



**HAL**  
open science

**Aux frontieres de la théorie des champs: I. De l'hydrodynamique aux champs multivalués. II. Construction de théories de champs de spin élevé en interaction.**

Mohamed Faquir

► **To cite this version:**

Mohamed Faquir. Aux frontieres de la théorie des champs: I. De l'hydrodynamique aux champs multivalués. II. Construction de théories de champs de spin élevé en interaction.. Physique mathématique [math-ph]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2006. Français. NNT : . tel-00138507

**HAL Id: tel-00138507**

**<https://theses.hal.science/tel-00138507>**

Submitted on 26 Mar 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE MONTPELLIER II  
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC**

**THESE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L' UNIVERSITE MONTPELLIER II**

Discipline : **Constituants élémentaires de la matière**

Ecole Doctorale : **Sciences chimiques et physiques**

présentée et soutenue publiquement par

**Mohamed FAQUIR**

le 19 décembre 2006

**AUX FRONTIERES DE LA THEORIE DES CHAMPS :**

**I. DE L'HYDRODYNAMIQUE AUX CHAMPS  
MULTIVALUES**

**II. CONSTRUCTION DE THEORIE DE CHAMPS DE SPIN  
ELEVE EN INTERACTION**

**JURY**

**M. Olivier BABELON, Rapporteur**  
**M. Jérôme LEON, Président du jury**  
**M. Jean-Michel MAILLET, Rapporteur**  
**M. André NEVEU, Directeur de thèse**  
**M. Paul SORBA**



*A moi! et à vous...*



Il existe un moyen simple de se rendre compte que trois ans passent très vite... faire une thèse. Au début, on pense qu'on a tout le temps devant soi, on cligne des yeux et l'instant d'après il est déjà temps de conclure. Et de dire merci.

Bien entendu, je tiens à remercier en tout premier lieu la personne qui m'a offert cette opportunité, à savoir mon directeur de thèse André Neveu. Ce fut un grand plaisir de découvrir le monde de la recherche sous sa direction et une véritable aventure de (tenter de) suivre ses captivantes et novatrices idées et intuitions scientifiques. Le résultat de ces trois ans est ce modeste "manuscrit" dont je suis néanmoins fier. Merci André.

Je souhaite ensuite offrir mes remerciements à tous les locataires plus ou moins permanents de l'institution dans laquelle j'ai passé ces trois années, le LPTA, pour leur accueil bienveillant, leur aide et leurs conseils tout au long de ma route vers le doctorat. Merci donc à tous les chercheurs, plus particulièrement à Miguel qui est à l'origine de mon travail principal et avec qui j'ai eu une courte interaction scientifique, à l'équipe de secrétaires dirigée par Sylviane, aux informaticiens Domi (l'irréductible) et Michèle, à notre bibliothécaire Françoise et à tous les permanents que j'oublie. Je remercie mes collègues thésards, ATER ou Post-docs Alexandra, David, Antonio, Manoel, Ricardo, Sean, Radouane, Lionel, Nada et Olivier pour les discussions enrichissantes, leur soutien matériel et immatériel et, pour certains, d'avoir partagé le bureau 44 dans la bonne humeur. Selon l'adage, gardons le meilleur pour la fin : merci à Federico pour de nombreuses raisons notamment, outre son amitié, parce que l'existence administrative de cette thèse lui doit beaucoup.

Tout au long de mon parcours dans le monde de la physique, j'ai rencontré des gens qui ont contribué à mon engouement pour la science et pour qui je me dois de coucher sur le papier une pensée reconnaissante, à commencer par mes amis et camarades de DEA Guillaume et Elie, puis ceux qui m'ont guidés directement ou indirectement comme les professeurs du DEA de Physique Théorique de Paris, une partie de l'équipe enseignante du Magistère de Physique d'Orsay et Thierry Masson, pour finir par Barry, Alan, Kevin, Dave, Karol et tous les autres dont j'ai fait la connaissance dans le cadre du réseau EUCLID.

Dans le monde "civil", il y a beaucoup de personnes à qui je tiens à exprimer ma gratitude, et deux en particulier. Bien évidemment, je remercie ma mère, qui ne le fait pas ? Mais moi, j'ai énormément de raisons de le faire. Et Catherine, qui a pris le train de ma thèse en marche et qui a su être là et bien là. Merci pour ça et pour le reste. Je conclurai en remerciant mes amis, qui se reconnaîtront, "la famille qu'on se choisit" comme dit souvent l'un d'entre eux.



---

# Table des matières

Table des matières	i
<b>I De l'hydrodynamique aux champs relativistes multivalués</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Nouveau système intégrable en hydrodynamique</b>	<b>7</b>
1.1 Equations de Green-Naghdi avec tension de surface . . . . .	7
1.2 Dynamique des ondes courtes . . . . .	9
1.3 Un nouveau système intégrable . . . . .	12
1.4 Ondes solitaires et solutions singulières pour l'équation de Green-Naghdi .	14
<b>2 Relations entre champs multivalués et équations locales</b>	<b>17</b>
2.1 Présentation des modèles . . . . .	17
2.1.1 Première construction d'un Lagrangien relativiste . . . . .	17
2.1.2 Extension à deux paramètres . . . . .	20
2.1.3 Un modèle jumeau . . . . .	23
2.2 Recherche d'une équation locale dans le cas général relativiste . . . . .	27
2.2.1 Introduction de champs auxiliaires . . . . .	27
2.2.2 Equation locale . . . . .	29
2.2.3 Retour sur les modèles connus . . . . .	32
2.3 Equation locale non relativiste et modèle de sine-Gordon . . . . .	35
2.3.1 Equation de mélange . . . . .	35
2.3.2 Transformations de Bäcklund . . . . .	38
<b>3 Premières étapes de quantification</b>	<b>43</b>
3.1 Résolution d'une indétermination à l'ordre des arbres par une méthode hamiltonienne . . . . .	43
3.1.1 Hamiltonien en présence des champs auxiliaires . . . . .	46
3.1.2 Développement en opérateurs de création et d'annihilation . . . . .	48
3.1.3 Amplitudes de probabilité . . . . .	53
3.2 Corrections à une boucle pour un modèle transformé de sinh-Gordon . . . . .	59
3.2.1 Elimination de diagrammes par intégration angulaire . . . . .	59
3.2.2 Exemple de calcul de corrections : le cas $N = 1$ . . . . .	68
3.2.3 Compensations . . . . .	75

---



Conclusions et perspectives	85
<b>II Construction de théorie de champs de spins élevés en interaction</b>	<b>89</b>
Introduction	91
<b>1 Le groupe de jauge</b>	<b>95</b>
1.1 Choix du groupe d'après la théorie des cordes . . . . .	95
1.2 Loi de composition . . . . .	99
<b>2 Champs de jauge</b>	<b>103</b>
2.1 Représentations . . . . .	103
2.2 Spin 3 non abélien . . . . .	106
2.3 Lagrangien de spin 2 . . . . .	110
Conclusions et perspectives	116
Bibliographie	117
<b>A Représentations des ondes solitaires de Green-Naghdi avec tension de surface</b>	<b>121</b>
<b>B Amplitudes de probabilité</b>	<b>125</b>

---

## Première partie

# De l'hydrodynamique aux champs relativistes multivalués

---



---

# Introduction

L'action de cette première partie se déroule dans le domaine des systèmes intégrables, aire de la physique tellement vaste que celui qui y consacre une thèse peut avoir l'impression de cambrioler la caverne d'Ali Baba : pour peu qu'on y entre, on en ressort les mains pleines mais on n'a pu emporter avec soi qu'une infime partie des richesses à sa disposition. La première définition d'un système intégrable, apparue dans le cadre de la mécanique hamiltonienne, est relativement simple :

*Un système à  $N$  degrés de liberté de Hamiltonien  $H$  est intégrable s'il possède  $N$  quantités  $F_i$  qui soient 1. intégrales du mouvement et 2. en involution :*

1.  $\frac{dF_i}{dt} = \frac{\partial F_i}{\partial t} + \{H, F_i\} = 0$
2.  $\{F_i, F_j\} = 0$

où  $\{A, B\}$  est un crochet de Poisson [1].

Depuis lors, cette notion n'a cessé de se diversifier, de se généraliser, par exemple aux systèmes à nombre de degrés de liberté infini que sont les théories de champs. Des outils théoriques de plus en plus puissants ont été créés par d'incessants échanges entre physique et mathématiques, devenant parfois des branches de ces sciences à part entière. Le développement de la géométrie symplectique à partir des travaux de Liouville [2], la démonstration du théorème de Liouville-Arnold prouvant l'existence des variables actions-angles par Arnold [3] et l'introduction de nouvelles méthodes telles que les paires de Lax [4], les groupes quantiques [5] ou les théories conformes [6] en sont des illustrations marquantes. De plus, on retrouve des modèles intégrables dans de très nombreuses spécialités de la physique moderne, théoriques comme expérimentales [8], voire également en mathématiques ou en biologie. Cette ubiquité et cette richesse ont rendu ce domaine quelque peu labyrinthique et il est temps de préciser ce qui fut l'objet de mon intérêt pendant ces années prédoctorales.

Toute cette aventure commence par une histoire de vagues. Plus prosaïquement, avec l'étude du problème bien connu en mécanique des fluides qu'est la propagation d'ondes

---

à la surface d'un fluide incompressible (densité constante) et idéal (viscosité nulle). En pratique, le problème complet est insoluble analytiquement et nécessite le recours à des approximations telles que la *shallow water theory* ("théorie en eau peu profonde"), qui a donné de nombreux modèles d'ondes longues (*long-wave models*), tel celui de Korteweg-de Vries (KdV), qui est d'ailleurs une des équations intégrables les plus étudiées, [9, 10, 11].

Le qualificatif "d'ondes longues" vient du fait que ces modèles possèdent un mécanisme de dispersion linéaire qui favorise grandement la propagation des longueurs d'onde élevées. Même si dans la plupart des cas elle est interdite par des propriétés comme une croissance exponentielle de l'amplitude ou des vitesses de phase complexes, la propagation des ondes courtes est parfois possible [12]. En effet, les ondes de surfaces résultent d'une gamme continue d'excitations et les méthodes habituelles pour obtenir ces modèles à partir des équations d'Euler n'éliminent pas systématiquement les plus courtes longueurs d'onde. Le cas échéant, ces dernières influencent la dynamique du système car elles contribuent aux solutions des équations du mouvement et peuvent les rendre instables si elles-même le sont. C'est la raison pour laquelle l'étude de leur propagation dans des modèles dit "d'ondes longues" a suscité un grand intérêt et fait l'objet d'un nombre important de simulations numériques [13, 14, 15].

C'est précisément l'étude de la dynamique de ces ondes courtes dans le cadre de l'un des avatars de la *shallow water theory* qui a mené Miguel Manna et André Neveu à découvrir une nouvelle équation intégrable pour la composante horizontale  $u$  de la vitesse à la surface du fluide, qui, dès le premier abord, présente des caractéristiques inhabituelles. Elle possède une invariance relativiste, des solutions singulières et multivaluées ainsi qu'un lien inattendu avec plusieurs modèles, dont le très fameux sine-Gordon, au travers d'une transformation d'espace-temps dépendant des champs [16].

Pour rappeler quelques rudiments sur sine-Gordon, disons que ce modèle a fait son apparition en mathématiques, dans l'étude des surfaces de courbure constante négative et qu'il s'est répandu dans de très nombreux domaines de la physique moderne et au delà. En deux dimension, il représente la propagation d'un champ  $v(x, t)$  soumis à un potentiel cosinusoidal :

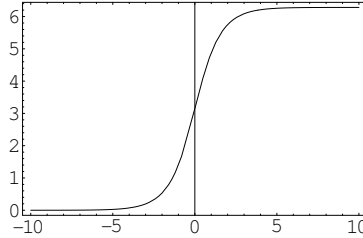
$$v_{tt} - v_{xx} = -\frac{1}{\alpha} \sin \alpha v, \quad (1)$$

où  $\alpha$  est une constante de couplage, et est décrit par le Lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (v_t^2 - v_x^2) - \frac{1}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha v). \quad (2)$$

J'en profite pour préciser que dans cette première partie j'ai utilisé de manière intensive la notation  $v_x \equiv \partial_x v$  très habituelle en physique non linéaire. De plus, par un abus de langage communément usité en théorie des champs, j'ai souvent désigné par "Lagrangien" ou "Hamiltonien" la densité lagrangienne ou hamiltonienne. Cependant, l'usage de lettres cursives pour les densités et de lettres droites pour les fonctions proprement dites devrait éviter toute confusion.

Les solutions les plus connues de (2) se rangent en deux catégories : les solitons, ondes solitaires d'apparence typique



qui se propagent en conservant leur forme et leur énergie, même après collisions avec d'autres ondes progressives, et les breathers, qui sont des états liés de solitons, dont le nom fait référence à leur caractère oscillatoire autour de  $v = 0$ .

En conclusion de cet aparté, citons parmi les nombreuses applications de ce modèle la représentation de la propagation d'onde de dislocation dans un cristal, de la transmission de flux magnétique à une jonction Josephson ou encore une approximation de l'interactions entre quarks et gluons [7].

Revenons à notre nouvelle équation intégrale née de l'hydrodynamique. Elle va se révéler le point de départ de plusieurs développements aussi intéressants que surprenants, tels la construction d'un modèle de champ scalaire relativiste, lié lui aussi à sine-Gordon, ou la découverte d'équations similaires et leurs généralisations, qui permettra de dégager une structure commune et d'éclaircir des relations qui semblaient *a priori* fortuites.

Dans un premier chapitre, nous partirons de l'étude d'ondes à la surface d'un fluide en tenant compte des effets de la gravité et de la tension de surface. Une première réduction des équations d'Euler à un système dit de Green-Naghdi par l'hypothèse d'une faible profondeur, puis la limite d'ondes courtes nous mèneront à l'équation en question. Nous détaillerons ensuite ses aspects fondamentaux, telle son intégrabilité, les premières quantités conservées et ses solutions singulières et multivaluées. Inspirée par ces solutions, la dernière section concernera la recherche d'ondes solitaires et d'instabilité dans les équations de Green-Naghdi.

Dans le chapitre qui suit sera construit un Lagrangien relativiste à partir de l'équation en  $u$  et héritera de ses caractéristiques inhabituelles par l'apparition d'un terme non local. Ce modèle pourra être vu comme le transformé de sine-Gordon dans une métrique dépendant des champs. On verra également comment généraliser l'équation pour  $u$  en une famille d'équations à deux paramètres, laissant entrevoir le début d'un réseau de ramifications plus vaste que prévu. Cette impression est renforcée par l'existence d'un modèle intégrable très similaire par ses propriétés mathématiques et lui aussi apparenté à sine-Gordon. Tout naturellement, ces points communs seront exploités pour construire un formalisme général dont ces systèmes sont des cas particuliers ainsi que pour créer un mélange de ces deux nouvelles équations intégrables dont l'étude révélera des conséquences surprenantes.

Cette partie se conclura par la pose des premières pierres d'un édifice qui sera sans nul doute long à bâtir, la quantification des modèles définis au chapitre précédent. Nous nous concentrerons sur les effets de la transformation dépendant des champs en théorie

des perturbations. Tout d'abord, une ambiguïté due à la structure du terme non local du Lagrangien dès le niveau des arbres pour les diagrammes de Feynman sera résolue par une méthode inspirée de la mécanique quantique. En second, le calcul de toutes les contributions au premier ordre quantique, i.e. les graphes à une boucle, dans un cas particulier ne mettra en évidence aucun comportement anormal.

---

# Chapitre 1

## Nouveau système intégrable en hydrodynamique

### 1.1 Equations de Green-Naghdi avec tension de surface

Considérons un fluide dans un espace identifié à un repère cartésien rectangulaire de centre  $O$  et d'axes  $(\xi, \xi_2, \xi_3)$ ,  $O\xi_3$  indiquant la verticale. On suppose l'invariance par translation dans la direction transverse  $O\xi_2$ , ce qui nous laisse avec un système à deux dimensions dans le plan  $\xi\xi_3$ . Le fluide évolue dans un domaine délimité verticalement par un fond fixe à  $\xi_3 = 0$  et une surface libre paramétrée par  $\xi_3 = S(\xi, \eta)$ ,  $\eta$  représentant le temps. On désigne par  $h$  la profondeur moyenne et par  $(u, w)$  les composantes du vecteur vitesse d'une particule de fluide, vérifiant l'équation de continuité

$$u_\xi + w_{\xi_3} = 0. \quad (1.1)$$

Le mouvement du fluide est décrit par les équations d'Euler

$$\sigma(u_\eta + uu_\xi + wu_{\xi_3}) = -p_\xi^*, \quad (1.2)$$

$$\sigma(w_\eta + uw_\xi + ww_{\xi_3}) = -p_{\xi_3}^* - g\sigma, \quad (1.3)$$

où  $p^*(\xi, \xi_3, \eta)$  est la pression,  $\sigma$  la densité du fluide et  $g$  représente la gravitation. On établit ensuite les conditions aux limites en tenant compte de la tension de surface  $T$

---



$$w(\xi, \xi_3, \eta) = 0 \quad \xi_3 = 0, \quad (1.4)$$

$$S_\eta + uS_\xi - w = 0 \quad \xi_3 = S(\xi, \eta), \quad (1.5)$$

$$p^* - p_0 = \frac{-TS_{\xi\xi}}{(1 + S_\xi^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \xi_3 = S(\xi, \eta). \quad (1.6)$$

L'usage en *shallow water theory* est de développer perturbativement les composantes de la vitesse  $u$  et  $w$ , la pression  $p$ , etc., à ce stade. Cependant, l'approche que nous avons adoptée consiste à étudier l'évolution non linéaire d'un Ansatz initial pour la vitesse, au lieu de traiter le problème complet de manière perturbative. On choisit de rendre  $u$  indépendant de  $\xi_3$

$$u = u(\xi, \eta). \quad (1.7)$$

Ce choix particulier se justifie *a posteriori* par des arguments théoriques au niveau linéaire et, davantage encore, par l'observation de la trajectoire des particules de fluide d'une onde plane périodique dans de l'eau suffisamment peu profonde [17]. Cette méthode, introduite par Green et Naghdi sous une forme quelque peu différente, porte le nom de *columnar-flow Ansatz* (ansatz de flot colonnaire) [18, 19, 20].

A partir de (1.1), de l'Ansatz (1.7) et des conditions aux limites en  $\xi_3 = 0$  on peut déterminer la composante verticale de la vitesse  $w$  en fonction de  $u$

$$w = -\xi_3 u_\xi. \quad (1.8)$$

Nous voulons obtenir un système d'équations pour  $u$  et  $S$  uniquement donc nous allons chercher à éliminer la pression  $p(\xi, \eta)$  définie par

$$p(\xi, \eta) = \int_0^{S(\xi, \eta)} p^*(\xi, \xi_3, \eta) dz - p_0 S(\xi, \eta). \quad (1.9)$$

On peut réécrire l'équation (1.2) en intégrant sur  $\xi_3$  de 0 à  $S(\xi, \eta)$  et en utilisant (1.6) :

$$\sigma S(u_\eta + uu_\xi) = -p_\xi + T[(1 + S_\xi^2)^{-\frac{1}{2}}]_\xi, \quad (1.10)$$

Puis, on multiplie (1.3) par  $\xi_3$  et une seconde intégration nous mène à

$$\sigma \frac{S^3}{3} (-u_{\xi\eta} - uu_{\xi\xi} + u_\xi^2) = p + \frac{TSS_{\xi\xi}}{(1 + S_\xi^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{g\sigma S^2}{2}. \quad (1.11)$$

Finalement, (1.10) et (1.11) se combinent en

$$S(u_\eta + uu_\xi) \frac{1}{3} [S^3(u_{\xi\eta} + uu_{\xi\xi} - u_\xi^2)]_\xi - gSS_\xi + (T/\sigma)S [S_{\xi\xi}(1 + S_\xi^2)^{-3/2}]_\xi. \quad (1.12)$$

et les équations (1.5) et (1.12) sont les équations de Green-Nagdhi avec tension de surface pour  $u$  et  $S$ . Elles correspondent à une première réduction des équations d'Euler dans une couche mince de fluide.

Il est intéressant de remarquer qu'on peut également arriver à ces équations par la méthode variationnelle appliquée au Lagrangien d'un fluide incompressible et non visqueux. Dans le volume intérieur (*bulk*), ce Lagrangien est simplement l'énergie cinétique du fluide, à laquelle on ajoute un terme avec un multiplicateur de Lagrange  $\mu$ , destiné à rendre compte de l'incompressibilité (1.1) :

$$\mathcal{L}_{bulk} = \frac{1}{2}\sigma(u^2 + w^2) + \mu(u_\xi + w_{\xi_3}). \quad (1.13)$$

A la surface il faut tenir compte de la gravitation, l'énergie due à la tension de surface ainsi que de la condition aux limites dynamique (1.5) que l'on rassemble dans

$$\mathcal{L}_{surface} = -\frac{1}{2}g(S - h)^2 - T(1 + S_\xi^2) + \mu'(S_\eta + uS_\xi - w). \quad (1.14)$$

où  $\mu'$  est un autre multiplicateur de Lagrange. On vérifie assez facilement que les équations du mouvement dérivées de ce Lagrangien, avec l'Ansatz (1.7), redonnent le système formé par (1.1), (1.5), (1.12) [21].

## 1.2 Dynamique des ondes courtes

Le système ((1.5), (1.12)) pour les champs  $S(\xi, \eta)$  et  $u(\xi, \eta)$  est le modèle d'ondes longues qui résulte d'une première réduction des équations d'Euler par l'hypothèse de flot colonnaire. Nous allons maintenant le développer perturbativement afin d'étudier la dynamique des ondes courtes. Pour ce faire, il est préférable d'utiliser les variables adimensionnées obtenues par les transformations

$$S \rightarrow \frac{S}{h}, \quad u \rightarrow \frac{u}{\sqrt{gh}}, \quad \xi \rightarrow \frac{\xi}{h}, \quad \eta \rightarrow \eta\sqrt{g/h}. \quad (1.15)$$

dans lesquelles (1.5) et (1.12) s'écrivent :

$$S(u_\eta + uu_\xi) = \frac{1}{3}[S^3(u_{\xi\eta} + uu_{\xi\xi} - u_\xi^2)]_\xi - SS_\xi + \theta S [S_{\xi\xi}(1 + S_\xi^2)^{-3/2}]_\xi, \quad (1.16)$$

$$S_\eta + (uS)_\xi = 0, \quad (1.17)$$

où  $\theta = (T/\sigma h^2 g)$  est le nombre de Bond sans dimension. La relation de dispersion linéaire correspondant à ces équations

$$\Omega^2 = \frac{k^2 + \theta k^4}{1 + \frac{1}{3}k^2} \quad (1.18)$$

a un comportement régulier lorsque le nombre d'onde  $k$  tend vers zéro (ondes longues) mais également lorsque  $k$  tend vers l'infini (ondes courtes). Le système est par conséquent caractérisé par une dispersion finie dans la limite des ondes longues, qui donne l'équation de KdV, et celle des ondes courtes, que nous voulons étudier. Il faut en premier lieu se doter d'une longueur de référence, pour laquelle le choix se porte naturellement sur la profondeur du fluide au repos  $h$ , et d'un paramètre pour le développement asymptotique  $\epsilon \ll 1$  défini par

$$k = \mathcal{O}(1/\epsilon). \quad (1.19)$$

Il convient ensuite d'introduire des nouvelles variables, appropriées à ce développement :  $\zeta$  décrivant de très courtes distances et  $\tau$  mesurant des grands temps, qui s'écrivent en fonction de  $\xi$  et  $\eta$

$$\zeta = \frac{1}{\epsilon}\xi, \quad (1.20)$$

$$\tau = \epsilon\eta. \quad (1.21)$$

De cette manière,  $\zeta$  et  $\tau$  sont d'ordre un quand  $\xi \ll 1$  et  $\eta \gg 1$  : elles sont donc tout à fait désignées pour décrire l'évolution asymptotique d'ondes courtes dans le temps.

Cependant, le changement de variables ((1.20), (1.21)) n'aura de sens que s'il est compatible avec la solution en onde progressive dont la fréquence est donnée par (1.18) dans la limite  $k \rightarrow \infty$ . C'est en effet le cas, car

$$k\xi - \Omega\eta \sim \frac{1}{\epsilon}(\xi - \eta\sqrt{3\theta}) - \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{1}{\theta} - 3\right)\eta + \mathcal{O}(\epsilon^2)\eta \quad \text{pour } \begin{cases} k \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0 \end{cases}. \quad (1.22)$$

et la contribution dominante est bien de la forme  $q\zeta - \omega\tau$ . Les nouvelles variables  $\zeta$  et  $\tau$  définissent de nouveaux opérateurs différentiels reliés aux anciens par

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{c}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (1.24)$$

Afin de déterminer la dynamique des ondes courtes de capillarité-gravité, il nous faut développer les équations de Green-Naghdi adimensionnées (1.16) et (1.17) en puissances de  $\epsilon$ , en utilisant (1.23) et (1.24) ainsi que les décompositions suivantes (chaque terme  $u_n$ ,  $S_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  tend vers 0 lorsque  $\zeta \rightarrow \infty$ )

$$u = \epsilon^2(u_0 + \epsilon^2 u_2 + \dots), \quad (1.25)$$

$$S = 1 + \epsilon^2(S_0 + \epsilon^2 S_2 + \dots). \quad (1.26)$$

Aux ordres  $1/\epsilon^3$  et  $1/\epsilon$  le système (1.16) et (1.17) se réduit à

$$cu_{0\zeta} = 3\theta S_{0\zeta}, \quad (1.27)$$

$$cS_{0\zeta} = u_{0\zeta}. \quad (1.28)$$

et a pour solution

$$c^2 = 3\theta, \quad cS_0 = u_0. \quad (1.29)$$

Les ordres suivants,  $1/\epsilon$  et  $\epsilon^0$ , donnent

$$\frac{c}{3}u_{2\zeta\zeta} - \theta S_{2\zeta\zeta} = cu_0 + \frac{1}{3}u_{0\zeta\tau} - cS_0u_{0\zeta\zeta} + \frac{1}{3}u_0u_{0\zeta\zeta} - \frac{1}{3}u_{0\zeta}^2 - \frac{1}{2}\theta S_{0\zeta}^2 \quad (1.30)$$

$$-\frac{3}{2}\theta S_{0\zeta\zeta}S_{0\zeta}^2 + \theta S_0S_{0\zeta\zeta} - S_0, \quad (1.31)$$

$$cS_{2\zeta} - u_{2\zeta} = u_{0\tau} + (u_0S_0)_\zeta. \quad (1.32)$$

Les quatre relations entre les composantes de  $u$  et  $S$  (1.27), (1.28), (1.31) et (1.32) nous permettent d'obtenir une équation pour  $u_0$

$$u_{0\zeta\tau} = \frac{3(1-3\theta)}{2c}u_0 - \frac{1}{4}u_{0\zeta}^2 - \frac{1}{2}u_0u_{0\zeta\zeta} + \frac{3}{4c}u_{0\zeta\zeta}u_{0\zeta}^2, \quad (1.33)$$

qui s'écrit finalement dans les coordonnées "du laboratoire"  $(\xi, \eta)$

$$u_{\xi\eta} = \frac{3g(1-3\theta)}{2v_p h}u - \frac{1}{2}u_{\xi\xi}u - \frac{1}{4}u_\xi^2 + \frac{3h^2}{4v_p}u_{\xi\xi}u_\xi^2. \quad (1.34)$$

avec  $v_p = (3T/\sigma h)^{1/2}$ .

Cette équation gouverne la propagation non linéaire des ondes courtes de surface dans le cadre de la réduction des équations d'Euler en eau peu profonde (1.5), (1.12). Elle possède des propriétés remarquables que nous allons présenter dans la section suivante.

### 1.3 Un nouveau système intégrable

Commençons par normaliser différemment l'équation (1.34) pour l'écrire sous la forme

$$u_{\xi\eta} = u - uu_{\xi\xi} - \frac{1}{2}u_{\xi}^2 + \frac{\gamma}{2}u_{\xi\xi}u_{\xi}^2. \quad (1.35)$$

dans laquelle  $\gamma$  est un paramètre dépendant des constantes physiques présentes dans l'équation (1.34). Il est possible d'obtenir (1.35) à partir du Lagrangien :

$$\mathcal{L}_u = \frac{1}{2}u_{\xi}u_{\eta} + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}uu_{\xi}^2 - \frac{\gamma}{24}u_{\xi}^4. \quad (1.36)$$

Une caractéristique fondamentale de cette équation est son intégrabilité qui se démontre par l'existence d'une paire de Lax  $(L, M)$

$$L = \frac{\partial}{\partial \xi} + i\sqrt{\lambda}F\tau_3 + \frac{1}{2}\frac{u_{\xi\xi\xi}\sqrt{1-\gamma}}{F^2}\tau_1, \quad (1.37)$$

$$M = -\frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{2}\gamma u_{\xi}^2\right)\frac{u_{\xi\xi\xi}\sqrt{1-\gamma}}{F^2}\tau_1 - i\sqrt{\lambda}\left(u - \frac{1}{2}\gamma u_{\xi}^2\right)F\tau_3 \\ - \frac{i}{4\sqrt{\lambda}}\frac{1-u_{\xi\xi}}{F}\tau_3 + \frac{1}{4\sqrt{\lambda}}\frac{u_{\xi\xi}\sqrt{1-\gamma}}{F}\tau_2, \quad (1.38)$$

où les  $\tau_i$  sont les matrices de Pauli usuelles,  $\lambda$  le paramètre spectral et

$$F^2 = 1 - 2u_{\xi\xi} + \gamma u_{\xi\xi}^2. \quad (1.39)$$

Un second point très intéressant est la possibilité de construire une première quantité conservée à partir de  $F$  quelque soit  $\gamma$ . En effet,  $F$  vérifie l'identité suivante :

$$\partial_{\eta}F = -\partial_{\xi}\left[\left(u - \frac{\gamma}{2}u_{\xi}^2\right)F\right], \quad (1.40)$$

que j'appellerai souvent par abus de langage équation de conservation, et la quantité définie par

$$Q(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta)d\xi,$$

est conservée au cours du temps si  $u$  s'annule à l'infini. Notons au passage que (1.40) se retrouve également par l'équation de Lax.

L'importance majeure de  $F$  et de sa loi de conservation réside dans la propriété de ce nouveau système intégrable que nous allons voir maintenant. En effet, si l'on définit le changement de variable et la transformation de champs suivants :

$$\begin{cases} \xi' = \int^\xi F(\xi_1, \eta) d\xi_1, \\ \eta' = \eta \end{cases}, \quad (1.41)$$

$$v(\xi', \eta') = \frac{1}{\sqrt{\gamma-1}} \text{Arctan} \frac{u_{\xi\xi} \sqrt{\gamma-1}}{1 - u_{\xi\xi}}, \quad (1.42)$$

on trouve que le champ  $v$  satisfait l'équation de sine-Gordon dans les coordonnées du cône de lumière

$$v_{\xi'\eta'} = \frac{1}{\sqrt{\gamma-1}} \sin v \sqrt{\gamma-1}. \quad (1.43)$$

Ceci est valable pour  $\gamma > 1$  et  $u_{\xi\xi}$  suffisamment faible pour que  $F$  soit réel. Si  $u_{\xi\xi}$  est grand, des transformations similaires conduisent au modèle de cos-Gordon et dans le cas où  $\gamma < 1$  on obtient l'équation de sinh-Gordon, toujours dans les coordonnées du cône de lumière. Cette relation inattendue va se révéler très fructueuse car elle est à l'origine de toutes les investigations que nous présentons dans la suite.

La dernière propriété marquante de (1.35) concerne la forme des solutions. Quelque soit la valeur de  $\gamma$ , il peut arriver lorsque l'on fait la transformation inverse de (1.41)-(1.42) qu'un  $v(\xi', \eta')$  régulier donne un  $u(\xi, \eta)$  *singulier* et *multivalué* si le changement de variable de  $\xi'$  à  $\xi$  n'est pas bijectif. Ceci se produit si  $|v|$  est suffisamment grand, faisant tendre  $u_{\xi\xi}$  vers l'infini et changer de signe  $F$  dans (1.41). Pour illustrer cette propriété, nous avons tracé en figure 1.1 deux solutions pour  $u$  à partir de deux breathers de sine-Gordon : une (courbes en tirets) pour laquelle l'amplitude de  $v$  est juste en dessous du seuil de singularité, et l'autre (courbe pleine) pour  $|v|$  au-dessus du seuil, entraînant un  $u$  singulier et multivalué avec un comportement "en queue d'hirondelle".

De plus, ce genre de solutions singulières et multivaluées peut s'obtenir en un temps fini. Considérons une solution de sine-Gordon  $v(\xi', \eta')$  composé de deux breathers dont les amplitudes sont suffisamment faibles pour que le changement  $\xi' \rightarrow \xi$  soit bijectif lorsqu'ils sont loin l'un de l'autre. Il se peut cependant qu'elles soient suffisamment importantes pour que l'amplitude totale  $|v|$  dépasse le seuil. Dans ce cas la singularité apparaît lors de la collision et ce n'est pas un phénomène asymptotique dans le temps. Dans les cas  $\gamma = 1$  (champ libre) et de sinh-Gordon, le même raisonnement s'applique si on remplace les breathers par des paquets d'ondes.

La solution  $u(\xi, \eta)$  correspondant au soliton de sine-Gordon est quant à elle toujours singulière et multivaluée. Nous l'avons tracée en figure 1.2 pour la valeur particulière  $\gamma = 10/9$ .

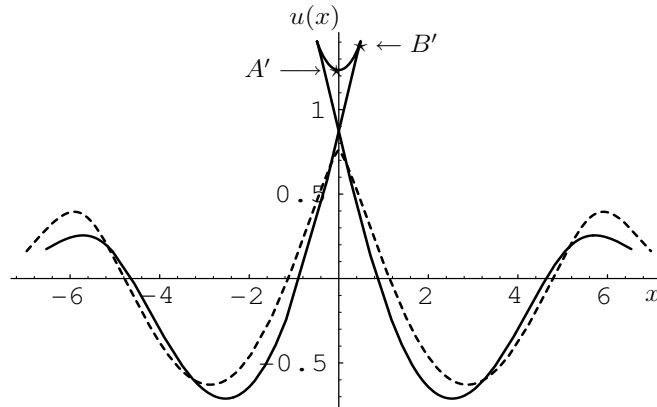


FIG. 1.1 –  $u(\xi, \eta = 0)$  correspondant aux breathers de sine-Gordon  $v(\xi', \eta')\sqrt{\gamma - 1} = -4\text{Arctan}\frac{d\cos[c(\xi' - \eta')]}{\cosh[s(\xi' + \eta')]}$ ,  $c^2 + s^2 = 1$ ,  $d = s/c$ , pour  $\gamma = 2.02$ ,  $d = 0.2$  (courbe en tirets),  $d = 0.35$  (courbe pleine).

Pour clore cette description, ajoutons que Brunelli, Das et Popowicz ont récemment mis en évidence dans [22] la structure bi-hamiltonienne d'une famille d'équations comprenant (1.35), en s'inspirant notamment des résultats de [16] qui constituent la majeure partie de ce chapitre.  $F$  y joue le rôle d'un des Hamiltoniens, soulignant encore son importance.

## 1.4 Ondes solitaires et solutions singulières pour l'équation de Green-Naghdi

Comme nous l'avons vu précédemment, l'équation (1.35) possède des solutions de type soliton, qui deviennent singulières pour certaines valeurs des paramètres. Étant donné que ce modèle dérive des équations de Green-Naghdi avec tension de surface (1.5) et (1.12), il est intéressant de rechercher pour ces dernières l'existence, probablement pas de solitons, mais d'ondes solitaires ainsi que d'éventuels domaines de l'espace des paramètres où ces solutions deviendraient singulières. Tout d'abord, il faut considérer des solutions se propageant à une vitesse  $w$  constante, que l'on choisit positive, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent que de  $\xi - w\eta$ . Avec l'identité  $\partial_\eta = -w\partial_\xi$  et en fixant  $\eta$  à zéro, (1.5) et (1.12) se réécrivent

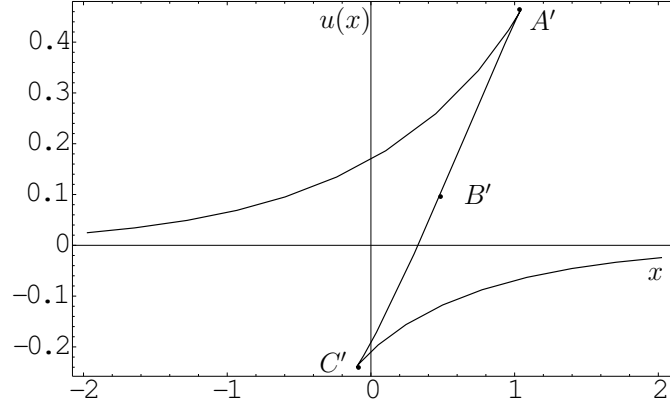


FIG. 1.2 –  $u(\xi, \eta = 0)$  correspondant au soliton de sine-Gordon  $g(\xi', \eta')\sqrt{\gamma-1} = 4\text{Arctan exp}(\xi' + \eta')$  à  $\gamma = 10/9$ .

$$S(u-w)u_\xi = \frac{1}{3} [S^3 ((u-w)u_{\xi\xi} - u_\xi^2)]_\xi - gSS_\xi + (T/\sigma)S [S_{\xi\xi}(1+S_\xi^2)^{-3/2}]_\xi, \quad (1.44)$$

$$[(u-w)S]_\xi = 0. \quad (1.45)$$

Exprimons ensuite  $u-w$  en fonction de  $S$  grâce à (1.45) et la condition  $S=h$  à l'infini, puis utilisons cette relation dans (1.44) pour obtenir une équation pour  $S$  et  $S_\xi$

$$3(S-h)^2 (gS-w^2) + h^2 w^2 S_\xi^2 - \frac{6TS}{\sigma} + \frac{6TS}{\sigma\sqrt{1+S_\xi^2}} = 0. \quad (1.46)$$

Nous cherchons des solutions qui décroissent exponentiellement vers  $h$  à l'infini, donc supposons

$$S \sim h e^{s(\xi)}, s \rightarrow 0$$

et vérifions pour quelles valeurs des paramètres la fonction  $s(\xi)$  est réelle. Le développement

$$S \sim h(1 + s(\xi) + \frac{1}{2}s^2(\xi))$$

transforme (1.46) en une équation pour  $s(\xi)$

$$(gh-w^2) s^2 + \left( \frac{1}{6}h^2 w^2 - \frac{Th}{2\sigma} \right) s_\xi^2 = 0. \quad (1.47)$$

Pour que  $s$  soit réelle, elle doit vérifier la condition :

$$(w^2 - gh) (w^2 - 3g\theta h) < 0, \quad (1.48)$$



et les domaines de l'espace  $(\theta, v)$  pour lesquels il existe des solutions de ((1.5), (1.12)) : de type onde solitaire sont :

$$\begin{array}{l} \theta > \frac{1}{3} \\ \theta < \frac{1}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} w < \sqrt{gh} \quad (i) \quad w > \sqrt{3g\theta h} \quad (ii), \\ w < \sqrt{3g\theta h} \quad (iii) \quad w > \sqrt{gh} \quad (iv). \end{array} \quad (1.49)$$

Une fois l'existence de telles solutions déterminée, cherchons si certaines d'entre elles sont singulières et, le cas échéant, dans quel domaine. La présence du terme  $S_\xi^2$  dans (1.46) permet de faire l'analogie avec une équation pour la trajectoire d'un point matériel de coordonnée  $S$  dépendant d'une variable temporelle  $\xi$

$$\frac{1}{2}S_\xi^2 + E_p = 0.$$

où  $\frac{1}{2}S_\xi^2$  est l'énergie cinétique et  $E_p$  l'énergie potentielle. Le but est de tracer cette "énergie potentielle" en fonction de  $S$  pour un ensemble de valeurs de  $(\theta, v)$  et d'étudier le comportement des solutions correspondantes. A partir de l'équation (1.46) et de la définition de  $E_p$  on obtient une équation pour ces courbes :

$$\sqrt{1 - E_p} \left[ 3(S - h)^2 (gS - w^2) - h^2 w^2 E_p - \frac{6TS}{\sigma} \right] + \frac{6TS}{\sigma} = 0. \quad (1.50)$$

Les graphes correspondant aux domaines  $i - iv$  sont rassemblés dans l'appendice A avec pour chacun une discussion de la forme de l'onde solitaire  $S(\xi - w\eta)$ . Le résultat important est qu'il existe en effet des solutions singulières à l'équation (1.46) dans les domaines  $ii$  et  $iii$ , et qu'elles sont très similaires à celles trouvées dans le cas de l'équation (1.35). On peut également noter que l'onde de dépression du cas  $i$  (tension de surface importante) a été observée expérimentalement dans du mercure [23].

## Chapitre 2

# Relations entre champs multivalués et équations locales

Le chapitre précédent nous a permis d'introduire un nouveau système intégrable, défini par l'équation d'évolution (1.35), à partir de l'étude de la propagation d'ondes courtes de capillarité-gravité et sa relation avec sine-Gordon via une transformation d'espace-temps dépendant des champs. Nous voulons explorer ici les conséquences de ce type de relations et la première est la possibilité de construire le Lagrangien d'un champ relativiste multivalué du fait de la présence d'un terme non local inhabituel.

