La trace en géométrie projective et torique

Martin WEIMANN
Université Bordeaux 1

22 Juin 2006

Plan

Partie I *TRACE EN GÉOMÉTRIE PROJECTIVE*

- Le théorème d'Abel originel
- Définitions et théorèmes connus
- Revisite du théorème d'Abel-inverse
- Commentaires

Plan

Partie I *TRACE EN GÉOMÉTRIE PROJECTIVE*

- Le théorème d'Abel originel
- Définitions et théorèmes connus
- Revisite du théorème d'Abel-inverse
- Commentaires

Partie II *TRACE EN GÉOMÉTRIE TORIQUE*

- Motivations
- Bonnes familles de sous-variétés
- Concavité-Dualité-Incidence-Trace
- Théorème de Wood torique

I.TRACE EN GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Le théorème d'Abel originel

Niels Henrik ABEL (1802-1829)

Soit $C \subset \mathbb{P}^2$, ϕ une 1-forme rationnelle sur C et γ un chemin de C.

L'intégrale abélienne

$$I(t) := \int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \phi$$

ne s'exprime pas avec les fonctions usuelles.

Le théorème d'Abel originel

Niels Henrik ABEL (1802-1829)

Soit $C \subset \mathbb{P}^2$, ϕ une 1-forme rationnelle sur C et γ un chemin de C.

L'intégrale abélienne

$$I(t) := \int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \phi$$

ne s'exprime pas avec les fonctions usuelles.

Soit $\{C_t\}_{t\in\mathbb{C}^\nu}$ une famille rationnelle de courbes d'intersection $C \cap C_t = \{p_1(t), \ldots, p_N(t)\}$ génériquement transverse.

Le théorème d'Abel originel

Niels Henrik ABEL (1802-1829)
Soit $C \subset \mathbb{P}^2$, ϕ une 1-forme rationnelle sur C et γ un chemin de C.

L'intégrale abélienne

$$I(t) := \int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \phi$$

ne s'exprime pas avec les fonctions usuelles.

Soit $\{C_t\}_{t \in \mathbb{C}^\nu}$ une famille rationnelle de courbes d'intersection $C \cap C_t = \{p_1(t), \ldots, p_N(t)\}$ génériquement transverse.

Théorème d'Abel : La fonction

$$u(t) := \int_p^{p_1(t)} \phi + \cdots + \int_p^{p_N(t)} \phi$$

s'écrit $u(t) = R(t) + log(Q(t))$ où Q et R sont rationnelles.

Définitions et théorèmes connus

Soit $U \subset \mathbb{P}^n$ un domaine k-concave et

$$U^* = \{L \in \mathbb{G}(k,n);\ L \subset U\}$$

le dual de U, ouvert de $\mathbb{G}(k,n)$.

Définitions et théorèmes connus

Soit $U \subset \mathbb{P}^n$ un domaine k-concave et

$$U^* = \{L \in \mathbb{G}(k,n);\ L \subset U\}$$

le dual de U, ouvert de $\mathbb{G}(k,n)$.

Soit $V \subset U$ analytique de codimension k et ϕ une q-forme méromorphe sur V.

Définitions et théorèmes connus

Soit $U \subset \mathbb{P}^n$ un domaine k-concave et

$$U^* = \{L \in \mathbb{G}(k,n);\ L \subset U\}$$

le dual de U, ouvert de $\mathbb{G}(k,n)$.

Soit $V \subset U$ analytique de codimension k et ϕ une q-forme méromorphe sur V.

Pour $L \in U^*$ générique, l'intersection

$$L \cap V = \{p_1(L), \dots, p_N(L)\}$$

est transverse et ne rencontre pas $\mathrm{pol}\,(\phi)$.

Définitions et théorèmes connus

Soit $U \subset \mathbb{P}^n$ un domaine k-concave et

$$U^* = \{L \in \mathbb{G}(k,n);\ L \subset U\}$$

le dual de U, ouvert de $\mathbb{G}(k,n)$.

Soit $V \subset U$ analytique de codimension k et ϕ une q-forme méromorphe sur V.

Pour $L \in U^*$ générique, l'intersection

$$L \cap V = \{p_1(L), \ldots, p_N(L)\}$$

est transverse et ne rencontre pas $\mathrm{pol}\,(\phi)$. On définit la trace de ϕ sur V:

$$Tr_V \phi(L) := \sum_1^N p_i^* \phi(L).$$

Courants résidus et variété d'incidence

$$
\begin{array}{ccccc}
& & I_U = \{(x, L) \in U \times U^*,\ x \in L\} & & \\
& p_U \swarrow & & \searrow q_U & \\
U & & & & U^*
\end{array}
$$

Courants résidus et variété d'incidence

$$\begin{array}{ccc} & I_U = \{(x,L) \in U \times U^*,\ x \in L\} & \\ p_U \swarrow & & \searrow q_U \\ U & & U^* \end{array}$$

$$U \subset \mathbb{P}^n \text{ concave} \Rightarrow \begin{cases} p_U \text{ submersion holomorphe} \\ q_U \text{ propre holomorphe.} \end{cases}$$

Courants résidus et variété d'incidence

$$I_U = \{(x, L) \in U \times U^*,\ x \in L\}$$

$$\begin{array}{ccc} & I_U & \\ p_U \swarrow & & \searrow q_U \\ U & & U^* \end{array}$$

$$U \subset \mathbb{P}^n \text{ concave} \Rightarrow \begin{cases} p_U \text{ submersion holomorphe} \\ q_U \text{ propre holomorphe.} \end{cases}$$

Le $(q, 0)$-courant transformée d'Abel

$$\mathcal{A}([V] \wedge \phi) := q_{U*}(p_U^*([V] \wedge \phi))$$

coïncide avec la trace de ϕ sur V.

