à jour du pas de déplacement. Il présente la souplesse de pouvoir travailler comme l'algorithme du recuit simulé classique, comme l'algorithme TABU tout seul ou comme un couplage des deux. Un autre avantage que nous avons remarqué dans l'algorithme MSA est que cet algorithme n'exige pas tout le cycle de refroidissement (*voir les résultats présentés au chap. V*), et cette caractéristique devra être mieux exploitée.

Comme l'algorithme génétique, MSA présente le double avantage d'être un algorithme d'optimisation global qui ne nécessite pas de calcul de gradient. Son application nous paraît être intéressante pour un problème à plusieurs minima et nombre faible de paramètres d'optimisation.

Les deux algorithmes hybrides proposés MSA-ALM et GA-ALM présentent, eux, l'inconvénient de nécessiter, dans la seconde phase (*déterministe*) du processus d'optimisation, le calcul des dérivées de la fonction objectif. Cette fonction dépend dans la plupart des cas, explicitement ou implicitement, des variables provenant du code de calcul de champ. On pourrait bien sûr faire le couplage avec un algorithme comme "pattern search" qui ne dépend pas des calculs des dérivées (*mais à quel prix et pour quelle efficacité?*). Sans entrer dans cette polémique, la possibilité de trouver le minimum global sans payer un prix trop élevé nous a séduits. Les résultats présentés montrent que ce but peut être atteint lorsque le nombre de minima n'est pas trop élevé, ce qui semble bien correspondre aux problèmes posés en électromagnétisme.

ANNEXE I

Nous traiterons dans la suite l'intégration de l'équation de Poisson. Les cas à étudier sont:

- la densité volumique de charge est une fonction quelconque des coordonnées,
- la densité volumique de charge est une fonction harmonique des coordonnées ou
- la densité volumique de charge est une constante.

Ces trois cas seront traités séparément, cependant il faut remarquer que ce calcul n'ajoute aucune nouvelle inconnue à celles de la frontière: il s'agit simplement de faciliter le calcul de cette intégrale.

A.1.1. Densité volumique de charge fonction quelconque des coordonnées.

Dans ce cas, il n'y a pas d'autre possibilité que de calculer numériquement l'intégrale correspondante dans le volume étudié. Pour cela, on peut discrétiser le volume en éléments finis. L'équation (30) devient:

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \nabla'^2 \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') d\Omega' = -\frac{1}{\epsilon} \sum_{k=1}^N \iiint_{\Omega_k} \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \rho(\bar{\mathbf{r}}') d\Omega' \quad (159)$$

où Ω_k est le volume du $k^{\text{ème}}$ élément fini. Dans le cas où le volume est discrétisé en tétraèdres élémentaires, l'intégration peut être achevée en utilisant la formule de quadrature donnée ci-dessous [62]:

$$\iiint_{\Omega_k} \mathbf{f} d\Omega' = \frac{V_k}{40} \left[\sum_{j=1}^4 (\mathbf{f}_s)_j + 9 \sum_{l=1}^4 (\mathbf{f}_g)_l \right] \quad (160)$$

où V_k - volume du $k^{\text{ème}}$ tétraèdre;

$(\mathbf{f}_s)_j$ - noyau évalué sur le $j^{\text{ème}}$ sommet du tétraèdre;

$(\mathbf{f}_g)_l$ - noyau évalué sur le centre de gravité de la $l^{\text{ème}}$ face du tétraèdre;

En utilisant l'équation (160), l'équation (159) en forme discrétisée devient:

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \nabla'^2 \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}') d\Omega' = -\frac{1}{40\epsilon} \sum_{k=1}^N V_k \left[\sum_{j=1}^8 \left((\mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \rho)_s \right)_j + 9 \sum_{l=1}^6 \left((\mathbf{G}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') \rho)_g \right)_l \right] \quad (161)$$

A.1.2. Densité volumique de charge est une fonction harmonique.

