



**HAL**  
open science

# Etude de la commande optimale en Optique Adaptative et Optique Adaptative Multi-Conjuguée, validation numérique et expérimentale.

Cyril Petit

► **To cite this version:**

Cyril Petit. Etude de la commande optimale en Optique Adaptative et Optique Adaptative Multi-Conjuguée, validation numérique et expérimentale.. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2006. Français. NNT: . tel-00134154

**HAL Id: tel-00134154**

**<https://theses.hal.science/tel-00134154>**

Submitted on 1 Mar 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE DOCTORALE GALILÉE  
UNIVERSITÉ Paris 13  
Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales

N° attribué par la bibliothèque

THESE

pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13  
Discipline : **PHYSIQUE**

présentée et soutenue publiquement  
par  
**Cyril PETIT**

le 18 Décembre 2006

Titre

**ÉTUDE DE LA COMMANDE OPTIMALE EN OA ET  
OAMC, VALIDATION NUMÉRIQUE ET  
EXPÉRIMENTALE**

Directeur de thèse :  
**M. VIARIS de LESEGNO Patrick**

JURY

<b>M. ABOU-KANDIL Hisham</b>	(Rapporteur examinateur)
<b>M. ZIAD Aziz</b>	(Rapporteur examinateur)
<b>M. GENDRON Eric</b>	(Examineur)
<b>M. VIARIS de LESEGNO Patrick</b>	(Examineur)
<b>M. CONAN Jean-Marc</b>	(Examineur)
<b>MME. KULCSÁR Caroline</b>	(Examineur)
<b>M. LE LOUARN Miska</b>	(Examineur invité)
<b>M. RAYNAUD Henri-François</b>	(Examineur invité)
<b>M. VERAN Jean-Pierre</b>	(Examineur invité)



# Remerciements

Alors que mon stage de DEA, d'ores et déjà réalisé au DOTA, tirait sur sa fin, je n'avais pas, en toute honnêteté, la conviction ferme que mon avenir résidait dans la réalisation d'une thèse. Pourtant l'optique et l'expérimentation guidaient déjà mes pas. Aussi, le sujet de cette thèse, la bonne ambiance rencontrée au sein de l'équipe du DOTA, le plaisir acquis durant le stage et les talents de persuasion de mon encadrant, Jean-Marc Conan, déjà lui, ont fini de me convaincre. Et trois ans plus tard, je me dois de reconnaître que j'ai pris un très grand plaisir à poursuivre cette thèse, qui a mélangé efficacement théorie, analyse numérique et expérimentation, et s'est établie à la lisière entre deux domaines de choix, l'optique et l'automatique. J'ai redécouvert avec mes premières fermetures de boucle d'optique adaptative et mes premières validation de la loi de commande l'excitation d'un gosse réalisant ses premiers tours de vélo. Alors je souhaite avant toute chose remercier Jean-Marc, pour avoir joué à si bon escient de ses talents de persuasion, pour m'avoir encadré et guidé durant ces trois années et pour avoir fait preuve en plus d'une très grande compétence scientifique, d'une disponibilité, d'une écoute et d'une pédagogie remarquables. Il m'a aussi fait retrouver les pistes de ski de fond et découvrir la randonnée hors piste dans les forêts jurassiennes. Alors merci aussi pour ces ballades mémorables.

J'ai eu aussi la chance d'avoir au cours de cette thèse non pas un, non pas deux, mais trois encadrants. Caroline Kulcsár et Henri-François Raynaud se sont joints à la troupe, donnant à mon encadrement sa touche d'automatique et constituant ainsi un trio de choc, très complémentaire. Je n'ai eu que du plaisir à travailler avec vous trois et je vous remercie pour tout (même pour les relectures consciencieuses, que dis-je, minutieuses de Caroline et mes pages de manuscrit barbouillées de rouge, amenant à trépas un joli stylo, mais, au demeurant ces pages ont incomparablement gagné de ce coloriage). Je tiens aussi à remercier mon directeur de thèse, M. Viaris, pour m'avoir suivi et encadré durant cette thèse, et Thierry Fusco, toujours présent pour répondre efficacement à mes innombrables questions et m'aider dans mes expériences.

Si j'ai pu mener à bien ma thèse et en particulier toutes les expérimentations réalisées durant ces trois années, c'est aussi grâce à l'intervention de diverses personnes. Ainsi, Bruno, Francis et surtout Joseph ont été des acteurs essentiels dans la réalisation de cette thèse, en m'aidant à remettre en route le banc BOA, à l'améliorer et à en optimiser le fonctionnement. Merci à Joseph pour ces nombreuses heures passées ensemble sur les ordinateurs, les électroniques, à traquer les bugs et modifier des cartes dont le fonctionnement reste toujours aussi mystérieux à mes yeux. Merci à Thierry, Jean-François et encore Joseph pour ces moments d'anthologie passés au labo, bien après le couché du soleil, à disséquer les aberrations non communes et fermer des boucles d'optique adaptative récalcitrantes. Merci enfin à Didier Rabaud pour son aide dans la mise en œuvre du calculateur, à Laurent Guillaumie pour m'avoir permis d'utiliser le vibreur sismique, et à Fanny Chemla pour notre coopération sympathique et fructueuse autour des écrans de phase.

La fin de thèse aura été un peu particulière, avec mon embauche à l'ONERA dès le début de ma troisième année. Entamer mon travail d'ingénieur à temps plein était évidemment une opportunité et une reconnaissance incomparable. C'était aussi un véritable défi que de mener en parallèle la fin de

ma thèse. Avouons que cette dernière année aura été exigeante physiquement et moralement. Mais l'équipe, notamment au travers de Vincent Michau, m'a encouragé à terminer la thèse tout en me donnant les moyens d'y arriver. Je tiens donc à remercier toute l'équipe et l'ONERA à la fois pour leur confiance et leur soutien durant cette dernière année. J'ai particulièrement apprécié l'accueil chaleureux et la bonne ambiance de l'ensemble de l'équipe.

Cette ambiance a été notamment le fait de l'ensemble des doctorants présents. Alors merci et bon courage à Serge, Magalie, Isabelle, Jean-François, Nicolas, Benoit, et tous les autres. Merci à Thierry, Jean-François et Isabelle pour ces soirées de coïncidences hilarantes ou ces parties de billard qui ont participé sans aucun doute possible à évacuer le stress emmagasiné.

Je souhaite remercier les rapporteurs, Hisham Abou-Kandil et Aziz Ziad, pour leur lecture consciencieuse de ce manuscrit relativement long (rassure-toi Jean-Pierre, j'ai essayé de minimiser les tirages papier pour préserver la forêt canadienne), et l'ensemble des membres du jury pour avoir accepté de juger ce travail. Un merci tout spécial à Miska Le Louarn pour avoir accepté avec bienveillance une participation surprise mais très appréciée.

Je voudrais aussi adresser mes remerciements et mon amitié à tous mes amis qui m'entourent et m'ont soutenu durant cette thèse : Charlotte, Delphin, Marie, Matthieu, Phil, Elise, Alex, Julie, Lahouari et tous les autres ... avec une pensée particulière pour Sandrine, qui malgré la distance a toujours été présente et à l'écoute pour partager les moments de blues comme de rire avec complicité.

Enfin, merci à ma famille qui a toujours été à mes côtés, m'apportant soutien et amour.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Optique Adaptative et Commande Optimale</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Turbulence atmosphérique, formation d'images</b>	<b>9</b>
1.1	Introduction	9
1.2	Caractéristiques de la turbulence atmosphérique	10
1.2.1	Le phénomène turbulent	10
1.2.2	Fluctuations de l'indice de réfraction	10
1.2.3	Répartition de la turbulence en altitude : constante de structure	11
1.3	Turbulence atmosphérique et propagation	12
1.3.1	Fluctuations de la phase	12
1.3.2	Paramètre de Fried	13
1.3.3	Propriétés statistiques des fluctuations de la phase	14
1.3.3.1	Propriétés spatiales	14
1.3.3.1.1	Statistique des fluctuations de phase	14
1.3.3.1.2	Fonction de structure de la phase	14
1.3.3.1.3	Spectre de puissance spatiale	14
1.3.3.1.4	Phénomène d'anisoplanétisme, angle isoplanétique	14
1.3.3.2	Propriétés temporelles	16
1.3.3.2.1	Spectre de puissance temporelle	16
1.3.3.2.2	Temps caractéristique	17
1.4	Décomposition modale de la phase	17
1.4.1	Définition des polynômes de Zernike	17
1.4.2	Décomposition de la phase sur la base des polynômes de Zernike : propriétés	18
1.5	Effets de la turbulence sur la formation d'images	23
1.6	Effets de la turbulence sur l'imagerie	24
1.6.1	Rapport de Strehl	24
1.6.2	Énergie cohérente	25
<b>2</b>	<b>Correction par Optique Adaptative et limitations</b>	<b>27</b>
2.1	Introduction	27
2.2	Principe de l'Optique Adaptative	28
2.3	Les composants d'une OA	28
2.3.1	L'analyseur de surface d'onde : le Shack-Hartmann	29
2.3.1.1	Principe de la mesure	29
2.3.1.2	Considérations temporelles	31
2.3.2	Le miroir déformable	32
2.3.2.1	Principe de la correction	32

2.3.2.2	Dynamique temporelle	34
2.3.2.3	Vers de nouvelles corrections	34
2.4	La commande	34
2.4.1	Matrices d'interaction et de commande	35
2.4.2	Contrôle dynamique de la boucle	36
2.4.2.1	Considérations temporelles, chronogramme	36
2.4.2.2	La boucle ouverte	37
2.4.2.3	La boucle fermée	38
2.5	Limitations d'une Optique Adaptative	39
2.5.1	Erreurs dues à la turbulence	39
2.5.1.1	Erreur de scintillation : $\sigma_{scint}^2$	39
2.5.1.2	Erreur d'anisoplanétisme : $\sigma_{aniso}^2$	40
2.5.2	Erreurs intrinsèques à l'Optique Adaptative	40
2.5.2.1	Erreurs liées à la mesure : $\sigma_{alias}^2$ et $\sigma_{bruit}^2$	40
2.5.2.2	Erreurs liées à la correction : $\sigma_{fit}^2$	41
2.5.2.3	Erreurs liées à l'asservissement : $\sigma_t^2$	41
2.5.3	Erreurs de calibration du système : $\sigma_{calib}^2$ et $\sigma_{aberr}^2$	41
2.5.4	Erreurs exogènes : $\sigma_{exo}^2$	41
2.6	Correction partielle par l'OA	42
<b>3</b>	<b>Nouveaux concepts d'OA</b>	<b>45</b>
3.1	Introduction	45
3.2	L'Optique Adaptative extrême	46
3.3	Les Optiques Adaptatives tomographiques	46
3.3.1	L'Optique Adaptative Multi-Conjuguée	46
3.3.1.1	Historique	46
3.3.1.2	Principe et particularités de l'OAMC	47
3.3.1.3	Étoiles laser	49
3.3.1.4	Vers l'implantation d'OAMC	50
3.3.2	Le concept de GLAO	50
3.3.3	L'OA tomographique (laser)	51
3.3.4	L'OA Multi-Objet	52
3.3.5	Un concept original : l'Optique Adaptative hors axe	53
<b>4</b>	<b>Critère de commande et modèle d'état</b>	<b>55</b>
4.1	Introduction	55
4.2	Modélisation du système d'OA	56
4.3	Critère d'optimalité	57
4.3.1	Choix du critère d'optimalité	57
4.3.2	Discretisation du problème	58
4.3.2.1	Quelques approches du problème de discrétisation	58
4.3.2.2	Expression du critère discret équivalent	59
4.3.2.3	Estimation de l'erreur incompressible ultime	59
4.3.2.4	Calcul numérique de l'erreur incompressible ultime	61
4.4	De la nécessité d'une connaissance <i>a priori</i>	63
4.4.1	Approche fréquentielle, notion de transfert	64
4.4.2	Mise en évidence du besoin d' <i>a priori</i>	65

4.4.3	Modèle de turbulence . . . . .	66
4.5	Expression d'un modèle d'état du système . . . . .	68
4.5.1	Le formalisme d'état . . . . .	69
4.5.2	Expression dans le cas de l'OA . . . . .	70
4.5.3	Propriétés du modèle d'état . . . . .	72
4.5.3.1	Stabilité . . . . .	72
4.5.3.2	Commandabilité . . . . .	73
4.5.3.3	Observabilité . . . . .	73
4.6	Extension à l'OAMC . . . . .	73
4.6.1	Modélisation du système . . . . .	74
4.6.2	Critère d'optimalité en OAMC . . . . .	76
4.6.3	Modèle d'état d'une OAMC . . . . .	77
4.6.4	Propriétés du modèle en OAMC . . . . .	77
4.7	Représentation d'état . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Des approches classiques à la commande LQG</b>	<b>81</b>
5.1	Introduction . . . . .	81
5.2	Approches classiques en OAMC . . . . .	82
5.2.1	La commande par intégrateur . . . . .	82
5.2.2	De l'estimation optimale statique au POLC . . . . .	83
5.3	La commande optimale LQG . . . . .	84
5.3.1	Travaux antérieurs sur la commande LQG en OA . . . . .	84
5.3.2	Séparation entre estimation et commande optimales . . . . .	86
5.3.3	Commande optimale en information complète . . . . .	87
5.3.4	Commande optimale en information incomplète . . . . .	87
5.3.4.1	Le filtre de Kalman . . . . .	88
5.3.4.2	Solution asymptotique . . . . .	90
5.3.4.3	Conditions initiales . . . . .	90
5.3.4.4	Propriétés des estimées et de la loi de commande . . . . .	91
5.3.4.5	Hypothèses probabilistes - perte d'optimalité . . . . .	92
5.4	Analyse par modèle d'état des commandes classiques . . . . .	93
5.4.1	La commande par intégrateur . . . . .	93
5.4.2	MMSE et POLC . . . . .	94
5.5	Mise en oeuvre de la commande en OA et OAMC . . . . .	96
5.5.1	Algorithme complet de la commande optimale pour l'OA/OAMC . . . . .	96
5.5.2	Nature des matrices dans le cas de l'OA . . . . .	97
5.5.3	Nature des matrices dans le cas de l'OAMC . . . . .	98
5.5.4	Estimation optimale en boucle ouverte . . . . .	98
5.5.5	Représentation d'état . . . . .	99
5.5.6	Choix des bases . . . . .	99
5.6	Outils de contrôle en validation numérique et expérimentale . . . . .	100
5.6.1	Cas de la simulation numérique . . . . .	100
5.6.2	Cas de la validation expérimentale . . . . .	101
5.6.3	Outil de test de blancheur . . . . .	101
<b>6</b>	<b>Conclusion de la première partie</b>	<b>103</b>



<b>II</b>	<b>Étude de la commande optimale - Simulation numérique</b>	<b>105</b>
<b>7</b>	<b>Implantation de la commande : algorithmie</b>	<b>107</b>
7.1	Introduction	107
7.2	Implantation de la commande et réduction du vecteur d'état	108
7.2.1	Modification du vecteur d'état pour une implantation	108
7.2.2	Simplification du vecteur d'état et optimisation des calculs	110
7.3	Résolution de l'équation de Riccati	113
7.3.1	Calcul de la matrice de gain asymptotique	113
7.3.2	Simplification de la résolution	114
7.3.3	Vers des méthodes plus sophistiquées	115
<b>8</b>	<b>Modèles et simulations numériques</b>	<b>117</b>
8.1	Introduction	117
8.2	Structure globale	118
8.3	Description des divers modules	118
8.3.1	Configuration système	119
8.3.2	Simulateur de turbulence	119
8.3.3	Simulateur d'analyseur de front d'onde	120
8.3.3.1	L'analyseur dit parfait	120
8.3.3.2	Le modèle d'analyseur de Shack-Hartmann géométrique	121
8.3.3.3	Le modèle diffractif d'analyseur de Shack-Hartmann	122
8.3.4	Simulateur de miroir déformable	122
8.3.4.1	Le modèle expérimental	123
8.3.5	Lois de commande	124
8.3.5.1	Intégrateur (à gain modal optimisé)	124
8.3.5.2	La commande optimale LQG	125
8.4	Modèles pour la commande LQG	125
8.4.1	Modèle de turbulence	125
8.4.2	Projecteurs de la phase dans les directions d'intérêt	125
8.4.3	Modèle d'analyseur	126
8.4.4	Modèle de miroir et projecteur	126
8.4.4.1	Modèle miroir	127
8.4.4.2	Matrice de projection de la phase sur le miroir	127
8.5	Premières simulations de commande LQG	129
8.5.1	Cas d'une Optique Adaptative simple	129
8.5.2	Vers une OA plus réaliste : sous-modélisation et <i>aliasing</i>	132
8.6	Caractérisation fréquentielle la commande	135
8.6.1	Motivation	135
8.6.2	Expression analytique de la matrice de transfert de réjection	136
8.6.3	Cas d'une OA fortement simplifiée	137
8.6.4	Cas d'une OA plus réaliste	138
<b>9</b>	<b>Gestion de composantes vibratoires</b>	<b>143</b>
9.1	Introduction	143
9.2	Nature des vibrations et problématique de leur gestion	144
9.3	Modélisation d'une composante vibratoire	145

9.3.1	Hypothèses	146
9.3.2	Modèle continu	146
9.3.3	Discrétisation du modèle continu par transformation adaptée	147
9.4	Estimation d'une composante vibratoire	148
9.4.1	Quelques hypothèses simplificatrices	148
9.4.2	Choix du vecteur d'état, mise en équation du filtre	148
9.4.3	Stabilité, observabilité, commandabilité	150
9.5	Cas du bruit de vibration : filtrage	151
9.6	Cas de la perturbation : correction	151
9.7	Nombre de modes, de vibrations et complexité	152
9.8	Identification d'une composante vibratoire	154
9.8.1	Identification de la fréquence de vibration	154
9.8.2	Identification du coefficient d'amortissement	155
9.8.3	Identification du paramètre $\sigma_e^2$	155
9.8.4	Vers une identification automatique des paramètres de la vibration	156
9.8.4.1	Contexte pour le choix d'une méthode d'identification	156
9.8.4.2	Méthodes d'identification	157
<b>10</b>	<b>Extensions</b>	<b>159</b>
10.1	Introduction	159
10.2	Gestion des composantes statiques	160
10.2.1	Filtrage d'aberrations statiques	160
10.2.2	Étude des propriétés de la loi de commande modifiée	161
10.2.3	Vers d'autres solutions	162
10.3	Prise en compte de saturations sur les tensions	162
10.3.1	Le phénomène d'emballement pour l'intégrateur	163
10.3.2	Gestion des saturations avec la commande LQG	164
10.3.3	Simulation de la prise en compte des saturations	165
10.3.4	Commande LQG avec pénalisation	167
10.3.5	Conclusion sur la gestion de saturation	168
<b>11</b>	<b>Conclusion de la deuxième partie</b>	<b>171</b>
<b>III</b>	<b>Validations expérimentales et numériques de la commande optimale</b>	<b>173</b>
<b>12</b>	<b>Le Banc d'Optique Adaptative</b>	<b>175</b>
12.1	Description de BOA	176
12.1.1	Caractéristiques générales du banc BOA	176
12.1.1.1	L'analyseur de surface d'onde	179
12.1.1.2	Miroir de pointage et miroir déformable	180
12.1.1.3	Caméra d'imagerie	180
12.1.2	Le simulateur de turbulence	180
12.1.2.1	Dimensionnement du simulateur	182
12.1.2.2	Caractéristiques du simulateur et perte d'équivalence	183
12.2	Calibration et modélisation de BOA	185
12.2.1	Caméra Princeton	186

12.2.2	Analyseur de Shack-Hartmann . . . . .	187
12.2.2.1	Réponse du capteur . . . . .	187
12.2.2.2	Facteur d'échantillonnage du capteur . . . . .	189
12.2.2.3	Modélisation de l'ASO . . . . .	189
12.2.3	Miroir déformable . . . . .	191
12.2.3.1	Calibration du miroir . . . . .	192
12.2.3.2	Modélisation du miroir . . . . .	194
12.2.4	Miroir de pointage . . . . .	194
12.2.4.1	Calibration du miroir de basculement . . . . .	195
12.2.4.2	Modélisation . . . . .	196
12.2.5	Calibration du générateur de turbulence . . . . .	196
12.2.5.1	Estimation des propriétés spatiales : utilisation d'un modèle ASO . . . . .	196
12.2.5.2	Calibration des écrans : propriétés spatiales . . . . .	198
12.2.5.3	Calibration de la motorisation : propriétés temporelles . . . . .	198
12.2.5.4	Modélisation . . . . .	202
12.2.6	Conclusion sur les calibrations et modélisations . . . . .	203
12.3	La matrice d'interaction expérimentale . . . . .	204
12.4	Correction des aberrations non communes . . . . .	207
12.5	Conclusion . . . . .	211
<b>13</b>	<b>Le calculateur temps réel</b>	<b>213</b>
13.1	Description du RTC . . . . .	213
13.2	Mise en œuvre des lois de commande sur BOA . . . . .	215
13.2.1	Intégrateur (à gain modal optimisé) . . . . .	215
13.2.2	Implantation de la loi de commande LQG sur le RTC . . . . .	215
13.2.2.1	Formulation générique de la commande LQG . . . . .	215
13.2.2.2	Données de sortie du RTC . . . . .	216
13.2.2.3	Gestion des tensions d'offset . . . . .	217
13.2.3	Quelques éléments sur la validation fonctionnelle de la commande . . . . .	217
13.3	Conclusion . . . . .	220
<b>14</b>	<b>Validation en OA</b>	<b>221</b>
14.1	Conditions expérimentales . . . . .	221
14.2	Une base de comparaison : l'intégrateur en OA . . . . .	222
14.2.1	Calcul des éléments de la commande intégrateur . . . . .	222
14.2.2	Lorsque l'optimisation modale perd de son utilité . . . . .	222
14.2.3	Performance de l'intégrateur . . . . .	222
14.3	Modèles et paramètres de la commande LQG . . . . .	223
14.3.1	Rappel des équations de la commande LQG en OA . . . . .	223
14.3.2	Définition des modèles de turbulence et de composants . . . . .	223
14.4	Performance de correction . . . . .	224
14.5	Caractérisation de la commande . . . . .	226
14.5.1	Caractéristiques de l'innovation . . . . .	226
14.5.1.1	Moyenne empirique de l'innovation . . . . .	226
14.5.1.2	Variance empirique de l'innovation . . . . .	227
14.5.1.3	Blancheur de l'innovation . . . . .	228
14.5.2	Analyse des états estimés . . . . .	229

14.5.3	Conclusion sur la caractérisation de la commande	230
14.6	Estimation optimale boucle ouverte	230
14.7	Confrontation avec la validation numérique	232
14.7.1	Conditions de simulation	233
14.7.2	Résultats numériques	233
14.7.3	Conclusion sur la simulation d'OA	234
14.8	Analyse paramétrique des performances	236
14.8.1	Évolution de la correction avec $\sigma_w^2$	236
14.8.2	Évolution de la correction avec le nombre de modes estimés et réduction d' <i>aliasing</i>	239
14.8.2.1	Approche expérimentale	239
14.8.2.2	Comparaison à la simulation, cas d'une turbulence forte	239
14.8.3	Conclusion sur le choix du nombre de modes estimés	241
14.9	Conclusion sur les validations en OA	242
<b>15</b>	<b>Commande LQG et filtrage de vibrations</b>	<b>245</b>
15.1	Introduction	245
15.2	Mise en œuvre expérimentale	246
15.2.1	Génération de vibrations	246
15.2.2	Conditions expérimentales	247
15.3	Vibrations sur BOA : effets et caractéristiques	249
15.3.1	Effets des vibrations	249
15.3.2	Caractérisation des vibrations introduites	249
15.3.2.1	Vibrations en présence et effets sur la phase	250
15.3.2.2	Caractéristiques de la vibration	252
15.3.2.3	Dégradation des images par la vibration : vibration perturbative	254
15.4	Filtrage de la composante vibratoire	257
15.5	Résultats expérimentaux	258
15.6	Hypothèse de découplage	260
15.7	Sensibilité des performances	261
15.7.1	Sensibilité vis-à-vis de $\xi$ et $\sigma_e^2$	261
15.7.2	Influence du nombre de modes filtrés	263
15.8	Conclusion sur les tests expérimentaux	264
15.9	Confrontation à la simulation numérique	264
15.9.1	Comparaison avec la simulation numérique	264
15.9.2	Cas multi-vibratoire	265
15.9.3	Cas d'un bruit de vibration	267
15.10	Conclusion sur la gestion des vibrations	270
<b>16</b>	<b>Application de la commande LQG à l'OAAO</b>	<b>273</b>
16.1	Conditions expérimentales	274
16.2	Effets de l'anisoplanétisme	274
16.2.1	L'intégrateur	275
16.2.2	La commande LQG pour l'OA	276
16.3	Mise en œuvre de la commande LQG pour l'OAAO	276
16.4	Premières performances dans le champ	278
16.5	Gestion des aberrations statiques	279

16.5.1	Position du problème . . . . .	279
16.5.2	Mise en œuvre d'une commande gérant la composante statique . . . . .	279
16.5.2.1	Modification de la commande LQG pour l'OA . . . . .	279
16.5.2.2	Validation expérimentale du concept en OA . . . . .	280
16.5.2.3	Modification de la commande LQG pour l'OAAO . . . . .	281
16.5.2.4	Validation expérimentale du concept en OAAO . . . . .	282
16.5.3	Mise en œuvre d'une solution expérimentale . . . . .	282
16.5.3.1	Principe . . . . .	282
16.5.3.2	Validation expérimentale . . . . .	283
16.5.4	Conclusion sur le filtrage des composantes statiques . . . . .	284
16.6	Performances finales de la commande LQG . . . . .	285
16.6.1	Performances pour diverses directions d'optimisation dans le champ . . . . .	285
16.6.2	Performance dans le champ pour une direction d'optimisation . . . . .	286
16.6.3	Propriétés de l'innovation et des états estimés . . . . .	288
16.6.4	Conclusion sur les performances obtenues . . . . .	290
16.7	Étude paramétrique de la correction hors axe . . . . .	290
16.7.1	Étude en fonction de la variance de bruit de mesure . . . . .	290
16.7.2	Étude en fonction du nombre de modes . . . . .	290
16.8	Comparaison avec d'autres lois . . . . .	291
16.9	Comparaisons à la simulation numérique . . . . .	292
16.9.1	Conditions de simulation . . . . .	293
16.9.2	Simulation de l'OAAO sur BOA . . . . .	293
16.9.2.1	Simulation des performances des diverses commandes . . . . .	293
16.9.2.2	Effet du sens du vent . . . . .	294
16.10	Conclusion . . . . .	295
<b>17</b>	<b>Application de la commande LQG</b> . . . . .	<b>297</b>
17.1	Conditions de simulation communes . . . . .	297
17.1.1	Description du système et des modèles . . . . .	298
17.1.2	Illustration d'un cas d'OA . . . . .	302
17.2	La commande LQG pour une OAMC au VLT . . . . .	303
17.2.1	Description des lois de commande . . . . .	303
17.2.2	Résultats de simulation . . . . .	304
17.3	Correction de type LTAO . . . . .	305
17.4	Conclusion . . . . .	306
<b>A</b>	<b>Outils de traitement de donnée</b> . . . . .	<b>317</b>
A.1	Calcul expérimental du Ratio de Strehl . . . . .	317
A.2	Calcul de la Densité Spectrale de Puissance d'un signal . . . . .	318
A.3	Calcul de l'autocorrélation d'un signal . . . . .	319
<b>B</b>	<b>Intégrateur à gain modal optimisé</b> . . . . .	<b>321</b>
B.1	Loi de commande intégrateur et calcul de la matrice de commande . . . . .	321
B.1.1	Filtrage de la pente moyenne . . . . .	322
B.1.2	Filtrage des modes piston et gaufre . . . . .	323
B.1.3	Décomposition en valeurs singulières et inversion . . . . .	324
B.2	Optimisation modale du gain . . . . .	325

*TABLE DES MATIÈRES*

xi

**C Non-observabilité de la représentation d'état**

**329**

**D Simplification de l'équation de Riccati**

**333**

**IV Bibliographie**

**337**



# Table des figures

1.1	Divers profils de $C_n^2$ . . . . .	12
1.2	Principe du phénomène d'anisoplanétisme . . . . .	15
1.3	Carte des premiers modes de Zernike . . . . .	19
1.4	Covariance des modes de Zernike . . . . .	20
1.5	DSP temporelle des modes de Zernike . . . . .	22
1.6	Comparaison de la tache d'Airy et d'une FEP . . . . .	24
2.1	Schéma de principe d'une OA . . . . .	29
2.2	Principe de fonctionnement d'un ASO . . . . .	30
2.3	Fonctions d'influence d'un MD SAM . . . . .	33
2.4	Chronogramme d'un asservissement d'OA . . . . .	37
2.5	Schéma-bloc d'une boucle ouverte d'OA . . . . .	37
2.6	Schéma-bloc d'une boucle fermée d'OA . . . . .	38
2.7	Phénomène d'anisoplanétisme . . . . .	40
2.8	Origine des NCPA . . . . .	42
2.9	Coupes de FEP . . . . .	43
2.10	Coupe de FEP longue pose . . . . .	44
3.1	Principe d'une OAMC . . . . .	48
3.2	Simulation d'une correction par OA et OAMC . . . . .	48
3.3	Modes non vus . . . . .	49
3.4	Principe du GLAO . . . . .	51
3.5	Principe de la LTAO . . . . .	52
3.6	Principe de l'OAAO . . . . .	54
4.1	Chronogramme de l'OA . . . . .	57
4.2	Profils de $C_n^2(h)$ de type Paranal . . . . .	62
4.3	Évolution de l'erreur résiduelle de discrétisation . . . . .	62
4.4	Contributions par ordre radial à l'erreur de discrétisation . . . . .	63
4.5	Diagonale de la matrice $\mathbf{A}^{tur}$ . . . . .	68
4.6	Comparaison des coefficients de corrélation modaux au premier et second pas . . . . .	69
4.7	Principe d'une OAMC . . . . .	74
5.1	Commande en information complète . . . . .	88
5.2	Système en information incomplète . . . . .	97
7.1	Convergence du calcul de la solution asymptotique de l'équation de Riccati . . . . .	114



8.1	Comparaison des modèles géométrique et diffractif . . . . .	122
8.2	Modèle gaussien de fonctions d'influence . . . . .	124
8.3	Exemple de matrice de projection de la phase . . . . .	126
8.4	Matrice de covariance des fonctions d'influence . . . . .	128
8.5	Reconstruction des modes de Zernike . . . . .	128
8.6	FEP d'une correction par intégrateur et commande LQG . . . . .	130
8.7	Comparaison des matrices de covariance d'innovation . . . . .	131
8.8	Test de blancheur de l'innovation . . . . .	131
8.9	Variances résiduelles et FEP après correction, ASO parfait . . . . .	132
8.10	Comparaison des phases incidentes et estimées . . . . .	133
8.11	Variances résiduelles et FEP après correction, ASO géométrique, 36 modes estimés . . . . .	134
8.12	Variances résiduelles et FEP après correction, ASO géométrique, 80 modes estimés . . . . .	134
8.13	Matrice de transfert de réjection, cas d'OA simplifiée . . . . .	138
8.14	Comparaison des fonctions de transfert de réjection modales . . . . .	139
8.15	Matrice de transfert de réjection, cas d'OA réaliste . . . . .	140
9.1	Schéma-bloc d'un système d'OA avec vibrations . . . . .	144
9.2	DSP et DSP cumulées de vibrations générées avec le modèle discret AR2 . . . . .	155
10.1	Histogramme de la répartition des tensions maximales . . . . .	166
10.2	Gestion du phénomène de saturation par la commande LQG . . . . .	167
10.3	Différence entre defocus turbulent et defocus estimé selon la gestion de la saturation . . . . .	168
12.1	Le banc BOA . . . . .	177
12.2	Présentation schématique du banc BOA . . . . .	178
12.3	L'Analyseur de Surface d'Onde du banc BOA . . . . .	179
12.4	Photographie du miroir de basculement . . . . .	181
12.5	Représentation schématique de la configuration ASO/MD . . . . .	181
12.6	Photographie de la caméra d'imagerie . . . . .	182
12.7	Le module d'injection . . . . .	185
12.8	Schéma du module d'injection et de l'écran . . . . .	186
12.9	Courbe de caractérisation du gain de la caméra Dalsa . . . . .	189
12.10	DSP temporelle d'une mesure de pentes . . . . .	190
12.11	Matrice de covariance du bruit de mesure sur les pentes . . . . .	191
12.12	Fonction d'influence de l'actionneur 34 . . . . .	193
12.13	Déformée au repos du miroir déformable . . . . .	193
12.14	Courbe de réponse en tension de l'actionneur 40 du MD . . . . .	194
12.15	Coupe axiale de la déformée mécanique d'un actionneur . . . . .	195
12.16	Courbe de réponse en tension du miroir de basculement . . . . .	196
12.17	Schéma de l'écran turbulent . . . . .	198
12.18	Caractérisation de l'écran numéro 618 . . . . .	199
12.19	Courbe d'étalonnage de la vitesse de rotation du moteur d'entraînement . . . . .	200
12.20	Densité Spectrale de Puissance temporelle expérimentale des modes de Zernike . . . . .	201
12.21	Corrélations temporelles expérimentales et modèle AR1 . . . . .	203
12.22	Exemple de matrice d'interaction expérimentale . . . . .	205
12.23	Comparaison des valeurs propres des diverses matrices d'interaction . . . . .	206
12.24	Comparaison des matrices d'interaction optique et théorique . . . . .	206

12.25	Évolution de la FEP avec la pré-compensation des NCPA . . . . .	210
13.1	Photographie du PC-RTC . . . . .	214
13.2	Comparaison de fonctions de transfert de réjection de l'OA . . . . .	219
14.1	Exemple de convergence du calcul de la solution de l'équation de Riccati . . . . .	224
14.2	Comparaisons des FEP corrigées intégrateur/commande LQG . . . . .	225
14.3	Comparaison de la moyenne de l'innovation à la moyenne de la pente estimée par le filtre . . . . .	227
14.4	Covariance de l'innovation empirique et théorique . . . . .	228
14.5	DSP temporelles de composantes de l'innovation . . . . .	228
14.6	Variance radiale et corrélation temporelle des modes estimés . . . . .	230
14.7	Comparaison des DSP temporelles des modes estimés . . . . .	231
14.8	Illustration de la correction obtenue en simulation en terme de FEP . . . . .	234
14.9	Moyenne et covariance de l'innovation en simulation numérique . . . . .	235
14.10	Analyse des états estimés en simulation . . . . .	235
14.11	Évolution de la performance de la commande en fonction de la variance du modèle bruit de mesure . . . . .	237
14.12	Évolution de la variance totale de l'innovation avec la variance du modèle bruit de mesure . . . . .	238
14.13	Évolution de la matrice de covariance de l'innovation . . . . .	238
14.14	Évolution de la FEP avec le nombre de modes estimés . . . . .	240
14.15	Évolution de la FEP avec le nombre de modes estimés, simulation . . . . .	241
14.16	Réduction de l'effet d' <i>aliasing</i> . Simulation à $\frac{D}{r_0} = 8$ . . . . .	242
15.1	Densité Spectrale de Puissance des pentes moyennes en $x$ et $y$ . . . . .	247
15.2	Photographie du vibreur sismique . . . . .	248
15.3	DSP cumulées de la phase sur les 4 premiers modes de Zernike . . . . .	251
15.4	Saut d'énergie autour de $f_{vib}$ sur la DSP cumulée, dû à la vibration . . . . .	252
15.5	Densité Spectrale de Puissance de la pente moyenne en $x$ (gauche) et son cumul (droite) . . . . .	253
15.6	Modélisation de la vibration par un AR2 . . . . .	254
15.7	Évolution du SR relatif en fonction de la tension d'excitation du vibreur . . . . .	256
15.8	DSP temporelles de la pente moyenne en $x$ , selon la correction . . . . .	259
15.9	DSP temporelle cumulée de la pente moyenne en $x$ , selon la correction . . . . .	259
15.10	Tracé du couple pente en $x$ -pente en $y$ au cours du temps . . . . .	261
15.11	Évolution du SR en appliquant une commande LQG filtrant la vibration en fonction de la variance du bruit . . . . .	262
15.12	DSPs temporelles cumulées de la pente moyenne en $x$ . . . . .	263
15.13	Transfert $\ T_x(\nu)\ ^2$ de la pente moyenne en $x$ . . . . .	266
15.14	Transferts de la pente moyenne en $x$ avec trois vibrations . . . . .	267
15.15	Transfert de la pente moyenne en $x$ pour une commande LQG standard . . . . .	269
15.16	Transfert de la pente moyenne en $x$ pour une commande LQG corrigeant la vibration . . . . .	269
15.17	Transfert de la pente moyenne en $x$ pour une commande LQG estimant la vibration . . . . .	270
16.1	Schéma de principe du montage expérimental d'OAAO . . . . .	275
16.2	Évolution de la performance en terme de SR dans le champ pour l'intégrateur (OA classique) . . . . .	276

16.3	Évolution de la performance en terme de SR dans le champ pour l'intégrateur et une commande LQG . . . . .	277
16.4	DSP du tilt estimé dans le cas d'une turbulence dynamique avec composante statique	281
16.5	Évolution de la performance en terme de SR avec l'optimisation des tensions d'offset	284
16.6	Évolution de la performance en terme de SR dans le champ de la commande LQG . .	286
16.7	FEP des étoiles sur axe (gauche) et hors axe (droite) pour $n = 20\%$ . . . . .	287
16.8	Évolution de la performance en terme de SR sur et hors axe . . . . .	288
16.9	Performance dans le champ pour un profil turbulent à 4 couches . . . . .	289
16.10	Évolution de la correction dans le champ pour une direction d'intérêt fixée . . . . .	289
16.11	Évolution de la performance de la correction hors axe en fonction du bruit de mesure	291
16.12	Évolution de la performance de la correction hors axe en fonction du nombre de modes estimés . . . . .	292
16.13	Performances comparées en terme de SR de corrections par intégrateur, POLC ou commande LQG . . . . .	293
16.14	Comparaison des performances sur l'étoile hors axe, en terme de SR, pour les commandes intégrateur, LQG ou POLC . . . . .	294
16.15	Évolution de la performance de la commande LQG avec le sens du vent . . . . .	295
17.1	Schéma du système d'OAMC simulé . . . . .	299
17.2	Répartition des étoiles dans le champ . . . . .	300
17.3	Performance dans le champ d'une correction de type OA par intégrateur . . . . .	302
17.4	Matrice d'interaction du système d'OAMC . . . . .	303
17.5	Performances (SR) dans le champ d'une correction de type OAMC par intégrateur . .	305
17.6	Performances (SR) dans le champ d'une correction de type OAMC par commande LQG	306
17.7	Performances (SR) dans le champ d'une correction de type LTAO par commande LQG	307
A.1	FEP brute et pré-traitée de BOA . . . . .	318
A.2	FTO brute et avec traitement de la FEP . . . . .	319
B.1	Matrice d'interaction de BOA . . . . .	322
B.2	Modes piston et gaufre . . . . .	323
B.3	Valeurs singulières de $\mathbf{M}_{inter}$ . . . . .	326
B.4	Gains optimaux de l'intégrateur du banc BOA . . . . .	328

# Liste des tableaux

7.1	Exemple de coût calculatoire en configuration MAD	110
7.2	Exemple de coût calculatoire en configuration MAD, après simplification	112
8.1	Normes $H_2$ des transferts de réjection	140
12.1	Caractéristiques principales opto-géométriques de BOA	177
12.2	Caractéristiques principales de la caméra d'imagerie	187
12.3	Caractéristiques principales de l'ASO	188
12.4	Caractéristiques principales du MD	191
12.5	Caractéristiques principales du miroir de basculement	195
12.6	Caractéristiques principales du module d'injection	197
12.7	Normes infinies des diverses matrices d'interaction	205
14.1	Diverses performances de l'intégrateur en OA	223
14.2	Comparaisons de diverses performances intégrateur/commande LQG	225
15.1	Tableau récapitulatif des performances expérimentales en SR	260
15.2	Tableau récapitulatif des performances en SR (%) selon la simulation numérique	264
15.3	Caractéristiques des modes vibratoires introduits dans la simulation numérique	266
15.4	Tableau récapitulatif des performances en SR obtenues en simulation numérique	268
17.1	Caractéristiques des couches turbulentes	301
17.2	Caractéristiques des ASO	301
17.3	Caractéristiques des miroirs déformables	301



# Principales notations et abbréviations

PRINCIPALES ABBREVIATIONS TECHNIQUES	
ARn	Auto Régressif d'ordre n
ASO	Analyseur de Surface d'Onde
BOA	Banc d'Optique Adaptative
DSP	Densité Spectrale de Puissance
DSPI	Densité Spectrale de Puissance cumulée
EG	Etoile Guide
FEP	Fonction d'Etalement du Point
FTO	Fonction de Transfert Optique
IGMO	Intégrateur à Gain Modal Optimisé
OA	Optique Adaptative
OAMC	Optique Adaptative Multi-Conjuguée
MD	Miroir Déformable
RSB	Rapport Signal-à-Bruit

PRINCIPALES ABBREVIATIONS ANGLAISES	
AO	Adaptive Optics
FoV	Field of View
LQG	Linear Quadratic Gaussian
LTAO	LASER Tomographic Adaptive Optics
MAD	Multiconjugate Adaptive optics Demonstrator
MCAO	Multi-Conjugate Adaptive Optics
MMSE	Minimum Mean Square Error
MOAO	Multi Object Adaptive Optics
OAAO	Off-Axis Adaptive Optics
RTC	Real Time Computer
SR	Strehl Ratio

PRINCIPALES NOTATIONS	
Notation	Description
$x$	Grandeur scalaire ou norme de la grandeur vectorielle associée
$\mathbf{X}$	Grandeur vectorielle ou matricielle
$D$	Diamètre du télescope
$S$	Surface de la pupille
$\lambda$	Longueur d'onde
$h$	Altitude
$r_0$	Paramètre de Fried
$s$	Seeing
$C_n^2(h)$	Constante de structure de l'indice de réfraction
$n$	Indice ou ordre radial ou découverture
$V$	Vitesse de vent
$\theta_0$	Angle isoplanétique
$\tau_0$	Temps caractéristique d'évolution de la turbulence
$Z_i$	Polynôme de Zernike numéro $i$
$a_i$	Coefficient de décomposition d'une phase sur le polynôme $Z_i$
$\varphi_j$	Phase dans une couche turbulente $j$
$\varphi$	Phase dans le volume
$\phi_\alpha$	Phase dans la pupille intégrée dans une direction $\alpha$
$\phi$	Phase dans la pupille
$\alpha$	Direction angulaire
$\boldsymbol{\alpha}$	Ensemble de directions angulaires
$\mathbf{M}_\alpha^L$	Projecteur de la phase dans une couche turbulente $L$ dans la pupille, dans les directions $\alpha$
$\mathbf{D}$	Matrice d'interaction d'un ASO ou ensemble d'ASO
$\mathbf{y}$	Mesure de pentes
$\mathbf{N}$	Matrice d'influence d'un MD ou ensemble de MD
$\mathbf{u}$	Tensions de commande
$\mathbf{M}_{inter}$	Matrice d'interaction d'une OA
$\mathbf{M}_{com}$	Matrice de commande d'une OA
$T$	Période d'échantillonnage (temps trame)
$f_{ech}$	Fréquence d'échantillonnage
$g$	Gain d'intégrateur
$\omega_0$	Pulsation d'une vibration
$\xi$	Coefficient d'amortissement d'une vibration
$\mathbf{X}$	Vecteur d'état
$\hat{\mathbf{X}}$	Estimé du vecteur $\mathbf{X}$
$\tilde{\mathbf{X}}$	Différence entre $\mathbf{X}$ et son estimée $\hat{\mathbf{X}}$ (dans le cas de la mesure = innovation)
$\mathbf{e}$	Matrice de commandabilité
$\mathbf{O}$	Matrice d'observabilité
$E$	Espérance mathématique
$\Sigma$	Matrice de covariance
$\sigma^2$	Variance
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	Matrices d'une représentation d'état
$\text{tr} \{ \}$	Fonction trace
$\text{Ker}(A)$	Noyau d'une application $A$
$\mathbf{Id}$	Matrice identité
$\tilde{x}$	transformée de Fourier ou en $z$ de la variable $x$
$X^T$	Transposée de la matrice $X$
$X^*$	Symétrique hermitienne (transconjugée) de la matrice $X$

"Si les observations astronomiques et les autres quantités, sur lesquelles s'appuie le calcul des orbites, jouissaient d'une précision absolue, les éléments aussi (...) s'obtiendraient aussitôt absolument exacts (...), et, par la suite, pourraient être confirmés par d'autres observations, mais non corrigés. Mais puisque toutes nos mesures et nos observations ne sont que des approximations de la vérité, et qu'il doit en être de même de tous les calculs qui reposent sur ces quantités, il faudra viser à ce but important que tous les calculs relatifs au phénomène concret s'approchent autant que faire se peut de la vérité. Mais ceci ne peut avoir lieu autrement que par une combinaison convenable d'un plus grand nombre d'observations que celui qui est rigoureusement nécessaire pour la détermination des quantités inconnues. On ne peut donc enfin entreprendre ce travail que lorsqu'on a déjà obtenu une connaissance approchée de l'orbite, qui doit après cela être corrigée de manière à satisfaire *le plus exactement possible* à toutes les observations."

K. G. Gauss <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>K.G. Gauss, "Théorie du mouvement des corps célestes", traduit de *Theoria Motus corporum caelestium* par E. Dubois, Ed. A. Bertrand, Librairie maritime et scientifique, Paris, 1864.





# Introduction

Durant l'été 1609, Thomas Harriot, dont l'Histoire, capricieuse, n'a malheureusement pas retenu le nom, pointa la première lunette astronomique vers la lune, une lunette dont le diamètre ne dépassait pas les 10 cm. L'histoire (avec un petit h) ne retiendra que les travaux de Galilée, publiés l'année suivante, car il consigna dans un style résolument moderne ses nombreuses observations, au demeurant révolutionnaires. Aujourd'hui, les diamètres des télescopes avoisinent généralement les 10 mètres et de multiples projets visent à la construction de télescopes de 30 à 50 mètres de diamètre.

Cette évolution spectaculaire a deux raisons fondamentales : le flux total collecté par un télescope est proportionnel à sa surface et sa résolution angulaire est proportionnelle à son diamètre. Pourtant, si le flux collecté par les grands télescopes terrestres actuels a significativement augmenté, leur résolution reste limitée à celle d'un télescope amateur de 10 cm de diamètre dans le visible. Ce paradoxe est dû à la turbulence atmosphérique, qui perturbe la formation des images.

Pour pallier ce phénomène, diverses solutions ont été développées sur la base d'un traitement *a posteriori* d'images courtes poses, permettant de figer la turbulence. Mais ces solutions pâtissent d'un mauvais rapport signal-à-bruit. L'Optique Adaptative (OA) est un système optique asservi qui permet la correction en temps réel des effets de la turbulence sur la formation d'images. Il s'agit d'analyser puis de corriger, grâce à un miroir déformable, les fluctuations du front d'onde induites par la turbulence. L'asservissement, en boucle fermée, s'appuie sur des solutions simples généralement basées sur une loi de type intégrateur, ce qui permet d'améliorer significativement la résolution effective du télescope et d'acquérir des images longues poses.

Proposée dès les années cinquante [Babcock(1953)], l'OA dûit cependant attendre plus d'une trentaine d'années pour équiper les premiers systèmes astronomiques. COME-ON [Kern *et al.*(1989), Rousset *et al.*(1990)], puis ses versions améliorées COME-ON+ [Rousset *et al.*(1992)] et ADONIS [Beuzit *et al.*(1994)] ont ainsi été installées sur le télescope de 3,6 m de l'European Southern Observatory (ESO) à La Silla (Chili). Par la suite, de nombreuses OA ont vu le jour sur divers télescopes, permettant aux astronomes du monde entier d'accéder à des images d'une qualité exceptionnelle. Plus récemment, le Very Large Telescope (VLT), installé à Paranal au Chili a pu, grâce à son OA, NAOS, offrir la première image d'une planète extra-solaire [Chauvin *et al.*(06)].

Néanmoins, la correction apportée par l'OA n'est que partielle. Un certain nombre de limitations, technologiques ou fondamentales, en dégradent les performances. Parmi elles, l'anisoplanétisme, lié à la distribution volumique de la turbulence, conduit à une réduction du domaine angulaire dans lequel la correction de l'OA est efficace. Par conséquent, ce phénomène restreint notablement le domaine observable du ciel et les possibilités d'observation simultanée d'objets multiples. Pour faire face à ce problème, le concept d'Optique Adaptative Multi-Conjuguée (OAMC) a été introduit dès 1975 [Dicke(1975)]. Il s'agit de corriger la turbulence atmosphérique dans son volume grâce à une analyse multi-directionnelle et une correction réalisée par plusieurs miroirs déformables conjugués en altitude. Ce concept est aujourd'hui encore à l'étude, et divers démonstrateurs doivent prochainement en valider le principe. La boucle fermée de ces systèmes est en revanche plus complexe. Les lois de

commande envisagées jusqu'à aujourd'hui n'ont été que des généralisations de celles appliquées à l'OA, et ces solutions ne garantissent pas une correction optimale et la stabilité en boucle fermée.

L'ONERA, et plus particulièrement son Département d'Optique Théorique et Appliquée (DOTA) est un acteur majeur du développement de l'OA. Outre ses travaux de recherche dans le domaine, il a participé aussi à la réalisation des systèmes COME-ON, COME-ON+ et NAOS. Depuis de nombreuses années, le DOTA s'attache notamment à l'étude de la problématique de la commande en OA et en OAMC [Fusco(2000), Desenne(1998)]. La collaboration avec le Laboratoire de Traitement et de Transport de l'Information (L2TI, Paris 13) a permis de développer une solution de commande optimale basée sur une commande à variance minimale. La description du problème dans un formalisme dit d'état, a permis d'explicitier simplement la commande optimale, de type Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG). Cette approche, abordée dans la thèse de Le Roux [Le Roux(2003)] a donné des premiers résultats de simulation numérique très encourageants, mettant en évidence le fort potentiel de cette solution. Le possible emploi de cette commande à des applications plus spécifiques (OA à haute dynamique, configurations d'OAMC particulières) a aussi été suggéré.

Le travail de thèse présenté dans ce manuscrit s'inscrit dans la continuité de ces travaux. Son objectif consiste à approfondir l'étude de la commande LQG, et d'estimer la faisabilité d'une implantation sur un système astronomique d'OA ou d'OAMC. Dans cette perspective, ce travail s'attache à étendre les fonctionnalités de la commande afin de gérer des perturbations présentes sur les systèmes d'OA, préparer la mise en œuvre de la commande et à en démontrer le bon fonctionnement tant numériquement qu'expérimentalement.

Pour cela, nous nous sommes appuyés sur une description linéaire du système d'OA (ou d'OAMC). Nous avons démontré l'équivalence entre un critère de performance à temps continu et à temps discret, ce qui nous a permis de mettre en évidence un terme d'erreur incompressible inhérent au processus de mesure et de correction d'un grand nombre de systèmes d'OA. Nous avons réalisé un calcul explicite de ce terme et évalué son impact sur les performances générales. Cette équivalence a permis de proposer une représentation du système par modèle d'état linéaire discret, et de rediscuter les propriétés générales du système. La solution de commande optimale au sens de la variance minimale a ensuite été établie. Son implantation a conduit à approfondir l'analyse des propriétés de la commande obtenue, tout en identifiant des outils de contrôle de son bon fonctionnement.

La mise en œuvre d'une telle approche nécessite d'évaluer son comportement et ses performances pour un système réaliste, ainsi que la faisabilité technique d'implantation. Une étude algorithmique a donc été réalisée afin d'évaluer les coûts calculatoires, et nous avons proposé une simplification des calculs permettant d'envisager l'implantation de la commande sur des calculateurs récents. Cette loi de commande étant basée sur une modélisation des éléments du système et de la turbulence, nous avons détaillé les techniques de calcul numérique des modèles, qui ont également servi au développement d'un simulateur numérique.

En effet, la simulation permet d'étudier le comportement de la commande de façon aisée, à la condition de disposer d'un simulateur réaliste. Nous avons donc développé un simulateur complet et représentatif de systèmes d'OA. Ce simulateur a été exploité tout au long de ce travail de thèse pour étudier les propriétés de la commande et évaluer ses performances dans divers contextes applicatifs. Nous avons ainsi montré le bon fonctionnement du système en boucle fermée et l'apport significatif de cette loi de commande en OA et en OAMC. Ce simulateur sert aussi d'outil de validation des résultats expérimentaux grâce à une très bonne adéquation des modèles avec le banc expérimental utilisé.

La mise en œuvre expérimentale de l'approche LQG a représenté une étape cruciale de ce travail de thèse. Elle vise à démontrer la faisabilité d'une telle implantation et les performances de la commande. Il s'agit de résultats entièrement nouveaux, basés sur une analyse détaillée du système expérimental. Cette validation expérimentale a tout d'abord porté sur une configuration de type OA.

L'OAMC ne pouvant être mise en œuvre actuellement à l'ONERA, un concept original d'OA hors axe a été proposé. Brique élémentaire des systèmes d'OAMC, il a permis d'analyser la commande dans un cadre pertinent. Les résultats ont été ensuite étendus à l'OAMC grâce au simulateur. Nous avons ainsi réalisé la première application de la commande LQG à une configuration dite d'OA tomographique.

Enfin, les systèmes d'OA et d'OAMC sont généralement confrontés à diverses perturbations (vibrations, phénomène de saturation des commandes) qui doivent être gérées dans la perspective d'une implantation. Ainsi, ce travail de thèse a également contribué à étendre la commande optimale pour prendre en compte ces perturbations. Une analyse théorique a été menée et validée tant numériquement qu'expérimentalement.

La première partie de ce mémoire est consacrée à la définition de la commande optimale en OA. Elle présente le contexte applicatif et décrit le phénomène de turbulence atmosphérique et le principe de l'OA (chapitres 1 à 3). Elle motive ainsi le développement de lois de commande nouvelles et optimales. Elle décrit surtout les modélisations des éléments d'un système d'OA à partir desquelles la loi de commande est construite à temps discret (chapitre 4). Le problème de la commande optimale pour l'OA et l'OAMC est alors posé et résolu dans le formalisme d'état (chapitre 5). La commande est décrite dans le cadre spécifique de l'OA et l'OAMC. Les outils nécessaires à son étude et son implantation sont présentés. On propose aussi une comparaison avec les travaux récents menés sur le sujet. Cette première partie met ainsi en regard deux domaines scientifiques, l'automatique et l'Optique Adaptative. Les trois premiers chapitres sont proposés en particulier aux lecteurs peu familiers du contexte applicatif. Les lecteurs peu ou pas familiers des modèles d'état et de la commande LQG pourront s'attarder sur les deux derniers chapitres qui établissent la solution optimale au problème de commande. Une conclusion de cette partie est proposée au chapitre 6.

La deuxième partie du mémoire vise à préparer l'implantation effective de la commande optimale. Pour cela, nous nous sommes intéressés aux aspects algorithmiques (chapitre 7) et au calcul pratique des modèles de la commande grâce à un outil de simulation numérique complet (chapitre 8). Ce simulateur est mis à profit pour valider la commande dans un cadre simple et mettre en évidence quelques premières propriétés. Dans la perspective de l'implantation expérimentale, trois problèmes pratiques sont ensuite abordés conduisant à de nouvelles extensions des modèles et donc de la commande optimale (chapitres 9 et 10). Le chapitre 11 conclut cette seconde partie.

La troisième partie du mémoire porte sur la validation numérique et expérimentale de la commande optimale. Il s'agit des premières validations en laboratoire pour des systèmes d'OA. Le contexte expérimental est décrit (chapitres 12 et 13) avant de s'intéresser à la validation de la commande optimale en OA classique, comparée à un intégrateur à gain modal optimisé (chapitre 14). Le fonctionnement et les propriétés de la commande LQG sont analysés. Une attention particulière est donnée au filtrage de composantes vibratoires en OA (chapitre 15). Enfin, pour donner un premier élément de validation expérimentale dans un contexte de type OAMC, une expérience originale d'OA hors axe est proposée (chapitre 16). Tous ces travaux expérimentaux sont confrontés à la simulation numérique. L'extension de ces résultats à l'OAMC est illustrée par simulation numérique (chapitre 17). L'application concrète de la commande optimale à des systèmes astronomiques est enfin discutée au regard des résultats obtenus.

Enfin, un chapitre de conclusion et perspectives dresse le bilan de ce travail de recherche et propose un certain nombre de pistes à explorer.



**Première partie**

**Optique Adaptative et Commande  
Optimale**



# Chapitre 1

## La turbulence atmosphérique et ses effets sur la formation d'images

### 1.1 Introduction

So, nat'ralists observe, a flea  
Hath smaller fleas that on him prey ;  
And these have smaller yet to bite 'em,  
And so proceed ad infinitum.  
J. Swift

L'atmosphère terrestre est un milieu turbulent. La propagation d'ondes optiques à travers l'atmosphère est affectée par cette turbulence conduisant à une dégradation des images obtenues au foyer des télescopes terrestres. En particulier, la résolution des grands télescopes s'en trouve fortement réduite. L'Optique Adaptative a alors pour but de corriger en temps réel les effets optiques de la turbulence atmosphérique et d'accroître cette résolution. Afin de mieux comprendre le cadre dans lequel s'est développée l'Optique Adaptative et incidemment la problématique de commande qui lui est associée, il est nécessaire de rappeler des notions fondamentales relatives à la turbulence atmosphérique.

Ce chapitre propose donc une description physique des phénomènes mis en jeu et notamment des effets subis par la phase d'ondes optiques à la traversée de l'atmosphère. Il décrit brièvement les conséquences sur la formation d'images. Les paramètres physiques clés liés à ces phénomènes sont introduits. Ils seront utilisés tout au long de ce mémoire.

Néanmoins, pour comprendre le fonctionnement de l'OA et comment un tel système de correction est construit et dimensionné, on ne peut se contenter d'une brève description de la physique en présence. Il est nécessaire de se pencher plus avant sur la nature des phénomènes rencontrés. Or la turbulence atmosphérique, et par conséquent ses effets sur la phase, sont de nature statistique complexe. Ce chapitre s'intéresse donc plus particulièrement aux propriétés statistiques des grandeurs d'intérêt, en mettant l'accent sur celles des fluctuations de phase. Pour cela, des modèles connus sont présentés et les hypothèses sous-jacentes sont rappelées afin de bien cerner leur domaine de validité. Des grandeurs caractéristiques fondamentales sont alors introduites. Elles participent à la définition d'une OA.

Enfin, la commande développée dans ce mémoire se base sur une approche par modèle d'état. Cette approche passe par une modélisation des phénomènes en présence, du fonctionnement de l'OA et par la définition d'un critère de performance physique pertinent. Le traitement algébrique du problème requiert aussi la donnée d'une base de décomposition de la phase, à choisir judicieusement.



Cette approche s'appuiera donc très fortement sur les modèles et résultats présentés dans ce chapitre.

Aussi, après un bref rappel du phénomène physique à l'origine de la turbulence atmosphérique, le paragraphe 1.2 en présente les principales caractéristiques. La turbulence atmosphérique étant un phénomène chaotique, elle est décrite par des modèles probabilistes. On présente ses propriétés statistiques, à la fois spatiales et temporelles. Le paragraphe 1.3 s'intéresse ensuite à ses effets sur la propagation d'une onde lumineuse. La turbulence atmosphérique engendre des fluctuations du front d'onde, quantifiables elles aussi statistiquement. En particulier, le choix d'une base de décomposition de la phase permet d'en étudier plus aisément les propriétés statistiques au paragraphe 1.4. Enfin, les conséquences de ces fluctuations du front d'onde lors de la formation d'images au foyer d'un télescope sont discutées au paragraphe 1.5. Le phénomène de dégradation des images par la turbulence atmosphérique est décrit. Des critères permettant de chiffrer la qualité des images sont alors présentés, critères qui seront utilisés dans l'ensemble du mémoire.

## 1.2 Caractéristiques de la turbulence atmosphérique

Ce paragraphe décrit le phénomène turbulent atmosphérique et ses effets sur l'indice de réfraction. Ce sont en effet les fluctuations de cette grandeur qui conduisent à la perturbation de la propagation des ondes lumineuses à travers l'atmosphère. Ce paragraphe met ainsi en place les éléments de base qui permettront d'étudier ensuite les fluctuations de la phase. Un certain nombre de modèles ou d'hypothèses sont introduits, sur lesquels s'appuieront les développements ultérieurs.

### 1.2.1 Le phénomène turbulent

Le déplacement des masses d'air au sein de l'atmosphère terrestre génère des structures tourbillonnaires, rendant le milieu atmosphérique turbulent. La vie de ces structures est gouvernée par les transferts d'énergie cinétique et les effets de viscosité : des structures de taille caractéristique de quelques dizaines voire centaines de mètres (définissant l'échelle externe  $L_0$  de formation du phénomène) se scindent progressivement en structures plus petites, atteignant quelques millimètres (échelle interne  $l_0$ ), avant de se dissiper par viscosité. Le domaine compris entre ces deux échelles est dit domaine inertiel. Cette évolution, qui n'est pas sans rappeler celle des fractales (et à juste titre [[Schwartz et al.\(1994\)](#)]), est souvent désignée sous le nom de théorie de la cascade d'énergie (nom évocateur qui tire son origine du poème de J. Swift présenté ci-dessus), introduite dès 1922 par L. F. Richardson puis développée par Kolmogorov lors de son élaboration d'un modèle turbulent atmosphérique [[Kolmogorov\(1941\)](#)].

L'existence même de ces tourbillons implique le mélange de masses d'air de températures différentes. Or les fluctuations locales de température entraînent aussi des fluctuations d'indice de réfraction de l'air, indice dont dépend la longueur du chemin optique parcouru par une onde électromagnétique traversant l'atmosphère. Au final, la turbulence atmosphérique conduit donc à une dégradation des images obtenues à travers la turbulence. Avant de s'intéresser à cette dégradation, il est donc nécessaire de rappeler quelques éléments relatifs au phénomène turbulent atmosphérique et son effet sur l'indice.

### 1.2.2 Fluctuations de l'indice de réfraction

L'indice de réfraction de l'air dépend de la température et de la pression. Cependant, aux longueurs d'onde optiques, les fluctuations de l'indice de réfraction sont essentiellement tributaires de celles de la température. On peut établir un modèle statistique des fluctuations de température et donc de

l'indice. On note  $\Delta_n(\mathbf{r}, h)$  les fluctuations de l'indice de réfraction autour de sa valeur moyenne à la position  $\mathbf{r}$  et à l'altitude  $h$  pour une couche d'épaisseur  $\delta h$ . On peut caractériser ces fluctuations par leur covariance ou par leur fonction de structure  $D_{\Delta_n}(\rho, h)$  [Tatarski(1961)] :

$$D_{\Delta_n}(\rho, h) = \left\langle [\Delta_n(\mathbf{r}, h) - \Delta_n(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, h)]^2 \right\rangle, \quad (1.1)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  désigne une moyenne d'ensemble. En supposant que  $\Delta_n(\mathbf{r}, h)$  est localement stationnaire et isotrope, alors la statistique de ces fluctuations ne dépend que de la distance  $\rho$  entre deux points. La fonction de structure se relie aisément à la covariance mais permet d'éviter une divergence en  $\rho = 0$  du modèle de turbulence de Kolmogorov présenté par la suite.

Dans le domaine inertiel ( $l_0 < \rho < L_0$ ), on montre que cette fonction de structure se met sous la forme [Obukhov(1949)] :

$$D_{\Delta_n}(\rho, h) = C_n^2(h) \rho^{\frac{2}{3}}, \quad (1.2)$$

où  $C_n^2(h)$  est une constante, appelée constante de structure de l'indice de réfraction, et qui caractérise la force de la turbulence à l'altitude  $h$ .

Généralement, on aime caractériser une grandeur statistique notamment par sa Densité Spectrale de Puissance (DSP). En l'occurrence, on peut exprimer la DSP spatiale des fluctuations d'indices  $W_{\Delta_n}(\mathbf{f}, h)$ , qui est reliée directement à la fonction de structure par transformée de Fourier, pour se mettre sous la forme :

$$W_{\Delta_n}(\mathbf{f}, h) \simeq 0,033(2\pi)^{-\frac{2}{3}} C_n^2(h) f^{-\frac{11}{3}}. \quad (1.3)$$

Ce spectre est dit de Kolmogorov car issu des modèles de turbulence atmosphérique développés par Kolmogorov [Kolmogorov(1941)]. Cette expression n'est valable que dans le domaine inertiel et diverge en  $f = 0$ . Pour remédier à ce problème, un modèle a été proposé [Consortini *et al.*(1973), Chassat(1992)] sur la base du spectre de Von Karman. Il prend en compte les échelles interne et externe,  $l_0$  et  $L_0$ , pour conduire à l'expression suivante :

$$W_{\Delta_n, h}^{Von\ Karman}(\mathbf{f}) \simeq 0,033(2\pi)^{-\frac{2}{3}} C_n^2(h) \left( \left( \frac{1}{L_0} \right)^2 + f^2 \right)^{-\frac{11}{6}} \exp(-(fl_0)^2). \quad (1.4)$$

On retrouve à partir de ce spectre celui de Kolmogorov dans le domaine inertiel, tout en conservant une énergie finie.

### 1.2.3 Répartition de la turbulence en altitude : constante de structure

Il apparaît en (1.2), que la fonction de structure de l'indice de réfraction à une altitude donnée dépend de la constante de structure  $C_n^2(h)$ . Cette grandeur caractérise la force de la turbulence en fonction de l'altitude  $h$ . Elle joue donc un rôle essentiel dans la connaissance de la turbulence et de ses effets (en particulier l'anisoplanétisme, la scintillation). Elle dépend d'un grand nombre de paramètres (météorologiques, topographiques, ...) et évolue au cours du temps. Diverses méthodes de mesure de cette grandeur existent. Des modèles semi-empiriques ont aussi été proposés [Hufnagel(1974)]. Les mesures comme ces modèles font tous apparaître la même propriété : la turbulence est essentiellement localisée dans certaines couches. Ainsi les couches situées près du sol présentent une turbulence toujours très forte. D'autres couches principales se distinguent en général, et ce jusqu'à quelques 15 à 20 km d'altitude. La figure 1.1 présente ainsi quelques profils de  $C_n^2(h)$  mesurés par l'équipe du LUAN [Dessenne(1998)] à l'Observatoire de Haute-Provence par ballon sonde. On distingue une forte couche au sol et quelques couches d'énergie variable autour de 5 et 15 km. Ce profil distribué

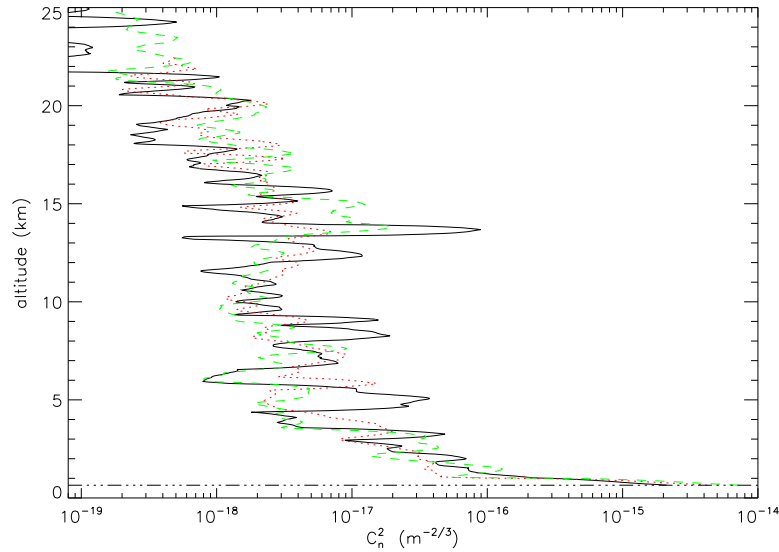


FIG. 1.1 – Divers profils de  $C_n^2$  obtenus à l'Observatoire de Haute-Provence.

de la turbulence conduit à considérer la turbulence comme une succession de couches turbulentes discrètes et indépendantes, d'épaisseur négligeable. Cette approximation sera utilisée dans toute la suite de ce mémoire. Notons que ce profil tend à évoluer fortement tant spatialement (d'un site à un autre) que temporellement (notamment entre le jour et la nuit) et qu'une connaissance précise des propriétés de la turbulence implique une réactualisation régulière des mesures acquises.

### 1.3 Effets de la turbulence atmosphérique sur la propagation d'une onde plane

Le paragraphe précédent a décrit le phénomène de turbulence atmosphérique et sa traduction en terme de fluctuations de l'indice de réfraction. Ce paragraphe analyse les effets de ces fluctuations d'indice sur la propagation d'une onde plane et plus exactement sur sa phase. Ils sont directement responsables de la dégradation des images obtenues à travers la turbulence. Les propriétés statistiques de la phase sont présentées et des grandeurs caractéristiques sont proposées. Ces éléments conditionnent le dimensionnement d'une OA (voir chapitre 2) et seront au cœur de la définition de la commande optimale présentée au chapitre 5.

#### 1.3.1 Fluctuations de la phase

Pour comprendre l'effet de la turbulence sur la formation d'images, il est nécessaire d'analyser l'effet des fluctuations de l'indice de réfraction, décrites précédemment, sur la propagation d'une onde électromagnétique. Comme suggéré dans le paragraphe 1.2.3, on considère la turbulence atmosphérique comme une succession de couches turbulentes minces localisées [Roddier(1981)]. Un front d'onde plan qui traverse une seule couche turbulente d'épaisseur  $\delta h$  située à l'altitude  $h$  est alors affecté d'une fluctuation de sa phase, en raison du lien simple existant entre la phase  $\phi(\mathbf{r}, h)$  et la

variation du chemin optique  $\Delta_n(\mathbf{r}, h)$  :

$$\phi(\mathbf{r}, h) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta_n(\mathbf{r}, h) \delta h. \quad (1.5)$$

Notons que la fluctuation d'indice étant à moyenne nulle, celle de la phase  $\phi(\mathbf{r}, h)$  l'est aussi.

La propagation de l'onde déphasée résultante au-delà de cette couche mince turbulente (à travers les couches inférieures et jusqu'au sol) devrait normalement tenir compte de l'effet de diffraction (propagation de Fresnel) amenant à une fluctuation spatiale de l'amplitude. C'est le phénomène de scintillation [Wolfe & Zisis(1989)]. Ce phénomène croît avec l'amplitude des fluctuations d'indice et l'altitude des couches turbulentes. La scintillation est à l'origine du clignotement des étoiles observées à l'oeil nu et de l'effet d'ombres volantes observé en astronomie. Parfois important en observation endo-atmosphérique, on montre cependant que cet effet est négligeable dans le cadre des applications astronomiques qui nous concernent [Roddier(1981)]. On peut alors se placer dans l'hypothèse de champ proche (faible turbulence, courte distance de propagation dans l'atmosphère). Dans ce cadre, l'onde plane se propage au travers de l'atmosphère en ne subissant que les effets de fluctuations de phase induites par les fluctuations de l'indice dans les diverses couches. En considérant donc la traversée par le front d'onde plan de l'ensemble de l'atmosphère, modélisée comme la superposition de  $m$  couches turbulentes, la fluctuation totale de la phase au niveau du sol est donc :

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^m \phi(\mathbf{r}, h_i). \quad (1.6)$$

L'effet de scintillation est toutefois à garder en mémoire. On sera amené par la suite (chapitre 12) à discuter des conditions de tests expérimentaux en présence d'une turbulence pouvant éventuellement être forte ou située à haute altitude, propice au développement des effets de scintillation.

### 1.3.2 Paramètre de Fried

Les effets de la turbulence atmosphérique sur la formation d'images peuvent être notamment caractérisés par le paramètre de Fried  $r_0$  [Fried(1966)]. Ce paramètre rend compte de la force totale de la turbulence atmosphérique rencontrée par un front d'onde à la traversée des différentes couches, dans une direction d'observation donnée. Pour une onde plane et un spectre de Kolmogorov, ce paramètre se définit par :

$$r_0 \simeq \left( 0,42 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos \gamma} \int_0^\infty C_n^2(h) dh \right)^{-\frac{3}{5}}, \quad (1.7)$$

où  $\gamma$  est l'angle zénithal et  $\lambda$  la longueur d'onde d'observation. Ce paramètre intervient directement dans l'expression de la limite supérieure de résolution de tout télescope en présence de turbulence. Cette notion de résolution est le plus souvent retranscrite au travers du paramètre dit de *seeing*,  $s$ , défini selon :

$$s = \frac{\lambda}{r_0}. \quad (1.8)$$

Cette notion de résolution angulaire limite sera rediscutée au paragraphe 1.5, lors de l'étude de la formation d'images.

Les valeurs moyennes du *seeing* et de  $r_0$  sur le site de Paranal (Chili) sont de l'ordre de  $s \simeq 0,85$  arcsecondes, et  $r_0 \simeq 12$  cm à  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ . Notons que  $r_0$  est un paramètre chromatique (évolution en  $\lambda^{\frac{6}{5}}$ ), tandis que  $s$  est quasiment achromatique (évolution en  $\lambda^{-\frac{1}{5}}$ ).

### 1.3.3 Propriétés statistiques des fluctuations de la phase

La turbulence atmosphérique, au travers des fluctuations d'indice de réfraction, joue donc directement sur la phase d'une onde plane lors de sa propagation. On s'intéresse aux fluctuations de cette phase en rattachant les propriétés statistiques de la phase à celles de l'indice, présentées au paragraphe 1.2.2. Les propriétés spatiales puis temporelles des fluctuations de phase sont abordées.

#### 1.3.3.1 Propriétés spatiales

**1.3.3.1.1 Statistique des fluctuations de phase** Le paragraphe 1.3 a montré que la fluctuation totale de la phase est à moyenne nulle. Ajoutons que la fluctuation totale de la phase est le résultat de la sommation d'un grand nombre de phénomènes statistiques indépendants identiquement distribués. Le théorème de la loi gaussienne limite permet donc d'assimiler la fluctuation totale de la phase à une statistique gaussienne.

**1.3.3.1.2 Fonction de structure de la phase** Pour cela on considère de nouveau la traversée par une onde plane d'une unique couche turbulente d'épaisseur  $\delta h$  située à l'altitude  $h$ . En rapprochant les équations (1.2) et (1.5), on définit une fonction de structure de la phase à l'altitude  $h$  par :

$$D_\phi(\boldsymbol{\rho}, h) = \left\langle [\phi(\mathbf{r}, h) - \phi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, h)]^2 \right\rangle \simeq 2,91 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 C_n^2(h) \delta h \rho^{\frac{5}{3}}. \quad (1.9)$$

En supposant maintenant que les diverses couches turbulentes de l'atmosphère sont statistiquement indépendantes, la sommation sur l'ensemble des couches conduit alors (dans le domaine inertiel) à une fonction de structure totale de la forme :

$$D_\phi(\boldsymbol{\rho}) \simeq 6,88 \left( \frac{\rho}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}, \quad (1.10)$$

où l'intégration du profil de  $C_n^2(h)\delta h$  le long de la direction d'observation est remplacée par l'expression (1.7) en fonction de  $r_0$ .

**1.3.3.1.3 Spectre de puissance spatiale** On caractérise aussi la statistique des fluctuations de la phase par leur spectre de puissance spatial. Dans l'hypothèse d'une statistique de Kolmogorov, ce spectre s'écrit :

$$W_\phi(\mathbf{f}) \simeq 0,023 \left( \frac{1}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} f^{-\frac{11}{3}}. \quad (1.11)$$

Une forme analogue se dérive de la statistique de Von Karman, prenant en compte  $l_0$  et  $L_0$  (Eq. (1.4)).

**1.3.3.1.4 Phénomène d'anisoplanétisme, angle isoplanétique** L'évolution spatiale de la turbulence dans le volume atmosphérique implique que la turbulence vue par deux fronts d'onde distincts arrivant sous des angles différents n'est pas la même. C'est le phénomène d'anisoplanétisme [Fried(1982)]. Ainsi, le schéma 1.2, gauche, illustre le cas d'une observation simultanée de deux étoiles séparées angulairement d'un angle  $\alpha$ . Les diverses couches atmosphériques sont traversées par les fronts d'onde issus de ces deux étoiles en des zones différentes. Plus précisément, si on considère la projection de la pupille du télescope sur les différentes couches atmosphériques et pour chaque direction, on constate en figure 1.2 droite, que ces projections sont entièrement disjointes pour la

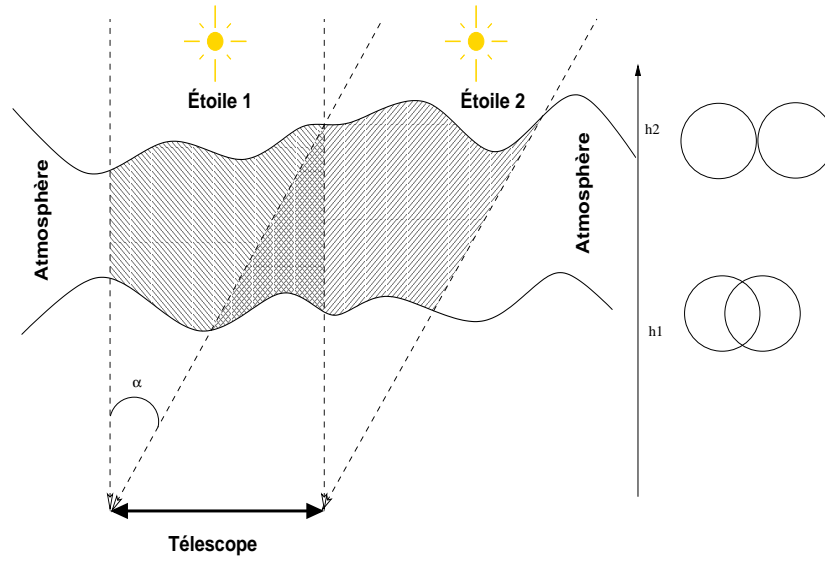


FIG. 1.2 – Principe du phénomène d’anisoplanétisme. La turbulence rencontrée dans les deux directions (séparées d’un angle  $\alpha$ ) n’est pas la même. Les projections de la pupille dans la couche haute (altitude  $h_2$ ) et dans les deux directions (schéma de droite) sont disjointes ( $n = 100\%$ ). A basse altitude ( $h_1$ ), elles se recouvrent à moitié ( $n = 50\%$ ). Elles ne se superposent qu’à  $h = 0$ .

couche la plus haute, et partiellement disjointes pour la couche la plus basse. Ces projections sont donc d’autant plus différentes que les couches considérées sont situées à une altitude élevée et que la séparation angulaire entre les deux directions est accrue. Pour résumer cet effet géométrique, on introduit le découvrement  $n$  de ces projections, défini pour une altitude  $h$  et un diamètre de télescope  $D$ , par  $n = \frac{\alpha h}{D}$ . il est de 100% pour la couche la plus haute et environ 50% pour la plus basse dans notre cas schématisé. Le phénomène d’anisoplanétisme évolue ainsi avec le paramètre  $n$ . Il augmente aussi avec la force de la turbulence de la couche considérée. Heureusement, la turbulence est en général concentrée près du sol réduisant quelque peu le phénomène.

Pour caractériser le phénomène d’anisoplanétisme, considérons d’abord le cas simple de la figure 1.2, avec une unique couche turbulente située à l’altitude  $h$ , et considérons les phases  $\phi(\mathbf{r}, h)$  et  $\phi(\mathbf{r} + \alpha h, h)$ . On exprime alors la fonction de structure selon :

$$D_\phi(\alpha h) = \left\langle [\phi(\mathbf{r} + \alpha h, h) - \phi(\mathbf{r}, h)]^2 \right\rangle \simeq 6,88 \left( \frac{\alpha h}{r_0} \right)^{3,5}, \quad (1.12)$$

où l’on a utilisé l’équation 1.10. On définit alors l’angle isoplanétique  $\theta_0$  comme l’angle pour lequel le phénomène d’anisoplanétisme reste acceptable. Une définition [Fried(1982)] consiste à choisir  $\theta_0$  de sorte que  $D_\phi(\alpha h)$  soit égal au plus à 1 rad<sup>2</sup>.  $\theta_0$  s’exprime alors sous la forme :

$$\theta_0 \simeq 0,314 \frac{r_0}{\alpha h} = 0,314 \frac{r_0}{nD}. \quad (1.13)$$

Cette dernière expression fait apparaître le découvrement  $n$ , paramètre qui sera exploité systématiquement dans ce mémoire. Plus concrètement, la turbulence ne se résume pas à une unique couche.

On définit donc dans la pratique une altitude équivalente  $\bar{h}$  obtenue par pondération des  $C_n^2(h)$  selon :

$$\bar{h} = \left( \frac{\int_0^\infty C_n^2(h) h^{\frac{5}{3}} dh}{\int_0^\infty C_n^2(h) dh} \right)^{\frac{3}{5}}. \quad (1.14)$$

L'angle  $\theta_0$  est défini alors par :

$$\theta_0 \simeq 0,314 \frac{r_0}{\bar{h}}, \quad (1.15)$$

et désigne le domaine isoplanétique, champ pour lequel la décorrélation angulaire de la turbulence reste limitée. Ce paramètre est fortement chromatique. Il est de l'ordre de la dizaine d'arcsecondes pour une observation dans l'infra-rouge ( $2,2 \mu\text{m}$ ), une turbulence moyenne de l'ordre de  $r_0 = 0,8 \text{ m}$  à  $2,2 \mu\text{m}$  et une altitude équivalente située à  $5 \text{ km}$ . Anisoplanétisme et domaine isoplanétique seront souvent rediscutés dans ce mémoire.

### 1.3.3.2 Propriétés temporelles

Les propriétés temporelles de la phase turbulente se déduisent des résultats précédents sur les propriétés spatiales. Pour cela on fait l'hypothèse d'une turbulence se présentant comme une succession d'écrans de phase indépendants, chacun en translation uniforme à la vitesse  $\mathbf{V}(h)$ , ce qui constitue l'hypothèse de Taylor [Taylor(1938)] de turbulence gelée. On suppose aussi une statistique spatiale de la turbulence de type Kolmogorov. Conan [Conan et al.(1995)] montre alors que la densité spectrale de puissance temporelle de la phase est reliée à sa densité spectrale de puissance spatiale. En effet, sous cette hypothèse de translation uniforme, et pour une unique couche à l'altitude  $h$ ,  $\phi(\mathbf{r}, t)$  vérifie (en omettant le paramètre  $h$  par souci de simplicité) :

$$\phi(\mathbf{r}, t + \tau) = \phi(\mathbf{r} - \tau \mathbf{V}, t). \quad (1.16)$$

Le lien est donc fait entre propriétés spatiales et temporelles.

**1.3.3.2.1 Spectre de puissance temporelle** Ce lien permet de traiter d'abord le problème monocouche et de définir une densité spectrale de puissance temporelle  $DSP_\phi(\nu, h)$  s'écrivant sous la forme :

$$DSP_\phi(\nu, h) = \frac{C_n^2(h) dh}{V(h)} F(\nu/V(h)) \delta h, \quad (1.17)$$

$V(h)$  désignant la norme du vecteur vitesse de vent local  $\mathbf{V}(h)$ . On fait ici l'hypothèse que  $\mathbf{V}(h)$  est colinéaire à l'axe des  $x$  d'un repère  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ , choisi arbitrairement. La fonction  $F(\nu/V(h))$  est définie par :

$$F(\nu/V(h)) \simeq 0,033(2\pi)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \left(\frac{\nu}{V(h)}\right)^2 + f_y^2 \right)^{-\frac{11}{6}} df_y, \quad (1.18)$$

le vecteur de fréquence spatiale  $\mathbf{f}$  se décomposant en  $(f_x, f_y)$ .

Le calcul mené ensuite sur l'ensemble des couches de l'atmosphère conduit à l'expression suivante pour la densité spectrale de puissance temporelle  $DSP_\phi(\nu)$  :

$$DSP_\phi(\nu) = \int_0^{h_{max}} \frac{C_n^2(h)}{V(h)} F(\nu/V(h)) dh, \quad (1.19)$$

où le calcul est mené par intégration sur l'ensemble des couches. On fait l'hypothèse ici que les vents  $\mathbf{V}(h)$  sont colinéaires. Le résultat est cependant généralisable à une distribution quelconque des vents  $\mathbf{V}(h)$ .



**1.3.3.2.2 Temps caractéristique** Tout comme le paramètre  $r_0$  définit une taille caractéristique des perturbations de l'atmosphère, on définit un temps caractéristique d'évolution de la turbulence, ou retard de Greenwood. De l'équation 1.16 et en suivant une démarche similaire à la définition de  $\theta_0$ , on peut écrire :

$$D_\phi(\tau) = \left\langle [\phi(\mathbf{r}, t) - \phi(\mathbf{r}, t + \tau)]^2 \right\rangle \simeq 6,88 \left( \frac{\bar{V}\tau}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}, \quad (1.20)$$

où  $\bar{V}$  est défini comme une vitesse moyenne de vent, pondération des vitesses  $V(h)$  par les  $C_n^2(h)$  obtenue de manière analogue à  $\bar{h}$  (1.14). On définit alors une constante de temps caractéristique des fluctuations temporelles du front d'onde  $\tau_0$ , temps pour lequel  $D_\phi(\tau)$  reste inférieure à  $1 \text{ rad}^2$  :

$$\tau_0 \simeq 0,314 \frac{r_0}{\bar{V}}. \quad (1.21)$$

Le temps  $\tau_0$  donne une indication sur la bande passante typique que doit atteindre un système de correction de la turbulence atmosphérique afin de minimiser l'erreur temporelle due au temps de réponse fini du système. Cette constante de temps est notablement chromatique et vaut typiquement quelques millisecondes pour une observation faite dans le visible et des conditions de turbulence moyenne ( $s \simeq 0,8$  arcsecondes à  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ ). Elle dépasse la dizaine de millisecondes dans l'infrarouge.

## 1.4 Décomposition modale de la phase

Le paragraphe précédent a décrit de manière générale les propriétés spatio-temporelles des fluctuations de la phase. Or la manipulation de la phase, en tant que fonction mathématique des variables d'espace et de temps, n'est pas toujours aisée. Il est donc souhaitable de pouvoir exprimer cette grandeur sur une base discrète de modes. Une telle base reste bien évidemment infinie. Un certain nombre de bases différentes sont couramment employées. Ce paragraphe présente uniquement celle des polynômes de Zernike, qui est la base principalement utilisée dans ce manuscrit.

Elle présente en effet un certain nombre de propriétés intéressantes qui en font un outil de prédilection en OA. Il s'agit par exemple d'une base orthonormée, définie sur un support circulaire, ce qui en facilite l'utilisation. Dotée d'une expression analytique simple, cette base peut être directement utilisée dans les calculs et présente un ordonnancement tel qu'on l'apparente souvent à une base de Fourier. En outre, lorsqu'un modèle de turbulence de type Kolmogorov est utilisé, elle permet d'exprimer simplement les propriétés statistiques de la phase turbulente présentées au paragraphe précédent. En particulier, on va montrer que l'énergie de la phase turbulente exprimée dans cette base présente une répartition originale, propriété particulièrement intéressante dans le cadre d'une correction par OA. Tous ces atouts font de cette base un outil particulièrement bien adapté pour l'étude de la loi de commande d'une OA.

### 1.4.1 Définition des polynômes de Zernike

La toute première propriété d'intérêt de cette base est l'existence d'une expression analytique des modes la définissant. Cette base a été proposée en 1934 par Zernike. Elle est définie sur un support circulaire plein (pupille pleine) et repose sur une représentation en coordonnées polaires  $\mathbf{r} = (r, \theta)$  de la phase *via* les polynômes  $Z_i$  définis par :



$$\begin{aligned}
Z_i &= \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \cos(m\theta) \text{ pour } m \neq 0 \text{ et } i \text{ pair} \\
Z_i &= \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \sin(m\theta) \text{ pour } m \neq 0 \text{ et } i \text{ impair} \\
Z_i &= \sqrt{n+1} R_n^0(r) \text{ pour } m = 0,
\end{aligned} \tag{1.22}$$

avec :

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n+m)/2 - s]! [(n-m)/2 - s]!} r^{n-2s}. \tag{1.23}$$

Les éléments de cette base sont classés selon leurs ordres radiaux et azimutaux,  $n$  et  $m$ . La figure 1.3 présente ainsi les premiers polynômes de Zernike et donne une idée de leur structure. Ces polynômes sont aussi désignés par leur ordre d'apparition  $i$ , le premier étant ainsi le piston  $i = 1$  correspondant à  $(n, m) = (0, 0)$ .

Cette base est orthonormée (sur la pupille pleine), si bien que :

$$\frac{1}{S} \int_S Z_i(\mathbf{r}) Z_j^*(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{ij}, \tag{1.24}$$

où  $S$  est la surface de la pupille pleine,  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  si et seulement si  $i = j$ , sinon  $\delta_{ij} = 0$ ). On constate aussi sur la figure 1.3 que les premiers polynômes représentent des aberrations optiques bien connues telles que coma, astigmatisme, defocus... En particulier les modes 2 et 3 nommés tip et tilt correspondent au basculement du front d'onde.

On peut enfin remarquer que ces polynômes se rangent aussi par ordre croissant de fréquences spatiales : les modes d'ordre radial élevé correspondent aussi à des modes de haute fréquence spatiale. Cette propriété conduit souvent à raisonner sur les polynômes de Zernike comme sur une base de Fourier.

