THÈSE DE DOCTORAT

QUELQUES MÉTHODES DE RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ELLIPTIQUES AVEC CONTRAINTE SUR LES ESPACES $W^{1,p}$ ET BV

MOUNA KRAÏEM

UMR 8088 "Analyse, Géométrie et modélisation"

Plan de l'exposé

I. Notations

- Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $N > 1$.

- $W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \nabla u \in L^p(\Omega), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ est l'espace de Sobolev réflexif, $(p > 1)$.

- $W_0^{1,1}(\Omega) = \left\{u \in L^1(\Omega), \nabla u \in L^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$ est l'espace de Sobolev non réflexif.

- $\mathcal{M}^1(\Omega)$ est l'ensemble des mesures bornées dans Ω.

- $BV(\Omega) = \left\{u \in L^1(\Omega), \nabla u \in \mathcal{M}^1(\Omega)\right\}$ est l'espace des fonctions à variations bornées dans Ω.

$BV(\Omega)$, muni de la norme $\|\nabla u\|_1 + \|u\|_1$ est un espace de Banach.

II. Introduction

On définit l'opérateur non-linéaire p-Laplacien, $p > 1$ par:

$$\Delta_p u = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

λ est une valeur propre du p-Laplacien si elle vérifie l'e.d.p. suivante:

$$\Delta_p u = \lambda u$$

où u est une fonction propre associée à λ.

On démontre que la première valeur propre du p-Laplacien est donnée par:

$$\lambda_p = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \|u\|_p^p = 1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p \right\}$$

II. Introduction

La première valeur propre du 1-Laplacien est définie classiquement comme le réel positif

$$\lambda_1 := \inf_{\substack{u \in W_0^{1,1}(\Omega) \\ \|u\|_1 = 1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u| \right\}. \tag{1}$$

II. Introduction

La première valeur propre du 1-Laplacien est définie classiquement comme le réel positif

$$\lambda_1 := \inf_{\substack{u \in W_0^{1,1}(\Omega) \\ \|u\|_1 = 1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u| \right\}. \tag{1}$$

Le problème dit relaxé est défini par:

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in BV(\Omega) \\ \|u\|_1 = 1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} |u| \right\}. \tag{2}$$

II. Introduction

La première valeur propre du 1-Laplacien est définie classiquement comme le réel positif

$$\lambda_1 := \inf_{\substack{u \in W_0^{1,1}(\Omega) \\ \|u\|_1 = 1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u| \right\}. \tag{1}$$

Le problème dit relaxé est défini par:

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in BV(\Omega) \\ \|u\|_1 = 1}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} |u| \right\}. \tag{2}$$

Il y a existence d'une solution au problème relaxé, qui réalise dans un certain sens, l'équation suivante:

$$-\text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \lambda_1.$$

[F.Dem]

II. Introduction

Proposition. *Soit* $u \in BV(\Omega)$, $\sigma \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *et* div$\sigma \in L^N(\Omega)$. *Pour tout* $\phi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$, *on a la formule de Green suivante:*

$$\langle \sigma \cdot \nabla u, \phi \rangle = -\int_\Omega (\mathrm{div}\sigma) u\phi - \int_\Omega (\sigma \cdot \nabla \phi)\ u + \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot \overrightarrow{n} u\ \phi. \tag{1}$$

$\overrightarrow{n}$ *la normale unitaire à* $\partial\Omega$.

Soit $u \in BV(\Omega)$ *et* $U \in BV(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega})$. *On definit* $\tilde{u}$ *l'extension suivante:*

$$\tilde{u} = \begin{cases} u \text{ in } \Omega, \\ U \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

- $\tilde{u} \in BV(\mathbb{R}^N)$
- $\nabla \tilde{u} = \nabla u \chi_\Omega + \nabla U \chi_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}} + (U - u)\ \delta_{\partial\Omega}$.
- $(\sigma \cdot \nabla \tilde{u}) = (\sigma \cdot \nabla u)\chi_\Omega + \sigma \cdot \overrightarrow{n}(U - u)\ \delta_{\partial\Omega}$.
- $|\sigma \cdot \nabla \tilde{u}| \leq \|\sigma\|_\infty |\nabla \tilde{u}|$.

