



**HAL**  
open science

# Une méthode de sous-domaines pour la résolution des équations de Maxwell instationnaires en présence d'un ensemble non-connexe d'objets diffractant.

Vincent Mouysset

► **To cite this version:**

Vincent Mouysset. Une méthode de sous-domaines pour la résolution des équations de Maxwell instationnaires en présence d'un ensemble non-connexe d'objets diffractant.. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2006. Français. NNT: . tel-00136029

**HAL Id: tel-00136029**

**<https://theses.hal.science/tel-00136029>**

Submitted on 11 Mar 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER TOULOUSE III  
UFR MATHÉMATIQUE INFORMATIQUE GESTION

# THÈSE

POUR OBTENIR LE GRADE DE  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ TOULOUSE III

Discipline : Mathématiques Appliquées

Présentée et soutenue par

**Vincent MOUYSET**

le 7 Décembre 2006

**Une méthode de sous-domaines pour la résolution des équations de  
Maxwell instationnaires en présence d'un ensemble non-connexe  
d'objets diffractant**

Directeur de thèse : P.A. Mazet  
Co-directeur de thèse : P. Borderies

## Jury

M.	X.	Antoine	
M.	J.	Audounet	
Mme	H.	Barucq	Rapporteur
M.	P.	Helluy	
M.	D.	Levadoux	
M.	F.	Nataf	Rapporteur



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier M. Florent Christophe, directeur adjoint du DEMR, et M. Jean-Philippe Parmantier, responsable de l'équipe CDE de m'avoir accueilli au sein de leur département pour toute la durée de cette thèse. Ce fut pour moi un réel plaisir de travailler "en immersion" dans cette partie de la branche physique de l'ONERA.

Mes remerciements s'adressent ensuite tout naturellement à Pierre-Alain Mazet pour m'avoir donné cette opportunité. Il s'est montré toujours extrêmement disponible et m'a laissé toute l'autonomie que je souhaitais quant aux orientations et au déroulement de ce travail, tout en répondant et en argumentant sur mes diverses questions. Outre ces aspects liés au caractère professionnel de notre relation, je tiens à le remercier pour l'amitié et les longues heures de discussions que nous avons partagées donnant un côté humain et largement plus personnel à cette période.

De même, je remercie aussi vivement Pierre Borderies pour ce sujet. Je soulignerais encore la très grande sympathie, l'amitié et le soutien apportés. Ainsi, l'intérêt qu'il a porté à ce travail et l'approche physique dont il faisait preuve ont pu déboucher sur d'assez longs débats autour des études visées et/ou abordées.

Je tiens à remercier Mme Hélène Barucq et M. Frédéric Nataf pour avoir accepté de me faire l'honneur de rapporter cette thèse. Je leur sais gré de l'attention qu'ils ont porté à la lecture du manuscrit ainsi que pour les remarques qu'ils ont pu formuler à ce propos. Je tiens également à remercier Messieurs Xavier Antoine, Jacques Audounet, David Levadoux et Philippe Helluy pour avoir accepté amicalement l'invitation qui leur était adressée à faire partie de ce jury.

J'adresse aussi tout particulièrement le témoignage de ma gratitude à Xavier Ferrières avec qui j'ai eu la chance de collaborer au sein de l'équipe CDE. De notre travail sur la partie numérique des équations de Maxwell instationnaires et de la jovialité qui animait nos discussions est née une réelle amitié. Une partie non-négligeable des résultats de cette entente se retrouve ainsi dans ce document.

Je tiens par ailleurs à saluer tous les membres du DEMR à Toulouse et plus précisément ceux de l'équipe CDE avec qui j'ai partagé ces années assez remplies; les repas communs, les soucis de gestion informatique, la bonne humeur, la convivialité ainsi que l'entraide ambiantes n'étant sûrement pas étrangers à tout cela. Je dois aussi saluer les membres de l'équipe M2SN du DTIM dont la fréquentation du bureau de Pierre-Alain, et donc des locaux, m'ont inévitablement rapproché. Certains en venant même à m'y croire rattaché.

A l'intérieur de ces deux départements j'adresse une pensée particulière aux stagiaires et thésards rencontrés et qui m'ont éventuellement intéressé à d'autres problématiques. En particulier Yoann, Sébastien, Stéphane, Emmanuel, Eric, Géraldine, Rémi, Claire, Pierre, Renaud, Davuth, Emmanuel et Céline...

Enfin, je ne peux en aucun cas oublier mes parents Alain et Marie-Claire ainsi que ma soeur Sandrine qui ont toujours été présents à mes côtés, et même au-delà de toutes espérances. Il est évident que sans eux les coups de blues inévitablement rencontrés ne se seraient pas aussi bien résorbés, et le résultat final s'en ressent. Je leur dois énormément.

# Table des matières

Table des matières	v
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	ix
Introduction	1
<b>1 Formule de rayonnement en champs "semi-lointain"</b>	<b>9</b>
1.1 Formules de rayonnement "champs proche / champs lointain" et "champs proche / champs proche" . . . . .	9
1.2 Création de la formule intégrale approchée . . . . .	13
1.2.1 Formule intégrale, surfaces admissibles et séparation par faces . . . . .	16
1.2.2 Cas des faces non-perpendiculaires à la direction d'observation . . . . .	22
1.2.3 Cas limite : faces perpendiculaires à la direction d'observation . . . . .	43
1.3 Etude numérique de la formule intégrale approchée . . . . .	50
1.3.1 Comparaisons et étude de la précision en fonction de la distance . . . . .	50
1.3.2 Exemple de rayonnement par surface admissible non-convexe . . . . .	59
<b>2 Méthode de décomposition en sous-domaines disjoints</b>	<b>63</b>
2.1 Principe de la décomposition multi-domaines . . . . .	63
2.2 Formulation de la méthode . . . . .	72
2.3 Etude de la méthode . . . . .	80
2.3.1 Systèmes de Friedrichs et espaces $H_{tan}^k$ . . . . .	81
2.3.2 Existence, unicité et première majoration de la solution du système couplé . . . . .	83
2.3.3 Précision sur la stabilité de la méthode . . . . .	90
<b>3 Etude numérique de la méthode</b>	<b>99</b>
3.1 Description de la méthode et stratégie de parallélisation . . . . .	99
3.2 Etude numérique de la méthode . . . . .	102
3.2.1 Tests de regroupements . . . . .	103
3.2.2 Efficacité de la méthode multi-domaines . . . . .	107
3.2.3 Convergence numérique de la méthode . . . . .	111
3.3 Exemples numériques . . . . .	116
3.3.1 Résolution multi-domaines à l'aide d'un schéma de volumes finis . . . . .	117
3.3.2 Hybridation de schémas avec la méthode multi-domaines . . . . .	118
3.4 Pas de temps locaux inter-domaines . . . . .	122
3.5 Résolution d'un problème de diffraction large-bande . . . . .	129

<b>4</b>	<b>Système PML généralisé</b>	<b>141</b>
4.1	Ecritures par changement de variables . . . . .	141
4.1.1	Système PML de Bérenger et complexification des variables . . . . .	142
4.1.2	Généralisation à des géométries quelconques : <i>Conformal PML</i> . . . . .	145
4.2	Variétés absorbantes . . . . .	145
4.3	Dérivation algébrique de PML généralisées . . . . .	150
4.3.1	Formulation des PML : écriture générale . . . . .	150
4.3.2	Proposition et étude d'une forme de PML . . . . .	153
4.3.3	Expression locale des matrices PML . . . . .	156
4.3.4	Ecritures sous forme de systèmes augmentés des équations PML . . . . .	159
4.3.5	Etude qualitative du système PML instationnaire obtenu . . . . .	161
4.3.6	Ecriture dimensionnée du système augmenté . . . . .	163
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>165</b>
	<b>Annexes</b>	<b>169</b>
<b>A</b>	<b>Traitement des milieux semi-infinis</b>	<b>169</b>
A.1	Principe de la méthode . . . . .	172
A.2	Formulation de la méthode . . . . .	179
A.2.1	Redimensionnement de la formule de rayonnement . . . . .	179
A.2.2	Méthode de décomposition dans le multi-milieu . . . . .	180
A.3	Etude de la méthode : principaux résultats . . . . .	180
A.4	Algorithme et stratégie de parallélisation . . . . .	182
A.5	Exemple numérique . . . . .	183
<b>B</b>	<b>Formule de rayonnement dans un milieu à pertes</b>	<b>191</b>
B.1	Résultats préliminaires dans le milieu à pertes . . . . .	192
B.2	Ecriture de la formule intégrale approchée . . . . .	194
	<b>Bibliographie</b>	<b>207</b>

# Table des figures

1.1	Principe des formules de rayonnement. . . . .	10
1.2	Exemple de contour <i>admissible</i> : polyèdre étoilé . . . . .	18
1.3	Exemple de contour <i>admissible</i> "trapping" . . . . .	20
1.4	Cas limite d'une surface <i>admissible</i> : "U" droit / "U" écarté . . . . .	20
1.5	Description du système de coordonnées locales utilisé . . . . .	23
1.6	Description du système de coordonnées locales utilisé dans le cas $\mathbf{t}_i = \pm \mathbf{n}_i$ . . . . .	43
1.7	Détermination géométriques des tailles de découpage à partir des valeurs de $\tau_i$ . . . . .	47
1.8	Configuration du cas test : cube métallique parfaitement conducteur d'arête $\lambda$ . . . . .	51
1.9	Comparaisons à $\approx 10 \lambda$ (point (14, -14, 14)) : champs lointain (Far Field) / Formule intégrale approchée (NTRF) . . . . .	52
1.10	Comparaisons à $\approx \lambda/2$ (point (3.55, -3.55, 3.55)) : champs proche (FDTD value) / champs lointain (Far Field) / Formule intégrale approchée (NTRF) . . . . .	53
1.11	Comparaisons à $\approx 3 \lambda$ (point (5.86, -5.86, 5.86)) : champs proche (FDTD value) / champs lointain (Far Field) / Formule intégrale approchée (NTRF) . . . . .	54
1.12	Comparaisons à $\approx \lambda/10$ (point (2.75, -2.75, 2.75)) : champs proche (FDTD value) / champs lointain (Far Field) / Formule intégrale approchée (NTRF) . . . . .	55
1.13	Evolution de l'erreur avec la distance en norme 2 . . . . .	56
1.14	Evolution de l'erreur avec la distance en norme $\infty$ . . . . .	57
1.15	Evolution de l'erreur en fonction du paramètre $\delta_i/d_i$ , en norme $\infty$ . . . . .	58
1.16	Evolution de l'erreur en fonction du paramètre $\delta_i/d_i$ , en norme 2 . . . . .	59
1.17	Configuration du cas test : boîte métallique parfaitement conductrice accolée à un barreau diélectrique ( $\varepsilon_r = 60$ ) . . . . .	60
1.18	Comparaisons à $\approx 0.4 \lambda$ (point (2, 20, 2)) : champs proche (FDTD value) / champs lointain (Far Field) / Formule intégrale approchée (NTRF) . . . . .	61
2.1	Représentation du système avant découpage en sous-domaines . . . . .	63
2.2	Représentation du principe de découpage en sous-domaines . . . . .	65
2.3	Principe d'antépolation/interpolation des champs . . . . .	73
2.4	Influence du déplacement de $X_0$ sur le repère local . . . . .	74
2.5	Décomposition de l'intervalle d'étude à l'aide du principe de Huygens, et répartition des interactions entre les domaines . . . . .	86
3.1	Calcul des distances aux surfaces de prélèvement . . . . .	100
3.2	Regroupement sur les surfaces de prélèvement. . . . .	101
3.3	Déroulement en temps de la méthode multi-domaine et stratégie de parallélisation. . . . .	102
3.4	Domaines de calculs pour les cas mono-domaine et multi-domaines. . . . .	103
3.5	Exemples de regroupements obtenus pour la surface de prélèvement (face en z). . . . .	104

3.6	Comparaison entre les méthodes mono-domaine et multi-domaines avec différents types et tailles de regroupements. . . . .	105
3.7	Domaines de calculs pour la méthode multi-domaines. . . . .	108
3.8	Evaluation des coûts entre les calculs par méthode mono-domaine ou multi-domaines par rapport à la valeur maximale du paramètre $\delta_i/d_i$ . . . . .	108
3.9	Evaluation des coûts entre les calculs par méthode mono-domaine ou multi-domaines par rapport à l'éloignement des boîtes. . . . .	109
3.10	Comparaison entre les résultats obtenus par méthode mono-domaine et multi-domaines. . . . .	110
3.11	Maillages utilisés pour l'étude de la convergence. . . . .	111
3.12	Maillage utilisé pour l'étude de la convergence : différentes positions du fil. . . . .	112
3.13	Evolution de l'erreur avec la distance en norme 2 . . . . .	113
3.14	Influence de $\delta/d$ sur les regroupements. . . . .	114
3.15	Evolution de l'erreur avec la distance en norme $\infty$ . . . . .	115
3.16	Influence de $\delta/d$ sur les regroupements. . . . .	115
3.17	Evolution des temps de calculs en fonction de $\delta/d$ et de la position. . . . .	116
3.18	Exemples de résolution VF/VF : diffractions par deux sphères . . . . .	117
3.19	Comparaisons à mi-chemin entre les sphères : résolution mono-domaine volumes finis (FVTD) à trois précisions différentes / résolution multi-domaines volumes finis (MD) . . . . .	119
3.20	Maillage hybride utilisé : antenne-sphère (coupe). . . . .	120
3.21	Différents maillages de la sphère utilisés pour les comparaisons de résolutions $FDTD$ , $FDTD/2$ , $FDTD/3$ et méthode hybride $MDFD - FV$ . . . . .	121
3.22	Comparaisons de trois résolutions globales FDTD et d'une multi-domaines hybride FDTD-FVTD : résultat obtenu par relevé entre la sphère et l'antenne. . . . .	123
3.23	Comparaisons de trois résolutions globales FDTD et d'une multi-domaines hybride FDTD-FVTD : résultat obtenu par relevé au voisinage proche de la sphère. . . . .	124
3.24	Evaluations des contributions entre les domaines pour le schéma de pas de temps local. . . . .	125
3.25	Exemple de résolution hybride FDTD-FVTD et utilisation de pas de temps local : résultat obtenu par rayonnement à mi-chemin entre l'antenne et la sphère. . . . .	127
3.26	Exemple de résolution hybride FDTD-FVTD et utilisation de pas de temps local : résultat obtenu par relevé au voisinage proche de la sphère. . . . .	128
3.27	Exemple diffraction d'une antenne par une voiture : maillages $FDTD$ utilisés . . . . .	130
3.28	Comparaisons devant l'antenne : mono-domaine ( $FDTD$ ) / mono-domaine raffiné ( $FDTD/2$ ) / multi-domaines FDTD $\delta/d < 0.15$ ( $MD(prop0.15)$ ) / multi-domaines FDTD $\delta/d < 0.1$ ( $MD(prop0.1)$ ) . . . . .	131
3.29	Comparaisons à mi-chemin antenne-voiture : mono-domaine ( $FDTD$ ) / mono-domaine raffiné ( $FDTD/2$ ) / multi-domaines FDTD $\delta/d < 0.15$ ( $MD(prop0.15)$ ) / multi-domaines FDTD $\delta/d < 0.1$ ( $MD(prop0.1)$ ) . . . . .	132
3.30	Comparaisons devant la voiture : mono-domaine ( $FDTD$ ) / mono-domaine raffiné ( $FDTD/2$ ) / multi-domaines FDTD $\delta/d < 0.15$ ( $MD(prop0.15)$ ) / multi-domaines FDTD $\delta/d < 0.1$ ( $MD(prop0.1)$ ) . . . . .	133
3.31	Diffraction d'une antenne par une voiture : maillage FVTD-FDTD utilisé (coupe). . . . .	135
3.32	Comparaisons devant l'antenne : mono-domaine ( $FDTD$ ) / mono-domaine raffiné ( $FDTD/2$ ) / multi-domaines FDTD $\delta/d < 0.15$ ( $MD(prop0.15)$ ) / multi-domaines hybride FDTD-FVTD $\delta/d < 0.15$ ( $MDFD - FV(prop0.15)$ ) . . . . .	136
3.33	Comparaisons à mi-chemin antenne-voiture : mono-domaine ( $FDTD$ ) / mono-domaine raffiné ( $FDTD/2$ ) / multi-domaines FDTD $\delta/d < 0.15$ ( $MD(prop0.15)$ ) / multi-domaines hybride FDTD-FVTD $\delta/d < 0.15$ ( $MDFD - FV(prop0.15)$ ) . . . . .	137

---

3.34	Comparaisons devant la voiture : mono-domaine ( $FDTD$ ) / mono-domaine raffiné ( $FDTD/2$ ) / multi-domaines FDTD $\delta/d < 0.15$ ( $MD(prop 0.15)$ ) / multi-domaines hybride FDTD-FVTD $\delta/d < 0.15$ ( $MDFD - FV(prop 0.15)$ ) . . . . .	138
4.1	Conformal PML : description dans le cas non-convexe . . . . .	145
4.2	Description de l'exhaustion utilisée. . . . .	146
4.3	Différentes décroissances à l'extérieur des PML (lignes iso-valeurs). . . . .	155
4.4	Choix de la décroissance à l'extérieur des PML. . . . .	157
A.1	Système avant découpage en sous-domaines . . . . .	169
A.2	Système après découpage en sous-domaines . . . . .	171
A.3	Hierarchie des communications entre les différents volumes de calculs . . . . .	182
A.4	Désignation des différents volumes de calcul . . . . .	184
A.5	Maillage multi-milieux multi-domaines utilisé. . . . .	185
A.6	Comparaisons $FDTD$ , $FDTD/2$ et multi-domaines juste au-dessus de l'interface. . .	187
A.7	Comparaisons $FDTD$ , $FDTD/2$ et multi-domaines juste au-dessous de l'interface. .	188
A.8	Comparaisons $FDTD$ , $FDTD/2$ et multi-domaines au voisinage de la boîte métallique.	189



# Liste des tableaux

1.1	Ordres moyens de l'erreur de la formule de rayonnement en fonction de la distance . . . . .	59
3.1	Comparaison des temps de calculs entre les méthodes mono-domaine and multi-domaines. . . . .	106
3.2	Comparaisons des coûts pour un schéma FDTD dans un cas symétrique. . . . .	110
3.3	Comparaison temps CPU et mémoire entre calculs mono et multi-domaines sur l'exemple des sphères avec un solveur FVTD . . . . .	118
3.4	Comparaison des coûts pour les différentes résolutions FDTD mono-domaine et multi-domaines hybrides. . . . .	122
3.5	Comparaison des coûts pour les résolutions hybrides FDTD-FVTD sans et avec pas de temps local inter-domaines. . . . .	126
3.6	Comparaison des coûts pour les résolutions FDTD mono-domaines et multi-domaines.	134
3.7	Comparaison des coûts pour la résolution FDTD mono-domaine et multi-domaines hybride FTDT-FVTD. . . . .	139
A.1	Comparaison des coûts entre les différentes méthodes. . . . .	186



# Introduction

Cette thèse a été effectuée dans le Département ElectroMagnétisme et Radar (DEMR) de l'Office National d'Etude et de Recherches Aérospatiales (ONERA), au sein de l'équipe Compatibilité et Détection Électromagnétique (CDE). L'un des thèmes essentiels abordés par celle-ci est l'étude de problèmes de Compatibilité ElectroMagnétiques (CEM). Parmi ces problèmes on peut citer entre autres l'étude de systèmes dits "large-bande" (i.e. dont le spectre est étalé continûment sur une grande plage de fréquences), ou encore la sensibilité d'éléments à tous ces types d'agressions (effets d'induction de champs sur des câbles, expositions de composants à différents environnements,...), de phénomènes non-linéaires tels que la modélisation des effets de claquages (induits par exemple par la foudre) ou la représentation de milieux magnétiques (ferrites,...). La plupart de phénomènes énoncés ci-dessus étant proprement instationnaires, leur modélisation peut être assurée à partir de l'écriture temporelle des équations de Maxwell. Dans l'essentiel de ces problèmes la simulation numérique permet d'apporter un outil de prédiction/interprétation efficace. Ceci explique donc la grande diversité des méthodes développées pour les résoudre. De manière plus précise, ce rapport s'intéresse à la simulation de grandes scènes d'interaction électromagnétiques entre une ou plusieurs source(s) et un ou plusieurs objet(s) diffractant. Deux types de techniques différentes sont couramment envisagées pour la simulation de telles scènes : la résolution d'équations dites intégrales ou de potentiels retardés, et les méthodes différentielles volumiques.

Les méthodes de résolution par équations intégrales sont obtenues par intégration du système différentiel en introduisant la solution élémentaire de celui-ci. Ceci ramène alors la résolution du système d'équations de Maxwell au calcul des valeurs d'un opérateur intégro-différentiel donné sur les éléments de la scène. Cet opérateur s'obtient en ajoutant des conditions de compatibilités (usuellement les lois de Gauss électriques et magnétiques) fermant le système, et des conditions dites de radiation permettant de distinguer les solutions décroissantes à l'infini, donc d'énergie décroissante, permettant alors d'assurer l'existence et l'unicité de la solution du système, obtenant ainsi l'expression de son noyau de Green (voir par exemple [9, 13]). Ces méthodes initialement développées pour la résolution de l'équation de Helmholtz en fréquentiel [13] et l'équations de ondes en temporels [10] ont ensuite été introduites pour la résolution des équations de Maxwell en fréquentiel et en temporel [1, 2, 3, 4, 40, 66]. Même si elles sont très utilisées dans le domaine fréquentiel, notamment grâce à l'apport des méthodes multipôles (FMM pour Fast Multipole Methods) (voir par exemple [25, 26, 27, 28]), de formulation améliorant la stabilité [21, 30], de quadratures centrées autour des termes prépondérants du point de vue du théorème de la phase stationnaire [18, 35], ou encore de préconditionneurs adaptés [44], elles ne sont pas aussi répandues pour la résolution des équations de Maxwell instationnaires. Cela peut se justifier d'une part par leur écriture essentiellement surfacique qui rend l'introduction d'inclusions de matériaux diélectriques assez pénalisante limitant leur domaine d'application. D'autre part, leur caractère non-local espace-temps rend le traitement de

grandes scènes très coûteux en terme de temps calcul et de stockage mémoire, ce point étant fortement amélioré par les FMM en fréquentiel. Enfin, de part l'hyper-singularité du noyau de Green des équations de Maxwell stationnaires en 3 dimensions d'espace, ce type de méthodes s'avère souvent instable. Nous ne retiendrons donc pas *a priori* ce type de méthodes pour la résolution de notre problème.

L'autre type de méthodes envisagées est obtenu à partir d'une approximation du système différentiel et d'une résolution directe de cet approximé, au contraire des équations intégrales qui approchent la valeur de la résolvante du système. Citons tout d'abord, dans l'ensemble des schémas utilisés, les méthodes de différences finies approchant les dérivations par différences divisées, le plus connu et l'un des plus usités étant le schéma différence finies de Yee (FDTD) [72] utilisant des maillages duaux en pour le champ électrique  $E$  et le champ magnétique  $H$ , ainsi qu'un schéma *leapfrog* en temps. A partir de formulations variationnelles et par projection sur des espaces d'approximations de types essentiellement polynomiaux, on peut citer les méthodes d'éléments finis (FETD) ; on se reportera par exemple à [8] pour les premières études sur le sujet, et pour le choix des espaces projectifs utilisés on pourra considérer les plus usités de type éléments de Witney [71], de Nédélec [52] ou encore spectraux [20]. D'autre part, par utilisation de formules de Green sur une intégration du système différentiel nous pouvons obtenir des schémas dits volumes finis (FVTD) (voir par exemple [37, 58]). Enfin, nous pourrions aussi considérer les schémas obtenus par décomposition de la partie spatiale des équations en séparant les flux aux bords des éléments constituant le volume de calcul amenant à des méthodes de type Galerkin discontinu (DGTD) dont les expressions varient selon les espaces d'approximation employés [53], le choix d'approches centrées ou décentrées [33], ou le type de séparation des flux utilisé [36]. L'un des grands avantages de toutes les méthodes précédemment citées est de permettre entre-autre d'introduire assez facilement des matériaux de compositions et de géométries différentes. Toutefois, à l'inverse des résolutions par équations intégrales, la prise en compte d'un vaste scène d'interactions électromagnétiques par utilisation de ces schémas amène conjointement à deux types problèmes.

Tout d'abord il est nécessaire d'intégrer les éléments constitutifs de la scène à un volume de calcul projeté sur un espace discrétisé. De grands espaces vides entre une source et un objet font alors apparaître un gros volumes de mailles *a priori* inutiles. Dans le cas où la solution numérique calculée n'est qu'une approximation de la vraie solution des équations de Maxwell, ce qui se vérifie trivialement pour le traitement de cas suffisamment complexes pour ne pas disposer d'une expression exacte *a priori* de cette-dernière, la différence introduite peut alors être de deux natures distinctes. La première catégorie est donnée par les erreurs dites "de dispersions", c'est à dire un décalage numérique du spectre de la solution par rapport à l'expression attendue. La seconde source d'erreur est caractérisée de "dissipative" car elle entraîne une sur-diminution artificielle de l'énergie (locale) de la solution. Les schémas numériques employés commettent alors soit des erreurs de dispersion, soit des erreurs de dissipation, soit encore un peu des deux. Ces phénomènes observables localement sur chaque maille du volume (ou de la surface) de calcul dans la plupart des cas, se cumulent sur l'ensemble du parcours du maillage global servant au calcul. Même si elles apparaissent localement faibles et sont en général contrôlées, soit par l'amélioration de la consistance du schéma spatial soit par le raffinement du traitement temporel, elles s'avèrent très vite extrêmement inadaptées aux grands volumes de calculs, et donc dans le contexte qui nous intéresse ici. Notons aussi que ce type de problème apparaît lorsqu'une étude rend nécessaire l'obtention de valeurs de champs en des points donnés de l'espace mais non-forcément au voisinage immédiat des sources ou des objets diffractants. Dans ces cas il est alors d'usage d'intégrer ces points au maillage global, augmentant par la même les cumuls d'erreurs de dissipation et/ou dispersion sur le parcours des mailles entre

ces éléments et les observatoires introduits.

Le second point limitant de ces approches réside dans le fait que les volumes de calculs ne peuvent pas être infinis ; il est alors nécessaire de fermer les schémas numériques par addition de conditions aux limites permettant d'obtenir une solution proche de, sinon égale à, la solution recherchée en espace libre. Pour ce faire deux types de conditions aux limites sont envisagées : les conditions aux limites transparentes (CLT) souvent dérivées en conditions aux limites absorbantes (CLA), et les matériaux ou milieux fictifs.

Les CLT reposent sur une décomposition de l'opérateur de propagation au voisinage du bord du domaine de calcul sous forme, par exemple, d'une factorisation de type Nirenberg en produit de deux opérateurs (le plus souvent de type Dirichlet-to-Neumann ou Neumann-to-Dirichlet) ; il est alors possible, par l'étude des bicaractéristiques de déterminer une partie "entrante" et une partie "sortante" (du domaine de calcul) donnant alors le terme à annuler pour garantir une "transparence" de la frontière dans le sens où celle-ci laisse "sortir" les ondes et ne provoque pas de "retours". Bien entendu, comme dans le cas des potentiels retardés il s'en suit une équation intégrale de frontière non-locale. Une approximation "localisante" est alors souvent effectuée pour simplifier l'expression de celles-ci. Les plus connues sont les conditions de radiation de surface (OSRC) obtenues par développement micro-local de l'opérateur pseudo-différentiel décrit précédemment [7]. Ce type de stratégie est toutefois essentiellement utilisé dans le domaine fréquentiel dû à la singularité introduite par la partie temporelle dans l'équation de Maxwell et la difficulté d'exhiber un parametrix permettant un développement micro-local des expressions obtenues.

Une autre approche consiste alors à terminer le domaine par un milieu fictif ayant pour propriété d'absorber les ondes électromagnétiques. Cette technique introduite sous différents modèles soit par impédance de surface représentant le milieu [51], soit par "couches" de matériaux, a connu un grand essor avec l'apparition des couches parfaitement absorbantes (PML) [14, 15]. Cette dernière approche a un double intérêt : d'une part elle s'implémente facilement avec la mise en place d'un système dispersif équivalent [34, 49], et d'autre part elle permet une écriture simple et localisée dans la plupart des configurations. Le côté fortement pénalisant de la non-localité des OSRC fait préférer l'usage de PML dans le cas de gros volumes de calculs traités par méthode volumiques comme ici. Nous considérerons donc l'usage de celles-ci pour toutes nos expériences numériques. A contrario, l'aspect fortement lié au système de coordonnées, éventuellement locales, utilisé ainsi que le type de géométries convexes généralement employées limite le gain apporté par l'emploi des PML en nécessitant des domaines de calculs de géométries canoniques (sphères, cubes, ellipses,... cf par exemple [24] et références) augmentant par la même le coût global de la résolution.

L'objectif de ce mémoire étant le rendu *au mieux* de grandes scènes de diffraction électromagnétique, et l'utilisation des méthodes volumiques déjà existantes étant préféré, nous allons donc nous intéresser à l'influence et surtout à l'amélioration de ces deux principaux problèmes points précédemment évoqués.

D'une part nous allons nous intéresser à l'introduction d'une méthode de décomposition en sous-domaines disjoints permettant l'utilisation des méthodes de résolutions volumiques classiques (FDTD, FVTD, FETD, DGTD,...) en limitant au plus proche le volume de calcul nécessaire élément par élément afin de diminuer les erreurs de dissipation/dispersion introduites dans le parcours des maillages. Pour ce faire, nous développerons sur le même principe que les formules de potentiels retardés une *formule intégrale approchée* permettant le calcul du champ en tout point de l'espace, hors d'un domaine polyédrique *non convexe* borné à partir des courants électromagnétiques prélevés sur celui-ci. Cette formule servira aussi de terme de couplage entre les sous-domaines amenant alors à la résolution de systèmes couplés d'équations de Maxwell par un algorithme parallèle et explicite

cassant les cumuls d'erreurs précédemment évoqués et préjudiciables à la qualité des résultats.

Nous nous intéresserons aussi, d'autre part, à améliorer l'approche classiquement utilisée en PML, en conservant les résultats essentiels de compatibilité des solutions et de décroissance exponentielle des champs dans les couches, pour élargir le champ d'applications et simplifier leur explicitation numérique. Pour cela, les couches seront générées automatiquement à l'aide d'un algorithme décrit dans la suite, amenant alors la possibilité d'introduire un formalisme PML s'interprétant localement ainsi que la possibilité des domaines de formes non-convexes approchant ainsi au mieux les différents éléments étudiés.

## Plan de la thèse :

La thèse se découpe autour de quatre chapitres suivant les points d'étude précédemment évoqués. Pour simplifier le traitement autour de la problématique du rendu de grandes scènes d'interactions électromagnétiques, le travail dans ces chapitres sera mené en espace homogène sans perte. Les développements permettant de prendre en compte des configurations plus complexes telles que le cas de milieux à pertes où le cas de milieux semi-infinis (ainsi que toutes les combinaisons entre ces possibilités) étant essentiellement une simple reprise du travail et de la méthodologie effectuée dans les premières parties, ils seront donc fournis de manière plus condensée en annexe.

## Chapitre 1 : Formule de rayonnement en champs "semi-lointain".

Cette première partie s'intéresse au transport de champs électromagnétiques par formules dites de rayonnement. Le principal résultat de ce chapitre est l'écriture d'une *formule intégrale approchée* permettant le calcul des valeurs de  $E$  et  $H$  à partir de courants prélevés sur une surface polyédrique  $\mathcal{P}$ . Cette formule est obtenue à partir d'une expression de la résolvante des équations de Maxwell sous forme de potentiels retardés, de l'introduction d'un découpage par faces de  $\mathcal{P}$  et de coordonnées locales faisant apparaître trois quantités principales : la distance à la face, la dilatation des sphères de propagation de l'équation des ondes en espace libre, et les directions tangentes à ces sphères. L'expression finale se déduit par développement autour d'un paramètre adimensionné  $\delta/d$  (avec  $\delta \ll d$ ), où  $d$  représente la distance de l'observatoire à  $\mathcal{P}$ , et  $\delta$  une grandeur caractéristique d'un découpage local de  $\mathcal{P}$  en sous-faces. L'erreur d'approximation est alors donnée en  $O(\delta/d)$ . La quantité  $\delta$  étant laissée arbitrairement libre, il s'en suit une formule adaptative offrant une précision et des coûts de calculs contrôlés quelque soit la distance de l'observatoire à  $\mathcal{P}$ .

Le développement effectué permet de retrouver une généralisation de la formule bien connue en calcul électromagnétique de *champs lointain* de Yee [73], les premiers termes (en  $d^{-1}$  étant identiques) et s'implémente de manière totalement analogue à celle proposée dans [47].

Des études numériques de cette approche aussi bien en champs lointain qu'en champ proche seront proposées afin de valider la précision de la méthode.

Afin de pouvoir effectuer le découpage face par face de  $\mathcal{P}$  et d'assurer un recollement cohérent des cartes locales définies, nous qualifierons les surfaces permettant ce type d'opérations en tant que *surfaces admissibles*. De telles surfaces peuvent être *non-convexes* afin de prélever des valeurs de courants aussi précises que possible (au plus près des sources fictives).

## Chapitre 2 : Méthode de décomposition en sous-domaines disjoints.

Il est présenté dans ce chapitre une méthode pour décomposer en *sous-domaines disjoints* les problèmes de diffractions entre des sources et des objets séparés et arbitrairement loin les uns des autres. L'étude du problème complet est ramenée à des jeux d'équations de Maxwell traitant chacun un (groupe d') élément(s). Le couplage entre ces différents problèmes est donné par ajout

de termes sources sur des surfaces ou des volumes de Huygens autour de cet(s) élément(s). Pour chaque système d'équation de Maxwell ces termes sont explicités comme transport par convolution du noyau de Green des équations de Maxwell avec des courants provenant des calculs des autres systèmes.

L'équivalence avec le problème complet, au sens de l'obtention de la solution du problème global par combinaison des termes de ces sous-systèmes de Maxwell, est explicitée dans presque tout l'espace (hormis un ensemble de volumes délimitées par lots de deux surfaces données arbitrairement et donc ajustables en fonctions des observables imposés).

A partir de l'approximation du transport intégral des champs établie dans le chapitre 1, nous proposons une approximation de l'ensemble de systèmes couples précédemment décrits permettant une implémentation simple de celui-ci tout en maîtrisant *a priori* l'erreur introduite par l'approximation afin de garantir une homogénéité avec les ordres d'erreurs des schémas numériques employés pour la résolution de chaque sous-domaine. Le développement de l'algorithmie, des gains en terme d'implémentation (parallélisation, explicitation,...) ainsi que les validations numériques sont proposés au chapitre 3.

Nous proposons aussi dans ce chapitre une étude du système couplé approximé obtenu afin d'établir des résultats d'existence, d'unicité et de stabilité *a priori* de la méthode. Pour cela, les espaces  $H_{tan}^k$  introduits par Bardos et Rauch pour l'étude des systèmes de Friedrich [11] ainsi que les principaux théorèmes de régularités donnés par Rauch [55] sont utilisés.

### Chapitre 3 : Etude numérique de la méthode.

Partant de la méthode de décomposition multi-domaines présentée dans le chapitre 2, nous allons montrer les avantages de celle-ci : une implémentation explicite de tous les termes de couplages et l'adaptabilité aux schémas numériques volumiques classiques. En outre, elle permet d'obtenir une stratégie de résolution naturellement parallèle dont le fonctionnement suit le principe de l'étude de stabilité précédemment effectuée ; c'est-à-dire un fenêtrage de l'intervalle de temps d'étude en plages de longueur fixe déterminées par l'espacement des domaines. Dans un premier temps, les principes d'implémentation et de parallélisation de la méthode sont explicités.

Dans un second temps, des validations numériques sur des cas tests académiques (objets canoniques, diélectriques parfaits) sont effectuées afin de vérifier aisément l'efficacité de la méthode et la présence effective des cumuls d'erreurs de dissipations/dispersions sur le parcours du maillage. Une évaluation, ainsi qu'une étude numérique, des coûts de la méthode est menée sur ces exemples afin de déduire le bon champ d'application de celle-ci.

Enfin, une stratégie de pas de temps différents extra-domaines est proposée permettant d'affranchir la résolution de pas de temps faibles, imposés par les CFL, sur des volumes de calculs ne les requérant pas. Cela offre alors un outil peu coûteux pour la modélisation de scènes de composition hétérogènes. Des exemples sur des cas tests plus réalistes issus d'expériences sur la thématique de la CEM [32], ainsi que des exemples d'utilisation en temps que méthode d'hybridation/parallélisation entre différents schémas sont aussi proposés en illustrations complémentaires.

### Chapitre 4 : Système PML généralisé.

Cette partie correspond au second point abordé : l'étude des conditions aux limites absorbantes. En partant de l'écriture par un changement de variable complexe des équations PML [19, 49], une généralisation est proposée. Pour cela, nous procédons de manière similaire à Lassas et Somersalo [41] en définissant un *milieu PML* obtenu par une exhaustion de  $\mathbb{R}^3$  sur une variété plongement de dimension 3 dans  $\mathbb{C}^3$ , coïncidant avec  $\mathbb{R}^3$  sur l'intérieur du volume de calcul  $\Omega$  bordé par les PML. Une écriture en système différentiel augmenté est proposé sous forme de décomposition de type

Gedney [34]. L'article de Lassas et Somersalo offrant l'existence, l'unicité ainsi que la décroissance exponentielle de la solution d'un système de Maxwell dans un milieu PML de type donné, en fréquentiel sur une écriture intrinsèque, nous proposons ici plutôt une étude utilisant l'écriture en système augmenté conformément aux applications visées. Les résultats d'existence, d'unicité (à un ensemble dénombrable de fréquences, pouvant être vide, près) et de décroissance exponentielle dans les couches sont démontrés.

A *contrario* des développements usuels de conditions aux limites PML obtenus sous forme de complexification d'une ou plusieurs variables, dont une extension à tout type de géométrie convexe est proposée par les *Conformal PML* [65] (le cas non-convexe est éliminé automatiquement par la nécessité d'avoir un relèvement bijectif de tout  $\Omega^c$ ), la stratégie présentée ici correspond à associer "localement" une valeur au champ PML en fonction de sa position sur la variété. Ainsi, un algorithme de construction du domaine extérieur  $\Omega^c$  ainsi que du maillage de celui-ci est détaillé. La description du maillage de  $\Omega^c$  est alors donnée en fonction des paramètres géométriques définissant les système d'exhaustion employé.

## Annexe A : Traitement des milieux semi-infinis.

Dans l'étude des problèmes de CEM, un thème important est l'influence des milieux semi-infinis (i.e. séparés par une interface surfacique ou volumique infinie). Citons par exemple la diffraction d'antennes près du sol, à travers des murs,... Classiquement ce type de représentation est traité soit par utilisation de représentation par équation intégrale, soit par maillage de tout le domaine de calcul. La première technique nécessitant une écriture différente du noyau de Green des équations de Maxwell pour chaque géométrie ou composition de l'interface, elle peut être utilisée en dehors de cas plus ou moins académiques (voir par exemple [50]). La seconde présente les mêmes défauts que dans le cas des stratégies mono-domaines sur les grandes scènes d'interactions électromagnétiques, et nécessite de surcroît un traitement particulier pour borner artificiellement le domaine de calcul [48]. Nous proposons donc ici un élargissement de la méthode multi-domaines décrite au chapitre 2 au cas des milieux semi-infinis afin de diminuer ces défauts. Pour cela une stratégie d'étude en temps fini, et de troncature du volume décrivant l'interface est détaillée.

Comme au chapitre 2, la correspondance entre les différents problèmes (global et système d'équations de Maxwell) est donnée. De plus, les résultats d'existence, unicité et stabilité sur la méthode sont dérivés de l'étude mono-milieu/multi-domaine du chapitre 3.

Enfin, de premiers résultats numériques sont proposés en illustration de l'intérêt de la méthode, ainsi que de son efficacité.

## Annexe B : Formule de rayonnement dans un milieu à pertes.

Dans cette annexe une extension de la formule intégrale approchée établie au chapitre 1 est proposée pour le cas de milieux homogènes à pertes. Sa construction suit le même principe que celle détaillée au début de la thèse. Les parties nécessaires sont donc données de manière rapide en reprenant les notations de la première partie. Le but de ce chapitre est de fournir la possibilité d'étendre le procédé de rayonnement à des milieux plus généraux que ceux abordés dans les premières parties de la thèse.

**Remarque 0.0.1** *Les résultats de composition entre les formules de rayonnement dans les milieux à pertes et les stratégies multi-milieux ne sont pas fournis dans ce mémoire et sont donc laissés en tant que perspectives même si toutefois l'ensemble des études théoriques séparées de chacun de ces points permette de donner a priori la compatibilité (en termes d'existence, unicité, stabilité et équivalence*

avec le problème de départ) de ceux-ci. En effet, si les propriétés vérifiées dans le chapitre 2, par la formule intégral du chapitre 1, sont démontrées dans le cas de la nouvelle écriture pour les milieux à perte, alors elles doivent permettre d'obtenir les résultats d'existence, unicité et stabilité de la méthode de décomposition en sous domaines selon la même démarche que celle développée dans le chapitre 2 et redémontrées dans l'annexe A. La stratégie multi-domaine, ainsi que tous les résultats obtenus au chapitre 2 s'en déduisent alors directement.



# Chapitre 1

## Formule de rayonnement en champs "semi-lointain"

Ce chapitre s'intéresse à la mise en place d'une nouvelle formule de rayonnement pour les équations de Maxwell instationnaires. L'objectif principal de cette formule est de fournir une alternative aux deux principaux types de formules de rayonnement : les formules dites de "champs proche - champs lointain" et les formules "champs proche - champs proche".

Les premières, bien connues en modélisation électromagnétique, sont utilisées pour avoir une évaluation des champs en dehors d'un domaine borné et *assez loin* de celui-ci. Leur domaine de validité ne permet pas alors de se rapprocher des objets à des distances de l'ordre de quelques longueurs d'ondes. Les secondes sont essentiellement des *améliorations* des premières. Elles permettent d'avoir une estimation beaucoup plus fine des valeurs des champs à quelques fractions de longueurs d'onde de ceux-ci. Toutefois cet accroissement en précision est accompagné d'un important surcoût par rapport aux techniques de champs lointain.

Dans ce chapitre nous proposons un autre type de formule de rayonnement, dont la précision sera contrôlée, permettant d'avoir des valeurs de champs "lointaines" mais aussi de se rapprocher aussi près que voulu du volume de calcul sans pour autant engendrer les mêmes surcoûts que dans le cas des formules "champs proche - champs proche".

### 1.1 Formules de rayonnement "champs proche / champs lointain" et "champs proche / champs proche"

Un problème courant en calcul numérique et en particulier en modélisation électromagnétique est l'obtention de valeurs de champs à une distance assez lointaine de l'objet diffractant ou de la source étudiée. Lorsque les calculs sont menés dans le domaine temporel, l'une des méthodes les plus utilisées consiste en l'utilisation d'une formule dite "de champs lointain" développée par Yee [73] et dont l'implémentation sur la plupart des schémas numériques utilisés, tels que les différences finies (FDTD), est très aisée [47]. Le principe est le suivant (cf figure 1.1) : la source ou l'objet diffractant étudié est entouré par une surface  $\mathcal{F}$  permettant le prélèvement de courants électromagnétiques  $J$  et  $M$  traces sur cette surface des champs électromagnétiques  $E$  et  $H$  diffractés, puis pour un observatoire choisi on évalue la contribution de ces courants en termes de champs  $E$  et  $H$  par utilisation d'une formule de rayonnement.

**Remarque 1.1.1** *Dans la littérature électromagnétique numérique ces surfaces sont appelées surfaces de Huygens, ou encore de Kirchoff lorsqu'elles sont utilisées avec les formulations intégrales*

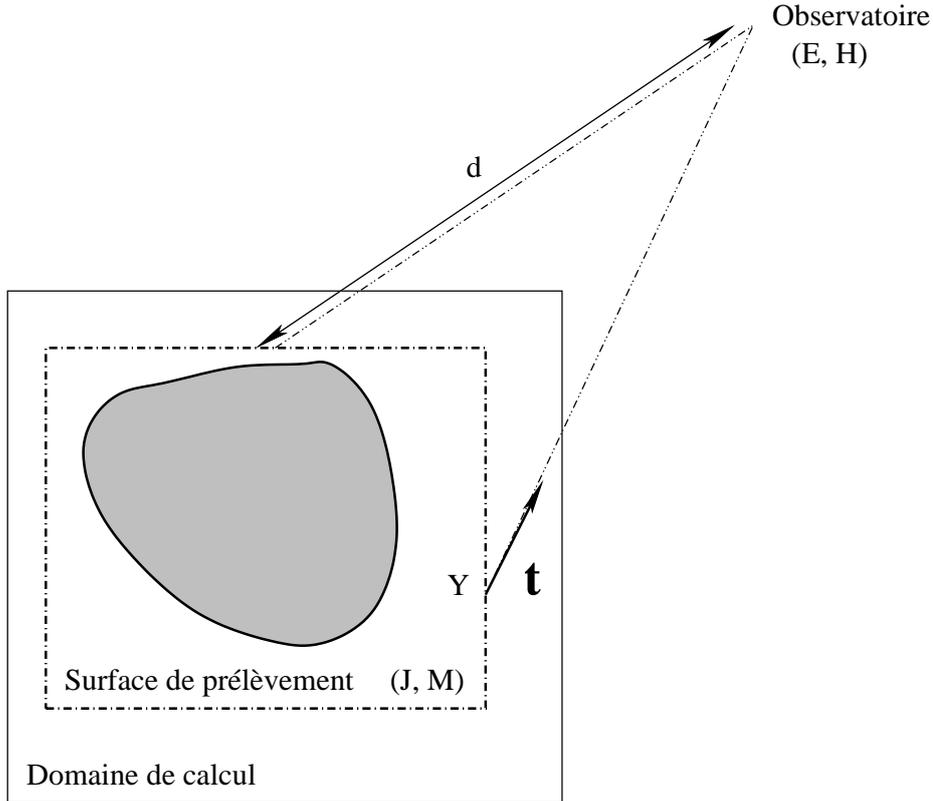


FIG. 1.1 – Principe des formules de rayonnement.

de Kirchhoff. Les surfaces de Huygens représentant aussi des surfaces permettant d'introduire des valeurs de courants dans les volumes de calculs, pour modéliser l'action d'une source (par exemple une onde plane) sur les éléments de la scène, nous désignerons pour toute la suite, dans un souci de clarté, par surfaces de prélèvement les surfaces sur lesquelles les courants électromagnétiques sont prélevés, et par surfaces de Huygens celles qui permettent d'introduire des termes sources dans les domaines.

L'établissement de la formule de champs lointain de Yee part d'une écriture des équations de Maxwell fréquentielles (obtenues par absorption limite), sur le problème extérieur

$$(P\omega) \begin{cases} i\omega\widehat{E} - \nabla \times \widehat{H} = \widehat{J}, & x \in V(\mathcal{F})^c \\ i\omega\widehat{H} + \nabla \times \widehat{E} = \widehat{M}, & x \in V(\mathcal{F})^c \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $V(\mathcal{F})$  désigne le volume intérieur délimité par la surface  $\mathcal{F}$ , et  $E(t, X) = \text{Re}(\widehat{E}(X)e^{-i\omega t})$  et  $H(t, X) = \text{Re}(\widehat{H}(X)e^{-i\omega t})$  (de même pour  $J = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$  et  $M = -\mathbf{n} \times E$ ). On écrit alors la solution à l'aide du noyau de Green  $G$  de l'équation des ondes vectorielle [6]

$$-\omega^2 G(\cdot, Z) + \nabla_X \times (\nabla_X \times G(\cdot, Z)) = -\delta_Z \mathbb{I}_3, \text{ dans } \mathbb{R}^3, \quad (1.2)$$

la solution élémentaire  $G$  de (1.2) étant donnée par

$$G(X, Z) = - \left( \mathbb{I}_3 + \frac{1}{k^2} \partial_X^2 \right) g(X, Z), \quad (X, Z) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,$$

avec  $g(X, Z) = \frac{e^{i\omega|X-Z|}}{4\pi|X-Z|}$ , solution de l'équation de Helmholtz  $(\Delta + \omega^2 \mathbb{I}_3)g(\cdot, Z) = -\delta_Z \mathbb{I}_3$ , dans  $\mathbb{R}^3$ . L'intégration de (1.1), en utilisant  $G$ , permet ainsi d'obtenir l'expression suivante de la solution fréquentielle de (1.1) donnée sous forme d'équations intégrales (cf par exemple [63]) :

$$\begin{cases} \widehat{E}(X) &= -i\omega \left[ A + \frac{1}{\omega^2} \nabla (\nabla \cdot A) \right] - \nabla \times F, \\ \widehat{H}(X) &= -i\omega \left[ F + \frac{1}{\omega^2} \nabla (\nabla \cdot F) \right] + \nabla \times A, \end{cases} \quad (1.3)$$

avec  $A(X) = \int_{\mathcal{F}} \frac{e^{-i\omega d}}{4\pi d} \widehat{J}(Z) dZ$ ,  $F(X) = \int_{\mathcal{F}} \frac{e^{-i\omega d}}{4\pi d} \widehat{M}(Z) dZ$ , et  $d = |X - Z|$ .

Un développement limité pour  $d \rightarrow +\infty$  étant effectué, et les termes d'ordres 2 ou supérieurs en  $1/d$  dans la représentation (1.3) étant négligés on obtient une écriture fréquentielle du champs lointain. Par transformée de Fourier inverse, le relèvement temporel formel permet alors d'obtenir la formule de champs lointain de Yee [73] :

$$\begin{cases} E(t, X) &= \int_{\mathcal{F}} \left( \frac{1}{4\pi d} \mathbf{t} \times \mathbf{t} \times \partial_t J(t-d, Y) + \frac{1}{4\pi d} \mathbf{t} \times \partial_t M(t-d, Y) \right) dY, \\ H(t, X) &= \int_{\mathcal{F}} \left( \frac{1}{4\pi d} \mathbf{t} \times \mathbf{t} \times \partial_t M(t-d, Y) - \frac{1}{4\pi d} \mathbf{t} \times \partial_t J(t-d, Y) \right) dY, \end{cases} \quad (1.4)$$

$\mathbf{t}$  étant, pour tout point courant  $Y$  sur  $\mathcal{F}$ , le vecteur unitaire  $1/d \overrightarrow{YX}$ , avec  $d = |Y - X|$ .

Bien qu'une telle formule soit très usité et notoirement reconnue pour son efficacité (tous les termes s'obtiennent par description géométrique et ne nécessitent qu'une faible récursivité), elle présente essentiellement deux défauts d'utilisation :

1. la formule (1.4) n'est considérée comme précise que pour des observatoires qualifiés de *lointains* ; un de ces critères étant donné (cf par exemple [67]) comme une distance supérieure à  $2D^2/\lambda$ , où  $D$  est une grandeur caractéristique de  $\mathcal{F}$  et  $\lambda$  une longueur d'onde (caractéristique) du signal,
2. la construction fréquentielle de (1.4) fait disparaître l'hyper-singularité présente dans les équations de Maxwell temporelles au sommet des cônes de propagation issus des points de  $\mathcal{F}$  (en effet on retrouve bien la singularité en espace pour un observatoire se rapprochant de  $\mathcal{F}$  mais pas la singularité à caractère temporel portée par la surface du cône de propagation).

Il est à noter que l'établissement de cette formule se faisant par développement de la transformée de Fourier puis relèvement direct, celle-ci ne prend pas correctement en compte les effets transitoires. Cependant, dû à la régularité des solutions de Maxwell, la forte décroissance spatiale en  $O(d^{-3/2})$ , pour  $d \rightarrow \infty$ , a un effet régularisant qui semble justifier l'obtention des bons résultats (cf l'étude du caractère intégré en temps du champs lointain dans [57]).

Partant de ces constatations, d'autres formules ont été développées afin d'améliorer ces résultats. Le point essentiellement travaillé est l'augmentation de la zone de validité des méthodes de rayonnement. Craddock et Railton [23] ont ainsi pris en compte un terme supplémentaire en  $1/d^2$  à (1.4) afin d'introduire une formule permettant de se rapprocher plus de la surface appelée transformation *champs proche - champs proche*, obtenant ainsi par exemple pour le champs  $E$

$$E(t, \mathbf{r}) = \int_{\mathcal{F}} \left( -\frac{1}{4\pi d} \partial_t J(t-d, Y) + \frac{1}{4\pi d} \mathbf{r} \times \partial_t M(t-d, Y) + \frac{1}{4\pi d^2} \mathbf{r} \times M(t-d, Y) \right) dY,$$

le point  $X$  étant ici repéré en coordonnées sphériques par le vecteur radial  $\mathbf{r}$ .

Elle est ensuite augmentée, par Shlager et Smith [61], de termes en  $1/d^3$  provenant d'un développement de (1.3) relevé en temps (par transformée de Fourier "formelle") et combinant en plus des composantes normales et tangentielles des champs sources sur  $\mathcal{F}$ , obtenant ainsi

$$E(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{F}} \left( -\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \partial_t J(t - d, \mathbf{r}') + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \times \partial_t M(t - d, \mathbf{r}') \right. \\ \left. + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times M(t - d, \mathbf{r}') + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \{ \mathbf{n} \cdot E(t - d, \mathbf{r}') \} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \{ \mathbf{n} \cdot \partial_t E(t - d, \mathbf{r}') \} \right) d\mathbf{r}'.$$

Cette dernière formule apparaissant comme trop coûteuse dans son implémentation du fait de ses 5 termes intégraux, ils ont alors développé [62] une autre écriture à partir d'une représentation intégrale basée sur la représentation de Kirchhoff [29], obtenant une expression basée uniquement sur l'extrapolation des champs  $E$

$$E(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{F}} \left( \left\{ \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} E(t - d, \mathbf{r}') + \left\{ \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right\} \partial_t E(t - d, \mathbf{r}') \right. \\ \left. - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \{ \mathbf{n} \cdot \nabla' \} E(t - d, \mathbf{r}') \right) d\mathbf{r}',$$

$\nabla'$  étant l'opérateur différentiel gradient appliqué aux variables muettes sous l'intégrale ( $\mathbf{r}'$ ). Cette nouvelle formule amène alors une diminution de moitié du stockage mémoire et des coûts calculs par rapport à l'expression précédente.

Citons enfin *Barth et al's* [12] qui ont, de manière numérique, pour un code de résolution FDTD (Finite Differences in Time Domain), implémenté le rayonnement d'éléments constituant les traces du maillage sur  $\mathcal{F}$  sous forme de diffraction de multiples dipôles, conduisant ainsi à une formule similaire aux précédentes, temporelle par relèvement formel, incluant des termes d'ordres plus élevés en  $1/d^2$  et  $1/d^3$ .

Bien qu'assurant un rapprochement significatif de l'observatoire et de la surface de Huygens, toutes les méthodes précédemment citées sont conçues à partir de la transposition "formelle", par transformation de Fourier inverse, d'écritures établies dans le domaine fréquentiel. Afin d'établir une formulation plus proprement temporelle *Kragalott et al's* [39] ont utilisé directement une résolvante des équations de Maxwell, en 2D, dans le domaine de temporel, prenant ainsi en compte le caractère singulier de celles-ci. Le problème rencontré est alors

- d'une part d'obtenir une implémentation réalisable, c'est-à-dire de traiter la singularité afin de pouvoir effectuer les calculs,
- et d'autre part d'avoir un code efficace, les termes utilisés dans les écritures temporelles étant donnés principalement par convolution, ce qui induit une récursivité lourde de la méthode.

Concernant la première problématique, la difficulté est d'évaluer des intégrales doubles de la forme

$$\int_{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{t-d} \frac{f(s, Z)}{\sqrt{t-s-d}} dZ ds. \quad (1.5)$$

Ils procèdent alors en deux étapes : d'abord ils remplacent le calcul de (1.5) par le passage à la limite formel en  $\varepsilon$  tendant vers 0 sur l'écriture  $\int_{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{t-d-\varepsilon} \frac{f(s, Z)}{\sqrt{t-s-d}} ds dZ$  avec  $d = |X - Z|$ , puis ils utilisent une formule de quadrature approchée pour remplacer l'intégration de la fraction en dehors de  $\mathcal{F}$ . La précision dans le développement des termes intégraux et la possibilité de rapprochement recherchées se font alors au détriment du deuxième point car elles induisent une récursivité de certaines opérations assez importante.

**Remarque 1.1.2** *Les deux problématiques rencontrées dans le travail directement temporel de la formule de rayonnement sont typiques des écritures sous forme de formulation intégrale [27] et des méthodes qui les emploient, plus particulièrement dans le domaine temporel [66, 40].*

Sur le même principe de fonctionnement et d'implémentation que la formule de champ lointain, on propose l'écriture d'une *formule intégrale approchée*. Son établissement se fait à partir du noyau de Green instationnaire des équations de Maxwell homogènes par développement par rapport à un critère d'éloignement relatif selon un paramètre homogène  $\delta/d$  (où  $\delta$  est une grandeur caractéristique, et adaptative, de découpage de la surface de prélèvement). De plus, le caractère spatial du rapport homogène  $\delta/d$  aura aussi une caractérisation spatiale comme rapport d'un retard relatif (ou local) sur un retard moyen (ou global). Cette démarche garantit alors

- l'obtention d'une formule de rayonnement cohérente avec le caractère fortement singulier des équations de Maxwell temporelles,
- un domaine de validité adaptatif et donc plus important, dit *semi-lointain* car donné par un éloignement relatif (et non plus absolu) qui englobe entièrement le domaine de validité du champ lointain classique,
- une facilité d'implémentation et une efficacité suivant les performances de la méthode de Yee [47].

Le but de cette partie est l'établissement d'une telle formule de rayonnement, dont le comportement asymptotique en  $\delta/d$  est contrôlé.

## 1.2 Création de la formule intégrale approchée

Le problème de départ est le suivant : dans un milieu homogène des hétérogénéités et des sources sont disposées de telle sorte qu'il est possible de les contenir dans un volume compact  $\mathcal{V}$ . L'objectif est de pouvoir évaluer, sans calculer dans tout le milieu, les valeurs de  $(E, H)$  en des points donnés hors du volume précédemment délimité. Par restriction du problème à l'extérieur de ce volume,  $(E, H)$  sont alors solution des équations de Maxwell instationnaires adminensionnées homogènes avec second membre

$$(P) \begin{cases} \partial_t E - \nabla \times H = f_E, \\ \partial_t H + \nabla \times E = f_H, \end{cases} \quad (1.6)$$

où  $f_E = (\mathbf{n} \times H)\delta_{\mathcal{F}}$  et  $f_H = -(\mathbf{n} \times E)\delta_{\mathcal{F}}$  sont respectivement les courants électriques et magnétiques relevés sur le bord  $\mathcal{F}$  du volume  $\mathcal{V}$ ,  $\mathbf{n}$  étant la normale sortante à  $\mathcal{V}$ . Enfin,  $\delta_{\mathcal{F}}$  est défini pour toute fonction  $\varphi$  continue au voisinage de  $\mathcal{F}$  par

$$(\delta_{\mathcal{F}}, \varphi) = \int_{\mathcal{F}} \varphi d\sigma,$$

où  $d\sigma$  désigne la mesure induite sur  $\mathcal{F}$  par la mesure de Lebesgue.

On peut alors donner l'expression exacte de la solution de (1.6)

**Théorème 1.2.1** *La solution du système d'équations de Maxwell en espace libre avec second membre (1.6) est donnée par :*

$$\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} (t, X) = \left( \mathcal{Z}_2 *_{(t,X)} \text{COM} \int_0^t \begin{pmatrix} f_E \\ f_H \end{pmatrix} \right) (t, X), \quad (1.7)$$

où  $\mathcal{Z}_2$  est le noyau de l'équation des ondes, et  $\mathcal{COM}$  est la comatrice du système de Maxwell donnée par :

$$\begin{pmatrix} \partial_{xx} - \partial_{tt} & \partial_x \partial_y & \partial_x \partial_z & 0 & \partial_z \partial_t & -\partial_y \partial_t \\ \partial_x \partial_y & \partial_{yy} - \partial_{tt} & \partial_y \partial_z & -\partial_z \partial_t & 0 & \partial_x \partial_t \\ \partial_x \partial_z & \partial_y \partial_z & \partial_{zz} - \partial_{tt} & \partial_y \partial_t & -\partial_x \partial_t & 0 \\ 0 & -\partial_z \partial_t & \partial_y \partial_t & \partial_{xx} - \partial_{tt} & \partial_x \partial_y & \partial_x \partial_z \\ \partial_z \partial_t & 0 & -\partial_x \partial_t & \partial_x \partial_y & \partial_{yy} - \partial_{tt} & \partial_y \partial_z \\ -\partial_y \partial_t & \partial_x \partial_t & 0 & \partial_x \partial_z & \partial_y \partial_z & \partial_{zz} - \partial_{tt} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Le théorème 1.2.1 exprime la solution de 1.6 par convolution du noyau de l'équation des ondes  $\mathcal{Z}_2$  et de la comatrice des équations de Maxwell  $\mathcal{COM}$  (1.7). Comme dans le cas des formules de rayonnement en champ lointain, afin de localiser cette convolution et d'alléger les coûts de calcul nous allons effectuer un développement de cette expression par rapport à une quantité  $\lambda$ . En outre, les surfaces de Huygens généralement utilisées dans les calculs étant polyédriques, ou traces de surfaces courbes approchées par un maillage en éléments plans (essentiellement triangles ou quadrangles), il paraît naturellement intéressant de supposer que  $\mathcal{F}$  est un polyèdre. Ceci permettra alors d'éviter les oublis de termes d'arêtes ou de coins dans l'expression de la formule intégrale approchée. En introduisant une grandeur caractéristique  $\delta$  du découpage de  $\mathcal{F}$  en faces ou en sous-faces (par raffinement de maillage par exemple) et en la comparant à la distance  $d$  de l'observatoire  $X_0$  à  $\mathcal{V}$ , on choisit alors comme paramètre de développement

$$\lambda = \frac{\delta}{d}. \quad (1.9)$$

Une approximation de la solution de (1.6) quantifiable à  $\delta/d$ -près permet alors un traitement ajustable des calculs en jouant sur le paramètre de découpage  $\delta$  :

- soit l'observatoire est loin ( $d \gg 1$ ) et donc on choisit de grands découpages de  $\mathcal{F}$  ( $\delta$  grand),
- soit  $X_0$  est proche de  $\mathcal{V}$  ( $d \ll 1$ ) et alors il suffit de raffiner le découpage de  $\mathcal{F}$  ( $\delta \rightarrow 0$ ),

l'objectif étant bien sur de laisser *a priori* aussi libre que possible le découpage de  $\mathcal{F}$  afin d'obtenir le meilleur rapport coût/précision, en fonction de la position de  $X_0$ , sur l'alternative précédente. Cette possibilité de comparer l'éloignement absolu de l'observatoire ( $d$ ) à une grandeur locale variable ( $\delta$ ) donne *a priori* un champ d'application plus vaste que pour les formules de rayonnement "classiques", et explique le caractère *semi-lointain* de la formule proposée.

Le résultat principal de ce chapitre est donc la construction de la *formule intégrale approchée* résumé dans le théorème suivant :

**Théorème 1.2.2 (formule de rayonnement semi-lointain)** *Soit un polyèdre  $\mathcal{V}$  de surface extérieure  $\mathcal{F} = \cup_i \mathcal{F}_i$  admissible (conformément à la définition 1.2.6). Si pour tout  $i$  les champs  $E$  et  $H$  sont dans  $C^2(\mathbb{R}^+, H^{5/2+\gamma}(V_i))$ , avec  $\gamma > 0$  et pour  $V_i$  voisinage ouvert de  $\mathcal{F}_i$ , alors pour tout point  $(t_0, X_0) \in \mathbb{R}^+ \times \bar{\mathcal{V}}^c$  la solution de (1.6) est donnée par*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} (t_0, X_0) &= \sum_i \int_{\mathcal{F}_i} \left[ \frac{1}{4\pi d_i} \left\{ \mathbf{t}_i^0 \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{t}_i^0 \times \mathbf{t}_i^0 \times \mathbb{I}_6 \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times \partial_t H \\ -(\mathbf{n}_i \times \partial_t E) \end{pmatrix} \right] (t_0 - d_i, \cdot) \\ &+ \frac{1}{4\pi d_i^2} \left\{ \mathbf{t}_i^0 \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} + 3\mathbf{t}_i^0 \times \mathbf{t}_i^0 \times \mathbb{I}_6 - 2\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_6 \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times H \\ -(\mathbf{n}_i \times E) \end{pmatrix} (t_0 - d_i, \cdot) \quad (1.10) \\ &+ \frac{1}{4\pi d_i^3} \int_0^{t_0 - d_i} \left\{ 3\mathbf{t}_i^0 \times \mathbf{t}_i^0 \times \mathbb{I}_6 - 2\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_6 \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times H \\ -(\mathbf{n}_i \times E) \end{pmatrix} (s, \cdot) ds \Big] dS_i + O \left( \sup_i \left( \frac{\delta_i}{d_i} \right) \right), \end{aligned}$$

où  $\mathbb{I}_k$  est l'opérateur identité de  $\mathbb{C}^k$ , et pour tout  $i$ ,  $dS_i$  est l'élément de surface de  $\mathcal{F}_i$ ,  $\mathbf{n}_i$  la normale unitaire à  $\mathcal{F}_i$  sortant de  $\mathcal{V}$ ,  $d_i$  est la distance d'un point  $X_i^0$  quelconque de  $\mathcal{F}_i$  à  $X_0$ ,  $\mathbf{t}_i^0 = (d_i)^{-1} \overrightarrow{X_i^0 X_0}$ , et  $\delta_i$  est le diamètre de  $\mathcal{F}_i$ .

### Plan de la construction du théorème 1.2.2.

1. Pour construire la formule intégrale 1.10 sur une surface polyédrique nous devons dans un premier temps séparer les termes de la convolution (1.7) sur les ensembles de normale  $\mathbf{n}$  constante. En outre,  $f_E$  et  $f_H$  étant distributionnels sur  $\mathcal{F}$ , nous allons introduire dans la section 1.2.1 une régularisation de la solution (1.7) obtenue par convolution des second membres du problème (1.6) avec des partitions de l'unité (sous-)face par (sous-)face.

Afin d'effectuer cette régularisation, il est préalablement nécessaire de définir une classe de surfaces de polyèdres *admissibles* éventuellement non-convexes (définition 1.2.6). A partir de telles surfaces, il est alors possible de permuter la sommation sur le découpage de  $\mathcal{F}$  avec l'intégration sur le support de la convolution de  $\mathcal{Z}_2$  et  $\mathcal{COM}$  (proposition 1.2.9). Les éléments de cette nouvelle expression étant alors à support disjoints et en relation avec une face (ou une sous-face)  $\mathcal{F}_i$  de  $\mathcal{F}$  nous pourrons alors travailler séparément sur chacun d'eux.

Ainsi les éléments intégrés sont en relation avec une normale  $\mathbf{n}_i$  constante sur leur volume d'intégration. La convolution (1.7) faisant apparaître le noyau de l'équation des ondes nous allons introduire la direction (locale) de dilatation des sphères de propagation  $\mathbf{t}_i$  centrées en l'observatoire  $X_0$ .

Nous avons alors deux cas à considérer :

- soit  $\mathbf{t}_i$  et  $\mathbf{n}_i$  ne sont pas colinéaires et peuvent alors être complétés en une base de  $\mathbb{R}^3$  par ajout d'un troisième vecteur  $\mathbf{s}_i$ ,
- soit  $\mathbf{t}_i = \pm \mathbf{n}_i$ .

2. Dans une première partie, section 1.2.2, nous considérons que  $\mathbf{t}_i \neq \pm \mathbf{n}_i$  et nous formons alors une base de  $\mathbb{R}^3$  :  $(\mathbf{t}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{s}_i)$ , où  $\mathbf{s}_i$  est choisi tangentiellement aux sphères de propagation et orthogonal à  $\mathbf{n}_i$ . A cette base est associé un système de coordonnées locales  $(\tau_i, \eta_i, \sigma_i)$  (définition 1.2.17). La grandeur caractéristique  $\delta_i$  relative à  $\mathcal{F}_i$  est ainsi directement liée à ce système de coordonnées locales par

$$\delta_i = \sup_{\mathcal{F}_i} |\tau_i|.$$

En outre, le choix de ce système de coordonnées permet d'une part de faire apparaître une coordonnée  $\sigma_i$  tangente aux sphères de propagation et donc telle que les opérateurs  $\partial_\sigma$  et  $\mathcal{Z}_2$  sont localement "orthogonaux" (lemme 1.2.32). L'écriture de la comatrice de dérivations  $\mathcal{COM}$  dans ce système de coordonnées (proposition 1.2.30) permet de simplifier toutes les dérivations tangentes. D'autre part, la coordonnée  $\tau_i$  représentant (localement) la dilatation des sphères de propagation, elle est donc liée au temps  $t$ . Ainsi, par utilisation contre  $\mathcal{Z}_2$  de  $\partial_\tau$  et  $\partial_\eta$  il est possible d'orienter le repère axialement par rapport à la dilatation des sphères et de "transformer" les dérivations d'espaces en dérivations temporelles (lemmes 1.2.33 et 1.2.34). Nous obtenons ainsi la première partie du théorème 1.2.2 dans le cas  $\mathbf{t}_i \neq \pm \mathbf{n}_i$  (proposition 1.2.39) par développement de l'expression simplifiée obtenue (1.30) pour  $\delta_i/d_i$  petit,  $d_i$  représentant la distance de  $X_0$  à  $\mathcal{F}_i$ .

3. Dans une deuxième partie, section 1.2.3, on construit une formule intégrale approchée dans le cas limite :  $\mathbf{t}_i = \pm \mathbf{n}_i$ . Pour cela, nous utilisons un repère local en coordonnées cylindriques autour de la normale  $\mathbf{n}_i$  qui est aussi direction de propagation :  $(\mathbf{r}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{s}_i)$ . Les coordonnées selon  $\mathbf{n}_i$  et  $\mathbf{r}_i$  jouent le rôle de  $\eta_i$  et  $\tau_i$  et sont donc "équivalentes" au temps  $t$ , c'est-à-dire

qu'elles permettent de transformer les dérivations d'espaces  $\partial_\eta$  et  $\partial_\tau$  en dérivations temporelles comme précédemment (lemmes 1.2.45 et 1.2.46). De même la coordonnée polaire selon  $\mathbf{s}_i$  étant tangente, elle joue le rôle de  $\sigma_i$ , et donc les opérateurs  $\partial_\sigma$  et  $\mathcal{Z}_2$  sont localement orthogonaux (lemme 1.2.44). Comme précédemment, on obtient alors de même l'expression de la formule intégrale approchée (proposition 1.2.50) dans le cas limite  $\mathbf{t}_i = \pm \mathbf{n}_i$  par développement de l'expression exacte reconstituée (1.50) pour  $\delta_i/d_i \ll 1$ .

4. Le lien entre le cas "général"  $\mathbf{t}_i \neq \pm \mathbf{n}_i$  et le cas limite  $\mathbf{t}_i = \pm \mathbf{n}_i$  est finalement traité dans la section 1.2.3 en montrant que la formule obtenue pour le cas  $\mathbf{t}_i = \pm \mathbf{n}_i$  est limite pour  $\mathbf{t}_i \rightarrow \pm \mathbf{n}_i$  du cas général, pour  $X_0$  décrivant tout chemin (proposition 1.2.53).

■

**Remarque 1.2.3** *Les termes vectoriels obtenus dans (1.10) étant géométriquement descriptibles, celle-ci est alors indépendante du système de coordonnées choisi; son implémentation (intégration sur les  $\mathcal{F}_i$  et approximations des intégrales et des dérivées temporelles) se faisant suivant le schéma numérique de résolution choisi pour (1.6).*

**Remarque 1.2.4** *La partie en  $\partial/\partial t$  (termes en  $d_i^{-1}$ ) de la formule (1.10) correspond à une expression localisée en temps de la formule champs lointain de Yee [73].*

*Les termes d'ordre supérieurs (en  $1/d_i^2$  et  $1/d_i^3$ ) peuvent aussi être considérés comme certaines des expressions (localisées) des termes supplémentaires présents dans les expressions de formules de champs proche - champs proche [23, 61, 62, 12].*

### 1.2.1 Formule intégrale, surfaces admissibles et séparation par faces

Comme précisé précédemment, il est plus intéressant à des fins d'implémentation d'envisager  $\mathcal{F}$  comme la surface d'un polyèdre  $\mathcal{V}$ . Ceci amène alors à considérer la normale extérieure à  $\mathcal{V}$  comme un élément "naturel" de référence. Etant donné que les supports de  $f_E$  et  $f_H$  sont portés par  $\mathcal{F}$ , et que leurs écritures respectives font intervenir  $\mathbf{n}$ , il serait utile de pouvoir séparer les intégrandes dans (1.7) selon des éléments donnés pour une normale constante (donc portés par les faces, ou encore par un découpage de celles-ci en "sous-faces", de  $\mathcal{F}$ ) notées  $(\mathcal{F}_i)_i$ . A cette fin, il est intéressant de

1. séparer les différents supports  $\mathcal{F}_i$  pour pouvoir par la suite séparer les termes selon des sous-faces de tailles ajustables sur lesquels  $\mathbf{n}_i$  sera constante,
2. régulariser les fonctions  $f_E$  et  $f_H$  afin de donner un sens à la re-formulation de l'expression de (1.7) dans les nouveaux supports.

La solution envisagée pour assurer ces deux points est de découper l'espace d'intégration (l'extérieur de  $\mathcal{V}$ ) en une partition de sous-volumes  $(\mathcal{V}_i)_i$  contenant les fonctions  $f_E$  et  $f_H$  régularisée par convolution après translations de leurs supports à l'intérieur des  $\mathcal{V}_i$ . Cela permettra alors de transformer l'intégration sur  $\mathcal{F} = \sum_i \mathcal{F}_i$  en une somme d'intégrales, séparées, données sur chaque  $\mathcal{V}_i$  tout en prenant en compte les éventuels termes portés par les arêtes ou les sommets de  $\mathcal{V}$ .

**Remarque 1.2.5** *La plupart des formules de rayonnement appliquées naturellement sur des surfaces  $\mathcal{F}$  sont établies à parties d'équations intégrales de type Stratton-Chu. La surface  $\mathcal{F}$  n'étant pas  $C^1$ , il est alors nécessaire de modifier ces équations en ajoutant des termes de traces sur les arêtes afin de vérifier les équations de Maxwell [64]. Les expressions de  $E$  et de  $H$ , à partir des formules de Stratton-Chu  $E^{SC}$  et  $H^{SC}$ , deviennent alors dans le domaine fréquentiel*

$$E = E^{SC} + \frac{i}{\omega} \nabla \int_{\delta \mathcal{F}_k} [G] |[H]| \cdot dl, \quad \text{et} \quad H = H^{SC} - \frac{i}{\omega} \nabla \int_{\delta \mathcal{F}_k} [G] |[E]| \cdot dl,$$

$[[H]]$  et  $[[E]]$  désignant respectivement les sauts de  $H$  et de  $E$  sur le bord  $\delta\mathcal{F}_k$  de  $\mathcal{F}_k$ , et  $[G]$  étant le noyau de Green matriciel des équations de Maxwell. Ceci justifie alors l'intérêt du procédé de décomposition par (sous-)faces proposé ici, ainsi que le choix de la formule intégrale appliquée sur les second membres régularisés.

### Surfaces admissibles

Afin de garantir la réalisation de ces opérations, on est amené à caractériser les surfaces  $\mathcal{F}$  des volumes polyédriques  $\mathcal{V}$ , que l'on considérera comme *admissibles* pour le problème, c'est-à-dire permettant le découpage de l'intégration spatiale par sous-faces, de la manière suivante

**Définition 1.2.6** Soit un polyèdre  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\mathcal{F}$ . On note  $\bar{\mathcal{V}}^c$  le complémentaire de  $\mathcal{V}$ . Enfin, on suppose que  $\mathcal{F}$  est découpée en sous-faces fermées  $\mathcal{F}_i$  ( $i = 1..n$ ) ( $\mathcal{F} = \cup_i \mathcal{F}_i$ ), vérifiant :

1.  $\forall i \neq j, \text{Int}_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j) = \emptyset$ , où  $\text{Int}_{\mathcal{F}}(A)$  est l'intérieur de  $A \subset \mathcal{F}$  pour la topologie induite sur  $\mathcal{F}$ ,
2.  $\mathcal{F}_i$  est une face ou une "sous-face", donc possède une normale  $\mathbf{n}_i$  (sortante à  $\mathcal{V}$ ) constante sur  $\mathcal{F}_i$ .

Alors, une telle surface  $\mathcal{F}$  sera appelée *admissible* si elle vérifie les hypothèses suivantes :

(H1). il existe des ouverts  $\mathcal{V}_j$  ( $j = 1..N$ ) (avec  $N \geq n$ ) de  $\mathbb{R}^3$  tels que  $\overline{\cup_j \mathcal{V}_j} = \mathbb{R}^3$ , et  $\forall i, \exists !j, \mathcal{F}_i \subset \bar{\mathcal{V}}_j$  (par renumérotation on indicera par  $i$  les ouverts  $\mathcal{V}_j$  vérifiant  $\mathcal{F}_i \subset \bar{\mathcal{V}}_j$ ),

(H2). il existe des vecteurs  $\mathbf{v}_i$  ( $i = 1..n$ ) tels que

1.  $\forall x_0 \in \mathcal{F}_i, \{x_0 + k\mathbf{v}_i, 0 < k < 1\} \subset \bar{\mathcal{V}}_i^c$ ,
2. il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que  $\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ ,  $\exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall i \neq j, A_i^\varepsilon \cap A_j^\varepsilon = \emptyset$  et tel que  $\forall i, A_i^\varepsilon \subset \mathcal{V}_i$ , où  $A_i^\varepsilon = \cup_{x \in \{x_0 + \varepsilon\mathbf{v}_i, x_0 \in \mathcal{F}_i\}} B(x, \delta(\varepsilon))$ .

D'après la définition précédente, si  $\mathcal{F}$  vérifie l'hypothèse (H1) alors il est immédiat de voir que

$$\forall j \neq i, \mathcal{F}_i \cap \bar{\mathcal{V}}_j \neq \emptyset \Rightarrow (\mathcal{F}_i \cap \bar{\mathcal{V}}_j) \subset \text{Fr}(\mathcal{V}_j). \quad (1.11)$$

Par la suite il sera toujours supposé que les points d'observations (notés  $X$ ) seront situés dans le domaine extérieur  $\bar{\mathcal{V}}^c$  délimité par  $\mathcal{F}$ .

Dans toute la suite, la surface  $\mathcal{F}$  sera considérée comme admissible.

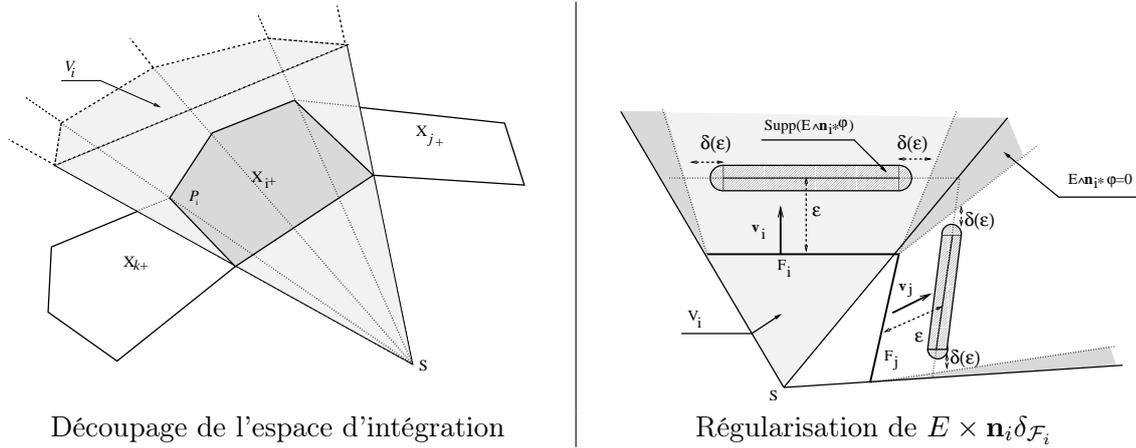
**Proposition 1.2.7** *Tout polyèdre étoilé est admissible.*

**Preuve.** Si on choisit les  $(\mathbf{v}_i)_i$  comme donnés par  $\overrightarrow{SX_i}$  où  $S$  est le sommet d'étoilement du polyèdre, et  $X_i$  un point de référence sur  $\mathcal{F}_i$ . Les volumes  $(\mathcal{V}_i)_i$  sont alors délimités par les surfaces triangulaires infinies de sommet  $S$  et dont les arrêtes passent par deux sommets consécutifs de  $\mathcal{F}_i$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  donné, un choix de  $\delta(\varepsilon)$  peut être assuré par  $2\delta(\varepsilon) = \min_i \{d(\mathcal{F}_i + \varepsilon\mathbf{v}_i, \mathcal{V}_i)\} > 0$  (cf figure 1.2).

Il est alors immédiat de vérifier que pour de tels choix de  $(\mathbf{v}_i)_i$ ,  $(\mathcal{V}_i)_i$  et  $\delta(\varepsilon)$ , la surface  $\mathcal{F}$  vérifie les hypothèses (H1) et (H2) de la définition 1.2.6. ■

La définition 1.2.6 généralise ainsi la notion "habituelle" de surface de Huygens (ie : convexe). Il est alors possible de considérer des polyèdres non-convexes (voir par exemple les cas tests étudiés dans la section 1.3).

**Corollaire 1.2.8** *Tout polyèdre convexe est admissible.*

FIG. 1.2 – Exemple de contour *admissible* : polyèdre étoilé

**Preuve.** Ce corollaire est une conséquence de la proposition 1.2.7 car les polyèdres convexes sont étoilés par rapport à chacun de leurs points. Toutefois, on peut aussi remarquer qu'il est aisé de construire les vecteurs  $\mathbf{v}_i$  vérifiant la définition 1.2.6 dans ce cas. En effet, pour cela il suffit de choisir comme découpage de  $\mathcal{F}_i$  les faces du polyèdre, comme directions d'éloignement les vecteurs  $\mathbf{v}_i$  donnés par les normales extérieures, et comme volumes extérieurs  $\mathcal{V}_i$  les volumes polygonaux coniques convexes de base  $\mathcal{F}_i$  dont les arêtes sont données par les demi-droites issues des sommets de  $\mathcal{F}_i$  et de vecteur directeur donné par la somme des normales des faces  $\mathcal{F}_k$  de même sommet. ■

La notion de surface admissible dépendant du choix du découpage de  $\mathcal{F}$  en les (sous-)faces  $\cup_i \mathcal{F}_i$ , et l'approximation proposée dans le théorème 1.2.2 étant donnée pour  $\delta_i/d_i \ll 1$  il est intéressant de pouvoir diminuer  $\delta_i$ , c'est-à-dire subdiviser les (sous-)faces  $\mathcal{F}_i$ . Pour garantir la validité des calculs effectués sous l'hypothèse  $\mathcal{F} = \cup_i \mathcal{F}_i$  *admissible*, il est nécessaire d'établir le caractère *admissible* d'une subdivision des  $\mathcal{F}_i$ . Nous avons alors le résultat suivant

**Proposition 1.2.9** *Soit  $\mathcal{V}$  un polyèdre de surface  $\mathcal{F} = \cup_i \mathcal{F}_i$  admissible. Alors toute subdivision des faces  $\mathcal{F}_i$  de  $\mathcal{F}$  donne encore une surface admissible.*

**Preuve.** Soit  $\mathcal{V}$  un polyèdre de surface  $\mathcal{F} = \cup_i \mathcal{F}_i$  admissible. Soit  $\mathcal{F}_i = \cup_j \mathcal{F}_i^j$  un découpage en  $n_i$  "sous-faces"  $(\mathcal{F}_i^j)_{j=1, \dots, n_i}$  de chaque face  $\mathcal{F}_i$ . Les trois premiers points de la définition 1.2.6 sont immédiatement vérifiés par  $\cup_j (\cup_j \mathcal{F}_i^j)$  du fait que  $\cup_i \mathcal{F}_i$  les vérifiait déjà.

Il reste alors à trouver des vecteurs  $\mathbf{v}_i^j$  et des volumes  $\mathcal{V}_i^j$  vérifiant (H1) et (H2). Pour cela on fixe  $\varepsilon_0 > 0$  et on choisit une face  $\mathcal{F}_i$ . On suppose que  $n_i > 1$ , sinon  $\mathcal{F}_i^j = \mathcal{F}_i$  qui va vérifier toutes les hypothèses. Par (H2-2) il existe  $\delta(\varepsilon_0) > 0$  tel que  $A_i^{\varepsilon_0} = \cup_{x \in \{x_0 + \varepsilon_0 \mathbf{v}_i, x_0 \in \mathcal{F}_i\}} B(x, \delta(\varepsilon_0)) \subset \mathcal{V}_i$ . Soit  $B_S(\mathbf{v}, R)$  la boule de  $S^2(\mathbb{R})$  de centre  $\mathbf{v}$  et de rayon  $R$ . Il est alors possible de choisir  $n_i$  vecteurs  $\mathbf{v}_i^j \in B_S(\mathbf{v}_i, \delta(\varepsilon_0))$  différents deux à deux tels que les adhérences des boules  $B_S(\mathbf{v}_i^j, \delta(\varepsilon_0)/(2n_i))$  soient deux à deux d'intersection vide (choisir par exemple  $\mathbf{v}_i^1 = \mathbf{v}_i$  et les  $n_i - 1$  autres équirépartis sur le cercle de  $S^2(\mathbb{R})$  de centre  $\mathbf{v}_i$  et de rayon  $\delta(\varepsilon_0)/2$ ). En notant  $\mathcal{V}_i^j$  une subdivision de  $\mathcal{V}_i$  telle que  $\cup_{x \in \{x_0 + \varepsilon_0 \mathbf{v}_i^j, x_0 \in \mathcal{F}_i^j\}} B(x, \delta(\varepsilon_0)/(2n_i)) \subset \mathcal{V}_i^j$  les propriétés (H1) et (H2) sont alors vérifiées. Par exemple, on pourra choisir les domaines intérieurs  $\mathcal{V}_i^j$  délimités par les surfaces de frontière extérieure

délimitée par

$$Fr(\mathcal{V}_i^j) = \mathcal{F}_i^j \cup \left( \bigcup_{j' \neq j / \overline{\mathcal{F}_i^{j'}} \cap \overline{\mathcal{F}_i^j} \neq \emptyset} \left\{ x + \lambda(v_i^j + v_i^{j'}), \lambda \in \mathbb{R}^+, x \in \mathcal{F}_i^{j'} \cap \mathcal{F}_i^j \right\} \right).$$

■

La proposition 1.2.9 permet alors de caractériser simplement un découpage de surface comme étant admissible du moment que la surface  $\mathcal{F}$  l'était. Par la suite, on sera amené à découper les faces  $\mathcal{F}_i$  de polyèdre de surface admissible  $\mathcal{F}$  en des "sous-faces"; la proposition 1.2.9 assurera alors la validité de l'établissement de la formule intégrale approchée sur de tels découpages. Plus précisément tous les développements menés supposeront que la face (et donc les sous-faces) est admissible, le *raffinement* spatial du découpage sera directement induit par la proposition 1.2.9 sans avoir à rétablir les résultats pour ces nouveaux découpages.

Enfin, par soucis de compatibilité avec les théories du scattering [70, 54], nous citerons un dernier résultat en relation avec la notion de "finite tiling" introduite par Wilcox [70].

**Définition 1.2.10 (Finite tiling [70])** Soit  $\mathcal{F}$  une surface délimitant un volume  $\mathcal{V}$ . Alors  $\mathcal{F}$  a la propriété de "finite tiling" si il existe :

1. un ouvert  $\mathcal{O}$  tel que  $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}$ ,
2. des compacts  $K_i$  tels que  $(\mathcal{O} \cap \mathcal{F}) \subset \bigcup_i K_i$ ,
3. des vecteurs  $\mathbf{v}_i$  tels que  $\forall x_0 \in \mathcal{F} \cap K_i, \{x_0 + k\mathbf{v}_i, 0 < k < 1\} \subset \mathcal{V}^c$ .

**Proposition 1.2.11** Si  $\mathcal{F}$  vérifie les hypothèses de la définition 1.2.6 alors  $\Omega$ , le domaine extérieur délimité par  $\mathcal{F}$ , possède la propriété de "finite tiling" ([70]).

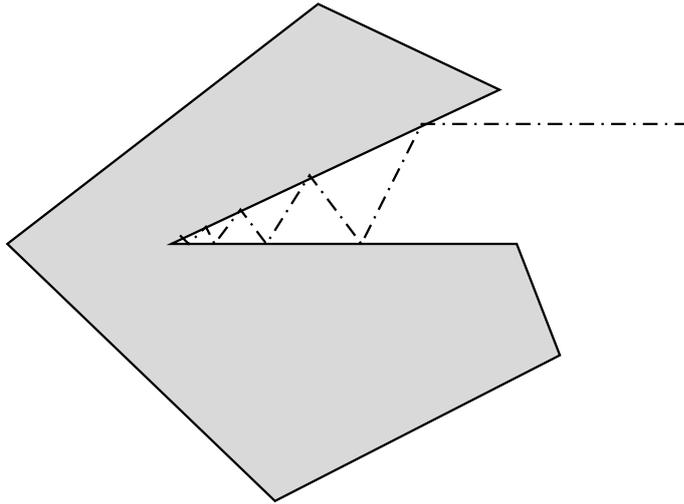
**Preuve.** Soit l'ensemble de volumes fermés définis par  $K_i = \overline{\mathcal{V}_i} \cap \overline{\mathcal{O}}$ , les  $\mathcal{V}_i$  étant les volumes définis dans le (H1) de la définition 1.2.6, et  $\mathcal{O}$  l'ouvert  $\overline{\mathcal{V}}^c$ . Alors les points 1 et 2 de la définition 1.2.10 sont immédiatement vérifiés. Enfin, les vecteurs  $\mathbf{v}_i$  définis dans l'hypothèse (H2-1) de la définition 1.2.6 vérifient alors le dernier point. ■

**Remarque 1.2.12** La proposition 1.2.11 permet aussi d'assurer que  $\mathcal{F}$  vérifie la propriété de locale compacité [70] très utile dans les problèmes de scattering. En effet, alliée à la propriété de "non-trapping" elle permet d'établir l'équivalence entre les études fréquentielles par amplitude limite et par absorption limite. La définition couramment utilisée du "trapping" [54] peut être énoncée de la façon suivante :

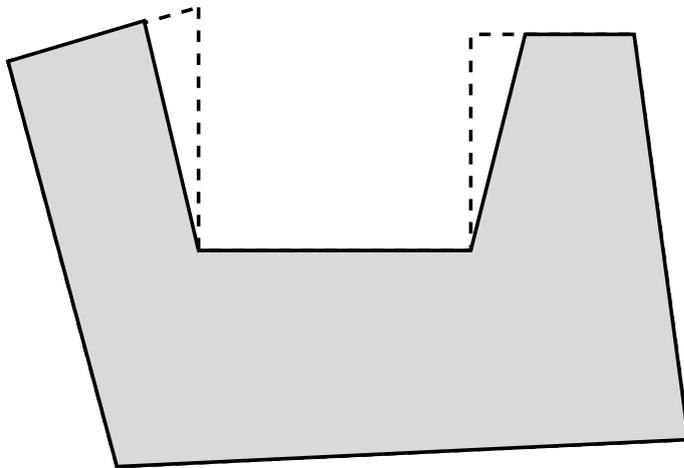
**Définition 1.2.13** Le domaine  $Q$  est dit "non-trapping" si pour tout  $R > \rho$  il existe  $T(R) > 0$  tel qu'aucune géodésique généralisée du d'Alembertien de longueur  $T(R)$  ne soit contenue entièrement dans  $\overline{Q} \cap \{x, |x| \leq R\}$ .

Il est évident que les polyèdres admissibles au sens de la définition 1.2.6 ne sont pas tous "non-trapping". Un contre-exemple peut être donné en considérant par exemple un polyèdre étoilé dont deux faces formeraient un angle rentrant inférieur à  $\pi/2$ . Un rayon parallèle à l'une des faces aura alors un chemin infini à parcourir jusqu'à l'arête frontière entre ces deux faces, et sera donc piégé (cf figure 1.3). Toutefois, il semblerait que ce soit une condition suffisante.

Enfin, il est possible d'envisager une notion généralisée de la notion de "non-trapping" en affaiblissant l'hypothèse "d'aucune géodésique généralisée piégée" dans la définition 1.2.13 par "il

FIG. 1.3 – Exemple de contour *admissible* "trapping"

*n'existe aucun ensemble de direction d'incidence, de mesure non-nulle sur la sphère unité  $S^2(\mathbb{R})$ , engendrant des rayons piégés". Même si il n'a pas été possible de l'établir, il semblerait que cette notion de "non-trapping généralisé" offre une condition nécessaire à la caractérisation d'une surface polyédrique comme admissible. Un exemple du cas limite entre une surface admissible et une surface non-admissible peut alors être illustré par la figure 1.4 : le "U" droit (en pointillé) ne représente pas une surface admissible au sens de la définition 1.2.6, mais un "U" écarté (en trait plein) est admissible. Ce dernier est non-trapping au sens de la définition généralisée proposée.*

FIG. 1.4 – Cas limite d'une surface *admissible* : "U" droit / "U" écarté

### Séparation par (sous-)faces

En conservant les notations précédentes, le problème de départ (1.6) est alors approximé sous la forme régularisée suivante

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} \partial_t E - \nabla \times H = f_E^\varepsilon, \\ \partial_t H + \nabla \times E = f_H^\varepsilon, \end{cases} \quad (1.12)$$

où les seconds membres  $f_E^\varepsilon$  et  $f_H^\varepsilon$  sont définis sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  par :

$$f_E^\varepsilon = \left( \sum_i [(\mathbf{n}_i \times H) \delta_{\mathcal{P}_i}] *_{(X)} \varphi_i^\varepsilon \right), \quad f_H^\varepsilon = - \left( \sum_i [(\mathbf{n}_i \times E) \delta_{\mathcal{P}_i}] *_{(X)} \varphi_i^\varepsilon \right), \quad (1.13)$$

$\mathcal{P}_i$  étant le plan contenant  $\mathcal{F}_i$ , et  $\varphi_i^\varepsilon = \mathbb{Y}_{\varepsilon \mathbf{v}_i} *_{(X)} \varphi$  pour  $\varphi$  une fonction telle que, pour  $\delta(\varepsilon) > 0$  assez petit,

$$\begin{cases} \varphi \in \mathcal{C}_m^1(\mathbb{R}^3), \\ \text{Supp} \varphi \subset B(0, \delta(\varepsilon)), \\ \int \varphi = 1, \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $\mathbb{Y}_{\varepsilon \mathbf{v}_i}$  désigne la fonction de Heaviside de l'ensemble  $\mathcal{A}_\varepsilon$  de frontière l'hyperplan de normale  $\mathbf{v}_i$  passant par le point  $0 + \varepsilon \mathbf{v}_i$ , et tel que  $0 \notin \mathcal{A}_\varepsilon$ .

Les études des problèmes (1.6) et (1.12) sont alors reliées par

**Proposition 1.2.14** *Le problème (P) est le problème limite au sens des distributions du problème à second membre régularisé  $(P_\varepsilon)$  pour  $\varepsilon$  tendant vers 0.*

**Preuve.** Par (1.14) on voit que pour tout  $i$  le support de  $\varphi_i^\varepsilon$  est lié au paramètre  $\varepsilon$  et vérifie  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Supp} \varphi = \{0\}$ , donc  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_i^\varepsilon = \delta$ . ■

En étudiant le problème régularisé  $(P_\varepsilon)$ , il est alors possible d'énoncer la solution de celui-ci sous la forme d'une somme de termes évalués uniquement dans un des volumes de découpage  $\mathcal{V}_i$  précédemment construits. Les permutations entre sommations, dérivations et intégrations étant alors induites par la forme suivante :

**Proposition 1.2.15** *Si  $\mathcal{F} = \cup_i \mathcal{F}_i$  est une surface admissible au sens de la définition 1.2.6, alors le problème  $(P_\varepsilon)$  a pour solution, en tout point  $(t_0, X_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{P}^c$*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} (t_0, X_0) &=: \sum_i \begin{pmatrix} \tilde{E}_i \\ \tilde{H}_i \end{pmatrix} (t_0, X_0) \\ &= \sum_i \int_{(s,Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3} \mathcal{Z}_2(t_0 - s, X_0 - Y) \mathcal{COM} \int_0^s \begin{pmatrix} [(\mathbf{n}_i \times H) \delta_{\mathcal{P}_i}] * \varphi_i^\varepsilon \\ - [(\mathbf{n}_i \times E) \delta_{\mathcal{P}_i}] * \varphi_i^\varepsilon \end{pmatrix} (\cdot, Y) ds dY. \end{aligned} \quad (1.15)$$

**Preuve.** Par le théorème 1.2.1, la solution de  $(P_\varepsilon)$  s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} (t_0, X_0) = \int_{(s,Y) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V}_i} \mathcal{Z}_2(t_0 - s, X_0 - Y) \mathcal{COM} \int_0^s \begin{pmatrix} f_E^\varepsilon \\ f_H^\varepsilon \end{pmatrix} (\cdot, Y) ds dY.$$

Le découpage en une somme sur les ensembles  $\mathbb{R} \times \mathcal{V}_i \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  peut s'effectuer car ils sont d'intersections de mesures nulles par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^4$ . Chacune des fonctions  $f_E^\varepsilon$  et  $f_H^\varepsilon$  étant ainsi continue (nulle) au passage des frontières par la régularisation (1.14) et le caractère admissible de  $\mathcal{F}$  donné par la définition 1.2.6.

De même, pour un indice  $i$  donné les seconds membres  $[(\mathbf{n}_i \times H)\delta_{\mathcal{P}_i}] * \varphi_i^\varepsilon$  et  $[(\mathbf{n}_i \times H)\delta_{\mathcal{P}_i}] * \varphi_i^\varepsilon$  sont identiquement nuls sur  $(\mathcal{V}_i)^c$ , donc en particulier sur tous les  $\mathcal{V}_j$  pour  $j \neq i$ . L'équation (1.7) se découpe alors "naturellement" sur tous les volumes ainsi créés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} (t_0, X_0) &=: \sum_i \begin{pmatrix} \tilde{E}_i \\ \tilde{H}_i \end{pmatrix} (t_0, X_0) \\ &= \sum_i \int_{(s,Y) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V}_i} \mathcal{Z}_2(t_0 - s, X_0 - Y) \mathcal{COM} \int_0^s \begin{pmatrix} [(\mathbf{n}_i \times H)\delta_{\mathcal{P}_i}] * \varphi_i^\varepsilon \\ - [(\mathbf{n}_i \times E)\delta_{\mathcal{P}_i}] * \varphi_i^\varepsilon \end{pmatrix} (\cdot, Y) ds dY. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Ce qui, en réutilisant la nullité de  $[(\mathbf{n}_i \times H)\delta_{\mathcal{P}_i}] * \varphi_i^\varepsilon$  et  $[(\mathbf{n}_i \times E)\delta_{\mathcal{P}_i}] * \varphi_i^\varepsilon$  sur  $(\mathcal{V}_i)^c$ , donne (1.15). ■

L'écriture de la solution de  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$  sous la forme (1.15) permet ainsi, dans toute la suite, de ne considérer que le rayonnement  $\begin{pmatrix} \tilde{E}_i \\ \tilde{H}_i \end{pmatrix}$  d'un élément indicé par  $i$  et caractérisé par la normale à la face  $\mathcal{F}_i$ , limite de son support. Nous allons évaluer séparément les termes  $\begin{pmatrix} \tilde{E}_i \\ \tilde{H}_i \end{pmatrix}$ . Pour cela, il est intéressant d'effectuer un changement de variable permettant de faire apparaître les grandeurs nécessaires à l'approximation de la formule intégrale. Le changement de variable proposé considère deux grandeurs principales : la normale  $\mathbf{n}_i$  à la face  $\mathcal{F}_i$  propre au terme  $\begin{pmatrix} \tilde{E}_i \\ \tilde{H}_i \end{pmatrix}$ , et la direction  $\mathbf{t}_i$  (localisée) de dilatation des sphères de propagation centrées en  $X_0$ . Il s'en suit donc deux cas distincts :

1.  $\mathbf{t}_i$  et  $\mathbf{n}_i$  sont linéairement indépendants,
2.  $\mathbf{t}_i$  est colinéaire à  $\mathbf{n}_i$ .

L'expression complète de la formule de rayonnement s'obtient enfin par sommation de tous les termes  $\begin{pmatrix} \tilde{E}_i \\ \tilde{H}_i \end{pmatrix}$  ainsi évalués, puis par passage à la limite en 0 sur  $\varepsilon$ .

### 1.2.2 Cas des faces non-perpendiculaires à la direction d'observation

La première étape à l'obtention de la formule intégrale approchée est l'écriture du système de coordonnées locales, dans le cas le plus général où nous disposons de deux directions privilégiées distinctes : la normale à la face et la normale aux sphères de propagations centrées en l'observatoire  $X_0$ . L'établissement de relations préliminaires de calcul dans ce repère est aussi effectué.

#### Définition du système de coordonnées locales

Soit  $X_0$  le point de référence choisi en dehors de la surface de Huygens  $\mathcal{F} = \cup_i \mathcal{F}_i$ . On note  $\mathcal{S}_R(X_0)$  la sphère de centre  $X_0$  et de rayon  $R$ . Soit  $X_i$  un point de  $\mathcal{F}_i$ . On suppose que l'on peut décrire  $\mathcal{F}_i$  dans un voisinage de  $X_i$  par une équation de la forme  $f(M) = 0$ ,  $M \in \mathcal{V}(X_i) \cap \mathcal{F}_i$ . On supposera de plus que  $f$  est au moins de classe  $\mathcal{C}^1$  dans  $\mathcal{V}(X_i) \cap \mathcal{F}_i$ , et que  $\mathcal{F}_i$  est localement convexe. Cette dernière hypothèse est directement liée à la définition des surfaces admissibles. En effet, celles-ci nécessitent que les  $\mathcal{F}_i$  soient plans mais ne pré-supposent rien d'autre sur la géométrie ; entre-autres, elles pourront être données comme des disques ou des morceaux de disques.

Soit  $h_i$  une fonction définie sur un intervalle contenant 0, à valeur dans  $\mathcal{V}(X_i) \cap \mathcal{F}_i \cap \mathcal{S}_{|X_i - X_0|}(X_0)$ , permettant de décrire localement autour de  $X_i$  la courbe  $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{S}_{|X_i - X_0|}(X_0)$ . La fonction  $h_i$  associe ainsi à tout point  $X'_i$  de l'arc de cercle  $\mathcal{V}(X_i) \cap \mathcal{F}_i \cap \mathcal{S}_{|X_i - X_0|}(X_0)$  une abscisse curviligne  $\sigma_i$  telle que  $X'_i = X_i + h_i(\sigma_i)$ .

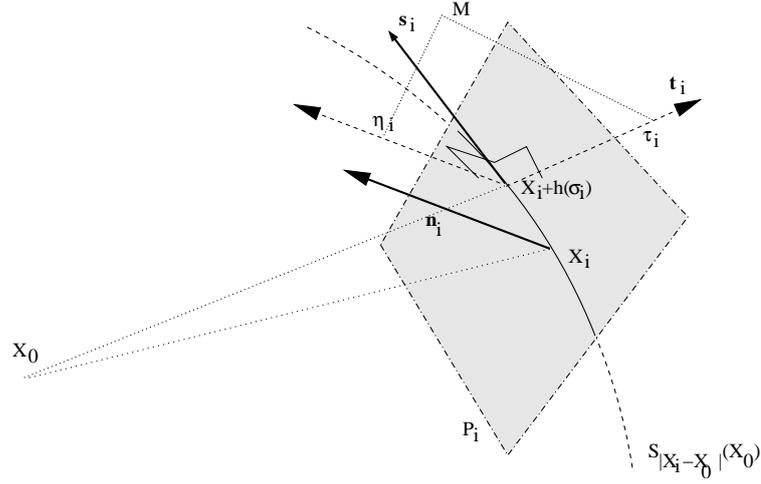


FIG. 1.5 – Description du système de coordonnées locales utilisé

**Remarque 1.2.16** Pour obtenir une description explicite de la fonction  $h_i$  il suffit de considérer par exemple la rotation  $R_{X_0}^{\mathbf{n}_i}(\sigma_i)(\cdot)$  d'angle  $\sigma_i$ , de centre  $X_0$  et d'axe  $\mathbf{n}_i$ ; un point  $X'_i$  de  $\mathcal{V}(X_i) \cap \mathcal{F}_i \cap \mathcal{S}_{|X_i - X_0|}(X_0)$  est alors repéré par :

$$X'_i = R_{X_0}^{\mathbf{n}_i}(\sigma_i)(X_i) = X_i + \left( R_{X_0}^{\mathbf{n}_i}(\sigma_i)(X_i) - X_i \right) = X_i + h_i(\sigma_i). \quad (1.17)$$

La définition de  $\sigma_i$  s'étend à tout point  $M \in \mathcal{V}(X_i)$  de la façon suivante : si  $X'_i$  désigne l'intersection de l'arc de cercle  $\mathcal{V}(X_i) \cap \mathcal{F}_i \cap \mathcal{S}_{|X_i - X_0|}(X_0)$  avec le demi-plan (affine) contenant  $X_0$ ,  $M$ , et  $\mathbf{n}_i$ , de bord  $(X_0, \mathbf{n}_i)$ , alors l'abscisse curviligne  $\sigma_i$  de  $M$  sera celle de  $X'_i$  conformément à la définition précédente (cf figure 1.5).

Le système utilisé est alors défini par

**Définition 1.2.17** Un point  $M \in \mathcal{V}(X_i)$ , sera désigné par  $M : (\tau_i, \eta_i, \sigma_i)$ , où

- $\sigma_i$  représente l'abscisse curviligne associée à la projection de  $M$  sur la représentation par  $h_i$  de  $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{S}_{|X_i - X_0|}(X_0)$ ,
- $\eta_i$  la coordonnée suivant la normale à  $\mathcal{F}_i$  en  $X_i + h_i(\sigma)$ ,
- et  $\tau_i$  la coordonnée suivant la normale à  $\mathcal{S}_{|X_i - X_0|}(X_0)$  en  $X_i + h_i(\sigma)$ .

Conformément à la définition de  $\sigma_i$  pour tout point de l'espace, on a  $\tau_i \in [-|X_i - X_0|, +\infty[$ , et on obtient un système de coordonnées de type cylindrique  $(r, \theta, z)$  déformées où  $\eta_i$  joue le rôle de  $z$ , et  $\sigma_i$  celui de  $\theta$ . De plus, toutes les représentations  $h_i$  de  $\mathcal{V}(X_i) \cap \mathcal{F}_i \cap \mathcal{S}_{|X_i - X_0|}(X_0)$  étant équivalentes, par commodité on choisira dans la suite une représentation sous forme d'une fonction de  $[0, 2\pi[$  à valeur dans  $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{S}_{|X_i - X_0|}(X_0)$  telle que  $h_i(0) = 0$  (cf par exemple la description (1.17) de la remarque 1.2.16). De même,  $\eta_i$  représentant la coordonnée selon la normale  $\mathcal{F}_i$ , elle sera choisie telle que  $\mathcal{F}_i \subset \{\eta_i = 0\}$ .