## 2.1 Présentation des modèles

### 2.1.1 Première construction d'un Lagrangien relativiste

En plus de celles présentées en section 1.3, une caractéristique intéressante de l'équation (1.35) est son invariance par la transformation

$$\xi \rightarrow \kappa\xi, \quad \eta \rightarrow \frac{\eta}{\kappa}, \quad u \rightarrow \kappa^2 u \quad (2.1)$$

pour un paramètre réel arbitraire  $\kappa$ , qui n'est autre qu'une transformation de Lorentz dans les coordonnées du cône de lumière. Cette invariance relativiste est le reflet de celle de sine(sinh)-Gordon, car les changements de variables (1.41) et de champ (1.42) qui lient ces deux modèles sont eux-même invariants de Lorentz. Cependant, l'action correspondant au Lagrangien (1.36) ne l'est pas et il paraît sensé de chercher une formulation lagrangienne qui tient compte de cette propriété. L'idée est de prendre pour champ fondamental de la théorie  $\varphi \equiv u_{\xi\xi}$  qui, à l'inverse de  $u$ , est un scalaire pour (2.1). L'équation du mouvement pour  $\varphi$  s'obtient en dérivant deux fois (1.35) par rapport à  $\xi$  :

---

$$\varphi_{\xi\eta} = \varphi F^2 - 3u_{\xi}\varphi_{\xi}(1 - \gamma\varphi) - \varphi_{\xi\xi}(u - \frac{\gamma}{2}u_{\xi}^2). \quad (2.2)$$

On peut montrer que le Lagrangien suivant, invariant de Lorentz et possédant un terme non local inhabituel

$$\mathcal{L}_{\varphi} = -\frac{1}{2} \frac{\varphi_{\xi}\varphi_{\eta}}{F^4} + \frac{\varphi_{\xi}^2}{2F^5} \partial_{\eta} \int^{\xi} (F - 1) d\xi_1 + \frac{F + \varphi - 1}{1 - \gamma}. \quad (2.3)$$

est celui que l'on cherche. En effet, on retrouve l'équation du mouvement (2.2) après variation, conditions aux limites appropriées à l'infini et en faisant disparaître la non-localité grâce aux lois de conservations de  $F$  (1.40) et de  $\varphi_{\xi}^2/2F^5$

$$\partial_{\eta} \left( \frac{\varphi_{\xi}^2}{2F^5} \right) = \partial_{\xi} \left[ \frac{\varphi - 1}{(\gamma - 1)F} - (u - \frac{\gamma}{2}u_{\xi}^2) \frac{\varphi_{\xi}^2}{2F^5} \right]. \quad (2.4)$$

Concentrons-nous sur le cas où  $\gamma > 1$ , autrement dit dans le cas de la relation avec sine-Gordon et écrivons le modèle en termes du champ  $v$  pour étudier cette relation. La transformation de champ (1.42) s'écrit alors

$$v = \frac{1}{\sqrt{\gamma - 1}} \text{Arctan} \frac{\varphi \sqrt{\gamma - 1}}{1 - \varphi}. \quad (2.5)$$

et en utilisant

$$d\varphi = F^2 dv, \quad (2.6)$$

on obtient un Lagrangien pour le champ  $v$

$$\mathcal{L}_v = -\frac{1}{2} v_{\xi} v_{\eta} + \frac{v_{\xi}^2}{2F} \partial_{\eta} \int^{\xi} (F - 1) d\xi_1 - \frac{2}{\sqrt{\gamma - 1}} \frac{\sin^2(\frac{v\sqrt{\gamma-1}}{2})}{\sqrt{\gamma - 1} \cos v\sqrt{\gamma - 1} + \sin v\sqrt{\gamma - 1}}, \quad (2.7)$$

$$F = \frac{\sqrt{\gamma - 1}}{\sqrt{\gamma - 1} \cos v\sqrt{\gamma - 1} + \sin v\sqrt{\gamma - 1}}. \quad (2.8)$$

Après cette transformation, nous obtenons un modèle de champ scalaire relativiste plus exploitable que celui défini par (2.3) car le terme cinétique a une forme standard mais le terme intégral-dérivé peu familier est toujours présent.

Une remarque s'impose à ce stade, à savoir qu'en dépit des apparences, la relation entre (1.35) et (2.7) n'est pas à sens unique. Plus précisément, la manière dont nous avons

construit ce Lagrangien peut laisser penser qu'on ne peut faire le chemin inverse, de  $v$  à  $u$ , sans plusieurs conditions extérieures telles que (1.35) ou différentes lois de conservation. Cela n'est pas exactement le cas car, même si la forme de l'équation de conservation de  $F$  est fortement contrainte dans le cas général, toutes les autres informations nécessaires pour retrouver l'équation pour  $u$  sont contenues dans (2.7).

Nous avons donc un Lagrangien qui n'est séparé du très étudié modèle de sine-Gordon que par la seule transformation d'espace-temps. Le Lagrangien (2.7) peut se mettre sous la forme plus compacte

$$\mathcal{L}_v = -\frac{1}{2}v_\xi v_\eta + \frac{v_\xi^2}{2F} \partial_\eta \int^\xi (F-1) d\xi_1 - FV(v), \quad (2.9)$$

$V$  étant le potentiel de sine-Gordon

$$V(v) = \frac{1}{\gamma-1} \left[ 1 - \cos(v\sqrt{\gamma-1}) \right].$$

pour rendre plus visible le fait que ce modèle n'est autre que sine-Gordon dans une métrique complètement non triviale, dépendant des champs mais cependant plate. En effet, si l'on écrit

$$\begin{cases} S &= \int d\xi d\eta \sqrt{-g} \mathcal{L}, \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu v \partial_\nu v - V(v), \end{cases} \quad (2.10)$$

avec la métrique  $g$  définie par

$$\begin{aligned} g^* &= \frac{1}{2F} \begin{pmatrix} -\frac{2}{F} \partial_\eta \int^\xi (F-1) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ g_* &= 2F \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2\partial_\eta \int^\xi (F-1) \end{pmatrix}, \\ g &= \det g_* = -2F^2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

(2.10) correspond bien à (2.9) à une constante multiplicative près. C'est, à notre connaissance, la première fois que l'on rencontre un tel mélange des coordonnées d'espace-temps et des champs.

L'endroit est d'ailleurs propice pour faire une remarque sur l'importance de cette forme du Lagrangien. On voit qu'on pourrait appliquer cette transformation à n'importe quel modèle de champ scalaire en prenant simplement un potentiel  $V$  différent dans (2.9). Ce dernier est donc l'outil idéal pour étudier les effets du passage de la métrique de Minkovski à (2.11) à un niveau général, i.e. pour  $V$  quelconque.

Étudions maintenant quelques propriétés du modèle relativiste que nous venons de construire. Comme dans le cas de l'équation (1.35) le changement de variables poten-

tiellement singulier entraîne l'apparition de solutions multivaluées inexistantes dans sine-Gordon. Pour illustrer cette propriété, nous avons tracé le soliton correspondant au Lagrangien (2.7) en figure 2.1.

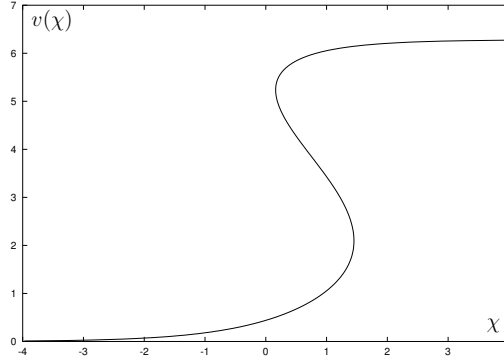


FIG. 2.1 – soliton multivalué, fonction de  $\chi = \xi - w\eta$ , où  $w$  est sa vitesse.

On trouve la même valeur pour l'énergie du soliton que dans sine-Gordon. Cela s'explique peut-être par le fait que la transformation d'espace-temps est localement régulière sauf en certains points entraînant que le soliton sent seulement un changement sur sa forme mais pas sur l'intégrale d'une densité d'énergie.

### 2.1.2 Extension à deux paramètres

Afin de mieux comprendre la relation entre un modèle de champs multivalués comme (1.35), d'une part, et sine-Gordon, d'autre part, intéressons-nous à la généralisation suivante du problème hydrodynamique

$$u_{\xi\eta} = u - uu_{\xi\xi} + Au_{\xi}^2 + \frac{\gamma}{2}u_{\xi\xi}u_{\xi}^2, \quad (2.12)$$

et cherchons à la relier à une équation de champ scalaire en coordonnées du cône de lumière

$$v_{\xi'\eta'} = V'(v), \quad (2.13)$$

où

$$(V(v))' = \frac{d}{dv}V.$$

L'équation (2.12) est elle aussi invariante par la transformation de Lorentz (2.1) donc comme dans le cas précédent, le champ scalaire de Lorentz est  $\varphi \equiv u_{\xi\xi}$ . Par conséquent,

il nous faut trouver, s'ils existent, la transformation de  $\varphi$  à  $v$  ainsi qu'un changement de variables de la forme (1.41) qui repose sur une densité de quantité conservée  $F$ .

Pour déterminer  $F(\varphi)$ , on impose la loi de conservation (1.40) dont le membre de gauche vaut

$$\partial_\eta F = F'(\varphi)u_{\xi\xi\eta} \equiv \frac{dF}{d\varphi}u_{\xi\xi\eta}.$$

Si l'on calcule  $u_{\xi\xi\eta}$  en dérivant (2.12), alors (1.40) devient une condition sur  $F$

$$(1 + (2A - 1)\varphi + \gamma\varphi^2) F' + (1 - \gamma\varphi) F = 0 \quad (2.14)$$

Définissons les racines  $\varphi_\pm$  du coefficient de  $F'$  dans (2.14) par

$$1 + (2A - 1)\varphi + \gamma\varphi^2 \equiv \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_+}\right) \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_-}\right) \quad (2.15)$$

et décomposons celui de  $F$  en introduisant une constante  $\beta$  telle que

$$1 - \gamma\varphi = \beta \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_+}\right) + (1 - \beta) \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_-}\right). \quad (2.16)$$

En identifiant les coefficients de  $\varphi$  on trouve l'équation suivante

$$\beta\varphi_- + (1 - \beta)\varphi_+ = 1 \quad (2.17)$$

de laquelle on tire la valeur de  $\beta$

$$\beta = \frac{\varphi_+ - 1}{\varphi_+ - \varphi_-}. \quad (2.18)$$

Nous pouvons maintenant calculer  $F$  en écrivant (2.14) sous la forme

$$\frac{F'}{F} = \frac{1 - \gamma\varphi}{1 + (2A - 1)\varphi + \gamma\varphi^2} \quad (2.19)$$

et en y insérant (2.15) et (2.16). La solution est donnée par

$$F = \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_-}\right)^{\beta\varphi_-} \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_+}\right)^{(1-\beta)\varphi_+}. \quad (2.20)$$

Il nous faut ensuite trouver la transformation de champ. La méthode est de transformer (2.12) en une équation pour  $\varphi$  seul dans les coordonnées  $(\xi', \eta')$ . On choisit ensuite une fonction  $v(\varphi)$  vérifiant

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{1}{1 + (2A - 1)\varphi + \gamma\varphi^2} \quad (2.21)$$

et l'équation pour  $\varphi$  devient

$$v_{\xi'\eta'} = \frac{\varphi}{F}. \quad (2.22)$$

Grâce à l'utilisation de (2.15), (2.20) dans les deux identités précédentes, on peut calculer la fonction  $v(\varphi)$  :

$$v(\varphi) = \frac{1}{B} \left( \log \frac{\varphi - \varphi_+}{\varphi - \varphi_-} - \log \frac{\varphi_+}{\varphi_-} \right) = \frac{1}{B} \log \left( \frac{1 - \frac{\varphi}{\varphi_+}}{1 - \frac{\varphi}{\varphi_-}} \right), \quad (2.23)$$

$$d\varphi = \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_+}\right) \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_-}\right) dv, \quad (2.24)$$

ainsi que l'équation du mouvement pour le champ scalaire  $v$

$$v_{\xi'\eta'} = \frac{1}{B} \left( e^{\beta\varphi - Bv} - e^{-(1-\beta)\varphi + Bv} \right), \quad (2.25)$$

où nous avons introduit

$$B = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{\varphi_+ \varphi_-}. \quad (2.26)$$

Comme on s'y attendait, on retrouve facilement le cas particulier (1.35)/sine-Gordon pour

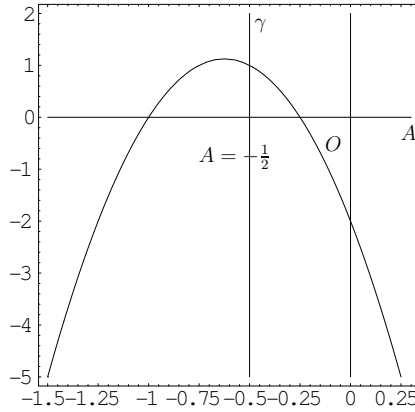
$$\beta\varphi_- = \frac{1}{2}$$

car ce cas correspond à  $A = \frac{1}{2}$  et  $\gamma$  arbitraire, et (2.12) redonne bien (1.35).

Il est plus intéressant de remarquer que pour  $\beta\varphi_- = \frac{1}{3}$  ou  $\beta\varphi_- = \frac{2}{3}$  le champ  $v$  satisfait l'équation intégrable de Bullough-Dodd [24] et dans les deux cas la condition sur  $(A, \gamma)$  est

$$8A^2 + 10A + \gamma + 2 = 0. \quad (2.27)$$

Pour conclure, disons que nous avons obtenu une famille de modèles qui sont intégrables quand les deux paramètres dont ils dépendent appartiennent aux courbes représentées ci-dessous



L'intersection de ces deux courbes est le point  $(A, \gamma) = (-\frac{1}{2}, 1)$  correspondant au champ libre.

### 2.1.3 Un modèle jumeau

Présentons maintenant une autre équation intégrable dépendant d'un paramètre  $\alpha$

$$u_{\xi\eta} = u + \alpha^2 (u^2 u_{\xi\xi} + u u_{\xi}^2), \quad (2.28)$$

qui partage de nombreuses propriétés avec (1.35), et son Lagrangien

$$\mathcal{L}_u = \frac{1}{2} u_{\xi} u_{\eta} + \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 u^2 u_{\xi}^2. \quad (2.29)$$

Cette section est calquée sur 2.1.1, donc les différentes étapes seront abordées plus succinctement. Tout d'abord, on trouve une quantité  $F$  ainsi qu'une loi de conservation qui s'écrivent

$$F = (1 + \alpha^2 u_{\xi}^2), \quad (2.30)$$

$$\partial_{\eta} F = \partial_{\xi} (u^2 F). \quad (2.31)$$

L'équation (2.28) est elle aussi invariante par une transformation de Lorentz, qui diffère de (2.1) par son effet sur  $u$

$$\xi \rightarrow \kappa \xi, \quad \eta \rightarrow \frac{\eta}{\kappa}, \quad u \rightarrow \kappa u. \quad (2.32)$$



Le champ que nous allons utiliser pour construire une théorie scalaire relativiste est alors  $\varphi \equiv u_\xi$ . La seconde loi de conservation, analogue de (2.4), est ici

$$\partial_\eta \left( \frac{\varphi_\xi^2}{2F^3} \right) = \partial_\xi \left[ u^2 \frac{\varphi_\xi^2}{2F^5} + \frac{\varphi^2}{2F} \right]. \quad (2.33)$$

et le Lagrangien pour  $\varphi$  s'écrit :

$$\mathcal{L}_\varphi = -\frac{1}{2} \frac{\varphi_\xi \varphi_\eta}{F^2} + \frac{\varphi_\xi^2}{2F^3} \partial_\eta \int^\xi (F-1) - \frac{\varphi^2}{2}. \quad (2.34)$$

Dans ce cas la transformation qui définit le champ  $v$  est

$$v(\varphi) = \frac{1}{\alpha} \text{Arctan} \alpha \varphi, \quad (2.35)$$

$$d\varphi = F dv \quad (2.36)$$

ce qui nous permet de calculer le Lagrangien pour  $v$

$$\mathcal{L}_v = -\frac{1}{2} v_\xi v_\eta + \frac{v_\xi^2}{2F} \partial_\eta \int^\xi (F-1) d\xi_1 + \frac{1}{2\alpha^2} \left( 1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha v} \right). \quad (2.37)$$

Là encore,  $\mathcal{L}_v$  peut se mettre sous la forme plus compacte (2.9) avec :

$$F = \frac{1}{\cos^2 \alpha v}. \quad (2.38)$$

$$V = \frac{1}{2\alpha^2} \sin^2 \alpha v. \quad (2.39)$$

En remarquant que  $V$  peut se réécrire comme

$$V = \frac{1}{4\alpha^2} (1 - \cos 2\alpha v), \quad (2.40)$$

il devient explicite qu'il s'agit encore une fois d'un modèle obtenu par transformation de sine-Gordon.

---

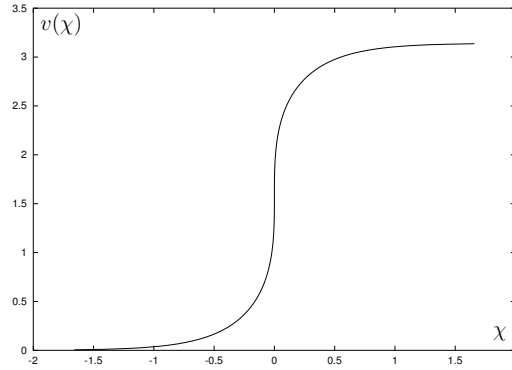


FIG. 2.2 – Nouveau soliton, multivalué en un point

Comme précédemment, il existe une solution de type soliton que nous présentons en figure 2.2.

Ce graphe mérite une petite remarque : il est intéressant de noter que le domaine où le soliton est multivalué est réduit à un point. Ceci suggère que ce cas marque une limite entre les cas avec et sans solutions multivaluées, autrement dit, entre les situations avec ou sans repliement de l'espace, causé par deux changements de signe de  $F$  (1.41) lorsque  $\xi$  parcourt l'axe réel.

L'histoire de ce modèle jumeau de (1.35) aurait pu s'arrêter là sans l'apparition, dans [25], d'une équation intégrable lui ressemblant de manière frappante quand  $\alpha = 1$  :

$$u_{\xi\eta} = u + uu_{\xi}^2 + \frac{1}{2}u^2u_{\xi\xi} \quad (2.41)$$

mais différent, et cela a son importance, par le rapport des coefficients des termes non linéaires. Cette équation, nommée *Short Pulse Equation* (SPE), intervient par exemple dans la description de courts trains d'ondes à très haute fréquence dans les fibres optiques. En l'intégrant une fois par rapport à  $\xi$  et en définissant  $\psi(x, t) = \int^{\xi} u(\xi_1, \eta) d\xi_1$ , on obtient

$$\psi_{\xi\eta} = \psi + \frac{1}{2}\psi_{\xi}^2\psi_{\xi\xi}. \quad (2.42)$$

qui, de manière inattendue, n'est autre que la limite  $\gamma \rightarrow \infty$  de (1.35), à un rescaling de  $\psi$  près. Il n'apparaît donc pas surprenant que les auteurs de [25] aient prouvé une relation avec sine-Gordon par les transformations (réécrites dans nos notations)

$$F = (1 + u_\xi^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.43)$$

$$v(\xi', \eta') = \arccos \frac{1}{F}, \quad (2.44)$$

qui sont, encore une fois, (1.42, 1.41) dans la limite  $\gamma \rightarrow \infty$ .

De plus, remarquant que (2.44) est exactement identique à (2.35), on est amené à explorer plus en détail la similarité entre (2.28) et (2.41) en étudiant l'équation suivante pour  $n \in \mathbb{R}$

$$u_{\xi\eta} = u + \alpha^2 \left( uu_\xi^2 + \frac{n}{2} u^2 u_{\xi\xi} \right). \quad (2.45)$$

Comme précédemment, en posant  $\varphi \equiv u_\xi$ , on trouve une quantité  $F$

$$F = (1 + \alpha^2 \varphi^2)^{\frac{n}{2}}, \quad (2.46)$$

conservée selon

$$\partial_\eta F = \partial_\xi \left( \frac{n}{2} \alpha^2 u^2 F \right) \quad (2.47)$$

et une transformation de champ (cf. (2.35)) :

$$v(\xi', \eta') = \frac{1}{\alpha} \arccos \left[ \left( \frac{1}{F} \right)^{\frac{1}{n}} \right], \quad (2.48)$$

$$d\varphi = (1 + \alpha^2 \varphi^2) dv \quad (2.49)$$

telle que  $v$  soit un champ scalaire vérifiant l'équation du mouvement

$$v_{\xi'\eta'} = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha v \cos^{n-1} \alpha v. \quad (2.50)$$

Finalement, cette équation se réduit à sine-Gordon pour  $n = 1$  et  $n = 2$ , correspondant à (2.41) et (2.28) respectivement. Il y a donc une analogie frappante avec la situation de la précédente section, car on se trouve encore une fois dans le cas d'une famille d'équations qui donnent deux modèles intégrables pour deux "courbes" dans l'espace des paramètres (ici  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $n=1,2$ ).

## 2.2 Recherche d'une équation locale dans le cas général relativiste

Tout au long de la section précédente, nous avons rencontré des modèles de champs relativistes multivalués construits à partir d'équations locales en termes d'un champ  $u$  et reliés par une transformation d'espace-temps à des modèles de champs scalaire dont certains cas particuliers sont les modèles intégrables de sine-Gordon et Bullough-Dodd. Nous allons aborder ici le problème dans l'autre sens puisque nous considérerons le Lagrangien non local (2.9) comme objet fondamental. Nous chercherons à déterminer dans quels cas il est possible de trouver, pour un champ  $u$  fonction de  $v$  une équation d'évolution et des lois de conservation locales, considérées ici comme une sorte de théorie effective. L'idée derrière ce changement de point de vue est d'esquisser une méthode pour étudier ce genre de théories de champs scalaires avec des propriétés topologiquement non triviales.

### 2.2.1 Introduction de champs auxiliaires

Afin de mieux appréhender le modèle défini par (2.9) et avant de chercher une description locale, il est utile d'introduire les champs auxiliaires  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  par

$$\mathcal{L}_v \rightarrow \mathcal{L}_v - \left[ \sigma_1 - \partial_\eta \int^\xi (F - 1) \right] \left[ \sigma_{2\xi} - \frac{v_\xi^2}{2F} \right] \quad (2.51)$$

car ce procédé permet d'obtenir un Lagrangien d'aspect plus familier

$$\mathcal{L}_{aux} = -\frac{1}{2}v_\xi v_\eta - \sigma_1 \sigma_{2\xi} + \sigma_1 \frac{v_\xi^2}{2F} + \sigma_{2\eta} (F - 1) - FV(v), \quad (2.52)$$

et plus facile à manipuler, en "camouflant" le terme non local dans l'équation du mouvement pour  $\sigma_1$ . Comme attendu, on retrouve (2.9) lorsque l'on intègre sur les champs  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . De plus, la forme des termes contenant les champs auxiliaires laisse penser que ceux-ci ne se propagent pas et n'interviendront pas dans les états externes des amplitudes de diffusion.

Les équations du mouvement de  $v$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  qui dérivent de (2.52) sont

$$v_{\xi\eta} - \partial_\xi \left( \frac{\sigma_1 v_\xi}{F} \right) - \sigma_1 v_\xi^2 \left( \frac{1}{F} \right)' + \sigma_{2\eta} F' - (FV)' = 0, \quad (2.53)$$

$$\sigma_{1\xi} - \partial_\eta F = \sigma_{1\xi} - v_\eta F' = 0, \quad (2.54)$$

$$\sigma_{2\xi} - \frac{v_\xi^2}{2F} = 0. \quad (2.55)$$

L'équation (2.54) semble être la loi de conservation de  $F$  en fonction des nouveaux champs mais, en réalité, on ne peut en obtenir une forme locale sans une condition supplémentaire que nous verrons par la suite. En effet, lorsque l'on intègre sur  $\sigma_1$  cette équation devient

$$\partial_\eta F = \partial_\xi \partial_\eta \int^\xi (F - 1), \quad (2.56)$$

ce qui est assez trivial.

Il est bien entendu possible de calculer le tenseur énergie-impulsion canonique et les équations auxquelles obéissent ses composantes

$$\partial_\mu T^{\mu\xi} = 0 = \partial_\eta (FV) + \partial_\xi \left( \frac{v_\eta^2}{2} + \sigma_1 \sigma_{2\xi} - \frac{\sigma_1 v_\xi v_\eta}{2F} \right), \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu t} = 0 = \partial_\eta \left( -\frac{1}{2} v_\xi^2 + \sigma_{2\xi} (F - 1) \right) - \\ \partial_\xi \left( \sigma_{2\eta} (F - 1) - \frac{\sigma_1 v_\xi^2}{2F} - FV \right). \end{aligned} \quad (2.58)$$

On peut montrer l'utilité de ce formalisme en retrouvant l'analogie des loi de conservation (2.4) et (2.33) avec toutefois une réserve sur la localité identique à celle exprimée plus haut. Remarquons en premier lieu que  $\varphi_\xi^2/2F^5$  dans 2.1.1 et  $\varphi_\xi^2/2F^3$  dans 2.1.3 valent tous les deux

$$\frac{v_x^2}{2F} \quad (2.59)$$

Ensuite, grâce aux équations du mouvement, transformons la “conservation de l'énergie” (2.57) et la “conservation de l'impulsion” (2.58) de la sorte

$$\partial_\eta (FV) = \partial_\xi \left( \sigma_1 V - \frac{1}{2} \left( \int^\xi FV' \right)^2 \right), \quad (2.60)$$

$$\partial_\eta \left( \frac{v_\xi^2}{2F} \right) = \partial_\xi \left( \frac{\sigma_1 v_\xi^2}{2F^2} - V \right), \quad (2.61)$$

et (2.61) est bien une loi de conservation pour (2.59).

Enfin, à partir de (2.53) et (2.55), on peut calculer l'identité

$$v_\eta = \frac{\sigma_1}{F} v_\xi + \int^\xi FV' \quad (2.62)$$

de laquelle on déduit cette équation très importante pour la suite

$$\partial_\eta(FV') = \frac{\sigma_1}{F} \partial_\xi(FV') + \frac{dFV'}{dv} \int^\xi FV'. \quad (2.63)$$

### 2.2.2 Equation locale

La première étape pour exprimer le modèle décrit par le Lagrangien  $\mathcal{L}_v$  en termes d'une équation locale pour un champ  $u$  est de trouver  $\varphi$ , dérivée de  $u$  et champ invariant de Lorentz intervenant dans l'analogie de (1.42) qui fait le lien entre les deux. Pour nous guider sur cette voie, observons de plus près les cas particuliers que nous connaissons, à savoir (2.12) et (2.45), pour lesquels  $\varphi \equiv u_{\xi\xi}$  et  $\varphi \equiv u_\xi$  respectivement

$$\begin{aligned} \varphi_\eta &= u_\xi \left( 1 + (2A - 1)\varphi + \gamma\varphi^2 \right) - \varphi_\xi \left( u - \frac{\gamma}{2} u_\xi^2 \right), \\ \varphi_\eta &= u \left( 1 + \alpha^2 \varphi^2 \right) + \frac{n}{2} \alpha^2 u^2 \varphi_\xi. \end{aligned}$$

D'après (2.24) et (2.49), il est assez facile de remarquer que ces deux équations sont de la forme

$$\varphi_\eta = \frac{d\varphi}{dv} \int^\xi \varphi + \varphi_\xi h \left( \int^\xi \varphi, \iint^\xi \varphi \right) \quad (2.64)$$

où

$$\iint^\xi \varphi \equiv \int^\xi d\xi_1 \int^{\xi_1} d\xi_2 \varphi(\xi_2, \eta) \quad (2.65)$$

$h$  est la fonction intervenant dans la loi de conservation de  $F$

$$\partial_\eta F = \partial_\xi [hF], \quad (2.66)$$


---

et vaut, respectivement

$$h = \begin{cases} -(u - \frac{\gamma}{2}u_\xi^2), \\ \frac{n}{2}\alpha^2u^2. \end{cases} \quad (2.67)$$

Il nous faut désormais trouver une fonction de  $v$  qui satisfasse (2.64) afin d'obtenir la forme générale de la transformation de  $v$  à  $\varphi$ . Ceci est déjà fait en pratique car si l'on pose

$$\phi \equiv FV'. \quad (2.68)$$

l'équation précédente est exactement (2.63), à condition de montrer que  $\frac{\sigma_1}{F} = h$  dans ces cas précis, ce qui sera fait par la suite. Nous avons donc déterminé  $\varphi$  comme une fonction de  $v$  dans le cas général et il est aisé de vérifier que cette définition coïncide avec les résultats déjà rencontrés.

La dernière étape est de définir le champ  $u$ , très certainement comme une intégrale double ou simple de  $\varphi$ , et prouver que la loi de conservation pour  $F$  s'écrit de manière locale *en fonction de ce champ et de ses dérivées*. D'ailleurs, nous supposons que  $F$  ne dépend de  $v$  qu'à travers  $\varphi$  ce qui équivaut à ce que la transformation de  $v$  à  $\varphi$  soit inversible.

Réécrivons tout d'abord l'équation satisfaite par  $\varphi$  en utilisant les champs auxiliaires

$$\varphi_\eta = \frac{d\varphi}{dv}(v) \int^\xi \varphi(v) + \varphi_\xi(v) \frac{\sigma_1}{F}(\varphi, \int \varphi, \iint \varphi, \dots). \quad (2.69)$$

ainsi que l'équation de conservation de  $F$  (2.54) dans ce contexte

$$\partial_\eta F(\varphi) = \partial_\xi \left[ \frac{\sigma_1}{F}(\varphi, \int \varphi, \iint \varphi, \dots) F(\varphi) \right]. \quad (2.70)$$

puis, comme dans la section 2.1.2, insérons (2.69) dans (2.70) pour obtenir

$$\frac{F'}{F} = \frac{\partial_\xi \frac{\sigma_1}{F}}{\frac{d\varphi}{dv} \int^\xi \varphi}. \quad (2.71)$$

Nous imposons que  $F$  dépende uniquement de  $\varphi$ , ce qui implique la même contrainte sur le membre de droite. C'est le cas de  $\frac{d\varphi}{dv}$  et il reste la condition suivante sur  $\frac{\sigma_1}{F}$

$$\partial_\xi \frac{\sigma_1}{F} = h_2(\varphi) \int^\xi \varphi. \quad (2.72)$$

De plus, comme nous voulons également que l'équation d'évolution de  $\varphi$  (2.69) soit invariante par la transformation de Lorentz

$$\xi \longrightarrow \kappa\xi, \quad \eta \longrightarrow \frac{\eta}{\kappa}$$

$\frac{\sigma_1}{F}$  doit satisfaire

$$\frac{\sigma_1}{F} \longrightarrow \kappa^2 \frac{\sigma_1}{F}$$

dont on déduit que  $h_2$  doit être au plus linéaire en  $\varphi$

$$h_2 = a_1 + a_2\varphi. \quad (2.73)$$

$\frac{\sigma_1}{F}$  s'écrit finalement

$$\frac{\sigma_1}{F} = a_1 \iint^\xi \varphi + \frac{a_2}{2} \left( \int^\xi \varphi \right)^2. \quad (2.74)$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} u \equiv \iint^\xi \varphi & a_1 \neq 0 \\ u \equiv \int^\xi \varphi & a_1 = 0 \end{cases} \quad (2.75)$$

alors il est clair que nous avons atteint le but recherché. En effet nous avons réussi à exprimer le modèle de champ scalaire relativiste correspondant au Lagrangien  $\mathcal{L}_v$  (2.9), pour un potentiel  $V$  quelconque, en termes d'un nouveau champ  $u$  satisfaisant une équation d'évolution locale. Comme on peut le voir en la comparant à (2.67), l'expression (2.74) recouvre tous les cas particuliers rencontrés jusqu'à maintenant que nous déduirons plus en détail de ce formalisme dans la section suivante.

Avant cela, il me faut faire une remarque, à savoir que nous aurions pu arriver à certains de ces résultats en partant de l'équation suivante

$$\varphi_\eta = g(\varphi) \int^\xi \varphi + \varphi_\xi h \left( \int^\xi \varphi, \iint^\xi \varphi \right). \quad (2.76)$$

où  $g$  et  $h$  sont quelconques. En imposant ensuite que

---



$$\partial_\eta F = \partial_\xi [hF], \quad (2.77)$$

ainsi que l'invariance de Lorentz,  $h$  s'exprime en fonction de  $\varphi$  comme  $\frac{\sigma_1}{F}$  dans (2.74). Le changement de variables  $(\xi, \eta) \longrightarrow (\xi', \eta')$  et (2.76) nous mène comme dans 2.1.2 à définir le champ  $v$  selon

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{1}{g}, \quad (2.78)$$

avec une équation du mouvement

$$v_{\xi'\eta'} = \frac{\varphi}{F}. \quad (2.79)$$

Dans ce cas, la deuxième loi de conservation, outre celle de  $F$ , utilisée pour construire un Lagrangien relativiste pour  $\varphi$  est donnée par

$$\partial_\eta \left( \frac{\varphi_\xi^2}{Fg^2} \right) = \partial_\xi \left[ h \frac{\varphi_\xi^2}{Fg^2} + 2 \int_0^\varphi \frac{\varphi}{Fg} \right], \quad (2.80)$$

et ce Lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L}_\varphi = -\frac{1}{2} \frac{\varphi_\xi \varphi_\eta}{g^2} + \frac{\varphi_\xi^2}{2Fg^2} \partial_\eta \int^\xi (F-1) d\xi_1 + H(\varphi). \quad (2.81)$$

avec  $H = -F \int_0^\varphi \frac{\varphi}{Fg}$ . Il suffit ensuite de remarquer que, d'après (2.78),

$$\int_0^\varphi \frac{\varphi}{Fg} = V(v)$$

et d'exprimer (2.81) en fonction de  $v$  pour retrouver le désormais familier Lagrangien (2.9).

### 2.2.3 Retour sur les modèles connus

Intégrons maintenant les cas présentés en section 2.1 au contexte général défini en 2.2.2. Comme nous l'avons déjà vu, les lois de conservation pour  $F$  (1.40) et (2.47) sont en accord avec (2.70)-(2.74), mais il semble de plus que  $F$  et  $V$  soient liés plus intimement

et  $V$  est toujours une somme d'exponentielles.

Prenons les exemples des équations (1.35) et (2.45) pour lesquelles nous rassemblons ici les quantités qui nous intéressent

– (1.35)

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{\gamma-1} [1 - \cos(v\sqrt{\gamma-1})] \\ F &= \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{\gamma-1} \cos v\sqrt{\gamma-1} + \sin v\sqrt{\gamma-1}} \end{aligned} \right\} \implies F = \frac{1}{1 - (\gamma-1)V + V'}$$

– (2.45)

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{n\alpha^2} [1 - \cos^n(\alpha v)] \\ F &= \frac{1}{\cos^n \alpha v} \end{aligned} \right\} \implies F = \frac{1}{1 - n\alpha^2 V}$$

On peut directement voir que  $F$  s'écrit dans ces cas là

$$F = \frac{1}{1 + aV + bV'}, \quad (2.82)$$

avec  $(a, b) = (-(\gamma-1), 1)$  et  $(-n\alpha^2, 0)$  respectivement. Explorons les conséquences d'une telle relation entre  $V$  et  $F$ .

Cette relation permet de calculer une autre expression pour la loi de conservation de  $F$ . En effet, le calcul de  $\partial_\eta \frac{1}{F}$  et l'équation du mouvement (2.13) pour  $v$  dans les coordonnées  $(\xi', \eta')$  mènent à

$$\partial_\eta F = -\partial_\xi \left[ \left( \frac{a}{2} v_{\eta'}^2 + b v_{\eta'\eta'} \right) F \right]. \quad (2.83)$$

Ce qui dérange au premier coup d'oeil dans cette nouvelle version de la conservation de  $F$  est la présence de  $v_{\eta'}^2$  et de  $v_{\eta'\eta'}$ , créant un mélange des deux systèmes de coordonnées. Afin de s'affranchir de tout problème, nous allons donc relier ces quantités à d'autres exprimées dans les coordonnées  $(\xi, \eta)$ . Utilisons à nouveau (2.13) pour obtenir

$$v_{\eta'} = \int^{\xi'} d\xi_1' V' = \int^\xi d\xi_1 F V' = \int^\xi d\xi_1 \varphi(v) \quad (2.84)$$

$$v_{\eta'\eta'} = \int^{\xi'} d\xi_1' V'' v_{\eta'} = \int^\xi d\xi_1 F V'' \int^{\xi_1} d\xi_2 \varphi(v). \quad (2.85)$$

Les résultats de la section 2.2.2 nous ont montré que l'équation de conservation de  $F$  devait être de la forme (2.70)-(2.74) donc  $v_{\eta'\eta'}$  doit être fonction de  $(\int^\xi \varphi)^2$  et  $\int \int^\xi \varphi$  seulement sauf bien sûr si  $b = 0$ . La seule façon de réaliser cette condition est d'avoir

$$F V'' \equiv a_3 + a_4 \varphi, \quad (2.86)$$


---

et finalement (2.83) devient

$$\partial_\eta F = -\partial_\xi \left[ \left( \frac{a + ba_4}{2} \left( \int^\xi \varphi \right)^2 + ba_3 \iint^\xi \varphi \right) F \right]. \quad (2.87)$$

On peut vérifier que tout ça est compatible avec les résultats généraux. La combinaison de (2.71) et (2.73) nous donne :

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dv} = a_1 + a_2 \varphi, \quad (2.88)$$

qu'on réécrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{F} \frac{dF}{dv} &= -\frac{a_1}{a_3} (a_3 + a_4 F V') + \left( a_2 - \frac{a_1 a_4}{a_3} \right) F V' \\ &= -F \left( \frac{a_1}{a_3} V'' - \left( a_2 - \frac{a_1 a_4}{a_3} \right) V' \right). \end{aligned} \quad (2.89)$$

On retrouve bien (2.82) lorsque l'on intègre sur  $v$ , que l'on prend la condition  $F \rightarrow 1$  à la limite  $v \rightarrow 0$  et que l'on identifie les constantes comme suit :

$$\begin{cases} a_1 &= -ba_3 \\ a_2 &= -(a + ba_4) \end{cases}. \quad (2.90)$$

Nous voyons donc que la condition supplémentaire par rapport au cas général est (2.86) (ou  $a_1 = 0$ ) et qu'elle engendre la forme particulière (2.82) de  $F$  et de sa conservation.

Il est intéressant de se demander quelle contrainte elle entraîne sur  $V$ , autrement dit quels potentiels on peut atteindre avec cette restriction. Pour obtenir une équation pour  $V$  il suffit de remplacer  $F$  par son expression (2.82) dans (2.86) :

$$V'' = a_3 (1 + aV + bV') + a_4 V'. \quad (2.91)$$

Avec les conditions aux limites  $V(0) = 0$  et  $V'(0) = 0$ , la solution de cette équation est donnée par le système

$$V = -\frac{1}{a} + d_1 e^{r+v} + d_2 e^{r-v} \quad (2.92)$$

$$d_1 + d_2 - \frac{1}{a} = 0 \quad (2.93)$$

$$r_+ d_1 + r_- d_2 = 0 \quad (2.94)$$

où  $r_{\pm}$  sont les racines de

$$r^2 + (bc_1 - c_2)r - ac_1$$

et sont complètement déterminées quand on connaît  $a$ ,  $b$ ,  $a_3$  et  $a_4$ .

Tous les potentiels correspondant aux équations que nous avons présentés en 2.1 sont du type de (2.92). Cela achève donc de dresser un cadre théorique autour de ces modèles qui semblaient partager de manière fortuite des propriétés remarquables.

## 2.3 Equation locale non relativiste et modèle de sine-Gordon

Nous venons de tirer au clair les structures sous-jacentes responsables des grandes similarités entre plusieurs familles d'équations et de déterminer les conditions plus générales de l'existence d'un lien entre modèles de champs relativistes multivalués et équations locales possédant elles aussi une symétrie de Lorentz. Un dernier développement mathématique mérite d'être mentionné dans ce chapitre avant de se tourner vers une étude quantique du Lagrangien  $\mathcal{L}_v$ . Du fait de leur relation à un même système intégrable, à savoir celui de sine-Gordon, il paraît pertinent de se demander s'il existe une équation de laquelle (1.35) et (2.28) seraient des limites particulières. On peut en effet construire une telle équation en les mélangeant comme nous allons le voir immédiatement.