III. Approximation de la 1ère valeur propre du 1-Laplacien.

III.1. Enoncé du problème

On introduit le problème de pénalisation suivant:

$$\lambda_{1,n} := \inf_{u \in W_0^{1,1}(\Omega)} \left\{ \int_\Omega |\nabla u| + n \left(\int_\Omega |u| - 1 \right)^2 \right\}. \qquad (3)$$

III. Approximation de la 1ère valeur propre du 1-Laplacien.

III.1. Enoncé du problème

On introduit le problème de pénalisation suivant:

$$\lambda_{1,n} := \inf_{u \in W_0^{1,1}(\Omega)} \left\{ \int_\Omega |\nabla u| + n \left(\int_\Omega |u| - 1 \right)^2 \right\}. \tag{3}$$

Ainsi que sa forme relaxée:

$$\lambda_{1,n} = \inf_{u \in BV(\Omega)} \left\{ \int_\Omega |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} |u| + n \left(\int_\Omega |u| - 1 \right)^2 \right\}. \tag{4}$$

III. Approximation de la 1ère valeur propre du 1-Laplacien.

III.2. Résultat principal

Thèoréme Principal. *Soit* Ω *un domaine borné dans* $\mathbb{R}^N$, $N > 1$, *de classe* C^1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *le problème relaxé* (4) *admet une solution* u_n *(qu'on peut supposer positive) dans* $BV(\Omega)$. *De plus,* u_n *réalise les e.d.p suivantes:*

$$(\mathcal{P}_n) \begin{cases} -\text{div } \sigma_n + 2n \left(\int_\Omega u_n - 1 \right) \text{sgn}^+(u_n) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \sigma_n \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N), \|\sigma_n\|_\infty \leq 1, \\ \sigma_n \cdot \nabla u_n = |\nabla u_n| \quad \text{dans } \Omega, \\ u_n \text{ non identiquement nulle}, -\sigma_n \cdot \overrightarrow{n}(u_n) = u_n \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

• $\overrightarrow{n}$ *la normale exterieure sur* $\partial\Omega$.
• $\sigma_n \cdot \nabla u_n$ *est une mesure à définir.*
• sgn$^+(u_n)$ *fonction dans* $L^\infty(\Omega)$ *tq:* (sgn$^+(u_n))u_n = u_n$ *dans* Ω.
De plus $\lambda_{1,n}$ *converge vers* λ_1 *et* u_n *converge vers une* 1*ère fonction propre* u.

III. Approximation de la 1ère valeur propre du 1-Laplacien.

III.3. Idée de la preuve du Théorème

La preuve se fait en 4 étapes:

Etape 1: Régularisation du problème de minimisation en approchant BV par $W_0^{1,1+\epsilon}, \epsilon > 0$.

Etape 2: Convergence de l'équation "régulière".

Etape 3: Les limites réalisent les E.D.P définies par $(\mathcal{P}_n)$.

Etape 4: $\lambda_{1,n} \longrightarrow \lambda_1$ et u_n converge vers une 1ère fonction propre, quand $n \longrightarrow \infty$.

Etape 1: Régularisation du problème de minimisation.

On introduit pour $\epsilon > 0$,

$$\lambda_{1+\epsilon,n} := \inf_{u \in W_0^{1,1+\epsilon}(\Omega)} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^{1+\epsilon} + n \left(\int_\Omega |u|^{1+\epsilon} - 1 \right)^2 \right\}.$$

Etape 1: Régularisation du problème de minimisation.