**Proposition 1.2.18** Soit  $M \in \mathcal{V}(X_i)$ . Le passage des coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  (dans le repère cartésien classique) du point  $M$ , au repère local  $(\tau_i, \eta_i, \sigma_i)$  est donné pour tout  $k \in \{1, 2, 3\}$  par :

$$x_k = (X_i + h_i(\sigma_i))_k + \frac{\tau_i}{|X_i - X_0|} (h_i(\sigma_i) + X_i - X_0)_k + \frac{\eta_i - \tau_i p_i}{|\nabla f(X_i + h_i(\sigma_i))|} \frac{\partial f}{\partial x_k}(X_i + h_i(\sigma_i)). \quad (1.18)$$

**Preuve.** La relation 1.18 se vérifie directement à l'aide de la définition des coordonnées locales 1.2.17 ■

Il est alors possible de créer un repère local associé aux coordonnées précédemment définies. Pour un point  $M(\tau_i, \eta_i, \sigma_i) \in \mathcal{V}(X_i)$ , on note  $\mathbf{t}_i$  le vecteur normal à  $\mathcal{S}_{|X_i - X_0|}(X_0)$  au point  $X_i + h_i(\sigma_i)$ ,  $\mathbf{n}_i$  le vecteur normal à  $\mathcal{F}_i$ , et  $\mathbf{s}_i$  le vecteur tangent à  $\mathcal{V}(X_i) \cap \mathcal{F}_i \cap \mathcal{S}_{|X_i - X_0|}(X_0)$  au point  $X_i + h_i(\sigma_i)$  complétant  $(\mathbf{t}_i, \mathbf{n}_i)$  en une base. En désignant par  $p_i$  le produit scalaire  $\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{n}_i$ , on a ainsi

$$\begin{cases} \mathbf{n}_i = \frac{\nabla f(X_i + h_i(\sigma_i))}{|\nabla f(X_i + h_i(\sigma_i))|}, \\ \mathbf{t}_i = \frac{h_i(\sigma_i) + X_i - X_0}{|h_i(\sigma_i) + X_i - X_0|} = \frac{h_i(\sigma_i) + X_i - X_0}{|X_i - X_0|}, \\ \mathbf{s}_i = \frac{\partial h_i(\sigma_i)}{\partial \sigma_i} + \tau_i \frac{\partial \mathbf{t}_i}{\partial \sigma_i} + (\eta_i - \tau_i p_i) \frac{\partial \mathbf{n}_i}{\partial \sigma_i} - \tau_i \frac{\partial p_i}{\partial \sigma_i} \mathbf{n}_i \\ \quad = (|X_i - X_0| + \tau_i) \frac{\partial \mathbf{t}_i}{\partial \sigma_i} + (\eta_i - \tau_i p_i) \frac{\partial \mathbf{n}_i}{\partial \sigma_i} - \tau_i \frac{\partial p_i}{\partial \sigma_i} \mathbf{n}_i. \end{cases} \quad (1.19)$$

**Remarque 1.2.19** On peut alors constater que pour  $\mathbf{t}_i \approx \pm \mathbf{n}_i$  ce système de coordonnées est mal (pas) défini (à l'inverse d'un système de coordonnées cylindriques classique), ce qui rejoint naturellement la nécessité de traitement en deux étapes évoquée au début de la section 1.2 :  $p_i \neq \pm 1$  puis  $p_i = \pm 1$ .

### Simplifications (géométriques) préliminaires

Afin de simplifier tous les calculs suivants,  $p_i = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{n}_i$  dépendant *a priori* de la valeur de  $\sigma_i$  (car  $\mathbf{t}_i$  dépend de  $\sigma_i$ ), on commence par établir le résultat suivant

**Proposition 1.2.20** *Le produit scalaire  $p_i = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{n}_i$  est indépendant de  $\sigma_i$ .*

**Preuve.** Pour toute valeur de  $\sigma_i$ , le vecteur  $\mathbf{t}_i(\sigma_i)$  est obtenu par rotation de  $\mathbf{t}_i(\sigma_i = 0)$  autour de l'axe  $(X_0, \mathbf{n}_i)$ , donc  $\forall \sigma_i, (\mathbf{t}_i(\sigma_i), \mathbf{n}_i) = (R_{X_0}^{\mathbf{n}_i}(\sigma_i)(\mathbf{t}_i(0), \mathbf{n}_i)) = (\mathbf{t}_i(0), \mathbf{n}_i)$ . ■

Il est alors possible de démontrer que le choix de coordonnées locales induit une base naturelle correspondant à un repère orthonormé

**Proposition 1.2.21** *Soit  $\mathbf{r}_i$  le vecteur défini par  $\mathbf{r}_i = \mathbf{t}_i - p_i \mathbf{n}_i$ . Alors le repère naturel associé au changement de variable (1.18) est  $(\mathbf{r}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{s}_i)$ .*

*De plus, le triplet  $((1 - p_i^2)^{-1/2} \mathbf{r}_i, |\mathbf{s}_i|^{-1} \mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i)$  forme un repère orthonormé.*

**Preuve.** La différentiation en  $\tau_i, \sigma_i$  et  $\eta_i$  de l'expression du changement de variable (1.18) permet de vérifier immédiatement que  $(\mathbf{r}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{s}_i)$  est bien le repère associé à  $(\tau_i, \eta_i, \sigma_i)$ .

Montrons alors que  $((1 - p_i^2)^{-1/2} \mathbf{r}_i, |\mathbf{s}_i|^{-1} \mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i)$  est bien un repère orthonormé. Les vecteurs  $|\mathbf{s}_i|^{-1} \mathbf{s}_i$ , et  $\mathbf{n}_i$  sont évidemment normés. Pour  $\mathbf{r}_i$  on a  $|\mathbf{r}_i|^2 = |\mathbf{t}_i|^2 + p_i^2 |\mathbf{n}_i|^2 - 2p_i \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{n}_i = 1 - p_i^2$ , d'où  $(1 - p_i^2)^{-1/2} \mathbf{r}_i$  est aussi un vecteur normé. Il reste à vérifier l'orthogonalité de ces trois vecteurs deux à deux. Tout d'abord, la proposition 1.2.20 permet d'écrire

$$\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{n}_i = (|X_i - X_0| + \tau_i - \tau_i) \partial_{\sigma} p(\sigma_i) = 0.$$

Comme de plus  $\mathcal{F}_i$  est portée par un plan, il vient naturellement  $\partial_\sigma \mathbf{n}_i = 0$ , et donc l'expression de  $\mathbf{s}_i$  devient

$$\mathbf{s}_i = (|X_i - X_0| + \tau_i) \frac{\partial \mathbf{t}_i}{\partial \sigma}. \quad (1.20)$$

Puisque le vecteur  $\mathbf{t}_i$  est normé, on obtient ensuite  $\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{s}_i = 0$ , et donc

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{s}_i = (\mathbf{t}_i - p_i \mathbf{n}_i) \cdot \mathbf{s}_i = 0.$$

Enfin  $|\partial_\sigma \mathbf{t}_i|^{-1} \partial_\sigma \mathbf{t}_i = |\mathbf{s}_i|^{-1} \mathbf{s}_i$  donc  $\mathbf{n}_i \times \partial_\sigma \mathbf{t}_i = |\partial_\sigma \mathbf{t}_i| \mathbf{n}_i \times (|\mathbf{s}_i|^{-1} \mathbf{s}_i)$ . De plus  $\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0$ , et  $|\mathbf{n}_i \times (|\mathbf{s}_i|^{-1} \mathbf{s}_i)| = 1$ ; d'où

$$\mathbf{n}_i \times \frac{\partial \mathbf{t}_i}{|\partial_\sigma \mathbf{t}_i|} = \mathbf{n}_i \times \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} = \pm \left( \frac{-p}{\sqrt{1-p_i^2}} \mathbf{n}_i + \frac{1}{\sqrt{1-p_i^2}} \mathbf{t}_i \right) = \pm \frac{1}{\sqrt{1-p_i^2}} \mathbf{r}_i, \quad (1.21)$$

le signe  $\pm$  étant fonction du sens de parcours selon  $\sigma$  de  $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{V}(X_i) \cap \mathcal{S}_{|X_i - X_0|}(X_0)$ . ■

**Remarque 1.2.22** D'après son expression,  $\mathbf{r}_i$  correspond en fait à la projection de  $\mathbf{t}_i$  sur  $\mathcal{F}_i$ . Il est aussi le vecteur de base associé à la variable  $\tau_i$  dans le repère différentiel naturel lié aux changements de variable (1.18).

De plus, par (1.21) on remarque que pour  $p_i \approx \pm 1$  on a alors par les formules précédentes  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{0}$  et  $(1-p_i^2)^{-1/2} |\mathbf{r}_i| = 1$ ; on retrouve bien le problème de définition du système de coordonnées pour  $\mathbf{t}_i \approx \pm \mathbf{n}_i$ .

Enfin, le repère orthonormé  $\left( (1-p_i^2)^{-1/2} \mathbf{r}_i, |\mathbf{s}_i|^{-1} \mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i \right)$  est direct lorsque  $X_i + h_i(\sigma_i)$  parcourt  $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{S}_{|X_i - X_0|}(X_0)$  dans le sens direct autour de l'axe  $(X_0, \mathbf{n}_i)$ , et indirect dans le cas contraire.

De même, le résultat intermédiaire suivant peut être ainsi établi

**Proposition 1.2.23** Pour tout  $\sigma_i \in [0, 2\pi[$ ,

$$|(\mathbf{t}_i \times \partial_\sigma \mathbf{t}_i) \cdot \mathbf{n}_i| = \sqrt{1-p_i^2} |\partial_\sigma \mathbf{t}_i|. \quad (1.22)$$

**Preuve.** Comme  $(\mathbf{t}_i \times \partial_\sigma \mathbf{t}_i) \cdot \mathbf{t}_i = 0$  et  $|\mathbf{t}_i \times \partial_\sigma \mathbf{t}_i| = |\partial_\sigma \mathbf{t}_i|$ , on en déduit alors que  $\mathbf{t}_i \times \partial_\sigma \mathbf{t}_i = \pm (1-p_i^2)^{-1/2} (-p_i |\partial_\sigma \mathbf{t}_i| \mathbf{t}_i + |\partial_\sigma \mathbf{t}_i| \mathbf{n}_i)$ , ce qui démontre (1.22) par passage au produit scalaire avec  $\mathbf{n}_i$ . ■

Enfin il est possible d'établir les formules permettant d'obtenir les dérivations des vecteurs de bases suivantes :

**Proposition 1.2.24** Pour tout  $\sigma_i \in [0, 2\pi[$ , on a les relations de dérivations suivantes

1.  $\frac{\partial}{\partial \sigma} (\mathbf{n}_i) = \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{n}_i) = 0$ ,
2.  $\frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \right) = \frac{1}{|X_i - X_0| \sqrt{1-p_i^2}} \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|}$ ,
3.  $\frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \mathbf{n}_i \right) = -\frac{1}{|X_i - X_0| \sqrt{1-p_i^2}} \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|}$ ,

$$4. \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} (\partial_\sigma h_i) = 0.$$

**Preuve.** Ces formules s'obtiennent directement grâce aux résultats précédents et en remarquant que  $|\partial_\sigma \mathbf{t}_i| = |X_i - X_0|^{-1} |\partial_\sigma h_i| = |X_i - X_0|^{-1}$ . ■

### Jacobien du changement de variable

Pour les manipulations ultérieures sur les dérivées apparues dans la comatrice  $\mathcal{COM}$ , et pour obtenir une expression de la formule intégrale approchée indépendante du système de coordonnées locales, il faut commencer par exprimer le Jacobien du changement de variables effectué

**Proposition 1.2.25** *Le déterminant du Jacobien associé au changement de variable (1.18) a pour expression :*

$$J = \sqrt{1 - p_i^2} \left( 1 + \frac{\tau_i}{|X_i - X_0|} \right). \quad (1.23)$$

**Preuve.** Par (1.21) on sait que  $|\mathbf{r}_i| = \sqrt{1 - p_i^2}$ , et par (1.20) il vient  $|\mathbf{s}_i| = (|X_0 - X_i| + \tau_i) |\partial_\sigma \mathbf{t}_i| = (1 + |X_i - X_0|^{-1} \tau_i)$ . Donc comme  $(\mathbf{r}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{s}_i)$  forme une base orthogonale associée au changement de coordonnées, on en déduit le résultat par l'expression du volume élémentaire  $|\det(\mathbf{r}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{s}_i)|$ . ■

### Noyau du d'Alembertien : $\mathcal{Z}_2$

L'utilisation de l'écriture complète du noyau de Green des équations de Maxwell instationnaires homogènes nécessite d'évaluer la solution élémentaire du d'Alembertien  $\mathcal{Z}_2$ . Pour cela, il faut procéder en utilisant les distributions de Riesz-Hadamard définies par parties finies de fraction rationnelles de la distance hyperbolique (cf [59]). Ce résultat étant bien connu nous nous contenterons donc de donner son expression dans le nouveau système de coordonnées. Toutefois une démonstration dans le cas du milieu à pertes de l'obtention d'un tel résultat est fournie dans l'annexe B, proposition B.1.2.

**Proposition 1.2.26** *Dans le nouveau système de coordonnées, la solution élémentaire du d'Alembertien s'écrit :*

$$\mathcal{Z}_2(t, X_i + h_i(\sigma_i) + \tau_i \mathbf{t}_i + (\eta_i - \tau_i p_i) \mathbf{n}_i) = \frac{\delta_{t=|X_i + h_i(\sigma_i) + \tau_i \mathbf{t}_i + (\eta_i - \tau_i p_i) \mathbf{n}_i|}}{4\pi |X_i + h_i(\sigma) + \tau_i \mathbf{t}_i + (\eta_i - \tau_i p_i) \mathbf{n}_i|}, \quad (1.24)$$

où  $t$  est choisi positif strictement.

**Remarque 1.2.27**  $\mathcal{Z}_2$  représente l'expression distributionnelle du noyau de l'équation des ondes dans le système choisi. Les intégrations de celui-ci devront alors faire intervenir le déterminant du Jacobien du changement de variable.

**Remarque 1.2.28** L'objectif étant d'évaluer la formule intégrale approchée au point  $X_0$ , dans la suite, on fera porter la convolution sur le noyau du d'Alembertien tout en évaluant le résultat au centre du repère, ce qui permettra alors la simplification suivante :

$$\mathcal{Z}_2(t_0 - t, X_0 - (X_i + h_i(\sigma_i) + \tau_i \mathbf{t}_i + (\eta_i - \tau_i p_i) \mathbf{n}_i)) = \frac{\delta_{t_0 - t = \alpha(\tau_i, \eta_i)}}{4\pi \alpha(\tau_i, \eta_i)},$$

où  $\alpha(\tau_i, \eta_i)$  ne dépend pas de  $\sigma_i$ , et  $d_i = |X_i - X_0|$ .

Le choix de coordonnées locales effectué s'explique alors par le fait que  $\sigma_i$  devient une coordonnée tangente à la propagation ( $\mathcal{Z}_2$  ne dépend pas de cette variable), et que pour tout point de la surface  $\mathcal{F}_i$  (donc vérifiant  $\eta_i = 0$ ), la variable  $\tau_i$  jouera le double rôle de variables temporelle et spatiale.

### Écriture de la comatrice

Afin d'écrire les termes de dérivations sous une forme plus exploitable dans le système de coordonnées locales, on commence par introduire une simplification préliminaire

**Proposition 1.2.29** *Si pour tout  $i$ , les fonctions  $E$  et  $H$  définissant  $f_E^\varepsilon = \sum_i (\mathbf{n}_i \times H) \delta_{\mathcal{P}_i} * \varphi_i^\varepsilon$  et  $f_H^\varepsilon = \sum_i (\mathbf{n}_i \times E) \delta_{\mathcal{P}_i} * \varphi_i^\varepsilon$  vérifie l'hypothèse suivante :*

$$\begin{cases} E \text{ et } H \text{ sont solutions des équations de Maxwell} \\ \text{et appartiennent à } C^2(\mathbb{R}^+, H^{5/2+\gamma}(\mathcal{V}(\mathcal{P}_i))), \text{ pour } \mathcal{V}(\mathcal{P}_i) \text{ voisinage de } \mathcal{P}_i \text{ et } \gamma > 0, \end{cases} \quad (1.25)$$

alors  $f_E^\varepsilon$  et  $f_H^\varepsilon$  sont, au sens des fonctions, dans le noyau de l'équation des ondes vectorielles

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{I}_3 + \nabla \times \nabla \times \mathbb{I}_3 = 0. \quad (1.26)$$

**Preuve.** Comme, pour tout  $i$ ,  $\mathbf{n}_i \times H$  et  $-\mathbf{n}_i \times E$  sont donnés comme traces tangentielles sur  $\mathcal{F}$  de champs électromagnétiques  $(E, H)$  suivant les équations de Maxwell instationnaires homogènes au voisinage de  $\mathcal{F}$ , elles sont donc solution de (1.26) ( $E$  et  $H$  le vérifiant déjà). Enfin comme  $f_E^\varepsilon = \sum_i (\mathbf{n}_i \times H) \delta_{\mathcal{P}_i} * \varphi_i^\varepsilon$  et  $f_H^\varepsilon = -\sum_i (\mathbf{n}_i \times E) \delta_{\mathcal{P}_i} * \varphi_i^\varepsilon$ , en appliquant l'opérateur  $\partial_t^2 \mathbb{I}_3 + \nabla \times \nabla \times \mathbb{I}_3$  aux membres de gauche des convolutions précédentes, on en déduit que  $f_E^\varepsilon$  et  $f_H^\varepsilon$  sont solutions de (1.26). ■

Il est alors possible de faire intervenir l'équation des ondes vectorielles à  $\mathcal{COM}$  afin de simplifier l'écriture de cette dernière. Ensuite, par utilisation du changement de variables avec les coordonnées locales précédemment obtenues, on a le résultat de décomposition suivant :

**Proposition 1.2.30** *La matrice des cofacteurs  $\mathcal{COM}$  associée au système de Maxwell exprimée avec les nouvelles variables (re-notée  $\mathcal{COM}_i$ ), prise contre le vecteur  $(f_E^\varepsilon, f_H^\varepsilon)^T$  s'écrit :*

$$\mathcal{COM}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{ROT}_i & 0 \\ 0 & \mathcal{ROT}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{ROT}_i & -\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 & \mathcal{ROT}_i \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

où  $\mathcal{ROT}_i$  est l'opérateur aux dérivées partielles défini par :

$$\mathcal{ROT}_i = \frac{\sqrt{1-p_i^2}}{J} \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \frac{\partial}{\partial \sigma} \mathbb{I}_3 + \frac{1}{\sqrt{1-p_i^2}} \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbb{I}_3 + \mathbf{n}_i \times \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbb{I}_3, \quad (1.28)$$

où, par convention, pour tout vecteur  $\vec{\mu}$  et toute variable  $\nu$  on désignera par  $\vec{\mu} \times \frac{\partial}{\partial \nu} \mathbb{I}_3$  l'opérateur qui à toute fonction  $f$  dérivable à valeur dans  $\mathbb{C}^3$  associe le vecteur  $\vec{\mu} \times \left( \frac{\partial}{\partial \nu} f \right)$ .

**Preuve.** La formulation (1.27) s'obtient après avoir introduit l'équation des ondes vectorielles (1.26) à  $\mathcal{COM}_i$ , comme  $f_E^\varepsilon$  et  $f_H^\varepsilon$  la vérifient, et ensuite effectué le changement de variables proposé. En factorisant l'opérateur  $\mathcal{ROT}_i$  décrit par (1.28), une identification des termes de  $\mathcal{COM}$  permet d'obtenir (1.27). ■

### Simplifications sur la convolution de $\mathcal{Z}_2$ par la comatrice

Partant de la remarque 1.2.28, et après avoir utilisé l'écriture (1.27) pour simplifier l'expression (1.16) évaluée en  $(t_0, X_0)$ , la comatrice de Maxwell se décompose sous la forme d'une somme de deux opérateurs  $\mathcal{COM}_i = \mathcal{A}_i + \mathcal{B}_i$ , de la manière suivante :

- un opérateur  $\mathcal{B}_i$  faisant apparaître les dérivées tangentes au cône de propagation centré en  $X_0$ , soit des dérivées selon  $\sigma$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i &= \frac{\sqrt{1-p_i^2}}{J} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \left( \begin{array}{cc} 0 & -\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 & 0 \end{array} \right) \right) \\ &+ \frac{\sqrt{1-p_i^2}}{J} \frac{\partial^2}{\partial \eta \sigma} \left( \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_6 \right) + \frac{\sqrt{1-p_i^2}}{J} \frac{\partial^2}{\partial \eta \sigma} \left( \mathbf{n}_i \times \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \mathbb{I}_6 \right) \\ &+ \frac{1}{J} \frac{\partial^2}{\partial \tau \sigma} \left( \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \mathbb{I}_6 \right) + \frac{1}{J} \frac{\partial^2}{\partial \tau \sigma} \left( \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \mathbb{I}_6 \right) \\ &+ \frac{1-p_i^2}{J^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \frac{\partial}{\partial \sigma} \mathbb{I}_6 \right) + \frac{\sqrt{1-p_i^2}}{J^2 d_i} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \mathbb{I}_6 \right), \end{aligned}$$

où  $\mathbb{I}_3$  représente l'opérateur identité de  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , et  $\mathbb{I}_6$  celui de  $(L^2(\mathbb{R}^3))^2$ ,

- un opérateur  $\mathcal{A}_i$  comportant les termes de dérivation suivant le support décalé de  $\mathcal{Z}_2$  (i.e. les dérivations par rapport aux autres coordonnées :  $\tau_i$ ,  $\eta_i$  et  $t$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i &= \frac{1}{\sqrt{1-p_i^2} J} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( J \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \left( \begin{array}{cc} 0 & -\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 & 0 \end{array} \right) \right) + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \mathbf{n}_i \times \left( \begin{array}{cc} 0 & -\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 & 0 \end{array} \right) \right) \\ &+ \frac{1}{(1-p_i^2) J} \frac{\partial^2}{\partial \tau \tau} \left( J \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \mathbb{I}_6 \right) + \frac{1}{J} \frac{\partial^2}{\partial \eta \eta} (J \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_6) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1-p_i^2} J} \frac{\partial^2}{\partial \eta \tau} \left( J \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_6 \right) + \frac{1}{\sqrt{1-p_i^2} J} \frac{\partial^2}{\partial \eta \tau} \left( J \mathbf{n}_i \times \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \mathbb{I}_6 \right) \\ &- \frac{1}{J(1-p_i^2) d_i} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{J}{1+\tau_i d_i^{-1}} \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \mathbb{I}_6 \right). \end{aligned}$$

**Remarque 1.2.31** Dans les écritures respectives de  $\mathcal{A}_i$  et  $\mathcal{B}_i$ , le terme  $1/J$  est toujours mis en évidence devant les dérivations, ces dernières englobants tous les autres termes (produits vectoriels et facteurs multiplicatifs). La motivation d'une telle factorisation est de pouvoir dans la suite faire passer les dérivées partielles, présentes dans la convolution (1.7), de ces termes sur  $\mathcal{Z}_2$ . Le facteur  $1/J$  permettra alors d'effectuer la simplification par le jacobien du changement de variables sous les signes sommes.

La séparation du terme  $(\tilde{E}_i, \tilde{H}_i)$  de (1.16) en deux parties, en se servant des opérateurs  $\mathcal{A}_i$  et  $\mathcal{B}_i$ , donne alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{E}_i \\ \tilde{H}_i \end{pmatrix} (t_0, X_0) &= \int_{(s,Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3} \mathcal{Z}_2(t_0 - s, X_0 - Y) \mathcal{A}_i \int_0^s \begin{pmatrix} f_E^\varepsilon \\ f_H^\varepsilon \end{pmatrix} (., Y) ds dY \\ &+ \int_{(s,Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3} \mathcal{Z}_2(t_0 - s, X_0 - Y) \mathcal{B}_i \int_0^s \begin{pmatrix} f_E^\varepsilon \\ f_H^\varepsilon \end{pmatrix} (., Y) ds dY. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Afin d'évaluer le second terme, qui ne comporte que des dérivations de la forme  $\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \sigma} f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i)$ , on établit le résultat suivant :

**Lemme 1.2.32** Soient  $\gamma$  l'application de  $C^\infty(\mathbb{R}^4)$  définie par  $\gamma : (t, X) \mapsto (t_0 - t, X_0 - X)$ , et  $\Omega_\lambda$  le sous-domaine de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  défini par

$$\Omega_\lambda = \{(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) \in ]t_0 + \lambda, +\infty[ \times [-d_i + \lambda, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R}\}$$

pour  $\lambda > 0$  quelconque donné. Alors, pour toute fonction régulière  $f$  telle que  $\text{Supp} f \subset \Omega_\lambda$ , on a

$$\int (\mathcal{Z}_2 \circ \gamma)(t, X) \frac{\partial}{\partial \sigma_i} f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i = 0.$$

**Preuve.** Soit  $f$  telle que  $\text{Supp} f \subset \Omega_\lambda$ . On a alors

$$\begin{aligned} & \int (\mathcal{Z}_2 \circ \gamma)(t, X) \frac{\partial}{\partial \sigma} f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i \\ &= \int (\mathcal{Z}_2 \circ \gamma)(t, X) \left[ \int \frac{\partial}{\partial \sigma} (f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i)) d\sigma_i \right] dt d\tau_i d\eta_i, \end{aligned}$$

car  $\mathcal{Z}_2 \circ \gamma(t, X)$  ne dépend pas de  $\sigma_i$  d'après la remarque 1.2.28. Enfin, comme  $f$  est régulière, on a  $\int_{\sigma \in [0, 2\pi]} \frac{\partial}{\partial \sigma} f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) d\sigma_i = 0$ . ■

Comme  $X_0 \notin \mathcal{F}_i$  il est toujours possible de trouver un  $\lambda$  strictement positif (choisi suffisamment petit) tel que les fonctions  $f_E^\varepsilon$  et  $f_H^\varepsilon$  vérifient les hypothèses  $\text{Supp}(f_E^\varepsilon) \subset \Omega_\lambda$  et  $\text{Supp}(f_H^\varepsilon) \subset \Omega_\lambda$ . Le lemme 1.2.32 permet alors d'annuler le terme  $\mathcal{B}_i$  dans la décomposition de la comatrice.

Il ne reste plus qu'à évaluer la partie  $\mathcal{A}_i$  de la décomposition. Pour cela on va établir deux lemmes techniques permettant de calculer les résultats de ces dérivations.

**Lemme 1.2.33** Soient  $\lambda > 0$  assez petit,  $\gamma$  la fonction et  $\Omega_\lambda$  l'ensemble définis dans le lemme 1.2.32, alors dans  $D'(\Omega_\lambda)$

$$(\mathcal{Z}_2 *_{(t,X)} (Y_t \otimes \delta_X)) \circ \gamma(t, X) = \frac{Y(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)},$$

avec  $\alpha(\tau_i, \eta_i) = d_i \sqrt{1 + 2(1 - p_i^2) \frac{\tau_i}{d_i} + (1 - p_i^2) \frac{\tau_i^2}{d_i^2} + 2p_i \frac{\eta_i}{d_i} + \frac{\eta_i^2}{d_i^2}}$ , et où  $Y_t$  est la fonction de Heaviside de l'ensemble  $\{t > 0\}$ .

**Preuve.** Soit  $f \in D'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0)\})$ , alors

$$(\mathcal{Z}_2 *_{(t,X)} (Y_t \otimes \delta_X), f) = \int \frac{\delta_{s-|X|}}{4\pi|X|} Y(t) f(t+s, X) ds dt dX = \int \frac{Y(t-|X|)}{4\pi|X|} f(t, X) ds dX,$$

d'où  $\mathcal{Z}_2 *_{(t,X)} (Y_{t_0} \otimes \delta_{X_0}) = \frac{Y(t-|X|)}{4\pi|X|}$  dans  $D'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0)\})$ . Le résultat s'obtient finalement en appliquant la translation  $\gamma$ ,  $D'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0)\})$  devenant  $D'(\Omega_\lambda)$ , et en passant dans le repère local où  $|X - X_0| = \alpha(\tau_i, \eta_i)$ . ■

**Lemme 1.2.34** Soient  $\lambda > 0$  assez petit, et  $\Omega_\lambda$  l'ensemble défini dans le lemme 1.2.32. Soit  $f$  une fonction régulière à support compact telle que  $\text{Supp} f \subset \Omega_\lambda$ , alors on a les relations de dérivation suivantes

1.  $\forall \mu \in \{\tau, \eta\}$ ,

$$\int \frac{Y(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} \frac{\partial}{\partial \mu} (f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i)) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i = \int \left[ \frac{Y(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)^2} + \frac{\delta(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} \right] \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i,$$

2.  $\forall (\mu, \nu) \in \{\tau, \eta\}^2$ ,

$$\begin{aligned} & \int \frac{Y(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} \frac{\partial^2}{\partial \mu \nu} (f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i)) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i = \\ & \int \left[ -\frac{\partial^2 \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \nu \mu} \frac{Y(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)^2} + 2 \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \nu} \frac{Y(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)^3} \right. \\ & \quad - \frac{\partial^2 \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \nu \mu} \frac{\delta(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} + 2 \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \nu} \frac{\delta(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)^2} \\ & \quad \left. + \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \nu} \frac{\delta(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} \right] \mathbb{D}_t f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i, \end{aligned}$$

où  $\mathbb{D}_t$  est l'opérateur de dérivation en  $t$ .

**Preuve.**

1. La première relation s'obtient par intégration par parties, en remarquant que

$$\int \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \int \frac{Y(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt \right) d\tau_i d\sigma_i d\eta_i = 0,$$

car  $f$  est une fonction régulière à support compact, et que son support ne touche pas les bords du domaine d'intégration en  $(\tau_i, \eta_i)$ . On a ainsi

$$\begin{aligned} 0 = & - \int \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} f(t_0 - \alpha(\tau_i, \eta_i), \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i \\ & - \int \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} \frac{Y(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha^2(\tau_i, \eta_i)} f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i \\ & + \int \frac{Y(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} \frac{\partial}{\partial \mu} f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i. \end{aligned}$$

2. Pour démontrer la seconde relation, il faut utiliser  $i$ . avec la fonction  $\frac{\partial}{\partial \nu} (f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i))$ , puis que

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} \frac{\delta(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} \frac{\partial}{\partial \nu} (f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i)) dt = \\ & \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} \frac{1}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} f(t_0 - \alpha(\tau_i, \eta_i), \tau_i, \sigma_i, \eta_i) \right) \\ & + \int \left[ \frac{\delta(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial t} f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} \frac{1}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} \right) \delta(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i)) f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) \right] dt. \end{aligned}$$

Enfin, comme  $f$  est une fonction régulière à support compact, et que  $X_0 \notin \text{Supp} f$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} \frac{1}{4\pi \alpha(\tau_i, \eta_i)} f(t_0 - \alpha(\tau_i, \eta_i), \tau_i, \sigma_i, \eta_i) \right) d\tau_i d\sigma_i d\eta_i = 0,$$

d'où le résultat en reportant dans l'expression obtenue à partir du  $i$ .

■

**Remarque 1.2.35** *Comme dans la suite  $(\tau_i, \eta_i, \sigma_i) \in \text{Supp} f_{E,H}^\varepsilon$  et  $\text{Supp} f_{E,H}^\varepsilon \cap \mathcal{F}_i = \emptyset$ , on en déduit donc que  $\alpha$  est  $C^\infty$  sur  $\text{Supp} f_{E,H}^\varepsilon$ , et donc toutes les dérivées successives de  $\alpha(\tau_i, \eta_i)$  présentent dans les lemmes 1.2.32 et 1.2.34 sont définies.*

Les deux formules précédentes utilisent complètement le caractère mixte espace-temps de l'écriture de la résolvante des équations de Maxwell choisie. En effet, elles permettent, en faisant porter les dérivations spatiales des fonctions second membres sur  $\mathcal{Z}_2$ , de transformer des dérivations spatiales (suivant  $\tau_i$  ou  $\eta_i$ ;  $\sigma_i$  étant tangent à  $\mathcal{Z}_2$  il n'intervient donc pas) en des combinaisons de dérivations temporelles de ces fonctions. La formule intégrale complète, et *a fortiori* la formule approchée, sera ainsi donnée par combinaisons de termes ne faisant plus intervenir de dérivées selon les coordonnées locales.

### Écriture de la formule intégrale complète

A partir des expressions des différents termes (comatrice, convolution par le noyau de l'équation des ondes,...) obtenues précédemment, ainsi que des lemmes 1.2.32, 1.2.33 et 1.2.34, nous pouvons réécrire la formule intégrale simplifiée dans le nouveau système de coordonnées. Toutefois, afin d'alléger le développement des termes de (1.16), après utilisation des lemmes 1.2.32, 1.2.33 et 1.2.34, on pose préalablement certaines notations résumées dans la définition suivante

**Définition 1.2.36** *Pour tout  $\lambda$  strictement positif assez petit, on introduit les quantités :*

1.  $\mathcal{K}_\mu^1$  et  $\mathcal{K}_{\mu,\nu}^2$  : fonctions de  $]-d_i + \lambda, +\infty[ \times \mathbb{R}$  à valeurs réelles, indicées par  $(\mu, \nu) \in \{\tau, \eta\}^2$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\mu^1 & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu}, \\ \mathcal{K}_{\mu,\nu}^2 & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{\partial^2 \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \nu \partial \mu}, \end{aligned}$$

2.  $\mathcal{R}_\mu^1, \mathcal{R}_{\mu,\nu}^{1,1}, \mathcal{R}_{\mu,\nu}^2$  : opérateurs indicés par  $(\mu, \nu) \in \{\tau, \eta\}^2$ , définis sur  $]-d_i + \lambda, +\infty[ \times \mathbb{R}$  de domaine  $\mathbb{C}^6$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\mu^1 & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{1}{4\pi} \mathcal{K}_\mu^1(\tau_i, \eta_i) \vec{\mu} \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{R}_{\mu,\nu}^{1,1} & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{1}{4\pi} \mathcal{K}_\mu^1(\tau_i, \eta_i) \mathcal{K}_\nu^1(\tau_i, \eta_i) \vec{\mu} \times \vec{\nu} \times \mathbb{I}_6, \\ \mathcal{R}_{\mu,\nu}^2 & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{1}{4\pi} \mathcal{K}_{\mu,\nu}^2(\tau_i, \eta_i) \vec{\mu} \times \vec{\nu} \times \mathbb{I}_6, \end{aligned}$$

$$\text{avec } \vec{\mu} \quad (\text{resp. } \vec{\nu}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{r}_i}{1 - p_i^2} \text{ si } \mu = \tau \quad (\text{resp. } \nu = \tau), \\ \mathbf{n}_i \text{ si } \mu = \eta \quad (\text{resp. } \nu = \eta). \end{cases}$$

3.  $\mathcal{R}_{\sigma,\sigma}^1$  : opérateur défini sur  $(]-d_i + \lambda, +\infty[ \times \mathbb{R}) \times \mathbb{C}^6$ .

$$\mathcal{R}_{\sigma,\sigma}^1 : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{1}{4\pi(1-p_i^2)} \mathcal{K}_\tau^1(\tau_i, \eta_i) \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \mathbb{I}_6.$$

Par utilisation des lemmes 1.2.32 et 1.2.34, toutes les dérivations spatiales sont remplacées par des combinaisons de termes, donnés par les définitions précédentes, et de dérivées en  $t$ . Il est alors possible de permuter l'intégration en  $Jdt d\tau d\sigma d\eta$  et la convolution par  $\varphi_i^\varepsilon$ . Finalement, par passage à la limite en  $\varepsilon \rightarrow 0$  et par la proposition 1.2.14, on trouve une écriture simplifiée du terme  $(\tilde{E}_i, \tilde{H}_i)$  de la formule intégrale exacte, résumé dans la proposition suivante :

**Proposition 1.2.37** *En utilisant les notations de la définition 1.2.36, et si les fonctions  $E$  et  $H$  vérifient l'hypothèse (1.25), alors le terme  $(\tilde{E}_i, \tilde{H}_i)$  de la décomposition (1.15), dans le cas  $\mathbf{t}_i \neq \pm \mathbf{n}_i$ , est donné, pour tout  $X$  en dehors du polyèdre de surface admissible  $\mathcal{F}$ , par :*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{E}_i \\ \tilde{H}_i \end{pmatrix} (t_0, X_0) &= \int_{\mathcal{F}_i} \frac{1}{\alpha(\tau_i, \eta_i)} \left[ \left\{ \sum_{\mu \in \{\tau, \eta\}} \mathcal{R}_\mu^1(\tau_i, \eta_i) + \sum_{(\mu, \nu) \in \{\tau, \eta\}^2} \mathcal{R}_{\mu, \nu}^{1,1}(\tau_i, \eta_i) \right\} \mathbb{D}_t \right. & (1.30) \\ &+ \left\{ \sum_{\mu \in \{\tau, \eta\}} \frac{1}{\alpha(\tau_i, \eta_i)} \mathcal{R}_\mu^1(\tau_i, \eta_i) + \sum_{(\mu, \nu) \in \{\tau, \eta\}^2} \left( -\mathcal{R}_{\mu, \nu}^2(\tau_i, \eta_i) + \frac{2}{\alpha(\tau_i, \eta_i)} \mathcal{R}_{\mu, \nu}^{1,1}(\tau_i, \eta_i) \right) \right\} \\ &+ \left\{ \sum_{(\mu, \nu) \in \{\tau, \eta\}^2} \left( -\frac{1}{\alpha(\tau_i, \eta_i)} \mathcal{R}_{\mu, \nu}^2(\tau_i, \eta_i) + \frac{2}{\alpha^2(\tau_i, \eta_i)} \mathcal{R}_{\mu, \nu}^{1,1}(\tau_i, \eta_i) \right) \right\} \mathbb{I}_t - \frac{\mathcal{R}_{\sigma, \sigma}^1(\tau_i, \eta_i)}{(|X_i - X_0| + \tau_i)} \\ &\left. - \frac{\mathcal{R}_{\sigma, \sigma}^1(\tau_i, \eta_i)}{(|X_i - X_0| + \tau_i)\alpha(\tau_i, \eta_i)} \mathbb{I}_t \right] \begin{pmatrix} (\mathbf{n}_i \times H)\delta_{\mathcal{F}_i} \\ -(\mathbf{n}_i \times E)\delta_{\mathcal{F}_i} \end{pmatrix} (t_0 - \alpha(\tau_i, \eta_i), X) Jd\tau_i d\sigma_i d\eta_i, \end{aligned}$$

où  $\mathbb{D}_t$  et  $\mathbb{I}_t$  sont respectivement les opérateurs de dérivation et d'intégration en  $t$ .

**Remarque 1.2.38** *Le caractère ponctuel de la formule intégrale (1.30) provient de la régularité supposée dans l'hypothèse (1.25).*

### Approximation de la formule intégrale

L'expression (1.30) propose une réécriture largement simplifiée dans une base spécifique de la résolvante des équations de Maxwell avec second membre évaluée en  $(t_0, X_0)$ . Toutefois, les caractères récursifs et non-locaux espace-temps des termes qui la composent ne permettent pas *a priori* une exploitation numérique suffisamment intéressante. Pour alléger celle-ci, une écriture approchée et ne faisant plus intervenir le repère local est proposée :

**Proposition 1.2.39** *Si les fonctions  $E$  et  $H$  vérifient l'hypothèse (1.25), et si elles vérifient de plus*

$$\mathbf{n}_i \times \partial_t E(t \leq 0, \cdot) = \mathbf{n}_i \times E(t \leq 0, \cdot) = 0 \text{ et } \mathbf{n}_i \times \partial_t H(t \leq 0, \cdot) = \mathbf{n}_i \times H(t \leq 0, \cdot) = 0. \quad (1.31)$$

*alors sous l'hypothèse  $\mathbf{t}_i \neq \pm \mathbf{n}_i$ , le terme  $(\tilde{E}_i, \tilde{H}_i)$  de la décomposition (1.15) vérifie, pour tout*

point  $(t_0, X_0) \in \mathbb{R}^+ \times \bar{\mathcal{V}}^c$ , vérifie

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{E}_i \\ \tilde{H}_i \end{pmatrix} (t_0, X_0) &= \int_{\mathcal{F}_i} \left[ \frac{1}{4\pi d_i} \left\{ \mathbf{t}_i^0 \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{t}_i^0 \times \mathbf{t}_i^0 \times \mathbb{I}_6 \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times \partial_t H \\ -(\mathbf{n}_i \times \partial_t E) \end{pmatrix} \right] (t_0 - d_i, \cdot) \\ &+ \frac{1}{4\pi d_i^2} \left\{ \mathbf{t}_i^0 \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} + 3\mathbf{t}_i^0 \times \mathbf{t}_i^0 \times \mathbb{I}_6 - 2\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_6 \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times H \\ -(\mathbf{n}_i \times E) \end{pmatrix} (t_0 - d_i, \cdot) \\ &+ \frac{1}{4\pi d_i^3} \int_0^{t_0 - d_i} \left\{ 3\mathbf{t}_i^0 \times \mathbf{t}_i^0 \times \mathbb{I}_6 - 2\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_6 \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times H \\ -(\mathbf{n}_i \times E) \end{pmatrix} (s, \cdot) ds \Big] dS_i + O\left(\frac{\delta_i}{d_i}\right), \end{aligned} \quad (1.32)$$

où,  $dS_i$  est l'élément de surface de  $\mathcal{F}_i$ ,  $\mathbf{n}_i$  la normale unitaire à  $\mathcal{F}_i$  sortant de  $\mathcal{V}$ ,  $d_i$  est la distance d'un point  $X_i$  quelconque de  $\mathcal{F}_i$  à  $X$ ,  $\mathbf{t}_i^0 = (d_i)^{-1} \overrightarrow{X_i X}$ , et  $\delta_i$  est le diamètre de  $\mathcal{F}_i$ .

**Remarque 1.2.40** L'hypothèse (1.31) est trivialement vérifiée dans le cas d'un étude causale. En effet, si les sources sont localisées dans l'intérieur du polyèdre  $\mathcal{V}$  délimité par  $\cup_i \mathcal{F}_i$ , alors on a effectivement  $\mathbf{n}_i \times \partial_t^n H(t \leq 0, \cdot) = \mathbf{n}_i \times \partial_t^n E(t \leq 0, \cdot) = 0$ .

**Preuve.** La proposition 1.2.39 s'obtient, à partir de (1.30), en considérant que sur chaque face  $\mathcal{F}_i$ ,  $\tau_i$  et  $d_i$  vérifient une relation de la forme  $\tau_i d_i^{-1} \ll 1$ . Un développement limité de l'intégrande de la formule (1.30) en  $\tau_i d_i^{-1}$  est alors effectué à l'ordre 0.

Dans un soucis de mise en évidence des homogénéités en  $\tau_i/d_i$  et  $d_i$ , notons  $\tilde{\alpha}$  la fonction

$$\tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i) = \sqrt{1 + 2(1 - p_i^2)\gamma + (1 - p_i^2)\gamma + 2p_i\eta/d_i + \eta_i^2/d_i^2}.$$

À partir des termes de la définition 1.2.36 introduisons les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}_{\tau_i}^1(\gamma, \eta_i) &= \frac{1 - p_i^2 + (1 - p_i^2)\gamma}{\tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i)/d_i}, \\ \tilde{\mathcal{K}}_{\eta_i}^1(\gamma, \eta_i) &= \frac{p_i + \eta_i/d_i}{\tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i)/d_i}, \\ \tilde{\mathcal{K}}_{\tau_i, \tau_i}^2(\gamma, \eta_i) &= \frac{1 - p_i^2}{\tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i)} - \frac{(1 - p_i^2 + (1 - p_i^2)\gamma)^2}{\tilde{\alpha}^3(\gamma, \eta_i)/d_i^2}, \\ \tilde{\mathcal{K}}_{\eta_i, \eta_i}^2(\gamma, \eta_i) &= \frac{1}{\tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i)} - \frac{(p_i + \eta_i/d_i)^2}{\tilde{\alpha}^3(\gamma, \eta_i)/d_i^2}, \\ \tilde{\mathcal{K}}_{\tau_i, \eta_i}^2(\gamma, \eta_i) &= \tilde{\mathcal{K}}_{\eta_i, \tau_i}^2(\gamma, \eta_i) = -\frac{(1 - p_i^2 + (1 - p_i^2)\gamma)(p_i + \eta_i/d_i)}{\tilde{\alpha}^3(\gamma, \eta_i)/d_i^2}. \end{aligned}$$

Nous avons alors pour tout  $(\mu, \nu) \in \{\tau_i, \eta_i\}^2$  :

$$\mathcal{K}_{\mu}^1(\tau_i, \eta_i) = \tilde{\mathcal{K}}_{\mu}^1(\tau_i/d_i, \eta_i) \text{ et } \mathcal{K}_{\mu, \nu}^2(\tau_i, \eta_i) = \tilde{\mathcal{K}}_{\mu, \nu}^2(\tau_i/d_i, \eta_i).$$

Le développement limité en  $\gamma = 0$  à l'ordre 0, avec reste intégral, de chacun des termes de (1.30) peut alors être explicité. Pour cela on considère le développement limité des parties scalaires de (1.30). On obtient donc des termes de la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\alpha}^n}(\gamma, \eta_i) \tilde{\mathcal{K}}(\gamma, \eta_i) f(t - \tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i)) &= \frac{1}{\tilde{\alpha}^n}(0, \eta_i) \tilde{\mathcal{K}}(0, \eta_i) f(t - \tilde{\alpha}(0, \eta_i)) \\ &+ \int_0^\gamma \left[ \frac{1 - p_i^2 + (1 - p_i^2)s}{\tilde{\alpha}^{n+1}(s, \eta_i)/d_i^2} \tilde{\mathcal{K}}(s, \eta_i) f'(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) + \partial_s \left( \frac{1}{\tilde{\alpha}^n}(s, \eta_i) \tilde{\mathcal{K}}(s, \eta_i) \right) f(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) \right] ds, \end{aligned} \quad (1.33)$$

où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma = \tau_i/d_i$ ,  $\tilde{\mathcal{K}}(\gamma, \eta_i)$  est une des fonctions précédentes, et enfin  $f$  est une coordonnée de  $\partial_t E$ ,  $\partial_t H$ ,  $E$ ,  $H$ ,  $\int_t E$  ou encore  $\int_t H$ . La première partie du membre de droite correspond à l'expression avant projection sur la surface  $\mathcal{F}_i$  de la formule approchée. Nous allons donc évaluer successivement les restes intégraux des développements limités de tous ces termes.

1. termes en  $\tilde{\alpha}^{-1}(\gamma, \eta_i) \tilde{K}_\mu^1 f(t - \tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i))$ ,  $\mu \in \{\tau_i, \eta_i\}$  : tous ces termes admettent une écriture sous la forme

$$+ \int_0^\gamma \left[ \frac{A_\mu(s)}{\tilde{\alpha}^3(s, \eta_i)/d_i^3} f'(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) + \frac{B_\mu(s)}{\tilde{\alpha}^4(s, \eta_i)/d_i^3} f(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) \right] ds. \quad (1.34)$$

avec  $A_\mu$  et  $B_\mu$  polynômes en  $s$  :

$$\begin{cases} A_{\tau_i}(s) = (1 - p_i^2 + (1 - p_i)^2 s)^2 \\ B_{\tau_i}(s) = (1 - p_i^2)(p_i^2 - (1 - p_i^2)(s + s^2 + 1) + p_i \eta_i/d_i + \eta_i^2/d_i^2), \\ \\ A_{\eta_i}(s) = (1 - p_i^2)(p_i + \eta_i/d_i) \\ B_{\eta_i}(s) = (1 - p_i^2)(p_i + \eta_i/d_i)(1 + s). \end{cases}$$

Comme  $p_i \in [-1, 1]$ , le coefficient de  $f'$  dans (1.34) est alors borné pour  $\eta_i$  proche de 0 par une constante  $C$  indépendante de  $d_i$  et  $p_i$ . la première moitié de (1.34) peut donc être majorée par  $C \sup_{r \in [0, t]} |f'(r)|$ . Pour la seconde moitié de (1.34), en utilisant l'hypothèse de causalité

$$f(t \leq 0) = 0, \quad (1.35)$$

il vient

$$\frac{B_\mu(s)}{\tilde{\alpha}^4(s, \eta_i)/d_i^3} f(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) = - \int_s^M \frac{P_\mu(s, s')}{\tilde{\alpha}^4(s, \eta_i) \tilde{\alpha}(s', \eta_i)/d_i^5} f'(t - \tilde{\alpha}(s', \eta_i)) ds',$$

où  $M > 0$  est choisi tel que  $t - \alpha_i(M, \eta_i) < 0$  (donc  $M \rightarrow \infty$  pour  $t \rightarrow \infty$ ), et  $P_\mu$  est un polynôme en  $(s, s')$  :

$$P_{\tau_i}(s, s') = -(1 - p_i^2)(1 + s')(p_i^2 - (1 - p_i^2)(s + 1)^2),$$

$$P_{\eta_i}(s, s') = 2(1 - p_i^2)^2(1 + s)(1 + s')(p_i + \eta_i/d_i).$$

Comme précédemment, le terme  $1/(\tilde{\alpha}^4(s, \eta_i)/d_i^4)$  est alors borné pour  $s > 0$ , par une constante  $C$  pour  $\eta_i \rightarrow 0$ . La seconde partie de (1.34) est donc bornée par

$$C s \sup_{s' \in [s, M]} |P_\mu(s, s')|/(\tilde{\alpha}(s', \eta_i)/d_i) \sup_{r \in [0, t]} |f'(r)|.$$

Enfin, le polynôme  $P_\mu(s, s')$  étant d'ordre 1 en  $s'$ , et  $\tilde{\alpha}(s', \eta_i)/d_i$  étant équivalent à  $s'$  pour  $s' \rightarrow \infty$ , le rapport  $|P_\mu(s, s')|/(\tilde{\alpha}(s', \eta_i)/d_i)$  est donc borné pour  $s' \in [s, M]$ . C'est un grand  $O(1)$  pour  $s$  au voisinage de 0 et  $s' \in [s, M]$ , le terme  $C(1 + s \sup_{s' \in [s, M]} |P_\mu(s, s')|/(\tilde{\alpha}(s', \eta_i)/d_i))$  est donc équivalent à  $C$  au voisinage de  $s = 0$ . On en déduit donc après intégration que le reste intégral de  $\tilde{\alpha}^{-1}(\gamma, \eta_i) \tilde{K}_\mu^1 f(t - \tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i))$  est majoré par

$$\leq C \gamma \sup_{r \in [0, t]} |f'(r)|. \quad (1.36)$$

2. termes en  $\tilde{\alpha}^{-1}(\gamma, \eta_i) \tilde{K}_\mu^1 f(t - \tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i)) \tilde{K}_\nu^1 f(t - \tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i))$ ,  $(\mu, \nu) \in \{\tau_i, \eta_i\}^2$  : tous ces termes s'écrivent sous la forme

$$+ \int_0^\gamma \left[ \frac{A_{\mu, \nu}}{\tilde{\alpha}^4(s, \eta_i)/d_i^4} f'(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) + \frac{B_{\mu, \nu}}{\tilde{\alpha}^5(s, \eta_i)/d_i^4} f(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) \right] ds. \quad (1.37)$$

avec  $A_{\mu, \nu}$  et  $B_{\mu, \nu}$  définis par :

$$\begin{cases} A_{\tau_i, \tau_i}(s) = (1 - p_i^2)^3 (1 + s)^3 \\ B_{\tau_i, \tau_i}(s) = (1 - p_i^2)^2 (1 + s) (p_i^2 - (1 - p_i^2)(1 + s)^2 + 4p_i \eta_i / d_i + 2\eta_i^2 / d_i^2) \end{cases},$$

$$\begin{cases} A_{\eta_i, \eta_i}(s) = (1 - p_i^2)(1 + s)(p_i + \eta_i / d_i)^2 \\ B_{\eta_i, \eta_i}(s) = 3(1 - p_i^2)^2 (1 + s)(p_i + \eta_i / d_i), \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{\tau_i, \eta_i}(s) = (1 - p_i^2)^2 (1 + s)^2 (p_i + \eta_i / d_i) \\ B_{\tau_i, \eta_i}(s) = (1 - p_i^2)(p_i + \eta_i / d_i) ((p_i + \eta_i / d_i)^2 - 2(1 - p_i^2)(1 + s)^2). \end{cases}$$

En procédant toujours comme précédemment, on majore le premier terme de (1.37) par  $C \sup_{r \in [0, t]} |f'(r)|$ , et, par utilisation de l'hypothèse de causalité (1.35), le second terme est réécrit sous la forme

$$\frac{B_{\mu, \nu}}{\tilde{\alpha}^5(s, \eta_i)/d_i^4} f(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) = - \int_s^M \frac{P_{\mu, \nu}(s, s')}{\tilde{\alpha}^5(s, \eta_i) \tilde{\alpha}(s', \eta_i)/d_i^6} f'(t - \tilde{\alpha}(s', \eta_i)) ds',$$

où  $P_{\mu, \nu}$  est le polynôme en  $(s, s')$  :

$$\begin{aligned} P_{\tau_i, \tau_i}(s, s') &= -(1 - p_i^2)^3 (1 + s)(1 + s')(2(p_i + \eta_i / d_i)^2 - (1 - p_i^2)(1 + s)^2), \\ P_{\eta_i, \eta_i}(s, s') &= 3(1 - p_i^2)^2 (1 + s)(1 + s')(p_i + \eta_i / d_i)^2, \\ P_{\tau_i, \tau_i}(s, s') &= -(1 - p_i^2)^2 (p_i + \eta_i / d_i)(1 + s') ((p_i + \eta_i / d_i)^2 - 2(1 - p_i^2)(1 + s)^2). \end{aligned}$$

Il se majore alors par  $C s \sup_{s' \in [s, M]} |P_\mu(s, s')| / (\tilde{\alpha}(s', \eta_i)/d_i) \sup_{r \in [0, t]} |f'(r)|$ , où le rapport  $|P_\mu(s, s')| / (\tilde{\alpha}(s', \eta_i)/d_i)$  est borné pour  $s$  proche de 0 et  $s' > 0$ . Finalement, le terme (1.37) est à son tour majoré par (1.36).

3. termes en  $\tilde{\alpha}^{-2}(\gamma, \eta_i) \tilde{K}_\mu^1 f(t - \tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i))$ ,  $\mu \in \{\tau_i, \eta_i\}$  : ces termes se mettent sous la forme

$$+ \int_0^\gamma \left[ \frac{A_\mu(s)}{\tilde{\alpha}^4(s, \eta_i)/d_i^3} f'(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) + \frac{B_\mu(s)}{\tilde{\alpha}^5(s, \eta_i)/d_i^3} f(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) \right] ds. \quad (1.38)$$

avec  $A_\mu$  et  $B_\mu$  polynômes en  $s$  :

$$\begin{cases} A_{\tau_i}(s) = -(1 - p_i^2)^2 (1 + s)^2 \\ B_{\tau_i}(s) = (1 - p_i^2) ((p_i + \eta_i / d_i)^2 - 2(1 - p_i^2)(1 + s)^2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{\eta_i}(s) = -(1 - p_i^2)(p_i + \eta_i / d_i)(1 + s) \\ B_{\eta_i}(s) = -3(1 - p_i^2)(p_i + \eta_i / d_i)(1 + s). \end{cases}$$

On traite ici le coefficient de  $f'$  dans (1.38), comme le second terme de (1.34). En introduisant l'hypothèse de causalité

$$f(t \leq 0) = f'(t \leq 0) = 0, \quad (1.39)$$

on a ainsi

$$\frac{A_\mu(s)}{\tilde{\alpha}^4(s, \eta_i)/d_i^3} f'(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) = - \int_s^M \frac{P_\mu(s, s')}{\tilde{\alpha}^4(s, \eta_i) \tilde{\alpha}(s', \eta_i)/d_i^5} f''(t - \tilde{\alpha}(s', \eta_i)) ds',$$

où  $P_\mu$  est un polynôme en  $s$  et  $s'$  :

$$P_{\tau_i}(s, s') = -(1 - p_i^2)^2(1 + s)(1 + s'),$$

$$P_{\eta_i}(s, s') = -(1 - p_i^2)^2(1 + s')(p_i + \eta_i/d_i).$$

Comme précédemment, le terme  $1/(\tilde{\alpha}^4(s, \eta_i)/d_i^4)$  est alors borné en  $s > 0$  proche de 0 par une constante  $C$  pour  $\eta_i \rightarrow 0$ . La première partie de (1.38) est donc bornée par

$$C s \sup_{s' \in [s, M]} |P_\mu(s, s')| / (\tilde{\alpha}(s', \eta_i)/d_i) \sup_{r \in [0, t]} |f''(r)|,$$

où  $P$  est de degré 1 en  $s'$ . Pour le second terme de (1.38) on itère deux fois le procédé précédent en utilisant (1.39), obtenant alors

$$\begin{aligned} \frac{B_\mu(s)}{\tilde{\alpha}^5(s, \eta_i)/d_i^3} f(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) &= - \int_s^M \frac{\tilde{Q}_\mu(s, s')}{\tilde{\alpha}^5(s, \eta_i)\tilde{\alpha}(s', \eta_i)/d_i^2} f'(t - \tilde{\alpha}(s', \eta_i)) ds' \\ &= \int_s^M \int_{s'}^M \frac{Q_\mu(s, s', s'')}{\tilde{\alpha}^5(s, \eta_i)\tilde{\alpha}(s', \eta_i)\tilde{\alpha}(s'', \eta_i)/d_i^2} f''(t - \tilde{\alpha}(s'', \eta_i)) ds'' ds', \end{aligned}$$

où finalement  $Q_\mu$  est un polynôme en  $(s, s', s'')$  :

$$Q_{\tau_i}(s, s', s'') = (1 - p_i^2)^3(1 + s)(1 + s')(1 + s''),$$

$$Q_{\eta_i}(s, s', s'') = (1 - p_i^2)^2(1 + s')(1 + s'')(p_i + \eta_i/d_i).$$

Le rapport  $1/(\tilde{\alpha}^3(s, \eta_i)/d_i^3)$  étant borné en  $s > 0$  proche de 0 par une constante  $C$  pour  $\eta_i \rightarrow 0$ . La seconde partie de (1.38) est donc bornée par

$$C s \sup_{s' \in [s, M]} s' \sup_{s'' \in [s', M]} |Q_\mu(s, s', s'')| / (\tilde{\alpha}(s', \eta_i)\tilde{\alpha}(s'', \eta_i)/d_i^2) \sup_{r \in [0, t]} |f''(r)|,$$

où,  $Q_\mu$  étant de degré 1 en  $s'$  et en  $s''$ , le rapport  $|Q_\mu(s, s', s'')| / (\tilde{\alpha}(s', \eta_i)\tilde{\alpha}(s'', \eta_i)/d_i^2)$  est donc borné pour  $s'$  et  $s''$  grands, et admet une limite en 0. Il est alors borné pour  $s$  proche de 0, et pour tout  $s'$  et  $s''$ . On en déduit donc après intégration que le reste intégral de  $\tilde{\alpha}^{-2}(\gamma, \eta_i)\tilde{K}_\mu^1 f(t - \tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i))$  est majoré par

$$\leq C\gamma \sup_{r \in [0, t]} |f''(r)|. \quad (1.40)$$

4. termes en  $\tilde{\alpha}^{-2}(\gamma, \eta_i)\tilde{K}_\mu^1\tilde{K}_\nu^1 f(t - \tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i))$  et  $\tilde{\alpha}^{-1}(\gamma, \eta_i)\tilde{K}_{\mu,\nu}^2 f(t - \tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i))$ ,  $(\mu, \nu) \in \{\tau_i, \eta_i\}^2$  : les restes intégraux de ces termes s'écrivent sous la forme

$$+ \int_0^\gamma \left[ \frac{A_{\mu,\nu}^i}{\tilde{\alpha}^5(s, \eta_i)/d_i^4} f'(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) + \frac{B_{\mu,\nu}^i}{\tilde{\alpha}^6(s, \eta_i)/d_i^4} f(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) \right] ds. \quad (1.41)$$

où  $A_{\mu,\nu}^i$  et  $B_{\mu,\nu}^i$ ,  $(\mu, \nu) \in \{\tau_i, \eta_i\}^2$ , désignent les coefficients obtenus

- pour  $i = 1$  par les termes  $\tilde{\alpha}^{-2}(\gamma, \eta_i)\tilde{K}_\mu^1\tilde{K}_\nu^1 f(t - \tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i))$ ,
- et pour  $i = 2$  par les termes  $\tilde{\alpha}^{-1}(\gamma, \eta_i)\tilde{K}_{\mu,\nu}^2 f(t - \tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i))$ .

Ils sont définis par :

$$\begin{cases} A_{\tau_i, \tau_i}^1(s) = -(1 - p_i^2)^3(1 + s)^3, \\ B_{\tau_i, \tau_i}^1(s) = -2(1 - p_i^2)^2(1 + s)((p_i + \eta_i/d_i)^2 - (1 - p_i^2)(1 + s)^2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{\eta_i, \eta_i}^1(s) = 4(1 - p_i^2)(1 + s)(p_i + \eta_i/d_i)^2, \\ B_{\eta_i, \eta_i}^1(s) = -(1 - p_i^2)^2(1 + s)(p_i + \eta_i/d_i)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{\tau_i, \eta_i}^1(s) = -(1 - p_i^2)(p_i + \eta_i/d_i)(1 + s)^2, \\ B_{\tau_i, \eta_i}^1(s) = -(1 - p_i^2)^2(p_i + \eta_i/d_i)((p_i + \eta_i/d_i)^2 - 3(1 - p_i^2)(1 + s)^2). \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{\tau_i, \tau_i}^2(s) = (1 - p_i^2)^2(1 + s)(p_i + \eta_i/d_i)^2, \\ B_{\tau_i, \tau_i}^2(s) = 4(1 - p_i^2)^2(1 + s)(p_i + \eta_i/d_i)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{\eta_i, \eta_i}^2(s) = (1 - p_i^2)^2(1 + s)^3, \\ B_{\eta_i, \eta_i}^2(s) = -2(1 - p_i^2)^2(1 + s)((p_i + \eta_i/d_i)^2 - (1 - p_i^2)(1 + s)^2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{\tau_i, \eta_i}^2(s) = (1 - p_i^2)^2(p_i + \eta_i/d_i)(1 + s)^2, \\ B_{\tau_i, \eta_i}^2(s) = (1 - p_i^2)^2(p_i + \eta_i/d_i)((p_i + \eta_i/d_i)^2 - 3(1 - p_i^2)(1 + s)^2). \end{cases}$$

En procédant toujours comme précédemment, par utilisation de l'hypothèse de causalité (1.39), le premier terme est récrit sous la forme

$$\frac{A_{\mu, \nu}^i(s)}{\tilde{\alpha}^5(s, \eta_i)/d_i^4} f'(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) = - \int_s^M \frac{P_{\mu, \nu}^i(s, s')}{\tilde{\alpha}^5(s, \eta_i)\tilde{\alpha}(s', \eta_i)/d_i^6} f''(t - \tilde{\alpha}(s', \eta_i)) ds',$$

où  $P_{\mu, \nu}^i$  est un polynôme en  $s$  et  $s'$  :

$$\begin{aligned} P_{\tau_i, \tau_i}^1(s, s') &= (1 - p_i^2)^4(1 + s)^3(1 + s'), \\ P_{\eta_i, \eta_i}^1(s, s') &= (1 - p_i^2)^2(1 + s)(1 + s')(p_i + \eta_i/d_i)^2, \\ P_{\tau_i, \eta_i}^1(s, s') &= -(1 - p_i^2)^3(1 + s)^2(1 + s')(p_i + \eta_i/d_i), \\ P_{\tau_i, \tau_i}^2(s, s') &= -(1 - p_i^2)^3(1 + s)(1 + s')(p_i + \eta_i/d_i)^2, \\ P_{\eta_i, \eta_i}^2(s, s') &= -(1 - p_i^2)^3(1 + s)^3(1 + s'), \\ P_{\tau_i, \eta_i}^2(s, s') &= (1 - p_i^2)^2(1 + s)^2(1 + s')(p_i + \eta_i/d_i). \end{aligned}$$

En suivant le même procédé que précédemment, on en déduit alors que ce terme est majoré par  $C s \sup_{s' \in [s, M]} |P_{\mu, \nu}^i(s, s')|/(\tilde{\alpha}(s', \eta_i)/d_i) \sup_{r \in [0, t]} |f''(r)|$ , où le rapport  $|P_{\mu, \nu}^i(s, s')|/(\tilde{\alpha}(s', \eta_i)/d_i)$  est borné en  $s'$ .

De la même manière, en utilisant (1.39), le second terme de (1.41) se récrit en

$$\frac{B_{\mu}^i(s)}{\tilde{\alpha}^6(s, \eta_i)/d_i^4} f(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) = \int_s^M \int_{s'}^M \frac{Q_{\mu, \nu}^i(s, s', s'')}{\tilde{\alpha}^6(s, \eta_i)\tilde{\alpha}(s', \eta_i)\tilde{\alpha}(s'', \eta_i)/d_i^8} f''(t - \tilde{\alpha}(s'', \eta_i)) ds'' ds',$$

où  $Q_{\mu, \nu}^i$  est le polynôme en  $(s, s', s'')$  :

$$\begin{aligned} Q_{\tau_i, \tau_i}^1(s, s', s'') &= -(1 - p_i^2)^4(1 + s)(1 + s')(1 + s'')((p_i + \eta_i/d_i)^2 - (1 - p_i^2)(1 + s)^2), \\ Q_{\eta_i, \eta_i}^1(s, s', s'') &= 4(1 - p_i^2)^3(1 + s)(1 + s')(1 + s'')(p_i + \eta_i/d_i)^2, \\ Q_{\tau_i, \tau_i}^1(s, s', s'') &= -(1 - p_i^2)^3(p_i + \eta_i/d_i)(1 + s')(1 + s'')((p_i + \eta_i/d_i)^2 - 3(1 - p_i^2)(1 + s)^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\tau_i, \tau_i}^2(s, s', s'') &= 4(1 - p_i^2)^4(1 + s)(1 + s')(1 + s'')(p_i + \eta_i/d_i)^2, \\
Q_{\eta_i, \eta_i}^2(s, s', s'') &= -2(1 - p_i^2)^3(1 + s)(1 + s')(1 + s'') \left( (p_i + \eta_i/d_i)^2 - (1 - p_i)^2(1 + s)^2 \right), \\
Q_{\eta_i, \tau_i}^2(s, s', s'') &= (1 - p_i^2)^3(p_i + \eta_i/d_i)(1 + s')(1 + s'') \left( (p_i + \eta_i/d_i)^2 - 3(1 - p_i)^2(1 + s)^2 \right).
\end{aligned}$$

Il se majore alors par

$$C s \sup_{s' \in [s, M]} s' \sup_{s'' \in [s', M]} |Q_{\mu, \nu}^i(s, s', s'')| / (\tilde{\alpha}(s', \eta_i) \tilde{\alpha}(s'', \eta_i) / d_i^2) \sup_{r \in [0, t]} |f''(r)|,$$

où  $|Q_{\mu, \nu}^i(s, s', s'')| / (\tilde{\alpha}(s', \eta_i) \tilde{\alpha}(s'', \eta_i) / d_i^2)$  est borné en  $s'$  et  $s''$ . Finalement, le terme (1.41) est à son tour majoré par (1.40).

5. termes en  $\tilde{\alpha}^{-3}(\gamma, \eta_i) \tilde{K}_\mu^1 \tilde{K}_\nu^1 f(t - \tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i))$  et  $\tilde{\alpha}^{-2}(\gamma, \eta_i) \tilde{K}_{\mu, \nu}^2 f(t - \tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i))$ ,  $(\mu, \nu) \in \{\tau_i, \eta_i\}^2$  : les restes intégraux de ces termes s'écrivent sous la forme

$$+ \int_0^\gamma \left[ \frac{A_{\mu, \nu}^i}{\tilde{\alpha}^6(s, \eta_i) / d_i^4} f'(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) + \frac{B_{\mu, \nu}^i}{\tilde{\alpha}^7(s, \eta_i) / d_i^4} f(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) \right] ds. \quad (1.42)$$

où, avec les mêmes notations que pour (1.41),  $A_{\mu, \nu}^i$  et  $B_{\mu, \nu}^i$ ,  $(\mu, \nu) \in \{\tau_i, \eta_i\}^2$  sont définis par :

$$\begin{cases}
A_{\tau_i, \tau_i}^1(s) = -2(1 - p_i^2)^3(1 + s)^3, \\
B_{\tau_i, \tau_i}^1(s) = (1 - p_i^2)^2(1 + s) \left( 2(p_i + \eta_i/d_i)^2 - 3(1 - p^2)(1 + s)^2 \right), \\
A_{\eta_i, \eta_i}^1(s) = (1 - p_i^2)(1 + s)(p_i + \eta_i/d_i)^2, \\
B_{\eta_i, \eta_i}^1(s) = -5(1 - p_i^2)^2(1 + s)(p_i + \eta_i/d_i)^2, \\
A_{\tau_i, \eta_i}^1(s) = (1 - p_i^2)(1 + s)^2(p_i + \eta_i/d_i), \\
B_{\tau_i, \eta_i}^1(s) = (1 - p_i^2)(p_i + \eta_i/d_i) \left( 2(p_i + \eta_i/d_i)^2 - 3(1 - p^2)(1 + s)^2 \right), \\
A_{\tau_i, \tau_i}^2(s) = (1 - p_i^2)^2(1 + s)(p_i + \eta_i/d_i)^2, \\
B_{\tau_i, \tau_i}^2(s) = 5(1 - p_i^2)^2(1 + s)(p_i + \eta_i/d_i)^2, \\
A_{\eta_i, \eta_i}^2(s) = (1 - p_i^2)^2(1 + s)^3, \\
B_{\eta_i, \eta_i}^2(s) = -(1 - p_i^2)^2(1 + s) \left( 2(p_i + \eta_i/d_i)^2 - 3(1 - p^2)(1 + s)^2 \right), \\
A_{\tau_i, \eta_i}^2(s) = -(1 - p_i^2)^2(p_i + \eta_i/d_i)(1 + s)^2, \\
B_{\tau_i, \eta_i}^2(s) = -(1 - p_i^2)^2(p_i + \eta_i/d_i) \left( (p_i + \eta_i/d_i)^2 - 4(1 - p^2)(1 + s)^2 \right).
\end{cases}$$

En procédant par utilisation de l'hypothèse de causalité

$$f(t \leq 0) = f'(t \leq 0) = f''(t \leq 0) = 0, \quad (1.43)$$

le premier terme de (1.42) est récrit sous la forme

$$\frac{A_{\mu, \nu}^i(s)}{\tilde{\alpha}^6(s, \eta_i) / d_i^4} f'(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) = \int_s^M \int_{s'}^M \frac{P_{\mu, \nu}^i(s, s', s'')}{\tilde{\alpha}^6(s, \eta_i) \tilde{\alpha}(s', \eta_i) \tilde{\alpha}(s'', \eta_i) / d_i^8} f'''(t - \tilde{\alpha}(s'', \eta_i)) ds'' ds',$$

où  $P_{\mu, \nu}^i$  est un polynôme en  $s, s'$  et  $s''$  :

$$P_{\tau_i, \tau_i}^1(s, s', s'') = (1 - p_i^2)^5(1 + s)^3(1 + s')(1 + s''),$$

$$P_{\eta_i, \eta_i}^1(s, s', s'') = (1 - p_i^2)^3(1 + s)(1 + s')(1 + s'')(p_i + \eta_i/d_i)^2.$$

$$P_{\tau_i, \eta_i}^1(s, s', s'') = (1 - p_i^2)^4 (1 + s)^2 (1 + s') (1 + s'') (p_i + \eta_i/d_i),$$

$$P_{\tau_i, \tau_i}^2(s, s', s'') = (1 - p_i^2)^4 (1 + s) (1 + s') (1 + s'') (p_i + \eta_i/d_i)^2,$$

$$P_{\eta_i, \eta_i}^2(s, s', s'') = (1 - p_i^2)^4 (1 + s)^3 (1 + s') (1 + s''),$$

$$P_{\tau_i, \eta_i}^2(s, s', s'') = -(1 - p_i^2)^4 (1 + s)^2 (1 + s') (1 + s'') (p_i + \eta_i/d_i).$$

Tout d'abord, le terme  $1/(\tilde{\alpha}^6(s, \eta_i)/d_i^6)$  est alors borné en  $s$  proche de 0 par une constante  $C$  pour  $\eta_i \rightarrow 0$ . Ensuite, en suivant le même procédé que pour les termes en  $f$  de (1.41), on en déduit alors que le premier terme de (1.42) est majoré par

$$C s \sup_{s' \in [0, s]} s' \sup_{s'' \in [0, s']} |P_{\mu, \nu}^i(s, s', s'')| / (\tilde{\alpha}(s', \eta_i) \tilde{\alpha}(s'', \eta_i) / d_i^2) \sup_{r \in [0, t]} |f'''(r)|,$$

où  $P_{\mu, \nu}^i$  étant de degré 1 en  $s'$  et  $s''$ , le rapport  $|P_{\mu, \nu}^i(s, s', s'')| / (\tilde{\alpha}(s', \eta_i) \tilde{\alpha}(s'', \eta_i) / d_i^2)$  est alors borné pour  $s' > 0$  et  $s'' > 0$ .

De la même manière, à l'aide de (1.43) le second terme de (1.42) se réécrit en

$$\begin{aligned} & \frac{B_\mu^i(s)}{\tilde{\alpha}^7(s, \eta_i) / d_i^4} f(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) \\ &= - \int_s^M \int_{s'}^M \int_{s''}^M \frac{Q_{\mu, \nu}^i(s, s', s'', s''')}{\tilde{\alpha}^7(s, \eta_i) \tilde{\alpha}(s', \eta_i) \tilde{\alpha}(s'', \eta_i) \tilde{\alpha}(s''', \eta_i) / d_i^{10}} f'''(t - \tilde{\alpha}(s''', \eta_i)) ds''' ds'' ds', \end{aligned}$$

où  $Q_{\mu, \nu}^i$  est le polynôme en  $(s, s', s'', s''')$  :

$$Q_{\tau_i, \tau_i}^1(s, s', s'', s''') = -(1 - p_i^2)^5 (1 + s) (1 + s') (1 + s'') (1 + s''') (2(p_i + \eta_i/d_i)^2 - 3(1 - p_i)^2 (1 + s)^2),$$

$$Q_{\eta_i, \eta_i}^1(s, s', s'', s''') = 5(1 - p_i^2)^4 (1 + s) (1 + s') (1 + s'') (1 + s''') (p_i + \eta_i/d_i)^2,$$

$$Q_{\eta_i, \tau_i}^1(s, s', s'', s''') = -(1 - p_i^2)^4 (p_i + \eta_i/d_i) (1 + s') (1 + s'') (1 + s''') ((p_i + \eta_i/d_i)^2 - 4(1 - p_i)^2 (1 + s)^2).$$

$$Q_{\tau_i, \tau_i}^2(s, s', s'', s''') = -(1 - p_i^2)^5 (1 + s) (1 + s') (1 + s'') (1 + s''') (p_i + \eta_i/d_i)^2,$$

$$Q_{\eta_i, \eta_i}^2(s, s', s'', s''') = (1 - p_i^2)^4 (1 + s) (1 + s') (1 + s'') (1 + s''') (2(p_i + \eta_i/d_i)^2 - 3(1 - p_i)^2 (1 + s)^2),$$

$$Q_{\eta_i, \tau_i}^2(s, s', s'', s''') = (1 - p_i^2)^4 (p_i + \eta_i/d_i) (1 + s') (1 + s'') (1 + s''') ((p_i + \eta_i/d_i)^2 - 4(1 - p_i)^2 (1 + s)^2).$$

Il se majore alors par

$$C s \sup_{s' \in [s, M]} s' \sup_{s'' \in [s', M]} s'' \sup_{s''' \in [s'', M]} \frac{|Q_{\mu, \nu}^i(s, s', s'', s''')|}{\tilde{\alpha}(s', \eta_i) \tilde{\alpha}(s'', \eta_i) \tilde{\alpha}(s''', \eta_i) / d_i^3} \sup_{r \in [0, t]} |f'''(r)|,$$

où  $|Q_{\mu, \nu}^i(s, s', s'', s''')| / (\tilde{\alpha}(s', \eta_i) \tilde{\alpha}(s'', \eta_i) \tilde{\alpha}(s''', \eta_i) / d_i^3)$  est borné pour  $s$  proche de 0, et  $s' > 0$ ,  $s'' > 0$ ,  $s''' > 0$ . Finalement, comme  $P_{\mu, \nu}^i$  et  $Q_{\mu, \nu}^i$  sont des  $O(1)$  au voisinage de  $s = 0$ , le terme (1.42) est à son tour majoré par

$$\leq C \gamma \sup_{r \in [0, t]} |f'''(r)|. \quad (1.44)$$

6. il ne reste plus qu'à traiter les deux derniers termes (reliés à  $\mathcal{R}_{\sigma, \sigma}^1$  dans (1.30)); soit

- (a) un terme en  $\tilde{\alpha}^{-1}(\gamma, \eta_i) \tilde{K}_\tau^1 / (d_i(1+y)) f(t - \tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i))$  : le reste intégral de ce terme s'écrit sous la forme

$$+ \int_0^\gamma \left[ \frac{A(s)}{\tilde{\alpha}^3(s, \eta_i) / d_i^2} f'(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) + \frac{B(s)}{\tilde{\alpha}^3(s, \eta_i) / d_i^2} f(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) \right] ds. \quad (1.45)$$

où  $A$  et  $B$  désignent les coefficients obtenus par :

$$\begin{cases} A(s) = -(1 - p_i^2)^2(1 + s), \\ B(s) = -2(1 - p_i^2)^2(1 + s). \end{cases}$$

En procédant toujours comme précédemment, par utilisation de l'hypothèse de causalité (1.39), le premier terme de (1.45) est récrit sous la forme

$$\frac{A(s)}{\tilde{\alpha}^3(s, \eta_i) / d_i^2} f'(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) = - \int_s^M \frac{P(s, s')}{\tilde{\alpha}^3(s, \eta_i) \tilde{\alpha}(s', \eta_i) / d_i^4} f''(t - \tilde{\alpha}(s', \eta_i)) ds',$$

où  $P$  est un polynôme en  $s$  et  $s'$  :

$$P(s, s') = -(1 - p_i^2)^3(1 + s)(1 + s').$$

En suivant le même procédé que précédemment, on en déduit alors que ce terme est majoré par  $C s \sup_{s' \in [s, M]} |P(s, s')| / (\tilde{\alpha}(s', \eta_i) / d_i) \sup_{r \in [0, t]} |f''(r)|$ , où  $|P(s, s')| / (\tilde{\alpha}(s', \eta_i) / d_i)$  est borné pour  $s$  proche de 0 et  $s' > 0$ .

De la même manière, avec (1.39) le second terme de (1.41) se récrit en

$$\frac{B(s)}{\tilde{\alpha}^4(s, \eta_i) / d_i^2} f(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) = \int_s^M \int_{s'}^M \frac{Q(s, s', s'')}{\tilde{\alpha}^4(s, \eta_i) \tilde{\alpha}(s', \eta_i) \tilde{\alpha}(s'', \eta_i) / d_i^6} f''(t - \tilde{\alpha}(s'', \eta_i)) ds'' ds',$$

où  $Q$  est le polynôme en  $(s, s', s'')$  :

$$Q(s, s', s'') = -2(1 - p_i^2)^4(1 + s)(1 + s')(1 + s'').$$

Il se majore alors par

$$C s \sup_{s' \in [0, s]} s' \sup_{s'' \in [0, s']} |Q(s, s', s'')| / (\tilde{\alpha}(s', \eta_i) \tilde{\alpha}(s'', \eta_i) / d_i^2) \sup_{r \in [0, t]} |f''(r)|,$$

où pour  $s$  proche de 0, le terme  $|Q(s, s', s'')| / (\tilde{\alpha}(s', \eta_i) \tilde{\alpha}(s'', \eta_i) / d_i^2)$  est borné en  $s' > 0$  et  $s'' > 0$ . Finalement, le terme (1.45) est donc à son tour majoré par (1.40).

- (b) un terme en  $\tilde{\alpha}^{-2}(\gamma, \eta_i) \tilde{K}_\tau^1 / (d_i(1+y)) f(t - \tilde{\alpha}(\gamma, \eta_i))$  : le reste intégral de ce terme s'écrit sous la forme

$$+ \int_0^\gamma \left[ \frac{A(s)}{\tilde{\alpha}^4(s, \eta_i) / d_i^2} f'(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) + \frac{B(s)}{\tilde{\alpha}^5(s, \eta_i) / d_i^2} f(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) \right] ds. \quad (1.46)$$

où  $A$  et  $B$  sont les polynômes en  $s$  :

$$\begin{cases} A(s) = -3(1 - p_i^2)^2(1 + s), \\ B(s) = -(1 - p_i^2)^2(1 + s). \end{cases}$$

En procédant par utilisation de l'hypothèse de causalité (1.43), le premier terme de (1.46) est récrit sous la forme

$$\frac{A(s)}{\tilde{\alpha}^4(s, \eta_i) / d_i^2} f'(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) = \int_s^M \int_{s'}^M \frac{P(s, s', s'')}{\tilde{\alpha}^4(s, \eta_i) \tilde{\alpha}(s', \eta_i) \tilde{\alpha}(s'', \eta_i) / d_i^6} f''(t - \tilde{\alpha}(s'', \eta_i)) ds'' ds',$$

où  $P$  est un polynôme en  $s$ ,  $s'$  et  $s''$  :

$$P(s, s', s'') = -(1 - p_i^2)^4 (1 + s)(1 + s')(1 + s'').$$

On en déduit alors que le premier terme de (1.46) est majoré par

$$C s \sup_{s' \in [s, M]} s' \sup_{s'' \in [s', M]} |P(s, s', s'')| / (\tilde{\alpha}(s', \eta_i) \tilde{\alpha}(s'', \eta_i) / d_i^2) \sup_{r \in [0, t]} |f''(r)|,$$

avec  $|P(s, s', s'')| / (\tilde{\alpha}(s', \eta_i) \tilde{\alpha}(s'', \eta_i) / d_i^2)$  borné pour  $s$  proche de 0.

De la même manière, avec (1.43) le second terme de (1.46) se réécrit en

$$\begin{aligned} & \frac{B(s)}{\tilde{\alpha}^5(s, \eta_i) / d_i^2} f(t - \tilde{\alpha}(s, \eta_i)) \\ &= - \int_s^M \int_{s'}^M \int_{s''}^M \frac{Q(s, s', s'', s''')}{\tilde{\alpha}^5(s, \eta_i) \tilde{\alpha}(s', \eta_i) \tilde{\alpha}(s'', \eta_i) \tilde{\alpha}(s''', \eta_i) / d_i^8} f'''(t - \tilde{\alpha}(s''', \eta_i)) ds''' ds'' ds', \end{aligned}$$

où  $Q$  est le polynôme en  $(s, s', s'', s''')$  :

$$Q(s, s', s'', s''') = 3(1 - p_i^2)^5 (1 + s)(1 + s')(1 + s'')(1 + s''').$$

Ce terme se majore alors par

$$C s \sup_{s' \in [s, M]} s' \sup_{s'' \in [s', M]} s'' \sup_{s''' \in [s'', M]} \frac{|Q(s, s', s'', s''')|}{\tilde{\alpha}(s', \eta_i) \tilde{\alpha}(s'', \eta_i) \tilde{\alpha}(s''', \eta_i) / d_i^3} \sup_{r \in [0, t]} |f'''(r)|.$$

Finalement, comme  $P_{\mu, \nu}^i$  et  $Q_{\mu, \nu}^i$  sont des  $O(1)$  au voisinage de 0, le terme (1.46) est à son tour majoré par (1.44).

A partir de toutes les majorations obtenues ci-dessus, on compare les hypothèses de causalités avec les définitions de  $f$  correspondantes dans la formule intégrale complète (1.30) :

- pour  $f$  donné par une composante de  $\mathbf{n}_i \times \partial_t E$  ou de  $\mathbf{n}_i \times \partial_t H$  (cas 1. et 2.), nous avons posé la condition (1.35), ce qui correspond donc à

$$\mathbf{n}_i \times \partial_t E(t \leq 0) = \mathbf{n}_i \times \partial_t H(t \leq 0) = 0,$$

- pour  $f$  composante de  $\mathbf{n}_i \times E$  ou de  $\mathbf{n}_i \times H$  (cas 3., 4. et 6.a.), la condition de causalité est alors (1.39), ce qui correspond donc à

$$\mathbf{n}_i \times E(t \leq 0) = \mathbf{n}_i \times H(t \leq 0) = \mathbf{n}_i \times \partial_t E(t \leq 0) = \mathbf{n}_i \times \partial_t H(t \leq 0) = 0,$$

- enfin pour  $f$  composante de  $\mathbf{n}_i \times \int_t E$  ou de  $\mathbf{n}_i \times \int_t H$  (cas 5. et 6.b.), nous avons posé la condition (1.43), soit

$$\mathbf{n}_i \times E(t \leq 0) = \mathbf{n}_i \times H(t \leq 0) = \mathbf{n}_i \times \partial_t E(t \leq 0) = \mathbf{n}_i \times \partial_t H(t \leq 0) = 0,$$

la condition  $f(t \leq 0) = 0$  correspondant ici à  $\int_{t \leq 0} \mathbf{n}_i \times E(t) dt = \int_{t \leq 0} \mathbf{n}_i \times H(t) dt = 0$  ce qui vérifié si  $\mathbf{n}_i \times E(t \leq 0) = \mathbf{n}_i \times H(t \leq 0) = 0$ .

L'ensemble des conditions (1.35), (1.39) et (1.43) revient donc à satisfaire à l'hypothèse (1.31).

Enfin, de même par correspondances entre les différentes majorations, on obtient

- pour  $f$  composante de  $\mathbf{n}_i \times \partial_t E$  ou de  $\mathbf{n}_i \times \partial_t H$  (cas 1. et 2.), nous avons posé la majoration (1.36) qui porte sur  $f'$  donc sur  $\mathbf{n}_i \times \partial_t^2 E$  et  $\mathbf{n}_i \times \partial_t^2 H$ ,

- pour  $f$  composante de  $\mathbf{n}_i \times E$  ou de  $\mathbf{n}_i \times H$  (cas 3., 4. et 6.a.), la majoration (1.40) porte  $f''$ , donc elle est aussi sur  $\mathbf{n}_i \times \partial_t^2 E$  et  $\mathbf{n}_i \times \partial_t^2 H$ ,
- enfin pour  $f$  composante de  $\mathbf{n}_i \times \int_t E$  ou de  $\mathbf{n}_i \times \int_t H$  (cas 5. et 6.b.), la majoration (1.44), est sur  $f'''$  soit encore sur  $\mathbf{n}_i \times \partial_t^2 E$  et  $\mathbf{n}_i \times \partial_t^2 H$ .

En conclusion, en prenant le sup des  $\tau_i$  sur  $\mathcal{F}_i$ , le reste intégral donnant la différence entre la formule intégrale exacte (1.30) et la formule approchée (1.32) est donc majoré par

$$C \frac{\delta_i}{d_i} \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times \partial_t^2 H \\ -\mathbf{n}_i \times \partial_t^2 E \end{pmatrix} \right\|_{C([0,t], L^1(\mathcal{F}_i))},$$

ce qui termine la démonstration. ■

**Lemme 1.2.41** *Lorsque  $\eta_i \rightarrow 0$ , et si l'on ne garde que les termes d'ordre 0 en  $\tau_i/d_i$  dans les expressions précédentes, alors on obtient les coefficients suivants :*

1.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

	$\mu = \tau_i$	$\mu = \eta_i$
$\frac{1}{\alpha(\tau_i, \eta_i)^n} \mathcal{K}_\mu^1(\tau_i, \eta_i) \approx$	$\frac{1 - p_i^2}{d_i^n}$	$\frac{p_i}{d_i^n}$

2.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

	$\mu = \tau_i$	$\mu = \eta_i$
$\frac{1}{\alpha(\tau_i, \eta_i)^n} \mathcal{K}_\mu^1(\tau_i, \eta_i) \mathcal{K}_\nu^1(\tau_i, \eta_i) \approx$		
$\nu = \tau_i$	$\frac{(1 - p_i^2)^2}{d_i^n}$	$\frac{p_i(1 - p_i^2)}{d_i^n}$
$\nu = \eta_i$	$\frac{p_i(1 - p_i^2)}{d_i^n}$	$\frac{p_i^2}{d_i^n}$

3.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

	$\mu = \tau_i$	$\mu = \eta_i$
$\frac{1}{\alpha(\tau_i, \eta_i)^n} \mathcal{K}_{\mu, \nu}^2(\tau_i, \eta_i) \approx$		
$\nu = \tau_i$	$\frac{1 - p_i^2}{d_i^{n+1}} - \frac{(1 - p_i^2)^2}{d_i^{n+1}}$	$\frac{-p_i(1 - p_i^2)}{d_i^{n+1}}$
$\nu = \eta_i$	$\frac{-p_i(1 - p_i^2)}{d_i^{n+1}}$	$\frac{1}{d_i^{n+1}} - \frac{p_i^2}{d_i^{n+1}}$

**Lemme 1.2.42** *Pour tout vecteur de l'espace tangent à  $\mathcal{F}_i \times \mathcal{F}_i \subset (\mathbb{R}^3)^2$ , on a l'égalité suivante :*

$$\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_6 = \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \mathbb{I}_6 + \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \mathbb{I}_6. \quad (1.47)$$

**Preuve.** s'obtient directement en prenant ces expressions contre un élément quelconque de l'espace tangent, puis en décomposant dans la base  $\left( \mathbf{n}_i, \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|}, \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \right)$  et en reportant. ■

### 1.2.3 Cas limite : faces perpendiculaires à la direction d'observation

Bien qu'il soit toujours possible de choisir un  $X_i$  sur  $\mathcal{F}_i$  tel que  $p_i \neq \pm 1$ , dans le cadre d'une implémentation numérique un tel choix peut s'avérer délicat à mettre en place de manière automatique. De plus, l'étude de la proximité de cette configuration et le passage à la limite lorsque  $p_i$  tend vers  $\pm 1$  permet de lever un éventuel mauvais traitement, ou mauvais conditionnement, de la formule.

Dans cette partie, on s'intéresse au cas où le découpage de la solution des équations de Maxwell sous la forme (1.15), et le choix des points de références par faces (notés  $X_i$ ) font apparaître un (ou plusieurs) élément  $\mathcal{F}_i$  dont le point de référence  $X_i$  vérifie

$$\frac{\overrightarrow{X_0 X_i}}{|X_i - X_0|} := \mathbf{t}_i = \pm \mathbf{n}_i,$$

$\mathbf{n}_i$  étant la normale (unitaire) à  $\mathcal{F}_i$ . Dans ce cas, une formule intégrale approchée spécifique est construite sur  $\mathcal{F}_i$  dans la première partie. Le raccordement de celle-ci avec l'écriture obtenue en déplaçant légèrement  $X_i$  de sorte à ne plus avoir  $p_i = \pm 1$  sera traité, dans la deuxième partie, afin de justifier le passage à la limite  $\mathbf{t}_i \rightarrow \pm \mathbf{n}_i$  dans la formule (1.10).

#### Construction d'une formule pour une face de normale $\mathbf{n}_i = \pm \mathbf{t}_i$

Partant directement de l'écriture (1.15), cette partie ne va considérer que le terme  $(\tilde{E}_i, \tilde{H}_i)$  porté par une face  $\mathcal{F}_i$  vérifiant  $p_i = \pm 1$ . Afin de simplifier les calculs et les notations, on supposera de plus que la normale à  $\mathcal{F}_i$  est donnée (en coordonnées cartésiennes) par  $\mathbf{n}_i = \pm(0, 0, 1)$ ; avec bien sûr  $X_0 \notin \mathcal{F}_i$  donné, et  $X_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathcal{F}_i$  vérifiant  $\overrightarrow{X_i X_0}$  colinéaire à  $\mathbf{n}_i$ .

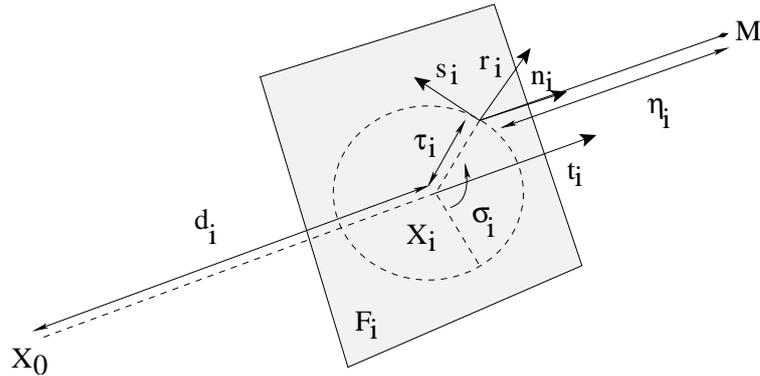


FIG. 1.6 – Description du système de coordonnées locales utilisé dans le cas  $\mathbf{t}_i = \pm \mathbf{n}_i$

Le traitement de ce terme pour obtenir la partie correspondante dans la formulation intégrale approchée s'effectue selon les mêmes étapes que celles nécessaires pour établir le résultat résumé dans la proposition 1.2.39. En utilisant les mêmes considérations que celles qui ont permis de choisir le système de coordonnées locales donné dans la définition 1.2.17, on est amené à prendre comme choix de coordonnées le système cylindrique (translaté suivant  $z$ ). On pose donc, pour suivre les notations de la définition 1.2.17, le changement de variables suivant (cf figure 1.6) :

$$\begin{cases} x = \tau_i \cos(\sigma_i), \\ y = \tau_i \sin(\sigma_i), \\ z = d_i + p_i \eta_i, \end{cases} \quad (1.48)$$

avec  $d_i = |X_i - X_0|$ ;  $(\mathbf{r}_i, \mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i)$  désignant ainsi la base cylindrique orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$  associée aux coordonnées  $(\tau_i, \sigma_i, \eta_i)$ .

Le jacobien de la transformation est alors trivialement :  $J = \tau_i$ .

### Ecriture de la formule exacte

En partant de l'écriture en coordonnées cartésiennes de la comatrice (1.8), et en simplifiant par l'équation des ondes comme effectués précédemment, il vient la décomposition, similaire à cette obtenue pour (1.27), suivante :

**Proposition 1.2.43** *La matrice des cofacteurs COM associée au système de Maxwell exprimée avec les nouvelles variables (re-notée  $COM_i$ ), prise contre le vecteur  $(f_E^\varepsilon, f_H^\varepsilon)^T$  s'écrit :*

$$COM_i = \begin{pmatrix} \mathcal{ROT}_i & 0 \\ 0 & \mathcal{ROT}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{ROT}_i & -\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 & \mathcal{ROT}_i \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

où  $\mathcal{ROT}_i = \mathbf{r}_i \times \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbb{I}_3 + \frac{1}{\tau_i} \mathbf{s}_i \times \frac{\partial}{\partial \sigma} \mathbb{I}_3 + \mathbf{n}_i \times \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbb{I}_3$ .

Procédant comme pour les simplifications de (1.27) selon les dérivations effectuées, on décompose la comatrice en somme de deux opérateurs  $\mathcal{A}_i$  et  $\mathcal{B}_i$  avec

–  $\mathcal{B}_i$  opérateur faisant apparaître des dérivées suivant  $\sigma_i$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i &= \frac{1}{J} \frac{\partial^2}{\partial \eta \sigma} (J \mathbf{n}_i \times \mathbf{s}_i \times \mathbb{I}_6) + \frac{1}{J} \frac{\partial^2}{\partial \tau \sigma} (J \mathbf{r}_i \times \mathbf{s}_i \times \mathbb{I}_6) + \frac{1}{J} \frac{\partial^2}{\partial \eta \sigma} (\mathbf{s}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_6) \\ &+ \frac{1}{J} \frac{\partial^2}{\partial \tau \sigma} (\mathbf{s}_i \times \mathbf{r}_i \times \mathbb{I}_6) + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{1}{J} \mathbf{s}_i \times \mathbf{r}_i \times \mathbb{I}_6 \right) + \frac{1}{J} \frac{\partial^2}{\partial \sigma \sigma} \left( \frac{1}{J} \mathbf{s}_i \times \mathbf{s}_i \times \mathbb{I}_6 \right) \\ &+ \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{1}{J} \mathbf{r}_i \times \mathbf{s}_i \times \mathbb{I}_6 \right) + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \mathbf{s}_i \times \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

–  $\mathcal{A}_i$  opérateur contenant toutes les autres dérivées :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i &= \frac{1}{J} \frac{\partial^2}{\partial \eta \eta} (J \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_6) + \frac{1}{J} \frac{\partial^2}{\partial \eta \tau} (J \mathbf{n}_i \times \mathbf{r}_i \times \mathbb{I}_6) + \frac{1}{J} \frac{\partial^2}{\partial \tau \eta} (J \mathbf{r}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_6) \\ &+ \frac{1}{J} \frac{\partial^2}{\partial \tau \tau} (J \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_i \times \mathbb{I}_6) - \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{s}_i \times \mathbf{s}_i \times \mathbb{I}_6) + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( J \mathbf{r}_i \times \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &+ \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \mathbf{n}_i \times \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

A l'instar de l'étude du cas  $\mathbf{t}_i \neq \mathbf{n}_i$ , le découpage de la comatrice sert à faire apparaître d'une part une quantité tangente à la propagation ( $\partial/\partial\sigma$ ) dont la dérivation prise contre le noyau de l'équation des ondes s'annule, et d'autre part des quantités spatiales ( $\partial/\partial\tau$  et  $\partial/\partial\eta$ ) comparables à  $t$ . Dans ce but, il est alors possible de démontrer des résultats analogues à ceux des lemmes 1.2.32, 1.2.33 et 1.2.34 décrits respectivement les lemmes 1.2.44, 1.2.45 et 1.2.46.

**Lemme 1.2.44** On note  $d_i = |X_i - X_0|$ . Soient  $\gamma$  l'application de  $C^\infty(\mathbb{R}^4)$  définie par  $\gamma : (t, X) \mapsto (t_0 - t, X_0 - X)$ , et  $\Omega_\lambda$  le sous-domaine de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$  défini par

$$\Omega_\lambda = \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid z > -d_i + \lambda \text{ et } |t - t_0| > \lambda\},$$

pour  $\lambda > 0$  quelconque donné.

Alors, pour toute fonction  $f$  telle que  $\text{Supp} f \subset \Omega_\lambda$  pour un  $\lambda > 0$  assez petit, on a :

$$\int (\mathcal{Z}_2 \circ \gamma)(t, X) \frac{\partial}{\partial \sigma} f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt d\tau_i d\eta_i d\sigma_i = 0.$$

**Lemme 1.2.45** Soit  $\lambda$  un réel strictement positif assez petit. Soient  $\gamma$  l'application et  $\Omega_\lambda$  le domaine définis dans le lemme 1.2.44. Alors dans  $D'(\Omega_\lambda)$  on a

$$(\mathcal{Z}_2 *_{(t)} Y_i) \circ \gamma(t, X) = \frac{Y(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)},$$

$$\text{avec } \alpha(\tau_i, \eta_i) = d_i \sqrt{1 + \frac{\tau_i^2}{d_i^2} + 2p_i \frac{\eta_i}{d_i} + \frac{\eta_i^2}{d_i^2}}.$$

**Lemme 1.2.46** Soit  $\Omega_\lambda$  le domaine définis dans le lemme 1.2.44, pour  $\lambda > 0$  assez petit. Soit  $f$  une fonction régulière à support compact telle que  $\text{Supp} f \subset \Omega_\lambda$ , alors on a les relations suivantes

$$1. \forall \mu \in \{\tau, \eta\},$$

$$\int \frac{Y(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} \frac{\partial}{\partial \mu} (f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i)) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i = \int \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} \left[ \frac{Y(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)^2} + \frac{\delta(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} \right] f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i,$$

$$2. \forall (\mu, \nu) \in \{\tau, \eta\}^2,$$

$$\int \frac{Y(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} \frac{\partial^2}{\partial \mu \nu} (f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i)) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i = \int \left[ -\frac{\partial^2 \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \nu \mu} \frac{Y(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)^2} + 2 \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \nu} \frac{Y(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)^3} - \frac{\partial^2 \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \nu \mu} \frac{\delta(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} + 2 \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \nu} \frac{\delta(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)^2} + \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \nu} \frac{\delta(t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i))}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} \mathbb{D}_t \right] f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i,$$

où  $\mathbb{D}_t$  est l'opérateur de dérivation en  $t$ .

Les démonstrations des lemmes 1.2.44, 1.2.45 et 1.2.46 s'effectuent respectivement de manière similaire à celles des lemmes 1.2.32, 1.2.33 et 1.2.34.

Le lemme 1.2.44 permet donc d'annuler la contribution de  $\mathcal{B}_i$ , les dérivées selon  $\sigma_i$  étant tangentes aux sphères de propagations passant par  $X_0$ . Le lemme 1.2.46 permet de calculer les dérivées par rapport aux autres coordonnées spatiales en les transformant en combinaisons de dérivées temporelles. On pose enfin les notations suivantes pour écrire la formule intégrale complète :

**Définition 1.2.47** Pour tout  $\lambda$  strictement positif assez petit, on introduit les quantités :

1.  $\mathcal{K}_\mu^1$  et  $\mathcal{K}_{\mu,\nu}^2$  : fonctions de  $]-d_i + \lambda, +\infty[ \times \mathbb{R}$  à valeurs réelles, indicées par  $(\mu, \nu) \in \{\tau, \eta\}^2$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_\mu^1 & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu}, \\ \mathcal{K}_{\mu,\nu}^2 & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{\partial^2 \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \nu \partial \mu},\end{aligned}$$

2.  $\mathcal{R}_\mu^1, \mathcal{R}_{\mu,\nu}^{1,1}, \mathcal{R}_{\mu,\nu}^2$  : opérateurs indicées par  $(\mu, \nu) \in \{\tau, \eta\}^2$ , définis sur  $(]-d_i + \lambda, +\infty[ \times \mathbb{R})$  à domaine dans  $\mathbb{C}^6$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\mu^1 & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{1}{4\pi} \mathcal{K}_\mu^1(\tau_i, \eta_i) \vec{\mu} \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{R}_{\mu,\nu}^{1,1} & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{1}{4\pi} \mathcal{K}_\mu^m(\tau_i, \eta_i) \mathcal{K}_\nu^n(\tau_i, \eta_i) \vec{\mu} \times \vec{\nu} \times \mathbb{I}_6, \\ \mathcal{R}_{\mu,\nu}^2 & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{1}{4\pi} \mathcal{K}_{\mu,\nu}^2(\tau_i, \eta_i) \vec{\mu} \times \vec{\nu} \times \mathbb{I}_6,\end{aligned}$$

$$\text{avec } \vec{\mu} \quad (\text{resp. } \vec{\nu}) = \begin{cases} \mathbf{r}_i & \text{si } \mu = \tau \quad (\text{resp. } \nu = \tau) \\ \mathbf{n}_i & \text{si } \mu = \eta \quad (\text{resp. } \nu = \eta) \end{cases}.$$

3.  $\mathcal{R}_{\sigma,\sigma}^1$  : opérateur défini sur  $(]-d_i + \lambda, +\infty[ \times \mathbb{R}) \times \mathbb{C}^6$ .

$$\mathcal{R}_{\sigma,\sigma}^1 : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{1}{4\pi J} \mathcal{K}_\tau^1(\tau_i, \eta_i) \mathbf{s}_i \times \mathbf{s}_i \times \mathbb{I}_6.$$

L'écriture précédente permettant de faire porter toutes les dérivations sur  $t$  ainsi que les opérateurs  $\mathcal{R}$  sur  $f_E^\varepsilon$  et  $f_H^\varepsilon$ , il est possible de permuter l'intégration en  $J dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i$  et la convolution par  $\varphi_i^\varepsilon$ . Finalement, par passage à la limite en  $\varepsilon \rightarrow 0$  et par la proposition 1.2.14, on trouve l'expression du terme en  $p_i = \pm 1$  pour la formule intégrale exacte :

**Proposition 1.2.48** *En utilisant les notations de la définition 1.2.47, et si les fonctions  $E$  et  $H$  vérifient l'hypothèse (1.25), alors le terme  $(\tilde{E}_i, \tilde{H}_i)$  de la décomposition (1.15), dans le cas  $\mathbf{t}_i = \pm \mathbf{n}_i$ , est donné, pour tout  $X$  en dehors du polyèdre de surface admissible  $\mathcal{F}$ , par :*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \tilde{E}_i \\ \tilde{H}_i \end{pmatrix} (t_0, X_0) &= \int_{\mathbb{R} \times \mathcal{F}_i} \frac{1}{\alpha(\tau_i, \eta_i)} \left[ \left\{ \sum_{\mu \in \{\tau_i, \eta_i\}} \mathcal{R}_\mu^1(\tau_i, \eta_i) + \sum_{(\mu, \nu) \in \{\tau_i, \eta_i\}^2} \mathcal{R}_{\mu,\nu}^{1,1}(\tau_i, \eta_i) \right\} \mathbb{D}_t \right. \\ &+ \left. \left\{ \sum_{\mu \in \{\tau_i, \eta_i\}} \frac{1}{\alpha(\tau_i, \eta_i)} \mathcal{R}_\mu^1(\tau_i, \eta_i) + \sum_{(\mu, \nu) \in \{\tau_i, \eta_i\}^2} \left( -\mathcal{R}_{\mu,\nu}^2(\tau_i, \eta_i) + \frac{2}{\alpha(\tau_i, \eta_i)} \mathcal{R}_{\mu,\nu}^{1,1}(\tau_i, \eta_i) \right) \right\} \right. \\ &+ \left. \left\{ \sum_{(\mu, \nu) \in \{\tau_i, \eta_i\}^2} \left( -\frac{1}{\alpha(\tau_i, \eta_i)} \mathcal{R}_{\mu,\nu}^2(\tau_i, \eta_i) + \frac{2}{\alpha^2(\tau_i, \eta_i)} \mathcal{R}_{\mu,\nu}^{1,1}(\tau_i, \eta_i) \right) \right\} \mathbb{I}_t \right. \\ &\left. - \mathcal{R}_{\sigma_i, \sigma_i}^1(\tau_i, \eta_i) - \frac{1}{\alpha(\tau_i, \eta_i)} \mathcal{R}_{\sigma_i, \sigma_i}^1(\tau_i, \eta_i) \mathbb{I}_t \right] \begin{pmatrix} \mathbf{n} \times H \delta_{\mathcal{F}_i} \\ -\mathbf{n} \times E \delta_{\mathcal{F}_i} \end{pmatrix} (t, X) \delta_{t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i)} J dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i, \quad (1.50)\end{aligned}$$

où  $\mathbb{I}_t$  et  $\mathbb{D}_t$  sont respectivement les opérateurs d'intégration et de dérivation en  $t$ .

**Remarque 1.2.49** *Ici, localiser l'intégrale sur  $\mathcal{F}_i$  revient à prendre directement  $\eta_i = 0$ .*

### Approximation de la formule exacte

Afin de donner ici aussi une formule intégrale approchée, un développement limité en  $\tau_i(d_i)^{-1} \ll 1$  sera effectué. Ce choix de critère est cohérent avec celui choisi pour obtenir (1.10), car  $\tau_i$  a ici le même caractère descriptif que pour l'établissement de la formule dans le cas  $p_i \neq \pm 1$  (cf figure 1.7). En effet  $\tau_i$  donne une valeur comparable à la grandeur de  $\mathcal{F}_i$  :  $|\tau_i| \leq \sqrt{|\mathcal{F}_i|} = \sqrt{\alpha} \delta_i$  ( $\alpha > 0$ ).

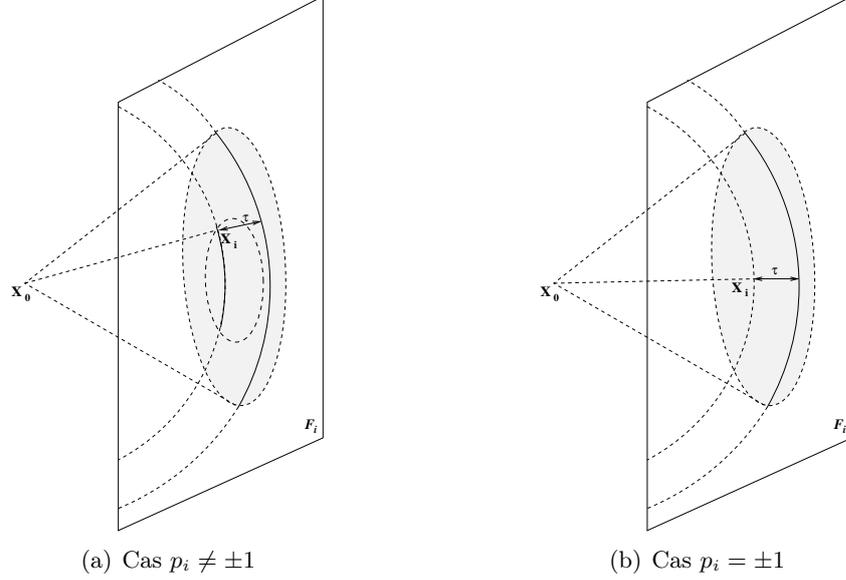


FIG. 1.7 – Détermination géométriques des tailles de découpage à partir des valeurs de  $\tau_i$

Il est ainsi possible d'énoncer le résultat suivant

**Proposition 1.2.50** *Si les fonctions  $E$  et  $H$  vérifient l'hypothèse (1.25), et si elles vérifient de plus l'hypothèse (1.31), alors, le terme  $(\tilde{E}_i, \tilde{H}_i)$  de la décomposition (1.15) dans le cas  $\mathbf{t}_i = \pm \mathbf{n}_i$  vérifie pour tout  $(t_0, X_0) \in \mathbb{R}^+ \times \bar{\mathcal{V}}^c$*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{E}_i \\ \tilde{H}_i \end{pmatrix} (t_0, X_0) &= \int_{\mathcal{F}_i} \left[ \frac{1}{4\pi d_i} \left\{ \mathbf{t}_i \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_i \times \mathbb{I}_6 \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times \partial_t H \\ -(\mathbf{n}_i \times \partial_t E) \end{pmatrix} \right] (t_0 - d_i, \cdot) \\ &+ \frac{1}{4\pi d_i^2} \left\{ \mathbf{t}_i \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_i \times \mathbb{I}_6 \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times H \\ -(\mathbf{n}_i \times E) \end{pmatrix} (t_0 - d_i, \cdot) \\ &+ \int_0^{t_0 - d_i} \frac{1}{4\pi d_i^3} \mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_i \times \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times H \\ -(\mathbf{n}_i \times E) \end{pmatrix} (s, \cdot) ds \Big] dS_i + O\left(\frac{\delta_i}{d_i}\right), \end{aligned} \quad (1.51)$$

où  $dS_i$  est l'élément de surface de  $\mathcal{F}_i$ ,  $\mathbf{n}_i$  la normale unitaire à  $\mathcal{F}_i$  sortant de  $\mathcal{V}$ ,  $d_i$  est la distance d'un point  $X_i$  choisi de  $\mathcal{F}_i$  à  $X$ ,  $\mathbf{t}_i^0 = (d_i)^{-1} \overrightarrow{X_i X}$ , et  $\delta_i$  est le diamètre de  $\mathcal{F}_i$ .

