# G-structures entières de représentations cristallines

Lionel Dorat

**Lionel DORAT**

# $G$-STRUCTURES ENTIÈRES DE REPRÉSENTATIONS CRISTALLINES

Soutenue le lundi 12 juin 2006 devant la Commission d'Examen :

Directeur de Thèse : Jean-Pierre WINTENBERGER
Rapporteur Externe : Jean-Marc FONTAINE
Rapporteur Externe : Thomas ZINK
Rapporteur Interne : Henri CARAYOL
Examinateur : Farid MOKRANE

*Lionel DORAT*
Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS (UMR 7501)
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France.
*E-mail :* dorat@math.u-strasbg.fr
*Url :* http ://www-irma.u-strasbg.fr/~dorat/

***Classification mathématique par sujets (2000) :*** 11F80, 11F85, 11S20, 11S23, 17B45.
***Mots clés :*** Représentations galoisiennes, représentations cristallines, représentations entières, modules filtrés, $(\varphi, \Gamma)$-modules, groupes algébriques, groupes engendrés exponentiellement, algèbre de Lie d'un groupe algébrique.

## Remerciements

Je veux tout d'abord remercier très chaleureusement mon directeur de thèse Jean-Pierre Wintenberger, sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour. Il a su me faire profiter de son expérience, de ses connaissances et de ses intuitions. J'ai beaucoup appris à son contact et eu beaucoup de plaisir à travailler avec lui.

Je remercie les professeurs Henri Carayol, Jean-Marc Fontaine et Thomas Zink qui ont bien voulu être rapporteurs de ma thèse, ainsi que Farid Mokrane qui a accepté de faire partie de mon jury.

Je désire témoigner à Nathalie Wach toute ma gratitude pour le temps et l'intérêt qu'elle a consacrés à nos nombreuses discussions, qui m'ont beaucoup aidé à comprendre les subtilités des objets que je manipulais.

Je tiens aussi à remercier tous ceux qui, à l'université ou ailleurs, ont partagé ma vie ces dernières années et ont rendu ce travail possible, ou tout simplement ma vie à Strasbourg agréable. Merci à Denis, Agnès, Carola et les autres doctorants pour leur amitié, leur bonne humeur, les diverses discussions (mathématiques ou autre) ...

Merci à tous mes amis du groupe Dixsous pour les bons moments passés ensemble, et aux participants de forum.ens.fr pour leur aide fort précieuse.

Je remercie enfin ma famille, mes parents Marc et Jacqueline qui m'ont toujours affectueusement soutenu, mon frère Rémi qui a toujours cru en moi, et ma femme Aida qui par sa présence et son amour m'a encouragé tout au long de mes travaux.

# Introduction

L'un des buts de la géométrie arithmétique est de comprendre la structure du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$, ou au moins de comprendre ses représentations qui proviennent de la géométrie. Si nous fixons un nombre premier $p$, le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$, noté ici $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$, s'injecte dans celui de $\mathbb{Q}$. Le but de la théorie des représentations $p$-adiques est d'extraire des renseignements des représentations continues de $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ sur des $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels. Suite à des compatibilités de topologie, ce cas est beaucoup plus riche que la théorie des représentations $l$-adiques, c'est-à-dire des représentations de $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ sur des $\mathbb{Q}_l$-espaces vectoriels, avec $l$ un nombre premier différent de $p$.

Plus généralement, nous allons nous intéresser aux représentations continues de $\Gamma_{\mathcal{K}}$, le groupe de Galois absolu d'un corps local $\mathcal{K}$ extension de $\mathbb{Q}_p$, sur des $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie. Le cas étudié ici sera celui où $\mathcal{K}$ est absolument non-ramifié, c'est-à-dire que $p$ est une uniformisante de $\mathcal{K}$, et à corps résiduel $k$ algébriquement clos (de caractéristique $p$). Nous noterons $W$ l'anneau des entiers de $\mathcal{K}$, c'est-à-dire l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $k$.

Nous nous restreindrons aux représentations cristallines (cf. paragraphe I.3.b), condition vérifiée dans bien des cas issus de la géométrie (par exemple, pour le module de Tate d'une variété abélienne ayant bonne réduction). L'avantage de ces représentations est que J.-M. Fontaine et P. Colmez ont montré dans [**Fon94b**] et [**CF00**] qu'elles forment une catégorie tannakienne, qui est $\otimes$-équivalente à la catégorie tannakienne des $\Phi$-modules filtrés sur $\mathcal{K}$ faiblement admissibles (cf. paragraphe I.3.b).

Le foncteur qui induit cette équivalence de catégories se décrit de la manière suivante : si $V$ est une représentation $p$-adique cristalline, le $\Phi$-module filtré associé est $\mathbf{D_{cris,p}}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris})^{\Gamma_{\mathcal{K}}}$ (le quasi-inverse est donné par : pour $D$ un $\Phi$-module filtré faiblement admissible, $\mathbf{V_{cris,p}}(D) = \mathrm{Fil}^0(D \otimes_{\mathcal{K}} B_{cris})^{\Phi}$). De plus, l'application

$$\mathbf{V_{cris,p}}(D) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} \to D \otimes_{\mathcal{K}} B_{cris}$$

issue de la multiplication de $B_{cris}$ est un isomorphisme (préservant l'action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$, la filtration, et le morphisme $\Phi$). Cela peut se traduire de la façon suivante : en notant $w_V$ le foncteur qui à la $\mathbb{Q}_p$-représentation cristalline $V$ associe le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel sous-jacent à $V$, et $w_D$ celui qui associe le $\mathcal{K}$-espace vectoriel sous-jacent à $\mathbf{D_{cris,p}}(V)$, alors les $\otimes$-isomorphismes du foncteur fibre $w_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}$ sur le foncteur fibre $w_D$, $\mathbf{Isom}(w_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}, w_D)$, forment un torseur sous $\mathbf{Aut}^{\otimes}(w_V)_{|\mathcal{K}}$ et sous $\mathbf{Aut}^{\otimes}(w_D)$.

La situation est donc bien comprise pour les $\mathbb{Q}_p$-représentations cristallines. Elle est cependant plus complexe pour les $\mathbb{Z}_p$-représentations cristallines, c'est-à-dire les réseaux stables d'une $\mathbb{Q}_p$-représentation cristalline.

Du côté des $\Phi$-modules filtrés sur $\mathcal{K}$, nous disposons de la notion de réseaux fortement divisibles (dont l'existence est une condition nécessaire et suffisante pour que le module soit faiblement admissible), qui sont des $\Phi$-modules filtrés sur $W$ (cf. paragraphe II.1). J.-M. Fontaine et G. Laffaille ont montré dans [**FL82**] que, si la longueur de la filtration est strictement plus petite que $p-1$, il existe une correspondance entre réseaux fortement divisibles d'un module filtré faiblement admissible, et les réseaux stables de la représentation cristalline associée.

Plus précisément, à $M$ un $\Phi$-module filtré sur $W$ vérifiant la condition $\mathrm{Fil}^1(M) = \{0\}$ et $\mathrm{Fil}^{2-p}(M) = M$, ils associent le réseau $\mathbf{V_{cris}}(M) = \mathrm{Fil}^0(M \otimes_W A_{cris})^{\varphi^0}$, et cette construction induit un foncteur exact, pleinement fidèle (dont nous noterons $\mathbf{D_{cris}}$ un quasi-inverse). Deux problèmes apparaissent : la condition sur la filtration n'est pas stable par produit tensoriel, et l'application naturelle

$$\Pi : \mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris} \to M \otimes_W A_{cris}$$

n'est pas un isomorphisme (le déterminant est une puissance de $t$, non inversible dans $A_{cris}$). Ils sont à l'origine de la problématique de cette thèse :

Après un premier chapitre entièrement consacré à des rappels, des définitions et des notations, et un deuxième chapitre où nous étudions le comportement de $\mathbf{V_{cris}}$ par rapport au produit tensoriel (ceci à l'aide de considérations sur les périodes, et les équations qu'elles vérifient), nous démontrons dans le troisième chapitre un théorème technique au coeur de nos résultats, qui montre comment, une fois les scalaires étendus à une certaine $\mathbb{Z}_p$-algèbre $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$, les problèmes soulevés précédemment n'existent plus (ou du moins sont moins importants). En réalité, $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ permet d'étudier toutes les représentations continues de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ dans un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini à l'aide de la théorie des $(\varphi, \Gamma)$-modules (cf. [**Fon90**]).

Notons $\mathbf{MF_W^{-h}}$ la catégorie des $\Phi$-modules filtrés $N$ libres sur $W$ tels que $\mathrm{Fil}^{-h}(N) = N, \mathrm{Fil}^1(N) = \{0\}$ (cf. paragraphe II.1 pour plus de détails). Pour tout objet $N$ de $\mathbf{MF_W^{-h}}$, $D_N = N \otimes_W \mathcal{K}$ est un $\Phi$-module filtré sur $\mathcal{K}$ faiblement admissible. Avant d'énoncer le théorème technique, introduisons quelques notations : soit $0 \leq h \leq p-2$, et notons $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les foncteur exacts de la catégorie $\mathbf{MF_W^{-h}}$ vers la catégorie des $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$-modules libres de rang fini définis par : si $M$ est un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$, alors $\mathcal{F}_1(M) = \mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ et $\mathcal{F}_2(M) = M \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$.

Théorème 1. *Soit $h$ un entier compris entre $0$ et $p-2$. Alors il existe $\mathsf{f}$ un isomorphisme de foncteur entre $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Il vérifie de plus :*

(1) *pour tous objets $N$ et $N'$ de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ tels que $N \otimes N'$ soit encore un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$, nous avons $\mathsf{f}_{N\otimes N'} = \mathsf{f}_N \otimes \mathsf{f}_{N'}$ ;*

(2) *pour tout uplet d'objets* $(N_{i,j})_{1\leq j\leq n,\,1\leq i\leq n_j}$ *de* $\mathbf{MF_W^{-h}}$*, pour tout* $\Phi$*-module filtré* $L$ *sur* $W$ *sous-objet et facteur direct (comme* $W$*-module) de* $\bigoplus_{j=1}^{n}\otimes_{i=1}^{n_j}N_{i,j}$*, l'application* $\bigoplus\otimes\mathsf{f}_{N_{i,j}}$ *envoie* $(\mathbf{V_{cris,p}}(D_L)\cap\bigoplus_{j=1}^{n}\otimes_{i=1}^{n_j}\mathbf{V_{cris}}(N_{i,j}))\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ *bijectivement sur* $L\otimes_W\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$.

Ce résultat est fortement lié aux modules de Wach que définit L. Berger dans [**Ber04**].

Le quatrième chapitre explore quelques conséquences du Théorème 1. La première est la suivante : considérons $G$ un groupe algébrique lisse sur $\mathbb{Z}_p$ et une représentation $\rho:\Gamma_{\mathcal{K}}\to G(\mathbb{Z}_p)$. Supposons donnée une immersion fermée $\alpha$ de $G$ dans $GL_U$, pour $U$ un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini, telle que la représentation $\alpha\circ\rho$ de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ (dans $GL(U\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p)$) soit cristalline à poids de Hodge-Tate dans $[\![0,h]\!]$ avec $h$ un entier compris entre 0 et $\frac{p-2}{2}$. Notons $V=U\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$. Par un théorème de Chevalley, il existe un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $V_G$ dans $\bigoplus_i \mathrm{End}(V)^{\otimes i}$ (en faisant agir $GL_V$ naturellement sur $V^*$ et trivialement sur $V$, dans $\mathrm{End}(V)=V\otimes V^*$) tel que $G\times_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ soit le groupe algébrique formé de l'ensemble des éléments de $GL_V$ qui laissent stable $V_G$. Alors, par le foncteur de Fontaine-Laffaille, nous pouvons définir naturellement un groupe $G_D$ sur $D=\mathbf{D_{cris,p}}(V)$ comme l'ensemble des éléments de $GL_D$ laissant stable $\mathbf{D_{cris,p}}(V_G)$. Un corollaire de la proposition 6.3.3 de [**Fon79a**] nous donne l'existence d'un élément de $\mathbf{Isom}(w_V\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{K},w_D)(\mathcal{K})$, donc en particulier d'un isomorphisme de $\mathcal{K}$-modules

$$f:V\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{K}\to D$$

qui identifie $G\times_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{K}$ à $G_D$. Le comportement de $f$ vis-à-vis des réseaux est à priori inconnu. Pour l'étudier, nous introduisons $\mathbf{Isom}$ le $G\times_W\mathcal{K}$-torseur obtenu à partir de $\mathbf{Isom}(w_V\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{K},w_D)$, qui est en réalité défini sur $W$. Le résultat suivant se montre alors en montrant que $\mathbf{Isom}$ est un $G$-torseur trivial sur $W$ :

Théorème 2. *Sous les hypothèses précédentes, si* $M=\mathbf{D_{cris}}(U)$*, il existe un sous-groupe algébrique* $G_M$ *de* $GL_M$ *sur* $W$*, avec* $G_M\times_W\mathcal{K}=G_D$*, et il existe* $f$ *un isomorphisme de* $W$*-modules*

$$f:U\otimes_{\mathbb{Z}_p}W\to M$$

*qui identifie* $G$ *à* $G_M$*.*

*De plus, si* $U'$ *est un réseau de* $U\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ *laissé stable par l'action de* $G$*, alors* $f[\frac{1}{p}]$ *envoie* $U'\otimes_{\mathbb{Z}_p}W$ *sur* $\mathbf{D_{cris}}(U')$*.*

Avec des hypothèses plus fortes sur $\alpha$, nous pouvons affaiblir l'hypothèse sur $h$. Le point essentiel (et technique) pour se dispenser de conditions sur $V_G$ provient de l'assertion 2 du Théorème 1 (dont tout l'intérêt est de ne pas avoir de condition sur la filtration de $L$). En effet, il nous permet de définir le torseur $\mathbf{Isom}$ sous le groupe $G$.

Une application directe de ce résultat concerne la semi-simplifiée d'une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate petits : le groupe algébrique $H$ engendré par l'image de Galois sur $\mathbb{Q}_p$ est alors connexe et réductif, donc en appliquant les résultats cités dans [**Tit79**] (paragraphe 3.2 et 3.4.1), il existe un groupe algébrique lisse $G$ défini sur $\mathbb{Z}_p$, tel que $G(\mathbb{Z}_p)$ contienne l'image de Galois, et dont la fibre générique est $H$. Le Théorème 2 s'applique alors.

Avant d'expliquer une autre conséquence, rappelons quelques résultats sur les représentations cristallines abéliennes : soit $T_s$ le tore restriction des scalaires de $\mathbb{Z}_{p^s}$ à $\mathbb{Z}_p$ appliqué à $\mathbb{G}_m$, et $\mathbf{T} = \varprojlim T_s$ (où les flèches du système projectif sont induites par la norme). Rappelons que $T_s \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^s} = \prod_{\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^s}/\mathbb{F}_p)} {}^{\tau}\mathbb{G}_m$. Alors le groupe pro-algébrique correspondant à la catégorie tannakienne formée des $\mathbb{Q}_p$-représentations cristallines abéliennes est $\mathbf{T} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$, et si $V$ est une $\mathbb{Q}_p$-représentation cristalline abélienne à poids de Hodge-Tate dans $[\![0, p-2]\!]$, la représentation de $\mathbf{T} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est entièrement déterminée par l'action de l'inertie modérée. Les modules filtrés correspondants sont les modules dits élémentaires, et forment aussi une catégorie tannakienne dont le groupe pro-algébrique correspondant est $\mathbf{T} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$.

Jean-Pierre Wintenberger a construit dans [**Win84**] pour tout objet $M$ de la catégorie des $\Phi$-modules filtrés sur $W$ une représentation $\rho^M_{\mathbf{MF}}$ (qui sera notée $\rho_{\mathbf{MF}}$) de $\mathbf{T}$ (d'image $\mathcal{T}_M$, qui sera noté $\mathcal{T}$). Fixons une section de l'inertie modérée dans l'inertie ; nous pouvons alors parler de l'image de l'inertie modérée. Nous construisons alors (cf. paragraphe III.6), pour tout objet $U$ de la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-représentations cristallines à poids de Hodge-Tate dans $[\![0, p-2]\!]$ et leurs quotients, une représentation $\rho^U_{mr}$ (qui sera notée $\rho_{mr}$) de $\mathbf{T}$ (d'image $(\mathcal{T}_{\mathrm{mr}})_U$ qui sera notée $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$), à l'aide justement de l'image de l'inertie modérée.

Pour montrer (dans le cas tué par $p$) le lien entre $\rho_{\mathbf{MF}}$ et $\rho_{mr}$, introduisons quelques définitions : soit $M$ un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{-\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$ et $p \geq \dim_k M$, et posons $V = \mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(M)$. Définissons $\overline{G}_M$ comme étant le groupe algébrique associé à la catégorie tannakienne engendrée par $M$. Nous cherchons à donner un analogue à $\overline{G}_M$ sur $V$ ; pour cela, algébrisons l'image de Galois : pour l'image de l'inertie modérée, nous avons $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ ; pour l'image de l'inertie sauvage dans $GL_V$, nous reprenons les idées introduites par Nori (cf. [**Nor87**]), et nous introduisons $U_V$ le groupe algébrique engendré exponentiellement (cf. définition IV.2.9) par celle-ci. Alors nous pouvons définir $\overline{G}_V$ comme étant le groupe algébrique engendré par $U_V$ et $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$, et nous avons le théorème :

Théorème 3. *Sous les hypothèses précédentes, il existe un isomorphisme de $k$-espaces vectoriels $V \otimes_{\mathbb{F}_p} k \to M$ qui identifie $\overline{G}_V$ à $\overline{G}_M$ et $\rho_{mr}$ à $\rho_{\mathbf{MF}}$.*

Remarque. *Dans le cas où $M$ est la réduction modulo $p$ de la situation du Théorème 2, nous pouvons choisir l'isomorphisme donné par le théorème 3 dans* $\mathbf{Isom}(k)$.

Nous pouvons déduire de ce théorème deux corollaires intéressants. Pour le premier, reprenons les notations et hypothèses du Théorème 2. A l'aide de la remarque précédente, et en relevant le résultat obtenu par le Théorème 3 à $W$, nous obtenons :

Corollaire 1. *Si $p \geq 2\,\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} U - 1$ et $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$, alors $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ est un sous-groupe de $G$, et il existe un isomorphisme de $W$-modules*

$$U \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \to M$$

*vérifiant les conclusions du Théorème 2, qui identifie $G$ à $G_M$ et $\rho_{mr}$ à $\rho_{\mathbf{MF}}$.*

Là aussi avec des hypothèses plus fortes sur $\alpha$, nous pouvons affaiblir l'hypothèse sur $h$. Et ce corollaire s'appliquera en particulier au cas de la semi-simplifiée d'une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate petits (toujours par application des résultats de Tits (cf. paragraphe 3.2 et 3.4.1 de [**Tit79**])).

Pour illustrer le corollaire suivant, rappelons que Jean-Pierre Wintenberger a montré dans [**Win91**] comment un certain groupe à un paramètre de $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$, plus précisément le groupe à un paramètre correspondant au plongement (indexé sur l'élément $\tau =$ identité du groupe de Galois) de $\mathbb{G}_m$ dans $T_s$, permettait de construire un point de $\mathbf{Isom}(w_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}, w_D)(\mathcal{K})$ une fois restreint aux représentations abéliennes. Ce groupe est le groupe à un paramètre introduit par Jean-Pierre Serre dans [**Ser79**] pour montrer le lien entre une représentation de Hodge-Tate abélienne, et les représentations des Lubin-Tate. Nous avons alors :

Corollaire 2. *Considérons une représentation cristalline de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ dans un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $V$ de dimension $n$, dont les poids de Hodge-Tate sont compris entre $0$ et $h$, avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$, et $p \geq 2n-1$. Alors le tore $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ est inclus dans l'adhérence de Zariski $H$ de l'image de la représentation.*

*De plus, le groupe à un paramètre définissant la graduation de Hodge-Tate est conjugué dans $H$ au groupe à un paramètre de $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ correspondant au plongement de $\mathbb{G}_m$ dans la composante ${}^{\mathrm{Id}}\mathbb{G}_m$ de $T_s \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^{nr}$.*

CHAPITRE I

# Rappels

## I.1. Notations

Dans toute la thèse, nous considérerons $\mathcal{K}$ un corps local (complet pour une valuation discrète, à corps résiduel $k$ algébriquement clos, de caractéristique $p > 2$), absolument non-ramifié (c'est-à-dire que $p$ est une uniformisante, et donc $\mathcal{K}$ est le corps des fractions de $W$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $k$), et $\Gamma_{\mathcal{K}}$ le groupe de Galois absolu de $\mathcal{K}$ (qui est en fait égal au groupe d'inertie). Le Frobenius étendu à $\mathcal{K}$ sera noté $\sigma$.

Nous noterons $\mathbb{C}$ le complété de $\overline{\mathcal{K}}$ (le complété d'une cloture algébrique de $\mathcal{K}$). $\mathcal{X} : \Gamma_{\mathcal{K}} \to \mathbb{Z}_p^*$ désignera le caractère cyclotomique de $\Gamma_{\mathcal{K}}$, c'est-à-dire que $g(z) = z^{\mathcal{X}(g)}$ pour tout $g \in \Gamma_{\mathcal{K}}$ et pour toute racine de l'unité $z \in \overline{\mathcal{K}}$ d'ordre une puissance de $p$.

De manière générale, si $F$ est un corps local, $\mathcal{O}_F$ désignera l'anneau des entiers de $F$, et $\mathsf{m}_F$ son idéal maximal.

## I.2. Rappels sur les $(\varphi, \Gamma)$-modules

**I.2.a. Définition de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.** Soit $R$ l'ensemble des suites $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ formées d'éléments de $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{K}}}/p\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{K}}}$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ pour tout $n$ (cf. [**Fon82**], p. 535). C'est un anneau parfait de caractéristique $p$, muni d'une valuation ; son corps résiduel s'identifie à $k$. Son corps des fractions $\mathrm{Fr}\, R$ est un corps algébriquement clos de caractéristique $p$, et $R$ est intégralement clos dans $\mathrm{Fr}\, R$.

Si $A$ est une $k$-algèbre, $W(A)$ désigne l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $A$. Notons $\mathbb{Z}_{p^s} = W(\mathbb{F}_{p^s})$, $\mathbb{Z}_p^{nr} = W(\overline{\mathbb{F}_p})$, $W = W(k)$, $W_{\mathcal{K}}(A) = \mathcal{K} \otimes_W W(A) = W(A)[\frac{1}{p}]$ et si $a \in A$, $[a] = (a, 0, \cdots, 0, \cdots)$ le représentant de Teichmüller de $a$ dans $W(A)$. Le Frobenius $x \in A \mapsto x^p \in A$ s'étend à $W(A)$ en $\varphi$ (encore appelé l'endomorphisme de Frobenius) par fonctorialité, ainsi qu'à $W_{\mathcal{K}}(A)$ ; nous noterons $\sigma$ le Frobenius sur $W$ et sur $\mathcal{K}$ (si $\lambda \in W$, $\sigma(\lambda) := \varphi(\lambda)$). En particulier ceci s'applique à $W(R)$, $W(\mathrm{Fr}\, R)$ et $W_{\mathcal{K}}(\mathrm{Fr}\, R)$.

D'autre part, le groupe $\Gamma_{\mathcal{K}}$ opère par fonctorialité sur $R$, $\mathrm{Fr}\, R$, $W(R)$ et $W(\mathrm{Fr}(R))$, et les anneaux $W(R)$, $W(\mathrm{Fr}\, R)$ et $W_{\mathcal{K}}(R)$ s'identifient à des sous-anneaux de $W_{\mathcal{K}}(\mathrm{Fr}\, R)$ stables par $\varphi$ et $\Gamma_{\mathcal{K}}$.

Notons $\mathbb{Z}_p(1) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mu_{p^n}(\bar{\mathcal{K}})$ le module de Tate du groupe multiplicatif et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_p(i) = \mathbb{Z}_p(1)^{\otimes i}$ et $\mathbb{Z}_p(-i)$ son dual. Pour tout $\mathbb{Z}_p$-module $T$, et pour tout $i \in \mathbb{Z}$, posons $T(i) = T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(i)$.

Le module de Tate $\mathbb{Z}_p(1) = T_p(\mathbb{G}_m)$ s'identifie au sous $\mathbb{Z}_p$-module du groupe multiplicatif des unités de $R$ congrues à 1 modulo l'idéal maximal, formé des $x$ tels que $x^{(0)} = 1$. Choisisons un générateur de ce module, c'est-à-dire un élément $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in R$ tel que $\varepsilon^{(0)} = 1$ et $\varepsilon^{(1)} \neq 1$, et considérons l'élément $\pi = [\varepsilon] - 1$ dans $W(R)$. Alors l'adhérence $S$ de la sous $W$-algèbre de $W(R)$ engendrée par $\pi$ s'identifie à l'algèbre $W[\![\pi]\!]$ des séries formelles en $\pi$ à coefficients dans $W$ ; de plus $S$ est stable par $\varphi$ et $\Gamma_{\mathcal{K}}$, et nous avons les relations suivantes :

$$\varphi(\pi) = (1+\pi)^p - 1$$
$$g(\pi) = (1+\pi)^{\mathcal{X}(g)} - 1$$

pour $g \in \Gamma_{\mathcal{K}}$.

Soit $\mathcal{K}_n$ le sous corps de $\bar{\mathcal{K}}$ engendré sur $\mathcal{K}$ par les racines $p^n$-ièmes de l'unité, et $\mathcal{K}_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_n$. Notons $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathcal{K}_\infty/\mathcal{K})$ et $H_{\mathcal{K}}$ le noyau de la projection de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ sur $\Gamma$. Le groupe $H_{\mathcal{K}}$ agit trivialement sur $S$. Si $\Gamma_f$ est le sous-groupe de torsion de $\Gamma$, posons $S_0 = S^{\Gamma_f}$ ainsi que $\Gamma_0 = \Gamma/\Gamma_f$ ; J.-M. Fontaine a montré (cf. [**Fon90**], p. 268-273) que $S_0 = W[\![\pi_0]\!]$, où $\pi_0 = -p + \sum_{a\in\mathbb{F}_p} [\varepsilon]^{[a]}$. Notons $q = p + \pi_0$. $S_0$ est munie d'une action naturelle de $\Gamma_0$.

Notons $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ le complété pour la topologie $p$-adique de $S[\frac{1}{\pi}]$. C'est l'anneau des entiers d'un corps complet pour une valuation discrète, absolument non ramifié, noté $\mathcal{E}$. Comme $\pi$ est inversible dans $W(\mathrm{Fr}\, R)$, l'inclusion de $S$ dans $W(R)$ se prolonge en un plongement de $S[\frac{1}{\pi}]$ dans $W(\mathrm{Fr}\, R)$, et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ s'identifie à l'adhérence de $S[\frac{1}{\pi}]$ dans $W(\mathrm{Fr}\, R)$ pour la topologie $p$-adique, tandis que $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}[\frac{1}{p}]$ s'identfie à un sous-corps de $W_{\mathcal{K}}(\mathrm{Fr}\, R)$. Alors si $E = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}/p$, $\mathcal{O}_E = S/pS = k[\![\tilde{\pi}]\!]$, où $\tilde{\pi}$ est la réduction modulo $p$ de $\pi$.

De plus, si $\hat{\mathcal{E}}_{nr}$ désigne l'adhérence dans $W_{\mathcal{K}}(\mathrm{Fr}\, R)$ de l'extension maximale non ramifiée $\mathcal{E}_{nr}$ de $\mathcal{E}$ contenue dans $W_{\mathcal{K}}(\mathrm{Fr}\, R)$ et $\mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}}$ son anneau des entiers, $\mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}}/p$ est une clôture séparable $E^{sep}$ de $E$, avec une identification des groupes de Galois

$$H_{\mathcal{K}} = \mathrm{Gal}(E^{sep}/E) = \mathrm{Gal}(\mathcal{E}_{nr}/\mathcal{E}).$$

**I.2.b. Définition des $(\varphi, \Gamma)$-modules.** Dans ce paragraphe, nous donnons la définition des $(\varphi, \Gamma)$-modules pour un groupe $\Gamma$ profini quelconque, comme fait dans [**Fon90**]. En pratique, ce sera soit le $\Gamma$ du paragraphe précédent, soit $\Gamma_0$.

Soit $A$ un anneau noethérien, muni d'une topologie, pour laquelle il est séparé et complet, d'un endomorphisme noté $\sigma$, et d'une action continue d'un groupe profini, compatible à la structure d'anneau et commutant à $\sigma$. Supposons en outre que le morphisme $\sigma : A \to A$ est plat. Un $\varphi$-module sur $A$ est un $A$-module muni d'un endomorphisme $\varphi$, semi-linéaire par rapport à $\sigma$ ; notons $\mathbf{\Phi M_A}$ la catégorie dont les objets sont les $\varphi$-modules sur $A$, et les morphismes sont les morphismes $A$-linéaires commutants à $\varphi$.

Si $(M, \varphi)$ est un tel module, notons $M^\sigma$ le $A$-module déduit de $M$ par l'extension des scalaires $\sigma : A \to A$. Alors $M$ est dit *étale* s'il est de type fini sur $A$ et si l'application linéaire $\Phi : M^\sigma \to M$, déduite de $\varphi$ en posant $\Phi(\lambda \otimes x) = \lambda\varphi(x)$ pour $\lambda \in A$ et $x \in M$ est bijective. Notons $\mathbf{\Phi M_A^{et}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Phi M_A}$ formée des objets étales.

La catégorie $\mathbf{\Phi M_A}$ est munie d'un produit tensoriel : si $(M, \varphi_M)$ et $(N, \varphi_N)$ sont deux objets de $\mathbf{\Phi M_A}$, alors $M \otimes N$ a pour module sous-jacent $M \otimes_A N$, et $\varphi_{M\otimes N}$ est défini par $\varphi_{M\otimes N}(x \otimes y) = \varphi_M(x) \otimes \varphi_N(y)$. Il existe un objet unité : c'est $A$ muni de $\varphi_A = \sigma$.

Si $A$ est noétherien et $\sigma$-plat, alors $\mathbf{\Phi M_A^{\text{ét}}}$ est une $\otimes$-catégorie (cf. [**Fon90**] p.257), c'est-à-dire que le produit tensoriel de deux modules étales est étale, $\mathbf{\Phi M_A^{\text{ét}}}$ contient l'objet unité, et admet un *hom* interne, défini par :
pour $(M, \varphi_M)$ et $(N, \varphi_N)$ deux objets de $\mathbf{\Phi M_A^{\text{ét}}}$, l'espace sous-jacent à $\mathrm{Hom}(M, N)$ est $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ le $A$-module formé des morphismes de $A$-modules, et le morphisme $\varphi$ est caractérisé par : $\forall x \in M$, $\varphi_{\mathrm{Hom}(M,N)}(f)(x) = \varphi_N(f(\varphi_M^{-1}(x)))$.

Un $(\varphi, \Gamma)$-module sur $A$ est un $\varphi$-module sur $A$ muni en plus d'une action de $\Gamma$, semi-linéaire par rapport à l'action de $\Gamma$ sur $A$, cette action commutant avec l'endomorphisme $\varphi$. Supposons $A$ et $\Gamma$ munis d'une topologie pour laquelle ils sont séparés et complets, que $\Gamma$ opère continûment sur $A$, et que $A$ est noétherien et $\sigma$-plat. Un $(\varphi, \Gamma)$-module est alors dit *étale* si le $\varphi$-module sous-jacent l'est et si l'action de $\Gamma$ est continue. Les $(\varphi, \Gamma)$-modules étales (avec comme morphismes les morphismes $A$-linéaires commutants à $\varphi$ et à $\Gamma$) définissent une $\otimes$-catégorie abélienne notée $\mathbf{\Gamma\Phi M_A^{\text{ét}}}$ (cf. [**Fon90**] p.273).

**I.2.c. Lien entre $(\varphi, \Gamma)$-modules et représentations galoisiennes.** Appelons représentation $\mathbb{Z}_p$-adique de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ la donnée d'un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini muni d'une action linéaire et continue de $\Gamma_{\mathcal{K}}$. Un morphisme sera une application $\mathbb{Z}_p$-linéaire commutant à l'action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$. Notons $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{K}})$ la catégorie des représentations $\mathbb{Z}_p$-adique de $\Gamma_{\mathcal{K}}$. La catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{K}})$ est défini de même.

J.-M. Fontaine a montré dans [**Fon90**] (p. 274) qu'il existait une équivalence de catégories entre $\mathbf{\Gamma\Phi M}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}^{\text{ét}}$ et $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{K}})$ induite par les foncteurs $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ et $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$,

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} : \mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{K}}) & \to & \mathbf{\Gamma\Phi M}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}^{\text{ét}} \\ T & \mapsto & (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} T)^{H_{\mathcal{K}}} \end{array}$$

et son quasi-inverse

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} : \mathbf{\Gamma\Phi M}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}^{\text{ét}} & \to & \mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{K}}) \\ \mathcal{N} & \mapsto & (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \mathcal{N})^{\varphi=1} \end{array}$$

La multiplication dans $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ induit alors une application naturelle et fonctorielle (préservant sous-objet, objet quotient, produit tensoriel, dual et somme directe) :

$$\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathcal{N}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \xrightarrow{\psi_\mathcal{N}} \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$$

pour $\mathcal{N}$ un objet de la catégorie $\mathbf{\Gamma\Phi M}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}^{\text{ét}}$.

## I.3. Représentations cristallines

**I.3.a. Définition de $A_{cris}$.** Soit $W(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $R$, et $W_n(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur $n$. L'application $\theta : W(R) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ défini par $\theta((x_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n x_n^{(n)}$ est un morphisme d'anneaux surjectif, de noyau un idéal principal de $W(R)$ (cf. [**Fon82**], p.537). Soit $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \cdots)$ un générateur de $\mathrm{Ker}(\theta)$. Définissons de même pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta_n : W(R) \to \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{K}}}/p^n$ par $\theta_n((x_0, \cdots, x_{n-1})) = \sum_{m=0}^{n-1} p^m x_m^{(m)}$ ; c'est un morphisme d'anneaux surjectif dont le noyau est engendré par $\lambda_{<n} = (\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1})$.

Notons $W_n^{PD}(R)$ l'enveloppe à puissance divisées (cf. [**BO78**], chapitre 3) de $W_n(R)$ relativement à l'idéal $\mathrm{Ker}(\theta_n)$, compatibles avec les puissances divisées canoniques sur $pW_n(R)$. Posons alors

$$A_{cris} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} W_n^{PD}(R)$$

C'est aussi le séparé complété pour la topologie $p$-adique de l'enveloppe à puissances divisées de $W(R)$ relativement à l'idéal $\mathrm{Ker}(\theta)$, compatibles avec les puissances canoniques sur $pW(R)$.

L'application $\theta$ s'étend naturellement à $W_{\mathcal{K}}(R)$ (par une application toujours noté $\theta$). Notons

$$B_{dR}^+ = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} W_{\mathcal{K}}(R)/\mathrm{Ker}(\theta)^n$$

le complété de $W_{\mathcal{K}}(R)$ pour la topologie $\mathrm{Ker}(\theta)$-adique. C'est un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal $\mathrm{Ker}(\theta)$ ; la série qui définit $\log([\varepsilon])$ converge dans $B_{dR}^+$ vers un élément noté $t$, qui est un générateur de l'idéal maximal, ce qui fait que $B_{dR} = B_{dR}^+[\frac{1}{t}]$ est un corps, muni d'une action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ (par fonctorialité), et d'une filtration définie par $\mathrm{Fil}^i(B_{dR}) = t^i B_{dR}^+$ pour $i \in \mathbb{Z}$. De plus,

$$\forall g \in \Gamma_{\mathcal{K}},\ g(t) = \mathcal{X}(g)t$$

où $\mathcal{X}$ est le caractère cyclotomique.

$A_{cris}$ se plonge naturellement dans $B_{dR}$ (cf. [**Fon94a**])), et alors $t \in A_{cris}$. L'application $\varphi : W(R) \to W(R)$ déduite du Frobenius $x \in R \mapsto x^p \in R$ s'étend naturellement en une application $\Phi : A_{cris} \to A_{cris}$ semi-linéaire par rapport à $\sigma$, et qui vérifie $\Phi(t) = pt$. De plus, $A_{cris}$ hérite alors de la filtration de $B_{dR}$ ($\mathrm{Fil}^i(A_{cris}) = \mathrm{Fil}^i(B_{dR}) \cap A_{cris}$), et l'action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ laisse stable $A_{cris}$. Il en va de même pour $B_{cris} = A_{cris}[\frac{1}{t}]$.

**I.3.b. Représentations cristallines.** Soit $V$ un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, et $\rho : \Gamma_{\mathcal{K}} \to GL(V)$ une représentation continue de $\Gamma_{\mathcal{K}}$. Définissons $\mathbf{D_{cris,p}}$ par

$$\mathbf{D_{cris,p}}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris})^{\Gamma_{\mathcal{K}}}$$

(où $\Gamma_{\mathcal{K}}$ agit sur le produit tensoriel via $g(v \otimes x) = \rho(g)(v) \otimes g(x)$). $\mathbf{D_{cris,p}}(V)$ est un $\mathcal{K}$-espace vectoriel, et $\dim_{\mathcal{K}} \mathbf{D_{cris,p}}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

DÉFINITION I.3.1. *La représentation* $(\rho, V)$ *est cristalline si* $\dim_{\mathcal{K}} \mathbf{D_{cris,p}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

Notons $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\mathbf{p},\mathbf{cris}}(\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{K}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\mathbf{p}}(\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{K}})$ formée par les représentations cristallines.
Définissons $\mathbf{MF}_{\mathcal{K}}$ la catégorie des $\Phi$-modules filtrés sur $\mathcal{K}$ : un objet $D$ de $\mathbf{MF}_{\mathcal{K}}$ est un $\mathcal{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni

- d'une filtration $(\mathrm{Fil}^i(D))_{i\in\mathbb{Z}}$ formée de sous-espaces vectoriels, fitration qui est décroissante, exhaustive et séparée ;
- d'une application $\sigma$-semi-linéaire bijective $\Phi : D \to D$.

Les morphismes de cette catégorie sont les applications $\mathcal{K}$-linéaires préservant la filtration et $\Phi$.

$\mathbf{D_{cris,p}}(V)$ est alors naturellement muni d'une structure de $\Phi$-module filtré sur $\mathcal{K}$, provenant de la filtration et de l'application $\Phi$ de $B_{cris}$.

DÉFINITION I.3.2. *Un $\Phi$-module filtré sur $\mathcal{K}$ isomorphe à un $\mathbf{D_{cris,p}}(V)$ pour $V$ cristalline est dit admissible.*

Notons $\mathbf{MF}_{\mathcal{K}}^{\mathbf{ad}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}_{\mathcal{K}}$ formée des modules admissibles.

$\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\mathbf{p}}(\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{K}})$ et $\mathbf{MF}_{\mathcal{K}}^{\mathbf{ad}}$ sont deux catégories tannakiennes dont $\mathbf{D_{cris,p}}$ induit une équivalence de $\otimes$-catégories, et dont un quasi-inverse est donné par

$$\mathbf{V_{cris,p}}(D) = \mathrm{Fil}^0(D \otimes_{\mathcal{K}} B_{cris})^{\Phi=1}$$

L'application naturelle (provenant de la multiplication dans $B_{cris}$)

$$\mathbf{V_{cris,p}}(D) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} \to D \otimes_{\mathcal{K}} B_{cris} \tag{I.3.3}$$

est alors une bijection.

Pour plus de clarté, décrivons la structure tannakienne de $\mathbf{MF}_{\mathcal{K}}^{\mathbf{ad}}$ (celle de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\mathbf{p}}(\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{K}})$ est claire) :
si $(D, \Phi_D, \mathrm{Fil}^i(D))$ et $(D', \Phi_{D'}, \mathrm{Fil}^i(D'))$ sont deux objets de $\mathbf{MF}_{\mathcal{K}}^{\mathbf{ad}}$, alors $D \otimes D'$ a pour espace sous-jacent $D \otimes_{\mathcal{K}} D'$, et

$$\Phi_{D\otimes D'}(x \otimes y) = \Phi_D(x) \otimes \Phi_{D'}(y)$$
$$\mathrm{Fil}^i(D \otimes D') = \sum_{j+k=i} \mathrm{Fil}^j(D) \otimes_{\mathcal{K}} \mathrm{Fil}^k(D')$$

Pour les homomorphismes, nous munissons $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(D, D')$ l'espace vectoriel des applications $\mathcal{K}$-linéaires de $D$ dans $D'$ d'une structure de $\Phi$-module filtré sur $\mathcal{K}$ par :

- pour $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(D, D')$, $\forall x \in D, \Phi_{\mathrm{Hom}(D,D')}(f)(x) = \Phi_{D'}(f(\Phi_D^{-1}(x)))$
- $\mathrm{Fil}^i(\mathrm{Hom}(D, D')) = \{f \in \mathrm{Hom}(D, D') | \forall j \in \mathbb{Z},\ f(\mathrm{Fil}^j(D)) \subset \mathrm{Fil}^{j+i}(D')\}$

L'objet unité est $\mathcal{K}$ muni de $\Phi = \sigma$ et $\mathrm{Fil}^i(\mathcal{K}) = \begin{cases} \mathcal{K} \text{ si } i \leq 0 \\ 0 \text{ si } i > 0 \end{cases}$.

**I.3.c. Poids de Hodge-Tate.** Rappelons que pour $\rho : \Gamma_{\mathcal{K}} \to GL_{\mathbb{Q}_p}(V)$ une représentation continue sur un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, l'action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ peut s'étendre à $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}$ via $g(v \otimes x) = \rho(g)(v) \otimes g(x)$. Notons alors pour $i \in \mathbb{Z}$, $V_{\mathbb{C}}\{i\} = \{v \in V_{\mathbb{C}} | \forall g \in \Gamma_{\mathcal{K}},\, g(v) = \mathcal{X}(g)^i v\}$. $V_{\mathbb{C}}\{i\}$ est un $\mathcal{K}$-sous espace vectoriel de $V_{\mathbb{C}}$ tel que l'injection $V_{\mathbb{C}}\{i\} \to V_{\mathbb{C}}$ s'étend en une injection $\mathbb{C}$-linéaire

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_{\mathbb{C}}\{i\} \otimes_{\mathcal{K}} \mathbb{C} \to V_{\mathbb{C}}$$

Définition I.3.4. *$V$ est dit de Hodge-Tate si cette injection est une bijection. Les poids de Hodge-Tate sont alors les $i \in \mathbb{Z}$ tels que* $\dim_{\mathcal{K}} V_{\mathbb{C}}\{i\} \neq 0$.

Si $V$ est cristalline, alors elle est de Hodge-Tate, et ses poids de Hodge-Tate sont les opposées des sauts de la filtration de $\mathbf{D}_{\mathbf{cris},\mathbf{p}}(V)$.

CHAPITRE II

# Théorème de Fontaine-Laffaille et produit tensoriel

## II.1. Rappels sur les Φ-modules

Les résultats énoncés ici proviennent de [**Win84**], p.517 à p.529.

Soit $\mathbf{MG_{W,tf}}$ la catégorie des Φ-modules gradués définie par :
– un objet est un module $M$ de type fini sur $W$ avec une graduation $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et une application $\sigma$-semi-linéaire bijective $f_M : M \to M$ (s'il n'y a pas ambiguité, nous noterons $M$ pour l'objet $(M,(M_i),f_M)$) ;
– les morphismes sont les applications $W$-linéaires commutants aux $f$ et compatibles aux graduations.
C'est une ⊗-catégorie abélienne, $\mathbb{Z}_p$-linéaire, qui possède des Hom internes.

Soit $X$ (respectivement $X_s$ pour $s \in \mathbb{N}^*$) le groupe additif des applications périodiques (respectivement ayant $s$ pour période) de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Pour tout $\xi \in X$, notons $|\xi|$ la période de $\xi$. Le Frobenius $\sigma$ agit sur $X$ par $\forall \xi \in X, \forall i \in \mathbb{Z}$, $\sigma(\xi)(i) = \xi(i+1)$, et laisse donc stable les $X_s$.

Notons $T_s$ le tore sur $\mathbb{Z}_p$ dont le groupe des caractères est $X_s$ ($T_s$ est le tore obtenue par la restriction des scalaires de $\mathbb{Z}_{p^s}$ à $\mathbb{Z}_p$ du groupe multiplicatif, nous en rediscuterons au paragraphe III.6.a), et donc si $\mathbf{T} = \varprojlim T_s$ (les flèches étant induites par la norme), $X$ est le groupe des caractères de $\mathbf{T}$.

Pour tout $M$ objet de $\mathbf{MG_{W,tf}}$, définissons, pour tout $\xi \in X$, le $W$-module $M\{\xi\}$ par $M\{\xi\} = \{x \in M | f_M^j(x) \in M_{\xi(j)} \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}\}$.

Définition II.1.1. *Un module est dit élémentaire si $M = \oplus_{\xi\in X} M\{\xi\}$.*

Pour tout $u \in Aut_W(M)$, définissons un nouvel objet $M^u$ de $\mathbf{MG_{W,tf}}$ de la manière suivante :
– en tant que $W$-module gradué, $M^u = M$ ;
– posons $f_{M^u} = u^{-1} \circ f_M$.

Proposition II.1.2. *Soit $M$ un objet de $\mathbf{MG_{W,tf}}$. Il existe au plus un $u \in Aut_W(M)$ tel que :*

(1) $(u - \mathrm{Id})(M_i) \subset \oplus_{j<i} M_j$, *ceci pour tout $i \in \mathbb{Z}$ ;*

(2) $M^u$ *est élémentaire.*

Définissons la catégorie $\mathbf{MG^b_{W,tf}}$ dite des *bons* $\Phi$-modules gradués de la manière suivante : c'est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MG_{W,tf}}$ dont les objets $M$ sont tels que

– il existe un $u$ (noté alors $u_M$) vérifiant les conditions de la proposition II.1.2

– $M/pM$ ait une suite de composition dont les quotients successifs sont des modules élémentaires.

La catégorie $\mathbf{MG^b_{W,tf}}$ est stable par sous-objet, objet quotient, somme directe, produit tensoriel et Hom interne.

Pour tout objet $M$ de $\mathbf{MG^b_{W,tf}}$, posons (si $u = u_M$), $M^{e\ell} := M^u$, $M_\xi := M^{el}\{\xi\}$, $f^{e\ell}_M := u^{-1} f_M$ et $M^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p} := M^{f^{e\ell}_M}$ (c'est-à-dire les éléments fixés par $f^{e\ell}_M$).
De part les définitions, $M_i = \bigoplus_{\xi(0)=i} M_\xi$. La graduation $M = \bigoplus_{\xi\in X} M_\xi$ induit une représentation $\rho^M_{\mathbf{MF}}$ (notée $\rho_{\mathbf{MF}}$ s'il n'y a pas ambiguité) de $\mathbf{T}$ sur $M$. Appellons $\mathcal{T}_M$ (que nous noterons aussi $\mathcal{T}$ s'il n'y a pas ambiguité) le tore image dans $GL_M$ donné par $\rho_{\mathbf{MF}}$.

Soit $\mathbf{MF_W}$ la catégorie dite des $\Phi$-modules filtrés sur $W$, dont les objets sont les $W$-modules $N$ muni

– d'une filtration décroissante exhaustive et séparée formée de sous-modules $(\mathrm{Fil}^i(N))_{i\in\mathbb{Z}}$ ;

– pour tout $i \in \mathbb{Z}$, d'une application $\sigma$-semi-linéaire $\varphi^i : \mathrm{Fil}^i(N) \to N$ telle que $\varphi^i|_{\mathrm{Fil}^{i+1}(N)} = p\varphi^{i+1}$.

Les morphismes de cette catégorie sont donnés par les applications $W$-linéaires compatibles aux filtrations et commutants aux $\varphi^i$.

Un exemple de module filtré serait $A_{cris}$, mais pour cela, il faut modifier la filtration : en posant $\varphi^i = \frac{1}{p^i}\Phi|_{\mathrm{Fil}^i(A_{cris})}$, il faut poser $\mathrm{Fil}^p(A_{cris}) = \{0\}$ (cette filtration sera appelée la *filtration tronquée* de $A_{cris}$).

Pour pouvoir introduire un produit tensoriel et le Hom interne, il faut restreindre la catégorie : considérons $\mathbf{MF'_W}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF_W}$ formée des objets $N$ vérifiant :

– il existe $i \in \mathbb{Z}$ avec $\mathrm{Fil}^i(N) = \{0\}$ ;

– les $\mathrm{Fil}^i(N)$ sont des facteurs directs dans $N$.

Alors, pour tout objet de $\mathbf{MF'_W}$, il existe un scindage de la filtration. De plus, le produit tensoriel et le Hom existent (cf. [**Win84**], p.521).

$A_{cris}$ (muni de la filtration tronquée) est un objet de $\mathbf{MF'_W}$, ce que nous garderons en mémoire pour la définition de $\mathbf{V_{cris}}$.