#### 1.4.2 Décomposition de la phase sur la base des polynômes de Zernike : propriétés

La phase turbulente se décompose de façon unique sur la base des polynômes de Zernike selon :

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i Z_i(\mathbf{r}). \tag{1.25}$$

La base étant orthonormée, les coefficients  $a_i$  de la décomposition de la phase sur cette base s'obtiennent par :

$$a_i = \frac{1}{S} \int_S \phi(\mathbf{r}) Z_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \tag{1.26}$$

On peut alors exprimer les propriétés tant spatiales que temporelles de la phase sur cette base. Ainsi, on montre que dans le cadre d'une statistique de type Kolmogorov, la variance des coefficients  $a_i$  vérifie [Noll(1976)] :

$$\begin{aligned}
\langle a_i a_j \rangle &= 3,90 [(n_i + 1)(n_j + 1)]^{\frac{1}{2}} (-1)^{(n_i + n_j - 2m_i)/2} \delta_{m_i m_j} \left( \frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \\
&\times \frac{2^{-\frac{14}{3}} \Gamma[\frac{14}{3}] \Gamma[(n_i + n_j - \frac{5}{3})/2]}{\Gamma[(-n_i + n_j + \frac{17}{3})/2] \Gamma[(n_i - n_j + \frac{17}{3})/2] \Gamma[(n_i + n_j + \frac{23}{3})/2]},
\end{aligned} \tag{1.27}$$

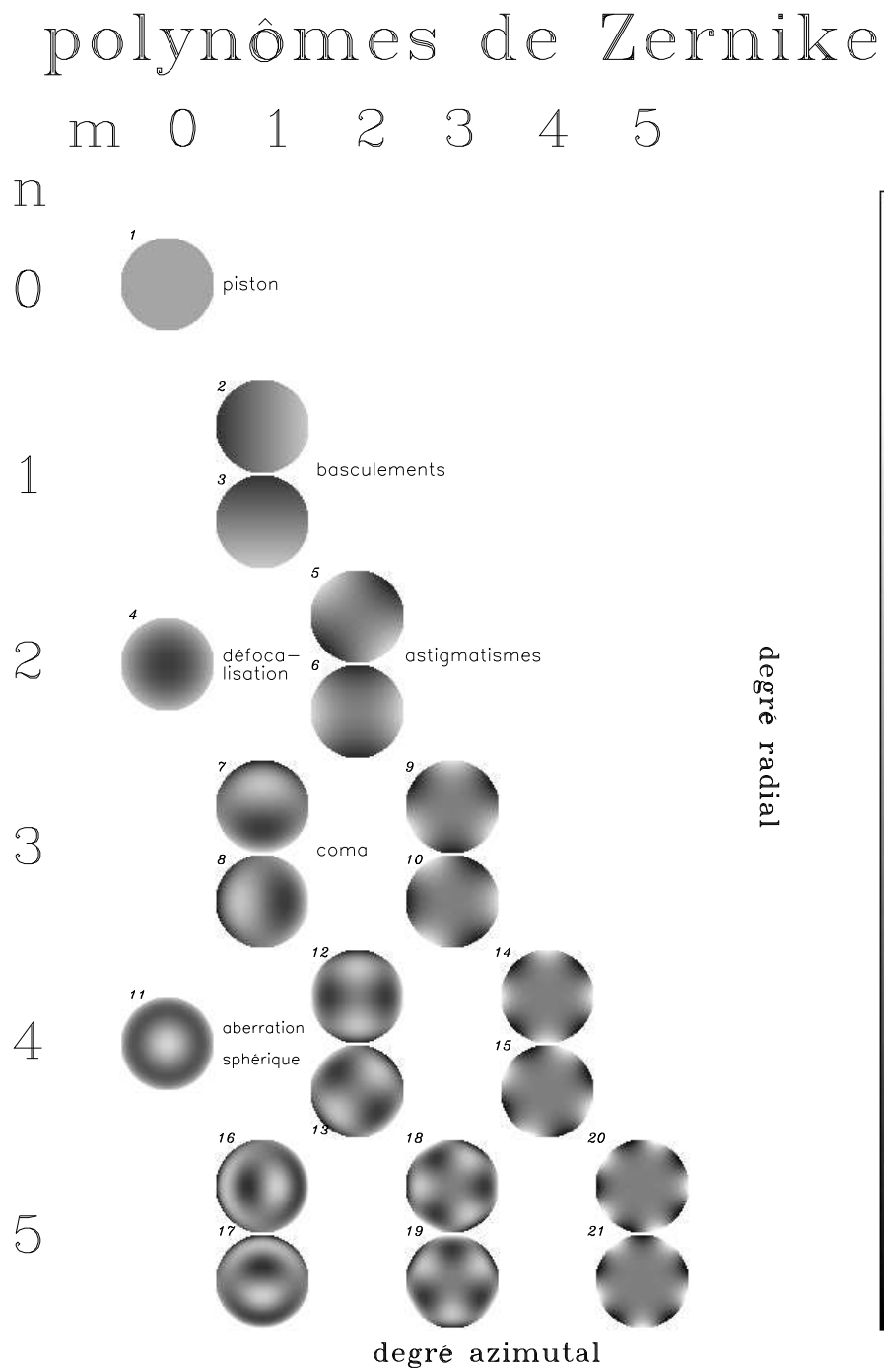


FIG. 1.3 – Carte des premiers modes de Zernike. Les modes sont classés par ordres radiaux et azimuthaux. On retrouve les aberrations optiques classiques (defocus, astigmatisme...)

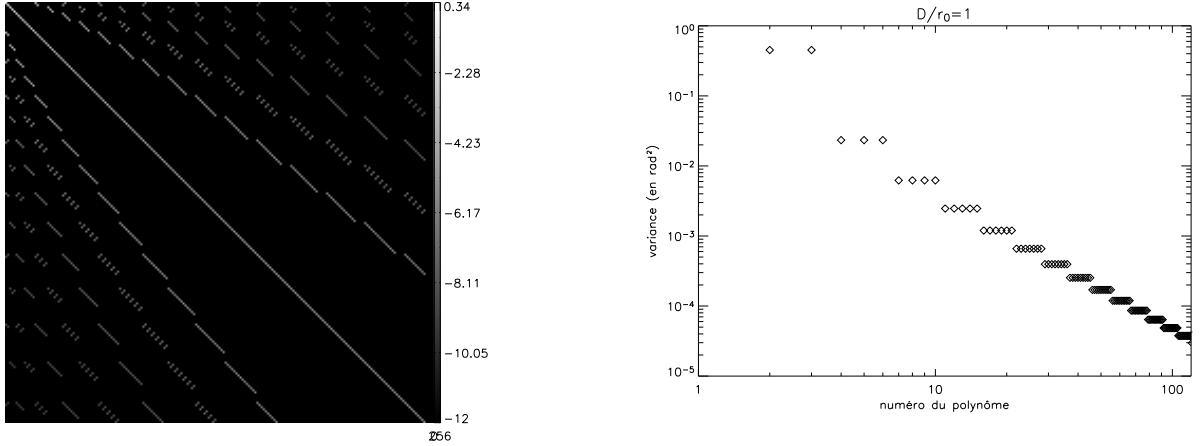


FIG. 1.4 – Covariance des modes de Zernike. Gauche : matrice de covariance des 200 premiers mode de Zernike (hors piston) en échelle logarithmique. Droite : variance de chacun de ces modes (diagonale de la matrice de covariance).

où  $D$  est le diamètre de la pupille, support des polynômes,  $\Gamma[x]$  désigne la fonction gamma, et  $n_i, n_j, m_i, m_j$ , désignent respectivement les ordres radiaux et azimutaux des polynômes  $Z_i$  et  $Z_j$ . La figure 1.4, gauche, présente la matrice de covariance  $\Sigma_{kol}$  des modes turbulents. On constate que cette matrice n'est pas diagonale, bien que fortement creuse. Il existe donc un couplage statistique entre les modes. Néanmoins ce couplage reste faible par rapport à la variance des modes.

En se rappelant que la base des polynômes de Zernike est orthonormée, on déduit de (1.25) l'expression de la variance totale de la phase turbulente :

$$\sigma_\phi^2 = \frac{1}{S} \int_S \langle \phi^2(\mathbf{r}) \rangle dr = \sum_{i=1}^{\infty} \langle a_i^2 \rangle. \quad (1.28)$$

L'expression des variances des coefficients  $a_i$  permet alors d'aboutir à la relation :

$$\sigma_\phi^2 \simeq 1,03 \left( \frac{D}{r_0} \right)^{5/3}. \quad (1.29)$$

On peut s'interroger sur la contribution de chacun des modes à cette variance totale. La figure 1.4, droite, montre la variance des modes, c'est-à-dire la diagonale de la matrice de covariance  $\Sigma_{kol}$  précédente. On constate une décroissance forte de la variance avec le numéro du polynôme : l'énergie de la turbulence se concentre dans les bas ordres, ou encore, les modes de Zernike sont aussi rangés par ordre décroissant d'énergie de la turbulence. En fait la variance d'un coefficient turbulent  $a_i$  est proportionnelle à  $(n_i + 1)^{-11/3} \left( \frac{D}{r_0} \right)^{5/3}$ ,  $n_i$  désignant l'ordre radial du polynôme  $i$ . Les modes tip et tilt sont ainsi les modes les plus énergétiques de la turbulence. Avec un peu d'anticipation, on en déduit que cette propriété est capitale dans le cadre d'une correction des effets de turbulence : la correction des bas ordres de la turbulence (basses fréquences spatiales) permet d'en corriger la majeure partie, ce qui est un soulagement pour le physicien. On peut alors s'intéresser à la variance résiduelle de la turbulence après correction parfaite des  $n$  premiers ordres radiaux,  $n$  supposé grand. On montre [Conan(1994)] que cette variance résiduelle vaut approximativement :

$$\sigma_n^2 \simeq 0,458(n + 1)^{-5/3} \left( \frac{D}{r_0} \right)^{5/3}. \quad (1.30)$$

Il est à noter que la grande échelle  $L_0$  peut, lorsqu'elle devient petite par rapport au diamètre  $D$ , modifier la variance des bas ordres et donc que les expressions précédentes sont changées [Chassat(1992), Conan(2000)].

Du point de vue temporel, les propriétés de la phase turbulente décomposée sur les polynômes de Zernike se dérivent aussi de celles de la phase elle-même, présentées en 1.3.3.2. On montre alors [Conan(1994)] que la DSP des coefficients de la turbulence exprimée sur la base des polynômes de Zernike présente une structure similaire à celle décrite en (1.19). On peut de la même manière définir une DSP du coefficient  $a_i$  de décomposition de la phase turbulente sur le polynôme  $Z_i$  pour une unique couche turbulente, puis sommer sur l'ensemble de l'atmosphère pour en déduire la DSP intégrée suivante :

$$DSP_{a_i}(\nu) = \int_0^{h_{max}} \frac{C_n^2(h)}{V(h)} F_i(\nu/V(h)) dh, \quad (1.31)$$

où la fonction  $F_i$  est définie par :

$$F_i(\nu/V(h)) \simeq 0,033(2\pi)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \tilde{Z}_i\left(\frac{\nu}{V(h)}, f_y\right) \right|^2 \left( \left(\frac{\nu}{V(h)}\right)^2 + f_y^2 \right)^{-\frac{11}{6}} df_y, \quad (1.32)$$

et  $\tilde{Z}_i$ , transformée de Fourier de  $Z_i$  est donnée par :

$$\left| \tilde{M}_i(\mathbf{f}) \right| = \sqrt{n+1} \frac{2|J_{n+1}(\pi D f)|}{\pi D f} \begin{cases} \sqrt{2} |\cos(m\theta)| & \text{pour } m \text{ paire } \neq 0 \\ \sqrt{2} |\sin(m\theta)| & \text{pour } m \text{ impaire } \neq 0 \\ 1 & \text{pour } m = 0, \end{cases} \quad (1.33)$$

où  $D$  désigne le diamètre du télescope,  $f$  la norme du vecteur de fréquence spatiale  $\mathbf{f}$ ,  $(n, m)$  l'ordre radial et azimutal du polynôme de Zernike  $i$ .

De ce résultat, on peut mettre en évidence [Conan(1994)] quelques caractéristiques très particulières de la turbulence atmosphérique exprimée dans cette base. En considérant tout d'abord une seule couche turbulente traversée :

- la DSP de la phase sur chaque mode de Zernike présente un changement de régime asymptotique pour une fréquence, que l'on désignera désormais sous le nom de fréquence de coupure,  $\nu_c$  définie par :

$$\nu_c \simeq 0,3(n+1)V/D, \quad (1.34)$$

$n$  désignant toujours l'ordre radial du mode concerné ;

- au-delà de cette fréquence de coupure, la DSP suit toujours une loi de puissance en  $f^{-17/3}$  et est proportionnelle à  $V/D$  ;
- en-deçà de cette fréquence, le comportement asymptotique est notablement dépendant de la direction du vent qui introduit des disparités selon les ordres radiaux et azimutaux.

La figure 1.5 illustre ces propriétés en présentant la DSP temporelle de quelques modes pour une unique couche turbulente ( $h = 0$ ,  $V = 12 \text{ m.s}^{-1}$ , grande échelle infinie, petite échelle négligée, unités arbitraires).

Après intégration sur l'ensemble des couches atmosphériques, ces effets se moyennent : les diverses fréquences de coupures se cumulent pour former un spectre composite, le comportement

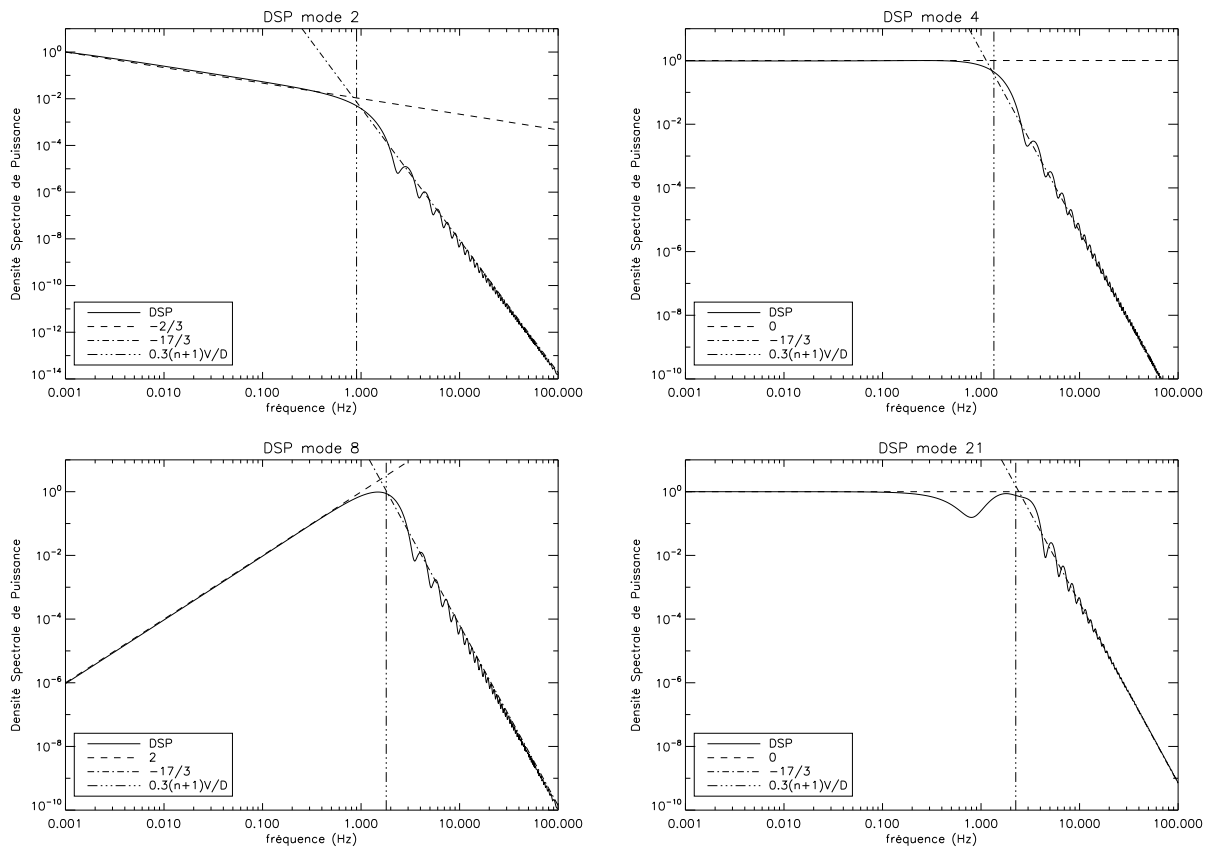


FIG. 1.5 – DSP temporelle des modes de Zernike 2 (tip), 4 (defocus), 8 (coma) et 21 pour une unique couche turbulente. Les asymptotes sont tracées pour indication, ainsi que la position de la fréquence de coupure. Les unités sont arbitraires, normalisées au maximum de chaque DSP.

asymptotique haute fréquence reste en  $f^{-17/13}$ , le comportement asymptotique basse fréquence se moyenne et est en  $f^0$  pour  $n > 1$  et  $f^{-2/3}$  pour  $n = 1$ . L'échelle externe modifie le comportement basse fréquence.

L'ensemble de ces éléments conduit donc à la remarque suivante : la base des polynômes de Zernike est particulièrement bien adaptée à la description de la phase turbulente. Ses propriétés tant spatiales que temporelles sont aisément exprimées dans cette base. Les propriétés spatiales tout d'abord se résument à la donnée de la matrice de covariance des coefficients  $a_i$ . La variance de la phase turbulente est directement reliée à la somme des variances de chacun de ces coefficients. Ceux-ci étant ordonnés par énergie décroissante, la variance de la phase turbulente est principalement reliée à celle des premiers modes. Ensuite, les propriétés temporelles de la phase turbulente peuvent s'exprimer au travers des DSP des divers coefficients  $a_i$  qui présentent des comportements asymptotiques marqués. Aussi, cette base va représenter un outil de choix dans la modélisation de la turbulence et le développement d'une commande optimale par modèle d'état. Elle va autoriser un traitement algébrique du problème de commande, facilité par la concentration de l'énergie sur les premiers modes (base de taille réduite).

## 1.5 Effets de la turbulence sur la formation d'images

Après s'être intéressé aux effets de la turbulence sur la propagation d'ondes électromagnétiques, on étudie maintenant les conséquences de ces dégradations sur la formation d'images. Ce sont ces conséquences qui ont justifié le développement de l'Optique Adaptative.

En considérant un système imageur linéaire invariant par translation, l'image  $I$  obtenue d'un objet  $O$  s'écrit :

$$I = FEP * O, \quad (1.35)$$

où  $FEP$  désigne la Fonction d'Etalement de Point du système, et  $*$  le produit de convolution. En d'autres termes, il s'agit de la réponse impulsionnelle du système : cette FEP (*Point Spread Function* ou PSF en anglais) correspond à l'image, au foyer du système, d'un point source à l'infini. On lui associe souvent sa transformée de Fourier qui n'est autre que la Fonction de Transfert Optique (FTO) du système. La théorie de la diffraction permet d'expliciter cette FEP sous la forme :

$$FEP(\boldsymbol{\rho}) \propto |TF[\psi(\boldsymbol{\rho})P(\boldsymbol{\rho})]|^2, \quad (1.36)$$

où  $\psi(\boldsymbol{\rho})$  est l'amplitude complexe de l'onde incidente sur la pupille du système optique, et  $P(\boldsymbol{\rho})$  la fonction pupille du dit système optique. Elle est définie pour un télescope selon :

$$P(\boldsymbol{\rho}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{d}{2} \leq \|\boldsymbol{\rho}\| \leq \frac{D}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (1.37)$$

incluant la présence éventuelle (et plutôt commune) d'une obturation centrale. En l'absence de turbulence, ou avec correction parfaite de celle-ci, la FEP du système se limite au carré de la transformée de Fourier de la fonction pupille. Dans ces conditions et en l'absence d'obturation centrale, l'image d'un point source est donc la tache d'Airy (voir Fig. 1.6 gauche). La largeur à mi-hauteur de la tache d'Airy est approximativement égale à  $\lambda/D$  et définit la résolution ultime du télescope, résolution qui s'améliore donc avec le diamètre  $D$ .

En présence de turbulence, les fluctuations de la phase conduisent à l'éclatement de la tache d'Airy et à l'apparition de *speckles* dans les FEP obtenues en courte pose. Ces *speckles* sont de taille caractéristique  $\lambda/D$ , tandis que la tache éclatée (FEP) s'étend typiquement sur un domaine de diamètre  $\lambda/r_0$ .

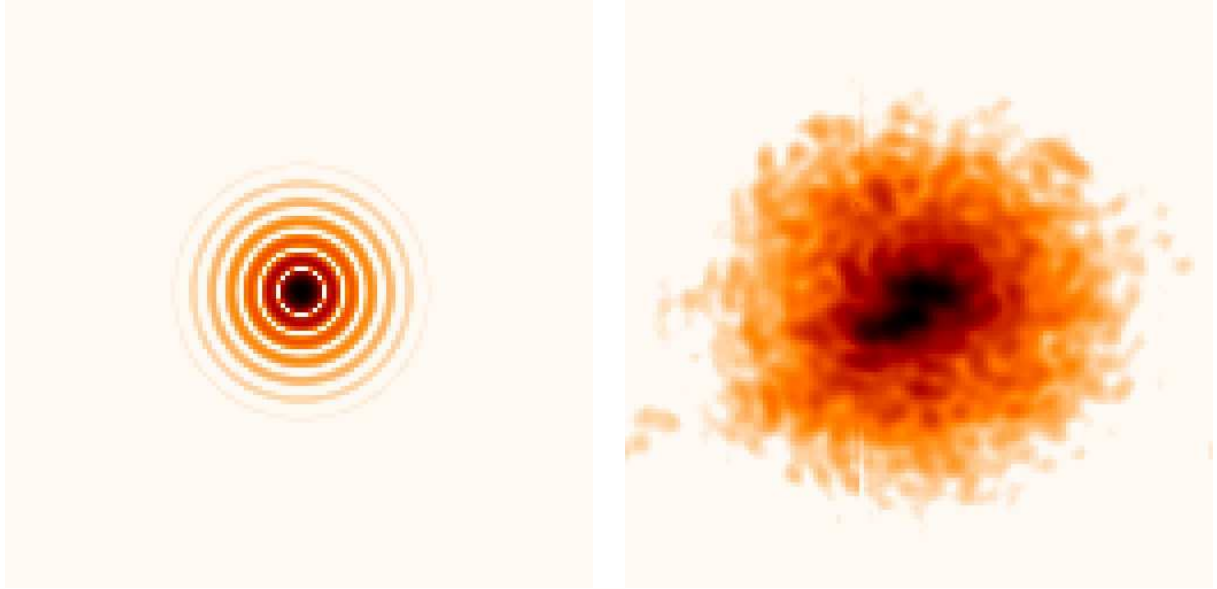


FIG. 1.6 – Comparaison de la tache d’Airy simulée et d’une FEP turbulente en pose longue acquise sur le banc d’Optique Adaptative de l’ONERA (les images sont en échelle logarithmique).

De plus, cette image varie avec la phase turbulente. L’intégration sur un temps assez long conduit à moyenner les *speckles* et l’image finale acquière une forme de gaussienne de largeur à mi-hauteur  $\lambda/r_0$  (voir Fig. 1.6 droite). La résolution du système optique chute donc. On retrouve ainsi la notion de résolution attachée à  $r_0$ , ou, de manière analogue, on peut considérer  $r_0$  comme le diamètre d’un télescope hors atmosphère donnant la même résolution qu’un télescope de diamètre infini en présence de turbulence. Rappelons qu’en général,  $r_0$  ne dépasse pas quelques dizaines de centimètres dans le visible sur de bons sites.

## 1.6 Caractérisation des effets de la turbulence sur l’imagerie

Il est important de pouvoir évaluer les effets de la turbulence atmosphérique sur la formation d’images. En particulier, la qualité de l’image obtenue avant et après correction doit pouvoir être quantifiée. Deux indicateurs usuels sont présentés : le Rapport de Strehl et l’énergie cohérente.

### 1.6.1 Rapport de Strehl

Le Rapport de Strehl (*Strehl Ratio* en anglais, noté désormais SR), est très largement utilisé en OA pour estimer la qualité d’une correction. Il est défini comme le rapport des intensités sur l’axe de la FEP corrigée et de la tache de diffraction du télescope (tache d’Airy), soit :

$$SR = \frac{FEP(\alpha = 0)}{Airy(\alpha = 0)}, \quad (1.38)$$

$\alpha$  étant l’écart angulaire à l’axe optique, la FEP et la tache d’Airy étant supposées centrées sur cette axe. Cet indicateur possède l’avantage de pouvoir être déduit directement des images acquises. Cependant, s’il contient de l’information sur la concentration de l’énergie dans le pic central de la tache,

il ne renseigne pas du tout sur la dispersion de l'énergie dans la tache et en particulier dans les hautes fréquences spatiales. Cet indicateur est cependant le plus couramment utilisé en OA, et le plus approprié pour le traitement des données expérimentales car il est la seule grandeur directement accessible. C'est donc sur lui que s'appuiera l'analyse des résultats obtenus dans ce mémoire (voir annexe [A.1](#)).

### 1.6.2 Énergie cohérente

L'énergie cohérente est définie par [\[Rousset et al.\(1991\)\]](#) :

$$E_c = \exp(-\sigma_{res}^2), \quad (1.39)$$

où  $\sigma_{res}$  désigne la variance de phase résiduelle après correction. Elle caractérise donc directement l'atténuation des hautes fréquences spatiales. On montre que pour des phases résiduelles faibles,  $E_c \simeq SR$ , et même  $E_c \simeq SR \simeq 1 - \sigma_{res}^2$  dès que la variance résiduelle est assez petite. Cet indicateur est bien adapté au traitement de l'image et notamment en déconvolution. Cependant, il se révèle inapproprié pour la caractérisation de données expérimentales, pour lesquelles la variance résiduelle est une grandeur difficilement accessible.





## Chapitre 2

# Correction par Optique Adaptative et limitations

### 2.1 Introduction

Ce chapitre présente une description générale d'une optique adaptative. L'objectif est de rappeler le principe et la nature des composants d'une OA. Il s'agit en effet des bases sur lesquelles l'ensemble de ce manuscrit va s'appuyer. Il propose aussi une première illustration de la commande en OA, en prenant pour exemple une loi de commande simple, mais très répandue, basée sur un intégrateur. Cet exemple dépeint sommairement la méthode d'asservissement de l'OA et permet d'introduire des notions de bases et des problématiques fondamentales de la commande en OA.

Nous allons nous intéresser plus particulièrement aux divers composants constituant l'OA. Il s'agit de présenter tout d'abord leur principe de fonctionnement pour une meilleure compréhension du système et des validations expérimentales menées en partie III. L'objectif est aussi de mettre en évidence comment ces composants sont choisis par rapport aux besoins de l'OA. Il s'agit le plus souvent de compromis entre les objectifs de performance de l'OA et les possibilités techniques. Les caractéristiques techniques de ces composants imposent donc certaines contraintes à l'asservissement par OA, notamment du point de vue de la dynamique temporelle. Il s'agit de mettre en évidence ces contraintes car elles conditionnent le mode de fonctionnement global de l'asservissement de l'OA, donc la structure de la commande discutée dans ce mémoire. Ensuite, cette loi de commande s'appuie sur une modélisation de l'OA et de ses composants. Il s'agit donc de proposer une modélisation du comportement de ces composants, modélisation dont on pourra rediscuter par la suite la pertinence, aux vues des systèmes réels et notamment du banc expérimental de l'ONERA.

Enfin, ce chapitre s'intéresse aux limitations de l'OA. Un certain nombre de sources d'erreurs réduisent les performances et les champs d'application de l'OA. Ce chapitre décrit ces sources d'erreurs et leurs conséquences sur la correction apportée. Il explique ainsi l'émergence de nouveaux concepts d'OA qui seront présentés au chapitre suivant et motive le développement de lois de commande plus élaborées.

Après un bref rappel du principe d'une OA au paragraphe 2.2, ses principaux composants sont introduits au paragraphe 2.3. L'accent est mis sur la description du fonctionnement et de la réponse des composants. Les principales contraintes techniques qui leur sont associées sont évoquées. Le fonctionnement d'une OA repose en particulier sur son asservissement. La problématique générale de la commande en OA est abordée au chapitre 5. Cependant, une illustration de la commande en OA est d'ores et déjà proposée au paragraphe 2.4, au travers d'un exemple de commande très classique : l'in-

tégrateur. Seul le principe général en est présenté, sans débattre de sa nature profonde, ses avantages ou ses défauts, qui sont abordés au chapitre 5. Le paragraphe 2.5 s'intéresse aux limitations d'une OA. Ce sont ces limitations qui motivent le développement de nouveaux concepts d'OA et de lois de commandes plus sophistiquées. Une description des divers types d'erreur est donc proposée. Enfin, les conséquences de cette correction partielle sur la formation d'images sont discutées au paragraphe 2.6 au travers de la Fonction d'Étalement du Point (FEP).

## 2.2 Principe de l'Optique Adaptative

L'optique adaptative est un système opto-mécanique asservi, visant à corriger en temps réel un front d'onde turbulent. La figure 2.1 propose une description schématique d'un système d'OA. Il se base sur l'analyse du front d'onde perturbé par la turbulence par un Analyseur de Surface d'Onde (ASO). Cette mesure est traitée par un système informatique temps réel afin de contrôler un Miroir Déformable (MD). Ce miroir est alors déformé afin d'imprimer au front d'onde une correction opposée à la perturbation qu'il a subi lors de la traversée de la turbulence atmosphérique. Au final, le front d'onde corrigé doit redevenir plan et permettre donc d'observer sur une voie d'imagerie une image corrigée, proche de la limite théorique de diffraction du système optique.

On peut d'ores et déjà voir transparaître dans ce mode de fonctionnement un certain nombre de problématiques techniques. Afin de réaliser une mesure correcte du front d'onde, le système d'OA doit disposer d'un flux lumineux suffisant. Ceci implique que l'OA soit pointée sur un objet brillant. Si l'objet d'intérêt ne satisfait pas à cette contrainte, une étoile brillante, dite Etoile Guide (EG) ou étoile de référence située au voisinage de l'objet d'intérêt doit être utilisée. Or on sait désormais (voir paragraphe 1.3.3.1.4) que les effets de la turbulence atmosphérique évoluent spatialement. Comme le montre le schéma 2.1, un système d'OA est aussi un système asservi fonctionnant en boucle fermée, c'est-à-dire que l'ASO est placé après le MD et réalise une mesure du front d'onde résiduel. On peut donc s'interroger sur la méthode d'asservissement du système. Les calculs sont de plus réalisés en temps réel par un système informatique devant permettre le contrôle du MD à haute fréquence, typiquement plus vite que n'évolue la turbulence au cours du temps. On a vu au paragraphe 1.3.3.2 que ce temps caractéristique d'évolution est donné par  $\tau_0$ , de l'ordre de la milliseconde ou de la dizaine de millisecondes, amenant donc à une correction à quelques centaines voire quelques milliers de Hertz. Il s'agit de fréquences de calcul non négligeables. Enfin, il se pose surtout la question du choix des composants de l'OA. Le paragraphe suivant présente ces composants.

## 2.3 Les composants d'une OA

Ce paragraphe présente les composants clés d'une OA, à savoir l'ASO, qui permet de mesurer les défauts du front d'onde générés par la turbulence, et le MD, permettant de corriger ces mêmes défauts. Il s'agit d'en présenter le fonctionnement et les caractéristiques techniques. Ces caractéristiques vont en effet conditionner la structure de l'asservissement de l'OA. L'objectif est aussi de proposer des modèles de composants qui seront exploités pour échafauder la commande optimale présentée au chapitre 5. Ce paragraphe vise aussi à faire ressortir certains compromis qui gouvernent le choix de ces composants.

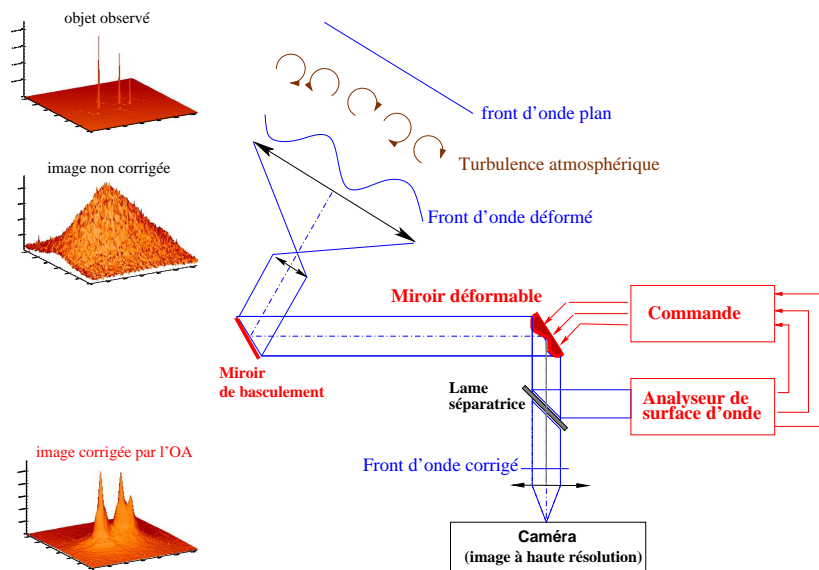


FIG. 2.1 – Schéma de principe d'un système d'Optique Adaptative.

### 2.3.1 L'analyseur de surface d'onde : le Shack-Hartmann

Il existe divers analyseurs de surface d'onde couramment utilisés en OA. Les principaux sont le Shack-Hartmann [Shack & Platt(1971)] et l'analyseur à courbure [Roddi(1988)]. Plus récemment, Ragazzoni a proposé un nouveau concept d'analyseur dit de capteur pyramidal en cours d'étude [Ragazzoni(1996)]. Il s'agit d'analyseurs plan pupille, par opposition aux analyseurs plan focal, tels que ceux basés sur la diversité de phase [Gonsalves(1982)]. Les analyseurs plan focal sont peu utilisés car faisant souvent appel à des algorithmes itératifs complexes, donc inadaptés au temps réel. Un comparatif des divers analyseurs peut être trouvé dans [Roussel(1999)]. Ce mémoire se limite à ne décrire que l'analyseur de Shack-Hartmann, seul analyseur considéré tant en simulation numérique qu'expérimentale. C'est aussi le plus répandu. Son principe de fonctionnement est présenté en figure 2.2. Il s'agit d'un analyseur plan pupille, dont la structure permet un échantillonnage de la pupille par une série de sous-pupilles. Il permet de mesurer alors la pente locale du front d'onde. Cet analyseur peut fonctionner avec des sources incohérentes, en lumière blanche. Son principe général peut être entièrement décrit dans le formalisme de l'optique géométrique.

#### 2.3.1.1 Principe de la mesure

L'analyseur est constitué d'une matrice de micro-lentilles, optiquement conjuguée avec la pupille du système, et d'une caméra située dans le plan focal de la matrice de micro-lentilles. Chaque micro-lentille échantillonne donc une portion de la pupille et donne dans son plan focal une tache image. Si le front d'onde incident est plan, la tache image est située sur l'axe optique, position qui définit une position de référence. Si le front d'onde est turbulent, la tache va se déplacer par rapport à cette référence. Le déplacement de cette tache sur la caméra renseigne sur la pente moyenne de la portion de front d'onde vue par la micro-lentille. En effet, on montre que ce déplacement  $(x_c, y_c)$  est relié à

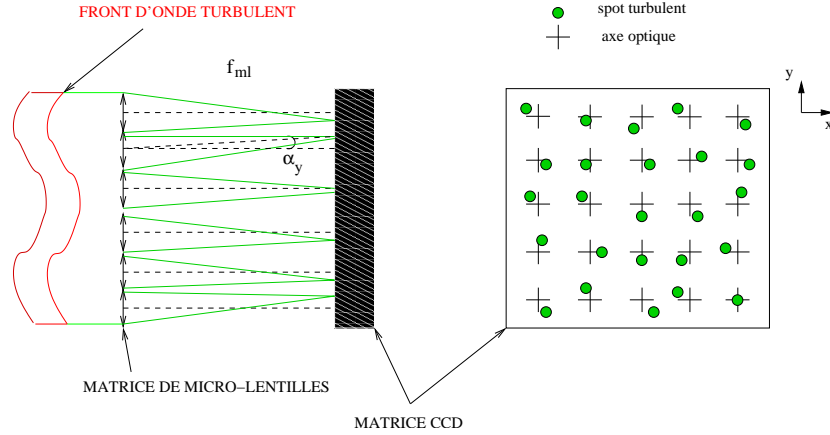


FIG. 2.2 – Principe de fonctionnement d'un analyseur de surface d'onde de type Shack-Hartmann.

la phase  $\phi$  et à sa pente locale (ou angle d'arrivée)  $(\alpha_x, \alpha_y)$  par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{x_c}{f_{ml}} = \alpha_x &= \frac{\lambda}{2\pi S} \int \int_{sspup} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy, \\ \frac{y_c}{f_{ml}} = \alpha_y &= \frac{\lambda}{2\pi S} \int \int_{sspup} \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$f_{ml}$  désignant la focale des micro-lentilles,  $S$  la surface de la sous-pupille. Cette expression suppose cependant de négliger les effets de scintillation. Les conséquences de la scintillation sur le modèle de mesure sont abordées au paragraphe 2.5. Les données mesurées sur l'ensemble des micro-lentilles renseignent donc sur la forme du front d'onde incident dans la pupille. On notera que la formule (2.1) implique l'achromaticité du senseur.

Le déplacement  $(x_c, y_c)$  d'une tache image est généralement évalué en mesurant un Centre De Gravité (CDG) et en se donnant une position de référence (ou pentes de référence) obtenue par calibration en l'absence de turbulence. Cette estimation du CDG se fait généralement après diverses opérations de pré-traitement des images, afin de diminuer le bruit sur la mesure. Ce sont des méthodes de type seuillage (soustraction à l'imagette de la sous-pupille d'une valeur uniforme, avec mise à zéro des valeurs négatives), fenêtrage (réduction de la zone de calcul du barycentre à une fenêtre plus petite). Il existe aussi d'autres techniques d'estimation du déplacement de la tache image, telles que le CDG pondéré [Nicolle *et al.*(2004)] faisant intervenir dans le calcul du barycentre une fonction de pondération de chaque pixel, ou la méthode de corrélation [Michau *et al.*(1992), Noël(1997), Poyneer *et al.*(2003)], particulièrement adaptée aux sources étendues. Une comparaison des diverses méthodes et leur optimisation selon les divers modes d'utilisation de l'OA peut être trouvée dans [Thomas(2005), Thomas *et al.*(2006)].

Utilisé dans le cadre de faibles perturbations (petits déplacements centrés), le comportement de l'analyseur Shack-Hartmann est linéaire. Aussi, le calcul des pentes locales du front d'onde qu'il fournit (vecteur  $\mathbf{p}$ ), se représente comme une opération linéaire sur la phase, *via* une matrice dite matrice ASO et notée  $\mathbf{D}$  :

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\phi, \quad (2.2)$$

en décomposant la phase  $\phi$  sur une base de modes (telle que la base des modes de Zernike). On peut considérer  $\mathbf{D}$  comme un opérateur de dérivation intégrée sur chaque sous-pupille. Pour l'heure,

aucune hypothèse n'est faite sur les dimensions de  $\mathbf{D}$ .

Ajoutons que la mesure réellement obtenue avec le Shack-Hartmann est entachée de bruit. Ce bruit de mesure par le capteur a deux origines, le bruit de photons (lié au signal et au fond de ciel) et le bruit du détecteur lui-même [Rousset *et al.*(1987), Séchaud *et al.*(1991), Rousset(1993)]. Le premier relève d'un processus poissonnien, le second d'un processus gaussien. La mesure de pente, par exemple par une méthode de CDG, est alors elle-même bruitée. On peut distinguer les contributions du bruit de photons et de détecteur et exprimer la variance de ces bruits sur la mesure de pente. Dans le cas du CDG, la variance du bruit de photons sur la mesure de CDG (exprimée en radians carrés de phase) est donnée par :

$$\sigma_{phot}^2 = \left( \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{N_{ph}} \left( \frac{X_T}{X_D} \right)^2, \quad (2.3)$$

où  $N_{ph}$  désigne le nombre de photons reçus par sous-pupille,  $X_T$  la largeur à mi-hauteur de la tache image, et  $X_D$  la largeur à mi-hauteur limitée par la diffraction. Les largeurs  $X_T$  et  $X_D$  sont habituellement exprimées en nombre de pixels.

La variance du bruit de détecteur s'exprime sous la forme (même unité physique) :

$$\sigma_{detect}^2 = \left( \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_{e-}}{N_{ph}} \frac{X_S^2}{X_D} \right)^2, \quad (2.4)$$

$\sigma_{e-}$  désignant l'écart quadratique moyen du bruit par pixel (en électrons) et  $X_S$  le nombre de pixels pris en compte dans le calcul du CDG (en général  $X_S \simeq 2X_T$ ). Une étude du bruit de mesure pour l'analyseur Shack-Hartmann a été réalisée par Noel [Noël(1997)].

Ainsi la mesure finale  $\mathbf{p}$  fournie par l'analyseur se représente sous la forme :

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\phi + \mathbf{w}, \quad (2.5)$$

$\mathbf{w}$  désignant un bruit additif issu des bruits de photons et de détecteur. Ce bruit additif sur la mesure de pente est généralement considéré comme blanc, gaussien, décorrélé du signal, et en première approximation décorrélé spatialement entre pentes différentes (sa matrice de covariance est diagonale). Dans la pratique, cette deuxième hypothèse est rarement vérifiée, en raison du bruit de lecture, généralement spatialement corrélé, comme le signale déjà Gendron pour ADONIS [Gendron(1995)] et comme on le verra au chapitre 12.

Notons enfin qu'un premier compromis apparaît dans le choix de la structure de l'analyseur de front d'onde par Shack-Hartmann. En effet, on souhaiterait naturellement augmenter le nombre de sous-pupilles pour améliorer l'échantillonnage et donc potentiellement la précision de reconstruction du front d'onde. Cependant ceci implique de diminuer le nombre de photons par sous-pupille. On risque donc de perdre en précision de mesure par augmentation du bruit. Ce dilemme peut être passablement résolu par la recherche d'EG suffisamment brillantes, et, en leur absence, par l'utilisation d'étoiles artificielles (LASER) (voir paragraphe 3.3.1.3).

### 2.3.1.2 Considérations temporelles

La mesure de front d'onde est réalisée par un capteur. Diverses technologies existent mais seuls les capteurs CCD sont abordés ici. Ces capteurs permettent une analyse faible bruit dans le visible et le proche infra-rouge avec la possibilité de grands capteurs offrant une grande résolution spatiale. Ceci rend leur usage généralement plus adapté en astronomie. D'un point de vue temporel, on a déjà

souligné que la turbulence atmosphérique évolue selon un temps caractéristique  $\tau_0$  proche de la milliseconde. La mesure des effets de la turbulence sur le front d'onde doit donc être réalisée à intervalles plus courts que  $\tau_0$  si l'on veut accéder à une information pertinente permettant ensuite une correction de ces effets. Cependant, la réalisation d'une mesure précise malgré la présence des nombreuses sources de bruit implique l'intégration du signal (des photons). Là encore un compromis apparaît donc. Ajoutons à cela que la mesure réalisée par le CCD n'est pas accessible immédiatement. Le fonctionnement des CCD repose sur le transfert de charges, transfert qui prend du temps. Des étages de traitement des données (amplification par exemple) peuvent exister. Tous ces éléments conduisent à l'existence d'un temps de lecture qui vient s'ajouter au temps d'intégration. Ce temps de lecture est principalement fixé par la technologie utilisée. En général, temps de lecture et temps d'intégration sont considérés comme comparables. C'est l'hypothèse qui sera retenue par la suite.

### 2.3.2 Le miroir déformable

Plusieurs types de miroirs déformables sont couramment utilisés en OA, dont on peut trouver une description dans [Séchaud(1999)]. Les plus traditionnels sont les miroirs de type *Stacked Actuators Mirror* (SAM) ou à empilement de piézo-électriques, et les miroirs bimorphes. Seuls les miroirs SAM sont abordés dans ce mémoire. Ce sont les plus communément utilisés conjointement avec un analyseur de type Shack-Hartmann. Néanmoins, il faut souligner l'intérêt accru porté aux miroirs déformables à l'heure où l'attention se porte sur des systèmes à grand nombre de degrés de liberté, ou de très grande taille. Ces nouveaux systèmes suscitent le développement de nouvelles technologies dans ce domaine (miroirs à cristaux liquides [Riehl *et al.*(1988)], micro-miroirs basés sur la technologie *Micro Opto Electronico Mechanical Systems* ou MOEMS [Liotard(2004)], miroirs électrostatiques [Vdovin(1998)] ou magnétiques [Charton *et al.*(2003)]).

#### 2.3.2.1 Principe de la correction

Les miroirs SAM sont constitués d'une surface réfléchissante souple à l'arrière de laquelle sont collés des actionneurs (ou actuateurs, si l'on apprécie les anglicismes) venant pousser et tirer la surface pour la déformer (figure 2.3 gauche). Ces actionneurs sont constitués d'empilements de piézo-électriques qui se contractent ou se dilatent à l'application de hautes tensions de commande. Le miroir, en se déformant, introduit un retard de phase qui doit permettre de compenser les défauts de la phase turbulente incidente. La phase résiduelle, définie par :

$$\phi^{res}(\mathbf{r}) = \phi^{tur}(\mathbf{r}) - \phi^{cor}(\mathbf{r}), \quad (2.6)$$

où  $\phi^{tur}$  désigne la phase turbulente et  $\phi^{cor}$  désigne la déformation du miroir, est ainsi ramenée à zéro. Les principaux paramètres d'un miroir SAM sont la densité d'actionneurs dans la pupille et la déformation maximale qu'ils pourront générer sur la surface du miroir. Le premier élément définit le nombre de modes (ou fréquences spatiales) maximal que le miroir peut corriger. En notant  $d_{act}$  le pas interactionneur, la fréquence spatiale maximale pouvant être corrigée par le miroir est donnée par  $1/d_{act}$ . Le second paramètre définit sa course maximale de correction et donc les conditions de turbulence dans lesquelles il reste efficace.

La phase de correction que peut générer le miroir pour s'adapter au front d'onde turbulent va être définie au travers de ses fonctions d'influences : il s'agit des déformées générées par chaque actuateur pris seul à seul. La figure 2.3, droite, représente une telle déformée. On vérifie bien la linéarité de la réponse de chaque actuateur (en terme de déformée) en fonction de la tension de commande. Mais généralement cette réponse n'est pas rigoureusement identique entre actuateurs et il est nécessaire

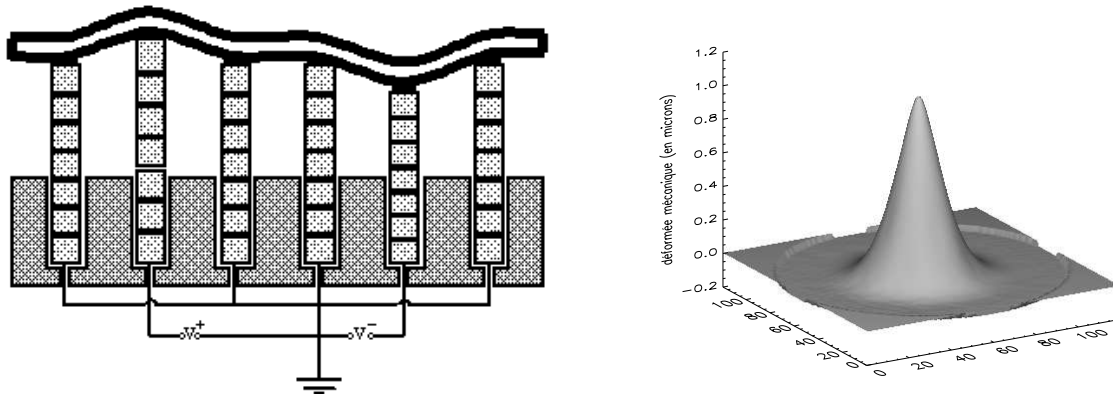


FIG. 2.3 – Gauche : principe de fonctionnement d'un miroir SAM. Droite : exemple de fonction d'influence d'un miroir SAM. La déformée mécanique en microns est tracée.

de les caractériser chacune, expérimentalement. Toutefois, on vérifie assez bien aussi la linéarité de la réponse spatiale du miroir : la déformée globale générée par le miroir sollicité par un vecteur de tensions est généralement bien représentée par la combinaison des réponses de chaque actionneur. On définit alors une relation linéaire entre tensions appliquées  $\mathbf{u}$  et déformation du miroir, au travers d'une matrice  $\mathbf{N}$ , dite matrice d'influence selon :

$$\phi^{cor} = \mathbf{N}\mathbf{u}, \quad (2.7)$$

où  $\phi^{cor}$  désigne la phase exprimée dans une base (modale comme celle de Zernike, ou zonale si il s'agit d'une représentation point à point de la phase, *via* une carte pixellique par exemple).

Cette linéarité ainsi que d'autres caractéristiques propres à la réponse de ce type de miroir sont détaillées au paragraphe 12 lors de la calibration du miroir SAM du banc d'OA de l'ONERA. On verra aussi que la déformée de chaque actionneur peut être approximée analytiquement, autorisant des modélisations numériques de son comportement (paragraphe 8).

Notons que ces miroirs déformables sont le plus souvent accompagnés d'un second miroir, dit de basculement, miroir plan qui ne corrige que les modes tip/tilt. Il permet alors de pas utiliser la majeure partie de la course du miroir déformable à la seule correction de ces modes, les plus énergétiques au sein de la turbulence rappelons-le (voir paragraphe 1.4).

Enfin, soulignons ici aussi que certains compromis doivent être trouvés lors du choix d'un miroir déformable pour une OA. Une tendance naturelle consisterait à augmenter la densité d'actionneurs et ainsi le nombre de fréquences spatiales corrigeables par le miroir. Un tel choix se heurte à deux obstacles. D'abord une telle densification est limitée par la technologie. Les contraintes optiques incitent à choisir des diamètres de miroir relativement faibles or le pas inter-actionneur est limité aujourd'hui entre 2 et 3 mm pour les SAM. D'autre part, la réduction du pas inter-actionneur se traduit par une perte de course des actionneurs. En général, le nombre d'actionneurs est déterminé conjointement au nombre de sous-pupilles puisqu'ils sont placés le plus souvent aux coins de chaque sous-pupille.



### 2.3.2.2 Dynamique temporelle

Du point de vue de la réponse temporelle, deux aspects nous importent. D'une part, l'existence de retard à l'application de la correction. Généralement, il existe un étage d'amplification des tensions de commande, les miroirs étant commandé par des tensions de l'ordre de plusieurs centaines de volts. Cet étage permet aussi d'assurer que les tensions ne dépassent pas un seuil critique. Cet étage d'amplification peut introduire un retard temporel. D'autre part, la correction va être tributaire de la dynamique temporelle du miroir. Certains miroirs (type bimorphes) présentent des fréquences de résonance basses, pouvant impacter sur la réponse dynamique du miroir. Les miroirs de type SAM jouissent, du fait de la configuration des piézo-électriques empilés, d'une très grande bande passante, supérieure à la dizaine de kHz. Il faut donc savoir mettre en rapport vitesse de correction recherchée et capacités dynamiques du miroir. Le problème est donc évoqué au niveau de la boucle d'asservissement au paragraphe 2.4.2.

### 2.3.2.3 Vers de nouvelles corrections

Notons que seuls des miroirs déformables placés après le télescope au sein de l'OA ont été considérés ici. Et hormis l'adjonction d'un miroir de correction du basculement, l'intégralité de la correction est réalisée par le MD seul. De nouveaux modes de corrections sont cependant à l'étude. D'une part, la correction de la turbulence peut être envisagée directement au niveau du miroir secondaire du télescope grâce au développement de secondaires adaptatifs [Salinari *et al.*(1993)]. Cette solution permet de pré-compenser les effets de la turbulence tout en réduisant les contraintes optiques (nombre de composants, émission thermique). Le Large Binocular Telescope (LBT) réalisera la première implantation d'un tel système [Riccardi *et al.*(2004)]. Une implantation sur le VLT est aussi prévue [Hubin *et al.*(2005)] pour les systèmes GALACSI et GRAAL de type GLAO (voir chapitre suivant). Basée sur une technologie de type actionneurs électromagnétiques déformant une coque réfléchissante souple, ces systèmes sont relativement complexes, de par leur structure et leur réglage. Ils posent surtout des problèmes de contrôle, puisque leur grande taille fait apparaître des fréquences de résonance basses. La gestion de leur dynamique temporelle devient donc une problématique, qui peut être gérée soit au niveau du composant et de chacun de ses actionneurs par des boucles locales d'asservissement, soit plus globalement au sein même de l'asservissement de l'OA.

On envisage aussi une correction à plusieurs étages, correspondant à plusieurs MD en série, chacun étant dédié à la correction de certains modes fréquentiels. La séparation peut alors porter sur le spectre temporel, ou spatial (Woofers-Tweeters)[Conan *et al.*(2006), Hampton *et al.*(2006)]. Les miroirs du télescope pourraient jouer le rôle de premier étage de correction. La gestion d'une telle correction multi-étage pose de nouveaux problèmes en terme de contrôle.

## 2.4 La commande

Ce paragraphe présente une approche très succincte du problème de la commande en OA. Le but est d'illustrer par un exemple simple et classique comment une boucle d'OA fonctionne. Il s'agit surtout d'introduire des notions de base indispensables pour la suite, tout en soulignant les contraintes intrinsèques à une OA qui conditionnent la structure de la commande. La méthode de contrôle proposée ici, basée sur un intégrateur, ainsi que ses avantages ou défauts ne sont donc pas discutés. La problématique de la commande en OA est abordée de manière plus générale dans le chapitre 5. L'occasion sera donnée alors de rediscuter de la solution présentée ici selon une autre perspective.

Le problème de la commande en OA peut être défini pour l'heure ainsi : il consiste à contrôler le miroir à partir des mesures de l'ASO, pour obtenir la meilleure correction possible du front d'onde incident. La solution proposée dans cet exemple est la commande de type intégrateur, utilisant une matrice, dite de commande du système, pour déterminer les tensions de commande.

### 2.4.1 Matrices d'interaction et de commande

Dans la pratique, une solution standard, simple et efficace, consiste à définir une relation directe entre commandes appliquées au miroir et mesures de pente. En effet, on a vu que le MD et l'ASO pouvaient être considérés comme des composants linéaires. Supposons alors que l'on connaisse l'effet de l'application de tensions au miroir sur la mesure de pentes de l'ASO selon la relation :

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}_{inter} \mathbf{u}, \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{M}_{inter}$  est la matrice dite d'interaction. Alors le vecteur de tension permettant de corriger un front d'onde turbulent ayant conduit à une mesure de pentes  $\mathbf{y}^{tur}$  est donné par :

$$\mathbf{u}_{corr} = -\mathbf{M}_{com} \mathbf{y}^{tur}. \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{M}_{com}$ , appelée matrice de commande, désigne l'inverse généralisée de  $\mathbf{M}_{inter}$ .  $\mathbf{M}_{inter}$  est en effet en général rectangulaire, donc non inversible.  $\mathbf{M}_{com}$  est alors définie par :

$$\mathbf{M}_{com} = \left( \mathbf{M}_{inter}^T \mathbf{M}_{inter} \right)^\dagger \mathbf{M}_{inter}^T. \quad (2.10)$$

La matrice  $\mathbf{M}_{inter}^T \mathbf{M}_{inter}$  est, elle, carrée mais pas toujours inversible (d'où le symbole  $\dagger$ ). Lorsque le noyau de  $\mathbf{M}_{inter}$  est non réduit à zéro, les modes appartenant à ce noyau sont dits non vus, car associés à une mesure nulle. L'inversion de  $\mathbf{M}_{inter}^T \mathbf{M}_{inter}$  est alors obtenue en se restreignant à un sous-espace orthogonal au noyau.

Même lorsque le noyau de  $\mathbf{M}_{inter}$  est réduit à zéro, il existe en général des modes dits mal vus, associés à des valeurs propres faibles (modes mal mesurés) de  $\mathbf{M}_{inter}^T \mathbf{M}_{inter}$  et conduisant à un conditionnement élevé de cette matrice (rapport de la plus haute et de la plus basse valeur propre). Or, on montre qu'un conditionnement élevé conduit à une sensibilité accrue de la reconstruction au bruit de mesure : le bruit se propage fortement au travers des modes mal vus. L'inversion de  $\mathbf{M}_{inter}^T \mathbf{M}_{inter}$  est alors obtenue par décomposition en valeur singulière (*Singular Value Decomposition* ou SVD), tronquée de  $\mathbf{M}_{inter}$ . Cela revient à appliquer une régularisation brutale lors du calcul de l'inverse de  $\mathbf{M}_{inter}^T \mathbf{M}_{inter}$ , par contrôle de dimension : on se restreint ainsi à une inversion sur un sous-espace orthogonal à celui généré par les modes mal-vus [Quiros-Pacheco(2006), Idier(2001), Gendron(1995)]. De plus amples détails sont donnés en annexe B quant au problème du calcul pratique de  $\mathbf{M}_{com}$  et de la gestion de ces modes.

Dans la pratique, ce procédé suppose de connaître  $\mathbf{M}_{inter}$ . Elle est obtenue expérimentalement en appliquant successivement une tension connue à chaque actionneur du miroir et en mesurant les fronts d'onde ainsi générés grâce à l'ASO. Pour s'affranchir des problèmes liés à une mesure absolue, on applique en fait à chaque actionneur une tension puis son opposée, pour en déduire un déplacement relatif sur l'ASO. Ce déplacement est ensuite divisé par le double de la tension appliquée pour obtenir le vrai déplacement (par volt) associé à l'excitation d'un actionneur donné. On construit ainsi directement et expérimentalement  $\mathbf{M}_{inter}$ , dont chaque colonne contient très exactement ce vrai déplacement obtenu lors de l'excitation individuelle de chaque actionneur.

La méthode présentée ci-dessus cache en fait une méthode de reconstruction modale de la phase sur la base des modes du miroir (base dite canonique), basée sur une méthode des moindres carrés. Il s'agit en effet d'une minimisation de la mesure de pente résiduelle, c'est-à-dire d'un critère du type :

$$\epsilon(\mathbf{u}) = \|\mathbf{y}^{tur} - M_{inter}\mathbf{u}\|^2, \quad (2.11)$$

dont la solution aux moindres carrés conduit très exactement à l'expression (au signe près) donnée en équation (2.9), avec la même définition de  $\mathbf{M}_{com}$ . Cette étape de reconstruction est parfois aussi appelée commande spatiale.

## 2.4.2 Contrôle dynamique de la boucle

La reconstruction présentée précédemment permet de définir les commandes à appliquer au miroir à partir des mesures ASO de la turbulence. Cependant, aucune considération temporelle n'a été faite jusque là. Pourtant, la turbulence évolue et l'ensemble des opérations de mesure, calcul et correction prend du temps. L'aspect dynamique de la correction doit donc être pris en compte. En outre, comme nous allons le voir, la présentation faite précédemment correspond à un fonctionnement dit en boucle ouverte de l'asservissement d'OA. Ce mode de fonctionnement n'est pas appliqué sauf configuration particulière. Ce paragraphe se penche donc sur l'implantation réelle d'une loi de commande pour l'OA.

### 2.4.2.1 Considérations temporelles, chronogramme

Le contrôle du système d'OA est dynamique. Il doit être réalisé suffisamment vite pour corriger en temps réel la turbulence, mais est aussi tributaire des caractéristiques temporelles des composants. Il est difficile de détailler le chronogramme temporel de chaque système d'OA tant il varie en fonction des propriétés des composants et de l'architecture choisie. Néanmoins, on peut donner une idée générale en faisant quelques hypothèses simples mais relativement représentatives.

Le paragraphe 2.3.1 a souligné que la mesure ASO était intégrée sur un certain intervalle de temps, que l'on note  $T$ , associé à une fréquence dite d'échantillonnage  $f_{ech} = 1/T$  de l'ASO. Ce temps d'intégration  $T$  (appelé aussi retard incompressible) doit être inférieur à  $\tau_0$ . Ainsi,  $f_{ech}$  est de l'ordre de quelques centaines de Hertz, voire du kiloHertz. On suppose que le processus de lecture de la mesure, l'ensemble des opérations de calcul de la correction (réalisé par le calculateur numérique temps réel) et l'application de la correction représentent des temps de retard additifs dont la durée globale (appelée aussi retard pur) est égale au temps  $T$ . Ainsi, la fréquence d'asservissement est déterminée par la fréquence  $f_{ech}$ . Enfin, on va supposer aussi que la correction appliquée est constante par intervalle de durée  $T$ . Une conséquence importante concerne la dynamique miroir. Celle-ci devient négligeable dès lors que la bande passante du miroir devient très supérieure à  $f_{ech}$ . C'est le cas avec les miroirs SAM. Leur dynamique peut être considérée comme parfaite, leur réponse s'assimile à un échelon.

La figure 2.4 propose un chronogramme résumant la dynamique temporelle de l'asservissement d'une OA. La mesure du front d'onde est intégrée durant un intervalle de temps  $[(n-2)T, (n-1)T]$ . Durant l'intervalle de temps  $[(n-1)T, nT]$  suivant, la mesure est lue, les tensions de correction sont calculées et appliquées au miroir. Ainsi, dans notre exemple, à l'instant  $nT$  une nouvelle correction est appliquée et est maintenue constante durant l'intervalle suivant afin de corriger le front d'onde turbulent pendant ce même intervalle. Il s'agit là d'un exemple représentatif de chronogramme d'OA, mais non général. Certains systèmes présentent des chronogrammes plus complexe.

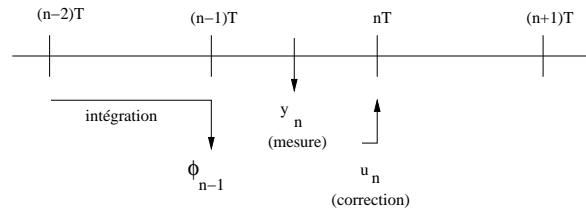


FIG. 2.4 – Chronogramme d'un asservissement d'OA. L'ASO réalise une mesure intégrée du front d'onde incident  $\phi_{n-1}$  durant l'intervalle  $[(n-2)T, (n-1)T]$ , puis les données sont lues, les pentes  $y_n$  et les tensions de correction  $u_n$  calculées durant l'intervalle  $[(n-1)T, nT]$  suivant. Les tensions sont enfin appliquées en  $nT$ , corrigeant de ce fait le front d'onde intégré durant l'intervalle de temps suivant.

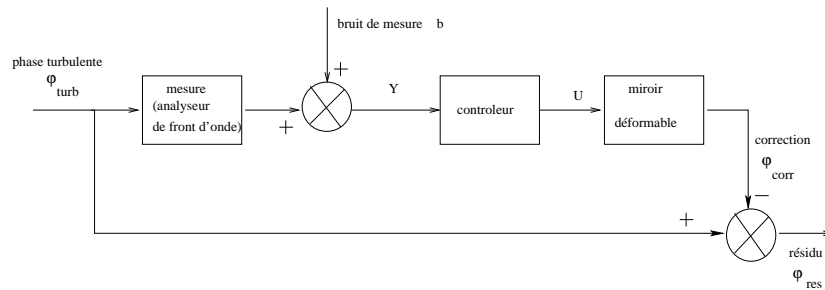


FIG. 2.5 – Schéma-bloc d'une boucle ouverte d'OA.

Ce chronogramme fait apparaître ainsi un retard global de l'asservissement de l'OA de deux trames entre l'occurrence de turbulence et la correction qui s'y rapporte. L'OA est irrémédiablement soumise à un retard de correction et donc une erreur associée, à moins de pouvoir prédire l'évolution de la turbulence. Ce chronogramme montre aussi que bien que le signal turbulent soit continu dans le temps, les grandeurs d'intérêt (mesures de pente, tensions de commande) et le processus de commande sont discrets. Cette dualité continu-discret mène généralement à des traitements ambigus de l'OA et de sa commande. Le problème sera abordé plus en détail au paragraphe 4.3.2. La problématique de la commande en OA est intrinsèquement liée à cette présence de retards.

#### 2.4.2.2 La boucle ouverte

La correction boucle ouverte consiste à mesurer directement la turbulence atmosphérique grâce à l'ASO, pour venir ensuite en réaliser la correction avec le miroir. Le principe est résumé par le schéma-bloc proposé en figure (2.5). La méthode de contrôle peut alors directement reposer sur le principe décrit au paragraphe 2.4.1.

Cette configuration est vite limitée par la dynamique de l'ASO (on mesure la pleine turbulence) et se heurte à ses non-linéarités. En outre, aucune information sur la qualité de la correction apportée n'est réinjectée dans le système : la correction se fait en somme en aveugle, à l'exception du contrôle *a posteriori* de l'image finale. La mesure de pente par l'ASO, et le calcul de la correction introduisent des retards qui ne sont pas pris en compte. La boucle ouverte offre cependant l'avantage d'être toujours stable (voir la définition de la stabilité au paragraphe 4.5.3).

Les corrections en boucle ouverte ne sont donc pas appliquées actuellement en OA. Cependant

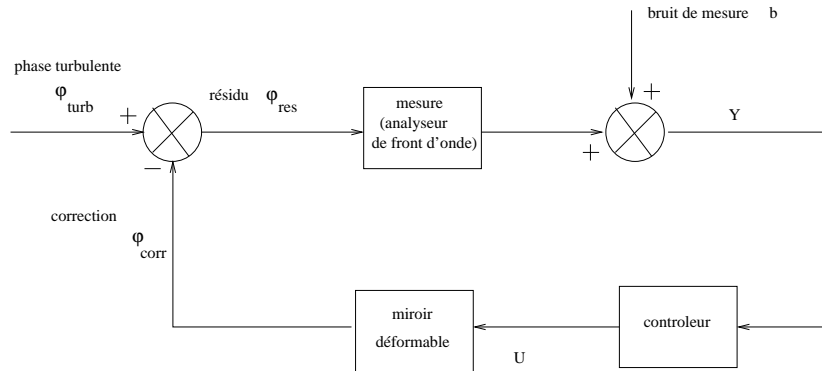


FIG. 2.6 – Schéma-bloc d'une boucle fermée d'OA. La correction est réalisée avant la mesure. L'analyseur mesure le résidu.

on notera que cette solution est envisagée dans le cadre de l'Optique Adaptative Multi-Objet (Multi-Object Adaptive Optics MOAO en anglais), technique qui sera présentée au paragraphe 3.3.4. On peut alors s'interroger sur la gestion efficace d'un tel mode de fonctionnement.

### 2.4.2.3 La boucle fermée

La boucle fermée est le cadre privilégié de l'OA. Ici, la correction par le miroir est réalisée préalablement à la mesure par l'ASO, si bien que celui-ci mesure un front d'onde résiduel après correction (voir figure 2.6). L'avantage est alors la mesure d'un déplacement faible, garantissant la linéarité. Le miroir étant placé avant l'analyseur, la matrice d'interaction est aisément mesurée.

Cependant cette configuration est plus compliquée, notamment quant aux aspects dynamiques. On mesure une pente résiduelle et l'existence de retards dans la boucle d'asservissement implique qu'en permanence la commande tente de "poursuivre" le signal turbulent pour garantir une mesure de pente résiduelle nulle. La stabilité de cet asservissement est alors plus difficile à garantir.

La commande la plus communément appliquée est la commande intégrateur, qui, dans le cadre discret qui nous concerne (calculateur numérique) s'écrit :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + g\delta\mathbf{u}_n, \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{u}_n$  désigne le vecteur de commande à l'instant  $n$ , et  $\delta\mathbf{u}_n$  le terme correctif calculé selon l'équation (2.9).  $g$  est appelé le gain de l'intégrateur. Cette loi de commande permet de proposer une correction simple et rapide, dès lors que la matrice d'interaction a pu être inversée (voir paragraphe 2.4.1 et annexe B). Cette commande offre une atténuation très forte des basses fréquences et une absence d'erreur statique. La conservation de la stabilité (voir définition en paragraphe 4.5.3) de l'asservissement étant donné le retard de la boucle d'asservissement définit un intervalle pour le choix de  $g$ . Ensuite, on montre que le choix de  $g$  au sein de cet intervalle peut être optimisé afin de garantir les meilleurs performances, en particulier en considérant le système multivarié initial comme la mise en parallèle de plusieurs systèmes monovariés indépendants. On réalise alors une optimisation séparée de chaque sous-système : c'est l'Intégrateur à Gain Modal Optimisé (IGMO) [Gendron(1995), Desenne(1998), Ellerbroek(1994)]. Le point sera rediscuté en paragraphe 5.2. Une description de cette commande dans le cadre du banc BOA de l'ONERA est proposée en annexe B.

Cette loi de commande équipe de nombreux systèmes tant d'optique adaptative que de régulation (température, vitesse ...) de notre quotidien. Néanmoins, malgré ses bonnes propriétés expliquant une application répandue, cette commande ne prend pas en compte le contexte applicatif particulier de l'OA, les propriétés du signal corrigé et du mode de correction (retards, composants), ou le critère de performance réellement visé (à définir). Il s'agit d'une solution de contrôle générique, que seule l'optimisation modale des gains permet d'adapter autant que faire se peut au contexte. Ces défauts, tout à fait gérables pour une OA classique, deviennent majeurs dans le cadre d'OAs plus sophistiquées (voir chapitre suivant).

## 2.5 Limitations d'une Optique Adaptative

L'OA est une technique efficace et prouvée. Néanmoins, la correction apportée n'est pas parfaite. Un certain nombre d'erreurs en limite les performances, conduisant à une correction partielle de la turbulence et à l'existence d'un résidu de correction. En notant  $\sigma_{res}^2$  la variance de la phase résiduelle après correction, on peut donc identifier ce résidu à une somme d'erreurs, pouvant être regroupées selon divers postes :

$$\sigma_{res}^2 = \underbrace{\sigma_{scint}^2 + \sigma_{aniso}^2}_{\text{turbulence}} + \underbrace{\sigma_{alias}^2 + \sigma_{bruit}^2 + \sigma_{fit}^2 + \sigma_t^2}_{\text{optique adaptative}} + \underbrace{\sigma_{calib}^2 + \sigma_{aberr}^2}_{\text{calibrations}} + \sigma_{exo}^2. \quad (2.13)$$

Ces termes d'erreur regroupés autour des postes d'erreur liés à la turbulence, l'optique adaptative, la calibration ou des éléments exogènes sont décrits dans les quatre paragraphes suivants. Ce découpage reste arbitraire. Des couplages peuvent intervenir entre les diverses erreurs mentionnées. Il peut aussi être fortement enrichi [Rousset(1993)] et détaillé dès que les exigences du système d'OA augmentent, comme dans le cadre des OA extrêmes, nécessitant des performances très élevées (voir paragraphe 3.2). Mais cette expression reste une bonne approximation. Cette partie rappelle ces principaux postes d'erreur d'une OA et les conséquences de cette correction partielle sur la qualité des images formées.

### 2.5.1 Erreurs dues à la turbulence

#### 2.5.1.1 Erreur de scintillation : $\sigma_{scint}^2$

La scintillation (paragraphe 1.3) conduit à une variation de l'amplitude du front d'onde dans la pupille. La conséquence directe, et indépendante de l'OA, est une dégradation des images formées sur la voie imagerie. L'OA est incapable de contrecarrer ces effets, puisque l'OA ne joue que sur la phase.

De plus, ces variations d'amplitude perturbent la mesure ASO. Ces fluctuations rendent en effet le modèle de mesure proposé en équation (2.1) caduque car il suppose une homogénéité de l'amplitude. Par conséquent, le phénomène de scintillation joue le rôle d'un bruit sur la mesure du Shack-Hartmann. Ces effets de la scintillation sur la mesure ASO ont été notamment étudiés par [Mahé(2000)] dans le cadre d'objets ponctuels et par [Robert *et al.*(2006)] dans le cas des objets étendus. Néanmoins, ces effets de la scintillation sont en général négligés en astronomie, hormis dans le cas d'observations de sources étendues comme le soleil. Ils seront aussi négligés dans l'ensemble du mémoire sauf lors de l'étude des conditions de validations expérimentales (chapitre 12).

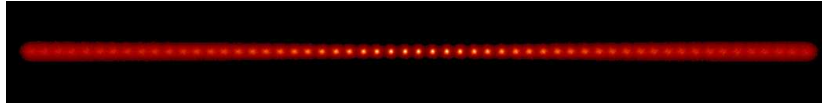


FIG. 2.7 – Dégradation de la correction apportée par une OA dans le champ du fait de l’anisoplanétisme. On considère l’image corrigée d’une étoile pour diverses positions dans le champ allant de -30 arcseconde à +30 arcsecondes. L’EG est sur l’axe (au centre). Les conditions équivalentes de la simulation sont un télescope de 4 m, un  $\frac{D}{r_0}$  de 10 (la turbulence est localisée sur trois couches à 0, 1 et 10 km d’altitude) et une correction parfaite des 21 premiers polynômes de Zernike. Le SR est de 43% sur l’EG au centre du champ.

### 2.5.1.2 Erreur d’anisoplanétisme : $\sigma_{aniso}^2$

Le phénomène d’anisoplanétisme a été présenté au paragraphe 1.3.3.1.4. Il est lié à la décorrélation angulaire de la phase turbulente. L’existence d’une séparation angulaire entre EG et objet implique l’apparition du phénomène d’anisoplanétisme. Dès lors, la correction apportée par le système d’OA n’est plus adaptée à la turbulence perçue par le front d’onde issu de l’objet d’intérêt : une erreur est introduite et la correction va se dégrader dans le champ. Un tel effet est illustré par la figure 2.7, résultat d’une simulation de Fusco [Fusco(2000)], et montrant la dégradation de la correction apportée par une OA dans le champ. Les conditions équivalentes de la simulation sont un télescope de 4 m, un  $\frac{D}{r_0}$  de 10 (la turbulence est localisée sur trois couches à 0, 1 et 10 km d’altitude) et une correction parfaite des 21 premiers polynômes de Zernike. Le SR est de 43% sur l’EG au centre du champ.

Cette erreur d’anisoplanétisme représente une limitation forte de l’OA : étant donné le flux nécessaire pour réaliser une mesure de front d’onde dans de bonnes conditions de rapport signal-à-bruit, le nombre d’EG potentielles et leur localisation dans le ciel sont limités, réduisant d’autant la surface du ciel observable par OA (appelée aussi couverture de ciel). Autre conséquence de l’anisoplanétisme : le champ d’observation par OA est réduit, limitant donc l’observation simultanée de plusieurs objets dans le même champ.

Afin de contourner ce phénomène plusieurs solutions ont été développées, soit en essayant de créer des étoiles artificielles, ou étoiles laser, soit en développant de nouveaux concepts d’OA, voire en associant les deux. Ces éléments sont présentés dans le chapitre suivant. Notons aussi que la scintillation accentue le phénomène d’anisoplanétisme.

## 2.5.2 Erreurs intrinsèques à l’Optique Adaptative

Le système d’OA introduit de lui-même un certain nombre d’erreurs limitant ses performances. ce paragraphe décrits ces termes d’erreur.

### 2.5.2.1 Erreurs liées à la mesure : $\sigma_{alias}^2$ et $\sigma_{bruit}^2$

Une première source d’erreur est liée à la structure de l’ASO. Il réalise en effet une mesure échantillonnée spatialement de la phase dans la pupille, échantillonnage conditionné par le nombre de micro-lentilles. Par conséquent, les hautes fréquences spatiales de la turbulences sont mal échantillonnées et un phénomène de repliement spectral intervient, amenant les hautes fréquences spatiales à se replier sur les basses fréquences échantillonnées par l’ASO. Ce phénomène, appelé aussi *aliasing*, peut être néanmoins réduit en particulier par un filtrage spatial des hautes fréquences avant la mesure par l’ASO [Poyneer & Macintosh(2004), Fusco *et al.*(2005a)]. Le terme  $\sigma_{alias}^2$  est



associé à cette source d'erreur.

Un deuxième poste d'erreur est directement lié au processus de mesure. Il s'agit du bruit de mesure du front d'onde, désigné par  $\sigma_{bruit}^2$ . Ce terme d'erreur regroupe les bruits de photons et de détecteur présentés en paragraphe 2.3.1.

### 2.5.2.2 Erreurs liées à la correction : $\sigma_{fit}^2$

Le spectre des fréquences spatiales reproductibles par le miroir est limité par le nombre d'actionneurs dans la pupille. Les hautes fréquences spatiales ne peuvent donc être corrigées amenant à une erreur dite de sous-modélisation. Cette erreur de sous-modélisation peut être évaluée grâce à la formule (1.30) en considérant qu'un nombre  $n$  de modes de Zernike sont correctement corrigés par le miroir. Ceci reste une approximation évidemment, le miroir ne corrigeant pas directement des modes de Zernike.

### 2.5.2.3 Erreurs liées à l'asservissement : $\sigma_t^2$

Comme expliqué au paragraphe 2.4.2.3, l'ensemble du système d'asservissement introduit un retard. Cumul du retard de mesure, de calcul et de correction, ce retard implique que la correction apportée n'est jamais adaptée à la turbulence en présence au moment même de la correction. Cette erreur temporelle notée  $\sigma_t^2$  va s'accroître avec la vitesse d'évolution de la turbulence relativement à la fréquence d'échantillonnage de l'asservissement.

### 2.5.3 Erreurs de calibration du système : $\sigma_{calib}^2$ et $\sigma_{aberr}^2$

Il s'ajoute à l'ensemble des postes d'erreur détaillés ci-dessus, l'ensemble des erreurs de calibration du système, notamment vis-à-vis de la matrice d'interaction, des pentes de références. Ces erreurs sont difficilement chiffrables et pudiquement regroupés derrière le terme  $\sigma_{calib}^2$ .

Ajoutons aussi l'erreur introduite par les aberrations non communes du système, au travers de  $\sigma_{aberr}^2$ . En effet, du simple fait de la séparation entre voie d'analyse et voie d'imagerie, il existe une portion de trajet optique jusqu'à la caméra d'imagerie dont les défauts ne sont pas mesurés par l'ASO. Cette portion non commune est grisée sur le schéma figure 2.8. Elle comprend toute la voie d'analyse depuis la séparatrice, avec les aberrations différentielles de la séparatrice entre les deux voies. Les défauts de cette portion non commune ne sont donc pas corrigés par la boucle d'OA. On assiste donc à une dégradation du front d'onde corrigé due aux aberrations du montage lui-même. Ces aberrations sont toutefois statiques ou très lentement variables (effets thermiques). Elles peuvent en outre être estimées et corrigées, notamment par diversité de phase. Ce protocole sera discuté plus avant au paragraphe 12.4.

### 2.5.4 Erreurs exogènes : $\sigma_{exo}^2$

Le terme d'erreur exogène vise à regrouper toutes les sources d'erreurs issues de l'environnement du système d'OA et venant perturber son fonctionnement. Plus particulièrement, il recouvre les erreurs introduites par d'éventuelles vibrations mécaniques se propageant dans le système et venant affecter la mesure de front d'onde ou l'acquisition d'images. L'expérience montre qu'un tel terme devient parfois non négligeable [Rousset *et al.*(2002)]. Il sera plus longuement discuté dans les chapitres 9 et 15.



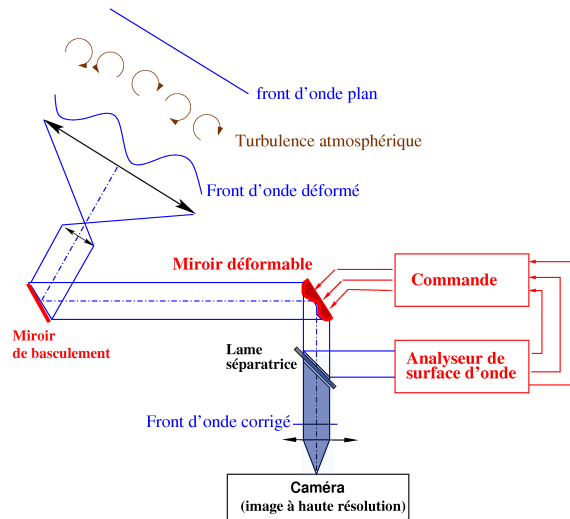


FIG. 2.8 – Schéma de l’OA et identification de la zone où interviennent les aberrations non communes (zone grisée). Ces aberrations ne sont pas vues par l’OA donc non corrigées, mais affecte l’image finale.

## 2.6 Correction partielle par l’OA

La correction apportée par l’OA est donc imparfaite. Les images obtenues après correction par OA présentent une qualité meilleure mais encore éloignée de la limite de diffraction, c’est-à-dire de la tache d’Airy. En terme de *FEP* courte pose, ce résultat se traduit par une concentration de l’énergie dans le pic central et donc l’augmentation du rapport de Strehl (voir figure 2.9). Néanmoins, il reste des *speckles* résiduels dus aux composantes de la turbulence non corrigées dans les images courte pose. En terme de *FEP* longue pose, on constate de manière similaire l’apparition d’un pic cohérent de largeur à mi-hauteur proche de  $\lambda/D$ , entouré d’un halo résiduel, résultat du moyennage des *speckles* résiduels.

La figure 2.10 propose une coupe plus précise de la *FEP* longue pose obtenue par simulation d’une optique adaptative (la description de la simulation est donnée au chapitre 8). Il s’agit d’une OA équipée d’un ASO  $8 \times 8$  sous-pupilles et d’un miroir SAM à  $9 \times 9$  actionneurs, commandée par un intégrateur. On compare la *FEP* longue pose obtenue à la tache d’Airy (correction parfaite). Les échelles sont logarithmiques.

Le profil de la tache d’Airy est caractéristique, avec une asymptote de puissance -3. Le profil de la *FEP* longue pose met en évidence d’une part l’apparition d’un pic cohérent central correspondant à la correction des basses fréquences spatiales de la turbulence. La structure de ce pic dépend de la correction de la turbulence basse fréquence, entachée des erreurs résiduelles liées au bruit de mesure ( $\sigma_{bruit}^2$ ), au retard temporel ( $\sigma_t^2$ ). A plus de  $6\lambda/D$ , la turbulence n’est plus corrigée ( $\sigma_{fit}^2$ ). Le profil de *FEP* est directement lié au profil turbulent, asymptotiquement en puissance -11/3. La transition se fait autour de  $4\lambda/D = \lambda/d$ , si  $d = D/8$  désigne le pas inter sous-pupille de l’ASO.  $1/d$  définit en effet la limite des fréquences spatiales de la turbulence bien mesurées et corrigées par l’OA. On constate néanmoins que la transition n’est pas abrupte et qu’un régime transitoire, d’asymptote quasi horizontale existe autour de  $4\lambda/D$ . Cette transition est caractéristique de l’effet de repliement (paragraphe 2.5.2.1) : les hautes fréquences spatiales viennent polluer la mesure et donc la correction des

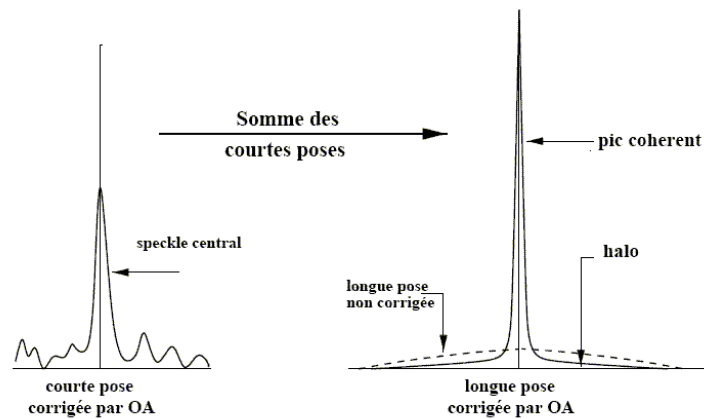


FIG. 2.9 – Représentation schématique des coupes de FEP courte et longue pose après correction par OA. On observe sur la FEP longue pose (droite) le pic cohérent de largeur  $\lambda/D$  et le halo non corrigé de largeur  $\lambda/r_0$ .

plus basses fréquences spatiales.

Du point de vue de l'image obtenue, l'OA a permis la correction des défauts de basses fréquences spatiales de l'image et la restitution partielle de l'information haute fréquence, jusqu'à la fréquence de coupure du télescope. Ceci justifie l'utilisation de l'OA, préalablement à toute solution de restauration d'image *a posteriori*. Ces solutions de traitement *a posteriori* sont en effet limitées en l'absence d'OA par la disparition de l'information haute fréquence lors de l'acquisition de longues poses (indispensables pour l'accumulation d'un nombre suffisant de photons). L'OA permet d'augmenter les capacités de ces algorithmes de traitement d'image par la pré-correction.

Les grandeurs caractérisant la qualité des images que sont le rapport de Strehl et l'énergie cohérente, présentées au paragraphe 1.5, permettent de caractériser la correction apportée par une OA.

Enfin, notons que les techniques dites coronagraphiques [Mawet(2002)] permettent d'«éteindre» le pic cohérent, et donc l'essentiel du flux de l'objet observé. Ces techniques permettent ainsi de faire ressortir le flux plus faible d'objet compagnons situés à quelques  $\lambda/D$ .

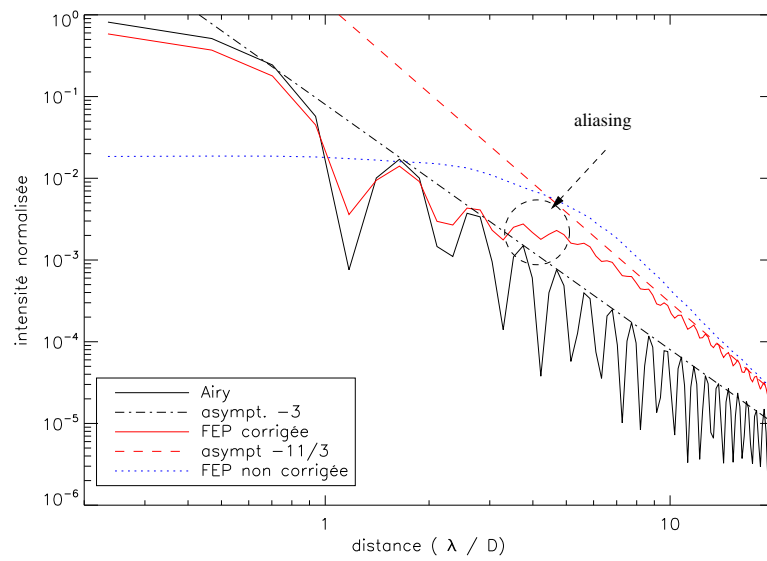


FIG. 2.10 – Coupe de FEP longue pose obtenue par simulation numérique d'une OA. On compare à la coupe de la tache d'Airy. On remarque la correction partielle des basses fréquences de la turbulence, et l'absence de correction des hautes fréquences. Entre les deux apparaît un régime transitoire marqué par l'effet de repliement spectral.

## Chapitre 3

# Vers de nouveaux concepts d'OA : les enjeux liés à la commande

### 3.1 Introduction

Le chapitre 2 a montré les possibilités apportées par l'OA. Il a aussi mis en évidence ses limitations intrinsèques. Ces limitations et les besoins des astronomes ont incité au développement de nouveaux concepts d'OA. Deux principaux axes de développement peuvent être identifiés : l'élaboration d'OAs de très hautes performances permettant d'accéder à de nouveaux domaines de résolution et de détection, et la construction d'OA offrant un champ de correction étendu.

Le premier axe est évidemment motivé par le besoin d'une résolution accrue, autorisant la détection et l'étude d'objets toujours plus lointains, plus petits. La découverte récente par NAOS d'une planète extra-solaire [Chauvin *et al.*(06)] a montré la capacité des instruments au sol à détecter et donner des images de planètes malgré l'atmosphère. Auparavant seules des techniques de détection indirectes étaient possibles. L'étape suivante consiste donc à élaborer des OA plus performantes, dites OA extrêmes, permettant de sonder les proches environs des étoiles à la recherche de planètes. De tels systèmes exigent cependant la mise en œuvre de technologies de pointes et de concepts nouveaux notamment vis-à-vis de la commande.

Le second axe trouve son origine dans une limitation fondamentale de l'OA : l'anisoplanétisme (voir paragraphe 1.3.3.1.4). Ce phénomène limite à la fois la couverture du ciel et le champ de correction des systèmes d'OA. Les besoins astronomiques ont donc incité à développer des OA à grand champ de correction, utilisant des étoiles de référence éloignées des objets d'intérêt, voire des étoiles artificielles. Ces systèmes à la complexité accrue posent de nouvelles problématiques en terme de commande.

Ce chapitre présente ces divers concepts et les applications visées par chacun, en insistant sur les contraintes qu'ils imposent du point de vue de la loi de commande. Le paragraphe 3.2 traite de l'OA extrême tandis que le paragraphe 3.3 traite des OA tomographiques, au travers de l'OAMC (paragraphe 3.3.1) et de ses concepts dérivés : l'AO couche au sol ou GLAO (paragraphe 3.3.2), l'OA tomographique (paragraphe 3.3.3), et l'OA Multi-Objet (paragraphe 3.3.4). Enfin, on introduit au paragraphe 3.3.5 le concept particulier d'OA hors axe, qui sous-tendra les validations expérimentales présentées dans ce mémoire. On verra par la suite comment la loi de commande optimale étudiée dans ce manuscrit peut contribuer à la plupart de ces concepts.

## 3.2 L'Optique Adaptative extrême

L'Optique Adaptative extrême (en anglais *eXtrem AO* ou XAO) n'est pas à proprement parler un concept d'OA nouveau. Par contre, la recherche de très hautes performances qu'elle représente synthétise nombre de technologies et de concepts novateurs pour répondre à des besoins nouveaux. L'objectif de ces OA est l'observation d'objets ténus, proches d'étoiles brillantes, typiquement des planètes géantes (1 à 20 masses de Jupiter) ou des naines brunes. L'imagerie mais aussi l'analyse spectrale voire polarimétrique de ces objets sont visés. Fusco synthétise dans [Fusco *et al.*(2006b)] la démarche sur laquelle se base la conception d'un tel système dans le cadre du projet SPHERE (*Spectro-Polarimetry High-contrast Exoplanet REsearch* anciennement désigné sous le nom de *Planet-Finder*). Réalisant un compromis entre buts scientifiques et possibilités technologiques, une telle conception repose sur l'optimisation du budget d'erreur de l'OA et de la correction de la FEP dans un champ bien déterminé. En effet, l'OA est couplée avec un coronographe [Mawet(2002)] permettant d'éteindre le flux de l'étoile. Il faut alors disposer d'une FEP «propre» dans un champ suffisant pour détecter une planète. Chaque poste du budget d'erreur mentionné en paragraphe 2.5 (erreurs dues à la turbulence, intrinsèques, de calibration ou exogènes) doit donc être étudié afin de réduire l'erreur globale mais aussi de réduire cette erreur selon la fréquence spatiale. Le résultat d'une telle analyse est l'optimisation de chaque composant ou étage de l'OA. C'est en cela que l'OA extrême représente un pas majeur et novateur en OA. Deux éléments vont particulièrement nous intéresser : la réduction de l'effet d'*aliasing* et le filtrage d'éventuelles vibrations. L'effet d'*aliasing* représente une part notable du budget d'erreur. Sa réduction est envisagée sous la forme d'un trou filtrant au plan focal de l'analyseur [Poyneer & Macintosh(2004), Fusco *et al.*(2005a)]. On peut s'interroger cependant sur la possibilité de prendre cet effet en compte dans la commande. Une autre contrainte particulière est la réduction des erreurs exogènes et plus particulièrement des vibrations éventuellement présentes sur le système et dégradant la correction globale et surtout la stabilité de l'axe optique sur le système coronographique. On peut encore envisager une gestion de ces composantes par une commande adéquate.

## 3.3 Les Optiques Adaptatives tomographiques

Les OA tomographiques visent à étendre le champ de correction des OA classiques afin de répondre à deux problématiques : pouvoir observer des objets loin de toute étoile guide et pouvoir observer simultanément plusieurs objets répartis dans le champ. L'Optique Adaptative Multi-Conjuguée (OAMC) fut le premier concept développé autour de ces problématiques. Ce paragraphe met donc l'accent sur l'OAMC, en introduisant la problématique de la commande. Un certain nombre de concepts dérivés sont également présentés.

