



**HAL**  
open science

## Bases canoniques d'espaces de Fock de niveau supérieur

Xavier Yvonne

► **To cite this version:**

Xavier Yvonne. Bases canoniques d'espaces de Fock de niveau supérieur. Mathématiques [math]. Université de Caen, 2005. Français. NNT: . tel-00137705

**HAL Id: tel-00137705**

**<https://theses.hal.science/tel-00137705>**

Submitted on 21 Mar 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Caen/Basse-Normandie  
U.F.R. de Sciences  
École doctorale SIMEM



**T H È S E**

présentée par

**M. Xavier YVONNE**

et soutenue le lundi 05 décembre 2005

en vue de l'obtention du

**DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN**

**Spécialité: mathématiques et leurs applications**

*(Arrêté du 25 avril 2002)*

**Bases canoniques d'espaces de Fock  
de niveau supérieur**

**MEMBRES du JURY**

- M. Bernard LECLERC, Professeur à l'université de Caen (*directeur de thèse*).  
M. Olivier MATHIEU, Directeur de Recherches CNRS, Université Lyon I (*rapporteur*).  
M. Jean-Yves THIBON, Professeur à l'université de Marne-la-Vallée (*rapporteur*).  
M. Raphaël ROUQUIER, Directeur de Recherches CNRS, Université Paris VII.  
M. Olivier SCHIFFMANN, Chargé de Recherches CNRS, ENS, DMA Paris.  
M. Leonid VAINERMAN, Professeur à l'université de Caen.



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude envers mon directeur de thèse Bernard Leclerc, qui a su me proposer un sujet innovant et passionnant. Je le remercie tout particulièrement pour la qualité de ses explications et des notes qu'il m'a transmises, pour son extrême disponibilité, pour ses conseils et ses idées qui m'ont aidé à maintes reprises. Je lui suis également reconnaissant pour la patience dont il a su faire preuve pour suivre à chaque instant l'avancée de mon travail.

J'adresse mes remerciements sincères à Olivier Mathieu et Jean-Yves Thibon, qui ont accepté de rapporter ma thèse avec sérieux et diligence. Je remercie également Raphaël Rouquier, Olivier Schiffmann et Leonid Vainerman qui me font l'honneur d'être membres de mon jury.

Je salue par ailleurs tous les membres du laboratoire de mathématiques Nicolas Oresme, au sein duquel j'ai trouvé une ambiance chaleureuse et d'excellentes conditions de travail. Merci à Nicolas Jacon qui a partagé mon bureau l'année passée ; les discussions stimulantes que j'ai eues avec lui ont énormément contribué à la rédaction de la fin de mon mémoire et de l'article correspondant. J'apprécie en Nicolas le lecteur curieux et attentif de l'évolution de mes travaux. Je remercie aussi Corentin et Marc pour leurs conseils liés à l'usage de  $\text{\LaTeX}$  pour la rédaction de ce mémoire. Je donne également le bonjour à mes collègues, doctorants et ATER, que j'ai fréquentés durant mes trois années de thèse : je salue donc Blanche, Chloé, Corentin, Damien, Emmanuel, Erwan, Fabien, Frank, Jean, les deux Marc, Mohamed, Nicolas, Laurent, les deux Pierre, ainsi que ceux que j'aurais malencontreusement oubliés et qui se reconnaîtront.

Un grand merci à Yves Duval, mon professeur de Mathématiques Spéciales, qui m'a formé au cours d'un moment essentiel de ma vie de futur mathématicien. Je suis également redevable envers l'École Normale Supérieure de Lyon et ses professeurs, qui m'ont donné le goût de la recherche et l'envie d'entreprendre cette thèse.

Je remercie enfin les membres de ma famille, et tout particulièrement mes parents Denis et Viviane en qui je trouve un soutien moral sans faille. Merci à Denis, qui m'a donné le goût des mathématiques et des jeux dès mon plus jeune âge. Enfin bravo à Viviane, Géraldine, Marie-Louise et tous mes proches qui ont veillé à ce que la fin de ma thèse se déroule dans une ambiance chaleureuse et conviviale.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction</b>	<b>vii</b>
<b>Notations</b>	<b>xi</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1 Combinatoire des partitions et multi-partitions . . . . .	1
1.1.1 Compositions, multi-compositions, partitions, multi-partitions . . . . .	1
1.1.2 Formes gauches, rubans . . . . .	3
1.1.3 Tableaux . . . . .	4
1.1.4 Multi-partitions chargées . . . . .	6
1.1.5 Abaques . . . . .	8
1.1.5.1 Représentation des multi-partitions chargées à l'aide d'abaques	8
1.1.5.2 Calcul du $n$ -quotient et du $n$ -cœur . . . . .	9
1.1.5.3 Une variante du $l$ -quotient et du $l$ -cœur . . . . .	11
1.2 L'algèbre quantique affine $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ . . . . .	13
1.2.1 L'algèbre de Lie affine $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ . . . . .	13
1.2.2 L'algèbre quantique affine $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ . . . . .	15
1.2.2.1 Définition . . . . .	15
1.2.2.2 Éléments de la théorie des $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules . . . . .	17
1.2.3 Bases cristallines, bases globales des $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules intégrables . . .	18
1.2.3.1 Opérateurs cristallins de Kashiwara [Kas3] . . . . .	18
1.2.3.2 Bases cristallines . . . . .	21
1.2.3.3 Bases globales . . . . .	22
1.3 Le groupe symétrique affine étendu $\widehat{\mathfrak{S}}_r$ et son algèbre de Hecke . . . . .	24
1.3.1 Le groupe symétrique affine étendu $\widehat{\mathfrak{S}}_r$ . . . . .	24
1.3.1.1 Deux présentations de $\widehat{\mathfrak{S}}_r$ . . . . .	24
1.3.1.2 Deux actions de $\widehat{\mathfrak{S}}_r$ . . . . .	26
1.3.2 L'algèbre de Hecke $H(\widehat{\mathfrak{S}}_r)$ . . . . .	28
1.3.2.1 Définition . . . . .	28

1.3.2.2	Deux actions de $\widehat{H}_r$ sur l'espace des poids . . . . .	30
1.3.2.3	Polynômes de Kazhdan-Lusztig . . . . .	32
<b>2</b>	<b><math>q</math>-produits extérieurs</b>	<b>35</b>
2.1	Notations . . . . .	35
2.2	Construction de l'espace $\Lambda_q^r V$ . . . . .	36
2.2.1	L'espace vectoriel $\Lambda(\mathbf{b})$ . . . . .	36
2.2.2	Une base de $\Lambda_q^r V$ . Relations de redressement . . . . .	38
2.3	Trois actions sur $\Lambda_q^r V$ . . . . .	43
2.4	Une involution de $\Lambda_q^r V$ . Bases canoniques d'Uglov . . . . .	46
2.4.1	Une involution de $\Lambda_q^r V$ . . . . .	46
2.4.2	Bases canoniques d'Uglov de $\Lambda_q^r V$ . . . . .	47
2.5	Démonstration du point (i) de la proposition 2.13 . . . . .	48
2.5.1	Démonstration de $(R_1)$ . . . . .	49
2.5.2	Démonstration de $(R_2)$ et $(R_3)$ . . . . .	49
2.5.3	Démonstration de $(R_4)$ . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Espaces de Fock de niveau supérieur</b>	<b>53</b>
3.1	L'espace des $q$ -produits extérieurs (semi-)infinis $\Lambda^s$ . . . . .	53
3.2	Trois actions sur $\Lambda^s$ . . . . .	55
3.2.1	Action des algèbres quantiques affines $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ et $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ . . . . .	55
3.2.2	Action des bosons sur $\Lambda^s$ . . . . .	59
3.3	Deux décompositions de $\Lambda^s$ en tant que $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \otimes \mathcal{H} \otimes U'_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ -module . . . . .	60
3.4	Espaces de Fock . . . . .	62
3.4.1	Lien entre les espaces de Fock et les sous-espaces de poids de $\Lambda^s$ . . . . .	62
3.4.2	Bases cristallines . . . . .	65
3.4.3	Une involution de $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . Bases canoniques d'Uglov de $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . . . . .	68
3.4.3.1	Une involution de $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . . . . .	68
3.4.3.2	Bases canoniques d'Uglov de $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . . . . .	69
3.4.3.3	Liens entre les bases canoniques de $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ et les bases globales de Kashiwara . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Comparaison de bases canoniques d'espaces de Fock de niveau supérieur</b>	<b>75</b>
4.1	Action des groupes de Weyl de $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ et $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ sur les poids de $\Lambda^s$ . . . . .	76
4.1.1	Rappels . . . . .	76
4.1.2	Compatibilité entre l'action des groupes de Weyl sur les poids de $\Lambda^s$ et l'action des groupes de Weyl sur les multi-charges . . . . .	77
4.2	Les bijections $\pi_i$ et $\dot{\pi}_i$ . . . . .	78
4.2.1	Action des puissances divisées sur les espaces de Fock . . . . .	78
4.2.2	Définition des bijections $\pi_i$ et $\dot{\pi}_i$ . . . . .	79
4.3	Comparaison des bases canoniques de différents sous-espaces de poids de $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ ( $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ ) . . . . .	81
4.4	Comparaison des bases canoniques de $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$ , $w \in \mathbf{w}$ pour une même classe $\mathbf{w} \in \mathcal{P}^s/\mathbb{Z}\delta$ et différentes multi-charges $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ . . . . .	85

4.4.1	Un théorème de comparaison . . . . .	85
4.4.2	Un graphe formé de multi-charges conjuguées sous l'action de $\check{W}_l$ . . .	90
4.4.3	Cas des multi-charges très dominantes . . . . .	92
4.4.3.1	Notations . . . . .	93
4.4.3.2	Un théorème de comparaison de bases canoniques pour les multi-charges très dominantes . . . . .	94
4.4.3.3	Démonstration de la proposition 4.35 . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Calcul des bases canoniques d'espaces de Fock de niveau supérieur</b>	<b>103</b>
5.1	Calcul de l'action de l'algèbre de Heisenberg $\mathcal{H}$ sur les vecteurs $ \emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$ ( $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ )	104
5.1.1	Cas du niveau 1 . . . . .	104
5.1.1.1	Action de $\mathcal{Z}_r$ sur $\Lambda_q^r V[n, 1]$ . . . . .	104
5.1.1.2	Action de $\mathcal{H}$ sur $\Lambda^s[n, 1]$ . . . . .	108
5.1.2	Action de $\mathcal{H}$ sur les vecteurs $ \lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle$ lorsque $(\lambda_l, \mathbf{s}_l)$ est très dominant .	110
5.1.3	Action de $\mathcal{H}$ sur les vecteurs $ \emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$ , $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ . . . . .	112
5.1.3.1	Méthode de calcul et exemple . . . . .	112
5.1.3.2	Énoncé et démonstration des résultats utilisés au paragraphe	
5.1.3.1	. . . . .	114
5.1.3.3	Un exemple illustrant le corollaire 5.17 . . . . .	116
5.2	Une base de $\Lambda^s$ invariante sous l'action de l'involution $\bar{\phantom{x}}$ . . . . .	118
5.2.1	Une base de $\mathbf{M}_q[\mathbf{s}_l]$ ( $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ ) . . . . .	118
5.2.2	Une base de $\mathcal{H} \cdot  \emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$ ( $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ ) . . . . .	121
5.2.3	Une base de $\Lambda^s$ invariante sous l'action de l'involution $\bar{\phantom{x}}$ . . . . .	121
5.2.3.1	Un lemme sur les bi-modules . . . . .	121
5.2.3.2	Une base de $\Lambda^s$ invariante sous l'action de l'involution $\bar{\phantom{x}}$ . .	122
5.3	Intersection de la base $\mathbb{B}^s$ avec les sous-espaces de poids de $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ , $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$	123
5.3.1	Énoncé et preuve du résultat . . . . .	123
5.3.2	Un exemple d'application . . . . .	127
<b>6</b>	<b>Algèbres d'Ariki-Koike</b>	<b>131</b>
6.1	Algèbres cellulaires . . . . .	131
6.1.1	Définition . . . . .	132
6.1.2	Modules cellulaires . . . . .	133
6.1.3	Théorie des représentations des algèbres cellulaires définies sur un corps	135
6.2	Algèbres d'Ariki-Koike . . . . .	136
6.2.1	Définition . . . . .	137
6.2.2	Représentations des algèbres d'Ariki-Koike . . . . .	138
6.2.2.1	La base standard de $\mathcal{H}$ . . . . .	139
6.2.2.2	Représentations de $\mathcal{H}$ . . . . .	140
6.2.3	Un théorème d'Ariki . . . . .	145
6.2.3.1	Énoncé du théorème . . . . .	145
6.2.3.2	Paramétrisation des modules simples de l'algèbre d'Ariki-Koike	148



<b>7</b>	<b><i>v</i>-algèbres de Schur cyclotomiques</b>	<b>151</b>
7.1	Modules permutacionnels	152
7.2	Définition des <i>v</i> -algèbres de Schur cyclotomiques	154
7.3	Représentations des <i>v</i> -algèbres de Schur cyclotomiques	158
7.3.1	Résultats provenant de la théorie des algèbres cellulaires	158
7.3.2	Foncteur de Schur et théorème du double centralisateur	159
7.4	Formule sommatoire de Jantzen	161
7.4.1	Énoncé de la sommatoire de Jantzen	161
7.4.2	Définition de la matrice $J^<$	163
<b>8</b>	<b>Bases d'Uglov et <i>v</i>-algèbres de Schur cyclotomiques</b>	<b>169</b>
8.1	Notations	170
8.2	Énoncé des résultats	171
8.2.1	Notre choix de paramètres	171
8.2.2	Énoncé des théorèmes	172
8.3	$\beta$ -nombres et rubans	175
8.4	Expressions des matrices $J^<$ et $J^<$	177
8.4.1	Une première approche des cas $(J_1)$ et $(J_2)$	177
8.4.2	Expression des coefficients de $J^<$	181
8.4.3	Cas où la multi-charge $s_l$ est $m$ -dominante	183
8.5	Une autre base de $\Lambda_q^r V$ . Relations de redressement	184
8.6	Suites admissibles, bonnes suites	186
8.6.1	Définitions	186
8.6.2	Réduction à l'étude des bonnes suites	187
8.6.3	Existence d'une bonne suite	189
8.6.4	Unicité de la bonne suite	191
8.7	Calcul de la longueur modulo 2 de la bonne suite	191
8.7.1	Énoncé et preuve du résultat	191
8.7.2	Exemples	194
8.8	Preuve du théorème 8.4	196
<b>9</b>	<b>Tables</b>	<b>199</b>
9.1	Tables pour $n = l = 2$ , $s_l = (2k, -2k)$ , $k \leq -1$	200
9.2	Tables pour $n = l = 2$ , $s_l = (0, 0)$	203
9.3	Tables pour $n = l = 2$ , $s_l = (2, -2)$	206
9.4	Tables pour $n = l = 2$ , $s_l = (2k, -2k)$ , $k \geq 2$	209

# Introduction

Les algèbres quantiques (ou groupes quantiques) ont été introduites en 1985 par Drinfel'd [Dr] et Jimbo [Ji] pour construire des solutions de l'équation de Yang-Baxter, qui intervient en mécanique statistique lors de l'étude des modèles exactement résolubles (en anglais : *exact solvable models*). L'algèbre quantique  $U_q(\mathfrak{g})$  est une algèbre de Hopf contenant un paramètre  $q$  ; lorsque  $q$  tend vers 1, on retrouve la structure de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Kac-Moody  $\mathfrak{g}$ . Le paramètre  $q$  correspond, dans le contexte des modèles exactement résolubles, à la température. La situation où  $q$  tend vers 0 correspond alors au cas où la température tend vers le zéro absolu, où le modèle cristallise.

La terminologie de base cristalline, introduite par Kashiwara [Kas1] d'après les calculs de Date, Jimbo et Miwa, s'explique grâce à cette interprétation. Une base cristalline est une base « à  $q = 0$  » des représentations de  $U_q(\mathfrak{g})$ , qui est envoyée sur elle-même par une action modifiée des générateurs de Chevalley. Le graphe sous-jacent d'une base cristalline, appelée cristal, est un squelette du module ayant une combinatoire très riche. La théorie des bases cristallines et des bases canoniques fournit donc un remarquable outil pour étudier les représentations des groupes quantiques. Les bases canoniques ont été introduites au début des années 90 de façon indépendante par Kashiwara [Kas1], qui les appelle bases globales, et par Lusztig [Lu2, Lu3]. Les bases canoniques sont des bases des représentations de  $U_q(\mathfrak{g})$  stables sous l'action d'une certaine involution de  $U_q(\mathfrak{g})$  et qui redonnent à  $q = 0$  les bases cristallines. Dans [Lu3], Lusztig a construit les bases canoniques de façon géométrique en analysant le travail de Ringel [Ri]. Celui-ci construit le groupe quantique comme une algèbre de Hall associée à un carquois. Dans ce contexte, la base canonique correspond à des faisceaux pervers irréductibles sur les variétés de représentations de carquois.

La théorie des algèbres quantiques a depuis envahi de nombreux domaines de la physique mathématique, mais aussi des mathématiques pures : invariants de nœuds,  $C^*$ -algèbres, théorie des représentations des algèbres de Kac-Moody, théorie des représentations modulaires des groupes algébriques réductifs, etc. En particulier, Lusztig a mis en évidence l'étroite analogie entre la théorie des représentations d'un groupe algébrique  $G$  en caractéristique  $p$  et celle de  $U_\zeta(\mathfrak{g})$ , où  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie de  $G$  et  $\zeta$  est une racine  $p$ -ième de l'unité. Il a aussi conjecturé une formule exprimant les caractères des modules simples de  $U_\zeta(\mathfrak{g})$  au moyen de polynômes de Kazhdan-Lusztig du groupe de Weyl affine de  $G$ . Cette conjecture a été démontrée par Kazhdan-Lusztig et Kashiwara-Tanisaki.

De manière analogue, James a remarqué une analogie étroite entre les représentations des groupes symétriques en caractéristique  $p$  et celles des algèbres de Hecke de type  $A$  spécialisées à une racine  $p$ -ième de l'unité. Lascoux, Leclerc et Thibon [LLT] ont alors conjecturé que les matrices de transition des bases canoniques du  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module simple de plus haut poids  $\Lambda_0$  donnent les matrices de décomposition d'une algèbre de Hecke de type  $A$  spécialisée à une racine primitive  $n$ -ième de l'unité. Ce résultat a été prouvé par Ariki [A2] en 1996. Plus généralement, Ariki a démontré que les matrices de transition des bases canoniques du  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module simple de plus haut poids  $\Lambda_{s_1} + \dots + \Lambda_{s_l}$  donnent les matrices de décomposition des algèbres de Ariki-Koike  $\mathcal{H}_C(\xi; \xi^{s_1}, \dots, \xi^{s_l})$ , où  $\xi$  est une racine primitive  $n$ -ième de l'unité. Par ailleurs, Varagnolo et Vasserot [VV] ont démontré la conjecture de Leclerc et Thibon, selon laquelle les matrices de transition des bases canoniques de l'espace de Fock de niveau 1 donnent les matrices de décomposition des  $v$ -algèbres de Schur de Dipper-James [DJ2] spécialisées à une racine primitive  $n$ -ième de l'unité.

Les espaces de Fock de niveau supérieur, qui constituent une généralisation de l'espace de Fock de niveau 1 [H, MM] (voir aussi [LT]), ont été introduits dans [JMMO] pour calculer le graphe cristallin de n'importe quelle représentation irréductible intégrable de niveau  $l \geq 1$  de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ . Dans [U2], Uglov a construit les bases canoniques des espaces de Fock de niveau supérieur en généralisant les travaux de [LT] dans le cas du niveau 1. Uglov a notamment donné une expression des matrices de transition des bases canoniques à l'aide de polynômes de Kazhdan-Lusztig paraboliques correspondant à des algèbres de Hecke affines de type  $\tilde{A}$ . Uglov a également donné un algorithme simple permettant de calculer ces bases canoniques à l'aide de redressements de  $q$ -produits extérieurs non ordonnés. Malheureusement, ces redressements deviennent rapidement très coûteux, c'est pourquoi cette méthode est en pratique d'une utilité assez limitée.

Dans ce mémoire, nous avons étudié les bases canoniques d'Uglov (voir les chapitres 2 et 3) et nous avons abordé les questions suivantes.

1. Peut-on calculer ces bases sans effectuer de redressement ?
2. Si  $w$  et  $w'$  sont deux poids du  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  conjugués sous l'action du groupe de Weyl, existe-t-il des conditions sur  $w$  et  $w'$  qui garantissent que les matrices de transition des bases d'Uglov dans les sous-espaces de poids  $w$  et  $w'$  sont égales ?
3. De manière duale, si  $\mathbf{s}_l$  et  $\mathbf{t}_l$  sont deux multi-charges congrues l'une à l'autre modulo  $n$ , existe-t-il des conditions qui assurent que les matrices de transition des bases d'Uglov de sous-espaces de poids de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  et  $\mathbf{F}_q[\mathbf{t}_l]$  coïncident ?
4. Existe-t-il un lien entre les bases d'Uglov et les matrices de décomposition des  $v$ -algèbres de Schur cyclotomiques de Dipper-James-Mathas, généralisant à la fois [VV] et [A2] ?

Voici maintenant un bref résumé de nos résultats. Les résultats du chapitre 8 sont également contenus dans [Y].

1. Nous décrivons au chapitre 5 un algorithme permettant de calculer les bases d'Uglov sans faire de redressement. Notre algorithme est une généralisation de l'algorithme de

Leclerc et Thibon décrit dans [Le] pour  $l = 1$ . Il y a cependant deux difficultés nouvelles en niveau  $l > 1$ . Tout d'abord, le calcul de l'action de l'algèbre de Heisenberg  $\mathcal{H}$  est beaucoup plus délicat. Nous aurons aussi besoin de l'action de l'algèbre  $U'_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ , qui est triviale lorsque  $l = 1$ .

2. Nous montrons au chapitre 4 que si  $w$  est un poids du  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  tel que  $w + \alpha_i$  n'est pas un poids de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ , et si  $w' = \sigma_i.w$ , alors les matrices de transition des bases d'Uglov dans les sous-espaces de poids  $w$  et  $w'$  sont égales. Ce résultat est une généralisation en niveau supérieur d'un théorème de [LM].
3. Toujours au chapitre 4, nous comparons les matrices de transition des bases d'Uglov de sous-espaces de poids de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  et  $\mathbf{F}_q[\mathbf{t}_l]$  lorsque  $\mathbf{s}_l$  et  $\mathbf{t}_l$  sont deux multi-charges congrues l'une à l'autre modulo  $n$ . Nous disons que la multi-charge  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l)$  est très dominante si on a  $s_1 \gg s_2 \gg \dots \gg s_l$ . Nous montrons en particulier que les matrices de transition des bases canoniques de certains sous-espaces de poids de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  ne dépendent pas de la multi-charge  $\mathbf{s}_l$  de résidus modulo  $n$  fixés, pourvu que celle-ci soit très dominante.
4. Au chapitre 6, nous rappelons les principaux éléments de la théorie des représentations des algèbres d'Ariki-Koike ([DJM, Mat3]). Nous rappelons au chapitre 7 les principaux éléments de la théorie des représentations des  $v$ -algèbres de Schur cyclotomiques de Dipper-James-Mathas [DJM]; nous donnons en particulier la formule sommatoire de Jantzen [JM] qui est un outil important pour calculer les matrices de décomposition. Au chapitre 8, nous établissons une expression combinatoire de la dérivée à  $q = 1$  de la matrice  $A(q)$  de l'involution de l'espace de Fock  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . Nous donnons une expression de  $A'(1)$  en termes de certaines suites, appelées bonnes suites, qui interviennent dans le redressement de  $q$ -produits extérieurs non ordonnés. Nous relierons ensuite cette expression à une matrice de valuations  $\wp$ -adiques de déterminants de Gram associés aux  $v$ -algèbres de Schur cyclotomiques. Nous obtenons alors une formule analogue à une version matricielle de la formule sommatoire de Jantzen. Ceci nous conduit à conjecturer que si la multi-charge  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l)$  est très dominante, les matrices de transition des bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  donnent un  $q$ -analogue des matrices de décomposition d'une  $v$ -algèbre de Schur cyclotomique. Ainsi, nous proposons pour la première fois une interprétation de certaines bases d'Uglov en termes d'une catégorie de représentations d'algèbres quasi-héréditaires : les  $v$ -algèbres de Schur cyclotomiques. Il est raisonnable de penser qu'en général, lorsque  $\mathbf{s}_l$  n'est pas très dominante, les bases d'Uglov ont encore une interprétation similaire en termes d'autres algèbres quasi-héréditaires provenant des algèbres de Cherednik (voir [Ro]).



# Notations

Dans ce mémoire, nous utiliserons les notations suivantes.

$ X $ ou $\sharp X$	Cardinal de l'ensemble fini $X$ .
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Ensemble des entiers naturels, des entiers relatifs, des nombres rationnels, des nombres réels, des nombres complexes.
$\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$	Ensemble des entiers naturels non nuls, des entiers relatifs non nuls, des nombres rationnels non nuls, des nombres réels non nuls, des nombres complexes non nuls.
$\llbracket a; b \rrbracket$ ( $a, b \in \mathbb{Z}$ )	Désigne l'intervalle $\{x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \leq b\}$ .
$\lfloor x \rfloor$ ( $x \in \mathbb{R}$ )	Désigne la partie entière de $x$ , <i>i.e.</i> le plus grand entier inférieur ou égal à $x$ .
$\lceil x \rceil$ ( $x \in \mathbb{R}$ )	Désigne le plus petit entier supérieur ou égal à $x$ .
$\mathcal{M}_{m,n}(A)$ ( <i>resp.</i> $\mathcal{M}_m(A)$ )	Ensemble des matrices à $m$ lignes et $n$ colonnes ( <i>resp.</i> matrices carrées à $m$ lignes et $m$ colonnes) à coefficients dans l'anneau $A$ . Si $n = 1$ , on identifie $\mathcal{M}_{m,1}(A)$ et $A^m$ . L'entrée de la matrice $M \in \mathcal{M}_{m,n}(A)$ située à la $i$ -ième ligne et la $j$ -ième colonne ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ) sera notée $m_{i,j}$ . Si $A = \mathbb{R}$ et $M, M' \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ , on écrit $M \leq M'$ si on a $m_{i,j} \leq m'_{i,j}$ pour tout $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ . Notons que $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \leq)$ est un treillis; on peut donc parler du minimum et du maximum de deux matrices à coefficients réels de même taille.
$\text{mod-}A$	Catégorie des $A$ -modules à droite de type fini, où $A$ est une $R$ -algèbre libre de rang fini comme $R$ -module et $R$ est un anneau commutatif unitaire. Nous nous permettrons d'écrire $\ll M \in \text{mod-}A \gg$ pour dire $\ll M$ est un objet de $\text{mod-}A \gg$ , même si la classe des objets de $\text{mod-}A$ n'est pas un ensemble.



# Chapitre 1

## Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons certaines notions de base relatives à la combinatoire des (multi-)partitions, aux bases cristallines et globales de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ , et à l'algèbre de Hecke du groupe symétrique affine.

### 1.1 Combinatoire des partitions et multi-partitions

En suivant en grande partie [DJM] et [Mac], nous donnons ici toutes les définitions de base concernant les (multi-)compositions et plus particulièrement les (multi-)partitions dont nous aurons besoin par la suite.

#### 1.1.1 Compositions, multi-compositions, partitions, multi-partitions

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Une *composition* de  $N$  est une suite  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  d'entiers strictement positifs telle que  $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = N$ . Les entiers  $\alpha_i$  sont les *parts* de  $\alpha$ . L'entier  $r$  est la *longueur* de  $\alpha$ , qu'on note  $\ell(\alpha)$ . L'entier  $N$  est le *rang* de  $\alpha$ , qu'on note  $|\alpha|$ . L'ensemble des compositions de  $N$  sera noté  $\Xi_N$ , et l'ensemble de toutes les compositions sera noté  $\Xi$ . Il peut être commode de noter une composition en la faisant suivre d'une suite (éventuellement infinie) de zéros : par exemple,  $(1,3,2)$ ,  $(1,3,2,0)$ ,  $(1,3,2,0,0)$ ,  $(1,3,2,0,0, \dots)$ , etc. désignent la même composition. Par convention, il existe une unique composition de 0, qu'on note  $()$ ,  $(0)$  ou  $\emptyset$ . Une  *$l$ -multi-composition de  $N$*  est un  $l$ -uplet de compositions  $\alpha = (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(l)})$  tel que  $|\alpha^{(1)}| + \dots + |\alpha^{(l)}| = N$ . On dit que  $\alpha^{(b)}$ ,  $1 \leq b \leq l$  est la  *$b$ -ième composante* de  $\alpha$ . L'entier  $N$  est le *rang* de  $\alpha$ , qu'on note  $|\alpha|$ ; l'ensemble des  $l$ -multi-compositions de  $N$  sera noté  $\Xi_N^l$ .

Le *diagramme de Young* de la multi-composition  $\alpha = (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(l)})$  est l'ensemble

$$D(\alpha) := \left\{ (i, j, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \llbracket 1; l \rrbracket \mid 1 \leq j \leq \alpha_i^{(b)} \right\},$$

dont les éléments sont appelés *nœuds*, *boîtes* ou *cases* de  $\alpha$ . (Plus généralement, un *nœud* est un élément de  $\mathbb{Z}^3$ .) Nous identifierons désormais les  $l$ -multi-compositions avec leurs diagrammes de Young que nous représenterons, en suivant la convention française, comme des  $l$ -uplets de tableaux. Si  $N = 1$  (*i.e.* si  $\alpha$  est une composition), nous omettrons la troisième



composante dans l'écriture  $(i, j, b)$  d'un nœud de  $\alpha$ . Si  $\gamma = (i, j, b) \in \alpha$ , l'entier  $i$  (*resp.*  $j$ , *resp.*  $b$ ) sera noté  $i(\gamma)$  (*resp.*  $j(\gamma)$ , *resp.*  $b(\gamma)$ ). Le *bord* ou la *frontière* de  $\alpha$ , que l'on note  $\partial\alpha$ , est l'ensemble formé des boîtes situées le plus à droite dans chacune des lignes des diagrammes représentant les composantes de  $\alpha$ , c'est-à-dire que l'on a

$$\partial\alpha := \left\{ (i, j, b) \in \alpha \mid j = \alpha_i^{(b)} \right\}.$$

La figure 1.1 ci-dessous illustre le dessin d'une multi-composition et de sa frontière.

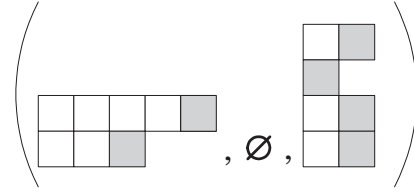


FIG. 1.1 – Dessin de la multi-composition  $((3,5), \emptyset, (2,2,1,2))$  et de sa frontière (les cases de la frontière sont représentées en gris).

On introduit sur les  $l$ -multi-compositions de  $N$  l'ordre (partiel) de *dominance*, aussi appelé *ordre naturel*. Soient  $\alpha = (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(l)})$  et  $\beta = (\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(l)})$  deux  $l$ -multi-compositions de  $N$ . On dit que  $\beta$  *domine*  $\alpha$ , et on écrit  $\beta \triangleright \alpha$  si pour tout  $k \geq 0$ ,  $1 \leq b \leq N$ , on a

$$\sum_{i=1}^{b-1} |\alpha^{(i)}| + \sum_{j=1}^k \alpha_j^{(b)} \leq \sum_{i=1}^{b-1} |\beta^{(i)}| + \sum_{j=1}^k \beta_j^{(b)}.$$

On écrit  $\beta \triangleright \alpha$  si  $\beta \triangleright \alpha$  et  $\beta \neq \alpha$ . Par exemple, les 2-multi-compositions de 2 rangées dans cet ordre sont

$$((2), \emptyset) \triangleright ((1,1), \emptyset) \triangleright ((1), (1)) \triangleright (\emptyset, (2)) \triangleright (\emptyset, (1,1)).$$

Une *partition* de  $N$  est une composition de  $N$  dont les parts forment une suite décroissante ; par exemple,  $(2,2,1)$  est une partition, mais pas  $(2,1,2)$ . Par convention,  $\emptyset$  est une partition. L'ensemble des partitions de  $N$  sera noté  $\Pi_N$ , et l'ensemble de toutes les partitions sera noté  $\Pi$ . On définit sur  $\Pi_N$  l'ordre *lexicographique décroissant* par

$$\lambda \geq \mu \Leftrightarrow (\lambda = \mu) \text{ ou } (\exists i \mid \lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_{i-1} = \mu_{i-1}, \lambda_i > \mu_i) ;$$

il s'agit d'un ordre total. Par exemple, les partitions de 5 rangées dans cet ordre sont

$$(5) > (4,1) > (3,2) > (3,1,1) > (2,2,1) > (2,1,1,1) > (1,1,1,1,1).$$

On montre aisément que cet ordre est compatible avec l'ordre de dominance, *i.e.* on a

$$\lambda \triangleright \mu \Rightarrow \lambda \geq \mu.$$

Il peut être commode d'écrire une partition  $\lambda$  en « notation multiplicative » ; avec cette notation,

$$\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} 3^{m_3} \dots)$$

désigne la partition ayant exactement  $m_1$  parts égales à 1,  $m_2$  parts égales à 2, etc. On dit alors que  $m_i$  ( $i \geq 1$ ) est la *multiplicité* de la part  $i$  de  $\lambda$ . Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $\lambda$  est *N-régulière* si toutes les parts de  $\lambda$  ont une multiplicité strictement inférieure à  $N$ . Si  $\lambda$  est une partition, on introduit la *partition conjuguée*  $\lambda'$  définie par

$$\lambda'_i := \#\{j \mid \lambda_j \geq i\} \quad (i \geq 1).$$

Par exemple, la partition conjuguée à  $(4,3,3,2,1)$  est  $(5,4,3,1)$ . En termes de diagrammes de Young, le diagramme de  $\lambda'$  est le symétrique de celui de  $\lambda$  par rapport à la diagonale principale. On a clairement  $\ell(\lambda') = \lambda_1$ ,  $|\lambda'| = |\lambda|$  et  $\lambda'' = \lambda$ .

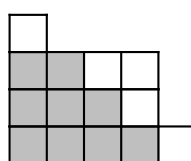
Une *l-multi-partition de N* est une *l-multi-composition* de  $N$  dont toutes les composantes sont des partitions. L'ensemble des *l-multi-partitions* de  $N$  sera noté  $\Pi_N^l$ . Si  $\lambda \in \Pi^l$  est une multi-partition dont les composantes sont (dans l'ordre)  $(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(l)})$ , on définit la *multi-partition conjuguée*  $\lambda' \in \Pi^l$  par  $\lambda' := (\lambda^{(l)'}, \dots, \lambda^{(1)'})$ .

### 1.1.2 Formes gauches, rubans

Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions telles que  $\lambda$  contient  $\mu$ , *i.e.* telles que  $D(\lambda) \supset D(\mu)$  (ou de façon équivalente,  $\lambda_i \geq \mu_i$  pour tout  $i$ ). La différence ensembliste

$$\theta = \lambda/\mu := D(\lambda) \setminus D(\mu)$$

est appelée *forme gauche* (en anglais, *skew diagram*). Par exemple, si  $\lambda$  est la partition  $(5,4,4,1)$  et  $\mu$  est la partition  $(4,3,2)$ , alors  $\theta := \lambda/\mu$  correspond aux cases blanches du diagramme suivant :



On définit de façon naturelle la *taille* de  $\theta = \lambda/\mu$  par  $|\theta| := |\lambda| - |\mu|$ .

Un *chemin* dans la forme gauche  $\theta$  est une suite de cases  $x_0, x_1, \dots, x_n \in \theta$  telle que pour tout  $i$ , les cases  $x_i$  et  $x_{i+1}$  ont un côté en commun. On dit que  $\theta$  est *connexe* si étant donné deux cases quelconques  $x$  et  $y$  de  $\theta$ , il existe un chemin allant de  $x$  à  $y$  dans  $\theta$ . Les composantes connexes de  $\theta$  sont les parties de  $\theta$  connexes maximales. Dans l'exemple ci-dessus,  $\theta$  admet 3 composantes connexes.

Un *ruban* est une forme gauche connexe ne contenant aucun bloc de  $2 \times 2$  boîtes. La *tête* (*resp. queue*) du ruban  $\rho$  est le nœud  $\gamma = (i, j)$  contenu dans  $\rho$  tel que  $j - i$  est minimal (*resp.*

maximal); nous noterons  $\text{hd}(\rho)$  (*resp.*  $\text{tl}(\rho)$ ) ce nœud. Si  $\text{hd}(\rho) = (i, j)$  et  $\text{tl}(\rho) = (i', j')$ , la hauteur de  $\rho$  est la quantité  $\text{ht}(\rho) := i - i' \in \mathbb{N}$ . La longueur de  $\rho$  est le nombre  $n$  de boîtes contenues dans  $\rho$ ; on note alors  $n = \ell(\rho)$  et on dit que  $\rho$  est un  $n$ -ruban.

**Exemple 1.1** Sur la figure 1.2,  $\rho$ ,  $\rho'$  et  $\rho''$  sont trois rubans de hauteurs respectives 2, 1 et 0 et de longueurs respectives 4, 4 et 3.  $\diamond$

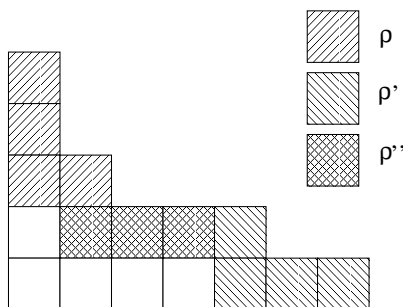


FIG. 1.2 – Dessin de trois rubans.

### 1.1.3 Tableaux

Les définitions que nous donnons dans ce paragraphe sont celles de [Mat3] (voir aussi [DJM]); nous aurons besoin des tableaux aux chapitres 6 et 7. Soit  $\alpha = (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(l)})$  une  $l$ -multi-composition de  $m$ . Un  $\alpha$ -tableau est une bijection  $T : D(\alpha) \rightarrow \llbracket 1; m \rrbracket$ ; on dit aussi que  $T$  est un tableau de profil ou de forme  $\alpha$ , et on pose  $\text{Shape}(T) := \alpha$ . On peut voir  $T$  comme un  $l$ -uplet de tableaux  $T = (T^{(1)}, \dots, T^{(l)})$ , où pour tout  $1 \leq b \leq l$ ,  $T^{(b)}$  est un  $\alpha^{(b)}$ -tableau; on dit alors que  $T^{(b)}$  est la  $b$ -ième composante de  $T$ . Nous représenterons  $T$  comme le diagramme obtenu à partir du diagramme de Young de  $\alpha$  en plaçant l'entier  $T(\gamma)$  dans la boîte  $\gamma$  pour tout  $\gamma \in D(\alpha)$  (voir l'exemple 1.2). Pour  $1 \leq k \leq m$ , nous noterons  $i_T(k)$  (*resp.*  $j_T(k)$ , *resp.*  $b_T(k)$ ) le numéro de la ligne (*resp.* colonne, *resp.* composante) de la boîte  $T^{-1}(k) \in D(\alpha)$ , et nous noterons  $|T|$  le nombre de boîtes de  $T$ .

Un tableau  $T$  est dit *standard* si  $\text{Shape}(T)$  est une multi-partition et pour tout  $(k, k') \in \mathbb{N}^2$  tel que  $1 \leq k < k' \leq |T|$  et  $b_T(k) = b_T(k')$ , on a  $i_T(k) \leq i_T(k')$  et  $j_T(k) \leq j_T(k')$ . Autrement dit,  $T$  est standard si le profil de  $T$  est une multi-partition et si dans chaque composante de  $T$ , les entrées croissent du bas vers le haut le long de chaque colonne et de la gauche vers la droite le long de chaque ligne. L'ensemble des  $\lambda$ -tableaux standard sera noté  $\text{Std}(\lambda)$ . Soit  $\alpha \in \Xi_m^l$ . On définit le tableau  $T^\alpha$  comme étant l'unique  $\alpha$ -tableau tel que pour tout  $1 \leq k < k' \leq m$ , on a

- (i)  $b_{T^\alpha}(k) \leq b_{T^\alpha}(k')$ ,
- (ii)  $b_{T^\alpha}(k) = b_{T^\alpha}(k') \Rightarrow i_{T^\alpha}(k) \leq i_{T^\alpha}(k')$  et
- (iii)  $(b_{T^\alpha}(k) = b_{T^\alpha}(k'), i_{T^\alpha}(k) = i_{T^\alpha}(k')) \Rightarrow j_{T^\alpha}(k) < j_{T^\alpha}(k')$ .

Notons que si  $\lambda \in \Pi_m^l$  est une multi-partition, alors  $T^\lambda$  est un tableau standard.

**Exemple 1.2** Soit  $\lambda := ((3,2),(1,1))$ . Alors  $S := \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 7 & \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \right)$  est un  $\lambda$ -tableau standard et  $T := \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 5 & \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \right)$  est un  $\lambda$ -tableau non standard. On a  $T^\lambda = \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \right)$ .

◇

Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_m$  agit de façon naturelle à droite sur  $\llbracket 1; m \rrbracket$ . Si  $\alpha \in \Xi_m^l$ ,  $T$  est un  $\alpha$ -tableau et  $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ , soit  $T.\sigma$  le tableau de profil  $\alpha$  obtenu en remplaçant chaque entrée de  $T$  par son image par  $\sigma$ . On définit ainsi une action à droite de  $\mathfrak{S}_m$  sur l'ensemble des  $\alpha$ -tableaux ( $\alpha \in \Xi_m^l$ ). Par exemple, si  $\lambda$  et  $S$  sont définis comme à l'exemple 1.2, alors on a  $S = T^\lambda.(2,3,4)(5,7,6)$ . Si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  est une composition de  $N$ , soit  $\mathfrak{S}_\alpha := \mathfrak{S}_{\alpha_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\alpha_r} \subset \mathfrak{S}_N$  le sous-groupe de Young associé à  $\alpha$ . De même, si  $\alpha = (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(l)})$  est une  $l$ -multi-composition de  $m$ , soit  $\mathfrak{S}_\alpha := \mathfrak{S}_{\alpha^{(1)}} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\alpha^{(l)}} \subset \mathfrak{S}_m$  le sous-groupe de Young associé à  $\alpha$ ; il s'agit du stabilisateur des lignes du tableau  $T^\alpha$ .

Nous aurons besoin plus généralement des tableaux suivants. Soient  $\alpha$  et  $\beta = (\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(l)})$  deux  $l$ -multi-compositions de  $m$ . Un *tableau de profil  $\alpha$*  (ou de *forme  $\alpha$* ) et de *type  $\beta$*  est une application  $\mathbb{T} : D(\alpha) \rightarrow \mathbb{N}^* \times \llbracket 1; l \rrbracket$  telle que  $\beta_k^{(d)} = \#\{\gamma \in D(\alpha) \mid \mathbb{T}(\gamma) = (k, d)\}$  pour tout  $(k, d) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 1; l \rrbracket$ . Notons  $\text{Shape}(\mathbb{T}) := \alpha$  le profil de  $\mathbb{T}$  et  $\text{Type}(\mathbb{T}) := \beta$  le type de  $\mathbb{T}$ . On dit encore que  $\mathbb{T}$  est un  *$\alpha$ -tableau de type  $\beta$* . L'exemple 1.3 montre deux tableaux de type  $((3,1),(1,1),(2,1))$ . Si  $T$  est un  $\alpha$ -tableau standard et  $\beta \in \Xi_m^l$ , soit  $\beta(T)$  le  $\alpha$ -tableau de type  $\beta$  défini par

$$\gamma \in D(\alpha) \mapsto (i_{T^\beta}(T(\gamma)), b_{T^\beta}(T(\gamma))) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 1; l \rrbracket ;$$

autrement dit,  $\beta(T)$  est le  $\alpha$ -tableau de type  $\beta$  obtenu à partir de  $T$  en remplaçant chaque entrée  $k$  par  $(i, b)$  si  $k$  apparaît à la  $i$ -ème ligne de la  $b$ -ième composante de  $T^\beta$ .

**Exemple 1.3** Prenons  $\alpha = ((5,1),(2),(1))$  et  $\beta = ((3,1),(1,1),(2,1))$ . Soit

$$T := \left( \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 5 & & & & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 8 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \right) ;$$

notons que  $T$  est un  $\alpha$ -tableau standard. On a

$$\beta(T^\beta) = \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2_1 & & \\ \hline 1_1 & 1_1 & 1_1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 2_2 \\ \hline 1_2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2_3 & \\ \hline 1_3 & 1_3 \\ \hline \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \beta(T) = \left( \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1_2 & & & & & \\ \hline 1_1 & 1_1 & 1_1 & 2_1 & 1_3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2_2 & 1_3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 2_3 \\ \hline \end{array} \right),$$

où on écrit  $k_d$  au lieu du couple  $(k, d) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 1; l \rrbracket$ . ◇

**Définition 1.4** Définissons un ordre sur  $\mathbb{N}^* \times \llbracket 1; l \rrbracket$  en écrivant  $(k, d) \leq (k', d')$  si  $d < d'$  ou ( $d = d'$  et  $k \leq k'$ ),  $(k, d), (k', d') \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 1; l \rrbracket$ ; il s'agit d'un ordre total. Soient  $\lambda \in \Pi_m^l$  et  $\mathbb{T}$  un  $\lambda$ -tableau (de type  $\mu$ ). On dit que  $\mathbb{T}$  est *semi-standard* si

- (i) Pour tout  $(i, j, j', b) \in \mathbb{N}^4$  tel que  $(i, j, b)$  et  $(i, j', b)$  sont des nœuds de  $D(\lambda)$  et  $j \leq j'$ , on a  $\mathbb{T}(i, j, b) \leq \mathbb{T}(i, j', b)$  (au sens de l'ordre défini ci-dessus).

- (ii) Pour tout  $(i, i', j, b) \in \mathbb{N}^4$  tel que  $(i, j, b)$  et  $(i', j, b)$  sont des nœuds de  $D(\boldsymbol{\lambda})$  et  $i < i'$ , on a  $\mathbb{T}(i, j, b) < \mathbb{T}(i', j, b)$ .
- (iii) Si  $(i, j, b) \in D(\boldsymbol{\lambda})$  et  $(k, d) := \mathbb{T}(i, j, b)$ , alors  $d \geq b$ .

L'ensemble des  $\boldsymbol{\lambda}$ -tableaux semi-standard sera noté  $\text{SStd}(\boldsymbol{\lambda})$  et l'ensemble des  $\boldsymbol{\lambda}$ -tableaux semi-standard de type  $\boldsymbol{\mu}$  sera noté  $\text{SStd}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ .  $\diamond$

La condition (i) signifie que les entrées de  $\mathbb{T}$  croissent, au sens large, au sein de chaque ligne de chaque composante de  $\mathbb{T}$ . La condition (ii) signifie que les entrées de  $\mathbb{T}$  croissent, au sens strict, au sein de chaque colonne de chaque composante de  $\mathbb{T}$ . Notons que la condition (iii) est automatiquement remplie si  $l = 1$ ; dans ce cas, on retrouve la définition habituelle des tableaux semi-standard qui provient de la théorie des représentations des groupes linéaires et symétriques.

**Remarque 1.5** La condition (iii) de la définition ci-dessus a été introduite dans [DJM]; elle est motivée par un résultat concernant les modules permutationnels pour les algèbres de Ariki-Koike (voir [DJM, Corollary 3.24]). Cette condition est introduite pour avoir le résultat suivant. Soient  $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \Pi_m^l$  et  $T \in \text{Std}(\boldsymbol{\lambda})$ . Alors  $\boldsymbol{\mu}(T)$  satisfait la condition (iii) si et seulement si  $b_T(k) \leq b_{T\boldsymbol{\mu}}(k)$  pour tout  $1 \leq k \leq m$ .  $\diamond$

**Remarque 1.6** Soit  $\boldsymbol{\omega} := ((0), \dots, (0), (1^m)) \in \Pi_m^l$  (ici,  $(1^m)$  désigne la partition de  $m$  dont toutes les parts sont égales à 1). Soit  $\boldsymbol{\lambda} \in \Pi_m^l$ . Alors l'application

$$\boldsymbol{\omega} : T \in \text{Std}(\boldsymbol{\lambda}) \mapsto \boldsymbol{\omega}(T) \in \text{SStd}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega})$$

est bien définie et bijective. Nous identifierons désormais, *via*  $\boldsymbol{\omega}$ , l'ensemble des  $\boldsymbol{\lambda}$ -tableaux standard et l'ensemble des  $\boldsymbol{\lambda}$ -tableaux semi-standard de type  $\boldsymbol{\omega}$ .  $\diamond$

**Exemple 1.7** Si  $\boldsymbol{\lambda} \in \Pi_m^l$ , alors

$$\mathbb{T}^\boldsymbol{\lambda} := \boldsymbol{\lambda}(T^\boldsymbol{\lambda})$$

est l'unique  $\boldsymbol{\lambda}$ -tableau semi-standard de type  $\boldsymbol{\lambda}$ . Par exemple, pour  $\boldsymbol{\lambda} = ((3,1), (1,1), (2,1))$ , on a

$$\mathbb{T}^\boldsymbol{\lambda} = \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2_1 & & \\ \hline 1_1 & 1_1 & 1_1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 2_2 \\ \hline 1_2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2_3 & \\ \hline 1_3 & 1_3 \\ \hline \end{array} \right)$$

(voir l'exemple 1.3). Le tableau  $\boldsymbol{\beta}(T)$  de l'exemple 1.3 est également semi-standard.  $\diamond$

#### 1.1.4 Multi-partitions chargées

Une *charge* (resp. *l-multi-charge*) est un élément de  $\mathbb{Z}$  (resp.  $\mathbb{Z}^l$ ), et une *l-multi-partition chargée* est un élément de  $\Pi^l \times \mathbb{Z}^l$ . Soit  $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s})$  une *l-multi-partition chargée*. Le *contenu* du nœud  $\gamma = (i, j, b) \in \boldsymbol{\lambda}$  est l'entier

$$\text{cont}(\gamma) = \text{cont}(\gamma; \mathbf{s}) := s_b + j - i \in \mathbb{Z},$$

où  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_l)$  désigne les composantes de  $\mathbf{s}$ . Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , le *résidu modulo  $n$*  de  $\gamma \in \boldsymbol{\lambda}$  est

$$\text{res}_n(\gamma) = \text{res}_n(\gamma; \mathbf{s}) := \text{cont}(\gamma) \bmod n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \llbracket 0; n-1 \rrbracket.$$

Si  $c \in \mathbb{Z}$ , on dit que  $\gamma \in \boldsymbol{\lambda}$  est un  *$c$ -nœud* si  $\text{res}_n(\gamma; \mathbf{s}) = c \bmod n$ .

Soit  $(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s})$  une  $l$ -multi-partition chargée. On dit que  $\gamma \in \boldsymbol{\mu}$  est un nœud *de type  $R$*  de  $(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s})$  si  $\boldsymbol{\lambda} := \boldsymbol{\mu} \setminus \{\gamma\}$  est le diagramme d'une multi-partition. Dans ce cas, on dit aussi que  $\gamma$  est un nœud *de type  $A$*  de  $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s})$ ; en particulier,  $\gamma \notin \boldsymbol{\lambda}$ . Autrement dit, un nœud de  $\boldsymbol{\lambda}$  est de type  $A$  (*resp.* de type  $R$ ) si on peut l'*ajouter* au (*resp.* le *retirer* du) diagramme de Young de  $\boldsymbol{\lambda}$  de façon à ce que le résultat obtenu soit encore le diagramme de Young d'une multi-partition. Pour  $0 \leq c \leq n-1$ , nous noterons  $N_c(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{s}; n)$  (*resp.*  $A_c(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{s}; n)$ , *resp.*  $R_c(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{s}; n)$ ) le nombre de  $c$ -nœuds (*resp.* le nombre de  $c$ -nœuds de type  $A$ , *resp.* le nombre de  $c$ -nœuds de type  $R$ ) de  $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s})$ . On pose aussi

$$M_c(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{s}; n) := A_c(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{s}; n) - R_c(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{s}; n).$$

Soient  $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \Pi^l$ ,  $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^l$ ,  $c \in \mathbb{Z}$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Nous écrivons

$$\boldsymbol{\lambda} \xrightarrow{c:k} \boldsymbol{\mu}$$

s'il existe une suite de  $l$ -multi-partitions  $\boldsymbol{\nu}^{(0)} \subset \boldsymbol{\nu}^{(1)} \subset \dots \subset \boldsymbol{\nu}^{(k)}$  telles que  $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\nu}^{(0)}$ ,  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu}^{(k)}$  et pour tout  $1 \leq j \leq k$ ,  $\boldsymbol{\nu}^{(j)}/\boldsymbol{\nu}^{(j-1)}$  est un  $c$ -nœud de type  $A$  de  $(\boldsymbol{\nu}^{(j-1)}, \mathbf{s})$ .

Soient  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(l)}) \in \Pi^l$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}^l$  et  $c \in \mathbb{Z}$ . On définit un ordre total  $\leq$  sur les  $c$ -nœuds de type  $A$  et de type  $R$  de  $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s})$  en disant que  $(i, j, b) \leq (i', j', b')$  si et seulement si  $j - i + s_b < j' - i' + s_{b'}$  ou  $(j - i + s_b = j' - i' + s_{b'} \text{ et } b < b')$ . En effet, pour  $d \in \mathbb{Z}$ ,  $1 \leq b \leq l$ , il existe au plus un  $c$ -nœud  $\gamma \in \lambda^{(b)}$  de type  $A$  ou de type  $R$  tel que  $j(\gamma) - i(\gamma) = d$ , donc  $\leq$  est bien un ordre total (à savoir, l'ordre lexicographique portant sur les diagonales puis sur les composantes). Si  $\boldsymbol{\lambda} \xrightarrow{c:k} \boldsymbol{\mu}$ , on pose

$$M_c^>(\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\mu}; \mathbf{s}; n) = \sum_{\gamma \in \boldsymbol{\mu}/\boldsymbol{\lambda}} \left( \#\{\beta \in \mathbb{N}^3 \mid \beta \text{ est un } c\text{-nœud de type } A \text{ de } (\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) \text{ et } \beta > \gamma\} \right. \\ \left. - \#\{\beta \in \mathbb{N}^3 \mid \beta \text{ est un } c\text{-nœud de type } R \text{ de } (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}) \text{ et } \beta > \gamma\} \right),$$

et on définit de même  $M_c^<(\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\mu}; \mathbf{s}; n)$ .

**Exemple 1.8** Prenons  $\mathbf{s} = (5, 0, 2, 1)$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = ((5, 3, 3, 1), (3, 2), (4, 3, 1), (2, 2, 2, 1))$ ,  $n = 3$  et  $c = 0$ . Alors on a

$$N_c(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{s}; n) = 11, \quad A_c(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{s}; n) = R_c(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{s}; n) = 5 \quad \text{et} \quad M_c(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{s}; n) = 0.$$

Les  $c$ -nœuds de type  $A$  de  $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s})$  sont  $(5, 1, 4)$ ,  $(4, 2, 1)$ ,  $(1, 4, 2)$ ,  $(1, 3, 4)$  et  $(1, 5, 3)$ ; les  $c$ -nœuds de type  $R$  de  $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s})$  sont  $(2, 2, 2)$ ,  $(3, 1, 3)$ ,  $(3, 2, 4)$ ,  $(2, 3, 3)$  et  $(1, 5, 1)$ , comme le montre la figure 1.3. La liste de tous ces nœuds rangés suivant l'ordre décrit précédemment est

$$(5, 1, 4) < (2, 2, 2) < (3, 1, 3) < (3, 2, 4) < (4, 2, 1) < (1, 4, 2) < (2, 3, 3) < (1, 3, 4) < (1, 5, 3) < (1, 5, 1).$$

Prenons de plus  $\mu = ((5,3,3,1),(3,2),(5,3,1),(2,2,2,1))$ , de telle sorte que  $\mu/\lambda = \{(1,5,3)\}$  est réduit à un  $c$ -nœud. On a alors  $M_c^>(\lambda; \mu; \mathbf{s}; n) = 0 - 1 = -1$  et  $M_c^<(\lambda; \mu; \mathbf{s}; n) = 4 - 4 = 0$ .  $\diamond$

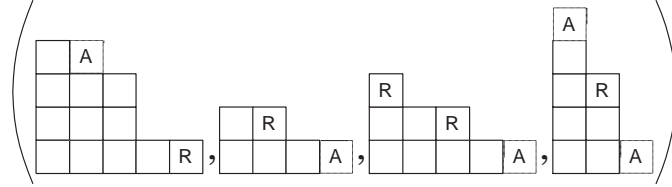


FIG. 1.3 – Dessin des 0-nœuds de type  $A$  et de type  $R$  de la multi-partition chargée  $\left( ((5,3,3,1),(3,2),(4,3,1),(2,2,2,1)), (5,0,2,1) \right)$  pour  $n = 3$ . Les 0-nœuds de type  $X$  ( $X = A, R$ ) sont marqués de la lettre correspondante.

## 1.1.5 Abaques

### 1.1.5.1 Représentation des multi-partitions chargées à l'aide d'abaques

Suivant [JK], il est commode de représenter les multi-partitions comme des abaques. Par définition, un *abaque à 1 tige* est une partie  $A$  de  $\mathbb{Z}$  telle que  $-k \in A$  et  $k \notin A$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  suffisamment grand. De façon moins formelle, chaque  $k \in A$  correspond à la position d'une bille sur l'abaque (horizontal)  $A$ , qui est par définition « plein à gauche et vide à droite ». Nous considérons ainsi des abaques infinis dans les deux directions, alors que ceux de [JK] ne sont infinis que dans une direction. Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des abaques à 1 tige. Si  $l \geq 1$ , un *abaque à  $l$  tiges* est un  $l$ -uplet d'abaques à 1 tige. Si  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_l) \in \mathcal{A}^l$  est un abaque à  $l$  tiges, nous identifierons  $\mathbf{A}$  à la partie

$$\{(k, d) \mid 1 \leq d \leq l, k \in A_d\} \subset \mathbb{Z} \times \llbracket 1; l \rrbracket.$$

Soit  $\lambda = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(l)}) \in \Pi^l$  et  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}^l$ . À  $(\lambda, \mathbf{s})$  on associe l'abaque à  $l$  tiges

$$A(\lambda, \mathbf{s}) := \left\{ (\lambda_i^{(d)} + s_d + 1 - i, d) \mid i \geq 1, 1 \leq d \leq l \right\}.$$

Par exemple, si  $l = 1$ , l'abaque correspondant à la partition chargée  $(\lambda, \mathbf{s}) = ((4,3,3,2,1), -1)$  est dessiné à la figure 1.4.

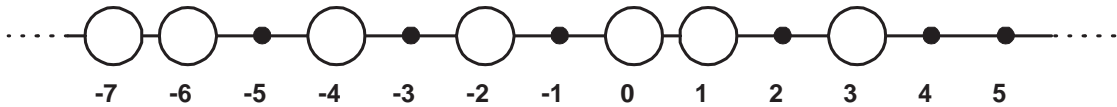
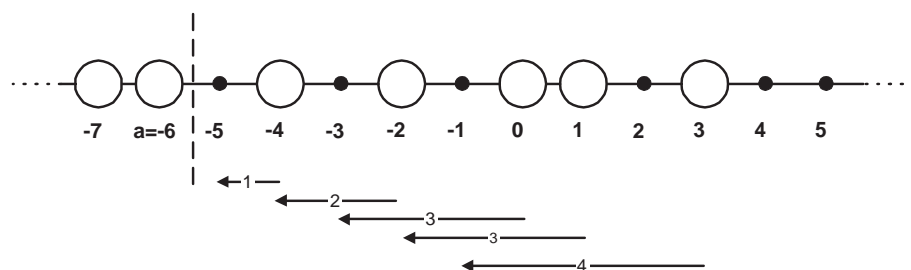
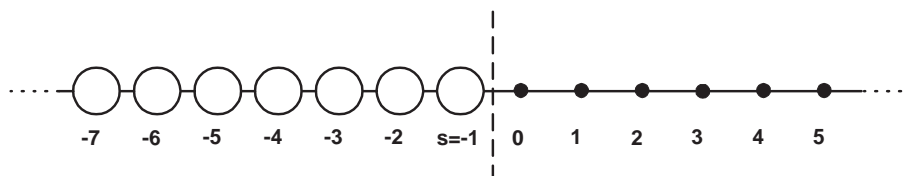


FIG. 1.4 – Dessin de l'abaque correspondant à la partition chargée  $((4,3,3,2,1), -1)$ .

En fait, l'application  $(\lambda, s) \in \Pi^l \times \mathbb{Z}^l \mapsto A(\lambda, s) \in \mathcal{A}^l$  est une bijection. Voici comment on récupère  $(\lambda, s)$  à partir de son diagramme d'abaques. En considérant séparément chaque tige du diagramme  $A(\lambda, s)$ , on se ramène au cas où  $l = 1$ , *i.e.*  $(\lambda, s) = (\lambda, s)$  est une partition chargée. Soit  $a$  l'unique entier vérifiant les deux propriétés suivantes: 1°) l'abaque est rempli de billes situées à gauche (au sens large) de  $a$ ; 2°) il n'y a pas de bille en  $a + 1$ . Déplaçons-nous à partir de  $a$  vers la droite de l'abaque jusqu'à rencontrer une bille. Déplaçons alors cette bille le plus à gauche possible; le nombre de crans dont on a déplacé cette bille vaut précisément  $\lambda_{\ell(\lambda)}$ . Partant de  $a + 1$ , déplaçons-nous sur l'abaque vers la droite jusqu'à rencontrer une bille; en ramenant cette bille le plus à gauche possible, on la déplace de précisément  $\lambda_{\ell(\lambda)-1}$  crans. Continuons le processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de billes à déplacer; on a alors reconstruit  $\lambda$ , et la bille située le plus à droite sur l'abaque est précisément en position  $s$ . La figure 1.5 illustre un exemple de lecture d'une partition chargée à partir de l'abaque associé.



Lecture d'une partition à partir d'un abaque en déplaçant les billes.



Lecture de la charge lorsque toutes les billes ont été déplacées.

FIG. 1.5 – Lecture de la partition chargée  $((4,3,3,2,1), -1)$  à partir l'abaque correspondant.

### 1.1.5.2 Calcul du $n$ -quotient et du $n$ -cœur

Nous renvoyons le lecteur à [Mac] pour la définition du  $n$ -quotient  $\lambda_n$  et du  $n$ -cœur  $\lambda_n^*$  d'une partition  $\lambda$ ; nous expliquons ici comment les calculer à partir des abaques. (Si le lecteur ne connaît pas les définitions classiques du  $n$ -quotient et du  $n$ -cœur, il pourra alors prendre pour définitions respectives de ces notions les objets  $\lambda_n$  et  $\lambda_n^*$  que nous allons introduire.)



Fixons pour tout ce paragraphe deux entiers naturels non nuls  $n$  et  $l$ . Le principe de la division euclidienne montre que tout entier  $k \in \mathbb{Z}$  peut s'écrire de manière unique

$$k = c(k) + n(d(k) - 1) + nlm(k),$$

avec  $c(k) \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $d(k) \in \llbracket 1; l \rrbracket$  et  $m(k) \in \mathbb{Z}$ . Soit  $\phi'$  l'application de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$  définie par

$$\phi'(k) := d(k) + lm(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On peut lire de façon graphique  $c(k)$ ,  $d(k)$ ,  $m(k)$  et  $\phi'(k)$  comme suit. Numérotions les éléments de  $\mathbb{Z}^n$  à l'aide des entiers  $\dots, -1, 0, 1, \dots$  comme sur la figure 1.6 (pour le dessin, on a pris  $n = 2$  et  $l = 3$ ). Alors l'élément de  $\mathbb{Z}^n$  ayant le numéro  $k \in \mathbb{Z}$  est situé sur la  $d(k)$ -ième colonne et la  $c(k)$ -ième ligne du cadre  $C'_m(k)$ . Numérotions en outre toutes les colonnes de ce diagramme à l'aide des entiers  $\dots, -1, 0, 1, \dots$  de façon à ce que l'élément de  $\mathbb{Z}^n$  ayant le numéro 1 soit situé sur la colonne 1. Alors l'élément de  $\mathbb{Z}^n$  ayant le numéro  $k$  est situé à la colonne  $\phi'(k)$  du diagramme.

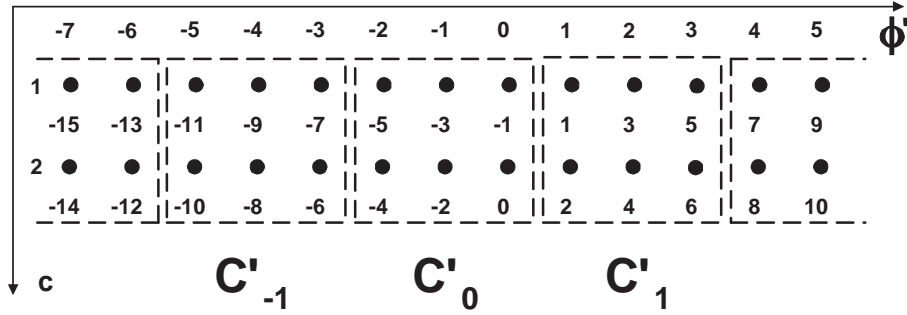


FIG. 1.6 – Numérotation des éléments de  $\mathbb{Z}^n$  pour le calcul de la bijection  $\tau'_n$ .

Il découle de ceci que l'application  $k \in \mathbb{Z} \mapsto (\phi'(k), c(k)) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 1; n \rrbracket$  est une bijection. On définit une bijection  $\tau'_n : \Pi \times \mathbb{Z} \cong \mathcal{A} \rightarrow \Pi^n \times \mathbb{Z}^n \cong \mathcal{A}^n$  en termes d'abaques par

$$\tau'_n(A) := \{(\phi'(k), c(k)), k \in A\} \in \mathcal{A}^n \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Observons que la numérotation des éléments de  $\mathbb{Z}^n$  de la figure 1.6 ne dépend pas de  $l$  (changer  $l$  revient simplement à faire varier la largeur des cadres  $C'_m$ ). Par conséquent, les définitions de  $c(k)$  et de  $\phi'(k)$ , et donc de  $\tau'_n$ , ne dépendent pas de  $l$ . Soit  $\lambda \in \Pi$ ,  $s \in \mathbb{Z}$ , et  $(\lambda_n, \mathbf{s}_n) := \tau'_n(\lambda, s) \in \Pi^n \times \mathbb{Z}^n$ . Alors  $\lambda_n$  ne dépend (à permutation circulaire des composantes près) que de  $\lambda$  et  $n$ , et non de  $s$  et  $l$ ; il s'agit en fait du  $n$ -quotient de  $\lambda$ . De plus, la multi-charge  $\mathbf{s}_n$  correspond au  $n$ -cœur de  $\lambda$ . En effet, déplaçons, si possible, d'un cran vers la gauche une bille d'une tige de  $A(\lambda_n, \mathbf{s}_n)$ . Ceci équivaut à enlever un nœud du  $n$ -quotient de  $\lambda$ , ou encore un  $n$ -ruban de  $\lambda$ . Itérons ce procédé autant de fois que possible. On obtient alors le

diagramme  $A(\emptyset_n, s_n)$ , où  $\emptyset_n$  désigne le  $n$ -uplet formé de  $n$  partitions vides. Cette opération correspond à enlever à  $\lambda$  autant de  $n$ -rubans que possible; on récupère donc ainsi le  $n$ -cœur de  $\lambda$ , c'est-à-dire que l'on a  $\tau'_n(\lambda^*, s) = (\emptyset_n, s_n)$ . Observons par ailleurs que  $s_n = (s_1, \dots, s_n)$  satisfait l'égalité  $s_1 + \dots + s_n = s$ .

**Exemple 1.9** Prenons  $n = 2$ ,  $l = 3$ , et  $(\lambda, s) = ((4, 3, 3, 2, 1), -1)$ . On a alors

$$\tau'_n(\lambda, s) = \left( ((3, 3), \emptyset), (-1, 0) \right),$$

comme le montre la figure 1.7. ◇

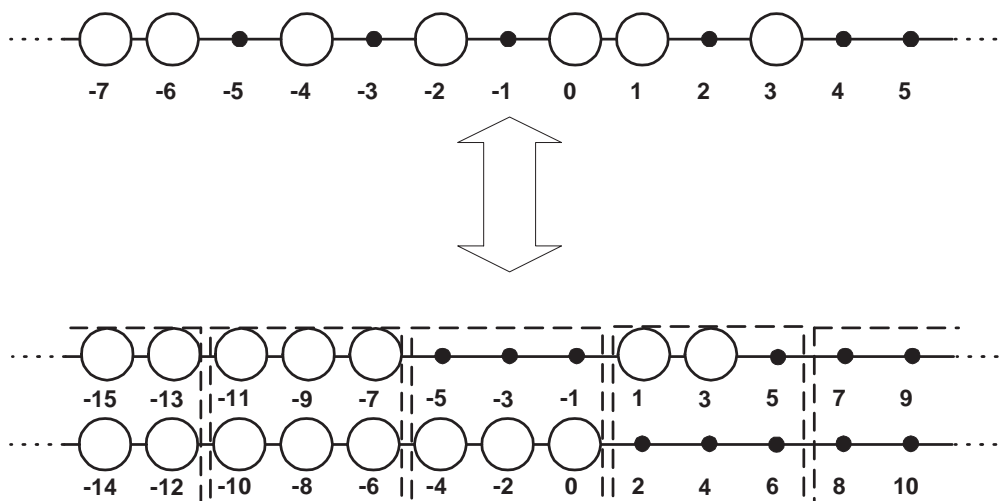


FIG. 1.7 – Calcul de la bijection  $\tau'_n$ .

### 1.1.5.3 Une variante du $l$ -quotient et du $l$ -cœur

Soient à nouveau deux entiers naturels non nuls  $n$  et  $l$ . Nous allons définir ici une bijection  $\tau_l : \Pi \times \mathbb{Z} \rightarrow \Pi^l \times \mathbb{Z}^l$ , qui donne une variante du  $l$ -quotient et du  $l$ -cœur. Cette définition est très proche de celle de  $\tau'_n$  vue au paragraphe précédent, mais elle dépend effectivement de  $n$  et de  $l$ ; c'est pourquoi nous avons choisi d'introduire un entier  $l$  au paragraphe précédent.

Reprenons les notations  $c(k)$ ,  $d(k)$  et  $m(k)$  du paragraphe précédent. Soit  $\phi$  l'application de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$  définie par

$$\phi(k) := c(k) + nm(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Signalons quelques propriétés de cette application, dont nous laissons la preuve au lecteur.



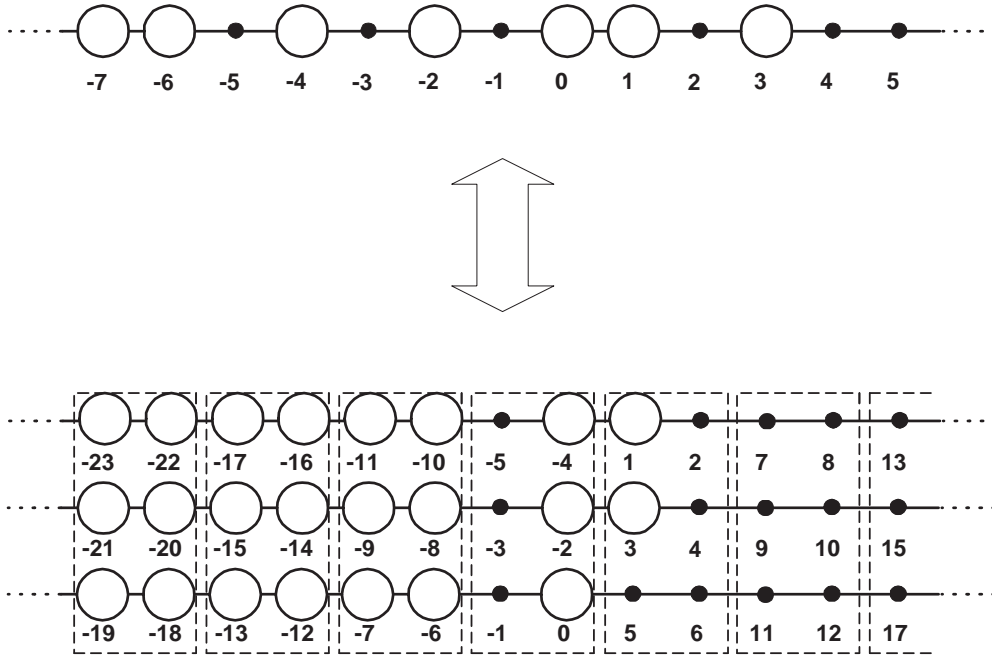


FIG. 1.9 – Calcul de la bijection  $\tau_l$ .

## 1.2 L’algèbre quantique affine $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$

Nous rappelons ici la définition de cette algèbre, que nous allons faire agir sur les espaces des  $q$ -produits extérieurs à partir du chapitre 2 et sur les espaces de Fock à partir du chapitre 3. Commençons par rappeler la définition de l’algèbre de Lie affine  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ .

### 1.2.1 L’algèbre de Lie affine $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$

Il s’agit de l’algèbre de Kac-Moody de type  $A_{n-1}^{(1)}$ , avec  $n \geq 2$  [Kac]. Soit  $\mathfrak{h}$  un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel ayant pour base  $\{h_0, \dots, h_{n-1}, D\}$ . Soit  $\{\Lambda_0, \dots, \Lambda_{n-1}, \delta\}$  la base de  $\mathfrak{h}^*$  définie à l’aide de l’accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{Q}$  par

$$\langle \Lambda_i, h_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle \Lambda_i, D \rangle = \langle \delta, h_i \rangle = 0, \quad \langle \delta, D \rangle = 1 \quad (0 \leq i, j \leq n-1).$$

Les  $\Lambda_i$ ,  $0 \leq i \leq n-1$  sont appelés *poids fondamentaux*. Il sera commode d’indexer les poids fondamentaux par  $\mathbb{Z}$  en posant, pour  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\Lambda_i := \Lambda_{i \bmod n}$ . Les *racines simples*  $\alpha_i$ ,  $0 \leq i \leq n-1$  sont les éléments de  $\mathfrak{h}^*$  définis par les relations

$$\alpha_i := -\Lambda_{i-1} + 2\Lambda_i - \Lambda_{i+1} + \delta_{i,0} \delta, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Pour  $0 \leq i, j \leq n-1$ , soit  $a_{ij}$  le coefficient de  $\Lambda_j$  dans  $\alpha_i$ . La matrice  $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n-1}$  est appelée *matrice de Cartan* de  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ . L’algèbre  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$  est l’algèbre de Lie sur  $\mathbb{Q}$  ayant pour

générateurs

$$d, e_i, f_i, h_i \quad (0 \leq i \leq n-1)$$

et soumise aux relations

$$\begin{aligned} [h_i, h_j] &= 0, & [h_i, e_j] &= a_{ij} e_j, & [h_i, f_j] &= -a_{ij} f_j, \\ [d, h_i] &= 0, & [d, e_i] &= \delta_{i,0} e_i, & [d, f_i] &= -\delta_{i,0} f_i, & [e_i, f_j] &= \delta_{i,j} h_i \end{aligned}$$

ainsi qu'aux relations de Serre

$$(\operatorname{ad} e_i)^{1-a_{ij}} e_j = (\operatorname{ad} f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0, \quad i \neq j.$$

(Ici, pour  $x \in \widehat{\mathfrak{sl}}_n$ ,  $\operatorname{ad} x$  est l'endomorphisme  $y \mapsto [x, y]$  et dans toutes les relations ci-dessus,  $i$  et  $j$  parcourent l'ensemble  $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$ ).

Notons

$$P := \left( \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z} \Lambda_i \right) \oplus \mathbb{Z} \delta \quad \text{et} \quad Q := \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z} \alpha_i;$$

$P$  (resp.  $Q$ ) est le réseau des poids fondamentaux (resp. poids radiciels) de  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ .

**Lemme 1.12**  $(\Lambda_0, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$  est une base de  $\mathfrak{h}^*$ .

*Démonstration.* Pour  $1 \leq i \leq n-1$ , posons  $\Lambda'_i := \Lambda_i - \Lambda_0$ . Alors pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ , on a  $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} \Lambda'_i$ . Le calcul de l'inverse de la matrice  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1}$  donne alors

$$\Lambda_i = \Lambda'_i + \Lambda_0 = \Lambda_0 + \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^{i-1} j(n-i) \alpha_j + \sum_{j=i}^n i(n-j) \alpha_j \right), \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

De plus, on a  $\delta = \alpha_0 + \dots + \alpha_{n-1}$ , donc la famille  $(\Lambda_0, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$  engendre  $\mathfrak{h}^*$ , et par cardinalité, c'en est une base.  $\square$

On définit sur  $\mathfrak{h}^*$  une forme bilinéaire symétrique non dégénérée  $(\cdot, \cdot)$  par

$$(\alpha_i, \alpha_j) = a_{ij}, \quad (\Lambda_0, \alpha_i) = \delta_{i,0}, \quad (\Lambda_0, \Lambda_0) = 0 \quad (0 \leq i, j \leq n-1).$$

Les expressions de  $\Lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$  et de  $\delta$  données au cours de la preuve du lemme précédent montrent qu'on a les relations

$$(\Lambda_i, \alpha_j) = \delta_{i,j}, \quad (\delta, \alpha_i) = 0, \quad 0 \leq i, j \leq n-1.$$

Le groupe de Weyl de  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$  est le sous-groupe de  $\operatorname{GL}(\mathfrak{h}^*)$  engendré par les réflexions simples  $\sigma_i$  définies par

$$\sigma_i(\Lambda) := \Lambda - (\alpha_i, \Lambda) \alpha_i \quad (\Lambda \in \mathfrak{h}^*, 0 \leq i \leq n-1).$$

Il s'agit d'un groupe de Coxeter de type  $A_{n-1}^{(1)}$ , isomorphe au groupe symétrique affine  $\widetilde{\mathfrak{S}}_{n-1}$ .

**Remarque 1.13** Les calculs faits précédemment montrent en particulier que pour tout  $0 \leq i, j \leq n-1$ , on a

$$\sigma_i(\delta) = \delta \quad \text{et} \quad \sigma_i(\Lambda_j) = \begin{cases} \Lambda_j & \text{si } j \neq i, \\ \Lambda_{i-1} + \Lambda_{i+1} - \Lambda_i - \delta_{i,0} \delta & \text{si } j = i. \end{cases}$$

◇

## 1.2.2 L'algèbre quantique affine $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$

### 1.2.2.1 Définition

L'algèbre  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  est définie (voir par exemple [KMS]) comme l'algèbre associative unitaire sur  $\mathbb{Q}(q)$  ayant pour générateurs

$$e_i, f_i, t_i, t_i^{-1} \quad (0 \leq i \leq n-1)$$

et soumise aux relations

$$t_i t_i^{-1} = t_i^{-1} t_i = 1, \quad t_i t_j = t_j t_i,$$

$$t_i e_j t_i^{-1} = q^{a_{ij}} e_j, \quad t_i f_j t_i^{-1} = q^{-a_{ij}} f_j, \quad e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q - q^{-1}}$$

ainsi qu'aux  $q$ -relations de Serre

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix} e_i^{1-a_{ij}-k} e_j e_i^k = \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix} f_i^{1-a_{ij}-k} f_j f_i^k = 0, \quad i \neq j.$$

Dans toutes ces relations, les indices  $i$  et  $j$  parcourent l'ensemble  $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$ . La matrice  $(a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n-1}$  est la matrice de Cartan de  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$  (cf. paragraphe 1.2.1). Enfin, nous avons utilisé les  $q$ -analogues des entiers et les coefficients binomiaux, définis par

$$[k] := \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}, \quad [k]! := [k][k-1] \cdots [1], \quad \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} := \frac{[m]!}{[m-k]![k]!} \quad (0 \leq k \leq m).$$

Observons que pour tout  $0 \leq i \leq n-1$ , la sous-algèbre de  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  engendrée par  $e_i, f_i$  et  $t_i$  est isomorphe à  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ ; nous noterons  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)_i$  cette sous-algèbre.

Nous aurons besoin des notations suivantes. Soit  $0 \leq i \leq n-1$ , et  $k \in \mathbb{Z}$ . On pose

$$e_i^{(k)} := e_i^k / [k]! \quad \text{si } k \geq 0 \quad \text{et} \quad e_i^{(k)} := 0 \quad \text{sinon.}$$

On dit alors que  $e_i^{(k)}$  est la  $k$ -ième puissance divisée de  $e_i$ . On définit de même  $f_i^{(k)}$ . Par ailleurs, si  $x$  est un élément inversible d'une  $\mathbb{Q}(q)$ -algèbre unitaire, on pose

$$\{x\} := \frac{x - x^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad \left\{ \begin{matrix} x \\ 0 \end{matrix} \right\} =: 1 \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{matrix} x \\ k \end{matrix} \right\} := \frac{\{x\} \{q^{-1}x\} \cdots \{q^{-(k-1)}x\}}{[k]!} \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

Par exemple, pour  $m \geq k \geq 0$ , on a  $\{q^k\} = [k]$  et  $\{q^m\} = [m]$ .

Signalons le classique résultat suivant.

**Lemme 1.14** *Soit  $k, m \in \mathbb{Z}$ , et  $0 \leq i \leq n-1$ . Alors on a*

$$\begin{aligned} e_i^{(k)} f_i^{(m)} &= \sum_{j \geq 0} f_i^{(m-j)} e_i^{(k-j)} \left\{ \begin{matrix} q^{k-m} t_i \\ j \end{matrix} \right\} \\ &= \sum_{j \geq 0} \left\{ \begin{matrix} q^{m-k} t_i \\ j \end{matrix} \right\} f_i^{(m-j)} e_i^{(k-j)} \\ &= \sum_{j \geq 0} f_i^{(m-j)} \left\{ \begin{matrix} q^{2j-k-m} t_i \\ j \end{matrix} \right\} e_i^{(k-j)}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* On peut supposer que  $k \geq 1$  et  $m \geq 1$ . À l'aide des relations de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)_i$ , on prouve les formules pour  $m = 1$  et pour tout  $k \geq 1$  par récurrence sur  $k$ , puis on les prouve pour tout  $k \geq 1$  et  $m \geq 1$  par récurrence sur  $m$  avec  $k$  fixé. Le lecteur pourra par exemple consulter [Kas4] pour les détails.  $\square$

Signalons un classique théorème de structure pour  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  (voir par exemple [Kas4]), qui est l'analogie quantique du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt pour les algèbres de Lie. Soit  $U_q(\mathfrak{n}^+)$  (resp.  $U_q(\mathfrak{n}^-)$ , resp.  $U_q(\mathfrak{h})$ ) la sous-algèbre de  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  engendrée par les  $e_i$  (resp.  $f_i$ , resp.  $t_i$ ),  $0 \leq i \leq n-1$ . Alors l'application

$$U_q(\mathfrak{n}^+) \otimes U_q(\mathfrak{h}) \otimes U_q(\mathfrak{n}^-) \rightarrow U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n), \quad \mathfrak{n}^+ \otimes \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{n}^- \mapsto \mathfrak{n}^+ \mathfrak{h} \mathfrak{n}^-$$

est un isomorphisme.

$U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  est une algèbre de Hopf, où le coproduit  $\Delta$  est donné par

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes e_i, \quad \Delta(f_i) = f_i \otimes 1 + t_i \otimes f_i, \quad \Delta(t_i) = t_i \otimes t_i \quad (0 \leq i \leq n-1).$$

L'algèbre  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  est une extension de  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  de dimension 1 par l'opérateur degré  $\partial$  satisfaisant les relations

$$[\partial, t_i] = 0, \quad [\partial, e_i] = \delta_{i,0} e_i, \quad [\partial, f_i] = -\delta_{i,0} f_i \quad (0 \leq i \leq n-1).$$

On étend la structure d'algèbre de Hopf à  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  en posant  $\Delta(\partial) := \partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial$ .

On munit  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  d'une involution  $\bar{\cdot}$ . Par définition,  $\bar{\cdot}$  est l'unique automorphisme de  $\mathbb{Q}$ -anneau tel que

$$\bar{q} = q^{-1}, \quad \bar{e}_i = e_i, \quad \bar{f}_i = f_i, \quad \bar{t}_i = t_i^{-1} \quad (0 \leq i \leq n-1) \quad \text{et} \quad \bar{\partial} = \partial.$$

On introduit une forme rationnelle  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)_{\mathbb{Q}}$  de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  ([Kas3]). Par définition,  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)_{\mathbb{Q}}$  est la  $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ -sous-algèbre de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  engendrée par les  $e_i^{(k)}$ ,  $f_i^{(k)}$ ,  $\{t_i\}$  et  $t_i$ , où les entiers  $k$

et  $i$  parcourent respectivement  $\mathbb{N}$  et  $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$ .

Nous serons également amenés à considérer l'algèbre quantique affine  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ , avec

$$p := -q^{-1}.$$

Pour ne pas confondre les générateurs, racines simples, poids, etc. de  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  avec ceux de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ , nous placerons des points au-dessus des éléments correspondant à  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ . Nous utiliserons le coproduit  $\dot{\Delta}$  de  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  défini par les formules

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}(\dot{e}_i) &= \dot{e}_i \otimes \dot{t}_i^{-1} + 1 \otimes \dot{e}_i, & \dot{\Delta}(\dot{f}_i) &= \dot{f}_i \otimes 1 + \dot{t}_i \otimes \dot{f}_i, & \dot{\Delta}(\dot{t}_i) &= \dot{t}_i \otimes \dot{t}_i & (0 \leq i \leq l-1), \\ \dot{\Delta}(\dot{\partial}) &= \dot{\partial} \otimes 1 + 1 \otimes \dot{\partial}. \end{aligned}$$

### 1.2.2.2 Éléments de la théorie des $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules

Soit  $M$  un  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module. On dit que l'action de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  sur  $M$  est de niveau  $l \in \mathbb{Z}$  si l'élément central canonique  $t_0 t_1 \dots t_{n-1} \in U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  agit sur  $M$  comme la multiplication par le scalaire  $q^l$ .

Rappelons que  $P$  désigne le réseau des poids fondamentaux de  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$  (cf. paragraphe 1.2.1). Soit  $\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \Lambda_i + d\delta \in P$  ( $a_0, \dots, a_{n-1}, d \in \mathbb{Z}$ ). Le sous-espace vectoriel de  $M$  formé de l'ensemble des  $m \in M$  tels que  $\partial \cdot m = dm$  et  $t_i \cdot m = q^{a_i} m$  pour tout  $0 \leq i \leq n-1$  est appelé *sous-espace de poids*  $\Lambda$  de  $M$ , nous le noterons  $M\langle\Lambda\rangle$ . (La notation  $M_\Lambda$  est plus traditionnelle, mais nous préférons notre notation pour éviter tout ajout intempestif d'indices.) Si  $M\langle\Lambda\rangle \neq \{0\}$ , on dit que  $\Lambda$  est un *poids* de  $M$ , et tout vecteur de  $M\langle\Lambda\rangle \setminus \{0\}$  est appelé *vecteur de poids*  $\Lambda$ . L'ensemble des poids de  $M$  sera noté  $\mathcal{P}(M)$ . Soit  $\Lambda \in \mathcal{P}(M)$ . On dit que  $u \in M\langle\Lambda\rangle$  est un vecteur *singulier* ou *de plus haut poids*  $\Lambda$  si  $u \neq 0$  et  $e_i \cdot u = 0$  pour tout  $0 \leq i \leq n-1$ . On dit que  $M$  est un  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module (resp.  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module) *cyclique de plus haut poids*  $\Lambda$  s'il existe un vecteur  $u \in M$  de plus haut poids  $\Lambda$  tel que  $M = U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot u$  (resp.  $M = U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot u$ ). Si  $M$  est cyclique de plus haut poids  $\lambda$ , le théorème de structure  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cong U_q(\mathfrak{n}^+) \otimes U_q(\mathfrak{h}) \otimes U_q(\mathfrak{n}^-)$  montre alors que tout poids  $\mu$  de  $M$  vérifie  $\mu \leq \lambda$ , i.e.  $\lambda - \mu \in \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}\alpha_i$ , d'où la terminologie de « plus haut poids » pour  $\lambda$ . Ce théorème montre aussi que  $M\langle\lambda\rangle$  est de dimension 1.

Soit  $\Lambda \in P$ . On montre qu'il existe un unique (à isomorphisme près)  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module irréductible cyclique de plus haut poids  $\Lambda$ ; on notera ce module  $V(\Lambda)$ . On montre que les  $V(\Lambda)$ ,  $\Lambda \in P$ , sont des  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules deux à deux non isomorphes. La restriction de  $V(\Lambda)$  à  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  est un  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module simple, qu'on notera  $V'(\Lambda)$ . On montre que  $V'(\Lambda)$  et  $V'(\Lambda')$  ( $\Lambda, \Lambda' \in P$ ) sont isomorphes si et seulement si  $\Lambda - \Lambda' \in \mathbb{Z}\delta$ . Nous travaillerons plus particulièrement avec les espaces  $V(\Lambda)$  et  $V'(\Lambda)$ , où  $\Lambda \in P^+ := (\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}\alpha_i) + \mathbb{Z}\delta$ ; un élément de  $P^+$  est appelé *poids dominant*.

**Définition 1.15** On dit que le  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module  $M$  est *intégrable* s'il vérifie les conditions



suivantes :

- (i)  $M = \bigoplus_{\lambda \in P} M\langle \lambda \rangle$ ,
- (ii) pour tout  $\lambda \in P$ ,  $M\langle \lambda \rangle$  est de dimension finie,
- (iii) pour tout  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $M$  se décompose comme une somme directe de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)_i$ -modules (simples) de dimension finie.  $\diamond$

$M$  est intégrable si et seulement si  $M$  vérifie (i), (ii) et

- (iii') les opérateurs  $e_i$  et  $f_i$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ) sont *localement nilpotents*, i.e. pour tout  $m \in M$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $e_i^N \cdot m = f_i^N \cdot m = 0$ .

Il est bien connu (voir par exemple [Kas4]) que la catégorie des  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules intégrables est semi-simple; plus précisément, tout  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module intégrable se décompose en somme directe de modules isomorphes à  $V(\Lambda)$ ,  $\Lambda \in P^+$ , et une telle décomposition est unique. Il s'ensuit que tout module  $M$  intégrable cyclique de plus haut poids est simple (en effet, nous avons vu précédemment que  $M$  possède alors un unique plus haut poids et que le sous-espace de plus haut poids est de dimension 1, donc la décomposition de  $M$  en somme directe de modules isomorphes à  $V(\Lambda)$ ,  $\Lambda \in P^+$  ne peut comporter qu'un seul facteur).

### 1.2.3 Bases cristallines, bases globales des $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules intégrables

Dans tout ce paragraphe, on considère un  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module intégrable  $M$ .

#### 1.2.3.1 Opérateurs cristallins de Kashiwara [Kas3]

Avant de rappeler la définition des opérateurs cristallins [Kas3], citons le classique résultat suivant concernant  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)_i \cong U_q(\mathfrak{sl}_2)$ .

**Lemme 1.16** *Soit  $\lambda \in \mathcal{P}(M)$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , et  $u \in M\langle \lambda \rangle$ . Soit  $N := (\lambda, \alpha_i)$ . Alors  $u$  s'écrit de façon unique*

$$u = \sum_{k \geq \max(0, -N)} f_i^{(k)} \cdot v_k,$$

avec  $v_k \in \text{Ker } e_i \cap M\langle \lambda + k\alpha_i \rangle$  pour tout  $k \geq \max(0, -N)$ , et  $v_k = 0$  si  $k$  est suffisamment grand.

*Démonstration.* D'après la condition (iii) des modules intégrables, on peut supposer que  $u$  est contenu dans un  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)_i$ -module  $M'$  qui est simple, de dimension finie  $N' + 1$ . D'après la théorie des  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules simples, il existe  $v \in M'$ , unique à un scalaire près, tel que  $M' = \bigoplus_{k=0}^{N'} \mathbb{Q}(q) f_i^{(k)} \cdot v$  et  $e_i \cdot v = 0$ ; de plus,  $v$  est un vecteur de poids  $\mu$  de  $M$ , et on a  $(\mu, \alpha_i) = N'$ . Ceci donne le résultat voulu si  $u = 0$ . Si  $u \neq 0$ , alors  $M' = U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)_i \cdot u$  par simplicité de  $M'$ , donc  $M'$  et  $\mathbb{Q}(q)v$  sont déterminés de façon unique. Il reste alors à prouver qu'il existe un unique  $k \geq \max(0, -N)$  tel que  $u \in \mathbb{Q}(q) \cdot f_i^{(k)} \cdot v$ . Puisque les  $f_i^{(k)} \cdot v$  ( $0 \leq k \leq N'$ ) sont de poids deux à deux distincts, il existe un unique  $k \in \llbracket 0; N' \rrbracket$  tel que  $u \in \mathbb{Q}(q) f_i^{(k)} \cdot v$ , et  $k$  est

déterminé par l'égalité  $(\lambda, \alpha_i) = (\mu - k \cdot \alpha_i, \alpha_i)$ . On a donc  $N = (\mu, \alpha_i) - k(\alpha_i, \alpha_i) = N' - 2k \geq -k$  car  $N' \geq k$ . Ainsi  $k \geq -N$ .  $\square$

Fixons  $0 \leq i \leq n - 1$ . Soit  $\lambda \in \mathcal{P}(M)$ , et  $u \in M\langle \lambda \rangle$ . Écrivons

$$u = \sum_{k \geq \max(0, -N)} f_i^{(k)} v_k,$$

où  $N$  et les  $v_k$  sont donnés par le lemme précédent. On pose alors

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i^{\text{low}}.u &:= \sum_{k \geq \max(1, -N)} f_i^{(k-1)}.v_k, & \tilde{f}_i^{\text{low}}.u &:= \sum_{k \geq \max(0, -N)} f_i^{(k+1)}.v_k, \\ \tilde{e}_i^{\text{up}}.u &:= \sum_{k \geq \max(1, -N)} \frac{[N+k+1]}{[k]} f_i^{(k-1)}.v_k & \text{et } \tilde{f}_i^{\text{up}}.u &:= \sum_{k \geq \max(0, -N)} \frac{[k+1]}{[N+k]} f_i^{(k+1)}.v_k. \end{aligned}$$

On prolonge ensuite les opérateurs  $\tilde{e}_i^{\text{low}}$ ,  $\tilde{f}_i^{\text{low}}$ ,  $\tilde{e}_i^{\text{up}}$  et  $\tilde{f}_i^{\text{up}}$  à  $M = \bigoplus_{\lambda \in P} M\langle \lambda \rangle$  par linéarité. Le lemme qui suit montre que dans certains cas, certaines puissances des opérateurs  $\tilde{e}_i^{\text{low}}$  et  $\tilde{e}_i^{\text{up}}$  coïncident (on peut énoncer un résultat analogue pour  $\tilde{f}_i^{\text{low}}$  et  $\tilde{f}_i^{\text{up}}$ ).

**Lemme 1.17** *Soit  $\lambda \in \mathcal{P}(M)$ ,  $u \in \text{Ker } e_i \cap M\langle \lambda \rangle$  et  $k := (\lambda, \alpha_i)$ . Alors on a*

$$(\tilde{e}_i^{\text{up}})^k.(f_i^{(k)}.u) = (\tilde{e}_i^{\text{low}})^k.(f_i^{(k)}.u) = u.$$

*Démonstration.* On prouve aisément la deuxième égalité par récurrence sur  $k$  à l'aide de la définition de  $\tilde{e}_i^{\text{low}}$ . Montrons que  $(\tilde{e}_i^{\text{up}})^k.(f_i^{(k)}.u) = u$ . Posons  $\text{wt}(v) := \mu$  si  $v \in M$  est un vecteur de poids  $\mu$  ( $\mu \in P$ ). Notons que pour  $0 \leq j \leq k$ , on a

$$(\text{wt}(f_i^{(k-j)}.u), \alpha_i) = (\text{wt}(u), \alpha_i) - (k-j)(\alpha_i, \alpha_i) = 2j - k.$$

On montre alors par récurrence sur  $0 \leq k' \leq k$  que

$$(\tilde{e}_i^{\text{up}})^{k'}.(f_i^{(k)}.u) = \left( \prod_{j=0}^{k'-1} \frac{[(2j-k) + (k-j) + 1]}{[k-j]} \right) f_i^{(k-k')}.u \quad (0 \leq k' \leq k).$$

Par conséquent, on a  $(\tilde{e}_i^{\text{up}})^k.(f_i^{(k)}.u) = \left( \prod_{j=0}^{k-1} \frac{[j+1]}{[k-j]} \right) u = u$ .  $\square$

Donnons une propriété vérifiée par  $\tilde{e}_i^{\text{up}}$  (on a une propriété analogue pour  $\tilde{f}_i^{\text{up}}$ , mais pas pour  $\tilde{e}_i^{\text{low}}$  ni pour  $\tilde{f}_i^{\text{low}}$ ).

**Lemme 1.18** ([Kas3], Lemma 3.1.1) *Soit  $m \in \mathbb{N}$ , et  $u \in M$  tel que  $e_i^{m+1}.u = 0$ . Alors on a  $(\tilde{e}_i^{\text{up}})^m.u = e_i^{(m)}.u$ .*

*Démonstration.* On peut supposer que  $u \in M\langle \lambda \rangle$ , où  $\lambda \in \mathcal{P}(M)$ . Écrivons comme au lemme 1.16,  $u = \sum_{k \geq \max(0, -N)} f_i^{(k)} v_k$ . Montrons tout d'abord que  $v_k = 0$  si  $k \geq m + 1$ . D'après le lemme 1.14, on a

$$\begin{aligned} 0 &= e_i^{(m+1)}.u = \sum_{k \geq \max(0, -N)} e_i^{(m+1)} f_i^{(k)}.v_k \\ &= \sum_{k \geq \max(0, -N)} \sum_{j \geq 0} f_i^{(k-j)} \left\{ \begin{matrix} q^{2j-m-1-k} t_i \\ j \end{matrix} \right\} e_i^{(m+1-j)}.v_k. \end{aligned}$$

Soit  $k \geq \max(0, -N)$ . Puisque  $e_i.v_k = 0$ , on a  $e_i^{(m+1-j)}.v_k = 0$  sauf si  $j = m + 1$ . Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k \geq \max(0, -N)} f_i^{(k-m-1)} \left\{ \begin{matrix} q^{m+1-k} t_i \\ m+1 \end{matrix} \right\}.v_k \\ &= \sum_{k \geq \max(m+1, -N)} f_i^{(k-m-1)} \left\{ \begin{matrix} q^{m+1-k} t_i \\ m+1 \end{matrix} \right\}.v_k \\ &= \sum_{k \geq \max(0, -N-m-1)} f_i^{(k)} \left\{ \begin{matrix} q^{-k} t_i \\ m+1 \end{matrix} \right\}.v_{m+1+k}. \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition de 0 donnée par le lemme 1.16, on doit donc avoir pour tout  $k \geq 0$ ,  $\left\{ \begin{matrix} q^{-k} t_i \\ m+1 \end{matrix} \right\}.v_{m+1+k} = 0$ , soit encore  $v_k = 0$  pour tout  $k \geq m + 1$ . À nouveau d'après le lemme 1.14, on a

$$\begin{aligned} e_i^{(m)}.u &= \sum_{j \geq 0} \sum_k \left\{ \begin{matrix} q^{m-k} t_i \\ j \end{matrix} \right\} f_i^{(k-j)} e_i^{(m-j)}.v_k \\ &= \sum_k \left\{ \begin{matrix} q^{m-k} t_i \\ m \end{matrix} \right\} f_i^{(k-m)}.v_k \\ &= \delta_{m \geq -N} \left\{ \begin{matrix} t_i \\ m \end{matrix} \right\} v_m, \end{aligned}$$

où dans chacune des sommes,  $k$  parcourt  $\{k' \in \mathbb{Z} \mid \max(0, -N) \leq k' \leq m\}$ , et si  $\mathcal{P}$  est une propriété, on pose  $\delta_{\mathcal{P}} := 1$  si  $\mathcal{P}$  est vraie et  $\delta_{\mathcal{P}} := 0$  sinon. Supposons que  $m \geq -N$ . Observons que  $v_m \in M\langle \lambda + m\alpha_i \rangle$ , donc  $\left\{ \begin{matrix} t_i \\ m \end{matrix} \right\}.v_m = \left[ \begin{matrix} \lambda + m\alpha_i, \alpha_i \\ m \end{matrix} \right].v_m = \left[ \begin{matrix} N+2m \\ m \end{matrix} \right].v_m$ . Posons  $\left[ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right] := 0$  si  $k < 0$ . On a donc

$$e_i^{(m)}.u = \left[ \begin{matrix} N+2m \\ m \end{matrix} \right].v_m.$$

Soit  $v \in \text{Ker } e_i$ , et  $k \in \mathbb{N}$ . Par définition de  $\tilde{e}_i^{\text{up}}$ , on a  $(\tilde{e}_i^{\text{up}})^m.(f_i^{(k)}.v) \in \mathbb{Q}(q)f_i^{(k-m)}.v$ . Par conséquent,  $(\tilde{e}_i^{\text{up}})^m.(f_i^{(k)}.v) = 0$  si  $m > k$ . Ceci implique que

$$(\tilde{e}_i^{\text{up}})^m.u = \delta_{m \geq -N} (\tilde{e}_i^{\text{up}})^m.(f_i^{(m)}.v_m).$$

Ceci prouve la formule désirée si  $m < -N$ . Supposons donc que  $m \geq -N$ . On a alors, par récurrence immédiate,

$$(\tilde{e}_i^{\text{up}})^m.u = \prod_{k=1}^m \frac{[(\lambda + m\alpha_i, \alpha_i) - k + 1]}{[k]}.v_m = \prod_{k=1}^m \frac{[N + 2m - k + 1]}{[k]}.v_m = \left[ \begin{matrix} N+2m \\ m \end{matrix} \right].v_m. \quad \square$$

### 1.2.3.2 Bases cristallines

En suivant [Kas3], nous rappelons ici les définitions des bases cristallines et des bases globales d'un  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module intégrable. Soit

$$\mathbb{A} := \left\{ \frac{a(q)}{b(q)} \in \mathbb{Q}(q) \mid a(q), b(q) \in \mathbb{Q}[q], b(0) \neq 0 \right\} \quad \text{et} \quad \overline{\mathbb{A}} := \{f(q^{-1}) \mid f(q) \in \mathbb{A}\}.$$

$\mathbb{A}$  (resp.  $\overline{\mathbb{A}}$ ) est l'anneau des fractions rationnelles (à valeurs dans  $\mathbb{Q}$ ) régulières à  $q = 0$  (resp. à  $q = \infty$ ).

**Remarque 1.19** On a  $\mathbb{A} \cap q^{-1}\overline{\mathbb{A}} \cap \mathbb{Q}[q, q^{-1}] = \{0\}$ . En effet, si  $f \in \mathbb{A} \cap q^{-1}\overline{\mathbb{A}} \cap \mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ , on peut écrire  $f(q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k q^k$  avec les  $a_k \in \mathbb{Q}$  presque tous nuls. Puisque  $f \in \mathbb{A}$ , on a  $a_k = 0$  pour tout  $k < 0$ . Écrivons par ailleurs  $f(q) = q^{-1}g(q)$  avec  $g(q) \in \overline{\mathbb{A}}$ . Alors  $g(q^{-1}) = q^{-1}f(q^{-1}) = \sum_{k \geq 0} a_k q^{1-k} \in \mathbb{A}$ ; compte tenu de ( $k \geq 0 \Rightarrow 1 - k < 0$ ), les  $a_k$ ,  $k \geq 0$  sont aussi tous nuls, d'où la remarque.  $\diamond$

Rappelons que  $M$  est un  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module intégrable.

**Définition 1.20** Un *réseau cristallin* (*crystal lattice* en anglais) *supérieur* (resp. *inférieur*) de  $M$  à  $q = 0$  est un  $\mathbb{A}$ -module libre  $L$  tel que

- (i)  $M \cong \mathbb{Q}(q) \otimes_{\mathbb{A}} L$  (on peut donc identifier  $L$  à un sous- $\mathbb{A}$ -module de  $M$ ),
- (ii)  $L = \bigoplus_{\lambda \in P} L\langle \lambda \rangle$ , où  $L\langle \lambda \rangle := L \cap M\langle \lambda \rangle$  ( $\lambda \in P$ ),
- (iii)  $\tilde{e}_i^{\text{up}} L \subset L$  et  $\tilde{f}_i^{\text{up}} L \subset L$  (resp.  $\tilde{e}_i^{\text{low}} L \subset L$  et  $\tilde{f}_i^{\text{low}} L \subset L$ ). Dans ce cas,  $\tilde{e}_i^{\text{up}}$  et  $\tilde{f}_i^{\text{up}}$  (resp.  $\tilde{e}_i^{\text{low}}$  et  $\tilde{f}_i^{\text{low}}$ ) induisent des endomorphismes de  $L/qL$ , qu'on notera de la même manière.

En remplaçant  $\mathbb{A}$  par  $\overline{\mathbb{A}}$  et  $q$  par  $q^{-1}$  dans la définition ci-dessus, on définit la notion de réseau cristallin supérieur (resp. inférieur) à  $q = \infty$ .  $\diamond$

**Remarque 1.21** Soit  $L$  un réseau cristallin à  $q = 0$ , et  $\lambda \in P$ . Alors l'inclusion  $L\langle \lambda \rangle \subset L$  induit un morphisme  $L\langle \lambda \rangle / qL\langle \lambda \rangle \rightarrow L/qL$ . D'après (ii), on a  $(qL) \cap L\langle \lambda \rangle = qL\langle \lambda \rangle$ , donc ce morphisme est injectif. Ainsi  $L\langle \lambda \rangle / qL\langle \lambda \rangle$  peut être vu comme un sous-espace vectoriel de  $L/qL$ . De même, si  $L$  un réseau cristallin à  $q = \infty$  et  $\lambda \in P$ , alors  $L\langle \lambda \rangle / q^{-1}L\langle \lambda \rangle$  peut être vu comme un sous-espace vectoriel de  $L/q^{-1}L$ .  $\diamond$

**Définition 1.22** Une *base cristalline supérieure* de  $M$  à  $q = 0$  est la donnée de  $(L, B)$ , où  $L$  est un réseau cristallin supérieur à  $q = 0$  et  $B$  est une base de l'espace vectoriel (sur le corps  $\mathbb{Q}$ )  $L/qL$  tels que

- (i)  $B = \coprod_{\lambda \in P} B\langle \lambda \rangle$ , où pour  $\lambda \in P$ , on a posé  $B\langle \lambda \rangle := B \cap (L\langle \lambda \rangle / qL\langle \lambda \rangle)$  (la remarque précédente montre que cette définition a bien un sens),
- (ii)  $\tilde{e}_i^{\text{up}} B \subset B \cup \{0\}$  et  $\tilde{f}_i^{\text{up}} B \subset B \cup \{0\}$ ,
- (iii) pour tout  $b, b' \in B$ , on a  $b' = \tilde{f}_i^{\text{up}} b$  si et seulement si  $b = \tilde{e}_i^{\text{up}} b'$ .

On définit de même la notion de base cristalline inférieure à  $q = 0$ , ainsi que la notion de base cristalline supérieure (*resp.* inférieure) à  $q = \infty$ .  $\diamond$

Soit  $(L, B)$  une base cristalline (supérieure ou inférieure) de  $M$ . Si  $b \in B$ , il existe un unique  $\lambda \in P$  tel que  $b \in B\langle \lambda \rangle$ ; on dit alors que  $\lambda$  est le *poinds* de  $b$  et on note ce poids  $\text{wt}(b)$ . Par ailleurs, le *graphe cristallin* de  $M$  (muni de la base cristalline  $(L, B)$ ) est le graphe dont l'ensemble des sommets est  $B$ , et dans lequel on a une arête étiquetée par  $i$  reliant  $b$  à  $b'$  ( $b, b' \in B, 0 \leq i \leq n-1$ ) si  $b' = \tilde{f}_i.b$ . Soit  $0 \leq i \leq n-1$ . Puisque  $M$  est intégrable, les opérateurs  $e_i$  et  $f_i$  agissent de façon localement nilpotente sur  $M$ . Par conséquent, les opérateurs de Kashiwara  $\tilde{e}_i$  et  $\tilde{f}_i$  agissent aussi de façon localement nilpotente sur  $L$  et donc sur  $B \cup \{0\}$ . On peut donc définir, pour  $b \in B$ , les quantités

$$\varepsilon_i(b) := \max \{m \in \mathbb{N} \mid \tilde{e}_i^m.b \neq 0\} \quad \text{et} \quad \varphi_i(b) := \max \{m \in \mathbb{N} \mid \tilde{f}_i^m.b \neq 0\}.$$

La théorie des  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules montre qu'on a la relation

$$(\text{wt}(b), \alpha_i) = \varphi_i(b) - \varepsilon_i(b) \quad (b \in B).$$

On définit une application  $\sigma_i : B \rightarrow B$  de la façon suivante. Soit  $b \in B$ . Soit  $\mathcal{C}$  la  $i$ -chaîne contenant  $b$  dans le graphe cristallin  $B$ . On définit alors  $\sigma_i(b)$  comme étant l'unique élément  $b' \in \mathcal{C}$  tel que  $\varphi_i(b') = \varepsilon_i(b)$  et  $\varepsilon_i(b') = \varphi_i(b)$ . En d'autres termes,  $b'$  est le symétrique de  $b$  par rapport au milieu de la chaîne  $\mathcal{C}$ . De façon équivalente,  $\sigma_i(b)$  est l'unique élément  $b' \in \mathcal{C}$  tel que  $\text{wt}(b') = \sigma_i.\text{wt}(b)$  (au sens de l'action du groupe de Weyl  $W_n$  de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  sur  $P$ ). On montre que si  $\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_a} = \sigma_{j_1} \cdots \sigma_{j_b}$  dans  $W_n$ , alors les éléments  $\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_a}$  et  $\sigma_{j_1} \cdots \sigma_{j_b}$  définissent les mêmes bijections de  $B$ . En fait,  $W_n$  agit ainsi sur  $B$ .