Courants résidus et variété d'incidence

$$I_U = \{(x, L) \in U \times U^*,\ x \in L\}$$

$$\begin{array}{ccc} & I_U & \\ p_U \swarrow & & \searrow q_U \\ U & & U^* \end{array}$$

$$U \subset \mathbb{P}^n \text{ concave} \Rightarrow \begin{cases} p_U \text{ submersion holomorphe} \\ q_U \text{ propre holomorphe.} \end{cases}$$

Le $(q, 0)$-courant transformée d'Abel

$$\mathcal{A}([V] \wedge \phi) := q_{U*}(p_U^*([V] \wedge \phi))$$

coïncide avec la trace de ϕ sur V. Ainsi,

- Henkin, Passare:

$$\phi \in M^q(V) \Rightarrow Tr_V \phi \in M^q(U^*).$$

Courants résidus et variété d'incidence

$$
\begin{array}{ccc}
 & I_U = \{(x, L) \in U \times U^*,\, x \in L\} & \\
p_U \swarrow & & \searrow q_U \\
U & & U^*
\end{array}
$$

$$U \subset \mathbb{P}^n \text{ concave} \Rightarrow \begin{cases} p_U \text{ submersion holomorphe} \\ q_U \text{ propre holomorphe.} \end{cases}$$

Le $(q,0)$-courant transformée d'Abel

$$\mathcal{A}([V] \wedge \phi) := q_{U*}(p_U^*([V] \wedge \phi))$$

coïncide avec la trace de ϕ sur V. Ainsi,

- Henkin, Passare:

$$\phi \in M^q(V) \Rightarrow Tr_V \phi \in M^q(U^*).$$

- Représentation résiduelle.

Théorèmes d'inversion

On note $L(a, b)$ la droite

$$\{x_i = a_i y + b_i,\ i = 1, \ldots, n-1\},$$

et $\mathcal{O}$ (respectivement $\mathcal{M}$) l'anneau des germes holomorphes (respectivement méromorphes) en $(a, b) = (0, 0)$.

Théorèmes d'inversion

On note $L(a, b)$ la droite

$$\{x_i = a_i y + b_i,\ i = 1, \ldots, n-1\},$$

et $\mathcal{O}$ (respectivement $\mathcal{M}$) l'anneau des germes holomorphes (respectivement méromorphes) en $(a, b) = (0, 0)$.

On considère une famille $V = V_1 \cup \cdots \cup V_N$ de germes d'hypersurfaces analytiques lisses transverses à $\{x = 0\}$ et $\phi \in \Omega^q(V)$.

Théorèmes d'inversion

Abel-inverse (Griffiths, Henkin, Passare):

$$\begin{cases} Tr_V\, \phi \text{ est} \\ \text{rationnelle} \end{cases} \iff \begin{cases} V \text{ algébrique deg } N, \\ \phi \text{ rationnelle.} \end{cases}$$

Théorèmes d'inversion

Abel-inverse (Griffiths, Henkin, Passare):

$$\begin{cases} Tr_V\,\phi \text{ est} \\ \text{rationnelle} \end{cases} \iff \begin{cases} V \text{ algébrique deg } N, \\ \phi \text{ rationnelle.} \end{cases}$$

Wood (Wood):

$$\begin{cases} Tr_V\, y \text{ est} \\ \text{affine en } b \end{cases} \iff V \text{ algébrique deg } N.$$

Théorème

Un germe $\Psi \in \mathcal{M}^{n-1}$ est une trace si et seulement s'il s'écrit

$$\sum_{I} \mathrm{Res}\left[\frac{Y^{|I|} H \,(\partial_y F - \sum a_j \partial_{b_j} F)\, dY}{F}\right] da_I \wedge db_{I^c}$$

où

$$(*) \quad \begin{cases} F(Y,a,b) \in \mathcal{O}_N[Y], & \partial_{a_i} F - Y \partial_{b_i} F \in (F) \\ H(Y,a,b) \in \mathcal{M}_{N-1}[Y], & \partial_{a_i} H - Y \partial_{b_i} H \in (F) \end{cases}$$

Caractérisation résiduelle des traces

Théorème

Un germe $\Psi \in \mathcal{M}^{n-1}$ est une trace si et seulement s'il s'écrit

$$\sum_I \mathrm{Res}\left[\begin{matrix} Y^{|I|} H\,(\partial_y F - \sum a_j \partial_{b_j} F)\, dY \\ F \end{matrix}\right] da_I \wedge db_{I^c}$$

où

$$(*) \quad \begin{cases} F(Y,a,b) \in \mathcal{O}_N[Y], & \partial_{a_i} F - Y \partial_{b_i} F \in (F) \\ H(Y,a,b) \in \mathcal{M}_{N-1}[Y], & \partial_{a_i} H - Y \partial_{b_i} H \in (F) \end{cases}$$

Dans ce cas,

$$\Psi = Tr_V \Phi$$

où $V = \{F(y,0,x) = 0\}$ et $\Phi = H(y,0,x)dx$.