Dans le cas où la densité volumique de charge est une fonction harmonique, elle doit satisfaire l'équation de Laplace. Donc nous pouvons écrire:

$$\nabla^2 \rho(\vec{r}') = 0 \quad (162)$$

S'il est possible trouver une fonction Φ , dont le Laplacien est égal à la fonction de Green, nous pouvons remplacer l'intégrale volumique par une intégrale surfacique. Pour cela, considérons la seconde identité de Green (Eq. (21)) avec Φ et Ψ telles que:

$\Psi(\vec{r}') = \rho(\vec{r}')$ et $\nabla^2 \Phi(\vec{r}, \vec{r}') = \mathbf{G}(\vec{r}, \vec{r}')$ nous arrivons à:

$$\iiint_{\Omega} (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) d\Omega' = - \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}') \mathbf{G}(\vec{r}, \vec{r}') d\Omega' \quad (163.a)$$

ou plus explicitement:

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{G}(\vec{r}, \vec{r}') \nabla^2 \mathbf{V}(\vec{r}') d\Omega' = \frac{1}{\epsilon} \iint_{\Gamma} [\Phi(\vec{r}, \vec{r}') \partial \rho(\vec{r}') / \partial \mathbf{n} - \rho(\vec{r}') \partial \Phi(\vec{r}, \vec{r}') / \partial \mathbf{n}] d\Gamma' \quad (163.b)$$

Par exemple, dans le cas tridimensionnel la fonction Φ est donnée par $\Phi = 8\pi r$ [21].

A.1.3. Densité volumique de charge uniforme.

D'après l'équation (163.b), l'évaluation de l'intégrale volumique, pour le cas où la densité volumique de charge est uniforme, se résume à:

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{G}(\vec{r}, \vec{r}') \nabla^2 \mathbf{V}(\vec{r}') d\Omega' = - \frac{1}{\epsilon} \iint_{\Gamma} [\rho(\vec{r}') \partial \Phi(\vec{r}, \vec{r}') / \partial \mathbf{n}] d\Gamma' \quad (164)$$

L'intégrale volumique a été remplacée par une intégrale surfacique dans les cas **b** et **c** étudiés, ce qui simplifie son évaluation. Cependant, il faut trouver pour chaque type de problème la fonction Φ , dont le Laplacien est égal à la fonction de Green.

Pour les problèmes de magnétostatique, les équations (159) - (164) sont encore valables, il est simplement nécessaire de les écrire pour chaque composante du potentiel vecteur magnétique (*à la place du potentiel scalaire électrique V*) en remplaçant la densité volumique de charge par la composante négative correspondante de la densité du courant, et la permittivité diélectrique par l'inverse de la perméabilité magnétique.

REFERENCE

- [1] H. Akima, "Interpolation and smooth curve fitting based on local procedures", algorithm 433, Collected Algorithms from ACM, 433 p. 1-6, (1976).
- [2] E. H. L. Aarts, J. Korst, "Simulated Annealing and Boltzmann Machines", John Wiley & Sons (1990).
- [3] S. Abramowitz, I. A. Stegun, "Handbook of mathematical functions", Dover Publications Inc. New York (1970).
- [4] J. S. Arora, A. I. Chahande, J. K. Paeng, "Multiplier methods for engineering optimization", International Journal for Numerical Methods Engineering, 32, 1485-1525 (1991).
- [5] J. S. Arora, J. Haug, "Methods of design sensitivity analysis in structural optimization", AIAA Journal, Vol. 17, N° 9, pag. 970-974 (1979).
- [6] A. D. Belegundu, J. S. Arora, "Potential of transformation methods in optimal design", AIAA Journal, 19, 10, 1372-1374 (1981).
- [7] A. D. Belegundu, J. S. Arora, "A computational study of transformation methods for optimal design", AIAA Journal, 22, 4, 535-542 (1984).
- [8] A. D. Belegundu, J. S. Arora, "A study of mathematical programming methods for structural optimization", Part I: Theory, Part II: Numerical results, International Journal for Numerical Methods Engineering, 21, 1583-1623 (1985).
- [9] A. D. Belegundu, J. S. Arora, "Potential of transformation methods in optimal design", AIAA Journal, Vol. 19, N° 10, pag. 1372-1374 (1981).
- [10] F. Bellina, P. Campostrini, G. Chitarin, A. Stella, F. Trevisan, "Automated optimal design techniques for inverse electromagnetic problems", IEEE Trans. on Magnetics, vol. 28, No 2, pp. 1549-1552 (1992).
- [11] D. P. Bertsekas, "Combined primal-dual and penalty methods for constrained minimization", SIAM J. Control, 13, 3, 521-544 (1975).
- [12] C. A. Brebbia - "The boundary element method for engineers", Pentech Press, London (1980).
- [13] J. D. Buys, "Dual algorithms for constrained optimization problems", Thèse de Doctorat, Universty of Leiden, Netherland (1972).
- [14] C. W. Carrol, "The created response surface technique for optimizing nonlinear restrained systems", Operational Research, 9, 169-184 (1961).
- [15] J. H. Cassis, L. A. Schmit, "On implementation of the extended interior penalty function", International Journal for Numerical Methods Engineering, 10, 1, 3-23 (1976).
- [16] A. Chandra, C. L. Chan, "A boundary element method formulation for design sensitivities in steady-state conduction convection problems", ASME, vol. 59, pag. 182-190 (1992).
- [17] M. V. K. Chari, G. Bedrosian, J. D'Angelo, A. Konrad, "Finite element applications in electrical engineering", IEEE Trans. on Magnetics, 29, 1306-1313, (1993).
- [18] A. Corana, M. Marchesi, C. Martini, S. Ridella, "Minimizing multimodal functions of continuous variables with the 'Simulated Annealing' algorithm", ACM Trans. on Mathematical Software, 13, 262-280 (1987).