**Preuve.** La proposition 1.2.50 se démontre comme la proposition 1.2.2. Après avoir établi l'écriture exacte (1.50), elle se déduit par développement limité en  $\tau_i d_i^{-1}$  à l'ordre 0 sous les signes intégraux, et par utilisation des lemmes 1.2.51 et 1.2.52. L'étude des restes intégraux pour chacun des cas  $f = (\mathbf{n}_i \times \partial_t H, -\mathbf{n}_i \times \partial_t E)$ ,  $f = (\mathbf{n}_i \times H, -\mathbf{n}_i \times E)$  et  $f = (\mathbf{n}_i \times \int_t H, -\mathbf{n}_i \times \int_t E)$  permet alors d'obtenir une majoration de l'erreur d'approximation. ■

**Lemme 1.2.51** Lorsque  $\eta_i \rightarrow 0$ , et si l'on ne garde que les termes d'ordre 0 en  $\tau_i/d_i$  dans les expressions précédentes, alors on obtient les coefficients suivants :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{1}{\alpha(\tau_i, \eta_i)^n} \mathcal{K}_\mu^1(\tau_i, \eta_i) \approx \begin{array}{c|c} \mu = \tau_i & \mu = \eta_i \\ \hline 0 & \frac{p_i}{d_i^n} \end{array}$$

2.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{1}{\alpha(\tau_i, \eta_i)^n} \mathcal{K}_\mu^1(\tau_i, \eta_i) \mathcal{K}_\nu^1(\tau_i, \eta_i) \approx \begin{array}{c|c|c} & \mu = \tau_i & \mu = \eta_i \\ \hline \nu = \tau_i & 0 & 0 \\ \nu = \eta_i & 0 & \frac{1}{d_i^n} \end{array}$$

3.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{1}{\alpha(\tau_i, \eta_i)^n} \mathcal{K}_{\mu, \nu}^2(\tau_i, \eta_i) \approx \begin{array}{c|c|c} & \mu = \tau_i & \mu = \eta_i \\ \hline \nu = \tau_i & \frac{1}{d_i^{n+1}} & 0 \\ \nu = \eta_i & 0 & 0 \end{array}$$

**Lemme 1.2.52** Dans le domaine défini par la sous-variété de  $(\mathbb{R}^3)^2$  de codimension 2 engendrée par  $\mathcal{F}_i \times \mathcal{F}_i$ , on a l'égalité opératoire suivante :

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_i \times \mathbb{I}_6 + \mathbf{s}_i \times \mathbf{s}_i \times \mathbb{I}_6 = \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_6 = \mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_i \times \mathbb{I}_6, \quad (1.52)$$

**Preuve.** Immédiat par le même procédé que pour le lemme 1.2.42. ■

### Généralisation de la formule intégrale au cas $\mathbf{t}_i \rightarrow \pm \mathbf{n}_i$

Nous avons vu précédemment que le cas  $\mathbf{t}_i = \pm \mathbf{n}_i$  empêchait la définition du système de coordonnées locales introduit dans la section 1.2.2 (cf remarque 1.2.19). Toutefois, dans ce cas précis une formule a quand même pu être établie : (1.51), donnant la même approximation que (1.32) établie pour le cas général  $\mathbf{t}_i \neq \pm \mathbf{n}_i$ . Afin de compléter le théorème 1.2.2, il est intéressant d'étudier le passage au cas limite pour  $\mathbf{t}_i$  proche de  $\pm \mathbf{n}_i$ , dans la proposition suivante :

**Proposition 1.2.53** Soit  $\mathcal{F}_i$  une face et  $X_i$  un point de  $\mathcal{F}_i$  tel que  $\overrightarrow{X_i X_0}$  soit colinéaire à la normale  $\mathbf{n}_i$  de  $\mathcal{F}_i$ . Soit  $\Gamma : \rho \mapsto X_i^\rho$  un arc continu de  $\mathbb{R}$  à valeur dans  $\mathbb{R}^3 \cap \mathcal{F}_i$ , vérifiant  $\Gamma(0) = X_i$  et tel qu'il existe  $\rho_0 > 0$  tel que pour tout  $\rho$  dans  $]0, \rho_0[$  le vecteur  $\overrightarrow{X_i^\rho X_0}$  n'est pas colinéaire à  $\mathbf{n}_i$ .

Alors, si les fonctions  $E$  et  $H$  vérifient l'hypothèse (1.25), et si elles vérifient de plus l'hypothèse (1.31), alors la formule (1.51) est la limite de (1.32) pour  $\rho \rightarrow 0$ .

**Preuve.** Soient  $\rho \in ]0, \rho_0[$ , avec  $\rho_0 > 0$  assez petit, et un point  $X_i^\rho \in \mathcal{F}_i \cap \mathcal{S}_{d_i + \Delta_\rho}(X_0)$ , où  $\Delta_\rho = |X_i^\rho - X_i| \rightarrow 0$  pour  $\rho \rightarrow 0$ . Il est alors possible de définir le repère local  $(\mathbf{r}_i^\rho, \mathbf{n}_i, \mathbf{s}_i^\rho)$  centré sur  $X_i^\rho$ , suivant la définition 1.2.17, car  $\overrightarrow{X_i^\rho X_0}$  et  $\mathbf{n}_i$  ne sont pas colinéaires.

De plus, il existe deux vecteurs orthonormaux  $\mathbf{r}_i^0$  et  $\mathbf{s}_i^0$  tels que  $(\mathbf{r}_i^0, \mathbf{n}_i, \mathbf{s}_i^0)$  soit un repère orthonormé direct, et tel que pour tout  $\rho$ , il existe un scalaire  $\theta_\rho \in \mathbb{R}$  vérifiant

$$\begin{cases} \mathbf{t}_i^\rho = \sqrt{\Delta\rho} \frac{\sqrt{\Delta\rho + 2d_i}}{d_i + \Delta\rho} R^{\mathbf{n}_i}(\theta_\rho) (\mathbf{r}_i^0) + \frac{d_i}{d_i + \Delta\rho} \mathbf{n}_i, \\ \mathbf{r}_i^\rho = \sqrt{\Delta\rho} \frac{\sqrt{\Delta\rho + 2d_i}}{d_i + \Delta\rho} R^{\mathbf{n}_i}(\theta_\rho) (\mathbf{r}_i^0), \\ \mathbf{s}_i^\rho = R^{\mathbf{n}_i} \left( \frac{\pi}{2} \right) (\mathbf{r}_i^\rho) = \sqrt{\Delta\rho} \frac{\sqrt{\Delta\rho + 2d_i}}{d_i + \Delta\rho} R^{\mathbf{n}_i}(\theta_\rho) (\mathbf{s}_i^0), \end{cases}$$

où  $R^{\mathbf{n}_i}(\theta)(\mathbf{v})$  est l'image du vecteur  $\mathbf{v}$  par la rotation vectorielle d'axe  $\mathbf{n}_i$  et d'angle  $\theta$ .

Donc les opérateurs  $\mathbf{t}_i^\rho \times \mathbf{t}_i^\rho \times \mathbb{I}_6$  et  $\mathbf{t}_i^\rho \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix}$  tendent respectivement uniformément vers  $\mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_i \times \mathbb{I}_6$  et  $\mathbf{t}_i \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix}$  pour  $\rho \rightarrow 0$ . Les traces  $(\mathbf{n}_i \times \partial_t H, -\mathbf{n}_i \times \partial_t E)$  et  $(\mathbf{n}_i \times H, -\mathbf{n}_i \times E)$  étant continues en  $t$ , et donc en  $\rho$  par la composition avec  $\Gamma$ , il vient donc

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{F}_i} \left[ \frac{1}{4\pi(d_i + \Delta\rho)} \left\{ \mathbf{t}_i^\rho \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{t}_i^\rho \times \mathbf{t}_i^\rho \times \mathbb{I}_6 \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times \partial_t H \\ -(\mathbf{n}_i \times \partial_t E) \end{pmatrix} (t_0 - (d_i + \Delta\rho), \cdot) \right. \\ & \left. - \frac{1}{4\pi d_i} \left\{ \mathbf{t}_i \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_i \times \mathbb{I}_6 \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times \partial_t H \\ -(\mathbf{n}_i \times \partial_t E) \end{pmatrix} (t_0 - d_i, \cdot) \right] dS_i \longrightarrow_{\rho \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{F}_i} \left[ \frac{1}{4\pi(d_i + \Delta\rho)} \left\{ \mathbf{t}_i^\rho \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times H \\ -(\mathbf{n}_i \times E) \end{pmatrix} (t_0 - (d_i + \Delta\rho), \cdot) \right. \\ & \left. - \frac{1}{4\pi d_i} \left\{ \mathbf{t}_i \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times H \\ -(\mathbf{n}_i \times E) \end{pmatrix} (t_0 - d_i, \cdot) \right] dS_i \longrightarrow_{\rho \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

On en déduit de plus que l'opérateur  $\{\mathbf{t}_i^\rho \times \mathbf{t}_i^\rho \times \mathbb{I}_6 - \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_6\}$  dans (1.32) tend uniformément vers 0 pour  $\rho \rightarrow 0$ , et donc pour  $(\mathbf{n}_i \times H, -\mathbf{n}_i \times E) \in C(0, t_0, L^2(\mathcal{F}_i))$  on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{F}_i} \left[ \frac{1}{4\pi(d_i + \Delta\rho)^2} \{3\mathbf{t}_i^\rho \times \mathbf{t}_i^\rho \times \mathbb{I}_6 - 2\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_6\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times H \\ -(\mathbf{n}_i \times E) \end{pmatrix} (t_0 - (d_i + \Delta\rho), \cdot) \right. \\ & \left. - \frac{1}{4\pi d_i^2} \{\mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_i \times \mathbb{I}_6\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times H \\ -(\mathbf{n}_i \times E) \end{pmatrix} (t_0 - d_i, \cdot) \right] dS_i \longrightarrow_{\rho \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{F}_i} \left[ \frac{1}{4\pi(d_i + \Delta\rho)^3} \{3\mathbf{t}_i^\rho \times \mathbf{t}_i^\rho \times \mathbb{I}_6 - 2\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_6\} \int_0^{t_0 - (d_i + \Delta\rho)} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times H \\ -(\mathbf{n}_i \times E) \end{pmatrix} (s, \cdot) ds \right. \\ & \left. - \frac{1}{4\pi d_i^3} \{\mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_i \times \mathbb{I}_6\} \int_0^{t_0 - d_i} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times H \\ -(\mathbf{n}_i \times E) \end{pmatrix} (s, \cdot) ds \right] dS_i \longrightarrow_{\rho \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Finalement, en désignant par  $(\tilde{E}_i^\rho, \tilde{H}_i^\rho)(t_0, X_0)$  la formule approchée calculée par (1.32) et centrée sur le point  $X_i^\rho$ , on obtient

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_i^\rho \\ \tilde{H}_i^\rho \end{pmatrix} (t_0, X_0) - \begin{pmatrix} \tilde{E}_i \\ \tilde{H}_i \end{pmatrix} (t_0, X_0) \longrightarrow_{\rho \rightarrow 0} 0.$$

■

**Remarque 1.2.54** *La limite obtenue par la proposition 1.2.53 est indépendante du chemin  $\Gamma$  choisi. Elle signifie donc que la formule (1.51) tend continûment vers (1.32) pour  $\mathbf{t}_i \rightarrow \pm \mathbf{n}_i$ . Il n'y a donc pas de traitement numérique particulier à prévoir pour le cas limite  $\mathbf{t}_i \rightarrow \pm \mathbf{n}_i$ .*

### 1.3 Etude numérique de la formule intégrale approchée

Cette partie présente des exemples de cas assez simples visant à valider la méthode de rayonnement. Conformément à l'objectif de généralisation de la formule de rayonnement en champs lointain de Yee [73], les exemples numériques seront effectués en utilisant le schéma de différences finies introduit par Yee [72] : FDTD (Finite Differences in Time Domain). Bien évidemment tous ces résultats s'étendent naturellement à de nombreux autres types de schémas numériques temporels, tels que les volumes finis (employés dans le cadre de l'hybridation de schémas pour l'utilisation de la méthode multi-domaines dans la section 3.3.2), les éléments finis ou le Galerkin discontinu, même si ces résultats ne sont pas présentés ici.

Afin de pouvoir obtenir une solution numérique suffisamment précise pour être prise comme référence, les cas tests ont été choisis dans le contexte où la FDTD donne les meilleurs résultats. Les obstacles considérés seront alors donnés comme des cubes axés conformément à la grille de maillage utilisée.

**Remarque 1.3.1** *Afin de pouvoir effectuer les calculs en utilisant des schémas et les formules couramment usités, et pour donner un "sens physique" à ceux-ci, les résolutions numériques seront menées en dimensionnant la formule de rayonnement (1.10). Pour cela, il suffit de faire le changement de variable de  $t \rightarrow c_0 t$ , et les changements d'inconnues  $E \rightarrow \sqrt{\varepsilon_0} E$  et  $H \rightarrow \sqrt{\mu_0} H$ ;  $c_0$  désignant la vitesse de la lumière dans le vide (ou le milieu),  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  les permittivités électriques et magnétiques du vide (ou du milieu). L'expression dimensionnée de la formule intégrale approchée est explicitée dans la section A.2.1 de l'annexe A.*

#### 1.3.1 Comparaisons et étude de la précision en fonction de la distance

Le cas considéré, illustré par la figure 1.8, se compose d'une boîte métallique parfaitement conductrice (donc vérifiant une condition d'obstacle de type conducteur électrique parfait) d'arête de longueur  $\lambda$  ( $\lambda \approx 2$ ), et excitée par l'onde plane ( $E^{inc}, H^{inc}$ ), solution des équations de Maxwell dans le vide, suivante

$$\begin{cases} E^{inc} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi \varepsilon_0}} e^{-(c_0 t - 6 + z)^2} \vec{e}_x, \\ H^{inc} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(c_0 t - 6 + z)^2} \vec{e}_y. \end{cases} \quad (1.53)$$

La boîte est entourée par une surface de prélèvement cubique centrée sur le centre de la boîte, et placée à approximativement  $\lambda$  de la surface métallique. Tous les calculs sont effectués en champs diffractés donc la boîte est excitée, sous forme de condition sur le bord de type Dirichlet, par le courant électrique induit par le champs incident :  $\mathbf{n} \times H^{inc}$ . Enfin, le domaine de calcul est fermé artificiellement par utilisation de couches parfaitement absorbantes (PML [14]).

#### Comparaisons entre les formules

Les résultats présentés dans cette partie sont obtenus en utilisant la FDTD sur une grille régulière maillée en  $\lambda/10$ .

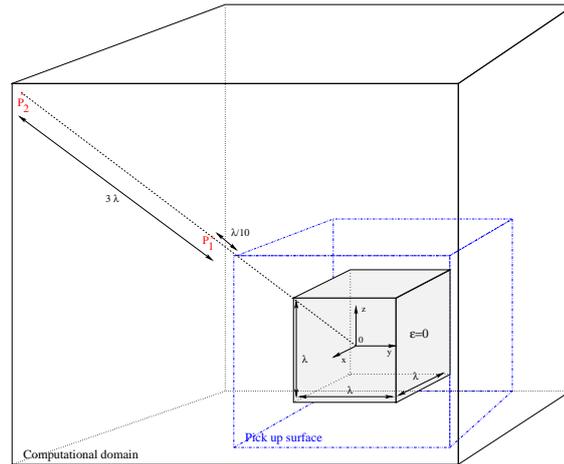


FIG. 1.8 – Configuration du cas test : cube métallique parfaitement conducteur d'arête  $\lambda$

Les termes prépondérants de la formule (1.10) pour  $d_i \rightarrow \infty$  (i.e. ceux en  $d_i^{-1}$ ) étant les même que pour la formule de Yee, il est normal que ces deux formules donnent des résultat identiques pour des points éloignés de la surface de prélèvement. Cette dernière étant validée théoriquement et numériquement, elle peut alors être considérée comme référence dans son domaine d'application. Ceci a été constaté numériquement dans les cas tests effectués. Une comparaison entre ces deux formules pour un point situé à approximativement  $10\lambda$  est fournie sur la figure 1.9 montrant cette adéquation.

Les exemples présentés ici s'intéressent donc plus au comportement en zone "plus proche", c'est-à-dire en se rapprochant de  $3\lambda$  jusqu'à  $\lambda/10$ ,  $\lambda$  désignant une longueur d'onde "caractéristique" du signal excitateur.

Afin de prendre en compte les éventuels effets de coins ou d'arrête, et comme sur ce type de cas les phénomènes de diffractions les plus marqués se déroulent généralement le long des coins, les valeurs numériques comparées seront relevées sur un axe porté par une des diagonales de la boîte. Les calculs ont été faits tout le long de cet axe en tenant compte de toutes les composantes du champ. L'évolution de la précision des différentes formules de rayonnement est fournie dans ce paragraphe.

Les valeurs présentées correspondent donc aux points suivants de cet axe :

1.  $P_2$  : (5.86, -5.86, 5.86) sur la figure 1.10, soit à environ  $3\lambda$  de la surface de prélèvement,
2.  $P_3$  : (3.55, -3.55, 3.55) sur la figure 1.11, entre  $P_1$  et  $P_2$ , à  $\lambda/2$  de la surface.
3. et  $P_1$  : (2.52, -2.52, 2.52) sur la figure 1.12, soit à  $\lambda/10$  de la surface.

Pour chacun des points on représente les deux composantes du champ électromagnétique les plus significatives  $E_x$  et  $H_y$  en fonction du temps  $t$ . Sur chaque figure, on trace alors les trois quantités suivantes :

- le relevé FDTD au point, pris comme valeur de référence, (FDTD value)
- la valeur obtenue par calcul du champ lointain (Far Field),
- la valeur obtenue par la formule de rayonnement (1.10) (NTRF pour "Near-to-Relative-Far").

Il est alors possible d'observer que la formule de rayonnement (1.10) donne d'aussi bons résultats en champ proche (figure 1.10) ou très proche (de l'ordre de la maille sur la figure 1.12) qu'en champ

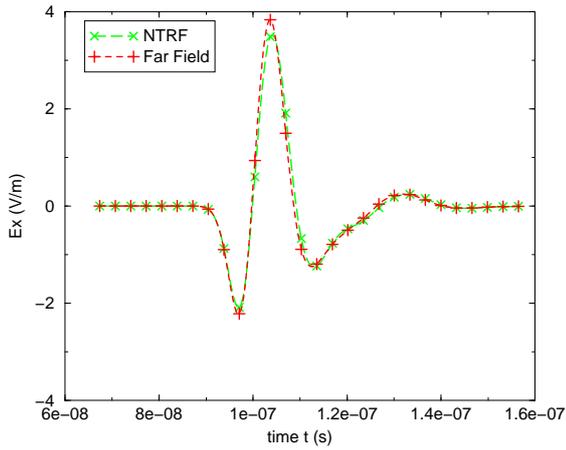
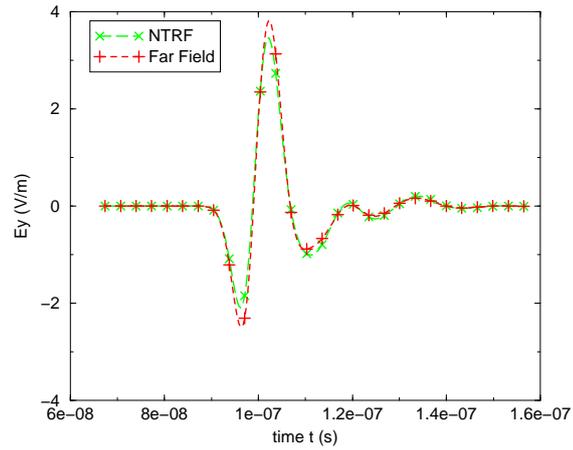
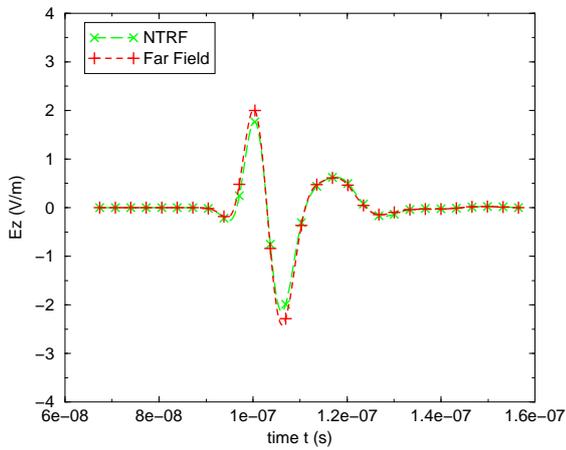
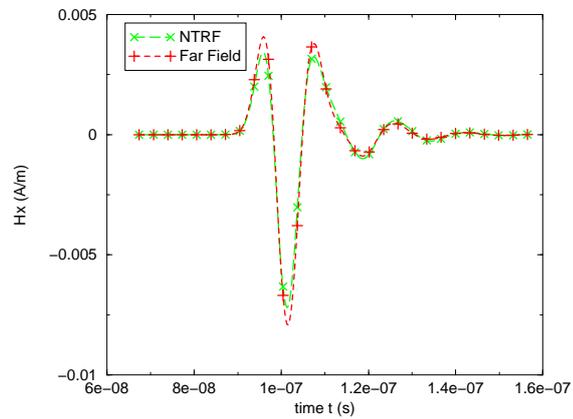
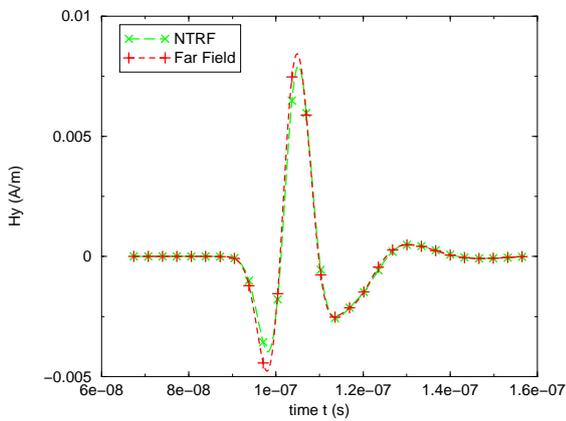
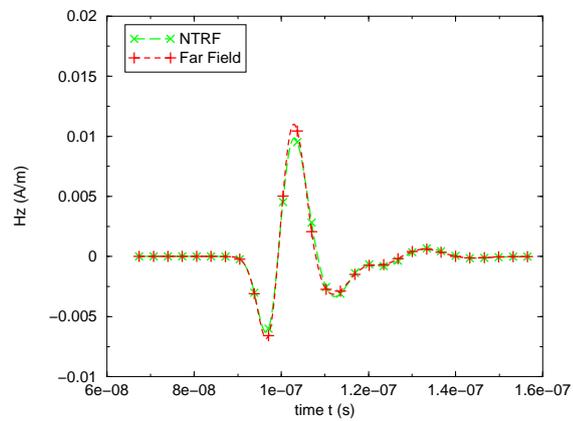
(a) Champs  $E_x$ (b) Champs  $E_y$ (c) Champs  $E_z$ (d) Champs  $H_x$ (e) Champs  $H_y$ (f) Champs  $H_z$ 

FIG. 1.9 – Comparaisons à  $\approx 10 \lambda$  (point  $(14, -14, 14)$ ) : champs lointain (Far Field) / Formule intégrale approchée (NTRF)

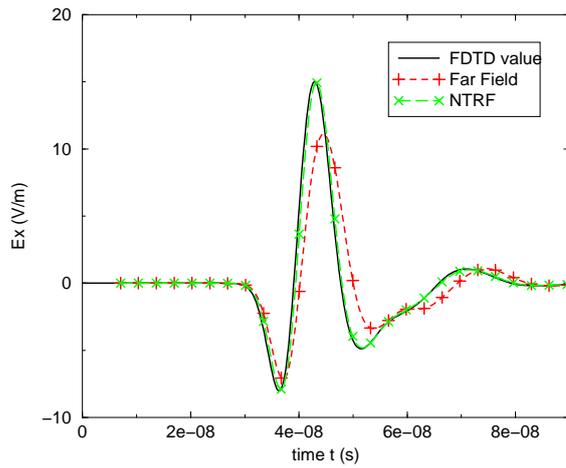
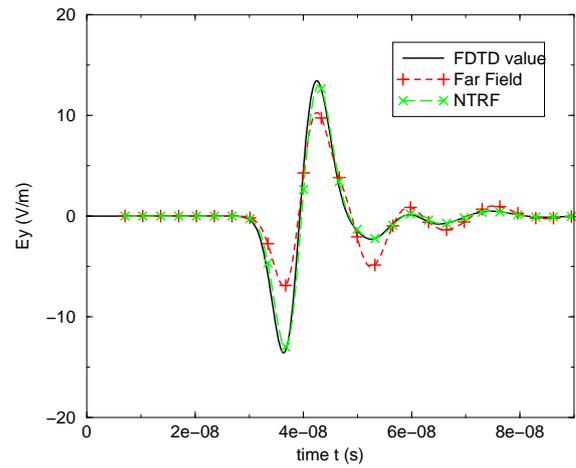
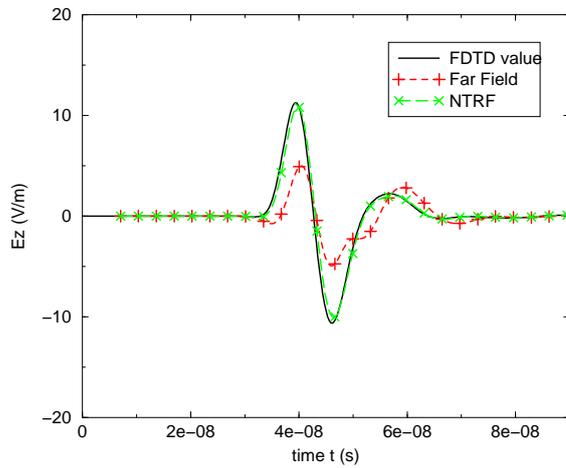
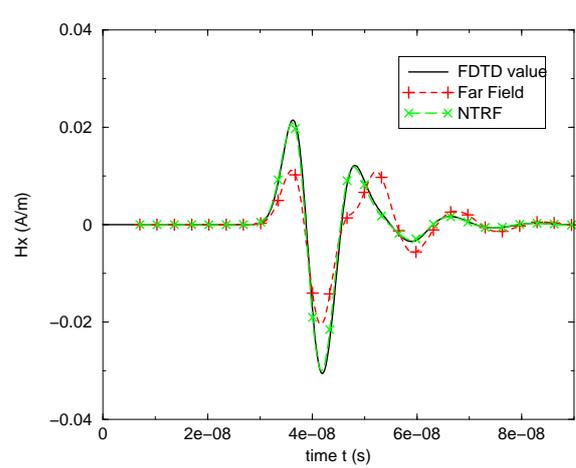
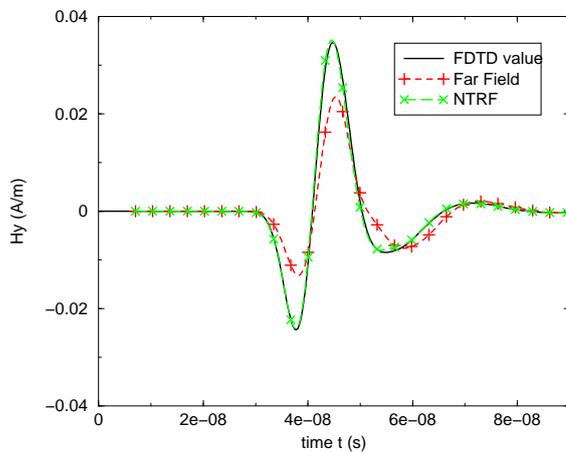
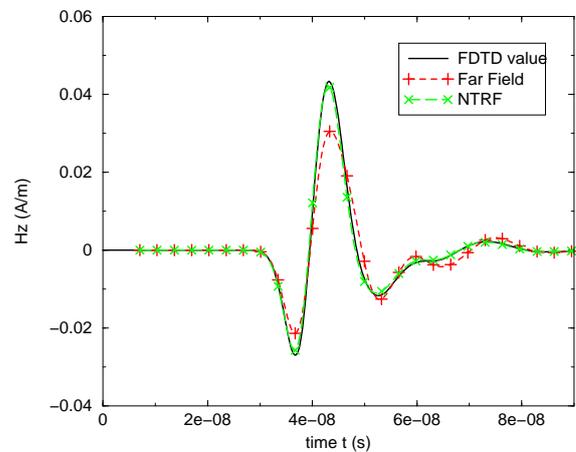
(a) Champs  $E_x$ (b) Champs  $E_y$ (c) Champs  $E_z$ (d) Champs  $H_x$ (e) Champs  $H_y$ (f) Champs  $H_z$ 

FIG. 1.10 – Comparaisons à  $\approx \lambda/2$  (point  $(3.55, -3.55, 3.55)$ ) : champs proche (FDTD value) / champs lointain (Far Field) / Formule intégrale approchée (NTRF)

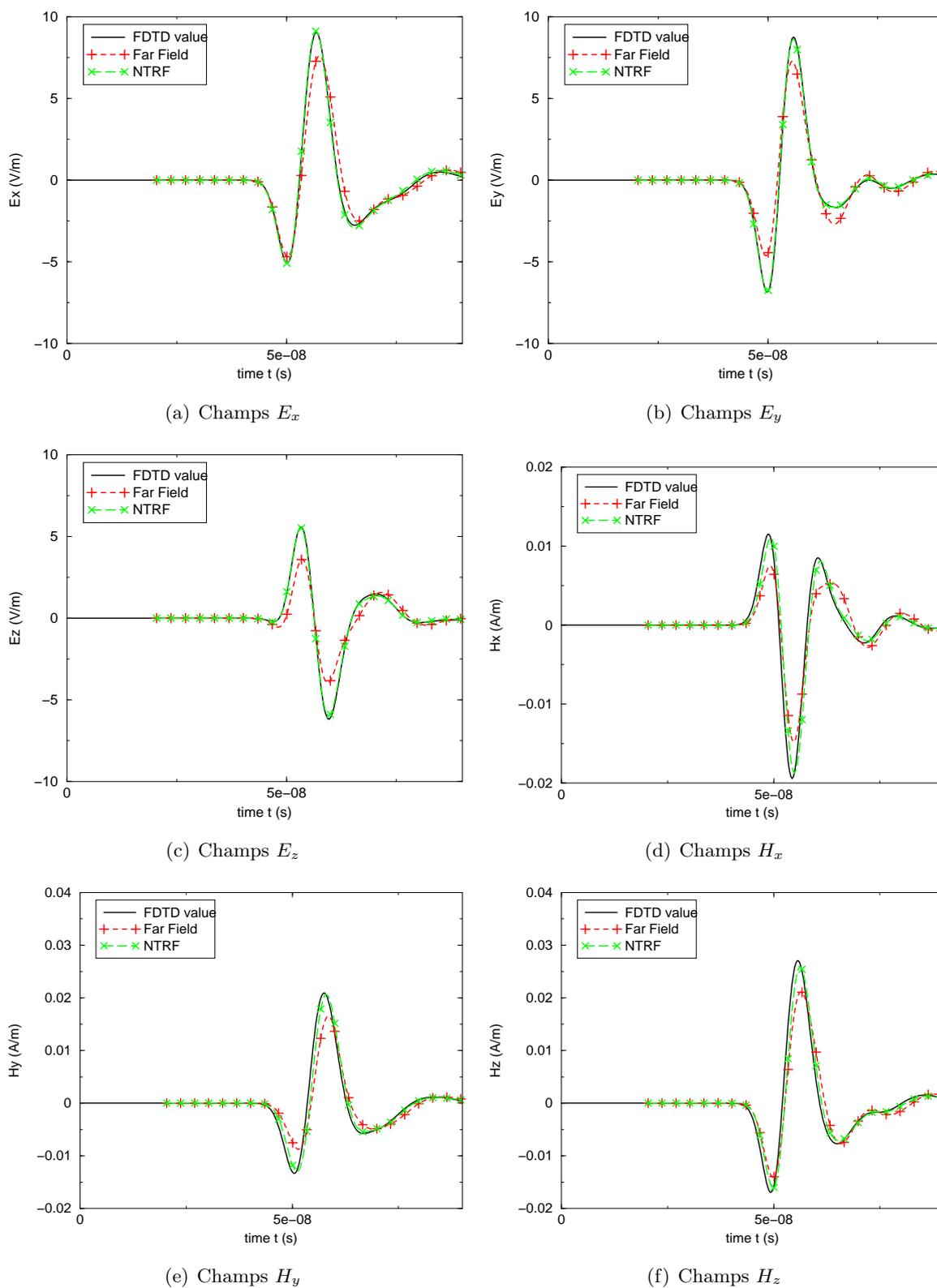


FIG. 1.11 – Comparaisons à  $\approx 3\lambda$  (point  $(5.86, -5.86, 5.86)$ ) : champs proche (FDTD value) / champs lointain (Far Field) / Formule intégrale approchée (NTRF)

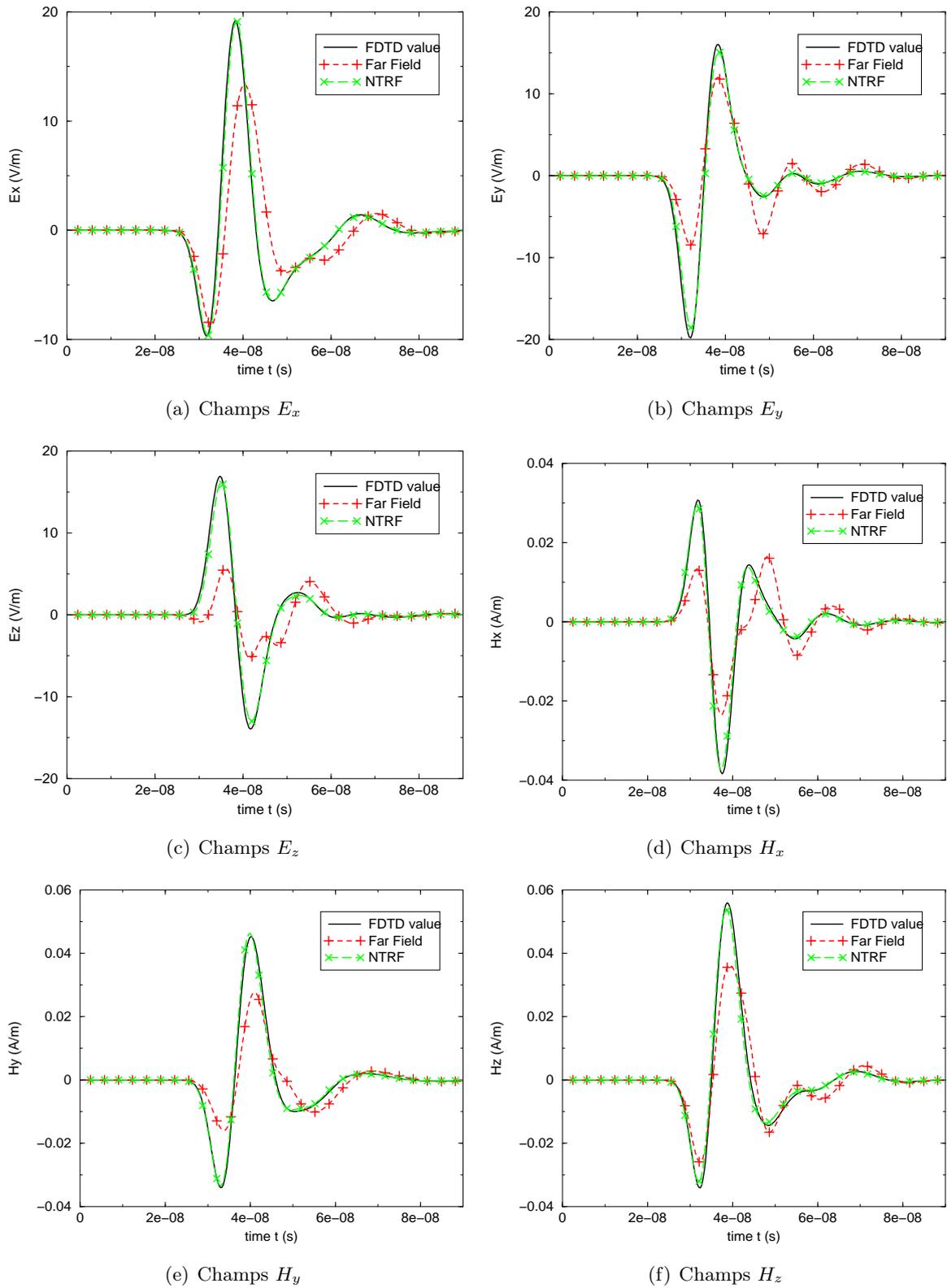


FIG. 1.12 – Comparaisons à  $\approx \lambda/10$  (point  $(2.75, -2.75, 2.75)$ ) : champs proche (FDTD value) / champs lointain (Far Field) / Formule intégrale approchée (NTRF)

lointain (figure 1.9). Il faut aussi souligner que le temps de calcul et le stockage mémoire nécessaires pour obtenir ces deux valeurs sont très similaires à ceux du calcul avec la formule de champ lointain. De plus, si cette dernière n'est pas très précise en zone proche (figures 1.11 et 1.12) on voit aisément que lorsque la distance grandit sa précision s'améliore (figure 1.10).

### Evaluation numérique de l'erreur sur les formules de rayonnement

Afin d'affiner les résultats précédents, l'erreur numérique introduite par utilisation des formules de rayonnement va être quantifiée et comparée ici. Pour cela, dans un premier temps, nous allons représenter la différence entre la solution de référence et les formules de rayonnement par une erreur quadratique discrète donnée par

$$\sqrt{\frac{\sum_{n=0}^N \Delta t \left( E^*(n\Delta t, X) - \hat{E}(n\Delta t, X) \right)^2}{\sum_{n=0}^N \Delta t \left( \hat{E}(n\Delta t, X) \right)^2}}, \quad (1.54)$$

où

- $\Delta t$  est le pas de temps utilisé dans le schéma numérique,
- $N$  le nombre d'itérations en temps,
- $X$  le point considéré ( $X$  est choisi sur le segment  $[P_1, P_2]$ ),
- $E^*(n\Delta t, X)$  est la valeur de  $E$  obtenue par la formule de rayonnement considérée au  $X$  au temps  $n\Delta t$ ,
- et  $\hat{E}(n\Delta t, X)$  est la valeur obtenue par FDTD au point  $X$  au temps  $n\Delta t$ .

Une formule similaire est utilisée pour le champ magnétique  $H$ .

La figure figure 1.13 présente alors l'évolution de cette erreur par rapport à la distance du point d'observation  $X$  à la surface de prélèvement (exprimée en multiples de  $\lambda/10$ ).

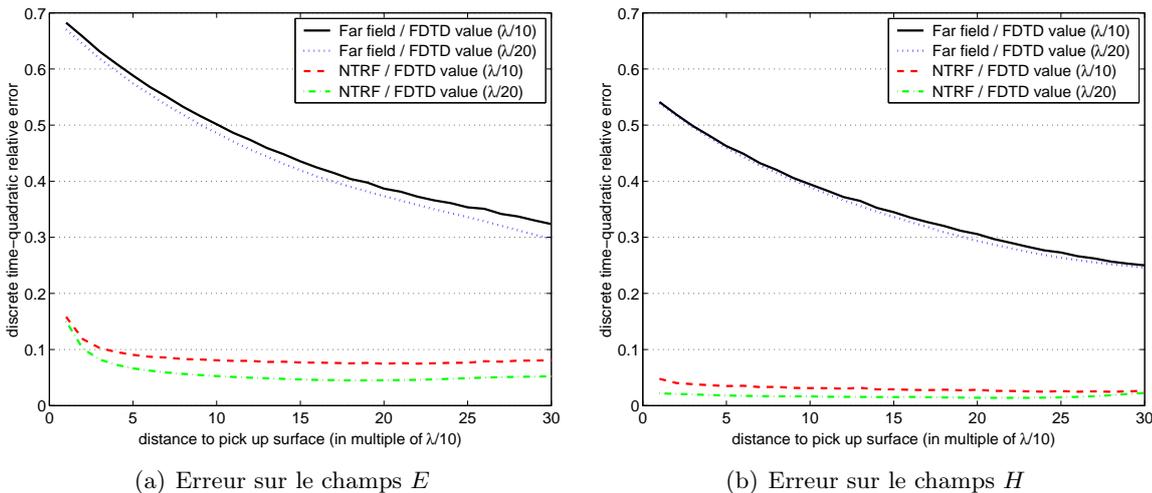


FIG. 1.13 – Evolution de l'erreur avec la distance en norme 2

L'erreur obtenue sur le maillage en  $\lambda/10$  par utilisation de la formule (1.10) étant relativement faible est quasiment constante à partir de  $\lambda/2$ , le même cas est alors réalisé en utilisant un maillage plus fin en  $\lambda/20$ . Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 1.13. L'erreur quadratique discrète de la formule (1.10) est alors divisée par 2 en passant d'un maillage en  $\lambda/10$  à un maillage

deux fois plus fin. Il semble que l'erreur introduite soit donc majoritairement due à la précision du schéma numérique employé à l'intérieur du volume délimité par la surface de prélèvement. Ceci confirme numériquement la précision *a priori* de la formule (1.10) en zone semi-lointaine. En outre, même si ce n'est pas son domaine d'application, on peut toutefois remarquer que la formule de champ lointain induit des erreurs assez importantes en zone proche (environ 70% pour le champ  $E$ , et 55% pour le champ  $H$  avec un maillage en  $\lambda/10$  ou  $\lambda/20$ ). Cette erreur croissant significativement pour une distance tendant vers 0 et le fait qu'elle ne diminue pas par raffinement de maillage justifie *a posteriori* le choix d'utiliser la formule (1.10) plutôt que les formules "classiques" (i.e. obtenues en ne considérant que la distance comme critère de précision) pour effectuer par la suite la phase d'interpolation dans la méthode multi-domaine (cf chapitre 2).

Il semble aussi que les valeurs extrêmes obtenues en utilisant la formule d'erreur (1.54) soient aussi dues à une erreur d'appréciation des formules pour les amplitudes maximales. Pour répondre à cela on propose alors de reformuler les résultats présentés sur la figure 1.13 en utilisant une estimation différente de l'erreur, sous forme d'erreur absolue discrète, donnée par

$$\frac{\max_{n=0..N} |E^*(n\Delta t, X) - \hat{E}(n\Delta t, X)|}{\max_{n=0..N} |E^{inc}(n\Delta t, X)|}, \quad (1.55)$$

où  $E^{inc}(n\Delta t, X)$  représente la valeur du champs incident (1.53) au point  $X$  et au temps  $n\Delta t$ .

Le même type de formule est utilisé pour le champ  $H$ .

Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 1.14.

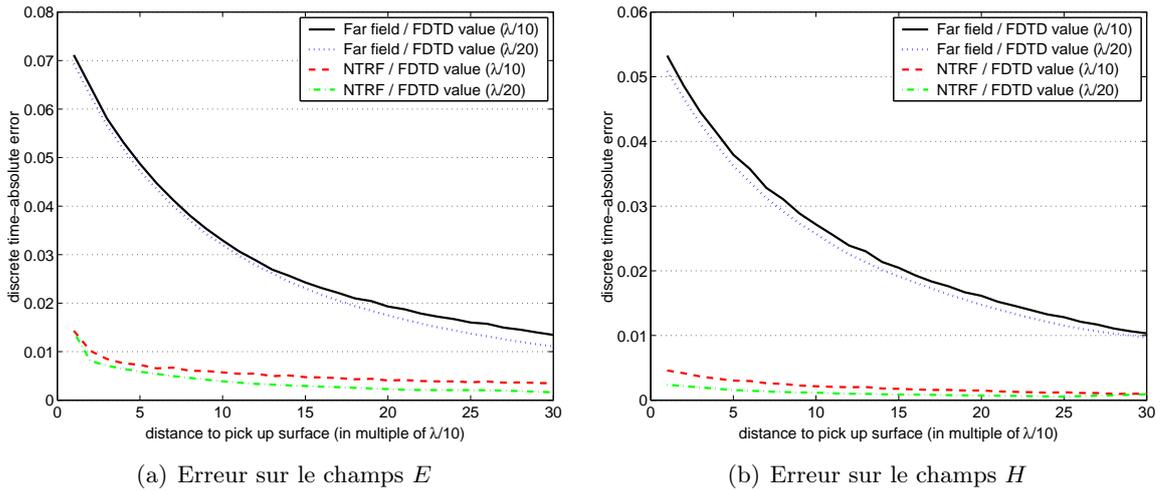


FIG. 1.14 – Evolution de l'erreur avec la distance en norme  $\infty$

En utilisant l'évaluation de l'erreur par (1.55) on constate que les valeurs maximales ont changé (divisées par un facteur 10 environ), mais l'allure générale de l'évolution est restée inchangée. De plus, on note que la formule de rayonnement (1.10) offre toujours des résultats extrêmement précis aussi bien en champ proche qu'en champ lointain. Enfin, comme observé précédemment, il semble que l'erreur introduite soit essentiellement liée à la précision du schéma numérique employé.

### Estimation de la consistance *ponctuelle* en $\delta_i/d_i$

Les résultats présentés sur les figures sont obtenus en évaluant l'erreur sur les champs  $E$  et  $H$  en des points et en adimensionnant par rapport à la norme correspondante du champs incident.

La comparaison sur plusieurs points des résultats permet de vérifier l'influence de la distance sur la consistance de la méthode. Pour cela, on a choisi des points placés sur la diagonale décrite sur la figure 1.8 à différentes distances :

- (2.52, -2.52, 2.52) soit à une distance  $d$  d'environ  $\lambda/10$  de la surface,
- (3.21, -3.21, 3.21) :  $d \approx 0.5\lambda$ ,
- (3.90, -3.90, 3.90) :  $d \approx \lambda$ ,
- (4.59, -4.59, 4.59) :  $d \approx 1.7\lambda$ ,
- (5.29, -5.29, 5.29) :  $d \approx 2.3\lambda$ .

Pour chacun de ces points, plusieurs simulations sont effectuées en faisant varier le paramètre de précision  $\varepsilon$  de 0.01 ( $\approx \lambda/200$ ) à 0.12 ( $\approx 3\lambda/50$ ). En outre, comme il a été illustré précédemment que la précision de la méthode utilisée peut être un facteur de saturation pour la précision de la formule de rayonnement, nous utiliserons ici un maillage régulier fin avec  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.05 \approx \lambda/40$ . La précision de la méthode sera alors de l'ordre de  $(\Delta x/2)^2 = 6.25 \cdot 10^{-4}$  soit largement plus fine que les valeurs de regroupement employées.

Les résultats des comparaisons sont donnés dans la figure 1.15 pour la norme infinie, et dans la figure 1.16 pour la norme quadratique.

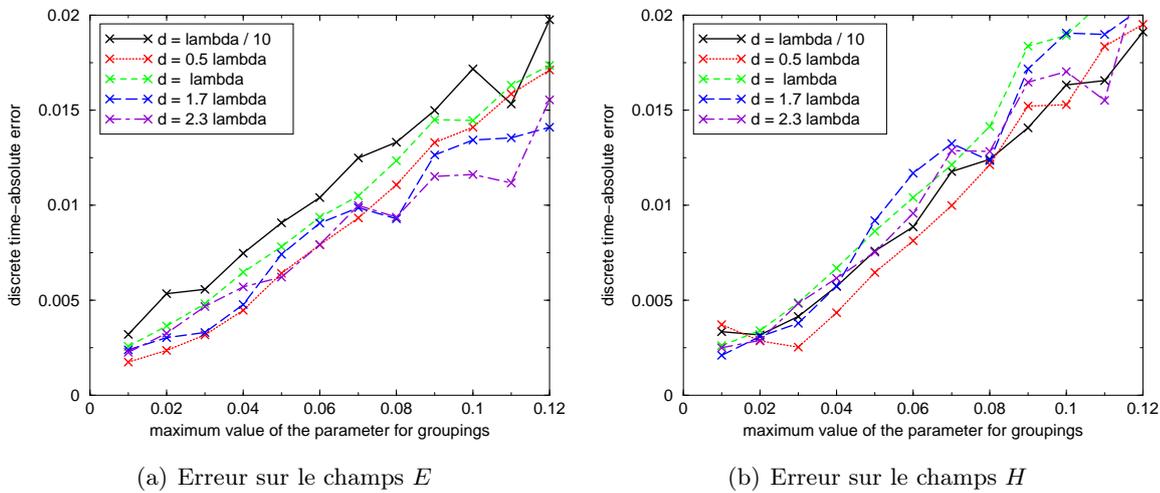
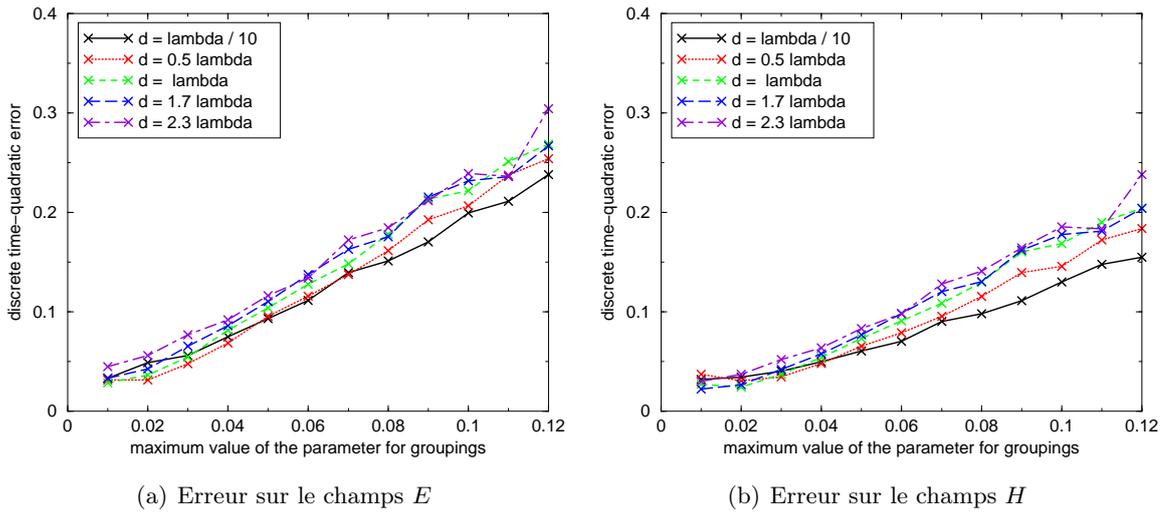


FIG. 1.15 – Evolution de l'erreur en fonction du paramètre  $\delta_i/d_i$ , en norme  $\infty$

Sur les figures 1.15 et 1.16 nous constatons que toutes les courbes sont très proches ce qui confirme a priori que la précision de la formule intégrale approchée est indépendante de la distance du point de calcul, et n'est donc liée qu'à la valeur du paramètre de regroupement  $\delta_i/d_i$  introduit. De plus, on remarque que toutes ces courbes sont quasiment des droites, la formule semblant alors donner une erreur ponctuellement d'ordre 1. Afin de le vérifier on calcule à partir des résultats précédents l'ordre de la méthode en évaluant successivement

$$ordre = \log \left( \frac{err(2\epsilon)}{err(\epsilon)} \right) / \log 2,$$

où  $err(\epsilon)$  et  $err(2\epsilon)$  sont les erreurs obtenues pour des regroupements respectivement de taille  $\epsilon$

FIG. 1.16 – Evolution de l'erreur en fonction du paramètre  $\delta_i/d_i$ , en norme 2

et  $2\epsilon$ . En effectuant une moyenne sur les différentes précisions calculées on en déduit pour chaque point l'ordre de la méthode. Ces résultats sont regroupés dans le tableau 1.1.

Ordre moyen de l'erreur : \	Distance à la surface :				
	$\lambda/10$	$0.5\lambda$	$\lambda$	$1.7\lambda$	$2.3\lambda$
E en norme 2	0.91	1.00	1.01	0.91	0.85
H en norme 2	0.82	0.91	1.00	1.00	0.93
E en norme $\infty$	0.80	1.07	0.84	0.80	0.76
H en norme $\infty$	0.88	1.03	0.97	0.97	0.92

TAB. 1.1 – Ordres moyens de l'erreur de la formule de rayonnement en fonction de la distance

Cette première étape valide alors numériquement la formule intégrale approchée (1.10). En effet elle s'avère aussi précise pour traduire les interactions proches que lointaines, l'erreur qu'elle introduit étant alors contrôlable entres autres par la précision du schéma de résolution utilisé.

Toutefois, un des gains apportés par la définition des surfaces admissibles 1.2.6 étant la possibilité de choisir des surfaces de prélèvement non-convexes n'ayant pas été utilisé ici, nous proposons un dernier cas de comparaison testant la validité de cette approche.

### 1.3.2 Exemple de rayonnement par surface admissible non-convexe

L'exemple illustré dans la figure 1.17 présente un cas test constitué par deux éléments rectangulaires : une boîte métallique parfaitement conductrice, et un barreau diélectrique de constante  $\epsilon_r = 60$ . Cet exemple est donné pour montrer l'utilisation de surfaces de prélèvement non-convexe, admissibles au sens de la définition 1.2.6, plus proches des éléments. Nous utiliserons donc une surface entourant les deux éléments (cf figure 1.17) et placée à quelques cellules de ceux-ci.

Comme précédemment les résultats sont obtenus à partir d'une résolution par différences finies sur un maillage à  $\lambda/10$ , la scène étant éclairée par l'onde plane (1.53), et le domaine de calcul est borné par utilisation de PML.

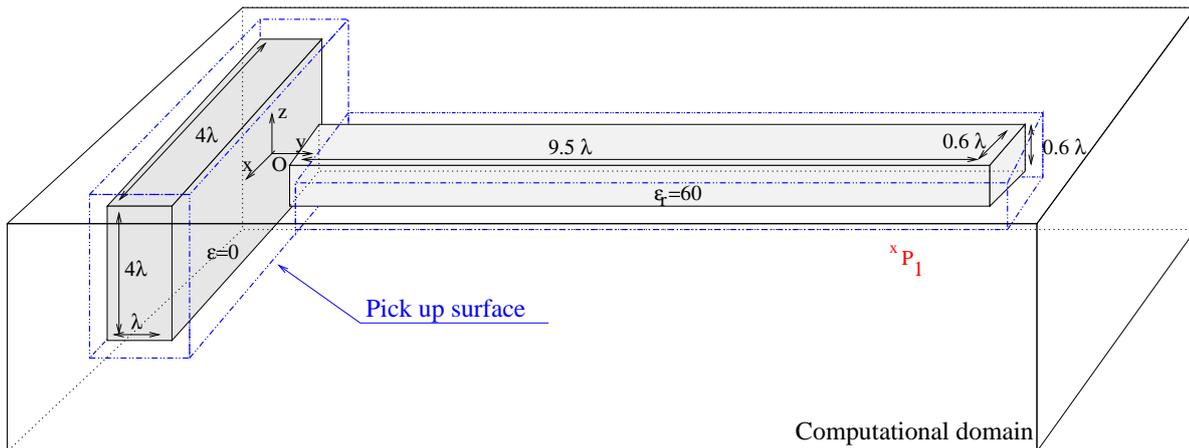


FIG. 1.17 – Configuration du cas test : boîte métallique parfaitement conductrice accolée à un barreau diélectrique ( $\epsilon_r = 60$ )

Sur la figure 1.18 nous présentons les résultats obtenus, par comparaison entre un relevé de la valeur calculée par FDTD et le champ obtenu par rayonnement en utilisant la formule intégrale approchée (1.10), en un point placé au voisinage de la surface de prélèvement (point  $P_1$  sur la figure 1.17). Ce point est choisi de telle sorte qu'une surface rectangulaire englobant l'ensemble boîte-barreau le contiendrait forcément. En outre, comme pour les exemples précédents (figures 1.11 et 1.12) il se trouve à une distance très petite de la surface de prélèvement : à environ  $0.4\lambda$  de celle-ci. Nous sommes donc dans un cas limite pour les formules de rayonnement classique de par sa position dans le volume nécessaire au calcul et au prélèvement des courants sur une surface convexe, et par sa proximité à la surface. Enfin, dans un souci de cohérence avec les résultats déjà présentés (figures 1.11, 1.10 et 1.12) nous représentons sur la figure 1.18 le résultat de l'application de la formule de rayonnement en champs lointain à partir des courants prélevés sur cette surface non-convexe, même si toutefois il est clair que ce n'est pas un cas d'application de cette formule.

Nous observons alors sur la figure 1.18 que les résultats obtenus par FDTD et par la formule de rayonnement sont quasiment identiques, validant ainsi l'approche par rayonnement dans un domaine proche en utilisant une surface de prélèvement non-convexe. Les légères différences s'expliquent par la nécessité de raffiner le maillage afin de garantir aux cellules proches de la surface d'obtenir la taille nécessaire pour le paramètre  $\delta$ .

Ce type de résultat motive alors l'utilité du choix de surfaces de rayonnement non-convexes afin de relever des courants peu entachés d'erreurs de dissipation/dispersion et de limiter les volumes globaux de maillages, diminuant ainsi les coûts de stockages pour la résolution. De telles applications se rencontrent dans la résolution par méthodes sur maillages non-structurés pouvant s'avérer coûteuses en fonction des volumes et des détails de constitutions des éléments en présence.

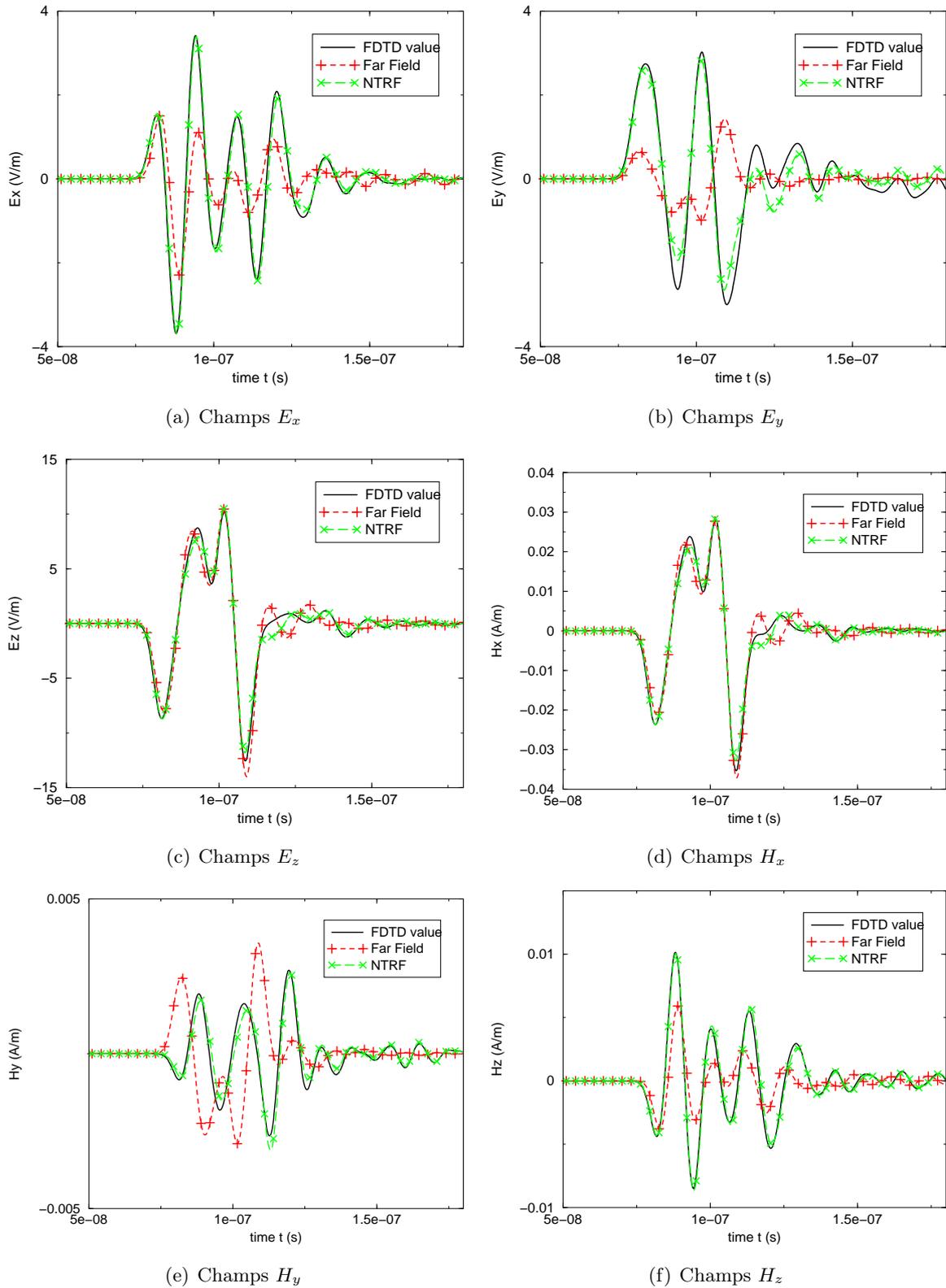


FIG. 1.18 – Comparaisons à  $\approx 0.4\lambda$  (point (2, 20, 2)) : champs proche (FDTD value) / champs lointain (Far Field) / Formule intégrale approchée (NTRF)



## Chapitre 2

# Méthode de décomposition en sous-domaines disjoints

**Notation :** comme dans toute la suite il sera souvent nécessaire de considérer un élément repéré par un indice  $i \in I$  parmi un ensemble  $I \subset \mathbb{N}$ , puis de regarder l'influence des autres éléments (individuellement ou séparément), nous désignerons par  $i^*$  un indice quelconque tel que  $i^* \in I$  et  $i^* \neq i$ . Ainsi, pour un ensemble d'éléments  $(f_j)_{j \in I}$  donné,  $f_{i^*}$  désignera un  $f_j$  quelconque d'indice  $j \neq i$ , et nous aurons par exemple  $\sum_{i^*} f_{i^*} := \sum_{j \neq i} f_j$  et  $\prod_{i^*} f_{i^*} := \prod_{j \neq i} f_j$ .

### 2.1 Principe de la décomposition multi-domaines

Considérons des sources et des objets diffractants placés dans un milieu homogène et séparés les uns des autres (cf figure 2.1). De plus, les éventuelles sources de type "ondes planes" (ie : solution des équations de Maxwell dans le milieu en l'absence des objets diffractants) seront introduites autour de chaque objet ou groupe d'objets par l'intermédiaire de surfaces ou de volumes de Huygens.

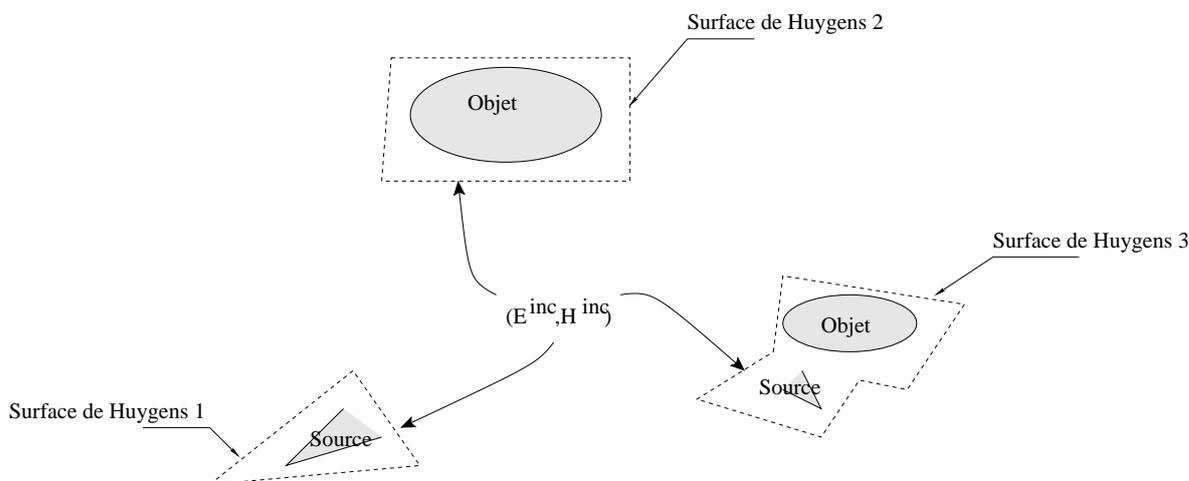


FIG. 2.1 – Représentation du système avant découpage en sous-domaines

Dans tout la suite nous désignerons par  $(E^{inc}, H^{inc})^t$  les sources de type "onde plane", et par  $(E^{src}, H^{src})^t$  tous les autres termes de sources. Le problème présenté ici peut alors être modélisé à partir des équations de Maxwell, sous la forme :

**Problème 2.1.1 (équations de Maxwell)**

Trouver  $u \in C^0\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{D}\left([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l\right)\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}^+, L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]}(\mathbb{R}^3)\right)$  solution de

$$\begin{cases} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0] \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) u = u^{src} + \sum_i B_i^{\mathcal{H}^i} u^{inc}, \\ u(t=0) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où :

- $\mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l$  représente l'opérateur de diffraction en espace homogène, soit :

$$\mathbb{A}_0 \partial_t == \begin{pmatrix} \partial_t \mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & \partial_t \mathbb{I}_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla \times \\ \nabla \times & 0 \end{pmatrix};$$

- $\mathbb{A}'_0 \partial_t$  représente la présence de permittivités variables ( $\varepsilon_r(x)$  et  $\mu_r(x)$ ), soit :

$$\mathbb{A}'_0 \partial_t == \begin{pmatrix} (\varepsilon_r(x) - 1) \partial_t \mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & (\mu_r(x) - 1) \partial_t \mathbb{I}_3 \end{pmatrix},$$

avec  $\mathbb{A}'_0$  uniformément coercif et à coefficients dans  $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ ;

- $\mathbb{B}$  est un opérateur de multiplication représenté par une matrice à support compact à support compact représentant les inhomogénéités du milieu ou des conditions aux limites;
- $L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]}(\mathbb{R}^3)$  est l'espace des fonctions de carré intégrables pour la norme associée au produit scalaire

$$(\phi, \xi) \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} ([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0] \phi, \xi),$$

et  $\mathcal{D}\left([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l\right)$  est le domaine de l'opérateur  $[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l$  à valeur dans  $L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]}(\mathbb{R}^3)$ ;

- enfin  $u = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ ,  $u^{src} = \begin{pmatrix} E^{src} \\ H^{src} \end{pmatrix}$  et  $u^{inc} = \begin{pmatrix} E^{inc} \\ H^{inc} \end{pmatrix}$ .

Avec les notations précédentes  $\mathbb{B}$  peut alors être, par exemple, une représentation de condition limite maximale monotone, donc ne changeant pas la résolution du problème 2.1.1, sur un obstacle (élément conducteur, impédance électromagnétique,...). Enfin, pour une surface de Huygens  $\mathcal{H}^i$  donnée, on désigne par  $\varphi_{\mathcal{H}^i}$  une régularisation de la fonction caractéristique de  $V(\mathcal{H}^i)$  vérifiant  $\varphi_i(x) = 1 \forall x \in V(\mathcal{H}^i)$  et  $\varphi_i(x) = 0 \forall x \in V(\mathcal{P}^i)^c$ ; l'opérateur de trace sur  $\mathcal{H}^i$ ,  $B_i^{\mathcal{H}^i}$ , est alors défini par

$$B_i^{\mathcal{H}^i} = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \varphi_{\mathcal{H}^i} \times \mathbb{I}_3 \\ -\nabla \varphi_{\mathcal{H}^i} \times \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Remarque 2.1.2** Pour des raisons de régularités des seconds membres introduits dans (2.1) les termes  $B_i^{\mathcal{H}^i} u^{inc}$  seront portés par des volumes de Huygens, régularisés de surfaces de Huygens. Toutefois, dans les applications numériques nous considérerons que ces volumes sont assimilables à des surfaces, c'est-à-dire qu'ils sont d'épaisseur négligeable devant les grandeurs caractéristiques du maillage. Ceci est possible car aucune épaisseur minimale n'est imposée pour les supports des régularisations  $\varphi_{\mathcal{H}^i}$ . L'expression de l'opérateur de trace sera alors notée

$$B_i^{\mathcal{H}^i} \approx \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{n}_{\mathcal{H}^i} \times \delta_{\mathcal{H}^i} \\ -\mathbf{n}_{\mathcal{H}^i} \times \delta_{\mathcal{H}^i} & 0 \end{pmatrix}.$$

De même les surfaces de prélèvement  $\mathcal{P}^i$  seront supposées  $C^1$  et par la suite, dans l'écriture du problème de décomposition en sous-domaines approché décrivant la méthode de résolution nous considérerons des surfaces de prélèvement polyédriques et utiliserons alors la formule de rayonnement "semi-lointain" établie dans le chapitre précédent.

Pour le problème 2.1.1, on a alors le résultat suivant :

**Proposition 2.1.3** *Soit  $\Omega$  le support de  $\mathbb{B}$ . Si  $u^{src}$  et  $u^{inc}$  sont dans  $C^1(\mathbb{R}^+, L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]}(\mathbb{R}^3))$ , et si  $\mathbb{B} \in L^\infty(\Omega)$  ou représente une condition aux limites maximales monotone sur  $\partial\Omega$ , alors il existe une unique solution  $u$  au problème 2.1.1.*

L'espace  $L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]}(\mathbb{R}^3)$  est uniformément équivalent à  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . En effet, par la coercivité et le caractère borné des coefficients de  $[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]$  il existe deux constantes strictement positives  $C$  et  $C'$  telles que

$$C \|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|\Phi\|_{L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]}(\mathbb{R}^3)}^2 C' \|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

La proposition 2.1.3 n'est alors qu'une simple application du théorème de Hille-Yosida. Elle permet simplement de poser un cadre fonctionnel à la décomposition du problème (2.1) et à l'interprétation des systèmes couplés ainsi obtenus dans ce paragraphe. Afin de pouvoir continuer le travail de décomposition en problèmes couplés, nous nous placerons alors dans le contexte des hypothèses de la proposition 2.1.3 dans tout ce paragraphe.

Dans la suite, au paragraphe 2.3 nous préciserons un cadre formel plus complet afin d'étudier, en existence et en unicité, le système couplé détaillant la méthode multi-domaines.

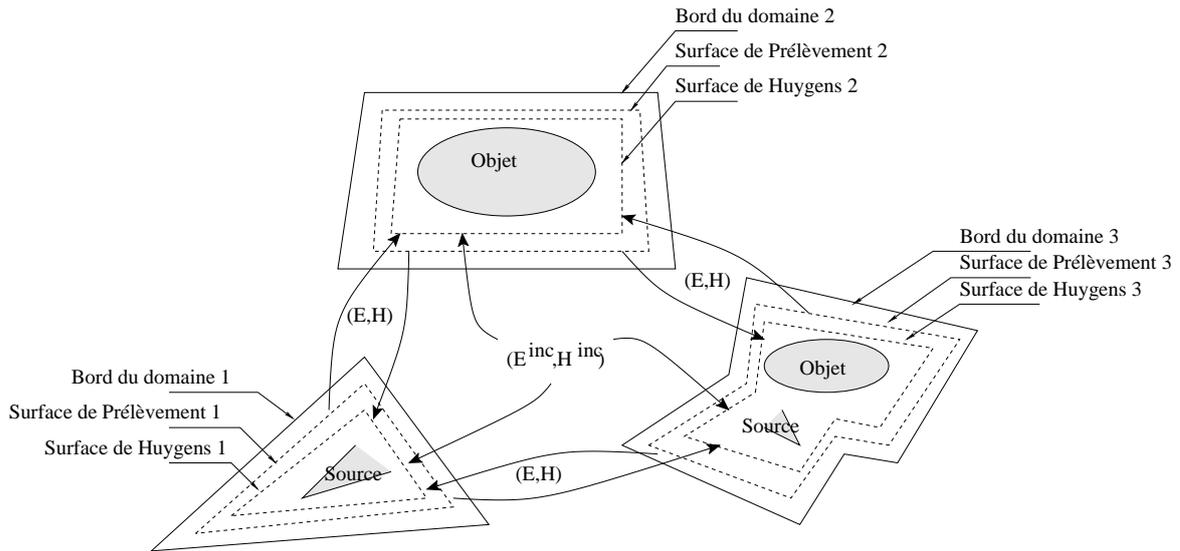


FIG. 2.2 – Représentation du principe de découpage en sous-domaines

Le principe de la méthode de résolution par décomposition en sous-domaines disjointes proposée dans ce rapport peut-être résumé de la manière suivante (cf figure 2.2) :

1. Nous séparons les différents objets dans des volumes de calculs disjoints sur lesquels nous utiliserons des méthodes classiques de résolution des équations de Maxwell (FDTD, FVTD,

DGTD...). Ces domaines étant alors de volumes finis, ils seront bornés par l'utilisation de conditions aux limites absorbantes (PML).

2. A partir de valeurs de courants prélevées à l'intérieur d'un volume de calcul donné nous évaluons sa contribution aux autres volumes par utilisation d'une formule intégrale.
3. Puis, à partir du calcul des contributions de chacun des domaines, nous introduisons ces valeurs de champs rayonnés sous forme de termes sources dans chaque volume en utilisant des surfaces ou des volumes de Huygens. L'utilisation de surfaces ou de volumes de Huygens pour imposer les sources permet de ne pas modifier les schémas numériques utilisés car cela n'ajoute seulement qu'un second membre localisé en espace dans les équations de Maxwell.
4. Enfin toutes les sources seront considérées soit comme locales aux volumes de calcul (point source, antenne...), soit solutions des équations de Maxwell homogènes (ondes planes) et donc introduites à leur tour sur les surface ou volumes de Huygens, en même temps que les champs rayonnés par les différents volumes de calculs. Cette dernière hypothèse est due à la nécessité de borner les domaines de calculs, l'égalité entre les problèmes bornés et non-bornés n'étant obtenue que pour la propagation de champs diffractés en dehors de ces volumes.

Afin de pouvoir mettre en œuvre une telle méthode, il est nécessaire d'effectuer l'hypothèse suivante :

#### Hypothèse 2.1.4 (découpage géométrique et localisation des inhomogénéités)

1. Pour tout indice  $i$  il existe un domaine borné  $\mathcal{D}^i$  tel que  $\forall i * \overline{\mathcal{D}^i} \cap \overline{\mathcal{D}^{i*}} = \emptyset$ , et vérifiant

$$\emptyset \neq V(\mathcal{H}^i) \subset \overline{\text{Supp}(\varphi_{\mathcal{H}^i})} \subsetneq \overline{V(\mathcal{P}^i)} \subsetneq \mathcal{D}^i.$$

2. Les opérateurs  $\mathbb{B}$  et  $\mathbb{A}'_0$  dans (2.1) se décomposent en sommes d'opérateurs respectivement notés  $\mathbb{B}_i$  et  $\mathbb{A}'_0{}^i$ , et pour tout  $i$  les opérateurs  $\mathbb{B}_i$  et  $\mathbb{A}'_0{}^i$  sont à supports compacts dans l'intérieur du volume  $V(\mathcal{H}^i)$  délimité par  $\mathcal{H}^i$ , et on a alors

$$\sum_i \mathbb{B}_i = \mathbb{B}, \quad \text{et} \quad \sum_i \mathbb{A}'_0{}^i = \mathbb{A}'_0.$$

3. Les termes des sources, sauf ondes incidentes,  $u^{src}$  sont à support dans compact dans  $\cup_i V(\mathcal{H}^i)$  et peuvent donc se décomposer sous la forme  $u^{src} = \sum_i u^{src} Y_{V(\mathcal{H}^i)} = \sum_i u^{src} Y_{\mathcal{D}^i}$ .

La résolution du problème (2.1) par la méthode de décomposition en  $n$  sous-domaines se ramène alors à la résolution d'un système de problèmes couplés :

#### Problème 2.1.5 (système d'équations de Maxwell couplées)

Trouver  $(u_i)_{i \in [1, n]} \in \prod_{i \in [1, n]} \left[ C^0 \left( \mathbb{R}^+, \mathcal{D} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0{}^i]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l \right) \right) \cap C^1 \left( \mathbb{R}^+, L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0{}^i]}(\mathbb{R}^3) \right) \right]$  solutions de

$$\forall i \in [1, n], \left\{ \begin{array}{l} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0{}^i] \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_i \right) u_i \\ = u^{src} Y_{\mathcal{D}^i} + B_i^{\mathcal{H}} \left( u^{inc} + \sum_{i*} G * B_{i*}^{\mathcal{P}} u_{i*} \right), \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u_i(t=0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

avec  $u_i = \begin{pmatrix} E_i \\ H_i \end{pmatrix}$ .  $\mathbb{B}_i$  et  $\mathbb{A}'_0{}^i$  représentent la prise en compte des inhomogénéités propres au problème  $i$ , et  $G$  est le noyau de Green de l'équation de Maxwell dans le vide. Les surfaces  $\mathcal{P}^i$  représentent les

surface de prélèvement permettant de relever les courants nécessaires au couplage. Ils sont exprimés sous formes de traces à l'aide de l'opérateur de trace noté

$$B_i^{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{n}_{\mathcal{P}_i} \times \delta_{\mathcal{P}_i} \\ -\mathbf{n}_{\mathcal{P}_i} \times \delta_{\mathcal{P}_i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme pour le problème 2.1.1, par le théorème de Hille-Yosida on a alors le résultat suivant :

**Proposition 2.1.6** *Soit  $\Omega_i$  le support de  $\mathbb{B}_i$ . Si l'hypothèse 2.1.4 est vérifiée, si  $u^{src}$  et  $u^{inc}$  sont dans  $C^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3))$ , et enfin si pour tout  $i$ ,  $\mathbb{B}_i \in L^\infty(\Omega_i)$ , alors il existe un unique  $n$ -uplets de solutions  $(u_i)_{i \in [1, n]}$  au problème 2.1.5.*

La démonstration de la proposition 2.1.6 nécessite d'établir un résultat préalable :

**Lemme 2.1.7** *Soient  $i$  un entier dans  $[1, n]$ , et  $T > 0$ . Soit  $g$  une fonction de  $C([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))$  à support dans  $V(\mathcal{H}^i)$ , alors le problème*

$$\begin{cases} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i] \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_i \right) v = g, & x \in \mathbb{R}^3, \\ v(t=0, \cdot) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

admet une solution unique  $v \in C^0(I_0, \mathcal{D}([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l)) \cap C^1(I_0, L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i]}(\mathbb{R}^3))$ .

De plus, la convolution par  $G$  des traces tangentielles  $B_i^{\mathcal{P}} v$  de  $v$  sur  $\mathcal{P}^i$  définit une fonction dans  $C^1([0, T], L^2(V(\mathcal{P}^i)^c))$ , et qui vérifie en outre  $v = G * B_i^{\mathcal{P}} v$  dans le complémentaire de  $V(\mathcal{P}^i)$ .

**Preuve de la proposition 2.1.6.** Cette proposition repose, comme pour la proposition 2.1.3, sur le théorème de Hille-Yosida. La différence essentielle se situe dans la présence au second membre de la  $i^{eme}$  équation de (2.2) d'un terme source lié aux autres solutions  $u^{i*}$ . Le principe de la démonstration, comme utilisé dans le paragraphe 2.3, repose sur une utilisation du principe de Huygens. Par l'hypothèse 2.1.4 la distance  $\underline{d} = \min_i (\min_{i^*} d(V(\mathcal{H}^i), \mathcal{P}^{i^*}))$  est strictement positive. Il s'en suit donc, pour tout  $i$ , par le principe de Huygens :

- pour tout  $t \in [0, \underline{d}]$  :  $B_i^{\mathcal{H}} \left( \sum_{i^*} G * B_{i^*}^{\mathcal{P}} u_{i^*} \right) (t) = 0$ ,
- pour tout  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et tout  $t \in [k\underline{d}, (k+1)\underline{d}]$  :

$$B_i^{\mathcal{H}} \left( \sum_{i^*} G * B_{i^*}^{\mathcal{P}} u_{i^*} \right) (t) = B_i^{\mathcal{H}} \left( \sum_{i^*} G * B_{i^*}^{\mathcal{P}} [u_{i^*} Y_{[0, k\underline{d}]}(t)] \right) (t).$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème 2.1.5 s'obtiennent alors par une récurrence directe en  $k \in \mathbb{N}$  sur le découpage en temps ainsi effectué en intervalles de longueur  $\underline{d}$ , notés  $I_k := [k\underline{d}, (k+1)\underline{d}]$ . On obtient alors ainsi :

1. Sur le premier intervalle : pour tout  $i$ , par le théorème de Hille-Yosida, le problème suivant

$$\forall i \in [1, n], \begin{cases} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i] \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_i \right) u_i = u^{src} Y_{\mathcal{D}^i} + B_i^{\mathcal{H}}(u^{inc}), & x \in \mathbb{R}^3, \\ u_i(t=0) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

admet une unique solution  $u_i \in C^0(I_0, \mathcal{D}([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l)) \cap C^1(I_0, L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i]}(\mathbb{R}^3))$ .

2. Pour un intervalle quelconque  $I_k$ , avec  $k > 0$  : on suppose que toutes les fonctions  $u_{i^*}$  sont dans  $C^0\left([0, k\underline{d}], \mathcal{D}\left([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^{i^*}]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l\right)\right) \cap C^1\left([0, k\underline{d}], L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^{i^*}]}(\mathbb{R}^3)\right)$ , alors en considérant le problème posé pour  $t \in [0, (k+1)\underline{d}]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i] \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_i \right) u_{i^*} \\ = u^{src} Y_{\mathcal{D}i} + B_i^{\mathcal{H}} \left( u^{inc} + \sum_{i^*} G * B_{i^*}^{\mathcal{P}} [u_{i^*} Y_{[0, k\underline{d}]}(t)] \right) (t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u_{i^*}(t=0, \cdot) = 0, \end{array} \right.$$

on en déduit que le terme  $B_i^{\mathcal{H}} \left( \sum_{i^*} G * B_{i^*}^{\mathcal{P}} u_{i^*} \right) (t)$  est dans  $C^1\left([0, (k+1)\underline{d}], L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^{i^*}]}(\mathbb{R}^3)\right)$  par le lemme 2.1.7 . Par la coercivité et le caractère borné des coefficients de  $[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i]$  il existe deux constantes strictement positives  $C_i$  et  $C'_i$  telles que

$$C_i \|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|\Phi\|_{L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i]}(\mathbb{R}^3)} C'_i \|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad (2.4)$$

et donc

$$\|\Phi\|_{L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i]}(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C'_i}{C_i} \|\Phi\|_{L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^{i^*}]}(\mathbb{R}^3)}. \quad (2.5)$$

Il s'en suit par (2.5) que  $B_i^{\mathcal{H}} \left( \sum_{i^*} G * B_{i^*}^{\mathcal{P}} u_{i^*} \right) (t)$  est dans  $C^1\left([0, (k+1)\underline{d}], L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i]}(\mathbb{R}^3)\right)$ , à l'instar de  $u^{inc}$  et  $u^{src}$  par (2.4). En remarquant enfin que la condition initiale  $v_i(t = k\underline{d}) = u_i(t = k\underline{d})$  est dans  $\mathcal{D}\left([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l\right)$  comme par hypothèse  $u_i$  est dans  $C^0\left([0, k\underline{d}], \mathcal{D}\left([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l\right)\right)$ , par le théorème de Hille-Yosida le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i] \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_i \right) v_i \\ = u^{src} Y_{\mathcal{D}i} + B_i^{\mathcal{H}} \left( u^{inc} + \sum_{i^*} G * B_{i^*}^{\mathcal{P}} u_{i^*} \right), \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ v_i(t = k\underline{d}) = u_i(t = k\underline{d}), \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{array} \right.$$

admet une solution unique dans  $C^0\left(I_k, \mathcal{D}\left([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^{i^*}]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l\right)\right) \cap C^1\left(I_k, L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i]}(\mathbb{R}^3)\right)$ .

Les solutions  $(u_i)_i$  de (2.2) sont ainsi prolongées à  $C^0\left([0, (k+1)\underline{d}], \mathcal{D}\left([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l\right)\right) \cap C^1\left([0, (k+1)\underline{d}], L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i]}(\mathbb{R}^3)\right)$ , ce qui permet d'itérer le raisonnement à l'intervalle  $I_{k+1}$ .

■

**Preuve du lemme 2.1.7.** Par le théorème de Hille-Yosida, l'existence et l'unicité de la solution  $v$  de (2.3) s'obtient dans  $C^0\left(I_0, \mathcal{D}\left([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l\right)\right) \cap C^1\left(I_0, L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^i]}(\mathbb{R}^3)\right)$ .

Considérons maintenant le problème extérieur posé par

$$\begin{cases} \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l \right) \tilde{v} = 0, & x \in V(\mathcal{P}^i)^c, \\ \tilde{v}(t=0, \cdot) = 0, \\ M \tilde{v}(t, x) = Mv(t, x), & x \in \mathcal{P}^i, \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $M$  est un opérateur donnant une condition aux limites maximale monotone ; par exemple avec  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

$$M = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_3 & -\mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_3 \\ \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_3 & \frac{1}{\alpha} \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_3 \end{pmatrix}.$$

D'après [55] (cf par exemple le théorème 2.3.5 dans la suite), comme  $v \in C^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))$ , le système (2.6) admet une solution unique  $\tilde{v} \in C^1 \left( I_0, L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^{i*}]}(V(\mathcal{P}^i)^c) \right)$ .

Enfin, le relèvement distributionnel des traces  $\mathcal{B}_i^{\mathcal{P}} \tilde{v}$  par convolution avec le noyau de Green  $G$  des équations de Maxwell dans le vide ([59]) donne une fonction  $G * \mathcal{B}_i^{\mathcal{P}} \tilde{v}$  qui coïncide avec  $\tilde{v}$  sur  $V(\mathcal{P}^i)^c$ .

Enfin, en remarquant que les choix équivalents de  $M$  pour la condition  $M \tilde{v}(t, x) = Mv(t, x)$  permettent d'assurer  $\mathcal{B}_i^{\mathcal{P}} \tilde{v} = \mathcal{B}_i^{\mathcal{P}} v$ , on en déduit que  $G * \mathcal{B}_i^{\mathcal{P}} v$  est dans  $C^1([0, T], L^2(V(\mathcal{P}^i)^c))$  et vérifie  $v = G * \mathcal{B}_i^{\mathcal{P}} v$  à l'extérieur de  $V(\mathcal{P}^i)$ . ■

Il est alors nécessaire de lier l'étude du problème (2.1) et la résolution du système (2.2).

**Proposition 2.1.8** *Soient  $u$  la solution unique du problème 2.1.1, et  $(u_1, \dots, u_n)$  le  $n$ -uplet solution du problème couplé 2.1.5. Si l'hypothèse 2.1.4 est vérifiée, alors  $u$  est donnée par*

$$u = \sum_i \left[ Y_{\mathcal{D}^i} u_i + Y_{(\mathcal{D}^i)^c} \Pi_{i*} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i*}}) G^{*(t,x)} \mathcal{B}_i^{\mathcal{P}} u_i \right], \quad (2.7)$$

$G^{*(t,x)}$  désignant la convolution espace-temps par le noyau  $G$  des équations de Maxwell homogènes, et pour tout ensemble  $A$  donné  $Y_A$  est la fonction caractéristique de  $A$ .

**Preuve.** Par (2.4) et (2.5) les espaces  $L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^{i*}]}(\mathbb{R}^3)$ ,  $L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]}(\mathbb{R}^3)$  et  $L^2(\mathbb{R}^3)$  sont uniformément équivalents. Il en est alors de même pour les domaines  $\mathcal{D} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^{i*}]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l \right)$  et  $\mathcal{D} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l \right)$ . Par la proposition 2.1.6, les fonctions  $(u_i)_i$  solutions de (2.2) sont dans  $C^0 \left( \mathbb{R}^+, \mathcal{D} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^{i*}]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l \right) \right) \cap C^1 \left( \mathbb{R}^+, L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^{i*}]}(\mathbb{R}^3) \right)$ , donc pour tout  $t$  les traces tangentielles  $\mathcal{B}_i^{\mathcal{P}} u_i$  sont définies dans  $H_{loc}^{-1/2}$  au voisinage de  $\mathcal{P}^i$ . Par combinaison de ces fonctions et par composition des traces avec la résolvante des équations de Maxwell, la fonction  $u$  proposée dans (2.7) est alors dans  $C^0 \left( \mathbb{R}^+, \mathcal{D} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l \right) \right) \cap C^1 \left( \mathbb{R}^+, L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]}(\mathbb{R}^3) \right)$ .

La solution du problème 2.1.1 étant unique, il suffit de vérifier que la fonction  $u$  définie par (2.7) vérifie (2.1). Pour cela, on applique l'opérateur  $\mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}$  à  $u$ . Tout d'abord, on a les relations suivantes

1.  $\sum_l \mathbb{A}_l \partial_l Y_{\mathcal{D}^i} = -\sum_l \mathbb{A}_l \partial_l Y_{(\mathcal{D}^i)^c} = B_i^{\mathcal{D}}$  avec  $B_i^{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{n}_{\mathcal{D}^i} \times \delta_{\mathcal{D}^i} \\ -\mathbf{n}_{\mathcal{D}^i} \times \delta_{\mathcal{D}^i} & 0 \end{pmatrix}$ ,
2. et  $\sum_l \mathbb{A}_l \partial_l (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i*}}) = -B_{i*}^{\mathcal{H}}$ ,

3. enfin, dû aux supports des fonctions  $\varphi_{\mathcal{H}^{i*}}$ , on a  $\sum_l \mathbb{A}_l \partial_l [\Pi_{i*} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i*}})] = -\sum_{i*} B_{i*}^{\mathcal{H}}$ .

Comme, par l'hypothèse 2.1.4,  $\mathbb{B} = \sum_i \mathbb{B}_i$  avec  $\mathbb{B}_i$  à support compact dans  $V(\mathcal{H}^i) \subset \mathcal{D}^i$ , il vient

$$\begin{cases} \forall i, \text{Supp}(\mathbb{B}_i) \cap \overline{(\mathcal{D}^i)^c} = \emptyset, \\ \forall i, \forall j \neq i, \text{Supp}(\mathbb{B}_j) \cap \text{Supp}(\Pi_{i*}(1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i*}})) = \emptyset. \end{cases}$$

On en déduit donc, après regroupement, et en utilisant la propriété  $(\mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l) (G *_{(t,x)} v) = v$ , l'égalité

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) u &= \sum_i \left\{ Y_{\mathcal{D}^i} \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) u_i \right. \\ &\quad + B_i^{\mathcal{D}} [u_i - \Pi_{i*} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i*}}) (G * B_i^{\mathcal{P}} u_i)] \\ &\quad - \sum_{i*} B_{i*}^{\mathcal{H}} \Pi_{i*} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i*}}) Y_{\overline{(\mathcal{D}^i)^c}} (G * B_i^{\mathcal{P}} u_i) \\ &\quad \left. + \Pi_{i*} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i*}}) Y_{\overline{(\mathcal{D}^i)^c}} B_i^{\mathcal{P}} u_i \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

On considère alors séparément chacun des quatre termes sous la somme dans le second membre de (2.8) :

- Par l'hypothèse 2.1.4, l'ensemble  $\overline{(\mathcal{D}^i)^c} \cap \text{Supp}(\Pi_{i*}(1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i*}})) \cap \mathcal{P}^i$  se réduit à  $\emptyset$ , la contribution du dernier terme de (2.8) est donc nulle.
- De même  $B_i^{\mathcal{D}} \Pi_{i*} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i*}}) = B_i^{\mathcal{D}}$  donc

$$B_i^{\mathcal{D}} [u_i - \Pi_{i*} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i*}}) (G * B_i^{\mathcal{P}} u_i)] = B_i^{\mathcal{D}} [u_i - (G * B_i^{\mathcal{P}} u_i)].$$

Or  $(\mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_i) G * B_i^{\mathcal{P}} u_i = B_i^{\mathcal{P}} u_i = 0$  dans  $V(\mathcal{P}_i)^c$ , la trace  $B_i^{\mathcal{P}} u_i$  étant dans  $H^{-1/2}$ , la fonction  $G * B_i^{\mathcal{P}} u_i$  donne ainsi une solution à

$$\begin{cases} \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l \right) v_i = 0, x \in V(\mathcal{P}^i)^c, \\ v_i = B_i^{\mathcal{P}} u_i, x \in \mathcal{P}^i, \\ v_i(t=0) = 0, x \in V(\mathcal{P}^i)^c, \end{cases}$$

qui admet une solution unique par le théorème de Hille-Yosida. La solution  $u_i$  de la  $i^{eme}$  équation du problème 2.1.5 étant elle aussi traçable dans  $H^{-1/2}$  au voisinage de  $\mathcal{P}^i$ , vérifiant elle aussi ce problème et étant unique par la proposition 2.1.6, on a donc  $G * B_i^{\mathcal{P}} u_i = u_i$  pour  $x$  dans  $V(\mathcal{P}_i)^c$ . Leur traces tangentielles sur  $\mathcal{D}_i$  sont ainsi égales. Le second terme de (2.8) s'annule donc lui aussi.

- Comme par l'hypothèse 2.1.4  $\mathbb{B} = \mathbb{B}_i$  sur  $V(\mathcal{H}_i)$ , alors par (2.2) on a

$$Y_{\mathcal{D}^i} \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) u_i = u^{src} Y_{\mathcal{D}^i} + B_i^{\mathcal{H}} \left( u^{inc} + \sum_{i*} G * B_{i*}^{\mathcal{P}} u_{i*} \right). \quad (2.9)$$

- Enfin, par 2.1.4,  $\forall i, \overline{(\mathcal{D}^i)^c} \cap \text{Supp}(\Pi_{i*}(1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i*}})) \cap \text{Supp}(\nabla \varphi_{\mathcal{H}^{i*}}) = \text{Supp}(\nabla \varphi_{\mathcal{H}^{i*}})$ , ainsi le troisième terme de (2.8) se réécrit sous la forme

$$-\sum_{i*} B_{i*}^{\mathcal{H}} \Pi_{i*} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i*}}) Y_{\overline{(\mathcal{D}^i)^c}} (G * B_i^{\mathcal{P}} u_i) = -\sum_{i*} B_{i*}^{\mathcal{H}} (G * B_i^{\mathcal{P}} u_i). \quad (2.10)$$

En reportant (2.9) et (2.10) dans (2.8), puis en opérant une permutation sur les sommes en  $i$  et en  $i^*$ , on trouve enfin

$$\left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) u = 0.$$

Finalement, les fonctions  $u_i$  solutions de (2.2) vérifiant  $u_i(t=0) = 0$ , la fonction  $u$  proposée vérifie alors à son tour  $u(t=0) = 0$ .

Ainsi la fonction  $u$  proposée est solution de (2.1). ■

Par la proposition 2.1.8, la décomposition en sous-domaines se ramène donc à remplacer le problème de départ (2.1) en un système de problèmes (2.2), tous définis sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$ , dont le couplage entre les différentes parties est assuré par le terme  $B_i^{\mathcal{H}} (G * B_{i^*}^{\mathcal{P}} u_{i^*})$ .

Enonçons enfin un corollaire de la proposition 2.1.8, pratique pour la mise en place et l'utilisation numérique de la méthode

**Corollaire 2.1.9** *Sous l'hypothèse 2.1.4 et avec les notations de la proposition 2.1.8, la solution  $u$  du problème 2.1.1 est déterminée à l'intérieur des volumes délimités par les surfaces de Huygens, par*

$$\forall i, \forall (t, X) \in \mathbb{R}^+ \times V(\mathcal{H}^i), u(t, X) = u_i(t, X). \quad (2.11)$$

De plus, à partir des traces tangentielles  $(B_i^{\mathcal{P}} u_i)_i$  des solutions  $(u_i)_i$  du problème 2.1.5 sur  $\mathcal{P}^i$ , la fonction  $u'$ , définie sur  $\mathbb{R}^+ \times (\cup_i \mathcal{D}^i)^c$  par  $u' = \sum_i G * B_i^{\mathcal{P}} u_i$ , vérifie

$$u'(t, X) = u(t, X), \forall (t, X) \in \mathbb{R}^+ \times (\cup_i \mathcal{D}^i)^c. \quad (2.12)$$

**Preuve.**

1. Soit  $k \in [1, n]$ . Par restriction de (2.7) à  $V(\mathcal{H}_k)$ , on trouve

$$Y_{\mathcal{D}_k} u = u_k + \sum_i \left[ Y_{V(\mathcal{H}_k)} Y_{(\mathcal{D}^i)^c} \Pi_{i^*} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i^*}}) G *_{(t,x)} B_i^{\mathcal{P}} u_i \right].$$

Or si  $i = k$  on a  $Y_{V(\mathcal{H}_k)} Y_{(\mathcal{D}^i)^c} = 0$  car  $V(\mathcal{H}_k) \subset \mathcal{D}_k$ . Pour  $i \neq k$  il existe un  $i^*$  tel que  $i^* = k$  et donc  $Y_{V(\mathcal{H}_k)} \Pi_{i^*} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i^*}}) = Y_{V(\mathcal{H}_k)} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^k}) \Pi_{i^* \neq k} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i^*}}) = 0$  car  $Supp(1 - \varphi_{\mathcal{H}^k}) \cap V(\mathcal{H}_k) = \emptyset$ . On obtient ainsi  $Y_{\mathcal{D}_k} u = u_k$ , soit (2.11).

2. Comme précédemment on s'intéresse à la restriction de (2.7) à  $\cup_k \mathcal{D}_k^c$ . Il vient ainsi

$$\left( \Pi_k Y_{\overline{\mathcal{D}_k^c}} \right) u = \sum_i \left[ \left( \Pi_k Y_{\overline{\mathcal{D}_k^c}} \right) Y_{\mathcal{D}^i} u_i + \left( \Pi_k Y_{\overline{\mathcal{D}_k^c}} \right) Y_{(\mathcal{D}^i)^c} \Pi_{i^*} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i^*}}) G *_{(t,x)} B_i^{\mathcal{P}} u_i \right].$$

Comme  $(\cup_k \overline{\mathcal{D}_k^c}) \cap \mathcal{D}^i = \emptyset$  alors  $\left( \Pi_k Y_{\overline{\mathcal{D}_k^c}} \right) Y_{\mathcal{D}^i} u_i = 0$ . Enfin comme pour tout  $i^*$  on a  $\overline{\mathcal{D}_{i^*}^c} \subset Supp(1 - \varphi_{i^*})$  il s'en suit donc  $\left( \Pi_k Y_{\overline{\mathcal{D}_k^c}} \right) Y_{(\mathcal{D}^i)^c} \Pi_{i^*} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i^*}}) = \left( \Pi_k Y_{\overline{\mathcal{D}_k^c}} \right)$ . Il vient ainsi  $\left( \Pi_k Y_{\overline{\mathcal{D}_k^c}} \right) u = \left( \Pi_k Y_{\overline{\mathcal{D}_k^c}} \right) (G *_{(t,x)} B_i^{\mathcal{P}} u_i)$  et donc (2.12). ■

**Remarque 2.1.10** *Le choix des surfaces de prélèvement  $\mathcal{P}^i$ , des surfaces de Huygens  $\mathcal{H}^i$  et des délimitations des différents domaines  $\mathcal{D}^i$ , assure que toutes les fonctions  $u$  et  $u_i$  construites ci-avant sont bien définies; la singularité du noyau de la convolution par  $G$  étant toujours évitée.*

**Remarque 2.1.11** *En utilisant les résultats de la proposition 2.1.8, une approximation des termes de couplages du schéma (2.2) de la forme*

$$B_i^{\mathcal{H}} (G * B_{i*}^{\mathcal{P}} u_{i*}') \approx B_i^{\mathcal{H}} \left( [\widetilde{G*}] B_{i*}^{\mathcal{P}} u_{i*}' \right),$$

*pourra alors être introduite à l'aide de la formule intégrale approchée (1.10). Elle permettra de plus, via (2.12), d'obtenir une approximation du champ propagé, hors des volumes de calculs délimités par  $\cup_i \mathcal{D}^i$ , par la formule*

$$\sum_i G * B_i^{\mathcal{P}} u_i \approx \sum_i [\widetilde{G*}] B_i^{\mathcal{P}} u_i;$$

*chaque solution  $u_i$  étant ainsi calculée sur un domaine restreint à  $\mathcal{D}^i$  et auquel une condition aux limites absorbante (par exemple PML) est adjointe.*

La remarque 2.1.11 motive la recherche d'une formule intégrale approchée simple et efficace afin de traduire au mieux les différents couplages entre domaines, d'où l'intérêt de l'écriture d'une telle formule dans le chapitre 1 permettant une utilisation sur un large domaine de validité et offrant une estimation de l'erreur commise.

## 2.2 Formulation de la méthode

Partant de la proposition 2.1.8, le découpage sous la forme (2.2) du problème de départ (2.1) semble plus simple à résoudre. En effet, chaque élément de (2.2) est isolable à l'intérieur d'un volume réduit  $\mathcal{D}_i$ , n'englobant qu'un ensemble restreint d'inhomogénéités; toutes les autres faisant partie des domaines  $(\mathcal{D}_{i*})_{i*}$ . La résolution d'un seul élément de (2.2), à condition de pouvoir calculer efficacement les termes de couplages entre les différents problèmes  $B_i^{\mathcal{H}} (G * B_{i*}^{\mathcal{P}} u_{i*}')$ , sera ainsi simplifiée. Par extension, la résolution de l'ensemble des problèmes de (2.2) sera donc d'autant plus simple qu'elle apparaît naturellement parallélisable. La résolution de (2.1) se fera donc à travers un schéma de résolution de plusieurs systèmes d'équations couplés par des fonctions de transports identifiées.

Le schéma d'approximation du couplage pour la méthode multi-domaine se fait selon deux étapes principales, similaires à celles utilisées dans la résolution par la Méthode de Multipôles Rapide (FMM) explicitée dans [27], de la manière suivante :

1. *l'interpolation des champs* (cf figure 2.3(a)) consistant à regrouper les courants relevés sur la surface de prélèvement et à évaluer leur contribution en un point de l'espace donné par formule intégrale approchée,
2. *l'interpolation des champs* (cf figure 2.3(b)) étant la reconstruction des courants sur les surfaces de Huygens à partir de la donnée de champs en certains points de celles-ci.

A ces deux étapes se rajoutent aussi des phases nécessitant un traitement quasi-exclusivement numérique de *pre-processing* (découpage des surfaces, création des regroupements...), de transferts de données, et de *post-processing* (combinaison des valeurs, évaluations de champs en des points...) qui seront explicitées par la suite.

Le système approximé de (2.2) est alors

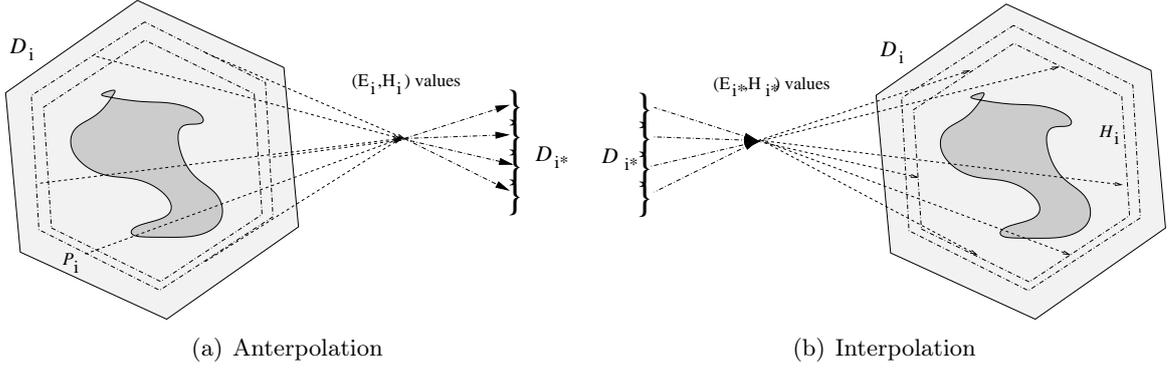


FIG. 2.3 – Principe d'antépolation/interpolation des champs

**Problème 2.2.1 (méthode de décomposition en sous-domaines)**

Trouver  $(u_i)_{i \in [1, n]} \in \mathcal{F} \left( \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3)^2 \right)^n$  solutions de

$$\forall i \in [1, n], \begin{cases} \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_i \right) u_i \\ = u^{src} Y_{\mathcal{D}^i} + B_i^{\mathcal{H}} u^{inc} + [\widetilde{B}_i^{\mathcal{H}}] \left( \sum_{i^*} [\widetilde{G}^*] B_{i^*}^{\mathcal{P}} u_{i^*} \right), x \in \mathbb{R}^3, \\ u_i(t=0) = 0, x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (2.13)$$

où  $\mathcal{F} \left( \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3)^2 \right)$  est un espace fonctionnel précisé par la suite. L'approximation du terme de couplage  $B_i^{\mathcal{H}} (G * B_{i^*}^{\mathcal{P}} u_{i^*})$  dans (2.2) par  $[\widetilde{B}_i^{\mathcal{H}}] \left( [\widetilde{G}^*] B_{i^*}^{\mathcal{P}} u_{i^*} \right)$  dans (2.13) est donnée par les opérations d'antépolation et d'interpolation proposées :

1. antépolation :  $[\widetilde{G}^*] B_{i^*}^{\mathcal{P}} u_{i^*}$  désigne l'approximation par la formule intégrale (1.10) du transport des domaines  $i^*$  sur vers des points de la surface de prélèvement  $\mathcal{P}^i$  du domaine  $i$ , représentant la phase d'antépolation ;
2. interpolation :  $[\widetilde{B}_i^{\mathcal{H}}]$  est le découpage par sous-volumes  $(V_j^{\mathcal{H}^i})_j$  du volume  $\text{Supp}(\nabla \varphi_{\mathcal{H}^i})$  entourant la surface de Huygens  $\mathcal{H}^i$ , puis l'approximation par constantes sur ces sous-volumes du champ transporté aux points de référence correspondants  $(Y^i)_j$  ; soit :

$$[\widetilde{B}_i^{\mathcal{H}}] f(x) = \sum_j \left( \chi_{V_j^{\mathcal{H}^i}}(x) B_i^{\mathcal{H}} f(Y_j^i) \right), \quad (2.14)$$

où  $\chi_V(x)$  est la fonction caractéristique en  $x$  du volume  $V$ .

D'après le théorème 1.2.2, l'erreur commise par l'emploi la formule (1.10) dans la phase d'antépolation est de l'ordre de  $\delta/d$ . Le gain apporté réside alors essentiellement dans la possibilité de simplifier le calcul de la convolution par  $G$  en localisant toutes les opérations d'intégrations autour de points de références pris sur un découpage de la surface de prélèvement en sous-faces de grandeurs caractéristiques inférieures à  $\delta$ . Un tel procédé permet alors de simplifier le couplage (donc gain en temps de calcul, en coût mémoire,...) par rapport à la prise en compte de la formule intégrale complète, tout en contrôlant l'erreur introduite.

Toutefois, le couplage entre les différents éléments de (2.2) nécessite de calculer les valeurs du champ électromagnétique en tous les points des volumes  $Supp(\nabla\varphi_{\mathcal{H}})$  entourant les surfaces de Huygens. Cette opération représente alors une perte importante de performances pour le schéma. L'efficacité de la formule d'antépolation repose en partie sur le découpage de la surface de prélèvement en sous-faces de grandeur caractéristique inférieure à  $\delta$  et telles que le rapport  $\delta/d$  soit suffisamment petit. Suivant le même principe, pour chaque  $j$  on introduit une partition  $\cup_j [Supp(\nabla\varphi_{\mathcal{H}})]_j$  du volume  $Supp(\nabla\varphi_{\mathcal{H}})$  entourant la surface de Huygens  $\mathcal{H}_j$ . Cette partition est établie sur le même critère que dans le cas des surfaces de prélèvement. La phase d'*interpolation* proposée dans (2.13) consiste donc à interpoler par constante les valeurs de champs, en tous les points d'un élément  $[Supp(\nabla\varphi_{\mathcal{H}})]_j$  de la partition, à partir de valeurs évaluées pour un point de référence  $X_0^j$  choisi sur  $[Supp(\nabla\varphi_{\mathcal{H}})]_j$ . Afin d'évaluer l'erreur d'approximation de cette formule, il vient alors naturellement à étudier le passage possible d'un point  $X_0$  donné sur  $\mathcal{H}$  à un point  $X_0'$  sur le même regroupement.