Preuve

Polynôme caractéristique

$$F(Y, a, b) = \prod_{i=1}^{N} (Y - y_i(a, b))$$

Preuve

Polynôme caractéristique

$$F(Y,a,b) = \prod_{i=1}^{N} (Y - y_i(a,b))$$

Polynôme d'interpolation de Lagrange

$$H(Y,a,b) = \sum_{i=1}^{N} \prod_{j \neq i} \left(\frac{Y - y_j(a,b))}{y_i(a,b) - y_j(a,b)} \right) h(p_i).$$

Preuve

Polynôme caractéristique

$$F(Y,a,b)=\prod_{i=1}^{N}(Y-y_i(a,b))$$

Polynôme d'interpolation de Lagrange

$$H(Y,a,b)=\sum_{i=1}^{N}\prod_{j\neq i}\Big(\frac{Y-y_j(a,b))}{y_i(a,b)-y_j(a,b)}\Big)h(p_i).$$

L'Equation d'onde

$$\partial_{a_j}y_i(a,b)-y_i(a,b)\partial_{b_j}y_i(a,b)=0$$

implique $(*)$.

preuve (suite)

Par dualité, on a l'égalité formelle

$$Tr_V \Phi = \int_U [I_U] \wedge [V] \wedge \phi.$$

preuve (suite)

Par dualité, on a l'égalité formelle

$$Tr_V \Phi = \int_U [I_U] \wedge [V] \wedge \phi.$$

On utilise ensuite l'équation de Lelong-Poincaré

$$[V] = df \wedge \bar{\partial}(\frac{1}{f})$$

preuve (suite)

Par dualité, on a l'égalité formelle

$$Tr_V \Phi = \int_U [I_U] \wedge [V] \wedge \phi.$$

On utilise ensuite l'équation de Lelong-Poincaré

$$[V] = df \wedge \bar{\partial}(\frac{1}{f})$$

et le théorème de dualité. $\square$

Abel-inverse revisité

Théorème

Soit $\phi \in M^{n-1}(V)$. On a l'équivalence

$$\begin{cases} Tr_V\,\phi \text{ est} \\ \text{rationnelle en } b \end{cases} \iff \begin{cases} V \text{ algébrique deg N,} \\ \phi \text{ rationnelle.} \end{cases}$$

Preuve

Soit $\phi = h(x, y)dx$. Par hypothèse, les germes méromorphes

$$w_k := \mathrm{Res}\left[\begin{matrix} Y^k H\,(\partial_y F - \sum a_j \partial_{b_j} F)\, dY \\ F \end{matrix}\right]$$

sont rationnels en b pour $k \leq n-1$.

Preuve

Soit $\phi = h(x,y)dx$. Par hypothèse, les germes méromorphes

$$w_k := \mathrm{Res}\left[\frac{Y^k H\left(\partial_y F - \sum a_j \partial_{b_j} F\right) dY}{F}\right]$$

sont rationnels en b pour $k \leq n-1$.

Ils vérifient l'équation différentielle

$$\partial_{a_i} w_k = \partial_{b_i} w_{k+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

Preuve

Soit $\phi = h(x,y)dx$. Par hypothèse, les germes méromorphes

$$w_k := \mathrm{Res}\left[\frac{Y^k H\,(\partial_y F - \sum a_j \partial_{b_j} F)\, dY}{F}\right]$$

sont rationnels en b pour $k \leq n-1$.

Ils vérifient l'équation différentielle

$$\partial_{a_i} w_k = \partial_{b_i} w_{k+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

et ne peuvent avoir de pôles simples en b.

Preuve

Soit $\phi = h(x,y)dx$. Par hypothèse, les germes méromorphes

$$w_k := \mathrm{Res}\left[\frac{Y^k H\,(\partial_y F - \sum a_j \partial_{b_j} F)\,dY}{F}\right]$$

sont rationnels en b pour $k \leq n-1$.

Ils vérifient l'équation différentielle

$$\partial_{a_i} w_k = \partial_{b_i} w_{k+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

et ne peuvent avoir de pôles simples en b. Ainsi,

$$Tr_V \phi \text{ rationnelle en } b$$

$$\Longrightarrow\; Tr_V y^k \phi \text{ rationnelle en } b,\;\; \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

preuve(suite)

On considère la matrice de trace

$$M = (w_{i+j})_{0 \leq i,j \leq N-1}$$

preuve(suite)

On considère la matrice de trace

$$M = (w_{i+j})_{0\leq i,j\leq N-1}$$

Par le théorème de dualité, les coefficients de

$$F(Y,a,b) = Y^N + \sigma_{N-1}(a,b)Y^{N-1} + \cdots + \sigma_0(a,b)\,,$$

sont uniques solutions de

$$(\sigma_0,\ldots,\sigma_{N-1})M = (w_N,\ldots,w_{2N-1})$$

et sont donc rationnels en b.

preuve(suite)

De $\partial_{a_i} F - Y \partial_{b_i} F \in (F)$, on déduit

$$\deg_b \sigma_{N-i} \leq i, \ \ \forall\, i = 1, \dots, N.$$

preuve(suite)

De $\partial_{a_i} F - Y \partial_{b_i} F \in (F)$, on déduit

$$\deg_b \sigma_{N-i} \leq i, \ \ \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

L'hypersurface $\widetilde{V} := \{F(y, 0, x) = 0\}$ est algébrique de degré N et contient V.

preuve(suite)

De $\partial_{a_i} F - Y \partial_{b_i} F \in (F)$, on déduit

$$\deg_b \sigma_{N-i} \leq i, \quad \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

L'hypersurface $\widetilde{V} := \{F(y, 0, x) = 0\}$ est algébrique de degré N et contient V.