Considérons $\mathbf{MF_{W,tf}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF'_W}$ formée des $W$-modules $N$ de type fini tels que $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \varphi^i(\mathrm{Fil}^i(N)) = N$. C'est une $\otimes$-catégorie abélienne, $\mathbb{Z}_p$-linéaire, qui possède des Hom internes.

Pour tout objet $N$ de $\mathbf{MF_{W,tf}}$, il existe une structure de Φ-module gradué : si $(N_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est un scindage de $(\mathrm{Fil}^i(N))_{i\in\mathbb{Z}}$, posons pour $x \in N$ tel que $x = \sum_i x_i$ avec $x_i \in N_i$, $f_N(x) = \sum_i \varphi_N^i(x_i)$. Alors, $(N,(N_i),f_N)$ est bien un Φ-module gradué. Réciproquement, si $M$ est un Φ-module gradué, en posant $\mathrm{Fil}^i(M) = \oplus_{j\geq i} M_j$ et pour $x \in \mathrm{Fil}^i(M)$ tel que $x = \sum_j x_j$ avec $x_j \in M_j$, $\varphi^i(x) = \sum_{j\geq i} p^{j-i} f(x_j)$, $M$ est alors muni d'une structure de Φ-module filtré.

Le résultat principale démontré dans [**Win84**] (Théorème 3.1.2 p.529) est le théorème suivant :

Théorème II.1.3. *La méthode décrite ci-dessus permet de construire une équivalence de ⊗-catégories entre* $\mathbf{MG^b_{W,tf}}$ *et* $\mathbf{MF_{W,tf}}$. *Plus précisement, pour tout objet $N$ de* $\mathbf{MF_{W,tf}}$, *il existe un et un seul scindage de la filtration de $N$ tel que le Φ-module gradué qu'il définit soit bon, et ce scindage vérifie les propriétés de fonctorialité attendues.*

Posons enfin $\mathbf{MF_W^{[a,b]}}$ (resp. $\mathbf{MF_k^{[a,b]}}$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF_{W,tf}}$ formée des $W$ (resp. $k$)-modules libres tels que $\mathrm{Fil}^a(M) = M$ et $\mathrm{Fil}^{b+1}(M) = \{0\}$. Notons $\mathbf{MF_W^{-h}} = \mathbf{MF_W^{[-h,0]}}$, $\mathbf{MF_W^{h}} = \mathbf{MF_W^{[0,h]}}$ et $\mathbf{MF_W^{\pm h}} = \mathbf{MF_W^{[-h,h]}}$ (de même en remplacant $W$ par $k$).

Soit $D$ un Φ-module filtré sur $\mathcal{K}$ admissible. Alors il possède des sous-réseaux fortement divisible, $M$, c'est-à-dire un réseau $M$ vérifiant $\sum_{i\in\mathbb{Z}} p^{-i}\Phi(\mathrm{Fil}^i(D)\cap M) = M$. En posant $\mathrm{Fil}^i(M) = \mathrm{Fil}^i(D)\cap M$, $\varphi^i = p^{-i}\Phi|_{\mathrm{Fil}^i(M)}$, $M$ devient un Φ-module filtré sur $W$. Posons alors $D_i := \mathcal{K}\otimes_W M_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $D_{\mathbb{Q}_p} := \mathcal{K}\otimes_W M_{\mathbb{Z}_p}$, $D^{e\ell}_{\mathbb{Q}_p} := \mathcal{K}\otimes_W M^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p}$, $D_\xi := \mathcal{K}\otimes_W M_\xi$. La graduation $(D_\xi)_{\xi\in X}$ correspond à un morphisme du protore $T\times_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ dans $GL_{D^{el}_{\mathbb{Q}_p}}$, noté $\gamma_D$.
Ces définitions ne dépendent pas du choix de $M$.

Remarque II.1.4. *Si $M$ est un objet de* $\mathbf{MF_{W,tf}}$ *libre sur $W$, en posant $D := \mathcal{K}\otimes_W M$, $\mathrm{Fil}^i(D) := \mathcal{K}\otimes_W \mathrm{Fil}^i(M)$, et pour $x_i \in \mathrm{Fil}^i(M)$, $\Phi(x_i) := p^i\varphi^i(x_i)$, l'objet $D$ ainsi construit est un Φ-module filtré sur $\mathcal{K}$ faiblement admissible (et donc en fait admissible) dont $M$ est un réseau fortement divisible. Par contre, différents $M$ peuvent donner le même $D$. Nous noterons $D_M$ ce Φ-module filtré sur $\mathcal{K}$ faiblement admissible construit à partir de $M$.*

## II.2. Autour du théorème de Fontaine-Laffaille

DÉFINITION II.2.1. *Pour tout objet $M$ de $\mathbf{MF_{W,tf}}$ tel que $\mathrm{Fil}^1(M)=\{0\}$, définissons la représentation galoisienne $\mathbf{V_{cris}}(M)$ par :*

$$\mathbf{V_{cris}}(M)=\mathrm{Fil}^0(M\otimes_W A_{cris})^{\varphi^0}$$

*Si $M$ est libre comme $W$-module, $\mathbf{V_{cris}}(M)$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre (c'est un sous-réseau de $\mathbf{V_{cris,p}}(D_M)$).*

En effet, rappelons que $A_{cris}$ muni de la filtration tronquée est un objet de $\mathbf{MF'_W}$, $M$ aussi, donc le produit tensoriel existe, et $\mathrm{Fil}^0(M\otimes_W A_{cris})^{\varphi^0}$ a donc un sens.

REMARQUE II.2.2. *Cette définition s'étend en la définition du foncteur $\mathbf{V_{cris}}$ de la sous-catégorie pleine formée des objet de $\mathbf{MF_{W,tf}}$ tels que $\mathrm{Fil}^1(M)=\{0\}$ vers la catégorie des représentations galoisiennes sur $\mathbb{Z}_p$.*

THÉORÈME II.2.3 (Théorème de Fontaine-Laffaille). *Si nous nous restreignons à la sous-catégorie pleine des $M$ vérifiant $\mathrm{Fil}^{2-p}(M)=M$ et $\mathrm{Fil}^1(M)=\{0\}$, alors le foncteur $\mathbf{V_{cris}}$ ainsi défini est exact et pleinement fidèle. De plus si $M$ est libre sur $W$, $\mathbf{V_{cris}}(M)$ est un réseau de la représentation galoisienne associée à $D_M$ (c'est-à-dire que $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{V_{cris}}(M))=\mathrm{rg}_W(M)$).*

REMARQUE II.2.4. *N. Wach a montré qu'un quasi-inverse de $\mathbf{V_{cris}}$ est donné par*

$$\mathbf{D_{cris}}(T)=\bigcup_{\substack{\Lambda\in\mathbf{MF_W^{-h}}\\ \Lambda\subset(T\otimes_{\mathbb{Z}_p}A_{cris})^{\Gamma_K}}}\Lambda$$

### II.2.a. Rappels sur les périodes des Lubin-Tate.

Rappelons les résultats énoncés dans [**Col93**] et [**Col92**] concernant les périodes des Lubin-Tate. Soit $l(X)=\sum_{n\geq 0}\frac{X^{q^n}}{p^n}$ avec $q=p^h$. Alors, Cartier démontre dans [**Car76**] que $G(X,Y)=l^{-1}(l(X)+l(Y))$ est la loi d'un Lubin-Tate pour l'uniformisante $p$ sur $\mathbb{Z}_{p^h}$ de hauteur $h$, qui vérifie en outre que pour $a\in\mathbb{Z}_{p^h}$, si $[a]$ est la série formelle donnant la structure de $\mathbb{Z}_{p^h}$-module du Lubin-Tate, alors $l([a](X))=al(X)$ (à gauche de l'égalité, c'est une composée de séries formelles, à droite c'est la multiplication de la série formelle $l$ par le scalaire $a$ pour la structure usuelle de $\mathbb{Z}_{p^h}$-module de $\mathbb{Q}_{p^h}[[X]]$).

Si $T_p(G)$ est le module de Tate de $G$ (voir par exemple [**LT65**]), considèrons alors $u=(u_n)\in T_p(G)$ un élément non nul. Par définition, $u_0=0$ et $u_n$ est un élément de l'iéal maximal $\mathfrak{m}_{\bar{K}}$ de $W$. Comme $\theta:W(R)\to\mathcal{O}_{\bar{K}}$ (le morphisme structurel de $B_{dR}$) est surjectif, il existe $\hat{u}_n\in W(R)$ avec $\theta(\hat{u}_n)=u_n$. Alors, Colmez montre les résultats suivants :

PROPOSITION II.2.5.
– *$l(\hat{u}_n)$ existe dans $B_{dR}^+$ ;*

- $p^n l(\hat{u}_n) \in A_{cris}$ ;
- *la suite* $(p^n l(\hat{u}_n))_n$ *converge dans* $A_{cris}$*, vers une limite* $\Omega_h(u)$ *ne dépendant pas du relèvement* $(\hat{u}_n)$ *choisi ;*
- $\forall g \in \Gamma_{\mathcal{K}}$, $g(\Omega_h(u)) = \mathcal{X}_h(g)\Omega_h(u)$ *où* $\mathcal{X}_h : \Gamma_{\mathcal{K}} \to \mathbb{Z}_{p^h}^*$ *est le caractère donnant l'action de* $\Gamma_{\mathcal{K}}$ *sur le Lubin-Tate* $G$ *(il est construit via la théorie du corps de classe local, voir* [**LT65**]*), et dont l'image de l'inertie modérée est* $\mathbb{F}_{p^h}^*$ *;*
- $\frac{\Phi^i(\Omega_h(u))}{p} \in A_{cris}$ *quelque soit* $i > 0$*. De plus,* $\prod_{i=0}^{h-1} \Phi^i(\Omega_h(u)) \in p^{h-1}\mathbb{Z}_p t$*, donc les* $\Phi^i(\Omega_h(u))$ *sont inversibles dans* $B_{cris}$ *;*
- $\Omega_h(u) \in \mathrm{Fil}^1 A_{cris} \setminus \mathrm{Fil}^2 A_{cris}$*, et* $\Phi^h(\Omega_h(u)) = p\Omega_h(u)$*. De plus, si* $u$ *est un générateur de* $T_p(G)$*,* $\prod_{i=0}^{h-1} \Phi^i(\Omega_h(u)) \in p^{h-1}\mathbb{Z}_p^* t$ *;*
- *Si* $\nu'$ *désigne la valuation (discrète) définie sur* $B_{dR}$ *par les puissances de* $\mathrm{Ker}\,\theta$ *(t est alors une uniformisante),* $\nu'(\Omega_h(u)) = 1$ *et* $\nu'(\Phi^j(\Omega(u))) = 0$ *pour* $1 \leq j \leq h-1$*.*

Les démonstrations proviennent des résultats des articles de Colmez sus-cités (en particulier du calcul de $v_p(\Omega(u))$ pour $u$ générateur de $T_p(G)$ (cf. [**Col93**], Théorème I.2.1, p.641)). Elles sont détaillées à l'annexe V.2.

**II.2.b. Modules élémentaires.** Fixons-nous $M$ un $\Phi$-module filtré libre de type fini sur $W$ (sur $k$, le même genre de résultat serait vrai), qui soit élémentaire et vérifiant $\mathrm{Fil}^1(M) = \{0\}$. Par définition, si $\xi \in X$ est tel que $M_\xi \neq \{0\}$, alors $\varphi^{\xi(|\xi|-1)} \circ \cdots \circ \varphi^{\xi(0)}$ est une application additive de $M_\xi$ dans lui-même, qui est bijective et $\sigma^{|\xi|}$ semi-linéaire. Rappelons le lemme suivant :

Lemme II.2.6. *Si* $M$ *est un* $W$*-module de type fini avec* $g$ *une application* $\sigma^n$*-semi-linéaire bijective, alors en notant* $M^g$ *les points de* $M$ *laissés fixe par* $g$*, l'application naturelle* $W \otimes_{\mathbb{Z}_{p^n}} M^g \to M$ *est un isomorphisme de* $W$*-module.*

La démonstration de ce lemme est essentiellement celle de la proposition donnée dans l'introduction de [**Win84**]. Elle est refaite à l'annexe V.3.

Par conséquent, une application directe du lemme donne l'existence d'une base de $M_\xi$ sur $W$ qui est laissée fixe par $\varphi^{\xi(|\xi|-1)} \circ \cdots \circ \varphi^{\xi(0)}$ (en effet, $M_\xi$ est libre, donc sans $p$-torsion, donc $M_\xi^g$ aussi, donc par la structure des modules sur les anneaux principaux, $M_\xi^g$ est un module libre sur $\mathbb{Z}_{p^n}$, donc le lemme s'applique, et alors une base de $M_\xi^g$ sur $\mathbb{Z}_{p^n}$ est une base de $M_\xi$ sur $W$).

Proposition II.2.7. *Si* $M$ *est un* $\Phi$*-module filtré libre de type fini sur* $W$ *et élémentaire, alors il existe une base* $(e_\xi^j)_{\xi\in X,\,1\leq j\leq \dim M_\xi}$ *de* $M$ *sur* $W$ *telle que* $\Phi(e_\xi^j) = p^{\xi(0)} e_{\sigma(\xi)}^j$*. Une telle base sera dite* **adaptée***.*

Démonstration. En effet, il existe $\xi_1, \cdots, \xi_n$ dans $X$ tels que $M = \oplus_l \oplus_k M_{\sigma^k(\xi_l)}$, donc il suffit de trouver une telle base pour $M = \oplus_k M_{\sigma^k \xi}$. Or, dans ce cas, il suffit de se fixer une base $(e_j)$ de $M_\xi$ invariante par $\varphi^{\xi(|\xi|-1)} \circ \cdots \circ \varphi^{\xi(0)}$, et de poser $e^j_{\sigma^k(\xi)} = \varphi^{\xi(k-1)} \circ \cdots \circ \varphi^{\xi(0)}(e_j)$. □

Une autre façon de traduire ce résultat est le suivant : pour $\xi \in X$, notons $N[\xi]$ le module tel que (avec $|\xi| = h$ sa période minimale)
- le $W$-module sous-jacent est $W^h$
- si $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}}$ est la base canonique, alors $\mathrm{Fil}^i(N[\xi]) = \bigoplus_{j|\xi(j)\geq i} We_j$
- $\Phi(e_i) = e_{i+1}$

(donc $N[\xi]_{\sigma^i(\xi)} = We_i$). Alors un module élémentaire est une somme directe (en tant que $\Phi$-module filtré) de modules de type $N[\xi]$.

Proposition II.2.8. *Soit $\xi \in X$ à valeurs négatives, alors $\mathbf{V_{cris}}(N[\xi])$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang celui de $N[\xi]$ sur $W$ (c'est-à-dire $|\xi|$). De plus, en posant*

$$x_0 = \Omega_h(u)^{-\xi(0)} \prod_{j=1}^{h-1} [\frac{\Phi^j(\Omega_h(u))}{p}]^{-\xi(h-j)}$$

*et pour $i$ variant de $0$ à $|\xi| - 1$,*

$$x_i = p^{\xi(0)+\cdots+\xi(i-1)}\Phi^i(x_0)$$

*une base de $\mathbf{V_{cris}}(N[\xi])$ est donnée par*

$$v_j = \frac{1}{p^\alpha}\big(x_0\sigma^j(y) \otimes e_\xi + x_1\sigma^{j+1}(y) \otimes e_{\sigma(\xi)} + \cdots + x_{|\xi|-1}\sigma^{j+|\xi|-1}(y) \otimes e_{\sigma^{|\xi|-1}(\xi)}\big)$$

*pour $j$ variant de $0$ à $|\xi|-1$, et pour un certain $\alpha \in \mathbb{N}$. Si $\xi$ est à valeurs dans $[\![2-p, 0]\!]$, alors $\alpha = 0$.*

Démonstration. C'est une application directe des résultats du paragraphe II.2.a et de ce que $\mathrm{Fil}^0\ B^\Phi_{cris} = \mathbb{Q}_p$. □

Pour écrire cette proposition pour les modules élémentaires, introduisons quelques notations :
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, fixons un $y_n \in \mathbb{Z}_{p^n}$ tel que $(\sigma^i(y_n))_i$ est une base normale de $\mathbb{Z}_{p^n}$ sur $\mathbb{Z}_p$.
- supposons donné $Y$ un système de représentants de $\{\xi \in X$ à valeurs négatives$\}/\sigma$ et un $x(\xi)$ pour tout $\xi \in Y$, tel que $x(\xi)_0 = x(\xi)$ puis $x(\xi)_i = p^{\xi(0)+\cdots+\xi(i-1)}\Phi^i(x(\xi)_0)$ est une solution pour les équations associés à $N[\xi]$ (c'est-à-dire que pour tout $i$, $x(\xi)_i \in \mathrm{Fil}^{-\xi(i)}\ A_{cris}$ et $x(\xi)_{|\xi|} = x(\xi)_0$), avec $\frac{x(\xi)_i}{p} \notin A_{cris}$ pour un certain $i$. Posons alors $x(\sigma^i(\xi))_j = x(\xi)_{i+j}$. Nous noterons $x(\sigma^i(x)) = x(\sigma^i(\xi))_0$.

Remarque II.2.9. *Il existe une façon de choisir les $x(\xi)$ pour que $x(\xi)x(\eta) = x(\xi+\eta)$ dès que $\xi$, $\eta$ et $\xi + \eta$ sont à valeurs dans $[\![1 - p, 0]\!]$ non constants à $1 - p$ (cf.*

*l'annexe V.4). Regardons rapidement comment faire pour les cas qui nous intérèsseront : notons* $\xi_n$ *l'élément de* $X$ *définit par* $\xi_n(0) = -1$ *et* $\xi_n(i) = 0$ *si* $1 \leq i \leq n-1$ *(*$\xi_n(i) = -1$ *si* $n|i$*, et* $\xi_n(i) = 0$ *sinon). Soit* $x_0$ *tel que* $x_i = p^{\xi_n(i-1)} x_{i-1}$ *vérifient* $x_n = x_0$*,* $x_i \in \mathrm{Fil}^{-\xi_n(i)}(A_{cris})$ *et* $\frac{x_0}{p} \notin A_{cris}$*. Posons* $x(\xi_n)_i = x_i$ *et pour* $\xi \in X_n$*,* $y(\xi) = \prod_{i=0}^{n-1} x_{n-i}^{-\xi(j)}$*. Nous avons par construction* $y(\xi)y(\eta) = y(\xi+\eta)$ *pour tout* $\xi$ *et* $\eta$ *dans* $X_n$ *(et à valeurs dans* $[\![2-p, 0]\!]$*). Le résultat de* [**Col93**] *(sur le calcul de* $v_p$*) nous donne que si* $\xi$ *est à valeurs dans* $[\![2-p, 0]\!]$*, alors* $\frac{y(\xi)}{p} \notin A_{cris}$*, et donc nous pouvons prendre* $x(\xi) = y(\xi)$*. Cette construction montre comment choisir les* $x(\xi)$ *pour des* $\xi$ *dans un* $X_n$ *fixé (et à valeurs dans* $[\![2-p, 0]\!]$*), donc dépendent du* $n$ *à priori. Nous montrons dans l'annexe V.4 que cette dépendance en* $n$ *peut être supprimée, mais en pratique, nous avons toujours qu'un nombre fini de* $\xi$*, qui sont donc bien tous dans un* $X_n$ *pour un certain* $n$ *assez grand.*

PROPOSITION II.2.10. *Sous les hypothèses précédentes, si* $(e^j_{\sigma^k(\xi)})_{\xi \in Y, 0 \leq k < |\xi|, j}$ *est une base adaptée de* $M$*, alors* $(v^j_{\sigma^k(\xi)})_{\xi \in Y, 0 \leq k < |\xi|, j}$ *défini par*

$$v^j_{\sigma^k(\xi)} = x(\xi)_0 \sigma^k(y_{|\xi|}) \otimes e^j_\xi + \cdots + x(\xi)_{|\xi|-1} \sigma^{k+|\xi|-1}(y_{|\xi|}) \otimes e^j_{\sigma^{|\xi|-1}(\xi)}$$

*est une* $\mathbb{Z}_p$*-base de* $\mathbf{V_{cris}}(M)$*.*

Pour énoncer proprement la proposition précédente, nous sommes obligés de faire intervenir le système de représentants $Y$. Par la suite, nous utiliserons une version un peu différente qui ne nécessite pas ceci :

PROPOSITION II.2.11. *Soit* $M$ *un objet de* $\mathbf{MF}^{-\mathbf{h}}_{\mathbf{W}}$ *élémentaire, et* $(e^j_\xi)$ *une base adaptée. Alors une base de* $\mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$ *est donnée par les vecteurs*

$$v^j_\xi = x(\xi) e^j_\xi$$

### II.2.c. Modules tués par $p$.

PROPOSITION II.2.12. *Pour tout objet* $M$ *de* $\mathbf{MF}^{\pm\mathbf{h}}_{\mathbf{k}}$*, il existe une filtration exhaustive* $M[i]$ *croissante de* $M$ *formée de sous-objets, tels que* $M[i]/M[i-1]$ *soit un module élémentaire, avec* $M[-1] = \{0\}$ *et* $M[0] \neq \{0\}$*.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de considérer une suite de Jordan-Hölder, puisque tout objet simple est élémentaire (cf. [**FL82**], p.566). □

Introduisons la notion de **base adaptée** pour un objet $M$ de $\mathbf{MF}^{\pm\mathbf{h}}_{\mathbf{k}}$. Notons $(M[i])$ une filtration vérifiant les conditions de la proposition II.2.12. Prenons sur $M[i]/M[i-1]$ une base adaptée, et relevons-la dans $M$. La base de $M$ ainsi obtenue, $(e^{j_{i,\xi_i}}_{i,\xi_i})$ est indexée par $i$ qui varie de 0 à l'entier $r+1$ tel que $M[r] \neq M$ et $M[r+1] = M$, $\xi_i$ qui varie dans $X$ et $j_{i,\xi_i}$ qui est un entier positif qui varie de 1 à $\dim_k\big((M[i]/M[i-1])_{\xi_i}\big)$. Elle est telle que

$$\widetilde{M}[i-1] = \bigoplus_{\xi_i, j_{i,\xi}} W e^{j_{i,\xi_i}}_{i,\xi_i}$$

est un supplémentaire de $M[i-1]$ dans $\mathrm{Fil}^i(M)$. Notons désormais (pour alléger les notations) : $e^{j_i,\xi_i}_{i,\xi_i} = e^j_{\xi_i}$.

Alors $\forall i, \forall \xi_i, \forall j$,

$$e^j_{\xi_i} \in \mathrm{Fil}^{\xi_i(0)} M \text{ et même } e^j_{\xi_i} \in M_{\xi_i(0)}$$
$$\Phi(e^j_{\xi_i}) = p^{\xi_i(0)}\big[e^j_{\sigma(\xi_i)} + \sum_{k<i,\,\eta_k,\,j_{\eta_k}} \lambda_{\xi_i,j}(\eta_k,\, j_{\eta_k}) e^{j_{\eta_k}}_{\eta_k}\big]$$

avec $\lambda_{\xi_i,j}(\eta_k,\, j_{\eta_k}) \in W$, et $\lambda_{\xi_i,j}(\eta_k,\, j_{\eta_k}) = 0$ si $\xi_i(1) \leq \eta_k(0)$. Une telle base sera dite **adaptée**.

De plus, $\lambda_{\xi_i,j}(\eta_k,\, j_{\eta_k})$ se relie à $u$ (cf. paragraphe II.1 et la propriété II.1.2 pour la définition de $u$) de la manière suivante : si $(u_{\xi_i,j}(\eta_k,\, j_{\eta_k}))$ est la matrice de $u$ dans la base $(e^j_{\xi_i})_{i,\xi_i,j}$, alors $\lambda_{\sigma(\xi_i),j}(\eta_k,\, j_{\eta_k}) = u_{\xi_i,j}(\eta_k,\, j_{\eta_k})$.

Un élément de $\widetilde{M}[i-1]$ sera dit **de niveau** $i$ (la notion de niveau dépend donc de la base adaptée choisie).

Remarque II.2.13. *De part la fonctorialité de la graduation $M_\xi$, les $(e^j_{\xi_i})$ où $\xi_i$ est égal à $\xi$ dans $X$ (et où $j$ varie) forment une base de $M_\xi$.*

Remarque II.2.14. *Il nous arrivera de faire l'abus de notation suivante : si $(e^j_{\xi_i})$ est une base adaptée d'un objet $M$ de $\mathbf{MF_k}$, elle pourra être notée juste $(e^j_\xi)$, et le niveau de $e^j_\xi$ sera noté par $\nu(e^j_\xi)$.*

Remarque II.2.15. *En considérant la filtration donnée par une suite de Jordan-Hölder, et $(e^j_\xi)$ une base adaptée construite à partir de cette filtration, alors $j=1$ (car pour un module simple, $\dim_k\big((M[i]/M[i-1])_{\xi_i}\big) = 1$), donc dans la suite, si nous notons $(e_{\xi_i})$ une base adaptée, il sera sous-entendu que la filtration associée sera donné par une suite de Jodan-Hölder.*

Lemme II.2.16. *Soit $M$ et $N$ deux objets de $\mathbf{MF_k}$.*
- *Si $(e^j_{\xi_i})$ (respectivement $(f^l_{\eta_k})$) est une base adaptée de $M$ (respectivement de $N$), alors $(e^j_{\xi_i} \otimes f^l_{\eta_k})$ est une base adaptée de $M \otimes N$.*
- *Si $N$ est un sous-objet de $M$, toute base adaptée de $N$ s'étend en une base adaptée de $M$.*
- *Si $N$ est un sous-objet de $M$, toute base adaptée de $M/N$ se relève dans $M$ en une famille qui se complète en une base adaptée de $M$ par une base adaptée de $N$.*
- *Si $(e^j_{\xi_i})$ (respectivement $(f^l_{\eta_k})$) est une base adaptée de $M$ (respectivement de $N$), alors $(e^j_{\xi_i}) \cup (f^l_{\eta_k})$ est une base adaptée de $M \oplus N$.*

Pour tout objet $M$ de $\mathbf{MF_k^{-h}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$, comme le foncteur $\mathbf{V_{cris}}$ est exact, nous pouvons munir $\mathbf{V_{cris}}(M)$ d'une filtration par $\mathbf{V_{cris}}(M)[i] = \mathbf{V_{cris}}(M[i])$, qui est alors exhaustive, croissante, formée de sous-objets, tels que $\mathbf{V_{cris}}(M)[i]/\,\mathbf{V_{cris}}(M)[i-1]$ soit une représentation élémentaire, avec $\mathbf{V_{cris}}(M)[-1] = \{0\}$ et $\mathbf{V_{cris}}(M)[0] \neq \{0\}$.

Nous pouvons alors former une base de $\mathbf{V_{cris}}(M)$ à l'aide d'une base adaptée $(e^j_{\xi_i})$ de $M$, en considérant la réunion des relevés d'une base de $\mathbf{V_{cris}}(M)[i]/\mathbf{V_{cris}}(M)[i-1]$. Pour plus de facilité d'écriture, décrivons une base de $\mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{F}_p} k$ (plutôt que de $\mathbf{V_{cris}}(M)$) par

$$v^j_{\xi_i} = x(\xi_i)e^j_{\xi_i} + \Big[\sum_{s<i,\,\eta_s,\,j_{\eta_s}} y_{\xi_i,\,j}(\eta_s,\,j_{\eta_s})e^{j_{\eta_s}}_{\eta_s}\Big]$$

avec $y_{\xi_i,\,j}(\eta_s,\,j_{\eta_s}) \in A_{cris}$ (les indices sont les mêmes que ceux de la base adaptée).

Le lien entre $\mathbf{V_{cris}}(M)$ pour $M$ objet libre sur $W$, ou tué par $p$, se fait à l'aide de la proposition suivante (qui est une application directe de l'exactitude du foncteur $\mathbf{V_{cris}}$) :

Proposition II.2.17. *Soit $M$ un objet de $\mathbf{MF^{-h}_W}$ avec $0 \leq h \leq p-2$. Alors $\mathbf{V_{cris}}(M)/p^n \simeq \mathbf{V_{cris}}(M/p^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

De plus, si $M$ est libre sur $W$, et que $(\bar{e}^j_{\xi_i})$ est une base adaptée de $M/p$, par fonctorialité de la graduation $(M_\xi)$, nous pouvons relever cette base en une base $(e^j_{\xi_i})$ de $M$ telle que $e^j_{\xi_i} \in M_{\xi_i(0)}$, $\varphi^{\xi_i(0)}(e^j_{\xi_i}) = \sum_{n,\,k} \lambda_{\xi_i,\,j}(\eta,\,k)e^k_\eta$ avec :

– $p|\lambda_{\xi_i,\,j}(\eta,\,k)$ si $\nu(e^k_\eta) > \nu(e^j_{\xi_i}) = i$ ou si $\nu(e^k_\eta) = \nu(e^j_{\xi_i})$ et $(\eta, k) \neq (\sigma(\xi_i), j)$

– $\lambda_{\xi_i,\,j}(\sigma(\xi_i),\,j) = 1$ et $\lambda_{\xi_i,\,j}(\eta,\,k) = 0$ si $\xi_i(1) \geq \eta(0)$.

Une telle base sera dite **adaptée**.

## II.3. $\mathbf{V_{cris}}$ et le produit tensoriel

Le théorème de Fontaine Laffaille affirme l'exactitude et la pleine fidélité du foncteur $\mathbf{V_{cris}}$ restreint à la catégorie des $M$ vérifiant $\mathrm{Fil}^{2-p}(M) = M$ et $\mathrm{Fil}^1(M) = \{0\}$. Cette catégorie n'est pas stable par produit tensoriel, mais nous pouvons tout de même décrire le comportement de $\mathbf{V_{cris}}$ face à cette opération :

Proposition II.3.1. *Considérons $M$ et $M'$ deux objets de $\mathbf{MF^{-h}_W}$ avec $0 \leq h \leq p-2$, si $L$ est un sous-objet de $M \otimes M'$ et est un objet de $\mathbf{MF^{-h}_W}$, alors*

$$\mathbf{V_{cris}}(L) \subset \mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V_{cris}}(M')$$

*Si de plus $L$ est facteur direct (comme $W$-module) dans $M \otimes M'$, alors $\mathbf{V_{cris}}(L)$ est facteur direct dans $\mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V_{cris}}(M')$. En particulier, si $M \otimes M'$ est encore un objet de $\mathbf{MF^{-h}_W}$, alors $\mathbf{V_{cris}}(M \otimes M') = \mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V_{cris}}(M')$.*

Remarque II.3.2. *Il est possible de s'autoriser $h = p-1$ dans la proposition, en excluant le cas où $\xi$ constant à $1-p$ apparait dans la graduation de $M$, $N$ et $M \otimes N$.*

Remarque II.3.3. *Les résultats énoncés restent vrai si le produit tensoriel porte sur plus que deux objets de $\mathbf{MF^{-h}_W}$, et plus généralement si $L$ est un sous-objet de $\bigoplus_i \otimes_j M_{i,j}$ avec $M_{i,j}$ des objets de $\mathbf{MF^{-h}_W}$ avec $0 \leq h \leq p-2$. La démonstration se fait de la même façon, mais fait introduire beaucoup plus de notations.*

DÉMONSTRATION. Considérons $L$ un sous-objet de $M \otimes M'$. Pour des raisons de dimensions, $\mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V_{cris}}(M')$ est un réseau de $\mathbf{V_{cris,p}}(D_{M\otimes M'})$, donc comme $\mathbf{V_{cris}}(L) \subset \mathbf{V_{cris,p}}(D_{M\otimes M'})$, nous obtenons :

$$\forall v \in \mathbf{V_{cris}}(L), \exists i(v) \geq 0 | p^{i(v)} v \in \mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V_{cris}}(M')$$

Or, $\mathbf{V_{cris}}(L)$ et $\mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V_{cris}}(M')$ sont tous les deux inclus dans $(M \otimes M') \otimes_W A_{cris}$, donc si $\mathbf{V_{cris}}(L) \nsubseteq \mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V_{cris}}(M')$, il existe $v \in \mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V_{cris}}(M')$ avec $\frac{v}{p} \in (M \otimes M') \otimes_W A_{cris}$ et $\frac{v}{p} \notin \mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V_{cris}}(M')$. Montrons que cela est impossible ; il suffit pour cela de montrer le lemme suivant, puisque $L$ est un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$ :

LEMME II.3.4. *Notons $X_{(p-2)}$ l'ensemble des $\xi \in X$ tels que $\xi(i) \in [\![2-p, 0]\!]$ pour tout $i$. Soit $v \in \mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V_{cris}}(M')$ tel que $v \in \oplus_{\xi \in X_{(p-2)}} p(M \otimes M')_\xi \otimes_W A_{cris}$, alors $v \in p\,\mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V_{cris}}(M')$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME II.3.4. Le module $M$ étant un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$, la proposition II.2.17 nous donne que $\mathbf{V_{cris}}(M)/p = \mathbf{V_{cris}}(M/p)$. En relevant alors une base de $\mathbf{V_{cris}}(M/p) \otimes_{\mathbb{F}_p} k$, nous obtenons une base $(w^j_{\xi_i})$ de $\mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$ qui s'écrit sous la forme :

$$w^j_{\xi_i} = x(\xi_i) e^j_{\xi_i} + \Big[ \sum_{s<i,\, \eta_s,\, j_{\eta_s}} y_{\xi_i,\, j}(\eta_s,\, j_{\eta_s}) e^{j_{\eta_s}}_{\eta_s} \Big] + p z^j_{\xi_i}$$

et $z^j_{\xi_i} \in M \otimes_W A_{cris}$.

Ce qui est important dans l'écriture de cette base, c'est que

$$w^j_{\sigma^k(\xi_i)} = x(\xi_i) e^j_{\xi_i}$$

plus des termes de niveau inférieur (modulo $p$ bien sur).

Revenons maintenant à $v$ : il est dans $\mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V_{cris}}(M')$, donc il existe $\alpha_{\xi_i,\, \xi'_i,\, j,\, j'} \in W$ avec

$$v = \sum_{i,\, i',\, \xi_i,\, \xi'_i,\, j,\, j'} \alpha_{\xi_i,\, \xi'_{i'},\, j,\, j'} w^j_{\xi_i} \otimes (w')^{j'}_{\xi'_{i'}}$$

Faisons ensuite une récurence descendante sur le niveau (c'est-à-dire sur $i+i'$) pour voir que $p$ divise les $\alpha_{\xi_i,\, \xi'_{i'},\, j,\, j'}$ :

$p$ divise $v$ dans $(M \otimes M') \otimes_W A_{cris}$, donc si $i+i'$ est le plus grand niveau de $M \otimes M'$, $p$ divise

$$\sum_{j,\, \xi_i,\, j',\, \xi'_{i'}} \alpha_{j,\, j',\, \xi_i,\, \xi'_{i'}} \big[x(\xi_i) e^j_{\xi_i}\big] \otimes \big[x(\xi'_{i'}) e^{j'}_{\xi'_{i'}}\big]$$

donc, $p$ divise chaque coordonnnée, donc $p$ divise

$$\alpha_{j,\, j',\, \xi_i,\, \xi'_{i'}} x(\xi_i) x(\xi'_{i'})$$

pour tout $j$, $j'$, $\xi_i$, $\xi'_{i'}$.

Or, $\xi_i$, $\xi'_{i'}$ et $\xi_i + \xi'_{i'}$ sont dans $X_{(p-2)}$, donc $x(\xi_i)x(\xi'_{i'}) = x(\xi_i + \xi'_{i'})$ (cf. remarque II.2.9, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de $\xi_i$ qui interviennent dans la graduation de $M$ et $M'$). Par conséquent $p$ ne divise pas $x(\xi_i)x(\xi'_{i'})$, et donc $p$ divise $\alpha_{j,j',\xi_i,\xi'_{i'}}$ si $\xi_i$, $\xi'_{i'}$ et $\xi_i + \xi'_{i'}$ sont dans $X_{(p-2)}$. Les hypothèses du lemme se traduisent par $\alpha_{j,j',\xi_i,\xi'_{i'}} = 0$ si $\xi_i + \xi'_{i'}$ n'est pas dans $X_{(p-2)}$.

D'où, en itérant le processus (en faisant une récurrence descendante sur le niveau), nous obtenons $v \in p\big(\mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V_{cris}}(M')\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$, ce qui montre le lemme. $\square$

Donc si $L$ est un sous-objet de $M \otimes M'$ et est un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$, $\mathbf{V_{cris}}(L)$ est bien inclus dans $\mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V_{cris}}(M')$.

Supposons de plus que $L$ est facteur direct (comme $W$-module) de $M \otimes M'$. Alors $L \otimes A_{cris}$ est facteur direct de $(M \otimes M') \otimes A_{cris}$. Donc, si $x \in L \otimes A_{cris}$ et $\frac{x}{p} \in (M \otimes M') \otimes A_{cris}$, alors $\frac{x}{p} \in L \otimes A_{cris}$. Donc, si $x \in \mathbf{V_{cris}}(L)$ et $\frac{x}{p} \in \mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V_{cris}}(M')$, alors $\frac{x}{p}$ est dans $\mathbf{V_{cris}}(L)$. Comme $\mathbf{V_{cris}}(L) \subset \mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V_{cris}}(M')$, $\mathbf{V_{cris}}(L)$ est bien un facteur direct (comme $\mathbb{Z}_p$-module) de $\mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V_{cris}}(M')$. $\square$

CHAPITRE III

# $\Phi$-modules filtrés et représentations galoisiennes

## III.1. Isomorphisme entre $\mathbf{V_{cris}}(M)$ et $M$

Soit $0 \leq h \leq p-2$, et notons $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les foncteurs exacts de la catégorie $\mathbf{MF_W^{-h}}$ vers la catégorie des $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$-modules libres de rang fini, définis par : si $M$ objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$, $\mathcal{F}_1(M) = \mathbf{V_{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ et $\mathcal{F}_2(M) = M \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$

Théorème III.1.1. *Pour $0 \leq h \leq p-2$ fixé, il existe $\mathsf{f}$ un isomorphisme de foncteur entre $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. De plus, vis à vis du produit tensoriel, l'isomorphisme peut être choisi de telle sorte que :*

– *pour tous objets $M$ et $N$ de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ tels que $M \otimes N$ est encore un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$, alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V_{cris}}(N \otimes M) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \arrow[r, "\mathsf{f}_{N\otimes M}"] \arrow[d] & (N \otimes M) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \arrow[d] \\
(\mathbf{V_{cris}}(M) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}} (\mathbf{V_{cris}}(N) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}) \arrow[r, "\mathsf{f}_M \otimes \mathsf{f}_N"'] & (N \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}} (M \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}})
\end{tikzcd}$$

– *pour tout uplet d'objets $(N_{i,j})_{1\leq j\leq n,\, 1\leq i\leq n_j}$ de $\mathbf{MF_W^{-h}}$, pour tout sous-$\Phi$-module filtré $L$ facteur direct (comme $W$-module) de $\displaystyle\bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} N_{i,j}$, l'application $\bigoplus \otimes \mathsf{f}_{N_{i,j}}$ envoie*

$$\Big(\mathbf{V_{cris,p}}(D_L) \cap \bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} \mathbf{V_{cris}}(N_{i,j})\Big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \text{ \emph{bijectivement sur} } L \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}.$$

Donnons les idées de la démonstration avant de rentrer dans les détails : nous construisons $\mathsf{f}_N$ à partir de l'isomorphisme fonctoriel :

$$\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathcal{N}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \xrightarrow{\psi_\mathcal{N}} \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$$

qui est défini pour tout objet $\mathcal{N}$ de la catégorie $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{\text{ét}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$. Pour pouvoir utiliser cet isomorphisme, il faut commencer par construire un foncteur $\mathrm{F}^-$ qui à un objet $N$ de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ associe un objet de $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{\text{ét}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$, de telle sorte que l'espace sous-jacent à $\mathrm{F}^-(N)$ soit $N \otimes_W \mathcal{O}_\mathcal{E}$. Il faut ensuite construire un isomorphisme de représentations galoisiennes

$$\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}^-(N)) \xrightarrow{g_N} \mathbf{V_{cris}}(N)$$

qui soit fonctoriel. En regroupant, nous poserons pour $\mathsf{f}_N$ :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{V_{cris}}(N)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} & \xrightarrow{g_N^{-1}} & \mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}}}(\mathrm{F}^-(N))\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} & \xrightarrow{\psi_{\mathrm{F}^-(N)}} & F^-(N)\otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \\ &&&& \| \\ &&&& N\otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \end{array}$$

Nous allons voir que l'existence d'une application $\mathsf{f}_N$ définie comme ci-dessus pour $N$ objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$, ainsi que la fonctorialité concernant sous-objet et objet quotient, proviennent directement des résultats de J.-M. Fontaine concernant le foncteur $j^*$ (cf. [**Fon90**], p.301) et les résultats de N. Wach (le Théorème 1' de [**Wac97**] donne l'existence de $g_N$). Ce qu'il reste à voir, c'est la construction d'un foncteur $\mathrm{F}^-$ exact et préservant le produit tensoriel (qui se relie aux modules de Wach construits par Berger dans [**Ber04**]), et surtout le comportement de $g_N$ par rapport au produit tensoriel.

Remarque III.1.2. *Le même résultat pour les objets de* $\mathbf{MF_k^{-h}}$ *(c'est-à-dire les objets tués par p) se montre de la même façon.*

## III.2. Le foncteur de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ vers $\mathbf{\Gamma\Phi M^{\acute{e}t}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}}$

**III.2.a. Rappels sur $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$.** Notons $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des $(\varphi,\Gamma_0)$-modules sur $S_0$ (cf. paragraphe I.2) formée des objets $\mathcal{N}$ vérifiant :
- le $S_0$-module sous-jacent est de type fini et sans $p'$-torsion (c'est-à-dire que pour tout élément irréductible $\lambda$ de $S_0$ non associé à $p$, $N$ est sans $\lambda$-torsion)
- le $S_0$-module $\mathcal{N}/\Phi(\mathcal{N}\otimes_\sigma S_0)$ est annulé par $q^h$ (où $q=\pi_0+p$)
- le groupe $\Gamma_0$ agit trivialement sur $\mathcal{N}/\pi_0\mathcal{N}$.

Elle est abélienne si $0\le h\le p-2$, et l'inclusion $j:S_0\to\mathcal{O}_\mathcal{E}$ induit un foncteur $j^*:\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}\to\mathbf{\Gamma\Phi M^{\acute{e}t}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}}$ pleinement fidèle qui est une équivalence de catégorie pour $0\le h\le p-2$ sur son image essentielle (cf. [**Fon90**], p.301). Si $\mathcal{N}$ est un objet de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$, alors $j^*(\mathcal{N})$ a pour espace sous-jacent $\mathcal{N}\otimes_{S_0}\mathcal{O}_\mathcal{E}$. Nous ferons souvent l'abus de notation de n'écrire que l'espace sous-jacent pour désigner $j^*(\mathcal{N})$.

Si $0\le h\le p-2$ et $\mathcal{N}$ un objet de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$, N. Wach a montré qu'il est possible de munir $N=\mathcal{N}/\pi_0\mathcal{N}$ d'une structure de $\Phi$-module filtré sur $W$ en posant

$$\mathrm{Fil}^r N=\{x\in N \text{ tels qu'il existe un relèvement } \widehat{x}\in\mathcal{N} \text{ de } x \text{ avec } \varphi(\widehat{x})\in q^r\mathcal{N}\}$$

et pour tout $x\in\mathrm{Fil}^r N$, $\varphi^r(x)$ égal à l'image de $\frac{\varphi(\widehat{x})}{q^r}$ dans $N$. Notons $\mathbf{MF^h_{W,tf}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF_{W,tf}}$ des objets $N$ tels que $\mathrm{Fil}^0(N)=N$ et $\mathrm{Fil}^{h+1}(N)=\{0\}$. Alors N. Wach a démontré le théorème suivant (cf. [**Wac97**], p.231) :

Théorème III.2.1. *Soit* $0\le h\le p-2$. *Pour tout objet* $\mathcal{N}$ *de* $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$, *le* $\Phi$*-module filtré* $i^*(\mathcal{N})=\mathcal{N}/\pi_0\mathcal{N}$ *est un objet de* $\mathbf{MF^h_{W,tf}}$ *; le foncteur* $i^*$ *ainsi défini est exact et fidèle.*

**III.2.b. Foncteur entre $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\mathbf{h}}$ et $\mathbf{\Gamma_0\Phi M}_{\mathbf{S_0}}^{\mathbf{h}}$.** N. Wach a donné les idées pour construire un quasi-inverse à $i^*$ : à partir d'un objet $N$ de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}^{\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$ et d'une base adaptée à la filtration, elle a construit un objet $\mathcal{N}$ tel que $i^*(\mathcal{N}) = N$. Nous allons montrer qu'en se fixant un scindage fonctoriel de la filtration, nous rendons cette construction fonctorielle.

Proposition III.2.2. *Notons $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}^{+}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$ formée des objets $M$ dont $\mathrm{Fil}^0(M) = M$. A tout scindage fonctoriel de la filtration des objets de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}^{+}$ nous pouvons associer un foncteur de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}^{+}$ vers $\mathbf{\Phi M}_{\mathbf{S_0}}^{ét}$ (la catégorie des $\varphi$-modules étales sur $S_0$), qui soit fidèle, additif, exact, et qui préserve le produit tensoriel.*

Démonstration. Si $N$ est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}^{+}$, et $N = \oplus N_i$ le scindage de la filtration, il suffit de construire sur $N \otimes_W S_0$ une structure de $\varphi$-module par : l'application $\varphi^i$ étant défini sur $\mathrm{Fil}^i(N)$, elle se restreint à $N_i$, permettant de poser $\varphi_N$ égal à $q^i\varphi^i$ sur $N_i$, c'est-à-dire

$$\forall x \in N_i,\ \varphi_N(x) = q^i\varphi^i(x)$$

Nous prolongeons cette définition à $N \otimes_W S_0$ tout entier en utilisant la semi-linéarité de $\varphi_N$. Les propriétés de fonctorialité découlent alors de celles du scindage de la filtration. Au niveau des flèches, ce foncteur est construit de la manière suivante : si $f : N \to N'$ est un morphisme de $\Phi$-modules filtrés, le foncteur lui associe $f \otimes \mathrm{Id}$. □

Remarque III.2.3. *Nous pouvons étendre ce foncteur de la même façon en un foncteur de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$ vers $\mathbf{\Phi M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}^{ét}$ qui préserve sous-objet, objet quotient, somme directe, produit tensoriel et dual.*

Théorème III.2.4. *Supposons $0 \leq h \leq p-2$. Alors pour tout objet $N$ de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}^{\mathbf{h}}$, il existe une unique action de $\Gamma_0$ sur $N \otimes_W S_0$ triviale modulo $\pi_0$ et commutant au $\varphi_N$ construit comme dans la proposition III.2.2. Le module $N \otimes_W S_0$ est alors muni d'une structure de $(\varphi, \Gamma_0)$-module sur $S_0$, et nous avons ainsi un foncteur $\mathrm{F}$ additif et exact de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}^{\mathbf{h}}$ dans $\mathbf{\Gamma_0\Phi M}_{\mathbf{S_0}}^{\mathbf{h}}$, pleinement fidèle et tel que $i^*(\mathrm{F}(N)) = N$ pour tout objet $N$ de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}^{\mathbf{h}}$. L'image essentielle de ce foncteur contient tout objet de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M}_{\mathbf{S_0}}^{\mathbf{h}}$ dont le module sous-jacent est libre sur $S_0$. De plus, pour tout $N$ et $N'$ objets de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}^{\mathbf{h}}$ tels que $N \otimes N'$ soit encore un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}^{\mathbf{h}}$, $\mathrm{F}(N) \otimes \mathrm{F}(N')$ est naturellement isomorphe à $\mathrm{F}(N \otimes N')$. Plus généralement, si $N_{i,j}$ sont des objets de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\mathbf{h}}$ (donc libres comme $W$-modules) et $L$ un sous-objet (dans $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{+}$) facteur direct (comme $W$-module) de $M := \bigoplus_i \otimes_j N_{i,j}$, alors l'action de $\Gamma_0$ sur $\bigoplus_i \otimes_j \mathrm{F}(N_{i,j}) = M \otimes_W S_0$ laisse stable $L \otimes_W S_0$.*

Remarque III.2.5. *De la même façon, nous montrons que l'image essentielle de ce foncteur contient tout objet de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M}_{\mathbf{S_0}}^{\mathbf{h}}$ dont le module sous-jacent est libre sur $S_0/p$. Dans l'annexe V.8, nous montrons plus généralement que l'image essentielle de $\mathrm{F}$ est*

$\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$ *(à l'aide d'outils introduits plus avant dans ce chapitre), donc que* F *est un quasi-inverse de* $i^*$.

Démonstration. Traitons d'abord le cas des modules libres. Dans tout ce qui suit, $h$ est un entier qui vérifie $0 \leq h \leq p-2$.