- [19] J. L. Coulomb, "Analyse Tridimensionnelle des Champs Electriques et Magnétiques par la Méthode des Eléments Finis", Thèse de Docteur Es-Sciences Physiques, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, 1981.
- [20] H. H. Däumling, H. Singer - "Investigations on field optimisation of isolateur geometry", IEEE Trans. Power Delivery, Vol. 4, No. 1, January 1989.
- [21] M. Defourny - "Contraintes dielectriques - Elements de frontière - Optimisation des isolations", Ph.D. Dissertation, Liège Univ., Liège, Belgium, 1987.
- [22] M. Defourny - "Optimisation in electrostatics coupled with the boundary element method", 5rd ISHVE, Braunschweig, 24-28 August 1987, paper No. 31.06.
- [23] G. Di Pillo, L. Grippo, "A new class of augmented lagrangians in nonlinear programming", SIAM J. Control and Optimization, 17, 5, 618-628 (1975).
- [24] G. Drago, A. Manella, M. Nervi, M. Repetto, G. Secondo, "A combined strategy for optimization in non linear magnetic problems using simulated annealing and search techniques", IEEE Trans. on Magnetics, 28, 1541-1544 (1992).
- [25] A. V. Fiacco, G. P. McCormick, "Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques", Wiley, (1968).
- [26] R. Fletcher, "An ideal penalty function for constrained optimization", J. Inst. Maths Applics, 15, 319-342 (1975).
- [27] R. Fletcher, "Methods related to lagrangian functions", P. E. Gill and W. Murray (eds), Academic Press, 219-239 (1974).
- [28] R. Fletcher, "Practical methods of optimization. vol. 1: unconstrained optimization", John Wiley & Sons, (1980).
- [29] R. L. Fox, "Optimizatin methods for engineering design", Addison-Wesley, (1971).
- [30] K. R. Frisch, "The logarithmic potential method of convex programming", Memorandum May 13, University Inst. of Economics, Oslo (1955).
- [31] P. E. Gill, W. Murray, "Numerical methods for constrained optimizatin", Academic Press, (1974).
- [32] S. Gitosusastro, J. L. Coulomb, J. C. Sabonnadière, "Performance derivative calculations and optimization process", IEEE Trans. on Magnetics, vol. 25, N° 4, pag. 2834-2839 (1989).
- [33] F. Glover, "Future paths for integer programming and links to artificial intelligence", Comp. Operations Research, 13, 533-549, (1986).
- [34] Goldberg, D. E., "Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning", Addison-Wesley, 1989.
- [35] A. Gottvald, K. Preis, C. Magele, O. Biro, A. Savini, "Global optimization methods for computational magnetics", IEEE Trans. Magnetics, Vol. 28, N° 2, 1537-1540, (1992).
- [36] J. P. Grégoire, Y. Jégou, "Programme DIEL de calcul du champ électrostatique en 3D", note EDF MM81.2295 HI/4835-05 (1984).
- [37] M. Guarnieri, A. Stella, F. Trevisan, "A methodological analysis of differents formulations for solving inverse electromagnetic problems", IEEE Trans. Magnetics, 26, 622-625 (1990).
- [38] M. Guillen - "Réalisation et validation d'un modèle numérique hybride basé sur la méthode des équations intégrales de frontière et la méthode des charges équivalentes pour le calcul des champs électriques tridimensionnels", Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, Lyon, France (1993).