### 1.2.3.3 Bases globales

**Définition 1.23** On dit que le  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module intégrable  $M$  admet une base globale supérieure (*resp.* inférieure) s'il existe  $M_{\mathbb{Q}}, (L_0, B_0), (L_{\infty}, B_{\infty})$  tels que

- (i)  $(L_0, B_0)$  est une base cristalline supérieure (*resp.* inférieure) à  $q = 0$ ,  $(L_{\infty}, B_{\infty})$  est une base cristalline supérieure (*resp.* inférieure) à  $q = \infty$ , et  $M_{\mathbb{Q}}$  est un sous- $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ -module de  $M$  stable sous l'action de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)_{\mathbb{Q}}$  tel que  $M \cong \mathbb{Q}(q) \otimes_{\mathbb{Q}[q, q^{-1}]} M_{\mathbb{Q}}$ ,
- (ii) L'application  $L_0 \cap L_{\infty} \cap M_{\mathbb{Q}} \rightarrow L_0/qL_0$  est un isomorphisme de  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels.

Dans ce cas, notons  $G : L_0/qL_0 \xrightarrow{\sim} L_0 \cap L_{\infty} \cap M_{\mathbb{Q}}$  l'isomorphisme inverse. On montre alors ([Kas3, Lemma 2.1.1, (2.1.3)  $\Rightarrow$  (2.1.5)]) que  $\{G(b) \mid b \in B_0\}$  est une  $\mathbb{A}$ -base de  $L_0$ , une  $\overline{\mathbb{A}}$ -base de  $L_{\infty}$ , une  $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ -base de  $M_{\mathbb{Q}}$  et une  $\mathbb{Q}(q)$ -base de  $M$ . On appelle cette base la base *globale supérieure* (*resp.* *inférieure*) de  $M$ .  $\diamond$

Les bases globales supérieure et inférieure sont adjointes une de l'autre, comme le montre la proposition suivante ([Kas3]).

**Proposition 1.24** *Supposons que  $M$  est muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée  $(.,.)$  telle que pour tout  $u, v \in M, 0 \leq i \leq n-1$ , on a*

$$(t_i.u, v) = (u, t_i.v) \quad \text{et} \quad (e_i.u, v) = (u, f_i.v).$$

Supposons que  $M$  admet une base globale supérieure (resp. inférieure)  $\{G(b) \mid b \in B\}$ . Soit  $\{G^*(b) \mid b \in B\}$  la base adjointe de  $\{G(b) \mid b \in B\}$ , c'est-à-dire définie par les relations

$$(G(b), G^*(b')) = \delta_{b,b'} \quad (b, b' \in B).$$

Alors  $\{G^*(b) \mid b \in B\}$  est une base globale inférieure (resp. supérieure) de  $M$ .

*Démonstration.* Par hypothèse sur  $(\cdot, \cdot)$ , on a les relations

$$(\tilde{e}_i^{\text{up}}.u, v) = (u, \tilde{f}_i^{\text{low}}.v) \quad \text{et} \quad (\tilde{f}_i^{\text{up}}.u, v) = (u, \tilde{e}_i^{\text{low}}.v)$$

pour tout  $u, v \in M$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ . La proposition s'ensuit (cf. [Kas3, Proposition 3.2.2]).  $\square$

Mentionnons une propriété de la base globale supérieure qui nous sera très utile plus tard.

**Proposition 1.25** ([Kas3], Lemma 5.1.1 (ii)) *Supposons que  $M$  admet une base globale supérieure  $\{G(b) \mid b \in B\}$ . Soit  $b \in B$ . On suppose qu'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que*

$$(\tilde{e}_i^{\text{up}})^{m+1}.b = 0.$$

Alors on a  $e_i^{(m)}G(b) = G((\tilde{e}_i^{\text{up}})^m.b)$ .

*Démonstration.*

- Première étape: soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $e_i^{k+1}G(b) = 0$ . Montrons que  $e_i^{(k)}G(b) = G((\tilde{e}_i^{\text{up}})^k.b)$ . En appliquant le lemme 1.18 à  $G(b)$ , on a (\*):  $(\tilde{e}_i^{\text{up}})^k.G(b) = e_i^{(k)}.G(b)$ . Reprenons les notations de la définition de la base globale. Par définition, le vecteur  $G(b)$  appartient à  $L_0 \cap L_\infty$ . Comme  $L_0$  et  $L_\infty$  sont des réseaux cristallins supérieurs, ceci implique que  $(\tilde{e}_i^{\text{up}})^k.G(b) \in L_0 \cap L_\infty$ . Par ailleurs,  $G(b) \in M_{\mathbb{Q}}$  et  $e_i^{(k)} \in U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)_{\mathbb{Q}}$  laisse stable  $M_{\mathbb{Q}}$ , donc  $e_i^{(k)}.G(b) \in M_{\mathbb{Q}}$ . Ainsi, d'après (\*), on a  $e_i^{(k)}G(b) \in L_0 \cap L_\infty \cap M_{\mathbb{Q}}$ . Il reste à voir que  $(e_i^{(k)}G(b)) \bmod qL_0 = G((\tilde{e}_i^{\text{up}})^k.b) \bmod qL_0 = (\tilde{e}_i^{\text{up}})^k.b$ . En effet, puisque  $(\tilde{e}_i^{\text{up}})^k.L_0 \subset L_0$ , on a d'après (\*),

$$(e_i^{(k)}G(b)) \bmod qL_0 = ((\tilde{e}_i^{\text{up}})^k.G(b)) \bmod qL_0 = (\tilde{e}_i^{\text{up}})^k.(G(b) \bmod qL_0) = (\tilde{e}_i^{\text{up}})^k.b.$$

- Seconde étape: où l'on conclut. Soit  $m' \in \mathbb{N}$  minimal tel que  $e_i^{m'+1}.G(b) = 0$  ( $m'$  existe car  $M$  est intégrable, donc  $e_i$  est un endomorphisme de  $M$  localement nilpotent). Supposons que  $m' \geq m+1$ . Alors on a  $(\tilde{e}_i^{\text{up}})^{m'}.b = (\tilde{e}_i^{\text{up}})^{m'-(m+1)}.(\tilde{e}_i^{\text{up}})^{m+1}.b = 0$ , d'où  $G((\tilde{e}_i^{\text{up}})^{m'}.b) = 0$ . En appliquant l'étape précédente à  $k = m'$ , on a donc

$$e_i^{(m')}.G(b) = G((\tilde{e}_i^{\text{up}})^{m'}.b) = 0,$$

ce qui contredit la minimalité de  $m'$ . Par conséquent, on a  $m \geq m'$ , d'où  $e_i^{m+1}.G(b) = 0$ . On peut donc appliquer l'étape précédente à  $k = m$  pour conclure.  $\square$

Le résultat qui suit nous permettra de faire le lien entre les bases globales et les bases canoniques (cf. chapitre 3).

**Théorème 1.26 ([Kas4])** *Supposons que  $M$  admet une base globale (supérieure ou inférieure)  $\{G(b) \mid b \in B_0\}$ . On suppose de plus que  $M$  est muni d'une involution  $\overline{\phantom{x}}$  telle que*

- (a)  $\overline{\phantom{x}}$  est un automorphisme de  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel tel que  $\overline{q^k u} = q^{-k} \overline{u}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ,  $u \in M$ ),
- (b)  $\overline{L_0} = L_\infty$ ,  $\overline{M_{\mathbb{Q}}} = M_{\mathbb{Q}}$ ,
- (c) pour tout  $v \in M_{\mathbb{Q}}$ , on a  $v - \overline{v} \in (q-1)M_{\mathbb{Q}}$ .

Soit  $b \in B_0$ . Alors  $G(b)$  est l'unique vecteur  $v \in L_0 \cap M_{\mathbb{Q}}$  tel que  $v = \overline{v}$  et  $b = v \bmod qL_0$ .

*Démonstration.* Soit  $v \in L_0 \cap M_{\mathbb{Q}}$  tel que  $v = \overline{v}$  et  $b = v \bmod qL_0$ . Alors d'après (b), on a  $\overline{v} \in \overline{L_0} = L_\infty$ , donc  $v = \overline{v} \in L_0 \cap L_\infty \cap M_{\mathbb{Q}}$ . Ainsi  $v = G(b)$ . Réciproquement, montrons que  $G(b) \in L_0 \cap M_{\mathbb{Q}}$  et  $\overline{G(b)} = G(b)$ . La première condition est évidente. Puisque  $G(b) \in L_0 \cap L_\infty$  et  $\overline{L_0} = L_\infty$ , on a aussi  $\overline{G(b)} \in L_0 \cap L_\infty$ . D'après (c), la vecteur  $(q-1)^{-1}(G(b) - \overline{G(b)})$  appartient à  $(q-1)^{-1}L_0 \cap (q-1)^{-1}L_\infty \cap M_{\mathbb{Q}}$ . Rappelons que  $\{G(b') \mid b' \in B_0\}$  est une  $\mathbb{A}$ -base de  $L_0$ , une  $\overline{\mathbb{A}}$ -base de  $L_\infty$  et une  $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ -base de  $M_{\mathbb{Q}}$ . Par conséquent, il existe des polynômes de Laurent  $f_{b'} \in (q-1)^{-1}\mathbb{A} \cap (q-1)^{-1}\overline{\mathbb{A}} \cap \mathbb{Q}[q, q^{-1}]$  tels que  $(q-1)^{-1}(G(b) - \overline{G(b)}) = \sum_{b' \in B_0} f_{b'} G(b')$ . Or  $(q-1)^{-1}$  est inversible dans  $\mathbb{A}$ , et on a  $(q-1)^{-1} = q^{-1}(1 - q^{-1})$  avec  $(1 - q^{-1})$  inversible dans  $\overline{\mathbb{A}}$ , donc  $(q-1)^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{A}$  et  $(q-1)^{-1}\overline{\mathbb{A}} = q^{-1}\overline{\mathbb{A}}$ . Par conséquent, pour tout  $b' \in B_0$ , on a en vertu de la remarque 1.19,

$$f_{b'} \in \mathbb{A} \cap q^{-1}\overline{\mathbb{A}} \cap \mathbb{Q}[q, q^{-1}] = \{0\},$$

d'où  $(q-1)^{-1}(G(b) - \overline{G(b)}) = 0$  et  $\overline{G(b)} = G(b)$ .  $\square$

### 1.3 Le groupe symétrique affine étendu $\widehat{\mathfrak{S}}_r$ et son algèbre de Hecke

Dans toute cette section,  $r$  désigne un entier supérieur ou égal à 2. Notre exposé suit, dans les grandes lignes, celui de [LT] et [U2].

#### 1.3.1 Le groupe symétrique affine étendu $\widehat{\mathfrak{S}}_r$

##### 1.3.1.1 Deux présentations de $\widehat{\mathfrak{S}}_r$

- \* Soit  $\widetilde{W} := \widetilde{\mathfrak{S}}_r$  le groupe de Weyl affine de type  $A_{r-1}^{(1)}$ , appelé aussi *groupe symétrique affine*. Il s'agit du groupe de Coxeter admettant la présentation suivante:

$$\widetilde{\mathfrak{S}}_r = \langle \sigma_i, 0 \leq i \leq r-1 \rangle$$

avec les relations suivantes (ici,  $i$  et  $j$  varient entre 0 et  $r-1$  et il faut lire les indices modulo  $r$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i && \text{si } i - j \not\equiv 1 \pmod{r}, \\ \sigma_i^2 &= 1. \end{aligned}$$

Notons en particulier que  $\widetilde{\mathfrak{S}}_r$  contient comme sous-groupe le groupe symétrique

$$W := \mathfrak{S}_r \cong \langle \sigma_i, 1 \leq i \leq r-1 \rangle,$$

où  $\sigma_i$  ( $1 \leq i \leq r-1$ ) s'identifie à la transposition  $(i, i+1)$ .

**Remarque 1.27** Notons que si  $r' \geq r$ , alors on a une injection naturelle  $\mathfrak{S}_r \hookrightarrow \mathfrak{S}_{r'}$ . Soit  $1 \leq i \leq r-1$ . L'image de  $(i, i+1)$  par cette application sera encore notée  $\sigma_i$ . On peut donc voir  $\sigma_i$  comme un élément de  $\mathfrak{S}_{r'}$  avec  $r' > i$ .  $\diamond$

Le *groupe symétrique affine étendu* est le groupe défini par

$$\widehat{W} = \widehat{\mathfrak{S}}_r := \widetilde{\mathfrak{S}}_r \rtimes \langle \tau \rangle,$$

où  $\langle \tau \rangle \cong \mathbb{Z}$  et le produit semi-direct est donné par les relations  $\tau \sigma_i = \sigma_{i+1} \tau$  (ici encore,  $i$  varie entre 0 et  $r-1$  et il faut lire les indices modulo  $r$ ). L'élément neutre de  $\widehat{W}$  sera noté  $\text{id}$ .

\* De façon équivalente, on peut donner la présentation suivante de  $\widehat{\mathfrak{S}}_r$ . Pour  $1 \leq i \leq r$ , soit  $y_i := (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq r} \in P_r := \mathbb{Z}^r$ . Alors  $\widehat{\mathfrak{S}}_r \cong \mathfrak{S}_r \rtimes P_r$ , où le produit semi-direct est donné par les relations  $\sigma_i y_j = y_j \sigma_i$  si  $j \notin \{i, i+1\}$  et  $\sigma_i y_i = y_{i+1} \sigma_i$ . Ici,  $i$  est compris entre 1 et  $r-1$  et  $j$  est compris entre 1 et  $r$ . En d'autres termes,  $\widehat{\mathfrak{S}}_r$  est le groupe engendré par les  $\sigma_i$ ,  $1 \leq i \leq r-1$  et les  $y_j$ ,  $y_j^{-1}$ ,  $1 \leq j \leq r$  avec les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall 1 \leq i, j \leq r-1, \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \\ \sigma_i^2 = 1 \end{array} \right. \quad \text{si } i-j \not\equiv 1 \pmod{r}, \\ \\ \forall 1 \leq i, j \leq r, \quad y_j y_i = y_i y_j, \\ \\ \forall 1 \leq i \leq r-1, \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_i y_j = y_j \sigma_i \quad \text{si } j \notin \{i, i+1\} \\ \sigma_i y_i \sigma_i = y_{i+1} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Les formules suivantes permettent de passer d'une présentation à l'autre:

$$\begin{aligned} y_i &= \sigma_{i-1} \sigma_{i-2} \cdots \sigma_1 \sigma_0 \sigma_{r-1} \sigma_{r-2} \cdots \sigma_{i+1} \tau \quad (1 \leq i \leq r) && \text{et} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0 &= \sigma_{r-1} \sigma_{r-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{r-1} y_1^{-1} y_r \\ \tau &= \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{r-1} y_r \end{array} \right. \end{aligned}$$

(Pour la formule donnant les  $y_i$  en fonction des  $\sigma_j$  et  $\tau$ , il faut lire les indices modulo  $r$ ).

Notons que  $\widehat{\mathfrak{S}}_r$  n'est pas un groupe de Coxeter ; néanmoins, on peut définir sur  $\widehat{\mathfrak{S}}_r$  une fonction longueur et un ordre de Bruhat comme suit. Soit  $\sigma = \tilde{\sigma} \tau^k$ ,  $\sigma' = \tilde{\sigma}' \tau^{k'} \in \widehat{\mathfrak{S}}_r$  avec  $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}' \in \widetilde{\mathfrak{S}}_r$  et  $k, k' \in \mathbb{Z}$ . On dit alors que  $\sigma < \sigma'$  si  $\tilde{\sigma} < \tilde{\sigma}'$  et  $k = k'$ , et on pose  $\ell(\sigma) := \ell(\tilde{\sigma})$ .



Si  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ , on a le fait bien connu suivant :

$$\ell(\sigma) = \#S(\sigma), \quad \text{où} \quad S(\sigma) := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i < j \leq r, \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

Soit

$$\begin{aligned} P_r^+ &:= \{(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in P_r \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r\}, & P_r^- &:= -P_r^+ & \text{et} \\ P_r^{++} &:= \{(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in P_r \mid \lambda_1 > \dots > \lambda_r\}. \end{aligned}$$

Pour  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in P_r$ , posons  $y_\lambda := y_1^{\lambda_1} \cdots y_r^{\lambda_r}$ .

**Proposition 1.28 (Uglov)**

Soit  $x \in \widehat{\mathfrak{S}}_r$ . Alors il existe un unique triplet  $(u, v, \lambda) \in \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_r \times P_r^+$  tel que

$$x = u y_\lambda v$$

et  $S(v) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i < j \leq r, \lambda_{v(i)} < \lambda_{v(j)}\}$ . De plus, on a

$$\ell(x) = \ell(u) + \ell(y_\lambda) - \ell(v).$$

*Démonstration.* Voir [U2, Proposition 3.3]. □

Nous appellerons *factorisation d'Uglov* la factorisation  $x = u y_\lambda v$  de  $x \in \widehat{\mathfrak{S}}_r$  donnée à la proposition précédente.

**1.3.1.2 Deux actions de  $\widehat{\mathfrak{S}}_r$**

Nous expliquons ici comment réaliser  $\widehat{\mathfrak{S}}_r$  comme sous-groupe discret des transformations affines de  $\mathbb{R}^r$ .

\* Soit  $l \in \mathbb{N}^*$ . Il est aisé de vérifier que les formules suivantes définissent une action (à gauche) fidèle de  $\widehat{\mathfrak{S}}_r$  sur  $P_r$  :

$$\begin{aligned} \sigma_i \cdot \lambda &= (\lambda_1, \dots, \lambda_{i+1}, \lambda_i, \dots, \lambda_r), \\ y_j \cdot \lambda &= (\lambda_1, \dots, \lambda_j + l, \dots, \lambda_r), \\ 1 \leq i \leq r-1, \quad 1 \leq j \leq r, \quad \lambda &= (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in P_r. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \sigma_0 \cdot \lambda &= (\lambda_r + l, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}, \lambda_1 - l), \\ \tau \cdot \lambda &= (\lambda_r + l, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}) \end{aligned}, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in P_r.$$

Notons en particulier que l'élément  $y_\lambda$  ( $\lambda \in P_r$ ) agit sur  $P_r$  comme la translation suivant le vecteur  $l\lambda$ . Le résultat suivant nous sera utile plus tard.

**Lemme 1.29** Soit  $\lambda \in P_r^+$ . Alors  $\ell(y_\lambda) = \sum_{i=1}^r (r+1-2i)\lambda_i$ . Par conséquent, si  $\lambda, \mu \in P_r^+$ , on a  $\ell(y_{\lambda+\mu}) = \ell(y_\lambda) + \ell(y_\mu)$ .

*Démonstration.* C'est un cas particulier d'une formule d'Iwahori et Matsumoto (cf. [IM, Proposition 1.23]).  $\square$

Un domaine fondamental pour cette action est

$$B^l := \{(b_1, \dots, b_r) \in P_r \mid l \geq b_1 \geq \dots \geq b_r \geq 1\},$$

c'est-à-dire que chaque orbite rencontre  $B^l$  en exactement un point. On vérifie aisément que pour  $b \in B^l$ , le stabilisateur  $W_b$  de  $b$  est

$$W_b = \langle \sigma_i, i \in I_b \rangle, \quad \text{où} \quad I_b := \{1 \leq i \leq r-1 \mid b_i = b_{i+1}\};$$

en particulier,  $W_b \subset W$ . On montre que chaque élément de  $\widehat{W}/W_b$  (resp.  $W/W_b$ ) contient un unique représentant de longueur minimale; on notera  $\widehat{W}^b$  (resp.  $W^b$ ) l'ensemble des représentants de longueur minimale ainsi définis. On montre aussi que si  $y \in \widehat{W}^b$ ,  $v \in W_b$ , alors on a  $\ell(yv) = \ell(y) + \ell(v)$ . Par définition de  $\widehat{W}^b$ , tout élément  $\lambda \in P_r$  s'écrit de façon unique  $\lambda = y.b$ , avec  $b \in B^l$  et  $y \in \widehat{W}^b$ . Nous admettrons les résultats suivants (cf. [U2, Lemma 3.9 & Proposition 3.12]) :

**Lemme 1.30 ([AST])** *Soit  $b \in B^l$ , et  $v \in W$ . Alors  $v \in W^b$  si et seulement si pour tout  $(i, j) \in S(v)$ , on a  $b_i > b_j$ .*  $\square$

**Proposition 1.31 (Deodhar)** *Soit  $b \in B^l$ ,  $\sigma \in \widehat{W}^b$ , et  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) := \sigma.b \in P_r$ . Posons  $\lambda_0 := \lambda_r + l$ . Soit  $0 \leq i \leq r-1$ . On a alors les équivalences suivantes :*

- (i)  $\lambda_i = \lambda_{i+1} \iff \sigma_i \sigma \notin \widehat{W}^b$ ,
- (ii)  $\lambda_i > \lambda_{i+1} \iff \sigma_i \sigma \in \widehat{W}^b$  et  $\ell(\sigma_i \sigma) = \ell(\sigma) + 1$ ,
- (iii)  $\lambda_i < \lambda_{i+1} \iff \sigma_i \sigma \in \widehat{W}^b$  et  $\ell(\sigma_i \sigma) = \ell(\sigma) - 1$ .

De plus, dans le cas (i), il existe  $j \in \llbracket 0; r-1 \rrbracket$  tel que  $\sigma_i \sigma = \sigma \sigma_j$ , avec  $\sigma_j \in W_b$ , et on a  $\ell(\sigma_i \sigma) = \ell(\sigma) + 1$ .

*Démonstration.* Voir [De, Lemma 2.1 (iii)].  $\square$

\* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme précédemment, on vérifie que les formules suivantes permettent de définir une action (à droite) fidèle de  $\widehat{\mathfrak{S}}_r$  sur  $P_r$  :

$$\begin{aligned} \lambda.\sigma_i &= (\lambda_1, \dots, \lambda_{i+1}, \lambda_i, \dots, \lambda_r), \\ \lambda.y_j &= (\lambda_1, \dots, \lambda_j + n, \dots, \lambda_r), \\ 1 \leq i \leq r-1, \quad 1 \leq j \leq r, \quad \lambda &= (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in P_r. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \lambda.\sigma_0 &= (\lambda_r - n, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}, \lambda_1 + n) \\ \lambda.\tau &= (\lambda_2, \dots, \lambda_r, \lambda_1 + n) \end{aligned}, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in P_r.$$

Notons en particulier que l'élément  $y_\lambda$  ( $\lambda \in P_r$ ) agit sur  $P_r$  comme la translation suivant le vecteur  $n\lambda$ .

Un domaine fondamental pour cette action est

$$A^n := \{(a_1, \dots, a_r) \in P_r \mid 1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r \leq n\}.$$

On vérifie aisément que le stabilisateur de  $a \in A^n$  est  $W_a = \langle \sigma_i, i \in I_a \rangle$ ; en particulier, on a  $W_a \subset W$ . On montre que chaque élément de  $W_a \backslash \widehat{W}$  (resp.  $W_a \backslash W$ ) contient un unique représentant de longueur minimale; on notera  ${}^a\widehat{W}$  (resp.  ${}^aW$ ) l'ensemble des représentants de longueur minimale ainsi définis. On montre aussi que si  $x \in {}^a\widehat{W}$ ,  $u \in W_a$ , alors on a  $\ell(ux) = \ell(u) + \ell(x)$ . Par définition de  ${}^a\widehat{W}$ , tout élément  $\lambda \in P_r$  s'écrit de façon unique  $\lambda = a.x$ , avec  $a \in A^n$  et  $x \in {}^a\widehat{W}$ .

**Lemme 1.32 (Uglov)** *Soit  $x = u y_\lambda v$  la factorisation de  $x \in \widehat{W}$  donnée à la proposition 1.28. Alors  $x \in {}^a\widehat{W}$  si et seulement si  $u \in {}^aW$ .*

*Démonstration.* Voir [U2, Lemma 3.4]. □

Signalons pour conclure ce paragraphe qu'on a des résultats analogues pour cette action à ceux du lemme 1.30 et de la proposition 1.31.

## 1.3.2 L'algèbre de Hecke $H(\widehat{\mathfrak{S}}_r)$

### 1.3.2.1 Définition

L'algèbre de Hecke du groupe  $\widehat{\mathfrak{S}}_r$  est l'algèbre obtenue à partir du groupe symétrique affine étendu en déformant les relations  $\sigma_i^2 = 1$  des présentations de ce groupe données au paragraphe précédent. Par définition, l'algèbre de Hecke  $\widehat{H}_r = H(\widehat{\mathfrak{S}}_r)$  (resp.  $\widetilde{H}_r = H(\widetilde{\mathfrak{S}}_r)$ , resp.  $H_r = H(\mathfrak{S}_r)$ ) est la  $\mathbb{Q}(q)$ -algèbre (associative, unitaire) ayant pour base (en tant qu'espace vectoriel) l'ensemble des  $T_\sigma$ , où  $\sigma$  parcourt  $\widehat{\mathfrak{S}}_r$  (resp.  $\widetilde{\mathfrak{S}}_r$ , resp.  $\mathfrak{S}_r$ ), et dont la multiplication est caractérisée par les propriétés

$$\begin{cases} T_\sigma T_{\sigma'} = T_{\sigma\sigma'} & \text{si } \ell(\sigma\sigma') = \ell(\sigma) + \ell(\sigma'), \\ (T_{\sigma_i} - q^{-1})(T_{\sigma_i} + q) = 0. \end{cases}$$

$\widetilde{H}_r$  est donc une sous-algèbre de  $\widehat{H}_r$ , et  $H_r$  est une sous-algèbre de  $\widetilde{H}_r$ . L'unité de  $\widetilde{H}_r$  est l'élément  $1 = T_{\text{id}}$ . Pour simplifier les notations, nous écrirons désormais  $T_i$  au lieu de  $T_{\sigma_i}$  et  $\tau$  au lieu de  $T_\tau$ . Clairement  $T_\tau$  est inversible, d'inverse  $T_{\tau^{-1}}$ . De plus,  $T_i$ ,  $0 \leq i \leq r-1$  est inversible, d'inverse  $T_i^{-1} = T_i + (q - q^{-1})$ . Il découle de ce qui précède que

$$T_i T_\sigma = \begin{cases} T_{\sigma_i \sigma} & \text{si } \ell(\sigma_i \sigma) = \ell(\sigma) + 1, \\ -(q - q^{-1})T_\sigma + T_{\sigma_i \sigma} & \text{si } \ell(\sigma_i \sigma) = \ell(\sigma) - 1. \end{cases}$$

**Remarque 1.33** Il découle du lemme de Matsumoto (voir par exemple [Mat1, Theorem 1.8]) que pour toute décomposition réduite (i.e. de longueur minimale) de  $\sigma = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k} \in \widehat{\mathfrak{S}}_r$ ,

on a  $T_\sigma = T_{i_1} \dots T_{i_k}$ . (Par conséquent, tous les  $T_\sigma$ ,  $\sigma \in \widetilde{\mathfrak{S}}_r$ , et donc tous les  $T_\sigma$ ,  $\sigma \in \widehat{\mathfrak{S}}_r$  sont inversibles).  $\diamond$

La première présentation de  $\widehat{\mathfrak{S}}_r$  vue au paragraphe précédent conduit à une présentation de  $\widehat{H}_r$  de type Coxeter.  $\widehat{H}_r$  est l'algèbre engendrée par les éléments  $T_i$ ,  $0 \leq i \leq r-1$  et  $\tau, \tau^{-1}$  avec les relations suivantes (ici,  $i$  et  $j$  varient entre 0 et  $r-1$  et il faut lire les indices modulo  $r$ ):

$$\begin{aligned} T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1}, \\ T_i T_j &= T_j T_i && \text{si } i - j \not\equiv 1 \pmod{r}, \\ (T_i - q^{-1})(T_i + q) &= 0, \\ \tau T_i &= T_{i+1} \tau. \end{aligned}$$

La seconde présentation de  $\widehat{\mathfrak{S}}_r$  vue au paragraphe précédent conduit à une présentation équivalente de  $\widehat{H}_r$ , de type Bernstein.  $\widehat{H}_r$  est l'algèbre engendrée par les éléments  $T_i$  ( $0 \leq i \leq r-1$ ) et  $Y_j, Y_j^{-1}$  ( $0 \leq j \leq r$ ) avec les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall 1 \leq i, j \leq r-1, \quad \left\{ \begin{array}{l} T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} \\ T_i T_j = T_j T_i \\ (T_i - q^{-1})(T_i + q) = 0 \end{array} \right. \quad \text{si } i - j \not\equiv 1 \pmod{r}, \\ \forall 1 \leq i, j \leq r, \quad Y_j Y_i = Y_i Y_j, \\ \forall 1 \leq i \leq r-1 \quad \left\{ \begin{array}{l} T_i Y_j = Y_j T_i \quad \text{si } j \notin \{i, i+1\} \\ T_i Y_i T_i = Y_{i+1} \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Les formules suivantes permettent de passer d'une présentation à l'autre (pour la première d'entre elles, il faut lire les indices modulo  $r$ ):

$$\begin{aligned} Y_i &= T_{i-1} T_{i-2} \dots T_1 T_0^{-1} T_{r-1}^{-1} T_{r-2}^{-1} \dots T_{i+1}^{-1} \tau && (1 \leq i \leq r) && \text{et} \\ \left\{ \begin{array}{l} T_0 &= T_{r-1}^{-1} T_{r-2}^{-1} \dots T_2^{-1} T_1^{-1} T_2^{-1} \dots T_{r-1}^{-1} Y_1^{-1} Y_r \\ \tau &= T_1^{-1} T_2^{-1} \dots T_{r-1}^{-1} Y_r \end{array} \right. \end{aligned}$$

Notons qu'à la translation  $y_\lambda$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in P_r$ , correspondent deux éléments de  $\widehat{H}_r$ , à savoir  $Y_\lambda := Y_1^{\lambda_1} \dots Y_r^{\lambda_r}$  et  $T_\lambda := T_{y_\lambda}$ . Ces deux éléments diffèrent en général (par exemple, pour  $r=3$  on a  $T_{y_2} = T_1 T_0 \tau$  et  $Y_2 = T_1 T_0^{-1} \tau$ ). En fait, les  $T_\lambda$  ne commutent pas en général. Bernstein a introduit des éléments  $X^\lambda$  ( $\lambda \in P_r$ ) définis comme suit. Écrivons  $\lambda \in P_r$  sous la forme  $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ , avec  $\lambda^+, \lambda^- \in P_r^+$ . Alors d'après le lemme 1.29, l'élément

$$X^\lambda := T_{\lambda^-} T_{\lambda^+}^{-1}$$

est bien défini (*i.e.* ne dépend pas de l'écriture  $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$  choisie), et on a

$$X^\lambda X^\mu = X^{\lambda+\mu} = X^\mu X^\lambda \quad (\lambda, \mu \in P_r).$$

La preuve du lemme suivant ([U2, Lemma 3.13], [LT, Lemma 5.5]) est contenue dans [Ki].

**Lemme 1.34**

- (i) Les éléments  $X^\lambda$ ,  $\lambda \in P_r$  et  $T_1, \dots, T_{r-1}$  engendrent l'algèbre  $\widehat{H}_r$ .  
(ii) Soit  $\lambda \in P_r$ ,  $1 \leq i \leq r-1$ , et  $\alpha_i := (\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j})_{1 \leq j \leq r} \in P_r$ . On a la relation

$$X^\lambda T_i = T_i X^{\sigma_i \cdot \lambda} + (q - q^{-1}) \frac{X^{\sigma_i \cdot \lambda} - X^\lambda}{1 - X^{\alpha_i}}.$$

□

**Remarque 1.35** On peut en fait montrer que les  $X^\lambda T_\sigma$  (resp.  $T_\sigma X^\lambda$ ),  $\lambda \in P_r$ ,  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ , forment une base de  $\widehat{H}_r$  en tant qu'espace vectoriel. ◇

On munit  $\widehat{H}_r$  d'une involution  $-$ . Par définition,  $-$  est l'unique automorphisme d'algèbre tel que

$$\overline{T_\sigma} = (T_{\sigma^{-1}})^{-1}, \sigma \in \widehat{\mathfrak{S}}_r \quad \text{et} \quad \overline{q} = q^{-1}.$$

**1.3.2.2 Deux actions de  $\widehat{H}_r$  sur l'espace des poids**

Soit  $\mathbf{K} := \mathbb{Q}(q)$ . On construit une action à gauche de  $\widehat{H}_r$  sur  $\mathcal{P}_r := \bigoplus_{\lambda \in P_r} \mathbf{K}|\lambda\rangle$  à partir de modules paraboliques induits, puis on relie *via* la proposition 1.31 cette action à l'action à gauche de  $\widehat{\mathfrak{S}}_r$  sur  $P_r$  définie au paragraphe précédent. On procède de même pour définir une action à droite.

\* Fixons  $b \in B^l$ . Soit  $H_b := H(W_b) = \langle T_\sigma, \sigma \in W_b \rangle$ . Rappelons que

$$I_b = \{1 \leq i \leq r-1 \mid b_i = b_{i+1}\}.$$

Considérons le  $H_b$ -module à gauche, de dimension 1 sur  $\mathbf{K}$ , dans lequel  $T_i$ ,  $i \in I_b$  agit par multiplication par  $-q$ ; on notera ce module  $\mathbf{K}_{-q}$ . On forme alors le module induit  $\widehat{H}_r \otimes_{H_b} \mathbf{K}_{-q}$ ; il s'agit d'un  $\widehat{H}_r$ -module à gauche ayant pour base (en tant que  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel)  $\{\overline{T}_y \otimes 1\}$ , où  $y$  parcourt  $\widehat{W}^b \cong \widehat{W}/W_b$ . À l'aide de l'isomorphisme de  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels

$$\widehat{H}_r \otimes_{H_b} \mathbf{K}_{-q} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{y \in \widehat{W}^b} \mathbf{K} |y.b\rangle, \quad \overline{T}_y \otimes 1 \mapsto |y.b\rangle,$$

on définit une action de  $\widehat{H}_r$  sur  $\bigoplus_{y \in \widehat{W}^b} \mathbf{K} |y.b\rangle$ , qu'on étend à

$$\mathcal{P}_r = \bigoplus_{b \in B^l} \bigoplus_{y \in \widehat{W}^b} \mathbf{K} |y.b\rangle$$

par linéarité. On a les formules explicites suivantes pour cette action.

**Proposition 1.36 ([U2])** Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in P_r$ . Alors pour  $0 \leq i \leq r-1$ , on a

$$T_i.\lambda = \begin{cases} |\sigma_i.\lambda| & \text{si } \lambda_i < \lambda_{i+1} \\ -q|\lambda| & \text{si } \lambda_i = \lambda_{i+1} \\ |\sigma_i.\lambda| - (q - q^{-1})|\lambda| & \text{si } \lambda_i > \lambda_{i+1} \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\tau.\lambda = |\tau.\lambda|.$$

*Démonstration.* Il résulte des définitions que pour  $0 \leq i \leq r-1$ ,  $y \in \widehat{\mathfrak{S}}_r$ , on a

$$T_i\overline{T_y} = \begin{cases} \overline{T_{\sigma_i y}} & \text{si } \ell(\sigma_i y) = \ell(y) - 1, \\ \overline{T_{\sigma_i y}} - (q - q^{-1})\overline{T_y} & \text{si } \ell(\sigma_i y) = \ell(y) + 1 \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\overline{T_y}T_i = \begin{cases} \overline{T_{y\sigma_i}} & \text{si } \ell(y\sigma_i) = \ell(y) - 1, \\ \overline{T_{y\sigma_i}} - (q - q^{-1})\overline{T_y} & \text{si } \ell(y\sigma_i) = \ell(y) + 1. \end{cases}$$

Écrivons maintenant  $\lambda = y.b$  avec  $b \in B^l$ ,  $y \in \widehat{W}^b$ . Soit  $0 \leq i \leq r-1$ . Modulo l'identification

$$\widehat{H}_r \otimes_{H_b} \mathbf{K}_{-q} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\sigma \in \widehat{W}^b} \mathbf{K}|\sigma.b), \quad \overline{T_\sigma} \otimes 1 \mapsto |\sigma.b),$$

on a

$$T_i.\lambda = T_i.(\overline{T_y} \otimes 1) = (T_i.\overline{T_y}) \otimes 1.$$

- Supposons que  $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ . Alors d'après la proposition 1.31, on a  $\sigma_i y \in \widehat{W}^b$  et  $\ell(\sigma_i y) = \ell(y) - 1$ . D'après les formules précédentes, on a donc

$$T_i.\lambda = (T_i.\overline{T_y}) \otimes 1 = \overline{T_{\sigma_i y}} \otimes 1 = |\sigma_i y.b) = |\sigma_i.\lambda).$$

- Supposons que  $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ . Alors d'après la proposition 1.31, on a  $\sigma_i y \in \widehat{W}^b$  et  $\ell(\sigma_i y) = \ell(y) + 1$ . Un raisonnement analogue nous donne alors

$$T_i.\lambda = |\sigma_i.\lambda| - (q - q^{-1})|\lambda|.$$

- Supposons enfin que  $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ . Alors d'après la proposition 1.31, il existe  $j \in I_b$  tel que  $\sigma_i y = y\sigma_j$  et  $\ell(\sigma_i y) = \ell(y) - 1$ . Compte tenu des formules précédentes, on a donc

$$T_i\overline{T_y} = \overline{T_{\sigma_i y}} = \overline{T_{y\sigma_j}} = \overline{T_y}T_j.$$

Puisque  $j \in I_b$ , on a donc

$$T_i.\lambda = (T_i.\overline{T_y}) \otimes 1 = (\overline{T_y}T_j) \otimes 1 = \overline{T_y} \otimes (T_j.1) = -q\overline{T_y} \otimes 1 = -q|\lambda|.$$

Enfin, on prouve de façon analogue que  $\tau.\lambda = |\tau.\lambda|$ . □

\* On définit de même une action à droite de  $\widehat{H}_r$  sur  $\mathcal{P}_r \cong \bigoplus_{\lambda \in P_r} \mathbf{K}(\lambda|$  de la façon suivante. Soit  $a \in A^n$ . On considère le  $H_a$ -module à droite, de dimension 1 sur  $\mathbf{K}$  dans lequel  $T_i$ ,  $i \in I_a$  agit par multiplication par  $q^{-1}$ ; on notera ce module  $\mathbf{K}_{q^{-1}}$ . Alors le  $\widehat{H}_r$ -module à droite  $\mathbf{K}_{q^{-1}} \otimes_{H_a} \widehat{H}_r$  a pour base (en tant que  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel)  $\{1 \otimes T_x, x \in {}^a\widehat{W}\}$ . On définit à l'aide de l'isomorphisme de  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels

$$\mathbf{K}_{q^{-1}} \otimes_{H_a} \widehat{H}_r \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{x \in {}^a\widehat{W}} \mathbf{K}(a.x|, \quad 1 \otimes T_x \mapsto (a.x|$$

une action de  $\widehat{H}_r$  sur  $\bigoplus_{x \in {}^a\widehat{W}} \mathbf{K}(a.x|$ , qu'on étend à

$$\mathcal{P}_r \cong \bigoplus_{a \in A^n} \bigoplus_{x \in {}^a\widehat{W}} \mathbf{K}(a.x|$$

par linéarité. On a alors les formules explicites suivantes.

**Proposition 1.37 ([U2])** Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in P_r$ . Alors pour  $0 \leq i \leq r-1$ , on a

$$\lambda|.T_i = \begin{cases} (\lambda.\sigma_i| & \text{si } \lambda_i < \lambda_{i+1} \\ q^{-1}(\lambda| & \text{si } \lambda_i = \lambda_{i+1} \\ (\lambda.\sigma_i| - (q - q^{-1})(\lambda| & \text{si } \lambda_i > \lambda_{i+1} \end{cases} \quad \text{et}$$

$$(\lambda|.\tau = (\lambda.\tau|.$$

*Démonstration.* Analogue à celle de la proposition 1.36. □

### 1.3.2.3 Polynômes de Kazhdan-Lusztig

Rappelons que  $\widetilde{H}_r \subset \widehat{H}_r$  est munie d'une involution  $\overline{\phantom{x}}$ , qui est l'unique automorphisme d'algèbre tel que  $\overline{T_\sigma} = (T_{\sigma^{-1}})^{-1}$ ,  $\sigma \in \widetilde{\mathfrak{S}}_r$  et  $\overline{q} = q^{-1}$ . Soit  $L^+$  (resp.  $L^-$ ) le  $\mathbb{Z}[q]$ -module (resp.  $\mathbb{Z}[q^{-1}]$ -module) libre de base les  $T_\sigma$ ,  $\sigma \in \widetilde{\mathfrak{S}}_r$ . On montre le résultat suivant (pour la preuve, voir [KL] ou [So]; voir aussi la preuve du théorème 3.34).

**Théorème 1.38 ([KL])** Il existe une unique base  $\{C'_x \mid x \in \widetilde{\mathfrak{S}}_r\}$  (resp.  $\{C_x \mid x \in \widetilde{\mathfrak{S}}_r\}$ ) satisfaisant les deux conditions suivantes :

- (i)  $\overline{C'_x} = C'_x$  (resp.  $\overline{C_x} = C_x$ ),
- (ii)  $C'_x \equiv T_x \pmod{qL^+}$  (resp.  $C_x \equiv T_x \pmod{q^{-1}L^-}$ ).

□

Les bases  $\{C_x\}$  et  $\{C'_x\}$  sont appelées *bases de Kazhdan-Lusztig* de l'algèbre de Hecke  $\widetilde{H}_r$ . Notons

$$C'_x = \sum_{y \in \widetilde{\mathfrak{S}}_r} P_{y,x}(q)T_y,$$

avec les  $P_{x,y} \in \mathbb{Z}[q]$ . Les  $P_{y,x}$  sont appelés *polynômes de Kazhdan-Lusztig* du groupe de Coxeter  $\tilde{\mathfrak{S}}_r$  (ils coïncident avec ceux introduits dans [KL], à la multiplication par  $q^{\ell(x)-\ell(y)}$  et au changement de variables  $q \mapsto q^{-2}$  près). On a alors [So, Proof of Theorem 2.7]

$$C_x = \sum_{y \in \tilde{\mathfrak{S}}_r} P_{y,x}(-q^{-1})T_y \quad (x \in \tilde{\mathfrak{S}}_r).$$

Soit  $I \subset \llbracket 1; r-1 \rrbracket$ , et  $W_I$  le sous-groupe de  $\mathfrak{S}_r$  engendré par les  $\sigma_i$ ,  $i \in I$  (on dit que  $W_I$  est un *sous-groupe parabolique* de  $\mathfrak{S}_r$ ). Alors  $W_I$  possède un unique élément  $\omega_I$  de longueur maximale. On peut montrer ([So, Proposition 2.9]) que

$$C'_{\omega_I} = \sum_{\sigma \in W_I} q^{\ell(\omega_I)-\ell(\sigma)} T_\sigma.$$

Compte tenu de ce qui précède, on a donc

$$C_{\omega_I} = \sum_{\sigma \in W_I} (-q)^{\ell(\sigma)-\ell(\omega_I)} T_\sigma.$$

Nous aurons besoin du classique résultat suivant.

**Lemme 1.39** *Soit  $i \in I$ . Alors on a  $(T_i + q)C_{\omega_I} = 0$ .*

*Démonstration.* Notons  $A^+ := \{\sigma \in W_I \mid \ell(\sigma_i\sigma) = \ell(\sigma) + 1\}$  et  $A^- := W_I \setminus A^+$ . Compte tenu de ce qui précède et des formules donnant  $T_i T_\sigma$ ,  $\sigma \in W_I$ , on a

$$T_i C_{\omega_I} = \sum_{\sigma \in A^+} (-q)^{\ell(\sigma)-\ell(\omega_I)} T_{\sigma_i\sigma} - (q - q^{-1}) \sum_{\sigma \in A^-} (-q)^{\ell(\sigma)-\ell(\omega_I)} T_\sigma + \sum_{\sigma \in A^-} (-q)^{\ell(\sigma)-\ell(\omega_I)} T_{\sigma_i\sigma}.$$

En faisant le changement d'indices  $\sigma' = \sigma_i\sigma$  dans la première et la troisième somme, on trouve

$$\begin{aligned} T_i C_{\omega_I} &= \sum_{\sigma' \in A^-} (-q)^{\ell(\sigma')-1-\ell(\omega_I)} T_{\sigma'} - (q - q^{-1}) \sum_{\sigma \in A^-} (-q)^{\ell(\sigma)-\ell(\omega_I)} T_\sigma + \sum_{\sigma' \in A^+} (-q)^{\ell(\sigma')+1-\ell(\omega_I)} T_{\sigma'} \\ &= -q \left( \sum_{\sigma \in A^-} (-q)^{\ell(\sigma)-\ell(\omega_I)} T_\sigma + \sum_{\sigma \in A^+} (-q)^{\ell(\sigma)-\ell(\omega_I)} T_\sigma \right) \\ &= -q C_{\omega_I}. \end{aligned}$$

□

Soit  $\widehat{L}^+$  (*resp.*  $\widehat{L}^-$ ) le  $\mathbb{Z}[q]$ -module (*resp.*  $\mathbb{Z}[q^{-1}]$ -module) libre engendré par les éléments  $T_x$ ,  $x \in \tilde{\mathfrak{S}}_r$ . Bien que  $\tilde{\mathfrak{S}}_r$  ne soit pas un groupe de Coxeter, il existe des bases de  $\widehat{H}_r$ , notées  $\{C_x^+ \mid x \in \tilde{\mathfrak{S}}_r\}$ , *resp.*  $\{C_x^- \mid x \in \tilde{\mathfrak{S}}_r\}$  et caractérisées par les propriétés

- (i)  $\overline{C_x^+} = C_x^+$  (*resp.*  $\overline{C_x^-} = C_x^-$ ),
- (ii)  $C_x^+ \equiv T_x \pmod{q\widehat{L}^+}$  (*resp.*  $C_x^- \equiv T_x \pmod{q^{-1}\widehat{L}^-}$ ).



Écrivons  $C_x^+ = \sum_{y \in \widehat{\mathfrak{S}}_r} \mathcal{P}_{y,x}^+(q) T_y$  et  $C_x^- = \sum_{y \in \widehat{\mathfrak{S}}_r} \mathcal{P}_{y,x}^-(q) T_y$ , avec les  $\mathcal{P}_{y,x}^+ \in \mathbb{Z}[q]$  et les  $\mathcal{P}_{y,x}^- \in \mathbb{Z}[q^{-1}]$ . Les polynômes  $\mathcal{P}_{y,x}^\pm$  sont appelés *polynômes de Kazhdan-Lusztig* de  $\widehat{\mathfrak{S}}_r$  ; ils sont étroitement reliés à ceux de  $\widetilde{\mathfrak{S}}_r$  par les formules suivantes. On a  $\mathcal{P}_{y,x}^+ = \mathcal{P}_{y,x}^- = 0$  à moins que  $y \leq x$ . Dans ce cas, il existe un unique  $(k, \tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{Z} \times \widetilde{\mathfrak{S}}_r \times \widetilde{\mathfrak{S}}_r$  tel que  $x = \tau^k \tilde{x}$  et  $y = \tau^k \tilde{y}$ . On a alors

$$\mathcal{P}_{y,x}^+(q) = P_{\tilde{y},\tilde{x}}(q) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{y,x}^-(q) = P_{\tilde{y},\tilde{x}}(-q^{-1}).$$

## Chapitre 2

# $q$ -produits extérieurs

Soit  $\mathbb{C}^n$  la représentation vectorielle de  $\mathfrak{sl}_n$ . Alors  $\mathfrak{sl}_n$  agit sur  $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^l$  en opérant sur le premier facteur. L'algèbre  $U(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$  agit sur une affinisisation  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^l$  et donc aussi sur la  $r$ -ième puissance extérieure  $\Lambda^r \mathcal{V}$ . Dans ce chapitre, nous construisons, d'après Uglov [U2], un analogue quantique de cette représentation, que nous noterons  $\Lambda_q^r \mathcal{V}$ . Nous construisons alors des bases canoniques de ce module.

### 2.1 Notations

Dans toute la suite du mémoire, nous utiliserons les notations suivantes. Nous travaillerons sur le corps  $\mathbf{K} := \mathbb{Q}(q)$ . Soient  $n$  et  $l$  deux entiers naturels non nuls, et  $k \in \mathbb{Z}$ . Rappelons que  $k$  peut s'écrire de manière unique

$$k = c(k) + n(d(k) - 1) + nlm(k),$$

avec  $c(k) \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $d(k) \in \llbracket 1; l \rrbracket$  et  $m(k) \in \mathbb{Z}$ . On pose alors  $\phi(k) := c(k) + nm(k)$ . Pour  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in P_r := \mathbb{Z}^r$ , on pose  $\mathbf{c}(\mathbf{k}) := (c(k_1), \dots, c(k_r))$  et on définit de même  $\mathbf{d}(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{m}(\mathbf{k})$  et  $\phi(\mathbf{k})$ . Reprenons les notations de la section 1.3. Pour  $\mathbf{k} \in P_r$ , il existe un unique  $\mathbf{a}(\mathbf{k}) \in A^n$ ,  $u(\mathbf{k}) \in {}^{\mathbf{a}(\mathbf{k})}W$  tel que  $\mathbf{c}(\mathbf{k}) = \mathbf{a}(\mathbf{k}).u(\mathbf{k})$ . De même, il existe un unique  $\mathbf{b}(\mathbf{k}) \in B^l$ ,  $v(\mathbf{k}) \in W^{\mathbf{b}(\mathbf{k})}$  tel que  $\mathbf{d}(\mathbf{k}) = v(\mathbf{k}).\mathbf{b}(\mathbf{k})$ . On forme alors les éléments  $x(\mathbf{k}) := u(\mathbf{k}).y_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}.v(\mathbf{k}) \in {}^{\mathbf{a}(\mathbf{k})}\widehat{W}$  et  $\zeta(\mathbf{k}) := \phi(\mathbf{k}).v(\mathbf{k}) = \mathbf{a}(\mathbf{k}).x(\mathbf{k}) \in P_r$ . Soit enfin  $\omega(\mathbf{k})$  l'élément de longueur maximale du sous-groupe parabolique  $W_{\mathbf{b}(\mathbf{k})} \subset \mathfrak{S}_r$ .

**Exemple 2.1** Prenons  $n = 2$ ,  $l = 3$ ,  $r = 5$  et  $\mathbf{k} = (29, 22, 13, 12, 2)$ . On a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{k}) &= (1, 1, 2, 2, 2), & \mathbf{b}(\mathbf{k}) &= (3, 3, 2, 1, 1), & \mathbf{c}(\mathbf{k}) &= (1, 2, 1, 2, 2), & \mathbf{d}(\mathbf{k}) &= (3, 2, 1, 3, 1), \\ \mathbf{m}(\mathbf{k}) &= (4, 3, 2, 1, 0), & u(\mathbf{k}) &= \sigma_2, & v(\mathbf{k}) &= \sigma_3 \sigma_2, & x(\mathbf{k}) &= \sigma_2 y_{(4, 3, 2, 1, 0)} \sigma_3 \sigma_2, \\ \phi(\mathbf{k}) &= (9, 8, 5, 4, 2) & \zeta(\mathbf{k}) &= (9, 4, 8, 5, 2) & \text{et} & \omega(\mathbf{k}) &= \sigma_1 \sigma_4. \end{aligned}$$

Pour le calcul pratique de  $\mathbf{b}(\mathbf{k})$  et  $\zeta(\mathbf{k})$ , le lecteur pourra se reporter à la remarque 2.11.  $\diamond$

**Remarque 2.2** Si  $l = 1$ , alors  $\zeta : P_r \rightarrow P_r$  est l'identité. En effet, si  $l = 1$ , alors l'application  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  est triviale, donc l'application  $\phi$  est l'identité de  $P_r$ . De plus, le domaine  $B^l$  est alors réduit à  $\{(1, \dots, 1)\}$ , donc  $v(\mathbf{k}) = \text{id}$  pour tout  $\mathbf{k} \in P_r$ . La remarque s'ensuit.  $\diamond$

**Lemme 2.3** Soit  $S := \left\{ (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{m}, u, v) \in A^n \times B^l \times P_r \times \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_r \mid u \in {}^a\widehat{W}, v \in \widehat{W}^b \right\}$ . Alors l'application  $P_r \rightarrow S$ ,  $\mathbf{k} \mapsto (\mathbf{a}(\mathbf{k}), \mathbf{b}(\mathbf{k}), \mathbf{m}(\mathbf{k}), u(\mathbf{k}), v(\mathbf{k}))$  est bijective.

*Démonstration.* Avec des notations et des domaines de définition évidents, les applications  $\mathbf{k} \mapsto (\mathbf{c}(\mathbf{k}), \mathbf{d}(\mathbf{k}), \mathbf{m}(\mathbf{k}))$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{a}.u \mapsto (\mathbf{a}, u)$  et  $\mathbf{d} = v.\mathbf{b} \mapsto (v, \mathbf{b})$  sont des bijections. Le lemme s'ensuit. Plus explicitement, la bijection réciproque de celle de l'énoncé est

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{m}, u, v) \mapsto (\mathbf{a}.u) + n((v.\mathbf{b}) - \mathbf{1}) + n\mathbf{l}\mathbf{m},$$

où  $\mathbf{1} := (1, \dots, 1) \in P_r$ .  $\square$

## 2.2 Construction de l'espace $\Lambda_q^r V$

### 2.2.1 L'espace vectoriel $\Lambda(\mathbf{b})$

Fixons dans tout ce paragraphe  $b \in B^l$ , et introduisons les  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels

$$\Lambda(a, b) := \mathbf{K}_{q^{-1}} \otimes_{H_a} \widehat{H}_r \otimes_{H_b} \mathbf{K}_{-q} \quad (a \in A^n) \quad \text{et} \quad \Lambda(b) := \bigoplus_{a \in A^n} \Lambda(a, b).$$

Le but de ce paragraphe est de donner une base de  $\Lambda(b)$ . Nous avons vu au chapitre 1 que nous avons un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\bigoplus_{a \in A^n} \mathbf{K}_{q^{-1}} \otimes_{H_a} \widehat{H}_r \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{a \in A^n, x \in {}^a\widehat{W}} \mathbf{K} (a.x | = \mathcal{P}_r, \quad 1 \otimes_{H_a} T_x \mapsto (a.x | ;$$

nous ferons désormais cette identification et nous écrivons alors

$$(a.x | := 1 \otimes_{H_a} T_x \quad (a \in A^n, x \in {}^a\widehat{W}).$$

De même, nous poserons

$$|y.b := \overline{T}_y \otimes_{H_b} 1 \quad (b \in B^l, y \in \widehat{W}^b).$$

Soit  $\omega_b$  l'élément de longueur maximale de  $W_b$ . On définit l'application linéaire

$$\phi_b : \mathcal{P}_r \rightarrow \Lambda(b), \quad (\zeta | \mapsto [\zeta]_b := (-q^{-1})^{\ell(\omega_b)} (\zeta | \otimes_{H_b} 1 \quad (\zeta \in \mathcal{P}_r).$$

En d'autres termes, si  $\zeta \in \mathcal{P}_r$ ,  $\zeta = a.x$  avec  $a \in A^n$  et  $x \in {}^a\widehat{W}$ , alors on a

$$[\zeta]_b = (-q^{-1})^{\ell(\omega_b)} 1 \otimes_{H_a} T_x \otimes_{H_b} 1.$$

**Lemme 2.4**  $\phi_b$  est surjective. De façon équivalente,  $\{[\zeta]_b \mid \zeta \in \mathcal{P}_r\}$  est une partie génératrice de  $\Lambda(b)$ .

*Démonstration.* Il suffit de voir que tous les  $1 \otimes_{H_a} T_y \otimes_{H_b} 1$ ,  $a \in A^n$ ,  $y \in \widehat{\mathfrak{S}}_r$  sont dans l'image de  $\phi_b$ . Soit  $a \in \widehat{\mathfrak{S}}_r$  et  $y \in \widehat{\mathfrak{S}}_r$ . Soit  $\lambda := a.y \in P_r$ , et  $x \in {}^a\widehat{W}$  tel que  $\lambda = a.x$ . Alors  $u := yx^{-1} \in W_a$ , donc d'après un résultat classique (rappelé au chapitre 1), on a  $\ell(ux) = \ell(u) + \ell(x)$ . Par conséquent, on a  $T_y = T_{ux} = T_u T_x$ . Puisque  $u \in W_a$ , ceci entraîne que

$$\begin{aligned} 1 \otimes_{H_a} T_y \otimes_{H_b} 1 &= 1 \otimes_{H_a} (T_u T_x) \otimes_{H_b} 1 = (1.T_u) \otimes_{H_a} T_x \otimes_{H_b} 1 \\ &= q^{-\ell(u)} 1 \otimes_{H_a} T_x \otimes_{H_b} 1 \in \text{Im}(\phi_b). \end{aligned}$$

□

**Lemme 2.5 ([U2])** Soit  $i \in I_b$ , et  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_r) \in P_r$ . Alors

$$[\zeta]_b = \begin{cases} 0 & \text{si } \zeta_i = \zeta_{i+1}, \\ -q^{-1}[\zeta.\sigma_i]_b & \text{si } \zeta_i < \zeta_{i+1}. \end{cases}$$

*Démonstration.* Par définition du produit tensoriel au-dessus de  $H_b$  et de l'action sur  $\mathbf{K}_{-q}$ , on a  $\text{Ker } \phi_b = \sum_{j \in I_b} \mathcal{P}_r.(T_j + q)$ . Par conséquent, on a  $\phi_b(([\zeta] | (T_i + q))) = 0$ . Le résultat provient alors des expressions de  $\zeta.(T_i |$  données à la proposition 1.37. □

Ainsi, dans le cas particulier où  $W_b = W$  et où on spécialise  $q$  à 1, on a  $[\zeta]_b = -[\zeta.\sigma_i]_b$  pour tout  $1 \leq i \leq r-1$ . Dans ce cas,  $\phi_b$  peut donc être vu comme un opérateur d'antisymétrisation. Dans le cas général,  $\phi_b$  est donc un  $q$ -analogue d'un opérateur d'antisymétrisation partielle.

Soit

$$P_{r,b}^{++} := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in P_r \mid i \in I_b \Rightarrow \lambda_i > \lambda_{i+1}\}.$$

Il découle des deux lemmes précédents que  $\{[\zeta]_b \mid \zeta \in P_{r,b}^{++}\}$  est une partie génératrice de  $\Lambda(b)$ .

**Proposition 2.6 ([U2], Lemma 3.19)**  $\{[\zeta]_b \mid \zeta \in P_{r,b}^{++}\}$  est une base de  $\Lambda(b)$ .

*Démonstration.* Il reste à voir que la partie  $\{[\zeta]_b \mid \zeta \in P_{r,b}^{++}\}$  est libre. Supposons que  $\sum_{\zeta \in P_{r,b}^{++}} a_\zeta [\zeta]_b = 0$ , où les  $a_\zeta \in \mathbf{K}$  sont presque tous nuls. Alors le vecteur  $v := \sum_{\zeta \in P_{r,b}^{++}} a_\zeta (\zeta |$  est dans le noyau de  $\phi_b$ . Considérons l'élément  $C_{\omega_b} = \sum_{y \in W_b} (-q)^{\ell(y) - \ell(\omega_b)} T_y \in \widetilde{H}_r$  (cf. paragraphe 1.3.2.3) ; il s'agit (du  $q$ -analogue) de l'antisymétriseur partiel évoqué précédemment.

D'après le lemme 1.39, on a  $\text{Ker } \phi_b = \sum_{j \in I_b} \mathcal{P}_r.(T_j + q) \subset \text{Ker } C_{\omega_b}$ . Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
0 &= v.C_{\omega_b} = v.\overline{C_{\omega_b}} \\
&= \sum_{\zeta \in P_{r,b}^{+++}, y \in W_b} (-q)^{\ell(\omega_b) - \ell(y)} a_\zeta(\zeta | \overline{T_y}) \\
&= \sum_{\zeta \in P_{r,b}^{+++}, y' \in W_b} (-q)^{\ell(\omega_b) - \ell(y')} a_\zeta(\zeta | (T_{y'})^{-1}) \\
&= \sum_{\zeta \in P_{r,b}^{+++}, y' \in W_b} (-q)^{\ell(\omega_b) - \ell(y')} a_\zeta(\zeta.y'|),
\end{aligned}$$

où l'égalité  $(\zeta | (T_{y'})^{-1}) = (\zeta.y'|$  ( $\zeta \in P_{r,b}^{+++}$ ,  $y' \in W_b$ ) provient de la proposition 1.37. Puisque les  $(\zeta.y'|$ ,  $(y', \zeta) \in W_b \times P_{r,b}^{+++}$  sont deux à deux distincts et que les  $|\lambda)$ ,  $\lambda \in P_r$  forment une famille libre, les  $a_\zeta$  ( $\zeta \in P_{r,b}^{+++}$ ) sont bien tous nuls.  $\square$

### 2.2.2 Une base de $\Lambda_q^r V$ . Relations de redressement

**Définition 2.7** Introduisons l'espace vectoriel

$$\Lambda_q^r V = \Lambda_q^r V[n, l] := \bigoplus_{b \in B^l} \Lambda(b),$$

et pour  $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_r) \in \mathbf{P}_r$ , posons

$$u_{\mathbf{k}} = u_{k_1} \wedge \dots \wedge u_{k_r} := (-q^{-1})^{\ell(\omega_b)} 1 \otimes_{H_a} T_u X^{-\mathbf{m}} (T_{v^{-1}})^{-1} \otimes_{H_b} 1 \in \Lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \Lambda_q^r V,$$

où  $\mathbf{a} := \mathbf{a}(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{b} := \mathbf{b}(\mathbf{k})$ , etc. Nous dirons que  $u_{\mathbf{k}}$  est un *q-produit extérieur*. (Le lecteur prendra garde à ne pas confondre la notation  $u_{\mathbf{k}}$ , qui désigne un *q-produit extérieur*, avec la notation  $u(\mathbf{k})$  introduite précédemment, qui désigne un élément de  $\mathfrak{S}_r$ .) Nous dirons que  $u_{\mathbf{k}}$  est *ordonné* si  $\mathbf{k} \in P_r^{+++}$ . Nous reviendrons sur la notation  $\Lambda_q^r V$  et sur cette terminologie au cours de la remarque 2.14.  $\diamond$

**Proposition 2.8** ([U2], Proposition 3.20)

1°) Soit  $S := \{(b, \zeta) \in B^l \times P_r \mid \zeta \in P_{r,b}^{+++}\}$ . Alors l'application

$$\psi : P_r^{+++} \rightarrow S, \quad \mathbf{k} \mapsto (\mathbf{b}(\mathbf{k}), \zeta(\mathbf{k}))$$

est bien définie et bijective.

2°) Pour tout  $\mathbf{k} \in P_r^{+++}$ , on a  $u_{\mathbf{k}} = [\zeta(\mathbf{k})]_{\mathbf{b}(\mathbf{k})}$ .

*Démonstration.* Dans toute la preuve, si  $\mathbf{k} \in P_r^{++}$  est fixé, nous noterons

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r) = \mathbf{a}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_r) = \mathbf{b}(\mathbf{k}), \quad \boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_r) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{k}), \quad \text{etc.}$$

– Première étape: montrons que  $\psi$  est bien définie. Soit  $\mathbf{k} \in P_r^{++}$ . Alors on a

- (i)  $\mathbf{m} \in P_r^+$ ,
- (ii)  $i < j, \quad d_i < d_j \Rightarrow m_i > m_j,$
- (iii)  $i < j, \quad d_i = d_j \Rightarrow \phi_i > \phi_j.$

Puisque  $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\phi}.v = v^{-1}.\boldsymbol{\phi}$  et  $\mathbf{b} = v^{-1}.\mathbf{d}$ , on a

$$(iv) \quad (\zeta_1, \dots, \zeta_r) = (\phi_{v(1)}, \dots, \phi_{v(r)}) \quad \text{et} \quad (v) \quad (b_1, \dots, b_r) = (d_{v(1)}, \dots, d_{v(r)}).$$

Soit  $1 \leq i < j \leq r$  tel que  $b_i = b_j$ . Puisque  $v \in W^{\mathbf{b}}$ , le lemme 1.30 implique que  $(i, j) \notin S(v)$ , d'où  $v(i) < v(j)$ . Par ailleurs, on a d'après (v),  $d_{v(i)} = b_i = b_j = d_{v(j)}$ . En appliquant (iii) à  $i' := v(i)$ ,  $j' := v(j)$ , on a  $\phi_{i'} > \phi_{j'}$ , soit encore d'après (iv),  $\zeta_i > \zeta_j$ . Ainsi  $\boldsymbol{\zeta} \in P_{r, \mathbf{b}}^{++}$ .

– Deuxième étape: soit  $\mathbf{k} \in P_r^{++}$ . Montrons que  $x = uy_{\mathbf{m}}v$  est la factorisation d'Uglov de  $x$ . On a  $\mathbf{m} \in P_r^+$  d'après (i). Il reste à montrer que

$$S(v) = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq r, m_{v(i)} < m_{v(j)}\}.$$

Soit  $1 \leq i < j \leq r$  tel que  $m_{v(i)} < m_{v(j)}$ . D'après (i), la suite  $(m_k)$  est décroissante, d'où  $v(i) > v(j)$ . Réciproquement, soit  $(i, j) \in S(v)$ . Puisque  $v \in W^{\mathbf{b}}$ , le lemme 1.30 entraîne que  $b_i > b_j$ . D'après (v), on a donc  $d_{v(i)} = b_i > b_j = d_{v(j)}$ . En appliquant (ii) au couple  $(i', j') := (v(j), v(i))$ , on a donc  $m_{v(i)} < m_{v(j)}$ , d'où l'égalité voulue.

– Troisième étape: montrons que  $\psi$  est injective. Soit  $(b, \zeta) \in S$ . Supposons qu'il existe  $\mathbf{k} \in P_r^{++}$  tel que  $(b, \zeta) = (\mathbf{b}(\mathbf{k}), \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{k}))$ . Nous allons montrer que  $\mathbf{k}$  est alors déterminé de façon unique. Il existe un unique  $a \in A^n$ ,  $x \in {}^a\widehat{W}$  tel que  $\zeta = a.x$ . Soit  $x = uy_{\mathbf{m}}v$  la factorisation d'Uglov de  $x$ . Puisque  $a.x = \zeta = \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{k}) = \mathbf{a}(\mathbf{k}).x(\mathbf{k})$ , on doit avoir, par unicité du couple  $(a, x)$ ,  $\mathbf{a}(\mathbf{k}) = a$  et  $x(\mathbf{k}) = x$ . D'après l'étape précédente, les expressions  $x = x(\mathbf{k}) = u(\mathbf{k})y_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}v(\mathbf{k})$  et  $x = uy_{\mathbf{m}}v$  sont deux factorisations d'Uglov de  $x$ . Or d'après la proposition 1.28, la factorisation d'Uglov est unique, d'où  $u(\mathbf{k}) = u$ ,  $\mathbf{m}(\mathbf{k}) = \mathbf{m}$  et  $v(\mathbf{k}) = v$ . Par conséquent, les éléments  $\mathbf{a}(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{m}(\mathbf{k})$ ,  $u(\mathbf{k})$  et  $v(\mathbf{k})$  sont déterminés de façon unique. D'après le lemme 2.3,  $\mathbf{k}$  est à son tour déterminé de façon unique; plus précisément, on a alors  $\mathbf{k} = (a.u) + n((v.b) - \mathbf{1}) + n\mathbf{l}\mathbf{m}$ .

– Quatrième étape: montrons que  $\psi$  est surjective. Soit  $(b, \zeta) \in S$ , et  $x$ ,  $a$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $u$  et  $v$  définis à partir de  $(b, \zeta)$  comme à l'étape précédente. En particulier,  $x = uy_{\mathbf{m}}v$  est la factorisation d'Uglov de  $x$ . Nous avons vu que le seul antécédent possible par  $\psi$  de  $(b, \zeta)$  est  $\mathbf{k} := (a.u) + n((v.b) - \mathbf{1}) + n\mathbf{l}\mathbf{m}$ . Il reste à voir que  $\mathbf{k} \in P_r^{++}$ . Soit  $1 \leq i < j \leq r$ .

Puisque  $x = uy_{\mathbf{m}}v$  est la factorisation d'Uglov de  $x$ , on a  $\mathbf{m} \in P_r^+$ , d'où  $m_i \geq m_j$ . Si  $m_i > m_j$ , alors on a bien  $k_i > k_j$ . Supposons désormais que  $m_i = m_j$ . Montrons tout d'abord que  $v^{-1}(i) < v^{-1}(j)$ . Sinon, puisque  $i \neq j$ , on doit alors avoir  $(v^{-1}(j), v^{-1}(i)) \in S(v)$ . Compte tenu de l'expression de  $S(v)$  donnée à la proposition 1.28, on a donc  $m_{v(v^{-1}(j))} < m_{v(v^{-1}(i))}$ , soit encore  $m_i > m_j$ , ce qui est absurde. Ainsi  $v^{-1}(i) < v^{-1}(j)$ . Puisque  $b \in P_r^+$ , on a donc  $b_{v^{-1}(i)} \geq b_{v^{-1}(j)}$ , soit encore, compte tenu de (v),  $d_i \geq d_j$ . Les assertions  $d_i > d_j$  et  $m_i = m_j$  impliquent  $k_i > k_j$ ; il reste donc à traiter le cas où  $m_i = m_j$  et  $d_i = d_j$ . D'après (v), on a donc  $b_{v^{-1}(i)} = b_{v^{-1}(j)}$ , et nous avons montré par ailleurs que  $v^{-1}(i) < v^{-1}(j)$ . Puisque  $\zeta \in P_{r,b}^{++}$ , on a donc  $\zeta_{v^{-1}(i)} > \zeta_{v^{-1}(j)}$ , ce qui donne d'après (iv):  $\phi_i > \phi_j$ . Comme  $m_i = m_j$ , on a donc  $c_i > c_j$ . Compte tenu de  $m_i = m_j$  et  $d_i = d_j$ , on a encore  $k_i > k_j$  dans ce cas. Ainsi  $\mathbf{k} \in P^{++}$ .

- Cinquième étape: soit  $\mathbf{k} \in P_r^{++}$ . Montrons que  $u_{\mathbf{k}} = [\zeta(\mathbf{k})]_{\mathbf{b}(\mathbf{k})}$ . Reprenons les notations du début de la preuve. D'après la deuxième étape,  $x = uy_{\mathbf{m}}v$  est la factorisation d'Uglov de  $x$ . De plus, on a  $\mathbf{m} \in P_r^+$ , d'où  $X^{-\mathbf{m}} = T_{y_{\mathbf{m}}}$ . La relation sur les longueurs donnée à la proposition 1.28 montre alors que

$$T_u X^{-\mathbf{m}} (T_{v^{-1}})^{-1} = T_u T_{y_{\mathbf{m}}} (T_{v^{-1}})^{-1} = T_{uy_{\mathbf{m}}v} = T_x.$$

Il n'y a plus qu'à faire agir l'application

$$h \in \widehat{H}_r \mapsto (-q^{-1})^{\ell(\omega_{\mathbf{b}})} 1 \otimes_{H_{\mathbf{a}}} h \otimes_{H_{\mathbf{b}}} 1$$

sur le membre de gauche et le membre de droite de la suite d'égalités précédentes pour conclure. □

**Remarque 2.9** Le contenu du point 1°) de la proposition précédente est purement combinatoire. C'est pourquoi nous avons voulu en donner une preuve faisant appel à aussi peu de résultats que possible; en particulier, notre preuve ne fait pas appel au paragraphe précédent. Par contre, Uglov [U2, Proof of Proposition 3.20] donne une preuve beaucoup plus courte de la surjectivité de  $\psi$ , mais qui utilise la proposition 2.6. ◇

**Remarque 2.10** On peut montrer que l'application  $P_r \rightarrow B^l \times P_r$ ,  $\mathbf{k} \mapsto (\mathbf{b}(\mathbf{k}), \zeta(\mathbf{k}))$  est encore surjective; par contre elle n'est pas injective. En effet, si  $n = 2$ ,  $l = 2$  et  $r = 2$ , l'image par cette application des vecteurs (1,4) et (4,1) est dans les deux cas le couple ((2,1),(2,1)). ◇

**Remarque 2.11** Voici comment calculer  $\psi$  de façon pratique. Soit  $(k_1, \dots, k_r) \in P_r^{++}$ . Numérotions les éléments de  $\mathbb{Z}^l$  à l'aide des entiers  $\dots, -1, 0, 1, \dots$  comme sur la figure 1.8, et plaçons sur ce diagramme les points de  $\mathbb{Z}^l$  ayant les numéros  $k_1, \dots, k_r$ . Appelons ces points  $A_1, \dots, A_r$ ; puisque  $\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_r) \in P_r^{++}$ , les  $k_i$  et donc les  $A_i$  sont deux à deux distincts.

Alors faire agir  $v(\mathbf{k})$  correspond à lire les points  $A_i$  sur le diagramme en partant de la dernière ligne, puis en parcourant le diagramme de droite à gauche puis de bas en haut. On obtient ainsi une suite de points  $A'_1, \dots, A'_r$ . Alors  $\zeta_i$  est le numéro de colonne de  $A'_i$  et  $b_i$  est le numéro de ligne de  $A'_i$ . La figure 2.1 illustre ce calcul (cf. exemple 2.1). Toutes les étapes de ce mode opératoire sont « réversibles » ; par conséquent le lecteur pourra tirer à partir de cette figure un moyen pratique pour calculer  $\psi^{-1}$ .  $\diamond$

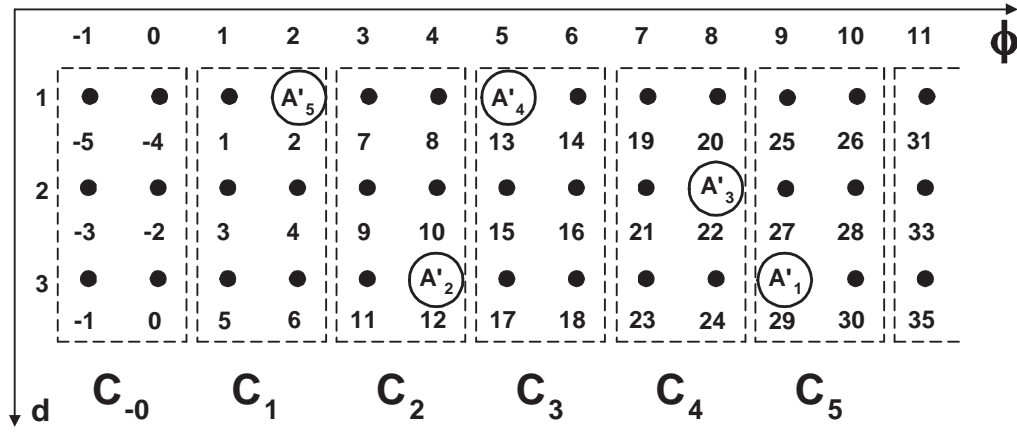


FIG. 2.1 – Calcul de  $\psi(\mathbf{k})$  pour  $n = 2, l = 3, r = 5$  et  $\mathbf{k} = (29, 22, 13, 12, 2)$  (cf. exemple 2.1). On lit ici  $\mathbf{b}(\mathbf{k}) = (3, 3, 2, 1, 1)$  et  $\zeta(\mathbf{k}) = (9, 4, 8, 5, 2)$ .

Les propositions 2.6 et 2.8 entraînent immédiatement le résultat suivant.

**Théorème 2.12** ([U2], Proposition 3.21)  $\{u_{\mathbf{k}} \mid \mathbf{k} \in P_r^{++}\}$  est une base de  $\Lambda_q^r V$ .  $\square$

Ce théorème montre que les  $u_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in P_r$  ne sont pas linéairement indépendants. Considérons par exemple l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\bigoplus_{a \in A^n, b \in B^l} \mathbf{K}_{q^{-1}} \otimes_{H_a} \widehat{H}_r \otimes_{H_r} H_r \otimes_{H_b} \mathbf{K}_{-q} \rightarrow \Lambda_q^r V, \quad 1 \otimes \widehat{h} \otimes h \otimes 1 \mapsto 1 \otimes \widehat{h}h \otimes 1.$$

Modulo cet isomorphisme, on a pour  $\mathbf{k} \in P_r$ ,

$$u_{\mathbf{k}} = (-q^{-1})^{\ell(\omega_b)} (c \cdot X^{-\mathbf{m}} \otimes_{H_r} |d\rangle),$$

où on a posé comme d'habitude  $\mathbf{a} := \mathbf{a}(\mathbf{k})$ , etc. Par conséquent, les égalités

$$(c \cdot X^{-\mathbf{m}} T_i \otimes_{H_r} |d\rangle) = (c \cdot X^{-\mathbf{m}} \otimes_{H_r} T_i \cdot |d\rangle), \quad 1 \leq i \leq r - 1$$

induisent des relations entre les  $u_{\mathbf{k}}$ . Il existe aussi des relations entre les  $u_{\mathbf{k}}$  provenant des relations de commutation entre les  $T_i$  et les  $X^\lambda$  données au lemme 1.34 (ii). Ces relations,



ainsi que les formules donnant l'action des  $T_i$  sur les  $(c)$  (*resp.*  $(d)$ ) vues à la proposition 1.37 (*resp.* 1.36), nous permettent de calculer de façon explicite les relations entre les  $u_k$ . Notons que les relations pour  $r \geq 2$  quelconque se déduisent de celles pour  $r = 2$ .

**Proposition 2.13 ([U2], Proposition 3.16)**

(i) Soit  $k_1 \leq k_2$ , et  $\gamma \in \llbracket 0; nl - 1 \rrbracket$  (*resp.*  $\delta \in \llbracket 0; nl - 1 \rrbracket$ ) le résidu de  $c(k_2) - c(k_1)$  (*resp.* de  $n(d(k_2) - d(k_1))$ ) modulo  $nl$ . On a alors

$$(R_1) \quad u_{k_1} \wedge u_{k_2} = -u_{k_2} \wedge u_{k_1} \quad \text{si } \gamma = \delta = 0,$$

$$(R_2) \quad \begin{aligned} u_{k_1} \wedge u_{k_2} &= -q^{-1}u_{k_2} \wedge u_{k_1} \\ &- (q^{-2} - 1) \sum_{i \geq 1} q^{-2i+1} u_{k_2-ni} \wedge u_{k_1+ni} \\ &+ (q^{-2} - 1) \sum_{i \geq 0} q^{-2i} u_{k_2-\gamma-ni} \wedge u_{k_1+\gamma+ni} \end{aligned} \quad \text{si } \gamma > 0, \delta = 0,$$

$$(R_3) \quad \begin{aligned} u_{k_1} \wedge u_{k_2} &= qu_{k_2} \wedge u_{k_1} \\ &+ (q^2 - 1) \sum_{i \geq 1} q^{2i-1} u_{k_2-ni} \wedge u_{k_1+ni} \\ &+ (q^2 - 1) \sum_{i \geq 0} q^{2i} u_{k_2-\delta-ni} \wedge u_{k_1+\delta+ni} \end{aligned} \quad \text{si } \gamma = 0, \delta > 0,$$

$$(R_4) \quad \begin{aligned} u_{k_1} \wedge u_{k_2} &= u_{k_2} \wedge u_{k_1} \\ &+ (q - q^{-1}) \sum_{i \geq 1} \frac{q^{2i} - q^{-2i}}{q + q^{-1}} u_{k_2-ni} \wedge u_{k_1+ni} \\ &+ (q - q^{-1}) \sum_{i \geq 0} \frac{q^{2i+1} + q^{-2i-1}}{q + q^{-1}} u_{k_2-\gamma-ni} \wedge u_{k_1+\gamma+ni} \\ &+ (q - q^{-1}) \sum_{i \geq 0} \frac{q^{2i+1} + q^{-2i-1}}{q + q^{-1}} u_{k_2-\delta-ni} \wedge u_{k_1+\delta+ni} \\ &+ (q - q^{-1}) \sum_{i \geq 0} \frac{q^{2i+2} - q^{-2i-2}}{q + q^{-1}} u_{k_2-\gamma-\delta-ni} \wedge u_{k_1+\gamma+\delta+ni} \end{aligned} \quad \text{si } \gamma > 0, \delta > 0,$$

où les sommes portent sur les indices  $i$  tels que les  $q$ -produits extérieurs correspondant soient ordonnés.

(ii) Les règles de (i) valent pour toute paire de facteurs adjacents du  $q$ -produit extérieur  $u_{\mathbf{k}} = u_{k_1} \wedge u_{k_2} \cdots \wedge u_{k_r}$ .

*Démonstration.* Il suffit de prouver le point (i). La preuve repose sur le lemme 1.34 (ii) et sur les relations données par les produits tensoriels. Le lecteur est invité à se reporter à la section 2.5 pour les détails techniques des calculs.  $\square$

Ces relations, appelées *relations de redressement*, permettent d'exprimer de façon pratique tout  $q$ -produit extérieur comme une combinaison linéaire de  $q$ -produits extérieurs ordonnés. Puisque les  $q$ -produits extérieurs ordonnés forment une base de  $\Lambda_q^r V$ , ces relations forment un système complet de relations pour  $\Lambda_q^r V$ .

**Remarque 2.14** Dans [U1], Uglov donne une définition des  $q$ -produits extérieurs différente de celle-ci. Notons  $v_{\mathbf{k}}$  le  $q$ -produit extérieur indexé par  $\mathbf{k} \in P_r$  de [U1] ; on a alors

$$v_{\mathbf{k}} = (-1)^{\ell(v(\mathbf{k}))} u_{\mathbf{k}} \quad (\mathbf{k} \in P_r).$$

Il n'est pas difficile, à partir de la proposition 2.13, de donner les relations de redressement pour les  $v_{\mathbf{k}}$ , ce que nous ferons explicitement à la proposition 8.20. On voit qu'en spécialisant  $q$  à 1 dans les relations de redressement pour les  $v_{\mathbf{k}}$ , on obtient les relations d'anticommutation  $v_{k_1} \wedge v_{k_2} = -v_{k_2} \wedge v_{k_1}$ ,  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ . Par conséquent, l'espace vectoriel engendré par les  $v_{\mathbf{k}}$  est un  $q$ -analogue d'une  $r$ -ième puissance extérieure de l'espace  $V := \langle v_k, k \in \mathbb{Z} \rangle$ , d'où la terminologie de  $q$ -produits extérieurs et la notation  $\Lambda_q^r V$ .  $\diamond$

## 2.3 Trois actions sur $\Lambda_q^r V$

\* Commençons par décrire l'action de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  sur  $\Lambda_q^1 V$ . Soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une base de  $\mathbf{K}^n$  et  $(w_1, \dots, w_l)$  une base de  $\mathbf{K}^l$ . On vérifie aisément que les formules

$$\begin{aligned} e_i(X^m \otimes v_c \otimes w_d) &= \delta_{i+1 \equiv c \pmod n} X^{m-\delta_{i,0}} \otimes v_{c-1} \otimes w_d, \\ f_i(X^m \otimes v_c \otimes w_d) &= \delta_{i \equiv c \pmod n} X^{m+\delta_{i,0}} \otimes v_{c+1} \otimes w_d, \\ t_i(X^m \otimes v_c \otimes w_d) &= q^{\delta_{i \equiv c \pmod n} - \delta_{i+1 \equiv c \pmod n}} X^m \otimes v_c \otimes w_d, \\ \partial(X^m \otimes v_c \otimes w_d) &= -mX^m \otimes v_c \otimes w_d, \end{aligned}$$

avec les conventions  $v_0 := v_n$  et  $v_{n+1} := v_1$ , définissent une action de niveau 0 de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  sur

$$V_{n,l} := \mathbf{K}[X, X^{-1}] \otimes \mathbf{K}^n \otimes \mathbf{K}^l.$$

À l'aide de l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$V_{n,l} \rightarrow \Lambda_q^1 V \cong \mathbf{K}^{(\mathbb{Z})}, \quad X^m \otimes v_c \otimes w_d \mapsto u_{c+n(d-1)+nlm},$$

on définit une action de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  sur  $\Lambda_q^1 V$ , qui est illustrée à la figure 2.2. Notons que la restriction de cette représentation à chaque cadre est la somme directe de  $l$  copies de la représentation vectorielle de  $\mathbf{K}^n$ .

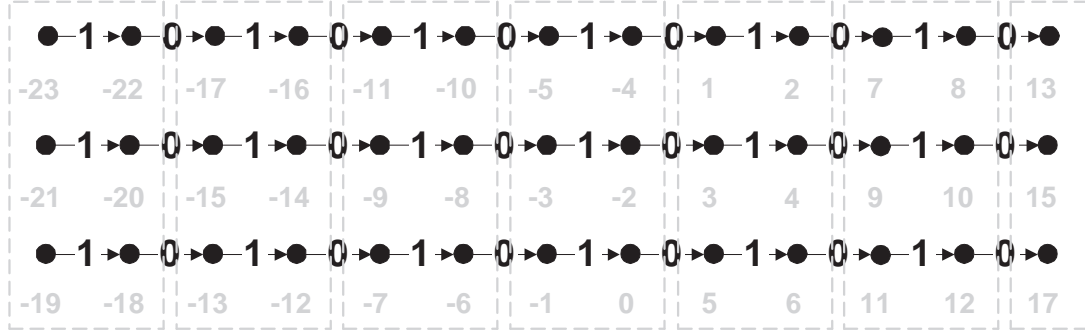


FIG. 2.2 – Action de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  sur  $\Lambda_q^1 V$ . Ici, le point numéroté  $k$  représente le vecteur  $u_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) et la flèche étiquetée  $i$  représente l'action de  $f_i$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ).

En itérant  $r-1$  fois le coproduit  $\Delta$  de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  (cf. paragraphe 1.2.2), on définit une action de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  sur  $(\Lambda_q^1 V)^{\otimes r}$ . De façon explicite, cette action est donnée à l'aide des formules suivantes : pour tout  $(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}^r$ , on a

$$\begin{aligned}
 e_i(u_{k_1} \otimes \cdots \otimes u_{k_r}) &= \sum_{j=1}^r u_{k_1} \otimes \cdots \otimes u_{k_{j-1}} \otimes e_i(u_{k_j}) \otimes t_i^{-1}(u_{k_{j+1}}) \otimes \cdots \otimes t_i^{-1}(u_{k_r}), \\
 f_i(u_{k_1} \otimes \cdots \otimes u_{k_r}) &= \sum_{j=1}^r t_i(u_{k_1}) \otimes \cdots \otimes t_i(u_{k_{j-1}}) \otimes f_i(u_{k_j}) \otimes u_{k_{j+1}} \otimes \cdots \otimes u_{k_r}, \\
 t_i(u_{k_1} \otimes \cdots \otimes u_{k_r}) &= t_i(u_{k_1}) \otimes \cdots \otimes t_i(u_{k_r}), \\
 \partial(u_{k_1} \otimes \cdots \otimes u_{k_r}) &= \sum_{j=1}^r u_{k_1} \otimes \cdots \otimes u_{k_{j-1}} \otimes \partial(u_{k_j}) \otimes u_{k_{j+1}} \otimes \cdots \otimes u_{k_r}.
 \end{aligned}$$

En voyant  $\Lambda_q^r V$  comme un  $q$ -analogue du produit extérieur de  $r$  copies de  $(\Lambda_q^1 V)$ , *i.e.* comme le quotient de  $(\Lambda_q^1 V)^{\otimes r}$  modulo les relations de redressement, on montre que l'action de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  sur  $(\Lambda_q^1 V)^{\otimes r}$  passe au quotient en une action sur  $\Lambda_q^r V$ . Nous renvoyons la preuve de ce fait (qui ne nécessite aucun calcul!) à [U2, Section 3.5]. Explicitement, cette action sur les  $q$ -produits extérieurs est donnée par :

$$\begin{aligned}
 e_i(u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_r}) &= \sum_{j=1}^r u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_{j-1}} \wedge e_i(u_{k_j}) \wedge t_i^{-1}(u_{k_{j+1}}) \wedge \cdots \wedge t_i^{-1}(u_{k_r}), \\
 f_i(u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_r}) &= \sum_{j=1}^r t_i(u_{k_1}) \wedge \cdots \wedge t_i(u_{k_{j-1}}) \wedge f_i(u_{k_j}) \wedge u_{k_{j+1}} \wedge \cdots \wedge u_{k_r}, \\
 t_i(u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_r}) &= t_i(u_{k_1}) \wedge \cdots \wedge t_i(u_{k_r}), \\
 \partial(u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_r}) &= \sum_{j=1}^r u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_{j-1}} \wedge \partial(u_{k_j}) \wedge u_{k_{j+1}} \wedge \cdots \wedge u_{k_r}.
 \end{aligned}$$

\* De la même façon, on peut définir une action de  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  sur  $(\Lambda_q^r V)$ ; rappelons que  $p$  est relié à  $q$  par la relation  $p = -q^{-1}$ . Commençons là encore par le cas où  $r = 1$ . Avec les notations précédentes, on vérifie que les formules

$$\begin{aligned}\dot{e}_i(X^m \otimes v_c \otimes w_d) &= \delta_{i+1 \equiv d \pmod{l}} X^{m-\delta_{i,0}} \otimes v_c \otimes w_{d-1}, \\ \dot{f}_i(X^m \otimes v_c \otimes w_d) &= \delta_{i \equiv d \pmod{l}} X^{m+\delta_{i,0}} \otimes v_c \otimes w_{d+1}, \\ \dot{t}_i(X^m \otimes v_c \otimes w_d) &= p^{\delta_{i \equiv d \pmod{l}} - \delta_{i+1 \equiv d \pmod{l}}} X^m \otimes v_c \otimes w_d, \\ \dot{\partial}(X^m \otimes v_c \otimes w_d) &= -m X^m \otimes v_c \otimes w_d,\end{aligned}$$

(avec les conventions  $w_0 := w_l$  et  $w_{l+1} := w_1$ ), définissent une action de niveau 0 de  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  sur  $V_{n,l}$ . À l'aide de l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$V_{n,l} \rightarrow \Lambda_q^1 V \cong \mathbf{K}^{(\mathbb{Z})}, \quad X^m \otimes v_c \otimes w_d \mapsto u_{c+n(d-1)+nlm},$$

on définit une action de  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  sur  $\Lambda_q^1 V$ , qui est illustrée à la figure 2.3.

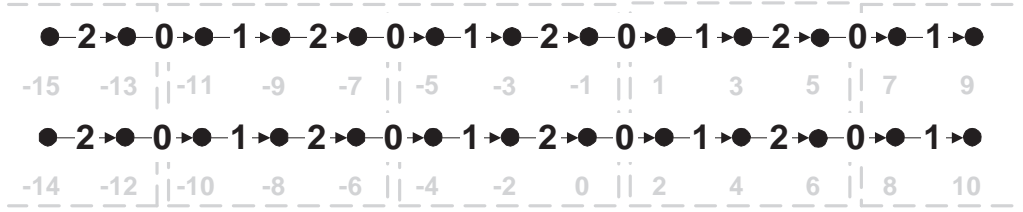


FIG. 2.3 – Action de  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  sur  $\Lambda_q^1 V$ . Ici, le point numéroté  $k$  représente le vecteur  $u_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) et la flèche étiquetée  $i$  représente l'action de  $\dot{f}_i$  ( $0 \leq i \leq l-1$ ).

En itérant  $r-1$  fois le coproduit  $\dot{\Delta}$  de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  (cf. paragraphe 1.2.2), on définit une action de  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  sur  $(\Lambda_q^1 V)^{\otimes r}$ . Là encore cette action passe au quotient en une action sur  $\Lambda_q^r V$ , qui est donnée par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{e}_i(u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_r}) &= \sum_{j=1}^r u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_{j-1}} \wedge \dot{e}_i(u_{k_j}) \wedge \dot{t}_i^{-1}(u_{k_{j+1}}) \wedge \cdots \wedge \dot{t}_i^{-1}(u_{k_r}), \\ \dot{f}_i(u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_r}) &= \sum_{j=1}^r \dot{t}_i(u_{k_1}) \wedge \cdots \wedge \dot{t}_i(u_{k_{j-1}}) \wedge \dot{f}_i(u_{k_j}) \wedge u_{k_{j+1}} \wedge \cdots \wedge u_{k_r}, \\ \dot{t}_i(u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_r}) &= \dot{t}_i(u_{k_1}) \wedge \cdots \wedge \dot{t}_i(u_{k_r}), \\ \dot{\partial}(u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_r}) &= \sum_{j=1}^r u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_{j-1}} \wedge \dot{\partial}(u_{k_j}) \wedge u_{k_{j+1}} \wedge \cdots \wedge u_{k_r}.\end{aligned}$$

\* Pour  $1 \leq i \leq r$ , soit  $\epsilon_i := (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq r} \in P_r$ . Notons  $\mathcal{Z}_r$  le centre de  $\widehat{H}_r$ . Il découle du lemme 1.34 (ii) que les éléments

$$B_m := \sum_{i=1}^r (X^{\epsilon_i})^m \quad (m \in \mathbb{Z}^*),$$

appelés *bosons*, sont dans  $\mathcal{Z}_r$  (en fait, un résultat de Bernstein montre que si l'algèbre de Hecke affine  $\widehat{H}_r$  est définie sur un corps algébriquement clos, alors ces éléments engendrent  $\mathcal{Z}_r$  en tant qu'algèbre). Pour  $a \in A^n$ ,  $b \in B^n$ , Introduisons les  $\widehat{H}_r$ -modules

$$\mathcal{I}_a := \sum_{i \in I_a} (T_i - q^{-1}) \cdot \widehat{H}_r \quad \text{et} \quad \mathcal{I}'_b := \sum_{j \in I_b} \widehat{H}_r \cdot (T_j + q).$$

Soit  $a \in A^n$  et  $b \in B^n$ . On a clairement  $\mathcal{I}_a \cdot \mathcal{Z}_r = \mathcal{Z}_r \cdot \mathcal{I}_a = \mathcal{I}_a$  et  $\mathcal{I}'_b \cdot \mathcal{Z}_r = \mathcal{Z}_r \cdot \mathcal{I}'_b = \mathcal{I}'_b$ , donc l'action (à gauche ou à droite) de  $\mathcal{Z}_r$  sur  $\widehat{H}_r$  passe au quotient en une action sur

$$\Lambda(a, b) \cong \mathcal{I}_a \backslash \widehat{H}_r / \mathcal{I}'_b.$$

Ainsi  $\mathcal{Z}_r$  agit sur  $\Lambda_q^r V$ . L'action des bosons sur les  $q$ -produits extérieurs est donnée par la formule

$$B_m(u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_r}) = \sum_{j=1}^r u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_{j-1}} \wedge u_{k_j - nlm} \wedge u_{k_{j+1}} \wedge \cdots \wedge u_{k_r}.$$

Le fait fondamental concernant ces trois actions est le suivant. On le vérifie par un calcul direct en se ramenant au cas où  $r = 2$  (cf. [LT] pour la preuve dans le cas où  $l = 1$ ).

**Théorème 2.15 ([U2], Proposition 3.30)** *Les actions de  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ ,  $U'_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  et des bosons  $B_m$ ,  $m \in \mathbb{Z}^*$  sur  $\Lambda_q^r V$  commutent deux à deux.*  $\square$

## 2.4 Une involution de $\Lambda_q^r V$ . Bases canoniques d'Uglov

### 2.4.1 Une involution de $\Lambda_q^r V$

Rappelons que  $\widehat{H}_r$  est muni d'une involution  $-$ . Soit  $a \in A^n$  et  $b \in B^l$ . Puisque les éléments  $T_i - q^{-1}$  et  $T_i + q$ ,  $0 \leq i \leq r - 1$ , sont  $-$ -invariants, les sous-modules  $\mathcal{I}_a$  et  $\mathcal{I}'_b$  introduits au paragraphe précédent sont laissés stables par l'involution de  $\widehat{H}_r$ . Par conséquent cette involution passe au quotient en une involution de  $\Lambda(a, b) \cong \mathcal{I}_a \backslash \widehat{H}_r / \mathcal{I}'_b$ , qu'on étend de façon additive à  $\Lambda_q^r V = \bigoplus_{a \in A^n, b \in B^l} \Lambda(a, b)$ . Un calcul permet de décrire l'action de cette involution sur les  $q$ -produits extérieurs. Avant d'énoncer le résultat, introduisons la notation

$$\kappa(\mathbf{k}) := \#\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i < j \leq r, k_i = k_j\} \quad (\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in P_r).$$

**Proposition 2.16 ([U2], Proposition 3.23 & Remark 3.24)** *Soit  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in P_r$ . On a alors*

$$\overline{u_{\mathbf{k}}} = (-q)^{\kappa(b(\mathbf{k}))} (q^{-1})^{\kappa(a(\mathbf{k}))} u_{k_r} \wedge \cdots \wedge u_{k_1}.$$

$\square$

Cette proposition permet donc, grâce aux relations de redressement, de calculer l'action de l'involution sur la base des  $q$ -produits extérieurs ordonnés. Écrivons les coefficients matriciels de l'involution en posant, pour  $\mathbf{l} \in P_r^{++}$ ,

$$\overline{u_{\mathbf{l}}} = \sum_{\mathbf{k} \in P_r^{++}} a_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}^{(r)}(q) \cdot u_{\mathbf{k}},$$

avec les  $a_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}^{(r)}(q) \in \mathbf{K}$ ; d'après la proposition 2.13, ces coefficients sont en fait dans  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ . Notons  $A^{(r)}(q) := (a_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}^{(r)}(q))_{\mathbf{k}, \mathbf{l} \in P_r^{++}}$  la matrice ainsi obtenue. Remarquons que d'après la proposition 2.13, la matrice  $A^{(r)}(1)$  est l'identité. On définit un ordre partiel sur  $P_r^{++}$  par

$$\mathbf{k} \geq \mathbf{l} \text{ si et seulement si } \begin{cases} \sum_{i=1}^j k_i \geq \sum_{i=1}^j l_i & \text{pour tout } 1 \leq j < r, \\ \sum_{i=1}^r k_i = \sum_{i=1}^r l_i \end{cases}$$

( $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in P_r^{++}, \mathbf{l} = (l_1, \dots, l_r) \in P_r^{++}$ ).

**Proposition 2.17 ([U2])** *Soit  $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in P_r^{++}$ .*

- (i) *Si  $a_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}^{(r)}(q) \neq 0$ , alors  $u_{\mathbf{k}}$  et  $u_{\mathbf{l}}$  appartiennent au même sous-espace  $\Lambda(a, b)$ . Autrement dit, on a  $\mathbf{a}(\mathbf{k}) = \mathbf{a}(\mathbf{l})$  et  $\mathbf{b}(\mathbf{k}) = \mathbf{b}(\mathbf{l})$ .*
- (ii) *On a  $a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}}^{(r)}(q) = 1$ , et  $a_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}^{(r)}(q) \neq 0$  implique  $\mathbf{k} \leq \mathbf{l}$ . Autrement dit, la matrice  $A^{(r)}(q)$  est unitriangulaire.*

*Démonstration.* Tout cela résulte de la proposition 2.13. □

On peut montrer que l'involution de  $\Lambda_q^r V$  est compatible avec les trois actions étudiées précédemment.

**Proposition 2.18 ([U2], Proposition 3.31)** *Pour tout  $u \in U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ ,  $\dot{u} \in U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ ,  $m \in \mathbb{Z}^*$ ,  $v \in \Lambda_q^r V$ , on a*

$$\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}, \quad \overline{\dot{u} \cdot v} = \overline{\dot{u}} \cdot \overline{v} \quad \text{et} \quad \overline{B_m \cdot v} = B_m \cdot \overline{v}.$$

□

#### 2.4.2 Bases canoniques d'Uglov de $\Lambda_q^r V$

Définissons deux réseaux de  $\Lambda_q^r V$  en posant

$$\mathcal{L}_r^+ := \bigoplus_{\mathbf{k} \in P_r^{++}} \mathbb{Z}[q] u_{\mathbf{k}} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_r^- := \bigoplus_{\mathbf{k} \in P_r^{++}} \mathbb{Z}[q^{-1}] u_{\mathbf{k}}.$$

Puisque la matrice de l'involution de  $\Lambda_q^r V$  est unitriangulaire, on prouve, en utilisant un argument classique, le théorème suivant.

**Théorème 2.19 ([U2], Theorem 3.25)** *Il existe une unique base  $\{G^{+,r}(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \in P_r^{++}\}$  (resp.  $\{G^{-,r}(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \in P_r^{++}\}$ ) de  $\Lambda_q^r V$  satisfaisant les deux conditions suivantes :*

- (i)  $\overline{G^{+,r}(\mathbf{k})} = G^{+,r}(\mathbf{k})$  (resp.  $\overline{G^{-,r}(\mathbf{k})} = G^{-,r}(\mathbf{k})$ ),
- (ii)  $G^{+,r}(\mathbf{k}) \equiv u_{\mathbf{k}} \pmod{q\mathcal{L}_r^+}$  (resp.  $G^{-,r}(\mathbf{k}) \equiv u_{\mathbf{k}} \pmod{q^{-1}\mathcal{L}_r^-}$ ).

*Démonstration.* Analogue à celle du théorème 3.34.  $\square$

**Définition 2.20** Les bases  $\{G^{+,r}(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \in P_r^{++}\}$  et  $\{G^{-,r}(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \in P_r^{++}\}$  sont appelées *bases canoniques d'Uglov* de  $\Lambda_q^r V$ . Définissons les coefficients matriciels  $\Delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}}^{+,r}(q), \Delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}}^{-,r}(q) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  ( $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in P_r^{++}$ ) par

$$G^{+,r}(\mathbf{l}) = \sum_{\mathbf{k} \in P_r^{++}} \Delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}}^{+,r}(q) \cdot u_{\mathbf{k}} \quad \text{et} \quad G^{-,r}(\mathbf{l}) = \sum_{\mathbf{k} \in P_r^{++}} \Delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}}^{-,r}(q) \cdot u_{\mathbf{k}},$$

et notons  $\Delta^{\epsilon,r}(q) := (\Delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}}^{\epsilon,r}(q))_{\mathbf{k},\mathbf{l} \in P_r^{++}}$  ( $\epsilon \in \{+, -\}$ ) les matrices donnant les bases canoniques de  $\Lambda_q^r V$ .  $\diamond$

**Proposition 2.21 ([U2])** Soit  $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in P_r^{++}$ .

- (i) Si  $\Delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}}^{\pm,r}(q) \neq 0$ , alors  $u_{\mathbf{k}}$  et  $u_{\mathbf{l}}$  appartiennent au même sous-espace  $\Lambda(a,b)$ . Autrement dit, on a  $\mathbf{a}(\mathbf{k}) = \mathbf{a}(\mathbf{l})$  et  $\mathbf{b}(\mathbf{k}) = \mathbf{b}(\mathbf{l})$ .
- (ii) On a  $\Delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}}^{\pm,r}(q) = 1$ , et  $\Delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}}^{\pm,r}(q) \neq 0$  implique  $\mathbf{k} \leq \mathbf{l}$ .

*Démonstration.* Tout cela résulte de la proposition 2.17.  $\square$

Grâce à la base  $\{[\zeta]_b \mid \zeta \in P_{r,b}^{++}\}$  de  $\Lambda(b)$  ( $b \in B^l$ ), on montre que les coefficients de  $\Delta^{\epsilon,r}(q)$  ( $\epsilon \in \{+, -\}$ ) s'expriment à l'aide des polynômes de Kazhdan-Lusztig de  $\widehat{\mathfrak{S}}_r$ . Signalons que la preuve du théorème qui suit est en tout point analogue à celle donnée dans [VV] dans le cas où  $l = 1$  (voir aussi [LT]).

**Théorème 2.22 ([U2], Theorem 3.26 & Remark 3.27)** Soit  $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in P_r^{++}$  tels que  $\mathbf{a}(\mathbf{k}) = \mathbf{a}(\mathbf{l}) = \mathbf{a} \in A^n$  et  $\mathbf{b}(\mathbf{k}) = \mathbf{b}(\mathbf{l}) = \mathbf{b} \in B^l$ . Alors on a

$$\Delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}}^{+,r}(q) = \sum_{y \in W_b} (-q)^{\ell(y)} \mathcal{P}_{\omega_a x(\mathbf{k}) \omega_b y, \omega_a x(\mathbf{l}) \omega_b}^+ \quad \text{et} \quad \Delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}}^{-,r}(q) = \sum_{y \in W_a} (q^{-1})^{\ell(y)} \mathcal{P}_{yx(\mathbf{k}), x(\mathbf{l})}^-.$$

*Démonstration.* Voir [U2].  $\square$

**Remarque 2.23** Il est également possible d'exprimer les coefficients  $\Delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}}^{\pm,r}(q)$  à l'aide des polynômes de Kazhdan-Lusztig associés à des modules paraboliques de  $\widehat{H}_r$  (voir [U2, Theorem 3.26]).  $\diamond$

**Remarque 2.24** Ce théorème implique, d'après un résultat de [KT], que les coefficients de  $\Delta^{+,r}(q)$  (resp.  $\Delta^{-,r}(q)$ ) sont dans  $\mathbb{N}[q]$  (resp.  $\mathbb{N}[p]$ ).  $\diamond$

## 2.5 Démonstration du point (i) de la proposition 2.13

Reprenons les notations de la proposition 2.13. Soit  $\mathbf{k} \in P_2$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k})$ , etc. Notons  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ , etc. les coordonnées de  $\mathbf{a}$ , etc. et posons enfin  $\mu = (\mu_1, \mu_2) := -(m_1, m_2)$ .