Considérons $N \otimes_W S_0$ : comme $0 \leq h \leq p-2$, il existe une unique action de $\Gamma_0$ sur $N \otimes_W S_0$ qui commute à $\varphi$ et est triviale modulo $\pi_0$ (c'est le lemme 3.1.6 p.233 de [**Wac97**] que nous reprendrons ci-dessous). Le $(\varphi, \Gamma_0)$ module ainsi défini, noté $\mathrm{F}(N)$, appartient bien à $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$. Il faut voir que nous définissons bien ainsi un foncteur. Comme la structure de $\varphi$-module provient d'un scindage de la filtration qui préserve le produit tensoriel, l'unicité de l'action de $\Gamma_0$ nous donnera bien que F préserve le produit tensoriel (tant que celui-ci reste dans $\mathbf{MF^h_W}$). L'exactitude provient de la même raison.

Choisissons une base adaptée à la graduation $(e_i)_{1\leq i \leq d}$ (c'est-à-dire : si $r_i$ est le plus grand entier tel que $e_i \in \mathrm{Fil}^{r_i}(N)$, alors pour tout $r$, $(e_i)_{r_i=r}$ est une base de $N_r$), et si $(a_{i,j})$ est la matrice des applications $\varphi^r$ dans cette base, l'action de $\varphi$ est donné par :

$$\varphi(e_j) = q^{r_j} \sum_{1\leq i \leq d} a_{i,j} e_i$$

Montrons que F préserve les sous objets. Par unicité de l'action de $\Gamma_0$, il suffit de montrer :

Proposition III.2.6. *Soit $N$ un objet de $\mathbf{MF^h_W}$, et $N'$ un sous-objet. Alors l'action de $\Gamma_0$ sur $N \otimes_W S_0$ laisse stable $N' \otimes_W S_0$.*

Démonstration. Nous allons le montrer pour deux cas particuliers : si $N'$ est facteur direct (comme $W$-modules), et si $N'$ est de même rang que $N$. Nous verrons que ceci entraine la proposition. Pour montrer ces affirmations, reprenons alors le lemme 3.1.6 p.233 de [**Wac97**] qui montre l'existence et l'unicité de l'action de $\Gamma_0$ (donnée par l'action d'un générateur topologique) par récurrence modulo $\pi_0^n$. Introduisons avant quelques notations : rappelons que $q = p + \pi_0$ (cf. paragraphe I.2.a) ; N. Wach a montré (lemme 3.1.1.2 de [**Wac97**]) qu'il existe un unique générateur topologique $g_0$ de $\Gamma_0$ tel que $\frac{g_0(q)-q}{q\pi_0} = 1$ modulo $qS_0$. Considérons alors une base adaptée à la graduation $(e_j)_{1\leq j\leq d}$, choisie de telle sorte qu'il existe des entiers $n_j \in \mathbb{N}$ pour que $(p^{n_j}e_j)_{1\leq j\leq d'}$ soit une base adaptée de $N'$. Notons $(a_{i,j})$ la matrice donnant l'action des $\varphi^r$ dans la base $(e_j)_{1\leq j\leq d}$. Les applications $\varphi^r$ de $N'$ proviennent de celles de $N$, donc comme $p^{n_j}e_j$ appartient à $N'$, il doit en être de même de $\varphi^r(p^{n_j}e_j) = p^{n_j}\varphi^r(e_j) = \sum_{1\leq i \leq d} p^{n_j} a_{i,j} e_i$. Plus exactement, la matrice $(a'_{i,j})$ donnant l'action de $\varphi^r$ sur $N'$ est (par définition) telle que $\varphi^r(p^{n_j}e_j) = \sum_{1\leq i\leq d'} p^{n_i} a'_{i,j} e_i$, donc $a_{i,j} = p^{n_i - n_j} a'_{i,j}$, et $(a'_{i,j})$ est une matrice inversible à coefficients dans $W$ (puisque $N'$ est un sous-objet).

Traitons d'abord le cas où $n_j = 0$ pour tout $j$, c'est-à-dire $N'$ facteur direct (comme $W$-module). L'action de $\Gamma_0$ (ou ce qui revient au même, de $g_0$) se construit par récurrence, modulo $\pi_0^n$, donc nous allons montrer la propriété par récurrence :

Lemme III.2.7 (Lemme 3.1.6 de [**Wac97**]). *Soient $n \in \mathbb{N}$, et $\rho$ un endomorphisme de $N \otimes_W S_0$, semi-linéaire par rapport à l'action de $g_0$ sur $S_0$ tel que $\rho(e_j) = e_j$ modulo $\pi_0$,*

$$\rho(\varphi(e_j)) = \varphi(\rho(e_j)) \textit{ mod } \pi_0^n q^{r_j}(N \otimes_W S_0)$$

*pour tout $j$, et plus précisement*

$$\rho(e_j) \in N' \otimes_W S_0 \textit{ et}$$
$$\rho(\varphi(e_j)) = \varphi(\rho(e_j)) \textit{ mod } \pi_0^n q^{r_j}(N' \otimes_W S_0)$$

*pour tout $j \leq d'$ ; alors, il existe un endomorphisme $\rho'$ de $N \otimes_W S_0$, uniquement déterminé modulo $\pi_0^{n+1}$, semi-linéaire par rapport à l'action de $g_0$ sur $S_0$ tel que, pour tout $j$*

$$\rho'(e_j) = \rho(e_j) \textit{ mod } \pi_0^n(N \otimes_W S_0) \textit{ et}$$
$$\rho'(\varphi(e_j)) = \varphi(\rho'(e_j)) \textit{ mod } \pi_0^{n+1} q^{r_j}(N \otimes_W S_0)$$

*et, pour tout $j \leq d'$,*

$$\rho'(e_j) \in N' \otimes_W S_0 \textit{ et}$$
$$\rho'(\varphi(e_j)) = \varphi(\rho'(e_j)) \textit{ mod } \pi_0^{n+1} q^{r_j}(N' \otimes_W S_0)$$

Remarque III.2.8. *La récurrence s'initialise pour $n = 1$ par : $\rho$ est donné par $\rho(e_j) = e_j$, et est défini sur $N \otimes_W S_0$ par semi-linéarité (par rapport à $g_0$) ; donc le lemme montre (par récurrence modulo $\pi_0^n$) que si $N'$ est un sous-objet de $N$, facteur direct (comme $W$-module), alors l'action de $\Gamma_0$ sur $N \otimes_W S_0$ laisse stable $N' \otimes_W S_0$.*

Démonstration du lemme. Notons pour tout $j$, $1 \leq j \leq d$, $\alpha_j$ l'unique élément de $S_0$ tel que $g_0(q^{r_j}) = q^{r_j}(1+\pi_0\alpha_j)$, et $b_j \in N \otimes_W S_0$ tel que $\varphi(\rho(e_j)) - \rho(\varphi(e_j)) = \pi_0^n q^{r_j} b_j$ (avec $b_j \in N' \otimes_W S_0$ si $j \leq d'$). Cherchons $\rho'$ à l'aide des équations

$$\rho'(e_j) = \rho(e_j) + \pi_o^n \sum_{i=1}^{d} g'_{i,j} e_i$$

avec $g'_{i,j} \in W$. Nous voulons voir que nous pouvons choisir $g'_{i,j} = 0$ pour $i > d'$ et $j \leq d'$. Il existe une unité $u$ de $S_0$ telle que $\varphi(\pi_0) = u\pi_0 q^{p-1}$. Alors,

$$\rho'(\varphi(e_j)) = \rho'(q^{r_j} \sum_k a_{k,j} e_k) = g_0(q^{r_j}) \sum_k a_{k,j} \rho'(e_k) = \rho(\varphi(e_j)) + g_0(q^{r_j}) \pi_0^n \sum_{i,k} a_{k,j} g'_{i,k} e_i$$

et

$$\begin{aligned} \varphi(\rho'(e_j)) &= \varphi(\rho(e_j) + \pi_0^n \sum_k g'_{k,j} e_k) = \varphi(\rho(e_j)) + \varphi(\pi_0^n) \sum_k \varphi(g'_{k,j}) \varphi(e_k) \\ &= \varphi(\rho(e_j)) + \pi_0^n q^{n(p-1)} u^n \sum_{i,k} \varphi(g'_{k,j}) q^{r_k} a_{i,k} e_i \end{aligned}$$

D'où, en faisant la soustraction, nous obtenons pour $1 \leq j \leq d$,

$$\pi_0^n q^{r_j} b_j - \pi_0^n g_0(q^{r_j}) \sum_{i,k} a_{k,j} g'_{i,k} e_i + \pi_0^n q^{n(p-1)} u^n \sum_{i,k} \varphi(g'_{k,j}) q^{r_k} a_{i,k} e_i = 0$$

modulo $\pi_0^{n+1}q^{r_j}$. Nous avons alors les équations suivantes à résoudre, pour tout $j$ :

$$b_j - (1+\pi_0\alpha_j)\sum_{1\le i,k\le d} a_{k,j}g'_{i,k}e_i + q^{n(p-1)-r_j}u^n \sum_{1\le i,k\le d}\varphi(g'_{k,j})q^{r_k}a_{i,k}e_i = 0$$

modulo $\pi_0$. En utilisant le fait que $q = p$ modulo $\pi_0$, nous avons à résoudre le système suivant dans $W$ :

$$\overline{b}_j - \sum_{1\le i,k\le d} a_{k,j}g'_{i,k}e_i + p^{n(p-1)-r_j}\overline{u}^n \sum_{1\le i,k\le d}\varphi(g'_{k,j})p^{r_k}a_{i,k}e_i = 0 \tag{III.2.9}$$

où $\overline{b}_j$ désigne $b_j \bmod \pi_0$, vu dans $N$ (ou $N'$ si $j \le d$).

Résolvons ce système modulo $p^k$ par récurrence. Modulo $p$, nous avons

$$\overline{b}_j = \sum_{1\le i,k\le d} a_{k,j}g'_{i,k}e_i \bmod p \tag{III.2.10}$$

car $r_j \le p-2$. Le système a une unique solution car la matrice $(a_{i,j})$ est inversible modulo $p$, et comme $a_{i,j} = 0$ si $j \le d'$ et $i > d'$, et $\overline{b}_j \in N'$ si $j \le d'$, nous obtenons bien que $g'_{i,k} = 0 \bmod p$ pour $i > d'$ et $k \le d'$. Pour relever cette solution modulo $p^k$ pour tout $k$, nous faisons de la même manière. □

Nous venons de voir qu'il existe une unique solution entière de l'équation III.2.9. Nous aurons besoin plus précisément du lemme suivant :

Lemme III.2.11. *Soit $b_j(i) \in W$, alors l'équation $\sum_i b_j(i)e_i - \sum_{1\le i,k\le d} a_{k,j}g'_{i,k}e_i + p^{n(p-1)-r_j}\overline{u}^n \sum_{1\le i,k\le d}\varphi(g'_{k,j})p^{r_k}a_{i,k}e_i = 0$ admet une unique solution $(g'_{i,j})$ d'éléments de $\mathcal{K}$. De plus, nous avons $g'_{i,j} \in W$.*

Démonstration. Nous savons déjà qu'il existe une unique solution à coefficients dans $W$, notons-la $(\overline{g}'_{i,j})$. Si $(g'_{i,j})$ est une solution formée d'éléments de $\mathcal{K}$, et si $p^a$ est une puissance de $p$ telle que $p^a g'_{i,j} \in W$, alors $(p^a g'_{i,j})$ et $(p^a\overline{g}'_{i,j})$ sont tous les deux des solutions dans $W$ de $\sum_i p^a b_j(i)e_i - \sum_{1\le i,k\le d} a_{k,j}g''_{i,k}e_i + q^{n(p-1)-r_j}u^n \sum_{1\le i,k\le d}\varphi(g''_{k,j})q^{r_k}a_{i,k}e_i = 0$, donc sont égales. □

Etudions le deuxième cas particulier, c'est-à-dire si $N'$ est de même rang que $N$. Nous voulons toujours voir que dans ce cas, l'action de $\Gamma_0$ sur $N \otimes_W S_0$ laisse stable $N' \otimes_W S_0$. Montrons-le par récurrence, comme pour la démonstration du lemme III.2.7 :

Lemme III.2.12. *Soient $n \in \mathbb{N}$, et $\rho$ un endomorphisme de $N \otimes_W S_0$, semi-linéaire par rapport à l'action de $g_0$ sur $S_0$ tel que $\rho(e_j) = e_j$ modulo $\pi_0$,*

$$\rho(\varphi(e_j)) = \varphi(\rho(e_j)) \ mod\ \pi_0^n q^{r_j}(N \otimes_W S_0)$$

*pour tout $j$, et plus précisement*

$$\rho(p^{n_j}e_j) \in N' \otimes_W S_0 \ et$$

$$\rho(\varphi(p^{n_j}e_j)) = \varphi(\rho(p^{n_j}e_j)) \ mod \ \pi_0^n q^{r_j}(N' \otimes_W S_0)$$

*pour tout $j$ ; alors, il existe un endomorphisme $\rho'$ de $N \otimes_W S_0$, uniquement déterminé modulo $\pi_0^{n+1}$, semi-linéaire par rapport à l'action de $g_0$ sur $S_0$ tel que, pour tout $j$*

$$\rho'(e_j) = \rho(e_j) \ mod \ \pi_0^n(N \otimes_W S_0),$$

$$\rho'(\varphi(e_j)) = \varphi(\rho'(e_j)) \ mod \ \pi_0^{n+1} q^{r_j}(N \otimes_W S_0)$$

*et, pour tout $j$*

$$\rho'(p^{n_j}e_j) \in N' \otimes_W S_0 \ et$$

$$\rho'(\varphi(p^{n_j}e_j)) = \varphi(\rho'(p^{n_j}e_j)) \ mod \ \pi_0^{n+1} q^{r_j}(N' \otimes_W S_0)$$

Remarque III.2.13. *La récurrence s'initialise pour $n = 1$ par : $\rho$ est donné par $\rho(e_j) = e_j$, et est défini sur $N \otimes_W S_0$ par semi-linéarité (par rapport à $g_0$) ; donc le lemme montre (par récurrence modulo $\pi_0^n$) que si $N'$ est un sous-objet de $N$ de même rang, alors l'action de $\Gamma_0$ sur $N \otimes_W S_0$ laisse stable $N' \otimes_W S_0$.*

Démonstration. Rappelons les notations précédentes : notons pour tout $j$, $1 \leq j \leq d$, $\alpha_j$ l'unique élément de $S_0$ tel que $g_0(q^{r_j}) = q^{r_j}(1 + \pi_0\alpha_j)$, et $b_j \in N \otimes_W S_0$ tel que $\varphi(\rho(e_j)) - \rho(\varphi(e_j)) = \pi_0^n q^{r_j} b_j$. Cherchons $\rho'$ à l'aide des équations

$$\rho'(e_j) = \rho(e_j) + \pi_o^n \sum_{i=1}^{d} g'_{i,j} e_i$$

avec $g'_{i,j} \in W$. Supposons donc que $\rho$ laisse stable $N' \otimes_W S_0$, donc $p^{n_j}b_j \in N'$, que nous écrirons $p^{n_j}b_j = \sum_i b_j(i)p^{n_i}e_i$ avec $b_j(i) \in S_0$. Cherchons alors $g'_{i,j}$ sous la forme $g'_{i,j} = p^{n_i - n_j}h_{i,j}$ avec $h_{i,j} \in W$. Si $g'_{i,j}$ se met sous cette forme, alors $\rho'$ laissera stable $N' \otimes_W S_0$, et comme $g'_{i,j}$ est la solution unique dans $\mathcal{K}$ de l'équation III.2.9 (par le lemme III.2.11), il suffit de montrer que nous pouvons trouver des $h_{i,j} \in W$ tels que $p^{n_i - n_j}h_{i,j}$ vérifient l'équation III.2.9, ou même de construire $h_{i,j}$ modulo $p^n$ vérifiant les équations III.2.10. En reportant, nous trouvons que $(h_{i,j})$ doit vérifier dans $W$ :

$$p^{-n_j}\big[\sum_i p^{n_i}\overline{b}_j(i)e_i - \sum_{1 \leq i,k \leq d} p^{n_i}a'_{k,j}h'_{i,k}e_i + p^{n(p-1)-r_j}\overline{u}^n \sum_{1 \leq i,k \leq d} p^{n_i}\varphi(h'_{k,j})p^{r_k}a'_{i,k}e_i\big] = 0$$

(avec $\overline{b}_j(i)$ qui vaut $b_j(i)$ modulo $\pi_0$, vu dans $W$) puisque $a_{i,j} = p^{n_i - n_j}a'_{i,j}$. Soit en identifiant les coordonnées,

$$\overline{b}_j(i) - \sum_{1 \leq k \leq d} a'_{k,j}h'_{i,k} + p^{n(p-1)-r_j}\overline{u}^n \sum_{1 \leq k \leq d} \varphi(h'_{k,j})p^{r_k}a'_{i,k} = 0$$

qui admet bien une solution dans $W$, puisque ce sont les équations obtenues en prenant coordonnée par coordonnée l'équation III.2.9 correspondant au $\Phi$-module filtré $N'$ (et à $\rho_{N'}$ valant $\rho$ restreint à $N'$, puisque par hypothèse $\rho$ laisse stable $N'$). Nous avons donc bien les $h_{i,j}$ dans $W$, comme souhaité. $\square$

Revenons au cas général d'un sous-objet $N'$ de $N$ non nécéssairement facteur direct. Nous avons l'égalité $a_{i,j} = p^{n_i - n_j} a'_{i,j}$, par conséquent, $N'' = \oplus_{1 \leq i \leq d'} W e_i$ est laissé stable par les $\varphi^r$, et c'est un sous-objet facteur direct (comme $W$-module) de $N$. Le lemme III.2.7 nous permet donc de dire que l'action de $\Gamma_0$ sur $N \otimes_W S_0$ laisse stable $N'' \otimes_W S_0$ (donc par unicité, elle donne l'action de $\Gamma_0$ définissant $\mathrm{F}(N'')$), et comme $N'$ et $N''$ ont même rang, et que $N'$ est un sous objet de $N''$, le lemme III.2.12 montre bien que l'action de $\Gamma_0$ sur $N'' \otimes_W S_0$ (qui provient de celle sur $N \otimes_W S_0$) laisse stable $N' \otimes_W S_0$. Ceci termine la démonstration de la proposition III.2.6. □

Nous pouvons alors justifier que si $f : M \to N$ est un morphisme entre deux $\Phi$-modules filtrés libres comme $W$-modules, alors $\mathrm{F}(f) = f \otimes \mathrm{Id} : \mathrm{F}(M) \to \mathrm{F}(N)$ est un morphisme de $(\varphi, \Gamma_0)$ module : il commute à $\varphi$ par construction, et l'action de $\Gamma_0$ sur $\mathrm{F}(M)$ induit alors une structure de $(\varphi, \Gamma_0)$-module sur l'image de $f \otimes \mathrm{Id}$ qui est $\mathrm{F}(\mathrm{Im}(f))$, qui correspond à celle induite par $\mathrm{F}(N)$, car l'action de $\Gamma_0$ sur $N \otimes_W S_0$ laisse stable $\mathrm{Im}(f) \otimes_W S_0$ (car $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-objet de $N$). Or, sur $\mathrm{F}(\mathrm{Im}(f))$ il existe une unique action de $\Gamma_0$ qui convienne (toujours sous l'hypothèse $0 \leq h \leq p-2$), donc ceci implique que $f \otimes \mathrm{Id}$ commute à l'action de $\Gamma_0$.

Par construction, nous avons $i^* \mathrm{F}(N) = N$. Pour voir que le foncteur $\mathrm{F}$ ainsi défini est bien un quasi-inverse (dans le cas restreint des modules libres), montrons d'abord qu'il est essentiellement surjectif. Plus exactement :

Lemme III.2.14. *Pour tout objet $\mathcal{N}$ de $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^h_{S_0}}$, libre comme $S_0$-module, si $N = i^*(\mathcal{N})$, il existe un unique isomorphisme de $(\varphi, \Gamma_0)$-module $\mathrm{F}(N) \to \mathcal{N}$ (qui se réduit modulo $\pi_0$ sur l'égalité $N = i^*(\mathcal{N})$).*

Démonstration. Présentons ici une démonstration de ce fait due à N. Wach. Pour cela, considérons une base $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ de $N$, adaptée à la graduation, et $(a_{i,j})$ la matrice des applications $\varphi^r$ dans cette base (donc l'action de $\varphi$ est donnée sur $\mathrm{F}(N)$ par $\varphi(e_j) = q^{r_j} \sum_{1 \leq i \leq d} a_{i,j} e_i$). Il faut alors prouver l'existence et l'unicité d'une base $(f_i)$ dans $\mathcal{N}$ vérifiant $\varphi(f_j) = q^{r_j} \sum_{1 \leq i \leq d} a_{i,j} f_i$ avec $e_i = f_i$ modulo $\pi_0$. Ce sera suffisant car en posant $h(e_i) = f_i$, nous aurons un morphisme de $\varphi$-module, qui fera commuter l'action de $\Gamma_0$ par unicité de celle-ci, et qui modulo $\pi_0$ redonnera l'identité.

Par construction du $\Phi$-module filtré $N$, la base $(e_i)$ se relève en une famille $(\hat{e}_i)$ de $\mathcal{N}$ avec $\varphi(\hat{e}_i) \in q^{r_i} \mathcal{N}$. De plus, $\mathcal{N}$ est complet pour la topologie $\pi_0$-adique (car $S_0$ l'est), et modulo $\pi_0$, $(e_i)$ est une base, donc $\mathcal{N}$ étant sans torsion, $(\hat{e}_i)$ est une base de $\mathcal{N}$ (nous pourrions aussi invoquer le lemme de Nakayama). Donc, il existe $\hat{a}_{i,j} \in S_0$ tels que :

$$\varphi(\hat{e}_j) = q^{r_j} \sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{i,j} \hat{e}_i$$

et $\hat{a}_{i,j} = a_{i,j}$ modulo $\pi_0$. Posons $\alpha_{i,j} \in S_0$ l'unique élément tel que $\hat{a}_{i,j} = a_{i,j} + \pi_0\alpha_{i,j}$. Nous cherchons à modifier la base $(\hat{e}_i)$ pour obtenir la base $(f_i)$. Cherchons $f_j$ sous la forme $f_j = \hat{e}_j + \pi_0 c_j$, et posons $b_j = \sum_{1\leq i\leq d} \alpha_{i,j}\hat{e}_i$. Alors, puisque $\varphi(\pi_0) = uq^{p-1}\pi_0$,

$$\begin{aligned}\varphi(\hat{e}_j + \pi_0 c_j) &= \varphi(\hat{e}_j) + q^{r_j} \sum_{1\leq i\leq d} a_{i,j}\pi_0 c_i + u\pi_0 q^{p-1}\varphi(c_j) - q^{r_j} \sum_{1\leq i\leq d} a_{i,j}\pi_0 c_i \\ &= q^{r_j} \sum_{1\leq i\leq d} a_{i,j}(\hat{e}_i + \pi_0 c_i) + \pi_0 q^{r_j} b_j + u\pi_0 q^{p-1}\varphi(c_j) - q^{r_j} \sum_{1\leq i\leq d} a_{i,j}\pi_0 c_i\end{aligned}$$

autrement dit, nous cherchons les $c_j \in \mathcal{N}$ tels que

$$b_j + uq^{p-1-r_j}\varphi(c_j) - \sum_{1\leq i\leq d} a_{i,j}c_i = 0$$

Nous résolvons ce système de manière unique par récurrence modulo $\pi_0^n$. A chaque étape, le système se résout en faisant une récurrence modulo $p^k$, en utilisant que $p-1-r_j \geq 1$ (par hypothèse), donc que $q^{p-1-r_j} = 0$ modulo $(p, \pi_0)$, et que la matrice $(a_{i,j})$ est inversible modulo $p$. □

Il nous reste à voir que les foncteurs $i^*$ et $\mathrm{F}$ sont pleinement fidèle. N. Wach a déjà montré que $i^*$ est fidèle, et comme pour $f : M \to N$ morphisme entre deux objets de $\mathbf{MF_W^h}$ nous avons $i^*(\mathrm{F}(f)) = f$, le foncteur $\mathrm{F}$ est fidèle. Or, si $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont deux objets de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^h_{S_0}}$, si $N_1 = i^*(\mathcal{N}_1)$ et $N_2 = i^*(\mathcal{N}_2)$ et si $f_1 : \mathcal{N}_1 \to \mathrm{F}(N_1)$ et $f_2 : \mathcal{N}_2 \to \mathrm{F}(N_2)$ sont les isomorphismes précédemment construits, et si $f : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ est un morphisme de $(\varphi, \Gamma_0)$-modules, alors $f_2^{-1} \circ \mathrm{F}(i^*(f)) \circ f_1$ est aussi un morphisme de $(\varphi, \Gamma_0)$-modules dont la réduction modulo $\pi_0$ est $i^*(f)$. Par fidélité de $i^*$, nous avons donc $f = f_2^{-1} \circ \mathrm{F}(i^*(f)) \circ f_1$. Donc $\mathrm{F}$ est pleinement fidèle. Ceci termine la démonstration du théorème dans le cas des modules libres sur $W$.

Soit $N$ objet de $\mathbf{MF^h_{W,tf}}$ ayant de la torsion, alors il existe $N'$ un objet de $\mathbf{MF^h_{W,tf}}$ sans torsion (donc libre comme $W$-module) avec un épimorphisme $g : N' \to N$ (cf. proposition 1.6.3 de [**Win84**]). Notons $N''$ le noyau de $g$, c'est aussi un objet de $\mathbf{MF^h_{W,tf}}$ libre comme $W$-module (puisque sans torsion). Donc $\mathrm{F}(N'')$ est un sous-$(\varphi, \Gamma_0)$-module de $\mathrm{F}(N')$, et nous définissons alors $\mathrm{F}(N)$ comme le quotient de $\mathrm{F}(N')$ par $\mathrm{F}(N'')$. Le $\varphi$-module sous-jacent s'identifie au $\varphi$-module $N' \otimes_W S_0$ défini dans la proposition III.2.2 (car $S_0$ est plat sur $W$).

Il faut voir que c'est bien défini, donc que l'action de $\Gamma_0$ ainsi construite ne dépend pas du $N'$ considéré : si $M'$ est un objet de $\mathbf{MF^h_{W,tf}}$ libre sur $W$ et $h : M' \to N$ un épimorphisme, alors la flèche $M' \oplus N' \to N \oplus N \to N$ est un épimorphisme, donc la même construction qu'au dessus nous permet de définir sur $\mathrm{F}(N)$ une action de $\Gamma_0$ provenant de celle sur $\mathrm{F}(M') \oplus \mathrm{F}(N')$ qui (par unicité) est la somme directe de l'action sur $\mathrm{F}(M')$ et de l'action sur $\mathrm{F}(N')$. Ceci donne bien que pour $x \in N \otimes_W S_0$, si $x' \in N' \otimes_W S_0$ est tel que $g(x') = x$ et $y \in M' \otimes_W S_0$ tel que $h(y) = x$, alors pour tout $\gamma \in \Gamma_0$, nous avons $g(\gamma x') = h(\gamma y) = \gamma x$.

Pour que ce soit un foncteur, il faut encore voir comment définir $\mathrm{F}$ sur les flèches. Soit $N'$ et $N''$ deux objets de $\mathbf{MF}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$, et $f : N' \to N''$ un épimorphisme. Alors $f \otimes \mathrm{Id} : \mathrm{F}(N') \to \mathrm{F}(N'')$ est un morphisme de $(\varphi, \Gamma_0)$-module. En effet, soit $N$ un objet de $\mathbf{MF}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$, libre comme $W$-module tel qu'il existe un épimorphisme $g : N \to N'$. Alors $f \circ g : N \to N''$ est aussi un épimorphisme, et donc l'action de $\Gamma_0$ sur $\mathrm{F}(N'')$ provient de celle sur $\mathrm{F}(N)$ via $f \circ g$, donc $f \otimes \mathrm{Id}$ commute bien à l'action de $\Gamma_0$. Le même genre de raisonnement donnera l'exactitude et la préservation du produit tensoriel (puisque ce sont des propriétés vraies sur les modules libres).

Il faut traiter le cas général d'un morphisme $N' \to N''$ qui ne soit pas nécessairement surjectif. Cela revient à étudier le cas d'un sous-objet, cas qui est donné par une généralisation de la proposition 1.6.3 de [**Win84**] : pour tout objet $N$ de $\mathbf{MF}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$, et pour tout sous-objet $N'$ de $N$, il existe un objet $M$ de $\mathbf{MF}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{W},\mathbf{tf}}$, libre sur $W$, un sous objet $M'$ de $M$ et un épimorphisme $g : M \to N$ tel que l'application $g$ restreinte à $M'$ soit un épimorphisme sur $N'$. Ceci termine la démonstration de la première partie du théorème. □

Nous avons construit l'action de $\Gamma_0$ sur $N \otimes_W S_0$ par récurrence modulo $\pi_0^n$. Pour étudier plus en détail le foncteur ainsi obtenu, nous avons besoin de voir cette action d'une autre façon : soit $G = (g_{i,j})$ la matrice dans $GL_{\mathrm{rg}(N)}(S_0)$ définie par $g_0(e_j) = \sum_i g_{i,j} e_i$ pour $(e_i)$ une base adaptée à la graduation de $N$, et $A = (a_{i,j}) \in GL_{\mathrm{rg}(N)}(W)$ donnant l'action de $\varphi^j$ sur $e_j$. Alors, en écrivant $\varphi \circ g_0(e_j) = \sum_{i,k} \varphi(g_{i,j}) a_{k,i} q^{r_i} e_k$ et $g_0 \circ \varphi(e_j) = \sum_{i,k} g(a_{i,j}) g_{k,i} g(q)^{r_j} e_k$, la commutativité $\varphi \circ g_0 = g_0 \circ \varphi$ nous donne pour $G$ l'équation $AQ\varphi(G) = Gg_0(A)g_0(Q)$ avec $Q$ la matrice correspondant à $Q(e_j) = q^{r_j} e_j$. Donc $G$ est un point fixe de l'application $f : H \mapsto AQ\varphi(H)g_0(Q^{-1})g_0(A^{-1})$. Notons $I$ la matrice identité dans $GL_{\mathrm{rg}(N)}$ et $G_n = f^{(n)}(I)$ (c'est-à-dire la composée $n$ fois de $f$ appliquée à $I$). Alors, en utilisant que $G - I \in \pi_0 M_{\mathrm{rg}(N)}(S_0)$, nous allons montrer :

Lemme III.2.15. *La matrice $G$ est la limite de la suite $G_n$.*

Démonstration. Nous noterons $\varphi^{(n)}$ la composée $n$ fois de $\varphi$, introduisons alors $B_n = AQ\varphi(A)\varphi(Q) \cdots \varphi^{(n-1)}(A)\varphi^{(n-1)}(Q)$ qui est une matrice à coefficients dans $S_0$. Nous avons $G_n = B_n \varphi^{(n)}(I) g_0(B_n^{-1})$, et comme $G$ est un point fixe de $f$, $G = B_n \varphi^{(n)}(G) g_0(B_n^{-1})$. Donc $G_n - G = B_n \varphi^{(n)}(I - G) g_0(B_n^{-1})$. Notons $G = I - \pi_0 H$ avec $H \in M_{\mathrm{rg}(N)}(S_0)$, alors $G_n - G = \varphi^{(n)}(\pi_0) B_n \varphi^{(n)}(H) g_0(B_n^{-1})$. Or, comme $A$ est inversible (dans $GL_{\mathrm{rg}(N)}(W)$), les seuls dénominateurs possibles sont les puissances de $g_0(q)^{r_i}$, et comme $0 \leq r_i \leq p-2$, nous pouvons écrire $G_n - G = \frac{\varphi^{(n)}(\pi_0)}{g_0\left(q\varphi(q)\cdots\varphi^{n-1}(q)\right)^{p-2}} G'_n$ avec $G'_n = B_n \varphi^{(n)}(H) g_0\big(\varphi^{(n-1)}(q^{p-2}Q^{-1})\varphi^{(n-1)}(A^{-1}) \cdots q^{p-2}Q^{-1}A^{-1}\big)$ qui est une matrice à coefficients dans $S_0$.

Donc tout revient à montrer que $\frac{\varphi^{(n)}(\pi_0)}{g_0\left(q\varphi(q)\cdots\varphi^{n-1}(q)\right)^{p-2}}$ tend vers 0. Nous avons $g_0(q) = v_g q$ avec $v_g$ inversible dans $S_0$, par conséquent le fait que $\varphi$ et $g_0$ commutent nous donne l'égalité

$$\frac{\varphi^{(n)}(\pi_0)}{g_0\big(q\varphi(q)\cdots\varphi^{n-1}(q)\big)^{p-2}} = \frac{(v_g\varphi(v_g)\cdots\varphi^{(n-1)}(v_g))^{2-p}}{(q\varphi(q)\cdots\varphi^{n-1}(q))^{p-2}}\varphi^{(n)}(\pi_0)$$

En utilisant que $\varphi(\pi_0) = u\pi_0 q^{p-1}$ pour $u$ un certain inversible dans $S_0$, nous obtenons que $\varphi^{(n)}(\pi_0) = (q\varphi(q)\cdots\varphi^{n-1}(q))^{p-1}\pi_0 u\varphi(u)\cdots\varphi^{(n-1)}(u)$. Par conséquent,

$$\frac{\varphi^{(n)}(\pi_0)}{g_0\big(q\varphi(q)\cdots\varphi^{n-1}(q)\big)^{p-2}} = \pi_0\frac{u\varphi(u)\cdots\varphi^{(n-1)}(u)}{(v_g\varphi(v_g)\cdots\varphi^{(n-1)}(v_g))^{p-2}}q\varphi(q)\cdots\varphi^{(n-1)}(q)$$

et donc, puisque $q\varphi(q)\cdots\varphi^{(n-1)}(q)$ tend vers 0 dans $S_0$ ($q$ est dans l'idéal maximal de $S_0$, idéal qui est stable par $\varphi$), nous pouvons conclure que $\frac{\varphi^{(n)}(\pi_0)}{g_0\left(q\varphi(q)\cdots\varphi^{n-1}(q)\right)^{p-2}}$ tend vers 0 dans $S_0$, donc que $G_n$ tend vers $G$. □

Nous allons en déduire la proposition suivante, ce qui terminera la démonstration du théorème III.2.4 :

Proposition III.2.16. *Soit $N_{i,j}$ des objets de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$, $L$ un sous-objet (dans $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{+}$) facteur direct (comme $W$-module) de $M := \bigoplus_i \otimes_j N_{i,j}$, alors l'action de $\Gamma_0$ sur $\bigoplus_i \otimes_j \mathrm{F}(N_{i,j}) = M \otimes_W S_0$ laisse stable $L \otimes_W S_0$.*

Démonstration. Remarquons que $\wedge^{\mathrm{rg}_W L}L$ est un sous-objet de $\wedge^{\mathrm{rg}_W L}M \subset M^{\otimes \mathrm{rg}_W L}$ de dimension 1 (en effet, $\wedge^i M$ s'identifie comme $\Phi$-module filtré sur $W$ à $\{x \in M^{\otimes i} | \forall g \in \mathfrak{S}_i,\ g.x = \varepsilon(g)x\}$ où le groupe des permutations $\mathfrak{S}_i$ agit naturelement sur $M^{\otimes i}$), et que $L \otimes_W S_0$ est laissé stable par l'action de $\Gamma_0$ sur $M \otimes_W S_0$ si et seulement si $\wedge^{\mathrm{rg}_W L}L \otimes_W S_0$ est laissé stable par l'action de $\Gamma_0$ sur $(M \otimes_W S_0)^{\otimes \mathrm{rg}_W L}$ (car c'est vrai au niveau des espaces vectoriels sur $\mathcal{K}$, et nous avons supposé $L$ facteur direct). Il suffit donc de traiter le cas $\mathrm{rg}_W L = 1$.

Fixons alors pour chaque $N_{i,j}$ une base $(e_k^{(i,j)})$ adaptée à la graduation. Notons $G^{(i,j)}$ la matrice de l'action de $g_0$ sur cette base et $C^{(i,j)}$ la matrice donnant l'action de $\varphi$ sur $N_{i,j} \otimes_W S_0$ (avec les notations précédentes, $C = AQ$). Alors nous avons que $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n^{(i,j)} = G^{(i,j)}$ avec $C^{(i,j)}\varphi(G_n^{(i,j)})g_0(C^{(i,j)})^{-1} = G_{n+1}^{(i,j)}$ et $G_0^{(i,j)} = I^{(i,j)}$. Considérons alors $l = \sum_{k,i,j} l_{k,i,j} \otimes_j e_k^{(i,j)}$ une base de $L \otimes_W S_0$ telle que $\varphi(l) = q^a l$ avec $a \geq 0$ (une telle base existe, car $L \subset M_a$ pour un certain $a$ positif, par fonctorialité de la graduation (et puisque $L$ est de rang 1)), et notons $\bar{l}$ le vecteur formé des coordonnées de $l$ (il est à coefficient dans $W$). Nous voulons voir que $\bigoplus_i \otimes_j G^{(i,j)}(g_0(\bar{l})) = \alpha\bar{l}$ pour un certain $\alpha \in S_0$. Montrons le par récurrence.

Supposons donc que $\bigoplus_i \otimes_j G_n^{(i,j)} g_0(\bar{l}) = \alpha_n \bar{l}$ avec $\alpha_n \in S_0$, alors $\bigoplus_i \otimes_j G_{n+1}^{(i,j)} g_0(\bar{l}) = \bigoplus_i \otimes_j C^{(i,j)} \otimes_j \varphi(G_n^{(i,j)}) g_0\big(\otimes_j C^{(i,j)}\big)^{-1}(g_0(\bar{l}))$.

Remarquons que $\varphi(l) = q^a l$ se traduit par $\bigoplus_i \otimes_j C^{(i,j)}\varphi(\bar{l}) = q^a\bar{l}$, et donc $g_0\big(\bigoplus_i \otimes_j (C^{(i,j)})^{-1}\big)g_0(\bar{l}) = g_0(q^{-a}\varphi(\bar{l})) = g_0(q)^{-a}\varphi(g_0(\bar{l}))$.

Puis, nous avons l'égalité $\bigoplus_i \otimes_j \varphi(G_n^{(i,j)})\varphi(g_0(\bar{l})) = \varphi\big(\bigoplus_i \otimes_j G_n^{(i,j)} g_0(\bar{l})\big) = \varphi(\alpha_n \bar{l})$ par hypothèse de récurrence.

Et enfin, nous réutilisons $\bigoplus_i \otimes_j C^{(i,j)}\varphi(\bar{l}) = q^a \bar{l}$ pour obtenir en définitive que $\bigoplus_i \otimes_j G_{n+1}^{(i,j)} g_0(\bar{l}) = \varphi(\alpha_n) q^a g_0(q)^{-a}\bar{l}$. Comme $\varphi(\alpha_n) \in S_0$ (puisque $\alpha_n \in S_0$ par hypothèse) et $qg_0(q)^{-1} \in S_0$ (puisque $g_0(q) = qv_g$ avec $v_g$ un inversible de $S_0$), nous avons bien $\bigoplus_i \otimes_j G_{n+1}^{(i,j)} g_0(\bar{l}) = \alpha_{n+1}\bar{l}$ avec $\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n) q^a g_0(q)^{-a} \in S_0$.

Pour $n = 0$ nous avons $G_0^{(i,j)} = I^{(i,j)}$ (où $I$ est la matrice identité), donc $\bigoplus_i \otimes_j G_0^{(i,j)} g_0(\bar{l}) = \bar{l}$, d'où par récurrence la propriété est vraie pour tout $n$. En passant à la limite, la propriété est vrai pour $\bigoplus_i \otimes_j G^{(i,j)}$. $\square$

Remarque III.2.17. *Ceci redémontre la proposition III.2.6*

Nous avons donc un foncteur, $\mathrm{F}$, qui vérifie les propriétés souhaitées, mais défini sur $\mathbf{MF_W^h}$. Si $N$ est un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$, son dual $N^*$ est un objet de $\mathbf{MF_W^h}$, donc $\mathrm{F}(N^*)$ est bien défini.

Définition III.2.18. *Le foncteur $\mathrm{F}^-$ est défini sur $\mathbf{MF_W^{-h}}$ par :*

$$\mathrm{F}^-(N) = \big(\mathrm{F}(N^*) \otimes_{S_0} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}\big)^* = N \otimes_W \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$$

*pour tout objet $N$ de $\mathbf{MF_W^{-h}}$. Il donne bien un $(\varphi, \Gamma)$-module étale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.*

Le foncteur $\mathrm{F}$ consiste à munir $N \otimes_W S_0$ (pour $N$ objet de $\mathbf{MF_W^h}$) d'une structure de $(\varphi, \Gamma_0)$-module, et comme nous voulons un foncteur défini sur $\mathbf{MF_W^{-h}}$, nous prenons le dual. Ceci pose néanmoins un problème de définition, car le dual d'un $\varphi$-module sur $S_0$ n'est pas un $\varphi$-module, c'est pourquoi nous étendons d'abord les scalaires à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, puis nous prenons le dual. Nous pouvons traduire le théorème III.2.4 pour $\mathrm{F}^-$ en disant :

Théorème III.2.19. *Supposons $0 \leq h \leq p-2$. Alors $\mathrm{F}^-$ est un foncteur additif et exact de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ dans $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{ét}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$, pleinement fidèle. De plus, pour tout $N$ et $N'$ objets de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ tels que $N \otimes N'$ soit encore un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$, $\mathrm{F}^-(N) \otimes \mathrm{F}^-(N')$ est naturellement isomorphe à $\mathrm{F}^-(N \otimes N')$. Plus généralement, si $N_{i,j}$ sont des objets de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ et $L$ un sous-objet (dans $\mathbf{MF_W^{-}}$) facteur direct (comme $W$-module) de $M := \bigoplus_i \otimes_j N_{i,j}$, alors l'action de $\Gamma_0$ sur $\bigoplus_i \otimes_j\ \mathrm{F}^-(N_{i,j})$ laisse stable $L \otimes_W \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.*

## III.3. Fonctorialité de $g_N$

Rappelons le Théorème 1' de N. Wach (cf. [**Wac97**]) :

Théorème 1'. *Si $\mathcal{N}$ est un objet de $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^h_{S_0}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF_W}}(i^*(\mathcal{N}), A_{cris})$ est isomorphe comme représentation galoisienne à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M_{S_0}}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}})$.*

Enoncé dans le cadre (et avec les notations) qui nous intéresse, il devient :

THÉORÈME 1'. *Si $N$ est un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$, alors il existe un isomorphisme $g_N : \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}^-(N)) \to \mathbf{V_{cris}}(N)$ de représentations galoisiennes. En passant au dual, cela donne un isomorphisme de représentations galoisiennes ${}^t g_N^{-1}$ : $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}(N^*) \otimes_{S_0} \mathcal{O}_\mathcal{E}) \to \mathbf{V_{cris}}(N)^*$.*

Nous allons vérifier que cet isomorphisme est fonctoriel :

THÉORÈME III.3.1. *Pour tout objet $N$ de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$, l'application $g_N$ construite par N. Wach vérifie les propriétés de fonctorialité suivante :*

(1) *pour tout morphisme $f : N \to N'$ entre deux objets $N$ et $N'$ de $\mathbf{MF_W^{-h}}$, nous avons $\mathbf{V_{cris}}(f) \circ g_N = g_{N'} \circ \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}^-(f))$ (cela s'applique en particulier pour l'injection d'un sous-objet, ou pour la projection sur un objet quotient) ;*

(2) *pour tout objet $N$ et $N'$ de $\mathbf{MF_W^{-h}}$, $g_{N\oplus N'} = g_N \oplus g_{N'}$ ;*

(3) *pour tout objet $N$ et $N'$ de $\mathbf{MF_W^{-h}}$, pour tout sous-objet $L$ de $N \otimes N'$ tel que $L$ soit un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$, l'application $g_N \otimes g_{N'}$ restreinte à $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}^-(L))$ est égale à $g_L$. En particulier, si $N \otimes N'$ est un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$, alors $g_{N\otimes N'} = g_N \otimes g_{N'}$ ;*

REMARQUE III.3.2. *Nous pourrions montrer la fonctorialité directement pour l'isomorphisme donné pour tout objet de $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^h_{S_0}}$, sans faire intervenir la construction de $\mathrm{F}^-$.*

Avant de démontrer le théorème, rappelons la construction de $g_N$ : N. Wach construit l'isomorphisme modulo $p^n$ pour tout $n$. Prenons $N$ un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$. Notons $\mathcal{N} = N \otimes_W S_0$ (vu dans $\mathrm{F}^-(N)$). Soit $A_S^+ = W(R) \cap \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$, l'inclusion $A_S^+ \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ induit alors une application naturelle

$$(\mathcal{N} \otimes_{S_0} A_S^+/p^n)^\varphi \xrightarrow{i_N} (\mathcal{N} \otimes_{S_0} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr/p^n}})^\varphi$$

qui est en fait une bijection (cf [**Fon90**], p.296, où c'est exprimé pour le foncteur contravariant).

Puis, l'inclusion $A_S^+ \to W(R)$ fournit une flèche injective $A_S^+/p^n \to W(R)/p^n = W_n(R)$.

Composons-la alors avec la flèche naturelle $W_n(R) \to W_n(R)/\pi_0$, pour obtenir l'application

$$\mathcal{N} \otimes_{S_0} A_S^+/p^n \xrightarrow{j_\mathcal{N}} \mathcal{N} \otimes_{S_0} W_n(R)/\pi_0 = N \otimes_W W_n(R)/\pi_0$$

Du côté de $N$, $A_{cris}/p^n = W_n^{PD}(R)$, et en notant

$$I^{[p-1]} W_n^{PD}(R) = \{x \in W_n^{PD}(R) \text{ tels que } \forall i \in \mathbb{N}, \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{i \text{ fois}}(x) \in \mathrm{Fil}^{p-1} W_n^{PD}(R)\}$$

nous avons une flèche naturelle $A_{cris}/p^n \to W_n^{PD}(R)/I^{[p-1]}W_n^{PD}(R) = W_n(R)/\pi_0$, d'où une application naturelle

$$N \otimes_W A_{cris}/p^n \xrightarrow{k_N} N \otimes_W W_n(R)/\pi_0$$

N. Wach montre que, pour $N$ objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$, le schéma suivant

$$\begin{tikzcd}
N/p^n \otimes_W A_{cris}/p^n \arrow[r, "k_N"] & N/p^n \otimes_W W_n(R)/\pi_0 & \mathcal{N}/p^n \otimes_{S_0} A_S^+/p^n \arrow[l, "j_{\mathcal{N}}"'] \\
\mathbf{V_{cris}}(N/p^n) \arrow[u, hook, "k"] & & \mathbf{V_{A_S^+}}(\mathcal{N}/p^n) \arrow[u, hook, "j"]
\end{tikzcd}$$

induit une bijection (de représentations galoisiennes) de

$$\mathbf{V_{A_S^+}}(\mathcal{N}/p^n) = (\mathcal{N}/p^n \otimes_{S_0} A_S^+)^{\varphi=1}$$

sur $\mathbf{V_{cris}}(N/p^n)$, c'est-à-dire que $K_N = k_N \circ k$ et $J_{\mathcal{N}} = j_{\mathcal{N}} \circ j$ sont toutes les deux injectives, et ont même image dans $N/p^n \otimes_W W_n(R)/\pi_0$.

Tout ceci passe à la limite projective, et nous obtenons l'application $g_N$ bijective :

$$\begin{tikzcd}
N \otimes_W A_{cris} \arrow[r, "k_N"] & N \otimes_W W(R)/\pi_0 & \mathcal{N} \otimes_{S_0} A_S^+ \arrow[l, "j_{\mathcal{N}}"'] \\
\mathbf{V_{cris}}(N) \arrow[u, hook, "k"] \arrow[ur, "K_N"'] & & \mathbf{V_{A_S^+}}(\mathcal{N}) \arrow[u, hook, "j"'] \arrow[ul, "J_{\mathcal{N}}"] \arrow[ll, "g_N"]
\end{tikzcd}$$

où $\mathbf{V_{A_S^+}}(\mathcal{N}) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{V_{A_S^+}}(\mathcal{N}/p^n) = (\mathcal{N} \otimes_{S_0} A_S^+)^{\varphi=1} = \mathbf{V}_{\mathcal{O_E}}(\mathcal{N} \otimes_{S_0} \mathcal{O_E})$ car $A_S^+$ est complet pour la topologie $p$-adique, et que $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}(\mathbf{V_{A_S^+}}(\mathcal{N}/p^n)) = \mathrm{rg}_W(\mathcal{N})$.