### 3.3.1 L'Optique Adaptative Multi-Conjuguée

#### 3.3.1.1 Historique

Le concept d'Optique Adaptative Multi-Conjuguée (paragraphe 3.3.1.2) fut proposé dès 1975 par Dicke [Dicke(1975)]. Le développement des premières OAs montra rapidement toute l'importance de l'anisoplanétisme et la profonde limitation qu'il suscite à la fois en terme de couverture du ciel et de champ de correction. Pourtant l'idée de Dicke se heurta aux limitations technologiques de l'époque. Reprise en 1988 par Beckers [Beckers(1988)], cette idée prit corps progressivement avec les réussites de l'OA. Dans l'attente de mises en œuvres concrètes de l'OAMC, de nombreuses études ont été menées du point de vue théorique, avec une analyse du concept et de ses performances [Ellerbroek(1994),

Tallon *et al.*(1992), Johnston & Welsh(1994), Lloyd-Hart & Milton(2003)]. Les techniques d'analyse du front d'onde ont été développées, d'une part en s'attachant aux modes de mesure avec l'apparition du concept de *Layer-Oriented* OAMC, alternative à la solution classique dite *Star-Oriented* [Ragazzoni *et al.*(2000a), Ragazzoni *et al.*(2002), Bello *et al.*(2003), Fusco *et al.*(2006a)] (voir paragraphe suivant). D'autre part, on s'est penché sur le problème des étoiles guides disponibles et la nécessité d'étoiles artificielles générées par source laser [Beckers(1988), Foy & Labeyrie(1985), Tallon & Foy(1990), Rigaut & d'Orgeville(2005)] (paragraphe 3.3.1.3). En parallèle, nombre d'auteurs ont étudié la commande dynamique d'une boucle de correction de la turbulence en OAMC, en proposant diverses lois de commande [Ellerbroek(1994), Fusco *et al.*(2001), Gilles *et al.*(2003), Le Roux *et al.*(2004), Gilles(2005), Petit *et al.*(2005), Quiros-Pacheco(2006)], abordées au chapitre 5. En l'absence de systèmes aboutis, la simulation a servi d'outil de base de validation de ces divers concepts [Ellerbroek *et al.*(2002), Femeía *et al.*(2002), Le Louarn *et al.*(2005)]. Enfin, à l'heure où les premiers systèmes d'OAMC voient le jour (voir paragraphe 3.3.1.4), l'attention se porte désormais vers les très grands télescopes et les problématiques toutes particulières qui leur sont associées [Ellerbroek & Rigaut(2000), Ragazzoni *et al.*(2005), Flicker & Mc Guire(2003)].

### 3.3.1.2 Principe et particularités de l'OAMC

L'OAMC a pour but de corriger les effets de la turbulence atmosphérique dans un champ donné. Son principe repose sur une analyse partielle du volume de turbulence puis sa reconstruction. En cela, l'OAMC est souvent comparée à l'imagerie médicale tridimensionnelle, telle que l'imagerie par résonance magnétique nucléaire ou l'imagerie tomographique à rayons X (Scanner). Pour ce faire, deux principaux axes sont actuellement proposés. L'approche dite *Star-Oriented* (SO) (présentée en figure 3.1) consiste à utiliser plusieurs EG et autant d'ASO, chacun pointant une EG et réalisant ainsi une mesure intégrée du volume de turbulence dans une direction. Le problème consiste alors à reconstruire la turbulence dans son volume à partir de ces mesures multi-directionnelles. La seconde approche, dite *Layer-Oriented* (LO) utilise quant à elle l'ensemble des étoiles disponibles dans le champ, et plusieurs analyseurs optiquement conjugués à différentes couches de l'atmosphère. Ils réalisent ainsi une mesure directe de la turbulence par couche en exploitant toutes les ressources lumineuses disponibles. Cette seconde solution permet ainsi de réduire le nombre d'ASO tout en maximisant le flux lumineux utilisé pour l'analyse de front d'onde. Cette approche ne sera pas considérée dans ce mémoire. Enfin, la correction de la turbulence est réalisée dans le volume grâce à plusieurs miroirs optiquement conjugués en altitude. Cette approche exploite fortement le caractère localisé de la turbulence, en supposant que celle-ci se concentre en un nombre limité de couches indépendantes. L'objectif est de pouvoir réaliser la correction en boucle fermée.

La figure 3.2 présente une simulation du résultat escompté lors de la mise en œuvre d'une OAMC (type SO), comparativement à une OA classique. On montre ainsi le gain significatif de correction apporté dans un champ notablement plus étendu (correction dans un champ de près de 2 arcminutes, au lieu d'une dizaine d'arcsecondes en OA).

Si l'OAMC n'est en somme que l'extension de l'OA à un cadre multi-directionnel, la commande en OAMC est un problème nettement plus complexe qu'en OA. Évidemment, une première complexité naît du nombre de mesures et d'actionneurs à commander. Les dimensions peuvent être notablement plus grandes qu'en OA, et cela sera d'autant plus vrai avec l'augmentation de la taille des télescopes. Dans une configuration typique d'OAMC, ce sont 3 analyseurs et deux miroirs qu'il faut considérer. En prenant le démonstrateur MAD comme exemple, ce sont ainsi  $3 \times 104 = 312$  mesures et  $2 \times 60 = 120$  actionneurs qui sont mis en jeu en OAMC au lieu de 104 et 60 respectivement en OA. La correction doit en outre être apportée dans un ensemble de directions qui peut être entièrement

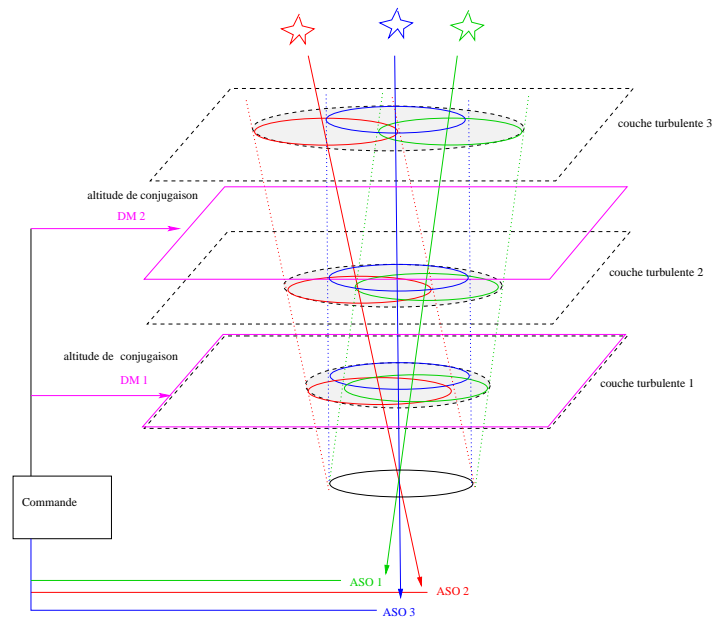


FIG. 3.1 – Schéma de principe d'une Optique Adaptative Multi-Conjuguée. La turbulence est analysée dans plusieurs directions grâce à plusieurs ASO conjugués de plusieurs EG. La correction est réalisée par plusieurs miroirs (ici 2), conjugués à différentes altitudes.

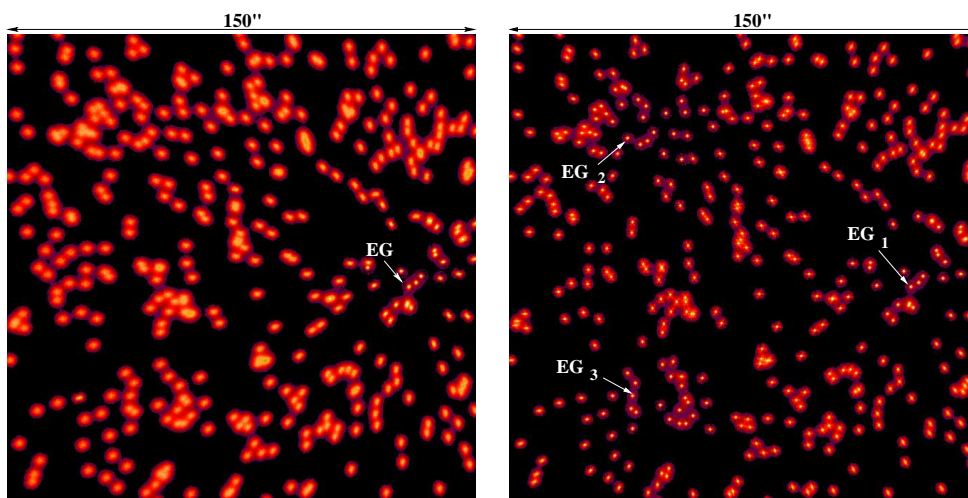


FIG. 3.2 – Simulation d'une correction par OA (à gauche) puis par OAMC (à droite). Un champ de 150 arcsecondes est considéré. 4 couches turbulentes sont simulées. La correction en OAMC utilise 4 miroirs conjugués des couches turbulentes.

disjoint de l'ensemble, restreint, des directions de mesure. Et évidemment, la correction apportée doit être localisée à diverses altitudes pour permettre une telle correction variable dans le champ. Cette configuration implique donc un critère d'optimisation plus complexe et pose le problème de l'extrapolation des mesures et des modes non vus [Fusco *et al.*(2001), Le Louarn(2000)]. Ces modes



consistent en la combinaison de contributions de différentes couches turbulentes dont la résultante dans les directions de mesure est nulle, et donc non mesurée. La figure 3.3 présente une telle combinaison. Ces modes non détectés dans les directions d'analyse impactent malgré tout sur la formation d'image dans les directions d'intérêt (où leur résultante n'est pas nulle). Fusco [Fusco *et al.*(2000)] a montré que plus les étoiles guides sont éloignées les unes des autres, plus les modes non vus sont le résultat de combinaisons de composantes de basse fréquence spatiale, donc plus ils contiennent de l'énergie. Enfin, on retrouve en OAMC des aspects similaires à l'OA : un système multi-varié, en boucle fermée, avec présence de retards. La spécification de lois de commandes dédiées à l'OAMC sera abordée au paragraphe 5.2. Dans ce mémoire seule l'approche SO sera considérée. Néanmoins, l'étude de la commande optimale pour l'OAMC-LO est un sujet particulièrement intéressant, méritant une étude approfondie, d'ores et déjà amorcée par les travaux de [Nicolle *et al.*(2006)].

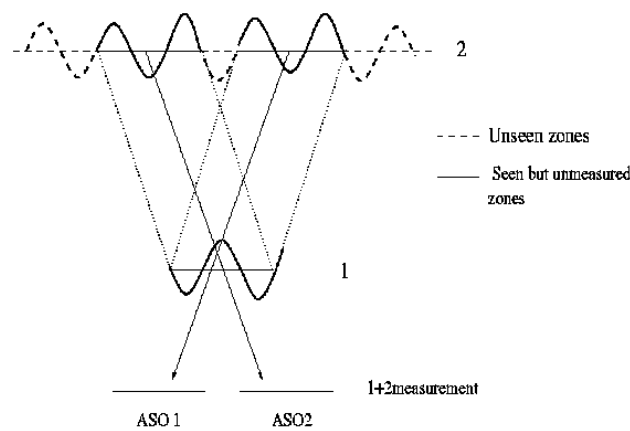


FIG. 3.3 – Illustration de la notion de mode mal (non) vu. Les contributions des deux couches turbulentes se compensent dans les deux directions d'analyse, mais pas dans les autres.

### 3.3.1.3 Étoiles laser

Les étoiles laser ont accompagné le développement de l'OAMC dès ses débuts [Beckers(1988), Foy & Labeyrie(1985)]. Rappelons que l'analyse de front d'onde en OA ne peut être réalisée qu'avec des sources de référence suffisamment brillantes pour réaliser l'analyse. Ces sources sont peu nombreuses et réparties de manière non uniforme. C'est d'ailleurs une des raisons du développement des OA tomographiques. Une solution consiste à utiliser comme sources lumineuses des étoiles artificielles [Foy & Labeyrie(1985)], générées artificiellement dans les moyennes ou hautes couches de l'atmosphère par une source laser. La diffusion Rayleigh (entre 7 et 20 km) ou l'excitation d'atomes de sodium (90 km) permettent d'obtenir une rétro-diffusion de lumière suffisamment intense pour réaliser l'analyse. Ce procédé peut potentiellement résoudre le problème de couverture de ciel, sans rendre toutefois l'OA tomographique caduque, puisque la correction grand champ est traitée uniquement grâce à cette technique. Il s'agit plutôt d'exploiter la complémentarité de ces techniques. En outre, malgré plusieurs mises en œuvre réussies au Keck, au Lick Observatory ou sur Gemini, les étoiles laser sont toujours confrontées à diverses difficultés rendant leur usage difficile [Rigaut & d'Orgeville(2005)], telles que l'indétermination du tilt [Pilkington *et al.*(1987), Rigaut *et al.*(1992)] nécessitant au final le recours à une étoile naturelle, l'effet de cône [Tallon & Foy(1990)] ou l'effet d'élongation pour les



étoiles sodium [Le Louarn(2000)].

### 3.3.1.4 Vers l'implantation d'OAMC

Plusieurs expériences en laboratoire ont été amorcées [Knutsson & Owner-Petersen(2003), Love *et al.*(2002), Langlois *et al.*(2004)] afin de tester l'OAMC du point de vue de l'analyse multi-directionnelle, de la correction multi-miroir et des contraintes de mise en œuvre pratique. Ces expériences ont apporté des informations précieuses. Néanmoins, la plupart d'entre elles se sont basées sur des commandes issues de l'OA et donc peu adaptées au cadre particulier de l'OAMC. Une première expérience de reconstruction tomographique boucle ouverte en conditions réelles fut proposée par Ragazzoni [Ragazzoni *et al.*(2000b)], mettant en évidence les possibilités d'une telle reconstruction à partir de mesures multi-directionnelles. Cette expérience réalisée à partir de données réelles acquises sur le télescope italien Galilée n'était cependant pas associée à une correction à proprement parler. En parallèle de ces développements en laboratoire, quelques premiers systèmes fonctionnels d'OAMC sont apparus. Le premier fut le système Altair installé sur Gemini (Nord) sur le Mauna Kea (Hawaï), comportant un unique miroir mais conjugué à 6,5 km [Saddlemyer *et al.*(2000), Herriot *et al.*(2000)]. Les performances de ce premier système s'apparentant à l'OAMC furent prometteurs malgré une certaine inadéquation entre cette altitude et la répartition de turbulence. En outre un seul miroir et une direction d'analyse ne permettent pas d'augmenter significativement le domaine isoplanétique. Le Vaccum Tower Telescope de Tenerife représente un exemple concret d'implantation d'OAMC fonctionnelle [Soltau *et al.*(2002), von der Lühe *et al.*(2003)]. Cette OAMC dédiée à l'observation du soleil offre déjà des résultats intéressants bien qu'il s'agisse de l'extension d'une OA pré-existante basée sur une architecture matérielle modeste. Le champ de correction passe cependant de 10 à 30 arcsecondes entre OA et OAMC [von der Lühe *et al.*(2005)]. Enfin, trois grands projets sont actuellement en cours de réalisation et devraient démontrer les performances de l'OAMC. NIRVANA [Ragazzoni *et al.*(2003), Gaessler *et al.*(2005)] est destiné à l'observation interférométrique sur le *Large Binocular Telescope* (LBT), basé sur une approche LO. Gemini sud vise à l'implantation d'une OAMC-SO utilisant des étoiles laser [Ellerbroek *et al.*(2003), Rigaut & d'Orgeville(2005)]. Enfin, l'ESO développe un démonstrateur, *Multi-conjugate Adaptive optics Demonstrator* (MAD) [Marchetti *et al.*(2002)], qui sera installé sur le *Very Large Telescope* (VLT) pour démontrer la validité de l'OAMC, mais aussi un certain nombre des concepts évoqués dans les paragraphes qui suivent (GLAO, LTAO ...). Les premiers résultats en laboratoire sont encourageants [Hubin *et al.*(2005)].

### 3.3.2 Le concept de GLAO

Le concept de *Ground Layer Adaptive Optics* (GLAO) [Rigaut(2001)] dont une traduction peut être «OA correction couche au sol», consiste à ne corriger que la couche basse de la turbulence par un unique miroir conjugué de la pupille ou à basse altitude. Le but est de proposer une correction modérée de la turbulence mais dans un grand champ et la plus homogène possible. Ce type de correction répond notamment aux besoins astronomiques pour les études extra-galactiques et la cosmologie, et ce à un coût modéré. La couche basse de la turbulence représentant le plus souvent la majeure partie de la turbulence, sa correction par un unique miroir doit permettre de répondre à cet objectif. Pour évaluer la turbulence à corriger sur la couche basse, une approche OAMC est possible, mais coûteuse. Une solution plus simple consiste à exploiter la décorrélation angulaire de la turbulence et à réaliser une analyse de front d'onde sur un grand nombre de sources, naturelles ou artificielles, réparties dans le champ (voir figure 3.4). Les effets des couches en altitude se moyennent et s'annulent, et la phase moyenne résultante est alors liée uniquement à la phase dans la couche au sol, commune à toutes

les directions d'analyse. Dans le cas d'étoiles artificielles, une seule étoile peut même être utilisée, l'effet de cône permettant de filtrer la turbulence issue des couches hautes et de privilégier la mesure de la couche au sol. Plusieurs projets d'implantation sont en cours avec divers types de source : le *SOAR Adaptive Module* (SAM) au Chili [Thomas(2005), Tokovinin *et al.*(2004)] et GLAS (William Herschel Telescope) avec étoile Rayleigh, sur le télescope Magellan (étoiles naturelles), et sur Gemini [Rigaut & d'Orgeville(2005)] et le VLT (projet MUSE-ESO) [Hubin *et al.*(2005)] avec étoile sodium.

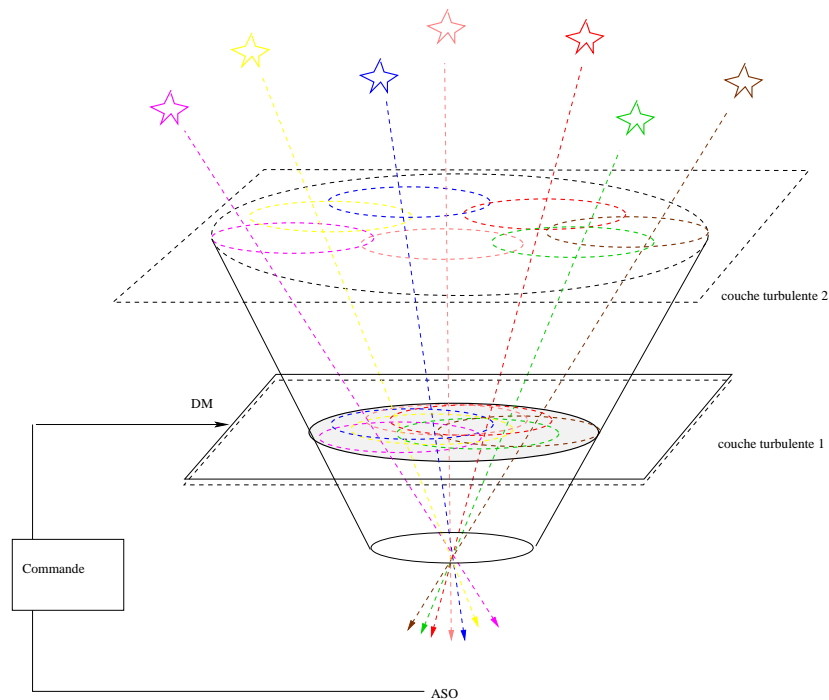


FIG. 3.4 – Schéma de principe du GLAO. La turbulence est analysée dans de nombreuses directions, permettant de moyenner et d'annuler les effets dus aux couches en altitude, tout en mesurant la couche au sol, commune. Un miroir conjugué de cette couche au sol permet alors une correction plus faible qu'en OAMC mais étendue à un très grand champ et relativement homogène.

### 3.3.3 L'OA tomographique (laser)

L'OA tomographique (éventuellement à étoiles laser devenant ainsi en anglais *Laser Tomographic AO* ou LTAO) est un concept à mi-chemin entre OA et OAMC, qui doit permettre d'étendre la couverture de ciel de l'OA [Hubin *et al.*(2005)] sans pour autant mettre en œuvre toute l'infrastructure d'une OAMC. Il combine une analyse multi-directionnelle de la turbulence (approche SO), et une reconstruction tomographique du volume de turbulence (voir figure 3.5). Cependant, au final, c'est une correction par un unique miroir conjugué de la pupille d'entrée qui est appliquée, comme en OA. Le principe est ici d'offrir une correction de type OA (donc de champ limité) dans une zone du ciel dépourvue d'étoiles guides assez lumineuses (augmentation de la couverture de ciel). Par conséquent, l'utilisation de quelques étoiles naturelles, ou plus probablement laser, permet de réaliser l'analyse de la turbulence dans le volume et son estimation dans la direction d'intérêt afin de fermer la boucle. L'utilisation d'étoiles laser multiples se justifie par l'effet de cône qui restreint la connaissance de la

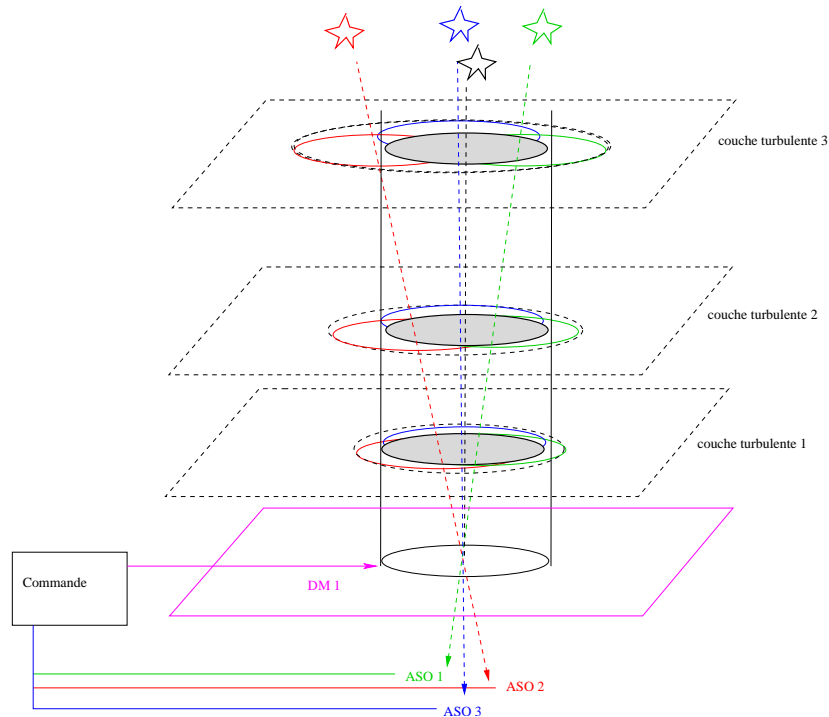


FIG. 3.5 – Schéma de principe de la LTAO. La turbulence est analysée dans de multiples directions (ici 3), permettant une reconstruction tomographique. Un miroir unique, conjugué de la pupille, réalise une correction dans une unique direction.

turbulence. Plusieurs étoiles laser bien réparties permettent de mieux sonder la turbulence en altitude et d'autoriser une reconstruction tomographique. La commande d'une OA tomographique est donc une problématique similaire à celle rencontrée en OAMC. L'ESO souhaite tester ce concept lors des essais de MAD sur le VLT au Chili, ou à défaut en laboratoire.

### 3.3.4 L' OA Multi-Objet

L'OA Multi-Objet (OAMO) (ou *Multi-Object AO*, MOAO en anglais) répond à un besoin astronomique particulier : celui de pouvoir observer simultanément (donc avec une correction similaire) 15 à 20 objets peu brillants répartis dans un champ typique du VLT soit 25 arcminutes. Le but est de pouvoir répondre aux questions liées à la formation des étoiles et d'éléments tels que les métaux dans les galaxies. Ceci passe par l'étude spectroscopique de galaxies lointaines, avec une très bonne résolution tant spatiale que spectrale. L'observation simultanée d'objets similaires permet alors de gagner en précision. L'OAMC ne peut répondre à ces besoins : la correction requise se veut moyenne mais dans des champs limités et multiples, et dans des directions éloignées de l'étoile ou des étoiles guides. Les longueurs d'onde considérées vont du visible à l'infra-rouge. Une OAMC destinée à ce type d'application serait démesurée étant donnés la correction et les champs requis. Un concept de type GLAO n'offrirait quant à lui qu'un gain de correction bien trop modeste dans un tel champ [Gendron *et al.*(2005)].

La MOAO peut être réalisée en utilisant pour chaque objet d'intérêt une OA tomographique miniaturisée, se composant typiquement de trois analyseurs de front d'onde et d'un micro-miroir réalisant

une correction dans la pupille. Des étoiles guides naturelles sont utilisées pour l'analyse de front d'onde. Une reconstruction tomographique de la turbulence est réalisée et la correction est optimisée pour la direction d'intérêt. L'asservissement fonctionne cependant en boucle ouverte. Le projet FALCON [Gendron *et al.*(2005), Hammer *et al.*(2004)], actuellement en cours de développement, est un exemple de système de MOAO destiné au VLT.

Un tel système permettrait effectivement d'accéder à une correction sensible, en particulier en infra-rouge, dans une multitude de directions d'intérêt, réparties dans un large champ. Néanmoins, il s'agit d'un système complexe (au final une soixantaine d'analyseurs et une vingtaine de micro-miroirs sont utilisés, avec une vingtaine de boucles d'asservissement indépendantes). Le fonctionnement en boucle ouverte impose des contraintes fortes tant sur les composants (linéarité des miroirs, analyseurs, calibration précise des composants ...), que sur la commande. A défaut d'éventuelles boucles de retour basées par exemple sur des capteurs annexes (mesurant la déformation des miroirs par exemple), la commande devra permettre une reconstruction tomographique boucle ouverte de grande qualité. Enfin, le problème de couverture de ciel se pose toujours, l'utilisation d'étoiles laser ayant été écartée dans ce projet.

### 3.3.5 Un concept original : l'Optique Adaptative hors axe

Ce paragraphe présente un concept original d'OA tomographique. L'Optique Adaptative hors axe (*Off-Axis AO* en anglais, dont on utilisera l'acronyme OAAO), est un concept à mi-chemin entre l'OAMC, la MOAO et la LTAO. Ce concept a été développé initialement pour les validations expérimentales de cette thèse. En effet, la structure simple, et malgré tout révélatrice du comportement de la commande utilisée dans ce contexte, doit permettre d'extrapoler les résultats de validation obtenus aux cas plus complexes et réalistes que sont l'OAMC, la MOAO ou la LTAO. Mais ce concept pourrait être avantageusement exploité sur des systèmes d'OA déjà existants afin d'étendre la couverture de ciel, sans toutefois recourir à des OAMC complètes.

Le principe de l'OAAO est décrit sur la figure 3.6. Il se base sur une structure d'OA classique, avec un ASO et un unique miroir conjugué de la pupille d'entrée. On sait qu'une telle solution de correction est confrontée irrémédiablement au problème d'anisoplanétisme et voit sa correction chuter rapidement dans le champ. L'idée est donc de réaliser une analyse du front d'onde sur axe, mais de reconstruire la turbulence dans son volume et de l'extrapoler hors axe, dans une direction d'intérêt différente de la direction d'analyse. On optimise alors la correction avec le miroir pour cette seconde direction. La correction est donc adaptée à la turbulence présente hors axe, et non pas à la turbulence sur axe. La correction sur axe est donc dégradée. Ce concept est donc très proche de la LTAO, à ceci près qu'il ne comporte d'un unique analyseur pour réaliser la reconstruction tomographique de la turbulence, ce qui est insuffisant. Aussi, on considérera dans ce mémoire une turbulence de structure plus simple, mono-couche. On se ramènera ainsi à un cas LTAO mono-couche mono-analyseur. On peut également apparenter l'OAAO à une structure d'OAMC ou de MOAO simplifiée. En somme, l'OAAO est la brique de base de l'ensemble de ces concepts. L'étude des performances d'une loi de commande en OAAO est donc essentielle. Enfin, sur le plan applicatif, l'OAAO peut être utilisée pour étendre la couverture de ciel de système d'OA classique, n'ayant pas à leur disposition de système d'OAMC ou de système multi-analyse pour réaliser une LTAO. Il faudra néanmoins considérer pour cela une OAAO multi-couche, cas qui n'a pas été étudié expérimentalement dans ce mémoire.

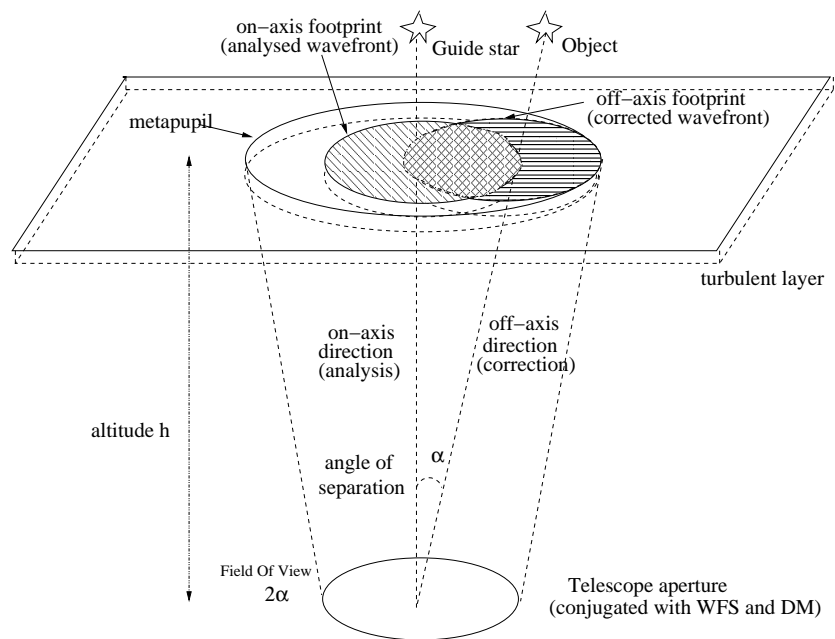


FIG. 3.6 – Schéma de principe d'une Optique Adaptative Hors-Axe (OAAO en anglais). La mesure du front d'onde turbulent sur axe permet de réaliser une correction en boucle fermée de la turbulence présente dans une direction hors axe. La structure d'analyse/correction utilisée est celle d'une OA classique.

## Chapitre 4

# Critère de commande et modélisation par espace d'état du système

### 4.1 Introduction

Ce chapitre définit le cadre du problème de commande optimale pour l'OA et l'OAMC. Le cadre d'OAMC choisi est suffisamment général pour être applicable à des problèmes plus spécifiques tels que l'OA hors axe, tomographique (LTAO), *etc.* Afin de simplifier le discours, l'ensemble de la démarche suivie dans ce chapitre est menée dans un cadre d'OA simple, avant d'être étendue à l'OAMC.

L'objectif est d'établir un modèle d'état pour l'OA puis l'OAMC, en précisant notamment les équations de mesure et de correction. Cette modélisation est l'ossature de ce mémoire, car c'est sur elle que s'appuie la commande optimale.

La construction de la loi de commande implique la définition d'un critère de performance à minimiser. Néanmoins, tandis que les grandeurs physiques en présence relèvent de processus continus du temps, mesures, calculs et correction relèvent de processus discrets. Il est donc primordial de définir le cadre d'étude adéquat. On montre que minimiser le critère de performance défini en temps continu est équivalent, sous certaines hypothèses, à minimiser un critère en temps discret. Nous mettons alors en évidence un terme d'erreur incompressible, indépendant de la loi de commande et commun à la plupart des systèmes d'OA.

Nous montrons également que la minimisation du critère de performance nécessite la connaissance *d'a priori* sur le système et la turbulence, pour laquelle un modèle d'évolution apparaît alors nécessaire.

L'analyse du problème de commande optimale est menée dans le cadre d'un formalisme propre à l'automatique, le formalisme d'état. Aussi, nous rappelons ce formalisme et réexprimons le problème de commande dans ce contexte, en justifiant les représentations d'état choisies. Ce formalisme permet aussi d'analyser un certain nombre de propriétés du système considéré, et d'étendre les modélisations et les résultats à l'OAMC de façon naturelle.

Le paragraphe 4.2 décrit la modélisation d'un système d'OA complet sur laquelle s'appuie le critère de performance présenté au paragraphe 4.3. Nous établissons l'équivalence entre critère à temps continu et critère à temps discret. Nous démontrons également que l'utilisation d'une commande constante par morceaux conduit à un terme d'erreur ultime qui est mis en évidence et calculé analytiquement. Le paragraphe 4.4 pose le problème final de commande optimale et introduit les *a priori* nécessaires. Un modèle d'évolution de la turbulence est proposé et ses caractéristiques mises en évidence. On montre en particulier l'existence d'un interspectre temporel. Le problème est alors

reformulé au paragraphe 4.5 dans un espace d'état et ses propriétés sont analysées. Les résultats précédemment obtenus en OA sont étendus à l'OAMC au paragraphe 4.6. Le choix de la représentation d'état est enfin discuté au paragraphe 4.7.

## 4.2 Modélisation du système d'OA

Ce paragraphe présente la modélisation du système d'OA et les hypothèses de travail utilisées dans l'ensemble du mémoire. Elles s'appliqueront aussi en OAMC, cas traité au paragraphe 4.6. On s'appuie pour cela sur les éléments présentés au chapitre 2. Les notations et la structure du modèle proposé s'inspirent de celles introduites par [Le Roux(2003)].

On ne fait que rappeler ici les modèles d'ASO et de MD qui ont été déjà présentés au chapitre 2, en précisant cependant les hypothèses qui seront faites systématiquement désormais sur le fonctionnement de ces composants. On pourra s'appuyer sur le chronogramme proposé en figure 4.1 pour suivre la chronologie de l'asservissement. Ces hypothèses sont les suivantes :

- Le capteur intègre le signal lumineux sur un intervalle de temps  $T$  si bien que la mesure  $\mathbf{y}_n$  disponible à un certain instant de l'intervalle de temps  $[(n-1)T, nT]$  et éventuellement pénalisée d'un retard  $d_m$  de traitement peut s'écrire :

$$\mathbf{y}_n = \frac{1}{T} \int_{(n-d_m-1)T}^{(n-d_m)T} (\mathbf{D}\phi(t) + \mathbf{w}(t)) dt. \quad (4.1)$$

$\mathbf{D}$  modélise la réponse linéaire du capteur,  $\phi(t)$  la phase mesurée et  $\mathbf{w}(t)$  le bruit de mesure ;

- Le calcul de la commande à partir des mesures de pente est réalisé par un calculateur numérique.
- Le calculateur temps réel commande le miroir par l'intermédiaire d'un bloqueur d'ordre zéro. On suppose que la dynamique du miroir est suffisamment rapide pour être négligée et peut donc être modélisée en première approximation par un simple gain matriciel. Autrement dit, on suppose que durant l'intervalle  $[nT, (n+1)T]$  la phase de correction générée par le miroir,  $\phi^{cor}(t)$ , est constante et définie par :

$$\phi^{cor}(t) = \mathbf{N}\mathbf{u}_{n-d_c}, \quad (4.2)$$

$\mathbf{N}$  désignant la matrice d'influence du MD et  $d_c$  un éventuel retard pur.

- Les remarques faites au paragraphe 2.4.2.1 concernant la dynamique temporelle du système d'OA (ou d'OAMC) amènent à choisir  $d_m = 1$  et  $d_c = 0$ , en faisant l'hypothèse que la somme des temps de lecture des données, calcul des commandes et application des commandes peut être assimilé à un retard de mesure d'une trame  $T$ . La tension  $\mathbf{u}_n$  est ainsi appliquée rigoureusement au temps  $nT$ . Ainsi, la mesure de front d'onde est intégrée durant l'intervalle  $[(n-2)T, (n-1)T]$ , conduisant à la donnée de  $\mathbf{y}_n$  à la fin de l'intervalle  $[(n-1)T, nT]$ . La correction  $\mathbf{u}_n$  est alors appliquée à l'instant  $nT$  afin de corriger la phase turbulente présente durant l'intervalle de temps  $[n, (n+1)T]$  (figure 4.1).
- Le système de correction est supposé fonctionner en boucle fermée, l'ASO mesurant donc un front d'onde résiduel après correction noté  $\phi^{res}(t)$ . Cette phase résiduelle est définie sur l'intervalle  $[nT, (n+1)T]$  par :

$$\phi^{res}(t) = \phi^{tur}(t) - \phi^{cor}(t) = \phi^{tur}(t) - \mathbf{N}\mathbf{u}_n. \quad (4.3)$$

Notons déjà que ces hypothèses recouvrent la plupart des asservissements actuels. Seule l'hypothèse de dynamique miroir rapide et linéaire peut faire défaut dans le cas de miroirs de type bimorphe

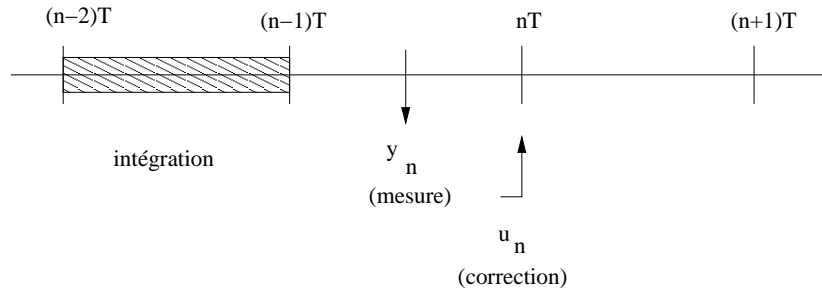


FIG. 4.1 – Chronogramme de l'asservissement d'OA (ou d'OAMC) considéré.

par exemple. L'approche qui suit doit alors être reconsidérée dans ce cas (voir notamment le paragraphe 10.3.4). On notera aussi que l'on a considéré que le calculateur numérique gérait directement des mesures de pente. Il est évident que le calcul des pentes à partir des mesures de front d'onde est lui-même réalisé par un calculateur, identique ou différent du premier, et cela sans incidence. Que l'on considère un système d'OA, d'OAMC, ou toute autre configuration comparable et utilisée en boucle fermée, il se représente donc selon le même schéma bloc que celui proposé en figure 2.6.

A partir de cette modélisation du système, il s'agit maintenant de se définir un critère de performance, c'est-à-dire la grandeur que l'on souhaite optimiser pour obtenir la commande optimale

### 4.3 Critère d'optimalité

Le choix du critère de performance n'est pas anodin et de nombreux critères peuvent être proposés selon les applications visées. Ce paragraphe propose donc un critère à temps continu très répandu. L'existence simultanée de grandeurs à temps continu (phases) et à temps discret (mesures, commandes) conduit souvent à un traitement lourd du problème de commande. Or nous montrons que la minimisation du critère à temps continu choisi est équivalente à la minimisation d'un critère à temps discret [Kulcsár *et al.*(2006)]. Cette équivalence permet de traiter l'ensemble du problème de commande dans un contexte discret. Ce calcul fait aussi apparaître un terme d'erreur incompressible ultime lié au processus de mesure et de correction et non à la loi de commande. Il est donc commun à la plupart des systèmes d'OA. Nous montrons que ce terme peut être calculé analytiquement et son comportement peut donc être étudié en fonction de la fréquence d'échantillonnage en particulier.

#### 4.3.1 Choix du critère d'optimalité

Le critère le plus souvent retenu consiste à minimiser la variance de la phase résiduelle, c'est-à-dire à minimiser par rapport aux commandes  $\mathbf{u}$  le critère quadratique  $\mathbf{J}(\mathbf{u})$  suivant :

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|\phi^{res}(s)\|^2 ds, \quad (4.4)$$

$\phi^{res}(s)$  étant défini selon (4.3).

Ce critère assure en effet la maximisation de l'énergie cohérente  $E_c = \exp(-\sigma_{res}^2)$ , et donc, à une approximation près, celle du SR (voir paragraphe 1.6). Or, ce sont les indicateurs qui intéressent particulièrement les astronomes dans une majorité des cas. De plus ce critère a le bon goût d'être quadratique, ce qui nous place directement dans un contexte favorable à la mise en œuvre d'une



commande optimale simple comme on le verra au paragraphe 5.3.2. C'est le critère qui va donc être retenu dans l'ensemble de ce mémoire.

Néanmoins, d'autres critères peuvent être définis. On peut notamment vouloir maximiser d'autres indicateurs de performance comme l'énergie encerclée, qui permet d'évaluer le flux lumineux concentré dans une zone bien définie [Fusco(2000)]. Cet indicateur est couramment utilisé en spectroscopie. On discutera aussi au paragraphe 4.6.2 des autres critères pouvant être retenus dans un cadre d'OAMC. Dans chaque cas, la loi de commande doit être reconsidérée selon le critère choisi.

### 4.3.2 Discrétisation du problème

Avant même de vouloir traiter le problème de la commande en OA, on doit s'interroger sur la nature des données à traiter et donc du critère à minimiser. En effet, si le signal d'intérêt, la phase, est un signal continu du temps, les mesures, les commandes de correction, et tous les traitements numériques sont de nature discrète. Cette dualité est propre à tous les asservissements numériques. Et elle mène inexorablement aux questions suivantes : doit-on résoudre le problème de la commande dans une approche générale, mêlant signaux continus et discrets ? peut-on minimiser un critère à temps continu voire à temps discret ? comment définir la commande optimale, forcément discrète ? Ces questions ont été traitées de manières variées.

#### 4.3.2.1 Quelques approches du problème de discrétisation

Nombre d'approches récentes considèrent une problématique discrète de la commande en OA, dérivant une loi de commande basée sur un formalisme à temps discret, quelle que soit la nature de cette commande [Piatrou & Gilles(2005), Gilles(2005), Looze *et al.*(2003), Oppenheimer & Pachter(2002), Ellerbroek & Rhoadarmer(2001), Wirth *et al.*(1998), Dessenne(1998), Paschall & Anderson(1993)]. Lorsqu'un critère d'optimalité est utilisé pour définir la loi de commande, il est lui-même à temps discret. Or ce passage au temps discret n'est pas explicitement justifié, amenant à s'interroger sur la validité du critère d'optimalité employé. La phase résiduelle considérée est en effet un signal à temps continu. A l'inverse, quelques travaux ont été menés entièrement en temps continu [Ellerbroek(1994)]. Ces approches reposent généralement sur une approximation, consistant à négliger le caractère discret de la mesure et de la commande.

Le Roux ([Le Roux(2003)]) a proposé une justification de la réduction du problème de commande optimale en temps continu à un problème en temps discret. Il montre que la meilleure correction de la phase (au sens du minimum de variance résiduelle) sur un intervalle  $[t, t + T]$  est donnée par la moyenne de la phase sur cette intervalle. Il montre ainsi que l'optimisation du critère peut être menée sur des grandeurs discrètes. Néanmoins, cette démonstration suppose déjà un modèle d'évolution de la phase.

Nous avons cependant proposé une démonstration ([Kulcsár *et al.*(2006)]) plus générale de l'équivalence du problème de commande optimale en temps continu et en temps discret pour l'optique adaptative. On en résume les principaux éléments au paragraphe 4.3.2.2. Cette démonstration fait apparaître un terme d'erreur incompressible, commun à la grande majorité des systèmes d'OA et lié au caractère discret de la mesure et de la correction. Ce terme est calculé analytiquement. Une application numérique est proposée dans un cas représentatif permettant d'évaluer l'impact de ce terme. Il s'agit là d'une contribution personnelle au problème de discrétisation.

### 4.3.2.2 Expression du critère discret équivalent

Par souci de simplicité, l'expression du critère est menée dans un cadre d'OA, mais les résultats sont directement transposables au cas OAMC. Les hypothèses utilisées ici sont celles rappelées au paragraphe 4.2.

On peut définir les grandeurs moyennées suivantes :

$$\phi_n^{res} = \frac{1}{T} \int_{(n-1)T}^{nT} \phi^{res}(s) ds \quad (4.5)$$

$$\phi_n^{tur} = \frac{1}{T} \int_{(n-1)T}^{nT} \phi^{tur}(s) ds \quad (4.6)$$

$$\mathbf{w}_n = \frac{1}{T} \int_{(n-1)T}^{nT} \mathbf{w}(s) ds. \quad (4.7)$$

On montre alors que le critère à minimiser  $\mathbf{J}(\mathbf{u})$  (équation (4.4)) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{u}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{T} \int_{(j-1)T}^{jT} \|\phi^{res}(s)\|^2 ds \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{T} \int_{(j-1)T}^{jT} \|\phi^{tur}(s) - \phi_j^{tur}\|^2 ds \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|\phi_j^{res}\|^2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

car  $\phi^{tur}(s) - \phi_j^{tur}$  est de moyenne nulle sur l'intervalle  $[(j-1)T, jT]$ , donc orthogonal à  $\phi_j^{res}$  (au sens du produit scalaire associé à l'intégrale sur  $[(j-1)T, jT]$ ). D'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{u}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{T} \int_{(j-1)T}^{jT} \|\phi^{tur}(s) - \phi_j^{tur}\|^2 ds \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|\phi_j^{tur} - \mathbf{N}\mathbf{u}_{j-1}\|^2 \\ &= \mathbf{J}_{res,1} + \mathbf{J}_{res,2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le terme  $\mathbf{J}_{res,1}$  est un terme de variance empirique de la phase entre deux instants d'échantillonnage, terme indépendant de la commande. Par conséquent, la minimisation de  $\mathbf{J}_{res}$  sera équivalente à minimiser  $\mathbf{J}_{res,2}$ , qui n'est rien d'autre que le pendant discret du problème de commande continu initialement posé.

On montre ainsi que le problème de commande optimale en temps continu est équivalent à un problème en temps discret, faisant intervenir des grandeurs moyennées discrètes. Par conséquent, il est légitime de rechercher maintenant une commande optimale en temps discret. Comme démontré dans [Kulcsár *et al.* (2006)], cette équivalence fait cependant apparaître un terme d'erreur résiduelle temporelle incompressible, le terme  $\mathbf{J}_{res,1}$ . Soulignons que ce terme est propre à tous les asservissements discrets répondant aux hypothèses énoncées ci-dessus, c'est-à-dire un grand nombre de systèmes actuels. On peut donc s'intéresser à la valeur de cette limite fondamentale. Bien que généralement reconvenue comme négligeable, il est, somme toute, pertinent de chiffrer cette limite. A notre connaissance, ce terme n'a pas été jusque-là mis en évidence ni calculé.

### 4.3.2.3 Estimation de l'erreur incompressible ultime

Il s'agit ici d'estimer le terme  $\mathbf{J}_{res,1}$ , que l'on peut assimiler à une erreur ultime incompressible liée à la mesure et à la correction discrète apportée par l'asservissement. Insistons sur le fait que ce

terme n'est pas lié à la loi de commande, non encore introduite, mais uniquement au mode de mesure et de correction. On réécrit  $\mathbf{J}_{res,1}$  sous la forme suivante :

$$\mathbf{J}_{res,1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{T} \int_{(j-1)T}^{jT} \|\phi^{tur}(t) - S(jT)\|^2 dt \right), \quad (4.10)$$

avec les hypothèses suivantes :

- $\phi^{tur}(t)$  est un processus aléatoire ergodique stationnaire au second ordre, de matrice de corrélation  $E[\phi^{tur}(t)\phi^{tur}(t+\tau)^T] = \Sigma_{\phi^{tur}}(\tau)$  connue.  $\phi^{tur}$  est décomposée sur une base de modes de type base de Zernike.
- $S(t)$  est le processus filtré de  $\phi^{tur}(t)$  par le filtre  $H(t) = \frac{1}{T}\mathbf{1}_{[0,T]}(t)$ , où  $\mathbf{1}_{[0,T]}(\cdot)$  est la fonction indicatrice sur l'intervalle  $[0, T]$ ,

$$S(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \phi^{tur}(t-u) du, \quad (4.11)$$

de matrice de corrélation  $E[S(t)S(t+\tau)^T] = \Sigma_s(\tau)$  connue. Les mesures correspondent à l'intégration (ou la moyenne) de  $\phi^{tur}(t)$  sur des intervalles  $[(j-1)T, jT]$ , c'est-à-dire aux échantillons  $S(jT)$  de  $S(t)$  définis par :

$$S(jT) = \phi_j^{tur} = \frac{1}{T} \int_{(j-1)T}^{jT} \phi^{tur}(u) du. \quad (4.12)$$

Les échantillons  $S(jT)$  représentent  $\phi_j^{tur}$ .

Le développement de (4.10) donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{res,1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{T} \int_{(j-1)T}^{jT} \|\phi^{tur}(t)\|^2 dt \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{T} \int_{(j-1)T}^{jT} \|S(jT)\|^2 dt \\ &\quad - 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{T} \int_{(j-1)T}^{jT} \phi^{tur}(t)^T S(jT) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_0^n \|\phi^{tur}(t)\|^2 dt + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|S(jT)\|^2 \\ &\quad - 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{T} \int_{(j-1)T}^{jT} \phi^{tur}(t) dt \right)^T S(jT) \\ &= E[\|\phi^{tur}(t)\|^2] - E[\|S(jT)\|^2], \end{aligned} \quad (4.13)$$

(la dernière égalité est obtenue en réutilisant la définition de  $S(jT)$  donnée en (4.12). Il est important de noter que l'on est confronté à une version échantillonnée de  $S$  ; néanmoins, par stationnarité :

$$\mathbf{J}_{res,1} = E[\|\phi^{tur}(t)\|^2] - E[\|S(t)\|^2]. \quad (4.14)$$

Si bien que :

$$\mathbf{J}_{res,1} = \text{tr} \left\{ \Sigma_{\phi^{tur}}(0) \right\} - \text{tr} \left\{ \Sigma_s(0) \right\}, \quad (4.15)$$

Étant donné que la corrélation est directement reliée à la DSP par transformée de Fourier, on en déduit :

$$\mathbf{J}_{res,1} = \text{tr} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} DSP_{\phi^{tur}}(f) df \right\} - \text{tr} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} DSP_s(f) df \right\}. \quad (4.16)$$

Étant donné le filtre utilisé, la DSP de  $S$  vaut

$$\begin{aligned} DSP_s(f) &= |H(f)|^2 DSP_{\phi^{tur}}(f) \\ &= |\text{sinc}(\pi f \Delta T)|^2 DSP_{\phi^{tur}}(f). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ainsi, on peut finalement écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{res,1} &= \text{tr} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} DSP_{\phi^{tur}}(f) - DSP_s(f) df \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (I - |\text{sinc}(\pi f T)|^2) DSP_{\phi^{tur}}(f) df \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

En supposant la phase décomposée sur la base de Zernike,  $\phi^{tur}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) Z_i$  (phase toujours sans piston), on peut donc réécrire  $\mathbf{J}_{res,1}$  sous la forme :

$$\mathbf{J}_{res,1} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (I - |\text{sinc}(\pi f T)|^2) DSP_{a_i}(f) df. \quad (4.19)$$

Les DSP de coefficients de décomposition de la phase turbulente sur la base de Zernike ont été rappelées en équation 1.31. On obtient donc une expression simple de l'erreur résiduelle  $\mathbf{J}_{res,1}$  en fonction de la DSP de la phase turbulente. On s'intéresse maintenant à la valeur de cette limite fondamentale pour un profil de turbulence et un temps d'intégration  $T$  donnés.

#### 4.3.2.4 Calcul numérique de l'erreur incompressible ultime

Ce paragraphe propose donc une estimation numérique de cette erreur résiduelle incompressible. Pour cela on considère un profil atmosphérique type Paranal, discrétisé sur 10 couches de turbulence. Les profils de  $C_n^2(h)$ , et de la vitesse de vent  $V(h)$  sont issus de mesures *in situ* et sont présentés en figure 4.2. On suppose de plus que la grande échelle est infinie.

L'exploitation des équations 4.19 et 1.31, permet de déduire la valeur de  $\mathbf{J}_{res,1}$  pour une fréquence d'échantillonnage  $f_{ech}$  variant de 1 à 500 Hz. Le calcul est mené pour une phase décomposée sur 78 modes de Zernike (ordre radial 11). Le résultat est proposé en figure 4.3. La force de la turbulence, à travers le paramètre  $\frac{D}{r_0}$ , ne jouant sur le résultat que comme un coefficient multiplicateur (à la puissance  $\frac{5}{3}$ ), l'évolution de  $\mathbf{J}_{res,1}$  est tracée pour seulement trois cas de turbulence. Les variances résiduelles conduisant à un SR de 90%, 99%, et 99.9% sont superposées pour indication.

On constate ainsi que l'erreur de discrétisation reste plus que négligeable dans les conditions standard d'utilisation d'une OA, c'est-à-dire avec une fréquence d'échantillonnage supérieure à 100 Hz. L'erreur commise est alors inférieure à 0.02% de SR ! Cette erreur devient non négligeable pour des fréquences d'échantillonnage inférieures à quelques dizaines de Hertz. Les résultats ne varient pas notablement en présence d'une grande échelle finie.

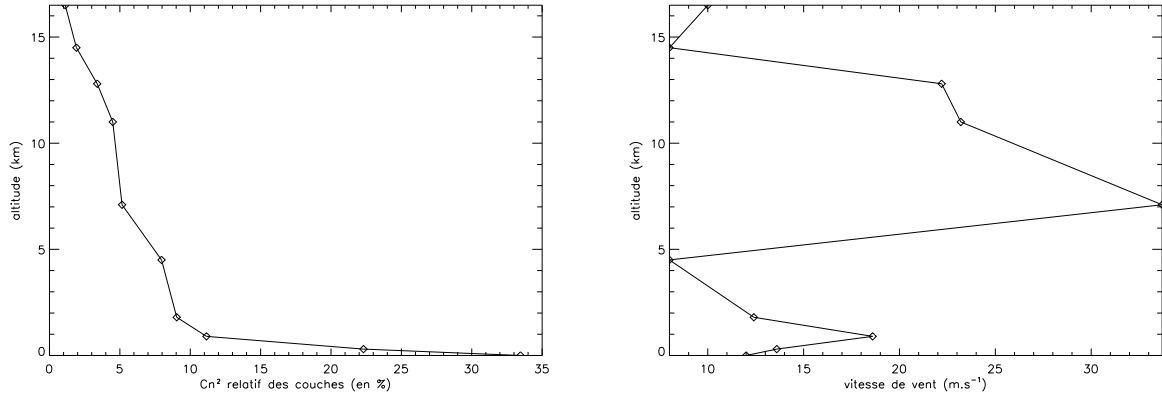


FIG. 4.2 – Profils de type Paranal de  $C_n^2(h)$  (gauche) et de la vitesse de vent  $V(h)$  (droite) utilisés pour le calcul d'erreur résiduelle de discrétisation temporelle.

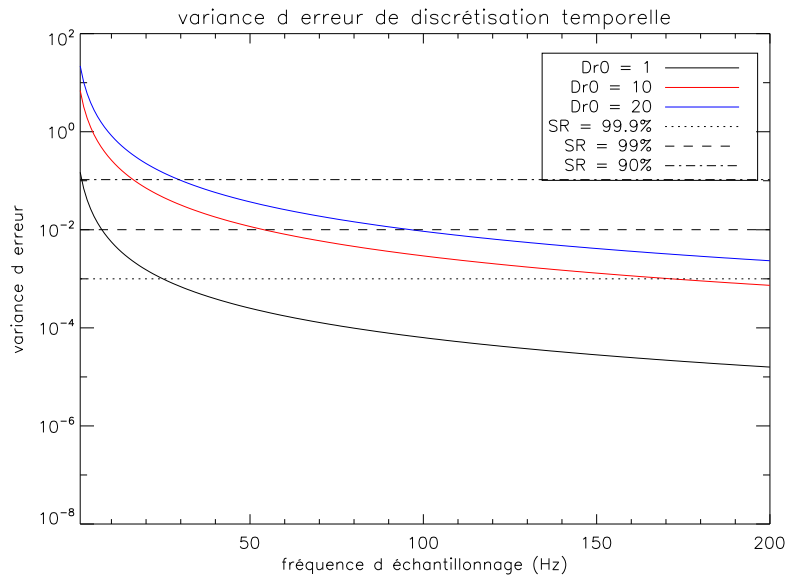


FIG. 4.3 – Évolution de l'erreur résiduelle de discrétisation (en radian carré de phase) temporelle  $\mathbf{J}_{res,1}$  avec la fréquence.

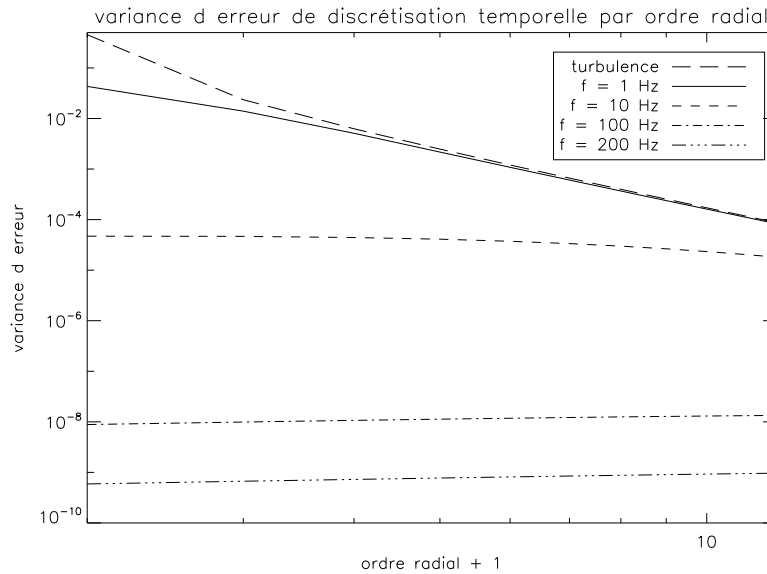


FIG. 4.4 – Contribution (en radian carré de phase) de chaque ordre radial à l’erreur de discrétisation et évolution pour quelques fréquences. Le cas ‘turbulence’ correspond au profil de variance radiale de la turbulence Kolmogorov pour  $\frac{D}{r_0} = 1$

Si on considère maintenant la contribution de chaque ordre radial à cette erreur, on peut voir sur la figure 4.4 qu’à basse fréquence ce sont les bas ordres qui contribuent majoritairement à l’erreur résiduelle. Mais ce sont aussi ces mêmes ordres dont la contribution va chuter la plus vite. Ceci s’explique simplement par l’énergie plus importante des bas ordres. A basse fréquence, l’intégration se fait trop lentement pour suivre la turbulence et ces composantes contribuent majoritairement à l’erreur résiduelle. Par contre, à plus haute fréquence, ces bas ordres, d’évolution temporelle relativement lente, sont très bien mesurés. L’erreur due à la discrétisation est alors minimale, à l’inverse des hauts ordres.

Par conséquent, ces résultats démontrent que l’erreur résiduelle incompressible qui accompagne la discrétisation temporelle est généralement négligeable dès qu’on utilise une OA au-delà d’une centaine de Hertz. Néanmoins, cette erreur peut devenir notable quand le temps de pose augmente (la fréquence d’échantillonnage est donc réduite), par exemple pour accroître le rapport signal à bruit pour des sources peu brillantes. Cette erreur augmente en outre avec la force de la turbulence.

Ces résultats montrent enfin et surtout que l’optimisation de la commande en temps discret est non seulement équivalente à son optimisation en temps continu mais en outre qu’elle n’introduit aucun biais notable quant à la variance d’erreur résiduelle. On peut donc désormais s’intéresser sans vergogne au problème de commande optimale dans un cadre discret.

#### 4.4 De la nécessité d’une connaissance *a priori*

Les paragraphes précédents nous ont permis de modéliser l’ensemble de l’OA, et de proposer un critère de performance à minimiser. On a montré qu’un critère à temps discret équivalent pouvait être exhibé. Ce faisant, toutes les grandeurs désormais considérées seront discrètes. Ainsi, la mesure

disponible à l'instant  $nT$  est désormais notée :

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{D}\phi_{n-1}^{res} + \mathbf{w}_n, \quad (4.20)$$

où  $\phi_{n-1}^{res}$  est la phase résiduelle définie par :

$$\phi_{n-1}^{res} = \phi_{n-1}^{tur} - \phi_{n-1}^{cor} = \phi_{n-1}^{tur} - \mathbf{N}\mathbf{u}_{n-2}. \quad (4.21)$$

Le problème de commande se pose donc enfin de la manière suivante. Il s'agit de minimiser relativement aux tensions de commandes  $\mathbf{u}_j$ ,  $j \in [0, \dots, n-1]$ , le critère de performance discret  $J_{res,2}^{oa}(\mathbf{u})$  suivant :

$$\mathbf{J}_{res,2}^{oa}(\mathbf{u}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|\phi_j^{res}\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|\phi_j^{tur} - \mathbf{N}\mathbf{u}_{j-1}\|^2, \quad (4.22)$$

connaissant les mesures  $\mathbf{y}_j$ ,  $j \in [0, \dots, n-1]$ .

Il apparaît désormais de manière évidente que le problème de commande optimale implique aussi un problème de prédiction, puisque l'on doit déterminer pour chaque intervalle de temps  $[(j-1)T, jT]$  les tensions  $\mathbf{u}_{j-1}$  permettant de corriger la phase intégrée sur cette intervalle  $\phi_j^{tur}$  et disponible à l'instant  $jT$ .

Avant d'aller plus loin dans sa résolution, c'est-à-dire la définition d'une loi de commande, on va faire apparaître la nécessité d'introduire une connaissance *a priori* du système. Les modélisations précédentes y contribuent, mais une connaissance *a priori* de l'évolution de la turbulence est aussi nécessaire et est donc détaillée.

#### 4.4.1 Approche fréquentielle, notion de transfert

Nous proposons ici un bref rappel de quelques notions liées à l'analyse fréquentielle du problème de commande. Cette approche est très souvent utilisée en raison de sa simplicité de mise en œuvre et d'interprétation physique. Nous allons l'exploiter dans le paragraphe suivant pour mettre en évidence le besoin de connaissance *a priori*. Elle sera aussi le sujet du paragraphe 8.6. Comme souligné précédemment, on suppose le système linéaire et à temps discret. On se place en outre, par souci de simplicité, dans un cadre d'OA. L'équation de mesure (4.20) s'écrit donc :

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{D}(\phi_{n-1}^{tur} - \mathbf{N}\mathbf{u}_{n-2}) + \mathbf{w}_n. \quad (4.23)$$

On suppose en outre qu'un correcteur linéaire boucle fermée a été choisi, permettant de calculer la tension de correction  $\mathbf{u}_n$  grâce aux mesures  $\mathbf{y}_n$ . S'agissant de l'application d'un filtre linéaire sur les mesures, une relation de convolution peut être écrite :

$$\mathbf{u}_n = (\mathbf{C} * \mathbf{y})_n, \quad (4.24)$$

$\mathbf{C}$  désignant l'opération réalisée par le correcteur. L'analyse du processus de correction peut être menée dans le domaine fréquentiel, et dans notre cadre linéaire discret, en appliquant une transformée en  $z$ . On note par  $\tilde{g}$  la transformée en  $z$  [Proakis & Manolakis(1996)] de la fonction  $g$ . L'application de la transformation en  $z$  aux équations (4.23) et (4.24) conduit à la relation suivante :

$$(\mathbf{Id} + \mathbf{N}\tilde{\mathbf{C}}(z)\mathbf{D}z^{-2}) \tilde{\phi}^{res}(z) = \tilde{\phi}^{tur}(z) - \mathbf{N}\tilde{\mathbf{C}}(z)z^{-1}\tilde{\mathbf{w}}(z). \quad (4.25)$$

$\mathbf{Id}$  désigne la matrice identité et le terme  $z^{-n}$  traduit l'existence d'un retard de  $n$  trames. (On rappelle que pour des fonctions discrètes du temps, le lien avec le domaine fréquentiel «classique» est obtenu en posant  $z = e^{j\omega}$ , pour une fréquence normalisée  $\omega \in [0, \pi]$ .)

On fait ainsi apparaître une relation simple entre la phase résiduelle et les paramètres d'entrée que sont la phase turbulente et le bruit de mesure. La fonction  $\mathbf{E}$  définie par :

$$\mathbf{E}(z) = \left( \mathbf{Id} + \mathbf{N}\tilde{\mathbf{C}}(z)\mathbf{D}z^{-2} \right)^{-1} = \left( \mathbf{Id} + \mathbf{G}(z) \right)^{-1} \quad (4.26)$$

désigne la fonction de transfert de réjection de l'asservissement, et  $\mathbf{G}$  la fonction de transfert boucle ouverte. Cette fonction traduit comment le signal turbulent (dans le domaine fréquentiel) est atténué par la boucle d'asservissement. La conception de correcteurs par l'approche fréquentielle consiste à choisir cette fonction de sorte à atténuer «au mieux» le signal turbulent, «au mieux» dépendant évidemment d'un critère de performance choisi préalablement. On peut montrer d'ailleurs que ce choix est contraint par certaines limitations physiques (explications et références dans [Kulcsár *et al.*(2006)]).

On désigne aussi par  $\mathbf{H}_w(z)$  la fonction de transfert du bruit définie par :

$$\mathbf{H}_w(z) = - \left( \mathbf{Id} + \mathbf{N}\tilde{\mathbf{C}}(z)\mathbf{D}z^{-2} \right)^{-1} \left( \mathbf{N}\tilde{\mathbf{C}}(z)z^{-1} \right). \quad (4.27)$$

#### 4.4.2 Mise en évidence du besoin d'a priori

L'analyse que nous allons mener ici est détaillée dans l'article [Kulcsár *et al.*(2006)]. L'application du théorème de Parseval (traduisant la conservation de l'énergie entre l'espace temporel et l'espace fréquentiel) à l'équation (4.22) conduit à la relation :

$$\mathbf{J}_{res,2}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{tr} \{ DSP_{\phi^{res}}(e^{j\omega}) \} d\omega. \quad (4.28)$$

En supposant que  $\mathbf{w}$  et  $\phi^{tur}$  sont des processus ergodiques, stationnaires, à moyenne nulle et d'énergie finie, et indépendants, on peut donc écrire que :

$$DSP_{\phi^{res}} = \mathbf{E}(z) DSP_{\phi^{tur}} \mathbf{E}^*(z) + \mathbf{H}_w(z) DSP_w \mathbf{H}_w^*(z), \quad (4.29)$$

où \* désigne la symétrie hermitienne,  $DSP_{\phi^{res}}$ ,  $DSP_{\phi^{tur}}$  et  $DSP_w$  les DSP de  $\phi^{res}$ ,  $\phi^{tur}$  et  $\mathbf{w}$ .

On réécrit ainsi (4.28) sous la forme :

$$\mathbf{J}_{res,2}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{tr} \left\{ \mathbf{E}(e^{j\omega}) DSP_{\phi^{tur}}(e^{j\omega}) \mathbf{E}^*(e^{j\omega}) + \mathbf{H}_w(e^{j\omega}) DSP_w(e^{j\omega}) \mathbf{H}_w^*(e^{j\omega}) \right\} d\omega. \quad (4.30)$$

Cette relation montre que la minimisation du critère  $J_{res,2}(\mathbf{u})$  nécessite d'une manière ou d'une autre une connaissance de la turbulence et du bruit de mesure. On peut même ajouter qu'une connaissance des composants et donc des matrices  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{D}$  intervenant dans les fonctions de transfert doivent aussi être connues, si l'on veut trouver le correcteur  $\mathbf{C}$  minimisant  $\mathbf{J}_{res,2}(\mathbf{u})$ . La loi de commande que nous allons mettre en œuvre va exploiter une connaissance *a priori* de l'ensemble de ces éléments. Nous avons d'ores et déjà introduit des modèles des composants, un modèle de bruit, et on peut supposer que la covariance du bruit peut être estimée. Mais il reste à introduire une connaissance *a priori* de la turbulence. Le paragraphe suivant s'intéresse à modéliser la turbulence.



### 4.4.3 Modèle de turbulence

Il apparaît ainsi qu'une connaissance *a priori* de la turbulence est nécessaire. On présente donc ici un modèle d'évolution de la turbulence. Ce modèle est celui proposé par Le Roux et on pourra se référer à [Le Roux *et al.*(2004)] pour de plus amples détails. Ce modèle repose sur les hypothèses d'une turbulence composée de couches discrètes localisées, indépendantes, et de statistique Kolmogorov en translation uniforme (hypothèse de Taylor). Considérant pour l'heure un cas d'OA simple, on peut assimiler l'ensemble de la turbulence atmosphérique à une unique couche turbulente.

Considérons la phase dans une pupille de diamètre  $D$  donnée, pour une unique couche turbulente, moyennée sur des intervalles de temps  $T$ , comme une fonction linéaire. Le principe repose sur une approximation de cette fonction par un Auto-Régressif d'ordre  $n$  (AR $n$ ). C'est-à-dire que l'évolution spatio-temporelle de la phase turbulente est décrite par une équation du type :

$$\phi_{n+1}^{tur} = \mathbf{A}_1 \phi_n^{tur} + \mathbf{A}_2 \phi_{n-1}^{tur} + \dots + \mathbf{A}_k \phi_{n-k+1}^{tur} + \boldsymbol{\nu}_{n+1}, \quad (4.31)$$

où  $k$  désigne l'ordre de l'AR, de coefficients  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$  (ce sont des matrices !), et  $\boldsymbol{\nu}$  désigne un bruit blanc gaussien de matrice de covariance  $\Sigma_\nu$ . Le Roux donne une interprétation physique à ce modèle dans une approche zonale (phase exprimée comme une carte de points), expliquant qu'il correspond d'une part à une évolution déterministe de la turbulence, liée à la translation uniforme de la couche turbulente dans l'hypothèse de Taylor, et d'autre part à une partie stochastique, liée à un terme de création, qui correspond à l'apparition en bord de pupille d'une turbulence nouvelle. D'un point de vue de l'automatique, cela consiste à considérer la phase turbulente comme la sortie d'un filtre formeur attaqué par un bruit blanc gaussien.

Il a été choisi d'utiliser un AR d'ordre 1, comme suggéré par Le Roux. Ce modèle est simple, mais présente l'avantage considérable d'être de complexité réduite. Il est relativement aisé d'identifier ce modèle sur la base des corrélations de la phase turbulente. De plus, la loi de commande, comme on le verra, ne nécessite principalement qu'une connaissance *a priori* limitée de l'évolution temporelle de la turbulence, à savoir son évolution sur une trame, ou évolution à un pas (paragraphe 5.5.1). Ce choix permet enfin de réduire la complexité calculatoire de la commande.

Ainsi, l'évolution de la turbulence est modélisée par l'équation récursive suivante :

$$\phi_{n+1}^{tur} = \mathbf{A}^{tur} \phi_n^{tur} + \boldsymbol{\nu}_n. \quad (4.32)$$

Le calcul des divers paramètres ( $\mathbf{A}^{tur}$  et  $\Sigma_\nu$ ) est détaillé par Le Roux. On en résume ici le principe. Ainsi, il apparaît que l'équation 4.32 impose la relation suivante :

$$\Sigma_{\phi^{tur}} = \mathbf{A}^{turT} \Sigma_{\phi^{tur}} \mathbf{A}^{tur} + \Sigma_\nu, \quad (4.33)$$

$\boldsymbol{\nu}_n$  et  $\phi_n^{tur}$  étant décorrélés.  $\Sigma_{\phi^{tur}}$  désigne la matrice de covariance de la phase  $\phi_n^{tur}$ . Cette relation peut être interprétée comme un principe de conservation de l'énergie et définit la matrice  $\Sigma_\nu$ , dès que  $\mathbf{A}^{tur}$  est choisie, par  $\Sigma_\nu = \Sigma_{\phi^{tur}} - \mathbf{A}^{turT} \Sigma_{\phi^{tur}} \mathbf{A}^{tur}$ .

On a vu que les propriétés de la phase turbulente s'expriment simplement dans la base de Zernike. On choisit donc cette base pour représenter la phase. Il est important de noter que l'on traite ici d'une phase discrète. On fait cependant l'hypothèse que la période  $T$  du système est petite devant le temps caractéristique d'évolution de la turbulence  $\tau_0$  (la fréquence d'échantillonnage  $f_{ech}$  dépasse plusieurs centaines de Hertz, la fréquence de coupure de la DSP de la turbulence étant de l'ordre de quelques Hertz voir paragraphe 1.4.2). Par conséquent, on assimile les propriétés de  $\phi_n^{tur}$  à celles de la turbulence. En particulier, la matrice de covariance  $\Sigma_{\phi^{tur}}$  de  $\phi_n^{tur}$  est assimilée à la matrice

$\Sigma_{kol}$  de la phase turbulente (continue) exprimée sur la base de Zernike. Ensuite, la matrice  $\mathbf{A}^{tur}$  est choisie diagonale, de coefficients diagonaux  $a_{ii}$ . On peut considérer ainsi que les éléments  $a_{ii}$  fixent en somme la vitesse de décorrélation de la phase turbulente. Il est important de souligner que ceci n'est pas équivalent à négliger les interspectres de la phase. Pour vérifier ce point, considérons le cas très simple d'un vecteur de phase exprimé sur deux composantes :

$$\phi_{n+1}^{tur} = \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{tur} \phi_n^{tur} + \nu_n, \quad (4.34)$$

où  $\mathbf{A}^{tur}$  est une matrice de dimension  $2 \times 2$  d'éléments diagonaux  $a_{11}, a_{22}$ . Pour tout entier  $k$ , le calcul de la covariance de  $\phi_n^{tur}$  et  $\phi_{n+k}^{tur}$ , conduit, en exploitant la relation réursive (4.34) à :

$$\mathbf{E} \left( \phi_n^{tur} \phi_{n+k}^{tur T} \right) = \mathbf{E} \left( \phi_n^{tur} \left( (\mathbf{A}^{tur})^k \phi_n^{tur} + \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{A}^{tur})^{(k-1)-i} \nu_{n+i} \right)^T \right). \quad (4.35)$$

En notant que  $\nu_{n+j}$  pour  $j \leq 0$  est blanc et décorrélé de la phase  $\phi_n^{tur}$ , il est résulte que :

$$\mathbf{E} \left( \phi_n^{tur} \phi_{n+k}^{tur T} \right) = \Sigma_{kol} \left( (\mathbf{A}^{tur})^k \right)^T \quad (4.36)$$

Ce terme est assurément non diagonal. En notant :

$$\Sigma_{kol} = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha^2 & \sigma_{\alpha,\beta}^2 \\ \sigma_{\beta,\alpha}^2 & \sigma_\beta^2 \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

on obtient :

$$\mathbf{E} \left( \phi_n^{tur} \phi_{n+k}^{tur T} \right) = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha^2 a_{11}^k & \sigma_{\alpha,\beta}^2 a_{22}^k \\ \sigma_{\beta,\alpha}^2 a_{11}^k & \sigma_\beta^2 a_{22}^k \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

La matrice de corrélation temporelle est donc non diagonale, démontrant l'existence d'un interspectre non nul. Ce résultat témoigne aussi d'une décroissance exponentielle de la corrélation temporelle. En résumé, le choix de  $\mathbf{A}^{tur}$  diagonale ne prive pas notre modèle d'évolution de la phase turbulente de ses interspectres. Ils existent au travers des caractéristiques du bruit  $\nu_n$  choisi en accord avec (4.33).

De manière plus générale, en notant par  $\xi^i(p)$  la fonction de corrélation du mode  $i$  de la phase, à  $p$  pas, on a donc :

$$\xi^i(p) = a_{ii}^p \sigma_{tur,i}^2, \quad (4.39)$$

où  $\sigma_{tur,i}^2$  désigne la variance turbulente du mode  $i$ . Or un modèle de phase turbulente de type Taylor assure plutôt un profil de décroissance de la corrélation de type gaussien. Afin d'ajuster le modèle AR1 à une évolution de la turbulence selon l'hypothèse de Taylor, Le Roux propose de définir un temps caractéristique de corrélation de l'AR1,  $\tau_c^{i,AR1}$ , pour chaque mode  $i$ , comme le temps de corrélation à  $\frac{1}{e}$  du maximum. Il définit aussi un temps caractéristique de corrélation du modèle de turbulence Taylor par l'inverse de la fréquence de coupure de la DSP, définie, rappelons-le (cf paragraphe 1.4.2) par  $\nu_c \simeq 0,3(n+1)V/D$ , pour un ordre radial  $n$ . L'égalisation de ces deux temps caractéristiques conduit au choix de :

$$a_{ii} = \exp(-0,3(n(i)+1)VT/D), \quad (4.40)$$

où  $n(i)$  désigne l'ordre radial du polynôme de Zernike  $i$ . On obtient ainsi une définition de la matrice  $\mathbf{A}^{tur}$ . Ses coefficients diagonaux  $a_{ii}$  sont définis pour chaque mode de la phase turbulente, et sont décroissants par paliers de même ordre radial. La figure 4.5 montre ainsi les valeurs des coefficients

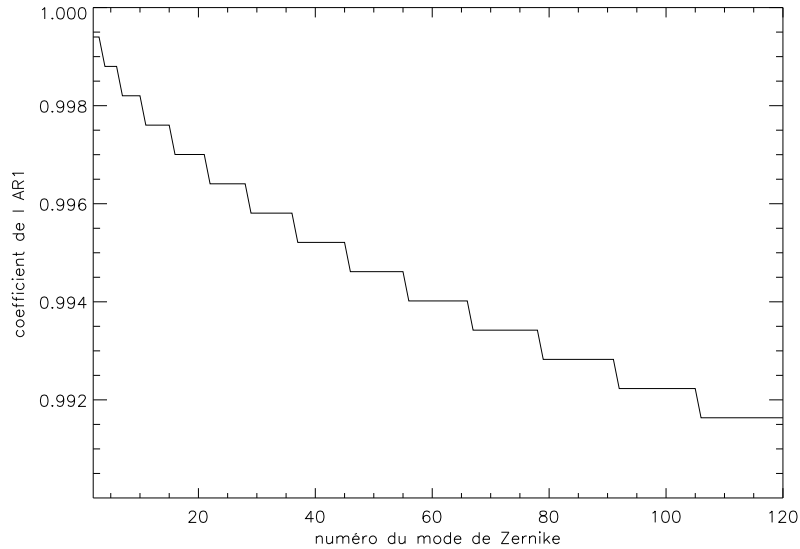


FIG. 4.5 – Diagonale de la matrice  $\mathbf{A}^{tur}$ . Les conditions de turbulence sont  $V/D = 1$  et  $f_{ech} = 500$  Hz. L'évolution des coefficients du modèle AR1 se fait par palliers, suivant l'ordre radial.

diagonaux de  $\mathbf{A}^{tur}$  pour une couche turbulente de vitesse de translation relative  $V/D = 1$  et pour une fréquence d'échantillonnage de 500 Hz. Ceci illustre l'évolution des coefficients de  $\mathbf{A}^{tur}$  par ordres radiaux. En notant que les  $a_{ii}$  (et resp.  $a_{ii}^n$ ) ne sont en fait que les coefficients de corrélation au premier (resp.  $n^{\text{ième}}$ ) pas du signal décrit par le modèle AR1, on peut comparer ces coefficients aux coefficients de corrélation d'une turbulence de type Taylor. On simule donc numériquement une turbulence de type Taylor, dont les conditions de vent sont proches de celles rencontrées en expérience (voir paragraphes 8.3.2 et 12.2.5), et on calcule sa décomposition sur la base de Zernike au cours du temps. Les coefficients de corrélation au premier et second pas des 100 premiers modes de Zernike (calculés par une méthode de transformée de Fourier décrite en annexe A.1) sont tracés en figure 4.6. On superpose les coefficients  $a_{ii}$  et  $a_{ii}^2$  obtenus grâce à (4.40). On constate ainsi que si l'allure globale des courbes de corrélation modale est respectée par le modèle AR1, aucune véritable correspondance des coefficients de corrélation n'est obtenue.

L'ajustement du modèle AR1 n'est pas unique. D'autres méthodes peuvent être envisagées, notamment en identifiant directement la corrélation au  $n^{\text{ième}}$  pas des modes de la turbulence avec le coefficient  $a_{ii}^n$ . Pour l'heure, ce choix s'avère à la fois simple et efficace.

Les matrices  $\mathbf{A}^{tur}$  et  $\Sigma_{\phi^{tur}}$  sont donc définies à partir des propriétés de la phase turbulente et représentent notre connaissance *a priori* de celle-ci. La matrice  $\Sigma_{\nu}$  est alors déduite de la relation (4.32).

## 4.5 Expression d'un modèle d'état du système

Le problème de la commande est donc posé au travers du critère (4.22). On a mis en évidence le besoin d'une connaissance *a priori* du système, connaissance désormais disponible. Afin de résoudre ce problème de commande grâce à la théorie du contrôle linéaire stochastique, on se place dans un contexte mathématique approprié, il s'agit du formalisme d'état. Il s'agit d'un outil puissant

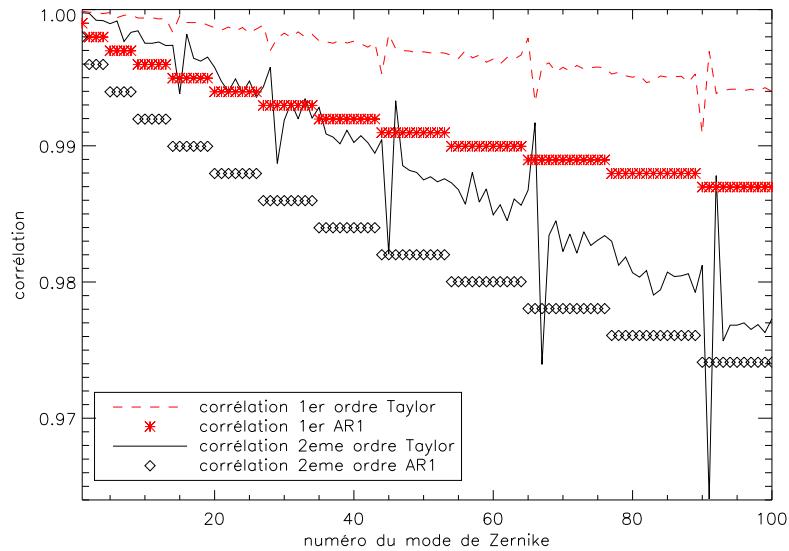


FIG. 4.6 – Comparaison des coefficients de corrélation modaux au premier et second pas (noté aussi ordre). On considère d'une part une turbulence de type Taylor simulée numériquement (lignes) et d'autre part les coefficients  $a_{ii}$  (étoile) et  $a_{ii}^2$  (losange) issus du modèle AR1 correspondant aux conditions de vent et de fréquence d'échantillonnage.

permettant d'aborder plus sereinement le problème de commande optimale. Le système étudié est alors synthétisé au travers d'un modèle dit modèle d'état. Après avoir donc présenté ce formalisme, des modèles d'état sont proposés pour le système d'OA. Enfin, un certain nombre de propriétés de ce système sont étudiées dans ce formalisme. Ces propriétés sont nécessaires pour mettre en œuvre la commande optimale.

#### 4.5.1 Le formalisme d'état

Le formalisme d'état est un outil puissant et très largement employé en automatique. Il consiste à décrire au sein d'un système d'équations, appelé modèle d'état, l'évolution de l'ensemble d'un système physique. On définit pour cela un état du système, matérialisé par un vecteur d'état, et on décrit l'évolution de cet état, de ses interactions avec d'éventuelles commandes, sorties (ou mesures) *etc.* On peut s'interroger sur l'utilité d'une telle représentation. Elle est multiple :

- une raison théorique. Il existe toute une théorie basée sur cette représentation permettant d'analyser les systèmes et de synthétiser des correcteurs ;
- des raisons numériques. La plupart des algorithmes de synthèse de correcteurs s'appuient sur cette représentation ;
- des raisons d'implantation. Une telle représentation permet de réaliser facilement une implantation algorithmique ou électronique sur des cartes de calcul ;
- des raisons liées aux modes cachés. La représentation d'état permet de mettre en évidence des modes cachés, qu'un traitement du problème avec des matrices de transfert (modèles «boîte noire» du comportement entrée-sortie) ne permet pas.

Nous présentons donc ici un modèle d'état linéaire pour le système d'OA et ce, en temps discret étant données les remarques faites dans les précédents paragraphes. De plus amples éléments relatifs au formalisme d'état et aux modèles d'état peuvent être trouvés dans [Anderson & Moore(1990)] et en particulier dans le cadre qui nous intéresse dans [Le Roux(2003)], Le Roux ayant déjà formalisé le problème durant sa thèse.

Le principe consiste donc à représenter le système par le système d'équations suivant :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_n + \mathbf{B}\mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n \quad (4.41)$$

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}\mathbf{X}_n + \mathbf{w}_n. \quad (4.42)$$

Dans cette représentation :

- $\mathbf{X}$  désigne l'état du système ;
- $\mathbf{y}$  représente la sortie, c'est la mesure du système ;
- $\mathbf{u}$  est l'entrée du système, ce sont les commandes ;
- $\mathbf{v}$  est une perturbation de matrice de covariance  $\Sigma_v$  ;
- $\mathbf{w}$  est le bruit de mesure, de matrice de covariance  $\Sigma_w$  ;
- $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  sont les matrices du système.

L'équation d'état (4.41) et l'équation d'observation (4.42) constituent le modèle d'état, qui est linéaire stochastique à temps discret. Les matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  vont être indépendantes du temps dans notre cas, si bien que le problème sera considéré comme stationnaire dans tout le mémoire.

On va montrer maintenant comment ce modèle d'état peut décrire notre système d'OA.

#### 4.5.2 Expression dans le cas de l'OA

Considérons donc le cas de l'OA. Le choix du vecteur d'état, détaillé dans [Le Roux(2003)], est rappelé ici. Ce choix a un but passablement explicatif, puisque le vecteur d'état proposé permet de bien comprendre la démarche suivie, mais n'est pas forcément le meilleur choix en terme de compacité (on parlera par la suite de minimalité cf. paragraphe 4.7), et donc d'optimalité au sens du coût calcul. D'autres vecteurs d'état sont envisageables, Le Roux en propose quelques-uns. Une version plus compacte sera proposée en paragraphe 7.2.

Le choix de ce vecteur d'état repose sur les remarques suivantes. Considérons un intervalle  $[(n-1)T, nT]$ . Comme on le verra plus en détail au chapitre 5, c'est l'estimation de l'état qui doit nous permettre de déterminer la correction à appliquer, on décide donc que le vecteur d'état va contenir la phase turbulente dans la pupille c'est-à-dire  $\phi_n^{tur}$ . Ensuite, l'équation d'observation (4.42) et le chronogramme de la figure 4.1 montre que la mesure  $\mathbf{y}_n$  est nécessairement liée à l'intégration de la phase sur un intervalle  $[(n-2)T, (n-1)T]$ , c'est-à-dire à  $\phi_{n-1}^{tur}$  et à la correction appliquée pour corriger cette phase turbulente, c'est-à-dire  $\mathbf{u}_{n-2}$ . Enfin, notre objectif va être de prédire la phase  $\phi_{n+1}^{tur}$  afin de déterminer la meilleure correction à appliquer  $\mathbf{u}_n$ . Ceci fait donc apparaître un état composé de  $\phi_{n+1}^{tur}, \phi_n^{tur}, \phi_{n-1}^{tur}$  et  $\mathbf{u}_{n-2}$ . En fait on y ajoute  $\mathbf{u}_{n-1}$  afin de garder en mémoire le vecteur de tension intermédiaire pour les itérations suivantes.

Ainsi, au final le vecteur d'état est choisi égal à :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tur} \\ \phi_{n-1}^{tur} \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

En exploitant les équations (4.32) et (4.20) on peut réécrire les équations d'état et d'observation selon :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_n + \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n, \quad (4.44)$$

et :

$$\mathbf{y}_n = ( 0 \ 0 \ \mathbf{D} \ 0 \ -\mathbf{DN} ) \mathbf{X}_n + \mathbf{w}_n. \quad (4.45)$$

$\mathbf{Id}$  désigne la matrice identité.

Ainsi :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{C} = ( 0 \ 0 \ \mathbf{D} \ 0 \ -\mathbf{DN} ), \quad (4.46)$$

et on définit  $\boldsymbol{\nu}_n$  par :

$$\boldsymbol{\nu}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n, \quad (4.47)$$

On peut faire un certain nombre de remarques sur cette représentation d'état. D'abord, le vecteur d'état choisi s'adapte parfaitement au modèle AR1 d'évolution temporelle de la turbulence. En fait, en choisissant un vecteur d'état contenant trois occurrences de phase, on peut aisément envisager un modèle d'évolution de la turbulence AR2 ou AR3 sans changer le vecteur d'état, ou la taille des matrices. Seule la matrice  $\mathcal{A}$  serait modifiée, par exemple pour un modèle AR2 défini par :

$$\phi_{n+1}^{tur} = \mathbf{A}_1^{tur} \phi_n^{tur} + \mathbf{A}_2^{tur} \phi_{n-1}^{tur} + \boldsymbol{\nu}_{n+1}, \quad (4.48)$$

on choisirait :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{tur} & \mathbf{A}_2^{tur} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

Au-delà d'un AR3, la taille du vecteur d'état et des matrices devrait être augmentée.

De plus, la présence dans le vecteur d'état de plusieurs occurrences de phase est intrinsèquement liée à l'existence de retards dans la boucle d'asservissement : on souhaite corriger au mieux la phase  $\phi_{n+1}$  qui sera intégrée dans l'intervalle de temps  $[nT, (n+1)T]$  suivant, indiquant qu'une prédiction est nécessaire, prédiction réalisée à partir de la mesure courante  $\mathbf{y}_n$ , elle-même liée à la phase  $\phi_{n-1}$ . On retrouve les deux trames de retard de la boucle et cela explique la multiplicité des phases constituant le vecteur d'état.

Enfin, dans le cadre de l'OA, on a considéré comme variable d'état la phase dans la pupille, sans prendre en compte l'aspect volumique de la turbulence, inutile en OA. Cela signifie que le modèle d'évolution temporelle (4.32) doit être défini pour la phase turbulente dans la pupille, en définissant sa covariance et sa vitesse de vent équivalent.

### 4.5.3 Propriétés du modèle d'état

L'utilisation du formalisme d'état permet d'étudier plus aisément certaines propriétés des systèmes modélisés. On présente ici trois propriétés, la stabilité, la commandabilité et l'observabilité. Ces propriétés sont définies, puis étudiées dans le cadre d'un système d'OA et dans un cadre déterministe (absence de bruits  $\nu$  et  $w$ ), l'extension des résultats à l'OAMC étant immédiate. Les informations récoltées sur ces systèmes permettront de mettre en œuvre plus aisément la commande optimale.

#### 4.5.3.1 Stabilité

Il existe plusieurs définitions de la stabilité d'un système décrit par un modèle d'état linéaire. On rappelle ici deux définitions.