On introduit pour $\epsilon > 0$,

$$\lambda_{1+\epsilon,n} := \inf_{u \in W_0^{1,1+\epsilon}(\Omega)} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^{1+\epsilon} + n \left(\int_\Omega |u|^{1+\epsilon} - 1 \right)^2 \right\}.$$

On montre l'existence et l'unicité d'une solution positive $u_{n,\epsilon}$ qui réalise:

$$-\mathrm{div}(|\nabla u_{n,\epsilon}|^{\epsilon-1} \nabla u_{n,\epsilon}) + 2n \left(\int_\Omega u_{n,\epsilon}^{1+\epsilon} - 1 \right) u_{n,\epsilon}^{\epsilon} = 0. \qquad (E_{n,\epsilon})$$

Etape 2:

Lemme. *Soient* $u_{n,\epsilon}$ *et* $\sigma_{n,\epsilon} = |\nabla u_{n,\epsilon}|^{\epsilon-1}\nabla u_{n,\epsilon}$ *solutions de l'equation* $(E_{n,\epsilon})$. *On a alors les convergences suivantes:*

- $\widetilde{u}_{n,\epsilon} \rightharpoonup u_n$ *faiblement dans* $BV(\mathbb{R}^N)$, $\quad \epsilon \to 0$.
- $\sigma_{n,\epsilon} \rightharpoonup \sigma_n$ *faiblement dans* $L^q(\Omega)$, $\forall 1 < q < \infty$, $\quad \epsilon \to 0$
- $w_{n,\epsilon} = u_{n,\epsilon}^{\epsilon} \rightharpoonup \mathrm{sgn}^+(u_n)$ *faiblement dans* $L^q(\Omega)$, $\forall 1 < q < \infty$

Etape 2:

- On prolonge $u_{n,\epsilon}$ par zéro hors Ω
  - $\widetilde{u}_{n,\epsilon}$ est uniformément bornée dans $BV(\mathbb{R}^N)$
  - $\widetilde{u}_{n,\epsilon} \rightharpoonup u_n$ faiblement dans $BV(\mathbb{R}^N)$

Etape 2:

- On prolonge $u_{n,\epsilon}$ par zéro hors Ω
  - $\widetilde{u}_{n,\epsilon}$ est uniformément bornée dans $BV(\mathbb{R}^N)$.
  - $\widetilde{u}_{n,\epsilon} \rightharpoonup u_n$ faiblement dans $BV(\mathbb{R}^N)$
- $\sigma_{n,\epsilon} = |\nabla u_{n,\epsilon}|^{\epsilon-1}\nabla u_{n,\epsilon}$ est uniformement bornée dans $L^q(\Omega)$, $\forall 1 < q < \infty$
  - $\sigma_{n,\epsilon} \rightharpoonup \sigma_n$ faiblement dans $L^q(\Omega)$, $\forall 1 < q < \infty$
  - $\|\sigma_n\|_\infty \leq 1$

Etape 2:

- On prolonge $u_{n,\epsilon}$ par zéro hors Ω
  - $\tilde{u}_{n,\epsilon}$ est uniformément bornée dans $BV(\mathbb{R}^N)$
  - $\tilde{u}_{n,\epsilon} \rightharpoonup u_n$ faiblement dans $BV(\mathbb{R}^N)$
- $\sigma_{n,\epsilon} = |\nabla u_{n,\epsilon}|^{\epsilon-1}\nabla u_{n,\epsilon}$ est uniformement bornée dans $L^q(\Omega)$, $\forall 1 < q < \infty$
  - $\sigma_{n,\epsilon} \rightharpoonup \sigma_n$ faiblement dans $L^q(\Omega)$, $\forall 1 < q < \infty$
  - $\|\sigma_n\|_\infty \leq 1$
- $u^\epsilon_{n,\epsilon}$ est uniformement bornée dans $L^q(\Omega)$, $\forall 1 < q < \infty$
  - $w_{n,\epsilon} = u^\epsilon_{n,\epsilon} \rightharpoonup w_n$ faiblement dans $L^q(\Omega)$
  - $0 \leq w_n \leq 1,\ w_n.u_n = u_n$
  - $w_n = \text{sgn}^+(u_n)$

Etape 2: Passage à la limite.