- [39] R. T. Haftka, J. H. Starnes, "Applications of a quadratic extended interior penalty function for structural optimization", *AIAA Journal*, 14, 6, 718-724, (1976).
- [40] B. Hajek, "Cooling schedules for optimal annealing", *Mathematics of Operations Research*, vol. 13, N° 2, 311-329, (1988).
- [41] P. Hajela, "Genetic Search - An approach to the nonconvex optimization problem", *AIAA Journal*, 28, N° 7, 1205-1210 (1990).
- [42] M. R. Hestenes, "Multiplier and gradient methods", *J. Optimization Theory Application*, 4, 303-320, (1969).
- [43] M. R. Hestenes, "Optimization theory: the finite dimensional case", John Wiley & Sons, NY, (1975).
- [44] J. H. Holland, "Adaptation in natural and artificial systems", MIT Press, (1992).
- [45] S. R. H. Hoole, S. Subramaniam, R. Saldanha, J. L. Coulomb, J. C. Sabonnadière, "Inverse problem methodology and finite elements in the identification of cracks, sources, materials and their geometry in inaccessible locations", *IEEE, Trans. on Magnetics*, 27, 3433-3443 (1991).
- [46] N. Hu, "TABU search method with random moves for globally optimal design", *Int: J. Num. Meth. Engineering*, 35, 1055-1070 (1992).
- [47] L. Jun, G. Beer, J. L. Meek - "Efficient evaluation of integrals of order $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$ using Gauss quadrature", *Eng. Analysis*, vol. 2, no. 3 (1985).
- [48] D. Kavlie, J. Moe, "Automated design of frame structures", *ASCE J. Struct. Div.*, vol. 97, ST1, 33-62, (1971).
- [49] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, M. P. Vecchi, "Optimization by simulated annealing", *Science*, 220, 671-680 (1983).
- [50] A. Konrad, "Integrodifferential finite element formulation of two-dimensional steady-state skin effect problems", *IEEE. Trans. on Magnetics*, Vol. 18, n° 1, 284-292 (1982).
- [51] L. Krähenbühl - "La méthode des équations intégrales de frontière pour la résolution des problèmes de potentiel en électrotechnique, et sa formulation axisymétrique", Thèse de Docteur-Ingénieur, Ecole Centrale de Lyon, Lyon, France (1983).
- [52] L. Krähenbühl, A. Nicolas, L. Nicolas. "The C.A.D. package PHI3D, for the computation of electric or magnetic fields in 3D devices - its validation", *3Dmag 89*, Okayama, Japan - Compel, International Journal for Computation and Mathematics in Electric and Electronic Engineering - Vol 9, sup. A, pp. 185,189 (1990).
- [53] L. Krähenbühl, A. Nicolas - "Axisymmetric formulation for boundary integral equation methods in scalar potential problems", *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. MAG-19, n° 6 (1983).
- [54] H. W. Kuhn, A. W. Tucker, "Nonlinear programming", *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, (J. Neymann eds.), 481-493, Univ. of California Press (1951).
- [55] D. G. Luenberger, "Introduction to linear and nonlinear programming", Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, (1984).
- [56] C. A. Magele, K. Preis, W. Renhart, R. Dyczij-Edlinger, K. R. Richter, "Higher order evolution strategies for global optimization of electromagnetic devices", *IEEE Trans. on Magnetics*, 29, 1775-1778 (1992).
- [57] O. L. Mangasarian, "Unconstrained lagrangians in nonlinear programming", *SIAM J. Control*, 13, 4, 772-791 (1975).