On raisonne de manière similaire pour le polynôme H.

preuve(suite)

De $\partial_{a_i} F - Y \partial_{b_i} F \in (F)$, on déduit

$$\deg_b \sigma_{N-i} \leq i, \ \ \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

L'hypersurface $\widetilde{V} := \{F(y, 0, x) = 0\}$ est algébrique de degré N et contient V.

On raisonne de manière similaire pour le polynôme H.

La forme $\widetilde{\phi} := H(y, 0, x)dx$ est rationnelle sur $\widetilde{V}$ et vérifie $\widetilde{\phi}_{|V} = \phi$.
$\square$

Commentaires

- On établit le lien avec le théorème de Wood. Ce théorème est la réciproque d'un théorème de Newton sur une propriété barycentrique des hypersurfaces algébriques.

Commentaires

- On établit le lien avec le théorème de Wood. Ce théorème est la réciproque d'un théorème de Newton sur une propriété barycentrique des hypersurfaces algébriques.

- Le théorème d'Abel-inverse s'interprête comme un résultat de rigidité d'un système différentiel en les inconnues $(\sigma, \tau) \in \mathcal{O}^N \times \mathcal{M}^N$: la rationnalité en b du second membre équivaut à la rationnalité en (a, b) des solutions.

Commentaires

- On établit le lien avec le théorème de Wood. Ce théorème est la réciproque d'un théorème de Newton sur une propriété barycentrique des hypersurfaces algébriques.

- Le théorème d'Abel-inverse s'interprête comme un résultat de rigidité d'un système différentiel en les inconnues $(\sigma, \tau) \in \mathcal{O}^N \times \mathcal{M}^N$: la rationnalité en b du second membre équivaut à la rationnalité en (a, b) des solutions.

- Le théorème de caractérisation permet de retrouver la dimension de l'espace des formes abéliennes de degré maximal dans le cas hypersurface : $\dim \omega_V^{n-1} = \binom{N-1}{n}$.

II. TRACE EN GÉOMÉTRIE TORIQUE

Motivations-Définitions

Comportement asymptotique de $\widetilde{V}$ (trouver le support de son polynôme)

Motivations-Définitions

Comportement asymptotique de $\widetilde{V}$ (trouver le support de son polynôme)

$$\Downarrow$$

Théorème de type Wood dans une variété torique lisse compacte.

Comportement asymptotique de $\widetilde{V}$ (trouver le support de son polynôme)

$$\Downarrow$$

Théorème de type Wood dans une variété torique lisse compacte.

Exemple

Soit $X = \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^l$. On cherche à caractériser l'interpolabilité d'une famille de germes d'hypersurfaces analytiques par une hypersurface de degré (d_1, d_2).

Comportement asymptotique de $\widetilde{V}$ (trouver le support de son polynôme)

$$\Downarrow$$

Théorème de type Wood dans une variété torique lisse compacte.

Exemple

Soit $X = \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^l$. On cherche à caractériser l'interpolabilité d'une famille de germes d'hypersurfaces analytiques par une hypersurface de degré (d_1, d_2).

Remarque

Plongement projectif inadéquat $\Longrightarrow$ Concavité torique intrinsèque.

Définition (Danilov, Ehlers)

Une variété torique lisse compacte est une variété algébrique munie d'une collection finie de cartes affines $x^\sigma : U_\sigma \longrightarrow \mathbb{C}^n$ à changements de cartes monômiaux.

Définition (Danilov, Ehlers)

Une variété torique lisse compacte est une variété algébrique munie d'une collection finie de cartes affines $x^\sigma : U_\sigma \longrightarrow \mathbb{C}^n$ à changements de cartes monômiaux.

Exemple

Produits d'espaces projectifs, Surfaces d'Hirzebruch, éclatements de variétés toriques.

Coordonnées affines

Une variété torique lisse compacte $X = X_\Sigma$ de dimension n est attachée à un éventail complet régulier Σ de $\mathbb{R}^n$.

Coordonnées affines

Une variété torique lisse compacte $X = X_\Sigma$ de dimension n est attachée à un éventail complet régulier Σ de $\mathbb{R}^n$.

Tout cône $\sigma \in \Sigma(n)$ définit un semi-groupe libre de type fini

$$S_\sigma := \check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^n = m_1\mathbb{Z}_{\geq 0} + \cdots + m_n\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

et une carte affine

$$U_\sigma = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[S_\sigma] \simeq \mathbb{C}^n$$

de coordonnées affines $(x_1^\sigma, \ldots, x_n^\sigma) := (t^{m_1}, \ldots, t^{m_n})$.

Fibrés en droites

Un fibré en droites L sur X est globalement engendré si son lieu de base

$$BS(L) = \{x \in X,\ s(x) = 0,\ \forall s \in \Gamma(X, L)\}$$

est vide.

Un fibré globalement engendré est très ample si l'application de Kodaira

$$\phi_L : X \longrightarrow \mathbb{P}(\Gamma(X, L)^*)$$

est un plongement.

Fibrés en droites

Un fibré en droites L sur X est globalement engendré si son lieu de base

$$BS(L) = \{x \in X,\ s(x) = 0,\ \forall\, s \in \Gamma(X, L)\}$$

est vide.
Un fibré globalement engendré est très ample si l'application de Kodaira

$$\phi_L : X \longrightarrow \mathbb{P}(\Gamma(X, L)^*)$$

est un plongement.