Pour $\epsilon \longrightarrow 0$ dans l'équation

$$-\mathrm{div}\sigma_{n,\epsilon} + 2n\left(\int_\Omega u_{n,\epsilon}^{1+\epsilon} - 1\right) u_{n,\epsilon}^{\epsilon} = 0 \qquad (E_{n,\epsilon})$$

on a:

$$-\mathrm{div}\sigma_{n} + 2n\left(\int_\Omega u_{n} - 1\right) \mathrm{sgn}^{+}(u_n) = 0. \qquad (E_{n})$$

Etape 3: u_n et σ_n sont-elles solutions de $(\mathcal{P}_n)$?

$\widetilde{u}_{n,\epsilon}$ l'extension de $u_{n,\epsilon}$ par 0 dans $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

- $\widetilde{u}_{n,\epsilon} \rightharpoonup u_n$ faiblement dans $BV(\mathbb{R}^N)$.
- $\widetilde{u}_{n,\epsilon} \longrightarrow v_n$ dans $L^k(\mathbb{R}^N)$, $\forall\ k < \frac{N}{N-1}$
- $\nabla \widetilde{u}_{n,\epsilon} \rightharpoonup \nabla v_n$ vaguement dans $\mathcal{M}^1(\mathbb{R}^N)$
- $\lim\limits_{\epsilon \longrightarrow 0} |\nabla(\widetilde{u}_{n,\epsilon})|^{1+\epsilon} = \mu$

tel que: $v_n = 0$ dans $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ et $u_n = v_{n_{|\Omega}}$

On obtient alors:

$$\begin{cases} \sigma_n \cdot \nabla u_n = |\nabla u_n| & \text{dans } \Omega. \\ \sigma_n \cdot \overrightarrow{n}\, u_n = -u_n & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Conclusion: u_n et σ_n vérifient l'E.D.P correspondantes au problème de minimisation, défini par $\lambda_{1,n}$

$$\begin{cases} -\text{div } \sigma_n + 2n\left(\displaystyle\int_\Omega u_n - 1\right) \text{sgn}^+(u_n) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \sigma_n \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N), \|\sigma_n\|_\infty \leq 1, \\ \sigma_n \cdot \nabla u_n = |\nabla u_n| \quad \text{dans } \Omega, \\ -\sigma_n \cdot \overrightarrow{n}(u_n) = u_n \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ u_n \text{ non identiquement nulle, } u_n > 0 \end{cases}$$

Etape 4: $\lambda_{1,n} \longrightarrow \lambda_1$ quand $n \longrightarrow \infty$?

Etape 4: $\lambda_{1,n} \longrightarrow \lambda_1$ quand $n \longrightarrow \infty$?

- $\limsup_{n\to\infty} \lambda_{1,n} \leq \lambda_1$
  - $n\left(\int_\Omega u_n - 1\right)^2$ bornée par λ_1
  - $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n = 1$

Etape 4: $\lambda_{1,n} \longrightarrow \lambda_1$ quand $n \longrightarrow \infty$?

- $\limsup_{n\to\infty} \lambda_{1,n} \le \lambda_1$
  - $n\left(\int_\Omega u_n - 1\right)^2$ bornée par λ_1
  - $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n = 1$

- $\tilde{u}_n$ l'extension de u_n par 0 dans $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.
  - $\tilde{u}_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $BV(\mathbb{R}^N)$

$u = 0$ hors $\overline{\Omega}$.

Etape 4:

$$\lambda_1 \le \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| \le \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| + n\left(\int_{\mathbb{R}^N} u - 1\right)^2$$

$$\le \liminf_{n\to\infty}\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{u}_n| + n\left(\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}_n - 1\right)^2\right]$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} \lambda_{1,n} \le \lambda_1.$$

Donc $\lambda_{1,n} \longrightarrow \lambda_1$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Etape 4:

$$\lambda_1 \le \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| \le \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| + n \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} u - 1 \right)^2$$
$$\le \liminf_{n \longrightarrow \infty} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \widetilde{u}_n| + n \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \widetilde{u}_n - 1 \right)^2 \right]$$
$$\le \limsup_{n \longrightarrow \infty} \lambda_{1,n} \le \lambda_1.$$

Donc $\lambda_{1,n} \longrightarrow \lambda_1$ quand $n \longrightarrow \infty$.