**Stabilité au sens de Lyapunov** Un système est dit stable au sens de Lyapunov (ou encore stabilité interne) si le vecteur d'état  $\mathbf{X}_t$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini si on arrête de le commander ( $\mathbf{u}_t = 0, \forall t$ )

Pour un système à temps discret, ceci est équivalent à ce que toutes les valeurs propres de  $\mathcal{A}$  soient de module strictement inférieur à 1. On dit que  $\mathcal{A}$  est une matrice de stabilité.

**Stabilité entrée bornée-sortie bornée** Un système est dit stable au sens Entrée Bornée-Sortie Bornée (EBSB) si pour toute entrée bornée la sortie est bornée.

La stabilité au sens de Lyapunov est plus forte et implique la stabilité EBSB. Lorsqu'une représentation minimale du système est donnée ces deux notions deviennent équivalentes.

**Cas de l'OA** Considérons le modèle d'état associé au système d'OA. La matrice  $\mathcal{A}$  est définie selon :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Les valeurs propres de  $\mathcal{A}$  sont égales à 0 et aux valeurs propres de  $\mathbf{A}^{tur}$ , laquelle est diagonale de termes diagonaux  $a_{ii}$ . La stabilité est donc garantie tant que les coefficients  $a_{ii}$  sont tous de module strictement inférieur à 1. En l'occurrence, on verra que cette condition est vérifiée en général pour nos systèmes. Cela se comprend simplement en remarquant que les  $a_{ii}$  sont définis comme des coefficients de corrélation des modes de la turbulence. Physiquement, la turbulence ne peut que se décorrélérer au cours du temps impliquant des coefficients  $a_{ii}$  strictement inférieurs à 1 en valeur absolue. On considérera un cas particulier de système non stable (au sens de Lyapunov) au chapitre 10.

### 4.5.3.2 Commandabilité

On dit qu'un système est commandable si, quel que soit l'état initial, on peut atteindre en un temps fini arbitrairement choisi (mais au moins égal à la dimension du vecteur d'état) n'importe quel point de l'espace d'état, grâce à un choix adéquat de la commande  $\mathbf{u}$ .

Le modèle d'état du système d'OA décrit au paragraphe 4.5.2 est clairement non commandable : notre modèle inclut un modèle de perturbation non commandable par construction ( $\mathbf{u}$  n'influence évidemment pas la phase turbulente  $\phi^{tur}$ ). Le résultat s'étend à l'OAMC.

### 4.5.3.3 Observabilité

On dit qu'un système est observable si on est capable de reconstituer l'évolution des valeurs de  $\mathbf{X}_t$  entre  $t = 0$  et  $t = \tau$  arbitraire (mais au moins égal à la dimension du vecteur  $\mathbf{X}$ ) à partir seulement des valeurs de  $\mathbf{u}_t$  et  $\mathbf{y}_t$  entre les mêmes instants.

On définit la matrice d'observabilité  $\mathbf{O}$  par :

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathcal{A} \\ \mathbf{C}(\mathcal{A})^2 \\ \dots \\ \mathbf{C}(\mathcal{A})^{n-1} \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

où  $n$  est la dimension du vecteur d'état  $\mathbf{X}_t$ . Le système est observable si et seulement si  $\mathbf{O}$  est de rang plein.

Le calcul de  $\mathbf{O}$  dans le cadre de l'OA mène à une expression du type :

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{D} & 0 & -\mathbf{D}\mathbf{N} \\ 0 & \mathbf{D} & 0 & -\mathbf{D}\mathbf{N} & 0 \\ \mathbf{D} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}\mathbf{A}^{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{D}\mathbf{A}^{tur^{n-3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Cette matrice n'est pas de rang plein, en raison des 4 dernières colonnes, les deux dernières étant définitivement liées aux deux précédentes, amenant à la conclusion que le système est inobservable. Ce sont les deux vecteurs de commandes qui sont en cause, et sont considérés comme inobservables. Comme le souligne déjà Le Roux, on introduit les vecteurs de tension dans le vecteur d'état or ceux-ci sont inobservables. Mais étant donné qu'ils sont connus, leur inobservabilité n'est pour Le Roux qu'un effet mineur, le système pouvant être réécrit sans les tensions. Mais le problème ne s'arrête pas là. Même en isolant les deux vecteurs de commandes, et en ne se concentrant que sur la partie turbulence du vecteur d'état, le système n'est pas observable. Ceci est simplement dû à la présence de retards dans le système et au fait qu'il y a en général plus d'états estimés que de mesures. La démonstration de ce résultat est donnée en annexe C. Le résultat est *a fortiori* vrai aussi pour l'OAMC.

## 4.6 Extension à l'OAMC

L'ensemble de la démarche suivie précédemment en OA se transpose naturellement à l'OAMC. On suppose que l'ensemble des modèles et des hypothèses introduits au paragraphe 4.2 pour l'OA



sont applicables de manière identique à l'OAMC. Le système est supposé ainsi fonctionner en boucle fermée selon le chronogramme décrit en figure 4.1. Dans ces conditions, on montre immédiatement que l'on peut, comme en OA, minimiser de manière équivalente un critère à temps discret. On va donc présenter la modélisation du système d'OAMC directement en temps discret.

La modélisation proposée peut aisément rendre compte de la grande majorité des configurations discutées dans ce mémoire telles que OA, MOAO, LTAO ou OAAO. La modification de certains vecteurs et de certaines matrices permet de traiter simplement chacune de ces configurations à partir des équations proposées ci-dessous. Les notations et la structure du modèle proposé s'inspirent là aussi de celles introduites par [Fusco(2000), Le Roux(2003)].

#### 4.6.1 Modélisation du système

Il s'agit de modéliser l'ensemble du système d'OAMC, mettant en jeu à la fois la turbulence, la mesure et la correction, tout cela sous le jour d'une architecture bien définie. On s'appuie sur le schéma d'une OAMC de la figure 4.7.

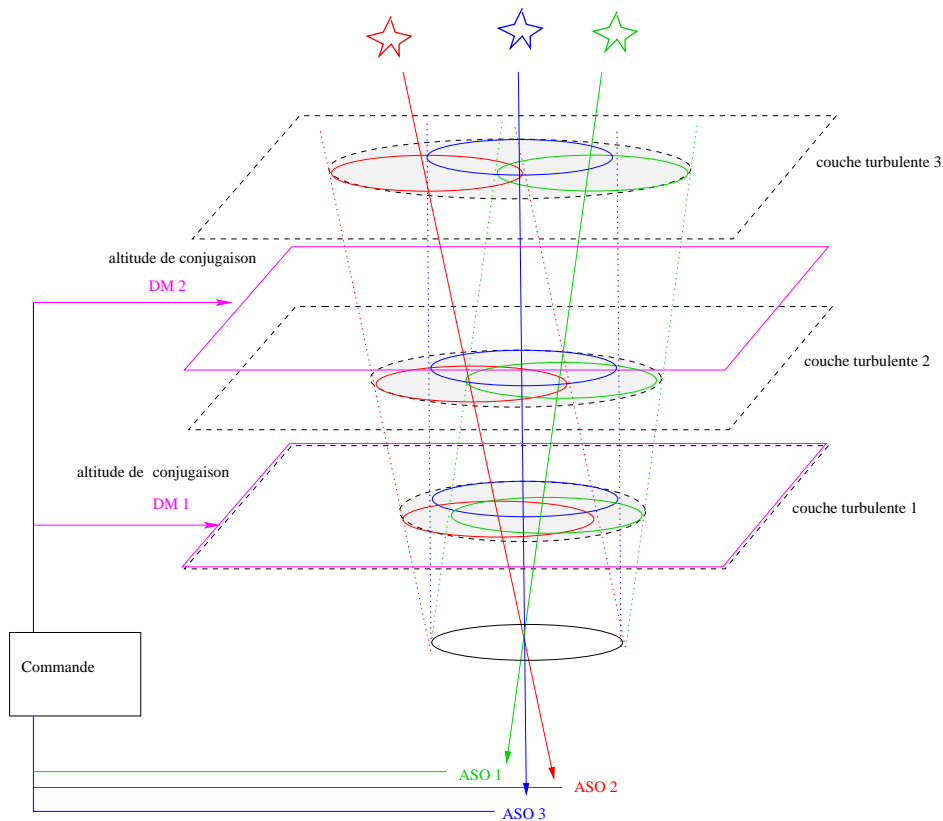


FIG. 4.7 – Schéma de principe d'une Optique Adaptative Multi-Conjuguée. La turbulence constituée de  $L$  couches est analysée dans  $n_{eg}$  directions grâce à autant d'ASO conjugués des EG (mode SO). La correction est réalisée par  $M$  miroirs (ici 2), conjugués à  $M$  altitudes, dans  $n_{obj}$  directions d'intérêt.

Soit donc un télescope de pupille de diamètre  $D$ . On considère un volume de turbulence, modélisé sous la forme d'une série de  $L$  couches turbulentes statistiquement indépendantes. Chaque couche  $i$  est caractérisée par son altitude  $h_i$ . Considérant un champ d'observation maximal d'angle  $\theta$ , on désigne

par  $\varphi_{i,n}^{tur}$  la phase turbulente à l'instant  $n$  dans la couche  $i$  définie sur une métapupille dont le support est délimité par le champ  $\theta$  dans ladite couche (diamètre  $D_i = D + h_i * \theta$ ). On suppose pour l'heure que cette phase est définie sur une base non précisée qui pourrait être par exemple la base des modes de Zernike. Quelle que soit la base, la phase est supposée sans piston. On définit un vecteur de phase turbulente dans le volume  $\varphi_n$  par :

$$\varphi_n^{tur} = \begin{pmatrix} \varphi_{1,n}^{tur} \\ \varphi_{2,n}^{tur} \\ \dots \\ \varphi_{L,n}^{tur} \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Considérons maintenant une direction d'observation  $\alpha_1$ . La phase résultante dans la pupille du télescope  $\phi_{\alpha_1,n}^{tur}$  s'écrit dans l'hypothèse de champ proche comme la sommation des phases extraites dans chaque couche turbulente sur un support de diamètre  $D$  selon :

$$\phi_{\alpha_1,n}^{tur}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^L \varphi_{i,n}^{tur}(\mathbf{r} + h_i * \alpha_1), \quad (4.54)$$

soit, en l'exprimant comme une opération linéaire sur chaque  $\varphi_{i,n}$  :

$$\phi_{\alpha_1,n}^{tur} = \mathbf{M}_{\alpha_1}^L \varphi_n^{tur}, \quad (4.55)$$

où  $\mathbf{M}_{\alpha_1}^L$  désigne l'opérateur découpant dans chaque couche  $i$  la turbulence dans la direction  $\alpha_1$ , sur un support égal à la pupille, et sommant l'ensemble des contributions. Enfin, en considérant un ensemble de directions d'intérêt  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ , on définit le vecteur  $\phi_{\alpha,n}^{tur}$  des mesures dans la pupille du télescope selon les différentes directions  $\alpha_j$  par :

$$\phi_{\alpha,n}^{tur} = \begin{pmatrix} \phi_{\alpha_1,n}^{tur} \\ \phi_{\alpha_2,n}^{tur} \\ \dots \\ \phi_{\alpha_p,n}^{tur} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{\alpha}^L \varphi_n^{tur}, \quad (4.56)$$

$\mathbf{M}_{\alpha}^L$  regroupant l'ensemble des opérateurs  $\mathbf{M}_{\alpha_j}^L$ ,  $j \in 1, \dots, p$  :

$$\mathbf{M}_{\alpha}^L = \left( (\mathbf{M}_{\alpha_1}^L)^T, (\mathbf{M}_{\alpha_2}^L)^T, \dots, (\mathbf{M}_{\alpha_p}^L)^T \right)^T. \quad (4.57)$$

Supposons maintenant l'existence d'une OAMC possédant  $M$  miroirs déformables conjugués aux altitudes  $(h_1', h_2', \dots, h_M')$  et soit  $\mathbf{u}_n$  vecteur des tensions de commande à l'instant  $n$  contenant les vecteurs de tension de commande  $u_{j,n}$  ( $j \in \{1, \dots, M\}$ ) appliqués à chaque miroir :

$$\mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} u_{1,n} \\ u_{2,n} \\ \dots \\ u_{M,n} \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

On désigne par  $\mathbf{N}$  la méta matrice d'influence de l'ensemble des miroirs. Il s'agit d'une matrice bloc diagonale, dont chaque élément  $j$  de la diagonale contient la matrice d'influence  $\mathbf{N}_j$  du miroir  $j \in \{1, \dots, M\}$ . On définit comme précédemment une phase de correction  $\varphi_n^{corr}$  dans le volume par :

$$\varphi_n^{corr} = \begin{pmatrix} \varphi_{1,n}^{corr} \\ \varphi_{2,n}^{corr} \\ \dots \\ \varphi_{M,n}^{corr} \end{pmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}_{n-1}. \quad (4.59)$$

On en déduit aussi la correction apportée dans un ensemble de direction  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ , dans la pupille, selon :

$$\phi_{\alpha,n}^{corr} = \mathbf{M}_{\alpha}^M \varphi_n^{corr}. \quad (4.60)$$

Dès lors, si on considère  $n_{eg}$  étoiles guides et autant de directions d'analyse  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_{eg}}\}$ , et  $n_{obj}$  objets d'intérêts et autant de directions d'intérêt  $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_{obj}}\}$ , on définit alors la mesure de front d'onde résiduel  $\mathbf{y}_n$  réalisée par une OAMC dans les directions  $\alpha$  par :

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{D} \left( \mathbf{M}_{\alpha}^L \varphi_{n-1}^{tur} - \mathbf{M}_{\alpha}^M \mathbf{N} \mathbf{u}_{n-2} \right) + \mathbf{w}_n, \quad (4.61)$$

$\mathbf{D}$  désignant la méta matrice de mesure ASO définie de manière similaire à  $\mathbf{N}$  pour les  $n_{eg}$  ASO de matrices ASO  $\mathbf{D}_i, i \in \{1, \dots, n_{eg}\}$ , et  $\mathbf{w}_n$  désignant le vecteur de bruit de mesure sur l'ensemble des ASO.

La phase résiduelle dans les directions d'intérêt  $\beta$  est définie par :

$$\phi_n^{res} = \mathbf{M}_{\beta}^L \varphi_n^{tur} - \mathbf{M}_{\beta}^M \mathbf{N} \mathbf{u}_{n-1}. \quad (4.62)$$

Une configuration de type OA est aisément retrouvée, en supposant que les diverses matrices de projection  $\mathbf{M}_{\alpha}^L, \mathbf{M}_{\beta}^L, \mathbf{M}_{\alpha}^M, \mathbf{M}_{\beta}^M$  sont égales à l'identité et qu'un unique ASO et un unique MD sont utilisés.

Il s'agit maintenant de redéfinir le critère de performance dans le cadre de l'OAMC.

#### 4.6.2 Critère d'optimalité en OAMC

Le critère de performance visé en OAMC est très similaire à celui de l'OA. Il s'agit de minimiser la variance de phase résiduelle dans chacune des directions d'intérêt.

Le critère s'écrit donc d'après (4.62) et par analogie avec l'OA :

$$\mathbf{J}_{res,2}^{oamc}(\mathbf{u}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\| \mathbf{M}_{\beta}^L \varphi_j^{tur} - \mathbf{M}_{\beta}^M \mathbf{N} \mathbf{u}_{j-1} \right\|^2, \quad (4.63)$$

connaissant les mesures  $\mathbf{y}_j, j \in [0, \dots, n-1]$ .

Le paragraphe 4.3 a déjà souligné la possibilité de définir pour certaines application d'autres critères de performance. Notons que dans le cadre des OA tomographiques, certaines applications et notamment le GLAO (paragraphe 3.3.2), visent par exemple à maximiser l'homogénéité de la variance de phase résiduelle dans le champ d'intérêt. On définit ainsi un critère bi-quadratique, portant sur la minimisation de la variance (spatiale) de la variance de phase résiduelle. Une fois de plus, soulignons que le critère quadratique portant sur la phase résiduelle (4.63) reste toutefois le critère le plus approprié pour les applications visées.

Comme en OA, la minimisation de ce critère implique nécessairement l'introduction d'*a priori* sur le système, la turbulence et le bruit de mesure. Le modèle de turbulence a été décrit au paragraphe 4.4.3. Dans le cadre de l'OAMC, chacune des  $L$  couches turbulentes est désormais modélisée par un processus de type AR1 caractérisé par la donnée des matrices  $\mathbf{A}_i^{tur}$  et  $\Sigma_{\varphi,i}^{tur}$ , pour  $i \in \{1, \dots, L\}$ .

Dans ce contexte, on peut établir une représentation d'état de l'OAMC, par analogie avec celle établie pour l'OA au paragraphe 4.5.2.

### 4.6.3 Modèle d'état d'une OAMC

Le passage au cas de l'OAMC est une généralisation du cas d'OA. L'état du système est cette fois décrit par la phase turbulente dans le volume et dans le champ d'observation. Il faut donc prendre en compte la phase turbulente dans chaque couche et dans chaque méta-pupille soit le vecteur  $\varphi_n^{tur}$ . On a aussi besoin d'introduire les tensions appliquées aux divers miroirs soit le vecteur  $\mathbf{u}_n$ . L'approche reste rigoureusement la même. Le vecteur d'état s'écrit donc :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \varphi_{n+1}^{tur} \\ \varphi_n^{tur} \\ \varphi_{n-1}^{tur} \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (4.64)$$

Et de la même manière, les équations d'état et d'observation s'écrivent :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_n + \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n, \quad (4.65)$$

$$\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{DM}_\alpha^L & 0 & -\mathbf{DM}_\alpha^M \mathbf{N} \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \mathbf{w}_n. \quad (4.66)$$

Bien qu'apparemment identiques, les modèles d'état d'OA et d'OAMC présentent quelques différences. On raisonne maintenant sur un méta-vecteur  $\varphi_n^{tur}$  contenant la phase dans les différentes couches. La matrice  $\mathbf{A}^{tur}$  est donc une matrice bloc-diagonale, à  $L$  blocs diagonaux si il y a  $L$  couches turbulentes modélisées. Chaque élément diagonal est lui-même une matrice  $\mathbf{A}_i^{tur}$  ( $1 \leq i \leq L$ ) issue de la modélisation de l'évolution temporelle de la couche turbulente  $i$ . De la même manière, les vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{y}$  désignent les commandes et mesures sur les multiples miroirs et ASO. L'équation de mesure (4.66) fait explicitement apparaître les projecteurs déterminant les directions d'analyse.

### 4.6.4 Propriétés du modèle en OAMC

On montre aisément que les caractéristiques établies au paragraphe 4.5.3 pour le modèle d'OA s'étendent directement à l'OAMC. Ainsi, le modèle d'état de l'OAMC est stable, grâce à une matrice  $\mathbf{A}^{tur}$  stable. Le système n'est ni commandable ni observable pour les mêmes raisons qu'en OA.

## 4.7 Choix de la représentation d'état, représentation minimale

Nous avons proposé au paragraphe 4.5.2 un vecteur d'état et une représentation du système d'OA (puis d'OAMC), c'est-à-dire un choix de matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ . Or ce système, comme d'ailleurs tous les systèmes dynamiques, peut être décrit grâce à différents choix de vecteurs d'état, et donc de représentations. Dès lors, laquelle prendre ? Une approche pertinente consiste à ne retenir que les représentations dont l'état possède le moins de coordonnées possible. De telles représentations sont dites minimales. Ceci suppose toutefois que l'on ait préalablement clairement défini ce qu'est exactement le système qu'on se propose de représenter. Dans le cas d'un modèle déterministe, on s'intéressera généralement au comportement entrées-sorties du modèle d'état ; dans ce cas, on peut montrer qu'une représentation est minimale quand elle est simultanément commandable et observable. La situation est

un peu plus complexe dans le cas d'un modèle stochastique : sans entrer dans les détails, on se contentera de dire de façon un peu schématique que le problème consiste alors à réussir à produire en sortie du modèle un processus hilbertien ayant les caractéristiques statistiques (structure d'autocorrélation) souhaitées.

Comme il a été expliqué plus haut, notre modèle combine justement (sous forme de connexion série) un modèle d'état stochastique (celui de la phase turbulente) et un modèle d'état déterministe (avec comme entrées la phase turbulente et la commande, et comme sortie la mesure). En laissant de côté pour l'instant la question de savoir si le modèle stochastique est ou non minimal, il est assez facile de se convaincre que la représentation d'état du sous-modèle déterministe ne l'est pas. Il suffit pour cela de remarquer que si l'on cherche simplement à fabriquer la mesure  $\mathbf{y}$  à partir de  $\phi^{tur}$  et de  $\mathbf{u}$ , on peut remplacer dans le vecteur d'état les coordonnées de  $\phi_n^{tur}$ ,  $\phi_{n-1}^{tur}$ ,  $\mathbf{u}_{n-1}$  et  $\mathbf{u}_{n-2}$  par celles de  $\mathbf{D}\phi_n^{res}$  et de  $\mathbf{D}\phi_{n-1}^{res}$ .

L'utilisation d'une représentation non minimale présentant des inconvénients théoriques et pratiques évidents (ne serait-ce que parce qu'on manipule des vecteurs et des matrices de plus grande taille), il est important d'expliquer ce qui a motivé ce choix.

Tout d'abord, nous avons signalé dès le paragraphe 4.5.2 que ce choix de vecteur d'état était motivé notamment par un souci de clarté du discours. En effet, en incluant les trois occurrences de phase, et les tensions, on rend bien compte de l'ensemble de l'état du système, des données disponibles ou à estimer à un instant donné. L'ensemble des équations peuvent être aisément décrites. On verra au chapitre suivant que cette forme permet de mettre aisément en œuvre la commande optimale.

Ensuite, le vecteur d'état fait explicitement apparaître la phase turbulente, *a priori* sur une base à définir et de dimension finie mais non bornée pour l'heure. Ce choix a été dicté par plusieurs remarques. D'abord, en choisissant un état défini par la phase turbulente, exprimée dans une base telle que celle de Zernike, on reporte sur l'équation de mesure les diverses matrices de passage que sont la matrice ASO  $\mathbf{D}$ , la matrice d'influence du miroir  $\mathbf{N}$  et les projecteurs comme  $\mathbf{M}_\alpha^L$ . Ceci permet de réduire l'influence des erreurs de modèle sur l'évolution de la phase. On verra au chapitre suivant que ce choix est favorable pour la loi de commande choisie. Le vecteur d'état (portant sur la phase) permet de faire apparaître une matrice  $\mathbf{A}^{tur}$  simple, dont on peut plus aisément contrôler la stabilité. Bien sûr, cela contraint aussi à utiliser un modèle d'évolution de la turbulence pertinent. Or, en choisissant pour état la phase turbulente, on peut exploiter toute notre connaissance *a priori* des propriétés physiques de la turbulence atmosphérique. En choisissant une base telle que celle de Zernike pour exprimer cette phase, on bénéficie d'expressions simples de ces propriétés (voir chapitre 1 et la discussion sur le choix de base au paragraphe 5.5.6). Ajoutons qu'en choisissant d'exprimer la phase sur une base de dimension *a priori* non limitée, on s'autorise aussi à estimer plus de modes, c'est-à-dire à sur-paramétrer notre système. Or, en général, une sur-paramétrisation raisonnable d'un système permet de réduire la sensibilité du système aux erreurs de modèle, en offrant en somme des degrés de liberté supplémentaires. Évidemment, en sur-paramétrant le système on augmente la complexité de la commande et le coût calculatoire. Un compromis doit être trouvé.

Il y a aussi dans ce choix une motivation guidée par la physique du système. Trois espaces co-existent dans le contexte de l'OA, celui des phases, des mesures et des commandes. Or, ces espaces ne se correspondent pas au sens où ils ne sont pas isomorphes deux à deux. Le premier est de dimension infini, les deux autres non. Certaines phases (ou déformées miroir) peuvent conduire à une mesure nulle, nombre de phases ne peuvent être reproduites par le miroir *etc.* Le choix qui a été fait ici repose sur le principe d'exprimer chaque grandeur dans une base la plus appropriée, physiquement et mathématiquement. Ainsi, les mesures et les commandes sont exprimées dans la base canonique associée, les phases sont exprimées dans une base telle que celle de Zernike (voir paragraphe 5.5.6). Faire apparaître des grandeurs physiques présente l'avantage d'amener à manipuler des matrices et des

grandeurs commensurables. Ceci conduit en général à un meilleur conditionnement des matrices impliquées. On bénéficie aussi d'une meilleure appréhension du sens des données utilisées. Leur calcul est facilité.

Le but n'est pas ici de clore le débat sur le choix de la représentation d'état. Il reste au contraire grand ouvert, et diverses autres pistes mériteraient d'être explorées. Ce paragraphe a néanmoins proposé une argumentation de notre choix. On considérera au chapitre 7 l'amélioration du choix du vecteur d'état afin de réduire le coût calculatoire, malgré une représentation encore non minimale. La nature des éléments composant le vecteur d'état ne sera pas en effet foncièrement modifiée.



## Chapitre 5

# Des approches classiques à la commande LQG

### 5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la définition de la commande optimale vis-à-vis du critère de variance minimale (4.22) défini dans le chapitre précédent. L'objectif est de rappeler la solution de ce problème de commande dite Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG). Ces éléments sont à la base de la mise en œuvre numérique et expérimentale de la commande optimale. Afin de motiver une telle approche, diverses solutions de commande actuellement développées pour l'OAMC sont présentées et leurs limitations soulignées. On présente ensuite le cheminement permettant de résoudre le problème de commande de manière optimale. Sa solution est basée sur une estimation stochastique de l'état du système réalisée par un filtre de Kalman, et une commande par retour d'état reconstruit. Cette solution classique est réinterprétée dans le cadre de l'OA et l'OAMC. On détaille ainsi le fonctionnement de la commande qui sera implantée sur un système et ses particularités. On introduit notamment quelques problématiques liées à l'évaluation et le calcul des diverses matrices intervenant dans la commande. L'objectif principal de ce travail étant la mise en œuvre et la validation de la commande, il est aussi nécessaire de se doter d'outils pour caractériser et contrôler le bon fonctionnement de la commande. Ce chapitre rappelle donc aussi quelques propriétés des estimées qui seront utiles pour la suite de ce mémoire. Enfin, nous montrons que les correcteurs classiquement utilisés en OA peuvent être réinterprétés comme des observateurs d'un modèle spécifique de phase turbulente. La forme de ces correcteurs est alors comparée à la solution optimale obtenue sur la base des modèles qu'ils sous-tendent.

Aussi, après avoir présenté au paragraphe 5.2 diverses solutions de commande actuellement développées pour l'OAMC et leurs limitations, la commande optimale est abordée au paragraphe 5.3. Après une brève synthèse des travaux antérieurs sur La commande LQG en OA 5.3.1, nous détaillons le principe de cette loi de commande des paragraphes 5.3.2 à 5.3.4. le paragraphe 5.4 s'attache alors à interpréter sous forme d'observateur l'intégrateur, le MMSE et la commande POLC, correcteurs développés aussi en OAMC. Leurs limitations sont alors clairement identifiées. Ensuite, le paragraphe 5.5 reprecise la solution de commande générale proposée dans le contexte de l'OA et l'OAMC, en s'attaquant à la problématique d'implantation. La nature exacte des matrices utilisées est présentée. Le choix des bases est abordé. Enfin, le paragraphe 5.6 s'intéresse aux variables accessibles et aux outils de contrôle du fonctionnement de la boucle fermée dans l'objectif d'une implantation.



## 5.2 Approches classiques en OAMC

On s'emploie ici à proposer un aperçu des solutions de commande développées dans le cadre de l'OA. L'objectif est de mettre en évidence d'une part les limitations des approches classiquement retenues et d'autre part l'apport de la solution proposée dans ce mémoire. Ce travail de comparaison a déjà été entamé par Le Roux [Le Roux(2003)], essentiellement dans le cadre de l'OA. Aussi l'ambition de ce paragraphe est de rappeler brièvement quelques-unes de ses conclusions, tout en apportant quelques éléments nouveaux. Pour cela, on se concentre sur les développements récents menés sur la commande en OAMC. En effet, nombre de commandes développées en OA ne sont pas transposables de manière simple et satisfaisante à l'OAMC.

### 5.2.1 La commande par intégrateur

La commande par intégrateur, et plus particulièrement dans sa version à gain modal optimisé [Gendron & Léna(1994), Gendron(1995), Dessenne(1998)], reste la commande de base des systèmes d'OA. Sa simplicité conceptuelle et calculatoire en font une référence. Une description de cette commande dans le cadre du banc BOA de l'ONERA est proposée en annexe B. Mais comme le souligne Le Roux, cette commande présente plusieurs défauts. Sa structure *ad-hoc* ne dérive pas des propriétés *a priori* de la turbulence et du système. Les corrélations spatiales entre modes ainsi que les retards de mesure ne sont ainsi pas pris en compte explicitement dans la synthèse du régulateur.

Noircissons encore un peu plus le tableau en ajoutant à cette liste quelques défauts supplémentaires. Nous allons montrer par la suite que cette commande est sous-optimale vis-à-vis du critère (4.22) (ou (4.63)). Sa nature intrinsèquement instable la prédispose aux effets d'emballlement. Ainsi, les modes non vus, ou mal vus par le correcteur, introduits au chapitre 2, risquent le plus souvent de s'amplifier et d'amener la boucle à diverger. Ce phénomène s'accroît lorsque des effets de saturation des commandes se produisent. Ce problème d'emballlement sera discuté au chapitre 10.

Ensuite, stigmatisons la difficulté à transposer cette loi de commande à des configurations nouvelles d'OA. Et tout d'abord, considérons le cas de l'OAMC. La transposition la plus directe de la commande intégrateur à l'OAMC consiste à évaluer, comme en OA, une matrice d'interaction généralisée, reliant les commandes des divers miroirs aux mesures de pente dans les diverses directions. On peut alors évaluer une matrice de commande, inverse généralisée de cette matrice d'interaction. Cette approche pose divers problèmes. D'abord des problèmes pratiques abordés notamment par Kolb [Kolb(2005)] : à chaque configuration d'étoiles guides, une nouvelle matrice d'interaction devrait être mesurée, et cette calibration ne peut pas être réalisée facilement et rapidement sur le ciel. Une solution consiste donc à pré-évaluer un ensemble de matrices d'interactions sur un ensemble de directions, réalisant un échantillonnage du champ d'observation. Ensuite, pour tout nouveau jeu de directions d'analyse, une matrice d'interaction peut être déduite par interpolation. Une autre solution consiste à pouvoir estimer théoriquement ces matrices à partir de modèles des ASO et des MD.

Il se pose aussi un problème de calcul de la matrice de commande et d'optimisation des gains de l'intégrateur. L'importance de modes non vus ou mal vus (voir paragraphe 2) est accentuée en OAMC. Lors de l'inversion par SVD de la matrice d'interaction deux politiques sont applicables [Fusco(2000), Quiros-Pacheco(2006)]. D'abord on peut pratiquer une troncature sévère, ce qui revient à filtrer brutalement de nombreux modes. On applique ensuite une commande intégrateur à gain uniforme. Ce faisant, se pose le douloureux problème du choix du niveau de troncature, puis du gain. Cette méthode taillée à la serpe est simple, mais de réglage difficile et le plus souvent de performances moindres. La troncature sévère limite les degrés de libertés. Pour améliorer ce point, on peut appliquer une politique de troncature limitée aux seuls modes non vus ou très mal vus. Par la suite on applique

une méthode d'optimisation modale des gains. Cette méthode offre théoriquement plus de souplesse, en affectant à chaque mode un gain optimisé. Cette méthode d'optimisation du gain, proposée par Gendron en OA [Gendron(1995)], puis simplifiée par Desenne [Desenne(1998)], fonctionne relativement bien en OA. Mais comme le montre Quiros [Quiros-Pacheco(2006)], ces méthodes classiques d'optimisation du gain ne s'appliquent plus aussi simplement en OAMC. En effet, Quiros souligne l'effet pernicieux de l'ensemble des composantes de la phase turbulente non corrigées par les miroirs sur l'optimisation modale. Ces composantes forment dans le système ce qu'on appelle l'erreur de repliement ou *remaining error*. Ce terme, bien qu'évoqué par Gendron et Desenne, est négligé en OA. Pourtant, en OAMC, Quiros montre que ce terme devient notoirement non négligeable et conduit à l'échec de ces méthodes. Pour éviter un calcul aberrant des gains modaux, il est nécessaire d'inclure ce terme dans la méthode d'optimisation des gains proposée par Gendron. Le calcul des gains optimaux se complexifie alors notablement. Il nécessite de prendre en compte diverses fonctions de transferts de l'asservissement (fonction de transfert de réjection, de bruit *etc*) et les spectres temporels à la fois des modes corrigés et des modes non corrigés de la phase turbulente. On peut envisager d'évaluer à partir de modèles *a priori* de la turbulence ces spectres, mais la reconstruction spectrale à partir de données expérimentales est lourde et pas forcément précise.

Ajoutons pour conclure que cette solution de commande est attachée aux mesures et aux directions de mesures. Elle ne permet pas d'optimiser la correction dans des directions d'intérêt spécifiques. Ceci représente un grave défaut de cette solution, rendant son utilisation par exemple en MOAO non envisageable (le problème est accru en MOAO boucle ouverte !). La LTAO représente un cas symptomatique, puisque le miroir, unique, est conjugué de la pupille : l'utilisation d'une commande intégrateur est difficilement envisageable.

### 5.2.2 De l'estimation optimale statique au POLC

Le principe d'estimation optimale de la turbulence en statique a été évoqué dès 1983, par Wallner [Wallner(1983)], puis repris et étendu à l'OAMC par Fusco [Fusco *et al.*(2001)]. On le désigne par *Minimum Mean Square Estimator* ou MMSE. Cette approche minimise la variance résiduelle de la phase dans des directions d'intérêt, c'est-à-dire un critère similaire à (4.63). Néanmoins, on considère dans cette approche une estimation en boucle ouverte statique, autrement dit en l'absence de dynamique de la turbulence (chaque occurrence de turbulence est traitée indépendamment). On mesure la phase turbulente (et non une phase résiduelle) et que l'on corrige ensuite (pas de boucle de retour, le miroir est placé après l'analyseur voir paragraphe 2.4.2). Les retards sont négligés. Rappelons la forme de cet estimateur en OAMC [Fusco *et al.*(2001)] en utilisant les notations introduites précédemment. On minimise donc la variance d'erreur résiduelle dans la pupille du télescope :

$$\mathbf{J}_{res}^{stat}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{i=n_{obj}} \left\langle \left\| \mathbf{M}_{\beta_i}^L \varphi^{tur} - \mathbf{M}_{\beta_i}^M \mathbf{N} \mathbf{u} \right\|^2 \right\rangle. \quad (5.1)$$

L'équation de mesure prend dans ce contexte boucle ouverte la forme suivante :

$$\mathbf{y} = \mathbf{D} \mathbf{M}_{\alpha}^L \varphi^{tur} + \mathbf{w}. \quad (5.2)$$

La solution est obtenue en estimant d'abord la phase turbulente de façon optimale, puis en projetant cette estimée sur la base miroir. Toute dynamique temporelle est ici négligée.

L'estimée optimale de la phase turbulente dans les directions d'intérêt est donnée par :

$$\hat{\varphi}^{tur} = \Sigma_{kol} \mathbf{M}_{\alpha}^{L T} \mathbf{D}^T \left( \mathbf{D} \mathbf{M}_{\alpha}^L \Sigma_{kol} \mathbf{M}_{\alpha}^{L T} \mathbf{D}^T + \Sigma_w \right)^{\dagger} \mathbf{y} = \mathbf{R}^{mmse} \mathbf{y}. \quad (5.3)$$

Enfin, la commande en tension est obtenue par projection de la phase estimée sur les miroirs c'est-à-dire par minimisation de :

$$\mathbf{J}^{proj}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{i=n_{obj}} \left\| \mathbf{M}_{\beta_i}^L \hat{\varphi}^{tur} - \mathbf{M}_{\beta_i}^M \mathbf{N} \mathbf{u} \right\|^2, \quad (5.4)$$

dont la solution aux moindres carrés conduit à :

$$\mathbf{u}_n = \left( \left( \mathbf{M}_{\beta}^M \mathbf{N} \right)^T \mathbf{M}_{\beta}^M \mathbf{N} \right)^{\dagger} \left( \mathbf{M}_{\beta}^M \mathbf{N} \right)^T \mathbf{M}_{\beta}^L \hat{\varphi}^{tur} = \mathbf{P}_{\beta}^{oamc} \hat{\varphi}^{tur}, \quad (5.5)$$

où  $\mathbf{P}_{\beta}^{oamc}$  est donc le projecteur dans les directions d'intérêt  $\beta$ .

Néanmoins, cette solution est statique et boucle ouverte. Elle n'est pas aisément transposable à la boucle fermée. On ne peut appliquer directement la reconstruction de type MMSE puisque les caractéristiques de la phase résiduelle en boucle fermée (typiquement sa matrice de covariance  $\Sigma_{res}$ ) ne sont pas aisément reliables à celle de la turbulence (caractérisée par sa covariance  $\Sigma_{kol}$ ). La commande s'avère alors inefficace et instable. Elle ne prend en compte aucun aspect temporel et donc ne gère pas les retards. Quelques solutions *ad hoc* ont été proposées [Le Louarn(2002), van Dam *et al.*(2004)], consistant à ajouter des paramètres de réglage au sein du reconstituteur MMSE et à jouer sur ces paramètres au cours du fonctionnement de l'asservissement en espérant trouver un jeu de paramètres améliorant la correction.

Une solution plus aboutie et stable a été proposée par Gilles [Gilles(2005)] afin de transposer cette solution boucle ouverte à la boucle fermée. L'idée est de ramener le fonctionnement boucle fermée à un fonctionnement boucle ouverte, en soustrayant à la mesure l'effet de la correction par les miroirs. La dynamique temporelle du système est gérée grâce à un contrôleur du premier ou du second ordre. Cette commande est donc nommée *Pseudo Open-Loop Control*, ou POLC. Le contrôleur fait intervenir deux ou trois paramètres (selon l'ordre), ajustables afin de garantir des marges de stabilité. Cette approche sera détaillée au paragraphe 5.4. Gilles et Piatrou [Piatrou & Gilles(2005)] ont montré une robustesse relativement bonne de cette solution. Néanmoins, ces approches ne garantissent en aucune manière l'optimalité de la commande proposée, et restent des montages *ad hoc* basés sur la solution optimale boucle ouverte statique.

### 5.3 La commande optimale LQG

Les lois de commande décrites précédemment ont un défaut essentiel en commun : elles ne répondent pas directement au problème de commande optimale en boucle fermée. Ce paragraphe présente la loi de commande optimale Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG), pour l'OA ou l'OAMC, dans le cadre d'une représentation d'état. Des travaux ont déjà été menés en OA sur ce type d'approche. Le paragraphe 5.3.1 en résume les caractéristiques et les principales limitations. Notre approche est ensuite décrite. La mise en œuvre de cette loi de commande repose sur le théorème de séparation, amenant à considérer successivement un problème de commande déterministe et une estimation optimale de la phase turbulente au sens de la variance minimale de la phase résiduelle.

#### 5.3.1 Travaux antérieurs sur la commande LQG en OA

La première utilisation d'une commande LQG en OA date de 1993 et des travaux de Paschall et Anderson [Paschall & Anderson(1993)]. Ils proposent une modélisation et une commande temps

continu, puis appliquent au final une discrétisation exacte. Le modèle utilisé inclut une dynamique miroir conduisant à la résolution de deux équations de Riccati (voir paragraphe 5.3.4.1). Compte-tenu des ordres de grandeur utilisés (temps de réponse caractéristique du miroir de l'ordre de 0,5 ms et fréquence d'échantillonnage de 140 Hz), la prise en compte de la dynamique miroir paraît néanmoins inutile. Par ailleurs, le traitement en temps continu est lourd, alors qu'une modélisation en temps discret pourrait être utilisée. C'est ce dernier point qui distingue principalement leur approche de la nôtre.

Divers travaux ont été menés par la suite sur la commande LQG en OA. On peut citer notamment les travaux menés par Pachter et Oppenheimer pour l'OA [Oppenheimer & Pachter(2002)], et plus récemment ceux de Gavel *et al.* [Gavel & Wiberg(2002)]. Gavel propose une mise en œuvre d'une loi de commande exploitant le théorème de séparation pour gérer d'une part l'estimation grâce à un filtre de Kalman et d'autre part la correction par une projection sur l'espace miroir de la phase estimée. Cependant, le modèle de phase turbulente introduit est non stationnaire spatialement. Ce modèle de phase non markovien conduit à des complications et nécessite des approximations supplémentaires. La difficulté à traiter le problème dans un cadre à temps continu est souligné, mais le passage au temps discret n'est pas justifié. En outre, son approche ne s'applique qu'à l'OA. Enfin, l'étude de la commande ne repose pas sur une modélisation d'état. Pour autant, les simulations menées par Gavel donnent aussi quelques éléments de robustesse sur la commande LQG en OA. Wiberg *et al.* proposent quant à eux [Wiberg & Gavel(2004a), Wiberg & Gavel(2004b)] une approche LQG mais en négligeant toute dynamique du système, ce qui ne présente qu'un intérêt limité.

Enfin, notons aussi les travaux récents de Looze *et al.* [Looze *et al.*(2003)], qui proposent également une approche LQG dans un formalisme d'état. Néanmoins, les auteurs privilégient directement une approche modale, séparant ainsi les modes de la phase et négligeant les couplages. La commande est modifiée pour inclure un comportement d'intégrateur à basse fréquence. Les applications numériques supposent exactement la même loi de commande pour tous les modes. L'optimalité de la commande n'est plus garantie au sens du critère (4.22). Enfin, là encore, le passage d'un problème temps continu à une solution temps discret n'est pas justifié.

Ces divers travaux se sont néanmoins concentrés sur l'OA. L'application d'une commande LQG pour l'OAMC n'a pas été considérée. Les travaux menés au DOTA, en collaboration avec le L2TI ont ouvert la voie de cette problématique, en introduisant la commande optimale pour l'OA et l'OAMC développée dans ce mémoire. Ces travaux se sont concrétisés grâce à la thèse de Le Roux [Le Roux(2003)] qui a établi le modèle d'état à temps discret en exploitant les connaissances *a priori* sur la turbulence et le système et a explicité la commande optimale, dans le formalisme d'état, pour l'OA et l'OAMC. Il a en outre suggéré l'extension de la commande pour la prise en compte de divers phénomènes parasites potentiels comme les composantes statiques. Néanmoins, le filtrage de composantes statiques n'a pas été validé. La gestion de composantes vibratoires, bien qu'évoquée, n'a pas été mise en œuvre. Du point de vue de la validation, Le Roux a réalisé des simulations numériques, en comparant les performances de la commande optimale et de l'intégrateur à gain modal optimisé tant en OA qu'en OAMC. Il a ainsi montré que la commande optimale apportait un gain substantiel en OA. Il a surtout montré que ce gain devenait très significatif en OAMC et qu'il était lié notamment à la meilleure gestion des modes non vus par la commande optimale. Les connaissances *a priori* permettent en effet de réduire l'influence de ces modes. Il a aussi souligné la faible sensibilité des performances de la commande à une erreur de modèle portant sur la vitesse d'évolution temporelle de la turbulence (coefficients de corrélation de la turbulence). Néanmoins, ces résultats ont été obtenus dans un cadre de simulation simplifiée. Analyseurs et miroirs étaient considérés comme parfaits, mesurant ou corrigeant directement des modes de la base de Zernike, base dans laquelle la phase était exprimée. La phase était réduite à un nombre restreint de modes de Zernike et suivait elle-même un

modèle d'évolution AR1. Les erreurs de modèles ont été ainsi réduites au minimum. Enfin, la mise en œuvre de validations expérimentales de type OA hors axe a été évoquée par Le Roux. Elle représente un des enjeux principaux de ce mémoire.

### 5.3.2 Séparation entre estimation et commande optimales

Le problème de commande optimale est donc désormais abordé dans le cadre décrit au chapitre 4. Rappelons le propos : trouver les commandes  $\mathbf{u}_n$  permettant de minimiser le critère quadratique

$$\mathbf{J}_{res,2}^{oa}(\mathbf{u}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|\phi_j^{res}\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|\phi_j^{tur} - \mathbf{N}\mathbf{u}_{j-1}\|^2 \quad (5.6)$$

connaissant les mesures  $\{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n-1}\}$ . Ce critère est un cas particulier de critère Linéaire Quadratique Gaussien, qui englobe tous les systèmes linéaires avec critère quadratique et bruits gaussiens. Nous disposons en effet ici d'un système **linéaire** invariant, décrit dans le formalisme d'état par les équations 4.41 et 4.42, avec l'hypothèse que  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  sont des bruits blancs **gaussiens**. Une formulation générale, à horizon infini, de ce critère correspond à déterminer la commande  $\mathbf{u}_n$  à partir des mesures  $\{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$  en minimisant le critère **quadratique** suivant :

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \mathbf{X}_n^T \mathcal{Q} \mathbf{X}_n + \mathbf{u}_n^T \mathcal{R} \mathbf{u}_n \right), \quad (5.7)$$

$\mathcal{Q}$  étant semi-définie positive et  $\mathcal{R}$  étant définie positive. Le terme quadratique sur la commande introduit un terme de pénalisation qui permet de limiter l'énergie de la commande  $\mathbf{u}_n$ .

Notre problème s'inscrit dans ce cadre. On suppose en effet que le réponse du miroir est exacte et immédiate. On suppose en outre pour l'heure qu'aucune contrainte supplémentaire n'est imposée sur la course autorisée du miroir (absence de saturation). Ainsi  $\mathcal{R}$  est nulle et un calcul simple permet d'exprimer  $\mathcal{Q}$  en fonction des matrices du modèle d'état sous la forme (en OA) :

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & -\mathbf{N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{N}^T & 0 & \mathbf{N}^T \mathbf{N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Pour résoudre ce problème, on exploite un résultat classique en automatique, le théorème de séparation stochastique [Joseph & Tou(1961), Patchell & Jacobs(1971), Bar-Shalom & Tse.(1974)]. Ce théorème établit que la minimisation d'un critère de forme (5.7) et *a fortiori* (5.6) est obtenue en résolvant séparément un problème de commande optimale déterministe amenant à la construction de  $\mathbf{u}_n$  et un problème d'estimation optimale (au sens du minimum de la variance d'estimation). Le problème déterministe consiste à établir la commande optimale au sens de (5.7) lorsque toutes les valeurs de l'état (passées et futures) sont parfaitement connues. C'est l'objet du paragraphe 5.3.3. L'expression de la commande établie, le problème d'estimation optimale consiste à fournir la meilleure estimée de l'état au sens du minimum de variance d'estimation étant données les mesures passées. C'est l'objet du paragraphe 5.3.4. La minimisation de (5.7) est alors réalisée en appliquant la commande obtenue dans le cas déterministe, mais en remplaçant l'état (inconnu) par son estimé.

### 5.3.3 Commande optimale en information complète

Lorsque l'on considère que l'état du système  $\mathbf{X}_n$  est parfaitement connu à chaque instant, on se place sous ce qui est appelé une hypothèse d'information complète. Dans le cas qui nous occupe ceci signifie essentiellement que  $\phi_{n+1}^{tur}$  est connue lors du calcul de  $\mathbf{u}_n$ . Dans ce contexte déterministe et purement hypothétique, la solution de commande correspond à appliquer le vecteur de tension  $\mathbf{u}_n$  minimisant la variance de la phase résiduelle, c'est-à-dire un critère quadratique  $J^{ic}(\mathbf{u})$  de la forme :

$$J^{ic}(\mathbf{u}_n) = \|\phi_{n+1}^{tur} - \mathbf{N}\mathbf{u}_n\|^2. \quad (5.9)$$

Le minimum de ce critère quadratique déterministe est obtenu par la solution aux moindres carrés :

$$\mathbf{u}_n = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^\dagger \mathbf{N}^T \phi_{n+1}^{tur} = \mathbf{P} \phi_{n+1}^{tur}. \quad (5.10)$$

On fait ainsi apparaître un projecteur  $\mathbf{P}$  sur l'image de  $\mathbf{N}$ . Le terme  $(\mathbf{N}^T \mathbf{N})^\dagger \mathbf{N}^T$  désigne l'inverse généralisé de  $\mathbf{N}$  (non inversible car rectangulaire), et le calcul de cet inverse repose sur la même méthode (SVD) que celle rappelée au paragraphe 2.4.1 pour l'inversion de la matrice d'interaction  $\mathbf{M}_{inter}$ . La commande obtenue est dite par retour d'état, on peut en effet la mettre sous la forme :

$$\mathbf{u}_n = -\mathbf{K}\mathbf{X}_n, \quad (5.11)$$

avec  $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -\mathbf{P} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Cette commande est illustrée par la figure 5.1.

La valeur du minimum du critère  $J^{ic}(\mathbf{u})$  en information complète se déduit de (5.10) :

$$J^{ic}(\mathbf{u}_{opt}) = \|(\mathbf{Id} - \mathbf{N}\mathbf{P}) \phi_{n+1}^{tur}\|^2. \quad (5.12)$$

En considérant cette fois la phase turbulente non pas comme une quantité déterministe mais comme un processus stochastique stationnaire (à moyenne nulle), l'espérance de cette grandeur est donnée par :

$$\mathbf{E}(J^{ic}(\mathbf{u}_{opt})) = \text{tr} \left\{ (\mathbf{Id} - \mathbf{N}\mathbf{P}) \Sigma_{kol} (\mathbf{Id} - \mathbf{N}\mathbf{P})^T \right\}. \quad (5.13)$$

Néanmoins, dans la pratique, l'état du système (et donc  $\phi_{n+1}^{tur}$ ) n'est évidemment pas connu. On possède toutefois une information partielle donnée par la mesure, puisque la mesure est reliée à l'état de la phase incidente quelques instants plus tôt. On peut donc envisager d'estimer l'état à partir de ces mesures. C'est ce qu'on appelle l'hypothèse d'information incomplète.

### 5.3.4 Commande optimale en information incomplète

On se place donc maintenant dans le cadre plus réaliste d'information incomplète. La minimisation de (5.6) est obtenue en conservant l'expression (5.10) mais en remplaçant l'état du système (inconnu) par son estimée optimale au sens de la variance minimale (d'où la notion de «principe d'équivalence à la certitude» associée à ce théorème). Ainsi, la commande optimale est donnée par :

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{P} \hat{\phi}_{n+1/n}^{tur} \quad (5.14)$$

où  $\hat{\phi}_{n+1/n}^{tur}$  désigne l'estimée optimale de  $\phi_{n+1}^{tur}$  au sens de la variance minimale connaissant toutes les mesures jusqu'à l'instant  $n$ . On parle dans ce cas de retour d'état reconstruit. Un second problème doit donc être maintenant résolu : considérant un système décrit par (4.41) et (4.42), trouver la meilleure estimée de l'état  $\mathbf{X}_n$  (on parle d'estimation) ou de  $\mathbf{X}_{n+1}$  (on parle alors de prédiction) connaissant l'ensemble des mesures  $(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ . Le filtre de Kalman fournit cette estimée.



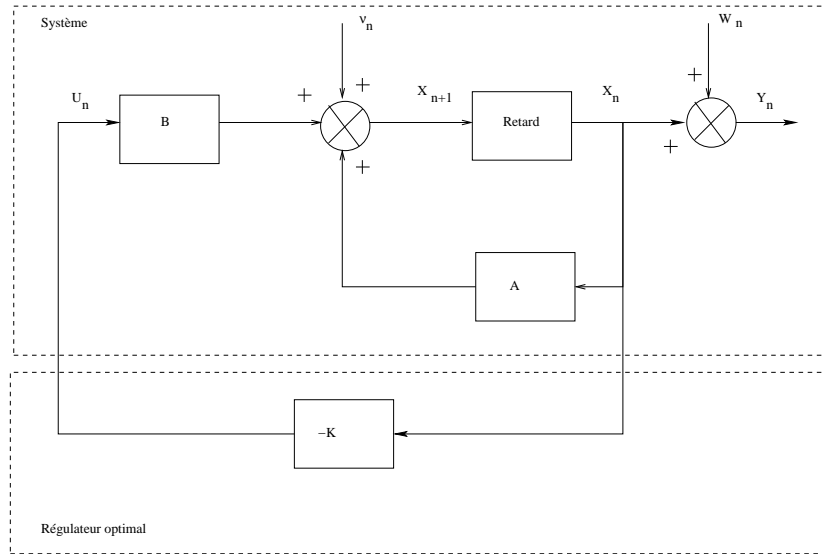


FIG. 5.1 – Commande en information complète. Schéma bloc du modèle du système d’OA (ou d’OAMC) dans le formalisme d’état en information complète. On cherche la commande comme un retour d’état.

### 5.3.4.1 Le filtre de Kalman

Toute la construction du filtre de Kalman découle directement de la solution d’un problème d’estimation/prédiction optimale dans un cadre gaussien [Sorenson(1970), Anderson & Moore(1990), Jazwinski(1970)]. Le filtre de Kalman repose en effet sur deux résultats plus fondamentaux qui sont les suivants :

*Théorème 1* : Soit  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{y}$  deux vecteurs aléatoires réels, la meilleure estimée  $\hat{\mathbf{X}}$  de  $\mathbf{X}$  au sens du minimum de variance d’erreur d’estimation par une fonction de  $\mathbf{y}$  est l’espérance conditionnelle de  $\mathbf{X}$  sachant  $\mathbf{y}$ , notée  $E(\mathbf{X}|\mathbf{y})$ .

*Théorème 2* : Soit  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{y}$  deux vecteurs aléatoires réels, la meilleure estimée  $\hat{\mathbf{X}}$  de  $\mathbf{X}$  au sens du minimum de variance d’erreur d’estimation par une fonction **affine** de  $\mathbf{y}$  est donnée par :

$$\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{y}) = E(\mathbf{X}) + \Sigma_{xy}\Sigma_y^{-1}(\mathbf{y} - E(\mathbf{y})), \quad (5.15)$$

$\Sigma_{xy}$  et  $\Sigma_y$  désignant les matrices de covariance respectivement de  $(\mathbf{X}, \mathbf{y})$  et  $\mathbf{y}$ . Ceci définit le meilleur estimateur parmi tous les estimateurs linéaires de  $\mathbf{X}$ . Dans le cas où  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{y}$  sont gaussiens dans leur ensemble, on montre que le meilleur estimateur se confond avec le meilleur estimateur linéaire et l’espérance *a posteriori*.

Reprenons donc le modèle d’état (équations (4.41) et (4.42)) :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_n + \mathbf{B}\mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n \quad (5.16)$$

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}\mathbf{X}_n + \mathbf{w}_n. \quad (5.17)$$

On considère dans toute la suite de notre étude les hypothèses suivantes :  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  sont des bruits blancs gaussiens, de matrices de covariances  $\Sigma_v$  et  $\Sigma_w$  connues. La condition initiale  $\mathbf{X}_0$  est également un vecteur gaussien et  $\mathbf{X}_0$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  sont mutuellement indépendants. Enfin,  $\mathbf{u}_n$  est une fonction linéaire des mesures  $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ . Les vecteurs  $\mathbf{X}_n$  et  $\mathbf{y}_n$  sont donc des vecteurs gaussiens dans leur ensemble.

Dans ce contexte, le filtre de Kalman donne le meilleur estimateur au sens du minimum de la variance d'erreur d'estimation de l'état  $\mathbf{X}_n$  (ou de  $\mathbf{X}_{n+1}$ ) connaissant l'ensemble des mesures  $(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ . Il s'agit d'un estimateur récursif. On ne rentre pas ici dans le détail de la construction de cet estimateur. De nombreux ouvrages proposent une description détaillée du principe [Anderson & Moore(1990), Jazwinski(1970)].

Définissons tout d'abord quelques notations indispensables :

- $\hat{\mathbf{X}}_{n/n'}$  est l'estimée de l'état  $\mathbf{X}_n$  à l'instant  $n$ , connaissant les mesures jusqu'à l'instant  $n'$  ;
- de même  $\hat{\mathbf{y}}_{n/n'}$  est l'estimée de la mesure connaissant  $(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n'})$  ;
- l'erreur d'estimation est définie par  $\tilde{\mathbf{X}}_{n/n'} = \mathbf{X}_n - \hat{\mathbf{X}}_{n/n'}$  ;
- $\Sigma_{n/n'}$  est la matrice de covariance d'erreur d'estimation associée à  $\tilde{\mathbf{X}}_{n/n'}$  ;
- de même on définit l'innovation par  $\tilde{\mathbf{y}}_{n/n'} = \mathbf{y}_n - \hat{\mathbf{y}}_{n/n'}$ . Cette grandeur représente toute l'information apportée par la nouvelle mesure. Il s'agit en effet de la différence entre la mesure effectivement réalisée et une prédiction de cette mesure à partir de données antérieures.

On montre alors que l'estimation de l'état  $\mathbf{X}_n$  est donnée par :

$$\hat{\mathbf{X}}_{n/n} = \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1} + \Sigma_{n/n-1} \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \Sigma_{n/n-1} \mathbf{C}^T + \Sigma_w)^{-1} \tilde{\mathbf{y}}_{n/n-1} \quad (5.18)$$

$$= \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1} + \mathbf{H}_n (\mathbf{y}_n - \mathbf{C} \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}), \quad (5.19)$$

où la matrice  $\mathbf{H}_n$  est le gain de Kalman :

$$\mathbf{H}_n = \Sigma_{n/n-1} \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \Sigma_{n/n-1} \mathbf{C}^T + \Sigma_w)^{-1}. \quad (5.20)$$

L'équation (5.19) est souvent appelée équation de mise à jour, car elle met à jour l'estimée de l'état courant  $\mathbf{X}_n$ , grâce à l'information apportée par la mesure courante  $\mathbf{y}_n$ . L'information nouvelle correspond à l'innovation  $\tilde{\mathbf{y}}_{n/n-1}$  pondérée toutefois par une matrice de gain  $\mathbf{H}_n$ . Le terme  $\Sigma_{n/n}$  est lui-même mis à jour selon :

$$\Sigma_{n/n} = \Sigma_{n/n-1} - \Sigma_{n/n-1} \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \Sigma_{n/n-1} \mathbf{C}^T + \Sigma_w)^{-1} \mathbf{C} \Sigma_{n/n-1}. \quad (5.21)$$

Enfin, on peut prédire l'état à venir en calculant  $\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}$ , donné par :

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n} = \mathcal{A} \hat{\mathbf{X}}_{n/n} + \mathcal{B} \mathbf{u}_n. \quad (5.22)$$

Cette équation, dite de prédiction, couplée à l'équation (5.19), permet d'évaluer récursivement l'estimée de l'état  $\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}$  selon :

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n} = \mathcal{A} \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1} + \mathcal{B} \mathbf{u}_n + \mathcal{A} \mathbf{H}_n \tilde{\mathbf{y}}_{n/n-1} \quad (5.23)$$

$$= \mathcal{A} \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1} + \mathcal{B} \mathbf{u}_n + \mathbf{L}_n \tilde{\mathbf{y}}_{n/n-1}. \quad (5.24)$$

L'équation (5.24) est caractéristique d'une structure de type observateur, de gain d'observateur  $\mathbf{L}_n$  : le filtre de Kalman est un observateur à gain variable et optimal.

On peut montrer qu'une équation récursive est aussi disponible pour déterminer  $\Sigma_{n/n-1}$  :

$$\Sigma_{n+1/n} = \mathcal{A} \Sigma_{n/n-1} \mathcal{A}^T + \Sigma_v - \mathcal{A} \Sigma_{n/n-1} \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \Sigma_{n/n-1} \mathbf{C}^T + \Sigma_w)^{-1} \mathbf{C} \Sigma_{n/n-1} \mathcal{A}^T. \quad (5.25)$$



Il s'agit là d'une équation de Riccati <sup>1</sup>, qui détermine le gain optimal  $\mathbf{H}_n$  du filtre de Kalman à chaque itération. On peut noter que cette équation ne fait intervenir en aucune manière les mesures, ni l'état, ou les occurrences de bruit. Le gain peut donc être calculé indépendamment de la boucle d'asservissement, et donc pré-calculé.

### 5.3.4.2 Solution asymptotique

Le filtre de Kalman ainsi proposé présente un inconvénient majeur pour une implantation temps réel sur un système potentiellement très multi-variable : la solution de l'équation de Riccati et le gain de l'observateur doivent être recalculés à chaque itération. Le coût de calcul peut sembler rédhibitoire pour les grands systèmes. Or, comme noté au paragraphe 5.3.4.1, l'équation de Riccati ne dépend ni des mesures ni des états, et à chaque itération peut être pré-calculée, hors temps réel.

On peut aussi montrer que, sous certaines conditions, l'équation de Riccati converge vers une solution asymptotique unique et ce, indépendamment du choix de la variance initiale  $\Sigma_0$ . Cette solution asymptotique est un point fixe de (5.25), c'est-à-dire une solution de l'équation algébrique de Riccati :

$$\Sigma_\infty = \mathcal{A}\Sigma_\infty\mathcal{A}^T + \Sigma_v - \mathcal{A}\Sigma_\infty^T\mathcal{C}^T(\mathcal{C}\Sigma_\infty\mathcal{C}^T + \Sigma_w)^{-1}\mathcal{C}\Sigma_\infty\mathcal{A}^T. \quad (5.26)$$

On peut alors assimiler la valeur de  $\Sigma_n$  à sa valeur asymptotique  $\Sigma_\infty$  et calculer le gain asymptotique de l'observateur,  $\mathbf{H}_\infty$  en utilisant  $\Sigma_\infty$  dans (5.20). Ce faisant, l'estimation devient localement sous-optimale, puisque l'on n'applique pas à chaque itération le bon gain. Mais asymptotiquement, l'optimalité est garantie. Si la convergence de la solution de l'équation de Riccati vers sa solution asymptotique est suffisamment rapide, la perte d'optimalité ne se fera sentir que sur les premières itérations. Or, dans le cadre des applications d'OA, le temps de pose des images astronomiques est très long par rapport à la période d'échantillonnage. La perte d'optimalité est donc en tout état de cause négligeable.

La convergence de l'équation de Riccati vers une solution asymptotique unique et indépendante de son initialisation est garantie sous la condition que le système soit stable, autrement dit que  $\mathcal{A}$  soit une matrice de stabilité <sup>2</sup>. On a vu que la stabilité était garantie en OA comme en OAMC, assurant ainsi la convergence de l'équation de Riccati vers une solution asymptotique unique  $\Sigma_\infty$  quel que soit  $\Sigma_0$ .

### 5.3.4.3 Conditions initiales

La mise en œuvre du filtre récursif suppose le choix de conditions initiales. Elles concernent tout d'abord les vecteurs d'état, de mesure et de commande. Dans la pratique aucune information *a priori* n'est donnée sur la nature initiale de l'état. La phase turbulente étant un processus à moyenne nulle, le choix le plus cohérent consiste donc à choisir un état initial nul  $\hat{\mathbf{X}}_{0/-1} = 0$  conduisant à  $\hat{\mathbf{y}}_{0/-1} = 0$  et  $\mathbf{u}_0 = 0$ .

Lorsque l'on ne choisit pas la version asymptotique de la loi de commande, il est nécessaire d'initialiser également le calcul de la matrice de covariance d'erreur d'estimation  $\Sigma_{0/-1}$ . Là encore, aucune information *a priori* n'est disponible. On n'a aucune idée pertinente de la valeur réelle de la variance

<sup>1</sup>On prendra garde à l'orthographe de ce nom propre, le plus souvent écorché en ricatti, mot italien dérivé du verbe ricattare, signifiant faire chanter, escroquer (mes remerciements à J.-M. Conan pour cette note culturelle).

<sup>2</sup>En fait, la condition minimale suffisante classiquement retenue est que les couples de matrices  $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$  et  $(\mathcal{A}, \Sigma_v^{1/2})$  soient respectivement détectable et stabilisable. Cette condition est trivialement vérifiée lorsque  $\mathcal{A}$  est une matrice de stabilité

d'erreur d'estimation initiale. On choisit donc une initialisation de la forme  $\Sigma_{0/-1} = \lambda \mathbf{Id}$ , où le coefficient  $\lambda$  est un réel positif grand, étant donné que l'erreur initiale d'estimation est *a priori* élevée au départ. L'ordre de grandeur de  $\lambda$  sera fixé au regard des premiers calculs. L'utilisation du gain d'observateur asymptotique rend cette question d'initialisation de  $\Sigma_{0/-1}$  caduque, la solution asymptotique ne dépendant pas de l'initialisation lorsque les conditions évoquées au paragraphe précédent sont réunies.

#### 5.3.4.4 Propriétés des estimées et de la loi de commande

On rappelle ici un certain nombre de propriétés relatives au filtre de Kalman et à la loi de commande. Ces propriétés seront mises à profit lors de la mise en œuvre de la loi de commande, en simulation numérique ou dans le cadre expérimental, pour contrôler le fonctionnement du système d'OA.

**Estimée de l'état et erreur d'estimation** L'état estimé présente des propriétés tant spatiales (matrice de covariance) que temporelles (corrélation) conformes aux *a priori*, et donc aux propriétés de l'état lui-même. En outre, l'erreur d'estimation  $\tilde{\mathbf{X}}_{n/n} = \mathbf{X}_n - \hat{\mathbf{X}}_{n/n}$  est d'espérance nulle (absence de biais) et sa covariance est égale à  $\Sigma_{n+1/n}$ .

**L'innovation** L'innovation présente deux propriétés particulières. Elle est d'une part d'espérance nulle. D'autre part, elle présente les caractéristiques d'un bruit blanc. De cette dernière propriété on dit généralement que le filtre de Kalman est un filtre blanchisseur. La covariance de l'innovation,  $\Sigma_{\tilde{y}_n/\tilde{y}_{n-1}}$  se déduit de  $\Sigma_{n/n-1}$  grâce à la relation (5.17) :

$$\Sigma_{\tilde{y}_n/\tilde{y}_{n-1}} = \mathbf{C}\Sigma_{n/n-1}\mathbf{C}^T + \Sigma_w. \quad (5.27)$$

Sa valeur est donc indépendante des réalisations de bruit. Lorsque la version asymptotique du filtre est considérée, l'équation (5.27) devient :

$$\Sigma_{\tilde{y},\infty} = \mathbf{C}\Sigma_{\tilde{y},\infty}\mathbf{C}^T + \Sigma_w. \quad (5.28)$$

**Performance de la commande** Par définition même de la commande optimale, la variance de phase résiduelle est minimisée par la loi de commande. Par conséquent, la loi de commande doit fournir la meilleure performance au sens du minimum de variance de phase résiduelle, comparativement à toute autre loi de commande, ou de manière équivalente, la meilleure performance en terme de SR.

On peut aussi aisément évaluer la valeur exacte du critère (5.6) après minimisation optimale. En effet, en exploitant (5.14) :

$$\mathbf{J}_{res,2}^{oa}(\mathbf{u}_{opt}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|\phi_j^{tur} - \mathbf{N}\mathbf{u}_{j-1}\|^2 \quad (5.29)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|\phi_j^{tur} - \mathbf{NP}\hat{\phi}_{j/j-1}^{tur}\|^2 \quad (5.30)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\| \left( \phi_j^{tur} - \hat{\phi}_{j/j-1}^{tur} \right) + (\mathbf{Id} - \mathbf{NP}) \hat{\phi}_{j/j-1}^{tur} \right\|^2 \quad (5.31)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\| \tilde{\phi}_{j/j-1}^{tur} + (\mathbf{Id} - \mathbf{NP}) \hat{\phi}_{j/j-1}^{tur} \right\|^2. \quad (5.32)$$

Or,  $\tilde{\phi}_{j/j-1}^{tur}$  et  $\hat{\phi}_{j/j-1}^{tur}$  sont indépendants et vérifient  $\phi_j^{tur} = \tilde{\phi}_{j/j-1}^{tur} + \hat{\phi}_{j/j-1}^{tur}$ . Les processus étant supposés ergodiques, on obtient :

$$\mathbf{J}_{res,2}^{oa}(\mathbf{u}_{opt}) = E \left( \left\| \tilde{\phi}_{j/j-1}^{tur} \right\|^2 + \left\| (\mathbf{Id} - \mathbf{NP}) \hat{\phi}_{j/j-1}^{tur} \right\|^2 \right) \quad (5.33)$$

$$= \text{tr} \left\{ \Sigma_{\tilde{\phi}} \right\} + \text{tr} \left\{ (\mathbf{Id} - \mathbf{NP}) \left( \Sigma_{kol} - \Sigma_{\tilde{\phi}} \right) (\mathbf{Id} - \mathbf{NP})^T \right\}. \quad (5.34)$$

Le terme  $\Sigma_{\tilde{\phi}}$  se déduit simplement de  $\Sigma_{\infty}$  (il s'agit d'une sous-matrice de  $\Sigma_{\infty}$ ). Ce résultat est à rapprocher de la valeur du critère en information complète (5.13). La différence entre ces deux quantités donne en effet la perte de minimalité à travailler en information incomplète. Cette différence vaut d'après (5.13) et (5.33) :

$$\Delta \mathbf{J}(\mathbf{u}_{opt}) = \text{tr} \left\{ \Sigma_{\tilde{\phi}} \right\} - \text{tr} \left\{ (\mathbf{Id} - \mathbf{NP}) \Sigma_{\tilde{\phi}} (\mathbf{Id} - \mathbf{NP})^T \right\}. \quad (5.35)$$

Ce résultat appelle quelques commentaires. Lorsque l'erreur d'estimation est nulle ( $\tilde{\phi}_{n/n-1}^{tur} = 0$ ), la perte de minimalité est évidemment nulle, puisque cela est équivalent à travailler en information complète. Enfin le cas  $\mathbf{NP} = \mathbf{Id}$  correspond au cas d'une erreur de projection de la phase estimée sur le miroir nulle. La perte de minimalité est alors uniquement liée à l'erreur d'estimation.

**Stabilité de la commande** La loi de commande ainsi construite, basée sur un observateur et un régulateur constitué par un retour d'état reconstruit, est stable si et seulement si l'observateur et le régulateur sont tous les deux stables. Cela signifie, dans le cadre des hypothèses stochastiques présentées au paragraphe 5.3.4.1, respectivement pour l'observateur et le régulateur que les matrices  $(\mathcal{A} - \mathbf{L}_{\infty} \mathcal{C})$  et  $(\mathcal{A} - \mathbf{BK})$  sont respectivement stables. Or, le filtre de Kalman fourni par construction une matrice de gain de Kalman  $\mathbf{L}_{\infty}$  garantissant la stabilité de  $(\mathcal{A} - \mathbf{L}_{\infty} \mathcal{C})$ . De plus, on vérifie aisément que le régulateur choisi, basé sur une simple projection de l'état sur la base du miroir, conduit à une matrice  $(\mathcal{A} - \mathbf{BK})$  dont la stabilité ne dépend que de celle de la matrice  $\mathcal{A}$ . On a montré au paragraphe 4.5.3.1 que cette matrice était stable.

Par conséquent, la boucle fermée est stable. Notons que lorsque les hypothèses stochastiques ne sont pas respectées, la stabilité du système bouclé est encore garantie si les bruits sont d'énergie finie.

#### 5.3.4.5 Hypothèses probabilistes - perte d'optimalité

L'estimation optimale par filtre de Kalman a été rappelée au paragraphe 5.3.4.1 en s'appuyant sur un certain nombre d'hypothèses. En particulier, les bruits  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  ont été supposés blancs, gaussiens, indépendants, de variance connue. Lorsque ces hypothèses ne sont plus vérifiées, l'optimalité du filtre de Kalman s'en trouve compromise :

- si on utilise des majorants des variances de  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$ , le filtre est sous-optimal mais la variance d'erreur d'estimation calculée est garantie ;
- si  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  sont blancs mais non gaussiens (conduisant à  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{y}$  non gaussiens), on a déjà souligné que le filtre de Kalman fournissait seulement l'estimateur linéaire de variance minimum, non biaisé ;
- si  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  sont des bruits stationnaires non blancs, le filtre de Kalman n'est plus de variance minimale mais on dispose de formules permettant de calculer la dégradation liée aux corrélations.

Il est donc important de vérifier les hypothèses afin de valider l'optimalité du filtre de Kalman. Enfin, quand bien même les hypothèses ne sont pas vérifiées, le filtre de Kalman reste optimal tant que le modèle d'état est conforme à la réalité, mais les propriétés décrites précédemment au paragraphe

5.3.4.4 sont dégradées. Sur un système réel, si le modèle d'état n'est pas rigoureusement conforme à la réalité, une perte d'optimalité est constatée, donc une perte de performance. Il s'agit là d'une problématique de robustesse en performance, c'est-à-dire d'évaluer la perte de performance de la commande finalement déduite en fonction des erreurs de modèle.

## 5.4 Analyse par modèle d'état des commandes classiques

On s'intéresse ici à une confrontation, au moins théorique, de cette solution avec les lois de commandes présentées au paragraphe 5.2. En effet, tout correcteur linéaire peut être mis sous la forme d'un observateur suivi d'un retour d'état, c'est-à-dire une équation de la forme de (5.24) et une loi de commande de la forme (5.11). Nous montrons que l'on peut mettre en évidence un modèle d'état dont la structure est directement dépendante de celle du correcteur considéré, avec un observateur dont le gain dépend également du correcteur. On fait apparaître les modèles et *a priori* qui sous-tendent ces correcteurs linéaires.

### 5.4.1 La commande par intégrateur

Pour mieux comprendre les défauts de cette loi de commande, nous avons montré dans [Kulcsár *et al.*(2006)] comment l'intégrateur pouvait être réinterprété dans une approche de type observateur. Le détail de ces travaux est disponible dans [Kulcsár *et al.*(2006), Raynaud(2005)], nous n'en donnons ici que les résultats principaux. Considérons un système d'OA et un intégrateur décrit par la relation :

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{G}\mathbf{y}_n, \quad (5.36)$$

Soit alors le modèle de phase turbulente dynamique de la forme :

$$\phi_{n+1}^{tur} = \phi_n^{tur} + \nu_n, \quad (5.37)$$

$\nu$  étant un bruit blanc gaussien. On montre que la représentation d'état suivante :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{Id} \end{pmatrix}, \mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ -\mathbf{DN} \end{pmatrix}, \quad (5.38)$$

avec un vecteur d'état défini par :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \phi_n^{tur} \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix}, \quad (5.39)$$

et en considérant l'équation de mesure suivante :

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{D}(\phi_n^{tur} - \phi_n^{cor}) + \mathbf{w}_n, \quad (5.40)$$

conduit à un observateur optimal asymptotique de la forme :

$$\hat{\phi}_{n+1/n}^{tur} = \hat{\phi}_{n/n-1}^{tur} + \mathbf{L}_\infty \mathbf{y}_n. \quad (5.41)$$

On montre alors que le gain  $\mathbf{G}$  est optimal s'il vérifie :

$$\mathbf{G} = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{L}_\infty. \quad (5.42)$$

Cette réinterprétation sous forme d'observateur suppose l'absence de retard de mesure.

La principale remarque est que le modèle d'évolution spatio-temporelle de la phase implicitement contenu est de type marche aléatoire : il s'agit donc d'un modèle d'énergie non bornée. Ceci rend cette loi de commande sujette à l'instabilité et l'état estimé, donc les tensions de commande, peuvent diverger. C'est l'effet d'emballement, qui sera rediscuté au chapitre 10. Il apparaît aussi que la matrice de commande ne correspond pas à la matrice de gain permettant d'assurer, dans cette configuration, un comportement optimal au sens du minimum de variance. La commande par intégrateur, optimisée ou non, est donc sous-optimale. Cette réinterprétation sous forme d'observateur de l'intégrateur permet de retrouver les divers défauts associés à cette commande.

### 5.4.2 MMSE et POLC

On a souligné que l'approche MMSE permet d'obtenir une estimation optimale de la phase turbulente au sens du minimum de variance, mais en boucle ouverte statique. Il est intéressant donc de comparer cet estimateur, et ses extensions aux systèmes boucle fermée dynamique avec la commande optimale LQG. Tout d'abord, Le Roux [Le Roux(2003)] a montré que l'approche par formalisme d'état présentée dans ce mémoire permet aisément de retrouver la solution de Wallner et Fusco, sous la forme d'un cas dégénéré au cas boucle ouverte sans dynamique temporelle de la commande LQG proposée ici. En somme, en boucle ouverte statique, les deux solutions se rejoignent.

Il est plus difficile d'apparenter la commande optimale avec les diverses adaptations de la reconstruction MMSE à la commande de systèmes boucle fermée dynamique. La commande proposée par Gilles *et al.*, le POLC, représente une solution fonctionnelle intéressante. On se propose ici de réinterpréter cette solution sous la forme d'un observateur pour en comprendre la structure profonde.

Le détail de l'algorithme est donné dans [Gilles(2005)]. Nous le résumons dans les notations introduites précédemment. Il repose comme pour la commande optimale sur l'estimation de la phase turbulente dans les diverses couches atmosphériques notée donc  $\varphi_n^{tur}$ . L'estimée de cette phase à l'instant  $n$  est notée  $\hat{\varphi}_n^{tur}$ . Le chronogramme n'apparaît pas clairement dans cet article. On se base donc sur l'hypothèse que deux trames de retard sont présentes et que le chronogramme du système est celui de la figure 4.1. On se place dans un intervalle  $[(n-1)T, T]$ . Les étapes sont alors les suivantes :

- une reconstruction de la mesure de pente boucle ouverte  $\mathbf{y}_n^{bo}$  à partir de la mesure boucle fermée  $\mathbf{y}_n$  selon :

$$\mathbf{y}_n^{bo} = \mathbf{y}_n + \mathbf{DM}_\alpha^M \mathbf{NP}_\beta \hat{\varphi}_{n-1}^{tur}. \quad (5.43)$$

Cette opération consiste simplement à enlever à la mesure la contribution apportée par les miroirs ;

- l'estimation de la phase turbulente incidente et sa comparaison avec la phase préalablement estimée selon :

$$\mathbf{e}_{n-1} = \mathbf{R}^{mmse} \mathbf{y}_n^{bo} - \hat{\varphi}_{n-1}^{tur}; \quad (5.44)$$

- la phase est prédite au travers de l'équation récursive du second ordre suivante :

$$\hat{\varphi}_{n+1}^{tur} = \alpha \hat{\varphi}_n^{tur} + \gamma \hat{\varphi}_{n-1}^{tur} + \delta \mathbf{e}_{n-1}; \quad (5.45)$$

- enfin, la correction est appliquée de manière classique *via* une projection sur les modes du miroir selon :

$$\mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{P}_\beta \hat{\varphi}_n^{tur}. \quad (5.46)$$

Cet algorithme correspond à une reconstruction de type MMSE, à laquelle est adjointe un processus de contrôle dynamique du second ordre. Les paramètres  $\alpha, \gamma, \delta$ , sont choisis de manière à assurer

la stabilité du système. Plus précisément, ces paramètres sont fixés par Gilles à  $\alpha = \gamma = 0,495$ ,  $\delta = 0,5$ . On se propose donc d'exprimer cette loi de commande sous la forme d'un observateur afin de faire apparaître le modèle d'état et la structure de la commande sous-jacents.

Considérons pour cela le modèle de turbulence de type AR2 suivant :

$$\varphi_{n+1} = \mathbf{a}_1 \varphi_n + \mathbf{a}_2 \varphi_{n-1} + \boldsymbol{\nu}_n, \quad (5.47)$$

où :

$$\mathbf{a}_1 = \alpha \mathbf{Id}, \quad (5.48)$$

$$\mathbf{a}_2 = (\gamma - \delta) \mathbf{Id} + \delta R^{mmse} \mathbf{D} \mathbf{M}_\alpha^M \mathbf{N} \mathbf{P}_\beta, \quad (5.49)$$

et  $\boldsymbol{\nu}_n$  est un bruit blanc gaussien.

Soit le vecteur d'état :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \varphi_n^{tur} \\ \varphi_{n-1}^{tur} \\ \mathbf{u}_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (5.50)$$

On montre alors que la représentation d'état :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \end{pmatrix}, \mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} \mathbf{M}_\alpha^L \mathbf{N} \mathbf{P}_\beta \\ 0 \\ -\mathbf{D} \mathbf{M}_\alpha^M \mathbf{N} \end{pmatrix}, \quad (5.51)$$

et en considérant l'équation de mesure :

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{D} \left( \mathbf{M}_\alpha^L \varphi_n^{tur} - \mathbf{M}_\alpha^M \varphi_n^{cor} \right), \quad (5.52)$$

avec  $\varphi_n^{cor} = \mathbf{N} \mathbf{u}_{n-1}$  conduit à un observateur optimal asymptotique de la forme :

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n} = \mathcal{A} \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1} + \mathbf{G} \mathbf{y}_n, \quad (5.53)$$

en supposant l'absence de retard de mesure. Dans le cadre du POLC, le gain d'observateur  $\mathbf{G}$  n'est pas optimal car il est donné par :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \delta R^{mmse} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.54)$$

On a ainsi fourni une représentation (entrée-sortie) équivalente au système proposé par Gilles, basée sur un retour d'état reconstruit et un observateur. Pour ce faire, certaines hypothèses ont cependant dû être faites : l'équation (5.53) suppose que  $\hat{\mathbf{y}}_{n/n-1}$  est nul. Cette condition est satisfaite si aucun retard de mesure n'est pris en compte, et si  $\mathbf{M}_\alpha^M \mathbf{N} \mathbf{P}_\beta = \mathbf{M}_\alpha^L$ . Cette dernière relation signifie que les miroirs peuvent reproduire dans les directions de mesure exactement les mêmes phases intégrées que celles générées par la turbulence. De plus, cette représentation fait apparaître un choix particulier de structure du gain d'observateur, qui n'est donc pas égal au gain d'observateur optimal. La structure du gain  $\mathbf{G}$  choisi fait apparaître un terme nul. Pour comprendre l'existence et le sens de ce terme, il suffit d'explicitier l'équation (5.53). On obtient la relation :

$$\hat{\varphi}_{n+1/n} = \mathbf{a}_1 \hat{\varphi}_{n/n-1} + \mathbf{a}_2 \hat{\varphi}_{n-1/n-2} + \delta R^{mmse} \mathbf{y}_n, \quad (5.55)$$

qui fait apparaître que l'on n'utilise pas toute l'information disponible à l'instant  $n - 1$ , puisqu'on utilise  $\hat{\varphi}_{n-1/n-2}$ .

La commande POLC représente donc une solution intéressante au problème de commande dynamique en OAMC, puisqu'elle réussit à mettre en œuvre un reconstruteur OAMC, optimal en conditions statiques boucle ouverte, au sein d'une commande boucle fermée. Mais il s'agit d'une solution *ad hoc*, sous-optimale. Rappelons que la transposition de la commande optimale statique boucle ouverte basée sur le reconstruteur MMSE au cas dynamique boucle fermée n'est autre que la commande optimale présentée ici.

## 5.5 Mise en œuvre de la commande en OA et OAMC

Ce paragraphe synthétise les résultats précédents et résume la commande appliquée dans le cadre de l'OA et de l'OAMC. Il décrit d'abord l'algorithme final de la loi de commande. Dans la pratique les matrices nécessaires à l'algorithme ont été définies pour l'OA et l'OAMC aux paragraphes 4.5.2 et 4.6.3. Néanmoins, il est nécessaire de préciser leur forme exacte dans chacun de ces deux cas d'application. Enfin, le choix du vecteur d'état et de la base utilisée pour représenter la phase est discuté.

### 5.5.1 Algorithme complet de la commande optimale pour l'OA/OAMC

On se propose ici de résumer les étapes qui se cachent derrière les équations du filtre de Kalman, pour un aperçu plus physique du processus. On suppose qu'on utilise la commande asymptotique. Le procédé est identique en OA et en OAMC, seule la nature de certaines matrices change. On rappelle que le vecteur d'état s'écrit :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tur} \\ \phi_{n-1}^{tur} \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (5.56)$$

Le système est décrit par le modèle d'état suivant :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_n + \mathbf{B}\mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n \quad (5.57)$$

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}\mathbf{X}_n + \mathbf{w}_n. \quad (5.58)$$

On s'intéresse d'abord au processus de la loi de commande. On se place dans un intervalle de temps  $[(n-1)T, nT]$ , où  $\hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}$  est disponible. Dès que la mesure  $\mathbf{y}_n$  est obtenue, l'estimée de l'état  $\hat{\mathbf{X}}_{n/n}$  est mise à jour *via* l'équation (5.19) :

$$\hat{\mathbf{X}}_{n/n} = \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1} + \mathbf{H}_\infty (\mathbf{y}_n - \mathbf{C}\hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}) \quad (5.59)$$

$$= \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1} + \mathbf{H}_\infty (\tilde{\mathbf{y}}_{n/n-1}) \quad (5.60)$$

Puis, l'état  $\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}$  est prédit par (5.22) :

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}_{n/n} + \mathbf{B}\mathbf{u}_n. \quad (5.61)$$

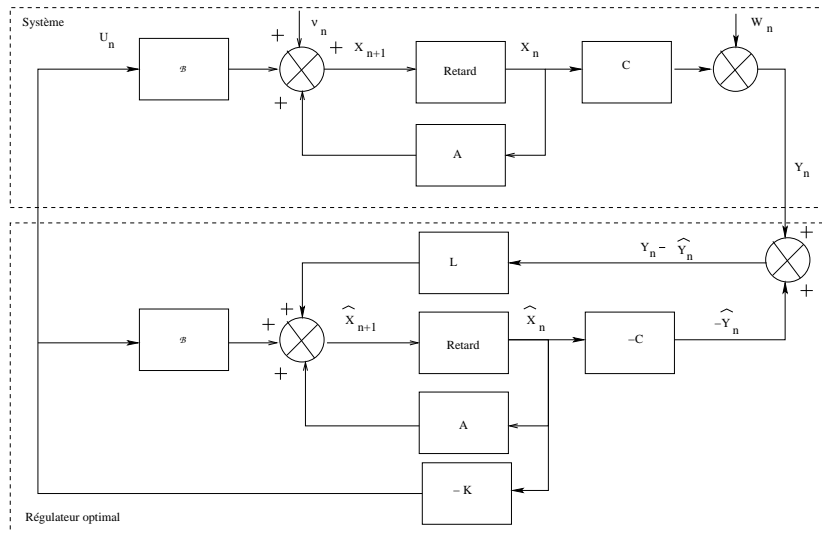


FIG. 5.2 – Système en information incomplète. Schéma bloc résumant le fonctionnement du système et du régulateur. La partie haute décrit le système, la partie basse le régulateur (loi de commande).

En fait, on peut souhaiter ne faire apparaître qu'une unique équation réursive pour des raisons algorithmiques. Ceci est obtenu en associant l'équation de prédiction (5.61) à (5.59) :

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n} = \mathcal{A}\hat{\mathbf{X}}_{n/n-1} + \mathcal{B}\mathbf{u}_n + \mathcal{A}\mathbf{H}_\infty \tilde{\mathbf{y}}_{n/n-1} \quad (5.62)$$

$$= \mathcal{A}\hat{\mathbf{X}}_{n/n-1} + \mathcal{B}\mathbf{u}_n + \mathbf{L}_\infty \tilde{\mathbf{y}}_{n/n-1}, \quad (5.63)$$

où l'on a fait apparaître la matrice de gain d'observateur  $\mathbf{L}_\infty = \mathcal{A}\mathbf{H}_\infty$ . On obtient ainsi une formulation compacte, réursive, qui sera celle retenue pour l'implantation. Enfin, la valeur optimale des tensions est obtenue par projection sur l'espace des commandes miroir de l'état prédit selon :

$$\mathbf{u}_n = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{X}}_{n/n} = \mathbf{P}\hat{\phi}_{n+1/n}^{tur}. \quad (5.64)$$

Ce processus correspond au schéma-bloc de la figure 5.2, illustrant le fonctionnement global de la commande en information incomplète.

### 5.5.2 Nature des matrices dans le cas de l'OA

Dans le cas de l'OA les matrices  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  sont définies par :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{C} = ( 0 \ 0 \ \mathbf{D} \ 0 \ -\mathbf{DN} ). \quad (5.65)$$

Notons que  $\mathbf{DN}$  représente finalement la matrice d'interaction du système d'OA.

Dans le cas de l'OA, la matrice  $\mathbf{P}$  se déduit aisément selon (5.10) :

$$\mathbf{P}^{oa} = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^\dagger \mathbf{N}^T, \quad (5.66)$$

$\mathbf{N}$  étant simplement la matrice d'influence du miroir.



### 5.5.3 Nature des matrices dans le cas de l'OAMC

Dans le cas de l'OAMC, on considère l'estimation de la phase turbulente dans son volume. Par souci de conformité aux équations du paragraphe 4.6.3, on note donc le vecteur d'état sous la forme :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \varphi_{n+1}^{tur} \\ \varphi_n^{tur} \\ \varphi_{n-1}^{tur} \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}, \quad (5.67)$$

faisant intervenir la phase dans le volume  $\varphi^{tur}$ . Néanmoins les équations d'état et d'observation restent inchangées dans leur structure. Il faut seulement modifier les matrices utilisées en distinguant les directions d'analyse  $\alpha$  des directions de correction  $\beta$ . D'après (4.65) et (4.66), les matrices  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  sont donc définies par :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{DM}_\alpha^L & 0 & -\mathbf{DM}_\alpha^M \mathbf{N} \end{pmatrix}. \quad (5.69)$$

Enfin, le projecteur  $\mathbf{P}$  doit prendre en compte les directions de correction  $\beta$ . Il se déduit de (4.62) comme une solution aux moindres carrés :

$$\mathbf{P}^{oamc} = \left( (\mathbf{M}_\beta^M \mathbf{N})^T \mathbf{M}_\beta^M \mathbf{N} \right)^\dagger (\mathbf{M}_\beta^M \mathbf{N})^T \mathbf{M}_\beta^L. \quad (5.70)$$

Il s'agit du même projecteur que celui introduit au paragraphe 5.2.2 pour le MMSE.

### 5.5.4 Estimation optimale en boucle ouverte

L'estimation optimale de la phase turbulente en boucle ouverte (voir paragraphe 2.4.2.2) s'obtient aisément à partir de la structure du filtre de Kalman. Il suffit pour cela d'ouvrir la boucle en enlevant les tensions de commande dans le vecteur d'état et dans les équations (ce qui revient à les annuler). Il est alors immédiat que le filtre de Kalman continue à fournir une estimée optimale de la phase turbulente en boucle ouverte, avec le vecteur d'état (on présente ici le cas OA) :

$$\mathbf{X}_n^1 = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tur} \\ \phi_{n-1}^{tur} \end{pmatrix}, \quad (5.71)$$

et le modèle d'état :

$$\mathbf{X}_{n+1}^1 = \mathcal{A}^1 \mathbf{X}_n^1 + \mathbf{v}_n \quad (5.72)$$

$$\mathbf{y}_n = \mathcal{C}^1 \mathbf{X}_n^1 + \mathbf{w}_n, \quad (5.73)$$

où :

$$\mathcal{A}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{tur} & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{C}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix}. \quad (5.74)$$

et où :

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n, \quad (5.75)$$

Cette estimation en boucle ouverte peut à son tour être exploitée pour réaliser une correction *a posteriori* de la phase turbulente, dans une architecture d'OA (ou d'OAMC) boucle ouverte (l'analyseur mesure directement et uniquement la phase turbulente et le miroir la corrige ensuite). Cette architecture correspond au schéma bloc de la figure 2.5.