### 2.5.1 Démonstration de $(R_1)$

Puisque  $\gamma = 0$ , on a  $\mathbf{c} = (c_1, c_1) \in A^n$ . Par suite,  $\mathbf{a} = \mathbf{c}$  et  $u = 1$ . De plus,  $\sigma_1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ , donc  $H_{\mathbf{a}} = \langle T_1 \rangle$ . De même, puisque  $\delta = 0$ , on a  $\mathbf{b} = \mathbf{d} = (d_1, d_1)$ ,  $v = 1$ ,  $H_{\mathbf{b}} = \langle T_1 \rangle$  et  $\omega_{\mathbf{b}} = \sigma_1$ . On a donc

$$u_{k_1} \wedge u_{k_2} = (-q^{-1}) \cdot 1 \otimes_{\langle T_1 \rangle} X^\mu \otimes_{\langle T_1 \rangle} 1,$$

et de même

$$u_{k_2} \wedge u_{k_1} = (-q^{-1}) \cdot 1 \otimes_{\langle T_1 \rangle} X^{\sigma_1 \cdot \mu} \otimes_{\langle T_1 \rangle} 1.$$

On a donc, en omettant de préciser au-dessus de quoi sont pris les produits tensoriels,

$$\begin{aligned} u_{k_1} \wedge u_{k_2} + u_{k_2} \wedge u_{k_1} &= (-q^{-1}) \cdot 1 \otimes (X^\mu + X^{\sigma_1 \cdot \mu}) \otimes 1 = -(1 \cdot T_1) \otimes (X^\mu + X^{\sigma_1 \cdot \mu}) \otimes 1 \\ &= -1 \otimes T_1 \cdot (X^\mu + X^{\sigma_1 \cdot \mu}) \otimes 1. \end{aligned}$$

D'après le lemme 1.34 (ii), on a  $T_1 \cdot (X^\mu + X^{\sigma_1 \cdot \mu}) = (X^\mu + X^{\sigma_1 \cdot \mu}) T_1$ , d'où

$$\begin{aligned} u_{k_1} \wedge u_{k_2} + u_{k_2} \wedge u_{k_1} &= -1 \otimes (X^\mu + X^{\sigma_1 \cdot \mu}) \cdot T_1 \otimes 1 = -1 \otimes (X^\mu + X^{\sigma_1 \cdot \mu}) \otimes (T_1 \cdot 1) \\ &= q \cdot 1 \otimes (X^\mu + X^{\sigma_1 \cdot \mu}) \otimes 1. \end{aligned}$$

Ainsi  $u_{k_1} \wedge u_{k_2} + u_{k_2} \wedge u_{k_1} = (-q^{-1}) \cdot 1 \otimes (X^\mu + X^{\sigma_1 \cdot \mu}) \otimes 1 = q \cdot 1 \otimes (X^\mu + X^{\sigma_1 \cdot \mu}) \otimes 1$ . Par conséquent,  $u_{k_1} \wedge u_{k_2} + u_{k_2} \wedge u_{k_1} = 0$ .  $\square$

### 2.5.2 Démonstration de $(R_2)$ et $(R_3)$

Nous ne montrons que  $(R_2)$ ; la preuve de  $(R_3)$ , en tout point analogue, est laissée au lecteur. Notons que l'hypothèse  $k_1 \leq k_2$  implique  $\mu_1 - \mu_2 \geq 0$ . Supposons pour fixer les idées que  $c_1 < c_2$ , de telle sorte que  $\gamma = c_2 - c_1$ . Alors  $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in A^n$ , donc  $\mathbf{a} = \mathbf{c}$  et  $u = 1$ . Puisque  $c_1 \neq c_2$ , on a  $H_{\mathbf{a}} = \mathbf{K}$ . De même,  $\mathbf{b} = (d_1, d_1)$ ,  $v = 1$ ,  $H_{\mathbf{b}} = \langle T_1 \rangle$  et  $\omega_{\mathbf{b}} = \sigma_1$ . Ainsi

$$u_{k_1} \wedge u_{k_2} = (-q^{-1}) 1 \otimes_{\mathbf{K}} X^\mu \otimes_{\langle T_1 \rangle} 1.$$

On a, toujours d'après le lemme 1.34 (ii):

$$\begin{aligned} u_{k_1} \wedge u_{k_2} &= -q^{-1} \cdot 1 \otimes X^\mu \otimes 1 = q^{-2} \cdot 1 \otimes X^\mu \otimes (T_1 \cdot 1) = q^{-2} \cdot 1 \otimes X^\mu T_1 \otimes 1 \\ &= q^{-2} \cdot 1 \otimes \left( T_1 X^{\sigma_1 \cdot \mu} + (q - q^{-1}) \sum_{i=0}^{\mu_1 - \mu_2 - 1} X^{\sigma_1 \cdot \mu + i \alpha_1} \right) \otimes 1. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que

$$\begin{aligned} -q^{-1} \cdot 1 \otimes T_1 X^{\sigma_1 \cdot \mu} \otimes 1 &= u_{k_2} \wedge u_{k_1} \text{ et} \\ -q^{-1} \cdot 1 \otimes X^{\sigma_1 \cdot \mu + i \alpha_1} \otimes 1 &= u_{k_2 - \gamma - n i} \wedge u_{k_1 + \gamma + n i}. \end{aligned}$$

Par souci de brièveté, introduisons pour toute la fin du chapitre la notation

$$w_m := u_{k_2 - m} \wedge u_{k_1 + m}, \quad m \in \mathbb{Z}$$



(il faut prendre garde au fait que  $w_m$  dépend de  $k_1$  et  $k_2$ ). On a ainsi établi

$$(*) : u_{k_1} \wedge u_{k_2} = -q^{-1}u_{k_2} \wedge u_{k_1} + (q^{-2} - 1) \sum_{i=0}^{\mu_1 - \mu_2 - 1} w_{\gamma + ni} .$$

Notons que les vecteurs  $w_{\gamma + ni}$  ne sont ordonnés que si  $i \leq \lfloor \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \rfloor$ ; il faut donc redresser près de la moitié des vecteurs de  $(*)$ ! Ceci invite à prouver  $(R_2)$  à l'aide de  $(*)$  par récurrence sur  $\mu_1 - \mu_2$ . Observons que  $(*)$  donne directement le résultat voulu lorsque  $\mu_1 - \mu_2 = 0$  et  $\mu_1 - \mu_2 = 1$ . Supposons maintenant que  $\mu_1 - \mu_2 \geq 2$ . En écrivant  $(*)$  pour  $u_{k_1} \wedge u_{k_2}$  et  $u_{k_1 + nl} \wedge u_{k_2 - nl}$ , on trouve

$$u_{k_1} \wedge u_{k_2} = -q^{-1}u_{k_2} \wedge u_{k_1} + (q^{-2} - 1)w_\gamma + q^{-1}w_{nl} + q^{-2}u_{k_1 + nl} \wedge u_{k_2 - nl} ;$$

il ne reste plus qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence à  $u_{k_1 + nl} \wedge u_{k_2 - nl}$  et à regrouper les termes pour conclure.  $\square$

### 2.5.3 Démonstration de $(R_4)$

La démarche pour prouver  $(R_4)$  est essentiellement la même que celle suivie pour prouver  $(R_2)$  et  $(R_3)$ , mais les calculs sont nettement plus compliqués (la difficulté réside dans la longueur des formules). Supposons pour fixer les idées que  $c_1 < c_2$  et  $d_1 < d_2$ , de telle sorte que  $\gamma = c_2 - c_1$  et  $\delta = n(d_2 - d_1)$ . Alors  $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in A^n$ , donc  $\mathbf{a} = \mathbf{c}$  et  $u = 1$ . Puisque  $c_1 \neq c_2$ , on a  $H_{\mathbf{a}} = \mathbf{K}$ . De même,  $\mathbf{b} = (d_2, d_1) = \sigma_1 \cdot d$ ,  $v = \sigma_1$ ,  $H_{\mathbf{b}} = \mathbf{K}$  et  $\omega_{\mathbf{b}} = 1$ . Ainsi

$$u_{k_1} \wedge u_{k_2} = 1 \otimes_{\mathbf{K}} X^\mu T_1^{-1} \otimes_{\mathbf{K}} 1 .$$

Puisque les produits tensoriels qui interviennent sont triviaux, nous pourrions nous permettre d'écrire

$$u_{k_1} \wedge u_{k_2} = X^\mu T_1^{-1} .$$

La relation  $T_1^{-1} = T_1(1 + (q - q^{-1})T_1^{-1})$  et le lemme 1.34 (ii) nous donnent

$$\begin{aligned} u_{k_1} \wedge u_{k_2} &= (X^\mu T_1) \left( 1 + (q - q^{-1})T_1^{-1} \right) \\ &= \left( T_1 X^{\sigma_1 \cdot \mu} + (q - q^{-1}) \sum_{i=0}^{\mu_1 - \mu_2 - 1} X^{\sigma_1 \cdot \mu + i\alpha_1} \right) \left( 1 + (q - q^{-1})T_1^{-1} \right) \\ &= T_1 X^{\sigma_1 \cdot \mu} + (q - q^{-1})T_1 X^{\sigma_1 \cdot \mu} T_1^{-1} + (q - q^{-1}) \left( \sum_{i=0}^{\mu_1 - \mu_2 - 1} X^{\sigma_1 \cdot \mu + i\alpha_1} \right) \\ &\quad + (q - q^{-1})^2 \left( \sum_{i=0}^{\mu_1 - \mu_2 - 1} X^{\sigma_1 \cdot \mu + i\alpha_1} T_1^{-1} \right) . \end{aligned}$$

On vérifie par un petit calcul que  $T_1 X^{\sigma_1 \cdot \mu} = u_{k_2} \wedge u_{k_1}$ ,  $T_1 X^{\sigma_1 \cdot \mu} T_1^{-1} = w_\delta$ ,  $X^{\sigma_1 \cdot \mu + i\alpha_1} = w_{\gamma + ni}$  et  $X^{\sigma_1 \cdot \mu + i\alpha_1} T_1^{-1} = w_{\gamma + \delta + ni}$ . Par suite, on a

$$(a) : u_{k_1} \wedge u_{k_2} = u_{k_2} \wedge u_{k_1} + (q - q^{-1})w_\delta + (q - q^{-1}) \sum_{i=0}^{\mu_1 - \mu_2 - 1} w_{\gamma + ni} + (q - q^{-1})^2 \sum_{i=0}^{\mu_1 - \mu_2 - 1} w_{\gamma + \delta + ni} .$$

Là encore, près de la moitié des vecteurs de chaque somme sont à redresser ... ceci donne néanmoins aisément la relation (R4) si  $\mu_1 - \mu_2 \leq 3$ . Supposons donc  $\mu_1 - \mu_2 \geq 4$ . On va chercher une relation de récurrence permettant de calculer  $u_{k_1} \wedge u_{k_2}$ . En écrivant (a) pour  $u_{k_1} \wedge u_{k_2}$  et  $u_{k_1+nl} \wedge u_{k_2-nl}$ , et en utilisant les relations  $w_{\gamma+nl(\mu_1-\mu_2-1)} = u_{k_1+\delta+nl} \wedge u_{k_2-\delta-nl}$  et  $w_{\gamma+\delta+nl(\mu_1-\mu_2-1)} = u_{k_1+nl} \wedge u_{k_2-nl}$ , on trouve

$$(b) : u_{k_1} \wedge u_{k_2} = u_{k_2} \wedge u_{k_1} + (q - q^{-1})(w_\gamma + w_\delta) + (q - q^{-1})^2 w_{\gamma+\delta} - w_{nl} \\ - (q - q^{-1})w_{\delta+nl} + (q - q^{-1})u_{k_1+\delta+nl} \wedge u_{k_2-\delta-nl} \\ + (q^2 + q^{-2} - 1)u_{k_1+nl} \wedge u_{k_2-nl} .$$

Il faut aussi expliciter  $u_{k_1+\delta+nl} \wedge u_{k_2-\delta-nl}$ . Un raisonnement analogue nous donne

$$(b') : u_{k_1+\delta+nl} \wedge u_{k_2-\delta-nl} = w_{\delta+nl} + (q - q^{-1})(w_{\gamma+\delta+nl} + u_{k_1+2nl} \wedge u_{k_2-2nl}) \\ + u_{k_1+\delta+2nl} \wedge u_{k_2-\delta-2nl} - w_{\delta+2nl} .$$

Formons à présent le vecteur  $u_{k_1} \wedge u_{k_2} - u_{k_1+nl} \wedge u_{k_2-nl}$ , et remplaçons  $u_{k_1} \wedge u_{k_2}$  (*resp.*  $u_{k_1+nl} \wedge u_{k_2-nl}$ ) par son expression donnée par (b) (*resp.* l'expression obtenue à partir de (b) en remplaçant  $(k_1, k_2)$  par  $(k_1 + nl, k_2 - nl)$ ). Compte tenu de (b'), on s'aperçoit que les termes en  $u_{k_1+\delta+2nl} \wedge u_{k_2-\delta-2nl}$ ,  $w_{\gamma+\delta+nl}$  et  $w_{\delta+2nl}$  s'en vont. On trouve au bout du compte, après avoir refait passer le terme  $u_{k_1+nl} \wedge u_{k_2-nl}$  dans le membre de droite :

$$(c) : u_{k_1} \wedge u_{k_2} = (q^2 + q^{-2})u_{k_1+nl} \wedge u_{k_2-nl} - u_{k_1+2nl} \wedge u_{k_2-2nl} \\ + u_{k_2} \wedge u_{k_1} + (q - q^{-1})(w_\gamma + w_\delta) + (q - q^{-1})^2 w_{\gamma+\delta} - 2w_{nl} \\ - (q - q^{-1})(w_{\gamma+nl} + w_{\delta+nl}) + w_{2nl} .$$

Une partie des termes de cette formule suit la relation de récurrence linéaire d'ordre 2

$$U_m = (q^2 + q^{-2})U_{m-1} - U_{m-2},$$

avec  $m = \mu_2 - \mu_1$  et  $U_i = u_{k_1+(\mu_1-\mu_2-i)nl} \wedge u_{k_2-(\mu_1-\mu_2-i)nl}$  ( $i \geq 0$ ). Notons que les coefficients  $q^{2m+1} + q^{-(2m+1)}$  et  $q^{2m} - q^{-2m}$  qui apparaissent dans (R4), satisfont la relation de récurrence

$$\lambda_m = (q^2 + q^{-2})\lambda_{m-1} - \lambda_{m-2},$$

ce qui nous invite à prouver (R4) à partir de (c) par récurrence sur  $\mu_1 - \mu_2$ . Nous avons déjà prouvé (R4) si  $\mu_1 - \mu_2 \leq 3$ . Si  $\mu_1 - \mu_2 \geq 4$ , nous pouvons, grâce à l'hypothèse de récurrence, exprimer  $u_{k_1+nl} \wedge u_{k_2-nl}$  et  $u_{k_1+2nl} \wedge u_{k_2-2nl}$  au moyen de (R4). En reportant ces expressions dans (c), on voit, après un calcul laissé au lecteur, que  $u_{k_1} \wedge u_{k_2}$  satisfait aussi (R4).  $\square$



## Chapitre 3

# Espaces de Fock de niveau supérieur

Dans ce chapitre, en suivant à nouveau [U2], nous faisons « tendre  $r$  vers  $+\infty$  » dans la construction de  $\Lambda_q^r V$  effectuée au chapitre 2. Nous obtenons ainsi des représentations  $\Lambda^s$  qui contiennent les sous-représentations  $\mathbf{F}_q[s_i]$ , appelées espaces de Fock. Nous déduisons du chapitre 2 la construction des bases canoniques d'Uglov des espaces de Fock.

### 3.1 L'espace des $q$ -produits extérieurs (semi-)infinis $\Lambda^s$

**Définition 3.1** Fixons dans tout ce chapitre une charge  $s \in \mathbb{Z}$ . On pose

$$\Lambda^s = \Lambda^s[n, l] := \varinjlim \Lambda_q^r V,$$

où les applications  $\Lambda_q^r V \rightarrow \Lambda_q^t V$  ( $t > r$ ) sont données par

$$v \mapsto v \wedge u_{s-r} \wedge u_{s-r-1} \wedge \cdots \wedge u_{s-t+1} \quad (v \in \Lambda_q^r V).$$

L'espace  $\Lambda^s$  sera appelé l'espace des  $q$ -produits extérieurs (semi-)infinis de charge  $s$ . On notera

$$v \mapsto v \wedge u_{s-r} \wedge u_{s-r-1} \wedge \cdots$$

l'application canonique  $\Lambda_q^r V \rightarrow \varinjlim \Lambda_q^t V$ . Soit  $P(s)$  (resp.  $P^{++}(s)$ ) l'ensemble des suites d'entiers (resp. suites strictement décroissantes d'entiers)  $\mathbf{k} = (k_i)_{i \geq 1}$  telles que  $k_i = s - i + 1$  dès que  $i$  est suffisamment grand. Par définition, les  $q$ -produits extérieurs infinis

$$u_{\mathbf{k}} = u_{k_1} \wedge u_{k_2} \wedge \cdots,$$

$\mathbf{k} \in P(s)$ , forment une partie génératrice de  $\Lambda^s$ . On dit que le  $q$ -produit extérieur  $u_{\mathbf{k}} \in \Lambda^s$  est ordonné si  $\mathbf{k} \in P^{++}(s)$ . Comme pour  $\Lambda_q^r V$ , les  $q$ -produits extérieurs ordonnés forment une base de  $\Lambda^s$  ([TU], [U2, Proposition 4.1]), qu'on appellera la base standard.  $\diamond$

Tout  $q$ -produit extérieur peut être exprimé comme combinaison linéaire de  $q$ -produits extérieurs ordonnés à l'aide des relations de redressement, données à la proposition 2.13 (i), qui sont valides pour chaque paire de facteurs adjacents de  $u_{\mathbf{k}} = u_{k_1} \wedge u_{k_2} \wedge \cdots$ .

Nous aurons besoin de différentes indexations de la base standard de  $\Lambda^s$ . Rappelons qu'on a défini aux paragraphes 1.1.5.2 et 1.1.5.3 des bijections  $\tau'_n : \Pi \times \mathbb{Z} \rightarrow \Pi^n \times \mathbb{Z}^n$  et  $\tau_l : \Pi \times \mathbb{Z} \rightarrow \Pi^l \times \mathbb{Z}^l$ . Définissons, pour  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , l'ensemble

$$X^N(t) := \{(s_1, \dots, s_N) \in X^N \mid s_1 + \cdots + s_N = t\};$$

nous utiliserons cette notation la plupart du temps dans le cas où  $X = \mathbb{Z}$ , et parfois lorsque  $X = \mathbb{Q}$  ou  $X = \mathbb{R}$ .

**Définition 3.2** Nous utiliserons les indexations suivantes de la base standard de  $\Lambda^s$ .

- \* Indexation  $u_{\mathbf{k}}$ . Comme nous l'avons vu, la base standard est indexée par les  $q$ -produits extérieurs ordonnés  $u_{\mathbf{k}} = u_{k_1} \wedge u_{k_2} \wedge \cdots$ , avec  $\mathbf{k} \in P^{++}(s)$ .
- \* Indexation  $\lambda$ . Au  $q$ -produit extérieur ordonné  $u_{\mathbf{k}}$  on peut faire correspondre une partition  $\lambda \in \Pi$ , en posant pour tout  $i \geq 1$ ,

$$\lambda_i := k_i - (s + 1 - i).$$

On écrira alors

$$|\lambda, s\rangle := u_{\mathbf{k}}.$$

- \* Indexation  $\lambda_n$ . Soit  $\lambda \in \Pi$ ,  $\lambda_n \in \Pi^n$  et  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$  tels que  $(\lambda_n, \mathbf{s}_n) = \tau'_n(\lambda, s)$ . On pose

$$|\lambda_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet := |\lambda, s\rangle.$$

Cette indexation coïncide avec l'indexation  $\lambda$  dans le cas où  $n = 1$ .

- \* Indexation  $\lambda_l$ . Soit  $\lambda \in \Pi$ ,  $\lambda_l \in \Pi^l$  et  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  tels que  $(\lambda_l, \mathbf{s}_l) = \tau_l(\lambda, s)$ . On pose

$$|\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle := |\lambda, s\rangle.$$

Cette indexation coïncide avec l'indexation  $\lambda$  dans le cas où  $l = 1$ .

◇

**Exemple 3.3** Prenons  $n = 2$ ,  $l = 3$ ,  $s = -1$  et  $\lambda = (4, 3, 3, 2, 1)$ . On a alors

$$|(4, 3, 3, 2, 1), -1\rangle = |((3, 3), \emptyset), (-1, 0)\rangle^\bullet = |((1, 1), (1, 1), (1)), (0, 0, -1)\rangle$$

(voir les exemples 1.9 et 1.11).

◇

**Remarque 3.4** Pour une autre description (équivalente) de ces indexations et pour d'autres exemples, le lecteur pourra consulter [U2, Remark 4.2 (ii) & Example 4.3].

◇

## 3.2 Trois actions sur $\Lambda^s$

### 3.2.1 Action des algèbres quantiques affines $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ et $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$

À l'aide des relations de redressement, on prouve le lemme suivant.

**Lemme 3.5 ([U2], Lemma 3.18)** *Soit  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \geq b$ . Alors on a*

$$(i) \quad u_b \wedge u_a \wedge u_{a-1} \wedge \cdots \wedge u_b = 0 \quad \text{et} \quad (ii) \quad u_a \wedge u_{a-1} \wedge \cdots \wedge u_b \wedge u_a = 0.$$

□

Grâce à la formule (ii) de ce lemme, on peut faire tendre  $r$  vers l'infini dans la formule donnant l'action de  $f_i$  sur les  $q$ -produits extérieurs de  $r$  termes. On peut donc faire agir  $f_i$  sur  $\Lambda^s$  de la façon suivante, la somme ne comportant en réalité qu'un nombre fini de termes non nuls :

$$f_i(u_{k_1} \wedge \cdots) := \sum_{j=1}^{+\infty} t_i(u_{k_1}) \wedge \cdots \wedge t_i(u_{k_{j-1}}) \wedge f_i(u_{k_j}) \wedge u_{k_{j+1}} \wedge u_{k_{j+2}} \wedge \cdots \quad ((k_1, \dots) \in P^{++}(s)).$$

La définition de l'action de  $e_i$  est un peu plus compliquée, car pour pouvoir faire tendre  $r$  vers l'infini dans la formule donnant l'action de  $e_i$  sur les  $q$ -produits extérieurs ordonnés de  $r$  termes, il d'abord donner un sens au vecteur

$$u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_{j-1}} \wedge e_i(u_{k_j}) \wedge t_i^{-1}(u_{k_{j+1}}) \wedge t_i^{-1}(u_{k_{j+2}}) \wedge \cdots$$

lorsque  $j$  est suffisamment grand. Voici comment on procède. Pour  $m \in \mathbb{Z}$ , posons

$$|m\rangle := u_m \wedge u_{m-1} \wedge \cdots;$$

ainsi tout élément  $u_{\mathbf{k}}$ ,  $\mathbf{k} \in P^{++}(s)$  peut s'écrire  $u_{\mathbf{k}} = v \wedge |s-r\rangle$  avec  $v \in \Lambda_q^r V$  (l'écriture n'est pas unique, à cause du choix de  $r$ ). On pose alors

$$t_i |nlm\rangle := q^{l\delta_{i,0}} |nlm\rangle$$

puis on remarque que le membre de droite de la formule

$$t_i(v \wedge |nlm\rangle) := t_i(v) \wedge |nlm\rangle$$

ne dépend pas de la décomposition choisie de  $u_{\mathbf{k}} = v \wedge |nlm\rangle$ . Par conséquent, cette formule permet de définir correctement un endomorphisme  $t_i$  de  $\Lambda^s$ . Définissons alors un endomorphisme  $e_i$  de  $\Lambda^s$  en posant

$$e_i(v \wedge |s-r\rangle) := e_i(v) \wedge t_i^{-1}|s-r\rangle \quad (v \in \Lambda_q^r V);$$

là encore, le membre de droite de la formule ci-dessus ne dépend pas de la décomposition choisie, comme on le voit en utilisant le lemme 3.5 (i).

On définit l'action de  $\partial$  de façon analogue. Posons tout d'abord, pour  $m \in \mathbb{Z}$ ,

$$\partial(|nlm\rangle) := -nl \cdot \text{sgn}(m) \cdot \frac{m(m+1)}{2} |nlm\rangle,$$

où  $\text{sgn}(m) \in \{0, 1, -1\}$  désigne le signe de  $m$ . Là encore, le membre de droite de la formule

$$\partial(v \wedge |nlm\rangle) := \partial(v) \wedge |nlm\rangle$$

ne dépend pas de la décomposition choisie  $u_{\mathbf{k}} = v \wedge |nlm\rangle$ ,  $v \in \Lambda_q^r V$  du  $q$ -produit extérieur ordonné  $u_{\mathbf{k}}$ . Ceci permet donc de définir correctement un endomorphisme  $\partial$  de  $\Lambda^s$ .

**Remarque 3.6** Les formules précédentes sont encore valables pour les  $q$ -produits extérieurs  $u_{\mathbf{k}}$ ,  $\mathbf{k} \in P(s)$ , à condition d'écrire  $u_{\mathbf{k}}$  sous la forme  $u_{\mathbf{k}} = v \wedge |s-r\rangle$ , avec  $v \in \Lambda_q^r V$  et  $r$  suffisamment grand.

On définit des endomorphismes  $\dot{e}_i, \dot{f}_i, \dot{t}_i, \dot{\partial} \in \text{End}(\Lambda^s)$  ( $0 \leq i \leq l-1$ ) de manière analogue, en remplaçant  $q$  par  $p$  et en permutant  $n$  et  $l$  dans toutes les formules ci-dessus. Nous allons voir en fait (cf. corollaire 3.11) que ces formules munissent  $\Lambda^s$  d'une structure de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module et de  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ -module.

Nous allons maintenant donner des expressions combinatoires qui permettent de calculer de façon pratique les actions des générateurs de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  et  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  sur  $\Lambda^s$ . Pour cela, introduisons quelques notations.

- Si  $M$  est un  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ - (resp.  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ -, resp.  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \otimes U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ -) module et si  $u \in M$  est un vecteur de poids, on note  $\text{wt}(u)$  (resp.  $\dot{\text{wt}}(u)$ , resp.  $\text{Wt}(u) = \text{wt}(u) + \dot{\text{wt}}(u)$ ) le poids de  $u$ . Nous utiliserons notamment ces notations pour  $M = \Lambda^s$ . (Dans la mesure où nous n'avons pas encore montré que  $\Lambda^s$  est un  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module et un  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ -module, nous dirons provisoirement que  $u \in \Lambda^s$  est un vecteur de poids  $\text{wt}(u) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \Lambda_i + d\delta \in P$  ( $a_0, \dots, a_{n-1}, d \in \mathbb{Z}$ ) si on a  $\partial \cdot u = du$  et  $t_i \cdot u = q^{a_i} u$  pour tout  $0 \leq i \leq n-1$ . Dans ce contexte, on définit de façon analogue les quantités  $\dot{\text{wt}}(u)$  et  $\text{Wt}(u)$  pour  $u \in \Lambda^s$ .)
- Soit  $(\lambda_l, \mathbf{s}_l)$  une  $l$ -multi-partition chargée. Rappelons que nous avons introduit au paragraphe 1.1.4 des entiers  $N_i(\lambda_l; \mathbf{s}_l; n)$  et  $M_i(\lambda_l; \mathbf{s}_l; n)$ . Nous avons aussi introduit la notation  $\lambda_l \xrightarrow{i:1} \mu_l$  si  $\mu_l / \lambda_l$  est un  $i$ -nœud de type  $A$  de  $(\lambda_l, \mathbf{s}_l)$ . Dans ce cas, nous avons également défini des entiers  $M_i^>(\lambda_l; \mu_l; \mathbf{s}_l; n)$  et  $M_i^<(\lambda_l; \mu_l; \mathbf{s}_l; n)$ .
- Pour  $a \in \mathbb{Z}$ , soit  $a \bmod n \in \{0, \dots, n-1\}$  le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $n$ . On pose, pour  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}^l$ ,

$$\Delta(\mathbf{s}_l, n) := \frac{1}{2} \sum_{b=1}^l \left( \frac{s_b^2}{n} - s_b \right) - \left( \frac{(s_b \bmod n)^2}{n} - (s_b \bmod n) \right)$$

et on définit de même  $\Delta(\mathbf{s}_n, l)$  pour  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n$ .

**Proposition 3.7 ([U2])**

1°) On a les formules

$$(W_1) \quad \text{wt}(|\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle) = -\Delta(\mathbf{s}_l, n)\delta + \Lambda_{s_1} + \cdots + \Lambda_{s_l} - \sum_{i=0}^{n-1} N_i(\lambda_l; \mathbf{s}_l; n)\alpha_i,$$

$$(W_2) \quad \dot{\text{wt}}(|\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle) = -(\Delta(\mathbf{s}_l, n) + N_0(\lambda_l; \mathbf{s}_l; n))\dot{\delta} + (n - s_1 + s_l)\dot{\Lambda}_0 + \sum_{i=1}^{l-1} (s_i - s_{i+1})\dot{\Lambda}_i,$$

$$(W_3) \quad \dot{\text{wt}}(|\lambda_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet) = -\Delta(\mathbf{s}_n, l)\dot{\delta} + \dot{\Lambda}_{s_1} + \cdots + \dot{\Lambda}_{s_n} - \sum_{i=0}^{l-1} N_i(\lambda_n; \mathbf{s}_n; l)\dot{\alpha}_i,$$

$$(W_4) \quad \text{wt}(|\lambda_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet) = -(\Delta(\mathbf{s}_n, l) + N_0(\lambda_n; \mathbf{s}_n; l))\delta + (l - s_1 + s_n)\Lambda_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (s_i - s_{i+1})\Lambda_i.$$

2°) Avec l'indexation  $\lambda_l$ , on a pour  $0 \leq i \leq n-1$ ,

$$\begin{aligned} e_i \cdot |\nu_l, \mathbf{s}_l\rangle &= \sum_{\lambda_l \xrightarrow{i:1} \nu_l} q^{-M_i^<(\lambda_l; \nu_l; \mathbf{s}_l; n)} |\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle, \\ f_i \cdot |\nu_l, \mathbf{s}_l\rangle &= \sum_{\nu_l \xrightarrow{i:1} \mu_l} q^{M_i^>(\nu_l; \mu_l; \mathbf{s}_l; n)} |\mu_l, \mathbf{s}_l\rangle, \\ t_i \cdot |\nu_l, \mathbf{s}_l\rangle &= q^{M_i(\nu_l; \mathbf{s}_l; n)} |\nu_l, \mathbf{s}_l\rangle \quad \text{et} \\ \partial \cdot |\nu_l, \mathbf{s}_l\rangle &= -(\Delta(\mathbf{s}_l, n) + N_0(\nu_l; \mathbf{s}_l; n)) |\nu_l, \mathbf{s}_l\rangle. \end{aligned}$$

3°) Avec l'indexation  $\lambda_n$ , on a pour  $0 \leq i \leq l-1$ ,

$$\begin{aligned} \dot{e}_i \cdot |\nu_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet &= \sum_{\lambda_n \xrightarrow{i:1} \nu_n} p^{-M_i^<(\lambda_n; \nu_n; \mathbf{s}_n; l)} |\lambda_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet, \\ \dot{f}_i \cdot |\nu_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet &= \sum_{\nu_n \xrightarrow{i:1} \mu_n} p^{M_i^>(\nu_n; \mu_n; \mathbf{s}_n; l)} |\mu_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet, \\ \dot{t}_i \cdot |\nu_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet &= p^{M_i(\nu_n; \mathbf{s}_n; l)} |\nu_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet \quad \text{et} \\ \dot{\partial} \cdot |\nu_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet &= -(\Delta(\mathbf{s}_n, l) + N_0(\nu_n; \mathbf{s}_n; l)) |\nu_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet. \end{aligned}$$

*Démonstration.* On vérifie toutes ces formules par un calcul direct. □

Pour  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ ,  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$  soient



$$\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] := \bigoplus_{\lambda_l \in \Pi^l} \mathbf{K}|\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet := \bigoplus_{\lambda_n \in \Pi^n} \mathbf{K}|\lambda_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet.$$

La proposition précédente montre que les  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ ,  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  (resp.  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ ,  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ ) sont stables sous l'action des générateurs de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  (resp.  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ ). On a en fait beaucoup mieux.

**Théorème 3.8** ([JMMO],[FLOTW],[U2])

- 1°) Soit  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ . Alors  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  est une représentation intégrable de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  de niveau  $l$ .  
 2°) Soit  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ . Alors  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$  est une représentation intégrable de  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  de niveau  $n$ .

*Démonstration.* Modulo la transformation qui consiste à renverser l'ordre des composantes de  $\lambda_l \in \Pi^l$  et de  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l$ , les formules des actions sur  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  données à la proposition 3.7 2°) coïncident avec celles de Jimbo-Misra-Miwa-Okado ([JMMO], [FLOTW]) dans le cas où  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l)$  vérifie  $n-1 \geq s_1 \geq \dots \geq s_l \geq 0$ , d'où la preuve du point 1°) dans ce cas. La démonstration pour  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  quelconque est similaire. La preuve du point 2°) est analogue à celle du point 1°).  $\square$

Introduisons, pour  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ , le sous- $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module

$$\mathbf{M}_q[\mathbf{s}_l] := U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle \subset \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l].$$

On définit de même  $\mathbf{M}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$  pour  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ .

**Remarque 3.9** Soit  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ . Il découle des formules données à la proposition 3.7 que le vecteur  $|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle \in \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  est un vecteur de plus haut poids  $\Lambda := -\Delta(\mathbf{s}_l, n)\delta + \Lambda_{s_1} + \dots + \Lambda_{s_l}$ . Par conséquent,  $\mathbf{M}_q[\mathbf{s}_l]$  est isomorphe au module simple  $V(\Lambda)$ .  $\diamond$

**Remarque 3.10** Soit  $X_l := \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i \Lambda_i \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{N}, a_0 + \dots + a_{n-1} = l \right\}$ . Puisque les  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules  $V'(\Lambda)$  et  $V'(\Lambda')$  ( $\Lambda, \Lambda' \in P$ ) sont isomorphes si et seulement si  $\Lambda - \Lambda' \in \mathbb{Z}\delta$ ,  $X_l$  paramétrise les classes d'isomorphisme des  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules  $V'(\Lambda)$  qui sont de niveau  $l$  et dont le plus haut poids est dominant. Nous allons voir que l'on peut aussi paramétriser ces classes d'isomorphisme à l'aide d'un domaine fondamental de l'action de  $\widehat{\mathfrak{S}}_l$  sur  $\mathbb{Z}^l$ . Rappelons que  $\widehat{\mathfrak{S}}_l$  agit à gauche sur  $P_l = \mathbb{Z}^l$ , où  $\mathfrak{S}_l \subset \widehat{\mathfrak{S}}_l$  agit en permutant les composantes, et l'élément  $y_\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}}_l$  ( $\lambda \in P_l$ ) agit comme la translation suivant le vecteur  $n\lambda$  (cf. paragraphe 1.3.1.2). Il est facile de voir que deux éléments  $\mathbf{a}_l = (a_1, \dots, a_l)$  et  $\mathbf{b}_l = (b_1, \dots, b_l)$  sont conjugués si et seulement si

$$\Lambda_{a_1} + \dots + \Lambda_{a_l} = \Lambda_{b_1} + \dots + \Lambda_{b_l},$$

ou encore si et seulement si les  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{a}_l\rangle$  et  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{b}_l\rangle$  sont isomorphes. On vérifie par ailleurs aisément qu'un domaine fondamental pour cette action est

$$\mathcal{X}_{l,n} := \left\{ (v_1, \dots, v_l) \in \mathbb{Z}^l \mid n-1 \geq v_1 \geq \dots \geq v_l \geq 0 \right\},$$

et que l'application  $\chi : \mathcal{X}_{l,n} \rightarrow X_l, (v_1, \dots, v_l) \mapsto \sum_{i=0}^{l-1} \Lambda_{v_i}$  est bijective. Par conséquent, le domaine fondamental  $\mathcal{X}_{l,n}$  paramétrise les classes d'isomorphisme des  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules  $V'(\Lambda)$  qui sont de niveau  $l$  et dont le plus haut poids est dominant. Plus précisément, soit  $\Lambda \in X_l$ , et  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l$ . Alors  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$  est isomorphe à  $V'(\Lambda)$  si et seulement si  $\mathbf{s}_l$  est conjugué sous l'action de  $\widehat{\mathfrak{S}}_l$  à l'élément  $\chi^{-1}(\Lambda) \in \mathcal{X}_{l,n}$ .  $\diamond$

Puisque  $\tau_l$  induit une bijection  $\Pi \rightarrow \Pi^l \times \mathbb{Z}^l(s)$ ,  $\lambda \mapsto \tau_l(\lambda, s)$ , on a la décomposition

$$\Lambda^s = \bigoplus_{\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)} \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l].$$

De même, on a la décomposition

$$\Lambda^s = \bigoplus_{\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)} \mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet.$$

Ces décompositions, ainsi que le théorème 3.8, impliquent le résultat suivant.

**Corollaire 3.11** *Les formules écrites dans ce paragraphe munissent  $\Lambda^s$  d'une structure de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module intégrable de niveau  $l$  et d'une structure de  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ -module intégrable de niveau  $n$ .  $\square$*

Nous noterons  $\mathcal{P}^s$  (resp.  $\dot{\mathcal{P}}^s$ , resp.  $\mathcal{P}^s$ ) l'ensemble des poids de  $\Lambda^s$  pour l'action de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  (resp.  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ , resp.  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \otimes U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ ).

### 3.2.2 Action des bosons sur $\Lambda^s$

Grâce aux deux formules du lemme 3.5, on peut définir une action des bosons sur les  $q$ -produits extérieurs infinis, en partant de l'action sur les  $q$ -produits extérieurs de  $r$  termes, puis en faisant tendre  $r$  vers l'infini. Dans la formule qui suit, la somme ne comporte en réalité qu'un nombre fini de termes non nuls, ce qui permet de définir un endomorphisme  $B_m$  ( $m \in \mathbb{Z}^*$ ) de  $\Lambda^s$  par

$$B_m(u_{k_1} \wedge \dots) := \sum_{j=1}^{+\infty} u_{k_1} \wedge \dots \wedge u_{k_{j-1}} \wedge u_{k_j - nlm} \wedge u_{k_{j+1}} \wedge \dots \quad ((k_1, \dots) \in P(s)).$$

Toutefois, contrairement au cas de  $\Lambda_q^r V$ , les  $B_m \in \text{End}(\Lambda^s)$  cessent de commuter deux à deux. On peut en effet prouver le résultat suivant.

**Théorème 3.12 ([U2], Propositions 4.4 & 4.5)** *Considérons les bosons  $B_m$ ,  $m \in \mathbb{Z}^s$  comme agissant sur  $\Lambda^s$ .*

1°) *Pour  $m \neq -m'$ , on a  $[B_m, B_{m'}] = 0$ .*

2°) *Soit  $m \in \mathbb{Z}^*$ . Alors il existe  $\gamma_m \in \mathbf{K}$  indépendant de  $s$  tel que  $[B_m, B_{-m}] = \gamma_m$ .*

3°) *De façon explicite, si  $m > 0$ , on a  $\gamma_m = m \frac{1 - q^{-2mn}}{1 - q^{-2m}} \frac{1 - q^{2ml}}{1 - q^{2m}}$ .*

$\square$

Ainsi, les bosons agissant sur  $\Lambda^s$  engendrent une algèbre de Heisenberg qu'on notera  $\mathcal{H}$ .

### 3.3 Deux décompositions de $\Lambda^s$ en tant que $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \otimes \mathcal{H} \otimes U'_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ -module

Comme pour  $\Lambda_q^r V$ , on peut montrer le résultat suivant, qui découle des formules données au paragraphe précédent.

**Théorème 3.13 ([U2], Proposition 4.6)** *Les actions de  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ ,  $U'_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  et de  $\mathcal{H}$  sur  $\Lambda^s$  commutent deux à deux.*  $\square$

Notons que, contrairement à  $\Lambda_q^r V$ ,  $\Lambda^s$  admet des vecteurs singuliers pour l'action de  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ , par exemple les vecteurs  $|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$ ,  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ . Soit  $u \in \Lambda^s$  un vecteur de poids  $\text{Wt}(u) \in \mathcal{P}^s$ . Alors le vecteur  $B_m.u$  ( $m \in \mathbb{Z}^*$ ) est clairement de poids  $\text{Wt}(u) + m(\delta + \dot{\delta})$ . Il découle de ceci et des formules  $(W_1)$ - $(W_4)$  que les vecteurs  $|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$ ,  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  sont aussi des vecteurs singuliers pour  $\mathcal{H}$ , c'est-à-dire annihilés par les  $B_m$ ,  $m > 0$ . De même, les vecteurs  $|\emptyset_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet$ ,  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$  sont des vecteurs singuliers pour  $U'_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  et  $\mathcal{H}$ .

Introduisons l'ensemble

$$A_{l,n}(s) := \left\{ (r_1, \dots, r_l) \in \mathbb{Z}^l(s) \mid r_1 \geq \dots \geq r_l, r_1 - r_l \leq n \right\}.$$

**Proposition 3.14 ([U2])** *Soit  $\mathbf{r}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  et  $\mathbf{r}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$  telles que  $|\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle = |\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet$ . Alors  $\mathbf{r}_l \in A_{l,n}(s)$  et  $\mathbf{r}_n \in A_{n,l}(s)$ . Réciproquement, si  $\mathbf{r}_l \in A_{l,n}(s)$ , alors il existe un unique  $\mathbf{r}_n \in A_{n,l}(s)$  tel que  $|\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet = |\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle$ , et si  $\mathbf{r}_n \in A_{n,l}(s)$ , alors il existe un unique  $\mathbf{r}_l \in A_{l,n}(s)$  tel que  $|\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle = |\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet$ .*

*Démonstration.* Elle repose sur les formules  $(W_1)$ - $(W_4)$ . On peut par exemple utiliser la proposition 3.24, dont nous donnons une démonstration ne faisant pas appel à cette proposition-ci.  $\square$

Il découle de cette proposition que

$$\{|\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle \mid \mathbf{r}_l \in A_{l,n}(s)\} = \{|\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet \mid \mathbf{r}_n \in A_{n,l}(s)\}$$

est un ensemble de vecteurs singuliers simultanément pour les actions de  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ ,  $U'_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  et  $\mathcal{H}$ . Il se trouve que ces vecteurs forment un système complet de vecteurs singuliers relativement à ces trois actions. Ceci permet en partie de prouver le théorème suivant, que nous admettrons.

**Théorème 3.15 ([U2], Theorem 4.8)** *Le  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \otimes \mathcal{H} \otimes U'_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ -module  $\Lambda^s$  se décompose en*

$$\Lambda^s = \bigoplus_{\mathbf{r}_l \in A_{l,n}(s)} U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \otimes \mathcal{H} \otimes U'_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle,$$

ou de façon équivalente

$$\Lambda^s = \bigoplus_{\mathbf{r}_n \in A_{n,l}(s)} U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \otimes \mathcal{H} \otimes U'_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l) \cdot |\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet.$$

□

Nous allons à présent montrer que les ensembles  $A_{l,n}(s)$  et  $A_{n,l}(s)$  sont finis.

**Lemme 3.16** *Pour  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}^l$ , posons  $s_0 := n + s_l$ . Alors l'ensemble*

$$X_{l,n,M}(s) := \left\{ (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}^l(s) \mid \forall 0 \leq i \leq l-1, s_{i+1} - s_i \leq M \right\}$$

( $M \in \mathbb{N}$ ) est fini.

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l) \in X_{l,n,M}(s)$ . Montrons que pour tout  $1 \leq k \leq l$ , on a  $m_k \leq s_k \leq M_k$ , où

$$M_i := \frac{M(l+2i-1)}{2} + n + \frac{s}{l} \quad (1 \leq i \leq l) \quad \text{et} \quad m_j := s - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^l M_i \quad (1 \leq j \leq l).$$

Pour  $1 \leq k \leq l$ , on a  $s_l - s_k = \sum_{i=k}^{l-1} (s_{i+1} - s_i) \leq \sum_{i=k}^{l-1} M = (l-k)M$ , d'où l'inégalité  $s_l \leq s_k + M(l-k)$ . Puisque  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ , on a donc

$$ls_l \leq \sum_{k=1}^l (s_k + M(l-k)) = s + M \frac{l(l-1)}{2},$$

soit encore  $s_l \leq \frac{s}{l} + \frac{M(l-1)}{2}$ . De plus, on a  $s_1 - s_0 \leq M$ , donc

$$s_1 \leq M + n + s_l \leq M + n + \frac{s}{l} + \frac{M(l-1)}{2} = M_1.$$

Soit  $1 \leq k \leq l$ . On a de même

$$s_k \leq s_1 + M(k-1) \leq M_1 + M(k-1) = M_k.$$

De plus, on a

$$s_k = s - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^l s_i \geq s - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^l M_i = m_k,$$

d'où les inégalités annoncées. Par conséquent,  $X_{l,n,M}(s)$  est fini, de cardinal inférieur ou égal à  $\prod_{k=1}^l (M_k - m_k + 1)$ . □

D'après le lemme précédent,  $A_{l,n}(s) = X_{l,n,0}(s)$  est fini et il en est de même pour  $A_{n,l}(s)$  (en fait, la proposition 3.14 montre que  $A_{l,n}(s)$  et  $A_{n,l}(s)$  sont en bijection). Par conséquent, les deux décompositions données au théorème 3.15 ne comportent qu'un nombre fini de facteurs.

## 3.4 Espaces de Fock

### 3.4.1 Lien entre les espaces de Fock et les sous-espaces de poids de $\Lambda^s$

**Définition 3.17** Les espaces  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ ,  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  (resp.  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ ,  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ ), introduits au paragraphe 3.2.1, sont appelés *espaces de Fock* (en anglais, *q-deformed Fock spaces*). D'après le théorème 3.8, ce sont des  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ - (resp.  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ -) sous-modules de  $\Lambda^s$  de niveau  $l$  et  $n$  respectivement. Lorsque  $l > 1$  et  $n > 1$ , on parle d'espaces de Fock *de niveau supérieur*.  $\diamond$

**Remarque 3.18** Attention, les sous-espaces  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ ,  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  (resp.  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ ,  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ ) ne sont pas des  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ - (resp.  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -) sous-modules de  $\Lambda^s$ . Par exemple, si  $n = l = 2$ , on a

$$f_0 \cdot |(\emptyset, \emptyset), (0, 0)\rangle = |((1), \emptyset), (1, -1)\rangle - q^{-1} |(\emptyset, (1)), (1, -1)\rangle \notin \mathbf{F}_q[(0, 0)].$$

$\diamond$

**Lemme 3.19** *L'application*

$$\theta_{l,n} : \mathcal{Q}^l(s) \rightarrow \mathcal{Q}^l(n), \quad (s_1, \dots, s_l) \mapsto (n - s_1 + s_l, s_1 - s_2, \dots, s_{l-1} - s_l)$$

est bijective, d'inverse  $\theta_{l,n}^{-1} : \mathcal{Q}^l(n) \rightarrow \mathcal{Q}^l(s)$ ,  $(a_1, \dots, a_l) \mapsto (s_1, \dots, s_l)$ , où les  $s_i$  sont définis à l'aide des  $a_j$  par les formules

$$s_i := \frac{1}{l} \left( s - \sum_{j=1}^{l-1} j a_j \right) + \sum_{j=i+1}^l a_j \quad (1 \leq i \leq l).$$

En particulier, l'application  $\theta_{l,n} : \mathbb{Z}^l(s) \rightarrow \mathbb{Z}^l$  est injective.

*Démonstration.* Cela se vérifie par un simple calcul laissé au lecteur.  $\square$

**Remarque 3.20** Soit  $w \in \mathcal{P}^s$ . Écrivons  $w = d\delta + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \Lambda_i$ , avec  $a_0, \dots, a_{n-1}, d \in \mathbb{Z}$ . Nous allons donner une inégalité vérifiée par les coordonnées de  $w$ . Soit  $(\boldsymbol{\lambda}_n, \mathbf{s}_n) \in \Pi^n \times \mathbb{Z}^n(s)$  tel que  $\text{wt}(|\boldsymbol{\lambda}_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet) = w$ . Compte tenu de la formule  $(W_4)$  et de l'indépendance linéaire des vecteurs  $\Lambda_0, \dots, \Lambda_{n-1}, \delta$ , on doit avoir

$$\mathbf{s}_n = \theta_{n,l}^{-1}(a_0, \dots, a_{n-1}),$$

où  $\theta_{n,l}$  est l'application définie au lemme précédent, ainsi que

$$d = -(\Delta(\mathbf{s}_n, l) + N_0(\boldsymbol{\lambda}_n; \mathbf{s}_n; l)).$$

Puisque  $N_0(\boldsymbol{\lambda}_n; \mathbf{s}_n; l) \in \mathbb{N}$ , on a en particulier

$$d \leq \Delta(\theta_{n,l}^{-1}(a_0, \dots, a_{n-1}), l).$$

Ceci montre que  $\{d' \in \mathbb{Z} \mid w + d'\delta \in \mathcal{P}^s\} \subsetneq \mathbb{Z}$ ; autrement dit,  $\mathcal{P}^s$  n'est pas stable sous l'action de  $\mathbb{Z}\delta$ . Par exemple, pour  $n = l = 2$ ,  $s = 0$ , on a  $2\Lambda_0 \in \mathcal{P}^s$ , mais on peut montrer comme précédemment que  $2\Lambda_0 + \delta \notin \mathcal{P}^s$ . On peut en fait prouver que  $\{d' \in \mathbb{Z} \mid w + d'\delta \in \mathcal{P}^s\}$  est un intervalle de la forme  $\{d' \in \mathbb{Z} \mid d' \leq \Delta\}$ , avec  $\Delta \in \mathbb{Z}$ . De même, on peut montrer que  $\dot{\mathcal{P}}^s$  n'est pas stable sous l'action de  $\mathbb{Z}\dot{\delta}$ .  $\diamond$

Pour  $w \in \mathcal{P}^s$ , notons  $w \bmod \mathbb{Z}\delta := \{w' \in \mathcal{P}^s \mid w' - w \in \mathbb{Z}\delta\}$  et  $\mathcal{P}^s/\mathbb{Z}\delta := \{w \bmod \mathbb{Z}\delta \mid w \in \mathcal{P}^s\}$ . Bien que  $\mathcal{P}^s$  ne soit pas un groupe, le fait que  $\mathbb{Z}\delta$  soit un groupe montre qu'on a

$$(w \in \mathcal{P}^s/\mathbb{Z}\delta, w \in w) \Rightarrow w = w \bmod \mathbb{Z}\delta.$$

On définit de même  $\dot{w} \bmod \mathbb{Z}\dot{\delta}$  ( $\dot{w} \in \dot{\mathcal{P}}^s$ ) et  $\dot{\mathcal{P}}^s/\mathbb{Z}\dot{\delta}$ . Le résultat suivant, contenu dans [U2], montre que les espaces de Fock  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ ,  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  (resp.  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ ,  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ ) coïncident avec la somme de certains sous-espaces de poids de  $\Lambda^s$  pour l'action de  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  (resp.  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ ). La preuve de ce résultat repose uniquement sur les formules ( $W_2$ ) et ( $W_4$ ).

### Proposition 3.21

1°) L'application

$$\varphi : \mathbb{Z}^n(s) \rightarrow \mathcal{P}^s/\mathbb{Z}\delta, \quad \mathbf{s}_n = (s_1, \dots, s_n) \mapsto \left( (l - s_1 + s_n)\Lambda_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (s_i - s_{i+1})\Lambda_i \right) \bmod \mathbb{Z}\delta$$

est bijective, et on a pour tout  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ ,  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet = \bigoplus_{w \in \varphi(\mathbf{s}_n)} \Lambda^s \langle w \rangle$ .

2°) L'application

$$\dot{\varphi} : \mathbb{Z}^l(s) \rightarrow \dot{\mathcal{P}}^s/\mathbb{Z}\dot{\delta}, \quad \mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l) \mapsto \left( (n - s_1 + s_l)\dot{\Lambda}_0 + \sum_{i=0}^{l-1} (s_i - s_{i+1})\dot{\Lambda}_i \right) \bmod \mathbb{Z}\dot{\delta}$$

est bijective, et on a pour tout  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ ,  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] = \bigoplus_{\dot{w} \in \dot{\varphi}(\mathbf{s}_l)} \Lambda^s \langle \dot{w} \rangle$ .

*Démonstration.* Nous ne prouvons que le point 1°), la preuve de 2°) étant analogue. Soit  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ . D'après la formule ( $W_4$ ), on a  $\text{wt}(|\lambda_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet) \in \varphi(\mathbf{s}_n)$  pour tout  $\lambda_n \in \Pi^n$ , d'où  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet \subset \bigoplus_{w \in \varphi(\mathbf{s}_n)} \Lambda^s \langle w \rangle$ . Supposons maintenant que  $w = d\delta + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \Lambda_i \in \mathcal{P}^s$ , avec  $a_0, \dots, a_{n-1}, d \in \mathbb{Z}$ . Soit  $(\lambda_n, \mathbf{s}_n) \in \Pi^n \times \mathbb{Z}^n(s)$  tel que  $\text{wt}(|\lambda_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet) = w$ . Compte tenu de la formule ( $W_4$ ) et de l'indépendance linéaire des vecteurs  $\Lambda_0, \dots, \Lambda_{n-1}, \delta$ , on doit avoir  $\mathbf{s}_n = \theta_{n,l}^{-1}(a_0, \dots, a_{n-1})$  et  $w = \text{wt}(|\lambda_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet) \in \varphi(\mathbf{s}_n)$ , d'où  $\varphi(\mathbf{s}_n) = w \bmod \mathbb{Z}\delta$ . Ceci montre que  $\varphi$  est surjective. De même, on montre que  $\bigoplus_{w \in \varphi(\mathbf{s}_n)} \Lambda^s \langle w \rangle \subset \mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ , d'où l'égalité. Cette égalité ainsi que le fait que les  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ ,  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$  sont en somme directe, montrent que  $\varphi$

est injective.  $\square$

**Corollaire 3.22**

1°) Soit  $w \in \mathcal{P}^s$ . Notons  $w = d\delta + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \Lambda_i$  avec  $a_0, \dots, a_{n-1}, d \in \mathbb{Z}$ . Alors  $\mathbf{s}_n := \theta_{n,l}^{-1}(a_0, \dots, a_{n-1})$  est l'unique multi-charge telle que  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet = \bigoplus_{d' \in \mathbb{Z}} \Lambda^s \langle w + d'\delta \rangle$ .

2°) Soit  $\dot{w} \in \dot{\mathcal{P}}^s$ . Notons  $\dot{w} = d\dot{\delta} + \sum_{i=0}^{l-1} a_i \dot{\Lambda}_i$  avec  $a_0, \dots, a_{l-1}, d \in \mathbb{Z}$ . Alors  $\mathbf{s}_l := \theta_{l,n}^{-1}(a_0, \dots, a_{l-1})$  est l'unique multi-charge telle que  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] = \bigoplus_{d' \in \mathbb{Z}} \Lambda^s \langle \dot{w} + d'\dot{\delta} \rangle$ .

*Démonstration.* Là encore, il suffit de prouver le point 1°. D'après la proposition 3.21,  $\mathbf{s}_n := \varphi^{-1}(w \bmod \mathbb{Z}\delta)$  vérifie  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet = \bigoplus_{d' \in \mathbb{Z}} \Lambda^s \langle w + d'\delta \rangle$ , et la preuve de cette proposition montre qu'on a aussi  $\mathbf{s}_n = \theta_{n,l}^{-1}(a_0, \dots, a_{n-1})$ . L'unicité de la multi-charge qui convient résulte du fait que les  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ ,  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$  sont en somme directe.  $\square$

**Remarque 3.23** Soit  $u \in \Lambda^s$  un vecteur de poids  $\text{Wt}(u) \in \mathcal{P}^s$ . Alors le vecteur  $B_m.u$  ( $m \in \mathbb{Z}^*$ ) est clairement de poids  $\text{Wt}(u) + m(\delta + \dot{\delta})$ . Par conséquent, d'après la proposition 3.21 (ou le corollaire 3.22), chacun des espaces de Fock de niveau supérieur est stable sous l'action de  $\mathcal{H}$ .  $\diamond$

Terminons ce paragraphe par un résultat reliant les sous-espaces de poids des espaces de Fock  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  ( $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ ) aux sous-espaces de poids des espaces de Fock  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$  ( $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ ).

**Proposition 3.24** Soit  $(\mathbf{s}_l, w) \in \mathbb{Z}^l(s) \times \mathcal{P}^s$ . On suppose que  $w$  est un poids de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . Alors il existe un unique couple  $(\mathbf{s}_n, \dot{w}) \in \mathbb{Z}^n(s) \times \dot{\mathcal{P}}^s$  tel que  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w \rangle = \mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet \langle \dot{w} \rangle$ . De façon explicite, notons  $w = d\delta + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \Lambda_i$  avec  $a_0, \dots, a_{n-1}, d \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l)$ , et posons  $s_0 := n + s_l$ . Alors on a  $\mathbf{s}_n = \theta_{n,l}^{-1}(a_0, \dots, a_{n-1})$  et  $\dot{w} = d\dot{\delta} + \sum_{i=0}^{l-1} (s_i - s_{i+1}) \dot{\Lambda}_i$ .

*Démonstration.* Commençons par prouver l'unicité. Si  $(\mathbf{s}_n, \dot{w})$  et  $(\mathbf{t}_n, \dot{v})$  conviennent, alors on doit avoir  $\{0\} \subsetneq \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w \rangle = \mathbf{F}_p[\mathbf{t}_n]^\bullet \langle \dot{v} \rangle = \mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet \langle \dot{w} \rangle \subset \mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet \cap \mathbf{F}_p[\mathbf{t}_n]^\bullet$ . Puisque les  $\mathbf{F}_p[\mathbf{a}_n]^\bullet$ ,  $\mathbf{a}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$  sont en somme directe, on a  $\mathbf{t}_n = \mathbf{s}_n$ . Comme les sous-espaces de poids de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$  sont en somme directe, on doit aussi avoir  $\dot{v} = \dot{w}$ . Définissons maintenant  $\mathbf{s}_n$  et  $\dot{w}$  à l'aide des formules de l'énoncé et montrons que  $(\mathbf{s}_n, \dot{w})$  répond au problème. D'après le corollaire 3.22,  $\mathbf{s}_n$  est l'unique multi-charge telle que  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet = \bigoplus_{d' \in \mathbb{Z}} \Lambda^s \langle w + d'\delta \rangle$ ; en particulier, on a bien  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ . On a donc  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w \rangle \subset \bigoplus_{d' \in \mathbb{Z}} \Lambda^s \langle w + d'\delta \rangle = \mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ . Soit  $\lambda_l \in \Pi^l$  tel que  $|\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle \in \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w \rangle$ . Écrivons que  $w = \text{wt}(|\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle)$  et appliquons la formule ( $W_1$ ). En écrivant le vecteur ainsi obtenu dans la base  $(\delta, \Lambda_0, \dots, \Lambda_{n-1})$ , on trouve

$$\begin{cases} d &= -(\Delta(\mathbf{s}_l, n) + N_0), \\ a_i &= -2N_i + N_{i-1} + N_{i+1} + n_i \quad (0 \leq i \leq n-1), \end{cases}$$

où pour  $0 \leq i \leq n-1$ , on a posé  $N_i := N_i(\boldsymbol{\lambda}_l; \mathbf{s}_l; n)$ ,  $n_i := \#\{1 \leq j \leq l \mid s_j \equiv i \pmod n\}$ , ainsi que  $N_{-1} := N_{n-1}$  et  $N_n := N_0$ . (Notons que ce système possède au plus une solution, et donc exactement une; par conséquent, les  $N_i$  sont entièrement déterminés par  $w$  et  $\mathbf{s}_l$ .) L'égalité  $d = -(\Delta(\mathbf{s}_l, n) + N_0)$  et la formule  $(W_2)$  montrent qu'on a bien  $\text{wt}(|\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l\rangle) = \dot{w}$ , d'où  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle \subset \mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet \langle \dot{w} \rangle$ . On montre de même, en permutant les rôles de  $n$  et  $l$ , qu'il existe  $\mathbf{t}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  et  $v \in \mathcal{P}^s$  tels que  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet \langle \dot{w} \rangle \subset \mathbf{F}_q[\mathbf{t}_l]\langle v \rangle$ . Ainsi, on a  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle \subset \mathbf{F}_q[\mathbf{t}_l]\langle v \rangle$ . Par un argument analogue à celui utilisé au début de la preuve pour montrer l'unicité de  $(\mathbf{s}_n, \dot{w})$ , on tire  $\mathbf{t}_l = \mathbf{s}_l$  et  $v = w$ , d'où le résultat.  $\square$

**Exemple 3.25** Prenons  $n = 3$ ,  $l = 2$ ,  $\mathbf{s}_l = (1, 0)$  et  $w = -2\Lambda_0 + \Lambda_1 + 3\Lambda_2 - 2\delta$ . Alors  $|((1, 1), (1)), \mathbf{s}_l\rangle \in \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \cap \Lambda^s \langle w \rangle$ , donc  $w \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$ . On a  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle = \mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet \langle \dot{w} \rangle$  pour  $\mathbf{s}_n = (2, 1, -2)$  et  $\dot{w} = 2\dot{\Lambda}_0 + \dot{\Lambda}_1 - 2\dot{\delta}$ . De plus, en utilisant les relations  $(W_1)$  et  $(W_3)$ , on voit que pour tout  $|\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l\rangle = |\boldsymbol{\lambda}_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet \in \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle = \mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet \langle \dot{w} \rangle$ , on a  $N_0(\boldsymbol{\lambda}_l; \mathbf{s}_l; n) = 2$ ,  $N_1(\boldsymbol{\lambda}_l; \mathbf{s}_l; n) = 1$ ,  $N_2(\boldsymbol{\lambda}_l; \mathbf{s}_l; n) = 0$  et  $N_0(\boldsymbol{\lambda}_n; \mathbf{s}_n; l) = N_1(\boldsymbol{\lambda}_n; \mathbf{s}_n; l) = 0$  (ceci montre *a posteriori* que  $\dim \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle = 1$ ).  $\diamond$

### 3.4.2 Bases cristallines

Fixons  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ . Nous allons décrire de façon combinatoire la base cristalline inférieure à  $q = 0$  de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . Tout ce que nous allons exposer ici vaut aussi pour  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ ,  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^l(s)$ , à condition de permuter les rôles de  $n$  et  $l$  et de remplacer  $q$  par  $p$ .

Pour décrire la structure du graphe cristallin de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ , on introduit la notion de *bon*  $i$ -nœud. Soit  $\lambda \in \Pi^l$ , et  $0 \leq i \leq n-1$ . Rappelons que l'on peut ranger les  $i$ -nœuds de type  $A$  et de type  $R$  de  $(\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l)$  suivant l'ordre total  $\leq$  décrit au paragraphe 1.1.4. On obtient ainsi une liste de  $i$ -nœuds que l'on notera  $\beta_1 < \dots < \beta_r$ . Supprimons de cette liste de façon récursive autant de fois que possible tous les couples  $\beta_h < \beta_{h+1}$  tels que  $\beta_h$  est un nœud de type  $R$  et  $\beta_{h+1}$  est un nœud de type  $A$  de  $(\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l)$ . Il reste alors une liste  $\gamma_1 < \dots < \gamma_u < \delta_1 < \dots < \delta_v$ , où les  $\gamma_j$  sont des nœuds de type  $A$  de  $(\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l)$  et les  $\delta_k$  sont des nœuds de type  $R$  de  $(\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l)$  (éventuellement, on peut avoir  $u = 0$  ou  $v = 0$ ). Les nœuds  $\gamma_u$  et  $\delta_1$ , s'ils existent, sont alors appelés *bons*  $i$ -nœuds. Clairement, il ne peut exister qu'au plus un bon  $i$ -nœud de type  $A$  (*resp.* de type  $R$ ) de  $(\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l)$ . Dans l'exemple 1.8,  $(5, 1, 4)$  et  $(1, 5, 1)$  sont les bons 0-nœuds de  $(\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l)$ .

Rappelons que  $\mathbb{A} \subset \mathbb{Q}(q)$  désigne l'anneau des fractions rationnelles qui sont régulières à  $q = 0$ . Posons

$$\mathcal{L}[\mathbf{s}_l] := \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l} \mathbb{A}|\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l\rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{B}[\mathbf{s}_l] := \left\{ |\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l\rangle \pmod{q\mathcal{L}[\mathbf{s}_l]} \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l \right\}.$$

Nous admettrons le résultat suivant, énoncé dans [JMMO] et [FLOTW] dans le cas où  $\mathbf{s}_l$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{X}_{l,n} := \{(t_1, \dots, t_l) \in \mathbb{Z}^l \mid n-1 \geq t_1 \geq \dots \geq t_l \geq 0\}$ , et dans [U2] pour  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  quelconque.



**Théorème 3.26** ([JMMO],[FLOTW],[U2]) *Le couple  $(\mathcal{L}[\mathbf{s}_l], \mathcal{B}[\mathbf{s}_l])$  est une base cristalline inférieure à  $q = 0$  de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . De plus, le graphe cristallin  $\mathcal{B}[\mathbf{s}_l]$  contient la flèche*

$$|\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l\rangle \bmod q\mathcal{L}[\mathbf{s}_l] \xrightarrow{i} |\boldsymbol{\mu}_l, \mathbf{s}_l\rangle \bmod q\mathcal{L}[\mathbf{s}_l]$$

si et seulement si  $(\boldsymbol{\mu}_l, \mathbf{s}_l)$  est obtenu à partir de  $(\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l)$  en ajoutant un bon  $i$ -nœud.  $\square$

Pour simplifier les notations, nous poserons

$$[\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l] := |\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l\rangle \bmod q\mathcal{L}[\mathbf{s}_l] \in \mathcal{B}[\mathbf{s}_l] \quad (\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l).$$

Soit  $\mathcal{B}[\mathbf{s}_l]^\circ$  la composante connexe de  $\mathcal{B}[\mathbf{s}_l]$  qui contient le sommet  $[\emptyset_l, \mathbf{s}_l]$ . D'après [Kas2, Theorem 3],  $\mathcal{B}[\mathbf{s}_l]^\circ$  est isomorphe au graphe cristallin du sous- $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module irréductible  $\mathbf{M}_q[\mathbf{s}_l] \subset \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . (Notons que ce graphe coïncide avec le graphe cristallin du  $U_q'(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module irréductible  $U_q'(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot [\emptyset_l, \mathbf{s}_l]$ .) La figure 3.1 montre une partie de  $\mathcal{B}[\mathbf{s}_l]^\circ$  pour  $n = 2$ ,  $l = 3$  et  $\mathbf{s}_l = (3, 3, 3)$ . Sur la figure, le sommet  $[\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l]$  ( $\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l$ ) est représenté à l'aide du diagramme de Young de  $\boldsymbol{\lambda}_l$ , et le symbole  $\cdot$  désigne la partition vide.

Introduisons l'ensemble

$$\Pi^l[\mathbf{s}_l, n]^\circ := \left\{ \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l \mid [\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l] \in \mathcal{B}[\mathbf{s}_l]^\circ \right\}.$$

Lorsque  $\mathbf{s}_l \in \mathcal{X}_{l,n}$ , les éléments de  $\Pi^l[\mathbf{s}_l, n]^\circ$  sont appelés *multi-partitions de Foda-Leclerc-Okado-Thibon-Welsh*, ou en abrégé, *multi-partitions de FLOTW* (voir [FLOTW],[Ja]). Il faut mettre en garde le lecteur que les notations adoptées dans ces articles diffèrent des nôtres selon la transformation qui consiste à renverser l'ordre des composantes de  $\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l$  et  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l$ . Il est possible de décrire les multi-partitions de FLOTW de manière non récursive. Pour cela, donnons la définition suivante. Soit  $(\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{v}_l) \in \Pi^l \times \mathbb{Z}^l$ . Notons  $\boldsymbol{\lambda}_l = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(l)})$  les composantes de  $\boldsymbol{\lambda}_l$  et  $\mathbf{v}_l = (v_1, \dots, v_l)$  les composantes de  $\mathbf{v}_l$ . On dit que  $(\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{v}_l)$  est *cylindrique* si  $\mathbf{v}_l \in \mathcal{X}_{l,n}$  et si pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\lambda_i^{(b+1)} \geq \lambda_{i+v_b-v_{b+1}}^{(b)} \quad (1 \leq b \leq l-1) \quad \text{et} \quad \lambda_i^{(1)} \geq \lambda_{i+n+v_l-v_1}^{(l)}.$$

Nous admettrons le résultat suivant.

**Théorème 3.27** ([JMMO],[FLOTW]) *Supposons que  $\mathbf{s}_l \in \mathcal{X}_{l,n}$ . Soit  $\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l$ . Alors  $\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l[\mathbf{s}_l, n]^\circ$  si et seulement si  $(\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l)$  est cylindrique et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , l'application  $\{(i, k, b) \in \mathbb{Z}^3 \mid (i, k, b) \in \partial\boldsymbol{\lambda}_l\} \rightarrow \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ ,  $\gamma \mapsto \text{res}_n(\gamma; \mathbf{s}_l)$  n'est pas surjective.  $\square$*

**Remarque 3.28** Si  $l = 1$  et  $\mathbf{s}_l \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , alors ce théorème montre que  $\Pi^l[\mathbf{s}_l, n]^\circ$  est l'ensemble des partitions  $n$ -régulières.  $\diamond$

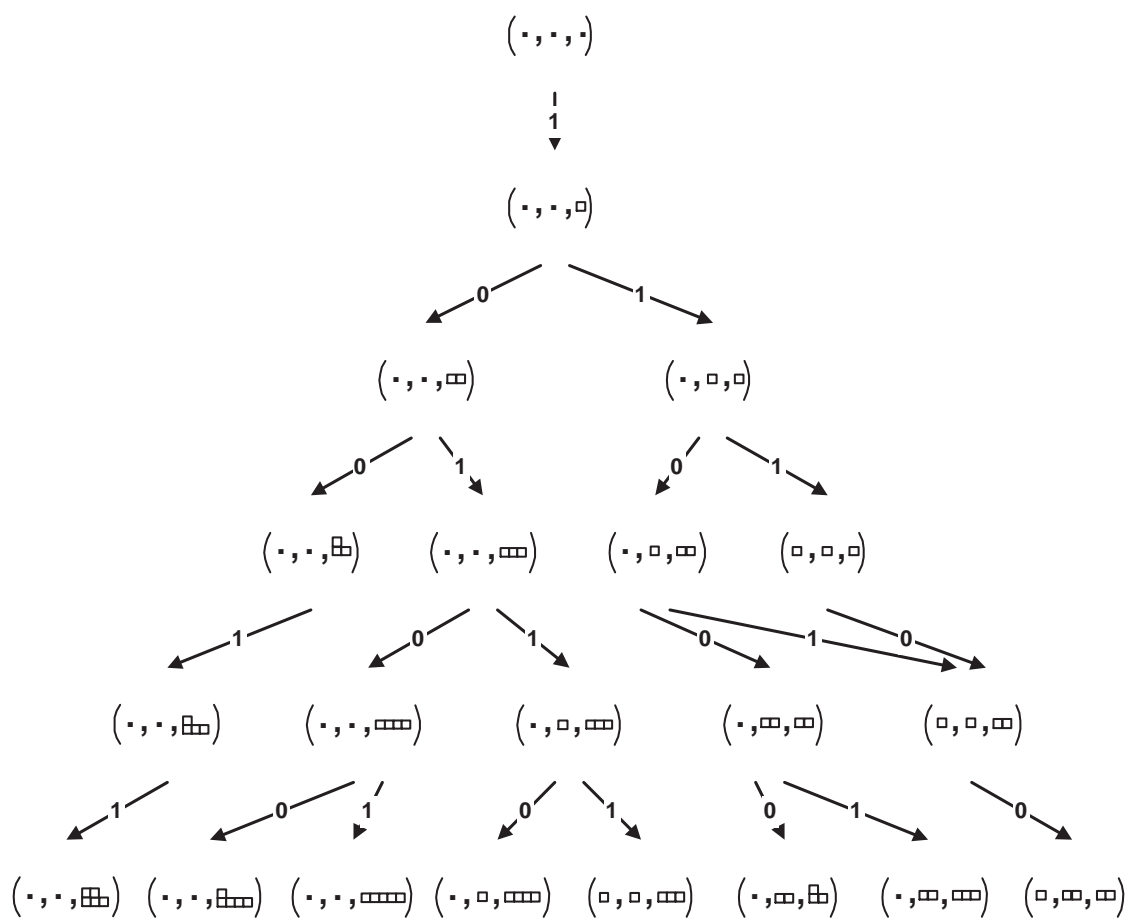


FIG. 3.1 – Une partie du graphe cristallin de  $M_q[s_l]$  pour  $n = 2$ ,  $l = 3$  et  $s_l = (1,1,1)$ .

**Remarque 3.29** Revenons au cas où  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  est quelconque. Soit  $\mathbf{v}_l \in \mathcal{X}_{l,n}$  l'unique élément tel que  $U'_q(\widehat{\mathbf{s}}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$  soit isomorphe à  $U'_q(\widehat{\mathbf{s}}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{v}_l\rangle$  (voir la remarque 3.10). Cet isomorphisme induit un isomorphisme de cristaux  $\mathcal{B}[\mathbf{s}_l]^\circ \cong \mathcal{B}[\mathbf{v}_l]^\circ$  et donc une bijection  $\Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ \rightarrow \Pi^l[\mathbf{s}_l, n]^\circ$  entre les sommets des deux graphes cristallins. On peut calculer cette bijection en remontant de  $[\lambda_l, \mathbf{v}_l]$  vers le vecteur  $[\emptyset_l, \mathbf{s}_l]$  dans  $\mathcal{B}[\mathbf{v}_l]^\circ$ , puis en appliquant le chemin inverse au vecteur  $[\emptyset_l, \mathbf{s}_l]$  dans  $\mathcal{B}[\mathbf{s}_l]^\circ$ . Il semble malheureusement difficile de décrire cette bijection de façon directe.  $\diamond$

### 3.4.3 Une involution de $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . Bases canoniques d'Uglov de $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$

#### 3.4.3.1 Une involution de $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$

Définissons une graduation sur  $\Lambda^s$  en posant  $\deg |\lambda, s\rangle := |\lambda|$  ( $\lambda \in \Pi$ ). On prouve le lemme suivant par récurrence sur  $t$  à partir de la proposition 2.13.

**Lemme 3.30 ([U2], Lemma 4.10)** *Soit  $\mathbf{k} \in P^{++}(s)$ . Alors pour tout  $t \geq r \geq \deg(u_{\mathbf{k}})$ , on a*

$$\overline{u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_r} \wedge u_{k_{r+1}} \wedge \cdots \wedge u_{k_t}} = \overline{u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_r} \wedge u_{k_{r+1}} \wedge \cdots \wedge u_{k_t}}.$$

□

Il découle de ce lemme que pour  $\mathbf{k} \in P^{++}(s)$ , la formule

$$\overline{u_{\mathbf{k}}} := \overline{u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_r} \wedge u_{k_{r+1}} \wedge u_{k_{r+2}} \wedge \cdots} \quad (r \geq \deg(u_{\mathbf{k}}))$$

permet de définir correctement un automorphisme involutif  $\overline{\phantom{x}}$  de  $\Lambda^s$ . On peut montrer que cette involution est compatible avec les 3 actions sur  $\Lambda^s$  étudiées au paragraphe 3.2 dans le sens suivant.

**Proposition 3.31 ([U2], Proposition 4.12)** *Pour tout  $u \in U'_q(\widehat{\mathbf{s}}_l)$ ,  $\dot{u} \in U'_p(\widehat{\mathbf{s}}_l)$ ,  $m < 0$ ,  $v \in \Lambda^s$ , on a*

$$\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}, \quad \overline{\dot{u} \cdot v} = \overline{\dot{u}} \cdot \overline{v} \quad \text{et} \quad \overline{B_m \cdot v} = B_m \cdot \overline{v}.$$

□

L'involution de  $\Lambda^s$  préserve le poids  $\text{Wt}$  des  $q$ -produits extérieurs. Par conséquent, les espaces  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ ,  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  et  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ ,  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$  sont chacun laissés stables par l'involution. Soit  $(\boldsymbol{\mu}_l, \mathbf{s}_l)$  une  $l$ -multi-partition chargée. Écrivons

$$\overline{|\boldsymbol{\mu}_l, \mathbf{s}_l\rangle} = \sum_{\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l} a_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l; \mathbf{s}_l}(q) |\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l\rangle,$$

avec les  $a_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l; \mathbf{s}_l}(q) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ , et notons  $A_{\mathbf{s}_l}(q) := (a_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l; \mathbf{s}_l}(q))_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l \in \Pi^l}$  la matrice de l'involution de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . Puisque l'involution laisse stable les sous-espaces de poids de  $\Lambda^s$ , la formule  $(W_1)$  montre que  $a_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l; \mathbf{s}_l}(q) \neq 0 \Rightarrow |\boldsymbol{\lambda}_l| = |\boldsymbol{\mu}_l|$ .

Soient  $\lambda_l, \mu_l \in \Pi^l$ ,  $s_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  et  $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in P^{++}(s)$  tels que  $u_{\mathbf{k}} = |\lambda_l, s_l\rangle$  et  $u_{\mathbf{l}} = |\mu_l, s_l\rangle$ . Par définition de l'involution de  $\Lambda^s$ , on a

$$a_{\lambda_l, \mu_l; s_l}(q) = a_{\mathbf{k}[r], \mathbf{l}[r]}^{(r)}(q),$$

où  $r$  est un entier tel que  $r \geq \max(\deg(u_{\mathbf{k}}), \deg(u_{\mathbf{l}}))$ ,  $\mathbf{k}[r] := (k_1, \dots, k_r)$ ,  $\mathbf{l}[r] := (l_1, \dots, l_r)$ , et les coefficients  $a_{\mathbf{k}[r], \mathbf{l}[r]}^{(r)}(q)$  sont ceux de la matrice de l'involution de  $\Lambda_q^r V$  définie au paragraphe 2.4.1. Par conséquent, la proposition 2.17 implique celle-ci.

**Proposition 3.32 ([U2])** Soient  $\lambda_l, \mu_l \in \Pi^l$ ,  $s_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  et  $\lambda, \mu \in \Pi$  tels que  $|\lambda, s\rangle = |\lambda_l, s_l\rangle$  et  $|\mu, s\rangle = |\mu_l, s_l\rangle$ . Alors  $a_{\lambda_l, \mu_l; s_l}(q) \neq 0 \Rightarrow \lambda \triangleleft \mu$  au sens de l'ordre partiel de dominance sur les partitions. De plus,  $a_{\lambda_l, \lambda_l; s_l}(q) = 1$ . Par conséquent, la matrice  $A_{s_l}(q)$  est unitriangulaire inférieure pour un ordre  $\leq$  donné par l'ordre lexicographique inverse sur les partitions.  $\square$

**Remarque 3.33** Soit  $s_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ . La formule  $(W_1)$  montre que le sous-espace de  $\mathbf{F}_q[s_l]$  de poids  $\text{wt}(|\emptyset_l, s_l\rangle)$  est de dimension 1. La proposition précédente et le fait que l'involution  $-$  préserve les sous-espaces de poids de  $\mathbf{F}_q[s_l]$  montrent alors que le vecteur  $|\emptyset_l, s_l\rangle$  est un point fixe de cette involution. De même, les vecteurs  $|\emptyset_n, s_n\rangle^\bullet$  ( $s_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ ) sont des points fixes de cette involution.  $\diamond$

### 3.4.3.2 Bases canoniques d'Uglov de $\mathbf{F}_q[s_l]$

Puisque la matrice  $A_{s_l}(q)$  est unitriangulaire, on peut définir, comme au paragraphe 2.4.2, des bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[s_l]$ . Définissons deux réseaux par

$$\mathcal{L}^+[s_l] := \bigoplus_{\lambda_l \in \Pi^l} \mathbb{Z}[q]|\lambda_l, s_l\rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^-[s_l] := \bigoplus_{\lambda_l \in \Pi^l} \mathbb{Z}[q^{-1}]|\lambda_l, s_l\rangle.$$

**Théorème 3.34 ([U2])** Soit  $s_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ . Alors il existe une unique base

$$\left\{ G^+(\lambda_l, s_l) \mid \lambda_l \in \Pi^l \right\} \quad \left( \text{resp.} \quad \left\{ G^-(\lambda_l, s_l) \mid \lambda_l \in \Pi^l \right\} \right)$$

de  $\mathbf{F}_q[s_l]$  satisfaisant les deux conditions suivantes :

- (i)  $\overline{G^+(\lambda_l, s_l)} = G^+(\lambda_l, s_l)$  (resp.  $\overline{G^-(\lambda_l, s_l)} = G^-(\lambda_l, s_l)$ ),
- (ii)  $G^+(\lambda_l, s_l) \equiv |\lambda_l, s_l\rangle \pmod{q\mathcal{L}^+[s_l]}$  (resp.  $G^-(\lambda_l, s_l) \equiv |\lambda_l, s_l\rangle \pmod{q^{-1}\mathcal{L}^-[s_l]}$ ).

$\square$

*Démonstration.* Nous ne donnons la preuve que pour la base  $\{G^+(\lambda_l, s_l) \mid \lambda_l \in \Pi^l\}$ , la preuve pour la base  $\{G^-(\lambda_l, s_l) \mid \lambda_l \in \Pi^l\}$  étant analogue. Fixons  $m \in \mathbb{N}$ . Rappelons que  $\Pi_m^l$  désigne l'ensemble des  $l$ -multi-partitions de  $m$  (cf. paragraphe 1.1.1). On introduit sur  $\Pi_m^l$  un ordre partiel  $\preceq$  comme suit. Soient  $\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l$ , et  $\lambda, \mu \in \Pi$  tels que  $(\lambda, s) = \tau_l^{-1}(\lambda_l, s_l)$  et  $(\mu, s) = \tau_l^{-1}(\mu_l, s_l)$ . Par définition, on a  $\lambda_l \preceq \mu_l$  si  $\mu$  domine  $\lambda$ . Considérons à présent un ordre total  $\leq$  sur  $\Pi_m^l$  raffinant  $\preceq$ , et notons  $\lambda_l^{(1)} \leq \dots \leq \lambda_l^{(r)}$  la liste des  $l$ -multi-partitions de  $m$  rangées dans cet ordre.

Nous allons à présent construire les vecteurs  $G_k := G^+(\lambda_l^{(k)}, s_l)$  ( $1 \leq k \leq r$ ) par récurrence sur  $k$ . Notons pour simplifier  $S_k := |\lambda_l^{(k)}, s_l\rangle$  ( $1 \leq k \leq r$ ). Puisque la matrice  $A_{s_l}(q)$  est unitriangulaire, on a  $\overline{S_1} = S_1$ , donc on peut prendre  $G_1 := S_1$ . Supposons avoir construit les vecteurs  $G_1, \dots, G_k$  avec  $1 \leq k \leq r-1$ , et que ces vecteurs sont de la forme

$$(*) : \quad G_j = S_j + \sum_{i=1}^{j-1} \Delta_{i,j}(q) S_i \quad (1 \leq j \leq k),$$

avec les  $\Delta_{i,j}(q) \in q\mathbb{Z}[q]$  ( $1 \leq i < j \leq k$ ). Nous allons chercher  $G_{k+1}$  sous la forme

$$G_{k+1} = S_{k+1} + \sum_{i=1}^k \alpha_i(q) G_i,$$

où les coefficients  $\alpha_i(q)$  sont dans  $q\mathbb{Z}[q]$  ( $1 \leq i \leq k$ ). Puisque la matrice  $A_{s_l}(q)$  est unitriangulaire, on a  $\overline{S_{k+1}} - S_{k+1} \in \sum_{i=1}^k \mathbb{Z}[q, q^{-1}] S_i$ . En résolvant un système linéaire dont la matrice associée est unitriangulaire d'ordre  $k$ , on trouve des coefficients  $\beta_i(q) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  tels que

$$\overline{S_{k+1}} = S_{k+1} + \sum_{i=1}^k \beta_i(q) G_i.$$

En appliquant l'involution  $-$  aux deux membres de cette égalité, on doit avoir pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $\beta_i(q^{-1}) = -\beta_i(q)$ . Par conséquent, il existe des polynômes  $\alpha_i(q) \in q\mathbb{Z}[q]$  tels que

$$\beta_i(q) = \alpha_i(q) - \alpha_i(q^{-1}) \quad (1 \leq i \leq k).$$

On remarque alors que le vecteur  $G_{k+1} := S_{k+1} + \sum_{i=1}^k \alpha_i(q) G_i$  vérifie  $\overline{G_{k+1}} = G_{k+1}$  et  $G_{k+1} - S_{k+1} \in q\mathcal{L}^+[s_l]$ . De plus, l'expression de  $G_{k+1}$  dans la base des  $S_i$  est bien de la forme  $(*)$ , ce qui achève la récurrence. Ceci montre l'existence de la base  $\{G^+(\lambda_l, s_l) \mid \lambda_l \in \Pi^l\}$ . (Il s'agit bien d'une base, car la matrice donnant l'expression de ces vecteurs dans la base standard de  $\mathbf{F}_q[s_l]$  est unitriangulaire.)

Montrons à présent l'unicité de cette base. Il faut montrer que si  $x \in q\mathcal{L}^+[s_l]$  est tel que  $\overline{x} = x$ , alors on a  $x = 0$ . Écrivons  $x = \sum_{\mu_l \in \Pi^l} \theta_{\mu_l}(q) |\mu_l, s_l\rangle$ , avec  $\theta_{\mu_l}(q) \in q\mathbb{Z}[q]$  ( $\mu_l \in \Pi^l$ ). Fixons sur  $\Pi^l$  un ordre total  $\leq$  tel que  $\lambda_l > \mu_l \Rightarrow a_{\lambda_l, \mu_l; s_l}(q) = 0$ . Si  $x \neq 0$ , soit  $\lambda_l \in \Pi^l$  la plus grande  $l$ -multi-partition (pour cet ordre) telle que  $\theta_{\lambda_l}(q) \neq 0$ . Compte tenu de l'unitriangularité de la matrice  $A_{s_l}(q)$  et de l'égalité  $\overline{x} = x$ , on doit avoir  $\theta_{\lambda_l}(q^{-1}) = \theta_{\lambda_l}(q)$ , ce qui est impossible car  $\theta_{\lambda_l}(q) \in q\mathbb{Z}[q] \setminus \{0\}$ .  $\square$

**Remarque 3.35** Nous avons tenu à donner la preuve du théorème précédent pour mettre en valeur le fait que ces bases peuvent être calculées explicitement de façon très simple si on connaît la matrice  $A_{s_l}(q)$  de l'involution de  $\mathbf{F}_q[s_l]$  : il suffit en effet de résoudre des systèmes linéaires dont les matrices sont unitriangulaires. La matrice  $A_{s_l}(q)$  peut à son tour être calculée grâce à la proposition 2.16 et au lemme 3.30. Nous en déduisons un algorithme simple permettant de calculer les bases canoniques des espaces de Fock en utilisant les relations de redressement.  $\diamond$

**Définition 3.36** Les bases  $\{G^+(\lambda_l, \mathbf{s}_l) \mid \lambda_l \in \Pi^l\}$  et  $\{G^-(\lambda_l, \mathbf{s}_l) \mid \lambda_l \in \Pi^l\}$  sont appelées *bases canoniques d'Uglov* de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . On peut définir de même des bases canoniques d'Uglov

$$\{G^+(\lambda_n, \mathbf{s}_n)^\bullet \mid \lambda_n \in \Pi^n\} \quad \text{et} \quad \{G^-(\lambda_n, \mathbf{s}_n)^\bullet \mid \lambda_n \in \Pi^n\}$$

de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$  ( $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ ).

Définissons les coefficients matriciels  $\Delta_{\lambda_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}^+(q), \Delta_{\lambda_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}^-(q) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  ( $\lambda_l, \mu_l \in \Pi^l$ ) par

$$G^+(\mu_l, \mathbf{s}_l) = \sum_{\lambda_l \in \Pi^l} \Delta_{\lambda_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}^+(q) \cdot |\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle \quad \text{et} \quad G^-(\mu_l, \mathbf{s}_l) = \sum_{\lambda_l \in \Pi^l} \Delta_{\lambda_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}^-(q) \cdot |\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle \quad (\mu_l \in \Pi^l),$$

et notons  $\Delta_{\mathbf{s}_l}^\epsilon(q) := (\Delta_{\lambda_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}^\epsilon(q))_{\lambda_l, \mu_l \in \Pi^l}$  ( $\epsilon \in \{+, -\}$ ) les matrices donnant les bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ .  $\diamond$

**Exemple 3.37** Prenons  $n = 3, l = 2, \mathbf{s}_l = (3, 6)$  et  $w = 2\Lambda_0 - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)$ . Nous allons calculer les bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$  à partir de la matrice de l'involution  $A(q)$  de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$ . À l'aide des relations de redressement, on peut montrer que

$$A(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q - q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -q^{-1}(q - q^{-1}) & q - q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q - q^{-1} & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ (q - q^{-1})^2 & q - q^{-1} & 0 & q - q^{-1} & 1 & \cdot \\ -q^{-1}(q - q^{-1})^2 & (q - q^{-1})^2 & q - q^{-1} & -q^{-1}(q - q^{-1}) & q - q^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (\emptyset, (3)) \\ (\emptyset, (2, 1)) \\ (\emptyset, (1, 1, 1)) \\ (3, \emptyset) \\ (2, 1, \emptyset) \\ ((1, 1, 1), \emptyset) \end{matrix}$$

(voir aussi le paragraphe 5.3.2). Ici les points situés au-dessus de la diagonale représentent des zéros, et les vecteurs écrits à droite de la matrice sont les  $l$ -multi-partitions indexant la base standard de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$ . Calculons la base  $G^+$ . Reprenons les notations de la preuve du théorème précédent. On a donc

$$\begin{aligned} S_1 &= |((1, 1, 1), \emptyset), \mathbf{s}_l\rangle, & S_2 &= |((2, 1), \emptyset), \mathbf{s}_l\rangle, & S_3 &= |((3), \emptyset), \mathbf{s}_l\rangle \\ S_4 &= |(\emptyset, (1, 1, 1)), \mathbf{s}_l\rangle, & S_5 &= |(\emptyset, (2, 1)), \mathbf{s}_l\rangle, & S_6 &= |(\emptyset, (3)), \mathbf{s}_l\rangle \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G_1 &= G^+(((1, 1, 1), \emptyset), \mathbf{s}_l), & G_2 &= G^+(((2, 1), \emptyset), \mathbf{s}_l), & G_3 &= G^+(((3), \emptyset), \mathbf{s}_l) \\ G_4 &= G^+((\emptyset, (1, 1, 1)), \mathbf{s}_l), & G_5 &= G^+((\emptyset, (2, 1)), \mathbf{s}_l), & G_6 &= G^+((\emptyset, (3)), \mathbf{s}_l). \end{aligned}$$

On a  $G_1 = S_1$ . Cherchons  $a(q) \in q\mathbb{Z}[q]$  tel que  $G_2 = S_2 + a(q)G_1$ . L'expression de la matrice  $A(q)$  montre que

$$\overline{S_2} = S_2 + (q - q^{-1})S_1 = S_2 + (q - q^{-1})G_1.$$

D'après la preuve du théorème 3.34, on a  $q - q^{-1} = a(q) - a(q^{-1})$ , d'où  $a(q) = q$  et

$$G_2 = S_2 + qS_1.$$

Cherchons  $b(q), c(q) \in q\mathbb{Z}[q]$  tels que  $G_3 = S_3 + b(q)G_2 + c(q)G_1$ . L'expression de la matrice  $A(q)$  et la résolution d'un système unitriangulaire d'ordre 2 montrent que

$$\begin{aligned} \overline{S_3} &= S_3 + (q - q^{-1})S_2 - q^{-1}(q - q^{-1})S_1 \\ &= S_3 + (q - q^{-1})(G_2 - qG_1) - q^{-1}(q - q^{-1})G_1 \\ &= S_3 + (q - q^{-1})G_2 + (q^{-2} - q^2)G_1. \end{aligned}$$

D'après la preuve du théorème 3.34, on a  $q - q^{-1} = b(q) - b(q^{-1})$  et  $q^{-2} - q^2 = c(q) - c(q^{-1})$ , d'où  $b(q) = q$  et  $c(q) = -q^2$ . Par conséquent, on a

$$G_3 = S_3 + qG_2 - q^2G_1 = S_3 + qS_2.$$

En calculant de même  $G_4, G_5$  et  $G_6$ , on obtient la matrice de passage de la base  $(S_1, \dots, S_6)$  vers la base  $(G_1, \dots, G_6)$ , qu'on note  $\Delta^+(q)$ . On trouve

$$\Delta^+(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & 0 & q & 1 & \cdot \\ 0 & q^2 & q & 0 & q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (\emptyset, (3)) \\ (\emptyset, (2,1)) \\ (\emptyset, (1,1,1)) \\ ((3), \emptyset) \\ ((2,1), \emptyset) \\ ((1,1,1), \emptyset) \end{matrix}.$$

On calcule de même la matrice  $\Delta^-(q)$  donnant la base  $G^-$  de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$ . On trouve cette fois

$$\Delta^-(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^{-2} & -q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -q^{-1} & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ q^{-2} & -q^{-1} & 0 & -q^{-1} & 1 & \cdot \\ -q^{-3} & q^{-2} & -q^{-1} & q^{-2} & -q^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (\emptyset, (3)) \\ (\emptyset, (2,1)) \\ (\emptyset, (1,1,1)) \\ ((3), \emptyset) \\ ((2,1), \emptyset) \\ ((1,1,1), \emptyset) \end{matrix}.$$

◇

Soit  $\epsilon \in \{+, -\}$ ,  $\lambda_l, \mu_l \in \Pi^l$ ,  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  et  $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in P^{++}(s)$  tels que  $u_{\mathbf{k}} = |\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle$  et  $u_{\mathbf{l}} = |\mu_l, \mathbf{s}_l\rangle$ . Rappelons que l'on a  $a_{\lambda_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}(q) = a_{\mathbf{k}^{(r)}, \mathbf{l}^{(r)}}^{(r)}(q)$  dès que  $r$  est suffisamment grand. Ceci implique que  $\Delta_{\lambda_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}^\epsilon(q) = \Delta_{\mathbf{k}^{(r)}, \mathbf{l}^{(r)}}^{\epsilon, r}(q)$  dès que  $r$  est suffisamment grand. Par conséquent, les résultats vus pour les bases canoniques de  $\Lambda_q^r V$  au paragraphe 2.4.2 sont encore vrais pour les bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . En particulier, d'après le théorème 2.22, les coefficients de  $\Delta_{\mathbf{s}_l}^+(q)$  (*resp.*  $\Delta_{\mathbf{s}_l}^-(q)$ ) s'expriment à l'aide des polynômes de Kazhdan-Lusztig de  $\widehat{\mathfrak{S}}_r$ . D'après [KT], ces coefficients sont donc dans  $\mathbb{N}[q]$  (*resp.*  $\mathbb{N}[p]$ ).

Nous allons à présent énoncer sans démonstration une importante formule d'inversion. Cette formule provient d'une dualité entre les deux bases canoniques d'Uglov de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  (voir [LT] dans le cas où  $l = 1$  et [U2] dans le cas général). Pour  $\lambda_l \in \Pi^l$ , rappelons que  $\lambda'_l$  désigne la multi-partition conjuguée de  $\lambda_l$  (cf. paragraphe 1.1.1). Pour  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}$ , posons  $\mathbf{s}'_l := (-s_l, \dots, -s_1)$ .

**Théorème 3.38** ([U2], Theorem 5.15) *Pour  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l$ ,  $\lambda_l, \mu_l \in \Pi^l$ , on a*

$$\sum_{\nu_l \in \Pi^l} \Delta_{\nu'_l, \lambda'_l; \mathbf{s}'_l}^-(q^{-1}) \Delta_{\nu_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}^+(q) = \delta_{\lambda_l, \mu_l}.$$

□

### 3.4.3.3 Liens entre les bases canoniques de $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ et les bases globales de Kashiwara

Considérons les ensembles (déjà définis)

$$L_0 = \mathcal{L}[\mathbf{s}_l] := \bigoplus_{\lambda_l \in \Pi^l} \mathbb{A}|\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle, \quad B_0 = \mathcal{B}[\mathbf{s}_l] := \left\{ |\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle \bmod q\mathcal{L}[\mathbf{s}_l] \mid \lambda_l \in \Pi^l \right\},$$

ainsi que les ensembles

$$L_\infty := \overline{\mathcal{L}[\mathbf{s}_l]} = \bigoplus_{\lambda_l \in \Pi^l} \overline{\mathbb{A}|\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle}, \quad B_\infty := \left\{ \overline{|\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle} \bmod q^{-1}L_\infty \mid \lambda_l \in \Pi^l \right\} \quad \text{et}$$

$$\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]_{\mathbb{Q}} := \bigoplus_{\lambda_l \in \Pi^l} \mathbb{Q}[q, q^{-1}]|\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle.$$

Nous allons maintenant montrer que  $(L_0, B_0, L_\infty, B_\infty, \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]_{\mathbb{Q}}, -)$  satisfait les conditions du théorème 1.26. D'après le théorème 3.26,  $(L_0, B_0)$  est une base cristalline inférieure à  $q = 0$  de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . On en déduit, à l'aide de la proposition 3.31, que  $(L_\infty, B_\infty)$  est une base cristalline inférieure à  $q = \infty$  de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . On a clairement l'isomorphisme  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \cong \mathbb{Q}(q) \otimes_{\mathbb{Q}[q, q^{-1}]} \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]_{\mathbb{Q}}$ . De plus  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]_{\mathbb{Q}}$  est stable sous l'action de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)_{\mathbb{Q}}$  ([AM, Lemma 2.7]), et puisque la matrice  $A_{\mathbf{s}_l}(q)$  est à coefficients dans  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ ,  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]_{\mathbb{Q}}$  est aussi stable sous l'action de l'involution  $-$ . Par définition, on a  $\overline{L_0} = L_\infty$ , donc la condition (b) du théorème 1.26 est vérifiée. Par ailleurs, l'involution  $-$  de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  satisfait clairement la condition (a). Il reste à vérifier la condition (c). Rappelons que la matrice  $A_{\mathbf{s}_l}(q)$  est à coefficients dans  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  et que  $A_{\mathbf{s}_l}(1)$  est la matrice identité. Soit  $\lambda_l \in \Pi^l$ . On a donc

$$\overline{|\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle} - |\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle = \sum_{\mu_l \in \Pi^l} (a_{\lambda_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}(q) - a_{\lambda_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}(1)) |\mu_l, \mathbf{s}_l\rangle.$$

Fixons  $\mu_l \in \Pi^l$ , et considérons le polynôme de Laurent

$$f(q) := a_{\lambda_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}(q) - a_{\lambda_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}(1) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}].$$



On a  $f(1) = 0$ , donc  $q - 1$  divise  $f(q)$  dans  $\mathbb{Q}(q)$ . De plus, le polynôme  $(q - 1) \in \mathbb{Z}[q]$  est unitaire, donc  $q - 1$  divise  $f(q)$  dans  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ , soit encore  $f(q) \in (q - 1)\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ . Compte tenu de l'expression du vecteur  $|\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle - |\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle$  donnée ci-dessus, ce qui précède montre que ce vecteur appartient bien à  $(q - 1)\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]_{\mathbb{Q}}$ . Par conséquent, la condition (c) est aussi vérifiée. Considérons maintenant le vecteur  $G^+(\lambda_l, \mathbf{s}_l) \in \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  ( $\lambda_l \in \Pi^l$ ). Par définition, on a  $G^+(\lambda_l, \mathbf{s}_l) \in L_0$ . De plus, la matrice  $\Delta_{\mathbf{s}_l}^+(q)$  est par définition à coefficients dans  $\mathbb{Z}[q]$ , donc  $G^+(\lambda_l, \mathbf{s}_l) \in \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]_{\mathbb{Q}}$ . Enfin, le vecteur  $G^+(\lambda_l, \mathbf{s}_l)$  est par définition  $-$ -invariant, donc on peut lui appliquer le théorème 1.26. Nous avons ainsi démontré le résultat suivant.

**Théorème 3.39 ([U2])** *La base canonique  $\{G^+(\lambda_l, \mathbf{s}_l) \mid \lambda_l \in \Pi^l\}$  est une base globale inférieure (au sens de [Kas3]) du  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module intégrable  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ .  $\square$*

On peut montrer de même que  $\{G^-(\lambda_n, \mathbf{s}_n)^\bullet \mid \lambda_n \in \Pi^n\}$  est une base globale inférieure du  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ -module intégrable  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ . Enfin, on peut montrer [U2] que

$$\left\{ G^+(\lambda_l, \mathbf{s}_l) \mid \lambda_l \in \Pi^l[\mathbf{s}_l, n]^\circ \right\}$$

(resp.  $\{G^-(\lambda_n, \mathbf{s}_n)^\bullet \mid \lambda_n \in \Pi^n[\mathbf{s}_n, l]^\circ\}$ ) est une base globale inférieure du  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module irréductible  $\mathbf{M}_q[\mathbf{s}_l]$  (resp. du  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ -module irréductible  $\mathbf{M}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ ).

## Chapitre 4

# Comparaison de bases canoniques d'espaces de Fock de niveau supérieur

Soient  $w$  et  $w'$  sont deux poids du  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  conjugués sous l'action du groupe de Weyl. Dans ce chapitre, nous cherchons des conditions sur  $w$  et  $w'$  qui garantissent que les matrices de transition des bases d'Uglov dans les sous-espaces de poids  $w$  et  $w'$  sont égales. Nous obtenons alors une généralisation en niveau supérieur d'un théorème de [LM]. De manière duale, si  $\mathbf{s}_l$  et  $\mathbf{t}_l$  sont deux multi-charges congrues l'une à l'autre modulo  $n$ , nous cherchons des conditions qui assurent que les matrices de transition des bases canoniques de sous-espaces de poids de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  et  $\mathbf{F}_q[\mathbf{t}_l]$  coïncident. Nous montrons en particulier que les matrices de transition des bases canoniques de certains sous-espaces de poids de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  ne dépendent pas de la multi-charge  $\mathbf{s}_l$ , pourvu que celle-ci soit très dominante.

Pour  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ ,  $w \in \mathcal{P}^s$ , on pose

$$\Pi^l(\mathbf{s}_l; w) := \left\{ \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l \mid |\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l\rangle \in \Lambda^s \langle w \rangle \right\}.$$

On définit de façon similaire  $\Pi^n(\mathbf{s}_n; \dot{w})$  pour  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^l(s)$ ,  $\dot{w} \in \dot{\mathcal{P}}^s$ .

**Définition 4.1** Soient  $\mathbf{s}_l, \mathbf{t}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ ,  $w \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$  et  $w' \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{t}_l])$ . On dit que les bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w \rangle$  et  $\mathbf{F}_q[\mathbf{t}_l] \langle w' \rangle$  sont *semblables* s'il existe une bijection

$$\pi : \Pi^l(\mathbf{s}_l; w) \rightarrow \Pi^l(\mathbf{t}_l; w')$$

telle que pour tout  $\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)$ ,  $\epsilon \in \{+, -\}$ , on a

$$\Delta_{\pi(\boldsymbol{\lambda}_l), \pi(\boldsymbol{\mu}_l); \mathbf{s}_l}^\epsilon(q) = \Delta_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l; \mathbf{s}_l}^\epsilon(q).$$

Autrement dit, les bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w \rangle$  et  $\mathbf{F}_q[\mathbf{t}_l] \langle w' \rangle$  sont semblables si les matrices de transition entre les bases canoniques et la base standard sont égales, à un changement d'indexation près des lignes et des colonnes.  $\diamond$

## 4.1 Action des groupes de Weyl de $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ et $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ sur les poids de $\Lambda^s$

### 4.1.1 Rappels

\* Rappelons que  $\widehat{\mathfrak{S}}_n = \langle \sigma_0, \dots, \sigma_{n-1}, \tau \rangle = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, y_1, \dots, y_n \rangle$  agit fidèlement à gauche sur  $\mathbb{Z}^n$  par les formules

$$\begin{aligned} \sigma_0.(s_1, \dots, s_n) &= (s_n + l, s_2, \dots, s_{n-1}, s_1 - n), \\ \sigma_i.(s_1, \dots, s_n) &= (s_1, \dots, s_{i+1}, s_i, \dots, s_n) \quad (1 \leq i \leq n-1), \\ \tau.(s_1, \dots, s_n) &= (s_n + l, s_1, \dots, s_{n-1}), \\ y_i.(s_1, \dots, s_n) &= (s_1, \dots, s_i + l, \dots, s_n) \quad (1 \leq i \leq n), \end{aligned}$$

$(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{Z}^n$  (cf. paragraphe 1.3.1.2).

(Nous prions le lecteur de bien vouloir nous excuser pour le léger conflit de notations qui en résulte; en effet, nous avons déjà introduit au chapitre 1 la notation  $\sigma_i$  pour les générateurs de Coxeter du groupe symétrique affine  $\widetilde{\mathfrak{S}}_r$ . Nous espérons que cela ne créera pas de confusion chez le lecteur.) Soit

$$W_n := \langle \sigma_0, \dots, \sigma_{n-1} \rangle \cong \widetilde{\mathfrak{S}}_n;$$

on a  $\widehat{\mathfrak{S}}_n = W_n \rtimes \langle \tau \rangle$ . Notons que pour  $\sigma \in W_n$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , on a  $\sigma \tau^k(\mathbb{Z}^n(s)) = \mathbb{Z}^n(s + lk)$ . En particulier,  $W_n$  agit sur  $\mathbb{Z}^n(s)$ , et pour tout  $\sigma \in \widehat{\mathfrak{S}}_n$ , on a  $\sigma \in W_n$  si et seulement si  $\sigma.\mathbb{Z}^n(s) = \mathbb{Z}^n(s)$ . Ceci implique en particulier que

$$\left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid y_\lambda := y_1^{\lambda_1} \cdots y_n^{\lambda_n} \in W_n \right\} = \mathbb{Z}^n(0).$$

On vérifie par ailleurs aisément que

$$A_{n,l}(s) := \{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}^n(s) \mid r_1 \geq \cdots \geq r_n, r_1 - r_n \leq l\}$$

est un domaine fondamental pour l'action de  $W_n$  sur  $\mathbb{Z}^n(s)$ .

Rappelons que  $W_n$  est le groupe de Weyl de l'algèbre quantique  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ . En particulier,  $W_n$  agit sur le réseau des poids de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ , et son action est donnée par les formules suivantes (voir la remarque 1.13). Pour  $0 \leq i, j \leq n-1$ , on a

$$\sigma_i.\delta = \delta \quad \text{et} \quad \sigma_i.\Lambda_j = \begin{cases} \Lambda_j & \text{si } j \neq i, \\ \Lambda_{i-1} + \Lambda_{i+1} - \Lambda_i - \delta_{i,0} \delta & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Le caractère formel du  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module intégrable  $\Lambda^s$  est invariant sous l'action de  $W_n$ . En particulier,  $W_n$  agit sur  $\mathcal{P}^s$ . Puisque  $\delta$  est un point fixe pour l'action de  $W_n$ ,  $W_n$  agit aussi sur  $\mathcal{P}^s/\mathbb{Z}\delta$ .

\* On définit de même le groupe  $\dot{W}_l := \widetilde{\mathfrak{S}}_l = \langle \dot{\sigma}_0, \dots, \dot{\sigma}_{l-1} \rangle$ .  $\dot{W}_l$  contient un grand sous-groupe abélien ; en effet, avec des notations évidentes, on a

$$\mathbb{Z}^l(0) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{Z}^l \mid \dot{y}_\lambda \in \dot{W}_l \right\}.$$

(On peut montrer qu'on a en fait l'égalité.)  $\dot{W}_l$  agit à gauche sur  $\mathbb{Z}^l$ , et les formules pour cette action s'obtiennent en permutant les rôles de  $n$  et  $l$  dans les formules donnant l'action de  $W_n$  sur  $\mathbb{Z}^n$ . On peut restreindre l'action de  $\dot{W}_l$  à  $\mathbb{Z}^l(s)$ , et  $A_{l,n}(s)$  est un domaine fondamental pour cette dernière action.

Rappelons que  $\dot{W}_l$  est de groupe de Weyl de l'algèbre quantique  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ . En particulier,  $\dot{W}_l$  agit sur le réseau des poids de  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ . De plus, le caractère formel du  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ -module intégrable  $\Lambda^s$  est invariant sous l'action de  $\dot{W}_l$ , donc  $\dot{W}_l$  agit sur  $\dot{\mathcal{P}}^s$ . Puisque  $\dot{\delta}$  est un point fixe pour l'action de  $\dot{W}_l$ ,  $\dot{W}_l$  agit aussi sur  $\dot{\mathcal{P}}^s / \mathbb{Z}\dot{\delta}$ .

#### 4.1.2 Compatibilité entre l'action des groupes de Weyl sur les poids de $\Lambda^s$ et l'action des groupes de Weyl sur les multi-charges

##### Lemme 4.2

1°) Soit  $\mathbf{s}_n = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{Z}^n(s)$  et  $\sigma \in W_n$ . Alors on a

$$\sigma.\text{wt}(|\emptyset_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet) = \text{wt}(|\emptyset_n, \sigma.\mathbf{s}_n\rangle^\bullet).$$

2°) Soit  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}^l(s)$  et  $\dot{\sigma} \in \dot{W}_l$ . Alors on a

$$\dot{\sigma}.\dot{\text{wt}}(|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle) = \dot{\text{wt}}(|\emptyset_l, \dot{\sigma}.\mathbf{s}_l\rangle).$$

*Démonstration.* Il suffit de prouver le point 1°), et ce uniquement pour l'action des  $\sigma_i$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ). Soit  $s_0 := l + s_n$ ,  $\mathbf{t}_n = (t_1, \dots, t_n) := \sigma_i.\mathbf{s}_n$  et  $t_0 := l + t_n$ . D'après ( $W_4$ ), on a

$$\text{wt}(|\emptyset_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet) = -\Delta(\mathbf{s}_n, l)\delta + \sum_{j=0}^{n-1} (s_j - s_{j+1})\Lambda_j.$$

- Supposons que  $i = 0$ . On a alors  $t_1 = s_n + l = s_0$ ,  $t_n = s_1 - l$ ,  $t_0 = t_n + l = s_1$  et  $t_j = s_j$  pour tout  $2 \leq j \leq n-1$ . Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \sigma_i.\text{wt}(|\emptyset_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet) &= -\Delta(\mathbf{s}_n, l)\delta + (s_0 - s_1)(\Lambda_{n-1} + \Lambda_1 - \Lambda_0 - \delta) + \sum_{j=1}^{n-1} (s_j - s_{j+1})\Lambda_j \\ &= -(\Delta(\mathbf{s}_n, l) + l - s_1 + s_n)\delta + \sum_{j=0}^{n-1} (t_j - t_{j+1})\Lambda_j. \end{aligned}$$

On vérifie alors par un calcul direct que  $\Delta(\mathbf{t}_n, l) = \Delta(\mathbf{s}_n, l) + l - s_1 + s_n$ , ce qui prouve le lemme dans ce cas.