### 2.3.1 Equation de mélange

Après quelques essais aux premiers ordres dans les dérivées et les non-linéarités, le Lagrangien suivant, composé à partir de (1.36) et (2.37),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} u_{\xi} u_{\eta} + \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 u^2 u_{\xi}^2 + u f - \frac{\gamma}{24} u_{\xi}^4, \quad (2.95)$$

où  $f = f(u_{\xi}^2)$ , semble l'outil approprié pour commencer cette quête. On en tire immédiatement une équation du mouvement qui s'écrit, si l'on pose  $f' = df/du_{\xi}^2$

$$u_{\xi\eta} = u + f - 2u_{\xi}^2 f' - 2uu_{\xi\xi} f' - 4uu_{\xi}^2 u_{\xi\xi} f'' + \alpha^2 (u^2 u_{\xi\xi} + uu_{\xi}^2) + \frac{\gamma}{2} u_{\xi\xi} u_{\xi}^2. \quad (2.96)$$

Mélangant à nouveau les expressions obtenues dans les cas de (1.35) et (2.28), nous sommes amenés à supposer pour  $F$  et sa loi de conservation les formes suivantes

$$F = \sqrt{f_1 + 2u_{\xi\xi} f_2 + u_{\xi\xi}^2 f_3}, \quad (2.97)$$

$$\partial_{\eta} F = -\partial_{\xi} \left( -\alpha^2 u^2 F + \left( u f_4 - \frac{\gamma}{2} u_{\xi}^2 \right) F \right), \quad (2.98)$$

où les  $f_i$  sont encore fonction de  $u_{\xi}^2$  uniquement. Identifier les coefficients des différents termes en  $u^n u_{\xi}^m u_{\xi\xi}^p$ , ( $m \neq 2$ ) dans (2.98) permet de déterminer  $f_1$

$$f_1 = (1 + \alpha^2 u_{\xi}^2)^2, \quad (2.99)$$

et d'obtenir un système d'équations pour les  $f$  et les  $f_i$  restantes

$$2f' + 4u_{\xi}^2 f'' - f_4 = 0, \quad (2.100)$$

$$f_2' + (1 + \alpha^2 u_{\xi}^2) f_4' = 0, \quad (2.101)$$

$$f_3' (1 + \alpha^2 u_{\xi}^2) - 12f_2 f'' - 8u_{\xi}^2 f_2 f''' + 2\alpha^2 f_3 + 4f_2 f_4' = 0, \quad (2.102)$$

$$f_3' f - 2u_{\xi}^2 f' f_3' - \gamma f_2 - f_3 f_4 = 0, \quad (2.103)$$

$$2f f_2' - 4u_{\xi}^2 f' f_2' + (1 + \alpha^2 u_{\xi}^2) f_3 - \gamma f_1 = 0. \quad (2.104)$$

En examinant attentivement ces équations, on peut remarquer que  $f$  n'apparaît qu'au travers de (2.100). Nous allons donc utiliser cette dernière pour éliminer  $f$  dans un premier temps puis la calculer en fonction de  $f_4$ . Commençons par transformer (2.102) en

$$f_3' (1 + \alpha^2 u_{\xi}^2) + 2\alpha^2 f_3 - 2f_5' f_2 = 0 \quad (2.105)$$

puis en la multipliant par  $(1 + \alpha^2 u_{\xi}^2)$  et en se servant de (2.101), on obtient

$$f_3' (1 + \alpha^2 u_{\xi}^2)^2 + 2\alpha^2 (1 + \alpha^2 u_{\xi}^2) f_3 - 2f_2' f_2 = 0 \quad (2.106)$$

qui s'intègre en

$$f_3 (1 + \alpha^2 u_\xi^2)^2 - f_2^2 = 0. \quad (2.107)$$

L'étape suivante est de réécrire le système de la sorte

$$2f' + 4u_\xi^2 f'' - f_4 = 0, \quad (2.100)$$

$$f_2' + (1 + \alpha^2 u_\xi^2) f_4' = 0, \quad (2.101)$$

$$f_3 (1 + \alpha^2 u_\xi^2)^2 - f_2^2 = 0, \quad (2.102)'$$

$$-\frac{1}{2} f_3' \int f_4 - \gamma f_2 - f_3 f_4 = 0, \quad (2.103)'$$

$$-f_2' \int f_5 + (1 + \alpha^2 u_\xi^2) f_3 - \gamma f_1 = 0. \quad (2.103)'$$

De fastidieux calculs nous mènent finalement aux solutions pour les  $f_i$

$$f_1 = (1 + \alpha^2 u_\xi^2)^2, \quad (2.108)$$

$$f_2 = -\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 \gamma u_\xi^2}} \left[ 1 + \frac{3}{2} \alpha^2 \gamma u_\xi^2 + \frac{1}{2} \alpha^4 \gamma u_\xi^4 \right], \quad (2.109)$$

$$f_3 = \gamma + \frac{1}{4} \frac{\alpha^4 \gamma^2 u_\xi^4}{1 + \alpha^2 \gamma u_\xi^2}, \quad (2.110)$$

$$f_4 = \frac{1 + \frac{3}{2} \alpha^2 \gamma u_\xi^2}{\sqrt{1 + \alpha^2 \gamma u_\xi^2}}, \quad (2.111)$$

puis pour  $f$

$$f = -\frac{1}{4} \alpha^2 \gamma u_\xi^2 \sqrt{1 + \alpha^2 \gamma u_\xi^2} + \sqrt{-\alpha^2 \gamma u_\xi^2} \arctan \left( \sqrt{\frac{-\alpha^2 \gamma u_\xi^2}{1 + \alpha^2 \gamma u_\xi^2}} \right). \quad (2.112)$$

Après avoir résolu les contraintes sur les fonctions ( $f, f_i$ ), il est possible de reformuler l'équation du mouvement pour  $u$  de manière nettement plus simple, notamment grâce à (2.100) :

$$u_{\xi\eta} = u - \frac{1}{2} u_\xi^2 \sqrt{1 + \alpha^2 \gamma u_\xi^2} - u u_{\xi\xi} \left( \frac{1 + \frac{3}{2} \alpha^2 \gamma u_\xi^2}{\sqrt{1 + \alpha^2 \gamma u_\xi^2}} \right) + \alpha^2 (u^2 u_{\xi\xi} + u u_\xi^2) + \frac{\gamma}{2} u_{\xi\xi} u_\xi^2. \quad (2.113)$$

Nous sommes bien arrivé à ce que nous recherchions : cette équation se réduit au premier modèle (1.35) lorsque  $\alpha = 0$  et tend vers le second (2.28) à la limite  $\gamma = 0$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\alpha v$  fini. Remarquons en dernier lieu que l'équation de mélange (2.113) n'est plus invariante relativiste comme on pouvait s'y attendre pour avoir mélangé deux équations avec des transformations de Lorentz différentes.

### 2.3.2 Transformations de Bäcklund

Maintenant que nous avons une équation qui englobe à la fois (1.35) et (2.28), nous allons bien entendu chercher quel lien elle pourrait avoir avec le modèle de sine-Gordon. L'idée est, comme d'habitude, d'effectuer un changement de coordonnées du type (1.41) avec  $F$  défini par (2.97) et une transformation de champ pour laquelle nous choisissons (2.35). (2.113) devient alors

$$v_{\xi'\eta'} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 + (\gamma - 1) v_{\xi'}^2} \sin \alpha v, \quad (2.114)$$

qui n'est autre que sine-Gordon dans la limite  $\gamma = 0$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\alpha v$  fini, correspondant à la seconde limite évoquée à la fin du paragraphe précédent. Il est amusant de remarquer que (2.114) se réduit aussi à sine-Gordon si l'on prend  $\gamma = 1$ , ce à quoi on ne s'attendait pas en observant (2.113) qui se révèle être dans cette limite un énième système lié avec ce modèle omniprésent. Le Lagrangien pour cette équation s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v = & \frac{1}{2} v_{\xi'} v_{\eta'} + \frac{1}{\alpha^2} (\cos \alpha v - 1) \sqrt{1 + (\gamma - 1) v_{\xi'}^2} \\ & - \frac{1}{2(\gamma - 1)} \sqrt{1 + (\gamma - 1) v_{\xi'}^2} \partial_{\eta'} \int^{\xi'} \sqrt{1 + (\gamma - 1) v_{\xi'}^2}. \end{aligned} \quad (2.115)$$

et le modèle est intégrable grâce à la paire de Lax suivante

$$L = \partial_{\xi'} - i\sqrt{\lambda} \tau_1 - \frac{1}{2} \left( \sqrt{\gamma - 1} \frac{v_{\xi'\xi'}}{\sqrt{1 + (\gamma - 1) v_{\xi'}^2}} + i\alpha v_{\xi'} \right) \tau_3 \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned} M = & -\frac{i}{4\sqrt{\lambda}} \left[ i\sqrt{\gamma - 1} v_{\xi'} \sin \alpha v + \sqrt{1 + (\gamma - 1) v_{\xi'}^2} \cos \alpha v \right] \tau_1 \\ & + \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \left[ \sqrt{\gamma - 1} v_{\xi'} \cos \alpha v + i\sqrt{1 + (\gamma - 1) v_{\xi'}^2} \sin \alpha v \right] \tau_2 \end{aligned} \quad (2.117)$$

où les  $\tau_i$  sont les matrices de Pauli usuelles comme au chapitre précédent. En observant attentivement ces matrices de Lax, on se rend compte qu'il est possible d'aller encore plus loin dans l'exploration de la relation de ce modèle à celui de sine-Gordon, par l'introduction d'un champ  $w$  selon

$$\left[ \sqrt{\gamma-1}v_{\xi'} + \sqrt{1+(\gamma-1)v_{\xi'}^2} \right] e^{i\alpha v} = e^{i\alpha w}, \quad (2.118)$$

$$\left[ -\sqrt{\gamma-1}v_{\xi'} + \sqrt{1+(\gamma-1)v_{\xi'}^2} \right] e^{-i\alpha v} = e^{-i\alpha w}. \quad (2.119)$$

On dérive ensuite ces équations par rapport à  $\xi'$ , ce qui donne

$$i\alpha v_{\xi'} + \sqrt{\gamma-1} \frac{v_{\xi'\xi'}}{\sqrt{1+(\gamma-1)v_{\xi'}^2}} = i\alpha w_{\xi'}, \quad (2.120)$$

$$-i\alpha v_{\xi'} + \sqrt{\gamma-1} \frac{v_{\xi'\xi'}}{\sqrt{1+(\gamma-1)v_{\xi'}^2}} = i\alpha w_{\xi'}, \quad (2.121)$$

et l'on exprime (2.116) et (2.117) en fonction de  $w$ . Comme par miracle, on retrouve la paire de Lax de sine-Gordon, qui encore une fois est cachée derrière une équation non linéaire loin d'être triviale!

Pour comprendre ce que représente le champ  $v$  par rapport au champ  $w$ , divisons (2.118) et (2.119) par  $e^{i\alpha v}$  et  $e^{-i\alpha v}$  respectivement et prenons la différence, ce qui nous laisse avec

$$\sqrt{1-\gamma}v_{\xi'} = \sin \alpha (w - v). \quad (2.122)$$

Cette identité rappelle une transformation de Bäcklund pour sine-Gordon. En effet, celle-ci s'écrit pour deux solutions  $w_1$  et  $w_2$  et un paramètre  $k$

$$\partial_{\xi'} \left( \frac{w_1 + w_2}{2} \right) = k \sin \left( \frac{w_1 - w_2}{2} \right) = k \sin \left( w_1 - \frac{w_1 + w_2}{2} \right), \quad (2.123)$$

$$\partial_{\eta'} \left( \frac{w_1 - w_2}{2} \right) = \frac{1}{k} \sin \left( \frac{w_1 + w_2}{2} \right), \quad (2.124)$$

et (2.123) est tout simplement (2.122) si l'on identifie champs et paramètres comme suit

$$\alpha w = w_1,$$



$$\alpha v = \frac{w_1 + w_2}{2},$$

et

$$k = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\gamma}}.$$

Afin de vérifier que tout est bien cohérent, dérivons l'équation (2.123) par rapport à  $\xi'$

$$\begin{aligned} \partial_{\xi'\eta'}^2 \left( \frac{w_1 + w_2}{2} \right) &= k \partial_{\eta'} \sin \left( \frac{w_1 - w_2}{2} \right) = \cos \left( \frac{w_1 - w_2}{2} \right) \sin \left( \frac{w_1 + w_2}{2} \right) \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \left( \partial_{\xi'} \left( \frac{w_1 + w_2}{2} \right) \right)^2} \sin \left( \frac{w_1 + w_2}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.125)$$

qui correspond comme attendu à (2.114).

Un dernier point doit être examiné ici, à savoir le sort de la deuxième combinaison de solutions de sine-Gordon utilisée dans la transformation de Bäcklund. Avec l'aide des équations (2.35), (2.97) et (2.96) notamment, on peut montrer que

$$\frac{w_1 - w_2}{2} = \arctan \frac{u_{\xi\xi} \sqrt{\gamma - 1}}{(1 + \alpha^2 u_{\xi}^2)^2 - u_{\xi\xi} f_2} \quad (2.126)$$

qui est la transformation de  $u$  et ses dérivées à  $v_2$ , défini par

$$v_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma - 1}} \frac{w_1 - w_2}{2},$$

et qui se réduit à (2.5) pour  $\alpha = 0$ . Ce résultat est assez rassurant car on s'attendait à voir intervenir cette transformation tôt ou tard par souci de symétrie.  $v_2$  satisfait l'équation du mouvement suivante

$$v_{2\xi'\eta'} = \frac{1}{\sqrt{\gamma - 1}} \sqrt{1 + \alpha^2 v_{2\eta'}^2} \sin v_2 \sqrt{\gamma - 1} \quad (2.127)$$

qui est à nouveau sine-Gordon pour  $\alpha = 0$ , comme le suggérait la fin de la dernière section. Disons pour finir qu'il est, là aussi, possible de construire un Lagrangien et une paire de Lax semblable à celle de  $v$  mis à part l'échange des rôles de  $\alpha$  et  $\sqrt{\gamma - 1}$  d'une part, et de  $\partial_{\xi'}$  et  $\partial_{\eta'}$  d'autre part.

Le résultat important auquel nous sommes arrivés ici est donc que nous avons découvert une équation, (2.113) dont les solutions sont des combinaisons de deux solutions

de sine-Gordon reliées par une transformation de Bäcklund, auxquelles on applique des transformations de coordonnées et de champ.

Pour conclure cette discussion, ajoutons simplement que l'on peut réaliser le même genre de construction en remplaçant (2.28) par la SPE (2.41), avec  $\alpha$  quelconque, de la manière suivante

$$u_{\xi\eta} = u + f - uu_{\xi\xi}h + \frac{\gamma}{2}u_{\xi\xi}u_{\xi}^2 + \alpha^2 (u^2u_{\xi\xi} + 2uu_{\xi}^2), \quad (2.128)$$

où  $f$  et  $h$  sont toujours des fonctions de  $u_x^2$ . On garde la même forme pour  $F$  ainsi que pour sa loi de conservation. Ces contraintes débouchent sur des équations et solutions encore plus compliquées que dans le cas précédent et cela n'apporterait rien de les présenter explicitement ici. De façon analogue, on trouve des relations avec des champs  $v$  et  $v_2$  satisfaisant les mêmes équations, avec  $\alpha$  remplacé par  $\alpha\sqrt{2}$ , et les mêmes résultats à propos de combinaisons de solutions de sine-Gordon reliées par transformation de Bäcklund.



## Chapitre 3

# Premières étapes de quantification

Au chapitre précédent, nous avons exploré de nombreux développements liés à une transformation d'espace-temps du type (1.41), tels que la création de modèles de champs relativistes à partir de diverses équations, provenant de l'hydrodynamique ou purement mathématiques ; tournons-nous maintenant vers une étude des effets potentiels d'une telle transformation au niveau quantique, dans le contexte de la théorie des champs. Etant donné son caractère particulier et la présence d'un terme non local dans les Lagrangiens qui nous intéressent, il est indispensable de procéder pas-à-pas et, comme nous le verrons dans quelques lignes, des problèmes surviennent dès l'ordre le plus bas, à savoir les diagrammes de Feynman en arbres.

### 3.1 Résolution d'une indétermination à l'ordre des arbres par une méthode hamiltonienne

Lorsque l'on veut étudier la théorie des perturbations d'un modèle de champ scalaire, il est assez naturel de commencer par l'ordre le plus bas, à savoir les diagrammes en arbres. Prenons l'exemple de (2.37) :

$$\mathcal{L}_v = -\frac{1}{2}v_\xi v_\eta + \frac{v_\xi^2}{2F} \partial_\eta \int^\xi (F-1) d\xi_1 - \frac{1}{2\alpha^2} \tan^2 \alpha v.$$

Développons  $F$  et  $FV$  pour obtenir les premiers termes d'interaction :

$$F = \frac{1}{\cos^2 \alpha v} \sim 1 + \alpha^2 v^2 \tag{3.1}$$

$$FV = \frac{1}{2\alpha^2} \tan^2 \alpha v \sim \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}\alpha^2 v^4, \tag{3.2}$$

qui sont d'ordre  $v^4$ . Le terme  $FV$  va donner au niveau des arbres une fonction à quatre points usuelle constante et nous allons nous focaliser sur le vertex

$$\frac{v_\xi^2}{2F} \partial_\eta \int^\xi (F-1) d\xi' \sim v_\xi^2 \partial_\eta \int^\xi d\xi_1 v^2 \quad (3.3)$$

Suivant une des méthodes habituelles de théorie des champs, calculons les diagrammes dans l'espace des impulsions, ce qui demande la petite introduction suivante. Nous choisissons pour la métrique dans les coordonnées d'espace-temps ( $x_0 \equiv t, x_1 \equiv x$ )

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (3.4)$$

ce qui implique pour l'énergie-impulsion ou moment  $k \equiv k_\mu = (k_0, k_1)$

$$k^2 = k_1^2 - k_0^2 \quad (= -m^2 < 0 \iff k \text{ sur la couche de masse}), \quad (3.5)$$

où  $m$  est la masse de la particule élémentaire associée à  $v$ , ici égale à 1. La plupart de nos résultats étant exprimés en coordonnées du cône de lumière ( $x_+ \equiv \xi, x_- \equiv \eta$ ), il faut introduire les composantes de  $k$  dans ce système

$$\begin{cases} k_+ = k_0 + k_1 \\ k_- = k_1 - k_0 \end{cases}, \quad (3.6)$$

et l'on obtient une nouvelle forme pour (3.5)

$$k^2 = k_+ k_- \quad (3.7)$$

Partant de ces définitions, on peut ensuite énoncer les règles de Feynman suivantes

- Propagateur

$$\text{---} \quad \frac{-i}{k^2 + m^2} \quad (3.8)$$

- Interactions

Pour traduire le vertex (3.3) dans le langage de l'espace des impulsions, on s'inspire de ce qu'on sait sur les couplages dérivatifs pour définir

$$\text{---} \rightarrow \triangleleft \text{---} \quad -ik_+ \quad \longleftarrow \quad v_\xi \quad (3.9)$$

$$\text{---} \leftarrow \triangleleft \text{---} \quad \frac{\sum_{i=1}^{n_1} k_{i-}}{\sum_{i=1}^{n_1} k_{i+}} \quad \longleftarrow \quad \partial_\eta \int^\xi v^{n_1} d\xi_1. \quad (3.10)$$

Le vertex s'écrit donc :

$$k_{1+}k_{2+} \frac{(k_3 + k_4)_-}{(k_3 + k_4)_+} \quad (3.11)$$

Ici tous les moments externes sont considérés entrant dans le vertex et, comme d'habitude, leur somme est nulle. La fonction à quatre points que l'on peut construire à partir de cette expression se calcule en prenant quatre moments externes  $p_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  et en sommant sur toutes les répartitions possibles de ces moments sur les pattes du vertex. Le résultat est proportionnel à

$$G = p_{1+}p_{2+} \frac{(p_3 + p_4)_-}{(p_3 + p_4)_+} + p_{1+}p_{3+} \frac{(p_2 + p_4)_-}{(p_2 + p_4)_+} + p_{1+}p_{4+} \frac{(p_2 + p_3)_-}{(p_2 + p_3)_+} \\ + p_{2+}p_{3+} \frac{(p_1 + p_4)_-}{(p_1 + p_4)_+} + p_{2+}p_{4+} \frac{(p_1 + p_3)_-}{(p_1 + p_3)_+} + p_{3+}p_{4+} \frac{(p_1 + p_2)_-}{(p_1 + p_2)_+}. \quad (3.12)$$

Tout semble aller pour le mieux jusqu'ici mais la situation se gâte quelque peu lorsque l'on impose aux moments externes d'être sur la couche de masse :

$$p_{i+}p_{i-} = -m^2 = -1. \quad (3.13)$$

ce qui correspond à l'hyperbole habituelle dans le plan  $(p_0, p_1)$ . Cette contrainte implique

$$p_{i+}p_{j+} \frac{(p_i + p_j)_-}{(p_i + p_j)_+} = -1 \quad (3.14)$$

En utilisant  $\sum p_i = 0$ , on pourrait mettre tous les termes de (3.12) sous la forme du membre de gauche de l'identité précédente et montrer que la fonction à quatre points est constante. Le problème vient du fait que quatre moments vérifiant (3.13) doivent être opposés deux à deux pour que leur somme soit nulle, entraînant une situation indéfinie où zéro divise zéro dans certains des termes de  $G$ .

Pour lever cette indétermination, l'idée est de calculer les amplitudes de probabilité

correspondant à la fonction à quatre points en arbres avec la théorie des perturbations de mécanique quantique. Pour ce faire :

- dans un premier temps, on calcule le Hamiltonien correspondant au Lagrangien  $\int d^2x \mathcal{L}_{aux}$ , puis on exprime les champs  $v$  et  $\sigma_i$  en termes d'opérateurs d'oscillateurs harmoniques puis le Hamiltonien libre et les termes d'interaction qui nous intéressent en fonction de ces mêmes oscillateurs.

- La seconde étape consiste à déterminer et à calculer, en appliquant les formules de la théorie des perturbations de mécanique quantique, les amplitudes de probabilité avec un état initial et un état final tous deux à deux particules et tous les états intermédiaires possibles.

### 3.1.1 Hamiltonien en présence des champs auxiliaires

Le point de départ est la densité lagrangienne pour le champ  $v$  et les champs auxiliaires  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  :

$$\mathcal{L}_{aux} = -\frac{1}{2}v_\xi v_\eta - \sigma_1 \partial_\xi \sigma_2 + \sigma_1 \frac{v_\xi^2}{2F} + (F-1) \partial_\eta \sigma_2 - FV(v). \quad (3.15)$$

Avant de déterminer le Hamiltonien, il faut écrire  $\mathcal{L}_{aux}$  dans les coordonnées d'espace-temps  $(x, t)$  :

$$\mathcal{L}_{aux} = \frac{1}{2} (v_t^2 - v_x^2) - \frac{1}{2} \sigma_1 (\partial_x \sigma_2 + \partial_t \sigma_2) + \sigma_1 \frac{(v_x + v_t)^2}{2F} + (F-1) (\partial_x \sigma_2 - \partial_t \sigma_2) - FV(v), \quad (3.16)$$

et calculer les moments associés aux champs :

$$\pi_v \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{aux}}{\partial v_t} = v_t + \frac{\sigma_1}{F} (v_x + v_t), \quad (3.17)$$

$$\pi_1 \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{aux}}{\partial (\partial_t \sigma_1)} = 0, \quad (3.18)$$

$$\pi_2 \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{aux}}{\partial (\partial_t \sigma_2)} = -\frac{1}{2} \sigma_1 - \frac{1}{2} (F-1). \quad (3.19)$$

Le fait que  $\pi_1$  soit nul signifie que l'on peut éliminer  $\sigma_1$  du Hamiltonien et, d'après (3.19), on peut l'exprimer en fonction des autres champs selon :

$$\sigma_1 = -(2\pi_2 + F - 1). \quad (3.20)$$

La densité de Hamiltonien s'écrit alors :

$$\mathcal{H} = \pi_v v_t + \pi_2 \partial_t \sigma_2 - \mathcal{L} \quad (3.21)$$

soit, après quelques simplifications,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} v_t^2 \left(1 + \frac{\sigma_1}{F}\right) + \frac{1}{2} v_x^2 \left(1 - \frac{\sigma_1}{F}\right) + \frac{1}{2} \sigma_1 \partial_x \sigma_2 - \frac{1}{2} (F - 1) \partial_x \sigma_2 + FV. \quad (3.22)$$

Pour supprimer toute dépendance explicite de  $\mathcal{H}$  par rapport au temps, on cherche à réécrire  $v_t$  en fonction des champs et des moments. (3.17) nous donne

$$v_t \left(1 + \frac{\sigma_1}{F}\right) = \pi_v - \frac{\sigma_1 v_x}{F} \quad (3.23)$$

puis, grâce à (3.20), on obtient

$$v_t = \frac{F\pi_v + v_x(2\pi_2 + F - 1)}{1 - 2\pi_2}. \quad (3.24)$$

En insérant (3.20) et (3.24) dans (3.22), on trouve l'expression suivante pour le Hamiltonien :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \frac{F\pi_v^2 + 4\pi_v\pi_2 v_x + 2\pi_v v_x (F - 1) + v_x^2 F}{1 - 2\pi_2} - \pi_2 \partial_x \sigma_2 - (F - 1) \partial_x \sigma_2 + FV. \quad (3.25)$$

En vue des calculs à venir, il faut décomposer le Hamiltonien

$$H = \int dx \mathcal{H} = H^{(0)} + H^{(Int)}, \quad (\text{à } t = 0) \quad (3.26)$$



où  $H^{(0)}$  est le Hamiltonien libre ou cinétique et  $H^{(Int)}$  le Hamiltonien d'interaction à l'ordre souhaité. En effet, nous allons appliquer les formules suivantes de mécanique quantique

$$A^{(1)} = \langle f | H^{(Int)} | i \rangle \quad (3.27)$$

$$A^{(2)} = \sum_{int} \frac{\langle f | H^{(Int)} | int \rangle \langle int | H^{(Int)} | i \rangle}{E_i^{(0)} - E_{int}^{(0)}} \quad (3.28)$$

où l'on a défini un ensemble d'états propres de  $H^{(0)}$ , dont l'état initial  $|i\rangle$  et l'état final  $|f\rangle$  sont deux représentants, et où  $E_i^{(0)}$  et  $E_{int}^{(0)}$  sont les valeurs propres de  $H^{(0)}$  correspondant à  $|i\rangle$  et à l'état intermédiaire du terme considéré.

En développant (3.25) pour des champs de faible amplitude et en remplaçant  $F$  et  $FV$  par (3.1) et (3.2), on arrive, à l'ordre quartique, à

$$H^{(0)} = \int dx \left[ \frac{1}{2} \pi_v^2 + \frac{1}{2} v_x^2 + \frac{1}{2} v^2 - \pi_2 \partial_x \sigma_2 \right], \quad (3.29)$$

$$H^{(Int)} = \int dx \left[ \frac{1}{2} \alpha^2 v^2 (\pi_v + v_x)^2 + \frac{1}{3} \alpha^2 v^4 + \pi_2 (\pi_v + v_x)^2 - \alpha^2 v^2 \partial_x \sigma_2 \right]. \quad (3.30)$$

### 3.1.2 Développement en opérateurs de création et d'annihilation

Comme attendu, le Hamiltonien libre pour  $v$ , qu'on note  $H_v^{(0)}$ , est la limite continue d'un ensemble infini d'oscillateurs harmoniques de fréquences  $\omega_n^2 = 1 + k_n^2$ . Prenons la transformée de Fourier de  $v$  en fonction d'opérateurs de création et d'annihilation

$$v(x) = \int d\tilde{k} \left[ v_k e^{ikx} + v_k^\dagger e^{-ikx} \right], \quad (3.31)$$

où  $d\tilde{k}$  est la mesure invariante relativiste. Si l'on restreint  $x$  à un intervalle  $[0, L]$ , ceci devient

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} \left[ v_n e^{ik_n x} + v_n^\dagger e^{-ik_n x} \right]. \quad (3.32)$$

avec  $k_n = \frac{2n\pi}{L}$ . Le moment associé  $\pi_v$  s'écrit

$$\pi_v(x) = \frac{-i}{\sqrt{L}} \sum_n \sqrt{\frac{\omega_n}{2}} [v_n e^{ik_n x} - v_n^\dagger e^{-ik_n x}]. \quad (3.33)$$

Les opérateurs  $v_n$  et  $v_n^\dagger$  obéissent à

$$[v_n, v_m] = [v_n^\dagger, v_m^\dagger] = 0; \quad [v_n, v_m^\dagger] = \delta_{n,m} \quad (3.34)$$

Enfin, si l'on insère (3.32) et (3.33) dans (3.29) on retrouve bien le Hamiltonien d'une somme d'oscillateurs harmoniques

$$H_v^{(0)} \equiv \int_0^L dx \left[ \frac{1}{2} \pi_v^2 + \frac{1}{2} v_x^2 + \frac{1}{2} v^2 \right] = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n (v_n v_n^\dagger + v_n^\dagger v_n). \quad (3.35)$$

$$H_v^{(0)} = \sum_n \omega_n : v_n^\dagger v_n :, \quad (\text{ordre normal}) \quad (3.36)$$

Le terme  $-\pi_2 \partial_x \sigma_2$  dans (3.29) correspond à une densité de quantité de mouvement et l'on nomme son intégrale  $H_2^{(0)}$ . L'idée, inhabituelle, pour traiter le champ  $\sigma_2$  est de le décomposer de la même manière que  $v$

$$\sigma_2(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{\sqrt{2\gamma_m}} [\sigma_m e^{iq_m x} + \sigma_m^\dagger e^{-iq_m x}]. \quad (3.37)$$

$$\pi_2(x) = \frac{-i}{\sqrt{L}} \sum_n \sqrt{\frac{\gamma_m}{2}} [\sigma_m e^{iq_m x} - \sigma_m^\dagger e^{-iq_m x}]. \quad (3.38)$$

où  $\sigma_m$  et  $\sigma_m^\dagger$  vérifient l'analogie de (3.34), ce qui implique que son énergie est donnée par un Hamiltonien du type de (3.36) et que  $H_2^{(0)}$  lit sa quantité de mouvement. En effet,  $H_2^{(0)}$  devient

$$H_2^{(0)} \equiv - \int_0^L dx \pi_2 \partial_x \sigma_2 = \frac{1}{2} \sum_{m \neq 0} q_m (\sigma_m \sigma_m^\dagger + \sigma_m^\dagger \sigma_m). \quad (3.39)$$

$$H_2^{(0)} = \sum_{m \neq 0} q_m : \sigma_m^\dagger \sigma_m :, \quad (\text{ordre normal}) \quad (3.40)$$

qui est la quantité de mouvement d'un ensemble d'oscillateurs définis comme précédemment.

Nous sommes maintenant en mesure de définir un ensemble d'états propres de  $H^{(0)}$  et de calculer les valeurs propres correspondantes :

– états propres

$$|\dots, N_i, \dots; \dots, M_j, \dots\rangle \equiv \dots v_i^\dagger \dots \sigma_j^\dagger \dots |0\rangle \quad (3.41)$$

avec  $\begin{cases} N_i : \text{nombre de particules créées par le mode } i \text{ du champ } v \\ M_j : \text{nombre de particules créées par le mode } j \text{ du champ } \sigma_2 \end{cases}$

– valeurs propres

$$E_a \equiv H^{(0)}|a\rangle = \sum_i N_i \omega_i + \sum_{j \neq 0} M_j q_j \quad (3.42)$$

L'état fondamental  $|0\rangle$  est tel que :

$$v_n^\dagger |0\rangle = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.43)$$

On s'intéresse à présent aux termes d'interaction, qu'on va exprimer avec les  $v_n, v_n^\dagger, \sigma_m, \sigma_m^\dagger$ .

$$H^{(Int)} = I + II + III + IV \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_0^L dx \frac{1}{2} \alpha^2 v^2 (\pi_v + v_x)^2 \\ II &\equiv \int_0^L dx \frac{1}{3} \alpha^2 v^4 \\ III &\equiv \int_0^L dx \pi_2 (\pi_v + v_x)^2 \\ IV &\equiv -\alpha^2 v^2 \partial_x \sigma_2 \end{aligned} \quad (3.45)$$

De la manière analogue à ce qu'on a fait pour  $H^{(0)}$ , on remplace  $v, \sigma_2$  et leurs moments par leurs décompositions en oscillateurs dans (3.30). Après intégration sur  $x$  et en utilisant la notation  $\delta_n \equiv \delta_{n,0}$ , on obtient une expression pour chacun des termes  $I - IV$  :

$$\begin{aligned}
 I = & -\frac{\alpha^2}{8L} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \sum_{i_3} \sum_{i_4} \frac{(k_{i_1} - \omega_{i_1})(k_{i_2} - \omega_{i_2})}{\sqrt{\omega_{i_1}\omega_{i_2}\omega_{i_3}\omega_{i_4}}} \\
 & \left[ \delta_{i_1+i_2+i_3+i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} v_{i_4} + v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger v_{i_3}^\dagger v_{i_4}^\dagger \right) - \delta_{-i_1+i_2+i_3+i_4} \left( v_{i_1}^\dagger v_{i_2} v_{i_3} v_{i_4} + v_{i_1} v_{i_2}^\dagger v_{i_3}^\dagger v_{i_4}^\dagger \right) \right. \\
 & - \delta_{i_1-i_2+i_3+i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2}^\dagger v_{i_3} v_{i_4} + v_{i_1}^\dagger v_{i_2} v_{i_3}^\dagger v_{i_4}^\dagger \right) - \delta_{i_1+i_2-i_3+i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3}^\dagger v_{i_4} + v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger v_{i_3} v_{i_4}^\dagger \right) \\
 & + \delta_{i_1+i_2+i_3-i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} v_{i_4}^\dagger + v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger v_{i_3}^\dagger v_{i_4} \right) + \delta_{i_1+i_2-i_3-i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3}^\dagger v_{i_4}^\dagger + v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger v_{i_3} v_{i_4} \right) \\
 & \left. - \delta_{i_1-i_2-i_3+i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2}^\dagger v_{i_3}^\dagger v_{i_4} + v_{i_1}^\dagger v_{i_2} v_{i_3} v_{i_4}^\dagger \right) - \delta_{i_1-i_2+i_3-i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2}^\dagger v_{i_3} v_{i_4} + v_{i_1}^\dagger v_{i_2} v_{i_3}^\dagger v_{i_4} \right) \right] \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 II = & \frac{\alpha^2}{12L} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \sum_{i_3} \sum_{i_4} \frac{1}{\sqrt{\omega_{i_1}\omega_{i_2}\omega_{i_3}\omega_{i_4}}} \\
 & \left[ \delta_{i_1+i_2+i_3+i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} v_{i_4} + v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger v_{i_3}^\dagger v_{i_4}^\dagger \right) + \delta_{-i_1+i_2+i_3+i_4} \left( v_{i_1}^\dagger v_{i_2} v_{i_3} v_{i_4} + v_{i_1} v_{i_2}^\dagger v_{i_3}^\dagger v_{i_4}^\dagger \right) \right. \\
 & + \delta_{i_1-i_2+i_3+i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2}^\dagger v_{i_3} v_{i_4} + v_{i_1}^\dagger v_{i_2} v_{i_3}^\dagger v_{i_4}^\dagger \right) + \delta_{i_1+i_2-i_3+i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3}^\dagger v_{i_4} + v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger v_{i_3} v_{i_4}^\dagger \right) \\
 & + \delta_{i_1+i_2+i_3-i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} v_{i_4}^\dagger + v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger v_{i_3}^\dagger v_{i_4} \right) + \delta_{i_1+i_2-i_3-i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3}^\dagger v_{i_4}^\dagger + v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger v_{i_3} v_{i_4} \right) \\
 & \left. + \delta_{i_1-i_2-i_3+i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2}^\dagger v_{i_3}^\dagger v_{i_4} + v_{i_1}^\dagger v_{i_2} v_{i_3} v_{i_4}^\dagger \right) + \delta_{i_1-i_2+i_3-i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2}^\dagger v_{i_3} v_{i_4} + v_{i_1}^\dagger v_{i_2} v_{i_3}^\dagger v_{i_4} \right) \right] \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 III = & \frac{i}{2\sqrt{2L}} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \sum_{j \neq 0} \frac{(k_{i_1} - \omega_{i_1})(k_{i_2} - \omega_{i_2}) \gamma_j}{\sqrt{\omega_{i_1}\omega_{i_2}\gamma_j}} \\
 & \left[ \delta_{j+i_1+i_2} \left( v_{i_1} v_{i_2} \sigma_j - v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger \sigma_j^\dagger \right) + \delta_{j-i_1+i_2} \left( v_{i_1}^\dagger v_{i_2} \sigma_j + v_{i_1} v_{i_2}^\dagger \sigma_j^\dagger \right) \right. \\
 & \left. + \delta_{j+i_1-i_2} \left( v_{i_1} v_{i_2}^\dagger \sigma_j + v_{i_1}^\dagger v_{i_2} \sigma_j^\dagger \right) + \delta_{j-i_1-i_2} \left( v_{i_1} v_{i_2} \sigma_j^\dagger + v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger \sigma_j \right) \right] \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 IV = & -\frac{i\alpha^2}{2\sqrt{2L}} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \sum_{j \neq 0} \frac{q_j}{\sqrt{\omega_{i_1}\omega_{i_2}\gamma_j}} \\
 & \left[ \delta_{j+i_1+i_2} \left( v_{i_1} v_{i_2} \sigma_j - v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger \sigma_j^\dagger \right) + \delta_{j-i_1+i_2} \left( v_{i_1}^\dagger v_{i_2} \sigma_j - v_{i_1} v_{i_2}^\dagger \sigma_j^\dagger \right) \right. \\
 & \left. + \delta_{j+i_1-i_2} \left( v_{i_1} v_{i_2}^\dagger \sigma_j - v_{i_1}^\dagger v_{i_2} \sigma_j^\dagger \right) + \delta_{j-i_1-i_2} \left( v_{i_1} v_{i_2} \sigma_j^\dagger - v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger \sigma_j \right) \right] \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

Il faut convenir que ces termes ont une apparence terrifiante, mais nous verrons par la suite qu'ils ne sont pas si compliqués à manipuler. L'étape suivante est de calculer les sommes  $I + II$  et  $III + IV$ , car elles interviendront dans les amplitudes de probabilité

du type de (3.27) et (3.28) respectivement.

$$\begin{aligned}
S_1 &\equiv I + II \\
&= \frac{\alpha^2}{8L} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \sum_{i_3} \sum_{i_4} \frac{1}{\sqrt{\omega_{i_1} \omega_{i_2} \omega_{i_3} \omega_{i_4}}} \\
&\quad \left[ \left( \frac{2}{3} - (k_{i_1} - \omega_{i_1})(k_{i_2} - \omega_{i_2}) \right) \times \right. \\
&\quad \left( \delta_{i_1+i_2+i_3+i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} v_{i_4} + v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger v_{i_3}^\dagger v_{i_4}^\dagger \right) + \delta_{i_1+i_2-i_3+i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3}^\dagger v_{i_4} + v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger v_{i_3} v_{i_4}^\dagger \right) \right. \\
&\quad \left. + \delta_{i_1+i_2+i_3-i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} v_{i_4}^\dagger + v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger v_{i_3}^\dagger v_{i_4} \right) + \delta_{i_1+i_2-i_3-i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3}^\dagger v_{i_4}^\dagger + v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger v_{i_3} v_{i_4} \right) \right) \\
&\quad \left. + \left( \frac{2}{3} + (k_{i_1} - \omega_{i_1})(k_{i_2} - \omega_{i_2}) \right) \times \right. \\
&\quad \left( \delta_{-i_1+i_2+i_3+i_4} \left( v_{i_1}^\dagger v_{i_2} v_{i_3} v_{i_4} + v_{i_1} v_{i_2}^\dagger v_{i_3}^\dagger v_{i_4}^\dagger \right) + \delta_{i_1-i_2+i_3+i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2}^\dagger v_{i_3} v_{i_4} + v_{i_1}^\dagger v_{i_2} v_{i_3}^\dagger v_{i_4}^\dagger \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \delta_{i_1-i_2-i_3+i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2}^\dagger v_{i_3}^\dagger v_{i_4} + v_{i_1}^\dagger v_{i_2} v_{i_3} v_{i_4}^\dagger \right) + \delta_{i_1-i_2+i_3-i_4} \left( v_{i_1} v_{i_2}^\dagger v_{i_3} v_{i_4} + v_{i_1}^\dagger v_{i_2} v_{i_3}^\dagger v_{i_4} \right) \right) \right] \quad (3.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &\equiv III + IV \\
&= \frac{i}{2\sqrt{2L}} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \sum_{j \neq 0} \frac{1}{\sqrt{\omega_{i_1} \omega_{i_2} \gamma_j}} \times \\
&\quad \left[ \left( (k_{i_1} - \omega_{i_1})(k_{i_2} - \omega_{i_2}) \gamma_j - \alpha^2 q_j \right) \times \right. \\
&\quad \left( \delta_{j+i_1+i_2} \left( v_{i_1} v_{i_2} \sigma_j - v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger \sigma_j^\dagger \right) + \delta_{j-i_1-i_2} \left( v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger \sigma_j - v_{i_1} v_{i_2} \sigma_j^\dagger \right) \right) \\
&\quad \left. + \left( (k_{i_1} - \omega_{i_1})(k_{i_2} - \omega_{i_2}) \gamma_j + \alpha^2 q_j \right) \times \right. \\
&\quad \left. \left( \delta_{j-i_1+i_2} \left( v_{i_1} v_{i_2}^\dagger \sigma_j^\dagger - v_{i_1}^\dagger v_{i_2} \sigma_j \right) \delta_{j+i_1-i_2} \left( v_{i_1}^\dagger v_{i_2} \sigma_j^\dagger - v_{i_1} v_{i_2}^\dagger \sigma_j \right) \right) \right] \quad (3.51)
\end{aligned}$$

Voyons maintenant comment se calculent les amplitudes de probabilité à partir de ces sommes.