Démonstration du théorème III.3.1. Pour la fonctorialité au niveau des flèches, il suffit de remarquer que le diagramme suivant est commutatif (car $\mathbf{V}_{\mathcal{O_E}}(\mathrm{F}^-(f))$ est juste $f \otimes \mathrm{Id}$) :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V}_{\mathcal{O_E}}(\mathrm{F}^-(N)) \arrow[r, "\mathbf{V}_{\mathcal{O_E}}(\mathrm{F}^-(f))"] \arrow[d, hook] & \mathbf{V}_{\mathcal{O_E}}(\mathrm{F}^*(N')) \arrow[d, hook] \\
N \otimes A_S^+ \arrow[r, "f \otimes \mathrm{Id}"] \arrow[d, "j_{\mathcal{L}}"'] & N' \otimes A_S^+ \arrow[d, "j_{\mathcal{L}'}"] \\
N \otimes W(R)/\pi_0 \arrow[r, "f \otimes \mathrm{Id}"] & N' \otimes W(R)/\pi_0 \\
N \otimes A_{cris} \arrow[r, "f \otimes \mathrm{Id}"] \arrow[u, "k_L"] & N' \otimes A_{cris} \arrow[u, "k_{L'}"'] \\
\mathbf{V_{cris}}(N) \arrow[r, "\mathbf{V_{cris}}(f)"] \arrow[u, hook] & \mathbf{V_{cris}}(N') \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Le fait que $g_{N\oplus N'} = g_N \oplus g_{N'}$ se montre de la même façon. Il reste donc à voir le cas du produit tensoriel : considérons $N$ et $N'$ deux objets de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$ avec $h \leq p-2$. Soit $L$ un sous-objet de $N \otimes N'$ qui est dans $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$, posons $\mathcal{L} = L \otimes_W S_0$. Le diagramme suivant est alors commutatif :

$$\begin{tikzcd}
L \otimes_W A_{cris} \arrow[r, hook] \arrow[d, "k_L"] & (N \otimes_W A_{cris}) \otimes_{A_{cris}} (N' \otimes_W A_{cris}) \arrow[d, "k_N \otimes k_{N'}"] \\
L \otimes_W W(R)/\pi_0 \arrow[r, hook] & \big(N \otimes_W W(R)/\pi_0\big) \otimes_{W(R)/\pi_0} \big(N' \otimes_W W(R)/\pi_0\big) \\
\mathcal{L} \otimes_{S_0} A_S^+ \arrow[r, hook] \arrow[u, "j_{\mathcal{L}}"] & (\mathcal{N} \otimes_{S_0} A_S^+) \otimes_{A_S^+} (\mathcal{N}' \otimes_{S_0} A_S^+) \arrow[u, "j_{\mathcal{N}} \otimes j_{\mathcal{N}'}"]
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, l'application $K_N \otimes K_{N'}$ restreinte à $\mathbf{V_{cris}}(L)$ est égale à $K_L$, et l'application $J_{\mathcal{N}} \otimes J_{\mathcal{N}'}$ restreinte à $\mathbf{V}_{\mathbf{A_S^+}}(\mathcal{L})$ est égale à $J_{\mathcal{L}}$.

Le point important est que $L$ étant un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$ (par hypothèse), ce sont bien des bijections, et ce sont celles qui permettent de construire $g_L$.

Donc $g_N \otimes g_{N'}$ envoie $\mathbf{V}_{\mathbf{A_S^+}}(\mathcal{L})$ sur $\mathbf{V_{cris}}(L)$ si $L$ est un sous-objet de $N \otimes N'$ qui soit dans $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$, et plus exactement, l'application $g_N \otimes g_{N'}$ restreinte à $\mathbf{V}_{\mathbf{A_S^+}}(\mathcal{L})$ est égale à $g_L$.

Si $N \otimes N'$ est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$, le résultat précédent avec $L = N \otimes N'$ nous donne $g_{N\otimes N'} = g_N \otimes g_{N'}$. □

Remarque III.3.3. *Nous montrons de la même manière que pour* $(N_{i,j})_{1\leq j\leq n,\,1\leq i\leq n_j}$ *objets de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$ *avec* $0 \leq h \leq p-2$*, et pour* $L$ *un sous-objet de* $\bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} N_{i,j}$ *qui soit dans* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$*, alors* $\bigoplus \otimes g_{\mathrm{F}^-(N_{i,j})}$ *restreinte à* $\mathbf{V}_{\mathbf{A_S^+}}(\mathrm{F}^-(L))$ *est égale à* $g_L$*, donc envoie bijectivement* $\mathbf{V}_{\mathbf{A_S^+}}(\mathrm{F}^-(L))$ *sur* $\mathbf{V_{cris}}(L)$*.*

Nous pouvons traduire ces résultats en disant :

Théorème III.3.4. *Soit* $0 \leq h \leq p-2$*, et notons* $\mathcal{G}$ *le foncteur exact de la catégorie* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$ *vers la catégorie des représentations continues de* $\Gamma_{\mathcal{K}}$ *sur les* $\mathbb{Z}_p$*-modules libres de rang fini, défini par : si* $N$ *objet de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$*,* $\mathcal{G}(N) = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathrm{F}^-(N))$*. Alors il existe* $g$ *un isomorphisme de foncteurs entre* $\mathcal{G}$ *et* $\mathbf{V_{cris}}$*. De plus, nous pouvons supposer que :*
- *pour tous objet* $N$ *et* $N'$ *de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$*, tel que* $N \otimes N'$ *soit encore un objet de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$*, nous avons* $g_{N\otimes N'} = g_N \otimes g_{N'}$ *;*
- *pour tout uplet d'objets* $(N_{i,j})_{1\leq j\leq n,\,1\leq i\leq n_j}$ *de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$*, pour tout sous-objet* $L$ *(dans* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$*) de* $\bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} N_{i,j}$*, l'application* $\bigoplus \otimes g_{N_{i,j}}$ *envoie* $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}}}(\mathrm{F}^-(L))$ *sur* $\mathbf{V_{cris}}(L)$*.*
  *Plus exactement, l'application* $\bigoplus \otimes g_{N_{i,j}}$ *restreinte à* $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}}}(\mathrm{F}^-(L))$ *est égale à* $g_L$*.*

Nous en déduisons la proposition :

Proposition III.3.5. *Pour tout uplet d'objets* $(N_{i,j})_{1\leq j\leq n,\,1\leq i\leq n_j}$ *de* $\mathbf{MF_W^{-h}}$*, pour tout sous-objet* $L$ *de* $\bigoplus_{j=1}^{n}\otimes_{i=1}^{n_j}N_{i,j}$ *dans* $\mathbf{MF_W^{-h}}$*, l'application* $\bigoplus\otimes\mathsf{f}_{N_{i,j}}$ *restreinte à* $\mathbf{V_{cris}}(L)$ *est égale à* $\mathsf{f}_L$.

Ceci termine presque la démonstration du théorème III.1.1 : il nous reste juste à nous affranchir de l'hypothèse sur la filtration de $L$. Pour cela, nous allons utiliser les résultats de Laurent Berger sur la fonctorialité des modules de Wach.

## III.4. Modules de Wach

Présentons ici le lien entre le foncteur $\mathrm{F}$ et les modules de Wach. L. Berger a défini dans [**Ber04**] le module de Wach $\mathbf{N}(T)$ d'un réseau $T$ d'une $\mathbb{Q}_p$-représentation cristalline $V$ à poids de Hodge-Tate négatifs comme l'unique $S$-sous-module de $\mathbf{D}^+(T) := (A_S^+\otimes_{\mathbb{Z}_p} T)^{H_K}$ (avec $A_S^+ = W(R)\cap\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{nr}}}$) vérifiant :

– $\mathbf{N}(T)$ est un $S$-module libre de rang la dimension de $V$ ;
– l'action de $\Gamma$ préserve $\mathbf{N}(T)$ et est triviale sur $\mathbf{N}(T)/\pi\,\mathbf{N}(T)$ ;
– il existe un entier $r\geq 0$ tel que $\pi^r\,\mathbf{D}^+(T)\subset\mathbf{N}(T)$.

Il définit de même le module de Wach $\mathbf{N}(V)$ d'une représentation cristalline $V$ à poids de Hodge-Tate négatifs. L'unicité donne en particulier que $\mathbf{N}$ va préserver somme directe et produit tensoriel, ce qui nous intéressera tout particulièrement.

Rappelons le Théorème 1' de [**Wac97**] :

Théorème 1'. *Si* $N$ *est un objet de* $\mathbf{MF_W^{-h}}$ *avec* $0\leq h\leq p-2$*, alors* $\mathbf{V_{cris}}(N)$ *est isomorphe (via l'application* $g_N$*) comme représentation galoisienne à* $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}^-(N))$.

Alors, nous avons

Proposition III.4.1. *Si* $N$ *est un objet de* $\mathbf{MF_W^{-h}}$ *avec* $0\leq h\leq p-2$*,* $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(g_N)$ *(qui identifie* $\mathrm{F}^-(N) = N\otimes_W\mathcal{O}_\mathcal{E}$ *à* $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathbf{V_{cris}}(N))$*) envoie* $N\otimes_W S$ *sur* $\mathbf{N}(\mathbf{V_{cris}}(N))$ *(le module de Wach associé à* $\mathbf{V_{cris}}(N)$*).*

Remarque III.4.2. *Cette proposition peut s'énoncer en disant que pour* $\mathcal{N}$ *objet de* $\mathbf{\Gamma_0\Phi M_{S_0}^h}$ *libre comme* $S_0$*-module (et pour* $0\leq h\leq p-2$*), alors* $\mathcal{N}\otimes_{S_0}S$ *est isomorphe à* $\mathbf{N}(\mathbf{V_{cris}}(i^*(\mathcal{N})))$.

Démonstration. En passant au dual, cela revient à dire que $\mathrm{F}(N^*)\otimes_{S_0}S$ est isomorphe à $\mathbf{N}(\mathbf{V_{cris}}(N)^*)$ par fonctorialité du module de Wach envers le dual. Appelons $T = \mathbf{V_{cris}}(N)^*$ et $r\leq p-2$ l'entier tel que $\mathrm{Fil}^r(N^*)\neq\{0\}$, $\mathrm{Fil}^{r+1}(N^*) = \{0\}$. Remarquons que la structure de $(\varphi,\Gamma_0)$-module de $\mathrm{F}(N^*)$ induit une structure de $(\varphi,\Gamma)$-module sur $N^*\otimes_W S$, et que $N^*\otimes_W\frac{1}{\pi^r}S$ est le dual (au sens généralisé des modules de Wach) d'un $(\varphi,\Gamma)$-module de hauteur finie (puisque égale à $r$) sur $S$ sans $p'$-torsion, donc par le résultat de J.-M. Fontaine (cf [**Fon90**], p.296), les périodes de $N^*\otimes_W\frac{1}{\pi^r}S$ sont dans $A_S^+$. Par conséquent, $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}\big((N^*\otimes_W\frac{1}{\pi^r}S)\otimes_S\mathcal{O}_\mathcal{E}\big) = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}(N^*)\otimes_{S_0}\mathcal{O}_\mathcal{E}) = T = ((N^*\otimes_W\frac{1}{\pi^r}S)\otimes_S A_S^+)^\varphi\subset N^*\otimes_W\frac{1}{\pi^r}A_S^+$.

Puis, l'identification de $\mathcal{N}$ avec $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathcal{N}))$ pour $\mathcal{N}$ un $(\varphi,\Gamma)$-module sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ est induite par la multiplication dans $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$. Donc, comme $T \subset N^* \otimes_W \frac{1}{\pi^r} A_S^+$, nous avons $\mathbf{D}^+(T) \subset ((N^* \otimes_W \frac{1}{\pi^r} A_S^+) \otimes A_S^+)^{H_\mathcal{K}}$ qui est identifié à $(N^* \otimes_W \frac{1}{\pi^r} A_S^+)^{H_\mathcal{K}} = N^* \otimes_W \frac{1}{\pi^r} S$. Donc la dernière condition de la définition d'un module de Wach, $\pi^r\, \mathbf{D}^+(T) \subset N^* \otimes_W S$, est vérifiée.

Lemme III.4.3. *Sous les notations précédentes, nous avons l'inclusion* $\mathbf{N}(T) \subset N^* \otimes_W S$.

Remarque III.4.4. *La démonstration donnée ci-dessous est exactement l'idée principale de la démonstration de l'unicité du module de Wach (cf. proposition II.1.1 de* [**Ber04**]*)*

Démonstration. $\mathbf{N}(T) \subset \mathbf{D}^+(T)$ par définition, donc nous avons l'inclusion $\pi^r\, \mathbf{N}(T) \subset N^* \otimes_W S$. Soit $s$ le plus petit entier tel que $\pi^s\, \mathbf{N}(T) \subset N^* \otimes_W S$. Prenons $(e_i)$ une base adaptée à la filtration de $N^*$, et $(f_i)$ une base de $\mathbf{N}(T)$. Alors, il existe $b_{i,j} \in S$ tels que $f_i = \sum_j \frac{b_{i,j}}{\pi^s} e_j$, et l'un des $b_{i,j}$ (supposons que c'est $b_{1,1}$) n'est pas divisible par $\pi$. Par définition, l'action de $g \in \Gamma$ doit être triviale modulo $\pi$ sur $\mathbf{N}(T)$, et elle l'est sur $N \otimes_W S$. Fixons $g$ un générateur de $\Gamma_0$. Ecrivons donc $g(e_j) = e_j + \pi \sum_k g_{j,k} e_k$, alors

$$g(f_1) - f_1 = \sum_j \left(\frac{g(b_{1,j})}{g(\pi)^s} - \frac{b_{1,j}}{\pi^s}\right) e_j + \sum_{j,k} \frac{g(b_{1,j})\pi g_{j,k}}{g(\pi)^s} e_k$$

Or, $\frac{g(\pi)}{\pi}$ est inversible dans $S$, donc $\sum_{j,k} \frac{g(b_{1,j})\pi g_{j,k}}{g(\pi)^s} e_k \in \frac{1}{\pi^{s-1}} N^* \otimes_W S$. De plus, comme $g$ agit trivialement sur $\mathbf{N}(T)$ modulo $\pi$, $g(f_1) - f_1$ doit être dans $\pi\, \mathbf{N}(T) \subset \frac{1}{\pi^{s-1}} N^* \otimes_W S$. Nous obtenons donc $\sum_j (\frac{g(b_{1,j})}{g(\pi)^s} - \frac{b_{1,j}}{\pi^s}) e_j \in \frac{1}{\pi^{s-1}} N^* \otimes_W S$, donc $\pi^{s-1}(\frac{g(b_{1,1})}{g(\pi)^s} - \frac{b_{1,1}}{\pi^s}) \in S$. Comme $b_{1,1} = \alpha + \pi b'_{1,1}$ avec $\alpha \in W \setminus \{0\}$ et $b'_{1,1} \in S$ et $\frac{g(\pi)}{\pi} = \mathcal{X}(g)$ modulo $\pi$ (où $\mathcal{X}$ est le caractère cyclotomique, donc $\mathcal{X}(g)^s \neq 1$ si $s \neq 0$ car $g \in \Gamma_0$), nous obtenons $\frac{\mathcal{X}(g)^s - 1}{\pi} \in S$, donc $s = 0$. Donc nous avons l'inclusion $\mathbf{N}(T) \subset N^* \otimes_W S$. □

Nous allons désormais étudier plus précisément le $S_0$-module $\mathcal{N} = \mathbf{N}(T)^{\Gamma_f}$. Montrons :

Lemme III.4.5. *Le $S_0$-module $\mathbf{N}(T)^{\Gamma_f}$ est libre et $\mathbf{N}(T) = \mathbf{N}(T)^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S$.*

Démonstration. De par l'inclusion du lemme précédent (morphisme de $(\varphi,\Gamma)$-modules), nous avons $\mathcal{N} \subset N^* \otimes_W S_0$. Par conséquent, $\mathcal{N}$ est un $S_0$-module de type fini, en tant que sous-module d'un module de type fini sur un anneau noetherien.

De plus, $\mathcal{N}[\frac{1}{p}] = (\mathbf{N}(T)[\frac{1}{p}])^{\Gamma_f}$ est alors un $S_0[\frac{1}{p}]$ module de type fini sans torsion, $S_0[\frac{1}{p}]$ est principal, donc $\mathcal{N}[\frac{1}{p}]$ est libre ; notons $m$ son rang. Comme $\mathcal{N}[\frac{1}{p}] \subset N^* \otimes_W S_0[\frac{1}{p}]$, nous avons $m \leq \mathrm{rg}_W(N)$. Le quotient $\mathcal{N}[\frac{1}{p}]/\pi_0$ est alors un $\mathcal{K}$-espace vectoriel de dimension $m$.

Considérons alors la projection Proj : $\mathbf{N}(T)[\frac{1}{p}] \to \mathbf{N}(T)[\frac{1}{p}]/\pi$, et pour tout $x \in \mathbf{N}(T)[\frac{1}{p}]$, posons $y_x = \frac{1}{|\Gamma_f|} \sum\limits_{\gamma \in \Gamma_f} \gamma(x)$ (c'est bien défini, car la somme est finie, et $|\Gamma_f|$ est inversible dans $W$). Alors $\mathrm{Proj}(y_x) = \mathrm{Proj}(x)$ car l'action de $\Gamma_f$ est triviale modulo $\pi$ ; de plus $y_x \in \mathcal{N}[\frac{1}{p}]$ (et si $x \in \mathbf{N}(T)$, $y_x \in \mathcal{N}$). Comme $\pi_0\mathcal{N}[\frac{1}{p}] \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Proj})$, nous obtenons un morphisme surjectif $\mathcal{K}^m \simeq \mathcal{N}[\frac{1}{p}]/\pi_0 \to \mathbf{N}(T)[\frac{1}{p}]/\pi \simeq \mathcal{K}^{\mathrm{rg}_W(N)}$, et comme $m \leq \mathrm{rg}_W(N)$, c'est un isomorphisme et $m = \mathrm{rg}_W(N)$.

Considérons maintenant $\mathcal{N}$ : soit $x, y \in \mathcal{N}$ tels qu'il existe $\alpha > 0$ avec $x = \pi_0 \frac{y}{p^\alpha}$. Alors, $x \in \mathbf{N}(T)$, $p^\alpha x \in \pi_0 \mathbf{N}(T)$, et $\mathbf{N}(T)$ est un $S$-module libre, donc $x \in \pi_0 \mathbf{N}(T)$ (car un élément de $\pi_0 S$ divisible par $p^\alpha$ est dans $\pi_0 p^\alpha S$ puisque $\pi_0$ se réduit sur $\pi^{p-1}$ modulo $p$). Comme $x$ et $\pi_0$ sont fixés par $\Gamma_f$, nous avons $x \in \pi_0\mathcal{N}$. Nous obtenons donc que $\mathcal{N} \cap \pi_0\mathcal{N}[\frac{1}{p}] = \pi_0\mathcal{N}$, et donc $\mathcal{N}/\pi_0$ s'injecte dans $\mathcal{N}[\frac{1}{p}]/\pi_0$.

Le $W$-module $\mathcal{N}/\pi_0$ est alors de type fini (puisque $\mathcal{N}$ l'est) et s'injecte dans un $\mathcal{K}$-espace vectoriel de dimension finie, donc est sans torsion, donc il est libre sur $W$. En relevant une base de $\mathcal{N}/\pi_0$, nous obtenons une base de $\mathcal{N}$ (car $S_0$ est complet pour la topologie $\pi_0$-adique), et donc $\mathcal{N}$ est un $S_0$-module libre, de rang $\mathrm{rg}_W(N)$ (puisque c'est le rang de $\mathcal{N}[\frac{1}{p}]$).

Or, $W^{\mathrm{rg}_W(N)} \simeq \mathcal{N}/\pi_0$ se surjecte (via l'application Proj) sur $\mathbf{N}(T)/\pi \simeq W^{\mathrm{rg}_W(N)}$, donc c'est un isomorphisme. Nous en déduisons deux faits importants :

- le $\Phi$-module filtré $\mathcal{N}/\pi_0$ est isomorphe à $\mathbf{N}(T)/\pi$, qui est lui-même isomorphe à $N$ par le théorème III.4.4 de [**Ber04**] ;
- $\mathcal{N} \otimes_{S_0} S = \mathbf{N}(T)$ (par le lemme de Nakayama).

□

Utilisons alors le fait que le foncteur $\mathrm{F}$ est essentiellement surjectif (à cause de l'hypothèse sur $h$) pour dire que $\mathcal{N}$ est isomorphe en tant que $(\varphi, \Gamma_0)$-module à $\mathrm{F}(N^*)$, donc $\mathbf{N}(T)$ est isomorphe au $(\varphi, \Gamma)$-module $N^* \otimes_W S$. Notons $i$ cet isomorphisme.

Remarquons que $\mathbf{N}(T) \otimes_S \mathcal{O}_\mathcal{E} = \mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(T) = N^* \otimes_W \mathcal{O}_\mathcal{E}$, car une représentation cristalline est de hauteur finie. Par conséquent, $i$ induit un isomorphisme de $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(T)$ qui envoye $\mathbf{N}(T)$ sur $N^* \otimes_W S$, et comme il préserve $D^+(T)$, nous obtenons bien $N^* \otimes_W S \subset D^+(T)$, donc $N^* \otimes_W S = \mathbf{N}(T)$ car il vérifie toutes les conditions de la définition du module de Wach. □

Nous pouvons mettre en valeur le dernier argument en disant :

Lemme III.4.6. *Soit $T$ une $\mathbb{Z}_p$-représentation cristalline à poids de Hodge-Tate négatifs, alors tout isomorphisme de $(\varphi, \Gamma)$-module de $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(T)$ préserve $\mathbf{N}(T)$. De plus, si $\mathcal{N}$ est un $S$-sous $(\varphi, \Gamma)$-module de $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(T)$ isomorphe (comme $(\varphi, \Gamma)$-module sur $S$) à $\mathbf{N}(T)$, il est égal à $\mathbf{N}(T)$.*

Nous pouvons alors en déduire la proposition qui nous intéresse :

PROPOSITION III.4.7. *Soit $N_{i,j}$ des objets de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$, $L$ un sous-objet (dans $\mathbf{MF_W^{-}}$) facteur direct (comme $W$-module) de $M = \bigoplus_i \otimes_j N_{i,j}$. Alors les isomorphismes de modules de Wach*

$$\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(g_{N_{i,j}}) : N_{i,j} \otimes_W S \to \mathbf{N}(\mathbf{V_{cris}}(N_{i,j}))$$

*induisent un isomorphisme de module de Wach*

$$L \otimes_W S \to \mathbf{N}(\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L))$$

*où $\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L) := \mathbf{V_{cris,p}}(D_L) \cap \bigoplus_{i=1}^{n} \otimes_{j=1}^{m_i} \mathbf{V_{cris}}(N_{i,j})$.*

DÉMONSTRATION. Les isomorphismes $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(g_{N_{i,j}})$ induisent un isomorphisme

$$\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(g_M) := \bigoplus_{i=1}^{n} \otimes_{j=1}^{m_i} \mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(g_{N_{i,j}}) : M \otimes_W S \to \mathbf{N}(\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M))$$

(puisque le module de Wach préserve le produit tensoriel). Par dualité, il suffit de voir que si $L_0 = M/L$, alors $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(g_M)$ induit un isomorphisme de $\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L_0^*)$ sur $L_0^* \otimes_W S$.

La proposition III.2.16 nous donne que $L_0^* \otimes_W S_0$ est stable par l'action de $\Gamma_0$ (et cette action est triviale modulo $\pi_0$ car c'est le cas sur $M^* \otimes_W S$ et $L_0^*$ est facteur direct comme $W$-module). Donc, nous pouvons considérer la sous-représentation galoisienne $T$ de $\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M)^*$ définie par $T = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(L_0^* \otimes_W \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$. Montrons que $\mathbf{N}(T) = L_0^* \otimes_W S$ (via $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(g_M)$) :

- $L_0^* \otimes_W S \subset T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \cap (\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M)^* \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_S^+)^{H_{\mathcal{K}}} = \mathbf{D}^+(T)$ (car $\mathbf{N}(\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M)^*) = M^* \otimes_W S$ par fonctorialité du module de Wach (et via l'isomorphisme $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(g_M)$) et donc $M^* \otimes_W S \subset \mathbf{D}^+(\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M)^*)$) ;
- $L_0^* \otimes_W S$ est un $S$-module libre de rang égal à celui de $T$ sur $\mathbb{Z}_p$ (qui est celui de $L \otimes_W \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, donc celui de $L$ sur $W$) ;
- l'action de $\Gamma$ laisse stable $L_0^* \otimes_W S$ (c'est la proposition III.2.16) et est triviale modulo $\pi$ (puisque $L_0^*$ est facteur direct comme $W$-modules) ;
- il existe $r$ un entier positif tel que $\pi^r \mathbf{D}^+(\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M)^*) \subset M^* \otimes_W S$ (via l'isomorphisme $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(g_M)$), donc ce $r$ donne $\pi^r \mathbf{D}^+(T) \subset M^* \otimes_W S \cap L_0^* \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} = L_0^* \otimes_W S$.

D'où, nous avons bien $\mathbf{N}(T) = L_0^* \otimes_W S$ (via $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(g_M)$).

Puis, une propriété du module de Wach va nous permettre de conclure : $\mathbf{N}(T[\frac{1}{p}])/\pi$ s'identifie à $\mathbf{D_{cris,p}}(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)$ (par le théorème III.4.4 de [**Ber04**]), et l'application $g_M$ envoie $\mathbf{N}(T)/\pi$ sur $L_0^*$, donc nous avons bien que $\mathbf{D_{cris,p}}(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) = L_0^* \otimes_W \mathcal{K}$, donc que $T = \overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L_0^*)$. □

REMARQUE III.4.8. *Si $M'$ est le quotient du $L$ considéré dans la proposition III.4.7 par le sous-objet $L'$ (facteur direct comme $W$-module), alors $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(g_M) : L \otimes_W S \to \mathbf{N}(\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L))$ (qui induit aussi un isomorphisme $L' \otimes_W S \to \mathbf{N}(\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L'))$) induit par passage au quotient un isomorphisme $M' \otimes_W S \to \mathbf{N}(\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M'))$.*

Traduisons cette proposition en terme de Φ-modules filtrés sur $\mathcal{K}$ :

Corollaire III.4.9. *Soit $D$ un objet de la catégorie engendrée par $D_M$ (pour les opérations produit tensoriel, somme directe, sous-objet et objet quotient) pour $M$ un objet de $\mathbf{MF^h_W}$ avec $0 \le h \le p-2$, alors il existe une action de $\Gamma_0$ sur $D \otimes_{\mathcal{K}} S_0[\frac{1}{p}]$ fonctorielle telle que $\mathbf{N}(\mathbf{V_{cris,p}}(D))$ est isomorphe à $D \otimes_{\mathcal{K}} S[\frac{1}{p}]$ comme $(\varphi, \Gamma)$-module (où la structure de $\varphi$-module provient d'un analogue sur $\mathcal{K}$ de la proposition III.2.2).*

De la proposition III.4.7 nous déduisons la dernière partie de la démonstration du théorème III.1.1 :

Proposition III.4.10. *Pour $0 \le h \le p-2$ fixé, pour tout uplet d'objets $(N_{i,j})_{1\le j\le n,\, 1\le i\le n_j}$ de $\mathbf{MF^{-h}_W}$, pour tout sous-Φ-module filtré $L$ facteur direct (comme $W$-module) de $\bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} N_{i,j}$, l'application $\bigoplus \otimes \mathsf{f}_{N_{i,j}}$ envoie $\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} = \big(\mathbf{V_{cris,p}}(D_L) \cap \bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} \mathbf{V_{cris}}(N_{i,j})\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ bijectivement sur $L \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$.*

Démonstration. Comme corollaire de la proposition III.4.7, l'inverse de la fonction $\psi^{-1}_{\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathbf{V_{cris}}(N))} \circ \big(\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(g_N) \otimes \mathrm{Id}\big)$ vérifie la propriété recherchée, car $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(g_N)$ envoie $L \otimes_W S$ sur $\mathbf{N}(\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L))$, donc $L \otimes_W \mathcal{O}_\mathcal{E}$ sur $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(L))$. Il suffit alors de remarquer que $\mathsf{f}_N = \psi_{\mathrm{F}^-(N)} \circ \big(g_N^{-1} \otimes \mathrm{Id}\big) = \big(\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(g_N^{-1}) \otimes \mathrm{Id}\big) \circ \psi_{\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathbf{V_{cris}}(N))}$ par commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V_{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \arrow[r, "g_N^{-1} \otimes \mathrm{Id}"] \arrow[d, "\psi_{\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathbf{V_{cris}}(N))}"] & \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}^-(N)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \arrow[d, "\psi_{\mathrm{F}^-(N)}"] \\
\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathbf{V_{cris}}(N)) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \arrow[r, "\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(g_N^{-1}) \otimes \mathrm{Id}"'] & \mathrm{F}^-(N) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}
\end{tikzcd}$$

puisque $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}^-(N))) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} = \mathrm{F}^-(N) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$, et $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathbf{D}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathbf{V_{cris}}(N))) = \mathbf{V_{cris}}(N)$. □

## III.5. $\mathsf{f}_N$ et le dual

Pour la suite, nous aurons besoin de définir $\mathsf{f}_N$ pour $N$ ayant des poids à la fois positifs et négatifs (par exemple si $N = \mathrm{End}(M)$ pour $M$ un objet de $\mathbf{MF^{-h}_W}$).

Appelons $W[-h]$ l'objet de $\mathbf{MF^{-h}_W}$ dont le $W$-module sous-jacent est $W$, avec $\mathrm{Fil}^i(W[-h]) = \begin{cases} W \text{ si } i \le -h \\ 0 \text{ si } i > -h \end{cases}$ et $\varphi^{-h}(x) = \sigma(x)$. Rappelons que $\mathbb{Z}_p(h)$ est la représentation galoisienne $\mathbb{Z}_p(1)^{\otimes h}$ pour $h \ge 0$ (et $\mathbb{Z}_p(h) = \mathbb{Z}_p(-h)^*$ si $h \le 0$), et que $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}(h) = \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(h)$. Nous pouvons alors définir :

Définition III.5.1. *Supposons* $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$. *Posons* $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N) = \mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N \otimes W[-h]) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-h)$ *pour* $N$ *objet de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, *et* $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(f) = \mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(f)$ *restreinte à* $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N)$ *pour* $f : N \to N'$ *flèche de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$. *Pour tout objet* $N$ *de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$ *nous pouvons définir* $\overline{\mathsf{f}}_N$ *de la façon suivante : remarquons que* $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} = \big(\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N \otimes W[-h]) \otimes \mathbb{Z}_p(-h)\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} = \big(\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N \otimes W[-h]) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}\big) \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}(-h)$, *et notons* $\mathsf{f}_h = {}^t\mathsf{f}^{-1}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}[-h]}$, *alors* $\overline{\mathsf{f}}_N$ *est l'isomorphisme*

$$\begin{array}{ccc}\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} & \xrightarrow{\mathsf{f}_{N\otimes W[-h]} \otimes \mathsf{f}_h} & \big((N \otimes W[-h]) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}\big) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}[h] \\ & & \downarrow \\ & & N \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}\end{array}$$

Nous avons bien que $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N) \simeq \mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(W[-h]) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-h) \simeq \mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N)$ de manière naturelle pour $N$ un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$, car $N \otimes W[-h]$ est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-2\mathbf{h}}$, et comme $2h \leq p-2$, nous pouvons appliquer la propriété II.3.1.

Un quasi-inverse de $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}$ est donné par $\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(V) = \mathbf{D}_{\mathbf{cris}}(V \otimes \mathbb{Z}_p(h)) \otimes_W W[h]$. Une façon naturelle de voir $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N)$ dans $N \otimes_W A_{cris}$ est de dire que

$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N) = \mathrm{Fil}^0(N \otimes_W t^{-h} A_{cris})^{\Phi} t^{-h}$$

Avant de continuer de regarder les propriétés de $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}$, introduisons $\overline{g}_N$ pour $N$ un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$ si $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$ de la même façon que précédemment. De la proposition III.4.7 et de la remarque III.4.8, nous déduisons :

Corollaire III.5.2. *Pour tout uplet d'objets* $(N_{i,j})_{1\leq j\leq n,\, 1\leq i\leq m}$ *de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$ *avec* $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$, *pour tout sous-objet* $L$ *facteur direct (comme* $W$*-module) de* $\bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{m} N_{i,j}$ *et pour tout quotient* $M$ *de* $L$, *les applications* $\overline{g}_{N_{i,j}}$ *induisent un isomorphisme de représentations de* $\Gamma_{\mathcal{K}}$, *de* $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}}}(\mathrm{F}^-(M \otimes W[-mh])) \otimes \mathbb{Z}_p(-mh)$ *sur un réseau de* $\mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(D_M)$ *(qui est l'image de* $\mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(D_L) \cap \bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N_{i,j})$ *par l'application projection).*

Puis, pour l'étude vis à vis du dual, montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme III.5.3. *Pour tout objet* $N$ *de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$ *avec* $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$ *tel que* $N \otimes N^*$ *est un objet de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{k}}$ *avec* $0 \leq k \leq \frac{p-2}{2}$, *l'application surjective naturelle*

$$N \otimes N^* \xrightarrow{\pi} W$$

*induit un isomorphisme*

$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N^*) \simeq \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N)^*$$

*dont le crochet de dualité correspond à* $\mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(\pi)$.

Démonstration. La filtration de $N$ est de longueur finie, c'est-à-dire qu'il existe des entiers $n_1$ et $n_2$ dans $\mathbb{Z}$ avec $\mathrm{Fil}^{n_1}(N) = N$, $\mathrm{Fil}^{n_1+1}(N) \neq N$, $\mathrm{Fil}^{n_2}(N) \neq \{0\}$, $\mathrm{Fil}^{n_2+1}(N) = \{0\}$, et puisque $N$ est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, nous avons $\frac{2-p}{2} \leq -h \leq n_1 \leq n_2 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$. De la même façon, il existe $n_1^*$ et $n_2^*$ pour $N^*$, qui valent $n_1^* = -n_2$ et $n_2^* = -n_1$. Par conséquent, la condition que $N \otimes N^*$ est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{k}}$ avec $0 \leq k \leq \frac{p-2}{2}$ donne $\frac{2-p}{2} \leq -k \leq n_1 - n_2 \leq n_2 - n_1 \leq k \leq \frac{p-2}{2}$. Donc il existe $l \in \mathbb{N}$ et $l' \in \mathbb{N}$ tels que $N \otimes W[-l]$ et $N^* \otimes W[-l']$ soient des objets de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{k}'}$ avec $0 \leq k' \leq \frac{p-2}{2}$, et $l + l' \leq \frac{p-2}{2}$ (il suffit de prendre $l = n_2$ si $n_2 \geq 0$, et $l = 0$ sinon, avec $l' = -n_1$ si $n_1 \leq 0$, et $l' = 0$ sinon).

Puis, $W$ désigne l'objet trivial de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, et donc $\pi$ induit une application $\mathrm{F}^-(N \otimes W[-l])) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \mathrm{F}^-(N^* \otimes W[-l']) \to \mathcal{O}_\mathcal{E}[-(l+l')]$, dont l'application linéaire sous-jacente est toujours celle obtenue par le crochet de dualité (c'est juste $\pi \otimes \mathrm{Id}$), donc induit un isomorphisme entre le dual de $\mathrm{F}^-(N \otimes W[-l])) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \mathcal{O}_\mathcal{E} e_l$ et $\mathrm{F}^-(N^* \otimes W[-l'])) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \mathcal{O}_\mathcal{E} e_{l'}$ (où $\varphi(e_r) = q^r e_r$ et $g(e_r) = \frac{\mathcal{X}(g)^{-r}\pi^{-r}}{g(\pi^{-r})}$ pour $g \in \Gamma$). Cet isomorphisme de $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-modules est en fait un isomorphisme de $(\varphi, \Gamma)$-module, car $\mathrm{F}^-(\pi \otimes \mathrm{Id})$ est un morphisme de $(\varphi, \Gamma)$-modules. Comme $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ préserve le dual, en notant $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(N) = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}^-(N \otimes W[-l])) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-l) = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}\left(\mathrm{F}^-(N \otimes W[-l]) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \mathcal{O}_\mathcal{E} e_l\right)$ et $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(N^*) = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}^-(N \otimes W[-l'])) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-l') = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}\left(\mathrm{F}^-(N^* \otimes W[-l']) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \mathcal{O}_\mathcal{E} e_{l'}\right)$, nous avons que l'application $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\pi)$ identifie le dual de $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(N)$ (comme représentation de $\Gamma_\mathcal{K}$) à $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(N)^*$.

Or, $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(N)$ est isomorphe à $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N)$ (via $\overline{g}_N$) et $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(N^*)$ est isomorphe à $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N^*)$ (via $\overline{g}_{N^*}$), car $N \otimes W[-l]$ et $N^* \otimes W[-l']$ sont des objets de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{k}'}$ avec $0 \leq k' \leq \frac{p-2}{2}$. Pour conclure, il suffit d'invoquer la commutativité du diagramme suivant (d'après l'affirmation 1 du théorème III.3.1) car $N \otimes N^* \otimes W[-(l+l')]$ est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{k}''}$ avec $0 \leq k'' \leq p-2$ :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(N) \otimes \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(N^*) \arrow[r, "\overline{g}_N \otimes \overline{g}_{N^*}"'] \arrow[d, "\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\pi)"'] & \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N) \otimes \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N^*) \arrow[d, "\mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(\pi)"'] \\
\mathbf{V}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathrm{F}^-(W)) \arrow[r, "\overline{g}_W"'] & \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(W)
\end{tikzcd}$$

□

Remarque III.5.4. *La même démonstration donne que $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N^*)$ est isomorphe à $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N)^*$ dès que $N$ est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$ pour $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$, mais nous perdons que $N \otimes N^* \otimes W[-(l+l')]$ est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{k}''}$ avec $0 \leq k'' \leq p-2$, donc la commutativité du diagramme n'est plus justifiée par le théorème III.3.1 et cette démonstration ne donne donc pas que le crochet de dualité est bien $\mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(\pi)$.*

*Par contre, le lemme s'applique pour les cas particuliers où $N$ est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$, ou de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$.*

Nous en déduisons alors :

LEMME III.5.5. *Sous les conditions du lemme III.5.3, l'application* $\overline{\mathsf{f}}_N$ *est fonctorielle vis à vis du dual, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N)^* \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \arrow[r, "({}^t\overline{\mathsf{f}}_N)^{-1}"] \arrow[d] & N^* \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \arrow[d] \\
\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N^*) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \arrow[r, "\overline{\mathsf{f}}_{N^*}"] & N^* \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}
\end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. La démonstration précédente montre que $\overline{g}_N$ est fonctorielle vis à vis du dual, ce qui donne le résultat pour $\overline{\mathsf{f}}_N$. □

D'où, en rassemblant tout ceci, nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME III.5.6. *Soit* $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$, *et notons* $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ *le foncteur exact de la catégorie* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$ *vers la catégorie des* $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$*-modules libres de rang fini, défini par : si* $N$ *objet de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, $\widetilde{\mathcal{F}}_1(N) = \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$. *Alors il existe* $\overline{\mathsf{f}}$ *un isomorphisme de foncteurs entre* $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$, *préservant le dual pour les objets* $N$ *tels que* $N \otimes N^*$ *soit encore un objet de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$. *Nous pouvons supposer de plus :*
– *pour tous objet* $N$ *et* $N'$ *de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, *tel que* $N \otimes N'$ *soit encore un objet de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, $\overline{\mathsf{f}}_{N\otimes N'} = \overline{\mathsf{f}}_N \otimes \overline{\mathsf{f}}_{N'}$ ;
– *pour tout uplet d'objets* $(N_{i,j})_{1\leq j\leq n,\, 1\leq i\leq n_j}$ *de* $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, *pour tout sous-*$\Phi$*-module filtré* $L$ *facteur direct (comme* $W$*-module) de* $\displaystyle\bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} N_{i,j}$, *l'application* $\bigoplus \otimes \overline{\mathsf{f}}_{N_{i,j}}$ *envoie* $\displaystyle(\mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(D_L) \cap \bigoplus_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{n_j} \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N_{i,j})) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ *bijectivement sur* $L \otimes_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$.

REMARQUE III.5.7. *Le même théorème dans* $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{\pm\mathbf{h}}$ *est vrai.*

## III.6. Tore de l'inertie modérée

Notons, pour $s \in \mathbb{N}^*$, $T_s$ le groupe algébrique sur $\mathbb{Z}_p$ tel que pour $R$ une $\mathbb{Z}_p$-algèbre, $T_s(R)$ soit le groupe $(R \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^s})^*$ des éléments inversibles de la $R$-algèbre $R \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^s}$. Le groupe $T_s \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est donc la restriction des scalaires à la Weil du tore $\mathbb{G}_{m/\mathbb{Q}_{p^s}}$ de $\mathbb{Q}_{p^s}$ à $\mathbb{Q}_p$. Soit $\rho : \Gamma_{\mathcal{K}} \to GL(U)$ une représentation continue (pour $U$ un $\mathbb{Z}_p$-module libre de type fini), nous allons construire une représentation $\rho_{mr}$ du tore $T_s$ (associée à $\rho$) pour un $s$ bien choisi à partir de l'image de l'inertie modérée (une fois choisie une section de l'inertie modérée dans l'inertie), et nous donnerons le lien entre $\rho_{mr}$ et $\rho_{\mathbf{MF}}$ (voir le paragraphe II.1 pour la définition de $\rho_{\mathbf{MF}}$) pour les modules élémentaires.

**III.6.a. Rappels sur la restriction des scalaires.** Considèrons $\mathbb{G}_{m/\mathbb{Q}_{p^s}}$, le groupe multiplicatif usuel, et appliquons-lui l'opération de restriction des scalaires de $\mathbb{Q}_{p^s}$ à $\mathbb{Q}_p$ comme l'a défini Weil dans [**Wei82**]. Le foncteur obtenu est $T_s \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ (que nous noterons encore $T_s$) défini sur $\mathbb{Q}_p$ par $T_s(R) = (R \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s})^*$ pour $R$ une

$\mathbb{Q}_p$-algèbre. C'est un groupe algébrique (voir par exemple [**BLR90**]), et en fait un tore de dimension $s$. En effet, si $R$ est une $\mathbb{Q}_{p^s}$-algèbre, alors

$$T_s(R) \simeq \prod_{\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{p}^s}/\mathbb{Q}_{\mathrm{p}})} (R^\gamma)^* \simeq \prod_{\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{p}^s}/\mathbb{Q}_{\mathrm{p}})} {}^\gamma\mathbb{G}_{m/\mathbb{Q}_p}(R) \tag{III.6.1}$$

(cet isomophisme provient de la théorie de la descente galoisienne (voir Bourbaki A.V.10.4)). Donnons alors une description du groupe des caractères de $T_s$ : c'est le $\mathbb{Z}$-module libre de base les $\mathcal{X}_\gamma$ pour $\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{p}^s}/\mathbb{Q}_{\mathrm{p}})$, où $\mathcal{X}_\gamma$ est défini sur $T_s(R)$ par $\mathcal{X}_\gamma(r \otimes \lambda) = \gamma(\lambda)r$ ($\mathcal{X}_\gamma$ est juste la projection canonique sur la composante $\gamma$, car l'isomorphisme associe à $r \otimes \lambda$ le $s$-uplet $(\gamma(\lambda)r)$).

Il nous reste alors à décrire l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_{\mathrm{p}}}/\mathbb{Q}_{\mathrm{p}})$ sur l'ensemble des caractères, puisque notre tore est défini sur $\mathbb{Q}_p$. Pour $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_{\mathrm{p}}}/\mathbb{Q}_{\mathrm{p}})$, $\tau\mathcal{X}_\gamma = \mathcal{X}_{\tau\gamma}$. Donc, l'ensemble des caractères est $X^*(T_s) = \mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{p}^s}/\mathbb{Q}_{\mathrm{p}})]$. Il s'identifie à $X_s$.

Notons $\mathbf{T} = \varprojlim T_s$ où les morphismes de transition sont induits par la norme. Alors $\mathbf{T} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est un protore de groupe des caractères $X$.

**III.6.b. Etude de l'image de l'inertie modérée.** L'inertie modérée est un quotient du groupe de Galois que nous considèrons : la suite exacte $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{I} \to \mathcal{I}_{mr} \to 0$ définit l'inertie modérée $\mathcal{I}_{mr}$ (où $\mathcal{I}$ est le groupe d'inertie (dans le cas exposé ici, $\mathcal{I} = \Gamma_{\mathcal{K}}$), et $\mathcal{P}$ la partie sauvagement ramifiée). L'existence d'une section à cette suite exacte provient d'une proposition sur les groupes finis (toute extension de groupes finis d'ordre premiers entre eux est scindé (voir th. 15.2.2 de [**Hal76**], ou I 18.1 du tome 1 de [**Hup67**])), et de ce qu'une limite projective d'ensembles finis non vides est non vide (voir Bourbaki E III 7.4 théorème 1). De plus, toutes les sections sont conjuguées entre elles (voir 18.2 du tome 1 de [**Hup67**]).

Pour toute la suite, fixons-nous une section $\eta : \mathcal{I}_{mr} \to \mathcal{I}$ de l'inertie modérée.

La structure de $\mathcal{I}_{mr}$ est bien connue : $\mathcal{I}_{mr} \simeq \prod_{l \neq p} \mathbb{Z}_l$, et il existe $\tau$ tel que $\mathbb{Z}\tau$ est dense dans $\mathcal{I}_{mr}$ ; $\tau$ est alors appelé un générateur topologique de $\mathcal{I}_{mr}$. Rappelons le lemme suivant (cf. Annexe V.1) :

LEMME III.6.2. *Toute représentation continue $\rho'$ de l'inertie modérée dans un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini est semi-simple : $\rho'(\tau)$ est d'ordre fini, premier à $p$.*

Son ordre est l'ordre de la matrice réduite modulo $p$ (voir l'annexe V.1). Alors, le groupe engendré par $\tau$, $H$, est fini d'ordre premier à $p$ et diagonalisable (et les valeurs propres sont des racines de l'unité). $H$ est fini, donc fermé pour la topologie $p$-adique, donc comme $\rho'$ est continue pour la topologie $p$-adique, l'image de $\mathcal{I}_{mr}$ est incluse dans $H$. L'action de l'inertie modérée est alors décomposée en caractères connus (voir [**Ser72**]).

**III.6.c. La représentation de $T_s$.** Dans le cas d'une représentation cristalline abélienne $V$ sur $\mathbb{Q}_p$, nous savons qu'il existe une représentation de $\mathbf{T}$ (qui se factorise par un $T_s$ pour un certain $s$) qui décrit la catégorie tannakienne engendrée par $V$, et le groupe à un paramètre correspondant au plongement de $\mathbb{G}_m$ sur la composante identité dans $T_s(R) \simeq \prod_{\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^s}/\mathbb{Q}_p)} (R^\gamma)^*$ permet de décrire $\mathbf{D_{cris,p}}(V)$ (cf. [**Win91**]). Dans le cas d'une représentation non cristalline, J.-P. Wintenberger à construit une généralisation de ce tore pour les $\Phi$-modules filtrés (c'est la représentation $\rho_{\mathbf{MF}}$ donnée par la graduation indexée sur $X$ d'un objet de $\mathbf{MF_{W,tf}}$ décrit au paragraphe II.1). Nous allons présenter ici la manière de construire une représenation $\rho_{mr}^U$ pour une représentation cristalline $U$ que nous supposerons à poids de Hodge-Tate dans $[\![0, p-2]\!]$. Pour cela, nous partirons de l'image de l'inertie modérée.

De manière générale, soit $\rho$ une représentation continue de $\mathcal{I}$ dans un $\mathbb{Z}_p$-module libre $U$ de rang $h$, et fixons-nous une section de l'inertie modérée. Soit $\rho'$ la représentation continue de $\mathcal{I}_{mr}$ obtenue en composant $\rho$ avec la section considérée. Regardons alors $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_h$ les valeurs propres de $\rho'(\tau)$ (comptées avec multiplicité) où $\tau$ est un générateur topologique de $\mathcal{I}_{mr}$. C'est un ensemble stable par l'action de Galois car $\rho'(\tau)$ est défini sur $\mathbb{Z}_p$ (c'est-à-dire que $\forall i$, $\exists j | \varepsilon_i^p = \varepsilon_j$ (il suffit de regarder l'action du Frobenius absolu puisque $\rho'(\tau)$ est diagonalisable sur $\mathbb{Z}_p^{nr}$)). Soit $\mathbb{Q}_{p^s}$ le plus petit surcorps non ramifié de $\mathbb{Q}_p$ contenant tous les $\varepsilon_i$ (c'est-à-dire que $\mathbb{F}_{p^s} = \mathbb{F}_p[\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_h]$). Si $\varepsilon$ est un générateur de $\mathbb{F}_{p^s}^*$, alors

$$\forall\, i, \exists \alpha_i \in [\![0, p^s - 1[\![ | \varepsilon_i = \varepsilon^{\alpha_i}$$

La représentation $\rho'$ nous permet donc de définir une représentation $\alpha'$ de $\mathbb{F}_{p^s}^*$ dans $U$ telle que $\alpha'(\varepsilon^{-1}) = \rho'(\tau)$. Nous cherchons alors à trouver une représentation $\rho_{mr}$ de $T_s$ dans $U$ telle que l'inclusion $\mathbb{F}_{p^s}^* \subset T_s(\mathbb{Z}_p)$ composée avec $\rho_{mr}$ nous redonne $\alpha'$.