Ceci rend le filtre de Kalman particulièrement intéressant pour les commandes boucle ouverte comme en MOAO. La boucle ouverte est dépourvue par définition de boucle de rétro-action, et nécessite donc une commande très précise. En outre, il est difficile dans la pratique avec les lois de commandes classiques utilisées en OA ou en OAMC de proposer une telle commande boucle ouverte dynamique. Le filtre de Kalman réalise quant à lui une estimation dynamique optimale.

### 5.5.5 Représentation d'état

Le paragraphe 4.7 a motivé notre choix de représentation d'état, non minimale. Une analyse rapide permet de faire deux commentaires sur ce choix.

Premièrement, la présence de la phase turbulente dans le vecteur d'état conduit à une équation d'évolution simple, essentiellement conditionnée par la matrice  $\mathbf{A}^{tur}$  de structure simple. Or l'équation (5.24) montre que le terme  $\mathbf{A}^{tur}$ , en jouant comme un terme multiplicatif sur  $\hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}$ , conditionne fortement l'évolution récursive de l'état, et donc, comme on l'a vu au paragraphe 4.5.3.1 la stabilité du système. De la même manière, ce terme conditionne la convergence de l'équation de Riccati (voir (5.26)). La simplicité du modèle d'état et de  $\mathbf{A}^{tur}$  permet donc de contrôler plus aisément la stabilité et la convergence des calculs récursifs.

Deuxièmement, l'utilisation du vecteur de phase  $\phi_{n+1}^{tur}$  dans le vecteur d'état n'est bien sûr pas indispensable, comme indiqué dès le paragraphe 4.7. Mettre  $\phi_{n+1}^{tur}$  dans  $\mathbf{X}_n$  permet d'utiliser la forme  $\mathbf{u}_n = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{X}}_{n/n} = \mathbf{P}\hat{\phi}_{n+1/n}^{tur}$  pour la commande, ce qui conduit à un exposé simplifié. On ne parle pas en effet de prédiction de l'état. On peut tout aussi bien prendre le vecteur d'état du type :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \phi_n^{tur} \\ \phi_{n-1}^{tur} \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}, \quad (5.76)$$

qui conduit à  $\mathbf{u}_n = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n} = \mathbf{P}\hat{\phi}_{n+1/n}^{tur}$ .  $\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}$  est alors défini par (5.61). Le coût calculatoire est alors réduit. La réduction du vecteur d'état et l'optimisation du coût calculatoire de la commande sont des préoccupations légitimes qui seront d'ailleurs traitées au chapitre 7.

### 5.5.6 Choix des bases

Il est un point qui fait souvent couler beaucoup d'encre dans le calcul des lois de commande, celui du choix des bases. Dans une approche aussi simple que celle de l'intégrateur, où la phase proprement

dite n'apparaît pas, mais où seules les mesures et les commandes miroirs (tensions) sont actrices, on peut distinguer déjà plusieurs bases pour le calcul de la matrice de commande, et l'optimisation des gains modaux de l'intégrateur : base des modes propres du système (c'est-à-dire la base diagonalisant la matrice d'interaction), base de Karhunen-Loeve sur l'espace miroir *etc.* Ces bases peuvent en outre être tronquées des modes à faible valeur propre [Gendron(1995), Dessenne(1998), Fusco(2000)]. Le choix de la base est généralement conditionné par une volonté d'être représentatif soit du système d'OA, et donc des modes qu'il est capable de générer et mesurer, soit des propriétés de la turbulence et la répartition caractéristique de son énergie selon les fréquences spatiales.

Lorsque des lois de commandes font explicitement apparaître la phase turbulente, celle-ci peut être exprimée sur une carte de points, une base de Zernike ou de Karhunen-Loeve, une base issue des modes du miroir *etc.* Le choix de la base n'est ni simple ni anodin. Comme expliqué au paragraphe 4.7, nous avons pris le parti de construire le vecteur d'état autour de la phase turbulente. Le choix de la base de décomposition de cette phase s'est porté naturellement sur la base de Zernike. Cette base permet en effet d'exprimer simplement les propriétés de la phase, tout en bénéficiant de l'ordonnement des modes selon leur énergie. Le nombre de modes à estimer est choisi délibérément grand, c'est-à-dire que le système est sur-paramétré, de façon à pouvoir absorber les erreurs de modèle. L'évaluation des projecteurs  $\mathbf{M}_\alpha^L, \mathbf{M}_\beta^L, \mathbf{M}_\alpha^M, \mathbf{M}_\beta^M$  est aussi facilitée dans cette base : on sait qu'un mode de numéro  $i$  présent dans une méta-pupille va se projeter dans la pupille sur des modes de numéros inférieurs ou égaux à  $i$  [Ragazzoni *et al.*(1999)]. Enfin, rappelons que lorsque la base n'est pas trop tronquée, son choix est globalement indifférent.

## 5.6 Outils de contrôle en validation numérique et expérimentale

Les différentes grandeurs intervenant dans la loi de commande (états, innovation, ...) possèdent un certain nombre de propriétés statistiques présentées au paragraphe 5.3.4.4. En l'absence d'erreurs de modèle, cas que l'on peut qualifier de parfait et que l'on retrouvera par exemple en simulation numérique, ces propriétés sont donc vérifiées. Seules des erreurs numériques, ou de convergence dans le calcul empirique de grandeurs statistiques peuvent apparaître.

Par contre, la présence d'erreurs de modèle conduit à la dégradation de ces propriétés. L'apparition d'erreurs de modèle peut intervenir dans deux contextes. Tout d'abord, ces erreurs peuvent être délibérément introduites, en simulation, afin d'étudier la robustesse de la loi de commande. Les propriétés évoquées deviennent alors des outils de détection de divergence, ou de contrôle de l'impact des erreurs introduites sur le fonctionnement du système. Un deuxième cas d'apparition d'erreurs de modèle est celui de l'implantation de la commande sur un système expérimental réel. En effet, la calibration des composants elle-même est entachée de bruit de mesure. A cela s'ajoute évidemment la méconnaissance des composants, de leur comportement, ou d'éventuels effets dus à l'environnement du système expérimental.

Autant en simulation les propriétés de toutes les grandeurs sont contrôlables, autant en validation expérimentale, seules quelques grandeurs sont accessibles.

### 5.6.1 Cas de la simulation numérique

Dans un cadre de connaissance complète des grandeurs en présence, toutes les grandeurs sont contrôlables. On peut par exemple comparer les états estimés avec l'état réel du système, connu, et évaluer ainsi l'erreur d'estimation  $\tilde{\mathbf{X}}_{n/n} = \mathbf{X}_n - \hat{\mathbf{X}}_{n/n}$ . On peut ainsi évaluer les propriétés statistiques des états estimés, la présence de biais, et comparer la covariance empirique de  $\tilde{\mathbf{X}}_{n/n}$ , calculée à partir

des estimées effectives et notée  $\Sigma_{n+1/n}^{emp}$  avec la matrice de covariance d'erreur d'estimation issue de l'équation de Riccati (5.21). En régime asymptotique, ces deux covariances doivent coïncider. La même approche peut être menée sur l'innovation.

### 5.6.2 Cas de la validation expérimentale

Tous ces paramètres de contrôle ne sont cependant pas utilisables dans le cadre de la validation expérimentale. Certains paramètres ne sont pas accessibles.

Il est clair que l'état réel du système n'est plus accessible dans le cadre expérimental, sauf à disposer d'un outil de contrôle annexe (mais probablement entaché lui-même de bruit de mesure). Néanmoins, il est toujours possible d'évaluer la variance empirique et la corrélation temporelle des états estimés et de les comparer aux modèles spatio-temporels, la présence d'un éventuel écart trahissant la présence d'erreurs de modèles.

La variance de phase résiduelle est exploitable dans le cadre expérimental, au travers des images acquises et de l'évaluation du SR. Elle permet de comparer la performance finale de la commande à celle d'autres lois de commande, ou au cours de divers réglages, mais elle n'apporte qu'une information indirecte sur le fonctionnement de la commande.

Seule l'innovation  $\tilde{y}$  devient réellement utilisable, puisqu'on a accès à la fois à la mesure réelle et à la mesure estimée. Il est alors possible de l'utiliser comme indicateur de bon fonctionnement du système commandé. Sa moyenne nulle est un critère de contrôle, mais pour lequel il est difficile de se donner une référence permettant une comparaison. Par contre, nous avons vu précédemment que la covariance de l'innovation est déterminée par les modèles introduits dans la commande et pré-calculés avant l'application de la commande. Par conséquent, on possède un élément de référence et on pourra comparer la covariance de l'innovation donnée par les mesures (expérimentales ou simulées) à sa covariance théorique. Lorsque la covariance de l'innovation augmente singulièrement cela trahit des erreurs de modèle importantes. Enfin, on peut réaliser une analyse de la blancheur de l'innovation pour une détection fine d'erreur de modèle.

### 5.6.3 Outil de test de blancheur

L'innovation est le plus souvent le paramètre principal de contrôle du fonctionnement de la commande, surtout dans le cadre expérimental. Sa blancheur est une propriété que l'on souhaite vérifier pour évaluer l'adéquation du système au modèle d'état choisi. Or il est difficile de quantifier la blancheur d'un signal. En général, une telle analyse repose sur la Densité Spectrale de Puissance temporelle du signal considéré. Mais le résultat reste qualitatif. Néanmoins, il est possible de se donner des critères de blancheur. En particulier, ce paragraphe présente brièvement un test, proposé par Stoica [Stoica(1977)], permettant de vérifier la blancheur d'un signal avec une marge d'erreur connue. Ce test repose sur un test du chi-2.

Considérons un signal d'intérêt  $y$  représentant un processus aléatoire scalaire discret. Soit  $r(i)$  l'estimée empirique de sa covariance déduite des échantillons  $(y(1), y(2), \dots, y(N))$  selon :

$$r(i) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{t=N-i} y(t)y(t+i). \quad (5.77)$$

On montre alors que si  $y$  est blanc,  $r(i)$  tend asymptotiquement vers une loi gaussienne, et que les échantillons  $r(i)$  sont décorrélés entre eux. La conséquence est que le terme normalisé

$N \sum_{i=1}^{i=k} r^2(i)/r^2(0)$  possède une distribution de chi-2 à  $k$  degrés de liberté. En première approximation, pour  $k$  suffisamment grand ( $k \geq 3$ ), on peut assimiler cette distribution à une loi normale  $N(k, 2k)$ .

Dès lors, si l'on se fixe un risque d'erreur  $p$ , on peut calculer la valeur  $V(p)$  telle que la variable aléatoire de distribution  $N(k, 2k)$  ait une probabilité  $p$  d'avoir une valeur supérieure à  $V(p)$ . En se ramenant à une loi normale  $N(0, 1)$ , cette valeur  $V(p)$  est donnée par  $V(p) = k + S(p)\sqrt{2k}$ , où  $S(p)$  est défini par :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{S(p)}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = p. \quad (5.78)$$

Rapporté à notre problème, on peut définir une borne  $V(p)$  pour laquelle on a une probabilité  $p$  de considérer  $y$  comme non blanc par erreur (risque dit de premier type). Ainsi, on peut définir la condition :

$$y \text{ blanc} \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=k} r^2(i) \leq \left(k + S(p)\sqrt{2k}\right) r^2(0)/N. \quad (5.79)$$

L'implication n'est vraie qu'avec une marge de risque, cependant connue. Cette implication sera le plus souvent utilisée selon sa négation. Le non-respect de (5.79), implique que  $y$  est non blanc. Enfin la réciproque n'est pas vraie. Il existe une probabilité non nulle qu'un signal vérifie l'inégalité et ne soit pourtant pas blanc. C'est le risque de deuxième type. Cependant, ce risque ne peut être quantifié sans connaître une statistique du signal considéré. Par conséquent, ce test sera le plus souvent utilisé pour vérifier qu'un signal est non blanc. Il représente un outil de contrôle quantitatif de la blancheur d'un signal, et en l'occurrence de l'innovation pour le cas qui nous concerne. Ce test sera mis à profit lors de l'étude de la commande optimale. Il viendra en complément des analyses spectrales de l'innovation.

## Chapitre 6

# Conclusion de la première partie

Cette première partie a présenté le cadre de notre étude portant sur la commande optimale en OA et en OAMC. Le phénomène de turbulence atmosphérique conduit à la dégradation des images obtenues à travers l'atmosphère. La résolution des télescopes s'en trouve fortement réduite. Ce phénomène a motivé le développement de l'OA. Le chapitre 1 a décrit ce phénomène de turbulence, et ses conséquences sur la formation d'images, en introduisant les principales grandeurs physiques utilisées dans ce mémoire. Il a surtout montré que la phase turbulente peut être décrite au travers de modèles connus et présente alors des propriétés spatio-temporelles caractéristiques. Ces propriétés peuvent être exprimées de manière simple dans une base particulière, celle des polynômes de Zernike, facilitant ainsi une description algébrique de la turbulence. Ce chapitre a ainsi introduit une modélisation des caractéristiques spatio-temporelles de la turbulence sur laquelle s'appuie la commande optimale.

Le principe d'une OA et sa structure ont ensuite été rappelés en chapitre 2. Une description de ses composants a été proposée, introduisant ainsi les notions et les outils indispensables à l'élaboration d'une loi de commande. En particulier, l'accent a été mis sur les caractéristiques de ces composants, afin de bien identifier les contraintes imposées dans la spécification d'une commande optimale pour un système de type OA. Des modèles des composants, sur lesquels s'appuie la commande optimale, ont été proposés. Le principe de la commande en OA a été introduit au travers d'un exemple simple mais aussi très répandu, celui d'un asservissement boucle fermée contrôlé par un intégrateur. Cette illustration du fonctionnement de la commande en OA a permis d'une part d'introduire les notions de base relative à la commande en OA, et d'autre part de mettre en évidence les contraintes et le mode de fonctionnement particulier de cette commande. Enfin, les limitations de la correction fournie par une OA ont été mises en évidence. La correction réalisée est en effet partielle en raison de nombreux postes d'erreurs. C'est l'existence même de ces limitations qui a conduit au développement de nouveaux concepts d'OA présentés en chapitre 3.

Une majorité d'entre eux ont été développés pour faire face au problème posé par l'anisoplanétisme. Les solutions proposées passent alors par une approche de type tomographique qui doit s'adapter à un asservissement temps réel le plus souvent en boucle fermée. Il se pose donc le problème du choix des lois de commande, si possible optimales vis-à-vis de critères de performance à définir. On a montré que derrière la plupart de ces concepts se cache un cas simple d'OA hors axe, brique élémentaire qui peut nous permettre de tester une loi de commande dédiée à l'ensemble de ces concepts. Il s'agit aussi d'une configuration relativement simple, pouvant être aisément mise en œuvre sur un banc d'OA. Enfin, dans le cadre de l'OA extrême, les performances requises exigent l'optimisation du système au niveau de chaque poste d'erreur, et en particulier le choix d'une commande pouvant gérer directement certains défauts du système, comme les vibrations.

Il s'agit donc de proposer une loi de commande optimale pouvant s'appliquer à ces divers concepts, en particulier l'OAMC. Pour ce faire, le chapitre 4 s'est penché sur la modélisation du problème. Le système d'OA a été décrit et un critère d'optimalité quadratique a été identifié. On a montré que la minimisation de ce critère à temps continu était équivalente à la minimisation d'un critère à temps discret, autorisant ainsi le développement d'une loi de commande optimale à temps discret. Cette discrétisation du système fait cependant apparaître un terme d'erreur ultime, incompressible, et directement lié à l'aspect discret de la mesure et de la correction. Une contribution originale a été apportée par le calcul analytique de ce terme d'erreur. Une application numérique dans un cas représentatif montre que cette erreur est dans une large mesure négligeable pour les systèmes d'OA les plus courants. On a alors montré que la minimisation du critère nécessitait une connaissance *a priori* du système et de la turbulence. Le système ayant été décrit auparavant, une modélisation de l'évolution spatio-temporelle de la turbulence est donc proposée, s'appuyant sur les propriétés exposées au premier chapitre. Afin de faciliter la résolution du problème de commande, les systèmes d'OA et d'OAMC ont été modélisés dans le formalisme d'état, cadre classique et puissant de traitement des problèmes de contrôle en automatique. La représentation d'état choisie a été justifiée.

Enfin, le problème de commande pour l'OA et l'OAMC a été abordé. Le chapitre 5 présente diverses solutions de commande déjà proposées pour l'OA et l'OAMC, en soulignant leurs limitations. Il a motivé ainsi le développement d'une commande optimale adaptée à l'OAMC et rendant compte des propriétés du système utilisé. En s'appuyant sur le théorème de séparation stochastique, on a montré que le problème de commande considéré se scinde en deux sous-problèmes : d'abord réaliser une estimation et une prédiction optimale de l'état du système puis résoudre un problème de commande déterministe. Le premier sous-problème trouve sa solution dans un filtre de Kalman. Il s'agit d'un estimateur linéaire optimal de l'état du système, basé sur un processus récursif, exploitant toutes les mesures précédemment acquises. Il s'appuie pour cela sur les *a priori* du système et de l'évolution spatio-temporelle de la turbulence présentés dans les chapitres précédents. Une version asymptotique de l'estimateur a été proposée. Ses propriétés ont été rappelées. Le second problème de commande déterministe, est dans notre contexte un simple problème de projection aux moindres carrés de la phase préalablement estimée sur l'espace miroir. L'algorithme de commande final prend donc la forme d'une équation récursive d'estimation/prédiction associée à une projection. Cet algorithme a été présenté dans le cadre de l'OA et de l'OAMC, en précisant la nature des matrices impliquées. Dans la perspective d'une mise en œuvre en simulation ou en laboratoire, des outils de contrôle de son fonctionnement et de validation de ses performances ont été présentés. Enfin, certaines lois de commandes ont été réinterprétées sous la forme d'observateurs afin de mettre en évidence les hypothèses et les modèles qui les sous-tendent. Leurs limitations ont ainsi été identifiées.

## **Deuxième partie**

# **Étude de la commande optimale - Simulation numérique**





## Chapitre 7

# Implantation de la commande optimale : considérations algorithmiques et calculatoires

### 7.1 Introduction

Ce chapitre se penche sur l'implantation algorithmique de la commande optimale proposée. En effet, la loi de commande décrite au chapitre 5 s'est appuyée sur un vecteur d'état dont la structure n'a eu qu'un rôle explicatif. L'implantation concrète de la commande amène à envisager une structure plus simple et plus logique du vecteur d'état. En outre, la taille des vecteurs et des matrices impliquées dans le calcul, les produits matriciels, soulèvent de nombreuses questions.

Aussi, se pose la question du coût calculatoire d'une telle commande et donc de son implantation réelle. Cette problématique concerne tout autant une implantation de la commande sur simulateur numérique que sur un système d'OA/OAMC réel. Dans les deux cas, il est indispensable d'évaluer le coût calculatoire de la commande et donc le temps de calcul nécessaire. Ce point devient particulièrement critique pour un asservissement temps réel. La charge calculatoire conditionne le dimensionnement du calculateur. Inversement, la puissance des calculateurs étant limitée, il est nécessaire d'envisager une réduction de la charge calculatoire.

De plus, on peut s'inquiéter à juste titre de la durée et de la qualité des calculs numériques réalisés lorsque les dimensions s'accroissent fortement. Ainsi, dans la cadre de la commande proposée, une équation de Riccati doit être résolue, impliquant en outre une inversion matricielle. Des problèmes de précision numérique se posent donc dès que la dimension des matrices augmente. Là encore, on peut envisager à la fois la réduction des dimensions des matrices utilisées et l'optimisation des procédures de calcul.

Il ne s'agit pas de développer ici une étude approfondie des techniques d'optimisation des calculs pour les grandes dimensions. L'ambition plus modeste de ce chapitre est de proposer quelques méthodes de simplification des calculs et de réduction de la taille des matrices incriminées, en évaluant l'impact sur le coût calculatoire. L'objectif est de montrer que le coût associé à la commande optimale proposée au chapitre 5 peut être très significativement réduit, autorisant ainsi une implantation sur des systèmes réels et appliqués. La réduction des dimensions matricielles et l'application de méthodes simples permettent aussi de garantir une précision de calcul numérique accrue notamment dans la résolution de l'équation de Riccati.

Aussi, le paragraphe 7.2 se penche sur une implantation concrète de la loi de commande et l'uti-

lisation d'un vecteur d'état raisonnable. Il évalue alors le coût calculatoire de la commande. Il montre ensuite que le vecteur d'état peut être réduit, et que l'on peut exploiter la nature même des matrices impliquées pour diminuer notablement le coût calculatoire. Le paragraphe 7.3 s'intéresse ensuite au problème de résolution de l'équation de Riccati. Il propose d'abord une méthode de calcul itératif du point fixe de l'équation, puis présente une méthode de simplification de ce calcul. Enfin, des solutions plus sophistiquées de résolution de l'équation de Riccati sont évoquées.

## 7.2 Implantation de la commande et réduction du vecteur d'état

Ce paragraphe traite de l'implantation pratique de la commande, et dans ce cadre le vecteur d'état est adapté. On montre aussi que la dimension du vecteur d'état peut être réduite, afin de réduire les coûts calculatoires.

### 7.2.1 Modification du vecteur d'état pour une implantation

Au chapitre 5, nous avons introduit un vecteur d'état  $\mathbf{X}_n$  défini selon :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tur} \\ \phi_{n-1}^{tur} \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Les deux vecteurs de tension introduits dans ce vecteur d'état au chapitre 5 n'ont eu qu'un rôle explicatif. Il est évident que dans la pratique, les tensions n'ont pas besoin d'être estimées car elles sont parfaitement connues à tout instant. Elles n'interviennent que comme des paramètres de calculs. Il n'est donc pas nécessaire de les inclure dans le vecteur d'état ; il suffit de les conserver en mémoire et les utiliser au bon moment.

Aussi, dans le cadre d'une implantation effective de la commande, on est amené [Le Roux(2003)] à décomposer le vecteur d'état en deux sous-vecteurs (on considère ici un cas d'OA pour plus de simplicité), en séparant phases et tensions :

$$\mathbf{X}_n^1 = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tur} \\ \phi_{n-1}^{tur} \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

et,

$$\mathbf{X}_n^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

On réécrit le modèle d'état de la manière suivante :

$$\mathbf{X}_{n+1}^1 = \mathcal{A}^1 \mathbf{X}_n^1 + \mathbf{v}_n \quad (7.4)$$

$$\mathbf{X}_{n+1}^2 = \mathcal{A}^2 \mathbf{X}_n^2 + \mathcal{B}^2 \mathbf{u}_n \quad (7.5)$$

$$\mathbf{y}_n = \mathcal{C}^1 \mathbf{X}_n^1 + \mathcal{C}^2 \mathbf{X}_n^2 + \mathbf{w}_n. \quad (7.6)$$

avec :

$$\mathcal{A}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{tur} & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{c}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{DN} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

et où :

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n. \quad (7.8)$$

Le filtre de Kalman porte donc uniquement sur la partie  $\mathbf{X}_n^1$ . La commande prend ainsi la forme :

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}^1 = \mathcal{A}^1 \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}^1 + \mathbf{L}_\infty \left( \mathbf{y}_n - \left( \mathbf{c}^1 \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}^1 + \mathbf{c}^2 \mathbf{X}_n^2 \right) \right) \quad (7.9)$$

$$\mathbf{u}_n = -\mathbf{K}' \hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}^1, \quad (7.10)$$

avec  $\mathbf{K}' = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{P} & 0 \end{pmatrix}$ . Les tensions étant connues à tout instant, c'est le vecteur  $\mathbf{X}_n^2$  qui apparaît dans l'équation (7.9).

Il s'agit là de la forme de la commande systématiquement retenue dans nos implantations ultérieures, tant sur le simulateur numérique que dans le véritable RTC du banc BOA (voir chapitre 13). Cette forme, dite aussi générique, permet en effet de prendre en compte les diverses extensions de la commandes au filtrage de composantes parasites (vibrations, composantes statiques). Elle offre aussi la possibilité d'étendre le modèle d'évolution spatio-temporelle de la turbulence jusqu'à un AR3 sans changer de vecteur d'état (voir paragraphe 4.5.2). On notera aussi que cette formulation de la loi de commande permet aisément de retrouver la forme estimateur boucle ouverte de la commande présentée au paragraphe 5.5.4 dans le cadre d'applications boucle ouverte de la commande optimale. Il suffit en effet d'annuler le projecteur  $\mathbf{K}'$  (équivalent à supprimer l'équation (7.10)) et la contribution du miroir dans l'équation (7.9), pour retrouver la forme du paragraphe 5.5.4. Elle offre donc une certaine souplesse d'utilisation.

Cette forme nous sert de point de départ dans l'évaluation du coût calculatoire et la mise en œuvre d'une optimisation des calculs. Si on ne suppose d'abord aucune forme d'optimisation des opérations menées, on se base sur ces deux équations dans leur forme la plus stricte et la plus complète pour estimer la complexité des calculs menés. D'ores et déjà on peut généraliser l'estimation de ce coût calcul tant pour l'OA que pour l'OAMC. On peut donc, sans restreindre la généralité de notre calcul, définir les dimensions suivantes :

- le vecteur de mesure est de taille  $p$  ;
- le vecteur de tension  $\mathbf{u}_n$  est de taille  $m$  (nombre d'actionneurs) ;
- le vecteur d'état  $\mathbf{X}$  est de taille  $n$ .

si bien que les diverses matrices impliquées dans les équations de contrôle sont de tailles :

$\mathcal{A}$	$n \times n$
$\mathcal{B}$	$n \times m$
$\mathcal{C}$	$p \times n$
$\mathbf{L}_\infty$	$n \times p$
$\mathbf{K}'$	$m \times n$

On en déduit les coûts, à chaque itération de la boucle de commande, de chaque équation :

- équation (7.9) :  $n \times (n + m + 2p)$  multiplications,  $n \times (n + m + 2p) - n$  additions
- équation (7.10) :  $m \times n$  multiplications,  $m \times (n - 1)$  additions

Soit une complexité globale évoluant selon  $n \times (n + m + p)$ .

Pour comparaison, une commande de type intégrateur, à gain modal optimisé ou non, se réduit à calculer à chaque itération :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n - \mathbf{M}_{com}\mathbf{y}_n, \quad (7.11)$$

où l'on suppose que le gain de l'intégrateur est inclus dans la matrice de commande  $\mathbf{M}_{com}$ . La complexité est donc en  $m \times p$  produits et  $m \times p$  additions. Cette relation est valable aussi bien en OA qu'en OAMC.

Pour fixer les idées, on considère pour exemple le cas du démonstrateur d'OAMC MAD développé par l'ESO (voir paragraphe 3.3.1.4). Il s'agit d'un système d'OAMC composé de trois analyseurs de type Shack-Hartmann de 52 sous-pupilles utiles (soit 104 mesures de pentes), deux miroirs bimorphes à 60 actionneurs utiles et d'un miroir de basculement (2 actionneurs). On va considérer pour exemple deux configurations typiques. La première correspond à une configuration d'OA, à un analyseur et un miroir de correction dans la pupille, plus le miroir de basculement. La seconde correspond à une configuration d'OAMC, utilisant les trois analyseurs, les deux miroirs plus celui de basculement et suppose que la turbulence atmosphérique se concentre dans trois couches situées à 0, à 6 et à 13 km d'altitude. Les miroirs déformables sont optiquement conjugués à 0 et 8,5 km. En terme de coût calcul, ces deux configurations représentent le cas le plus simple et le plus compliqué, donnant une bonne idée de l'étendue des besoins.

Le tableau 7.1 résume les dimensions des différents vecteurs et détermine le coût calculatoire de chaque loi de commande. Le nombre de modes de phase turbulente estimés pour la commande optimale est issu de l'expérience acquise tant en simulation et en validation expérimentale. Il correspond en OA à l'estimation de la phase sur 100 modes (base de Zernike) et en OAMC à l'estimation typiquement de 70,145 et 265 modes dans les trois couches turbulentes.

grandeur cas	OA	OAMC
$\mathbf{y}_n : p =$	$2 \times 52 = 104$	$2 \times 52 \times 3 = 312$
$\mathbf{u}_n : m =$	$60 + 2 = 62$	$60 + 60 + 2 = 122$
nombre modes estimés	100	$70 + 145 + 265 = 480$
$\mathbf{X}_n : n =$	$3 \times 100 = 300$	$3 \times 480 = 1440$
complexité intégrateur		
nombre de produits	6448	38064
nombre d'additions	6448	38064
commande optimale (forme générique)		
nombre de produits	189600	$\simeq 3.3 \cdot 10^6$
nombre d'additions	189000	$\simeq 3.3 \cdot 10^6$

TAB. 7.1 – Exemple de coût calculatoire dans une configuration MAD, en OA et OAMC. On précise les dimensions des divers vecteurs pour les deux cas de figure puis le coût calculatoire d'une commande intégrateur ou d'une commande optimale dans sa forme générique.

On comprend que l'essentiel de la complexité provient de l'estimation de la phase turbulente estimée à trois instants.

## 7.2.2 Simplification du vecteur d'état et optimisation des calculs

On peut cependant pousser le raisonnement plus loin. Nous avons souligné au paragraphe 5.5.5 que le vecteur d'état contient un état de phase non nécessaire. En effet, on peut considérer le vecteur

d'état  $\mathbf{X}_n^1$  suivant :

$$\mathbf{X}_n^1 = \begin{pmatrix} \phi_n^{tur} \\ \phi_{n-1}^{tur} \end{pmatrix}, \quad (7.12)$$

Le modèle d'état se réécrit selon :

$$\mathbf{X}_{n+1}^1 = \mathcal{A}^1 \mathbf{X}_n^1 + \mathbf{v}_n \quad (7.13)$$

$$\mathbf{X}_{n+1}^2 = \mathcal{A}^2 \mathbf{X}_n^2 + \mathcal{B}^2 \mathbf{u}_n \quad (7.14)$$

$$\mathbf{y}_n = \mathcal{C}^1 \mathbf{X}_n^1 + \mathcal{C}^2 \mathbf{X}_n^2 + \mathbf{w}_n, \quad (7.15)$$

avec :

$$\mathcal{A}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{tur} & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

$$\mathcal{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C}^1 = (0 \quad \mathbf{D}), \mathcal{C}^2 = (0 \quad -\mathbf{DN}),$$

et où maintenant :

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n. \quad (7.17)$$

Ceci conduit à la même loi de commande :

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}^1 = \mathcal{A}^1 \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}^1 + \mathbf{L}_\infty \left( \mathbf{y}_n - \left( \mathcal{C}^1 \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}^1 + \mathcal{C}^2 \mathbf{X}_n^2 \right) \right) \quad (7.18)$$

$$\mathbf{u}_n = -\mathbf{K}'' \hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}^1, \quad (7.19)$$

avec  $\mathbf{K}'' = \begin{pmatrix} -\mathbf{P} & 0 \end{pmatrix}$ .

On ne traite donc plus que deux états de phase et des matrices de taille réduite, amenant à un complexité moindre. Cette solution nous restreint cependant à un modèle d'évolution spatio-temporelle de la turbulence au plus de type AR2.

On peut alors se pencher de plus près sur la nature des opérations et de ce fait envisager l'optimisation des calculs. En effet, la plupart des matrices sont creuses et reflètent surtout des mises en mémoires, des extractions de sous-blocs de vecteurs.

- la matrice  $\mathcal{A}$  décrit l'évolution du vecteur d'état. Cette matrice est constituée de blocs donc la plupart sont nuls ou égaux à l'identité et représentant des opérations de mise en mémoire. Enfin il reste un bloc  $\mathbf{A}^{tur}$  (cas AR1) voire 2 (AR2), non nuls et non égaux à l'identité, mais tous diagonaux. Le produit matriciel se résume pour ces blocs à un produit vectoriel ;
- les matrices  $\mathcal{A}^2$  et  $\mathcal{B}^2$  ne servent qu'à la mise à jour du vecteur de tension, ce sont des matrices remplies de zéros et de 1. On peut directement réaliser la copie du vecteur  $\mathbf{u}_n$  dans le vecteur d'état  $\mathbf{X}_n^2$  sans opérations de calculs. Il s'agit en somme uniquement d'une zone mémoire tampon ;
- les matrices  $\mathcal{C}^1$  et  $\mathcal{C}^2$  présentent elles aussi une structure creuse. On constate que pour chacune une seule sous-matrice est non nulle ;
- enfin, il en est de même pour  $\mathbf{K}''$ , puisqu'on ne calcule  $\mathbf{u}_n$  qu'à partir de  $\hat{\phi}_{n+1}^{tur}$ , soit la première composante du vecteur  $\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}^1$ .

La prise en compte de ces quelques remarques permet de réduire le coût calcul pour chaque équation. On considère que les opérations de recopie de vecteurs sont de coût nul. En notant  $t$  la taille du vecteur de phase estimée (de sorte que  $n = 2 \times t$ ) on a ainsi :

- équation (7.18) :  $p \times m + t \times (3p + 1)$  multiplications,  $p \times (3t + m)$  additions
- équation (7.19) :  $m \times t$  multiplications,  $m \times (t - 1)$  additions

En reprenant, notre exemple de MAD, ceci conduit à une complexité synthétisée dans le tableau 7.2. Le coût calculatoire a été globalement divisé par 8 grâce aux quelques considérations simples proposées, c'est-à-dire sans exploiter les techniques de calcul matriciel disponibles pour les systèmes de grande dimension. L'essentiel de la complexité réside dans cette dernière forme au niveau du produit de l'innovation par la matrice de gain. Cette opération concentre l'essentiel de la complexité calculatoire de l'algorithme.

Le coût calculatoire reste cependant près de 14 fois supérieur à celui de l'intégrateur simple. Mais c'est le prix de l'optimalité. Nous avons délibérément porté la comparaison entre la commande optimale et l'intégrateur, solution la plus simple et la moins coûteuse. Il est important de garder à l'esprit que l'utilisation de toute autre solution s'appuyant sur une estimation régularisée de la phase (solution de type MMSE, notamment le POLC voir paragraphe 7.2) conduirait à un coût calculatoire similaire à celui de la commande LQG proposée ici.

Enfin, nous n'avons raisonné ici que sur l'évaluation directe des divers produits matriciels. Il est possible d'améliorer encore la charge calculatoire d'un calculateur temps réel en répartissant astucieusement les calculs dans le temps (calculs séquentiels, pré-calcul de certaines quantités...).

grandeur cas	OA	OAMC
$\mathbf{y}_n : p =$	$2 \times 52 = 104$	$2 \times 52 \times 3 = 312$
$\mathbf{u}_n : m =$	$60 + 2 = 62$	$60 + 60 + 2 = 122$
nombre modes estimés : $t =$	100	$70 + 145 + 265 = 480$
$\mathbf{X}_n : n =$	$2 \times 100 = 200$	$2 \times 480 = 960$
complexité intégrateur		
nombre de produits	6448	38064
nombre d'additions	6448	38064
commande optimale simplifiée		
nombre de produits	43948	546384
nombre d'additions	43786	545782

TAB. 7.2 – Exemple de coût calculatoire dans une configuration MAD, en OA et OAMC. On précise la dimensions des divers vecteurs pour les deux cas de figure puis le coût calculatoire d'une commande intégrateur ou d'une commande optimale après optimisation des calculs.

Cette dernière optimisation des calculs n'a pas été mise en œuvre pour l'heure sur le RTC du banc BOA ou dans les simulations numériques. La solution présentée au paragraphe 7.2.1 a été privilégiée pour sa souplesse d'utilisation : elle reste adaptée à tout cas de figure (éventuellement commande optimale avec extensions à divers filtrages de composantes parasites, utilisation d'AR3).

Ajoutons enfin que les méthodes précédentes se sont concentrées sur la réduction de la charge calculatoire *via* une réduction de la taille du vecteur d'état et l'exploitation de la nature des matrices. Les calculs proposés sont des calculs matriciels. Or, il est aussi possible d'envisager une gestion séquentielle des calculs, c'est-à-dire qu'il s'agit de traiter le vecteur de mesure composante par composante dans l'actualisation du vecteur d'état [Anderson & Moore(1990)]. Ceci est possible lorsque la matrice  $\Sigma_w$  est bloc diagonale. On a déjà souligné que cette matrice pouvait être considérée comme diagonale,

en supposant le bruit de mesure décorrélé de sous-pupille à sous-pupille et selon les deux axes ( $x$  et  $y$ ) de mesure. Cette méthode peut permettre un gain substantiel en terme de coût calculatoire selon les conditions d'utilisation.

### 7.3 Résolution de l'équation de Riccati

L'estimation optimale réalisée par le filtre de Kalman repose sur le calcul du gain d'observateur donné par :

$$\mathbf{L}_n = \mathbf{A}\mathbf{H}_n = \mathbf{A}\Sigma_{n/n-1}\mathbf{C}^T (\mathbf{C}\Sigma_{n/n-1}\mathbf{C}^T + \Sigma_w)^{-1}. \quad (7.20)$$

On a souligné au paragraphe 5.3.4.2 que ce gain d'observateur pouvait être pré-calculé, ou qu'il pouvait être approximé par sa valeur asymptotique,  $\mathbf{L}_\infty$ , moyennant une perte d'optimalité limitée à une partie transitoire, l'optimalité étant conservée asymptotiquement. Ceci permet de pré-calculer une unique matrice  $\Sigma_\infty$ , donnée par le point fixe d'une équation de Riccati :

$$\Sigma_\infty = \mathbf{A}\Sigma_\infty\mathbf{A}^T + \Sigma_v - \mathbf{A}\Sigma_\infty^T\mathbf{C}^T (\mathbf{C}\Sigma_\infty\mathbf{C}^T + \Sigma_w)^{-1}\mathbf{C}\Sigma_\infty\mathbf{A}^T. \quad (7.21)$$

Ce paragraphe présente d'abord la méthode retenue pour le calcul de la solution de cette équation. Il s'agit d'une méthode récursive simple et efficace. Les simplifications apportées précédemment au modèle d'état permettent de réduire la dimension des matrices et donc les coûts calculatoires. Ce paragraphe vise ensuite à démontrer que ce coût peut être encore diminué, par la réduction du calcul de point fixe sur une sous-matrice de  $\Sigma_\infty$ . Cela se traduit évidemment par un temps de calcul réduit mais aussi par une réduction des erreurs de calcul liées à la grande dimension des matrices. Par la suite, on propose quelques méthodes plus sophistiquées disponibles dans la littérature de résolution rapide de l'équation de Riccati, tout en garantissant une meilleure précision des calculs.

#### 7.3.1 Calcul de la matrice de gain asymptotique

On a justifié au paragraphe 5.3.4.2 de l'existence et de l'unicité de la matrice de gain asymptotique d'observateur, indépendamment de son initialisation. Il se pose néanmoins la question du calcul proprement dit de cette matrice.

La méthode retenue jusqu'à présent est une méthode récursive. Il s'agit tout simplement d'itérer le calcul (5.25) de la matrice  $\Sigma_{n+1/n}$  jusqu'à convergence. Il faut pour cela se donner un critère de convergence et ensuite faire confiance aux calculs numériques.

Rappelons que la matrice  $\Sigma_{n+1/n}$  est par définition symétrique définie positive. Un critère de convergence peut donc être donné par l'évolution de la trace (somme des valeurs propres, ici toutes strictement positives) de  $\Sigma_{n+1/n}$  avec  $n$ . On définit le paramètre  $\epsilon(n)$  par :

$$\epsilon(n) = \text{tr} \{ \Sigma_{n+1/n} - \Sigma_{n/n-1} \}. \quad (7.22)$$

On considère que la valeur asymptotique de  $\Sigma_{n+1/n}$  est atteinte lorsque  $\epsilon(n)$  est inférieur à un seuil  $s$  donné. C'est ce critère de convergence que l'on considère par la suite.

Du point de vue du calcul numérique, il est clair qu'itérer un calcul semblable à (5.25) sur des matrices de grandes dimensions peut laisser dubitatif. On verra au chapitre 14 que le comportement numérique est cependant plutôt sain et la convergence rapide, même en condition expérimentale. Enfin, il est possible de contrôler au fur et à mesure de la convergence la qualité de  $\Sigma_{n+1/n}$ , en vérifiant sa symétrie et sa définie positivité. Cette méthode, bien que rustique, a été utilisée par Le Roux précédemment [Le Roux(2003)] et a été appliquée tout au long des tests menés durant cette



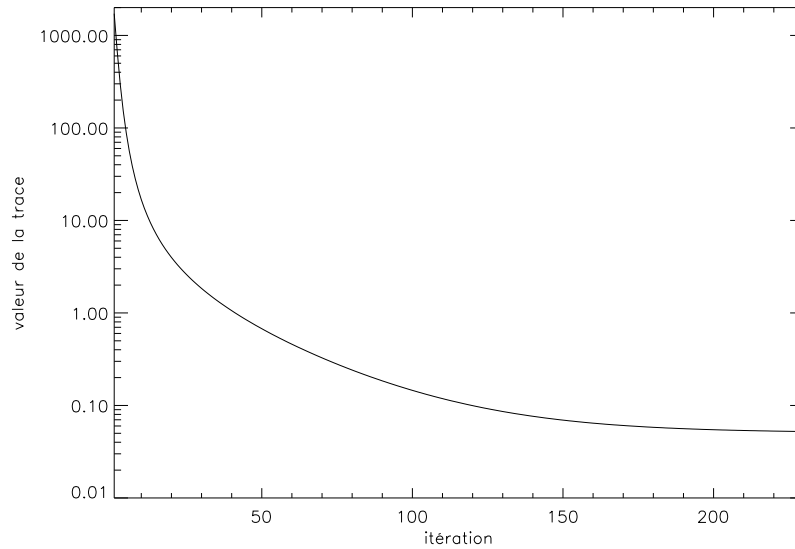


FIG. 7.1 – Exemple de convergence du calcul de la solution asymptotique de l'équation de Riccati. On trace ici l'évolution de la trace de  $\Sigma_{n+1/n}$  sur les 250 itérations nécessaires pour atteindre le seuil de convergence choisi, à savoir  $\epsilon(n) \leq s = 5 \cdot 10^{-5}$ .

thèse, sans difficulté notable. La figure 7.1 illustre ainsi l'évolution de la trace de  $\Sigma_{n+1/n}$  au cours d'un calcul de la solution asymptotique. Il s'agit d'un cas issu d'une simulation du banc BOA dans son utilisation nominale en OA. Ce cas sera décrit en détail aux chapitres 8 et 14. En se donnant un seuil  $s = 5 \cdot 10^{-5}$ , la convergence est obtenue en 250 itérations.

Néanmoins, les dimensions des matrices mises en jeu peuvent rendre ce calcul itératif long et sujet aux erreurs numériques. On propose donc une méthode de simplification de ce calcul, basée sur un découpage par bloc de la matrice  $\Sigma_{n+1/n}$ .

### 7.3.2 Simplification de la résolution

Ce paragraphe présente une méthode de simplification exploitant la forme des vecteurs et des matrices mis en présence. On va considérer une implantation de la commande dans sa forme générique, c'est-à-dire comme présentée au paragraphe 7.2.1. Le vecteur d'état est donc séparé en deux sous-vecteurs, le premier incluant trois états de phase sur lequel porte l'estimation par filtre de Kalman, le second contenant les vecteurs de tension à deux instants.

Cette simplification du calcul de l'équation de Riccati se base sur les remarques suivantes : la matrice  $\Sigma_\infty$ , solution asymptotique de l'équation de Riccati est nécessairement symétrique et, comme pour la simplification de l'équation réursive du filtre de Kalman, les matrices  $\mathcal{A}^1$  et  $\mathcal{C}^1$  sont très creuses et de structure particulière.

Aussi, en notant :

$$\Sigma_\infty = \begin{pmatrix} J & K & L \\ M & N & O \\ P & Q & R. \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

On peut montrer que  $\Sigma_\infty$  est solution de (7.21) si et seulement si les relations suivantes sont

vérifiées :

$$\begin{aligned}
R &= \mathbf{A}^{tur} R \mathbf{A}^{turT} + \Sigma_\nu - \mathbf{A}^{tur} R^T \mathbf{D}^T (\mathbf{D} R \mathbf{D}^T + \Sigma_w)^{-1} \mathbf{D} R \mathbf{A}^{turT} \\
N &= \mathbf{A}^{tur} R \mathbf{A}^{turT} + \Sigma_\nu \\
J &= \mathbf{A}^{tur} N \mathbf{A}^{turT} + \Sigma_\nu \\
Q &= R \mathbf{A}^{turT} \\
O &= Q^T \\
P &= Q \mathbf{A}^{turT} \\
L &= P^T \\
M &= N \mathbf{A}^{turT} \\
K &= M^T.
\end{aligned} \tag{7.24}$$

La démonstration est fournie en annexe **D**. On notera qu'ici on fait intervenir  $\Sigma_\nu$  et non plus  $\Sigma_v$ . En effet, avec la forme générique on a la relation :

$$\Sigma_v = \begin{pmatrix} \Sigma_\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.25}$$

Ce résultat montre que résoudre (7.21) est donc équivalent à résoudre l'équation (7.24) portant sur la sous-matrice  $R$ . Les matrices ainsi mises en jeu sont de taille 3 fois plus faible, soit un gain d'un facteur 9 en terme de coût calcul. La réduction des dimensions joue aussi en faveur d'une meilleure précision numérique, notamment lors des inversions matricielles. On ne change pas néanmoins la méthode de recherche de point fixe. Le principe reste basé sur la méthode consistant à itérer le calcul de l'équation (5.25) jusqu'à convergence comme décrit au paragraphe 7.3.1.

Néanmoins, on peut s'intéresser à des solutions plus sophistiquées ou plus robustes, applicables dans le cadre de modèles invariants dans le temps, avec bruits stationnaires.

### 7.3.3 Vers des méthodes plus sophistiquées

La méthode proposée précédemment s'appuie sur la structure du vecteur d'état et la nature des matrices impliquées dans la loi de commande. Elle permet un gain significatif en terme de coût calculatoire. Elle peut se coupler avec les tests proposés au paragraphe 7.3.1 permettant de valider que la matrice calculée à chaque itération est bien symétrique définie positive. Néanmoins, il existe diverses méthodes plus sophistiquées permettant de résoudre l'équation de Riccati, se divisant en deux classes principales : les méthodes récursives, où l'on cherche à faire converger l'équation de Riccati (5.25) vers son point fixe, et les méthodes de résolution directe de l'équation algébrique (7.21). Pour exemple, on peut trouver dans [Anderson & Moore(1990)] trois principales techniques pouvant être mises en œuvre :

- Les algorithmes de type Chandrasekhar utilisent des expressions différentes mais équivalentes des équations du filtre de Kalman. Le gain d'observateur asymptotique peut alors être directement recherché au travers d'algorithmes récursifs dont le coût calculatoire est inférieur à celui engendré par la résolution de l'équation de Riccati standard. En outre une programmation réfléchie permet aisément d'assurer la définie positivité ;

- L'algorithme de doublage permet de résoudre récursivement l'équation de Riccati en passant non pas de  $\Sigma_{n/n-1}$  à  $\Sigma_{n+1/n}$  à chaque itération mais de  $\Sigma_{n/n-1}$  à  $\Sigma_{2n/2n-1}$ , dès lors que trois autres matrices sont aussi mises à jour en même temps. On accélère ainsi la vitesse du processus de convergence.
- Il est enfin possible de mettre en œuvre une méthode de résolution algébrique et non récursive de l'équation (7.21). La solution est alors donnée par une relation matricielle.

Il s'agit là de méthodes permettant d'accélérer la résolution de l'équation de Riccati. On peut aussi se préoccuper de la qualité des calculs numériques réalisés. Diverses techniques sont disponibles pour améliorer la précision numérique des inversions matricielles, ou pour assurer par exemple que la matrice de covariance  $\Sigma_{n/n-1}$  reste symétrique définie positive (méthode de la racine carrée). Pour l'heure, ces méthodes n'ont pas été exploitées mais ouvrent de nombreuses perspectives quant à la simplification des algorithmes pour des systèmes complexes.

# Chapitre 8

## Modèles et simulations numériques

### 8.1 Introduction

Le chapitre précédent s'est consacré à la réduction des coûts calculatoires en vue d'une implantation de la commande. Ce chapitre aborde l'implantation effective de la commande. Il présente l'outil de simulation numérique développé durant la thèse et son utilisation dans le cadre de premières validations numériques de la commande. Il donne notamment un regard plus approfondi sur la mise en œuvre concrète de la commande.

Le développement de ce simulateur répond à divers besoins. Le premier est de disposer d'un outil permettant de simuler diverses configurations (OA, OAMC) ou systèmes, et de tester diverses lois de commande sur ces systèmes. En particulier, il doit servir à étudier la loi de commande LQG proposée. Afin de pouvoir progressivement complexifier le système et le rendre plus réaliste, la simulation des divers composants doit présenter divers degrés de modélisation.

Il faut alors distinguer les modèles servant à simuler le système d'OA de ceux sur lesquels s'appuie la loi de commande. Celle-ci peut en effet être fondée sur une modélisation simplifiée ou différente du système pour introduire des erreurs de modèle. L'outil de simulation va donc aussi servir à construire numériquement ces modèles, pour leurs divers usages.

Le dernier objectif de ce simulateur est de pouvoir plus particulièrement simuler le banc d'OA de l'ONERA, BOA. Dans la perspective des validations expérimentales présentées en partie III, on souhaite en effet pouvoir prévoir les performances de la commande ou valider les résultats expérimentaux observés. Le simulateur est donc un outil de diagnostic.

Ce chapitre propose aussi une première mise en œuvre de la commande optimale. Ces validations offrent un premier aperçu du fonctionnement de la commande. L'étude de certaines propriétés de la commande est abordée dans ce cadre numérique, et en particulier, le comportement fréquentiel de la loi de commande LQG. Nous montrons en particulier que la caractérisation classique par fonctions de transfert est inadaptée dans le cadre de la commande optimale.

Le paragraphe 8.2 présente donc la structure modulaire du simulateur, puis chaque module est plus spécifiquement détaillé au paragraphe 8.3 afin d'analyser les modèles de composants introduits. Le paragraphe 8.4 détaille le calcul des matrices intervenant dans la loi de commande. Le paragraphe 8.5 décrit ensuite les simulations d'OA envisagées avec un réalisme croissant. Enfin, le paragraphe 8.6 aborde la question de la caractérisation fréquentielle de la commande.

La confrontation des validations expérimentales et des simulations sera présentée en partie III.

## 8.2 Structure globale

L'outil de simulation qui a été développé se distingue par la volonté de représenter chaque élément constitutif d'un système d'OA ou d'OAMC, afin d'obtenir un simulateur complet et représentatif, à divers degrés de précision, du comportement d'un système réel. Ce simulateur permet de quantifier les performances du système, les tolérances admissibles sur certains paramètres précis, et les conditions d'implantation de lois de commande sur un vrai système.

Le code de simulation a été développé en IDL sur la base de codes pré-existants. Sa structure est modulaire et s'appuie sur une librairie étendue de fonctions de base permettant de simuler chaque constituant d'un système d'OA. Ces fonctions ou briques de base peuvent ensuite être assemblées librement pour simuler des systèmes divers (OA, OAMC...) avec des constituants variés, par leur nature ou leur niveau de complexité. Elles peuvent aussi être directement utilisées pour modéliser les composants d'un système et alimenter ainsi le calcul des matrices de la commande optimale pour une application expérimentale.

Certaines hypothèses sont faites dans ce simulateur. Ainsi, la simulation est menée en temps discret, sur des occurrences discrètes de la phase. On néglige donc les phénomènes d'intégration de signal. En outre, toutes les sources considérées sont des objets non résolus.

Notons que ce code repose sur un certain nombre de briques pré-existantes. Le travail réalisé n'est donc pas l'écriture de l'intégralité du code. Par contre, un certain nombre de fonctions ont été développées durant cette thèse, d'autres réadaptées et généralisées pour ce code de simulation. Les principaux apports concernent la modélisation dite géométrique de l'ASO, la modélisation miroir, l'implantation des lois de commandes. Enfin, l'effort a été porté sur la construction modulaire du code. Les fonctions de base peuvent être regroupées en cinq groupes :

- **configuration système** : regroupe les fonctions et fichiers permettant de définir le système et ses constituants, ainsi que le déroulement de la simulation
- **simulateur de turbulence** : permet de générer et gérer la turbulence atmosphérique
- **simulateur d'analyseur de front d'onde** : permet de simuler le ou les analyseurs de front d'onde
- **simulateur de miroir déformable** : simule le ou les miroirs déformables et miroir de basculement
- **lois de commande** : permet de simuler diverses lois de commandes

A cela s'ajoutent toutes les fonctions de traitement des données et calculs de performances ainsi que les outils de gestion du code de simulation lui-même.

## 8.3 Description des divers modules

Ce paragraphe décrit plus précisément le contenu de chacun de ces cinq groupes fonctionnels en tentant de faire ressortir les modèles ou hypothèses sous-jacents. Il est important de bien distinguer dès maintenant les modèles de composants utilisés pour la simulation du système, et les modèles de composants utilisés pour définir l'observateur et la loi de commande. En simulation numérique, ces modèles peuvent être identiques, on est alors exempt d'erreurs de modèle, mais on peut aussi les choisir distincts pour introduire des erreurs de modèle, par exemple pour une étude de robustesse de la commande. D'un point de vue expérimental, on exploitera les modèles de composants numériques pour définir la loi de commande implantée sur le système expérimental.

### 8.3.1 Configuration système

Etant donné le nombre de paramètres pouvant intervenir dans la simulation d'un système d'OA complet, il a été choisi de regrouper tous ces éléments au sein d'un seul fichier de configuration. Les paramètres sont alors relus et regroupés au sein d'une structure pour être aisément manipulés au sein de l'ensemble du code principal. Cette forme permet aussi une bonne traçabilité des paramètres de simulation. Cette structure comprend les paramètres d'observation (caractéristiques du télescope, conditions atmosphériques, paramètres des étoiles guides ou des objets visés, champ de vue...), les paramètres de l'OA (caractéristiques du ou des miroirs déformables, des analyseurs de surface d'onde, de la loi de commande...) et les conditions de la simulation (paramètres visuels, nombre d'itérations, données à calculer et sauvegarder...). La calibration du système d'OA est aussi simulée, permettant d'introduire des conditions et des paramètres de calibration différents de ceux utilisés pour le fonctionnement de l'OA.

### 8.3.2 Simulateur de turbulence

Ce simulateur de turbulence permet de générer une turbulence atmosphérique multi-couches dynamique sous la forme d'écrans de phase point à point, c'est une approche dite zonale, contrairement au simulateur de Le Roux [Le Roux(2003)] qui utilisait une approche modale sur une base de polynômes de Zernike. Le phénomène de propagation à travers la turbulence est ensuite simulé par simple découpe de la turbulence dans les directions d'intérêt (on néglige la propagation de Fresnel, on se place en régime de faibles perturbations, les variations d'amplitudes sont négligées, voir le paragraphe 1.3). Deux types de turbulence atmosphérique peuvent être produits.

#### Générateur de turbulence

La turbulence multi-couches est générée sous forme d'écrans de phase pixellisés ; elle peut être de type Kolmogorov (ou Von-Karman) ou de type auto-régressive d'ordre  $n$ . Dans le premier cas, on utilise la Densité Spectrale de Puissance de la turbulence (voir équation (1.11)) pour colorer un bruit blanc dans le domaine de Fourier. On repasse ensuite dans l'espace direct pour obtenir une turbulence aux propriétés adéquates. On obtient ainsi des écrans de grande dimension dans lesquels seront découpées les phases turbulentes d'intérêt. La dimension de ces écrans est déterminée par les conditions de simulation (nombre d'itérations, vitesse de vent, fréquence d'échantillonnage et champ de vue ...). Aucune grande échelle n'est introduite dans ces écrans, mais une grande échelle apparaît naturellement de par leur taille finie. Les écrans sont donc choisis relativement grands afin de réduire cet effet. Ces écrans sont générés et mis à l'échelle selon les caractéristiques de la turbulence (paramètre  $r_0$ ) et pondérés dans le cas multi-couches par un profil de  $C_n^2$ .

La turbulence générée peut aussi être de type AR $n$  (en particulier AR1), c'est-à-dire correspondre au modèle de turbulence utilisé dans le cadre de la loi de commande LQG. Cette option permet d'étudier les performances de la commande en l'absence d'erreur de modèle de turbulence ou dans le cas d'une erreur de modèle faible. Par exemple, on pourra considérer un simple écart entre les paramètres du modèle AR $n$  de la turbulence et du modèle de turbulence de la loi de commande, mais les modèles d'évolution seront très proches. La génération des écrans de phase suit alors directement la formule de récurrence proposée au paragraphe 4.4.3 dans le cas d'un modèle AR1. La phase turbulente exprimée sur la base des modes de Zernike évolue selon la relation :

$$\phi_{n+1}^{tur} = \mathbf{A}^{tur} \phi_n^{tur} + \nu_n. \quad (8.1)$$

L'idée est donc de générer un bruit coloré connaissant les caractéristiques de  $\nu$  et d'appliquer la formule de récurrence, ayant défini  $\mathbf{A}^{tur}$  (voir équation (4.33)). La phase est ensuite exprimée sous forme de carte pixellisée. Dans ce cas, la turbulence est générée pas après pas, pour chaque cas de simulation. Il n'y a pas de problème de grande échelle dans ce type d'écrans qui présentent la statistique imposée c'est-à-dire Kolmogorov. Le choix d'une statistique de type Von Karman permettrait d'introduire une grande échelle.

### Dynamique temporelle de la turbulence

Dans le cas d'une turbulence Kolmogorov ou Von-Karman, l'évolution dynamique temporelle de la turbulence est obtenue par translation uniforme de chaque couche turbulente selon des directions et des vitesses propres à chaque couche. Cette évolution est donc basée sur une hypothèse de type Taylor.

Dans le cas d'une turbulence ARn, les écrans sont générés les uns après les autres en respectant le modèle récursif de turbulence. Par conséquent, la dynamique ne respecte pas l'hypothèse de Taylor.

### Propagation

Ce module réalise l'extraction et la sommation de la phase issue de chaque couche dans les directions d'intérêt afin d'obtenir la phase cumulée dans la pupille. Il s'agit d'un découpage direct de la phase pixellisée dans les sous-zones d'intérêt. Ce module est utilisé de la même manière en OAMC pour extraire les phases de correction générées par chaque miroir conjugué à une altitude donnée. On obtient ainsi un équivalent de la propagation d'un front d'onde à travers l'atmosphère dans l'hypothèse de faibles perturbations et d'absence d'effets de diffraction.

### 8.3.3 Simulateur d'analyseur de front d'onde

L'analyseur de front d'onde est modélisé sous la forme d'un composant dont la réponse est linéaire sans dynamique temporelle. Il fournit une mesure immédiate du front d'onde incident. La mesure est soit modale soit zonale, c'est-à-dire que l'on mesure une phase pixellisée, et non déjà projetée dans une base modale. Ce point marque une différence avec l'approche modale de Le Roux [Le Roux(2003)]. L'analyseur de type Shack-Hartmann a été pris comme composant de base pour la modélisation. Trois modèles d'analyseur de complexité croissante sont disponibles. Cette gradation permet de simplifier l'analyse à une mesure parfaite pour s'affranchir des défauts du composant ou au contraire proposer un modèle de plus en plus représentatif du composant réel.

#### 8.3.3.1 L'analyseur dit parfait

Il s'agit du modèle d'analyseur le plus simple. Il suppose que l'analyseur réalise directement la mesure du front d'onde décomposé sur une base de mode finie déterminée, telle que la base des polynômes de Zernike. Il fournit ainsi directement les coefficients de la phase incidente décomposée sur la base donnée.

Il est possible d'introduire dans ce modèle un bruit de mesure sur les coefficients de la décomposition. La variance de ce bruit de mesure peut être soit supposée connue et ajoutée directement au résultat de la mesure c'est-à-dire sur les coefficients ; soit elle est évaluée par le calcul des bruits de photon et/ou de détecteur sur la mesure de pente d'un analyseur de Shack-Hartmann grâce aux équations (2.3) et (2.4), puis propagé sur la mesure des coefficients de la décomposition. On sait en effet que lors de la reconstruction d'une phase sur une base de modes de Zernike à partir de mesures de

pentés bruitées, le bruit se propage sur chaque mode d'ordre radial  $n$  et de fréquence azimuthale  $m$ , selon un coefficient de propagation  $p_{m,n}$  défini par Rigaut et Gendron [Rigaut *et al.*(1992)] :

$$\begin{aligned} p_{m,n} &= 0.295(n+1)^{2.05} & \text{si } n = m \\ p_{m,n} &= 0.174(n+1)^2 & \text{si } n \neq m. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Le calcul consiste donc à réaliser la décomposition, déterminer les paramètres  $n, m$ , évaluer la variance de bruit et les coefficients de propagation. Ce procédé peut être étendu à d'autres bases.

### 8.3.3.2 Le modèle d'analyseur de Shack-Hartmann géométrique

Ce modèle simule de manière simplifiée un analyseur de type Shack-Hartmann. Il se base sur une analyse de l'effet de la matrice de micro-lentilles de l'analyseur sur un front d'onde incident en approximation géométrique. Il s'agit en fait d'une approximation discrète des équations (2.1), reliant dérivée de la phase dans chaque sous-pupille et pente locale mesurée. En considérant la mesure de pente  $\alpha_x$  en  $x$  on peut en effet écrire :

$$\alpha_x = \frac{x_c}{f_{ml}} = \frac{\lambda}{2\pi S} \int \int_{sspup} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy \simeq \frac{\lambda}{2\pi S} \sum_{\Delta x, \Delta y, sspup} \frac{\Delta \phi}{\Delta x} \Delta x \Delta y, \quad (8.3)$$

où  $S$  désigne la surface de la sous-pupille :  $S = N^2 \Delta x \Delta y$ , si  $N$  représente le nombre de points de calcul (pixels) de dimensions  $\Delta x, \Delta y$  dans la sous-pupille. Soit encore :

$$\alpha_x = \frac{\lambda}{2\pi N \Delta x} \frac{\sum_{sspup} (\phi(x + \Delta x) - \phi(x))}{N}. \quad (8.4)$$

On voit alors que la sommation se limite à :

$$\alpha_x = \frac{\lambda}{2\pi L_x} \langle \phi_{xmax} - \phi_{xmin} \rangle, \quad (8.5)$$

et en  $y$  :

$$\alpha_y = \frac{\lambda}{2\pi L_y} \langle \phi_{ymax} - \phi_{ymin} \rangle, \quad (8.6)$$

où  $L_x$  (resp.  $L_y$ ) désigne la taille d'une sous-pupille selon  $x$  (resp.  $y$ ),  $\phi_{xmax}$  et  $\phi_{xmin}$  (resp.  $\phi_{ymax}$  et  $\phi_{ymin}$ ) représentent les phases calculées sur les bords extrêmes en  $x$  (resp.  $y$ ) de la sous-pupille, et  $\langle \rangle$  désigne la moyenne.

Ainsi, le calcul se résume à moyenniser sur chaque sous-pupille les différences de phase d'un bord à l'autre de la sous-pupille. Les sous-pupilles partiellement éclairées sont gérées similairement en prenant en compte la portion éclairée de la sous-pupille. Ce modèle nécessite de connaître la structure de l'ASO (nombre de sous-pupilles), le choix des sous-pupilles valides.

Cette approche discrète permet de fournir un modèle simple mais réaliste de la mesure d'un Shack-Hartmann, prenant en entrée un front d'onde discrétisé spatialement sur une carte de points (approche zonale) et donnant en sortie une mesure de pentes en  $x$  et  $y$ .

On peut ajouter un bruit sur les pentes ainsi mesurées, qui peut lui aussi être dérivé des équations (2.3,2.4) ou être une donnée globale de la simulation (issue de calibrations expérimentales par exemple).



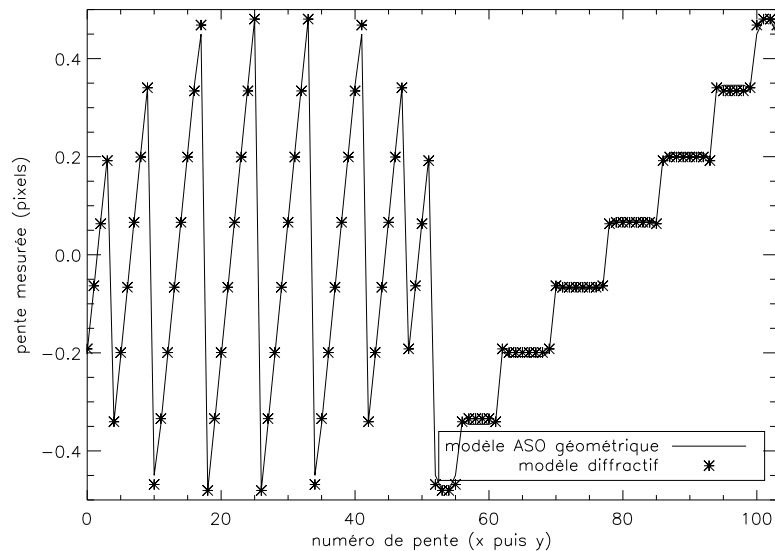


FIG. 8.1 – Comparaison d’une mesure de pente, exprimée en pixels et obtenue grâce à un modèle d’ASO géométrique ou diffractif, d’une défocalisation.

### 8.3.3.3 Le modèle diffractif d’analyseur de Shack-Hartmann

Ce modèle est le plus représentatif du comportement d’un analyseur de type Shack-Hartmann. Il simule la formation d’images sur le capteur CCD après traversée de la matrice de micro-lentilles et propagation, dans l’approximation de Fresnel. L’effet d’échantillonnage du capteur est simulé. La lecture par le capteur est bruitée (bruit de photon et électronique) avant détermination de la pente. Le calcul de la pente peut être réalisé par un calcul de centre de gravité à loisir seuillé, fenêtré, pondéré (voir paragraphe 2.3.1). Ce modèle ne prend pas en compte le débordement des FEP d’une sous-pupille à l’autre.

La figure 8.1 compare les mesures simulées, avec un analyseur de type diffractif ou géométrique, à l’arrivée d’un front d’onde correspondant à une défocalisation. Un analyseur de type  $8 \times 8$  sous-pupilles a été modélisé. Il possède 52 sous-pupilles valides. On trace les mesures de pentes obtenues en  $x$  et  $y$  (sous une forme concaténée de vecteur de taille 104). Le modèle géométrique se révèle très réaliste pour les faibles perturbations. Il est cependant parfaitement linéaire en tout contexte et donc peu représentatif des effets de non-linéarités observés sur un vrai ASO en présence de turbulence forte, et des effets liés à l’estimation de la pente (mesure de CDG, effets de seuillage ou de fenêtrage...).

### 8.3.4 Simulateur de miroir déformable

Les miroirs sont modélisés sous forme de composants linéaires dont la réponse est instantanée et linéaire. Ils sont alors entièrement caractérisés par leurs fonctions d’influence (voir paragraphe 2.3.2), c’est-à-dire la déformée générée à l’activation de chaque actionneur. Ces fonctions d’influence sont présentées sous la forme d’écrans de phase de  $n \times n$  pixels. Trois niveaux de modélisation ont été développés. L’idée est de proposer une modélisation pouvant aller d’un modèle de miroir à correction parfaite, permettant de s’affranchir de tous ses défauts, jusqu’à une représentation fidèle du comportement d’un miroir déformable réel (modèle expérimental sans dynamique). Entre les deux,

un modèle analytique approché de la réponse en terme de déformée du miroir est proposée.

Le miroir dit parfait correspond simplement à faire l'hypothèse qu'il est capable de reproduire parfaitement une base donnée et finie de modes tels que les polynômes de Zernike.

Les modèles analytique et expérimental sont décrits ci-après.

### Le modèle analytique

Ce modèle de miroir se base sur une approximation analytique de la réponse en terme de phase d'un miroir de nature donnée. Le principal type de miroir ainsi modélisé est le miroir à empilement de piézo-électriques ou Stacked Array Mirror (SAM) utilisé à l'ONERA sur le banc BOA. On utilise alors une approximation par une fonction gaussienne de la déformée générée par un actionneur. Cette fonction prend typiquement la forme d'une fonction  $f_i$  des variables  $x$  et  $y$  en repère cartésien, dépendant de l'actionneur  $i$  donnée par :

$$f_i(x, y) = A(i) \exp \left( - \left( \frac{\sqrt{(x - x_i^c)^2 + (y - y_i^c)^2}}{\delta} \right)^2 \right), \quad (8.7)$$

où  $A(i)$  désigne le gain en amplitude de l'actionneur  $i$  considéré,  $x_i^c$  et  $y_i^c$  désignent les coordonnées de l'actionneur  $i$ , et  $\delta$  représente le coefficient de couplage des actionneurs. Ce coefficient de couplage se définit comme l'amplitude de déformation mesurée sur les plus proches voisins d'un actionneur excité, relativement à l'amplitude de déformation de cet actionneur.

La figure 8.2 compare une coupe d'une fonction d'influence d'un actionneur mesurée expérimentalement (miroir SAM du banc BOA, voir paragraphe 12.2.3 de calibration du miroir) et la fonction d'influence approchée par le modèle gaussien. Le principal paramètre de réglage du modèle de déformée gaussienne est le couplage. Il permet d'assurer la bonne représentativité du modèle par rapport à un miroir réel. L'utilisation d'une valeur moyenne de l'amplitude et du couplage pour l'ensemble des actionneurs explique que la déformée réelle, prise sur un actionneur au hasard, et la déformée gaussienne ne se superposent pas exactement.

Ce modèle offre une bonne représentation d'un miroir SAM réel. Des comparaisons plus détaillées seront proposées au chapitre 12. Il permet surtout d'être représentatif du mode de correction de ces miroirs et de simuler n'importe quel système (selon le nombre d'actionneurs, le pas interactionneur, le couplage, les gains différentiels entre actionneurs...). Le miroir de bascule (ou de tilt) généralement associé au miroir SAM est directement modélisé comme un composant à deux actionneurs générant une bascule de faisceau.

#### 8.3.4.1 Le modèle expérimental

Cette modélisation repose sur la donnée directe d'une matrice d'influence expérimentale du ou des miroirs. Cette matrice est établie par des mesures expérimentales annexes des fonctions d'influence du miroir. Tout type de miroir peut alors être simulé. Dans notre cas, c'est essentiellement le miroir déformable SAM du banc BOA qui a été modélisé à partir de mesures interférométriques (mesures Zygo) de la réponse de chaque actionneur du miroir à une tension connue. Ces mesures font partie d'une campagne de calibration du miroir qui fait l'objet du paragraphe 12.2.3.1. Cette partie décrit notamment la procédure d'obtention de la matrice d'influence et discute de la validité de ce modèle expérimental linéaire à dynamique parfaite.

On ne dispose pas de mesure directe des fonctions d'influence du miroir de bascule, cela n'aurait guère d'intérêt. Sa modélisation reste donc entièrement analytique selon la méthode décrite au paragraphe précédent.

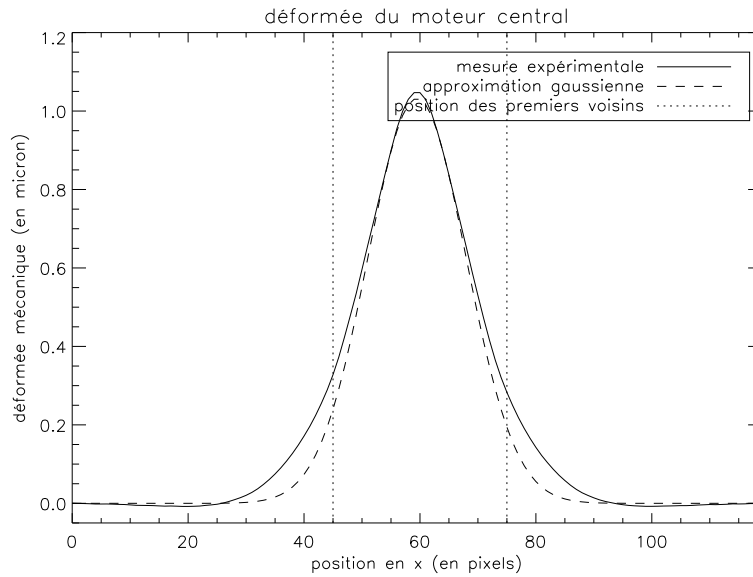


FIG. 8.2 – Comparaison d’une mesure de fonction d’influence d’un miroir SAM et du modèle gaussien associé.

### 8.3.5 Lois de commande

Différentes lois de commande peuvent être implantées dans le code de simulation pour en comparer les performances. On peut distinguer un fonctionnement en boucle ouverte ou fermée et pour chaque mode de correction une loi de commande spécifique. Ainsi, on peut citer notamment :

- en boucle ouverte : moindres carrés, commande LQG, et MMSE pour le cas statique.
- en boucle fermée : intégrateur, intégrateur à gain modal optimisé, commande LQG, POLC.

Ce module regroupe les fonctions de calcul des diverses matrices ou paramètres nécessaires à ces lois de commande (matrices d’interaction, de commande, loi de commande optimale, gains modaux optimaux...), et les fonctions de calcul de ces lois de commandes dans la boucle simulée. Ces diverses lois de commandes sont aussi adaptées pour fonctionner en OA ou en OAMC. Quiros a notablement contribué à la mise en œuvre de la commande intégrateur à gain modal optimisé en OAMC [Quiros-Pacheco(2006)].

#### 8.3.5.1 Intégrateur (à gain modal optimisé)

La commande de type intégrateur est implantée dans sa forme la plus standard :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n - g \mathbf{M}_{com} \mathbf{y}_n, \quad (8.8)$$

où  $\mathbf{u}_n$  désigne le vecteur de commande à l’instant  $n$ , et  $\mathbf{y}_n$  la mesure de pente résiduelle. Le calcul de la matrice de commande se base sur l’inversion de la matrice d’interaction. Cette inversion fait appel à une décomposition en valeurs singulières et une troncature des valeurs propres faibles. L’optimisation modale du gain suit la procédure proposée par Dessenne [Dessenne(1998)]. Ces éléments sont détaillés en annexe B.

### 8.3.5.2 La commande optimale LQG

L'implantation de la commande optimale se base sur les remarques du chapitre 7. Il est indispensable de pouvoir envisager simplement l'application de la commande optimale aux divers cas d'intérêt (OA, OAMC, filtrage de vibrations...), tout en offrant une complexité calculatoire réduite. Aussi, la commande optimale est implantée selon le schéma suivant : pour les tests d'OA, d'OAAO ou d'OAMC, il s'agit de la forme générique proposée au paragraphe 7.2.1, incluant les simplifications algorithmiques proposées. La solution de l'équation de Riccati est calculée asymptotiquement en appliquant récursivement le calcul de l'équation (5.25) comme expliqué au paragraphe 7.3.1. Un seuil fixe le point d'arrêt du calcul. A chaque fois que cela est possible (OA ou OAMC sans filtrage de composantes additives), le calcul de la solution de cette équation est simplifié grâce au procédé décrit au paragraphe 7.3, permettant de diviser par trois la taille de la matrice calculée.

## 8.4 Modèles utilisés pour l'élaboration de la commande LQG

Nous avons jusque-là raisonné abstraitement sur les modèles de composants et les matrices intervenant dans la commande LQG. Il est nécessaire de comprendre maintenant comment ils sont définis dans la commande et d'aborder quelques problématiques liées à leur calcul. Les paragraphes suivants expliquent la construction pratique des diverses matrices. Dans le simulateur, les phases sont représentées sur des cartes de pixels. Dans la loi de commande, la phase est définie sur la base des polynômes de Zernike, il faut donc réexprimer les modèles précédents dans cette base.

### 8.4.1 Modèle de turbulence

Le modèle de turbulence est de type AR1, défini selon (4.32). Ses paramètres sont la covariance  $\Sigma_\nu$  du bruit blanc gaussien  $\nu$  et de la matrice  $\mathbf{A}^{tur}$ . Cette matrice est diagonale, de coefficients diagonaux définis selon (4.40). Le calcul de la matrice de covariance du bruit d'état  $\mathbf{v}$ ,  $\Sigma_v$ , se déduit de  $\Sigma_\nu$  et de la relation (4.47), éventuellement adaptée selon le choix de la structure du vecteur d'état.

### 8.4.2 Projecteurs de la phase dans les directions d'intérêt

Dès que l'on considère un système relevant de l'OA tomographique au sens large (OAMC, OAMO, OAAO), on distingue directions d'analyse et de correction (ou d'intérêt) qui font apparaître des projecteurs  $\mathbf{M}_\alpha^L, \mathbf{M}_\beta^L, \mathbf{M}_\alpha^M, \mathbf{M}_\beta^M$  (voir paragraphe 4.6.1). Considérons pour exemple le cas de la figure 8.3, gauche, où l'on s'intéresse à la projection dans la pupille, selon une direction  $\alpha$  de la turbulence située à l'altitude  $h$  dans une méta-pupille. Il s'agit donc d'extraire une sous-partie de la turbulence située en altitude. L'utilisation d'une base de Zernike pour exprimer la phase offre un certain avantage : on sait qu'un mode de numéro  $i$  présent dans la méta-pupille va se projeter dans la pupille sur des modes de numéros inférieurs ou égaux à  $i$  [Ragazzoni et al.(1999)]. Les projecteurs sont donc construits dans cette base, en calculant pour une configuration donnée, la décomposition de la projection dans la pupille de chaque mode  $i$  sur la base de Zernike (entre les modes 1 et  $i$ ). La figure 8.3 droite montre par exemple la matrice de projection calculée dans la configuration proposée pour un découvrement de  $n = 10\%$  (on rappelle que le découvrement est défini par  $n = \frac{\alpha h}{D}$ , c'est-à-dire la séparation des centres des pupilles projetées sur et hors axe dans la couche en pourcentage du diamètre voir paragraphe 1.3.3.1.4).

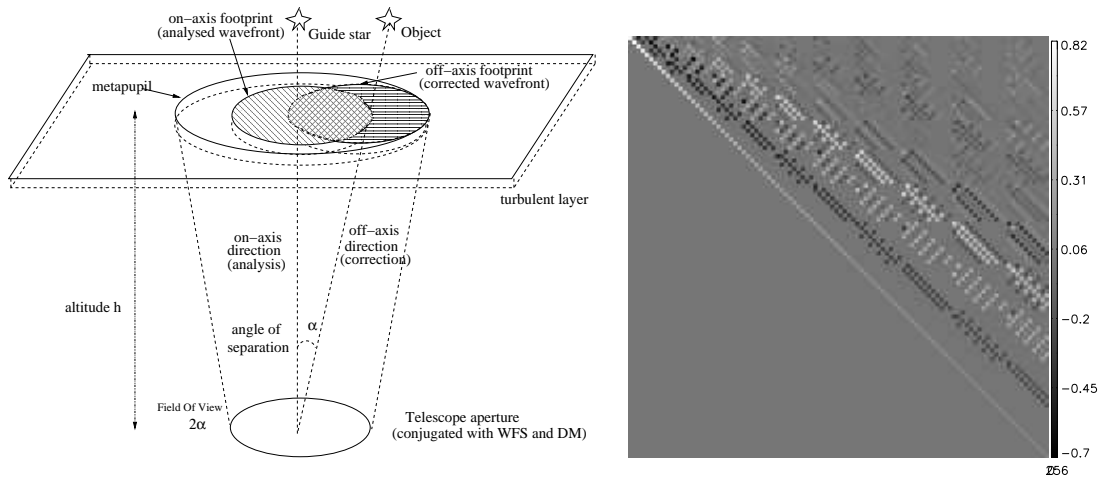


FIG. 8.3 – Exemple de matrice de projection de la phase dans la pupille selon une direction  $\alpha$  ( $n = 10\%$ ). La configuration d'analyse est présentée sur la figure de gauche : une seule couche en altitude est considérée, les hachures diagonales (resp. horizontales) définissent la projection dans la couche turbulente et dans la direction d'analyse (resp. dans la direction d'intérêt *ie.* de correction) de la pupille du système. A droite est présentée la matrice de projection de chaque mode de Zernike exprimé dans la méta-pupille et décomposé sur une base de Zernike exprimée dans la pupille hors-axe.

### 8.4.3 Modèle d'analyseur

Dans le cadre de la commande LQG, l'équation d'observation correspond à un analyseur linéaire. On souhaite modéliser son comportement sous la forme (voir paragraphes 2.3.1 et 4.4) :

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\phi + \mathbf{w}, \quad (8.9)$$

$\mathbf{y}$  désignant la mesure de pente,  $\phi$  la phase incidente dans la pupille (c'est la phase turbulente en OA, et la phase turbulente projetée dans les directions d'analyse en OAMC) et  $\mathbf{w}$  désignant un bruit de mesure. Le modèle d'analyseur est donc représenté par la matrice  $\mathbf{D}$ . Rappelons que dans le cadre de la commande LQG, la phase est estimée sur la base de Zernike. Ainsi, à partir des modèles numériques construits pour la simulation, on peut aussi construire la matrice  $\mathbf{D}$  afin de définir la loi de commande. Dans un cas idéal d'analyseur parfait cette matrice correspond à l'identité. Dans le cas de l'analyseur géométrique ou diffractif, cette matrice est construite grâce à la mesure de pente donnée pour chaque mode de Zernike, sur un nombre choisi de modes. Ces modèles sont construits de la même manière pour la modélisation du composant réel en validation expérimentale, à un dimensionnement près permettant de rendre compte de la mesure obtenue sur le vrai composant. La nature du bruit  $\mathbf{w}$  (variance, corrélation entre mesures de pente...) permet de définir la matrice de covariance du bruit de mesure  $\Sigma_w$ . Elle est considérée le plus souvent comme diagonale (bruit décorréolé entre sous-pupilles), de valeurs diagonales uniformes (bruit homogène). Sa nature dans le cas expérimental est discutée au chapitre 12.

### 8.4.4 Modèle de miroir et projecteur

Le modèle miroir intervient d'une part dans l'équation d'observation (4.42), associé au modèle d'ASO  $\mathbf{D}$  pour former la matrice d'interaction  $\mathbf{M}_{inter}$ . Il apparaît d'autre part dans la définition de la

commande (équation (5.66)), dans le calcul du projecteur de la phase estimée sur le (ou les) miroir de correction.

#### 8.4.4.1 Modèle miroir

On modélise le comportement du miroir sous la forme (paragraphe 2.3.2) :

$$\phi^{cor} = \mathbf{N}\mathbf{u}. \quad (8.10)$$

Le modèle de miroir est représenté par la matrice  $\mathbf{N}$ . Dans le cadre de la commande LQG cette matrice doit fournir une phase exprimée sur la base de Zernike. Dans le cas du miroir parfait la matrice  $\mathbf{N}$  correspond donc à l'identité. Ce cas reste restreint à certaines simulations simplifiées pour les besoins de l'étude. Dans le cas du modèle analytique ou du modèle expérimental, cette matrice contient les fonctions d'influence du miroir décomposées sur la base de Zernike. Ceci reste parfaitement en adéquation avec les modèles d'ASO décrits précédemment pour la commande LQG.

#### 8.4.4.2 Matrice de projection de la phase sur le miroir

Le projecteur  $\mathbf{P}$  doit permettre d'associer à une phase estimée, exprimée dans la base de Zernike, un vecteur de commande miroir. Jusqu'à présent le projecteur  $\mathbf{P}$  a été exprimé, par exemple en OA, simplement sous la forme :

$$\mathbf{P}^{oa} = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^\dagger \mathbf{N}^T. \quad (8.11)$$

Dans le cas où l'on considère un miroir parfait, le problème est trivial. Toutes les phases sont exprimées sur la base de Zernike et  $\mathbf{N}$  est l'identité. Le projecteur  $\mathbf{P}^{oa}$  est donc lui aussi égal à l'identité.

Dans le cas de miroirs plus réalistes la structure de  $\mathbf{P}^{oa}$  est plus complexe. La figure 8.4 montre ainsi la matrice  $(\mathbf{N}^T \mathbf{N})$  obtenue à partir des fonctions d'influence du banc BOA. Cette matrice correspond à la matrice de covariance géométrique des fonctions d'influence. Sa structure montre le couplage existant entre fonctions d'influence.  $\mathbf{P}^{oa}$  réalise alors la projection aux moindres carrés de la phase exprimée sur la base de Zernike sur les commandes du miroir (ou de manière équivalente les fonctions d'influence du miroir).

Traisons enfin le problème de la bascule. Le calcul précédent doit inclure aussi le miroir de basculement. Cependant, on souhaite que la bascule (modes tip et tilt) soit corrigée par le miroir de bascule seulement, et non par le MD pour en soulager la course (voir annexe B pour le cas intégrateur). Pour cela, on annule dans  $\mathbf{P}^{oa}$  les projections des modes de bascule sur la base des commandes du MD.

Enfin, pour compléter cette analyse sur le projecteur  $\mathbf{P}^{oa}$ , on peut s'interroger sur la capacité du miroir à corriger les divers modes de Zernike. Pour répondre, on calcule le résultat de la projection de chaque mode de Zernike sur les commandes miroir (par  $\mathbf{P}^{oa}$ ), puis on effectue la reconstruction du mode par le MD en appliquant les commandes obtenues grâce à  $\mathbf{N}$ . Le résultat est alors exprimé sur la base de Zernike. La figure 8.5 gauche présente cette matrice calculée sur 100 modes de Zernike et pour le cas du miroir du banc BOA. A droite est tracée la diagonale de cette matrice (normalisée) qui donne donc en somme le taux de reconstruction de chaque mode (dans un cas idéal cette matrice est l'identité). On constate ainsi que ce taux de reconstruction est très bon pour les bas ordres, et quasi-nul au-delà du mode 200, avec entre les deux un régime transitoire irrégulier. Certains modes sont très mal reconstruits, car le MD est de géométrie inadaptée à leur reconstruction. C'est un aspect à prendre en compte dans le choix du nombre de mode à estimer avec la commande LQG, puisqu'un nombre limité de modes de Zernike sont reproductibles par le MD.

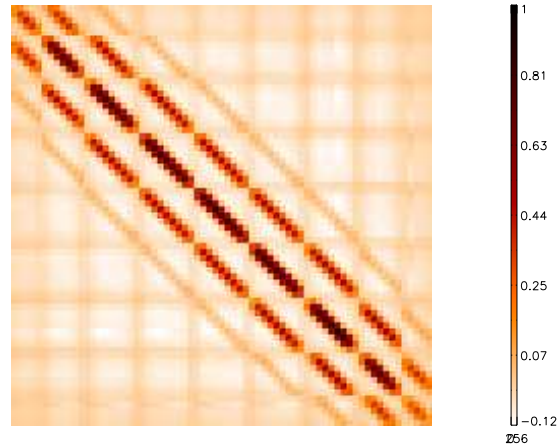


FIG. 8.4 – Matrice de covariance géométrique ( $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$ ) des fonctions d'influence du MD de BOA ( $9 \times 9$  actionneurs). Chaque ligne ou colonne de cette matrice correspond à un actionneur du miroir. L'ordre de numérotation des actionneurs suit leur positionnement par ligne sur le miroir. On constate que chaque actionneur est essentiellement couplé à ses 8 plus proches voisins et que ce couplage est significatif.

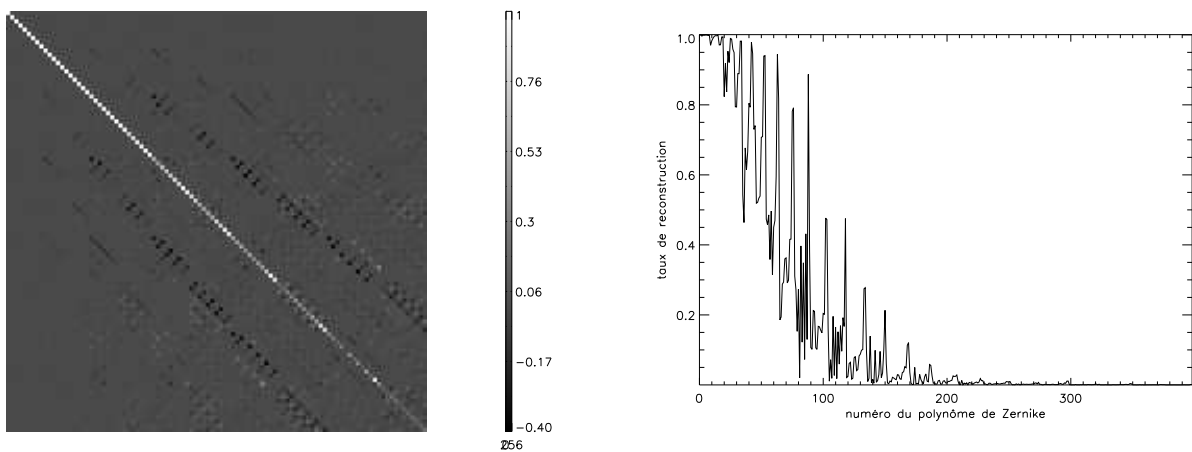


FIG. 8.5 – Gauche : matrice de reconstruction des modes de Zernike par le MD, donnée pour 100 modes. Droite : diagonale de la matrice, c'est-à-dire le taux de reconstruction des divers polynômes de Zernike par le MD.



## 8.5 Premières simulations de la loi de commande LQG : cas d'étude

Le simulateur est un outil indispensable de validation des divers concepts proposés dans les chapitres précédents, et de diagnostic des validations expérimentales. Il représente aussi un outil puissant pour simuler des systèmes réels plus complexes ou en cours d'étude.

Ce paragraphe a vocation à donner une première illustration de l'application de la commande LQG. Aussi, seuls quelques cas d'étude sont proposés, dans un cadre simplifié.

### 8.5.1 Cas d'une Optique Adaptative simple

Ce paragraphe propose une validation de la commande LQG dans un cas simpliste d'OA. Ce cadre de simulation est évidemment peu réaliste, de part la naïveté des modèles. Néanmoins, il permet une validation du fonctionnement de la commande dans un cas nominal, dénué d'erreurs de modèle. La turbulence est supposée mono-couche, de type AR1, générée à partir d'une base de 80 modes de Zernike. Le paramètre  $\frac{D}{r_0}$  est de 8, le vent est de  $10 \text{ m.s}^{-1}$ . L'analyseur et le miroir sont parfaits, analysant ou corrigeant directement les 80 premiers modes de Zernike. Un bruit de mesure faible de variance  $0,002 \text{ rad}^2$  est introduit et propagé sur chaque mode selon les formules du paragraphe 8.3.3.1. La boucle d'asservissement présente deux trames de retard et fonctionne à 250 Hz.

Une correction, basée sur un intégrateur à gain modal optimisé est proposée. Elle est construite selon les remarques du paragraphe 8.3.5.1, en notant que la matrice d'interaction est ici l'identité. Son inversion est donc triviale et ne requiert aucun traitement particulier.