– Supposons que  $1 \leq i \leq n-1$ . On montre de même que

$$\sigma_i.\text{wt}(|\emptyset_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet) = -\Delta(\mathbf{s}_n, l)\delta + \sum_{j=0}^{n-1} (t_j - t_{j+1})\Lambda_j.$$

De plus, on a dans ce cas  $\Delta(\mathbf{t}_n, l) = \Delta(\mathbf{s}_n, l)$ , d'où la formule souhaitée. □

### Corollaire 4.3

1°) Soit  $\varphi : \mathbb{Z}^n(s) \rightarrow \mathcal{P}^s/\mathbb{Z}\delta$  l'application définie à la proposition 3.21. Alors pour tout  $\sigma \in W_n$ ,  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ , on a  $\varphi(\sigma.\mathbf{s}_n) = \sigma.\varphi(\mathbf{s}_n)$ .

2°) Soit  $\dot{\varphi} : \mathbb{Z}^l(s) \rightarrow \dot{\mathcal{P}}^s/\mathbb{Z}\dot{\delta}$  l'application définie à la proposition 3.21. Alors pour tout  $\dot{\sigma} \in \dot{W}_l$ ,  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ , on a  $\dot{\varphi}(\dot{\sigma}.\mathbf{s}_l) = \dot{\sigma}.\dot{\varphi}(\mathbf{s}_l)$ .

*Démonstration.* Il suffit de prouver le point 1°). D'après ( $W_4$ ), on a pour  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ ,  $\varphi(\mathbf{s}_n) = \text{wt}(|\emptyset_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet) \bmod \mathbb{Z}\delta$ . Le corollaire s'ensuit, en réduisant l'égalité du point 1°) du lemme précédent modulo  $\mathbb{Z}\delta$ . □

## 4.2 Les bijections $\pi_i$ et $\dot{\pi}_i$

### 4.2.1 Action des puissances divisées sur les espaces de Fock

Fixons dans tout ce paragraphe  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  et  $0 \leq i \leq n-1$ . Nous allons décrire l'action des puissances divisées  $e_i^{(k)}$  et  $f_i^{(k)}$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) sur  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . Rappelons que nous avons introduit au paragraphe 1.1.4 la notation  $\lambda_l \xrightarrow{i:k} \mu_l$  ainsi que des entiers  $M_i^>(\lambda_l; \mu_l; \mathbf{s}_l; n)$  et  $M_i^<(\lambda_l; \mu_l; \mathbf{s}_l; n)$ .

#### Lemme 4.4

1°) Soit  $\nu_l \in \Pi^l$ , et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Alors on a

$$\begin{aligned} e_i^{(k)}.|\nu_l, \mathbf{s}_l\rangle &= \sum_{\lambda_l \xrightarrow{i:k} \nu_l} q^{-M_i^<(\lambda_l; \nu_l; \mathbf{s}_l; n)} |\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle, \\ f_i^{(k)}.|\nu_l, \mathbf{s}_l\rangle &= \sum_{\nu_l \xrightarrow{i:k} \mu_l} q^{M_i^>(\nu_l; \mu_l; \mathbf{s}_l; n)} |\mu_l, \mathbf{s}_l\rangle. \end{aligned}$$

2°) En particulier,

– si  $(\nu_l, \mathbf{s}_l)$  a exactement  $k$   $i$ -nœuds de type  $R$  et aucun  $i$ -nœud de type  $A$ , alors on a

$$e_i^{(k)}.|\nu_l, \mathbf{s}_l\rangle = |\nu_l, \mathbf{s}_l\rangle,$$

où  $\lambda_l \in \Pi^l$  est l'unique multi-partition telle que  $\lambda_l \xrightarrow{i:k} \nu_l$  ;

- si  $(\nu_l, \mathbf{s}_l)$  a exactement  $k$   $i$ -nœuds de type  $A$  et aucun  $i$ -nœud de type  $R$ , alors on a

$$f_i^{(k)} \cdot |\nu_l, \mathbf{s}_l\rangle = |\mu_l, \mathbf{s}_l\rangle,$$

où  $\mu_l \in \Pi^l$  est l'unique multi-partition telle que  $\nu_l \xrightarrow{i:k} \mu_l$ .

*Démonstration.* Le point 2°) découle clairement du point 1°). On prouve 1°) par récurrence sur  $k$  à l'aide de la proposition 3.7. Pour les détails, nous renvoyons le lecteur à [Mat1, Proof of Lemma 6.16] dans le cas où  $l = 1$  et à [Ja, Proposition 4.5] dans le cas général.  $\square$

Naturellement, il existe des formules analogues pour l'action des  $\dot{e}_i^{(k)}$  et  $\dot{f}_i^{(k)}$  sur  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$  ( $0 \leq i \leq l-1$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ ).

#### 4.2.2 Définition des bijections $\pi_i$ et $\dot{\pi}_i$

**Définition 4.5** Rappelons que  $W_n$  agit sur le graphe cristallin  $\mathcal{B}[\mathbf{s}_l]$  (cf. paragraphe 1.2.3.2). Soit  $i$  un entier appartenant à  $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$ . On peut donc définir une involution  $\varpi_i : \Pi^l \rightarrow \Pi^l$ , où  $\varpi_i(\lambda_l)$  est l'unique multi-partition telle que

$$[\varpi_i(\lambda_l), \mathbf{s}_l] = \sigma_i \cdot [\lambda_l, \mathbf{s}_l] \quad (\lambda_l \in \Pi^l).$$

Notons alors que pour  $w \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$ , on a  $\varpi_i(\Pi^l(\mathbf{s}_l; w)) = \Pi^l(\mathbf{s}_l; \sigma_i \cdot w)$ . Dans le cas où  $w + \alpha_i \notin \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$ , la restriction de  $\varpi_i$  à  $\Pi^l(\mathbf{s}_l; w)$  sera notée  $\pi_i$ . Nous avons ainsi construit une bijection

$$\pi_i : \Pi^l(\mathbf{s}_l; w) \rightarrow \Pi^l(\mathbf{s}_l; \sigma_i \cdot w)$$

pour tout  $w \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$  et  $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  tels que  $w + \alpha_i \notin \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$ .  $\diamond$

**Remarque 4.6** Dans le cas où  $l = 1$ , les travaux de [LM] montrent que  $\pi_i$  s'interprète comme une bijection de Scopes. Les bijections de Scopes ont été introduites dans [Sc], dans le cas où  $n = p$  est un nombre premier, pour étudier les  $p$ -blocs de la série de tous les groupes symétriques et montrer qu'il existe un nombre fini de  $p$ -blocs de défaut donné  $d$  à équivalence de Morita près.  $\diamond$

**Proposition 4.7** Soient  $w \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$  et  $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  tels que  $w + \alpha_i \notin \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$ . Soient

$$\pi_i : \Pi^l(\mathbf{s}_l; w) \rightarrow \Pi^l(\mathbf{s}_l; \sigma_i \cdot w)$$

la bijection définie précédemment,  $\lambda_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)$ , et  $\mu_l := \pi_i(\lambda_l)$ . On a alors les propriétés suivantes.

- (i)  $\mu_l$  est la multi-partition obtenue à partir de  $\lambda_l$  en ajoutant tous les  $i$ -nœuds de type  $A$  de  $(\lambda_l, \mathbf{s}_l)$ , et on a  $|\mu_l/\lambda_l| = k_i := (w, \alpha_i)$ .
- (ii)  $|\mu_l, \mathbf{s}_l\rangle = f_i^{(k_i)} \cdot |\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle$  et  $|\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle = e_i^{(k_i)} \cdot |\mu_l, \mathbf{s}_l\rangle$ .

$$(iii) \quad [\boldsymbol{\mu}_l, \mathbf{s}_l] = \tilde{f}_i^{k_i} \cdot [\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l] \quad \text{et} \quad [\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l] = \tilde{e}_i^{k_i} \cdot [\boldsymbol{\mu}_l, \mathbf{s}_l].$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{C}$  la  $i$ -chaîne du graphe cristallin  $\mathcal{B}[\mathbf{s}_l]$  contenant  $b := [\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l]$ . Puisque  $w + \alpha_i \notin \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$ ,  $(\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l)$  n'a aucun  $i$ -nœud de type  $R$ , donc le théorème 3.26 montre que  $[\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l]$  est l'extrémité initiale de la chaîne  $\mathcal{C}$ . Par invariance du caractère formel de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  sous l'action du groupe de Weyl  $W_n$ ,  $\sigma_i(w + \alpha_i) = \sigma_i(w) - \alpha_i$  n'est pas un poids de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ , donc  $(\boldsymbol{\mu}_l, \mathbf{s}_l)$  n'a aucun  $i$ -nœud de type  $A$ . Par conséquent, le théorème 3.26 montre que  $[\boldsymbol{\mu}_l, \mathbf{s}_l]$  est l'extrémité terminale de la chaîne  $\mathcal{C}$ , et que  $\boldsymbol{\mu}_l$  est obtenue à partir de  $\boldsymbol{\lambda}_l$  en ajoutant un certain nombre de (disons  $k$ )  $i$ -nœuds de type  $A$  de  $(\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l)$ . De plus,  $k = |\boldsymbol{\mu}_l / \boldsymbol{\lambda}_l|$  est la longueur de la chaîne  $\mathcal{C}$ . Avec les notations du paragraphe 1.2.3.2, on a la relation  $k_i = (\text{wt}(b), \alpha_i) = \varphi_i(b) - \varepsilon_i(b) = k$ . Remarquons en outre que puisque  $(\boldsymbol{\mu}_l, \mathbf{s}_l)$  n'a aucun  $i$ -nœud de type  $A$  et  $(\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l)$  n'a aucun  $i$ -nœud de type  $R$ ,  $\boldsymbol{\mu}_l / \boldsymbol{\lambda}_l$  est l'ensemble des  $i$ -nœuds de type  $A$  de  $(\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l)$ , et  $\boldsymbol{\mu}_l / \boldsymbol{\lambda}_l$  est aussi l'ensemble des  $i$ -nœuds de type  $R$  de  $(\boldsymbol{\mu}_l, \mathbf{s}_l)$ . Nous venons de voir qu'il y a exactement  $k_i$  tels nœuds. Ceci prouve le point (i), mais aussi le point (ii) compte tenu du lemme 4.4 2°). Le point (iii) découle du fait que  $\mathcal{C}$  est une  $i$ -chaîne de longueur  $k_i$  ayant  $[\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l]$  pour extrémité initiale et  $[\boldsymbol{\mu}_l, \mathbf{s}_l]$  pour extrémité terminale.  $\square$

**Exemple 4.8** Prenons  $n = 3$ ,  $l = 2$ ,  $\mathbf{s}_l = (1, 2)$ ,  $i = 0$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_l = ((2, 2, 1), (3, 2))$  et  $w := \text{wt}([\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l])$ . On a  $N_0(\boldsymbol{\lambda}_l; \mathbf{s}_l; n) = 2$  et  $N_1(\boldsymbol{\lambda}_l; \mathbf{s}_l; n) = N_2(\boldsymbol{\lambda}_l; \mathbf{s}_l; n) = 4$ . On vérifie aisément qu'il n'existe aucune multi-partition  $\boldsymbol{\mu}_l$  telle que  $N_0(\boldsymbol{\mu}_l; \mathbf{s}_l; n) = 1$  et  $N_1(\boldsymbol{\mu}_l; \mathbf{s}_l; n) = N_2(\boldsymbol{\mu}_l; \mathbf{s}_l; n) = 4$ , donc d'après  $(W_1)$ ,  $w + \alpha_0$  n'est pas un poids de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . Par conséquent,  $\pi_i(\boldsymbol{\lambda}_l)$  est bien défini et on a  $\pi_i(\boldsymbol{\lambda}_l) = ((3, 2, 2), (3, 3, 1))$ .  $\diamond$

**Remarque 4.9** L'hypothèse d'extrémalité  $w \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$ ,  $w + \alpha_i \notin \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$  est nécessaire pour avoir les points (i) et (ii) de la proposition précédente. En particulier, (ii) est faux en général si on remplace  $\boldsymbol{\mu}_l$  par  $\varpi_i(\boldsymbol{\lambda}_l)$ .  $\diamond$

La proposition 4.7 redonne en particulier pour  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  un résultat classique sur les  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules intégrables.

**Corollaire 4.10** Soit  $w \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$ , et  $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  tel que  $w + \alpha_i \notin \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$ , ou de façon équivalente tel que  $(\sigma_i.w) - \alpha_i \notin \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$ . Soit  $k_i := (w, \alpha_i)$ . Alors les applications  $e_i^{(k_i)} : \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle \rightarrow \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle \sigma_i.w \rangle$  et  $f_i^{(k_i)} : \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle \sigma_i.w \rangle \rightarrow \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$  sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

*Démonstration.* En effet, d'après la proposition 4.7,  $e_i^{(k_i)}$  envoie la base  $\{[\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l] \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)\}$  de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$  sur la base  $\{[\pi_i(\boldsymbol{\lambda}_l), \mathbf{s}_l] \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)\}$  de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle \sigma_i.w \rangle$ , et  $f_i^{(k_i)}$  agit de façon inverse.  $\square$

**Remarque 4.11** Reprenons les notations et les hypothèses de la proposition 4.7. La preuve de cette proposition montre que si  $\boldsymbol{\mu}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; \sigma_i.w)$ , alors  $\pi_i^{-1}(\boldsymbol{\mu}_l)$  est la multi-partition obtenue en retirant à  $\boldsymbol{\mu}_l$  tous les  $i$ -nœuds de type  $R$  de  $(\boldsymbol{\mu}_l, \mathbf{s}_l)$ .  $\diamond$

**Remarque 4.12** Soit de même  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ ,  $\dot{w} \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet)$  et  $i \in \llbracket 0; l-1 \rrbracket$  tel que  $\dot{w} + \dot{\alpha}_i$  n'est pas un poids de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ . Alors on peut définir, comme à la définition 4.5, une bijection

$$\tilde{\pi}_i : \Pi^n(\mathbf{s}_n; \dot{w}) \rightarrow \Pi^n(\mathbf{s}_n; \dot{\sigma}_i \cdot \dot{w})$$

qui possède des propriétés similaires à celle des bijections  $\pi_j$ .  $\diamond$

### 4.3 Comparaison des bases canoniques de différents sous-espaces de poids de $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ ( $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ )

Fixons dans tout ce paragraphe une multi-charge  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ . On notera pour simplifier  $\lambda_l$  l'élément de la base standard de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  indexé par  $\lambda_l \in \Pi^l$ ,  $[\lambda_l] := [\lambda_l, \mathbf{s}_l]$  le sommet correspondant dans le graphe cristallin  $\mathcal{B}[\mathbf{s}_l]$ , et  $G^+(\lambda_l) := G^+(\lambda_l, \mathbf{s}_l)$  le vecteur de la base canonique correspondant. Par ailleurs, on pose

$$\|\lambda_l\| := (\text{wt}(\lambda_l), \text{wt}(\lambda_l))/2 \quad (\lambda_l \in \Pi^l).$$

On munit  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée  $(\cdot, \cdot)$  définie par

$$(\lambda_l, \mu_l) = q^{\|\lambda_l\|} \delta_{\lambda_l, \mu_l} \quad (\lambda_l, \mu_l \in \Pi^l).$$

**Lemme 4.13 ([LLT], Proposition 8.1)** Soient  $u, v \in \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  et  $0 \leq i \leq n-1$ . Alors on a

$$(t_i \cdot u, v) = (u, t_i \cdot v) \quad \text{et} \quad (e_i \cdot u, v) = (u, f_i \cdot v).$$

*Démonstration.* On peut supposer que  $u = \lambda_l$  et  $v = \mu_l$  ( $\lambda_l, \mu_l \in \Pi^l$ ). On a

$$\begin{aligned} (t_i \cdot \lambda_l, \mu_l) &= q^{(\text{wt}(\lambda_l), \alpha_i)} (\lambda_l, \mu_l) = q^{(\text{wt}(\lambda_l), \alpha_i) + \|\lambda_l\|} \delta_{\lambda_l, \mu_l} \\ &= q^{(\text{wt}(\mu_l), \alpha_i) + \|\mu_l\|} \delta_{\lambda_l, \mu_l} = (t_i \cdot \mu_l, \lambda_l) \\ &= (\lambda_l, t_i \cdot \mu_l), \end{aligned}$$

d'où la première égalité. Rappelons que  $e_i \cdot \lambda_l = \sum_{\nu_l \in \Pi^l} a_{\nu_l} \nu_l$ , avec  $a_{\nu_l} := q^{-M_i^<(\nu_l; \lambda_l; \mathbf{s}_l; n)}$  si  $\nu_l \xrightarrow{i:1} \lambda_l$  et  $a_{\nu_l} := 0$  sinon (voir la proposition 3.7). De même, on a  $f_i \cdot \mu_l = \sum_{\nu_l \in \Pi^l} b_{\nu_l} \nu_l$ , avec  $b_{\nu_l} := q^{M_i^>(\mu_l; \nu_l; \mathbf{s}_l; n)}$  si  $\mu_l \xrightarrow{i:1} \nu_l$  et  $b_{\nu_l} := 0$  sinon. Par conséquent, on a  $(e_i \cdot \lambda_l, \mu_l) = q^{\|\mu_l\|} a_{\mu_l}$  et  $(\lambda_l, f_i \cdot \mu_l) = q^{\|\lambda_l\|} b_{\lambda_l}$ . Il faut donc montrer que

$$q^{\|\mu_l\|} a_{\mu_l} = q^{\|\lambda_l\|} b_{\lambda_l}.$$

Supposons qu'on ne puisse pas obtenir  $\lambda_l$  en ajoutant un  $i$ -nœud au diagramme de  $\mu_l$ . Alors  $a_{\mu_l} = b_{\lambda_l} = 0$ , et les deux membres de l'égalité précédente sont nuls. Supposons désormais que  $\mu_l \xrightarrow{i:1} \lambda_l$ . Il faut alors montrer que

$$\|\mu_l\| - M_i^<(\mu_l; \lambda_l; \mathbf{s}_l; n) = \|\lambda_l\| + M_i^>(\mu_l; \lambda_l; \mathbf{s}_l; n),$$



soit encore

$$\|\boldsymbol{\mu}_l\| - \|\boldsymbol{\lambda}_l\| = M_i^<(\boldsymbol{\mu}_l; \boldsymbol{\lambda}_l; \mathbf{s}_l; n) + M_i^>(\boldsymbol{\mu}_l; \boldsymbol{\lambda}_l; \mathbf{s}_l; n) = M_i(\boldsymbol{\mu}_l; \mathbf{s}_l; n) - 1.$$

En effet, on a d'après ( $W_1$ ),

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\mu}_l\| - \|\boldsymbol{\lambda}_l\| &= \frac{1}{2} \left( (\text{wt}(\boldsymbol{\mu}_l), \text{wt}(\boldsymbol{\mu}_l)) - (\text{wt}(\boldsymbol{\mu}_l) - \alpha_i, \text{wt}(\boldsymbol{\mu}_l) - \alpha_i) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 2(\text{wt}(\boldsymbol{\mu}_l), \alpha_i) - (\alpha_i, \alpha_i) \right) = (\text{wt}(\boldsymbol{\mu}_l), \alpha_i) - 1. \end{aligned}$$

De plus, d'après la proposition 3.7, on a  $t_i \cdot \boldsymbol{\mu}_l = q^{M_i(\boldsymbol{\mu}_l; \mathbf{s}_l; n)} \boldsymbol{\mu}_l$ , d'où  $(\text{wt}(\boldsymbol{\mu}_l), \alpha_i) = M_i(\boldsymbol{\mu}_l; \mathbf{s}_l; n)$ . Par conséquent, on a bien  $\|\boldsymbol{\mu}_l\| - \|\boldsymbol{\lambda}_l\| = M_i(\boldsymbol{\mu}_l; \mathbf{s}_l; n) - 1$ .  $\square$

Nous aurons besoin d'un petit lemme d'algèbre linéaire, dont la preuve est laissée au lecteur.

**Lemme 4.14** *Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soient  $u = \{u_i \mid i \in I\}$  et  $v = \{v_i \mid i \in I\}$  deux bases de  $E$ . Soient  $u^* = \{u_i^* \mid i \in I\}$  et  $v^* = \{v_i^* \mid i \in I\}$  les bases adjointes de  $u$  et  $v$  respectivement, c'est-à-dire définies par les relations*

$$\langle u_i, u_j^* \rangle = \langle v_i, v_j^* \rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j \in I).$$

*Soit  $M(u, v) = (m_{i,j})_{i,j \in I}$  la matrice de passage de la base  $u$  vers la base  $v$ , c'est-à-dire telle que  $v_j = \sum_{i \in I} m_{i,j} u_i$  ( $j \in I$ ). Soit de même  $M(v^*, u^*)$  la matrice de passage de la base  $v^*$  vers la base  $u^*$ . Alors la matrice  $M(v^*, u^*)$  est la transposée de la matrice  $M(u, v)$ .*  $\square$

Nous allons maintenant énoncer et démontrer un résultat permettant de comparer les bases canoniques de certains sous-espaces de poids de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . Il s'agit d'une généralisation en niveau supérieur de [LM, Theorem 20].

**Théorème 4.15** *Soient  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ ,  $w \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$  et  $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  tels que  $w + \alpha_i$  n'est pas un poids de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . Soit  $\pi_i : \Pi^l(\mathbf{s}_l; w) \rightarrow \Pi^l(\mathbf{s}_l; \sigma_i \cdot w)$  la bijection définie au paragraphe 4.2.2. Alors on a, pour  $\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)$ ,*

$$(i) \quad \Delta_{\pi_i(\boldsymbol{\lambda}_l), \pi_i(\boldsymbol{\mu}_l); \mathbf{s}_l}^+(q) = \Delta_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l; \mathbf{s}_l}^+(q) \quad \text{et} \quad (ii) \quad \Delta_{\pi_i(\boldsymbol{\lambda}_l), \pi_i(\boldsymbol{\mu}_l); \mathbf{s}_l}^-(q) = \Delta_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l; \mathbf{s}_l}^-(q).$$

*Par conséquent, les bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$  et de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle \sigma_i \cdot w \rangle$  sont semblables, au sens de la définition 4.1.*

*Démonstration.* Prouvons (i). Soit  $\{G^*(\boldsymbol{\lambda}_l) \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l\}$  la base adjointe de  $\{G^+(\boldsymbol{\lambda}_l) \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l\}$  pour la forme  $(\cdot, \cdot)$ . Nous écrirons parfois  $G^*([\boldsymbol{\lambda}_l]) := G^*(\boldsymbol{\lambda}_l)$  ( $\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l$ ). Par définition, les bases  $\{\boldsymbol{\lambda}_l \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; \sigma_i \cdot w)\}$  et  $\{q^{-\|\boldsymbol{\mu}_l\|} \boldsymbol{\mu}_l \mid \boldsymbol{\mu}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; \sigma_i \cdot w)\}$  sont adjointes l'une de l'autre. Soit  $\boldsymbol{\mu}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)$ . Compte tenu de la définition des coefficients  $\Delta_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l; \mathbf{s}_l}^+(q)$ , on a d'après le lemme 4.14 :

$$q^{-\|\pi_i(\boldsymbol{\mu}_l)\|} \pi_i(\boldsymbol{\mu}_l) = \sum_{\boldsymbol{\nu}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; \sigma_i \cdot w)} \Delta_{\pi_i(\boldsymbol{\mu}_l), \boldsymbol{\nu}_l; \mathbf{s}_l}^+(q) G^*(\boldsymbol{\nu}_l).$$

Puisque  $\pi_i : \Pi^l(\mathbf{s}_l; w) \rightarrow \Pi^l(\mathbf{s}_l; \sigma_i.w)$  est une bijection, on peut faire, dans la somme écrite ci-dessus, le changement d'indices  $\boldsymbol{\nu}_l = \pi_i(\boldsymbol{\lambda}_l)$ . Appliquons alors  $e_i^{(k_i)}$  aux deux membres de l'égalité obtenue, avec  $k_i := (w, \alpha_i)$ . On trouve

$$(*) : \quad q^{-\|\pi_i(\boldsymbol{\mu}_l)\|} e_i^{(k_i)} \cdot \pi_i(\boldsymbol{\mu}_l) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)} \Delta_{\pi_i(\boldsymbol{\mu}_l), \pi_i(\boldsymbol{\lambda}_l); \mathbf{s}_l}^+(q) e_i^{(k_i)} \cdot G^*(\pi_i(\boldsymbol{\lambda}_l)).$$

Puisque  $\sigma_i \in W_n$  est une isométrie, on a

$$\|\pi_i(\boldsymbol{\mu}_l)\| = (\sigma_i.\text{wt}(\boldsymbol{\mu}_l), \sigma_i.\text{wt}(\boldsymbol{\mu}_l))/2 = (\text{wt}(\boldsymbol{\mu}_l), \text{wt}(\boldsymbol{\mu}_l))/2 = \|\boldsymbol{\mu}_l\|.$$

De plus, d'après la proposition 4.7 (ii), on a  $e_i^{(k_i)} \cdot \pi_i(\boldsymbol{\mu}_l) = \boldsymbol{\mu}_l$ . Par ailleurs, d'après le théorème 3.39, le lemme 4.13 et la proposition 1.24, la base  $\{G^*(\boldsymbol{\lambda}_l) \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l\}$  est une base globale supérieure (au sens de [Kas3]) de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . Soit  $\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)$ . Puisque  $w + \alpha_i \notin \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$ , on a  $e_i \cdot \boldsymbol{\lambda}_l = 0$ , d'où  $\tilde{e}_i^{\text{up}} \cdot [\boldsymbol{\lambda}_l] = 0$ . En outre, d'après la proposition 4.7, on a  $\pi_i(\boldsymbol{\lambda}_l) = f_i^{(k_i)} \cdot \boldsymbol{\lambda}_l$ , donc d'après le lemme 1.17, on a

$$[\boldsymbol{\lambda}_l] = (\tilde{e}_i^{\text{low}})^{k_i} [f_i^{(k_i)} \cdot \boldsymbol{\lambda}_l] = (\tilde{e}_i^{\text{up}})^{k_i} [f_i^{(k_i)} \cdot \boldsymbol{\lambda}_l] = (\tilde{e}_i^{\text{up}})^{k_i} [\pi_i(\boldsymbol{\lambda}_l)],$$

d'où  $(\tilde{e}_i^{\text{up}})^{k_i+1} [\pi_i(\boldsymbol{\lambda}_l)] = 0$ . La proposition 1.25 montre alors que

$$e_i^{(k_i)} \cdot G^*([\pi_i(\boldsymbol{\lambda}_l)]) = G^*((\tilde{e}_i^{\text{up}})^{k_i} \cdot [\pi_i(\boldsymbol{\lambda}_l)]) = G^*([\boldsymbol{\lambda}_l]).$$

Il découle de (\*) et de toutes ces considérations qu'on a

$$q^{-\|\boldsymbol{\mu}_l\|} \boldsymbol{\mu}_l = \sum_{\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)} \Delta_{\pi_i(\boldsymbol{\mu}_l), \pi_i(\boldsymbol{\lambda}_l); \mathbf{s}_l}^+(q) G^*(\boldsymbol{\lambda}_l).$$

Ceci étant valide pour tout  $\boldsymbol{\mu}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)$ , on a, en appliquant à nouveau le lemme 4.14,

$$G^+(\boldsymbol{\mu}_l) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)} \Delta_{\pi_i(\boldsymbol{\lambda}_l), \pi_i(\boldsymbol{\mu}_l); \mathbf{s}_l}^+(q) \boldsymbol{\lambda}_l \quad (\boldsymbol{\mu}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)).$$

Puisque  $\{\boldsymbol{\lambda}_l \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)\}$  est une base, le point (i) s'ensuit.

Prouvons à présent (ii). Soit  $w' \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$ . Si on connaît la base  $\{G^+(\boldsymbol{\lambda}_l) \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w')\}$ , alors on peut calculer l'involution de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w' \rangle$  en résolvant un système linéaire dont la matrice associée est unitriangulaire. La preuve du théorème 3.34 montre que la base canonique  $\{G^-(\boldsymbol{\lambda}_l) \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w')\}$  est uniquement déterminée à partir de l'involution de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w' \rangle$ . Par conséquent, la base  $\{G^-(\boldsymbol{\lambda}_l) \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w')\}$  est uniquement déterminée à partir de la base  $\{G^+(\boldsymbol{\lambda}_l) \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w')\}$  (et réciproquement). Le point (ii) découle alors de ceci (en prenant  $w' = w$  et  $w' = \sigma_i.w$ ) et du point (i). (Une autre preuve, plus sophistiquée, consisterait à montrer (ii) à partir de (i) et de la formule d'inversion donnée au théorème 3.38.)  $\square$

**Exemple 4.16** Prenons  $n = 3$ ,  $l = 2$ ,  $\mathbf{s}_l = (1, 0)$ ,  $w = \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle) - (2\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_2)$  et  $i = 2$ . On vérifie aisément qu'il n'existe pas de multi-partition  $\boldsymbol{\lambda}_l$  telle que  $N_0(\boldsymbol{\lambda}_l; \mathbf{s}_l; n) = 2$ ,

$N_1(\lambda_l; \mathbf{s}_l; n) = 3$  et  $N_2(\lambda_l; \mathbf{s}_l; n) = 0$ . Par conséquent, d'après  $(W_1)$ ,  $w + \alpha_i$  n'est pas un poids de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . Les éléments de  $\Pi^l(\mathbf{s}_l; w)$  sont

$$((1),(5)), ((4),(2)), ((4,2),\emptyset), ((1),(2,2,1)), ((2,2),(2)), ((1,1),(2,1,1)), ((1,1,1,1),(2)), ((1),(2,1,1,1)),$$

et leurs images respectives par l'application  $\pi_i$  sont

$$((2),(6,1)), ((5),(3,1)), ((5,3,1),\emptyset), ((2),(3,2,2)), ((2,2,1),(3,1)), ((2,1,1),(3,1,1)), ((2,1,1,1),(3,1)), ((2),(3,1,1,1,1)).$$

Le calcul des bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$  donne, avec des notations évidentes, les matrices

$$\Delta_{\mathbf{s}_l}^+ \langle w \rangle (q) = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ q & 1 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & q & 1 & . & . & . & . & . \\ q & 0 & 0 & 1 & . & . & . & . \\ q & q^2 & q & 0 & 1 & . & . & . \\ q^2 & 0 & 0 & q & q & 1 & . & . \\ 0 & 0 & q & 0 & q^2 & q & 1 & . \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 & q & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} ((1),(5)) \\ ((4),(2)) \\ ((4,2),\emptyset) \\ ((1),(2,2,1)) \\ ((2,2),(2)) \\ ((1,1),(2,1,1)) \\ ((1,1,1,1),(2)) \\ ((1),(2,1,1,1)) \end{matrix} \quad \text{et}$$

$$\Delta_{\mathbf{s}_l}^- \langle w \rangle (q) = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ q^{-1} & 1 & . & . & . & . & . & . \\ q^{-2} & -q^{-1} & 1 & . & . & . & . & . \\ -q^{-1} & 0 & 0 & 1 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & -q^{-1} & 0 & 1 & . & . & . \\ q^{-2} & -q^{-1} & q^{-2} & -q^{-1} & -q^{-1} & 1 & . & . \\ -q^{-3} & q^{-2} & 0 & q^{-2} & 0 & -q^{-1} & 1 & . \\ 0 & q^{-2} & -q^{-3} & 0 & q^{-2} & -q^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} ((1),(5)) \\ ((4),(2)) \\ ((4,2),\emptyset) \\ ((1),(2,2,1)) \\ ((2,2),(2)) \\ ((1,1),(2,1,1)) \\ ((1,1,1,1),(2)) \\ ((1),(2,1,1,1)) \end{matrix} .$$

De même, le calcul des bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle \sigma_i.w \rangle$  donne les matrices

$$\Delta_{\mathbf{s}_l}^+ \langle \sigma_i.w \rangle (q) = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ q & 1 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & q & 1 & . & . & . & . & . \\ q & 0 & 0 & 1 & . & . & . & . \\ q & q^2 & q & 0 & 1 & . & . & . \\ q^2 & 0 & 0 & q & q & 1 & . & . \\ 0 & 0 & q & 0 & q^2 & q & 1 & . \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 & q & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} ((2),(6,1)) \\ ((5),(3,1)) \\ ((5,3,1),\emptyset) \\ ((2),(3,2,2)) \\ ((2,2,1),(3,1)) \\ ((2,1,1),(3,1,1)) \\ ((2,1,1,1),(3,1)) \\ ((2),(3,1,1,1,1)) \end{matrix} \quad \text{et}$$

$$\Delta_{\mathbf{s}_l}^- \langle \sigma_i \cdot w \rangle (q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^{-2} & -q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -q^{-1} & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -q^{-1} & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^{-2} & -q^{-1} & q^{-2} & -q^{-1} & -q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot \\ -q^{-3} & q^{-2} & 0 & q^{-2} & 0 & -q^{-1} & 1 & \cdot \\ 0 & q^{-2} & -q^{-3} & 0 & q^{-2} & -q^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} ((2), (6, 1)) \\ ((5), (3, 1)) \\ ((5, 3, 1), \emptyset) \\ ((2), (3, 2, 2)) \\ ((2, 2, 1), (3, 1)) \\ ((2, 1, 1), (3, 1, 1)) \\ ((2, 1, 1, 1), (3, 1)) \\ ((2), (3, 1, 1, 1, 1)) \end{matrix},$$

ce qui illustre le théorème 4.15 dans ce cas. ◇

## 4.4 Comparaison des bases canoniques de $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w \rangle$ , $w \in \mathbf{w}$ pour une même classe $w \in \mathcal{P}^s / \mathbb{Z}\delta$ et différentes multi-charges $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$

### 4.4.1 Un théorème de comparaison

Soit  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ . Nous avons défini au chapitre 3 des bases canoniques

$$\{G^+(\boldsymbol{\lambda}_n, \mathbf{s}_n)^\bullet \mid \boldsymbol{\lambda}_n \in \Pi^n\} \quad \text{et} \quad \{G^-(\boldsymbol{\lambda}_n, \mathbf{s}_n)^\bullet \mid \boldsymbol{\lambda}_n \in \Pi^n\}$$

de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ . Introduisons les coefficients matriciels des matrices de passage de la base standard de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$  vers chacune de ces bases. Pour  $\boldsymbol{\mu}_n \in \Pi^n$ ,  $\epsilon \in \{+, -\}$ , posons

$$G^\epsilon(\boldsymbol{\mu}_n, \mathbf{s}_n)^\bullet = \sum_{\boldsymbol{\lambda}_n \in \Pi^n} \dot{\Delta}_{\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\mu}_n; \mathbf{s}_n}^\epsilon(q) \cdot |\boldsymbol{\lambda}_n, \mathbf{s}_n)^\bullet$$

(où les coefficients  $\dot{\Delta}_{\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\mu}_n; \mathbf{s}_n}^\epsilon(q)$  appartiennent à  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ ). Puisque l'involution de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$  laisse stable chacun des sous-espaces de poids de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ , on a  $\dot{\Delta}_{\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\mu}_n; \mathbf{s}_n}^\epsilon(q) = 0$  à moins que  $\text{Wt}(|\boldsymbol{\lambda}_n, \mathbf{s}_n)^\bullet) = \text{Wt}(|\boldsymbol{\mu}_n, \mathbf{s}_n)^\bullet)$ . Dans ce cas, les formules  $(W_1)$ - $(W_4)$  montrent qu'il existe  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l \in \Pi^l$  tels que  $|\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l) = |\boldsymbol{\lambda}_n, \mathbf{s}_n)^\bullet$  et  $|\boldsymbol{\mu}_l, \mathbf{s}_l) = |\boldsymbol{\mu}_n, \mathbf{s}_n)^\bullet$ . On a alors clairement

$$(4.1) \quad \dot{\Delta}_{\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\mu}_n; \mathbf{s}_n}^\epsilon(q) = \Delta_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l; \mathbf{s}_l}^\epsilon(q).$$

On peut par ailleurs démontrer le résultat suivant, qui est l'analogue pour  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$  du théorème 4.15. Soient  $\dot{w} \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet)$  et  $i \in \llbracket 0; l-1 \rrbracket$  tels que  $\dot{w} + \dot{\alpha}_i$  n'est pas un poids de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ . Soit  $\dot{\pi}_i : \Pi^n(\mathbf{s}_n; \dot{w}) \rightarrow \Pi^n(\mathbf{s}_n; \dot{\sigma}_i \cdot \dot{w})$  la bijection définie au paragraphe 4.2.2. Alors on a, pour  $\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\mu}_n \in \Pi^n(\mathbf{s}_n; \dot{w})$ ,  $\epsilon \in \{+, -\}$ , l'égalité

$$(4.2) \quad \dot{\Delta}_{\dot{\pi}_i(\boldsymbol{\lambda}_n), \dot{\pi}_i(\boldsymbol{\mu}_n); \mathbf{s}_n}^\epsilon(q) = \dot{\Delta}_{\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\mu}_n; \mathbf{s}_n}^\epsilon(q).$$

Soient  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ ,  $w \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$  et  $i \in \llbracket 0; l-1 \rrbracket$ . D'après la proposition 3.24, il existe un unique couple  $(\mathbf{s}_n, \dot{w}) \in \mathbb{Z}^n(s) \times \mathcal{P}^s$ , que l'on peut déterminer explicitement, tel que

$$\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet \langle \dot{w} \rangle = \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w \rangle.$$

De même, il existe un unique couple  $(\mathbf{t}_l, w') \in \mathbb{Z}^l(s) \times \mathcal{P}^s$ , que l'on peut déterminer explicitement, tel que

$$\mathbf{F}_q[\mathbf{t}_l]\langle w' \rangle = \mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet \langle \dot{\sigma}_i \cdot \dot{w} \rangle.$$

Les formules données à la proposition 3.24 montrent qu'on a en fait

$$\mathbf{t}_l = \dot{\sigma}_i \cdot \mathbf{s}_l \quad \text{et} \quad w' = w + \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{t}_l\rangle) - \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle)$$

(voir aussi les calculs de la preuve du lemme 4.2). En d'autres termes, si  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{N}$  sont tels que

$$w = \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \Lambda_j,$$

alors on a

$$w' = \text{wt}(|\emptyset_l, \dot{\sigma}_i \cdot \mathbf{s}_l\rangle) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \Lambda_j.$$

Notons que

$$w' - w \in \mathbb{Z}\delta, \quad \text{et} \quad w' = w \quad \text{si} \quad i > 0.$$

**Définition 4.17** Soient  $\mathbf{s}_l$ ,  $w$ ,  $i$ ,  $\mathbf{s}_n$ ,  $\dot{w}$  et  $w'$  comme précédemment. Supposons de plus que  $i$  est tel que  $\dot{w} + \dot{\alpha}_i$  n'est pas un poids de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ . On a donc une bijection

$$\dot{\pi}_i : \Pi^n(\mathbf{s}_n; \dot{w}) \rightarrow \Pi^n(\mathbf{s}_n; \dot{\sigma}_i \cdot \dot{w}).$$

L'égalité  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet \langle \dot{w} \rangle = \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w \rangle$  induit une bijection entre la base standard de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet \langle \dot{w} \rangle$  (vu en tant que sous-espace vectoriel de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ ) et la base standard de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w \rangle$  (vu en tant que sous-espace vectoriel de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ ). On a donc une bijection

$$\Pi^l(\mathbf{s}_l; w) \xrightarrow{\sim} \Pi^n(\mathbf{s}_n; \dot{w}).$$

De même, on a une bijection

$$\Pi^l(\dot{\sigma}_i \cdot \mathbf{s}_l; w') \xrightarrow{\sim} \Pi^n(\mathbf{s}_n; \dot{\sigma}_i \cdot \dot{w}).$$

On a donc le diagramme commutatif suivant de bijections, dont la flèche du bas sera encore notée  $\dot{\pi}_i$ .

$$\begin{array}{ccc} \Pi^n(\mathbf{s}_n; \dot{w}) & \xrightarrow{\dot{\pi}_i} & \Pi^n(\mathbf{s}_n; \dot{\sigma}_i \cdot \dot{w}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Pi^l(\mathbf{s}_l; w) & \xrightarrow{\sim} & \Pi^l(\dot{\sigma}_i \cdot \mathbf{s}_l; w'). \end{array}$$

◇

**Exemple 4.18** Prenons  $n = 2$ ,  $l = 3$ ,  $\mathbf{s}_l = (0, 2, -1)$ ,  $w = \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle) - (\alpha_0 + \alpha_1)$ ,  $i = 2$  et  $\lambda_l := (\emptyset, (2), \emptyset)$ . On a bien  $\lambda_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)$ . D'après la proposition 3.24, on a, avec les notations précédentes,  $\mathbf{s}_n = (1, 0)$ ,  $\dot{w} = \text{wt}(|\emptyset_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet) - (2\dot{\alpha}_0 + 3\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2)$  et  $w' = w$ . Remarquons que  $\dot{w} + \dot{\alpha}_i \notin \mathcal{P}(\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet)$  (voir l'exemple 4.16). On a  $|\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle = |\lambda_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet$  avec  $\lambda_n = ((1), (5))$ . On calcule  $\mu_n := \dot{\pi}_i(\lambda_n)$ , où  $\dot{\pi}_i(\lambda_n)$  est définie comme au paragraphe 4.2.2. On trouve  $\mu_n = ((2), (6, 1))$ . Alors,  $\dot{\pi}_i(\lambda_l)$  est la  $l$ -multi-partition telle que  $|\dot{\pi}_i(\lambda_l), \mathbf{s}_l\rangle = |\mu_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet$ ; on a donc  $\dot{\pi}_i(\lambda_l) = (\emptyset, \emptyset, (2))$ . ◇

Les identités (4.1), (4.2) et la définition de  $\pi_i$  que nous venons d'introduire entraînent le théorème suivant.

**Théorème 4.19** *Soient  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ ,  $w \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$  et  $i \in \llbracket 0; l-1 \rrbracket$ . Soit  $(\mathbf{s}_n, \dot{w}) \in \mathbb{Z}^n(s) \times \dot{\mathcal{P}}^s$  tel que  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet \langle \dot{w} \rangle = \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w \rangle$  (cf. proposition 3.24). Soit  $w' := w + \text{wt}(|\emptyset_l, \dot{\sigma}_i, \mathbf{s}_l|) - \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{s}_l|)$ , de telle sorte que l'on a  $\mathbf{F}_q[\dot{\sigma}_i, \mathbf{s}_l] \langle w' \rangle = \mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet \langle \dot{\sigma}_i, \dot{w} \rangle$ . Supposons que  $\dot{w} + \dot{\alpha}_i$  n'est pas un poids de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ . Alors la bijection  $\pi_i : \Pi^l(\mathbf{s}_l; w) \rightarrow \Pi^l(\dot{\sigma}_i, \mathbf{s}_l; w')$  est bien définie, et pour  $\lambda_l, \mu_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)$ ,  $\epsilon \in \{+, -\}$ , on a la relation*

$$\Delta_{\pi_i(\lambda_l), \pi_i(\mu_l); \sigma_i, \mathbf{s}_l}^\epsilon(q) = \Delta_{\lambda_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}^\epsilon(q).$$

Par conséquent, les bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w \rangle$  et de  $\mathbf{F}_q[\dot{\sigma}_i, \mathbf{s}_l] \langle w' \rangle$  sont semblables.  $\square$

**Exemple 4.20** (Voir les exemples 4.16 et 4.18.) Prenons  $n = 2$ ,  $l = 3$ ,  $\mathbf{s}_l = (0, 2, -1)$ ,  $w = \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{s}_l|) - (\alpha_0 + \alpha_1)$  et  $i = 2$ . Avec les notations du théorème 4.19, on a  $\mathbf{s}_n = (1, 0)$ ,  $\dot{w} = \text{wt}(|\emptyset_n, \mathbf{s}_n|^\bullet) - (2\dot{\alpha}_0 + 3\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2)$  et  $w' = w$ . Rappelons que  $\dot{w} + \dot{\alpha}_i \notin \mathcal{P}(\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet)$ . Les éléments de  $\Pi^l(\mathbf{s}_l; w)$  sont

$$(\emptyset, (2), \emptyset), (\emptyset, \emptyset, (1, 1)), (\emptyset, (1), (1)), (\emptyset, \emptyset, (2)), ((2), \emptyset, \emptyset), ((1), \emptyset, (1)), ((1, 1), \emptyset, \emptyset), (\emptyset, \emptyset, (1, 1)),$$

et leurs images respectives par l'application  $\pi_i$  sont

$$(\emptyset, \emptyset, (2)), (\emptyset, \emptyset, (1, 1)), (\emptyset, (1), (1)), ((2), \emptyset, \emptyset), (\emptyset, (2), \emptyset), ((1), (1), \emptyset), ((1, 1), \emptyset, \emptyset), (\emptyset, (1, 1), \emptyset),$$

Le calcul des bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w \rangle$  donne, avec des notations évidentes, les matrices

$$\Delta_{\mathbf{s}_l}^+ \langle w \rangle (q) = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ q & 1 & . & . & . & . & . & . \\ q^2 & q & 1 & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & q & 1 & . & . & . & . \\ q & 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ q^2 & q & q^2 & q & q & 1 & . & . \\ q^3 & q^2 & 0 & 0 & q^2 & q & 1 & . \\ 0 & q^2 & q^3 & q^2 & 0 & q & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (\emptyset, (2), \emptyset) \\ (\emptyset, \emptyset, (1, 1)) \\ (\emptyset, (1), (1)) \\ (\emptyset, \emptyset, (2)) \\ ((2), \emptyset, \emptyset) \\ ((1), \emptyset, (1)) \\ ((1, 1), \emptyset, \emptyset) \\ (\emptyset, \emptyset, (1, 1)) \end{matrix} \quad \text{et}$$

$$\Delta_{\mathbf{s}_l}^- \langle w \rangle (q) = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ -q^{-1} & 1 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & -q^{-1} & 1 & . & . & . & . & . \\ -q^{-1} & q^{-2} & -q^{-1} & 1 & . & . & . & . \\ -q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ q^{-2} & 0 & 0 & -q^{-1} & -q^{-1} & 1 & . & . \\ 0 & 0 & -q^{-1} & q^{-2} & 0 & -q^{-1} & 1 & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q^{-2} & -q^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (\emptyset, (2), \emptyset) \\ (\emptyset, \emptyset, (1, 1)) \\ (\emptyset, (1), (1)) \\ (\emptyset, \emptyset, (2)) \\ ((2), \emptyset, \emptyset) \\ ((1), \emptyset, (1)) \\ ((1, 1), \emptyset, \emptyset) \\ (\emptyset, \emptyset, (1, 1)) \end{matrix}.$$

De même, le calcul des bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\dot{\sigma}_i, \mathbf{s}_l] \langle w' \rangle$  donne les matrices

$$\Delta_{\vec{\sigma}_i, \mathbf{s}_l}^+ \langle w' \rangle (q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & q^2 & q & q & 1 & \cdot & \cdot \\ q^3 & q^2 & 0 & 0 & q^2 & q & 1 & \cdot \\ 0 & q^2 & q^3 & q^2 & 0 & q & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (\emptyset, \emptyset, (2)) \\ (\emptyset, \emptyset, (1, 1)) \\ (\emptyset, (1), (1)) \\ ((2), \emptyset, \emptyset) \\ (\emptyset, (2), \emptyset) \\ ((1), (1), \emptyset) \\ ((1, 1), \emptyset, \emptyset) \\ (\emptyset, (1, 1), \emptyset) \end{matrix} \quad \text{et}$$

$$\Delta_{\vec{\sigma}_i, \mathbf{s}_l}^- \langle w' \rangle (q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -q^{-1} & q^{-2} & -q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^{-2} & 0 & 0 & -q^{-1} & -q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -q^{-1} & q^{-2} & 0 & -q^{-1} & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q^{-2} & -q^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (\emptyset, \emptyset, (2)) \\ (\emptyset, \emptyset, (1, 1)) \\ (\emptyset, (1), (1)) \\ ((2), \emptyset, \emptyset) \\ (\emptyset, (2), \emptyset) \\ ((1), (1), \emptyset) \\ ((1, 1), \emptyset, \emptyset) \\ (\emptyset, (1, 1), \emptyset) \end{matrix},$$

ce qui illustre le théorème 4.19 dans ce cas.  $\diamond$

**Remarque 4.21** Dans le cas où  $l = 1$ , la bijection  $\hat{\pi}_i$  du théorème 4.19 est l'identité. Par conséquent ce théorème ne donne aucun résultat nouveau pour les espaces de Fock de niveau 1.  $\diamond$

Reprenons les notations du théorème 4.19. Considérons l'assertion

$$(4.3) \quad \dot{w} + \dot{\alpha}_i \notin \mathcal{P}(\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet).$$

On peut donc appliquer le théorème 4.19 avec ce choix de  $i$  si (4.3) est vérifiée. D'après [Kac, Proposition 3.6 (iv)], (4.3) a lieu si et seulement si  $\dot{e}_i \cdot (\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet \langle \dot{w} \rangle) = \{0\}$ , soit encore  $\dot{e}_i \cdot (\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w \rangle) = \{0\}$ . Rappelons qu'on a une bijection  $\lambda_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w) \mapsto \lambda_n \in \Pi^n(\mathbf{s}_n; \dot{w})$ . Avec ces notations, (4.3) a donc lieu si et seulement si pour tout  $\lambda_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)$ ,  $(\lambda_n, \mathbf{s}_n)$  n'a aucun  $i$ -nœud de type  $R$ . Cette condition n'est, hélas, pas très agréable à manipuler dans la pratique dès que le nombre de nœuds des multi-partitions qui interviennent est grand.

Nous allons maintenant donner une condition suffisante sur  $\mathbf{s}_l$ ,  $w$  et  $i$  pour que la condition (4.3) ait lieu. Pour cela, introduisons la notation suivante. Soit  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ ,  $w \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$  et  $i \in \llbracket 0; l-1 \rrbracket$ . Alors d'après la formule  $(W_1)$ , l'entier  $N_i(\lambda_l; \mathbf{s}_l; n)$  dépend de  $\mathbf{s}_l$  et  $w$ , mais pas de  $\lambda_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)$ ; on notera ce nombre  $N_i(w; \mathbf{s}_l)$ .

**Lemme 4.22** Soit  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}^l(s)$  et  $w \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$ . Soit  $(\mathbf{s}_n, \dot{w}) \in \mathbb{Z}^n(s) \times \dot{\mathcal{P}}^s$  tel que  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet \langle \dot{w} \rangle = \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w \rangle$  (cf. proposition 3.24). Soit  $i \in \llbracket 0; l-1 \rrbracket$ . Supposons que

$$s_i - s_{i+1} \geq n(N_0(w; \mathbf{s}_l) + 1)$$

(si  $i = 0$ , on a posé  $s_0 := n + s_l$ ). Alors  $\dot{w} + \dot{\alpha}_i$  n'est pas un poids de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ .

*Démonstration.* Fixons  $\lambda_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)$ , et supposons que  $\dot{w} + \dot{\alpha}_i$  est un poids de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ . Soit alors  $\mu_n \in \Pi^n(\mathbf{s}_n; \dot{w} + \dot{\alpha}_i)$  et  $(\mu_l, \mathbf{t}_l) \in \Pi^l \times \mathbb{Z}^l(s)$  tels que  $|\mu_l, \mathbf{t}_l\rangle = |\mu_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet$ . Soient  $a_0, \dots, a_{l-1}, d \in \mathbb{Z}$  tels que  $\dot{w} = d\dot{\delta} + \sum_{j=0}^{l-1} a_j \dot{\Lambda}_j$ . Alors  $\dot{w} + \dot{\alpha}_i = (d + \delta_{i,0})\dot{\delta} + \sum_{j=0}^{l-1} b_j \dot{\Lambda}_j$ , où  $b_j = a_j + a_{i,j}$  ( $0 \leq j \leq l-1$ ) et  $(a_{i',j'})_{0 \leq i', j' \leq l-1}$  est la matrice de Cartan de  $\widehat{\mathfrak{sl}}_l$ . Compte tenu de la formule (W<sub>2</sub>) et de l'indépendance linéaire des vecteurs  $\dot{\Lambda}_0, \dots, \dot{\Lambda}_{l-1}, \dot{\delta}$ , on a  $\mathbf{t}_l = \theta_{l,n}^{-1}(b_0, \dots, b_{l-1})$  et  $d + \delta_{i,0} = -(\Delta(\mathbf{t}_l, n) + N_0(\mu_l; \mathbf{t}_l; n))$ . De même, on a l'égalité  $d = -(\Delta(\mathbf{s}_l, n) + N_0(\lambda_l; \mathbf{s}_l; n))$ . Par conséquent, on a

$$-\Delta(\mathbf{s}_l, n) - N_0(w; \mathbf{s}_l) + \delta_{i,0} = -\Delta(\mathbf{t}_l, n) - N_0(\mu_l; \mathbf{t}_l; n),$$

d'où

$$N_0(\mu_l; \mathbf{t}_l; n) = \Delta(\mathbf{s}_l, n) - \Delta(\mathbf{t}_l, n) + N_0(w; \mathbf{s}_l) - \delta_{i,0}.$$

Explicitons à présent  $\mathbf{t}_l$ . Pour  $j \in \llbracket 0; l \rrbracket$ , posons

$$t_i := s_i + 1, \quad t_{i+1} := s_{i+1} - 1 \quad \text{et} \quad t_j := s_j \quad \text{si} \quad j \notin \{i, i+1, i+l\}.$$

On a clairement  $\theta_{l,n}(t_1, \dots, t_l) = (b_0, \dots, b_{l-1})$ , donc  $\mathbf{t}_l = (t_1, \dots, t_l)$ . Pour  $a \in \mathbb{Z}$ , notons  $\bar{a} \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  le résidu de  $a$  modulo  $n$ . Compte tenu du fait que  $s_0 - \bar{s}_0 = 1 + (s_l - \bar{s}_l)$ , un petit calcul montre que

$$\Delta(\mathbf{t}_l, n) = \Delta(\mathbf{s}_l, n) + \frac{1}{n}(s_i - s_{i+1}) + \frac{1}{n}(\bar{s}_{i+1} - \bar{s}_i) + \delta_{\bar{s}_{i+1}, 0} - \delta_{i,0}.$$

En outre, on a par hypothèse  $N_0(w; \mathbf{s}_l) - \frac{1}{n}(s_i - s_{i+1}) \leq -1$ . Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} N_0(\mu_l; \mathbf{t}_l; n) &= -\frac{1}{n}(\bar{s}_{i+1} - \bar{s}_i) - \delta_{\bar{s}_{i+1}, 0} + N_0(w; \mathbf{s}_l) - \frac{1}{n}(s_i - s_{i+1}) \\ &\leq -\frac{1}{n}(\bar{s}_{i+1} - \bar{s}_i) - \delta_{\bar{s}_{i+1}, 0} - 1 \\ &< 0, \end{aligned}$$

ce qui est absurde car  $N_0(\mu_l; \mathbf{t}_l; n) \in \mathbb{N}$  est le nombre de 0-nœuds de  $(\mu_l; \mathbf{t}_l)$ . Par conséquent,  $\dot{w} + \dot{\alpha}_i$  n'est pas un poids de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ .  $\square$

**Remarque 4.23** L'hypothèse  $s_i - s_{i+1} \geq n(N_0(w; \mathbf{s}_l) + 1)$  n'est sûrement pas la plus faible pour avoir la conclusion  $\dot{w} + \dot{\alpha}_i \notin \mathcal{P}(\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet)$ . Nous conjecturons en effet que cette conclusion subsiste si on suppose que

$$s_i - s_{i+1} \geq N_0(w; \mathbf{s}_l) + \dots + N_{n-1}(w; \mathbf{s}_l)$$

(cette dernière minoration est en général meilleure).  $\diamond$



#### 4.4.2 Un graphe formé de multi-charges conjuguées sous l'action de $\dot{W}_l$

**Définition 4.24** Fixons  $\mathbf{r}_l \in A_{l,n}(s)$ . Pour  $\mathbf{s}_l \in \dot{W}_l.\mathbf{r}_l$ , notons  $\dot{\sigma}(\mathbf{s}_l) \in \dot{W}_l$  l'élément de longueur minimale tel que  $\mathbf{s}_l = \dot{\sigma}(\mathbf{s}_l).\mathbf{r}_l$ . Soit  $0 \leq i \leq l-1$ . Rappelons que pour toute multi-charge  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}^l$ , on pose  $s_0 := n + s_l$ . Soient  $M \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathbf{s}_l, \mathbf{t}_l \in \dot{W}_l.\mathbf{r}_l$ . On écrit

$$\mathbf{s}_l \overset{i}{\dashrightarrow} \mathbf{t}_l$$

si  $\mathbf{t}_l = \dot{\sigma}_i.\mathbf{s}_l$  et  $s_i - s_{i+1} > 0$ . Dans ce cas, la proposition 1.31 montre qu'on a  $\dot{\sigma}(\mathbf{t}_l) = \dot{\sigma}_i \dot{\sigma}(\mathbf{s}_l)$  et  $\ell(\dot{\sigma}(\mathbf{t}_l)) = \ell(\dot{\sigma}(\mathbf{s}_l)) + 1$ . On écrit

$$\mathbf{s}_l \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{t}_l$$

si  $\mathbf{t}_l = \dot{\sigma}_i.\mathbf{s}_l$  et  $s_i - s_{i+1} \geq M$ . Soit  $\Gamma$  (resp.  $\Gamma(M)$ ) le graphe dont l'ensemble des sommets est  $\dot{W}_l.\mathbf{r}_l$ , et dans lequel on a une arête étiquetée par  $i$  reliant  $\mathbf{s}_l$  à  $\mathbf{t}_l$  ( $\mathbf{s}_l, \mathbf{t}_l \in \dot{W}_l.\mathbf{r}_l$ ,  $0 \leq i \leq l-1$ ) si  $\mathbf{s}_l \overset{i}{\dashrightarrow} \mathbf{t}_l$  (resp.  $\mathbf{s}_l \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{t}_l$ ).  $\diamond$

Observons que  $\Gamma(M)$  dépend de  $n, l, \mathbf{r}_l$  et  $M$ , et qu'on a  $\Gamma = \Gamma(1)$ . Remarquons en outre que  $\Gamma$  est connexe et que  $\Gamma(M)$  est un sous-graphe de  $\Gamma$ . La figure 4.1 illustre une partie des graphes  $\Gamma$  et  $\Gamma(M)$  pour  $n = 3, l = 3, \mathbf{r}_l = (1, 0, 0)$  et  $M = 2$ . Lorsque  $\mathbf{s}_l \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{t}_l$ , nous avons omis de représenter la flèche  $\mathbf{s}_l \overset{i}{\dashrightarrow} \mathbf{t}_l$ . Par ailleurs, nous avons représenté deux sommets de  $\Gamma(M)$  par le même symbole si et seulement si ils sont dans la même composante connexe de  $\Gamma(M)$ .

**Proposition 4.25** Soit  $M \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $\Gamma(M)$  n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des composantes connexes de  $\Gamma(M)$ . Pour chaque  $C \in \mathcal{C}$ , choisissons  $\mathbf{s}_l(C) \in C$  tel que  $\ell(\dot{\sigma}(\mathbf{s}_l(C)))$  soit minimal parmi les  $\ell(\dot{\sigma}(\mathbf{t}_l))$ ,  $\mathbf{t}_l \in C$ . Soit  $C \in \mathcal{C}$ , et  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l) := \mathbf{s}_l(C)$ . Nous allons montrer que

$$(*) : \mathbf{s}_l \in X := \left\{ (t_1, \dots, t_l) \in \mathbb{Z}^l(s) \mid \forall 0 \leq i \leq l-1, t_{i+1} - t_i \leq M-1 \right\}.$$

Soit  $0 \leq i \leq l-1$ . Montrons que  $s_{i+1} - s_i \leq M-1$ . C'est clair si  $s_{i+1} - s_i \leq 0$ . Si  $s_{i+1} - s_i > 0$ , posons  $\mathbf{t}_l = (t_1, \dots, t_l) := \dot{\sigma}_i.\mathbf{s}_l$ . Observons que  $t_i = s_{i+1}$  et  $t_{i+1} = s_i$  (même si  $i = 0$ ). Par conséquent, on a  $t_i - t_{i+1} = s_{i+1} - s_i > 0$ , et  $\mathbf{t}_l \overset{i}{\dashrightarrow} \mathbf{s}_l$ . On a donc  $\ell(\dot{\sigma}(\mathbf{t}_l)) = \ell(\dot{\sigma}(\mathbf{s}_l)) - 1$ . Par définition de  $\mathbf{s}_l$ , on a donc  $\mathbf{t}_l \notin C$ , donc  $(\mathbf{t}_l, \mathbf{s}_l)$  n'est pas une arête de  $\Gamma(M)$ . Par conséquent, on a  $t_i - t_{i+1} < M$  et donc  $s_{i+1} - s_i \leq M-1$ , d'où l'assertion (\*). Nous avons donc  $\mathcal{C} \cong \{\mathbf{s}_l(C) \mid C \in \mathcal{C}\} \subset X$ , donc  $\mathcal{C}$  s'injecte dans  $X$ . Mais  $X$  est fini d'après le lemme 3.16. Par conséquent,  $\mathcal{C}$  est également fini.  $\square$

**Remarque 4.26** Soit  $M \in \mathbb{N}^*$ . Nous conjecturons que chaque composante connexe  $C$  de  $\Gamma(M)$  contient un unique élément  $\mathbf{s}_l$  tel que  $\ell(\dot{\sigma}(\mathbf{s}_l))$  soit minimal parmi les  $\ell(\dot{\sigma}(\mathbf{t}_l))$ ,  $\mathbf{t}_l \in C$ .  $\diamond$

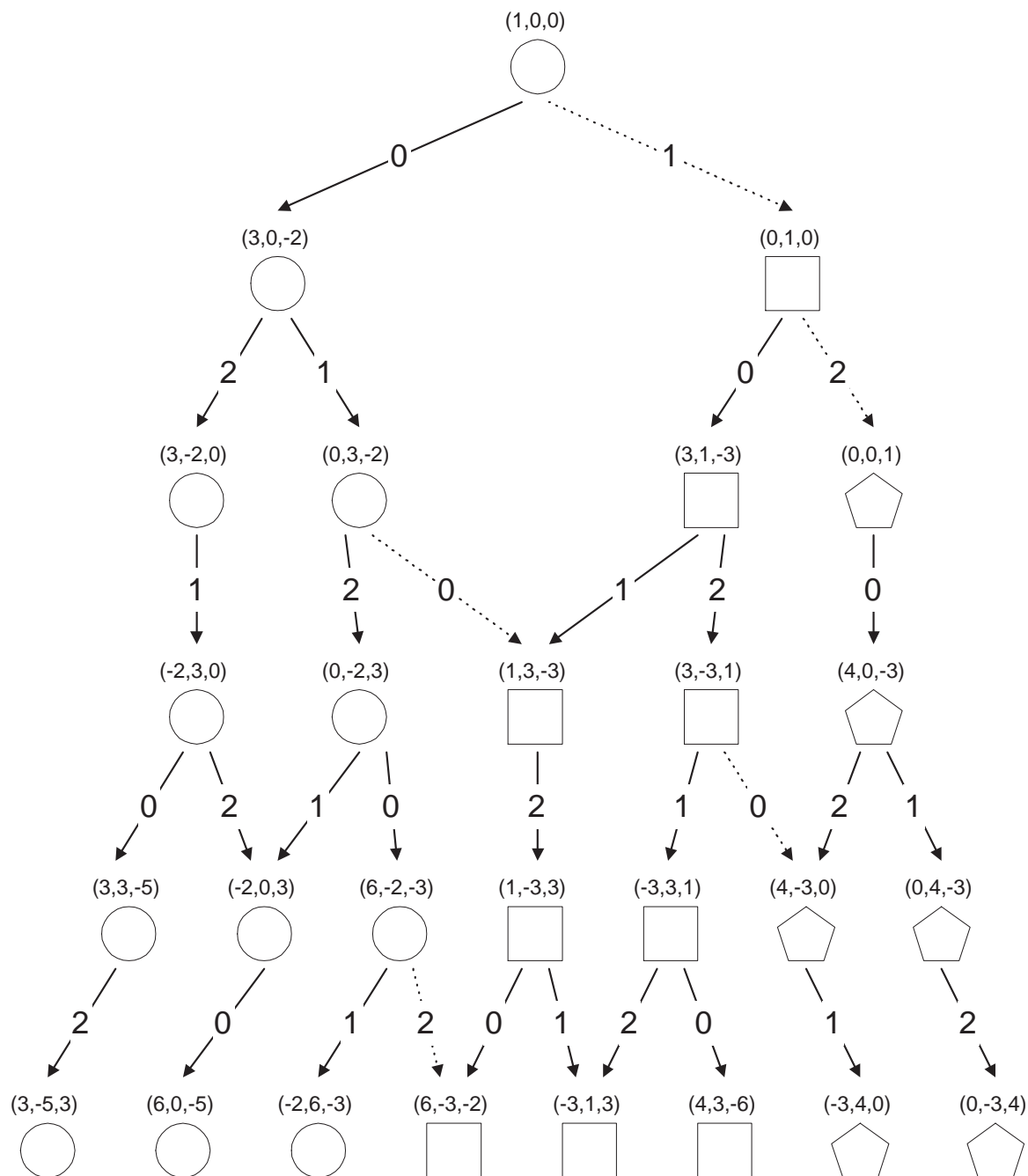


FIG. 4.1 – Une partie des graphes  $\Gamma$  et  $\Gamma(M)$  pour  $n = 3$ ,  $l = 3$ ,  $r_l = (1,0,0)$  et  $M = 2$ . Ici  $\Gamma(M)$  a 3 composantes connexes.

La proposition suivante fait le lien entre les composantes connexes de  $\Gamma(M)$  et la comparaison des bases canoniques. Nous verrons un exemple important d'application de ce résultat au paragraphe 4.4.3.

**Proposition 4.27** Soient  $\mathbf{r}_l \in A_{l,n}(s)$  et  $v \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{r}_l])$ . Posons  $M := n(N_0(v; \mathbf{r}_l) + 1)$ . Pour  $\mathbf{s}_l \in \dot{W}_l \cdot \mathbf{r}_l$ , posons

$$w(\mathbf{s}_l) := v + \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle) - \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle).$$

Soient  $\mathbf{s}_l$  et  $\mathbf{t}_l$  deux multi-charges situées dans une même composante connexe de  $\Gamma(M)$  (en particulier,  $\mathbf{s}_l$  et  $\mathbf{t}_l$  sont toutes deux conjuguées à  $\mathbf{r}_l$  sous l'action de  $\dot{W}_l$ ). Alors les bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w(\mathbf{s}_l) \rangle$  et  $\mathbf{F}_q[\mathbf{t}_l]\langle w(\mathbf{t}_l) \rangle$  sont semblables.

*Démonstration.* On peut se ramener au cas où  $\mathbf{s}_l \xrightarrow{i} \mathbf{t}_l$ , avec  $i \in \llbracket 0; l-1 \rrbracket$ . Avec des notations évidentes, on a alors par définition  $s_{i+1} - s_i \geq M$ . Observons que pour  $\mathbf{a}_l \in \dot{W}_l \cdot \mathbf{r}_l$ , on a

$$w(\mathbf{a}_l) = \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{a}_l\rangle) - \sum_{j=0}^{n-1} N_j(v; \mathbf{r}_l) \alpha_j,$$

d'où  $N_j(w(\mathbf{a}_l); \mathbf{a}_l) = N_j(v; \mathbf{r}_l)$  ( $0 \leq j \leq n-1$ ). En particulier, on a

$$N_0(w(\mathbf{s}_l); \mathbf{s}_l) = N_0(v; \mathbf{r}_l).$$

Par conséquent, on a  $s_{i+1} - s_i \geq n(N_0(w(\mathbf{s}_l); \mathbf{s}_l) + 1)$ . On peut donc appliquer le lemme 4.22 puis le théorème 4.19 pour conclure.  $\square$

**Remarque 4.28** Soient  $\mathbf{r}_l \in A_{l,n}(s)$  et  $v \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{r}_l])$ . Soit  $M := n(N_0(v; \mathbf{r}_l) + 1)$ . Alors d'après les propositions 4.25 et 4.27, il n'y a qu'un nombre fini de classes de similitude de bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w(\mathbf{s}_l) \rangle$ ,  $\mathbf{s}_l \in \Gamma(M)$ . Si de plus le résultat conjecturé à la remarque 4.23 est vrai, le même raisonnement montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes de similitude de bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w(\mathbf{s}_l) \rangle$ ,  $\mathbf{s}_l \in \Gamma(M')$  avec  $M' := N_0(v; \mathbf{s}_l) + \dots + N_{n-1}(v; \mathbf{s}_l)$ .  $\diamond$

### 4.4.3 Cas des multi-charges très dominantes

Dans tout ce paragraphe, on suppose que  $l \geq 2$ .

**Définition 4.29** Soient  $M \in \mathbb{N}$  et  $N \in \mathbb{N}^*$ . Nous dirons que le  $N$ -uplet  $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$  est  $M$ -dominant si on a

$$x_i - x_{i+1} \geq M \quad (1 \leq i \leq N-1).$$

$\diamond$

### 4.4.3.1 Notations

Nous utiliserons dans tout le paragraphe 4.4.3 les notations du paragraphe 4.4.2, ainsi que les notations suivantes.

\* Rappelons que  $\mathbb{R}^l(s) = \{(x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^l \mid x_1 + \dots + x_l = s\}$ . La partie de  $\mathbb{R}^l(s)$  formée des éléments qui sont  $M$ -dominants sera notée  $\mathcal{C}_M$ .

\* Rappelons que pour  $\lambda \in \mathbb{Z}^l(0)$ , on a défini un élément  $\dot{y}_\lambda \in \dot{W}_l$  qui agit sur  $\mathbb{Z}^l(s)$  comme la translation suivant le vecteur  $n\lambda$ . Pour  $1 \leq j \leq l$ , soit  $\epsilon_j := (\delta_{i,j})_{1 \leq i \leq l}$  le  $j$ -ième vecteur de la base naturelle de  $\mathbb{R}^l$ . Soit  $\dot{Q}$  le sous-groupe de  $\dot{W}_l$  engendré par les

$$\dot{\tau}_i := \dot{y}_{\epsilon_i - \epsilon_{i+1}} = \dot{y}_i \dot{y}_{i+1}^{-1} \quad (1 \leq i \leq l-1).$$

\* Nous aurons besoin de paramétrer l'ensemble des classes d'équivalence des multi-charges de  $\mathbb{Z}^l(s)$ , où deux multi-charges sont dites équivalentes si leurs composantes respectives ont les mêmes résidus modulo  $n$ . Plus précisément, posons pour toute multi-charge  $\mathbf{a}_l = (a_1, \dots, a_l) \in \mathbb{Z}^l$ ,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{a}_l} := \left\{ (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}^l(s) \mid \forall 1 \leq i \leq l, s_i \equiv a_i \pmod{n} \right\}.$$

Notons que pour  $\mathbf{a}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ ,  $\dot{Q}$  agit transitivement sur  $\mathcal{L}_{\mathbf{a}_l}$ ; en particulier, deux éléments de  $\mathcal{L}_{\mathbf{a}_l}$  sont conjugués sous l'action de  $\dot{W}_l$ .

\* Soient  $\mathbf{s}_l, \mathbf{t}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  et  $M \in \mathbb{N}$ . Nous écrivons

$$\mathbf{s}_l \stackrel{M}{\equiv} \mathbf{t}_l$$

si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

- (i) On a  $\mathcal{L}_{\mathbf{s}_l} = \mathcal{L}_{\mathbf{t}_l}$ ; notons  $\mathcal{L}$  cet ensemble commun.
- (ii) Il existe  $\mathbf{s}^{(0)}, \dots, \mathbf{s}^{(r)} \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}_M$  tels que  $\mathbf{s}^{(0)} = \mathbf{s}_l$ ,  $\mathbf{s}^{(r)} = \mathbf{t}_l$  et pour tout  $1 \leq i \leq r$ , on a  $\mathbf{s}^{(i)} \in \left\{ \dot{\tau}_j^{\pm 1} \cdot \mathbf{s}^{(i-1)} \mid 1 \leq j \leq l-1 \right\}$ .

De façon équivalente, plaçons les éléments de  $\mathbb{Z}^l(s)$  dans un graphe non orienté, dans lequel deux éléments sont reliés par une arête si et seulement si ils sont conjugués sous l'action de  $\dot{W}_l$  par un des générateurs de  $\dot{Q}$  ou son inverse. Alors on a  $\mathbf{s}_l \stackrel{M}{\equiv} \mathbf{t}_l$  si et seulement si il existe un chemin dans ce graphe reliant  $\mathbf{s}_l$  à  $\mathbf{t}_l$  qui passe par des sommets qui sont tous  $M$ -dominants (y compris  $\mathbf{s}_l$  et  $\mathbf{t}_l$ ).

\* Soient  $\mathbf{r}_l \in A_{l,n}(s)$  et  $v \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{r}_l])$ . Pour  $\mathbf{s}_l \in \dot{W}_l \cdot \mathbf{r}_l$ , posons

$$w(\mathbf{s}_l) := v + \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle) - \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle)$$

(Notons que  $w(\mathbf{s}_l)$  dépend aussi de  $\mathbf{r}_l$  et de  $v$ .)

#### 4.4.3.2 Un théorème de comparaison de bases canoniques pour les multi-charges très dominantes

L'objectif du paragraphe 4.4.3 est de prouver le résultat suivant.

**Théorème 4.30** Soient  $\mathbf{r}_l \in A_{l,n}(s)$  et  $v \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{r}_l])$ . Soit  $c := n(l^2 + l + 4)$  et

$$N := N_0(v; \mathbf{r}_l)n + c.$$

Soient  $\mathbf{s}_l, \mathbf{t}_l \in \dot{W}_l \cdot \mathbf{r}_l$  deux multi-charges  $N$ -dominantes telles que  $\mathcal{L}_{\mathbf{s}_l} = \mathcal{L}_{\mathbf{t}_l}$ . Alors les bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w(\mathbf{s}_l) \rangle$  et  $\mathbf{F}_q[\mathbf{t}_l]\langle w(\mathbf{t}_l) \rangle$  sont semblables.  $\square$

**Remarque 4.31** On peut prouver un résultat similaire pour des multi-charges  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l)$  très « anti-dominantes », i.e. telles que  $s_1 \ll s_2 \ll \dots \ll s_l$ .  $\diamond$

La valeur de  $N$  du théorème 4.30 n'est certainement pas optimale. En accord avec la remarque 4.23 et les tables données au chapitre 9, nous conjecturons le résultat suivant.

**Conjecture 4.32** La conclusion du théorème 4.30 subsiste si on remplace  $N$  par

$$N' := N_0(v; \mathbf{r}_l) + \dots + N_{n-1}(v; \mathbf{r}_l).$$

$\square$

**Exemple 4.33** Prenons  $n = 3, l = 2, \mathbf{r}_l = (1, 0)$  et  $v = \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle) - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)$ . Avec les notations du théorème 4.30 et de la conjecture 4.32, on a  $N = 33$  et  $N' = 3$ . Observons que les multi-charges  $\mathbf{s}_l^{(k)} := (3k + 1, -3k)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) sont dans l'orbite de  $\mathbf{r}_l = \mathbf{s}_l^{(0)}$  sous l'action de  $\dot{W}_l$ , et que de plus les résidus modulo  $n$  des composantes des  $\mathbf{s}_l^{(k)}$  sont les mêmes pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . D'après le théorème 4.30, les bases canoniques des  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l^{(k)}]\langle w(\mathbf{s}_l^{(k)}) \rangle$ ,  $k \geq 6$  sont deux à deux semblables. D'après la conjecture 4.32, les bases canoniques des  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l^{(k)}]\langle w(\mathbf{s}_l^{(k)}) \rangle$ ,  $k \geq 1$  sont deux à deux semblables. Cette conjecture implique en particulier (pour  $k = 1$  et  $k = 2$ ) que les bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[(4, -3)]\langle w((4, -3)) \rangle$  et  $\mathbf{F}_q[(7, -6)]\langle w((7, -6)) \rangle$  sont semblables. En effet, les matrices  $\Delta_k^\epsilon(q)$  des bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l^{(k)}]\langle w(\mathbf{s}_l^{(k)}) \rangle$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\epsilon \in \{+, -\}$ ) sont les suivantes, pour  $k = 1$  et  $k = 2$ .

$$\Delta_1^+(q) = \Delta_2^+(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q^2 & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & q^2 & 0 & q & q & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & q & q^2 & 0 & q & 1 & \cdot \end{pmatrix} \begin{matrix} ((3), \emptyset) \\ ((2, 1), \emptyset) \\ ((2), (1)) \\ ((1, 1, 1), \emptyset) \\ ((1), (1, 1)) \\ (\emptyset, (3)) \\ (\emptyset, (2, 1)) \\ (\emptyset, (1, 1, 1)) \end{matrix} \quad \text{et}$$

$$\Delta_1^-(q) = \Delta_2^-(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^{-2} & -q^{-1} & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q^{-2} & -q^{-1} & -q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -q^{-1} & q^{-2} & -q^{-1} & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ q^{-2} & -q^{-3} & q^{-2} & q^{-2} & -q^{-1} & -q^{-1} & 1 & \cdot \\ -q^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & q^{-2} & -q^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} ((3), \emptyset) \\ ((2,1), \emptyset) \\ ((2), (1)) \\ ((1,1,1), \emptyset) \\ ((1), (1,1)) \\ (\emptyset, (3)) \\ (\emptyset, (2,1)) \\ (\emptyset, (1,1,1)) \end{matrix}.$$

Par contre, la conjecture 4.32 ne nous permet pas de comparer les bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l^{(k)}]\langle w(\mathbf{s}_l^{(k)}) \rangle$  pour  $k = 0$  et  $k = 1$ . On peut en fait vérifier que

$$\Delta_0^+(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & q & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q^2 & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & q^2 & 0 & q & 1 & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & q & 0 & q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} ((3), \emptyset) \\ ((2,1), \emptyset) \\ ((2), (1)) \\ ((1,1,1), \emptyset) \\ ((1), (1,1)) \\ (\emptyset, (3)) \\ (\emptyset, (2,1)) \\ (\emptyset, (1,1,1)) \end{matrix}.$$

Observons que  $\Delta_1^+(q)$  a 22 coefficients non nuls alors que  $\Delta_0^+(q)$  n'en a que 21. Par conséquent, les bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l^{(k)}]\langle w(\mathbf{s}_l^{(k)}) \rangle$  pour  $k = 0$  et  $k = 1$  ne sont pas semblables.  $\diamond$

La démonstration du théorème 4.30 repose sur les deux propositions suivantes.

**Proposition 4.34** *Soient  $\mathbf{r}_l \in A_{l,n}(s)$  et  $v \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{r}_l])$ . Soient  $M := n(N_0(v; \mathbf{r}_l) + 2)$  et  $\mathbf{s}_l \in \mathcal{C}_M \cap \dot{W}_l \cdot \mathbf{r}_l$ . Soient  $1 \leq i \leq l-1$  et  $\mathbf{t}_l := \dot{\tau}_i \cdot \mathbf{s}_l$ . Alors les bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w(\mathbf{s}_l) \rangle$  et  $\mathbf{F}_q[\mathbf{t}_l]\langle w(\mathbf{t}_l) \rangle$  sont semblables.*

*Démonstration.* Nous donnons la preuve dans le cas où  $2 \leq i \leq l-3$  (la preuve pour  $i = 1$ ,  $i = l-2$  et  $i = l-1$  est analogue). On vérifie aisément, en calculant l'action des deux membres de l'égalité ci-dessous sur  $\mathbb{Z}^l(s)$ , qu'on a

$$\dot{\tau}_i = \dot{\sigma}_{i-1} \dot{\sigma}_{i-2} \cdots \dot{\sigma}_1 \dot{\sigma}_0 \dot{\sigma}_{l-1} \cdots \dot{\sigma}_{i+2} \dot{\sigma}_{i+1} \dot{\sigma}_{i+2} \cdots \dot{\sigma}_{l-1} \dot{\sigma}_0 \dot{\sigma}_1 \cdots \dot{\sigma}_i.$$

Soit  $0 \leq k \leq 2l-2$ . Notons  $\dot{\tau}_i[k]$  le facteur droit ayant  $k$  lettres dans cette écriture de  $\dot{\tau}_i$ . (On a donc  $\dot{\tau}_i[0] = \text{id}$ ,  $\dot{\tau}_i[1] = \dot{\sigma}_i$ ,  $\dot{\tau}_i[2] = \dot{\sigma}_{i-1} \dot{\sigma}_i$ , etc.) Posons

$$\mathbf{s}^{(k)} = (s_1^{(k)}, \dots, s_l^{(k)}) := \dot{\tau}_i[k] \cdot \mathbf{s}_l.$$

Pour  $1 \leq k \leq 2l - 2$ , soit  $i_k \in \llbracket 0; l - 1 \rrbracket$  tel que  $\dot{\tau}_i[k] = \dot{\sigma}_{i_k} \dot{\tau}_i[k - 1]$ . Fixons  $0 \leq k \leq 2l - 3$ . En calculant l'action de  $\dot{\tau}_i[k]$  sur  $\mathbf{s}_l$ , on voit qu'on a les propriétés suivantes.

- (i) On a  $s_{i_{k+1}}^{(k)}, s_{i_{k+1}+1}^{(k)} \in \{s_1, \dots, s_l, s_l + n, s_i + n, s_{i+1} - n\}$ .
- (ii) Si  $s_{i_{k+1}}^{(k)} = s_a + \epsilon n$  et  $s_{i_{k+1}+1}^{(k)} = s_{a'} + \epsilon' n$  avec  $a, a' \in \llbracket 1; l \rrbracket$ ,  $\epsilon, \epsilon' \in \{-1, 0, 1\}$ , alors  $a \neq a'$  et  $\epsilon \epsilon' = 0$ .

Observons de plus que par hypothèse sur  $\mathbf{s}_l$ , on a pour tout  $a, b \in \llbracket 1; l \rrbracket$  tels que  $a \neq b$ ,  $|s_b - s_a| \geq M|b - a| \geq M$ . Il découle de (i), (ii) et de ceci que

$$|s_{i_{k+1}}^{(k)} - s_{i_{k+1}+1}^{(k)}| \geq M - n.$$

Par conséquent, on a une arête  $\mathbf{s}^{(k)} \xrightarrow{i_k} \mathbf{s}^{(k+1)}$  ou  $\mathbf{s}^{(k+1)} \xrightarrow{i_k} \mathbf{s}^{(k)}$  dans  $\Gamma(M - n)$ . Il s'ensuit que  $\mathbf{s}_l$  et  $\mathbf{t}_l$  sont dans la même composante connexe de  $\Gamma(M - n) = \Gamma(n(N_0(v; \mathbf{r}_l) + 1))$ . On peut donc appliquer la proposition 4.27 pour conclure.  $\square$

**Proposition 4.35** Soient  $M \in \mathbb{N}$  et

$$N(M) := M + n(l^2 + l + 2).$$

Soient  $\mathbf{s}_l, \mathbf{t}_l$  deux multi-charges  $N(M)$ -dominantes telles que  $\mathcal{L}_{\mathbf{s}_l} = \mathcal{L}_{\mathbf{t}_l}$ . Alors on a  $\mathbf{s}_l \stackrel{M}{\equiv} \mathbf{t}_l$ .

*Démonstration.* Nous prouverons cette proposition au paragraphe 4.4.3.3.  $\square$

*Démonstration du théorème 4.30 à partir des propositions 4.34 et 4.35.*

Reprenons les notations du théorème 4.30. Posons  $M := n(N_0(v; \mathbf{r}_l) + 2)$ . Soit  $N(M)$  l'entier donné par la proposition 4.35. Notons que l'entier  $N$  défini au théorème 4.30 est précisément  $N(M)$ . Posons  $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{\mathbf{s}_l} = \mathcal{L}_{\mathbf{t}_l}$ . Par définition de  $N(M)$ , il existe  $\mathbf{s}^{(0)}, \dots, \mathbf{s}^{(r)} \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}_M$  tels que  $\mathbf{s}^{(0)} = \mathbf{s}_l$ ,  $\mathbf{s}^{(r)} = \mathbf{t}_l$  et pour tout  $1 \leq i \leq r$ , on a  $\mathbf{s}^{(i)} \in \left\{ \dot{\tau}_j^{\pm 1} \cdot \mathbf{s}^{(i-1)} \mid 1 \leq j \leq l - 1 \right\}$ . Soit  $1 \leq i \leq r$ . Puisque  $\mathcal{L}_{\mathbf{s}^{(i-1)}} = \mathcal{L}_{\mathbf{s}^{(i)}} = \mathcal{L}$ , on a  $\mathbf{s}^{(i-1)}, \mathbf{s}^{(i)} \in \dot{W}_l \cdot \mathbf{r}_l$ . La proposition 4.34 entraîne alors que les bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}^{(i-1)}] \langle w(\mathbf{s}^{(i-1)}) \rangle$  et de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}^{(i)}] \langle w(\mathbf{s}^{(i)}) \rangle$  sont semblables. Le théorème 4.30 s'ensuit.  $\square$

#### 4.4.3.3 Démonstration de la proposition 4.35

Exposons succinctement la preuve de cette proposition, qui fait appel à plusieurs résultats intermédiaires. Reprenons provisoirement les notations de la proposition 4.35. Notons  $\mathcal{L}$  l'ensemble  $\mathcal{L}_{\mathbf{s}_l} = \mathcal{L}_{\mathbf{t}_l}$ . Nous construisons des points  $\mathbf{s}^{(0)}, \dots, \mathbf{s}^{(r)}$  appartenant à  $\mathcal{L} \cap \mathcal{C}_M$  tels que  $\mathbf{s}^{(0)} = \mathbf{s}_l$ ,  $\mathbf{s}^{(r)} = \mathbf{t}_l$  et pour tout  $1 \leq i \leq r$ ,  $\mathbf{s}^{(i)}$  appartient à  $\left\{ \dot{\tau}_j^{\pm 1} \cdot \mathbf{s}^{(i-1)} \mid 1 \leq j \leq l - 1 \right\}$ . Pour cela, nous construisons une bijection  $\varphi$  qui envoie les points de  $\mathcal{L} \cap \mathcal{C}_{N(M)}$  sur les points

à coordonnées entières d'un cône  $C_{N(M)}$ . (Par définition, un *cône* est une intersection de demi-espaces.) Nous travaillons dans  $C_M$  qui est un translaté convenable de  $C_{N(M)}$ . Nous montrons que  $\varphi(\mathbf{s}_l)$  et  $\varphi(\mathbf{t}_l)$  sont connectés dans  $C_M$  *via* un chemin affine par morceaux dont les segments  $[\mathbf{x}^{(i)}; \mathbf{x}^{(i+1)}]$  ( $0 \leq i \leq r-1$ ) sont parallèles aux axes de coordonnées. Nous montrons alors que les points  $\mathbf{x}^{(i)} := \varphi^{-1}(\mathbf{s}^{(i)})$  ( $0 \leq i \leq r$ ) conviennent.

Nous adopterons dans tout ce paragraphe les notations suivantes. Dans tout ce paragraphe, on fixe une multi-charge  $\mathbf{a}_l = (a_1, \dots, a_l) \in \mathbb{Z}^l$  telle que  $0 \leq a_1, \dots, a_l \leq n-1$ .

\* Pour  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ), on pose

$$[\mathbf{x}] := ([x_1], \dots, [x_N]) \in \mathbb{Z}^N$$

et on définit de même  $[\mathbf{x}]$ .

\* Soit  $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{\mathbf{a}_l}$ .

\* Soit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{l-1}(\mathbb{R})$$

la matrice de Cartan de  $\mathfrak{sl}_l$ . On vérifie que  $\det(A) = l$ , donc  $A$  est inversible. Notons  $A^{-1} = (a^{i,j})_{1 \leq i, j \leq l-1}$  les coefficients de  $A^{-1}$ . On montre que (voir la preuve du lemme 1.12)

$$a^{i,j} = \begin{cases} \frac{i(l-j)}{l} & \text{si } i \leq j \\ \frac{j(l-i)}{l} & \text{si } j \leq i \end{cases} \quad (1 \leq i, j \leq l-1);$$

en particulier, tous les coefficients de  $A^{-1}$  sont strictement positifs. Soit  $1 \leq i \leq l-1$ . Posons

$$S_i := \sum_{j=1}^{l-1} a^{i,j}.$$

On vérifie par un calcul direct que  $S_i = \frac{i(l-i)}{2}$ . Une étude de variations de  $x \mapsto \frac{x(l-x)}{2}$

montre qu'on a  $\frac{1}{2} \leq S_i \leq \frac{l^2}{8}$ .

\* Pour  $1 \leq j \leq l-1$ , notons  $\epsilon_j := (\delta_{i,j})_{1 \leq i \leq l-1}$  le  $j$ -ième vecteur de la base naturelle de  $\mathbb{R}^{l-1}$ . Posons en outre  $\mathbf{1} := \epsilon_1 + \dots + \epsilon_{l-1}$ .



\* Rappelons que  $\mathbb{R}^{l-1} \cong \mathcal{M}_{l-1,1}(\mathbb{R})$  est naturellement muni d'un ordre partiel  $\leq$  (cf. page xi). Pour  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{l-1}$ , considérons les cônes

$$C_{\mathbf{b}} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{l-1} \mid A.\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \right\} \quad \text{et} \quad C'_{\mathbf{b}} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{l-1} \mid A.\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \right\}.$$

L'unique vecteur  $\boldsymbol{\omega} := \boldsymbol{\omega}(\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{l-1}$  tel que  $A.\boldsymbol{\omega} = \mathbf{b}$  est appelé *sommet* de  $C_{\mathbf{b}}$  (ou de  $C'_{\mathbf{b}}$ ).

\* Pour  $M \in \mathbb{N}$ , soit  $\mathbf{b}(M) = (b_1^{(M)}, \dots, b_{l-1}^{(M)}) \in \mathbb{R}^{l-1}$  le vecteur défini par

$$b_i^{(M)} := (M + a_{i+1} - a_i)/n \quad (1 \leq i \leq l-1).$$

\* À  $(s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{R}^l(s)$  on associe l'élément  $(x_1, \dots, x_{l-1}) = \varphi(s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{R}^{l-1}$  défini par

$$x_i := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^i (s_j - a_j), \quad 1 \leq i \leq l-1.$$

Réciproquement, à  $(x_1, \dots, x_{l-1}) \in \mathbb{R}^{l-1}$  on associe l'élément  $(s_1, \dots, s_l) = \psi(x_1, \dots, x_{l-1})$  appartenant à  $\mathbb{R}^l(s)$  défini par

$$s_i := n(x_i - x_{i-1}) + r_i, \quad 1 \leq i \leq l,$$

où on a posé  $x_0 = x_l := 0$ .

**Lemme 4.36** Soit  $\mathbf{b} := (b_1, \dots, b_{l-1}) \in \mathbb{R}^{l-1}$ . Soient

$$b := \min \{b_i \mid 1 \leq i \leq l-1\} \quad \text{et} \quad B := \max \{b_i \mid 1 \leq i \leq l-1\}.$$

Soit  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{l-1}) \in \mathbb{R}^{l-1}$  le sommet de  $C_{\mathbf{b}}$ . On a alors les propriétés suivantes.

- (i) Pour tout  $1 \leq i \leq l-1$ , on a  $bS_i \leq \omega_i \leq BS_i$ .
- (ii)  $C_{\mathbf{b}} \subset \boldsymbol{\omega} + (\mathbb{R}^+)^{l-1}$ .

*Démonstration.* Soit  $1 \leq i \leq l-1$ . Par définition, on a  $\omega_i = \sum_{j=1}^{l-1} a^{i,j} b_j$ . Puisque  $A^{-1} \geq 0$ , le point (i) s'ensuit. Soit  $\mathbf{x} \in C_{\mathbf{b}}$ ; alors  $A.\mathbf{x} - \mathbf{b} \geq 0$ . De plus,  $A^{-1} \geq 0$ , ce qui entraîne  $\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{b}) = A^{-1}.(A.\mathbf{x} - \mathbf{b}) \geq 0$ , d'où le point (ii).  $\square$

**Lemme 4.37**

- 1°) Les applications  $\varphi : \mathbb{R}^l(s) \rightarrow \mathbb{R}^{l-1}$  et  $\psi : \mathbb{R}^{l-1} \rightarrow \mathbb{R}^l(s)$  sont des bijections inverses l'une de l'autre.

2°) On a  $\psi(\mathbb{Z}^{l-1}) = \mathcal{L}$ , et pour  $1 \leq i \leq l-1$ ,  $(x_1, \dots, x_{l-1}) \in \mathbb{Z}^{l-1}$ , on a

$$\psi(x_1, \dots, x_i + 1, \dots, x_{l-1}) = \dot{\tau}_i \cdot \psi(x_1, \dots, x_{l-1}).$$

3°) Pour  $M \in \mathbb{N}$ , on a  $\varphi(\mathcal{C}_M) = C_{\mathbf{b}(M)}$ .

*Démonstration.* On prouve 1°) et 2°) à l'aide d'un calcul ne présentant aucune difficulté. Le point 3°) résulte, avec des notations évidentes, de l'équivalence

$$s_i - s_{i+1} \geq M \iff -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} \geq (M + a_{i+1} - a_i)/n.$$

□

Soit  $D \subset \mathbb{R}^{l-1}$ . On dit que  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$  sont  $\mathbb{Z}$ -connectés dans  $D$  s'il existe des vecteurs  $\mathbf{x}^{(0)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)} \in D \cap \mathbb{Z}^{l-1}$  tels que  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}^{(N)} = \mathbf{y}$  et pour tout  $0 \leq i \leq N-1$ , on a

$$\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)} \in \{\pm \epsilon_j \mid 1 \leq j \leq l-1\};$$

en particulier, on a  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^{l-1}$ . On notera alors  $\mathbf{x} \underset{D}{\sim} \mathbf{y}$ . Par exemple, si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^{l-1}$  sont deux points arbitraires du pavé  $\mathbf{P} := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{l-1} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{b}\}$ , alors  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont  $\mathbb{Z}$ -connectés dans  $\mathbf{P}$ .

**Remarque 4.38** Soit  $M \in \mathbb{N}$ . Rappelons que nous avons défini au paragraphe 4.4.3.1 une relation  $\underset{M}{\equiv}$  sur  $\mathbb{Z}^l(s)$ . Soient  $\mathbf{s}_l, \mathbf{t}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  deux multi-charges telles que  $\mathcal{L}_{\mathbf{s}_l} = \mathcal{L}_{\mathbf{t}_l} = \mathcal{L}$ . Alors d'après le lemme 4.37, on a  $\mathbf{s}_l \underset{M}{\equiv} \mathbf{t}_l$  si et seulement si  $\varphi(\mathbf{s}_l) \underset{C_{\mathbf{b}(M)}}{\sim} \varphi(\mathbf{t}_l)$ . ◊

**Proposition 4.39** Soit  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{l-1}$ . Alors il existe  $\mathbf{c} \leq \mathbf{b}$  tel que  $\mathbf{x} \underset{C_{\mathbf{c}}}{\sim} \mathbf{y}$  pour tout couple  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C_{\mathbf{b}} \times C_{\mathbf{b}}$ .

*Démonstration.* Commençons par construire  $\mathbf{c}$ . Soient  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{l-1})$  le sommet de  $C_{\mathbf{b}}$ ,  $\mathbf{b}' := \mathbf{b} + 2\mathbf{1}$ ,  $\boldsymbol{\omega}'$  le sommet de  $C_{\mathbf{b}'}$  et  $\boldsymbol{\omega}'' = (\omega''_1, \dots, \omega''_{l-1}) := \max(\boldsymbol{\omega}', [\boldsymbol{\omega}])$ . Posons en outre  $\omega''_0 = \omega''_l := 0$ . D'après le lemme 4.36 (ii), on a  $\mathbf{x} \geq \boldsymbol{\omega}$  pour tout  $\mathbf{x} \in C_{\mathbf{b}}$ . De même, on a  $\mathbf{x} \leq \boldsymbol{\omega}'$  pour tout  $\mathbf{x} \in C_{\mathbf{b}'}$ . En particulier, puisque  $\mathbf{b} \leq \mathbf{b}'$ , on a  $\boldsymbol{\omega} \in C_{\mathbf{b}'}$  et donc  $\boldsymbol{\omega} \leq \boldsymbol{\omega}' \leq \boldsymbol{\omega}''$ . Considérons le pavé

$$\mathbf{P} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{l-1} \mid \boldsymbol{\omega} \leq \mathbf{x} \leq \boldsymbol{\omega}''\}.$$

Ce qui précède montre que  $C_{\mathbf{b}}' \cap C_{\mathbf{b}'}' \subset \mathbf{P}$ , et par construction, on a aussi  $[\boldsymbol{\omega}] \in \mathbf{P}$ . Soit  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{l-1}) \in \mathbb{R}^{l-1}$  le vecteur défini par

$$c_i := -\omega''_{i-1} + 2\omega_i - \omega''_{i+1} \quad (1 \leq i \leq l-1).$$

Par construction, on a  $\mathbf{P} \subset C_{\mathbf{c}}$ . En particulier, puisque  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{P}$ , on a  $\boldsymbol{\omega} \in C_{\mathbf{c}}$  et donc  $\mathbf{c} \leq \mathbf{b}$ .

Montrons à présent que tout point  $\mathbf{x} \in C_b \cap \mathbb{Z}^{l-1}$  est  $\mathbb{Z}$ -connecté à  $[\boldsymbol{\omega}]$  dans  $C_c$ . Observons que si  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{l-1}) \in C_b \cap \mathbb{Z}^{l-1}$ , on a  $\mathbf{x} \geq \boldsymbol{\omega}$  car  $\mathbf{x} \in C_b$ , et donc  $\mathbf{x} \geq [\boldsymbol{\omega}]$ . On raisonne par récurrence sur

$$N(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{l-1} (x_i - [\omega_i]) \in \mathbb{N}.$$

Si  $N(\mathbf{x}) = 0$ , on a  $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\omega}] \in \mathbf{P} \subset C_c$  et il n'y a rien à prouver. Supposons donc que  $N(\mathbf{x}) > 0$  et envisageons deux cas. Supposons que  $\mathbf{x} \in C_{b'}$ . Alors par construction de  $\mathbf{P}$ , on a  $\mathbf{x} \in C_b \cap C_{b'} \subset \mathbf{P}$ ; en outre, on a  $[\boldsymbol{\omega}] \in \mathbf{P}$  et donc  $\mathbf{x} \underset{\mathbf{P}}{\geq} [\boldsymbol{\omega}]$ . Puisque  $\mathbf{P} \subset C_c$ , on a bien  $\mathbf{x} \underset{C_c}{\geq} [\boldsymbol{\omega}]$ . Traitons à présent le cas où  $\mathbf{x} \notin C_{b'}$ . Il existe alors  $1 \leq i \leq l-1$  tel que  $-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} > b_i + 2$  (ici, on pose  $x_0 = x_l := 0$ ). Considérons le vecteur

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{l-1}) := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - 1, x_{i+1}, \dots, x_{l-1}) \in \mathbb{Z}^{l-1}$$

et posons  $y_0 = y_l := 0$ . Observons que pour  $1 \leq j \leq l-1$ , on a

$$-y_{j-1} + 2y_j - y_{j+1} \geq -x_{j-1} + 2x_j - x_{j+1} - 2\delta_{i,j};$$

compte tenu du choix de  $i$  et de  $\mathbf{x} \in C_b$ , ceci montre que  $\mathbf{y} \in C_b$ . En outre, on a la relation  $N(\mathbf{y}) = N(\mathbf{x}) - 1$ , donc par hypothèse de récurrence, on a  $\mathbf{y} \underset{C_c}{\geq} [\boldsymbol{\omega}]$ . De plus,  $\mathbf{x} \underset{C_c}{\geq} \mathbf{y}$  car  $\mathbf{b} \leq \mathbf{c}$ , donc  $\mathbf{x} \underset{C_c}{\geq} [\boldsymbol{\omega}]$ .  $\square$

Pour  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{l-1}$ , définissons l'ensemble (non vide, en vertu de la proposition précédente)

$$\mathcal{A}(\mathbf{b}) := \left\{ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{l-1} \mid \mathbf{c} \leq \mathbf{b} \text{ et } \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C_b, \mathbf{x} \underset{C_c}{\geq} \mathbf{y} \right\}.$$

**Remarque 4.40** Soit  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{l-1}$ . Alors  $\mathcal{A}(\mathbf{b})$  est un intervalle, et l'application  $\mathbf{b}' \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{b}')$  est croissante. Supposons en effet que  $\mathbf{c} \in \mathcal{A}(\mathbf{b})$  et  $\mathbf{c}' \leq \mathbf{c}$ . Alors  $\mathbf{c} \leq \mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}' \leq \mathbf{c}$ , donc  $\mathbf{c}' \leq \mathbf{b}$ . Soit maintenant  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C_b \cap \mathbb{Z}^{l-1}$ . Alors  $\mathbf{x} \underset{C_c}{\geq} \mathbf{y}$ . De plus,  $\mathbf{c}' \leq \mathbf{c}$ , donc  $C_c \subset C_{c'}$ . Par conséquent, on a  $\mathbf{x} \underset{C_{c'}}{\geq} \mathbf{y}$ , et  $\mathbf{c}' \in \mathcal{A}(\mathbf{b})$ . Ainsi  $\mathcal{A}(\mathbf{b})$  est un intervalle. On montre par un raisonnement similaire que l'application  $\mathbf{b}' \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{b}')$  est croissante.  $\diamond$

**Remarque 4.41** On n'a pas nécessairement  $\mathbf{b} \in \mathcal{A}(\mathbf{b})$ . En effet, prenons  $l = 3$  (on a donc  $l-1 = 2$ ) et  $\mathbf{b} = (0,0)$ . Alors  $\mathbf{x} := (1,1)$  et  $\mathbf{y} := (0,0)$  sont deux points de  $C_b$  qui ne sont pas  $\mathbb{Z}$ -connectés dans  $C_b$ , car aucun des points  $(0, \pm 1)$  et  $(\pm 1, 0)$  n'est dans  $C_b$ .  $\diamond$

Notre but est à présent de construire, pour  $M \in \mathbb{N}$ , un entier  $N(M) \geq M$  tel que  $\mathbf{b}(M) \in \mathcal{A}(\mathbf{b}(N(M)))$ .

**Lemme 4.42** Soient  $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \mathbb{R}^{l-1}$  tels que  $A^{-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}') \in \mathbb{Z}^{l-1}$ . Alors  $\mathcal{A}(\mathbf{b}) = \mathcal{A}(\mathbf{b}') + (\mathbf{b} - \mathbf{b}')$ .

*Démonstration.* Nous ne prouvons que l'inclusion  $\subset$ , le raisonnement pour l'inclusion inverse étant analogue. Nous utiliserons le fait suivant.

$$(*) : \quad \mathbf{a} + C_{\mathbf{a}'} = C_{\mathbf{a}'+A.\mathbf{a}} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathbb{R}^{l-1}).$$

Soit  $\mathbf{c} \in \mathcal{A}(\mathbf{b})$ ; montrons que  $\mathbf{c} - (\mathbf{b} - \mathbf{b}') \in \mathcal{A}(\mathbf{b}')$ . On a bien  $\mathbf{c} - (\mathbf{b} - \mathbf{b}') \leq \mathbf{b}'$ , car  $\mathbf{c} \in \mathcal{A}(\mathbf{b})$  donc  $\mathbf{c} \leq \mathbf{b}$ . Soit  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C_{\mathbf{b}'} \cap \mathbb{Z}^{l-1}$ . Posons  $\mathbf{a} := A^{-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}')$ . D'après (\*), on a  $\mathbf{x} + \mathbf{a} \in C_{\mathbf{b}'+A.\mathbf{a}} = C_{\mathbf{b}}$ , et de même, on a  $\mathbf{y} + \mathbf{a} \in C_{\mathbf{b}}$ . Par hypothèse, on a  $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^{l-1}$  et  $\mathbf{c} \in \mathcal{A}(\mathbf{b})$ , donc  $\mathbf{x} + \mathbf{a} \underset{C_{\mathbf{c}}}{=} \mathbf{y} + \mathbf{a}$ . Il s'ensuit que  $\mathbf{x} \underset{-\mathbf{a}+C_{\mathbf{c}}}{=} \mathbf{y}$ ; mais d'après (\*), on a  $-\mathbf{a} + C_{\mathbf{c}} = C_{\mathbf{c} - (\mathbf{b} - \mathbf{b}'')}$  et donc  $\mathbf{x} \underset{C_{\mathbf{c} - (\mathbf{b} - \mathbf{b}'')}}{=} \mathbf{y}$ .  $\square$

Soit  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{l-1}) \in \mathbb{R}^{l-1}$ . Soit  $\mathbf{c}$  un élément de l'ensemble non vide  $\mathcal{A}(\mathbf{b})$ . Puisque  $[\mathbf{c}] \leq \mathbf{c}$ , la remarque 4.40 montre que  $[\mathbf{c}] \in \mathcal{A}(\mathbf{b}) \cap \mathbb{Z}^{l-1}$ . Par conséquent, l'ensemble

$$\left\{ \min_{1 \leq i \leq l-1} (c_i) \mid (c_1, \dots, c_{l-1}) \in \mathcal{A}(\mathbf{b}) \cap \mathbb{Z}^{l-1} \right\}$$

est une partie de  $\mathbb{Z}$  non vide et majorée dans  $\mathbb{R}$  par  $\min_{1 \leq i \leq l-1} (b_i)$ . Ainsi, l'entier

$$m(\mathbf{b}) := \max_{\mathbf{c} \in \mathcal{A}(\mathbf{b}) \cap \mathbb{Z}^{l-1}} \min_{1 \leq i \leq l-1} (c_i)$$

est bien défini et on a  $m(\mathbf{b}) \leq \min_{1 \leq i \leq l-1} (b_i)$ . Si  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(M)$  ( $M \in \mathbb{N}$ ), on pose  $m_M := m(\mathbf{b}(M))$ .

**Lemme 4.43** *La suite  $(m_M)_{M \in \mathbb{N}}$  est croissante, et pour tout  $M \in \mathbb{N}$ , on a  $m_{nlM} = m_0 + lM$ . De plus, on a  $m_0 \geq -l^2$ .*

*Démonstration.* Le premier point résulte de la croissance de l'application  $M \mapsto \mathbf{b}(M)$  et de la croissance de l'application  $\mathbf{b} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{b})$  (cf. remarque 4.40). Puisque  $\det(A) = l$ , la formule de Cramer montre que si  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{l-1}$ , alors  $A^{-1} \cdot (l\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}^{l-1}$ . Par conséquent, d'après le lemme 4.42, on a pour tout  $M \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{A}(\mathbf{b}(nlM)) = \mathcal{A}(\mathbf{b}(0) + (lM, \dots, lM)) = \mathcal{A}(\mathbf{b}(0)) + (lM, \dots, lM).$$

Le deuxième point s'ensuit.

Montrons à présent que  $m_0 \geq -l^2$ . Reprenons le raisonnement de la preuve de la proposition 4.39. Soient  $\mathbf{b} := \mathbf{b}(0)$ ,  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{l-1})$  le sommet de  $C_{\mathbf{b}}$ ,  $\mathbf{b}' := \mathbf{b} + 2.\mathbf{1}$  et  $\boldsymbol{\omega}' = (\omega'_1, \dots, \omega'_{l-1})$  le sommet de  $C_{\mathbf{b}'}$ . Soit  $\boldsymbol{\omega}'' = (\omega''_1, \dots, \omega''_{l-1}) := \max(\boldsymbol{\omega}', \lceil \boldsymbol{\omega} \rceil)$ . Posons en outre  $\omega''_0 = \omega''_l := 0$ . Soit  $\mathbf{c} := (c_1, \dots, c_{l-1}) \in \mathbb{R}^{l-1}$  le vecteur défini par

$$c_i := -\omega''_{i-1} + 2\omega_i - \omega''_{i+1} \quad (1 \leq i \leq l-1).$$

La preuve de la proposition 4.39 et la remarque 4.40 montrent alors que  $[\mathbf{c}] \in \mathcal{A}(\mathbf{b}(0))$ , donc  $m_0 \geq \min_{1 \leq i \leq l-1} ([c_i])$ . Soit  $1 \leq j \leq l-1$ . Puisque  $a_i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  ( $1 \leq i \leq l-1$ ), on a  $-\mathbf{1} \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{1}$ . Par conséquent, d'après le lemme 4.36 (i), on a  $-S_j \leq \omega_j \leq S_j$ . Rappelons

que  $\frac{1}{2} \leq S_j \leq \frac{l^2}{8}$ . Puisque  $l \geq 2$ , on a donc  $\omega_j \geq -\frac{l^2}{8}$  et  $[\omega_j] \leq \omega_j + 1 \leq \frac{l^2}{8} + 1 \leq \frac{3l^2}{8}$ . De même, on a  $S_j \leq \omega'_j \leq 3S_j \leq \frac{3l^2}{8}$ . Par conséquent, on a aussi  $\omega''_j \leq \frac{3l^2}{8}$ . Soit maintenant  $1 \leq i \leq l-1$ . On a alors

$$c_i = -\omega''_{i-1} + 2\omega_i - \omega''_{i+1} \geq -\frac{3l^2}{8} - 2\frac{l^2}{8} - \frac{3l^2}{8} = -l^2.$$

On a donc bien  $m_0 \geq \min_{1 \leq i \leq l-1} ([c_i]) \geq -l^2$ .  $\square$

**Corollaire 4.44** Soit  $M \in \mathbb{N}$ , et  $N'(M) := n(M + l^2 + l)$ . Alors  $m_{N'(M)} \geq M$ .

*Démonstration.* Soient  $a \in \mathbb{N}$  et  $r \in \llbracket 0; l-1 \rrbracket$  tels que  $M = al + r$ . On a alors l'inégalité  $N'(M) = nl(a + l + 1) + nr \geq nl(a + l + 1)$ , donc d'après le lemme précédent, on a

$$m_{N'(M)} \geq m_{nl(a+l+1)} = m_0 + l(a + l + 1) = M + (m_0 + l^2) + (l - r) \geq M.$$

$\square$

**Proposition 4.45** Soit  $M \in \mathbb{N}$ , et  $N(M) := M + n(l^2 + l + 2)$  (cf. proposition 4.35). Alors  $\mathbf{b}(M) \in \mathcal{A}(\mathbf{b}(N(M)))$ .