Remarque III.6.3. *Vouloir que $\alpha'(\varepsilon^{-1}) = \rho'(\tau)$ plutôt que $\alpha'(\varepsilon) = \rho'(\tau)$ permettra de prendre en compte que pour $V$ représentation cristalline à poids de Hodge-Tate positifs, les sauts de la filtration de $\mathbf{D_{cris,p}}(V)$ sont négatifs (puisque ce sont les opposés des poids de Hodge-Tate).*

Se donner une représentation rationnelle sur $U$ de $T_s$ revient à se donner un ensemble de caractères $(\mathcal{X}_i)$ définis sur l'anneau des entiers $\overline{\mathbb{Z}_p}$ de la cloture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$ de $\mathbb{Q}_p$, stable par l'action de $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$, et des sous-espaces de $U_{\overline{\mathbb{Z}_p}} = \overline{\mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_p} U$, $U_{\mathcal{X}_i}$, tels que $U_{\overline{\mathbb{Z}_p}} = \oplus U_{\mathcal{X}_i}$ et $\forall \gamma \in \Gamma_{\mathbb{Q}_p}, \gamma(U_{\mathcal{X}_i}) = U_{\gamma(\mathcal{X}_i)}$.

Dans ce cas, si

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{s-1} a_j^{(i)} p^j$$

avec $a_j^{(i)} \in [\![0, p-1]\!]$, prenons

$$\mathcal{X}_{\varepsilon_i} = \prod_{j=0}^{s-1} \mathcal{X}_{\sigma^j}^{-a_j^{(i)}}$$

où $\mathcal{X}_{\sigma^j}$ est le caractère de $T_s$ défini par : pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre $R$, pour tout élément $\sum x_i \otimes \lambda_i$ de $T_s(R) = (R \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^s})^*$, $\mathcal{X}_{\sigma^j}(\sum x_i \otimes \lambda_i) = \sum \sigma^j(\lambda_i) x_i$. En identifiant les caractères de $T_s$ à $X_s$, pour avoir l'identification des actions du Frobenius comme décrit précédemment, nous devons poser $\mathcal{X}_{\varepsilon_i}$ le caractère correspondant à $\xi \in X_s$ défini par $\xi(-j) = -a_j^{(i)}$.

Pour tout $i$, soit $v_i \in U_{\mathbb{Z}_{p^s}}$ un vecteur propre de $\rho'(\tau)$ associé à $\varepsilon_i$ tel que la famille $(v_i)_i$ est une base de $U_{\mathbb{Z}_{p^s}}$. Alors comme $\rho'(\tau)$ est défini sur $\mathbb{Z}_p$, les $U_{\varepsilon_i} = \overline{\mathbb{Z}_p} v_i$ vérifient : $U_{\overline{\mathbb{Z}_p}} = \oplus U_{\varepsilon_i}$ et $\gamma(U_{\varepsilon_i}) = U_{\gamma(\varepsilon_i)}$ pour tout $\gamma \in \Gamma_{\mathbb{Q}_p}$. Est-ce vrai que $\gamma(\mathcal{X}_{\varepsilon_i}) = \mathcal{X}_{\gamma(\varepsilon_i)}$ ? Comme les caractères intervenant ici sont définis sur $\mathbb{Z}_p^{nr}$, il suffit de vérifier ceci pour $\gamma = \sigma$. Alors, grâce à la formule donnée de l'action sur les caractères de $T_s$, il suffit de voir que pour tout $\alpha_i = \sum_{j=0}^{s-1} a_j^{(i)} p^j$, il existe $k$ tel que

$$\varepsilon_k = \varepsilon^{a_{s-1} + \sum_{j=0}^{s-2} a_j^{(i)} p^{j+1}}$$

Nous avons $\varepsilon^{p^s} = \varepsilon$ (car $\varepsilon$ est dans $\mathbb{F}_{p^s}$), donc

$$\varepsilon_i^p = \varepsilon^{a_{s-1} + \sum_{j=0}^{s-2} a_j^{(i)} p^{j+1}}$$

qui est bien dans la liste des valeurs propres, comme remarqué précédemment.

Ceci définit alors une représentation $\rho_{mr}$ de $T_s$ dans $GL(U)$ définie sur $\mathbb{Z}_p$, qui étend bien la représentation $\alpha'$. Appelons ${\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}}^U$ (ou bien $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ s'il n'y a pas ambiguité ) le tore image de cette représentation dans $GL_U$.

Remarque III.6.4. *Dans le cas d'une représentation cristalline abélienne $V$ sur $\mathbb{Q}_p$, la représentation de $\mathbf{T} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ caractérisant $V$ est donnée par la même formule que ci-dessus, à la différence que les $a_j^{(i)}$ qui interviennent sont les poids de Hodge-Tate (donc non necessairement dans $[\![0, p-2]\!]$), et seuls leurs réductions modulo $p$ peuvent s'interpréter à l'aide de l'image de l'inertie modérée. C'est pourquoi la méthode exposée ici ne conviendra que pour des représentations cristallines à poids de Hodge-Tate dans $[\![0, p-1]\!]$ non tous égaux à $p-1$.*

### III.6.d. Lien entre $\rho_{mr}$ et $\rho_{\mathbf{MF}}$.

Proposition III.6.5. *Soit $N$ un objet élémentaire de $\mathbf{MF_k^{-h}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$, alors le conjugué de $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p)$ par $\mathsf{f}_N$ est $\mathcal{T}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p)$. Plus précisement, nous avons pour tout $x \in T_s(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p)$ l'égalité $\rho_{\mathbf{MF}}(x) = \mathsf{f}_N \circ \rho_{mr} \circ \mathsf{f}_N^{-1}(x)$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que si $h \in \mathrm{End}(\mathbf{V_{cris}}(N))$ commute à l'action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$, alors $g = \mathsf{f}_N \circ h \circ \mathsf{f}_N^{-1}$ induit un élément de $\mathrm{End}(N)$ qui préserve la filtration et qui commute à $\Phi$ (car $N$ s'obtient à partir de $\mathbf{V_{cris}}(N)$ de la manière classique $N = (\mathbf{V_{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p)^{\Gamma_{\mathcal{K}}}$ via l'isomorphisme $\mathsf{f}_N$). Par conséquent, $g$ commute à tout élément de $\mathcal{T}$ qui est le groupe correspondant à la catégorie tannakienne engendré par $N$ (cf. [**Win84**] ou la proposition IV.2.1 ci-dessous) car $N$ est élémentaire. Donc $g$ laisse stable les sous-espaces propres définissant $\mathcal{T}$.

D'un autre côté, $\mathsf{f}_N$ préservant les sommes directes, restreignons-nous au cas où $N$ est simple, c'est-à-dire que les $N_\xi$ (le sous-espace où $\mathcal{T}$ agit via le caractère $\xi$) sont de dimension 1 ou 0 sur $k$. Notons $e_\xi$ une base de $N_\xi$. Nous pouvons décrire l'action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ sur $\mathbf{V_{cris}}(N)$ : l'action est abélienne et diagonalisable sur $k$, et les espaces propres sont de dimension 1. Il existe une base $(v_i)$ de $\mathbf{V_{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{F}_p} k$ formée de vecteurs propres pour l'action de Galois. En particulier, si $t \in \mathcal{T}_{\mathrm{mr}}(\mathbb{F}_p)$, $t \in \mathrm{End}(\mathbf{V_{cris}}(N))$ et commute à l'action de Galois (puisque l'action est abélienne), donc $\mathsf{f}_N \circ t \circ \mathsf{f}_N^{-1}$ induit sur $N$ un endomorphisme qui admet les $e_\xi$ comme vecteurs propres (puisqu'il laisse stable les $N_\xi$ qui sont de dimensions 1), et qui commute à $\Phi$. Donc, $\mathsf{f}_N \circ t \circ \mathsf{f}_N^{-1}$ est un élément de $\mathcal{T}(\mathbb{F}_p)$. Cela montre que pour tout $i$, il existe $a_i \in k^*$ avec $\mathsf{f}_N(v_i) = a_i e_{\xi_i}$.

Il faut ensuite voir que pour $v_i$ vecteur propre de l'inertie modérée associée au caractère $\xi$ de la représentation de $T_s$ définissant $\rho_{mr}$, il existe $a_i \in k^*$ tel que $\mathsf{f}_N(v_i) = a_i e_\xi$.

Considérons $\mathsf{f}_N$ : en étendant les scalaires, nous obtenons une application bijective préservant l'action de galois :

$$\mathbf{V_{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p \otimes_R A_{cris}/p) \xrightarrow{\mathsf{f}_N} N \otimes_k (\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p \otimes_R A_{cris}/p)$$

D'autre part, en considérant l'application naturelle $\mathbf{V_{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{F}_p} A_{cris}/p \to N \otimes_k A_{cris}/p$ (provenant de la définition de $\mathbf{V_{cris}}$ et de la multiplication de l'anneau $A_{cris}/p$), et en étendant les scalaires, nous obtenons aussi une flèche (injective non surjective) préservant l'action de galois :

$$\mathbf{V_{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}_p} (A_{cris}/p \otimes_R \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p) \xrightarrow{f_N} N \otimes_k (A_{cris}/p \otimes_R \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p)$$

Lemme III.6.6. *Nous avons l'égalité* $\rho_{\mathbf{MF}}(x) = f_N \circ \rho_{mr} \circ f_N^{-1}(x)$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'article [**Win91**]. Nous allons cependant donner ici une démonstration faisant intervenir les périodes des Lubin-Tate (et plus généralement des modules élémentaires), et des bases adaptées (c'est la notion de base adaptée qui intègre tout l'aspect fonctoriel du résultat de [**Win91**]).

Soit $(e_\xi)$ une base adaptée de $N$, alors une base de $\mathbf{V_{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{F}_p} k$ est $(x(\xi)e_\xi)$ où les $x(\xi)$ sont les périodes intervenants pour $N$ (cf. paragraphe II.2.b). Les $e_\xi$ sont vecteurs propres associés au caractère $\xi$ pour l'action de $\mathcal{T}$, et les $x(\xi)e_\xi$ sont vecteurs propres de l'inertie modérée. Il suffit donc de voir comment agit l'inertie modérée sur $x(\xi)$. Cela se fait en utilisant les périodes de Lubin-Tate $\Omega_h$, car si $\xi$ est de période $n$, nous pouvons prendre $x(\xi) = \Omega_n^{-\xi(0)} \prod_{j=1}^{n-1} [\frac{\Phi^j(\Omega_n)}{p}]^{-\xi(n-j)}$ car $\xi$ prend ses valeurs dans $[\![2-p, 0]\!]$ (c'est l'hypothèse $h \leq p-2$ ; sans cette hypothèse, il faudrait diviser par une certaine puissance de $p$ le membre de droite de l'égalité). Il suffit donc d'utiliser la proposition II.2.5 pour voir que $x(\xi)$ est vecteur propre pour l'inertie modérée associé au caractère $\xi$. □

Considèrons alors $\mathsf{f}_N^{-1} \circ f_N$ : c'est un endomorphisme de $\mathbf{V_{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}_p} (A_{cris}/p \otimes_R \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p)$ qui préserve l'action de galois, donc préserve les espaces propres de l'inertie modérée.

Nous venons de voir que pour tout $v_i$ vecteur propre de l'inertie modérée associée au caractère $\xi$, il existe $a_i \in k^*$ tel que $f_N(v_i) = a_i e_\xi$. Nous savons aussi qu'il existe $j$ et $b_j \in k^*$ tel que $\mathsf{f}_N(v_j) = b_i e_\xi$. Or, $\mathsf{f}_N^{-1} \circ f_N$ préserve les espaces propres de l'inertie modérée, donc $i = j$, donc nous avons bien le résultat recherché. $\square$

CHAPITRE IV

# Applications

## IV.1. Position des réseaux

Pour tout ce paragraphe, nous supposerons donnés $\rho : \Gamma_{\mathcal{K}} \to G(\mathbb{Z}_p)$ une représentation cristalline à valeurs dans les point sur $\mathbb{Z}_p$ d'un groupe algébrique lisse sur $\mathbb{Z}_p$, $G$, et $U$ un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang $n$, avec $\alpha : G \to GL_U$ une immersion fermée.

**IV.1.a. Description des groupes plats sur $\mathbb{Z}_p$.** Notons $U_W = U \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$. Identifions $G$ avec son image dans $GL_U$. Nous allons donner une définition plus exploitable de $G_W = G \times_{\mathbb{Z}_p} W$ dans un cas particulier :

Prenons une base de $U$ et supposons que l'immersion de $G$ dans $GL_U$ induise une immersion dans $\mathrm{End}_U$ (c'est-à-dire $G = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}/I)$).

Notons $\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{\leq d}$ les polynômes de degré total inférieur ou égal à $d$. Le groupe $GL_U$ agit sur $\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]$ par : pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre $R$, si $f \in R[X_{i,j}]$, et $s \in GL_U(R)$, alors $\eta_s(f)$ est le polynôme défini par $\eta_s(f)(y) = f(s^{-1}y)$. Cette action est linéaire et laisse stable $\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{\leq d}$.

Proposition IV.1.1. *Soit $G = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}/I)$ un groupe algébrique plat sur $\mathbb{Z}_p$, soient $(f_1, \cdots, f_r)$ des générateurs de l'idéal $I$, et si $d$ est le maximum des degrés totaux des $f_i$, posons $E = I \cap \mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{\leq d}$. Alors $E$ est facteur direct, et pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre $R$, si $E_R = E \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$, $G(R) = \{g \in GL_U(R) | \eta_g(E_R) = E_R\}$.*

Remarque IV.1.2. *Si $\alpha : G \to GL_U$ n'induit pas une immersion fermée de $G$ dans $\mathrm{End}_U$, il suffit de composer $\alpha$ avec une immersion fermée $\beta : GL_U \to GL_{U'}$ tel que $\beta$ induise une immersion fermée de $GL_U$ dans $\mathrm{End}_{U'}$. Par exemple, $U' = U \oplus \mathbb{Z}_p$ avec $\beta = \mathrm{Id} \oplus \frac{1}{\det}$, ou bien $U' = U \oplus U^*$ (où $U^*$ est le dual de $U$) avec $\beta(g) = (g, {}^tg^{-1})$. Par contre, le $E$ donné par la proposition IV.1.1 dépendra du morphisme $\beta$ considéré.*

Démonstration. Commençons par le lemme suivant :

Lemme IV.1.3. *Pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre $R$, le module $I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ s'injecte dans $R[X_{i,j}]$.*

Démonstration. Pour tout $k$, notons $E_k = I \cap \mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{\leq k}$. Le module $\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{\leq k}$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de type fini, et $\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{\leq k}/E_k$ est sans $p$-torsion car il s'injecte dans $\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}/I$ qui est plat sur $\mathbb{Z}_p$ (par hypothèse). Donc le module $E_k$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre facteur direct dans $\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{\leq k}$. Donc $E_k$ est un facteur direct de $\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]$, par conséquent $E_k \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ s'injecte dans $R[X_{i,j}]$. Or, $I$ est la réunion des $E_k$, donc $I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ s'injecte dans $R[X_{i,j}]$. □

Au passage, nous avons démontré une assertion de la proposition, à savoir que $E := E_d$ est facteur direct.

Notons $H$ le groupe algébrique défini par $H(R) = \{g \in GL_U(R) | \eta_g(E_R) = E_R\}$. L'application naturelle $H \to GL_U$ est une immersion fermée et $H(R) = \{g \in GL_U(R) | \eta_g(E_R) \subset E_R\}$ car $E$ est facteur direct. Nous voulons montrer que $H = G$. Si $s \in GL_U(R)$ vérifie $\eta_g(E_R) = E_R$, alors pour tout $i$, $\eta(s)(f_i) \in E_R \subset I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$, donc $\eta(s)(f_i)(Id) = 0$ car $Id \in G(R)$. Donc, par définition de l'action, $f_i(s^{-1}) = 0$ pour tout $i$, donc la famille $(f_i)$ étant une famille de générateurs de l'idéal $I$ sur $\mathbb{Z}_p$, nous obtenons $s^{-1} \in G(R)$, or $G$ est un groupe, donc $s \in G(R)$, ce qui montre l'inclusion $H(R) \subset G(R)$. Donc il existe un monomorphisme $H \to G$.

Montrons que c'est une immersion fermée : le morphisme $H \to GL_U$ est une immersion fermée, et $\alpha$ est par hypothèse une immersion fermée de $G$ dans $GL_U$. Donc, en notant $A[K]$ l'algèbre affine d'un groupe $K$, les flèches $A[GL_U] \to A[G]$ et $A[GL_U] \to A[H]$ sont surjectives, et nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A[G] \arrow[d] & A[GL_U] \arrow[l, two heads] \arrow[dl, two heads] \\ A[H] & \end{tikzcd}$$

par conséquent, la flèche $A[G] \to A[H]$ est surjective, donc $H \to G$ est bien une immersion fermée.

Nous allons maintenant montrer que $G$ et $H$ ont même fibre générique. Pour cela, donnons une description de $G$ semblable à celle de $H$ :

Lemme IV.1.4. *Pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre $R$, nous avons*

$$G(R) = \{g \in GL_U(R) | \eta_g\big((I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R) \cap R[X_{i,j}]_{\leq d}\big) = (I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R) \cap R[X_{i,j}]_{\leq d}\}$$

Démonstration. Fixons $R$, et posons $M = (I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R) \cap R[X_{i,j}]_{\leq d}$. Si $s \in GL_U(R)$ vérifie $\eta_g(M) = M$, alors pour tout $i$, $\eta(s)(f_i) \in M \subset I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$, donc $\eta(s)(f_i)(Id) = 0$ car $Id \in G(R)$. Donc, par définition de l'action, $f_i(s^{-1}) = 0$ pour tout $i$, donc la famille $(f_i)$ étant une famille de générateurs de l'idéal $I$ sur $\mathbb{Z}_p$, nous obtenons $s^{-1} \in G(R)$, or $G$ est un groupe, donc $s \in G(R)$, ce qui montre une inclusion.

L'inclusion réciproque sera un corollaire du lemme de Yoneda : d'abord, il suffit de montrer que $\eta_s(M) \subset M$, car $\eta$ est une action de groupe. Puis, si $s \in G(R)$ et $f \in M$, notons $P = \eta(s)(f)$. Pour toute $R$-algèbre $B$, pour tout $g \in G(B)$, nous avons $P(g) = f(s^{-1}g) = 0$ car $s^{-1}g \in G(B)$ et $f \in I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$, donc $P$ est dans $I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ (et de bon degré, donc $P \in M$) par la remarque suivante :

Soit $G = \mathrm{Spec}(A/I)$ un groupe algébrique au dessus d'un anneau $R$, alors si $J = \{f \in A |$ pour toute $R$-algebre $B$, $\forall g \in G(B)$, $f(g) = 0\}$, nous avons $I = J$. En effet, si $K = \mathrm{Spec}(A/J)$, alors $K(B) \subset G(B)$ car $I \subset J$, puis la définition de $J$ nous dit que pour tout $\varphi : A/I \to B$, $J$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$, d'où se factorise en $\varphi : A/J \to B$, $J$, donc $G(B) \subset K(B)$. Le lemme de Yoneda donne alors $G = K$, donc $I = J$. $\square$

Lemme IV.1.5. *Soit $S/R$ une extension d'anneau, supposons que $S$ est plat sur $R$. Alors,* $((I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R) \cap R[X_{i,j}]_{\leq d}) \otimes_R S = (I \otimes_{\mathbb{Z}_p} S) \cap S[X_{i,j}]_{\leq d}$.

Démonstration. En effet, notons $M_1 = I \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$, $M_2 = R[X_{i,j}]_{\leq d}$ et $M_3 = R[X_{i,j}]$, alors nous voulons voir que $(M_1 \cap M_2) \otimes_R S = (M_1 \otimes_R S) \cap (M_2 \otimes_R S)$. Or, nous avons la suite exacte courte de $R$-modules

$$0 \longrightarrow M_1 \cap M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow M_3/M_1 \oplus M_3/M_2$$

et nous avons supposé que $S$ est plat sur $R$, donc

$$0 \longrightarrow (M_1 \cap M_2) \otimes_R S \longrightarrow M_3 \otimes_R S \longrightarrow (M_3/M_1) \otimes_R S \oplus (M_3/M_2) \otimes_R S$$

est une suite exacte, ce qui conclut car $(M_3/M_i) \otimes_R S = M_3 \otimes_R S/M_i \otimes_R S$. □

Puis, $G$ et $H$ ont même fibre générique, par application directe des deux lemmes précédents.

Il ne reste plus qu'à voir que si $H \to G$ est une immersion fermée telle que $G$ et $H$ ont même fibre générique, et $G$ plat, alors $H = G$. Nous voulons montrer que la flèche surjective $A[G] \to A[H]$ est aussi injective. $G$ étant plat, l'application naturelle $i_G : A[G] \to A[G] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est injective. $H$ et $G$ ayant même fibre générique, la flèche $f : A[G] \to A[H]$ donnée par l'immersion fermée induit une bijection $f_p : A[G] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \to A[H] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$. De plus le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} A[G] \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i_G"] & A[H] \arrow[d, "i_H"] \\ A[G] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \arrow[r, hook, two heads, "f_p"] & A[H] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \end{tikzcd}$$

donc $f$ est bien injective, donc $H = G$. □

En fait, lors de l'identification de $GL_U$ avec $GL_{n,\mathbb{Z}_p}$, nous avons identifié la représentation de $GL_U$ que sont les polynômes homogènes de degré $i$ (noté $\mathbb{Z}_p^i[X_{i,j}]$) avec $Sym^i(\mathrm{End}_U)$ qui est un sous-objet de $\mathrm{End}_U^{\otimes i}$, ou bien, dit autrement, $\mathbb{Z}_p[X_{i,j}]_{\leq d}$ a été identifié à un sous-objet de $\oplus_{0 \leq i \leq d} \mathrm{End}_U^{\otimes i}$. L'action de $GL_U$ sur $\mathbb{Z}_p^i[X_{i,j}]$ est le produit tensoriel de l'action naturelle de $GL_U$ sur $U^*$ par l'action triviale de $GL_U$ sur $U$ dans $\mathrm{End}_U^{\otimes i} = (U \otimes_{\mathbb{Z}_p} U^*)^{\otimes i}$ ; par conséquent $E$ est un sous-module de $\bigoplus_{0 \leq i \leq d} (\underbrace{U^* \oplus \cdots \oplus U^*}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$ (où $n = \mathrm{rg}(U)$).

Appliquons ceci non pas au plongement $\alpha$, mais à $\alpha^* : G \to GL_{U^*}$, défini par $\alpha^*(g) = {}^t\alpha(g)^{-1}$. Il existe alors $E^* = \bigoplus_{0 \leq i \leq k} (\underbrace{U \oplus \cdots \oplus U}_{n \text{ fois}})^{\otimes i} \cap I^*$ un sous $\mathbb{Z}_p$-module (libre facteur direct) tel que $s \in \alpha(G)(R) \Leftrightarrow s(E_R^*) = E_R^*$ (où $I^*$ est l'idéal définissant $\alpha^*(G)$).

Rassemblons tout ceci dans le lemme suivant :

Proposition IV.1.6. *Soit $G$ un groupe plat sur $\mathbb{Z}_p$, $U$ un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang $n$ et $\alpha : G \to GL_U$ une représentation qui induit une immersion fermée dans* $\mathrm{End}_U$.

*Identifions $G$ avec son image. Alors, il existe un entier $k$ et un sous $\mathbb{Z}_p$-module $E$ (facteur direct) de $\bigoplus_{0\leq i\leq k}(\underbrace{U\oplus\cdots\oplus U}_{n\ fois})^{\otimes i}$ laissé stable par l'action naturelle de $G(\mathbb{Z}_p)$ (provenant de celle de $GL_U$, notée $\eta$) tels que $G(R)=\{g\in GL(R)|\eta_g(E_R)=E_R\}$ pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre $R$.*

Nous pouvons alors définir sur $M=\mathbf{D_{cris}}(U)$ (ou sur $\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)$ suivant les cas) un groupe algébrique sur $W$, $G_M$, par : si $\eta$ est l'action naturelle de $GL_M$ sur $\bigoplus_{0\leq i\leq k}(\underbrace{M\oplus\cdots\oplus M}_{n\text{ fois}})^{\otimes i}$, alors $G_M(R)=\{g\in GL_M(R)|\eta_g(\overline{E}_R)=\overline{E}_R\}$ pour toute $W$-algèbre $R$. Il ne reste qu'à bien choisir $\overline{E}$ en liaison avec $E$, ce qui nous conduit au théorème suivant :

Théorème IV.1.7. *Supposons $G$ lisse sur $\mathbb{Z}_p$. Si $\alpha : G\to GL_U$ induit une immersion fermée dans* $\mathrm{End}_U$ *et si la représentation de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ induite sur $U$ par $\alpha$ (et par $\rho:\Gamma_{\mathcal{K}}\to G(\mathbb{Z}_p)$) vérifie*

– *soit elle est à poids de Hodge-Tate dans $[\![0,h]\!]$ avec $0\leq h\leq p-2$*

– *soit elle est à poids de Hodge-Tate dans $[\![-h,h]\!]$ avec $0\leq h\leq \frac{p-2}{2}$*

*alors, en prenant*

$$\overline{E}=\mathbf{D_{cris,p}}(E\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p)\cap\bigoplus_{0\leq i\leq k}(\underbrace{\mathbf{D_{cris}}(U)\oplus\cdots\oplus\mathbf{D_{cris}}(U)}_{n\ fois})^{\otimes i}$$

*dans le premier cas, ou*

$$\overline{E}=\mathbf{D_{cris,p}}(E\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p)\cap\bigoplus_{0\leq i\leq k}(\underbrace{\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)\oplus\cdots\oplus\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)}_{n\ fois})^{\otimes i}$$

*dans le deuxième cas (voir le paragraphe III.5 pour la définition de $\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}$), il existe une bijection $\Psi : U\otimes_{\mathbb{Z}_p}W\to M$ qui identifie $G\times_{\mathbb{Z}_p}W$ et $G_M$.*

Remarque IV.1.8. *Pour qu'une application $\Psi$ bijective identifie $G\times_{\mathbb{Z}_p}W$ et $G_M$, il suffit de montrer que l'application naturelle induite par $\Psi$ envoie $E\otimes_{\mathbb{Z}_p}W$ bijectivement sur $\overline{E}$.*

**IV.1.b. Demonstration du théorème IV.1.7.** Soit $h : U_R=U\otimes_{\mathbb{Z}_p}R\simeq M_R=M\otimes_W R$ un isomorphisme de $R$-modules, alors $h$ induit un isomorphisme $s(h)$ de $\bigoplus_{0\leq i\leq k}(\underbrace{U_R\oplus\cdots\oplus U_R}_{n\text{ fois}})^{\otimes i}$ sur $\bigoplus_{0\leq i\leq k}(\underbrace{M_R\oplus\cdots\oplus M_R}_{n\text{ fois}})^{\otimes i}$.

Considérons alors

$$\mathbf{Isom}(R)=\{h : U\otimes_{\mathbb{Z}_p}R\simeq M\otimes_W R|s(h)(E_R)=\overline{E}_R\}$$

pour $R$ une $W$-algèbre. C'est un sous-$W$-schéma de $\mathbf{Isom_W}(U\otimes_{\mathbb{Z}_p}W,M)$ (les $W$-isomorphismes de $U\otimes_{\mathbb{Z}_p}W$ sur $M$).

Il est non vide, car $\mathsf{f}_{\mathbf{D_{cris}}(U)}$ (ou $\overline{\mathsf{f}}_{\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)}$ suivant les conditions sur les poids de Hodge-Tate) induit un élément de $\mathbf{Isom}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}})$. C'est une retraduction du théorème III.1.1 (ou du théorème III.5.6)

LEMME IV.1.9. *Le schéma* $\mathbf{Isom} \times_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ *est un torseur trivial sous* $G \times_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$.

DÉMONSTRATION. En effet, $G$ agit naturellement et fidèlement à gauche sur **Isom** : si $f \in \mathbf{Isom}(R)$ et $g \in G(R)$,

$$U \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \xrightarrow{g} U \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \xrightarrow{f} M \otimes_W R$$

est bien un isomorphisme.

Puis, l'application naturelle

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{0\le i\le k} (\underbrace{U \oplus \cdots \oplus U}_{n \text{ fois}})^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_p} R & \xrightarrow{\eta_g} & \bigoplus_{0\le i\le k} (\underbrace{U \oplus \cdots \oplus U}_{n \text{ fois}})^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \\ & & \downarrow s(f) \\ & & \bigoplus_{0\le i\le k} (\underbrace{M \oplus \cdots \oplus M}_{n \text{ fois}})^{\otimes i} \otimes_W R \end{array}$$

s'identifie naturellement à $s(f \circ g)$.

Enfin, la définition de **Isom**, la proposition IV.1.6 et le fait que $s(f \circ g) = s(f) \circ \eta_g$ donnent bien $s(f \circ g)(E_R) = E_R$, donc que $f \circ g \in \mathbf{Isom}(R)$. Le groupe $G$ agit donc sur **Isom** par $(g, f) \mapsto f \circ g^{-1}$.

La fidélité provient de ce qu'un élément de **Isom** est un isomorphisme de modules.

Pour finir, il reste à montrer que pour $f, f' \in \mathbf{Isom}(R)$, il existe $g \in G(R)$ avec $f' = f \circ g^{-1}$. Autrement dit, il faut voir que $g = f'^{-1} \circ f$ est bien un élément de $G(R)$. Cela se montre de la même façon que précédement. C'est la propriété IV.1.6 qui est le point essentiel. □

Nous venons donc de montrer que $\mathbf{Isom} \times_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ est un $G \times_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$-espace homogène ayant un point sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$, or $G \times_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ est un groupe lisse, donc $\mathbf{Isom} \times_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ est lisse, donc **Isom** aussi (car la flèche $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}) \to \mathrm{Spec}(W)$ est fidèlement plate et quasi-compact, donc c'est une application directe du corollaire 17.7.3 de EGA IV).

**Isom** est lisse, donc par le lemme de Hensel (cf. théorème 18.5.11 b de EGA IV), $\mathbf{Isom}(W)$ se surjecte (par la réduction modulo $p$) sur $\mathbf{Isom}(k)$. Si ce dernier est non vide, nous aurons bien montré que $\mathbf{Isom}(W)$ est non vide, ce qui prouvera le théorème.

$\mathbf{Isom} \times_W \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}$ est lisse, donc, toujours par le lemme de Hensel, $\mathbf{Isom}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}})$ se surjecte sur $\mathbf{Isom}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p)$, donc le $k$-schéma $\mathbf{Isom} \times \mathrm{Spec}(k)$ est non vide (car $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}/p$ est une $k$-algèbre), donc par le théorème des zéros de Hilbert, $\mathbf{Isom} \times \mathrm{Spec}(k)(k)$ est non vide (car $k$ est algébriquement clos). □

Remarquons qu'en nous donnant un $\mathbb{Z}_p$-module $N \subset M$ qui engendre $M$ comme $W$-module (c'est à dire $N \otimes_{\mathbb{Z}_p} W = M$), et tel que le $\mathbb{Z}_p$-module $N' = \overline{E} \cap \bigoplus_{0\le i\le k} (\underbrace{N \oplus \cdots \oplus N}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$ engendre $\overline{E}$ comme $W$-module (par exemple, avec les notations du paragraphe II.1, $N = M^{f_M}$ (et alors $N' = \overline{E}^{f_{\overline{E}}}$) ou $N = M^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p}$ (et alors $N' = \overline{E}^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p}$)), nous pouvons définir **Isom** sur $\mathbb{Z}_p$ par

$$\mathbf{Isom}(R) = \{h : U \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \simeq N \otimes_{\mathbb{Z}_p} R | s(h)(E_R) = N'_R\}$$

pour $R$ une $\mathbb{Z}_p$-algèbre. Alors, par un théorème de Lang (tout $H$-torseur défini sur $\mathbb{F}_p$ est trivial si $H$ est un groupe algébrique sur $\mathbb{F}_p$ connexe) , en supposant que $G$ est à fibre spéciale connexe, nous avons $\mathbf{Isom}(\mathbb{F}_p)$ non vide, donc par lissité, $\mathbf{Isom}(\mathbb{Z}_p)$ est non vide, et donc sous cette hypothèse, nous pouvons supposer que $\Psi(U) = N$. De plus, $\Psi$ identifie $G$ à une forme sur $\mathbb{Z}_p$ de $G_M$ (celle qui est définie à l'aide de $N'$).

Corollaire IV.1.10. *Sous les hypothèses et notations précédentes, si $U'$ est un réseau de $U \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ laissé stable par l'action de $G$, alors $\Psi[\frac{1}{p}] = \Psi \otimes_W \mathcal{K}$ envoie $U' \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$ sur $\mathbf{D_{cris}}(U')$ si les poids de Hodge-Tate sont positifs, ou sur $\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U')$ sinon.*

Démonstration. Notons $M = \mathbf{D_{cris}}(U)$ (ou $M = \widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)$ si les poids de Hodge-Tate ne sont pas tous positifs). Tout d'abord, quitte à multiplier par une certaine puissance de $p$, nous pouvons supposer $U' \subset U$. Puis, $\Psi \in \mathbf{Isom}(W) \subset \mathbf{Isom}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}})$ et $\mathsf{f}_M \in \mathbf{Isom}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}})$ (respectivement, $\bar{\mathsf{f}}_M \in \mathbf{Isom}(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}})$), donc, comme **Isom** est un $G \times_{\mathbb{Z}_p} W$-espace homogène, il existe $g \in G(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}})$ tel que $\Psi = \mathsf{f}_M \circ g$ (respectivement $\Psi = \bar{\mathsf{f}}_M \circ g$). Il suffit donc (puisque $U'$ est stable par $G$) de vérifier la propriété pour $\mathsf{f}_M$ (ou $\bar{\mathsf{f}}_M$), or ceci provient juste de la fonctorialité de $\mathsf{f}_M$ (et de $\bar{\mathsf{f}}_M$) pour les sous-objets. □

**IV.1.c. Exemples.** Remarquons que $GL_U$ se plonge naturellement par une immersion fermée $\beta$ dans $GL_{U\oplus U^*}$ où l'action sur $U$ est l'action naturelle, et l'action sur le dual $U^*$ est donnée par la transposée de l'inverse. De plus, $\beta$ provient d'une immersion fermée de $GL_U$ dans $\mathrm{End}_{U\oplus U^*}$, car l'image de $\beta$ est un sous-groupe fermé de $SL_{U\oplus U^*}$. Donc, si la représentation galoisienne $U$ est à poids de Hodge-Tate dans $[\![0, h]\!]$ avec $h \leq \frac{p-2}{2}$, ou dans $[\![-h, h]\!]$ avec $h \leq \frac{p-2}{4}$, alors l'immersion $\alpha' = \beta \circ \alpha$ vérifie en partie les hypothèses du théorème IV.1.7. Soit alors $E$ le sous-module définissant $G$ dans $U \oplus U^*$ (de la manière décrite dans le paragraphe IV.1.a). Nous définissons de même sur $\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U) \oplus \widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)^*$ un groupe $G_M$ à l'aide de

$$\overline{E} = \mathbf{D_{cris,p}}(E \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) \cap \bigoplus_{0\leq i\leq k} (\underbrace{\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U) \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$$

Théorème IV.1.11. *Si la représentation de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ induite sur $U$ par $\alpha$ (et par $\rho$) vérifie*
*– soit elle est à poids de Hodge-Tate dans $[\![0, h]\!]$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$*
*– soit elle est à poids de Hodge-Tate dans $[\![-h, h]\!]$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$*
*alors, avec les notations précédentes, il existe un isomorphisme de $W$-module $\Psi : U \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \to M$ qui induit une bijection $\Psi \oplus {}^t\Psi^{-1} : (U \oplus U^*) \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \to M \oplus M^*$ identifiant $G \times_{\mathbb{Z}_p} W$ et $G_M$. En particulier, le groupe $G_M$ (plongé dans $GL_{M\oplus M^*}$) laisse stable $M$ et $M^*$.*

Démonstration. Considérons le schéma $\mathbf{Isom}(R) = \{h : U \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \simeq M \otimes_W R | s(h)(E_R) = \overline{E}_R\}$ (ce n'est à priori pas le même que celui considéré dans la démonstration du théorème IV.1.7, qui considère des morphismes définis sur $U \otimes U^*$). C'est un $G \times_{\mathbb{Z}_p} W$ espace homogène, qui a un point sur $W$ (cela se montre de la même façon que lors de la démonstration du théorème IV.1.7). □

**IV.1.d. Données initiales pour un $\Phi$-module filtré.** Formulons ici comment les idées introduites précédemment se traduisent dans le formalisme introduit par Rapoport et Zink (cf. [**RZ96**]). Soit $G$ un groupe algébrique lisse sur $\mathbb{Z}_p$ et $\rho$ un morphisme de groupe de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ dans $G(\mathbb{Z}_p)$, $\mu : \mathbb{G}_m \to G$ un cocaractère défini sur $W$, et $b \in G(W)$. Alors, à toute représentation $\beta : G \to GL_U$ où $U$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini, nous pouvons associer un objet $\mathcal{I}(U)$ de $\mathbf{MF'_W}$, défini par :

– le $W$-module sous-jacent est $U \otimes_{\mathbb{Z}_p} W = M$ ;
– $\mathrm{Fil}^i(M) = \bigoplus_{j \geq i} M_j$ où $M_j$ est l'espace propre de poids $j$ correspondant à $\mu$ ;
– $\varphi^i = p^{-i} b \circ (Id \otimes \sigma)$ sur $\mathrm{Fil}^i(M)$, c'est-à-dire si $v = \sum_k v_k \otimes x_k \in \mathrm{Fil}^i(M)$ avec $v_k \in U$ et $x_k \in W$, $\varphi^i(v) = \sum_k \sigma(x_k)\beta(b)(v_i)$.

Définition IV.1.12. *Le triplet $(\mu, b, \beta)$ est dit admissible si $\mathcal{I}(U)$ est un objet de $\mathbf{MF_{W,tf}}$.*

Si $G$ est supposé lisse, si $\beta$ induit une immersion fermée de $G$ dans $\mathrm{End}_U$, et $\mathcal{I}(U)$ est un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$, nous pouvons faire de même qu'au paragraphe IV.1.a : $G$ est défini par $E$ un $\mathbb{Z}_p$-module bien choisi de $\bigoplus_{0 \leq i \leq k} (\underbrace{U \oplus \cdots \oplus U}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$ (alors $E \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$ sera un objet de $\mathbf{MF_{W,tf}}$), et sur $\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))$ nous construisons $G_{\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))}$ sur $\mathbb{Z}_p$ par son foncteur des points (pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre $R$, $G_{\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))}(R)$ est le groupe des éléments de $GL_{\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))}(R)$ qui laissent stable $\big(\mathbf{V_{cris,p}}(E \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{K}) \cap \bigoplus_{0 \leq i \leq k} (\underbrace{\mathbf{V_{cris}}(M) \oplus \cdots \oplus \mathbf{V_{cris}}(M)}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$.

Théorème IV.1.13. *Sous les conditions précédentes, avec*

– *soit $M$ est un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ avec $0 \leq h \leq p-2$ et $\beta$ induit une immersion fermée de $G$ dans $\mathrm{End}_U$,*
– *soit $M$ est un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$,*
– *soit $M$ est un objet de $\mathbf{MF_W^{\pm h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$ et $\beta$ induit une immersion fermée de $G$ dans $\mathrm{End}_U$,*
– *soit $M$ est un objet de $\mathbf{MF_W^{\pm h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$,*

*alors il existe une bijection $\Psi : M \to \mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$ qui identifie $G \times_{\mathbb{Z}_p} W$ et $G_{\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))} \times_{\mathbb{Z}_p} W$. De plus, la représentation galoisienne associée à $\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))$ est à valeurs dans $G_{\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))}(\mathbb{Z}_p)$.*

Démonstration. L'existence de la bijection se montre de la même façon que pour le théorème IV.1.7 : nous introduisons un $G$-espace homogène **Isom** défini sur $\mathbb{Z}_p$, nous montrons qu'il est lisse sur $\mathbb{Z}_p$, $\mathbf{Isom}(k)$ est non vide par le théorème des zéros de Hilbert, et le lemme de Hensel conclut. La définition même de $G_{\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))}$ implique que la représentation galoisienne associée à $\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))$ est à valeurs dans $G_{\mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))}(\mathbb{Z}_p)$. □

Remarque IV.1.14. *Le théorème de Lang à propos des torseurs définis sur les corps finis implique que si la fibre spéciale de $G$ est connexe, alors le torseur* **Isom** *est trivial sur $\mathbb{F}_p$. Autrement dit, il a un point sur $\mathbb{F}_p$, que nous pouvons relever à $\mathbb{Z}_p$ par le lemme de Hensel. Par conséquent, si la fibre spéciale de $G$ est connexe, l'isomorphisme $\Psi$ est défini sur $\mathbb{Z}_p$, c'est à dire qu'il induit une bijection $\Psi : U \to \mathbf{V_{cris}}(\mathcal{I}(U))$.*

## IV.2. Tore de l'inertie modérée

**IV.2.a. Les groupes $\overline{G}_M$, $\overline{G}'_M$ et $\overline{G}_V$, $\overline{G}'_V$.** Considérons $M$ un objet de $\mathbf{MF_{W,tf}}$ **tué par** $p$ (autrement dit un $k$-espace vectoriel), muni de la filtration $M[i]$ donné au lemme II.2.12. Soit $r$ l'entier tel que $M[r] = M$ et $M[r-1] \neq M$.

Soit $\overline{G}_M$ le schéma en groupes affine (cf. [**DMOS82**]) associé à la catégorie tannakienne engendrée par $M$ (notée $\mathbf{Tan}(M)$) dans $\mathbf{MF_{W,tf}}$ et au foncteur fibre qui a $M$ associe $M^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p} = M^{f^{e\ell}_M}$ (cf. paragraphe II.1 pour ces notations). Le groupe $\overline{G}_M$ s'identifie aux éléments de $GL_M$ qui induisent sur tout objet de $\mathbf{Tan}(M)$ un isomorphisme défini sur $M^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p}$, qui laissent stable sous-objet, objet quotient, produit tensoriel, dual, et qui commutent aux morphismes.

Proposition IV.2.1. *$\overline{G}_M$ est le plus petit sous-schéma en groupes affine de $GL_{M^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p}}$ qui soit défini sur $\mathbb{F}_p$ et qui, après extension des scalaires à $k$, contienne $u_M$ et $\mathcal{T}$*

Démonstration. En effet, nous devons prouver que si $H$ est un sous-schéma en groupes de $\overline{G}_M$ qui est défini sur $\mathbb{F}_p$ et est tel que $H \times_{\mathbb{F}_p} k$ contienne $u_M$ et $\mathcal{T}$, alors $H = \overline{G}_M$. Il suffit pour cela de prouver que le morphisme de $H$ dans $\overline{G}_M$ est fidèlement plat, et donc (cf. [**DMOS82**], prop. 2.21.a) que le foncteur naturel de $\mathbf{Tan}(M)$ dans la catégorie des représentations linéaires de $H$ est pleinement fidèle, et que son image est stable par sous-objet.

Si $N$ et $N'$ sont deux objets de $\mathbf{Tan}(M)$, une application $\mathbb{F}_p$-linéaire de $N^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p}$ dans $(N')^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p}$ commutant à $u$ et à $\mathcal{T}$ après extension des scalaires est un morphisme dans $\mathbf{MF_{W,tf}}$ (donc dans $\mathbf{Tan}(M)$) : en effet, cela résulte directement de ce que $N = N^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{F}_p} k$ et si $N_\xi$ est l'espace propre associé au caractère $\xi$ de $\mathcal{T}$, alors $\mathrm{Fil}^i(N) = \bigoplus_{\xi(0)=i} N_\xi$, $f_N = u_N \circ f^{e\ell}_N$ et $N^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p} = N^{f^{e\ell}_N}$ (idem pour $N'$). Cela prouve la pleine fidélité.

Prouvons la stabilité par sous-objet. Si $N$ est un objet de $\mathbf{Tan}(M)$, et si $(N')^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p}$ est un sous-$\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de $N^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p}$ tel que $N' = (N')^{e\ell}_{\mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{F}_p} k$ est stable par $\mathcal{T}$ et $u_N$, de même qu'avant, nous avons que $N'$ est un sous-objet de $N$ dans $\mathbf{MF_{W,tf}}$, qui est donc dans $\mathbf{Tan}(M)$. □

COROLLAIRE IV.2.2. *Le groupe $\overline{G}_M$ est réduit (donc lisse) et connexe.*

DÉMONSTRATION. En effet, $\overline{G}_M^{red}$ est un groupe algébrique défini sur $\mathbb{F}_p$, inclus dans $\overline{G}_M$, et qui a les mêmes points sur $k$. Donc $u_M$ et $\mathcal{T}$ sont dans $\overline{G}_M^{red}$, et par la proposition précédente, nous avons donc bien $\overline{G}_M = \overline{G}_M^{red}$.

Le groupe $\overline{G}_M \times_{\mathbb{F}_p} k$ contient $\mathcal{T}$, donc contient le groupe à un paramètre $h_M$ associé à la graduation $M = \oplus M_i$. Ce groupe est l'image de $\mathbb{G}_m$ par un morphisme de groupes algébriques, donc est connexe et contient l'identité, donc est inclus dans la composante connexe de l'identité, $(\overline{G}_M \times_{\mathbb{F}_p} k)^0$. Si $\overline{G}_M$ n'est pas connexe, la composante connexe de l'identité $\overline{G}_M^0$ est un sous-groupe distingué, donc il existe une représentation $\overline{G}_M \to GL_N$ (donc $N$ est un $\Phi$-module filtré dans la catégorie tannakienne engendrée par $M$) dont le noyau est exactement $\overline{G}_M^0$(cf. Théorème 5.6 de [**Bor91**]), et donc le $\Phi$-module filtré $N$ est non trivial (car le groupe de la catégorie tannakienne engendrée par $N$ est isomorphe à $\overline{G}_M/\overline{G}_M^0$). De plus, $\overline{G}_M^0 \times_{\mathbb{F}_p} k$ contient $(\overline{G}_M \times_{\mathbb{F}_p} k)^0$, donc le groupe a un paramètre $h_M$ agit trivialement sur $N$. Or la graduation est fonctorielle, donc $h_N$ est égal à l'image de $h_M$, donc agit trivialement, donc $N = N_0$, donc $N$ est trivial, ce qui contredit le fait que la catégorie tannakienne qu'il engendre ait un groupe non-trivial. □

PROPOSITION IV.2.3. *Soit $U_M$ le sous-schéma en groupes affine de $\overline{G}_M$ formé des éléments unipotents, alors $U_M$ est un sous-groupe distingué de $\overline{G}_M$ et $\overline{G}_M = U_M \ltimes \mathcal{T}$.*

DÉMONSTRATION. Cela vient du fait que $M$ est extension d'élémentaires, et pour $N$ élémentaire, $\overline{G}_N = \mathcal{T}_N$. Puis, la matrice d'un élément de $\overline{G}_M$ écrite dans une base adaptée de $M$ appartient au groupe $\mathcal{H}_M$ dont les éléments s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} X_0 & * & \cdots & * \\ 0 & X_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & X_r \end{pmatrix}$$

où $X_s$ correspond à la matrice agissant sur $M[s]/M[s-1]$ (qui est un module élémentaire) et $X_s$ est une matrice diagonale correspondant à $\mathcal{T}_{M[s]/M[s-1]}(t)$ pour un certain $t$ (avec $t$ ne dépendant pas de $s$). De plus, les unipotents de $\mathcal{H}_M$ forment un sous-groupe distingué noté $\mathcal{U}_M$, et $\mathcal{H}_M$ est le produit semi-direct de $\mathcal{T}_M$ (qui est un tore maximal) et de $\mathcal{U}_M$, d'où le résultat. □

Notons $\overline{G}'_M = \{g \in GL_M | g$ induit sur $M$ et $\mathrm{End}(M)$ une application qui commute aux morphismes, qui laisse stable sous-objet (de $M$ ou $\mathrm{End}(M)$) et qui agit comme un élément de $\mathcal{T}$ sur les élémentaires construits comme quotient de deux sous-objets (de $M$ ou $\mathrm{End}(M))\}$, et $U'_M$ ses unipotents. $\overline{G}'_M$ est un sous-schéma en groupes affine de $GL_M$ qui contient $\overline{G}_M$.