La commande LQG est construite grâce aux mêmes modèles de turbulence et de composants que ceux utilisés pour simuler le système, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune erreur de modèle. Les matrices  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{N}$  sont égales à l'identité, la matrice de covariance de bruit de mesure  $\Sigma_w$  est déduite des caractéristiques du bruit de mesure introduit sur l'analyseur. La commande LQG estime les 80 modes de la turbulence.

Notons que dans ce contexte simple, la convergence de l'équation de Riccati est très rapide (moins d'une dizaine d'itérations), pour un seuil fixé à une variation de la trace (voir paragraphe 7.3.1) inférieure à  $10^{-5}$ .

La figure 8.6 gauche montre le résultat de la simulation après 4000 itérations, en terme de FEP longue pose. On constate une correction notablement meilleure pour la commande LQG avec un SR de 74,7% contre 71,4% pour l'intégrateur. Ce premier résultat démontre d'une part le bon fonctionnement de la commande LQG, mais aussi son apport en terme de correction face à une commande sous-optimale. La figure 8.6 droite réinterprète cette performance en terme de variance de phase résiduelle comparée entre les deux commandes. On note ainsi la réduction notable de la variance de phase résiduelle sur l'ensemble des modes de la phase dans la base de Zernike déjà signalée par Le Roux [Le Roux(2003)].

Nous nous intéressons ici à contrôler certaines propriétés indicatrices du bon fonctionnement de la boucle de commande (voir paragraphe 5.3.4.4), particulièrement utiles lors des validations expérimentales. En l'absence d'erreur de modèle, il s'agit surtout de chiffrer l'écart éventuel entre les valeurs théoriques et empiriques, d'illustrer dans un cas parfait le calcul de ces grandeurs et de vérifier l'absence d'erreur de codage. Nous nous intéressons ici essentiellement à l'innovation. Les propriétés statistiques des états estimés seront évoquées.

On va vérifier que l'innovation correspond bien à un bruit blanc centré. Les données montrent que la moyenne de l'innovation est asymptotiquement nulle. La figure 8.7 gauche présente la matrice de covariance empirique de l'innovation, estimée à partir des mesures de la boucle (différence entre pentes résiduelles mesurées et estimées). Cette matrice est comparée à la matrice théorique-



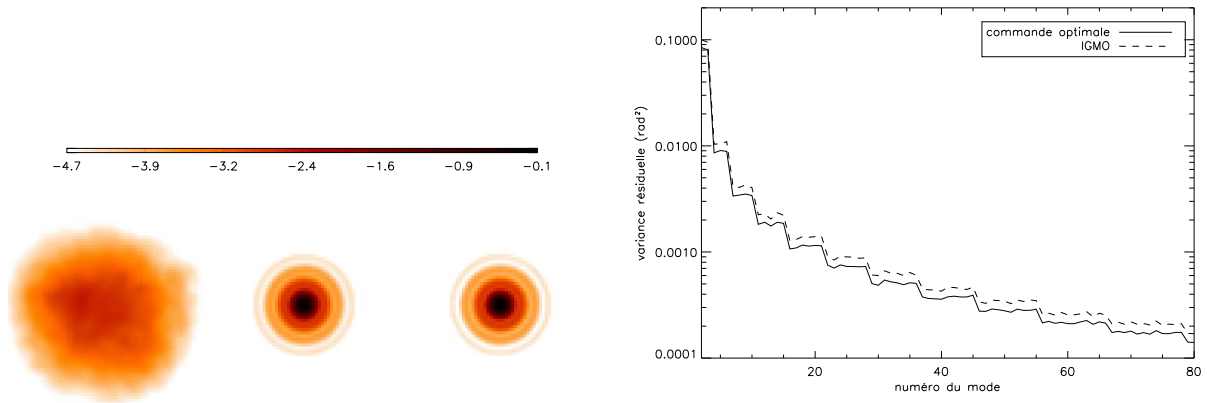


FIG. 8.6 – Gauche : comparaison des FEP boucle ouverte (gauche), intégrateur (milieu), et en commande LQG (droite). L'échelle est logarithmique. Les SR respectifs sont de 2%, 71,4% et 74,7%. Droite : comparaison des variances résiduelles de la phase sur la base de Zernike, après correction par intégrateur optimisé ou IGMO (tirets) ou commande LQG (continu).

ment attendue étant donnés les modèles utilisés (voir paragraphe 5.6). On vérifie ainsi qu'au bruit près (convergence du calcul des covariances empiriques), ces deux matrices sont identiques (erreur inférieure à 6% après 4000 itérations). Les variances (diagonales des matrices) en figure 8.7 droite correspondent très bien.

Afin de vérifier la blancheur de l'innovation, on applique le test de blancheur (équation (5.79)) proposé en paragraphe 5.6 :

$$y \text{ blanc} \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=k} r^2(i) \leq \left(k + S(p)\sqrt{2k}\right) r^2(0)/N. \quad (8.12)$$

Il s'agit de vérifier l'inégalité proposée sur un rang  $k$ , pour un risque  $p$  de considérer par erreur  $y$  comme non blanc, en estimant les covariances empiriques  $r(i)$  de l'innovation, sur un échantillon de  $N$  réalisations. La figure 8.8 gauche compare les deux termes de l'inégalité pour  $k$  allant de 1 à 50, pour un risque de 1%. Le membre de droite de l'inégalité est désigné sous le nom de référence. En général, on se limite à  $k$  de l'ordre de la dizaine. On constate ici que l'inégalité est vérifiée sans difficulté jusqu'à  $k = 50$ . L'hypothèse de blancheur semble donc confirmée. On peut aussi calculer la DSP temporelle empirique de l'innovation pour un mode pris au hasard (figure 8.8 droite) ce qui conforte de manière qualitative que l'innovation est blanche.

Enfin, on peut noter que la comparaison de la matrice de covariance empirique d'erreur d'estimation de la phase issue de la simulation (comparaison directe des états estimés et de la phase réelle), à la matrice d'erreur d'estimation théorique donnée par le filtre de Kalman, conduit à la même conclusion que pour l'innovation : les matrices correspondent au bruit de convergence près.

La simulation de la boucle est réalisée en l'absence d'erreur de modèles, en conditions parfaites. Ce premier cas de test permet donc de donner un aperçu de ce que donne une correction optimale. On va voir comment les divers paramètres présentés sont dégradés, d'abord lorsque des erreurs de modèle sont introduites en simulation (paragraphe suivant), puis lors d'une validation expérimentale (en partie 14).

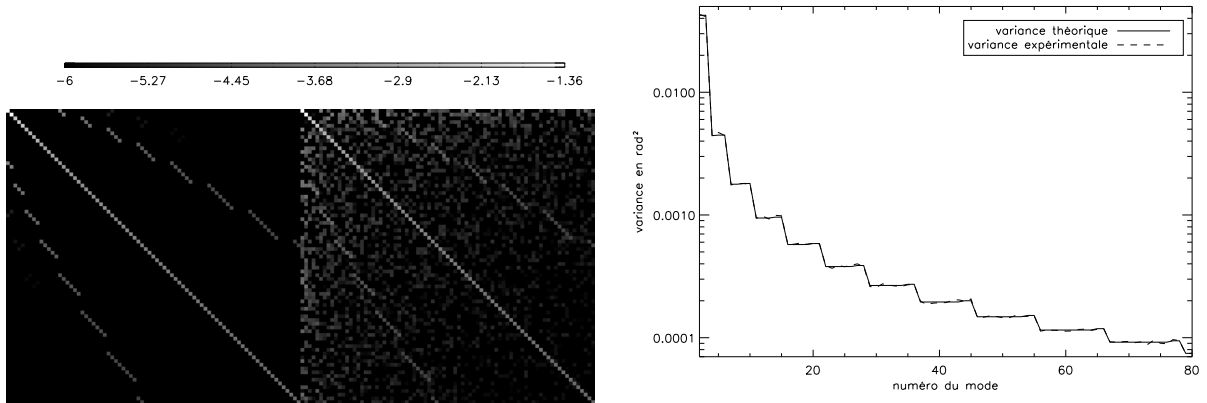


FIG. 8.7 – Gauche : comparaison des matrices de covariance d’innovation, la première issue des modèles (théorique), la seconde établie à partir des données de simulation. Droite : comparaison des diagonales des deux matrices.

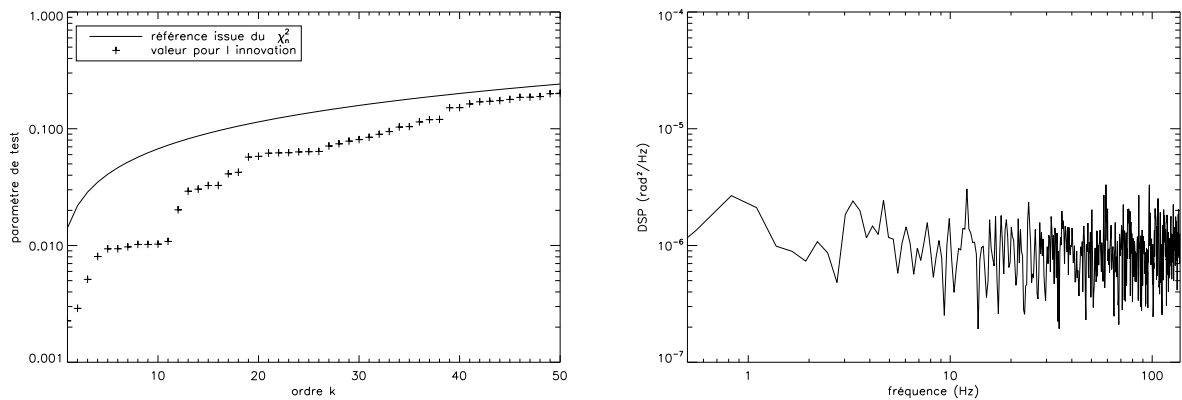


FIG. 8.8 – Test de blancheur de l’innovation. Gauche : application du test de blancheur. En continu la référence, ou membre de droite de l’inégalité de (8.12), en croix le membre de gauche, calculé à partir des covariances empiriques  $r(i)$  de l’innovation. Droite : DSP temporelle de l’innovation pour un mode au hasard.

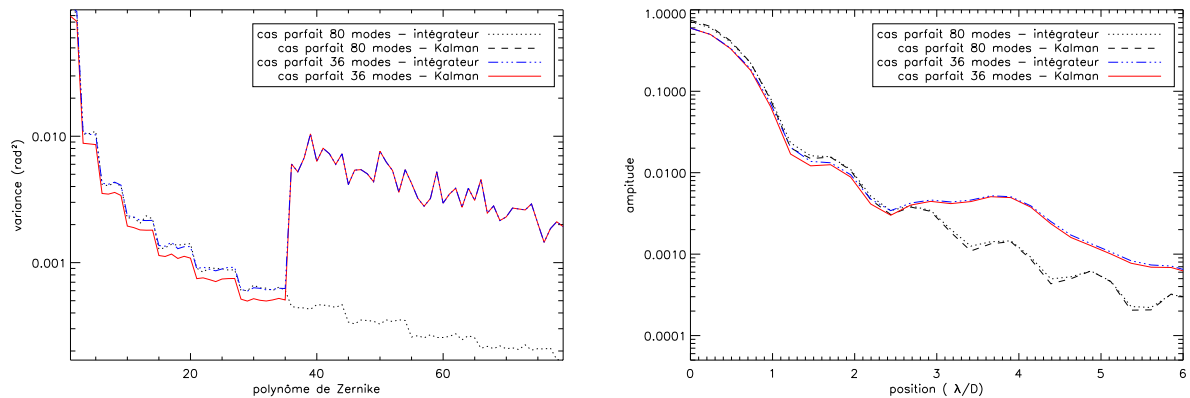


FIG. 8.9 – Gauche : variances de phase résiduelle. Droite : coupe des FEP. Cas d’un ASO parfait, mesurant 36 polynômes de Zernike. On compare la correction par intégrateur (-.-) et commande LQG (-). L’estimation pour la commande LQG se fait sur 36 polynômes. Le cas précédent est donné pour référence.

### 8.5.2 Vers une OA plus réaliste : sous-modélisation et *aliasing*

Il est intéressant de voir l’évolution des caractéristiques décrites précédemment lorsque l’on s’achemine vers un système réel. L’étude des conséquences de chaque erreur de modèle relève de l’étude de robustesse de la commande, qui ne fait pas l’objet de ce mémoire. Quelques éléments et informations sur le sujet sont toutefois fournis au travers du manuscrit. Ainsi, ce paragraphe s’intéresse à un couple d’erreurs de modèle simple mais révélateur : l’erreur de sous-modélisation et le repliement spectral.

Le premier aspect est la sous-modélisation de la turbulence. Celle-ci se décompose sur une infinité de polynômes de Zernike, or, seul un petit nombre est estimé. On va donc considérer les mêmes conditions de test que celles décrites précédemment, mais en supposant cette fois que la turbulence est décrite sur 80 modes tandis qu’analyse, estimation et correction se font sur 36 modes (il en est de même pour l’intégrateur). Notons bien que l’analyseur mesurant les polynômes de Zernike, qui sont orthogonaux entre eux, la mesure des 36 premiers modes est indépendante des modes 37 à 80. Par conséquent, le fonctionnement de la commande LQG est similaire au cas précédent, mais l’existence des modes 37 à 80 conduit évidemment à la chute de la performance de correction. Le SR est de 59% pour l’intégrateur et 62% pour la commande LQG. La figure 8.9 montre à gauche la variance de la phase résiduelle après correction par intégrateur ou commande LQG dans ce cas de test. On constate par opposition avec le cas de test précédent illustré en figure 8.6, que seuls les 36 premiers modes sont corrigés, ce qui est logique. A droite, on voit le résultat sur une coupe de la FEP. La FEP est corrigée jusqu’à  $3\lambda/D$ . Les coupes pour le cas précédent sont indiquées. Par contre, innovation et erreur d’estimation voient leurs propriétés conservées, puisque les modes 37 à 80 n’interfèrent pas sur la boucle d’asservissement.

L’estimation de la turbulence est donc identique au cas précédent sur les 36 premiers modes. Pour illustrer cette capacité d’estimation du filtre, la figure 8.10 compare la phase turbulente incidente et la phase estimée par le filtre au cours du temps. On se limite à comparer les modes 2 (tip) et 22, turbulents et estimés. On note ainsi la précision de l’estimation de la turbulence.

Pour s’acheminer vers un système réel, l’analyseur est maintenant choisi plus réaliste, grâce à

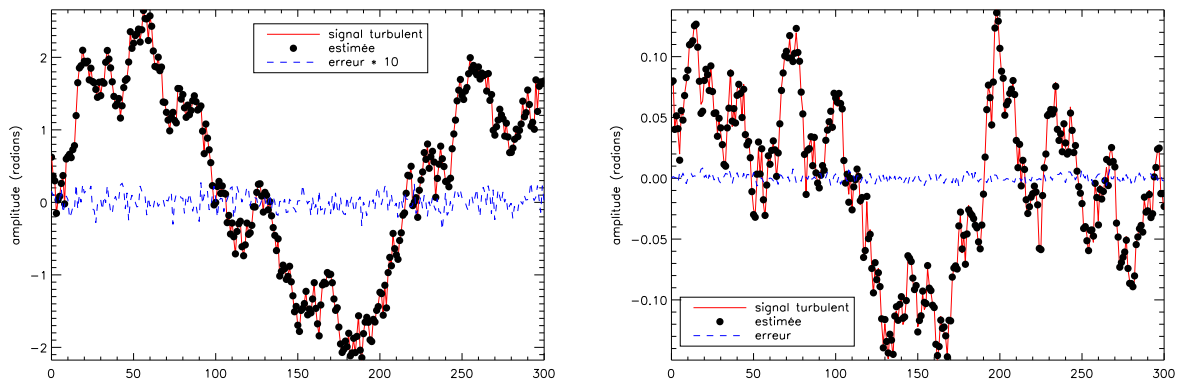


FIG. 8.10 – Comparaison de la phase incidente et de la phase estimée. On s'intéresse à deux modes en particulier, les modes 2 et 22 de la phase turbulente. L'erreur est tracée (à gauche multipliée par 10) pour indication.

un modèle géométrique de Shack-Hartmann, à  $8 \times 8$  sous-pupilles. On sait qu'un tel analyseur est limité par l'effet de repliement, et en général on considère que pour 8 sous-pupilles linéaires, les 7 ou 8 premiers ordres radiaux des polynômes de Zernike sont bien analysés, les autres modes, moins bien vus, se repliant sur les premiers. On va supposer en premier lieu que la turbulence est estimée sur 36 modes (jusqu'à l'ordre radial 7), et corrigée parfaitement par le miroir sur autant de modes. On constate que la correction reste similaire au cas précédent. Le SR est désormais de 56% pour l'intégrateur et 59% pour la commande LQG. Mais cette fois les modes 37 à 80 affectent la mesure ASO, et génèrent du repliement spectral. On subit donc conjointement l'effet d'*aliasing* et de sous-modélisation de la turbulence. Ceci apparaît clairement dans le tracé de la variance de phase résiduelle. En effet, pour l'intégrateur comme pour la commande LQG, on constate en figure 8.11 (gauche) une surexcitation de la variance résiduelle des derniers modes corrigés. Ce phénomène est dû à la contamination des 36 premiers modes mesurés par les modes d'ordres supérieurs. Ce phénomène d'*aliasing* conduit à une perte de performance visible sur la coupe de FEP présentée en figure 8.11 droite. On note la surexcitation de la FEP autour de  $3\lambda/D$  (voir aussi le paragraphe 2.6). On constate aussi que les propriétés de l'innovation et de l'erreur d'estimation sont dégradées. L'innovation n'est plus blanche, et les covariances empiriques de ces deux grandeurs s'écartent notablement de leurs valeurs théoriques, trahissant l'existence d'erreurs de modèle.

Enfin, le dernier test consiste à réduire les erreurs de modèle introduites. La configuration précédente est reprise avec l'analyseur géométrique  $8 \times 8$  sous-pupilles et le miroir parfait corrigeant 36 modes de Zernike, mais le nombre de modes estimés est égal au nombre de modes utilisés dans la simulation de la turbulence (soit 80 : pas d'erreur de sous-modélisation). Les effets de repliement de l'ASO sont pris en compte dans le modèle puisque le modèle d'ASO  $\mathbf{D}$  décrit la mesure ASO associée aux 80 modes de la turbulence. On constate alors un gain en performance, les SR étant de 56% pour l'intégrateur (inchangé) et 62% pour la commande LQG. On constate aussi en figure 8.12 gauche que la variance de phase résiduelle ne présente plus, pour la commande LQG, l'effet de surexcitation vu précédemment. Les 36 premiers modes ont une correction similaire au cas d'un ASO parfait. Du point de vue de la FEP, on note une réduction du profil autour de  $3\lambda/D$ . Le profil obtenu se rapproche fortement de celui obtenu dans le deuxième cas, c'est-à-dire avec un ASO parfait, ne mesurant que les 36 premiers modes, donc en l'absence de l'effet d'*aliasing*.

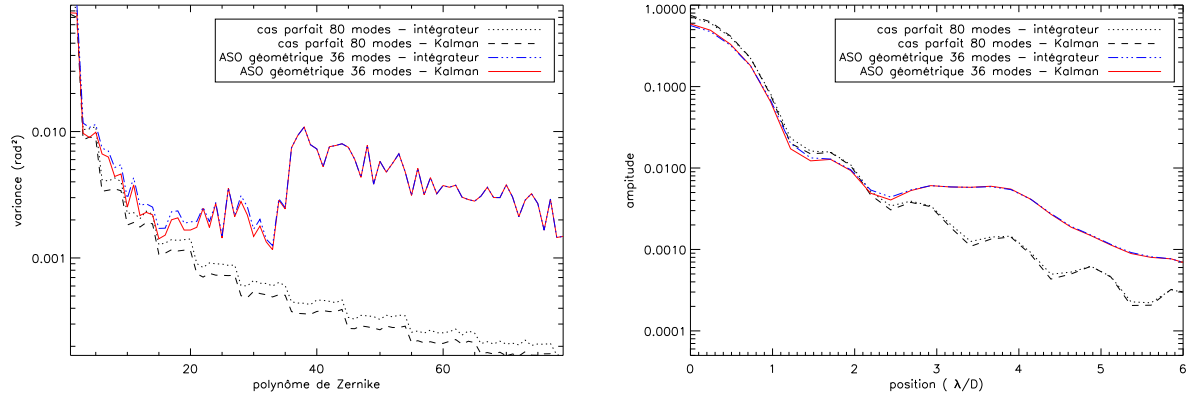


FIG. 8.11 – Gauche : variances de phase résiduelle. Droite : coupe des FEP. Cas d'un ASO géométrique  $8 \times 8$  sous-pupilles. L'estimation pour la commande LQG se fait sur 36 polynômes. On compare commande LQG (–) et intégrateur (-.-). Le cas parfait sur 80 modes est donné pour référence.

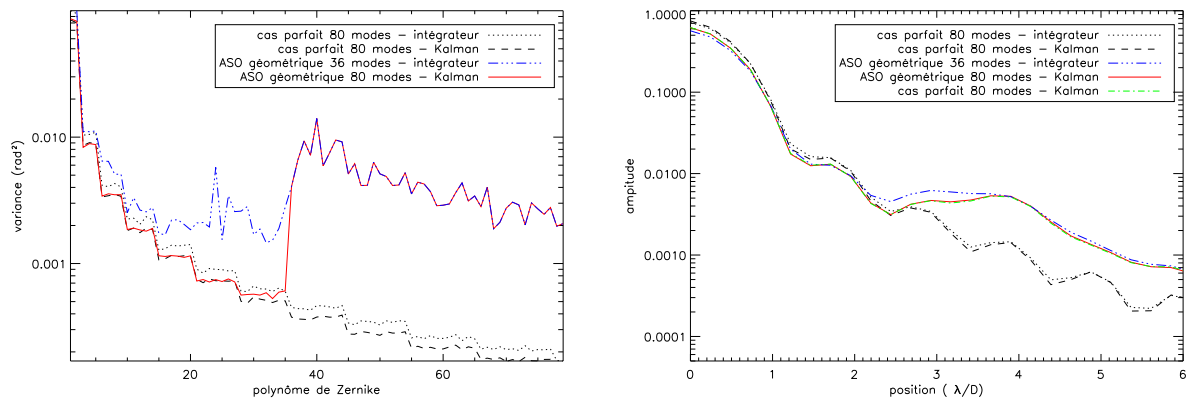


FIG. 8.12 – Gauche : variances de phase résiduelle. Droite : coupe des FEP. Cas d'un ASO géométrique  $8 \times 8$  sous-pupilles. L'estimation pour la commande LQG se fait sur 80 polynômes. On compare commande LQG (–) et intégrateur (-.-). Le cas parfait sur 80 modes est donné pour référence.

En conclusion, ces simulations ont permis de donner une illustration de l'implantation et de la validation de la commande dans un cadre de simulation d'une OA relativement simple. Ces tests ont montré que des erreurs sur la structure du modèle utilisé pour la loi de commande dégradent les propriétés des grandeurs intervenant dans la commande LQG. Les performances en terme de SR, bien que réduites, restent correctes. Ces tests ont aussi montré que l'effet d'*aliasing* peut être réduit par le choix d'une structure de modèle adaptée. Cette possibilité d'améliorer les structures de modèle marque une différence significative avec une commande de type intégrateur, de structure fixe. Ces tests mettent en évidence certaines erreurs rencontrées dans un système se rapprochant d'un cas réel. L'erreur de sous-modélisation est systématiquement rencontrée étant donnée la nature de la turbulence. L'erreur d'*aliasing* est inhérente à l'échantillonnage spatial de l'analyseur. Néanmoins, les deux erreurs de structure de modèle associées peuvent être réduites. L'extension du vecteur d'état, et le raffinement du modèle ASO, informant sur la mesure fournie par celui-ci pour des modes d'ordres élevés, permettent d'augmenter notablement les performances. Ces résultats confortent nos choix de base et de structure sur-paramétrée du modèle discutés aux paragraphes 4.7 et 5.5.6. Ces éléments seront rediscutés dans un cadre réel, celui du banc BOA, au chapitre 14. Leur importance dans le cadre de l'OAMC sera discutée au paragraphe 17.

## 8.6 Caractérisation fréquentielle la loi de commande optimale : matrice de transfert de réjection

Dans les chapitres précédents, la loi de commande a été établie dans un formalisme d'état. Néanmoins, comme souligné au paragraphe 4.5.1, l'approche fréquentielle est souvent préférée car plus simple à mettre en œuvre et à interpréter. Les fonctions de transfert représentent dans la littérature un outil de prédilection assez répandu pour caractériser une loi de commande. Cette caractérisation fréquentielle est toujours modale en accord avec la structure modale des correcteurs. Ce paragraphe a pour objectif de démontrer que cette approche fréquentielle modale est inadaptée dans le cadre de la commande optimale, car les couplages entre modes ne peuvent être négligés.

### 8.6.1 Motivation

L'établissement et la manipulation de fonctions de transfert ne sont en général bien maîtrisés que dans le cas mono-variable, ou multi-variable découplé. Aussi, dans le contexte fortement multi-variable de l'OA (au sens large), cet obstacle pousse généralement à ramener le système multi-varié initial à un système découplé, composé de sous-systèmes mono-variés indépendants [Looze *et al.*(2003), Wirth *et al.*(1998), Dessenne *et al.*(1997)]. Chaque sous-système peut alors être traité indépendamment. C'est ce que font notamment les commandes intégrales. Au prix d'un changement de base adéquate, il est possible de se ramener à une série de commandes mono-variables découplées [Gendron & Léna(1994)] et, ce faisant, d'optimiser par exemple les gains de chaque asservissement indépendamment (intégrateur à gain modal optimisé voir paragraphe 5.2.1).

Le système qui nous intéresse est très fortement couplé, et la présence simultanée de trois grandeurs, la phase, les commandes et les mesures, correspondant à trois espaces distincts, rend la recherche de base diagonalisante complexe. Quand bien même une telle base serait exhibée, il n'y a guère de chance qu'elle présente un sens physique quelconque, rendant l'analyse des transferts ardue. Comme évoqué au paragraphe 5.5.6, le plus simple et le plus naturel dans cette situation est de laisser chaque grandeur évoluer dans son propre espace et sa base de prédilection. La conséquence de ce choix est bien-sûr la présence des couplages, au demeurant intrinsèques au système. Il devient

alors difficile de considérer le système comme découplé et de définir des fonctions de transfert mono-variées. On peut néanmoins définir pour tout système linéaire homogène un transfert, matriciel dans le cas le plus général.

Cette partie se propose donc de calculer analytiquement le transfert de réjection matriciel, entre la phase turbulente et la phase résiduelle, pour la commande optimale LQG. Ce calcul est mené dans un cadre général, aucune hypothèse n'étant faite sur le type de système (OA, OAMC...) pour ce calcul. L'objectif est d'analyser la structure de ce transfert pour mettre en évidence des couplages non négligeables. Aussi, le système le plus simple, celui d'une OA, est étudié. Les autres configurations, de type OAMC, ne feront qu'apporter plus de couplages de par le principe de l'analyse et de la correction.

Le paragraphe 8.6.2 s'intéresse au calcul de la matrice de transfert de réjection. Au paragraphe 8.6.3, des approximations simplificatrices classiques sont appliquées, mettant en évidence un couplage réduit. Dans ce cadre, il est alors possible de définir des fonctions de transfert et de proposer des comparaisons entre les réponses de la commande optimale et celles de commandes plus classiques telles que l'intégrateur. Ces hypothèses simplificatrices sont abandonnées au paragraphe 8.6.4, et l'étude du transfert matriciel est réalisée dans un cadre plus réaliste. L'approche classique consistant à caractériser une commande d'OA par ses fonctions de transfert est alors rediscutée.

### 8.6.2 Expression analytique de la matrice de transfert de réjection

L'expression analytique du transfert matriciel entre phase turbulente et phase résiduelle s'établit aisément car le système est linéaire, discret et invariant dans le temps. On néglige les effets dus à la troncature de la phase sur une base limitée de  $n$  modes de Zernike. Enfin, on se place dans le cas asymptotique du gain de Kalman.

L'établissement de la matrice de transfert de réjection entre la phase turbulente et la phase résiduelle est mené en deux étapes, en commençant par le transfert  $\mathbf{G}(z)$  dû à la seule loi de commande prenant en entrée les mesures et donnant en sortie les tensions de commande, puis en déduisant le transfert global  $\mathbf{E}(z)$  de la boucle de correction. Ces deux transferts sont donc définis par :

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{y}(z), \quad (8.13)$$

$$\phi^{res}(z) = \mathbf{E}(z)\phi^{tur}(z). \quad (8.14)$$

Dans ces équations et les suivantes, toutes les grandeurs sont exprimées dans le domaine fréquentiel, aussi on assimile une fonction et sa transformée en  $z$ , en omettant le  $\tilde{\cdot}$ .

En reprenant les équations récursives de la loi de commande établie en (5.24) et (5.64), et en appliquant une transformée en  $z$  des variables à temps discret impliquées, on obtient :

$$\begin{aligned} z\hat{\mathbf{X}}_{n/n-1} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}_{n/n-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_n + \mathbf{A}\mathbf{H}_\infty(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}\hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}) \\ \mathbf{u}_n &= z\mathbf{P}\hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

En remplaçant  $\mathbf{u}_n$  dans la première équation et en isolant  $\hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}$ , on obtient l'expression de  $\mathbf{G}(z)$  :

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{P}(\mathbf{Id} - z^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{P} + z^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H}_\infty\mathbf{C})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H}_\infty. \quad (8.16)$$

$\mathbf{G}(z)$  constitue le transfert entre  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{u}$  pour un système commandé par une commande LQG. On déduit alors le transfert de réjection entre phase turbulente et phase résiduelle sous la forme :



$$\mathbf{E}(z) = (\mathbf{Id} + z^{-2}\mathbf{N}\mathbf{G}(z)\mathbf{D})^{-1}. \quad (8.17)$$

On peut donc calculer ce transfert, en disposant des diverses matrices intervenant dans le calcul de  $\mathbf{E}(z)$  et en se limitant à des dimensions raisonnables de matrices. Les deux paragraphes suivants font le calcul numérique de ce transfert dans deux configurations d'OA, l'une fortement simplifiée, l'autre très proche d'un système réel. Pour cela, la matrice de transfert est calculée à diverses fréquences, en fonction des matrices modélisant les composants de l'OA (ASO, MD...).

### 8.6.3 Cas d'une OA fortement simplifiée

Ce cas reprend l'approximation faite au paragraphe 8.5.1 d'un système d'OA très simplifié. On suppose que l'analyseur sait parfaitement mesurer les  $n$  premiers modes de la phase exprimée sur une base telle que celle des modes de Zernike. Cette mesure est bruitée et la matrice de covariance du bruit de mesure est issue du modèle proposé dans [Rigaut et al.(1992)] de propagation du bruit de mesure d'un analyseur de type Shack-Hartmann sur les divers modes (voir paragraphe 8.3.3.1). De plus, on suppose que le miroir déformable est capable de reproduire parfaitement un certain nombre de modes de cette même base. Par souci de simplicité, on suppose aussi que l'analyseur et le miroir mesurent ou reproduisent le même ensemble de modes. Dans ce contexte particulier et en choisissant effectivement la base des modes de Zernike pour l'analyse, la correction et l'estimation, les matrices de mesure  $\mathbf{D}$  et de correction  $\mathbf{N}$  sont égales à l'identité. Un nombre  $n = 80$  de modes de Zernike est considéré. La matrice  $A^{tur}$  du modèle AR1 d'évolution temporelle de la phase est diagonale. Enfin,  $\Sigma_{kol}$  est la matrice de covariance de cette phase turbulente. Ainsi, par ce choix de matrices, le couplage apparaissant dans le système est assez faible car issu de la matrice de covariance de la phase  $\Sigma_{kol}$ . Les conditions retenues sont celles du banc expérimental BOA, présentées en chapitre 12. Brièvement, il s'agit d'une configuration d'OA, avec une turbulence de  $\frac{D}{r_0} \simeq 3$ , et une vitesse de vent telle que  $V/D \simeq 0,3$  pour une fréquence d'échantillonnage  $f_{ech} = 60$  Hz.

La figure 8.13 présente la matrice de transfert  $\mathbf{E}(z)$  calculée partir de (8.17) à diverses fréquences. On suppose ici que les fréquences sont normalisées par rapport à la fréquence d'échantillonnage. Les valeurs de fréquence considérées sont donc comprises entre 0 et 0,5. Quatre exemples sont données, aux fréquences  $[3 \cdot 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-3}, 3 \cdot 10^{-2}, 3 \cdot 10^{-1}]$ . L'échelle de représentation est logarithmique.

La structure de la matrice est très fortement diagonale, et exhibe comme prévu un couplage très faible entre modes. On effectue donc l'approximation consistant à ne s'intéresser qu'à la diagonale de ce transfert, en négligeant les couplages introduits par les termes extra-diagonaux. On considère donc que le système peut être découplé mode à mode. On trace alors les fonctions de transfert modales associées à chaque mode de Zernike. Cette analyse des transferts diagonaux a été proposée dans [Petit et al.(2004)]. Une comparaison a aussi été proposée avec les fonctions de transfert d'un Intégrateur à Gain Modal Optimisé (IGMO) afin de souligner les caractéristiques propres à la commande optimale. On en résume ici les conclusions. Les conditions de test sont les mêmes, à la différence près que la turbulence et le bruit de mesure sont un peu plus forts afin de faire ressortir les différences entre les deux lois de commande, autrement trop similaires. En outre, la fréquence n'est pas normalisée à 1, la fréquence d'échantillonnage est en effet de 200 Hz. Les figures 8.14 gauche et droite montrent divers transferts diagonaux pour divers modes, et une comparaison avec les transferts de l'IGMO correspondant. On constate une nette différence. La forme du transfert est relativement fixe pour un intégrateur, avec une pente de 20dB par décade avant la fréquence de coupure à  $-3$ dB et une surexcitation au-delà, la fréquence de coupure et la surexcitation diminuant avec le gain modal. Le transfert de la commande optimale varie aussi avec le mode, mais plus fortement. Une atténuation finie est



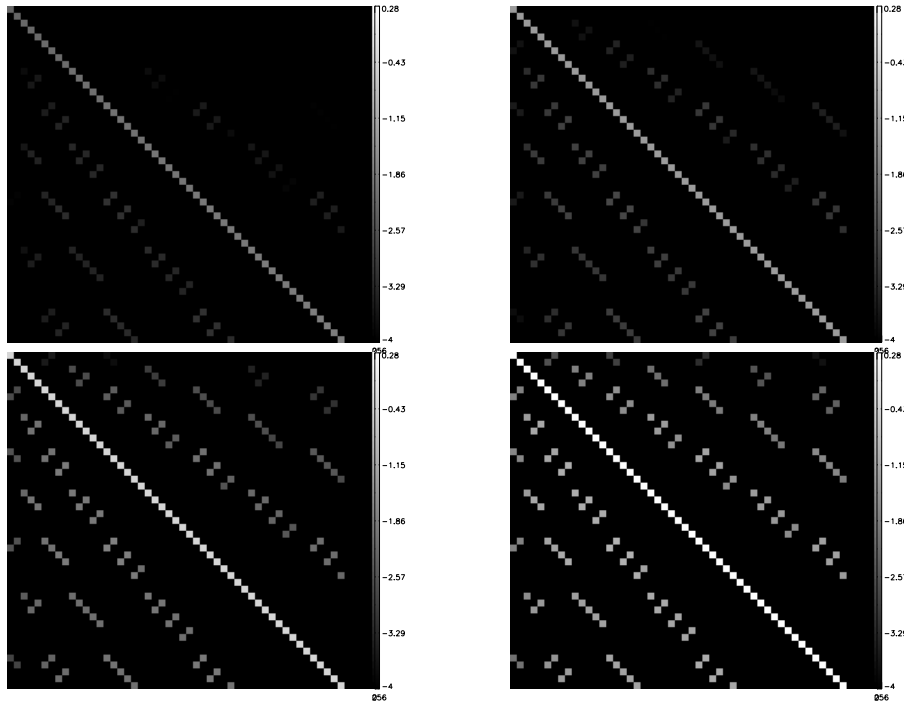


FIG. 8.13 – Matrice de transfert de réjection, cas d’OA simplifiée. Les valeurs de la matrice sont présentées aux fréquences normalisées  $[3 \cdot 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-3}, 3 \cdot 10^{-2}, 3 \cdot 10^{-1}]$ . L’échelle est logarithmique.

constatée à fréquence nulle, la fréquence de coupure pour chaque mode est supérieure ou égale à celle de l’intégrateur, avec une surexcitation moins prononcée. Ces différences sont plutôt favorables, puisqu’elles impliquent une correction modale plus large bande avec une amplification plus faible du bruit haute fréquence. L’atténuation plus faible à basse fréquence peut s’interpréter simplement en remarquant que le modèle de signal turbulent, qui domine à basse fréquence, présente lui-même une énergie finie à basse fréquence.

Ainsi, avec cet exemple d’OA simplifiée, on constate qu’une approximation de découplage modal est possible. Elle permet alors de se ramener, comme pour l’intégrateur, à des fonctions de transfert modales. On note alors la différence de comportement entre les deux types de commande. Néanmoins, si cette approche permet de mieux visualiser l’effet de la commande optimale dans un cas d’OA simpliste, elle n’est pas applicable en général dans les cas réalistes.

Ces fonctions de transfert ont toutefois été utilisées avec beaucoup de précautions notamment dans [Petit *et al.*(2004)] pour illustrer le comportement fréquentiel de la commande optimale notamment lors du filtrage de perturbations (composante statique, vibration voir chapitres 9 et 10).

#### 8.6.4 Cas d’une OA plus réaliste

Nous considérons ici une OA plus fidèle à la réalité pour évaluer le transfert matriciel associé à la commande optimale. On reprend la configuration proposée au paragraphe 8.5.2, avec une turbulence modélisée par un modèle AR1, un modèle ASO basé sur un modèle géométrique du Shack-Hartmann, le bruit de mesure est représenté par une matrice de covariance diagonale (bruit indépendant entre sous-pupilles et axes de mesure, de propriétés statistiques issues des calibrations du banc BOA). Le MD est modélisé cette fois grâce à un modèle gaussien de ses déformées (approximation d’un miroir

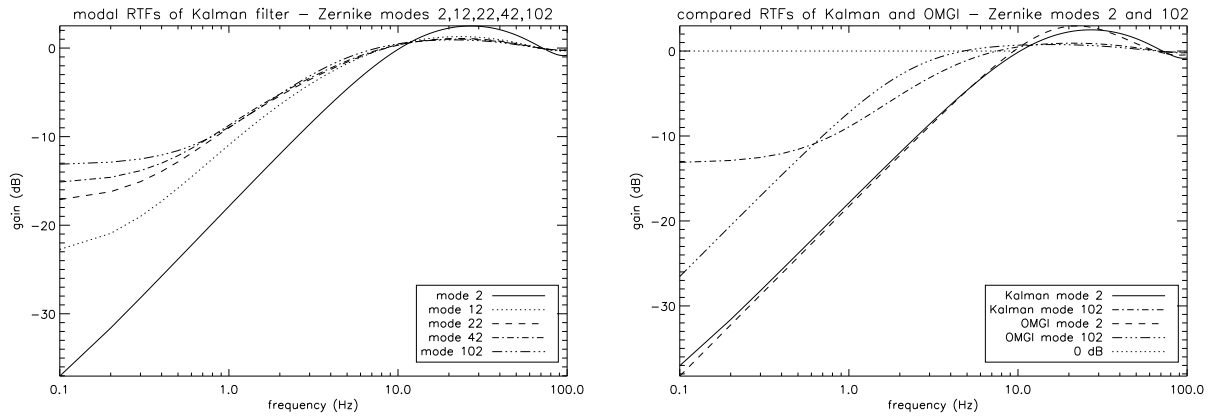


FIG. 8.14 – Comparaison des fonctions de transfert de réjection modales. Gauche : transferts modaux de la commande optimale pour divers modes et pour une fréquence d'échantillonnage choisie ici à 200 Hz. Droite : comparaison des transferts modaux (modes 2 et 102) de la commande LQG et d'un intégrateur à gain modal optimisé.

SAM voir paragraphe 8.3.4). Le projecteur de la phase sur les modes miroirs  $\mathbf{P}$  est déduit de la décomposition des fonctions d'influence sur les modes de Zernike (paragraphe 8.4.4.2). Le calcul proposé considère ainsi un cas d'OA similaire à celui du banc BOA (ASO à  $8 \times 8$  sous-pupilles, MD à  $9 \times 9$  actionneurs dont 69 utiles plus 2 du miroir de basculement) présenté au chapitre 12. Les matrices  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{N}$  intervenant dans le calcul sont alors fortement non diagonales. On suppose en outre que les phases turbulentes, résiduelles et estimées sont exprimées dans une base de Zernike, sur un nombre  $n = 80$  de modes.

Comme précédemment, la figure 8.15 présente la matrice  $\mathbf{E}(z)$  calculée *via* (8.17) pour les quatre mêmes fréquences normalisées  $[3 \cdot 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-3}, 3 \cdot 10^{-2}, 3 \cdot 10^{-1}]$ . L'échelle est toujours logarithmique mais de bornes différentes.

On vérifie alors que la matrice  $\mathbf{E}(z)$  n'est plus du tout proche d'une matrice diagonale. En particulier à basse fréquence, les termes extra-diagonaux sont très nombreux et prépondérants.

Afin de quantifier ce couplage, on peut s'intéresser à la différence entre le transfert  $\mathbf{E}(z)$  et le même transfert dont on annule tous les termes extra-diagonaux. Ce second transfert  $\mathbf{E}^d(z)$  fait donc l'hypothèse d'un découplage modal complet du système. Dans le cadre de transferts linéaires invariants dans le temps, on peut s'intéresser à leur norme  $H_2$ , norme qui quantifie l'énergie de la sortie par rapport à l'entrée, ou plus précisément, qui évalue la covariance de la sortie lorsque l'entrée est un bruit blanc unitaire. Dans le cas de systèmes discrets, cette norme s'écrit pour un transfert  $\mathbf{H}$  :

$$\|\mathbf{H}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{ech}/2}^{+\omega_{ech}/2} \text{Trace}(\mathbf{H}^*(e^{j\omega})\mathbf{H}(e^{j\omega}))d\omega}, \quad (8.18)$$

où  $\omega_{ech} = 2\pi f_{ech}$ ,  $f_{ech}$  désignant la fréquence d'échantillonnage.

On compare alors  $\|\mathbf{E}(z)\|_2$ ,  $\|\mathbf{E}^d(z)\|_2$ , et  $\|\mathbf{E}(z) - \mathbf{E}^d(z)\|_2$  dans ce cas d'OA réaliste et on effectue la même comparaison dans le cas de l'OA simplifiée présentée précédemment, pour laquelle le découplage semblait valide. Le tableau 8.1 récapitule les résultats obtenus sur les matrices de transfert de réjection calculées dans ces deux cas d'OA.

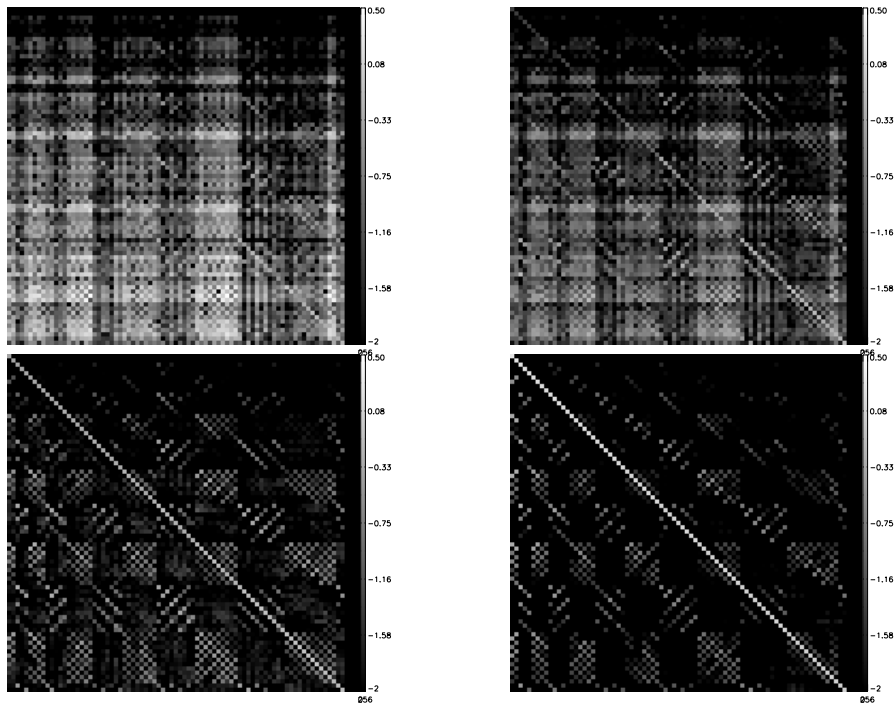


FIG. 8.15 – Matrice de transfert de réjection, cas d’OA réaliste. Les valeurs de la matrice sont présentées aux fréquences normalisées  $[3 \cdot 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-3}, 3 \cdot 10^{-2}, 3 \cdot 10^{-1}]$ . L’échelle est logarithmique.

grandeur	$\ \mathbf{E}(z)\ _2$	$\ \mathbf{E}^d(z)\ _2$	$\ \mathbf{E}(z) - \mathbf{E}^d(z)\ _2$	$\ \mathbf{E}(z) - \mathbf{E}^d(z)\ _2 / \ \mathbf{E}(z)\ _2$
OA simplifiée	12,19	12,17	0,82	0,07
OA réaliste	10,59	10,03	3,42	0,32

TAB. 8.1 – Normes  $H_2$  des transferts de réjection. On présente la norme des transferts, de leur approximation sous hypothèse de découplage et de la différence des deux dans le cadre de l’OA simplifiée ou réaliste.

Ceci illustre l'aspect fortement couplé de la commande proposée et l'impossibilité dans ces conditions d'isoler des fonctions de transfert de la commande afin de comparer notre commande avec les commandes plus classiques fondées sur un découplage modal. Les couplages sont essentiellement liés à la covariance de la turbulence, au MD et à l'ASO. Le choix d'une configuration basée sur le banc BOA reste donc représentatif, l'existence de ces couplages restant vraie sur les divers systèmes d'OA. Ajoutons que ce phénomène de couplage s'accroît particulièrement lorsqu'un système de type OAMC est considéré, en raison de la présence des projecteurs liés à la mesure et à la correction, qui couplent les modes de la phase.

A cela on pourrait rétorquer qu'un choix judicieux de base permettrait de diagonaliser la matrice de transfert et de se ramener à un transfert diagonal donc découplé. Un tel changement de base serait probablement possible, mais très agressif. On force le système dans une base abstraite, au prix de calculs numériques qui doivent être très précis. En effet, en présence d'erreurs numériques, on risque d'identifier la base choisie à une base diagonalisante, peut être pour optimiser des gains, alors que cette base n'est pas découplée. On risque plus certainement alors d'amplifier du bruit numérique. Ajoutons que les dimensions des matrices mises en jeu peuvent devenir importantes (voir chapitre 7) accroissant les risques d'erreur numériques.

Notons en outre qu'une diagonalisation conduirait à une base n'ayant aucun sens physique, contrairement aux modes classiquement manipulés (modes propres du système, modes de Karhunen-Loeve [Rousset *et al.*(2000)], base de Zernike). L'interprétation du comportement fréquentiel, et d'éventuelles comparaisons avec les lois de commandes plus standard, seraient alors difficiles voire impossibles.

D'un point de vue plus pratique, un tel transfert n'est pas mesurable expérimentalement de manière simple.

Enfin, l'étude des transferts des commandes dans le plan fréquentiel est le plus souvent utilisée pour choisir les paramètres des dites commandes, afin d'optimiser leurs performances ou leur stabilité (choix de gains). L'approche optimale proposée ne rentre pas dans ce schéma. Le problème est géré globalement, et les paramètres optimaux pour la minimisation du critère choisi sont déduits des modèles et des *a priori*.

La caractérisation fréquentielle modale de la loi de commande au travers de fonctions de transfert dans un cas d'OA (ou d'OAMC) réaliste n'est donc pas adaptée. Par conséquent, elle n'a pas été utilisée dans l'étude par simulation numérique ou lors des validations expérimentales.



# Chapitre 9

## Gestion de composantes vibratoires

### 9.1 Introduction

Les chapitres précédents ont traité de l'implantation numérique de la loi de commande en général, sans prendre en compte explicitement les contraintes applicatives. Ce chapitre et le suivant abordent au contraire des problématiques bien concrètes, propres à l'OA.

Les systèmes d'observation sont communément soumis à des perturbations générant des vibrations. Ces perturbations sont essentiellement mécaniques et dues à l'excitation des structures par le vent, les systèmes de refroidissement, les appareils en mouvement. Les vibrations générées représentent des composantes parasites qui perturbent les observations et notamment les systèmes d'OA. Ainsi, dès les premiers tests sur le ciel du système NAOS, la présence de vibrations venant détériorer la performance de l'OA a été détectée [Rousset *et al.*(2002)]. Il a été mis en évidence que ces vibrations étaient associées à des oscillations du télescope et qu'une diminution de près de 15% du SR pouvait leur être imputée, malgré une optimisation de la commande utilisée, en l'occurrence de type IGMO. En fait, la commande en question amplifiait les vibrations en présence.

Or tous les systèmes d'OA sont potentiellement concernés par la présence de vibrations parasites. On comprend alors tout l'intérêt de gérer spécifiquement ce type de composantes. Le problème devient particulièrement pressant pour des systèmes d'OA de haute performance tels que ceux en cours de développement pour l'XAO et la recherche de planètes extra-solaires [Fusco *et al.*(2006b)]. Et le souci est alors double. En effet, ces systèmes d'XAO dédiés à la recherche d'exo-planètes sont couplés à des coronographes. Or certains coronographes (type quatre quadrants [Rouan *et al.*(2000)]) exigent une stabilisation rigoureuse de la FEP. La présence de vibrations jouant sur la bascule du faisceau pourrait détériorer singulièrement les performances de ces coronographes. On doit donc à la fois s'assurer de la stabilité de la boucle d'asservissement et de sa performance globale, mais aussi garantir une grande stabilité du faisceau de sortie pour d'éventuelles applications coronographiques. Ceci passe par le choix d'une commande adaptée à la gestion des vibrations.

Cette partie vise donc à montrer comment la loi de commande LQG décrite dans ce manuscrit peut inclure une telle gestion des vibrations. Comme pour la correction de la turbulence, un modèle *a priori* d'évolution de ces composantes est requis. Il s'agit donc d'établir un tel modèle et d'en déduire la loi de commande associée, en s'assurant de la stabilité du système. Enfin, dans la perspective d'une implantation et de l'utilisation effective d'une telle solution, il est nécessaire de se pencher sur le problème de l'identification de ce modèle.

Le paragraphe 9.2 discute de la nature des vibrations et montre comment elles peuvent jouer aussi bien le rôle d'un bruit que d'une perturbation pour le système d'OA. Cette nuance, ainsi que la

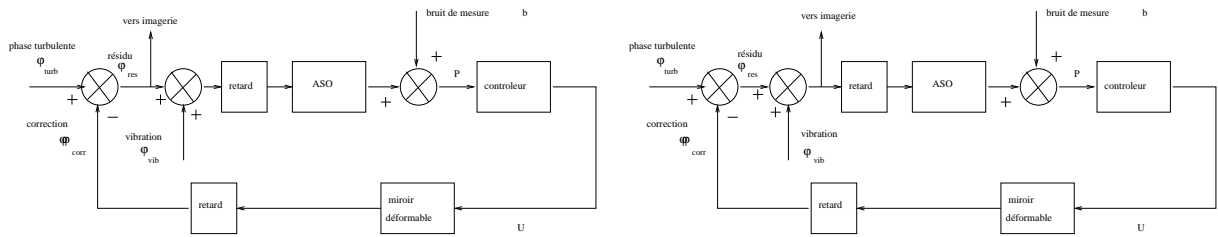


FIG. 9.1 – Schéma-bloc d'un système d'OA avec vibrations. Gauche : cas d'une vibration de type bruit (pas d'influence sur l'imagerie). Droite : cas d'une vibration de type perturbative (commune aux deux voies).

possible variabilité des caractéristiques des vibrations, incite à écarter les correcteurs classiques et en premier lieu les commandes de type intégrateur, inadaptées au contrôle de vibrations. Le paragraphe 9.3 propose un modèle de vibration. Ce modèle est pris en compte dans l'observateur en paragraphe 9.4 afin d'estimer les vibrations. Les équations d'état et d'observation sont présentées. Cet estimateur est général et peut englober les deux natures de vibration évoquées. Les paragraphes suivants 9.5 et 9.6 particularisent cependant cet estimateur général à la gestion spécifique de chacun des deux cas. Cette étude est menée sous certaines hypothèses simplificatrices. Le paragraphe 9.7 étend donc les résultats obtenus à des cas plus complexes. Enfin, le paragraphe 9.8 se penche sur le problème d'identification des paramètres du modèle.

Cette extension de la commande LQG permet d'envisager ainsi l'implantation directe de la commande sur un site soumis à des vibrations sans recours à une procédure annexe de contrôle des vibrations (boucle locale de contrôle, atténuation active ...), en offrant une gestion souple des divers cas de vibration.

## 9.2 Nature des vibrations et problématique de leur gestion

Il est important de bien définir d'abord la nature des vibrations en jeu. Une distinction fondamentale peut être faite selon que les vibrations perturbant le système affectent la voie scientifique, la voie d'analyse ou les deux. Dans ce dernier cas, on peut aussi envisager que les vibrations des deux voies soient en tout ou partie distinctes.

Notons déjà que les vibrations présentes seulement sur la voie scientifique ne peuvent être gérées directement par une OA, puisqu'elles ne sont pas mesurées par la boucle. Ensuite, il est important de souligner que l'on souhaite gérer ces composantes, ce qui ne veut pas dire obligatoirement les corriger. En effet, considérons le cas où les vibrations ne sont présentes que sur la voie d'analyse. Ce cas est décrit par le schéma-bloc de gauche de la figure 9.1. Ces vibrations perturbent la mesure de front d'onde et sont attribuées à tort à la turbulence. Elles viennent donc parasiter la correction tout en étant potentiellement amplifiées par la boucle d'OA. Un réflexe naturel serait de corriger avec une loi de commande appropriée ces vibrations. Or, dans ce cas précis, vouloir les corriger pour obtenir une mesure de front d'onde propre serait une erreur : la correction des vibrations par les miroirs entraînerait l'apparition de ces mêmes vibrations sur la voie scientifique qui en était dépourvue. On détériorerait donc l'image corrigée en utilisant, comble du malheur, une partie de la dynamique miroir. L'idée, dans ce cas, est donc de filtrer ces composantes lors de la mesure sans les introduire dans la correction. En somme, en termes d'automaticien, cela revient à distinguer deux cas. Le premier, celui de notre exemple pour lequel les vibrations sont un bruit sur la mesure. Dans ce cas, ce bruit doit être

filtré pour extraire la donnée d'intérêt que représente la mesure de la turbulence. C'est-à-dire que l'on ne doit ni amplifier ni atténuer ces vibrations, mais seulement les soustraire au signal d'intérêt. Dans le second cas, celui pour lequel on souhaite effectivement corriger les vibrations présentes à la fois sur la voie d'analyse et sur la voie scientifique (schéma-bloc de droite de la figure 9.1), ces vibrations représentent une perturbation sur la phase turbulente. Dans ce second cas, on souhaite effectivement atténuer ces composantes, quelles que soient leurs caractéristiques fréquentielles. On conçoit donc que cette distinction entre bruit et perturbation va se traduire par un traitement différent au moment de la correction ou, plus précisément, à l'étape de la commande par opposition à l'étape d'estimation. L'estimation peut être abordée de manière générale et commune pour les deux cas, ce qui est fait en paragraphe 9.4.

Les lois de commande classiques à base d'intégrateur ne peuvent fournir une réponse adéquate au problème de vibration. La réponse fréquentielle (fonction de transfert de réjection) de ce type de contrôleur est de structure fixe, directement liée au gain. Il n'est pas possible de réaliser un correcteur filtrant ou corrigeant des vibrations en particulier. Dès lors, dans le meilleur des cas, les composantes vibratoires se situent dans la zone fréquentielle d'atténuation du filtre, et disparaissent. Dans le pire des cas, elles se situent au beau milieu de la zone d'amplification (ou zone d'*overshoot*) du filtre. Cela conduit à une détérioration supplémentaire des performances de la boucle de correction et dans certains cas à des instabilités. Ainsi, il a pu être mis en évidence sur NAOS [Rousset *et al.*(2002)] que la plupart des vibrations en présence se situaient au-delà de la bande d'atténuation du contrôleur conduisant à une amplification des vibrations. Un réglage du gain, global ou modal (IGMO) peut éventuellement réduire les effets des vibrations. Les vibrations sont alors considérées comme participant au bruit et affectant les divers modes et la diminution du gain (global ou pour les modes concernés) permet de réduire l'amplification. Cependant, ceci se fait au détriment de la réjection du signal de turbulence, puisque diminuer le gain revient aussi à réduire la réjection basse fréquence du filtre. Dans le cas de NAOS, une optimisation modale a conduit à la réduction "substantielle" du gain afin de limiter les effets des vibrations. Mais une perte de 15% de SR était malgré tout constatée.

Des correcteurs de type coupe-bande existent, et permettent de filtrer des vibrations. Néanmoins, ils sont généralement défini grâce à un gabarit. Ceci impose une structure peu souple face à une éventuelle dérive des vibrations présentes. En outre, cela représente un étage supplémentaire de correction qui ne doit pas perturber la boucle de contrôle de l'OA. Enfin, comme il a été souligné précédemment, on peut être confronté à des vibrations jouant le rôle de bruit ou de perturbation sur le système d'OA. Le traitement de ces deux cas est différent et il n'est pas clair que cette distinction puisse être aisément gérée par les correcteurs plus "classiques". Dans le cas de l'intégrateur, les vibrations sont ainsi gérées systématiquement comme un bruit, que l'on cherche à ne pas amplifier. On ne peut les corriger. Enfin, l'objectif est de pouvoir gérer simultanément turbulence et vibration, limitant ainsi le nombre de systèmes de correction mis en jeu et leur éventuels couplages. L'analyse du problème des vibrations montre qu'en fait la question du simple filtrage des vibrations (pour un bruit) ou de leur correction (pour une perturbation) relève de la partie commande, par opposition à la partie estimation. Dans les deux cas de figure, on cherche d'abord à estimer les vibrations. Seule la partie commande va ensuite différer. Il faut donc d'abord se donner les outils nécessaires à l'estimation des vibrations.

### 9.3 Modélisation d'une composante vibratoire en temps discret

L'objectif de ce paragraphe est de proposer un modèle d'évolution des composantes vibratoires permettant ainsi leur prise en compte dans le modèle d'état et leur estimation. Pour cela on décrit un phénomène vibratoire à temps continu avant d'aborder sa discrétisation et la mise en évidence d'un



modèle linéaire simple.

### 9.3.1 Hypothèses

Par souci de clarté et de simplicité on raisonne dans la suite sur l'estimation d'une seule composante vibratoire de fréquence centrale et de largeur spectrale connues et dans un cas scalaire (ou monomode). Une généralisation sera apportée par la suite (paragraphe 9.7). On suppose aussi que la vibration considérée est de fréquence inférieure à la demi-fréquence d'échantillonnage.

Au même titre que pour l'estimation de la phase turbulente, on introduit un état de phase vibratoire. On réalise une estimation et une prédiction de cet état grâce aux données antérieures. On définit donc un état vibratoire  $\phi_n^{vib}$ , et durant l'intervalle de temps  $[(n-1)T, nT]$  on souhaite prédire la phase  $\phi_{n+1}^{vib}$  en fonction des données acquises jusqu'à  $(n-1)T$ . Pour cela, il faut pouvoir définir un modèle de composante vibratoire discrète, reliant  $\phi_{n+1}^{vib}$  à  $[\phi_n^{vib}, \phi_{n-1}^{vib}, \dots]$  sous la forme :

$$\phi_{n+1}^{vib} = F(\phi_n^{vib}, \phi_{n-1}^{vib}, \dots). \quad (9.1)$$

La fonction  $F$  doit être représentative du modèle d'évolution. Par souci de commodité on la prendra de préférence récursive linéaire, et de ce fait compatible avec notre modélisation linéaire du système. Ceci conduit à des représentations de type ARMA. L'ordre du filtre doit être minimal afin de réduire la complexité des calculs.

La vibration présente sur un système est un signal de nature continue. Afin de déterminer un modèle de vibration discret, on définit d'abord un modèle en temps continu de la vibration puis on le discrétise.

### 9.3.2 Modèle continu

Décrivons tout d'abord en temps continu (signal analogique) un signal vibratoire amorti  $y$  issu d'une excitation  $e$  à une fréquence  $\omega_0$ . Il répond à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_0\dot{y} + \omega_0^2y = C\omega_0^2e, \quad (9.2)$$

où  $C$  est le gain statique,  $\xi$  est le coefficient d'amortissement. (Il s'agit en somme de l'équation différentielle classique régissant le comportement d'une masse fixée sur un ressort (de coefficient d'amortissement  $\xi$ ) et soumise à une excitation). Considérant des signaux continus causaux, on applique une transformée de Laplace à l'équation précédente pour obtenir :

$$\tilde{y}(p) = H(p)\tilde{e}(p), \quad (9.3)$$

où  $H(p)$  définit le transfert entre  $\tilde{e}$  et  $\tilde{y}$  et s'écrit :

$$H(p) = \frac{C\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0p + \omega_0^2}. \quad (9.4)$$

On définit ainsi une relation de filtrage entre  $e$  et  $y$ . On s'intéresse ici uniquement au régime oscillant amorti, correspondant au cas  $0 < \xi < 1$ , le cas limite  $\xi = 0$ , correspond à une oscillation pure non amortie et n'est pas physique.

Pour trouver une représentation discrète de la relation précédente, on peut supposer en première approximation un échantillonnage de type bloqueur. On considère donc un échantillonnage de période

$T$  des signaux continus  $y$  et  $e$ , correspondant à une fréquence  $f_{ech}$  d'échantillonnage. Les signaux échantillonnés s'écrivent sous la forme :

$$y_n = y(nT), e_n = e(nT). \quad (9.5)$$

Ces signaux discrets étant eux-mêmes causaux, leurs transformées en  $z$ ,  $\tilde{y}(z)$  et  $\tilde{e}(z)$  sont liées par un transfert discret similairement à (9.3) :

$$\tilde{y}(z) = H(z)\tilde{e}(z). \quad (9.6)$$

La fonction de transfert  $H(z)$  s'obtient rigoureusement à partir de  $H(p)$  en utilisant la relation liant  $z$  à  $p$  du fait de la transformée en  $z$  :

$$z = e^{pT}, \quad (9.7)$$

conduisant à :

$$p = \frac{1}{T} \text{Log}(z). \quad (9.8)$$

Or  $H(p)$  se présente simplement sous la forme d'un filtre linéaire invariant, quotient de polynômes en  $p$  et l'on souhaite garder pour  $H(z)$  une représentation semblable, qui permette de générer un filtre ARMA. La relation précédente ne favorise pas cette solution et conduit à des expressions lourdes. Il existe cependant diverses méthodes pour réaliser cette transformation de manière approchée en privilégiant la conservation de certaines propriétés du signal analogique : la dérivée du signal, l'intégrale du signal, sa réponse impulsionnelle, indicielle, les pôles du transfert [Cottet(2002)]. Dans le cas présent on souhaite conserver au mieux la réponse fréquentielle globale du filtre. Ceci écarte la méthode d'Euler d'approximation de la dérivée, présentant en général des distorsions des caractéristiques hautes fréquences. La méthode dite homographique, d'approximation de l'intégrale du signal est généralement choisie pour sa simplicité de calcul et sa stabilité. Néanmoins elle présente un décalage du profil fréquentiel. Ce décalage est compensable mais alourdit la mise en œuvre. Dans notre cas, la méthode dite adaptée, de conservation des pôles du transfert, présente un bon compromis. Il se trouve par ailleurs que cette solution conduit au même résultat que celui des méthodes indicielle et impulsionnelle.

### 9.3.3 Discrétisation du modèle continu par transformation adaptée

Lors d'une transformation adaptée, et en considérant  $H(p)$  écrit sous la forme d'un produit d'éléments simples du premier ordre, on applique la transformation suivante :

$$\frac{1}{p - p_i} \rightarrow T \frac{1}{1 - e^{p_i T} z^{-1}}, \quad (9.9)$$

ce qui conduit à un transfert discret de la forme :

$$H(z) = C\omega_0^2 T \frac{1}{1 - 2e^{-\xi\omega_0 T} \cos(\omega_0 T \sqrt{1 - \xi^2}) z^{-1} + e^{-2\xi\omega_0 T} z^{-2}}. \quad (9.10)$$

On obtient donc un filtre numérique se présentant sous la forme d'un quotient de polynômes, c'est-à-dire sous la forme d'un filtre ARMA, que l'on peut noter :

$$H(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}. \quad (9.11)$$

En l'occurrence,  $Q$  est constant et le filtre est AR d'ordre 2.

En reprenant la relation (9.6), avec  $z^{-1}x_n = x_{n-1}$ , on déduit une relation de récurrence qui prend la forme suivante :

$$y_k = \alpha_1 y_{k-1} + \alpha_2 y_{k-2} + \beta_0 e_k, \quad (9.12)$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2e^{-\xi\omega_0 T} \cos(\omega_0 T \sqrt{1 - \xi^2}) = 2e^{-\xi\omega_0 T} \cos(\omega_r T) \\ \alpha_2 &= -e^{-2\xi\omega_0 T} \\ \beta_0 &= C\omega_0^2 T^2 \end{aligned} \quad (9.13)$$

où  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$  est la pulsation de résonance. Par la suite, le terme  $\beta_0$  sera inclus dans le terme source  $e_k$ . Dans le cas limite  $\xi = 0$ , les pôles du transfert  $H(z)$  sont sur le cercle unité trahissant une instabilité du transfert. Pour  $0 < \xi < 1$ , le transfert est stable.

Le signal d'entrée du filtre, c'est-à-dire le signal d'excitation doit enfin être défini. L'hypothèse la plus générale consiste à considérer pour ce signal un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma_e^2$ , excitant ainsi toutes les fréquences.

Ainsi, on modélise sous la forme d'un filtre AR une composante vibratoire issue d'une excitation par un signal de forme inconnue modélisé par un bruit blanc gaussien.

## 9.4 Estimation d'une composante vibratoire par filtre de Kalman

L'estimation d'une composante vibratoire par le filtre de Kalman relève de la même démarche que l'estimation de la turbulence. Nous disposons d'un modèle permettant de décrire la composante vibratoire que l'on souhaite estimer. Le vecteur d'état est donc étendu pour prendre en compte les états vibratoires. La structure globale du filtre de Kalman est conservée. Les équations d'état et d'observation sont modifiées en conséquence.

### 9.4.1 Quelques hypothèses simplificatrices

On considère d'abord, par souci de simplicité, que la turbulence est estimée sur une base de  $m$  modes de Zernike, et que l'estimation de composantes vibratoires est menée sur l'ensemble de ces modes. On suppose aussi qu'une seule composante vibratoire est estimée pour chaque mode. L'extension des résultats suivants à l'estimation de composantes vibratoires, multiples, sur plusieurs modes spécifiques est discutée ultérieurement (paragraphe 9.7) ainsi que les conséquences sur le vecteur d'état et la complexité des calculs. Enfin, il est important de noter que dans toute la suite on suppose que la vibration estimée sur chaque mode est découplée des vibrations présentes sur tous les autres modes. Cette hypothèse de découplage permet de simplifier cette étude. Dans la pratique, on peut s'attendre cependant à la présence de couplages entre les vibrations modales. Une étude de l'influence du couplage sur la performance de la commande proposée devrait alors être menée. On peut aussi envisager de prendre en compte de tels couplages dans la commande. Ce problème sera évoqué dans le cadre des validations expérimentales en paragraphe 15.6.

### 9.4.2 Choix du vecteur d'état, mise en équation du filtre

En reprenant l'analyse qui a été menée lors du choix du vecteur d'état dans le cas de l'estimation de la turbulence, on voit très vite que l'estimation d'une composante vibratoire suit les mêmes

contraintes. On a donc besoin de trois occurrences de phase vibratoire. Le vecteur d'état devient donc (en reprenant l'écriture initiale, c'est-à-dire la plus complète et la plus explicative) :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{vib} \\ \phi_n^{vib} \\ \phi_{n-1}^{vib} \\ \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tur} \\ \phi_{n-1}^{tur} \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (9.14)$$

Le paragraphe 9.3.3 a permis de modéliser le phénomène vibratoire sous la forme d'un AR du second ordre de la forme (équation 9.12) :

$$\phi_n^{vib} = \alpha_1 \phi_{n-1}^{vib} + \alpha_2 \phi_{n-2}^{vib} + e_n, \quad (9.15)$$

où  $e_n$  représente le bruit excitateur, source de la vibration.

Les équations du modèle d'état et d'observation s'écrivent donc :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathcal{A}\mathbf{X}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n + \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e_n, \quad (9.16)$$

$$\mathbf{y}_n = (0 \ 0 \ \mathbf{D} \ 0 \ 0 \ \mathbf{D} \ 0 \ -\mathbf{DN}) \mathbf{X}_n + \mathbf{w}_n. \quad (9.17)$$

$\mathcal{A}$  est définie par :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{vib} & \mathbf{A}_2^{vib} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}^{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.18)$$

avec  $\mathbf{A}_1^{vib} = \alpha_1 \mathbf{Id}$  et  $\mathbf{A}_2^{vib} = \alpha_2 \mathbf{Id}$ , comme définis dans les équations 9.12 et 9.13.

Le calcul du vecteur de tension relève de l'étape de commande. On constate déjà au travers de cette mise en équation que la gestion de chaque cas de vibration (bruit ou perturbation) est aisée :

- filtrer la vibration jouant le rôle de bruit revient à l'estimer mais ne pas la prendre en compte dans la correction. On déduit donc que  $\mathbf{u}_n$  est lié uniquement à  $\hat{\phi}_{n+1/n}^{vib}$  selon l'équation (5.64) ;
- corriger la vibration jouant le rôle de perturbation consiste cette fois à considérer le signal total vibration plus turbulence comme le signal à corriger. La commande  $\mathbf{u}_n$  est donc liée à  $\hat{\phi}_{n+1/n}^{tur} + \hat{\phi}_{n+1/n}^{vib}$ .

Ces deux gestions différentes de la vibration peuvent ainsi reposer sur le même estimateur de la turbulence et de la vibration. Cependant, les deux paragraphes suivants montrent que l'étape d'estimation peut dans chaque cas être simplifiée, diminuant d'autant la complexité de la loi de commande.

### 9.4.3 Stabilité, observabilité, commandabilité

Ce paragraphe se penche sur les trois propriétés standard du modèle que sont stabilité, observabilité et commandabilité. L'introduction des composantes de vibration et la modification du modèle d'état oblige en effet à reconsidérer ces propriétés.

La stabilité du modèle d'état ainsi défini est *a priori* acquise, puisqu'on considère finalement la mise en parallèle de systèmes stables : on a déjà souligné la stabilité du modèle de turbulence, le modèle vibratoire est, quant à lui, évidemment stable dès que  $\xi > 0$  (il s'agit d'un système amorti, son énergie se dissipe). On va cependant en faire la vérification numérique.

On étudie la stabilité du modèle d'état proposé en étudiant les zéros du polynôme caractéristique de  $\mathcal{A}$  donnée par (9.18) (paragraphe 4.5.3). On rappelle que  $\mathbf{A}^{tur}$  est diagonale d'éléments diagonaux  $a_{ii}^{tur}$ , que chaque vecteur de phase est exprimé sur  $m$  modes et que les vecteurs de tension sont par hypothèse de taille  $q$ . On montre par récurrence sur le nombre de modes que le polynôme caractéristique de la matrice définie par :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{vib} & \mathbf{A}_2^{vib} & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.19)$$

est donné par  $\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{Id}) = (\lambda(\lambda(\alpha_1^{vib} - \lambda) + \alpha_2^{vib}))^m$ . Par conséquent le polynôme caractéristique de  $\mathcal{A}$  s'écrit :

$$\det(\mathcal{A} - \lambda \mathbf{Id}) = (-\lambda)^{(3m+2q)} (-\lambda(\alpha_1^{vib} - \lambda) - \alpha_2^{vib})^m \prod_{i=1}^{i=m} (a_{ii}^{tur} - \lambda). \quad (9.20)$$

Les racines du polynôme caractéristique sont donc 0, les  $a_{ii}^{tur}$ , et les solutions de :

$$\lambda^2 - \alpha_1^{vib} \lambda - \alpha_2^{vib} = 0 \quad (9.21)$$

données par :

$$\lambda = e^{-\xi \omega_0 T} (\cos(\omega_r T) \pm i \sin(\omega_r T)). \quad (9.22)$$

Sachant que les  $a_{ii}^{tur}$  sont choisis pour être de module strictement inférieur à 1, la stabilité du filtre est assurée dès lors que  $\xi$  est strictement positif.

La stabilité du système permet alors de conclure quant à la convergence de l'équation de Riccati. Il est à noter que la résolution de l'équation de Riccati dans ce contexte de filtrage de composantes vibratoires ne permet plus d'exploiter les simplifications proposées au paragraphe 7.3.2, en raison du couplage apparaissant entre les composantes turbulentes et vibratoires. Les méthodes plus sophistiquées proposées au paragraphe 7.3.3 pour accélérer la recherche de la solution de l'équation de Riccati et la réduction de la dimension du vecteur d'état (paragraphe 7.2) peuvent néanmoins s'appliquer.

Les conclusions quant à l'observabilité et la commandabilité du système ainsi modélisé sont similaires à celles obtenues en l'absence de gestion de vibrations et présentées en paragraphe 4.5.3. Le système n'est pas commandable puisque seules les tensions de commande le sont, la turbulence et les vibrations ne pouvant être commandées. Le système n'est pas non plus observable, pour les raisons déjà évoquées en paragraphe 4.5.3.3.

## 9.5 Cas du bruit de vibration : filtrage

On particularise ici le modèle proposé en paragraphe 9.4.2 au cas particulier de vibrations présentes uniquement sur la voie d'analyse, représentant un bruit de mesure à filtrer. Dans ce cas on ne s'attache qu'à l'estimation séparée de la turbulence et des vibrations, pour réaliser ensuite la correction seule de la turbulence. Le vecteur d'état comprendra donc deux parties, l'une visant à l'estimation de la phase vibratoire  $\phi^{vib}$ , l'autre issue du modèle standard d'estimation et correction de la phase turbulente, comprenant trois occurrences de phase turbulente  $\phi_{n+1}^{tur}$ ,  $\phi_n^{tur}$ ,  $\phi_{n-1}^{tur}$ . Mais dans ce cas précis, on n'a plus besoin de la phase vibratoire à l'instant suivant  $n + 1$  pour le calcul de la tension  $\mathbf{u}_n$ . le choix de la partie vibratoire du vecteur d'état n'est plus conditionné que par deux contraintes. D'une part, la mesure  $\mathbf{y}_n$  à l'instant  $n$  est liée à la phase turbulente et vibratoire à l'instant  $n - 1$ . On a donc besoin de  $\phi_{n-1}^{vib}$  dans notre vecteur d'état. D'autre part, on a besoin de deux occurrences de phase vibratoire pour exprimer la suivante (modèle AR2). Par conséquent on peut supprimer une composante vibratoire et se ramener au vecteur d'état suivant :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \phi_n^{vib} \\ \phi_{n-1}^{vib} \\ \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tur} \\ \phi_{n-1}^{tur} \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}, \quad (9.23)$$

Les équations d'état et de mesure du système s'écrivent alors :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{vib} & \mathbf{A}_2^{vib} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}^{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n + \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e_n, \quad (9.24)$$

$$\mathbf{y}_n = (0 \quad \mathbf{D} \quad 0 \quad 0 \quad \mathbf{D} \quad 0 \quad -\mathbf{DN}) \mathbf{X}_n + \mathbf{w}_n. \quad (9.25)$$

Cette forme permet l'estimation séparée de la composante vibratoire présente dans les mesures et de la composante turbulente. Dans cette formulation, seule la composante turbulente est corrigée. Ainsi, on ne se soustrait pas à l'effet de la vibration sur la mesure, mais on n'agit pas sur elle et on ne l'amplifie donc pas. La commande est alors déduite uniquement de la partie turbulente du vecteur d'état :  $\mathbf{u}_n$  est lié uniquement à  $\hat{\phi}_{n+1/n}^{vib}$

La forme finale de l'estimateur et de la commande sont alors déduites de la même façon que pour l'estimation et la correction d'une turbulence seule (voir paragraphe 5.5).

## 9.6 Cas de la perturbation : correction

Dans le cas précédent, l'absence de correction de la vibration a permis de réduire la taille du vecteur d'état et donc le coût calculatoire global. Dans ce second cas, il faut néanmoins estimer et

corriger la turbulence. Pourtant, il est aussi possible d'appliquer une légère simplification du vecteur d'état afin de réduire la taille des matrices et donc le coût calculatoire des opérations. En choisissant le vecteur d'état suivant, on réduit d'un sixième la taille des vecteurs et matrices impliqués :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{vib} \\ \phi_n^{vib} \\ \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tot} \\ \phi_{n-1}^{tot} \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}, \quad (9.26)$$

où la phase totale intervient. Deux occurrences de phase vibratoire sont isolées en raison du modèle d'évolution du second ordre, tandis que seule une occurrence de phase turbulente est isolée. Les équations d'évolution et de mesure s'écrivent avec cette dernière forme du vecteur d'état :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{vib} & \mathbf{A}_2^{vib} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}^{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n + \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e_n, \quad (9.27)$$

$$\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{D} & 0 & -\mathbf{D}\mathbf{N} \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \mathbf{w}_n. \quad (9.28)$$

Le vecteur de tension  $\mathbf{u}_n$  est alors calculé grâce à  $\hat{\phi}_{n+1/n}^{tot} = \hat{\phi}_{n+1/n}^{tur} + \hat{\phi}_{n+1/n}^{vib}$ . Ainsi, c'est la phase totale, regroupant la turbulence estimée et la composante vibratoire estimée qui est corrigée. Enfin, comme mentionné précédemment il est encore possible de réduire la taille des vecteurs et matrices en prenant en compte le fait que trois occurrences de phase ne sont pas indispensables. Ce point est rediscuté au chapitre 7.

## 9.7 Nombre de modes, de vibrations et complexité

Jusqu'à présent, plusieurs hypothèses simplificatrices ont été faites : une unique composante vibratoire par mode, une vibration identique sur chaque mode, présence de la vibration sur tous les modes, découplage de la vibration entre modes. Or, les trois premières hypothèses peuvent être entièrement relâchées sans changer pour autant le modèle établi précédemment et la forme des équations proposées.

La commande établie précédemment est tout d'abord indifférente aux caractéristiques de la vibration présente sur chaque mode. Autrement dit, on peut filtrer sur chaque mode une vibration différente sans rien modifier aux résultats précédents. Il suffit pour cela de considérer pour  $\mathbf{A}_1^{vib}$  et  $\mathbf{A}_2^{vib}$  des matrices diagonales  $\mathbf{A}_1^{vib} = \text{diag}(\alpha_{1,i}^{vib})$  et  $\mathbf{A}_2^{vib} = \text{diag}(\alpha_{2,i}^{vib})$  pour  $1 < i < n$  où les  $\alpha_{1,i}^{vib}$  et  $\alpha_{2,i}^{vib}$  sont définis pour chaque mode. Ainsi on notera que le calcul de stabilité prend la forme suivante :

$$\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{Id}) = (-\lambda)^m \prod_{i=1}^{i=m} (-\lambda(\alpha_{1,i}^{vib} - \lambda) - \alpha_{2,i}^{vib}), \quad (9.29)$$

et conduit à la même conclusion que précédemment : les coefficients  $\xi_i$  désormais définis par mode, doivent être non nuls.

Il est aussi très simple de réduire le filtrage de vibration à quelques modes spécifiques. Il suffit de réduire la partie vibration du vecteur d'état au nombre de modes considérés et d'adapter les matrices. Ainsi, par exemple, dans le cas de l'estimation et de la correction de vibrations présentes sur  $p < m$  modes quelconques, on pourra considérer le modèle suivant :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{vib} & \mathbf{A}_2^{vib} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}^{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{T} & 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n + \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_n, \quad (9.30)$$

$$\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}_m & 0 & -\mathbf{D}_m \mathbf{N} \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \mathbf{w}_n. \quad (9.31)$$

La matrice  $\mathbf{T}$  introduite dans l'équation d'état permet de sommer les contributions vibratoires et turbulentes d'un même mode (c'est donc une matrice rectangulaire remplie de 1 et de 0 de taille  $m \times p$ ), la matrice  $\mathbf{D}_m$  rend compte du modèle de mesure restreint aux  $m$  modes concernés par l'estimation. Cette évolution est sans conséquence sur le calcul de stabilité, d'observabilité ou de commandabilité du système. Par contre, il y a évidemment un gain calculatoire à ne considérer que les modes impliqués dans la composante vibratoire. Ce gain peut être chiffré en reprenant les éléments de coût calcul présentés au chapitre 7.

Une autre hypothèse simplificatrice concerne le nombre de composantes de vibration estimées par mode. Jusqu'à présent une seule vibration a été systématiquement considérée sur chaque mode. Généralement plusieurs vibrations sont présentes par mode sur un système réel, comme le montre les tests effectués sur NAOS [Rousset *et al.* (2002)] ou sur le banc BOA qui sera présenté en 12. Ce cas peut aussi être pris en compte. Considérons pour simplifier qu'un seul mode de la phase est confronté à des vibrations. Supposons qu'il soit malheureusement confronté à  $v$  vibrations (vibration 1,  $vib_1$  et vibration 2,  $vib_2$ , etc). En considérant que chaque vibration est une perturbation indépendante des autres (raisonnement analogue pour un bruit), alors il faut estimer autant de composantes de vibration pour ce mode qu'il y a de vibrations. C'est-à-dire, en notant que  $\phi^{vib}$  est désormais un unique mode, le vecteur d'état prend la forme (toujours en considérant une vibration de type perturbation) :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{vib_1} \\ \phi_n^{vib_1} \\ \dots \\ \phi_{n+1}^{vib_v} \\ \phi_n^{vib_v} \\ \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tot} \\ \phi_{n-1}^{tot} \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (9.32)$$

On peut enfin étendre ce raisonnement à  $v_p$  vibrations différentes sur  $p$  modes quelconques. Il est à noter que la complexité des équations et le coût calcul augmente substantiellement lors du filtrage de



plusieurs vibrations. Néanmoins, soulignons que le filtrage de vibration concerne en général quelques vibrations sur un nombre restreint de modes. La complexité introduite par le filtrage de vibrations reste en général bien inférieure à la complexité de la partie de la commande corrigeant la turbulence.

## 9.8 Identification des paramètres d'une composante vibratoire : premiers éléments

Si on dispose désormais d'un modèle AR du second ordre pour modéliser en temps discret une vibration, et en déduire la loi de commande adaptée à son filtrage, il reste malheureusement à en définir les paramètres. C'est-à-dire qu'il faut pouvoir estimer les grandeurs  $\omega_0$ ,  $\xi$  et  $\sigma_e^2$ . Ce paragraphe s'intéresse donc à l'identification de ces paramètres. Cette étape sera cruciale lors des tests expérimentaux pour définir le modèle *a priori* de la vibration. Seul le problème d'identification des paramètres à partir de données préalablement acquises est considéré ici. La problématique plus générale d'identification dynamique de paramètres n'est pas abordée. Il s'agit pour l'heure de se doter d'une première méthode d'identification simple. Néanmoins, des méthodes plus systématiques d'identification sont à envisager. Le problème est discuté en fin de paragraphe.

Par souci de simplicité, le problème d'identification est traité dans un premier temps dans un cas scalaire, c'est-à-dire par exemple dans le cas d'une vibration présente sur un mode donné de la phase, exprimée dans la base des polynômes de Zernike. L'extension de ces résultats au cas multi-modale est discuté par la suite.

L'estimation des divers paramètres peut être envisagée à partir de mesures issues d'instruments de calibration indépendants de l'OA (accéléromètres, analyseur de spectres...). Le risque est alors qu'ils donnent des informations générales sur les vibrations de la structure sans donner l'information primordiale pour le système : leurs effets sur les mesures et sur les modes de la phase. On considère donc l'identification de ces paramètres à partir des mesures mêmes du système d'OA. Comme souligné précédemment, on s'intéresse uniquement à des vibrations apparaissant sur les mesures ASO, qu'elles soient aussi présentes ou non sur la voie imagerie. L'identification va donc exploiter ces mesures ASO.

Un premier réflexe pour identifier ces paramètres peut être d'utiliser les méthodes dites de Yule Walker [Idier *et al.*(1993)], méthodes utilisées par Dessenne [Dessenne(1998)], pour approximer un signal temporel par un auto-régressif d'ordre choisi et les méthodes associées. Dans le cas présent, la vibration est cependant noyée dans le signal turbulent, compliquant une telle extraction. Par conséquent le processus d'identification va directement porter sur les paramètres physiques de la vibration : fréquence centrale, coefficient de couplage (ou de manière équivalente largeur à mi-hauteur), énergie. Les coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont en effet directement reliés à ces paramètres d'après (9.13).

### 9.8.1 Identification de la fréquence de vibration

Le tout premier paramètre d'intérêt est la fréquence centrale de la vibration. L'identification de ce paramètre peut reposer sur l'étude du spectre temporel du mode d'intérêt. Évidemment, il s'agit alors de repérer dans la mesure un pic dû à la vibration. Néanmoins, les spectres obtenus de mesures expérimentales sont en général bruités et difficiles à exploiter. Des méthodes de lissage du spectre pour en atténuer le bruit peuvent être exploitées, dans la mesure où le signal vibratoire n'est pas dégradé. Il peut être plus simple de considérer la DSP cumulée  $DSPI(f)$  définie par :

$$DSPI(f) = \int_0^f DSP(\nu) d\nu. \quad (9.33)$$

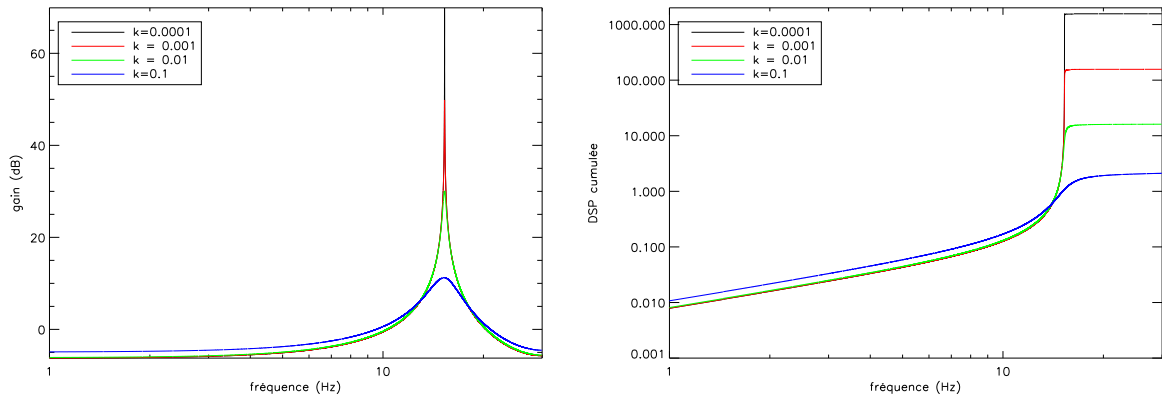


FIG. 9.2 – DSP et DSP cumulées de vibrations générées avec le modèle discret AR2 de l'équation (9.12). Divers coefficients de couplages sont considérés (noté  $k$  ici, en lieu et place de  $\xi$ ). La fréquence de résonance est de 15 Hz et  $f_{ech} = 60$  Hz,  $\sigma_e^2 = 1$ . On note l'atténuation du pic de résonance et du saut d'énergie avec l'augmentation du coefficient de couplage.

Elle permet de moyenniser les effets du bruit d'estimation de la DSP. La présence d'une vibration se traduit par un changement, plus ou moins brusque, du profil de la DSP cumulée. Pour exemple, la figure 9.2 gauche présente la DSP de vibrations générées selon le modèle AR2 proposé en paragraphe 9.3.3, pour divers coefficients de couplage et une fréquence de résonance de 15 Hz ( $f_{ech} = 60$  Hz, ce sont des conditions proches de celles du banc BOA). Le terme de bruit d'excitation est pris tel que  $\sigma_e^2 = 1$ . A droite sont tracées les DSP cumulées associées. Le saut d'énergie constaté est caractéristique. Cette analyse de la DSP cumulée peut être soit 'visuelle' et 'manuelle' et donc peu rapide, soit peut reposer sur divers algorithmes de recherche des irrégularités de la DSP. Dans le cadre expérimental, une approche 'manuelle' a été retenue, le problème de l'identification et de son automatiser dépassant le cadre de ces travaux.

### 9.8.2 Identification du coefficient d'amortissement

L'identification du coefficient d'amortissement est fortement reliée à l'analyse précédente. En effet, le coefficient d'amortissement est lié à la largeur à mi-hauteur  $\Delta f$  du pic de résonance de la vibration. Un calcul simple de cette largeur permet alors de montrer que pour des valeurs de  $\xi$  faibles ( $\xi \leq 0.5$ ), on a la relation :

$$\Delta f \simeq \sqrt{14}\xi \quad (9.34)$$

L'estimation de la largeur spectrale peut se faire elle aussi à partir de l'analyse de la DSP ou de la DSP intégrée et de la largeur spectrale de la transition observée.