Dans le cadre du théorème 1.2.2, l'erreur d'approximation était donné par  $O(\sup_i \delta_i / d_i)$  qui peut être majorée par  $O(\sup_i \delta_i / \inf_i d_i)$ . Pour chaque point  $X_0$  des supports des volumes de Huygens  $\mathcal{H}^j$ , la distance critique  $d$  étant choisie comme inférieure à l'écart entre tout point  $X_0$  de  $Supp(\nabla\varphi_{\mathcal{H}^j})$  et tout point de référence  $X_i$  des surfaces de prélèvement  $\mathcal{P}^{j*}$ , il est encore possible de la majorer par :

$$0 < d \leq \inf_j \left[ \inf_{X_0 \in [Supp(\nabla\varphi_{\mathcal{H}})]_j} \left( \inf_{X_i \in \mathcal{P}^{j*}} |X_0 - X_i| \right) \right] \leq \inf_j \left[ \inf_{X_i \in \mathcal{P}^{j*}} |X_0^j - X_i| \right].$$

Ainsi, si  $[Supp(\nabla\varphi_{\mathcal{H}})]_j$  est de grandeur caractéristique inférieure à  $\delta$  alors les formules intégrales approchées obtenues par (1.10) en tous points de  $[Supp(\nabla\varphi_{\mathcal{H}})]_j$  seront données à la même précision :  $\delta/d$ . L'erreur introduite est alors majorée indépendamment du choix de  $X_0^j$  sur  $[Supp(\nabla\varphi_{\mathcal{H}})]_j$ . Cependant, comme le montre la figure 2.4, le déplacement de  $X_0$  en  $X_0'$  induit un changement de la définition du repère local utilisé pour calculer la formule intégrale approchée (1.10).

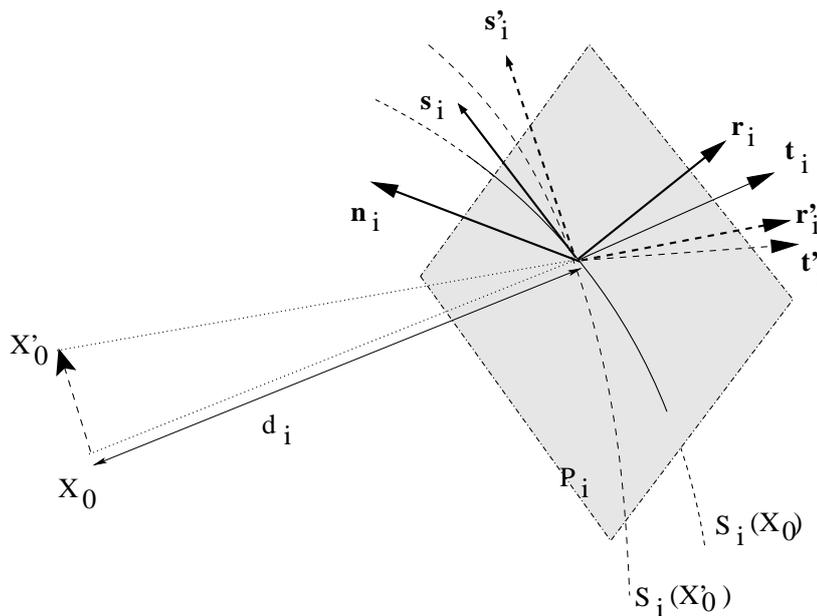


FIG. 2.4 – Influence du déplacement de  $X_0$  sur le repère local

Nous avons alors le résultat suivant

**Proposition 2.2.2** Soit  $\mathcal{P} = \cup_i \mathcal{P}_i$  une surface de prélèvement admissible fixée, et soient  $(X_i)_{i \in [1,n]}$  les points de références choisis respectivement sur  $(\mathcal{P}_i)_{i \in [1,n]}$ . On suppose que les termes traces

tangentielles sur  $\mathcal{P}_i$ ,  $\mathbf{n}_i \times E$  et  $\mathbf{n}_i \times H$ , sont dans  $C^2(\mathbb{R}^+, L^1(\mathcal{P}_i))$  et vérifient l'hypothèse de causalité (1.31). Alors, pour tous points  $X_0, X'_0 \notin \mathcal{P}$  tels que  $|X_0 - X'_0| \leq \delta$ , et pour tout  $t > 0$ , l'écart entre les valeurs des champs  $\tilde{E}$  et  $\tilde{H}$  transportés respectivement en  $X_0$  et  $X'_0$  par des formules intégrales approchées (1.10), est donnée par

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} \\ \tilde{H} \end{pmatrix} (t, X'_0) - \begin{pmatrix} \tilde{E} \\ \tilde{H} \end{pmatrix} (t, X_0) = O\left(\frac{\delta}{d}\right), \quad (2.15)$$

où les faces  $\mathcal{P}_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) sont de dimensions caractéristiques inférieures à  $\delta$ , et  $\inf_{i \in \{1, \dots, n\}} |X_0 - X_i| \geq d > 0$ .

**Preuve.** Soient une des sous-faces  $\mathcal{P}_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) de  $\mathcal{P}$  et  $X_i$  le point de référence sur  $\mathcal{P}_i$  désigné par construction de (1.10). Soient  $X_0$  et  $X'_0$  deux points n'appartenant pas à  $\mathcal{P}_i$ , et tels que  $|X_0 - X'_0| \leq \delta$ . La formule (1.10) étant définie pour  $p_i \neq \pm 1$ , puis étendue par continuité, trois cas sont alors à envisager selon les placements respectifs de  $X_0, X'_0$  et  $X_i$  :

- $\left(\overrightarrow{X_0 X_i}, \mathbf{n}_i\right) \neq \pm 1$  et  $\left(\overrightarrow{X'_0 X_i}, \mathbf{n}_i\right) \neq \pm 1$ ,
- $\left(\overrightarrow{X_0 X_i}, \mathbf{n}_i\right) = \pm 1$  et  $\left(\overrightarrow{X'_0 X_i}, \mathbf{n}_i\right) = \pm 1$ ,
- $\left(\overrightarrow{X_0 X_i}, \mathbf{n}_i\right) = \pm 1$  et  $\left(\overrightarrow{X'_0 X_i}, \mathbf{n}_i\right) \neq \pm 1$  (le cas  $\left(\overrightarrow{X_0 X_i}, \mathbf{n}_i\right) \neq \pm 1$  et  $\left(\overrightarrow{X'_0 X_i}, \mathbf{n}_i\right) = \pm 1$  s'obtenant en changeant  $X_0$  et  $X'_0$ ).

En fonction de chacun de ces trois cas, la construction de (1.10) diverge (le repère de coordonnées locales utilisé est défini différemment).

Introduisons les notations  $d_i = |X_i - X_0|$ ,  $d'_i = |X_i - X'_0|$ ,  $\mathbf{t}_i = d_i^{-1} \overrightarrow{X_i X_0}$ ,  $\mathbf{t}'_i = (d'_i)^{-1} \overrightarrow{X_i X'_0}$  et enfin on désigne par  $\gamma$  l'arc paramétré :

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad s \mapsto X_0 + s(X'_0 - X_0).$$

On a donc  $\gamma(0) = X_0$  et  $\gamma(1) = X'_0$ . L'objectif est alors de montrer que l'on a les relations suivantes :

$$\int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^{2-n}} \mathbf{n}_i \times \partial_t^n f(t - d_i) = \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{(d'_i)^{2-n}} \mathbf{n}_i \times \partial_t^n f(t - d'_i) + O\left(\frac{\delta}{d_i}\right), \quad (2.16)$$

$$\int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^{2-n}} \mathbf{t}_i \times \partial_t^n f(t - d_i) = \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{(d'_i)^{2-n}} \mathbf{t}'_i \times \partial_t^n f(t - d'_i) + O\left(\frac{\delta}{d_i}\right), \quad (2.17)$$

où  $f$  correspond à soit  $\mathbf{n}_i \times E$  ou  $\mathbf{n}_i \times E$ , et  $n \in \{0, 1\}$  ; ainsi que les relations

$$\int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^{3-n}} \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \partial_t^n g(t - d_i) = \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{(d'_i)^{3-n}} \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \partial_t^n g(t - d'_i) + O\left(\frac{\delta}{d_i}\right), \quad (2.18)$$

$$\int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^{3-n}} \mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_i \times \partial_t^n g(t - d_i) = \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{(d'_i)^{3-n}} \mathbf{t}'_i \times \mathbf{t}'_i \times \partial_t^n g(t - d'_i) + O\left(\frac{\delta}{d_i}\right), \quad (2.19)$$

où  $g$  est soit  $\int_t \mathbf{n}_i \times E$  soit  $\int_t \mathbf{n}_i \times E$ , et  $n \in \{0, 1, 2\}$ .

Toutes ces relations constituent les comparaisons deux-à-deux des termes constituant les formules intégrales approchées aux points  $X_0$  et  $X'_0$ . On remarque alors, que l'établissement du résultat (2.15) dans le cas  $\left(\overrightarrow{X_0 X_i}, \mathbf{n}_i\right) = \pm 1$  et  $\left(\overrightarrow{X'_0 X_i}, \mathbf{n}_i\right) = \pm 1$  ne nécessite que l'étude des relations (2.16) et (2.18). De même, pour la démonstration de (2.15) dans le cas  $\left(\overrightarrow{X_0 X_i}, \mathbf{n}_i\right) = \pm 1$  et  $\left(\overrightarrow{X'_0 X_i}, \mathbf{n}_i\right) \neq \pm 1$  les vecteurs  $\mathbf{t}_i$  et  $\mathbf{n}_i$  sont alors confondus. L'étude de ce cas peut alors être faite en démontrant les

relations (2.16), (2.17), (2.18) et (2.19). Nous allons donc nous attacher à démontrer ces quatre relations, l'ensemble de tous les choix possibles de  $X_0$  et  $X'_0$  étant alors naturellement pris en compte par combinaison de ces résultats.

Remarquons tout d'abord que si  $|X_0 - X'_0| \leq \delta$ , alors

$$\|\mathbf{t}_i - \mathbf{t}'_i\| \leq \frac{1}{d_i} \left\| \overrightarrow{X_i X_0} - \overrightarrow{X_i X'_0} \right\| + \left| \frac{d'_i - d_i}{d_i d'_i} \right| \left\| \overrightarrow{X_i X'_0} \right\| \leq 2 \frac{\delta}{d_i}. \quad (2.20)$$

Traisons ensuite les 3 cas différents :  $(\overrightarrow{X_0 X_i}, \mathbf{n}_i) \neq \pm 1$  et  $(\overrightarrow{X'_0 X_i}, \mathbf{n}_i) \neq \pm 1$ .

Comme pour la démonstration de la proposition 1.2.39 nous allons ramener les puissances de  $1/d_i$  et les ordres de dérivations en temps de  $\partial_t f$  à la même valeur par utilisation d'intégrations successives des dérivées de  $\partial_t f$ . Soit alors  $\tilde{d}(s)$  la fonction  $\tilde{d}(s) = |X_i - \gamma(s)|$ . On a donc  $\tilde{d}(0) = d_i$  et  $\tilde{d}(1) = d'_i$ . En outre, comme  $X_0 - X'_0 \neq 0$  on a  $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \tilde{d}(s) = +\infty$ . Soit alors  $M > 0$  positif assez grand tel que  $t - \tilde{d}(M) < 0$ , et donc par l'hypothèse de causalité (1.31) :  $\partial_t^n f(t - \tilde{d}(M)) = 0$ . Il vient donc

$$\begin{aligned} \partial_t^n f(t - \tilde{d}(s)) &= - \int_s^M \partial_t^{n+1} f(t - \tilde{d}(s')) \partial_s \tilde{d}(s') ds' \\ &= \int_s^M \int_{s'}^M \partial_t^{n+2} f(t - \tilde{d}(s'')) \partial_s \tilde{d}(s') \partial_s \tilde{d}(s'') ds'' ds', \\ &= \int_s^M \int_{s'}^M \int_{s''}^M \partial_t^{n+2} f(t - \tilde{d}(s''')) \partial_s \tilde{d}(s') \partial_s \tilde{d}(s'') \partial_s \tilde{d}(s''') ds''' ds'' ds'. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Or  $\partial_s \tilde{d}(s) = (X_0 - X'_0, \tilde{d}(s)^{-1} \overrightarrow{\gamma(s) X_i})$ , le vecteur  $\tilde{d}(s)^{-1} \overrightarrow{\gamma(s) X_i}$  étant normé, on en déduit donc

$$\left| \partial_s \tilde{d}(s) \right| \leq \delta. \quad (2.22)$$

1. A partir des relations (2.22) et (2.21) nous allons évaluer (2.16). On trouve alors
  - pour  $n = 1$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i} \mathbf{n}_i \times \partial_t f(t - d_i) - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d'_i} \mathbf{n}_i \times \partial_t f(t - d'_i) \\ &= \int_{\mathcal{P}_i} \frac{d'_i - d_i}{d_i d'_i} \mathbf{n}_i \times \partial_t f(t - d_i) + \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d'_i} \mathbf{n}_i \times (\partial_t f(t - d'_i) - \partial_t f(t - d_i)) \\ &= - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{d'_i - d_i}{d_i d'_i} \mathbf{n}_i \times \int_0^M \partial_t^2 f(t - \tilde{d}(s)) \partial_s \tilde{d}(s) ds \\ &\quad - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d'_i} \mathbf{n}_i \times \int_0^1 \partial_t^2 f(t - \tilde{d}(s)) \partial_s \tilde{d}(s) ds. \end{aligned}$$

Comme  $(d'_i - d_i)/(d_i d'_i) \leq C\delta/d_i^2$ , le premier terme est alors majoré en utilisant (2.22) par

$$\leq C \frac{\delta^2}{d_i^2} \sup_{s \in [0, t]} \left\| \partial_t^2 f(s) \right\|_{L^1(\mathcal{P}_i)}. \quad (2.23)$$

De même, en majorant l'intégration en  $s$  dans le second terme par

$$\leq C \frac{\delta}{d_i} \sup_{s \in [0, t]} \left\| \partial_t^2 f(s) \right\|_{L^1(\mathcal{P}_i)}. \quad (2.24)$$

– pour  $n = 0$  on procède de même en utilisant la double intégration de (2.21). Il vient ainsi

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^2} \mathbf{n}_i \times f(t - d_i) - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{(d'_i)^2} \mathbf{n}_i \times f(t - d'_i) \\ &= \int_{\mathcal{P}_i} \frac{(d'_i)^2 - d_i^2}{d_i^2 (d'_i)^2} \mathbf{n}_i \times \int_0^M \int_s^M \partial_t^2 f(t - \tilde{d}(s')) \partial_s \tilde{d}(s) \partial_s \tilde{d}(s') ds' ds \\ & \quad - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^2} \mathbf{n}_i \times \int_0^1 \int_s^M \partial_t^2 f(t - \tilde{d}(s')) \partial_s \tilde{d}(s) \partial_s \tilde{d}(s') ds' ds. \end{aligned}$$

Comme  $((d'_i)^2 - d_i^2)/(d_i d'_i)^2 \leq \delta(d'_i + d_i)/(d_i d'_i)^2 \leq C\delta/d_i^3$ , en appliquant (2.21), on en déduit donc que le premier terme est majoré par

$$\leq C \frac{\delta^3}{d_i^3} \sup_{s \in [0, t]} \|\partial_t^2 f(s)\|_{L^1(\mathcal{P}_i)}. \quad (2.25)$$

Le second terme est, selon le même raisonnement que précédemment, majoré par (2.24). La majoration (2.16) est donc vérifiée.

2. L'établissement de la majoration (2.17) est très similaire à celui de (2.16). Pour ce faire, il suffit de découper (2.17) en deux parties de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^{2-n}} \mathbf{t}_i \times \partial_t^n f(t - d_i) - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{(d'_i)^{3-n}} \mathbf{t}'_i \times \partial_t^n f(t - d'_i) = \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^{2-n}} (\mathbf{t}_i - \mathbf{t}'_i) \times \partial_t^n f(t - d_i) \\ & \quad + \left[ \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^{2-n}} \mathbf{t}_i \times \partial_t^n f(t - d_i) - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{(d'_i)^{2-n}} \mathbf{t}_i \times \partial_t^n f(t - d'_i) \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

La seconde partie de (2.26) (deux derniers termes du second membre) se traite de la même manière que (2.17) en remplaçant  $\mathbf{n}_i$  par le vecteur normé  $\mathbf{t}_i$ . Elle est donc majorée par (2.23). Pour la première partie de (2.26), nous utilisons la double intégration de (2.21) pour  $n = 0$ , et la simple pour  $n = 1$ ; on applique enfin (2.20).

– pour  $n = 1$  il vient ainsi

$$\int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i} (\mathbf{t}_i - \mathbf{t}'_i) \times \partial_t f(t - d_i) = - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i} (\mathbf{t}_i - \mathbf{t}'_i) \times \int_s^M \partial_t^2 f(t - \tilde{d}(s')) \partial_s \tilde{d}(s') ds',$$

qui est alors majoré par (2.23).

– pour  $n = 0$  on obtient donc

$$\int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^2} (\mathbf{t}_i - \mathbf{t}'_i) \times f(t - d_i) = \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^2} (\mathbf{t}_i - \mathbf{t}'_i) \times \int_s^M \int_{s'}^M \partial_t^2 f(t - \tilde{d}(s'')) \partial_s \tilde{d}(s') \partial_s \tilde{d}(s'') ds' ds'',$$

qui est majoré par (2.25).

La relation (2.17) est ainsi établie.

3. la majoration (2.18) on procède de manière similaire à celle utilisée pour (2.16).

– pour  $n = 2$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i} \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \partial_t^2 g(t - d_i) - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d'_i} \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \partial_t^2 g(t - d'_i) \\ &= - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{d'_i - d_i}{d_i d'_i} \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \int_0^M \partial_t^3 g(t - \tilde{d}(s)) \partial_s \tilde{d}(s) ds \\ & \quad - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d'_i} \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \int_0^1 \partial_t^3 g(t - \tilde{d}(s)) \partial_s \tilde{d}(s) ds. \end{aligned}$$

Les deux parties du second membre de cette égalité sont donc respectivement majorées par

$$\leq C \frac{\delta^2}{d_i^2} \sup_{s \in [0, t]} \|\partial_t^3 g(s)\|_{L^1(\mathcal{P}_i)}, \quad (2.27)$$

et, pour la seconde partie, par

$$\leq C \frac{\delta}{d_i} \sup_{s \in [0, t]} \|\partial_t^3 g(s)\|_{L^1(\mathcal{P}_i)}, \quad (2.28)$$

comme dans le cas  $n = 1$  de (2.16).

– pour  $n = 1$ , il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^2} \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \partial_t g(t - d_i) - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{(d'_i)^2} \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \partial_t g(t - d'_i) \\ &= \int_{\mathcal{P}_i} \frac{(d'_i)^2 - d_i^2}{d_i^2 (d'_i)^2} \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \int_0^M \int_s^M \partial_t^3 g(t - \tilde{d}(s')) \partial_s \tilde{d}(s') ds' \tilde{d}(s) ds \\ & \quad \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{(d'_i)^2} \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \int_0^1 \int_s^M \partial_t^3 g(t - \tilde{d}(s')) \partial_s \partial_s \tilde{d}(s') ds' \tilde{d}(s) ds. \end{aligned}$$

En suivant le même raisonnement que pour le traitement du cas  $n = 0$  dans (2.16), on trouve directement que le premier terme du second membre de l'égalité précédente est majoré par

$$\leq C \frac{\delta^3}{d_i^3} \sup_{s \in [0, t]} \|\partial_t^3 g(s)\|_{L^1(\mathcal{P}_i)}. \quad (2.29)$$

De même, le second terme est quand à lui majoré par (2.27) comme pour le second terme de (2.16) avec  $n = 0$ .

– pour  $n = 0$ , on a alors

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^3} \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times g(t - d_i) - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{(d'_i)^3} \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times g(t - d'_i) \\ &= - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{(d'_i)^3 - d_i^3}{d_i^3 (d'_i)^3} \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \int_0^M \int_s^M \int_{s'}^M \partial_t^3 g(t - \tilde{d}(s'')) \partial_s \tilde{d}(s'') ds'' \tilde{d}(s') ds' \tilde{d}(s) ds \\ & \quad - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{(d'_i)^3} \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \int_0^1 \int_s^M \int_{s'}^M \partial_t^3 g(t - \tilde{d}(s'')) \tilde{d}(s'') ds'' \partial_s \partial_s \tilde{d}(s') ds' \tilde{d}(s) ds. \end{aligned}$$

On remarque que  $((d'_i)^3 - d_i^3)/(d_i d'_i)^3 \leq C\delta/d_i^4$ , en appliquant (2.22) à la première partie du second membre de l'égalité ci-dessus, on la majore donc par

$$\leq C \frac{\delta^4}{d_i^4} \sup_{s \in [0, t]} \|\partial_t^3 g(s)\|_{L^1(\mathcal{P}_i)}. \quad (2.30)$$

De même, en utilisant (2.22), la seconde partie de l'égalité peut alors être directement majorée par (2.29).

Ceci établit donc l'inégalité (2.18).

4. enfin, pour (2.19) nous allons procéder comme pour (2.17) en regroupant les termes de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^{3-n}} \mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_i \times \partial_t^n g(t - d_i) - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{(d'_i)^{3-n}} \mathbf{t}'_i \times \mathbf{t}'_i \times \partial_t^n g(t - d'_i) \\
&= \left[ \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^{3-n}} \mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_i \times \partial_t^n g(t - d_i) - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^{3-n}} \mathbf{t}'_i \times \mathbf{t}_i \times \partial_t^n g(t - d_i) \right] \\
&+ \left[ \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^{3-n}} \mathbf{t}'_i \times \mathbf{t}_i \times \partial_t^n g(t - d_i) - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^{3-n}} \mathbf{t}'_i \times \mathbf{t}'_i \times \partial_t^n g(t - d_i) \right] \\
&+ \left[ \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^{3-n}} \mathbf{t}'_i \times \mathbf{t}'_i \times \partial_t^n g(t - d_i) - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{(d'_i)^{3-n}} \mathbf{t}'_i \times \mathbf{t}'_i \times \partial_t^n g(t - d'_i) \right].
\end{aligned} \tag{2.31}$$

La dernière partie de (2.31) est identique à (2.18), il suffit de changer le vecteur unitaire  $\mathbf{t}'_i$  en  $\mathbf{n}_i$ ; elle admet donc bien une majoration en (2.28).

Le premier terme se traite, comme pour le cas (2.17) en utilisant (2.20). Il est ainsi donné par

$$A = \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^{3-n}} (\mathbf{t}_i - \mathbf{t}'_i) \times \mathbf{t}_i \times \partial_t^n g(t - d_i).$$

De même le second terme de (2.31) se récrit sous la forme

$$B = \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^{3-n}} \mathbf{t}'_i \times (\mathbf{t}_i - \mathbf{t}'_i) \times \partial_t^n g(t - d_i).$$

On obtient donc

- pour  $n = 2$ , on a successivement

$$A = - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i} (\mathbf{t}_i - \mathbf{t}'_i) \times \mathbf{t}_i \times \int_0^M \partial_t^3 g(t - \tilde{d}(s)) \tilde{d}(s) ds,$$

$$B = - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i} \mathbf{t}'_i \times (\mathbf{t}_i - \mathbf{t}'_i) \times \int_0^M \partial_t^3 g(t - \tilde{d}(s)) \tilde{d}(s) ds,$$

qui se majorent alors tous les deux par (2.27).

- pour  $n = 1$ , il vient

$$A = - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^2} (\mathbf{t}_i - \mathbf{t}'_i) \times \mathbf{t}_i \times \int_0^M \int_s^M \partial_t^3 g(t - \tilde{d}(s')) \tilde{d}(s') ds' \tilde{d}(s) ds,$$

$$B = - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^2} \mathbf{t}'_i \times (\mathbf{t}_i - \mathbf{t}'_i) \times \int_0^M \int_s^M \partial_t^3 g(t - \tilde{d}(s')) \tilde{d}(s') ds' \tilde{d}(s) ds,$$

qui sont majorés tous les deux par (2.27).

- enfin pour  $n = 0$ , on a

$$A = - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^3} (\mathbf{t}_i - \mathbf{t}'_i) \times \mathbf{t}_i \times \int_0^M \int_s^M \int_{s'}^M \partial_t^3 g(t - \tilde{d}(s'')) \tilde{d}(s'') ds'' \tilde{d}(s') ds' \tilde{d}(s) ds,$$

$$B = - \int_{\mathcal{P}_i} \frac{1}{d_i^3} \mathbf{t}'_i \times (\mathbf{t}_i - \mathbf{t}'_i) \times \int_0^M \int_s^M \int_{s'}^M \partial_t^3 g(t - \tilde{d}(s'')) \tilde{d}(s'') ds'' \tilde{d}(s') ds' \tilde{d}(s) ds,$$

que l'on majore par (2.29).

Ce qui finit de démontrer (2.19).

Enfin, en regroupant toutes les majorations (2.23), (2.24), (2.25), (2.27), (2.28), (2.29) et (2.30), ainsi que les définitions respectives de  $f$  et  $g$  pour chacune de ces majorations, on en déduit, par recombinaison des termes, que la différence entre les deux calculs par formules intégrales approchées aux points  $X_0$  et  $X'_0$  peut être majorée par

$$CP \left( \frac{\delta_i}{d_i} \right) \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times \partial_t^2 H \\ -\mathbf{n}_i \times \partial_t^2 E \end{pmatrix} \right\|_{C([0,t],L^1(\mathcal{F}_i))},$$

où  $P$  est un polynôme réel de degré au plus 4 et de variance supérieure ou égale à 1. La relation (2.15) est ainsi établie. ■

La formule (2.15) permet alors d'établir que la méthode d'interpolation consistant à prendre la valeur du champ électromagnétique constante sur chaque regroupement de la surface de prélèvement  $\mathcal{P}$ , de dimension caractéristique inférieure à  $\delta$ , assure alors de conserver une erreur en  $O(\delta/d)$ . Le schéma numérique ainsi obtenu sera donc aisée à mettre en place (il suffit d'étendre la valeur du champ calculée en un point d'un regroupement  $\mathcal{P}_i$  donné à tous les autres points de  $\mathcal{P}_i$ ), et n'introduira pas plus d'erreur que l'approximation déjà effectuée par la formule intégrale approchée (1.10). Nous avons donc une consistance *a priori* de l'ordre de  $O(\delta/d)$ .

**Remarque 2.2.3** *D'après la remarque 2.1.2, une méthode pratique d'implémentation consiste à poser que les volumes  $\text{Supp}(\nabla\varphi_{\mathcal{H}_i})$  tendent vers les surfaces de Huygens  $\mathcal{H}^i$ ; le découpage introduit sera alors un découpage en sous-faces de  $\mathcal{H}^i$  similaire à celui effectué sur  $\mathcal{P}^i$ .*

**Remarque 2.2.4** *Tous les résultats sur les approximations établis étant donnés pour une représentation continue de la solution du problème (2.2), le passage à un schéma numérique est alors immédiat et possible pour a priori tous types de méthodes de résolutions volumiques à l'intérieur des domaines  $\mathcal{D}^i$ . La discrétisation des deux étapes principales précédentes se fera alors directement en fonction du (ou des) schéma(s) numérique(s) utilisé(s). Enfin, ces étapes étant distinctes l'une de l'autre, l'emploi de méthodes différentes sur chaque domaine  $\mathcal{D}^i$  est envisageable.*

## 2.3 Etude de la méthode

L'objectif de cette partie est de fournir un a priori quant à la convergence de la méthode. En effet, nous avons montré dans le chapitre 1 que l'erreur commise par la phase d'antépolation est donnée en  $O(\delta/d)$ . De plus, précédemment nous venons d'établir que l'erreur commise dans la phase d'interpolation est aussi en  $O(\delta/d)$ . Toutefois, nous n'avons pas démontré, même s'il est naturel de le supposer, que l'erreur globale lors de l'utilisation la méthode est donc bien en  $O(\delta/d)$ . En outre, comme le but principal de ce chapitre est de proposer une méthode de résolution générale, le schéma numérique employé pour le calcul de la solution de chaque domaine a volontairement été laissé libre. Dans ces conditions il apparaît difficile de proposer un résultat montrant la consistance (puis la convergence) de la méthode. En conséquence, afin de laisser toujours le choix du schéma à utiliser sur chaque domaine, nous allons donc montrer que le système d'équations de Maxwell formulé dans (2.13) est bien posé en existence et unicité. Qui plus est, nous allons proposer une inégalité induisant la stabilité du schéma (2.13) sous la forme continue espace-temps. Par la suite, dans le chapitre 3, la consistance de la méthode sera analysée à travers des exemples numériques afin de compléter cette étude, et d'appuyer ainsi la convergence de l'approximation (2.13).

Afin de montrer le caractère bien posé (en existence et unicité) de la méthode multi-domaines telle qu'elle est présentée précédemment par l'approximation du couplage dans (2.2), puis de proposer une inégalité induisant la stabilité de celle-ci, nous allons introduire des espaces fonctionnels  $H_{tan}^k$  adaptés à l'étude des systèmes de Friedrichs dont font parties les équations de Maxwell instationnaires. Ces espaces permettent la prise en compte de conditions de régularités sur les termes de traces présents dans l'utilisation de la formule de rayonnement (1.10), ainsi que la description de conditions aux limites fréquemment rencontrées (conducteur parfait, diélectrique, impédance,...).

L'établissement des résultats d'existence, unicité et de stabilité découle de l'étude de la régularité de l'approximation du transport intégral par la formule (1.10) et d'une première majoration de la solution du système couplé (2.13) par rapport aux conditions initiales obtenue dans la démonstration de l'existence et de l'unicité. Cette partie est donc organisée autour de l'obtention de ces résultats de la manière suivante :

1. Dans un premier temps (section 2.3.1) nous rappelons la définition des espaces  $H_{tan}^k$  ainsi que deux résultats importants pour la suite :
  - (a) le théorème de régularité tangentielle (théorème 2.3.4) donnant l'existence et l'unicité de la solution à un problème couplé de type Maxwell (2.1) ; il fournit également une majoration, dans les espaces  $H_{tan}^k$ , de cette solution en fonction des seconds membres et conditions initiales de (2.1) ;
  - (b) un théorème (théorème 2.3.5) établissant le caractère  $L^2$  bien posé du système (2.1).
2. Ensuite, (section 2.3.2) nous pourrions fournir une première étude du système approché (2.2) :
  - (a) d'abord nous établissons la régularité de la formule intégrale approchée sur les espaces  $C^k(0, T, H_{tan}^1(\mathcal{D} \cap V(\mathcal{H})^c))$  (proposition 2.3.6),
  - (b) puis ensuite (théorème 2.3.8), à partir de ce résultat nous obtenons l'existence et l'unicité du  $n$ -uplet  $(u_i)_i$  de solutions de (2.13) dans  $\left(\cap_{j=0}^{k-1} C^j(0, T, H_{tan}^{k-1-j})\right)^n$ , ainsi qu'une majoration donnant la dépendance aux données initiales de la solution du système (2.2).
3. Enfin, (section 2.3.3) des résultats précédents nous déduisons une majoration plus fine de la solution de (2.13), donnant la stabilité la méthode, à partir de trois étapes :
  - (a) une hypothèse de découpage "homogène" des surfaces liée à la consistance du maillage (hypothèse 2.3.11) est formulée afin de donner la dépendance du nombre de sous-faces utilisées dans (1.10) pour un  $\delta$  garantissant  $\delta/d \ll 1$  à  $d$  fixé,
  - (b) en outre, un résultat plus fin de régularité de la formule intégrale approchée (proposition 2.3.14) dans  $L^2$  et  $H_{tan}^1$  au voisinage des surfaces de Huygens est établi,
  - (c) enfin, à partir de cette dernière estimation et du théorème d'existence et d'unicité précédent, la majoration fine est établie pour les solutions  $(u_i)_i$  de (2.13) dans  $H_{tan}^1$  (théorème 2.3.15).

**Remarque 2.3.1** *Le théorème 2.3.15 permet d'établir que le système couplé est stable, mais aussi que chaque sous-système est lui-même stable. Par extension directe, il garantit a priori la stabilité du couplage entre schémas numériques dissipatifs ou conservatifs par la majoration sur tout volume  $V$*

$$\forall t > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|u(t, \cdot)\|_{L^2(V)} \leq \|u(t, \cdot)\|_{H_{tan}^k(V)}. \quad (2.32)$$

### 2.3.1 Systèmes de Friedrichs et espaces $H_{tan}^k$

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  domaine ouvert, borné, d'un seul côté de sa frontière  $\delta\Omega \in C^1$ .

On rappelle ici la définition, donnée dans [11, 56], des espaces  $H_{tan}^s(\Omega)$ , ainsi que certaines propriétés de régularités de systèmes de Friedrich définis sur  $\Omega$ .

**Définition 2.3.2** Un champ vectoriel  $\gamma$  sur  $\bar{\Omega}$  est dit tangentiel si et seulement si pour tout  $x \in \delta\Omega$ ,  $(\gamma(x), \mathbf{n}(x)) = 0$ . Alors, pour tout indice  $s \in \mathbb{N}$ , l'espace  $H_{tan}^s(\Omega)$  est constitué par l'ensemble des fonctions  $u \in L^2(\Omega)$  telles que pour tout  $r \leq s$ , et pour tout champs tangentiels  $(\gamma_i)_{i \in \{1, \dots, r\}}$ ,  $\gamma_1 \cdots \gamma_r u \in L^2(\Omega)$ .

On remarque que  $H_{tan}^s(\Omega) \subset H_{loc}^s(\Omega)$ . Il est alors possible de donner une structure d'espace de Hilbert aux espaces  $H_{tan}^s$  de la manière suivante : pour tout  $p \in \delta\Omega$

1. localiser  $u$  en  $\phi u$  au voisinage de  $p$  par partition de l'unité,
2. redresser localement le système de coordonnées sous la forme  $(x_1, x')$ , de sorte que

$$\text{Supp}\phi u \subset \{|x| < 1, x_1 \geq 0\},$$

3. enfin remarquer que les fonctions  $\phi u$  sont caractérisées par

$$\sum_{|\alpha| \leq s} \|(x_1 \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)^\alpha \phi u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 < \infty.$$

**Définition 2.3.3** Une fonction  $u$  est dans  $H_{tan}^1(\mathbb{R}^n)$  si  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $u|_\Omega \in H_{tan}^1(\Omega)$  et  $u|_{\Omega^c} \in H_{tan}^1(\Omega^c)$ . La norme est donnée par

$$\|u\|_{H_{tan}^1(\mathbb{R}^n)}^2 = \|u\|_{H_{tan}^1(\Omega)}^2 + \|u\|_{H_{tan}^1(\Omega^c)}^2 \quad (2.33)$$

Par convention, on notera  $H_{tan}^0 = L^2$ .

Afin de pouvoir établir un comportement des solutions successives de l'approximation du problème couplé (2.2), un autre résultat préliminaire de régularité de la solution générale du système d'équation de Maxwell, avec inhomogénéités, est nécessaire. Pour cela, on utilise le théorème de régularité tangentielle énoncé par Rauch dans [55].

**Théorème 2.3.4 (Régularité tangentielle)** Soit un entier  $k \geq 1$ . On suppose que  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  sont respectivement de classe  $C^{k,1}$  et  $C^{k-1,1}$ . Si de plus la condition initiale  $g$  et le second membre  $f$  vérifient respectivement  $g \in H^k(\Omega)$  et il existe  $T' \in ]0, T]$  tel que  $\forall 0 \leq j \leq k$ ,  $\partial_t^j f \in L^1(0, T, H_{tan}^{k-j}(\Omega)) \cap L^1(0, T', H^{k-j}(\Omega))$ , alors la solution  $u$  du problème

$$\begin{cases} \mathbb{A}(x) \partial_t u + \sum_l A_l \partial_l u + \mathbb{B}(x) u = f, & (t, x) \in [0, T] \times B(0, R), \\ u(t=0, x) = g(x), & x \in \Omega, \\ u(t, x) \in N(t, x), & (t, x) \in [0, T] \times \delta\Omega, \end{cases} \quad (2.34)$$

est dans  $\cap_{j=0}^k C^j(0, T, H_{tan}^{k-j}(\Omega))$ ; et de plus on a l'estimation suivante

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \Phi_k(u)(t) \leq C \left( \sum_{j=0}^k \left\| \partial_t^j f \right\|_{L^1([0, T], H_{tan}^{k-j}(\Omega))} + \Phi_k(u)(0) \right), \quad (2.35)$$

où  $\Phi_k(u)(t) = \sum_{j=0}^k \left\| \partial_t^j u(t) \right\|_{H_{tan}^{k-j}(\Omega)}$ , et  $C$  est une constante ne dépendant que de  $\Omega$ .

Le théorème 2.3.4 est une extension du résultat suivant [55] que nous utiliserons pour le cas particulier  $H_{tan}^k = L^2$  dans la seconde partie de cette étude

**Théorème 2.3.5 (Caractère  $L^2$  bien posé)** *Pour tout  $g \in L^2(\Omega)$  et tout  $f \in L^1([0, T], L^2(\Omega))$ , il existe un unique  $u \in L^2(O)$  solution de (2.34). De plus,  $u \in C([0, T], L^2(\Omega))$ , et on a l'estimation suivante*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \Phi_0(u)(t) \leq C \left( \|f\|_{L^1([0, T], L^2(\Omega))} + \Phi_0(u)(0) \right), \quad (2.36)$$

où  $C$  est une constante ne dépendant que de  $\Omega$ .

### 2.3.2 Existence, unicité et première majoration de la solution du système couplé

Conformément aux notations du paragraphe 2.3.1, nous travaillerons dans cette section et dans la suivante dans les espaces  $H_{tan}^k(\Omega)$  où  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ .

#### Régularité de la formule de transport

Pour une surface de prélèvement donnée  $\mathcal{P}$ , on isole les inhomogénéités à l'intérieur du volume délimité par une surface de Huygens  $\mathcal{H}$ ; le tout étant inclus dans un volume borné  $\mathcal{D}$ . D'après la proposition 2.1.8, si on ne considère que le cas mono sous-domaine, la solution  $u$  de (2.1) peut être calculée en dehors de  $\mathcal{D}$ , à partir de traces tangentielles sur  $\mathcal{P}$ , par  $u = G * B^{\mathcal{P}}u$ . Dans la méthode mise en place précédemment, le transport est approximé sous la forme  $u \approx [\widetilde{G*}]B^{\mathcal{P}}u$  à l'aide de la formule intégrale approchée (1.10). Le but est d'établir la régularité de ce transport par formule intégrale approchée.

On obtient alors le résultat suivant

**Proposition 2.3.6** *Soit un entier  $k \geq 1$  donné. Soient  $\mathcal{D}$  un domaine borné et  $\mathcal{P} = \cup_i \mathcal{P}_i$  une surface admissible, au sens de la définition 1.2.6, tels que  $\emptyset \subsetneq V(\mathcal{P}) \subset \overline{V(\mathcal{P})} \subsetneq \mathcal{D}$ .*

*Soient  $\Omega \subset \mathcal{D}^c$  et  $u$  une fonction définie sur  $[0, T] \times \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V}$  étant un voisinage de  $\mathcal{P}$ , et vérifiant  $B^{\mathcal{P}}u \in \cup_i C^k(0, T - d_0, L^2(\mathcal{P}_i))$ , où  $d_0 = \text{dist}(\Omega, \mathcal{P})$ . Alors on a*

$$\forall j \in \{0, \dots, k-1\}, \quad [\widetilde{G*}]B^{\mathcal{P}}u \in C^{k-1-j}(0, T, H_{loc}^j(\Omega)).$$

**Preuve.** Il suffit de montrer que, pour  $\Omega$  domaine borné de  $\mathcal{D}^c$  et  $j \in \{0, \dots, k-1\}$  fixé quelconques, la somme multi-indices  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^3, |\alpha| \leq j} \left\| \partial_t^\beta (\partial_1, \partial_2, \partial_3)^\alpha [\widetilde{G*}]B^{\mathcal{P}}u \right\|_{L^2(\Omega)}$  est bornée pour tout  $\beta \in \{0, \dots, k-1-j\}$ .

Par la formule (1.10),  $[\widetilde{G*}]B^{\mathcal{P}}u$  se décompose en trois parties sous la forme  $[\widetilde{G*}]B^{\mathcal{P}}u = A + B + C$ , où  $A = \sum_p \int_{\mathcal{P}_p} A_p$  rassemble les termes en  $\partial_t$ ,  $C = \sum_p \int_{\mathcal{P}_p} C_p$  ceux en  $\int_t$ , et  $B = \sum_p \int_{\mathcal{P}_p} B_p$  les autres; soit encore

$$\begin{aligned} A_p &= \frac{1}{4\pi d_p} \left[ \mathbf{t}_p \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{t}_p \times \mathbf{t}_p \times \mathbb{I}_6 \right] \frac{\partial}{\partial t} B^{\mathcal{P}}u(t_0 - d_p, \cdot), \\ B_p &= \frac{1}{4\pi d_p^2} \left[ \mathbf{t}_p \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} + 3\mathbf{t}_p \times \mathbf{t}_p \times \mathbb{I}_6 - 2\mathbf{n}_p \times \mathbf{n}_p \times \mathbb{I}_6 \right] B^{\mathcal{P}}u(t_0 - d_p, \cdot), \\ C_p &= \frac{1}{4\pi d_p^3} \{3\mathbf{t}_p \times \mathbf{t}_p \times \mathbb{I}_6 - 2\mathbf{n}_p \times \mathbf{n}_p \times \mathbb{I}_6\} \int_0^{t_0 - d_p} B^{\mathcal{P}}u(s, \cdot) ds, \end{aligned}$$

où  $d_p = |X_p - X_0|$ ,  $X_0$  étant un point courant dans  $\Omega$ . Cette décomposition prenant la forme de la proposition 1.2.39 elle a priori valable presque partout, c'est-à-dire pour tout  $X_0$  hors des demi-droites  $(D_p)_p$  dans  $\mathcal{D}^c$ . Chaque demi-droite  $D_p$  est de sommet  $X_p$  le point de référence choisi sur

le découpage  $\mathcal{H} = \cup_p \mathcal{H}_p$ , et de direction  $\mathbf{n}_p$  la normale à  $\mathcal{H}_p$  sortante au volume  $V(\mathcal{H})$ . Toutefois, l'expression obtenue dans la proposition 1.2.50 étant la limite continue de celle de la proposition 1.2.39 (cf proposition 1.2.53), l'étude de ces cas s'en déduit alors immédiatement par passage à la limite.

En désignant par  $\mathbb{D}^{\alpha,\beta}$  l'opérateur différentiel  $\partial_t^\beta (\partial_1, \partial_2, \partial_3)^\alpha$ , il vient alors pour tout multi-indice  $\alpha \in \mathbb{N}^3$  tel que  $|\alpha| \leq j$

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{D}^{\alpha,\beta} [\widetilde{G*}] B^{\mathcal{P}} u \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} 2N \sum_{p=1}^N \left| \int_{\mathcal{P}_p} \mathbb{D}^{\alpha,\beta} (A_p + B_p + C_p) \right|^2 \\ &\leq \int_{\Omega} 2N \sum_{p=1}^N |\mathcal{P}_p| \left[ \left\| \mathbb{D}^{\alpha,\beta} A_p \right\|_{L^2(\mathcal{P}_p)} + \left\| \mathbb{D}^{\alpha,\beta} B_p \right\|_{L^2(\mathcal{P}_p)} + \left\| \mathbb{D}^{\alpha,\beta} C_p \right\|_{L^2(\mathcal{P}_p)} \right]^2, \\ &\leq 6 \int_{\Omega} \sum_p N |\mathcal{P}_p| \left[ \int_{\mathcal{P}_p} \left| \mathbb{D}^{\alpha,\beta} A_p \right|^2 + \int_{\mathcal{P}_p} \left| \mathbb{D}^{\alpha,\beta} B_p \right|^2 + \int_{\mathcal{P}_p} \left| \mathbb{D}^{\alpha,\beta} C_p \right|^2 \right], \end{aligned} \quad (2.37)$$

$N$  désignant le nombre de sous-faces de grandeur caractéristique inférieure à  $\tau$  constituant le découpage  $\mathcal{P}$ .

On commence par étudier le premier terme (en  $A_p$ ) de (2.37), les autres se traitant de manière totalement analogue. Comme  $\Omega \subset \mathcal{D}^c \subsetneq \overline{V(\mathcal{P})}^c$ , on en déduit qu'il existe  $d_0 = \text{dist}(\Omega, \mathcal{P}) > 0$  tel que pour tout  $X_0 \in \Omega$ ,  $d_p \geq d_0 > 0$ ; ceci assurant l'infini dérivabilité des termes en  $(1/d_p)^\gamma$  ( $\gamma \geq 1$ ). De même, le vecteur  $\mathbf{t}_p$  est défini, continu et infiniment dérivable sur  $\Omega$  (sa définition pour tout  $X_0 \in \mathcal{D}^c$  sur les demi-droite  $D_p$  étant alors par continuité  $\pm \mathbf{n}_p$ ). Le vecteur  $\mathbf{n}_p$  étant indépendant du choix de  $X_0$  il est donc aussi infiniment dérivable (constant) sur  $\Omega$ . La régularité du terme  $A_p$  après application de l'opérateur de dérivation  $\mathbb{D}^{\alpha,\beta}$  est alors uniquement donnée en considérant la régularité du terme  $\partial_t B^{\mathcal{P}} u(t_0 - d_p, \cdot)$  auquel les opérateurs de dérivation successives  $\mathbb{D}^{\alpha',\beta}$ , pour tout multi-indice  $\alpha' \leq \alpha$ , sont appliqués. D'après l'expression de  $A_p$  il est aisé de voir que l'application d'un opérateur de dérivation spatio-temporel de la forme  $\mathbb{D}^{\alpha',\beta}$  va se traduire par une combinaison linéaire de dérivées en espaces de  $d_p$  de la forme  $\mathbb{D}^{\alpha'',\beta} d_p$  pour  $\alpha'' \leq \alpha'$ , et de dérivées temporelles de  $B^{\mathcal{P}} u$  d'ordre  $\beta + |\alpha'| - |\alpha''| + 1$ . Par hypothèse  $u$  est de classe  $C^k$  en temps, le nombre de dérivations temporelles étant donné par  $\beta + |\alpha'| - |\alpha''| + 1 \leq \beta + j + 1 \leq k$ , on en déduit alors que  $\partial_t^\beta \mathbb{D}^{\alpha',\beta} A_p$  est continu en temps.

De plus, on remarque encore que l'application d'un tel opérateur de dérivation à  $A_p$  n'induit aucune dérivation spatiale sur  $B^{\mathcal{P}} u$ . Les coefficients spatiaux, ainsi que ceux apportés par les dérivations successives, étant suffisamment réguliers on en déduit donc que si  $B^{\mathcal{P}} u$  est dans  $L^2(\mathcal{P})$ , alors  $\mathbb{D}^{\alpha',\beta} A_p$  y sera aussi et donc  $\left\| \mathbb{D}^{\alpha,\beta} [\widetilde{G*}] B^{\mathcal{P}} u \right\|_{L^2(\Omega)}$  sera majoré (les termes en  $B_p$  et  $C_p$  se traitant de manière similaire à  $A_p$ ). Or, par hypothèse,  $B^{\mathcal{P}} u$  est dans  $L^2(\mathcal{P})$ ; ceci justifiant le passage de la première à la deuxième majoration dans (2.37).

Finalement,  $\forall \beta \in \{0, \dots, k-1-j\}$  et  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^3, |\alpha| \leq j$ ,  $\mathbb{D}^{\alpha,\beta} [\widetilde{G*}] B^{\mathcal{P}} u \in C^0(0, T, L^2(\Omega))$ . Donc,  $[\widetilde{G*}] B^{\mathcal{P}} \in C^{k-1-j}(0, T, H^j(\Omega))$ , d'où le résultat. ■

En reprenant le procédé de construction de la proposition 2.3.6, il est de plus possible de formuler une majoration de l'intensité du champs propagé par la formule intégrale approchée (1.10)

**Corollaire 2.3.7** Soient  $k \geq 1$  entier,  $\mathcal{D}$  un domaine et  $\mathcal{P} = \cup_{i=1}^N \mathcal{P}_i$  une surface admissible au sens de la définition 1.2.6, tels que  $\emptyset \subsetneq V(\mathcal{P}) \subsetneq \mathcal{D}$  et  $V(\mathcal{P}) \cap \mathcal{D} = \emptyset$ . Soient enfin  $T > 0$  et  $X$  un point de  $\mathcal{D}^c$ .

Si  $u$  vérifie  $B^{\mathcal{P}}u \in \cup_i C^k(0, T - d_0, L^2(\mathcal{P}_i))$ , où  $d_0 = \text{dist}(X, \mathcal{P})$ , et si  $\forall m \geq 0 \partial_t^m B^{\mathcal{P}}u(t \leq 0) = 0$  alors pour tout entier  $j \in \{0, \dots, k-1\}$  il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\int_0^T \left| \partial_t^j (\partial_1, \partial_2, \partial_3)^\alpha [\widetilde{G^*}] B^{\mathcal{P}}u(t, X) \right|^2 dt \leq C \sum_{m=\max(j-1, 0)}^{j+|\alpha|+1} \sup_{s \in [0, T-d_0]} \left( \sum_{i=1}^N \|\partial_t^m B^{\mathcal{P}}u(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{P}_i)}^2 \right),$$

pour tout multi-indice  $\alpha \in \mathbb{N}^3$  tel que  $|\alpha| \leq k - 2 - j$ .

**Preuve.** Soit  $j \in \{0, \dots, k-1\}$ . En partant de l'inégalité (2.37) avec  $\beta = j$  et  $|\alpha| \leq k - 1 - j$  il suffit de majorer les termes  $\int_{\mathcal{P}_p} |\mathbb{D}^{\alpha, j} A_p|^2$ ,  $\int_{\mathcal{P}_p} |\mathbb{D}^{\alpha, j} B_p|^2$  et  $\int_{\mathcal{P}_p} |\mathbb{D}^{\alpha, j} C_p|^2$ . D'après ce qui précède,  $\mathbb{D}^{\alpha, j} A_p$  est une combinaison linéaire de termes  $\partial_t^k B^{\mathcal{P}}u$ , pour  $k \in \{j+1, \dots, j+1+|\alpha|\}$ , évalués en  $(t - |Y - X|, Y)$  pour  $Y \in \mathcal{P}_p$ , et dont les coefficients sont des fonctions composées de la fonction  $\varphi : Y \in \mathcal{P}_p \mapsto |Y - X|$ . Comme  $X \in \mathcal{D}^c \subsetneq V(\mathcal{P})^c$  on a  $\varphi > d_0 > 0$  sur tout  $\mathcal{P}_p$ .  $\varphi$  est alors définie, continue et donc bornée sur  $\mathcal{P}_p$  dans  $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ . Ainsi tous les coefficients sont bornés. Considérons enfin la majoration suivante

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathcal{P}_p} \left| \partial_t^k B^{\mathcal{P}}u(t - |Y - X|, Y) \right|^2 dY dt &= \int_{\mathcal{P}_p} \int_0^{t-|Y-X|} \left| \partial_t^k B^{\mathcal{P}}u(t, Y) \right|^2 dt dY \\ &\leq \max(0, (t - d_0)^2) \sup_{s \in [0, t-d_0]} \int_{\mathcal{P}_p} \left| \partial_t^k B^{\mathcal{P}}u(s, Y) \right|^2 dY, \end{aligned}$$

le terme  $\max(0, (t - d_0)^2)$  traduisant la nullité de l'intégrale  $\int_0^{t-|Y-X|} B^{\mathcal{P}}u(s, Y) ds$  pour  $t \leq d_0$ . On en déduit alors que

$$\int_{\mathcal{P}_p} |\mathbb{D}^{\alpha, j} A_p|^2 \leq C \sum_{k=j+1}^{j+|\alpha|+1} \sup_{s \in [0, t-d_0]} \left( \left\| \partial_t^k B^{\mathcal{P}}u(s, \cdot) \right\|_{L^2(\mathcal{P}_p)}^2 \right).$$

De même,  $\mathbb{D}^{\alpha, j} B_p$  est une combinaison linéaire similaire de termes  $\partial_t^k B^{\mathcal{P}}u$  pour  $k \in \{j, \dots, j+|\alpha|\}$ , et  $\mathbb{D}^{\alpha, j} C_p$  est une combinaison linéaire de termes  $\partial_t^k B^{\mathcal{P}}u$  pour  $k \in \{j-1, \dots, j+|\alpha|-1\}$  où par convention le cas  $k = -1$  (obtenu pour  $j = 0$ ) correspond à  $\int_{\mathcal{P}_p} \left| \int_0^{t-|Y-X|} B^{\mathcal{P}}u(s, Y) ds \right|^2 dY$  qui peut être majoré par  $\max(0, (t - d_0)^2) \sup_{s \in [0, t-d_0]} \int_{\mathcal{P}_p} |B^{\mathcal{P}}u(s, Y)|^2 dY$ .

En recombinaison les majorations des trois termes  $A_p$ ,  $B_p$  et  $C_p$ , et en sommant sur les facettes  $\mathcal{P}_p$  de  $\mathcal{P}$  on en déduit le résultat. ■

### Étude du problème couplé : existence, unicité et première majoration de la solution

L'hypothèse 2.1.4 assure que la distance  $d_{i,j}$  entre la surface de prélèvement  $\mathcal{P}^i$  et la surface de Huygens  $\mathcal{H}^j$  est strictement positive pour tout  $i \neq j$ . Soit alors  $\underline{d}$  tel que  $\min_{i \neq j} d_{i,j} > \underline{d} > 0$ . Nous allons étudier la stabilité de la méthode sur un intervalle de temps fini  $I = [0, T]$ . Il se découpe alors en au plus  $N_T + 1$  fenêtres d'études, avec  $N_T = \lceil T/\underline{d} \rceil$ , de la forme  $I_n = [n\underline{d}, (n+1)\underline{d}]$  (la dernière fenêtre,  $I_{N_T} = [N_T \underline{d}, T]$ , vérifiant alors  $\emptyset \subseteq I_{N_T} \subsetneq [N_T \underline{d}, (N_T + 1)\underline{d}]$ ). L'étude de la résolution de (2.2) pour tout domaine  $\mathcal{D}^i$  quelconque donné, sur  $\cup_{k \in [0, n]} I_k \times \mathbb{R}^3$ , ne nécessite donc que la connaissance des solutions  $(u_{i^*})_{i^*}$  sur  $(\cup_{k \in [0, n-1]} I_k \times \mathbb{R}^3)^{N-1}$ , comme représenté sur la figure 2.5.

De la proposition 2.3.6 et du théorème 2.3.4, on peut alors établir la régularité du schéma couplé approximé

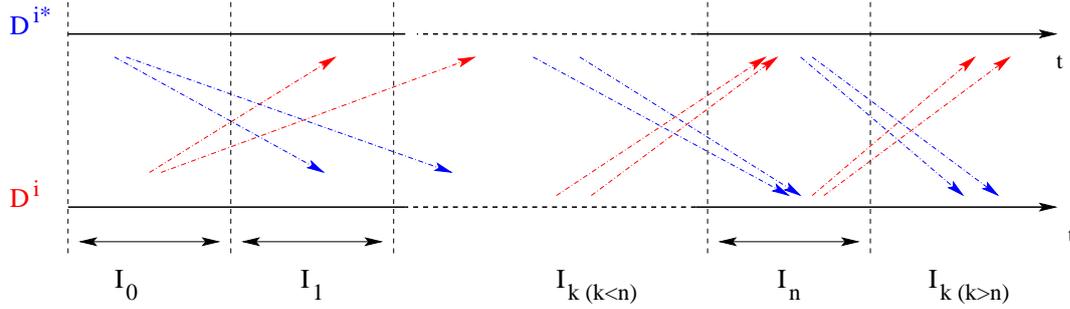


FIG. 2.5 – Décomposition de l'intervalle d'étude à l'aide du principe de Huygens, et répartition des interactions entre les domaines

**Théorème 2.3.8** Soit un entier  $N \geq 0$ . Si l'hypothèse 2.1.4 est vérifiée, et si il existe  $T' \in ]0, T]$  tel que les termes sources  $u^{src}$  et  $\sum_i B_i^{\mathcal{H}} u^{inc}$  vérifient

$$\forall 0 \leq j \leq 2N_T + N, \begin{cases} \partial_t^j u^{src} \in L^1(0, T, H_{tan}^{2N_T + N - j}(\mathbb{R}^3)) \cap L^1(0, T', H^{2N_T + N - j}(\mathbb{R}^3)), \\ \forall i, \partial_t^j B_i^{\mathcal{H}} u^{inc} \in L^1(0, T, H_{tan}^{2N_T + N - j}(\mathcal{D}^i)) \cap L^1(0, T', H^{2N_T + N - j}(\mathcal{D}^i)), \end{cases}$$

alors le système de  $n$  problèmes couplés (2.13) admet un unique  $n$ -uplet de solutions  $(u_i)_i$  dans  $(\cap_{k=0}^N C^k(0, T, H_{tan}^{N-k}(\mathbb{R}^3)))^n$ .

De plus, il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\forall i, \Phi_N(u_i)(T) \leq C \sum_{k=0}^{N_T} \int_{s \in I_{N_T - k}} [\Phi_{N+2k}(u^{inc})(s) + \Phi_{N+2k}(u^{src})(s)] ds. \quad (2.38)$$

**Preuve.** Le théorème 2.3.8 se démontre par itérations successives sur les fenêtres de temps  $I_k$  en considérant le problème (2.13) restreint à un domaine de calcul  $\Omega$  bien choisi et en y ajoutant des conditions aux limites. La restriction de la solution  $u_i$  de (2.13) à  $I_k$  sera notée  $u_i^k$ .

1. Afin de pouvoir appliquer les théorèmes de régularité sur les systèmes de Friedrich précédemment énoncés, nous devons préalablement restreindre le domaine spatial. Pour cela, l'étude étant menée pour  $t \in [0, T]$  et les termes sources étant à support compact dans  $V(\mathcal{P}_i)$ , en utilisant le principe de Huygens il est possible de définir une boule  $B_R$  de rayon  $R > 0$  assez grand tel que  $\forall i, V(\mathcal{P}_i) \subset B_R$ , et

$$\forall i, \forall t \in [0, T], u_i|_{\delta B_R}(t, \cdot) = 0.$$

On adjoint alors au système (2.13) des conditions aux limites admissibles au sens de Rauch sur la frontière  $\delta B_R$  de  $B_R$  :

$$\forall i, \forall t \in [0, T], M u_i|_{\delta B_R}(t, \cdot) = 0. \quad (2.39)$$

ou  $M$  est un opérateur donnant une condition aux limites maximale monotone ; par exemple avec  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

$$M = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_3 & -\mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_3 \\ \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_3 & \frac{1}{\alpha} \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_3 \end{pmatrix}.$$

Le nouveau problème obtenu par cette restriction est alors identique au système (2.13) sur  $([0, T] \times B_R)^n$ , et même sur  $([0, T] \times \mathbb{R}^3)^n$  en utilisant un prolongement par 0.

2. Sur la première fenêtre, les termes de couplages  $[\widetilde{G^*}]$  sont nuls. Le théorème 2.3.4 assure que, pour tout indice  $i$ , la solution  $u_i^0$  de (2.13) existe et appartient à  $\cap_{j=0}^{2N_T+N} C^j(I_0, H_{tan}^{2N_T+N-j}(B_R))$ . La fonction  $u_i^0$  est donc en particulier dans  $C^{2N_T+N-1}(I_0, H_{tan}^1(B_R))$ , on en déduit alors que sur chaque facette  $\mathcal{P}_j^i$  de la surface de prélèvement  $\mathcal{P}^i$  la restriction de la trace  $B_i^{\mathcal{P}} u_i^0$  est dans  $C^{2N_T+N-1}(I_0, H^{1/2}(\mathcal{P}_j^i)) \subset C^{2N_T+N-1}(I_0, L^2(\mathcal{P}_j^i))$ . D'où, par la proposition 2.3.6, en remarquant que  $\{t + \underline{d}, t \in I_0\} = I_1$ ,

$$\forall j \in \{0, \dots, 2N_T + N - 2\}, [\widetilde{G^*}]B^{\mathcal{P}}(u_i^0 \chi_{I_0}) \in C^{2N_T+N-2-j}(I_1, H_{loc}^j((\mathcal{D}^i)^c)).$$

3. Pour tout  $k \geq 1$ , les fonctions  $u_i^k$  solutions de (2.13) pour  $t \in I_k$ , sont alors solutions de

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_i \right) u_i^k = \\ u^{src} Y_{\mathcal{D}^i} + B_i^{\mathcal{H}} u^{inc} + [\widetilde{B_i^{\mathcal{H}}}] \left( \sum_{i^*} [\widetilde{G^*}] B_{i^*}^{\mathcal{P}} \left( \sum_{m=0}^{k-1} u_{i^*}^m \chi_{I_m}(t) \right) \right), \quad \forall (t, x) \in I_k \times B_R, \\ u_i^k(t = k\underline{d}) = u_i^{k-1}(t = k\underline{d}), \quad \forall x \in B_R, \\ \sum_l \mathbb{A}_l \mathbf{n}_l u_i^k(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in I_k \times \delta B_R, \end{array} \right.$$

où  $\chi_{I_m}$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $I_m$ .

Le résultat s'obtient ainsi par une récurrence directe. Pour cela, on suppose que l'hypothèse suivante, déjà vérifiée par  $u_i^0$  pour  $m = 0$ , est vraie pour tout  $m \in \{0, \dots, k-1\}$

$$(\mathbf{H}_m) : \quad u_i^m \in \cap_{j=0}^{2N_T+N-2m} C^j(m\underline{d}, (m+1)\underline{d}, H_{tan}^{2N_T+N-2m-j}(B_R)).$$

Il vient alors successivement avec  $m = k-1$

- (a) pour tout  $i^*$ , les traces tangentielles  $B^{\mathcal{P}} \left( \sum_{p=0}^{k-1} u_{i^*}^p \chi_{I_p}(t) \right)$  sont alors obtenues dans  $\cup_j C^{2N_T+N-2k+1}(\mathcal{I}_{k-1}, L^2(\mathcal{P}_j^{i^*}))$ , où  $\mathcal{I}_{k-1}$  représente le support en  $t$  de  $B^{\mathcal{P}} \left( \sum_{p=0}^{k-1} u_{i^*}^p \chi_{I_p}(t) \right)$ . Par le principe de Huygens on en déduit que  $I_k \subset \mathcal{I}_k$ , et donc par la proposition 2.3.6, on a ainsi pour tout  $j \in \{0, \dots, 2N_T + N - 2k\}$

$$[\widetilde{G^*}]B^{\mathcal{P}} \left( \sum_{p=0}^{k-1} u_{i^*}^p \chi_{I_p}(t) \right) \in C^{2N_T+N-2k-j}(I_k, H_{loc}^j((\mathcal{D}^{i^*})^c)),$$

d'où par utilisation de la "restriction"  $[\widetilde{B_i^{\mathcal{H}}}]$  :

$$\partial_t^j [\widetilde{B_i^{\mathcal{H}}}] [\widetilde{G^*}] B^{\mathcal{P}} \left( \sum_{p=0}^{k-1} u_{i^*}^p \chi_{I_p}(t) \right) \in L^1(0, T, H^{2N_T+N-2k-j}(\mathcal{H}_i)) ;$$

- (b) le second membre  $[\widetilde{B_i^{\mathcal{H}}}] \left( \sum_{i^*} [\widetilde{G^*}] B_{i^*}^{\mathcal{P}} \left( \sum_{m=0}^{k-1} u_{i^*}^m \chi_{I_m}(t) \right) \right)$  étant identiquement nul au voisinage de  $\mathcal{P}_i \subset B_R$ , si il est dans  $H^s(B_R)$  alors il est donc aussi dans  $H_{tan}^s(B_R)$  et il y a égalité des normes,
- (c) enfin, la condition initiale vérifie

$$u_i^{k-1}(t = k\underline{d}, \cdot) \in \cap_{j=0}^{2N_T+N-2k+1-j} H_{tan}^{2N_T+N-2k+1-j}(B_R).$$

Finalement, par utilisation du théorème 2.3.4 et de la combinaison de ces trois points, on en déduit l'existence d'une solution

$$u_i^k \in \cap_{j=0}^{2N_T+N-2k} C^j \left( k\underline{d}, (k+1)\underline{d}, H_{tan}^{2N_T+N-2k-j}(B_R) \right).$$

L'hypothèse  $(\mathbf{H}_k)$  étant alors vérifiée il est ainsi possible de réitérer le raisonnement.

4. En reconstruisant les solutions complètes  $u_i$  sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^3$  par prolongement par 0 hors de  $B_R$ , on obtient le résultat.

L'établissement de (2.38) permet d'assurer l'unicité de la solution. La majoration (2.38) se démontre elle aussi successivement sur chaque fenêtre. Cependant, on procède ici à l'envers en partant de la dernière fenêtre :

1. On suppose d'abord que  $N \geq 1$ . Pour  $m \in \{0, \dots, N_T - 1\}$ , on démontre que pour une fenêtre  $I_{N_T-m}$  donnée il existe une constante  $C$  telle que la propriété  $(\mathbf{P}_m)$  est vraie.

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_m) : & \sup_{t \in I_{N_T-m}} \Phi_{N+2m}(u_i^{N_T-m})(t) \\ & \leq C \left[ \int_{s \in I_{N_T-m}} [\Phi_{N+2m}(u^{inc})(s) + \Phi_{N+2m}(u^{src})(s)] ds \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i_*} \sup_{s \in [0, (N_T-m)\underline{d}]} \Phi_{N+2m+2} \left( \sum_{k=0}^{N_T-m-1} u_{i_*}^k Y_{I_k} \right) (s) + \Phi_{N+2m}(u_i^{N_T-m-1})((N_T-m)\underline{d}) \right]. \end{aligned}$$

En effet, pour un problème donné sur une fenêtre  $I_{N_T-m}$  avec  $m \in \{1, \dots, N_T - 1\}$ , par le théorème 2.3.4, il vient

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I_{N_T-m}} \Phi_{N+2m}(u_i^{N_T-m})(t) & \leq C \left[ \Phi_{N+2m}(u_i^{N_T-m})((N_T-m)\underline{d}) \right. \\ & \quad \left. + \int_{s \in I_{N_T-m}} [\Phi_{N+2m}(u^{inc})(s) + \Phi_{N+2m}(u^{src})(s)] ds \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=0}^{N+2m} \left\| \sum_{k=0}^{N_T-m-1} \partial_t^j [\widetilde{B}_i^{\mathcal{H}}] \left( \sum_{i_*} [\widetilde{G}^*] B_{i_*}^{\mathcal{P}} \left( \sum_{m=0}^{N_T-1} u_{i_*}^m Y_{I_m}(t) \right) \right) \right\|_{L^1([0, T], H_{tan}^{N+2m-j}(B_R))} \right], \end{aligned}$$

où par définition du problème  $u_i^{N_T-m}((N_T-m)\underline{d}) = u_i^{N_T-m-1}((N_T-m)\underline{d})$ .

En utilisant le caractère constant par morceaux de  $[\widetilde{B}_i^{\mathcal{H}}]$  ainsi que le corollaire 2.3.7 on en déduit finalement qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{N+2m} \left\| \sum_{k=0}^{N_T-m-1} \partial_t^j [\widetilde{B}_i^{\mathcal{H}}] \left( \sum_{i_*} [\widetilde{G}^*] B_{i_*}^{\mathcal{P}} \left( \sum_{m=0}^{N_T-1} u_{i_*}^m Y_{I_m}(t) \right) \right) \right\|_{L^1([0, T], H_{tan}^{N+2m-j}(B_R))} \\ & \leq C \sum_{j=0}^{N+2m+1} \sum_{i_*} \sup_{s \in [0, (N_T-m)\underline{d}]} \left( \sum_{k=1}^{N_{\mathcal{P}i_*}} \left\| \partial_t^j B^{\mathcal{P}} u(s, \cdot) \right\|_{L^2(\mathcal{P}_k^{i_*})} \right), \end{aligned}$$

le dernier terme étant alors, par domination de la norme de la trace sur chaque sous-face  $\mathcal{P}_k^{i_*}$  par la norme  $H_{tan}^1$ , majoré par

$$\leq C \sum_{i_*} \sup_{s \in [0, (N_T-m)\underline{d}]} \Phi_{N+2m+2} \left( \partial_t^j B^{\mathcal{P}} u(s, \cdot) \right) (s),$$

démontrant alors  $(\mathbf{P}_m)$ .

2. Enfin, sur  $I_0$ , le second membre se réduit à  $[\widetilde{B}_i^{\mathcal{H}}]u^{inc}$ , la condition initiale étant nulle,  $(\mathbf{P}_m)$  pour  $m = N_T$  est donc ici donnée par

$$\sup_{t \in I_0} \Phi_{N+2N_T}(u_i^0)(t) \leq C \left[ \int_{s \in I_0} \Phi_{N+2N_T}(u^{inc})(s) ds \right]. \quad (2.40)$$

Ce résultat étant valable pour tout  $N \geq 0$ . On en déduit alors directement (2.38) en reportant les majorations successives  $(\mathbf{P}_m)$ , ainsi que (2.40).

3. Dans le cas particulier où  $N = 0$ , le seul changement pour l'obtention de  $(\mathbf{P}_m)$  correspond à la dernière fenêtre en temps ( $m = 0$ ). Sur  $I_{N_T}$ , d'après le théorème 2.3.5, il vient :

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I_{N_T}} \Phi_0(u_i^{N_T})(t) &\leq C \left\{ \Phi_0(u_i^{N_T})(N_T \underline{d}) \right. \\ &\quad \left. + \left\| u^{src} Y_{\mathcal{D}^i} + B_i^{\mathcal{H}} u^{inc} + [\widetilde{B}_i^{\mathcal{H}}] \left( \sum_{i^*} [\widetilde{G}^*] B_{i^*}^{\mathcal{P}} \left( \sum_{m=0}^{N_T-1} u_{i^*}^m Y_{I_m}(t) \right) \right) \right\|_{L^1(I_{N_T}, L^2(B_R))} \right\}. \end{aligned}$$

On remarque d'abord que  $\Phi_0(u_i^{N_T})(N_T \underline{d}) = \Phi_0(u_i^{N_T-1})(N_T \underline{d})$ . Puis en utilisant la continuité de  $B_i^{\mathcal{H}}$  et l'inégalité triangulaire sur le terme de droite, on en déduit l'existence d'une nouvelle constante, notée  $C$ , telle que

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I_{N_T}} \Phi_0(u_i^{N_T})(t) &\leq C \left\{ \Phi_0(u_i^{N_T-1})(N_T \underline{d}) + \int_{s \in I_{N_T}} [\Phi_0(u^{inc})(s) + \Phi_0(u^{src} Y_{\mathcal{D}^i})(s)] ds \right. \\ &\quad \left. + \left\| [\widetilde{B}_i^{\mathcal{H}}] \left( \sum_{i^*} [\widetilde{G}^*] B_{i^*}^{\mathcal{P}} \left( \sum_{m=0}^{N_T-1} u_{i^*}^m Y_{I_m}(t) \right) \right) \right\|_{L^1(I_{N_T}, L^2(B_R))} \right\}. \end{aligned}$$

Comme précédemment, en utilisant le caractère constant par morceaux de  $[\widetilde{B}_i^{\mathcal{H}}]$  ainsi que le corollaire 2.3.7, et la majoration des traces dans  $L^2(\mathcal{P}^i)$  par la norme de  $u_i^{N_T}$  dans  $H_{tan}^1(B_R)$ , on en déduit finalement

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I_{N_T}} \Phi_0(u_i^{N_T})(t) &\leq C \left\{ \int_{s \in I_{N_T}} [\Phi_0(u^{inc})(s) + \Phi_0(u^{src} Y_{\mathcal{D}^i})(s)] ds \right. \\ &\quad \left. + \sup_{s \in I_{N_T}} \left[ \sum_{i^*} \Phi_2 \left( \sum_{m=0}^{N_T-1} u_{i^*}^m Y_{I_m} \right) (s) \right] + \Phi_0(u_i^{N_T-1})(N_T \underline{d}) \right\}. \end{aligned}$$

■

**Remarque 2.3.9** *Le théorème 2.3.8 permet d'assurer la stabilité faible a priori de la méthode pour tout schéma, ou hybridation entre schémas, numérique volumique dissipatif ou conservatif, par la majoration (2.38).*

*Le résultat obtenu ici n'est a priori pas optimal car on perd une régularité en temps sur chaque fenêtre par l'utilisation de la formule intégrale approchée (1.10), ainsi qu'une régularité en espace par le relevé des traces sur les surfaces de prélèvement  $\mathcal{P}^i$ . Toutefois, il correspond encore à un large champs d'applications, les termes sources  $u^{src}$  et  $u^{inc}$  étant très souvent pris comme des fonctions aussi régulières que souhaité.*

**Remarque 2.3.10** L'ajout des conditions aux limites admissibles (2.39) dans la restriction du problème (2.13) à une boule  $B_R$  permet aussi de prendre naturellement en compte la présence d'autres conditions limites à l'intérieur des volumes  $V(\mathcal{H}_i)$  telles que la présence d'obstacles, à frontière régulière et localement d'un seul côté, diélectriques ou diélectriques parfaits décrits par des conditions d'impédance; d'où l'intérêt d'utiliser les espaces  $H_{tan}^k$ .

### 2.3.3 Précision sur la stabilité de la méthode

Moyennant certaines hypothèses géométriques supplémentaires et en tenant compte des résultats de régularités précédemment établis dans le théorème 2.3.8, il est possible d'améliorer l'évaluation de la dépendance aux données initiales et donc d'établir un résultat de stabilité plus précis pour la méthode multi-domaine. L'objectif est ici d'introduire plus d'*a priori* sur le déroulement algorithmique de la méthode, et donc de proposer une évaluation de la majoration (2.38) plus cohérente vis-à-vis de l'implémentation numérique qui sera faite dans la suite.

A l'hypothèse 2.1.4 nous allons ajouter une l'hypothèse de découpage géométrique des surfaces de prélèvement  $\mathcal{P}^i$ .

**Hypothèse 2.3.11** Soient  $\delta_M > \delta_m > 0$  donnés. La surface de prélèvement  $\mathcal{P}$  est divisée en sous-surfaces que l'on note  $\mathcal{P}_j$  ( $j = 1..N$ ). On suppose alors qu'il existe deux constantes strictement positives  $m_{\mathcal{P}}$  et  $M_{\mathcal{P}}$  ne dépendant pas de  $\delta_m$  et  $\delta_M$  telles que

$$\forall j, \quad \exists \delta \in [\delta_m, \delta_M], \quad m_{\mathcal{P}} \frac{\delta_m^2}{\delta^2} \delta^2 \leq |\mathcal{P}_j| \leq M_{\mathcal{P}} \delta^2.$$

Cette hypothèse lie les sous-faces de  $\mathcal{P}$  à des grandeurs caractéristiques  $\delta > 0$  et force "l'uniformité" du découpage. De manière pratique, l'hypothèse 2.3.11 est justifiée

- d'une part (pour la minoration) par la taille limite que ne peuvent dépasser les sous-faces due à la taille du maillage (donc  $|\mathcal{P}_j| \geq h^2$ , où  $h$  est le pas du maillage utilisé),
- d'autre part (pour la majoration) par la taille maximale que l'on demande aux  $\mathcal{P}_j$  (typiquement  $|\mathcal{P}_j| \leq \delta^2$  ou  $\pi\delta^2$ ),
- enfin, le découpage de  $\mathcal{P}$  est effectué de manière à garantir que pour chaque sous-face, de grandeur caractéristique  $\delta > 0$ , on vérifie  $\delta/d \leq \varepsilon < 1$ .

L'hypothèse 2.3.11 sera alors vérifiée par un tel découpage en prenant par exemple  $\delta_M = \varepsilon d$ ,  $\delta_m = h$ ,  $m = 1$ , et  $M = 1$  ou  $\pi$ .

Le nombre de sous-faces  $\mathcal{F}_i$  étant évidemment une fonction décroissante de la taille maximale  $\delta_M$  tendant vers  $+\infty$  pour  $\delta_M \rightarrow 0$ . Parallèlement, la surface des sous-faces tendant vers 0, on propose alors de majorer le produit de ses deux entités

**Lemme 2.3.12** Soit  $\mathcal{P}$  une surface polygonale de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $\mathcal{P}$  est divisée en sous-faces  $\mathcal{P}_i$  vérifiant l'hypothèse 2.3.11 alors il existe deux constantes positives  $C$  et  $C'$  ne dépendant que de  $\mathcal{P}_i$ ,  $\delta_m$ ,  $m_{\mathcal{P}}$  et  $M_{\mathcal{P}}$  telles que

$$\forall \delta \in ]\delta_m, \delta_M[, \quad NM_{\mathcal{P}}\delta^2 \leq C\delta_M^2 + C'\delta^2.$$

**Preuve.**  $\mathcal{P}_i$  étant un polyèdre, on va noter  $n$  le nombre de cotés qu'il possède, chaque face regroupant un ensemble de sous-faces  $\mathcal{P}_j$ . Une telle face est alors incluse dans un carré de la forme de côté  $l$  (ou à l'image d'un tel carré par une isométrie de  $\mathbb{R}^3$ ). On en déduit donc que toutes les faces comprennent au plus  $\left( \left[ \frac{l}{\sqrt{m}\delta} \frac{\delta_M}{\delta_m} \right] + 1 \right)^2$  sous-faces de tailles supérieures à  $m_{\mathcal{P}}\delta_m^2\delta^2/\delta_M^2$ . On

en déduit alors l'inégalité suivante

$$NM_{\mathcal{P}}\delta^2 \leq n \left( \left[ \frac{l}{\sqrt{m}\delta} \frac{\delta_M}{\delta_m} \right] + 1 \right)^2 M_{\mathcal{P}}\delta^2 \leq 2n \frac{M_{\mathcal{P}}}{m} \frac{l^2}{\delta_m^2} \delta_M^2 + 2nM_{\mathcal{P}}\delta^2. \quad (2.41)$$

■

**Remarque 2.3.13** *D'après l'expression de  $C$  obtenue dans (2.41), la dépendance en  $\delta_m$  fait apparaître  $\lim_{\delta_m \rightarrow 0} C = \infty$ . Ceci est cohérent avec le fait que le nombre  $N$  de sous-faces peut tendre vers l'infini lorsque la taille du maillage ( $h$ ) tend vers 0.*

L'hypothèse 2.3.11 permet alors d'établir un corollaire de la proposition 2.3.6 précisant la dépendance de la constante  $C$  dans le corollaire 2.3.7, dans le cas d'une fonction  $u \in C^1(0, T, H_{tan}^1)$ .

**Proposition 2.3.14** *Soient  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deux domaines bornés d'intersection vide,  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  deux surfaces admissibles au sens de la définition 1.2.6. Soient  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  deux surfaces de Huygens délimitant des volumes donnés pour les régularisation respectives  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  et telles que*

$$\forall i, \emptyset \subsetneq V(\mathcal{H}_i) \subsetneq V(\mathcal{P}_i) \subsetneq \mathcal{D}_i \text{ et } \mathcal{P}^i \cap V(\mathcal{H}^i) = \emptyset.$$

*Si de plus la surface  $\mathcal{P}_2$  admet un découpage en sous-faces vérifiant l'hypothèse de 2.3.11 pour des grandeurs caractéristiques maximales  $\delta_M \leq \underline{d} = \text{dist}(\mathcal{H}^1, \mathcal{P}^2)$ , alors il existe une constante  $C > 0$  ne dépendante que de  $\mathcal{P}^2$  et de la régularisation  $\varphi_1$ , ainsi qu'un polynôme  $Q \in \mathbb{N}[X]$  tels que, pour toute fonction  $u$  vérifiant  $B_2^{\mathcal{P}} u \in \cup_i C^2(0, T - \underline{d}, L^2(\mathcal{P}_i^2))$  et  $\partial_t^m B_2^{\mathcal{P}} u(t \leq 0) = 0 \forall m \in \{0, 1\}$ , les inégalités suivantes aient lieu*

$$\int_0^T \left\| \partial_t [\widetilde{G*}] B^{\mathcal{P}} u(t, X) \right\|_{L^2(V(\mathcal{H}^1))}^2 dt \leq C \left[ 1 + \frac{\delta^2}{\underline{d}^2} \right] Q \left( \frac{T}{\underline{d}} \right) \int_0^{T-\underline{d}} \|B_2^{\mathcal{P}} \partial_t^2 u(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{P}_j^2)}^2 ds, \quad (2.42)$$

et

$$\int_0^T \left\| [\widetilde{G*}] B^{\mathcal{P}} u(t, X) \right\|_{H_{loc}^1(V(\mathcal{H}^1))}^2 dt \leq C \left[ 1 + \frac{\delta^2}{\underline{d}^2} \right] Q \left( \frac{T}{\underline{d}} \right) \int_0^{T-\underline{d}} \|B_2^{\mathcal{P}} \partial_t^2 u(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{P}_j^2)}^2 ds, \quad (2.43)$$

**Preuve.** Dans un premier temps nous allons montrer la relation (2.42). La proposition 2.3.6 donne déjà une majoration par  $C' \|u\|_{C^1(0, T, H_{tan}^1(V(\mathcal{P}^2)))}$ . Le point délicat est alors de montrer la dépendance en  $1 + \delta^2/d^2$  de la constante  $C'$ . Pour celà, on commence par décomposer  $[\widetilde{G*}]$  en une somme de trois termes comme effectué pour la démonstration dur proposition 2.3.6, sous la forme

$$[\widetilde{G*}] B_2^{\mathcal{P}} v(s, X) = \sum_j \int_{\mathcal{P}_j^2} [A_j(s - |X - Y|, Y) + B_j(s - |X - Y|, Y) + C_j(s - |X - Y|, Y)] dY,$$

$A_j$  contenant les termes en  $\partial_t$  sur la sous-face  $\mathcal{P}_j^2$  de  $\mathcal{P}^2$ ,  $C_j$  ceux en  $\int_t$ , et  $B_j$  les autres. Ceci permet alors d'obtenir, en notant  $d = |X - Y|$  et en posant  $v = \partial_t u$

$$\begin{aligned} & \left\| [\widetilde{B}_1^{\mathcal{H}^1}] [\widetilde{G*}] B_2^{\mathcal{P}} v(s, \cdot) \right\|_{L^2(V(\mathcal{H}^1))}^2 \\ &= \int_{V(\mathcal{H}^1)} \left| \sum_{j=1}^N \int_{\mathcal{P}_j^2} [A_j(s - d, Y) + B_j(s - d, Y) + C_j(s - d, Y)] dY \right|^2 dX \\ &\leq 6C \sum_{X \in V(\mathcal{H}^1)} \sum_j N |\mathcal{P}_j^2| \left[ \int_{\mathcal{P}_j^2} |A_j(s - d, Y)|^2 dY + \int_{\mathcal{P}_j^2} |B_j(s - d, Y)|^2 dY \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathcal{P}_j^2} |C_j(s - d, Y)|^2 dY \right], \end{aligned} \quad (2.44)$$

le terme  $C \sum_{X \in V(\mathcal{H}^1)}$  correspond au caractère constant par morceaux de  $[\widetilde{B}_1^{\mathcal{H}^1}]$ , ainsi que la continuité de la fonction de régularisation sur  $\mathcal{H}^1$ . Les termes  $A_j$ ,  $B_j$  et  $C_j$  sont évalués en ces points de références  $X \in V(\mathcal{H}^1)$ . Alors pour tout  $Y \in \mathcal{P}^2$  et pour tout  $X \in V(\mathcal{H}^1)$  la distance  $d = |X - Y|$  vérifie  $d \geq \underline{d} > 0$ .

Chaque  $\mathcal{P}_j^2$  vérifiant, par l'hypothèse 2.3.11,  $|\mathcal{P}_j^2| \leq M\delta^2$ , et que de plus  $\delta \leq \underline{d}$ , on en déduit par le lemme 2.3.12 qu'il existe une constante  $C(\mathcal{P}^2) \geq 0$  telle que

$$\forall j, N|\mathcal{P}_j^2| \leq C(\mathcal{P}^2)(\underline{d}^2 + \delta^2).$$

Il reste alors à évaluer successivement les termes en  $A_j$ ,  $B_j$  et  $C_j$ .

1.  $A_j$  est composé d'une somme d'opérateurs linéaires :

$$A_j(s-d, Y) = \frac{1}{4\pi d} \left\{ \mathbf{t}_j \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{t}_j \times \mathbf{t}_j \times \mathbb{I}_6 \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_j \times \partial_t H \\ -(\mathbf{n}_j \times \partial_t E) \end{pmatrix} (s-d, Y).$$

Les vecteurs  $\mathbf{t}_j$  étant normés, il existe donc une constante  $C > 0$  ne dépendant pas de la géométrie de  $\mathcal{P}^2$  (prendre par exemple  $C \geq 1/\pi$ ) telle que

$$\int_{\mathcal{P}_j^2} |A_j(s-d, Y)|^2 dY \leq \left( \frac{C}{\underline{d}} \right)^2 \int_{\mathcal{P}_j^2} |B_2^{\mathcal{P}} \partial_t v(s-d, \cdot)|^2,$$

d'où

$$\int_0^T \int_{\mathcal{P}_j^2} |A_j(s-d, Y)|^2 dY ds \leq \left( \frac{C}{\underline{d}} \right)^2 \int_0^{T-\underline{d}} \|B_2^{\mathcal{P}} \partial_t v(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{P}_j^2)}^2 ds. \quad (2.45)$$

2. De même,  $B_j(s-d, Y) =$

$$\frac{1}{4\pi d^2} \left\{ \mathbf{t}_j \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} + 3\mathbf{t}_j \times \mathbf{t}_j \times \mathbb{I}_6 - 2\mathbf{n}_j \times \mathbf{n}_j \times \mathbb{I}_6 \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_j \times H \\ -(\mathbf{n}_j \times E) \end{pmatrix} (s-d, Y),$$

donc il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}_j^2} |B_j(s-d, Y)|^2 dY &\leq \left( \frac{C}{\underline{d}^2} \right)^2 \int_{\mathcal{P}_j^2} |B_2^{\mathcal{P}} v(s-d, Y)|^2 dY \\ &= \left( \frac{C}{\underline{d}^2} \right)^2 \int_{\mathcal{P}_j^2} \left| \int_0^{s-d} B_2^{\mathcal{P}} \partial_t v(s', Y) ds' + B_2^{\mathcal{P}} v(0, Y) \right|^2 dY. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de causalité sur  $u$  et une majoration de type Cauchy-Schwartz sur le temps, il vient alors

$$\int_0^T \int_{\mathcal{P}_j^2} |B_j(s-d, Y)|^2 dY ds \leq \frac{C}{\underline{d}^4} (T-\underline{d})^2 \int_0^{T-\underline{d}} \|B_2^{\mathcal{P}} \partial_t v(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{P}_j^2)}^2 ds. \quad (2.46)$$

3. Enfin  $C_j(s-d, Y) =$

$$\frac{1}{4\pi d_i^3} \int_0^{t_0-d_i} \{3\mathbf{t}_i^0 \times \mathbf{t}_i^0 \times \mathbb{I}_6 - 2\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}_6\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times H \\ -(\mathbf{n}_i \times E) \end{pmatrix} (s, \cdot) ds$$

En procédant sur  $C_j$  comme précédemment pour (2.46), on trouve avec l'hypothèse de causalité

$$\int_0^T \int_{\mathcal{P}_j^2} |C_j(s-d, Y)|^2 dY ds \leq \frac{C}{\underline{d}^6} (T-\underline{d})^4 \int_0^{T-\underline{d}} \|B_2^{\mathcal{P}} \partial_t v(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{P}_j^2)}^2 ds. \quad (2.47)$$

En reportant les résultats des trois parties (2.45), (2.46) et (2.47) dans l'équation (2.44), on obtient finalement

$$\left\| \widetilde{[B_1^{\mathcal{H}}][G^*]B_2^{\mathcal{P}}} v(s, \cdot) \right\|_{L^2(V(\mathcal{H}_1))}^2 \leq C \left[ 1 + \frac{\delta^2}{\underline{d}^2} \right] R \left( \frac{T}{\underline{d}} \right) \int_0^{T-\underline{d}} \|B_2^{\mathcal{P}} \partial_t v(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{P}_j^2)}^2 ds,$$

où  $R$  est le polynôme à coefficients entiers donné par

$$R(m) = 1 + (m+1)^2 + (m+1)^4,$$

ce qui établi finalement la majoration (2.42).

Pour démontrer (2.43) nous allons procéder de la même manière. Compte tenu du caractère constant par morceaux de  $\widetilde{[B_1^{\mathcal{H}}]}$ , pour majorer la norme  $H_{loc}^1(V(\mathcal{H}_1))$  il suffit alors d'évaluer la norme  $L^2$  des termes en  $\partial_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ), dérivations spatiales, de  $\widetilde{[B_1^{\mathcal{H}}][G^*]B_2^{\mathcal{P}}} u$  autour des points de référence  $X \in V(\mathcal{H}_1)$ . On procède alors, via un raisonnement similaire à celui de l'établissement de (2.42) en découpant en trois quantités  $A'_j$ ,  $B'_j$  et  $C'_j$ . La dérivée  $\partial_m$  ( $\widetilde{[B_1^{\mathcal{H}}][G^*]B_2^{\mathcal{P}}} u$ ) fait alors intervenir deux type de termes dans les quantités  $A'_j$ ,  $B'_j$  et  $C'_j$  :

- les termes de dérivations spatiales des quantités géométriques (vecteurs  $\mathbf{t}_i$  et distance  $d_i$ ) présents sous les intégrations spatiales de  $\widetilde{[G^*]B_2^{\mathcal{P}}}$ , notés respectivement  $A_j^1$ ,  $B_j^1$  et  $C_j^1$ ,
- et les termes de dérivations spatiales de la partie en  $u$  dans  $\widetilde{[G^*]B_2^{\mathcal{P}}} u$ , respectivement  $A_j^2$ ,  $B_j^2$  et  $C_j^2$ .

Ces deux types de termes sont alors traités successivement.

1. Tout d'abord on a naturellement

$$\partial_m \left( \frac{1}{d^k} \mathbf{t}_j \right) = \partial_m \left( \frac{1}{d^{k+1}} \overrightarrow{Y_j X} \right) = -(k+1) \frac{\overrightarrow{Y_j X} \cdot \mathbf{e}_m}{d^{k+2}} \overrightarrow{Y_j X} + \frac{1}{d^{k+1}} \mathbf{e}_m,$$

$\mathbf{e}_m$  représentant le  $m^{ieme}$  vecteur unitaire de base,  $Y_j$  étant le point de référence pour le calcul de la formule intégrale approchée sur  $\mathcal{P}_j^2$ , et donc  $d\mathbf{t}_j = \overrightarrow{Y_j X}$ .

Les dérivations des vecteurs de bases unitaires  $\mathbf{t}_j$ , ou de la distance  $d$  augmentent les majorations des coefficients de  $A_j^1$ ,  $B_j^1$  et  $C_j^1$  de  $1/d^2$  par rapport aux calculs effectués respectivement avec  $A_j$ ,  $B_j$  et  $C_j$  en prenant ici  $v = u$ . Par intégrations par parties en temps et majorations en norme, on augmente alors l'ordre de dérivation en temps de  $B^{\mathcal{P}} \partial_t u$ , puis on utilise le caractère causal de  $u$ . Il vient ainsi

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\mathcal{P}_j^2} |A_j^1|^2 \leq \frac{C}{\underline{d}^4} (T - \underline{d})^2 \int_0^{T-\underline{d}} \int_{\mathcal{P}_j^2} |B_2^{\mathcal{P}} \partial_t v(s - d, \cdot)|^2 ds, \\ \int_0^T \int_{\mathcal{P}_j^2} |B_j^1|^2 \leq \frac{C}{\underline{d}^6} (T - \underline{d})^4 \int_0^{T-\underline{d}} \int_{\mathcal{P}_j^2} |B_2^{\mathcal{P}} \partial_t v(s - d, \cdot)|^4 ds, \\ \int_0^T \int_{\mathcal{P}_j^2} |C_j^1|^2 \leq \frac{C}{\underline{d}^8} (T - \underline{d})^6 \int_0^{T-\underline{d}} \int_{\mathcal{P}_j^2} |B_2^{\mathcal{P}} \partial_t v(s - d, \cdot)|^2 ds. \end{cases} \quad (2.48)$$

2. Les termes de dérivation spatiale de  $u(t - d, \cdot)$  dans  $\widetilde{[G^*]B_{i^*}^{\mathcal{P}}} u$  :

$$\partial_m u(t - d, \cdot) = (\partial_m d) \partial_t u(t - d, \cdot),$$

où  $\partial_m d \in [-1, 1]$ . Il est alors possible de reprendre les calculs de  $A_j$ ,  $B_j$  et  $C_j$  en prenant ici  $v = (\partial_m d) \partial_t u$ , et on en déduit alors directement les majorations de  $A_j'^2$ ,  $B_j'^2$  et  $C_j'^2$

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\mathcal{P}_j^2} |A_j'^2|^2 \leq \frac{C}{\underline{d}^2} \int_0^{T-\underline{d}} \int_{\mathcal{P}_j^2} |B_2^{\mathcal{P}} \partial_t v(s-d, \cdot)|^2 ds, \\ \int_0^T \int_{\mathcal{P}_j^2} |B_j'^2|^2 \leq \frac{C}{\underline{d}^4} (T-\underline{d})^2 \int_0^{T-\underline{d}} \int_{\mathcal{P}_j^2} |B_2^{\mathcal{P}} \partial_t v(s-d, \cdot)|^4 ds, \\ \int_0^T \int_{\mathcal{P}_j^2} |C_j'^2|^2 \leq \frac{C}{\underline{d}^6} (T-\underline{d})^4 \int_0^{T-\underline{d}} \int_{\mathcal{P}_j^2} |B_2^{\mathcal{P}} \partial_t v(s-d, \cdot)|^2 ds. \end{cases} \quad (2.49)$$

Par sommation de (2.48) et (2.49), et après avoir reporté dans (2.44), on en déduit alors

$$\left\| \partial_m [\widetilde{B_1^{\mathcal{H}}}] [\widetilde{G^*}] B_2^{\mathcal{P}} u(s, \cdot) \right\|_{L^2(V(\mathcal{H}^1))}^2 \leq C \left[ 1 + \frac{\delta^2}{\underline{d}^2} \right] Q \left( \frac{T}{\underline{d}} \right) \int_0^{T-\underline{d}} \|B_2^{\mathcal{P}} \partial_t v(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{P}_j^2)}^2 ds,$$

où  $Q$  est un polynôme à coefficients entiers donné par

$$Q(m) = 2 + 2(m+1)^2 + 2(m+1)^4 + (m+1)^6 \quad (\geq R(m)),$$

ce qui montre alors (2.43). ■

On peut alors énoncer l'expression de la stabilité pour le système (2.13) suivant

**Théorème 2.3.15** *Soit  $T > 0$ . On désigne par  $N_T$  la partie entière de  $T/\underline{d}$ ,  $\underline{d}$  étant la distance minimale entre  $\mathcal{H}^i$  et  $\mathcal{P}^j$  pour tout  $i \neq j$ .*

*On suppose que*

- l'hypothèse 2.1.4 est vérifiée,
- les surfaces de prélèvements  $(\mathcal{P}^i)_i$  sont admissibles au sens de la définition 1.2.6 et vérifient l'hypothèse 2.3.11,
- il existe  $T' \in ]0, T]$  tel que les termes sources  $u^{src}$  et  $\sum_i B_i^{\mathcal{H}} u^{inc}$  vérifient

$$\forall 0 \leq j \leq 2N_T + N, \begin{cases} \partial_t^j u^{src} \in L^1 \left( 0, T, H_{tan}^{2N_T + N - j}(\mathbb{R}^3) \right) \cap L^1 \left( 0, T', H^{2N_T + N - j}(\mathbb{R}^3) \right), \\ \forall i, \partial_t^j B_i^{\mathcal{H}} u^{inc} \in L^1 \left( 0, T, H_{tan}^{2N_T + N - j}(\mathcal{D}^i) \right) \cap L^1 \left( 0, T', H^{2N_T + N - j}(\mathcal{D}^i) \right), \end{cases}$$

*Alors il existe une constante  $C$  positive ne dépendant que des surfaces de prélèvement  $(\mathcal{P}^i)_i$  et de la régularisation  $\varphi$  des surfaces de Huygens  $(\mathcal{H}^i)_i$ , et un polynôme  $Q \in \mathbb{N}[X]$ , tels que les solutions  $(u_i)_i$  de (2.13) obéissent à la majoration suivante*

$$\begin{aligned} \forall i, \forall t \in [0, T], \Phi_1(u_i)(t) \leq C \left( \sum_{k=0}^{N_T} \left[ \Pi_{m=N_T-k}^{N_i} A_m \right] \left( \sup_{t \in [0, (k+1)\underline{d}]} \Phi_1 \left( \partial_t^{2(N_T-k)} u^{inc} \right) (t) \right. \right. \\ \left. \left. + \sup_{t \in [0, (k+1)\underline{d}]} \Phi_1 \left( \partial_t^{2(N_T-k)} u^{src} \right) (t) \right) \right), \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\text{où } A_k = \underline{d} C Q(k) \sqrt{k+1} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\underline{d}^2}}.$$

**Preuve.** Tout d'abord, comme pour la démonstration du théorème 2.3.8, afin de pouvoir appliquer les théorèmes de régularité sur les systèmes de Friedrich, nous allons restreindre le domaine spatial. De la même manière que dans la preuve du théorème 2.3.8, il est possible de définir une boule  $B_R$  de rayon  $R > 0$  assez grand tel que  $\forall i, V(\mathcal{P}_i) \subset B_R$ , et  $\forall i, \forall t \in [0, T], u_i|_{\delta B_R}(t, \cdot) = 0$ . On adjoint alors au système (2.13) des conditions aux limites admissibles au sens de Rauch sur la frontière  $\delta B_R$  de  $B_R$  :

$$\forall i, \forall t \in [0, T], \sum_l \mathbb{A}_l \mathbf{n}_l u_i|_{\delta B_R}(t, \cdot) = 0.$$

Le nouveau problème obtenu par cette restriction est alors identique au système (2.13) sur  $([0, T] \times B_R)^n$ , et même sur  $([0, T] \times \mathbb{R}^3)^n$  en utilisant un prolongement par 0.

Pour démontrer (2.50), on commence par découper le problème (2.13) en plusieurs sous problèmes, notés  $(P_i^k)$ , chacun étant défini sur une fenêtre temporelle  $I_k = [k\underline{d}, (k+1)\underline{d}]$  (pour  $k \in \{0, \dots, N_T\}$ ) sous la forme

$$(P_i^k) : \begin{cases} \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_i \right) u_i^k \\ = u^{src} Y_{\mathcal{D}^i} + B_i^{\mathcal{H}} u^{inc} + [\widetilde{B}_i^{\mathcal{H}}] \left( \sum_{i^*} [\widetilde{G}^*] B_{i^*}^{\mathcal{P}} U_{i^*}^{k-1} \right), \forall (t, x) \in I_k \times B_R, \\ \sum_l \mathbb{A}_l \mathbf{n}_l u_i^k|_{\delta B_R}(t, \cdot) = 0, \forall (t, x) \in I_k \times \delta B_R \\ u_i^k(t = k\underline{d}) = U_i^{k-1}(t = k\underline{d}), \forall x \in B_R, \end{cases}$$

où, comme dans la démonstration du théorème 2.3.8,  $u_i^k$  représente la restriction de la solution  $u_i$  de (2.13) à  $t \in I_k$ ; et où  $U_{i^*}^k(t, x) = \sum_{m=0}^k u_{i^*}^m(t, x) \chi_{I_m}(t)$ , pour  $k \geq 1$ .

Pour  $k = 0$ , le premier système est donné par

$$(P_i^0) : \begin{cases} \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_i \right) u_i^0 = u^{src} Y_{\mathcal{D}^i} + B_i^{\mathcal{H}} u^{inc}, (t, x) \in I_0 \times \mathbb{R}^3, \\ \sum_l \mathbb{A}_l \mathbf{n}_l u_i^0|_{\delta B_R}(t, \cdot) = 0, \forall (t, x) \in I_0 \times \delta B_R \\ u_i^0(t = 0) = 0, x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

La démonstration de (2.50) s'effectue par une récurrence sur  $k$ . Pour cela on procède en trois étapes clés : l'établissement des premières relations pour  $k = N_T$ , puis pour  $1 \leq k \leq N_T - 1$ , et enfin pour  $k = 0$ .

1.  $k = N_T$ . Soit  $t \in I_{N_T}$ . Par le théorème 2.3.4 et la relation (2.35), il vient la majoration suivante

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I_{N_T}} \Phi_1(u_i^{N_T})(t) &\leq C \left( \Phi_1(u_i^{N_T})(N_T \underline{d}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^1 \left\| \partial_t^j \left\{ B_i^{\mathcal{H}} u^{inc} + u^{src} Y_{\mathcal{D}^i} + [\widetilde{B}_i^{\mathcal{H}}] \left( \sum_{i^*} [\widetilde{G}^*] B_{i^*}^{\mathcal{P}} U_{i^*}^{N_T-1} \right) \right\} \right\|_{L^1([N_T \underline{d}, T], H_{tan}^{1-j}(\mathbb{R}^3))} \right) \\ &\leq C \left( \Phi_1(u_i^{N_T})(N_T \underline{d}) + \int_{N_T \underline{d}}^T [\Phi_1(u^{inc})(s) + \Phi_1(u^{src})(s)] ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^1 \left\| \partial_t^j \left\{ [\widetilde{B}_i^{\mathcal{H}}] \left( \sum_{i^*} [\widetilde{G}^*] B_{i^*}^{\mathcal{P}} U_{i^*}^{N_T-1} \right) \right\} \right\|_{L^1([N_T \underline{d}, T], H_{tan}^{1-j}(\mathbb{R}^3))} \right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

D'après le théorème 2.3.8 la fonction  $U_{i_*}^{N_T-1}$  a la régularité nécessaire pour utiliser la proposition 2.3.14, et vérifie de plus  $\partial_t^m U_{i_*}^{N_T-1}(t \leq 0) = 0$  pour  $m \in \{0, 1\}$ , on peut alors majorer le terme en  $j = 0$  de la somme précédente, grâce à (2.43), par

$$\leq CQ \left( \frac{T}{\underline{d}} \right) \sqrt{\underline{d}} \sqrt{\frac{T}{\underline{d}} - N_T} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\underline{d}^2} \sqrt{\int_0^T \left\| B_{i_*}^{\mathcal{P}} \partial_t^2 U_{i_*}^{N_T-1}(t) \right\|_{L^2(\mathcal{P}^{i_*})}^2 ds}},$$

soit encore en passant au *sup* en  $t$  sous l'intégrale et en majorant la norme de la trace sur  $\mathcal{P}^{i_*}$  par la norme  $H_{tan}^1$

$$\leq C\underline{d}Q \left( \frac{T}{\underline{d}} \right) \sqrt{\frac{T}{\underline{d}} - N_T} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\underline{d}^2} \sqrt{\frac{T}{\underline{d}} \sup_{t \in [0, T]} \Phi_1 \left( \partial_t^2 U_{i_*}^{N_T-1} \right) (t)}}.$$

En utilisant (2.42) il vient la même majoration pour le terme en  $j = 0$  de (2.51). On en déduit finalement

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I_{N_T}} \Phi_1(u_i^{N_T})(t) &\leq C \left( \Phi_1(u_i^{N_T})(N_T \underline{d}) + \int_{N_T \underline{d}}^T [\Phi_1(u^{inc})(s) + \Phi_1(u^{src})(s)] ds \right. \\ &\quad \left. \underline{d}Q \left( \frac{T}{\underline{d}} \right) \sqrt{\frac{T}{\underline{d}} - N_T} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\underline{d}^2} \sqrt{\frac{T}{\underline{d}} \sup_{t \in [0, T]} \Phi_1 \left( \partial_t^2 U_{i_*}^{N_T-1} \right) (t)}} \right), \end{aligned} \quad (2.52)$$

en remarquant que l'on en a en plus la majoration

$$\sqrt{\frac{T}{\underline{d}} - N_T} \sqrt{\frac{T}{\underline{d}}} \leq \sqrt{\frac{(N_T + 1)\underline{d}}{\underline{d}} - N_T} \sqrt{\frac{(N_T + 1)\underline{d}}{\underline{d}}} = \sqrt{N_T + 1}.$$

2.  $1 \leq k \leq N_T - 1$ . Soit  $t \in I_k$ . D'après (2.52) il suffit de majorer les dérivées en temps de  $u_i^k$ , de plus en itérant la construction de (2.52) on voit qu'il faut majorer  $\partial_t^j u_i^k$  pour  $j = 0, \dots, 2(N_T - k)$ . Or, d'après le théorème 2.3.8 la solution  $u_i^k$  de  $(P_i^k)$  existe et est unique; de plus elle est de classe au moins  $C^{2(N_T - k) + 1}$  en temps. Donc en utilisant l'unicité de la solution ainsi que sa régularité on peut alors affirmer que la fonction  $v_i^{(k, j)} = \partial_t^j u_i^k$  est l'unique solution (de classe  $C^2(I_k, H_{tan}^1(B_R))$ ) du problème obtenu par  $j$  dérivations en temps de  $(P_i^k)$ . En remarquant que  $\partial_t^j \left( [\widetilde{G*}] B_{i_*}^{\mathcal{P}} U_{i_*}^{k-1} \right) = [\widetilde{G*}] B_{i_*}^{\mathcal{P}} \partial_t^j U_{i_*}^{k-1}$  et en notant  $V_{i_*}^{(k, j)}(t, x) = \sum_{m=0}^k \partial_t^m u_{i_*}^m(t, x) \chi_{I_m}(t)$ , on se ramène alors à résoudre le système

$$(P_i^{(k, j)}) : \begin{cases} \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_i \right) v_i^{(k, j)} = \partial_t^j u^{src} Y_{\mathcal{D}^i} + B_i^{\mathcal{H}} \partial_t^j u^{inc} \\ \quad + [\widetilde{B}_i^{\mathcal{H}}] \left( \sum_{i_*} [\widetilde{G*}] B_{i_*}^{\mathcal{P}} V_{i_*}^{(k-1, j)} \right), \forall (t, x) \in I_k \times B_R, \\ \sum_l \mathbb{A}_l \mathbf{n}_l v_i^{(k, j)} \Big|_{\delta B_R}(t, x) = 0, \forall (t, x) \in I_k \times \delta B_R \\ v_i^{(k, j)}(t = k\underline{d}, x) = V_{i_*}^{(k-1, j)}(t = k\underline{d}, x), \forall x \in B_R, \end{cases}$$

Comme  $(P_i^{(k, j)})$  est mis sous la même forme que  $(P_i^{N_T})$ , en répétant le procédé de majoration dans le cas  $k = N_T$  sur le problème  $(P_i^{(k, j)})$ , on en déduit pour tout  $j = 0, \dots, 2(N_T - k)$ ,

une majoration similaire à (2.52)

$$\sup_{t \in I_k} \Phi_1(v_i^{(k,j)})(t) \leq C \left( \Phi_1(v_i^{(k,j)})(k\underline{d}) + \int_{k\underline{d}}^{(k+1)\underline{d}} \left[ \Phi_1(\partial_t^j u^{inc})(s) + \Phi_1(\partial_t^j u^{src})(s) \right] ds \right. \\ \left. \underline{d} Q \left( \frac{k\underline{d}}{\underline{d}} \right) \sqrt{\frac{(k+1)\underline{d}}{\underline{d}}} - k \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\underline{d}^2}} \sqrt{\frac{(k+1)\underline{d}}{\underline{d}}} \sup_{t \in [0, (k+1)\underline{d}]} \Phi_1(\partial_t^2 V_{i^*}^{(k-1,j)})(t) \right),$$

soit finalement pour tout  $j = 0, \dots, 2(N_T - k)$

$$\sup_{t \in I_k} \Phi_1(\partial_t^j u_i^k)(t) \leq C \left( \Phi_1(\partial_t^j u_i^k)(k\underline{d}) + \int_{k\underline{d}}^{(k+1)\underline{d}} \left[ \Phi_1(\partial_t^j u^{inc})(s) + \Phi_1(\partial_t^j u^{src})(s) \right] ds \right. \\ \left. \underline{d} Q(k) \sqrt{k+1} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\underline{d}^2}} \sup_{t \in [0, (k+1)\underline{d}]} \Phi_1(\partial_t^{j+2} U_{i^*}^{k-1})(t) \right). \quad (2.53)$$

3. Enfin  $k = 0$ . Sur  $I_0$ , comme précédemment on se ramène à la résolution pour  $j = 0, \dots, 2N_T$  des problèmes

$$(P_i^{(0,j)}) : \begin{cases} \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_i \right) v_i^{(0,j)} = \partial_t^j u^{src} Y_{\mathcal{D}^i} + B_i^{\mathcal{H}} \partial_t^j u^{inc}, \forall (t, x) \in I_0 \times B_R, \\ \sum_l \mathbb{A}_l \mathbf{n}_l v_i^{(0,j)} \Big|_{\delta B_R}(t, x) = 0, \forall (t, x) \in I_0 \times \delta B_R \\ v_i^{(0,j)}(t = 0, x) = 0, \forall x \in B_R, \end{cases}$$

Le théorème 2.3.4 donne alors la majoration pour tout  $j = 0, \dots, 2N_T$

$$\sup_{t \in I_0} \Phi_{\mathbb{R}^3}^1(\partial_t^j u_i^0)(t) \leq \left\| B_i^{\mathcal{H}} \partial_t^j u^{inc} \right\|_{L^1(I_n, H_{tan}^1(\mathbb{R}^3))} + \left\| B_i^{\mathcal{H}} \partial_t^{j+1} u^{inc} \right\|_{L^1(I_n, L^2(\mathbb{R}^3))}. \quad (2.54)$$

La majoration (2.50) s'obtient alors finalement en reportant les inégalités (2.53) et (2.54) dans (2.52), et en utilisant à chaque fois la relation

$$v_i^{(k,j)}(k\underline{d}) := \partial_t^j u_i^k(k\underline{d}) = \partial_t^j u_i^{k-1}(k\underline{d}) =: v_i^{(k-1,j)}(k\underline{d}), \quad \forall k = 0..N_T, \forall j = 0, \dots, 2(N_T - k),$$

car la solution globale ainsi que toutes ses dérivées en temps jusqu'à l'ordre  $2N_T$  sont continues par le théorème 2.3.8. ■

**Remarque 2.3.16** *D'après la majoration (2.50), d'un point de vue numérique, la méthode multi-domaines ne rajoute pas de condition supplémentaire de type CFL au(x) schéma(s) utilisé(s). Il sera alors possible, comme présenter dans la suite de considérer des schémas différents sur les domaines de calculs  $\mathcal{D}^i$  pouvant utiliser des pas de temps eux-aussi différents. Ce point sera utilisé dans le chapitre 3 pour la mise en œuvre d'une telle stratégie de pas de temps locaux inter-domaines. Sur des exemples numériques, nous pourrons alors vérifier que le choix de pas de temps différents sur chaque volume de calcul n'est pas limitant et n'induit pas d'instabilité sur la résolution globale de (2.13).*



## Chapitre 3

# Etude numérique de la méthode

Cette partie présente la mise en oeuvre de la méthode de décomposition en sous-domaines disjoints établie au chapitre 2 ainsi que des exemples d'utilisations. L'objectif est de montrer l'efficacité de cette méthode ainsi qu'un cadre d'application intéressant en termes de gains de précision et de diminution des coûts (mémoire et temps calcul). Pour cela, nous allons dans un premier temps présenter une description algorithmique de la méthode puis étudier l'influence des différents paramètres (taille des regroupements, distance entre les sous-domaines) sur les performances et la précision des résultats obtenus.