*Démonstration.* Notons pour simplifier  $N := N(M)$ . Soit  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{l-1}) \in \mathcal{A}(\mathbf{b}(N)) \cap \mathbb{Z}^{l-1}$  tel que  $\min_{1 \leq i \leq l-1} (c_i) = m_N$ . D'après la remarque 4.40, il suffit de montrer que  $\mathbf{b}(M) \leq \mathbf{c}$ .

Puisque  $\left\lceil \frac{M}{n} \right\rceil \leq \frac{M}{n} + 1$ , on a

$$N = (M + n) + n(l^2 + l + 1) \geq n \left\lceil \frac{M}{n} \right\rceil + n(l^2 + l + 1) = n \left( \left( \left\lceil \frac{M}{n} \right\rceil + 1 \right) + l^2 + l \right).$$

D'après le corollaire précédent, on a donc  $m_N \geq \left\lceil \frac{M}{n} \right\rceil + 1$ . Soit  $1 \leq i \leq l-1$ . Puisque  $a_j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  ( $1 \leq j \leq l-1$ ), on a donc

$$c_i \geq m_N \geq \left\lceil \frac{M}{n} \right\rceil + 1 \geq \frac{M}{n} + \frac{a_{i+1} - a_i}{n} = b_i^{(M)},$$

d'où le résultat.  $\square$

*Démonstration de la proposition 4.35.*

Reprenons les notations de la proposition 4.35. Pour  $1 \leq i \leq l-1$ , soit  $\mathbf{a}_i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket^l$  tel que  $\mathcal{L}_{\mathbf{a}_i} = \mathcal{L}_{\mathbf{s}_i} = \mathcal{L}_{\mathbf{t}_i}$  ( $\mathbf{a}_i$  est formé des résidus modulo  $n$  des composantes de  $\mathbf{s}_i$ , qui sont aussi les résidus modulo  $n$  des composantes de  $\mathbf{t}_i$ ). Soit  $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{\mathbf{a}_i}$ . D'après le lemme 4.37, on a  $\varphi(\mathbf{s}_i), \varphi(\mathbf{t}_i) \in C_{\mathbf{b}(N(M))} \cap \mathbb{Z}^{l-1}$ . Or  $\mathbf{b}(M) \in \mathcal{A}(\mathbf{b}(N(M)))$  d'après la proposition 4.45, donc  $\varphi(\mathbf{s}_i) \underset{C_{\mathbf{b}(M)}}{\equiv} \varphi(\mathbf{t}_i)$ . La remarque 4.38 montre alors que  $\mathbf{s}_i \underset{M}{\equiv} \mathbf{t}_i$ .  $\square$

## Chapitre 5

# Calcul des bases canoniques d'espaces de Fock de niveau supérieur

Fixons  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ . Nous avons vu au chapitre 3 comment calculer de façon rapide les bases canoniques de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  à partir de l'involution (voir la preuve du théorème 3.34 et l'exemple 3.37). Nous avons également vu un algorithme simple permettant de calculer l'involution de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . Cet algorithme repose sur le plongement  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \hookrightarrow \Lambda^s$  et sur la réalisation de  $\Lambda^s$  à l'aide des  $q$ -produits extérieurs ; il fait donc appel aux relations de redressement de  $\Lambda^s$ . Malheureusement, pour certaines valeurs de  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l)$ , les  $q$ -produits extérieurs à redresser comportent un nombre important de facteurs ; c'est par exemple le cas si  $s_1 \gg s_2 \gg \dots \gg s_l$ . Dans ce cas, le nombre de relations de redressement  $(R_1) - (R_4)$  à manipuler est trop important pour que cet algorithme soit utilisable dans la pratique.

Nous allons décrire dans ce chapitre un second algorithme permettant de calculer l'involution de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  sans utiliser les relations de redressement. Par conséquent, cet algorithme est en pratique nettement plus performant que l'algorithme précédent. Fixons un poids  $w$  de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . Soit  $A(q)$  la matrice de l'involution de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$  (relativement à la base standard). Nous allons voir au cours de ce chapitre comment calculer une base  $\mathbb{B}$  de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$  sur laquelle l'involution  $-$  de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  agit trivialement. Plus précisément,  $\mathbb{B}$  s'exprime à l'aide de monômes en les opérateurs  $f_i, \hat{f}_j$  et  $B_{-m}$  ( $0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq l-1, m \in \mathbb{N}^*$ ). Soit  $T(q)$  la matrice de passage de la base standard de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$  vers la base  $\mathbb{B}$ . On a donc la relation

$$A(q) = T(q) \left( T(q^{-1}) \right)^{-1}.$$

Notons que cet algorithme est une généralisation de l'algorithme de Leclerc et Thibon décrit dans [Le] pour  $l = 1$ . Il y a cependant deux difficultés nouvelles en niveau  $l > 1$ . Tout d'abord le calcul de l'action de  $\mathcal{H}$  est beaucoup plus délicat : nous l'expliquerons à la section 5.1. Nous aurons aussi besoin de l'action de l'algèbre  $U_p^l(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ , qui est triviale lorsque  $l = 1$ .

Pour un exemple de calcul, le lecteur pourra se reporter au paragraphe 5.3.2. Notons que le calcul de  $A(q)$  par cette méthode nécessite l'inversion de la matrice  $T(q^{-1})$ ; il s'agit là de l'étape la plus coûteuse de l'algorithme. Remarquons en outre que  $T(q)$  n'est pas unitriangulaire; par conséquent cette approche n'explique absolument pas pourquoi la matrice  $A(q)$  l'est.

## 5.1 Calcul de l'action de l'algèbre de Heisenberg $\mathcal{H}$ sur les vecteurs $|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$ ( $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ )

### 5.1.1 Cas du niveau 1

#### 5.1.1.1 Action de $\mathcal{Z}_r$ sur $\Lambda_q^r V[n, 1]$

Fixons dans tout ce paragraphe un entier  $r \geq 1$ . Soit  $\text{Sym}_r := \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_r]^{\mathfrak{S}_r}$  l'anneau des polynômes à coefficients rationnels qui sont symétriques en les variables  $x_1, \dots, x_r$ . On définit [Mac] les *fonctions symétriques complètes*  $h_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) par

$$h_0 := 1 \quad \text{et} \quad h_k := \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq r} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

On définit aussi les *sommes de puissances* (en anglais, *power sums*)  $p_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) par

$$p_0 := 1 \quad \text{et} \quad p_k := \sum_{i=1}^r x_i^k \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

Il est possible d'exprimer par récurrence les  $p_i$  à l'aide des  $h_j$  à l'aide des fameuses formules de Newton. Plus précisément, on a [Mac, (2.11)]:

$$p_k = kh_k - \sum_{i=1}^{k-1} p_i h_{k-i} \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

Soit  $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  (*resp.*  $\{y_{-k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ ) une partie d'un anneau commutatif telle que  $x_0 = 1$  (*resp.*  $y_0 = 1$ ), et  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  une partition. On pose

$$x_\lambda := x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_k} \quad (\text{resp. } y_{-\lambda} := y_{-\lambda_1} \cdots y_{-\lambda_k});$$

en particulier, si  $\lambda = (k)$  n'a qu'une part, alors on a  $x_\lambda = x_k$ . Par exemple, on a

$$p_{(3,3,2,1,1,1)} = p_1^3 p_2 p_3^2 \in \text{Sym}_r \quad \text{et} \quad B_{-(2,1,1)} = B_{-2} B_{-1}^2 \in \mathcal{H}$$

(rappelons que dans  $\mathcal{H}$ , on a  $[B_{-1}, B_{-2}] = 0$ ).

Plaçons-nous à nouveau dans  $\text{Sym}_r$ . Il est bien connu que les  $p_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) engendrent l'algèbre  $\text{Sym}_r$ , et que les  $p_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) sont algébriquement indépendants. Par conséquent,  $\{p_\lambda \mid \lambda \in \Pi\}$  est une base de  $\text{Sym}_r$  en tant que  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel. De même,  $\{h_\lambda \mid \lambda \in \Pi\}$

est une base de  $\text{Sym}_r$  en tant que  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel. Soient  $\alpha_{\lambda,\mu} \in \mathbb{Q}$  ( $\lambda, \mu \in \Pi$ ) les coefficients de la matrice de passage de la base des  $p_\lambda$  vers la base des  $h_\mu$ , définis par

$$h_\mu = \sum_{\lambda \in \Pi} \alpha_{\lambda,\mu} p_\lambda \quad (\mu \in \Pi).$$

Les formules de Newton montrent que ces coefficients ne dépendent pas du nombre de variables  $r$ , et que si  $|\lambda| \neq |\mu|$ , alors  $\alpha_{\lambda,\mu} = 0$ .

**Remarque 5.1** Les coefficients  $\alpha_{\lambda,\mu}$  ( $\lambda, \mu \in \Pi$ ) sont liés à la théorie des représentations du groupe symétrique, et ils peuvent être calculés explicitement à l'aide de coefficients multinomiaux. Nous allons détailler ceci en introduisant plusieurs notations.

Soit  $\{m_\lambda \mid \lambda \in \Pi\}$  la base de  $\text{Sym}_r$  formée des fonctions monomiales [Mac]. Frobenius [F] a calculé les coefficients  $\beta_{\lambda,\mu}$  tels que  $p_\mu = \sum_{\lambda \in \Pi} \beta_{\lambda,\mu} m_\lambda$  ( $\mu \in \Pi$ ). Il est clair que  $\alpha_{\lambda,\mu} = \beta_{\lambda,\mu} = 0$  à moins que  $\lambda$  et  $\mu$  soient des partitions d'un même entier  $N$ . Pour  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Pi_N$ , soit

$$\mathfrak{S}_\lambda := \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda_k} \subset \mathfrak{S}_N$$

le sous-groupe de Young associé à  $\lambda$ , et  $\Xi_\lambda$  le caractère de la représentation de  $\mathfrak{S}_N$  induite à partir de la représentation triviale de  $\mathfrak{S}_\lambda$ . Les  $\Xi_\lambda$ ,  $\lambda \in \Pi_N$ , sont appelés *caractères permutationnels* de  $\mathfrak{S}_N$ ; Frobenius a montré qu'ils forment une base des fonctions centrales de  $\mathfrak{S}_N$ . Si  $\Xi$  est un caractère de  $\mathfrak{S}_N$  et  $\mu \in \Pi_N$ , notons  $\Xi(\mu)$  la valeur prise par  $\Xi$  sur la classe de conjugaison de  $\mathfrak{S}_N$  indexée par  $\mu$ . Frobenius a alors montré que

$$\beta_{\lambda,\mu} = \Xi_\lambda(\mu) \quad (\lambda, \mu \in \Pi_N)$$

et il a exprimé  $\beta_{\lambda,\mu}$  comme somme de coefficients multinomiaux.

Munissons  $\text{Sym}_r$  du produit scalaire qui rend la base des fonctions de Schur orthonormée (voir [Mac]). Alors les bases  $\{h_\lambda \mid \lambda \in \Pi\}$  et  $\{m_\lambda \mid \lambda \in \Pi\}$  sont adjointes l'une de l'autre pour ce produit scalaire [Mac]. De plus, les bases  $\{p_\lambda \mid \lambda \in \Pi\}$  et  $\{z_\lambda^{-1} p_\lambda \mid \lambda \in \Pi\}$  sont aussi adjointes l'une de l'autre [Mac]. Ici on a posé, pour toute partition  $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots)$  écrite sous forme multiplicative (cf. paragraphe 1.1.1),  $z_\lambda := \prod_{i \geq 1} i^{m_i} (m_i)!$ . D'après le lemme 4.14, on a donc

$$h_\mu = \sum_{\lambda \in \Pi_N} \beta_{\mu,\lambda} z_\lambda^{-1} p_\lambda \quad (\mu \in \Pi_N),$$

d'où

$$\alpha_{\lambda,\mu} = z_\lambda^{-1} \Xi_\mu(\lambda) \quad (\lambda, \mu \in \Pi_N).$$

◇

Rappelons que  $\mathcal{Z}_r$  désigne le centre de l'algèbre de Hecke  $\widehat{H}_r$  (cf. section 2.3). Pour  $1 \leq i \leq r$ , nous avons défini, à la section 2.3, un élément  $X^{e_i} \in \widehat{H}_r$ . Par brièveté nous poserons  $X_i := X^{e_i}$ . D'après le lemme 1.34 (ii), si  $f \in \text{Sym}_r$ , alors les éléments  $f(X_1, \dots, X_r)$  et  $f(X_1^{-1}, \dots, X_r^{-1})$  appartiennent à  $\mathcal{Z}_r$ . En fait, un théorème de Bernstein dit que si l'algèbre de Hecke affine  $\widehat{H}_r$  est définie sur un corps algébriquement clos et si  $\{b_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  est une



partie de  $\text{Sym}_r$  telle que  $\{b_\lambda \mid \lambda \in \Pi\}$  est une base de  $\text{Sym}_r$  en tant qu'espace vectoriel, alors  $\{b_\lambda(X_1, \dots, X_r), b_\lambda(X_1^{-1}, \dots, X_r^{-1}) \mid \lambda \in \Pi\}$  est une base de l'espace vectoriel  $\mathcal{Z}_r$ . En prenant  $b_k := p_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), on trouve la base de  $\mathcal{Z}_r$  formée les bosons, que nous avons considérée à la section 2.3. En prenant  $b_k := h_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), on trouve la base de  $\mathcal{Z}_r$  formée des éléments

$$\mathcal{U}_\lambda := h_\lambda(X_1, \dots, X_r) \quad (\lambda \in \Pi) \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_\lambda := h_\lambda(X_1^{-1}, \dots, X_r^{-1}) \quad (\lambda \in \Pi).$$

On pose  $\mathcal{U}_k := \mathcal{U}_{(k)}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et on définit de même  $\mathcal{V}_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

Soit  $\Lambda_q^r V[n, 1]$  l'espace vectoriel engendré par les  $q$ -produits extérieurs, dépendant des paramètres  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $l = 1$  (cf. paragraphe 2.2.2). Dans [LT], Leclerc et Thibon ont donné une expression combinatoire de l'action des  $\mathcal{U}_k$  et des  $\mathcal{V}_k$  sur  $\Lambda_q^r V[n, 1]$ , que nous rappelons ici. Pour cela, introduisons les définitions suivantes. Si  $\theta$  est une forme gauche, soit  $\theta \downarrow$  la forme gauche contenue dans  $\theta$  qui est constituée des cases situées en bas de chaque colonne de  $\theta$  (voir figure 5.1).

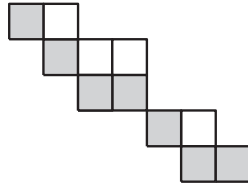


FIG. 5.1 – Une forme gauche  $\theta$ . Les cases de  $\theta \downarrow$  sont représentées en gris.

Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions telles que  $\mu \subset \lambda$ . On dit que  $\theta$  est une bande horizontale de  $N$ -rubans de poids  $m$  et de profil  $\lambda/\mu$  (en anglais, *horizontal  $N$ -ribbon strip of weight  $m$  and shape  $\lambda/\mu$* ) si  $\theta = \lambda/\mu$  et si on peut paver  $\theta$  à l'aide de  $m$  rubans de longueur  $N$  ayant chacun leur queue dans  $\theta \downarrow$ . La figure 5.3 montre une bande horizontale de  $N$ -rubans.

**Lemme 5.2** *Soit  $\theta$  une bande horizontale de  $N$ -rubans. Alors  $\theta$  peut être pavée d'une unique façon par des  $N$ -rubans ayant leur queue dans  $\theta \downarrow$ .*

*Démonstration.* La preuve que nous allons exposer va également donner un algorithme pour la construction de ce pavage. On procède par récurrence sur  $|\theta|$ . Si  $|\theta| = 0$ , il n'y a rien à prouver. Sinon, on construit par récurrence une suite  $b_1, \dots, b_m$  de boîtes de  $\theta$  de la façon suivante. Pour  $i \in \mathbb{N}^*$ , soit  $E_i := \{j \in \mathbb{N}^* \mid (i, j) \in \theta\}$ . Soit  $i_1$  le plus grand entier tel que  $E_{i_1}$  est non vide. Soit  $j_1$  le plus petit élément de  $E_{i_1}$ , de telle sorte que  $b_1 := (i_1, j_1)$  est la boîte située « le plus en haut à gauche » du diagramme de  $\theta$ . Supposons avoir construit  $b_k = (i, j)$  avec  $k \geq 1$ . Si  $(i-1, j) \in \theta$ , on pose  $b_{k+1} := (i-1, j)$ . Si  $(i-1, j) \notin \theta$  et  $(i, j+1) \in \theta$ , on pose  $b_{k+1} := (i, j+1)$ . Si aucun de ces deux cas n'a lieu, on s'arrête. Il est clair qu'on construit ainsi une suite finie  $b_1, \dots, b_m$  de boîtes de  $\theta$ , et que  $b_m$  est la boîte située « le plus en bas à droite » de la composante connexe du diagramme de  $\theta$  contenant  $b_1$ . La figure 5.2 montre les boîtes  $b_1, \dots, b_m$  sur un exemple.

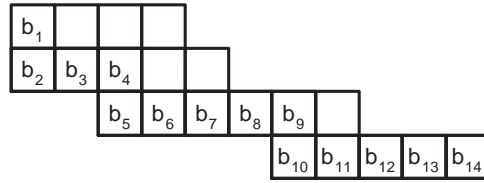


FIG. 5.2 – Quelques boîtes d'une forme gauche.

L'observation cruciale est que si  $\mathcal{T}$  est un pavage de  $\theta$  satisfaisant les conditions de l'énoncé, alors on doit avoir  $m \geq N$  et  $\rho := \{b_1, \dots, b_N\}$  doit être un des rubans de  $\mathcal{T}$  (par conséquent, on doit avoir  $b_N \in \theta \downarrow$ ). Par définition de  $b_1, \dots, b_N$ ,  $\theta' := \theta - \rho$  est encore une forme gauche. Puisque tout pavage de  $\theta$  satisfaisant les conditions de l'énoncé contient  $\rho$ ,  $\theta'$  doit encore être une bande horizontale de  $N$ -rubans. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à  $\theta'$  pour conclure.  $\square$

On définit le *spin* de la bande horizontale de  $N$ -rubans  $\theta$ , que l'on note  $\text{spin}(\theta)$ , comme étant égal à la somme des hauteurs de chacun des rubans qui pavent le diagramme de  $\theta$ .

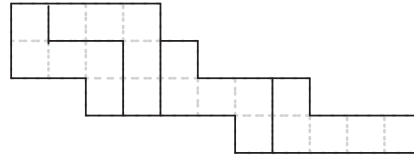


FIG. 5.3 – Une bande horizontale de 5-rubans de poids 4 et de spin 7.

Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions, et  $N, m \in \mathbb{N}^*$ . Si  $\mu \subset \lambda$  et si  $\theta := \lambda/\mu$  est une bande horizontale de  $N$ -rubans de poids  $m$ , alors on pose

$$L_{\lambda/\mu, m}^{(N)}(q) := (-q)^{-\text{spin}(\theta)}.$$

Sinon, on pose  $L_{\lambda/\mu, m}^{(N)}(q) := 0$ .

Introduisons enfin la notation suivante. Si  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  est une partition en au plus  $r$  parts et  $s \in \mathbb{Z}$ , on pose

$$u_\lambda^{(s)} := u_{\lambda_1+s+r-1} \wedge u_{\lambda_2+s+r-2} \wedge \dots \wedge u_{\lambda_r+s} \in \Lambda_q^r V[n, 1].$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat de Leclerc et Thibon. Pour la démonstration dans le cas où  $s = 0$ , nous renvoyons le lecteur à [LT]. La preuve dans le cas général où  $s \in \mathbb{Z}$  est similaire.

**Théorème 5.3 ([LT], Theorem 6.4)** Soit  $\nu$  une partition en au plus  $r$  parts,  $s \in \mathbb{Z}$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Alors on a dans  $\Lambda_q^r V[n,1]$ ,

$$\mathcal{U}_k.u_\nu^{(s)} = \sum_{\mu} L_{\nu/\mu,k}^{(n)}(q) u_\mu^{(s)} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_k.u_\nu^{(s)} = \sum_{\lambda} L_{\lambda/\nu,k}^{(n)}(q) u_\lambda^{(s)},$$

où les sommes portent sur l'ensemble des partitions ayant au plus  $r$  parts.  $\square$

Grâce à ce théorème et aux formules de Newton, on peut calculer l'action des bosons sur les  $q$ -produits extérieurs ordonnés de  $\Lambda_q^r V[n,1]$  sans avoir à effectuer de redressement. C'est pourquoi nous préférons utiliser cette méthode dans la pratique.

**Exemple 5.4** Prenons  $n = 2$ ,  $r = 4$ ,  $k = -2$  et  $\nu = \emptyset$ . Alors d'après les formules de Newton, on a  $B_{-2} = 2\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1^2$ . On calcule, pour  $s \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1.u_\emptyset^{(s)} &= u_{(2)}^{(s)} - q^{-1}u_{(1,1)}^{(s)}, \\ \mathcal{V}_1.u_{(2)}^{(s)} &= u_{(4)}^{(s)} + u_{(2,2)}^{(s)} - q^{-1}u_{(2,1,1)}^{(s)}, \\ \mathcal{V}_1.u_{(1,1)}^{(s)} &= u_{(3,1)}^{(s)} - q^{-1}u_{(2,2)}^{(s)} - q^{-1}u_{(1,1,1,1)}^{(s)}, \\ \mathcal{V}_1^2.u_\emptyset^{(s)} &= u_{(4)}^{(s)} - q^{-1}u_{(3,1)}^{(s)} + (1 + q^{-2})u_{(2,2)}^{(s)} - q^{-1}u_{(2,1,1)}^{(s)} + q^{-2}u_{(1,1,1,1)}^{(s)}, \\ \mathcal{V}_2.u_\emptyset^{(s)} &= u_{(4)}^{(s)} - q^{-1}u_{(3,1)}^{(s)} + q^{-2}u_{(2,2)}^{(s)}, \end{aligned}$$

d'où

$$B_{-2}.u_\emptyset^{(s)} = u_{(4)}^{(s)} - q^{-1}u_{(3,1)}^{(s)} + (-1 + q^{-2})u_{(2,2)}^{(s)} + q^{-1}u_{(2,1,1)}^{(s)} - q^{-2}u_{(1,1,1,1)}^{(s)},$$

comme on peut le vérifier à l'aide des relations de redressement.  $\diamond$

**Remarque 5.5** Il est en fait possible de donner directement une description combinatoire de l'action des bosons sur les  $q$ -produits extérieurs ordonnés de  $\Lambda_q^r V[n,1]$  (cf. [La]). Cette description étant plus compliquée, nous préférons travailler avec les opérateurs  $\mathcal{U}_k$  et  $\mathcal{V}_k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) introduits précédemment.  $\diamond$

### 5.1.1.2 Action de $\mathcal{H}$ sur $\Lambda^s[n,1]$

Soit  $v \in \Lambda_q^r V[n,1]$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $k > r + nm$ . D'après le lemme 3.5 (ii), l'expression

$$B_{-m}(v \wedge u_{s-r} \wedge u_{s-r-1} \wedge \cdots \wedge u_{s-t+1}) \wedge u_{s-t} \wedge u_{s-t-1} \wedge \cdots \wedge u_{s-k+1}$$

ne dépend pas de  $t \in \llbracket r + nm; k - 1 \rrbracket$ . Par ailleurs, on a pour tout  $a \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathcal{V}_m = \sum_{\mu \in \Pi} \alpha_{(m),\mu} B_{-\mu} \in \text{End}(\Lambda_q^a V[n,1]),$$

et les coefficients  $\alpha_{(m),\mu}$  ne dépendent pas de  $a$ . Il s'ensuit que l'expression

$$\mathcal{V}_m(v \wedge u_{s-r} \wedge u_{s-r-1} \wedge \cdots \wedge u_{s-t+1}) \wedge u_{s-t} \wedge u_{s-t-1} \wedge \cdots \wedge u_{s-k+1}$$

ne dépend pas de  $t \in \llbracket r + nm ; k - 1 \rrbracket$ . Par conséquent, on peut définir un endomorphisme  $\mathcal{V}_m \in \text{End}(\Lambda^s[n,1])$  en posant, pour  $v \in \Lambda_q^r V[n,1]$ ,

$$\mathcal{V}_m(v \wedge |s - r) := \mathcal{V}_m(v \wedge u_{s-r} \wedge u_{s-r-1} \wedge \cdots \wedge u_{s-t+1}) \wedge |s - t),$$

et cette expression ne dépend pas de  $t \geq r + nm$ . De même, on peut définir un endomorphisme  $\mathcal{U}_m \in \text{End}(\Lambda^s[n,1])$  en posant, pour  $v \in \Lambda_q^r V[n,1]$ ,

$$\mathcal{U}_m(v \wedge |s - r) := \mathcal{U}_m(v \wedge u_{s-r} \wedge u_{s-r-1} \wedge \cdots \wedge u_{s-t+1}) \wedge |s - t),$$

et cette expression ne dépend pas de  $t \geq r + nm$ . Notons que pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$ , on a les égalités suivantes dans  $\text{End}(\Lambda_q^r V[n,1])$  :

$$\mathcal{U}_m = \sum_{\mu \in \Pi} \alpha_{(m),\mu} B_\mu \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_m = \sum_{\mu \in \Pi} \alpha_{(m),\mu} B_{-\mu};$$

par conséquent, ces égalités sont encore vraies dans  $\text{End}(\Lambda^s[n,1])$ . Compte tenu de la définition des opérateurs  $\mathcal{U}_m, \mathcal{V}_m \in \text{End}(\Lambda^s[n,1])$  et du théorème 5.3, on a les expressions suivantes dans  $\Lambda^s[n,1]$ .

**Proposition 5.6** *Soit  $\nu \in \Pi$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Alors on a dans  $\Lambda^s[n,1]$ ,*

$$\mathcal{U}_k \cdot |\nu, s) = \sum_{\mu \in \Pi} L_{\nu/\mu, k}^{(n)}(q) |\mu, s) \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_k \cdot |\nu, s) = \sum_{\lambda \in \Pi} L_{\lambda/\nu, k}^{(n)}(q) |\lambda, s) \quad (\nu \in \Pi).$$

□

Comme pour  $\Lambda_q^r V[n,1]$ , cette proposition et les formules de Newton permettent de calculer l'action des bosons  $B_m$ ,  $m \in \mathbb{Z}^*$  sur  $\Lambda^s[n,1]$  sans faire de redressement. Par exemple, pour  $n = 2$  et  $k = -2$ , on a pour tout  $s \in \mathbb{Z}$ ,

$$B_{-2} \cdot |\emptyset, s) = |(4), s) - q^{-1} |(3,1), s) + (-1 + q^{-2}) |(2,2), s) + q^{-1} |(2,1,1), s) - q^{-2} |(1,1,1,1), s)$$

(cf. exemple 5.4).

**Remarque 5.7** Il découle de ce qui précède que l'action en niveau 1 des bosons sur les partitions chargées ne dépend pas de la charge  $s$ . Ceci provient du fait que les relations de redressement en niveau  $l = 1$  sont elles-mêmes invariantes par translation suivant  $s \in \mathbb{Z}$  arbitraire. Plus précisément, soit  $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $k_1 \leq k_2$ . Écrivons la relation donnant le redressement de  $u_{k_1} \wedge u_{k_2}$  sous la forme

$$u_{k_1} \wedge u_{k_2} = \sum_{l_1 \geq l_2} \alpha_{k_1, k_2, l_1, l_2}(q) u_{l_1} \wedge u_{l_2} \quad (\alpha_{k_1, k_2, l_1, l_2}(q) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]).$$

Soit  $s \in \mathbb{Z}$ . Puisque  $l = 1$ , on a

$$c(k_2 - s) - c(k_1 - s) \equiv c(k_2) - c(k_1) \pmod{n} \quad (\text{et } d(k_2 - s) - d(k_1 - s) = d(k_2) - d(k_1) = 0).$$

Il s'ensuit que

$$u_{k_1-s} \wedge u_{k_2-s} = \sum_{l_1 \geq l_2} \alpha_{k_1, k_2, l_1, l_2}(q) u_{l_1-s} \wedge u_{l_2-s},$$

soit encore  $\alpha_{k_1-s, k_2-s, l_1-s, l_2-s}(q) = \alpha_{k_1, k_2, l_1, l_2}(q)$  pour tout  $(k_1, k_2, l_1, l_2, s) \in \mathbb{Z}^5$  tel que  $l_1 \leq l_2$ . Puisque l'action des bosons sur  $\Lambda^s[n, 1]$  est définie à l'aide de redressements de  $q$ -produits extérieurs non ordonnés, la remarque s'ensuit. Par contre, cet argument tombe en défaut si on suppose que  $l > 1$ . En effet, on a pour  $n = l = 2$ ,  $u_0 \wedge u_3 = -q^{-1}u_3 \wedge u_0$  alors que  $u_1 \wedge u_4 = u_4 \wedge u_1 + (q - q^{-1})u_3 \wedge u_2$  (ceci provient du fait que  $d(3) = d(0)$  alors que  $d(4) \neq d(1)$  dans ce cas). On peut alors trouver deux multi-charges  $\mathbf{s}_l$  et  $\mathbf{t}_l$  telles que les actions de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  et  $\mathbf{F}_q[\mathbf{t}_l]$  soient effectivement différentes (cf. exemple 5.13).  $\diamond$

### 5.1.2 Action de $\mathcal{H}$ sur les vecteurs $|\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle$ lorsque $(\lambda_l, \mathbf{s}_l)$ est très dominant

On se place à nouveau dans  $\Lambda^s[n, l]$  avec  $l \geq 1$  quelconque. Suivant [U2], nous allons voir maintenant qu'il est possible, dans certains cas, de calculer l'action de  $B_m$  ( $m \in \mathbb{Z}^*$ ) sur le vecteur  $|\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle$ , ( $\lambda_l \in \Pi^l$ ,  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ ) en se ramenant au cas du niveau 1. Grâce aux résultats du paragraphe précédent, on peut donc se passer des relations de redressement dans ce cas. Ceci motive la définition suivante.

**Définition 5.8** Soit  $M, N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda \in \Pi^N$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N) \in \mathbb{Z}^N$ . On dit que le couple  $(\lambda, \mathbf{s})$  est  $M$ -dominant si on a

$$s_i - s_{i+1} \geq M + |\lambda| \quad (1 \leq i \leq N - 1).$$

En particulier, le couple  $(\emptyset, \mathbf{s}) \in \Pi^N \times \mathbb{Z}^N$  est  $M$ -dominant si et seulement si la multi-charge  $\mathbf{s}$  est  $M$ -dominante, au sens de la définition 4.29.  $\diamond$

Introduisons la notation suivante. Soit  $x \in \text{End}(\Lambda^s[n, 1])$  un opérateur agissant sur les vecteurs de la base standard de  $\Lambda^s[n, 1]$  par

$$x \cdot |\lambda, \mathbf{s}\rangle = \sum_{\mu \in \Pi} x_{\lambda, \mu}^{(s)} |\mu, \mathbf{s}\rangle \quad (\lambda \in \Pi, x_{\lambda, \mu}^{(s)} \in \mathbf{K}).$$

On définit alors, pour  $b \in \llbracket 1; l \rrbracket$ , un opérateur  $x[b] \in \text{End}(\Lambda^s[n, l])$  par

$$x[b] \cdot |\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle = \sum_{\mu \in \Pi} x_{\lambda^{(b)}, \mu}^{(s_b)} \left| (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(b-1)}, \mu, \lambda^{(b+1)}, \dots, \lambda^{(l)}), \mathbf{s}_l \right\rangle$$

$$(\lambda_l = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(l)}) \in \Pi^l, \quad \mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}^l(s));$$

autrement dit,  $x[b]$  agit comme  $x$  sur la  $b$ -ième composante et laisse inchangée les autres.

**Exemple 5.9** Prenons  $n = 2$ ,  $l = 1$  et  $s \in \mathbb{Z}$ . Alors on a (cf. paragraphe précédent)

$$B_{-2} \cdot |\emptyset, s\rangle = |(4), s\rangle - q^{-1}|(3,1), s\rangle + (-1 + q^{-2})|(2,2), s\rangle + q^{-1}|(2,1,1), s\rangle - q^{-2}|(1,1,1,1), s\rangle.$$

Par conséquent, pour  $n = 2$ ,  $l = 2$  et  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^2$ , on a

$$\begin{aligned} B_{-2}[1] \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle &= |((4), \emptyset), \mathbf{s}_l\rangle - q^{-1}|((3,1), \emptyset), \mathbf{s}_l\rangle + (-1 + q^{-2})|((2,2), \emptyset), \mathbf{s}_l\rangle \\ &\quad + q^{-1}|((2,1,1), \emptyset), \mathbf{s}_l\rangle - q^{-2}|((1,1,1,1), \emptyset), \mathbf{s}_l\rangle, \\ B_{-2}[2] \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle &= |(\emptyset, (4)), \mathbf{s}_l\rangle - q^{-1}|(\emptyset, (3,1)), \mathbf{s}_l\rangle + (-1 + q^{-2})|(\emptyset, (2,2)), \mathbf{s}_l\rangle \\ &\quad + q^{-1}|(\emptyset, (2,1,1)), \mathbf{s}_l\rangle - q^{-2}|(\emptyset, (1,1,1,1)), \mathbf{s}_l\rangle. \end{aligned}$$

◇

Uglov a prouvé le remarquable résultat suivant, que nous admettrons.

**Théorème 5.10 ([U2], Proposition 5.3)** *Soit  $m \in \mathbb{Z}^*$ , et  $\tilde{m} := \max(0, -m)$ . Supposons que  $(\lambda_l, \mathbf{s}_l)$  est  $n\tilde{m}$ -dominant. Alors on a*

$$B_m \cdot |\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle = \sum_{b=1}^l q^{(b-1)|m|} B_m[b] \cdot |\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle.$$

□

Ce théorème montre que dans certains cas, on peut se ramener à calculer l'action des bosons en niveau 1 et donc éviter ainsi de manipuler les relations de redressement. (Uglov a aussi donné un résultat similaire pour l'indexation  $\lambda_n$ , dont nous n'aurons pas besoin ici.)

**Remarque 5.11** Supposons que l'on a spécialisé  $q$  à 1. Notons alors  $\mathbf{F}[\mathbf{s}_l]$  la spécialisation à  $q = 1$  de l'espace de Fock. Il est possible de spécialiser l'algèbre quantique  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  à  $q = 1$  [Jo]; l'algèbre obtenue est isomorphe à  $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ , l'algèbre enveloppante de  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$  [Kac]. On a alors l'isomorphisme de  $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules

$$(*) \quad \mathbf{F}[\mathbf{s}_l] \cong \mathbf{F}[\mathbf{s}_1] \otimes \cdots \otimes \mathbf{F}[\mathbf{s}_l], \quad |\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle \mapsto |\lambda_l^{(1)}, \mathbf{s}_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\lambda_l^{(l)}, \mathbf{s}_l\rangle.$$

Ainsi  $\mathbf{F}[\mathbf{s}_l]$  s'identifie à un produit tensoriel de  $l$  espaces de Fock de niveau 1 spécialisés à  $q = 1$ . Notons que tous les  $\mathbf{F}[\mathbf{s}_l]$ ,  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l$  sont isomorphes, donc il n'y a pas lieu de considérer les multi-charges à  $q = 1$ . Soit  $m \in \mathbb{Z}^*$ . Alors  $B_m$  appartient une algèbre de Lie de Heisenberg, dont l'action sur les produits tensoriels est donnée par

$$B_m \cdot (u_1 \otimes \cdots \otimes u_l) = \sum_{b=1}^l u_1 \otimes \cdots \otimes (B_m \cdot u_b) \otimes \cdots \otimes u_l \quad (u_1 \in \mathbf{F}[\mathbf{s}_1], \dots, u_l \in \mathbf{F}[\mathbf{s}_l]).$$

Le théorème 5.10 montre que l'action à  $q = 1$  de  $B_m$  est compatible avec l'isomorphisme (\*). Ce théorème donne en fait un analogue quantique de ce fait dans le cas où  $\mathbf{s}_l$  serait « infiniment dominante »; dans ce cas,  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  s'identifierait encore à un produit tensoriel d'espaces de Fock de niveau 1. ◇

**Remarque 5.12** Soit  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que  $(\lambda_l, s_l)$  est  $(m_1 + m_2)n$ -dominant. On peut alors calculer  $B_{-m_1} \cdot |\lambda_l, s_l\rangle$  à l'aide du théorème 5.10. On trouve ainsi une combinaison linéaire de vecteurs  $|\mu_l, s_l\rangle$ , avec  $\mu_l \in \Pi^l$ . Soit  $\mu_l \in \Pi^l$  une multi-partition telle que  $|\mu_l, s_l\rangle$  apparaît dans cette combinaison linéaire. D'après la remarque 3.23, on a

$$\text{wt}(|\mu_l, s_l\rangle) = \text{wt}(|\lambda_l, s_l\rangle) - m_1 \delta.$$

La formule  $(W_1)$  implique que  $|\mu_l| = |\lambda_l| + nm_1$  et donc que  $(\mu_l, s_l)$  est  $m_2 n$ -dominant. On peut donc à nouveau appliquer le théorème 5.10 pour calculer  $B_{-m_2} \cdot |\mu_l, s_l\rangle$ . Finalement, nous avons ainsi pu calculer l'action de  $B_{-m_2} B_{-m_1}$  sur  $|\lambda_l, s_l\rangle$  grâce au théorème 5.10. Plus généralement, si  $\mu \in \Pi$  et si  $(\lambda_l, s_l)$  est  $|\mu|n$ -dominant, alors on peut calculer  $B_{-\mu} \cdot |\lambda_l, s_l\rangle$  en appliquant à plusieurs reprises le théorème 5.10, ce qui nous permet, là encore, de nous passer des relations de redressement.  $\diamond$

### Exemple 5.13

- (i) Prenons  $n = 2, l = 2, m = -2, \lambda_l = \emptyset_l$  et  $s_l = (2, -2)$ . Alors  $(\lambda_l, s_l)$  est  $n|m|$ -dominant, donc d'après le théorème 5.10 et l'exemple 5.9, on a

$$\begin{aligned} B_{-2} \cdot |\emptyset_l, s_l\rangle &= B_{-2}[1] \cdot |\emptyset_l, s_l\rangle + q^2 B_{-2}[2] \cdot |\emptyset_l, s_l\rangle \\ &= |((4), \emptyset), s_l\rangle - q^{-1} |((3, 1), \emptyset), s_l\rangle + (-1 + q^{-2}) |((2, 2), \emptyset), s_l\rangle \\ &\quad + q^{-1} |((2, 1, 1), \emptyset), s_l\rangle - q^{-2} |((1, 1, 1, 1), \emptyset), s_l\rangle \\ &\quad + q^2 |(\emptyset, (4)), s_l\rangle - q |(\emptyset, (3, 1)), s_l\rangle + (-q^2 + 1) |(\emptyset, (2, 2)), s_l\rangle \\ &\quad + q |(\emptyset, (2, 1, 1)), s_l\rangle - |(\emptyset, (1, 1, 1, 1)), s_l\rangle. \end{aligned}$$

- (ii) Prenons  $n = 2, l = 2, m = -2, \lambda_l = \emptyset_l$  et  $s_l = (0, 0)$ . Alors  $(\lambda_l, s_l)$  n'est pas  $n|m|$ -dominant, donc le théorème 5.10 ne s'applique pas. En fait, on peut montrer (cf. exemple 5.14) que

$$\begin{aligned} B_{-2} \cdot |\emptyset_l, s_l\rangle &= q |((4), \emptyset), s_l\rangle - |((3, 1), \emptyset), s_l\rangle + (-q^2 + 1) |((2, 2), \emptyset), s_l\rangle \\ &\quad + q |((2, 1, 1), \emptyset), s_l\rangle - |((1, 1, 1, 1), \emptyset), s_l\rangle \\ &\quad + |(\emptyset, (4)), s_l\rangle - q^{-1} |(\emptyset, (3, 1)), s_l\rangle + (-1 + q^{-2}) |(\emptyset, (2, 2)), s_l\rangle \\ &\quad + |(\emptyset, (2, 1, 1)), s_l\rangle - q^{-1} |(\emptyset, (1, 1, 1, 1)), s_l\rangle \\ &\quad + (q^2 - 1) |((2), (2)), s_l\rangle + (-q + q^{-1}) |((1), (2, 1)), s_l\rangle \\ &\quad + (-q + q^{-1}) |((2, 1), (1)), s_l\rangle + (1 - q^{-2}) |((1, 1), (1, 1)), s_l\rangle. \end{aligned}$$

$\diamond$

### 5.1.3 Action de $\mathcal{H}$ sur les vecteurs $|\emptyset_l, s_l\rangle, s_l \in \mathbb{Z}^l(s)$

#### 5.1.3.1 Méthode de calcul et exemple

Nous ne connaissons pas de formule combinatoire permettant de décrire l'action de  $\mathcal{H}$  sur le vecteur  $|\lambda_l, s_l\rangle$  lorsque  $(\lambda_l, s_l)$  ne vérifie pas les hypothèses du théorème 5.10. Pourtant,

nous pouvons calculer sans faire de redressement l'action de  $\mathcal{H}$  sur les vecteurs  $|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$ , où  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  est quelconque. Voici la démarche que nous allons suivre. Soit  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ . Puisque  $B_m \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle = 0$  pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , il suffit de savoir calculer l'action de  $B_{-\lambda}$  sur le vecteur  $|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$  pour tout  $\lambda \in \Pi$ . Soit  $\lambda \in \Pi$ . En faisant agir le groupe de Weyl  $\dot{W}_l$  sur  $\mathbb{Z}^l(s)$ , nous pouvons trouver  $\mathbf{t}_l \in \dot{W}_l \cdot \mathbf{s}_l$  telle que  $\mathbf{t}_l$  est  $n|\lambda|$ -dominante (cf. lemme 5.15). Puisque  $\mathbf{t}_l$  est conjuguée à  $\mathbf{s}_l$  sous l'action de  $\dot{W}_l$ , nous serons, grâce au corollaire 5.17, à même de construire  $\dot{u} \in U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  tel que

$$|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle = \dot{u} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{t}_l\rangle ;$$

de plus,  $\dot{u}$  a une expression simple en termes de générateurs de Chevalley de  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ . Nous décrirons au paragraphe 5.1.3.3 une méthode permettant de calculer de façon pratique  $\dot{u}$ . Puisque l'action de  $\mathcal{H}$  commute à celle de  $U_p'(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ , on a

$$B_{-\lambda} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle = \dot{u} \cdot (B_{-\lambda} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{t}_l\rangle).$$

Puisque  $\mathbf{t}_l$  est  $n|\lambda|$ -dominante, nous avons vu précédemment comment calculer  $B_{-\lambda} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{t}_l\rangle$  à l'aide du théorème 5.10. On obtient ainsi une combinaison linéaire de vecteurs de la base standard de  $\Lambda^s$ , qu'on exprime à l'aide de l'indexation  $\lambda_n$ . On peut ainsi calculer de façon commode, à l'aide de la proposition 3.7, leur image par l'opérateur  $\dot{u}$ , ce qui nous donne finalement l'expression de  $B_{-\lambda} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$  dans la base standard de  $\Lambda^s$  sans avoir effectué un seul redressement.

**Exemple 5.14** Prenons  $n = 2$ ,  $l = 2$ ,  $\lambda = 2$  et  $\mathbf{s}_l = (0, 0)$ . Alors  $\mathbf{t}_l := (2, -2) = \dot{\sigma}_0 \cdot \mathbf{s}_l$  est conjuguée à  $\mathbf{s}_l$  sous l'action de  $\dot{W}_l$ , et de plus  $\mathbf{t}_l$  est  $n|\lambda|$ -dominante. On peut donc calculer  $B_{-\lambda} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{t}_l\rangle$  à l'aide du théorème 5.10; on trouve (cf. exemple 5.13 (i))

$$\begin{aligned} B_{-\lambda} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{t}_l\rangle &= |((4), \emptyset), \mathbf{t}_l\rangle - q^{-1}|((3, 1), \emptyset), \mathbf{t}_l\rangle + (-1 + q^{-2})|((2, 2), \emptyset), \mathbf{t}_l\rangle \\ &\quad + q^{-1}|((2, 1, 1), \emptyset), \mathbf{t}_l\rangle - q^{-2}|((1, 1, 1, 1), \emptyset), \mathbf{t}_l\rangle \\ &\quad + q^2|(\emptyset, (4)), \mathbf{t}_l\rangle - q|(\emptyset, (3, 1)), \mathbf{t}_l\rangle + (-q^2 + 1)|(\emptyset, (2, 2)), \mathbf{t}_l\rangle \\ &\quad + q|(\emptyset, (2, 1, 1)), \mathbf{t}_l\rangle - |(\emptyset, (1, 1, 1, 1)), \mathbf{t}_l\rangle \\ &= |((1), (5)), (0, 0)\rangle^\bullet - q^{-1}|((5), (1)), (0, 0)\rangle^\bullet + (-1 + q^{-2})|((3), (3)), (0, 0)\rangle^\bullet \\ &\quad + q^{-1}|((1), (3, 2)), (0, 0)\rangle^\bullet - q^{-2}|((3, 2), (1)), (0, 0)\rangle^\bullet \\ &\quad + q^2|((1), (2, 2, 1)), (0, 0)\rangle^\bullet - q|((2, 2, 1), (1)), (0, 0)\rangle^\bullet \\ &\quad + (-q^2 + 1)|((1, 1, 1), (1, 1, 1)), (0, 0)\rangle^\bullet \\ &\quad + q|((1), (1, 1, 1, 1)), (0, 0)\rangle^\bullet - |((1, 1, 1, 1), (1)), (0, 0)\rangle^\bullet. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on vérifie aisément que

$$|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle = \dot{e}_0^2 \cdot |\emptyset_l, \mathbf{t}_l\rangle$$

(pour trouver cet élément  $\dot{e}_0^2$ , le lecteur pourra suivre la méthode décrite au paragraphe 5.1.3.3). Par conséquent, on a  $B_{-\lambda} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle = \dot{e}_0^2 \cdot B_{-\lambda} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{t}_l\rangle$ . Compte tenu de l'expression de



$B_{-\lambda} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{t}_l\rangle$  donnée ci-dessus et de la proposition 3.7, on trouve, en revenant à l'indexation  $\lambda_l$ , l'expression suivante (cf. exemple 5.13 (ii)) :

$$\begin{aligned} B_{-\lambda} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle &= q|((4), \emptyset), \mathbf{s}_l\rangle - |((3,1), \emptyset), \mathbf{s}_l\rangle + (-q^2 + 1)|((2,2), \emptyset), \mathbf{s}_l\rangle \\ &+ q|((2,1,1), \emptyset), \mathbf{s}_l\rangle - |((1,1,1,1), \emptyset), \mathbf{s}_l\rangle \\ &+ |(\emptyset, (4)), \mathbf{s}_l\rangle - q^{-1}|(\emptyset, (3,1)), \mathbf{s}_l\rangle + (-1 + q^{-2})|(\emptyset, (2,2)), \mathbf{s}_l\rangle \\ &+ |(\emptyset, (2,1,1)), \mathbf{s}_l\rangle - q^{-1}|(\emptyset, (1,1,1,1)), \mathbf{s}_l\rangle \\ &+ (q^2 - 1)|((2), (2)), \mathbf{s}_l\rangle + (-q + q^{-1})|((1), (2,1)), \mathbf{s}_l\rangle \\ &+ (-q + q^{-1})|((2,1), (1)), \mathbf{s}_l\rangle + (1 - q^{-2})|((1,1), (1,1)), \mathbf{s}_l\rangle. \end{aligned}$$

◇

### 5.1.3.2 Énoncé et démonstration des résultats utilisés au paragraphe 5.1.3.1

Nous allons à présent énoncer et prouver le lemme 5.15 et le corollaire 5.17 auxquels nous avons fait allusion au paragraphe 5.1.3.1.

**Lemme 5.15** *Soit  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ , et  $M \in \mathbb{N}^*$ . Alors il existe  $\mathbf{t}_l \in \dot{W}_l \cdot \mathbf{s}_l$  telle que  $\mathbf{t}_l$  est  $nM$ -dominante.*

*Démonstration.* Posons  $\lambda := ((l-1)M, (l-2)M, \dots, M, -l(l-1)M/2) \in \mathbb{Z}^l(0)$ , de telle sorte que  $\dot{y}_\lambda \in \dot{W}_l$  (cf. paragraphe 4.1.1). Choisissons  $\dot{\sigma} \in \mathfrak{S}_l \subset \dot{W}_l$  tel que  $\mathbf{a}_l = (a_1, \dots, a_l) := \dot{\sigma} \cdot \mathbf{s}_l$  vérifie  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_l$ . Alors l'élément  $\mathbf{t}_l := \dot{y}_\lambda \dot{\sigma} \cdot \mathbf{s}_l$  convient. □

Soient  $\mathbf{a}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  et  $\mathbf{b}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  deux multi-charges conjuguées sous l'action de  $\dot{W}_l$ . Nous allons maintenant montrer qu'il existe  $\dot{u} \in U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  tel que  $|\emptyset_l, \mathbf{b}_l\rangle = \dot{u} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{a}_l\rangle$ . Rappelons que nous avons défini, pour  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ ,  $\dot{w} \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet)$  et  $i \in \llbracket 0; l-1 \rrbracket$  tel que  $\dot{w} + \dot{\alpha}_i$  n'est pas un poids de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet$ , une bijection  $\dot{\pi}_i : \Pi^n(\mathbf{s}_n; \dot{w}) \rightarrow \Pi^n(\mathbf{s}_n; \dot{\sigma}_i \cdot \dot{w})$  (cf. paragraphe 4.2.2).

**Proposition 5.16** *Soit  $\mathbf{r}_l \in A_{l,n}(s)$ , et  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l) \in \dot{W}_l \cdot \mathbf{r}_l$ . Posons  $\mathbf{s}_0 := \mathbf{s}_l + n$ . Soit  $\dot{\sigma} \in \dot{W}_l$  l'élément de longueur minimale telle que  $\mathbf{s}_l = \dot{\sigma} \cdot \mathbf{r}_l$ . Fixons une expression réduite  $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_{i_r} \dots \dot{\sigma}_{i_1}$  de  $\dot{\sigma}$ . Soit par ailleurs  $\mathbf{r}_n$  l'unique multi-charge de  $A_{n,l}(s)$  telle que  $|\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet = |\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle$  (cf. proposition 3.14). Alors l'élément*

$$\lambda_n := \dot{\pi}_{i_r} \dots \dot{\pi}_{i_1}(\emptyset_n) \in \Pi^n$$

*est bien défini, et si  $i \in \llbracket 0; l-1 \rrbracket$  est tel que  $s_i > s_{i+1}$ , alors  $\dot{\text{wt}}(|\lambda_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet) + \dot{\alpha}_i$  n'est pas un poids de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet$ . De plus, on a*

$$|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle = |\lambda_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet.$$

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $r = \ell(\dot{\sigma})$ . Supposons que  $r = 0$ . Par convention, on a  $\lambda_n = \emptyset_n$ , et l'égalité  $|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle = |\lambda_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet$  est évidente. De plus, la formule ( $W_3$ ) montre que pour tout  $0 \leq i \leq l-1$ ,  $\dot{\text{wt}}(|\lambda_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet) + \dot{\alpha}_i = \dot{\text{wt}}(|\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet) + \dot{\alpha}_i$  n'est pas un poids

de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet$ .

Supposons à présent que  $r > 0$ . Par hypothèse de récurrence, l'élément  $\boldsymbol{\mu}_n := \dot{\pi}_{i_{r-1}} \dots \dot{\pi}_{i_1}(\boldsymbol{\emptyset}_n)$  est bien défini. Soit  $\dot{w}' := \dot{\text{wt}}(|\boldsymbol{\mu}_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet)$ ,  $\dot{\sigma}' := \dot{\sigma}_{i_{r-1}} \dots \dot{\sigma}_{i_1}$  et  $\mathbf{t}_l = (t_1, \dots, t_l) := \dot{\sigma}' \cdot \mathbf{r}_l$ . Posons  $t_0 := t_l + n$ . Puisque  $\ell(\dot{\sigma}_{i_r} \dot{\sigma}') = \ell(\dot{\sigma}') + 1$ , la proposition 1.31 implique que  $t_{i_r} > t_{i_r+1}$ , donc par hypothèse de récurrence,  $\dot{w}' + \dot{\alpha}_{i_r}$  n'est pas un poids de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet$ . Par conséquent, l'élément  $\boldsymbol{\lambda}_n := \dot{\pi}_{i_r}(\boldsymbol{\mu}_n) \in \Pi^n$  est bien défini.

Toujours par hypothèse de récurrence, on a  $u := |\boldsymbol{\emptyset}_l, \mathbf{t}_l\rangle = |\boldsymbol{\mu}_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet \in \Lambda^s \langle \dot{w}' \rangle$ . Soit  $x := |\boldsymbol{\emptyset}_l, \mathbf{s}_l\rangle$  et  $y := |\boldsymbol{\lambda}_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet$ ; il faut montrer que  $x = y$ . Montrons tout d'abord que  $x$  appartient à  $\mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet$ . Puisque  $\mathbf{s}_l \in \dot{W}_l \cdot \mathbf{t}_l$ , on a  $\Lambda_{s_1} + \dots + \Lambda_{s_l} = \Lambda_{t_1} + \dots + \Lambda_{t_l}$ . Par conséquent, la formule  $(W_1)$  montre que  $\text{wt}(x) \equiv \text{wt}(u) \pmod{\mathbb{Z}\delta}$ , soit encore  $\text{wt}(x) \in (\text{wt}(u) \pmod{\mathbb{Z}\delta})$ . Or  $u = |\boldsymbol{\mu}_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet$ , donc  $\text{wt}(u) \in \varphi(\mathbf{r}_n)$  d'après la formule  $(W_4)$ . Ainsi  $\text{wt}(x) \in \varphi(\mathbf{r}_n)$ , donc d'après la proposition 3.21, on a  $x \in \bigoplus_{w \in \varphi(\mathbf{r}_n)} \Lambda^s \langle w \rangle = \mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet$ . Par ailleurs, d'après le lemme 4.2 et la définition de  $\dot{\pi}_{i_r}$ , on a  $\dot{\text{wt}}(x) = \dot{\text{wt}}(y) = \dot{\sigma}_{i_r} \cdot \dot{w}'$ . Ainsi  $x$  et  $y$  appartiennent au sous-espace de poids  $\dot{w} := \dot{\sigma}_{i_r} \cdot \dot{w}'$  de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet$ . D'après la formule  $(W_3)$ , le sous-espace de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet$  de poids  $\dot{w}'' := \dot{\text{wt}}(|\boldsymbol{\emptyset}_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet)$  est de dimension 1. Puisque le caractère formel du  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ -module intégrable  $\mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet$  est invariant sous l'action du groupe de Weyl  $\dot{W}_l$ , on a

$$\dim(\mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet \langle \dot{\sigma}_{i_r} \cdot \dot{w}' \rangle) = \dim(\mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet \langle \dot{\sigma} \cdot \dot{w}'' \rangle) = \dim(\mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet \langle \dot{w}'' \rangle) = 1.$$

Ainsi,  $x$  et  $y$  sont deux éléments de la base standard de  $\Lambda^s$  qui appartiennent à un sous-espace de dimension 1, donc  $x = y$ .

Soit  $0 \leq i \leq l-1$  tel que  $s_i - s_{i+1} > 0$ . Il faut montrer que  $\dot{w} + \dot{\alpha}_i$  n'est pas un poids de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet$ . Posons

$$\dot{\epsilon}_i := \max\{m \in \mathbb{N} \mid \dot{e}_i^m \cdot x \neq 0\} \quad \text{et} \quad \dot{\varphi}_i := \max\{m \in \mathbb{N} \mid \dot{f}_i^m \cdot x \neq 0\}.$$

La théorie des  $U_p(\mathfrak{sl}_2)$ -modules nous donne la relation

$$(\dot{\text{wt}}(x), \dot{\alpha}_i) = \dot{\varphi}_i - \dot{\epsilon}_i.$$

D'après la formule  $(W_2)$ , on a  $(\dot{\text{wt}}(x), \dot{\alpha}_i) = (\dot{\text{wt}}(|\boldsymbol{\emptyset}_l, \mathbf{s}_l\rangle), \dot{\alpha}_i) = s_i - s_{i+1}$ . On a donc

$$\dot{\varphi}_i - \dot{\epsilon}_i = s_i - s_{i+1} > 0,$$

d'où  $\dot{\varphi}_i > \dot{\epsilon}_i \geq 0$ . Par conséquent,  $\dot{w} - \dot{\alpha}_i$  est un poids de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet$ . Puisque le caractère formel de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet$  est stable sous l'action du groupe de Weyl  $\dot{W}_l$ ,  $\dot{w}'' - \dot{\sigma} \cdot \dot{\alpha}_i = \dot{\sigma} \cdot (\dot{w} - \dot{\alpha}_i)$  est aussi un poids de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet$ . Remarquons que la formule  $(W_3)$  implique que si  $\dot{w}'' - \dot{z}$  est un poids de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet$ , alors  $\dot{z} \in \sum_{j=0}^{l-1} \mathbb{N} \dot{\alpha}_j$  et  $\dot{w}'' + \dot{z}$  n'est pas un poids de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet$ . En appliquant ceci à  $\dot{z} := \dot{\sigma} \cdot \dot{\alpha}_i$  et en utilisant à nouveau l'invariance du caractère formel de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet$  sous l'action de  $\dot{W}_l$ , on voit que  $\dot{w} + \dot{\alpha}_i$  n'est pas un poids de  $\mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet$ .  $\square$

Le résultat qui suit est un raffinement de [U2, Corollary 4.9].

**Corollaire 5.17** Soit  $\mathbf{r}_l \in A_{l,n}(s)$ , et  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l) \in \dot{W}_l \cdot \mathbf{r}_l$ . Alors il existe  $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}^*$  et  $i_1, \dots, i_r \in \llbracket 0; l-1 \rrbracket$ , que l'on peut calculer de façon explicite, tels que  $i_j \neq i_{j+1}$  pour tout  $1 \leq j \leq r-1$ ,

$$|\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle = \dot{e}_{i_1}^{(k_1)} \dots \dot{e}_{i_r}^{(k_r)} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle \quad \text{et} \quad |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle = \dot{f}_{i_r}^{(k_r)} \dots \dot{f}_{i_1}^{(k_1)} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle.$$

*Démonstration.* Soit  $\dot{\sigma} \in \dot{W}_l$  l'élément de longueur minimale telle que  $\mathbf{s}_l = \dot{\sigma} \cdot \mathbf{r}_l$ . Nous allons donner un algorithme pour calculer une expression réduite de  $\dot{\sigma}$ . On procède par récurrence sur  $r := \ell(\dot{\sigma})$ . Si  $r = 0$ , ou de façon équivalente si  $\mathbf{s}_l = \mathbf{r}_l$ , il n'y a rien à faire. Si  $r > 0$ , alors  $\mathbf{s}_l \notin A_{l,n}(s)$ , donc par définition de  $A_{l,n}(s)$ , il existe  $i_r \in \llbracket 0; l-1 \rrbracket$  tel que  $s_{i_r} < s_{i_r+1}$  (comme d'habitude, on a posé  $s_0 := n + s_l$ ). D'après la proposition 1.31, on a  $\ell(\dot{\sigma}_{i_r} \dot{\sigma}) = \ell(\dot{\sigma}) - 1$ . Par hypothèse de récurrence, on peut trouver  $i_1, \dots, i_{r-1} \in \llbracket 0; l-1 \rrbracket$  tels que  $\dot{\sigma}_{i_r} \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_{i_{r-1}} \dots \dot{\sigma}_{i_1}$ . Puisque  $\ell(\dot{\sigma}) = r$ ,  $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_{i_r} \dot{\sigma}_{i_{r-1}} \dots \dot{\sigma}_{i_1}$  est une expression réduite de  $\dot{\sigma}$ , ce qui achève la récurrence. Nous avons ainsi exhibé une expression réduite  $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_{i_r} \dot{\sigma}_{i_{r-1}} \dots \dot{\sigma}_{i_1}$  de  $\dot{\sigma}$ ; puisque cette expression est réduite, on a bien  $i_j \neq i_{j+1}$  pour tout  $1 \leq j \leq r-1$ . Soit  $\mathbf{r}_n$  l'unique multi-charge de  $A_{n,l}(s)$  telle que  $|\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet = |\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle$  (cf. proposition 3.14). Alors d'après la proposition 5.16, on a

$$|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle = |\dot{\pi}_{i_r} \dots \dot{\pi}_{i_1}(\emptyset_n), \mathbf{r}_n\rangle^\bullet.$$

Pour  $1 \leq j \leq r$ , posons  $k_j := |\dot{\pi}_{i_j} \dots \dot{\pi}_{i_1}(\emptyset_n)| - |\dot{\pi}_{i_{j-1}} \dots \dot{\pi}_{i_1}(\emptyset_n)|$ . Alors d'après la proposition 4.7 (ii), on a

$$|\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle = |\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet = \dot{e}_{i_1}^{(k_1)} \dots \dot{e}_{i_r}^{(k_r)} \cdot |\dot{\pi}_{i_r} \dots \dot{\pi}_{i_1}(\emptyset_n), \mathbf{r}_n\rangle^\bullet = \dot{e}_{i_1}^{(k_1)} \dots \dot{e}_{i_r}^{(k_r)} \cdot |\emptyset_r, \mathbf{s}_l\rangle,$$

et la même proposition nous donne l'égalité  $|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle = \dot{f}_{i_r}^{(k_r)} \dots \dot{f}_{i_1}^{(k_1)} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle$ .  $\square$

**Remarque 5.18** Soit  $\mathbf{r}_n \in A_{n,l}(s)$ , et  $\mathbf{s}_n \in W_n \cdot \mathbf{r}_n$ . Alors on peut, de la même façon, trouver  $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}^*$  et  $i_1, \dots, i_r \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  tels que  $i_j \neq i_{j+1}$  pour tout  $1 \leq j \leq r-1$ ,  $|\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet = e_{i_1}^{(k_1)} \dots e_{i_r}^{(k_r)} \cdot |\emptyset_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet$  et  $|\emptyset_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet = f_{i_r}^{(k_r)} \dots f_{i_1}^{(k_1)} \cdot |\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet$ .  $\diamond$

### 5.1.3.3 Un exemple illustrant le corollaire 5.17

Prenons  $n = 2$ ,  $l = 3$ ,  $s = 0$ ,  $\mathbf{a}_l = (1, -3, 2)$  et  $\mathbf{b}_l = (0, -1, 1)$ . Clairement,  $\mathbf{a}_l$  et  $\mathbf{b}_l$  sont  $\dot{W}_l$ -conjugués à  $\mathbf{c}_l := (1, 0, -1) \in A_{l,n}(s)$ . Le but de cet exemple est de trouver  $\dot{u} \in U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  tel que  $|\emptyset_l, \mathbf{a}_l\rangle = \dot{u} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{b}_l\rangle$ . Chaque ligne du tableau qui suit comporte une multi-charge  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l)$ , puis un indice  $i \in \llbracket 0; l-1 \rrbracket$  (s'il existe) tel que  $s_i < s_{i+1}$ . La multi-charge de la ligne suivante est  $\sigma_i \cdot \mathbf{s}_l$ . On commence par remplir le tableau avec  $\mathbf{a}_l$  et on s'arrête lorsqu'on tombe sur une multi-charge qui est dans  $A_{l,n}(s)$  (celle-ci ne peut être autre que  $\mathbf{c}_l$ ).

$(1, -3, 2)$	$i = 2$
$(1, 2, -3)$	$i = 0$
$(-1, 2, -1)$	$i = 1$
$(2, -1, -1)$	$i = 0$
$(1, -1, 0)$	$i = 2$
$(1, 0, -1)$	

On a donc  $\mathbf{a}_l = \dot{\sigma}_{i_r} \dots \dot{\sigma}_{i_1} \cdot \mathbf{c}_l$ , avec  $r = 5$  et  $(i_r, \dots, i_1) = (2, 0, 1, 0, 2)$ . D'après la proposition 5.17, on a  $|\emptyset_l, \mathbf{a}_l\rangle = |\boldsymbol{\lambda}_n, \mathbf{c}_n\rangle^\bullet$ , où  $\mathbf{c}_n \in A_{n_l}(s)$  est tel que  $|\emptyset_l, \mathbf{c}_l\rangle = |\emptyset_n, \mathbf{c}_n\rangle^\bullet$  et  $\boldsymbol{\lambda}_n := \dot{\pi}_{i_r} \dots \dot{\pi}_{i_1}(\emptyset_n)$ . On calcule  $\mathbf{c}_n$  (par exemple, avec la formule  $(\emptyset_n, \mathbf{c}_n) = \tau_n' \tau_l^{-1}(\emptyset_l, \mathbf{c}_l)$ ) et on trouve

$$\mathbf{c}_n = (1, -1).$$

On calcule ensuite par récurrence les multi-partitions  $\boldsymbol{\lambda}_n^{(j)} := \dot{\pi}_{i_j} \dots \dot{\pi}_{i_1}(\emptyset_n)$  ( $0 \leq j \leq r$ ) à partir de  $\boldsymbol{\lambda}_n^{(0)} = \emptyset_n$ . Pour  $1 \leq j \leq r$ , l'entier  $k_j$  de la preuve du corollaire 5.17 est alors le nombre de  $i_j$ -nœuds de type  $A$  de  $(\boldsymbol{\lambda}_n^{(j-1)}, \mathbf{c}_n)$ , et  $\boldsymbol{\lambda}_n^{(j)}$  est la multi-partition obtenue en ajoutant ces nœuds à  $\boldsymbol{\lambda}_n^{(j-1)}$ . Les éléments  $i_j$ ,  $k_j$  et  $\boldsymbol{\lambda}_n^{(j)}$  sont listés dans le tableau ci-dessous.

$j$	$\boldsymbol{\lambda}_n^{(j)}$	$i_{j+1}$	$k_{j+1}$
0	$((), ())$	2	1
1	$((), (1))$	0	1
2	$((), (2))$	1	3
3	$((1), (3, 1))$	0	2
4	$((1, 1), (3, 1, 1))$	1	5
5	$((2, 1, 1), (4, 2, 1, 1))$		

Par conséquent, d'après le corollaire 5.17, on a

$$|\emptyset_l, \mathbf{a}_l\rangle = \dot{f}_2^{(5)} \dot{f}_0^{(2)} \dot{f}_1^{(3)} \dot{f}_0^{(1)} \dot{f}_2^{(1)} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{c}_l\rangle.$$

Effectuons le même travail pour  $\mathbf{b}_l$ .

$$\begin{aligned} (0, -1, 1) & \quad i = 2 \\ (0, 1, -1) & \quad i = 1 \\ (1, 0, -1) & \end{aligned}$$

On a donc  $\mathbf{b}_l = \dot{\sigma}_{i_r} \dots \dot{\sigma}_{i_1} \cdot \mathbf{c}_l$ , avec  $r = 2$  et  $(i_2, i_1) = (2, 1)$ . De même, on calcule les entiers  $k_j$  associés à  $(\mathbf{c}_l, \mathbf{b}_l)$ , qu'on liste dans le tableau suivant.

$j$	$\boldsymbol{\lambda}_n^{(j)}$	$i_{j+1}$	$k_{j+1}$
0	$((), ())$	1	1
1	$((1), (1))$	2	2
2	$((2), (1))$		

Par conséquent, on a  $|\emptyset_l, \mathbf{c}_l\rangle = \dot{e}_1^{(1)} \dot{e}_2^{(2)} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{b}_l\rangle$ . Nous avons ainsi démontré que

$$|\emptyset_l, (1, -3, 2)\rangle = \dot{f}_2^{(5)} \dot{f}_0^{(2)} \dot{f}_1^{(3)} \dot{f}_0^{(1)} \dot{f}_2^{(1)} \dot{e}_1^{(1)} \dot{e}_2^{(2)} \cdot |\emptyset_l, (0, -1, 1)\rangle,$$

comme on peut le vérifier directement.

## 5.2 Une base de $\Lambda^s$ invariante sous l'action de l'involution –

### 5.2.1 Une base de $M_q[s_l]$ ( $s_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ )

Commençons par rappeler plusieurs notations utilisées précédemment dans ce mémoire.

- \* (Voir paragraphe 1.1.1.) Soit  $\lambda_l \in \Pi^l$ , et  $D(\lambda_l) \subset \mathbb{N}^3$  le diagramme de Young de  $\lambda_l$ , que nous identifierons à  $\lambda_l$ . Alors le nœud  $\gamma$  de  $\lambda_l \subset \mathbb{N}^3$  a pour coordonnées  $\gamma = (i(\gamma), j(\gamma), b(\gamma))$ . Rappelons que  $\partial\lambda_l$  désigne la frontière de  $\lambda_l$ .
- \* (Voir paragraphe 3.4.2.) Soit  $\mathbf{v}_l \in \mathcal{X}_{l,n} := \{(v_1, \dots, v_l) \in \mathbb{Z}^l \mid n-1 \geq v_1 \geq \dots \geq v_l \geq 0\}$ . Soit  $\Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ$  l'ensemble des multi-partitions indexant les sommets du graphe cristallin de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{v}_l\rangle$ .

Fixons une multi-charge  $\mathbf{v}_l \in \mathcal{X}_{l,n}$ . Dans [Ja], Jacon donne une base du  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module irréductible  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{v}_l\rangle$ . Pour ce faire, il associe à  $\lambda_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ$  une suite d'entiers

$$\text{Jac}(\lambda_l; \mathbf{v}_l; n) = (i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket^k,$$

que nous appellerons *suite de Jacon* (cette suite est appelée *a-sequence* dans [Ja]). Nous allons rappeler la construction des suites de Jacon, puis énoncer le théorème de Jacon donnant une base de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot |\emptyset_l, s_l\rangle$  lorsque  $s_l \in \mathcal{X}_{l,n}$ . Nous pourrons alors donner une base du même type lorsque  $s_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  est quelconque.

Fixons à nouveau une multi-charge  $\mathbf{v}_l \in \mathcal{X}_{l,n}$ . Pour  $\lambda_l \in \Pi^l$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ , introduisons l'ensemble

$$X_k(\lambda_l) := \left\{ \gamma \in \lambda_l \text{ de type } R \mid \text{res}_n(\gamma, \mathbf{v}_l) = k \pmod n \text{ et } (\beta \in \partial\lambda_l, \text{res}_n(\beta, \mathbf{v}_l) = k-1 \pmod n) \Rightarrow j(\gamma) > j(\beta) \right\}.$$

**Exemple 5.19** Prenons  $n = 4$ ,  $l = 2$ ,  $\mathbf{v}_l = (3, 1)$  et  $\lambda_l = ((4, 2), (4, 1))$ . On a alors

$$X_0(\lambda_l) = \{(1, 4, 2)\}, \quad X_1(\lambda_l) = \emptyset, \quad X_2(\lambda_l) = \{(1, 4, 1)\} \quad \text{et} \quad X_3(\lambda_l) = \emptyset.$$

En effet,  $(2, 1, 2)$  est un 0-nœud de type  $R$  de  $(\lambda_l; \mathbf{v}_l)$ , mais le nœud  $(2, 2, 1)$  est un nœud situé sur la frontière de  $\lambda_l$ , son résidu vaut  $3 \pmod n = 0 - 1 \pmod n$  et on a  $j(2, 2, 1) > j(2, 1, 2)$ ; par conséquent  $(2, 1, 2) \notin X_0(\lambda_l)$ . De même, en considérant le nœud  $(1, 4, 1)$ , on voit que  $(2, 2, 1) \notin X_3(\lambda_l)$ .  $\diamond$

Jacon a démontré le résultat suivant, que nous admettrons.

**Proposition 5.20** ([Ja], Lemmas 4.2 & 4.3) *Soit  $\mathbf{v}_l \in \mathcal{X}_{l,n}$  et  $\lambda_l = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(b)}) \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ$ ,  $\lambda_l \neq \emptyset_l$ . Soit  $j_{\max} := \max \{ \lambda_1^{(b)} \mid 1 \leq b \leq l \}$  la plus grande part de  $\lambda_l$ . Alors il existe  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  tel que*

$$X_k(\lambda_l) \cap \{ \gamma \in \lambda_l \mid j(\gamma) = j_{\max} \}$$

*est non vide. De plus, la multi-partition ayant pour diagramme de Young  $D(\lambda_l) \setminus X_k(\lambda_l)$  appartient à  $\Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ$ .*  $\square$

**Définition 5.21** On définit les *suites de Jaccon*  $\text{Jac}(\lambda_l)$  et les *éléments de Jaccon*  $F(\lambda_l)$  ( $\lambda_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ$ ) par récurrence comme suit. Notons que ces quantités dépendent de  $\mathbf{v}_l$  et  $n$ .

- Par définition,  $\text{Jac}(\emptyset_l)$  est la suite vide, et on pose  $F(\emptyset_l) := 1 \in U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ .
- Si  $\lambda_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ \setminus \{\emptyset_l\}$ , on choisit  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  minimal donné par la proposition précédente. Alors la multi-partition  $\mu_l$  ayant pour diagramme de Young  $D(\lambda_l) \setminus X_k(\lambda_l)$  appartient à  $\Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ$ , donc par hypothèse de récurrence,  $\text{Jac}(\mu_l)$  et  $F(\mu_l)$  sont bien définis. On pose alors

$$\text{Jac}(\lambda_l) := \text{Jac}(\mu_l) \cdot \underbrace{(k, \dots, k)}_{\#X_k(\lambda_l) \text{ fois}} \quad \text{et} \quad F(\lambda_l) := f_k^{\left(\#X_k(\lambda_l)\right)} F(\mu_l).$$

(Ici, si  $u = (i_1, \dots, i_a)$  et  $v = (j_1, \dots, j_b)$  sont deux suites d'entiers, la suite

$$u.v := (i_1, \dots, i_a, j_1, \dots, j_b)$$

désigne la concaténation de la suite  $u$  et de la suite  $v$ .) Attention, les éléments  $F(\lambda_l; \mathbf{v}_l; n)$  sont des produits de certaines puissances divisées des  $f_i$ .  $\diamond$

**Exemple 5.22** Prenons  $n = 4$ ,  $l = 2$ ,  $\mathbf{v}_l = (3, 1)$  et  $\lambda_l = ((4, 2), (4, 1))$ . On vérifie, par exemple à l'aide du théorème 3.27, que  $\lambda_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ$ . Chaque ligne du tableau suivant comporte d'abord une multi-partition  $\mu_l$ , puis l'entier  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  minimal donné par la proposition 5.20, et enfin le cardinal de  $X_k(\mu_l)$ . On place alors à la ligne suivante la multi-partition dont le diagramme de Young est  $D(\mu_l) \setminus X_k(\mu_l)$ . On commence à remplir le tableau avec  $\mu_l := \lambda_l$  et on s'arrête lorsque  $\mu_l = \emptyset_l$ .

$\mu_l$	$k$	$\#X_k(\mu_l)$
$((4, 2), (4, 1))$	0	1
$((4, 2), (3, 1))$	2	1
$((3, 2), (3, 1))$	1	1
$((2, 2), (3, 1))$	3	2
$((2, 1), (2, 1))$	0	2
$((1, 1), (2))$	2	2
$((1), (1))$	1	1
$((1), \emptyset)$	3	1
$(\emptyset, \emptyset)$		

On a donc

$$\text{Jac}(\lambda_l) = (3, 1, 2, 2, 0, 0, 3, 3, 1, 2, 0) \quad \text{et} \quad F(\lambda_l) = f_0^{(1)} f_2^{(1)} f_1^{(1)} f_3^{(2)} f_0^{(2)} f_2^{(2)} f_1^{(1)} f_3^{(1)}.$$

$\diamond$

Jacon a démontré le résultat suivant.

**Théorème 5.23** ([Ja], Proposition 4.6) *Soit  $\mathbf{v}_l \in \mathcal{X}_{l,n}$  et  $\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ$ . Alors*

$$F(\boldsymbol{\lambda}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{v}_l\rangle \in |\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{v}_l\rangle + \bigoplus_{\substack{\boldsymbol{\mu}_l \in \Pi^l \\ a(\boldsymbol{\mu}_l) > a(\boldsymbol{\lambda}_l)}} \mathbb{Z}[q, q^{-1}] \cdot |\boldsymbol{\mu}_l, \mathbf{v}_l\rangle,$$

où  $a : \Pi^l \rightarrow \mathbb{Z}$  désigne la  $a$ -valeur ([Ja, Lu1]). □

Nous n'aurons pas besoin, dans ce mémoire, de la définition de cette  $a$ -valeur, ni de savoir la calculer. La seule partie de ce théorème que nous utiliserons est cette propriété d'unitriangularité, qui implique le résultat suivant.

**Corollaire 5.24** *Soit  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}^l(s)$ , et  $\mathbf{v}_l = (v_1, \dots, v_l)$  l'unique élément de  $\mathcal{X}_{l,n}$  tel que  $\Lambda_{v_1} + \dots + \Lambda_{v_l} = \Lambda_{s_1} + \dots + \Lambda_{s_l}$  (voir remarque 3.10). Pour  $\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ$ , soit  $F(\boldsymbol{\lambda}_l)$  l'élément de Jaco associé à  $\boldsymbol{\lambda}_l$ ,  $\mathbf{v}_l$  et  $n$ . Alors*

$$\left\{ F(\boldsymbol{\lambda}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ \right\}$$

est une base de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$ .

*Démonstration.* Fixons un sous-espace de poids  $w$  de  $M := U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{v}_l\rangle$ , et posons

$$B_w := \left\{ \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ \mid |\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{v}_l\rangle \in M\langle w \rangle \right\}.$$

Puisque  $\Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ$  indexe les sommets du graphe cristallin de  $M$ , on a  $\dim M\langle w \rangle = \#B_w$ . D'après le théorème précédent,  $\{F(\boldsymbol{\lambda}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in B_w\}$  est une partie libre de  $M\langle w \rangle$ , donc par cardinalité, c'en est une base. Puisque  $M$  est la somme directe de ses sous-espaces de poids,  $\{F(\boldsymbol{\lambda}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{v}_l\rangle \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ\}$  est une base de  $M$ . Maintenant, par définition de  $\mathbf{v}_l$ , il existe un isomorphisme de  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{v}_l\rangle \rightarrow U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$  qui envoie  $u \cdot |\emptyset_l, \mathbf{v}_l\rangle$  sur  $u \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$  ( $u \in U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ ). Par conséquent,

$$\left\{ F(\boldsymbol{\lambda}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ \right\}$$

est une base de l'espace vectoriel  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$ . Il suffit de voir que les  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$  et  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$  sont égaux pour conclure. □

**Remarque 5.25** On peut définir, par analogie avec le cas de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{v}_l\rangle$  ( $\mathbf{v}_l \in \mathcal{X}_{l,n}$ ), des éléments de Jaco  $\dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n) \in U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  ( $\mathbf{v}_n \in \mathcal{X}_{n,l}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_n \in \Pi^n[\mathbf{v}_n, l]^\circ$ ). On peut alors montrer le résultat suivant, analogue au corollaire 5.24. Soit  $\mathbf{s}_n = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{Z}^n(s)$ , et  $\mathbf{v}_n = (v_1, \dots, v_n)$  l'unique élément de  $\mathcal{X}_{n,l}$  tel que  $\dot{\Lambda}_{v_1} + \dots + \dot{\Lambda}_{v_n} = \dot{\Lambda}_{s_1} + \dots + \dot{\Lambda}_{s_n}$ . Alors  $\left\{ \dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n) \cdot |\emptyset_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet \mid \boldsymbol{\lambda}_n \in \Pi^n[\mathbf{v}_n, l]^\circ \right\}$  est une base de  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l) \cdot |\emptyset_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet$ . ◇

### 5.2.2 Une base de $\mathcal{H} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$ ( $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ )

Soit  $\text{Sym}$  la  $\mathbf{K}$ -algèbre des fonctions symétriques [Mac]. On peut encore définir les sommes de puissances  $p_k \in \text{Sym}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), et on définit, comme au paragraphe 5.1.1.1, les fonctions  $p_\lambda$  ( $\lambda \in \Pi$ ). Comme pour  $\text{Sym}_r$ , les  $p_\lambda$  ( $\lambda \in \Pi$ ) forment une base de  $\text{Sym}$  en tant que  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Pour  $k \in \mathbb{Z}^*$ , on définit  $b_k \in \text{End}(\text{Sym})$  de la façon suivante. Si  $k < 0$ , soit  $b_k$  l'endomorphisme agissant comme la multiplication par  $p_{-k}$ . Si  $k > 0$ , on pose  $b_k(f) := \gamma_k \frac{\partial f}{\partial p_k}$  ( $f = f(p_1, p_2, \dots) \in \text{Sym}$ ). Ici  $\gamma_k \in \mathcal{Z}(\mathcal{H}) \cong \mathbf{K}$  est le scalaire tel que  $[B_k, B_{-k}] = \gamma_k$ . On vérifie aisément qu'il existe un homomorphisme d'algèbres  $\mathcal{H} \rightarrow \text{End}(\text{Sym})$  qui envoie  $B_k$  sur  $b_k$  ( $k \in \mathbb{Z}^*$ ). Par conséquent,  $\text{Sym}$  est un  $\mathcal{H}$ -module. On montre facilement que ce  $\mathcal{H}$ -module est simple. Le résultat suivant est très classique (voir par exemple [Kac, Lemma 9.13 a]).

**Proposition 5.26** *Soit  $M$  un  $\mathcal{H}$ -module, et  $m \in M \setminus \{0\}$  tel que  $B_k \cdot m = 0$  pour tout  $k > 0$ . Alors l'homomorphisme d'espaces vectoriels  $\phi : \text{Sym} \rightarrow \mathcal{H} \cdot m$ ,  $p_\lambda \mapsto B_{-\lambda} \cdot m$  ( $\lambda \in \Pi$ ) est un isomorphisme de  $\mathcal{H}$ -modules.*

*Démonstration.* Montrons que  $\phi$  est bien un homomorphisme de  $\mathcal{H}$ -modules. Soit  $\lambda \in \Pi$ , et  $k \in \mathbb{Z}^*$ . Il faut montrer que  $B_k \cdot \phi(p_\lambda) = \phi(B_k \cdot p_\lambda) = \phi(b_k \cdot p_\lambda)$ . L'égalité est évidente si  $k < 0$ . Supposons que  $k > 0$  et  $k$  n'est pas une part de  $\lambda$ . Alors  $B_k$  et  $B_{-\lambda}$  commutent, d'où  $B_k \cdot \phi(p_\lambda) = B_k \cdot B_{-\lambda} \cdot m = 0$ ; par ailleurs, on voit aisément que  $b_k \cdot p_\lambda = 0$ , d'où l'égalité dans ce cas. Supposons enfin que  $k > 0$  et  $k$  est une part de  $\lambda$  avec une multiplicité  $m_k > 0$ . Soit  $\mu$  la partition obtenue à partir de  $\lambda$  en supprimant les  $m_k$  parts de  $\lambda$  égales à  $k$ . On vérifie aisément que  $\phi(B_k \cdot p_\lambda) = \gamma_k m_k B_{-\mu} \cdot m$ . Par ailleurs, on montre par récurrence sur  $N \geq 1$  que  $B_k B_{-k}^N \cdot m = N \gamma_k B_{-k}^{N-1} \cdot m$ , d'où  $B_k \cdot \phi(p_\lambda) = \gamma_k m_k B_{-\mu} \cdot m$ , ce qui prouve également la relation voulue dans ce cas. Par conséquent,  $\phi$  est bien un homomorphisme de  $\mathcal{H}$ -modules. De plus,  $\phi$  est surjective car  $m = \phi(1) \in \text{Im}(\phi)$ , et  $\phi$  est injective car  $\text{Sym}$  est un  $\mathcal{H}$ -module simple et  $\phi(1) = m \neq 0$ .  $\square$

**Corollaire 5.27** *Soit  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ . Alors  $\{B_{-\lambda} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle \mid \lambda \in \Pi\}$  est une base de  $\mathcal{H} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$ .*

*Démonstration.* Rappelons que  $\{p_\lambda \mid \lambda \in \Pi\}$  est une base de  $\text{Sym}$ . Le corollaire s'ensuit en appliquant la proposition précédente au vecteur singulier  $m := |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$ .  $\square$

## 5.2.3 Une base de $\Lambda^s$ invariante sous l'action de l'involution $-$

### 5.2.3.1 Un lemme sur les bi-modules

**Lemme 5.28** *Soit  $(m_j)_{j \in J}$  une famille libre de vecteurs singuliers du  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module intégrable  $M$ . Alors la somme  $\bigoplus_{j \in J} U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot m_j \subset M$  est directe.*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une relation de dépendance linéaire non triviale  $0 = \sum_{j' \in J'} u_{j'} \cdot m_{j'}$ , où  $J'$  est une partie finie de  $J$  et les  $u_{j'}$  sont des éléments de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ . On peut supposer que  $J'$  est de cardinal minimal; alors les  $u_{j'} \cdot m_{j'}$  ( $j' \in J'$ ) sont tous non nuls. Fixons un indice  $j \in J'$ . Comme  $m_j$  est un vecteur de plus haut poids du  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module



intégrable  $M$ , le module  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n).m_j$  est simple. D'autre part,  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)u_j.m_j$  est un sous-module non nul de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n).m_j$ , d'où  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n).m_j = U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)u_j.m_j$ . Ainsi, il existe  $v_j \in U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  tel que  $m_j = v_j u_j.m_j$ . On a  $0 = \sum_{j' \in J'} u_{j'}.m_{j'}$ ; en appliquant  $v_j$  aux deux membres de cette égalité, on trouve  $m_j = v_j u_j.m_j = -\sum_{j' \in J' \setminus \{j\}} v_j u_{j'}.m_{j'}$ . On peut supposer que tous les  $v_j u_{j'}.m_{j'}$  sont non nuls. Soit  $0 \leq i \leq n-1$ . En appliquant  $e_i$  aux deux membres de l'égalité précédente, on trouve  $0 = e_i.m_j = -\sum_{j' \in J' \setminus \{j\}} e_i(v_j u_{j'}.m_{j'}) \in \bigoplus_{j' \in J' \setminus \{j\}} U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n).m_{j'}$  (la somme est directe par minimalité du cardinal de  $J'$ ). Par conséquent, on a  $e_i(v_j u_{j'}.m_{j'}) = 0$  pour tout  $j' \in J' \setminus \{j\}$ . Soit  $j' \in J' \setminus \{j\}$ . Alors le vecteur  $v_j u_{j'}.m_{j'}$  est un vecteur de plus haut poids dans  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n).m_{j'}$ . Or le sous-espace de plus haut poids de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n).m_{j'}$  est de dimension 1, donc  $v_j u_{j'}.m_{j'}$  et  $m_{j'}$  sont colinéaires. On a donc  $m_j = -\sum_{j' \in J' \setminus \{j\}} v_j u_{j'}.m_{j'} \in \sum_{j' \in J' \setminus \{j\}} \mathbf{K}.m_{j'}$ ; on a ainsi exhibé une relation de dépendance linéaire non triviale entre les  $m_j^!$  ( $j' \in J$ ), ce qui est absurde.  $\square$

**Lemme 5.29** *Soit  $A$  une  $\mathbf{K}$ -algèbre unitaire, et  $U := U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  ou  $U'_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$ . Soit  $V$  un  $(A, U)$ -bi-module, i.e. un  $(A \otimes U)$ -module tel que les actions de  $A \cong (A \otimes 1)$  et  $U \cong (1 \otimes U)$  commutent. On suppose que  $V$  est un  $U$ -module intégrable, et qu'il existe  $v_0 \in V$  de plus haut poids pour l'action de  $U$  tel que  $V = (A \otimes U).v_0 = A.U.v_0$ . Soient  $A^\bullet \subset A$  et  $U^\bullet \subset U$  des parties telles que  $\{a.v_0 \mid a \in A^\bullet\}$  est une base de  $A.v_0$  et  $\{u.v_0 \mid u \in U^\bullet\}$  est une base de  $U.v_0$ . Alors  $\{a.u.v_0 \mid a \in A^\bullet, u \in U^\bullet\}$  est une base de  $V$ .*

*Démonstration.* Les hypothèses faites sur  $V$  montrent que les vecteurs  $a.v_0$  ( $a \in A^\bullet$ ) sont des vecteurs singuliers pour l'action de  $U$ . D'après le lemme précédent,  $\widetilde{V} := \bigoplus_{a \in A^\bullet} U.a.v_0$  est un  $U$ -sous-module de  $V$  et la somme est directe. Fixons maintenant  $a \in A^\bullet$ . La multiplication par  $a : U.v_0 \rightarrow U.a.v_0$  est un morphisme de  $U$ -modules, car l'action de  $a$  commute à celle de  $U$ . Cette application est surjective, et injective par simplicité de  $U.v_0$ ; c'est donc un isomorphisme. Cet isomorphisme envoie la base  $\{u.v_0 \mid u \in U^\bullet\}$  sur l'ensemble  $\{u.a.v_0 \mid u \in U^\bullet\}$ , qui est donc une base de  $U.a.v_0$ . Ainsi  $U.a.v_0 = \bigoplus_{u \in U^\bullet} \mathbf{K}u.a.v_0$ . Par conséquent, on a la somme directe

$$\widetilde{V} = \bigoplus_{a \in A^\bullet, u \in U^\bullet} \mathbf{K} u.a.v_0. \text{ De plus, on a}$$

$$V = U.A.v_0 = U. \sum_{a \in A^\bullet} \mathbf{K}a.v_0 \subset \sum_{a \in A^\bullet} \mathbf{K} a.U.v_0 \subset \sum_{a \in A^\bullet} \mathbf{K} a. \sum_{u \in U^\bullet} \mathbf{K} u.v_0 \subset \sum_{\substack{a \in A^\bullet \\ u \in U^\bullet}} \mathbf{K} a.u.v_0 = \widetilde{V},$$

d'où  $\widetilde{V} = V$ . Le lemme s'ensuit.  $\square$

### 5.2.3.2 Une base de $\Lambda^s$ invariante sous l'action de l'involution —

Nous sommes maintenant à même de prouver le résultat suivant.

**Théorème 5.30**

1°) Fixons  $\mathbf{r}_l \in A_{l,n}(s)$ . Soit  $\mathbf{r}_n$  l'unique élément de  $A_{n,l}(s)$  tel que  $|\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet = |\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle$  (cf. proposition 3.14). Soit  $\mathbf{v}_l$  (resp.  $\mathbf{v}_n$ ) l'unique multi-charge de  $\mathcal{X}_{l,n}$  (resp.  $\mathcal{X}_{n,l}$ ) telle que  $U'_q(\widehat{\mathbf{s}}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{v}_l\rangle \cong U'_q(\widehat{\mathbf{s}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle$  (resp.  $U'_p(\widehat{\mathbf{s}}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{v}_n\rangle^\bullet \cong U'_p(\widehat{\mathbf{s}}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet$ ) (cf. remarque 3.10). Alors avec les notations du paragraphe 5.2.1,

$$\begin{aligned} & \left\{ F(\boldsymbol{\lambda}_l) B_{-\mu} \dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n) \cdot |\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ, \mu \in \Pi, \boldsymbol{\lambda}_n \in \Pi^n[\mathbf{v}_n, l]^\circ \right\} \\ &= \left\{ \dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n) B_{-\mu} F(\boldsymbol{\lambda}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ, \mu \in \Pi, \boldsymbol{\lambda}_n \in \Pi^n[\mathbf{v}_n, l]^\circ \right\} \end{aligned}$$

est une base de l'espace vectoriel

$$U'_q(\widehat{\mathbf{s}}_n) \otimes \mathcal{H} \otimes U'_p(\widehat{\mathbf{s}}_l) \cdot |\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet = U'_p(\widehat{\mathbf{s}}_l) \otimes \mathcal{H} \otimes U'_q(\widehat{\mathbf{s}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle.$$

2°) Avec les notations de 1°), l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^s &:= \left\{ F(\boldsymbol{\lambda}_l) B_{-\mu} \dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n) \cdot |\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet \mid \mathbf{r}_n \in A_{n,l}(s), \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ, \mu \in \Pi, \boldsymbol{\lambda}_n \in \Pi^n[\mathbf{v}_n, l]^\circ \right\} \\ &= \left\{ \dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n) B_{-\mu} F(\boldsymbol{\lambda}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle \mid \mathbf{r}_l \in A_{l,n}(s), \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ, \mu \in \Pi, \boldsymbol{\lambda}_n \in \Pi^n[\mathbf{v}_n, l]^\circ \right\} \end{aligned}$$

est une base de l'espace vectoriel  $\Lambda^s$  qui est invariante sous l'action de l'involution  $-$ .

*Démonstration.* Les égalités écrites dans l'énoncé proviennent du fait que les actions de  $U'_q(\widehat{\mathbf{s}}_n)$ ,  $U'_p(\widehat{\mathbf{s}}_l)$  et  $\mathcal{H}$  commutent deux à deux. Prouvons le point 1°). D'après les corollaires 5.24 et 5.27 et la remarque 5.25,

- $\{F(\boldsymbol{\lambda}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ\}$  est une base de  $U'_q(\widehat{\mathbf{s}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle$ ,
- $\{B_{-\mu} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle \mid \mu \in \Pi\}$  est une base de  $\mathcal{H} \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle$ , et
- $\{\dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n) \cdot |\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet \mid \boldsymbol{\lambda}_n \in \Pi^n[\mathbf{v}_n, l]^\circ\}$  est une base de  $U'_p(\widehat{\mathbf{s}}_l) \cdot |\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet$ .

De ceci, ainsi que du lemme 5.29 appliqué au  $(\mathcal{H}, U'_q(\widehat{\mathbf{s}}_n))$ -bi-module  $(\mathcal{H} \otimes U'_q(\widehat{\mathbf{s}}_n)) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle$  puis au  $(\mathcal{H} \otimes U'_q(\widehat{\mathbf{s}}_n), U'_p(\widehat{\mathbf{s}}_l))$ -bi-module  $((\mathcal{H} \otimes U'_q(\widehat{\mathbf{s}}_n)) \otimes U'_p(\widehat{\mathbf{s}}_l)) \cdot |\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet$ , découle le point 1°). D'après 1°) et le théorème 3.15, l'ensemble  $\mathbb{B}^s$  de l'énoncé est une base de  $\Lambda^s$ . Enfin, d'après la remarque 3.33 et la proposition 3.31, l'involution  $-$  agit trivialement sur chacun des vecteurs de  $\mathbb{B}^s$ .  $\square$

## 5.3 Intersection de la base $\mathbb{B}^s$ avec les sous-espaces de poids de $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ , $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$

### 5.3.1 Énoncé et preuve du résultat

Soit  $\mathbb{B}^s$  la base de  $\Lambda^s$  décrite au théorème 5.30. Dans toute cette section, on fixe  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  et  $w \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$ . Nous allons calculer ici la base  $\mathbb{B} := \mathbb{B}^s \cap \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$  de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$ ; notons

que d'après le théorème 5.30, l'involution  $-$  agit trivialement sur la base  $\mathbb{B}$ . Puisque l'on connaît les degrés des opérateurs  $F(\lambda_l)$ ,  $B_{-\mu}$  et  $\dot{F}(\lambda_n)$  du théorème 5.30, il s'agit seulement de déterminer quand la somme de ces degrés ajoutée au poids de  $|\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle$  est égale à  $w$ . Ceci ne pose aucun problème théorique, mais pour effectuer le calcul en pratique, nous avons besoin d'introduire de nouvelles notations un peu lourdes.

– Pour  $\mathbf{v}_l \in \mathcal{X}_{l,n}$ ,  $\boldsymbol{\nu}_n = (N_0, \dots, N_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$ , on pose

$$\Pi^l[\mathbf{v}_l, n; \boldsymbol{\nu}_n]^\circ := \left\{ \lambda_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ \mid \forall 0 \leq i \leq n-1, N_i(\lambda_l; \mathbf{v}_l; n) = N_i \right\}$$

et on définit de même  $\Pi^n[\mathbf{v}_n, l; \boldsymbol{\nu}_l]^\circ$  ( $\mathbf{v}_n \in \mathcal{X}_{n,l}$ ,  $\boldsymbol{\nu}_l \in \mathbb{N}^l$ ).

– On munit  $P := \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z}\Lambda_i \oplus \mathbb{Z}\delta$  d'une relation d'ordre partiel en écrivant  $w' \leq w''$  ( $w', w'' \in P$ ) si et seulement si  $w'' - w' \in \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}\alpha_i$ . Soit  $\mathbf{t}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ , et  $w' \in P$  tel que  $w' \leq \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{t}_l\rangle)$ . Soit  $(N_0, \dots, N_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$  tel que  $w' = \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{t}_l\rangle) - \sum_{i=0}^{n-1} N_i \alpha_i$ . On pose alors  $\nu(w', \mathbf{t}_l) := (N_0, \dots, N_{n-1})$ . On définit de même  $\dot{\nu}(\dot{w}, \mathbf{s}_n) \in \mathbb{N}^l$  pour  $\dot{w} \in \bigoplus_{i=0}^{l-1} \mathbb{Z}\dot{\Lambda}_i \oplus \mathbb{Z}\dot{\delta}$  et  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$ . Si  $w' \in P$  est tel que  $w \leq w'$ , soit  $(N_0, \dots, N_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$  tel que  $w' - w = \sum_{i=0}^{n-1} N_i \alpha_i$ . On pose alors  $N(w') := \min \{N_i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$ .

**Remarque 5.31** Soit  $\mathbf{t}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$ ,  $\mathbf{v}_l \in \mathcal{X}_{l,n}$  et  $\lambda_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ$ . Il découle de la formule  $(W_1)$  et de la définition des éléments de Jacon que  $\text{wt}(F(\lambda_l).|\emptyset_l, \mathbf{t}_l\rangle) \leq \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{t}_l\rangle)$ . Plus précisément, on a

$$\text{wt}(F(\lambda_l).|\emptyset_l, \mathbf{t}_l\rangle) = \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{t}_l\rangle) - \sum_{i=0}^{n-1} N_i(\lambda_l; \mathbf{v}_l; n) \alpha_i.$$

On a donc  $\nu(\text{wt}(F(\lambda_l).|\emptyset_l, \mathbf{t}_l\rangle), \mathbf{t}_l) = (N_i(\lambda_l; \mathbf{v}_l; n))_{0 \leq i \leq n-1}$ , soit encore

$$\lambda_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n; \nu(\text{wt}(F(\lambda_l).|\emptyset_l, \mathbf{t}_l\rangle), \mathbf{t}_l)]^\circ.$$

De même, si  $\mathbf{s}_n \in \mathbb{Z}^l(s)$ ,  $\mathbf{v}_n \in \mathcal{X}_{n,l}$  et  $\lambda_n \in \Pi^n[\mathbf{v}_n, l]^\circ$ , alors on a

$$\lambda_n \in \Pi^n[\mathbf{v}_n, l; \dot{\nu}(\dot{\text{wt}}(\dot{F}(\lambda_n).|\emptyset_n, \mathbf{s}_n\rangle^\bullet), \mathbf{s}_n)]^\circ.$$

◇

**Définition 5.32** On dit que  $w' \in P$  est *admissible* (relativement à  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$ ) si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i)  $w'$  est un poids de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  tel que  $w \leq w' \leq \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle)$ .
- (ii) Soit  $(\mathbf{r}_n, \dot{w}') \in \mathbb{Z}^n(s) \times \dot{\mathcal{P}}^s$  l'unique couple tel que  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w' \rangle = \mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet \langle \dot{w}' \rangle$  (cf. proposition 3.24). On demande alors que  $\mathbf{r}_n \in A_{n,l}(s)$ .

Si la condition (i) est vérifiée, on pose  $\mathbf{r}_n(w') := \mathbf{r}_n$  et  $\dot{w}'(w') := \dot{w}'$ . Soit  $\mathbf{v}_n(w')$  l'unique multi-charge de  $\mathcal{X}_{n,l}$  telle que  $U_p'(\widehat{\mathbf{s}}_l).|\emptyset_n, \mathbf{v}_n(w')\rangle^\bullet \cong U_p'(\widehat{\mathbf{s}}_l).|\emptyset_n, \mathbf{r}_n(w')\rangle^\bullet$ . Si de plus  $w'$  est admissible, soit  $\mathbf{r}_l(w') \in A_{l,n}(s)$  l'unique multi-charge telle que  $|\emptyset_l, \mathbf{r}_l(w')\rangle = |\emptyset_l, \mathbf{r}_n(w')\rangle^\bullet$  (cf. proposition 3.14), et  $\mathbf{v}_l(w')$  l'unique multi-charge de  $\mathcal{X}_{l,n}$  telle que  $U_q'(\widehat{\mathbf{s}}_l).|\emptyset_l, \mathbf{v}_l(w')\rangle$  soit isomorphe à  $U_q'(\widehat{\mathbf{s}}_l).|\emptyset_l, \mathbf{r}_l(w')\rangle$ .

◇

**Exemple 5.33** Prenons  $n = 3$ ,  $l = 2$ ,  $\mathbf{s}_l = (3, 6)$  et  $w = 2\Lambda_0 - 4\delta = \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle) - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)$ . Le tableau suivant donne la liste des poids  $w'$  de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  tels que  $w \leq w' \leq \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle)$ . Pour chacun de ces vecteurs  $w'$ , on peut calculer les quantités  $\nu(w', \mathbf{s}_l)$ ,  $N(w')$ ,  $\dot{w}'(w')$ ,  $\mathbf{r}_n(w')$  et  $\mathbf{v}_n(w')$ . Si de plus  $w'$  est admissible, on calcule aussi  $\mathbf{r}_l(w')$  et  $\mathbf{v}_l(w')$ .

$w'$	$\nu(w', \mathbf{s}_l)$	$N(w')$	$\dot{w}'(w')$	$\mathbf{r}_n(w')$	$\mathbf{v}_n(w')$	$\mathbf{r}_l(w')$	$\mathbf{v}_l(w')$
$2\Lambda_0 - 3\delta$	(0,0,0)	1	$3\dot{\Lambda}_1 - 3\dot{\alpha}_1$	(3,3,3)	(1,1,1)	(6,3)	(0,0)
$(2\Lambda_0 - 3\delta) - \alpha_0$	(1,0,0)	0	$2\dot{\Lambda}_0 + \dot{\Lambda}_1 - (\dot{\alpha}_0 + 3\dot{\alpha}_1)$	(4,3,2)	(1,0,0)	(5,4)	(2,1)
$(2\Lambda_0 - 3\delta) - (\alpha_0 + \alpha_1)$	(1,1,0)	0	$2\dot{\Lambda}_0 + \dot{\Lambda}_1 - (\dot{\alpha}_0 + 3\dot{\alpha}_1)$	(3,4,2)	(1,0,0)	—	—
$(2\Lambda_0 - 3\delta) - (\alpha_0 + \alpha_2)$	(1,0,1)	0	$2\dot{\Lambda}_0 + \dot{\Lambda}_1 - (\dot{\alpha}_0 + 3\dot{\alpha}_1)$	(4,2,3)	(1,0,0)	—	—
$(2\Lambda_0 - 3\delta) - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)$	(1,1,1)	0	$3\dot{\Lambda}_1 - (\dot{\alpha}_0 + 4\dot{\alpha}_1)$	(3,3,3)	(1,1,1)	(6,3)	(0,0)

Par conséquent, les poids admissibles sont  $2\Lambda_0 - 3\delta$ ,  $(2\Lambda_0 - 3\delta) - \alpha_0$  et  $(2\Lambda_0 - 3\delta) - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)$ .  
 $\diamond$

**Proposition 5.34** On a

$$\mathbb{B} = \bigcup_{w' \text{ admissible}} \left\{ \dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n) B_{-\mu} F(\boldsymbol{\lambda}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l(w')\rangle \mid \mu \in \Pi, |\mu| \leq N(w'), \right. \\ \left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\lambda}_n \in \Pi^n[\mathbf{v}_n(w'), l; \dot{\nu}(\dot{w}'(w'), \mathbf{r}_n(w'))]^\circ, \\ \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l(w'), n; \nu(w''(w', \mu), \mathbf{r}_l(w'))]^\circ \end{array} \right\},$$

où on a posé  $w''(w', \mu) := w - w' + |\mu|\delta + \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{r}_l(w')\rangle)$ .