- [58] M. L. Marchesi, G. Molinari, M. Repetto, "Global optimization for discrete magnetostatic problems", *IEEE Trans. on Magnetics*, 29, 2, 1779-1782, (1993).
- [59] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, E. Teller, "Equation of state calculations by fast computing machines", *Journal of Chem. Physics*, 21, 1087-1092 (1953).
- [60] A. Miele, A. V. Levy and E. E. Cragg, "Modifications and extensions of the conjugate gradient-restoration algorithm for mathematical programming problems", *J. Optimization Theory Applic.*, 6, 450-472 (1971)".
- [61] G. Molinari, G. Sciutto, A. Viviani, "Experimental results and computer simulation of electric fields around insulating structures under AC and DC conditions", 3rd I.S.H.V.E., paper n° 12-17, Milan 28-31 august (1979).
- [62] A. Nicolas, "A boundary integral equation approach for eddy current calculation", *IEEE Trans. on Magnetics*, 19, 2453-2456 (1983).
- [63] R. Parraud, "Mesures et calculs comparatifs du champ électrique sur des isolateurs haute tension", *Electra* No 141, pp. 68-77 (1992).
- [64] F. Piriou, A. Rasek, "Finite element analysis in electromagnetic circuits", *IEEE Trans. on Magnetics*, 29, 1669-1675 (1993).
- [65] M. J. D. Powell, "A method for nonlinear constraints in minimization problems", R. Fletcher (Ed.), *Optimization Academic Press, NY* (1969).
- [66] M. J. D. Powell, "Optimisation algorithms in 1979", *Committee on Algorithms Newsletter, N° 5, Mathematical Programming Society*, pp. 2-16, February (1981).
- [67] M. J. D. Powell, "Introduction to constrained optimization", P. E. Gill and W. Murray (eds), *Academic Press*, 1-28 (1974).
- [68] B. Prasad, "A classe of generalized variable penalty methods for nonlinear programming", *J., Optimization Theory Application*, 35, 2, 159-182 (1981).
- [69] K. Preis, O. Biro, M. Friedrich, A. Gottvald, C. Magele, "Comparison of different optimization strategies in the design of electromagnetic devices", *IEEE Trans. on Magnetics*, 27, 5, 4154-4157, (1991).
- [70] R. T. Rockafellar, "The multiplier methods of Hestenes and Powell applied to convex programming", *J. Optimization Theory Application*, 12, 555-562 (1973).
- [71] R. T. Rockafellar, "Penalty methods and augmented Lagrangians in nonlinear programming", 5th IFIP Conference on Optimization Techniques, Springer-verlag, Berlin, 3, 418-425 (1973).
- [72] R. T. Rockafellar, "Augmented Lagrange multiplier functions and duality in nonconvex programming", *SIAM J. Control*, 12, 2, 268-285 (1974).
- [73] J. B. Rosen, "The gradient projection method for nonlinear programming: I Linear constraints", *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 8, 181-217 (1960).
- [74] D. M. Ryan, "Penalty and barrier functions", P. E. Gill and W. Murray (eds), *Academic Press*, (1974).
- [75] J. C. Sabonnadière, G. Meunier, B. Morel, "Flux: a general finite elements package for 2D electromagnetic fields", *IEEE Trans. on Magnetics*, 18, 411-415 (1982).
- [76] R. R. Saldanha, J. L. Coulomb, A. Foggia, J. C. Sabonnadiere, "A dual method for constrained optimization design in magnetostatic problems", *IEEE Trans. on Magnetics*, 27, n° 5, 4136-4141 (1991).
- [77] J. Simkin, C. W. Trowbridge, "Optimizing electromagnetic devices combining direct search methods with simulated annealing", *IEEE Trans. on Magnetics*, 28, 1545-1548 (1992).