Nous proposons en outre, d'autres exemples d'applications montrant l'intérêt de la démarche sur des cas plus réalistes, ainsi que des exemples d'utilisation comme méthode d'hybridation de schémas numériques (conforme et non-conforme).

Enfin, une stratégie de pas de temps locaux *inter-domaines* est présentée permettant ainsi de diminuer les contraintes sur les pas de temps liés aux conditions CFL sur chaque sous-domaine.

### 3.1 Description de la méthode et stratégie de parallélisation

Afin d'introduire la partie numérique de l'étude de la méthode, nous commençons par rappeler les principales étapes de la méthode multi-domaines telles qu'elles étaient données dans le chapitre 2 :

1. *l'antépolation* : désignant le calcul par la formule intégrale approchée (1.10) du rayonnement des découpages de la surface de prélèvement de chaque domaine vers les autres ;
2. *l'interpolation* : consistant à approximer par constantes sur un découpage de la surface d'injection la contribution des autres domaines afin de les introduire comme termes sources dans le volume de calcul.

Aucune de ses étapes ne porte sur la résolution des équations de Maxwell instationnaires. Le principe de la méthode de résolution en sous-domaines disjoints n'amène donc qu'à peu de modifications par rapport aux résolutions classiques . Une stratégie simple d'implémentation et de parallélisation de la méthode, utilisée pour l'ensemble des exemples proposés dans ce chapitre, consiste à assigner un processus par domaine de calcul  $\mathcal{D}^i$ . On peut alors détailler algorithmiquement les principales étapes introduite dans les schémas numériques, au niveau du pré-traitement et durant le calcul, de la manière suivante :

**Pré-traitement** : il consiste essentiellement à créer les regroupements sur les surfaces de Huygens et de prélèvement, et à transmettre aux autres domaines les points de références des surfaces de Huygens pour effectuer les calculs par la suite.

**Etape 1** : la première étape consiste à effectuer les regroupements sur les surfaces de Huygens afin d'obtenir les coordonnées des points de références pour le calcul des termes de couplage.

Pour ce faire, chaque surface de Huygens  $\mathcal{H}^i$  doit être regroupée en sous-faces  $(\mathcal{H}_j^i)_j$  de grandeur caractéristique  $\delta_j^i$  donnée par  $\delta_j^i \leq \varepsilon d_j^i$  où  $\varepsilon$  est la précision demandée sur la méthode multi-domaines, et  $d_j^i$  est la distance de  $\mathcal{H}_j^i$  aux surfaces de prélèvements des autres domaines. Afin de calculer de manière efficace et rapide la distance  $d_j^i$ , les faces constituant les surfaces de prélèvements sont transmises à tous les domaines sous forme de triplets points  $(A^1, A^2, A^4)$  décrivant un parallélogramme comme représenté sur la figure 3.1.

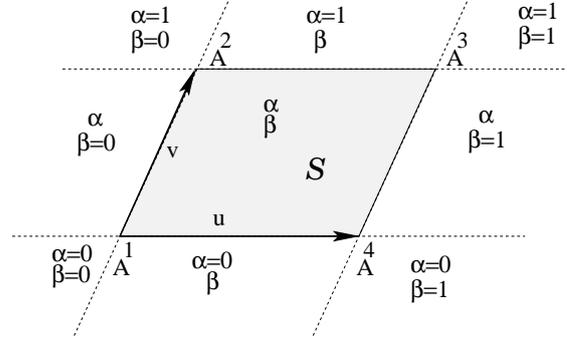


FIG. 3.1 – Calcul des distances aux surfaces de prélèvement

A partir des points fournis, la distance  $d$  d'un point  $X \in \mathcal{H}_j^i$  à une face ainsi décrite est donnée par

$$d = \sqrt{\left\| \tilde{X} - A^1 - \tilde{\alpha}\mathbf{u} - \tilde{\beta}\mathbf{v} \right\|^2 + \|\gamma\mathbf{n}\|^2},$$

où  $\mathbf{u} = \overrightarrow{A^1A^4}$ ,  $\mathbf{v} = \overrightarrow{A^1A^2}$ ,  $\mathbf{n} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^{-1} \mathbf{u} \times \mathbf{v}$  est la normale de la face,  $\tilde{X} = X - (X - A^1) \cdot \mathbf{n}$  est le projeté de  $X$  sur la face, et enfin  $\tilde{\alpha} = \min(\max(\alpha, 0), 1)$  et  $\tilde{\beta} = \min(\max(\beta, 0), 1)$  où le point  $X$  était repéré dans la base  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$  par les coordonnées  $(\alpha, \beta, \gamma) = (\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{u} \times \mathbf{v})^{-1} (X - A^1)$ . Comme illustré sur la figure 3.2, à partir d'un point choisi sur la face de Huygens considérée, tous les éléments voisins situés à une distance inférieure à  $\varepsilon d_j^i$  sont alors incorporés à  $\mathcal{H}_j^i$ , et ainsi de suite.

**Étape 2 :** à partir de la donnée des points de référence ainsi construits sur les surfaces de Huygens des autres domaines ainsi que des éventuelles coordonnées de points de sorties hors des volumes de calculs, on procède alors au regroupement des surfaces de prélèvement selon le même principe. Les sous faces  $(\mathcal{P}_j^i)_j$  d'une surface de prélèvement quelconque sont construites sur le même principe que pour l'étape 1 : de grandeur caractéristique  $\delta_j^i \leq \varepsilon d_j^i$  où  $d_j^i$  est maintenant simplement prise comme la distance d'un point  $X$  de  $\mathcal{P}_j^i$  à l'ensemble des points de sortie éventuels ainsi que des points de référence des surfaces de Huygens des autres domaines.

**Étape 3 :** calcul du retard minimum entre les domaines  $T_{sync}$ . Comme dans les démonstrations de stabilité du chapitre 2 nous allons introduire le principe de Huygens afin de rendre "indépendantes" les résolutions pour chaque domaine de calcul sur des plages de temps de la forme  $I_k = [k T_{sync}, (k + 1) T_{sync}]$ . Pour ce faire, il est nécessaire d'évaluer le temps maximum  $T_{sync}$  à ne pas dépasser afin de pouvoir effectuer les couplages d'une fenêtre de temps  $I_k$  vers  $I_{k+1}$ . Pour chaque domaine  $i$ , à partir des points de référence précédemment choisis  $X_j^i \in \mathcal{P}_j^i$  sur la surface de prélèvement  $\mathcal{P}^i$ , nous évaluons pour chaque  $X_j^i$  la distance  $d^{\mathcal{H}^{i*}}(X_j^i)$  de ce point aux points de regroupement des surfaces de Huygens des autres domaines, ainsi que la distance  $d^{points}(X_j^i)$  aux éventuels points de sortie hors des différents

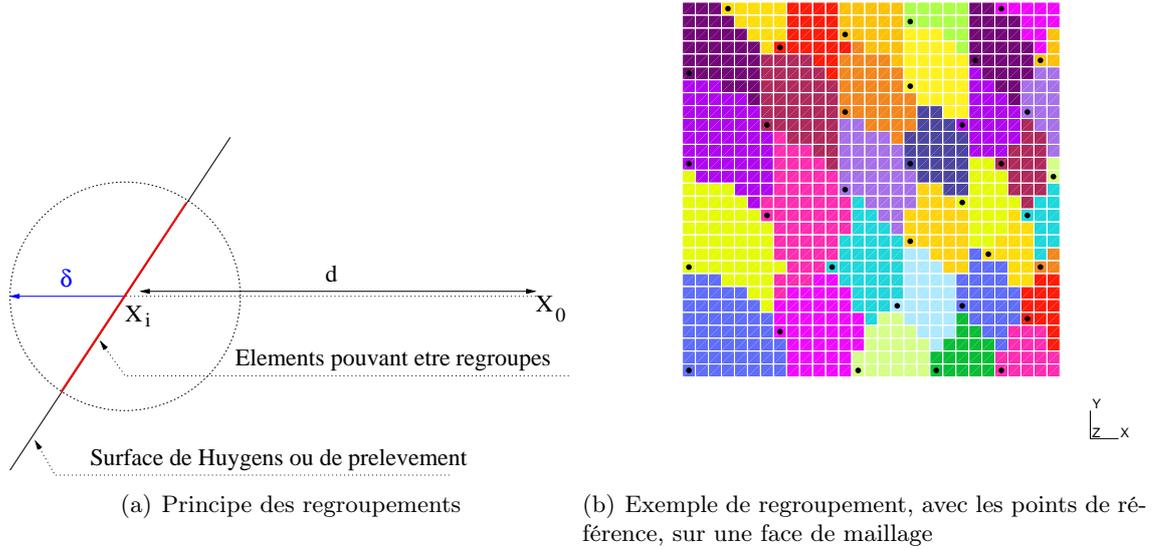


FIG. 3.2 – Regroupement sur les surfaces de prélèvement.

domaines. Le retard minimum est alors simplement obtenu par :

$$T_{sync} = \min_i T_{min}^i, \text{ avec } T_{min}^i = \min_{\mathcal{P}_j^i} \left( d^{\mathcal{H}^{i*}}(X_j^i), d^{points}(X_j^i) \right) / c,$$

$c$  étant la vitesse de la lumière dans le milieu considéré.

**Calcul et stratégie de parallélisation :** les étapes 1 à 3 étant accomplies, le reste de l'implémentation de la méthode réside alors dans le déroulement du calcul. Pour cela nous avons affecté un processus distinct à chaque domaine et utilisons un fractionnement de l'intervalle de calcul en fenêtres de longueur  $T_{sync}$ .

Comme illustré sur la figure 3.1, le fonctionnement sur une fenêtre de longueur  $T_{sync}$  peut être traité de manière totalement autonome. Pour chaque domaine  $\mathcal{D}^i$ , l'organisation du calcul en fonction de l'évolution du temps  $t$  est alors la suivante :

**Étape 4** ( $t \in [0, T_{sync}[$ ) : résolution du système de Maxwell par une méthode numérique choisie (par exemple différences finies ou volumes finis), et calcul (et stockage) par la formule intégrale approchée (1.10) du rayonnement de la surface de prélèvement  $\mathcal{P}^i$  aux points de référence des surfaces de Huygens des autres domaines ainsi qu'aux éventuels points de sortie situés hors des domaines de calculs.

L'étape 4 est répétée sur l'ensemble des itérations en temps de 0 à  $T_{sync}$ .

**Étape 5** ( $t = T_{sync}$ ) : échange entre les domaines des valeurs de champs  $E$  et  $H$  calculées pour  $t \in [0, T_{sync}[$  durant l'étape 4. Ces valeurs sont stockées et vont donc être introduites comme contributions pour  $t \geq T_{sync}$ .

**Étape 6** ( $t \in [T_{sync}, 2T_{sync}[$ ) : résolution du système d'équations de Maxwell. Les valeurs de  $E$  et  $H$  échangées précédemment, lors de l'étape 5, des domaines  $i^*$  vers le domaine  $i$  sont sommées en chaque point de référence des partitions  $\mathcal{H}_j^i$  de la surface de Huygens  $\mathcal{H}^i$  et introduites sous formes de courants  $\mathbf{n} \times H$  et  $-\mathbf{n} \times E$  sur l'ensemble des éléments de la partition  $\mathcal{H}_j^i$  correspondante. En même temps, les valeurs des champs  $E$  et  $H$  vers les points

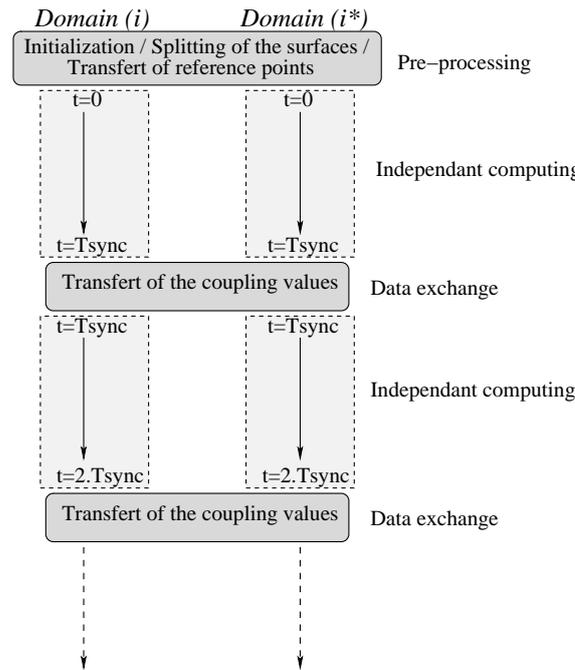


FIG. 3.3 – Déroulement en temps de la méthode multi-domaine et stratégie de parallélisation.

de référence des surfaces de Huygens des autres domaines, ainsi que vers les points de sortie hors des domaines, sont calculés par (1.10).

Les étapes 5 et 6 sont alors répétées sur l'ensemble du calcul, respectivement pour  $t = k T_{sync}$  et  $t \in [k T_{sync}, (k + 1) T_{sync}]$ .

**Remarque 3.1.1** Les étapes impliquant des échanges entre les différents domaines/processus de calcul (étape 5, et à l'intérieur des étapes 1 et 2) ne consistent qu'en des transferts de coordonnées de points (sommets des surfaces de Huygens et de prélèvement, points de regroupement sur les surfaces de Huygens des différents domaines) ou de valeurs de champs en des points  $(t, X)$  déterminés à l'avance. Le choix du type de méthode (conforme ou non-conforme) sur chacun de ces domaines n'influe donc pas sur les autres éléments. La méthode qui en résulte est alors naturellement hybride. Des exemples d'utilisations en tant que méthode hybride seront fournis dans les sections 3.3.2 et 3.4.

**Remarque 3.1.2** Outre le déroulement précédemment détaillé, les éléments de chaque domaine peut être traité de manière dissociée de l'ensemble des autres. Ceci permet de réutiliser les éléments de la scène dans des configurations différentes et il est alors intéressant d'introduire des traitements par repères locaux des différents domaines. Les communications s'effectuent alors après passage des différentes données (descriptions des surfaces de Huygens et de prélèvement, coordonnées des points de références des surfaces de Huygens, valeurs des champs  $E$  et  $H$  en ces points) dans un repère désigné comme global. Ces données seront alors converties dans le repère local utilisé sur chaque domaine pour l'ensemble du calcul.

## 3.2 Etude numérique de la méthode

Comme établi dans les chapitre 1 et 2, la précision de la méthode de résolution multi-domaines est donnée par la plus grande valeur autorisée au rapport  $\delta_i/d_i$ . Or, comme explicité précédem-

ment, ce rapport permettant d'effectuer les découpages en sous-faces des surfaces de Huygens et de prélèvement est *a priori* laissé libre. Il doit être choisi de sorte à garantir de ne pas introduire *a priori* plus d'erreur par l'approximation des termes de couplages dans le système (2.13) que l'erreur d'approximation numérique du (des) schéma(s) numérique(s) employé(s). Nous allons donc nous attacher à étudier l'influence des variations de ce paramètre sur les coûts des calculs (mémoire et temps calcul) et sur la précision du résultat obtenu. En outre, la quantité  $d$  du rapport  $\delta/d$  étant imposée par la géométrie du problème (écartement des différents objets et position des éventuels observatoires nécessitant un calcul par rayonnement). Nous allons aussi nous intéresser à son influence sur la résolution globale du problème, le principal objectif de la méthode multi-domaine étant de rendre quantitativement et qualitativement possible le traitement de scènes étendues (donc  $d$  arbitrairement grand).

### 3.2.1 Tests de regroupements

Dans une première étape, afin d'illustrer l'importance d'un choix judicieux de ces regroupements sur la précision et les performances de la méthode, on se propose de comparer les résultats obtenus en effectuant plusieurs tests successifs de regroupements sur un exemple assez simple.

Pour cela, considérons le cas test composé de deux boîtes métalliques, identiques à celle utilisée précédemment pour l'étude numérique de la formule de rayonnement au paragraphe 1.3, et placées en vis-à-vis comme représenté sur la figure 3.4. Pour les tests, la source utilisée est donnée par l'onde plane (1.53) précédemment employée. La résolution est effectuée comme dans la section 1.3 par différences finies (FDTD). Le maillage sera donc naturellement régulier avec des cellules de taille caractéristique  $\lambda/10$ .

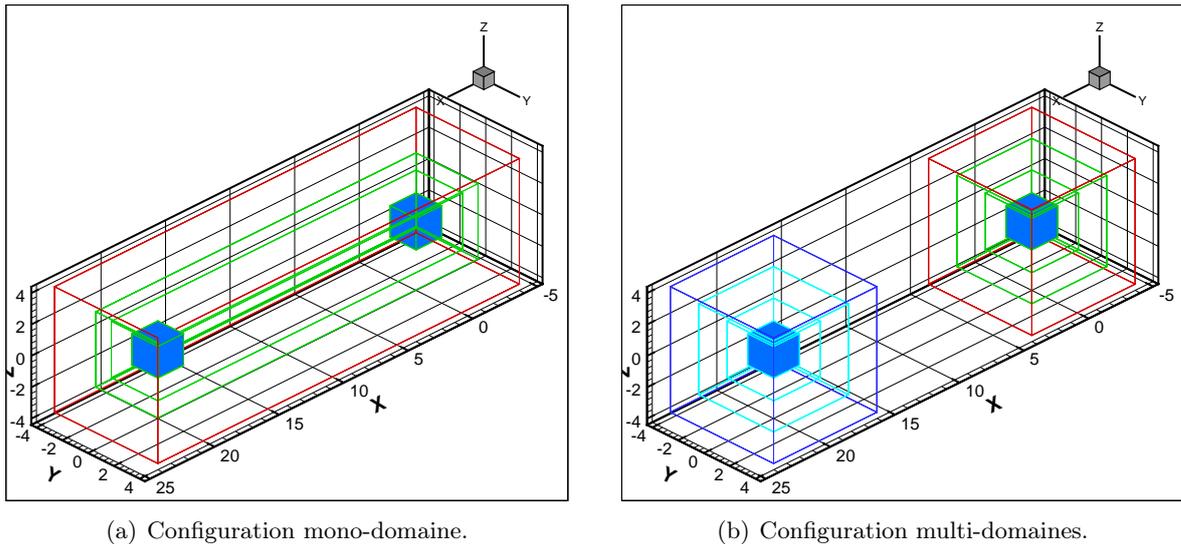


FIG. 3.4 – Domaines de calculs pour les cas mono-domaine et multi-domaines.

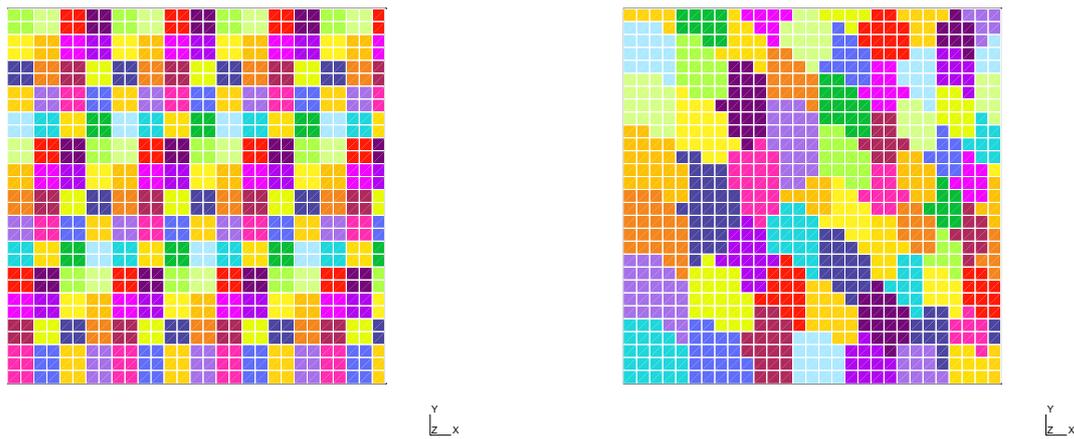
Comme il a été montré dans la construction de la formule de rayonnement (1.10) pour la phase d'antépolation, et dans (2.15) pour la phase d'interpolation, les éléments des surfaces de Huygens et de prélèvements sont supposés être de grandeur caractéristique inférieure à une valeur maximale de  $\delta_i$ , paramètre servant à décrire l'erreur introduite par le schéma. Pour une précision souhaitée  $\varepsilon > 0$  sur l'approximation des termes de couplage, nous allons comparer deux types de regroupements :

- des regroupements réguliers, où chaque sous-face  $\mathcal{F}_i$  des surfaces de Huygens et de prélève-

ments vérifie  $|\mathcal{F}_i| \leq \delta^2$ , avec  $\delta \leq \varepsilon d$  où  $d$  est la plus petite distance [surfaces de Huygens - surfaces de prélèvement] et [surface de prélèvement - observatoire];

- des regroupements proportionnels (c'est-à-dire optimisant le paramètre local  $\delta_i/d_i$ ), vérifiant pour toute sous-face  $\mathcal{F}_i : |\mathcal{F}_i| \leq \delta_i^2$  avec  $\delta_i \leq \varepsilon d_i$  calculé simplement en fonction de  $\mathcal{F}_i$ .

Le principe des regroupements proportionnels est représenté sur la figure 3.2. D'après les formules (1.10) et (2.15) les erreurs sont données en  $O(\sup_i \delta_i/d_i)$ , le but est alors, partant d'un point de référence donné, d'incorporer le maximum d'éléments voisins vérifiant la contrainte  $\delta_i/d_i \leq \varepsilon$ . D'après les résultats établis dans les parties précédentes, l'erreur de la formule de rayonnement et l'erreur de l'interpolation par constante sur de tels regroupements sera alors en  $O(\varepsilon)$ .



(a) Regroupements réguliers ( $2 \times 2 \times 2$ ).

(b) Regroupements non-réguliers (*prop.* 0.1).

FIG. 3.5 – Exemples de regroupements obtenus pour la surface de prélèvement (face en  $z$ ).

Afin de comparer les résultats nous introduisons un observatoire à mi-chemin des deux boîtes. La distance minimale  $d$  est alors  $d \approx 5$ . Des exemples des regroupements obtenus par chacune des deux techniques sont présentés sur la figure 3.5.

La précision du schéma de Yee est donnée par  $O(\max\{\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2\})$  où  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  sont respectivement les pas de maillage en  $x$ ,  $y$  et  $z$ . En prenant pour  $\varepsilon$  cette valeur, avec  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \lambda/10 \approx 0.2$  on obtient  $\varepsilon \approx 0.04$ . Si on fixe la taille du sous-maillage telle que  $\delta/d \leq 0.04$ , avec  $10 \geq d \geq 5$ , on obtient alors un sous-découpage régulier d'approximativement 2 cellules par 2 sur toutes les sous-faces. Nous comparerons donc

- une grille régulière de 2 cellules par 2 (désigné par la courbe *reg.*  $2 \times 2 \times 2$ ),
- un regroupement proportionnel utilisant le critère  $\delta_i/d_i \leq 0.1$  (représenté par *prop.* 0.1),
- un regroupement proportionnel plus fin  $\delta_i/d_i \leq 0.05$  (noté *prop.* 0.05).

Les résultats obtenus pour l'observatoire placé à mi-chemin des deux boîtes sont représentés sur la figure 3.6.

On constate que les résultats sont très bons pour les regroupements *reg.*  $2 \times 2 \times 2$  et *prop.* 0.05, et légèrement moins pour *prop.* 0.1. Ceci s'explique par le fait (cf figure 3.5) que le regroupement régulier en  $2 \times 2$  est plus fin que le regroupement proportionnel avec comme critère  $\delta_i/d_i \leq 0.1$ . Ces résultats montrent alors qu'en affinant la précision sur le regroupement, le résultat devient plus précis. Ceci est en accord avec la convergence de la formule de rayonnement et de l'interpolation lorsque  $\max_i(\delta_i/d_i)$  tend vers 0.

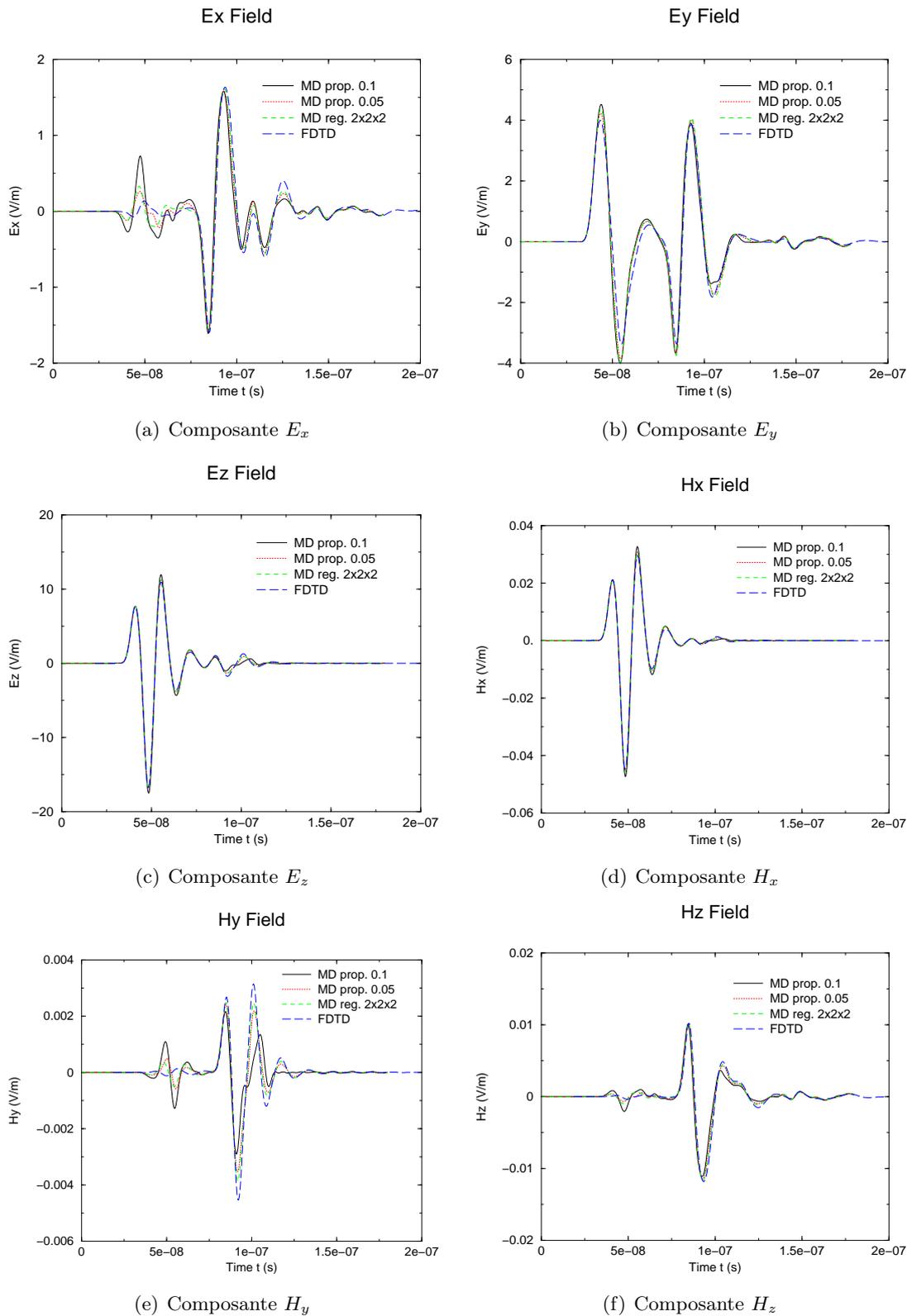


FIG. 3.6 – Comparaison entre les méthodes mono-domaine et multi-domaines avec différents types et tailles de regroupements.

Toutefois, afin de mieux évaluer l'importance de ce critère, il faut aussi prendre en compte la vitesse de résolution. Pour cela, les temps de calculs pour ces différents types de regroupements sont présentés dans le tableau 3.1 et comparé au temps du calcul de résolution mono-domaine pris comme référence à 1.

Configuration :	Temps de calcul : $N_{inj}$ :	
Mono Domaine	$\times 1$	-
MD reg. 2x2x2 [domaine 1]	$\times 40$	486
MD reg. 2x2x2 [domaine 2]	$\times 41.5$	486
MD prop. 0.1 [domaine 1]	$\times 1.6$	36
MD prop. 0.1 [domaine 2]	$\times 1.4$	40
MD prop. 0.05 [domaine 1]	$\times 3.5$	97
MD prop. 0.05 [domaine 2]	$\times 3.2$	100

TAB. 3.1 – Comparaison des temps de calculs entre les méthodes mono-domaine and multi-domaines.

Remarquons d'abord que la résolution mono-domaine est plus rapide que la résolution multi-domaines. Ce résultat est tout à fait cohérent étant donné que le cas test présenté est très petit et est surtout un des cas où la FDTD offrira les meilleures performances. Toutefois, il sera présenté dans la section 3.2.2 un exemple assez similaire où l'erreur de dispersion introduite par ce schéma n'est plus négligeable pour le résultat, et où la résolution multi-domaines permet avec la même précision d'éviter une erreur de dispersion aussi importante alors que dans un cas mono-domaine il est nécessaire d'utiliser un maillage plus fin. Ceci amenant bien évidemment à de meilleurs résultats en termes de performances et de précision.

Le point le plus important est de remarquer que l'augmentation de la précision sur le critère de regroupement proportionnel entraîne une hausse significative du nombre de points nécessaires au couplage ( $N_{inj}$ ) et donc des coûts de calculs. Il est alors intéressant de choisir une valeur aussi grande que possible pour ce paramètre. De plus, des regroupements de type non-réguliers, comme présentés sur la figure 3.5, semblent amener à des résultats aussi précis et bien moins coûteux que dans le cas de regroupements réguliers. Le paramètre adimensionné  $\delta_i/d_i$  peut alors, selon les cas étudiés, jouer un rôle prépondérant dans l'équilibrage de la balance coûts/précision. Ainsi, pour des configurations relativement simples et peu étendues comme celle montrée ici on remarque que la décomposition en sous-domaines engendre un surcoût par rapport à une résolution mono-domaine. Toutefois, au vu des exemples numériques effectués, il semble que ce compromis est relativement aisé à maintenir. En effet, sur les résultats présentés sur la figure 3.6 les résultats sont déjà satisfaisants pour un critère  $\delta_i/d_i \leq 0.1$ , soit 2 à 3 fois la précision du schéma, tout en donnant des temps de résolution comparables à ceux de la FDTD.

Dans la section 3.2.2, l'influence de ce paramètre sur le temps de calcul et le coût en mémoire est étudiée et montre que la méthode multi-domaine peut devenir assez vite rentable par rapport au calcul mono-domaine, tout en amenant un gain de précision sur la solution.

Signalons enfin que pour chacune de ces approches, sous réserve de ne pas prendre un critère  $\delta_i/d_i$  trop grand, les tests numériques sont réalisables et donnent lieu à des calculs stables.

### 3.2.2 Efficacité de la méthode multi-domaines

Dans cette partie on s'intéresse essentiellement à l'efficacité numérique de la méthode de décomposition multi-domaines, en termes de temps de calcul et de stockage mémoire.

Avant d'illustrer les comparaisons de performances entre les méthodes, on peut formuler une évaluation *a priori* du coût nécessaire pour la résolution par la méthode multi-domaines, pour un domaine  $\mathcal{D}^i$  quelconque donné. Ainsi, d'après la description de l'implémentation donnée dans la section 3.1, on en déduit que chaque domaine de calcul doit stocker en mémoire, en plus du coût de la résolution des équations de Maxwell :

- les valeurs des champs  $(E, H)^T$  nécessaires au couplage sur toute une fenêtre de temps,
- et les valeurs des champs calculés vers tous les domaines  $\mathcal{D}^{i*}$ .

De même, en plus du temps de calcul de la résolution des équations de Maxwell sur le domaine, il faut calculer le rayonnement en tous les points des domaines  $\mathcal{D}^{i*}$  à partir des valeurs des courants sur les surfaces de prélèvement.

Nous pouvons alors formuler les coûts par domaine  $\mathcal{D}^i$  et par itération en temps, en termes de stockage

$$M_{Dom}^i + O\left(\sum_j N_{inj}^j * N_{min} + \sum_{j \neq i} N_{inj}^j * N_{reg}^i\right), \quad (3.1)$$

et en terme de temps de calcul

$$T_{Dom}^i + O\left(\sum_{j \neq i} N_{inj}^j * N_{pre}^i\right), \quad (3.2)$$

où  $M_{Dom}^i$  et  $T_{Dom}^i$  sont respectivement la Mémoire et le Temps requis par le schéma numérique employé pour résoudre le problème posé sur le domaine  $\mathcal{D}^i$  sans couplage et

- $N_{inj}^i$  et  $N_{reg}^i$  sont respectivement le nombre de points d'injection et de points regroupement sur la surface de Huygens  $\mathcal{H}^i$  et sur la surface de prélèvement  $\mathcal{P}^i$ ,
- $N_{pre}^i$  est le nombre d'éléments constituant la surface de prélèvement,
- $N_{min}$  est le nombre minimum d'itérations en temps permettant l'autonomie des domaines avant qu'il y ait nécessité de couplage.

D'après les évaluations *a priori* (3.1) et (3.2), et d'après les remarques effectuées précédemment, les coûts (mémoire et temps de calculs) augmentent avec le nombre de points regroupés sur la surface de Huygens et la surface de prélèvement. Eux-mêmes étant liés à la valeur maximale demandée au critère local de regroupement  $\delta_i/d_i$ , il paraît alors judicieux d'effectuer deux types de comparaisons

1. pour une configuration donnée, il est donc intéressant d'évaluer les coûts de calcul qu'entraînent le choix de différentes valeurs maximales de  $\delta_i/d_i$ ,
2. pour une précision maximale de  $\delta_i/d_i$  fixée, la taille des regroupements évoluant naturellement en fonction de la distance entre les domaines, il est intéressant de déterminer à partir de quelle distance ce calcul devient peu coûteux.

Pour illustrer cela, on considère le cas test composé des deux boîtes métalliques de la figure 3.4 mais ici placées diagonalement l'une par rapport à l'autre comme illustré sur la figure 3.7. La source utilisée est toujours l'onde plane (1.53) et le maillage utilisé, sauf indication contraire, est composé d'une grille régulière en  $\lambda/10$ .

Pour répondre au premier point, on étudie l'influence de la valeur maximale du paramètre  $\delta/d$  sur la scène illustrée par la figure 3.7. Les résultats d'évaluation des coûts en terme de mémoire et

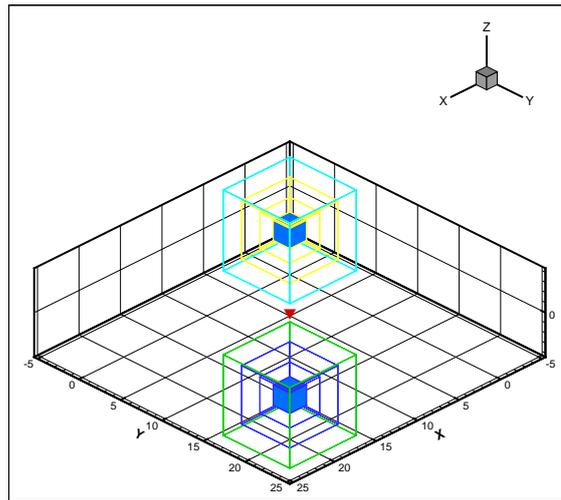


FIG. 3.7 – Domaines de calculs pour la méthode multi-domaines.

en terme de temps calculs sont présentés sur la figure 3.8. Afin de permettre une comparaison plus aisée, tous les résultats sont adimensionnés par division par rapport à la valeur du premier cas en résolution par méthode mono-domaine. La méthode de décomposition en plusieurs sous-domaines étant naturellement parallèle et les formules d'évaluation (3.1) et (3.2) étant présentées par domaines, on fournit ici les évaluations séparées sur chaque sous-domaine.

Le second point est traité en fixant la valeur maximale du paramètre  $\delta_i/d_i$  à 0.1, choix motivé par les résultats précédents et la précision de la méthode employée, et en déplaçant les cubes le long de la diagonale. Les résultats de ces tests sont représentés sur la figure 3.9 en adimensionnant encore par rapport à la valeur "référence" obtenue pour la résolution par méthode mono-domaine sur le premier cas.

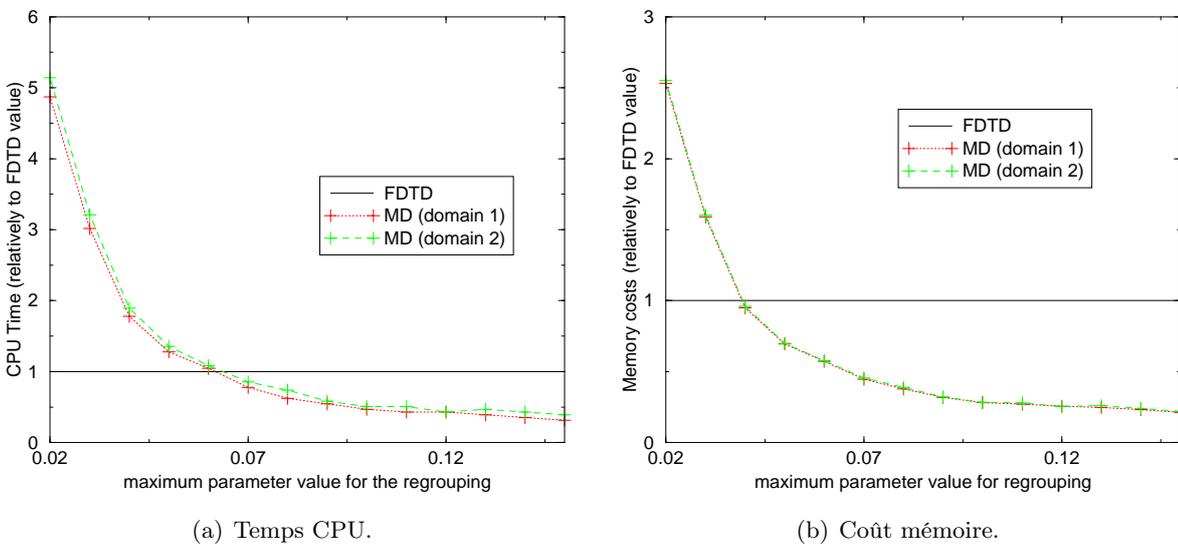


FIG. 3.8 – Evaluation des coûts entre les calculs par méthode mono-domaine ou multi-domaines par rapport à la valeur maximale du paramètre  $\delta_i/d_i$ .

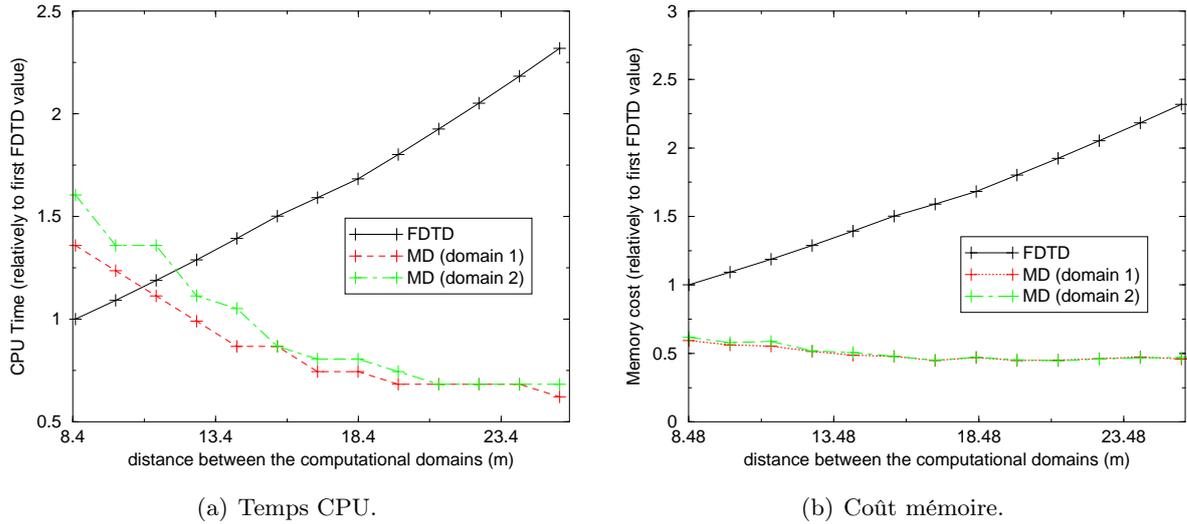


FIG. 3.9 – Evaluation des coûts entre les calculs par méthode mono-domaine ou multi-domaines par rapport à l'éloignement des boîtes.

Pour chacun des deux points on peut remarquer le comportement suivant :

- pour des valeurs très faibles du paramètre considéré (la valeur maximale de  $\delta_i/d_i$  sur la figure 3.8, et la distance entre les domaines sur 3.9) la méthode multi-domaines est moins intéressante (voire plus coûteuse) qu'une résolution naturelle en mono-domaine,
- pour des valeurs très importantes de ce paramètre, la méthode multi-domaines est très avantageuse,
- pour des valeurs intermédiaires du paramètre considéré elle est dans le pire des cas aussi performante que la résolution par mono-domaine.

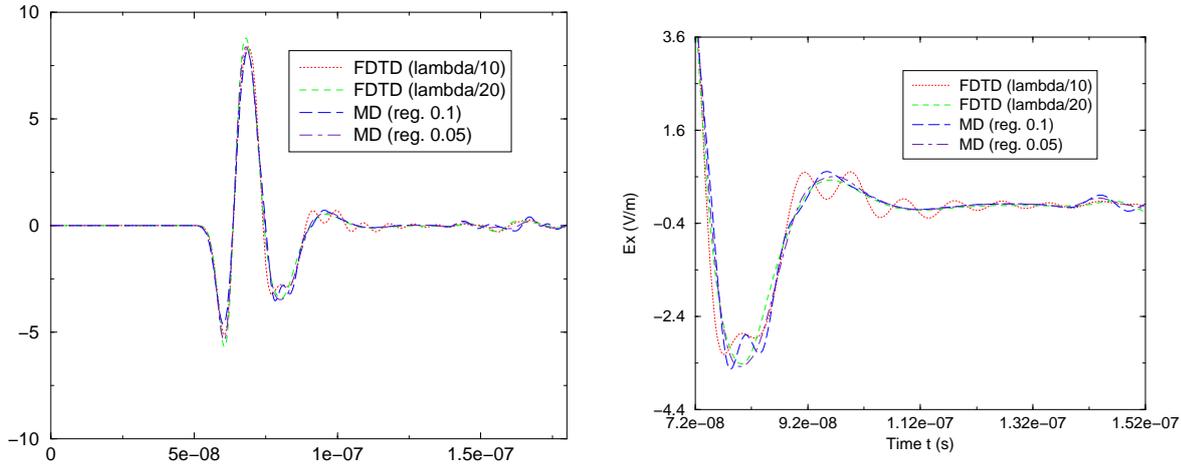
Les faibles valeurs de ces paramètres amenant à des coûts *a priori* prohibitifs semblent donc peu intéressantes. Les valeurs fortes n'ont quant à elles que peu d'intérêt car elles induisent soit une mauvaise précision ( $\delta_i/d_i$  trop grand), soit un couplage très faible entre les différents domaines ( $d_i$  très important pour tous les  $i$ ). Ces deux cas ne reflètent pas un bon cadre d'application de la méthode.

Comme présenté précédemment, les valeurs intermédiaires des paramètres distance ou valeur maximale de  $\delta_i/d_i$  sont les plus intéressantes car elles amènent à un résultat suffisamment précis dans des cas où les effets liés au couplage entre domaines restent non-négligeables. C'est donc ce dernier cas qui définit *a priori* au mieux le champ d'application de cette méthode, amenant à la fois à des résultats précis et à des performances améliorées.

On remarque de plus, sur les figures 3.8 et 3.9, que les coûts en temps de calculs ou en stockage mémoire tendent vers une valeur asymptotique aussi bien lors de l'augmentation de la valeur maximale de  $\delta_i/d_i$  que lors de l'augmentation de la distance entre les domaines. Ceci s'explique par le caractère concurrentiel des quantités  $N_{inj}$  et  $N_{min}$  (la première diminuant avec la précision et la distance, la seconde augmentant par rapport à ces critères) qui tendent à s'équilibrer, en particulier pour des valeurs importantes de  $d_i$ . Toutefois, dans ce cas le volume de calcul nécessaire à la résolution de chaque domaine  $\mathcal{D}^i$  pouvant être réduit au plus proche des obstacles présent dans celui-ci, les coûts de résolutions sont donc alors largement inférieurs à une résolution mono-domaine.

Enfin, afin d'illustrer l'intérêt et l'apport de la résolution par cette méthode, on propose dans la

figure 3.10 le résultat de calculs effectués sous la configuration décrite par la figure 3.7 en un point placé au milieu de la diagonale reliant les domaines.



(a) Composante  $E_x$  du champ électromagnétique au cours du temps.

(b) Detail de la composante  $E_x$ .

FIG. 3.10 – Comparaison entre les résultats obtenus par méthode mono-domaine et multi-domaines.

Sur la figure 3.10 on représente les différentes courbes obtenues pour les cas suivants :

- résolution mono-domaine en FDTD avec un maillage en  $\lambda/10$ ,
- résolution mono-domaine en FDTD avec un maillage en  $\lambda/20$ ,
- méthode Multi-Domaines avec FDTD en prenant  $\delta/d \leq 0.1$  et un maillage en  $\lambda/10$ ,
- méthode Multi-Domaines avec FDTD en prenant  $\delta/d \leq 0.05$  et un maillage en  $\lambda/10$ .

Les coûts de ces différentes simulations sont reportés dans le tableau 3.2.

Méthode :	Temps CPU :	Coût mémoire :
FDTD mono ( $\lambda/10$ )	1	1
FDTD mono ( $\lambda/20$ )	8	16
FDTD multi 0.1 ( $\lambda/10$ ) [par domaine]	0.5	0.25
FDTD multi 0.05 ( $\lambda/10$ ) [par domaine]	1	0.5

TAB. 3.2 – Comparaisons des coûts pour un schéma FDTD dans un cas symétrique.

Sur cet exemple on peut remarquer qu'une valeur maximale de  $\delta_i/d_i$  peu importante (0.1) avec un maillage régulier en  $\lambda/10$  amène à de meilleurs résultats que la résolution directe en FDTD sur le même maillage. On constate effectivement sur la figure 3.10 que l'erreur de dispersion introduite par le schéma numérique, visible en comparant les résultats obtenus pour des maillages en  $\lambda/10$  et  $\lambda/20$ , est considérablement réduite par l'utilisation de la formule de rayonnement (1.10) pour le couplage. Ceci permet de réduire de moitié le temps de calcul et du quart le stockage nécessaire. De plus, avec une plus grande précision sur le paramètre  $\delta_i/d_i$  (inférieur à 0.05) on obtient des résultats comparables à ceux d'une résolution mono-domaine sur un maillage en  $\lambda/20$  tout en ayant des coûts comparables à la résolution mono-domaine sur maillage en  $\lambda/10$ .

Remarquons enfin que même si les domaines sont éloignés l'un de l'autre (environ 5 à  $8\lambda$ ), les valeurs des termes de couplage restent non-négligeables dans tous les cas présentés ici, ce qui

constitue l'intérêt de cette décomposition avec couplage.

### 3.2.3 Convergence numérique de la méthode

La convergence *a priori* de la méthode n'est pas démontrée, même si toutefois nous avons fourni des estimations en  $O(\delta/d)$  pour les erreurs commises dans la phase d'antépolation et dans celle d'interpolation. En l'absence d'hypothèses sur le(s) schéma(s) utilisé(s), le procédé de résolution par sous-domaines se réduit essentiellement à l'utilisation de ces deux étapes. Il est alors raisonnable de supposer que l'erreur globale commise est elle aussi en  $O(\delta/d)$ ; ce qui, avec la stabilité établie dans le chapitre 2, permettront ainsi d'assurer la convergence de la méthode.

Comme dans les exemples numériques du chapitre 1 pour l'étude numérique de la formule de rayonnement, nous allons donc regarder sur une série de cas test l'évolution de la différence entre une solution de référence et les résultats de calculs effectués par la méthode multi-domaine pour différents choix du paramètre de précision maximale  $\delta/d$ . En outre, comme présenté précédemment, pour une valeur fixée de ce paramètre le nombre de points d'injection ( $N_{inj}$ ) et celui de regroupements ( $N_{reg}$ ) varient en fonction de l'éloignement  $d$  des différents domaines de calcul. Il est alors naturel de s'interroger sur l'influence de cette distance  $d$  sur la précision de la méthode.

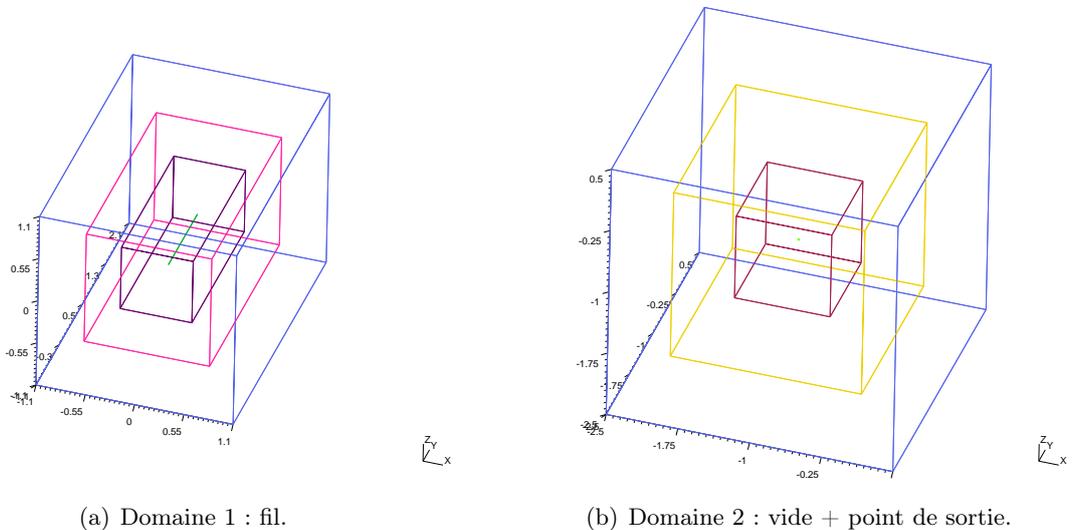


FIG. 3.11 – Maillages utilisées pour l'étude de la convergence.

Pour pouvoir pleinement évaluer l'influence du paramètre  $\delta/d$  sur la précision de la méthode nous allons considérer une configuration en deux domaines représentés sur la figure 3.11. Le premier domaine sera composé uniquement d'un fil placé en espace libre simulant un dipôle électromagnétique. Il servira de terme source à l'ensemble du calcul et son action sur le second domaine, via la formule intégrale approchée montrera l'influence de  $\delta/d$  sur la phase d'antépolation. Le second domaine sera constitué d'un volume vide au centre duquel nous effectuerons des relevés de champs. Les sorties obtenues dans le domaine vide permettront d'estimer l'impact du choix de  $\delta/d$  dans la phase d'interpolation reconstituant les contributions extérieures.

Ces deux volumes seront placés en vis-à-vis et le premier domaine de calcul sera arbitrairement éloigné du second comme représenté sur la figure 3.12. Afin de suivre les exemples présentés précédemment, le fil sera successivement placé à  $4.5\lambda$ ,  $6.5\lambda$ ,  $8.5\lambda$  et  $10.5\lambda$ .

Les calculs seront effectués en utilisant la méthode de différences finies (FDTD) sur chaque

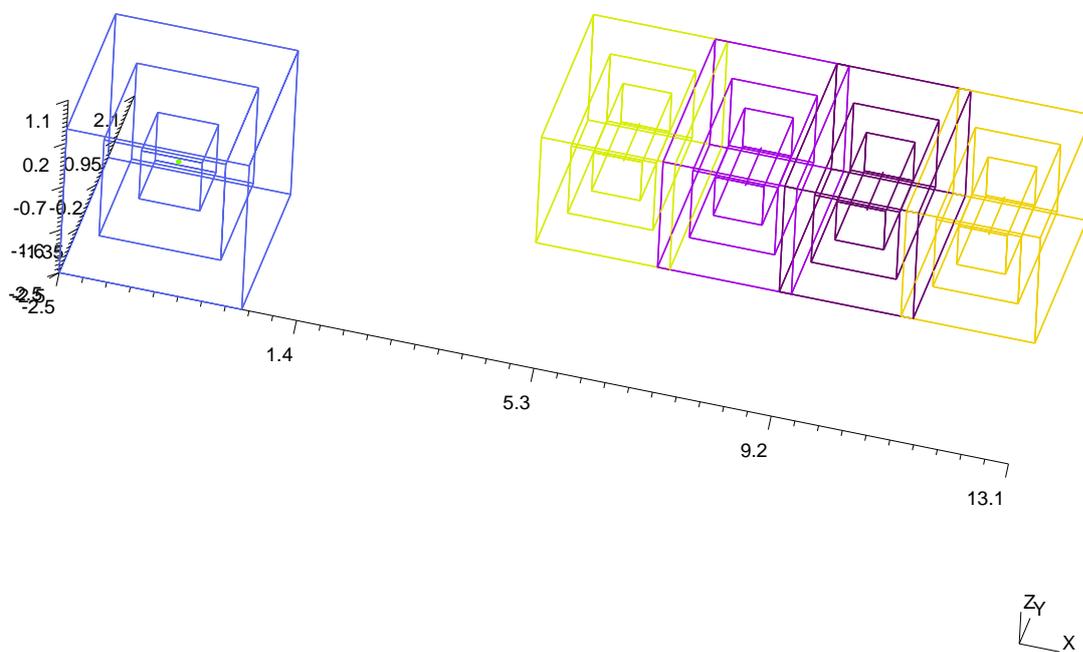


FIG. 3.12 – Maillage utilisé pour l'étude de la convergence : différentes positions du fil.

domaine et comparés à une solution de référence calculée par le même schéma sur l'ensemble de la scène. Afin de réduire l'influence de l'erreur numérique introduite par le schéma numérique utilisé, nous avons maillé les volumes de calculs à  $\lambda/20 \approx 0.1m$ .

Les résultats des calculs d'erreur pour chacune de ces configurations en faisant évoluer le rapport  $\delta/d$  entre 0 et 0.20 (ie : 20 fois la précision  $\varepsilon$  du schéma numérique), par pas de 0.005 (ie :  $0.5 \varepsilon$ ) sont représentés sur la figure 3.13 en utilisant la norme quadratique discrète introduite dans le chapitre 1. La norme du champ incident, en l'absence de celui-ci, étant ici fixée à 1.

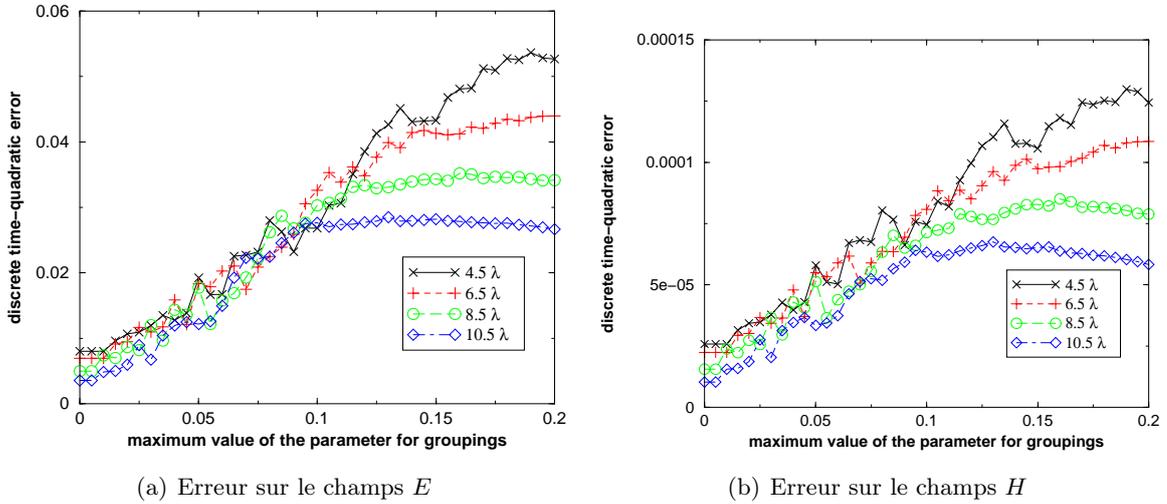


FIG. 3.13 – Evolution de l'erreur avec la distance en norme 2

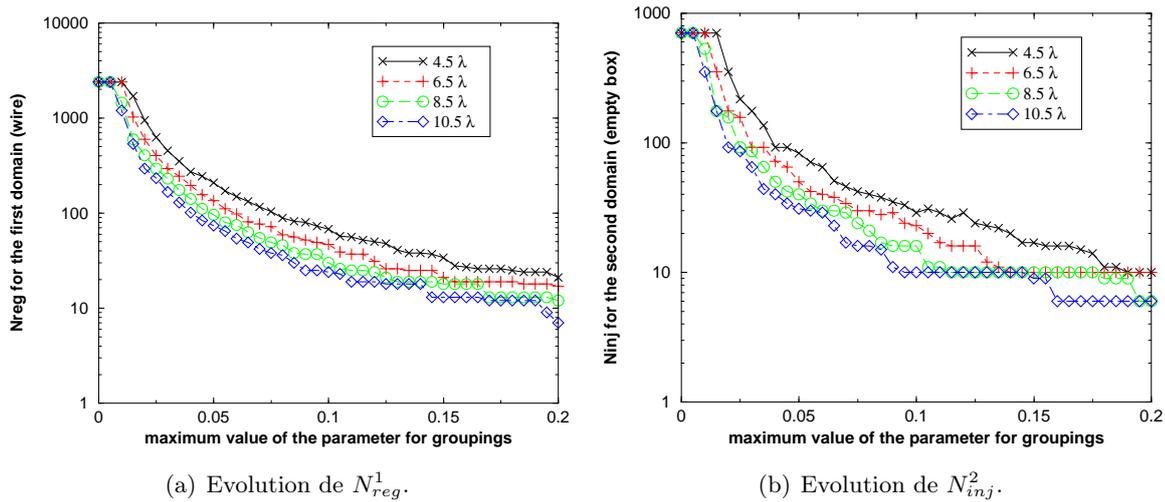
Sur la figure 3.13 nous pouvons remarquer que les courbes d'erreur, pour chaque position du premier domaine, se décomposent en trois parties :

- pour  $\delta/d$  proche de 0 toutes les courbes semblent effectuer un palier, celle pour  $d = 4.5\lambda$  ayant le plus grand, et celle pour  $d = 10.5\lambda$  le plus petit ;
- pour  $\delta/d$  proche de 0.2 les courbes forment à nouveau un palier dont le début se situe de manière échelonnée autour de  $\delta/d = 0.1$  pour  $d = 10.5\lambda$ , jusqu'à  $\delta/d = 0.18$  pour  $d = 4.5\lambda$  ;
- enfin, entre ces deux paliers leur comportement est quasiment linéaire et elles sont presque confondues.

Pour expliquer ces deux paliers l'évolution du nombre de points  $N_{reg}^1$  du domaine 1 servant à l'antépolation, et du nombre de points  $N_{inj}^2$  du domaine 2 servant à l'interpolation, en fonction de  $\delta/d$ , sont représentées sur la figure 3.14.

Sur la figure 3.14 nous retrouvons les deux mêmes paliers : un proche de  $\delta/d = 0$ , et un autre pour  $\delta/d$  voisin de 0.2. L'allure de la courbe d'erreur de la méthode multi-domaines sur la figure 3.13 peut alors s'expliquer :

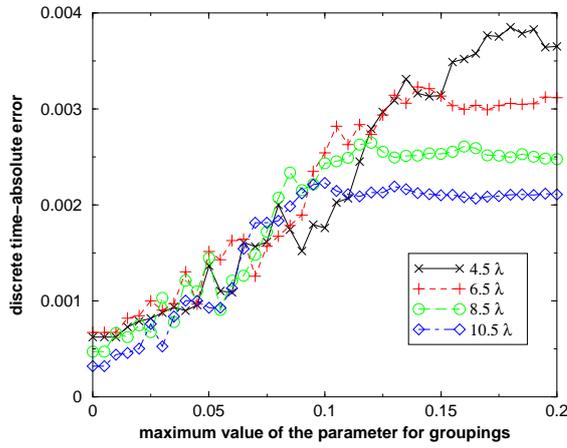
1. pour  $\delta/d$  proche de 0 par une limitation du nombre de regroupements effectués sur la surface de Huygens du domaine 2 lorsque la précision induit des tailles caractéristiques  $\delta$  plus petites que la taille de la maille sur la surface de Huygens. Dans ce cas, et a fortiori pour le cas limite  $\delta/d = 0$ , le nombre d'éléments utilisés pour la phase d'interpolation est donné par le nombre de mailles de la surface de Huygens considérée (ici : celle du domaine 2). La dimension caractéristique  $\delta$ , à une taille de regroupement  $\varepsilon$  donnée, étant majorée par  $\varepsilon d$ , celle-ci devient alors plus vite inférieure à la taille des mailles pour des valeurs de  $d$  peu importantes. Nous observons donc bien que ce phénomène de saturation est plus important pour  $d = 4.5\lambda$  que pour des écarts  $d$  plus grands ; le palier le plus fin étant obtenu ici pour  $d = 10.5\lambda$ .

FIG. 3.14 – Influence de  $\delta/d$  sur les regroupements.

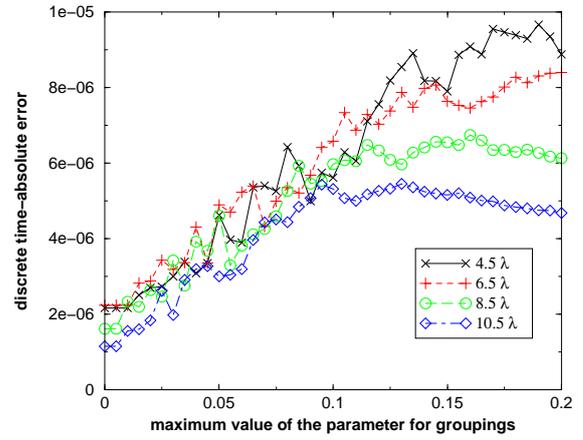
2. pour  $\delta/d$  grand (jusqu'à 0.2) nous avons un comportement similaire. En effet, dans ce cas la montée en taille des regroupements sur la surface de prélèvement est limitée par la taille maximale de celle-ci. Nous obtenons donc des paliers pour  $N_{reg}^2$  à 6, c'est-à-dire le nombre de faces de la surface de prélèvement. Lors de ce phénomène de saturation la valeur maximale  $\varepsilon$  du rapport  $\delta/d$  est alors largement inférieure à celle demandée, la précision de la formule de rayonnement est donc supérieure à la valeur attendue. Dans ce cas, la grandeur caractéristique  $\delta$  majorée par  $\varepsilon d$  devient supérieure à la taille de la face considérée de façon plus rapide si  $d$  est grand. Nous observons alors effectivement un palier plus important pour  $d = 10.5\lambda$ , de taille décroissante avec  $d$  jusqu'au minimum obtenu pour  $d = 4.5\lambda$ .
3. enfin pour la partie linéaire en  $\delta/d$  nous observons le comportement de l'erreur de la méthode par rapport au paramètre de regroupement en dehors des phénomènes de saturation précédents. Tout d'abord les courbes sont quasiment confondues ce qui confirme l'indépendance de la précision de la méthode à la distance  $d$  en tant que seul paramètre. Ensuite, l'allure linéaire convergeant vers 0 pour  $\delta/d$  tendant vers 0 de l'erreur valide, numériquement tout du moins, l'hypothèse de consistance de la méthode par rapport à  $\delta/d$ . Enfin, le caractère linéaire de ces courbes d'erreurs semble indiquer que, à l'instar des résultats numériques du chapitre 1 sur la formule de rayonnement approchée, nous avons ici encore une erreur (ponctuelle) d'ordre 1 en  $\delta/d$ .

Par soucis de cohérence avec les études numériques précédentes, les courbes d'erreurs pour les champs  $E$  et  $H$ , pour les différentes positions du fil, en fonction de  $\delta/d$  sont représentées sur la figure 3.15. Nous retrouvons sur cette figure toutes les mêmes parties caractéristiques que sur la figure 3.13. En outre, pour l'ensemble des valeurs de  $\delta/d$  entre les deux paliers le comportement est encore linéaire et ne dépend pas de la position du fil. Ceci confirme encore le rôle de paramètre unique de  $\delta/d$  dans la précision globale (hors précision du schéma numérique employé), ainsi que la dépendance à l'ordre 1 de celle-ci par rapport à  $\delta/d$ .

L'objectif principal de ce cas test étant la mise en évidence de l'importance des contributions respectives des phases d'antépolation et d'interpolation, nous avons focalisé notre attention dans la figure 3.14 sur les quantités principales :  $N_{reg}^1$  et  $N_{inj}^2$ . Notons quand même avec la figure 3.16 le comportement prévisible complètement symétrique des deux autres quantités ( $N_{reg}^2$  et  $N_{inj}^1$ )

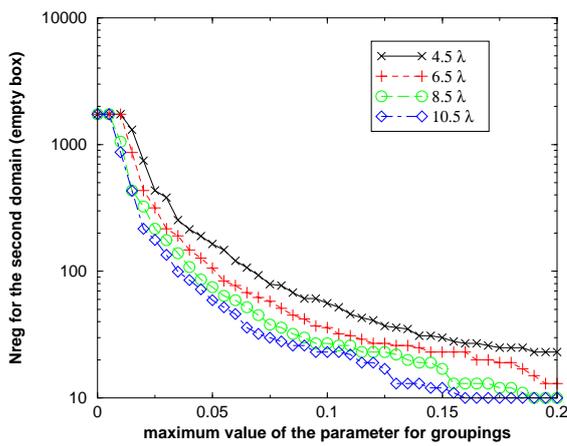


(a) Erreur sur le champs  $E$

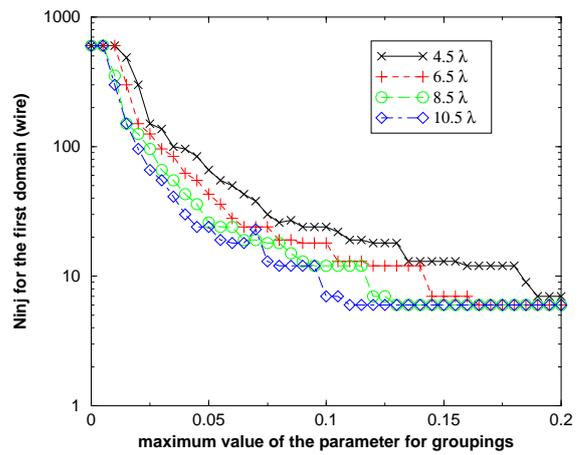


(b) Erreur sur le champs  $H$

FIG. 3.15 – Evolution de l’erreur avec la distance en norme  $\infty$ .



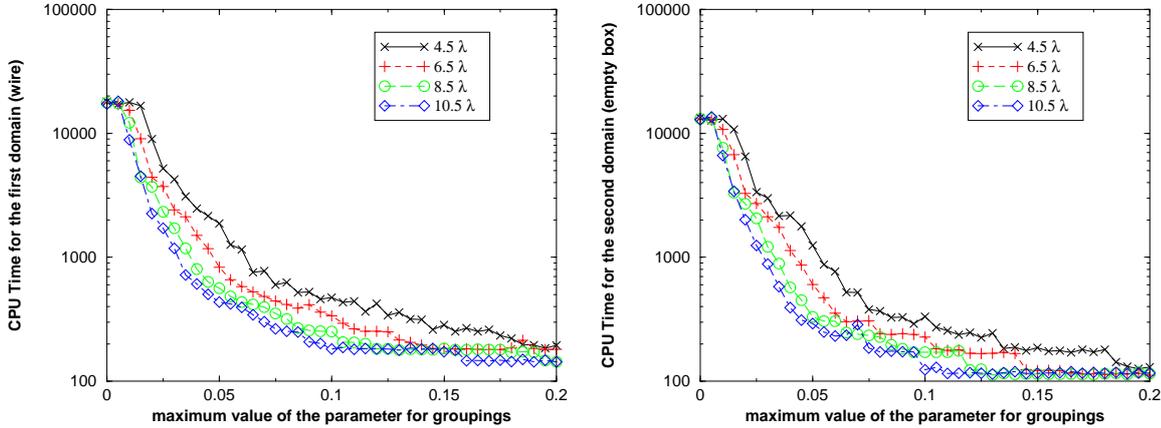
(a) Evolution de  $N_{reg}^2$ .



(b) Evolution de  $N_{inj}^1$ .

FIG. 3.16 – Influence de  $\delta/d$  sur les regroupements.

présentes dans le calcul. Ceci permet alors d'assurer le même type d'influence du choix de  $\delta/d$  que sur les figures 3.13 et 3.15 dans le cas, non-présenté sur cette exemple, d'une configuration impliquant de multiples interactions entre les domaines.



(a) Temps de calculs pour le premier domaine (vide). (b) Temps de calculs pour le second domaine (fil)

FIG. 3.17 – Evolution des temps de calculs en fonction de  $\delta/d$  et de la position.

Afin de compléter les résultats de la section 3.2.2, donnons finalement, pour ces exemples, sur la figure 3.17 l'évolution des temps de calculs, en fonction des valeurs de  $\delta/d$ , pour chacune des positions du fil. Conformément aux prévisions établies dans la partie 3.2.2 le temps de calcul pour chaque domaine suit l'évolution du nombre de regroupements de sa surface de Huygens et de la surface prélèvement de l'autre domaine. Il s'en suit une décroissance au carré par rapport à  $\delta/d$  du temps de calcul comme dépendant de la quantité  $N_{inj}^1$  donnant le nombre de découpages de la surface de Huygens en sous-faces de tailles  $O(\delta^2)$ . Enfin, la proximité des domaines induit des valeurs plus élevées de  $N_{reg}$  et  $N_{inj}$  impliquant un temps de calcul plus grand, ce que l'on retrouve en comparant les courbes : celle obtenue pour  $4.5\lambda$  offrant les temps les plus élevés, et celle pour  $10.5\lambda$  les plus bas.

### 3.3 Exemples numériques

Afin de compléter les exemples numériques déjà présentés, nous proposons dans cette partie d'illustrer deux aspects supplémentaires de la méthode.

Dans un premier temps, afin d'être cohérent avec la démarche initiale qui était d'établir une méthode fonctionnant sur un large éventail de configurations, il est intéressant d'introduire de nouveaux schémas non-nécessairement structurés comme c'était le cas avec la FDTD. La motivation bien connue de ce type de schéma réside dans la prise en compte de certains phénomènes électromagnétiques, en particulier dans le cadre de la CEM (courants près de parois d'objets,...), nécessitant une bonne prise en compte de géométries courbes. Dans cet objectif, l'utilisation d'un schéma de type volumes finis temporels (FVTD) a été testée, montrant ici encore l'intérêt de cette méthode.

Enfin, dans un second temps, nous proposons l'étude d'un cas test plus complexe mettant en avant les avantages de la stratégie de décomposition en sous-domaines dans une configuration plus réaliste. En outre, toujours dans l'optique de ne spécifier a priori aucun schéma numérique pour l'utilisation de la méthode, l'utilisation simultanée de deux schémas distincts, un structuré non-conforme

(FDTD) et un non-structuré conforme (FVTD), montre un exemple d'hybridation naturelle de schémas par la méthode multi-domaines.

### 3.3.1 Résolution multi-domaines à l'aide d'un schéma de volumes finis

Comme présentée dans le chapitre 2, la méthode de décomposition en sous-domaines repose essentiellement sur deux étapes : l'antépolation et l'interpolation. Chacune de ces étapes travaille avec des courants portés par les surfaces : à partir de courants sur la surface de prélèvement pour la phase d'antépolation, et pour la création de courants sur la surface de Huygens pour la phase d'interpolation. Les courants, relevés pour la première étape et injectés pour la seconde, sont donc donnés par des flux aux niveaux de surfaces frontières entre des éléments (volumiques) du maillage. Il apparaît alors naturel de s'intéresser à des schémas permettant d'obtenir et d'introduire facilement de tels termes de flux. Pour ce faire, nous avons choisi d'utiliser une méthode de type volumes finis décentrés en espace et utilisant un schéma de type MUSCL en temps [17].

L'implémentation et l'utilisation de la méthode de résolution en sous-domaines disjoints se déroulent de la même manière que pour un schéma FDTD, comme présenté au début de ce chapitre.

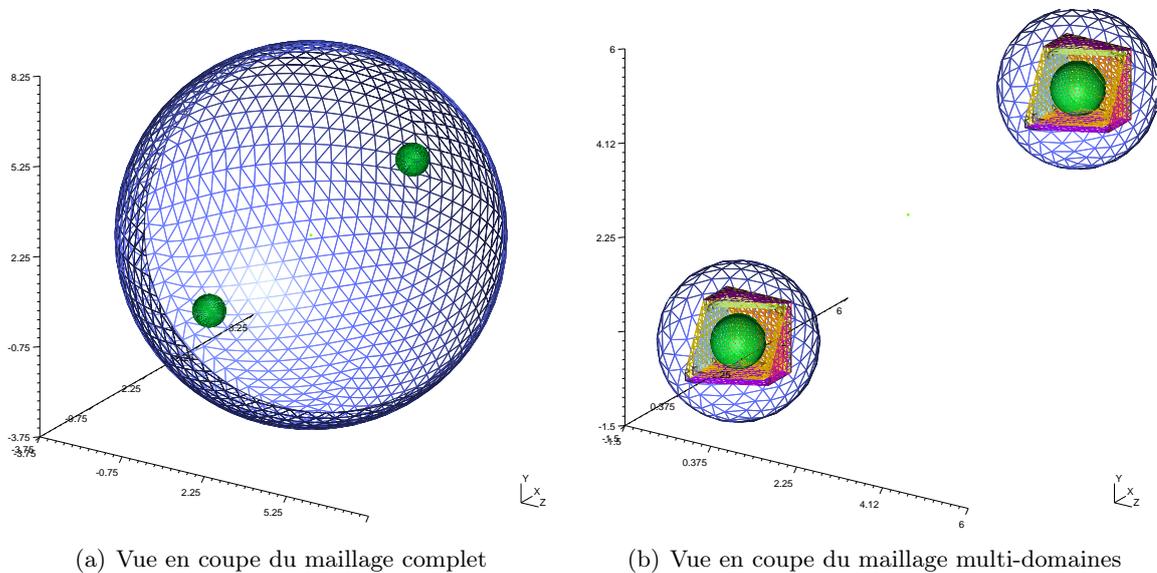


FIG. 3.18 – Exemples de résolution VF/VF : diffractions par deux sphères

Le cas test représenté sur la figure 3.18 se compose de deux sphères métalliques parfaitement conductrices placées dans l'espace. Pour le maillage multi-domaines nous avons placés les deux sphères dans des surfaces de Huygens et de prélèvement cubiques afin de pouvoir effectuer des regroupements sur celles-ci.

Les domaines de calculs mono-domaines et multi-domaines sont pris de géométrie sphérique et terminés par des conditions aux limites de type Silver-Müller.

Les sphères sont exposées au champ incident (1.53) mettant en évidence le couplage induit de l'une sur l'autre en un point choisi à mi-chemin des deux sphères afin de prendre au mieux les contributions de chacune d'elles.

Afin de pouvoir effectuer une comparaison des résultats obtenus, plusieurs maillages globaux de plus en plus raffinés sont introduits :

- un premier maillage constitué de 23535 éléments dont le rapport volume/surface des éléments ( $\Delta_{min}$ ), donnant la précision de la méthode ainsi que la condition CFL, est compris entre  $2.89 \cdot 10^{-3}$  et 0.13,
- un maillage raffiné de 73493 éléments avec  $\Delta_{min} \in [2.92 \cdot 10^{-3}, 7.35 \cdot 10^{-2}]$ ,
- un dernier maillage encore plus raffiné de 137692 éléments avec  $\Delta_{min} \in [2.65 \cdot 10^{-3}, 5.25 \cdot 10^{-2}]$ .

Le maillage est le même pour chaque composante utilisée pour la résolution par la méthode multi-domaine. Il est composé de 18265 éléments avec  $\Delta_{min} \in [3.17 \cdot 10^{-3}, 2.70 \cdot 10^{-2}]$ . Les valeurs les plus importantes de  $\Delta_{min}$  obtenues pour les maillages globaux correspondent aux cellules les plus éloignées des sphères (cellules proches du bord du domaine de calcul). Dans ces conditions, le maillage utilisé pour la méthode multi-domaine a donc une précision comparable au voisinage des sphères à celle obtenue pour le second maillage global.

Les résultats obtenus pour ces différents maillages, en un point de calcul situé à mi-chemin des sphères, sont représentés sur la figure 3.19.

Nous pouvons alors observer les bons résultats obtenus par la méthode multi-domaines par comparaison avec les résultats sur le maillage complet, et tout particulièrement avec la solution obtenue pour le maillage le plus fin. Les résultats obtenus par le schéma multi-domaines semblent globalement meilleurs que pour ceux donnés par le calcul global avec le maillage de précision équivalente à 73493 éléments. Comme dans le cas de la résolution par différences finies l'utilisation du découpage permet d'obtenir des résultats comparables à un calcul fin avec un maillage plus grossier. Ceci donne alors une validation numérique, dans le cas de méthodes non-conformes, la méthode de décomposition dans cette thèse.

Méthode :	Temps CPU :	Coût mémoire :
FVTD (23535 elts)	x1	x1
FVTD (73493 elts)	x4	x3
FVTD (137692 elts)	x6.7	x5.7
FVTD multi-domaines (18265 elts) [par domaine]	x3.7	x1.3

TAB. 3.3 – Comparaison temps CPU et mémoire entre calculs mono et multi-domaines sur l'exemple des sphères avec un solveur FVTD

Enfin, sur le tableau 3.3 sont représentés les temps de calculs et les coûts mémoires respectifs des différentes simulations. Afin de simplifier les comparaisons, les valeurs sont données relativement à celles obtenues pour le maillage le plus grossier. Ici encore nous notons que la méthode de décomposition en sous-domaines amène à des coûts en mémoire et en temps calcul très largement avantageux par rapport à une résolution globale à précision équivalente.

### 3.3.2 Hybridation de schémas avec la méthode multi-domaines

Comme présenté dans le paragraphe précédent, selon le problème traité le choix du schéma numérique pourra changer en fonction des demandes de précision et de possibilité de réalisation (temps calcul et coût mémoire). Afin d'ouvrir la méthode multi-domaines, pouvant fonctionner avec différents schémas, nous proposons ici d'adopter un traitement pouvant être différent sur chaque domaine.

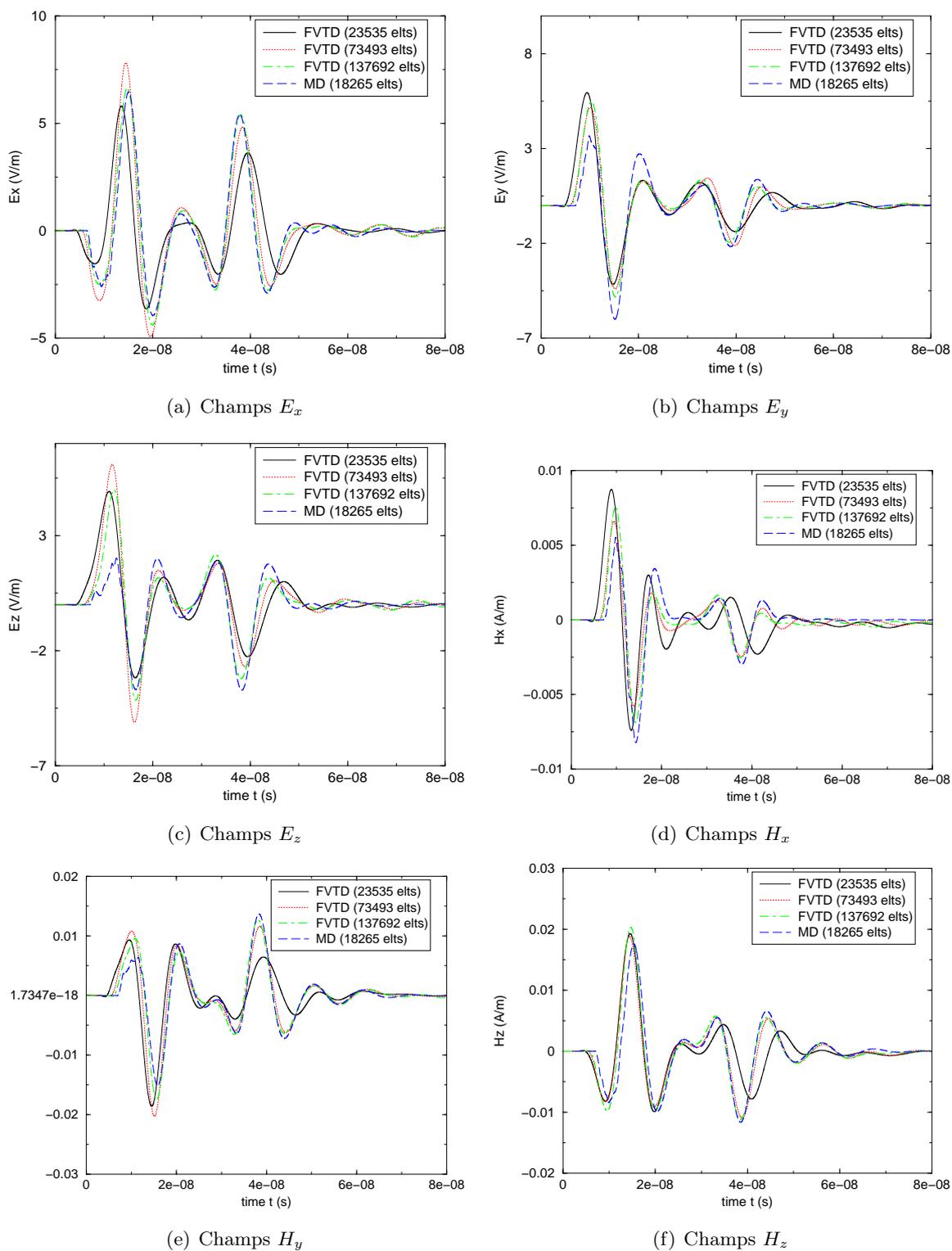


FIG. 3.19 – Comparaisons à mi-chemin entre les sphères : résolution mono-domaine volumes finis (FVTD) à trois précisions différentes / résolution multi-domaines volumes finis (MD)

A partir du principe de parallélisation exposé au début de ce chapitre, l'hybridation de ces deux méthodes (FDTD et FVTD) dans le cadre de la décomposition en sous-domaines disjoints est quasiment immédiate. En effet, chaque domaine ne devant transmettre que des valeurs ponctuelles de champs aux points de références des surfaces de Huygens des autres parties de la scène, le fonctionnement global se fait alors de façon quasi-autonome sans introduction de spécifications liées aux schémas utilisés, comme c'est le cas dans les décomposition en sous-domaines adjacents (conditions de raccords, position des inconnues, projections sur les fonctions de bases,...).

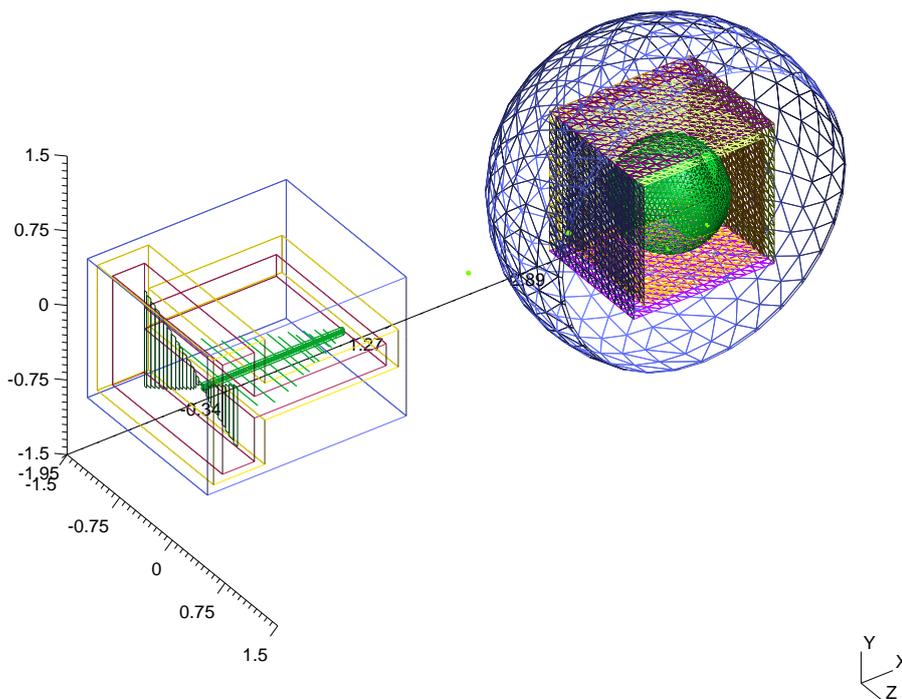


FIG. 3.20 – Maillage hybride utilisé : antenne-sphère (coupe).

Afin de montrer la mise en œuvre et le gain de cette hybridation, nous nous intéressons à l'exemple représenté sur la figure 3.20 composé d'une antenne large-bande émettant sur une bande de fréquences allant de 20Mhz à 1Ghz, et d'une sphère métallique parfaitement conductrice. La configuration utilisée dans cet exemple est assez délicate à traiter et propose donc un exemple propice à l'utilisation de méthodes hybrides. Il est alors intéressant de comparer ces deux types de résolutions, et tout particulièrement au voisinage de la sphère car la bonne prise en compte de la géométrie y est alors un critère de précision très important.

Comme représentées sur la figure 3.21, nous proposons donc d'utiliser plusieurs précisions sur le maillage de la sphère. Nous comparerons donc :

- un maillage global en différences finies maillé à la précision de l'antenne utilisée dans le cas de la figure 3.20 (noté *FDTD*), donnant une grandeur caractéristique  $h$  comprise entre 0.0125 et 0.1 ;

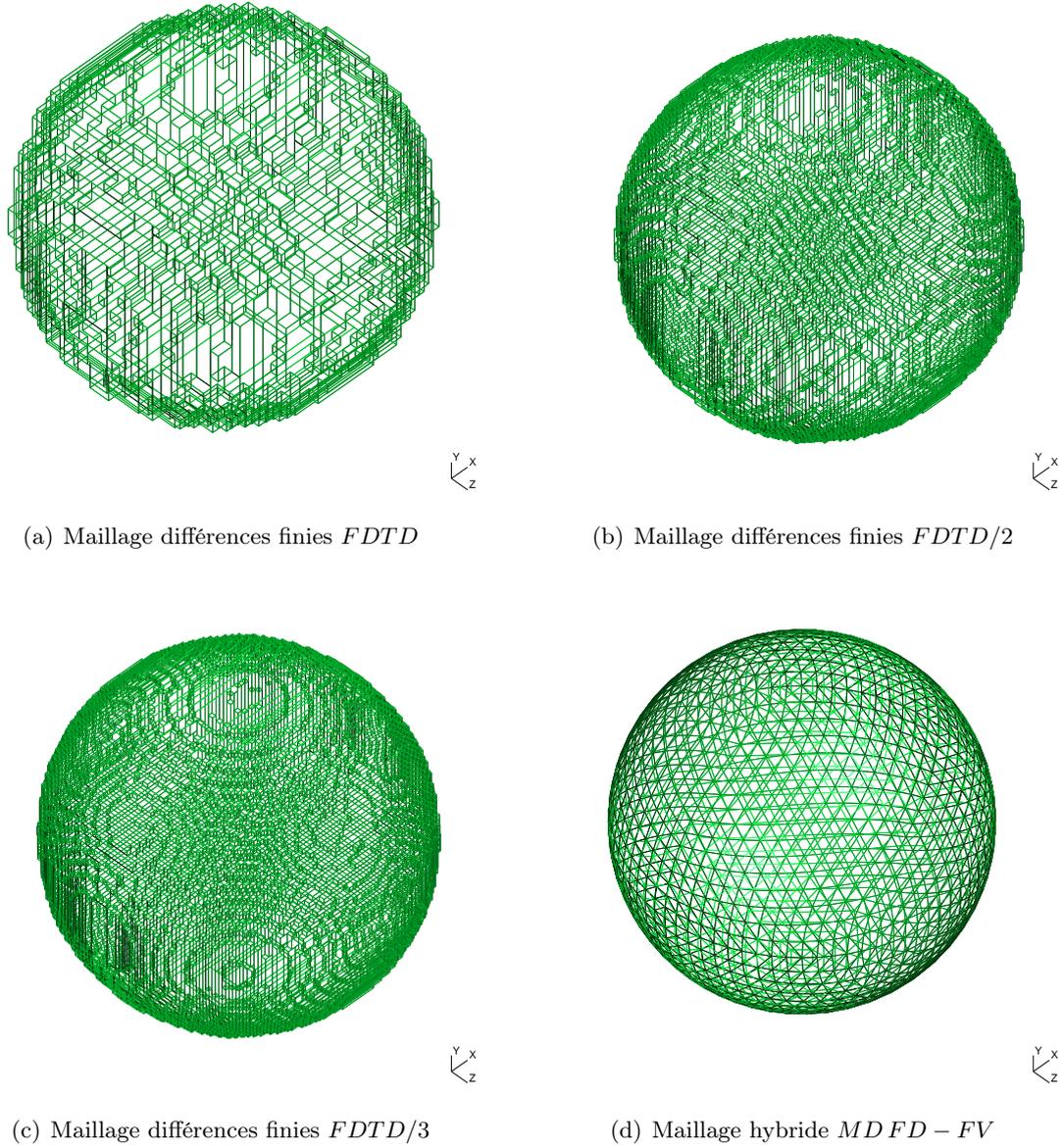


FIG. 3.21 – Différents maillages de la sphère utilisés pour les comparaisons de résolutions  $FDTD$ ,  $FDTD/2$ ,  $FDTD/3$  et méthode hybride  $MDFD - FV$ .

- un maillage global deux fois plus fin que le précédent (noté  $FDTD/2$ ), de grandeur caractéristique  $h \in [0.005, 0.05]$  ;
- un maillage global composé par morceaux de l'antenne raffinée précédente ainsi qu'un maillage d'un maillage trois fois plus fin que le premier de la sphère en différences finies (noté  $FDTD/3$ ) ;
- et enfin le maillage multi-domaines de la figure 3.20 utilisant l'antenne du maillage simple et une sphère maillée en volumes finis de précision globale de l'ordre du second maillage global, soit  $h$  de l'ordre de 0.1.

Les différents résultats obtenus sont représentés pour un point situé à mi-chemin entre la sphère et l'antenne (figure 3.22, ainsi que pour un point juste devant la sphère (figure 3.23).

Nous constatons alors pour ces deux points que les résultats obtenus par les trois résolutions de FDTD sont sensiblement différents mais semblent cependant converger. Parallèlement à cela les courbes  $FDTD/3$  et  $MDFD - FV$  sont globalement très proches. La prise en compte de la géométrie étant ici meilleure par utilisation d'un schéma conforme FVTD, la méthode multi-domaines hybridée fournit alors de bons résultats, aussi bien dans le cas de points choisis hors des domaines et calculés par rayonnement que pour des points au voisinage très proche des objets. Toutefois, comme détaillé dans le tableau 3.4, l'apport principal de l'hybridation se situe ici dans le gain de stockage à précisions quasi-égales.

Méthode :	Temps CPU :	Coût mémoire :
Mono-domaine $FDTD$	x1	x1
Mono-domaine $FDTD/2$	x10.52	x6.30
Mono-domaine $FDTD/3$	x22.48	x11.84
MD (prop. 0.08) [sphere / FVTD]	x6.49	x0.82
MD (prop. 0.08) [antenne / FDTD]	x22.02	x1

TAB. 3.4 – Comparaison des coûts pour les différentes résolutions FDTD mono-domaine et multi-domaines hybrides.

Sur cet exemple, la principale restriction au choix de la méthode hybride réside a priori dans le temps global d'exécution deux fois supérieur à celui de la résolution par  $FDTD$  sur le maillage raffiné  $FDTD/2$ . Ceci s'explique par l'utilisation sur le domaine de l'antenne d'un pas de temps, induit par la condition CFL sur le domaine FVTD, deux fois plus petit que requis pour le traitement seul de cette partie. Il s'en suit donc un surcoût nuisant aux performances globales. Pour remédier à cela nous allons introduire, dans le paragraphe suivant, une stratégie de pas de temps local *inter-domaines* diminuant significativement l'influence des conditions CFL de chaque domaine sur la résolution complète.

### 3.4 Pas de temps locaux inter-domaines

Comme remarqué sur l'exemple précédent, un point très restrictif de l'utilisation de plusieurs maillages différents, liés à un ou plusieurs schéma(s) numérique(s), avec la méthode multi-domaines est donné par l'introduction éventuelle de conditions de stabilité, de type CFL, par chacun des schémas. Chaque domaine impose donc un pas de temps maximal et la résolution globale, afin de garantir la stabilité du traitement de chaque élément, doit employer le pas de temps le plus petit. Ainsi, sur certains exemples, nous sommes amenés à choisir des pas de temps extrêmement petits par rapport à la condition CFL du domaine à traiter, et donc à augmenter de manière significative

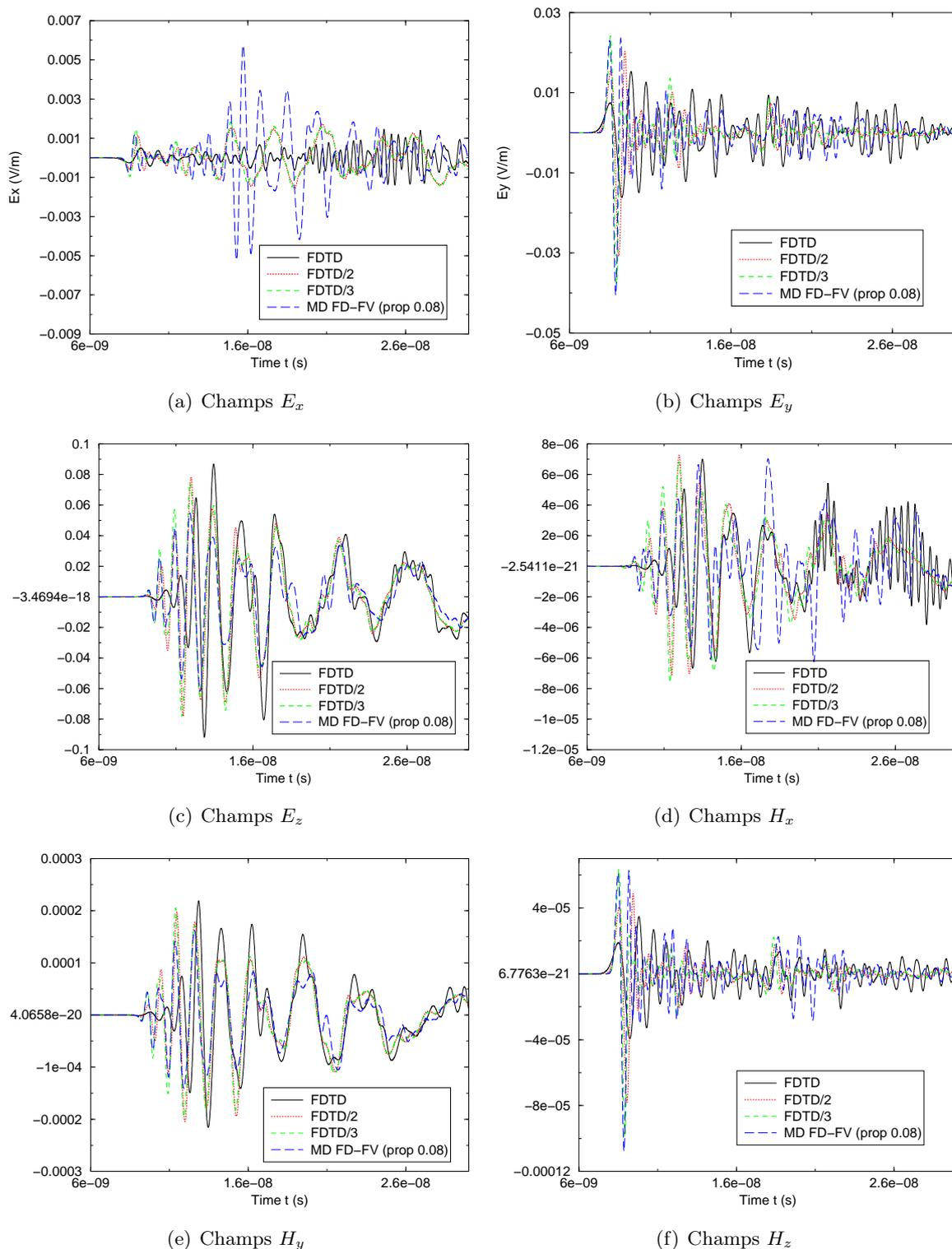


FIG. 3.22 – Comparaisons de trois résolutions globales FDTD et d’une multi-domaines hybride FDTD-FVTD : résultat obtenu par relevé entre la sphère et l’antenne.

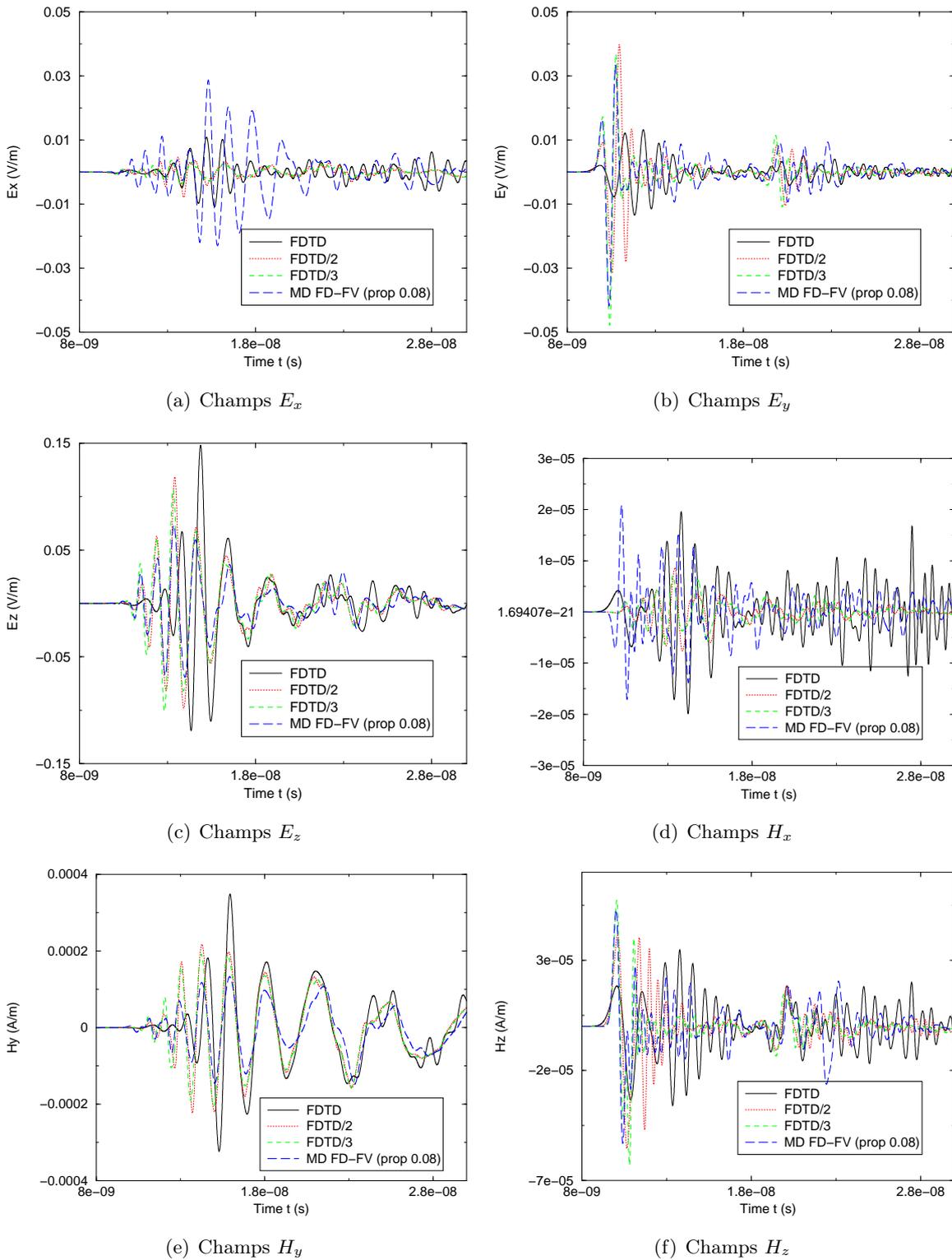


FIG. 3.23 – Comparaisons de trois résolutions globales FDTD et d’une multi-domaines hybride FDTD-FVTD : résultat obtenu par relevé au voisinage proche de la sphère.

les coûts du calcul.

Toutefois, d'après le principe de fonctionnement et la stratégie de parallélisation de la méthode présentés au début du chapitre, à partir d'une plage de temps établie de longueur  $T_{sync}$  donnée (étape 3), les processus sont indépendants sur tous les intervalles de la forme  $[kT_{sync}, (k+1)T_{sync}]$  (étape 6), la mise à jour des contributions étant obtenues à partir des valeurs échangées tous les  $kT_{sync}$  (étape 5).

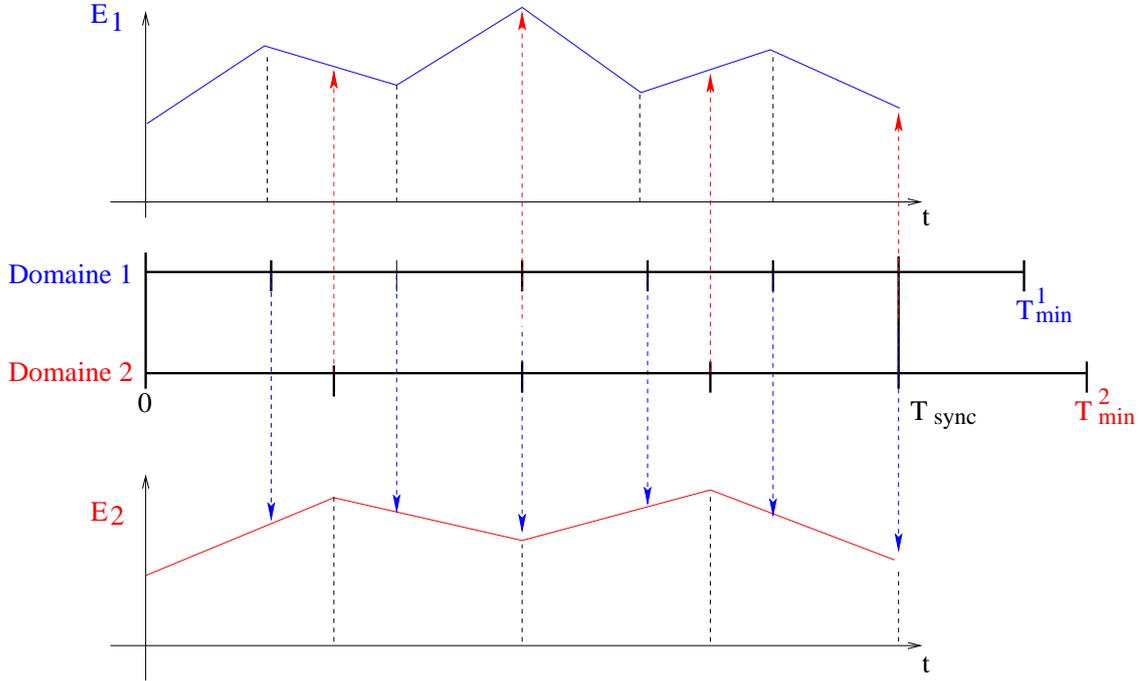


FIG. 3.24 – Evaluations des contributions entre les domaines pour le schéma de pas de temps local.

L'algorithme présenté au début du chapitre peut alors se modifier comme représenté sur la figure 3.24 de la manière suivante :

**Etape 3'** : calcul pour tout domaine  $i$  du retard minimum  $T_{min}^i$  comme dans le paragraphe 3.1, puis recherche sur l'ensemble des domaines du plus grand temps  $T_{sync}$  tel que :

$$\forall i, T_{sync} \leq T_{min}^i \text{ et } \forall i, \exists N_i \in \mathbb{N}, T_{sync} = N_i \Delta t_i,$$

où  $\Delta t_i$  correspond au pas de temps du domaine  $i$ .

**Etape 6'** ( $t \in [kT_{sync}, (k+1)T_{sync}]$ ) : calcul, par la formule intégrale approchée, sur chaque des domaine des champs  $E$  et  $H$  aux points de références des autres domaines. Pour chaque domaine  $i$ , les contributions pour  $t \geq kT_{sync}$  des champs  $E$  et  $H$  ainsi calculés par un domaine  $i$  sont stockées de manière échantillonnée pour  $t = n\Delta t_i$ ,  $n \in \mathbb{N}$

**Etape 5'** ( $t = (k+1)T_{sync}$ ) : pour chaque domaine  $i$ , les contributions des domaines  $i^*$  sont interpolées, selon les schémas respectivement utilisés sur ces domaines, afin de fournir des champs  $E$  et  $H$  aux temps  $n\Delta t_i$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Les valeurs ainsi ramenées sur des itérations de calcul en temps du domaine  $i$  peuvent alors être directement introduites comme termes sources dans l'étape 6' selon le même procédé que pour l'étape 6.

**Remarque 3.4.1** Comme aucun des pas de temps n'est a priori spécifié pour les points situés hors des domaines de calculs (points obtenus par rayonnement), ils peuvent être arbitrairement associés

à un des domaines de calculs et l'échantillonnage en temps se fera alors naturellement comme celui utilisé pour les points de référence sur les surfaces de Huygens du domaine choisi.