PROPOSITION IV.2.4. *$U'_M$ est un sous-groupe distingué de $\overline{G}'_M$, et $\overline{G}'_M = U'_M \ltimes \mathcal{T}$.*

Démonstration. Le fait que $\mathcal{T}$ soit inclus dans $\overline{G}'_M$ provient de la fonctorialité de $\mathcal{T}$. Les conditions "laisse stable sous-objet" et "qui agit sur les élémentaires construits comme quotient de deux sous-objets comme un élément de $\mathcal{T}$" donnent que $\overline{G}'_M$ est inclus dans $\mathcal{H}_M$. □

Remarque IV.2.5. *Nous allons prouver que $G_M$ et $G'_M$ sont presque égaux : le théorème principal de cette section (le théorème IV.2.27) nous donne qu'ils ont même groupe dérivé, et un corollaire nous donne qu'ils ont même éléments semi-simples.*

Nous venons de construire deux schémas en groupes affines pour $M$. Faisons de même du côté galoisien : soit $V = \mathbf{V_{cris}}(M)$, $\Gamma_{\mathcal{K}}$ agit naturellement dessus, et l'image est finie (puisque $V$ est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension fini). Si $N$ est élémentaire, l'action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ sur $\mathbf{V_{cris}}(N)$ se factorise par l'inertie modérée (en effet, l'inertie sauvage agit trivialement modulo $p$ sur les périodes des Lubin Tate). Donc, suite à la filtration $(M[i])$ de $M$, un élément de l'inertie sauvage agit via la matrice

$$\begin{pmatrix} I_0 & * & \cdots & * \\ 0 & I_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & I_r \end{pmatrix}$$

où $I_s$ correspond à la matrice identité sur $\mathbf{V_{cris}}(M[s])/\mathbf{V_{cris}}(M[s-1])$.

Quel schéma en groupes affine peut-on alors associer à $V$ ? Pour l'image de l'inertie modérée, nous avons le tore $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$. Pour l'image de l'inertie sauvage, nous venons de voir que c'est un groupe unipotent. Elle a en plus la particularité que pour $g_1, \cdots, g_r$ des éléments de cette image, $(g_1 - Id) \circ \cdots \circ (g_r - Id) = 0$. Nous pouvons donc essayer les méthodes exposées dans [**Nor87**], quitte à imposer des condition sur $p$ : si $p \geq r+1$, alors tout élément de ce groupe est d'ordre $p$, donc nous pouvons définir $U_V$ comme le sous-groupe algébrique de $GL_V$ engendré par les groupes à un paramètres $t \mapsto x^t$ (où $x^t = \exp(t\ln(x))$) avec $x$ élément de l'image de l'inertie modérée. Appellons $\overline{G}_V$ le groupe de $GL_V$ engendré par $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ et $U_V$. Nous avons aussi $\overline{G}_V = U_V \ltimes \mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$.

Définissons alors $\overline{G}'_V$ de la même façon que $\overline{G}'_M$ : $\overline{G}'_V = \{g \in GL_V | g$ induit sur $V$ et $\mathrm{End}(V)$ une application qui commute aux morphismes, qui laisse stable sous-objet (de $V$ ou $\mathrm{End}(V)$) et qui agit sur les élémentaires construits comme quotient de deux sous-objets (de $V$ ou $\mathrm{End}(V)$) comme un élément de $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}\}$. Alors, de même que pour $\overline{G}'_M$, $\overline{G}'_V$ est un groupe contenant $\overline{G}_V$, et si $U'_V$ est l'ensemble des unipotents de $\overline{G}'_V$, alors $U'_V$ est un sous-groupe distingué tel que $\overline{G}'_V = U'_V \ltimes \mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$.

**IV.2.b. Groupes engendrés exponentiellement.**

IV.2.b.1. *Etude de certains groupes de matrices.* Pour ce paragraphe, considérons $K$ un corps de caractéristique $p$, $n$ et $r$ deux entiers tels que $n \geq r+1$, $(n_0, \cdots, n_r)$ un $r+1$-uplet d'entiers strictement positifs tel que $\sum n_i = n$, et notons $\mathcal{U}$ (en toute rigueur, $\mathcal{U}(n_0, \cdots, n_r)$) le sous-goupe de $GL_n(K)$ formé des éléments de la forme

$$\begin{pmatrix} I_{n_0} & * & \cdots & * \\ 0 & I_{n_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & I_{n_r} \end{pmatrix}$$

avec $I_{n_i}$ la matrice identité de taille $n_i \times n_i$ (le groupe $\mathcal{U}_M(k)$ rentre donc dans ce cadre), et $\mathcal{N}$ la $K$-sous-algèbre de Lie de $M_n(K)$ formée des éléments de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où le i-ème 0 sur la diagonale est un bloc carré de taille $n_i$.

Lemme IV.2.6. *Si $p \geq r+1$, alors pour tout $x \in \mathcal{U}$, nous pouvons définir* $\ln(x)$ *à l'aide de la série entière définissant* $\ln(1+x)$. *De plus,* $\ln$ *restreint à $\mathcal{U}$ est un polynôme, et induit une bijection (dont la réciproque est juste* $\exp$, *qui restreinte à* $\ln(\mathcal{U})$ *est aussi un polynôme) de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{N}$.*

*En outre, la formule de Campbell-Hausdorff est valable sur $\mathcal{U}$. Plus exactement, $\forall (x,y) \in \mathcal{U}^2$, si $X := \ln(x)$ et $Y := \ln(y)$, alors $\ln(xy) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \sum_{i=3}^{p-1} C_i(X,Y)$ avec $C_i(X,Y)$ appartenant à la $\mathbb{F}_p$-algèbre de Lie $L$ engendré par $X$ et $Y$ (et même $C_i(X,Y)$ appartient à $[L,L]$).*

Démonstration. La première partie provient juste de ce que pour $x \in \mathcal{U}$, $(x-1)^{r+1} = 0$, et donc $(x-1)^p = 0$ car $p \geq r+1$. Par conséquent, la série $\ln(1+n) = \sum_{i\geq 1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} n^i$ peut être évalué en $n = x-1$, et donne $\ln(x) = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(-1)^{i+1}}{i}(x-1)^i$.

Pour la formule de Campbell-Hausdorff, il suffit de remarquer quelques points : elle est vrai sur les matrices de la même forme à coefficients réels, ce qui donne une égalité formelle entre polynômes ; puis les coefficients intervenants sont des rationnels dont le dénominateur est premier à $p$ (car nous avons la formule de récurrence

$$C_{s+1}(X,Y) = \frac{[X-Y, C_s(X,Y)]}{2(s+1)} + \sum_{1\leq t\leq \frac{s}{2}} \frac{B_{2t}}{s+1} \sum [C_{k_1}(X,Y), [...[C_{k_{2t}}(X,Y), X+Y]...]$$

où la seconde somme porte sur les $k_i > 0$ tels que $k_1 + \cdots + k_{2t} = n$, et où les $B_{2t}$ sont les nombres de Bernouilli, donc avec dénominateur premier à $p$ si $s+1 < p$) ; enfin, pour pouvoir appliquer ceci, il suffit de remarquer que si $(x_i) \in \mathcal{U}^{r+1}$, alors le produit des $\ln(x_i)$ est nul (ceci quelque soit l'ordre du produit). □

Proposition IV.2.7. *Si $p \geq r+1$ et si $U_1$ est un sous-groupe de $\mathcal{U}$, alors $\ln(U_1)$ (c'est-à-dire $\{\ln(u)$ pour $u \in U_1\}$) est une $\mathbb{F}_p$-algèbre de Lie. Réciproquement, si $L$ est* *une $\mathbb{F}_p$-sous-algèbre de Lie de $\mathcal{N}$, alors* $\exp(L) := \{\exp(l), l \in L\}$ *est un sous-groupe de $\mathcal{U}$.*

REMARQUE IV.2.8. *Ceci s'appliquera en particulier à $U_1 = U_M(K)$ ou bien $U_1 = U'_M(K)$ et $K = k$.*

DÉMONSTRATION. $U_1$ est un groupe, donc si $u \in U_1$, $u^i \in U_1$ pour tout $i$ et $u^p = \mathrm{Id}$, donc $\ln(U_1)$ est stable par multiplication par un scalaire dans $\mathbb{F}_p$. Pour dire que c'est un espace vectoriel, il reste à voir qu'il est stable par addition, et cela va provenir de la formule de Campbell-Hausdorff.

Montrons par récurrence qu'il existe des polynômes $(P_j^{(i)})_{i\leq j\leq p-1}$ de $K[X,Y]$ (nous considérons ici les polynômes généralisés, c'est-à-dire que $XY \neq YX$) homogènes de degré $j$, tels que si $\exp(x)$ et $\exp(y)$ sont dans $U_1$, alors $z_i := \exp(x+y+\sum_{j=i}^{p-1} P_j^{(i)}(x,y)) \in U_1$.

Pour $i = 2$, c'est la formule de Campbell-Hausdorff. Pour $i = p$, nous obtenons $\exp(x+y) \in U_1$, ce qui est le résultat cherché. Supposons la formule vraie pour $i$ et pour tout $x$ et $y$ dans $\ln(U_1)$. Alors, comme $\ln(U_1)$ est stable par multiplication par un scalaire, pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_p$, nous pouvons remplacer $x$ par $\lambda x$ et $y$ par $\lambda y$, donc nous avons $z_{i,\lambda} = \exp(\lambda x + \lambda y + \sum_{j=i}^{p-1} \lambda^j P_j^{(i)}(x,y)) \in U_1$ (car les polynômes $P_j^{(i)}$ sont supposés homogènes). De plus, pour $\mu \in \mathbb{F}_p$, nous avons $z_i^{-\mu} = \exp(-\mu x - \mu y + \sum_{j=i}^{p-1}(-\mu)P_j^{(i)}(x,y)) \in U_1$, donc en faisant le produit, nous obtenons $z_i^{-\mu} z_{i,\lambda} \in U_1$. Or, en applicant la formule de Campbell-Hausdorff, nous obtenons

$$z_i^{-\mu} z_{i,\lambda} = \exp((\lambda-\mu)x + (\lambda-\mu)y + (\lambda^i - \mu)P_i^{(i)}(x,y) + \sum_{j=i+1}^{p-1} Q_j^{(i+1)}(x,y))$$

avec $Q_j^{(i+1)}$ polynôme homogène de degré $j$ (car $[-\mu(x+y), \lambda(x+y)] = 0$). Il suffit alors de prendre $\lambda^i = \mu$ avec $\lambda \neq \mu$ (ce qui est possible, car $i \leq p-1$). D'où, en itérant, nous obtenons bien (si $i = p$) $\exp(x+y) \in U_1$.

La formule de Campbell-Hausdorff nous donne aussi que si $\exp(x)$ et $\exp(y)$ sont dans $U_1$, alors $\exp(x)\exp(y)\exp(-x)\exp(-y) = \exp([x,y] + \sum_{j=3}^{p-1} R_j(x,y))$ où $R_j(x,y))$ est un polynôme homogène de degré $j$. Puis une récurrence semblable à celle ci-dessus nous donnera que $\exp([x,y]) \in U_1$.

La réciproque est une application directe de la formule de Campbell-Hausdorff. $\square$

Introduisons la définition suivante (nous nous plaçons en fait dans un cadre plus restreint que Nori dans cf. [**Nor87**], et nous obtiendrons des résultats plus précis)

DÉFINITION IV.2.9. *Soit $H$ un sous-groupe de $\mathcal{U}$, il est dit engendré exponentiellement s'il existe $S \subset \mathcal{N}$ tel que $H$ est le groupe engendré par les groupes à un-paramètre $t \in K \mapsto \exp(tx) \in \mathcal{U}$ où $x \in S$.*

PROPOSITION IV.2.10. *Supposons $p \geq r+1$. Soit $L \subset \mathcal{N}$ une $K$-sous-algèbre de Lie de $\mathcal{N}$, alors $\exp(L)$ est un sous-groupe de $\mathcal{U}$ engendré exponentiellement.*

*Réciproquement, si $H$ est le sous-groupe de $\mathcal{U}$ engendré exponentiellement par $S$, alors $\ln(H)$ est la $K$-algèbre de Lie engendrée par $S$.*

DÉMONSTRATION. La première affirmation est une conséquence immédiate de la définition et de la proposition précédente.

Soit donc $H$ un sous-groupe de $\mathcal{U}$ engendré exponentiellement par $S$, et notons $L$ la $K$-algèbre de Lie engendrée par $S$. Comme $S \subset L$, nous avons $H \subset \exp(L)$ (car si $x \in S$, pour tout $t$ de $K$, $tx \in L$), et en repassant au logarithme (qui est une bijection) nous obtenons $\ln(H) \subset L$. Mais par définition, $\ln(H)$ contient $Kx$ pour tout $x$ dans $S$, donc comme $\ln(H)$ est stable par addition et crochet de Lie, il contient l'algèbre de Lie engendrée par $\{Kx\}_{x \in S}$, qui est bien $L$, donc $L = \ln(H)$. □

PROPOSITION IV.2.11. *Soit $p \geq r+1$. Soit $U_1$ un sous-groupe de $\mathcal{U}$, alors $U_1$ est engendré exponentiellement si et seulement si pour tout $u \in U_1$ et pour tout $t \in K$, $x^t = \exp(t\ln(u)) \in U_1$. Donc $U_1$ est engendré exponentiellement si et seulement si $\ln(U_1)$ est une $K$-algèbre de Lie.*

DÉMONSTRATION. C'est une retraduction des propositions précédentes. □

PROPOSITION IV.2.12. *Si $U_1$ est un sous-groupe de $\mathcal{U}$ engendré exponentiellement, alors il est algébrique.*

*De plus, si $K$ est algébriquement clos, en notant $\widetilde{U_1}$ le groupe algébrique réduit associé à $U_1$ (c'est-à-dire $\widetilde{U_1}(K) = U_1$), l'application $\ln$ induit un isomorphisme de variété algébrique de $\widetilde{U_1}$ sur l'espace affine de dimension $\dim_K(\ln(U_1))$. Par conséquent, si $U_1$ est engendré exponentiellement par des éléments de $M_n(K_1)$ (où $K_1$ est un sous-corps), $\widetilde{U_1}(K_1)$ est engendré exponentiellement sur $K_1$ par les mêmes éléments, et $\ln(U_1) = \ln(\widetilde{U_1}(K_1)) \otimes_{K_1} K$.*

DÉMONSTRATION. $U_1$ est algébrique car $x \in U_1$ si et seulement si $\ln(x) \in \ln(U_1)$, or $\ln$ restreint à $\mathcal{U}$ est un polynôme et $\ln(U_1)$ est un $K$-espace vectoriel. L'assertion suivante provient juste de ce que $\ln(U_1)$ est un $K$-espace vectoriel et $K$ un corps algébriquement clos. □

REMARQUE IV.2.13. *Tout sous-groupe de $\mathcal{U}$ n'est pas nécessairement engendré exponentiellement si $K \neq \mathbb{F}_p$. Donnons deux contre-exemples : le premier est le groupe de matrices $\left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right.$, avec $\left. a \in \mathbb{F}_p\right\}$ ; le deuxième est $\left\{\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a^p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right.$, avec $\left. a \in K\right\}$*

*(si $K$ est algébriquement clos, c'est les points dans $K$ d'un groupe algébrique isomorphe à $\mathbb{G}_a$, donc connexe).*

IV.2.b.2. *Quelques exemples de groupes engendrés exponentiellement.* Gardons la situation et les notations introduites précédemment.

PROPOSITION IV.2.14. *Supposons $p \geq 2r+1$. Alors $U'_M(K)$ est engendré exponentiellement.*

DÉMONSTRATION. Rappelons le lemme suivant (cf. [**Nor87**], lemma 1.4) :

LEMME IV.2.15. *Soit $M$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $S$ un ensemble de $GL_M(K)$ formé de matrices nilpotentes d'ordre $p$. Soient $W_1 \subset W_2 \subset M$ des sous-espaces vectoriels. Alors il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :*

(1) *$s(W_2) \subset W_1$ pour tout $s \in S$*
(2) *$W_1$ et $W_2$ sont stables sous l'action de $< \exp S >$ (le sous-groupe engendré par les $\exp(s)$, pour $s \in S$) et l'action de ce groupe sur $W_2/W_1$ est triviale.*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate de ce que exp et ln sont dans ces cas-là des polynômes à terme constant égal à 1 et 0 respectivement. □

Nous cherchons à montrer que si $u \in U'_M(K)$, alors pour tout $t \in K$, $u^t \in U'_M(K)$, ce qui concluera. Comme $p \geq r+1$, nous pouvons appliquer le lemme précédent. Par conséquent, si $V$ est un sous-espace vectoriel de $M$, $u \in GL_M$ laisse stable $V$ si et seulement si $\ln(u)$ laisse stable $V$ (il suffit de prendre $W_1 = W_2 = V$ dans le lemme IV.2.15). Donc $t\ln(u)$ laisse stable $V$, pour $t \in K$, donc $\exp(t\ln(u))$ laisse stable $V$. Donc $u$ laisse stable $V$ si et seulement si $u^t$ laisse stable $V$ pour tout $t \in K$.

De plus, comme $u$ est unipotent, s'il agit sur un espace quotient de deux sous-objets de $M$ qui est un élémentaire, il doit agir comme l'identité (c'est la condition qu'un élément de $\overline{G}'_M$ agit sur un élémentaire comme un élément de $\mathcal{T}$ (dont le seul unipotent est l'identité)). Dans ce cas, le lemme nous donne que $u^t$ agit sur cet élémentaire aussi comme l'identité.

Pour l'action sur $\mathrm{End}(M)$, le lemme 1.5 de [**Nor87**] va nous donner pour $\mathrm{End}(M)$ l'équivalent du lemme IV.2.15 pour $M$. Mais comme notre cadre est un peu plus précis, nous pouvons affaiblir (un peu) les hypothèses du lemme (au lieu d'avoir $p \geq 2\dim_k(M) - 1$, nous aurons $p \geq 2r+1$) et nous utiliserons le lemme IV.2.17.

Rappelons que nous pouvons prendre $\mathcal{U}_M(K)$ pour le $\mathcal{U}$ du paragraphe précédent, donc si $p \geq r+1$ le logarithme d'un élément de $\mathcal{U}_M(K)$ est bien défini et $L = \ln(\mathcal{U}_M(K))$ est une $K$-algèbre de Lie vérifiant :

$$\forall (x_0, \cdots, x_r) \in L^r,\ x_0 x_1 \cdots x_r = 0$$

Rappelons en outre le lemme suivant :

LEMME IV.2.16. *Soit $x \in L$, alors $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent d'ordre $p$. Si $p \geq 2r+1$, nous avons en plus que $\exp(\mathrm{ad}(x)) = \mathrm{Ad}(\exp(x))$.*

Démonstration du lemme. Il suffit de faire la même démonstration que celle du lemme 1.2 de [**Nor87**]. Nous utilisons juste que $x^{r+1} = 0$ au lieu de $x^p = 0$ pour dire que $L_x^i R_x^{p-i} = 0$ pour $1 \leq i \leq p-1$. $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer :

Lemme IV.2.17 (lemme 1.5 de [**Nor87**]). *Soit $W_1 \subset W_2 \subset \mathrm{End}(M)$ des sous-espaces vectoriels, et $S \subset L$. Si $p \geq 2r+1$, alors il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :*

(1) $\forall s \in S$, $\mathrm{ad}(x)(W_2) \subset W_1$

(2) *$W_1$ et $W_2$ sont stables par l'action adjointe de $< \exp S >$ et l'action induite sur $W_2/W_1$ est triviale*

Démonstration du lemme. En effet, soit $\overline{S} \subset \mathrm{End}(M)$ défini par $\overline{S} = \{\mathrm{ad}(s) | s \in S\}$. Par le lemme précédent, le groupe engendré par $\overline{S}$ s'écrit $< \exp \overline{S} >= \{\mathrm{Ad}(h) | h \in < \exp S >\}$, et il suffit alors d'appliquer le lemme IV.2.15. $\square$

Revenons alors à la démonstration de la proposition :

Si $W_1 \subset \mathrm{End}(M)$, et $\mathrm{Ad}(u)$ laisse stable $W_1$, alors $\mathrm{ad}(\ln(u))$ laisse stable $W_1$ (application du lemme IV.2.17). Donc, pour tout $t \in K$, $\mathrm{ad}(t\ln(u))$ laisse stable $W_1$ (car $W_1$ est un $K$-espace vectoriel). Donc, par la réciproque du lemme IV.2.17, $\mathrm{Ad}(\exp(t\ln(u)))$ laisse stable $W_1$.

Si de plus, $\mathrm{Ad}(u)$ laisse stable $W_2$ et $W_1 \subset W_2$ tel que $\mathrm{Ad}(u)$ agisse sur $W_2/W_1$ trivialement (ce qui est le cas si $W_2/W_1$ est élémentaire), alors une application semblable du lemme IV.2.17, nous donne que $\mathrm{Ad}(\exp(t\ln(u)))$ agit trivialement sur $W_2/W_1$.

Par conséquent, nous venons de montrer que pour tout $u \in U'_M(K)$, $u^t$ est un élément de $U'_M(K)$. Donc par le lemme IV.2.11, $U'_M(K)$ est engendré exponentiellement. $\square$

Proposition IV.2.18. *Supposons que $K$ est algébriquement clos. Soit $T$ un sous-tore de $GL_M(K)$ scindé sur $K$ (donc $T$ est isomorphe à $(K^*)^s$, une fois choisie une base des caractères) ; ses poids sont dans $\mathbb{Z}^s$, et nous supposerons qu'ils sont en réalité dans $[\![-\frac{p-2}{2}, 0]\!]^s$ ou dans $[\![-\frac{p-2}{4}, \frac{p-2}{4}]\!]^s$. Soit $U_1$ un sous-groupe de $\mathcal{U}_M(K)$ normalisé par $T$ qui est le plus petit groupe normalisé par $T$ et contenant certains unipotents $(u_j)$. Supposons en outre que pour tout $j$, il existe un groupe à un-paramètre associé à $T$, $M = \oplus M_i^{(j)}$, tel que $(u_j - \mathrm{Id})(M_i^{(j)}) \subset \oplus_{k<i} M_k^{(j)}$. Alors $U_1$ est engendré exponentiellement.*

Démonstration. Le tore $T$ agit sur $\mathrm{End}_M$ par conjugaison, notons $(\mathrm{End}_M)_\xi$ les espaces propres associés (donc $\xi$ parcourt les caractères de $T$ pour l'action adjointe sur $\mathrm{End}_M$, qui s'identifie à une partie de $[\![-\frac{p-2}{2}, \frac{p-2}{2}]\!]^s$ par hypothèse (et $\xi$ sera alors identifié à $(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{s-1})$)). Montrons le lemme suivant :

Lemme IV.2.19. *Sous les hypothèses et notations précédentes, pour tout $u \in U_1$, si $\ln(u) = \sum_\xi \ln(u)_\xi$ avec $\ln(u)_\xi \in (\mathrm{End}_M)_\xi$ est la décomposition de $\ln(u)$ suivant les espaces* *propres de l'action adjointe de $T$ sur* $\mathrm{End}_M$*, nous avons* $\ln(u)_\xi \in \ln(U_1)$*, ceci pour tout* $\xi$ *caractère de* $T$*. De plus, si* $\xi \neq 0$*, pour tout* $t \in K$*, nous avons* $t\ln(u)_\xi \in \ln(U_1)$*.*

Démonstration. La dernière affirmation provient juste de ce que l'image par un caractère d'un tore est un sous-tore de $K^*$, donc soit $K^*$, soit $\{1\}$ (car $K$ est algébriquement clos).

Nous pouvons supposer que $T$ est isomorphe à $K^*$ ($T$ étant scindé, cela revient à montrer que $\ln(u)_i = \sum_{\xi|\xi_0=i} \ln(u)_\xi$ appartient à $\ln(U_1)$ et à itérer le processus suivant les autres facteurs de $T = (K^*)^s$).

Notons $L = \ln(U_1)$. Comme $U_1$ est normalisé par $T$, $L$ est laissé stable par l'action adjointe de $T$ sur $\mathrm{End}_M$. Nous avons donc que pour tout $t \in K^*$, si $\sum_i v_i \in L$ avec $v_i \in \mathrm{End}(M)_i$, alors $\sum_i t^i v_i \in L$, donc $t\ln(u) = \sum_i t^i \ln(u)_i \in L$. Donc, $L$ étant un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel, $v = t\ln(u) - \ln(u) = \sum_{i\neq 0} \alpha_i \ln(u)_i \in L$ avec $\alpha_i = t^i - 1 \neq 0$ pour tout $i$ non nul (pour $t$ bien choisi dans $K$). Nous allons ensuite faire plusieurs récurrences à partir de l'élément $v = \sum_{i\neq 0} v_i \in L$.

Tout d'abord, par hypothèses sur les poids de $T$, si $h$ est la partie entière de $\frac{p-2}{2}$, alors $v = \sum_{i\neq 0,\, -h\leq i\leq h} v_i$. Montrons par récurrence que $v^{(j)} = \sum_{i\neq 0,\, -h+j\leq i\leq h-j} k(i,j)v_i \in L$ pour certains $k(i,j) \in K^*$. Si $j = 0$, nous prenons $v^{(0)} = v$. Puis, nous posons $v^{(j+1)} = tv^{(j)} - v^{(j)}$ avec $t$ une racine primitive $(h-j)^{\text{ème}}$ de l'unité (qui existe, car $0 \leq h-j \leq p-1$), ce qui donnera bien $k(i,j+1) = (t^i - 1)k(i,j)$ non nul si $-h+j+1 \leq i \leq h-j-1$.

Puis, si $j = h-1$, nous obtenons $k(1,h-1)v_1 + k(-1,h-1)v_{-1} \in L$. Si $t \in \mathbb{F}_p$, nous pouvons soit utiliser la structure de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel pour dire que $tk(1,h-1)v_1 + tk(-1,h-1)v_{-1} \in L$, soit utiliser l'action de $T$ pour dire que $tk(1,h-1)v_1 + t^{-1}k(-1,h-1)v_{-1} \in L$, ce qui donne en faisant la soustraction, $(t - t^{-1})k(-1,h-1)v_{-1} \in L$. Nous pouvons trouver $t \in \mathbb{F}_p$ tel que $t - t^{-1} \neq 0$ (rappelons que $p > 2$), donc en utilisant la dernière affirmation de la proposition (qui a été justifiée au tout début de la démonstration), nous obtenons $v_{-1} \in L$, et de même $v_1 \in L$.

A partir de là, comme $v^{(h-2)} \in L$, $v_{-1} \in L$, et $v_1 \in L$, nous obtenons $k(2,h-2)v_2 + k(-2,h-2)v_{-2} \in L$. Nous itérons le processus ... De manière générale, à l'étape $i$ quand nous avons $k(i,h-i)v_i + k(-i,h-i)v_{-i} \in L$, pour en déduire que $v_i \in L$ et $v_{-i} \in L$, nous faisons de même que ci-dessus, c'est-à-dire qu'il faut trouver $t \in \mathbb{F}_p$ tel que $t^i - t^{-i} \neq 0$, ce qui est possible car $0 \leq i \leq h \leq \frac{p-2}{2}$.

En appliquant ceci à $v = \sum_{i\neq 0} \alpha_i \ln(u)_i$, nous obtenons $\ln(u)_i \in L$ pour tout $i$ non nul, mais comme $\ln(u) = \sum_i \ln(u)_i \in L$, en faisant la soustraction, nous obtenons aussi $\ln(u)_0 \in L$, ce qui donne le lemme. □

Remarque IV.2.20. *Ce lemme nous explique que le groupe des unipotents d'un Borel n'est pas loin d'être engendré exponentiellement : il suffit de savoir que la partie* $\ln(U_1)_0$ *est un* $K$*-espace vectoriel.*

Revenons à la démonstration de la proposition : appliquons le lemme à $u = u_j$, l'un des unipotents $U_1$. Par hypothèse, $(u_j - \mathrm{Id})(M_i^{(j)}) \subset \oplus_{k<i} M_k^{(j)}$, donc $\ln(u_j)_0 = 0$. Par conséquent, le lemme nous permet d'affirmer que pour tout $\xi$, pour tout $t \in K$, $t\ln(u_j)_\xi \in L$. Donc le groupe engendré exponentiellement par les $\ln(u_j)_\xi$ est inclus dans $U_1$. Notons le $U_2$. Il contient par définition les $u_j$. Il est normalisé par $T$, car si $t \in T$, $t\exp(\ln(u_j)_\xi)t^{-1} = \exp(\xi(t)\ln(u_j)) \in U_2$ par définition. Donc c'est bien $U_1$, par l'hypothèse de minimalité dans la définition de $U_1$. □

Corollaire IV.2.21. *Le groupe* $U_M(k)$ *est engendré exponentiellement si* $M$ *est un objet de* $\mathbf{MF_k^{-h}}$ *avec* $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$ *ou un objet de* $\mathbf{MF_k^{\pm h}}$ *avec* $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$*.*

Démonstration. Nous prenons $T = \mathcal{T}(k)$, qui aura les poids dans le bon domaine par hypothèse sur $h$. Pour les $u_j$, il suffit de prendre $\exp(\ln(u_M)_\xi)$ et leurs conjugués par $f_M^{e\ell}$ (puisque $G_M$ est le plus petit groupe défini sur $M^{f_M^{e\ell}}$ contenant $u_M$ et le tore $\mathcal{T}$). Puisque, si $M = \oplus M_i$ est la graduation donnée par [**Win84**], nous avons (par définition de $u_M$) $(u_M - \mathrm{Id})(M_i) \subset \oplus_{j<i} M_j$, nous pouvons appliquer la proposition précédente. □

IV.2.b.3. *Groupes algébriques engendrés exponentiellement.* Un groupe algébrique réduit inclus dans un $GL_M$ est caractérisé par ses points sur un corps algébriquement clos (c'est le théorème des zéros de Hilbert). Nous pouvons donc étendre le travail précédent aux groupes algébriques réduits sur $k$ (car $k$ est algébriquement clos) :

Définition IV.2.22. *Soit* $U_1$ *un sous-groupe algébrique réduit de* $\mathcal{U}_M$*.* $U_1$ *est dit engendré exponentiellement si* $U_1(k)$ *l'est (pour la définition précédente). Cela revient à dire que* $\ln$ *définit un isomorphisme de variété algébrique de* $U_1$ *sur l'espace affine de dimension* $\dim_k(\ln(U_1(k)))$*, ou bien que si* $U_1(k)$ *est engendré exponentiellement par* $S$*, alors* $U_1$ *est le groupe algébrique engendré par les groupes à un-paramètre* $(\exp(ts))_t$ *pour* $s \in S$*.*

Remarque IV.2.23. *C'est une définition moins générale que celle qu'étudie Nori dans* [**Nor87**] *(puisque nous ne considérons que des sous-groupes de* $\mathcal{U}_M$*), mais nous avons ainsi des résultats plus précis.*

Proposition IV.2.24. *Avec cette définition, sous l'hypothèse* $p \geq 2r+1$*,* $U_M$ *et* $(U'_M)^{red}$ *(le groupe algébrique réduit associé à* $U'_M$*) sont engendrés exponentiellement.*

Démonstration. C'est une application directe des propositions IV.2.18 et IV.2.14 □

Deux remarques utiles sur les groupes engendrés exponentiellement :

Lemme IV.2.25. *Si* $U_1$ *est un groupe engendré exponentiellement, alors* $U_1$ *est connexe*

DÉMONSTRATION. En effet, $t \mapsto \exp(tx)$ a une image connexe, et il suffit d'appliquer la proposition 2.2 de [**Bor91**]. □

PROPOSITION IV.2.26. *Si $p \geq r+1$ et $U_1$ est engendré exponentiellement, alors l'algèbre de Lie sur $k$, notée $Lie(U_1)$, associée à $U_1$ est $Lie(U_1) = \ln(U_1(k))$.*

DÉMONSTRATION. Nous savons déjà que sous ces conditions $\ln(U_1(k))$ est une $k$-algèbre de Lie, et comme $U_1$ est de dimension $\dim_k \ln(U_1(k))$, il suffit de montrer une inclusion pour avoir l'égalité. Or pour tout $x \in \ln(U_1(k))$, le groupe à un-paramètre $t \mapsto \exp(tx)$ est inclus dans $U_1$ (c'est une application du lemme IV.2.11 et du fait qu'un groupe algébrique réduit est caractérisé par ses points sur un corps $k$ algébriquement clos). Donc $Lie((\exp(tx))_t) \subset Lie(U_1)$, donc $x \in Lie(U_1)$. □

### IV.2.c. Etude de $\overline{G}_M$ et $\overline{G}'_M$.

THÉORÈME IV.2.27. *Notons $(G, G)$ le groupe dérivé d'un groupe $G$ quelconque. Supposons $M$ objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{-\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$ ou un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{\pm\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$. Alors, si $p \geq 2r+1$, nous avons $(\overline{G}_M, \overline{G}_M) = ((\overline{G}'_M)^{red}, (\overline{G}'_M)^{red})$, et c'est un groupe connexe.*

DÉMONSTRATION. Notons durant cette démonstration, $G := \overline{G}_M(k)$, $U := U_M(k)$, $G' := (\overline{G}'_M)^{\mathrm{red}}(k) = \overline{G}'_M(k)$ et $U' := (U'_M)^{\mathrm{red}}(k) = U'_M(k)$. Montrons ce théorème à l'aide de deux lemmes :

LEMME IV.2.28. *L'égalité pour les algèbres de Lie est vraie : $[Lie(G), Lie(G)] = [Lie(G'), Lie(G')]$*

REMARQUE IV.2.29. *Nous avons $Lie(U') = \ln(U')$ car $U'$ est engendré exponentiellement (cf. prop. IV.2.26), et (pour des raisons de dimensions), $Lie(G) = Lie(U) \oplus Lie(T)$, $Lie(G') = Lie(U') \oplus Lie(T)$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME IV.2.28. Par définition, $G \subset G'$, ce qui se traduit pour les algèbres de Lie par $[Lie(G), Lie(G)] \subset [Lie(G'), Lie(G')]$.

Comme $U$ est engendré exponentiellement et $U \subset \mathcal{U}_M$, nous avons, par la proposition IV.2.26, $Lie(U) = \ln(U)$. Or, $[Lie(U), Lie(G)] \subset [Lie(G), Lie(G)] = W_1$, donc $\mathrm{ad}(\ln(u))(Lie(G)) \subset W_1$ pour tout $u \in U$. Donc (cf. lemme IV.2.17) $Lie(G)$ et $W_1$ sont stables par $\mathrm{Ad}(U)$, et l'action sur $Lie(G)/W_1$ est triviale.

De plus, les caractères du tore $\mathcal{T}$ sur $M$ sont donnés par les $\xi \in X$ qui interviennent dans la décomposition $M = \oplus M_\xi$. Rappelons que $\xi$ est une application périodique de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Dans le cas où $M$ objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$, nous avons pour tout $i$, $0 \geq \xi(i) \geq -h$. Alors, les caractères de $\mathcal{T}$ agissant par conjugaison sur $\mathrm{End}(M)$ sont donnés par les éléments $\xi - \eta$. Donc les caractères de $Lie(\mathcal{T})$ étant donnés par les $\xi - \eta$ modulo $p$, ils définissent les mêmes espaces propres que ceux de $\mathcal{T}$, car $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$. Il se passe la même chose pour $M$ objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{\pm\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$. Donc, comme $\mathrm{ad}(Lie(T))(Lie(G)) \subset W_1$, nous en déduisons que $\mathrm{Ad}(\mathcal{T})(Lie(G)) \subset Lie(G)$ et $\mathrm{Ad}(\mathcal{T})(W_1) \subset W_1$, donc $\mathrm{Ad}(\mathcal{T})$ agit sur $Lie(G)/W_1$.

Donc, en reliant les deux affirmations, nous obtenons que $G$ agit sur $Lie(G)/W_1$ (et $G$ stabilise $Lie(G)$ et $W$) et $U$ agit trivialement (donc $Lie(G)/W_1$ est un élémentaire). Donc, par définition, $G'$ aussi, donc en particulier, $\mathrm{Ad}(U')$ stabilise $Lie(G)$, $W_1$ et agit trivialement sur le quotient. Donc une application du lemme IV.2.17 nous donne $\mathrm{ad}(\ln(U'))\big(Lie(G)\big) = [Lie(U'), Lie(G)] \subset W_1$. Or, $Lie(G') = Lie(\mathcal{T}) \oplus Lie(U')$, donc nous avons $[Lie(G'), Lie(G)] \subset W_1 = [Lie(G), Lie(G)]$. En raisonnant de même, en remplaçant $Lie(G)$ par $Lie(G')$, nous déduisons bien que $[Lie(G'), Lie(G')] \subset [Lie(G), Lie(G)]$. □

Lemme IV.2.30. *Sous les mêmes conditions,* $[Lie(G), Lie(G)] = \ln((G,G)(k))$, *et* $[Lie(G'), Lie(G')] = \ln((G',G')(k))$

Démonstration du lemme IV.2.30. Nous avons les inclusions suivantes : $[Lie(G), Lie(G)] \subset Lie\big((G,G)\big) \subset \ln\big((G,G)(k)\big)$. La première inclusion est toujours vraie (voir [**Bor91**] proposition 3.17), la seconde vient de ce que $(G,G) \subset U$, donc $\ln\big((G,G)(k)\big)$ existe, et il engendre un groupe exponentiellement qui l'admet comme algèbre de Lie (cf. proposition IV.2.26), et qui contient $(G,G)$. La même propriété est vraie en remplaçant $G$ par $G'$, $U$ par $U'$.

Or, du fait que $U$ (ou $U'$) est inclus dans $\mathcal{U}_M$, la formule de Campbell-Hausdorf est vraie. Si $t \in \mathcal{T}(k)$ et $u \in U(k)$, $tut^{-1} \in U(k)$ (car $U$ est distingué dans $G$), donc nous pouvons appliquer la formule, et donc $tut^{-1}u^{-1} = \exp(z)$, avec si $X = t\ln(u)t^{-1}$ et $Y = -\ln(u)$, $z = X + Y + Z$ avec $Z \in [Lie(G), Lie(G)]$.

Montrons que $X + Y \in [Lie(G), Lie(G)]$ : notons $Lie(U)_\xi$ l'espace propre associé au caractère $\xi$ pour l'action adjointe de $\mathcal{T}$. Par la remarque faite au cours de la démonstration du lemme précédent, c'est l'espace propre associé au caractère $\bar{\xi}$ (la réduction modulo $p$ de $\xi$) pour l'action adjointe de $Lie(\mathcal{T})$. Donc, nous avons l'inclusion $[Lie(\mathcal{T}), Lie(U)] = \oplus_{\xi\neq 0} Lie(U)_\xi \subset [Lie(G), Lie(G)]$. Considérons $u \in U$ tel que $\ln(u)$ soit dans $Lie(U)_\xi$, et un élément $t \in \mathcal{T}(k)$. Alors $t\ln(u)t^{-1} - \ln(u) = (\xi(t) - 1)\ln(u)$ vaut 0 si $\xi = 0$, ou appartient à $Lie(U)_\xi$ sinon. Dans les deux cas, nous avons bien $X + Y \in [Lie(G), Lie(G)]$ (en décomposant composante par composante).

Par conséquent, nous obtenons $tut^{-1}u^{-1} = \exp(z)$ avec $z \in [Lie(G), Lie(G)]$. Comme $\mathcal{T}$ est un tore, il est abélien, donc pour tout $t_1$, $t_2 \in \mathcal{T}(k)$, $t_1t_2t_1^{-1}t_2^{-2} = 0$. Le fait que $\ln(uvu^{-1}v^{-1}) \in [Lie(G), Lie(G)]$ est une application directe de la formule de Campbell-Hausdorff qui nous donne même plus précisement $\ln(uvu^{-1}v^{-1}) \in [Lie(U), Lie(U)]$. Donc nous en déduisons l'inclusion $\ln\big((G,G)(k)\big) \subset [Lie(G), Lie(G)]$. (Bien sur, le même résultat est vrai en remplaçant $G$ par $G'$, $U$ par $U'$). □

En regroupant tout ceci, nous avons donc montré que $(G,G)$ (respectivement $(G',G')$) est engendré exponentiellement, son algèbre de Lie étant $[Lie(G), Lie(G)]$ (respectivement $[Lie(G'), Lie(G')]$. Or $[Lie(G), Lie(G)] = [Lie(G'), Lie(G')]$, donc $\ln\big((G,G)(k)\big) = \ln\big((G',G')(k)\big)$, donc $(G,G)(k) = (G',G')(k)$, ce qui montre le théorème (car $k$ est algébriquement clos et $\overline{G}_M$ et $(\overline{G}'_M)^{\mathrm{red}}$ sont réduits). □

Corollaire IV.2.31. *Tout élément $t'$ de $(\overline{G}'_M)^{red}$ semi-simple est élément de $\overline{G}_M$. Par conséquent, si $T'$ est un tore de $\overline{G}'_M$, nous avons l'inclusion $T' \subset \overline{G}_M$.*

Démonstration. En effet, $(\overline{G}'_M)^{\mathrm{red}}$ étant connexe et résoluble avec $\mathcal{T}$ comme tore maximal (les autres lui sont conjugués), appliquons le théorème 10.6 de [**Bor91**], pour obtenir existence d'un $t \in \mathcal{T}$ et $g \in \overline{G}'_M$ tel que $t' = gtg^{-1}$. Alors $gtg^{-1}t^{-1} = u \in ((\overline{G}'_M)^{\mathrm{red}}, (\overline{G}'_M)^{\mathrm{red}}) = (\overline{G}_M, \overline{G}_M)$, donc $u \in \overline{G}_M$, et $t' = ut \in \overline{G}_M$. □

De la même façon, nous pouvons montrer :

Proposition IV.2.32. *Sous les hypothèses précédentes, le groupe $(\overline{G}_V, \overline{G}_V)$ est égal au groupe $((\overline{G}'_V)^{red}, (\overline{G}'_V)^{red})$, et c'est un groupe engendré exponentiellement. De plus, tout tore de $\overline{G}'_V$ est inclus dans $\overline{G}_V$.*

Proposition IV.2.33. *Sous les hypothèses précédentes, nous avons l'égalité $(\overline{G}_M, \overline{G}_M) = U_M$.*

Démonstration. En effet, par le théorème 5.6 de [**Bor91**], il existe une immersion fermée de $\overline{G}_M/(\overline{G}_M, \overline{G}_M)$ dans $GL_N$ pour un $N \in \mathbf{Tan}(M)$, dont l'image est abélienne, et égale à $G_N$. Donc, par la description donnée à la proposition IV.2.1, $G_N$ est sans unipotent (puisque la commutativité implique $u_N = \mathrm{Id}$). Donc $U_M \subset (\overline{G}_M, \overline{G}_M)$. □

Proposition IV.2.34. *Sous les hypothèses précédentes, nous avons l'égalité $(\overline{G}_V, \overline{G}_V) = U_V$ si $0 \leq h \leq p-3$.*

Démonstration. Nous avons montré que $(\overline{G}_V, \overline{G}_V)$ est engendré exponentiellement. Si l'image de Galois (dans $V$) a comme groupe dérivé ses unipotents, alors comme $(\overline{G}_V, \overline{G}_V)$ est engendré exponentiellement, et contient les unipotents de l'image de Galois (c'est-à-dire l'image de l'inertie sauvage), nous aurons $U_V \subset (\overline{G}_V, \overline{G}_V)$. L'inclusion réciproque étant immédiate, nous aurons bien montré la proposition.

Montrons donc que l'image de Galois (dans $V$) a comme groupe dérivé ses unipotents. Or cela provient du théorème de Fontaine dans [**Fon93**] :

Théorème (Fontaine). *Soit $U$ une représentation $\mathbb{Z}_p$-adique de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ qui est cristalline, à poids de Hodge-Tate dans $[\![0, h]\!]$, avec $0 \leq h \leq p-2$. Notons $V$ la réduction modulo $p$ de $U$, $H$ le noyau de l'action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ sur $V$, et $L = \overline{\mathcal{K}}^H$. Si enfin $v_0$ désigne la valuation de $L$ normalisée par $v_0(p) = 1$ et $\mathfrak{D}_{L/\mathcal{K}}$ la différente de l'extension $L/\mathcal{K}$, alors*

$$v_0(\mathfrak{D}_{L/\mathcal{K}}) \leq 1 + \frac{h}{p-1}$$

Le $V$ considéré ici est $V = \mathbf{V_{cris}}(M)$.

Supposons alors qu'il existe un élément unipotent de $\mathrm{Gal}(L/\mathcal{K}) = \Gamma_{\mathcal{K}}/H$ qui ne soit pas dans le groupe dérivé. Alors, il induit dans $J = \mathrm{Gal}(L/\mathcal{K})/(\mathrm{Gal}(L/\mathcal{K}), \mathrm{Gal}(L/\mathcal{K}))$ un sous-groupe d'ordre une puissance de $p$, donc il existe un élément de $J$ d'ordre $p$ (qui engendre un groupe cyclique distingué car $J$ est abélien). Par conséquent, il existe

$M/\mathcal{K}$ extension cyclique de degré $p$ (donc sauvagement ramifié car $\mathcal{K}$ a un corps résiduel algébriquement clos) avec $M \subset L$. De plus, comme $\mathfrak{D}_{L/\mathcal{K}} = \mathfrak{D}_{L/M}\mathfrak{D}_{M/\mathcal{K}}$, nous obtenons $v_0(\mathfrak{D}_{M/\mathcal{K}}) \leq v_0(\mathfrak{D}_{L/\mathcal{K}}) \leq 1 + \frac{h}{p-1}$.

$M/\mathcal{K}$ est totalement ramifiée, donc si $\pi \in M$ est une uniformisante (c'est-à-dire $v_0(\pi) = \frac{1}{p}$), $\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_{\mathcal{K}}[\pi]$ (cf. I 6 théorème 1 de [**CF86**]), et si $f$ est le polynôme minimal de $\pi$ sur $\mathcal{K}$, alors $\mathfrak{D}_{M/\mathcal{K}} = f'(\pi)\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ (cf. I 4 proposition 6 de [**CF86**]), donc $v_0(\mathfrak{D}_{M/\mathcal{K}}) = v_0(f'(\pi)) = v_0\big(\prod_{\sigma\in \mathrm{Gal}(M/\mathcal{K})\setminus\{Id\}} (\sigma(\pi)-\pi)\big) = \dfrac{(i+1)(p-1)}{p}$ où $i \geq 1$ est le nombre de ramification de l'extension $M/\mathcal{K}$ (il y a un seul nombre de ramification car l'extension est cyclique, et il est supérieur ou égal à 1 car l'extension est sauvagement ramifiée).

Nous obtenons donc $h \geq \frac{ip^2-(2i+1)p+i+1}{p}$. Si $0 \leq h \leq p-3$ et $i \geq 1$, cette inégalité est impossible, ce qui conduit à une contradiction. Ceci montre donc bien que l'image de Galois (dans $V$) a comme groupe dérivé ses unipotents, ce qui conclut la proposition. □

**IV.2.d. Relation entre $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ modulo $p$.** Soit $\widetilde{M}$ un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{-\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$ ou de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$, et notons $M$ sa réduction modulo $p$ et $n = \dim_k(M)$. Soit $r+1$ la plus petite longueur d'une filtration de $M$ dont les quotients sont des modules élémentaires.

Théorème IV.2.35. *Supposons $p \geq 2r+1$. Alors il existe $h_M : \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(\widetilde{M})\otimes_{\mathbb{F}_p} k \to M$ un isomorphisme de $k$-espaces vectoriels tel que*
- *$h_M\rho_{mr}(t) = \rho_{\mathbf{MF}}(t)h_M$ pour $t \in (k\otimes_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}_{p^s})^*$ ;*
- *$h_M$ identifie $\overline{G}_M \times_{\mathbb{F}_p} k$ et $\overline{G}_V \times_{\mathbb{F}_p} k$ ;*
- *pour tout sous-objet $L$ dans $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}$, facteur direct (comme $W$-module) de $\bigoplus_{0\leq i\leq k} (\underbrace{\widetilde{M}\oplus\cdots\oplus\widetilde{M}}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$, l'isomorphisme $h_M$ induit une bijection de $\big(\mathbf{V}_{\mathbf{cris,p}}(D_L)\cap \bigoplus_{0\leq i\leq k}(\underbrace{\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(\widetilde{M})\oplus\cdots\oplus\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(\widetilde{M})}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}\big)\otimes_{\mathbb{Z}_p} k$ sur $L\otimes_W k$.*

Démonstration. Soit $\overline{f}_M$ la bijection donnée par le théorème III.5.6

$$\overline{f}_M : \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M)\otimes_{\mathbb{F}_p}\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p \to M\otimes_k \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p$$

Elle envoie $\overline{G}'_V(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p)$ sur $\overline{G}'_M(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p)$ par définition de ces groupes, combiné à la proposition III.6.5, et car suite aux conditions imposées sur $h$, $\mathrm{End}_M$ est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{\pm\mathbf{k}}$ avec $0 \leq k \leq \frac{p-2}{2}$. Donc, à l'aide des théorèmes précédents (nous remarquerons que pour $G$ un schéma en groupe, si $F$ est un corps, $G(F) = G^{\mathrm{red}}(F)$), nous pouvons voir que $U_V(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p) = (\overline{G}'_V, \overline{G}'_V)(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p)$ est envoyé sur $(\overline{G}'_M, \overline{G}'_M)(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p) = U_M(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p)$. Alors, elle envoie $\overline{G}_V(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p)$ sur $\overline{G}_M(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p)$, car ces groupes contiennent tous les éléments semi-simples (de $\overline{G}'_M(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p)$ ou de $\overline{G}'_V(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p)$ respectivement).