### 3.1.3 Amplitudes de probabilité

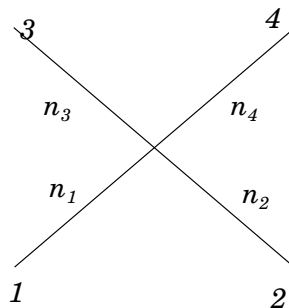
En premier lieu, nous choisissons comme états initial et final

$$\begin{cases} |i(n_1, n_2)\rangle \equiv |1_{n_1}, 1_{n_2}; 0\rangle \\ E_i = \omega_{n_1} + \omega_{n_2} \end{cases} \quad (3.52)$$

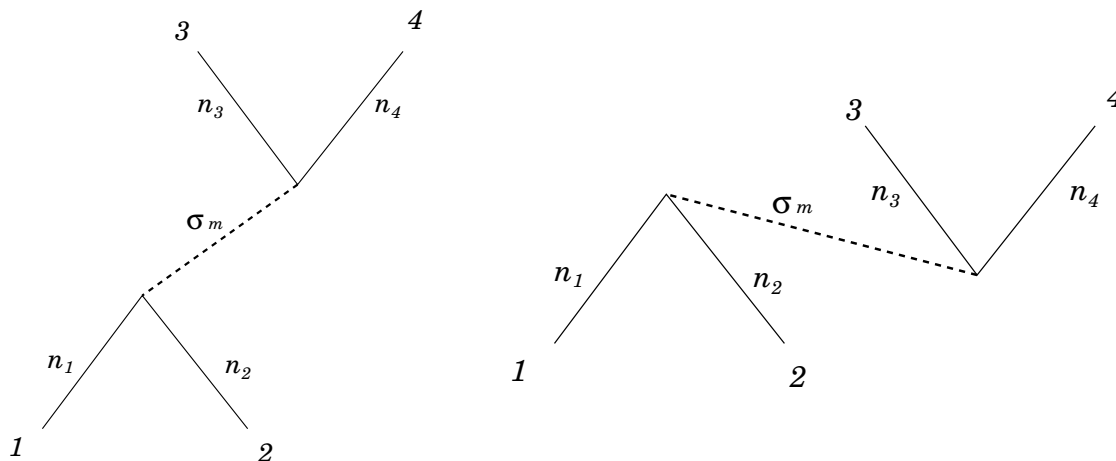
$$\begin{cases} |f(n_3, n_4)\rangle \equiv |1_{n_3}, 1_{n_4}; 0\rangle \\ E_f = \omega_{n_3} + \omega_{n_4} \end{cases} \quad (3.53)$$

Afin de prendre en compte toutes les possibilités, il faudra sommer sur toutes les valeurs des  $n_i$ . Lorsqu'aucune confusion n'est possible, j'utiliserai la notation  $|i\rangle, |n\rangle$ . A partir de ces définitions et de celles des sommes (3.50) et (3.51), nous trouvons sept amplitudes qui approximent la fonction à quatre points (3.12) et nous les représentons de manière diagrammatique :

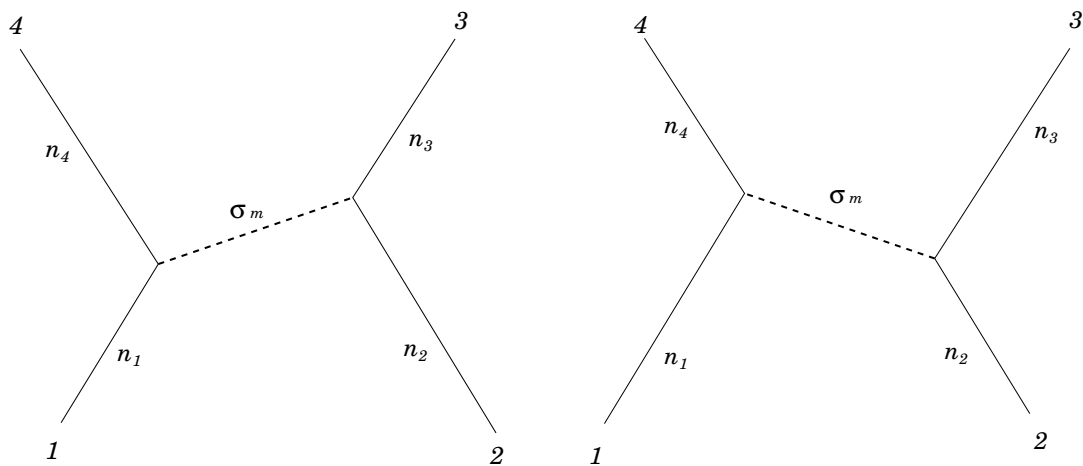
- $A_1$



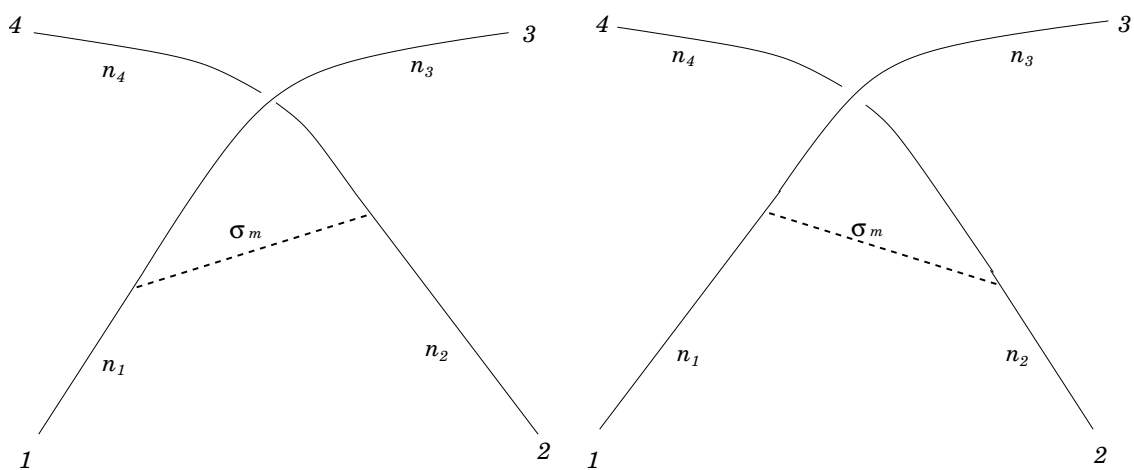
- $A_2$  et  $A_3$



•  $A_4$  et  $A_5$



•  $A_6$  et  $A_7$



Les propriétés du formalisme que nous avons choisi nous fournissent des règles pour le calcul des  $A_i$ . Tout d'abord, on ne garde que les termes dans lesquels apparaissent le même nombre d'opérateurs de création et d'annihilation de même espèce, car en vertu de (3.43), ou de son conjugué hermitique, les autres termes sont nuls. Ensuite, nous n'avons considéré que des amplitudes dont les représentations sont connexes, ce qui implique que nous ne conserverons que les termes pour lesquels les opérateurs de création (resp. d'annihilation) des états initial et final sont commutés avec des opérateurs d'annihilation (resp. de création) des termes d'interaction, comme dans le calcul des diagrammes de Feynman en formalisme canonique en théorie des champs - cas très proche en pratique de ce qu'on fait ici.

Voyons cela de plus près avec l'exemple de  $A_1$  qui est la seule amplitude du premier ordre et s'écrit

$$A_1 = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \sum_{n_4} \langle f | S_1 | i \rangle. \quad (3.54)$$

Le premier terme non nul contient

$$\langle f | v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3}^\dagger v_{i_4}^\dagger | i \rangle = \langle 0 | v_{n_3} v_{n_4} v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3}^\dagger v_{i_4}^\dagger v_{n_1}^\dagger v_{n_2}^\dagger | 0 \rangle \quad (3.55)$$

Conformément aux règles de calcul énoncées précédemment, nous allons d'abord commuter  $v_{i_3}^\dagger v_{i_4}^\dagger$  avec  $v_{n_1}^\dagger v_{n_2}^\dagger$  puis utiliser l'identité suivante

$$v_a v_b v_c^\dagger v_d^\dagger = v_c^\dagger v_d^\dagger v_a v_b + \delta_{a,c} v_d^\dagger v_b + \delta_{a,d} v_c^\dagger v_b + \delta_{b,c} v_d^\dagger v_a + \delta_{b,d} v_c^\dagger v_a + \delta_{a,c} \delta_{b,d} + \delta_{a,d} \delta_{b,c}, \quad (3.56)$$

ce qui nous mène à

$$\begin{aligned} \langle f | v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3}^\dagger v_{i_4}^\dagger | i \rangle &= (\delta_{i_1, n_1} \delta_{i_2, n_2} + \delta_{i_1, n_2} \delta_{i_2, n_1}) \langle 0 | v_{n_3} v_{n_4} v_{i_3}^\dagger v_{i_4}^\dagger | 0 \rangle \\ &= (\delta_{i_1, n_1} \delta_{i_2, n_2} + \delta_{i_1, n_2} \delta_{i_2, n_1}) (\delta_{i_3, n_3} \delta_{i_4, n_4} + \delta_{i_3, n_4} \delta_{i_4, n_3}). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Afin de ne pas saturer le texte de calculs qui n'apportent rien de plus à la compréhension, j'ai reporté celui des autres termes à l'appendice B.

On voit clairement dans la formule (3.50) que  $A_1$  est symétrique sous l'échange

$$(i_1 \leftrightarrow i_2, i_3 \leftrightarrow i_4),$$

ce qui nous amène à regrouper les termes en fonction de cette symétrie. Par exemple,



$$\langle f | v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3}^\dagger v_{i_4}^\dagger + v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger v_{i_3} v_{i_4} | i \rangle$$

contient la somme

$$\begin{aligned} & \delta_{i_1, n_1} \delta_{i_2, n_2} \delta_{i_3, n_3} \delta_{i_4, n_4} + \delta_{i_1, n_1} \delta_{i_2, n_2} \delta_{i_3, n_4} \delta_{i_4, n_3} \\ & + \delta_{i_1, n_2} \delta_{i_2, n_1} \delta_{i_3, n_3} \delta_{i_4, n_4} + \delta_{i_1, n_2} \delta_{i_2, n_1} \delta_{i_3, n_4} \delta_{i_4, n_3} \end{aligned} \quad (3.58)$$

qui est invariante par l'ensemble des permutations évoquées ci-dessus. Lorsque l'on insère ces résultats dans (3.54) et que l'on somme sur  $i_1, i_2, i_3$  et  $i_4$ , on obtient la contribution de (3.58) à  $A_1$

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \sum_{n_4} \frac{4}{\sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2} \omega_{n_3} \omega_{n_4}}} \left( \frac{2}{3} - (k_{n_1} - \omega_{n_1})(k_{n_2} - \omega_{n_2}) \right) \delta_{n_1+n_2-(n_3+n_4)} \quad (3.59)$$

Le calcul des autres contributions est fait dans l'appendice B. Finalement, l'amplitude  $A_1$  vaut

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{\alpha^2}{8L} \sum' \frac{1}{\sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2} \omega_{n_3} \omega_{n_4}}} & \left[ 4 - \Delta_{n_1} \Delta_{n_2} - \Delta_{n_3} \Delta_{n_4} \right. \\ & \left. + \Delta_{n_1} \Delta_{n_3} + \Delta_{n_1} \Delta_{n_4} + \Delta_{n_2} \Delta_{n_3} + \Delta_{n_2} \Delta_{n_4} \right] \end{aligned} \quad (3.60)$$

où l'on a défini la somme

$$\sum' \equiv \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3, n_4 \\ n_1+n_2=n_3+n_4}}$$

et  $\Delta_{n_i} \equiv k_{n_i} - \omega_{n_i}$ .

Les amplitudes restantes sont du type (3.28)

$$A_i = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \sum_{n_4} \sum_{int} \frac{\langle f | S_2 | int \rangle \langle int | S_2 | i \rangle}{E_i^{(0)} - E_{int}^{(0)}} \quad (3.61)$$

où les états initial et final  $|i\rangle$  et  $|f\rangle$  sont définis comme avant par (3.52) et (3.53). Je vais présenter ici le calcul de  $A_2$  et renvoyer le compréhensif lecteur à l'appendice B pour les autres.

Dans le cas de  $A_2$ , les états intermédiaires et leurs énergies sont

$$\begin{cases} |int\rangle \equiv |0; 1_m\rangle = \sigma_m^\dagger |0\rangle \\ E_{int} = q_m \end{cases} \quad (3.62)$$

et  $\sum_{int} \equiv \sum_m$ . Commençons par déterminer les éléments de matrice de (3.61), en utilisant les règles de commutation des opérateurs de création/annihilation et la restriction aux amplitudes connexes pour sélectionner les termes *a priori* non nuls.

$$\begin{aligned} \langle int|S_2|i\rangle &= \langle 0|\sigma_m S_2 v_{n_1}^\dagger v_{n_2}^\dagger |0\rangle \\ &= -\frac{i}{2\sqrt{2L}} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \sum_{j \neq 0} \frac{(k_{i_1} - \omega_{i_1})(k_{i_2} - \omega_{i_2}) \gamma_j - \alpha^2 q_j}{\sqrt{\omega_{i_1} \omega_{i_2} \gamma_j}} \\ &\quad \times \delta_{j-i_1-i_2} \langle 0|\sigma_m \sigma_j^\dagger v_{i_1} v_{i_2} v_{n_1}^\dagger v_{n_2}^\dagger |0\rangle \\ &= -\frac{i}{2\sqrt{2L}} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \sum_{j \neq 0} \frac{(k_{i_1} - \omega_{i_1})(k_{i_2} - \omega_{i_2}) \gamma_j - \alpha^2 q_j}{\sqrt{\omega_{i_1} \omega_{i_2} \gamma_j}} \\ &\quad \times \delta_{j-i_1-i_2} \delta_{m,j} (\delta_{i_1, n_1} \delta_{i_2, n_2} + \delta_{i_1, n_2} \delta_{i_2, n_1}) \\ \langle int|S_2|i\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2L}} \frac{\Delta_{n_1} \Delta_{n_2} \gamma_m - \alpha^2 q_m}{\sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2} \gamma_m}} \delta_{m-n_1-n_2} \end{aligned} \quad (3.63)$$

où  $\Delta_n$  est défini comme avant. De même

$$\begin{aligned} \langle f|S_2|int\rangle &= \langle 0|v_{n_3} v_{n_4} S_2 \sigma_m^\dagger |0\rangle \\ &= \frac{i}{2\sqrt{2L}} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \sum_{j \neq 0} \frac{(k_{i_1} - \omega_{i_1})(k_{i_2} - \omega_{i_2}) \gamma_j - \alpha^2 q_j}{\sqrt{\omega_{i_1} \omega_{i_2} \gamma_j}} \\ &\quad \times \delta_{j-i_1-i_2} \langle 0|v_{n_3} v_{n_4} v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger \sigma_j \sigma_m^\dagger |0\rangle \\ \langle f|S_2|int\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2L}} \frac{\Delta_{n_3} \Delta_{n_4} \gamma_m - \alpha^2 q_m}{\sqrt{\omega_{n_3} \omega_{n_4} \gamma_m}} \delta_{m-n_3-n_4} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Nous pouvons maintenant calculer la valeur de  $A_2$  d'après (3.61) pour finalement obtenir

$$\begin{aligned}
A_2 &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \sum_{n_4} \sum_m \frac{\delta_{m-n_1-n_2} \delta_{m-n_3-n_4}}{2L} \frac{(\Delta_{n_1} \Delta_{n_2} \gamma_m - \alpha^2 q_m) (\Delta_{n_3} \Delta_{n_4} \gamma_m - \alpha^2 q_m)}{\gamma_m \sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2} \omega_{n_3} \omega_{n_4}} (\omega_{n_1} + \omega_{n_2} - q_m)} \\
A_2 &= \sum' \frac{1}{2L} \frac{(\Delta_{n_1} \Delta_{n_2} \gamma_{n_1+n_2} - \alpha^2 q_{n_1+n_2}) (\Delta_{n_3} \Delta_{n_4} \gamma_{n_3+n_4} - \alpha^2 q_{n_3+n_4})}{\gamma_{n_1+n_2} \sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2} \omega_{n_3} \omega_{n_4}} (\omega_{n_1} + \omega_{n_2} - q_{n_1+n_2})} \quad (3.65)
\end{aligned}$$

Le calcul des autres amplitudes de probabilité est présenté dans l'appendice B. Il ne reste désormais qu'à faire la somme de toutes les amplitudes pour obtenir la valeur de la fonction à quatre points et il est intéressant de regrouper les termes de cette somme comme suit :

$$\begin{aligned}
A_2 + A_3 &= - \sum' \frac{\alpha^2}{L} \frac{\Delta_{n_1} \Delta_{n_3} q_{n_3+n_4} + \Delta_{n_3} \Delta_{n_4} q_{n_1+n_2}}{\sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2} \omega_{n_3} \omega_{n_4}} (\omega_{n_1} + \omega_{n_2} - q_{n_1+n_2})}, \\
A_4 + A_5 &= \sum' \frac{\alpha^2}{L} \frac{\Delta_{n_2} \Delta_{n_3} q_{n_1-n_4} - \Delta_{n_1} \Delta_{n_4} q_{n_2-n_4}}{\sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2} \omega_{n_3} \omega_{n_4}} (\omega_{n_1} - \omega_{n_4} - q_{n_1-n_4})}, \\
A_6 + A_7 &= \sum' \frac{\alpha^2}{L} \frac{\Delta_{n_2} \Delta_{n_4} q_{n_1-n_3} - \Delta_{n_1} \Delta_{n_3} q_{n_2-n_3}}{\sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2} \omega_{n_3} \omega_{n_4}} (\omega_{n_1} - \omega_{n_3} - q_{n_1-n_3})}. \quad (3.66)
\end{aligned}$$

En remarquant que  $q_n = k_n$  et que (cf. appendice B)

$$\frac{\Delta_i \Delta_j k_{i+j}}{\omega_i + \omega_j - q_{i+j}} = -\frac{1}{2} (\Delta_i \Delta_j - 1), \quad (3.67)$$

et, en additionnant  $A_1$  aux trois termes précédents, on obtient finalement

$$G = \sum_i A_i = -\frac{\alpha^2}{L \sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2} \omega_{n_3} \omega_{n_4}}} \quad (3.68)$$

Les artefacts introduits par la forme particulière du vertex (3.73) disparaissent donc et la fonction à quatre points se révèle être constante. Le choix d'étudier le problème sous l'angle de vue de la théorie des perturbations par le biais du Hamiltonien permet de contourner les problèmes de définition rencontrés lorsque l'on envoie tous les moments externes sur la couche de masse en même temps. Cependant, il est possible que d'autres choix pour ce Hamiltonien, dus à d'éventuels termes de bord, mènent à des résultats différents, ce qu'il serait intéressant d'étudier.

## 3.2 Corrections à une boucle pour un modèle transformé de sinh-Gordon

Comme nous venons de le voir, le changement de système de coordonnées particulier qui transforme un Lagrangien de champ scalaire “usuel”

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}v_{\xi'}v_{\eta'} - V(v), \quad (3.69)$$

en (2.9) est responsable dès le niveau classique, autrement dit les diagrammes de Feynman en arbres, d’ambiguïtés lorsque l’on cherche à déterminer les propriétés de diffusion des modèles obtenus. Nous allons maintenant poursuivre cette investigation sur l’influence de cette transformation sur les aspects quantiques de ces modèles en étudiant les corrections au premier ordre, i.e. les diagrammes de Feynman à une boucle, dans le cas d’un exemple simple. En effet, il est connu que, dans le cas de modèles de champs scalaires en  $1 + 1$  dimensions avec un potentiel exponentiel, le terme de masse n’est pas renormalisé et la renormalisation du couplage revient simplement à prendre l’ordre normal des termes d’interaction, multiplié par une constante, ce qui implique que l’on n’observe pas de divergence UV (hautes énergies). Nous nous concentrerons donc sur l’apparition éventuelle de telles divergences dans le cas d’un Lagrangien du type de (2.9).

### 3.2.1 Élimination de diagrammes par intégration angulaire

L’exemple que nous allons utiliser est basé sur le modèle de sinh-Gordon, soit un potentiel donné par

$$V = 1 - \cosh v, \quad (3.70)$$

et nous choisissons la fonction  $F$  de la forme

$$F \equiv \frac{1}{1 - V - V'} = \frac{1}{e^v}. \quad (3.71)$$

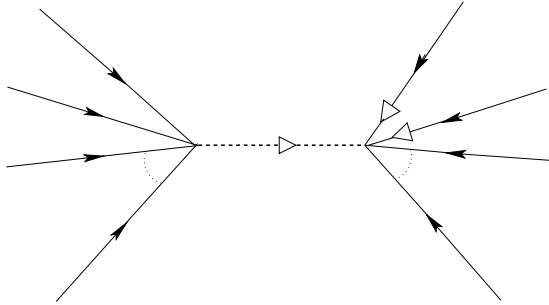
Le Lagrangien pour le champ  $v$  est alors

$$\mathcal{L}_v = -\frac{1}{2}v_{\xi}v_{\eta} + v_{\xi}^2 e^v \partial_{\eta} \int^{\xi} (e^{-v} - 1) d\xi_1 - \frac{1}{2} + e^{-v} - \frac{1}{2}e^{-2v}. \quad (3.72)$$

D’après les propriétés des termes d’interaction exponentiels mentionnées dans l’introduction, les derniers termes du Lagrangien précédent, correspondant à  $FV$ , ne causent pas de comportements divergents dans la limite des grandes énergies et impulsions. Par conséquent, les seules divergences UV possibles ne peuvent provenir que du terme

$$v_\xi^2 e^v \partial_\eta \int^\xi (e^{-v} - 1) d\xi_1 = v_\xi^2 \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{v^{n_2}}{n_2!} \partial_\eta \int^\xi \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{v^{n_1}}{n_1!} d\xi_1 \quad (3.73)$$

Il faut donc étudier la limite UV de tous les diagrammes à une boucle que l'on peut construire avec ce vertex. On conserve ici les règles de Feynman et les conventions définies au début de 3.1 et on écrit (3.73) dans l'espace des impulsions sous la forme



$$-\frac{(-1)^{n_1}}{n_1! n_2!} \frac{\sum_{i=1}^{n_1} k_{i-}}{\sum_{i=1}^{n_1} k_{i+}} k_{a+} k_{b+}. \quad (3.74)$$

Dans le but d'alléger les explications à venir, désignons les pattes du vertex du type (3.9) comme "chargées" et les autres comme "neutres" et disons qu'une patte chargée est dans le sens du flot de moment si ce dernier *entre* dans le vertex sur cette patte.

Au lieu de recenser et de calculer brutalement tous les diagrammes, on peut simplifier drastiquement la situation et gagner beaucoup de temps en déterminant *a priori* quels sont ceux qui sont susceptibles de diverger dans la limite asymptotique  $|k| \rightarrow \infty$ , où  $k$  désigne ici le moment interne à la boucle. L'utilisation d'une rotation de Wick  $k_0 \equiv ik_2$  en deux dimensions revient à passer dans un plan complexe  $(k_c, \bar{k}_c)$  défini par

$$\begin{cases} k_+ = k_0 + k_1 \\ k_- = k_1 - k_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_c = k_i + ik_2 \equiv \rho e^{i\theta} \\ \bar{k}_c = k_1 - ik_2 \equiv \rho e^{-i\theta} \end{cases} \quad (3.75)$$

L'intégrale angulaire sur  $\theta$  permet alors d'effectuer une sélection, grâce à la propriété

$$\oint d\theta e^{ir\theta} = \delta_{r,0}, \quad (3.76)$$

dans le cadre de considérations générales communes à tous les diagrammes à la limite asymptotique. Remarquons également que cette identité garantit l'invariance de Lorentz dans les calculs futurs. En effet, une rotation d'angle  $\theta$  correspond à un boost et (3.76) assure que les fonctions à n-points ne dépendent pas de  $\theta$ .

D'après les expressions du propagateur et du vertex, tous les graphes de Feynman à une boucle que l'on peut construire ne contiennent que trois types de facteurs dépendant du moment interne à la boucle  $k$  et des moments externes  $p_i$  :

- $(k + p_i)_+ \leftarrow$  (3.9), qui se réécrit quand on passe dans le plan complexe

$$\rho e^{i\theta} + p_{i+} = \rho e^{i\theta} \left( 1 + \frac{p_{i+}}{\rho} e^{-i\theta} \right) \equiv \rho e^{i\theta} \Gamma_i^1, \quad (3.77)$$

- $\frac{(k+p_i)_-}{(k+p_i)_+} \leftarrow (3.10)$ , qui devient

$$e^{-2i\theta} \frac{1 + \frac{p_{i-}}{\rho} e^{i\theta}}{1 + \frac{p_{i+}}{\rho} e^{-i\theta}} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} e^{-2i\theta} \left( 1 + \frac{p_{i-}}{\rho} e^{i\theta} \right) \left( 1 - \frac{p_{i+}}{\rho} e^{-i\theta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \right) \equiv e^{-2i\theta} \Gamma_i^2 \quad (3.78)$$

- $\frac{1}{(k+p_i)^2 + m^2}$ , le propagateur, donne quand  $\rho \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\rho^2} \left( 1 - \frac{\rho (p_{i-} e^{i\theta} + p_{i+} e^{-i\theta}) + q_i^2 + m^2}{\rho^2} + \dots \right) \equiv \frac{\Gamma_i^3}{\rho^2}. \quad (3.79)$$

L'intégrale de boucle  $I$  la plus générale vérifie donc

$$I \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \int d\rho d\theta \rho^{n_++1-2N} e^{i(n_+-2n_-)\theta} \prod_{i=1}^{n_+} \prod_{j=1}^{n_-} \prod_{l=1}^N \Gamma_i^1 \Gamma_j^2 \Gamma_l^3 \quad (3.80)$$

où l'on a introduit les paramètres suivants, fixés pour chaque diagramme,

$$\begin{cases} n_+ : \text{nombre de } \longrightarrow \triangleright \longrightarrow \text{ internes} \\ n_- : \text{nombre de } \cdots \triangleright \cdots \text{ internes} \\ N : \text{nombre de vertex} = \text{nombre de propagateurs dans le cas d'une boucle} \end{cases} \quad (3.81)$$

Le +1 dans l'exposant de  $\rho$  est dû à

$$dk_c d\bar{k}_c = \rho d\rho d\theta. \quad (3.82)$$

En rassemblant les termes du développement des trois produits précédents selon leurs contributions  $\delta \geq 0$  à l'exposant de  $\rho$  et  $\nu$  à celui de  $e^{-i\theta}$  (le signe  $-$  est un choix en vue de la suite) respectivement, on obtient la somme suivante

$$I \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \int d\rho d\theta \sum_{\delta, \nu} \rho^{n_++1-2N-\delta} e^{i(n_+-2n_--\nu)\theta} \Gamma_{\delta, \nu}(\{p_i\}, \{p_j\}, \{p_l\}) \quad (3.83)$$

où  $\Gamma_{\delta,\nu}$  ne dépend pas de  $\rho$  et  $\theta$ . A ce stade, on peut déjà trouver une relation entre  $\delta$  et  $\nu$  car, en observant les  $\Gamma_j^i$ , on remarque que chaque  $e^{i\theta}$  vient avec au moins une puissance de  $1/\rho$  ce qui implique que

$$\nu \in \{-\delta, \dots, \delta\} \iff |\nu| \leq \delta. \quad (3.84)$$

Après avoir transformé les intégrales de boucle de la sorte, on peut maintenant déterminer les conditions sur les paramètres  $n_+$ ,  $n_-$ ,  $N$ ,  $\delta$  et  $\nu$  pour l'apparition d'une divergence à limite  $\rho \rightarrow \infty$ . Notons que  $n_+$ ,  $n_-$  et  $N$  sont fixés pour chaque diagramme mais que  $\delta$  et  $\nu$  caractérisent les termes dans le calcul des intégrales. Nous allons donc chercher en priorité à obtenir des contraintes sur les premiers pour éliminer les diagrammes finis puis l'étude des derniers permettra de préciser quels termes sont responsables des divergences des diagrammes restants.

Tout d'abord, on ne peut avoir plus de deux couplages dérivatifs sur chacune des  $N$  lignes internes d'un graphe de Feynman et plus d'un couplage interne de type (3.10) par vertex, ce qui se traduit par les inégalités

$$n_+ + n_- \leq 2N, \quad (3.85)$$

$$n_- \leq N. \quad (3.86)$$

Le terme dominant de (3.83) est celui pour lequel  $\delta = 0, \nu = 0, \Gamma_{\delta,\nu} = 1$ , donc une condition nécessaire pour qu'un diagramme soit divergent est que l'exposant de  $\rho$  pour ce terme là soit supérieur à  $-1$ , ou encore

$$\boxed{2N - 2 \leq n_+ (\leq 2N)} \quad (3.87)$$

Pour un terme quelconque, cette condition se généralise à

$$n_+ + 1 - 2N - \delta \geq -1, \quad (3.88)$$

et pour qu'il ne soit pas nul, le facteur de  $\theta$  doit, lui, être nul d'après (3.76), ce qui s'écrit

$$n_+ - 2n_- - \nu = 0. \quad (3.89)$$

En combinant (3.84), (3.87) et (3.88), on peut encadrer  $\delta$  et  $\nu$

$$-2 \leq -(n_+ - 2N + 2) \leq -\delta \leq \nu \leq \delta \leq n_+ - 2N + 2 \leq 2. \quad (3.90)$$

Dans le cas où (3.89) est vérifiée, (3.85) et (3.87) nous donnent une autre borne pour  $\nu$

$$\nu = n_+ - 2n_- \geq 2N - 2 - 2(2N - n_+) = 2(n_+ - N - 1). \quad (3.91)$$

Des deux précédentes relations, on extrait une condition absolue, i.e. ne dépendant pas d'autre paramètre, sur  $n_+$

$$n_+ \leq 4, \quad (3.92)$$

qui, elle-même associée à (3.87), restreint les valeurs de  $N$  à

$$\boxed{N \leq 3}. \quad (3.93)$$

L'inégalité (3.87) sélectionne trois valeurs de  $n_+$  qu'il est utile de considérer séparément avant de recenser les diagrammes.

- $n_+ = 2N - 2$   $\implies n_- \leq 2$

On peut déduire dans un premier temps les valeurs de  $\delta$  et  $\nu$

$$(3.90) \implies \delta = 0 \implies \nu = 0, \quad (3.94)$$

puis celle de  $n_-$  d'après (3.89)

$$n_+ = 2n_- \implies n_- = N - 1. \quad (3.95)$$

Pour cette valeur de  $n_+$ , l'intégrale (3.83) diverge comme

$$\int^{\Lambda} d\rho \rho^{-1} \sim \log \Lambda,$$

où  $\Lambda$  est un cut-off arbitraire.



- $\underline{n_+ = 2N - 1} \implies n_- \leq 1$

Dans ce cas les valeurs de  $\delta$  permises par (3.90) sont  $\delta \leq 1$ ,  $-1 \leq \nu \leq 1$ . Ici,  $n_+ - 2n_-$  est impair donc  $\nu = \pm 1$  et  $\delta = 1$ . Examinons les deux cas :

$$- \underline{\nu = 1} \qquad n_+ - 2n_- = 1 \implies n_- = N - 1. \qquad (3.96)$$

La borne  $n_- \leq 1$  implique une restriction supplémentaire sur  $N$ ,  $N \leq 2$

$$- \underline{\nu = -1} \qquad n_+ - 2n_- = -1 \implies n_- = N. \qquad (3.97)$$

ce qui entraîne  $N \leq 1$ .

Pour la valeur de  $\delta$  trouvée, la divergence est du même type que dans le premier cas en  $n_+$ , i.e.  $\log \Lambda$ .

- $\underline{n_+ = 2N} \implies n_- = 0$

On n'apprend rien de plus sur  $\delta$  et  $\nu$  que dans (3.90) mais (3.89) nous dit que  $\nu = n_+$ . La seule solution possible est donc

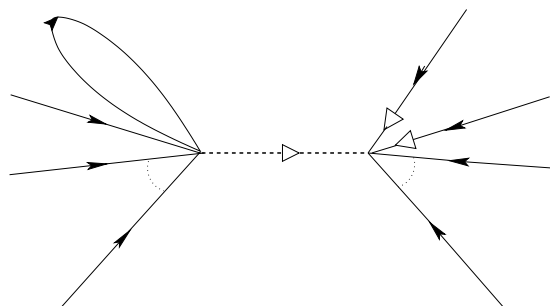
$$\begin{cases} \nu = 2 \\ N = 1 \end{cases} . \qquad (3.98)$$

Finalement, comme  $\delta$  peut prendre les trois valeurs autorisées, la divergence peut être en  $\Lambda^2, \Lambda, \log \Lambda$ .

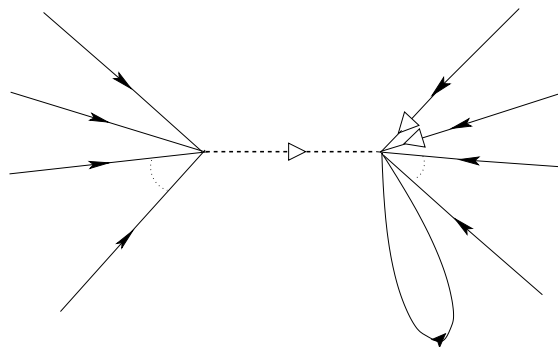
Le travail est alors presque terminé et il ne reste plus, pour déterminer toutes les sources de divergences UV, qu'à déduire de l'analyse qui précède les valeurs de  $n_+, n_-, \delta$  et  $\nu$  pertinentes selon les différents cas pour  $N$  ainsi que les types de graphes qui leur correspondent.

- $N = 1$

- $n_+ = 0, \delta = \nu = n_- = 0$



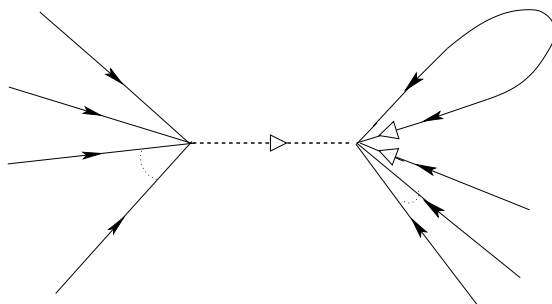
$G_1$



$G_2$

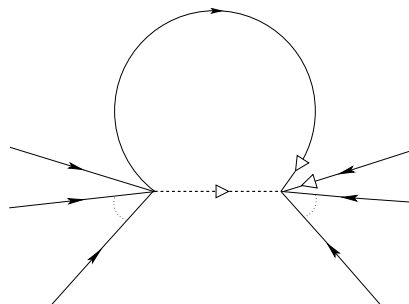
- $n_+ = 1, \delta = 1$

- $\nu = 1, n_- = 0$



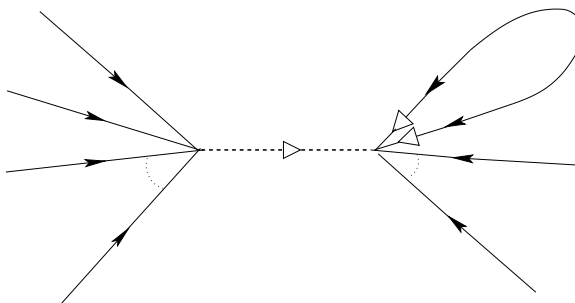
$G_3$

- $\nu = -1, n_- = 1$



$G_4$

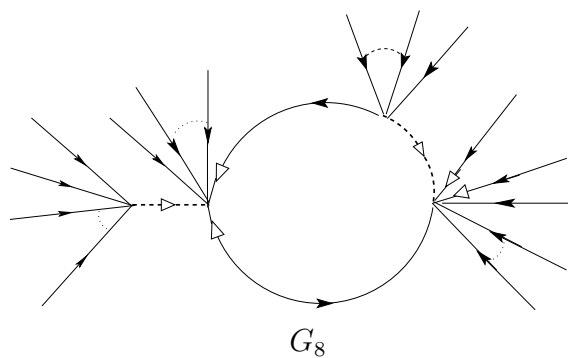
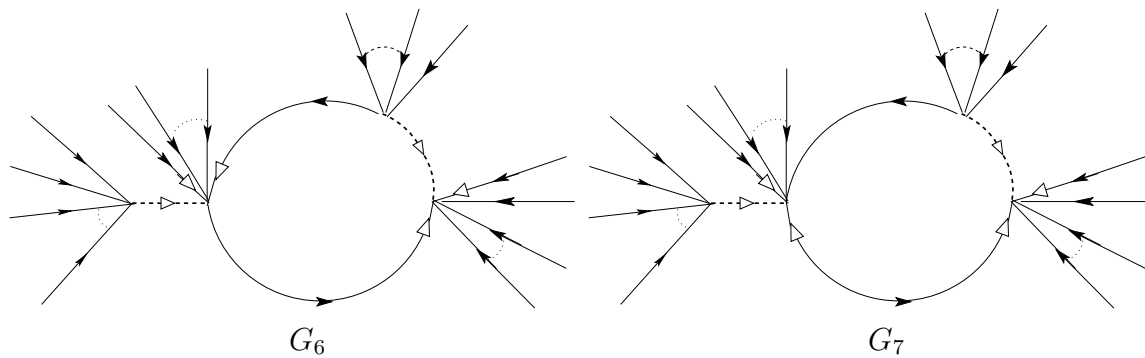
- $n_+ = 2 = \delta = \nu, n_- = 0$



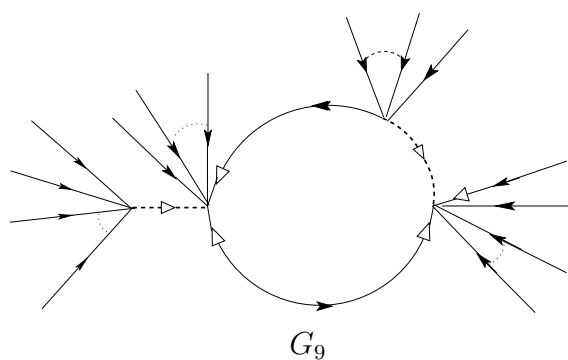
$G_5$

- $N = 2$

- $n_+ = 2, \delta = \nu = 0, n_- = 1$

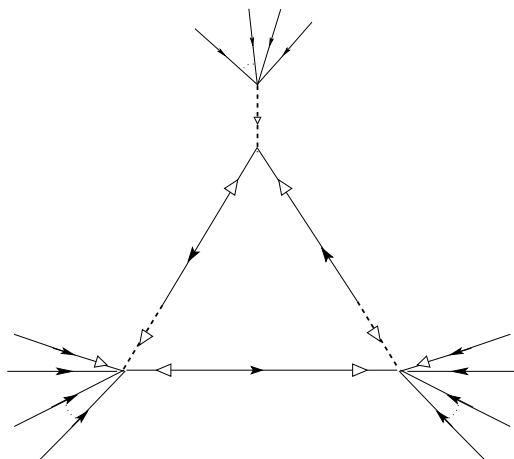


- $n_+ = 3, \delta = \nu = 1, n_- = 1$

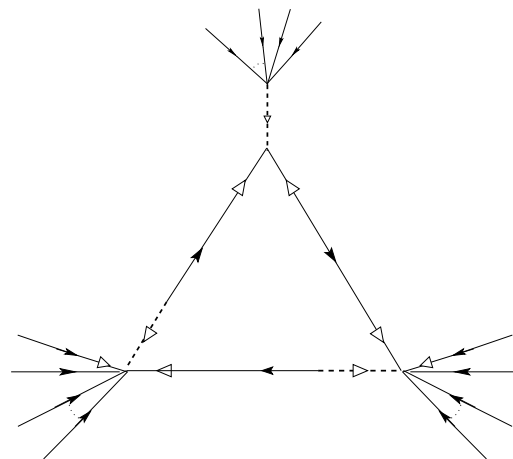


- $N = 3$

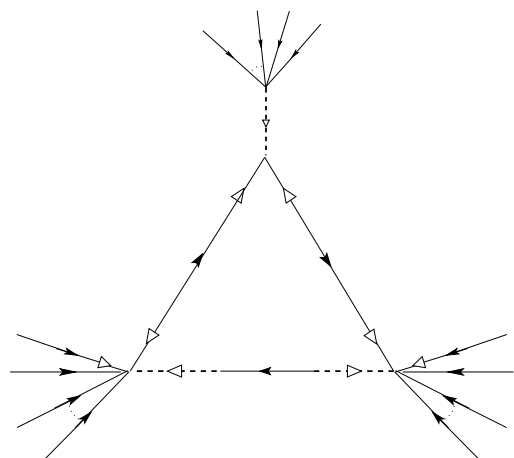
- $n_+ = 4, \delta = \nu = 0, n_- = 2$



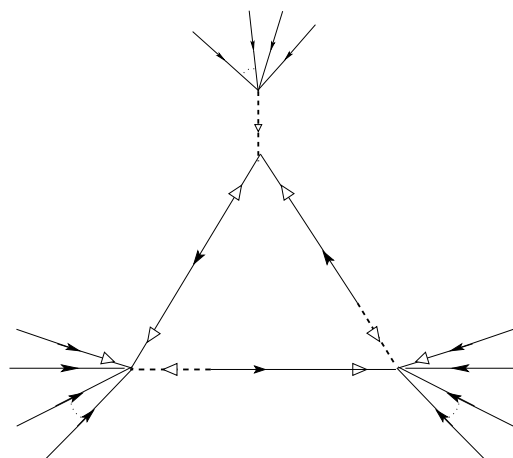
$G_{10}$



$G_{11}$



$G_{12}$



$G_{13}$

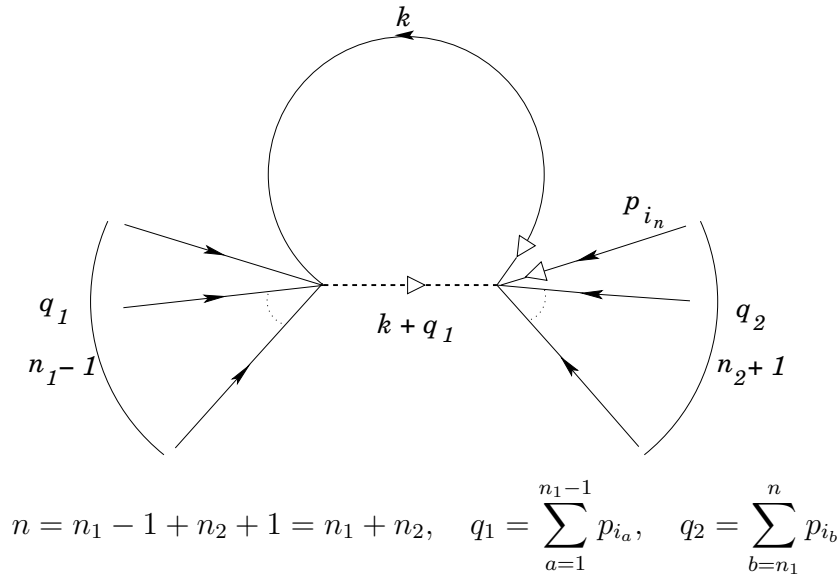
Cependant, on peut tout de suite éliminer les graphes  $G_3$  et  $G_5$  car les moments externes n'interviennent pas dans la boucle donc  $\delta$  et  $\nu$  ne peuvent être différents de zéro, autrement dit le facteur de  $\theta$  ne peut être compensé. L'intégrale angulaire est alors nulle.