*Démonstration.* Prouvons l'inclusion  $\subset$ . Soit  $x \in \mathbb{B}$ . Avec les notations du théorème 5.30, soient  $\mathbf{r}_n \in A_{n,l}(s)$ ,  $\mathbf{r}_l \in A_{l,n}(s)$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l, n]^\circ$ ,  $\mu \in \Pi$  et  $\boldsymbol{\lambda}_n \in \Pi^n[\mathbf{v}_n, l]^\circ$  tels que

$$x = F(\boldsymbol{\lambda}_l) B_{-\mu} \dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n) \cdot |\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet = \dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n) B_{-\mu} F(\boldsymbol{\lambda}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle.$$

Puisque  $x \neq 0$ , le vecteur  $y := \dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n) \cdot |\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet = \dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle$  est non nul, donc c'est un vecteur de poids  $w'$  du  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module  $\Lambda^s$ . Montrons que  $w'$  est un poids admissible relativement à  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$ . Soit  $\mathbf{t}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  tel que  $y \in \mathbf{F}_q[\mathbf{t}_l]$ . Puisque  $\mathbf{F}_q[\mathbf{t}_l]$  est stable sous les actions de  $U_p'(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  et  $\mathcal{H}$ , on a

$$x = F(\boldsymbol{\lambda}_l) B_{-\mu} \cdot y \in \mathbf{F}_q[\mathbf{t}_l]\langle w' - |\mu|\delta - \sum_{i=0}^{n-1} n_i \alpha_i \rangle,$$

où on a posé  $n_i := N_i(\boldsymbol{\lambda}_l; \mathbf{v}_l; n)$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ). Par ailleurs, on a  $x \in \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$ . Puisque les  $\mathbf{F}_q[\mathbf{a}_l]$ ,  $\mathbf{a}_l \in \mathbb{Z}^l(s)$  sont en somme directe, on doit avoir  $\mathbf{t}_l = \mathbf{s}_l$  puis

$$(*) : \quad w = w' - |\mu|\delta - \sum_{i=0}^{n-1} n_i \alpha_i = w' - \sum_{i=0}^{n-1} (n_i + |\mu|) \alpha_i.$$

En particulier, on a  $y \in \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w' \rangle$  et  $w \leq w'$ . En outre, puisque  $y$  est un vecteur de poids de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ , on a d'après  $(W_1)$ ,  $w' = \text{wt}(y) \leq \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle)$ . Par conséquent,  $w'$  satisfait la

condition (i) des poids admissibles. D'après la proposition 3.24, il existe un unique couple  $(\mathbf{s}_n, \dot{w}') \in \mathbb{Z}^n(s) \times \dot{\mathcal{P}}^s$  tel que  $\mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet \langle \dot{w}' \rangle = \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w' \rangle$ . Alors

$$y = \dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n) \cdot |\emptyset_n, \mathbf{r}_n\rangle^\bullet \in \mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet \cap \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w' \rangle = \mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet \cap \mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet \langle \dot{w}' \rangle \subset \mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n]^\bullet \cap \mathbf{F}_p[\mathbf{s}_n]^\bullet.$$

Puisque les  $\mathbf{F}_p[\mathbf{a}_n]^\bullet$ ,  $\mathbf{a}_n \in \mathbb{Z}^n(s)$  sont en somme directe, on doit avoir  $\mathbf{s}_n = \mathbf{r}_n \in A_{n,l}(s)$ . Ainsi  $w'$  est admissible, et par définition on a  $\dot{w}' = \dot{w}'(w')$  et  $\mathbf{r}_n = \mathbf{s}_n = \mathbf{r}_n(w')$ , d'où  $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_n(w')$ . Puisque  $\mathbf{r}_l$  est l'unique élément de  $A_{l,n}(s)$  tel que  $|\emptyset_l, \mathbf{r}_l\rangle = |\emptyset_n, \mathbf{r}_n(w')\rangle^\bullet$ , on doit aussi avoir  $\mathbf{r}_l = \mathbf{r}_l(w')$ , d'où  $\mathbf{v}_l = \mathbf{v}_l(w')$ . D'après (\*), on a  $w' - w = \sum_{i=0}^{n-1} N_i \alpha_i$  avec  $N_i := n_i + |\mu|$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ). Puisque les  $n_i$  sont des entiers naturels, on a pour tout  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $|\mu| = N_i - n_i \leq N_i$ , donc  $|\mu| \leq \min_i(N_i) = N(w')$ . Par ailleurs, d'après la remarque 5.31 appliquée à  $(\mathbf{r}_n(w'), \mathbf{v}_n(w'), \boldsymbol{\lambda}_n)$ , on a

$$\boldsymbol{\lambda}_n \in \Pi^n[\mathbf{v}_n(w'), l; \dot{\nu}(\text{wt}(\dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n) \cdot |\emptyset_n, \mathbf{r}_n(w')\rangle^\bullet), \mathbf{r}_n(w'))]^\circ.$$

Mais par définition, on a  $\text{wt}(\dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n) \cdot |\emptyset_n, \mathbf{r}_n(w')\rangle^\bullet) = \text{wt}(y) = \dot{w}'(w')$ , la dernière égalité provenant du fait que  $y \in \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w' \rangle = \mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n(w')]^\bullet \langle \dot{w}'(w') \rangle$ . On a donc bien

$$\boldsymbol{\lambda}_n \in \Pi^n[\mathbf{v}_n(w'), l; \dot{\nu}(\dot{w}'(w'), \mathbf{r}_n(w'))]^\circ.$$

De même, en appliquant la remarque 5.31 à  $(\mathbf{r}_l(w'), \mathbf{v}_l(w'), \boldsymbol{\lambda}_l)$ , on a

$$\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l[\mathbf{v}_l(w'), n; \nu(\text{wt}(F(\boldsymbol{\lambda}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l(w')\rangle), \mathbf{r}_l(w'))]^\circ.$$

Il reste à voir que  $\text{wt}(F(\boldsymbol{\lambda}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l(w')\rangle) = w''(w', \mu)$ , où  $w''(w', \mu)$  est défini comme dans l'énoncé. En effet, on a par définition des  $n_i$  d'une part, et d'après  $(W_1)$  et (\*) d'autre part,

$$\begin{aligned} \text{wt}(F(\boldsymbol{\lambda}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l(w')\rangle) &= \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{r}_l(w')\rangle) - \sum_{i=0}^{n-1} n_i \alpha_i \\ &= \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{r}_l(w')\rangle) + w - w' + |\mu| \delta \\ &= w''(w', \mu), \end{aligned}$$

ce qui prouve l'inclusion  $\subset$ .

Montrons à présent l'inclusion réciproque. Soit  $x = \dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n) B_{-\mu} F(\boldsymbol{\lambda}_l) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l(w')\rangle$ , où  $w'$  est un poids admissible,  $\mu \in \Pi$ ,  $|\mu| \leq N(w')$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_n \in \Pi^n[\mathbf{v}_n(w'), l; \dot{\nu}(\dot{w}'(w'), \mathbf{r}_n(w'))]^\circ$  et  $\boldsymbol{\lambda}_l$  appartient à  $\Pi^l[\mathbf{v}_l(w'), n; \nu(w''(w', \mu), \mathbf{r}_l(w'))]^\circ$ . Clairement  $x \in \mathbb{B}^s$ , et par construction, on a  $\text{wt}(x) = w$ . Il reste à voir que  $x \in \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . Puisque  $\boldsymbol{\lambda}_n \in \Pi^n[\mathbf{v}_n(w'), l; \dot{\nu}(\dot{w}'(w'), \mathbf{r}_n(w'))]^\circ$ , on a par définition

$$y := \dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{r}_l(w')\rangle = \dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n) \cdot |\emptyset_n, \mathbf{r}_n(w')\rangle^\bullet \in \mathbf{F}_p[\mathbf{r}_n(w')]^\bullet \langle \dot{w}'(w') \rangle = \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \langle w' \rangle.$$

De plus, puisque les actions de  $\dot{F}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ ,  $B_{-\mu}$  et  $F(\boldsymbol{\lambda}_l)$  commutent, on a  $x = F(\boldsymbol{\lambda}_l) B_{-\mu} \cdot y$ , donc  $x \in F(\boldsymbol{\lambda}_l) B_{-\mu} \cdot \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l] \subset \mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . Ainsi  $x \in \mathbb{B}$ .  $\square$

**Remarque 5.35** Soit  $x = \dot{F}(\lambda_n)B_{-\mu}F(\lambda_l)|\emptyset_l, \mathbf{r}_l(w')\rangle \in \mathbb{B}$ , où  $\lambda_n$ ,  $\mu$ ,  $\lambda_l$  et  $\mathbf{r}_l(w')$  sont comme dans la proposition 5.34. Puisque les actions de  $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ ,  $U'_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)$  et  $\mathcal{H}$  commutent deux à deux, on peut écrire

$$x = F(\lambda_l)\dot{F}(\lambda_n)B_{-\mu}|\emptyset_l, \mathbf{r}_l(w')\rangle.$$

On peut alors utiliser la section 5.1 pour calculer  $B_{-\mu}|\emptyset_l, \mathbf{r}_l(w')\rangle$  sans manipuler les relations de redressement. On en déduit alors le calcul pratique de  $x$ , grâce aux indexations  $\lambda_n$  et  $\lambda_l$  et à la proposition 3.7.  $\diamond$

### 5.3.2 Un exemple d'application

Prenons  $n = 3$ ,  $l = 2$ ,  $\mathbf{s}_l = (3, 6)$  et  $w = 2\Lambda_0 - 4\delta = \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle) - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)$ . Nous allons calculer la base  $\mathbb{B}$  de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$  donnée par la proposition 5.34, ainsi que la matrice  $A(q)$  de l'involution de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$  relativement à la base standard. Nous avons vu à l'exemple 5.33 que les poids admissibles sont  $2\Lambda_0 - 3\delta$ ,  $(2\Lambda_0 - 3\delta) - \alpha_0$  et  $(2\Lambda_0 - 3\delta) - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)$ .

\* Contribution de  $w' := 2\Lambda_0$ . L'exemple 5.33 donne  $\mathbf{v}_n(w') = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_l(w') = (0, 0)$  et  $\mathbf{r}_l(w') = (6, 3)$ . De plus, on a  $\dot{\nu}(\dot{w}'(w'), \mathbf{r}_n(w')) = (3, 0)$ , donc on calcule le graphe cristallin de  $U_p(\widehat{\mathfrak{sl}}_l)|\emptyset_n, \mathbf{v}_n(w')\rangle^\bullet$  jusqu'à la profondeur  $3 + 0 = 3$ . On trouve alors

$$\Pi^n[\mathbf{v}_n(w'), l; \dot{\nu}(\dot{w}'(w'), \mathbf{r}_n(w'))]^\circ = \Pi^n[(1, 1, 1), l; (3, 0)]^\circ = \{((1), (1), (1))\}.$$

Par conséquent, seule la multi-partition  $\lambda_n := ((1), (1), (1))$  apporte une contribution à  $\mathbb{B}$ . On calcule alors l'élément de Jacon

$$\dot{F}(\lambda_n) = \dot{f}_1^{(3)}.$$

De plus, on a  $N(w') = 1$ , donc seules les partitions  $\mu = \emptyset$  et  $\mu = (1)$  apportent une contribution à  $\mathbb{B}$ .

- Contribution de  $w' := 2\Lambda_0$ ,  $\mu = \emptyset$ . On a alors

$$w''(w', \mu) := w - w' + \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{r}_l(w')\rangle) = \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{r}_l(w')\rangle) - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2),$$

d'où  $\nu(w''(w', \mu), \mathbf{r}_l(w')) = (1, 1, 1)$ . Par conséquent, nous devons calculer le graphe cristallin de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)|\emptyset_l, \mathbf{v}_l(w')\rangle$  jusqu'à la profondeur  $1 + 1 + 1 = 3$ . On voit alors que

$$\Pi^l[\mathbf{v}_l(w'), n; \nu(w''(w', \mu), \mathbf{r}_l(w'))]^\circ = \Pi^l[(0, 0), n; (1, 1, 1)]^\circ = \{(\emptyset, (3)), (\emptyset, (2, 1))\}.$$

On calcule alors les éléments de Jacon  $F(\lambda_l)$  pour  $\lambda_l = (\emptyset, (3))$  et  $\lambda_l = (\emptyset, (2, 1))$ ; on trouve respectivement les éléments  $f_2 f_1 f_0$  et  $f_1 f_2 f_0$ . Nous avons ainsi exhibé deux vecteurs de  $\mathbb{B}$ , à savoir

$$v_1 := \dot{f}_1^{(3)} f_2 f_1 f_0 |\emptyset_l, (6, 3)\rangle \quad \text{et} \quad v_2 := \dot{f}_1^{(3)} f_1 f_2 f_0 |\emptyset_l, (6, 3)\rangle.$$

- Contribution de  $w' := 2\Lambda_0$ ,  $\mu = (1)$ . En suivant la même méthode, on trouve un seul vecteur de  $\mathbb{B}$ , à savoir

$$v_3 := \dot{f}_1^{(3)} B_{-1} \cdot |\emptyset_l, (6,3)\rangle.$$

- \* Contribution de  $w' := 2\Lambda_0 - \alpha_0$ . On trouve deux vecteurs de  $\mathbb{B}$ , à savoir

$$v_4 := \dot{f}_1^{(3)} \dot{f}_0 f_2 f_1 \cdot |\emptyset_l, (5,4)\rangle \quad \text{et} \quad v_5 := \dot{f}_1^{(3)} \dot{f}_0 f_1 f_2 \cdot |\emptyset_l, (5,4)\rangle.$$

- \* Contribution de  $w' := 2\Lambda_0 - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)$ . On trouve cette fois un seul vecteur de  $\mathbb{B}$ , à savoir

$$v_6 := \dot{f}_1^{(3)} \dot{f}_0 \dot{f}_1 \cdot |\emptyset_l, (6,3)\rangle.$$

Nous avons ainsi exhibé six vecteurs de  $\mathbb{B}$ . En fait,  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$  est bien de dimension 6, et les multi-partitions indexant la base standard de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]\langle w \rangle$  sont

$$(\emptyset, (3)), (\emptyset, (2,1)), (\emptyset, (1,1,1)), ((3), \emptyset), ((2,1), \emptyset) \quad \text{et} \quad ((1,1,1), \emptyset).$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &= \{v_1, \dots, v_6\} \\ &= \left\{ \dot{f}_1^{(3)} f_2 f_1 f_0 \cdot |\emptyset_l, (6,3)\rangle, \dot{f}_1^{(3)} f_1 f_2 f_0 \cdot |\emptyset_l, (6,3)\rangle, \dot{f}_1^{(3)} B_{-1} \cdot |\emptyset_l, (6,3)\rangle, \right. \\ &\quad \left. \dot{f}_1^{(3)} \dot{f}_0 f_2 f_1 \cdot |\emptyset_l, (5,4)\rangle, \dot{f}_1^{(3)} \dot{f}_0 f_1 f_2 \cdot |\emptyset_l, (5,4)\rangle, \dot{f}_1^{(3)} \dot{f}_0 \dot{f}_1 \cdot |\emptyset_l, (6,3)\rangle \right\}. \end{aligned}$$

On exprime alors les vecteurs  $v_1, \dots, v_6$  dans la base standard de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  comme expliqué à la remarque 5.35. On trouve la matrice de passage

$$T(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ q & 1 & -q^{-1} & q & 1 & -q^{-1} \\ 0 & q & q^{-2} & 0 & q & q^{-2} \\ q & 0 & q & -q^{-1} & 0 & -q^{-1} \\ q^2 & q & -1 & -1 & -q^{-1} & q^{-2} \\ 0 & q^2 & q^{-1} & 0 & -1 & -q^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\emptyset, (3)) \\ (\emptyset, (2,1)) \\ (\emptyset, (1,1,1)) \\ ((3), \emptyset) \\ ((2,1), \emptyset) \\ ((1,1,1), \emptyset) \end{pmatrix}.$$

On calcule alors  $A(q) = T(q) \left( T(q^{-1}) \right)^{-1}$ . On trouve

$$A(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q - q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -q^{-1}(q - q^{-1}) & q - q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q - q^{-1} & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ (q - q^{-1})^2 & q - q^{-1} & 0 & q - q^{-1} & 1 & \cdot \\ -q^{-1}(q - q^{-1})^2 & (q - q^{-1})^2 & q - q^{-1} & -q^{-1}(q - q^{-1}) & q - q^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (\emptyset, (3)) \\ (\emptyset, (2, 1)) \\ (\emptyset, (1, 1, 1)) \\ (3, \emptyset) \\ (2, 1, \emptyset) \\ (1, 1, 1, \emptyset) \end{matrix} .$$





## Chapitre 6

# Algèbres d'Ariki-Koike

*Les algèbres d'Ariki-Koike ont été introduites de façon indépendante par Ariki et Koike [AK] d'une part, et par Broué et Malle [BM] d'autre part, en vue de généraliser la théorie des algèbres de Hecke de type  $A_{m-1}$  et  $B_m$ . L'algèbre d'Ariki-Koike  $\mathcal{H}$  définie sur l'anneau  $R$  dépend de deux entiers  $l$  et  $m$ , ainsi que de paramètres de déformation  $v, u_1, \dots, u_l \in R$ . Pour une spécialisation appropriée de ces paramètres (cf. remarque 6.17),  $\mathcal{H}$  est isomorphe à l'algèbre de groupe  $RW_{l,m}$ , où  $W_{l,m}$  est le groupe de réflexions complexes de type  $G(l,1,m)$  dans la classification de Shephard-Todd [ST].*

*Dans ce chapitre, nous donnons les éléments principaux de la théorie des représentations des algèbres d'Ariki-Koike. Nous suivrons en grande partie [DJM] ainsi que l'excellent article [Mat3]. Notre approche repose sur la théorie des algèbres cellulaires de Graham-Lehrer [GL]. Pour comprendre les représentations des algèbres d'Ariki-Koike, nous serons amenés à calculer les matrices de décomposition de ces algèbres, en particulier lorsque les paramètres sont spécialisés à une puissance d'une racine  $n$ -ième de l'unité. Ce calcul peut être mené à bien grâce à un profond théorème dû à Ariki [A2]. Ce théorème montre qu'en caractéristique 0, l'ensemble formé des classes des modules projectifs indécomposables dans le groupe de Grothendieck est en bijection avec la base canonique d'un  $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module intégrable irréductible de niveau  $l$  (cf. théorème 6.41). Par conséquent, la matrice de décomposition d'une algèbre d'Ariki-Koike coïncide avec la spécialisation à  $q = 1$  d'une partie de la matrice de transition de la base standard vers la base d'Uglov d'un espace de Fock de niveau supérieur (cf. corollaire 6.48). Dans le cas particulier du niveau  $l = 1$ , ce résultat donne la preuve d'une conjecture faite par Lascoux, Leclerc et Thibon [LLT].*

*Notations.* Dans tout ce chapitre, on considère un anneau intègre  $R$ ; en particulier,  $R$  est commutatif. Soit  $R^\times$  l'ensemble des éléments inversibles de  $R$ .

### 6.1 Algèbres cellulaires

Dans cette section, nous rappelons la définition des algèbres cellulaires au sens de Graham et Lehrer [GL], puis nous énonçons sans démonstration les principaux résultats de la théorie

des représentations des  $R$ -algèbres cellulaires lorsque  $R$  est un corps. Nous suivons ici en grande partie l'article de Mathas [Mat3], dont nous reprenons les conventions (celles-ci sont légèrement différentes de celles de [GL]).

### 6.1.1 Définition

**Définition 6.1** ([GL]) Une *algèbre cellulaire* est la donnée d'une  $R$ -algèbre (associative, unitaire)  $A$  et d'un quadruplet  $(\Lambda, \mathcal{T}, \mathcal{C}, *)$  vérifiant les propriétés suivantes.

( $C_1$ )  $\Lambda$  est un ensemble fini muni d'un ordre partiel  $\geq$ . Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\mathcal{T}(\lambda)$  est un ensemble fini. De plus,  $\mathcal{C} : \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}(\lambda) \times \mathcal{T}(\lambda) \rightarrow A$ , est une application injective, dont l'image est une  $R$ -base de  $A$ .

( $C_2$ ) Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $S, S' \in \mathcal{T}(\lambda)$ , posons  $C_{S,T}^\lambda := \mathcal{C}(S,T) \in A$ . Alors  $*$  :  $A \rightarrow A$  est un anti-automorphisme de  $R$ -algèbre involutif tel que  $(C_{S,T}^\lambda)^* = C_{T,S}^\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ,  $S, T \in \mathcal{T}(\lambda)$ ).

( $C_3$ ) Pour  $\lambda \in \Lambda$ , notons  $A(> \lambda)$  le sous- $R$ -module de  $A$  engendré par les  $C_{S,T}^\mu$ ,  $\mu > \lambda$ ,  $S, T \in \mathcal{T}(\mu)$ , et définissons de même  $A(\geq \lambda)$ . Alors pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $T \in \mathcal{T}(\lambda)$ ,  $a \in A$ , il existe des coefficients  $r_a(S', T) \in R$  ( $S' \in \mathcal{T}(\lambda)$ ) tels que pour tout  $S \in \mathcal{T}(\lambda)$ , on a

$$C_{S,T}^\lambda a \equiv \sum_{S' \in \mathcal{T}(\lambda)} r_a(S', T) C_{S,S'}^\lambda \pmod{A(> \lambda)}.$$

(Nous exigeons donc que les coefficients  $r_a(S', T)$  ne dépendent pas de  $S$ ).

Le quadruplet  $(\Lambda, \mathcal{T}, \mathcal{C}, *)$  est appelé *structure cellulaire*, et la base  $\{C_{S,T}^\lambda \mid \lambda \in \Lambda, S, T \in \mathcal{T}(\lambda)\}$  est appelée *base cellulaire* de  $A$ .  $\diamond$

Dans toute cette section, nous supposons que  $A$  est une algèbre cellulaire, munie de la structure cellulaire  $(\Lambda, \mathcal{T}, \mathcal{C}, *)$ . Notons qu'en appliquant l'anti-automorphisme  $*$  à ( $C_3$ ), on obtient

$$(C'_3) \quad a C_{S,T}^\lambda \equiv \sum_{S' \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{a^*}(S', S) C_{S',T}^\lambda \pmod{A(> \lambda)} \quad (a \in A, S, T \in \mathcal{T}(\lambda)),$$

où les coefficients  $r_{a^*}(S', S)$  sont ceux de ( $C_3$ ). Réciproquement, on obtient ( $C_3$ ) en appliquant  $*$  à ( $C'_3$ ), donc une algèbre vérifiant ( $C_1$ ), ( $C_2$ ) et ( $C'_3$ ) est cellulaire.

**Exemple 6.2** Soit  $A := H(\mathfrak{S}_m) = \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} RT_\sigma$  l'algèbre de Hecke de type  $A_{m-1}$ , définie sur l'anneau  $R := \mathbb{Z}[q]$  (cf. paragraphe 1.3.2). Nous allons montrer, à l'aide de résultats contenus dans [KL], que  $A$  est cellulaire. Soit  $(\Lambda, \geq) := (\Pi_m, \trianglelefteq)$ , où  $\trianglelefteq$  désigne l'ordre de dominance sur l'ensemble des partitions de  $m$ . Pour  $\lambda \in \Lambda$ , soit  $\mathcal{T}(\lambda) := \text{Std}(\lambda)$  l'ensemble des tableaux standard de profil  $\lambda$  (cf. paragraphe 1.1.3). D'après [KL],  $A$  admet une  $R$ -base formée des éléments de Kazhdan-Lusztig  $C_\sigma$ ,  $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ . (La définition de cette base est similaire à la

définition de la base de Kazhdan-Lusztig que nous avons donnée au paragraphe 1.3.2.3 pour le groupe symétrique affine.) Rappelons qu'on a une bijection  $\mathfrak{S}_m \rightarrow \coprod_{\lambda \in \Pi_m} \text{Std}(\lambda) \times \text{Std}(\lambda)$ , appelée *correspondance de Robinson-Schensted* (voir [Kn]). Écrivons  $\sigma \sim (S, T)$  si  $(S, T)$  est l'image de  $\sigma$  *via* la correspondance de Robinson-Schensted, et posons alors  $C_{S, T}^\lambda := C_\sigma$ , où  $\lambda \in \Pi_m$  est le profil de  $S$  et  $T$ . Si  $\sigma \sim (S, T)$ , alors il est connu [KL] que  $T$  correspond à la cellule à gauche de  $\sigma$  et  $S$  correspond à la cellule à droite de  $\sigma$ . De plus, on a alors  $\sigma^{-1} \sim (T, S)$ ; par conséquent, l'anti-automorphisme  $*$ , défini par  $(T_\sigma)^* := T_{\sigma^{-1}}$  ( $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ ), vérifie  $(C_2)$ . La relation  $(C'_3)$  provient de l'isomorphisme des représentations cellulaires (au sens de [KL]) associées aux cellules à gauche contenues dans une cellule bilatère donnée.  $\diamond$

On dit que  $\Phi$  est un *idéal* de  $\Lambda$  si  $\Phi \subset \Lambda$  et pour tout  $\phi \in \Phi$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , on a  $\lambda \geq \phi \Rightarrow \lambda \in \Phi$ . Si  $\Phi$  est un idéal de  $\Lambda$ , soit  $A(\Phi)$  le sous- $R$ -module engendré par les  $C_{S, T}^\lambda$ ,  $\lambda \in \Phi$ ,  $S, T \in \mathcal{T}(\lambda)$ . Il découle des assertions  $(C_3)$  et  $(C'_3)$  que  $A(\Phi)$  est un idéal bilatère de  $A$ . En particulier, les parties  $A(> \lambda)$  et  $A(\geq \lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , sont des idéaux bilatères de  $A$ . On peut ainsi, à partir de la base cellulaire, construire de nombreuses filtrations de  $A$ .

### 6.1.2 Modules cellulaires

#### Définition 6.3

- Pour  $\lambda \in \Lambda$ , définissons le  $A$ -module à droite  $C(\lambda)$  comme suit.  $C(\lambda)$  est un  $R$ -module libre de base  $\{C_T^\lambda \mid T \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ , et l'action de  $A$  est définie par

$$C_T^\lambda \cdot a = \sum_{S' \in \mathcal{T}(\lambda)} r_a(S', T) C_{S'}^\lambda \quad (a \in A, T \in \mathcal{T}(\lambda)).$$

Ici,  $r_a(S', T) \in R$  est l'élément défini dans  $(C_3)$ .

- Pour  $\lambda \in \Lambda$ , définissons le  $A$ -module à gauche  $C(\lambda)^*$  comme suit.  $C(\lambda)^*$  est un  $R$ -module libre de base  $\{C_S^\lambda \mid S \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ , et l'action de  $A$  est définie par

$$a \cdot C_S^\lambda = \sum_{S' \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{a^*}(S', S) C_{S'}^\lambda \quad (a \in A, S \in \mathcal{T}(\lambda)).$$

Les modules  $C(\lambda)$  (*resp.*  $C(\lambda)^*$ ),  $\lambda \in \Lambda$  sont appelés *modules cellulaires* de  $A$ .  $\diamond$

Il résulte de  $(C_3)$  (*resp.*  $(C'_3)$ ) que ceci définit bien une action de  $A$  sur  $C(\lambda)$  (*resp.*  $C(\lambda)^*$ ). En effet, on peut réaliser  $C(\lambda)$  comme sous-module de  $A(\geq \lambda)/A(> \lambda)$  comme suit. (Grâce à  $(C'_3)$ , on peut construire  $C(\lambda)^*$  de façon analogue.) Fixons  $S \in \mathcal{T}(\lambda)$ , et notons provisoirement  $C_S(\lambda)$  le  $R$ -module libre de base  $\{C_{S, T}^\lambda \bmod A(> \lambda) \mid T \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ , et dont l'action (à droite) de  $A$  est définie à l'aide de  $(C_3)$  par passage au quotient. Il découle de  $(C_3)$  que pour tout  $S, S' \in \mathcal{T}(\lambda)$ ,  $C_S(\lambda)$  et  $C_{S'}(\lambda)$  sont deux  $A$ -modules isomorphes, *via* l'application  $R$ -linéaire qui envoie  $C_{S, T}^\lambda \bmod A(> \lambda)$  ( $T \in \mathcal{T}(\lambda)$ ) sur  $C_{S', T}^\lambda \bmod A(> \lambda)$ . Par conséquent, on peut identifier  $C(\lambda)$  avec l'un des  $C_S(\lambda)$  (où  $S \in \mathcal{T}(\lambda)$  est arbitraire), *via* l'application

$R$ -linéaire qui envoie  $C_T^\lambda$  ( $T \in \mathcal{T}(\lambda)$ ) sur  $C_{S,T}^\lambda \bmod A(> \lambda)$ .

En général, les deux actions que nous venons de définir ne commutent pas. On peut vérifier qu'on a l'isomorphisme  $C(\lambda^*) \cong \text{Hom}_R(C(\lambda), R)$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ . Par ailleurs, on a l'isomorphisme canonique de  $(A, A)$ -bi-modules

$$C(\lambda)^* \otimes_R C(\lambda) \cong A(\geq \lambda)/A(> \lambda), \quad C_S^\lambda \otimes C_T^\lambda \mapsto C_{S,T}^\lambda \bmod A(> \lambda) \quad (S, T \in \mathcal{T}(\lambda)).$$

**Remarque 6.4** Les algèbres cellulaires sont compatibles avec les spécialisations. Plus précisément, soient  $R'$  un anneau intègre,  $\phi : R \rightarrow R'$  un morphisme d'anneaux et  $A$  une  $R$ -algèbre cellulaire. Considérons la  $R'$ -algèbre  $A' := A \otimes_R R'$  (ici, la structure de  $R$ -module sur  $R'$  est donnée par  $\phi$ ). Alors la spécialisation à  $R'$  de la base cellulaire de  $A$  (*i.e.*, l'image de cette base par l'application  $x \in A \mapsto x \otimes 1 \in A'$ ) est une base cellulaire de  $A'$  (et la structure cellulaire de  $A'$  s'obtient de façon naturelle à partir de celle de  $A$ ). Il découle de ceci que les modules cellulaires commutent avec la spécialisation à  $R'$ . Plus précisément, si  $\{C(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$  est l'ensemble des modules cellulaires de  $A$  et  $\{C'(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$  est l'ensemble des modules cellulaires de  $A'$ , alors on a  $C'(\lambda) \cong C(\lambda) \otimes_R R'$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ .  $\diamond$

Soit  $\lambda \in \Lambda$ . Nous introduisons maintenant une forme bilinéaire  $\phi_\lambda$  sur  $C(\lambda)$ . Soient  $S, T \in \mathcal{T}(\lambda)$ . Alors d'après  $(C_3)$  et  $(C'_3)$ , il existe  $r_{S,T} \in R$  tel que pour tout  $U, V \in \mathcal{T}(\lambda)$ , on a

$$C_{U,S}^\lambda C_{T,V}^\lambda \equiv r_{S,T} C_{U,V}^\lambda \bmod A(> \lambda);$$

ainsi  $r_{S,T}$  ne dépend pas de  $U$  et  $V$ . Soit alors  $\phi_\lambda : C(\lambda) \times C(\lambda) \rightarrow R$  la forme bilinéaire définie par

$$\phi_\lambda(C_S^\lambda, C_T^\lambda) = r_{S,T} \quad (S, T \in \mathcal{T}(\lambda)).$$

Le résultat suivant montre que  $\phi_\lambda$  est symétrique et associative.

**Proposition 6.5** ([GL], Proposition 2.4) *Soient  $\lambda \in \Lambda$ ,  $a \in A$  et  $x, y \in C(\lambda)$ . Alors on a*

$$(i) \quad \phi_\lambda(x, y) = \phi_\lambda(y, x) \quad \text{et} \quad (ii) \quad \phi_\lambda(x \cdot a, y) = \phi_\lambda(x, y \cdot a^*).$$

□

Pour  $\lambda \in \Lambda$ , soit

$$\text{rad } \phi_\lambda := \{x \in C(\lambda) \mid \forall y \in C(\lambda), \phi_\lambda(x, y) = 0\}$$

le radical de la forme bilinéaire  $\phi_\lambda$ . Puisque  $\phi_\lambda$  est associative, c'est un  $A$ -sous-module de  $C(\lambda)$ ; on peut définir, pour  $\lambda \in \Lambda$ , le  $A$ -module

$$D(\lambda) := C(\lambda) / \text{rad } \phi_\lambda.$$

Posons

$$\Lambda^\bullet := \{\lambda \in \Lambda \mid \phi_\lambda \neq 0\} = \{\lambda \in \Lambda \mid D(\lambda) \neq 0\}.$$

Supposons que  $R$  est un corps commutatif. On peut alors montrer (cf. [GL, Proposition 3.2]) que si  $\lambda \in \Lambda^\bullet$ , alors  $\text{rad } \phi_\lambda$  est égal à  $\text{rad } C(\lambda)$ , le radical de Jacobson de  $C(\lambda)$  (en d'autres

termes, c'est le plus petit sous-module  $M \subset C(\lambda)$  tel que  $C(\lambda)/M$  est semi-simple).

Il est par ailleurs bien connu que si  $R$  est un corps commutatif, alors pour tout  $\mu \in \Lambda^\bullet$ , il existe un unique (à isomorphisme près)  $A$ -module projectif indécomposable  $P(\mu)$  tel que  $P(\mu)/\text{rad } P(\mu) \cong D(\mu)$ ; on dit que  $P(\mu)$  est la *couverture projective* de  $D(\mu)$ .

### 6.1.3 Théorie des représentations des algèbres cellulaires définies sur un corps

Reprenons les notations des deux paragraphes précédents. Dans tout ce paragraphe, on suppose que  $R$  est un corps commutatif. Les modules que nous considérerons seront de dimension finie sur  $R$ .

Rappelons que si  $K$  est un corps commutatif et  $M$  est un module sur lequel agit une  $K$ -algèbre  $A'$  de dimension finie, on dit que  $M$  est *absolument irréductible* si  $M \otimes_K L$  est irréductible pour toute extension  $L$  de  $K$ . Il est bien connu que  $M$  est absolument irréductible si et seulement si  $M$  est irréductible et  $\text{End}_{A'}(M) = K$ .

**Théorème 6.6** ([GL], Proposition 3.2 & Theorem 3.4) *Soient  $R$  un corps commutatif et  $A$  une  $R$ -algèbre cellulaire. Alors avec les notations précédentes, les modules  $D(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda^\bullet$  sont absolument irréductibles, et ils forment un système complet de représentants des classes d'isomorphisme des  $A$ -modules simples.*  $\square$

**Remarque 6.7** Ce théorème donne donc une classification des modules simples d'une algèbre cellulaire. Hélas, il est en général difficile d'explicitier  $\Lambda^\bullet$ .  $\diamond$

Il résulte du théorème précédent que le  $A$ -module  $C(\lambda)$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) a une série de composition dont les quotients sont isomorphes à certains  $D(\mu)$  ( $\mu \in \Lambda^\bullet$ ). D'après le théorème de Jordan-Hölder, la définition suivante a donc un sens.

**Définition 6.8** Rappelons que  $A$  est une  $R$ -algèbre cellulaire définie sur le corps commutatif  $R$ . Pour  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\mu \in \Lambda^\bullet$ , soit

$$[C(\lambda) : D(\mu)]$$

la multiplicité de  $D(\mu)$  comme facteur de composition de  $C(\lambda)$ . La matrice

$$D := \left( [C(\lambda) : D(\mu)] \right)_{\lambda \in \Lambda, \mu \in \Lambda^\bullet}$$

est appelée *matrice de décomposition* de  $A$ , et les entiers  $[C(\lambda) : D(\mu)]$  ( $\lambda \in \Lambda$ ,  $\mu \in \Lambda^\bullet$ ) sont appelés *nombres de décomposition* de  $A$ .  $\diamond$

**Proposition 6.9** ([GL], Proposition 3.5) *Supposons que  $R$  est un corps commutatif. Alors avec les notations de ce paragraphe, la matrice  $D$  est unitriangulaire. En d'autres termes, on a pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\mu \in \Lambda^\bullet$ ,  $[C(\lambda) : D(\mu)] \neq 0 \Rightarrow \lambda \geq \mu$  et  $[C(\mu) : D(\mu)] = 1$ .*  $\square$

La proposition suivante donne une formule pour calculer les nombres de décomposition de  $A$  à l'aide des modules projectifs indécomposables.

**Proposition 6.10** ([GL], Theorem 3.7 (ii)) *Supposons que  $R$  est un corps commutatif, et reprenons les notations ci-dessus. Soient  $\lambda \in \Lambda$  et  $\mu \in \Lambda^\bullet$ . Alors on a*

$$[C(\lambda) : D(\mu)] = \dim_R \operatorname{Hom}_A(P(\mu), C(\lambda)) = \dim_R P(\mu) \otimes_A C(\lambda)^*.$$

□

La matrice  $C := \left( [P(\lambda) : D(\mu)] \right)_{\lambda, \mu \in \Lambda^\bullet}$  est appelée *matrice de Cartan* de l'algèbre  $A$ . Graham et Lehrer ont prouvé le résultat suivant.

**Théorème 6.11** ([GL], Theorem 3.7 (iii)) *Supposons que  $R$  est un corps commutatif. Alors avec les notations de ce paragraphe, on a  $C = {}^tD \cdot D$ , où  ${}^tD$  désigne la transposée de la matrice  $D$ . En particulier, la matrice  $C$  est symétrique.* □

La théorie des algèbres cellulaires donne un critère utile de semi-simplicité. Rappelons que si  $K$  est un corps, une  $K$ -algèbre est dite *déployée* si tout module irréductible sur cette algèbre est absolument irréductible.

**Théorème 6.12** ([GL], Theorem 3.8) *Soient  $R$  un corps commutatif et  $A$  une  $R$ -algèbre cellulaire. Alors avec les notations de ce paragraphe, les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $A$  est semi-simple.
- (ii)  $A$  est semi-simple déployée.
- (iii) Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , on a  $C(\lambda) = D(\lambda)$ .
- (iv) Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , on a  $\operatorname{rad} \phi_\lambda = \{0\}$ , i.e.  $\phi_\lambda$  est non-dégénérée.
- (v) On a  $\Lambda^\bullet = \Lambda$  et la matrice  $D$  est l'identité. □

**Remarque 6.13** Il résulte des théorèmes 6.12 et 6.6 que si  $A$  est semi-simple, alors on a l'égalité  $\Lambda^\bullet = \Lambda$ , et  $\{C(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$  est un système complet de représentants des classes d'isomorphisme des  $A$ -modules simples. ◇

**Remarque 6.14** Supposons que  $\Lambda^\bullet = \Lambda$ , ou de façon équivalente (d'après la proposition 6.9) que  $D$  est une matrice unitriangulaire carrée. On peut alors montrer que  $A$  est une algèbre quasi-héréditaire au sens de Cline-Parshall-Scott [CPS]. ◇

## 6.2 Algèbres d'Ariki-Koike

Nous supposons à nouveau que  $R$  est un anneau intègre. Dans toute cette section, on considère un entier  $m \in \mathbb{N}$  et des éléments  $v, u_1, \dots, u_l \in R^\times$ .

### 6.2.1 Définition

**Définition 6.15** L'algèbre d'Ariki-Koike  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_R = \mathcal{H}_R(v; u_1, \dots, u_l) = \mathcal{H}_{R,m}(v; u_1, \dots, u_l)$  est la  $R$ -algèbre associative unitaire engendrée par les  $T_i$ ,  $0 \leq i \leq m-1$ , et soumise aux relations

$$\left\{ \begin{array}{ll} (T_0 - u_1) \cdots (T_0 - u_l) = 0, \\ T_0 T_1 T_0 T_1 = T_1 T_0 T_1 T_0, \\ (T_i + 1)(T_i - v) = 0 & (1 \leq i \leq m-1), \\ T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} & (1 \leq i \leq m-2), \\ T_i T_j = T_j T_i & (0 \leq i < j-1 \leq m-2). \end{array} \right.$$

◇

**Remarque 6.16** Notons que la sous-algèbre de  $\mathcal{H}$  engendrée par les  $T_i$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ , est isomorphe à l'algèbre de Hecke  $H(\mathfrak{S}_m)$  (définie sur l'anneau  $R$  et de paramètre  $q = v$ ). Dans le cas où  $l = 1$ ,  $T_0$  est un scalaire et donc  $\mathcal{H} \cong H(\mathfrak{S}_m)$  est une algèbre de Hecke de type  $A_{m-1}$ . Si  $l = 2$ , alors  $\mathcal{H}$  est une algèbre de Hecke de type  $B_m$ . ◇

**Remarque 6.17** Si  $R$  contient une racine primitive  $l$ -ième de l'unité  $\zeta$ , alors l'algèbre d'Ariki-Koike  $\mathcal{H}_{R,m}(1; \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^l)$  est isomorphe à l'algèbre de groupe  $RW_{l,m}$ . Ici le groupe

$$W_{l,m} := (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_m$$

est le produit en couronne d'un groupe cyclique d'ordre  $l$  et d'un groupe symétrique de degré  $m$ ; il s'agit du groupe de réflexions complexes de type  $G(l, 1, m)$  dans la classification de Shephard-Todd [ST]. ◇

Pour  $1 \leq k \leq m$ , posons

$$L_k := v^{1-k} T_{k-1} \cdots T_1 T_0 T_1 \cdots T_{k-1} \in \mathcal{H}.$$

À l'aide des relations de  $\mathcal{H}$ , on vérifie que  $L_1, \dots, L_m$  engendre une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{H}$  et que les polynômes symétriques en  $L_1, \dots, L_m$  sont dans le centre de  $\mathcal{H}$ .

**Remarque 6.18** On peut montrer que le centre de  $\mathcal{H}$  est égal à l'ensemble des polynômes symétriques en les  $L_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  si  $R$  est un corps commutatif et  $\mathcal{H}_R$  est semi-simple (voir [AK] et [Mat3, Theorem 3.4]), ou bien si  $l = 1$  (d'après un article non publié de Graham [G]). Dans le cas où  $l > 1$ , Ariki [A2] a donné un exemple d'élément central de  $\mathcal{H}$  qui n'est pas un polynôme symétrique en les  $L_i$ . ◇

**Remarque 6.19** Rappelons que nous avons donné au paragraphe 1.3.2 (dans le cas où  $v = q^2$  et  $R = \mathbb{Q}(q)$ ) une présentation de type Bernstein de l'algèbre de Hecke affine

$$\widehat{H}_m = \langle T_1, \dots, T_{m-1}, Y_1, \dots, Y_m \rangle.$$

Avec un léger abus de notations, les présentations que nous avons données pour  $\widehat{H}_m$  et  $\mathcal{H}$  montrent qu'il existe un homomorphisme surjectif d'algèbres  $\widehat{H}_m \twoheadrightarrow \mathcal{H}_{R,m}(v; u_1, \dots, u_l)$  qui



envoi  $T_i$  sur  $vT_i$  ( $1 \leq i \leq m-1$ ) et  $Y_j$  sur  $L_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ). (Ici, la présence du facteur  $v$  tient compte du fait nous n'avons pas pris les mêmes relations quadratiques pour les  $T_i$  dans la définition des deux algèbres). En fait, on a

$$\mathcal{H}_{R,m}(v; u_1, \dots, u_l) \cong \widehat{H}_m / \langle (Y_1 - u_1) \cdots (Y_1 - u_l) \rangle.$$

Il découle de ceci que si  $R$  est un corps algébriquement clos, alors les  $\widehat{H}_m$ -modules irréductibles de dimension finie sont précisément les  $\mathcal{H}_{R,m}(v; u_1, \dots, u_l)$ -modules irréductibles de dimension finie, où  $(u_1, \dots, u_l)$  décrit  $(R^\times)^l$  et  $l \geq 1$ . Dans ce cas, les paramètres  $u_i$  sont les valeurs propres de l'opérateur  $Y_1$  (répétées suivant leurs multiplicités); voir [Mat3, fin de 2.4].  $\diamond$

Rappelons que pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ , on a défini au paragraphe 1.3.2 un élément  $T_\sigma \in H(\mathfrak{S}_m) \subset \mathcal{H}$ .

**Théorème 6.20 ([AK])** *L'algèbre  $\mathcal{H}$  est un  $R$ -module libre, de base*

$$\{L_1^{a_1} \cdots L_m^{a_m} T_\sigma \mid 0 \leq a_1, \dots, a_m \leq l-1, \sigma \in \mathfrak{S}_m\}.$$

*En particulier, le rang de  $\mathcal{H}$  est égal à  $l^m m! = \#W_{l,m}$ .*  $\square$

Nous allons maintenant donner un critère de semi-simplicité pour les algèbres de Ariki-Koike définies sur un corps commutatif.

**Théorème 6.21 ([A1])** *Supposons que  $R$  est un corps commutatif. Considérons l'élément de  $R$  suivant :*

$$P_{\mathcal{H}} = P_{\mathcal{H}_{R,m}(v; u_1, \dots, u_l)} := \prod_{i=1}^m (1 + v + \cdots + v^{i-1}). \prod_{1 \leq i < j \leq l} \prod_{-m < d < m} (v^d u_i - u_j) \in R.$$

*Alors  $\mathcal{H}$  est semi-simple si et seulement si  $P_{\mathcal{H}}$  est non nul.*  $\square$

**Exemple 6.22** Supposons que  $R$  est un corps commutatif. Soit  $\widehat{R} := R(\widehat{v}, \widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_l)$ , où les  $\widehat{u}_i$ ,  $1 \leq i \leq l$  et  $\widehat{v}$  sont algébriquement indépendants sur  $R$ . Les paramètres  $\widehat{v}, \widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_l$  sont dits *génériques*. Alors d'après le théorème précédent, l'algèbre d'Ariki-Koike générique  $\widehat{\mathcal{H}} := \mathcal{H}_{\widehat{R},m}(\widehat{v}; \widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_l)$  est semi-simple.  $\diamond$

## 6.2.2 Représentations des algèbres d'Ariki-Koike

Nous allons maintenant étudier à la théorie des représentations des algèbres de Ariki-Koike qui sont définies sur un corps commutatif, mais qui ne sont pas nécessairement semi-simples. Pour cela, nous allons munir l'algèbre d'Ariki-Koike  $\mathcal{H}$  d'une structure cellulaire, puis appliquer les résultats de la section précédente. Pour l'instant, nous ne supposons pas que  $R$  est un corps.

### 6.2.2.1 La base standard de $\mathcal{H}$

#### Définition 6.23

- Soit  $(\Lambda_{\mathcal{H}}, \geq) := (\Pi_m^l, \supseteq)$ , où  $\supseteq$  désigne l'ordre (inverse) de dominance sur l'ensemble des  $l$ -multi-partitions de  $m$ .
- Pour  $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{H}}$ , soit  $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(\lambda) := \text{Std}(\lambda)$  l'ensemble des tableaux standard de profil  $\lambda$  (cf. paragraphe 1.1.3).
- Soit  $* = *_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  l'anti-automorphisme d'algèbre involutif qui envoie le générateur  $T_i$  ( $0 \leq i \leq m-1$ ) sur  $T_i$ . On a alors  $(T_{\sigma})^* = T_{\sigma^{-1}}$  pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_m$  et  $L_k^* = L_k$  pour tout  $1 \leq k \leq m$ .
- Fixons  $\lambda = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(l)}) \in \Lambda_{\mathcal{H}}$ . Pour  $2 \leq d \leq l$ , soit  $n_d := |\lambda^{(1)}| + \dots + |\lambda^{(d-1)}|$ . Si  $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(\lambda)$  est un tableau standard de profil  $\lambda$  ( $\lambda \in \Pi_m^l$ ), soit  $\sigma(T) \in \mathfrak{S}_m$  l'unique permutation telle que

$$T = T^{\lambda} \cdot \sigma(T),$$

où  $T^{\lambda}$  et l'action à droite de  $\mathfrak{S}_m$  sur  $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(\lambda)$  ont été définis au paragraphe 1.1.3. Rappelons que  $\mathfrak{S}_{\lambda} \subset \mathfrak{S}_m$  est le stabilisateur des lignes de  $T^{\lambda}$ . Définissons trois éléments  $x_{\lambda}$ ,  $u_{\lambda}$  et  $m_{\lambda} \in \mathcal{H}$  par

$$x_{\lambda} := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\lambda}} T_{\sigma}, \quad u_{\lambda} := \prod_{d=2}^l \prod_{k=1}^{n_d} (L_k - u_d) \quad \text{et} \quad m_{\lambda} := x_{\lambda} u_{\lambda}.$$

Pour  $S, T \in \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(\lambda)$ , posons

$$m_{S,T}^{\lambda} := T_{\sigma(S)}^* m_{\lambda} T_{\sigma(T)}.$$

Soit enfin  $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$  l'application définie par  $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}(S, T) := m_{S,T}^{\lambda}$  ( $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{H}}$ ,  $S, T \in \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(\lambda)$ ). ◇

**Remarque 6.24** Soit  $\lambda \in \Pi_m^l$ . Il découle des relations de  $\mathcal{H}$  que les éléments  $x_{\lambda}$  et  $u_{\lambda}$  ainsi définis commutent. ◇

Graham et Lehrer [GL] sont les premiers à avoir construit une base cellulaire de  $\mathcal{H}$ . Nous donnons ici une autre base cellulaire; cette base a été construite par Murphy pour  $l = 1$  et par Dipper-James-Mathas [DJM] (voir aussi [AM, Mat3]) dans le cas général.

**Théorème 6.25 ([DJM], Theorem 3.26)** *Reprenons les notations de la définition 6.23. Alors  $(\Lambda_{\mathcal{H}}, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}, \mathcal{C}_{\mathcal{H}}, *_{\mathcal{H}})$  est une structure cellulaire pour l'algèbre d'Ariki-Koike  $\mathcal{H}$ , et la base*

$$\left\{ m_{S,T}^{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda_{\mathcal{H}}, S, T \in \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(\lambda) \right\}$$

*est une base cellulaire de  $\mathcal{H}$ , appelée base standard ou base de Murphy.* □

**Remarque 6.26** En calculant le rang du  $R$ -module libre  $\mathcal{H}$  à l'aide du théorème 6.20 d'une part et du théorème 6.25 d'autre part, on obtient l'égalité

$$l^m m! = \sum_{\lambda \in \Pi_m^l} |\text{Std}(\lambda)|^2.$$

Cette égalité se démontre à l'aide de la correspondance de Robinson-Schensted; il s'agit en fait de l'un des ingrédients de la preuve du théorème 6.25.  $\diamond$

**Exemple 6.27** Prenons  $m = l = 2$ . On a

$$\Lambda_{\mathcal{H}} = \{((2), \emptyset), ((1,1), \emptyset), ((1), (1)), (\emptyset, (2)), (\emptyset, (1,1))\}.$$

Les tableaux standard de profil  $\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{H}}$ ) sont

$$\begin{aligned} S &:= \left( \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \emptyset \right), & T &:= \left( \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \emptyset \right), & U &:= \left( \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \right), \\ V &:= \left( \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \right), & W &:= \left( \emptyset, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} \right) & \text{et } X &:= \left( \emptyset, \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \right). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathcal{H}}((2), \emptyset) &= \{S\}, & \mathcal{T}_{\mathcal{H}}((1,1), \emptyset) &= \{T\}, & \mathcal{T}_{\mathcal{H}}((1), (1)) &= \{U, V\} \\ \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(\emptyset, (2)) &= \{W\} & \text{et} & & \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(\emptyset, (1,1)) &= \{X\}. \end{aligned}$$

Notons qu'on a bien l'égalité  $l^m m! = \sum_{\lambda \in \Pi_m^l} |\text{Std}(\lambda)|^2$  dans ce cas. Les éléments de la base de Murphy de  $\mathcal{H}$  sont

$$\begin{aligned} m_{S,S}^{((2), \emptyset)} &= (1 + T_1)(L_1 - u_2)(L_2 - u_2), & m_{T,T}^{((1,1), \emptyset)} &= (L_1 - u_2)(L_2 - u_2), \\ m_{U,U}^{((1), (1))} &= (L_1 - u_2), & m_{U,V}^{((1), (1))} &= (L_1 - u_2)T_1, \\ m_{V,U}^{((1), (1))} &= T_1(L_1 - u_2), & m_{V,V}^{((1), (1))} &= T_1(L_1 - u_2)T_1, \\ m_{W,W}^{(\emptyset, (2))} &= (1 + T_1) & \text{et } m_{X,X}^{(\emptyset, (1,1))} &= 1. \end{aligned}$$

$\diamond$

### 6.2.2.2 Représentations de $\mathcal{H}$

Dans tout ce paragraphe, nous supposons que  $R$  est un corps commutatif. Rappelons que si  $A$  est une  $R$ -algèbre munie d'une structure cellulaire  $(\Lambda, \mathcal{T}, \mathcal{C}, *)$ , nous avons défini à la section 6.1 un module cellulaire à droite  $C(\lambda)$  ainsi qu'un module simple ou nul  $D(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ . Nous avons également défini une matrice de décomposition pour  $A$ .

**Définition 6.28** Soit  $(\Lambda_{\mathcal{H}}, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}, \mathcal{C}_{\mathcal{H}}, *_{\mathcal{H}})$  la structure cellulaire pour  $\mathcal{H}$  considérée au théorème 6.25. Le module cellulaire à droite associé à  $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{H}}$  est appelé *module de Specht*; on le note

$S(\lambda)$ .  $S(\lambda)$  est un  $R$ -module libre, dont la base naturelle sera notée  $\{m_T^\lambda \mid T \in \text{Std}(\lambda)\}$  (le vecteur  $m_T^\lambda$  correspond à l'élément noté  $C_T^\lambda$  dans la définition 6.3). Soit  $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{H}}$ . D'après la section 6.1,  $S(\lambda)$  est muni d'une forme bilinéaire associative  $\phi_\lambda$ , donc le radical de  $\phi_\lambda$ , que l'on note  $\text{rad } \phi_\lambda$ , est un sous-module de  $S(\lambda)$ . Posons

$$D(\lambda) := S(\lambda) / \text{rad } \phi_\lambda.$$

Soit enfin

$$\Lambda_{\mathcal{H}}^\bullet := \{\lambda \in \Lambda_{\mathcal{H}} \mid D(\lambda) \neq \{0\}\}.$$

◇

**Remarque 6.29** Notre convention pour les modules de Specht, qui est celle de [Mat3], diffère de celle de la plupart des articles de la littérature. Pour la plupart des auteurs, le module de Specht indexé par  $\lambda \in \Pi_m^l$ , que nous noterons  $\overline{S}(\lambda)$ , est celui introduit par Dipper-James [DJ1] lorsque  $l = 1$  (cas des algèbres de Hecke). On passe d'un type de modules à l'autre de la façon suivante. Si  $M$  est un  $\mathcal{H}$ -module à droite, soit  $M^\diamond$  le  $\mathcal{H}$ -module à droite égal à  $\text{Hom}_R(M, R)$  en tant que  $R$ -module, et dont l'action à droite est donnée par  $(\varphi.h)(m) = \varphi(m.h^*)$  ( $m \in M$ ,  $h \in \mathcal{H}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}_R(M, R)$ ). On a alors, pour  $\lambda \in \Pi_m^l$ , la relation  $S(\lambda) \cong \overline{S}(\lambda')^\diamond$ , où  $\lambda'$  désigne le conjugué de la multi-partition  $\lambda$  (cf. paragraphe 1.1.1). Notre convention a l'avantage de donner une expression plus simple pour le foncteur de Schur pour les  $v$ -algèbres de Schur cyclotomiques (cf. théorème 7.26). ◇

Donnons deux exemples (triviaux) de modules de Specht. Pour cela, introduisons les deux représentations suivantes de  $\mathcal{H}$ . Celles-ci sont définies pourvu que  $R$  soit un anneau commutatif unitaire.

**Définition 6.30** Soit  $\mathcal{H}_1$  le  $R$ -module égal à  $R$ , sur lequel  $\mathcal{H}$  agit à droite *via*  $1.T_i = v$  pour  $1 \leq i \leq m$  et  $1.T_0 = u_1$ . On vérifie que ceci permet de définir correctement une représentation de  $\mathcal{H}$ , appelée *représentation triviale*. Soit de même  $\mathcal{H}_\varepsilon$  le  $R$ -module égal à  $R$ , sur lequel  $\mathcal{H}$  agit à droite *via*  $1.T_i = -1$  pour  $1 \leq i \leq m$  et  $1.T_0 = u_l$ . On vérifie que ceci permet de définir correctement une représentation de  $\mathcal{H}$ , appelée *représentation signe*. ◇

**Exemple 6.31** Soient  $\eta := ((m), \emptyset, \dots, \emptyset) \in \Pi_m^l$  et  $\omega := (\emptyset, \dots, \emptyset, (1^m)) = \eta'$ . On peut alors montrer que  $S(\eta) = D(\eta) \cong \mathcal{H}_1$  et  $S(\omega) = D(\omega) \cong \mathcal{H}_\varepsilon$ . ◇

Nous allons maintenant appliquer la théorie des algèbres cellulaires lorsque  $\mathcal{H}$  est définie sur un corps commutatif.

**Théorème 6.32** *Supposons que  $R$  est un corps commutatif. Alors avec les notations précédentes, les  $\mathcal{H}$ -modules  $D(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{H}}^\bullet$  sont absolument irréductibles, et ils forment un système complet de représentants des classes d'isomorphisme des  $\mathcal{H}$ -modules simples.*

*Démonstration.* Cela découle des théorèmes 6.25 et 6.6. □

**Remarque 6.33** Dans le cas où  $R$  est un corps commutatif, on peut, à l'aide d'un théorème d'Ariki, montrer que  $\Lambda_{\mathcal{H}}^\bullet$  est l'ensemble des multi-partitions de Kleshchev (cf. paragraphe 6.2.3). ◇

**Définition 6.34** Si  $R$  est un corps commutatif, la matrice

$$\left( [S(\lambda) : D(\mu)] \right)_{\lambda \in \Lambda_{\mathcal{H}}, \mu \in \Lambda_{\mathcal{H}}^{\bullet}}$$

(bien définie, d'après le théorème 6.32 et le théorème de Jordan-Hölder) est appelée *matrice de décomposition* de l'algèbre d'Ariki-Koike  $\mathcal{H}$ .  $\diamond$

**Exemple 6.35** Nous allons ici calculer « à la main » la matrice de décomposition de l'algèbre  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{R,m}(v; u_1, \dots, u_l)$  pour  $R = \mathbb{C}$ ,  $m = l = 2$ ,  $v = \zeta$ ,  $(u_1, u_2) = (\zeta^{s_1}, \zeta^{s_2})$ , où  $\zeta \in \mathbb{C}$  est une racine primitive  $n$ -ième de l'unité avec  $n = 2$  (autrement dit,  $\zeta = -1$ ) et  $(s_1, s_2) = (1, 0)$ . Soient  $S, T, U, V, W$  et  $X$  les tableaux standard introduits à l'exemple 6.27. Nous avons vu à l'exemple 6.27 que la base de Murphy de  $\mathcal{H}$  est formée des éléments

$$\begin{aligned} m_{S,S} &= m_{S,S}^{(2,\emptyset)} = (1 + T_1)(L_1 - u_2)(L_2 - u_2), & m_{T,T} &= m_{T,T}^{(1,1,\emptyset)} = (L_1 - u_2)(L_2 - u_2), \\ m_{U,U} &= m_{U,U}^{(1),(1)} = (L_1 - u_2), & m_{U,V} &= m_{U,V}^{(1),(1)} = (L_1 - u_2)T_1, \\ m_{V,U} &= m_{V,U}^{(1),(1)} = T_1(L_1 - u_2), & m_{V,V} &= m_{V,V}^{(1),(1)} = T_1(L_1 - u_2)T_1, \\ m_{W,W} &= m_{W,W}^{(\emptyset,(2))} = (1 + T_1) & \text{et} & \quad m_{X,X} = m_{X,X}^{(\emptyset,(1,1))} = 1. \end{aligned}$$

Avant de calculer la matrice de décomposition de  $\mathcal{H}$ , étudions ses représentations de dimension 1. Si  $V$  est un  $\mathcal{H}$ -module de dimension 1, nous identifions tout élément de  $\mathcal{H}$  avec l'élément de  $\text{End}(V) \cong \mathbb{C}$  auquel il correspond. Soit  $V$  un  $\mathcal{H}$ -module de dimension 1. À cause des relations  $0 = (T_1 + 1)(T_1 - v) = (T_1 + 1)^2$  et  $0 = (T_0 - u_1)(T_0 - u_2) = T_0^2 - 1$  dans  $\mathcal{H}$ , on doit avoir  $T_1 = -1$  et  $T_0 = \pm 1$  dans  $\text{End}(V)$ . Par conséquent,  $V$  est la représentation triviale ou la représentation signe. De plus, si  $V$  est la représentation triviale, on a  $L_1 = T_0 = -1$ , d'où  $m_{U,U} = -2$ ; de même, si  $V$  est la représentation signe, on a  $m_{U,U} = 0$ . Nous avons donc prouvé l'assertion suivante, que nous noterons (\*).

*Soit  $V$  un  $\mathcal{H}$ -module de dimension 1. Alors on a  $V \cong \mathcal{H}_1$  ou  $V \cong \mathcal{H}_\varepsilon$ . De plus, on a  $V \cong \mathcal{H}_\varepsilon$  si et seulement  $m_{U,U}$  agit comme 0 dans  $V$ .*

Calculons à présent  $\Lambda_{\mathcal{H}}^{\bullet}$ . On déduit de la présentation de  $\mathcal{H}$  les relations suivantes :

$$\begin{aligned} T_0^2 &= 1, \quad (T_1 + 1)^2 = 0, \quad T_1 L_1 = 2L_2 + L_2 T_1, \quad L_1^2 = 1, \quad L_2^2 = 1 + 2T_1 + 2L_1 L_2 T_1 \\ (L_1 - 1)(L_2 - 1)(1 + T_1) &= (1 + T_1)(L_1 - 1)(L_2 - 1). \end{aligned}$$

Il vient alors

(\*\*)

$$\begin{aligned}
m_{S,S} m_{S,S} &= 0, & m_{T,T} m_{T,T} &= -4 m_{S,S}, & m_{U,U} m_{U,U} &= -2 m_{U,U}, \\
m_{U,U} m_{V,U} &= 2 m_{U,U} + (m_{S,S} + m_{T,T}), & m_{U,V} m_{V,U} &= -2 m_{U,U} + (-2 m_{S,S} - 2 m_{T,T}), \\
m_{W,W} m_{W,W} &= 0, & m_{X,X} m_{X,X} &= 1, \\
m_{S,S} m_{U,U} &= -2 m_{S,S}, & m_{T,T} m_{U,U} &= -2 m_{T,T}, & m_{X,X} m_{U,U} &= m_{U,U}.
\end{aligned}$$

On en déduit l'expression des  $\phi_{\lambda}(m_{t_1}^{\lambda}, m_{t_2}^{\lambda})$  pour tout  $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{H}}$ ,  $t_1, t_2 \in \text{Std}(\lambda)$ . Par conséquent, on a

$$\Lambda_{\mathcal{H}}^{\bullet} = \{((1),(1)), (\emptyset, (1,1))\}.$$

De plus, si on pose  $m_t := m_t^{((1),(1))}$  pour  $t \in \{U, V\}$ , alors la matrice de  $\phi := \phi_{((1),(1))}$  dans la base  $\{m_U, m_V\}$  est

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le radical de  $\phi$  est la droite engendrée par  $m_U + m_V$ . Ainsi, les modules  $\text{rad } \phi$  et  $D((1),(1)) = S((1),(1)) / \text{rad } \phi$  sont de dimension 1. Par définition de  $\text{rad } \phi$ , on a  $x.m_{U,U} = 0$  pour tout  $x \in \text{rad } \phi$ , donc d'après (\*),  $\text{rad } \phi$  est la représentation signe de  $\mathcal{H}$ . Pour  $x \in S((1),(1))$ , posons  $\bar{x} := x + \text{rad } \phi \in D((1),(1))$ . Compte tenu de l'égalité  $m_{U,U} m_{U,U} = -2 m_{U,U}$ , on a  $m_U.m_{U,U} = -2 m_U$ , d'où  $\bar{m}_U.m_{U,U} = -2 \bar{m}_U$ . L'assertion (\*) montre alors que

$$D((1),(1)) \cong \mathcal{H}_1.$$

Par ailleurs, d'après l'égalité  $m_{X,X} m_{X,X} = 1$ , on a  $D(\emptyset, (1,1)) = S(\emptyset, (1,1))$ , et ces modules sont de dimension 1; par conséquent, on a d'après (\*),

$$D(\emptyset, (1,1)) = S(\emptyset, (1,1)) \cong \mathcal{H}_{\varepsilon}.$$

La suite de composition  $\{0\} \subset \text{rad } \phi \cong \mathcal{H}_{\varepsilon} \subset S((1),(1))$  nous donne les multiplicités

$$[S((1),(1)) : D((1),(1))] = [S((1),(1)) : D(\emptyset, (1,1))] = 1.$$

Il reste à remarquer que les modules  $S(\lambda)$ ,  $\lambda \in \{((2), \emptyset), ((1,1), \emptyset), (\emptyset, (2))\}$  sont de dimension 1. Par conséquent, à l'aide de (\*) et des trois dernières relations de (\*\*), on peut compléter le calcul de la matrice de décomposition de  $\mathcal{H}$ , que l'on note  $D$ . On trouve la matrice suivante.

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} ((1),(1)) & (\emptyset, (1,1)) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} ((2), \emptyset) \\ ((1,1), \emptyset) \\ ((1),(1)) \\ (\emptyset, (2)) \\ (\emptyset, (1,1)) \end{matrix} \end{matrix}.$$

◇

**Proposition 6.36** *Supposons que  $R$  est un corps commutatif. Alors la matrice de décomposition de  $\mathcal{H}$  est unitriangulaire, i.e. pour tout  $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{H}}$ ,  $\mu \in \Lambda_{\mathcal{H}}^{\bullet}$ , on a  $[S(\lambda) : D(\mu)] \neq 0 \Rightarrow \lambda \succeq \mu$  et  $[S(\mu) : D(\mu)] = 1$ .*

*Démonstration.* Cela découle du théorème 6.25 et de la proposition 6.9. □

**Théorème 6.37** *Supposons que  $R$  est un corps commutatif. Alors avec les notations de ce paragraphe, les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *Le polynôme de Laurent  $P_{\mathcal{H}} \in R[u_1, \dots, u_l][v, v^{-1}]$  défini au théorème 6.21 est non nul.*
- (ii)  *$\mathcal{H}$  est semi-simple (déployée).*
- (iii) *Pour tout  $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{H}}$ , on a  $S(\lambda) = D(\lambda)$ .*
- (iv) *Pour tout  $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{H}}$ , on a  $\text{rad } \phi_{\lambda} = \{0\}$ , i.e.  $\phi_{\lambda}$  est non-dégénérée.*
- (v) *On a  $\Lambda_{\mathcal{H}}^{\bullet} = \Lambda_{\mathcal{H}}$ , et la matrice de décomposition de  $\mathcal{H}$  est l'identité.*

*Démonstration.* Cela résulte des théorèmes 6.21, 6.25 et 6.12. □

Revenons au cas où  $R$  est un anneau intègre. Nous allons maintenant énoncer un théorème de réduction qui permet de se ramener, grâce à une équivalence de Morita, à l'étude des algèbres d'Ariki-Koike  $\mathcal{H}_{R,m}(v; u_1, \dots, u_l)$  où les paramètres  $u_i$  ( $1 \leq i \leq l$ ) sont des puissances entières de  $v$ . Le théorème 6.38 permet en fait de se ramener au cas où il existe une constante  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  et des entiers  $s_1, \dots, s_l \in \mathbb{Z}$  tels que  $u_i = cv^{s_i}$  ( $1 \leq i \leq l$ ). On se ramène alors au cas où  $c = 1$  en remplaçant le générateur  $T_0$  par  $c^{-1}T_0$ .

**Théorème 6.38 ([DM])** *Supposons que  $R$  est un anneau intègre. Fixons une partition*

$$\{u_1, \dots, u_l\} = \prod_{i=1}^r \{u_1^{(i)}, \dots, u_{l_i}^{(i)}\}$$

*de l'ensemble  $\{u_1, \dots, u_l\}$ . Supposons que l'élément*

$$\prod_{1 \leq i < i' \leq r} \prod_{\substack{1 \leq j \leq l_i \\ 1 \leq j' \leq l_{i'}}} \prod_{-m < d < m} (v^d u_j^{(i)} - u_{j'}^{(i')}) \in R$$

*est inversible. (Remarquons que cet élément est un facteur de  $P_{\mathcal{H}}$ .) Alors l'algèbre d'Ariki-Koike  $\mathcal{H}_{R,m}(v; u_1, \dots, u_l)$  est Morita-équivalente à l'algèbre*

$$\bigoplus_{\substack{m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N} \\ m_1 + \dots + m_r = m}} \bigotimes_{i=1}^r \mathcal{H}_{R, m_i}(v; u_1^{(i)}, \dots, u_{l_i}^{(i)}).$$

□

### 6.2.3 Un théorème d'Ariki

#### 6.2.3.1 Énoncé du théorème

Nous énonçons ici un profond théorème dû à Ariki, qui permet de calculer les matrices de décomposition des algèbres d'Ariki-Koike en spécialisant à  $q = 1$  les matrices de transition des bases canoniques de certains  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules intégrables simples de plus haut poids. Dans tout ce paragraphe, nous choisirons les paramètres suivants. Fixons une multi-charge  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}^l$ . Supposons que  $R$  un corps commutatif de caractéristique 0, contenant une racine primitive  $n$ -ième de l'unité  $\zeta$ , et posons

$$v := \zeta \quad \text{et} \quad (u_1, u_2, \dots, u_l) := (\zeta^{s_1}, \zeta^{s_2}, \dots, \zeta^{s_l}).$$

Pour énoncer le théorème d'Ariki, nous devons introduire plusieurs notations, ainsi que la notion de groupe de Grothendieck.

**Définition 6.39** Soit  $A$  une algèbre de dimension finie sur un corps  $K$ . Pour tout module  $M \in \text{mod-}A$ , notons  $[M]$  la classe d'isomorphisme de  $M$ . Le *groupe de Grothendieck*  $\mathcal{R}_0(A)$  est le groupe abélien engendré par les  $[M]$ ,  $M \in \text{mod-}A$ , et soumis aux relations

$$[M] = [N] + [P]$$

si on a une suite exacte  $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$  (remarquons alors que  $[N] + [P]$  ne dépend pas du choix des représentants  $M \in [M]$ ,  $N \in [N]$  et  $P \in [P]$ ). Notons qu'une base de  $\mathcal{R}_0(A)$  est formée des classes d'isomorphisme des  $A$ -modules simples de type fini.  $\diamond$

\* Soit  $\widehat{R} := R(\widehat{v}, \widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_l)$ , où les  $\widehat{u}_i$ ,  $1 \leq i \leq l$  et  $\widehat{v}$  sont algébriquement indépendants sur  $R$ . Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Pour  $\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi_m^l$ , notons  $S_{\widehat{R}}(\boldsymbol{\lambda}_l)$  le module de Specht indexé par  $\boldsymbol{\lambda}_l$  pour l'algèbre d'Ariki-Koike générique  $\mathcal{H}_{\widehat{R}, m} := \mathcal{H}_{\widehat{R}, m}(\widehat{v}; \widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_l)$ . Nous garderons les notations  $S(\boldsymbol{\lambda}_l)$  et  $D(\boldsymbol{\mu}_l)$  pour désigner les modules de Specht et les modules simples de l'algèbre spécialisée  $\mathcal{H}_{R, m} := \mathcal{H}_{R, m}(v; u_1, \dots, u_l)$ . D'après la remarque 6.4, on a  $S(\boldsymbol{\lambda}_l) \cong S_{\widehat{R}}(\boldsymbol{\lambda}_l) \otimes_{\widehat{R}} R$ . De plus, puisque  $\mathcal{H}_{\widehat{R}, m}$  est semi-simple (cf. exemple 6.22), le théorème 6.37 montre que  $\{[S_{\widehat{R}}(\boldsymbol{\lambda}_l)] \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi_m^l\}$  est une base de  $\mathcal{R}_0(\mathcal{H}_{\widehat{R}, m})$ . Considérons l'application linéaire

$$\mathbf{d}_m : \mathcal{R}_0(\mathcal{H}_{\widehat{R}, m}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{R}_0(\mathcal{H}_{R, m}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad [S_{\widehat{R}}(\boldsymbol{\lambda}_l)] \mapsto [S_{\widehat{R}}(\boldsymbol{\lambda}_l) \otimes_{\widehat{R}} R] \quad (\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi_m^l).$$

Cette application est appelée *application de décomposition*. (Il est en fait possible de définir une application de décomposition dès qu'on s'est donné un triplet modulaire; voir [GP].) Notons que la matrice de cette application linéaire rapportée aux bases  $\{[S_{\widehat{R}}(\boldsymbol{\lambda}_l)] \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi_m^l\}$  et  $\{[D(\boldsymbol{\mu}_l)] \mid \boldsymbol{\mu}_l \in \Lambda_{\mathcal{H}_{R, m}}^{\bullet}\}$  est la transposée de la matrice de décomposition de  $\mathcal{H}_{R, m}$  que nous avons introduite à la définition 6.34. Puisque cette matrice est unitriangulaire (cf. proposition 6.36), l'application  $\mathbf{d}_m$  est surjective. Posons

$$\mathcal{F}_m := \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{R}_0(\mathcal{H}_{\widehat{R}, m}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_m := \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{R}_0(\mathcal{H}_{R, m}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \mathbb{Q}).$$



Soient  $\{[S_{\widehat{R}}(\boldsymbol{\lambda}_l)]^\dagger \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi_m^l\} \subset \mathcal{F}_m$  la base duale de la base  $\{[S_{\widehat{R}}(\boldsymbol{\lambda}_l)] \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi_m^l\}$  et  $\{[D(\boldsymbol{\mu}_l)]^\dagger \mid \boldsymbol{\mu}_l \in \Lambda_{\mathcal{H}_{R,m}}^\bullet\} \subset \mathcal{G}_m$  la base duale de la base  $\{[D(\boldsymbol{\mu}_l)] \mid \boldsymbol{\mu}_l \in \Lambda_{\mathcal{H}_{R,m}}^\bullet\}$ . Soit  $\mathbf{e}_m$  la transposée de l'application  $\mathbf{d}_m$ . Puisque  $\mathbf{d}_m$  est surjective,  $\mathbf{e}_m$  est injective. De façon explicite,  $\mathbf{e}_m$  est l'application linéaire définie par

$$\mathbf{e}_m : \mathcal{G}_m \rightarrow \mathcal{F}_m, \quad [D(\boldsymbol{\mu}_l)]^\dagger \mapsto \sum_{\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi_m^l} [S(\boldsymbol{\lambda}_l) : D(\boldsymbol{\mu}_l)] [S_{\widehat{R}}(\boldsymbol{\lambda}_l)]^\dagger \quad (\boldsymbol{\mu}_l \in \Lambda_{\mathcal{H}_{R,m}}^\bullet).$$

Posons enfin

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_m, \quad \mathcal{G} := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_m \quad \text{et} \quad \mathbf{e} := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{e}_m.$$

L'application  $\mathbf{e}$  est une injection de  $\mathcal{G}$  dans  $\mathcal{F}$ .

\* Soit

$$\mathbf{F}[\mathbf{s}_l] := \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l} \mathbb{Q}|\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l\rangle;$$

en tant que  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel,  $\mathbf{F}[\mathbf{s}_l]$  a une base indexée par l'ensemble des  $l$ -multi-partitions. Cet espace n'est rien d'autre que la spécialisation à  $q = 1$  de l'espace de Fock  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . Soit par ailleurs  $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  l'algèbre enveloppante de  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$  [Kac]. Il s'agit de la  $\mathbb{Q}$ -algèbre ayant pour générateurs  $e_i, f_i, h_i$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ) et  $d$ , et soumise à des relations que l'on obtient de façon standard à partir des relations définissant  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$  (que nous avons décrites au paragraphe 1.2.1). Il est possible de voir  $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  comme une spécialisation à  $q = 1$  de l'algèbre quantique  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  (cf. [Jo]). En spécialisant à  $q = 1$  l'action de JMMO sur  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  (voir la proposition 3.7 et le théorème 3.8 pour la description de cette action), on obtient le résultat suivant.

**Proposition 6.40** *L'espace  $\mathbf{F}[\mathbf{s}_l]$  est un  $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module intégrable, et les générateurs de Chevalley  $e_i, f_i$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ) agissent sur  $|\boldsymbol{\nu}_l, \mathbf{s}_l\rangle$  ( $\boldsymbol{\nu}_l \in \Pi^l$ ) par les formules*

$$e_i \cdot |\boldsymbol{\nu}_l, \mathbf{s}_l\rangle = \sum_{\boldsymbol{\lambda}_l \xrightarrow{i:1} \boldsymbol{\nu}_l} |\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l\rangle \quad \text{et} \quad f_i \cdot |\boldsymbol{\nu}_l, \mathbf{s}_l\rangle = \sum_{\boldsymbol{\nu}_l \xrightarrow{i:1} \boldsymbol{\mu}_l} |\boldsymbol{\mu}_l, \mathbf{s}_l\rangle.$$

□

Comme dans le cas quantique, le vecteur  $|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle \in \mathbf{F}[\mathbf{s}_l]$  est un vecteur de plus haut poids congru à  $\Lambda := \sum_{b=1}^l \Lambda_{s_b}$  modulo  $\mathbb{Z}\delta$ . Puisque  $\mathbf{F}[\mathbf{s}_l]$  est un  $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module intégrable, le sous-module

$$\mathbf{M}[\mathbf{s}_l] := U(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle \subset \mathbf{F}[\mathbf{s}_l]$$

est par conséquent isomorphe à  $L(\Lambda)$ , l'unique (à isomorphisme près)  $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module simple de plus haut poids  $\Lambda$ . On a donc une injection

$$\iota : L(\Lambda) \hookrightarrow \mathbf{F}[\mathbf{s}_l].$$

La spécialisation à  $q = 1$  de la base canonique  $\{G^+(\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l) \mid \boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi^l[\mathbf{s}_l, n]^\circ\}$  de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$  (voir paragraphe 3.4.3), que l'on notera de la même façon, est appelée *base canonique* de  $L(\Lambda) \cong \mathbf{M}[\mathbf{s}_l]$ .

\* Puisque  $\mathcal{F}$  et  $\mathbf{F}[s_l]$  sont deux  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels ayant des bases indexées par l'ensemble des  $l$ -multi-partitions, on peut définir l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\mathfrak{A} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{F}[s_l], \quad [S_{\widehat{R}}(\lambda_l)]^\dagger \mapsto |\lambda_l, s_l\rangle.$$

On a donc le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\mathfrak{A}} & \mathbf{F}[s_l] \\ e \uparrow & & \uparrow \iota \\ \mathcal{G} & & L(\Lambda) \end{array}$$

Nous pouvons à présent énoncer le résultat le plus important de ce paragraphe, à savoir « le » théorème d'Ariki (voir aussi [Mat3, Theorem 3.19]).

**Théorème 6.41 ([A2])** *Soit  $R$  un corps commutatif de caractéristique 0, contenant une racine primitive  $n$ -ième de l'unité  $\zeta$ . Soit  $s_l = (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}^l$ . Considérons les algèbres d'Ariki-Koike*

$$\mathcal{H}_{R,m} = \mathcal{H}_{R,m}(\zeta; \zeta^{s_1}, \zeta^{s_2}, \dots, \zeta^{s_l}) \quad (m \in \mathbb{N}),$$

*et définissons les espaces vectoriels gradués  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  comme précédemment. Considérons enfin le poids*

$$\Lambda := \sum_{b=1}^l \Lambda_{s_b}.$$

*On a alors les résultats suivants.*

- (i) *On peut munir  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  d'une structure de  $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module, compatible avec l'injection  $e : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F}$ . L'application  $\mathfrak{A} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{F}[s_l]$  est alors un isomorphisme de  $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules.*
- (ii) *L'application  $\mathfrak{A}$  induit un isomorphisme de  $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules entre  $\mathcal{G}$  et  $\mathbf{M}[s_l] \cong L(\Lambda)$ . Notons encore  $\mathfrak{A}$  l'application  $\mathcal{G} \xrightarrow{\cong} L(\Lambda)$ .*
- (iii)  *$\mathfrak{A}$  envoie la base  $\{[D(\mu_l)]^\dagger \mid \mu_l \in \Lambda_{\mathcal{H}_{R,m}}^\bullet, m \in \mathbb{N}\}$  de  $\mathcal{G}$  sur la base canonique de  $L(\Lambda)$ .* □

**Remarque 6.42** Le théorème 6.41 est en fait encore vrai si on suppose seulement que  $R$  un corps commutatif de caractéristique 0,  $v \neq 1$  et les  $u_i$  ( $1 \leq i \leq l$ ) sont des puissances entières de  $v$ . Si  $v$  n'est pas une racine de l'unité, il faut remplacer l'algèbre de Lie affine  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$  par  $\widehat{\mathfrak{sl}}_\infty$  (cf. [Kac] pour la définition de cette algèbre). Le théorème d'Ariki [A2] s'énonce en fait dans ce cadre plus général; de plus le cas où  $v \neq 1$  n'est pas une racine de l'unité est un des cas de base de la démonstration. ◇

### 6.2.3.2 Paramétrisation des modules simples de l'algèbre d'Ariki-Koike

D'après le point (iii) de ce théorème, les éléments de  $\Lambda_{\mathcal{H}_{R,m}}^\bullet$  sont en bijection avec  $\Pi^l[\mathbf{s}_l, n]^\circ \cap \Pi_m^l$ , l'ensemble des  $l$ -multi-partitions de  $m$  indexant les sommets du graphe cristallin de  $\mathbf{M}_q[\mathbf{s}_l] := U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \cdot |\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$  (on rappelle que l'algèbre  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  opère sur  $\mathbf{M}_q[\mathbf{s}_l]$  suivant l'action de JMMO). Il est possible de décrire cette bijection en introduisant une autre action sur l'espace de Fock, appelée *action d'Hayashi* ([H], voir aussi [Ja]).

**Définition 6.43** Soient  $\lambda_l \in \Pi^l$  et  $0 \leq c \leq n-1$ . L'ordre d'Ariki-Mathas [AM] est l'ordre sur les  $c$ -nœuds de type  $A$  et de type  $R$  de  $(\lambda_l, \mathbf{s}_l)$ , noté  $\leq_{\text{AM}}$  et défini comme suit. Si  $\gamma = (i, j, b)$  et  $\gamma' = (i', j', b')$  sont deux  $c$ -nœuds de type  $A$  ou  $R$  de  $(\lambda_l, \mathbf{s}_l)$ , on écrit  $\gamma \leq_{\text{AM}} \gamma'$  si  $b < b'$  ou  $(b = b' \text{ et } i < i')$ . Autrement dit, la liste des  $c$ -nœuds de type  $A$  ou de type  $R$  de  $(\lambda_l, \mathbf{s}_l)$  rangés suivant cet ordre s'obtient en parcourant de haut en bas les lignes de la première composante de  $\lambda_l$ , puis en parcourant de haut en bas les lignes de la deuxième composante de  $\lambda_l$  et ainsi de suite.

On définit une action des générateurs de Chevalley de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  sur  $\bigoplus_{\lambda_l \in \Pi^l} \mathbb{Q}(q) \cdot |\lambda_l, \mathbf{s}_l\rangle$  à l'aide des formules obtenues à partir de la proposition 3.7 2°) en remplaçant l'ordre  $\leq$  de cette proposition par l'ordre d'Ariki-Mathas. On montre alors, comme pour le théorème 3.8, que l'on obtient un  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module intégrable [H], que l'on note  $\mathbf{F}_q^{(\text{H})}[\mathbf{s}_l]$ . L'action ainsi définie est appelée *action d'Hayashi*. (Nous conserverons les notations  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ ,  $\mathbf{M}_q[\mathbf{s}_l]$ , etc. vues au chapitre 3 lorsqu'on considère l'action de JMMO.) Notons que l'espace  $\mathbf{F}_q^{(\text{H})}[\mathbf{s}_l]$  est isomorphe (en tant que  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module) à un produit tensoriel d'espaces  $\mathbf{F}_q^{(\text{H})}[\mathbf{s}_i]$  de niveau 1. Le sous- $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module de  $\mathbf{F}_q^{(\text{H})}[\mathbf{s}_l]$  engendré par le vecteur  $|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle$  sera noté  $\mathbf{M}_q^{(\text{H})}[\mathbf{s}_l]$ . Soit  $\mathcal{K}[\mathbf{s}_l, n]$  l'ensemble des  $l$ -multi-partitions indexant les sommets du graphe cristallin de  $\mathbf{M}_q^{(\text{H})}[\mathbf{s}_l]$ ; ces  $l$ -multi-partitions sont appelées *multi-partitions de Kleshchev*.  $\diamond$

On peut calculer de façon récursive les multi-partitions de Kleshchev de la façon suivante. Soient  $\lambda_l \in \mathcal{K}[\mathbf{s}_l, n]$  une multi-partition de Kleshchev et  $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ . Rangeons les  $i$ -nœuds de type  $A$  et de type  $R$  de  $(\lambda_l, \mathbf{s}_l)$  par ordre croissant suivant l'ordre d'Ariki-Mathas. Notons  $\beta_1 <_{\text{AM}} \cdots <_{\text{AM}} \beta_r$  la liste des nœuds ainsi obtenue. Supprimons de cette liste de façon récursive autant de fois que possible tous les couples  $\beta_h <_{\text{AM}} \beta_{h+1}$  tels que  $\beta_h$  est un nœud de type  $R$  et  $\beta_{h+1}$  est un nœud de type  $A$  de  $(\lambda_l, \mathbf{s}_l)$ . Il reste alors une liste  $\gamma_1 <_{\text{AM}} \cdots <_{\text{AM}} \gamma_u <_{\text{AM}} \delta_1 <_{\text{AM}} \cdots <_{\text{AM}} \delta_v$ , où les  $\gamma_j$  sont des nœuds de type  $A$  de  $(\lambda_l, \mathbf{s}_l)$  et les  $\delta_k$  sont des nœuds de type  $R$  de  $(\lambda_l, \mathbf{s}_l)$  (éventuellement, on peut avoir  $u = 0$  ou  $v = 0$ ). Les nœuds  $\gamma_u$  et  $\delta_1$ , s'ils existent, sont alors appelés *bons  $i$ -nœuds pour l'ordre d'Ariki-Mathas*. On peut alors démontrer le théorème suivant (cf. théorème 3.26).

**Théorème 6.44** ([JMMO], [FLOTW]) *Identifions les multi-partitions de Kleshchev avec les sommets du graphe cristallin de  $\mathbf{M}_q^{(\text{H})}[\mathbf{s}_l]$  qu'elles indexent. Alors le graphe cristallin de  $\mathbf{M}_q^{(\text{H})}[\mathbf{s}_l]$  contient la flèche  $\lambda_l \xrightarrow{i} \mu_l$  si et seulement si  $(\mu_l, \mathbf{s}_l)$  est obtenu à partir de  $(\lambda_l, \mathbf{s}_l)$  en ajoutant un bon  $i$ -nœud pour l'ordre d'Ariki-Mathas.*  $\square$

**Remarque 6.45** Nous ne connaissons pas, à ce jour, de description non récursive des multi-partitions de Kleshchev (sauf pour  $l = 1$ , auquel cas on retrouve l'ensemble des partitions  $n$ -régulières).  $\diamond$

Les modules intégrables  $\mathbf{M}_q[\mathbf{s}_l]$  et  $\mathbf{M}_q^{(\text{H})}[\mathbf{s}_l]$  sont engendrés par un seul vecteur de plus haut poids, et le plus haut poids est le même pour ces deux modules. Par conséquent, on a un isomorphisme  $\mathbf{M}_q[\mathbf{s}_l] \cong \mathbf{M}_q^{(\text{H})}[\mathbf{s}_l]$ , qui induit un isomorphisme de cristaux entre les graphes cristallins et donc une bijection  $\mathcal{K}[\mathbf{s}_l, n] \xrightarrow{\cong} \Pi^l[\mathbf{s}_l, n]^\circ$  entre les (multi-partitions indexant les) sommets de ces graphes. Cette bijection peut être calculée en suivant des chemins dans les graphes cristallins (voir remarque 3.29).

Nous pouvons maintenant expliciter la bijection  $\Phi_m : \Lambda_{\mathcal{H}_{R,m}}^\bullet \xrightarrow{\cong} \Pi^l[\mathbf{s}_l, n]^\circ \cap \Pi_m^l$  provenant du théorème 6.41 (iii). Le résultat suivant est dû à Ariki et Mathas (voir aussi [Mat3, Theorem 3.24]).

**Théorème 6.46 ([AM])** *Avec les notations et les hypothèses du théorème 6.41, on a l'égalité  $\Lambda_{\mathcal{H}_{R,m}}^\bullet = \mathcal{K}[\mathbf{s}_l, n] \cap \Pi_m^l$ .*  $\square$

D'après le théorème 6.41 (iii), nous avons donc deux paramétrisations de  $\Lambda_{\mathcal{H}_{R,m}}^\bullet$  : une à l'aide des multi-partitions de Kleshchev et une autre donnée par le cristal de  $\mathbf{M}_q[\mathbf{s}_l]$ . Le théorème suivant montre que ces deux paramétrisations coïncident.

**Théorème 6.47 ([A3])** *Reprenons les notations et les hypothèses du théorème 6.41. Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Soit*

$$\Phi_m : \Lambda_{\mathcal{H}_{R,m}}^\bullet = \mathcal{K}[\mathbf{s}_l, n] \cap \Pi_m^l \xrightarrow{\cong} \Pi^l[\mathbf{s}_l, n]^\circ \cap \Pi_m^l$$

*la bijection induite par la bijection  $\mathcal{K}[\mathbf{s}_l, n] \xrightarrow{\cong} \Pi^l[\mathbf{s}_l, n]^\circ$  définie précédemment. Alors l'isomorphisme  $\mathfrak{A} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{F}[\mathbf{s}_l]$  du théorème 6.41 envoie l'élément  $[D(\boldsymbol{\mu}_l)]^\dagger$  ( $\boldsymbol{\mu}_l \in \Lambda_{\mathcal{H}_{R,m}}^\bullet$ ) sur  $G^+(\Phi_m(\boldsymbol{\mu}_l), \mathbf{s}_l) \in \mathbf{F}[\mathbf{s}_l]$ .*  $\square$

**Corollaire 6.48** *Reprenons les hypothèses et notations du théorème 6.41. Rappelons (cf. paragraphe 3.4.3) que*

$$\Delta_{\mathbf{s}_l}^+(q) = (\Delta_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l; \mathbf{s}_l}^+(q))_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l \in \Pi^l}$$

*est la matrice de transition entre la base standard et la base canonique  $G^+$  de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ . Soit  $\Phi_m : \Lambda_{\mathcal{H}_{R,m}}^\bullet \xrightarrow{\cong} \Pi^l[\mathbf{s}_l, n]^\circ \cap \Pi_m^l$  la bijection définie au théorème 6.47. Alors pour tout  $\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi_m^l$ ,  $\boldsymbol{\mu}_l \in \Lambda_{\mathcal{H}_{R,m}}^\bullet$ , on a*

$$[S(\boldsymbol{\lambda}_l) : D(\boldsymbol{\mu}_l)] = \Delta_{\boldsymbol{\lambda}_l, \Phi_m(\boldsymbol{\mu}_l); \mathbf{s}_l}^+(1).$$

*Démonstration.* Soit  $\boldsymbol{\mu}_l \in \Lambda_{\mathcal{H}_{R,m}}^\bullet$ . En identifiant (via l'application  $\mathbf{e}$ )  $\mathcal{G}$  à un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}$ , on a dans  $\mathcal{F}$  l'égalité

$$[D(\boldsymbol{\mu}_l)]^\dagger = \sum_{\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi_m^l} [S(\boldsymbol{\lambda}_l) : D(\boldsymbol{\mu}_l)] [S_{\widehat{R}}(\boldsymbol{\lambda}_l)]^\dagger.$$

Appliquons l'isomorphisme  $\mathfrak{A} : \mathcal{F} \xrightarrow{\cong} \mathbf{F}[\mathbf{s}_l]$ . Les théorèmes 6.41 et 6.47 montrent qu'on a alors l'égalité suivante dans  $\mathbf{F}[\mathbf{s}_l]$ :

$$G^+(\Phi_m(\boldsymbol{\mu}_l), \mathbf{s}_l) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi_m^l} [S(\boldsymbol{\lambda}_l) : D(\boldsymbol{\mu}_l)] |\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l\rangle.$$

Compte tenu de la définition de la matrice  $\Delta_{\mathbf{s}_l}^+(q)$ , le corollaire s'ensuit.  $\square$

Rappelons que  $\zeta \in R$  est une racine primitive  $n$ -ième de l'unité. Ce corollaire dit que la matrice de décomposition de  $\mathcal{H}_{R,m}(\zeta; \zeta^{s_1}, \dots, \zeta^{s_l})$  s'obtient, à permutation des colonnes près, en spécialisant à  $q = 1$  la sous-matrice de la matrice  $\Delta_{\mathbf{s}_l}^+(q)$  qui est formée des colonnes indexées par les sommets du graphe cristallin du  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module  $\mathbf{M}_q[\mathbf{s}_l]$ .

**Exemple 6.49** Prenons  $n = 2$ ,  $l = 2$ ,  $m = 2$  et  $\mathbf{s}_l = (1, 0)$ . On vérifie que la matrice de transition entre la base standard et la base canonique  $G^+$  de la composante homogène de degré  $m$  de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  est

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . \\ 0 & 1 & . & . & . \\ q & q & 1 & . & . \\ 0 & q^2 & q & 1 & . \\ q^2 & 0 & q & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} ((2), \emptyset) \\ (\emptyset, (2)) \\ ((1), (1)) \\ (\emptyset, (1, 1)) \\ ((1, 1), \emptyset) \end{matrix}.$$

Par ailleurs, en comparant les graphes cristallins de  $\mathbf{M}_q[\mathbf{s}_l]$  et  $\mathbf{M}_q^{(H)}[\mathbf{s}_l]$ , on voit que

$$\Phi_m((1), (1)) = ((2), \emptyset) \quad \text{et} \quad \Phi_m(\emptyset, (1, 1)) = (\emptyset, (2)).$$

D'après le corollaire 6.48, la matrice de décomposition de  $\mathcal{H}_{R,m}$  est donc

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} ((1), (1)) & (\emptyset, (1, 1)) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} ((2), \emptyset) \\ (\emptyset, (2)) \\ ((1), (1)) \\ (\emptyset, (1, 1)) \\ ((1, 1), \emptyset) \end{matrix} \end{matrix};$$

on retrouve bien la matrice calculée à l'exemple 6.35.  $\diamond$

**Remarque 6.50** En utilisant le théorème 6.41 (ou plus précisément, la version de ce théorème énoncée à la remarque 6.42 ainsi que le corollaire 6.48) d'une part, ainsi que le théorème 6.38 d'autre part, nous sommes à même de calculer la matrice de décomposition de l'algèbre  $\mathcal{H}_{R,m}(v; u_1, \dots, u_l)$  pour tout choix de paramètres  $v, u_1, \dots, u_l \in R \setminus \{0\}$ . Signalons que dans le cas particulier où  $l = 1$ , on obtient les matrices de décomposition des algèbres de Hecke de type  $A$ , ce qui prouve la conjecture de Lascoux-Leclerc-Thibon [LLT].  $\diamond$

## Chapitre 7

# $v$ -algèbres de Schur cyclotomiques

En vue d'étudier les représentations de l'algèbre de Ariki-Koike  $\mathcal{H}$  associée au groupe de réflexions complexes  $G(l,1,m)$ , Dipper, James et Mathas [DJM] ont introduit en 1998 la  $v$ -algèbre de Schur cyclotomique

$$\mathcal{S} := \text{End}_{\mathcal{H}} \left( \bigoplus_{\mu \in \Xi_m^l} M(\mu) \right).$$

Ici les  $M(\mu)$  sont certains  $\mathcal{H}$ -modules, appelés modules permutationnels (cf. définition 7.1). Lorsque  $l = 1$ , la  $v$ -algèbre de Schur cyclotomique coïncide avec la  $v$ -algèbre de Schur de [DJ2]. L'algèbre  $\mathcal{S}$  est cellulaire ; par conséquent, nous pouvons appliquer la théorie des algèbres cellulaires vue à la section 6.1 pour étudier ses représentations. Un des problèmes centraux qui se pose alors est de calculer la matrice de décomposition d'une  $v$ -algèbre de Schur cyclotomique obtenue en spécialisant les paramètres à une racine  $n$ -ième de l'unité. Pour cela, James et Mathas [JM] ont établi, pour les  $v$ -algèbres de Schur cyclotomiques, une formule importante : la formule sommatoire de Jantzen. Étant donné une filtration de Jantzen pour les modules de Weyl, on peut définir un  $q$ -analogue  $D(q)$  de la matrice de décomposition, dont les coefficients sont les multiplicités graduées des facteurs de composition des modules de Weyl (cf. section 7.4). La formule sommatoire de Jantzen équivaut à l'identité matricielle  $D^l(1) = J^{\triangleleft} D(1)$ , où  $J^{\triangleleft}$  est une matrice de valuations  $\wp$ -adiques de certains déterminants de Gram (cf. lemme 7.36 et théorème 7.33).

Dans tout ce chapitre, nous suivons en grande partie [DJM], [JM] et [Mat3].

*Notations.* Dans tout ce chapitre, on considère un anneau intègre  $R$ , et on fixe des paramètres  $v, u_1, \dots, u_l \in R^\times$ , ainsi qu'un entier  $m \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{R,m}(v; u_1, \dots, u_l)$  l'algèbre d'Ariki-Koike donnée par ces paramètres. Rappelons en outre que  $\Xi_m^l$  désigne l'ensemble des  $l$ -multi-compositions de  $m$ .

## 7.1 Modules permutacionnels

**Définition 7.1** Soit  $\boldsymbol{\mu} \in \Xi_m^l$ . Nous avons introduit, à la définition 6.23, un élément  $m_{\boldsymbol{\mu}} \in \mathcal{H}$ . On considère le  $\mathcal{H}$ -module à droite

$$M(\boldsymbol{\mu}) := m_{\boldsymbol{\mu}}\mathcal{H}.$$

Les modules  $M(\boldsymbol{\mu})$ ,  $\boldsymbol{\mu} \in \Xi_m^l$  sont appelés *modules permutacionnels* (en anglais, *permutation modules*).  $\diamond$

**Remarque 7.2** On montre aisément que si  $\boldsymbol{\mu} \in \Xi_m^l$  est une multi-composition et  $\boldsymbol{\lambda} \in \Pi_m^l$  est la multi-partition obtenue en réordonnant les parts à l'intérieur de chaque composante de  $\boldsymbol{\mu}$ , alors  $M(\boldsymbol{\lambda})$  et  $M(\boldsymbol{\mu})$  sont isomorphes (cf. [Mat3, Paragraph 4.1]).  $\diamond$

**Remarque 7.3** Rappelons que  $\mathcal{H}$  est munie d'une involution  $*$  (cf. définition 6.23). L'image du  $R$ -sous-module  $M \subset \mathcal{H}$  par cette involution sera notée  $M^*$ . (Le lecteur veillera à ne pas confondre  $M^*$  et  $\text{Hom}_R(M, R)$ .) On vérifie aisément que pour  $\boldsymbol{\mu} \in \Xi_m^l$ , on a  $x_{\boldsymbol{\mu}}^* = x_{\boldsymbol{\mu}}$  et  $u_{\boldsymbol{\mu}}^* = u_{\boldsymbol{\mu}}$ . Puisque  $m_{\boldsymbol{\mu}} = x_{\boldsymbol{\mu}}u_{\boldsymbol{\mu}} = u_{\boldsymbol{\mu}}x_{\boldsymbol{\mu}}$ , on a  $m_{\boldsymbol{\mu}}^* = m_{\boldsymbol{\mu}}$  et donc  $M(\boldsymbol{\mu})^* = \mathcal{H}m_{\boldsymbol{\mu}}$ .  $\diamond$

**Remarque 7.4** Supposons que  $l = 1$ . Soit  $\boldsymbol{\mu} \in \Xi_m^l$ . Notons  $\mathbf{1}_{\boldsymbol{\mu}}$  la représentation triviale de la sous-algèbre parabolique  $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\mu}} = H(\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}}) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}}} RT_{\sigma}$ . Il s'agit de la représentation qui est de rang 1 comme  $R$ -module, dans laquelle  $T_{\sigma}$  ( $\sigma \in \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}}$ ) agit comme la multiplication par  $v^{\ell(\sigma)}$ . On a alors

$$M(\boldsymbol{\mu}) \cong \mathbf{1}_{\boldsymbol{\mu}} \otimes_{\mathcal{H}_{\boldsymbol{\mu}}} \mathcal{H};$$

en spécialisant  $v$  à 1, on retrouve donc la notion de module permutacionnel pour la théorie des représentations du groupe symétrique (cf. remarque 5.1). Si  $l > 1$ , les modules  $M(\boldsymbol{\mu})$ ,  $\boldsymbol{\mu} \in \Xi_m^l$  ne s'obtiennent en général pas directement par induction à partir de modules pour des sous-algèbres de  $\mathcal{H}$ . Néanmoins, comme nous allons le voir, les modules  $M(\boldsymbol{\mu})$ ,  $\boldsymbol{\mu} \in \Xi_m^l$  se comportent presque comme les modules permutacionnels pour la théorie des représentations du groupe symétrique, c'est pourquoi nous gardons cette terminologie pour les modules que nous venons d'introduire.  $\diamond$

Soient  $\boldsymbol{\lambda} \in \Pi_m^l$  et  $\boldsymbol{\mu} \in \Xi_m^l$ . Rappelons que nous avons défini au paragraphe 1.1.3) l'ensemble  $\text{SStd}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$  formé des  $\boldsymbol{\lambda}$ -tableaux semi-standard de type  $\boldsymbol{\mu}$ . Nous avons également défini une application (notée abusivement  $\boldsymbol{\mu}$ ) de  $\text{Std}(\boldsymbol{\lambda})$  vers  $\text{SStd}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ .

En utilisant la base de Murphy de  $\mathcal{H}$  (cf. théorème 6.25), nous pouvons construire une base du  $R$ -module  $M(\boldsymbol{\mu})$  ( $\boldsymbol{\mu} \in \Xi_m^l$ ).

**Théorème 7.5** ([DJM], **Theorem 4.14**) Soit  $\boldsymbol{\mu} \in \Xi_m^l$  une  $l$ -multi-composition de  $m$ . Pour  $\boldsymbol{\lambda} \in \Pi_m^l$ ,  $\mathbb{S} \in \text{SStd}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ ,  $T \in \text{Std}(\boldsymbol{\lambda})$ , posons

$$m_{\mathbb{S}, T}^{\boldsymbol{\lambda}} := \sum_{\substack{S \in \text{Std}(\boldsymbol{\lambda}) \\ \boldsymbol{\mu}(S) = \mathbb{S}}} m_{S, T}^{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathcal{H}.$$

Alors  $M(\boldsymbol{\mu})$  est un  $R$ -module libre, de base

$$\left\{ m_{\mathbb{S},T}^\lambda \mid \lambda \in \Pi_m^l, \mathbb{S} \in \text{SStd}(\lambda, \boldsymbol{\mu}), T \in \text{Std}(\lambda) \right\}.$$

□

Le corollaire qui suit nous servira à construire une base de  $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(M(\boldsymbol{\nu}), M(\boldsymbol{\mu}))$  (où  $\boldsymbol{\mu}$  et  $\boldsymbol{\nu}$  sont deux  $l$ -multi-compositions de  $m$ ). Un autre corollaire du théorème 7.5 est le fait que les modules permutationnels de  $\mathcal{H}$  admettent une filtration par des modules de Specht [DJM, Corollary 4.15].

**Corollaire 7.6** ([DJM], Proposition 6.3) *Soient  $\boldsymbol{\mu}$  et  $\boldsymbol{\nu}$  deux  $l$ -multi-compositions de  $m$ . Pour  $\lambda \in \Pi_m^l$ ,  $\mathbb{S} \in \text{SStd}(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ ,  $\mathbb{T} \in \text{SStd}(\lambda, \boldsymbol{\nu})$ , posons*

$$m_{\mathbb{S},\mathbb{T}}^\lambda := \sum_{\substack{S, T \in \text{Std}(\lambda) \\ \boldsymbol{\mu}(S) = \mathbb{S} \\ \boldsymbol{\nu}(T) = \mathbb{T}}} m_{\mathbb{S},T}^\lambda \in \mathcal{H}.$$

Alors avec les notations du théorème 7.5, on a

$$m_{\mathbb{S},\mathbb{T}}^\lambda = \sum_{\substack{T \in \text{Std}(\lambda) \\ \boldsymbol{\nu}(T) = \mathbb{T}}} m_{\mathbb{S},T}^\lambda = \sum_{\substack{S \in \text{Std}(\lambda) \\ \boldsymbol{\mu}(S) = \mathbb{S}}} \left( m_{\mathbb{T},S}^\lambda \right)^* \in M(\boldsymbol{\mu}) \cap M(\boldsymbol{\nu})^*.$$

De plus,  $M(\boldsymbol{\mu}) \cap M(\boldsymbol{\nu})^*$  est un  $R$ -module libre, de base

$$\left\{ m_{\mathbb{S},\mathbb{T}}^\lambda \mid \lambda \in \Pi_m^l, \mathbb{S} \in \text{SStd}(\lambda, \boldsymbol{\mu}), \mathbb{T} \in \text{SStd}(\lambda, \boldsymbol{\nu}) \right\}.$$

□

Pour construire une base de  $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(M(\boldsymbol{\nu}), M(\boldsymbol{\mu}))$  ( $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \in \Xi_m^l$ ), Dipper, James et Mathas ont prouvé le résultat suivant. Pour l'énoncer, on introduit la notion de double annulateur.

**Définition 7.7** Soit  $S$  une partie de  $\mathcal{H}$ . Posons

$$r(S) := \{h \in \mathcal{H} \mid Sh = \{0\}\}, \quad l(S) := \{h \in \mathcal{H} \mid hS = \{0\}\} \quad \text{et} \quad \text{lr}(S) := l(r(S)).$$

On dit que  $\text{lr}(S)$  est le *double annulateur* de  $S$ .

◇

**Théorème 7.8** ([DJM], Theorem 5.16) *Pour  $\boldsymbol{\mu} \in \Xi_m^l$ , on a*

$$\text{lr}(\{m_{\boldsymbol{\mu}}\}) = M(\boldsymbol{\mu})^* = \mathcal{H}m_{\boldsymbol{\mu}}.$$

□

**Corollaire 7.9** *Soient  $\boldsymbol{\mu}$  et  $\boldsymbol{\nu}$  deux  $l$ -multi-compositions de  $m$ . Alors l'application*

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}}(M(\boldsymbol{\nu}), M(\boldsymbol{\mu})) \rightarrow M(\boldsymbol{\mu}) \cap M(\boldsymbol{\nu})^*, \quad \varphi \mapsto \varphi(m_{\boldsymbol{\nu}})$$

*est bien définie et c'est un isomorphisme de  $R$ -modules.*



*Démonstration.* Soit  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(M(\nu), M(\mu))$ . Puisque  $m_\nu \in M(\nu)$ , on a par définition  $\varphi(m_\nu) \in M(\mu)$ . Soit  $h \in \mathcal{H}$  tel que  $m_\nu h = 0$ . Puisque  $\varphi$  est un morphisme de  $\mathcal{H}$ -modules, on a  $\varphi(m_\nu)h = \varphi(m_\nu h) = 0$ , d'où  $\varphi(m_\nu) \in \text{lr}(\{m_\nu\})$ . D'après le théorème 7.8, on a bien  $\varphi(m_\nu) \in M(\nu)^*$ , donc l'application de l'énoncé, que nous noterons  $\Phi$ , est bien définie et c'est un morphisme de  $R$ -modules. Soit  $x \in M(\mu) \cap M(\nu)^*$ . Puisque  $x \in M(\nu)^*$ , il existe  $x' \in \mathcal{H}$  tel que  $x = x'm_\nu$ . Par conséquent, pour tout  $(h, h') \in \mathcal{H}^2$  tel que  $m_\nu h = m_\nu h'$ , on a  $xh = xh'$ , donc l'application  $\Psi_x : m_\nu h \in M(\nu) \mapsto xh \in \mathcal{H}$  est bien définie. Puisque  $x \in M(\mu)$ , il existe  $x'' \in \mathcal{H}$  tel que  $x = m_\mu x''$ . On a alors, pour tout  $h \in \mathcal{H}$ ,  $\Psi_x(m_\nu h) = m_\mu(x''h) \in M(\mu)$ , donc  $\Psi_x \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(M(\nu), M(\mu))$ . Ainsi l'application

$$\Psi : x \in M(\mu) \cap M(\nu)^* \mapsto \Psi_x \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(M(\nu), M(\mu))$$

est bien définie et il est clair qu'il s'agit de l'inverse de  $\Phi$ .  $\square$

Soient  $\mu, \nu \in \Xi_m^l$ ,  $\lambda \in \Pi_m^l$ ,  $\mathbb{S} \in \text{SStd}(\lambda, \mu)$  et  $\mathbb{T} \in \text{SStd}(\lambda, \nu)$ . Nous avons défini au corollaire 7.6 un élément  $m_{\mathbb{S}, \mathbb{T}}^\lambda \in M(\mu) \cap M(\nu)^*$ . Par conséquent, d'après le corollaire 7.9, l'application

$$\varphi_{\mathbb{S}, \mathbb{T}}^\lambda : m_\nu h \in M(\nu) \mapsto m_{\mathbb{S}, \mathbb{T}}^\lambda h \in \mathcal{H},$$

est bien définie et c'est un élément de  $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(M(\nu), M(\mu))$ .

**Remarque 7.10** Soit  $\lambda \in \Pi_m^l$ . Rappelons que

$$\mathbb{T}^\lambda := \lambda(T^\lambda)$$

est l'unique  $\lambda$ -tableau semi-standard de type  $\lambda$  (voir paragraphe 1.1.3). Il découle de ceci et des définitions données dans ce chapitre que  $\varphi_{\mathbb{T}^\lambda, \mathbb{T}^\lambda} \in \text{End}_{\mathcal{H}}(M(\lambda))$  et

$$\varphi_{\mathbb{T}^\lambda, \mathbb{T}^\lambda}(m_\lambda) = m_{\mathbb{T}^\lambda, \mathbb{T}^\lambda} = m_{T^\lambda, T^\lambda} = m_\lambda.$$

Puisque  $M(\lambda) = m_\lambda \mathcal{H}$ , on en déduit que  $\varphi_{\mathbb{T}^\lambda, \mathbb{T}^\lambda} \in \text{End}_{\mathcal{H}}(M(\lambda))$  est l'identité.  $\diamond$

**Proposition 7.11** Soient  $\mu, \nu \in \Xi_m^l$ . Alors les éléments  $\varphi_{\mathbb{S}, \mathbb{T}}^\lambda$  ( $\lambda \in \Pi_m^l$ ,  $\mathbb{S} \in \text{SStd}(\lambda, \mu)$ ,  $\mathbb{T} \in \text{SStd}(\lambda, \nu)$ ) définis précédemment forment une base du  $R$ -module  $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(M(\nu), M(\mu))$ .

*Démonstration.* Cela résulte du corollaire 7.6 et de l'isomorphisme exhibé au corollaire 7.9.  $\square$

## 7.2 Définition des $v$ -algèbres de Schur cyclotomiques

**Définition 7.12** ([DJM]) La  $v$ -algèbre de Schur cyclotomique est la  $R$ -algèbre définie par

$$\mathcal{S} := \text{End}_{\mathcal{H}}\left(\bigoplus_{\mu \in \Xi_m^l} M(\mu)\right) \cong \bigoplus_{\mu, \nu \in \Xi_m^l} \text{Hom}_{\mathcal{H}}(M(\nu), M(\mu))$$

(ici, le symbole  $\oplus$  désigne une somme directe « externe » de  $R$ -modules). Cette algèbre dépend des mêmes paramètres que  $\mathcal{H}$ ; pour les mettre en valeur, nous écrirons parfois

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_R = \mathcal{S}_R(v; u_1, \dots, u_l) = \mathcal{S}_{R,m}(v; u_1, \dots, u_l).$$

◇

Nous allons à présent munir  $\mathcal{S}$  d'une structure cellulaire.