Donc, il existe $g \in \overline{G}_M(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p)$ tel que $g\mathcal{T}g^{-1}$ est envoyé sur $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$. Si $g = u_1t_1$ avec $u_1 \in U_M(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p)$ et $t_1 \in \mathcal{T}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p)$, alors $u_1\mathcal{T}u_1^{-1}$ est envoyé sur $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$. Comme $u_1$

agit via l'identité sur les élémentaires $M[i]/M[i-1]$, pour tout $t \in (\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{p^s})^*$, $u_1\rho_{\mathbf{MF}}u_1^{-1}(t)$ agit comme $\rho_{mr}(t)$ sur $M[i]/M[i-1]$. Par les propriétés de fonctorialité, la remarque III.5.7 et la proposition III.6.5, $u_1\rho_{\mathbf{MF}}u_1^{-1}(t)$ est envoyé par $\mathsf{f}_M$ sur un élément qui agit comme $\rho_{mr}(t)$ sur $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M)[i]/\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M[i-1])$, donc $u_1\rho_{\mathbf{MF}}u_1^{-1}(t)$ est envoyé sur $\rho_{mr}(t)$.

Considérons alors le schéma $\mathbf{X}$ défini sur $k$ par : pour toute $k$-algèbre $R$, $\mathbf{X}(R)$ est l'ensemble des $\theta : \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{F}_p} R \simeq M \otimes_k R$ isomorphismes de $R$-modules tels que

– $\forall t \in (R \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{p^s})^*$, $\theta\rho_{mr}(t)\theta^{-1} = \rho_{\mathbf{MF}}(t)$ ;
– si $L$ est un sous-objet dans $\mathbf{MF_W}$, facteur direct (comme $W$-module) de $\bigoplus_{0\le i\le k}(\underbrace{\widetilde{M}\oplus\cdots\oplus\widetilde{M}}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$, alors $\theta$ induit une bijection de $\big(\mathbf{V_{cris,p}}(D_L) \cap \bigoplus_{0\le i\le k}(\underbrace{\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(\widetilde{M})\oplus\cdots\oplus\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(\widetilde{M})}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ sur $L \otimes_W R$ ;
– $\theta$ envoie $\overline{G}_V(R)$ bijectivement sur $\overline{G}_M(R)$.

Alors $\mathbf{X}$ est un sous-$k$-schéma de $\mathbf{Isom_k}(\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{F}_p} k, M)$ (les $k$-isomorphismes de $\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{F}_p} k$ sur $M$), il est non vide car $\mathsf{f}_M \circ u_1 \in \mathbf{X}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}/p)$. Donc, $k$ étant algébriquement clos, $\mathbf{X}(k)$ est non vide. □

Remarque IV.2.36. *Nous aurions pu considérer $\mathbf{X}'$ défini de la manière suivant : notons pour $N$ élémentaire, $g_N : \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{F}_p} k \to N$ l'application $g_N(x(\xi)e_\xi^j) = e_\xi^j$. Alors, $\mathbf{X}'(R)$ est l'ensemble des $\theta : \widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(M) \otimes_{\mathbb{F}_p} R \simeq M \otimes_k R$ tels que*

– *si $N$ est un sous-objet de $M$, alors $\theta(\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{F}_p} R) = N \otimes_k R$ ;*
– *si $N$ est un sous-objet de* End$(M)$, *alors $\theta \otimes {}^t\theta^{-1}(\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(N) \otimes_{\mathbb{F}_p} R) = N \otimes_k R$ ;*
– *si $N_1 \subset N_2$ sont deux sous-objets de $M$ tels que $N_2/N_1$ est élémentaire, alors $\theta$ restreint à $N_2/N_1$ est égal à $g_{N_2/N_1} \otimes_k R$ ;*
– *si $N_1 \subset N_2$ sont deux sous-objets de* End$(M)$ *tels que $N_2/N_1$ est élémentaire, alors $\theta \otimes {}^t\theta^{-1}$ restreint à $N_2/N_1$ est égal à $g_{N_2/N_1} \otimes_k R$ ;*
– *si $L$ est un sous-objet dans $\mathbf{MF_W}$, facteur direct (comme $W$-module) de $\bigoplus_{0\le i\le k}(\underbrace{\widetilde{M}\oplus\cdots\oplus\widetilde{M}}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}$, alors $\theta$ induit une bijection de $\big(\mathbf{V_{cris,p}}(D_L) \cap \bigoplus_{0\le i\le k}(\underbrace{\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(\widetilde{M})\oplus\cdots\oplus\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{cris}}(\widetilde{M})}_{n \text{ fois}})^{\otimes i}\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ sur $L \otimes_W R$.*

*$\mathbf{X}'$ est relié à $\mathbf{X}$ par l'équivalence suivante : $\theta \in \mathbf{X}'(R)$ si et seulement s'il existe $g \in \overline{G}_M(R)$ tel que $g \circ \theta \in \mathbf{X}(R)$.*

**IV.2.e. Relation entre $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$.** Reprenons le cadre (et les notations) du paragraphe IV.1.b : soit $G$ un groupe lisse sur $\mathbb{Z}_p$, et $\rho$ une représentation cristalline de $G$ dans $GL_{\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(\widetilde{M})}$ où $\widetilde{M}$ est un objet de $\mathbf{MF_W^{-h}}$ avec $0 \le h \le \frac{p-2}{2}$ ou de $\mathbf{MF_W^{\pm h}}$ avec $0 \le h \le \frac{p-2}{4}$ et si $r$ est la plus petite longueur d'une filtration de $M$ dont les quotients sont des modules élémentaires, $p \ge 2r-1$. Le torseur **Isom** est un $W$-schéma lisse, et $h_M \in \mathbf{Isom}(k)$. Donc, par le lemme de Hensel (cf. théorème 18.5.11 b de EGA IV), il existe une bijection $\widetilde{h} : U \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \to \widetilde{M}$ qui identifie le groupe $G$ à un groupe $\overline{G}$ qui contient $G_{\widetilde{M}}$, donc en particulier $\mathcal{T}$; et la réduction de $\widetilde{h}$ modulo $p$ vaut $h_M$.

Modulo $p$, $h_M$ identifie $\rho_{\mathbf{MF}}$ et $\rho_{_{mr}}$, donc si $\tau$ est un générateur de l'inertie modérée $\mathcal{I}_{mr}$, si $t \in \mathbb{Z}_{p^s}^*$ est tel que $\rho_{_{mr}}(t) = \rho(\tau)$, alors $h_M \rho_{\mathbf{MF}}(t) h_M^{-1} = \rho(\tau)$ modulo $p$, et ($\widetilde{h}^{-1}(\mathcal{T})$ étant conjugué à $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ dans $GL_{\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(\widetilde{M})}$ car ils ont mêmes caractères, et mêmes dimension d'espaces propres) $\rho_{\mathbf{MF}}(t)$ engendre dans $GL_{\widetilde{M}}$ un groupe isomorphe à celui de l'image de l'inertie modéré.

Considérons un élément $x \in \widetilde{h}^{-1}\mathcal{T}\widetilde{h}$ tel que $x = \rho(\tau)$ modulo $p$. Il existe alors $g \in G(W)$ avec $g^{-1}xg = \rho(\tau)$ et $g = \mathrm{Id}$ modulo $p$ (c'est le lemme IV.2.37). Alors, $\widetilde{h}g$ est un relèvement possible de $h_M$ tel que $\rho(\tau) \in (\widetilde{h}g)^{-1}\mathcal{T}\widetilde{h}g$. Donc, $(\widetilde{h}g)^{-1}\mathcal{T}\widetilde{h}g$ est un tore qui contient l'image de l'inertie modérée (donc commute à $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$), qui est égal à $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ modulo $p$, et qui a les mêmes caractères (qui sont déterminés sur $k$ à cause des conditions sur $h$), donc $(\widetilde{h}g)^{-1}\mathcal{T}\widetilde{h}g = \mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$. Et comme $hg$ modulo $p$ vaut $h_M$, nous avons $(\widetilde{h}g)^{-1}\rho_{\mathbf{MF}}\widetilde{h}g = \rho_{_{mr}}$ modulo $p$, donc $(\widetilde{h}g)^{-1}\rho_{\mathbf{MF}}\widetilde{h}g = \rho_{_{mr}}$.

LEMME IV.2.37. *Soit $H$ un groupe de type multiplicatif sur $W$, $G$ un groupe lisse sur $W$ (sous-groupe de $GL_U$ pour un $W$-module libre de type fini $U$), et $u, v : H \to G$ deux morphismes de groupes tels que $u \times_W k = v \times_W k$. Alors, il existe $g \in G(W)$ tel que $v = gug^{-1}$ et $g = \mathrm{Id}$ modulo $p$.*

DÉMONSTRATION. L'existence d'un $g_n \in G(W/p^n)$ tel que $g_n(u \times_W W/p^n)g_n^{-1} = (v \times_W W/p^n)$ et $g_n = Id$ modulo $p$ provient du corollaire 3.3 de SGA 3 II Exposé IX. Et plus exactement, en utilisant ce corollaire, pour tout $g_n$ qui vérifie $g_n \in G(W/p^n)$ tel que $g_n(u \times_W W/p^n)g_n^{-1} = (v \times_W W/p^n)$, il existe un $g_{n+1} \in G(W/p^{n+1})$ tel que $g_{n+1}(u \times_W W/p^{n+1})g_{n+1}^{-1} = (v \times_W W/p^{n+1})$ et $g_{n+1} = g_n$ modulo $p^n$. Si $Y_n := \{g_n \in G(W/p^n)$ tel que $g_n(u \times_W W/p^n)g_n^{-1} = (v \times_W W/p^n)$ et $g_n = Id$ modulo $p\}$, et $Y_1 := \{\mathrm{Id}\}$, alors les $Y_n$ (avec les applications de restrictions modulo $p^n$) forment un système projectif. Nous venons de montrer que chaque $Y_n$ est non vide, donc la limite projective est non vide. Soit $g \in \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} Y_n$, alors $g \in G(W)$ (car si $I$ est l'idéal qui définit $G$ sur $W$, $I \otimes_W W/p^n$ est l'idéal définissant $G$ sur $W/p^n$, par conséquent pour tout $f \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(g) = f(g_n) = 0$ modulo $p^n$, donc $f(g) = 0$), $g = \mathrm{Id}$ modulo $p$ et $v = gug^{-1}$ modulo $p^n$ pour tout $n$. $\square$

Nous venons donc de montrer :

THÉORÈME IV.2.38. *Soit $\rho : \Gamma_{\mathcal{K}} \to G(\mathbb{Z}_p)$ une représentation cristalline à valeurs dans les point sur $\mathbb{Z}_p$ de $G$, groupe algébrique lisse défini sur $\mathbb{Z}_p$. Soit $U$ un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang $n$, et $\alpha : G \to GL_U$ une représentation qui soit une immersion fermée. Supposons $p \geq 2r+1$ où $r+1$ est le nombre de modules élémentaires intervenant dans une suite de composition de $V/p$. Supposons que l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

– *la représentation cristalline induite par $\alpha$ sur $U$ est à poids de Hodge-Tate dans $[\![0, h]\!]$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$, et $\alpha$ induit une immersion fermée de $G$ dans* $\mathrm{End}_U$

– *la représentation cristalline induite par $\alpha$ sur $U$ est à poids de Hodge-Tate dans $[\![-h, h]\!]$ avec $0 \le h \le \frac{p-2}{4}$, et $\alpha$ induit une immersion fermée de $G$ dans* $\mathrm{End}_U$
– *la représentation cristalline induite par $\alpha$ sur $U$ est à poids de Hodge-Tate dans $[\![0, h]\!]$ avec $0 \le h \le \frac{p-2}{4}$*
– *la représentation cristalline induite par $\alpha$ sur $U$ est à poids de Hodge-Tate dans $[\![-h, h]\!]$ avec $0 \le h \le \frac{p-2}{8}$*

*Alors, $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}} \subset G$ et il existe un isomorphisme $h : U \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \to \widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)$ qui identifie le groupe $G$ à un groupe $\overline{G}$ (dont la description est donné au théorème IV.1.7) contenant $\mathcal{T}$, tel que $h^{-1}\rho_{\mathbf{MF}}h = \rho_{mr}$ (donc en particulier identifie $\mathcal{T}$ à $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$).*

REMARQUE IV.2.39. *La condition $p \ge 2r+1$ est vérifiée dès que $p \ge 2n-1 = 2\,\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p} U - 1$.*

Mais ce théorème peut s'appliquer de la manière suivante : considérons $\rho : \Gamma_{\mathcal{K}} \to GL_V$ une représenation cristalline de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ dans un $\mathbb{Q}_p$ espace-vectoriel de dimension inférieure à $\frac{p}{2}$. Supposons que les poids de Hodge-Tate soient dans $[\![-h, h]\!]$ avec $0 \le h \le \frac{p-2}{8}$ ou dans $[\![0, h]\!]$ avec $0 \le h \le \frac{p-2}{4}$, alors (cf [**Fon79b**], proposition 3.8.4) l'adhérence de Zariski (dans $GL_V$) $H$ de l'image de $\rho$ est connexe. Supposons la représentation semi-simple (sinon, considérons sa semi-simplifiée), alors $H$ est réductif. Donc, en appliquant les résultats cités dans [**Tit79**] (paragraphe 3.2 et 3.4.1), il existe un groupe algébrique lisse $G$ défini sur $\mathbb{Z}_p$, tel que $\mathrm{Im}(\rho) \subset G(\mathbb{Z}_p)$, et dont la fibre générique est $H$. Le théorème précédent s'applique alors, et nous donne l'inclusion $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}} \subset H$.

De manière générale, nous avons la suite exacte courte scindée (cf. un résultat de G.D. Mostow, car la caractéristique du corps de base $\mathbb{Q}_p$ est nulle) :

$$0 \longrightarrow R_u(H) \longrightarrow H \xrightarrow{\Pi} H_{red} \longrightarrow 0$$

où $H_{red}$ est un groupe réductif, qui est égal à l'adhérence de Zariski de l'image de la représentation semi-simplifiée associée, et $R_u(H)$ est le radical unipotent de $H$. De plus, toutes les sections sont conjuguées.

Alors, le tore $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ est inclus dans $H_{red}$, de part les remarques précédentes, et en considérant son image par une section $s : H_{red} \to H$, nous obtenons un tore $T = s(\mathcal{T}_{\mathrm{mr}})$, qui se réduit sur $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$. Quitte à conjuguer la section, nous pouvons supposer que l'image de l'inertie modérée est incluse dans $T$ (en effet, soit $K$ le groupe engendré par $T$ et $R_u(H)$ (c'est-à-dire $K = T \ltimes R_u(H)$) ; alors l'image de l'inertie modérée est dans $K$, car $K = \Pi^{-1}(\mathcal{T}_{\mathrm{mr}})$, donc il existe un élément de $T$ qui est conjugué (par $g \in K$) à l'image d'un générateur de l'inertie modérée (cf. théorème 10.6(5) de [**Bor91**]) ; or, $T$ étant abélien, nous pouvons supposer $g \in R_u(H)$, et considérer alors la section $gsg^{-1}$). Nous voulons montrer que $T$ est en fait $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$, or il suffit de remarquer qu'il a les mêmes espaces propres que ceux de l'image d'un générateur de l'inertie modérée, associés aux bons caractères, et ceci se voit sur le semi-simplifié. Nous avons donc montré le théorème suivant :

Théorème IV.2.40. *Considérons une représentation cristalline de* $\Gamma_{\mathcal{K}}$ *dans un* $\mathbb{Q}_p$*-espace-vectoriel de dimension* $n$ *avec* $p \geq 2n-1$*, et supposons que les poids de Hodge-Tate soient dans* $[\![0,h]\!]$ *avec* $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$ *ou dans* $[\![-h,h]\!]$ *avec* $0 \leq h \leq \frac{p-2}{8}$*. Alors le tore* $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ *est inclus dans l'adhérence sur* $\mathbb{Q}_p$ *de Zariski de l'image de la représentation.*

**IV.2.f. Groupe à un paramètre de Hodge-Tate.** Le tore $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}$ est l'image du tore restriction des scalaires, qui se scinde en $\prod_{\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^s}/\mathbb{Q}_p)} {}^{\tau}\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{Q}_p^{nr}$. Notons $f$ le groupe à un paramètre correspondant à l'image de la composante indexée sur l'identité.

Théorème IV.2.41. *Considérons* $V$ *une représentation cristalline de* $\Gamma_{\mathcal{K}}$ *dans un* $\mathbb{Q}_p$*-espace-vectoriel de dimension* $n$ *avec* $p \geq 2n-1$*, et supposons que les poids de Hodge-Tate soient dans* $[\![0,h]\!]$ *avec* $0 \leq h \leq \frac{p-2}{4}$ *ou dans* $[\![-h,h]\!]$ *avec* $0 \leq h \leq \frac{p-2}{8}$*. Alors le groupe à un paramètre de Hodge-Tate est conjugué à* $f$ *dans* $H$*, l'adhérence sur* $\mathbb{Q}_p$ *de Zariski de l'image de la représentation.*

Démonstration. Montrons le théorème dans le cas où $V$ est semi-simple : dans ce cas, $H$ est un groupe réductif, donc si $U$ est un réseau stable pour la représentation, en appliquant les résultats de [**Tit79**], il existe un groupe algébrique lisse $G$ défini sur $\mathbb{Z}_p$, tel que l'image de la représentation soit incluse dans $G(\mathbb{Z}_p)$, et dont la fibre générique est $H$. Le théorème IV.2.38 s'applique donc, et il existe alors une application $\mathsf{f}_U : U \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \to \widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{cris}}(U)$ qui est dans le torseur **Isom** (cf. la démonstration du théorème IV.1.7 dans le paragraphe IV.1.b pour la définition de **Isom**). Considérons alors l'application $h_V$ défini de la sorte : notons $N = \mathbf{D}_{\mathbf{cris,p}}(V)$, $Gr^i(N) = \mathrm{Fil}^i(N)/\mathrm{Fil}^{i+1}(N)$. Alors, puisque $V$ est cristalline, elle est de DeRham et de Hodge-Tate, et nous avons donc un isomorphisme naturel $Gr^i(N) \to (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}(i))^{\Gamma_{\mathcal{K}}}$. Pour obtenir une application $N \to \oplus_i Gr^i(N)$, il faut se choisir un scindage de la filtration. En considérant le scindage donné dans [**Win84**] en $N = \oplus N_i$, scindage fonctoriel, nous obtenons une application

$$h_V : N \otimes_{\mathcal{K}} \mathbb{C} \to (\oplus_i Gr^i(N)) \otimes_{\mathcal{K}} \mathbb{C} \to (\oplus_i (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}(i))^{\Gamma_{\mathcal{K}}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C} \to V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}$$

qui est fonctorielle.

L'application $h_V$ ainsi défini appartient donc à $\mathbf{Isom}(\mathbb{C})$ qui est un $G$-espace homogène, donc il existe $g \in G(\mathbb{C}) = H(\mathbb{C})$ tel que $h_V = g \circ \mathsf{f}_U^{-1}$. Or, en notant $f_{HT}$ le groupe à un paramètre de Hodge-Tate et $f_{grad}$ le groupe à un paramètre associé à la graduation $N = \oplus N_i$ (c'est-à-dire le groupe à un paramètre correspondant à l'image de la composante indexée sur l'identité par la représentation définissant $\mathcal{T}$), nous avons $h_V \circ f_{grad} = f_{HT} \circ h_V$, et donc, comme $\mathsf{f}_U^{-1} \circ f_{grad} = f \circ \mathsf{f}_U^{-1}$, nous obtenons $f_{HT} = gfg^{-1}$, ce qui donne le résultat dans le cas d'une représentation semi-simple.

Pour le cas général, si $\Pi : H \to H_{red}$ est la projection canonique, il suffit de remarquer que si $T_1$ et $T_2$ sont deux tores d'un groupe algébrique $H$ tels que l'image par $\Pi$ de $T_1$ est conjugué à l'image de $T_2$ dans $H_{red}$, alors $T_1$ et $T_2$ sont conjugués : en effet, il suffit de relever l'élément qui conjugue pour se ramener au cas où $T_1$ et $T_2$ ont même image $T$, mais alors ce sont deux tores maximaux de $\Pi^{-1}(T)$ (qui est un groupe réductif), donc sont conjugués (cf. théorème 11.10 [**Bor91**]). □

CHAPITRE V

# Annexe

## V.1. Image de l'inertie modérée

Soit $\rho : \Gamma_{\mathcal{K}} \to GL(V)$ une représentation continue de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ dans un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension fini. Choisissons une base de $V$.

LEMME V.1.1. *Il existe un $\mathbb{Z}_p$-réseau stable par la représentation $\rho$.*

DÉMONSTRATION. L'image $\mathrm{Im}(\rho)$ est un compact comme image directe par une application continue d'un compact. Soit $H = \{g \in \mathrm{Im}(\rho) | g(\mathbb{Z}_p^d) = \mathbb{Z}_p^d\}$, c'est un sous-groupe de $\mathrm{Im}(\rho)$, ouvert car $\forall g \in H, [g + p\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_p)] \cap H \subset H$ (car $g \in GL_h(\mathbb{Z}_p)$, et le déterminant ne change pas modulo $p$), non vide ($Id \in H$). Un sous-groupe ouvert d'un groupe compact est d'indice fini, donc $\mathrm{Im}(\rho)/H$ est fini (il y a un nombre fini de classes d'équivalence). Soit $g_1, \cdots, g_k$ un système de représentants de $\mathrm{Im}(\rho)/H$, alors $\sum\limits_{i=1}^{k} g_i(\mathbb{Z}_p^d)$ est un réseau (car la somme est finie) stable par $\mathrm{Im}(\rho)$. $\square$

Supposons donc que $\mathrm{Im}(\rho) \subset GL_d(\mathbb{Z}_p)$. Rappelons que nous nous somme fixé un relèvement $\eta$ de l'inertie modéré, ce qui nous permet de considérer $\rho' = \rho \circ \eta$, une représentation continue de l'inertie modérée. Soit $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{K}}$, montrons alors le lemme suivant :

LEMME V.1.2. *Il existe un unique couple de matrices $(g_p, g^{(p)})$ qui vérifient : $\rho(\gamma) = g_p g^{(p)}$, $g_p g^{(p)} = g^{(p)} g_p$, $g^{(p)}$ est semi-simple d'ordre fini premier à $p$, et $g_p$ est pro-unipotent (au sens où pour tout $n$, $g_p$ modulo $p^n$ est d'ordre une puissance de $p$). De plus, l'ordre de $g^{(p)}$ est l'ordre de sa réduction modulo $p$.*

DÉMONSTRATION. Soit $g = \rho(\gamma)$. Regardons modulo $p$ : $GL_d(\mathbb{F}_p)$ est un groupe fini, donc $\bar{g}$ (la réduction modulo $p$ de $g$) est d'ordre fini $np^\beta$, avec $n$ premier à $p$. Par le lemme de Bezout, il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $ap^\beta + bn = 1$. Posons $\bar{g}^{(p)} = \bar{g}^{ap^\beta}$ et $\bar{g}_p = \bar{g}^{bn}$, ils vérifient les conditions du lemme modulo $p$. L'unicité provient de ce qu'ils commutent et sont d'ordre l'un une puissance de $p$, l'autre un entier premier à $p$. Le lemme de Bezout nous donne que $a$ et $n$ sont premiers entre eux, donc l'ordre de $\bar{g}^{(p)}$ est bien $n$.

Puis passons modulo $p^2$ : $GL_d(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ est fini, donc tout élément est d'ordre fini. Soit $f \in GL_d(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ tel que $f$ modulo $p$ vaut $\bar{g}$ (donc l'ordre de $\bar{g}$ divise celui de $f$). Alors, nous avons l'existence d'un $f' \in \mathcal{M}_d(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ tel que $f^{np^\beta} = 1 + pf'$. Donc $(f^{np^\beta})^p = (1 + pf')^p = 1 + p^2 f" = 1$ par le binôme de Pascal (et car $p | C_p^1$), ce qui implique que l'ordre de $f$ divise $np^{\beta+1}$ et est divisé par l'ordre de $\bar{g}$, $np^{\beta}$, donc l'ordre de $f$ vaut $np^{\beta}$ ou $np^{\beta+1}$. Refaisons comme avant, à l'aide du lemme de Bezout ... l'unicité va donner que $\bar{f}^{(p)} = \bar{g}^{(p)}$ et que $f^{(p)}$ a le même ordre que $g^{(p)}$ (car l'ordre de $f$ a la même partie première à $p$), et que $\bar{f}_p = \bar{g}_p$.

Itérons ce procédé modulo $p^n$ pour tout $n$, et passons à la limite projective, pour terminer la démonstration du lemme. □

Maintenant, revenons au cas où $g$ est l'image d'un élément de l'inertie modérée. Comme tout quotient fini de l'inertie modérée est d'ordre premier à $p$, dans la construction de la démonstration du lemme, il ne reste que la partie d'ordre premier à $p$, et donc $g = g^{(p)}$, donc est d'ordre fini (égal à l'ordre de la réduction modulo $p$, et premier à $p$).

Remarque V.1.3. *La même démonstration reste valable dans le cas d'une représentation à valeurs dans $GL_m(\mathbb{Z}_{p^n})$ (ce n'est d'ailleurs qu'un cas particulier). Donc dans ce cas là, l'image de l'inertie modérée est encore diagonalisable.*

## V.2. Rappels sur les périodes des Lubin-Tate

**Montrons que $l(\hat{u}_n)$ existe dans $B_{dR}$ :**

Par définition, nous avons $\theta(\hat{u}_n) = u_n$, donc $v_p(\theta(\hat{u}_n)) > 0$. Donc il existe $r \in \mathbb{N}$ avec $p|\theta(\hat{u}_n)^r$ dans $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{K}}}$, donc il existe $y \in W(R)$ tel que $\hat{u}_n^r - py = z \in W(R) \cap \mathrm{Ker}\ \theta$. Posons $q^s = ar + b$ avec $0 \le b < r$. Alors $\frac{\hat{u}_n^{q^s}}{p^s}$ existe dans $B_{dR}$, et :

$$\frac{\hat{u}_n^{q^s}}{p^s} = \hat{u}_n^b \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} \frac{p^i z^{a-i}}{p^s} y^i$$

De plus, $a = a(s)$ tend vers l'infini si $s$ tend vers l'infini, car pour $s$ assez grand, $q^s > (4s+1)r > 4sr + b(s)$, donc $a(s) > 4s$ (donc $i > 2s$ ou $a - i > 2s$, donc $\frac{p^i z^{a-i}}{p^s} \in p^s W(R)$ ou bien $\frac{p^i z^{a-i}}{p^s} \in z^s A_{cris}$). Alors, pour de tels $s$,

$$\sum_{s=s_1}^{m} \frac{\hat{u}_n^{q^s}}{p^s} = [\sum_{s=s_1}^{m} \hat{u}_n^{b(s)} \sum_{i=0}^{2s-1} \binom{a}{i} \frac{p^i z^{a-i}}{p^s} y^i] + [\sum_{s=s_1}^{m} \hat{u}_n^{b(s)} \sum_{i=2s}^{a(s)} \binom{a}{i} \frac{p^i z^{a-i}}{p^s} y^i]$$

La première somme est un élément de $z^{s_1} A_{cris}$, la deuxième somme est un élément de $p^{s_1} W(R)$. Vu la topologie de $B_{dR}^+$ (qui est alors complet), la série converge dans $B_{dR}^+$ (au moins elle part de $s_1$ suffisament grand, et sinon, en partant de zéro, nous sommes sûr de la convergence dans $B_{dR}$).

En fait, nous venons de montrer la convergence de la série $l$ sur les éléments $X$ de $W(R)$ avec $v_p(\theta(X)) > 0$.

**Montrons que $p^n l(\hat{u}_n) \in A_{cris}$ :**

LEMME V.2.1. *Soit $u \in \mathrm{Ker}\ \theta \cap W(R)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons $\frac{u^{p^n}}{p^n} \in A_{cris}$, et si $n > 1$, $\frac{u^{p^n}}{p^n} \in pA_{cris}$.*

DÉMONSTRATION. Comme $\mathrm{Ker}\ \theta \cap W(R)$ est principal, ramenons-nous à $u = [x] - p$ où $x \in R$ est tel que $x^{(0)} = p$ (donc $u$ est un générateur de $\mathrm{Ker}\ \theta \cap W(R)$). Regardons l'égalité $\frac{u^{p^n}}{p^n} = \sum_{i+j=p^n} \frac{[x]^i}{i!} \frac{(p^n-1)!}{j!} p^j$. Si $j \neq p^n$ et $j \neq 0$, $\frac{(p^n-1)!}{j!}$ est un entier, $\frac{[x]^i}{i!}$ est dans $A_{cris}$ par définition, donc cette partie là de la somme est bien un multiple de $p$ dans $A_{cris}$. Si $j = p^n$, il y a juste le terme $p^{p^n - n}$, donc comme $p^n \ge n+1$, c'est toujours un multiple de $p$. Si $j = 0$, $\frac{[x]^{p^n}}{p^n!}$ est toujours dans $A_{cris}$, et il reste $(p^n-1)!$, qui est un multiple de $p$ si $n > 1$. Si $n = 1$, nous avons juste $u^p = [x]^p$ modulo $p$, or $\frac{[x]^p}{p!} = \frac{[x]^p}{p} \frac{1}{(p-1)!} \in A_{cris}$, or $(p-1)!$ est inversible dans $\mathbb{Z}_p$, donc $\frac{u^p}{p} \in A_{cris}$. □

LEMME V.2.2. *Si $x$ et $y \in A_{cris}$ sont tels que $y - x \in W(R) \cap \mathrm{Ker}\ \theta$, alors $l(y) - l(x) \in A_{cris}$*

DÉMONSTRATION. En effet,en écrivant le développement de Taylor, nous obtenons $l(y) - l(x) = \sum_{k \ge 1} \frac{l^k(y)}{(k-1)!} \frac{(x-y)^k}{k}$, et le lemme V.2.1 permet de conclure. □

Alors, comme $\theta([p]\hat{u}_{n+1}) = u_n$, nous avons $y = [p]\hat{u}_{n+1}$ et $x = \hat{u}_n$ qui vérifient les hypoythèses du lemme V.2.2, donc $pl(\hat{u}_{n+1}) - l(\hat{u}_n) = l([p]\hat{u}_{n+1}) - l(\hat{u}_n) \in A_{cris}$. Donc $p^{n+1}l(\hat{u}_{n+1}) - p^n l(\hat{u}_n) \in p^n A_{cris}$. En prenant $\hat{u}_0 = 0$, et en sommant, nous obtenons que $p^n l(\hat{u}_n) \in A_{cris}$.

**Montrons que $(p^n l(\hat{u}_n))$ converge dans $A_{cris}$ vers une limite indépendante du relèvement $\hat{u}_n$ choisit** :

Comme $A_{cris}$ est complet pour la topologie $p$-adique et $p^{n+1}l(\hat{u}_{n+1}) - p^n l(\hat{u}_n) \in p^n A_{cris}$, la suite $p^n l(\hat{u}_n) \in A_{cris}$ converge dans $A_{cris}$. Cette limite $\Omega(u)$ est indépendant du relèvement de $u_n$ choisit : si $\hat{u}'_n$ est un autre relèvement de $u_n$, alors $p^n l(\hat{u}'_n)$ converge vers un $\Omega'(u)$, or, en considérant pour tout $n_0$ le relèvement $\hat{u}''_n = \hat{u}_n$ si $n \leq n_0$, $\hat{u}''_n = \hat{u}'_n$ si $n > n_0$, grâce au calcul précédent appliqué à $(\hat{u}_n)$ puis à $(\hat{u}''_n)$, nous obtenons $p^{n_0+1}l(\hat{u}_{n_0+1}) - p^{n_0}l(\hat{u}_{n_0}) \in p^{n_0}A_{cris}$ et $p^{n_0+1}l(\hat{u}''_{n_0+1}) - p^{n_0}l(\hat{u}''_{n_0}) \in p^{n_0}A_{cris}$, donc, vu les définitions, $p^{n_0+1}l(\hat{u}_{n_0+1}) - p^{n_0+1}l(\hat{u}'_{n_0+1}) \in p^{n_0}A_{cris}$, et ceci pour tout $n_0$. Par conséquent, nous avons bien (car $A_{cris}$ est séparé pour la topologie $p$-adique) $\Omega(u) = \Omega'(u)$.

**Etude des $\Phi^j(\Omega(u))$** :

Comme $\Omega(u)$ ne dépend pas du relèvement $(\hat{u}_n)$ choisi, prenons $x_n \in R$ avec $x_n^{(0)} = u_n$ et $\hat{u}_n = [x_n]$ le relèvement de Teichmüller de $x_n$ dans $W(R)$, ainsi, $\Phi(\hat{u}_n) = \hat{u}_n^p$. Comme $\Phi$ est continue, nous obtenons $\Phi(\Omega(u)) = \lim_n p^n l(\hat{u}_n^p) = \lim_n([p^n](\hat{u}_n^p))$. Or, comme $[p] \in \mathbb{Z}_p[[X]]$, et que $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_p$, $\alpha^p = \alpha$ modulo $p$, nous avons $[p^n](\hat{u}_n^p) = ([p^n](\hat{u}_n))^p$ modulo $p$. Or $\theta(\hat{u}_n) = 0$, donc par définition de $A_{cris}$, nous avons $\frac{\hat{u}_n^p}{p} \in A_{cris}$. En définitive, $\frac{[p^n](\hat{u}_n^p)}{p}$ est dans $A_{cris}$. Alors $l(\hat{u}_n^p)$ est dans $pA_{cris}$, et donc $\Phi(\Omega(u)) \in pA_{cris}$. Ceci donne en particulier que $\Phi^j(\Omega(u)) \in pA_{cris}$ pour tout $j > 0$.

Du fait que $\Phi(\hat{u}_n) = \hat{u}_n^p$ et que $\Phi$ est continu, nous déduisons $\Phi^h(\Omega(u)) = p\Omega(u)$.

**Etude de l'action de Galois sur $\Phi^j(\Omega(u))$** :

Comme $l \in \mathbb{Q}_p[[X]]$, et que l'action de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ sur $B_{dR}$ est continue, nous avons $g(\Omega(u)) = \lim_n p^n l(g(\hat{u}_n)) = \Omega(g(u))$ car $g(\hat{u}_n)$ est un relèvement de $g(u_n)$. Or, d'après les résultats de [**LT65**], $g(u) = [\mathcal{X}_h(g)]u$, or comme $l([a](X)) = al(X)$ pour tout $a$ de $\mathbb{Z}_{p^h}$, nous obtenons $\Omega(g(u)) = \mathcal{X}_h(g)\Omega(u)$. Alors, nous avons l'égalité $g\big(\Phi^j(\Omega(u))\big) = \sigma^j(\mathcal{X}_h(g))\Phi^j(\Omega(u))$ (car l'action du groupe de Galois commute à l'action du Frobenius). En se souvenant que ($\mathcal{X}_h$ étant à valeurs dans $\mathbb{Z}_{p^h}^*$)

$$\prod_{i=0}^{h-1} \sigma^i(\mathcal{X}_h(g)) = N_{\mathbb{Q}_{p^h}/\mathbb{Q}_p}(\mathcal{X}_h(g)) = \mathcal{X}(g)$$

($N$ est la norme et $\mathcal{X}$ est le caractère cyclotomique), nous obtenons $\frac{\prod_{i=0}^{h-1}\Phi^i(\Omega(u))}{t} \in B_{cris}^{\Gamma_\mathcal{K}}$. Comme $B_{cris}^{\Gamma_\mathcal{K}} = \mathcal{K}$, $\frac{\prod_{i=0}^{h-1}\Phi^i(\Omega(u))}{p^{h-1}} \in A_{cris}$ et $\frac{t}{p} \notin A_{cris}$, nous avons $\prod_{i=0}^{h-1}\Phi^i(\Omega(u)) \in p^{h-1}Wt$.

En particulier, $\Omega(u) \notin \mathrm{Fil}^2 A_{cris}$, car $\theta$ est injective sur $W$. Or, $\theta$ est un morphisme d'anneaux continu, donc $\theta(\Omega(u)) = \lim_n l(\theta([p^n]\hat{u}_n)) = 0$, et donc $\Omega(u) \in \mathrm{Fil}^1 A_{cris}$ et $\Phi^j(\Omega(u)) \notin \mathrm{Fil}^1 A_{cris}$ pour $1 \leq j \leq h-1$ (une autre façon de le dire : $\nu'(\Omega(u)) = 1$ et $\nu'(\Phi^j(\Omega(u))) = 0$ pour $1 \leq j \leq h-1$).

Donc nous avons aussi $\frac{\prod_{i=0}^{h-1}\Phi^i(\Omega(u))}{t} \in \mathrm{Fil}^0 B_{cris}$, et comme $\Phi(\prod_{i=0}^{h-1}\Phi^i(\Omega(u))) = p\prod_{i=0}^{h-1}\Phi^i(\Omega(u))$, nous en déduisons $\frac{\prod_{i=0}^{h-1}\Phi^i(\Omega(u))}{t} \in \mathrm{Fil}^0 B_{cris}^{\Phi} = \mathbb{Q}_p$. Donc

$$\prod_{i=0}^{h-1}\Phi^i(\Omega(u)) \in p^{h-1}\mathbb{Z}_p t$$

**Montrons que** $\prod_{i=0}^{h-1}\Phi^i(\Omega(u)) \in p^{h-1}\mathbb{Z}_p^* t$ **pour** $u$ **générateur de** $T_p(G)$ :

En effet, supposons que $px' = \Omega(u)\prod_{i=1}^{h-1}\frac{\Phi^i(\Omega(u))}{p}$ avec $x' \in A_{cris}$. Nous avons alors $x' \in \mathrm{Fil}^1 A_{cris}$ (par définition de la filtration) et $\theta(x) \in \mathcal{O}_\mathbb{C}$ (en effet : $x'$ s'écrit sous la forme $x' = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\frac{z^n}{n!}$ avec $z$ un générateur (fixé) de $\mathrm{Ker}(\theta)$ dans $W(R)$, et les $a_n \in W(R)$ qui tendent $p$-adiquement vers 0 ; comme $x' \in \mathrm{Fil}^1 A_{cris}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\frac{z^n}{n!} \in \mathrm{Fil}^1 A_{cris}$, nous obtenons $a_0 \in \mathrm{Fil}^1 A_{cris} \cap W(R)$, c'est-à-dire $a_0 \in \mathrm{Ker}(\theta)$, qui est un idéal principal sur $W(R)$, donc $a_0 = zb$ avec $b \in W(R)$. Puis, $\theta$ étant un morphisme d'algèbre, nous obtenons $\theta(x'z^{-1}) = \theta(b + a_1) \in \mathcal{O}_\mathbb{C}$ car $b + a_1 \in W(R)$).

Or, Colmez a montré dans [**Col93**] que $v_p(\theta(xz^{-\nu'(x)}))$ (où $v_p$ est la valuation $p$-adique normalisé en $p$ de $\mathbb{C}$) pour $x \in B_{dR}^+ \setminus \{0\}$ vérifie les propriétés suivantes :
– si $x \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ est non nul, alors $v_p(x) = v_p(\theta(xz^{-\nu'(x)}))$ ;
– si $x$ et $y$ sont deux éléments non-nuls de $B_{dR}^+$, alors $v_p(\theta(xz^{-\nu'(x)})) + v_p(\theta(yz^{-\nu'(y)})) = v_p(\theta(xyz^{-\nu'(xy)}))$ (autrement dit $v_p(x) + v_p(y) = v_p(xy)$).

Notons alors $v_p(x) = v_p(\theta(xz^{-\nu'(x)}))$ pour $x \in B_{dR}^+$.

Comme $\theta(x'z^{-1}) \in \mathcal{O}_\mathbb{C}$ (l'anneau des entiers de $\mathbb{C}$), nous obtenons $v_p(x') \geq 0$. Colmez a montré (cf. [**Col93**], Théorème I.2.1, p.641) que pour $u$ générateur de $T_p(G)$, $v_p(\Omega(u)) = \frac{1}{p^h-1}$ et $v_p(\frac{\Phi^i(\Omega(u))}{p}) = \frac{p^i}{p^h-1}$ pour $1 \leq i \leq h-1$. Donc, $\frac{1}{p-1} = \sum_{i=0}^{h-1}\frac{p^i}{p^h-1} =$

$v_p(\prod_{i=0}^{h-1} \Phi^i(\Omega(u))) = v_p(px') = v_p(p) + v_p(x') = 1 + v_p(x')$, ce qui contredit $v_p(x') \geq 0$ (si $p \geq 3$). D'où, il est vrai que $p^h$ ne divise pas $\prod_{i=0}^{h-1} \Phi^i(\Omega(u))$ dans $A_{cris}$.

Remarque V.2.3. *Comme $t^{p-2}$ n'est pas divisible par $p$ dans $A_{cris}$, c'est un corollaire immédiat de l'affirmation précédente qu'il en est de même pour $\Omega(u)^{a_0} \prod_{i=1}^{h-1} (\frac{\Phi^i(\Omega(u))}{p})^{a_i}$ si $0 \leq a_i \leq p-2$ pour tout $i$.*

## V.3. Application $\sigma^n$-semi-linéaire

Soit $M$ un $W$ module de type fini, avec une application bijective $f : M \to M$ qui est $\sigma^n$ semi-linéaire. Posons $q = p^n$.

PROPOSITION V.3.1. *Alors l'application $W$-linéaire naturelle $i : W \otimes_{\mathbb{Z}_p} M^f \to M$ est un isomorphisme, et $f$ vu par cet isomorphisme correspond à $\sigma^n \otimes Id$.*

DÉMONSTRATION. En effet, regardons d'abord le cas où $M$ est tué par $p$, c'est-à-dire lorsque $M$ est un $k$-espace vectoriel de dimension finie. Montrons par récurrence l'existence d'une base $(e_i)$ avec $f(e_i) = e_i$.

Soit $y \in M$ non nul, et soit $k$ le plus petit entier tel que la famille $(y, f(y), \cdots, f^k(y))$ est linéairement dépendante. Il existe donc des $\lambda_j \in k$ non tous nuls, avec $f^k(y) = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j f^j(y)$. Cherchons $e_1$ sous la forme $e_1 = \sum_{j=0}^{k-1} x_j f^j(y)$. Nous voulons $f(e_1) = e_1$, donc en utilisant la liberté de $(y, f(y), \cdots, f^{k-1}(y))$, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} x_0 &= \lambda_0 x_{k-1}^q \\ x_1 &= \xi_0^q + \lambda_1 x_{k-1}^q \\ &\vdots \\ x_{k-1} &= \xi_{k-2}^q + \lambda_{k-1} x_{k-1}^q \end{cases}$$

donc $x_0, \cdots, x_{k-2}$ sont entièrement déterminés comme fonctions de $t = x_{k-1}$, et nous obtenons pour $t$ l'équation ($k$ étant de caractéristique $p$) $t = \lambda_0^{q^{k-1}} t^{q^k} + \cdots + \lambda_{k-1} t^q$. Comme les $\lambda_j$ ne sont pas tous nuls, ce polynôme admet une solution non nulle dans $k$ (car $k$ est algébriquement clos), ce qui nous donne l'existence d'un $e_1$ non nul qui est laissé fixe par $f$.

La proposition "$f$ est bijective" est équivalente à dire que la matrice de $f$ dans une base est inversible (car $\sigma^n$ est bijectif sur $k$). Complétons $e_1$ en une base de $M$ par $y_2, \cdots, y_m$. Dans cette base, la matrice de $f$ est triangulaire par bloc (avec deux blocs), le premier bloc étant juste la matrice unité de taille $1 \times 1$ (c'est-à-dire (1)), et le deuxième bloc (qui est donc une matrice inversible) est la matrice de $\bar{f} = \Pi \circ f$ dans la base $\bar{y}_2 = \Pi(y_2), \cdots, \bar{y}_m = \Pi(y_m)$ où $\Pi$ est la projection canonique de $M$ sur $\bar{M} = M/ke_1$. Par conséquent, appliquons l'hypothèse de récurrence à $(\bar{M}, \bar{f})$, et relevons une base laissée fixe par $\bar{f}$, obtenant ainsi l'existence de $m-1$ éléments $z_2, \cdots, z_m$ de $M$, tels que $f(z_i) = z_i + \mu_i e_1$ avec $\mu_i \in k$.

Par conséquent, $f(z_i + x'_i e_1) = (z_i + x'_i e_1) + (x_i'^q - x'_i + \mu_i)e_1$, donc, en prenant $x'_i$ solution dans $k$ (algébriquement clos) de $x_i'^q - x'_i + \mu_i = 0$, nous obtenons notre base laissée fixe par $f$ en posant $e_i = z_i + x'_i e_1$ pour $2 \leq i \leq m$.

Revenons au cas général : $M/pM = k \otimes_{F_p} (M/pM)^f$ d'après ce que nous venons de voir. Soit $x_1, \cdots, x_m$ des éléments de $M$ relevant une $\mathbb{F}_p$-base de $(M/pM)^f$. Le module $p^n M/p^{n+1}M$ est un module tué par $p$, et $f$ induit dessus une bijection $\sigma^n$ semi-linéaire, donc $p^n M/p^{n+1}M$ a une base $(e_i)$ laissée fixe par $f$. Alors, si $x \in p^n M/p^{n+1}M$, $x$

s'écrit $x = \sum_i x_i e_i$ avec $x_i \in k$, et $f(x) - x = \sum_i (x_i^q - x_i) e_i$. Comme l'application $\lambda \in k \mapsto \lambda^q - \lambda \in k$ est surjective (car $k$ est algébriquement clos), nous avons alors $f - Id$ surjective comme applicatino de $p^n M / p^{n+1} M$ dans lui-même, ceci pour tout $n$.

Montrons alors que tout élément $y$ de $(M/pM)^f$ se relève par un élément de $M^f$ : si $f(y_n) = y_n$ modulo $p^n$, et $y_n$ (modulo $p$) $= y$, cherchons $y_{n+1} = y_n + p^n z$ tel que $f(y_n + p^n z) = y_n + p^n z$ modulo $p^{n+1}$. Il suffit de prendre $z$ tel que $f(p^n z) - p^n z = f(y_n) = y_n$ modulo $p^{n+1}$ (ce qui est possible d'après le résultat précédent). Nous construisons ainsi une suite de cauchy pour la topologie $p$-adique, qui converge (car $M$ est complet pour la topologie $p$-adique) vers une limite $y'$ relevant $y$ qui est laissé fixe par $f$. Donc nous pouvons supposer $x_i \in M^f$ pour tout $i$.

De la même façon, la multiplication par $p^n$ induit une application surjective de $M^f / pM^f$ sur $(p^n M / p^{n+1} M)^f$ (autrement dit, tout élément de $(p^n M / p^{n+1} M)^f$ se relève en un élément de $p^n M^f$). Ceci implique que le sous-$\mathbb{Z}_p$-module $N$ engendré par les $x_i$ est $M^f$. En effet, si $x \in M^f$ est non nul, il existe $n$ tel que $x \in p^n M$ et $x \notin p^{n+1} M$. Donc, il existe $z \in M^f$ avec $x' = p^n z - x = 0$ dans $p^n M / p^{n+1} M$ (en utlisant les deux remarques précédentes). Donc, $x'$ vérifie les mêmes conditions que $x$, mais le $n$ tel que $x' \in p^n M$ et $x' \notin p^{n+1} M$ est plus grand que celui de $x$. Nous construisons ainsi par récurrence des éléments $z_n \in M^f$ avec $x - \sum_{n \leq n_0} p^n z_n \in p^{n_0 + 1} M$. Comme $M$ est complet pour la topologie $p$-adique, nous en déduisons que ($N$ étant fermé) $x \in N$.

Par conséquent, l'application naturelle $i : W \otimes_{\mathbb{Z}_p} M^f \to M$ est surjective modulo $p$ (par le cas modulo $p$ traité précédemment), donc surjective.