### 3.2.2 Exemple de calcul de corrections : le cas $N = 1$

Nous allons maintenant nous attaquer au calcul du petit nombre de diagrammes qui ont survécu à la sélection de la section précédente. Pour chacun d'eux, il faut d'abord évaluer l'intégrale de boucle à la limite où l'amplitude du moment interne tend vers l'infini, puis sommer sur toutes les configurations de moments externes possibles. Dans la suite, on appellera  $n$  le nombre de ces moments externes qui satisfont

$$\sum_{i=1}^n p_i = 0. \quad (3.99)$$

Afin de détailler ces étapes, étudions pas-à-pas  $G_4$  qui est un exemple relativement simple regroupant les différents types de calculs que nous pouvons rencontrer. Commençons par préciser la répartition des moments pour ce diagramme :



Nous avons introduit  $J = \{i_1, \dots, i_r, \dots, i_n\}$ , permutation de l'ensemble des indices des  $n$  moments externes car prendre en compte toutes les contributions à ce diagramme revient à sommer sur ces permutations à  $n_1$  fixé puis sur  $n_2$  (ou  $n_1$ ). Choisissons de mettre  $p_{i_n}$  sur la patte externe chargée. On remarque que  $n_1$  doit être supérieur à 2 car  $G_4$  s'annule quand  $n_1 = 1$  pour la même raison que  $G_3$  et  $G_5$ .

L'expression mathématique de  $G_4$  contient un facteur dû aux coefficients du propagateur (3.8) et du vertex (3.74) ainsi qu'au développement perturbatif de l'intégrale fonctionnelle. Il faut également tenir compte du nombre de possibilités de former la boucle, à savoir deux choix pour une patte chargée à connecter avec une des  $n_1$  pattes neutres. Le tout s'écrit

$$c_4 = 2n_1 \times (-i) \times \frac{(-i)^2 (-1)^{n_1}}{2n_1! n_2!} \times i = -\frac{(-1)^{n_1}}{(n_1 - 1)! n_2!} \quad (3.100)$$

On ne tient pas compte dans le calcul de l'intégrale du facteur numérique précédent mais on inclut celui dû aux moment externes. Pour une configuration choisie, elle vaut :

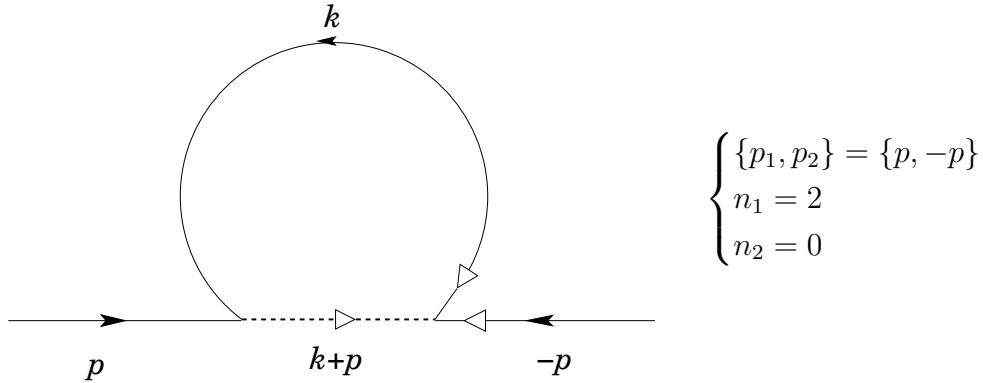
$$I_4 = p_{i_{n+}} \int d^2k \frac{-k_+}{k^2 + m^2} \frac{(k + \sum_{r=1}^{n_1-1} p_{i_r})_-}{(k + \sum_{r=1}^{n_1-1} p_{i_r})_+}. \quad (3.101)$$

à Le signe “-” vient du fait que  $k$  est un moment sortant du vertex au niveau du couplage dérivatif contrairement à la convention (3.9). Nous savons que le seul terme non nul est celui pour lequel  $\nu = -1$ , soit :

$$\begin{aligned} I_4^\Lambda &\equiv \lim_{\rho \rightarrow \infty} I_4 = -p_{i_{n+}} \int^\Lambda d\rho \oint d\theta \frac{\sum_{r=1}^{n_1-1} p_{i_r}^-}{\rho} \\ I_4^\Lambda &= -p_{i_{n+}} \sum_{r=1}^{n_1-1} p_{i_r}^- 2\pi \log \Lambda \end{aligned} \quad (3.102)$$

Faisons le calcul complet dans les cas où  $n = 2, 3$  et 4 afin de se familiariser avec les raisonnements impliqués dans l'étude du problème pour  $n$  quelconque.

- $n = 2$



Dans ce cas,  $c_4 = -1$  et l'on voit facilement que les seules configurations possibles sont

$$\{p_{i_1}, p_{i_2}\} = \begin{cases} \{p, -p\} \\ \{-p, p\} \end{cases}. \quad (3.103)$$

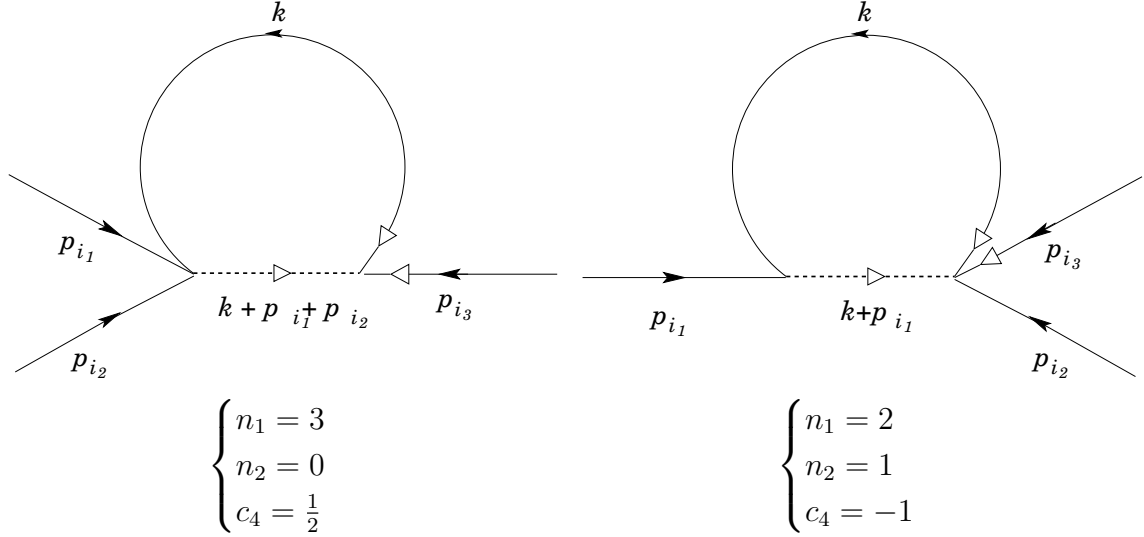
D'après (3.102), leurs contributions sont identiques et  $G_4$  vaut dans la limite asymptotique

$$\Sigma_4^\Lambda \equiv \sum_{perm} c_4 I_4^\Lambda = -4\pi p_+ p_- \log \Lambda \quad (3.104)$$

où  $\sum_{perm}$  représente la somme sur l'ensemble  $J$  des permutations des indices des moments externes.

- $n = 3$

On peut répartir les pattes externes de deux façons :



- $n_1 = 3$

Pour une configuration  $\{i_1, i_2, i_3\}$ , l'intégrale (3.102) vaut

$$I_4^\Lambda = -p_{i_3+} (p_{i_1-} + p_{i_2-}) 2\pi \log \Lambda, \quad (3.105)$$

ou encore, d'après (3.99),

$$I_4^\Lambda = p_{i_3+} p_{i_3-} 2\pi \log \Lambda. \quad (3.106)$$

Cette dernière est symétrique en  $p_{i_1}$  et  $p_{i_2}$  ce qui correspond aux deux choix équivalents pour placer ces moments sur les deux pattes externes neutres et permet de compenser  $c_4 = 1/2$ . Les seules permutations qu'il reste à prendre en compte sont les permutations circulaires des valeurs de  $i_1, i_2$  et  $i_3$  et finalement,

$$\Sigma_4^\Lambda = (p_{1+} p_{1-} + p_{2+} p_{2-} + p_{3+} p_{3-}) 2\pi \log \Lambda. \quad (3.107)$$

- $n_1 = 2$

Ici, l'intégrale de boucle s'écrit

$$I_4^\Lambda = -p_{i_1-} p_{i_2+} 2\pi \log \Lambda. \quad (3.108)$$

Sommer sur les différentes configurations revient à chercher toutes les paires  $(i_1, i_2)$  (l'ordre compte) construites à partir de  $\{1, 2, 3\}$ . En pratique, pour  $i_1$  fixé, il y a deux termes possibles

$$p_{i_1-} (p_{i_2+} + p_{i_3+}) \quad (3.109)$$

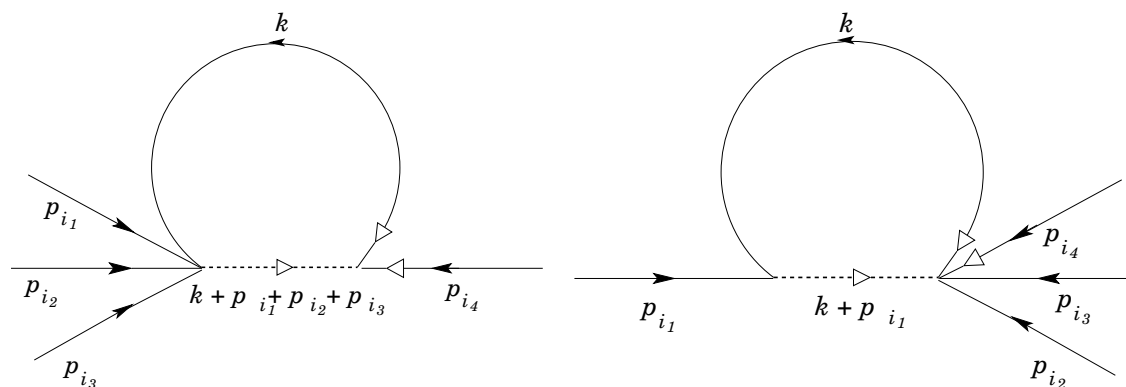
et il ne reste plus qu'à considérer les permutations circulaires pour obtenir :

$$\begin{aligned} \Sigma_4^\Lambda &= (p_{1-} (p_{i_2+} + p_{i_3+}) + p_{2-} (p_{i_1+} + p_{i_3+}) + p_{3-} (p_{i_1+} + p_{i_2+})) 2\pi \log \Lambda \\ &= - (p_{1+} p_{1-} + p_{2+} p_{2-} + p_{3+} p_{3-}) 2\pi \log \Lambda. \end{aligned} \quad (3.110)$$

De manière inattendue, les valeurs des graphes (3.107) et (3.110) se compensent. Qu'en est-il pour  $n = 4$  ?

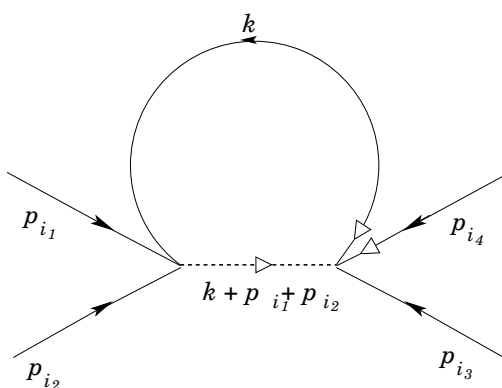
- $n = 4$

Trois types de diagrammes correspondent à cette valeur de  $n$  :



$$\begin{cases} n_1 = 4 \\ n_2 = 0 \\ c_4 = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_1 = 2 \\ n_2 = 2 \\ c_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} n_1 = 3 \\ n_2 = 1 \\ c_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$



Étudions ces trois possibilités en nous inspirant de ce qui précède

–  $n_1 = 4$

Valeur de l'intégrale :

$$I_4^\Lambda = -p_{i_4+} (p_{i_1-} + p_{i_2-} + p_{i_3-}) 2\pi \log \Lambda \quad (3.111)$$

$$I_4^\Lambda = p_{i_4+} p_{i_4-} 2\pi \log \Lambda. \quad (3.112)$$

Ce cas est analogue à (3.105) car on voit aisément que les 3! permutations entre les valeurs de  $i_1, i_2, i_3$  ne changent pas l'expression précédente. Seules les permutations circulaires des quatre moments externes vont contribuer différemment au résultat final :

$$\begin{aligned} \Sigma_4^\Lambda &= -\frac{1}{3!} \times 3! (- (p_{1+} p_{1-} + p_{2+} p_{2-} + p_{3+} p_{3-} + p_{4+} p_{4-}) 2\pi \log \Lambda) \\ \Sigma_4^\Lambda &= -2\pi \log \Lambda \sum_{i=1}^4 p_{i+} p_{i-}. \end{aligned} \quad (3.113)$$

–  $n_1 = 3$

$$I_4^\Lambda = - (p_{i_1-} + p_{i_2-}) p_{i_4+} 2\pi \log \Lambda \quad (3.114)$$

Cette situation mélange les propriétés des deux diagrammes pour  $n = 3$ . D'une part, comme pour le cas  $n = n_1 = 3$ , l'échange des valeurs de  $i_1$  et  $i_2$  laisse (3.114) inchangée, ce qui fait apparaître un facteur 2 qui compense  $c_4$ . Si l'on pose d'autre part  $q_1 = p_{i_1} + p_{i_2}$ , on retrouve l'autre cas ( $n = 3, n_1=2$ ), ce qui permet, d'après (3.109), de rassembler tous les termes correspondant à  $(i_1, i_2)$  fixés dans l'expression :

$$- (p_{i_1-} + p_{i_2-}) (p_{i_3+} + p_{i_4+}) 2\pi \log \Lambda \quad (3.115)$$

Posons  $(a, b)_\pm \equiv (p_a + p_b)_\pm$  pour écrire le résultat final

$$\begin{aligned} \Sigma_4^\Lambda &= - [(1, 2)_- (3, 4)_+ + (1, 3)_- (2, 4)_+ + (1, 4)_- (2, 3)_+ + ((a, b)_+ \leftrightarrow (a, b)_-)] 2\pi \log \Lambda \\ &= - [2p_{1-} (p_{2+} + p_{3+} + p_{4+} + \text{circ}(1, 2, 3, 4))] \\ \Sigma_4^\Lambda &= 4\pi \log \Lambda \sum_{i=1}^4 p_{i+} p_{i-}, \end{aligned} \quad (3.116)$$

où  $(a, b)_+ \leftrightarrow (a, b)_-$  signifie qu'on reprend les termes en intervertissant les composantes + et - et  $\text{circ}(1, 2, 3, 4)$  désigne les permutations circulaires des moments externes.

–  $n_1 = 2$

$$I_4^\Lambda = -p_{i_1-} p_{i_4+} 2\pi \log \Lambda \quad (3.117)$$

Comme dans le cas  $n = 3$ , la somme des configurations pour  $i_1$  fixé va faire apparaître la somme des composantes + des  $n_2 + 1$  moments externes de droite, mais également un facteur 2 dû à la liberté de choix pour placer  $p_{i_2}$  et  $p_{i_3}$ , qui encore une fois, compense  $c_4$ .  $\Sigma_4^\Lambda$  vaut donc

$$\begin{aligned} \Sigma_4^\Lambda &= [p_{1-} (p_{2+} + p_{3+} + p_{4+}) + \text{circ}(1, 2, 3, 4)] 2\pi \log \Lambda \\ \Sigma_4^\Lambda &= -2\pi \log \Lambda \sum_{i=1}^4 p_{i+} p_{i-}. \end{aligned} \quad (3.118)$$

A nouveau, la somme de tous ces diagrammes s'annule. De manière assez évidente, on s'attend à trouver un résultat nul dans le cas où  $n$  est quelconque et nous pouvons tenter de tirer des exemples précédents quelques pistes pour appréhender au mieux les calculs. La première remarque que l'on peut faire est que la somme des carrés  $p_{i+} p_{i-}$  de tous les moments externes est en facteur quelle que soit leur répartition sur les pattes externes ; on va donc chercher à la faire apparaître. De plus, les factorielles provenant du développement des exponentielles du vertex semblent être compensées par les permutations qui ne modifient pas la valeur de  $I_4^\Lambda$ . Réécrivons cette dernière :

$$I_4^\Lambda = -p_{i_n+} \sum_{r=1}^{n_1-1} p_{i_r-} 2\pi \log \Lambda,$$

et notons  $J_1 = \{i_1, \dots, i_{n_1-1}\}$  et  $J_2 = \{i_{n_1}, \dots, i_n\}$  les sous-ensembles de  $J = \{i_1, \dots, i_n\}$  correspondant respectivement aux moments connectés aux  $n_1 - 1$  et aux  $n_2 + 1$  pattes externes du vertex. Rappelons que considérer toutes les configurations possibles revient pour chaque valeur de  $n_1$  permise à une somme sur les permutations  $J$  à  $n_1$  fixé. On peut dégager deux types parmi celles-ci en fonction de leur effet sur  $I_4^\Lambda$ . Certaines la laissent invariante : ce sont les permutations qui agissent séparément sur  $J_1$  et  $J_2 - \{i_n\}$  et qui représentent les différentes possibilités de connecter les moments avec les pattes externes neutres situées à gauche et à droite du vertex (3.74). Elles donnent les facteurs combinatoires  $A_{n_1-1}^{n_1-1}$  et  $A_{n_2}^{n_2}$ . Le second type comprend, bien entendu, les permutations qui modifient  $I_4^\Lambda$  et ceci de deux façons : soit en changeant  $p_{i_n}$  soit en mélangeant  $J_1$  et  $J_2 - \{i_n\}$  ce qui affecte  $\sum p_{i_r-}$ . Elles se regroupent selon la valeur de  $i \equiv i_n$  :  $i$  va prendre toutes les valeurs de 1 à  $n$  et, pour chaque, la somme sur les configurations se réduit à une somme sur les permutations qui répartissent différemment les  $n - 1$  moments restants entre  $J_1$  et  $J_2 - \{i\}$  et que nous appelons  $\sum_i'$ . D'après tous ces éléments  $\Sigma_4^\Lambda$  devient donc :

$$\begin{aligned}
\Sigma_4^\Lambda &= \sum_{n_1=2}^n \sum_J c_4 I_4^\Lambda \\
&= \sum_{n_1=2}^n -\frac{(-1)^{n_1}}{(n_1-1)!n_2!} (n_1-1)!n_2! \left( -\sum_{i=1}^n p_{i+} \sum_{i_n}' \sum_{s=1}^{n_1-1} p_{i_s-} \right) 2\pi \log \Lambda \\
\Sigma_4^\Lambda &= 2\pi \log \Lambda \sum_{n'_1=0}^{n-2} (-1)^{n'_1} \sum_{i=1}^n p_{i+} \sum_i' \sum_{s=1}^{n'_1+1} p_{i_s-} \quad \Leftarrow (n'_1 = n_1 - 2). \quad (3.119)
\end{aligned}$$

A  $i$  fixé, un indice  $j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$  va se retrouver  $C_{n-2}^{n'_1}$  fois dans  $J_1$ , ce qui permet d'écrire l'équation

$$\sum_{i=1}^n p_{i+} \sum_i' \sum_{r=1}^{n'_1+1} p_{i_r-} = C_{n-2}^{n'_1} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} p_{i+} p_{j-} \quad (3.120)$$

que l'on insère dans (3.119)

$$\begin{aligned}
\Sigma_4^\Lambda &= 2\pi \log \Lambda \sum_{n_1=0}^{n-2} (-1)^{n'_1} C_{n-2}^{n'_1} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} p_{i+} p_{j-} \\
&= -2\pi \log \Lambda \sum_{i=1}^n p_{i+} p_{i-} \sum_{n'_1=0}^{n-2} (-1)^{n'_1} C_{n-2}^{n'_1} \quad \Leftarrow (3.99) \quad (3.121)
\end{aligned}$$

$$(3.122)$$

Or on reconnaît un développement binomial

$$\sum_{n'_1=0}^{n-2} (-1)^{n'_1} C_{n-2}^{n'_1} = \sum_{n'_1=0}^{n-2} C_{n-2}^{n'_1} (-1)^{n'_1} 1^{n-2-n'_1} = (1-1)^{n-2} \quad (3.123)$$

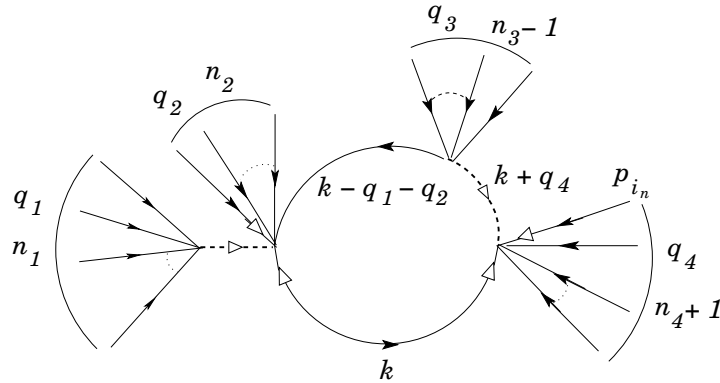
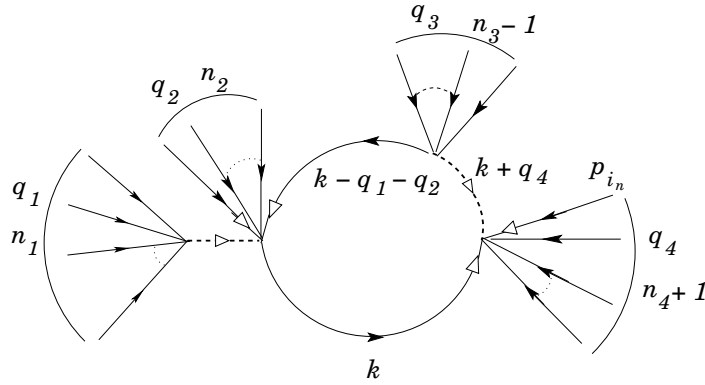
et donc

$$\Sigma_4^\Lambda = \begin{cases} 0, & n \geq 3 \\ -4\pi p_+ p_- \log \Lambda & n = 2 \end{cases} \quad (3.124)$$

Ce résultat confirme bien l'impression évoquée plus haut qu'intervient à chaque ordre  $n \geq 3$  une compensation systématique des contributions à ce graphe de Feynman. Fort des techniques développées dans l'étude de cet exemple, tournons-nous maintenant vers les diagrammes restants.

### 3.2.3 Compensations

Parmi les graphes qu'il reste à étudier, certains n'ont pas besoin d'être calculés complètement car on peut déduire facilement qu'ils se compensent deux à deux. Intéressons-nous en premier lieu aux graphes  $G_6$  et  $G_7$  :



$$n = n_1 + n_2 - 1 + 1 + n_3 - 1 + n_4 + 1 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4,$$

$$q_1 = \sum_{a=1}^{n_1} p_{i_a}, \quad q_2 = \sum_{b=n_1+1}^{n_1+n_2} p_{i_b}, \quad q_3 = \sum_{c=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3-1} p_{i_c}, \quad q_4 = \sum_{d=n-n_4}^n p_{i_d}$$

Ici et dans la suite  $n_1$  et  $n_3$  correspondent au développement de  $e^{-v} - 1$  et sont supérieurs à 1,  $n_2$  et  $n_4$  à celui de  $e^v$ . De plus,  $n_2 \geq 1$ . On a défini  $J \equiv \{\{J_1\}, \{J_2\}, \{J_3\}, \{J_4\}\} \equiv \{\{i_a\}, \{i_b\}, \{i_c\}, \{i_d\}\}$ , les permutations de  $\{1, \dots, n\}$ .  $G_6$  et  $G_7$  ont un "habillage externe"

identique, i.e. une même répartition des moments externes sur les pattes chargées et neutres, et donc les mêmes facteurs devant l'intégrale de boucle :

$$c_6 = c_7 = (-i)^2 \times (-i)^4 \times i^2 \frac{1}{4} \frac{(-1)^{n_1} (-1)^{n_3}}{n_1! n_2! n_3! n_4!} 2 \times 2 \times n_2 n_3$$

$$c_6 = c_7 = \frac{(-1)^{n_1} (-1)^{n_3}}{n_1! (n_2 - 1)! (n_3 - 1)! n_4!} \quad (\text{vertex} \times \text{boucle}) \quad (3.125)$$

$$P_6 = P_7 = \frac{q_{1-}}{q_{1+}} p_{i_n+} p_{i_{n-1}+} \quad (\text{moments externes}) \quad (3.126)$$

Ils ne diffèrent que par les caractéristiques de l'intégrale de boucle qui s'écrit dans chacun des cas :

$$I_6 = \int d^2k \frac{k_+}{k^2 + m^2} \frac{(k - q_1 - q_2)_+}{(k - q_1 - q_2)^2 + m^2} \frac{(k + q_4)_-}{(k + q_4)_+} \quad (3.127)$$

$$I_7 = \int d^2k \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{-k_+^2}{(k - q_1 - q_2)^2 + m^2} \frac{(k + q_4)_-}{(k + q_4)_+} \quad (3.128)$$

D'après la fin de la section 3.2.1,  $n_+ = 2n_-$ ,  $\delta = \nu = 0$  pour ces diagrammes donc le seul terme non nul de (3.83) à la limite asymptotique est le terme dominant, indépendant des moments externes, et les intégrales deviennent :

$$I_6^\Lambda = 2\pi \log \Lambda \quad (3.129)$$

$$I_7^\Lambda = -2\pi \log \Lambda \quad (3.130)$$

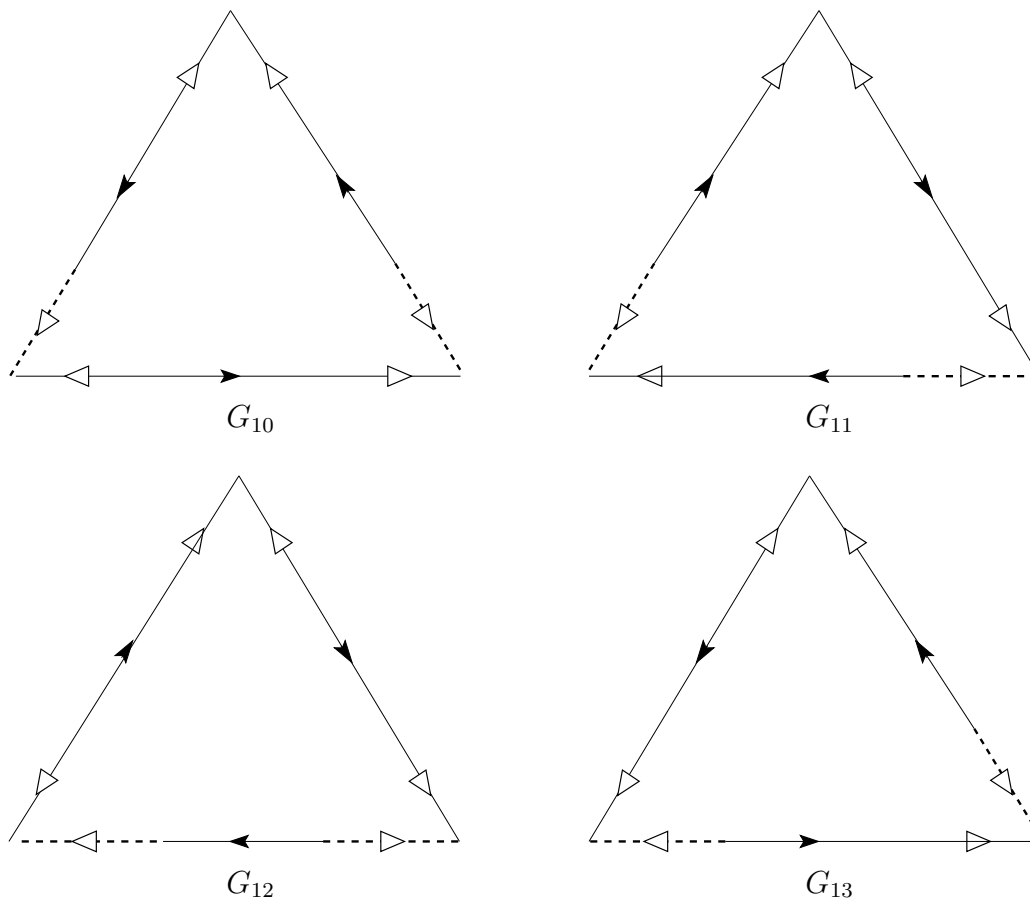
Ces graphes ont des valeurs opposées pour un choix de  $n_1, n_2, n_3$  et  $n_4$  et une répartition des moments externes donnée donc la somme sur les configurations est évidemment nulle.

Cherchons à analyser un peu plus la raison de cette compensation. La seule différence entre les diagrammes 6 et 7 réside dans la position d'une patte interne chargée qui donne les facteurs  $(k - q_1 - q_2)_+$  et  $-k_+$  dans (3.127) et (3.128) respectivement. Le signe "-" dans le deuxième cas vient du fait que cette patte n'est pas dans le sens du flot de moment (cf. (3.9)). Or nous sommes dans un cas où seul subsiste le terme dominant de l'intégrale de boucle à la limite asymptotique et ce terme ne dépend pas du détail des moments externes. Ceci implique que les valeurs précises des moments qui circulent dans la boucle n'importent pas et que l'intégrale de boucle vaudra dans ce genre de situation :

$$I^\Lambda = (-1)^s 2\pi \log \Lambda \quad (3.131)$$

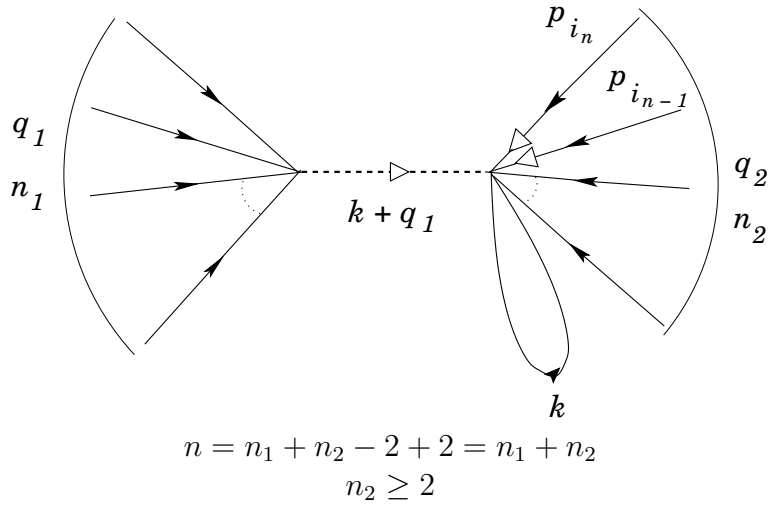
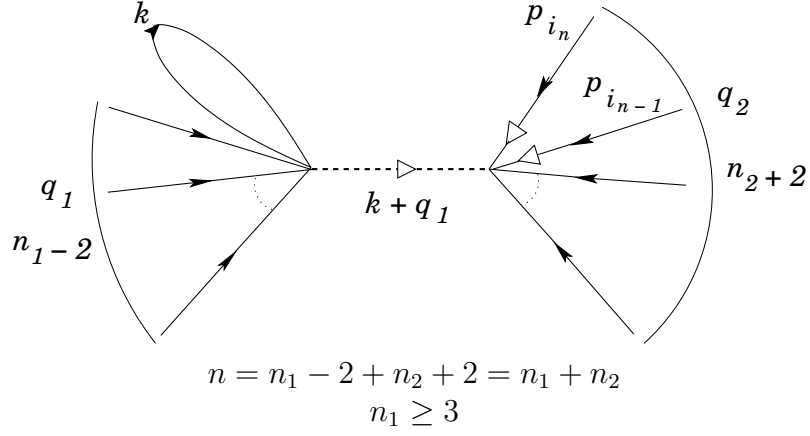
où  $s$  est le nombre de pattes internes chargées qui vont à l'encontre du flot de moment.

On peut appliquer ce raisonnement pour les diagrammes



pour lesquels  $n_+ = 2n_-$ . En effet, tous ont le même habillage externe et (3.131) vaut  $2\pi \log \Lambda$  pour les graphes  $G_{10}$  et  $G_{12}$  et  $-2\pi \log \Lambda$  pour les graphes  $G_{11}$  et  $G_{13}$ . Encore une fois, la somme de ces diagrammes s'annule pour  $n$  fixé et une répartition donnée des moments externes.

Etudions ensuite  $G_1$  et  $G_2$ .



Encore une fois,  $J = \{i_1, \dots, i_n\}$  est une permutation des indices des moments et

$$J = \{i_1, \dots, i_{n_1-2}\}, \quad J = \{i_{n_1-1}, \dots, i_n\} \quad \text{graphe 1} \quad (3.132)$$

$$J = \{i_1, \dots, i_{n_1}\}, \quad J = \{i_{n_1+1}, \dots, i_n\} \quad \text{graphe 2} \quad (3.133)$$

L'intégrale de boucle vaut dans les deux cas

$$I_1 = I_2 = \int \frac{d^2k}{k^2 + m^2} = \int d\rho d\theta \frac{\rho}{\rho^2 + m^2} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} I_1^\Lambda = I_2^\Lambda = 2\pi \log \Lambda \quad (3.134)$$

et les coefficients  $c_1$  et  $c_2$  sont donnés par

$$c_1 = -\frac{1}{2} \frac{(-1)^{n_1}}{n_1! n_2!} C_{n_1}^2 = -\frac{1}{4} \frac{(-1)^{n_1}}{(n_1 - 2)! n_2!}, \quad (3.135)$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} \frac{(-1)^{n_1}}{n_1! n_2!} C_{n_2}^2 = -\frac{1}{4} \frac{(-1)^{n_1}}{n_1! (n_2 - 2)!}. \quad (3.136)$$

Les facteurs  $C_{n_1}^2$  et  $C_{n_2}^2$  représentent le nombre de possibilités de former la boucle avec  $n_1$  et  $n_2$  pattes du vertex respectivement. Parmi toutes les configurations possibles à  $n_1$  fixé, certaines contribuent de manière identique à

$$\Sigma_{1,2}^\Lambda \equiv \sum_{config} c_{1,2} I_{1,2}^\Lambda;$$

elles correspondent aux permutations qui agissent séparément sur  $J_1$  et  $J_2 - \{i_{n-1}, i_n\}$ . Comme dans le cas de  $G_4$ , cela se traduit par l'apparition de facteurs de symétrie :

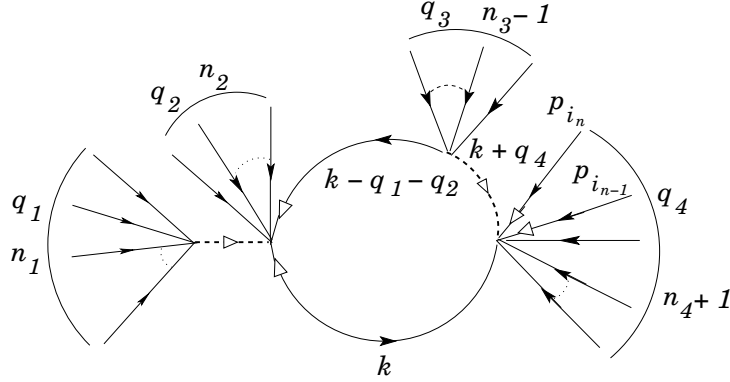
$$\begin{aligned} \Sigma_1^\Lambda &= - \sum_{\substack{n_1=3 \\ n_2=n-n_1}}^n \sum'_{perm} \frac{1}{4} \frac{(-1)^{n_1}}{(n_1 - 2)! n_2!} A_{n_1-2}^{n_1-2} A_{n_2}^{n_2} p_{i_n+p_{i_{n-1}}} + \frac{q_{1-}}{q_{1+}} 2\pi \log \Lambda \\ \Sigma_1^\Lambda &= -\frac{1}{2} \pi \log \Lambda \sum_{\substack{n_1=3 \\ n_2=n-n_1}}^n \sum'_{perm} (-1)^{n_1} p_{i_n+p_{i_{n-1}}} + \frac{q_{1-}}{q_{1+}}, \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2^\Lambda &= - \sum_{\substack{n_1=1 \\ n_2=n-n_1}}^{n-2} \sum'_{perm} \frac{1}{4} \frac{(-1)^{n_1}}{(n_1)! (n_2 - 2)!} A_{n_1}^{n_1} A_{n_2-2}^{n_2-2} p_{i_n+p_{i_{n-1}}} + \frac{q_{1-}}{q_{1+}} 2\pi \log \Lambda \\ \Sigma_2^\Lambda &= -\frac{1}{2} \pi \log \Lambda \sum_{\substack{n_1=1 \\ n_2=n-n_1}}^{n-2} \sum'_{perm} (-1)^{n_1} p_{i_n+p_{i_{n-1}}} + \frac{q_{1-}}{q_{1+}} \end{aligned} \quad (3.138)$$

$\sum'_{perm}$  est la somme sur les permutations restantes, celles qui mélangent  $J_1$  et  $J_2$ . Si l'on définit  $n'_1 = n_1 - 2$  dans (3.137), il apparaît clairement que ces diagrammes sont égaux, notamment car leurs habillages externes sont identiques.