- $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \widetilde{u}_n| = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| = \int\limits_{\Omega} |\nabla u| + \int\limits_{\partial\Omega} |u|.$
- $n \left(\int\limits_{\Omega} u_n - 1 \right)^2 \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.
- $\int\limits_{\Omega} u_n \mathrm{sgn}^+(u_n) = \int\limits_{\Omega} u_n \longrightarrow \int\limits_{\Omega} u = 1$

Conclusion

On multiplie l'e.d.p suivante par u_n

$$-\mathrm{div}\ \sigma_n + 2n\left(\int_\Omega u_n - 1\right)\mathrm{sgn}^+(u_n) = 0$$

On obtient, aprés une intégration par parties et passage à la limite, l'approximation de la 1ère valeur propre λ_1:

- $$-2n\left(\int_\Omega u_n - 1\right) \longrightarrow \lambda_1 \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

IV. Problème d'obstacle

Pour $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $f \in L^{p'}(\Omega)$, on définit le problème d'obstacle sur $W^{1,p}$, $p > 1$ par:

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geq f \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \geq \psi \end{cases}$$

On introduit la formulation variationnelle suivante:

$$\inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ u \geq \psi}} \left\{ \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p - \int_\Omega f u \right\}.$$

On obtient l'existence et l'unicité d'une solution u ssi u est la plus petite fonction f-superharmonique, $u \geq \psi$.

IV. Problème d'obstacle sur BV

On considère le problème d'obstacle suivant:

$$\mathcal{P} := \inf_{\substack{u \in W_0^{1,1}(\Omega) \\ u \geq \psi}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u| - \int_\Omega f u \right\},$$

IV. Problème d'obstacle sur BV

On considère le problème d'obstacle suivant:

$$\mathcal{P} := \inf_{\substack{u \in W_0^{1,1}(\Omega) \\ u \geq \psi}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u| - \int_\Omega f u \right\},$$

- $f \in L^\infty(\Omega),\ \|f\|_\infty \leq \lambda_1.$
- Etendre le problème de minimisation à BV
- Relaxer la condition au bord
- Existence d'une solution faible.

IV. Problème d'obstacle sur BV

Proposition. *Soit* Ω *un domaine borné de* $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $\mathcal{C}^1$ *par morceaux. Soit* $\psi \in W_0^{1,1}(\Omega)$ *et* $u \in BV(\Omega)$, *tel que* $u \geq \psi$. *Il existe une sous suite* $u_n \in W_0^{1,1}(\Omega)$, $u_n \geq \psi$ *tel que*

$$\int_\Omega |u_n - u| \longrightarrow 0, \text{ quand } n \to \infty$$

$$\int_\Omega |\nabla u_n| \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} |u|, \text{ quand } n \to \infty$$

IV. Problème d'obstacle sur BV

On définit la formulation relaxée du problème d'obstacle par:

$$\mathcal{P}_{BV} := \inf_{\substack{u \in BV(\Omega) \\ u \geq \psi}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} |u| - \int_\Omega f u \right\}.$$

▶ $\mathcal{P}_{BV} = \mathcal{P}$.

IV. Problème d'obstacle sur BV

On définit la formulation relaxée du problème d'obstacle par:

$$\mathcal{P}_{BV} := \inf_{\substack{u \in BV(\Omega) \\ u \geq \psi}} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} |u| - \int_{\Omega} fu \right\}.$$

▶ $\mathcal{P}_{BV} = \mathcal{P}$.

▶ On régularise le problème en approchant BV par $W_0^{1,1+\epsilon}$.

▶ On fait le calcul du problème dual.

IV. Problème d'obstacle sur BV

IV.1 Approximation du problème.

On définit le problème d'approximation suivant, pour $\epsilon > 0$

$$\mathcal{P}_\epsilon := \inf_{\substack{u \in W_0^{1,1+\epsilon}(\Omega) \\ u \geq \psi}} \left\{ \frac{1}{1+\epsilon} \int_\Omega |\nabla u|^{1+\epsilon} - \int_\Omega f u \right\}.$$

IV. Problème d'obstacle sur BV

IV.1 Approximation par un problème.