Soit $M'$ son noyau, nous avons $(\sigma^n \otimes Id)(M') = M'$ (car $(\sigma^n \otimes Id)$ est bijectif sur $W \otimes_{\mathbb{Z}_p} M^f$, préserve $M'$ car $f \circ i = i \circ (\sigma^n \otimes Id)$, d'où $(\sigma^n \otimes Id)(M') \subset M'$ ; puis, $f$ bijective et les deux remarques précédentes donnent l'autre inclusion). Puis, le module $M'^{(\sigma^n \otimes Id)}$ est nul, car $M'^{(\sigma^n \otimes Id)} = M' \cap M^f = \{0\}$. Or tout ce travail s'applique aussi au module $(M', (\sigma^n \otimes Id))$, et donc nous savons que l'application naturelle $W \otimes_{\mathbb{Z}_p} M'^{(\sigma^n \otimes Id)} \to M'$ est surjective, donc nous avons bien $M' = \{0\}$. D'où $i$ est bien une bijection. $\square$

## V.4. Solutions homogènes

Nous allons décrire ici comment se fixer les $x(\xi)$. En effet, si $(x_i)$ est une période pour $\xi$ et $(y_i)$ pour $\eta$ (en supposant $\xi$ et $\eta$ dans $X_n$, c'est-à-dire ayant $n$ comme période, et à valeurs négatives), alors $(x_iy_i)$ est une période de $\xi+\eta$. Par conséquent, il peut être intéressant de vouloir que $x(\xi)x(\eta) = x(\xi+\eta)$. Mais il faut que $p \nmid x(\xi)$, or pour $\xi = [-1]$ la fonction constante égale à $-1$, nous avons nécessairement $x(\xi) = t$ (à un inversible près), et $\frac{t^{p-1}}{p} \in A_{cris}$ nous dit que nous ne pouvons pas avoir $x([-p+1]) = x([-1])^{p-1}$. Par contre, le calcul de la valuation $p$-adique des $\Omega_h(u)$ fait dans [**Col93**] nous permet de dire que $v_p\big(\Phi^j(\Omega_h(u))\big) = \frac{p^j}{p^h-1}$ pour $0 \le j \le h-1$, donc $v_p(x(\xi)) = \frac{1}{p-1} p^{\sum_{j=0}^{|\xi|-1} -\xi(j)p^j} < 1$ si $\xi$ non constant à $-1$. Donc, rien n'empèche que ce soit vrai pour des $\xi$ et $\eta$ à valeurs dans $[\![1-p, 0]\!]$ non constant à $-1$.

Notons $\xi_n$ l'élément de $X$ définit par $\xi_n(0) = -1$ et $\xi_n(i) = 0$ si $1 \le i \le n-1$ ($\xi_n(i) = -1$ si $n|i$, et $\xi_n(i) = 0$ sinon). Notons $X(\xi_n) = \{x \in A_{cris} | x_0 = x$ et $x_i = p^{\xi_n(i-1)} x_{i-1}$ vérifient $x_n = x_0$, $x_i \in \mathrm{Fil}^{-\xi_n(i)}(A_{cris})$ et $\frac{x}{p} \notin A_{cris}\}$. Nous avons $\forall x, y \in X(\xi_n)$, $\exists \alpha \in \mathbb{Z}_{p^n}^* | y = \alpha x$ (car $\mathbf{V_{cris}}(N[\xi])$ est un $\mathbb{Z}_{p^n}$-module libre de rang 1).

Le résultat de [**Col93**] nous donne que pour $x \in X(\xi_n)$, $v_p(x_i) = \frac{p^i}{p^n-1}$ (car un élément de $X(\xi_n)$ est un multiple par un coefficient de $\mathbb{Z}_p^*$ de la période du Lubin-Tate), et donc nous pouvons définir une application $\psi_{m,n} : X(\xi_n) \to X(\xi_m)$ pour $m|n$, avec : pour $x \in X(\xi_n)$, $x_0 = x$ et $x_i = p^{\xi_n(i-1)} x_{i-1}$, $\psi_{m,n}(x) = \prod_{j=0}^{\frac{n}{m}-1} x_{jm}$. Ces applications forment un système projectif. Comme $\psi_{m,n}(\alpha x) = \alpha x$ pour $\alpha \in \mathbb{Z}_{p^m}^*$, elles sont surjectives. Donc (cf. Bourbaki, E III paragraphe 7.4 proposition 5), la limite projective est non vide.

Prenons un élément $x(\xi_n)$ tel que $(x(\xi_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dans cette limite projective, et posons $x(\xi_n)_0 = x(\xi_n)$ et $x(\xi_n)_i = p^{\xi_n(i-1)} x(\xi_n)_{i-1}$. Construisons alors pour $\xi \in X_n$, $y(\xi) = \prod_{i=0}^{n-1} x_{n-i}^{-\xi(j)}$. Le fait que les $x(\xi_n)$ sont dans la limite projective nous dit que cette construction ne dépend pas du $n$ choisit tel que $\xi \in X_n$. De plus, nous avons par construction $y(\xi)y(\eta) = y(\xi+\eta)$ pour tout $\xi$ et $\eta$.

Peut-on prendre $x(\xi) = y(\xi)$ (autrement dit, a-t-on $\frac{y(\xi)}{p} \in A_{cris}$ ou non) ? Comme $v_p(x(\xi_n)_i) = \frac{p^i}{p^n-1}$ pour $0 \le i \le n-1$, si $\xi \ne [-p+1]$ est à valeurs dans $[\![1-p, 0]\!]$, alors $\frac{y(\xi)}{p} \notin A_{cris}$, et donc nous pouvons prendre $x(\xi) = y(\xi)$. Nous prendrons $x([-p+1]) = \frac{x([-1])^{p-1}}{p}$, et si $\xi$ prend des valeurs strictement plus petites que $-p+1$, nous prendrons pour $x(\xi)$ celui construit par les périodes des Lubin-Tate, divisé par la bonne puissance de $p$.

Nous avons ainsi construit un système $(x(\xi))$ d'éléments de $A_{cris}$ pour $\xi \in X$ à valeurs négatives, qui vérifient :

– $x(\xi)$ n'est pas divisible par $p$ dans $A_{cris}$ ;
– $p^{\xi(0)}\Phi(x(\xi)) = x(\sigma(\xi))$ ;

– Si $\xi$ et $\eta$ sont à valeurs dans $[\![1-p,0]\!]$, tels que $\xi \neq [-p+1]$, $\eta \neq [-p+1]$, $\xi+\eta \neq [-p+1]$, alors $x(\xi)x(\eta) = x(\xi+\eta)$.

## V.5. Catégorie tannakienne

LEMME V.5.1. *Pour tout objet $L_1$, $L_2$, $M_1$, $M_2$ de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, avec $L_2$ sous-objet facteur direct (comme $W$-module) de $L_1$, et $M_2$ sous-objet facteur direct (comme $W$-module) de $M_1$, nous avons les isomorphismes :*

(1) $(L_1/L_2) \otimes (M_1/M_2) \simeq (L_1 \otimes M_1)/(L_2 \otimes M_1 + L_1 \otimes M_2)$ ;

(2) $(L_1/L_2) \oplus (M_1/M_2) \simeq (L_1 \oplus M_1)/(L_2 \oplus M_2)$ ;

(3) *si $M$ est un sous objet de $L_1/L_2$, alors, en notant $\Pi : L_1 \to L_1/L_2$ la projection canonique, $M_1 = \Pi^{-1}(M)$ et $M_2 = M_1 \cap L_2$ sont des objets de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, et $M \simeq M_1/M_2$ ;*

(4) *$(L_1/L_2)^*$ est un sous-objet de $L_1^*$.*

LEMME V.5.2. *Pour tout objet $L_1$, $L_2$, $M_1$, $M_2$ de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, avec $L_2$ sous-objet facteur direct (comme $W$-module) de $L_1$, et $M_2$ sous-objet facteur direct (comme $W$-module) de $M_1$, nous avons :*

(1) *$L_2 \otimes M_2$ est un sous-objet de $L_1 \otimes M_1$ ;*

(2) *$L_2 \oplus M_2$ est un sous-objet de $L_1 \oplus M_1$ ;*

(3) *$L_2^*$ est un quotient de $L_1^*$.*

LEMME V.5.3. *Pour tout objet $L$, $M$, $N$ de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, nous avons les isomorphismes :*

(1) $(L \oplus M) \otimes N \simeq (L \otimes N) \oplus (M \otimes N)$ ;

(2) $(L \oplus M)^* \simeq L^* \oplus M^*$.

LEMME V.5.4. *Pour tout objet $L$, $M$ de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, nous avons l'isomorphisme $(L \otimes M)^* \simeq L^* \otimes M^*$.*

PROPOSITION V.5.5. *Notons $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm}$ la réunion des $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, pour $h$ entier positif, et considérons $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}[\mathbf{h}]$ la catégorie engendrée par $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$ dans $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm}$ pour le produit tensoriel, la somme directe, le dual, le passage au sous-objet et le passage à l'objet quotient (dans $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm}$). Alors tout objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}[\mathbf{h}]$ peut s'écrire comme le quotient d'un sous-objet d'une somme directe de produits tensoriels d'objets de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$.*

DÉMONSTRATION. Un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}[\mathbf{h}]$ est obtenu à partir d'objets de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$ par le biais de produits tensoriels, sommes directes, duals, sous-objets et objets quotients. Une application des lemmes précédents nous donnent qu'il s'écrit comme le quotient d'un sous-objet d'une somme directe de produits tensoriels d'objets de $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$, ou de leurs duals. Or, $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{\pm\mathbf{h}}$ est stable par passage au dual, ce qui nous donne le résultat. $\square$

### V.6. Modules élémentaires et représentations abéliennes

Théorème V.6.1. *Soit $N$ un objet de $\mathbf{MF_{W,tf}}$ tel que $\mathrm{Fil}^1(N) = \{0\}$, $\mathrm{Fil}^{-h}(N) = N$ avec $0 \leq h \leq p-2$, et $\mathbf{V_{cris}}(N)$ est une représentation du groupe de Galois $\Gamma_{\mathcal{K}}$ abélienne. Alors $N$ est élémentaire et donc l'image de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ dans $GL_{\mathbf{V_{cris}}(N)}$ est $\mathcal{T}_{\mathrm{mr}}(\mathbb{Z}_p)$.*

Démonstration. Supposons $\mathbf{V_{cris}}(N)$ une représentation abélienne, alors l'image d'un générateur de l'inertie modérée, noté $f$, est un isomorphisme de $\mathbf{V_{cris}}(N)$ qui commute à l'action de Galois, et d'ordre $n$ un nombre premier à $p$ (cf. III.6.2). Donc, le foncteur $\mathbf{V_{cris}}$ étant pleinement fidèle, il lui correspond un isomorphisme $g$ de $N$ d'ordre $n$ qui commute à la filtration et aux $\varphi^i$. Par conséquent, $g$ commute au tore $\mathcal{T}$ ainsi qu'à l'endomorphisme $u_N$ (cf. la proposition 2.3.2(4) et le théorème 3.1.2 de [**Win84**] pour la définition de $u_N$).

Lemme V.6.2. *L'endomorphisme $g$ est diagonal sur $N$.*

Démonstration. Le nombre $n$ étant premier à $p$, il est inversible dans $W$. Notons $P(X) = X^n - 1 = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ où les $\alpha_i$ sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, donc deux à deux disjointes et au nombre de $n$ dans $W$, car $X^n - 1$ est séparable. Alors, $P'(\alpha_i)$ est inversible dans $W$, pour tout $i$. Donc nous pouvons considérer les polynômes de Lagrange $L_i(X) = \dfrac{1}{P'(\alpha_i)}\displaystyle\prod_{j\neq i}(X-\alpha_j)$. L'endomorphisme $L_i(g)$ a un sens, et comme $\sum_i L_i(X) = 1$, nous avons $\sum_i L_i(g) = \mathrm{Id}$. Comme $(g - \alpha_i \,\mathrm{Id}) \circ L_i(g) = 0$ et $L_i(g) \circ L_j(g) = \delta_{i,j} L_i(g)$ (pour $j \neq i$, c'est clair. Pour $i = j$, $L_i = L_i \circ \mathrm{Id} = \sum_j L_i \circ L_j = L_i \circ L_i$), nous obtenons que $L_i(g)$ est un projecteur, d'image $\mathrm{Im}(L_i(g)) = \mathrm{Ker}(g - \alpha_i \,\mathrm{Id})$, et $N = \oplus_i \mathrm{Ker}(g - \alpha_i \,\mathrm{Id})$. Donc $g$ est bien diagonal sur $N$. □

L'endomorphisme $g$ est donc diagonal sur $N$, commute au tore $\mathcal{T}$, donc préserve les sous-modules $N_\xi$, qui sont donc sommes directes de sous-modules propres de $g$, associés à des valeurs propres choisies parmi les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. D'après le lemme V.6.3, $N/p$ est élémentaire, donc $(N/p)_\xi$ est l'espace propre de $\overline{g}$ (c'est-à-dire l'endomorphisme $g$ modulo $p$) dans $N/p$ associé à une certaine racine de l'unité. Comme la réduction modulo $p$ est injective sur les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité (avec $n$ premier à $p$), nous obtenons que les $N_\xi$ sont les espaces propres de $g$ dans $N$. Puis, le fait que $u_N$ commute à $g$, et que $(u_N - \mathrm{Id})(M_i) \subset \oplus_{j\leq i-1} M_j$, nous donne que $u_N = \mathrm{Id}$, donc $N$ élémentaire. □

Il nous reste donc à justifier le lemme suivant, qui n'est rien d'autre que le théorème dans le cas où $N$ est tué par $p$.

Lemme V.6.3. *Soit $N$ un objet de $\mathbf{MF_{k,tf}}$ tel que $\mathrm{Fil}^1(N) = \{0\}$, $\mathrm{Fil}^{-h}(N) = N$ avec $0 \leq h \leq \frac{p-2}{2}$, et $\mathbf{V_{cris}}(N)$ est une représentation du groupe de Galois $\Gamma_{\mathcal{K}}$ abélienne. Alors $N$ est élémentaire.*

DÉMONSTRATION. La proposition IV.2.34 et le fait que nous supposons $\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N)$ abélienne nous donne que l'inertie sauvage agit trivialement, et donc seule l'inertie modérée agit, donc $N$ est élémentaire (puisque le foncteur $\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}$ est pleinement fidèle, et que les $\mathbf{V}_{\mathbf{cris}}(N)$ pour $N$ élémentaires tués par $p$ sont les représentations où seule l'inertie modérée agit). $\square$

## V.7. Action adjointe et $\mathbb{Z}_p$-modules

Soit $x \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ tel que $\bar{x} := x$ modulo $p$ est un unipotent. Alors, $(x - \mathrm{Id})^n \in pM_n(\mathbb{Z}_p)$, donc si $p \geq n$, $\ln(x)$ converge dans $M_n(\mathbb{Z}_p)$ (car $\mathbb{Z}_p$ est fermé pour la topologie $p$-adique, et $M_n(\mathbb{Z}_p)$ est libre de type fini), et $\ln(x)^n \in pM_n(\mathbb{Z}_p)$ (puisque $\ln(\bar{x})^n = 0$).

Lemme V.7.1. *Soit $N$ et $M$ deux sous $\mathbb{Z}_p$-modules de $M_n(\mathbb{Z}_p)$ avec $M \subset N$. Supposons $p \geq n^2 + 3$. Alors* $\mathrm{ad}(\ln(x))(N) \subset M$ *équivaut à* $\mathrm{Ad}(x)(M) \subset M$*,* $\mathrm{Ad}(x)(N) \subset N$ *et* $\mathrm{Ad}(x)|_{N/M} = \mathrm{Id}$.

Démonstration. Supposons que $\mathrm{ad}(\ln(x))(N) \subset M$. Remarquons que $M = \varprojlim_k M/(M \cap p^k M_n(\mathbb{Z}_p))$, car $\cap_k p^k M_n(\mathbb{Z}_p) = \{0\}$, donc l'application de $M$ dans la limite projective est injective et d'image dense, et $M$ est fermé (car complet) et compact pour la topologie $p$-adique. Puis, en appliquant le lemme 1.5.1 de [**Win84**], nous avons l'égalité $M/pM = \varprojlim_k \frac{M/(M\cap p^k M_n(\mathbb{Z}_p))}{p(M/(M\cap p^k M_n(\mathbb{Z}_p)))}$.

Considérons $M_i = \mathrm{ad}(\ln(x))^i(M/p)$, c'est une suite décroissante de sous $k$-espaces vectoriels de $M/p$. Si $M_{i_0} = M_{i_0+1}$, alors $\mathrm{ad}(x)|_{M_{i_0}}$ est un isomorphisme, donc $M_{i_0} = M_k$ pour tout $k \geq i_0$. Soit $y \in M_{i_0}$, alors il existe $y_k \in M$ tel que $\mathrm{ad}(\ln(x))^k(y_k) = y$ modulo $p$ si $k \geq i_0$. Si $k = nk'$, alors $\mathrm{ad}(\ln(x))^k(y_k) \in p^{k'} M_n(\mathbb{Z}_p)$ (car $\ln(x)^{nk'} = (\ln(x)^n)^{k'}$ et $\ln(x)^n \in pM_n(\mathbb{Z}_p)$). Donc pour tout $k \geq i_0$ (et donc pour $k \leq i_0$ aussi), il existe $z_k \in M \cap p^k M_n(\mathbb{Z}_p)$ tel que $z_k = y$ modulo $p$. Donc, si $y = (y^{(k)}) \in \varprojlim_k \frac{M/(M\cap p^k M_n(\mathbb{Z}_p))}{p(M/(M\cap p^k M_n(\mathbb{Z}_p)))}$, nous avons $y^{(k)} = 0$ pour tout $k$, donc $y = 0$.

Donc la suite $M_i$ est strictement décroissante vers $\{0\}$, or $\dim_k M/p \leq n^2$, donc nous sommes certains que $M_{n^2} = \{0\}$, autrement dit que pour tout $y \in M$, $\mathrm{ad}(\ln(x))^{n^2}(y) \in pM$.

Donc, le rayon de convergence de l'exponentielle pour la topologie $p$-adique étant de $\frac{1}{p-1}$, si $\frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{p-1}$, $\exp(\mathrm{ad}(\ln(x))(z) - z$ converge dans $M$ pour tout $z \in N$ (il suffit de poser $y = \mathrm{ad}(\ln(x))(z) \in M$). Or, nous savons qu'alors $\exp(\mathrm{ad}(\ln(x)) = \mathrm{Ad}(x)$ (car c'est une égalité de séries formelles), ce qui montre un sens de l'équivalence.

Montrons la réciproque : considérons $\mathrm{Ad}(x) - \mathrm{Id} : N \to M$, et $\bar{f} = \mathrm{Ad}(x) - \mathrm{Id} : M/p \to M/p$. Posons $M_i = \bar{f}^i(M/p)$, c'est une suite décroissante de sous-$k$-espaces vectoriels. Si $M_{i_0} = M_{i_0+1}$, alors $\bar{f}|_{M_{i_0}}$ est un isomorphisme, donc $M_{i_0} = M_k$ pour tout $k \geq i_0$. Soit $y \in M_{i_0}$, alors il existe $y_k \in M$ tel que $f^k(y_k) = y$ modulo $p$.

Or, $f^{n^2} = 0$ modulo $p$, car $x$ modulo $p$ est un élément unipotent du groupe algébrique $GL_n$, donc $\mathrm{Ad}(x)$ est un élément unipotent du groupe algébrique $GL_{\mathrm{End}(k^n)} = GL_{n^2}$, $\mathrm{Ad}(x) \in GL_{n^2}(\mathbb{Z}_p)$, donc $f$ est un nilpotent d'ordre inférieur ou égal à $n^2$.

Donc, si $k = n^2 k'$, $f^k(y_k) \in p^{k'} M_n(\mathbb{Z}_p)$, donc pour tout $k \geq i_0$ (et donc pour $k \leq i_0$ aussi), il existe $z_k \in M \cap p^k M_n(\mathbb{Z}_p)$ tel que $z_k = y$ modulo $p$. Donc, de même qu'au dessus, $y = 0$, donc $M_{i_0} = \{0\}$.

Donc la suite $M_i$ est strictement décroissante vers $\{0\}$, or $\dim_k M/p \leq n^2$, donc nous sommes certains que $M_{n^2} = \{0\}$, autrement dit que pour tout $y \in M$, $(\mathrm{Ad}(x) - \mathrm{Id})^{n^2}(y) \in pM$.

Donc $\ln(\mathrm{Ad}(x))(z)$ converge dans $M$ pour $z \in N$ si $p \geq n^2 + 1$ (il suffit de poser $y = (\mathrm{Ad}(x) - \mathrm{Id})(z)$). Donc, comme $\ln(\mathrm{Ad}(x)) = \mathrm{ad}(\ln(x))$ (égalité entre séries formelles), nous avons bien prouvé l'autre sens. $\square$

## V.8. Essentielle surjectivité du foncteur $\mathrm{F}$

Montrons le théorème suivant, ce qui démontrera la remarque III.2.5 :

THÉORÈME V.8.1. *Pour $0 \leq h \leq p-2$, le foncteur $\mathrm{F}$ de $\mathbf{MF}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{W,tf}}$ vers $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^{h}_{S_0}}$ a pour image essentielle $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^{h}_{S_0}}$.*

Pour montrer ce résultat, nous allons utiliser le théorème III.4.1 qui nous dit que pour $N$ objet de $\mathbf{MF}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{W}}$, $\mathrm{F}(N)\otimes_{S_0} S$ est le module de Wach de $\mathbf{V_{cris}}(N^*)^*$. Commençons par montrer :

PROPOSITION V.8.2. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^{h}_{S_0}}$ (avec $0 \leq h \leq p-2$) de $p$-torsion, et $T' = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{M}\otimes_{S_0}\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ la $\mathbb{Z}_p$-représentation galoisienne correspondant au $(\varphi,\Gamma)$-module sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ obtenu à partir de $\mathcal{M}$. Alors il existe $T'' \subset T$ deux $\mathbb{Z}_p$-représentations galoisiennes cristallines (c'est à dire que le module sous-jacent est libre sur $\mathbb{Z}_p$, et en rendant $p$ inversible nous avons une représentation cristalline) à poids de Hodge-Tate dans $[\![-h,0]\!]$ telles que $T'$ s'identifie au quotient de $T$ par $T''$.*

DÉMONSTRATION. Le Théorème 1' de [**Wac97**] (dont une conséquence est le théorème III.4.1) donne que $T' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}\left(\mathbf{V_{cris}}\left(\mathrm{Hom}_W(i^*(\mathcal{M}), \varinjlim W/p^n)\right), \varinjlim \mathbb{Z}_p/p^n\right)$. En notant $X^*$ le dual de Pontriaguine d'un module de torsion $X$, cela s'écrit plus simplement en $T' = \mathbf{V_{cris}}\left((\mathcal{M}/\pi_0)^*\right)^*$. Puis, puisque $(\mathcal{M}/\pi_0)^*$ est un objet de la catégorie $\mathbf{MF}^{\mathbf{-h}}_{\mathbf{W,tf}}$, la proposition 1.6.3 de [**Win84**] nous donne qu'il existe $M_1 \in \mathbf{MF}^{\mathbf{-h}}_{\mathbf{W}}$ et un épimorphisme $M_1 \to (\mathcal{M}/\pi_0)^*$. Le foncteur $\mathbf{V_{cris}}$ étant exact, il existe donc une $\mathbb{Z}_p$-repésentation cristalline $T_1$ ($T_1 = \mathbf{V_{cris}}(M_1)$) dont les poids de Hodge-Tate sont dans $[\![0,h]\!]$ et un épimorphisme $T_1 \to \mathbf{V_{cris}}\left((\mathcal{M}/\pi_0)^*\right)$.

Comme $\mathcal{M}$ est supposé de $p$-torsion, $\mathbf{V_{cris}}\left((\mathcal{M}/\pi_0)^*\right)$ est de $p$-torsion et de type fini, donc il existe un entier $n$ tel que $p^n\,\mathbf{V_{cris}}\left((\mathcal{M}/\pi_0)^*\right) = \{0\}$. Alors $T_1/p^n$ se surjecte toujours sur $\mathbf{V_{cris}}\left((\mathcal{M}/\pi_0)^*\right)$, et en passant au dual de Pontriaguine, $T'$ s'injecte dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}\left(T_1/p^n, \varinjlim \mathbb{Z}_p/p^n\right) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_1,\mathbb{Z}_p)/p^n$ (car $T_1$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre). Si $f$ est la projection canonique $f : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}\left(T_1,\mathbb{Z}_p\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}\left(T_1,\mathbb{Z}_p\right)/p^n$, alors $T = f^{-1}(T')$ convient (et il suffit de prendre $T''$ égal au noyau de la projection $f|_T$). $\square$

PROPOSITION V.8.3. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M^{h}_{S_0}}$ (avec $0 \leq h \leq p-2$) de $p$-torsion, $T' = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{M}\otimes_{S_0}\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ et $T'' \subset T$ les représentations données par la proposition ci-dessus. Alors $\mathcal{M}\otimes_{S_0} S$ s'identifie à $\mathbf{N}(T)/\,\mathbf{N}(T'')$.*

DÉMONSTRATION. Cette proposition est le coeur de la démonstration du théorème.

Notons $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}\otimes_{S_0} S$ et $\mathcal{M}_2 = \mathbf{N}(T)/\,\mathbf{N}(T'')$ (tous les deux vus dans le $(\varphi,\Gamma)$-module $\mathcal{M}\otimes_{S_0}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$). D'après les résultats p.296 de [**Fon90**] (l'égalité entre $\mathbf{D}^*_{\mathbf{S}}$ et $j_*\circ\mathbf{D}^*_{\mathcal{E}}$), nous avons $\mathcal{M}_1 \subset \mathbf{D}^+(T')$ et $\mathcal{M}_2 \subset \mathbf{D}^+(T')$, puisque tout deux sont des $S$-modules de type fini stables par $\varphi$ et étales. Puis, l'action de $\Gamma$ est triviale modulo $\pi$ dans les deux cas (puisque c'est le cas par définition sur $\mathbf{N}(T)$, et que l'action de $\Gamma_0$ est triviale modulo $\pi_0$ sur $\mathcal{M}$).

D'après le Théorème III.3.1 de [**Ber04**], nous avons l'inclusion $\pi^h T \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_S^+ \subset \mathbf{N}(T) \otimes_S A_S^+$. Par conséquent, en projetant nous obtenons que $\pi^h T' \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_S^+ \subset \mathcal{M}_2 \otimes_S A_S^+$. Par défintion, nous avons que $\mathbf{D}^+(T') \subset \mathbf{D}^+(T') \otimes_S A_S^+ \subset T' \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_S^+$, donc en prenant les points fixes sous l'action de $H_{\mathcal{K}}$, nous avons $\mathbf{D}^+(T') \subset \big(\mathbf{D}^+(T') \otimes_S A_S^+\big)^{H_{\mathcal{K}}} \subset \big(T' \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_S^+\big)^{H_{\mathcal{K}}} = \mathbf{D}^+(T')$. Donc, en prenant les points fixes sous $H_{\mathcal{K}}$ dans l'inclusion $\pi^h T' \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_S^+ \subset \mathcal{M}_2 \otimes_S A_S^+$, nous obtenons que $\pi^h\, \mathbf{D}^+(T') \subset \big(\mathcal{M}_2 \otimes_S A_S^+\big)^{H_{\mathcal{K}}}$. Donc nous avons $\pi^h\, \mathbf{D}^+(T') \subset \mathcal{M}_2$ en vertu du lemme :

Lemme V.8.4. *Soit $\mathcal{N}$ un $S$-module de type fini sans $p'$-torsion, alors $\big(\mathcal{N} \otimes_S A_S^+\big)^{H_{\mathcal{K}}} = \mathcal{N}$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 1.2.7 de [**Fon90**], qui nous donne (sous les hypothèses du lemme) une filtration décroissante $\mathcal{N}_i$ de $\mathcal{N}$, telle que $\mathcal{N}_i/\mathcal{N}_{i+1}$ est soit $S/p$-libre, soit $S$-libre. La propriété cherchée est stable par suite exacte, c'est à dire vérifie que si $0 \to \mathcal{N}'' \to \mathcal{N} \to \mathcal{N}' \to 0$ est une suite exacte de $S$-modules, et que $\big(\mathcal{N}'' \otimes_S A_S^+\big)^{H_{\mathcal{K}}} = \mathcal{N}''$, $\big(\mathcal{N}' \otimes_S A_S^+\big)^{H_{\mathcal{K}}} = \mathcal{N}'$, alors $\big(\mathcal{N} \otimes_S A_S^+\big)^{H_{\mathcal{K}}} = \mathcal{N}$. Donc il suffit de montrer le lemme pour $\mathcal{N}$ qui est $S$-libre ou $S/p$-libre, ce qui provient de ce que $(A_S^+)^{H_{\mathcal{K}}} = S$ et $(A_S^+/p)^{H_{\mathcal{K}}} = S/p$. □

Puis $\frac{1}{\pi^h}\mathcal{M}_1$ est le dual (de Pontriaguine) d'un $(\varphi,\Gamma)$-module sur $S$ de hauteur inférieur ou égale à $h$, sans $p'$-torsion, donc $T' = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\frac{1}{\pi^h}\mathcal{M} \otimes_{S_0} \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ vérifie $T' = (\frac{1}{\pi^h}\mathcal{M} \otimes_{S_0} A_S^+)^{\varphi}$ (cf [**Fon90**], p.296) puisque $0 \leq h$. Donc $T' \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_S^+ \subset \frac{1}{\pi^h}\mathcal{M} \otimes_{S_0} A_S^+$, et en prenant les points fixes sous $H_{\mathcal{K}}$ (et par le lemme précédent), nous obtenons $\mathbf{D}^+(T') \subset \frac{1}{\pi^h}\mathcal{M}_1$, donc $\pi^h\, \mathbf{D}^+(T') \subset \mathcal{M}_1$.

Par un analogue du lemme III.4.3 (voir par exemple la démonstration de la proposition II.1.1 de [**Ber04**]), ces conditions impliquent que $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$. □

Il ne reste donc plus qu'à passer d'un module sur $S$ à un module sur $S_0$, ce qui est donné par le lemme suivant :

Lemme V.8.5. *Soit $\mathcal{M}$ un $S_0$-module, alors $\big(\mathcal{M} \otimes_{S_0} S\big)^{\Gamma_f} = \mathcal{M}$.*

Démonstration. L'élément essentiel est que $|\Gamma_f| = p-1$, donc est premier à $p$ (donc inversible dans $S$). Il suffit alors de voir que $S = \bigoplus\limits_{0 \leq i \leq p-2} S_i$, où si $x \in S_i$ et $g \in \Gamma_f$ est $[\alpha]$ (le relèvement de Teichmuller de $\alpha \in \mathbb{F}_p^*$), alors $g$ agit sur $x$ par $g(x) = [\alpha]^i x$ (car alors $\mathcal{M} \otimes_{S_0} S = \bigoplus\limits_{0 \leq i \leq p-2} \mathcal{M} \otimes_{S_0} S_i$). Pour voir ceci, nous pouvons par exemple poser $p_i = \frac{1}{|\Gamma_f|} \sum\limits_{g \in \Gamma_f} \mathcal{X}(g)^{-i} g$, alors les $p_i$ sont des projecteurs dont l'image est $S_i$, et qui vérifient $\sum\limits_{0 \leq i \leq p-2} p_i = \mathrm{Id}$. □

Ces propositions et ces lemmes mis bout à bout nous donnent le théorème dans le cas d'un objet de $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M_{S_0}^h}$ de $p$-torsion. C'est à dire que si $\mathcal{M}$ est un objet de $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M_{S_0}^h}$ (avec $0 \leq h \leq p-2$) de $p$-torsion, alors il existe $M$ un objet de $\mathbf{MF_{W,tf}^h}$ tel que $\mathcal{M} = \mathrm{F}(M)$. Et plus précisément, nous avons $M = i^*(\mathcal{M}) = \mathcal{M}/\pi$. Donc, dans le cas où $\mathcal{M}$ n'est pas supposé de $p$-torsion, nous avons que $\mathcal{M}/p^n = \mathrm{F}(i^*(\mathcal{M}/p^n))$ pour tout $n$, donc en passant à la limite projective, nous obtenons bien que $\mathcal{M} = \mathrm{F}(i^*(\mathcal{M}))$, ce qui donne bien l'essentielle surjectivité de $\mathrm{F}$, et donc termine la démonstration du théorème V.8.1.

Le lien entre $S_0$ et $S$ est donné par le théorème V.8.9. Montrons d'abord quelques résultats intermédiares (en gardant les notations du lemme V.8.5) :

Lemme V.8.6. *$S$ a une base normale sur $S_0$, c'est à dire qu'il existe $e \in S$ tel que $(g(e))_{g\in\Gamma_f}$ soit une base de $S$ sur $S_0$. De plus, $p$ ne divise aucun $p_i(e)$.*

Démonstration. En effet, il suffit de le montrer modulo $p$ (et ensuite de relever une base normale de $k[[\pi]]$ sur $k[[\pi_0]]$, puisque $S_0$ est complet pour la topologie $p$-adique). Or, Fontaine a montré dans [**Fon90**], page 270, que le corps des fractions de $k[[\pi]]$, $k((\pi))$, est une extension galoisienne cyclique de degré $p-1$ (donc modérément ramifiée) de $k((\pi_0))$, dont le groupe de Galois est donné par $\Gamma_f$. Donc, par un théorème de E. Noether, il existe une base normale pour les anneaux d'entiers correspondants. Enfin, si $\overline{e}$ est cette base (modulo $p$), alors $p_i(\overline{e}) = \sum_g \frac{\mathcal{X}(g)^{-i}}{|\Gamma_f|} g(\overline{e})$ est non nul (puisque chaque coordonnée suivant la base $(g(\overline{e}))$ est non nulle (même modulo $p$)), donc $p_i(e)$ sera bien non divisible par $p$ si $e$ relève $\overline{e}$. □

En particulier, nous avons $S_i = p_i(e)S_0$ (car $p_i(e)S_0 \subset S_i$, puis $e \in \oplus_i p_i(e)S_0$, $\oplus_i p_i(e)S_0$ est donc un $S_0$-module contenant $e$ et stable par $\Gamma_f$, donc $S = \oplus_i p_i(e)S_0 \subset \oplus_i S_i = S$). Puis, remarquons que $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$ (car $p_i \circ p_j = \frac{1}{|\Gamma_f|^2}\sum_{g,h\in\Gamma_f} \mathcal{X}(g)^{-i+j-j}\mathcal{X}(h)^{-j}gh = \frac{1}{|\Gamma_f|^2}\sum_g \mathcal{X}(g)^{j-i}p_j$ car $\mathcal{X}$ est un caractère (multiplicatif), or si $f(k) = \sum_{a\in\mathbb{F}_p^*} a^k$, alors pour tout $b \in \mathbb{F}_p^*$ (rappelons que $\mathcal{X}$ identifie $\Gamma_f$ à $\mathbb{F}_p^*$), $f(k) = \sum_{a\in\mathbb{F}_p^*}(ab)^k = b^k f(k)$, donc $f(k) = 0$ si $p-1$ ne divise pas $k$), donc pour $\mathcal{M}$ un objet de $\mathbf{\Gamma\Phi M_S^h}$, nous avons les $p_i(\mathcal{M})$ en somme directe dans $\mathcal{M}$ (car si $m_i \in p_i(\mathcal{M})$ sont tels que $\sum_i m_i = 0$, alors $0 = p_j(\sum_i m_i) = \sum_i p_j(m_i) = m_j$ car $m_i = p_i(m_i)$ puisque $p_i$ est un projecteur). Enfin, $p_i(e)\mathcal{M}^{\Gamma_f} \subset p_i(\mathcal{M})$, et $p_i(e)\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ est isomorphe comme $S_0$-module à $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ car $\mathcal{M}$ est sans $p'$-torsion, et $p$ ne divise pas $p_i(e)$. Donc, nous avons que pour $\mathcal{M}$ un objet de $\mathbf{\Gamma\Phi M_S^h}$, $\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S = \oplus_i \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S_0 p_i(e)$ s'injecte dans $\mathcal{M}$.

Proposition V.8.7. *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\mathbf{\Gamma\Phi M_S^h}$, alors $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ est un objet de $\mathbf{\Gamma_0\Phi M_{S_0}^h}$, et $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S$. De plus, $\mathcal{M}^{\Gamma_f}/\pi_0 = \mathcal{M}/\pi$.*

Démonstration. Nous avons que $p_0(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^{\Gamma_f}$. Or, comme l'action de $\Gamma_f$ est triviale modulo $\pi$, nous avons que pour tout $x \in \mathcal{M}$, $x - p_0(x) \in \pi\mathcal{M}$, donc si $\mathcal{N}$ est le $S$-module engendré par $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ (c'est à dire que $\mathcal{N} = \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S$ d'après la remarque précédent la proposition), alors $\mathcal{M} = \mathcal{N} + \pi\mathcal{M}$, donc comme $\mathcal{M}$ est de type fini sur $S$, et que l'idéal engendré par $\pi$ est dans le radical de $S$, le lemme de Nakayama nous donne que $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

Puis, $\mathcal{M}$ est de type fini sur $S$, donc sur $S_0$ (car $S$ est un $S_0$-module libre de rang fini par le lemme V.8.6), donc engendré sur $S_0$ par exemple par la famille finie $(m_i)$. Alors, $p_0(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^{\Gamma_f}$ est engendré par la famille $(p_0(m_i))$ (car $p_0$ est un morphisme de $S_0$-modules), donc est de type fini. De plus, $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ étant inclus dans $\mathcal{M}$, il est sans $p'$-torsion.

Ensuite, nous avons que $\pi\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\Gamma_f} = \pi_0\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ : pour $S$, l'égalité $\pi S \cap S_0 = \pi_0 S_0$ provient juste de ce que $\pi_0$ est un multiple de $\pi$, donc $\pi_0 S_0 \subset \pi S \cap S_0$, et pour la réciproque, que $S_0 = W[[\pi_0]]$. Cela se traduit par la suite exacte de $S_0$-modules

$$0 \longrightarrow \pi_0 S_0 \longrightarrow S \longrightarrow S/\pi S \oplus S/S_0 \longrightarrow 0$$

(la surjectivité vient juste de ce que $S/\pi = W$, et que $W \subset S_0$), et en tensorisant par $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ au dessus de $S_0$, nous avons la suite exacte de $S_0$-modules

$$0 \longrightarrow \pi_0\mathcal{M}^{\Gamma_f} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/\pi \oplus \mathcal{M}/\mathcal{M}^{\Gamma_f} \longrightarrow 0$$

ce qui traduit bien $\pi\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\Gamma_f} = \pi_0\mathcal{M}^{\Gamma_f}$. Par conséquent, $\mathcal{M}^{\Gamma_f}/\pi_0$ s'injecte dans $\mathcal{M}/\pi$, et l'action de $\Gamma_0$ provient de celle sur $\mathcal{M}/\pi$, qui est triviale par définition. De plus, nous avons vu que pour tout $x \in \mathcal{M}$, $x - p_0(x) \in \pi\mathcal{M}$, donc comme $p_0(x) \in \mathcal{M}^{\Gamma_f}$, l'application naturelle $\mathcal{M}^{\Gamma_f}/\pi_0 \to \mathcal{M}/\pi$ (dont nous avons vu l'injectivité) est surjective.

Enfin, $\varphi$ commute à $\Gamma$, donc laisse stable $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$, donc induit un morphisme $\Phi_0 : \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_\sigma S_0 \to \mathcal{M}^{\Gamma_f}$. Pour étudier le conoyau, remarquons d'abord que $x \otimes y \in S_0 \otimes_\sigma S_0 \mapsto \varphi(x)y \in S_0$ et $x \otimes y \in S \otimes_\sigma S \mapsto \varphi(x)y \in S$ sont des isomorphismes (préservant l'action naturelle de $\Gamma_f$), donc $S_0 \otimes_{\sigma(S_0)} S_0[\frac{1}{q}] \simeq S_0[\frac{1}{q}]$ et $S \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}] \simeq S[\frac{1}{q}]$ (puisque $S[\frac{1}{q}]$ est plat sur $S$ et $S_0[\frac{1}{q}]$ est plat sur $S_0$). Par conséquent, $S_0 \otimes_{\sigma(S_0)} S \simeq S \otimes_{\sigma(S)} S$ et $S_0 \otimes_{\sigma(S_0)} S[\frac{1}{q}] \simeq S \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}]$ ; plus présicément, si $y_i \in S \otimes_{\sigma(S)} S$ s'envoye dans $S$ sur $p_i(e)$ (nous pouvons supposer que $y_0 = 1$ car $p_0(e)$ est inversible dans $S_0$), alors $S \otimes_{\sigma(S)} S = \oplus_i S_0 \otimes_{\sigma(S_0)} S_0 y_i$ et $S \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}] = \oplus_i S_0 \otimes_{\sigma(S_0)} S_0[\frac{1}{q}] y_i$ (c'est bien le même $y_i$, car $S \otimes_{\sigma(S)} S$ s'injecte dans $S \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}]$, puisque $S \otimes_{\sigma(S)} S$ est sans $q$-torsion). Et l'action naturelle de $\Gamma_f$ sur $S \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}]$ revient à dire que $g(y_i) = \mathcal{X}(g)^i y_i$ pour $g \in \Gamma_f$. Puisque $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S$, nous avons que $\mathcal{M} \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}] = \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S[\frac{1}{q}] = \oplus_i \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0[\frac{1}{q}] y_i$. Donc, $\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0[\frac{1}{q}]$ s'injecte naturellement dans $\mathcal{M} \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}]$, et $(\mathcal{M} \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}])^{\Gamma_f} = \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0[\frac{1}{q}]$.

Ensuite, $\Phi : \mathcal{M} \otimes_\sigma S \to \mathcal{M}$ est injective, de conoyau tué par $q^h$ (par définition), donc comme $S[\frac{1}{q}]$ est plat sur $S$, $\Phi$ induit une bijection $\Phi : \mathcal{M} \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}] \to \mathcal{M} \otimes_S S[\frac{1}{q}]$. Puis, $S[\frac{1}{q}] = \oplus_i S_0[\frac{1}{q}] p_i(e)$, donc $\mathcal{M} \otimes_S S[\frac{1}{q}] = \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S[\frac{1}{q}] = \oplus_i \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S_0[\frac{1}{q}] p_i(e)$, donc $\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S_0[\frac{1}{q}]$ s'injecte dans $\mathcal{M} \otimes_S S[\frac{1}{q}]$ et $\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S[\frac{1}{q}] = (\mathcal{M} \otimes_S S[\frac{1}{q}])^{\Gamma_f}$. Par conséquent, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}] \arrow[r, "\Phi"] & \mathcal{M} \otimes_S S[\frac{1}{q}] \\
\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0[\frac{1}{q}] \arrow[r, "\Phi_0"] \arrow[u, hook, "i"] & \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S_0[\frac{1}{q}] \arrow[u, hook, "j"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif, avec $\Phi$ bijective, $i$ et $j$ injective, et $\Phi$ (qui commute à l'action de $\Gamma_f$) qui identifie $(\mathcal{M} \otimes_{\sigma(S)} S[\frac{1}{q}])^{\Gamma_f}$ à $(\mathcal{M} \otimes_S S[\frac{1}{q}])^{\Gamma_f}$, donc $\Phi_0$ est bijective (donc $\mathcal{M}^{\Gamma_f}/\Phi_0(\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_\sigma S_0)$ est de $q$-torsion, donc tué par une puissance de $q$ car $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ est de type fini sur $S_0$).

Soit alors $x \in \mathcal{M}^{\Gamma_f}$. Par définition, il existe $y \in \mathcal{M} \otimes_{\sigma(S)} S = \oplus_i \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0 y_i$ tel que $\Phi(y) = q^h x$. La commutativité du diagramme et la bijectivité de $\Phi_0$ nous donne que $y \in \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0[\frac{1}{q}]$. Donc nous avons $y \in \big(\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0[\frac{1}{q}]\big) \cap \big(\oplus_i \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0 y_i\big) = \big(\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0[\frac{1}{q}]\big) \cap \big(\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0\big) = \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{\sigma(S_0)} S_0$. En définitive, nous avons bien que $\mathcal{M}^{\Gamma_f}/\Phi_0(\mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_\sigma S_0)$ est tué par $q^h$.

Finalement, nous avons bien que $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ est un objet de $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^h_{S_0}}$. □

Remarque V.8.8. *De la même façon que pour $S_i$, nous montrons pour $\mathcal{M}$ un objet de $\mathbf{\Gamma\Phi M^h_S}$ que $p_i(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^{\Gamma_f} \otimes_{S_0} S_i = p_i(e)\mathcal{M}^{\Gamma_f}$.*

Théorème V.8.9. *L'extension des scalaires de $S_0$ à $S$ induit une équivalence de catégories entre $\mathbf{\Gamma_0 \Phi M^h_{S_0}}$ et $\mathbf{\Gamma\Phi M^h_S}$, préservant suites exactes et produit tensoriel (si ce dernier est encore dans la catégorie). Un quasi-inverse est donné par les points fixes par $\Gamma_f$.*

Démonstration. L'essentielle surjectivité se prouve en remarquant que si $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est un morphisme de $\mathbf{\Gamma\Phi M^h_S}$, alors comme il commute à l'action de $\Gamma_f$, $f$ induit bien un morphisme de $(\varphi, \Gamma_0)$-modules entre $\mathcal{M}^{\Gamma_f}$ et $\mathcal{N}^{\Gamma_f}$ (qui redonne $f$ en étendant les scalaires de $S_0$ à $S$). Le reste est immédiat à partir des résultats précédents. □

# Bibliographie


[Ber04] Laurent Berger. Limites de représentations cristallines. *Compos. Math.*, 140(6) :1473–1498, 2004.

[BLR90] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert, and Michel Raynaud. *Néron models*, volume 21 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[BO78] Pierre Berthelot and Arthur Ogus. *Notes on crystalline cohomology.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1978.

[Bor91] Armand Borel. *Linear algebraic groups*, volume 126 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[Car76] Pierre Cartier. Groupes de Lubin-Tate généralisés. *Invent. Math.*, 35 :273–284, 1976.

[CF86] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, editors. *Algebraic number theory*, London, 1986. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers]. Reprint of the 1967 original.

[CF00] Pierre Colmez and Jean-Marc Fontaine. Construction des représentations $p$-adiques semi-stables. *Invent. Math.*, 140(1) :1–43, 2000.

[Col92] Pierre Colmez. Périodes $p$-adiques des variétés abéliennes. *Math. Ann.*, 292(4) :629–644, 1992.

[Col93] Pierre Colmez. Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe. *Ann. of Math. (2)*, 138(3) :625–683, 1993.

[DMOS82] Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus, and Kuang-yen Shih. *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, volume 900 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1982. Philosophical Studies Series in Philosophy, 20.

[FL82] Jean-Marc Fontaine and Guy Laffaille. Construction de représentations $p$-adiques. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(4) :547–608 (1983), 1982.

[Fon79a] Jean-Marc Fontaine. Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes. (Rennes, 1978), Vol. III*, volume 65 of *Astérisque*, pages 3–80. Soc. Math. France, Paris, 1979.

[Fon79b] Jean-Marc Fontaine. Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes. (Rennes, 1978), Vol. III*, volume 65 of *Astérisque*, pages 3–80. Soc. Math. France, Paris, 1979.

[Fon82] Jean-Marc Fontaine. Sur certains types de représentations $p$-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. *Ann. of Math. (2)*, 115(3) :529–577, 1982.

[Fon90] Jean-Marc Fontaine. Représentations $p$-adiques des corps locaux. I. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 249–309. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Fon93] Jean-Marc Fontaine. Schémas propres et lisses sur $\mathbf{Z}$. In *Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry (Bombay, 1989)*, pages 43–56, Delhi, 1993. Hindustan Book Agency.

[Fon94a] Jean-Marc Fontaine. Le corps des périodes $p$-adiques. *Astérisque*, (223) :59–111, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes $p$-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[Fon94b] Jean-Marc Fontaine. Représentations $p$-adiques semi-stables. *Astérisque*, (223) :113–184, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes $p$-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[Hal76] Marshall Hall, Jr. *The theory of groups*. Chelsea Publishing Co., New York, 1976. Reprinting of the 1968 edition.

[Hup67] B. Huppert. *Endliche Gruppen. I*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 134. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[LT65] Jonathan Lubin and John Tate. Formal complex multiplication in local fields. *Ann. of Math. (2)*, 81 :380–387, 1965.

[Nor87] Madhav V. Nori. On subgroups of $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$. *Invent. Math.*, 88(2) :257–275, 1987.

[RZ96] M. Rapoport and Th. Zink. *Period spaces for p-divisible groups*, volume 141 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[Ser72] Jean-Pierre Serre. Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques. *Invent. Math.*, 15(4) :259–331, 1972.

[Ser79] Jean-Pierre Serre. Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes. (Rennes, 1978), Vol. III*, volume 65 of *Astérisque*, pages 155–188. Soc. Math. France, Paris, 1979.

[Tit79] J. Tits. Reductive groups over local fields. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 29–69. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Wac97] Nathalie Wach. Représentations cristallines de torsion. *Compositio Math.*, 108(2) :185–240, 1997.

[Wei82] André Weil. *Adeles and algebraic groups*, volume 23 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Mass., 1982. With appendices by M. Demazure and Takashi Ono.

[Win84] Jean-Pierre Wintenberger. Un scindage de la filtration de Hodge pour certaines variétés algébriques sur les corps locaux. *Ann. of Math. (2)*, 119(3) :511–548, 1984.

[Win91] Jean-Pierre Wintenberger. Torseur entre cohomologie étale $p$-adique et cohomologie cristalline ; le cas abélien. *Duke Math. J.*, 62(3) :511–526, 1991.

# Index

# Table des matières