### 9.8.3 Identification du paramètre $\sigma_e^2$

Le paramètre  $\sigma_e^2$  est plus difficile à évaluer. Ce paramètre conditionne l'énergie de la vibration modélisée. En effet, rappelons que la densité spectrale  $DSP_y(\nu)$  d'un signal auto-régressif  $y$  peut s'écrire sous la forme :

$$DSP_y(\nu) = \sigma_e^2 \frac{1}{\|1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{2i\pi\nu}\|^2} = \sigma_e^2 R(\nu). \quad (9.35)$$

Par conséquent,  $\sigma_e^2$  est un coefficient multiplicatif dans l'énergie de la vibration associée au signal  $y$ . On peut noter que le terme  $R(\nu)$  ne dépend dans le cas de notre modèle AR2 que de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , termes connus dès que  $f$  et  $\xi$  ont été estimés. Il n'est guère envisageable de calculer, pour un couple  $(f, \xi)$  donné,  $R(\nu)$  puis d'essayer de faire correspondre cette fonction avec la DSP intégrée d'une série temporelle de mesures. On sera gêné par la partie turbulente de la mesure et la définition d'un critère de ressemblance des courbes. Par contre, on peut remarquer qu'il est aisé de chiffrer sur une DSP cumulée expérimentale le saut d'énergie  $\Delta E_{exp}$  introduit par la vibration. De la même manière on peut tenter de chiffrer un même saut d'énergie  $\Delta E_{th}(f, \xi)$  sur une DSP cumulée théorique obtenue pour des coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  issus de l'estimation de  $f$  et  $\xi$ , et avec un paramètre  $\sigma_e^2 = 1$ . Le rapport  $\Delta E_{exp}/\Delta E_{th}(f, \xi)$  doit permettre de déduire le paramètre  $\sigma_e^2$  permettant de modéliser au mieux notre vibration. On s'intéresse donc au calcul de  $\Delta E_{th}(f, \xi)$ , pour un couple  $(f, \xi)$  connu et  $\sigma_e^2 = 1$ . On peut d'ores et déjà souligner que l'énergie totale du modèle AR2 de vibration  $y$ ,  $\int_0^{f_{ech}} DSP_y(\nu) d\nu$  vérifie (avec  $\sigma_e^2 = 1$ ) :

$$\int_0^{f_{ech}} DSP_y(\nu) d\nu = \int_0^{f_{ech}} R(\nu) d\nu \simeq \Delta E_{th}(f, \xi). \quad (9.36)$$

L'énergie du signal est essentiellement contenue dans sa résonance. Ceci est d'autant plus vrai que  $\xi$  est faible c'est-à-dire que la résonance est importante. Cette propriété apparaît en figure 9.2 droite. Ainsi, on simplifie le calcul de  $\Delta E_{th}(f, \xi)$  en l'égalisant à l'énergie totale de la vibration. Le calcul de  $\sigma_e^2$  s'en trouve simplifié aussi. Cette méthode sera mise en pratique en validation expérimentale en paragraphe 15.3.2.

## 9.8.4 Vers une identification automatique des paramètres de la vibration

Les méthodes présentées précédemment sont rustiques et adaptées à la validation expérimentale. Elles s'appliquent dans un contexte relativement simple, où quelques vibrations clairement identifiables sont présentes et invariantes dans le temps. Dans la pratique, les vibrations seront très probablement multiples, présentes sur divers modes, et aux caractéristiques variées. On peut s'attendre aussi à une évolution de leurs propriétés au cours du temps. Il est difficilement concevable aussi d'envisager un contrôle humain sur un système de type astronomique. Ceci impose donc de définir des méthodes d'identification des vibrations automatiques, permettant d'alimenter par la suite la commande. On se propose ici lister quelques propriétés, caractéristiques ou contraintes nécessaires à une éventuelle méthode d'identification des vibrations. On propose par la suite quelques pistes, basées sur des travaux exploratoires menés à l'ONERA ou des éléments bibliographiques.

### 9.8.4.1 Contexte pour le choix d'une méthode d'identification

Il est difficile de définir à l'avance les contraintes propres au système sur lequel un tel processus d'identification (et de filtrage) sera implanté. On peut toutefois isoler quelques éléments. Tout d'abord, dans le contexte de l'OA, il faut garder à l'esprit que les vibrations sont à rechercher non pas au sein d'un bruit blanc, mais d'une mesure de phase turbulente, probablement résiduelle si on essaye de travailler en boucle fermée pour optimiser le processus et le temps d'exploitation. On travaillera donc sur un fond structuré, ce qui peut être à la fois pénalisant dans le cadre de certaines méthodes d'identification (travaillant sur bruit blanc) et un point positif si on peut exploiter une certaine connaissance de cette structure résiduelle. En particulier, on peut supposer que les vibrations les plus dommageables seront celles situées près ou au-delà de la fréquence de coupure à 0 dB du système. En-deçà, l'atténuation de la boucle de correction devrait suffire à résorber les vibrations (à moins de pics de vibrations

très énergétiques à basse fréquence, mais dans ce cas des solutions matérielles existent). Au-delà de la fréquence de coupure, le profil spectral de la phase résiduelle est essentiellement asymptotique (voir paragraphe 1.4.2) et donc de structure simple. Ces éléments fixent une bande spectrale d'intérêt et la nature du signal de fond sur lequel chercher les vibrations. En contrepartie, il est difficile de présu-mer de la nature, de la variabilité et du nombre de vibrations. Il est donc nécessaire de prévoir une méthode d'identification assez souple pour envisager l'identification de vibrations de nature diverses (au sens de leur largeur spectrale, leur fréquence centrale), et une identification régulière. Le nombre de vibrations recherchées est un problème en soi. D'une part, les contraintes calculatoires limitent le nombre de composantes corrigeables et identifiables. D'autre part, on risque à trop en identifier de faire une analyse de composantes bénignes voire liées au bruit. L'application d'un seuil, certainement énergétique, conjointement à une borne supérieure de vibrations identifiées serait une solution, mais encore faudrait-il pouvoir classer les vibrations pour sélectionner les plus dommageables plutôt que les  $n$  premières trouvées. Tout ceci reste une analyse fondée sur des hypothèses, et quelques éléments physiques simples et mériterait une analyse plus approfondie. Il s'agit seulement de brosser un tableau succinct du contexte applicatif. Le paragraphe suivant évoque quelques solutions au problème d'identification.

#### 9.8.4.2 Méthodes d'identification

Le problème d'identification de composantes sinusoïdales n'est pas nouveau et divers algorithmes sont d'ores et déjà utilisés dans des contextes applicatifs variés (milieu industriel, contrôle de position, communications, acoustique...). Il reste toutefois l'objet de nombreux travaux de part sa complexité. Voici quelques exemples de méthodes existantes.

**Méthode de Prony et Pisarenko** Il s'agit pour ces méthodes de décomposer le signal en une composante déterministe (les vibrations) et une composante de bruit. Le signal résultant est modélisé sous la forme d'un AR (méthode de Prony) ou d'un ARMA (méthode de Pisarenko). Ces méthodes permettent l'estimation de la fréquence des composantes harmoniques par l'estimation des coefficients de l'AR (ou ARMA). Elles reposent sur des approches de type maximum de vraisemblance. Ces méthodes découplent l'estimation des fréquences et des amplitudes. La résolution d'un second système linéaire permet d'évaluer les amplitudes *a posteriori*. Ces méthodes sont cependant dédiées à l'identification de sinusoïdes, sur un bruit blanc. Il est possible de blanchir le signal avant application de ces méthodes si on dispose de sa fonction de covariance. Dans le cas contraire les méthodes précédentes sont inadaptées et on s'oriente plus souvent vers les méthodes présentées ci-dessous. Il est difficile de dire si ces méthodes s'appliquent au problème des vibrations possédant une largeur spectrale significative. Enfin, elles pâtissent d'un certain nombre de relations non-linéaires (entre coefficients des ARMA recherchés et fréquences de vibrations) conduisant à des difficultés calculatoires, notamment en terme de précision.

**Méthode par filtre de Kalman étendu** Il s'agit là de l'extension du filtre de Kalman aux modèles non-linéaires. Le principe repose sur une linéarisation de la fonction non-linéaire autour de l'état estimé courant. On exploite alors tout le potentiel de l'observateur en s'appuyant sur des modèles, qui peuvent intégrer une connaissance *a priori* du système, notamment du signal turbulent résiduel jouant le rôle de bruit additif. La difficulté repose alors dans le choix des modèles.

**Méthode par minimisation d'un critère quadratique sur la DSP** Le processus d'identification peut exploiter notre connaissance *a priori* de la structure des signaux en présence. On sait par

exemple qu'une vibration se modélise très bien grâce à un filtre AR2. De la même manière, on peut proposer un modèle auto-régressif de la turbulence. Jusque-là un modèle de type AR1 a été exploité étant donnés les besoins restreints de la loi de commande (connaissance de la décorrélation à 1 pas de la turbulence). On peut cependant envisager un modèle d'ordre supérieur (on peut vérifier qu'un modèle d'ordre 3 ou 4 fournit une bonne approximation). Dans ces conditions, il s'agit d'identifier les paramètres des modèles auto-régressifs à partir des mesures obtenues. Une telle identification peut reposer sur la minimisation d'un critère quadratique portant sur les Densités Spectrales de Puissance temporelles des signaux. Ainsi, considérons un signal mesuré  $y(n)$ , et supposons qu'il représente une mesure d'une composante modale de la turbulence, incluant  $k$  vibrations. On désigne par  $DSP_y(\nu)$  la densité spectrale de puissance temporelle de  $y(n)$ , estimée à partir d'un échantillon de mesure. On rappelle qu'un signal  $u(n)$  défini comme un AR d'ordre  $p$  de paramètres  $\{\alpha_{1 \leq j \leq p}, \sigma_e^2\}$  s'écrit :

$$u(n) = \sum_{j=1}^p \alpha_j u(n-j) + e(n), \quad (9.37)$$

où  $e$  est un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma_e^2$ . La DSP de ce signal est donnée par :

$$DSP_u(\nu) = \sigma_e^2 \frac{1}{\|1 + \sum_{j=1}^p \alpha_j e^{(2i\pi\nu)}\|^2}. \quad (9.38)$$

On modélise *a priori* la composante turbulente de  $y(n)$  par un AR d'ordre  $l$ , noté  $s(n)$ , de paramètres  $\{\alpha_{1 \leq j \leq l}^s, \sigma_{e^s}^2\}$  et les  $k$  vibrations par des AR 2 notés  $v_i(n)$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ , de paramètres  $\{\alpha_{1 \leq j \leq 2}^v, \sigma_{e^{v_i}}^2\}$ .

On se propose donc d'identifier simultanément le modèle de turbulence et de vibration en minimisant le critère quadratique suivant :

$$J(x) = \sum_{\nu} \left\| DSP_y(\nu) - \left( DSP_s + \sum_{i=0}^k DSP_{v_i} \right) (\nu, x) \right\|^2, \quad (9.39)$$

où le vecteur  $x$  désigne l'ensemble des paramètres des modèles AR de la turbulence et des vibrations, c'est-à-dire que :

$$x = (\alpha_{1 \leq j \leq l}^s, \sigma_{e^s}^2, \alpha_{1 \leq j \leq 2}^v, \sigma_{e^{v_i}}^2) \quad (9.40)$$

L'objectif est ainsi de minimiser la fonctionnelle à valeur scalaire  $J(x)$  relativement à  $x$ . On détermine ainsi les paramètres des diverses vibrations présentes.

Cette approche semble apparemment plus simple que les précédentes. Les méthodes de minimisation de critère quadratique sont nombreuses et peuvent aisément inclure des contraintes supplémentaires, par exemple des bornes sur les paramètres des vibrations trouvées. Les méthodes de descente par gradient conjugué en sont un exemple. On dispose en effet de l'expression analytique, relativement simple, des AR impliqués. Des premiers travaux exploratoires ont été menés. Ils montrent que le critère  $J(x)$  est néanmoins non convexe, et présente des minima locaux nombreux. La recherche de solution n'est donc pas aisée. L'utilisation de méthodes de préconditionnement ou le choix d'un autre critère seraient à considérer.

## Chapitre 10

# Quelques extensions : composantes statiques et saturation des tensions

### 10.1 Introduction

Ce chapitre discute de l'extension de la commande optimale à deux autres problématiques que sont les composantes statiques et la saturation des tensions de commande. Il s'agit là de problématiques très concrètes, directement inspirées de l'expérience acquise à l'implantation de la commande sur le banc BOA.

D'une part, tout système d'OA présente des défauts optiques. Qu'ils soient dûs à des défauts d'alignement, ou aux limites technologiques de réalisation d'optiques de qualité, ces défauts se traduisent par l'introduction dans le système d'aberrations, le plus souvent statiques, parfois lentement variables (effets thermiques). Ces défauts ne sont en général relevés que sur la voie imagerie, où ils conduisent à une dégradation de la qualité finale des images corrigées par OA. Ce sont les fameuses aberrations non communes (voir paragraphe 2.5.3), non vues par le système d'OA et donc non corrigées, que certains procédés permettent cependant de réduire (voir paragraphe 12.4). Des aberrations statiques existent aussi sur la voie d'OA. Les correcteurs de type intégrateur corrigent naturellement ces composantes. Cependant, il n'en est pas exactement de même pour la commande LQG proposée. En effet, le modèle de turbulence utilisé définit une turbulence à moyenne nulle, et présentant une certaine évolution temporelle. Les aberrations statiques semblent donc ne pas pouvoir être gérées complètement par la commande optimale ainsi définie.

D'autre part, l'attention a été portée jusqu'à présent sur l'estimateur (le filtre de Kalman) et son extension à diverses applications spécifiques. La commande du miroir a le plus souvent été négligée en faisant quelques hypothèses simplificatrices. Les miroirs sont supposés avoir une dynamique temporelle parfaite. Leur réponse en tension est supposée linéaire, et non bornée. Dans la pratique, tous les miroirs présentent une course finie. Cet aspect peut représenter une limitation lorsque la turbulence est trop forte par rapport aux possibilités de correction du miroir. Il est donc légitime de se préoccuper des limitations imposées par la dynamique du miroir. Tôt ou tard, l'implantation concrète de notre loi de commande sur un vrai système devra tenir compte de ces limitations des miroirs.

Enfin, nous résumons l'ensemble des problèmes traités dans cette partie, dont l'objectif principal aura été l'analyse de la loi de commande et la préparation d'une mise en œuvre expérimentale.

Ainsi, le paragraphe 10.2 aborde la problématique du filtrage de composante statique, en proposant une solution de commande et en analysant ses propriétés et ses limitations. Le paragraphe 10.3 traite de la problématique de la correction et plus particulièrement du phénomène de saturation des

commandes. Une solution de commande assurant l'estimation optimale et stable est proposée.

## 10.2 Gestion des composantes statiques

Ce paragraphe traite du problème des composantes statiques communes d'une OA et de leur gestion par une commande optimale. En effet, le modèle d'état ne rend pas compte de la présence de ces composantes, dont l'évolution spatio-temporelle ne correspond pas au modèle d'évolution de la turbulence. On peut donc s'interroger sur l'effet de ces composantes et éventuellement la façon de les filtrer. Dans le cadre de l'OA, cette remarque peut cependant être relativisée. L'évolution temporelle de la turbulence est généralement relativement lente par rapport à la vitesse d'échantillonnage du système. Composantes turbulentes dynamiques et composantes statiques peuvent donc aisément être traitées de manière identiques. Les fonctions de transfert présentées au chapitre 8 montrent d'ailleurs une atténuation non nulle et significative à basse fréquence.

Cependant, les aberrations statiques posent un tout autre problème dans le cadre d'applications de type tomographique. En effet, ces applications reposent sur l'interpolation de la turbulence entre différentes directions d'analyse, ou l'extrapolation de celle-ci dans une direction différente de la direction d'analyse. Cette reconstruction de la turbulence dans un champ non analysé repose sur les propriétés spatio-temporelles de la turbulence. Or les aberrations statiques, si elles sont vues par le ou les analyseurs, n'ont aucune raison d'être estimées dans des directions autres que celles d'analyse. La validation expérimentale d'OAAO donnera un exemple flagrant de ce phénomène (chapitre 16). Il convient donc d'identifier les cas pour lesquels ces composantes deviennent problématiques et le cas échéant d'isoler ces composantes de la turbulence.

Le filtrage d'aberrations statiques a été proposé par Le Roux [Le Roux(2003)] pour montrer la versatilité du filtre de Kalman et sa capacité à prendre en compte aisément de nouvelles perturbations identifiées. Ce paragraphe reprend ce concept de filtrage des aberrations statiques, mais sous un jour plus applicatif et pragmatique : ce filtrage sera indispensable dans la pratique en OAAO.

Aussi, le paragraphe 10.2.1 montre comment les composantes statiques peuvent être estimées et corrigées spécifiquement par notre loi de commande. La stabilité, la commandabilité et l'observabilité du modèle d'état modifié sont rediscutées au paragraphe 10.2.2. Cette solution montre néanmoins quelques faiblesses *a priori*. On discute donc de ces défauts potentiels en envisageant quelques solutions alternatives.

### 10.2.1 Filtrage d'aberrations statiques par modification du modèle d'état

On se place ici dans un cadre d'OA, mais l'extension à l'OAMC relève du même procédé. Une première solution au filtrage des composantes statiques consiste à modifier le modèle d'état en incluant ces composantes dans le vecteur d'état. Une modélisation simple de la dynamique de ces aberrations est disponible : ces composantes sont constantes. Ainsi en notant  $\phi^{stat}$  la phase statique à estimer,  $\phi_{n+1}^{stat} = \phi_n^{stat}$  et le vecteur d'état devient :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{stat} \\ \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tur} \\ \phi_{n-1}^{tur} \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (10.1)$$



Les équations du modèle d'état (4.44) et d'observation (4.45) deviennent alors :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n, \quad (10.2)$$

$$\mathbf{y}_n = (\mathbf{D} \ 0 \ 0 \ \mathbf{D} \ 0 \ -\mathbf{DN}) \mathbf{X}_n + \mathbf{W}_n. \quad (10.3)$$

Il est important de noter l'absence de terme de bruit dans le modèle d'état de la composante statique, qui conduirait à un modèle de marche aléatoire foncièrement instable puisque d'énergie croissante. Quelques éléments relatifs à la stabilité, la commandabilité et l'observabilité de ce modèle d'état sont réprécisés ici et viennent compléter les résultats de Le Roux.

### 10.2.2 Étude des propriétés de la loi de commande modifiée

La stabilité est évaluée par l'étude des valeurs propres de la matrice  $\mathcal{A}_1$  définie par :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.4)$$

Il apparaît clairement que 1 est valeur propre de  $\mathcal{A}$ . Par conséquent, le modèle, dans son ensemble, est instable au sens de la stabilité interne ou de manière équivalente au sens de la stabilité asymptotique. Ce qui se comprend bien en reprenant la définition de cette stabilité : si l'on arrête de commander le système, il ne reviendra pas de lui-même à zéro puisque une composante statique est présente dans le modèle. Cependant, il est important de noter que dans ce modèle la composante statique intervient comme une perturbation constante, et donc d'énergie bornée, s'additionnant au modèle de turbulence, qui lui reste stable. Par conséquent, la sortie du modèle restera dans tous les cas bornée. La stabilité est donc bien conservée mais au sens EBSB (voir paragraphe 4.5.3.1).

Les conclusions quant à la commandabilité et l'observabilité sont celles déjà évoquées pour l'OA ou l'OAMC : le système n'est ni observable ni commandable.

On peut donc s'interroger sur les conditions de calcul du gain d'observateur. On a vu qu'une condition suffisante d'existence d'une solution asymptotique unique et indépendante de l'initialisation est la stabilité du modèle. Dans ce cas, cette condition n'est plus vérifiée. En fait, il est impossible de garantir l'existence de cette solution asymptotique avec ce modèle d'état, les conditions minimales d'existence étant non vérifiées. Cette situation rend le filtrage de composantes statiques plus aléatoire. Les simulations numériques ont montré que le filtrage de composantes statiques en OA était faisable et efficace. Mais l'OA n'est pas le contexte d'intérêt d'un tel filtrage, car rappelons-le, les composantes statiques sont naturellement corrigées en OA par la commande optimale, sans introduire de filtrage de composante statique supplémentaire. Par contre, les simulations menées dans un contexte d'OA hors-axe ont conduit à des résultats variables, fortement dépendants des conditions de bruit et d'initialisation. Ce filtrage de composantes statiques en OA hors axe sera discuté du point de vue expérimental au chapitre 16.



### 10.2.3 Vers d'autres solutions

Le défaut majeur de cette approche du problème de composante statique est d'avoir fait apparaître ces composantes au sein de la phase turbulente. Il est alors difficile de distinguer les composantes statiques des composantes purement turbulentes, car leur vitesse d'évolution relative est trop faible. En outre, en OA hors-axe ou en OAMC, on ne saura comment extrapoler ces composantes statiques dans le volume. Enfin, ces composantes ne sont pas pleinement observables. Une solution alternative consisterait donc à introduire l'existence de composantes statiques au sein de la mesure, c'est-à-dire en décrivant la mesure sous la forme :

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{D} (\phi_{n-1}^{tur} - \mathbf{N}\mathbf{u}_{n-2}) + \mathbf{y}_n^{stat} + \mathbf{w}_n, \quad (10.5)$$

où l'on a considéré un cas d'OA, et où  $\mathbf{y}_n^{stat}$  représente une composante statique sur la mesure, en somme un biais. SO modèle d'évolution est donc donné par  $\mathbf{y}_{n+1}^{stat} = \mathbf{y}_n^{stat}$

Ce faisant, on représente l'état du système par le vecteur d'état (en reprenant l'écriture initiale, c'est-à-dire la plus complète et la plus explicative) :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tur} \\ \phi_{n-1}^{tur} \\ \mathbf{y}_n^{stat} \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (10.6)$$

Il est alors possible de réécrire l'ensemble du modèle d'état en faisant apparaître la composante  $\mathbf{y}_n^{stat}$ , composante qui sera estimée. L'avantage de cette solution est que la composante  $\mathbf{y}_n^{stat}$ , non stable, est désormais entièrement observable, par définition. Cette solution n'a pas été encore testée.

## 10.3 Prise en compte de saturations sur les tensions

On s'intéresse dans ce paragraphe au problème de la saturation des commandes miroir. Dans la pratique, tous les miroirs possèdent en effet une course limitée. Or, il n'est pas rare que les conditions de turbulence, et les capacités limitées de correction des miroirs amènent à solliciter un ou plusieurs actionneurs des miroirs au-delà de leur course limite. L'utilisation du miroir en saturation conduit à son vieillissement prématuré ou sa détérioration. En général, par souci de préservation du miroir, une tension de commande maximale, ou tension de saturation, est définie au sein des amplificateurs haute tension commandant, en dernier lieu, les miroirs. Ceux-ci réalisent ainsi un écrêtement abrupt des tensions de commande dépassant la tension de saturation. Mais le problème reste foncièrement le même : l'existence de cette limitation en tension représente un défaut de linéarité flagrant du composant. Or, les lois de commande, qu'elles soient de type intégrateur ou LQG, présupposent un système au fonctionnement linéaire. L'absence de prise en compte d'un tel phénomène peut conduire à une instabilité de ces commandes. Et même prise en compte, la saturation peut devenir problématique avec certaines boucles de contrôle, telle que l'intégrateur, en raison du phénomène d'emballement (ou *wind-up effect*), décrit au paragraphe 10.3.1. On discute au paragraphe 10.3.2 de la prise en compte des saturations au sein de la commande LQG. La méthode proposée assure une estimation optimale même en présence de saturation, bien que la loi de commande ne soit plus globalement optimale. Cette solution est testée grâce au simulateur numérique au paragraphe 10.3.3. Enfin, le paragraphe 10.3.4 donne quelques éléments complémentaires relatifs à la commande LQG, pouvant permettre de gérer de manière plus générale les problèmes de dynamique miroir.

### 10.3.1 Le phénomène d'emballlement pour l'intégrateur

Le phénomène d'emballlement constaté chez l'intégrateur est un phénomène bien connu. Il résulte de la conjugaison de deux caractéristiques de l'intégrateur : il s'agit d'une part d'un régulateur instable comme rappelé au paragraphe 5.4.1 et discuté dans [Kulcsár *et al.*(2006), Raynaud(2005)], d'autre part l'intégrateur ne peut gérer les modes dits non vus du système, c'est-à-dire ceux appartenant au noyau de la matrice d'interaction (lorsqu'il n'est pas réduit à zéro).

De manière plus explicite, l'intégrateur s'écrit :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n - g\mathbf{M}_{com}\mathbf{y}_n, \quad (10.7)$$

où  $\mathbf{M}_{com}$  est l'inverse généralisée de la matrice d'interaction  $\mathbf{M}_{inter}$ . Par construction cette inverse est définie dans l'orthogonal du noyau de la matrice d'interaction ( $\text{Ker}(\mathbf{M}_{inter})^\perp$ ). Par conséquent, les commandes devraient théoriquement rester dans ce sous-espace. Ainsi, si l'on considère le projecteur sur le noyau de  $\mathbf{M}_{inter}$ ,  $\mathbf{P}_{ker}$ , la projection  $\mathbf{u}_n^{ker}$  de la commande sur cet espace vérifie :

$$\mathbf{u}_{n+1}^{ker} = \mathbf{u}_n^{ker} - g\mathbf{P}_{ker}\mathbf{M}_{com}\mathbf{y}_n. \quad (10.8)$$

Théoriquement,  $\mathbf{P}_{ker}\mathbf{M}_{com}$  est nulle si bien que si  $\mathbf{u}_0^{ker}$  est nul,  $\mathbf{u}_n$  reste dans  $\text{Ker}(\mathbf{M}_{inter})^\perp$ . Dans la pratique, l'existence d'erreurs de calcul dans l'évaluation de  $\mathbf{M}_{com}$  implique que  $\mathbf{P}_{ker}\mathbf{M}_{com}$  ne peut être rigoureusement nulle, si bien que  $\mathbf{u}_n^{ker}$  n'est pas réduit à zéro. Cette composante étant dans le noyau de  $\mathbf{M}_{inter}$ , elle est par définition sans effet sur la mesure  $\mathbf{y}_n$ . Elle évolue donc en boucle ouverte. La somme cumulée des erreurs de projection amène donc inexorablement à une divergence de ce terme. C'est ce phénomène qui est à l'origine de l'amplification des modes dits non vus (ou mal vus) tel que le mode piston ou le fameux mode gaufre (voir annexe B), qui évoluent en boucle ouverte dans l'asservissement et contribuent à l'emballlement.

Ce phénomène est exacerbé en présence de saturations des tensions de commande. En effet, une saturation des tensions, qui se traduit par un écrêtement des tensions en cause, revient finalement à additionner à la commande un terme perturbatif  $\epsilon_n^{sat}$ . La projection de la commande sur  $\text{Ker}(\mathbf{M}_{inter})^\perp$  devient alors :

$$\mathbf{u}_{n+1}^{ker} = \mathbf{u}_n^{ker} - g\mathbf{P}_{ker}\mathbf{M}_{com}\mathbf{y}_n + \mathbf{P}_{ker}\epsilon_n^{sat}. \quad (10.9)$$

Or le terme  $\epsilon_n^{sat}$  n'appartient pas forcément à  $\text{Ker}(\mathbf{M}_{inter})^\perp$  et contribue donc à l'accroissement du phénomène d'emballlement. On peut voir ce phénomène là encore en remarquant que des actionneurs en saturation ne sont plus commandés : des modes se retrouvent donc à fonctionner en boucle ouverte.

Dans la pratique, ce phénomène est géré, pour la commande intégrale de la manière suivante. La tension  $\mathbf{u}_{n+1}$  calculée par (10.7) est écrêtée au niveau de la tension de saturation, pour donner  $\mathbf{u}_{n+1}^{ec}$ . Afin de limiter le phénomène d'emballlement, on soustrait à ce terme sa projection sur le noyau de  $\mathbf{M}_{inter}$  pour obtenir la tension de commande finale  $\mathbf{u}_{n+1}^{fin}$ . Cette tension finale est donc dans  $\text{Ker}(\mathbf{M}_{inter})^\perp$  et on limite par conséquent la possibilité d'emballlement. Cependant cette solution présente plusieurs défauts. Le premier reste lié à l'incertitude numérique concernant le calcul de  $\mathbf{M}_{com}$  et du projecteur  $\mathbf{P}_{ker}$ , qui réduit inévitablement l'efficacité de cette méthode. D'autre part, rien n'assure que la tension de commande finale  $\mathbf{u}_{n+1}^{fin}$  reste dans les limites autorisées, c'est-à-dire que l'application  $\mathbf{Id} - \mathbf{P}_{ker}$  (où  $\mathbf{Id}$  est l'opérateur identité) n'est pas assurée de fournir une image incluse dans l'intervalle  $[-V_{sat}, V_{sat}]$  si  $V_{sat}$  désigne la tension de saturation. Une solution consistant à écrêter puis projeter de manière itérative jusqu'à obtention d'une tension respectant les deux contraintes (dans l'intervalle de tension voulu et dans  $\text{Ker}(\mathbf{M}_{inter})^\perp$ ) peut être envisagée mais représente un coût calculatoire à considérer.

### 10.3.2 Gestion des saturations avec la commande LQG

Le phénomène de saturation représente aussi un problème pour la commande LQG. En effet, la tension de commande participe au processus d'estimation de la phase turbulente.

Considérons d'abord un cas particulier simple, pour lequel les commandes en saturation sont écrêtées, mais où cet écrêtage n'est pas connu au niveau de la loi de commande. Cela revient à dire que la loi de commande fonctionne avec des commandes non écrêtées, alors que les tensions réellement appliquées le sont. Ce cas peut sembler guère réaliste, on connaît le matériel utilisé, on sait donc quelles sont ses limites en tension. Toutefois, en supposant que cette information n'est pas prise en compte dans l'algorithme de commande, la stabilité du système boucle n'est alors plus garantie : les tensions réellement appliquées ne sont pas celles que l'on croit, la turbulence est alors mal estimée (équation d'observation (4.45)) et les commandes calculées risquent d'être de plus en plus grandes pour pouvoir suivre l'évolution de la turbulence.

On s'intéresse donc au cas plus réaliste pour lequel les tensions réellement appliquées sont connues. On suppose que la réponse du miroir reste une réponse pile, sans dynamique, et linéaire tant que les tensions sont inférieures à la tension de saturation. Dans ce cadre, l'estimation optimale de la phase turbulente par le filtre de Kalman nécessite de connaître la correction réellement apportée par le miroir et sa contribution à la mesure. Il faut pour cela introduire dans le vecteur d'état le vrai vecteur de tension appliqué, connu. Dans la formulation récursive du filtre de Kalman l'utilisation de la tension réellement appliquée sur le miroir, c'est-à-dire la tension éventuellement écrêtée  $\mathbf{u}_n^{ec}$ , conduit à l'algorithme suivant :

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}_{n/n-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_n^{ec} + \mathbf{L}_\infty(\mathbf{y}_n - \hat{\mathbf{y}}_{n/n-1}^{ec}). \quad (10.10)$$

La commande est toujours obtenue par l'équation :

$$\mathbf{u}_n = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n} = \mathbf{P}\hat{\varphi}_{n+1}^{tur}, \quad (10.11)$$

et sera éventuellement écrêtée, au besoin, au niveau de la saturation  $V_{sat}$  pour obtenir  $\mathbf{u}_n^{ec}$ . L'algorithme d'estimation fonctionne ainsi avec les tensions réellement appliquées. Le modèle est alors conforme au comportement du système et l'optimalité de l'estimation est assurée. Le modèle d'état choisi étant stable, on conserve aussi de la stabilité de l'observateur.

Un avantage majeur apporté par notre loi de commande dans ce contexte de saturation est alors l'absence naturelle d'amplification de modes particuliers, tels que les modes non vus du système. La raison en est simple : l'estimation restant optimale et stable, la phase estimée ne peut voir l'une de ses composantes s'amplifier. C'est l'effet de la régularisation due aux *a priori*. Le calcul de la tension de commande étant issu d'une projection de la phase turbulente estimée sur le miroir, on s'assure par construction de l'absence d'emballement du miroir. Il reste toutefois à évoquer le cas particulier du mode piston. Ce mode est généralement problématique car il fait partie des modes non vus du système. Il fait donc partie des modes potentiellement amplifiés par une commande de type intégrateur. Dans la pratique, ce mode n'est pas estimé par la commande optimale et donc non projeté sur le miroir. Ainsi, à chaque instant la commande est dénuée de piston.

Bien-sûr, avec la loi de commande ainsi modifiée pour gérer la saturation, on ne peut plus garantir une correction optimale de la phase car projeter la phase turbulente sur le miroir, puis écrêter les tensions n'assure pas de fournir la meilleure correction sous contrainte de tensions de commande bornées. La solution proposée ici est une méthode *ad hoc*, qui permet seulement de poursuivre l'estimation stable et optimale de la phase, en prenant en compte les limitations du miroir.

La question de la commande optimale, sous contrainte de tensions incluses dans le fermé  $[-V_{sat}, V_{sat}]$ , représente un problème plus complexe. On ne peut garantir que le principe de séparation

qui nous a permis de traiter séparément estimation et correction optimales puisse encore s'appliquer. Toutefois si l'on peut supposer que la saturation des commandes est un phénomène ponctuel et court, la perte d'optimalité de la correction engendrée par l'application d'une commande légèrement sous-optimale ne devrait pas être notablement pénalisante.

### 10.3.3 Simulation de la prise en compte des saturations

Les précédentes simulations présentées au chapitre 8 ont permis d'illustrer le fonctionnement de la loi de commande tout en mettant en évidence quelques aspects liés à l'*aliasing* et la sous-modélisation. L'étude de l'implantation effective, du fonctionnement et des performances de la loi de commande dans un cadre expérimental fait l'objet de la partie suivante. Elle traite notamment les problématiques de composantes statiques et vibratoires évoquées précédemment. Néanmoins, le montage expérimental actuel ne permet pas d'aborder la problématique de la saturation puisque la gestion des saturations n'est pas implantée (l'écrtage des commandes est réalisé pour l'heure en aval de la loi de commande). L'objet de ce paragraphe est donc de proposer quelques éléments de validation de cette solution de gestion de saturation dans un cadre de simulation numérique.

On considère pour ces simulations un cadre d'OA réaliste, très proche des conditions du banc BOA. Autrement dit, on utilise un modèle d'ASO géométrique à  $8 \times 8$  sous-pupilles, un modèle de miroir SAM de déformées gaussiennes à  $9 \times 9$  actionneurs plus un miroir de basculement. La dynamique miroir est parfaite, l'asservissement présente deux trames de retard. La fréquence d'échantillonnage est de 60 Hz, et la vitesse de vent relative de la turbulence est de  $V/D \simeq 0,3$  Hz. Les conditions de turbulence et de bruit sont données par un  $\frac{D}{r_0} \simeq 8$  et une variance du bruit total par sous-pupille de  $\sigma_b^2 = 1 \text{ rad}^2$  (de phase).

L'objectif est de comparer les comportements de la boucle d'OA commandée par LQG avec saturation des tensions (prises en compte ou non prises en compte) et sans saturation. Pour cela, on fait apparaître un régime de fonctionnement en saturation, en imposant une limite sur les tensions du MD. Afin de fixer cette borne de tension, on fait fonctionner la simulation en boucle fermée d'abord sans contraintes sur les tensions de commande sur 2000 itérations. On réalise un histogramme des tensions maximales (en valeur absolue) appliquées aux actionneurs au cours du temps, et de leurs occurrences. Cette courbe est tracée en figure 10.1.

On définit ainsi la limite de tension comme la tension pour laquelle 75% des tensions maximales de commande lui sont supérieures. Cette limite de tension va représenter notre tension maximale autorisée, et, toute tension supérieure sera écartée à cette valeur limite au moment de la correction par le miroir.

Pour prendre en compte le phénomène de saturation au sein de la commande LQG, on applique donc la méthode décrite au paragraphe 10.3.2 : on injecte dans l'observateur la tension de correction réellement appliquée, c'est-à-dire éventuellement écartée. L'observateur prend donc bien en compte la correction réellement apportée et cela permet d'estimer toujours la turbulence de manière optimale, même si la correction est de course insuffisante. On simule donc ces deux cas de figure.

Il est difficile de caractériser les effets de la saturation et de perte de stabilité. Pour ce faire on va s'intéresser à 3 critères.

- On considère d'abord le SR, et donc la performance de l'asservissement, qui diminue lorsque le système devient instable ;
- On s'intéresse ensuite au fonctionnement de l'asservissement en saturation. On définit donc par cycle de saturation une période de temps durant laquelle une ou plusieurs commandes en tension dépassent systématiquement la tension limite et sont écartées. Chaque cycle de saturation se

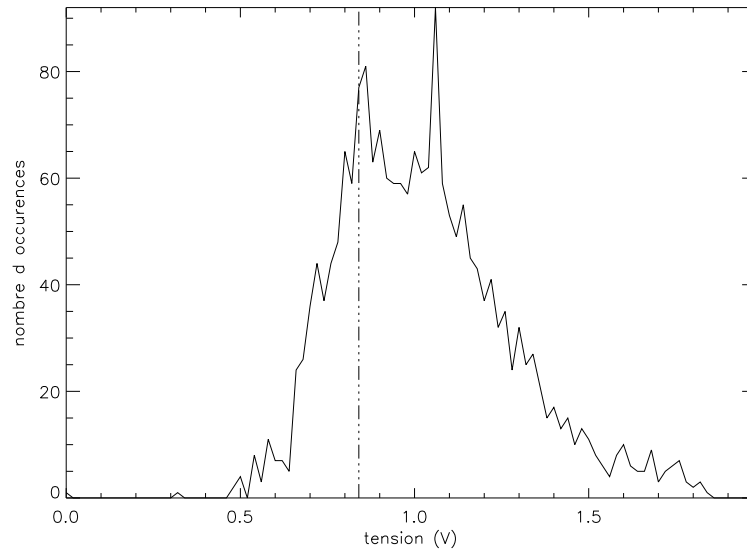


FIG. 10.1 – Histogramme de la répartition des tensions maximales (en valeur absolue) obtenue en l'absence de limitation de tension de commande. La droite verticale détermine la tension pour laquelle 75% des tensions maximales sont supérieures.

caractérise par sa durée et le nombre de commandes dépassant la tension limite au cours du cycle.

- Enfin, on évalue l'effet de la saturation sur l'estimation en comparant la phase turbulente incidente et la phase estimée sur quelques modes.

Lorsqu'aucune contrainte n'est imposée sur les tensions de commande, une correction par commande LQG conduit à un SR de 69%. Si l'on impose maintenant une tension limite, fixée selon la méthode décrite précédemment, la correction entre très souvent en régime de saturation : une ou plusieurs tensions de commande dépassent la limite imposée et sont écrêtées, sans que ce soit pris en compte. On constate une baisse du SR à 66,5%, attestant des conséquences de l'existence de saturations. Enfin, si l'on introduit dans l'observateur la tension écrêtée, prenant en compte ainsi le phénomène de saturation, le SR atteint 67,3%. Ce critère sur la performance finale est cependant peu sensible. La perte de SR (puis l'augmentation) est faible. Le fait de travailler en simulation (peu d'erreurs de modèle), sur un horizon temporel court, et peut-être dans des conditions de bruit trop favorables ne permet pas de faire apparaître des instabilités de la commande, avec ce que l'on nomme un "décrochage de la boucle d'asservissement". Les autres critères aident à mieux visualiser les effets de la saturation. La figure 10.2 gauche compare ainsi le nombre et la durée des cycles de saturation, en présence ou en l'absence de prise en compte des éventuelles saturations. En abscisse sont précisés les numéros de chaque cycle de saturation (donc au final leur nombre) et en ordonnée leur durée (en nombre d'itérations). On note qu'en gérant la saturation dans la commande, ces cycles sont plus nombreux mais plus courts : on limite les fortes amplitudes dans la durée. Ceci se confirme en analysant le nombre de tensions de commande saturées durant les cycles de saturation. La figure 10.2 droite est un histogramme donnant, sur l'ensemble des cycles de saturation, le nombre de fois où 1, 2, ...,  $n$  tensions sont saturées,  $n$  étant limité au nombre total d'actionneurs. Lorsque les saturations sont prises en compte, on constate une chute notable du nombre de tensions saturées, et notamment, le nombre maximal de tensions simulta-

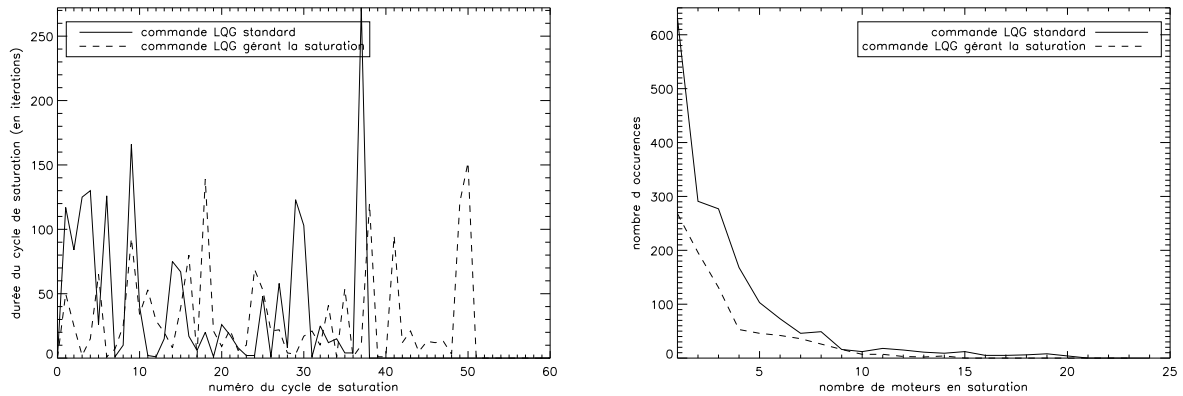


FIG. 10.2 – Gestion du phénomène de saturation par la commande LQG. Gauche : durée des cycles successifs de saturation lorsque l'existence de la limite de tension est prise en compte ou non dans la commande. Droite : nombre de fois où  $n$  tensions ( $0 < n < 71$ ) sont saturées au cours des divers cycles de saturation pour la commande LQG standard ou gérant la saturation.

nément en saturation diminue de 21 à 15. On constate donc que les cycles de saturation sont toujours présents mais durent moins longtemps et que moins de tensions sont simultanément saturées.

Enfin, pour illustrer l'instabilité, on compare phase turbulente et phase estimée. On s'intéresse ici uniquement au terme de defocus. La figure 10.3 montre l'évolution au cours du temps de la différence entre le defocus de la turbulence et celui estimé par le filtre de Kalman dans les trois conditions étudiées : sans aucune limite de tension, avec une limite de tension mais non prise en compte, et enfin en prenant en compte cette limite dans l'observateur. On a choisi de présenter un intervalle de temps correspondant à une phase de saturation prolongée, avec de nombreuses tensions en saturation. On constate clairement une destabilisation en présence d'une limite de tension, avec une surestimation importante et croissante de la turbulence par l'observateur. Un retour à la normale est constaté, probablement avec la diminution de l'amplitude de la phase turbulente. La mise en œuvre d'une gestion de la saturation permet de faire disparaître cette phase d'instabilité. Gérer la saturation consiste à utiliser les tensions échantillonnées pour l'estimation de la phase turbulente qui est alors estimée de façon optimale.

### 10.3.4 Commande LQG avec pénalisation

On peut envisager une autre approche au problème de saturation. Cela consiste à réduire l'excursion en tension, en favorisant les basses tensions de commande et en pénalisant les tensions s'approchant de  $V_{sat}$ . On retrouve le problème général de commande LQG déjà évoqué au paragraphe 5.3.2. Dans ce cadre, il est courant de prendre en compte un terme de pénalisation sur les commandes avec le critère quadratique suivant :

$$J(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}_n^T \mathbf{Q} \mathbf{X}_n + \mathbf{u}_n^T \mathbf{R} \mathbf{u}_n, \quad (10.12)$$

$\mathbf{Q}$  étant semi-définie positive et  $\mathbf{R}$  étant définie positive. Le terme  $\mathbf{R}$  représente une pénalisation sur les commandes, dont la valeur dépend du niveau de saturation  $V_{sat}$ .

En annulant la dérivée de (10.12), on montre que la commande optimale est obtenue simplement

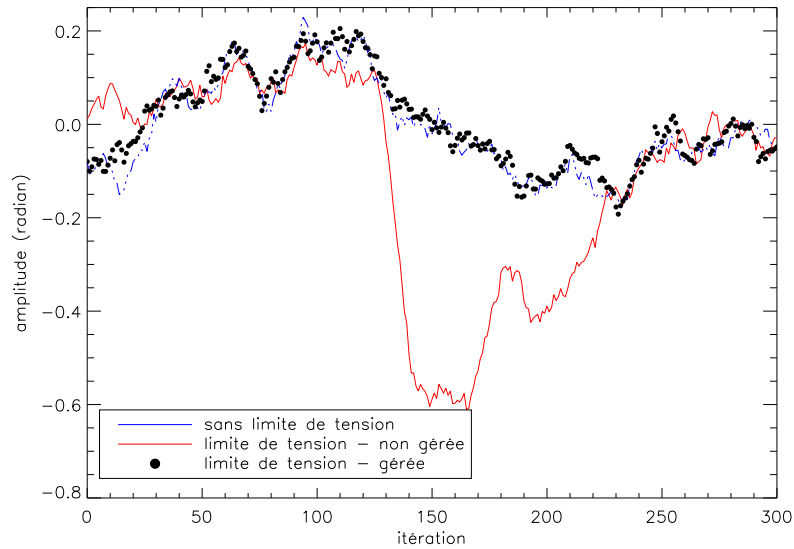


FIG. 10.3 – Différence entre defocus turbulent et defocus estimé selon la gestion de la saturation. Le cas sans limitation de tension est tracé en trait discontinu bleu. Le cas en présence de limitation de tension, mais sans prise en compte dans l’observateur, est tracé en trait continu rouge. Enfin, les points montre cette différence lorsque le phénomène de limitation de tension est présent et pris en compte dans l’observateur.

par le retour d’état suivant :

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{P}_{pen} \hat{\phi}_{n+1/n}, \quad (10.13)$$

avec  $\mathbf{P}_{pen} = \left( (\mathbf{N}^T \mathbf{N} + \mathcal{R})^\dagger \mathbf{N}^T \right)$  et  $\hat{\phi}_{n+1/n}$  est l’estimée optimale (au sens de la variance minimale de l’erreur d’estimation) de  $\phi_{n+1}$  (obtenue par filtrage de Kalman, voir le chapitre 5). On note que la solution (10.13) correspond aux classiques moindres carrés régularisés.

### 10.3.5 Conclusion sur la gestion de saturation

Le phénomène de saturation des tensions de commande n’est pas rare en OA. Lorsqu’il intervient de manière répétée et dégrade la stabilité et les performances du système on peut souhaiter gérer cet effet, par une prise en compte des saturations.

Si l’on refuse de dégrader les performances globales du système lorsque les tensions ne sont pas saturées, une première solution consiste à prendre en compte les tensions écrêtées dans l’observateur, comme proposé au paragraphe 10.3.2. On ne garantit plus une commande optimale, mais l’estimation reste optimale et le système stable. Les quelques tests de simulation présentés ici ont validé cette solution. Une deuxième solution serait de déterminer à chaque itération la commande optimale du critère sous la contrainte  $|\mathbf{u}| \leq V_{sat}$ . Cette solution fait appel à des algorithmes d’optimisation itératifs et assez lourds, et n’a donc pas été explorée.

Si l’on accepte maintenant de dégrader en permanence les performances globales du système (cas par exemple de très fortes turbulences conduisant à des tensions très souvent en saturation), le critère pénalisé est une solution intéressante. En effet, la commande optimale vis-à-vis de ce critère est simple (équation (10.13)) et sa mise en œuvre ne pose donc pas de problème particulier. Le seul point

restant est le réglage de  $\mathcal{R}$  en fonction de  $V_{sat}$  (une méthode standard est de passer en interprétation probabiliste et de régler l'écart-type de  $\mathbf{u}$  à  $V_{sat}/3$  pour avoir par exemple une probabilité d'être inférieur à trois écarts-type de 95%). Des conditions aussi défavorables n'ont pas été expérimentées, et les performances de cette solution n'ont donc pas été étudiées.

La simulation offre de meilleures conditions de fonctionnement que l'expérimentation (absence de désalignements, d'erreurs de modèle *etc*). La mise en évidence d'effets de saturation et d'instabilité a dû en conséquence être forcée par une valeur de saturation artificielle. Une situation aussi défavorable n'a toutefois que peu de chances de se produire en expérimentation, où l'on peut miser sur des durées en saturation courtes et peu nombreuses. De ce point de vue, il serait intéressant de comparer notre méthode et les solutions classiquement retenues pour des commandes de type intégrateur.

Ajoutons pour conclure que la méthode proposée dans ce paragraphe, consistant à prendre en compte la tension écrêtée dans l'observateur, est applicable plus généralement à tout problème de non-linéarité connue des tensions de commande  $\mathbf{u}_n$  : la sortie modèle  $\hat{y}_{n/n-1}$  est calculée avec la réponse exacte du miroir à une sollicitation, et l'on conserve ainsi l'optimalité et la stabilité de l'estimateur.





## Chapitre 11

# Conclusion de la deuxième partie

Cette partie a été consacrée à l'analyse de la commande optimale en vue de son implantation. Cette analyse s'est portée d'abord sur les aspects algorithmiques de la commande, mettant en évidence la réduction notable des coûts calculatoires que l'on peut envisager. En effet, on a montré que le vecteur d'état initialement choisi pour la clarté du discours peut être singulièrement réduit et que les propriétés des diverses matrices peuvent être exploitées. Une réduction significative du coût calculatoire est ainsi constatée, notamment dans le cadre illustratif du démonstrateur MAD, ce qui permet d'envisager plus sereinement l'application temps réel de la commande. On a montré parallèlement que la recherche du point fixe de l'équation de Riccati pouvait, elle aussi, bénéficier de cette réduction de dimensions. Une méthode pour accélérer cette recherche est proposée. Les simplifications apportées restent cependant simples. De nombreuses techniques existent pour parfaire la précision numérique des calculs et accélérer cette recherche.

La mise en œuvre pratique de la commande nécessite de définir les modèles de turbulence et de composants. Le chapitre 8 a décrit ces modèles et leur calcul. Ces modèles ont été aussi exploités pour mettre en place un simulateur numérique complet d'OA ou d'OAMC. Ce simulateur modulaire doit permettre de confronter les résultats expérimentaux et d'étudier la commande dans divers contextes. Quelques premières validations numériques ont illustré le fonctionnement du simulateur et de la loi de commande en OA. Elles ont notamment mis en évidence les effets d'erreurs de modèle telles que sous-modélisation et repliement dû à la mesure. Elles ont ainsi montré que la sur-paramétrisation et la prise en compte de l'effet de repliement permet de réduire significativement ces erreurs et d'améliorer les performances comparativement à une commande intégrateur. L'exploitation du simulateur numérique a également permis de mettre en évidence l'inutilité d'une caractérisation fréquentielle de la commande optimale. La matrice de transfert de réjection d'une boucle d'OA utilisant la commande optimale a été évaluée analytiquement et numériquement. L'existence de couplages forts rend la caractérisation fréquentielle par fonctions de transfert caduque. La partie suivante complétera ces validations numériques en même temps qu'elle présentera les validations expérimentales.

Cependant, la mise en œuvre expérimentale est aussi l'occasion de mettre en évidence diverses contraintes rencontrées sur des systèmes réels. Trois contraintes ont été considérées : la présence de vibrations parasites, l'existence de composantes statiques, la limitation des tensions de commande. Face à ces contraintes très concrètes, trois approches ont été présentées pour étendre la loi de commande et permettre la gestion de ces défauts. Le filtrage de vibrations a été proposé au chapitre 9. Un modèle simple de vibration à temps discret basé sur un AR2 a été présenté. Il permet d'inclure ces composantes dans la commande, les estimer, et si besoin, les corriger. On a en effet souligné une distinction forte entre vibrations représentant une perturbation ou un bruit de mesure. Ces deux natures

de vibration requièrent un traitement adapté, que la commande LQG permet aisément de mettre en œuvre. Une extension des résultats obtenus à des cas de vibrations plus complexes a été proposée. Le problème d'identification a alors été soulevé. Les méthodes proposées et qui seront appliquées en validations expérimentales sont simples et efficaces. Mais des méthodes automatisées doivent être mises en œuvre pour des systèmes appliqués. Quelques pistes ont été proposées.

Nous avons montré au chapitre 10 que le filtrage de composantes statiques pouvait être aussi mené. Il sera utile en OA hors axe. Mais la solution proposée est à considérer avec précautions, puisque l'existence d'un point fixe à l'équation de Riccati n'est plus assurée, tout comme la stabilité. Une solution alternative est envisagée bien que non développée. Enfin, nous avons considéré une problématique de saturation des tensions de commande. L'existence de saturations est commune à tous les miroirs et représente une cause d'instabilité potentielle avec des commandes de type intégrateur. Cette non-linéarité a été traitée dans le cadre de la commande LQG. La correction n'est plus optimale mais une estimation optimale et une commande stable sont garanties. La simulation numérique a permis de valider cette approche et le gain à la fois en performance et en réduction des périodes de saturation. Cette solution mériterait une validation expérimentale et une comparaison plus poussée notamment avec les méthodes utilisées pour l'intégrateur.

## **Troisième partie**

# **Validations expérimentales et numériques de la commande optimale**



## Chapitre 12

# Le Banc d'Optique Adaptative : calibrations et modélisations

Ce chapitre est consacré à la description et la calibration du Banc d'OA (BOA) expérimental de l'ONERA. Il présente les principaux composants du système, à savoir un simulateur de turbulence, visant à reproduire une turbulence atmosphérique pertinente pour nos tests, et une OA classique, basée sur un miroir déformable et un analyseur de front d'onde. Cette présentation permet de se familiariser avec le système utilisé pour les validations expérimentales, tout en offrant une illustration concrète d'un montage d'OA. Ce chapitre présente les caractéristiques techniques et fonctionnelles des éléments de BOA. Il s'attarde surtout sur la calibration de ses composants et l'identification de leurs paramètres. Il est en effet important pour la compréhension du système mis en œuvre et des tests réalisés de connaître un certain nombre de grandeurs caractéristiques du banc. On peut notamment juger des conditions de rapport signal-à-bruit, des conditions de turbulence, d'anisoplanétisme *etc.*

Ces calibrations ont aussi un autre but majeur : préparer la mise en œuvre de la commande LQG sur le banc BOA. Cela repose d'une part sur la confrontation des hypothèses sous lesquelles la loi de commande a été établie avec la réalité physique du banc. Des hypothèses telles que linéarité des composants, blancheur et caractère gaussien du bruit de mesure *etc.*, sous-tendent l'établissement de la loi de commande. Ces hypothèses se fondent bien sûr sur une connaissance des composants et du système en présence. Mais il est indispensable de contrôler finement la conformité de ces hypothèses avec les propriétés du système réel. Les éventuelles erreurs conditionneront la performance finale de la commande et une étude de robustesse ultérieure. D'autre part les modèles d'ASO, de MD, de turbulence interviennent, et la définition concrète de la loi de commande repose sur l'identification précise de ces modèles. L'existence d'erreurs de modèles conduirait à une perte de performance de la commande. On souhaite aussi se donner des moyens de contrôler les modèles ainsi identifiés par des tests annexes. La fin de ce chapitre s'y consacre au travers de deux calibrations très classiques mais aussi fondamentales d'un banc d'OA. Enfin, cette caractérisation du banc va servir à mettre en œuvre une simulation complète et précise du comportement du système et de ses performances, afin d'analyser et comparer les résultats expérimentaux.

Aussi, ce chapitre commence par une description générale du banc au paragraphe 12.1. Puis, au paragraphe 12.2, chaque composant du banc est calibré. Les hypothèses sur la commande sont discutées et les modèles de composants identifiés. Enfin, au paragraphe 12.3 et 12.4, deux calibrations particulières du banc sont proposées : la mesure de la matrice d'interaction du banc et la compensation des aberrations non communes (*Non Common Path Aberrations* ou NCPA). Elles permettent d'une part d'estimer des éléments essentiels d'un banc d'OA, même si il ne s'agit pas de composants

matériels, et d'autre part d'offrir un contrôle indirect des modèles établis en phase de calibration des composants. La calibration des NCPA représente une part notable du travail d'optimisation du banc réalisé.

## 12.1 Description du banc BOA

L'ONERA ne dispose pas à l'heure actuelle de banc expérimental d'OAMC permettant une validation complète de la loi de commande Kalman. Aussi, la mise en œuvre d'une validation expérimentale de la loi s'est appuyée sur le Banc d'Optique Adaptative BOA disponible à l'ONERA. Ce banc d'OA expérimentale se base sur un analyseur de type Shack-Hartmann, un miroir de pointage et un miroir déformable, tous deux conjugués de la pupille d'entrée. Une caméra d'imagerie permet aussi de réaliser l'imagerie scientifique après correction. Comme tout système d'OA classique, ce banc permet de réaliser une correction sur axe de la turbulence, c'est-à-dire dans la direction d'analyse de l'ASO (direction de l'EG). Pour cela, il s'appuie sur les mesures de pentes fournies par l'ASO caractérisant la turbulence sur axe. Si un tel système autorise la validation expérimentale de la loi de commande Kalman en configuration OA, il ne permet donc pas à proprement parlé de réaliser des tests d'OAMC. Cependant, il est possible de se rapprocher de l'OAMC en mettant en œuvre une expérience d'OA hors axe dont le principe a été présenté au paragraphe 3.3.5 et qui sera développée au chapitre 16.

Cette partie donne un aperçu général de BOA et en décrit les principales caractéristiques techniques. Il s'agit de se familiariser avec sa structure et d'expliquer certains choix techniques, notamment vis-à-vis du générateur de turbulence. Les conditions expérimentales ( $\frac{D}{r_0}$ , effets d'anisoplanétisme *etc*) seront discutées et justifiées. A défaut d'une bonne reproduction de conditions astronomiques spécifiques, le banc doit avant tout servir à valider un concept de commande. La simulation numérique pourra à défaut nous replacer en contexte plus réaliste.

Le paragraphe 12.1.1 rappelle d'abord brièvement la structure et les caractéristiques du banc BOA. Le paragraphe 12.1.2 résume ensuite les adjonctions qui ont été apportées à ce banc notamment par S. Oberti [Oberti(2002)] pour permettre de réaliser les tests hors axe. En effet, il a fallu développer un simulateur de turbulence spécifique pour ces tests, et assurer le couplage de ce simulateur avec le banc malgré les contraintes qui lui sont propres. Un dimensionnement précis de ce simulateur a été nécessaire. Les grandes lignes en sont rappelées et les conséquences sur la structure finale du banc et des tests menés sont discutées.

### 12.1.1 Caractéristiques générales du banc BOA

Le banc, présenté en figure 12.1, et schématisé en figure 12.2 se décompose en 4 sous modules :

- un module d'adaptation qui a été réalisé historiquement pour adapter l'ouverture du banc BOA ( $f/15$ ) à celle du télescope de l'Observatoire de Haute-Provence ( $f/28$ ). Formé de deux doubles, il comprend dans l'espace collimaté les séparant la pupille physique du banc, pleine et circulaire de 11,4 mm de diamètre. Les diverses évolutions du banc ont conduit à considérer (voir 12.1.1.2) une pupille excentrée de 10,10 mm (point (D) sur la figure 12.2) de diamètre, et donc une ouverture en amont du module d'adaptation de  $f/32$  (point (B)).
- un module miroirs, comprenant un miroir de pointage et un miroir déformable. Ces deux miroirs sont placés aux foyers de deux paraboles utilisées en configuration excentrée pour être optiquement conjugués à la pupille d'entrée. Ce montage assure un gain de place par repliement du faisceaux tout en minimisant les aberrations.

pupille d'entrée réduite (D)	10, 10 mm (sans obturation)
ouverture réduite (B)	$f/32$
diffraction au foyer d'entrée du banc (B)	$20\mu\text{m}$
diffraction au foyer de sortie du banc (C)	$11\mu\text{m}$
FoV (D)	$27 \times 27$ arcmin

TAB. 12.1 – Caractéristiques principales opto-géométriques de BOA. Remarque : le foyer de sortie du banc coïncide avec le foyer d'entrée de l'ASO. Les positions sont repérées sur la figure 12.2.

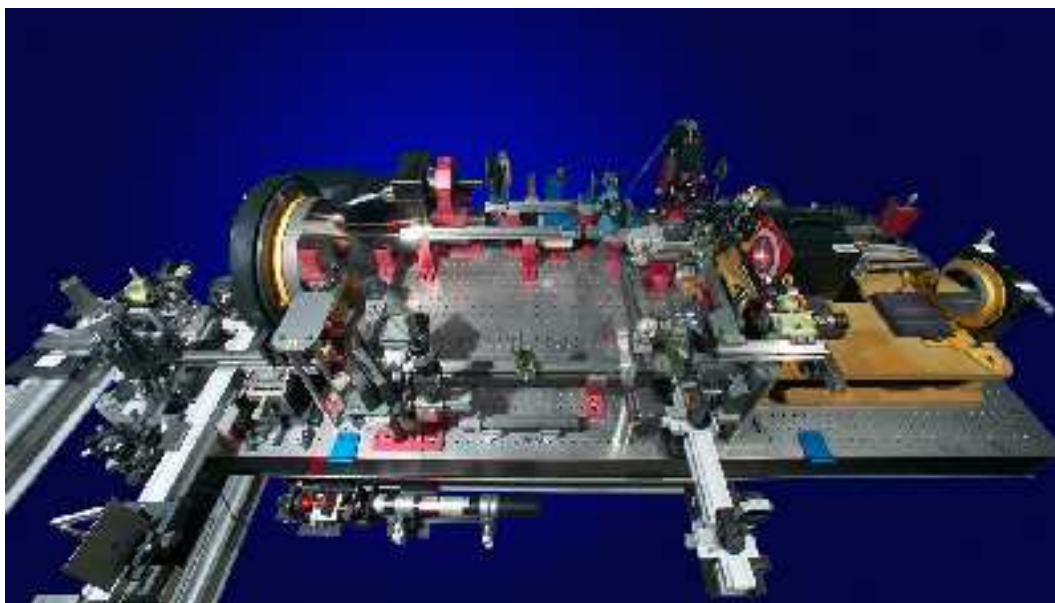


FIG. 12.1 – Le banc BOA : photo du Banc d'Optique Adaptative BOA de l'ONERA.

- le module d'analyse de surface d'onde composé d'un analyseur de Shack-Hartmann et d'une source de référence.
- un module d'imagerie équipé d'une caméra Princeton.

Les principales caractéristiques du banc sont présentées en tableau 12.1.

Une lame séparatrice sépare le faisceau après correction par les miroirs entre la voie d'analyse et la voie d'imagerie scientifique. L'ouverture à l'entrée de ces deux voies est de  $f/17$  (point (C) par exemple). L'ensemble du banc a été optimisé pour la bande 0,4-1 microns, en particulier du point de vue de ses aberrations d'ouverture, de champ et chromatique. Notons que l'utilisation de la pupille excentrée n'a pas porté préjudice à ces optimisations. L'ensemble des tests menés durant cette étude sont réalisés à 633 nm, longueur d'onde de la source qui est une diode laser faiblement cohérente. Les faisceaux sont amenés aux divers points sources par des fibres de 4 microns ( $1/5$  de la diffraction en (B)), créant ainsi des sources non résolues. Enfin, l'ensemble du banc est supporté par une structure de dimensions limitées, imposant des contraintes de compacité.

Il est important de noter que le banc BOA a été conçu pour un champ global (ou *Field of View* FoV) de 2,6 mm au foyer d'entrée (B) (soit 27 arcmin). C'est aussi le champ de la caméra d'imagerie. Cette caractéristique va donc conditionner fortement la mise en œuvre de tests de correction hors axe.



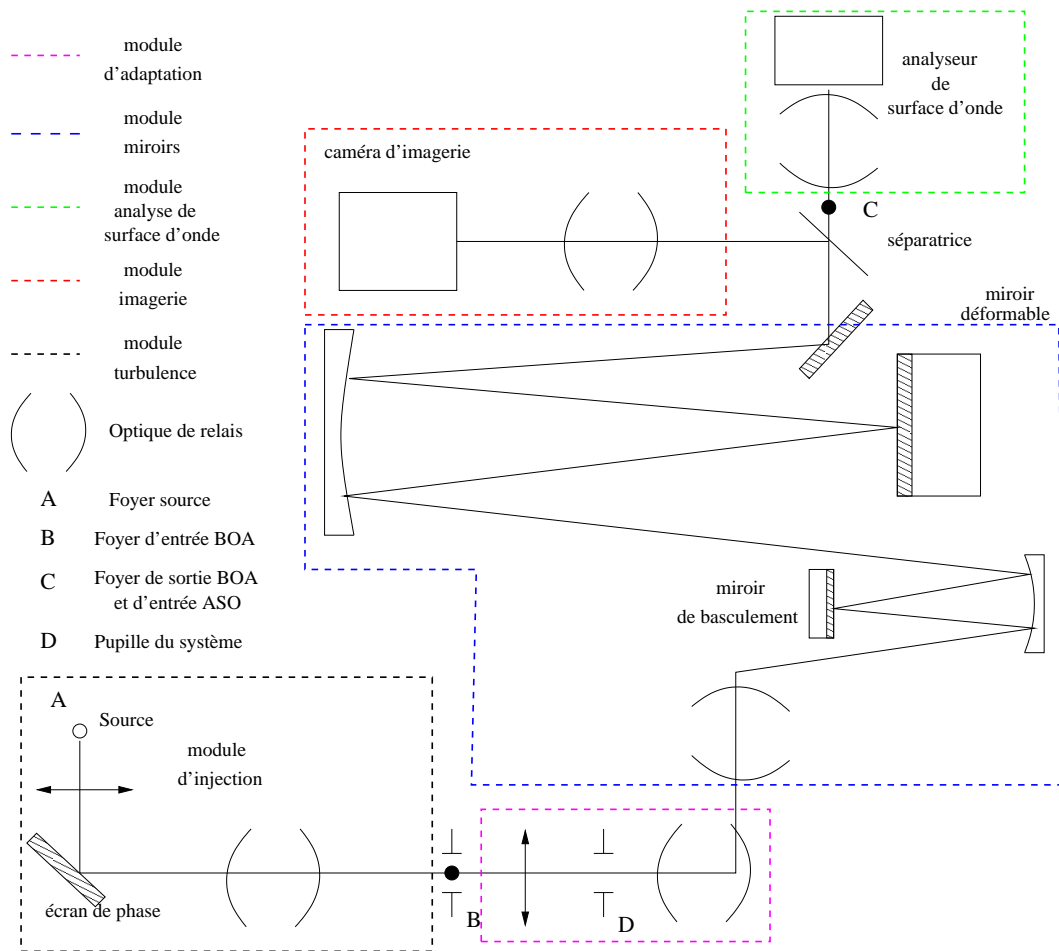


FIG. 12.2 – Présentation schématique du banc BOA.

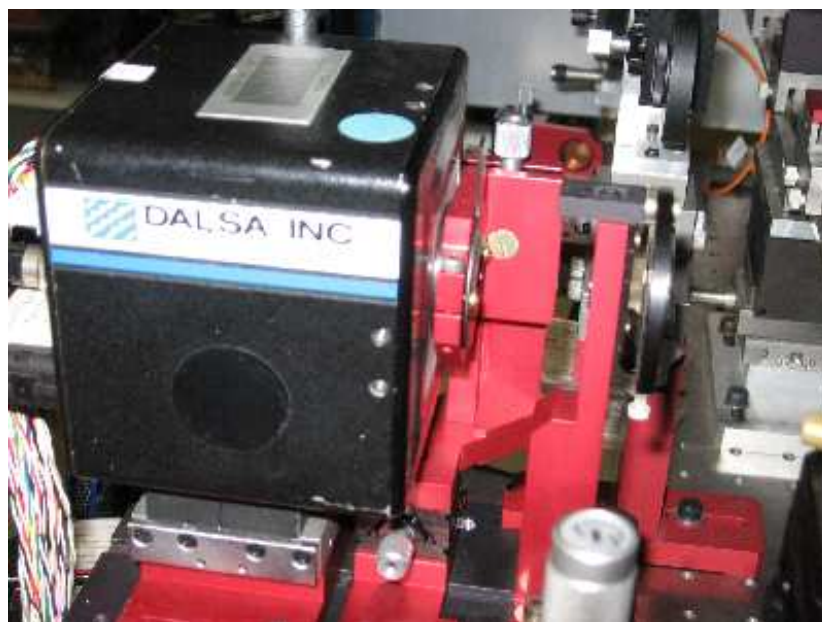


FIG. 12.3 – L'Analyseur de Surface d'Onde du banc BOA. La caméra (en noir) est placée derrière la matrice de micro-lentilles (support rouge).

Les paragraphes suivants décrivent les principales caractéristiques des composants de l'OA. La description fine des divers éléments est abordée au paragraphe 12.2.

#### 12.1.1.1 L'analyseur de surface d'onde

L'analyseur de Shack-Hartmann (figure 12.3) possède une matrice de  $8 \times 8$  micro-lentilles carrées de 240 microns de côté chacune. Leur focale a été estimée à 18 mm avec une marge d'erreur élevée de 10% étant donnée l'ouverture ( $f/75$ ). 52 micro-lentilles sont utiles dans la pupille circulaire. Cette matrice de micro-lentilles est conjuguée de la pupille d'entrée. Une caméra DALSA équipée d'un détecteur CCD de  $128 \times 128$  pixels de 16 microns réalise la mesure à une fréquence pouvant aller jusqu'à plus de 500 Hz. Le bruit de cette caméra non refroidie est élevé (voir paragraphe 12.2). Un diaphragme de champ peut être placé au foyer de cet analyseur. Il sera utilisé pour les tests d'OAAO (voir chapitre 16). La mesure de pentes sur le banc BOA se fait en deux étapes : un traitement des images acquises par le capteur, puis le calcul proprement dit des pentes. Le traitement des images consiste en la soustraction d'un fond (voir paragraphe 12.2.2.1), et l'application d'un seuil. La méthode de seuillage, propre à l'expérience, consiste à évaluer pour chaque sous-pupille un niveau de signal tel qu'en moyenne 8 pixels de la sous-pupille aient un niveau de signal supérieur à ce seuil. Ce niveau est estimé en moyenne, sur un grand nombre d'acquisition d'images en boucle ouverte (plusieurs centaines). Ensuite, pour chaque image, ce niveau de signal est soustrait à l'ensemble des pixels de la sous-pupille, les valeurs négatives étant mises à zéro. Le nombre de pixels fixant le niveau de seuillage peut être ajusté. Le calcul de pente est appliqué sur les images traitées et se résume à un classique CDG.

Comme expliqué au paragraphe 2.3.1, la mesure de pentes est réalisée relativement à des pentes dites de référence. Ces pentes sont généralement obtenues par calibration en plaçant une source au foyer de l'ASO. Ces références  $y^{\text{ref}}$  représentent ainsi la mesure associée à un front d'onde plan et

définissent le zéro de la mesure de pentes, autrement dit la consigne. Il est à noter qu'on peut choisir de modifier ces pentes de références, afin de définir une nouvelle consigne et donc amener le système à travailler autour d'un front d'onde non plan. En effet, considérons un système d'OA en boucle ouverte. On suppose qu'une mesure de pentes  $\mathbf{y}$  est définie par rapport à la référence  $\mathbf{y}^{\text{ref}}$ . Notons  $\mathbf{y}^{\text{abs}}$  les mesures de pentes absolues. La mesure effective est donc  $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{\text{abs}} - \mathbf{y}^{\text{ref}}$ . On sait (paragraphe 2.4.1) qu'alors la commande peut être obtenue en minimisant :

$$\epsilon(\mathbf{u}) = \|\mathbf{y} - M_{\text{inter}}\mathbf{u}\|^2, \quad (12.1)$$

conduisant à  $\mathbf{u} = -\mathbf{M}_{\text{com}}\mathbf{y}$ . Si on modifie les pentes de référence en un vecteur  $\mathbf{y}^{\text{ref}'}$ , alors la mesure devient  $\mathbf{y}'$  :

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y}^{\text{abs}} - \mathbf{y}^{\text{ref}'} = \mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}^{\text{ref}}, \quad (12.2)$$

où  $\Delta\mathbf{y}^{\text{ref}} = \mathbf{y}^{\text{ref}} - \mathbf{y}^{\text{ref}'}$ . En choisissant  $\Delta\mathbf{y}^{\text{ref}}$  telle que  $\Delta\mathbf{y}^{\text{ref}} = M_{\text{inter}}\Delta\mathbf{u}$ , et en supposant que  $\mathbf{M}_{\text{com}}M_{\text{inter}} = \mathbf{Id}$ , ceci amène à une nouvelle commande  $\mathbf{u}'$  définie par :

$$\mathbf{u}' = -\mathbf{M}_{\text{com}}\mathbf{y}' = \mathbf{u} - \mathbf{M}_{\text{com}}\Delta\mathbf{y}^{\text{ref}} = \mathbf{u} - \Delta\mathbf{u}. \quad (12.3)$$

On amène ainsi le miroir à générer un front d'onde additif donné. Dans le cadre d'une commande de type intégrateur, on peut prolonger ce raisonnement et amener par un changement de pentes de référence à faire fonctionner l'asservissement d'OA, à convergence, autour d'un front d'onde non plan choisi. Cette méthode sera mise à profit au paragraphe 12.4.

### 12.1.1.2 Miroir de pointage et miroir déformable

Ces deux miroirs (figure 12.4) réalisent la correction du front d'onde. Le miroir de pointage est un miroir Physics Instrument corrigeant la bascule du faisceau selon les deux axes. Sa bande passante est supérieure à 1 kHz. Le miroir déformable est un miroir CILAS de type Stacked Array Mirror c'est-à-dire à empilement de piézo-électriques. Il est constitué de  $10 \times 10$  actionneurs espacés de 8 mm, dont 88 utiles. Les actionneurs sont alimentés en tension à  $\pm 400\text{V}$  pour une déformée maximale d'un peu plus de 4 microns Pic-Vallée (PV) mécaniques. Ce miroir possède une bande passante de plus de 10 kHz.

L'utilisation d'un analyseur de  $8 \times 8$  sous-pupilles a conduit à ne considérer qu'une zone de  $9 \times 9$  actionneurs (actionneurs placés aux angles des sous-pupilles). Ceci explique l'apparition sur le banc d'une pupille circulaire pleine, excentrée, de 10,10 mm dans l'espace collimaté du module d'adaptation et de 64 mm de diamètre sur ce miroir. On ne considère ainsi que 69 actionneurs utiles. La figure 12.5 résume cette configuration. Une conséquence de cette modification est la présence d'un certain nombre d'actionneurs inutilisés autour de cette pupille. On pourra s'interroger sur la tension de commande à leur appliquer (voir paragraphe 12.2.3.1).

### 12.1.1.3 Caméra d'imagerie

L'imagerie scientifique est réalisée par une caméra Princeton (figure 12.6)  $512 \times 512$  pixels de 24 microns faible bruit, grâce à son refroidissement, de 4 photo-électrons. Elle est placée derrière un téléobjectif d'ouverture  $f/155$ .

## 12.1.2 Le simulateur de turbulence

Bien que l'ONERA dispose d'une cuve à turbulence pouvant reproduire des conditions de turbulence atmosphérique, un simulateur de turbulence plus simple a été choisi. En effet, on souhaite

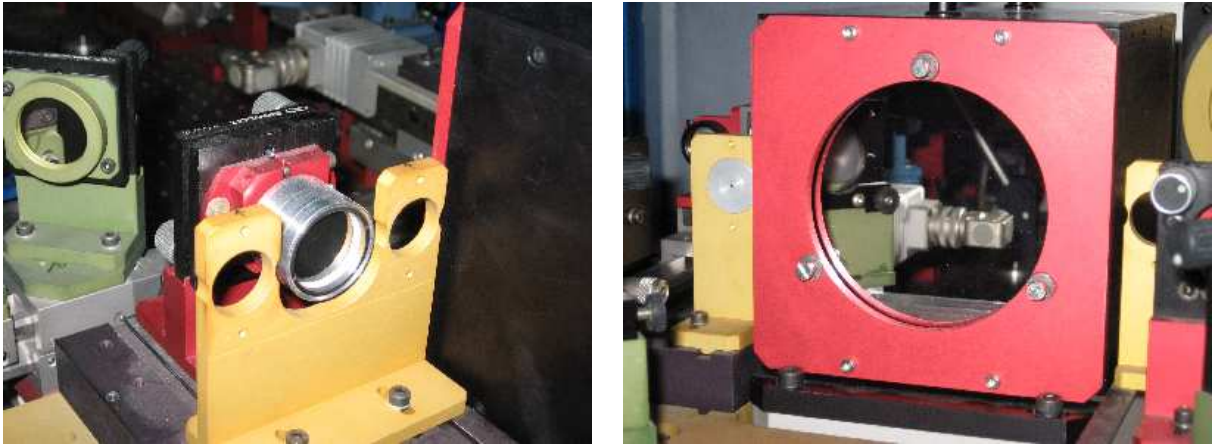


FIG. 12.4 – Photographie du miroir de basculement (gauche) et du Miroir Déformable de BOA (droite).

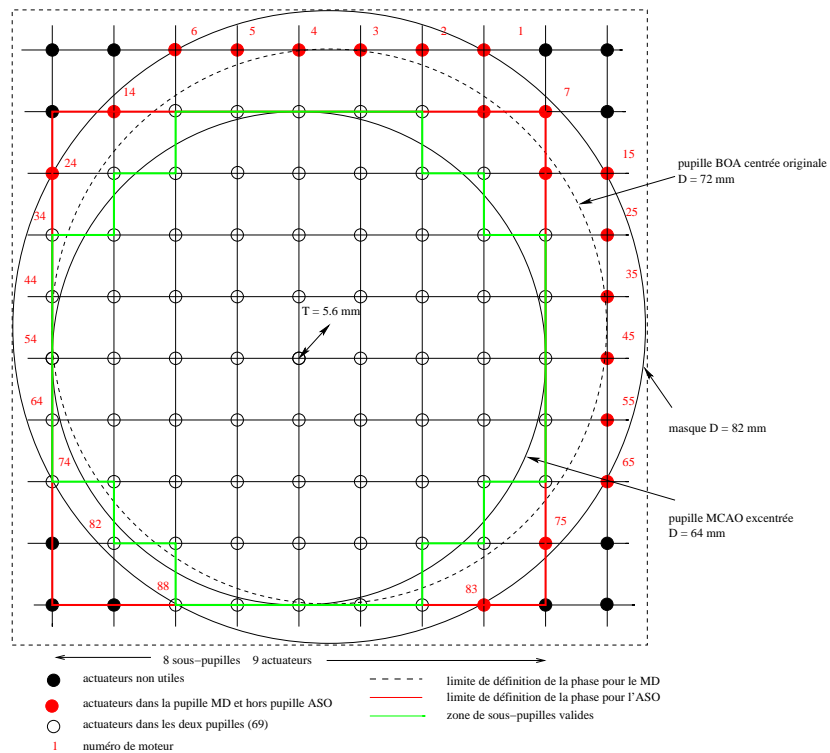


FIG. 12.5 – Représentation schématique de la configuration ASO/MD. On superpose artificiellement la face avant du miroir et la matrice de micro-lentille de l'ASO. Une zone de  $8 \times 8$  sous-pupilles et donc  $9 \times 9$  actionneurs est utilisée. Les actionneurs sont placés aux angles des sous-pupilles carrées. La pupille utile est légèrement excentrée par rapport à la pleine pupille du MD.

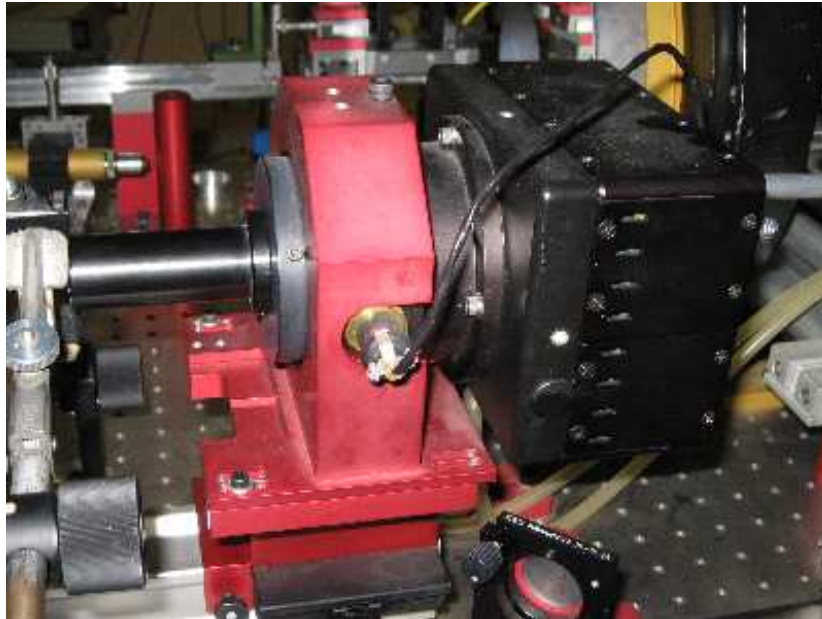


FIG. 12.6 – Photographie de la caméra d'imagerie Princeton de BOA.

connaître précisément la turbulence générée, et surtout la reproduire afin de tester les diverses lois de commande dans des conditions strictement similaires. Le choix s'est donc porté sur des écrans de phase fournis par l'Observatoire de Paris. Cette technologie a notamment servi à la phase d'intégration du système NAOS. Les écrans sont constitués d'un substrat de verre sur lequel est déposé une résine photo-sensible. Cette résine est insolée à travers un masque afin de générer un profil d'épaisseur variable. Une aluminure est ajoutée alors comme sur un miroir standard. Les retards ainsi créés sur un front d'onde venant se réfléchir sur ce miroir permettent de reproduire les effets d'une couche turbulente de statistique spatiale déterminée par le masque utilisé lors de l'insolation. Enfin le miroir circulaire de 5 cm de diamètre obtenu est mis en rotation grâce à un moteur linéaire continu pour reproduire l'effet de vent. Le but est de générer une turbulence de type Kolmogorov, sous hypothèse de Taylor, aux caractéristiques bien établies.

### 12.1.2.1 Dimensionnement du simulateur

Le dimensionnement du simulateur a été réalisé par S. Oberti [Oberti(2002)]. En voici les grandes lignes. L'objectif est donc de dimensionner le système pour être au mieux représentatif des effets d'anisoplanétisme observés sur un télescope de type VLT (8 m de diamètre) dans l'infra-rouge, et ce en respectant les contraintes imposées par le banc BOA. En particulier, on se limite ici à une turbulence supposée mono-couche qui pourrait être en somme une couche turbulente équivalente d'un profil turbulent distribué en altitude typique de celui observé au dessus de Paranal.

Le dimensionnement d'un système expérimental visant à reproduire les conditions d'un système astronomique passe par la conservation d'un certain nombre de paramètres d'échelle. En notant  $D$  le diamètre du télescope,  $r_0$  le paramètre de Fried de la turbulence,  $h$  l'altitude de la couche turbulente,  $\alpha$  l'angle entre les deux étoiles et  $\lambda$  la longueur d'onde, ces paramètres sont :

- $\frac{D}{r_0}$ , caractéristique de l'effet de la turbulence sur l'imagerie ;

- $n = \frac{\alpha h}{D}$ , caractéristique du découvrement des pupilles projetées sur la couche turbulente et donc de l'effet d'anisoplanétisme (voir paragraphe 1.3.3.1.4);
- $\frac{D^2}{\lambda h}$  s'interprétant comme la conservation de l'angle solide par unité de diffraction ou comme le nombre de grains d'intensité dans la pupille. On montre que l'énergie de scintillation est inversement proportionnelle à ce paramètre à la puissance  $\frac{5}{6}$  [Mahé(2000)].

Notons que conserver  $n$  et  $\frac{D^2}{\lambda h}$  est équivalent à conserver  $n$  et  $\frac{\alpha}{\lambda/D}$ , c'est-à-dire le champ en unité de diffraction.

Le choix des divers paramètres  $D$ ,  $r_0$ ,  $h$ ,  $\alpha$  relève donc d'un compromis entre la conservation des paramètres d'échelle  $\frac{D}{r_0}$ ,  $n$ ,  $\frac{D^2}{\lambda h}$ , assurant un système représentatif, et les contraintes liées au banc BOA.

Ces contraintes sont les suivantes :

- la longueur d'onde est fixée dans le visible ;
- les quelques écrans disponibles limitent le nombre de conditions de turbulence reproductibles (paramètre  $r_0$ ) ;
- le champ de BOA est limité. Afin de conserver une bonne qualité optique du système on doit donc restreindre la valeur de  $\alpha$  ;
- l'utilisation d'une seule couche turbulente placée en altitude risque d'amplifier un éventuel phénomène de scintillation, toute la turbulence pouvant être concentrée à très haute altitude ( $\alpha$  étant fixé et petit il faut augmenter notablement  $h$  pour augmenter le découvrement), ce qui n'est pas réaliste et risque de pénaliser la mesure de front d'onde. Il est donc important de contrôler ce phénomène ;
- l'encombrement final du système doit être limité étant donné la place disponible sur le banc. Ceci impose une compacité du simulateur de turbulence.

Afin de fixer les idées, on peut définir un cas typique d'une observation à Paranal. Envisageons par exemple une couche équivalente située à environ 3 km d'altitude (ceci peut être représentatif d'un cas Paranal, avec une couche au sol un peu plus prépondérante, voir paragraphe 1.3.3.1.4). Le champ isoplanétique ne dépasse guère quelques dizaines d'arcsecondes dans l'infra-rouge. On pourra s'intéresser à un phénomène d'anisoplanétisme équivalent à celui rencontré dans un champ de près d'une arcminute. Dans cette situation, on trouve que le découvrement est de l'ordre de  $n = 10\%$ .

Le compromis trouvé privilégie la conservation des effets d'anisoplanétisme. Ce sont en effet les paramètres d'intérêt pour démontrer les performances en commande. Mais ce choix s'est fait au détriment de la scintillation, difficile à minimiser au regard des contraintes.

### 12.1.2.2 Caractéristiques du simulateur et perte d'équivalence

Ce paragraphe présente la configuration qui a été retenue étant données les contraintes d'échelle et d'implantation sur le banc. Les paramètres de mise à l'échelle permettent d'en déduire les conséquences vis-à-vis du système réel simulé.

Tout d'abord, le champ de BOA étant limité, il a été choisi de ne pas faire varier la séparation angulaire des deux étoiles. L'écart angulaire  $\alpha$  est fixé et on translate la couche turbulente en altitude pour modifier l'effet d'anisoplanétisme. A travers le paramètre  $n = \frac{\alpha h}{D}$ , on constate qu'alors pour tout découvrement et donc tout effet d'anisoplanétisme voulu, on pourra trouver, à  $\alpha$  donné, une altitude  $h$  satisfaisant l'équivalence en terme d'anisoplanétisme. L'ensemble des paramètres sont exprimés dans l'espace collimaté du module d'injection (voir schéma 12.2), dans lequel est placé l'écran de phase. Les paramètres retenus sont les suivants :

- la pupille du système  $D$  dans l'espace collimaté du simulateur est de 0,86 mm. Le champ maximal de l'OA est de  $5,24^\circ$  dans cet espace, la diffraction étant de 2,54 arcmin. Cette valeur



- de  $D$  permet de simuler divers  $\frac{D}{r_0}$  d'intérêt comme 3, ou 5,5 (à 0,5  $\mu\text{m}$ ) selon les écrans ;
- $\alpha$  est fixé à  $2^\circ$  (soit environ 50 fois la diffraction) dans ce même espace, permettant donc de conserver les deux sources dans le champ de la caméra d'imagerie ;
  - pour simuler un découvrement  $n$  variant de 0 à 100%,  $h$  varie entre 0 et près de 24,6 mm. Ceci offre un encombrement compatible avec l'espace disponible, notamment en utilisant l'écran turbulent en réflexion à  $45^\circ$  ;
  - les sources peuvent être blanches ou, pour des problèmes d'injection et de flux, issues d'un laser He-Ne (635 nm) ou de diodes laser émettant à 633 nm. Cette dernière solution est préférable, la cohérence de la source étant plus faible.

Pour bien comprendre les implications de ces choix, on va les ré-interpréter à travers un système réel. On considère un système de type VLT ( $D' = 8$  m), fonctionnant dans l'infra-rouge ( $\lambda' = 2,2$   $\mu\text{m}$ ). Si on suppose un fonctionnement avec une turbulence monocouche, située typiquement à  $h = 3$  km, et un champ d'intérêt (séparation  $\alpha$ ) de 1 arcmin, cela correspond en unités de diffraction à  $1000\lambda/D$  et à  $n = 10\%$ .

Le montage proposé permet de reproduire un tel découvrement de  $n = 10\%$ , mais avec un angle  $\alpha$  de seulement  $50\lambda/D$ , c'est-à-dire un champ en unité de diffraction très inférieur à celui du VLT. Comme souligné précédemment au paragraphe 12.1.2.1, la conservation des paramètres d'échelle est équivalente à conserver  $n$  et  $\frac{\alpha}{\lambda/D}$ . Ici, la conservation est donc mise en défaut.

Pour fixer les idées, on peut évaluer inversement les valeurs des paramètres  $h'$  et  $\alpha'$  pour le VLT, lorsqu'on considère un cas  $n = 10\%$ , soit  $h = 2,46$  mm sur BOA, et que l'on conserve  $\frac{\alpha}{\lambda/D} = 50$ . Cela conduit à une valeur  $h'$  de :

$$h' = \left(\frac{D'}{D}\right)^2 \frac{\lambda}{\lambda'} h = 61,25 \text{ km}, \quad (12.4)$$

soit :

$$\alpha' = 2,7'' . \quad (12.5)$$

Cette valeur semble évidemment peu réaliste. Ce résultat traduit seulement le fait que le champ de notre montage est trop faible. On en déduit que pour obtenir le même découvrement  $\alpha$  on va devoir placer la couche turbulente bien plus haut en altitude. L'ensemble des paramètres d'échelle ne peuvent être conservés. Le paramètre  $n$ , qui conditionne l'effet d'anisoplanétisme, est bien conservé mais la scintillation ne l'est pas.

On peut s'interroger aussi sur le niveau de turbulence reproduit. Il s'agit d'un élément dimensionnant du système. Or, peu d'écrans et donc de conditions de turbulence différentes sont disponibles. Soulignons déjà que les caractéristiques du système tendent à choisir  $\frac{D}{r_0} \leq 8$  environ, pour 8 sous-pupilles linéaires pour l'analyseur. De plus, on souhaite au départ réaliser des tests dans des conditions favorables, afin de bien identifier les éventuels problèmes. On choisit donc des conditions de faible  $\frac{D}{r_0}$ . Surtout, le même écran est utilisé dans ce montage pour représenter la turbulence à diverses altitudes. Par conséquent, si un  $\frac{D}{r_0}$  de 3 ou 5,5 semble faible lorsque  $n = 0\%$  et que la couche est dans la pupille, il devient relativement fort lorsque la couche se situe en altitude, avec  $n = 20\%$  par exemple. Il est donc important de garder à l'esprit cette conservation du niveau de turbulence quel que soit le découvrement.