On définit le problème d'approximation suivant, pour $\epsilon > 0$

$$\mathcal{P}_\epsilon := \inf_{\substack{u \in W_0^{1,1+\epsilon}(\Omega) \\ u \geq \psi}} \left\{ \frac{1}{1+\epsilon} \int_\Omega |\nabla u|^{1+\epsilon} - \int_\Omega f u \right\}.$$

Proposition. *Soit u_ϵ une solution du problème d'approximation defini par $\mathcal{P}_\epsilon$.*

▶ $u_\epsilon \rightharpoonup u$ *faiblement dans $BV(\Omega)$, u solution du problème defini par $\mathcal{P}_{BV}$.*

▶ $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \mathcal{P}_\epsilon = \mathcal{P}$.

IV. Problème d'obstacle sur BV

IV.2 Calcul dual.

Soient X et Y deux espaces de Banach, Y^* le dual topologique de Y. On introduit le problème de minimisation suivant:

$$\mathcal{P} := \inf_{u \in X} \{F(u) + G(\Lambda u)\}$$

- F est une fonction convexe sur X
- G est convexe sur Y
- $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ est lineaire et continue sur X.

Le problème dual de P est alors:

$$\mathcal{P}^* = \sup_{p^* \in Y^*} \{-F^*(-\Lambda^* p^*) - G^*(p^*)\}.$$

IV. Problème d'obstacle sur BV

IV.2 Calcul dual.

Proposition (Ekeland-Temam)**.** *On a immédiatement une première relation d'extrémalité donnée par:*

$$\mathcal{P}^* \leq \mathcal{P}$$

Soit F une fonction définie sur X. S'il existe $u_0 \in X$,tel que $F(u_0) < \infty$ et si G est continue en Λu_0,alors:

$$\inf_{u \in X} \{G(\Lambda u) + F(u)\} = \sup_{p^* \in Y^*} \{-G^*(p^*) - F^*(-\Lambda^* p^*)\},$$

De plus P^* admet une solution.

IV. Problème d'obstacle sur BV

IV.2 Problème dual

Le calcul du problème dual donne:

$$\mathcal{P}^* = \sup_{\substack{(\sigma,\tau)\in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)\times\mathcal{M}^+(\Omega) \\ \tau\geq 0, |\sigma|\leq 1 \\ \mathrm{div}\sigma+\tau+f=0}} \left\{ \int_\Omega \tau\psi \right\}.$$

où $\mathcal{M}^+(\Omega)$ désigne l'ensemble des mesures positives.

▶ $\mathcal{P}^* \leq \mathcal{P}$. cf.[Ekeland-Temam]

▶ La fonctionnelle dans $\mathcal{P}$ n'est pas continue dans $L^1(\Omega)$

IV. Problème d'obstacle sur BV

IV.3 Problème pénalisé et relations d'extrémalité

On introduit le problème de pénalisation suivant:

$$\mathcal{P}_\delta(\psi) = \inf_{v \in W_0^{1,1}(\Omega)} \left\{ \int_\Omega |\nabla v| + \frac{1}{\delta} \int_\Omega (v-\psi)^- - \int_\Omega f v \right\}$$

$f \in L^\infty(\Omega),\ \|f\|_\infty < \lambda_1(\Omega)$.

IV. Problème d'obstacle sur BV

IV.3 Problème pénalisé et relations d'extrémalité

On introduit le problème de pénalisation suivant:

$$\mathcal{P}_\delta(\psi) = \inf_{v \in W_0^{1,1}(\Omega)} \left\{ \int_\Omega |\nabla v| + \frac{1}{\delta} \int_\Omega (v-\psi)^- - \int_\Omega f v \right\}$$

$f \in L^\infty(\Omega),\ \|f\|_\infty < \lambda_1(\Omega)$.

Théorème. *Soit Ω un domaine borné, de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. Soit $f \in L^\infty(\Omega)$ tel que $||f||_\infty < \lambda_1$, et $\psi \in W_0^{1,1}(\Omega)$.*

►$\mathcal{P}_\delta \longrightarrow \mathcal{P}$ *quand* $\delta \to 0$.