Lemme

- L est globalement engendré ssi les équations affines d'une hypersurface $H \in |L|$ générique ont un coefficient constant non nul.

Fibrés en droites

Un fibré en droites L sur X est globalement engendré si son lieu de base

$$BS(L) = \{x \in X,\ s(x) = 0,\ \forall\, s \in \Gamma(X, L)\}$$

est vide.

Un fibré globalement engendré est très ample si l'application de Kodaira

$$\phi_L : X \longrightarrow \mathbb{P}(\Gamma(X, L)^*)$$

est un plongement.

Lemme

- L est globalement engendré ssi les équations affines d'une hypersurface $H \in |L|$ générique ont un coefficient constant non nul.
- L est très ample ssi les supports des équations affines d'une hypersurface générique $H \in |L|$ contiennent le n-simplexe élémentaire.

L-Dualité et L-incidence

Soient k fibrés en droites $L_1, \ldots, L_k$ sur X. On note $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$.

Soient k fibrés en droites $L_1, \ldots, L_k$ sur X. On note $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$.

Définition

- Variété L-duale de X:

$$X^* := \mathbb{P}(\Gamma(X, L_1)) \times \cdots \times \mathbb{P}(\Gamma(X, L_k)).$$

L-Dualité et L-incidence

Soient k fibrés en droites $L_1, \dots, L_k$ sur X. On note $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$.

Définition

- Variété L-duale de X:
$$X^* := \mathbb{P}(\Gamma(X, L_1)) \times \cdots \times \mathbb{P}(\Gamma(X, L_k)).$$
- Espace des sous-variétés de type L:
$$\mathcal{C}_X(L) := \{C = \{s = 0\},\ s \in \Gamma(X, L)\}$$

L-Dualité et L-incidence

Soient k fibrés en droites $L_1, \dots, L_k$ sur X. On note $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$.

Définition

- Variété L-duale de X:

$$X^* := \mathbb{P}(\Gamma(X, L_1)) \times \cdots \times \mathbb{P}(\Gamma(X, L_k)).$$

- Espace des sous-variétés de type L:

$$\mathcal{C}_X(L) := \{C = \{s = 0\},\ s \in \Gamma(X, L)\}$$

- Variété de L-incidence:

$$I_X := \{(x, a) \in X \times X^*,\ \ x \in C_a\}.$$

où $a \in X^* \mapsto C_a \in \mathcal{C}_X(L)$.

L-Dualité et L-incidence

Soient k fibrés en droites $L_1, \ldots, L_k$ sur X. On note $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$.

Définition

- Variété L-duale de X:

$$X^* := \mathbb{P}(\Gamma(X, L_1)) \times \cdots \times \mathbb{P}(\Gamma(X, L_k)).$$

- Espace des sous-variétés de type L:

$$\mathcal{C}_X(L) := \{C = \{s = 0\},\ s \in \Gamma(X, L)\}$$

- Variété de L-incidence:

$$I_X := \{(x, a) \in X \times X^*,\ \ x \in C_a\}.$$

  où $a \in X^* \mapsto C_a \in \mathcal{C}_X(L)$.
- Paramètres réguliers:

$$\mathrm{Reg}(X^*) := \{a \in X^*,\ \ C_a \text{ lisse de codim } k\}.$$

Familles essentielles semi-amples

Définitions

- Une famille $(L_1, \ldots, L_k)$ de fibrés en droites sur X est dite semi-ample si chaque fibré L_i est globalement engendré.

Familles essentielles semi-amples

Définitions

- Une famille $(L_1, \ldots, L_k)$ de fibrés en droites sur X est dite semi-ample si chaque fibré L_i est globalement engendré.
- Une famille $(L_1, \ldots, L_k)$ de fibrés en droites sur X est dite essentielle (Khovanskii, Khetan, Soprounov, Sturmfels) si la famille de polytopes associés $(P_1, \ldots, P_k)$ vérifie

$$\forall I \subset \{1, \ldots, k\}, \quad \dim \sum_{i \in I} P_i \geq \mathrm{Card}\ I.$$

Familles essentielles semi-amples

Définitions

- Une famille $(L_1, \ldots, L_k)$ de fibrés en droites sur X est dite semi-ample si chaque fibré L_i est globalement engendré.
- Une famille $(L_1, \ldots, L_k)$ de fibrés en droites sur X est dite essentielle (Khovanskii, Khetan, Soprounov, Sturmfels) si la famille de polytopes associés $(P_1, \ldots, P_k)$ vérifie

$$\forall I \subset \{1, \ldots, k\}, \quad \dim \sum_{i \in I} P_i \geq \mathrm{Card}\ I.$$

- Une famille $(L_1, \ldots, L_k)$ de fibrés en droites sur X est dite très ample si chaque fibré l'est.

Caractérisation des bonnes familles de fibrés

Théorème

La famille $(L_1, \ldots, L_k)$ est semi-ample si et seulement si

- I_X est une intersection complète irréductible lisse et $p_X : I_X \to X$ est une submersion holomorphe.

Caractérisation des bonnes familles de fibrés

Théorème

La famille $(L_1, \ldots, L_k)$ est essentielle semi-ample si et seulement si

- I_X est une intersection complète irréductible lisse et $p_X : I_X \to X$ est une submersion holomorphe.
- $\mathrm{Reg}\,(X^*)$ est un ouvert de Zariski de X^*
- $q_X : I_X \to X^*$ est holomorphe, propre, surjective, submersion sur $\mathrm{Reg}\,(X^*)$.