Il n'est pas nécessaire de continuer plus avant le calcul car nous allons maintenant montrer que  $G_8$  compense la somme de  $G_1$  et  $G_2$ .



$$n = n_1 + n_2 - 1 + 1 + n_3 - 1 + n_4 - 1 + 2 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$$

$$n_4 \geq 1$$

$$q_1 = \sum_{a=1}^{n_1} p_{i_a}, \quad q_2 = \sum_{b=n_1+1}^{n_1+n_2} p_{i_b}, \quad q_3 = \sum_{c=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3-1} p_{i_c}, \quad q_4 = \sum_{d=n-n_4}^n p_{i_d}$$

$$J \equiv \{\{J_1\}, \{J_2\}, \{J_3\}, \{J_4\}\} \equiv \{\{i_a\}, \{i_b\}, \{i_c\}, \{i_d\}\}$$

De manière analogue aux diagrammes  $G_6$  et  $G_7$ , les facteurs devant l'intégrale sont ici

$$c_8 = (-i)^2 \times (-i)^4 \times i^2 \frac{1}{4} \frac{(-1)^{n_1} (-1)^{n_3}}{n_1! n_2! n_3! n_4!} 2 \times n_3 n_4$$

$$c_8 = \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n_1} (-1)^{n_3}}{n_1! n_2! (n_3 - 1)! (n_4 - 1)!} \quad (\text{vertex} \times \text{boucle}) \quad (3.139)$$

$$P_8 = \frac{q_{1-}}{q_{1+}} p_{i_{n+}} p_{i_{n-1+}} \quad (\text{moments externes}) \quad (3.140)$$

Nous sommes à nouveau dans le cas où  $n_+ = 2n_-$  donc nous pouvons nous servir de (3.131) et de la discussion qui précède cette identité pour affirmer que

$$I_8^\Lambda = -2\pi \log \Lambda. \quad (3.141)$$

Comme nous commençons à en avoir l'habitude, la somme sur un certain nombre de configurations, celles qui ne modifient pas  $\{J_1\}$ ,  $\{J_2\}$ ,  $\{J_3\}$  et  $\{J_4\}$ , va faire apparaître des facteurs de symétrie :

$$\begin{aligned}
 \Sigma_8^\Lambda &= \sum_{n_1=1}^{n-2} \sum_{\substack{n_4=1 \\ n_2=n-n_1-n_4-n_3}}^{n-n_1-1} \sum_{n_3=1}^{n-n_1-n_4} \sum'_{perm} \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n_1}(-1)^{n_3}}{n_1!n_2!(n_3-1)!(n_4-1)!} \\
 &\quad \times A_{n_1}^{n_1} A_{n_2}^{n_2} A_{n_3-1}^{n_3-1} A_{n_4-1}^{n_4-1} p_{i_n+p_{i_{n-1}}} \frac{q_{1-}}{q_{1+}} (-2\pi \log \Lambda) \\
 \Sigma_8^\Lambda &= -\pi \log \Lambda \sum_{n_1=1}^{n-2} \sum_{\substack{n_4=1 \\ n_2=n-n_1-n_4-n_3}}^{n-n_1-1} \sum_{n_3=1}^{n-n_1-n_4} \sum'_{perm} (-1)^{n_1}(-1)^{n_3} p_{i_n+p_{i_{n-1}}} \frac{q_{1-}}{q_{1+}} \quad (3.142)
 \end{aligned}$$

où  $\sum'_{perm}$  est toujours la somme sur les permutations restantes, celles qui modifient au moins deux des ensembles d'indices  $J_s$ ,  $s = 1, 2, 3, 4$ . Parmi celles-ci, les permutations qui laissent invariant  $J_1$  et  $J_4$  et qui échangent des indices uniquement entre  $J_2$  et  $J_3$  ne modifient pas non plus l'argument des sommes de l'expression précédente.  $\sum'_{perm}$  se décompose

$$\sum'_{perm} = C_{n-n_1-n_4-1}^{n_3-1} \sum''_{perm} \quad (3.143)$$

Le facteur combinatoire représente le nombre de manières de choisir  $n_3 - 1$  moments parmi  $n - n_1 - n_4 - 1$  lorsque  $n_1$  et  $n_4$  sont fixés et  $\sum''_{perm}$  rassemble le reste des permutations.  $\Sigma_8^\Lambda$  devient alors

$$\Sigma_8^\Lambda = -\pi \log \Lambda \sum_{n_1=1}^{n-2} \sum_{\substack{n_4=1 \\ n_2=n-n_1-n_4-n_3}}^{n-n_1-1} \sum_{n_3=1}^{n-n_1-n_4} C_{n-n_1-n_4-1}^{n_3-1} (-1)^{n_3} \sum''_{perm} (-1)^{n_1} p_{i_n+p_{i_{n-1}}} \frac{q_{1-}}{q_{1+}}. \quad (3.144)$$

Il faut remarquer que

$$\begin{aligned}
 \sum_{n_3=1}^{n-n_1-n_4} C_{n-n_1-n_4-1}^{n_3-1} (-1)^{n_3} &= - \sum_{n_3=1}^{n-n_1-n_4} C_{n-n_1-n_4-1}^{n_3-1} (-1)^{n_3-1} 1^{n_2} \\
 &= -(1-1)^{n-n_1-n_4-1} = \begin{cases} -1 & n = n_1 + n_4 + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.145)
 \end{aligned}$$

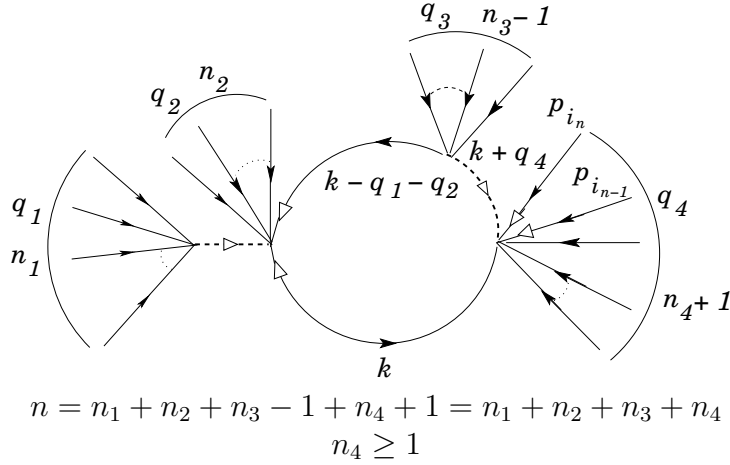
La seule possibilité pour que (3.144) ne s'annule pas est donc  $n = n_1 + n_4 + 1$ , ce qui implique  $n_2 + n_3 = 1$ . Comme  $n_3 \geq 1$ , tout ceci fixe  $n_2 = 0$  et  $n_3 = 1$  et finalement

$$\Sigma_8^\Lambda = -\pi \log \Lambda \sum_{\substack{n_1=1 \\ n_4=n-n_1-1}}^{n-2} \sum''_{perm} (-1)^{n_1} p_{i_n+p_{i_{n-1}}} \frac{q_{1-}}{q_{1+}}. \quad (3.146)$$

A cause de la restriction sur  $n_2$  et  $n_3$ , les seules permutations à prendre en compte dans  $\sum_{perm}''$  sont celles qui mélangent  $J_1$  et  $J_4$ . Dès lors, si l'on identifie le  $n_2$  de (3.137)-(3.138) à  $n_4 + 1$  dans (3.146), il devient évident que

$$\Sigma_1^\Lambda + \Sigma_2^\Lambda + \Sigma_8^\Lambda = 0. \quad (3.147)$$

Il ne nous manque plus que le calcul de  $G_9$  et un petit peu de courage pour terminer cette étude des corrections quantiques au premier ordre du Lagrangien (3.72). Heureusement, tous les raisonnements nécessaires à ce calcul ont déjà été rencontrés donc nous allons nous référer à ce qui a été fait précédemment, chaque fois que cela sera possible. Rappelons à quoi ressemble le graphe  $G_9$  en précisant ses caractéristiques :



$$q_1 = \sum_{a=1}^{n_1} p_{i_a}, \quad q_2 = \sum_{b=n_1+1}^{n_1+n_2} p_{i_b}, \quad q_3 = \sum_{c=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3-1} p_{i_c}, \quad q_4 = \sum_{d=n-n_4}^n p_{i_d}$$

$$J \equiv \{\{J_1\}, \{J_2\}, \{J_3\}, \{J_4\}\} \equiv \{\{i_a\}, \{i_b\}, \{i_c\}, \{i_d\}\}$$

Les facteurs par lesquels on doit multiplier l'intégrale de boucle sont :

$$c_9 = \frac{1}{4} \frac{(-1)^{n_1} (-1)^{n_3}}{n_1! n_2! n_3! n_4!} 2 \times 2 \times n_3$$

$$c_9 = \frac{(-1)^{n_1} (-1)^{n_3}}{n_1! n_2! (n_3 - 1)! n_4!} \quad (\text{vertex} \times \text{boucle}) \quad (3.148)$$

$$P_9 = \frac{q_{1-}}{q_{1+}} p_{i_{n+}} \quad (\text{moments externes}) \quad (3.149)$$

et elle vaut

$$\begin{aligned}
 I_9 &= \int d^2k \frac{-k_+^2}{k^2 + m^2} \frac{(k - q_1 - q_2)_+}{(k - q_1 - q_2)^2 + m^2} \frac{(k + q_4)_-}{(k + q_4)_+} \\
 I_9 &\xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} - \int^\Lambda d\rho \oint d\theta e^{i\theta} \left( 1 - \frac{(q_1 + q_2)_+}{\rho} e^{-i\theta} \right) \\
 &\quad \left( 1 + \frac{q_{4-}}{\rho} e^{i\theta} \right) \left( 1 - \frac{q_{4+}}{\rho} e^{-i\theta} \right) \left( 1 + \frac{(q_1 + q_2)_+ e^{-i\theta} + (q_1 + q_2)_- e^{i\theta}}{\rho} \right) \quad (3.150)
 \end{aligned}$$

On sait que les seuls termes non nuls dans ce cas sont ceux pour lesquels  $\nu = -1$  et l'on obtient au final

$$\begin{aligned}
 I_9^\Lambda &= -2\pi \log \Lambda \left( -(q_1 + q_2)_+ - q_{4+} + (q_1 + q_2)_+ \right) \\
 I_9^\Lambda &= 2\pi \log \Lambda q_{4+}. \quad (3.151)
 \end{aligned}$$

De manière tout à fait analogue à (3.142), les facteurs combinatoires dus aux permutations qui laissent les  $J_s$ ,  $s = 1, 2, 3, 4$  invariants compensent les factorielles de  $c_9$  et

$$\Sigma_9^\Lambda = 2\pi \log \Lambda \sum_{n_1=1}^{n-1} \sum_{\substack{n_4=0 \\ n_2=n-n_1-n_4-n_3}}^{n-n_1-1} \sum_{n_3=1}^{n-n_1-n_4} \sum'_{perm} (-1)^{n_1} (-1)^{n_3} p_{i_n+q_{4+}} \frac{q_{1-}}{q_{1+}} \quad (3.152)$$

Là encore, l'identité (3.143) est valable et il est possible de montrer que  $n_3 = 1$  et  $n_2 = 0$ . Ceci implique que  $q_4 = -q_1$  et  $\Sigma_9^\Lambda$  s'écrit

$$\Sigma_9^\Lambda = 2\pi \log \Lambda \sum_{\substack{n_1=1 \\ n_4=n-n_1-1}}^{n-1} \sum''_{perm} (-1)^{n_1} p_{i_n+q_{1-}} \quad (3.153)$$

$$\Sigma_9^\Lambda = -2\pi \log \Lambda \sum_{\substack{n'_1=0 \\ n_4=n-n'_1}}^{n-1} \sum''_{perm} (-1)^{n'_1} p_{i_n+q_{1-}} \quad (n'_1 = n_1 - 1) \quad (3.154)$$

Et là, miracle! On se trouve exactement avec la même expression que (3.119) pour peu que l'on identifie  $n_4 - 1$  à  $n_2$  et que l'on remarque que la somme  $\sum''_{perm}$  est identique à

$\sum_i \sum_i'$  dans le cas de  $G_4$ . Cela permet d'appliquer le raisonnement qui suit (3.119) et d'obtenir

$$\Sigma_9^\Lambda = \begin{cases} 4\pi p_+ p_- \log \Lambda, & n = 2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases} . \quad (3.155)$$

Finalement, ce dernier diagramme est nul, sauf lorsque  $n = 2$ , valeur pour laquelle il compense (3.124).

Le résultat de cette investigation est donc que la somme de toutes les contributions du vertex (3.73) aux corrections quantiques à une boucle s'annule de manière inattendue à tous les ordres en  $n$ . Il semble donc que le modèle défini par le Lagrangien (3.72) se comporte au niveau quantique comme le modèle de sinh-Gordon, à partir duquel il a été obtenu par une transformation du type (1.41). Dans ce cas précis, cette transformation d'espace-temps ne modifie apparemment pas les propriétés de renormalisation usuelles des modèles intégrables à deux dimensions. Cependant, cette avalanche de compensations miraculeuses des diagrammes à une boucle est due essentiellement aux propriétés de symétrie et à la simplicité de la fonction  $F$  obtenue à partir du potentiel de sinh-Gordon et il y a fort à parier que la situation est plus compliquée dans les cas que nous avons rencontré dans le chapitre 2. Affaire à suivre.

---

## Conclusions et perspectives

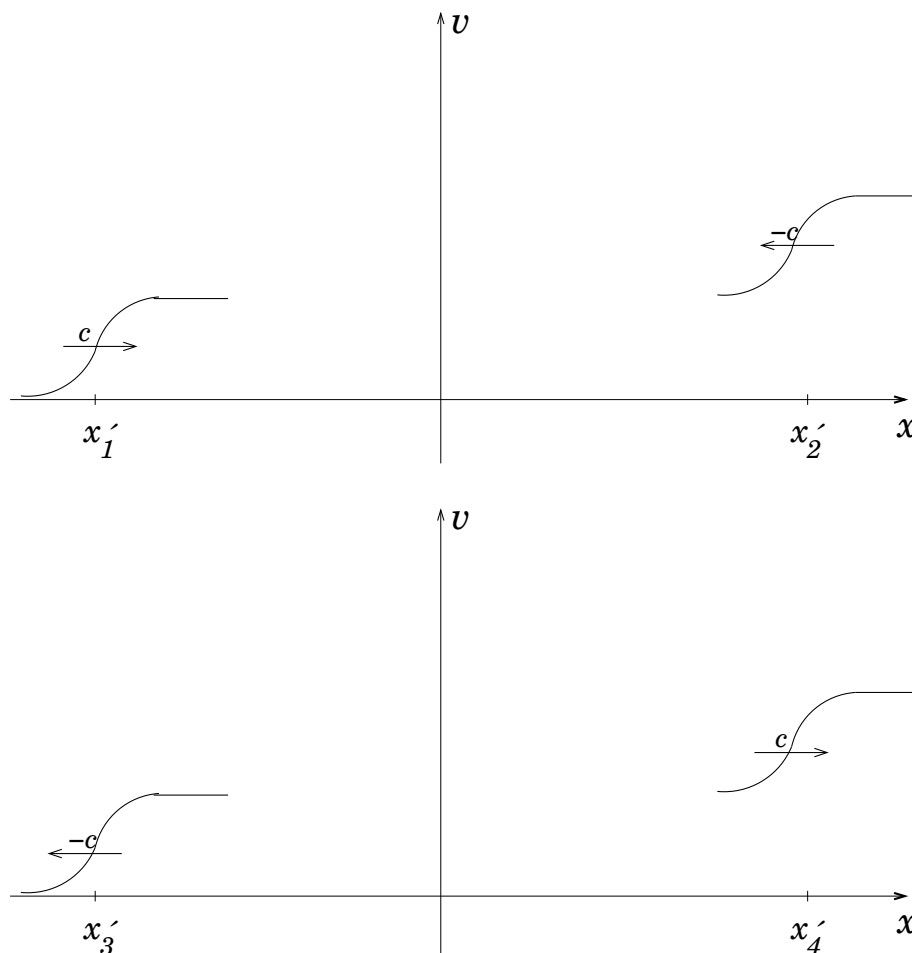
Au cours de cette première partie, nous avons pu avoir un infime aperçu de la richesse et de la grande multiplicité de ce que désignent aujourd'hui les termes "systèmes intégrables". Partis de la description de la dynamique d'ondes courtes à la surface d'un fluide, nous sommes arrivés au calcul de corrections quantiques au modèle de sinh-Gordon dans un espace-temps dont la métrique est influencée par la présence des champs. Tous les résultats et développements rencontrés entre ces extrémités reposent sur une constante : l'existence d'une relation en deux étapes, une transformation de champ et une d'espace-temps, entre une équation de type hydrodynamique pour un champ  $u$  et un modèle décrivant un champ scalaire relativiste  $v$ .

Le nouveau système intégrable découvert par Miguel Manna et André Neveu dans le cadre de la *shallow water theory* n'aurait pas engendré tant de développements s'il n'avait été lié à sinh/sine-Gordon. Il aurait été plus difficile d'appréhender les caractéristiques particulières de ses solutions singulières et multivaluées en se passant de cette référence et l'idée d'étudier une nouvelle version de sine-Gordon dans une métrique modifiée, contenant, elle aussi, des champs multivalués, n'aurait bien évidemment jamais vu le jour. Par la suite, l'apparition d'une nouvelle relation de ce type, jumelle de celle que nous avons déjà observée, et les extensions à deux paramètres de ces deux cas décrites en 2.1.2 et 2.1.3, nous ont poussé à chercher une formulation plus générale pour dégager l'essence de ces transformations dans le cas relativiste. En 2.3, nous avons exposé une autre direction pour étendre ce genre de constructions en créant une nouvelle équation pour  $u$  mélangeant les deux premières équations rencontrées. A l'inverse de tous les autres cas, le résultat n'est plus invariant de Lorentz, ce qui nous a fait douter de la possibilité de trouver un lien avec un modèle de champ scalaire relativiste. Pourtant, là encore, ce lien existe et se manifeste de façon surprenante, faisant apparaître une transformation de Bäcklund. La volonté d'explorer les aspects quantiques des modèles de champs multivalués est venue naturellement compléter cette étude.

Cependant, il reste encore beaucoup à faire pour comprendre pleinement ce qui a seulement été esquissé dans cette partie car des questions troublantes sont toujours en suspens. La plus importante est certainement celle de la non-invariance par parité, ou renversement de l'espace, des équations en  $u$  ou des Lagrangiens pour les champs relativistes multivalués. Alors qu'elle n'a rien d'inhabituel en hydrodynamique, cette situation pose des problèmes en théorie des champs, et, dans notre cas, ces problèmes se manifestent notamment dans la diffusion de deux solitons. En effet, si l'on considère la fonction de diffusion de sine-Gordon dans les limites  $t' \rightarrow \pm\infty$ , on obtient dans les deux cas un

---

soliton à chaque extrémité de l'espace, de centres  $x'_1$  et  $x'_2$ , et  $x'_3$  et  $x'_4$  respectivement :



Lorsque que l'on passe aux coordonnées non primées, il faut tenir compte pour  $x_2$  et  $x_4$  de la présence des solitons en  $x_1$  et  $x_3$  d'après la forme de la transformation, et ces contributions dépendent du signe de la vitesse et les décalages diffèrent. Le résultat gênant est que le centre de masse des solitons, supposé fixe, semble s'être déplacé après la diffusion, comme si le système avait acquis une impulsion supplémentaire pendant un temps fini remettant en cause les lois de conservation usuelles.

Une fois ce point éclairci, de nombreuses facettes de ces transformations mériteront une étude approfondie. Comme je l'ai écrit à la fin de 3.2.3, les diagrammes de Feynman à une boucle pour des potentiels autres que celui de sinh-Gordon risquent de ne pas se compenser entraînant des effets quantiques et une renormalisation différents de ce qu'on a l'habitude de voir en théorie des champs en deux dimensions. Au cours notre recherche, nous avons tenté de savoir ce que devient la célèbre équivalence entre les modèles de sine-Gordon et de Thirring dans ce contexte mais sans réel succès. Il serait intéressant de continuer un peu plus loin dans cette direction et, par extension, de trouver comment adapter la transformation d'espace-temps à un Lagrangien de fermions. Enfin, le monde des systèmes intégrables utilise des outils puissants tels les groupes quantiques, les matrices

---

de monodromie ou les perturbations de théories conformes pour n'en citer que quelques uns, qu'il faudrait essayer d'appliquer aux modèles de champs multivalués dont nous avons longuement parlé. A bon entendeur...

---





## Deuxième partie

# Construction de théorie de champs de spins élevés en interaction

---







# Introduction

Depuis longtemps déjà, les théories de jauge suscitent l'intérêt des physiciens et leur représentant le plus célèbre qu'est le champ de Yang-Mills occupe une place fondamentale dans le Modèle Standard sur lequel repose actuellement la physique des particules. Dans le contexte des tentatives d'unification des forces, les motivations pour étudier les champs de spins élevés se sont révélées nombreuses mais des problèmes ont très vite empêché des avancées significatives [26, 27, 28]. Le théorème de Coleman-Mandula [29] et sa généralisation [30] affirment sous certaines conditions que ceux-ci ne peuvent intervenir dans la matrice  $S$ . Cependant, on observe un regain d'intérêt pour ces spins élevés dû aux développements des théories de cordes desquelles ils pourraient être une limite quand la tension de la corde tend vers 0. Des progrès ont été réalisés en contournant les hypothèses de ce théorème, par exemple en se plaçant dans un espace-temps courbe et/ou en introduisant une infinité de champs [31, 32].

Nous présentons ici une construction basée sur ce deuxième principe et vouée à obtenir un Lagrangien pour ces champs en interaction. La méthode la plus souvent rencontrée dans ce genre de démarche est de rechercher la forme des termes d'interaction et des transformations de jauge en partant de la théorie libre et en essayant de préserver l'invariance du Lagrangien ordre par ordre. A l'inverse, nous avons commencé par déterminer les transformations non abéliennes en nous inspirant d'une théorie des champs de cordes dans laquelle apparaît un groupe de jauge mélangeant tous les niveaux de spin lorsque l'on cherche à satisfaire les contraintes de Virasoro [33, 34]. Nous verrons dans le premier chapitre le détail de la construction des éléments du groupe et de leur loi de composition. Dans un second chapitre, nous exposerons la représentation choisie pour les champs, à savoir le groupe lui-même, puis les nouveaux champs obtenus après un développement du spin 2 autour de la métrique de Minkovski. Finalement, nous redéfinirons le spin 3 pour qu'on ne soit pas forcé, dans le cas abélien, d'annuler la trace du paramètre  $\lambda_{\mu\nu}$  intervenant dans sa transformation. Cette redéfinition entraînera l'introduction d'un champ auxiliaire qui permettra d'écrire un Lagrangien pour le spin 2 libre selon une analogie avec un procédé utilisé pour le champ de Yang-Mills.

---



# Chapitre 1

## Le groupe de jauge

### 1.1 Choix du groupe d'après la théorie des cordes

L'approche que nous utilisons se base sur un groupe de jauge  $G$  construit pour contenir les transformations agissant à tous les niveaux de spin. Cette idée vient de la théorie des cordes dans laquelle un champ peut être défini en fonction des coordonnées  $X^\mu$  de la corde, des composantes  $\alpha_m^\mu$  des opérateurs de Virasoro et du vide  $|0\rangle$  par [33, 34] :

$$\Psi[X^\mu] \equiv \left[ \phi + A^\mu \alpha_{1\mu}^\dagger + h^{\mu\nu} \alpha_{1\mu}^\dagger \alpha_{1\nu}^\dagger + (A^\mu)^2 \alpha_{2\mu}^\dagger + \dots \right] |0\rangle \quad (1.1)$$

Suivant cette suggestion, définissons les transformations de jauge locales  $f$  appartenant à ce "méga-groupe" dans un espace-temps à  $D$  dimensions par

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{r=0}^{\infty} \Lambda^{\mu_1 \dots \mu_r}(x) \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} \delta(x - y) \\ &= \Lambda(x) \delta(x - y) + \Lambda^\mu(x) \partial_\mu \delta(x - y) + \Lambda^{\mu_1 \mu_2}(x) \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \delta(x - y) + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

Nous avons utilisé la notation usuelle  $\partial_{\mu_1} \equiv \partial/\partial x^{\mu_1}$  et, sauf mention contraire, ces dérivées partielles se référeront à la coordonnée  $x$  dans la suite. Les  $\Lambda^{\mu_1 \dots \mu_r}$  sont des tenseurs symétriques et se décomposent eux-mêmes suivant

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu_1 \dots \mu_r} &= \sum_{s=0}^{\infty} a_r^s \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_s} \lambda^{\mu_1 \dots \mu_r \nu_1 \dots \nu_s} \\ &= a_r^0 \lambda^{\mu_1 \dots \mu_r} + a_r^1 \partial_{\nu_1} \lambda^{\mu_1 \dots \mu_r \nu_1} + a_r^2 \partial_{\nu_1} \partial_{\nu_2} \lambda^{\mu_1 \dots \mu_r \nu_1 \nu_2} + \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$



où les coefficients  $a_r^s$  sont réels et les  $\lambda^{\mu_1 \dots \mu_r \nu_1 \dots \nu_s}$  sont également des tenseurs symétriques qui correspondent aux paramètres de jauge usuels comme on le verra avec l'exemple des champs de spins 1, 2 et 3. Il est d'ailleurs utile de réécrire les  $\Lambda^{\mu_1 \dots \mu_r}$  en introduisant l'ordre  $n = r + s$  des  $\lambda^{\mu_1 \dots \mu_n}$  :

$$\Lambda^{\mu_1 \dots \mu_r} = \sum_{n=r}^{\infty} a_r^{n-r} \partial_{\mu_{r+1}} \dots \partial_{\mu_n} \lambda^{\mu_1 \dots \mu_n}. \quad (1.4)$$

Dans le cas le plus général,  $f$  et les  $\Lambda^{\mu_1 \dots \mu_r}$  et  $\lambda^{\mu_1 \dots \mu_n}$  sont des matrices qui agissent sur un champ à  $N$  composantes  $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)$  selon

$$\delta\Phi(x) = \int dy f(x, y) \Phi(y). \quad (1.5)$$

ou en termes de composantes

$$\delta\phi_i(x) = \int dy \sum_{j=1}^N f_{ij}(x, y) \phi_j(y). \quad (1.6)$$

Afin de construire un éventuel Lagrangien pour  $\Phi$  invariant sous ces transformations de jauge, il faut notamment que la variation du terme de masse  $\int dx \Phi^\dagger(x) \Phi(x)$  s'annule, ce qui va impliquer une contrainte sur  $f$ . En effet,

$$\begin{aligned} \delta \int dx \Phi^\dagger(x) \Phi(x) &= \int dx [\delta\Phi^\dagger(x) \Phi(x) + \Phi^\dagger(x) \delta\Phi(x)] \\ \delta \int dx \Phi^\dagger(x) \Phi(x) &= \iint dx dy [\Phi^\dagger(y) f^\dagger(x, y) \Phi(x) + \Phi^\dagger(x) f(x, y) \Phi(y)] \end{aligned} \quad (1.7)$$

et, de manière évidente,  $f$  doit être anti-hermitique

$$\iint dx dy \Phi^\dagger(y) f^\dagger(x, y) \Phi(x) = - \iint dx dy \Phi^\dagger(x) f(x, y) \Phi(y). \quad (1.8)$$

Cette contrainte va permettre de préciser les propriétés d'hermiticité des  $\lambda^{\mu_1 \dots \mu_n}$  et de réduire les choix possibles pour les coefficients  $a_r^{n-r}$ , mais pour arriver à en tirer ces informations il faut mettre les deux termes sous une forme qui rende possible une comparaison. La première étape est de s'inspirer de la définition des dérivées de  $\delta(x)$  pour montrer que

$$\begin{aligned}
& \iint dx dy \Phi^\dagger(x) \Lambda^{\mu_1 \dots \mu_r} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} \delta(x-y) \Phi(y) = \\
& \quad (-1)^r \iint dx dy \Phi^\dagger(y) \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} (\Lambda^{\mu_1 \dots \mu_r} \delta(x-y)) \Phi(x) \\
& = (-1)^r \iint dx dy \Phi^\dagger(y) \left( \sum_{i=0}^r C_r^i \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_i} \Lambda^{\mu_1 \dots \mu_r} \partial_{\mu_{i+1}} \dots \partial_{\mu_r} \delta(x-y) \right) \Phi(x), \quad (1.9)
\end{aligned}$$

puis en y insérant (1.4), l'égalité précédente se transforme en

$$\begin{aligned}
& \iint dx dy \Phi^\dagger(x) \Lambda^{\mu_1 \dots \mu_r} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} \delta(x-y) \Phi(y) = \\
& (-1)^r \iint dx dy \Phi^\dagger(y) \left( \sum_{i=0}^r \sum_{n=r}^{\infty} C_r^i a_r^{n-r} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_i} \partial_{\mu_{r+1}} \dots \partial_{\mu_n} \lambda^{\mu_1 \dots \mu_n} \partial_{\mu_{i+1}} \dots \partial_{\mu_r} \delta(x-y) \right) \Phi(x). \quad (1.10)
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc exprimer le membre de droite de (1.8) en fonction des  $\lambda^{\mu_1 \dots \mu_n}$  en sommant (1.10) sur toutes les valeurs de  $r$ . Afin de rendre visible l'ordre des dérivées de  $\delta(x-y)$ , introduisons  $r' = r - i$ . Grâce à la symétrie des indices  $\mu_1, \dots, \mu_n$  et à  $C_r^{r-r'} = C_r^{r'}$ , les quantités dépendant de  $i$  se réécrivent :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^r C_r^i \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_i} \partial_{\mu_{r+1}} \dots \partial_{\mu_n} \lambda^{\mu_1 \dots \mu_n} \partial_{\mu_{i+1}} \dots \partial_{\mu_r} \delta(x-y) = \\
& \quad \sum_{r'=0}^r C_r^{r'} \partial_{\mu_{r'+1}} \dots \partial_{\mu_n} \lambda^{\mu_1 \dots \mu_n} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{r'}} \delta(x-y). \quad (1.11)
\end{aligned}$$

Réarrangeons les différentes sommes selon

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=r}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n, \quad \sum_{r=0}^n \sum_{r'=0}^r = \sum_{r'=0}^n \sum_{r=r'}^n \quad (1.12)$$

pour obtenir une expression pour le membre de droite de (1.8) organisée selon l'ordre  $n$  des  $\lambda^{\mu_1 \dots \mu_n}$  puis les nombres  $r$  et  $r'$  de dérivées appliquées à  $\delta(x-y)$  et à ces tenseurs

$$\begin{aligned}
& \iint dx dy \Phi^\dagger(x) f(x, y) \Phi(y) = \\
& \iint dx dy \Phi^\dagger(y) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r'=0}^n \sum_{r=r'}^n (-1)^r C_r^{r'} a_r^{n-r} \partial_{\mu_{r'+1}} \dots \partial_{\mu_n} \lambda^{\mu_1 \dots \mu_n} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{r'}} \delta(x-y) \right) \Phi(x).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Il reste désormais à mettre le membre de gauche de (1.8) sous une forme similaire ce qui se fait plus simplement.

$$\begin{aligned}
& \iint dx dy \Phi^\dagger(y) f^\dagger(x, y) \Phi(x) \\
& = \iint dx dy \Phi^\dagger(y) \left( \sum_{r'=0}^{\infty} (\Lambda^{\mu_1 \dots \mu_{r'}})^\dagger \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{r'}} \delta(x-y) \right) \Phi(x) \\
& = \iint dx dy \Phi^\dagger(y) \left( \sum_{r'=0}^{\infty} \sum_{n=r'}^{\infty} a_{r'}^{n-r'} \partial_{\mu_{r'+1}} \dots \partial_{\mu_n} (\lambda^{\mu_1 \dots \mu_n})^\dagger \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{r'}} \delta(x-y) \right) \Phi(x)
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Ici également on peut inverser l'ordre des sommes et cette expression devient finalement

$$\begin{aligned}
& \iint dx dy \Phi^\dagger(y) f^\dagger(x, y) \Phi(x) \\
& = \iint dx dy \Phi^\dagger(y) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r'=0}^n a_{r'}^{n-r'} \partial_{\mu_{r'+1}} \dots \partial_{\mu_n} (\lambda^{\mu_1 \dots \mu_n})^\dagger \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{r'}} \delta(x-y) \right) \Phi(x).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

L'invariance du terme de masse sera donc assurée si (1.13) et (1.15) sont opposés, i.e. si, à  $n$  et  $r'$  fixés, l'équation suivante est satisfaite :

$$a_{r'}^{n-r'} \partial_{\mu_{r'+1}} \dots \partial_{\mu_n} (\lambda^{\mu_1 \dots \mu_n})^\dagger + \sum_{r=r'}^n (-1)^r C_r^{r'} a_r^{n-r} \partial_{\mu_{r'+1}} \dots \partial_{\mu_n} \lambda^{\mu_1 \dots \mu_n} = 0. \tag{1.16}$$

Pour ce faire, les propriétés d'hermiticité des  $\lambda^{\mu_1 \dots \mu_n}$  peuvent être choisies de plusieurs façons mais nous retenons la moins restrictive pour  $f$

$$(\lambda^{\mu_1 \dots \mu_n})^\dagger = (-1)^{n+1} \lambda^{\mu_1 \dots \mu_n} \tag{1.17}$$

dans le sens où le maximum de coefficients  $a_{r'}^{n-r'}$  ne sont pas nuls. Ces derniers sont alors les seules inconnues restantes et sont reliées par

$$a_{r'}^{n-r'} (-1)^{n+1} + \sum_{r=r'}^n (-1)^r C_r^{r'} a_r^{n-r} = 0. \quad (1.18)$$

ce qui nous permet de les calculer aux premiers ordres avec une liberté de choix pour certains des  $a_{r'}^{n-r'}$  qui ne sont pas contraints. A l'ordre  $n = 3$ ,  $f$  s'écrit

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \lambda(x) \delta(x - y) \\ &+ \lambda^\mu \partial_\mu \delta(x - y) + \frac{1}{2} \partial_\mu \lambda^\mu \delta(x - y) \\ &+ \lambda^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \delta(x - y) + \partial_\mu \lambda^{\mu\nu} \partial_\nu \delta(x - y) + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \lambda^{\mu\nu} \delta(x - y) \\ &+ \lambda^{\mu\nu\rho} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \delta(x - y) + \frac{3}{2} \partial_\mu \lambda^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \partial_\rho \delta(x - y) \\ &+ \frac{3}{2} \partial_\mu \partial_\nu \lambda^{\mu\nu\rho} \partial_\rho \delta(x - y) + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \lambda^{\mu\nu\rho} \delta(x - y). \end{aligned} \quad (1.19)$$

## 1.2 Loi de composition

Maintenant que nous avons précisé la forme d'un élément du groupe de jauge, étudions la loi de composition de deux de ces éléments, définie par

$$f_{[21]}(x, y) = [f_2, f_1]_G(x, y) \equiv f_2 * f_1(x, y) - f_1 * f_2(x, y), \quad (1.20)$$

où l'on a défini la multiplication  $*$

$$f_2 * f_1(x, y) \equiv \int dz f_2(x, z) f_1(z, y).$$

Le but que l'on cherche à atteindre est d'obtenir la composition des  $\lambda^{\mu_1 \dots \mu_n}$  car c'est par eux qu'on fera l'analogie à chaque ordre avec les champs de jauge usuels.

Il faut dans un premier temps calculer  $f_{[21]}$  en se servant d'identités du type de

$$\begin{aligned} &\int dz \Lambda_2^{\mu_1 \dots \mu_{r_2}} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{r_2}} \delta(x - z) \Lambda_1^{\nu_1 \dots \nu_{r_1}} \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_{r_1}} \delta(z - y) \\ &= \Lambda_2^{\mu_1 \dots \mu_{r_2}} \sum_{i=0}^{r_2} C_{r_2}^i \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_i} \Lambda_1^{\nu_1 \dots \nu_{r_1}} \partial_{\mu_{i+1}} \dots \partial_{\mu_{r_2}} \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_{r_1}} \delta(x - y). \end{aligned} \quad (1.21)$$

puis en tirer les  $\Lambda_{[21]}^{\mu_1 \dots \mu_r}$  qui sont les facteurs des  $\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} \delta(x-y)$ . Nous ne considérons que les termes comprenant au plus une dérivée et nous ne prenons pas en compte les  $\Lambda^{\mu_1 \dots \mu_r}$  ou les  $\lambda^{\mu_1 \dots \mu_n}$  d'ordre supérieur à trois. En effet, ceux-ci interviendront avec deux dérivées ou plus dans la variation d'éventuels termes cinétiques pour les spins  $s \leq 3$  auxquels nous entendons nous limiter pour l'instant. Pour  $r = 0, 1, 2$  et  $3$ , nous trouvons

$$\Lambda_{[21]} = [\Lambda_2, \Lambda_1] + \Lambda_2^\sigma \partial_\sigma \Lambda_1 - \Lambda_1^\sigma \partial_\sigma \Lambda_2, \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{[21]}^\mu &= [\Lambda_2^\mu, \Lambda_1] + [\Lambda_2, \Lambda_1^\mu] + \Lambda_2^\sigma \partial_\sigma \Lambda_1^\mu - \Lambda_1^\sigma \partial_\sigma \Lambda_2^\mu \\ &\quad + 2(\Lambda_2^{\mu\sigma} \partial_\sigma \Lambda_1 - \Lambda_1^{\mu\sigma} \partial_\sigma \Lambda_2), \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{[21]}^{\mu\nu} &= [\Lambda_2^{\mu\nu}, \Lambda_1] + [\Lambda_2, \Lambda_1^{\mu\nu}] + \frac{1}{2}([\Lambda_2^\mu, \Lambda_1^\nu] + [\Lambda_2^\nu, \Lambda_1^\mu]) \\ &\quad + \Lambda_2^\sigma \partial_\sigma \Lambda_1^{\mu\nu} - \Lambda_1^\sigma \partial_\sigma \Lambda_2^{\mu\nu} + \Lambda_2^{\mu\sigma} \partial_\sigma \Lambda_1^\nu + \Lambda_2^{\nu\sigma} \partial_\sigma \Lambda_1^\mu \\ &\quad - \Lambda_1^{\mu\sigma} \partial_\sigma \Lambda_2^\nu - \Lambda_1^{\nu\sigma} \partial_\sigma \Lambda_2^\mu + 3(\Lambda_2^{\mu\nu\sigma} \partial_\sigma \Lambda_1 - \Lambda_1^{\mu\nu\sigma} \partial_\sigma \Lambda_2), \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{[21]}^{\mu\nu\rho} &= [\Lambda_2^{\mu\nu\rho}, \Lambda_1] + [\Lambda_2, \Lambda_1^{\mu\nu\rho}] \\ &\quad + \frac{1}{3}([\Lambda_2^{\mu\nu}, \Lambda_1^\rho] + [\Lambda_2^{\nu\rho}, \Lambda_1^\mu] + [\Lambda_2^{\rho\mu}, \Lambda_1^\nu]) \\ &\quad + \frac{1}{3}([\Lambda_2^\mu, \Lambda_1^{\nu\rho}] + [\Lambda_2^\nu, \Lambda_1^{\rho\mu}] + [\Lambda_2^\rho, \Lambda_1^{\mu\nu}]) \\ &\quad + \Lambda_2^\sigma \partial_\sigma \Lambda_1^{\mu\nu\rho} - \Lambda_1^\sigma \partial_\sigma \Lambda_2^{\mu\nu\rho} \\ &\quad + \frac{2}{3}(\Lambda_2^{\mu\sigma} \partial_\sigma \Lambda_1^{\nu\rho} + \Lambda_2^{\nu\sigma} \partial_\sigma \Lambda_1^{\rho\mu} + \Lambda_2^{\rho\sigma} \partial_\sigma \Lambda_1^{\mu\nu}) \\ &\quad - \frac{2}{3}(\Lambda_1^{\mu\sigma} \partial_\sigma \Lambda_2^{\nu\rho} + \Lambda_1^{\nu\sigma} \partial_\sigma \Lambda_2^{\rho\mu} + \Lambda_1^{\rho\sigma} \partial_\sigma \Lambda_2^{\mu\nu}) \\ &\quad + \Lambda_2^{\mu\nu\sigma} \partial_\sigma \Lambda_1^\rho + \Lambda_2^{\nu\rho\sigma} \partial_\sigma \Lambda_1^\mu + \Lambda_2^{\rho\mu\sigma} \partial_\sigma \Lambda_1^\nu \\ &\quad - \Lambda_1^{\mu\nu\sigma} \partial_\sigma \Lambda_2^\rho - \Lambda_1^{\nu\rho\sigma} \partial_\sigma \Lambda_2^\mu - \Lambda_1^{\rho\mu\sigma} \partial_\sigma \Lambda_2^\nu. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Le crochet  $[A, B]$  représente ici un commutateur, par opposition à (1.20) où il désigne la composition dans le groupe de jauge. L'étape suivante est de remplacer  $\Lambda_1^{\mu_1 \dots \mu_r}$  et  $\Lambda_2^{\mu_1 \dots \mu_r}$  par leurs expressions respectives en fonction des  $\lambda^{\mu_1 \dots \mu_n}$  puis de séparer les termes qui sont des dérivées totales et ceux qui n'en sont pas, afin de mettre les  $\Lambda_{[21]}^{\mu_1 \dots \mu_r}$  sous la forme

$$\Lambda_{[21]}^{\mu_1 \dots \mu_r} = a_r^0 \lambda_{[21]}^{\mu_1 \dots \mu_r} + a_r^1 \partial_{\mu_{r+1}} \lambda_{[21]}^{\mu_1 \dots \mu_r \mu_{r+1}} \quad (1.26)$$

de laquelle on tire les  $\lambda_{[21]}^{\mu_1 \dots \mu_n}$ . Ces longs et quelque peu fastidieux calculs nous mènent finalement à

$$\lambda_{[21]} = [\lambda_2, \lambda_1] + \frac{1}{2} (\{\lambda_2^\sigma, \partial_\sigma \lambda_1\} - \{\lambda_1^\sigma, \partial_\sigma \lambda_2\}), \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{[21]}^\mu &= [\lambda_2^\mu, \lambda_1] + [\lambda_2, \lambda_1^\mu] + \{\lambda_2^{\mu\sigma}, \partial_\sigma \lambda_1\} - \{\lambda_1^{\mu\sigma}, \partial_\sigma \lambda_2\} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\{\lambda_2^\sigma, \partial_\sigma \lambda_1^\mu\} - \{\lambda_1^\sigma, \partial_\sigma \lambda_2^\mu\}), \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{[21]}^{\mu\nu} &= [\lambda_2^{\mu\nu}, \lambda_1] + [\lambda_2, \lambda_1^{\mu\nu}] + \frac{1}{2} ([\lambda_2^\mu, \lambda_1^\nu] + [\lambda_2^\nu, \lambda_1^\mu]) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\{\lambda_2^{\mu\sigma}, \partial_\sigma \lambda_1^\nu\} + \{\lambda_2^{\nu\sigma}, \partial_\sigma \lambda_1^\mu\} - \{\lambda_1^{\mu\sigma}, \partial_\sigma \lambda_2^\nu\} - \{\lambda_1^{\nu\sigma}, \partial_\sigma \lambda_2^\mu\}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\{\lambda_2^\sigma, \partial_\sigma \lambda_1^{\mu\nu}\} - \{\lambda_1^\sigma, \partial_\sigma \lambda_2^{\mu\nu}\}) + \frac{3}{2} (\{\lambda_2^{\mu\nu\sigma}, \partial_\sigma \lambda_1\} - \{\lambda_1^{\mu\nu\sigma}, \partial_\sigma \lambda_2\}), \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{[21]}^{\mu\nu\rho} &= [\lambda_2^{\mu\nu\rho}, \lambda_1] + [\lambda_2, \lambda_1^{\mu\nu\rho}] \\ &\quad + \frac{1}{3} ([\lambda_2^{\mu\nu}, \lambda_1^\rho] + [\lambda_2^{\nu\rho}, \lambda_1^\mu] + [\lambda_2^{\rho\mu}, \lambda_1^\nu]) \\ &\quad + \frac{1}{3} ([\lambda_2^\mu, \lambda_1^{\nu\rho}] + [\lambda_2^\nu, \lambda_1^{\rho\mu}] + [\lambda_2^\rho, \lambda_1^{\mu\nu}]) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\{\lambda_2^\sigma, \partial_\sigma \lambda_1^{\mu\nu\rho}\} - \{\lambda_1^\sigma, \partial_\sigma \lambda_2^{\mu\nu\rho}\}) \\ &\quad + \frac{1}{3} (\{\lambda_2^{\mu\sigma}, \partial_\sigma \lambda_1^{\nu\rho}\} + \{\lambda_2^{\nu\sigma}, \partial_\sigma \lambda_1^{\rho\mu}\} + \{\lambda_2^{\rho\sigma}, \partial_\sigma \lambda_1^{\mu\nu}\}) \\ &\quad - \frac{1}{3} (\{\lambda_1^{\mu\sigma}, \partial_\sigma \lambda_2^{\nu\rho}\} + \{\lambda_1^{\nu\sigma}, \partial_\sigma \lambda_2^{\rho\mu}\} + \{\lambda_1^{\rho\sigma}, \partial_\sigma \lambda_2^{\mu\nu}\}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\{\lambda_2^{\mu\nu\sigma}, \partial_\sigma \lambda_1^\rho\} + \{\lambda_2^{\nu\rho\sigma}, \partial_\sigma \lambda_1^\mu\} + \{\lambda_2^{\rho\mu\sigma}, \partial_\sigma \lambda_1^\nu\}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\{\lambda_1^{\mu\nu\sigma}, \partial_\sigma \lambda_2^\rho\} + \{\lambda_1^{\nu\rho\sigma}, \partial_\sigma \lambda_2^\mu\} + \{\lambda_1^{\rho\mu\sigma}, \partial_\sigma \lambda_2^\nu\}). \end{aligned} \quad (1.30)$$

où nous avons introduit l'anticommutateur

$$\{A, B\} \equiv AB + BA.$$

A ce niveau, il nous faut faire plusieurs remarques. La première est assez évidente et concerne le fait que la composition interne au groupe de jauge mélange les  $\lambda^{\mu_1 \dots \mu_n}$  de tous les ordres. De ce fait, les transformations des champs de jauge correspondants, qui forment une représentation de ce groupe, mélangent tous les spins, de manière analogue à (1.1).