►$(u_\delta) \rightharpoonup u$ *faiblement dans* $BV(\Omega)$ *(à sous suite près).*
u *est solution du problème d'obstacle défini par* $\mathcal{P}$.

IV. Problème d'obstacle sur BV

IV.3 Problème pénalisé et relations d'extrémalité

$$\mathcal{P}_\delta^* = \sup_{\substack{(\sigma,\tau)\in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)\times L^\infty(\Omega) \\ 0\le\tau\le\frac{1}{\delta},|\sigma|\le 1 \\ \mathrm{div}\sigma+\tau+f=0.}} \left\{ \int_\Omega \tau\psi \right\}.$$

IV. Problème d'obstacle sur BV

IV.3 Problème pénalisé et relations d'extrémalité

$$\mathcal{P}_\delta^* = \sup_{\substack{(\sigma,\tau)\in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)\times L^\infty(\Omega) \\ 0\leq\tau\leq\frac{1}{\delta},|\sigma|\leq 1 \\ \mathrm{div}\sigma+\tau+f=0.}} \left\{ \int_\Omega \tau\psi \right\}.$$

►$\mathcal{P}_\delta^* = \mathcal{P}_\delta$. cf.[Ekeland-Temam].

IV. Problème d'obstacle sur BV

IV.3 Problème pénalisé et relations d'extrémalité

$$\mathcal{P}_\delta^* = \sup_{\substack{(\sigma,\tau)\in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)\times L^\infty(\Omega) \\ 0\le\tau\le\frac{1}{\delta},|\sigma|\le 1 \\ \mathrm{div}\sigma+\tau+f=0.}} \left\{ \int_\Omega \tau\psi \right\}.$$

► $\mathcal{P}_\delta^* = \mathcal{P}_\delta$. cf.[Ekeland-Temam].

► $\mathcal{P}^* \le \mathcal{P} \le \lim_{\delta\to 0} \mathcal{P}_\delta = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{P}_\delta^* \le \mathcal{P}^*$.

► $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$.

IV. Problème d'obstacle sur BV

IV.3 Problème pénalisé et relations d'extrémalité

$$\mathcal{P}_\delta^* = \sup_{\substack{(\sigma,\tau)\in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)\times L^\infty(\Omega) \\ 0\leq\tau\leq\frac{1}{\delta},|\sigma|\leq 1 \\ \mathrm{div}\sigma+\tau+f=0.}} \left\{ \int_\Omega \tau\psi \right\}.$$

► $\mathcal{P}_\delta^* = \mathcal{P}_\delta$. cf.[Ekeland-Temam].

► $\mathcal{P}^* \leq \mathcal{P} \leq \lim_{\delta\to 0} \mathcal{P}_\delta = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{P}_\delta^* \leq \mathcal{P}^*$.

► $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$.

Remarque. *Si* $\psi \leq 0$*:*

► *zéro est l'unique solution au problème d'obstacle défini par* $\mathcal{P}$*.*

IV. Problème d'obstacle sur BV

IV.4 Exemple dans le cas unidimensionnel

Soit $\Omega =]0,1[$ et $\psi \in W^{1,1}(]0,1[)$

Théorème. *Soit* f *continue et positive sur* $]0,1[$*, tel que* $\|f\|_\infty < 2 = \lambda_1(]0,1[)$*. Soit* $\psi \in W^{1,1}(\Omega)$*, qui admet un unique maximum, strictement positif, en un point* $\gamma \in]0,1[$*.*

Il existe alors une unique solution qui réalise $\mathcal{P}$ *donnée par* $u = \chi_{]0,1[} \max \psi$*. De plus* $\mathcal{P}$ *vaut* $(2 - \int_0^1 f) \max \psi$ *et* $\mathcal{P}^*$ *admet une unique paire de solutions* (σ, τ) *donnée par:*

$$\tau = \left(2 - \int_0^1 f\right) \delta_\gamma, \quad \sigma(x) = \begin{cases} 1 - \int_0^x f \text{ si } x < \gamma \\ -1 + \int_x^1 f \text{ si } x > \gamma \end{cases}$$