L-concavité

- Un ouvert U de X est *L-concave* si

$$\forall\, x \in U,\ \exists\, C \in \mathcal{C}_X(L) \text{ tel que } \begin{cases} x \in C \\ C \subset U. \end{cases}$$

L-concavité

- Un ouvert U de X est L-concave si

$$\forall x \in U,\ \exists\, C \in \mathcal{C}_X(L) \text{ tel que } \begin{cases} x \in C \\ C \subset U. \end{cases}$$

- Le L-dual d'un ouvert L-concave U est

$$U^* = \{a \in X^*,\ C_a \subset U\}.$$

L-concavité

- Un ouvert U de X est *L-concave* si

$$\forall x \in U,\ \exists\, C \in \mathcal{C}_X(L) \text{ tel que } \begin{cases} x \in C \\ C \subset U. \end{cases}$$

- Le *L-dual* d'un ouvert L-concave U est

$$U^* = \{a \in X^*,\ C_a \subset U\}.$$

- Le *L-dual* d'un sous-ensemble V d'un ouvert L-concave U est

$$V^* = \{a \in U^*,\ C_a \cap V \neq \emptyset\}.$$

Propriétés L-duales

Si $(L_1, \dots, L_k)$ semi-ample essentielle, alors:

- U ouvert L-concave (connexe) $\Rightarrow$ U^* ouvert (connexe) de X^*.

Propriétés L-duales

Si $(L_1, \ldots, L_k)$ semi-ample essentielle, alors:

- U ouvert L-concave (connexe) $\Rightarrow$ U^* ouvert (connexe) de X^*.
- $V \subset U$ analytique (irréductible) $\Rightarrow$ $V^* \subset U^*$ analytique (irréductible).

Propriétés L-duales

Si $(L_1, \ldots, L_k)$ semi-ample essentielle, alors:

- U ouvert L-concave (connexe) $\Rightarrow$ U^* ouvert (connexe) de X^*.
- $V \subset U$ analytique (irréductible) $\Rightarrow$ $V^* \subset U^*$ analytique (irréductible).
- Si $V \cap C_a$ propre pour un $a \in \mathrm{Reg}\,(U^*)$,

$$\operatorname{codim} V^* = \begin{cases} k - \dim V, & \text{si } \dim V < k \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Propriétés L-duales

Si $(L_1, \ldots, L_k)$ semi-ample essentielle, alors:

- U ouvert L-concave (connexe) $\Rightarrow U^*$ ouvert (connexe) de X^*.
- $V \subset U$ analytique (irréductible) $\Rightarrow V^* \subset U^*$ analytique (irréductible).
- Si $V \cap C_a$ propre pour un $a \in \mathrm{Reg}\,(U^*)$,

$$\mathrm{codim}\; V^* = \begin{cases} k - \dim V, & \text{si } \dim V < k \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

- Aucun ensemble n'est dégénéré si la famille $(L_1, \ldots, L_k)$ est très ample, .

La trace torique

Soit $(L_1, \ldots, L_k)$ semi-ample essentielle et U ouvert L-concave.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & I_U = \{(x,a) \in U \times U^*,\ x \in C_a\} \arrow[dl, "p_U"'] \arrow[dr, "q_U"] & \\ U & & U^* \end{tikzcd}$$

La trace torique

Soit $(L_1, \ldots, L_k)$ semi-ample essentielle et U ouvert L-concave.

$$\begin{array}{ccccc} & & I_U = \{(x,a) \in U \times U^*,\ x \in C_a\} & & \\ & p_U \swarrow & & \searrow q_U & \\ U & & & & U^* \end{array}$$

Soit $V \subset U$ analytique, dim k.

La trace torique

Soit $(L_1, \ldots, L_k)$ semi-ample essentielle et U ouvert L-concave.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & I_U = \{(x,a) \in U \times U^*, \ x \in C_a\} & & \\
 & p_U \swarrow & & \searrow q_U & \\
 U & & & & U^*
\end{array}
$$

Soit $V \subset U$ analytique, dim k.

La trace de $\phi \in M^q(V)$ sur V (relativement à L) est le $(q,0)$-courant transformée d'Abel sur U^*

$$Tr_V\, \phi := q_{U*}(p_U^*([V] \wedge \phi)).$$

Théorème d'Abel

Théorème d'Abel

- On a l'implication

$$\phi \in M^q(V) \Longrightarrow Tr_V\, \phi \in M^q(U^*)$$

Théorème d'Abel

- On a l'implication

$$\phi \in M^q(V) \Longrightarrow Tr_V\, \phi \in M^q(U^*)$$

- Si V algébrique et la famille est très ample, tout diviseur D de X d'intersection propre avec V induit pour tout entier q un morphisme d'espaces vectoriels

$$Tr_V : H^0(X, \Omega^q_X(D)) \longrightarrow H^0(X^*, \Omega^q_{X^*}((D \cdot V)^*))$$

où $(D \cdot V)^* \in \mathrm{Div}(U^*)$ est le diviseur L-dual du $(k-1)$-cycle $D \cdot V$.

Théorème de Wood torique

On suppose X projective .

Théorème de Wood torique

On suppose X projective .

Soit $V = V_1 \cup \cdots \cup V_N$ une collection de germes distincts d'hypersurfaces analytiques inclus dans le tore $\mathbb{T}$.