Nous proposons de tester cette technique de pas de temps locaux sur l'exemple d'utilisation de l'hybridation des méthodes différences finies et volumes finis proposé précédemment (cf figure 3.20).

Sur un tel exemple, la condition CFL du schéma volume fini impose un pas de temps de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-12} s$  alors que le maillage de l'antenne impose un pas de temps de  $10^{-11} s$  pour la résolution FDTD. Nous avons alors effectué deux simulations successives sur le même maillage : une avec les mêmes pas de temps  $5 \cdot 10^{-12} s$  sur les deux domaines (notée *MD FD – FV (prop 0.08)*), et une seconde simulation utilisant  $5 \cdot 10^{-12} s$  comme pas de temps pour le domaine traité par FVTD et un pas de temps deux fois plus gros pour celui traité par FDTD (notée *MD FD – FV (prop 0.08) / dt loc*).

Les résultats de ces calculs ont été représentés pour plusieurs points différents :

- un point situé entre l'antenne et la sphère (figure 3.25),
- et un point au voisinage direct de la sphère (figure 3.26) obtenu par relevé ponctuel.

Nous constatons qu'il n'y a aucune perte de précision induite par l'utilisation du pas de temps local, et ce aussi bien dans le cas de points situés hors domaines et calculés par rayonnement que dans le cas de points à l'intérieur des domaines.

Méthode :	Temps CPU :	Coût mémoire :
MD FD-FV (prop. 0.08) [sphère / FVTD]	x1	x1
MD FD-FV (prop. 0.08) [antenne / FDTD]	x3.47	x1.22
MD FD-FV (prop. 0.08) [sphère / FVTD] dt loc	x1	x1
MD FD-FV (prop. 0.08) [antenne / FDTD] dt loc	x1.81	x0.89

TAB. 3.5 – Comparaison des coûts pour les résolutions hybrides FDTD-FVTD sans et avec pas de temps local inter-domaines.

Les temps de calculs et les coûts mémoires de ces simulations pour chaque domaine sont donnés dans le tableau 3.5.

Nous pouvons d'abord remarquer que les temps de calculs et stockage mémoire du domaine traité par FVTD sont identiques sur les deux configurations ce qui est naturel ; le maillage, le pas de temps, ainsi que les nombres de points de références de l'autre domaine (antenne) n'ayant pas changé. Par contre, le temps de calcul du domaine traité par FDTD est significativement diminué ( $\approx 48\%$  de temps en moins), ceci s'expliquant logiquement par la réduction du nombre d'itérations en temps demandées. Nous pouvons aussi noter que le stockage global est lui aussi considérablement diminué ( $\approx 27\%$  de moins), ceci s'expliquant par la diminution de la taille des fenêtres de longueur  $T_{sync}$  une fois ramenées en nombre d'itérations sur le domaine.

Le schéma proposé ici permet donc à la fois une économie de temps calcul et de stockage mémoire, sans pour autant diminuer la précision de la méthode. Sur cet exemple, la résolution hybride avec pas de temps local inter-domaines s'est donc avérée très avantageuse.

**Remarque 3.4.2** *La démonstration de stabilité du chapitre 2 étant obtenue dans le cadre continu en temps et ne faisant intervenir comme constante de majoration qu'un polynôme du nombre de fenêtres de taille  $T_{sync}$ , la démarche présentée ici semble donc complètement naturelle et n'induit a priori aucun changement sur les conditions de stabilité de la méthode. Cette technique semble donc être un choix judicieux permettant une hybridation simple de méthodes, sous réserve que la configuration géométrique s'y prête, et permettant d'alléger les conditions CFL souvent assez coûteuses (en temps calculs et en stockage) sur de tels schémas.*

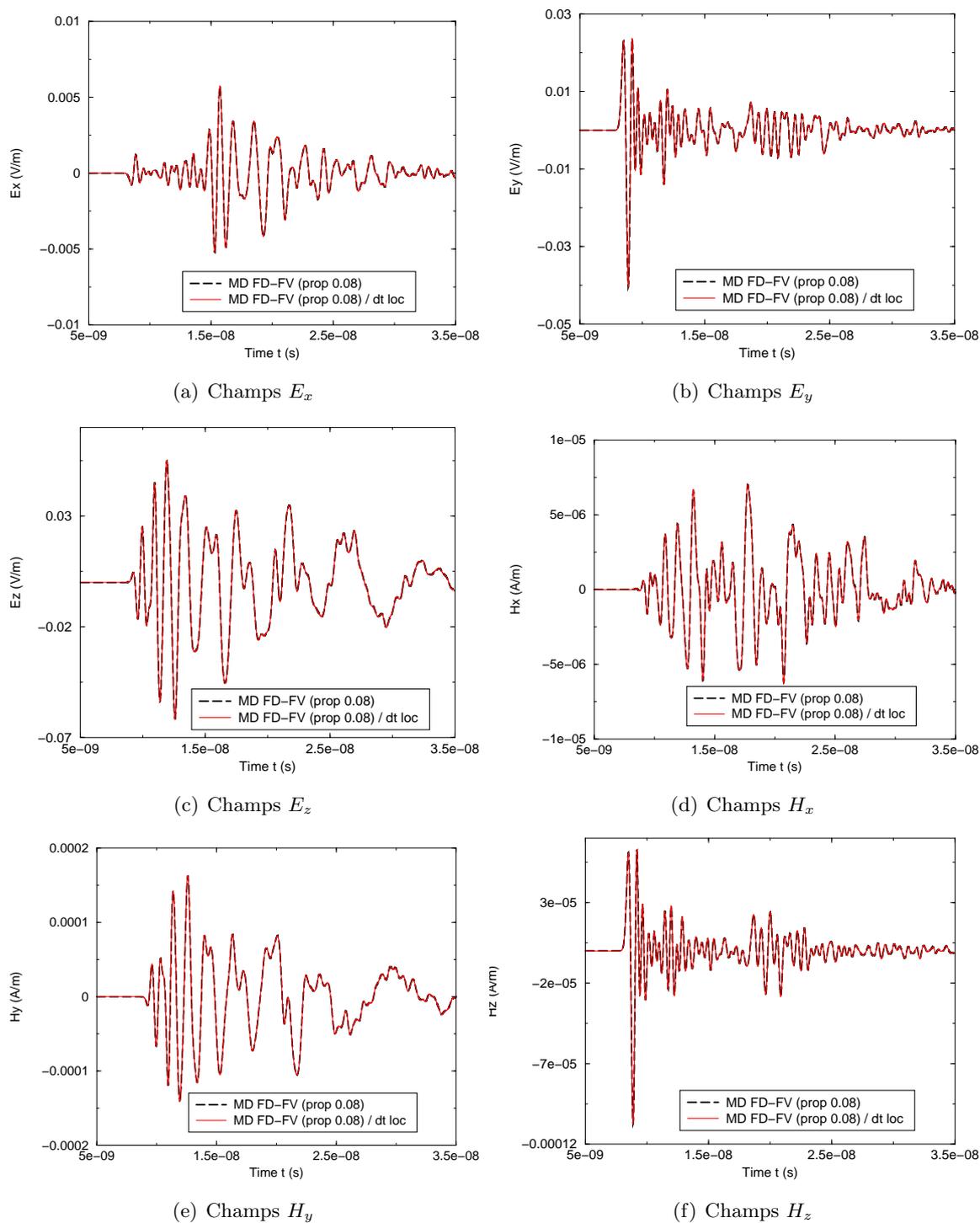


FIG. 3.25 – Exemple de résolution hybride FDTD-FVTD et utilisation de pas de temps local : résultat obtenu par rayonnement à mi-chemin entre l'antenne et la sphère.

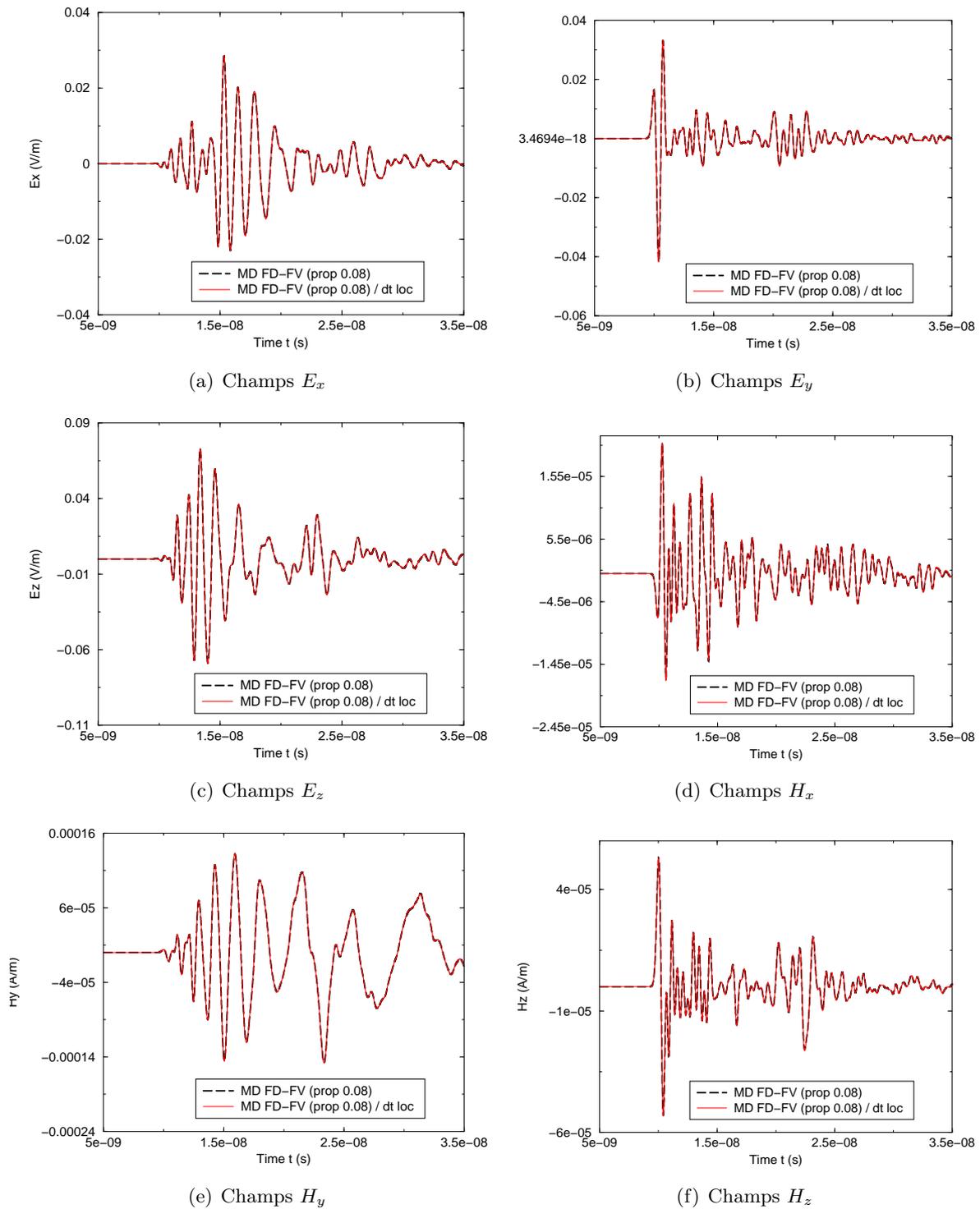


FIG. 3.26 – Exemple de résolution hybride FDTD-FVTD et utilisation de pas de temps local : résultat obtenu par relevé au voisinage proche de la sphère.

### 3.5 Résolution d'un problème de diffraction large-bande

Afin de montrer l'intérêt de la méthode multi-domaine dans un contexte de compatibilité électromagnétique, nous allons nous intéresser à un problème de diffraction composé de deux éléments : une antenne large-bande ayant un spectre étalé de 20Mhz à 1Ghz (déjà utilisée dans l'exemple de la figure 3.20), et la partie métallique constituant la carrosserie d'une voiture. La configuration globale de la simulation est représentée sur la figure 3.27.

Cet exemple, issu du projet européen GEMCAR, a déjà été étudié dans [32] à l'aide d'une méthode hybride différences finies / volumes finis mono-domaine. L'un des objectifs, non traité ici, était l'étude fine des phénomènes d'inductions de l'antenne sur des câbles situés à l'intérieur de l'habitacle de la voiture. Pour cela, une bonne précision des courants portés par la carrosserie était nécessaire. Celle-ci étant liée à la bonne prise en compte de la géométrie de la voiture, le traitement par méthode conforme volumes finis à été utilisé. Toutefois, l'utilisation globale de cette méthode n'était pas envisageable, d'une part à cause de la dissipation importante du schéma apparaissant sur de grands maillages, et d'autre part pour des problèmes de faisabilité numérique des simulations. Il a donc été préféré l'utilisation d'un solveur hybride FDTD-FVTD décrivant finement les courants au voisinage des câbles étudiés et offrant une plus grande souplesse d'exécution sur l'ensemble du maillage de l'antenne ainsi qu'entre les deux éléments.

Dans ce paragraphe nous nous allons reprendre cet exemple, illustrant une configuration réaliste pouvant admettre un découpage en sous-domaines disjoints, et proposer des comparaisons de résolutions obtenues soit sur des maillages globaux soit par la méthode multi-domaines.

#### Résolutions par différences finies et multi-domaines FDTD-FDTD

Dans un premier temps, il est intéressant de regarder l'apport sur cet exemple du découpage en sous-domaines disjoints par rapport à une résolution globale. Pour ce faire, les simulations effectuées vont comparer les résultats obtenus pour deux résolutions en FDTD sur toute la scène et un calcul par décomposition en sous-domaines. La résolution par décomposition en sous-domaines (notée *MD*) sera menée sur le même maillage que la première simulation globale (notée *FDTD*). Un maillage deux fois plus fin sera utilisé pour la seconde simulation globale (notée *FDTD/2*). Les maillages mono et multi-domaines utilisés sont représentés sur la figure 3.27.

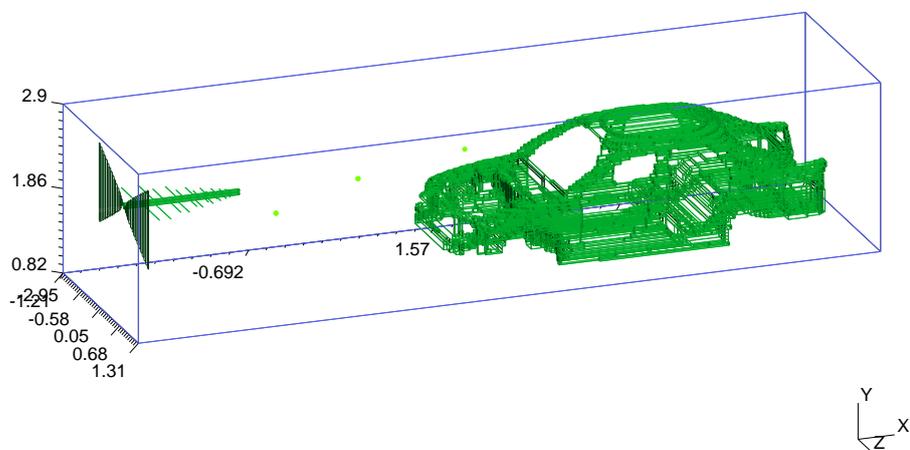
Afin de pouvoir comparer les résultats des différentes méthodes, les maillages (antenne et voiture) utilisés dans la résolution par décomposition de domaines sont des parties extraites du maillage global utilisé pour le calcul mono-domaine *FDTD*.

Notons en outre que ce maillage, bien que structuré, n'est pas régulier. En effet, le pas de maillage d'espace utilisé a été pris variable afin de mailler plus finement les zones proches des objets (essentiellement près des fils de l'antenne) et plus lâche aux endroits plus réguliers. Nous avons donc une différence de condition CFL entre la partie découpée autour de l'antenne et celle englobant la voiture. La méthode multi-domaine sera donc utilisée conjointement avec la stratégie de pas de temps locaux inter-domaines précédemment présentée amenant ainsi un pas de temps 2.5 fois plus grand pour le traitement de la voiture que celui utilisé pour l'antenne. Le pas de temps de l'antenne correspond au pas de temps global de la résolution *FDTD* mono-domaine. Le calcul *FDTD/2* utilisant donc un pas de temps 2 fois plus fin.

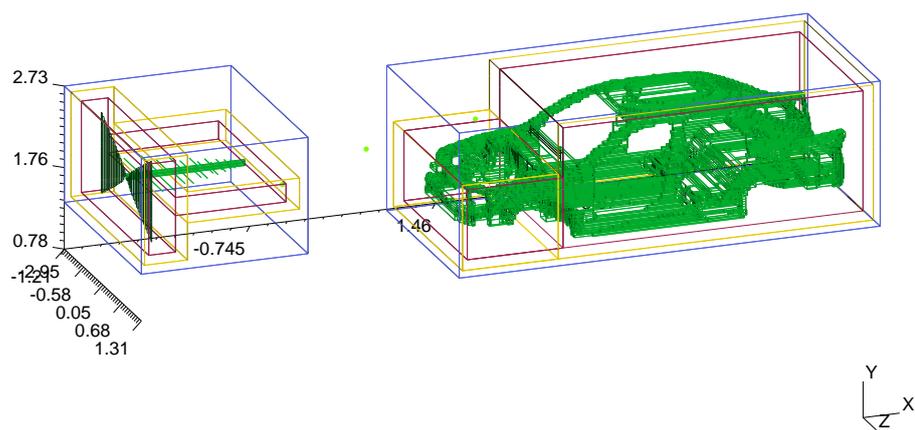
Le volume de maillage à traiter étant plus gros pour la voiture que pour l'antenne, comme détaillé ci-après cette utilisation de pas de temps différents permet sur cet exemple d'équilibrer les coûts entre les différents domaines.

Les résultats des calculs sont donnés pour trois points importants :

- un point placé près de l'antenne permettant d'observer la source (figure 3.28),



(a) Maillage pour les calculs mono-domaines



(b) Maillage pour les calculs multi-domaines

FIG. 3.27 – Exemple diffraction d'une antenne par une voiture : maillages *FDTD* utilisés

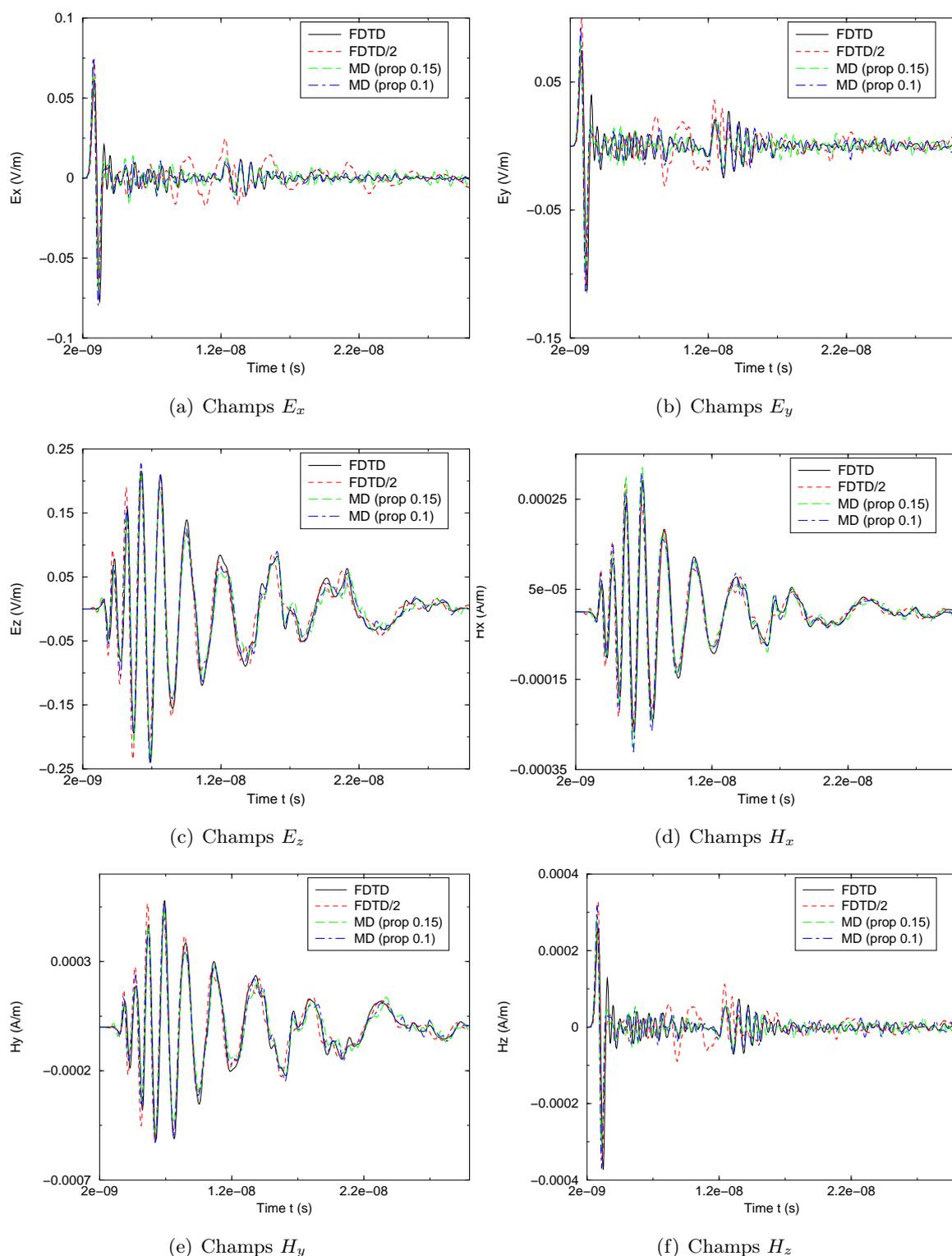


FIG. 3.28 – Comparaisons devant l'antenne : mono-domaine ( $FDTD$ ) / mono-domaine raffiné ( $FDTD/2$ ) / multi-domaines FDTD  $\delta/d < 0.15$  ( $MD(prop0.15)$ ) / multi-domaines FDTD  $\delta/d < 0.1$  ( $MD(prop0.1)$ )

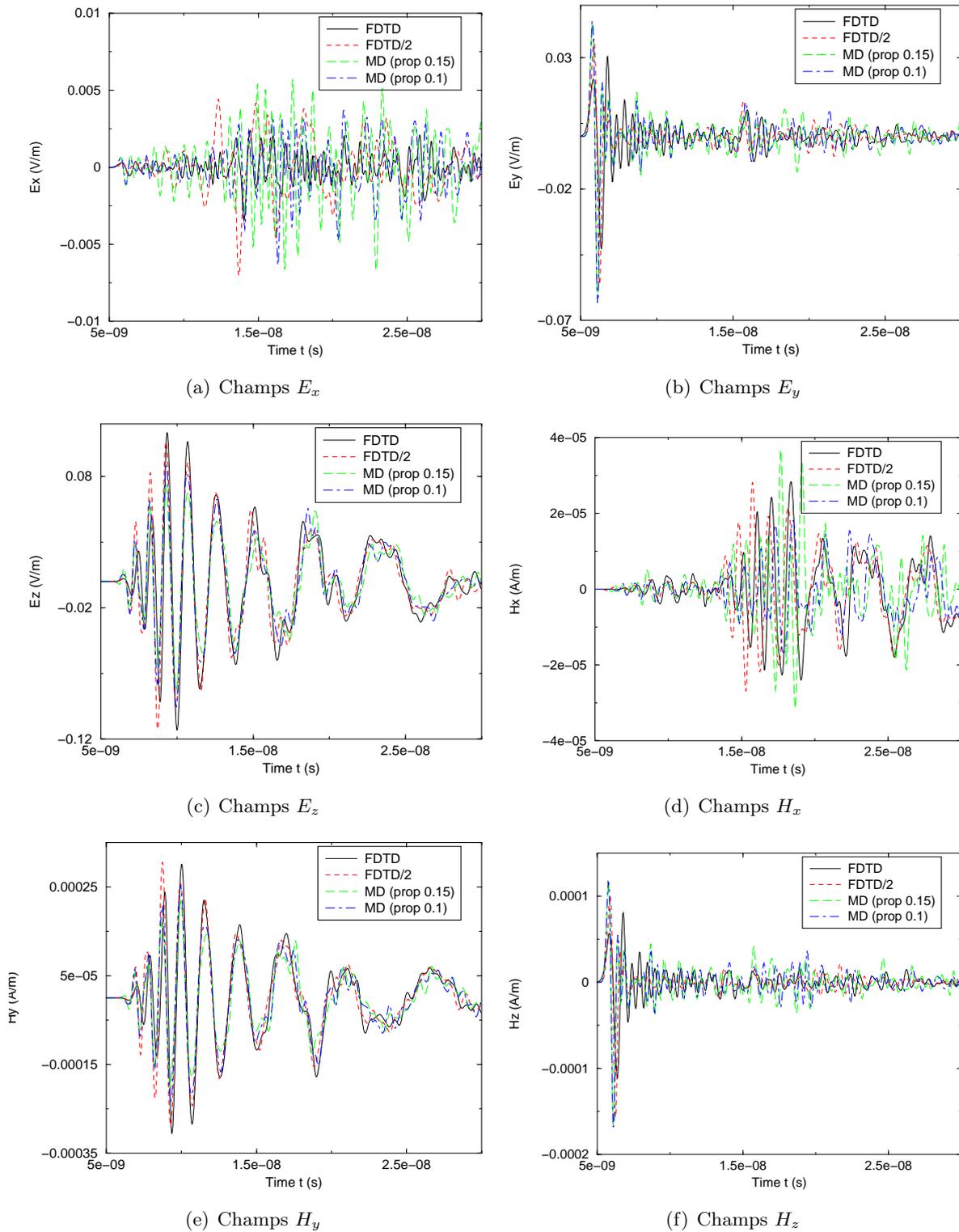


FIG. 3.29 – Comparaisons à mi-chemin antenne-voiture : mono-domaine ( $FDTD$ ) / mono-domaine raffiné ( $FDTD/2$ ) / multi-domaines FDTD  $\delta/d < 0.15$  ( $MD(prop 0.15)$ ) / multi-domaines FDTD  $\delta/d < 0.1$  ( $MD(prop 0.1)$ )

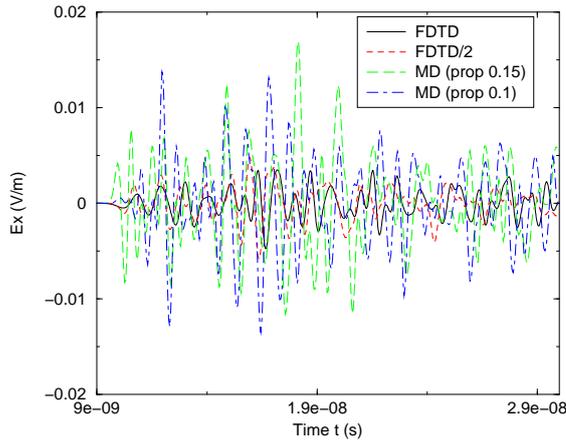
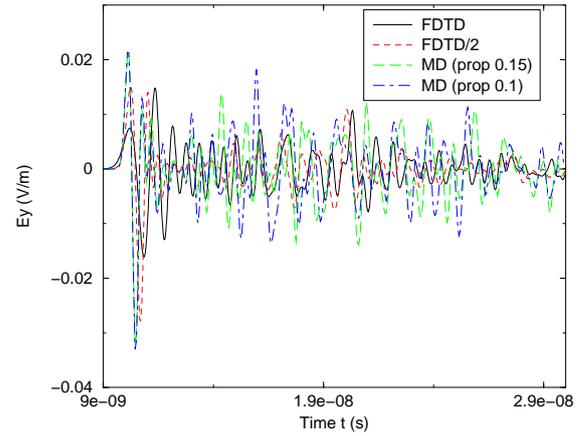
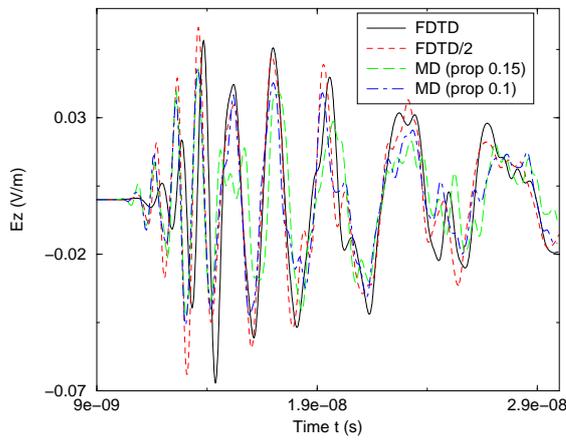
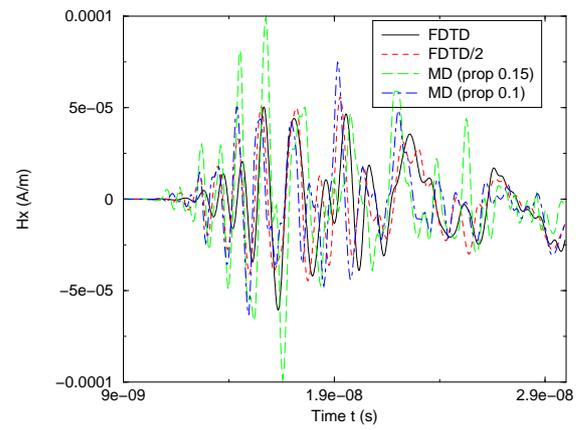
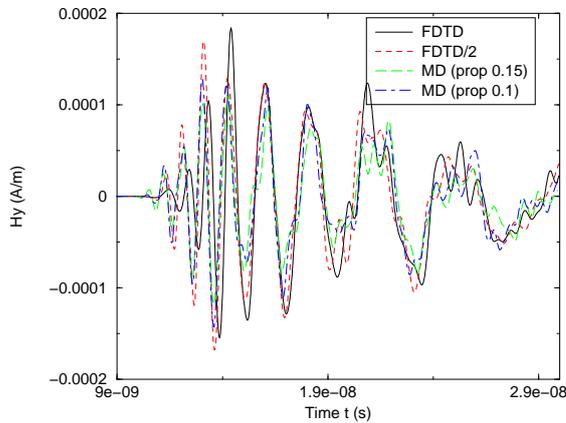
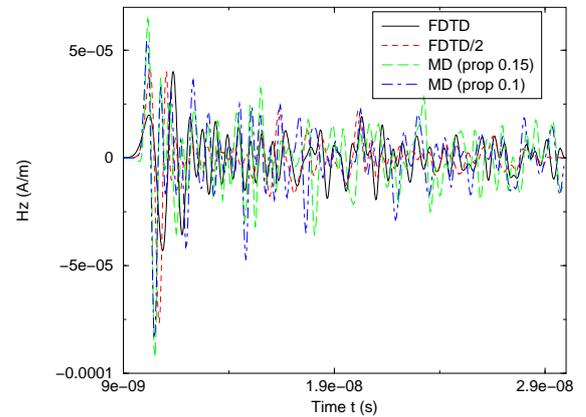
(a) Champs  $E_x$ (b) Champs  $E_y$ (c) Champs  $E_z$ (d) Champs  $H_x$ (e) Champs  $H_y$ (f) Champs  $H_z$ 

FIG. 3.30 – Comparaisons devant la voiture : mono-domaine ( $FDTD$ ) / mono-domaine raffiné ( $FDTD/2$ ) / multi-domaines FDTD  $\delta/d < 0.15$  ( $MD(prop0.15)$ ) / multi-domaines FDTD  $\delta/d < 0.1$  ( $MD(prop0.1)$ )

- un point à mi-chemin entre l’antenne et la voiture montrant le couplage (figure 3.29),
- un point près de la voiture montrant l’influence du choix de maillage sur la résolution (figure 3.30).

Sur ces figures il est possible de remarquer l’importance de la finesse du maillage sur les résultats. En effet, les écarts entre les courbes  $FDTD$  et  $FDTD/2$  sont, par endroits, assez importants. Ceci justifiant a priori la nécessité d’être précis sur la description des éléments ainsi que sur le rendu de la propagation du signal émis par l’antenne. Pour la résolution par décomposition de domaines, nous pouvons remarquer que, pour des maillages des deux domaines fixés, les courbes obtenues pour la précision initiale ( $\delta/d \leq 0.15$ ) sont très proches de celles obtenues pour une précision plus fine ( $\delta/d \leq 0.1$ ). Il s’en suit donc que nous ne sommes pas dans la phase saturation de la méthode présentée dans la section 3.2.3. Ceci s’observant aussi de manière numérique par la forte variations du nombre de points de référence sur les surfaces de Huygens ( $N_{inj}$ ) entre ces deux précisions. En outre les résultats divergeant peu, tout du moins sur les composantes principales du champs ( $E_x$  et  $H_y$ ), la solution du couplage par la méthode multi-domaines, pour ces maillages, semble donc être rendue assez finement.

En comparant les courbes obtenues pour les différentes configurations, les résolutions par FDTD sur maillage raffiné et méthode multi-domaines sont très proches, bien que toutefois cette dernière utilise un maillage extrait du cas test FDTD non-raffiné. De plus, les surfaces de Huygens et de prélèvement ont été choisies non-convexes et proches des géométries des deux éléments afin de diminuer d’autant la quantité de mailles utilisées par la FDTD pour la prise en compte des courants nécessaires aux phases d’antépolation et d’interpolation. La méthode de décomposition amène donc une amélioration des conditions de propagations entre l’antenne et la voiture. Globalement, l’effet de raffinement du maillage global semble faire converger la solution obtenue par FDTD vers celle évaluée sur les maillages tronqués auxquels la méthode de décomposition a été appliquée.

Méthode :	Temps CPU :	Coût mémoire :	$N_{inj}$ :	$\Delta t (\times 10^{-11} s)$ :
Mono-domaine $FDTD$	x1	x1	-	2
Mono-domaine $FDTD/2$	x13.61	x6.36	-	1
MD (prop. 0.15) [antenne]	x5.01	x0.29	49	2
MD (prop. 0.15) [voiture]	x3.24	x0.62	67	5
MD (prop. 0.1) [antenne]	x9.01	x0.32	94	2
MD (prop. 0.1) [voiture]	x8.47	x0.66	124	5

TAB. 3.6 – Comparaison des coûts pour les résolutions FDTD mono-domaines et multi-domaines.

En outre, sur le tableau 3.6 nous pouvons comparer les coûts respectifs des différentes résolutions utilisées. La quantité de stockage totale de la méthode multi-domaines est très largement inférieure à celles des différentes autres simulations. De même, le temps de calcul est meilleur sur la configuration en sous-domaines disjoints, pour les deux précisions utilisées, que sur le cas test mono-domaine raffiné. Les coûts sont de plus très proches entre les différents domaines grâce à l’emploi de la stratégie de pas de temps locaux inter-domaines. L’utilisation de la méthode de sous-domaines semble donc être très intéressante sur ce type de configurations.

Remarquons enfin que ces cas tests sont “avantageux” pour les résolutions mono-domaines car l’antenne et la voiture sont alignées et donc le maillage global est contenu dans un pavé relativement étroit. Toutefois, pour des configurations légèrement différentes, où l’antenne serait placée à même distance mais dans une position oblique par rapport à l’axe de la voiture par exemple, le maillage (et donc les coûts) pour la résolution globale s’en trouverait grandement augmenté alors que le coût de la résolution par la méthode multi-domaines sera quasi-inchangé.

### Hybridation différences finies / volumes finis

A partir des expériences précédentes, et afin de suivre l'idée de [32], le domaine décrivant la voiture va être maintenant traité par la méthode de volumes finis (FVTD) déjà employée dans le paragraphe 3.3.1. L'antenne reste toujours traitée par différences finies (FDTD). Comme représenté sur la figure 3.31, le domaine correspondant à la voiture est donc ici résolu par un solveur FVTD, l'antenne utilisant le même maillage que précédemment. Afin d'alléger la représentation sur la figure 3.31, seules les surfaces de Huygens et de prélèvement ainsi que les éléments (antenne et voiture) de chaque domaine ont été représentés.

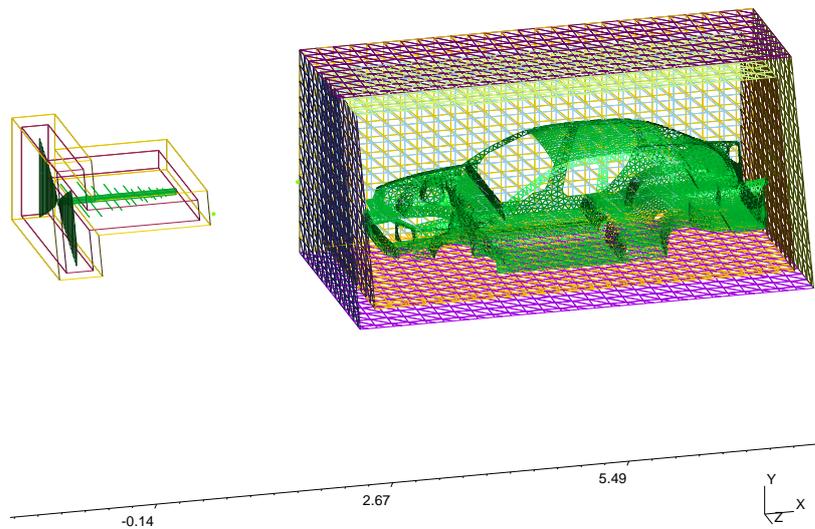


FIG. 3.31 – Diffraction d'une antenne par une voiture : maillage FVTD-FDTD utilisé (coupe).

Pour le calcul de ce cas test, le pas de temps CFL requis par le domaine de l'antenne est toujours de  $10^{-11}s$ , alors que le maillage de la voiture impose un pas de temps de  $5 \cdot 10^{-13}s$  sur le second domaine. Cette différence s'explique par le caractère très plat de certains éléments, imposés par la géométrie, dans le maillage de la voiture. Nous utiliserons donc ici la méthode de pas de temps local inter-domaines du paragraphe 3.4 avec un pas de temps 20 fois plus important pour le traitement (FDTD) de l'antenne que celui utilisé dans la résolution (FVTD) de la voiture.

Sur les figures 3.32, 3.33 et 3.34 nous avons comparé les résultats de différentes simulations aux mêmes points que ceux utilisés précédemment et correspondant respectivement sur les figures 3.28, 3.29 et 3.30.

Nous avons donc comparé les deux calculs mono-domaines  $FDTD$  et  $FDTD/2$  avec le calcul par la méthode hybride  $MDFD - FV$  utilisant des regroupements dont le paramètre de regroupement est fixé pour  $\delta/d \leq 0.15$ . En outre, les résultats obtenus par le calcul multi-domaines  $MD$  pour cette précision est lui-aussi représenté.

Nous remarquons alors que sur la figure 3.32 les résultats obtenus pour les deux calculs par

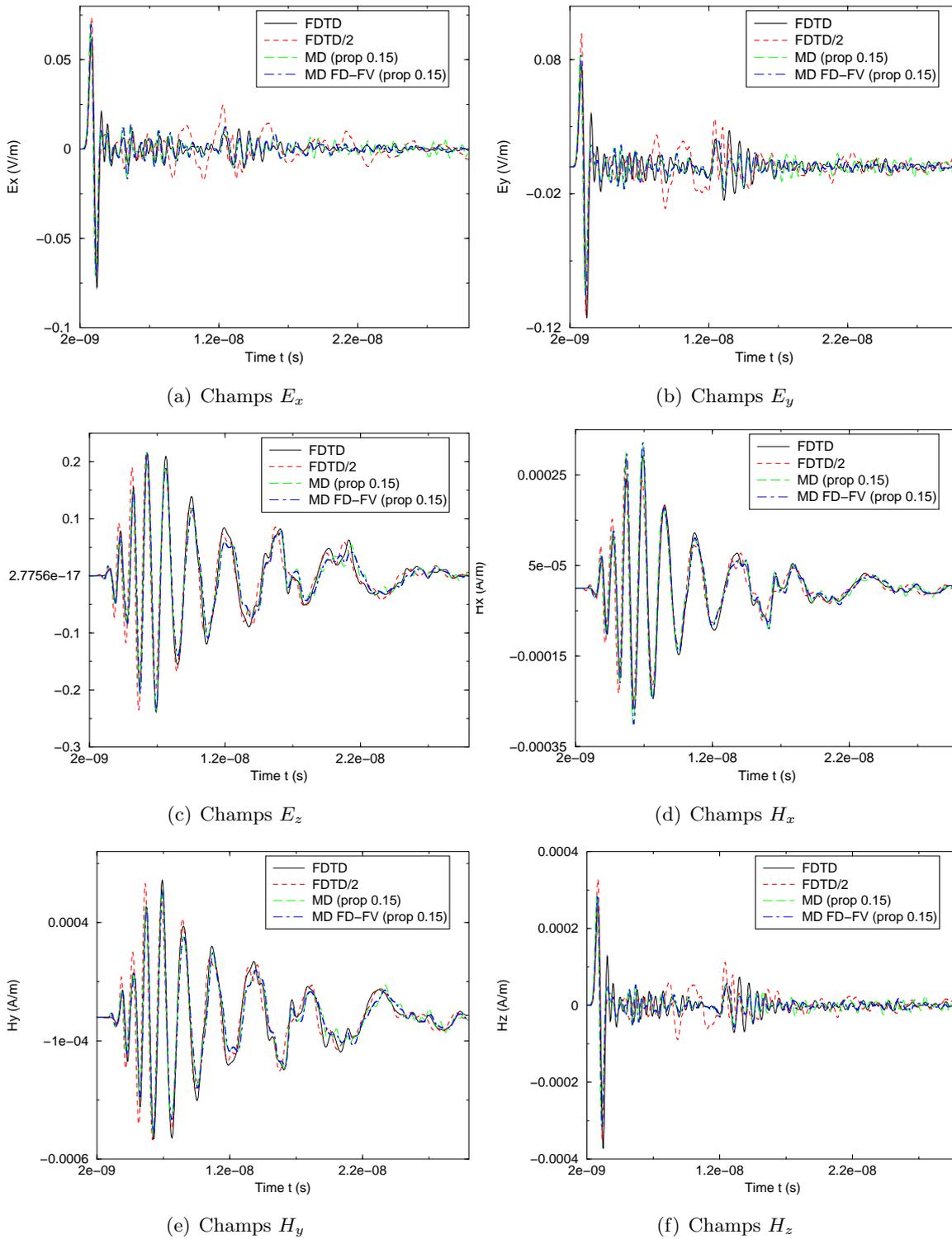


FIG. 3.32 – Comparaisons devant l'antenne : mono-domaine ( $FDTD$ ) / mono-domaine raffiné ( $FDTD/2$ ) / multi-domaines FDTD  $\delta/d < 0.15$  ( $MD(prop 0.15)$ ) / multi-domaines hybride FDTD-FVTD  $\delta/d < 0.15$  ( $MD FD - FV(prop 0.15)$ )

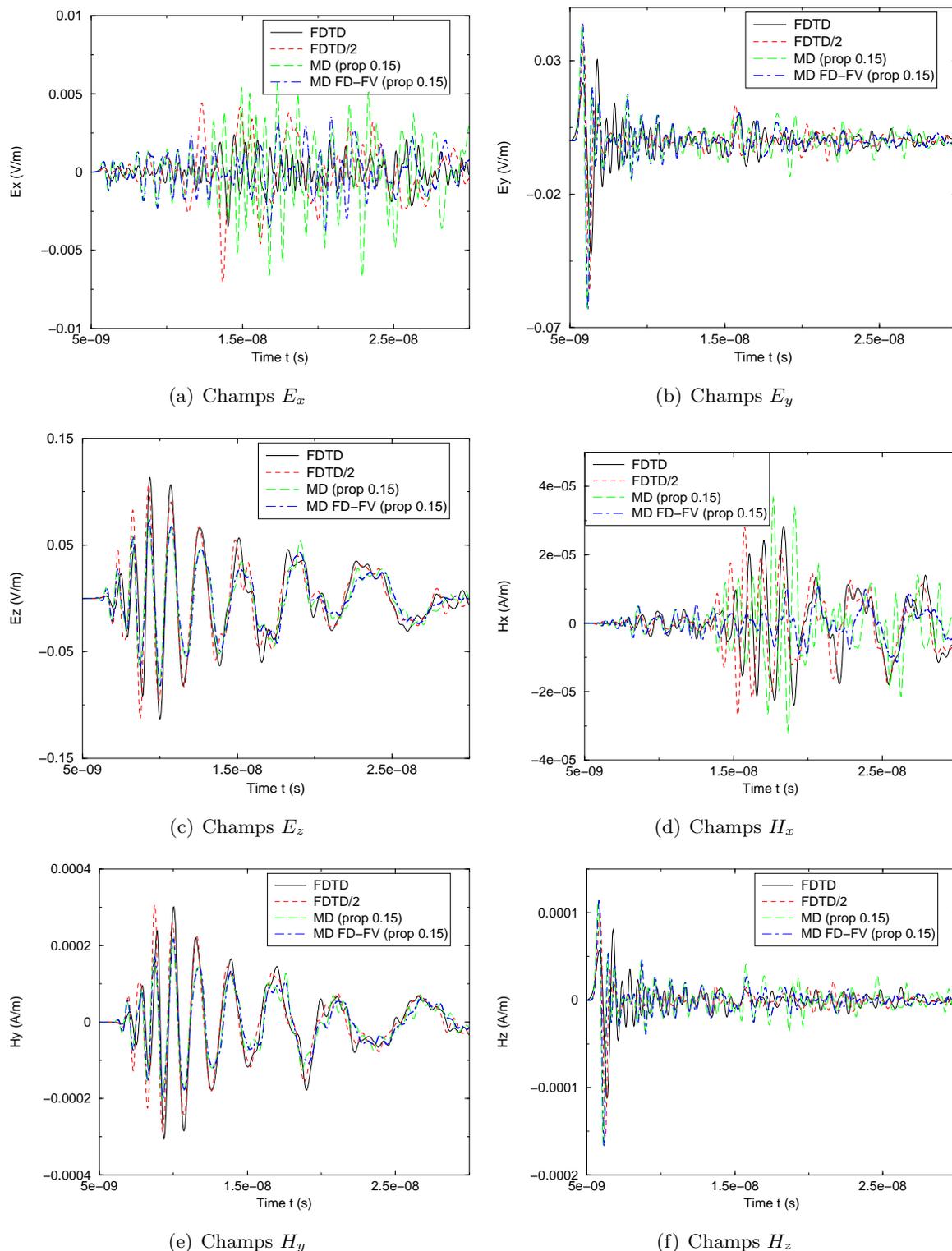


FIG. 3.33 – Comparaisons à mi-chemin antenne-voiture : mono-domaine ( $FDTD$ ) / mono-domaine raffiné ( $FDTD/2$ ) / multi-domaines FDTD  $\delta/d < 0.15$  ( $MD(prop 0.15)$ ) / multi-domaines hybride FDTD-FVTD  $\delta/d < 0.15$  ( $MD FD - FV(prop 0.15)$ )

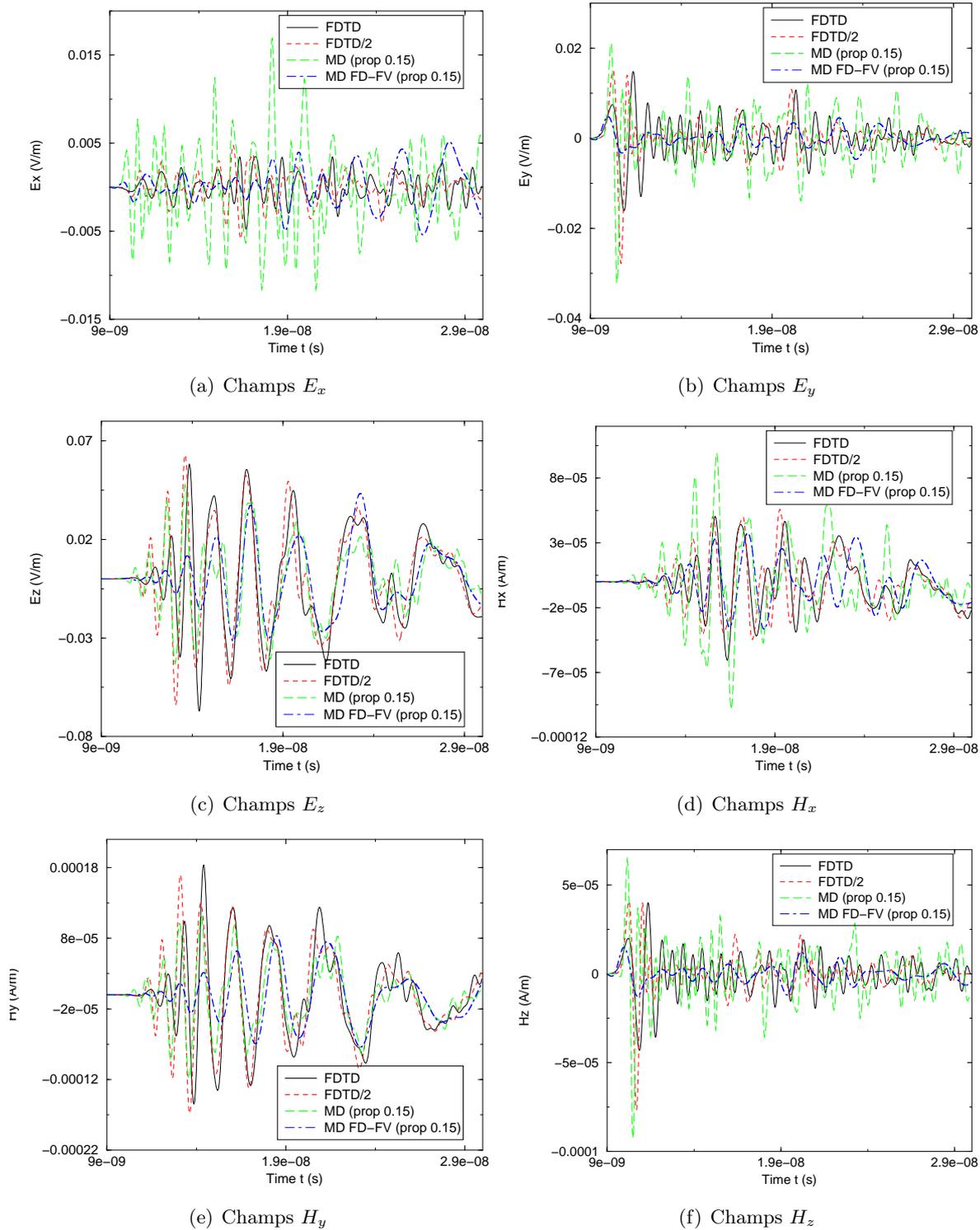


FIG. 3.34 – Comparaisons devant la voiture : mono-domaine ( $FDTD$ ) / mono-domaine raffiné ( $FDTD/2$ ) / multi-domaines FDTD  $\delta/d < 0.15$  ( $MD (prop 0.15)$ ) / multi-domaines hybride FDTD-FVTD  $\delta/d < 0.15$  ( $MD FD - FV (prop 0.15)$ )

la méthode multi-domaines sont quasiment identiques. Ces deux calculs sont obtenus proches de l'antenne et comme le maillage utilisé est le même dans les deux configurations nous y visualisons donc essentiellement le rayonnement de l'antenne calculée en FDTD et qui donne donc naturellement les mêmes résultats. Les légères différences éventuelles sont dues à la différence du nombre de points de regroupements ainsi que du placement de ceux-ci dans ces deux cas. Ces deux paramètres étant reliés, comme présenté au début du chapitre, aux placements des points de références sur la surface de Huygens de l'autre domaine qui eux sont différents.

Dans le cas du point à mi-chemin entre l'antenne et la voiture (figure 3.33) nous pouvons discerner à peu près deux phases. La première phase concerne essentiellement le rayonnement de l'antenne (pour environ  $t \leq 1.5 \cdot 10^{-8}$ ) et donne donc comme pour la figure 3.32 des résultats quasi-identiques. Dans la seconde phase ( $t \geq 1.5 \cdot 10^{-8}$ ) nous observons le rayonnement de la voiture en ce point amenant à de légères différences. Dans ce cas, le rendu par la méthode hybride semble être légèrement meilleur à celui obtenu par  $FDTD - FDTD$ . Ce dernier proposant des niveaux un peu plus hauts par endroits.

Enfin, sur la figure 3.34 correspondant au point placé en face de la voiture nous observons le comportement du schéma hybride. Notons tout d'abord que les premiers pics sont rendus avec une amplitude plus faible ceci étant a priori essentiellement dû à la dissipation pour les hautes fréquences de ce schéma de volumes finis; le maillage hors de la surface de la voiture devant être plus raffiné pour bien rendre ces phénomènes. Dans l'ensemble, et surtout dans les parties plus basses fréquences, la précision semble globalement être meilleure avec le schéma hybride que pour l'utilisation du schéma  $FDTD - FDTD$  avec le même critère de regroupement. Ceci justifie alors l'introduction et l'utilisation de ce types de schémas hybrides conforme/non-conforme.

Méthode :	Temps CPU :	Coût mémoire :	$N_{inj}$ :	$\Delta t (\times 10^{-11} s)$ :
Mono-domaine $FDTD$	x1	x1	-	2
Mono-domaine $FDTD/2$	x13.61	x6.36	-	1
MD (prop. 0.15) [antenne - FDTD]	x12.77	x0.57	74	2
MD (prop. 0.15) [voiture - FVTD]	x220.04	x4.68	140	0.05

TAB. 3.7 – Comparaison des coûts pour la résolution FDTD mono-domaine et multi-domaines hybride FTDT-FVTD.

Finalement, d'après le tableau 3.7, notons tout d'abord que les coûts de calculs sont globalement plus élevés pour la résolution  $FDTD - FVTD$ . Ceci s'explique, pour la partie  $FVTD$  du schéma par le pas de temps 100 fois plus faible que celui utilisé dans le cadre  $FDTD - FDTD$  augmentant significativement le temps de calcul ainsi que le nombre d'itérations en temps sur les points de couplages stockées; et pour la partie  $FDTD$  par le plus grand nombre de points de références sur la surface de Huygens du second domaine que dans le cas  $FDTD - FDTD$  (140 contre 67). Pour cette seconde partie les coûts se rapprochent alors logiquement de ceux obtenus pour la simulation  $FDTD - FDTD$  avec regroupement à 0.1 (120 points sur la surface de Huygens du domaine de la voiture). La différence sur le nombre de points de couplages  $N_{inj}$  entre les simulations  $FDTD$  et  $FVTD$  correspond aux géométries de surfaces de Huygens employées. En effet, sur le maillage en volumes finis nous avons utilisé une boîte parallélépipédique alors que le maillage différences finies avait une surface non-convexe plus proche de la géométrie de la voiture. Dans ce dernier cas, les points de références se trouvent alors globalement plus éloignés du domaine de l'antenne et sont donc moins nombreux à paramètre de regroupement égal. Ceci motivant ici encore l'utilisation de surfaces de Huygens et de prélèvement admissibles non-convexes afin de diminuer les coûts tout en

augmentant la précision des courants respectivement ajoutés et relevés.

Notons enfin que sur tous les exemples numériques, l'utilisation de pas de temps locaux inter-domaines n'a entraîné aucune instabilité, y compris sur cet exemple où le facteur multiplicatif était pourtant de 20.

## Chapitre 4

# Systeme PML généralisé

Le principe de découpage en sous-domaines disjoints présenté dans le chapitre 2 donne un système d'équations de Maxwell (2.13). Chaque élément du système est donné sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^3$  et est constitué d'inhomogénéités et de sources localisées à l'intérieur d'un domaine compact, l'extérieur de celui-ci étant homogène. La réalisation numérique du calcul nécessite alors l'introduction de conditions aux limites afin de pouvoir réduire le volume de calcul à un sous-domaine compact de  $\mathbb{R}^3$ . Les deux principaux types de conditions aux limites employés sont donnés

- soit par utilisation, et éventuellement restriction, d'équation intégrales sur la frontière (voir par exemple l'introduction des *On Surface Radiating Conditions* [7]),
- soit à l'aide d'un milieu absorbant fictif, le plus usité étant donné par les *Perfect Matching Layers* (PML) introduites par Bérenger [14].

Dans le cadre du calcul par décomposition en sous-domaines, les conditions aux limites dérivées par équations intégrales sont le plus souvent utilisées (voir par exemple [16, 38, 45]). Ceci s'explique par le gain en stockage obtenu par la restriction "proche des objets" qu'induit naturellement l'absence d'hypothèse de convexité des domaines dans l'écriture des équations intégrales. Toutefois, les équations intégrales de frontières engendrent un surcoût en  $O(N_s^2 N_p^2)$  ( $N_s$  et  $N_p$  représentant le nombre de points nécessaires au calcul des termes de l'équation intégrale sur elle-même si on ne considère qu'une surface frontière, ou d'une surface  $\mathcal{S}_s$  sur une surface "duale"  $\mathcal{S}_p$  si on introduit un double maillage de la frontière), et peut se réduire en  $O(N_s \log(N_s) N_p \log(N_p))$  par utilisation de techniques de compressions basées sur les décompositions en ondes planes, proches des FMM (voir par exemple [46, 60]).

*A contrario*, l'écriture de systèmes PML à partir d'une formulation dispersive (cf [24]) amène à la recherche d'une solution approchée dont l'erreur est exponentiellement décroissante avec la pénétration dans les couches et dont l'implémentation se fait à l'aide d'un système augmenté du même type que celui déjà utilisé. Les coûts de calculs sont alors du même ordre que ceux nécessaires à la résolution des équations de Maxwell dans le domaine borné.

Nous avons donc choisi l'emploi de PML pour borner les domaines de calculs du système couplé (2.13).

### 4.1 Ecritures par changement de variables

Dans un premier temps nous allons rappeler de manière brève les constructions des principaux systèmes PML. Par la suite, nous proposerons une nouvelle écriture de systèmes PML sous une forme s'inspirant de ceux-ci.

### 4.1.1 Système PML de Bérenger et complexification des variables

En 1994, Bérenger [14] a introduit des couches absorbantes pour les équations de Maxwell en deux dimensions. Le principe repose sur l'introduction d'un milieu fictif absorbant appelé *Perfectly Matched Layer* (PML). Les couches PML consistent en un dédoublement des composantes du champs  $E$  et  $H$ , puis en leur détermination à partir d'un systèmes d'équations augmentées. L'objectif est alors d'absorber les ondes normales à la frontière du domaine vide/PML.

En 1996, il montre [15] que ces conditions s'étendent au cas des équations de Maxwell en trois dimensions par dédoublement de chaque composante de  $E$  et  $H$  en deux sous-composantes, en remplaçant la résolution du système d'équations de Maxwell par le système (4.1) dans le cadre d'un volume de calcul parallélépipédique  $[-x_0, x_0] \times [-y_0, y_0] \times [-z_0, z_0]$  en coordonnées cartésiennes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t E_{xy} + \sigma_y E_{xy} = \partial_y (H_{zx} + H_{zy}) \\ \partial_t E_{xz} + \sigma_z E_{xz} = -\partial_z (H_{yz} + H_{yx}) \\ \partial_t E_{yz} + \sigma_z E_{yz} = \partial_z (H_{xy} + H_{xz}) \\ \partial_t E_{yx} + \sigma_x E_{yx} = -\partial_x (H_{zx} + H_{zy}) \\ \partial_t E_{zx} + \sigma_x E_{zx} = \partial_x (H_{yz} + H_{yx}) \\ \partial_t E_{zy} + \sigma_y E_{zy} = -\partial_y (H_{xy} + H_{xz}) \\ \partial_t H_{xy} + \sigma_y^* H_{xy} = -\partial_y (E_{zx} + E_{zy}) \\ \partial_t H_{xz} + \sigma_z^* H_{xz} = \partial_z (E_{yz} + E_{yx}) \\ \partial_t H_{yz} + \sigma_z^* H_{yz} = -\partial_z (E_{xy} + E_{xz}) \\ \partial_t H_{yx} + \sigma_x^* H_{yx} = \partial_x (E_{zx} + E_{zy}) \\ \partial_t H_{zx} + \sigma_x^* H_{zx} = -\partial_x (E_{yz} + E_{yx}) \\ \partial_t H_{zy} + \sigma_y^* H_{zy} = \partial_y (E_{xy} + E_{xz}) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où les fonctions  $\sigma_\mu$  et  $\sigma_\mu^*$ , pour  $\mu \in \{x, y, z\}$ , ne dépendent que de la variable  $\mu$ , sont nulles pour  $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$  et strictement positives pour  $|\mu| > \mu_0$ . Il a alors montré que, sous réserve de choisir  $\sigma_\mu = \sigma_\mu^*$  pour tout  $\mu$ , toutes les ondes planes étaient absorbées par les couches PML, que celles-ci n'induisaient pas de réflexion au niveau de l'interface et que leurs amplitudes décroissaient exponentiellement avec l'éloignement à la frontière du domaine.

A partir des travaux de Bérenger, les couches PML ont été par la suite réinterprétées en remplaçant le système (4.1) par une complexification des variables dans les équations de Maxwell (voir par exemple [22, 19, 49]). Pour ce faire, les équations de Maxwell sont d'abord réécrites sous forme fréquentielle par une transformation de Fourier-Laplace de paramètre  $p = ik - \varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} p\hat{E} - \nabla \times \hat{H} = 0, \\ p\hat{H} + \nabla \times \hat{E} = 0, \end{array} \right. \quad (4.2)$$

$\hat{E}$  et  $\hat{H}$  désignant respectivement les transformées de Fourier-Laplace de  $E$  et  $H$ . Ensuite, une complexification des variables  $x, y$  et  $z$  est introduite sous la forme de changements de variables à valeurs dans  $\mathbb{C}$

$$\tilde{\mu}(\mu) = \mu + \frac{1}{p} \int_0^\mu \sigma_\mu(s) ds, \quad (4.3)$$

où les fonctions  $\sigma_\mu$  sont choisies comme précédemment. Les opérateurs de dérivations spatiales  $\partial/\partial\mu$  présents dans les termes  $\nabla \times$  sont alors remplacés par des opérateurs de dérivations à coefficients complexes  $\partial/\partial\tilde{\mu}$

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{\mu}} = \frac{1}{s_\mu} \frac{\partial}{\partial\mu}, \quad (4.4)$$

où  $s_\mu = 1 + \sigma_\mu/p$ . Le système (4.2) est alors remplacé par

$$\begin{cases} p\tilde{E} - \widetilde{\nabla} \times \tilde{H} = 0, \\ p\tilde{H} + \widetilde{\nabla} \times \tilde{E} = 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

où les inconnues  $\hat{E}$  et  $\hat{H}$  sont remplacées respectivement par  $\tilde{E}$  et  $\tilde{H}$ , et où  $\widetilde{\nabla} \times$  est l'opérateur

$$\widetilde{\nabla} \times = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Le système d'équations de Maxwell avec PML s'obtient alors finalement en effectuant la factorisation de l'opérateur  $\widetilde{\nabla} \times$  (voir par exemple [24]) sous la forme

$$\widetilde{\nabla} \times = N((\nabla \times)M), \text{ avec } M = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix} \text{ et } N = \frac{1}{s_x s_y s_z} M, \quad (4.7)$$

puis en posant le changement d'inconnues  $\tilde{\tilde{E}} = M\tilde{E}$  et  $\tilde{\tilde{H}} = M\tilde{H}$ ; on obtient alors

$$\begin{cases} pN^{-1}M^{-1}\tilde{\tilde{E}} - \nabla \times \tilde{\tilde{H}} = 0, \\ pN^{-1}M^{-1}\tilde{\tilde{H}} + \nabla \times \tilde{\tilde{E}} = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Cette écriture [24] peut s'interpréter comme la perturbation d'un opérateur différentiel (l'opérateur symétrique de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  définit par  $(f, g) \mapsto (-\nabla \times g, \nabla \times f)$ ) par un opérateur d'ordre 0 et permet ainsi d'être implémentée sur des schémas de type volumes finis comme effectué par la suite.

Dans l'optique de cette thèse, l'étude des équations de Maxwell stationnaires, le système (4.8) peut se relever en un système d'équations temporelles. Développons alors les deux principales formulations temporelles utilisées.

### Formulation convolutive

Le produit  $N^{-1}M^{-1}$  donne une matrice diagonale contenant des pôles en  $p$ ;  $N^{-1}M^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_x s_z}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_x s_y}{s_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(p + \sigma_y)(p + \sigma_z)}{p(p + \sigma_x)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(p + \sigma_x)(p + \sigma_z)}{p(p + \sigma_y)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(p + \sigma_x)(p + \sigma_y)}{p(p + \sigma_z)} \end{pmatrix}.$$

Afin d'en établir un relèvement il est nécessaire d'extraire de cette écriture des parties correspondant à des transformées de Fourier-Laplace d'opérateurs différentiels ou intégraux et faisant apparaître une partie de dérivation temporelle qui, combinée à la partie en  $\pm \nabla \times$ , coïncide avec les équations de Maxwell à l'intérieur du domaine borné par les PML. Une décomposition possible de  $N^{-1}M^{-1}$  est donnée sous la forme [49]

$$pN^{-1}M^{-1} = p\mathbb{I}_3 + A + R_1(p\mathbb{I}_3 + C)^{-1}R_2,$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} \sigma_z + \sigma_y - \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z + \sigma_x - \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x + \sigma_y - \sigma_z \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix},$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z - \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_y - \sigma_z \end{pmatrix} \text{ et } R_2 = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x - \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x - \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Le système (4.8) est alors relevé en temps sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t E + AE + R_1 K(t) *_t R_2 E - \nabla \times H = 0, \\ \partial_t H + AH + R_1 K(t) *_t R_2 H + \nabla \times E = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\text{avec } K(t) = \begin{pmatrix} e^{-t\sigma_x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t\sigma_y} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t\sigma_z} \end{pmatrix}.$$

L'intérêt de cette formulation repose dans l'obtention d'un système temporel bien posé et similaire aux équations de Maxwell, donc facilement implémentable sur un schéma de résolution classique.

### Système augmenté : formulation de Gedney

L'autre type de relèvement temporel du système (4.8) est l'écriture d'un système d'équations de Maxwell "augmenté", c'est-à-dire ici donné par les équations de Maxwell couplé des équations différentielles ordinaires (EDO) en  $t$ . La formulation la plus usité, proposée par Gedney [34], peut être assimilée à la décomposition de  $N^{-1}M^{-1}$  sous la forme

$$N^{-1}M^{-1} = Z_1 Z_2 Z_0^{-1}, \quad (4.10)$$

avec  $Z_1 = \begin{pmatrix} s_y & 0 & 0 \\ 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & s_x \end{pmatrix}$ ,  $Z_2 = \begin{pmatrix} s_z & 0 & 0 \\ 0 & s_x & 0 \\ 0 & 0 & s_y \end{pmatrix}$  et  $Z_0 = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix}$ . On pose alors le changement d'inconnues  $D = Z_2 A_0^{-1} E$  et  $B = Z_2 Z_0^{-1} H$ ; le système (4.8) devient alors

$$\begin{cases} pZ_1 D - \nabla \times H = 0, \\ pZ_1 B + \nabla \times E = 0, \end{cases}$$

soit encore, en remarquant que les matrices diagonales  $Z_2$  et  $Z_0^{-1}$  commutent

$$\begin{cases} pZ_1 D - \nabla \times H = 0, \\ pZ_2 E = pZ_0 D, \\ pZ_1 B + \nabla \times E = 0, \\ pZ_2 H = pZ_0 B. \end{cases} \quad (4.11)$$

Les matrices  $pZ_0$ ,  $pZ_1$  et  $pZ_2$  étant toutes des polynômes de degré 1 en  $p$ , (4.11) se relève facilement en temps sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t D + F_1 D - \nabla \times H = 0, \\ \partial_t E + F_2 E = \partial_t D + F_0 D, \\ \partial_t B + F_1 B + \nabla \times E = 0, \\ \partial_t H + F_2 H = \partial_t B + F_0 B, \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\text{avec } F_0 = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}, F_1 = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \text{ et } F_2 = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_y \end{pmatrix}.$$

L'intérêt principal du système (4.12) par rapport à la formulation convolutive (4.9) réside dans l'apparition de deux EDO à la place des termes convolution en temps, réduisant ainsi le stockage de valeurs. Comme dans le cas de (4.9), sa formulation spatiale reste inchangée (à un opérateur de multiplication près) permettant ainsi une implémentation aisée dans les schémas classiques.

#### 4.1.2 Généralisation à des géométries quelconques : *Conformal PML*

Le système de complexification des variables (4.3) a été étendu à d'autres types de géométries, essentiellement canoniques, de la frontière du domaine de calcul. Suivant le même procédé, le changement de variables (4.3) a été par exemple appliqué (voir par exemple [24] et références)

- sur la coordonnée radiale  $\rho$ , dans le cas d'une frontière sphérique pour les équations de Maxwell écrites en coordonnées polaires  $(\rho, \theta, \phi)$ ,
- ou sur les coordonnées radiale  $\rho$  et axiales  $z$ , pour des domaines en forme de tube dans le système de coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ .

Dans chaque cas une formulation dispersive équivalente sous forme convolutive (4.9) ou de système augmentée (4.12) a pu être développée.

Une extension au cas de frontières quelconques a été proposée par *Teixeira et al's* [65], reposant essentiellement sur la complexification de la coordonnée suivant la normale  $\xi$  dans le système de coordonnées locales  $(s, \phi, \xi)$ . Ils ont alors montré et vérifié numériquement [65] que les conformal PML n'étaient pas correctes pour des couches PML non-convexe (cf figure 4.1. Toutefois en effectuant une convexification par génération hyperbolique du maillage PML les résultats sont alors corrects.

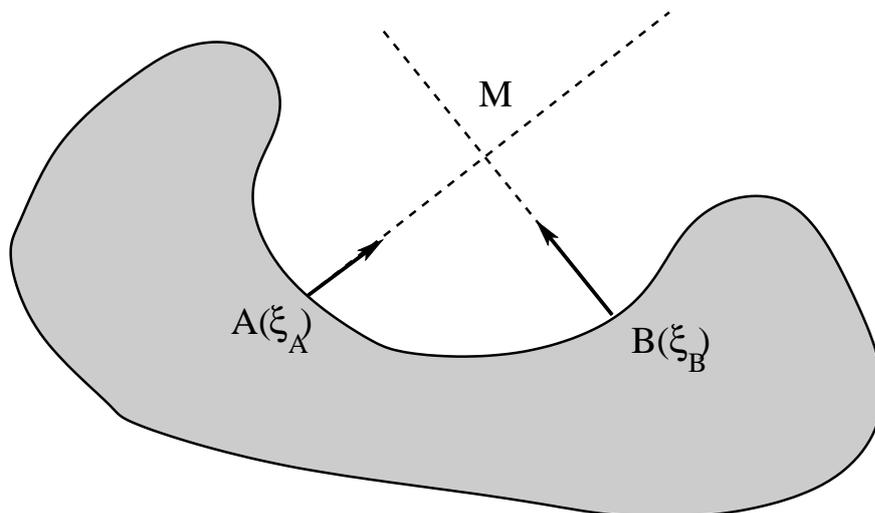


FIG. 4.1 – Conformal PML : description dans le cas non-convexe

## 4.2 Variétés absorbantes

Une autre approche possible pour la généralisation des systèmes PML est de considérer que le domaine  $\Omega$  est la trace sur  $\mathbb{R}^3$ , éventuellement à un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  près, d'une variété complexe  $M$  de  $\mathbb{C}^3$  comme illustré sur la figure 4.2.

Les changements de variables complexes précédemment introduits correspondent alors à des exemples d'équations de telles variétés décrites par un difféomorphisme  $\Phi^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow M \subset \mathbb{C}^3$

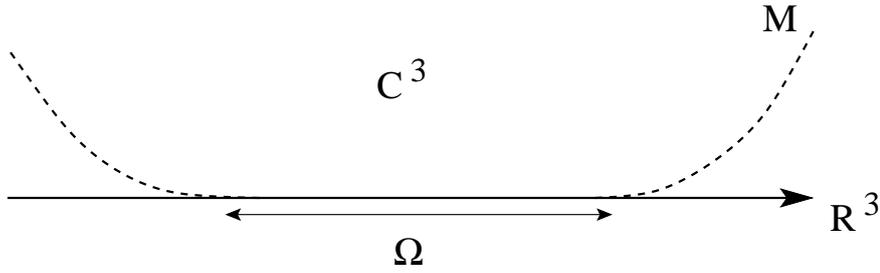


FIG. 4.2 – Description de l'exhaustion utilisée.

vérifiant  $\Phi^{-1}(x) = x$  pour  $x \in \Omega \subset M \cap \mathbb{R}^3$ . *Lassas et al's* [41, 42] ont alors proposé de définir des *variétés pseudo-Riemanniennes complexes absorbantes* généralisant ces propriétés. On entend par variété pseudo-Riemannienne complexe une variété réelle de dimension 3, à fibrés tangent et cotangent complexes, munie d'une métrique (ie un isomorphisme entre les fibrés tangent et cotangent défini par une matrice complexe  $g$  symétrique, inversible et telle que la racine du déterminant de  $g$  aie une détermination unique). L'objectif est de décrire géométriquement la "complexification PML" et non-plus analytiquement par des changements de variables. Cette démarche va permettre d'introduire plus d'a priori dans la construction du domaine extérieur définissant les PML à partir de sa structure géométrique et de garantir le bon comportement du système ainsi obtenu. Nous allons donc ici rappeler les principaux résultats démontrés dans [41] permettant l'étude des variétés absorbantes.

Rappelons tout d'abord quelques résultats sur les variétés permettant d'introduire les calculs effectués par la suite. Une connexion linéaire :  $T \times T \rightarrow T : (u, v) \mapsto \nabla_u v$ ,  $u \in T, v \in T$ , où  $T$  désigne le fibré tangent à la variété, est une application bilinéaire vérifiant, avec  $f$  une fonction quelconque, les axiomes

$$\begin{cases} \nabla_u(v + w) = \nabla_u v + \nabla_u w, \\ \nabla_{fu} v = f \nabla_u v, \\ \nabla_u(fv) = u(f)v + f \nabla_u v \text{ (règle de Leibnitz)}. \end{cases}$$

Si  $g(u, v)$  est la forme bilinéaire sur  $T \times T$  équivalente à l'isomorphisme sur  $T^*$ , la connexion de Levi-Civita est la seule connexion linéaire qui "conserve" la métrique  $g$ , c'est-à-dire telle que

$$u(g(v, w)) = g(\nabla_u v, w) + g(v, \nabla_u w).$$

Elle est donnée par

$$2g(\nabla_u v, w) = ug(v, w) + vg(w, u) - wg(u, v) + g([u, v], w) - g([u, w], v) - g([v, w], u),$$

où  $[u, v]$  désigne le crochet de Lie de  $u$  et  $v$ . Remarquons que si la composition  $u \circ v$  n'est pas une dérivation a priori,  $u \circ v - v \circ u$  en est bien une.

Sur un système de coordonnées  $\partial_{x_i}$  de  $T_x$  on a pour tout tenseur  $t_{l_1 \dots l_q}^{j_1 \dots j_p}$ , avec  $(p, q)$  quelconques, en posant  $\nabla_i = \nabla_{\partial_{x_i}}$  la dérivée covariante selon  $x_i$

$$\nabla_i t_{l_1 \dots l_q}^{j_1 \dots j_p} = \partial_i t_{l_1 \dots l_q}^{j_1 \dots j_p} + \sum_{\nu=1}^p \Gamma_{h_\nu, i}^{j_\nu} t_{l_1 \dots l_q}^{j_1 \dots h_\nu \dots j_p} - \sum_{\nu=1}^q \Gamma_{l_\nu, i}^{h_\nu} t_{l_1 \dots h_\nu \dots l_q}^{j_1 \dots j_p},$$

où  $\gamma_{hi}^j$  sont les symboles de Christoffel

$$\Gamma_{hi}^j = \frac{1}{2}g^{jk} (\partial_i g_{kh} + \partial_h g_{ik} - \partial_h g_{ki}),$$

$g^{jk}$  désignant les composantes de l'inverse de la métrique  $g$ . On aura donc sur une base donnée  $\nabla_i(\partial_{x_h}) = \Gamma_{ih}^j \partial_{x_j}$ . La connexion  $\nabla$  est alors sans torsion si :

1.  $T(u, v) = \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v] = 0$ , ce qui donne une expression simple des crochets de Lie,
2.  $\nabla_i g = 0$ .

La courbure "complexe" s'exprime, selon le choix des conventions de signe, par

$$\pm R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u, v]} w.$$

Sur une base de  $T$ , comme  $[\partial_{x_i}, \partial_{x_j}] = 0$ , la nullité de la courbure exprime la commutation des dérivées covariantes. L'expression sur une base  $\partial_\sigma \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes dx^\rho$  du (1, 3) tenseur ainsi défini est

$$\pm R_{\mu\nu\rho}^\sigma = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\sigma}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\sigma}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\rho\lambda}^\sigma - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma.$$

On voit ainsi que si  $g$ , ses dérivées partielles et son inverse dépendent holomorphiquement d'un paramètre  $s$ , les composantes de  $R$  sont à leur tour holomorphes en  $s$ . Par la suite, sur les base  $\wedge_i \partial_{\varphi_i}$  et  $\wedge_i d_{\varphi_i}$  cette condition se réécrit sous la forme d'une matrice  $(\mathbb{I}_3 + s\mathbb{F}_0)^{-1}$  devant être holomorphe en  $s$  (pour  $s \notin \mathbb{R}^-$ ).

Définissons enfin la transformée de Hodge par

**Définition 4.2.1** *Pour deux  $p$ -formes  $\eta$  et  $\tau$ , on note le produit scalaire  $\eta \lrcorner \tau = \eta_J \tau^J$  où  $J$  représente l'ensemble des  $p$  indices ordonnés; et on définit la transformée de Hodge  $*$  par la relation*

$$\eta \wedge * \tau = \tau \wedge * \eta = (\eta \lrcorner \tau) \sqrt{g} dx_1 \wedge \cdots \wedge x_n.$$

On en déduit alors par calcul que  $**\tau = \tau$  si la dimension de la variété est impaire, et  $*\tau = \tau \lrcorner \sqrt{g} dx_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ .

Introduisons maintenant les variétés pseudo-Riemanniennes complexes absorbantes. Pour ce faire, on désigne par  $g^C$  la métrique euclidienne complexe dans  $\mathbb{C}^3$ , exprimée en coordonnées cartésiennes, soit  $g^C(u, v) = \sum_{j=1}^3 u^j v^j, \forall u^j, v^j \in \mathbb{C}^3$ . A partir du changement de variable  $x \mapsto \tilde{x}(x)$  nous définissons

alors une métrique complexe sur  $\mathbb{R}^3$ , notée  $g_x : T_x \mathbb{R}^3 \times T_x \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ , par

$$g_x(u, v) = g^C(d\tilde{x}(u), d\tilde{x}(v)), \quad (4.13)$$

où  $d\tilde{x}$  est la différentielle de  $\tilde{x}$ .

Les variétés absorbantes sont alors définies par

**Définition 4.2.2 (variétés pseudo-Riemanniennes absorbantes)**

*Une variété pseudo-Riemannienne  $(M, g)$  est appelée absorbante si*

1. la variété  $(M, g)$  est plate et  $M$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^3$ . On note ce difféomorphisme  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ .
2. Il existe un ouvert relativement compact  $\Omega \subset M$  où la métrique est euclidienne, et est donc donnée par  $g = \Phi^* g^e$ ;  $\Phi^*$  le pull-back selon  $\Phi$  et  $g^e$  la métrique euclidienne.

3. Pour tout vecteur réel du fibré tangent  $v \in T_x^{\mathbb{R}}$ ,  $v \neq 0$ , on a  $g_x(v, v) \neq 0$ .  
 4. L'immersion  $\tilde{x} : M \rightarrow \mathbb{C}^3$  vérifie

$$(\tilde{x}(x_1) - \tilde{x}(x_2))^2 = 0 \text{ si et seulement si } x_1 = x_2, \quad (4.14)$$

et il existe  $c_0$  et  $c_1$  strictement positives telles que

$$\operatorname{Re} \left( \frac{\tilde{x}(x)^2}{|\Phi(x)|^2} \right) \leq -2c_0 \text{ pour } |\Phi(x)| > c_1. \quad (4.15)$$

La définition 4.2.2 indique alors que les tenseurs  $\otimes_{k=1}^p d\tilde{x}^{i_k}$  et  $\otimes_{r=1}^q d\tilde{x}^{i_r}$  sont parallèles et leurs dérivées covariantes sont nulles. En particulier la platitude de la variété (axiome 1) va permettre de trouver un noyau de Schwartz à l'opérateur de Maxwell analogue à la convolution par le noyau de l'équation des ondes et la matrice des co-dérivations permettant de trouver le noyau des équations de Maxwell sur  $\mathbb{R}^3$ . La platitude assurant ici la commutativité des dérivations et des compositions par convolutions.

### Problème de Helmholtz sur $M$

On s'intéresse tout d'abord à la résolution de l'équation de Helmholtz sur la variété  $M$ . L'opérateur de Hodge  $*$  associé correspondant à la métrique  $g$  d'une variété absorbante  $(M, g)$  est défini par l'identité

$$U \wedge *V = g(U, V) d\tilde{x}^1 \wedge d\tilde{x}^2 \wedge d\tilde{x}^3.$$

Il est alors possible de définir le Laplacien généralisé  $\Delta$  pour les 0-formes sur  $M$  par la généralisation à la métrique  $g$  de la relation

$$\Delta = *d*d - d*d*.$$

Alors, si par la définition 4.2.2 la variété  $M$  est plate,  $\Delta$  correspond à l'opposé de l'opérateur de Laplace-Beltrami  $\Delta_g : \varphi \mapsto g^{ij} \nabla_i \nabla_j \varphi$ , car si la variété est plate  $[\nabla_i, \nabla_j] = 0$ , des composantes d'une 1-forme quelconque exprimé à l'aide de la métrique  $g$ . On s'intéresse donc à la résolution de l'équation de Helmholtz en utilisant  $\Delta_g$  avec pour second membre l'opposé du courant  $\delta_y d\tilde{x}_1 \wedge d\tilde{x}_2 \wedge d\tilde{x}_3$  dans (4.18). La recherche du noyau de Green de cette équation donnera ainsi la solution élémentaire de l'équation de Helmholtz pour les 1-formes composante à composante.

Il vient ainsi

**Théorème 4.2.3** Soit  $(M, g)$  une variété absorbante telle que

$$\forall x, y \in \Omega, \sqrt{(\tilde{x}(x) - \tilde{x}(y))^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (\tilde{x}_j(x) - \tilde{x}_j(y))^2} \geq 0. \quad (4.16)$$

Alors la fonction

$$G_H(x, y) = \frac{e^{ik\sqrt{(\tilde{x}(x) - \tilde{x}(y))^2}}}{4\pi\sqrt{(\tilde{x}(x) - \tilde{x}(y))^2}} \quad (4.17)$$

est la solution fondamentale de l'opérateur de Helmholtz  $\Delta_g + k^2$ , décrit sur  $M$ , et satisfait

$$(\Delta_g + k^2) G_H(x, y) = -\delta_y. \quad (4.18)$$

De plus,  $G_H$  vérifie la relation asymptotique

$$|G_H(x, y)| \leq C_y e^{-c_0 k |\Phi(x)|} \text{ pour } |\Phi(x)| > c_2, \quad (4.19)$$

où  $c_0 > 0$ ,  $c_2 = c_2(y) > 0$  et  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  est le difféomorphisme donné par la définition 4.2.2.

Remarquons tout d'abord que la condition (4.16) correspond à la détermination d'une racine carrée complexe. En effet, d'après la dernière condition de la définition 4.2.2 la partie imaginaire de  $\sqrt{\tilde{x}(x) - \tilde{x}(y)}$  est strictement positive sous la condition  $|\Phi(x)| > c(y)$ . Il est alors possible de fixer le signe de  $\sqrt{\tilde{x}(x) - \tilde{x}(y)}$  pour  $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ . Le choix  $\sqrt{\tilde{x}(x) - \tilde{x}(y)} \geq 0$  correspondant à une condition de radiation d'onde sortante, et  $\sqrt{\tilde{x}(x) - \tilde{x}(y)} \leq 0$  à une onde entrante. Nous nous intéressons donc ici au cas des ondes sortantes avec (4.16). Le signe de la racine carrée complexe  $\sqrt{\tilde{x}(x) - \tilde{x}(y)}$  pour  $(\tilde{x}(x), \tilde{x}(y))$  peut alors être déterminé sur la variété simplement connectée  $M \times M$ . Dans ce cas la variété  $M$  sera appelée *variété absorbante sortante*.

Le théorème 4.2.3 décrit la solution élémentaire (4.17) de la partie principale des équations de Maxwell écrites sur la variété complexe  $M$ , soit de l'équation de Helmholtz (4.18) avec le Laplacien  $\Delta_g$  sur la variété. La relation (4.19) correspondant alors à la condition de décroissance à l'infini sur la variété  $M$ .

### Equations de Maxwell non-bornées sur $M$

A partir des résultats précédents, la résolution des équations de Maxwell sur la variété  $M$  est étudiée afin de garantir dans un premier temps l'existence et l'unicité de la solution sur tout  $M$ . Dans un second temps le problème posé sur la variété  $M$  en domaine non-borné sera restreint à un ensemble borné  $O$  décrivant le problème PML en domaine borné avec condition limite.

Définissons tout d'abord l'opérateur de Maxwell  $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix} = -\mathcal{M}^T,$$

et désignons par  $*(E, H)$  la transformation de Hodge du doublet  $(E, H)$  définie par  $(*E, *H)$ . Alors pour deux 1-formes  $A$  et  $B$  telles que  $dA = dB = 0$ , on peut définir l'application  $G_{A,B}(x, y)$  à partir du noyau de Green  $G_H(x, y)$  de l'équation de Helmholtz sur  $M$

$$G_{A,B}(x, y) = \begin{pmatrix} ik - (ik)^{-1}d * d * & *d \\ - * d & ik - (ik)^{-1}d * d * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_H(x, y)A \\ G_H(x, y)B \end{pmatrix}.$$

A l'instar des variétés euclidiennes, sur la variété  $M$  l'application  $G_{A,B}(x, y)$  vérifie alors les propriétés du noyau de Green pour les équations de Maxwell

**Théorème 4.2.4** *Soit  $(M, g)$  une variété absorbante sortante et  $y \in M$ , alors  $G_{A,B}$  vérifie*

$$(*\mathcal{M}^T + ik) G_{A,B}(\cdot, y) = \begin{pmatrix} A\delta_y \\ B\delta_y \end{pmatrix},$$

ainsi que les relations asymptotiques pour  $|\Phi(x)| > c_2 = c_2(y)$

$$|G_{A,B}(x, y)| \leq C(y)e^{-kc_0|\Phi(x)|} \text{ et } |\nabla_x G_{A,B}(x, y)| \leq C(y)e^{-kc_0|\Phi(x)|}.$$

Considérons alors un relèvement des équations de Maxwell sous forme de problème extérieur à un domaine  $D_0 \subset \Omega$  ouvert, régulier et relativement compact contenu dans la partie réelle de la variété  $M$ . En écrivant la condition limite sur le bord de  $D_0$  comme la donnée de courants suffisamment réguliers  $\eta$  et  $\gamma$  pour les relèvements respectifs des traces sur  $\partial D_0$  des 1-formes  $E$  et  $H$  sur la variété  $M$ , notés  $i_{\partial D_0}^* E$  et  $i_{\partial D_0}^* H$ , le système à résoudre peut être donné sur  $M \setminus D_0$  par :

Trouver les 1-formes  $E$  et  $H$  vérifiant dans  $(M \setminus D_0)$  :

$$\begin{cases} dE = ik * H, \\ dH = -ik * E, \\ i_{\partial D_0}^* E = \eta, \\ \text{ou } i_{\partial D_0}^* H = \gamma, \end{cases} \quad (4.20)$$

et telles que les composantes de  $E$  et  $H$  décroissent exponentiellement pour  $|\Phi(x)| \rightarrow \infty$ .

Comme dans le cas des équations de Maxwell sur une variété euclidienne, le système (4.20) peut être résolu en existence et unicité à l'aide d'une formulation similaire aux équations intégrales de Stratton-Chu

**Théorème 4.2.5** *Soit  $(M, g)$  une variété absorbante sortante. Alors le problème donné par (4.20) admet une solution unique donnée par*

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \int_{\partial D_0} (-\eta \wedge (G_{d\tilde{x}^j, 0})_2 + \gamma \wedge (G_{d\tilde{x}^j, 0})_1) \right\} d\tilde{x}^j, \\ H &= \left\{ \int_{\partial D_0} (-\eta \wedge (G_{0, d\tilde{x}^j})_2 + \gamma \wedge (G_{0, d\tilde{x}^j})_1) \right\} d\tilde{x}^j. \end{aligned} \quad (4.21)$$

De plus, au voisinage de  $\Omega \setminus \overline{D_0}$  où la métrique est euclidienne, la solution  $(E, H)$  est égale à  $(E_{sc}, H_{sc})$ , restriction du problème sans PML.

### Equations de Maxwell bornées sur $M$

Pour restreindre les équations à un domaine borné avec conditions aux limites homogènes et analyser l'erreur ainsi introduite nous allons, pour des choix de  $M$  particuliers et des solutions régulières (correspondant à des données régulières) procéder à un relèvement temporel analogue à celui obtenu à partir de (4.8) puis considérer l'existence et l'unicité du problème temporel restreint.

## 4.3 Dérivation algébrique de PML généralisées

Dans cette partie nous proposons d'établir directement une écriture du système PML à partir d'un système de variétés absorbantes, de type (4.8) admettant un relèvement temporel. Afin de pouvoir construire aisément un système de PML généralisées, nous proposons ensuite une construction des matrices constituant le système (4.8) à partir de critères purement géométriques caractérisant le domaine. Enfin, une écriture de type système augmenté de Gedney (4.12) est proposée afin de faciliter l'implémentation numérique sur un schéma volumes finis par la suite.

### 4.3.1 Formulation des PML : écriture générale

Notations : les coordonnées contravariantes d'un point  $x$  quelconque de l'espace seront données par  $x = (x^1, x^2, x^3)$ , les vecteurs de bases du fibré cotangent sont donnés par  $dx^i, i = 1, \dots, 3$  et on désignera par  $d\tilde{x}^i$  la 2-forme élémentaire donnée par le produit extérieur  $dx^j \wedge dx^k$ , avec  $j \neq i, k \neq i$  et  $j < k$ .

Afin de proposer une formulation proche de (4.8) en introduisant les variétés absorbantes, nous récrivons les équations de Maxwell en transformées de Fourier-Laplace (4.2) en formulation implicite

$$\begin{cases} -ik *^{\mathcal{E}} e - d(h) = 0, \\ -ik *^{\mathcal{E}} h + d(e) = 0, \end{cases} \quad (4.22)$$

où  $*^{\mathcal{E}}$  est l'isomorphisme de Hodge euclidien, comme dans (4.2),  $\tilde{E}$  et  $\tilde{H}$  désignent respectivement les transformées de Fourier-Laplace de  $E$  et  $H$ , et les 1-formes  $e$  et  $h$  sont respectivement données en cartésien par

$$e = \sum_i \tilde{E}^i dx^i \text{ et } h = \sum_i \tilde{H}^i dx^i.$$

L'objectif est de restreindre les solutions des équations de Maxwell  $E$  à un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ . Pour ce faire, commençons par introduire un difféomorphisme  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe au moins  $C^1$  permettant d'amener la représentation des équations de Maxwell dans un autre système de coordonnées éventuellement plus propice à l'introduction des PML. Un tel choix de  $\varphi$  sera donné par la suite dans la construction des PML généralisées. Dans les exemples du premier paragraphe,  $\varphi$  était donné comme l'application identité. Soit alors le relèvement de la partie de l'espace  $\varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^3$  dans une variété réelle (repérée par  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ) à valeurs dans  $\mathbb{C}^3$  décrite, pour chaque coordonnée  $x_i$ , par le changement de variables :

$$\tilde{x}^i = (\varphi(x))^i - \frac{1}{ik} f^i(\varphi(x)). \quad (4.23)$$

Le changement de variables (4.23) est différent de celui proposé dans (4.3). En effet, la complexification de chaque composante se fait à partir d'une fonction donnée sur tout  $\mathbb{R}^3$ , et ne dépendant plus alors de la simple coordonnée choisie. En outre, pour l'instant, ce changement de variable ne préjuge pas a priori de la forme donnée aux couches PML, ni de la direction d'absorption de celles-ci.

Afin de proposer un changement de variables proches des théories PML précédentes, les fonctions  $f^i$  seront choisies par la suite nulles sur  $\Omega$  laissant ainsi le système inchangé, et positives croissantes sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$  (comme illustré sur la figure 4.2).

**Remarque 4.3.1** Si les fonctions  $f^i$  sont de classe  $C^k$ , alors en notant  $\mathcal{M} = h(\mathbb{R}^3)$ , avec  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $x \mapsto \varphi(x) - 1/(ik) (f^i(\varphi(x)))_i$ , est une sous-variété de classe  $C^k$  de dimension 3 dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 6 :  $\mathbb{C}^3$ .

**Proposition 4.3.2** Le système de PML correspondant au changement de variable (4.23) est donné par

$$\begin{cases} -ik F(x)^{-1} \text{Com} Z_0(k, x) (Z_0(k, x))^{-1} F(x) \tilde{E} - \nabla \times \tilde{H} = 0, \\ -ik F(x)^{-1} \text{Com} Z_0(k, x) (Z_0(k, x))^{-1} F(x) \tilde{H} + \nabla \times \tilde{E} = 0, \end{cases} \quad (4.24)$$

où  $Z_0(k, x) = \mathbb{I}_3 - \frac{1}{ik} F_0^T(\varphi(x))$  avec  $F_0(\varphi(x))$  et  $F(x)$  matrices définies respectivement par

$$(F_0(\varphi(x)))_{ij} = \partial_j f_i(y)|_{y=\varphi(x)} \text{ et } (F(x))_{ij} = \partial_j \varphi_i(x).$$

**Preuve.** Comme pour l'obtention de (4.5) à partir du changement de variable (4.3) introduit dans (4.2), nous obtenons donc par report de (4.23) dans (4.22)

$$\begin{cases} -ik * e - d(h) = 0, \\ -ik * h + d(e) = 0, \end{cases} \quad (4.25)$$

\* désignant ici l'isomorphisme de Hodge sur la variété  $M$ .

Soit  $Z_0(k, x)$  la matrice du jacobien de la transformation (4.23) :

$$Z_0(k, x) = F(x) - \frac{1}{ik} F_0(\varphi(x)) F(x).$$

A partir de  $Z_0(k, x)$  la métrique  $g$  du changement de variable (4.23) est donnée par la matrice  $G = Z_0(k, x)^T Z_0(k, x)$ . Par l'isomorphisme de Hodge  $*$  sur  $M$ , une 1-forme  $\omega = \omega_i dx^i$  se transforme en une 2-formes dont la composante en  $d\tilde{x}^i$  est donnée par  $\sqrt{g}g^{ij}\omega_j$ , où  $g^{ij}$  désignent les composantes de l'inverse de  $g$ , et  $\sqrt{g}$  est la racine carré complexe du déterminant de  $g$  prise égale au déterminant de  $Z_0(k, x)$ . On a ainsi

$$*\omega = \left[ \sqrt{\det(G)}G^{-1} \right]_{ij} [\omega_j] d\tilde{x}^i,$$

où  $\sqrt{\det(G)}G^{-1} = \det(Z_0(k, x))Z_0(k, x)^{-1}(Z_0(k, x)^T)^{-1}$ . Le retour au coordonnées cartésiennes s'effectue en remarquant que sur  $(M, g)$  la base duale réelle orthonormée de  $(dx^1, dx^2, dx^3)$  est donnée par  $(\partial_{\varphi^1}, \partial_{\varphi^2}, \partial_{\varphi^3})$  qui est liée à la base cartésienne  $(\partial_{x^1}, \partial_{x^2}, \partial_{x^3})$  par

$$(\partial_{\varphi^1}, \partial_{\varphi^2}, \partial_{\varphi^3}) = \frac{1}{|\det(F(x))|} \left[ \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right] (\partial_{x^1}, \partial_{x^2}, \partial_{x^3})^T := \frac{1}{|\det(F(x))|} F(x) (\partial_{x^1}, \partial_{x^2}, \partial_{x^3})^T,$$

en posant  $G_\varphi = F(x)^T F(x)$ , et donc  $\det(F(x)) = \sqrt{\det(G_\varphi)}$ . Les composantes de  $e$  et  $h$  sont données à partir de celles des vecteurs  $\tilde{E}$  et  $\tilde{H}$  par

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{\det(G_\varphi)}} [G_\varphi]_{ij} \tilde{E}^j \text{ et } h_i = \frac{1}{\sqrt{\det(G_\varphi)}} [G_\varphi]_{ij} \tilde{H}^j,$$

les vecteurs  $\tilde{E}$  et  $\tilde{H}$  étant exprimés dans la base naturelle de  $\mathbb{R}^3$  associée au changement de variable  $x \mapsto \varphi(x)$ ; soit  $(\sqrt{\det(G_\varphi)}\partial_{\varphi^1}, \sqrt{\det(G_\varphi)}\partial_{\varphi^2}, \sqrt{\det(G_\varphi)}\partial_{\varphi^3})$ . Le système s'écrit alors vectoriellement sous la forme

$$\begin{cases} -ik \left[ \sqrt{\frac{\det(G)}{\det(G_\varphi)}} G^{-1} G_\varphi \tilde{E} \right]_i d\tilde{x}^i - d \left( \sum_j \tilde{H}^j dx^j \right) = 0, \\ -ik \left[ \sqrt{\frac{\det(G)}{\det(G_\varphi)}} G^{-1} G_\varphi \tilde{H} \right]_i d\tilde{x}^i + d \left( \sum_j \tilde{E}^j dx^j \right) = 0. \end{cases}$$

Soit, en notant  $H_\varphi$  la composée de la transformée de Hodge et de la dualité  $T^* = G_\varphi(T)$  d'un élément de  $T^* \wedge T^*$  sur la base de l'espace tangent  $(\partial_{x^1}, \partial_{x^2}, \partial_{x^3})$ .

$$\begin{cases} -ik H_\varphi \sqrt{\frac{\det(G)}{\det(G_\varphi)}} G^{-1} G_\varphi \tilde{E} - H_\varphi \nabla \times (\tilde{H}) = 0, \\ -ik H_\varphi \sqrt{\frac{\det(G)}{\det(G_\varphi)}} G^{-1} G_\varphi \tilde{H} + H_\varphi \nabla \times (\tilde{E}) = 0, \end{cases}$$

où  $\tilde{E}$  et  $\tilde{H}$  sont les coordonnées des champs électromagnétiques exprimés comme vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , et  $\nabla \times$  est le rotationnel contravariant de  $\mathbb{R}^3$  en coordonnées cartésiennes. ■

**Remarque 4.3.3** A partir du changement de variable (4.3) en coordonnées cartésiennes, il est possible de donner localement l'expression des matrices  $F_0(x, y, z)$  et  $F(x)$

$$F_0(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sigma_x(x) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y(y) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z(z) \end{pmatrix} \text{ et } F(x) = \mathbb{I}_3. \quad (4.26)$$

Par (4.24), on retrouve alors bien l'écriture du produit  $N^{-1}M^{-1}$  proposée dans (4.8).

### 4.3.2 Proposition et étude d'une forme de PML

Nous nous proposons dans cette partie d'expliciter une forme du changement de variables (4.23) vérifiant alors la définition d'une variété absorbante et donnant, à partir des résultats de la section 4.2, un système PML bien posé et dont la restriction à un borné est exponentiellement proche de la solution du problème initial. Par la suite, en explicitant la construction de la matrice  $Z_0$  de (4.25) nous pourrons alors donner successivement une écriture fréquentielle puis un relèvement temporel de celle-ci définissant un système PML cohérent.

Dans [43], les auteurs étudient un changement de variable pour les domaines  $\Omega$  convexes décrit par

$$\tilde{x}(x) = p(x) + i\tau(h(x))\mathbf{n}(x),$$

où  $\tau$  est une fonction positive croissante,  $p(x)$  est la projection du point  $x$  sur  $\partial\Omega$ ,  $\mathbf{n}(x)$  est la normale à  $\partial\Omega$  orientée dans le sens sortant à  $\Omega$  et prise en  $p(x)$ , et  $h(x) = |x - p(x)|$ ; donc  $x = p(x) + h(x)\mathbf{n}(x)$ . Ils montrent alors dans [41] que la variété définie par ce changement de variable est une variété pseudo-Riemannienne absorbante.

Afin de simplifier la construction des PML et de gagner en généralité sur le cas présenté, nous allons considérer  $\Omega$  comme un domaine borné, de bord  $\partial\Omega$  suffisamment régulier, et choisir la variété réelle de  $\mathbb{C}^3$  définie par (4.23) :

$$\tilde{x}(x) = \varphi(x) - \frac{1}{ik}f(\varphi(x)),$$

où  $\varphi$  est un  $C^1$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ , et  $f$  est une fonction  $C^1$  qui vérifie

$$(y_1 - y_2) \cdot (f(y_1) - f(y_2)) > 0, \quad \forall (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^3)^2 \setminus \Omega \times \Omega, \quad y_1 \neq y_2, \quad (4.27)$$

et l'hypothèse de croissance

$$\frac{\|f(y)\|}{\|y\|} \rightarrow \infty \text{ pour } |y| \rightarrow \infty. \quad (4.28)$$

Le principal résultat est alors le suivant

**Proposition 4.3.4** *Si  $f$  vérifie les hypothèses (4.27) et (4.28), alors la variété définie par (4.23) est une variété pseudo-Riemannienne complexe absorbante.*

**Preuve.** Il suffit de vérifier les 4 points de la définition 4.2.2 :

1. Considérons l'application  $\Psi_s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  définie par

$$\Psi_s(x) = \varphi(x) + s f(\varphi(x)).$$

Pour  $s$  réel positif ou nul, l'application  $\Psi_s$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ , et la variété décrite par  $x \mapsto \Psi_s(x)$  est donc plate car euclidienne. La courbure de la métrique  $g_s = \Psi_s^* g^C$  correspondant au changement de variable  $x \mapsto \Psi_s(x)$  étant une fonction analytique de  $s$  sur  $\mathbb{C}^{++} = \{Im(z) \geq 0\} \cap \{Re(z) \geq 0\}$ , nulle sur tout  $\mathbb{R}^+$ , elle est alors nulle sur tout  $\mathbb{C}^{++}$ . En particulier, pour  $s = -1/(ik)$  on en déduit que la variété engendrée par (4.23) est plate.

2. Par le choix de la fonction  $f$ , l'application  $x \mapsto \tilde{x}(x)$  décrit un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  et donc la métrique  $g$  sur  $\Omega$  est bien euclidienne.
3. A partir du changement de variable (4.23), la matrice  $g = [g_{ij}]$  est donnée par

$$g_x = F(x)^T \left( \mathbb{I}_3 - \frac{1}{ik} F_0(x) \right)^T \left( \mathbb{I}_3 - \frac{1}{ik} F_0(x) \right) F(x),$$

où  $F(x) = \text{Jac}(\varphi)(x)$  et  $F_0(x) = \text{Jac}(f)(\varphi(x))$ . On en déduit donc par un simple changement de variable que garantir la condition  $g_x(v, v) \neq 0$  pour  $v \neq 0$  est équivalent à  $\tilde{g}_x(u, u) \neq 0$  pour  $u \neq 0$  avec

$$\tilde{g}_x = \left( \mathbb{I}_3 - \frac{1}{ik} F_0(x) \right)^T \left( \mathbb{I}_3 - \frac{1}{ik} F_0(x) \right).$$

Reste alors à étudier deux cas : soit  $F_0(x) = 0$  soit  $F_0(x) \neq 0$ . Dans le second cas la partie imaginaire de  $\tilde{g}_x(u, u)$  est donnée par  $(F_0(x) + F_0(x)^T) u \cdot u$ . La croissance stricte de  $f$  hors de  $\Omega$  implique que l'image numérique de  $f$ ,  $F_0(x)x \cdot x$  est strictement positive,  $(F_0(x) + F_0(x)^T)$  est donc symétrique définie positive, d'où  $\tilde{g}_x(u, u) \neq 0$  pour  $u \neq 0$ .

Si  $F_0(x) = 0$ , alors  $\tilde{g}_x = \mathbb{I}_3$  est le résultat est immédiat.

4. Soient  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $(\tilde{x}(x_1) - \tilde{x}(x_2))^2 = 0$ , alors en reportant (4.23), avec  $p = ik$  on trouve pour la partie imaginaire

$$(f(\varphi(x_1)) - f(\varphi(x_2))) \cdot (\varphi(x_1) - \varphi(x_2)) = 0. \quad (4.29)$$

Comme précédemment, si  $(x_1, x_2)$  n'est pas dans  $\Omega \times \Omega$ , en reportant par (4.27) on a alors  $x_1 = x_2$ .

Enfin, dans le cas  $x_1 \in \Omega$  et  $x_2 \in \Omega$  est immédiat comme  $(\tilde{x}(x_1) - \tilde{x}(x_2))^2 = \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\|^2 = 0$ .

■

**Remarque 4.3.5** *L'hypothèse (4.27) est a priori plus forte que de demander la croissance stricte de  $f$  pour tout  $(y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)^2$  correspondant à l'évaluation sur le support de  $f$ . Toutefois, on voit dans la démonstration de la proposition 4.3.4 que le cas limitant est donné par  $y_1 \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$  et  $y_2 \in \Omega$  (ou inversement) qui ne permet pas a priori d'assurer l'hypothèse d'injectivité des variétés absorbantes (4.14). En effet, dans ce cas en posant  $\varphi(y_2) = \varphi(y_1) + u$  avec  $u$  orthogonal à  $\varphi(y_1)$  et  $f(\varphi(y_1))$  la partie imaginaire de  $(\tilde{x}(y_1) - \tilde{x}(y_2))^2$  s'annule et la partie réelle induit une condition sur la norme de  $u$  qui peut alors ne pas être réalisée selon les valeurs de  $k$ .*

*Une condition suffisante pour assurer la réalisation de (4.27), utilisée par la suite, est de choisir  $f$  strictement croissante pour tout  $(y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)^2$  et d'assurer que  $\partial\Omega = \{y, \|\varphi(y)\| = c\}$ .*

## Décroissance du noyau de Green

Avant de passer à la suite de la construction du système PML généralisé, regardons rapidement la décroissance exponentielle attendue à l'intérieur des PML.

Dans le changement de variable cartésien "usuel" (4.3), la partie imaginaire de chaque composante  $\tilde{\mu}(\mu)$  croît selon  $\int_0^\mu \sigma_\mu(u) du$  avec l'éloignement au bord du domaine intérieur aux PML  $\Omega$ . Ce type de complexification des variables modifie alors la partie principale des équations de Maxwell harmoniques (équation de Helmholtz), et son noyau  $G_H$  est alors obtenu algébriquement, à partir du

noyau de l'équation de Helmholtz  $G_H(x, y, z) = \frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ , en utilisant (4.3) avec  $p = -ik$

$$G_H(x, y, z) = \frac{e^{ik\sqrt{\tilde{x}^2(x) + \tilde{y}^2(y) + \tilde{z}^2(z)}}}{4\pi\sqrt{\tilde{x}^2(x) + \tilde{y}^2(y) + \tilde{z}^2(z)}},$$

où  $\tilde{x}(x)$ ,  $\tilde{y}(y)$  et  $\tilde{z}(z)$  sont donnés par (4.3). Par exemple, dans le cas simple où le point  $A(x, y, z)$  sortait de  $M$  uniquement par sa composante  $x$ , il vient  $\tilde{y}(y) = y$  et  $\tilde{z}(z) = z$ , d'où

$$\sqrt{\tilde{x}^2(x) + \tilde{y}^2(y) + \tilde{z}^2(z)} = \sqrt{x^2 - \frac{1}{k^2} \left( \int_0^x \sigma_x(u) du \right)^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{ik} x \int_0^x \sigma_x(u) du} := \sqrt{Z(x, y, z)}.$$

Pour  $|x| \rightarrow \infty$  la croissance et la positivité de  $\sigma_x$  donne alors

$$Re(Z(x, y, z)) \rightarrow -\infty \text{ et } Im(Z(x, y, z)) \rightarrow +\infty.$$

Ainsi  $arg(Z(x, y, z)) \in [\pi/2, \pi]$ , et donc  $\sqrt{Z(x, y, z)}$  est de partie imaginaire positive, ceci entraînant la décroissance exponentielle de la solution dans les PML.