Cependant, lorsque que l'on considère les situations où seuls  $\lambda_{[21]}$  et  $\lambda_{[21]}^\mu$  respectivement sont non nuls, les lois de compositions restantes sont dans l'une

$$\lambda_{[21]} = [\lambda_2, \lambda_1] \quad (1.31)$$

et dans l'autre

$$\lambda_{[21]}^\mu = \frac{1}{2} (\{\lambda_2^\nu, \partial_\nu \lambda_1^\mu\} - \{\lambda_1^\nu, \partial_\nu \lambda_2^\mu\}). \quad (1.32)$$

On reconnaît les paramètres de la composition de deux transformations de jauge pour un champ de spin 1, dans un cas, et, dans l'autre, pour un champ de spin 2 sans masse si les  $\lambda^\mu$  commutent.

Au contraire de ces deux cas, les compositions des transformations correspondant aux champs de spins  $s \geq 3$  ne produisent pas, à cet ordre en dérivées, de termes qui ne dépendent que de  $\lambda_1^{\mu_1 \dots \mu_{s-1}}$  et  $\lambda_2^{\mu_1 \dots \mu_{s-1}}$ . On peut en déduire qu'à partir du spin 3, il est nécessaire d'avoir une infinité de champs pour construire les représentations du groupe de jauge, retrouvant ainsi un résultat commun à plusieurs articles sur le sujet [35, 31, 32].

## Chapitre 2

# Champs de jauge

### 2.1 Représentations

Partant de la forme des éléments du groupe de jauge que nous venons de trouver, nous pouvons à présent chercher à construire les champs correspondants. Un tel champ  $h$  est nécessairement une somme sur tous les spins et on détermine sa transformation en fonction de  $f$  en imposant que le terme  $\iint dx dy \Phi^\dagger(x) h(x, y) \Phi(y)$  soit invariant sous l'action du groupe  $G$ , ce qui se traduit par

$$\begin{aligned}
& \delta \iint dx dy \Phi^\dagger(x) h(x, y) \Phi(y) \\
&= \iint dx dy (\Phi^\dagger(x) \delta h(x, y) \Phi(y) + \delta \Phi^\dagger(x) h(x, y) \Phi(y) + \Phi^\dagger(x) h(x, y) \delta \Phi(y)) \\
&= \iint dx dy (\Phi^\dagger(x) \delta h(x, y) \Phi(y)) \\
&+ \iiint dx dy dz (\Phi^\dagger(x) h(x, y) f(y, z) \Phi(z) + \Phi^\dagger(z) f^\dagger(x, z) h(x, y) \delta \Phi(y)) \\
&= \iint dx dy \left( \Phi^\dagger(x) \delta h(x, y) \Phi(y) + \Phi^\dagger(x) \left( \int dz h(x, z) f(z, y) - f(x, z) h(z, y) \right) \delta \Phi(y) \right)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Pour que la variation de ce terme s'annule,  $\delta h(x, y)$  doit donc vérifier

$$\delta h(x, y) = f * h(x, y) - h * f(x, y). \tag{2.2}$$

La forme de cette transformation assure qu'elle est bien compatible avec le fait que les



champs  $h(x, y)$  forment une représentation du groupe, c'est-à-dire que l'égalité suivante est vérifiée

$$\delta_{[21]}h(x, y) = (\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2)h(x, y). \quad (2.3)$$

où, bien entendu,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  et  $\delta_{[21]}$  sont les transformations associées à  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_{[21]}$  respectivement. Par  $(\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2)h(x, y)$ , on entend

$$h(x, y) + \delta_1h(x, y) + \delta_2(h(x, y) + \delta_1h(x, y)) - (1 \leftrightarrow 2).$$

Le choix le plus naturel pour  $h$  est celui d'une expression analogue à celle de  $f$

$$\begin{aligned} h(x, y) &= h(x)\delta(x - y) \\ &+ h^\mu\partial_\mu\delta(x - y) + \frac{1}{2}\partial_\mu h^\mu\delta(x - y) \\ &+ h^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\delta(x - y) + \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu\delta(x - y) + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu}\delta(x - y) \\ &+ h^{\mu\nu\rho}\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\delta(x - y) + \frac{3}{2}\partial_\mu h^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\partial_\rho\delta(x - y) \\ &+ \frac{3}{2}\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu\rho}\partial_\rho\delta(x - y) + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho h^{\mu\nu\rho}\delta(x - y). \end{aligned} \quad (2.4)$$

avec, cependant, des propriétés d'hermiticité opposées

$$(h^{\mu_1 \dots \mu_s})^\dagger = (-1)^n h^{\mu_1 \dots \mu_s} \quad (2.5)$$

car  $h(x, y)$  est alors hermitique ce qui est nécessaire pour construire une action. Il est facile de déduire de ce qui précède les transformations des  $h^{\mu_1 \dots \mu_s}$  puisqu'il suffit de remplacer  $\lambda_2^{\mu_1 \dots \mu_s}$  par  $\lambda^{\mu_1 \dots \mu_s}$  et  $\lambda_1^{\mu_1 \dots \mu_s}$  par  $h^{\mu_1 \dots \mu_s}$  dans (1.27), (1.28), (1.29), (1.30) :

$$\delta h = [\lambda, h] + \frac{1}{2} (\{\lambda^\sigma, \partial_\sigma h\} - \{h^\sigma, \partial_\sigma \lambda\}), \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \delta h^\mu &= [\lambda^\mu, h] + [\lambda, h^\mu] + \{\lambda^{\mu\sigma}, \partial_\sigma h\} - \{h^{\mu\sigma}, \partial_\sigma \lambda\} \\ &+ \frac{1}{2} (\{\lambda^\sigma, \partial_\sigma h^\mu\} - \{h^\sigma, \partial_\sigma \lambda^\mu\}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \delta h^{\mu\nu} &= [\lambda^{\mu\nu}, h] + [\lambda, h^{\mu\nu}] + \frac{1}{2} ([\lambda^\mu, h^\nu] + [\lambda^\nu, h^\mu]) \\ &+ \frac{1}{2} (\{\lambda^{\mu\sigma}, \partial_\sigma h^\nu\} + \{\lambda^{\nu\sigma}, \partial_\sigma h^\mu\} - \{h^{\mu\sigma}, \partial_\sigma \lambda^\nu\} - \{h^{\nu\sigma}, \partial_\sigma \lambda^\mu\}) \\ &+ \frac{1}{2} (\{\lambda^\sigma, \partial_\sigma h^{\mu\nu}\} - \{h^\sigma, \partial_\sigma \lambda^{\mu\nu}\}) + \frac{3}{2} (\{\lambda^{\mu\nu\sigma}, \partial_\sigma h\} - \{h^{\mu\nu\sigma}, \partial_\sigma \lambda\}), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
\delta h^{\mu\nu\rho} &= [\lambda^{\mu\nu\rho}, h] + [\lambda, h^{\mu\nu\rho}] \\
&+ \frac{1}{3} ([\lambda^{\mu\nu}, h^\rho] + [\lambda^{\nu\rho}, h^\mu] + [\lambda^{\rho\mu}, h^\nu]) \\
&+ \frac{1}{3} ([\lambda^\mu, h^{\nu\rho}] + [\lambda^\nu, h^{\rho\mu}] + [\lambda^\rho, h^{\mu\nu}]) \\
&+ \frac{1}{2} (\{\lambda^\sigma, \partial_\sigma h^{\mu\nu\rho}\} - \{h^\sigma, \partial_\sigma \lambda^{\mu\nu\rho}\}) \\
&+ \frac{1}{3} (\{\lambda^{\mu\sigma}, \partial_\sigma h^{\nu\rho}\} + \{\lambda^{\nu\sigma}, \partial_\sigma h^{\rho\mu}\} + \{\lambda^{\rho\sigma}, \partial_\sigma h^{\mu\nu}\}) \\
&- \frac{1}{3} (\{h^{\mu\sigma}, \partial_\sigma \lambda^{\nu\rho}\} + \{h^{\nu\sigma}, \partial_\sigma \lambda^{\rho\mu}\} + \{h^{\rho\sigma}, \partial_\sigma \lambda^{\mu\nu}\}) \\
&+ \frac{1}{2} (\{\lambda^{\mu\nu\sigma}, \partial_\sigma h^\rho\} + \{\lambda^{\nu\rho\sigma}, \partial_\sigma h^\mu\} + \{\lambda^{\rho\mu\sigma}, \partial_\sigma h^\nu\}) \\
&- \frac{1}{2} (\{h^{\mu\nu\sigma}, \partial_\sigma \lambda^\rho\} + \{h^{\nu\rho\sigma}, \partial_\sigma \lambda^\mu\} + \{h^{\rho\mu\sigma}, \partial_\sigma \lambda^\nu\}). \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Pour les raisons évoquées dans la première section, on ne considère pas  $\lambda^{\mu_1 \dots \mu_s}$  et  $h^{\mu_1 \dots \mu_s}$  pour  $s \geq 4$ .

Nous remarquons que les transformations de ces champs ne contiennent pas de termes inhomogènes comme c'est le cas habituellement. Pour les faire apparaître et se rapprocher des constructions usuelles, développons  $h^{\mu\nu}$  autour de la métrique Minkovskienne selon

$$h^{\mu\nu} \longrightarrow \eta^{\mu\nu} + h'^{\mu\nu}$$

. Revenons aux deux situations évoquées à la fin du chapitre précédent.

Si  $\lambda$  n'est pas une matrice et que  $\lambda^\mu$  et  $\lambda^{\mu\nu}$  sont nuls,  $\delta h_\mu$  devient :

$$\delta h_\mu = -2\partial_\mu \lambda, \tag{2.10}$$

et  $-h_\mu/2$  est le champ de Yang-Mills libre. Par contre, si les  $\lambda^\mu$  sont les seuls paramètres non nuls et commutent avec  $h'^{\mu\nu}$  alors :

$$\delta h'_{\mu\nu} = -(\partial_\mu \lambda_\nu + \partial_\nu \lambda_\mu), \tag{2.11}$$

et on peut identifier  $-h'_{\mu\nu}$  à la métrique du champ gravitationnel.

Les deux exemples précédents nous montrent l'utilité de redéfinir les champs afin de retrouver les termes inhomogènes habituels. Introduisons

$$h' = -h \quad \longrightarrow \quad \delta h' = 0 + \dots \tag{2.12}$$

$$h'_\mu = -\frac{1}{2}h_\mu \quad \longrightarrow \quad \delta h'_\mu = \partial_\mu \lambda + \dots \tag{2.13}$$

$$h''_{\mu\nu} = -h'_{\mu\nu} \quad \longrightarrow \quad \delta h''_{\mu\nu} = \partial_\mu \lambda_\nu + \partial_\nu \lambda_\mu + \dots \tag{2.14}$$

$$h'_{\mu\nu\rho} = -\frac{3}{2}h_{\mu\nu\rho} \quad \longrightarrow \quad \delta h'_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu \lambda_{\nu\rho} + \partial_\nu \lambda_{\rho\mu} + \partial_\rho \lambda_{\mu\nu} + \dots \tag{2.15}$$

et omettons les primes dès à présent. Ces nouveaux champs se transforment selon

$$\delta h = [\lambda, h] + \{\lambda^\sigma, \partial_\sigma h\} - \frac{1}{2} \{h^\sigma, \partial_\sigma \lambda\}, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \delta h_\mu &= \partial_\mu \lambda + \frac{1}{2} [\lambda_\mu, h] + [\lambda, h_\mu] + \{\lambda_\mu^\sigma, \partial_\sigma h\} - \{h_\mu^\sigma, \partial_\sigma \lambda\} \\ &+ \frac{1}{2} (\{\lambda^\sigma, \partial_\sigma h_\mu\} - \{h^\sigma, \partial_\sigma \lambda_\mu\}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \delta h_{\mu\nu} &= \partial_\mu \lambda_\nu + \partial_\nu \lambda_\mu + [\lambda_{\mu\nu}, h] + [\lambda, h_{\mu\nu}] + [\lambda_\mu, h_\nu] + [\lambda_\nu, h_\mu] \\ &+ \{\lambda_\mu^\sigma, \partial_\sigma h_\nu\} + \{\lambda_\nu^\sigma, \partial_\sigma h_\mu\} - \frac{1}{2} (\{h_\mu^\sigma, \partial_\sigma \lambda_\nu\} + \{h_\nu^\sigma, \partial_\sigma \lambda_\mu\}) \\ &+ \frac{1}{2} \{\lambda^\sigma, \partial_\sigma h_{\mu\nu}\} - \{h^\sigma, \partial_\sigma \lambda_{\mu\nu}\} + \frac{3}{2} \{\lambda_{\mu\nu}^\sigma, \partial_\sigma h\} - \{h_{\mu\nu}^\sigma, \partial_\sigma \lambda\}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \delta h_{\mu\nu\rho} &= \partial_\mu \lambda_{\nu\rho} + \partial_\nu \lambda_{\rho\mu} + \partial_\rho \lambda_{\mu\nu} \\ &+ \frac{3}{2} [\lambda_{\mu\nu\rho}, h] + [\lambda, h_{\mu\nu\rho}] + [\lambda_{\mu\nu}, h_\rho] + [\lambda_{\nu\rho}, h_\mu] + [\lambda_{\rho\mu}, h_\nu] \\ &+ \frac{1}{2} ([\lambda_\mu, h_{\nu\rho}] + [\lambda_\nu, h_{\rho\mu}] + [\lambda_\rho, h_{\mu\nu}]) + \frac{1}{2} (\{\lambda^\sigma, \partial_\sigma h_{\mu\nu\rho}\} - 3 \{h^\sigma, \partial_\sigma \lambda_{\mu\nu\rho}\}) \\ &+ \frac{1}{2} (\{\lambda_\mu^\sigma, \partial_\sigma h_{\nu\rho}\} + \{\lambda_\nu^\sigma, \partial_\sigma h_{\rho\mu}\} + \{\lambda_\rho^\sigma, \partial_\sigma h_{\mu\nu}\}) \\ &- \frac{1}{2} (\{h_\mu^\sigma, \partial_\sigma \lambda_{\nu\rho}\} + \{h_\nu^\sigma, \partial_\sigma \lambda_{\rho\mu}\} + \{h_\rho^\sigma, \partial_\sigma \lambda_{\mu\nu}\}) \\ &+ \frac{3}{2} (\{\lambda_{\mu\nu}^\sigma, \partial_\sigma h_\rho\} + \{\lambda_{\nu\rho}^\sigma, \partial_\sigma h_\mu\} + \{\lambda_{\rho\mu}^\sigma, \partial_\sigma h_\nu\}) \\ &- \frac{1}{2} (\{h_{\mu\nu}^\sigma, \partial_\sigma \lambda_\rho\} + \{h_{\nu\rho}^\sigma, \partial_\sigma \lambda_\mu\} + \{h_{\rho\mu}^\sigma, \partial_\sigma \lambda_\nu\}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

## 2.2 Spin 3 non abélien

Nous pouvons désormais nous intéresser aux conséquences de ce choix pour les champs de jauge correspondant au groupe  $G$  en nous inspirant de ce qui existe dans la littérature. Outre la construction de représentations de ce type de groupes englobant tous les niveaux de spin, un objectif primordial de la recherche sur les champs de spins  $s$  supérieur à 3 est de construire des Lagrangiens invariants de jauge avec interactions. Cette tâche s'avère compliquée car, même pour le cas libre, des nouvelles contraintes sur les paramètres de jauge apparaissent dès  $s = 3$  [35]. En effet, le Lagrangien libre pour  $h_{\mu\nu\rho}$  s'écrit

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu h_{\nu\rho\sigma})^2 + \frac{3}{2} (\partial_\mu h^{\mu\nu\rho})^2 - 3\partial_\mu h_{\nu\rho}{}^\rho \partial_\sigma h^{\mu\nu\sigma} + \frac{3}{2} (\partial_\mu h_{\nu\rho}{}^\rho)^2 + \frac{3}{4} (\partial_\mu h^{\mu\rho}{}_\rho)^2 \quad (2.20)$$

et pour la transformation de jauge abélienne

$$\delta h_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu \lambda_{\nu\rho} + \partial_\nu \lambda_{\rho\mu} + \partial_\rho \lambda_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

les variations des différents termes valent :

$$\delta \left( -\frac{1}{2} (\partial_\mu h_{\nu\rho\sigma})^2 \right) = -3\partial_\nu h^{\nu\rho\sigma} \partial^2 \lambda^{\rho\sigma} \quad (2.22)$$

$$\delta \left( \frac{3}{2} (\partial_\mu h^{\mu\nu\rho})^2 \right) = 3\partial_\nu h^{\nu\rho\sigma} \partial^2 \lambda^{\rho\sigma} - 6\partial^\sigma \lambda_{\sigma\rho} \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu\rho} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \delta (-3\partial_\mu h_{\nu\rho}{}^\rho \partial_\sigma h^{\mu\nu\sigma}) &= 6\partial^\rho \lambda_{\rho\nu} \partial_\mu \partial_\sigma h^{\mu\nu\sigma} + 3\partial_\nu \lambda_\rho{}^\rho \partial_\mu \partial_\sigma h^{\mu\nu\sigma} \\ &\quad + 6\partial^2 h_{\nu\rho}{}^\rho \partial_\sigma \lambda^{\nu\sigma} - 3\partial^\nu h_{\nu\rho}{}^\rho \partial_\mu \partial_\sigma \lambda^{\mu\sigma} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\delta \left( \frac{3}{2} (\partial_\mu h_{\nu\rho}{}^\rho)^2 \right) = 3\partial^2 h_{\nu\rho}{}^\rho (2\partial_\sigma \lambda^{\nu\sigma} + \partial^\nu \lambda_\sigma{}^\sigma) \quad (2.25)$$

$$\delta \left( \frac{3}{4} (\partial^\mu h_{\mu\nu}{}^\nu)^2 \right) = \frac{3}{2} \partial^\mu h_{\mu\nu}{}^\nu (\partial^2 \lambda_\rho{}^\rho + \partial_\rho \partial_\sigma \lambda^{\rho\sigma}), \quad (2.26)$$

où  $\partial^2$  est le d'Alembertien.  $\delta\mathcal{L}$  devient finalement :

$$\delta\mathcal{L} = 3\partial_\sigma \lambda_\rho{}^\rho \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu\sigma} - \frac{3}{2} \partial^\mu h_{\mu\nu}{}^\nu \partial^2 \lambda_\rho{}^\rho \quad (2.27)$$

donc la condition  $\lambda_\rho{}^\rho = 0$  est nécessaire pour que  $\mathcal{L}$  soit invariant de jauge. Toutefois, cette contrainte apparaît lorsque  $h_{\mu\nu\rho}$  vérifie (2.21) et on peut tenter de s'en affranchir en introduisant un champ  $\hat{h}_{\mu\nu\rho}$  qui se transforme différemment :

$$\delta \hat{h}_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu \left( \lambda_{\nu\rho} - \frac{1}{D} \eta_{\nu\rho} \lambda_\sigma{}^\sigma \right) + \text{circ}(\mu, \nu, \rho). \quad (2.28)$$

$\text{circ}(\mu, \nu, \rho)$  désigne les permutations circulaires des indices  $\mu, \nu, \rho$ . Les termes à rajouter à la variation du Lagrangien (2.27) sont

$$\delta \left( -\frac{1}{2} \left( \partial_\mu \hat{h}_{\nu\rho\sigma} \right)^2 \right) \longrightarrow \frac{3}{D} \partial_\mu \hat{h}_\nu{}^{\nu\sigma} \partial^\mu \partial_\sigma \lambda_\tau{}^\tau \quad (2.29)$$

$$\delta \left( \frac{3}{2} \left( \partial_\mu \hat{h}^{\mu\nu\rho} \right)^2 \right) \longrightarrow -\frac{6}{D} \partial_\mu \hat{h}^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \partial_\rho \lambda_\tau{}^\tau - \frac{3}{D} \partial^\mu \hat{h}_{\mu\nu}{}^\nu \partial^2 \lambda_\tau{}^\tau \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \delta \left( -3 \partial_\mu \hat{h}_{\nu\rho}{}^\rho \partial_\sigma \hat{h}^{\mu\nu\sigma} \right) &\longrightarrow \frac{3(D+2)}{2D} \partial_\sigma \hat{h}^{\mu\nu\sigma} \partial_\mu \partial_\nu \lambda_\tau{}^\tau \\ &+ \frac{3}{D} \partial^\mu \hat{h}_{\mu\nu}{}^\nu \partial^2 \lambda_\tau{}^\tau + \frac{6}{D} \partial_\mu \hat{h}_{\nu\rho}{}^\rho \partial^\mu \partial^\nu \lambda_\tau{}^\tau \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\delta \left( \frac{3}{2} \left( \partial_\mu \hat{h}_{\nu\rho}{}^\rho \right)^2 \right) \longrightarrow -\frac{3(D+2)}{D} \partial_\mu \hat{h}_{\nu\rho}{}^\rho \partial^\mu \partial^\nu \lambda_\tau{}^\tau \quad (2.32)$$

$$\delta \left( \frac{3}{4} \left( \partial^\mu \hat{h}_{\mu\nu}{}^\nu \right)^2 \right) \longrightarrow -\frac{3(D+2)}{2D} \partial^\mu \hat{h}_{\mu\nu}{}^\nu \partial^2 \lambda_\tau{}^\tau \quad (2.33)$$

Leur somme se réduit à

$$-3 \partial_\sigma \lambda_\rho{}^\rho \partial_\mu \partial_\nu \hat{h}^{\mu\nu\sigma} + \frac{3}{2} \partial^\mu \hat{h}_{\mu\nu}{}^\nu \partial^2 \lambda_\rho{}^\rho \quad (2.34)$$

et dans ce cas, il est clair que  $\delta \mathcal{L}[\hat{h}^{\mu\nu\rho}] = 0$ , conformément à ce que l'on cherche.

Afin que  $\hat{h}^{\mu\nu\rho}$  soit un "bon" champ de jauge, il doit encore satisfaire (2.3) dans le cas non-abélien. Il faut pour cela compenser les contributions à  $\delta_{[21]} \hat{h}^{\mu\nu\rho}$  dues à la trace de  $\lambda_{\mu\nu}$  qui s'écrivent à l'ordre d'une dérivée :

$$-\frac{\eta_{\mu\nu}}{D} \partial_\rho \lambda_{[21]\sigma}{}^\sigma + \text{circ}(\mu, \nu, \rho) = -\frac{\eta_{\mu\nu}}{D} \partial_\rho ([\lambda_{2\sigma}{}^\sigma, \lambda_1] + [\lambda_{2\sigma}, \lambda_1^\sigma] + [\lambda_2, \lambda_{1\sigma}{}^\sigma]) + \text{circ}(\mu, \nu, \rho). \quad (2.35)$$

Le point de départ le plus simple pour  $\delta \hat{h}^{\mu\nu\rho}$  est la transformation de  $h^{\mu\nu\rho}$  (2.19), dont on modifie les termes inhomogènes selon (2.28) et dans laquelle on remplace  $h^{\mu\nu\rho}$  par  $\hat{h}^{\mu\nu\rho}$ . Outre la somme (2.35), il n'y a pas de nouveau terme à une dérivée au plus dans  $\delta_{[21]} \hat{h}^{\mu\nu\rho}$ . Par contre, dans  $(\delta_2 \delta_1 - \delta_1 \delta_2) \hat{h}^{\mu\nu\rho}$ , apparaît :

$$-\frac{\eta_{\mu\nu}}{D} [\lambda_2, \partial_\rho \lambda_{1\sigma}{}^\sigma] + \frac{\eta_{\mu\nu}}{D} [\lambda_1, \partial_\rho \lambda_{2\sigma}{}^\sigma] + \text{circ}(\mu, \nu, \rho). \quad (2.36)$$

Or,  $(\delta_2 \delta_1 - \delta_1 \delta_2)$  appliquée à

$$-\frac{\eta_{\mu\nu}}{D} [\lambda_\sigma{}^\sigma, h_\rho] + \text{circ}(\mu, \nu, \rho) \quad (2.37)$$

donne l'expression

$$-\frac{\eta_{\mu\nu}}{D} [\partial_\rho \lambda_2, \lambda_{1\sigma}{}^\sigma] + \frac{\eta_{\mu\nu}}{D} [\partial_\rho \lambda_1, \lambda_{2\sigma}{}^\sigma] + \text{circ}(\mu, \nu, \rho). \quad (2.38)$$

Il faut donc ajouter (2.37) à la transformation de  $\hat{h}^{\mu\nu\rho}$  pour reconstruire deux des termes de (2.35) :

$$-\frac{\eta_{\mu\nu}}{D} \partial_\rho ([\lambda_2, \lambda_{1\sigma}{}^\sigma] + [\lambda_{2\sigma}{}^\sigma, \lambda_1]) + \text{circ}(\mu, \nu, \rho). \quad (2.39)$$

par la somme de (2.36) et (2.38). Il ne reste plus qu'à retrouver le commutateur des  $\lambda_\sigma$ , et ce dernier pourrait provenir de

$$-\frac{\eta_{\mu\nu}}{D} [\lambda^\sigma, h_{\rho\sigma}] + \text{circ}(\mu, \nu, \rho), \quad (2.40)$$

mais cela produirait une contribution supplémentaire

$$-\frac{\eta_{\mu\nu}}{D} ([\lambda_2^\sigma, \partial_\sigma \lambda_{1\rho}] + [\partial_\sigma \lambda_{2\rho}, \lambda_1^\sigma]) + \text{circ}(\mu, \nu, \rho) \quad (2.41)$$

qui ne peut être compensée grâce aux champs  $h_{\mu\nu\rho\dots}$ . La solution est de définir un champ auxiliaire  $k_\mu$  qui se transforme selon :

$$\delta k_\mu = m \lambda_\mu + \dots \quad (2.42)$$

où le paramètre  $m$  a la dimension d'une masse et la correction à  $\delta \hat{h}^{\mu\nu\rho}$  devient

$$-\frac{\eta_{\mu\nu}}{2D} \left( [\lambda^\sigma, h_{\rho\sigma}] + \frac{1}{m} [\lambda_2^\sigma, \partial_\rho k_\sigma - \partial_\sigma k_\rho] \right) + \text{circ}(\mu, \nu, \rho). \quad (2.43)$$

La transformation de  $\hat{h}^{\mu\nu\rho}$  s'écrit finalement :

$$\begin{aligned}
\delta h_{\mu\nu\rho} = & \partial_\mu \left( \lambda_{\nu\rho} - \frac{1}{D} \eta_{\nu\rho} \lambda_\sigma{}^\sigma \right) + \frac{3}{2} [\lambda_{\mu\nu\rho}, h] + [\lambda, \hat{h}_{\mu\nu\rho}] + [\lambda_{\mu\nu}, h_\rho] \\
& + \frac{1}{2} [\lambda_\mu, h_{\nu\rho}] + \frac{1}{2} \left( \{ \lambda^\sigma, \partial_\sigma \hat{h}_{\mu\nu\rho} \} - 3 \{ h^\sigma, \partial_\sigma \lambda_{\mu\nu\rho} \} \right) \\
& + \frac{1}{2} \{ \lambda_\mu{}^\sigma, \partial_\sigma h_{\nu\rho} \} - \frac{1}{2} \{ h_\mu{}^\sigma, \partial_\sigma \lambda_{\nu\rho} \} + \frac{3}{2} \{ \lambda_{\mu\nu}{}^\sigma, \partial_\sigma h_\rho \} \\
& - \frac{1}{2} \{ \hat{h}_{\mu\nu}{}^\sigma, \partial_\sigma \lambda_\rho \} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{D} [\lambda_\sigma{}^\sigma, h_\rho] - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2D} \left( [\lambda^\sigma, h_{\rho\sigma}] + \frac{1}{m} [\lambda_2^\sigma, \partial_\rho k_\sigma - \partial_\sigma k_\rho] \right) \\
& + \text{circ}(\mu, \nu, \rho). \tag{2.44}
\end{aligned}$$

### 2.3 Lagrangien de spin 2

Revenons sur le champ auxiliaire  $k_\mu$ . A l'instar d'un champ de Yang-Mills, ce dernier a un degré de liberté en trop et  $\lambda_\mu$ , présent dans sa transformation de jauge, ne peut servir à supprimer une de ses composantes car il joue déjà ce rôle pour  $h_{\mu\nu}$ . Il nous faut donc un nouveau paramètre de jauge. On peut utiliser  $\partial_\mu \lambda_\sigma{}^\sigma$  pour compléter  $\delta k_\mu$  et en imposant que cette dernière vérifie (2.3), on trouve :

$$\delta k_\mu = m \lambda_\mu + \partial_\mu \lambda_\sigma{}^\sigma + [\lambda, k_\mu] + [\lambda_\sigma{}^\sigma, h_\rho] + \frac{1}{2} \left( [\lambda^\sigma, h_{\rho\sigma}] + \frac{1}{m} [\lambda_2^\sigma, \partial_\rho k_\sigma - \partial_\sigma k_\rho] \right) \tag{2.45}$$

De manière analogue à un champ de Yang-Mills, un terme cinétique pour  $k_\mu$  serait

$$\frac{1}{m^2} (\partial_\mu k_\nu - \partial_\nu k_\mu)^2 = \frac{1}{m^2} (\partial_\mu k_\nu + \partial_\nu k_\mu)^2 - 4(\partial_\mu k^\mu)^2. \tag{2.46}$$

La contribution à sa variation correspondant à  $\partial_\mu \lambda_\sigma{}^\sigma$  s'annule mais  $\lambda_\mu$  engendre des termes qu'on peut compenser en couplant  $k_\mu$  à  $h_{\mu\nu}$  de la sorte :

$$\frac{1}{2} (m h_{\mu\nu} - (\partial_\mu k_\nu + \partial_\nu k_\mu))^2 - \frac{1}{2} (m h_\mu{}^\mu - 2m \partial_\mu k^\mu)^2. \tag{2.47}$$

A leur tour, les termes croisés dans le carré ci-dessus font apparaître des contributions dues à  $\partial_\mu \lambda_\sigma{}^\sigma$  :

$$-2m h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \lambda_\sigma{}^\sigma + 2m h_\mu{}^\mu \partial^2 \lambda_\sigma{}^\sigma \tag{2.48}$$

Heureusement, cette apparition en cascade de nouveaux termes est stoppée si l'on définit un deuxième champ auxiliaire  $l$ , appartenant au groupe, tel que

$$\delta l = m \lambda_\sigma^\sigma + \dots \quad (2.49)$$

et que l'on ajoute

$$2h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu l - 2 h_\mu{}^\mu \partial^2 l \quad (2.50)$$

à (2.47). La forme de ce dernier rappelle une méthode initiée par Veltman [36, 37] qui permet de construire un Lagrangien pour un champ de Yang-Mills massif  $W_\mu$ , pour lequel le propagateur ne contient pas de terme en  $k_\mu k_\nu / m^2$  provenant du fixage de jauge et posant des problèmes dans la limite  $m \rightarrow 0$ . L'idée est de définir un nouveau champ  $W'_\mu(\varphi)$  à partir de  $W_\mu$  et d'un champ  $\varphi$  selon :

$$W'_\mu(\varphi) \equiv U(\varphi) W_\mu U^{-1}(\varphi) + \frac{2}{ig} \partial_\mu (U(\varphi)) U^{-1}(\varphi) \quad (2.51)$$

$$U(\varphi) \equiv e^{-\frac{ig}{2m} \varphi} \quad (2.52)$$

$$\varphi \equiv \varphi^a \tau_a \quad (2.53)$$

où  $g$  est la constante de couplage dans le Lagrangien de  $W_\mu$  :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} m^2 W_\mu^2 \quad (2.54)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + g[W_\mu, W_\nu] \quad (2.55)$$

et les  $\tau_a$  sont les générateurs de la représentation adjointe. En utilisant l'identité

$$U = \cos \frac{g}{2m} |\varphi| - \frac{ig}{2m} \varphi \frac{\sin \frac{g}{2m} |\varphi|}{\frac{g}{2m} |\varphi|} \quad (2.56)$$

on peut écrire  $W'_\mu$  aux premiers ordres en  $\varphi$

$$W'_\mu = W_\mu - \frac{1}{m} \partial_\mu \varphi - g[W_\mu, \varphi] + \frac{g}{2m} [\partial_\mu \varphi, \varphi] + \mathcal{O}(W_\mu \varphi^2) + \mathcal{O}(\varphi^3). \quad (2.57)$$



Le but de l'introduction de ces nouveaux champs est de compenser les transformations de jauge de  $W_\mu$  de paramètre  $\lambda$

$$W_\mu \longrightarrow VW_\mu V^{-1} + \frac{2}{ig} \partial_\mu(V) V^{-1} \quad (2.58)$$

$$V \equiv e^{\frac{ig}{2m} \lambda} \quad (2.59)$$

$$\lambda = \lambda^a \tau_a \quad (2.60)$$

par celle de  $\varphi$ , de telle sorte que  $W'_\mu(\varphi)$  soit invariant. Lorsque l'on insère (2.58) dans (2.51), cette contrainte prend la forme

$$U(\varphi) = U(\varphi + \delta\varphi)V \quad (2.61)$$

et l'on en tire

$$\delta\varphi = m\lambda + \frac{g}{2}[\varphi, \lambda] + \mathcal{O}(\lambda\varphi^2). \quad (2.62)$$

L'étape suivante est de choisir un Lagrangien pour le champ invariant  $W'_\mu$ . L'idée la plus naturelle est de prendre une expression identique à (2.54). Exprimons-la ensuite en fonction de  $W_\mu$  et  $\varphi$ . Du fait de la forme de (2.51),  $Tr F_{\mu\nu}^2$  ne change pas et les modifications par rapport à (2.54) proviennent uniquement du terme de masse  $m^2 W_\mu'^2$ . Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} (\partial_\mu W_\nu)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu W^\mu)^2 - \frac{1}{2} m^2 W_\mu^2 \\ & - \frac{1}{2} g (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) \cdot [W^\mu, W^\nu] - \frac{1}{4} g^2 (W_\mu \cdot W^\mu) (W_\nu \cdot W^\nu) + \frac{1}{4} g^2 (W_\mu \cdot W_\nu) (W^\mu \cdot W^\nu) \\ & - \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - m\varphi \cdot \partial_\mu W^\mu + \mathcal{O}(W_\mu \varphi^2) + \mathcal{O}(\varphi^3) \end{aligned} \quad (2.63)$$

où  $A \cdot B \equiv A^a B_a$ . A ce stade, considérons deux manières de fixer la jauge. La première est simplement  $\varphi = 0$ , qui nous ramène au Lagrangien usuel (2.54) et qui nous confirme que nous sommes toujours en présence d'un pur spin 1 massif. La seconde consiste à rajouter à (2.63) le terme

$$-\frac{1}{2} (\partial_\mu W^\mu - m\varphi)^2 \quad (2.64)$$

pour aboutir à

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{2}(\partial_\mu W_\nu)^2 - \frac{1}{2}m^2 W_\mu^2 \\
& -\frac{1}{2}g(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) \cdot [W^\mu, W^\nu] - \frac{1}{4}g^2(W_\mu \cdot W^\mu)(W_\nu \cdot W^\nu) + \frac{1}{4}g^2(W_\mu \cdot W_\nu)(W^\mu \cdot W^\nu) \\
& -\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \varphi^2 + \mathcal{O}(W_\mu \varphi^2) + \mathcal{O}(\varphi^3).
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Nous avons donc atteint l'objectif fixé : le propagateur du champ  $W_\mu$  est ici

$$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + m^2}$$

et admet une limite continue quand  $m$  tend vers zéro. De plus, nous savons que  $\varphi$  ne peut apparaître sur les pattes externes car nous sommes en présence d'une théorie de pur spin 1 massif et il n'existe pas de terme d'interaction linéaire en  $\varphi$ . On en déduit que ce champ ne peut apparaître dans les diagrammes en arbres ce qui semble raisonnable.