Théorème de Wood torique

On suppose X projective .

Soit $V = V_1 \cup \cdots \cup V_N$ une collection de germes distincts d'hypersurfaces analytiques inclus dans le tore $\mathbb{T}$.

Proposition

Il existe une famille de fibrés très amples $(L_1, \ldots, L_{n-1})$ et $C_0 \in \mathcal{C}_X(L)$ d'intersection transverse réduite à un point avec chaque germe V_i.

Théorème de Wood torique

On suppose X projective .

Soit $V = V_1 \cup \cdots \cup V_N$ une collection de germes distincts d'hypersurfaces analytiques inclus dans le tore $\mathbb{T}$.

Proposition

Il existe une famille de fibrés très amples $(L_1, \ldots, L_{n-1})$ et $C_0 \in \mathcal{C}_X(L)$ d'intersection transverse réduite à un point avec chaque germe V_i.

On fixe une telle famille et on note P_i et D_i les polytopes et diviseurs associés.

Théorème de Wood torique

On fixe $\sigma \in \Sigma(n)$.

On note $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées affines de la carte U_σ et c_i le coefficient σ-extrémal du fibré L_i.

Théorème de Wood torique

On fixe $\sigma \in \Sigma(n)$.

On note $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées affines de la carte U_σ et c_i le coefficient σ-extrémal du fibré L_i.

Lemme

Il existe s diviseurs effectifs très amples $E_1, \ldots, E_s$ supportés par $X \setminus U_\sigma$, dont les classes forment une $\mathbb{Q}$-base pour $A_{n-1}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Théorème de Wood torique

On fixe $\sigma \in \Sigma(n)$.

On note $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées affines de la carte U_σ et c_i le coefficient σ-extrémal du fibré L_i.

Lemme

Il existe s diviseurs effectifs très amples $E_1, \ldots, E_s$ supportés par $X \setminus U_\sigma$, dont les classes forment une $\mathbb{Q}$-base pour $A_{n-1}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

On fixe une telle famille de diviseurs et on note Q_i les polytopes associés.

Théorème

- V algébrique de L-degré N

$$\iff$$

$$\deg_{c_i} Tr_V\, x_j \leq 1 \qquad (1)$$

pour tout $i = 1, \ldots, n-1$ et $j = 1, \ldots, n$.

Théorème de Wood torique

Théorème

- V algébrique de L-degré N

$$\Longleftrightarrow$$

$$\deg_{c_i} Tr_V\, x_j \leq 1 \qquad (1)$$

pour tout $i = 1, \ldots, n-1$ et $j = 1, \ldots, n$.

- Sous l'hypothèse (1), $V \in |L(D)|$

$$\Longleftrightarrow$$

il existe $h_1, \ldots, h_s$ supportés par $Q_1, \ldots, Q_s$ tels que

$$\deg_{c_1} \prod_{p \in V \cap C_a} h_j(p) = MV(P_D, Q_j, P_2, ..., P_{n-1})$$

Preuve
Algébricité de V

$\Longrightarrow$

Représentation résiduelle + Théorème d'Abel-Jacobi torique (Khovanskii, Vidras, Yger, Zhang).

Preuve

Algébricité de V

$\Longrightarrow$

Représentation résiduelle + Théorème d'Abel-Jacobi torique (Khovanskii, Vidras, Yger, Zhang).

$\Longleftarrow$

Soit $V_i = \{f_i = 0\}$ et $u = \sum u_i x_i$,

$$\partial_u f_i \neq 0, \forall i = 1, \ldots, N.$$

Preuve
Algébricité de V

$\Longrightarrow$

Représentation résiduelle + Théorème d'Abel-Jacobi torique (Khovanskii, Vidras, Yger, Zhang).

$\Longleftarrow$

Soit $V_i = \{f_i = 0\}$ et $u = \sum u_i x_i$,

$$\partial_u f_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, N.$$

Equation d'onde associée à $(L_1, \dots, L_{n-1})$:

$$t^{m'}(p_j)\partial_{a_{im}} h(p_j) - t^m(p_j)\partial_{a_{im'}} h(p_j) = 0$$

$$\forall\, h \in \mathbb{C}(V_j),\ \forall\, j = 1, \dots, N,\ \forall\, m, m' \in P_i.$$

Preuve

Algébricité de V

$\Longrightarrow$

Représentation résiduelle + Théorème d'Abel-Jacobi torique (Khovanskii, Vidras, Yger, Zhang).

$\Longleftarrow$

Soit $V_i = \{f_i = 0\}$ et $u = \sum u_i x_i$,

$$\partial_u f_i \neq 0, \forall i = 1, \ldots, N.$$

Equation d'onde associée à $(L_1, \ldots, L_{n-1})$:

$$t^{m'}(p_j)\partial_{a_{im}} h(p_j) - t^{m}(p_j)\partial_{a_{im'}} h(p_j) = 0$$

$$\forall\, h \in \mathbb{C}(V_j),\ \forall j = 1, \ldots, N,\ \forall\, m, m' \in P_i.$$

Ainsi

$$\deg_{c_i} Tr_V u^l \leq l, \forall l \in \mathbb{N}.$$

Preuve
Algébricité de V

$\Longrightarrow$

Représentation résiduelle + Théorème d'Abel-Jacobi torique (Khovanskii, Vidras, Yger, Zhang).