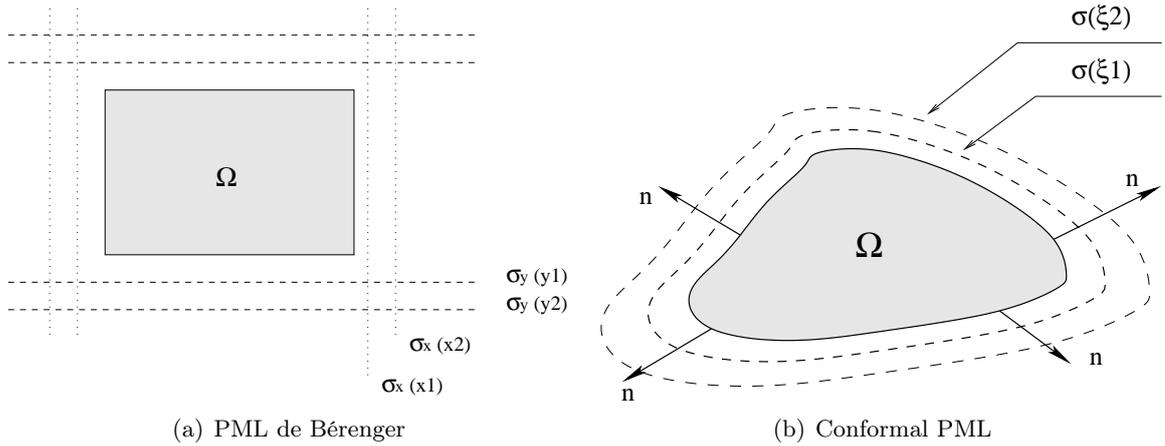


FIG. 4.3 – Différentes décroissances à l'extérieur des PML (lignes iso-valeurs).

Dans le cas cartésien (cf figure 4.3), pour tout point  $M$  hors de  $\Omega$ , la décroissance s'effectuait donc selon l'éloignement en  $x$ ,  $y$  ou  $z$  du point à la face du domaine  $\Omega$ . De même, dans le cadre des Conformal PML, la décroissance du noyau de Green est donnée par l'éloignement à  $\Omega$  calculé par projection orthogonale sur la frontière de  $\Omega$ .

Sur le même principe, pour le changement de variable (4.23) la décroissance du complexifié du noyau de Green de l'équation de Helmholtz est alors donnée par la croissance de la fonction  $f(\varphi(x))$  pour  $|\varphi(x)|$  tendant vers l'infini.

En reprenant  $\tilde{x}(x)$  donné par (4.23), par le théorème 4.2.3, on avait

$$G_H(x, y) = \frac{e^{ik\sqrt{(\tilde{x}(x) - \tilde{x}(y))^2}}}{4\pi\sqrt{(\tilde{x}(x) - \tilde{x}(y))^2}}.$$

En notant le nombre complexe  $Z(x, y) = (\tilde{x}(x) - \tilde{x}(y))^2$  sous la forme  $|Z(x, y)|e^{iarg(Z(x, y))}$  avec  $arg(Z(x, y)) \in [-\pi, \pi]$ , on en déduit que  $Im(Z(x, y)) > 0$  par l'hypothèse (4.27) et donc

$$arg\left(\sqrt{Z(x, y)}\right) \in [0, \pi/2].$$

La partie imaginaire de la racine carrée complexe de  $Z(x, y)$  s'écrit alors

$$\sqrt{|Z(x, y)|} \sin\left(\frac{arg(Z(x, y))}{2}\right) = +\sqrt{|Z(x, y)|} \sqrt{\frac{\tan^2(arg(Z(x, y))/2)}{1 + \tan^2(arg(Z(x, y))/2)}},$$

avec  $\tan(\arg(Z(x, y))/2) = +\frac{\cos(\arg(Z(x, y))) + 1}{\sin(\arg(Z(x, y)))}$ . En utilisant (4.28) on en déduit donc que

$$\tan(\arg(Z(x, y))/2) \approx \frac{1}{k} \|f(\varphi(x)) - f(\varphi(y))\| \text{ pour } \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \rightarrow \infty,$$

d'où  $\sin(\arg(Z(x, y))/2) \approx 1 + o(1)$ , et donc

$$\operatorname{Im}\left(\sqrt{Z(x, y)}\right) \approx \frac{1}{k} \|f(\varphi(x)) - f(\varphi(y))\| \text{ pour } \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \rightarrow \infty. \quad (4.30)$$

L'équivalent (4.30) permet d'assurer la décroissance exponentielle du noyau de Green  $G_H$  selon  $e^{-k \operatorname{Im}(\sqrt{Z(x, y)})}$  pour  $x$  et  $y$  s'éloignant, mais montre aussi que pour  $x$  et  $y$  suffisamment loin l'un de l'autre ce coefficient ne dépend pas de la fréquence réduite  $k$ . Les équations PML obtenues par relèvement temporel du système écrit sur  $M$  garderont donc a priori la même décroissance a priori.

**Remarque 4.3.6** *Si  $x$  est un point de  $\Omega$  et si  $y \in M \setminus \Omega$  "s'éloigne de  $x$ ", alors le coefficient de décroissance est donné, aussi en bien en fréquentiel qu'en temporel, par  $e^{-\|f(\varphi(y))\|}$  pour  $\|\varphi(y)\| \rightarrow \infty$ . Ceci rejoint les résultats obtenus sur les autres types de PML.*

### 4.3.3 Expression locale des matrices PML

Afin de simplifier la construction des PML et de gagner en généralité sur le cas présenté, nous allons considérer  $\Omega$  comme un domaine borné, étoilé et de bord  $\partial\Omega$  continûment différentiable, et choisir la variété réelle de  $\mathbb{C}^3$  définie par

$$\varphi(x) = \frac{x}{\rho_0(x)} \text{ et } f(y) = \frac{y}{\|y\|} \sigma(\|y\| - 1), \quad (4.31)$$

où  $\rho_0(x) = |x_0(x) - O|$  est la distance du centre d'étoilage  $O$  au point d'intersection unique  $x_0(x)$  de la demi-droite  $[0, x)$  avec  $\delta\Omega$ , et  $\sigma$  est une fonction strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ , de classe  $C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ , nulle sur  $\mathbb{R}^-$ , vérifiant

$$\frac{\sigma(s-1)}{s} \rightarrow \infty \text{ pour } s \rightarrow +\infty. \quad (4.32)$$

Typiquement nous prendrons  $\sigma(s) = \alpha s^n \mathbb{Y}(s)$ , avec  $\alpha > 0$ ,  $n \geq 2$  et où  $\mathbb{Y}$  est la fonction de Heaviside.

Le changement de variable (4.23) est alors décrit par

$$\tilde{x}(x) = \frac{x}{\rho_0(x)} + \frac{1}{p} \frac{x}{\|x\|} \sigma\left(\frac{\|x\|}{\rho_0(x)} - 1\right). \quad (4.33)$$

On a ainsi

**Proposition 4.3.7** *Le changement de variable décrit par (4.33) avec une fonction  $\sigma$  strictement croissante et vérifiant l'hypothèse (4.32) décrit une variété absorbante.*

**Preuve.** Il suffit de montrer que le choix de  $f$  et  $\varphi$  vérifie les hypothèses (4.27) et (4.28) auquel cas la proposition 4.3.4 pourra s'appliquer.

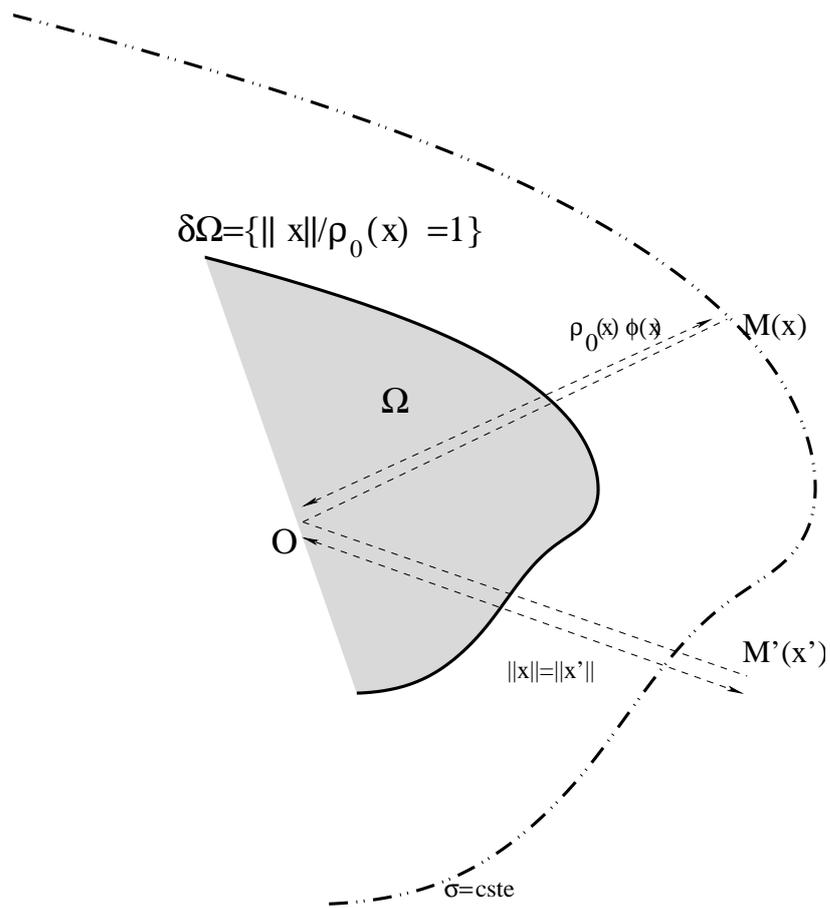


FIG. 4.4 – Choix de la décroissance à l'extérieur des PML.

1. Dans un premier temps, soient deux vecteurs  $y_1$  et  $y_2$  de  $\mathbb{R}^3 \setminus \varphi^{-1}(\Omega)$ , alors

$$(y_1 - y_2) \cdot (f(y_1) - f(y_2)) = y_1 \cdot f(y_1) + y_2 \cdot f(y_2) - y_1 \cdot f(y_2) - y_2 \cdot f(y_1).$$

Comme  $y_i \cdot f(y_i) = \|y_i\| \sigma(\|y_i\| - 1)$  et  $y_i \cdot f(y_j) = \cos(\theta) \|y_i\| \sigma(\|y_j\| - 1)$ , où  $\theta$  est l'angle vectoriel  $(y_1, y_2)$ , on a alors l'égalité suivante

$$\begin{aligned} (y_1 - y_2) \cdot (f(y_1) - f(y_2)) &= (\|y_1\| - \|y_2\|) (\sigma(\|y_1\| - 1) - \sigma(\|y_2\| - 1)) \\ &\quad + (1 - \cos(\theta)) (\|y_2\| \sigma(\|y_1\| - 1) + \|y_1\| \sigma(\|y_2\| - 1)), \end{aligned}$$

dont le premier terme est positif si  $y_1 \neq y_2$  car  $\sigma$  est supposée strictement croissante, et dont le second terme est positif et ne s'annule que si  $\cos(\theta) = 1$  et sous l'hypothèse  $\|y_1\| = \|y_2\|$  soit  $y_1 = y_2$ . L'hypothèse (4.27) est alors vérifiée.

Supposons maintenant que l'un des deux vecteurs, par exemple  $y_2$ , est dans  $\varphi^{-1}(\Omega)$ . Alors,  $f(y_2) = 0$  et donc

$$(y_1 - y_2) \cdot f(y_1) = y_1 \cdot f(y_1) - y_2 \cdot f(y_1).$$

Or, par la définition de  $\varphi$  le bord de  $\Omega$  est décrit par  $\partial\Omega = \varphi^{-1}(S^2)$ , où  $S^2$  est la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . On a ainsi  $\|y_1\| \geq \|y_2\|$  et donc  $(y_1 - y_2) \cdot f(y_1) > 0$  si  $y_1 \notin \varphi^{-1}(\Omega)$ , d'où  $y_1 \neq y_2$ .

2. La vérification de (4.28) est immédiate car  $\|f(\varphi(x))\| / \|\varphi(x)\| = \sigma(\|\varphi(x)\| - 1) / \|\varphi(x)\| \rightarrow \infty$  pour  $\|\varphi(x)\| \rightarrow \infty$  par (4.32).

Par la proposition 4.3.4 on en déduit alors que la variété décrite par (4.33) est bien absorbante. ■

Sous ces notations, nous pouvons alors proposer une écriture de la matrice PML élémentaire

**Lemme 4.3.8** *La matrice  $Z_0(p, x)$  du système PML (4.24) correspondant au changement de variable (4.33) est donnée par  $Z_0(p, x) = \mathbb{I}_3 + \frac{1}{p} F_0(x)$ , où*

$$F_0(x) = Q(x) \begin{pmatrix} \sigma'(\|\varphi(x)\| - 1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma(\|\varphi(x)\| - 1)}{\|\varphi(x)\|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma(\|\varphi(x)\| - 1)}{\|\varphi(x)\|} \end{pmatrix} Q^{-1}(x), \quad (4.34)$$

avec  $Q(x)$  matrice de passage décrite par

$$Q(x) = \left( \begin{array}{c|c|c} \frac{\varphi(x)}{\|\varphi(x)\|} & u(x) & v(x) \end{array} \right),$$

où  $u(x)$  et  $v(x)$  sont choisis de sorte que  $(\varphi(x), u(x), v(x))$  soit une base orthogonale de  $\mathbb{R}^3$ .

**Preuve.** Par la proposition 4.3.2, la matrice  $F_0(x)$  est donnée par

$$[F_0(x)]_{ij} = \frac{\partial f_i(y)}{\partial y_j} \Big|_{y=\varphi(x)}.$$

On obtient ainsi la formule générale

$$[F_0(x)]_{ij} = \frac{\sigma(\|\varphi(x)\| - 1)}{\|\varphi(x)\|} \delta_{ij} + \frac{\varphi_i(x)\varphi_j(x)\sigma'(\|\varphi(x)\| - 1)}{\|\varphi(x)\|^2} - \frac{\varphi_i(x)\varphi_j(x)\sigma(\|\varphi(x)\| - 1)}{\|\varphi(x)\|^3}, \quad (4.35)$$

en remarquant que tous les termes et les dérivations dans (4.35) sont définis sur le support de  $\sigma$  qui est donné par  $\{x, \|\varphi(x)\| \geq 1\}$ . En remarquant que les valeurs propres de cette matrice sont alors respectivement  $\sigma'(\|\varphi(x)\| - 1)$ , et  $\sigma(\|\varphi(x)\| - 1) / \|\varphi(x)\|$  comme valeur propre double, une simple recherche de vecteurs propres permet d'obtenir (4.34). ■

**Remarque 4.3.9** *Il est toujours possible de définir une base  $(\varphi(x), u(x), v(x))$  à l'extérieur de  $\Omega$  car dans ce cas, par définition,  $\varphi(x) \neq 0$ .*

#### 4.3.4 Ecritures sous forme de systèmes augmentés des équations PML

Afin de pouvoir implémenter de manière efficace le système PML et d'obtenir un système instationnaire total et "tronqué" bien posé à partir de l'écriture proposée dans (4.24) avec la construction de la matrice  $Z_0(p, x)$  décrite par (4.34), nous allons proposer ici une formulation convolutive du type (4.9) et un système augmenté de type Gedney (4.12).

Pour cela, nous décomposons la co-matrice de  $Z_0(p, x)$  par

**Lemme 4.3.10** *La comatrice de  $Z_0(p, x)$  se décompose sous la forme*

$$\text{Com}Z_0(p, x) = Z_1(p, x)Z_2(p, x), \quad (4.36)$$

où comme dans (4.10), les  $Z_i(p, x)$  sont des polynômes de degré 1 en  $p$  obtenus par permutation sur les valeurs propres de  $Z_0(p, x)$ ;  $Z_i(p, x) = \mathbb{I}_3 + 1/p F_i(x)$ , avec

$$F_1(x) = Q(x) \begin{pmatrix} \frac{\sigma(\|\varphi(x)\| - 1)}{\|\varphi(x)\|} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'(\|\varphi(x)\| - 1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma(\|\varphi(x)\| - 1)}{\|\varphi(x)\|} \end{pmatrix} Q^{-1}(x),$$

$$\text{et } F_2(x) = Q(x) \begin{pmatrix} \frac{\sigma(\|\varphi(x)\| - 1)}{\|\varphi(x)\|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma(\|\varphi(x)\| - 1)}{\|\varphi(x)\|} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'(\|\varphi(x)\| - 1) \end{pmatrix} Q^{-1}(x).$$

**Preuve.** A partir de la décomposition de  $F_0(x)$  (4.34) on a ainsi

$$\text{Com}Z_0(p, x) = \text{Com}Q(x) \text{Com} \left( \mathbb{I}_3 + \frac{1}{p} D_0(x) \right) \text{Com}Q^{-1}(x),$$

où  $D_0(x)$  est la matrice diagonale de (4.34). En écrivant

$$\text{Com} \left( \mathbb{I}_3 + \frac{1}{p} D_0(x) \right) = \left( \mathbb{I}_3 + \frac{1}{p} D_1(x) \right) \left( \mathbb{I}_3 + \frac{1}{p} D_2(x) \right),$$

où les matrices  $D_i(x)$  sont des permutations par 3-cycle des valeurs sur la diagonale de  $D_0(x)$ , et en remarquant finalement que

$$\text{Com}Q(x) = \det(Q(x))(Q^T(x))^{-1} = \det(Q(x))Q(x) \text{ et } \text{Com}Q^{-1}(x) = \det(Q(x))^{-1}Q^{-1}(x),$$

car la matrice  $Q(x)$  est orthogonale. On en déduit alors le résultat. ■

A partir de cette décomposition nous retrouvons en particulier les commutations deux-à-deux de  $Z_1(p, x)$ ,  $Z_2(p, x)$  et  $Z_0^{-1}(p, x)$ .

### Formulation convolutive

En remarquant que

$$Z_0^{-1}(p, x) = \mathbb{I}_3 - \frac{1}{p}F_0(x) + \frac{1}{p^2}F_0(x)Z_0^{-1}(p, x)F_0(x),$$

on en déduit que le produit  $p^{-1}F(x)Z_1(p, x)Z_2(p, x)Z_0^{-1}(p, x)F(x)$  peut se mettre sous la forme

$$pF^{-1}(x)Z_1(p, x)Z_2(p, x)Z_0^{-1}(p, x)F(x) = p\mathbb{I}_3 + A + F^{-1}(x)R(x)(p\mathbb{I}_3 + F_0(x))F(x), \quad (4.37)$$

avec  $A = F^{-1}(x)(F_1(x) + F_2(x) - F_0(x))F(x)$  et  $R = (F_1(x) - F_0(x))(F_2(x) - F_0(x))$ .

A partir du développement (4.37) le système PML en formulation convolutive peut s'écrire sous la forme d'un système augmenté

$$\begin{cases} -ik\tilde{E} + A\tilde{E} + F^{-1}(x)R(x)F(x)\tilde{D} &= \nabla \times \tilde{H}, \\ -ik\tilde{D} + F^{-1}(x)F_0(x)F(x)\tilde{D} &= \tilde{E}, \\ -ik\tilde{H} + A\tilde{H} + F^{-1}(x)R(x)F(x)\tilde{B} &= -\nabla \times \tilde{E}, \\ -ik\tilde{B} + F^{-1}(x)F_0(x)F(x)\tilde{B} &= \tilde{H}, \end{cases} \quad (4.38)$$

qui se relève en temps sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t E + A E + F^{-1}(x)R(x)F(x)D &= \nabla \times H, \\ \partial_t D + F^{-1}(x)F_0(x)F(x)D &= E, \\ \partial_t H + A H + F^{-1}(x)R(x)F(x)B &= -\nabla \times E, \\ \partial_t B + F^{-1}(x)F_0(x)F(x)B &= H. \end{cases} \quad (4.39)$$

**Remarque 4.3.11** Dans le cas où la matrice  $F_0(x)$  et  $F(x)$  sont données par (4.26), cas cartésien des PML par complexification des variables, alors les expressions des systèmes (4.9) et (4.39) sont quasi-identiques. En effet, les matrices  $A$  de ces deux systèmes coïncident, et les matrices  $R_1$  et  $R_2$  de (4.9) sont en relation avec la matrice  $R(x)$  de (4.39) par  $R(x) = R_1R_2$ ; la décomposition  $R_1K(t) *_t R_2E$  pouvant se récrire  $R_1R_2K(t) *_t E$  car  $R_2$  et  $K(t)$  (ou  $Z_0(k, x)$  dans le domaine fréquentiel) commutent.

### Formulation de Gedney

A partir de la décomposition de la comatrice (4.36), en posant les changements d'inconnues successifs  $\tilde{D} = Z_2(k, x)Z_0^{-1}(k, x)\tilde{E}$  et  $\tilde{B} = Z_2(k, x)Z_0^{-1}(k, x)\tilde{H}$ , et en utilisant la commutation de  $Z_0^{-1}(k, x)$  et  $Z_2(k, x)$ , le système (4.24) se ramène au système augmenté

$$\begin{cases} -ik\tilde{D} + F^{-1}(x)F_1(x)F(x)\tilde{D} &= \nabla \times \tilde{H}, \\ -ik\tilde{E} + F^{-1}(x)F_2(x)F(x)\tilde{E} &= -ik\tilde{D} + F^{-1}(x)F_0(x)F(x)\tilde{D} \\ -ik\tilde{B} + F^{-1}(x)F_1(x)F(x)\tilde{B} &= -\nabla \times \tilde{E}, \\ -ik\tilde{H} + F^{-1}(x)F_2(x)F(x)\tilde{H} &= -ik\tilde{B} + F^{-1}(x)F_0(x)F(x)\tilde{B}, \end{cases}$$

qui se relève alors immédiatement en temps sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t D + F^{-1}(x)F_1(x)F(x)D &= \nabla \times H, \\ \partial_t E + F^{-1}(x)F_2(x)F(x)E &= \partial_t D + F^{-1}(x)F_0(x)F(x)D \\ \partial_t B + F^{-1}(x)F_1(x)F(x)B &= -\nabla \times E, \\ \partial_t H + F^{-1}(x)F_2(x)F(x)H &= \partial_t B + F^{-1}(x)F_0(x)F(x)B, \end{cases} \quad (4.40)$$

**Remarque 4.3.12** Comme pour l'écriture convolutive, dans le cas où  $F_0(x)$  et  $F(x)$  sont les matrices (4.26), les écritures (4.40) et (4.12) sont alors les mêmes.

## 4.3.5 Etude qualitative du système PML instationnaire obtenu

Considérons le système de Maxwell, avec des seconds membres  $f$  localisés dans  $D_0 \subset \Omega$ .

$$\begin{cases} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0] \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) u = f(t, x), (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \\ u(t=0) = 0, \end{cases}$$

où  $\mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l$  représente l'opérateur de diffraction en espace homogène, soit :

$$\mathbb{A}_0 \partial_t = \begin{pmatrix} \partial_t \mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & \partial_t \mathbb{I}_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla \times \\ \nabla \times & 0 \end{pmatrix},$$

et  $\mathbb{A}'_0$  et  $\mathbb{B}$  correspondent aux variations des caractéristiques dans  $D_0 \subset \Omega$ .

En posant  $g = f - \mathbb{A}'_0 \partial_t u - \mathbb{B}u$ , on se ramène au problème équivalent

$$\begin{cases} \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l \right) u = g(t, x), (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \\ u(t=0) = 0, \end{cases} \quad (4.41)$$

où  $g$  est encore un second membre à support dans  $D_0$ .

Si on suppose maintenant qu'il existe  $C > 0$ ,  $t_0 > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que  $g$  vérifie

$$\|g(t)\| \leq C e^{-\alpha t}, \quad \forall t > t_0, \quad (4.42)$$

alors en symétrisant l'inconnue  $u$  par rapport à  $t = 0$ , le problème (4.41) est équivalent à la résolution après transformation par Fourier du système à coefficient constants

$$\left( -ik \mathbb{I}_6 + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l \right) \tilde{u} = \tilde{g}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (4.43)$$

où  $\tilde{u}$  et  $\tilde{g}$  désignent respectivement les transformées de Fourier de  $u$  et  $g$ .

Considérons maintenant la résolution de (4.43) transporté sur une variété absorbante décrite par (4.33) et mis sous la forme d'un système augmenté, comme dans (4.38), sous la forme

$$\begin{cases} -ik \tilde{\mathcal{E}} + \mathbb{B} \tilde{\mathcal{E}} + \mathbb{A} \tilde{\mathcal{E}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus D_0, \\ \mathbf{n} \times \tilde{E}^{PML} = \mathbf{n} \times \tilde{E}, \quad x \in \delta D_0 \end{cases} \quad (4.44)$$

où  $\tilde{\mathcal{E}} = \left( \tilde{E}^{PML}, \tilde{D}, \tilde{H}^{PML}, \tilde{B} \right)^T$ , et  $\mathbb{B}$  et  $\mathbb{A}$  sont les opérateurs donnés par

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} A & F^{-1}(x)R(x)F(x) & 0 & 0 \\ -\mathbb{I}_3 & F^{-1}(x)F_0(x)F(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & F^{-1}(x)R(x)F(x) \\ 0 & 0 & -\mathbb{I}_3 & F^{-1}(x)F_0(x)F(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\nabla \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nabla \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par le théorème 4.2.5, le système (4.44) admet alors une solution unique dans  $(L^2(\mathbb{R}^3 \setminus D_0, \mathbb{R}^3))^4$  qui vérifie de plus  $\tilde{E}^{PML} = \tilde{E}$  et  $\tilde{H}^{PML} = \tilde{H}$  sur  $\Omega \setminus D_0$ .

Par transformation de Fourier inverse on en déduit que les relèvements en temps respectifs  $(E^{PML}, D, H^{PML}, B)$  de  $(\tilde{E}^{PML}, \tilde{D}, \tilde{H}^{PML}, \tilde{B})$ , sont la solution unique dans  $(C^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3 \setminus D_0, \mathbb{R}^3)))^4$  du problème, relevé en temps de (4.44)

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{E} + \mathbb{B}\mathcal{E} + \mathbb{A}\mathcal{E} = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus D_0, \\ \mathbf{n} \times E^{PML} = \mathbf{n} \times E, & x \in \delta D_0, \\ \mathcal{E}(t = 0, \cdot) = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus D_0, \end{cases} \quad (4.45)$$

où  $\mathcal{E} = (E^{PML}, D, H^{PML}, B)^T$ . De plus, par la formule de Parseval on a aussi  $E^{PML} = E$  et  $H^{PML} = H$  sur  $\Omega \setminus D_0$ .

En remarquant en outre que les systèmes (4.43) et

$$\begin{cases} -ik\tilde{\mathcal{E}} + \mathbb{B}\tilde{\mathcal{E}} + \mathbb{A}\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{g}, & x \in D_0, \\ \mathbf{n} \times \tilde{E}^{PML} = \mathbf{n} \times \tilde{E}, & x \in \delta D_0 \end{cases} \quad (4.46)$$

donnent par restriction à  $D_0$  la même solution en  $(\tilde{E}, \tilde{H})$ , on peut alors étendre la relation  $\tilde{E}^{PML} = \tilde{E}$  et  $\tilde{H}^{PML} = \tilde{H}$  à tout  $\Omega$ , et donc finalement  $E^{PML} = E$  et  $H^{PML} = H$  sur  $\Omega$ . On assure ainsi qui plus est l'existence et l'unicité de la solution du problème instationnaire complet sur tout  $\mathcal{R}^3$

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{E} + \mathbb{B}\mathcal{E} + \mathbb{A}\mathcal{E} = g, & x \in \mathbb{R}^3, \\ \mathcal{E}(t = 0, \cdot) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (4.47)$$

qui pourrait par ailleurs être démontrées directement à l'aide de la théorie sur les systèmes de Friedrich.

Nous allons maintenant nous intéresser à la restriction du système PML à un domaine borné. Pour cela, à partir de la définition de  $\varphi$  dans (4.31), notons  $\Omega_R$  l'ensemble

$$\Omega_R = \Omega \cup \{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \|\varphi(x)\| \leq 1 + R\},$$

pour tout  $R \geq 0$ . On remarquera que par cette définition  $\Omega_0 = \Omega$  et que, pour les frontières  $\partial\Omega_R$  correspond aux ensembles  $\{x, \|f(\varphi(x))\| = F_R\}$ , où  $F_R = \sigma(R) > 0$  est une constante dépendant uniquement de  $f$  et de  $R$ .

Soit  $R > 0$ . Le problème (4.47) revient sur  $\Omega_R$  à résoudre

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{E} + \mathbb{B}\mathcal{E} + \mathbb{A}\mathcal{E} = g(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_R, \\ M \begin{pmatrix} E^{PML} \\ H^{PML} \end{pmatrix} = Mu^{PML}, & x \in \delta\Omega_R, \\ \mathcal{E}(t = 0) = 0, \end{cases} \quad (4.48)$$

où  $u^{PML}$  correspond au terme  $(E^{PML}, H^{PML})^T$  obtenu par (4.47), et  $M$ , comme dans la démonstration du lemme 2.1.7,  $M$  est un opérateur donnant une condition maximale monotone. Dans ce cas, la solution  $\mathcal{E}$  de (4.48) existe, est unique ([55]) et coïncide donc avec la solution de (4.47).

Considérons maintenant le problème tronqué obtenu à partir de (4.48)

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{E}_c + \mathbb{B}\mathcal{E}_c + \mathbb{A}\mathcal{E}_c = g(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_R, \\ M \begin{pmatrix} E_c^{PML} \\ H_c^{PML} \end{pmatrix} = 0, & x \in \delta\Omega_R, \\ \mathcal{E}_c(t = 0) = 0, \end{cases} \quad (4.49)$$

Ce problème admet à son tour une solution unique  $\mathcal{E}_c = (E_c^{PML}, D_c, H_c^{PML}, B_c)^T$ .

Maintenant, en notant  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} - \mathcal{E}_c = (E_0^{PML}, D_0, H_0^{PML}, B_0)^T$ , la fonction  $\mathcal{E}_0$  vérifie sur  $\Omega_R$

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{E}_0 + \mathbb{B}\mathcal{E}_0 + \mathbb{A}\mathcal{E}_0 = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_R, \\ M \begin{pmatrix} E_0^{PML} \\ H_0^{PML} \end{pmatrix} = Mu, & x \in \delta\Omega_R, \\ \mathcal{E}_0(t=0) = 0, \end{cases} \quad (4.50)$$

En transformant (4.50) par Fourier, et par le théorème 4.2.5, on obtient une expression sous représentation intégrale de la transformée de Fourier de  $\mathcal{E}_0$ . Or, par la remarque 4.3.6, on sait que pour  $R > 0$  assez grand, le noyau de Green utilisé dans le théorème 4.2.5 décroît en  $e^{-R}$ . Il s'en suit donc que la transformée de Fourier du terme de bord  $Mu$  est majorée par  $Ce^{-FR}$ , où  $C$  est par exemple la norme de  $(\mathbf{n} \times \tilde{E}, \mathbf{n} \times \tilde{H})$  sur  $\partial D_0$ . La norme de la transformée de Fourier de  $\mathcal{E}_0$ , et donc la norme de  $\mathcal{E}_0$  par utilisation de la formule de Parseval, est alors majorée par  $Ce^{-FR}$ .

Ainsi, pour  $R > 0$  assez grand, la différence entre  $(E_c^{PML}, H_c^{PML})$ , solution du problème avec conditions aux limites (4.49), et  $(E, H)$  est majorée par  $Ce^{-FR}$ .

**Remarque 4.3.13** *En utilisant, à partir de  $Mu^{PML}$  sur  $\partial\Omega_R$ , en utilisant la formulation de Stratton-Chu obtenue dans le théorème 4.2.5 on peut remarquer qu'à l'intérieure de  $\Omega$  l'erreur introduite sur la troncature des PML, c'est-à-dire la norme de  $\mathcal{E}_0$ , est encore majorée par  $\|Mu^{PML}\| e^{-FR}$ . L'erreur globale à l'intérieur de  $\Omega$  est donc a priori majoré par  $Ce^{-2FR}$ .*

### 4.3.6 Ecriture dimensionnée du système augmenté

Afin de pouvoir utiliser les PML dans un contexte physique dimensionné, on dimensionne (4.39) et (4.40).

#### Formulation convolutive

Pour cela,  $E$  est remplacé par  $\sqrt{\varepsilon}E$ ,  $H$  par  $\sqrt{\mu}H$ , et  $t$  par  $t/\sqrt{\varepsilon\mu}$ . Le système (4.39) est alors remplacé par

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t E + \varepsilon A E + \frac{1}{\sqrt{\mu}} F^{-1}(x) R(x) F(x) D & = \nabla \times H, \\ \sqrt{\mu} \partial_t D + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} F^{-1}(x) F_0(x) F(x) D & = E, \\ \mu \partial_t H + \mu A H + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} F^{-1}(x) R(x) F(x) B & = -\nabla \times E, \\ \sqrt{\varepsilon} \partial_t B + \frac{1}{\sqrt{\mu}} F^{-1}(x) F_0(x) F(x) B & = H. \end{cases}$$

Posons ensuite le dimensionnement des inconnues fictives  $D \rightarrow \sqrt{\varepsilon}D$  et  $B \rightarrow \sqrt{\mu}B$ ; il vient alors

$$\begin{cases} \partial_t E + A E + F^{-1}(x) \tilde{R}(x) F(x) D & = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times H, \\ \partial_t D + F^{-1}(x) \tilde{F}_0(x) F(x) D & = c_0 E, \\ \partial_t H + A H + F^{-1}(x) \tilde{R}(x) F(x) B & = -\frac{1}{\mu} \nabla \times E, \\ \partial_t B + F^{-1}(x) \tilde{F}_0(x) F(x) B & = c_0 H, \end{cases}$$

où  $c_0 = \sqrt{\varepsilon\mu}^{-1}$  est la vitesse de la lumière dans le milieu, et en posant  $\tilde{F}_0(x) = c_0 F_0(x)$ ,  $\tilde{F}_1(x) = c_0 F_1(x)$ ,  $\tilde{F}_2(x) = c_0 F_2(x)$  et donc  $\tilde{R}(x) = c_0 R(x)$ .

### Formulation de Gedney

En procédant de la même manière, avec  $E \rightarrow \sqrt{\varepsilon}E$ ,  $H \rightarrow \sqrt{\mu}H$ , et  $t \rightarrow t/\sqrt{\varepsilon\mu}$ , le système augmenté (4.40) se réécrit donc sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\varepsilon}\partial_t D + \frac{1}{\sqrt{\mu}}F^{-1}(x)F_1(x)F(x)\tilde{D} = \nabla \times H, \\ \partial_t E + c_0F^{-1}(x)F_2(x)F(x)E = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\partial_t D + c_0F^{-1}(x)F_0(x)F(x)D \\ \sqrt{\mu}\partial_t B + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}F^{-1}(x)F_1(x)F(x)\tilde{B} = -\nabla \times E, \\ \partial_t H + c_0F^{-1}(x)F_2(x)F(x)H = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\partial_t B + c_0F^{-1}(x)F_0(x)F(x)B. \end{array} \right.$$

Soit ensuite en dimensionnant les inconnues fictives  $D \rightarrow \sqrt{\varepsilon}D$  et  $B \rightarrow \sqrt{\mu}B$ ; il vient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t D + F^{-1}(x)\tilde{F}_1(x)F(x)\tilde{D} = \frac{1}{\varepsilon}\nabla \times H, \\ \partial_t E + F^{-1}(x)\tilde{F}_2(x)F(x)E = \partial_t D + F^{-1}(x)\tilde{F}_0(x)F(x)D \\ \partial_t B + F^{-1}(x)\tilde{F}_1(x)F(x)\tilde{B} = -\frac{1}{\mu}\nabla \times E, \\ \partial_t H + F^{-1}(x)\tilde{F}_2(x)F(x)H = \partial_t B + F^{-1}(x)\tilde{F}_0(x)F(x)B, \end{array} \right.$$

en utilisant les définitions précédentes de  $\tilde{F}_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, 3$ .

# Conclusion et perspectives

Dans ce travail nous avons traité de la résolution numérique des équations de Maxwell dans un contexte instationnaire. L'objectif était de proposer des éléments méthodologiques permettant de réduire le volume de calcul global nécessaire au traitement numérique de simulations électromagnétiques, permettant par la même d'augmenter la taille des scènes pouvant être prises en compte. Dans cette optique nous nous sommes intéressés à trois points en particulier.

Dans une première partie de ce travail, nous avons proposé une nouvelle formule de rayonnement permettant le calcul du champs électromagnétique hors d'un volume borné donné à partir de la donnée de courants sur la surface de ce volume. L'intérêt d'une telle démarche est de limiter le volume global de calcul tout en laissant la possibilité de considérer des points de mesure extérieurs au maillage. Il s'en suit *a priori* un gain en stockage mémoire et en temps calcul pour l'ensemble de la simulation, permettant ainsi de considérer des volumes de plus en plus importants. L'emploi d'équations intégrales de surface étant généralement évité en raison du surcoût qu'elles engendrent, des formules dites *de rayonnement* (plus efficaces) approximant les équations intégrales sont alors employées. Contrairement à la plupart de ces formules écrites pour des approximations par développement limité proportionnellement à l'inverse de la distance  $d$  entre l'observatoire et la surface de rayonnement, nous avons effectué ici l'établissement d'une nouvelle formule de rayonnement dont le critère de précision est donné par le rapport d'une quantité de découpage local de la surface de prélèvement  $\delta$  et de la distance  $d$ . Cette méthodologie a ainsi permis d'obtenir une formule dont le domaine de validité, qualifié de *semi-lointain*, permet de rapprocher ou éloigner l'observatoire autant que souhaité de la surface de prélèvement. Pour une distance  $d$  fixée, en jouant sur le numérateur du rapport  $\delta/d$  nous pouvons alors donner une approximation du champ propagé à une précision quelconque fixée. Notons en outre, que l'établissement de cette formule passe par la description de surfaces qualifiées d'*admissibles* englobant l'ensemble des surfaces convexes et même une grande quantité de surfaces non-convexes (étoilées par exemple). A contrario de la plupart des formules de rayonnement nous pouvons alors considérer des surfaces de prélèvement dont la géométrie peut suivre finement celle des éléments rayonnant considérés. Il s'en suit donc une meilleure précision sur les courants, traces tangentielles à la surface de champs numériquement calculés par des schémas de résolution volumique, qui sont utilisés pour le calcul du rayonnement. De même, l'utilisation de conditions aux limites bornant artificiellement le domaine non-convexes sera alors rendu possible.

Numériquement, cette formule pouvant être assimilée à une généralisation de la formule dite *de champs lointain* de Yee [73] s'avère extrêmement simple à introduire sur des schémas numériques de résolution volumique des équations de Maxwell temporelles. Les exemples traités ont montré que la formule s'avérait toujours d'une grande précision aussi bien pour un observatoire placé loin de la surface de rayonnement que lorsqu'il ne se trouve qu'à quelques mailles de celle-ci. Nous avons pu en outre vérifier la consistance de cette approximation et l'utiliser dans le cas d'objets non-convexes en choisissant des surfaces de prélèvement suivant la géométrie de ceux-ci et constater qu'il n'y avait effectivement aucune perte de précision dans ce cas.

La seconde partie de cette thèse consiste en l'établissement, l'étude théorique, puis la mise en œuvre et l'étude numérique d'une méthode de décomposition en sous-domaines disjoints de grandes scènes d'interactions électromagnétiques entre un (des) source(s) et un (des) élément(s) diffractant(s). Nous avons ainsi proposé à partir de la formulation par les équations de Maxwell d'une telle scène, une écriture sous forme d'un système de systèmes d'équations de Maxwell équivalent. La particularité de ce nouveau système d'équations réside dans la localisation d'une ou plusieurs source(s)/élément(s) pour chacune d'elle à l'intérieur d'un domaine borné entourant uniquement celle(s)-ci/celui(ceux)-ci. L'interaction des différents domaines entre-eux est alors donnée par un terme de couplage introduit au second membre des équations de Maxwell sous forme de courants électriques et magnétiques sur des couronnes(/surfaces) entourant l'(es) inhomogénéité(s) considérée(s) dans ce domaine, appelés volumes(/surfaces) de Huygens. Ces courants sont décrits par la propagation, via le noyau de Green des équations de Maxwell, des champs électromagnétiques calculés sur les autres domaines. Un tel système permet alors de travailler séparément domaine par domaine, ou chacun d'eux peut être borné à un volume n'englobant que la(es) source(s)/objet(s) considéré(es) par utilisation de conditions aux limites transparentes ou absorbantes. Le traitement par utilisation de la formulation complète du noyau de Green étant a priori d'un coût prohibitif pour la résolution numérique de ce nouveau système, nous avons alors introduit une approximation en deux étapes : *l'antepolation* et *l'interpolation*. La première étape consiste en l'approximation de la propagation des courants issus domaines vers les points des volumes(/surfaces) de Huygens d'un autre domaine à l'aide de la formule de rayonnement développée dans la première partie. La seconde étape approxime quant à elle la distribution des courants sur les volumes(/surfaces) de Huygens suivant la même précision que celle utilisée pour le calcul du rayonnement (ie : l'erreur est donnée par rapport à  $\delta/d$ ). Nous avons alors montré que le système approximé obtenu par l'utilisation conjointe de ces deux étapes est alors bien posé dans des espaces introduits par Bardos et Rauch [11, 55] pour l'étude des systèmes de Friedrich. En outre, en étudiant le problème continu en espace et en temps nous avons démontré que la stabilité globale de la méthode est garantie a priori, la constante de stabilité étant alors exprimée par utilisation du principe de Huygens sous forme d'un polynôme du nombre de fenêtres de taille  $T_{min}$  découpant l'intervalle d'étude en temps  $[0, T]$ , où  $T_{sync}$  est le minimum sur l'ensemble des domaines des temps nécessaires à la propagation du champ à partir de la surface de prélèvement vers la surface de Huygens d'un autre domaine.

D'un point de vue numérique, l'implémentation de la méthode de décomposition en sous-domaines disjoints a amené à un schéma naturellement hybride et parallèle. Nous avons ainsi pu effectuer plusieurs simulations en utilisant un schéma non-conforme de types différences finies et un schéma conforme volumes finis. Dans tous les cas la méthode s'est avérée amener à d'excellents résultats, et fonction de la précision choisie sur le paramètre d'erreur  $\delta/d$  nous avons pu évaluer les coups engendrés par la méthode par rapport à ceux obtenus par une résolution globale. Nous avons ainsi pu constater que cette méthode a amené à des gains importants en temps de calcul et en stockage mémoire, à précision équivalente, tout en diminuant les erreurs (dissipation et/ou dispersion) introduites par les différents schémas lors du parcours du maillage de l'espace libre situé entre les différents composants des scènes considérées. Comme pour la mise en pratique de la formule de rayonnement, nous avons pu vérifier expérimentalement la consistance de la méthode par rapport au paramètre introduit  $\delta/d$ , validant ainsi l'approche développée. En outre, à partir de l'écriture en continu du système couplé approximé nous avons introduit naturellement une hybridation entre les différents schémas utilisés (différences finies et volumes finis) dont l'intérêt a été mis en avant. De plus, une stratégie de pas de temps locaux inter-domaines a été présentée permettant entre-autres de diminuer les contraintes sur le pas de temps imposées par exemple sur l'hybridation des méthodes par les conditions CFL propres aux différents schémas. Ce pas de temps local, sur les exemples étudiés, a amené des gains significatifs en temps de calcul et en coût mémoire tout en n'induisant pas

de perte sur la précision globale de la méthode. Enfin, afin d'illustrer l'intérêt global de la méthode sur une configuration physique réaliste, nous avons utilisé cette méthode sur une scène de couplage, provenant de simulations réelles, entre une antenne large-bande et la carrosserie d'une voiture. Sur un tel exemple nous avons mis en avant les intérêts conjoints de la méthode de décomposition en sous-domaines, de la stratégie de pas de temps locaux inter-domaines, et proposé l'illustration de la résolution par hybridation de méthodes.

Dans le cas de milieux homogènes à pertes, ou de milieux semi-infinis, nous avons suggéré en annexe les éléments permettant la généralisation de la méthode développée.

Enfin, dans la dernière partie, nous nous sommes intéressé aux conditions aux limites absorbantes permettant de borner artificiellement les domaines de calculs. Les tests numériques effectués dans ce travail ont été obtenu en entourant les domaines de calculs par des conditions PML "classiques". En s'inspirant des travaux de Lassas *et al's* [41, 42] dans le domaine harmonique, nous avons établi une formulation temporelle locale bien posée, s'appliquant à des domaines étoilés, et nous avons étudié l'erreur introduite par troncature (erreur sur-exponentiellement décroissante) dans des cas réguliers.

## Perspectives

Dans ce travail nous avons écrit une formule de rayonnement sous forme de développement limité à l'ordre 0 en  $\delta/d$  sous l'intégration sur la surface de prélèvement. Nous avons alors montré que pour des problèmes suffisamment réguliers l'erreur commise était en  $O(\delta/d)$ . Dans le cas de la formule de champs lointain, le développement était effectué en  $1/d$  et le reste était alors écrit comme  $O(1/d)$ . Toutefois, cette formule constitue le premier terme d'un développement en série de  $1/d^n$  du champs électromagnétique, appelé développement de Atkinson-Wilcox [9, 68, 69]. Il a été démontré que les termes d'ordres supérieurs ( $1/d^n$ ,  $n \geq 2$ ) s'obtiennent par une formule de récurrence à partir du terme de champs lointain en utilisant un opérateur de Laplace-Beltrami. Une extension possible de la formule de rayonnement proposée dans cette thèse serait de calculer les termes d'ordres supérieurs ( $\delta^n/d^n$ ,  $n \geq 2$ ). Il serait alors possible de proposer des formules de précision, donc pour un observatoire fixé (donc une valeur de  $d$  fixée) d'effectuer des regroupements selon  $\delta$  plus grand sur la surface de prélèvement, augmentant ainsi la précision de la formule et diminuant les coûts. En outre, la recherche d'une formule de récurrence sur les termes du développement en  $\delta/d$  du champs permettrait d'effectuer parallèlement une montée en ordre sur la phase d'interpolation dans le schéma multi-domaines. Ceci permettrait alors de réduire très significativement le nombre d'éléments nécessaires à la bonne prise en compte du couplage, et augmenterait donc a priori les performances globales de la méthode.

Une autre perspective de cette méthode réside dans la possibilité d'hybrider plusieurs schémas numériques. Afin de proposer un plus grand éventail de méthodes de résolutions pour traiter des configurations plus complexes, l'utilisation de nouveaux schémas peut s'avérer intéressante. Ainsi, par exemple, il semble a priori naturel d'utiliser la méthode multi-domaines avec des schémas de type Galerkin discontinus. En effet, ces schémas travaillant au niveau d'échanges de flux entre les différentes cellules du maillage, le prélèvement et l'introduction de courants sur les bords de ces cellules semble alors immédiat et l'implémentation de la méthode de résolution par sous-domaines disjoints en devient alors naturelle. Dans le travail effectué, afin de garder le plus de généralité possible dans le choix des schémas numériques employés, nous avons étudié séparément l'erreur introduite par la méthode (erreurs d'interpolation et d'interpolation) et de la restriction à des domaines bornés par utilisation de PML. Toutefois, l'erreur globale de la méthode, c'est-à-dire la composition des deux erreurs précédemment citées ainsi que celle introduite par le schéma numérique, pourrait être

évaluée en fixant a priori un schéma. Au vu des considérations précédentes, le choix du Galerkin discontinu s'avérerait par exemple une piste intéressante pour obtenir un résultat de consistance globale. Qui plus est, il se généraliserait alors aux hybridations  $hp$  de ces schémas (utilisation de différentes caractéristiques de maillages ( $h$ ), et de degrés d'approximations polynomiales variés ( $p$ )), ainsi qu'à l'emploi des volumes finis (schémas obtenu pour  $p = 0$ ).

Enfin, concernant les PML introduites dans ce travail, nous avons montré que la décroissance du noyau de Green s'effectuait selon des lignes iso-paramètre par rapport au coefficient d'éloignement au bord du domaine d'étude. Cette décroissance est donnée de manière sur-exponentielle en  $d$  lors du parcours de ces couches, et se réduit à la décroissance en  $1/d$  du noyau de Green de l'équation des ondes homogènes le long du parcours d'une seule couche. Sur un maillage du domaine, les fonctions de bases employées par le schéma numérique auraient donc deux décroissances à l'intérieur d'une même cellule : une en  $1/d$  dans les directions iso-paramétriques, et une  $\exp(-\sigma(d))$ , pour  $\sigma$  fonction positive croissante, dans les directions transverses. Il semble alors que l'utilisation d'une approximation polynomiale à l'intérieur des PML ne soit pas a priori la mieux adaptée au traitement de celles-ci, risquant même de faire apparaître des artefacts numériques. Un choix judicieux des fonctions de bases utilisées à l'intérieur des PML est alors à étudier. On peut alors par exemple envisager des approximations de  $\exp(-x)$  par polynômes.

## Annexe A

# Traitement des milieux semi-infinis

Dans cette section nous présentons un élargissement de la méthode présentée dans le chapitre 2, dans le cadre de scènes d'interactions dans un milieu homogène, à l'étude de scènes d'interactions dans des *multi-milieux semi-infinis homogènes* ; c'est à dire un partitionnement de  $\mathbb{R}^3$  en plusieurs domaines non-bornés, chaque élément de la partition étant la donnée d'un milieu homogène, et les séparations entre les différents éléments sont assurées par des surfaces ou des volumes non-bornés, éventuellement de constitution hétérogène, appelés *interfaces*.

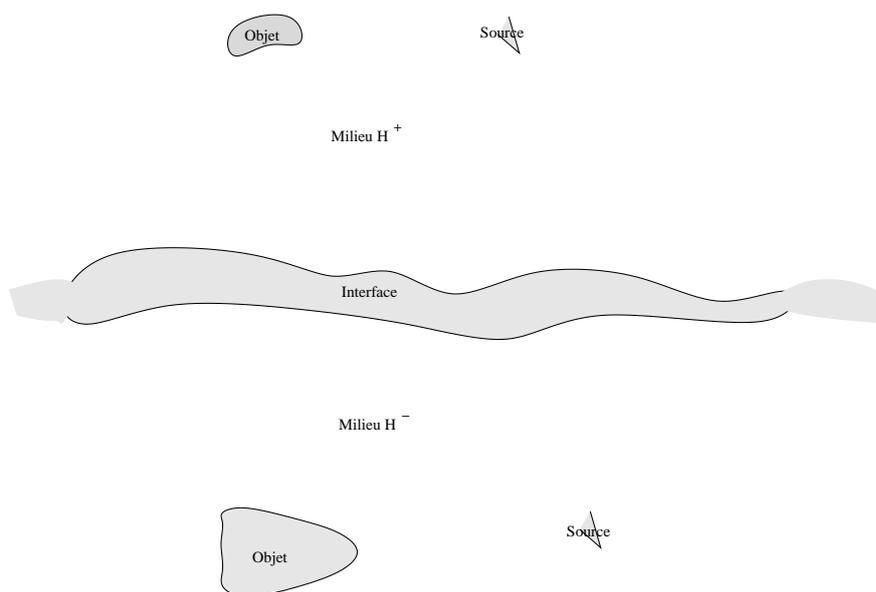


FIG. A.1 – Système avant découpage en sous-domaines

Afin de simplifier les notations et la description de la méthode, nous considérerons (cf figure A.1) que  $\mathbb{R}^3$  est constitué de deux milieux infinis homogènes, dans lesquels sont placés les sources et les objets diffractants, ainsi que d'une interface surfacique ou volumique de constitution et de

géométrie quelconque. Toutefois, tous les résultats présentés ici s'étendent naturellement au cas de  $n$  milieux semi-infinis homogènes ( $n \geq 2$ ).

Dans toute la suite, on désignera par  $H^+$  et  $H^-$  les deux domaines ainsi délimités. L'interface sera alors donnée par  $Inter = \mathbb{R}^3 \setminus (H^+ \cup H^-)$ .

Un tel problème se représente alors à partir des équations de Maxwell, sous la forme :

**Problème A.0.14 (équations de Maxwell dans le multi-milieux)**

Trouver  $u \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathcal{D}([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]}(\mathbb{R}^3))$  solution de

$$\begin{cases} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0] \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) u = u^{src}, \\ u(t=0) = 0, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où :

–  $\mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l$  représente l'opérateur de diffraction dans le bi-milieu homogène, soit :

$$\mathbb{A}_0 \partial_t == \begin{pmatrix} \varepsilon(x) \partial_t \mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & \mu(x) \partial_t \mathbb{I}_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla \times \\ \nabla \times & 0 \end{pmatrix},$$

où les permittivités diélectriques et électromagnétiques du bi-milieu sont données strictement positives et constantes par morceaux :  $\varepsilon(x) = \varepsilon_r^\pm$  et  $\mu(x) = \mu_r^\pm$  pour  $x \in H^\pm$  ;

–  $\mathbb{A}'_0 \partial_t$  représente la présence de permittivités variables ( $\varepsilon_r(x)$  et  $\mu_r(x)$ ), soit :

$$\mathbb{A}'_0 \partial_t == \begin{pmatrix} (\varepsilon_r(x) - \varepsilon(x)) \partial_t \mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & (\mu_r(x) - \mu(x)) \partial_t \mathbb{I}_3 \end{pmatrix},$$

avec  $\mathbb{A}'_0$  uniformément coercif et à coefficients dans  $L^\infty(\mathbb{R}^3)$  ;

–  $\mathbb{B}$  est un opérateur à support compact représentant les inhomogénéités du milieu ;

– comme dans le paragraphe 2.1,  $L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]}(\mathbb{R}^3)$  est l'espace des fonctions de carré intégrables pour la norme associée au produit scalaire

$$(\phi, \xi) \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} ([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0] \phi, \xi),$$

et  $\mathcal{D}([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l)$  est le domaine de l'opérateur  $[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l$  à valeur dans  $L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]}(\mathbb{R}^3)$  ;

– enfin  $u = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ ,  $u^{src} = \begin{pmatrix} E^{src} \\ H^{src} \end{pmatrix}$  et  $u^{inc} = \begin{pmatrix} E^{inc} \\ H^{inc} \end{pmatrix}$ .

Comme dans le chapitre 2, par le théorème de Hille-Yosida on peut établir l'existence et l'unicité de la solution du problème A.0.14

**Proposition A.0.15** Soit  $\Omega$  le support de  $\mathbb{B}$ . Si  $u^{src}$  et  $u^{inc}$  sont dans  $C^1(\mathbb{R}^+, L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]}(\mathbb{R}^3))$ , et si  $\mathbb{B} \in L^\infty(\Omega)$ , alors il existe une unique solution  $u$  au problème A.0.14.

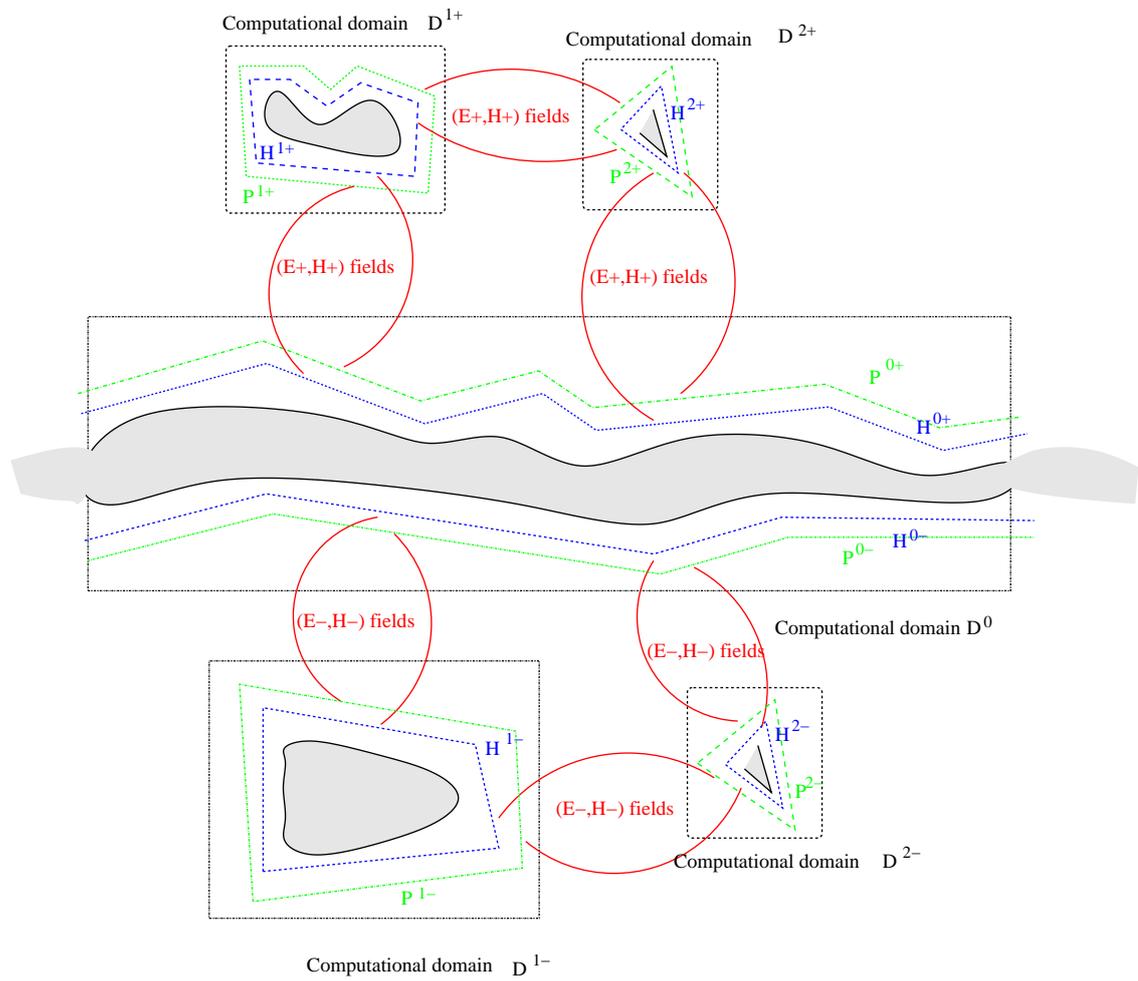


FIG. A.2 – Système après découpage en sous-domaines

## A.1 Principe de la méthode

Suivant le même procédé que celui introduit dans le chapitre 2, nous pouvons découper le principe de la méthode de la manière suivante (cf figure A.2) :

1. Les objets et sources de chacun des milieux  $H^+$  et  $H^-$  sont séparés dans des volumes de calculs disjoints, respectivement  $(\mathcal{D}^{i+})_i$  et  $(\mathcal{D}^{j-})_j$  dans lesquels nous utiliserons les méthodes numériques classiques.
2. Un traitement spécifique est introduit pour l'interface : elle est considérée soit comme délimitation du milieu  $H^+$  pour le calcul du couplage avec les éléments de  $H^+$ , soit comme frontière du milieu  $H^-$  pour la prise en compte des interactions avec les éléments de  $H^-$ . Pour chacun de ces cas, l'introduction des contributions provenant des milieux  $H^+$  et  $H^-$  se fera respectivement sur une surface de Huygens dans  $H^+$  et sur une autre dans  $H^-$ .
3. Vu des éléments d'un milieu  $H^+$  ou  $H^-$  les prises en compte des champs diffractés par les éléments de l'autre milieu ainsi que par l'interface seront obtenus par le rayonnement d'une surface de prélèvement proche de l'interface respectivement dans  $H^+$  ou  $H^-$ . La prise en compte des interactions des éléments d'un même milieu s'effectue de la même manière que dans le cas mono-milieu du chapitre 2.
4. Enfin, on suppose que l'étude s'effectue sur une plage de temps finie donnée  $t \in [0, T]$  ce qui permet alors de limiter la dimension du domaine interface à la zone compacte dans laquelle les champs  $E$  et  $H$  seront non-nuls au cours du temps. L'interface et les surfaces de Huygens et de prélèvement des milieux  $H^+$  et  $H^-$  seront donc limitées à cette zone qui formera le domaine de calcul  $\mathcal{D}^0$ .

Comme dans le chapitre 2, la description de la méthode nécessite de formuler une hypothèse de découpage géométrique et de localisation des inhomogénéités :

### Hypothèse A.1.1 (découpage géométrique et localisation des inhomogénéités)

1. Les éléments du milieu  $H^+ \cup H^-$  vérifient les conditions de l'hypothèse 2.1.4, c'est-à-dire :
  - (a) i. Pour tout indice  $i$  il existe un domaine borné  $\mathcal{D}^{i+}$  tel que  $\forall i * \overline{\mathcal{D}^{i+}} \cap \overline{\mathcal{D}^{i*+}} = \emptyset$ , et vérifiant  $\emptyset \neq V(\mathcal{H}^{i+}) \subset \overline{\text{Supp}(\varphi_{\mathcal{H}^{i+}})} \subsetneq \overline{V(\mathcal{P}^{i+})} \subsetneq \mathcal{D}^{i+}$  ;
  - ii. Pour tout indice  $j$  il existe un domaine borné  $\mathcal{D}^{j-}$  tel que  $\forall j * \overline{\mathcal{D}^{j-}} \cap \overline{\mathcal{D}^{j*-}} = \emptyset$ , et vérifiant  $\emptyset \neq V(\mathcal{H}^{j-}) \subset \overline{\text{Supp}(\varphi_{\mathcal{H}^{j-}})} \subsetneq \overline{V(\mathcal{P}^{j-})} \subsetneq \mathcal{D}^{j-}$  ;
  - (b) i. La restriction des opérateurs  $\mathbb{B}$  et  $\mathbb{A}'_0$  dans (A.1) au milieu  $H^+$  se décompose en sommes d'opérateurs  $\mathbb{B}_{i+}$  et  $\mathbb{A}'_0{}^{i+}$ , et pour tout  $i$  les opérateurs  $\mathbb{B}_{i+}$  et  $\mathbb{A}'_0{}^{i+}$  sont à support compact dans l'intérieur du volume  $V(\mathcal{H}^{i+})$  délimité par  $\mathcal{H}^{i+}$  ; et de plus on a  $\sum_i \mathbb{B}_{i+} = \mathbb{B}Y_{H^+}$  et  $\sum_i \mathbb{A}'_0{}^{i+} = \mathbb{A}'_0 Y_{H^+}$  ;
  - ii. La restriction des opérateurs  $\mathbb{B}$  et  $\mathbb{A}'_0$  dans (A.1) au milieu  $H^-$  se décompose en sommes d'opérateurs  $\mathbb{B}_{j-}$  et  $\mathbb{A}'_0{}^{j-}$ , et pour tout  $j$  les opérateurs  $\mathbb{B}_{j-}$  et  $\mathbb{A}'_0{}^{j-}$  sont à support compact dans l'intérieur du volume  $V(\mathcal{H}^{j-})$  délimité par  $\mathcal{H}^{j-}$  ; et de plus on a  $\sum_j \mathbb{B}_{j-} = \mathbb{B}Y_{H^-}$  et  $\sum_j \mathbb{A}'_0{}^{j-} = \mathbb{A}'_0 Y_{H^-}$  ;
2. Le domaine  $\mathcal{D}_0$  de l'interface vérifie dans le milieu  $H^+ \cup H^-$  :
  - (a) i. Pour tout  $i$ ,  $\mathcal{D}^0 \cap \mathcal{D}^{i+} = \emptyset$ , et il existe deux surfaces  $\mathcal{H}^{0+}$  et  $\mathcal{P}^{0+}$  dans  $\mathcal{D}^0 \cap H^+$  telles que  $\mathcal{H}^{0+} \cap \mathcal{P}^{0+} = \emptyset$  et  $d(\mathcal{P}^{0+}, \text{Inter}) > d(\mathcal{H}^{0+}, \text{Inter}) > 0$  ;
  - ii. Pour tout  $j$ ,  $\mathcal{D}^0 \cap \mathcal{D}^{j-} = \emptyset$ , et il existe deux surfaces  $\mathcal{H}^{0-}$  et  $\mathcal{P}^{0-}$  dans  $\mathcal{D}^0 \cap H^-$  telles que  $\mathcal{H}^{0-} \cap \mathcal{P}^{0-} = \emptyset$  et  $d(\mathcal{P}^{0-}, \text{Inter}) > d(\mathcal{H}^{0-}, \text{Inter}) > 0$  ;

(b) i. Soit  $x \in \mathcal{D}^0 \cap H^+$  tel que  $d(x, Inter) \geq d(\mathcal{P}^{0+}, Inter)$  alors  $\mathbb{B}(x)Y_{\mathcal{D}^0} = 0$  et  $\mathbb{A}'_0(x)Y_{\mathcal{D}^0} = 0$ ;

ii. Soit  $y \in \mathcal{D}^0 \cap H^-$  tel que  $d(y, Inter) \geq d(\mathcal{P}^{0-}, Inter)$  alors  $\mathbb{B}(y)Y_{\mathcal{D}^0} = 0$  et  $\mathbb{A}'_0(y)Y_{\mathcal{D}^0} = 0$ ;

On notera alors  $\mathbb{B}_0 = \mathbb{B}Y_{\mathcal{D}^0}$  et  $\mathbb{A}_0^0 = \mathbb{A}'_0Y_{\mathcal{D}^0}$ , et il s'en suit donc

$$\mathbb{B} = \sum_i \mathbb{B}_{i+} + \sum_j \mathbb{B}_{j-} + \mathbb{B}_0 \quad \text{et} \quad \mathbb{A}'_0 = \sum_i \mathbb{A}_0^{i+} + \sum_j \mathbb{A}_0^{j-} + \mathbb{A}_0^0.$$

3. Les termes de sources  $u^{src}$  sont à support compact dans  $\mathcal{D}^0 \cup (\cup_i V(\mathcal{H}^{i+})) \cup (\cup_j V(\mathcal{H}^{j-}))$ , et :

(a) pour tout  $x \in \mathcal{D}^0 \cap H^+$  tel que  $d(x, Inter) \geq d(\mathcal{P}^{0+}, Inter)$  alors  $u^{src}(x)Y_{\mathcal{D}^0} = 0$ ;

(b) pour tout  $y \in \mathcal{D}^0 \cap H^-$  tel que  $d(y, Inter) \geq d(\mathcal{P}^{0-}, Inter)$  alors  $u^{src}(y)Y_{\mathcal{D}^0} = 0$ .

Suivant le même principe que celui employé dans le chapitre 2, à l'aide de l'hypothèse A.1.1 nous ramenons la résolution du problème (A.1) à la résolution d'un système de problèmes couplés qui définirons la méthode de décomposition en sous-domaines :

### Problème A.1.2 (système d'équations de Maxwell couplées)

Trouver le  $(n^+ + n^- + 1)$ -uplet  $\{u_0, (u_i^+)_{i \in [1, n^+]}, (u_j^-)_{j \in [1, n^-]}\}$ , avec

$$- u_0 \in C^0([0, T], \mathcal{D}([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^0]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l)) \cap C^1([0, T], L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^0]}(\mathbb{R}^3)),$$

$$- \forall i \in [1, n^+], u_i^+ \in C^0([0, T], \mathcal{D}([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^{i+}]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l)) \cap C^1([0, T], L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^{i+}]}(\mathbb{R}^3)),$$

$$- \forall j \in [1, n^-], u_j^- \in C^0([0, T], \mathcal{D}([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^{j-}]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l)) \cap C^1([0, T], L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^{j-}]}(\mathbb{R}^3)),$$

solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i : \left\{ \begin{array}{l} ([\mathbb{A}_0^+ + \mathbb{A}_0^{i+}] \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_{i+}) u_i^+ = u^{src} Y_{\mathcal{D}^{i+}} \\ \quad + B_i^{(\mathcal{H}^+)} \left( \sum_{i^*} (G^+) * B_{i^*}^{(\mathcal{P}^+)} u_{i^*}^+ + (G^+) * B_0^{(\mathcal{P}^+)} u_0 \right), (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3, \\ u_i^+(t=0) = 0, x \in \mathbb{R}^3, \end{array} \right. \\ \forall j : \left\{ \begin{array}{l} ([\mathbb{A}_0^- + \mathbb{A}_0^{j-}] \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_{j-}) u_j^- = u^{src} Y_{\mathcal{D}^{j-}} \\ \quad + B_j^{(\mathcal{H}^-)} \left( \sum_{j^*} (G^-) * B_{j^*}^{(\mathcal{P}^-)} u_{j^*}^- + (G^-) * B_0^{(\mathcal{P}^-)} u_0 \right), (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3, \\ u_j^-(t=0) = 0, x \in \mathbb{R}^3, \end{array} \right. \\ 0 : \left\{ \begin{array}{l} ([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_0^0] \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_0) u_0 = u^{src} Y_{\mathcal{D}^0} + B_0^{(\mathcal{H}^+)} \left( \sum_i (G^+) * B_i^{(\mathcal{P}^+)} u_i^+ \right) \\ \quad + B_0^{(\mathcal{H}^-)} \left( \sum_j (G^-) * B_j^{(\mathcal{P}^-)} u_j^- \right), (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3, \\ u_0(t=0) = 0, x \in \mathbb{R}^3, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

où  $\mathbb{A}_0^+ = \begin{pmatrix} \varepsilon_r^+ \mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & \mu_r^+ \mathbb{I}_3 \end{pmatrix}$  et  $\mathbb{A}_0^- = \begin{pmatrix} \varepsilon_r^- \mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & \mu_r^- \mathbb{I}_3 \end{pmatrix}$ ; et où  $G^+$  (resp.  $G^-$ ) est la solution élémentaire associée à l'opérateur  $\mathbb{A}_0^+ \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l$  (resp.  $\mathbb{A}_0^- \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l$ ).

Pour tout  $i$  (resp. tout  $j$ ) le terme  $B_i^{(\mathcal{P}^+)}$  (resp.  $B_j^{(\mathcal{P}^-)}$ ) représente le terme de traces sur le surface de prélèvement  $\mathcal{P}^{i+}$  (resp.  $\mathcal{P}^{j-}$ ), et  $B_i^{(\mathcal{H}^+)}$  (resp.  $B_j^{(\mathcal{H}^-)}$ ) est le terme de trace sur la surface de Huygens  $\mathcal{H}^{i+}$  (resp.  $\mathcal{H}^{j-}$ ) explicité au chapitre 2. De même,  $B_0^{(\mathcal{P}^+)}$  et  $B_0^{(\mathcal{H}^+)}$  (resp.  $B_0^{(\mathcal{P}^-)}$  et

$B_0^{(\mathcal{H}^-)}$ ) sont les termes de traces sur les surfaces de prélèvement et de Huygens  $\mathcal{P}^{0+}$  et  $\mathcal{H}^{0+}$  (resp.  $\mathcal{P}^{0-}$  et  $\mathcal{H}^{0-}$ ).

Les traces  $B_0^{(\mathcal{H}^+)}$  et  $B_0^{(\mathcal{H}^-)}$  sont obtenus comme dans le cas du chapitre 2 en utilisant une fonction régularisation de l'unité  $\varphi_0$  telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in H^+, d(x, Inter) \geq d(\mathcal{P}^{0+}, Inter), \varphi_{\mathcal{H}^0}(x) = 0, \\ \forall y \in H^-, d(y, Inter) \geq d(\mathcal{P}^{0-}, Inter), \varphi_{\mathcal{H}^0}(y) = 0, \\ \forall x \in V(\mathcal{H}^0), \varphi_{\mathcal{H}^0}(x) = 1, \end{cases}$$

où  $V(\mathcal{H}^0)$  est un volume du domaine  $\mathcal{D}^0$  vérifiant :

- $\mathcal{H}^{0+} \subset \partial V(\mathcal{H}^0)$  et  $\mathcal{H}^{0-} \subset \partial V(\mathcal{H}^0)$ ,
- $\forall t \in [0, T], \forall x \in \partial V(\mathcal{H}^0) \setminus (\mathcal{H}^{0-} \cup \mathcal{H}^{0+}), u(t, x) = 0$ , où  $u$  est la solution sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^3$  de (A.1); l'existence de cette fermeture étant donnée par l'hypothèse de découpage A.1.1.

Comme pour le problème A.0.14, par le théorème de Hille-Yosida on a alors le résultat suivant :

**Proposition A.1.3** *Soit  $\Omega_{i+}, \Omega_{j-}$  et  $\Omega_0$  les supports respectifs de  $\mathbb{B}_{i+}, \mathbb{B}_{j-}$  et  $\mathbb{B}_0$ . Si  $u^{src}$  est dans  $C^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))$ , et si pour tout indice  $\mu \in \{i+, j-, 0\}$ ,  $\mathbb{B}_\mu \in L^\infty(\Omega_\mu)$ , alors il existe un unique  $(n^+ + n^- + 1)$ -uplet  $\{u_0, (u_i^+)_{i \in [1, n^+]}, (u_j^-)_{j \in [1, n^-]}\}$  au problème A.1.2.*

**Preuve.** La démonstration repose sur le même principe que pour la proposition 2.1.6. Par l'hypothèse A.1.1 il existe une distance minimale strictement positive  $\underline{d}$  telle que :

- $\forall i, \min_{i^*} d(\mathcal{P}^{i+}, \mathcal{H}^{i*+}) \geq \underline{d}$  et  $d(\mathcal{P}^{i+}, \mathcal{H}^{0+}) \geq \underline{d}$ ,
- $\forall j, \min_{j^*} d(\mathcal{P}^{j-}, \mathcal{H}^{j*-}) \geq \underline{d}$  et  $d(\mathcal{P}^{j-}, \mathcal{H}^{0-}) \geq \underline{d}$ .

On découpe alors l'intervalle  $[0, T]$  en sous-intervalles  $(I_k)_{k \in [0, N_T]}$ , où  $N_T$  est la partie entière de  $T/[\max(c^+, c^-)\underline{d}]$  avec  $c^\pm = 1/\sqrt{\varepsilon^\pm \mu^\pm}$ . Pour tout  $k \in [0, N_T - 1]$  on a  $I_k = [k\underline{d}, (k+1)\underline{d}]$ , et  $I_{N_T} = [N_T\underline{d}, T]$ . Par application du principe de Huygens il vient alors

- pour tout  $t \in I_0$  :

$$\begin{cases} \forall i, B_i^{(\mathcal{H}^+)} \left( \sum_{i^*} G^+ * B_{i^*}^{(\mathcal{P}^+)} u_{i^*}^+ + (G^+) * B_0^{(\mathcal{P}^+)} u_0 \right) (t) = 0, \\ \forall j, B_j^{(\mathcal{H}^-)} \left( \sum_{j^*} G^- * B_{j^*}^{(\mathcal{P}^-)} u_{j^*}^- + (G^-) * B_0^{(\mathcal{P}^-)} u_0 \right) (t) = 0, \\ B_0^{(\mathcal{H}^+)} \left( \sum_i G^+ * B_i^{(\mathcal{P}^+)} u_i^+ \right) (t) + B_0^{(\mathcal{H}^-)} \left( \sum_j G^- * B_j^{(\mathcal{P}^-)} u_j^- \right) (t) = 0 \end{cases}$$

– pour tout  $k \in [1, N_T]$  et tout  $t \in I_k$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i, B_i^{(\mathcal{H}^+)} \left( \sum_{i^*} G^+ * B_{i^*}^{(\mathcal{P}^+)} u_{i^*}^+ + (G^+) * B_0^{(\mathcal{P}^+)} u_0 \right) (t) \\ = B_i^{(\mathcal{H}^+)} \left( \sum_{i^*} G^+ * B_{i^*}^{(\mathcal{P}^+)} [u_{i^*}^+ Y_{[0, k\underline{d}]}(t)] + (G^+) * B_0^{(\mathcal{P}^+)} [u_0 Y_{[0, k\underline{d}]}(t)] \right) (t), \\ \forall j, B_j^{(\mathcal{H}^-)} \left( \sum_{j^*} G^- * B_{j^*}^{(\mathcal{P}^-)} u_{j^*}^- + (G^-) * B_0^{(\mathcal{P}^-)} u_0 \right) (t) \\ = B_j^{(\mathcal{H}^-)} \left( \sum_{j^*} G^- * B_{j^*}^{(\mathcal{P}^-)} [u_{j^*}^- Y_{[0, k\underline{d}]}(t)] + (G^-) * B_0^{(\mathcal{P}^-)} [u_0 Y_{[0, k\underline{d}]}(t)] \right) (t), \\ B_0^{(\mathcal{H}^+)} \left( \sum_i G^+ * B_i^{(\mathcal{P}^+)} u_i^+ \right) (t) + B_0^{(\mathcal{H}^-)} \left( \sum_j G^- * B_j^{(\mathcal{P}^-)} u_j^- \right) (t) = \\ B_0^{(\mathcal{H}^+)} \left( \sum_i G^+ * B_i^{(\mathcal{P}^+)} [u_i^+ Y_{[0, k\underline{d}]}(t)] \right) (t) + B_0^{(\mathcal{H}^-)} \left( \sum_j G^- * B_j^{(\mathcal{P}^-)} [u_j^- Y_{[0, k\underline{d}]}(t)] \right) (t) \end{array} \right.$$

Comme dans la démonstration de la proposition 2.1.6, on suit une récurrence directe sur les intervalles de temps  $I_k$  en commençant par  $I_0$

1. pour  $t \in I_0$ , le système A.2 s'écrit alors pour tout indice  $\mu \in \{i+, j-, 0\}$  sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0{}^\mu] \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_\mu \right) v_\mu = u^{src} Y_{\mathcal{D}^\mu}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ v_\mu(t=0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{array} \right.$$

qui a une unique solution  $v_\mu \in C^0 \left( I_0, \mathcal{D} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0{}^\mu]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l \right) \right) \cap C^1 \left( I_0, L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0{}^\mu]}(\mathbb{R}^3) \right)$  par le théorème de Hille-Yosida.

2. Pour un intervalle quelconque  $I_k$ , avec  $k > 0$  : on suppose que toutes les fonctions  $u_\mu$ , pour  $\mu \in \{i+, j-, 0\}$ , sont dans  $C^0 \left( [0, k\underline{d}], \mathcal{D} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0{}^\mu]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l \right) \right) \cap C^1 \left( [0, k\underline{d}], L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0{}^\mu]}(\mathbb{R}^3) \right)$ , alors les traces tangentielles des fonctions  $u_\mu$  sur les surfaces de prélèvement  $\mathcal{P}^\mu$  sont dans  $H_{loc}^{-1/2}$ . La convolution avec la résolvante des équations de Maxwell du milieu  $G^\pm$  permet alors d'assurer que les termes de couplages provenant des autres domaines dans les systèmes (A.2) sont dans  $C^1 \left( [0, (k+1)\underline{d}], L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0{}^\mu]}(\mathbb{R}^3) \right)$ . Comme dans la démonstration de la proposition 2.1.6, la coercivité et le caractère borné des coefficients de  $[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0{}^\mu]$  permettent d'établir l'équivalence entre les différents espaces  $L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0{}^\mu]}(\mathbb{R}^3)$ . Les termes de couplages et  $u^{src}$  vérifient alors les hypothèses du théorème de Hille-Yosida. Pour chaque solution  $u_\mu$  on a supposé que  $u_\mu \in C^0 \left( I_{k-1}, \mathcal{D} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0{}^\mu]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l \right) \right)$ , on en déduit donc que la restriction du système (A.2) en temps à  $I_k$  admet une condition en  $t = k\underline{d}$ ,  $u_\mu(t = k\underline{d})$  qui est dans  $\mathcal{D} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0{}^\mu]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l \right)$ . Le théorème de Hille-Yosida assure alors l'existence d'une solution unique  $u_\mu$  dans  $C^0 \left( I_k, \mathcal{D} \left( [\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0{}^\mu]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l \right) \right) \cap C^1 \left( I_k, L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0{}^\mu]}(\mathbb{R}^3) \right)$  pour chaque système de (A.2).

Chaque élément  $u_\mu$  du  $(n^+ + n^- + 1)$ -uplet de solutions de (A.2) est ainsi contiûment prolongée à  $C^0\left([0, (k+1)\underline{d}], \mathcal{D}\left([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l\right)\right) \cap C^1\left([0, (k+1)\underline{d}], L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]}(\mathbb{R}^3)\right)$ , ce qui permet d'itérer le raisonnement à l'intervalle  $I_{k+1}$ .

■

Dans ce cas, comme dans le chapitre 2 avec la proposition 2.1.8, il est possible de lier l'étude du problème (A.1) et la résolution du système (A.2).

**Proposition A.1.4** *Soient  $u$  la solution du problème A.0.14, et  $\left\{u_0, (u_i^+)_{i \in [1, n^+]}, (u_j^-)_{j \in [1, n^-]}\right\}$  l'ensemble de solutions du problème couplé A.1.2. Si l'hypothèse A.1.1 est vérifiée, alors  $u$  est donnée pour tout  $t \in [0, T]$  par*

$$\begin{aligned} u = & \sum_i \left[ Y_{\mathcal{D}^{i+}} u_i^+ + Y_{(\mathcal{D}^{i+})^c} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^0}) \Pi_{i^*} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i^*+}}) G^+ *_{(t,x)} B_i^{(\mathcal{P}^+)} u_i^+ \right] \\ & + \sum_j \left[ Y_{\mathcal{D}^{j-}} u_j^- + Y_{(\mathcal{D}^{j-})^c} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^0}) \Pi_{j^*} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{j^*-}}) G^- *_{(t,x)} B_j^{(\mathcal{P}^-)} u_j^- \right] \\ & + Y_{\mathcal{D}^0} u_0 + Y_{(\mathcal{D}^0)^c} \left[ \Pi_i (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i+}}) G^+ *_{(t,x)} B_0^{(\mathcal{P}^+)} u_0 + \Pi_j (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{j-}}) G^- *_{(t,x)} B_0^{(\mathcal{P}^-)} u_0 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

**Preuve.** Tout d'abord, comme dans la démonstration de la proposition 2.1.8 on utilise l'uniforme équivalence entre tous les espaces  $L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]}(\mathbb{R}^3)$  ( $\mu \in \{i^+, j^-, 0\}$ ) et  $L^2(\mathbb{R}^3)$  afin d'en déduire l'équivalence des domaines de tous les opérateurs  $\mathcal{D}\left([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l\right)$ . Par la proposition A.1.4, chaque élément  $u_\mu$  du  $(n^+ + n^- + 1)$ -uplet de solutions du problème A.1.2 est dans  $C^0\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{D}\left([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l\right)\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}^+, L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]}(\mathbb{R}^3)\right)$ , définissant ainsi les traces tangentielles de ces fonctions sur les surfaces de prélèvement  $\mathcal{P}^\mu$  à valeur dans  $H_{loc}^{-1/2}$  au voisinage de  $\mathcal{P}^\mu$ . Par combinaison de ces fonctions et par composition des traces avec la résolvante des équations de Maxwell du milieu  $G^\pm$ , la fonction  $u$  proposée dans (A.3) est alors dans  $C^1\left([0, T], L^2_{[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]}(\mathbb{R}^3)\right) \cap C^0\left([0, T], \mathcal{D}\left([\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_0]^{-1} \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l\right)\right)$ .

Par la suite, la démonstration de la proposition A.1.4 se mène de manière similaire à celle de la proposition 2.1.8 en appliquant l'opérateur  $\mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}$  à la fonction  $u$  proposée dans (A.3) et en envisageant les cas suivants :

1.  $x \in H^+ \setminus V(\mathcal{D}^0)$ ,
2.  $x \in V(\mathcal{D}^0)$ ,
3.  $x \in H^- \setminus V(\mathcal{D}^0)$ ,

où  $V(\mathcal{D}^0)$  désigne un voisinage ouvert de  $\mathcal{D}^0$  n'intersectant aucun des autres domaines  $\mathcal{D}^{i^+}$  et  $\mathcal{D}^{j^-}$ .

1.  $x \in H^+ \setminus V(\mathcal{D}^0)$  : dans ce cas

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) u = & \sum_i \left\{ Y_{\mathcal{D}^{i+}} \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) u_i^+ + \mathcal{B}_i^{(\mathcal{D}^+)} u_i^+ \right. \\ & - \mathcal{B}_i^{(\mathcal{D}^+)} G^+ *_{(t,x)} \mathcal{B}_i^{(\mathcal{P}^+)} u_i^+ - \sum_{i^*} \mathcal{B}_{i^*}^{(\mathcal{H}^+)} G^+ * \mathcal{B}_i^{(\mathcal{P}^+)} u_i^+ - \mathcal{B}_0^{(\mathcal{H}^+)} G^+ * \mathcal{B}_i^{(\mathcal{P}^+)} u_i^+ \\ & \left. - \mathcal{B}_i^{(\mathcal{H}^+)} G^+ * \mathcal{B}_0^{(\mathcal{P}^+)} u_0^+ \right\}. \end{aligned}$$

Or si  $x \in \mathcal{D}^{i+}$ ,  $\mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} = \mathbb{A}_0^+ \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_{i+}$ , donc

$$Y_{\mathcal{D}^{i+}} \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) u_i^+ = B_i^{(\mathcal{H}^+)} \left( \sum_{i^*} (G^+) * B_{i^*}^{(\mathcal{P}^+)} u_{i^*}^+ + (G^+) * B_0^{(\mathcal{P}^+)} u_0 \right).$$

D'où en ré-assemblant les termes :

$$\sum_i \left[ u^{src} Y_{\mathcal{D}^{i+}} + B_i^{(\mathcal{H}^+)} \left( \sum_{i^*} (G^+) * B_{i^*}^{(\mathcal{P}^+)} u_{i^*}^+ + (G^+) * B_0^{(\mathcal{P}^+)} u_0 \right) - B_i^{(\mathcal{H}^+)} G^+ * B_0^{(\mathcal{P}^+)} u_0^+ - \sum_{i^*} B_{i^*}^{(\mathcal{H}^+)} G^+ * B_{i^*}^{(\mathcal{P}^+)} u_{i^*}^+ \right] = \sum_i Y_{\mathcal{D}^{i+}} u^{src} = Y_{H^+} u^{src}$$

En utilisant les mêmes arguments que dans la proposition 2.1.8 on obtient :

$$B_i^{(\mathcal{D}^+)} u_i^+ - B_i^{(\mathcal{D}^+)} G^+ *_{(t,x)} B_i^{(\mathcal{P}^+)} u_i^+ = 0.$$

Enfin si  $x \notin V(\mathcal{D}^0)$  alors  $B_0^{(\mathcal{H}^+)} = 0$ , d'où

$$\left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) u = Y_{H^+} u^{src}. \quad (\text{A.4})$$

2.  $x \in V(\mathcal{D}^0)$  :

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) u &= Y_{\mathcal{D}^0} \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) u_0 \\ &+ B_0^{(\mathcal{D}^+)} u_0 - B_0^{(\mathcal{D}^+)} G^+ *_{(t,x)} B_0^{(\mathcal{P}^+)} u_0 + B_0^{(\mathcal{D}^-)} u_0 - B_0^{(\mathcal{D}^-)} G^- *_{(t,x)} B_0^{(\mathcal{P}^-)} u_0 \\ &+ \sum_i \left\{ \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) \left[ (1 - \varphi_{\mathcal{H}^0}) Y_{(\mathcal{D}^{i+})^c} \Pi_{i^*} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i^*+}}) G^+ *_{(t,x)} B_i^{(\mathcal{P}^+)} u_i^+ \right] \right\} \\ &+ \sum_j \left\{ \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) \left[ (1 - \varphi_{\mathcal{H}^0}) Y_{(\mathcal{D}^{j-})^c} \Pi_{j^*} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{j^*-}}) G^- *_{(t,x)} B_j^{(\mathcal{P}^-)} u_j^- \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

par hypothèse le  $u(t, x) = 0$  pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times \partial \mathcal{D}^0 \cap Inter$ , les termes en  $B_0^{(\mathcal{D}^\pm)}$  proviennent donc des traces respectives sur  $\mathcal{D}^0 \cap H^\pm$ .

Comme précédemment on a

$$B_0^{(\mathcal{D}^\pm)} u_0 - B_0^{(\mathcal{D}^\pm)} G^\pm *_{(t,x)} B_0^{(\mathcal{P}^\pm)} u_0 = 0,$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) u_0 &= u^{src} Y_{\mathcal{D}^0} \\ &+ B_0^{(\mathcal{H}^+)} \left( \sum_i (G^+) * B_i^{(\mathcal{P}^+)} u_i^+ \right) + B_0^{(\mathcal{H}^-)} \left( \sum_j (G^-) * B_j^{(\mathcal{P}^-)} u_j^- \right). \end{aligned}$$

Enfin, pour tout  $i$  on a

$$\begin{aligned} & \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) \left[ (1 - \varphi_{\mathcal{H}^0}) Y_{(\mathcal{D}^{i+})^c} \Pi_{i^*} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{i^*+}}) G^+ *_{(t,x)} B_i^{(\mathcal{P}^+)} u_i^+ \right] \\ &= -B_0^{(\mathcal{H}^+)} \left( (G^+) * B_i^{(\mathcal{P}^+)} u_i^+ \right) - \mathcal{B}_i^{(\mathcal{D}^+)} G^+ *_{(t,x)} \mathcal{B}_i^{(\mathcal{P}^+)} u_i^+ - \sum_{i^*} \mathcal{B}_{i^*}^{(\mathcal{H}^+)} G^+ * \mathcal{B}_i^{(\mathcal{P}^+)} u_i^+. \end{aligned}$$

La localisation à  $V(\mathcal{D}^0)$  assure alors que la contribution des deux derniers termes est nulle. De même on obtient pour tout  $j$

$$\begin{aligned} & \left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) \left[ (1 - \varphi_{\mathcal{H}^0}) Y_{(\mathcal{D}^{j-})^c} \Pi_{j^*} (1 - \varphi_{\mathcal{H}^{j^*-}}) G^- *_{(t,x)} B_j^{(\mathcal{P}^-)} u_j^- \right] \\ &= -B_0^{(\mathcal{H}^-)} \left( (G^-) * B_j^{(\mathcal{P}^-)} u_j^- \right). \end{aligned}$$

En reportant dans (A.5), on en déduit sur  $V(\mathcal{D}^0)$  :

$$\left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) u_0 = u^{src} Y_{\mathcal{D}^0}. \quad (\text{A.6})$$

3. Le dernier cas,  $x \in H^- \setminus V(\mathcal{D}^0)$ , est similaire au premier; il s'obtient de la même manière. Nous obtenons ainsi sur  $H^- \setminus V(\mathcal{D}^0)$  :

$$\left( \mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B} \right) u = Y_{H^-} u^{src}. \quad (\text{A.7})$$

Finalement, en reportant les résultats (A.4), (A.6) et (A.7), et en remarquant que  $Y_{H^-} u^{src} + Y_{H^+} u^{src} + Y_{\mathcal{D}^0} u^{src} = u^{src}$  grâce à l'hypothèse A.1.1, on en déduit que la fonction  $u$  proposée par (A.3), vérifiant trivialement  $u(t=0) = 0$ , est bien solution de (A.1). ■

Enfin comme dans le chapitre 2 avec le corollaire 2.1.9, il est possible de formuler un corollaire à la proposition A.1.4 permettant de simplifier par la suite l'utilisation du problème couplé (A.2)

**Corollaire A.1.5** Soit  $\left\{ u_0, (u_i^+)_{i \in [1, n^+]}, (u_j^-)_{j \in [1, n^-]} \right\}$  l'ensemble de solutions du système couplé (A.2), alors sous l'hypothèse A.1.1, la solution  $u$  de (A.1) est déterminée à l'intérieur des volumes délimités par les surfaces de Huygens, par

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, N^+\}, \forall (t, x) \in [0, T] \times V(\mathcal{H}^{i^+}), u(t, x) = u_i^+(t, x), \\ \forall j \in \{1, \dots, N^-\}, \forall (t, x) \in [0, T] \times V(\mathcal{H}^{j^-}), u(t, x) = u_j^-(t, x), \\ \forall (t, x) \in [0, T] \times V(\mathcal{H}^0), u(t, x) = u_0(t, x), \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Enfin, à partir des fonctions  $u^+$  et  $u^-$  définies par

$$\begin{aligned} u^+ &= \sum_i (G^+) * B_i^{(\mathcal{P}^+)} u_i^+ + (G^+) * B_0^{\mathcal{P}} [Y_{H^+}(x) u_0], \\ u^- &= \sum_j (G^-) * B_j^{(\mathcal{P}^-)} u_j^- + (G^-) * B_0^{\mathcal{P}} [Y_{H^-}(x) u_0], \end{aligned}$$

la solution  $u$  de (A.1) vérifie les relations suivantes à l'extérieur des sous-domaines

$$\begin{cases} u(t, x) = u^+(t, x), \forall (t, x) \in [0, T + d(x, (\cup_i \mathcal{P}^{i+}) \cup \mathcal{P}^{0+}) / c^+] \times (H^+ \cap (\cup_i \mathcal{D}^{i+} \cup \mathcal{D}^0)^c), \\ u(t, x) = u^-(t, x), \forall (t, x) \in [0, T + d(x, (\cup_j \mathcal{P}^{j-}) \cup \mathcal{P}^{0-}) / c^-] \times (H^- \cap (\cup_j \mathcal{D}^{j-} \cup \mathcal{D}^0)^c), \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

$c^+$  et  $c^-$  représentant la vitesse de la lumière respectivement dans  $H^+$  et dans  $H^-$ .

**Preuve.** Comme pour la démonstration du corollaire 2.1.9, (A.8) et (A.9) s'obtiennent à partir de la proposition A.1.4 par restrictions aux ensembles concernés. Les termes de retard supplémentaires  $d(x, (\cup_i \mathcal{P}^{i+}) \cup \mathcal{P}^{0+}) / c^+$  et  $d(x, (\cup_j \mathcal{P}^{j-}) \cup \mathcal{P}^{0-}) / c^-$  se déduisent d'une application directe du principe de Huygens fort vérifié dans les milieux homogènes  $H^+$  et  $H^-$  à partir des contributions connues sur  $[0, T]$ . ■

## A.2 Formulation de la méthode

### A.2.1 Redimensionnement de la formule de rayonnement

Les deux milieux  $H^+$  et  $H^-$  étant de constantes électriques et magnétiques ( $\varepsilon_r^\pm$  et  $\mu_r^\pm$ ) a priori différentes et donc non-forcément égales à 1, il est nécessaire afin de réaliser les calculs des termes de couplages comme présenté au chapitre 2 avec la formule intégrale approchée obtenue au chapitre 1, de re-dimensionner cette dernière.

Pour cela on introduit le changement de variable et d'inconnues lié à l'adimensionnement des équations de Maxwell :

- changement de variable  $t \leftrightarrow ct$ ,
- changement d'inconnues  $E \leftrightarrow \sqrt{\varepsilon}E$  et  $H \leftrightarrow \sqrt{\mu}H$ ;

$\varepsilon$  et  $\mu$  représentant les permittivités du milieu,  $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$  étant la vitesse de la lumière dans le milieu. On a ainsi aux niveaux des opérateurs les changements suivants :

$$\partial_t \leftrightarrow \partial_t/c \quad \text{et} \quad \int_0^{t-d} f(s)ds \leftrightarrow \int_0^{t-d/c} f(s)ds.$$

Il vient ainsi à partir de la formule (1.10), et sous les hypothèses du théorème 1.2.2 :

$$\begin{aligned} E(t_0, X_0) &= \sum_i \int_{\mathcal{P}_i} \left[ \frac{1}{cd_i} (Z\mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_i \times \partial_t J(t_0 - T_i, \cdot) - \mathbf{t}_i \times \partial_t M(t_0 - T_i, \cdot)) \right. \\ &\quad + \frac{Z}{d_i^2} \left( 3\mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_i \times J(t_0 - T_i, \cdot) - 2\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times J(t_0 - T_i, \cdot) - \frac{1}{Z}\mathbf{t}_i \times M(t_0 - T_i, \cdot) \right) \\ &\quad \left. + \frac{cZ}{d_i^3} \int_0^{t_0 - T_i} (3\mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_i \times J(s, \cdot) - 2\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times J(s, \cdot)) ds \right] \frac{dS_i}{4\pi} + O\left(\sup_i \left(\frac{\delta_i}{d_i}\right)^2\right), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} H(t_0, X_0) &= \sum_i \int_{\mathcal{P}_i} \left[ \frac{1}{cd_i} \left( \frac{1}{Z}\mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_i \times \partial_t M(t_0 - T_i, \cdot) + \mathbf{t}_i \times \partial_t J(t_0 - T_i, \cdot) \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{Zd_i^2} (3\mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_i \times M(t_0 - T_i, \cdot) - 2\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times M(t_0 - T_i, \cdot) + Z\mathbf{t}_i \times J(t_0 - T_i, \cdot)) \\ &\quad \left. + \frac{c}{Zd_i^3} \int_0^{t_0 - T_i} (3\mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_i \times M(s, \cdot) - 2\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times M(s, \cdot)) ds \right] \frac{dS_i}{4\pi} + O\left(\sup_i \left(\frac{\delta_i}{d_i}\right)^2\right), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

avec les notations classiques en électromagnétisme :  $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ ,  $J = \mathbf{n} \times H$  et  $J = -\mathbf{n} \times E$ ; et où  $T_i = d_i/c$  représente le retard entre le point de référence  $X_i$  et l'observatoire  $X_0$ .

### A.2.2 Méthode de décomposition dans le multi-milieu

Suivant le même procédé que dans le chapitre 2, le système approximé de (A.2) est donné par :

#### Problème A.2.1 (méthode de décomposition en sous-domaines)

Trouver  $\left\{ u_0, (u_i^+)_{i \in [1, n^+]}, (u_j^-)_{j \in [1, n^-]} \right\} \in \mathcal{F} \left( \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3)^2 \right)^{(n^+ + n^- + 1)}$  solutions de

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i : \left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{A}_0^+ \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_{i^+}) u_i^+ = u^{src} Y_{\mathcal{D}i^+} \\ \quad + [B_i^{(\mathcal{H}^+)}] \left( \sum_{i^*} [\widetilde{G^{+*}}] B_{i^*}^{(\mathcal{P}^+)} u_{i^*}^+ + [\widetilde{G^{+*}}] B_0^{(\mathcal{P}^+)} u_0 \right), (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3, \\ u_i^+(t=0) = 0, x \in \mathbb{R}^3, \end{array} \right. \\ \forall j : \left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{A}_0^- \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_{j^-}) u_j^- = u^{src} Y_{\mathcal{D}j^-} \\ \quad + [B_j^{(\mathcal{H}^-)}] \left( \sum_{j^*} [\widetilde{G^{-*}}] B_{j^*}^{(\mathcal{P}^-)} u_{j^*}^- + [\widetilde{G^{-*}}] B_0^{(\mathcal{P}^-)} u_0 \right), (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3, \\ u_j^-(t=0) = 0, x \in \mathbb{R}^3, \end{array} \right. \\ 0 : \left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{A}_0 \partial_t + \sum_l \mathbb{A}_l \partial_l + \mathbb{B}_0) u_0 = u^{src} Y_{\mathcal{D}0} + [B_0^{(\mathcal{H}^+)}] \left( \sum_i [\widetilde{G^{+*}}] B_i^{(\mathcal{P}^+)} u_i^+ \right) \\ \quad + [B_0^{(\mathcal{H}^-)}] \left( \sum_j [\widetilde{G^{-*}}] B_j^{(\mathcal{P}^-)} u_j^- \right), (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3, \\ u_0(t=0) = 0, x \in \mathbb{R}^3, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{A.12})$$

où  $\mathcal{F} \left( \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3)^2 \right)^2$  est un espace fonctionnel précisé par la suite.

L'approximation du terme  $B_i^{(\mathcal{H}^+)} \left( G^+ * B_{i^*}^{(\mathcal{P}^+)} u_{i^*} \right)$  dans (A.2) par  $[B_i^{(\mathcal{H}^+)}] \left( [\widetilde{G^{+*}}] B_{i^*}^{(\mathcal{P}^+)} u_{i^*} \right)$  (resp. du terme  $B_j^{(\mathcal{H}^-)} \left( G^- * B_{j^*}^{(\mathcal{P}^-)} u_{j^*} \right)$  par  $[B_j^{(\mathcal{H}^-)}] \left( [\widetilde{G^{-*}}] B_{j^*}^{(\mathcal{P}^-)} u_{j^*} \right)$ ) dans (A.12) est donnée par les opérations d'antépolation et d'interpolation proposées :

1. antépolation :  $[\widetilde{G^{+*}}] B_{i^*}^{(\mathcal{P}^+)} u_{i^*}$  (resp.  $[\widetilde{G^{-*}}] B_{j^*}^{(\mathcal{P}^-)} u_{j^*}$ ) désigne l'approximation par les formules intégrales approchées (A.10) et (A.11) du transport dans le milieu  $H^+$  (resp.  $H^-$ ) des domaines  $i^*$  (resp.  $j^*$ ) sur vers des points de la surface de prélèvement  $\mathcal{P}^{i^+}$  du domaine  $i$  (resp. la surface  $\mathcal{P}^{j^-}$  du domaine  $j$ ), représentant la phase d'antépolation ;
2. interpolation :  $[B_i^{(\mathcal{H}^+)}]$  est le découpage par sous-volumes  $(V_k^{\mathcal{H}^i})_k$  du volume  $\text{Supp}(\nabla \varphi_{\mathcal{H}^i})$  entourant la surface de Huygens  $\mathcal{H}^i$ , puis l'approximation par constantes sur ces sous-volumes du champ transporté aux points de référence correspondants  $(Y^i)_k$  ; soit :

$$[\widetilde{B_i^{(\mathcal{H}^+)}}] f(x) = \sum_k \left( \chi_{V_k^{\mathcal{H}^i}}(x) B_i^{\mathcal{H}^i} f(Y_k^i) \right), \quad (\text{A.13})$$

où  $\chi_V(x)$  est la fonction caractéristique en  $x$  du volume  $V$ .

## A.3 Etude de la méthode : principaux résultats

Comme dans le cas de la méthode multi-domaines du chapitre 2, nous pouvons ici présenter deux résultats :

1. le théorème A.3.1 établissant l'existence et l'unicité de la solution du problème approximé A.2.1 dans les espaces  $C^l([0, T], H_{tan}^k)$  ; il fournit aussi une première estimation de la dépendance de la solution aux conditions initiales (A.14) ;
2. le théorème A.3.2 affinant l'expression de la constante de majoration dans la dépendance aux conditions initiales (A.15), en faisant intervenir les paramètres du regroupement  $\underline{d}$  et  $\delta$ , ainsi que le découpage en sous-fenêtres de l'intervalle d'étude  $[0, T]$ .

Pour cela, on désigne par  $\underline{d}$  une distance strictement positive telle que :

- $\forall i, \min_{i^*} d(\mathcal{P}^{i^+}, \mathcal{H}^{i^*+}) \geq \underline{d}$  et  $d(\mathcal{P}^{i^+}, \mathcal{H}^{0^+}) \geq \underline{d}$ ,
- $\forall j, \min_{j^*} d(\mathcal{P}^{j^-}, \mathcal{H}^{j^*-}) \geq \underline{d}$  et  $d(\mathcal{P}^{j^-}, \mathcal{H}^{0^-}) \geq \underline{d}$ .

Comme vu dans la section précédente, l'hypothèse A.1.1 garantit l'existence d'une telle distance.

Nous désignerons enfin par  $N_T$  la partie entière de  $T/[\max(c^+, c^-)\underline{d}]$ ,  $c^+$  et  $c^-$  étant les vitesses de propagation respectives des milieux  $+$  et  $-$  ;  $c^\pm = 1/\sqrt{\varepsilon^\pm \mu^\pm}$ .

**Théorème A.3.1** *Soit un entier  $N \geq 0$ . Si l'hypothèse A.1.1 est vérifiée, et si il existe  $T' \in ]0, T]$  tel que le terme source  $u^{src}$  vérifie*

$$\forall 0 \leq k \leq 2N_T + N, \partial_t^k u^{src} \in L^1\left(0, T, H_{tan}^{2N_T + N - k}(\mathbb{R}^3)\right) \cap L^1\left(0, T', H^{2N_T + N - k}(\mathbb{R}^3)\right),$$

alors le système de  $n$  problèmes couplés (A.12) admet un unique  $(n^+ + n^- + 1)$ -uplet de solutions dans  $\left(\cap_{k=0}^N C^k\left(0, T, H_{tan}^{N-k}(\mathbb{R}^3)\right)\right)^{n^+ + n^- + 1}$ .

De plus, il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in [1, n^+], \Phi_N(u_i^+)(T) \leq C \sum_{k=0}^{N_T} \int_{s \in I_{N_T - k}} \Phi_{2k}(u^{src})(s) ds, \\ \forall j \in [1, n^-], \Phi_N(u_j^-)(T) \leq C \sum_{k=0}^{N_T} \int_{s \in I_{N_T - k}} \Phi_{2k}(u^{src})(s) ds, \\ \Phi_N(u_0)(T) \leq C \sum_{k=0}^{N_T} \int_{s \in I_{N_T - k}} \Phi_{2k}(u^{src})(s) ds. \end{array} \right. \quad (A.14)$$

**Preuve.** Ce théorème se démontre exactement de la même façon que son équivalent dans le cas d'un seul domaine dans le chapitre 2 (théorème 2.3.8).

La régularité de la formule intégrale approchée n'étant pas changée par l'utilisation du re-dimensionnement (A.10-A.11), la proposition 2.3.6 est toujours valable dans le cas des milieux homogènes  $\pm$ .

Nous pouvons alors démontrer le résultat par récurrence sur chaque sous-fenêtre de  $[0, T]$  en utilisant la régularité de la formule intégrale approchée et le théorème 2.3.4. ■

**Théorème A.3.2** *Soit  $T > 0$ . On suppose que*

- l'hypothèse A.1.1 est vérifiée,
- les surfaces de prélèvements  $(\mathcal{P}^{i^+})_i$ ,  $(\mathcal{P}^{j^-})_j$  et  $\mathcal{P}^0$  sont admissibles au sens de la définition 1.2.6 et vérifient l'hypothèse 2.3.11,
- il existe  $T' \in ]0, T]$  tel que le terme source  $u^{src}$  vérifie

$$\forall 0 \leq k \leq 2N_T + N, \partial_t^k u^{src} \in L^1\left(0, T, H_{tan}^{2N_T + N - k}(\mathbb{R}^3)\right) \cap L^1\left(0, T', H^{2N_T + N - k}(\mathbb{R}^3)\right),$$

Alors il existe une constante  $C$  positive ne dépendant que des surfaces de prélèvement  $(\mathcal{P}^{i+})_i$ ,  $(\mathcal{P}^{j-})_j$ ,  $\mathcal{P}^0$  et de la régularisation  $\varphi$  des surfaces de Huygens  $(\mathcal{H}^{i+})_i$ ,  $(\mathcal{H}^{j-})_j$ ,  $\mathcal{H}^0$ , et un polynôme  $Q \in \mathbb{N}[X]$ , tels que les solutions de (A.12) obéissent à la majoration suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i, \Phi_1(u_i^+)(T) \leq C \left( \sum_{k=0}^{N_T} \left[ \prod_{m=N_T-k}^{N_t} A_k \right] \sup_{t \in [0, (k+1)\underline{d}]} \Phi_1 \left( \partial_t^{2(N_T-k)} u^{src} \right) (t) \right), \\ \forall j, \Phi_1(u_j^-)(T) \leq C \left( \sum_{k=0}^{N_T} \left[ \prod_{m=N_T-k}^{N_t} A_k \right] \sup_{t \in [0, (k+1)\underline{d}]} \Phi_1 \left( \partial_t^{2(N_T-k)} u^{src} \right) (t) \right), \\ \Phi_1(u_0)(T) \leq C \left( \sum_{k=0}^{N_T} \left[ \prod_{m=N_T-k}^{N_t} A_k \right] \sup_{t \in [0, (k+1)\underline{d}]} \Phi_1 \left( \partial_t^{2(N_T-k)} u^{src} \right) (t) \right), \end{array} \right. \quad (\text{A.15})$$

$$\text{où } A_k = \underline{d} C Q(k) \sqrt{k+1} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\underline{d}^2}}.$$

**Preuve.** Si les surfaces de prélèvement et les surfaces de Huygens de tous les domaines vérifient l'hypothèse de découpage géométrique 2.3.11, alors la majoration obtenue dans le chapitre 2 pour la formule intégrale, dans la proposition 2.3.14 est toujours valable avec les formules dimensionnées (A.10) et (A.11); la division de  $N_T$  par  $\max(c^+, c^-)$  assurant la prise en compte de la plus petite vitesse de propagation et ajustant ainsi le découpage de  $[0, T]$  en fonction du principe de Huygens.

La démonstration du théorème A.3.2 est alors identique à celle de 2.3.15 en utilisant une récurrence sur le découpage de  $[0, T]$  et la proposition 2.3.14. ■

## A.4 Algorithme et stratégie de parallélisation

En terme d'implémentation numérique, le traitement du bi-milieu change peut de celui de la méthode multi-domaines déjà exposé dans la section 3.1.