- [78] H. Singer, H. Steinbigler, P. Weiß, "A charge simulation method for the calculation of high voltage fields", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, 93, 1660-1667 (1974).
- [79] M. R. Spiegel - "Mathematical handbook of formulas and tables", McGraw-Hill Inc., New York (1974).
- [80] A. H. Stroud, D. Secrest - "Gaussian quadrature formulas", Prentice - Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1966).
- [81] M. Sunar, A. D. Belegundu, "Trust region methods for structural optimization using exacte second order sensitiLity", International Journal for Numerical Methods Engineering, 32, 275-293 (1991).
- [82] R. A. Tapia, "Newton's method for optimization problems with equality constraints", SIAM J. Num. Anal., 11, 874-886 (1974).
- [83] Ph. Trompette, "Méthodes de pénalité et méthodes duales", Optimisation des Structures: Approche de l'ingénieur, Cours 3/b, Paris (1987).
- [84] D. Vanderbilt, S. G. Louie, "A Monte Carlo simulated annealing approach to optimization over continuous variables", Journal of Computational Phisics, 56, 259-271 (1984).
- [85] G. N. Vanderplaats, "Numerical optimization techniques for engineering design: with applications", McGraw-Hill (1984).
- [86] J. A. Vasconcelos, E. J. Da Silva, L. Krähenbühl, L. Nicolas, A. Nicolas, "Método de elementos integrais de fronteira", Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo Aplicado, B. Horizonte (Brésil), pp. 197-206 (1992).
- [87] J.A. Vasconcelos, L. Krähenbühl, L. Nicolas, A. Nicolas, "Potential and electric field computation at point interior to a domain by using the boundary element method", International Workshop on Electric and Magnetic fields, Liege (Belgium), paper 23.1 (1992).
- [88] J. A. Vasconcelos, L. Krähenbühl, L. Nicolas, A. Nicolas- "Design optimisation in electrostatic field analysis using the BEM and the augmented Lagrangian method", Compumag'93, Miami, 01-04 November (1993).
- [89] J. A. Vasconcelos, L. Krähenbühl, L. Nicolas, A. Nicolas. - "Design optimisation using the BEM coupled with Genetic Algorithm", IEE-Proceedings CEM'94, Nottingham, UK, (1994).
- [90] J. A. Vasconcelos, L. Krähenbühl, A. Nicolas, "Optimization of insulator using a genetic algorithm", 2nd Int. Workshop on Electric and Magnetic Fields From Numerical Models to Industrial Applications, Leuven (Belgium), 18-20 May (1994).
- [91] J. A. Vasconcelos, L. Nicolas, F. Buret, A. Nicolas, "Shape optimization of an HV connector in a GIS", 2nd Int. Workshop on Electric and Magnetic Fields From Numerical Models to Industrial Applications, Leuven (Belgium), 18-20 May (1994).
- [92] J. A. Vasconcelos, L. Krähenbühl, A. Nicolas, "Optimising electromagnetic devices with a modified simulated annealing algorithm", Adaptive Computing in Engineering Design and Control, Plymouth (UK) (1994)

Titre:

Optimisation de forme des structures électromagnétiques

Résumé:

Ce travail présente des méthodes d'optimisation de forme associées à un programme de calcul de champ dans des structures électrostatiques bidimensionnelles ou axisymétriques.

Dans un premier chapitre, la méthode numérique utilisée pour le calcul du champ - à savoir la méthode des équations intégrales de frontières - est exposée en détail. Quelques améliorations, en particulier une technique efficace d'intégration adaptative, sont présentées.

Le second chapitre est consacré au calcul numérique de la sensibilité des solutions aux paramètres géométriques ayant servi à décrire la structure.

Les deux chapitres suivants sont consacrés aux méthodes d'optimisation, *déterministes* (s'appuyant sur le calcul des gradients) ou *aléatoires* (recuit simulé, génétique). Les variantes choisies sont testées sur des fonctions analytiques.

Le dernier chapitre montre l'application des méthodes d'optimisation sur des structures électrostatiques réelles (forme d'électrodes, profils diélectriques), et démontre leur efficacité en particulier par des comparaisons avec des résultats trouvés dans la littérature.

Mots clés:

- optimisation de forme - électrostatique - méthode intégrale - intégration adaptative - Lagrangien augmenté - recuit simulé - algorithme génétique - électrode - profil diélectrique -

Direction de recherche:

Centre de Génie Electrique de Lyon (CEGELY) - URA CNRS 829

L. Krähenbühl (CNRS) et A. Nicolas (Professeur des Universités)
Ecole Centrale de Lyon BP163 - 69131 Ecully cedex - France