$\Longleftarrow$

Soit $V_i = \{f_i = 0\}$ et $u = \sum u_i x_i$,

$$\partial_u f_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, N.$$

Equation d'onde associée à $(L_1, \dots, L_{n-1})$:

$$t^{m'}(p_j)\partial_{a_{im}} h(p_j) - t^m(p_j)\partial_{a_{im'}} h(p_j) = 0$$

$$\forall\, h \in \mathbb{C}(V_j),\ \forall\, j = 1, \dots, N,\ \forall\, m, m' \in P_i.$$

Ainsi

$$\deg_{c_i} Tr_V u^l \leq l, \forall l \in \mathbb{N}.$$

Fin de preuve similaire au cas projectif.

preuve (suite)
Degré de V

Soit $H_j \in |L(E_j)|$ d'équation $h_j = 0$ dans le tore.

preuve (suite)
Degré de V

Soit $H_j \in |L(E_j)|$ d'équation $h_j = 0$ dans le tore.

Formule du produit, (Pedersen, Sturmfels)

$$\mathcal{R}_{V \cdot H_j} = \prod_{p \in V \cap C_a} h_j(p) \times \mathcal{R}_{V \cdot E_j},$$

où $\mathcal{R}_W$ est le L-résultant d'un $(k-1)$-cycle effectif W de X, polynôme multihomogène définissant le diviseur effectif L-dual W^*.

preuve (suite)
Degré de V

Soit $H_j \in |L(E_j)|$ d'équation $h_j = 0$ dans le tore.

Formule du produit, (Pedersen, Sturmfels)

$$\mathcal{R}_{V \cdot H_j} = \prod_{p \in V \cap C_a} h_j(p) \times \mathcal{R}_{V \cdot E_j},$$

où $\mathcal{R}_W$ est le L-résultant d'un $(k-1)$-cycle effectif W de X, polynôme multihomogène définissant le diviseur effectif L-dual W^*.

Ainsi,

$$\deg_{c_1}\Big(\prod_{p \in V \cap C_a} h_j(p)\Big) = \deg_{c_1} \mathcal{R}_{V \cdot H_j}$$

$$\leq \deg_{a_1} \mathcal{R}_{V \cdot E_j} = [V] \cdot [E_j] \cdot [D_2] \cdots [D_{n-1}]$$

preuve (suite)
Degré de V

Une inégalité stricte équivaut à

$$\mathrm{Dim}\,(V \cap (X \setminus U_\sigma)) = n - 1$$

et ne peut avoir lieu dans notre cas.

preuve (suite)
Degré de V

Une inégalité stricte équivaut à

$$\mathrm{Dim}\,(V \cap (X \setminus U_\sigma)) = n - 1$$

et ne peut avoir lieu dans notre cas.

L'hypothèse faite sur les degrés des normes équivaut donc à

$$[D] \cdot [E_j] \cdot [D_2] \cdots [D_{n-1}] = [V] \cdot [E_j] \cdot [D_2] \cdots [D_{n-1}]$$

pour tout $j = 1, \ldots, s$.

preuve (suite)
Degré de V

Une inégalité stricte équivaut à

$$\mathrm{Dim}\,(V \cap (X \setminus U_\sigma)) = n - 1$$

et ne peut avoir lieu dans notre cas.

L'hypothèse faite sur les degrés des normes équivaut donc à

$$[D] \cdot [E_j] \cdot [D_2] \cdots [D_{n-1}] = [V] \cdot [E_j] \cdot [D_2] \cdots [D_{n-1}]$$

pour tout $j = 1, \ldots, s$.

La dualité entre $A_1(X)$ et $A_{n-1}(X)$ implique $V \in |L(D)|$. $\square$

Perspectives

- Exploiter la notion de L-concavité torique pour les tranformées de type Fantappié-Martineau.

Perspectives

- Exploiter la notion de L-concavité torique pour les tranformées de type Fantappié-Martineau.
- Codimension supérieure à 1.

Perspectives

- Exploiter la notion de L-concavité torique pour les tranformées de type Fantappié-Martineau.
- Codimension supérieure à 1.
- Reconstruire $[V] \wedge \Phi$ avec un nombre fini de traces.

Perspectives

- Exploiter la notion de L-concavité torique pour les tranformées de type Fantappié-Martineau.
- Codimension supérieure à 1.
- Reconstruire $[V] \wedge \Phi$ avec un nombre fini de traces.
- Caractériser $\phi \in \omega_V^q$ avec un nombre fini de traces.

Perspectives

- Exploiter la notion de L-concavité torique pour les tranformées de type Fantappié-Martineau.
- Codimension supérieure à 1.
- Reconstruire $[V] \wedge \Phi$ avec un nombre fini de traces.
- Caractériser $\phi \in \omega_V^q$ avec un nombre fini de traces.
- Diviseur polaire de ϕ sur V ? Relation avec l'ordre du courant $[V] \wedge \Phi$? Relation avec diviseur polaire de la trace ?

Perspectives

- Exploiter la notion de L-concavité torique pour les tranformées de type Fantappié-Martineau.
- Codimension supérieure à 1.
- Reconstruire $[V] \wedge \Phi$ avec un nombre fini de traces.
- Caractériser $\phi \in \omega_V^q$ avec un nombre fini de traces.
- Diviseur polaire de ϕ sur V ? Relation avec l'ordre du courant $[V] \wedge \Phi$? Relation avec diviseur polaire de la trace ?
- Théorème de Wood dans le cas torique non projectif ?