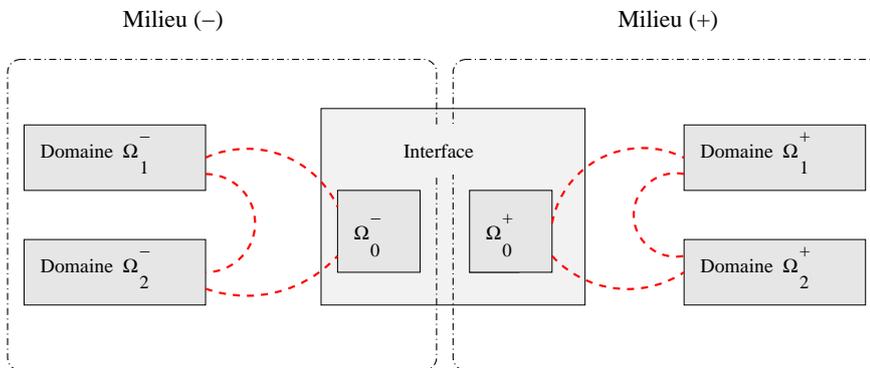


FIG. A.3 – Hiérarchie des communications entre les différents volumes de calculs

Comme dans le principe détaillé sous le problème A.2.1 les traitements des milieux notés + et - sont séparés par l'utilisation d'approximations du noyau de Green des équations de Maxwell avec des permittivités différentes. L'interface, pour sa part, est séparée en deux parties : une dans le milieu + et l'autre dans le milieu -. Il s'en suit deux surfaces de Huygens et de prélèvement pour

le domaine interface : une dans chaque milieu. L'algorithme proposé, illustré sur la figure A.3, suit donc cette décomposition naturelle :

1. sur chaque domaine  $i$  du milieu  $H^+$  le système, vérifié par la solution  $u_i^+$  correspondante, du problème A.2.1 entraîne la résolution d'un problème similaire à 2.2.1 ; nous appliquons, dans le milieu  $+$  une résolution numérique suivant l'algorithme présenté dans la section 3.1 ;
2. pour chaque domaine  $j$  du milieu  $H^-$  le système vérifié est encore du même type que le problème 2.2.1, la résolution suit donc l'algorithme de la section 3.1 ;
3. enfin, pour l'interface nous appliquons une résolution globale de tout le domaine interface, les termes sources provenant
  - pour la partie  $\mathcal{H}^{0+}$  des éléments  $i$  calculés dans le domaine  $+$ ,
  - et pour la partie  $\mathcal{H}^{0-}$  des éléments  $j$  calculés dans le domaine  $-$ .

La stratégie de parallélisation est alors similaire à celle présentée dans le paragraphe 3.1 :

- chaque domaine est traité en tant que processus séparé et résolu par une méthode numérique choisie,
- les processus sont synchronisés à intervalles de temps réguliers : tous les  $kT_{sync}$ , et indépendants sur des plages de temps successives de longueur  $T_{sync}$ ,
- les éléments d'un domaine  $\pm$  communiquent entre eux et avec la partie correspondante  $\mathcal{H}^{0\pm}$  du volume de calcul de l'interface au cours de la phase de synchronisation à  $t = kT_{sync}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

Remarquons toutefois, dû à la nécessité, pour une fenêtre de calcul en temps  $I_k = [kT_{sync}, (k+1)T_{sync}]$  quelconque, d'avoir l'ensemble des contributions de chacun des milieux  $\pm$  sur les surfaces de Huygens correspondantes  $\mathcal{H}^{0\pm}$  afin de résoudre le système 0 du problème A.2.1, le temps minimal  $T_{sync}$  de synchronisation entre les différents domaines est choisi de manière identique pour la résolution dans chaque milieu.

Enfin, comme présenté sur la figure A.4, l'hypothèse A.1.1 permet de limiter l'ajout de conditions aux limites sur le domaine interface qu'aux parties correspondantes aux milieux  $\pm$ , les termes de bords traversant l'interface étant supposés identiquement nuls pour tout  $t \in [0, T]$ . Les autres éléments  $i$  et  $j$  du problème A.2.1 étant donnés en espace libre hors de leurs domaines respectifs  $\mathcal{D}^{i+}$  et  $\mathcal{D}^{j-}$ , les volumes de calculs peuvent alors être terminés par l'ajout de conditions aux limites absorbantes telles que des PML.

## A.5 Exemple numérique

Afin de tester le fonctionnement de la méthode multi-domaines dans le contexte d'un bimilieu nous utilisons la configuration représentée sur la figure A.5 formée d'une source (domaine 1) donnée par un fil utilisé comme dipôle à  $\lambda \approx 1$ . dans le premier milieu, d'une boîte métallique parfaitement conductrice rectangulaire (domaine 2) de dimensions  $0.5\lambda \times \lambda \times \lambda$  dans le milieu 2, et d'une interface entre les deux milieux constituée d'incrustation de hauteurs variables de matériaux diélectriques de permittivité relative  $\varepsilon_r = 2$ . et coefficient de pertes diélectriques  $\sigma = 10^{-5}$  (domaine 3). Conformément à la méthodologie détaillée précédemment, les domaines 1 et 2 sont entourés de PML correspondant aux milieu dans lequel elles se trouvent (ici en air libre), et l'interface (selon l'axe  $z$ ) est bornée par des PML uniquement dans ses parties supérieure et inférieure.

Pour effectuer les calculs nous utilisons une méthode de différences finies FDTD sur chacun des domaines avec un maillage à  $\lambda/5$ , et avec un paramètre de regroupements "lâche" :  $\delta/d \leq 0.08$ , soit deux fois la précision du schéma numérique.

Les résultats sont comparés à deux résolutions complètes en FDTD utilisant respectivement le même maillage (notée *FDTD*) et un maillage raffiné (noté *FDTD/2*). Afin de vérifier la bonne

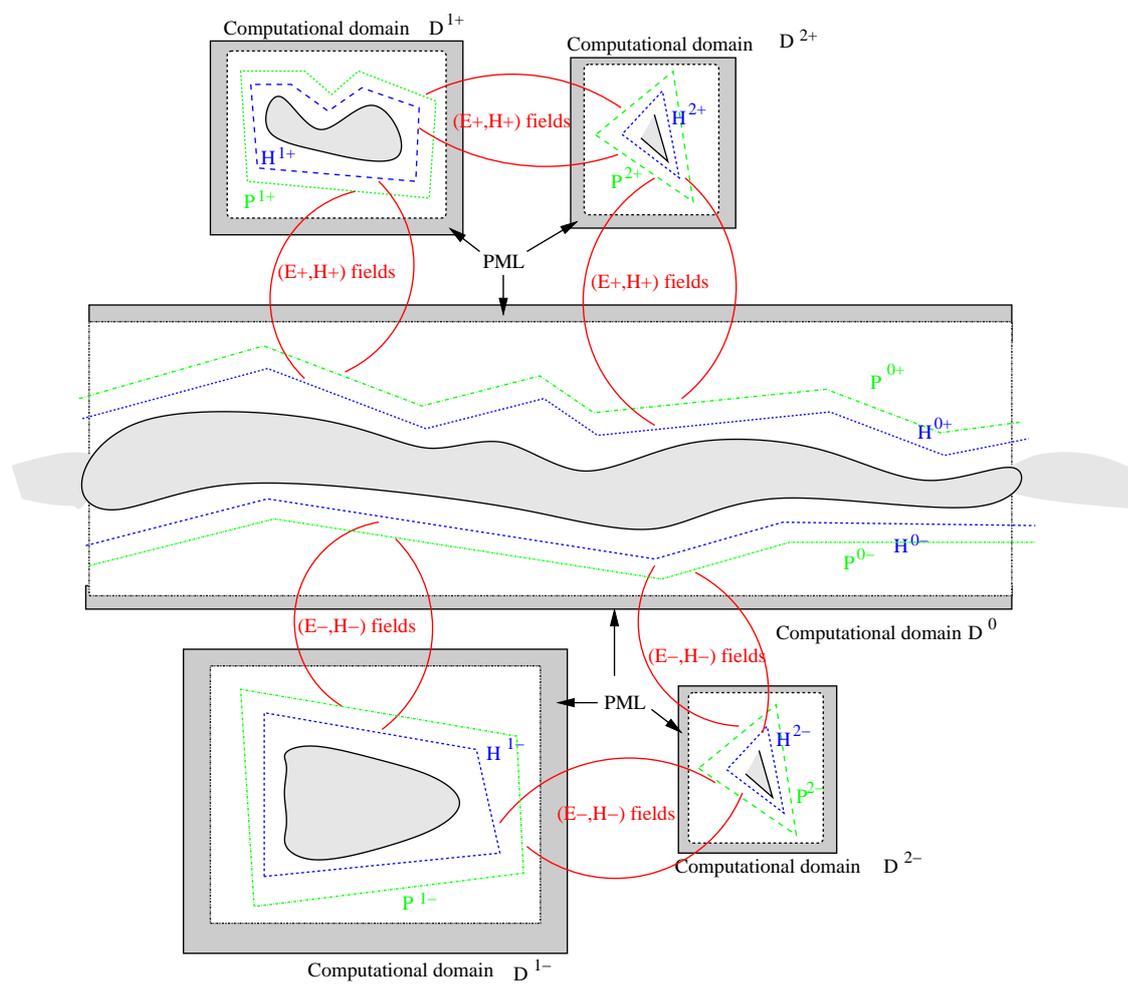


FIG. A.4 – Désignation des différents volumes de calcul

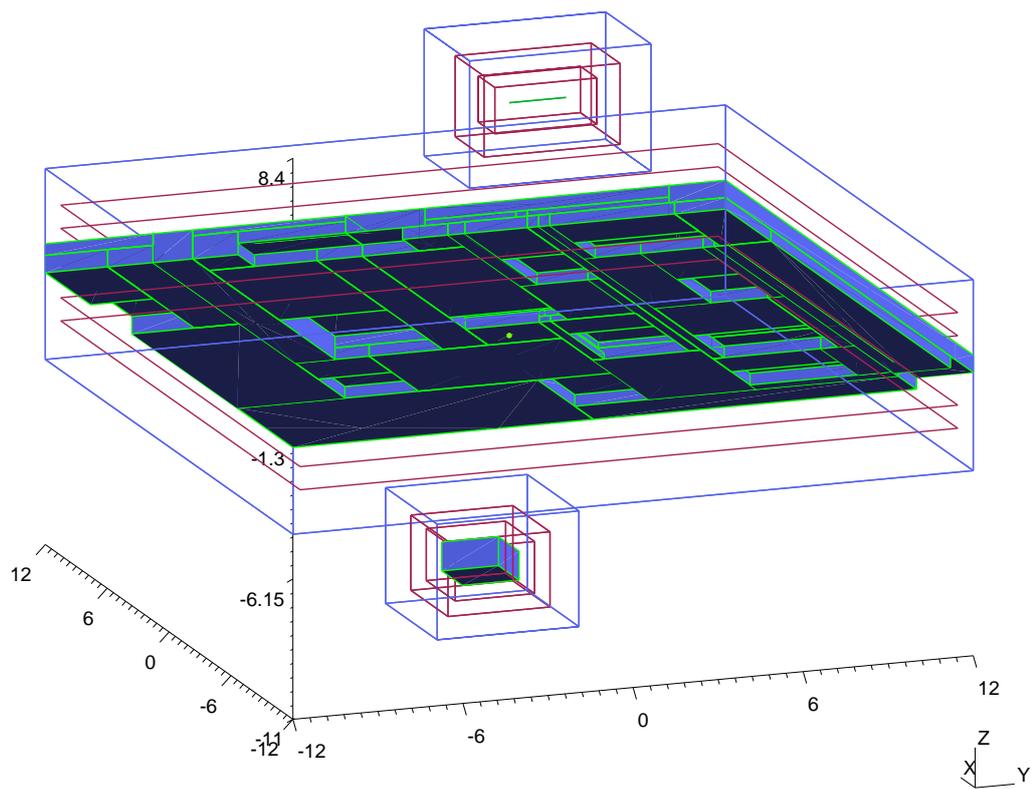


FIG. A.5 – Maillage multi-milieux multi-domaines utilisé.

prise en compte des conditions de transmission dans du milieu 1 vers le milieu 2 nous avons donné des sorties locales des composantes des champs  $E$  et  $H$  en trois points :

- un point juste au-dessus de l'interface : figure A.6,
- un point juste en-dessous de l'interface : figure A.7,
- enfin un point proche de la boîte métallique : figure A.8.

Les résultats sont tracés au-delà de la limite de validité en temps de la méthode se situant à approximativement  $t = 4.2 \cdot 10^{-8} s$ , mais qui peut être allongée à près de  $t = 8 \cdot 10^{-8} s$  en tenant compte de la position des points choisis par rapport aux bords de l'interface et en utilisant le retard induit par le principe de Huygens.

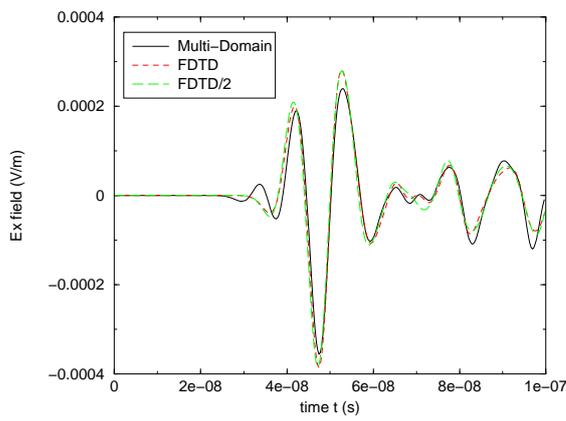
Sur les figures A.6, A.7 et A.8 la résolution par la méthode de sous-domaines semble donner des résultats très proches des résolutions globales, dans la plage de temps fixée, même si la valeur prise pour le paramètre  $\delta/d$  est importante. L'erreur induite au niveau de l'interface est très faible (figures A.6 et A.7), et de même pour la combinaison avec le procédé pour le calcul de l'interaction avec la boîte (figure A.8). Ceci semble confirmer numériquement la précision de la méthode.

Méthode :	Temps CPU :	Coût mémoire :
mono FDTD $\lambda/10$	x1	x1
mono FDTD $\lambda/20$	x13	x4.1
multi-domaines [fil]	x 20.7	x5.4
multi-domaines [boite]	x9.7	x5.4
multi-domaines [interface]	x28.6	x7.7

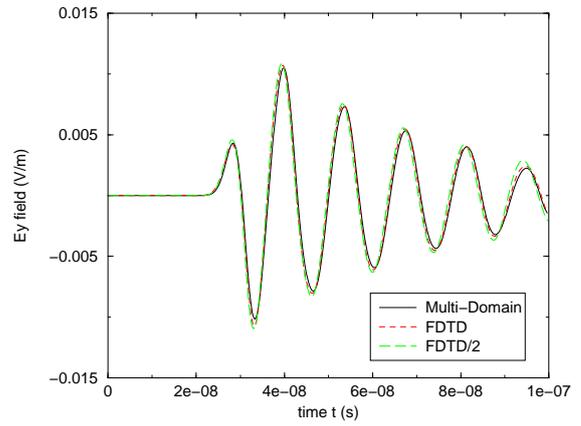
TAB. A.1 – Comparaison des coûts entre les différentes méthodes.

Il faut cependant noter (cf tableau A.1) que pour une telle configuration le procédé de décomposition en sous-domaines reste plus coûteux qu'une simple résolution sur l'ensemble de la scène par FDTD. Ceci s'explique en partie par la proximité des différents éléments (fil et boîte) avec l'interface. Dans ce cas, le nombre de points nécessaires au couplage pour chaque domaine est alors important comme déjà observé dans le chapitre 3. Le choix d'une configuration ici désavantageuse pour la méthode multi-domaines était motivé par la possibilité de fournir une solution de référence suffisamment précise pour permettre des comparaisons. Toutefois, dans le cas où les éléments sont écartés de l'interface, les coûts de résolution par décomposition en sous-domaines diminuent très vite ; le nombre de regroupements sur les surfaces de Huygens et de prélèvement étant une fonction décroissante de l'écartement des domaines. Dans ce cas, il est nécessaire d'élargir le domaine interface mais le surcoût engendré est largement compensé par la hausse de taille des découpages des surfaces de Huygens et de prélèvement. En outre, le volume rajouté à l'interface se situant à l'extrémité du domaine correspondant, il engendre alors les regroupements de tailles les plus importantes, et donc nécessite peu de moyens de stockage.

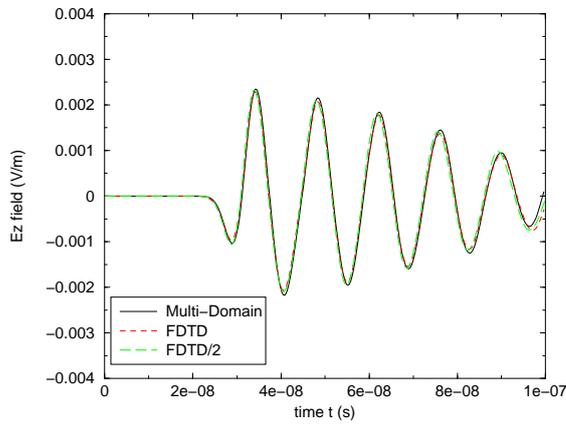
Notons enfin que le même cas a pu être tester en changeant le domaine interface ou en déplaçant les éléments, ceci fournissant des résultats avec une précision et des coûts comparables sans nécessiter de traitement (maillage ou introduction de conditions aux limites spécifiques au bord du bimilieu) supplémentaires, conférant ainsi une grande souplesse pour l'utilisation de la méthode.



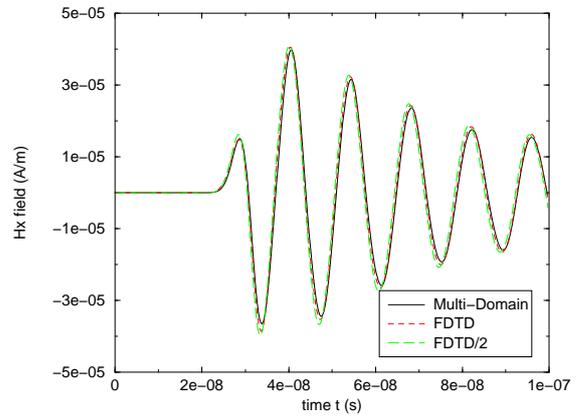
(a) Champs  $E_x$



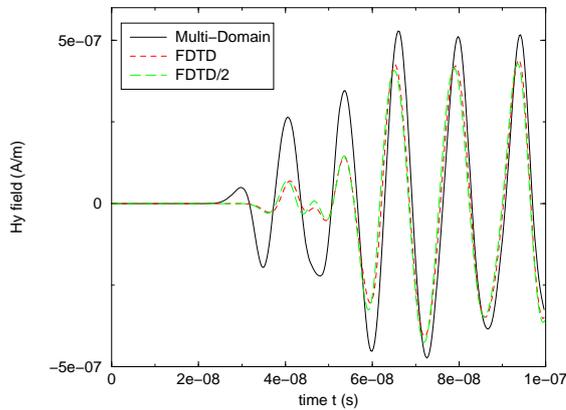
(b) Champs  $E_y$



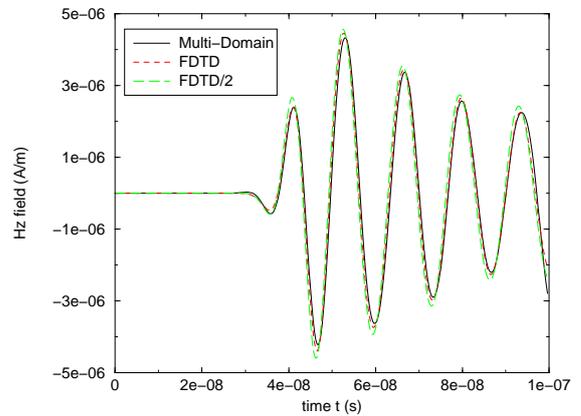
(c) Champs  $E_z$



(d) Champs  $H_x$

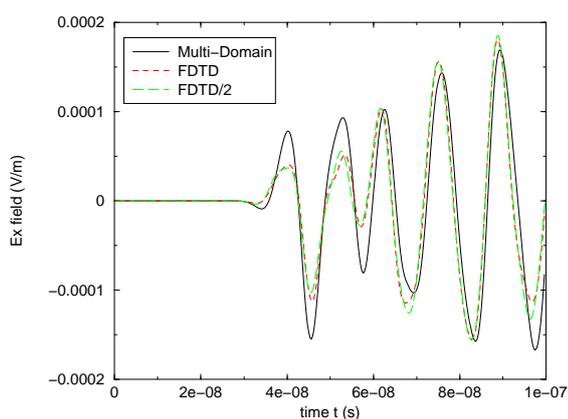
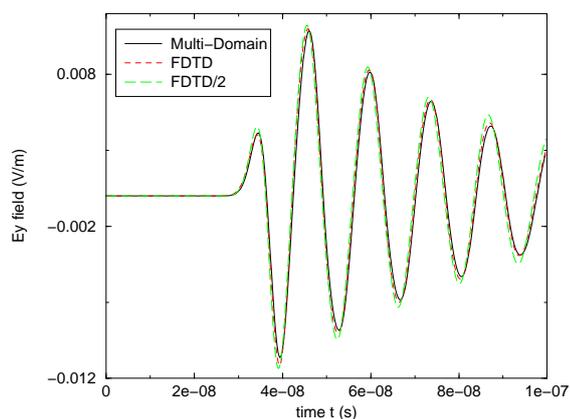
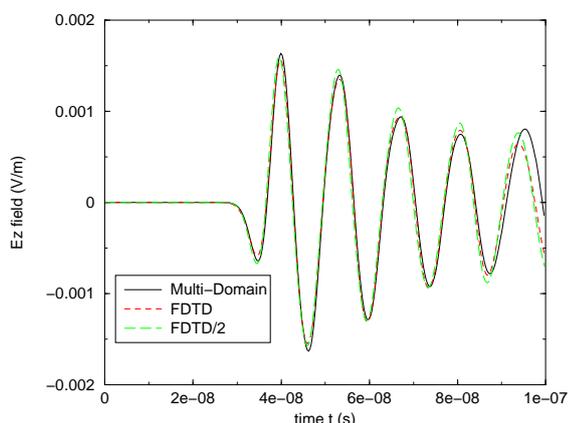
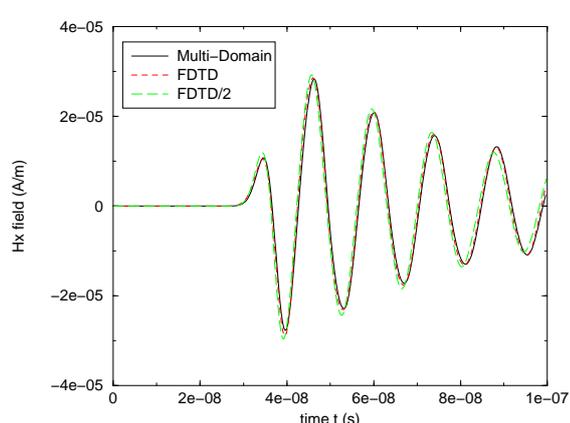
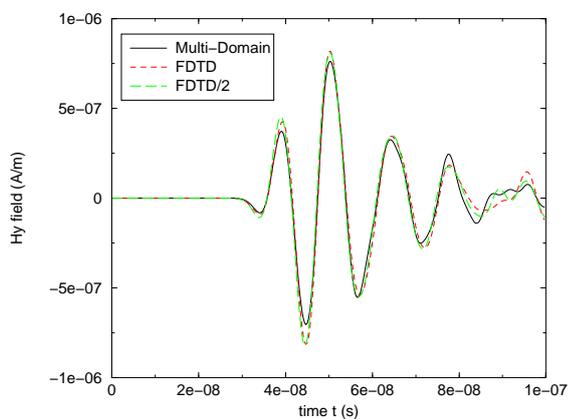
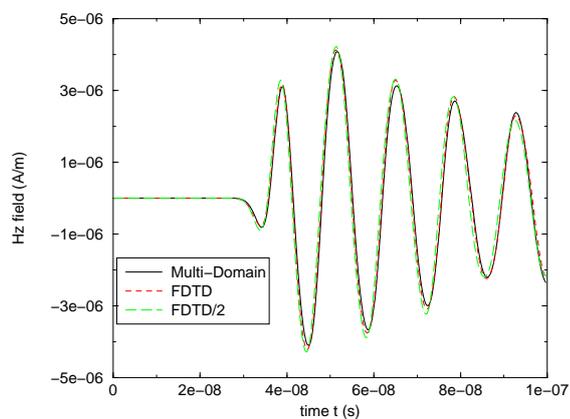


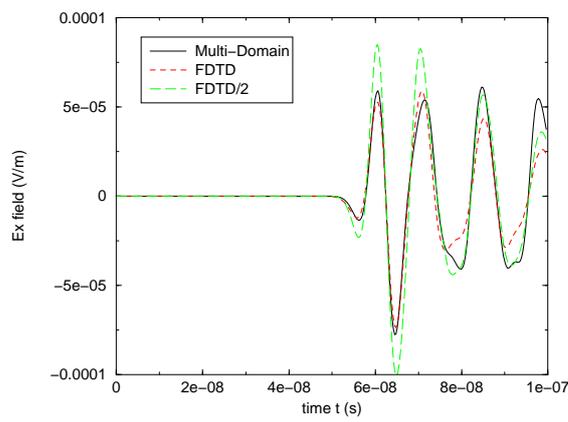
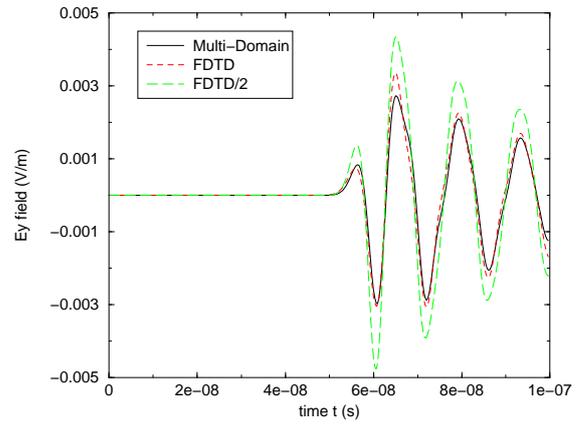
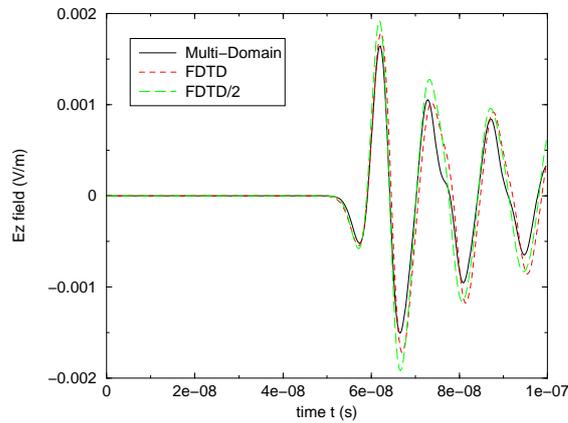
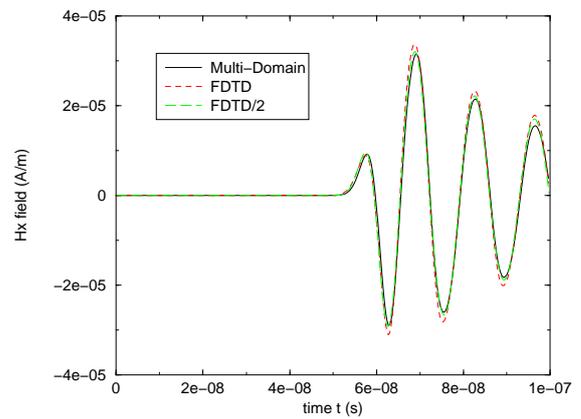
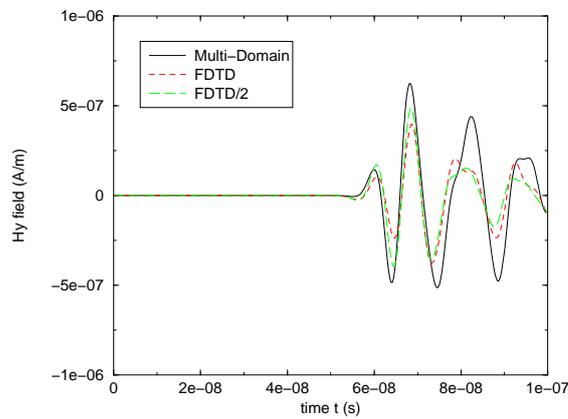
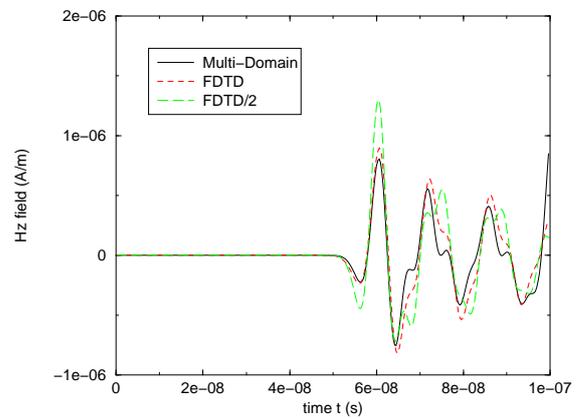
(e) Champs  $H_y$



(f) Champs  $H_z$

FIG. A.6 – Comparaisons  $FDTD$ ,  $FDTD/2$  et multi-domaines juste au-dessus de l'interface.

(a) Champs  $E_x$ (b) Champs  $E_y$ (c) Champs  $E_z$ (d) Champs  $H_x$ (e) Champs  $H_y$ (f) Champs  $H_z$ FIG. A.7 – Comparaisons  $FDTD$ ,  $FDTD/2$  et multi-domaines juste au-dessous de l'interface.

(a) Champs  $E_x$ (b) Champs  $E_y$ (c) Champs  $E_z$ (d) Champs  $H_x$ (e) Champs  $H_y$ (f) Champs  $H_z$ FIG. A.8 – Comparaisons  $FDTD$ ,  $FDTD/2$  et multi-domaines au voisinage de la boîte métallique.



## Annexe B

# Formule de rayonnement dans un milieu à pertes

Dans ce chapitre on va s'intéresser à la propagation dans un milieu homogène à pertes et non plus homogène sans pertes comme dans le cas du chapitre 1. L'objectif est d'élargir la méthodologie établie dans le chapitre 1 à la prise en compte de milieux plus généraux, modélisant par exemple la propagation dans le sol. Tout naturellement, la formule de rayonnement développée ici est compatible avec la méthode de décomposition en sous-domaines présentée au chapitre 2 afin de modéliser des interactions dans des milieux homogènes à pertes, ainsi qu'avec la méthode de traitement des milieux semi-infinis de l'annexe A afin, par exemple, de modéliser la propagation d'une onde émise au-dessus d'un sol homogène (à pertes) et pouvant interagir avec des éléments présents dans celui-ci.

Par rapport au chapitre 1, le problème de départ est alors modifié de la façon suivante : dans un milieu homogène à pertes des hétérogénéités et des sources sont disposées de telle sorte qu'il est possible de les contenir dans un volume compact  $\mathcal{V}$ . Comme dans le cas du chapitre 1, l'objectif reste de pouvoir évaluer, sans calculer dans tout le milieu, les valeurs de  $(E, H)$  en des points donnés hors du volume précédemment délimité. La restriction du problème à l'extérieur de  $\mathcal{V}$  amène alors à chercher  $(E, H)$  solutions des équations de Maxwell instationnaires homogènes à pertes avec second membre :

$$(P^\rho) \begin{cases} \partial_t E - \nabla \times H + \rho E & = f_E, \\ \partial_t H + \nabla \times E & = f_H, \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

avec  $\rho > 0$ , et où  $f_E = (\mathbf{n} \times H)\delta_{\mathcal{F}}$  et  $f_H = -(\mathbf{n} \times E)\delta_{\mathcal{F}}$  sont respectivement les courants électriques et magnétiques relevés sur le bord  $\mathcal{F}$  du volume  $\mathcal{V}$ ,  $\mathbf{n}$  étant la normale sortante à  $\mathcal{V}$ .

La difficulté essentielle de la résolution du système (B.1) est d'obtenir une expression "convenable" de la résolvante. En effet, la présence du terme  $\rho E$  différenciant les traitements de  $E$  et de  $H$ , celle-ci va faire apparaître un terme de "pertes" sur l'un de ces termes et pas sur le second, d'où une écriture plus délicate de la formule exacte. De plus, les écritures respectives l'équation des ondes vectorielles et de l'équation des ondes étant changées, l'obtention d'une formule aisée à implémentée en est *a priori* plus difficile. Enfin, il est nécessaire d'obtenir une écriture du noyau de l'équation des ondes "à pertes" compatible avec les développements précédemment effectués.

## B.1 Résultats préliminaires dans le milieu à pertes

En utilisant le calcul algébrique sur l'algèbre de convolution introduite par les différentes différentiations, il est possible d'exprimer la solution de (B.1), comme pour les milieux homogènes sans pertes, sous la forme

**Théorème B.1.1** *La solution du système d'équations de Maxwell en espace libre avec second membre (B.1) est donnée par :*

$$\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} (t, X) = \left( \mathcal{Z}_2^\rho *_{(t,X)} \mathcal{COM}^\rho \int_0^t \begin{pmatrix} f_E \\ f_H \end{pmatrix} \right) (t, X), \quad (\text{B.2})$$

où  $\mathcal{Z}_2^\rho$  est le noyau de l'équation des ondes "à pertes"

$$\partial_t^2 \mathbb{I}_3 + \rho \partial_t \mathbb{I}_3 - \Delta = 0, \quad (\text{B.3})$$

et  $\mathcal{COM}^\rho$  est la comatrice du système de Maxwell donnée par :

$$\mathcal{COM}^\rho = \begin{pmatrix} \partial_t (\partial_t + \rho)^{-1} *_{(t)} [A - \rho \partial_t \mathbb{I}_3] & B \\ B^T & [A - \rho \partial_t \mathbb{I}_3] \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} \partial_{xx} - \partial_{tt} & \partial_x \partial_y & \partial_x \partial_z \\ \partial_x \partial_y & \partial_{yy} - \partial_{tt} & \partial_y \partial_z \\ \partial_x \partial_z & \partial_y \partial_z & \partial_{zz} - \partial_{tt} \end{pmatrix} \text{ et } B = -B^T = \begin{pmatrix} 0 & \partial_z \partial_t & -\partial_y \partial_t \\ -\partial_z \partial_t & 0 & \partial_x \partial_t \\ \partial_y \partial_t & -\partial_x \partial_t & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme on pouvait s'y attendre, la présence de  $\rho E$  dans (B.1) a modifié le symbole principal de l'équation ; la solution de (B.1) est alors donnée par la convolution avec un noyau de l'équation des ondes modifié  $\mathcal{Z}_2^\rho$ . Afin de pouvoir construire à nouveau une formule intégrale approchée à partir du changement de variable et des développements proposés dans le chapitre 1, il faut préalablement donner une expression de  $\mathcal{Z}_2^\rho$  compatible (i.e. qui permettra de simplifier les dérivations tangentes et permettra de reporter les dérivations spatiales sur les parties temporelles de la formule). On obtient alors :

**Proposition B.1.2** *La solution élémentaire de l'équation des ondes "à pertes" (B.3) s'écrit :*

$$\mathcal{Z}_2^\rho(t, X) = e^{-\rho t/2} \mathcal{Z}_2(t, X) + \frac{\rho e^{-\rho t/2}}{8\pi \sqrt{t^2 - |X|^2}} Y_{t-|X|} I_1 \left( \sqrt{t^2 - |X|^2} \rho/2 \right), \quad (\text{B.5})$$

où  $t$  est choisi positif strictement,  $\mathcal{Z}_2$  est la solution élémentaire du d'Alembertien, et  $I_1$  est une fonction de Bessel modifiée de première espèce  $I_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_{[0,\pi]} \cos(\theta) e^{z \cos(\theta)} d\theta$ .

**Preuve.** On commence par effectuer le changement d'inconnues  $u(t, X) = e^{-\rho t/2} v(t, X)$ , et (B.3). On se ramène alors à la recherche de la solution de l'équation des ondes "amorties"

$$\partial_t^2 v - \frac{\rho^2}{4} v - \Delta v = 0. \quad (\text{B.6})$$

La solution élémentaire  $\widetilde{\mathcal{Z}}_2^\rho$  de (B.6) étant un cas particulier des noyaux des équations des ondes amorties généralisés [59], elle est donnée par le passage à la limite (continu) suivant

$$\lim_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \mathcal{Z}_{2+\varepsilon}^\rho = \mathcal{Z}_2^\rho,$$

avec  $\widetilde{\mathcal{Z}}_{2+\varepsilon}^\rho$  donné par [59]

$$\widetilde{\mathcal{Z}}_{2+\varepsilon}^\rho(t, X) = \frac{1}{2^{1+\varepsilon/2}\pi\Gamma(1+\frac{\varepsilon}{2})} Pf \left( s^{-2+\varepsilon} \left( \sum_{k \geq 0} \frac{(\rho^2 s^2/16)^k}{k!\Gamma(k+\varepsilon/2)} \right) \right), \quad (\text{B.7})$$

où  $s = \sqrt{t^2 - |X|^2}$ . La série en  $k$  est absolument convergente car représentant une fonction de Bessel modifiée de première espèce [5], le traitement de la partie finie s'effectue alors en deux morceaux :  $k = 0$  et  $\sum_{k > 0}$ .

- $k = 0$  :  $\frac{1}{2^{1+\varepsilon/2}\pi\Gamma(1+\frac{\varepsilon}{2})\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})} Pf(s^{-2+\varepsilon})$  est un noyau du d'Alembertien généralisé  $\mathcal{Z}_{2+\varepsilon}$  et vérifie alors la limite continue suivante [59]

$$\lim_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \mathcal{Z}_{2+\varepsilon} = \mathcal{Z}_2,$$

- $\sum_{k > 0}$  : compte tenu de la régularité en  $s$  de cette série, le terme en partie finie limite uniquement l'application de l'intégration espace-temps au cône  $C = \{(t, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, s^2 - |X|^2 \geq 0\}$ , support de la distribution dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  associée à la fonction  $s$  de  $(t, X)$ .  
En remplaçant l'indice muet  $k$  par  $k + 1$  sous la sommation, on obtient alors

$$\begin{aligned} & \frac{Y_C}{2^{1+\varepsilon/2}\pi\Gamma(1+\frac{\varepsilon}{2})} s^{-2+\varepsilon} \left( \sum_{k \geq 1} \frac{(\rho^2 s^2/16)^k}{k!\Gamma(k+\varepsilon/2)} \right) \\ &= \frac{Y_C}{2^{1+\varepsilon/2}\pi\Gamma(1+\frac{\varepsilon}{2})} s^{-2+\varepsilon} \frac{\rho^2 s^2}{16} \left( \sum_{k \geq 0} \frac{(\rho^2 s^2/16)^k}{(k+1)!\Gamma(k+1+\varepsilon/2)} \right), \end{aligned}$$

avec  $(k+1)!\Gamma(k+1+\varepsilon/2) = k!\Gamma(k+1+(1+\varepsilon/2))$  et en factorisant le premier terme sous la forme  $\rho/4s^{-1}(\rho s/4)^{1+\varepsilon}$ , le deuxième terme de la somme se réécrit alors

$$= \frac{\rho Y_C}{2^{1+\varepsilon/2}4\pi\frac{\varepsilon}{2}\Gamma(1+\frac{\varepsilon}{2})^2} s^{-1} I_{1+\varepsilon/2} \left( \frac{\rho s}{2} \right),$$

où  $I_{1+\varepsilon/2}$  est une fonction de Bessel modifiée de première espèce, et vérifie en plus  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{1+\varepsilon/2} = I_1$ , avec  $I_1$  continue sur  $C$  et vérifiant  $\lim_{s \rightarrow s_0 \in \partial C} s^{-1} I_1(\rho s/2) = \rho/2$ . Enfin  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2^{1+\varepsilon/2}4\pi\frac{\varepsilon}{2}\Gamma(\frac{\varepsilon}{2}) = 8\pi$ , d'où

$$\widetilde{\mathcal{Z}}_2 = \mathcal{Z}_2(t, X) + \frac{\rho Y_C}{8\pi s} I_1(s\rho/2),$$

le résultat se déduit alors par le changement d'inconnue inverse.

■

**Remarque B.1.3** *Le choix dans la proposition B.1.2 de l'expression de la solution de l'équation des ondes "amorties" donnée par [59], est motivé par la possibilité d'avoir une écriture faisant intervenir une somme de deux termes : le noyau de l'équation des ondes "homogène", et une perturbation exponentiellement décroissante dépendant de  $\rho$ , de la mesure hyperbolique et dérivée en temps. Un tel choix devrait permettre d'une part une implémentation simple de la formule de rayonnement "à*

pertes" à partir de la version "homogène", et d'autre part de faciliter l'établissement des lemmes techniques amenant à l'expression approchée.

D'autres écritures peuvent aussi être envisagées. Par exemple, à partir de l'expression équivalente [31]

$$\mathcal{Z}_2^{\rho * (t,X)} \Phi = \frac{1}{4\pi} \int \left[ \left[ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] \int_{\xi=g(a,b,c)}^{t-r} \Phi(a,b,c,\xi) I_0 \left( \frac{\rho}{2} \gamma \right) d\xi \right] dadbdc,$$

avec  $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ ,  $\gamma = \sqrt{(t-\xi)^2 - r^2}$ , où  $g$  décrit le support de  $\Phi$  sur le cône de propagation, et  $I_0$  est une fonction de Bessel modifiée de première espèce.

Comme dans le cas de l'espace "sans pertes", il est nécessaire d'introduire ici une écriture "à pertes" de l'équation des ondes vectorielles afin de pouvoir simplifier l'écriture de la comatrice dans le repère local.

**Proposition B.1.4** Soient  $(E, H)$  une solution donnée des équations de Maxwell homogènes à pertes :

$$\begin{cases} \partial_t E - \nabla \times H + \rho E = 0, \\ \partial_t H + \nabla \times E = 0, \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

alors  $E$  et  $H$  sont solutions de "l'équation des ondes vectorielles à pertes"

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{I}_3 + \rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 + \nabla \times \nabla \times \mathbb{I}_3 = 0. \quad (\text{B.9})$$

**Preuve.**

- pour  $E$  : en prenant le rotationnel de la seconde équation de (B.8) on en déduit que  $(E, H)$  vérifie  $\partial_t \nabla \times H = -\nabla \times \nabla \times E$  ; en différenciant par rapport à  $t$  la première équation de (B.8) et en reportant la relation précédente on en déduit que  $E$  vérifie (B.9).
- pour  $H$  : en prenant le rotationnel de la première équation de (B.8) et en utilisant la seconde on obtient

$$\partial_t \nabla \times E = \nabla \times \nabla \times H - \rho \nabla \times E = \nabla \times \nabla \times H + \rho \partial_t H ;$$

en reportant dans la seconde équation de (B.8), après l'avoir différenciée en  $t$ , on en déduit que  $H$  vérifie (B.9).

■

## B.2 Ecriture de la formule intégrale approchée

Le principe de la construction de la formule intégrale dans le milieux à pertes est le même que dans le chapitre 1 :

1. on régularise les seconds membres de (B.1) selon le même procédé que dans le chapitre 1, obtenant un système du même type que (1.12) dont la solution converge vers celle du problème de départ (B.1) ;
2. puis à l'aide des résultats sur les surfaces admissibles nous introduisons un découpage par faces des éléments régularisés, obtenant une formulation similaire à (1.15) ;
3. à partir du système de coordonnées locales de la définition 1.2.17 nous obtenons une réécriture de la comatrice (B.4) ;

4. nous introduisons des lemmes de calculs des termes de dérivations successives sur les convolutions avec  $\mathcal{Z}_2^\rho$  similaires aux lemmes 1.2.32, 1.2.33 et 1.2.34 ;
5. et enfin, après avoir simplifier l'écriture complète de la formule intégrale, nous effectuons un développement en  $\tau/d$  des intégrandes afin de localiser.

**Remarque B.2.1** *Dans le cadre de l'obtention de la formule intégrale approchée pour le milieu sans pertes, l'introduction du système de coordonnées locales n'était valable que sous l'hypothèse  $\mathbf{t}_i \neq \pm \mathbf{n}_i$ , sinon la définition 1.2.17 ne donnait pas un changement de variable. Il était donc nécessaire d'envisager séparément les cas  $\mathbf{t}_i \neq \pm \mathbf{n}_i$  et  $\mathbf{t}_i = \pm \mathbf{n}_i$ . Il a ainsi été établi une formule pour chacun de ces cas, le passage à la limite étant alors continu pour  $\mathbf{t}_i \rightarrow \pm \mathbf{n}_i$  (proposition 1.2.53). Pour l'écriture de la formule intégrale approchée dans le milieu à pertes nous nous contenterons d'établir une écriture générale dans le cadre le plus vaste  $\mathbf{t}_i \neq \pm \mathbf{n}_i$ , sachant que le cas limite  $\mathbf{t}_i = \pm \mathbf{n}_i$  peut s'éviter naturellement en changeant de points de références  $X_i$  sur les découpages des surfaces de prélèvement.*

On suppose que la surface de prélèvement  $\mathcal{F}$  est subdivisée en sous-faces  $(\mathcal{F}_i)_i$  est forme une surface admissible au sens de la définition 1.2.6. Le problème de départ (B.1) peut alors être régularisé sous la forme suivante

$$(P_\varepsilon^\rho) \begin{cases} \partial_t E - \nabla \times H + \rho E & = f_E^\varepsilon, \\ \partial_t H + \nabla \times E & = f_H^\varepsilon, \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

où les seconds membres  $f_E^\varepsilon$  et  $f_H^\varepsilon$  sont définis sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  par (1.13) :

$$f_E^\varepsilon = \left( \sum_i [(\mathbf{n}_i \times H) \delta_{\mathcal{P}_i}] *_{(X)} \varphi_i^\varepsilon \right), \quad f_H^\varepsilon = - \left( \sum_i [(\mathbf{n}_i \times E) \delta_{\mathcal{P}_i}] *_{(X)} \varphi_i^\varepsilon \right),$$

$\mathcal{P}_i$  étant le plan contenant  $\mathcal{F}_i$ , et  $\varphi_i^\varepsilon = \mathbb{Y}_{\varepsilon \mathbf{v}_i} *_{(X)} \varphi^\varepsilon$  pour  $\varphi$  une fonction (partition de l'unité) telle que, pour  $\delta(\varepsilon) > 0$  assez petit  $\varphi$  vérifie (1.14) :

$$\begin{cases} \varphi \in \mathcal{C}_m^1(\mathbb{R}^3), \\ \text{Supp} \varphi \subset B(0, \delta(\varepsilon)), \\ \int \varphi = 1, \end{cases}$$

où  $\mathbb{Y}$  désigne la fonction de Heaviside.

Comme dans le cas du chapitre 1, les études des problèmes (B.1) et (B.10) sont alors reliées par

**Proposition B.2.2** *Le problème  $(P^\rho)$  est le problème limite au sens des distributions du problème à second membre régularisé  $(P_\varepsilon^\rho)$  pour  $\varepsilon$  tendant vers 0.*

**Preuve.** Démonstration identique à celle de la proposition 1.2.14. ■

A l'aide de ce problème régularisé il est alors possible de séparer les traitements des termes comme pour (1.15)

**Proposition B.2.3** *Si  $\mathcal{F} = \cup_i \mathcal{F}_i$  est une surface admissible au sens de la définition 1.2.6, alors le problème  $(P_\varepsilon)$  a pour solution, en tout point  $(t_0, X_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{P}^c$*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} (t_0, X_0) &=: \sum_i \begin{pmatrix} \tilde{E}_i \\ \tilde{H}_i \end{pmatrix} (t_0, X_0) \\ &= \sum_i \int_{(s,Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3} \mathcal{Z}_2^\rho(t_0 - s, X_0 - Y) \text{COM}^\rho \int_0^s \begin{pmatrix} [(\mathbf{n}_i \times H) \delta_{\mathcal{P}_i}] * \varphi_i^\varepsilon \\ - [(\mathbf{n}_i \times E) \delta_{\mathcal{P}_i}] * \varphi_i^\varepsilon \end{pmatrix} (., Y) ds dY. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

**Preuve.** Les surfaces admissibles permettent de séparer les supports de  $f_E^\varepsilon$  et  $f_H^\varepsilon$  de telles sorte que les compositions par  $\mathcal{COM}^\rho$  et  $\mathcal{Z}_2^\rho$  n'induisent aucun terme de traces entre  $[(\mathbf{n}_i \times H)\delta_{\mathcal{P}_i}] * \varphi_i^\varepsilon$  et  $[(\mathbf{n}_j \times H)\delta_{\mathcal{P}_j}] * \varphi_j^\varepsilon$  pour  $i \neq j$  (de même en  $\mathbf{n}_i \times E$ ). La démonstration de cette proposition se fait alors de façon similaire à celle de la proposition 1.2.15. ■

Afin de simplifier l'écriture de  $\mathcal{COM}^\rho$  on introduit le résultat suivant

**Proposition B.2.4**  $f_E^\varepsilon$  et  $f_H^\varepsilon$  sont solutions de "l'équation des ondes vectorielles à pertes" (B.9).

**Preuve.** Comme pour la démonstration dans le cas sans pertes (1.26) :  $E$  et  $H$  vérifient (B.9), donc par passage aux régularisées des traces sur la surface, on en déduit que  $f_E^\varepsilon$  et  $f_H^\varepsilon$  le vérifient aussi. ■

La comatrice  $\mathcal{COM}^\rho$  peut alors être développée dans le repère local

**Proposition B.2.5** La matrice des cofacteurs  $\mathcal{COM}^\rho$  associée au système de Maxwell exprimée avec les nouvelles variables (renotée  $\mathcal{COM}_i^\rho$ ), prise contre le vecteur  $(f_E^\varepsilon, f_H^\varepsilon)^T$  s'écrit :

$$\mathcal{COM}_i^\rho = \begin{pmatrix} \mathcal{ROT}_i & 0 \\ 0 & \mathcal{ROT}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t (\partial_t + \rho)^{-1} {}^{*(t)} \mathcal{ROT}_i & -\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 & \mathcal{ROT}_i \end{pmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

où  $\mathcal{ROT}_i$  est l'opérateur défini par (1.28) :

$$\mathcal{ROT}_i = \frac{\sqrt{1-p_i^2}}{J} \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \frac{\partial}{\partial \sigma} \mathbb{I}_3 + \frac{1}{\sqrt{1-p_i^2}} \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbb{I}_3 + \mathbf{n}_i \times \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbb{I}_3.$$

**Preuve.** Comme pour la démonstration de la proposition 1.2.30 on introduit l'équation des ondes vectorielles "à pertes" (B.9) dans l'expression (B.4), puis on utilise les simplifications dans le repère local développées au chapitre 1. ■

Après avoir utilisé l'écriture (B.12) évaluée en  $(t_0, X_0)$ , la comatrice de Maxwell se décompose sous la forme d'une somme de deux opérateurs  $\mathcal{COM}_i^\rho = \mathcal{A}_i^\rho + \mathcal{B}_i^\rho$ , de la même manière que dans le chapitre 1 :

– un opérateur  $\mathcal{B}_i^\rho$  faisant apparaître les dérivées tangentes au cône de propagation centré en  $X_0$ , soit des dérivées selon  $\sigma$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i^\rho &= \frac{\sqrt{1-p_i^2}}{J} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &+ \frac{\sqrt{1-p_i^2}}{J} \frac{\partial^2}{\partial \eta \sigma} \left( \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}^\rho \right) + \frac{\sqrt{1-p_i^2}}{J} \frac{\partial^2}{\partial \eta \sigma} \left( \mathbf{n}_i \times \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \mathbb{I}^\rho \right) \\ &+ \frac{1}{J} \frac{\partial^2}{\partial \tau \sigma} \left( \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \mathbb{I}^\rho \right) + \frac{1}{J} \frac{\partial^2}{\partial \tau \sigma} \left( \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \mathbb{I}^\rho \right) \\ &+ \frac{1-p_i^2}{J^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \frac{\partial}{\partial \sigma} \mathbb{I}^\rho \right) + \frac{\sqrt{1-p_i^2}}{J^2 d_i} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \mathbb{I}^\rho \right), \end{aligned}$$

où  $\mathbb{I}_3$  représente l'opérateur identité de  $L^2(\mathbb{C}^3)$ , et  $\mathbb{I}^\rho$  est l'opérateur de  $(L^2(\mathbb{C}^3))^2$  défini par

$$\mathbb{I}^\rho = \begin{pmatrix} \partial_t (\partial_t + \rho)^{-1} *_{(t)} \mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.13})$$

– un opérateur  $\mathcal{A}_i^\rho$  comportant les termes de dérivation suivant le support décalé de  $\mathcal{Z}_2^\rho$  (i.e. les dérivations par rapport aux autres coordonnées)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i^\rho &= \frac{1}{\sqrt{1-p_i^2}J} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( J \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} \right) + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \mathbf{n}_i \times \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &+ \frac{1}{(1-p_i^2)J} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( J \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \mathbb{I}^\rho \right) + \frac{1}{J} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (J \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}^\rho) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1-p_i^2}J} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \tau} \left( J \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}^\rho \right) + \frac{1}{\sqrt{1-p_i^2}J} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \tau} \left( J \mathbf{n}_i \times \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|} \times \mathbb{I}^\rho \right) \\ &- \frac{1}{J(1-p_i^2)d_i} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{J}{1+\tau_i d_i^{-1} |\mathbf{s}_i|} \times \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \mathbb{I}^\rho \right). \end{aligned}$$

Il reste à présent à établir des équivalents des lemmes 1.2.32, 1.2.33 et 1.2.34 (respectivement B.2.7, B.2.8 et B.2.10), permettant d'évaluer les dérivations dans les opérateurs  $A_i^\rho$  et  $B_i^\rho$  quand ils sont combinés avec  $\mathcal{Z}_2^\rho$ , ainsi que le résultat suivant

**Lemme B.2.6** *Le terme  $\partial_t (\partial_t + \rho)^{-1}$  peut être explicité, au sens des distributions, par*

$$\partial_t (\partial_t + \rho)^{-1} = \delta_t - \rho e^{-\rho t}. \quad (\text{B.14})$$

**Preuve.** Il suffit de remarquer que  $\partial_t (\partial_t + \rho)^{-1} = \delta_t - \rho (\partial_t + \rho)^{-1}$ , et que  $(\partial_t + \rho)^{-1} = e^{-\rho t}$ . ■

**Lemme B.2.7** *Soient  $\gamma$  l'application de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$  définie par  $\gamma : (t, X) \mapsto (t_0 - t, X_0 - X)$ , et  $\Omega_\lambda$  le sous-domaine de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  défini par*

$$\Omega_\lambda = \{(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) \in ]t_0 + \lambda, +\infty[ \times [-d_i + \lambda, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R}\}$$

pour  $\lambda > 0$  quelconque donné. Alors, pour toute fonction régulière  $f$  telle que  $\text{Supp} f \subset \Omega_\lambda$ , on a

$$\int (\mathcal{Z}_2^\rho \circ \gamma)(t, X) \frac{\partial}{\partial \sigma_i} f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i = 0.$$

**Preuve.** Comme pour la démonstration de la proposition 1.2.32, il suffit de remarquer que dans le repère local, par la proposition B.1.2

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_2^\rho \circ \gamma(t, X) &= e^{-\rho(t_0-t)/2} \frac{\delta_{t_0-t-\alpha(\tau_i, \eta_i)}}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} \\ &+ \frac{\rho e^{-\rho(t_0-t)/2}}{8\pi\sqrt{(t_0-t)^2 - \alpha(\tau_i, \eta_i)^2}} Y_{t_0-t-\alpha(\tau_i, \eta_i)} I_1 \left( \sqrt{(t_0-t)^2 - \alpha(\tau_i, \eta_i)^2} \rho / 2 \right), \end{aligned}$$

et donc ne dépend pas de  $\sigma_i$ ;  $\alpha$  étant la fonction définie dans le lemme B.2.8. On en déduit alors, que pour toute fonction  $f$  telle que  $\text{Supp} f \subset \Omega_\lambda$

$$\begin{aligned} & \int (\mathcal{Z}_2^\rho \circ \gamma)(t, X) \frac{\partial}{\partial \sigma} f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) J dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i \\ &= \int (\mathcal{Z}_2^\rho \circ \gamma)(t, X) \left[ \int \frac{\partial}{\partial \sigma} (f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i)) d\sigma_i \right] dt d\tau_i d\eta_i. \end{aligned}$$

Enfin, comme  $f$  est régulière, on a  $\int_{\sigma \in [0, 2\pi]} \frac{\partial}{\partial \sigma} f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) d\sigma_i = 0$ . ■

Comme dans le chapitre 1, on a  $X_0 \notin \mathcal{F}_i$  donc il est toujours possible de trouver un  $\lambda > 0$  (suffisamment petit) tel que  $f_E^\varepsilon$  et  $f_H^\varepsilon$  vérifient  $\text{Supp}(f_E^\varepsilon) \subset \Omega_\lambda$  et  $\text{Supp}(f_H^\varepsilon) \subset \Omega_\lambda$ . Le lemme B.2.7 permet alors d'annuler le terme  $\mathcal{B}_i$  dans la décomposition de la comatrice.

**Lemme B.2.8** Soient  $\lambda > 0$  assez petit,  $\gamma$  l'application et  $\Omega_\lambda$  l'ensemble définis dans le lemme B.2.7, alors dans  $D'(\Omega_\lambda)$  on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \mathcal{Z}^\rho(\tau_i, \eta_i) &:= (\mathcal{Z}_2^\rho *_{(t, X)} (Y_t \otimes \delta_X)) \circ \gamma(t, X) = \frac{Y_{t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i)}}{4\pi\alpha(\tau_i, \eta_i)} e^{-\rho\alpha(\tau_i, \eta_i)/2} \\ &+ \int_0^{t_0 - t - \alpha(\tau_i, \eta_i)} \frac{\rho Y(s) e^{-\rho(t_0 - t - s)/2}}{8\pi\sqrt{(t_0 - t - s)^2 - \alpha(\tau_i, \eta_i)^2}} I_1\left(\sqrt{(t_0 - t - s)^2 - \alpha(\tau_i, \eta_i)^2} \rho/2\right) ds, \end{aligned}$$

$$\text{avec } \alpha(\tau_i, \eta_i) = d_i \sqrt{1 + 2(1 - p_i^2) \frac{\tau_i}{d_i} + (1 - p_i^2) \frac{\tau_i^2}{d_i^2} + 2p_i \frac{\eta_i}{d_i} + \frac{\eta_i^2}{d_i^2}}.$$

**Preuve.** En procédant comme pour la démonstration du lemme 1.2.33, il vient pour toute fonction  $\varphi \in D'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0)\})$

$$\begin{aligned} & \int Y(t) \mathcal{Z}_2^\rho(s, X) \varphi(s + t, X) ds dt dX = \int Y(t) e^{-\rho s/2} \mathcal{Z}_2(s, X) \varphi(s + t, X) ds dt dX \\ &+ \int Y(t) Y(s - |X|) \frac{\rho e^{-\rho s/2}}{8\pi\sqrt{s^2 - |X|^2}} I_1(\sqrt{s^2 - |X|^2} \rho/2) \varphi(s + t, X) ds dt dX. \end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme donne alors, par le changement de variable  $s \rightarrow s - t$ , le crochet de dualité  $\left\langle (s, X) \mapsto \frac{Y_{s-|X|}}{4\pi|X|} e^{-\rho|X|/2}, \varphi \right\rangle$ . De même, le second terme devient alors

$$\begin{aligned} & \int Y(t) Y(s - t - |X|) \frac{\rho e^{-\rho(s-t)/2}}{8\pi\sqrt{(s-t)^2 - |X|^2}} I_1(\sqrt{(s-t)^2 - |X|^2} \rho/2) \varphi(s, X) ds dt dX \\ &= \left\langle (s, X) \mapsto \int_0^{s-|X|} \frac{\rho Y(t) e^{-\rho(s-t)/2}}{8\pi\sqrt{(s-t)^2 - |X|^2}} I_1(\sqrt{(s-t)^2 - |X|^2} \rho/2) dt, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Donc en recombinant, dans  $D'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0)\})$  on trouve  $(\mathcal{Z}_2^\rho *_{(t, X)} (Y_t \otimes \delta_X))(t, X) =$

$$\frac{Y_{t-|X|}}{4\pi|X|} e^{-\rho|X|/2} + \int_0^{t-|X|} \frac{\rho Y(s) e^{-\rho(t-s)/2}}{8\pi\sqrt{(s-t)^2 - |X|^2}} I_1(\sqrt{(s-t)^2 - |X|^2} \rho/2) ds.$$

Le résultat final s'obtient alors en appliquant la translation  $\gamma$  à ces deux termes,  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0)\}$  devenant  $\Omega_\lambda$  dans le nouveau repère. ■

**Remarque B.2.9** La présence du Heaviside  $Y(s)$  sous le terme  $\int_0^{t_0-t-\alpha(\tau_i, \eta_i)} (\dots) ds$  correspond à  $\sqrt{(t_0-t-s)^2 - \alpha(\tau_i, \eta_i)^2} \in \mathbb{R}$  et annule donc les contributions de ce terme dans les calculs de convolutions pour les valeurs de  $t$  telles que  $t_0 - \alpha(\tau_i, \eta_i) < t$ .

Pour alléger les notations dans l'énoncé du lemme B.2.10 et sa démonstration nous omettrons la dépendance en  $(\tau_i, \eta_i)$  de la fonction  $\alpha$  dans les écritures.

**Lemme B.2.10** Soient  $\lambda > 0$  assez petit, et  $\Omega_\lambda$  l'ensemble défini dans le lemme 1.2.32. Soit  $f$  une fonction régulière à support compact telle que  $\text{Supp } f \subset \Omega_\lambda$ , alors on a les relations de dérivation suivantes

1.  $\forall \mu \in \{\tau, \eta\}$ ,

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{Z} \mathcal{Z}^\rho(\tau_i, \eta_i) \frac{\partial}{\partial \mu} (f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i)) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i \\ &= \int \left\{ \left[ \frac{\delta(t_0 - t - \alpha)}{4\pi\alpha} + \left( \frac{2 + \alpha\rho}{8\pi\alpha^2} + \frac{\rho^2}{32\pi} \right) Y(t_0 - t - \alpha) \right] e^{-\rho\alpha/2} \right. \\ & \quad \left. - \mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_1 \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i, \end{aligned}$$

avec les fonctions  $\mathcal{J}_0$  et  $\mathcal{J}_1$  suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 &= \int_0^{t_0-t-\alpha} \frac{\rho^2 \alpha Y(s) e^{-\rho(t_0-t-s)/2}}{16\pi((t_0-t-s)^2 - \alpha^2)} I_0 \left( \sqrt{(t_0-t-s)^2 - \alpha^2} \rho/2 \right) ds, \\ \mathcal{J}_1 &= \int_0^{t_0-t-\alpha} \frac{\rho \alpha Y(s) e^{-\rho(t_0-t-s)/2}}{4\pi((t_0-t-s)^2 - \alpha^2)^{3/2}} I_1 \left( \sqrt{(t_0-t-s)^2 - \alpha^2} \rho/2 \right) ds, \end{aligned}$$

2.  $\forall (\mu, \nu) \in \{\tau, \eta\}^2$ ,

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{Z} \mathcal{Z}^\rho(\tau_i, \eta_i) \frac{\partial^2}{\partial \mu \nu} (f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i)) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i \\ &= \int \left[ \int_0^{t_0-t-\alpha} \{ \mathcal{I}_0^{\mu\nu} - \mathcal{I}_1^{\mu\nu} \} Y(s) e^{-\rho(t_0-t-s)/2} ds + \mathcal{I}_2^{\mu\nu} Y(t_0 - t - \alpha) e^{-\rho\alpha/2} \right. \\ & \quad + \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} \frac{(4 + \rho\alpha)^2}{32\pi\alpha^2} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \nu \mu} \frac{1}{4\pi\alpha} \right\} e^{-\alpha\rho/2} \delta(t_0 - t - \alpha) \\ & \quad \left. + \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} \frac{e^{-\alpha\rho/2} \delta(t_0 - t - \alpha)}{4\pi\alpha} \mathbb{D}_t \right] f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i, \end{aligned}$$

où  $\mathbb{D}_t$  est l'opérateur de dérivation en  $t$ , et les fonctions  $\mathcal{I}_0^{\mu\nu}$ ,  $\mathcal{I}_1^{\mu\nu}$  et  $\mathcal{I}_2^{\mu\nu}$  sont définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0^{\mu\nu} &= \left[ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \nu \mu} \frac{\rho^2 \alpha}{16\pi((t_0-t-s)^2 - \alpha^2)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\rho^2 (3\alpha^2 + (t_0-t-s)^2)}{4\pi((t_0-t-s)^2 - \alpha^2)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} \right] I_0 \left( \sqrt{(t_0-t-s)^2 - \alpha^2} \rho/2 \right), \\ \mathcal{I}_1^{\mu\nu} &= \left[ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \nu \mu} \frac{\rho \alpha}{4\pi((t_0-t-s)^2 - \alpha^2)^{3/2}} + \frac{\rho((t_0-t-s)^2 + \alpha^2)}{4\pi((t_0-t-s)^2 - \alpha^2)^{5/2}} \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\rho^3 \alpha^2}{32\pi((t_0-t-s)^2 - \alpha^2)^{3/2}} \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} \right] I_1 \left( \sqrt{(t_0-t-s)^2 - \alpha^2} \rho/2 \right), \end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_2^{\mu\nu} = \frac{\partial\alpha}{\partial\mu} \frac{\partial\alpha}{\partial\nu} \frac{256 + 128\alpha\rho + 64\alpha^2\rho^2 + 8\alpha^3\rho^3 + \alpha^4\rho^4}{512\pi\alpha^3} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial\nu\mu} \left( \frac{2 + \alpha\rho}{8\pi\alpha^2} + \frac{\rho^2}{32\pi} \right).$$

**Preuve.**

1. Comme pour la démonstration du lemme 1.2.34, il faut remarquer que

$$\int \frac{\partial}{\partial\mu} \left( \int \mathcal{Z}\mathcal{Z}^\rho(\tau_i, \eta_i) f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt \right) d\tau_i d\sigma_i d\eta_i = 0,$$

car  $f$  est une fonction régulière à support compact, et que son support ne touche pas les bords du domaine d'intégration en  $(\tau_i, \eta_i)$ . Et de plus, on a pour la premier terme de  $\mathcal{Z}\mathcal{Z}^\rho(\tau_i, \eta_i)$

$$\frac{\partial}{\partial\mu} \left( \frac{Y_{t_0-t-\alpha}}{4\pi\alpha} e^{-\rho\alpha/2} \right) = -\frac{\partial\alpha}{\partial\mu} \left( \left( \frac{1}{4\pi\alpha^2} + \frac{\rho}{8\pi\alpha} \right) Y(t_0 - t - \alpha) + \frac{\delta(t_0 - t - \alpha)}{4\pi\alpha} \right) e^{-\rho\alpha/2}.$$

La fonction  $I_1(z)$  étant équivalente au voisinage de  $z = 0$  à  $z/2$  [5] on a ainsi

$$\lim_{s \rightarrow t_0-t-\alpha} \frac{I_1 \left( \sqrt{(t_0 - t - s)^2 - \alpha^2} \rho/2 \right)}{\sqrt{(t_0 - t - s)^2 - \alpha^2}} = \frac{\rho}{4},$$

d'où, comme  $\partial_z I_1(z) = I_0(z) - I_1(z)/z$ , on obtient enfin pour le second terme de  $\mathcal{Z}\mathcal{Z}^\rho(\tau_i, \eta_i)$

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left( \int_0^{t_0-t-\alpha} \frac{\rho Y(s) e^{-\rho(t_0-t-s)/2}}{8\pi \sqrt{(t_0-t-s)^2 - \alpha^2}} I_1 \left( \sqrt{(t_0-t-s)^2 - \alpha^2} \rho/2 \right) ds \right) \\ &= -\frac{\partial\alpha}{\partial\mu} \left[ \frac{\rho^2 e^{-\alpha\rho/2}}{32\pi} Y(t_0 - t - \alpha) \right. \\ &+ \int_0^{t_0-t-\alpha} \frac{\rho^2 \alpha Y(s) e^{-\rho(t_0-t-s)/2}}{16\pi ((t_0-t-s)^2 - \alpha^2)} I_0 \left( \sqrt{(t_0-t-s)^2 - \alpha^2} \rho/2 \right) ds \\ &\left. - \int_0^{t_0-t-\alpha} \frac{\rho \alpha Y(s) e^{-\rho(t_0-t-s)/2}}{4\pi ((t_0-t-s)^2 - \alpha^2)^{3/2}} I_1 \left( \sqrt{(t_0-t-s)^2 - \alpha^2} \rho/2 \right) ds \right]. \end{aligned}$$

2. On utilise i. pour calculer  $\partial_\mu (\partial_\nu f)$ , puis on évalue séparément les 4 termes de la forme

$$\int \mathcal{A}_k(t, \tau_i, \eta_i) \frac{\partial}{\partial\nu} f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i.$$

(a)  $\mathcal{A}_1 = \frac{\partial\alpha}{\partial\mu} \frac{\delta(t_0 - t - \alpha)}{4\pi\alpha} e^{-\rho\alpha/2}$  : comme dans la démonstration du 2. du lemme 1.2.34, on écrit

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial\alpha}{\partial\mu} \frac{\delta(t_0 - t - \alpha) e^{-\alpha\rho/2}}{4\pi\alpha} \frac{\partial}{\partial\nu} (f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i)) dt = \frac{\partial}{\partial\nu} \left( \frac{\partial\alpha}{\partial\mu} \frac{e^{-\alpha\rho/2}}{4\pi\alpha} f(t_0 - \alpha, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) \right) \\ &+ \int \left[ \frac{\delta(t_0 - t - \alpha) e^{-\alpha\rho/2}}{4\pi\alpha} \frac{\partial\alpha}{\partial\mu} \frac{\partial\alpha}{\partial\nu} \frac{\partial}{\partial t} f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) \right. \\ &\left. - \frac{\partial}{\partial\nu} \left( \frac{\partial\alpha}{\partial\mu} \frac{e^{-\alpha\rho/2}}{4\pi\alpha} \right) \delta(t_0 - t - \alpha) f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) \right] dt. \end{aligned}$$

Enfin, comme  $f$  est une fonction régulière à support compact, et que  $X_0 \notin \text{Supp} f$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \frac{e^{-\alpha \rho / 2}}{4\pi \alpha} f(t_0 - \alpha, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) \right) d\tau_i d\sigma_i d\eta_i = 0.$$

Les 3 cas suivants de  $\mathcal{A}_k$  vérifient la relation

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial \nu} (\mathcal{A}_k(t, \tau_i, \eta_i) f(t_0 - \alpha, \tau_i, \sigma_i, \eta_i)) d\tau_i d\sigma_i d\eta_i = 0 ;$$

ils sont alors factorisés sous la forme

$$\mathcal{A}_k = \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \mathcal{B}_k,$$

ces fonctions étant dérivables (au sens des distributions), on obtient ainsi

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3} \mathcal{A}_k(t, \tau_i, \eta_i) \frac{\partial}{\partial \nu} f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i \\ &= - \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3} \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{B}_k(t, \tau_i, \eta_i) f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \nu \mu} \mathcal{B}_k(t, \tau_i, \eta_i) f(t, \tau_i, \sigma_i, \eta_i) dt d\tau_i d\sigma_i d\eta_i. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Nous allons donc calculer leurs dérivées (au sens des distributions).

$$(b) \mathcal{B}_2 = \left( \frac{2 + \alpha \rho}{8\pi \alpha^2} + \frac{\rho^2}{32\pi} \right) Y(t_0 - t - \alpha) e^{-\rho \alpha / 2} :$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{B}_2(t, \tau_i, \eta_i) &= - \left( \frac{8 + 4\rho \alpha + \rho^2 \alpha^2}{32\pi \alpha^2} \delta(t_0 - t - \alpha) e^{-\rho \alpha / 2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{32 + 16\alpha \rho + 8\alpha^2 \rho^2 + \rho^3 \alpha^3}{64\pi \alpha^3} Y(t_0 - t - \alpha) e^{-\rho \alpha / 2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \nu}. \end{aligned}$$

$$(c) \mathcal{B}_3 = - \int_0^{t_0 - t - \alpha} \frac{\rho^2 \alpha Y(s) e^{-\rho(t_0 - t - s)/2}}{16\pi ((t_0 - t - s)^2 - \alpha^2)} I_0 \left( \sqrt{(t_0 - t - s)^2 - \alpha^2} \rho / 2 \right) ds$$

$$(d) \mathcal{B}_4 = \int_0^{t_0 - t - \alpha} \frac{\rho \alpha Y(s) e^{-\rho(t_0 - t - s)/2}}{4\pi ((t_0 - t - s)^2 - \alpha^2)^{3/2}} I_1 \left( \sqrt{(t_0 - t - s)^2 - \alpha^2} \rho / 2 \right) ds$$

Pour  $\mathcal{B}_3$  et  $\mathcal{B}_4$ , le calcul de  $\partial_\nu \mathcal{B}_k$  donne

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{B}_k = - \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} \lim_{s \rightarrow t_0 - t - \alpha} b_k(s) + \int_0^{t_0 - t - \alpha} \frac{\partial}{\partial \nu} b_k(s) ds,$$

où  $\mathcal{B}_k = \int_0^{t_0 - t - \alpha} b_k(s) ds$ . Or  $b_3$  et  $b_4$  n'admettent pas de limite finie pour  $s \rightarrow t_0 - t - \alpha$ , ils doivent alors être traités ensembles. On remarque tout d'abord que l'intégrande de la somme  $\mathcal{B}_3 + \mathcal{B}_4$  peut se mettre sous la forme  $b_{34} :=$

$$\frac{\rho^3 \alpha Y(s) e^{-\rho(t_0 - t - s)/2}}{32\pi \sqrt{(t_0 - t - s)^2 - \alpha^2}} \left[ \frac{I_0 \left( \sqrt{(t_0 - t - s)^2 - \alpha^2} \rho / 2 \right)}{\sqrt{(t_0 - t - s)^2 - \alpha^2} \rho / 2} - \frac{2I_1 \left( \sqrt{(t_0 - t - s)^2 - \alpha^2} \rho / 2 \right)}{\left( \sqrt{(t_0 - t - s)^2 - \alpha^2} \rho / 2 \right)^2} \right],$$

dont il va falloir évaluer la limite pour  $s \rightarrow t_0 - t - \alpha$ . La fonction de Bessel  $I_1$  vérifie par définition  $z^2 \partial_z^2 I_1(z) + z \partial_z I_1(z) - (z^2 + 1) I_1(z) = 0$  et  $\partial_z I_1(z) = I_0(z) - I_1(z)/z$  donc

$$-\frac{I_0(z)}{z} + \frac{2I_1(z)}{z^2} = \partial_z^2 I_1(z) - I_1(z).$$

En utilisant le développement en série de  $I_1(z)$  autour de  $z = 0$  [5] on a  $I_1(z) \sim_0 z/2 + z^3/16$ , d'où  $\frac{I_0(z)}{z} - \frac{2I_1(z)}{z^2} \sim_0 -z/8$ ; donc finalement

$$\lim_{s \rightarrow t_0 - t - \alpha} b_{34} = \frac{\rho^4 \alpha Y(t_0 - t - \alpha) e^{-\rho \alpha / 2}}{512 \pi}. \quad (\text{B.16})$$

En outre,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} b_{34} = \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} \left\{ -\frac{\rho^2 (3\alpha^2 + (t_0 - t - s)^2) Y(s) e^{-(t_0 - t - s)\rho/2}}{4\pi ((t_0 - t - s)^2 - \alpha^2)^2} I_0\left(\sqrt{(t_0 - t - s)^2 - \alpha^2} \rho/2\right) \right. \\ + \frac{\rho ((t_0 - t - s)^2 + \alpha^2) Y(s) e^{-(t_0 - t - s)\rho/2}}{4\pi ((t_0 - t - s)^2 - \alpha^2)^{5/2}} I_1\left(\sqrt{(t_0 - t - s)^2 - \alpha^2} \rho/2\right) \\ \left. + \frac{\rho^3 \alpha^2 Y(s) e^{-(t_0 - t - s)\rho/2}}{32\pi ((t_0 - t - s)^2 - \alpha^2)^{3/2}} I_1\left(\sqrt{(t_0 - t - s)^2 - \alpha^2} \rho/2\right) \right\}. \end{aligned}$$

Le résultat s'obtient finalement en recombinaison à partir de (B.15).

■

**Lemme B.2.11** Avec les notations du lemme B.2.10, on a

1. pour tout  $\mu \in \{\tau, \eta\}$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_0] = Y(t_0 - t - \alpha) \mathcal{J},$$

avec  $\mathcal{J}$  définie par

$$\mathcal{J} = \frac{\rho^2 \alpha e^{-\rho(t_0 - t)/2}}{16\pi ((t_0 - t)^2 - \alpha^2)} \left[ I_0\left(\sqrt{(t_0 - t)^2 - \alpha^2} \rho/2\right) - 2 \frac{I_1\left(\sqrt{(t_0 - t)^2 - \alpha^2} \rho/2\right)}{\sqrt{(t_0 - t)^2 - \alpha^2} \rho/2} \right],$$

2. et pour tout  $(\mu, \nu) \in \{\tau, \eta\}^2$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^{t_0 - t - \alpha} \{\mathcal{I}_0^{\mu\nu} - \mathcal{I}_1^{\mu\nu}\} Y(s) e^{-\rho(t_0 - t - s)/2} ds \right] = -Y(t_0 - t - \alpha) \mathcal{I}_{\mu\nu},$$

avec pour tout  $(\mu, \nu)$  la fonction  $\mathcal{I}_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \nu \mu} \mathcal{J} + \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} \frac{\rho^3 e^{-\rho(t_0 - t)/2}}{32\pi ((t_0 - t)^2 - \alpha^2)^{3/2}} \left[ 4(3\alpha^2 + (t_0 - t)^2) \frac{I_0\left(\sqrt{(t_0 - t)^2 - \alpha^2} \rho/2\right)}{\sqrt{(t_0 - t)^2 - \alpha^2} \rho/2} \right. \\ \left. - 2(\alpha^2 + (t_0 - t)^2) \frac{I_1\left(\sqrt{(t_0 - t)^2 - \alpha^2} \rho/2\right)}{\left(\sqrt{(t_0 - t)^2 - \alpha^2} \rho/2\right)^2} - \alpha^2 I_1\left(\sqrt{(t_0 - t)^2 - \alpha^2} \rho/2\right) \right] \end{aligned}$$

**Preuve.** Il suffit de remarquer que pour tout fonction  $f$  régulière on a

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t_0-t-\alpha} Y(s)f(-t-s)ds = -Y(t_0-t-\alpha)f(-t).$$

1. Comme dans la démonstration du 2. du lemme B.2.10 soit  $\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_0 = \int_0^{t_0-t-\alpha} j(s)Y(s)ds$ , il vient donc

$$\frac{\partial}{\partial t} [\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_0] = -Y(t_0-t-\alpha) \lim_{s \rightarrow 0} j(s).$$

2. De même

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^{t_0-t-\alpha} \{\mathcal{I}_0^{\mu\nu} - \mathcal{I}_1^{\mu\nu}\} Y(s) e^{-\rho(t_0-t-s)/2} ds \right] = -Y(t_0-t-\alpha) \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \{\mathcal{I}_0^{\mu\nu} - \mathcal{I}_1^{\mu\nu}\} e^{-\rho(t_0-t-s)/2} \right].$$

■

**Remarque B.2.12** Comme pour les lemmes 1.2.32, 1.2.33 et 1.2.34, toutes les dérivées successives de  $\alpha(\tau_i, \eta_i)$  présentent dans les lemmes B.2.7, B.2.8, B.2.10 et B.2.11 sont définies car on va avoir  $(\tau_i, \eta_i, \sigma_i) \in \text{Supp}f_{E,H}^\varepsilon$  et que  $\text{Supp}f_{E,H}^\varepsilon \cap \mathcal{F}_i = \emptyset$ , donc  $\alpha$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\text{Supp}f_{E,H}^\varepsilon$ .

### Ecriture de la formule intégrale complète

Comme dans le chapitre 1 nous allons récrire la formule intégrale simplifiée dans le nouveau système de coordonnées à partir des expressions des différents termes obtenues précédemment, ainsi que des lemmes B.2.7, B.2.8 et B.2.10. Pour cela nous introduisons d'abord les notations suivantes analogues à celles de la définition 1.2.36

**Définition B.2.13** Pour tout  $\lambda$  strictement positif assez petit, on introduit les quantités :

1. les fonctions  $\mathcal{K}_\mu^1$  et  $\mathcal{K}_{\mu,\nu}^2$  de la définition 1.2.36 définies sur  $] -d_i + \lambda, +\infty[ \times \mathbb{R}$  à valeurs réelles, indicées par  $(\mu, \nu) \in \{\tau, \eta\}^2$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\mu^1 & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu}, \\ \mathcal{K}_{\mu,\nu}^2 & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{\partial^2 \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \nu \mu}, \end{aligned}$$

2.  $\mathcal{R}_\mu^{\rho 1}$ ,  $\mathcal{R}_{\mu,\nu}^{\rho 1,1}$ ,  $\mathcal{R}_{\mu,\nu}^{\rho 2}$  : opérateurs indicés par  $(\mu, \nu) \in \{\tau, \eta\}^2$ , définis sur  $] -d_i + \lambda, +\infty[ \times \mathbb{R}$  de domaine  $\mathbb{C}^6$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\mu^{\rho 1} & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{e^{-\rho\alpha/2}}{4\pi} \mathcal{K}_\mu^1(\tau_i, \eta_i) \vec{\mu} \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{R}_{\mu,\nu}^{\rho 1,1} & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{e^{-\rho\alpha/2}}{4\pi} \mathcal{K}_\mu^1(\tau_i, \eta_i) \mathcal{K}_\nu^1(\tau_i, \eta_i) \vec{\mu} \times \vec{\nu} \times \mathbb{I}^\rho, \\ \mathcal{R}_{\mu,\nu}^{\rho 2} & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{e^{-\rho\alpha/2}}{4\pi} \mathcal{K}_{\mu,\nu}^2(\tau_i, \eta_i) \vec{\mu} \times \vec{\nu} \times \mathbb{I}^\rho, \end{aligned}$$

$$\text{avec } \vec{\mu} \quad (\text{resp. } \vec{\nu}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{r}_i}{1-p_i^2} \text{ si } \mu = \tau \quad (\text{resp. } \nu = \tau), \\ \mathbf{n}_i \text{ si } \mu = \eta \quad (\text{resp. } \nu = \eta). \end{cases}$$

3.  $\mathcal{R}\mathcal{J}^\rho_\mu$  et  $\mathcal{R}\mathcal{I}^\rho_{\mu,\nu}$  : opérateurs indicés par  $(\mu, \nu) \in \{\tau, \eta\}^2$ , définis sur  $]-d_i + \lambda, +\infty[ \times \mathbb{R}$  de domaine  $\mathbb{C}^6$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\mathcal{J}^\rho_\mu & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \mathcal{J} \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \mu} \vec{\mu} \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{R}\mathcal{I}^\rho_{\mu,\nu} & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \mathcal{I}_{\mu\nu} \vec{\mu} \times \vec{\nu} \times \mathbb{I}^\rho,\end{aligned}$$

où  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  sont les fonctions définies dans le lemme B.2.11.

4.  $\mathcal{R}\rho^\rho_{\sigma,\sigma}$  et  $\mathcal{R}\mathcal{J}^\rho_{\sigma,\sigma}$  : opérateurs définis sur  $(]-d_i + \lambda, +\infty[ \times \mathbb{R}) \times \mathbb{C}^6$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\rho^\rho_{\sigma,\sigma} & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{e^{-\rho\alpha/2}}{4\pi(1-p_i^2)} \mathcal{K}_\tau^1(\tau_i, \eta_i) \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \mathbb{I}^\rho, \\ \mathcal{R}\mathcal{J}^\rho_{\sigma,\sigma} & : (\tau_i, \eta_i) \mapsto \frac{\mathcal{J}}{(1-p_i^2)} \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \tau} \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \frac{\mathbf{s}_i}{|\mathbf{s}_i|} \times \mathbb{I}^\rho\end{aligned}$$

Par utilisation des lemmes B.2.7 et B.2.10, toutes les dérivations spatiales sont remplacées par des combinaisons de termes, donnés par les définitions précédentes, et de dérivées en  $t$ . Il est alors possible de permuter l'intégration en  $J dtd\tau d\sigma d\eta$  et la convolution par  $\varphi_i^\varepsilon$ . Finalement, par passage à la limite en  $\varepsilon \rightarrow 0$  et par la proposition 1.2.14, on trouve une écriture simplifiée du terme  $(\tilde{E}_i, \tilde{H}_i)$  de la formule intégrale exacte.

Comme pour le lemme B.2.10 et sa démonstration nous omettons la dépendance en  $(\tau_i, \eta_i)$  de la fonction  $\alpha$  et des fonctions introduites dans la définition B.2.13 afin d'alléger les écritures de (B.17).

**Proposition B.2.14** *En utilisant les notations de la définition B.2.13, le terme  $(\tilde{E}_i, \tilde{H}_i)$  de la décomposition (B.11), dans le cas  $\mathbf{t}_i \neq \pm \mathbf{n}_i$ , est donné, pour tout  $X$  en dehors du polyèdre de surface admissible  $\mathcal{F}$ , par :*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \tilde{E}_i \\ \tilde{H}_i \end{pmatrix} (t_0, X_0) & = \int \frac{1}{\alpha} \left[ \left\{ \sum_{\mu \in \{\tau, \eta\}} \mathcal{R}\rho^\rho_\mu + \sum_{(\mu, \nu) \in \{\tau, \eta\}^2} \mathcal{R}\rho^{\rho,1}_{\mu, \nu} \right\} \mathbb{D}_t \right. \\ & + \left\{ \sum_{\mu \in \{\tau, \eta\}} \left[ \frac{1}{\alpha} + \frac{\rho}{2\alpha} + \frac{\rho^2 \alpha}{8} \right] \mathcal{R}\rho^\rho_\mu + \sum_{(\mu, \nu) \in \{\tau, \eta\}^2} \left( -\mathcal{R}\rho^2_{\mu, \nu} + \frac{(4 + \rho\alpha)^2}{8\alpha} \mathcal{R}\rho^{\rho,1}_{\mu, \nu} \right) \right\} \\ & + \left\{ \sum_{(\mu, \nu) \in \{\tau, \eta\}^2} \left( \frac{256 + 128\alpha\rho + 64\alpha^2\rho^2 + 8\alpha^3\rho^3 + \alpha^4\rho^4}{128\alpha^2} \mathcal{R}\rho^{\rho,1}_{\mu, \nu} - \left[ \frac{1}{\alpha} + \frac{\rho}{2\alpha} + \frac{\rho^2 \alpha}{8} \right] \mathcal{R}\rho^2_{\mu, \nu} \right) \right\} \mathbb{I}_t \\ & - \frac{\mathcal{R}\rho^\rho_{\sigma, \sigma}}{(|X_i - X_0| + \tau_i)} - \left\{ \left[ \frac{1}{\alpha} + \frac{\rho}{2\alpha} + \frac{\rho^2 \alpha}{8} \right] \frac{\mathcal{R}\rho^\rho_{\sigma, \sigma}}{|X_i - X_0| + \tau_i} + \frac{\alpha \mathcal{R}\mathcal{J}^\rho_{\sigma, \sigma}}{(|X_i - X_0| + \tau_i)} \right\} \mathbb{I}_t \\ & + \left. \left\{ \sum_{\mu \in \{\tau, \eta\}} \alpha \mathcal{R}\mathcal{J}^\rho_\mu - \sum_{(\mu, \nu) \in \{\tau, \eta\}^2} \alpha \mathcal{R}\mathcal{I}^\rho_{\mu, \nu} \right\} \mathbb{I}_t \right] \begin{pmatrix} (\mathbf{n}_i \times H) \delta_{\mathcal{F}_i} \\ -(\mathbf{n}_i \times E) \delta_{\mathcal{F}_i} \end{pmatrix} (t, X) J dtd\tau_i d\sigma_i d\eta_i,\end{aligned}\tag{B.17}$$

où  $\mathbb{D}_t$  et  $\mathbb{I}_t$  sont respectivement les opérateurs de dérivation et d'intégration en  $t$ .

**Remarque B.2.15** *Les termes généraux de la formule obtenue dans le cas du milieu homogène à pertes (B.17) tendent continûment vers ceux de la formule obtenue dans le cadre du milieu homogène sans perte (1.30) pour  $\rho \rightarrow 0$ .*

### Approximation de la formule intégrale

On peut alors proposer, sur le même principe que dans le chapitre 1, une formule intégrale approchée

**Proposition B.2.16** *Sous l'hypothèse  $\mathbf{t}_i \neq \pm \mathbf{n}_i$ , le terme  $(\tilde{E}_i, \tilde{H}_i)$  de la décomposition (B.11) vérifie, pour tout point  $(t_0, X_0) \in \mathbb{R}^+ \times \bar{\mathcal{V}}^c$ , vérifie*

$$\begin{aligned}
\left( \begin{array}{c} \tilde{E}_i \\ \tilde{H}_i \end{array} \right) (t_0, X_0) &= \int_{\mathcal{F}_i} \frac{e^{-\rho d_i/2}}{4\pi d_i} \left[ \left\{ \mathbf{t}_i^0 \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{t}_i^0 \times \mathbf{t}_i^0 \times \mathbb{I}^\rho \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times \partial_t H \\ -(\mathbf{n}_i \times \partial_t E) \end{pmatrix} (t_0 - d_i, \cdot) \right. \\
&+ \frac{1}{d_i} \left\{ C^\rho \mathbf{t}_i^0 \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} + (1 + 2C^\rho) \mathbf{t}_i^0 \times \mathbf{t}_i^0 \times \mathbb{I}^\rho - 2C^\rho \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}^\rho \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times H \\ -(\mathbf{n}_i \times E) \end{pmatrix} (t_0 - d_i, \cdot) \\
&+ \frac{1}{d_i^2} \int_0^{t_0 - d_i} \left\{ \left( 2C^\rho + \frac{\rho^2 d_i^2}{8} (C^\rho + 1) \right) \mathbf{t}_i^0 \times \mathbf{t}_i^0 \times \mathbb{I}^\rho - 2C^\rho \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i \times \mathbb{I}^\rho \right. \\
&+ \frac{d_i^2 \rho^2 e^{-\rho(T-d)/2}}{16\pi (T^2/d^2 - 1)} \left[ I_0 \left( \sqrt{T^2 - d^2} \rho/2 \right) - 2 \frac{I_1 \left( \sqrt{T^2 - d^2} \rho/2 \right)}{\sqrt{T^2 - d^2} \rho/2} \right] \mathbf{t}_i^0 \times \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_3 \\ \mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} \\
&\frac{d_i \rho e^{-\rho(T-d)/2}}{32\pi (T^2/d^2 - 1)^2} \left[ [6\rho d_i (T^2/d^2 - 1) + 32\rho d_i] I_0 \left( \sqrt{T^2 - d^2} \rho/2 \right) \right. \\
&\left. \left. + [16 + \rho^2 d^2 (T^2/d^2 - 1)] \frac{I_1 \left( \sqrt{T^2 - d^2} \rho/2 \right)}{\sqrt{T^2 - d^2} \rho/2} \right] \mathbf{t}_i^0 \times \mathbf{t}_i^0 \times \mathbb{I}^\rho \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i \times H \\ -(\mathbf{n}_i \times E) \end{pmatrix} (s, \cdot) ds \Bigg] dS_i \\
&+ O \left( \frac{\delta_i}{d_i} \right), \tag{B.18}
\end{aligned}$$

où  $C^\rho = 1 + \rho d/2 + \rho^2 d^2/8$ ,  $T = t_0 - t$ ,  $dS_i$  est l'élément de surface de  $\mathcal{F}_i$ ,  $\mathbf{n}_i$  la normale unitaire à  $\mathcal{F}_i$  sortant de  $\mathcal{V}$ ,  $d_i$  est la distance d'un point  $X_i$  quelconque de  $\mathcal{F}_i$  à  $X$ ,  $\mathbf{t}_i^0 = (d_i)^{-1} \overrightarrow{X_i X}$ , et  $\delta_i$  est le diamètre de  $\mathcal{F}_i$ .

**Preuve.** L'établissement de la formule (B.18) est complètement analogue à celui de (FormuleIntegraleOrdre0nonperp) : on effectue un développement limités sous l'intégrale pour  $\tau_i/d_i \ll 1$  à l'ordre 0 ; les principaux résultats de calculs étant regroupés dans le lemme B.2.18. ■

**Remarque B.2.17** *La formule "à pertes" (B.18) semble bien tendre continûment vers la formule "sans pertes" (1.32) lorsque  $\rho \rightarrow 0$ .*

**Lemme B.2.18** *Lorsque  $\eta_i \rightarrow 0$ , et si l'on ne garde que les termes d'ordre 0 en  $\tau_i/d_i$  dans les expressions précédentes, alors on obtient les coefficients suivants :*

1.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

	$\mu = \tau_i$	$\mu = \eta_i$
$\frac{e^{-\rho\alpha(\tau_i, \eta_i)/2}}{\alpha(\tau_i, \eta_i)^n} \mathcal{K}_\mu^1(\tau_i, \eta_i) \approx$	$\frac{1 - p_i^2}{d_i^n} e^{-\rho d_i/2}$	$\frac{p_i}{d_i^n} e^{-\rho d_i/2}$

2.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$\frac{e^{-\rho\alpha(\tau_i, \eta_i)/2}}{\alpha(\tau_i, \eta_i)^n} \mathcal{K}_\mu^1(\tau_i, \eta_i) \mathcal{K}_\nu^1(\tau_i, \eta_i) \approx$	$\mu = \tau_i$	$\mu = \eta_i$
$\nu = \tau_i$	$\frac{(1 - p_i^2)^2}{d_i^n} e^{-\rho d_i/2}$	$\frac{p_i(1 - p_i^2)}{d_i^n} e^{-\rho d_i/2}$
$\nu = \eta_i$	$\frac{p_i(1 - p_i^2)}{d_i^n} e^{-\rho d_i/2}$	$\frac{p_i^2}{d_i^n} e^{-\rho d_i/2}$

3.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$\frac{e^{-\rho\alpha(\tau_i, \eta_i)/2}}{\alpha(\tau_i, \eta_i)^n} \mathcal{K}_{\mu, \nu}^2(\tau_i, \eta_i) \approx$	$\mu = \tau_i$	$\mu = \eta_i$
$\nu = \tau_i$	$\frac{1 - p_i^2}{d_i^{n+1}} e^{-\rho d_i/2} - \frac{(1 - p_i^2)^2}{d_i^{n+1}} e^{-\rho d_i/2}$	$\frac{-p_i(1 - p_i^2)}{d_i^{n+1}} e^{-\rho d_i/2}$
$\nu = \eta_i$	$\frac{-p_i(1 - p_i^2)}{d_i^{n+1}} e^{-\rho d_i/2}$	$\frac{1 - p_i^2}{d_i^{n+1}} e^{-\rho d_i/2}$

4. en posant  $T = t_0 - t$

$$\mathcal{J} \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \tau} \approx \frac{\rho^2 d(1 - p_i^2) e^{-\rho T/2}}{16\pi (T^2 - d^2)} \left[ I_0 \left( \sqrt{T^2 - d^2} \rho/2 \right) - 2 \frac{I_1 \left( \sqrt{T^2 - d^2} \rho/2 \right)}{\sqrt{T^2 - d^2} \rho/2} \right],$$

$$\mathcal{J} \frac{\partial \alpha(\tau_i, \eta_i)}{\partial \eta} \approx \frac{\rho^2 d p_i e^{-\rho T/2}}{16\pi (T^2 - d^2)} \left[ I_0 \left( \sqrt{T^2 - d^2} \rho/2 \right) - 2 \frac{I_1 \left( \sqrt{T^2 - d^2} \rho/2 \right)}{\sqrt{T^2 - d^2} \rho/2} \right],$$

5. enfin

$$\mathcal{I}_{\tau\tau} \approx \frac{\rho(1 - p_i^2) e^{-\rho T/2}}{32\pi (T^2 - d^2)^3} \left\{ \begin{aligned} & [6(1 - p_i^2)\rho(T^2 - d^2)^2 + 32\rho d^2(1 - p_i^2)(T^2 - d^2) + 2\rho(T^2 - d^2)^2] I_0 \left( \sqrt{T^2 - d^2} \rho/2 \right) \\ & + [16d^2 \sqrt{T^2 - d^2}(1 - p_i)^2 + (1 - p_i^2)d^2 \rho^2 (T^2 - d^2)^{3/2} + 8(T^2 - d^2)^{3/2}] I_1 \left( \sqrt{T^2 - d^2} \rho/2 \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\mathcal{I}_{\tau\eta} \approx \frac{\rho p_i(1 - p_i^2) e^{-\rho T/2}}{32\pi (T^2 - d^2)^3} \left\{ \begin{aligned} & [6\rho(T^2 - d^2)^2 + 32\rho d^2 (T^2 - d^2)] I_0 \left( \sqrt{T^2 - d^2} \rho/2 \right) \\ & + [16d^2 \sqrt{T^2 - d^2} + \rho^2 d^2 (T^2 - d^2)^{3/2}] I_1 \left( \sqrt{T^2 - d^2} \rho/2 \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\mathcal{I}_{\eta\eta} \approx \frac{\rho e^{-\rho T/2}}{32\pi (T^2 - d^2)^3} \left\{ \begin{aligned} & [6\rho p_i^2 (T^2 - d^2)^2 + 32\rho d^2 p_i^2 (T^2 - d^2) + 2\rho (T^2 - d^2)^2] I_0 \left( \sqrt{T^2 - d^2} \rho/2 \right) \\ & + [16p_i^2 d^2 \sqrt{T^2 - d^2} + \rho^2 d^2 p_i^2 (T^2 - d^2)^{3/2} + 8(T^2 - d^2)^{3/2}] I_1 \left( \sqrt{T^2 - d^2} \rho/2 \right) \end{aligned} \right\}$$

# Bibliographie

- [1] T. Abboud and T. Sayah. Couplage equations de maxwell-potentiels retardés pour les milieux hétérogènes. Technical Report 372, CMAP, 1997.
- [2] T. Abboud and T. Sayah. Couplage equations de maxwell-potentiels retardés pour les milieux hétérogènes (suite). Technical Report 382, CMAP, 1998.
- [3] T. Abboud and T. Sayah. Potentiels retardés pour les obstacles homogènes par morceaux. Technical Report 390, CMAP, 1998.
- [4] T. Abboud and T. Sayah. Potentiels retardés pour les équations de maxwell avec condition d'impédance généralisée. Technical Report 387, CMAP, 1998.
- [5] M. Abramovitch and I.A. Segun. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, 1964.
- [6] H. Ammari, M.S. Vogelius, and D. Volkov. Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of inhomogeneities of small diameter ii. the full maxwell equations. *J. Math. Pures Appl.*, 80(8) :769–814, 2001.
- [7] X. Antoine. *Conditions de Radiation sur le bord*. PhD thesis, Université de Pau et des pays de l'Adour, 1997.
- [8] F. Assous, P. Degond, E. Heintzé, P.A. Raviart, and J. Segré. On a finite-element method for solving the three-dimensional maxwell's equations. *Journal of Computational Physics*, 109(2) :222–237, 1993.
- [9] F.V. Atkinson. On sommerfeld's radiation condition. *Philosophical Magazine Series*, 40(7) :645–651, 1949.
- [10] A. Bamberger and T. Ha-Duong. Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardés d'une onde acoustique. *Mathematical methods in the applied sciences*, 8(3) :405–435, 1986.
- [11] C. Bardos and J. Rauch. Maximal positive boundary value problems as limits of singular perturbation problems. *Transaction of the American Mathematical Society*, 270(2) :377–408, April 1982.
- [12] M.J. Barth, R.R. McLeod, and R.W. Ziolkowski. A near and far-field projection algorithm for finite-difference time-domain codes. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 6(1) :5–18, 1992.
- [13] A. Bendali. Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques. Thèse de doctorat d'état, 1984.

- [14] J.P. Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114 :185–200, 1994.
- [15] J.P. Berenger. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 127 :363–379, 1996.
- [16] P. Bernardi, M. Cavagnaro, S. Pisa, and E. Piuzzi. Evaluation of human exposure in the vicinity of a base-station antenna using the multiple region / ftd hybrid method. In *IEEE Microwave symposium digest*, volume 3, pages 1747–1750, February 2002.
- [17] P. Bonnet and X. Ferrières. Numerical modeling of scattering problems using a time domain finite volume method. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 11 :1165–1189, 1997.
- [18] O. Bruno and F. Reitich. Calculation of electromagnetic scattering via boundary variations and analytic continuation. *Applied computation electromagnetic society journal*, 11(1) :17–31, 1996.
- [19] W.C. Chew and W.H. Weedon. 3-d perfectly matched medium from modified maxwell's equations with stretched coordinates. *Microwave and Optical Technology Letters*, 1994.
- [20] G. Cohen. *Higher-order numerical methods for transient wave equations*. Springer, 2001.
- [21] F. Collino and B. Després. Integral equations via saddle point problems for time-harmonic maxwell's equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 150(1) :157–192, 2003.
- [22] F. Collino and P. Monk. The perfectly matched layer in curvilinear coordinates. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 19(6) :2061–2090, 1998.
- [23] I.J. Craddock and C.J. Railton. Application of the ftd method and a full time-domain near-field transform to the problem of radiation from a pcb. *Electronics Letters*, 29(23) :2017–2018, November 1993.
- [24] B. Dah. *Sur la modélisation de milieux fictifs absorbants de type couches de Bérenger*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2001.
- [25] E. Darrigrand. *Couplage méthodes multipôles - discrétisation microlocale pour les équations intégrales de l'électromagnétisme*. PhD thesis, Université de Bordeaux I, 2002.
- [26] E. Darve. Fast-multipole method : a mathematical study. *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences Série I*, 325 :1037–1042, 1997.
- [27] E. Darve. *Méthode multipôles rapides : résolution des équations de Maxwell par formulations intégrales*. PhD thesis, Université de Paris 6, 1999.
- [28] E. Darve. Fast-multipole method : Numerical implementation. *Journal of Computational Physics*, 160(1) :195–240, May 2000.
- [29] J. Demoerlose and G.S. Smith. Near-field to near-field transformation for use with the ftd method and application to pulsed antenna problems. *Electronics Letters*, 30(16) :1262–1264, 1991.

- [30] B. Desprès. Quadratic functional and integral equations for harmonic wave problems in exterior domains. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 31(6) :679–732, 1997.
- [31] E. Durand. Identités conduisant aux solutions des équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants. *Bulletin de la S.M.F.*, 82 :361–411, 1954.
- [32] X. Ferrières, J.-P. Parmentier, S. Bertuol, and A. Ruddle. Application of an hybride finite difference/finite volume method to solve an automative emc problem. *IEEE Transactions on EMC*, 46 :624–634, 2005.
- [33] L. Fezoui, S. Lanteri, S. Lohrengel, and S. Piperno. Convergence and stability of a discontinuous galerkin time-domain method for the 3d heterogeneous maxwell equations on unstructured meshes. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39(6) :1149–1176, 2005.
- [34] S. D. Gedney. An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for the truncation of fdtd lattices. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 44(12) :1630–1639, 1996.
- [35] C. Geuzaine, O. Bruno, and F. Reitich. On the  $o(1)$  solution of multiple-scattering problems. *IEEE transactions on magnetics*, 41(5) :1488–1491, 2005.
- [36] P. Helluy. *Résolution numérique des équations de Maxwell harmoniques par une méthode d'éléments finis discontinus*. PhD thesis, Ecole nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace, Toulouse, 1994.
- [37] R. Holland, V.P. Cable, and L.C. Wilson. Finite-volume time-domain (fvtd) techniques for em scattering. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 33 :281–294, 1991.
- [38] J. M. Johnson and Y. Rahmat-Samii. Multiple region fdtd (mr/fdtd) and its application to microwave analysis and modeling. In *IEEE Microwave symposium digest*, volume 3, pages 1475–1478, June 1996.
- [39] M. Kragalott, M.S. Kluskens, and W.P. Pala. Time-domain fields exterior to a two-dimensional fdtd space. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 45(11) :1655–1663, November 1997.
- [40] V. Lange. *Equations intégrales espace-temps pour les équations de Maxwell. Calcul du champs diffracté par un obstacle dissipatif*. PhD thesis, Université de Bordeaux I, 1995.
- [41] M. Lassas, J. Liukkonen, and E. Somersalo. Complex riemannian metric and absorbing boundary conditions. *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, 80(7) :739–768, 2001.
- [42] M. Lassas and E. Somersalo. On the existence and convergence of the solution of pml equations. *Computing*, 60(3) :229–241, 1998.
- [43] M. Lassas and E. Somersalo. Analysis of the pml equations in general convex geometry. *Proceedings Section A : Mathematics - Royal Society of Edinburgh*, 131(5) :1183–1207, 2001.
- [44] D.P. Levadoux. Proposition de préconditionneurs pseudo-différentiels pour l'équation cfie de l'électromagnétisme. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39(1) :147–155, 2005.
- [45] S. Lindenmeier, L. Pierantoni, and P. Russer. Hybrid space discretizing integral equation methods for numerical modeling of transient interference. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 41(4) :425–430, November 1999.

- [46] M. Lu, M. Lv, A. A. Ergin, B. Shanker, and E. Michielssen. Multilevel plane wave time domain-based global boundary kernels for two-dimensional finite difference time domain simulations. *Radio Science*, 39(4) :RS4007 :1–16, July-August 2004.
- [47] R.J. Luebbers, K.S. Kunz, M. Schneider, and F. Hunsberger. A finite-difference time-domain near zone to far zone transformation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 39(4) :429–433, April 1991.
- [48] B. Martinat, A. Reineix, and J.P. Berenger. Pml for simulation of conductive medium in fdtd. In *URSI*, Salt-Lake city, July 2000.
- [49] P.-A. Mazet, L. Ségui, and B. Dah. Sur l’existence et l’unicité des solutions pour le système de maxwell harmonique en présence de couches de bérenger. *Comptes Rendu à l’Académie des Sciences Série I*, 333 :599–604, 2001.
- [50] K.A. Michalski and J.R. Mosig. Multilayered media green’s functions in integral equationformulations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 45(3) :508–519, March 1997.
- [51] G. Mur. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations. *IEEE Transaction on Electromagnetic Compatibility*, EMC-23 :377–382, 1981.
- [52] J.C. Nédélec. Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Numerische Mathematik*, 35(3) :57–81, 1980.
- [53] S. Pernet. *Etude de méthodes d’ordre élevé pour résoudre les équations de Maxwell dans le domaine temporel. Application à la détection et à la compatibilité électromagnétique*. PhD thesis, Université de Paris Dauphine, Paris IX, 2004.
- [54] V. Petkov. *Scattering Theory for Hyperbolic Operators*. North-Holland, 1989.
- [55] J. Rauch. Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity. *Transaction of the American Mathematical Society*, 291(1) :167–187, September 1985.
- [56] J. Rauch. *Partial Differential Equations*. Springer, 1991.
- [57] J. Rauch and G. Mourou. The time integrated far field for maxwell’s and d’alembert’s equations. In *Applied and Interdisciplinary Seminar, Department of Mathematics, University of Michigan*, October 2003.
- [58] M. Remaki. *Méthodes numériques pour les équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogène*. PhD thesis, Ecole nationale des ponts et chaussées, 1999.
- [59] L. Schwartz. *Théorie des Distributions*. Hermann, 1951.
- [60] B. Shanker, M. Lu, A. A. Ergin, and E. Michielssen. Plane-wave time-domain accelerated radiation boundary kernels for fdtd analysis of 3-d electromagnetic phenomena. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 53(11) :3704–3716, November 2005.
- [61] K.L. Shlager and G.S. Smith. Near-field to near-field transformation for use with fdtd method and its application to pulsed antenna problems. *Electronics Letters*, 30(16) :1262–1264, August 1994.
- [62] K.L. Shlager and G.S. Smith. Comparison of two fdtd near-field to near-field transformations applied to pulsed antenna problems. *Electronics Letters*, 31(12) :410–413, June 1995.

- 
- [63] A. Taflove and S.C. Hagness. *Computational Electrodynamics*. Artech House, 2000.
- [64] C.T. Tai. Direct integration of field equations. *Progress In Electromagnetic Research*, 28 :339–359, 2000.
- [65] F.L. Teixeira, K.P. Hwang, W.C. Chew, and J.M. Jin. Conformal pml-fdtd schemes for electromagnetic field simulations : A dynamic stability study. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 49(6) :902–907, June 2001.
- [66] I. Terrasse. *Résolution mathématique et numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de potentiels retardés*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1993.
- [67] L. Thourel. *Les antennes*. CEPADUES, 1990.
- [68] C.H. Wilcox. An expansion theorem for electromagnetic fields. *Communication on Pure and Applied Mathematics*, 9 :115–134, 1956.
- [69] C.H. Wilcox. A generalization of theorems of Rellich and Atkinson. *Proceeding of the American Mathematical Society*, 7 :271–276, 1956.
- [70] C.H. Wilcox. *Scattering Theory for the d'Alembert Equation in Exterior Domains*. Springer-Verlag, 1975.
- [71] H. Whitney. *Géométrie intégration theory*. Princeton university press, 1957.
- [72] K.S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14, 1966.
- [73] K.S. Yee, D. Ingham, and K. Shlager. Time-domain extrapolation to the far field based on fdtd calculations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 39 :410–413, 1991.