### Définition 7.13

- Soit  $(\Lambda_{\mathcal{S}}, \geq) := (\Pi_m^l, \underline{\geq})$ , où  $\underline{\geq}$  désigne l'ordre (inverse) de dominance sur l'ensemble des  $l$ -multi-partitions de  $m$ .
- Pour  $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}$ , soit  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\lambda) := \text{SStd}(\lambda)$  l'ensemble des tableaux semi-standard de profil  $\lambda$  et de type arbitraire (cf. paragraphe 1.1.3).
- Soit  $* = *_S : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  l'anti-automorphisme d'algèbre involutif défini comme suit. Soient  $\mu, \nu \in \Xi_m^l$  et  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(M(\nu), M(\mu))$ . On montre alors aisément qu'il existe un unique  $\varphi^* \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(M(\mu), M(\nu)) \subset \mathcal{S}$  tel que

$$\varphi^*(m_{\mu}) = (\varphi(m_{\nu}))^*,$$

où dans le membre de droite,  $*$  désigne l'involution de  $\mathcal{H}$ . On étend alors de façon additive l'application  $*$  ainsi définie à  $\mathcal{S} \cong \bigoplus_{\mu, \nu \in \Xi_m^l} \text{Hom}_{\mathcal{H}}(M(\nu), M(\mu))$  et on vérifie qu'il s'agit bien d'un anti-automorphisme involutif de  $\mathcal{S}$ . Le lecteur pourra trouver la preuve de toutes ces assertions dans [DJM, Lemma 6.10].

- Soient  $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}$  et  $\mathbb{S}, \mathbb{T} \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\lambda)$ . Soit  $\varphi_{\mathbb{S}, \mathbb{T}}^{\lambda}$  le vecteur de la base de  $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(M(\nu), M(\mu))$  considérée à la proposition 7.11. On étend  $\varphi_{\mathbb{S}, \mathbb{T}}^{\lambda}$  à  $\mathcal{S}$  de façon additive en imposant que  $\varphi_{\mathbb{S}, \mathbb{T}}^{\lambda}$  est nulle sur  $M(\alpha)$  pour tout  $\alpha \in \Xi_m^l \setminus \{\nu\}$ . L'élément de  $\mathcal{S}$  ainsi défini sera encore noté  $\varphi_{\mathbb{S}, \mathbb{T}}^{\lambda}$ . Soit enfin  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$  l'application définie par  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}(\mathbb{S}, \mathbb{T}) := \varphi_{\mathbb{S}, \mathbb{T}}^{\lambda}$  pour tout  $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}$ ,  $\mathbb{S}, \mathbb{T} \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\lambda)$ .

◇

En utilisant le théorème 6.25 et les résultats de la section précédente, on peut démontrer le « théorème de la base semi-standard » pour  $\mathcal{S}$ .

**Théorème 7.14 ([DJM], Theorem 6.6)** *Reprenons les notations de la définition 7.13. Alors  $(\Lambda_{\mathcal{S}}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}}, \mathcal{C}_{\mathcal{S}}, *_S)$  est une structure cellulaire pour la  $v$ -algèbre de Schur cyclotomique  $\mathcal{S}$ , et la base*

$$\left\{ \varphi_{\mathbb{S}, \mathbb{T}}^{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}, \mathbb{S}, \mathbb{T} \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\lambda) \right\}$$

*est une base cellulaire de  $\mathcal{S}$ , appelée base semi-standard.*

□

**Remarque 7.15** Soit  $\lambda \in \Pi_m^l$ . En accord avec la définition 6.3, notons  $\mathcal{H}(\triangleright \lambda)$  le sous- $R$ -module de  $\mathcal{H}$  engendré par les  $m_{S,T}^\mu$ ,  $\mu \triangleright \lambda$ ,  $S, T \in \text{Std}(\mu)$ . De même, notons  $\mathcal{S}(\triangleright \lambda)$  le sous- $R$ -module de  $\mathcal{S}$  engendré par les  $\varphi_{S,T}^\mu$ ,  $\mu \triangleright \lambda$ ,  $S, T \in \text{Std}(\mu)$ . Il n'est pas difficile de voir que  $\mathcal{S}(\triangleright \lambda)$  est l'ensemble des  $\varphi \in \mathcal{S}$  dont l'image est contenue dans  $\mathcal{H}(\triangleright \lambda)$ .  $\diamond$

Nous allons à présent voir comment calculer le produit de deux éléments de la base semi-standard de  $\mathcal{S}$ .

**Proposition 7.16** Soient  $\lambda, \mu \in \Pi_m^l$ ,  $S, T \in \text{SStd}(\lambda)$  et  $U, V \in \text{SStd}(\mu)$ .

(i) Si  $\text{Type}(T) \neq \text{Type}(U)$ , alors on a  $\varphi_{S,T}^\lambda \varphi_{U,V}^\mu = 0$ .

(ii) Supposons que les tableaux  $T$  et  $U$  sont de même type. Alors il existe  $h_{U,V} \in \mathcal{H}$  tel que  $m_{U,V}^\mu = m_{\text{Type}(U)} h_{U,V}$ . Soit

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{S,T} := \left\{ (\nu, X, Y) \mid \nu \in \Pi_m^l, X \in \text{SStd}(\nu, \text{Type}(S)), Y \in \text{SStd}(\nu, \text{Type}(T)) \right\}.$$

Alors il existe des coefficients  $r_{X,Y}^\nu \in R$  ( $(\nu, X, Y) \in \mathcal{A}$ ) tels que

$$m_{S,T}^\lambda h_{U,V} = \sum_{(\nu, X, Y) \in \mathcal{A}} r_{X,Y}^\nu m_{X,Y}^\nu,$$

et on a

$$\varphi_{S,T}^\lambda \varphi_{U,V}^\mu = \sum_{(\nu, X, Y) \in \mathcal{A}} r_{X,Y}^\nu \varphi_{X,Y}^\nu.$$

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $h \in \mathcal{H}$  tel que  $\varphi_{S,T}^\lambda \varphi_{U,V}^\mu(h) \neq 0$ . Par définition des éléments de la base semi-standard de  $\mathcal{S}$ , on a  $\varphi_{U,V}^\mu(M(\nu)) = \{0\}$  à moins que  $\nu = \text{Type}(V)$ , et  $\varphi_{U,V}^\mu(M(\text{Type}(V))) \subset M(\text{Type}(U))$ . Par conséquent, l'élément non nul  $\varphi_{U,V}^\mu(h)$  appartient à  $M(\text{Type}(U))$ . Le même argument appliqué à  $\varphi_{S,T}^\lambda$  montre que  $\varphi_{U,V}^\mu(h) \in M(\text{Type}(T))$ . Puisque  $M(\text{Type}(T))$  et  $M(\text{Type}(U))$  sont des facteurs directs de  $\bigoplus_{\nu \in \Xi_m^l} M(\nu)$ , on doit avoir  $\text{Type}(T) = \text{Type}(U)$ , d'où le point (i).

Supposons maintenant que  $\text{Type}(T) = \text{Type}(U)$ . D'après le corollaire 7.6, l'élément  $m_{U,V}^\mu$  appartient à  $M(\text{Type}(U))$ , donc il existe  $h_{U,V} \in \mathcal{H}$  tel que  $m_{U,V}^\mu = m_{\text{Type}(U)} h_{U,V}$ . À nouveau d'après le corollaire 7.6, on a  $m_{S,T}^\lambda \in M(\text{Type}(S)) \cap M(\text{Type}(T))^*$ . Comme  $M(\text{Type}(S))$  est un idéal à droite de  $\mathcal{H}$ , on a  $m_{S,T}^\lambda h_{U,V} \in M(\text{Type}(S))$ . De plus, puisque  $m_{S,T}^\lambda$  appartient à  $M(\text{Type}(T))^* = M(\text{Type}(U))^*$ , il existe  $h'_{S,T} \in \mathcal{H}$  tel que  $m_{S,T}^\lambda = h'_{S,T} m_{\text{Type}(U)}$ . On a alors

$$m_{S,T}^\lambda h_{U,V} = h'_{S,T} m_{\text{Type}(U)} h_{U,V} = h'_{S,T} m_{U,V}^\mu;$$

mais toujours d'après le corollaire 7.6, l'élément  $m_{U,V}^\mu$  appartient à  $M(\text{Type}(V))^*$  qui est un idéal à gauche de  $\mathcal{H}$ , donc on a aussi  $m_{S,T}^\lambda h_{U,V} = h'_{S,T} m_{U,V}^\mu \in M(\text{Type}(V))^*$ . En appliquant

encore une fois le corollaire 7.6, on obtient l'existence de coefficients  $r_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}^{\nu} \in R$  ( $(\nu, \mathbb{X}, \mathbb{Y}) \in \mathcal{A}$ ) tels que

$$m_{\mathbb{S},\mathbb{T}}^{\lambda} h_{\mathbb{U},\mathbb{V}} = \sum_{(\nu, \mathbb{X}, \mathbb{Y}) \in \mathcal{A}} r_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}^{\nu} m_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}^{\nu}.$$

Montrons à présent que pour tout  $h \in \mathcal{H}$ , on a

$$\varphi_{\mathbb{S},\mathbb{T}}^{\lambda} \varphi_{\mathbb{U},\mathbb{V}}^{\mu}(h) = \sum_{(\nu, \mathbb{X}, \mathbb{Y}) \in \mathcal{A}} r_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}^{\nu} \varphi_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}^{\nu}(h).$$

Il suffit de le prouver pour  $h = m_{\nu}$  avec  $\nu \in \Xi_m^l$ . Si  $\nu \neq \text{Type}(\mathbb{V})$ , alors on a  $\varphi_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}^{\nu}(h) = 0$  pour tout  $(\nu, \mathbb{X}, \mathbb{Y}) \in \mathcal{A}$ , et on a de même  $\varphi_{\mathbb{U},\mathbb{V}}^{\mu}(h) = 0$ , ce qui montre la formule dans ce cas. Supposons à présent que  $h = m_{\text{Type}(\mathbb{V})}$ . Pour tout  $(\nu, \mathbb{X}, \mathbb{Y}) \in \mathcal{A}$ , on a  $\text{Type}(\mathbb{Y}) = \text{Type}(\mathbb{V})$  et donc  $\varphi_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}^{\nu}(h) = m_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}^{\nu}$ . De même, on a  $\varphi_{\mathbb{U},\mathbb{V}}^{\mu}(h) = m_{\mathbb{U},\mathbb{V}}^{\mu}$ . Il vient alors

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbb{S},\mathbb{T}}^{\lambda} \varphi_{\mathbb{U},\mathbb{V}}^{\mu}(h) &= \varphi_{\mathbb{S},\mathbb{T}}^{\lambda}(m_{\mathbb{U},\mathbb{V}}^{\mu}) = \varphi_{\mathbb{S},\mathbb{T}}^{\lambda}(m_{\text{Type}(\mathbb{U})} h_{\mathbb{U},\mathbb{V}}) = \varphi_{\mathbb{S},\mathbb{T}}^{\lambda}(m_{\text{Type}(\mathbb{T})} h_{\mathbb{U},\mathbb{V}}) \\ &= m_{\mathbb{S},\mathbb{T}}^{\lambda} h_{\mathbb{U},\mathbb{V}} = \sum_{(\nu, \mathbb{X}, \mathbb{Y}) \in \mathcal{A}} r_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}^{\nu} m_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}^{\nu} = \sum_{(\nu, \mathbb{X}, \mathbb{Y}) \in \mathcal{A}} r_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}^{\nu} \varphi_{\mathbb{U},\mathbb{V}}^{\mu}(h), \end{aligned}$$

d'où le résultat.  $\square$

Concluons cette section par un théorème de réduction, qui est l'analogie pour  $\mathcal{S}$  du théorème 6.38. Le théorème qui suit, dont le lecteur trouvera l'énoncé dans [Mat3, Theorem 4.15], peut être prouvé à partir du théorème 6.38 en utilisant la théorie des modules de Young pour les algèbres d'Ariki-Koike (voir [Mat2]).

**Théorème 7.17 ([DM])** *Supposons que  $R$  est un anneau intègre. Fixons une partition*

$$\{u_1, \dots, u_l\} = \prod_{i=1}^r \{u_1^{(i)}, \dots, u_{l_i}^{(i)}\}$$

de l'ensemble  $\{u_1, \dots, u_l\}$ . Supposons que l'élément

$$\prod_{1 \leq i < i' \leq r} \prod_{\substack{1 \leq j \leq l_i \\ 1 \leq j' \leq l_{i'}}} \prod_{-m < d < m} (v^d u_j^{(i)} - u_{j'}^{(i')}) \in R$$

est inversible. Alors la  $v$ -algèbre de Schur cyclotomique  $\mathcal{S}_{R,m}(v; u_1, \dots, u_l)$  est Morita-équivalente à l'algèbre

$$\bigoplus_{\substack{m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N} \\ m_1 + \dots + m_r = m}} \bigotimes_{i=1}^r \mathcal{S}_{R, m_i}(v; u_1^{(i)}, \dots, u_{l_i}^{(i)}).$$

$\square$

### 7.3 Représentations des $v$ -algèbres de Schur cyclotomiques

Nous allons maintenant appliquer la théorie des algèbres cellulaires pour étudier les représentations de  $\mathcal{S}$ .

#### 7.3.1 Résultats provenant de la théorie des algèbres cellulaires

Dans tout ce paragraphe, nous supposons que  $R$  est un corps commutatif. Rappelons que si  $A$  est une  $R$ -algèbre munie d'une structure cellulaire  $(\Lambda, \mathcal{F}, \mathcal{C}, *)$ , nous avons défini à la section 6.1 un module cellulaire à droite  $C(\lambda)$  ainsi qu'un module simple ou nul  $D(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ . Nous avons également défini une matrice de décomposition pour  $A$ .

**Définition 7.18** Soit  $(\Lambda_{\mathcal{S}}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}}, \mathcal{C}_{\mathcal{S}}, *_{\mathcal{S}})$  la structure cellulaire pour  $\mathcal{S}$  considérée au théorème 7.14. Le module cellulaire à droite associé à  $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}$  est appelé *module de Weyl*; on le note  $W(\lambda)$ .  $W(\lambda)$  est un  $R$ -module libre, dont la base naturelle sera notée  $\{\varphi_{\mathbb{T}}^{\lambda} \mid \mathbb{T} \in \text{SStd}(\lambda)\}$  (le vecteur  $\varphi_{\mathbb{T}}^{\lambda}$  correspond à l'élément noté  $C_{\mathbb{T}}^{\lambda}$  dans la définition 6.3). Soit  $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}$ . D'après la section 6.1,  $W(\lambda)$  est muni d'une forme bilinéaire associative  $\psi_{\lambda}$ , donc le radical de  $\psi_{\lambda}$ , que l'on note  $\text{rad } \psi_{\lambda}$ , est un sous-module de  $W(\lambda)$ . Posons

$$L(\lambda) := W(\lambda) / \text{rad } \psi_{\lambda}.$$

Soit

$$\Lambda_{\mathcal{S}}^{\bullet} := \{\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}} \mid L(\lambda) \neq \{0\}\}.$$

**Théorème 7.19** *Supposons que  $R$  est un corps commutatif. Alors avec les notations précédentes, les  $\mathcal{S}$ -modules  $L(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}^{\bullet}$  sont absolument irréductibles, et ils forment un système complet de représentants des classes d'isomorphisme des  $\mathcal{S}$ -modules simples.*

*Démonstration.* Cela découle des théorèmes 7.14 et 6.6. □

Contrairement au cas de l'algèbre d'Ariki-Koike, il est très simple de déterminer  $\Lambda_{\mathcal{S}}^{\bullet}$  pour la  $v$ -algèbre de Schur cyclotomique  $\mathcal{S}$  que nous avons définie.

**Théorème 7.20** *Supposons que  $R$  est un corps commutatif. Alors avec les notations de ce paragraphe, on a  $\Lambda_{\mathcal{S}}^{\bullet} = \Lambda_{\mathcal{S}}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}$ . Par définition de la forme bilinéaire  $\psi_{\lambda}$ , on a

$$\varphi_{\mathbb{T}\lambda, \mathbb{T}\lambda} \varphi_{\mathbb{T}\lambda, \mathbb{T}\lambda} \equiv \psi_{\lambda}(\varphi_{\mathbb{T}\lambda}, \varphi_{\mathbb{T}\lambda}) \varphi_{\mathbb{T}\lambda, \mathbb{T}\lambda} \pmod{\mathcal{S}(\triangleright \lambda)},$$

où l'ensemble  $\mathcal{S}(\triangleright \lambda)$  est défini à la remarque 7.15. Mais d'après la remarque 7.10, la restriction de  $\varphi_{\mathbb{T}\lambda, \mathbb{T}\lambda}$  à  $M(\lambda)$  est l'identité, donc  $\varphi_{\mathbb{T}\lambda, \mathbb{T}\lambda}$  est un idempotent et  $\psi_{\lambda}(\varphi_{\mathbb{T}\lambda}, \varphi_{\mathbb{T}\lambda}) = 1$ . Par conséquent, on a  $\psi_{\lambda} \neq 0$  et  $L(\lambda) \neq \{0\}$ . □

**Définition 7.21** Si  $R$  est un corps commutatif, la matrice

$$D = \left( d_{\lambda, \mu} := [W(\lambda') : L(\mu')] \right)_{\lambda, \mu \in \Lambda_{\mathcal{S}}}$$

(bien définie, d'après le théorème 7.19 et le théorème de Jordan-Hölder) est appelée *matrice de décomposition* de la  $v$ -algèbre de Schur cyclotomique  $\mathcal{S}$ .  $\diamond$

**Remarque 7.22** Nous adoptons ainsi une convention différente de celle du chapitre 6 ; en effet, la matrice de décomposition de  $\mathcal{S}$  (au sens de la définition 6.8) serait plutôt la matrice  $\overline{D} := (d_{\lambda', \mu'})_{\lambda, \mu \in \Lambda_{\mathcal{S}}}$ . Toutefois,  $D$  s'obtient à partir de  $\overline{D}$  via une permutation des lignes et des colonnes, c'est pourquoi nous appelons encore « matrice de décomposition » la matrice  $D$ . Nous préférons travailler avec  $D$  plutôt que  $\overline{D}$  pour être en accord avec le chapitre 8 (cf. conjecture 8.5).  $\diamond$

**Proposition 7.23** *Supposons que  $R$  est un corps commutatif. Alors la matrice de décomposition de  $\mathcal{S}$  est unitriangulaire, i.e. pour tout  $\lambda, \mu \in \Lambda_{\mathcal{S}}$ , on a  $[W(\lambda) : L(\mu)] \neq 0 \Rightarrow \lambda \supseteq \mu$  et  $[W(\mu) : L(\mu)] = 1$ .*

*Démonstration.* Cela découle du théorème 7.14 et de la proposition 6.9.  $\square$

**Remarque 7.24** Supposons que  $R$  est un corps commutatif. Alors le théorème 7.20, la proposition 7.23 ainsi que la remarque 6.14 montrent que la  $v$ -algèbre de Schur cyclotomique  $\mathcal{S}$  est une algèbre quasi-héréditaire.  $\diamond$

**Théorème 7.25** *Supposons que  $R$  est un corps commutatif. Alors avec les notations de ce paragraphe, les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $\mathcal{S}$  est semi-simple (déployée).
- (ii) Pour tout  $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}$ , on a  $W(\lambda) = L(\lambda)$ .
- (iii) Pour tout  $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{S}}$ , on a  $\text{rad } \psi_{\lambda} = \{0\}$ , i.e.  $\psi_{\lambda}$  est non-dégénérée.
- (iv) La matrice de décomposition de  $\mathcal{S}$  est l'identité.

*Démonstration.* Cela résulte des théorèmes 7.14 et 6.12.  $\square$

Nous allons voir également au paragraphe suivant (cf. corollaire 7.28) que si  $R$  est un corps commutatif, alors  $\mathcal{S}_R$  est semi-simple si et seulement si  $\mathcal{H}_R$  l'est.

### 7.3.2 Foncteur de Schur et théorème du double centralisateur

Dans ce paragraphe, nous supposons à nouveau que  $R$  est un anneau intègre. Posons  $\mathcal{M} := \bigoplus_{\mu \in \Xi_m^l} M(\mu)$  et  $\omega := ((0), \dots, (0), (1^m)) \in \Pi_m^l$  (ici,  $(1^m)$  désigne la partition de  $m$  dont toutes les parts sont égales à 1). Notons que  $m_{\omega} = 1$ , donc  $\mathcal{H} = M(\omega)$  est un sous-module de  $\mathcal{M}$ . Pour  $h \in \mathcal{H}$ , soit  $\rho_h \in \text{End}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H})$  l'endomorphisme donné par la multiplication à gauche par  $h$ . D'après la remarque 7.10, l'élément  $\varphi_{\mathbb{T}\omega, \mathbb{T}\omega} \in \text{End}_R(\mathcal{M})$  est la projection sur  $\mathcal{H}$  parallèlement à  $\bigoplus_{\mu \in \Xi_m^l \setminus \{\omega\}} M(\mu)$ ; par conséquent,  $\varphi_{\mathbb{T}\omega, \mathbb{T}\omega}$  est un idempotent de  $\mathcal{S}$ . Pour  $h \in \mathcal{H}$ , posons

$$\widehat{\rho}_h := \varphi_{\mathbb{T}\omega, \mathbb{T}\omega} \rho_h \varphi_{\mathbb{T}\omega, \mathbb{T}\omega} \in \text{End}_R(\mathcal{M}) ;$$

puisque  $\varphi_{\mathbb{T}\omega, \mathbb{T}\omega}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{H}$  et  $\rho_h \in \text{End}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H})$ , ceci définit effectivement un élément de l'algèbre  $\mathcal{S} = \text{End}_{\mathcal{H}}(\mathcal{M})$ . Soit  $M$  un  $\mathcal{S}$ -module à droite. Puisque  $\varphi_{\mathbb{T}\omega, \mathbb{T}\omega}$  est un idempotent de  $\mathcal{S}$ , on vérifie aisément que l'application

$$(m \varphi_{\mathbb{T}\omega, \mathbb{T}\omega}, h) \in M \varphi_{\mathbb{T}\omega, \mathbb{T}\omega} \times \mathcal{H} \mapsto (m \varphi_{\mathbb{T}\omega, \mathbb{T}\omega}) \cdot h := m \varphi_{\mathbb{T}\omega, \mathbb{T}\omega} \widehat{\rho}_h \in M \varphi_{\mathbb{T}\omega, \mathbb{T}\omega}$$

est bien définie et munit  $M \varphi_{\mathbb{T}\omega, \mathbb{T}\omega}$  d'une structure de  $\mathcal{H}$ -module à droite. Nous avons ainsi construit un foncteur

$$\text{mod-}\mathcal{S} \rightarrow \text{mod-}\mathcal{H}, \quad M \mapsto M \varphi_{\mathbb{T}\omega, \mathbb{T}\omega};$$

ce foncteur est appelé *foncteur de Schur*.

**Théorème 7.26 ([DJM], Proposition 2.19)**

- (i) Pour  $\lambda \in \Pi_m^l$ , on a des isomorphismes  $W(\lambda) \varphi_{\mathbb{T}\omega, \mathbb{T}\omega} \cong S(\lambda)$  et  $L(\lambda) \varphi_{\mathbb{T}\omega, \mathbb{T}\omega} \cong D(\lambda)$ .
- (ii) Supposons que  $R$  est un corps commutatif. Alors pour tout  $\lambda \in \Pi_m^l$ ,  $\mu \in \Lambda_{\mathcal{H}}^{\bullet}$ , on a  $[S(\lambda) : D(\mu)] = [W(\lambda) : L(\mu)]$ .  $\square$

**Remarque 7.27** Ce théorème montre en particulier que la matrice de décomposition de  $\mathcal{H}$  est une sous-matrice de la matrice de décomposition de  $\mathcal{S}$ . (Le lecteur troublé par ce fait pourra se reporter à la remarque 6.29.)  $\diamond$

**Corollaire 7.28** Supposons que  $R$  est un corps commutatif. Alors  $\mathcal{S}_R$  est semi-simple si et seulement si  $\mathcal{H}_R$  l'est.

*Démonstration.* Supposons que  $\mathcal{H}$  est semi-simple. Le théorème 6.37 ((ii)  $\Rightarrow$  (v)) implique que la matrice de décomposition de  $\mathcal{H}$  est la matrice identité. D'après le théorème 7.26 (ii), la matrice de décomposition de  $\mathcal{S}$  est également l'identité, donc le théorème 7.25 ((iv)  $\Rightarrow$  (i)),  $\mathcal{S}$  est semi-simple. Réciproquement, supposons que  $\mathcal{S}$  est semi-simple. Soit  $\lambda \in \Pi_m^l$ . D'après le théorème 7.25 ((i)  $\Rightarrow$  (ii)) et le théorème 7.26 (i), on a

$$S(\lambda) \cong W(\lambda) \varphi_{\mathbb{T}\omega, \mathbb{T}\omega} = L(\lambda) \varphi_{\mathbb{T}\omega, \mathbb{T}\omega} \cong D(\lambda),$$

donc  $S(\lambda)$  et  $D(\lambda)$  sont isomorphes. Puisque  $D(\lambda)$  est un quotient du  $R$ -espace vectoriel  $S(\lambda)$  de dimension finie, on a  $S(\lambda) = D(\lambda)$ . Le théorème 6.37 ((iii)  $\Rightarrow$  (ii)) montre alors que  $\mathcal{H}$  est semi-simple.  $\square$

Observons que  $\mathcal{M}$  est un  $(\mathcal{S}, \mathcal{H})$ -bi-module. En fait, chacune des algèbres  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{S}$  centralise l'action de l'autre; nous avons donc un analogue cyclotomique de la dualité de Schur-Weyl.

**Théorème 7.29 (Théorème du double centralisateur, [Mat3])** On a

$$\mathcal{S} \cong \text{End}_{\mathcal{H}} \left( \bigoplus_{\mu \in \Xi_m^l} M(\mu) \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{H} \cong \text{End}_{\mathcal{S}} \left( \bigoplus_{\mu \in \Xi_m^l} M(\mu) \right).$$

$\square$

## 7.4 Formule sommatoire de Jantzen

### 7.4.1 Énoncé de la sommatoire de Jantzen

**Définition 7.30** On dit que  $(R, K, F)$  est un *triplet modulaire* si  $R$  est un anneau de valuation discrète, d'unique idéal maximal  $\wp$ ,  $K$  est le corps des fractions de  $R$  et  $F = R/\wp R$  est le corps résiduel.  $\diamond$

Dans toute cette section, nous supposons que  $(R, K, F)$  est un triplet modulaire. Soit  $\wp$  l'unique idéal maximal de  $R$ . Puisque  $R$  est un anneau de valuation discrète, pour tout  $x \in R \setminus \{0\}$ , il existe un unique entier  $\nu_\wp(x) \in \mathbb{N}$  tel que  $x \in \wp^{\nu_\wp(x)} R$  et  $x \notin \wp^{\nu_\wp(x)+1} R$ . On pose également  $\nu_\wp(0) := +\infty$ . L'application  $\nu_\wp : R \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  ainsi définie satisfait les propriétés suivantes :

$$(i) \quad \nu_\wp(xy) = \nu_\wp(x) + \nu_\wp(y) \quad \text{et} \quad (ii) \quad \nu_\wp(x+y) \geq \min(\nu_\wp(x), \nu_\wp(y)) \quad (x, y \in R).$$

D'après (i), on peut étendre  $\nu_\wp$  à  $K$  en posant  $\nu_\wp(x/y) = \nu_\wp(x) - \nu_\wp(y)$  ( $x, y \in R, y \neq 0$ ). Les propriétés (i) et (ii) sont encore vraies pour tout  $x, y \in K$ . On dit que l'application  $\nu_\wp : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$  ainsi définie est une valuation, appelée *valuation  $\wp$ -adique*.

Nous introduisons à présent la filtration de Jantzen pour les  $R$ -modules. Si  $M$  est un  $R$ -module, on note  $M_F := F \otimes_R M$  le module spécialisé (ici,  $R$  agit à droite sur  $F = R/\wp R$  via la surjection naturelle  $R \rightarrow R/\wp R$ ).

**Définition 7.31 ([AM])** Soit  $M$  un  $R$ -module muni d'une forme bilinéaire symétrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On pose pour  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$M(i) := \{u \in M \mid \forall v \in M, \nu_\wp(\langle u, v \rangle) \geq i\}.$$

La *filtration de Jantzen* de  $M$  est la suite

$$M_F = M_F(0) \supset M_F(1) \supset \cdots,$$

où  $M_F(i) := (M(i) + \wp M)/\wp M$  ( $i \geq 0$ ).  $\diamond$

**Remarque 7.32** Soit  $(M_F(i))_{i \in \mathbb{N}}$  la filtration de Jantzen du  $R$ -module  $M$  muni d'une certaine forme bilinéaire symétrique. Alors  $M_F(1)$  est le radical de cette forme bilinéaire (définie sur  $M_F \times M_F$ ). De plus, si  $M$  est libre de rang fini comme  $R$ -module, alors on a  $M_F(i) = \{0\}$  pour  $i$  assez grand.  $\diamond$

Nous allons maintenant considérer, pour  $\lambda_l \in \Pi_m^l$ , la filtration de Jantzen  $(W_F(\lambda_l; i))_{i \in \mathbb{N}}$  du  $\mathcal{S}_R$ -module de Weyl  $W(\lambda_l)$ , muni de la forme bilinéaire  $\psi_{\lambda_l}$  (cf. définition 7.18). D'après la remarque 6.4, les  $W_F(\lambda_l; i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  sont des  $\mathcal{S}_F$ -modules.

James et Mathas ont prouvé le résultat suivant [JM, Theorem 4.3].



**Théorème 7.33 (Formule sommatoire de Jantzen)**

Supposons que  $\mathcal{S}_K$  est semi-simple. Alors pour tout  $\lambda_l \in \Pi_m^l$ , on a dans  $\mathcal{R}_0(\mathcal{S}_F)$  :

$$\sum_{i>0} [W_F(\lambda_l; i)] = \sum_{\mu_l \in \Pi_m^l} j_{\lambda_l, \mu_l}^{\triangleleft} [W_F(\mu_l)],$$

où la matrice  $J^{\triangleleft} = (j_{\lambda_l, \mu_l}^{\triangleleft})_{\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l}$  est explicitée au paragraphe 7.4.2. □

La matrice  $J^{\triangleleft}$  dépend du choix de l'anneau  $R$  et des paramètres  $v, u_1, \dots, u_l \in R$  et  $m, l \in \mathbb{N}$ . Les coefficients de  $J^{\triangleleft}$  sont des valuations  $\wp$ -adiques de certains déterminants de Gram ; au paragraphe 7.4.2, nous allons les décrire de façon combinatoire à l'aide de rubans contenus dans les diagrammes de  $l$ -multi-partitions. Ici  $\triangleleft$  désigne l'ordre de dominance sur les multi-partitions. Nous utilisons la notation  $J^{\triangleleft}$  au lieu de  $J$  pour mettre en évidence le fait que  $J^{\triangleleft}$  est triangulaire pour cet ordre, c'est-à-dire que l'on a  $\lambda_l \not\triangleleft \mu_l \Rightarrow j_{\lambda_l, \mu_l}^{\triangleleft} = 0$ . Nous illustrerons cette formule par l'exemple 7.40.

Nous allons maintenant donner une identité matricielle équivalente à la formule sommatoire de Jantzen.

**Définition 7.34** On définit la matrice  $D(q) = (d_{\lambda_l, \mu_l}(q))_{\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l}$  par

$$d_{\lambda_l, \mu_l}(q) := \sum_{i \geq 0} [W_F(\lambda_l'; i) / W_F(\lambda_l'; i+1) : L_F(\mu_l')] q^i \in \mathbb{N}[q] \quad (\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l)$$

(noter la présence de multi-partitions conjuguées). ◇

Comme la matrice  $J^{\triangleleft}$ , la matrice  $D(q)$  dépend du choix de l'anneau  $R$  et des paramètres  $v, u_1, \dots, u_l \in R$  et  $m, l \in \mathbb{N}$ .

**Remarque 7.35** La matrice  $D(q)$  dépend du choix de l'anneau  $R$  et des paramètres  $v, u_1, \dots, u_l \in R$  et  $m, l \in \mathbb{N}$ . Notons que  $d_{\lambda_l, \mu_l}(1)$  est égal à la multiplicité de  $L_F(\mu_l')$  comme facteur de composition de  $W_F(\lambda_l')$ , donc  $D(1)$  est la matrice de décomposition  $D$  de  $\mathcal{S}_F$ . ◇

**Lemme 7.36** Pour  $\lambda_l \in \Pi_m^l$ , notons  $\overline{\lambda}_l \in \Pi_m^l$  la multi-partition conjuguée à  $\lambda_l$  et gardons le symbole  $'$  pour désigner la dérivation par rapport à la variable  $q$ . Soit  $J = (j_{\lambda_l, \mu_l})_{\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l}$  une matrice à coefficients entiers. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Dans  $\mathcal{R}_0(\mathcal{S}_F)$ , on a pour tout  $\lambda_l \in \Pi_m^l$ , 
$$\sum_{i>0} [W_F(\overline{\lambda}_l; i)] = \sum_{\nu_l \in \Pi_m^l} j_{\lambda_l, \nu_l} [W_F(\overline{\nu}_l)].$$

(ii)  $D'(1) = JD(1)$ .

*Démonstration.* Soit  $\lambda_l \in \Pi_m^l$ . D'après le théorème 7.19, les  $[L_F(\overline{\mu}_l)]$ ,  $\mu_l \in \Pi_m^l$  forment une  $\mathbb{Z}$ -base du groupe de Grothendieck  $\mathcal{R}_0(\mathcal{S}_F)$ . On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i>0} [W_F(\overline{\lambda}_l; i)] &= \sum_{i>0} \sum_{\mu_l \in \Pi_m^l} [W_F(\overline{\lambda}_l; i) : L_F(\overline{\mu}_l)] [L_F(\overline{\mu}_l)] \\
&= \sum_{\mu_l \in \Pi_m^l} \left( \sum_{i>0} \sum_{j \geq i} [W_F(\overline{\lambda}_l; j) / W_F(\overline{\lambda}_l; j+1) : L_F(\overline{\mu}_l)] \right) [L_F(\overline{\mu}_l)] \\
&= \sum_{\mu_l \in \Pi_m^l} \left( \sum_{j>0} \sum_{0 < i \leq j} [W_F(\overline{\lambda}_l; j) / W_F(\overline{\lambda}_l; j+1) : L_F(\overline{\mu}_l)] \right) [L_F(\overline{\mu}_l)] \\
&= \sum_{\mu_l \in \Pi_m^l} d_{\lambda_l, \mu_l}^l(1) [L_F(\overline{\mu}_l)];
\end{aligned}$$

de même, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu_l \in \Pi_m^l} j_{\lambda_l, \nu_l} [W_F(\overline{\nu}_l)] &= \sum_{\mu_l, \nu_l \in \Pi_m^l} j_{\lambda_l, \nu_l} [W_F(\overline{\nu}_l) : L_F(\overline{\mu}_l)] [L_F(\overline{\mu}_l)] \\
&= \sum_{\mu_l \in \Pi_m^l} \left( \sum_{\nu_l \in \Pi_m^l} j_{\lambda_l, \nu_l} [W_F(\overline{\nu}_l) : L_F(\overline{\mu}_l)] \right) [L_F(\overline{\mu}_l)] \\
&= \sum_{\mu_l \in \Pi_m^l} \left( \sum_{\nu_l \in \Pi_m^l} j_{\lambda_l, \nu_l} d_{\nu_l, \mu_l}(1) \right) [L_F(\overline{\mu}_l)].
\end{aligned}$$

Puisque les  $[L_F(\overline{\mu}_l)]$ ,  $\mu_l \in \Pi_m^l$  sont linéairement indépendants, le lemme s'ensuit.  $\square$

**Corollaire 7.37** *Supposons que  $S_K$  est semi-simple. Alors avec les notations du théorème 7.33, on a  $D'(1) = J^<D(1)$ .*  $\square$

#### 7.4.2 Définition de la matrice $J^<$

Suivant [JM], nous définissons dans ce paragraphe une matrice  $\mathcal{J} = (J_{\lambda_l, \mu_l})_{\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l}$ , à coefficients dans  $R$ ; cette matrice dépend des paramètres  $m, l \in \mathbb{N}$  et  $v, u_1, \dots, u_l \in R$ . Fixons  $\lambda_l = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(l)})$ ,  $\mu_l = (\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(l)}) \in \Pi_m^l$ , et envisageons les cas suivants.

- Cas ( $J_1$ ). Supposons que  $\lambda_l \neq \mu_l$  et qu'il existe deux entiers  $d, d' \in \llbracket 1; l \rrbracket$ ,  $d \neq d'$  vérifiant les conditions suivantes:  $\mu^{(d)} \subset \lambda^{(d)}$ ,  $\lambda^{(d')} \subset \mu^{(d')}$ ,  $\lambda^{(b)} = \mu^{(b)}$  pour tout  $b \notin \{d, d'\}$ , et  $\rho := \lambda^{(d)} / \mu^{(d)}$  et  $\rho' := \mu^{(d')} / \lambda^{(d')}$  sont deux rubans de même longueur  $\widehat{h}$ . Soient  $\text{hd}(\rho) = (i, j, d)$  la tête de  $\rho$  et  $\text{hd}(\rho') = (i', j', d')$  la tête de  $\rho'$ . On pose alors

$$\varepsilon := (-1)^{\text{ht}(\rho) + \text{ht}(\rho')} \quad \text{et} \quad J_{\lambda_l, \mu_l} := (u_d v^{j-i} - u_{d'} v^{j'-i'})^\varepsilon.$$

- Cas ( $J_2$ ). Supposons que  $\lambda_l \neq \mu_l$  et qu'il existe  $d \in \llbracket 1; l \rrbracket$  tel que  $\lambda^{(b)} = \mu^{(b)}$  pour tout  $b \neq d$ , et  $\rho := \lambda^{(d)} / (\lambda^{(d)} \cap \mu^{(d)})$  et  $\rho' := \mu^{(d)} / (\lambda^{(d)} \cap \mu^{(d)})$  sont deux rubans de même longueur  $\widehat{h}$ . Par définition de  $\rho$  et  $\rho'$ , on a  $\rho \cap \rho' = \emptyset$ , d'où l'on déduit (en fonction des positions relatives de  $\rho$  et  $\rho'$ ) que  $\lambda^{(d)} \triangleleft \mu^{(d)}$  ou  $\mu^{(d)} \triangleleft \lambda^{(d)}$ . Supposons que  $\lambda^{(d)} \triangleleft \mu^{(d)}$ . Soit  $\rho'' \subset (\lambda^{(d)} \cap \mu^{(d)})$  le ruban obtenu en joignant la queue de  $\rho$  à la tête de  $\rho'$ , mais qui ne contient pas ces deux derniers nœuds (cf. figure 7.1). Notons  $\text{hd}(\rho) = (i, j, d)$  (*resp.*

$\text{hd}(\rho') = (i', j', d')$ , resp.  $\text{hd}(\rho'') = (i'', j'', d'')$  la tête de  $\rho$  (resp.  $\rho'$ , resp.  $\rho''$ ). Posons enfin

$$\varepsilon_1 := (-1)^{\text{ht}(\rho) + \text{ht}(\rho')}, \quad \varepsilon_2 := (-1)^{\text{ht}(\rho \cup \rho'') + \text{ht}(\rho'' \cup \rho')} \quad \text{et}$$

$$J_{\lambda_l, \mu_l} := (u_d(v^{j-i} - v^{j'-i'}))^{\varepsilon_1} \cdot (u_d(v^{j-i} - v^{j''-i''}))^{\varepsilon_2}.$$

Si  $\mu^{(d)} \triangleleft \lambda^{(d)}$ , on pose  $J_{\lambda_l, \mu_l} := J_{\mu_l, \lambda_l}$ .

– Cas ( $J_3$ ). Dans tous les autres cas, on pose

$$J_{\lambda_l, \mu_l} := 1.$$

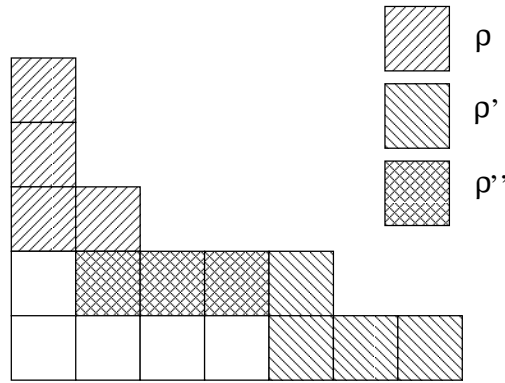


FIG. 7.1 – Dessin des rubans  $\rho$ ,  $\rho'$  et  $\rho''$  (les nœuds de  $(\lambda^{(d)} \cap \mu^{(d)}) - \rho''$  sont représentés en blanc).

Rappelons que  $\wp$  est l'unique idéal maximal de  $R$ . On définit une matrice

$$J = J_{\wp} = (j_{\lambda_l, \mu_l})_{\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l}$$

par la formule

$$j_{\lambda_l, \mu_l} := \nu_{\wp}(J_{\lambda_l, \mu_l}) \in \mathbb{Z} \quad (\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l).$$

Fixons maintenant un ordre partiel  $\leq$  sur  $\Pi_m^l$ , et notons  $<$  l'ordre strict associé. On définit alors une matrice  $J^< = (j_{\lambda_l, \mu_l}^<)_{\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l}$  par les formules

$$j_{\lambda_l, \mu_l}^< := \begin{cases} j_{\lambda_l, \mu_l} & \text{si } \lambda_l < \mu_l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l).$$

La matrice  $J^<$  dépend donc des mêmes paramètres que  $J$ , ainsi que de l'ordre  $<$ .

**Définition 7.38** La matrice  $J^{\triangleleft}$  du théorème 7.33 est la matrice  $J^<$  que nous venons de définir, où  $< = \triangleleft$  est l'ordre de dominance sur les multi-partitions.  $\diamond$

**Remarque 7.39** Avec les notations de [JM], on a pour tout  $\lambda_l, \nu_l \in \Pi_m^l$ ,  $\nu_\varphi(g_{\lambda_l, \nu_l}) = j_{\lambda_l', \nu_l'}^\triangleleft$  (cf. [JM, Definition 3.36 & Remark 3.37]). Notons que  $\lambda_l' \triangleleft \nu_l'$  si et seulement si  $\lambda_l \triangleright \nu_l$ . Nous préférons travailler avec des multi-partitions conjuguées pour être en accord avec le chapitre 8 (cf. théorème 8.3).  $\diamond$

**Exemple 7.40** Prenons  $l = 2$  et  $m = 4$ . Soient  $\widehat{R} := \mathbb{C}[x, x^{-1}]$  l'anneau des polynômes de Laurent en une indéterminée sur  $\mathbb{C}$ ,  $\varphi$  l'idéal premier de  $\widehat{R}$  engendré par  $x - i$  (où  $i \in \mathbb{C}$  est une racine carrée de  $-1$ ) et  $R := \mathbb{C}[x, x^{-1}]_\varphi$  le localisé de  $\widehat{R}$  en  $\varphi$ . On a  $K = \mathbb{C}(x)$  et  $F = \mathbb{C}$ . Prenons  $v = x^2$ ,  $u_1 = -x^6$  et  $u_2 = x^{-12}$ . Il s'agit du choix de paramètres donné par le lemme 7.41 pour  $l = 2$ ,  $m = 4$ ,  $n = 2$  et  $s_l = (4, -4)$ . Soit  $\lambda_l := ((3,1), \emptyset)$ . Le calcul de  $j_{\lambda_l', \mu_l'}^\triangleleft$  pour certaines  $l$ -multi-partitions  $\mu_l$  est donné dans le tableau ci-dessous.

$\mu_l$	Cas	$J_{\lambda_l', \mu_l'}$	$j_{\lambda_l', \mu_l'}^\triangleleft$
$(\emptyset, (1,1,1,1))$	$(J_1)$	$x^{-16} + x^6$	1
$(\emptyset, (2,1,1))$	$(J_1)$	$(x^{-16} + x^4)^{-1}$	0
$(\emptyset, (2,2))$	$(J_3)$	1	0
$((1,1), (1,1))$	$(J_1)$	$(x^{-16} + x^6)^{-1}$	-1
$((1,1,1,1), \emptyset)$	$(J_2)$	$\frac{x^{-4} - 1}{x^{-4} - x^4}$	0
$((2,2), \emptyset)$	$(J_2)$	$\frac{x^{-4} - 1}{x^{-4} - x^{-2}}$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

On calcule ainsi  $j_{\lambda_l', \mu_l'}^\triangleleft$  pour tout  $\mu_l \in \Pi_m^l$  (on a  $\#\Pi_m^l = 20$ ). La formule sommatoire de Jantzen donne alors :

$$\sum_{j>0} [W_F(((3,1), \emptyset); j)] = [W_F((2,2), \emptyset)] + [W_F((2,1,1), \emptyset)] + [W_F((2,1), (1))] - [W_F((1,1), (1,1))] + [W_F(\emptyset, (3,1))] + [W_F(\emptyset, (1,1,1,1))].$$

$\diamond$

Pour un choix approprié de paramètres, des coefficients de  $J = (j_{\lambda_l, \mu_l})_{\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l}$  ont une expression plus simple. Nous reviendrons sur ce choix de paramètres au paragraphe 8.2.1. Les notations du lemme 7.41 ayant trait à des objets combinatoires sont données à la section 1.1.

**Lemme 7.41** Soient  $n \geq 2$  un entier et  $s_l = (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}^l$ . Choisissons les paramètres suivants. Soient  $\widehat{R} := \mathbb{C}[x, x^{-1}]$  l'anneau des polynômes de Laurent en une indéterminée

sur  $\mathbb{C}$ ,  $\xi := \exp\left(\frac{2i\pi}{nl}\right) \in \mathbb{C}$  une racine primitive  $nl$ -ième de l'unité,  $\wp$  l'idéal premier de  $\widehat{R}$  engendré par  $x - \xi$ ,  $R := \mathbb{C}[x, x^{-1}]_{\wp}$  le localisé de  $\widehat{R}$  en  $\wp$ ,

$$v := x^l \quad \text{et} \quad u_d := \xi^{nd} x^{ls_d - nd} \quad (1 \leq d \leq l).$$

Nos paramètres dépendent donc de  $n$ ,  $l$  et  $\mathbf{s}_l$ . Avec ce choix de paramètres, nous avons les expressions suivantes des coefficients de  $J$ .

1°) Supposons que  $(\lambda_l, \mu_l) \in \Pi_m^l \times \Pi_m^l$  satisfait les conditions  $(J_1)$ . Alors

$$j_{\lambda_l, \mu_l} = \begin{cases} (-1)^{\text{ht}(\rho) + \text{ht}(\rho')} & \text{si } \text{res}_n(\text{hd}(\rho)) = \text{res}_n(\text{hd}(\rho')), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2°) Supposons que  $(\lambda_l, \mu_l) \in \Pi_m^l \times \Pi_m^l$  satisfait les conditions  $(J_2)$ . Alors

$$j_{\lambda_l, \mu_l} = (-1)^{\text{ht}(\rho) + \text{ht}(\rho')} \varepsilon,$$

où

$$\varepsilon := \begin{cases} 1 & \text{si } \text{res}_n(\text{hd}(\rho)) = \text{res}_n(\text{hd}(\rho')) \quad \text{et} \quad \widehat{h} \not\equiv 0 \pmod{n}, \\ -1 & \text{si } \text{res}_n(\text{hd}(\rho)) \neq \text{res}_n(\text{hd}(\rho')) \quad \text{et} \quad \widehat{h} \equiv 0 \pmod{n}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* Supposons que  $(\lambda_l, \mu_l)$  satisfait les conditions  $(J_1)$ . On a alors

$$j_{\lambda_l, \mu_l} = (-1)^{\text{ht}(\rho) + \text{ht}(\rho')} \nu_{\wp}(P_{\lambda_l, \mu_l}(x)),$$

avec  $P_{\lambda_l, \mu_l}(x) := u_d x^{l(j-i)} - u_{d'} x^{l(j'-i')}$ . Observons que

$$P_{\lambda_l, \mu_l}(x) = \xi^{a_1} x^{a_2} - \xi^{a_3} x^{a_4},$$

avec  $a_1 := dn$ ,  $a_2 := ls_d - dn + l(j-i)$ ,  $a_3 := d'n$  et  $a_4 := ls_{d'} - d'n + l(j'-i')$ . En utilisant le fait que  $\nu_{\wp}(x^N) = 0$  pour tout  $N \in \mathbb{Z}$  et que  $x^N P_{\lambda_l, \mu_l}(x) \in \mathbb{C}[x]$  pour un  $N \in \mathbb{Z}$  convenable, on a

$$\begin{aligned} \nu_{\wp}(P_{\lambda_l, \mu_l}(x)) &\geq 0, \\ \nu_{\wp}(P_{\lambda_l, \mu_l}(x)) &\geq 1 \iff P_{\lambda_l, \mu_l}(\xi) = 0, \\ \nu_{\wp}(P_{\lambda_l, \mu_l}(x)) &\geq 2 \iff P_{\lambda_l, \mu_l}(\xi) = P'_{\lambda_l, \mu_l}(\xi) = 0. \end{aligned}$$

Un calcul direct montre que  $\nu_{\wp}(P_{\lambda_l, \mu_l}(x)) \geq 1$  si et seulement si  $a_1 + a_2 \equiv a_3 + a_4 \pmod{nl}$ , i.e.  $l(s_d + j - i) \equiv l(s_{d'} + j' - i') \pmod{nl}$ , soit encore  $\text{res}_n(\text{hd}(\rho)) = \text{res}_n(\text{hd}(\rho'))$ . De plus, on a

$$\begin{aligned} \nu_{\wp}(P_{\lambda_l, \mu_l}(x)) \geq 2 &\iff \begin{cases} a_1 + a_2 \equiv a_3 + a_4 \pmod{nl} \\ a_2 \xi^{a_1 + a_2 - 1} = a_4 \xi^{a_3 + a_4 - 1} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_1 + a_2 \equiv a_3 + a_4 \pmod{nl} \\ a_2 = a_4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_1 \equiv a_3 \pmod{nl} \\ a_2 = a_4 \end{cases}. \end{aligned}$$

Or la condition  $a_1 \equiv a_3 \pmod{nl}$  entraîne  $d \equiv d' \pmod{l}$ , ce qui est impossible car  $d$  et  $d'$  sont deux entiers distincts compris entre 1 et  $l$ . Par conséquent, on  $\nu_{\wp}(P_{\lambda_l, \mu_l}(x)) \leq 1$ , d'où le point 1°) du lemme. Supposons maintenant que  $(\lambda_l, \mu_l)$  satisfait les conditions  $(J_2)$ . Avec les notations de  $(J_2)$ , on a alors  $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ , d'où

$$j_{\lambda_l, \mu_l} = (-1)^{\text{ht}(\rho) + \text{ht}(\rho')} \nu_{\wp}(P_{\lambda_l, \mu_l}(x)), \quad \text{avec}$$

$$P_{\lambda_l, \mu_l}(x) := \frac{u_d(x^{l(j-i)} - x^{l(j'-i')})}{u_d(x^{l(j-i)} - x^{l(j''-i'')})}$$

$$= \frac{x^{l((j'-i')-(j-i))} - 1}{x^{l((j''-i'')-(j-i))} - 1} = \frac{x^{l(\text{cont}(\text{hd}(\rho')) - \text{cont}(\text{hd}(\rho)))} - 1}{x^{l\widehat{h}} - 1}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que si  $N \in \mathbb{Z}$ , alors  $\nu_{\wp}(x^{lN} - 1) = 1$  si  $ln$  divise  $lN$ , ou encore si  $n$  divise  $N$ , et  $\nu_{\wp}(x^{lN} - 1) = 0$  sinon.  $\square$



## Chapitre 8

# Bases d'Uglov et $v$ -algèbres de Schur cyclotomiques

Un des problèmes centraux de la théorie des représentations des  $v$ -algèbres de Schur cyclotomiques est de calculer la matrice de décomposition de  $\mathcal{S}_{R,m}(v; u_1, \dots, u_l)$  lorsque les paramètres sont spécialisés à une racine  $n$ -ième de l'unité. Étant donné une filtration de Jantzen pour les modules de Weyl, nous avons défini un  $q$ -analogue  $D(q)$  de la matrice de décomposition, dont les coefficients sont les multiplicités graduées des facteurs de composition des modules de Weyl (cf. définition 7.34). Soit par ailleurs  $\Delta(q)$  la matrice de transition entre la base standard et la base canonique  $G^+$  de la composante homogène de degré  $m$  du  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  (cf. chapitre 3). Grâce au théorème d'Ariki (cf. théorème 6.41 et corollaire 6.48), il semble naturel de conjecturer que pour des choix appropriés de paramètres, on a l'identité  $D(q) = \Delta(q)$ . Ceci donnerait, grâce au chapitre 5, un algorithme pour calculer les matrices de décomposition des  $v$ -algèbres de Schur cyclotomiques. Dans le cas où  $l = 1$ , Varragnolo et Vasserot [VV] ont prouvé que  $D(1) = \Delta(1)$ . De plus, les travaux de Ryom-Hansen [Ry] ont montré que cette conjecture (toujours pour  $l = 1$ ) est compatible avec la formule de Jantzen-Schaper. Nous conjecturons que si la multi-charge  $\mathbf{s}_l$  est  $m$ -dominante (au sens de la définition 4.29), alors on a  $D(q) = \Delta(q)$ ; en particulier, nous conjecturons que  $\Delta(1)$  est égale à la matrice de décomposition  $D(1)$  de l'algèbre de Schur cyclotomique spécialisée  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ . Notons qu'à notre connaissance il n'existait pas jusqu'à maintenant de conjecture précise pour le calcul de la matrice de décomposition, même pour le cas  $l = 2$  (type  $B_m$ ).

Bien que  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  et donc  $D(1)$  ne dépendent pas vraiment de la multi-charge  $\mathbf{s}_l$ , mais seulement de la suite des résidus modulo  $n$  de ses composantes, il est nécessaire d'imposer une condition sur  $\mathbf{s}_l$  pour avoir l'égalité  $D(1) = \Delta(1)$  (et à plus forte raison,  $D(q) = \Delta(q)$ ). En effet, nous avons par exemple calculé, pour deux choix de la multi-charge donnant les mêmes suites de résidus modulo  $n$ , deux matrices  $\Delta(q)$  qui n'ont pas le même nombre de coefficients non nuls (voir l'exemple 4.33).

Notre conjecture s'appuie sur le théorème suivant (voir aussi [Y]). À toute multi-charge  $\mathbf{s}_l$  nous associons un ordre  $\prec$ , ce qui nous donne une matrice  $J^{\prec}$ . Les coefficients  $J^{\prec}$  sont



décrits de manière combinatoire (cf. paragraphe 7.4.2). Dans le cas où  $\mathbf{s}_l$  est  $m$ -dominante, notre matrice  $J^\prec$  coïncide avec la matrice  $J^\triangleleft$  de la formule sommatoire de Jantzen, qui est équivalente à l'identité  $D'(1) = J^\triangleleft D(1)$  (cf. corollaire 7.37). Nous montrons alors que pour toute multi-charge  $\mathbf{s}_l$ , nous avons  $\Delta'(1) = J^\prec \Delta(1)$  (cf. théorème 8.3)

La preuve de notre théorème est basée sur une expression combinatoire de la dérivée à  $q = 1$  de la matrice  $A(q)$  de l'involution de l'espace de Fock. Plus précisément, nous montrons que  $A'(1) = 2J^\prec$  (théorème 8.4). Les coefficients de  $A(q)$  sont des analogues pour les espaces de Fock des polynômes  $R_{x,y}(q)$  de Kazhdan-Lusztig pour les algèbres de Hecke. Le calcul classique des  $R'_{x,y}(1)$  a été effectué dans [GJ] en liaison avec la conjecture de Kazhdan-Lusztig pour les multiplicités des facteurs de composition des modules de Verma.

## 8.1 Notations

Nous utiliserons dans tout ce chapitre les notations suivantes.

- \* Rappelons que  $n$  et  $l$  désignent deux entiers naturels non nuls, et  $s$  un entier relatif. Soit  $\mathbf{s}_l = (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}^l(s)$  une multi-charge.
- \* Soit  $m$  un entier naturel non nul. Rappelons que  $\Pi_m^l$  désigne l'ensemble des  $l$ -multi-partitions de  $m$ .
- \* Soit  $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}) \in \Pi^N \times \mathbb{Z}^N$  une multi-partition chargée. Pour  $i \in \mathbb{Z}$ , notons

$$N_i(\boldsymbol{\lambda}) := \#\{\gamma \in \boldsymbol{\lambda} \mid \text{res}_n(\gamma) = i \bmod n\}$$

le nombre de  $i$ -nœuds de  $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s})$  (ce nombre dépend de la multi-charge  $\mathbf{s}$ ). Nous définissons de façon similaire  $N_i(\theta)$  si  $\theta$  est une forme gauche contenue dans une partition chargée.

- \* Rappelons que nous avons défini au paragraphe 1.1.5.3 une bijection  $\tau_l : \Pi \times \mathbb{Z} \rightarrow \Pi^l \times \mathbb{Z}^l$ . Nous noterons

$$\boldsymbol{\lambda}_l \leftrightarrow \lambda$$

si  $\lambda \in \Pi$  et  $\boldsymbol{\lambda}_l \in \Pi_m^l$  sont liées par la relation  $(\boldsymbol{\lambda}_l, \mathbf{s}_l) = \tau_l(\lambda, s)$ . On définit un ordre partiel  $\preceq$  sur  $\Pi_m^l$  comme suit. Soient  $\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l \in \Pi_m^l$ , et  $\lambda, \mu \in \Pi$  telles que  $\boldsymbol{\lambda}_l \leftrightarrow \lambda$  et  $\boldsymbol{\mu}_l \leftrightarrow \mu$ . On dit que  $\boldsymbol{\lambda}_l$  précède  $\boldsymbol{\mu}_l$ , et on écrira  $\boldsymbol{\lambda}_l \preceq \boldsymbol{\mu}_l$  si on a  $\lambda \preceq \mu$ . En particulier,  $\lambda$  et  $\mu$  doivent être de même rang. Notons que l'ordre  $\preceq$  ainsi défini dépend de la multi-charge  $\mathbf{s}_l$  que nous nous sommes fixée. L'ordre strict associé à  $\preceq$  sera noté  $\prec$ .

- \* En accord avec le chapitre 1, nous serons amenés à considérer le groupe de Coxeter  $\mathfrak{S}_r$  (où  $r \in \mathbb{N}^*$ ), relativement au système canonique de générateurs

$$\{\sigma_i := (i, i+1) \mid 1 \leq i \leq r-1\}.$$

(Nous prions le lecteur de bien vouloir nous excuser pour le léger conflit de notations qui en résulte; en effet, nous avons déjà introduit au chapitre 4 la notation  $\sigma_i$  pour les

générateurs de Coxeter du groupe de Weyl affine  $W_n$  de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ , mais nous n'aurons pas à considérer  $W_n$  dans ce chapitre.) La fonction longueur sur  $\mathfrak{S}_r$  sera notée  $\ell$ . L'élément de longueur maximale de  $\mathfrak{S}_r$  sera noté  $\omega$ . Rappelons que  $\mathfrak{S}_r$  agit à gauche sur  $\mathbb{Z}^r$  via

$$\sigma.(k_1, \dots, k_r) = (k_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, k_{\sigma^{-1}(r)}) \quad ((k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}^r, \sigma \in \mathfrak{S}_r).$$

\* Nous utiliserons les notations  $c(k)$ ,  $d(k)$ ,  $m(k)$ ,  $\phi(k)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) définies à la section 2.1. Soient  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  et  $(P_3)$  les propriétés de  $\phi$  données au lemme 1.10. Nous utiliserons aussi les notations  $\mathbf{b}(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{c}(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{d}(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{m}(\mathbf{k})$ ,  $v(\mathbf{k})$  et  $\omega(\mathbf{k})$  ( $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^r$ ), également définies à la section 2.1.

\* Rappelons que

$$A_{\mathbf{s}_l}(q) = (a_{\lambda_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}(q))_{\lambda_l, \mu_l \in \Pi^l}$$

désigne la matrice de l'involution de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$ , et que

$$\Delta_{\mathbf{s}_l}^+(q) = (\Delta_{\lambda_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}^+(q))_{\lambda_l, \mu_l \in \Pi^l}$$

désigne la matrice de passage de la base standard vers la base canonique d'Uglov  $G^+$  de  $\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l]$  (cf. paragraphe 3.4.3). Notons pour simplifier

$$A(q) := (a_{\lambda_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}(q))_{\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l} \quad \text{et} \quad \Delta(q) := (\Delta_{\lambda_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}^+(q))_{\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l},$$

et posons de même  $a_{\lambda_l, \mu_l}(q) := a_{\lambda_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}(q)$  et  $\Delta_{\lambda_l, \mu_l}(q) := \Delta_{\lambda_l, \mu_l; \mathbf{s}_l}^+(q)$  ( $\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l$ ).

## 8.2 Énoncé des résultats

### 8.2.1 Notre choix de paramètres

Nous décrivons ici notre choix de paramètres pour la  $v$ -algèbre de Schur cyclotomique  $\mathcal{S}$  (cf. lemme 7.41). Nous garderons ces paramètres pour toute la suite de ce chapitre, sans pour autant les mentionner systématiquement de façon explicite.

Nos paramètres sont similaires à ceux utilisés dans [Ja] pour les algèbres de Ariki-Koike. Ils dépendent des entiers  $n$ ,  $l$  et du  $l$ -uplet  $\mathbf{s}_l \in \mathbb{Z}^l$  que nous nous sommes fixés au départ. Soient  $\widehat{R} := \mathbb{C}[x, x^{-1}]$  l'anneau des polynômes de Laurent en une indéterminée sur le corps  $\mathbb{C}$ ,  $\xi := \exp\left(\frac{2i\pi}{nl}\right) \in \mathbb{C}$  une racine primitive  $nl$ -ième de l'unité,  $\wp$  l'idéal premier de  $\widehat{R}$  engendré par  $x - \xi$ ,  $R := \mathbb{C}[x, x^{-1}]_{\wp}$  le localisé de  $\widehat{R}$  en  $\wp$ ,

$$v := x^l \quad \text{et} \quad u_d := \xi^{nd} x^{ls_d - nd} \quad (1 \leq d \leq l).$$

On a alors  $K = \mathbb{C}(x)$ ,  $F = \mathbb{C}$  et  $\mathcal{S}_F = \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\zeta; \zeta^{s_1}, \dots, \zeta^{s_l})$  avec  $\zeta := \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ ;  $\mathcal{S}_F$  ne dépend donc que des résidus  $s_d \bmod n$  ( $1 \leq d \leq l$ ). Notre choix de paramètres fournit effectivement un triplet modulaire  $(R, K, F)$ ; cependant le choix de l'idéal  $\wp$  conduisant à la

définition de  $R$  n'est pas canonique.

Notons qu'avec notre choix de paramètres, l'élément  $P_{\mathcal{H}_K} \in K$  introduit au théorème 6.21 est non nul, donc d'après le théorème 6.21, l'algèbre  $\mathcal{H}_K(v; u_1, \dots, u_l)$  est semi-simple. (On peut aussi retrouver la semi-simplicité de  $\mathcal{H}_K(v; u_1, \dots, u_l)$  en remarquant que la spécialisation de  $x$  à 1 envoie  $\mathcal{H}_K(v; u_1, \dots, u_l)$  sur l'algèbre semi-simple  $\mathbb{C}G(l, 1, m)$ , puis en utilisant un argument de déformation de Tits [A1].) D'après le corollaire 7.28, l'algèbre  $\mathcal{S}_K(v; u_1, \dots, u_l)$  est aussi semi-simple. Par conséquent, nous avons une formule de Jantzen pour la  $v$ -algèbre de Schur cyclotomique spécialisée  $\mathcal{S}_F = \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\zeta; \zeta^{s_1}, \dots, \zeta^{s_l})$ .

### 8.2.2 Énoncé des théorèmes

La formule sommatoire de Jantzen fait intervenir une matrice notée  $J^{\triangleleft}$ , que nous avons définie au paragraphe 7.4.2. Nous avons en fait défini à ce paragraphe une matrice  $J^{\prec}$  pour n'importe quel ordre  $\prec$  sur  $\Pi_m^l$ ; la définition de cette matrice fait appel à des cas  $(J_1)$ ,  $(J_2)$  et  $(J_3)$  auxquels nous nous référerons tout au long de ce chapitre. Nous avons donné au lemme 7.41 une expression commode permettant de calculer la matrice  $J^{\prec}$  avec notre choix de paramètres. Dans ce chapitre, nous travaillerons plus particulièrement avec l'ordre  $\prec$  défini à la section 8.1. (Rappelons que cet ordre dépend de  $s_l$ .) Nous verrons à la proposition 8.18 que si  $s_l$  est  $m$ -dominante, alors on a  $J^{\prec} = J^{\triangleleft}$ . Attention, les ordres  $\prec$  et  $\triangleleft$  ne coïncident pas nécessairement, même si  $s_l$  est  $m$ -dominante (cf. remarque 8.19).

**Exemple 8.1** Prenons  $n = 3$ ,  $l = 2$ ,  $s_l = (1, 0)$  et  $m = 3$ . Ici,  $s_l$  n'est pas  $m$ -dominante, et les matrices  $J^{\prec}$  et  $J^{\triangleleft}$  sont différentes. En effet, on a d'une part

$$J^{\prec} = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} ((1,1),(1)) \\ (3),\emptyset \\ (\emptyset,(3)) \\ (1),(2) \\ (\emptyset,(2,1)) \\ (2),(1) \\ (1),(1,1) \\ (\emptyset,(1,1,1)) \\ (2,1),\emptyset \\ (1,1,1),\emptyset \end{matrix}.$$

Ici, les multi-partitions de  $m$  indexant les vecteurs de la base standard de  $\mathbf{F}_q[s_l]$  sont rangées suivant un ordre total qui raffine l'ordre  $\prec$ . D'autre part, si nous conservons cet ordre pour écrire les lignes et les colonnes de  $J^{\triangleleft}$ , nous avons

$$J^{\triangleleft} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} ((1,1),(1)) \\ ((3),\emptyset) \\ (\emptyset,(3)) \\ ((1),(2)) \\ (\emptyset,(2,1)) \\ ((2),(1)) \\ ((1),(1,1)) \\ (\emptyset,(1,1,1)) \\ ((2,1),\emptyset) \\ ((1,1,1),\emptyset) \end{matrix}.$$

La matrice écrite ci-dessus n'est pas triangulaire car l'ordre que nous considérons n'est pas compatible avec  $\triangleleft$ . ◇

**Exemple 8.2** Prenons  $n = 3$ ,  $l = 2$ ,  $\mathbf{s}_l = (4, -3)$  et  $m = 3$ . Ici,  $\mathbf{s}_l$  est  $m$ -dominante. Dans ce cas,  $\prec$  et  $\triangleleft$  sont deux ordres différents, mais les matrices  $J^\prec$  et  $J^{\triangleleft}$  coïncident. En effet, on a

$$J^\prec = J^{\triangleleft} = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & . \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} ((1,1),(1)) \\ ((3),\emptyset) \\ ((2,1),\emptyset) \\ ((2),(1)) \\ ((1,1,1),\emptyset) \\ ((1),(2)) \\ ((1),(1,1)) \\ (\emptyset,(3)) \\ (\emptyset,(2,1)) \\ (\emptyset,(1,1,1)) \end{matrix}.$$

◇

Voici le principal résultat de ce chapitre.

**Théorème 8.3** *On a*

$$\Delta'(1) = J^\prec \Delta(1).$$

□

Ce théorème est équivalent au théorème suivant.

**Théorème 8.4** *On a*

$$A'(1) = 2J^\prec.$$

*Démonstration de l'équivalence des théorèmes 8.3 et 8.4.* Puisque la base canonique est invariante sous l'action de l'involution, on a l'identité  $\Delta(q) = A(q)\Delta(q^{-1})$ . En dérivant ceci à  $q = 1$ , on a  $\Delta'(1) = A'(1)\Delta(1) - A(1)\Delta'(1)$ . Puisque  $A(1)$  est la matrice identité, on en déduit que  $2\Delta'(1) = A'(1)\Delta(1)$ . Par conséquent, le théorème 8.4 implique le théorème 8.3. Il suffit de remarquer que  $\Delta(1)$  est unitriangulaire, donc inversible, pour établir la réciproque.  $\square$

**Exemple 8.1** (*suite*). Rappelons que  $n = 3, l = 2, s_l = (1,0)$  et  $m = 3$ . Si nous arrangeons les lignes et les colonnes de  $A(q)$  suivant l'ordre utilisé pour écrire  $J^\prec$ , nous avons

$$A(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & q - q^{-1} & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q - q^{-1} & q - q^{-1} & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q^{-2} - 1 & (q - q^{-1})^2 & 0 & q - q^{-1} & q - q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q^{-3}(q^2 - 1) & -(q - q^{-1}) & 0 & q^2 - 1 & q^{-2} - 1 & q - q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q^2 - 1 & q^{-2} - 1 & 0 & 0 & q - q^{-1} & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & -(q - q^{-1}) & -q^{-1}(q - q^{-1})^2 & 0 & q^{-2} - 1 & (q - q^{-1})^2 & q - q^{-1} & 0 & q - q^{-1} & 1 & \cdot \end{pmatrix} \begin{matrix} ((1,1),(1)) \\ (3,\emptyset) \\ (\emptyset,(3)) \\ (1),(2) \\ (\emptyset,(2,1)) \\ (2),(1) \\ (1),(1,1) \\ (\emptyset,(1,1,1)) \\ (2,1),\emptyset \\ (1,1,1),\emptyset \end{matrix}.$$

On a donc bien  $A'(1) = 2J^\prec$  dans ce cas.  $\diamond$

**Exemple 8.2** (*suite*). Rappelons que  $n = 3, l = 2, s_l = (4,-3)$  et  $m = 3$ . Si nous arrangeons les lignes et les colonnes de  $A(q)$  suivant l'ordre utilisé pour écrire  $J^\prec$ , nous avons

$$A(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q^2 - 1 & q - q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q^{-2} - 1 & q - q^{-1} & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -(q - q^{-1}) & (q - q^{-1})^2 & q - q^{-1} & q - q^{-1} & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & q^{-2} - 1 & q - q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -q^{-1}(q - q^{-1})^2 & (q - q^{-1})^2 & q^{-2} - 1 & 0 & q - q^{-1} & q - q^{-1} & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & q^{-3}(q^2 - 1) & 0 & -(q - q^{-1}) & 0 & 0 & q^2 - 1 & q^{-2} - 1 & q - q^{-1} & 1 & \cdot \end{pmatrix} \begin{matrix} ((1,1),(1)) \\ (3,\emptyset) \\ (2,1),\emptyset \\ (2),(1) \\ (1,1,1),\emptyset \\ (1),(2) \\ (1),(1,1) \\ (\emptyset,(3)) \\ (\emptyset,(2,1)) \\ (\emptyset,(1,1,1)) \end{matrix}.$$

On a donc également  $A'(1) = 2J^\prec$  dans ce cas.  $\diamond$

Nous prouverons le théorème 8.4 au cours des sections suivantes. Notre démonstration est similaire à celle donnée dans [Ry] dans le cas du niveau 1. Toutefois, le cas du niveau supérieur est nettement plus compliqué; nous le traitons en envisageant de nombreux cas (voir la section 8.8).

L'analogie formelle entre le théorème 8.3 d'une part, et la reformulation de la formule sommatoire de Jantzen donnée au corollaire 7.37 d'autre part, nous invite à poser la

**Conjecture 8.5** *Supposons que  $s_l$  est  $m$ -dominante. Soit  $S_F$  la  $v$ -algèbre de Schur cyclotomique spécialisée donnée par notre choix de paramètres (cf. paragraphe 8.2.1). Soit  $D(q)$  la  $q$ -analogue de la matrice de décomposition de  $S_F$  introduit à la définition 7.34. Alors on a*

$$D(q) = \Delta(q).$$

□

**Exemple 8.6** Prenons à nouveau  $n = 3, l = 2, \mathbf{s}_l = (4, -3)$  et  $m = 3$ . Soient  $\widehat{R} := \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ ,  $\wp := \left(x - e^{\frac{i\pi}{3}}\right) \subset \widehat{R}$  et  $R := \mathbb{C}[x, x^{-1}]_{\wp}$ . Considérons la  $v$ -algèbre de Schur cyclotomique

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_R(v; u_1, u_2)$$

définie sur l'anneau  $R$  et ayant pour paramètres

$$v := x^2, \quad u_1 := -x^5, \quad u_2 := x^{-12}.$$

L'algèbre spécialisée est donc  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}; e^{\frac{2i\pi}{3}}, 1\right)$ . Dans ce cas, nous conjecturons que la matrice  $D(q)$  est égale à

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & q & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & q^2 & q & 1 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & q & 0 & 1 & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & q^2 & q & q & 0 & 1 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 1 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & q & q & 1 & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & q^2 & 0 & q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} ((1,1),(1)) \\ ((3),\emptyset) \\ ((2,1),\emptyset) \\ ((2),(1)) \\ ((1,1,1),\emptyset) \\ ((1),(2)) \\ ((1),(1,1)) \\ (\emptyset,(3)) \\ (\emptyset,(2,1)) \\ (\emptyset,(1,1,1)) \end{matrix}.$$

◇

Si on ne suppose plus que  $\mathbf{s}_l$  est  $m$ -dominante, alors nous conjecturons que la matrice  $\Delta(q)$  est égale à un  $q$ -analogue de la matrice de décomposition d'un recouvrement quasi-héréditaire (au sens de Rouquier) de l'algèbre de Ariki-Koike  $\mathcal{H}$ . Ce recouvrement, dépendant de  $\mathbf{s}_l$ , pourrait provenir d'une algèbre de Cherednik rationnelle *via* le foncteur de Knizhnik-Zamolodchikov [GGOR] (voir [Ro]). Il serait Morita-équivalent à la  $v$ -algèbre de Schur cyclotomique de [DJM] dans le cas où  $\mathbf{s}_l$  est  $m$ -dominante.

### 8.3 $\beta$ -nombres et rubans

On introduit ici les  $\beta$ -nombres associés à une partition chargée. Soit  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \Pi$  une partition ayant au plus  $r$  parts. Le  $r$ -uplet

$$\beta_r(\lambda) := (\lambda_1 + s, \lambda_2 + s - 1, \dots, \lambda_r + s - r + 1) \in \mathbb{Z}^r$$

est appelé  $r$ -liste de  $\beta$ -nombres associée à  $(\lambda, s)$ , ou de façon abusive *liste* ou *suite de  $\beta$ -nombres associée à  $\lambda$* . L'ensemble des entiers qui composent  $\beta_r(\lambda)$  sera noté  $B_r(\lambda)$ . Notons que  $\beta_r(\lambda)$  est une suite strictement décroissante d'entiers tous supérieurs ou égaux à  $s + 1 - r$ .  $\beta_r(\lambda)$  dépend en fait de l'entier  $s$  que nous nous sommes fixés, mais que nous ne ferons pas

apparaître dans la notation pour ne pas trop l'alourdir. Une partition  $\lambda$  est entièrement déterminée par la suite de  $\beta$ -nombres  $\beta_r(\lambda)$  qui lui est associée. Il y a en fait un lien étroit entre les  $\beta$ -nombres et les  $q$ -produits extérieurs de  $r$  facteurs (cf. chapitre 2). En effet, si  $\lambda$  est une partition ayant au plus  $r$  parts et  $\mathbf{k} = (k_1, \dots) \in P^{++}(s)$  est tel que  $u_{\mathbf{k}} = |\lambda, s\rangle$ , alors on a  $(k_1, \dots, k_r) = \beta_r(\lambda)$ .

Si  $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{Z}^r$ , il sera commode de voir  $f$  comme une fonction (qu'on notera encore  $f$ ) définie sur l'ensemble des partitions de rang  $r$ , *via* la formule

$$f(\lambda) := f(\beta(\lambda)) \quad (\lambda \in \Pi, |\lambda| = r).$$

Par exemple, on définit ainsi pour toute partition  $\lambda$  les vecteurs  $\mathbf{c}(\lambda)$ ,  $\mathbf{d}(\lambda)$ , etc. (Voir la section 8.1.)

Pour prouver le théorème 8.4, nous devons faire le lien entre l'ajout/la suppression d'un ruban à une partition et la liste de  $\beta$ -nombres associée. Pour cela, nous rappelons un résultat classique sur les  $\beta$ -nombres (cf. par exemple [Mat1, Lemma 5.26]).

**Lemme 8.7** *Soient  $\nu^{(1)}$  et  $\nu^{(2)}$  deux partitions ayant au plus  $r$  parts. Soit  $\beta_r(\nu^{(2)}) = (\beta_1, \dots, \beta_r)$  la liste de  $\beta$ -nombres associée à  $\nu^{(2)}$ . Alors  $\nu^{(1)} \subset \nu^{(2)}$ , et  $\rho := \nu^{(2)}/\nu^{(1)}$  est un ruban si et seulement si il existe des entiers  $b, h \in \mathbb{N}^*$  tels que*

$$B_r(\nu^{(1)}) = \{\beta_1, \dots, \beta_{b-1}, \beta_b - h, \beta_{b+1}, \dots, \beta_r\}.$$

*Dans ce cas,  $b$  est le numéro de ligne de la queue de  $\rho$  et  $h$  est la longueur de  $\rho$ . Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$  l'unique permutation obtenue en rangeant les entiers  $(\beta_1, \dots, \beta_{b-1}, \beta_b - h, \beta_{b+1}, \dots, \beta_r)$  par ordre décroissant. On a alors  $\ell(\sigma) = \text{ht}(\rho)$ . De plus, le contenu de la tête de  $\rho$  vaut*

$$\text{cont}(\text{hd}(\rho)) = \alpha_c = \beta_b - h,$$

*où  $c$  est le numéro de ligne de la tête de  $\rho$ .*

*Démonstration.* Le sens direct est immédiat. Réciproquement, supposons que l'ensemble des  $\beta$ -nombres de  $\nu^{(1)}$  est  $B(\nu^{(1)}) = \{\beta_1, \dots, \beta_{b-1}, \beta_b - h, \beta_{b+1}, \dots, \beta_r\}$ , avec  $h > 0$ . On doit alors avoir  $\beta_b - h \geq s + 1 - r$  et l'existence de  $b \leq c \leq r$  tel que  $\beta_c > \beta_b - h > \beta_{c+1}$  (où, si  $c = r$ , on pose  $\beta_{c+1} := s - r$ ). On remarque alors que  $\nu^{(1)}$  est obtenue à partir de  $\nu^{(2)}$  en enlevant un ruban  $\rho$ , où  $\rho \subset \nu^{(2)}$  est le ruban dont la tête est située à la ligne  $c$  de  $\nu^{(2)}$  et dont la queue est située à la ligne  $b$  de  $\nu^{(2)}$ ;  $\rho$  est bien un ruban de longueur  $h$ . De plus, la permutation  $\sigma$  de l'énoncé vérifie

$$\sigma.(\beta_1, \dots, \beta_{b-1}, \beta_b - h, \beta_{b+1}, \dots, \beta_r) = (\beta_1, \dots, \beta_{b-1}, \beta_{b+1}, \dots, \beta_c, \beta_b - h, \beta_{c+1}, \dots, \beta_r);$$

par conséquent,  $\sigma$  est un cycle de longueur  $c - b = \text{ht}(\rho)$ . Enfin, la tête de  $\rho$  a pour coordonnées  $(c, \nu_c^{(1)} + 1)$ , donc son contenu vaut  $\text{cont}(\text{hd}(\rho)) = s + (\nu_c^{(1)} + 1) - c = \alpha_c = \beta_b - h$ .  $\square$

**Exemple 8.8** Prenons  $s = 4$ ,  $r = 5$ ,  $\nu^{(1)} = (6, 2, 2, 2, 2)$  et  $\nu^{(2)} = (6, 5, 3, 2, 2)$ . Alors  $\rho = \nu^{(2)}/\nu^{(1)}$  est un ruban et on a  $b = 2$ ,  $c = 3$  et  $h = 4$ . Par ailleurs, on a  $\beta(\nu^{(2)}) = (\beta_1, \dots, \beta_5) =$

$(10,8,5,3,2)$  et  $\beta(\nu^{(1)}) = (\beta_1, \beta_3, \beta_b - h, \beta_4, \beta_5) = (10,5,4,3,2)$ . On a  $\sigma = (2,3)$  et donc  $\ell(\sigma) = 1 = \text{ht}(\rho)$ . Enfin, la tête de  $\rho$  a pour coordonnées  $(3,3)$  et on a donc  $\text{cont}(\text{hd}(\rho)) = 4 = \alpha_c = \beta_b - h$ .  $\diamond$

**Lemme 8.9** *Soient  $\nu^{(1)}, \nu^{(2)} \in \Pi$  telles que  $|\nu^{(1)}| = |\nu^{(2)}| = r$  et  $\nu^{(1)} \neq \nu^{(2)}$ . Soient  $\beta(\nu^{(1)}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  et  $\beta(\nu^{(2)}) = (\beta_1, \dots, \beta_r)$  les suites de  $\beta$ -nombres associées à  $\nu^{(1)}$  et  $\nu^{(2)}$  respectivement. Posons  $\rho := \nu^{(1)}/(\nu^{(1)} \cap \nu^{(2)})$  et  $\rho' := \nu^{(2)}/(\nu^{(1)} \cap \nu^{(2)})$ .*

1°) *Alors,  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux rubans si et seulement si  $\sharp(B(\nu^{(1)}) \cap B(\nu^{(2)})) = r - 2$ . Dans ce cas, soit*

- .  $h$  la longueur commune de  $\rho$  et de  $\rho'$ ,
- .  $y$  le numéro de ligne de la queue de  $\rho'$ ,
- .  $y'$  le numéro de ligne de la tête de  $\rho'$ ,
- .  $x'$  le numéro de ligne de la queue de  $\rho$ , et
- .  $x$  le numéro de ligne de la tête de  $\rho$ .

On a alors  $\{\alpha_i, i \neq x', y'\} = \{\beta_j, j \neq x, y\}$ ,

$$\text{cont}(\text{hd}(\rho)) = \beta_x = \alpha_{x'} - h \quad \text{et} \quad \text{cont}(\text{hd}(\rho')) = \alpha_{y'} = \beta_y - h.$$

Soit  $\pi \in \mathfrak{S}_r$  l'unique permutation obtenue en rangeant par ordre décroissant les entiers  $(\beta_1, \dots, \beta_y - h, \dots, \beta_x + h, \dots, \beta_r)$  qui forment  $B(\nu^{(1)})$ . Alors  $\ell(\pi) = \text{ht}(\rho) + \text{ht}(\rho')$ .

2°) *Supposons que les conditions du 1°) sont remplies. On a alors les équivalences suivantes, et de plus un des deux cas suivants a lieu :*

- (i)  $y \leq y' < x' \leq x \iff \nu^{(1)} \triangleleft \nu^{(2)}$ ,
- (ii)  $x' \leq x < y \leq y' \iff \nu^{(2)} \triangleleft \nu^{(1)}$ .

*Démonstration.* On prouve 1°) en appliquant le lemme précédent aux couples de partitions  $(\nu^{(1)} \cap \nu^{(2)}, \nu^{(1)})$  et  $(\nu^{(1)} \cap \nu^{(2)}, \nu^{(2)})$ . Prouvons à présent 2°). Les inégalités  $y \leq y'$  et  $x' \leq x$  sont évidentes. Puisque  $\rho \cap \rho' = \emptyset$ , un des deux cas suivants a lieu : ou bien  $y' < x'$ , auquel cas on a  $\nu^{(1)} \triangleleft \nu^{(2)}$ , ou bien  $x < y$ , auquel cas on a  $\nu^{(2)} \triangleleft \nu^{(1)}$ . Ceci prouve les deux implications  $\Rightarrow$ , et comme l'un des deux cas a lieu, on a les équivalences souhaitées.  $\square$

## 8.4 Expressions des matrices $J^{\triangleleft}$ et $J^{\triangleleft}$

### 8.4.1 Une première approche des cas $(J_1)$ et $(J_2)$

Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante en termes de partitions pour que  $(\lambda_l, \mu_l) \in \Pi_m^l \times \Pi_m^l$  satisfasse  $(J_1)$  ou  $(J_2)$ . Nous renvoyons le lecteur au paragraphe 7.4.2 pour la définition de ces cas.



**Lemme 8.10** Soient  $\lambda_l = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(l)}) \in \Pi_m^l$  et  $\mu_l = (\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(l)}) \in \Pi_m^l$  deux multi-partitions, et  $\lambda, \mu \in \Pi$  telles que  $\lambda_l \leftrightarrow \lambda$  et  $\mu_l \leftrightarrow \mu$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\lambda \subset \mu$ , et  $\mu/\lambda$  est un ruban,
- (ii)  $\lambda_l \subset \mu_l$ , et il existe  $d \in \llbracket 1; l \rrbracket$  tel que  $\mu^{(d)}/\lambda^{(d)}$  est un ruban et  $\lambda^{(b)} = \mu^{(b)}$  pour tout  $b \in \llbracket 1; l \rrbracket \setminus \{d\}$ .

*Démonstration.* Prouvons (i)  $\Rightarrow$  (ii). On passe de  $\lambda$  à  $\mu$  en ajoutant un ruban de longueur  $h$ . D'après le lemme 8.7, ceci correspond, au niveau des diagrammes d'abaques, à passer de  $A(\lambda, s)$  à  $A(\mu, s)$  en déplaçant une bille située en position  $k$  de  $h$  crans vers la droite. Au niveau des diagrammes d'abaques à  $l$  tiges  $A(\lambda_l, s_l)$  et  $A(\mu_l, s_l)$ , le déplacement de cette bille correspond au déplacement de  $\hat{h}$  crans vers la droite de la bille située en position  $\phi(k)$  sur la tige  $d := d(k)$ . L'assertion (ii) découle de ceci et du lemme 8.7 appliqué au couple  $(\lambda^{(d)}, \mu^{(d)})$ . On prouve la réciproque de façon analogue.  $\square$

En appliquant deux fois le lemme précédent et le lemme 8.9, on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 8.11** Soient  $\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l$  deux multi-partitions distinctes, et  $\lambda, \mu \in \Pi$  telles que  $\lambda_l \leftrightarrow \lambda$  et  $\mu_l \leftrightarrow \mu$ . Supposons que  $|\lambda| = |\mu| = r$ . Alors  $(\lambda_l, \mu_l)$  satisfait  $(J_1)$  ou  $(J_2)$  si et seulement si  $\sharp(B(\lambda) \cap B(\mu)) = r - 2$ .  $\square$

Soient  $\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l$  et  $\lambda, \mu \in \Pi$  telles que  $\lambda_l \leftrightarrow \lambda$  et  $\mu_l \leftrightarrow \mu$ . Considérons les assertions

$$(\mathcal{H}) \quad \lambda_l \prec \mu_l \quad (\text{i.e. } \lambda \triangleleft \mu), \quad |\lambda| = |\mu| = r \quad \text{et} \quad \sharp(B(\lambda) \cap B(\mu)) = r - 2.$$

Le corollaire précédent montre que si  $(\lambda_l, \mu_l)$  ne satisfait pas  $(\mathcal{H})$ , alors on a  $j_{\lambda_l, \mu_l}^{\prec} = 0$ .

*Notations.* Soient  $\lambda_l = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(l)}) \in \Pi_m^l$  et  $\mu_l = (\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(l)}) \in \Pi_m^l$  deux multi-partitions telles que  $(\lambda_l, \mu_l)$  satisfait  $(\mathcal{H})$ . Dans ce cas, nous adopterons pour toute la suite de ce chapitre les notations suivantes. Soient  $\lambda, \mu \in \Pi$  les partitions telles que  $\lambda_l \leftrightarrow \lambda$  et  $\mu_l \leftrightarrow \mu$ . Soient  $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  et  $(\beta_1, \dots, \beta_r)$  les suites de  $\beta$ -nombres associées à  $\lambda$  et  $\mu$  respectivement. D'après le lemme 8.9 appliqué au couple  $(\nu^{(1)}, \nu^{(2)}) = (\lambda, \mu)$ , il existe des entiers positifs  $y, y', x', x$  et  $h$  tels que  $\{\alpha_i, i \neq x', y'\} = \{\beta_j, j \neq x, y\}$ ,  $\alpha_{y'} = \beta_y - h$  et  $\alpha_{x'} = \beta_x + h$ . De plus, d'après le corollaire 8.11,  $(\lambda_l, \mu_l)$  vérifie  $(J_1)$  ou  $(J_2)$ ; soient alors  $d, d' \in \llbracket 1; l \rrbracket$  et  $\hat{h} \in \mathbb{N}^*$  les entiers introduits dans la définition des cas  $(J_1)$  et  $(J_2)$  (dans le cas  $(J_2)$ , on pose  $d' := d$ ). Soient enfin  $\gamma \in \llbracket 0; nl - 1 \rrbracket$  le résidu de  $c(\beta_y) - c(\beta_x)$  modulo  $nl$  et  $\delta \in \llbracket 0; nl - 1 \rrbracket$  le résidu de  $n(d(\beta_y) - d(\beta_x))$  modulo  $nl$ .

**Remarque 8.12** Supposons que  $(\lambda_l, \mu_l)$  vérifie  $(\mathcal{H})$ , et reprenons les notations précédentes. Puisque  $\lambda \triangleleft \mu$ , on a d'après le lemme 8.9 l'inégalité  $y' < x'$ , ce qui entraîne

$$\beta_x < \beta_x + h = \alpha_{x'} < \alpha_{y'} = \beta_y - h < \beta_y.$$

Ces inégalités, ainsi que l'égalité  $\{\alpha_i \mid i \neq x', y'\} = \{\beta_j \mid j \neq x, y\}$  et le fait que les  $\beta_i$  sont deux à deux distincts, impliquent que  $\{\beta_x, \beta_y\} \cap B(\lambda) = \emptyset$ .  $\diamond$

Sous les hypothèses  $(\mathcal{H})$ , le lemme qui suit relie les  $\beta$ -nombres de  $\lambda^{(d)}$ ,  $\lambda^{(d')}$ ,  $\mu^{(d)}$  et  $\mu^{(d')}$  d'une part aux  $\beta$ -nombres de  $\lambda$  et  $\mu$  d'autre part.

**Lemme 8.13** *Supposons que  $(\lambda_l, \mu_l)$  vérifie  $(\mathcal{H})$ , et reprenons les notations précédentes.*

1°) *On a alors*

$$\{d(\beta_x), d(\beta_y)\} = \{d(\beta_x + h), d(\beta_y - h)\} = \{d, d'\}.$$

*De plus, pour tout  $1 \leq b \leq l$ , on a*

$$\#\{1 \leq i \leq r \mid d(\alpha_i) = b\} = \#\{1 \leq i \leq r \mid d(\beta_i) = b\};$$

*soit  $r_b$  cette valeur commune.*

2°) *Supposons que  $(\lambda_l, \mu_l)$  vérifie  $(\mathcal{H})$  et  $(J_1)$ . Alors  $d(\beta_x) = d$  et  $d(\beta_y) = d'$ . Notons*

$$\begin{aligned} \beta_{r_d}(\lambda^{(d)}) &= (\gamma_1, \dots, \gamma_{r_d}), & \beta_{r_d}(\mu^{(d)}) &= (\delta_1, \dots, \delta_{r_d}), \\ \beta_{r_{d'}}(\lambda^{(d')}) &= (\gamma'_1, \dots, \gamma'_{r_{d'}}) & \text{et} & \beta_{r_{d'}}(\mu^{(d')}) &= (\delta'_1, \dots, \delta'_{r_{d'}}) \end{aligned}$$

*les suites de  $\beta$ -nombres associées à  $\lambda^{(d)}$ ,  $\mu^{(d)}$ ,  $\lambda^{(d')}$  et  $\mu^{(d')}$ . Soit  $b$  (resp.  $c$ ) le numéro de ligne de la queue (resp. tête) de  $\rho$ , et  $b'$  (resp.  $c'$ ) le numéro de ligne de la queue (resp. tête) de  $\rho'$ . Les égalités  $\{d(\beta_x), d(\beta_y)\} = \{d(\beta_x + h), d(\beta_y - h)\} = \{d, d'\}$  du 1°) montrent qu'un des deux cas suivants a lieu.*

- Premier cas : on a  $d(\beta_x) = d(\beta_x + h) = d$  et  $d(\beta_y) = d(\beta_y - h) = d'$ . Alors

$$\delta_c = \phi(\beta_x), \quad \gamma_b = \phi(\beta_x + h), \quad \gamma'_{c'} = \phi(\beta_y - h), \quad \delta'_{b'} = \phi(\beta_y)$$

$$\text{et } \hat{h} = \phi(\beta_x + h) - \phi(\beta_x) = \phi(\beta_y) - \phi(\beta_y - h).$$

- Second cas : on a  $d(\beta_x) = d(\beta_y - h) = d$  et  $d(\beta_y) = d(\beta_x + h) = d'$ . Alors

$$\delta_c = \phi(\beta_x), \quad \gamma_b = \phi(\beta_y - h), \quad \gamma'_{c'} = \phi(\beta_x + h), \quad \delta'_{b'} = \phi(\beta_y)$$

$$\text{et } \hat{h} = \phi(\beta_y - h) - \phi(\beta_x) = \phi(\beta_y) - \phi(\beta_x + h).$$

3°) *Supposons que  $(\lambda_l, \mu_l)$  vérifie  $(\mathcal{H})$  et  $(J_2)$ . Notons*

$$\beta_{r_d}(\lambda^{(d)}) = (\gamma_1, \dots, \gamma_{r_d}) \quad \text{et} \quad \beta_{r_d}(\mu^{(d)}) = (\delta_1, \dots, \delta_{r_d})$$

*les suites de  $\beta$ -nombres associées à  $\lambda^{(d)}$  et  $\mu^{(d)}$ . Soit  $b$  (resp.  $c$ ) le numéro de ligne de la queue (resp. tête) de  $\rho$ , et  $b'$  (resp.  $c'$ ) le numéro de ligne de la queue (resp. tête) de  $\rho'$ . Alors  $\lambda^{(d)} \triangleleft \mu^{(d)}$ , et on a*

$$\delta_c = \phi(\beta_x), \quad \gamma_b = \phi(\beta_x + h), \quad \gamma_{c'} = \phi(\beta_y - h), \quad \delta_{b'} = \phi(\beta_y)$$

$$\text{et } \hat{h} = \phi(\beta_x + h) - \phi(\beta_x) = \phi(\beta_y) - \phi(\beta_y - h).$$

*Démonstration.* On passe de  $\mu_l$  à  $\lambda_l$  en retirant le ruban  $\rho'$  et en ajoutant le ruban  $\rho$ . Ceci correspond au niveau des diagrammes d'abaques  $A(\mu_l, s_l)$  et  $A(\lambda_l, s_l)$  au déplacement de deux billes (cf. démonstration du lemme 8.10). Déplacer ces deux billes revient, au niveau des diagrammes d'abaques  $A(\mu, s)$  et  $A(\lambda, s)$ , à déplacer les billes situées en positions  $\{\beta_x, \beta_y\}$  vers les positions  $\{\beta_x + h, \beta_y - h\}$ , d'où les deux premières égalités du point 1°). Les dernières assertions du point 1°) découlent de ceci et de l'égalité  $\{\alpha_i \mid i \neq x', y'\} = \{\beta_j \mid j \neq x, y\}$ .

Prouvons à présent le point 2°). Une analyse plus poussée du déplacement des billes évoquées ci-dessus montre qu'on a plus précisément les propriétés suivantes :

- (i)  $\{\gamma_b, \gamma_{c'}\} = \{\phi(\beta_x + h), \phi(\beta_y - h)\}$  et  $\{\delta_{b'}, \delta_c\} = \{\phi(\beta_x), \phi(\beta_y)\}$ .
- (ii) Soit  $k \in \{\beta_x, \beta_x + h, \beta_y - h, \beta_y\}$ . Alors  $\phi(k) \in \{\gamma_b, \delta_c\}$  si et seulement si  $d(k) = d$ , et  $\phi(k) \in \{\gamma_{c'}, \delta_{b'}\}$  si et seulement si  $d(k) = d'$ .

Commençons par montrer que  $d(\beta_x) = d$ . Supposons que  $d(\beta_x) = d'$ . D'après (i) et (ii), on a  $\phi(\beta_x) \in \{\delta_{b'}, \delta_c\} \cap \{\gamma_{c'}, \delta_{b'}\}$ . Ceci implique  $\phi(\beta_x) = \delta_{b'}$ . En effet, si  $\phi(\beta_x) \neq \delta_{b'}$ , on doit avoir  $\phi(\beta_x) = \delta_c = \gamma_{c'} \in \{\phi(\beta_x + h), \phi(\beta_y - h)\}$  d'après (i). Soit  $k \in \{\beta_x + h, \beta_y - h\}$  tel que  $\phi(k) = \gamma_{c'} = \phi(\beta_x)$ . D'après (ii), on a  $d(k) = d(\beta_x)$ ; de plus,  $\phi(k) = \phi(\beta_x)$ , d'où  $k = \beta_x$ . Ceci est contradictoire avec la remarque 8.12, donc  $\phi(\beta_x) = \delta_{b'}$ . Soit  $k \in \{\beta_x + h, \beta_y - h\}$  tel que  $d(k) = d'$ . D'après la propriété  $(P_2)$  et la remarque 8.12, on a  $\phi(k) > \phi(\beta_x) = \delta_{b'}$ , donc d'après (ii), on a  $\phi(k) = \gamma_{c'}$ . Par conséquent, on a  $\gamma_{c'} > \delta_{b'}$ . Par ailleurs, d'après le lemme 8.7 appliqué à  $(\lambda^{(d)}, \mu^{(d)})$ , on a  $\gamma_{c'} = \delta_{b'} - \widehat{h} < \delta_{b'}$ , ce qui est absurde. D'après le point 1°), on a donc  $d(\beta_x) = d$  et  $d(\beta_y) = d'$ . Traitons à présent le premier cas du point 2°) (le second cas se traite de même). D'après (ii), on a  $\{\gamma_b, \delta_c\} = \{\phi(\beta_x), \phi(\beta_x + h)\}$ . De plus, d'après le lemme 8.7 appliqué à  $(\lambda^{(d)}, \mu^{(d)})$ , on a  $\delta_c = \gamma_b - \widehat{h} < \gamma_b$ . La propriété  $(P_2)$  entraîne alors  $\delta_c = \phi(\beta_x)$  et  $\gamma_b = \phi(\beta_x + h)$ , d'où  $\widehat{h} = \gamma_b - \delta_c = \phi(\beta_x + h) - \phi(\beta_x)$ . De même, on a  $\gamma_{c'} = \phi(\beta_y - h)$ ,  $\delta_{b'} = \phi(\beta_y)$  et  $\widehat{h} = \phi(\beta_y) - \phi(\beta_y - h)$ .

Prouvons à présent le point 3°). Puisque  $\lambda \triangleleft \mu$ , la remarque 8.12 et la propriété  $(P_2)$  entraînent les inégalités

$$\phi(\beta_x) < \phi(\beta_x + h) < \phi(\beta_y - h) < \phi(\beta_y).$$

Par ailleurs, une analyse plus poussée du déplacement des billes évoquées au début de la preuve montre que

$$\{\delta_{b'}, \delta_c\} = \{\phi(\beta_x), \phi(\beta_y)\} \quad \text{et} \quad \{\gamma_b, \gamma_{c'}\} = \{\phi(\beta_x + h), \phi(\beta_y - h)\}.$$

Supposons que  $\delta_c = \phi(\beta_y)$ . Puisque  $\phi(\beta_y) > \phi(\beta_x + h)$ ,  $\phi(\beta_y) > \phi(\beta_y - h)$  et  $\gamma_b$  appartient à l'ensemble  $\{\phi(\beta_x + h), \phi(\beta_y - h)\}$ , on doit avoir  $\delta_c > \gamma_b$ . Par ailleurs, en appliquant le lemme 8.9 au couple  $(\lambda^{(d)}, \mu^{(d)})$ , on a  $\gamma_b = \delta_c + \widehat{h} > \delta_c$ , ce qui est absurde. Ainsi  $\delta_c = \phi(\beta_x)$  et  $\delta_{b'} = \phi(\beta_y)$ . D'après la propriété  $(P_2)$ , on a donc  $\delta_c < \delta_{b'}$ , d'où  $c > b'$ . En appliquant à nouveau le lemme 8.9, on a  $\lambda^{(d)} \triangleleft \mu^{(d)}$  et  $b' \leq c' < b \leq c$ . En particulier, on a  $c' < b$ , d'où  $\gamma_b < \gamma_{c'}$ . D'après la propriété  $(P_2)$ , on a donc  $\gamma_b = \phi(\beta_x + h)$  et  $\gamma_{c'} = \phi(\beta_y - h)$ . Le lemme

8.9 montre alors que  $\widehat{h} = \gamma_b - \delta_c = \phi(\beta_x + h) - \phi(\beta_x)$  et  $\widehat{h} = \delta_{b'} - \gamma_{c'} = \phi(\beta_y) - \phi(\beta_y - h)$ .  $\square$

**Lemme 8.14** *Soient  $\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l$ , et  $\lambda, \mu \in \Pi$  telles que  $\lambda_l \leftrightarrow \lambda$  et  $\mu_l \leftrightarrow \mu$ . Supposons que  $j_{\lambda_l, \mu_l} \neq 0$ . Alors on a, avec les notations de  $(J_1)$  et  $(J_2)$  et de la section 8.1, les égalités*

$$N_i(\rho) = N_i(\rho') \quad (i \in \mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad |\lambda| = |\mu|.$$

*Démonstration.* Puisque  $j_{\lambda_l, \mu_l}$  est non nul, le lemme 7.41 montre qu'au moins un des deux cas suivants a lieu :

- Premier cas : on a  $\text{res}_n(\text{hd}(\rho)) = \text{res}_n(\text{hd}(\rho'))$ . Notons que si  $\sigma$  est un ruban, alors les nombres  $\text{cont}(\gamma), \gamma \in \sigma$  sont deux à deux distincts, et l'ensemble de ces nombres est précisément l'intervalle  $[\text{cont}(\text{hd}(\sigma)); \text{cont}(\text{tl}(\sigma))]$ . En combinant ceci avec l'hypothèse  $\text{res}_n(\text{hd}(\rho)) = \text{res}_n(\text{hd}(\rho'))$  ainsi que  $\widehat{h} = \ell(\rho) = \ell(\rho')$ , on a pour tout entier  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $N_i(\rho) = N_i(\rho')$ .
- Second cas : on a  $\widehat{h} \equiv 0 \pmod{n}$ . Alors pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , on a  $N_i(\rho) = N_i(\rho') = \widehat{h}/n$ .

Montrons à présent que  $|\lambda| = |\mu|$ . Soit  $\nu_l := \lambda_l \cap \mu_l$ , et  $\nu \in \Pi$  telle que  $\nu_l \leftrightarrow \nu$ . Nous allons montrer que

$$h := |\lambda| - |\nu| = ((n-1)l + 1)N_0(\rho) + (\widehat{h} - N_0(\rho)).$$

En raisonnant par récurrence sur  $\widehat{h}$ , on se ramène au cas où  $\widehat{h} = 1$ , *i.e.*  $\rho$  ne contient qu'un seul nœud  $\gamma$ . Soit  $r \in \mathbb{N}$  tel que  $\lambda$  et  $\nu$  ont au plus  $r$  parts. D'après le lemme 8.7, il existe  $\alpha \in B_r(\nu)$  et  $\beta \in B_r(\lambda)$  tels que  $B_r(\nu) \setminus \{\alpha\} = B_r(\lambda) \setminus \{\beta\}$  et  $\alpha = \beta - h$ . Les diagrammes d'abaques  $A(\nu, s)$  et  $A(\lambda, s)$  diffèrent de par le déplacement d'une bille; il en est de même pour les diagrammes  $A(\nu_l, s_l)$  et  $A(\lambda_l, s_l)$ . En considérant les positions initiales et finales de ces deux billes, on obtient les égalités

$$\phi(\beta) = \phi(\alpha) + \widehat{h} = \phi(\alpha) + 1 \quad \text{et} \quad d(\beta) = d(\alpha) = d.$$

D'après le lemme 8.7 et la propriété  $(P_1)$ , on a  $\text{res}_n(\gamma) = \phi(\alpha) \pmod{n} = \alpha \pmod{n}$ . Distinguons à présent deux cas. Si  $\text{res}_n(\gamma) = 0 \pmod{n}$  (*i.e.* si  $N_0(\rho) = 1$ ), on a  $\alpha = n + n(d-1) + nlm$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ , d'où  $\phi(\beta) = \phi(\alpha) + 1 = 1 + n(m+1)$ . Puisque  $d(\beta) = d$ , on a donc  $\beta = 1 + n(d-1) + nl(m+1)$ , d'où  $h = \beta - \alpha = (n-1)l + 1$ . Un raisonnement analogue montre que si  $\text{res}_n(\gamma) \neq 0 \pmod{n}$  (*i.e.* si  $N_0(\rho) = 0$ ), alors on a  $h = 1$ . Ceci prouve la formule annoncée. De même, on a  $|\mu| - |\nu| = ((n-1)l + 1)N_0(\rho') + (\widehat{h} - N_0(\rho'))$ . Puisque  $N_0(\rho) = N_0(\rho')$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  ont bien le même rang.  $\square$

### 8.4.2 Expression des coefficients de $J^<$

Grâce au lemme 7.41, nous établissons les expressions des  $j_{\lambda_l, \mu_l}^<$  dont nous aurons besoin pour prouver le théorème 8.4.

**Proposition 8.15** *Supposons que  $(\lambda_l, \mu_l)$  satisfait les conditions  $(J_1)$  et que  $\lambda_l \prec \mu_l$ . Avec les notations du paragraphe 8.4.1, on a alors  $\delta > 0$ , et*

$$j_{\lambda_l, \mu_l}^{\prec} = \begin{cases} (-1)^{\text{ht}(\rho) + \text{ht}(\rho')} & \text{si } h \equiv \gamma \pmod{nl} \quad \text{ou } h \equiv \delta \pmod{nl}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* Notons qu'on peut appliquer le lemme 8.13 en vertu du corollaire 8.11. Reprenons les notations de ce lemme. L'assertion  $\delta > 0$  découle du point 1°) du lemme 8.13. En appliquant le lemme 8.7 aux couples  $(\lambda^{(d)}, \mu^{(d)})$  et  $(\lambda^{(d')}, \mu^{(d')})$ , on a

$$\text{res}_n(\text{hd}(\rho)) = \delta_c \pmod{n} \quad \text{et} \quad \text{res}_n(\text{hd}(\rho')) = \gamma'_{c'} \pmod{n}.$$

D'après le lemme 7.41, il suffit donc de montrer l'équivalence

$$\delta_c \equiv \gamma'_{c'} \pmod{n} \iff (h \equiv \gamma \pmod{nl} \quad \text{ou} \quad h \equiv \delta \pmod{nl}).$$

Pour cela, reprenons les deux cas du point 2°) du lemme 8.13.

- Premier cas : on a  $d(\beta_x) = d(\beta_x + h)$  et  $d(\beta_y) = d(\beta_y - h)$ . D'après le lemme 8.13 et la propriété  $(P_1)$ , on a les équivalences suivantes, où les congruences sont prises modulo  $n$  :

$$\delta_c \equiv \gamma'_{c'} \iff \phi(\beta_x) \equiv \phi(\beta_y - h) \iff \beta_x \equiv \beta_y - h \iff h \equiv \gamma.$$

Il reste donc à prouver que  $\delta_c \equiv \gamma'_{c'} \pmod{n} \implies h \equiv \gamma \pmod{nl}$ . Supposons que  $\delta_c \equiv \gamma'_{c'} \pmod{n}$  ; on a alors  $h \equiv \gamma \pmod{n}$ . Ceci et l'égalité  $d(\beta_x) = d(\beta_x + h)$  forcent  $d(h) = 1$ , d'où  $h \equiv \gamma \pmod{nl}$ .