Revenons maintenant aux champs  $h_{\mu\nu}$ ,  $k_\mu$  et  $l$  et appliquons ce que nous venons de voir, en nous concentrant toutefois sur le cas abélien. Partons du Lagrangien suivant pour le champ de spin 2 libre massif :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{2}(\partial_\mu h_{\nu\rho})^2 + (\partial_\mu h^{\mu\nu})^2 - \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h_\sigma{}^\sigma \\
& + \frac{1}{2}(\partial_\mu h_\sigma{}^\sigma)^2 - \frac{m^2}{2}(h^{\mu\nu})^2 + \frac{m^2}{2}(h_\sigma{}^\sigma)^2
\end{aligned} \tag{2.66}$$

dans lequel nous effectuons le remplacement

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow h_{\mu\nu} - \frac{1}{m}(\partial_\mu k_\nu + \partial_\nu k_\mu), \tag{2.67}$$

d'après (2.47), et auquel nous ajoutons (2.50), ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{2}(\partial_\mu h_{\nu\rho})^2 + (\partial_\mu h^{\mu\nu})^2 - \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h_\sigma{}^\sigma + \frac{1}{2}(\partial_\mu h_\sigma{}^\sigma)^2 \\
& -\frac{m^2}{2}(h^{\mu\nu})^2 + \frac{m^2}{2}(h_\sigma{}^\sigma)^2 + 2mh^{\mu\nu} \partial^\mu k^\nu - 2m h_\sigma{}^\sigma \partial_\mu k^\mu \\
& -(\partial_\mu k_\nu)^2 + (\partial_\mu k^\mu)^2 - 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu l - +2\partial_\mu h_\sigma{}^\sigma \partial^\mu l.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Comme précédemment on peut fixer les cinq jauges en annulant les deux champs auxiliaires et (2.68) devient le Lagrangien de Fierz-Pauli d'un pur spin 2 massif. Le propagateur du champ  $h_{\mu\nu}$  contient alors au numérateur des termes d'ordre supérieur en  $k_\rho k_\sigma / m^2$  qui, encore une fois, posent des problèmes dans la limite  $m \rightarrow 0$ .

Ici aussi, il existe une autre manière de procéder qui contourne ce problème. Pour  $\lambda_\mu$ , on utilise le fixage de jauge :

$$-\left[\partial^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu h_\sigma{}^\sigma + \partial_\mu l - mk_\mu\right]^2 \quad (2.69)$$

mais cette expression est invariante par la transformation de paramètre  $\lambda_\sigma{}^\sigma$  donc il est nécessaire d'ajouter :

$$-\left[\partial_\mu k^\mu - \frac{1}{2}m h_\sigma{}^\sigma - ml\right]^2. \quad (2.70)$$

Finalement,  $\mathcal{L}$  devient

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}(\partial_\mu h_{\nu\rho})^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu h_\sigma{}^\sigma)^2 - \frac{m^2}{2}(h^{\mu\nu})^2 + \frac{m^2}{2}(h_\sigma{}^\sigma)^2 \\ & - (\partial_\mu k_\nu)^2 - m^2 k_\mu^2 - (\partial^\mu l)^2 - m^2 l^2 \end{aligned} \quad (2.71)$$

après la redéfinition de  $l$  suivante

$$l \longrightarrow l + \frac{1}{2} h_\sigma{}^\sigma.$$

Pour ces choix de jauges, les propagateurs des champs s'écrivent :

$$l \longrightarrow \frac{1}{k^2 + m^2} \quad (2.72)$$

$$k_\mu \longrightarrow \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2 + m^2} \quad (2.73)$$

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow \frac{\eta_{\mu\mu'}\eta_{\nu\nu'} - \frac{1}{D-1}\eta_{\mu\nu}\eta_{\mu'\nu'}}{k^2 + m^2} \quad (2.74)$$

et les termes problématiques ont disparu, comme dans le cas du spin 1. On pressent qu'une construction analogue pour un Lagrangien contenant des termes d'interaction est possible

---

et que, là également, les champs auxiliaires n'interviendront vraisemblablement pas dans les diagrammes en arbres.

Il est intéressant de souligner un dernier point : afin d'obtenir une transformation pour  $\hat{h}^{\mu\nu\rho}$  qui satisfasse la loi de groupe (2.3), nous avons utilisé  $k_\mu$  pour compenser  $\partial_\mu [\lambda_{2\sigma}, \lambda_1^\sigma]$ . Cependant si les  $\lambda_\mu$  commutent, l'introduction de ce champ n'est plus nécessaire. Or c'est la forme du terme cinétique de  $k_\mu$  qui requiert l'apparition d'un terme de masse pour  $h_{\mu\nu}$  donc dans le formalisme que nous avons développé dans cette partie, le champ de spin 2 est naturellement massif si son groupe de symétrie interne n'est pas trivial, i.e. si les  $\lambda_\mu$  ne commutent pas.

---



## Conclusions et perspectives

Dans le contexte d'un besoin de plus en plus présent d'obtenir une théorie cohérente des champs de spin élevé, nous avons présenté la construction d'un groupe de jauge inspirée du formalisme des champs de cordes. De manière plus précise, les éléments sont des séries de matrices de tenseurs symétriques et de leurs dérivés, qu'on identifie aux paramètres de jauge de Yang-Mills et de la gravitation pour les ordres les plus bas. Afin de préserver l'invariance d'un terme de masse pour des champs de matière, nous avons imposé des conditions d'hermiticité qui nous ont permis de calculer exactement ces éléments jusqu'au troisième ordre puis leur loi de composition.

L'étape suivante fut de choisir les champs de jauge dans le groupe lui-même puis de se placer dans la limite  $h^{\mu\nu} \longrightarrow \eta^{\mu\nu} + h'^{\mu\nu}$  afin de retrouver les termes inhomogènes usuels dans leurs transformations. Dans la dernière section, nous avons dû modifier ce terme dans le cas du spin 3 pour éviter d'annuler la trace du paramètre  $\lambda_{\mu\nu}$ . Dans le cas non-abélien, cette redéfinition a requis l'introduction d'un champ auxiliaires  $k_\mu$  se transformant en partie comme le groupe pour que  $h_{\mu\nu\rho}$  vérifie la loi de groupe. La variation du terme cinétique de  $k_\mu$  a entraîné l'apparition d'un terme de masse pour  $h_{\mu\nu}$ , puis d'un autre champ auxiliaire  $l$ . Il a alors été possible de construire un Lagrangien pour un spin 2 massif libre avec un propagateur admettant un limite de masse nulle continue. De plus, l'absence de termes linéaires en  $k_\mu$  et  $l$  assure que ces derniers ne peuvent se retrouver au niveau des arbres dans le cas en interaction. Cette situation est l'extension d'un mécanisme bien connu pour le spin 1.

Il reste bien entendu à trouver un Lagrangien en interaction pour ces champs de spins élevés qui soit compatible avec leurs transformations non abéliennes, mais on peut déjà souligner l'intérêt de ce formalisme qui constitue un intermédiaire entre une approche de théorie des champs usuelle et la théorie des cordes.

---



---

## Bibliographie

- [1] Babelon O., Bernard D. et Talon M., “Introduction to Classical Integrable Systems,” *Cambridge University Press*, 602 pp. (2003)
  - [2] Liouville J., “Note sur l’intégration des équations différentielles de la Dynamique”, *J. Math. Pures Appl.* **20**, 137–138 (1855). Présentée en 1853.
  - [3] Arnol’d V.I., “A theorem of Liouville concerning integrable problems of dynamics”, *Siberian Math. J.* **4** (1963)
  - [4] Lax P. D. , “Integrals Of Nonlinear Equations Of Evolution And Solitary Waves,” *Commun. Pure Appl. Math.* **21**, 467 (1968)
  - [5] Drinfeld V.G. , “Quantum groups,” *J. Sov. Math.***41**, 898 (1988)
  - [6] Belavin A.A., Polyakov A.M. et Zamolodchikov A.B., “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory,” *Nucl. Phys. B* **241**, 333 (1984)
  - [7] Barone, A., Esposito, F., Magee, C. J., et Scott, A. C., “Theory and Applications of the Sine-Gordon Equation” *Riv. Nuovo Cim* **1**, 227-267 (1971)
  - [8] Scott, A. C., Chu F.Y.F , McLaughlin D., “The soliton : A new concept in applied science ” *Proc. of the IEEE* **61**, 10 (1973)
  - [9] Whitham G. B. , “Linear and Nonlinear Waves”, *Wiley Interscience, New York* (1974)
  - [10] Dodd R., Eilbeck K., J. C., Gibbon J. D. et Morris H. C., “Solitons and Nonlinear Wave Equations” *Academic Press, London* (1982)
  - [11] Camassa R., Holm D. D., *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1661-1664 (1993)
  - [12] Peregrine D.H., *J. Fluid Mech.* **25** (part2), 321 (1966).
  - [13] Broer J. P., *Appl. Scientific Res.* **32**, 619 (1976)
  - [14] Van Der Houwen P., Mooiman P. J et Wuls F. W., *Int. J. Numer. Methods in Fluids* **13**, 10, 1235 (1991).
  - [15] Katopodes N.D., Sanders B.F., et Boyd J.P., *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering* **124**,5, 238 (1998)
  - [16] Manna M. A. et Neveu A., “A singular integrable equation from short capillary gravity waves”, [physics/0303085](#)
  - [17] Van Dyke M., “An Album of Fluid Motion” *The Parabolic Press, Stanford, California* (1997)
-



- 
- [18] Green A. E., Laws N. et Nagdhi P. M., *Proc. R. Soc. A* **338**, 43-55 (1974)
- [19] Green A. E. et Nagdhi P. M., *J. Fluid. Mech.* **78**, 237-246 (1976)
- [20] Green A. E. et Nagdhi P. M., *Proc. R. Soc. A* **347**, 447-473 (1976)
- [21] Kim J. W., Bai K. J., Ertekin R. C., et Webster W. C. , *J. Engineering Mathematics* **40**,17-34 (2001)
- [22] Brunelli J.C., Das A. et Popowicz. Z., “Deformed Harry-Dym and Hunter-Zheng equations“ [nlin/0307043](#) (2003)
- [23] Falcon E., Laroche C. et Fauve S., “Observation of depression solitary wave on a thin fluid layer” *Phys. Rev. Lett* **89**, 204501 (2002).
- [24] Dodd R.K. et Bullough R.K., *Proc. Roy. Soc London A* **352**, 481 (1977)
- [25] Sakovich A. et Sakovich S., *J. Phys. Soc. Jpn.* **74**, 239 (2005)
- [26] Fierz M. et Pauli W., *Proc. Roy. Soc London A* **173**, 481 (1939)
- [27] Fronsdal C., “Massless fiels with integer spin” *Phys. Rev. D* **18**, 10, 3624 (1978).
- [28] de Wit B. et Freedman D., “Systematics of higher-spin gauge fields” *Phys. Rev. D* **21**, 2, 358 (1978).
- [29] Coleman S.R., et Mandula J., “All possible symmetries of the S-Matrix ” *Phys. Rev.* **159**, 1251 (1967)
- [30] Haag R., Lopuszanski J.T. and Sohnius M., “All Possible Generators Of Supersymmetries Of The S Matrix,” *Nucl. Phys. B* **88** 257 (1975).
- [31] Bekaert X., Cnockaert S., Iazeolla C. and Vasiliev M.A., “Nonlinear higher spin theories in various dimensions” [hep-th/0503128](#).
- [32] Vasiliev M.A., “Higher spin gauge theories in any dimension” *Comptes Rendus Physique* **5**, 1101 (2004) ([hep-th/0409260](#))
- [33] Neveu A., Nicolai H. et West P.C., “Gauge Covariant Local Formulation Of Free Strings And Superstrings,” *Nucl. Phys. B* **264**, 573 (1986).
- [34] Neveu A., Nicolai H. et West P.C., “New Symmetries And Ghost Structure Of Covariant String Theories”, *Phys. Lett. B* **167**, 307 (1986).
- [35] Sorokin D., “Introduction to the classical theory of higher spins,” *AIP Conf. Proc.* **767** 172 (2005) [hep-th/0405069](#).
- [36] Veltman M. J. G., “Perturbation Theory Of Massive Yang-Mills Fields,” *Nucl. Phys. B* **7** 637 (1968).
- [37] Reiff J. et Veltman M. J. G., “Massive yang-mills fields,” *Nucl. Phys. B* **13**, 545 (1969).
-

## Annexe A

# Représentations des ondes solitaires de Green-Naghdi avec tension de surface

Nous montrons ici les graphes correspondant aux quatre domaines (1.49). Comme expliqué dans la section 1.4, nous avons considéré (1.46) comme l'équation d'un point matériel de coordonnées  $S(\xi)$  et nous avons tracé de manière paramétrique (1.50) dans le plan  $(S, E_p)$ . A partir des morceaux des courbes pour lesquels  $E_p$  est négatif (on a défini  $E_p = -\frac{1}{2}S\xi^2$ ) il est possible de déduire la forme des solutions de (1.46). A  $\xi \rightarrow -\infty$ ,  $S \rightarrow h$ , que l'on a fixé à 1 dans ce cas, suit le profil du potentiel et tend à nouveau vers  $h = 1$  quand  $\xi \rightarrow \infty$ . Tout cela rejoint le comportement habituel d'une onde solitaire mais les graphes des domaines *ii* et *iii* partagent une propriété inhabituelle, l'existence de points particuliers où  $E_p$  continue à croître (ou décroître) alors que  $S$  passe un extremum local. L'existence de chacun de ces points résulte en une singularité dans la forme de la solution  $S$ . Voyons le détail selon les cas :

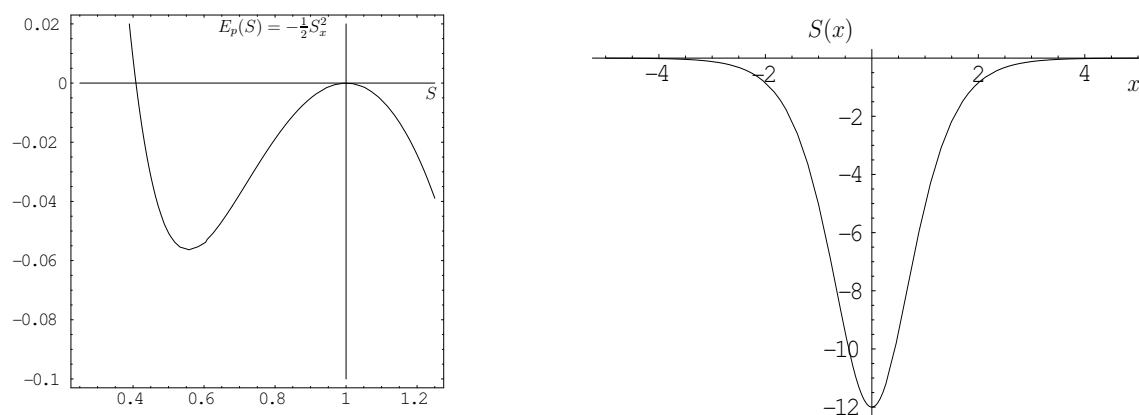


FIG. A.1 – Domaine *i* : Onde de dépression ou “creux”.

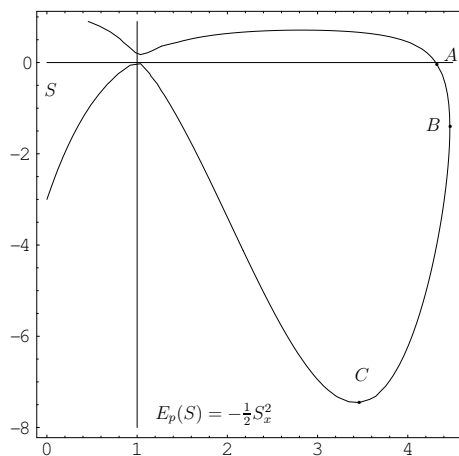


FIG. A.2 – Domaine *ii* : On obtient la forme de  $S$  comme suit : la solution  $S$  part de la valeur 1 à  $\xi = -\infty$ , croît jusqu’au point  $B$ , puis commence à décroître alors que sa dérivée ne change pas de signe, ce qui entraîne l’apparition d’un point singulier du même type que le point  $B'$  de la figure 1.1.  $S$  atteint finalement un minimum local au point  $A$  où  $E_p = 0$  et fait le chemin inverse de manière symétrique (croissance  $\rightarrow B \rightarrow$  décroissance jusqu’à  $h = 1$  en à  $\xi = \infty$ ). En résumé,  $S$  ressemble à une traditionnelle onde solitaire “en bosse” avec un comportement singulier en “queue d’hirondelle”, comme le breather de la figure 1.1.

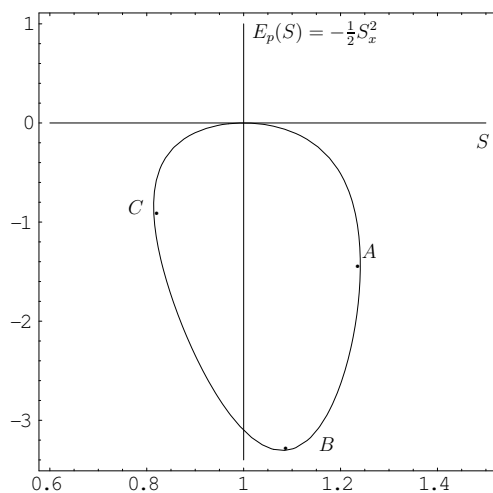


FIG. A.3 – Domaine *iii* : Il y a deux points singuliers dans ce cas et la forme de  $S$  est essentiellement la même que la solution singulière  $u(\xi, \eta)$  de la figure 1.2. En effet, pour la solution de type “soliton” (le sens de parcours est celui des aiguilles d’une montre),  $S$  part de 1, croît jusqu’à  $A$ , similaire au point  $A'$  de la figure 1.2, puis décroît de  $A$  à  $C$ , en passant par un point d’inflexion minimum  $B$  de  $E_p(S)$ . L’autre point singulier  $C$ , est du type de  $C'$  de la figure 1.2, et pour finir,  $S$  croît de nouveau jusqu’à 1.

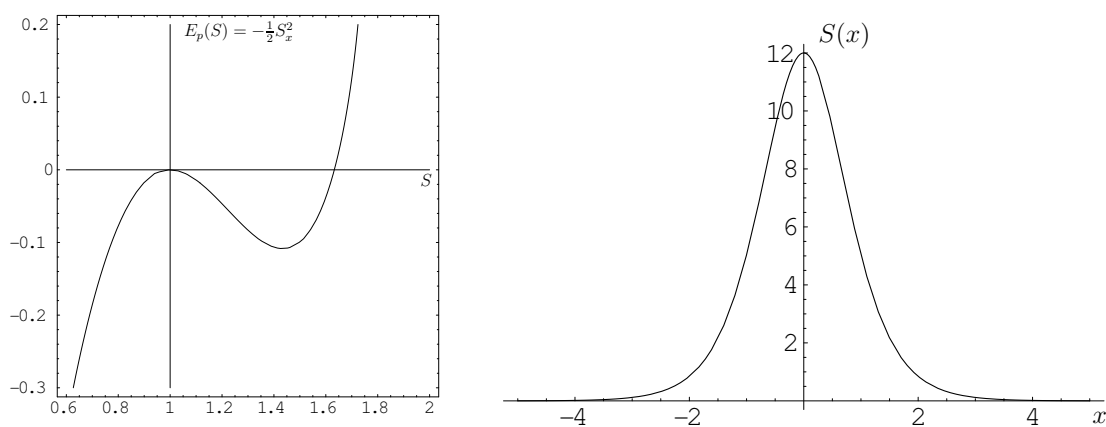


FIG. A.4 – Domaine *iv* : Onde d’élévation ou “bosse” .



## Annexe B

# Amplitudes de probabilité

Nous présentons ici les principales étapes du calcul des amplitudes de probabilités entrant en considération dans la section 3.1.

Termes présent dans  $A_1$

$$\langle f | v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger v_{i_3} v_{i_4} | i \rangle_c = (\delta_{i_3, n_1} \delta_{i_4, n_2} + \delta_{i_3, n_2} \delta_{i_4, n_1}) (\delta_{i_1, n_3} \delta_{i_2, n_4} + \delta_{i_1, n_4} \delta_{i_2, n_3}). \quad (\text{B.1})$$

$$\langle f | v_{i_1} v_{i_2}^\dagger v_{i_3} v_{i_4}^\dagger | i \rangle_c = (\delta_{i_1, n_1} \delta_{i_3, n_2} + \delta_{i_1, n_2} \delta_{i_3, n_1}) (\delta_{i_2, n_3} \delta_{i_4, n_4} + \delta_{i_2, n_4} \delta_{i_4, n_3}). \quad (\text{B.2})$$

$$\langle f | v_{i_1}^\dagger v_{i_2} v_{i_3}^\dagger v_{i_4} | i \rangle_c = (\delta_{i_2, n_1} \delta_{i_4, n_2} + \delta_{i_2, n_2} \delta_{i_4, n_1}) (\delta_{i_1, n_3} \delta_{i_3, n_4} + \delta_{i_1, n_4} \delta_{i_3, n_3}). \quad (\text{B.3})$$

$$\langle f | v_{i_1} v_{i_2}^\dagger v_{i_3}^\dagger v_{i_4} | i \rangle_c = (\delta_{i_1, n_1} \delta_{i_4, n_2} + \delta_{i_1, n_2} \delta_{i_4, n_1}) (\delta_{i_2, n_3} \delta_{i_3, n_4} + \delta_{i_2, n_4} \delta_{i_3, n_3}). \quad (\text{B.4})$$

$$\langle f | v_{i_1}^\dagger v_{i_2} v_{i_3} v_{i_4}^\dagger | i \rangle_c = (\delta_{i_2, n_1} \delta_{i_2, n_2} + \delta_{i_2, n_2} \delta_{i_3, n_1}) (\delta_{i_1, n_3} \delta_{i_4, n_4} + \delta_{i_1, n_4} \delta_{i_4, n_3}). \quad (\text{B.5})$$

Calcul des  $A_i$ ,  $i = 3, 4, 5, 6, 7$

-  $A_3$  :

– état intermédiaire

$$\begin{cases} |int\rangle \equiv |1_{n_1}, 1_{n_2}, 1_{n_3}, 1_{n_4}; 1_m\rangle = v_{n_1}^\dagger v_{n_2}^\dagger v_{n_3}^\dagger v_{n_4}^\dagger \sigma_m^\dagger |0\rangle \\ E_{int} = \omega_{n_1} + \omega_{n_2} + \omega_{n_3} + \omega_{n_4} + q_m \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

– premier facteur

$$\begin{aligned} \langle int|S_2|i\rangle &= \langle 1_{n_1}, 1_{n_2}|v_{n_3}v_{n_4}\sigma_m S_2|1_{n_1}, 1_{n_2}\rangle \\ &= -\frac{i}{2\sqrt{2L}} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \sum_{j \neq 0} \frac{(k_{i_1} - \omega_{i_1})(k_{i_2} - \omega_{i_2})\gamma_j - \alpha^2 q_j}{\sqrt{\omega_{i_1}\omega_{i_2}\gamma_j}} \\ &\quad \times \delta_{j+i_1+i_2} \langle 1_{n_1}, 1_{n_2}|v_{n_3}v_{n_4}\sigma_m \sigma_j^\dagger v_{i_1}^\dagger v_{i_2}^\dagger |1_{n_1}, 1_{n_2}\rangle \\ \langle int|S_2|i\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2L}} \frac{\Delta_{n_3}\Delta_{n_4}\gamma_m - \alpha^2 q_m}{\sqrt{\omega_{n_3}\omega_{n_4}\gamma_m}} \delta_{m+n_3+n_4} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

– second facteur

$$\begin{aligned} \langle f|S_2|int\rangle &= \langle 1_{n_3}, 1_{n_4}|S_2 v_{n_1}^\dagger v_{n_2}^\dagger \sigma_m^\dagger |1_{n_3}, 1_{n_4}\rangle \\ &= \frac{i}{2\sqrt{2L}} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \sum_{j \neq 0} \frac{(k_{i_1} - \omega_{i_1})(k_{i_2} - \omega_{i_2})\gamma_j - \alpha^2 q_j}{\sqrt{\omega_{i_1}\omega_{i_2}\gamma_j}} \\ &\quad \times \delta_{j+i_1+i_2} \langle 1_{n_3}, 1_{n_4}|\sigma_j v_{i_1} v_{i_2} v_{n_1}^\dagger v_{n_2}^\dagger \sigma_m^\dagger |1_{n_3}, 1_{n_4}\rangle \\ \langle f|S_2|int\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2L}} \frac{\Delta_{n_1}\Delta_{n_2}\gamma_m - \alpha^2 q_m}{\sqrt{\omega_{n_1}\omega_{n_2}\gamma_m}} \delta_{m+n_1+n_2} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

– expression complète

$$\begin{aligned} A_3 &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \sum_{n_4} \sum_m \frac{\delta_{m+n_1+n_2} \delta_{m+n_3+n_4}}{2L} \times \\ &\quad \frac{(\Delta_{n_1}\Delta_{n_2}\gamma_m - \alpha^2 q_m)(\Delta_{n_3}\Delta_{n_4}\gamma_m - \alpha^2 q_m)}{\gamma_m \sqrt{\omega_{n_1}\omega_{n_2}\omega_{n_3}\omega_{n_4}} (\omega_{n_1} + \omega_{n_2} - \sum i\omega_{n_i} - q_m)} \\ A_3 &= - \sum' \frac{1}{2L} \frac{(\Delta_{n_1}\Delta_{n_2}\gamma_{n_1+n_2} + \alpha^2 q_{n_1+n_2})(\Delta_{n_3}\Delta_{n_4}\gamma_{n_3+n_4} + \alpha^2 q_{n_3+n_4})}{\gamma_{n_1+n_2} \sqrt{\omega_{n_1}\omega_{n_2}\omega_{n_3}\omega_{n_4}} (\omega_{n_3} + \omega_{n_4} - q_{n_1+n_2})} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

–  $A_4$

– état intermédiaire

$$\begin{cases} |int\rangle \equiv |1_{n_2}, 1_{n_4}; 1_m\rangle = v_{n_2}^\dagger v_{n_4}^\dagger \sigma_m^\dagger |0\rangle \\ E_{int} = \omega_{n_2} + \omega_{n_4} + q_m \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

– premier facteur

$$\begin{aligned}
\langle int|S_2|i\rangle &= \langle 1_{n_2}|v_{n_4}\sigma_m S_2 v_{n_1}^\dagger|1_{n_2}\rangle \\
&= \frac{i}{2\sqrt{2L}} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \sum_{j \neq 0} \frac{(k_{i_1} - \omega_{i_1})(k_{i_2} - \omega_{i_2})\gamma_j + \alpha^2 q_j}{\sqrt{\omega_{i_1}\omega_{i_2}\gamma_j}} \\
&\quad \times \langle 1_{n_2}|v_{n_4}\sigma_m \left( \delta_{j+i_1-i_2}\sigma_j^\dagger v_{i_1}^\dagger v_{i_2} + \delta_{j-i_1+i_2}\sigma_j^\dagger v_{i_1} v_{i_2}^\dagger \right) |1_{n_2}\rangle \\
\langle int|S_2|i\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2L}} \frac{\Delta_{n_1}\Delta_{n_4}\gamma_m + \alpha^2 q_m}{\sqrt{\omega_{n_1}\omega_{n_4}\gamma_m}} \delta_{m-n_1+n_4} \tag{B.11}
\end{aligned}$$

– second facteur

$$\begin{aligned}
\langle f|S_2|int\rangle &= \langle 1_{n_4}|v_{n_3} S_2 v_{n_2}^\dagger \sigma_m^\dagger |1_{n_4}\rangle \\
&= -\frac{i}{2\sqrt{2L}} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \sum_{j \neq 0} \frac{(k_{i_1} - \omega_{i_1})(k_{i_2} - \omega_{i_2})\gamma_j + \alpha^2 q_j}{\sqrt{\omega_{i_1}\omega_{i_2}\gamma_j}} \\
&\quad \times \langle 1_{n_4} | \left( \delta_{j+i_1-i_2}\sigma_j v_{i_1} v_{i_2}^\dagger + \delta_{j-i_1+i_2}\sigma_j v_{i_1}^\dagger v_{i_2} \right) |1_{n_4}\rangle \\
\langle f|S_2|int\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2L}} \frac{\Delta_{n_2}\Delta_{n_3}\gamma_m + \alpha^2 q_m}{\sqrt{\omega_{n_2}\omega_{n_3}\gamma_m}} \delta_{m+n_2-n_3} \tag{B.12}
\end{aligned}$$

– expression complète

$$\begin{aligned}
A_4 &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \sum_{n_4} \sum_m \frac{\delta_{m+n_1+n_2}\delta_{m+n_3+n_4}}{2L} \times \\
&\quad \frac{(\Delta_{n_1}\Delta_{n_4}\gamma_m + \alpha^2 q_m)(\Delta_{n_2}\Delta_{n_3}\gamma_m + \alpha^2 q_m)}{\gamma_m \sqrt{\omega_{n_1}\omega_{n_2}\omega_{n_3}\omega_{n_4}} (\omega_{n_1} + \omega_{n_2} - \omega_{n_3} - \omega_{n_4} - q_m)} \\
A_4 &= \sum' \frac{1}{2L} \frac{(\Delta_{n_1}\Delta_{n_2}\gamma_{n_1+n_2} + \alpha^2 q_{n_1+n_2})(\Delta_{n_3}\Delta_{n_4}\gamma_{n_3+n_4} + \alpha^2 q_{n_3+n_4})}{\gamma_{n_1+n_2}\sqrt{\omega_{n_1}\omega_{n_2}\omega_{n_3}\omega_{n_4}} (\omega_{n_1} - \omega_{n_4} - q_{n_1-n_4})} \tag{B.13}
\end{aligned}$$

Par analogie avec  $A_4$ , on peut déduire simplement les étapes du calcul des amplitudes restantes.

–  $A_5$

– état intermédiaire

$$\begin{cases} |int\rangle \equiv |1_{n_1}, 1_{n_3}; 1_m\rangle = v_{n_1}^\dagger v_{n_3}^\dagger \sigma_m^\dagger |0\rangle \\ E_{int} = \omega_{n_1} + \omega_{n_3} + q_m \end{cases} \tag{B.14}$$



– premier facteur

$$\begin{aligned}\langle int|S_2|i\rangle &= \langle 1_{n_1}|v_{n_3}\sigma_m S_2 v_{n_2}^\dagger|1_{n_1}\rangle \\ \langle int|S_2|i\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2L}} \frac{\Delta_{n_2}\Delta_{n_3}\gamma_m + \alpha^2 q_m}{\sqrt{\omega_{n_2}\omega_{n_3}\gamma_m}} \delta_{m-n_2+n_3}\end{aligned}\quad (\text{B.15})$$

– second facteur

$$\begin{aligned}\langle f|S_2|int\rangle &= \langle 1_{n_3}|v_{n_4} S_2 v_{n_1}^\dagger \sigma_m^\dagger|1_{n_3}\rangle \\ \langle int|S_2|i\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2L}} \frac{\Delta_{n_1}\Delta_{n_4}\gamma_m + \alpha^2 q_m}{\sqrt{\omega_{n_1}\omega_{n_4}\gamma_m}} \delta_{m+n_1-n_4}\end{aligned}\quad (\text{B.16})$$

– expression complète

$$\begin{aligned}A_5 &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \sum_{n_4} \sum_m \frac{\delta_{m+n_1-n_4} \delta_{m-n_2+n_3}}{2L} \times \\ &\quad \frac{(\Delta_{n_1}\Delta_{n_4}\gamma_m + \alpha^2 q_m)(\Delta_{n_2}\Delta_{n_3}\gamma_m + \alpha^2 q_m)}{\gamma_m \sqrt{\omega_{n_1}\omega_{n_2}\omega_{n_3}\omega_{n_4}} (\omega_{n_1} + \omega_{n_2} - \omega_{n_1} - \omega_{n_3} - q_m)} \\ A_5 &= \sum' \frac{1}{2L} \frac{(\Delta_{n_1}\Delta_{n_2}\gamma_{n_1+n_2} - \alpha^2 q_{n_1-n_4})(\Delta_{n_3}\Delta_{n_4}\gamma_{n_3+n_4} + \alpha^2 q_{n_2-n_3})}{\gamma_{n_2-n_3} \sqrt{\omega_{n_1}\omega_{n_2}\omega_{n_3}\omega_{n_4}} (\omega_{n_2} - \omega_{n_3} - q_{n_2-n_3})}\end{aligned}\quad (\text{B.17})$$

–  $A_6$

– état intermédiaire

$$\begin{cases} |int\rangle \equiv |1_{n_2}, 1_{n_3}; 1_m\rangle = v_{n_2}^\dagger v_{n_3}^\dagger \sigma_m^\dagger |0\rangle \\ E_{int} = \omega_{n_2} + \omega_{n_3} + q_m \end{cases}\quad (\text{B.18})$$

– premier facteur

$$\begin{aligned}\langle int|S_2|i\rangle &= \langle 1_{n_2}|v_{n_3}\sigma_m S_2 v_{n_1}^\dagger|1_{n_2}\rangle \\ \langle int|S_2|i\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2L}} \frac{\Delta_{n_1}\Delta_{n_3}\gamma_m + \alpha^2 q_m}{\sqrt{\omega_{n_1}\omega_{n_3}\gamma_m}} \delta_{m-n_1+n_3}\end{aligned}\quad (\text{B.19})$$

– second facteur

$$\begin{aligned}\langle f|S_2|int\rangle &= \langle 1_{n_3}|v_{n_4} S_2 v_{n_2}^\dagger \sigma_m^\dagger|1_{n_3}\rangle \\ \langle int|S_2|i\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2L}} \frac{\Delta_{n_2}\Delta_{n_4}\gamma_m + \alpha^2 q_m}{\sqrt{\omega_{n_2}\omega_{n_4}\gamma_m}} \delta_{m+n_2-n_4}\end{aligned}\quad (\text{B.20})$$

– expression complète

$$A_6 = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \sum_{n_4} \sum_m \frac{\delta_{m-n_1+n_3} \delta_{m+n_2-n_4}}{2L} \times \frac{(\Delta_{n_1} \Delta_{n_3} \gamma_m + \alpha^2 q_m) (\Delta_{n_2} \Delta_{n_4} \gamma_m + \alpha^2 q_m)}{\gamma_m \sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2} \omega_{n_3} \omega_{n_4}} (\omega_{n_1} + \omega_{n_2} - \omega_{n_2} - \omega_{n_3} - q_m)}$$

$$A_6 = \sum' \frac{1}{2L} \frac{(\Delta_{n_1} \Delta_{n_3} \gamma_{n_1+n_2} + \alpha^2 q_{n_1-n_3}) (\Delta_{n_2} \Delta_{n_4} \gamma_{n_3+n_4} - \alpha^2 q_{n_2-n_4})}{\gamma_{n_1-n_3} \sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2} \omega_{n_3} \omega_{n_4}} (\omega_{n_1} - \omega_{n_3} - q_{n_1-n_3})} \quad (\text{B.21})$$

–  $A_7$

– état intermédiaire

$$\begin{cases} |int\rangle \equiv |1_{n_1}, 1_{n_4}; 1_m\rangle = v_{n_1}^\dagger v_{n_4}^\dagger \sigma_m^\dagger |0\rangle \\ E_{int} = \omega_{n_1} + \omega_{n_4} + q_m \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

– premier facteur

$$\langle int | S_2 | i \rangle = \langle 1_{n_1} | v_{n_4} \sigma_m S_2 v_{n_2}^\dagger | 1_{n_2} \rangle$$

$$\langle int | S_2 | i \rangle = \frac{i}{\sqrt{2L}} \frac{\Delta_{n_2} \Delta_{n_4} \gamma_m + \alpha^2 q_m}{\sqrt{\omega_{n_2} \omega_{n_4} \gamma_m}} \delta_{m-n_2+n_4} \quad (\text{B.23})$$

– second facteur

$$\langle f | S_2 | int \rangle = \langle 1_{n_4} | v_{n_3} S_2 v_{n_1}^\dagger \sigma_m^\dagger | 1_{n_4} \rangle$$

$$\langle int | S_2 | i \rangle = -\frac{i}{\sqrt{2L}} \frac{\Delta_{n_1} \Delta_{n_3} \gamma_m + \alpha^2 q_m}{\sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_3} \gamma_m}} \delta_{m+n_1-n_3} \quad (\text{B.24})$$

– expression complète

$$A_7 = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \sum_{n_4} \sum_m \frac{\delta_{m+n_1-n_3} \delta_{m-n_2+n_4}}{2L} \times \frac{(\Delta_{n_1} \Delta_{n_3} \gamma_m + \alpha^2 q_m) (\Delta_{n_2} \Delta_{n_4} \gamma_m + \alpha^2 q_m)}{\gamma_m \sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2} \omega_{n_3} \omega_{n_4}} (\omega_{n_1} + \omega_{n_2} - \omega_{n_1} - \omega_{n_4} - q_m)}$$

$$A_7 = \sum' \frac{1}{2L} \frac{(\Delta_{n_1} \Delta_{n_3} \gamma_{n_1+n_2} - \alpha^2 q_{n_1-n_3}) (\Delta_{n_2} \Delta_{n_4} \gamma_{n_3+n_4} + \alpha^2 q_{n_2-n_4})}{\gamma_{n_2-n_4} \sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2} \omega_{n_3} \omega_{n_4}} (\omega_{n_2} - \omega_{n_4} - q_{n_2-n_4})} \quad (\text{B.25})$$

Démonstration de la formule (3.67)

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta_i \Delta_j k_{i+j}}{\omega_i + \omega_j - k_{i+j}} &= \frac{1}{2} (k_i + k_j - \omega_i - \omega_j + k_i + k_j + \omega_i + \omega_j) \frac{(k_i - \omega_i)(k_j - \omega_j)}{\omega_i + \omega_j - k_i + k_j} \\
&= \frac{1}{2} \left[ -\Delta_i \Delta_j + \frac{(k_i^2 - \omega_i^2)(k_j - \omega_j) + (k_j^2 - \omega_j^2)(k_i - \omega_i)}{\omega_i + \omega_j - k_i + k_j} \right] \quad (\text{B.26})
\end{aligned}$$

La relation de dispersion nous dit que

$$\omega_i^2 = k_i^2 + 1$$

ce qui implique que

$$\frac{\Delta_i \Delta_j k_{i+j}}{\omega_i + \omega_j - k_{i+j}} = \frac{1}{2} \left[ -\Delta_i \Delta_j - \frac{k_j - \omega_j + k_i - \omega_i}{\omega_i + \omega_j - k_i - k_j} \right] = -\frac{1}{2} (\Delta_i \Delta_j - 1) \quad (\text{B.27})$$



## Summary

**I.** The equation describing short waves dynamique on the surface of a fluid after a Green-Naghdi type reduction of Euler equations is found to be a new integrable system that exhibits very interesting properties. Indeed, an unexpected relation with the sine-Gordon model, through transformations involving a conserved quantity, leads to singular and multi-valued solutions for the new equation and allows to build a description in terms of the Lagrangian of a relativistic field. The existence of cases very similar to this one leads us to investigate general condition for this kind of relations to appear and to study a model not explicitly Lorentz-invariant which mix two of the equations we obtained earlier. The last point we focus on is the effects on low-order quantum corrections due to those transformations.

**II.** In order to find a consistent theory for higher-spin fields, we have studied a new way to build gauge groups and fields based on string field theory and mixing all levels of spin. We first calculate elements of the group and the composition law thanks to hermiticity constraints. We then choose the gauge fields to belong to the adjoint representation of the group and modify them to get closer to usual definitions. Eventually, the study of the spin 3 needs us to introduce auxiliary fields which can be used to build a Lagrangian for the massive spin 2, analogous to what Veltman did in the Yang-Mills case.

**Key-words :** I. integrable models, field theory, sine-Gordon, multi-valued fields, field-dependent metric , non linear equations, solitons. II. gauge theory, interacting higher-spin fields, spin 3, massive spin 2 , auxiliary fields.



## Résumé

**I.** L'équation décrivant la dynamique des ondes courtes à la surface d'un fluide après une réduction de Green-Naghdi des équations d'Euler se trouve être un nouveau système intégrable exhibant des propriétés remarquables. Une relation insoupçonnée avec le modèle de sine-Gordon, au travers de transformations impliquant une quantité conservée, nous permet en effet d'obtenir des solutions singulières et multivaluées pour la nouvelle équation intégrable et, par la suite, d'en construire une description en terme du Lagrangien d'un champ relativiste. L'existence de modèles très similaires au système hydrodynamique et partageant les mêmes propriétés nous pousse à rechercher les conditions d'apparition d'une telle relation dans un cadre plus général puis à construire un modèle non relativiste mélangeant deux des équations obtenues auparavant. Cette partie se clôt sur une étude aux premiers ordres quantiques des effets de ces transformations responsables de l'apparition de champs relativistes multivalués.

**II.** Dans l'optique d'arriver à une théorie cohérente décrivant des champs de spins élevés en interaction, nous présentons dans la seconde partie une construction, basée sur la théorie des champs de cordes, qui mélange tous les niveaux de spin. Grâce à des contraintes d'hermiticité, on détermine dans un premier temps les éléments d'un groupe de jauge et leur loi de composition. Les champs de jauge sont choisis comme la représentation adjointe du groupe puis modifiés pour se rapprocher des définitions usuelles. Finalement, l'étude du spin 3 nécessite l'introduction de champs auxiliaires qui nous permettent d'obtenir un Lagrangien pour le champ de spin 2 massif en généralisant une méthode introduite par Veltman dans le cas de Yang-Mills.

**Mots-clefs :** I. systèmes intégrables, théorie des champs, sine-Gordon, champs multivalués, métrique dépendant des champs, équations non linéaires, solitons. II. théories de jauge, champs de spins élevés en interaction, spin 3, spin 2 massif, champs auxiliaires.

**Discipline :** Constituants élémentaires de la matière

**Laboratoire :** Laboratoire de Physique Théorique et Astroparticules, UMR 5207 CNRS-UM2, Université Montpellier II.