- Second cas : on a  $d(\beta_x) = d(\beta_y - h)$  et  $d(\beta_y) = d(\beta_x + h)$ . En utilisant à nouveau le lemme 8.13, on prouve comme au premier cas l'équivalence

$$\delta_c \equiv \gamma'_{c'} \pmod{n} \iff h \equiv 0 \pmod{n}.$$

Supposons que  $\delta_c \equiv \gamma'_{c'} \pmod{n}$ . On a alors  $h \equiv 0 \pmod{n}$ , d'où

$$d(\beta_y) = d(\beta_x + h) \equiv d(\beta_x) + d(h) - 1 \pmod{l},$$

puis  $n(d(h) - 1) \equiv n(d(\beta_y) - d(\beta_x)) \equiv \delta \pmod{nl}$ . On a donc bien  $h \equiv \delta \pmod{nl}$ . □

**Proposition 8.16** *Supposons que  $(\lambda_l, \mu_l)$  satisfait les conditions  $(J_2)$  et que  $\lambda_l \prec \mu_l$ . Avec les notations du paragraphe 8.4.1, on a alors  $\delta = 0$ , et*

$$j_{\lambda_l, \mu_l}^{\prec} = (-1)^{\text{ht}(\rho) + \text{ht}(\rho')} \varepsilon,$$

où

$$\varepsilon := \begin{cases} 1 & \text{si } h \equiv \gamma \pmod{nl} \quad \text{et } h \not\equiv 0 \pmod{nl}, \\ -1 & \text{si } h \not\equiv \gamma \pmod{nl} \quad \text{et } h \equiv 0 \pmod{nl}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* La preuve est analogue à celle de la proposition précédente. Notons qu'on peut appliquer le lemme 8.13 en vertu du corollaire 8.11. Reprenons les notations de ce lemme. L'assertion  $\delta = 0$  découle du point 1°) du lemme 8.13. D'après le lemme 7.41, il suffit de montrer les équivalences

$$\begin{array}{l} \text{(i)} \quad \text{res}_n(\text{hd}(\rho)) = \text{res}_n(\text{hd}(\rho')) \iff h \equiv \gamma \pmod{nl} \\ \text{et} \quad \text{(ii)} \quad \widehat{h} \equiv 0 \pmod{n} \iff h \equiv 0 \pmod{nl}. \end{array}$$

Le lemme 8.9 montre que  $\text{res}_n(\text{hd}(\rho)) = \delta_c \pmod{n}$  et  $\text{res}_n(\text{hd}(\rho')) = \gamma_{c'} \pmod{n}$ . D'après le lemme 8.13 et la propriété  $(P_1)$ , on a les équivalences

$$\text{res}_n(\text{hd}(\rho)) = \text{res}_n(\text{hd}(\rho')) \iff \phi(\beta_x) \equiv \phi(\beta_y - h) \pmod{n} \iff h \equiv \gamma \pmod{n};$$

on montre alors l'équivalence (i) comme au cours la preuve de la proposition 8.15. On prouve de même l'équivalence (ii) à l'aide de l'égalité  $\widehat{h} = \phi(\beta_x + h) - \phi(\beta_x)$  donnée par le lemme 8.13.  $\square$

### 8.4.3 Cas où la multi-charge $s_l$ est $m$ -dominante

Rappelons qu'on a défini au paragraphe 8.1 un ordre partiel  $\preceq$  sur  $\Pi_m^l$ .

**Lemme 8.17** *Soient  $\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l$ , et  $\lambda, \mu \in \Pi$  telles que  $\lambda_l \leftrightarrow \lambda$  et  $\mu_l \leftrightarrow \mu$ . Supposons que  $|\lambda| = |\mu|$ . Considérons les cas suivants :*

- 1°)  $(\lambda_l, \mu_l)$  satisfait  $(J_1)$  et  $s_l$  est  $m$ -dominante,
- 2°)  $(\lambda_l, \mu_l)$  satisfait  $(J_2)$ .

Alors dans chacun de ces cas, on a l'équivalence

$$\lambda_l \prec \mu_l \iff \lambda_l \triangleleft \mu_l.$$

*Démonstration.* Dans chacun des deux cas, on peut appliquer le corollaire 8.11 puis le lemme 8.9 pour en déduire que  $\lambda_l \prec \mu_l$  ou  $\mu_l \prec \lambda_l$ . Il suffit alors de prouver l'implication  $\lambda_l \prec \mu_l \Rightarrow \lambda_l \triangleleft \mu_l$ . Supposons désormais que  $\lambda_l \prec \mu_l$  et  $(\lambda_l, \mu_l)$  satisfait  $(J_1)$  ou  $(J_2)$ . Alors d'après le corollaire 8.11,  $(\lambda_l, \mu_l)$  satisfait les hypothèses  $(\mathcal{H})$ . Reprenons alors les notations du paragraphe 8.4.1. Si  $(\lambda_l, \mu_l)$  satisfait  $(J_2)$ , alors d'après le point 3°) du lemme 8.13, on a  $\lambda^{(d)} \triangleleft \mu^{(d)}$ . De plus, pour tout  $b \in \llbracket 1; l \rrbracket \setminus \{d\}$ , on a  $\lambda^{(b)} = \mu^{(b)}$ , d'où  $\lambda_l \triangleleft \mu_l$ . Supposons désormais que  $(\lambda_l, \mu_l)$  satisfait  $(J_1)$ . Le point clé de la preuve est le suivant. Soit  $\nu_l = (\nu^{(1)}, \dots, \nu^{(l)}) \in \Pi_m^l$ , et  $\nu \in \Pi$  la partition telle que  $\nu_l \leftrightarrow \nu$ . Alors sous l'hypothèse que  $s_l$  est  $m$ -dominante, on a

$$(*) \quad (d(k) < d(k'), k, k' \in B(\nu)) \Rightarrow \phi(k) > \phi(k').$$

En effet, soient  $k, k' \in B(\nu)$ ,  $b := d(k)$ ,  $b' := d(k')$  et  $N$  (resp.  $N'$ ) le nombre de parts de  $\nu^{(b)}$  (resp.  $\nu^{(b')}$ ). Puisque  $\nu_l \leftrightarrow \nu$ , on a  $\phi(k) \in B_N(\nu^{(b)})$  et  $\phi(k') \in B_{N'}(\nu^{(b')})$ . Par conséquent, il

existe  $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ ,  $i' \in \llbracket 1; N' \rrbracket$  tels que  $\phi(k) = s_b + \nu_i^{(b)} - i + 1$  et  $\phi(k') = s_{b'} + \nu_{i'}^{(b')} - i' + 1$ . Puisque  $s_l$  est  $m$ -dominante, on a

$$\begin{aligned} \phi(k) - \phi(k') &= (s_b - s_{b'}) + (i' + \nu_i^{(b)}) - (i + \nu_{i'}^{(b')}) \\ &> s_b - s_{b'} - (N + |\nu^{(b')}|) \geq s_b - s_{b'} - |\nu_l| \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

ce qui montre (\*). Puisque  $(\lambda_l, \mu_l)$  satisfait  $(\mathcal{H})$ , la remarque 8.12 montre que  $\beta_x < \beta_y$ . Puisque  $s_l$  est  $m$ -dominante, l'assertion (\*) et la propriété  $(P_3)$  impliquent que  $d(\beta_x) \geq d(\beta_y)$ . D'après le point 2° du lemme 8.13, on a  $d(\beta_x) = d$  et  $d(\beta_y) = d'$ , d'où  $d > d'$ . De plus, on a  $|\mu^{(d')}| = |\lambda^{(d')}| + \widehat{h}$ ,  $|\mu^{(d)}| = |\lambda^{(d)}| - \widehat{h}$  et  $\mu^{(b)} = \lambda^{(b)}$  pour tout  $b \in \llbracket 1; l \rrbracket \setminus \{d, d'\}$ . Ceci et l'inégalité  $d' < d$  entraînent que  $\lambda_l \triangleleft \mu_l$ .  $\square$

**Proposition 8.18** *Supposons que  $s_l$  est  $m$ -dominante. Alors  $J^{\prec} = J^{\triangleleft}$ .*

*Démonstration.* Soient  $\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l$ , et  $\lambda, \mu \in \Pi$  telles que  $\lambda_l \leftrightarrow \lambda$  et  $\mu_l \leftrightarrow \mu$ . Il suffit de prouver l'équivalence  $j_{\lambda_l, \mu_l}^{\prec} \neq 0 \Leftrightarrow j_{\lambda_l, \mu_l}^{\triangleleft} \neq 0$ , auquel cas on a par définition  $j_{\lambda_l, \mu_l}^{\prec} = j_{\lambda_l, \mu_l}^{\triangleleft} = j_{\lambda_l, \mu_l}$ . Supposons que  $j_{\lambda_l, \mu_l}^{\triangleleft} \neq 0$ . Alors  $\lambda_l \triangleleft \mu_l$ , et d'après le lemme 8.14, on a  $|\lambda| = |\mu|$ . Le lemme 8.17 implique alors que  $\lambda_l \prec \mu_l$ , d'où  $j_{\lambda_l, \mu_l}^{\prec} = j_{\lambda_l, \mu_l} \neq 0$ . La réciproque est analogue.  $\square$

**Remarque 8.19** Il faut prendre garde au fait que les ordres  $\prec$  et  $\triangleleft$  ne coïncident pas nécessairement, même si  $s_l$  est  $m$ -dominante. Par exemple, prenons  $n = 2$ ,  $l = 2$ ,  $m = 6$ ,  $s_l = (3, -3)$ ,  $\lambda_l = ((2, 1), (1, 1, 1))$  et  $\mu_l = ((3), (2, 1))$ . On a  $\lambda_l \triangleleft \mu_l$ ; en revanche, les partitions  $\lambda$  et  $\mu$  telles que  $\lambda_l \leftrightarrow \lambda$  et  $\mu_l \leftrightarrow \mu$  sont  $\lambda = (9, 6, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$  et  $\mu = (10, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1)$ , donc  $\lambda_l$  et  $\mu_l$  sont incomparables pour  $\preceq$ .  $\diamond$

## 8.5 Une autre base de $\Lambda_q^r V$ . Relations de redressement

Fixons dans toute cette section un entier  $r \geq 1$ . Rappelons que  $\Lambda_q^r V$  désigne l'espace vectoriel des  $q$ -produits extérieurs de  $r$  facteurs (cf. chapitre 2). Les relations de redressement  $(R_1)$ - $(R_4)$  de la proposition 2.13 ne donnent pas, à  $q = 1$ , des relations d'anticommutation de la forme  $u_{k_1} \wedge u_{k_2} = -u_{k_2} \wedge u_{k_1}$ , à cause des signes qui apparaissent dans les relations  $(R_3)$  et  $(R_4)$  (voir la remarque 2.14). Pour y remédier, nous allons introduire une base légèrement différente de  $\Lambda_q^r V$ ; il s'agit en fait de la définition des  $q$ -produits extérieurs donnée dans [U1]. Si  $u_{\mathbf{k}} = u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_r} \in \Lambda_q^r V$  ( $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}^r$ ) est un  $q$ -produit extérieur (pas nécessairement ordonné), on pose

$$v_{\mathbf{k}} = v_{k_1} \wedge \cdots \wedge v_{k_r} := (-1)^{\ell(v(\mathbf{k}))} u_{\mathbf{k}},$$

où  $v(\mathbf{k})$  est défini au paragraphe 8.1. Notons que cette définition a un sens, en vertu de la proposition 2.13. On dit que le  $q$ -produit extérieur  $v_{\mathbf{k}}$  est *ordonné* si  $u_{\mathbf{k}}$  l'est. Grâce à la proposition 2.13, on peut aisément expliciter les relations de redressement pour les  $v_{\mathbf{k}}$ .

**Proposition 8.20**

(i) Soit  $k_1 \leq k_2$ , et  $\gamma \in \llbracket 0; nl - 1 \rrbracket$  (resp.  $\delta \in \llbracket 0; nl - 1 \rrbracket$ ) le résidu de  $c(k_2) - c(k_1)$  (resp. de  $n(d(k_2) - d(k_1))$ ) modulo  $nl$ . Alors on a

$$(R'_1) \quad v_{k_1} \wedge v_{k_2} = -v_{k_2} \wedge v_{k_1} \quad \text{si } \gamma = \delta = 0,$$

$$v_{k_1} \wedge v_{k_2} = -q^{-1}v_{k_2} \wedge v_{k_1}$$

$$(R'_2) \quad \begin{aligned} & -(q^{-2} - 1) \sum_{i \geq 1} q^{-2i+1} v_{k_2-nli} \wedge v_{k_1+ni} \\ & + (q^{-2} - 1) \sum_{i \geq 0} q^{-2i} v_{k_2-\gamma-nli} \wedge v_{k_1+\gamma+ni} \end{aligned} \quad \text{si } \gamma > 0, \delta = 0,$$

$$v_{k_1} \wedge v_{k_2} = -qv_{k_2} \wedge v_{k_1}$$

$$(R'_3) \quad \begin{aligned} & -(q^2 - 1) \sum_{i \geq 1} q^{2i-1} v_{k_2-nli} \wedge v_{k_1+ni} \\ & + (q^2 - 1) \sum_{i \geq 0} q^{2i} v_{k_2-\delta-nli} \wedge v_{k_1+\delta+ni} \end{aligned} \quad \text{si } \gamma = 0, \delta > 0,$$

$$(R'_4) \quad \begin{aligned} v_{k_1} \wedge v_{k_2} &= -v_{k_2} \wedge v_{k_1} \\ & -(q - q^{-1}) \sum_{i \geq 1} \frac{q^{2i} - q^{-2i}}{q + q^{-1}} v_{k_2-nli} \wedge v_{k_1+ni} \\ & -(q - q^{-1}) \sum_{i \geq 0} \frac{q^{2i+1} + q^{-2i-1}}{q + q^{-1}} v_{k_2-\gamma-nli} \wedge v_{k_1+\gamma+ni} \\ & + (q - q^{-1}) \sum_{i \geq 0} \frac{q^{2i+1} + q^{-2i-1}}{q + q^{-1}} v_{k_2-\delta-nli} \wedge v_{k_1+\delta+ni} \\ & + (q - q^{-1}) \sum_{i \geq 0} \frac{q^{2i+2} - q^{-2i-2}}{q + q^{-1}} v_{k_2-\gamma-\delta-nli} \wedge v_{k_1+\gamma+\delta+ni} \end{aligned} \quad \text{si } \gamma > 0, \delta > 0,$$

où les sommes portent sur tous les indices  $i$  tels que les  $q$ -produits extérieurs correspondant soient ordonnés.

(ii) Les relations du (i) sont valables pour toute paire de facteurs adjacents du  $q$ -produit extérieur  $v_{\mathbf{k}} = v_{k_1} \wedge \cdots \wedge v_{k_r}$ .  $\square$

Terminons cette section par une notation qui nous servira plus tard. Si  $\nu \in \Pi$  est une partition de rang  $r$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ , on pose  $v_{\sigma, \nu} := v_{\sigma, \beta(\nu)}$  (c'est un  $q$ -produit extérieur de  $r$  facteurs), et on définit de même  $u_{\sigma, \nu}$ . On dit alors que  $v_{\sigma, \nu}$  est obtenu à partir de  $v_{\nu}$  par permutation.



## 8.6 Suites admissibles, bonnes suites

### 8.6.1 Définitions

Fixons pour toute cette section un entier  $r \geq 1$ . Soit  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^r$  une suite de  $r$  entiers non nécessairement strictement décroissante. Nous allons examiner en détail le processus de redressement du  $q$ -produit extérieur  $v_{\mathbf{k}} = v_{k_1} \wedge \cdots \wedge v_{k_r}$ . Si ce  $q$ -produit extérieur n'est pas ordonné, il y a en général plusieurs manières de le redresser en appliquant de façon récursive les relations  $(R'_1)$ - $(R'_4)$ . Nous décidons désormais d'effectuer chaque « redressement élémentaire » à la *première* infraction qui a lieu dans  $v_{\mathbf{k}}$ , c'est-à-dire d'utiliser une des relations  $(R'_1)$ - $(R'_4)$  pour redresser  $v_{k_i} \wedge v_{k_{i+1}}$ , où  $i$  est le *plus petit* entier tel que  $k_i \leq k_{i+1}$ . Ceci conduit à la notion de suite admissible, que nous introduisons.

**Définition 8.21** Soit  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ ,  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_r) \in \mathbb{Z}^r$ . On dit que les  $q$ -produits extérieurs  $v_{\mathbf{k}}$  et  $v_{\mathbf{l}}$  sont *adjacents* s'il existe  $1 \leq i \leq r-1$  ( $i$  est alors nécessairement unique) tel que :

- (i)  $k_i \leq k_{i+1}$ , et  $k_j > k_{j+1}$  pour tout  $1 \leq j \leq i-1$ ,
- (ii)  $k_j = l_j$  pour tout  $j \in \llbracket 1; r \rrbracket \setminus \{i, i+1\}$ ,
- (iii) le  $q$ -produit extérieur  $v_{\mathbf{l}}$  apparaît dans le redressement de  $v_{k_i} \wedge v_{k_{i+1}}$ .

Dans ce cas, soient  $t \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$  l'indice de la relation  $(R'_t)$  utilisée pour redresser  $v_{k_i} \wedge v_{k_{i+1}}$  et  $\alpha(v_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{l}}) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  le coefficient de  $v_{\mathbf{l}}$  dans la combinaison linéaire qui en résulte. Si on a  $(l_i, l_{i+1}) = (k_{i+1}, k_i)$ , on notera alors  $v_{\mathbf{k}} \xrightarrow{\bullet} v_{\mathbf{l}}$ , et on posera  $m(v_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{l}}) := 0$ . Sinon, on notera  $v_{\mathbf{k}} \xrightarrow{t} v_{\mathbf{l}}$  (notons qu'on a alors  $t \geq 2$ ) et on posera  $m(v_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{l}}) := 1$ . Dans chacun des deux cas, on notera parfois plus simplement  $v_{\mathbf{k}} \rightarrow v_{\mathbf{l}}$ .

On dit que la suite  $\mathbf{V} = (v_{\mathbf{k}_i})_{0 \leq i \leq N}$  est *admissible* si chacun des  $v_{\mathbf{k}_i}$  est un  $q$ -produit extérieur de  $r$  facteurs et si on a

$$v_{\mathbf{k}_0} \rightarrow v_{\mathbf{k}_1} \rightarrow \cdots \rightarrow v_{\mathbf{k}_N} ;$$

dans ce cas,  $N$  est appelé *longueur* de la suite  $\mathbf{V}$ , et on pose

$$\alpha_{\mathbf{V}}(q) := \prod_{i=1}^N \alpha(v_{\mathbf{k}_{i-1}}, v_{\mathbf{k}_i}) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}] \quad \text{et} \quad m(\mathbf{V}) := \sum_{i=1}^N m(v_{\mathbf{k}_{i-1}}, v_{\mathbf{k}_i}) \in \mathbb{N}.$$

◇

**Remarque 8.22** La condition (i) de la définition 8.21 montre qu'il existe au plus une suite admissible  $\mathbf{V}$  de longueur fixée et commençant à un  $q$ -produit extérieur  $v$  fixé telle que  $m(\mathbf{V}) = 0$ . ◇

**Définition 8.23** Soient  $\lambda, \mu \in \Pi$  deux partitions de rang  $r$ . On dit que la suite de  $q$ -produits extérieurs  $\mathbf{V} = (v_{\mathbf{k}_i})_{0 \leq i \leq N}$  est  $(\lambda, \mu)$ -*admissible* si c'est une suite admissible de  $q$ -produits extérieurs (ayant chacun  $r$  facteurs) telle que  $v_{\mathbf{k}_N} = v_{\lambda}$  et  $v_{\mathbf{k}_0} = v_{\omega \cdot \mu}$  (rappelons que

$\omega := \binom{1, \dots, r}{r, \dots, 1}$  est l'unique élément de longueur maximale de  $\mathfrak{S}_r$ . Une suite  $(\lambda, \mu)$ -admissible  $\mathbf{V}$  telle que  $m(\mathbf{V}) = 1$  est appelée *bonne suite* (relativement à  $(\lambda, \mu)$ ). Une telle suite peut s'écrire

$$v_{\omega, \mu} \xrightarrow{\bullet} \cdots \xrightarrow{\bullet} \mathbf{u} \xrightarrow{t} \mathbf{v} \xrightarrow{\bullet} \cdots \xrightarrow{\bullet} v_\lambda,$$

avec  $t \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$ . ◇

**Remarque 8.24** Si  $\lambda \neq \mu$ , alors il n'existe pas de suite  $(\lambda, \mu)$ -admissible  $\mathbf{V} = (v_{\mathbf{k}_i})_{0 \leq i \leq N}$  telle que  $m(\mathbf{V}) = 0$ . Car sinon, on doit avoir pour tout  $1 \leq i \leq N$ ,  $v_{\mathbf{k}_{i-1}} \xrightarrow{\bullet} v_{\mathbf{k}_i}$ , ce qui montre que chaque  $v_{\mathbf{k}_i}$ ,  $0 \leq i \leq N$  est obtenu à partir de  $v_\mu$  par permutation. Ceci vaut en particulier pour  $v_\lambda$ , d'où  $\beta(\lambda) = \beta(\mu)$ , puis  $\lambda = \mu$ . ◇

**Remarque 8.25** Si une bonne suite (relativement à  $(\lambda, \mu)$ ) existe, on a alors nécessairement

$$\sharp(B(\lambda) \cap B(\mu)) = r - 2.$$
◇

### 8.6.2 Réduction à l'étude des bonnes suites

Soient  $\lambda \in \Pi$  une partition de  $r$  et  $\mathbf{k} = (k_i) \in P^{++}(s)$  tels que  $u_{\mathbf{k}} = |\lambda, s\rangle$ . Rappelons que  $\Lambda^s$  est muni d'une involution  $-$  agissant sur  $|\lambda, s\rangle$  de la façon suivante (cf. paragraphe 3.4.3) :

$$\overline{|\lambda, s\rangle} = (-1)^{\kappa(\mathbf{d}(\lambda))} q^{\kappa(\mathbf{d}(\lambda)) - \kappa(\mathbf{c}(\lambda))} (u_{k_r} \wedge \cdots \wedge u_{k_1}) \wedge u_{k_{r+1}} \wedge u_{k_{r+2}} \wedge \cdots,$$

où pour  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$ ,  $\kappa(\mathbf{a})$  est l'entier défini par

$$\kappa(\mathbf{a}) := \sharp \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i < j \leq r, a_i = a_j\}.$$

En exprimant l'involution de  $\Lambda^s$  en termes de  $v_{\mathbf{k}}$  et en utilisant la définition des suites  $(\lambda, \mu)$ -admissibles, nous trouvons l'expression suivante pour les coefficients de  $A(q)$ .

**Lemme 8.26** Soient  $\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l$ , et  $\lambda, \mu \in \Pi$  les partitions telles que  $\lambda_l \leftrightarrow \lambda$  et  $\mu_l \leftrightarrow \mu$ . Supposons que  $|\lambda| = |\mu|$ . Alors on a

$$a_{\lambda_l, \mu_l}(q) = \varepsilon(\lambda_l, \mu_l) q^{\kappa(\mathbf{d}(\mu)) - \kappa(\mathbf{c}(\mu))} \sum_{\mathbf{V}} \alpha_{\mathbf{V}}(q),$$

où la somme porte sur toutes les suites  $\mathbf{V}$  qui sont  $(\lambda, \mu)$ -admissibles, et  $\varepsilon(\lambda_l, \mu_l)$  est le signe défini par

$$\varepsilon(\lambda_l, \mu_l) := (-1)^{\kappa(\mathbf{d}(\mu)) + \ell(v(\omega, \mu)) + \ell(v(\lambda))}.$$

*Démonstration.* Posons  $r := |\lambda| = |\mu|$  et  $|s - r\rangle := u_{s-r} \wedge u_{s-r-1} \wedge \cdots$ . Par définition des coefficients  $\alpha_{\mathbf{V}}(q)$ , on a

$$\begin{aligned} \overline{u_\mu \wedge |s - r\rangle} &= (-1)^{\kappa(\mathbf{d}(\mu))} q^{\kappa(\mathbf{d}(\mu)) - \kappa(\mathbf{c}(\mu))} u_{\omega, \mu} \wedge |s - r\rangle \\ &= (-1)^{\kappa(\mathbf{d}(\mu)) - \ell(v(\omega, \mu))} q^{\kappa(\mathbf{d}(\mu)) - \kappa(\mathbf{c}(\mu))} v_{\omega, \mu} \wedge |s - r\rangle \\ &= (-1)^{\kappa(\mathbf{d}(\mu)) + \ell(v(\omega, \mu))} q^{\kappa(\mathbf{d}(\mu)) - \kappa(\mathbf{c}(\mu))} \sum_{\nu} \left( \sum_{\mathbf{V}_\nu} \alpha_{\mathbf{V}_\nu}(q) \right) v_\nu \wedge |s - r\rangle, \end{aligned}$$

où la première somme porte sur les partitions  $\nu$  qui sont de rang  $r$  et la deuxième somme porte sur les suites  $\mathbf{V}_\nu$  qui sont  $(\nu, \mu)$  admissibles. On a donc

$$\overline{u_\mu \wedge |s-r\rangle} = \sum_{\nu} \left( (-1)^{\kappa(\mathbf{d}(\mu)) + \ell(\mathbf{v}(\omega, \mu)) + \ell(\mathbf{v}(\nu))} q^{\kappa(\mathbf{d}(\mu)) - \kappa(\mathbf{c}(\mu))} \sum_{\mathbf{V}_\nu} \alpha_{\mathbf{V}_\nu}(q) \right) u_\nu \wedge |s-r\rangle ;$$

par ailleurs, par définition de  $A(q)$ , on a

$$\overline{u_\mu \wedge |s-r\rangle} = \sum_{\nu} a_{\nu_l, \mu_l}(q) u_\nu \wedge |s-r\rangle.$$

Ici la somme porte sur toutes les partitions  $\nu$  de rang  $r$  telles que  $\nu_l \in \Pi_m^l$ , où  $\nu_l$  et  $\nu$  sont reliées par la relation  $\nu_l \leftrightarrow \nu$ . Il n'y a plus qu'à prendre  $\nu = \lambda$  dans ces deux expressions pour avoir le résultat.  $\square$

**Remarque 8.27** Il faut prendre garde au fait que la somme donnée dans le lemme ci-dessus comporte en général plusieurs termes, donc l'argument donné au début de [Ry, Section 4] ne tient pas. Nous pouvons cependant récupérer l'argument de [Ry] en montrant d'abord que seuls les termes provenant des bonnes suites apportent effectivement une contribution non nulle à  $a'_{\lambda_l, \mu_l}(1)$  (voir le lemme qui suit), puis en montrant qu'il existe au plus une bonne suite (voir les propositions 8.31 et 8.32 des deux paragraphes suivants).  $\diamond$

**Lemme 8.28** Soient  $\lambda_l, \mu_l \in \Pi_m^l$  deux multi-partitions distinctes, et  $\lambda, \mu \in \Pi$  telles que  $\lambda_l \leftrightarrow \lambda$  et  $\mu_l \leftrightarrow \mu$ . Supposons que  $|\lambda| = |\mu| = r$ . Alors on a

$$a'_{\lambda_l, \mu_l}(1) = \varepsilon(\lambda_l, \mu_l) \sum_{\mathbf{V}} \alpha'_{\mathbf{V}}(1),$$

où la somme porte sur toutes les bonnes suites relativement à  $(\lambda, \mu)$ , et  $\varepsilon(\lambda_l, \mu_l)$  est le signe défini au lemme 8.26. En particulier, s'il n'existe pas de telle suite, alors on a  $a'_{\lambda_l, \mu_l}(1) = 0$ .

*Démonstration.* D'après le lemme précédent, on a

$$a_{\lambda_l, \mu_l}(q) = \varepsilon(\lambda_l, \mu_l) \sum_{\mathbf{V}} f_{\mathbf{V}}(q),$$

où la somme porte sur toutes les suites  $\mathbf{V}$  qui sont  $(\lambda, \mu)$ -admissibles et  $f_{\mathbf{V}}(q)$  est le polynôme de Laurent défini par  $f_{\mathbf{V}}(q) := q^{\kappa(\mathbf{d}(\mu)) - \kappa(\mathbf{c}(\mu))} \alpha_{\mathbf{V}}(q)$ . Observons que si  $\mathbf{V}$  est une suite admissible, alors  $m(\mathbf{V}) \geq 1$  (car  $\lambda \neq \mu$ ), et de plus les relations  $(R'_1)$ - $(R'_4)$  montrent que

$$\alpha_{\mathbf{V}}(q) \in (q^2 - 1)^{m(\mathbf{V})} \mathbb{Z}[q, q^{-1}].$$

Par conséquent, si  $\mathbf{V}$  est une suite  $(\lambda, \mu)$ -admissible telle que  $m(\mathbf{V}) \geq 2$ , alors  $(q^2 - 1)^2$  divise  $f_{\mathbf{V}}(q)$  dans  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ , d'où  $f'_{\mathbf{V}}(1) = 0$ . En outre, si  $\mathbf{V}$  est une bonne suite, alors d'après ce qui précède, on a  $\alpha_{\mathbf{V}}(1) = 0$ , d'où  $f'_{\mathbf{V}}(1) = (\kappa(\mathbf{d}(\mu)) - \kappa(\mathbf{c}(\mu))) \alpha_{\mathbf{V}}(1) + \alpha'_{\mathbf{V}}(1) = \alpha'_{\mathbf{V}}(1)$ .  $\square$

### 8.6.3 Existence d'une bonne suite

Nous allons commencer par donner (cf. proposition 8.31) des conditions suffisantes pour qu'une bonne suite (relativement à  $(\lambda, \mu)$  fixé) existe. Pour cela, nous devons examiner de façon approfondie la suite de permutations que l'on effectue sur les composantes de  $q$ -produits extérieurs (comportant  $r$  facteurs) lorsqu'on parcourt une suite de la forme

$$v_{\mathbf{k}_0} \xrightarrow{\bullet} v_{\mathbf{k}_1} \xrightarrow{\bullet} \cdots \xrightarrow{\bullet} v_{\mathbf{k}_N},$$

où  $k_0, \dots, k_N \in \mathbb{Z}^r$  et  $v_{\omega, \mathbf{k}_0}$  est ordonné.

Soit  $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_r$ . Notons  $\sigma \rightarrow \sigma'$  s'il existe  $1 \leq i \leq r-1$  tel que  $\sigma(i) < \sigma(i+1)$ , avec  $i$  minimal pour cette propriété, et si on a  $\sigma' = \sigma_i \sigma$ . La relation  $\rightarrow$  sur  $\mathfrak{S}_r$  a un lien étroit avec la relation  $\xrightarrow{\bullet}$  sur les  $q$ -produits extérieurs de  $r$  facteurs. Rappelons que si  $v_{\mathbf{k}} = v_{k_1} \wedge \cdots \wedge v_{k_r}$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ , alors on a  $v_{\sigma, \mathbf{k}} = v_{k_{\sigma^{-1}(1)}} \wedge \cdots \wedge v_{k_{\sigma^{-1}(r)}}$ . Alors par définition, on a  $\sigma \rightarrow \sigma'$  si et seulement si  $v_{\sigma^{-1}, \mathbf{k}} \xrightarrow{\bullet} v_{\sigma'^{-1}, \mathbf{k}}$ , où  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}^r$  est tel que  $v_{\omega, \mathbf{k}}$  est ordonné (i.e.  $k_1 < \cdots < k_r$ ).

Considérons maintenant l'écriture réduite suivante du mot de longueur maximale de  $\mathfrak{S}_r$  :

$$\omega = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{r-1})(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{r-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2)(\sigma_1),$$

et notons, pour  $0 \leq i \leq \frac{r(r-1)}{2}$ ,  $\omega[i]$  le facteur droit de longueur  $i$  dans cette écriture de  $\omega$  (par convention,  $\omega[0] = \text{id}$ ). Par exemple, si  $r \geq 3$ , on a  $\omega[5] = \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$ . La suite  $(\omega[i])_{0 \leq i \leq \frac{r(r-1)}{2}}$  vérifie la propriété suivante: si  $\text{id} = \sigma^{(0)} \rightarrow \sigma^{(1)} \rightarrow \cdots \rightarrow \sigma^{(k)}$  avec  $0 \leq k \leq \frac{r(r-1)}{2}$ , alors on a  $\sigma^{(i)} = \omega[i]$  pour tout  $0 \leq i \leq k$ . En particulier, on a  $\omega[i-1] \rightarrow \omega[i]$  pour tout  $1 \leq i \leq \frac{r(r-1)}{2}$ .

**Lemme 8.29** *Soient  $i, j \in \llbracket 1; r \rrbracket$  tels que  $i < j$ . Alors il existe deux entiers  $k \in \llbracket 1; r-1 \rrbracket$  et  $e \in \llbracket 0; \frac{r(r-1)}{2} - 1 \rrbracket$  déterminés de façon unique tels que  $(\omega[e])(k) = i$ ,  $(\omega[e])(k+1) = j$  et  $\omega[e+1] = \sigma_k \omega[e]$ . Plus précisément, on a  $k = j - i$  et  $e = \frac{(j-1)(j-2)}{2} + (i-1)$ .*

*Démonstration.* On montre par récurrence sur  $j$  que  $\tilde{\omega} := \omega[\frac{(j-1)(j-2)}{2}]$  est la permutation  $\tilde{\omega} = \binom{1, \dots, j-1, j, \dots, r}{j-1, \dots, 1, j, \dots, r}$ . Par conséquent, si on pose  $e := \frac{(j-1)(j-2)}{2} + (i-1)$  et  $k := j - i$ , alors  $\omega[e] = \sigma_{j-i+1} \sigma_{j-i+2} \cdots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1} \tilde{\omega}$  est la permutation

$$\omega[e] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j-i-1 & j-i & j-i+1 & j-i+2 & \dots & j & j+1 & \dots & r \\ j-1 & j-2 & \dots & i+1 & i & j & i-1 & \dots & 1 & j+1 & \dots & r \end{pmatrix},$$

donc  $k$  et  $e$  ainsi définis conviennent. Il reste à montrer l'unicité de  $e$ , car  $k$  sera alors déterminé par la relation  $k = (\omega[e])^{-1}(i)$ . Clairement aucun  $e' < e := \frac{(j-1)(j-2)}{2} + (i-1)$  ne peut convenir. Supposons que  $e' > e$  convient aussi. Notons alors que  $i$  apparaît à droite de  $j$  dans l'écriture de la suite d'entiers  $(\omega[e+1]).(1, \dots, r)$ ; en d'autres termes, on a  $(\omega[e+1])^{-1}(i) > (\omega[e+1])^{-1}(j)$ . Par contre, on a  $(\omega[e'])^{-1}(i) < (\omega[e'])^{-1}(j)$ ; par conséquent,

le passage de  $\omega[e+1]$  à  $\omega[e']$  à travers la suite  $\omega[e+1] \rightarrow \dots \rightarrow \omega[e']$  nécessite de permuter à nouveau les entiers  $i$  et  $j$ , ce qui est impossible car  $i < j$ .  $\square$

**Exemple 8.30** Prenons  $r = 6$ ,  $i = 2$  et  $j = 5$ . On a la suite

$$\begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 1,2,3,4,5,6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 2,1,3,4,5,6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 2,3,1,4,5,6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 3,2,1,4,5,6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 3,2,4,1,5,6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 3,4,2,1,5,6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 4,3,2,1,5,6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 4,3,2,5,1,6 \end{pmatrix} = \omega[e],$$

d'où  $e = 7 = \frac{(j-1)(j-2)}{2} + (i-1)$  et  $k = 3 = j - i$ .  $\diamond$

**Proposition 8.31** *Supposons que  $(\lambda_l, \mu_l)$  satisfait  $(\mathcal{H})$ . Reprenons alors les notations du paragraphe 8.4.1. Supposons de plus que  $(\gamma, \delta) \neq (0,0)$  et  $h \equiv \eta \pmod{nl}$ , avec  $\eta \in \{0, \gamma, \delta, \gamma + \delta\}$ . Alors il existe une bonne suite relativement à  $(\lambda, \mu)$ .*

*Démonstration.* Soient  $e$  et  $k = x - y$  les entiers donnés par le lemme précédent appliqué au couple  $(i, j) := (r + 1 - x, r + 1 - y)$ . On a alors la suite  $\omega[0] \rightarrow \dots \rightarrow \omega[e]$ , donc la suite  $v_{\omega[0]^{-1} \cdot (\omega, \mu)} \xrightarrow{\bullet} \dots \xrightarrow{\bullet} v_{\omega[e]^{-1} \cdot (\omega, \mu)}$  est admissible. De plus, par hypothèse sur  $e$ , on a

$$\mathbf{u} := v_{\omega[e]^{-1} \cdot (\omega, \mu)} = v_{(\omega\omega[e]^{-1}) \cdot \mu} = v_{m_1} \wedge \dots \wedge v_{m_{k-1}} \wedge v_{\beta_x} \wedge v_{\beta_y} \wedge v_{m_{k+2}} \wedge \dots \wedge v_{m_r},$$

où les  $m_i$  sont des entiers appartenant à  $B(\mu)$ , et la prochaine étape du processus de redressement consiste à redresser  $\mathbf{u}$  par rapport aux facteurs situés aux places  $(k, k+1)$  (i.e. à redresser  $v_{\beta_x} \wedge v_{\beta_y}$ ). La condition  $(\gamma, \delta) \neq (0,0)$  montre que ce redressement se fait à l'aide de la relation  $(R'_t)$ , avec  $t \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$ . On obtient alors une combinaison linéaire de  $q$ -produits extérieurs dont les facteurs situés aux places  $(k, k+1)$  sont de la forme  $v_{\beta_y - nli} \wedge v_{\beta_x + nli}$  (resp.  $v_{\beta_y - \gamma - nli} \wedge v_{\beta_x + \gamma + nli}$ , resp.  $v_{\beta_y - \delta - nli} \wedge v_{\beta_x + \delta + nli}$ , resp.  $v_{\beta_y - \gamma - \delta - nli} \wedge v_{\beta_x + \gamma + \delta + nli}$ ), avec  $i \in \mathbb{N}$ . La condition  $h \equiv \eta \pmod{nl}$  de l'énoncé nous assure qu'on peut choisir  $i$  de façon à avoir  $h = nli$  (resp.  $h = nli + \gamma$ , resp.  $h = nli + \delta$ , resp.  $h = nli + \gamma + \delta$ ). Compte tenu de l'expression de  $\beta(\lambda)$ , on voit que le  $q$ -produit extérieur correspondant à ce choix de  $i$ , qui n'est autre que

$$\mathbf{v} := v_{m_1} \wedge \dots \wedge v_{m_{k-1}} \wedge v_{\beta_y - h} \wedge v_{\beta_x + h} \wedge v_{m_{k+2}} \wedge \dots \wedge v_{m_r},$$

est obtenu à partir de  $v_\lambda$  par permutation. Posons  $\mathbf{v}_1 := \mathbf{v}$ . Si  $\mathbf{v}_1$  n'est pas ordonné, alors le redressement élémentaire de  $\mathbf{v}_1$  par rapport à la première infraction donne une combinaison linéaire de  $q$ -produits extérieurs, et l'un d'entre eux, que l'on notera  $\mathbf{v}_2$ , est obtenu à partir de  $\mathbf{v}_1$  par permutation. On itère ce procédé jusqu'à tomber sur un  $q$ -produit extérieur ordonné (qui est forcément  $v_\lambda$ ), d'où l'existence d'une suite admissible  $\mathbf{v} \xrightarrow{\bullet} \dots \xrightarrow{\bullet} \mathbf{v}_z = v_\lambda$ . Par conséquent, la suite

$$v_{\omega, \mu} \xrightarrow{\bullet} \dots \xrightarrow{\bullet} \mathbf{u} \xrightarrow{t} \mathbf{v} \xrightarrow{\bullet} \dots \xrightarrow{\bullet} v_\lambda$$

ainsi construite est une bonne suite.  $\square$

### 8.6.4 Unicité de la bonne suite

Nous montrons maintenant la réciproque de la proposition 8.31.

**Proposition 8.32** *Supposons que  $(\lambda_l, \mu_l)$  satisfait  $(\mathcal{H})$ , et reprenons les notations du paragraphe 8.4.1. Supposons qu'il existe une bonne suite*

$$v_{\omega.\mu} = v_{\mathbf{k}_0} \xrightarrow{\bullet} \cdots \xrightarrow{\bullet} v_{\mathbf{k}_e} \xrightarrow{t} v_{\mathbf{k}_{e+1}} \xrightarrow{\bullet} \cdots \xrightarrow{\bullet} v_{\mathbf{k}_N} = v_\lambda$$

relativement à  $(\lambda, \mu)$ , avec  $t \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$ . Alors cette suite est unique,  $t$  est déterminé de façon unique, et on a de plus les conditions  $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$  et  $h \equiv \eta \pmod{nl}$ , avec  $\eta \in \{0, \gamma, \delta, \gamma + \delta\}$ .

*Démonstration.* Par hypothèse,  $v_{\mathbf{k}_e}$  est obtenu à partir de  $v_\mu$  par permutation et  $v_{\mathbf{k}_{e+1}}$  est obtenu à partir de  $v_\lambda$  par permutation. En outre, la remarque 8.12 montre que l'on a  $\{\beta_x, \beta_y\} \cap B(\lambda) = \emptyset$ . Par conséquent, il existe  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$  et  $1 \leq k \leq r - 1$  tels que

$$v_{\mathbf{k}_e} = v_{\sigma.\mu} = v_{\beta_{\sigma^{-1}(1)}} \wedge \cdots \wedge v_{\beta_{\sigma^{-1}(k-1)}} \wedge v_{\beta_x} \wedge v_{\beta_y} \wedge v_{\beta_{\sigma^{-1}(k+2)}} \wedge \cdots \wedge v_{\beta_{\sigma^{-1}(r)}},$$

$$v_{\mathbf{k}_{e+1}} = v_{\beta_{\sigma^{-1}(1)}} \wedge \cdots \wedge v_{\beta_{\sigma^{-1}(k-1)}} \wedge v_{\beta_{y-h}} \wedge v_{\beta_{x+h}} \wedge v_{\beta_{\sigma^{-1}(k+2)}} \wedge \cdots \wedge v_{\beta_{\sigma^{-1}(r)}},$$

et  $v_{\mathbf{k}_{e+1}}$  se déduit de  $v_{\mathbf{k}_e}$  en redressant  $v_{\beta_x} \wedge v_{\beta_y}$  grâce à la relation  $(R'_t)$ . Puisque  $t \in \llbracket 2; 4 \rrbracket$ , les conditions de la dernière phrase de l'énoncé doivent être vérifiées. De plus  $t$  est entièrement déterminé en fonction de la nullité (ou non) de  $\gamma$  et  $\delta$ . Montrons que  $k$  et  $e$  satisfont les conditions du lemme 8.29. Pour  $0 \leq i \leq e$ , soit  $\sigma^{(i)} \in \mathfrak{S}_r$  l'unique permutation telle que  $\mathbf{k}_i = \sigma^{(i)}\omega.\mu$ ; en particulier, on a  $\sigma = \sigma^{(e)}\omega$ . Comme la suite  $v_{\mathbf{k}_0} \xrightarrow{\bullet} \cdots \xrightarrow{\bullet} v_{\mathbf{k}_e}$  est admissible, on a  $\text{id} = (\sigma^{(0)})^{-1} \rightarrow \cdots \rightarrow (\sigma^{(e)})^{-1}$ ; par conséquent, pour tout  $0 \leq i \leq e$ , on a  $\sigma^{(i)} = \omega[i]^{-1}$ . Posons  $i := r + 1 - x$  et  $j := r + 1 - y$ ; par hypothèse sur  $\sigma$ , on a  $k = \sigma(x) = \omega[e]^{-1}\omega(x) = \omega[e]^{-1}(i)$ , d'où  $\omega[e](k) = i$  et de même,  $\omega[e](k + 1) = j$ . Enfin, puisque  $v_{\mathbf{k}_e} \rightarrow v_{\mathbf{k}_{e+1}}$ ,  $k$  est le plus petit entier tel que  $\beta_{\sigma^{-1}(k)} < \beta_{\sigma^{-1}(k+1)}$ , soit encore tel que  $\omega\sigma^{-1}(k) < \omega\sigma^{-1}(k + 1)$ ; on a donc  $\omega\sigma^{-1} \rightarrow \sigma_k\omega\sigma^{-1}$ , soit encore  $\omega[e] \rightarrow \sigma_k\omega[e]$ . Ainsi  $k$  et  $e$  satisfont les conditions du lemme 8.29 (appliqué aux entiers  $i = r + 1 - x$  et  $j = r + 1 - y$ ), donc ces entiers sont déterminés de façon unique. Ceci détermine complètement la suite  $v_{\mathbf{k}_0} \xrightarrow{\bullet} \cdots \xrightarrow{\bullet} v_{\mathbf{k}_e}$ . D'après l'expression de  $v_{\mathbf{k}_{e+1}}$  donnée au début de la preuve, le  $q$ -produit extérieur  $v_{\mathbf{k}_{e+1}}$  est lui aussi déterminé de façon unique. Soit  $\sigma' \in \mathfrak{S}_r$  l'unique permutation telle que  $v_{\mathbf{k}_{e+1}} = v_{\sigma'.\lambda}$ . D'après la remarque 8.22, la suite  $v_{\sigma'.\lambda} \xrightarrow{\bullet} \cdots \xrightarrow{\bullet} v_\lambda$ , de longueur  $\ell(\sigma')$ , est à son tour déterminée de façon unique.  $\square$

## 8.7 Calcul de la longueur modulo 2 de la bonne suite

### 8.7.1 Énoncé et preuve du résultat

Nous abordons à présent la partie technique de la preuve du théorème 8.4. La proposition qui suit servira à montrer que si  $a'_{\lambda_l, \mu_l}(1)$  et  $j_{\lambda_l, \mu_l}^\prec$  sont non nuls, alors ces deux nombres ont

le même signe. Le lecteur est invité à se reporter aux exemples donnés au paragraphe suivant pour suivre le cheminement de la preuve.

**Proposition 8.33** *Supposons que  $(\lambda_l, \mu_l)$  satisfait  $(\mathcal{H})$ , et reprenons les notations du paragraphe 8.4.1. Supposons de plus que  $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$  et  $h \equiv \eta \pmod{nl}$ , avec  $\eta \in \{\gamma, \delta\}$ . Soit alors*

$$\mathbf{V} = v_{\omega, \mu} \xrightarrow{\bullet} \cdots \xrightarrow{\bullet} v_{\mathbf{k}} \xrightarrow{t} v_l \xrightarrow{\bullet} \cdots \xrightarrow{\bullet} v_\lambda$$

*l'unique bonne suite relativement à  $(\lambda, \mu)$  (cf. propositions 8.31 et 8.32). Notons  $N$  la longueur de cette suite. Alors on a*

$$(-1)^{N-1} = (-1)^{\text{ht}(\rho) + \text{ht}(\rho')} \varepsilon(\lambda_l, \mu_l) \varepsilon,$$

*où  $\varepsilon(\lambda_l, \mu_l)$  est le signe défini au lemme 8.26 et  $\varepsilon$  est le signe défini par*

$$\varepsilon := \begin{cases} 1 & \text{si } \delta > 0 \text{ et } h \equiv \delta \pmod{nl}, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Remarque 8.34** Nous verrons plus tard que si  $h \equiv \eta \pmod{nl}$  avec  $\eta \in \{0, \gamma + \delta\} \setminus \{\gamma, \delta\}$ , on a alors  $a'_{\lambda_l, \mu_l}(1) = j_{\lambda_l, \mu_l}^< = 0$ ; c'est pourquoi nous n'envisageons pas ce cas ici.  $\diamond$

*Démonstration.* Soient  $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_r$  les permutations déterminées par les relations  $v_{\sigma\omega, \mu} = v_{\mathbf{k}}$  et  $v_{\sigma'^{-1}\lambda} = v_l$ . On a  $N = \ell(\sigma) + 1 + \ell(\sigma')$ , d'où  $(-1)^{N-1} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$ . Grâce au lemme 8.29, on peut expliciter  $\ell(\sigma)$  et donc  $\varepsilon(\sigma)$ ; il est en revanche peu aisé de calculer  $\ell(\sigma')$ . Nous nous contenterons de calculer  $\varepsilon(\sigma')$  en écrivant  $\sigma'$  comme produit de 7 permutations  $\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(7)}$  dont nous pouvons calculer facilement la signature.

\* Commençons par poser

$$\sigma^{(1)} := \sigma^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_1 := v_{\sigma^{(1)}\mathbf{l}};$$

alors  $\mathbf{v}_1$  est le  $q$ -produit extérieur obtenu à partir de  $v_{\omega, \mu}$  en remplaçant  $\beta_x$  (correspondant au  $(r+1-x)$ -ième facteur) par  $\beta_y - h$ , et  $\beta_y$  (correspondant au  $(r+1-y)$ -ième facteur) par  $\beta_x + h$ .

\* D'après le lemme 8.13, on a deux cas :

- Premier cas :  $d(\beta_x) = d(\beta_y - h)$  et  $d(\beta_y) = d(\beta_x + h)$ ,
- Second cas :  $d(\beta_x) = d(\beta_x + h)$ ,  $d(\beta_y) = d(\beta_y - h)$  et  $d(\beta_x) \neq d(\beta_y)$ .

Il est facile de voir que le premier cas a lieu si et seulement si  $\delta = 0$  ou  $h \equiv \delta \pmod{nl}$ , et que le deuxième cas a lieu si et seulement si  $\delta > 0$  et  $h \equiv \gamma \pmod{nl}$ . Posons alors

$$\sigma^{(2)} := \begin{cases} \text{id} & \text{si on est dans le premier cas} \\ (r+1-x, r+1-y) & \text{si on est dans le second cas} \end{cases}$$

$$\text{et } \mathbf{v}_2 := v_{\sigma^{(2)}\sigma^{(1)}\mathbf{l}};$$

dans le second cas,  $\mathbf{v}_2$  est obtenu à partir de  $\mathbf{v}_1$  en permutant  $\beta_x + h$  et  $\beta_y - h$ .  $\sigma^{(2)}$  est construite de façon à avoir  $\mathbf{d}(\sigma^{(2)}\sigma^{(1)}\mathbf{l}) = \mathbf{d}(\omega, \mu)$  et donc  $\mathbf{v}(\sigma^{(2)}\sigma^{(1)}\mathbf{l}) = \mathbf{v}(\omega, \mu)$ .

\* Posons alors

$$\sigma^{(3)} := \mathbf{v}(\sigma^{(2)}\sigma^{(1)}.\mathbf{l})^{-1} = \mathbf{v}(\omega.\mu)^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_3 := v_{\sigma^{(3)}\sigma^{(2)}\sigma^{(1)}.\mathbf{l}}.$$

Remarquons, en vertu du lemme 1.30, que si  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}^r$ , alors  $\mathbf{v}(\mathbf{m})^{-1}$  est l'unique permutation de  $\mathfrak{S}_r$  telle que  $\mathbf{m}' = (m'_1, \dots, m'_r) = \mathbf{v}(\mathbf{m})^{-1}.\mathbf{m}$  satisfait les deux conditions suivantes :

- (i)  $\forall 1 \leq i < j \leq r, d(m'_i) \geq d(m'_j)$ ,
- (ii)  $\forall 1 \leq i, j \leq r, d(m'_i) = d(m'_j) \implies i \leq j$ .

Autrement dit, considérons  $\mathbf{m}$  comme un mot en les lettres  $m_i$ , et pour  $1 \leq b \leq l$ , soit  $w_b$  le sous-mot de  $\mathbf{m}$  formé des lettres  $m_i$  telles que  $d(m_i) = b$ . On a alors  $\mathbf{m}' = w_l \cdots w_1$ . En appliquant cette remarque à  $\mathbf{m} = \sigma^{(2)}\sigma^{(1)}.\mathbf{l}$ , on voit que  $\mathbf{v}_3$  est un  $q$ -produit extérieur qui peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{v}_3 = v_{\mathbf{k}^{(l)}} \wedge \cdots \wedge v_{\mathbf{k}^{(1)}},$$

où chaque  $v_{\mathbf{k}^{(b)}}$ ,  $1 \leq b \leq l$  est un  $q$ -produit extérieur dont chaque facteur  $v_k$  vérifie  $d(k) = b$ . Dans ce cas et dans toute la suite de la preuve, on dira que  $\mathbf{v}_3$  admet une écriture par blocs, et  $v_{\mathbf{k}^{(b)}}$  ( $1 \leq b \leq l$ ) sera appelé le  $b$ -ième bloc de  $\mathbf{v}_3$ .

\* Posons ensuite

$$\sigma^{(4)} := \omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{l}) \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_4 := v_{\sigma^{(4)}\sigma^{(3)}\sigma^{(2)}\sigma^{(1)}.\mathbf{l}},$$

où  $\omega(\mathbf{k})$  est défini à la section 8.1 (l'égalité  $\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{l})$  provient du lemme 8.13). Pour  $1 \leq b \leq l$ , notons

$$r_b := \#\{1 \leq i \leq r \mid d(\alpha_i) = b\} = \#\{1 \leq i \leq r \mid d(\beta_i) = b\}$$

le nombre de facteurs du bloc  $v_{\mathbf{k}^{(b)}}$  (l'égalité des deux quantités définissant  $r_b$  provient à nouveau du lemme 8.13). Soit  $1 \leq b \leq l$ . Alors  $\sigma^{(4)}$  agit sur le  $b$ -ième bloc de  $\mathbf{v}_3$  comme un retournement, c'est-à-dire comme la permutation  $\binom{1, \dots, r_b}{r_b, \dots, 1}$ . Puisque  $v_\mu$  est ordonné, on voit que pour tout  $b \in \llbracket 1; l \rrbracket \setminus \{d, d'\}$ , le  $b$ -ième bloc de  $\mathbf{v}_4$  est lui aussi ordonné. Ici les entiers  $d$  et  $d'$  sont ceux du lemme 8.13.

\* Notons provisoirement  $\mathbf{v}_4 = v_{\mathbf{k}_1} \wedge \cdots \wedge v_{\mathbf{k}_r}$ ; soit alors  $i$  (resp.  $j$ )  $\in \llbracket 1; r \rrbracket$  tel que  $k_i = \beta_y - h$  (resp.  $k_j = \beta_x + h$ ). Définissons  $\sigma^{(5)}$  et  $\mathbf{v}_5$  par

$$\sigma^{(5)} := \begin{cases} \text{id} & \text{si } \delta > 0 \\ (i, j) & \text{si } \delta = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_5 := v_{\sigma^{(5)}\sigma^{(4)}\sigma^{(3)}\sigma^{(2)}\sigma^{(1)}.\mathbf{l}};$$

on a  $\sigma^{(5)} = \text{id}$  si et seulement si  $\beta_y - h$  et  $\beta_x + h$  sont dans le même bloc de  $\mathbf{v}_4$ .



- \* Soient  $\sigma^{(6)} \in \mathfrak{S}_r$  la permutation qui agit séparément sur chaque les bloc de  $\mathbf{v}_5$  en le réordonnant, et

$$\mathbf{v}_6 := v_{\sigma^{(6)}\sigma^{(5)}\sigma^{(4)}\sigma^{(3)}\sigma^{(2)}\sigma^{(1)}} \cdot l.$$

Décrivons  $\sigma^{(6)}$  de façon plus précise. Si  $\delta = 0$ , alors  $\sigma^{(6)}$  agit sur le  $d$ -ième bloc de  $\mathbf{v}_5$  comme la permutation  $\pi$  définie au lemme 8.9, et  $\sigma^{(6)}$  agit trivialement sur les autres blocs. Si  $\delta > 0$ , alors  $\sigma^{(6)}$  est le produit de deux permutations  $\sigma'_d$  et  $\sigma'_{d'}$ , où chaque  $\sigma'_b$ ,  $b \in \{d, d'\}$  agit sur le  $b$ -ième bloc de  $\mathbf{v}_5$  comme la permutation notée  $\sigma$  au lemme 8.7, et  $\sigma'_b$  agit trivialement sur les autres blocs de  $\mathbf{v}_5$ . Il découle de ceci que dans les deux cas, on a

$$\varepsilon(\sigma^{(6)}) = (-1)^{\text{ht}(\rho) + \text{ht}(\rho')}.$$

- \* Posons enfin

$$\sigma^{(7)} := \mathbf{v}(\lambda) \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_7 := v_{\sigma^{(7)}\sigma^{(6)}\sigma^{(5)}\sigma^{(4)}\sigma^{(3)}\sigma^{(2)}\sigma^{(1)}} \cdot l.$$

Notons que  $v_\lambda$  est ordonné et que  $\mathbf{v}_6$  est obtenu à partir de  $v_\lambda$  par permutation. De plus,  $\mathbf{v}_6$  admet une écriture par blocs telle que chacun de ces blocs est ordonné. D'après la remarque suivant la définition de  $\sigma^{(3)}$ , on a donc  $v_{\mathbf{v}(\lambda)^{-1}, \lambda} = \mathbf{v}_6$ , d'où  $\mathbf{v}_7 = v_\lambda$ .

Par conséquent, on a bien  $\sigma' = \sigma^{(7)} \dots \sigma^{(1)}$ , où les  $\sigma^{(i)}$  sont définis comme ci-dessus, donc  $(-1)^{N-1} = \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^7 \varepsilon(\sigma^{(i)})$ . Via une étude au cas par cas, on constate que  $\varepsilon(\sigma^{(2)})\varepsilon(\sigma^{(5)}) = \varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est défini comme dans l'énoncé. Par ailleurs, on a

$$\varepsilon(\sigma^{(4)}) = \varepsilon(\omega(\mathbf{k})) = \prod_{b=1}^l (-1)^{\frac{r_b(r_b-1)}{2}} = (-1)^{\kappa(\mathbf{d}(\mu))}.$$

Il vient alors  $\varepsilon(\sigma^{(3)})\varepsilon(\sigma^{(4)})\varepsilon(\sigma^{(7)}) = \varepsilon(\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l)$ ; la proposition s'ensuit.  $\square$

### 8.7.2 Exemples

Illustrons la preuve de la proposition précédente par deux exemples, en calculant explicitement  $N$  et la suite de vecteurs  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_7)$  ainsi que les longueurs des permutations  $\sigma^{(i)}$  qui interviennent. On utilise le lemme 8.29 pour calculer  $\ell(\sigma) = \ell(\sigma^{(1)})$ , ainsi que les formules suivantes: si  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^r$  et  $\mathbf{d}(\mathbf{k}) = (d_1, \dots, d_r)$ , on a

$$\ell(\omega(\mathbf{k})) = \#\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i < j \leq r, d_i = d_j\} \quad \text{et}$$

$$\ell(\mathbf{v}(\mathbf{k})) = \#\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i < j \leq r, d_i < d_j\}.$$

Dans chacun des deux exemples, nous prendrons  $n = 3$  et  $l = 2$ ; si  $k \in \mathbb{Z}$ , nous écrirons  $\bar{k}$  (resp.  $\underline{k}$ ) au lieu de  $k$  si  $d(k) = 1$  (resp.  $d(k) = 2$ ). Nous écrirons aussi  $(k_1, \dots, k_r)$  au lieu de

$$v_{k_1} \wedge \cdots \wedge v_{k_r}.$$

**Exemple 8.35** Rappelons que  $n = 3$ ,  $l = 2$ , et prenons  $\mathbf{s}_l = (0, -3)$ ,  $m = 7$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_l = ((3, 2, 1, 1), \emptyset)$  et  $\boldsymbol{\mu}_l = ((7), \emptyset)$ . On a alors  $\text{ht}(\rho) = 2$ ,  $\text{ht}(\rho') = 0$ ,  $r = 16$ ,  $\lambda = (6, 5, 1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $\mu = (16)$ ,

$$v_\mu = (\overline{13}, \overline{-4}, \overline{-5}, \overline{-6}, \overline{-7}, \overline{-8}, \overline{-9}, \overline{-10}, \overline{-11}, \overline{-12}, \overline{-13}, \overline{-14}, \overline{-15}, \overline{-16}, \overline{-17}, \overline{-18}) \quad \text{et}$$

$$v_\lambda = (\overline{3}, \overline{1}, \overline{-4}, \overline{-5}, \overline{-6}, \overline{-7}, \overline{-8}, \overline{-10}, \overline{-11}, \overline{-12}, \overline{-13}, \overline{-14}, \overline{-15}, \overline{-16}, \overline{-17}, \overline{-18}),$$

d'où  $\beta_x = -9$ ,  $\beta_y = 13$ ,  $\gamma = 4$ ,  $\delta = 0$  et  $h = 10 \equiv \gamma \pmod{nl}$ . On a, avec les notations de la preuve de la proposition précédente,

$$v_{\omega, \mu} = (\overline{-18}, \overline{-17}, \overline{-16}, \overline{-15}, \overline{-14}, \overline{-13}, \overline{-12}, \overline{-11}, \overline{-10}, \overline{-9}, \overline{-8}, \overline{-7}, \overline{-6}, \overline{-5}, \overline{-4}, \overline{13}),$$

$$v_{\sigma\omega, \mu} = (\overline{-4}, \overline{-5}, \overline{-6}, \overline{-7}, \overline{-8}, \overline{-9}, \overline{13}, \overline{-10}, \overline{-11}, \overline{-12}, \overline{-13}, \overline{-14}, \overline{-15}, \overline{-16}, \overline{-17}, \overline{-18}), \quad \ell(\sigma) = 114,$$

$$v_{\sigma'^{-1}, \lambda} = (\overline{-4}, \overline{-5}, \overline{-6}, \overline{-7}, \overline{-8}, \overline{3}, \overline{1}, \overline{-10}, \overline{-11}, \overline{-12}, \overline{-13}, \overline{-14}, \overline{-15}, \overline{-16}, \overline{-17}, \overline{-18}).$$

On peut facilement expliciter la suite admissible  $v_{\sigma'^{-1}, \lambda} \xrightarrow{\bullet} \cdots \xrightarrow{\bullet} v_\lambda$ , d'où on tire  $\ell(\sigma') = 10$  et  $N - 1 = 124$ . Par ailleurs, on a

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 = (\overline{-18}, \overline{-17}, \overline{-16}, \overline{-15}, \overline{-14}, \overline{-13}, \overline{-12}, \overline{-11}, \overline{-10}, \overline{3}, \overline{-8}, \overline{-7}, \overline{-6}, \overline{-5}, \overline{-4}, \overline{1}), \quad \ell(\sigma^{(1)}) = 114, \ell(\sigma^{(2)}) = 0,$$

$$\mathbf{v}_3 = (\overline{-18}, \overline{-14}, \overline{-13}, \overline{-12}, \overline{-8}, \overline{-7}, \overline{-6}, \overline{-17}, \overline{-16}, \overline{-15}, \overline{-11}, \overline{-10}, \overline{3}, \overline{-5}, \overline{-4}, \overline{1}), \quad \ell(\sigma^{(3)}) = 27,$$

$$\mathbf{v}_4 = (\overline{-6}, \overline{-7}, \overline{-8}, \overline{-12}, \overline{-13}, \overline{-14}, \overline{-18}, \overline{1}, \overline{-4}, \overline{-5}, \overline{3}, \overline{-10}, \overline{-11}, \overline{-15}, \overline{-16}, \overline{-17}), \quad \ell(\sigma^{(4)}) = 57,$$

$$\mathbf{v}_5 = (\overline{-6}, \overline{-7}, \overline{-8}, \overline{-12}, \overline{-13}, \overline{-14}, \overline{-18}, \overline{3}, \overline{-4}, \overline{-5}, \overline{1}, \overline{-10}, \overline{-11}, \overline{-15}, \overline{-16}, \overline{-17}), \quad \ell(\sigma^{(5)}) = 5,$$

$$\mathbf{v}_6 = (\overline{-6}, \overline{-7}, \overline{-8}, \overline{-12}, \overline{-13}, \overline{-14}, \overline{-18}, \overline{3}, \overline{1}, \overline{-4}, \overline{-5}, \overline{-10}, \overline{-11}, \overline{-15}, \overline{-16}, \overline{-17}), \quad \ell(\sigma^{(6)}) = 2,$$

$$\mathbf{v}_7 = v_\lambda = (\overline{3}, \overline{1}, \overline{-4}, \overline{-5}, \overline{-6}, \overline{-7}, \overline{-8}, \overline{-10}, \overline{-11}, \overline{-12}, \overline{-13}, \overline{-14}, \overline{-15}, \overline{-16}, \overline{-17}, \overline{-18}), \quad \ell(\sigma^{(7)}) = 39.$$

On a donc  $\varepsilon = -1 = \varepsilon(\sigma^{(2)})\varepsilon(\sigma^{(5)})$ ,  $\varepsilon(\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l) = (-1)^{\ell(\sigma^{(3)}) + \ell(\sigma^{(4)}) + \ell(\sigma^{(7)})} = (-1)^{27 + 57 + 39} = -1$  et  $(-1)^{\text{ht}(\rho) + \text{ht}(\rho')} = (-1)^{2+0} = 1$ . Donc l'égalité de la proposition 8.33 est bien vérifiée.  $\diamond$

**Exemple 8.36** Rappelons que  $n = 3$ ,  $l = 2$ , et prenons  $\mathbf{s}_l = (0, 0)$ ,  $m = 8$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_l = ((2, 1, 1), (2, 2))$  et  $\boldsymbol{\mu}_l = (\emptyset, (5, 3))$ . On a alors  $\text{ht}(\rho) = 2$ ,  $\text{ht}(\rho') = 1$ ,  $r = 17$ ,  $\lambda = (5, 5, 4, 1, 1, 1)$ ,  $\mu = (11, 6)$ ,

$$v_\mu = (\underline{11}, \underline{5}, \underline{-2}, \underline{-3}, \underline{-4}, \underline{-5}, \underline{-6}, \underline{-7}, \underline{-8}, \underline{-9}, \underline{-10}, \underline{-11}, \underline{-12}, \underline{-13}, \underline{-14}, \underline{-15}, \underline{-16}) \quad \text{et}$$

$$v_\lambda = (\underline{5}, \underline{4}, \underline{2}, \underline{-2}, \underline{-3}, \underline{-4}, \underline{-6}, \underline{-7}, \underline{-8}, \underline{-9}, \underline{-10}, \underline{-11}, \underline{-12}, \underline{-13}, \underline{-14}, \underline{-15}, \underline{-16}),$$

d'où  $\beta_x = -5$ ,  $\beta_y = 11$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta = 3$  et  $h = 7 \equiv \gamma \pmod{nl}$ . On a

$$v_{\omega \cdot \mu} = (\underline{-16}, \underline{-15}, \underline{-14}, \underline{-13}, \underline{-12}, \underline{-11}, \underline{-10}, \underline{-9}, \underline{-8}, \underline{-7}, \underline{-6}, \underline{-5}, \underline{-4}, \underline{-3}, \underline{-2}, \underline{5}, \underline{11}),$$

$$v_{\sigma \omega \cdot \mu} = (\underline{5}, \underline{-2}, \underline{-3}, \underline{-4}, \underline{-5}, \underline{11}, \underline{-6}, \underline{-7}, \underline{-8}, \underline{-9}, \underline{-10}, \underline{-11}, \underline{-12}, \underline{-13}, \underline{-14}, \underline{-15}, \underline{-16}), \quad \ell(\sigma) = 131,$$

$$v_{\sigma'^{-1} \cdot \lambda} = (\underline{5}, \underline{-2}, \underline{-3}, \underline{-4}, \underline{4}, \underline{2}, \underline{-6}, \underline{-7}, \underline{-8}, \underline{-9}, \underline{-10}, \underline{-11}, \underline{-12}, \underline{-13}, \underline{-14}, \underline{-15}, \underline{-16}).$$

On peut facilement expliciter la suite admissible  $v_{\sigma'^{-1} \cdot \lambda} \xrightarrow{\bullet} \cdots \xrightarrow{\bullet} v_\lambda$ , d'où on tire  $\ell(\sigma') = 6$  et  $N - 1 = 137$ . Par ailleurs, on a

$$\mathbf{v}_1 = (\underline{-16}, \underline{-15}, \underline{-14}, \underline{-13}, \underline{-12}, \underline{-11}, \underline{-10}, \underline{-9}, \underline{-8}, \underline{-7}, \underline{-6}, \underline{4}, \underline{-4}, \underline{-3}, \underline{-2}, \underline{5}, \underline{2}), \quad \ell(\sigma^{(1)}) = 131,$$

$$\mathbf{v}_2 = (\underline{-16}, \underline{-15}, \underline{-14}, \underline{-13}, \underline{-12}, \underline{-11}, \underline{-10}, \underline{-9}, \underline{-8}, \underline{-7}, \underline{-6}, \underline{2}, \underline{-4}, \underline{-3}, \underline{-2}, \underline{5}, \underline{4}), \quad \ell(\sigma^{(2)}) = 9,$$

$$\mathbf{v}_3 = (\underline{-14}, \underline{-13}, \underline{-12}, \underline{-8}, \underline{-7}, \underline{-6}, \underline{-2}, \underline{5}, \underline{4}, \underline{-16}, \underline{-15}, \underline{-11}, \underline{-10}, \underline{-9}, \underline{2}, \underline{-4}, \underline{-3}), \quad \ell(\sigma^{(3)}) = 45,$$

$$\mathbf{v}_5 = \mathbf{v}_4 = (\underline{4}, \underline{5}, \underline{-2}, \underline{-6}, \underline{-7}, \underline{-8}, \underline{-12}, \underline{-13}, \underline{-14}, \underline{-3}, \underline{-4}, \underline{2}, \underline{-9}, \underline{-10}, \underline{-11}, \underline{-15}, \underline{-16}), \quad \ell(\sigma^{(4)}) = 64, \ell(\sigma^{(5)}) = 0,$$

$$\mathbf{v}_6 = (\underline{5}, \underline{4}, \underline{-2}, \underline{-6}, \underline{-7}, \underline{-8}, \underline{-12}, \underline{-13}, \underline{-14}, \underline{2}, \underline{-3}, \underline{-4}, \underline{-9}, \underline{-10}, \underline{-11}, \underline{-15}, \underline{-16}), \quad \ell(\sigma^{(6)}) = 3,$$

$$\mathbf{v}_7 = v_\lambda = (\underline{5}, \underline{4}, \underline{2}, \underline{-2}, \underline{-3}, \underline{-4}, \underline{-6}, \underline{-7}, \underline{-8}, \underline{-9}, \underline{-10}, \underline{-11}, \underline{-12}, \underline{-13}, \underline{-14}, \underline{-15}, \underline{-16}), \quad \ell(\sigma^{(7)}) = 28.$$

On a donc  $\varepsilon = -1 = \varepsilon(\sigma^{(2)})\varepsilon(\sigma^{(5)})$ ,  $\varepsilon(\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l) = (-1)^{\ell(\sigma^{(3)}) + \ell(\sigma^{(4)}) + \ell(\sigma^{(7)})} = (-1)^{45+64+28} = -1$  et  $(-1)^{\text{ht}(\rho) + \text{ht}(\rho')} = (-1)^{2+1} = -1$ . Donc l'égalité de la proposition 8.33 est bien vérifiée.  $\diamond$

## 8.8 Preuve du théorème 8.4

Soient  $\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l \in \Pi_m^l$ , et  $\lambda, \mu \in \Pi$  les partitions telles que  $\boldsymbol{\lambda}_l \leftrightarrow \lambda$  et  $\boldsymbol{\mu}_l \leftrightarrow \mu$ . Il faut montrer que  $a'_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l}(1) = 2j_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l}^{\prec}$ . Si  $\boldsymbol{\lambda}_l = \boldsymbol{\mu}_l$ , alors  $a_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l}(q) = 1$ , d'où  $a'_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l}(1) = 0 = j_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l}^{\prec}$ . Si  $\boldsymbol{\lambda}_l \not\prec \boldsymbol{\mu}_l$ , alors  $a_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l}(q) = 0 = j_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l}^{\prec}$ . Si  $\boldsymbol{\lambda}_l \prec \boldsymbol{\mu}_l$ ,  $|\lambda| = |\mu| = r$  et  $\sharp(B(\lambda) \cap B(\mu)) \neq r - 2$ , alors le corollaire 8.11 montre que  $j_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l}^{\prec} = 0$ ; par ailleurs, d'après la remarque 8.25 il ne peut pas exister de bonne suite relativement à  $(\lambda, \mu)$ , et le lemme 8.28 entraîne alors  $a'_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l}(1) = 0$ . Il reste à traiter le cas où  $(\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l)$  satisfait les hypothèses  $(\mathcal{H})$ . Reprenons alors les notations du paragraphe 8.4.1. D'après le corollaire 8.11 et les propositions 8.15 et 8.16, le cas  $(J_1)$  (*resp.*  $(J_2)$ ) a lieu si et seulement si  $\delta > 0$  (*resp.*  $\delta = 0$ ), et la proposition 8.15 (*resp.* 8.16) nous donne alors l'expression de  $j_{\boldsymbol{\lambda}_l, \boldsymbol{\mu}_l}^{\prec}$ . Par ailleurs, les propositions 8.31 et 8.32 nous donnent des conditions nécessaires et suffisantes sur  $\gamma$ ,  $\delta$  et  $h$  pour qu'une bonne suite existe, auquel

cas elle est unique; le lemme 8.28 ainsi que les relations  $(R'_2) - (R'_4)$  nous donnent alors l'expression de  $a'_{\lambda_l, \mu_l}(1)$ . Pour comparer les deux valeurs trouvées, nous sommes amenés à envisager 12 cas en fonction de la nullité ou non de  $\gamma$ ,  $\delta$  et de la valeur de  $h$  modulo  $nl$ . Nous regroupons les résultats trouvés dans le tableau donné à la figure 8.1. Ici  $N$  est égal à la longueur de la bonne suite si elle existe. Le théorème s'ensuit en comparant les valeurs données dans les deux dernières colonnes de ce tableau et en appliquant la proposition 8.33 si ces deux nombres sont non nuls.  $\square$

Cas	Nombre de bonnes suites	$\frac{a'_{\lambda_l, \mu_l}(1)}{\varepsilon(\lambda_l, \mu_l)}$	$\frac{j_{\lambda_l, \mu_l}}{(-1)^{\text{ht}(\rho) + \text{ht}(\rho')}}}$
$\gamma = \delta = 0$	0	0	0
$\gamma > 0, \delta = 0,$ $h \not\equiv 0 \pmod{nl}, h \not\equiv \gamma \pmod{nl}$	0	0	0
$\gamma > 0, \delta = 0,$ $i := \frac{h}{nl} \in \mathbb{N}^*$	1	$(-1)^{N-1} \frac{d}{dq} \Big _{q=1} \left( -(q^{-2} - 1)q^{-2i+1} \right)$ $= 2(-1)^{N-1}$	-1
$\gamma > 0, \delta = 0,$ $i := \frac{h-\gamma}{nl} \in \mathbb{N}$	1	$(-1)^{N-1} \frac{d}{dq} \Big _{q=1} \left( (q^{-2} - 1)q^{-2i} \right)$ $= -2(-1)^{N-1}$	1
$\gamma = 0, \delta > 0,$ $h \not\equiv 0 \pmod{nl}, h \not\equiv \delta \pmod{nl}$	0	0	0
$\gamma = 0, \delta > 0,$ $i := \frac{h}{nl} \in \mathbb{N}^*$	1	$(-1)^{N-1} \frac{d}{dq} \Big _{q=1} \left( -(q^2 - 1)q^{2i-1} \right)$ $= -2(-1)^{N-1}$	1
$\gamma = 0, \delta > 0,$ $i := \frac{h-\delta}{nl} \in \mathbb{N}$	1	$(-1)^{N-1} \frac{d}{dq} \Big _{q=1} \left( (q^2 - 1)q^{2i} \right)$ $= 2(-1)^{N-1}$	1
$\gamma > 0, \delta > 0,$ $h \not\equiv 0 \pmod{nl}, h \not\equiv \gamma \pmod{nl},$ $h \not\equiv \delta \pmod{nl}, h \not\equiv \gamma + \delta \pmod{nl}$	0	0	0
$\gamma > 0, \delta > 0,$ $i := \frac{h}{nl} \in \mathbb{N}^*$	1	$(-1)^{N-1} \frac{d}{dq} \Big _{q=1} \left( -(q - q^{-1}) \frac{q^{2i} - q^{-2i}}{q + q^{-1}} \right)$ $= 0$	0
$\gamma > 0, \delta > 0,$ $i := \frac{h-\gamma}{nl} \in \mathbb{N}$	1	$(-1)^{N-1} \frac{d}{dq} \Big _{q=1} \left( -(q - q^{-1}) \frac{q^{2i+1} + q^{-2i-1}}{q + q^{-1}} \right)$ $= -2(-1)^{N-1}$	1
$\gamma > 0, \delta > 0,$ $i := \frac{h-\delta}{nl} \in \mathbb{N}$	1	$(-1)^{N-1} \frac{d}{dq} \Big _{q=1} \left( (q - q^{-1}) \frac{q^{2i+1} + q^{-2i-1}}{q + q^{-1}} \right)$ $= 2(-1)^{N-1}$	1
$\gamma > 0, \delta > 0,$ $i := \frac{h-\gamma-\delta}{nl} \in \mathbb{N}$	1	$(-1)^{N-1} \frac{d}{dq} \Big _{q=1} \left( (q - q^{-1}) \frac{q^{2i+2} - q^{-2i-2}}{q + q^{-1}} \right)$ $= 0$	0

FIG. 8.1 – Liste des cas intervenant dans la preuve du théorème 8.4.



## Chapitre 9

# Tables

Dans ce chapitre, nous donnons les matrices de transition des bases d'Uglov de certains sous-espaces de poids d'espaces de Fock de niveau supérieur. Nous donnons les matrices

$$\Delta(q) = (\Delta_{\lambda_l, \mu_l}^+; \mathbf{s}_l(q))_{\lambda_l, \mu_l \in \Pi^l(\mathbf{s}_l; w)}$$

pour  $n = l = 2$ ,  $\mathbf{s}_l = (2k, -2k)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  et  $w \in \mathcal{P}(\mathbf{F}_q[\mathbf{s}_l])$ . Nous prenons les poids  $w$  qui sont de la forme  $w = \text{wt}(|\emptyset_l, \mathbf{s}_l\rangle) - (N_0(w)\alpha_0 + N_1(w)\alpha_1)$  avec  $N_0(w), N_1(w) \in \mathbb{N}$  et  $N_0(w) + N_1(w) \leq 5$ . Le couple  $(N_0(w), N_1(w))$  sera alors noté  $\nu(w)$ , et la dimension du sous-espace de poids correspondant sera notée  $D$ .

Ces tables montrent que dans le cas où la multi-charge  $\mathbf{s}_l$  est très dominante, les bases d'Uglov de certains sous-espaces de poids sont semblables, conformément à la conjecture 4.32 et au théorème 4.30. De même, si la multi-charge  $\mathbf{s}_l$  est très anti-dominante (au sens de la remarque 4.31), alors les bases d'Uglov de certains sous-espaces de poids sont semblables, conformément à la remarque 4.31.

Avec les notations du chapitre 8, les lignes et les colonnes des matrices  $\Delta(q)$  sont rangées suivant l'ordre  $\geq$  défini sur  $\Pi^l$  par  $\lambda_l \geq \mu_l$  si et seulement si  $|\lambda| = |\mu|$  et  $\lambda \geq \mu$ , où  $\geq$  désigne l'ordre de dominance sur les partitions et  $\lambda, \mu$  sont reliées à  $\lambda_l, \mu_l$  par les relations  $\lambda_l \leftrightarrow \lambda$  et  $\mu_l \leftrightarrow \mu$ . Ces matrices doivent être lues colonne par colonne; par exemple on a

$$G^+(((3), \emptyset), (0, 0)) = |((3), \emptyset), (0, 0)\rangle + q|((2), (1)), (0, 0)\rangle + q|((1, 1), (1)), (0, 0)\rangle + q^2|((1, 1, 1), \emptyset), (0, 0)\rangle .$$

Par ailleurs, nous marquons d'un astérisque  $*$  les lignes indexées par les multi-partitions appartenant à  $\Pi^l[\mathbf{s}_l, n]^\circ$ . Par conséquent, les colonnes correspondantes donnent les expressions dans la base standard des vecteurs de la base globale inférieure du sous-module irréductible  $\mathbf{M}_q[\mathbf{s}_l]$ .

Dans le cas où  $\nu(w) = (3, 2)$ , on a  $D = 28$  et la matrice  $\Delta(q)$  est trop grande pour tenir sur la page. Nous écrivons alors  $\Delta(q)$  sous la forme

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} \Delta^{(1,1)}(q) & 0 \\ \Delta^{(2,1)}(q) & \Delta^{(2,2)}(q) \end{pmatrix},$$

où  $\Delta^{(1,1)}(q)$ ,  $\Delta^{(2,1)}(q)$  et  $\Delta^{(2,2)}(q)$  sont des matrices carrées de taille  $14 \times 14$ .

Les matrices que nous donnons pour  $k = 0$  ont déjà été publiées dans [U2]. Le calcul de toutes les matrices de transition des bases d'Uglov que nous donnons ici repose sur l'implémentation de l'algorithme que nous avons décrit au chapitre 5.<sup>1</sup> Nous avons programmé cet algorithme d'une part, ainsi que l'algorithme d'Uglov basé sur les redressements (voir chapitre 3) d'autre part, en Maple<sup>®</sup> de Waterloo Maple Inc. Nous avons utilisé la version 7 de ce logiciel. Nous avons mené les calculs sur un ordinateur équipé d'un processeur Sempron<sup>™</sup> 2600+ et de 512 Mo de mémoire vive. Nous obtenons des gains de temps de calcul significatifs en utilisant notre algorithme; par exemple, le calcul de la matrice  $\Delta(q)$  pour  $n = l = 2$ ,  $\mathbf{s}_l = (2, -2)$  et  $\nu(w) = (2,2)$  nécessite environ 10 000 secondes avec l'algorithme d'Uglov, contre seulement 3 secondes avec notre algorithme. En outre, sans notre algorithme, nous n'aurions certainement pas pu mener à bien les calculs des matrices  $\Delta(q)$  pour  $n = l = 2$  et  $\mathbf{s}_l = (2k, -2k)$  avec  $|k| \geq 2$ .

### 9.1 Tables pour $n = l = 2$ , $\mathbf{s}_l = (2k, -2k)$ , $k \leq -1$

$$* \underline{\nu(w) = (0,0)} \quad (D = 1)$$

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} * (\emptyset, \emptyset)$$

$$* \underline{\nu(w) = (1,0)} \quad (D = 2)$$

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ q & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (\emptyset, (1)) \\ ((1), \emptyset) \end{pmatrix}$$

$$* \underline{\nu(w) = (2,0)} \quad (D = 1)$$

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} * ((1), (1))$$

$$* \underline{\nu(w) = (1,1)} \quad (D = 4)$$

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 1 & \cdot \\ q^2 & q & q & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (\emptyset, (2)) \\ (\emptyset, (1,1)) \\ ((2), \emptyset) \\ ((1,1), \emptyset) \end{pmatrix}$$

---

1. Ce chapitre n'est pas une liste exhaustive de toutes les matrices de transition que nous avons calculées. En fait, cet algorithme permet de calculer les matrices  $\Delta(q)$  en un temps raisonnable pour des valeurs de  $n$ ,  $l$ ,  $\mathbf{s}_l$  et  $\nu(w)$  quelconques, à condition que le sous-espace de poids correspondant soit de dimension  $D \lesssim 100$ . Le lecteur intéressé par le calcul d'autres matrices de transition pourra contacter l'auteur de ce mémoire.

\*  $\underline{\nu(w) = (2,1)}$  ( $D = 8$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & q^2 & 0 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q^3 & q & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 1 & \cdot \\ q^3 & 0 & q^2 & q & q^2 & q & q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} * (\emptyset, (3)) \\ * ((1), (2)) \\ (\emptyset, (1,1,1)) \\ ((1), (1,1)) \\ ((2), (1)) \\ ((1,1), (1)) \\ ((3), \emptyset) \\ ((1,1,1), \emptyset) \end{matrix}$$

\*  $\underline{\nu(w) = (1,2)}$  ( $D = 2$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} * (\emptyset, (2,1)) \\ ((2,1), \emptyset) \end{matrix}$$

\*  $\underline{\nu(w) = (3,1)}$  ( $D = 4$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 1 & \cdot \\ q^2 & q & q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} * ((1), (3)) \\ ((1), (1,1,1)) \\ ((3), (1)) \\ ((1,1,1), (1)) \end{matrix}$$

\*  $\underline{\nu(w) = (2,2)}$  ( $D = 16$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q^3 & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 0 & 0 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & q & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & q & q^2 & q & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^3 & 0 & q & 2q^2 & q^3 & q^2 & q & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & q^2 & q^3 & q^4 & q^3 + q & q^2 & 0 & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^3 & q^2 & 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q^3 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & q^2 & 0 & q & 1 & \cdot & \cdot \\ q^3 & q^4 & q^3 & q^2 & 0 & q^2 & q & 0 & q & q^2 & q^3 & q & q^2 & q & 1 & \cdot \\ q^4 & 0 & 0 & q^3 & 0 & q^3 & q^2 & q^2 & q^2 & q & 0 & q^2 & 0 & 0 & q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} * (\emptyset, (4)) \\ * (\emptyset, (3,1)) \\ * (\emptyset, (2,2)) \\ (\emptyset, (2,1,1)) \\ * ((1), (2,1)) \\ (2), (2) \\ ((1,1), (2)) \\ (\emptyset, (1,1,1,1)) \\ (2), (1,1) \\ ((1,1), (1,1)) \\ (2,1), (1) \\ (4), \emptyset \\ (3,1), \emptyset \\ (2,2), \emptyset \\ ((2,1,1), \emptyset) \\ ((1,1,1,1), \emptyset) \end{matrix}$$





\*  $\underline{\nu(w) = (2,3)}$  ( $D = 8$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & q^3 & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 1 & \cdot \\ q^3 & q^2 & 0 & q & q^2 & q & q & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} * (\emptyset, (4,1)) \\ (\emptyset, (2,1,1,1)) \\ * ((2), (2,1)) \\ ((1,1), (2,1)) \\ ((2,1), (2)) \\ ((2,1), (1,1)) \\ ((4,1), \emptyset) \\ ((2,1,1,1), \emptyset) \end{array}$$

### 9.2 Tables pour $n = l = 2$ , $\mathbf{s}_l = (0,0)$

\*  $\underline{\nu(w) = (0,0)}$  ( $D = 1$ )

$$\Delta(q) = ( 1 ) \quad * (\emptyset, \emptyset)$$

\*  $\underline{\nu(w) = (1,0)}$  ( $D = 2$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} * (\emptyset, (1)) \\ ((1), \emptyset) \end{array}$$

\*  $\underline{\nu(w) = (2,0)}$  ( $D = 1$ )

$$\Delta(q) = ( 1 ) \quad * ((1), (1))$$

\*  $\underline{\nu(w) = (1,1)}$  ( $D = 4$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 1 & \cdot \\ q^2 & q & q & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} * (\emptyset, (2)) \\ (\emptyset, (1,1)) \\ ((2), \emptyset) \\ ((1,1), \emptyset) \end{array}$$

\*  $\underline{\nu(w) = (2,1)}$  ( $D = 8$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & q^3 & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 1 & \cdot \\ q^3 & q^2 & 0 & q & q^2 & q & q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} * (\emptyset, (3)) \\ ((3), \emptyset) \\ * ((1), (2)) \\ ((2), (1)) \\ ((1), (1,1)) \\ ((1,1), (1)) \\ (\emptyset, (1,1,1)) \\ ((1,1,1), \emptyset) \end{matrix}$$

\*  $\underline{\nu(w) = (1,2)}$  ( $D = 2$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} * (\emptyset, (2,1)) \\ ((2,1), \emptyset) \end{matrix}$$

\*  $\underline{\nu(w) = (3,1)}$  ( $D = 4$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 1 & \cdot \\ q^2 & q & q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} * ((1), (3)) \\ ((3), (1)) \\ ((1), (1,1,1)) \\ ((1,1,1), (1)) \end{matrix}$$

\*  $\underline{\nu(w) = (2,2)}$  ( $D = 16$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & q & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & q^2 & 0 & 0 & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & q & 0 & 0 & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q^3 & 0 & 0 & q^2 & 0 & q & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & q & 0 & 0 & q^2 & q & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^3 & q^2 & 2q^2 & q & q & q^3 & q^2 & q & 0 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & q^3 & 0 & q^2 & q^4 & q^3 + q & q^2 & 0 & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 & q & 0 & 0 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q^3 & 0 & q^2 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ q^3 & q^4 & q^2 & q^3 & q^3 & 0 & q^2 & q & q & q & q^2 & 0 & 0 & q & 1 & \cdot \\ q^4 & 0 & q^3 & 0 & 0 & 0 & q^3 & q^2 & q & q^2 & q^2 & q & q^2 & q & 0 & q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} * (\emptyset, (4)) \\ * (\emptyset, (3,1)) \\ (4), \emptyset \\ ((3,1), \emptyset) \\ (\emptyset, (2,2)) \\ * ((2), (2)) \\ ((1), (2,1)) \\ ((1,1), (2)) \\ (\emptyset, (2,1,1)) \\ ((2), (1,1)) \\ ((2,1), (1)) \\ ((1,1), (1,1)) \\ (\emptyset, (1,1,1,1)) \\ ((2,2), \emptyset) \\ ((2,1,1), \emptyset) \\ ((1,1,1,1), \emptyset) \end{matrix}$$



$$* \underline{\nu(w) = (2,3)} \quad (D = 8)$$

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & 0 & q & 1 & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & q^3 & q^2 & q & 0 & 1 & \cdot \\ q^3 & q^2 & 0 & q & q^2 & q & q & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} * (\emptyset, (4,1)) \\ ((4,1), \emptyset) \\ * ((2), (2,1)) \\ ((2,1), (2)) \\ ((1,1), (2,1)) \\ (\emptyset, (2,1,1,1)) \\ ((2,1), (1,1)) \\ ((2,1,1,1), \emptyset) \end{array}$$

### 9.3 Tables pour $n = l = 2$ , $\mathbf{s}_l = (2, -2)$

$$* \underline{\nu(w) = (0,0)} \quad (D = 1)$$

$$\Delta(q) = (1) \quad * (\emptyset, \emptyset)$$

$$* \underline{\nu(w) = (1,0)} \quad (D = 2)$$

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} * ((1), \emptyset) \\ (\emptyset, (1)) \end{array}$$

$$* \underline{\nu(w) = (2,0)} \quad (D = 1)$$

$$\Delta(q) = (1) \quad * ((1), (1))$$

$$* \underline{\nu(w) = (1,1)} \quad (D = 4)$$

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 1 & \cdot \\ q^2 & q & q & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} * ((2), \emptyset) \\ ((1,1), \emptyset) \\ (\emptyset, (2)) \\ (\emptyset, (1,1)) \end{array}$$

\*  $\underline{\nu(w) = (2,1)}$  ( $D = 8$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & q^2 & 0 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q^3 & q & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 1 & \cdot \\ q^3 & 0 & q^2 & q & q^2 & q & q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} * ((3),\emptyset) \\ * ((2),(1)) \\ ((1,1,1),\emptyset) \\ ((1,1),(1)) \\ ((1),(2)) \\ ((1),(1,1)) \\ (\emptyset,(3)) \\ (\emptyset,(1,1,1)) \end{matrix}$$

\*  $\underline{\nu(w) = (1,2)}$  ( $D = 2$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} * ((2,1),\emptyset) \\ (\emptyset,(2,1)) \end{matrix}$$

\*  $\underline{\nu(w) = (3,1)}$  ( $D = 4$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 1 & \cdot \\ q^2 & q & q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} * ((3),(1)) \\ ((1),(3)) \\ ((1,1,1),(1)) \\ ((1),(1,1,1)) \end{matrix}$$

\*  $\underline{\nu(w) = (2,2)}$  ( $D = 16$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q^3 & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 0 & 0 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & q & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & q & q^2 & q & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^3 & 0 & q & 2q^2 & q^3 & q^2 & q & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & q^2 & q^3 & q^4 & q^3 + q & q^2 & 0 & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^3 & q^2 & 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q^3 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & q^2 & 0 & q & 1 & \cdot & \cdot \\ q^3 & q^4 & q^3 & q^2 & 0 & q^2 & q & 0 & q & q^2 & q^3 & q & q^2 & q & 1 & \cdot \\ q^4 & 0 & 0 & q^3 & 0 & q^3 & q^2 & q^2 & q^2 & q & 0 & q^2 & 0 & 0 & q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} * ((4),\emptyset) \\ * ((3,1),\emptyset) \\ ((2,2),\emptyset) \\ ((2,1,1),\emptyset) \\ * ((2,1),(1)) \\ ((2),(2)) \\ ((2),(1,1)) \\ ((1,1,1,1),\emptyset) \\ ((1,1),(2)) \\ ((1,1),(1,1)) \\ ((1),(2,1)) \\ (\emptyset,(4)) \\ (\emptyset,(3,1)) \\ (\emptyset,(2,2)) \\ (\emptyset,(2,1,1)) \\ (\emptyset,(1,1,1,1)) \end{matrix}$$



\*  $\underline{\nu(w) = (2,3)}$  ( $D = 8$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & q^3 & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 1 & \cdot \\ q^3 & q^2 & 0 & q & q^2 & q & q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} * ((4,1),\emptyset) \\ ((2,1,1,1),\emptyset) \\ * ((2,1),(2)) \\ ((2,1),(1,1)) \\ ((2),(2,1)) \\ ((1,1),(2,1)) \\ (\emptyset,(4,1)) \\ (\emptyset,(2,1,1,1)) \end{matrix}$$

**9.4 Tables pour  $n = l = 2$ ,  $\mathbf{s}_l = (2k, -2k)$ ,  $k \geq 2$**

\*  $\underline{\nu(w) = (0,0)}$  ( $D = 1$ )

$$\Delta(q) = ( 1 ) \quad * (\emptyset,\emptyset)$$

\*  $\underline{\nu(w) = (1,0)}$  ( $D = 2$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} * ((1),\emptyset) \\ (\emptyset,(1)) \end{matrix}$$

\*  $\underline{\nu(w) = (2,0)}$  ( $D = 1$ )

$$\Delta(q) = ( 1 ) \quad * ((1),(1))$$

\*  $\underline{\nu(w) = (1,1)}$  ( $D = 4$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 1 & \cdot \\ q^2 & q & q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} * ((2),\emptyset) \\ ((1,1),\emptyset) \\ (\emptyset,(2)) \\ (\emptyset,(1,1)) \end{matrix}$$



$$* \underline{\nu(w) = (2,1)} \quad (D = 8)$$

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & q^2 & 0 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q^3 & q & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 1 & \cdot \\ q^3 & 0 & q^2 & q & q^2 & q & q & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} * ((3), \emptyset) \\ * ((2), (1)) \\ ((1,1,1), \emptyset) \\ ((1,1), (1)) \\ ((1), (2)) \\ ((1), (1,1)) \\ (\emptyset, (3)) \\ (\emptyset, (1,1,1)) \end{array}$$

$$* \underline{\nu(w) = (1,2)} \quad (D = 2)$$

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} * ((2,1), \emptyset) \\ (\emptyset, (2,1)) \end{array}$$

$$* \underline{\nu(w) = (3,1)} \quad (D = 4)$$

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 1 & \cdot \\ q^2 & q & q & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} * ((3), (1)) \\ ((1,1,1), (1)) \\ ((1), (3)) \\ ((1), (1,1,1)) \end{array}$$

$$* \underline{\nu(w) = (2,2)} \quad (D = 16)$$

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q^3 & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 0 & 0 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & q & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & q & q^2 & q & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^3 & 0 & q & 2q^2 & q^3 & q^2 & q & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & q^2 & q^3 & q^4 & q^3 + q & q^2 & 0 & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^3 & q^2 & 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q^3 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & q^2 & 0 & q & 1 & \cdot & \cdot \\ q^3 & q^4 & q^3 & q^2 & 0 & q^2 & q & 0 & q & q^2 & q^3 & q & q^2 & q & 1 & \cdot \\ q^4 & 0 & 0 & q^3 & 0 & q^3 & q^2 & q^2 & q^2 & q & 0 & q^2 & 0 & 0 & q & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} * ((4), \emptyset) \\ * ((3,1), \emptyset) \\ ((2,2), \emptyset) \\ ((2,1,1), \emptyset) \\ * ((2,1), (1)) \\ ((2), (2)) \\ ((2), (1,1)) \\ ((1,1,1,1), \emptyset) \\ ((1,1), (2)) \\ ((1,1), (1,1)) \\ ((1), (2,1)) \\ (\emptyset, (4)) \\ (\emptyset, (3,1)) \\ (\emptyset, (2,2)) \\ (\emptyset, (2,1,1)) \\ (\emptyset, (1,1,1,1)) \end{array}$$



\*  $\underline{\nu(w) = (2,3)}$       ( $D = 8$ )

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & q^2 & q & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^2 & 0 & 0 & 0 & q & 1 & \cdot & \cdot \\ q^2 & q & q^3 & q^2 & q & 0 & 1 & \cdot \\ q^3 & q^2 & 0 & q & q^2 & q & q & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} * (\emptyset, (4,1)) \\ ((4,1), \emptyset) \\ * ((2), (2,1)) \\ ((2,1), (2)) \\ ((1,1), (2,1)) \\ (\emptyset, (2,1,1,1)) \\ ((2,1), (1,1)) \\ ((2,1,1,1), \emptyset) \end{matrix}$$



# Bibliographie

- [AST] T. ARAKAWA, T. SUZUKI, A. TSUCHIYA, *Degenerate double affine Hecke algebra and conformal field theory*, Proceedings of the 38<sup>th</sup> Taniguchi symposium, Éd. M. Kashiwara et al., Birkhäuser (1998), 1-34.
- [A1] S. ARIKI, *On the semisimplicity of the Hecke algebra of  $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$* , J. Algebra **169** (1994), 216-225.
- [A2] S. ARIKI, *On the decomposition numbers of the Hecke algebra of  $G(m,1,n)$* , J. Math. Kyoto Univ. **36** No.4 (1996), 789-808.
- [A3] S. ARIKI, *On the classification of simple modules for cyclotomic Hecke algebras of type  $G(m,1,n)$  and Kleshchev multipartitions*, Osaka J. Math. **38** No.4 (2001), 827-837.
- [AK] S. ARIKI, K. KOIKE, *A Hecke algebra of  $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$  and construction of its irreducible representations*, Adv. Math. **106** No.2 (1994), 216-243.
- [AM] S. ARIKI, A. MATHAS, *The number of simple modules of the Hecke algebras of type  $G(r,1,n)$* , Math. Z. **233** No.3 (2000), 601-623.
- [BM] M. BROUÉ, G. MALLE, *Zyklotomische Heckealgebren*, Société Mathématique de France, Astérisque **212** (1993), 119-189.
- [CPS] E. CLINE, B. PARSHALL, L. SCOTT, *Finite-dimensional algebras and highest weight categories*, J. Reine Angew. Math. **391** (1988), 85-99.
- [De] V.V. DEODHAR, *On some geometric aspects of Bruhat orderings II*, J. Algebra **111** (1987), 483-506.
- [DJ1] R. DIPPER, G. JAMES, *Representations of Hecke algebras of general linear groups*, Proc. London Math. Soc., III. Ser. **52** (1986), 20-52.
- [DJ2] R. DIPPER, G. JAMES, *The  $q$ -Schur algebra*, Proc. London Math. Soc., III. Ser. **59** No.1 (1989), 23-50.
- [DJM] R. DIPPER, G. JAMES, A. MATHAS, *Cyclotomic  $q$ -Schur algebras*, Math. Z. **229** (1998), 385-416.
- [DM] R. DIPPER, A. MATHAS, *Morita equivalences of Ariki-Koike algebras*, Math. Z. **240** No.3 (2002), 579-610.
- [Dr] V.G. DRINFEL'D, *Hopf algebra and the Yang-Baxter equation*, Soviet Math. Dokl. (English translation) **32** (1985), 254-258.
- [FLOTW] O. FODA, B. LECLERC, M. OKADO, J.-Y. THIBON, T. WELSH, *Branching functions of  $A_{n-1}^{(1)}$  and Jantzen-Seitz problem for Ariki-Koike algebras*, Adv. Math. **141** No.2 (1999), 322-365.

- [F] G. FROBENIUS, *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe*, Sitzber. Pruess. Akad. Berlin (1900), 516-534.
- [GJ] O. GABBER, A. JOSEPH, *Towards the Kazhdan-Lusztig conjecture*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV. Sér. **14** (1981), 261-302.
- [GP] M. GECK, G. PFEIFFER, *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*, Oxford Science Publications, Oxford University Press, 2000.
- [GGOR] V. GINZBURG, N. GUAY, E. OPDAM, R. ROUQUIER, *On the category  $\mathcal{O}$  for rational Cherednik algebras*, Invent. Math. **154** (2003), 617-651.
- [G] J. J. GRAHAM, *The centre of the Iwahori-Hecke algebra of type A*, non publié (2002).
- [GL] J. J. GRAHAM, G. I. LEHRER, *Cellular algebras*, Invent. Math. **123** (1996), 1-34.
- [H] T. HAYASHI,  *$q$ -analogues of Clifford and Weyl algebras - spinor and oscillator representations of quantum enveloping algebras*, Commun. Math. Phys. **127** No.1 (1990), 129-144.
- [IM] N. IWAHORI, H. MATSUMOTO, *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of  $p$ -adic Chevalley groups*, Publ. IHES **25** (1965), 5-48.
- [Ja] N. JACON, *On the parametrization of the simple modules for Ariki-Koike algebras at roots of unity*, J. Math. Kyoto Univ. **44** No.4 (2004), 729-767.
- [JK] G.D. JAMES, A. KERBER, *The representation theory of the symmetric group*. Encyclopedia of Mathematics **16**, Addison-Wesley, 1981.
- [JM] G. JAMES, A. MATHAS, *The Jantzen sum formula for cyclotomic  $q$ -Schur algebras*, Trans. AMS **352** (2000), 5381-5404.
- [Ji] M. JIMBO, *A  $q$ -difference analogue of  $U(\mathfrak{g})$  and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63-69.
- [JMMO] M. JIMBO, K. MISRA, T. MIWA, M. OKADO, *Combinatorics of representations of  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  at  $q = 0$* , Commun. Math. Phys. **136** No.3 (1991), 543-566.
- [Jo] A. JOSEPH, *Quantum groups and their primitive ideals*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **29**, Springer-Verlag, Berlin (1995).
- [Kac] V. G. KAC, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd Ed. Cambridge University Press, 1990.
- [Kas1] M. KASHIWARA, *Crystallizing the  $q$ -analogue of universal enveloping algebras*, Commun. Math. Phys. **133** No.2 (1990), 249-260.
- [Kas2] M. KASHIWARA, *On crystal bases of the  $q$ -analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math. J. **63** (1991), 465-516.
- [Kas3] M. KASHIWARA, *Global crystal bases of quantum groups*, Duke Math. J. **69** (1993), 455-485.
- [Kas4] M. KASHIWARA ; rédigé par CH. COCHET, *Bases cristallines des groupes quantiques*, Cours spécialisés **9**, Société Mathématique de France, viii (2002).
- [KMS] M. KASHIWARA, T. MIWA, E. STERN, *Decomposition of  $q$ -deformed Fock spaces*, Selecta Math. **1** (1995), 787-805.

- [KT] M. KASHIWARA, T. TANISAKI, *Parabolic Kazhdan-Lusztig polynomials and Schubert varieties*, J. Algebra **249** (2002), 306-325.
- [KL] D. KAZHDAN, G. LUSZTIG, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. **53** (1979), 165-184.
- [Ki] A.A. KIRILLOV, JR, *Lectures on the affine Hecke algebras and Macdonald conjectures*, Bull. Am. Math. Soc., New Ser. **34** No.3 (1997), 251-292.
- [Kn] D. KNUTH, *The art of computer programming*, Addison-Wesley, Reading MA, 1975.
- [La] T. LAM, *Ribbon tableaux and the Heisenberg algebra*, arXiv math.QA/0310250 (2003).
- [LLT] A. LASCoux, B. LECLERC, J.-Y. THIBON, *Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras*, Commun. Math. Phys. **181** No.1 (1996), 205-263.
- [Le] B. LECLERC, *Symmetric functions and the Fock space*, in *Symmetric functions 2001: surveys of developments and perspectives*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem. **74**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2002), 153-177.
- [LM] B. LECLERC, H. MIYACHI, *Some closed formulas for canonical bases of Fock spaces*, Represent. Theory **6** (2002), 290-312.
- [LT] B. LECLERC, J.-Y. THIBON, *Littlewood-Richardson coefficients and Kazhdan-Lusztig polynomials*, Combinatorial Methods in Representation Theory, Advanced Studies in Pure Mathematics **28** (2000), 155-220.
- [Lu1] G. LUSZTIG, *Left cells in Weyl groups 3*. J. Fac Sci. Univ. Tokyo **34** (1987), 223-243.
- [Lu2] G. LUSZTIG, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, J. Am. Math. Soc. **3** No.2 (1990), 447-498.
- [Lu3] G. LUSZTIG, *Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras*, J. Am. Math. Soc. **4** No.2 (1991), 365-421.
- [Mac] I. G. MACDONALD, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd Ed. Oxford Science Publications, Oxford University Press, 1995.
- [Mat1] A. MATHAS, *Iwahori-Hecke Algebras and Schur algebras of the symmetric group*, AMS University Lecture Series **15**, 1999.
- [Mat2] A. MATHAS, *Tilting modules for cyclotomic Schur algebras*, J. Reine Angew. Math. **562** (2003), 137-169.
- [Mat3] A. MATHAS, *The representation theory of the Ariki-Koike and cyclotomic  $q$ -Schur algebras*, Adv. Stud. Pure Math. **40** (2004), 261-320.
- [MM] K.C. MISRA, T. MIWA, *Crystal base for the basic representation of  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$* , Commun. Math. Phys. **134** No.1 (1990), 79-88.
- [Ri] C. M. RINGEL, *Hall algebras*, Topics in algebra, Part 1 (Warsaw, 1988), 433-447, Banach Center Publ. **26**, Part 1, PWN, Warsaw (1990).
- [Ro] R. ROUQUIER,  *$q$ -Schur algebras and complex reflection groups, I*, arXiv math.RT/0509252 (2005).

- [Ry] S. RYOM-HANSEN, *The Schaper formula and the Lascoux, Leclerc and Thibon-algorithm*, Lett. Math. Phys. **64** (2003), 213-219.
- [Sc] J. SCOPES, *Cartan matrices and Morita equivalence for blocks of the symmetric groups*, J. Algebra **142** No.2 (1991), 441-455.
- [ST] G.C. SHEPHARD, J. A. TODD, *Finite unitary reflection groups*, Can. J. Math. **6** (1954), 274-304.
- [So] W. SOERGEL, *Kazhdan-Lusztig polynomials and a combinatorics for tilting modules*, Represent. Theory **1** No.6 (1997), 83-114.
- [TU] K. TAKEMURA, D. UGLOV, *Representations of the quantum toroidal algebra on highest weight modules of the quantum affine algebra of type  $\mathfrak{gl}_n$* , Publ. Res. Inst. Math. Sci. **35** No.3 (1999), 407-450.
- [U1] D. UGLOV, *Canonical bases of higher-level  $q$ -deformed Fock spaces*, arXiv math.QA/9901032 (1999).
- [U2] D. UGLOV, *Canonical bases of higher-level  $q$ -deformed Fock spaces and Kazhdan-Lusztig polynomials*, in Physical Combinatorics ed. M. Kashiwara, T. Miwa, Progress in Math. **191**, Birkhäuser (2000), arXiv math.QA/9905196 (1999).
- [VV] M. VARAGNOLO, E. VASSEROT, *On the decomposition matrices of the quantized Schur algebra*, Duke Math. J. **100** (1999), 267-297.
- [Y] X. YVONNE, *A conjecture for  $q$ -decomposition matrices of cyclotomic  $v$ -Schur algebras*, arXiv math.RT/0505379 (2005).





**Titre de la thèse en français**

Bases canoniques d'espaces de Fock de niveau supérieur.

**Résumé**

Nous comparons les bases canoniques d'espaces de Fock de niveau supérieur. Nous donnons une variante de l'algorithme de Leclerc-Thibon pour les calculer. Nous donnons une expression de la dérivée à  $q = 1$  des matrices de transition de ces bases ; par analogie avec la formule sommatoire de Jantzen, nous posons une conjecture pour les matrices de décomposition des  $v$ -algèbres de Schur cyclotomiques.

**English title**

Canonical bases of higher-level Fock spaces.

**Abstract**

We compare the canonical bases of some higher-level Fock spaces. We give a variation of the Leclerc-Thibon algorithm in order to compute them. We give an expression for the derivative at  $q = 1$  of the transition matrices of these bases; by analogy with Jantzen sum formula, we set a conjecture for decomposition matrices of cyclotomic  $v$ -Schur algebras.

**Discipline**

Mathématiques et leurs applications.

**Mots clés**

*Indexation RAMEAU*: Groupes quantiques, Représentations modulaires de groupes, algorithmes, Groupes de Coxeter, Tableaux de Young.

*Indexation libre*: Groupes quantiques, Espaces de Fock, Bases canoniques, Algèbres d'Ariki-Koike, Algèbres de Schur cyclotomiques.

**Adresse**

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, CNRS UMR 6139,  
BP 5186, 14032 CAEN Cedex, FRANCE

Adresse électronique: `xyvonne@math.unicaen.fr`