Le module de turbulence est présenté en figure 12.7, et un schéma de principe est proposé en figure 12.8. Il est composé tout d'abord des deux sources fibrées (fibres de 4 microns, soit 1/18 de la diffraction au point (A)) connectées à la diode laser émettant à 633 nm. Ces deux sources sont placées toutes deux dans le plan focal d'une lentille grâce à une séparatrice. Une des sources est placée sur l'axe optique du système d'OA et constitue notre étoile sur axe pour tous les tests d'OA

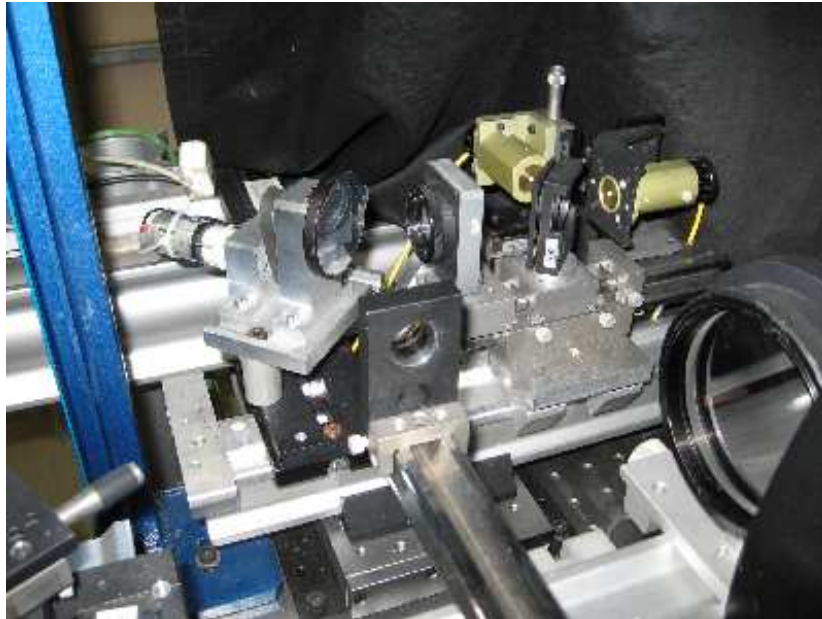


FIG. 12.7 – Le module d’injection : l’écran turbulent en réflexion est monté sur un moteur en rotation. L’ensemble est placé à  $45^\circ$  dans le faisceau collimaté issu des deux sources.

et d’OAAO. La seconde source est placée hors axe avec un angle  $\alpha = 2^\circ$  dans l’espace collimaté. L’écran de phase est placé à  $45^\circ$  dans le faisceau collimaté. Cette configuration n’est pas optimale, puisqu’il existe une légère variation de l’altitude de la couche d’un bord à l’autre de la pupille. Cet angle de  $45^\circ$  entraîne aussi une anisotropie du facteur  $\frac{D}{r_0}$  (la pupille découpée sur l’écran est en fait elliptique). Les calibrations du module de turbulence n’ont pas indiqué d’effet sensible de ce défaut. Il sera négligé.

L’ensemble, sources et écran, peut être translaté en altitude de telle sorte que le découvrément augmente. Il est nul lorsque l’écran turbulent est dans la pupille. Enfin, un système dioptrique refocalise le faisceau collimaté en entrée du système d’OA et réalise l’adaptation d’ouverture. Ce montage a subi cependant quelques modifications mineures afin de pouvoir réaliser des tests dynamiques : l’architecture proposée par Oberti était statique. L’utilisation d’un moteur linéaire continu fourni par P.Y. Madec a permis de placer l’écran sur une monture rotative.

Les deux pupilles projetées sur l’écran sont placées côte-à-côte et à la verticale de l’axe de rotation pour simuler un vent en quasi translation, uniforme entre les pupilles. En effet, on limite ainsi le gradient de vitesse avec  $r$  entre pupilles (la variation de la composante radiale de la vitesse de vent au travers des deux pupilles est inférieure à 20% pour  $n \leq 30\%$ ). En choisissant une distance à l’axe  $r$  relativement grande par rapport au diamètre de pupille, on s’assure d’avoir un vent en quasi-translation (la variation de la composante radiale de la vitesse de vent dans une pupille représente alors moins de 15% de la vitesse totale).

## 12.2 Calibration et modélisation de BOA

La calibration du banc BOA est une étape fondamentale dans la mise en œuvre et la validation de notre loi de commande. Comme pour toute validation expérimentale, il s’agit avant tout de connaître



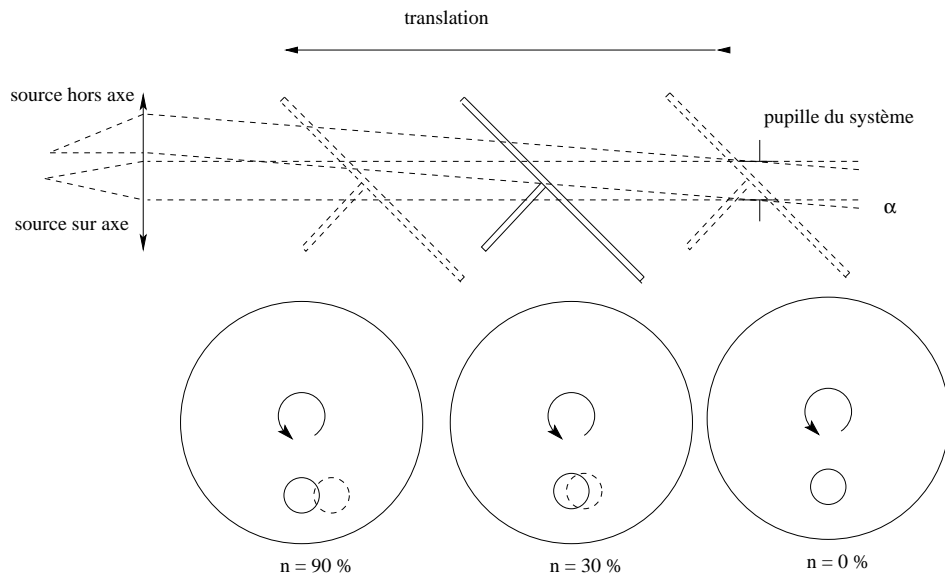


FIG. 12.8 – Schéma du module d'injection (gauche) et de l'écran (droite) : l'écran turbulent en réflexion est monté sur un moteur en rotation. L'ensemble est placé à  $45^\circ$  dans le faisceau collimaté issu des deux sources (par simplicité le schéma est présenté en transmission). La translation en altitude permet de modifier le découverture  $n$ . Deux pupilles sont découpées sur l'écran, placées l'une à côté de l'autre à la verticale de l'axe de rotation. En trait continu la pupille correspondant à l'étoile sur axe, en pointillés, celle correspondant à l'étoile hors axe, placée en aval selon le sens de rotation.

les caractéristiques des outils de diagnostic que sont les caméras, et les propriétés générales des divers composants. Cette calibration revêt cependant une importance particulière dans le cadre de la validation d'une commande LQG. En effet, contrairement à une commande plus standard, basée par exemple sur un intégrateur, une commande LQG se place dans un cadre précis, reposant sur certaines hypothèses (linéarité des composants, propriété du bruit de l'ASO, retard de système ...). On doit donc vérifier l'adéquation de ces hypothèses avec les propriétés des composants. En outre, cette commande requiert contrairement à la plupart des lois de commande standard une connaissance *a priori* des composants, au travers de modèles (modèle d'ASO, bruit de mesure, modèle de MD ...), et surtout de la turbulence (vitesse de vent, altitude, propriétés spatiales). Par conséquent, une caractérisation précise de ces divers éléments est nécessaire et débouche sur la définition des modèles utilisés. Cette partie fait une synthèse des calibrations menées, donnant une idée plus précise des conditions expérimentales. Les hypothèses utilisées pour définir la commande sont discutées. Cette partie détaille aussi pour chaque élément les modèles qui pourront être utilisés dans la loi de commande. Plus qu'un inventaire à la Prévert, il s'agit donc de définir les éléments au cœur de la loi de commande.

### 12.2.1 Caméra Princeton

La caméra Princeton a déjà fait l'objet de plusieurs caractérisations, qui ont permis de valider les données constructeur. Par conséquent sa calibration s'est limitée pour nous à évaluer son facteur d'échantillonnage et les relations opto-géométriques entre cette caméra et la caméra ASO. Ces paramètres sont indispensables à l'estimation du SR des images (voir annexe A.1) et à la compensation des aberrations non communes (paragraphe 12.4). Ils sont rappelées dans le tableau 12.2. Soulignons

taille pixel	24 $\mu$ m 36 arcsecondes
taille capteur	512 $\times$ 512 pix
suréchantillonnage	2,05 shannon
bruit max FoV	4 photo-électrons/pix/trame 5,24 $\times$ 5,24 degrés

TAB. 12.2 – Caractéristiques principales de la caméra d’imagerie (les dimensions angulaires sont données dans l’espace collimaté du simulateur de turbulence).

que les caractéristiques de ce composant n’ont pas d’impact direct sur la loi de commande puisqu’il se situe en aval de la boucle d’asservissement.

### 12.2.2 Analyseur de Shack-Hartmann

L’ASO est l’outil de mesure du front d’onde. Deux niveaux de caractérisation sont à considérer. D’une part la caractérisation du capteur : les caractéristiques généralement considérées en sont la courbe de réponse donnant le gain, le bruit de détecteur, la carte de gain pixellique (ou *flat*) et de fond. Ces données sont nécessaires pour la connaissance du composant et de sa réponse. D’autre part, on souhaite définir un modèle d’ASO : dans le cadre de la loi de commande proposée, l’ASO intervient au niveau de l’équation de mesure (équation (4.45)) et au sein du calcul de la matrice de gain *via* la matrice de bruit de mesure  $\Sigma_w$  (équation (5.26)). Les hypothèses qui ont été faites lors de l’établissement de la loi de commande (linéarité de la mesure, bruit de mesure blanc et gaussien ...) sont basées sur des propriétés communément vérifiées par les ASO Shack-Hartmann. L’enjeu est ici de contrôler en premier lieu que le composant utilisé est bien compatible avec ces hypothèses. On s’intéresse donc à la réponse du composant et aux propriétés statistiques du bruit de mesure des pentes. Il s’agit ensuite de proposer un modèle déterministe d’ASO, soit géométrique soit diffractif (voir paragraphe 8.3.3). Dans les deux cas, modèle et réponse du composant doivent coïncider. Le dimensionnement du modèle ASO s’appuie sur la caractérisation du capteur. Un récapitulatif des caractéristiques de la caméra ASO est donné dans le tableau 12.3. La figure 12.5 précise la position géométrique relative de l’ASO par rapport au MD.

#### 12.2.2.1 Réponse du capteur

Rappelons que la matrice CCD utilisée au sein de l’analyseur doit pouvoir délivrer un signal électrique proportionnel au flux lumineux reçu par chaque pixel. C’est-à-dire que la réponse d’un pixel  $i$  s’écrit :

$$s_i = g_i F_i + c_i + b_i, \quad (12.6)$$

où  $s_i$  est la réponse du pixel en terme de signal électrique après passage au travers des divers étages de lecture, amplification et conversion,  $g_i$  est le gain de la réponse du pixel,  $F_i$  est le signal lumineux détecté par le pixel (en photo-électrons),  $c_i$  est un offset,  $b_i$  est un bruit de mesure. Le bruit  $b_i$  est généralement considéré comme gaussien, et le signal lumineux  $F_i$  est poissonnien, indépendant du bruit, si bien que le signal  $s_i - c_i$  vérifie :

$$\sigma_{s_i - c_i}^2 = g_i \langle s_i - c_i \rangle + \sigma_{b_i}^2, \quad (12.7)$$

où  $\sigma^2$  désigne la variance d’un signal et  $\langle \cdot \rangle$ , sa moyenne. Ainsi, le tracé de la courbe de variance de  $s_i - c_i$  en fonction de sa valeur moyenne permet de déduire les paramètres  $g_i$  et  $\sigma_{b_i}$ . Évidemment,

taille pixel	16 $\mu$ m 6,86 arcmin
taille capteur	128 $\times$ 128 pix
nbr pixels par sous-pupille	15 $\times$ 15
fréquence de lecture	270 Hz
nbr micro-lentilles	8 $\times$ 8
focale micro-lentilles	18 mm
dimension micro-lentilles	240 $\mu$ m
suréchantillonnage	1,48 shannon
max FoV/ss pupille	1,71 $\times$ 1,71 degrés
max FoV total	13,72°
diffraction au foyer de l'ASO (C)	11 $\mu$ m
bruit de détecteur	$\sigma_b \simeq 60$ photo-électrons/pix/trame
flux typique par sous-pupille (après seuillage)	62500 photo-électrons
bruit de mesure de pentes par sous-pupille (pour ce flux)	10 <sup>-3</sup> pixels <sup>2</sup> ou 0,005 rad <sup>2</sup>

TAB. 12.3 – Caractéristiques principales de l'ASO (les dimensions angulaires sont données dans l'espace collimaté du simulateur de turbulence).

on peut s'attendre à une inhomogénéité entre pixels des termes  $g_i$ ,  $c_i$  et  $b_i$ . L'acquisition d'une image en l'absence de flux appelée fond (ou image flux froid ou *dark*) permet de déterminer la carte  $c_i$ . L'acquisition d'images à flux lumineux uniforme sur le capteur (ou images à flux chaud ou *flat field*) permet de déduire la carte de gain pixel. L'inhomogénéité constatée est faible, ce qui permet de définir un gain moyen et un bruit moyen du capteur.

La figure 12.9 présente la calibration de la réponse moyenne de l'analyseur en terme de variance du signal mesuré en fonction de la valeur de ce signal (signal dit *Analogic to Digital Unit* ou ADU, numérisé sur 12 bits). On vérifie la bonne linéarité de la réponse du détecteur en fonction du flux, avec un gain moyen de  $g_{moy} = 0,04$  ADU/photo-électrons (écart-type entre pixels de  $2,6 \cdot 10^{-3}$ ), et le bruit moyen est d'écart-type  $\sigma_{b_{moy}} = 60$  photo-électrons. Cette valeur est élevée, même pour ce type de détecteur. Comme nous le verrons par la suite, le système d'acquisition actuel est provisoire et non optimisé et peut expliquer un tel niveau de bruit. Les tests présentés dans ce mémoire sont cependant tous réalisés à fort flux afin d'avoir un rapport signal-à-bruit élevé. Ainsi, dans les conditions expérimentales standard du banc, le bruit de mesure des pentes (estimé sur source interne ou sur source en altitude avec une turbulence fixe, à 60 Hz) est de  $10^{-3}$  pixels<sup>2</sup> par sous-pupille, soit environ 0,005 rad<sup>2</sup> en variance de différence de phase en bord de sous-pupille. Le flux quant à lui est, après seuillage (paragraphe 12.1.1.1), de 62500 photo-électrons par sous-pupille.

On constate alors que le bruit est supérieur à celui donné par les équations proposées au paragraphe 2.3.1. Pour ce faire, on considère que  $X_D$ , lié à la dimension de la tache à la limite de diffraction vérifie  $X_D \simeq 3$ , le facteur d'échantillonnage étant de près de 1,5 fois Shannon (voir ci-dessous le facteur d'échantillonnage). On considère aussi que  $X_T \simeq 4$ . La turbulence est en effet faible par sous-pupille ( $D/r_0 \simeq 3$ ) et conduit à une tache image de 4 pixels linéaires. Enfin,  $X_S \simeq 3$  en raison de la méthode de seuillage aux 8 pixels les plus intenses définissant une fenêtre de calcul du CDG de  $3 \times 3$  pixels. La valeur déduite des formules (2.3) et (2.4) est inférieure d'un facteur 5 à la valeur expérimentale. On est dominé par les effets de fenêtrage et de seuillage amenant à une saturation du bruit. Ce constat est confirmé par une analyse du bruit mesuré en fonction du flux de la source : la variance du bruit est peu dépendante du flux et ne commence à varier qu'à flux très faible. En conclusion, la caméra est

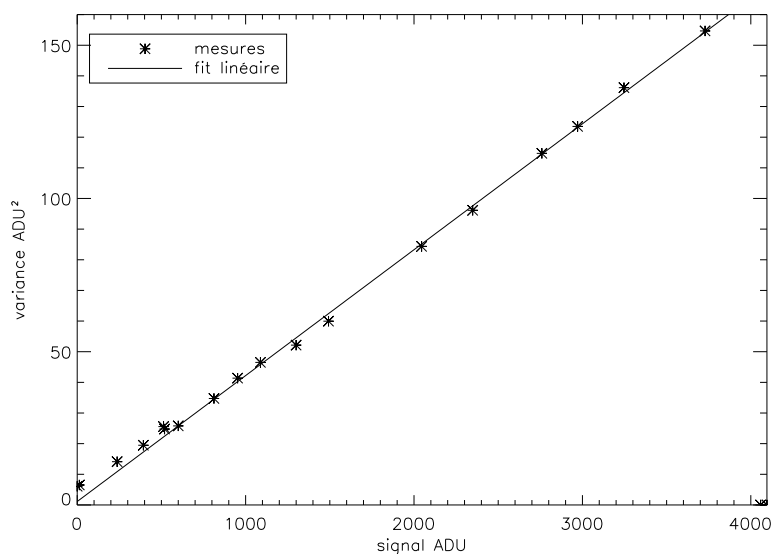


FIG. 12.9 – Courbe de caractérisation du gain de la caméra Dalsa. On peut voir l'effet de la saturation aux forts niveaux de signal au-delà de 3900 ADU.

fortement bruitée, mais les conditions d'utilisation nominales nous placent dans des conditions de très bon rapport signal-à-bruit. L'ensemble des caractéristiques principales de l'ASO est synthétisé dans le tableau 12.3.

### 12.2.2.2 Facteur d'échantillonnage du capteur

La mesure de pentes est conditionnée non pas par la focale des micro-lentilles, mais par le bras de levier, c'est-à-dire la distance réelle des micro-lentilles au capteur. Celle-ci est mal connue, comme d'ailleurs la focale des micro-lentilles, mais peut être identifiée à partir des mesures. Ceci peut être fait notamment sur source ponctuelle non résolue en l'absence de turbulence en contrôlant les images par sous-pupille et la sensibilité de déplacement des spots, notamment lors de l'introduction dans le trajet optique d'un prisme de qualité, d'angle parfaitement connu [Oberti(2002)]. On déduit ainsi que le facteur d'échantillonnage est de 1,48 fois Shannon, soit près de 3 pixels dans la tache de diffraction.

### 12.2.2.3 Modélisation de l'ASO

On s'intéresse maintenant à la modélisation de l'ensemble du composant ASO. Deux hypothèses principales sont utilisées pour établir l'équation de mesure (5.58) : une mesure linéaire du front d'onde et la présence d'un bruit additif, blanc et gaussien, indépendant de la phase.

Considérons donc d'abord le bruit de mesure des pentes. La figure 12.10 montre la DSP temporelle d'une mesure de pentes (un axe, une sous-pupille donnée) en l'unique présence de bruit (pas de turbulence sauf locale) ainsi qu'un histogramme de la mesure. La DSP n'est pas exactement celle d'un bruit blanc. A très basse fréquence la coloration du signal peut être due à la turbulence locale et des effets électroniques. Néanmoins, ce défaut concerne uniquement un intervalle spectral très réduit. L'histogramme montre une certaine dissymétrie mais le modèle de bruit gaussien centré est une bonne approximation. Ces données sont très similaires entre sous-pupilles et selon les deux axes. En

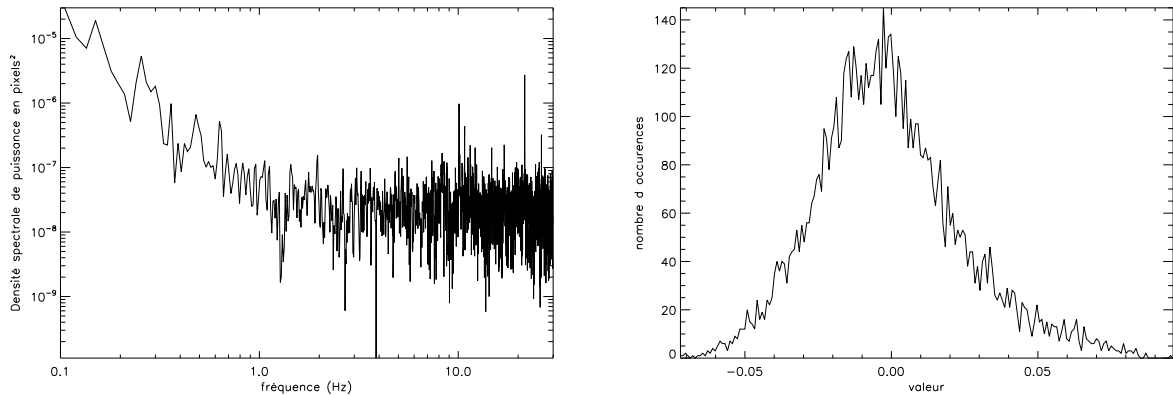


FIG. 12.10 – DSP temporelle (gauche) d’une mesure de pentes en la seule présence de bruit (turbulence figée) et histogramme associé à la mesure donnée en pixels (droite).

première approximation, l’hypothèse d’un bruit de mesure blanc gaussien est donc confortée. Rappelons en outre que le filtre de Kalman reste l’estimateur linéaire optimal au sens du minimum de variance en présence de bruits non gaussiens. Par contre, la perte de blancheur du bruit conduit à une perte d’optimalité.

Du point de vue modélisation, on fait généralement l’hypothèse supplémentaire que le bruit de mesure est décorrélé entre sous-pupilles et entre les deux directions, si bien que la matrice de covariance du bruit est diagonale. Ce point semble plus litigieux. L’analyse de la covariance de ce bruit, proposée en figure 12.11, entre sous-pupilles montre un couplage notable. Le couplage est faible entre pentes en  $x$  et  $y$ , mais les pentes en  $x$  ou  $y$  entre elles sont couplées. Ceci est probablement dû à la méthode de lecture par colonne du capteur, introduisant un bruit qui se propage (transfert de charges). Néanmoins l’hypothèse de découplage n’influe que sur le choix de  $\mathbf{C}_b$  et ne remet pas en cause la blancheur du bruit de mesure. On suppose en première approximation que  $\mathbf{C}_b$  est diagonale. Pour finaliser la modélisation du bruit, ajoutons que la variance de ce bruit a été estimée à  $10^{-3}$  pixels<sup>2</sup> en moyenne, mais il est inhomogène entre sous-pupilles avec un bruit plus fort pour la mesure de pentes en  $y$  (effet dû au mode de lecture par colonne). Cette disparité est négligée en première approximation.

Intéressons-nous maintenant au modèle de mesure. On a fait l’hypothèse, communément admise, que l’ASO était linéaire. En travaillant près des références (turbulence corrigée), on s’assure relativement bien de cette linéarité. Néanmoins, il est difficile de vérifier expérimentalement la validité de cette hypothèse et son domaine d’application.

Il est nécessaire d’identifier enfin la matrice ASO reliant phase et pentes mesurées. Deux approches ont été proposées, utilisant un modèle géométrique ou diffractif (voir paragraphe 8.3.3). Quel que soit le modèle retenu, le facteur d’échantillonnage est le paramètre clé du dimensionnement de la matrice ASO. Ces modèles se caractérisent par une matrice associant à chaque mode de Zernike la réponse en terme de pentes mesurée par l’ASO. La calibration directe de cette matrice n’est pas possible. Des doutes peuvent persister sur la géométrie des micro-lentilles dans la pupille et l’orientation des axes. La qualité du modèle et la pertinence de son dimensionnement ont pu être validées notamment en comparant les matrices d’interaction issues des modèles ou de la mesure expérimentale (voir paragraphe 12.3), ou encore en optimisant le banc par une méthode de diversité de phase (voir paragraphe 12.4). Des premiers tests en boucle ouverte [Petit *et al.*(2004)] ont confirmé ces résultats. Par la suite, le modèle géométrique a été utilisé exclusivement. Le modèle diffractif n’a pas apporté

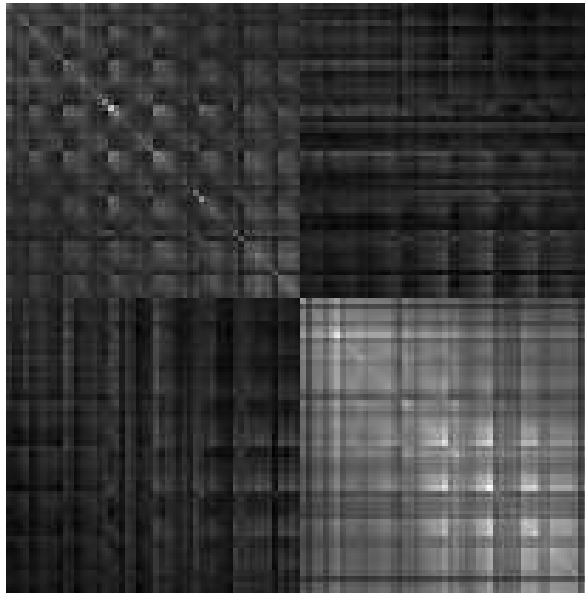


FIG. 12.11 – Matrice de covariance du bruit de mesure sur les pentes (rangée selon les pentes en x puis en y).

nb total d'actionneurs	100 (88 actifs)
diamètre pleine pupille	82 mm
diamètre pupille utile	64 mm
actionneurs utiles	69
pas interactionneur	8 mm
déformée	$\simeq$ gaussienne
coefficient de couplage	26%
déformée mécanique maximale	$\pm 2\mu\text{m}$
bande passante	$> 10$ kHz

TAB. 12.4 – Caractéristiques principales du MD.

de gain significatif, pour une complexité accrue.

### 12.2.3 Miroir déformable

Le miroir déformable, comme l'ASO, est un élément crucial de la boucle d'OA, pour lequel il est important de disposer d'un modèle précis. Dans le cadre de la commande LQG, il intervient d'une part dans la prise en compte de l'action du miroir au cours de la correction boucle fermée, d'autre part dans la projection de la phase estimée sur le miroir pour définir la commande. Par conséquent il faut s'assurer de l'adéquation d'un modèle linéaire avec le composant réel et déterminer ce modèle. L'ensemble des principales caractéristiques du miroir sont rappelées dans le tableau 12.4, sa géométrie est rappelée en figure 12.5.

### 12.2.3.1 Calibration du miroir

Les calibrations ont été réalisées grâce à un interféromètre Zygo (interféromètre de type Fizeau) ( $\lambda = 633 \text{ nm}$ ). Durant ces tests, divers paramètres du miroir déformable ont été calibrés :

- sa déformée au repos, ou déformée du miroir sous tension nulle ;
- ses fonctions d'influence, ou déformées générées par le miroir à l'activation de chacun de ses actionneurs pris séparément ;
- la linéarité de la réponse en terme de déformée du miroir à une excitation en tension et le coefficient de linéarité de cette réponse ou gain (pour chaque actionneur en microns par volt) ;
- la reproductibilité de cette réponse en tension ;
- la linéarité de la réponse du miroir à l'excitation de plusieurs actionneurs en même temps ou pris séparément que l'on nomme par la suite linéarité spatiale ;
- la dérive temporelle du miroir à l'application d'une tension, et ce, fonction aussi de la tension appliquée.

Il n'a pas été possible de caractériser la réponse temporelle dynamique du miroir à une excitation en tension. On suppose donc que la réponse du miroir n'a guère évolué depuis sa recette et les précédentes calibrations et qu'il continue à fournir une réponse assimilable à une réponse instantanée de dynamique infinie. En effet, sa bande passante est de l'ordre de 10 kHz soit bien supérieure aux fréquences d'utilisation courante, de l'ordre de la centaine de Hertz. Une synthèse des résultats obtenus au cours de ces calibrations est présentée dans ce paragraphe.

Les fonctions d'influence du miroir ont été mesurées. La matrice d'influence du miroir associant tension appliquée et déformée générée a ainsi été construite. La figure 12.12 donne un exemple de fonction d'influence mesurée. La déformée (*stroke*) mécanique moyenne fournie par chaque actionneur est d'au plus  $\pm 2 \mu\text{m}$  Pic Vallée (PV). Le coefficient de couplage mécanique moyen du miroir se définit comme le taux de déformation généré par un actionneur sollicité au niveau de ses plus proches voisins (en moyenne sur l'ensemble des actionneurs). Il est de 26%. On notera que la course considérée ici est celle d'un actionneur excité seul, en moyenne sur les actionneurs. Le miroir présente une déformée au repos très forte (figure 12.13) : elle atteint 1,8 microns PV (déformée mécanique) et 0,2 microns rms c'est-à-dire qu'elle représente près de 45% de la dynamique du miroir. Il s'agit principalement d'un astigmatisme. Cette forte déformée au repos aura, on le verra, un impact sur la commande optimale. Néanmoins une remise à plat du miroir par l'application de tensions statiques dites d'offset est possible en utilisant la matrice d'influence du miroir. On arrive ainsi à remettre le miroir à plat à mieux que 0,23 microns PV et 15 nm rms dans la pupille de 64 mm d'intérêt. On a souligné la présence d'actionneurs non utilisés, car hors pupille. Ces actionneurs sont cependant utilisés lors de la remise à plat. Les tensions de ces actionneurs sont ensuite maintenues constantes en permanence lors des réglages et de la correction par OA.

Le miroir déformable présente un très bon comportement linéaire en tension (voir la courbe 12.14). La reproductibilité de la réponse du miroir à une excitation en tension est aussi très bonne, puisque la reproductibilité mesurée est limitée par la qualité de reproductibilité des mesures Zygo, de  $\frac{\lambda}{125} = 5 \text{ nm}$  en PV. Sa linéarité spatiale a été estimée en mesurant la réponse du miroir à l'excitation de combinaisons d'actionneurs (groupes de 2,4 ou 9 actionneurs voisins). On compare ensuite ces réponses à celles fournies par un modèle linéaire qui n'est autre que la matrice d'influence. On a vérifié alors que l'erreur mesurée ne dépasse pas les 8% PV (7% rms) (pourcentage d'erreur exprimé pour le modèle linéaire relativement à la déformée réellement mesurée) dans les cas les plus exigeants. On négligera ces écarts à la linéarité.

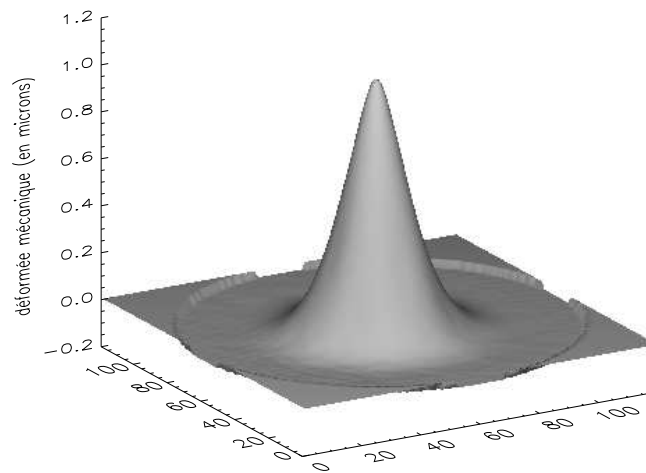


FIG. 12.12 – Fonction d’influence de l’actionneur 34. Il s’agit de la déformée mécanique mesurée en microns à l’application d’une tension de 3V.

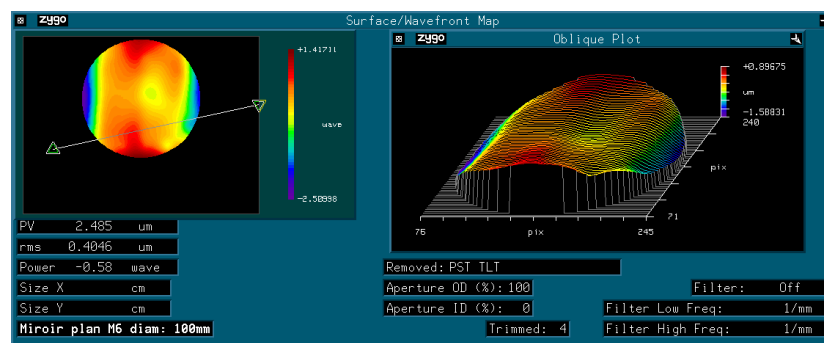


FIG. 12.13 – Déformée au repos du miroir déformable mesurée à l’interféromètre Zygo.



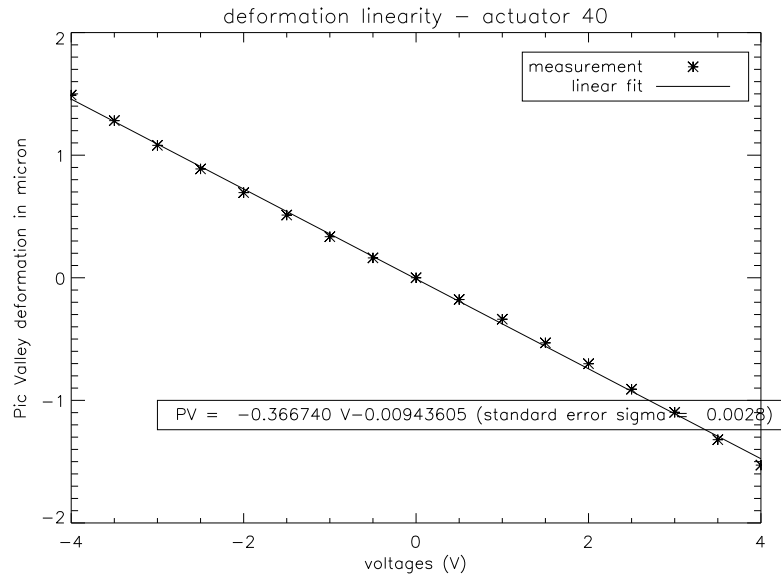


FIG. 12.14 – Courbe de réponse en tension de l’actionneur 40 du MD. La déformée mécanique en microns est donnée en fonction de la tension appliquée. La linéarité de la réponse est très bien vérifiée.

A défaut d’une caractérisation de la réponse temporelle dynamique précise du miroir à une excitation, sa dérive temporelle (évolution de la déformée appliquée et maintenue constante au cours du temps) a été toutefois estimée. On a constaté ainsi que la dérive apparaît sur des échelles de temps trop importantes pour représenter un problème en boucle fermée (plusieurs dizaines de secondes pour une dérive de 1% de la déformée par rapport à la consigne).

### 12.2.3.2 Modélisation du miroir

Les calibrations indiquent une bonne linéarité en tension du composant. L’utilisation d’un modèle linéaire du miroir, décrit par sa matrice d’influence semble donc acceptable. L’ensemble des mesures menées antérieurement conduisent à considérer un modèle dynamique du miroir réduit à un simple gain (réponse instantanée et exacte). Les calibrations permettent d’obtenir directement un modèle expérimental du miroir : sa matrice d’influence  $\mathbf{N}$ . Notons de plus que l’on peut associer au miroir un modèle approché gaussien (voir paragraphe 8.3.4). On peut choisir les paramètres des fonctions d’influence gaussiennes pour assurer, pour chaque actionneur ou en moyenne sur l’ensemble du miroir, les mêmes gains (microns/volt) et les mêmes coefficients de couplage mécanique que ceux mesurés. La figure 12.15 montre la concordance des déformées avec la forme gaussienne simple proposée, lorsqu’on a choisi un coefficient de couplage et un gain moyen sur l’ensemble des actionneurs. On pourra donc utiliser à loisir les fonctions d’influence mesurées ou le modèle gaussien, en particulier en simulation, pour modéliser le miroir.

### 12.2.4 Miroir de pointage

La calibration du miroir de pointage se résume essentiellement à la relation tension-bascule de phase pour alimenter le modèle miroir utilisé dans la loi de commande et la vérification de la linéarité

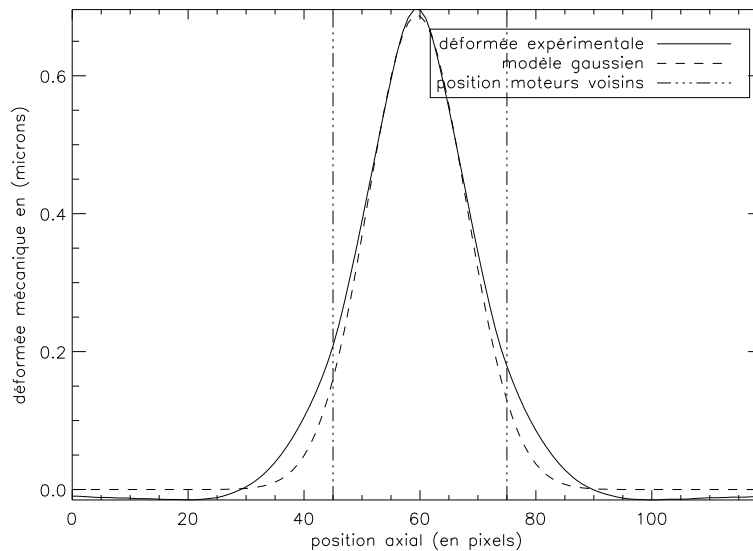


FIG. 12.15 – Coupe axiale de la déformée mécanique (en microns) d'un actionneur, et comparaison avec une approximation gaussienne. Un gain (microns/volt) et un coefficient de couplage moyen ont été appliqués expliquant l'écart entre les réponses. La position des premiers actionneurs voisins est donnée pour indication.

diamètre pleine pupille	25 mm
diamètre pupille utile	22,2 mm
bascule maximale	2,17°
bande passante	> 1 kHz

TAB. 12.5 – Caractéristiques principales du miroir de basculement (les dimensions angulaires sont données dans l'espace collimaté du simulateur de turbulence).

du composant. Sa modélisation est similaire au cas du miroir déformable, mais en plus simple. Les caractéristiques principales du miroir de basculement sont proposées dans le tableau 12.5.

#### 12.2.4.1 Calibration du miroir de basculement

La linéarité du composant, initialement considérée comme acquise étant données de précédentes campagnes de test, s'est avérée plus douteuse au cours des expériences en particulier en boucle ouverte [Petit *et al.*(2004)]. Un desserrement du support du composant a fait apparaître, au moins en boucle ouverte, des effets de dérives et d'hystérésis. Ceci est dû aussi à l'absence en boucle ouverte de jauge de contrôle de position. Les deux tracés suivants (figure 12.16) présentent l'évolution de la pente moyenne en  $x$  et en  $y$  mesurée sur l'ASO lors de l'application d'un cycle de tensions de pas 0,1 V, allant de -1 V à 1 V, pour la bascule en  $x$  puis en  $y$  du miroir. Seule la pente moyenne en  $x$  ou  $y$  est considérée car en agissant sur le miroir de pointage on n'introduit qu'une bascule globale sur la phase entièrement rendue par la pente moyenne.

On retrouve un phénomène de non-linéarité (hystérésis) non négligeable, lié au pas de tension appliqué. Pour un pas de 0,1 V il est notable mais limité, au-delà il s'amplifie rapidement. Or en

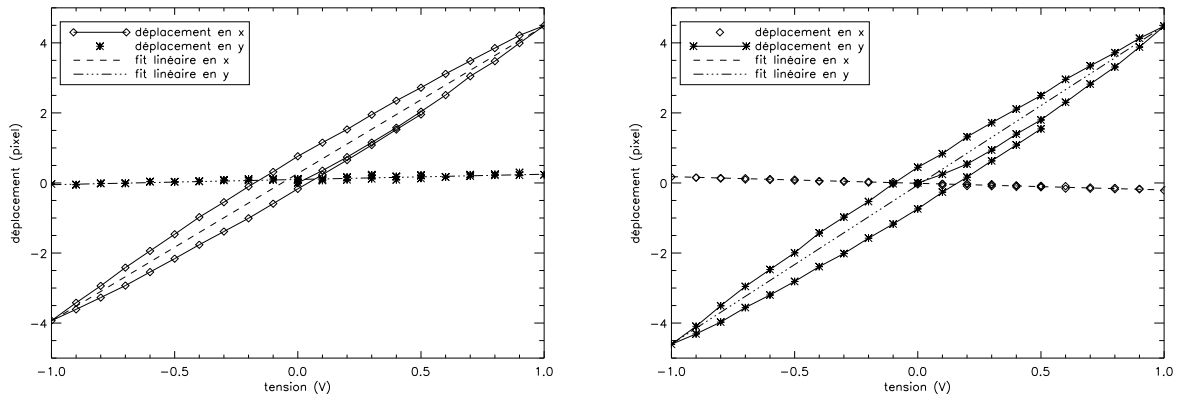


FIG. 12.16 – Courbe de réponse en tension du miroir de basculement pour les axes  $x$  et  $y$ . Une non-linéarité apparaît en boucle ouverte.

boucle fermée les variations de tension mises en jeu sont de l'ordre du dixième de volt. On peut donc se rassurer quant au comportement boucle fermée. L'analyse des fonctions de transfert en boucle fermée relatives à la commande de ce miroir permettront de contrôler son éventuelle non-linéarité. On constate également la présence d'une légère rotation entre les axes du miroir de pointage et de l'ASO, inférieure à  $1^\circ$  (soit un pixel ASO de décalage au travers de la pupille). Ce décalage est négligeable et sera négligé.

#### 12.2.4.2 Modélisation

Les hypothèses faites concernant le miroir de pointage sont identiques à celles formulées pour le MD : une réponse linéaire et instantanée. On constate que la linéarité est cependant approximative, avec un effet apparent d'hystérésis en boucle ouverte. Cependant ce phénomène peut être négligé en boucle fermée du fait des très faibles amplitudes de mouvement. La modélisation se limite donc à connaître la relation tension-basculement, fournie par la calibration (voir tableau 12.5).

#### 12.2.5 Calibration du générateur de turbulence

L'établissement de la loi de commande repose sur un modèle *a priori* de la turbulence. Par conséquent, la calibration de ce simulateur est particulièrement importante. Elle doit permettre de connaître les propriétés spatio-temporelles de la turbulence générée, d'en évaluer la pertinence par rapport à un modèle standard de turbulence atmosphérique réelle, et enfin de définir un modèle *a priori* de la turbulence pour l'estimation par le filtre de Kalman (modèle d'état). Il s'agit aussi de connaître les caractéristiques de la turbulence afin de pouvoir simuler numériquement la perturbation et confronter simulations et expérience. Le tableau 12.6 récapitule les principales données du simulateur de turbulence.

##### 12.2.5.1 Estimation des propriétés spatiales : utilisation d'un modèle ASO

On souhaite pouvoir évaluer la statistique de la turbulence générée par l'écran. Une cartographie des écrans serait idéale. Or leur rugosité interdit une mesure de type interférométrique. Des mesures

source	diode laser 633 nm
fibres	4 $\mu\text{m}$ $\lambda/D/18$
écart angulaire (espace collimaté du simulateur de turbulence)	2° $50\lambda/D$
écart angulaire (foyer d'entrée du banc (B))	10 arcmin
type d'écrans de phase	en réflexion (GEPI)
diamètre	50 mm
écran 618	$r_0 = 0,31$ mm à 633 nm bonne qualité
diamètre de pupille sur l'écran	0,86 mm
distance de la pupille à l'axe de rotation	5 mm
entraînement	moteur continu
découvrement $n$ min-max	$0\% \leq n \leq 90\%$

TAB. 12.6 – Caractéristiques principales du module d'injection.

plus indirectes doivent donc être privilégiées. L'analyse de la FEP en boucle ouverte peut éventuellement renseigner sur le paramètre  $r_0$ , relié à la largeur à mi-hauteur de la FEP. Cependant, cette mesure, peu précise, suppose une grande échelle infinie et est assujettie aux possibles effets de bascule du faisceau dus à un défaut dans la rotation de l'écran (il est difficile d'assurer l'orthogonalité de l'écran par rapport à l'axe de rotation, ce qui peut introduire une bascule périodique du faisceau lors de la rotation). Aussi, cette calibration peut être réalisée plus sûrement avec un analyseur de surface d'onde. Au moins deux méthodes permettent alors de déterminer les propriétés spatiales de la phase : la reconstruction du front d'onde sur une base de type Zernike, ou l'analyse de la variance des mesures de pentes [Ziad(1993), Sarazin(1986), Martin *et al.*(1994), Tallon(1989)]. Cette seconde méthode a été adaptée par Dessenne [Dessenne(1998)] pour le cas de sous-pupilles carrées, correspondant à notre cas. Cependant, si cette méthode donne une estimation du  $r_0$  et de  $L_0$ , elle est complètement dépendante d'un modèle de turbulence pré-supposé (Kolmogorov ou Von Karman). On souhaite plutôt connaître la distribution en variance modale sur une base de type Zernike.

Par conséquent, on s'intéresse à la méthode de reconstruction directe de la phase. L'analyseur de surface d'onde du banc est de résolution trop faible ( $8 \times 8$  sous pupilles). Par conséquent on utilise un analyseur annexe de  $64 \times 64$  sous-pupilles (HASO de Imagine Optic), mesurant la turbulence dans la pupille du banc, avant l'OA. Les mesures de pentes sont réalisées en boucle ouverte. Un modèle de type géométrique peut être utilisé pour décrire ce composant. Le paragraphe 8.4 a expliqué comment construire la matrice ASO, associant une phase décomposée sur la base de Zernike à une mesure de pentes. La reconstruction d'un front d'onde à partir de mesures de pentes consiste donc simplement à inverser ce modèle afin d'en déduire la décomposition du front d'onde incident sur la base de Zernike. Pour réaliser l'inversion, on choisit de restreindre le nombre de modes reconstruits à un nombre faible, dans la limite des modes bien mesurés par l'ASO, c'est-à-dire de fréquence spatiale inférieure à la fréquence spatiale propre de l'ASO définie par son pas inter-pupille. Pour un ASO de  $64 \times 64$  sous-pupilles, dont on utilise une sous zone  $38 \times 38$  sous-pupilles, ceci équivaut à se limiter aux modes d'ordre radial inférieur à environ 38. L'inversion se base dans la pratique sur une inverse généralisée, utilisant une décomposition en valeur singulière. On vérifie qu'en considérant jusqu'à 38 ordres radiaux reconstruits (soit 780 modes environ), le conditionnement de la matrice ASO reste très bon ( $\simeq 100$ ) autorisant une inversion directe (absence de troncature).

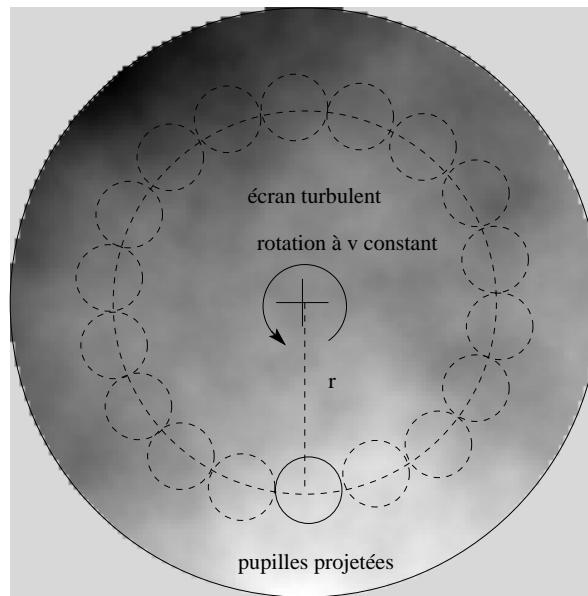


FIG. 12.17 – Schéma de l'écran turbulent, avec une représentation arbitraire des déformations de sa surface. On représente schématiquement le protocole de mesure de la statistique de la turbulence générée par l'écran, sur un tour complet d'écrans (un tour représente 45 pupilles disjointes).

De manière à obtenir une statistique représentative, des mesures sont réalisées sur un tour complet d'écran (voir figure 12.17). Enfin la phase est reconstruite et la variance de chaque mode est évaluée. Cette méthode permet d'accéder à la variance de chaque mode de la phase, jusqu'à l'ordre radial 38, mais pas aux covariances entre modes. En effet, l'estimation des covariances nécessite un très grand nombre de mesures, inaccessible sur le montage.

### 12.2.5.2 Calibration des écrans : propriétés spatiales

L'ensemble des tests expérimentaux, et donc des calibrations, se sont basés sur l'écran numéro 618, fourni par l'Observatoire de Paris (GEPI). La figure 12.18 présente la caractérisation de cet écran grâce au HASO en terme de variance radiale à la longueur d'onde de fonctionnement du banc. La turbulence est reconstruite grâce au modèle ASO jusqu'à l'ordre radial 38 après inversion de la matrice ASO. On constate finalement que l'écran numéro 618 présente un bon profil, proche de celui attendu pour une turbulence de type Kolmogorov, avec un  $\frac{D}{r_0}$  de 2,7. Quelques petits écarts sont toutefois notables, tel qu'un déficit à l'ordre 4, des ondulations entre les ordres 10 et 38, et une surexcitation sur les derniers ordres due à l'effet de repliement spectral. Aucun effet notable de l'échelle externe  $L_0$  n'est détectable. Elle est donc considérée comme infinie. L'angle de 45° de l'écran dans le faisceau n'entraîne pas de variation notable des propriétés de la turbulence, il est aussi négligé.

Cet écran est peu turbulent, mais comme discuté au paragraphe 12.1.2.2, ces conditions restent pertinentes pour les validations envisagées.

### 12.2.5.3 Calibration de la motorisation : propriétés temporelles

La simulation de l'évolution temporelle de la turbulence repose sur le principe de mise en rotation de l'écran turbulent. Le montage a été décrit au paragraphe 12.1.2.2. On génère ainsi une turbulence

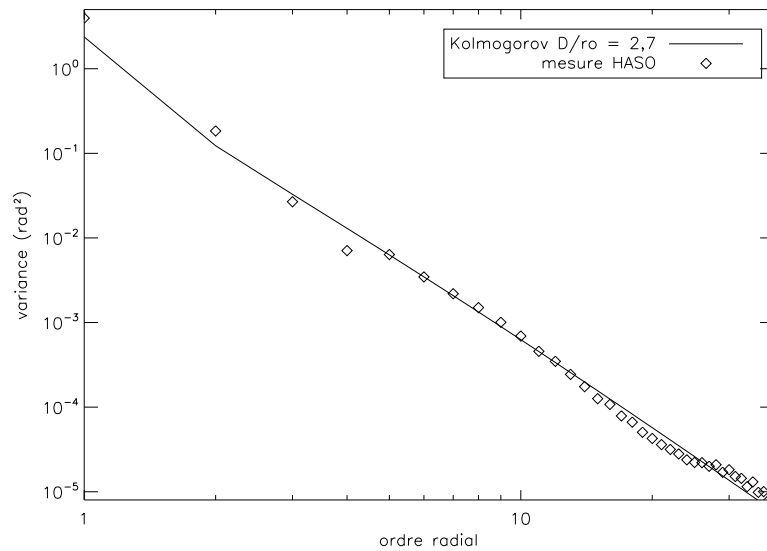


FIG. 12.18 – Caractérisation de l’écran numéro 618 : variance de la turbulence exprimée sur la base des modes de Zernike en fonction de l’ordre radial. Les mesures expérimentales issues de l’HASO sont comparées à une statistique de Kolmogorov.

mono-couche en quasi-translation dans la pupille.

**Vitesse de vent** La calibration de ce simulateur de vent consiste d’abord à évaluer la vitesse de vent équivalente dans la pupille. Cette calibration est facilitée par la présence d’une unique couche turbulente. Elle est basée sur le traitement des mesures de front d’onde de l’ASO en boucle ouverte sur la turbulence. Une méthode de corrélation spatio-temporelle des pentes mesurées entre sous-pupilles, similaire à celle décrite par Desenne [Desenne(1998)], a été utilisée. Il s’agit de calculer l’intercorrélation temporelle entre les mesures de pentes issues des diverses sous-pupilles et d’analyser la position du maximum de corrélation. Cette méthode a permis d’établir la courbe d’étalonnage en figure 12.19, reliant vitesse de vent (rapportée au diamètre de pupille) et tension de commande du moteur de rotation de l’écran. Le comportement est linéaire avec une rotation de la vitesse du vent dans la pupille négligeable (cf. paragraphe 12.1.2.2).

Comme pour le dimensionnement du banc, on peut définir un paramètre d’échelle permettant de fixer la vitesse de rotation de l’écran tout en restant représentatif de conditions réelles. Le paramètre réduit qui importe est  $\frac{V}{Df_{ech}}$ ,  $f_{ech}$  désignant la fréquence d’échantillonnage de l’ASO et donc de la boucle d’asservissement, c’est-à-dire le déplacement de l’écran exprimé en fraction de diamètre entre deux instants d’échantillonnage.

La fréquence d’échantillonnage étant limitée à 60 Hz (voir paragraphe 13.1), le rapport  $\frac{V}{D}$  est choisi proche de 0,3. On est alors représentatif d’un système de type VLT  $D = 8\text{m}$  avec un rapport  $\frac{V}{D} = 1$  et une fréquence d’échantillonnage de  $f_{ech} = 200\text{ Hz}$ . Notons qu’avec cette configuration, un tour d’écran permet de réaliser 7500 mesures à 60 Hz, ce qui reste un peu faible pour des études statistiques poussées. L’utilisation d’écrans de plus grande taille, ou multiples, est actuellement considérée.

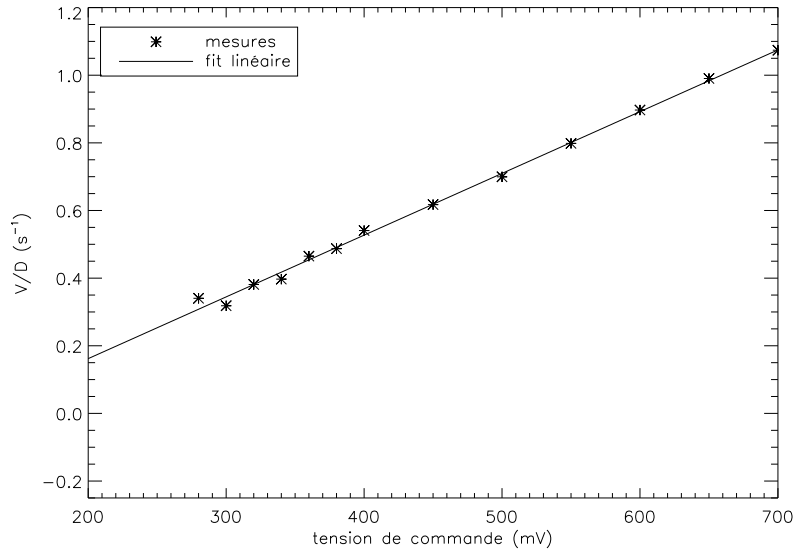


FIG. 12.19 – Courbe d'étalonnage de la vitesse de rotation du moteur d'entraînement des écrans turbulents.

**Densité Spectrale de Puissance temporelle** Étant donné ce protocole de simulation de l'évolution temporelle de la turbulence, on peut s'intéresser aux propriétés fréquentielles de la turbulence générée par l'écran en rotation. On souhaite typiquement connaître la DSP temporelle de la phase décomposée sur la base de Zernike, d'une part pour vérifier la conformité avec un modèle de type Taylor, et d'autre part pour faire le lien avec un modèle de l'évolution temporelle de la turbulence de type AR1 (voir paragraphe 4.4.3).

Pour cela la turbulence est reconstruite de nouveau sur la base des modes de Zernike grâce aux mesures de pentes et à un modèle ASO. L'ASO de calibration  $64 \times 64$  sous-pupilles n'autorise pas une mesure synchrone et continue. Cette mesure est donc faite avec l'ASO du banc ( $8 \times 8$  sous-pupilles) donc de moins bonne résolution. La reconstruction de la turbulence sur la base de Zernike se fait par inversion généralisée d'un modèle géométrique. On se limite toutefois ici à un nombre faible de modes reconstruits (7 ordres radiaux soit 35 modes, piston exclu, l'ASO n'ayant que 8 sous-pupilles linéaires). On gardera aussi en mémoire que les derniers modes reconstruits sont particulièrement entachés de l'erreur de repliement spectral. La figure 12.20 présente ainsi les DSP temporelles estimées des modes 2, 4, 8 et 21 de la turbulence, que l'on peut comparer aux DSP théoriques des mêmes modes pour une couche turbulente Taylor présentées en figure 1.5. Les conditions de vent (vitesse) et d'échantillonnage sont différentes, mais l'orientation du vent est identique. Comme en présence d'une unique couche de vent, le comportement basse fréquence de la DSP dépend de l'ordre radial et azimuthal du mode, les comportements asymptotiques basse fréquence devraient être similaires. La fréquence de coupure théorique pour chaque mode, donnée par l'équation (1.34) est aussi indiquée sur les courbes.

On constate que les profils asymptotiques sont globalement respectés à basse fréquence. La fréquence de coupure entre régime basse et haute fréquence semble bien suivre la loi empirique donnée par  $f_c = 0,3(n + 1)V/D$ . Cela confirme la calibration de la vitesse de vent proposée précédemment. L'étude de ces asymptotes basse fréquence valide l'orientation horizontale du vent. Cepen-

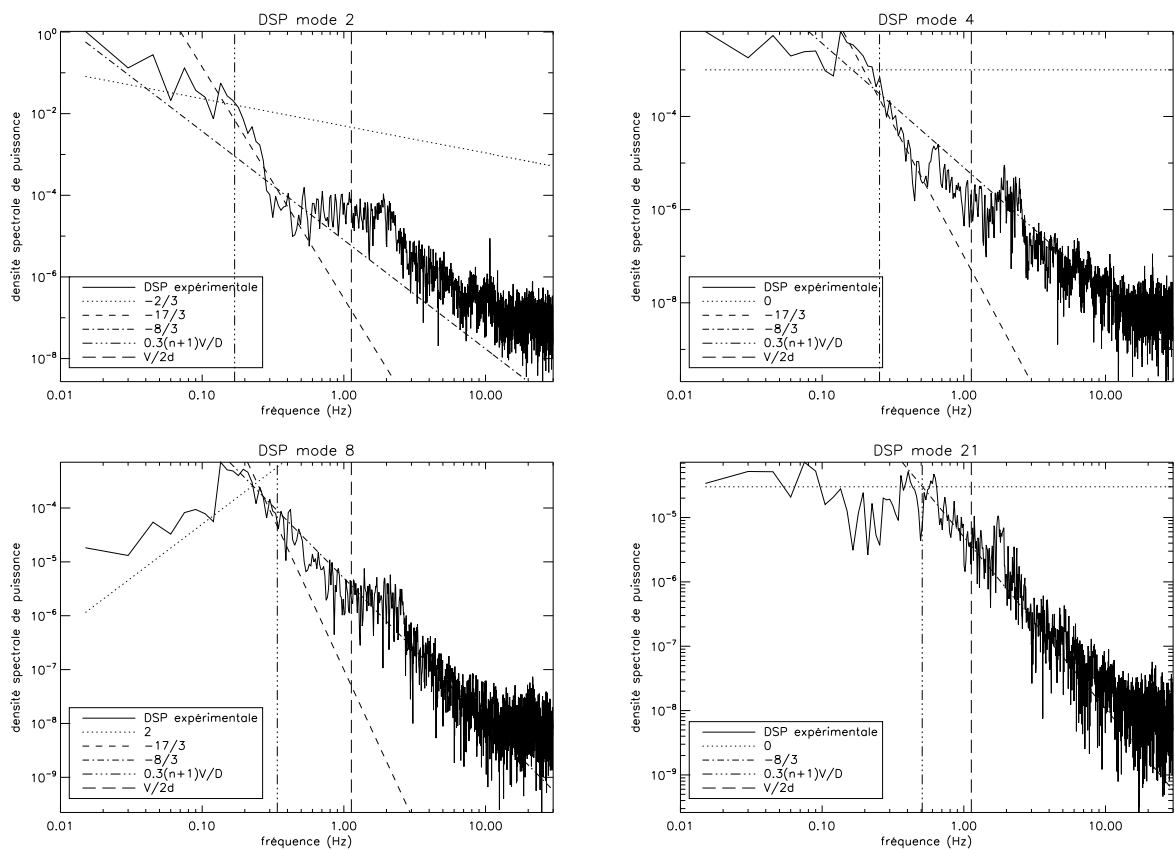


FIG. 12.20 – Densité Spectrale de Puissance temporelle expérimentale des modes de Zernike 2 (tip), 4 (defocus), 8 (coma) et 21. Les asymptotes sont tracées pour indication, ainsi que la position des fréquences de coupure  $f_c = (0, 3)(n + 1)V/D$  et  $f'_c = V/2d$ .



à plus haute fréquence, le comportement asymptotique tend à évoluer vers une pente de  $-8/3$  au lieu des  $-17/3$  théoriquement attendus. Ce comportement avait déjà été signalé par Gendron [Gendron(1995)], qui a expliqué ce phénomène par l'effet de repliement spectral (*aliasing*) intervenant lors de la mesure ASO. Il explique ainsi qu'en-deçà d'une fréquence de coupure  $f'_c = V/2d$ ,  $d$  désignant le diamètre de la sous-pupille, les fluctuations de pentes sont corrélées et permettent de retrouver le profil spectral de la turbulence, en  $-17/3$ . Au-delà, les fluctuations de pentes sont décorréées et le profil spectral reconstruit est dominé par celui des mesures de pentes. Une pente de  $-11/3$  peut être alors attendue ; dans la pratique la pente varie généralement entre  $-2,5$  et  $-3,8$ . Les DSP en présence rentrent très bien dans ce cadre.

#### 12.2.5.4 Modélisation

Ces calibrations permettent de conclure que l'écran présente une variance radiale proche d'un modèle de type Kolmogorov (grande échelle négligeable, on peut écarter un modèle de type Von Karman). D'un point de vue temporel, le montage permet de matérialiser une couche turbulente en translation uniforme, de vitesse aisément réglable. La DSP temporelle de la turbulence générée apparaît comme représentative d'une turbulence de type Kolmogorov, aux défauts d'analyse par l'ASO près. Notamment, les fréquences de coupure des DSP des différents modes dans une base de Zernike suivent relativement bien la loi empirique proposée par Conan [Conan *et al.*(1995)]. Par conséquent, le montage peut être considéré comme représentatif de conditions de turbulence sous l'hypothèse d'une statistique de Kolmogorov et d'une turbulence gelée en translation.

La modélisation de la turbulence pour la caractérisation du modèle d'état peut donc être basée sur ces conditions de turbulence. Les propriétés spatiales de la phase turbulente sont décrites dans une base de Zernike par une matrice de covariance telle que décrite au paragraphe 1.4, correspondant à une turbulence de  $\frac{D}{r_0}$  de 2, 7. Du point de vue temporel, l'approche proposée au paragraphe 4.4.3 pour modéliser par un AR1 l'évolution temporelle de la turbulence peut être appliquée. Chaque mode de la phase décomposée sur la base de Zernike voit son évolution temporelle approximée par un AR1, en faisant l'hypothèse d'un découplage mode à mode. Le coefficient de chaque AR1 est défini à partir de la fréquence de coupure de la DSP du mode en question, ainsi que de la fréquence d'échantillonnage selon l'équation (4.40). La figure 12.21 propose une comparaison entre les coefficients de corrélation à un pas de la turbulence mesurée expérimentalement et décomposée sur la base des modes de Zernike, et les coefficients des AR1 modaux issus du modèle. Pour cela, la turbulence mesurée est reconstruite sur 55 polynômes de Zernike grâce au modèle ASO inversé. La corrélation à un pas de la turbulence sur chaque mode est estimée par un calcul empirique (voir annexe A.1). Le problème majeur de l'estimation de la corrélation est la taille des échantillons disponible. En l'occurrence on dispose de 30000 mesures, correspondant à 1 tour d'écran. Le calcul de corrélation est réalisé sur l'ensemble de cet échantillon. Pour donner une idée de la précision de ce calcul, on réalise le calcul de la corrélation empirique à un pas sur des tranches de 5000 mesures, et on en estime l'écart-type, indiqué sur la figure 12.21.

On constate ainsi que l'estimation des coefficients de corrélation modaux à un pas de l'écran turbulent est très difficile et fortement bruitée. Le calcul de corrélation à partir des données expérimentales est de qualité rapidement décroissante avec le numéro du mode. Ceci est dû au nombre limité de points de mesure. En outre, les données sont bruitées et soumises aux effets de repliement. L'hypothèse de découplage entre modes est non vérifiée. La comparaison avec le modèle AR1 montre cependant que l'approximation reste relativement représentative, mais on sait déjà qu'on ne peut garantir une modélisation précise de la corrélation à un pas de la turbulence (paragraphe 4.4.3).

La sensibilité de la commande à cette erreur de modèle et donc la nécessité ou non de modèles

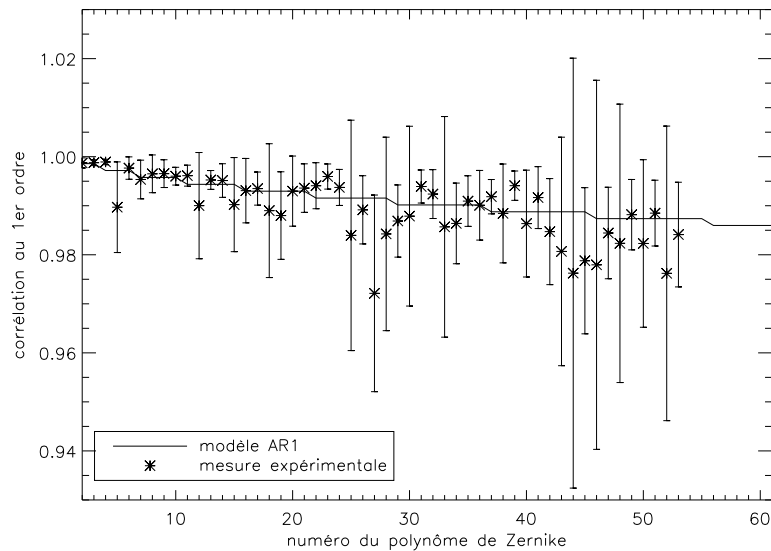


FIG. 12.21 – Comparaison des corrélations temporelles expérimentales à un pas des divers modes de la phase turbulente et de celles données par le modèle AR1 défini selon l'équation (4.40). Une barre d'erreur à  $\pm$  l'écart-type est indiquée.

plus précis de l'évolution temporelle de la turbulence seront discutées ultérieurement (voir paragraphe 14.7).

### 12.2.6 Conclusion sur les calibrations et modélisations

Cette partie a présenté la calibration du banc et de ses composants. Cette calibration est nécessaire à la connaissance du banc et de ses outils de mesure. Elle permet également de discuter les modèles choisis lors de l'établissement du modèle d'état et de l'équation de mesure. Les hypothèses faites sur la linéarité des composants, sur leurs diverses propriétés, sont confrontées à la réalité. Les limites de ces hypothèses, et donc des modèles déduits, sont établies. La calibration permet alors l'identification des modèles et le choix de valeurs numériques. Enfin, cette calibration permet une simulation complète et fiable du banc afin de prédire son comportement et ses performances.

Les modèles retenus pour les divers éléments du système peuvent se résumer ainsi :

- une turbulence de type Kolmogorov, avec un  $\frac{D}{r_0}$  bien défini, et une évolution selon l'hypothèse de Taylor de turbulence gelée en translation, à vitesse constante connue. Matrice de covariance, et modèle AR1 peuvent alors se déduire des calibrations et sont représentatifs des propriétés spatio-temporelles de la turbulence ;
- un ASO dont le bruit de mesure est approximé par un bruit blanc gaussien, décorréolé entre sous-pupilles et de valeur uniforme entre sous-pupilles. Le modèle ASO est linéaire, de type géométrique ou diffractif, dimensionné au banc ;
- un miroir déformable et un miroir de basculement, de déformées connues expérimentalement, ou modélisées analytiquement et dimensionnées. Leur dynamique est parfaite (réponse instantanée) et leur réponse linéaire.

L'ensemble de ces éléments permet de définir explicitement l'ensemble des matrices et grandeurs

intervenant dans les modèles et influe donc directement sur la loi de commande, et la simulation.

Bien évidemment, les calibrations sont entachées d'une multitude d'erreurs, dues au bruit de mesure, aux incertitudes de mesure *etc.* Par conséquent, les modèles, même issus de calibrations précises, restent une description approximative de la réalité qu'on peut vouloir contrôler, voire raffiner, par des calibrations annexes. Les deux paragraphes suivants présentent des éléments complémentaires à la calibration et au réglage du banc. Il s'agit d'une part de l'étude de la matrice d'interaction optique, qui représente une calibration de l'interaction des composants miroirs-ASO entre eux, donc une calibration du système. Cette matrice représente aussi un outil de contrôle des modèles de composant. D'autre part, une étape importante du réglage du banc est abordée. Il s'agit de l'optimisation de la correction des aberrations non communes (NCPA). Cette étape permet elle aussi de valider indirectement le modèle ASO.

### 12.3 La matrice d'interaction expérimentale : un élément de contrôle

La matrice d'interaction  $\mathbf{M}_{inter}$  est un élément spécifique d'un système d'OA. Elle donne une description physique du lien existant entre MD et ASO (équation (2.8)). Elle est indispensable pour la plupart des commandes classiques, telle qu'intégrale, puisqu'elle permet par inversion de définir la matrice de commande  $\mathbf{M}_{com}$  liant mesure de pentes et tensions de commande du miroir (équation (2.10)). Dans le cadre de la commande LQG, son rôle est moins primordial, mais elle reste un élément nécessaire de la définition de la commande. Elle intervient dans l'équation d'estimation/prédiction (5.24). Cette matrice peut s'obtenir de deux manières différentes : numériquement, à partir d'un modèle ASO et MD, ou par une mesure expérimentale directe. On va comparer ici ces deux méthodes, afin de vérifier la qualité des modèles ASO et MD.

La figure 12.22 donne un exemple de matrice d'interaction expérimentale mesurée sur BOA. Une telle matrice est obtenue par l'application d'une tension choisie successivement à chaque actionneur (71 actionneurs), et la mesure des pentes sur l'ASO (52 pentes en x et en y). Plus précisément, la tension est appliquée positivement puis négativement et on calcule la demi-différence des deux mesures de pentes associées, cette opération permettant de s'affranchir de toute composante continue. On répète le processus plusieurs fois (typiquement 4 fois) pour moyennner les mesures et accroître la précision. Chaque mesure ASO est elle-même une série de  $n \simeq 100$  mesures moyennnées. Le résultat est une matrice de 71 colonnes et 104 lignes, les pentes en x et en y étant placées à la suite.

On considère donc la matrice d'interaction mesurée expérimentalement, ou «matrice optique», et la matrice issue des modèles ASO et MD, ou «matrice théorique». En fait, deux matrices théoriques sont utilisées : celle issue d'un modèle miroir gaussien et celle issue d'un modèle construit à partir des fonctions d'influence mesurées. Ce dernier modèle est désigné sous le nom de modèle miroir expérimental. Le modèle d'ASO est toujours quant à lui géométrique.

S'agissant d'opérateurs, plusieurs critères de comparaison peuvent nous intéresser : leurs normes, la norme de leur différence, leurs valeurs propres, les valeurs propres de leur différence. Quelques éléments de comparaison basés sur la norme infinie des matrices et leurs valeurs propres sont proposés ici.

La norme infinie représente une norme d'opérateur couramment utilisée, dont la valeur est directement reliée à la valeur absolue de la plus haute valeur propre de l'opérateur. Rappelons que la norme infinie  $\|\cdot\|_\infty$  d'une matrice  $A = \{A_{i,j}\}$  de taille  $(n, m)$  se définit par :

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |A_{i,j}|. \quad (12.8)$$

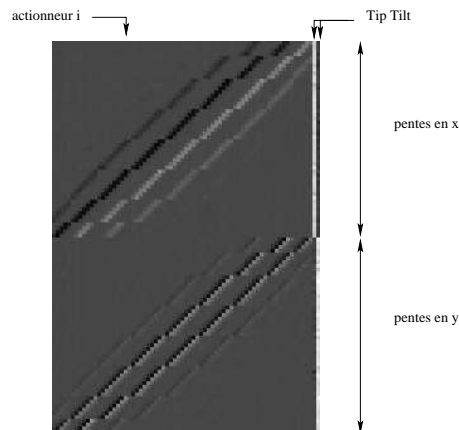


FIG. 12.22 – Exemple de matrice d'interaction expérimentale. Chaque colonne contient les mesures de pentes en x puis y obtenues à l'application d'une tension unitaire sur un actionneur.

Matrice	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_1 - M_2$	$M_1 - M_3$
Norme infinie	17.89	12.66	14.88	7.5	6.53

TAB. 12.7 – Normes infinies des matrices d'interaction optique ( $M_1$ ), théorique avec modèle miroir gaussien ( $M_2$ ), théorique avec modèle miroir expérimental ( $M_3$ ), et leurs différences.

Le tableau 12.7 récapitule les normes infinies de chaque matrice et de la différence de chaque matrice théorique à la matrice expérimentale. On note un écart par rapport à la matrice expérimentale plus faible pour la matrice optique que pour la matrice théorique à modèle miroir expérimental, ce qui est logique.

Si on s'intéresse maintenant aux valeurs propres de ces matrices tracées en figure 12.23, on constate une ressemblance frappante entre les valeurs propres de la matrice optique et de la matrice théorique à modèle miroir expérimental. La matrice utilisant le modèle de miroir gaussien présente quant à elle des valeurs propres plus éloignées, et dont le rapport de la plus haute sur la plus basse (conditionnement de la matrice d'interaction), s'éloigne de celui de la matrice optique.

De manière assez naturelle, la matrice théorique utilisant le modèle de miroir expérimental est donc la plus proche de la matrice optique.

Enfin, en se concentrant sur cette matrice théorique à modèle miroir expérimental, on peut comparer de manière plus qualitative sa ressemblance avec la matrice optique. La figure 12.24 présente d'une part ces deux matrices en niveaux de gris, et d'autre part, une colonne particulière de ces matrices, correspondant à l'actionneur 35. On constate ainsi que les deux matrices présentent une ressemblance frappante, tant en niveaux qu'en structure (couplages). La matrice optique est cependant bruitée, avec des irrégularités dans la réponse des diverses sous-pupilles (visible dans la réponse au basculement, donnée par les deux dernières colonnes de chaque matrice). Et plus précisément, la mesure enregistrée pour une déformée donnée est très similaire entre cas optique et cas théorique.

Ces comparaisons simples permettent de valider plusieurs aspects. Tout d'abord, on peut de manière assez rudimentaire comparer la pertinence de matrices théoriques entre elles, relativement à une matrice expérimentale. On peut ensuite se rassurer quant à notre capacité à modéliser les composants du système et leur interaction : la matrice théorique retenue (modèle miroir expérimental) est très similaire à la matrice optique. On peut donc avantageusement utiliser nos modèles et même remplacer

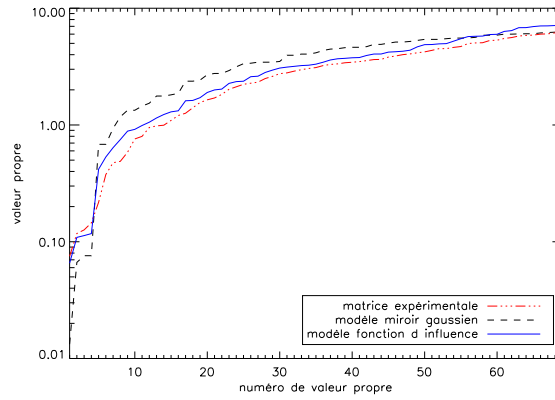


FIG. 12.23 – Comparaison des valeurs propres des matrices d'interaction optique, théorique avec modèle miroir gaussien, théorique avec modèle miroir expérimental.

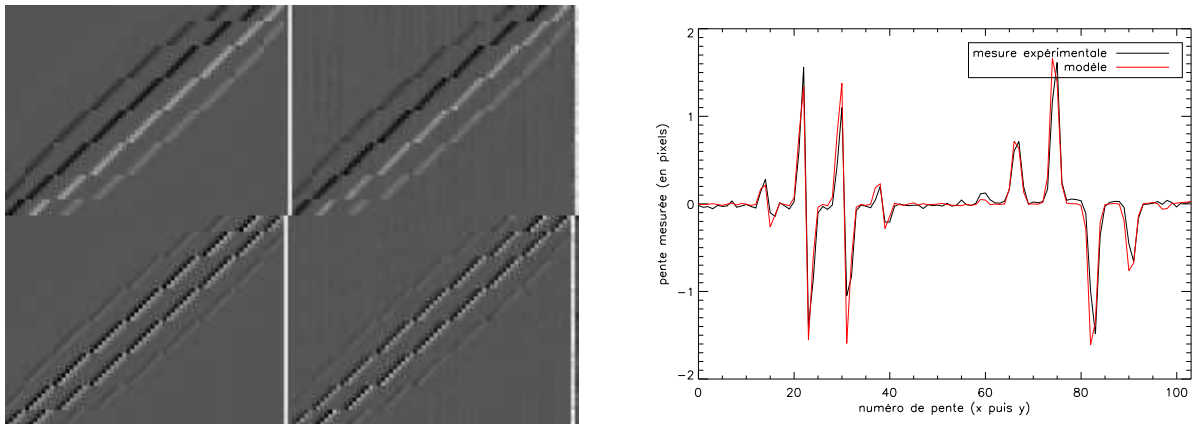


FIG. 12.24 – Comparaison des matrices d'interaction optique et théorique à modèle miroir expérimental. A gauche : comparaison des matrices (à gauche la matrice théorique, à droite, la matrice optique). A droite, tracé de la colonne 35 de chaque matrice (réponse de l'ASO à l'actionneur 35).

la matrice d'interaction expérimentale dans les équations de la commande par celle issue des modèles sans trop de doutes. On a ainsi vérifié que la différence entre matrices optique et théorique est suffisamment faible pour être négligée, notamment dans les modèles de la commande LQG. La concordance des modèles avec la matrice optique indique aussi la position relative de la grille des actionneurs par rapport aux micro-lentilles.

Enfin, cette comparaison a été réalisée dans un cas simple, celui d'une OA, où l'on dispose d'une mesure directe de la matrice d'interaction optique. Dans le cas d'une OAMC on ne peut avoir accès systématiquement à la matrice d'interaction du système, qui se modifie dès que les conditions d'observation changent (position angulaire des étoiles guides). Il devient donc indispensable de pouvoir construire cette matrice à partir de modèles théoriques. La vérification présentée ci-dessus est donc un premier élément de réponse à cette problématique. On pourrait déduire des modèles et de la configuration angulaire choisie une matrice d'interaction théorique, s'affranchissant du problème de mesure de ladite matrice. Néanmoins, on peut s'attendre à ce que les erreurs de modèle rencontrées dans un système d'OAMC soient plus importantes, étant donnée la complexité du système. On a déjà souligné cette problématique d'évaluation des matrices d'interaction en OAMC au paragraphe 5.2.1 et les travaux menés sur le sujet par Kolb [Kolb(2005)].

## 12.4 Optimisation du banc BOA : correction des aberrations non communes

Nous avons présenté dans les paragraphes précédents une caractérisation des composants du banc et la définition de modèles de ces composants dans la perspective de l'implantation de la commande optimale à base de filtre de Kalman. Certains aspects relativement standard, tels que les réglages du banc, n'ont pas été présentés. Cependant, une attention particulière a été portée à l'optimisation du banc, et notamment du point de vue des aberrations non communes (voir paragraphe 2.5.3). L'importance de ces aberrations et de leur correction dans un système d'OA a déjà été soulignée. Une méthode originale a été proposée par T. Fusco pour optimiser leur correction et la mise en œuvre sur le banc. Ce paragraphe présente brièvement nos travaux relatifs à cette optimisation de la correction de ces NCPA, débutés avec T. Fusco [Fusco *et al.*(2005b)], et largement approfondis par J.-F. Sauvage [Sauvage *et al.*(2005), Sauvage *et al.*(2006)]. Ce paragraphe explique notamment les performances atteintes en terme de SR durant les validations expérimentales. Ce paragraphe met surtout en relief l'apport de cette phase d'optimisation dans la validation du modèle d'ASO. Pour ce faire, on fait l'hypothèse que l'on dispose d'une boucle d'OA parfaite, corrigeant la turbulence parfaitement.

Le principe de mesure et pré-compensation des NCPA est décrit dans [Fusco *et al.*(2005b)]. On se place en l'absence de turbulence (sauf locale), avec une source non résolue à l'entrée du banc. La boucle d'OA est fermée (corrigeant la turbulence locale, les défauts statiques de la partie commune et d'éventuelles dérives). En l'absence de NCPA, et dans l'hypothèse d'une correction parfaite par l'OA, le front d'onde résultant après correction par OA est parfaitement plan (soit  $\phi_{res} = 0$ ). Dans la réalité, il existe des NCPA, c'est-à-dire des aberrations fixes, dues aux optiques, présentes sur la voie d'imagerie et non sur la voie d'analyse (voir figure 2.8). Ces aberrations notées  $\phi_{aber}$  ne sont pas vues et donc pas corrigées par la boucle d'OA. Aussi, le front d'onde arrivant sur la caméra d'imagerie  $\phi_{im}$  peut s'écrire :

$$\phi_{im} = \phi_{res} + \phi_{aber} = \phi_{aber}. \quad (12.9)$$

Il s'agit d'abord d'estimer les NCPA, *via* un algorithme de diversité de phase [Gonsalves(1982), Paxman *et al.*(1992)].

Le principe consiste à mesurer au niveau de la caméra d'imagerie une paire d'images, focalisée et défocalisée d'une quantité connue  $\phi_d$ .

Rappelons que l'image focalisée  $I_f$  formée sur le capteur d'un objet  $O$  s'écrit (voir paragraphe 1.5) :

$$I_f = FEP_f * O + b_f, \quad (12.10)$$

où l'on a ajouté un bruit de mesure  $b_f$ , et  $FEP_f$  désigne la Fonction d'Étalement du Point du système focalisé. La FEP, donnée par l'équation (1.36), s'écrit aussi, en considérant une onde incidente d'amplitude complexe  $\exp(j\phi_{im})$  :

$$FEP_f \propto |TF[\exp(j\phi_{im})P]|^2, \quad (12.11)$$

$P$  désignant la fonction pupille. Retrouver les NCPA consiste donc à estimer  $\phi_{im}$  à partir de  $I_f$ . Or il se pose un problème d'indétermination sur la partie paire de la phase. L'idée est de lever cette indétermination par la donnée d'une information supplémentaire. On considère donc une seconde image  $I_d$ , défocalisée de  $\phi_d$  connue.  $I_d$  s'écrit :

$$I_d = FEP_d * O + b_d, \quad (12.12)$$

où  $b_d$  est un bruit de mesure, et  $FEP_d$  est définie par :

$$FEP_d \propto |TF[\exp(j(\phi_{im} + \phi_d))P]|^2. \quad (12.13)$$

La relation non linéaire qui existe entre  $I_f$  et  $I_d$  permet de lever l'indétermination. L'algorithme de diversité de phase [Blanc *et al.*(2003)] permet alors de reconstruire sur une base de Zernike la phase incidente sur la caméra  $\phi_{im}$ . On aboutit à la donnée d'un jeu de coefficients  $a_i^{aber}$  de décomposition sur cette base. Cette phase correspond aux NCPA du système et contient surtout des basses fréquences spatiales.

Le principe de correction de ces aberrations repose sur une pré-compensation par la boucle d'OA : on va amener la boucle d'OA à générer un front d'onde non pas plan, mais complémentaire des NCPA, si bien qu'au final,  $\phi_{im}$  sera nulle. En somme on génère  $\phi_{res} = -\phi_{aber}$ . On a vu au paragraphe 12.1.1.1 que ceci pouvait être obtenu en modifiant les pentes de référence de l'ASO. En effet, la boucle d'OA tend à annuler les mesures de pentes, en prenant en général pour référence le foyer des micro-lentilles de l'ASO (pentes de référence dites centrées). Le principe ici est de décaler ces références pour créer un nouveau point de fonctionnement de la boucle, générant le front d'onde souhaité. Pour définir les nouvelles pentes, on utilise le modèle ASO **D** (voir paragraphe 8.4.3), associant polynômes de Zernike et mesures de pentes. Connaissant les NCPA exprimées sur la base de Zernike,  $a_i^{aber}$ , on en déduit une mesure de pentes associée. On modifie alors les pentes de référence  $\mathbf{y}^{ref}$  en de nouvelles pentes  $\mathbf{y}^{ref'}$  selon :

$$\mathbf{y}^{ref'} = \mathbf{y}^{ref} - \mathbf{D}a_i^{aber}. \quad (12.14)$$

On amène ainsi la boucle d'OA à pré-compenser les NCPA (ou du moins leur partie basse fréquence spatiale, compensable par la boucle).<sup>1</sup>

Cette technique n'est pas nouvelle, et a déjà été appliquée sur NAOS-CONICA avec succès [Blanc *et al.*(2003), Hartung *et al.*(2003)], amenant à une amélioration significative des performances

<sup>1</sup>Notons qu'ici on impose  $\Delta\mathbf{y}^{ref} = \mathbf{D}a_i^{aber}$ , ce qui n'assure pas que le miroir pourra générer la forme requise. Le paragraphe 12.1.1.1 a montré qu'il était préférable d'utiliser un changement de référence du type  $\Delta\mathbf{y}^{ref} = M_{inter}\Delta\mathbf{u}$ . Ceci revient à d'abord rechercher la projection sur le miroir de la phase à générer, donnant  $\Delta\mathbf{u}$ , puis à calculer la modification de pentes de référence associée.



du système. Néanmoins, cette solution est essentiellement limitée par la précision du modèle d'ASO, afin de convertir efficacement une mesure d'aberrations en modification de pentes de référence. Or en général, ce modèle est mal connu et malgré de meilleures calibrations, des incertitudes persistent en général, limitant les performances de cette technique.

La solution proposée est donc l'application itérative de ce processus d'estimation et pré-compensation des aberrations. Ce mode pseudo-boucle fermée, consiste à répéter le protocole simple décrit précédemment plusieurs fois de suite afin de mesurer à chaque fois le résidu de NCPA après correction à la précédente itération. Cette méthode permet de converger rapidement vers une correction bien meilleure, malgré les erreurs de modèle.

Dans la pratique, ce processus utilise le modèle ASO géométrique décrit précédemment. La diversité de phase permet d'estimer les NCPA sur un grand nombre de modes, 78 en l'occurrence (ordre radial 11), et 36 sont convertis en mesure de pentes, afin de modifier les pentes de référence de l'ASO selon l'équation (12.14) (ces chiffres sont choisis pour réduire d'éventuels effets de repliement, tout en corrigeant un nombre restreint de modes, relativement bien reproductibles par le miroir cf. [Sauvage *et al.*(2005)]). On referme alors la boucle d'OA. Les 36 modes sont alors partiellement corrigés à cause des erreurs de modèle, tandis que les modes d'ordre supérieur sont inchangés. Ceci conduit progressivement à une amélioration significative de la qualité de la FEP et l'augmentation rapide du SR (en 4 itérations). La figure 12.25 représente ainsi l'évolution de la FEP du système au cours de quelques itérations du processus, le SR augmentant de 70% à plus de 94%.

Notons que l'acquisition d'une image focalisée puis défocalisée utilise le même principe que celui de l'équation (12.14) : plutôt que de défocaliser la caméra ou une optique de la voie imagerie, la défocalisation est introduite elle-même *via* la modification des pentes de référence de l'ASO. C'est donc là encore la boucle d'OA et donc le miroir qui génère l'aberration souhaitée, ici un defocus. La boucle fermée offre en plus une garantie de stabilité de la déformation introduite.

Cette technique a ainsi permis d'améliorer significativement les performances du banc, autorisant par la suite son utilisation dans des conditions de haut SR, et permettant de chiffrer plus aisément les performances des diverses améliorations apportées au banc, que ce soit du point de vue de la loi de commande (filtrage d'*aliasing* par exemple voir paragraphe 14.8.2) ou de techniques instrumentales (voir [Fusco *et al.*(2005a)]).

Par la suite, les travaux menés par J.-F. Sauvage ont permis d'améliorer encore la technique et les performances atteintes. Les valeurs de SR obtenues hors turbulence avec source à l'entrée du banc sont désormais désignées sous le terme de SR interne. Elles seront précisées par la suite pour chaque étude expérimentale. Ces performances représentent la performance ultime accessible par le banc. Des valeurs de 95% de SR interne ont ainsi pu être obtenues régulièrement.

Ces travaux ont donc été un réel apport pour l'optimisation du banc et les validations expérimentales. En outre, cette optimisation de la correction des NCPA permet aussi d'avoir un retour sur la validité du modèle ASO. Le processus de pré-compensation utilise en effet ce modèle pour déduire la modification des pentes de référence des aberrations chiffrées par diversité de phase. On l'utilise encore pour introduire la défocalisation dans la boucle d'OA, permettant d'acquérir l'image défocalisée et d'appliquer la diversité de phase. Si le modèle d'ASO n'est pas assez précis, la convergence de ce processus itératif est lente. Or on constate que la pseudo-boucle ainsi créée converge très vite (3 à 4 itérations), signe d'une bonne modélisation.



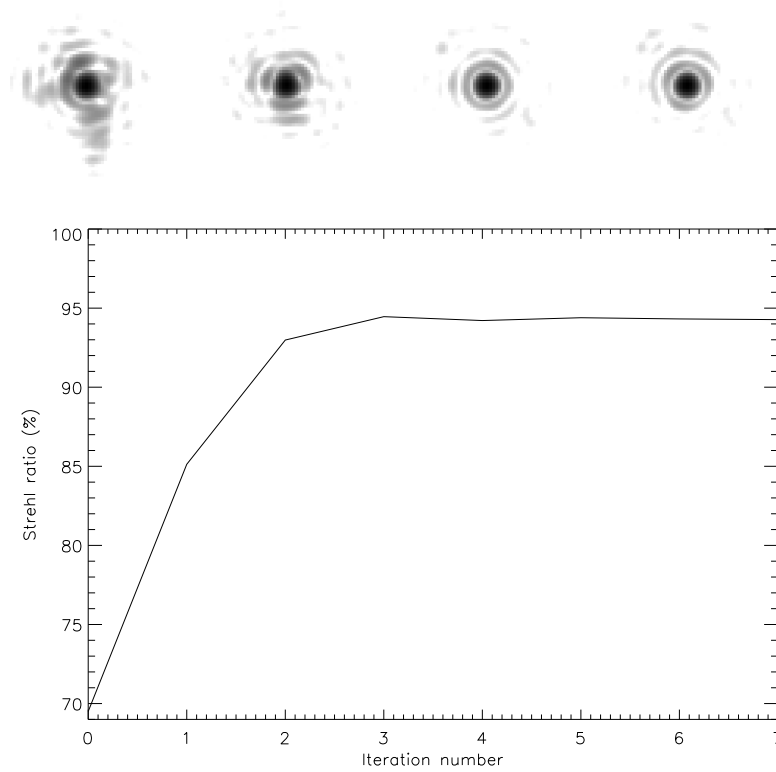


FIG. 12.25 – Évolution de la FEP (en haut) obtenue sur source interne après correction par OA, au cours de quelques itérations du processus de pré-compensation des NCPA. Le graphique correspond à l'évolution du SR. Le SR initial est de 70% (gauche), puis augmente après 1 (85%), 2 (93%) et 3 itérations à plus de 94% (droite).

## 12.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté la structure du banc BOA. Ses divers composants ont été calibrés, mettant en évidence leurs caractéristiques propres. Ces calibrations ont surtout montré que les hypothèses retenues lors de l'élaboration de la loi de commande sont globalement vérifiées. L'analyseur est linéaire et le bruit de mesure relativement blanc et gaussien. Le miroir déformable possède une réponse linéaire et instantanée. Enfin, la turbulence s'apparente bien à la turbulence traitée jusqu'à présent c'est-à-dire une turbulence de type Kolmogorov, en translation uniforme. L'ensemble des calibrations a permis alors d'identifier chacun des modèles, de turbulence, d'ASO, de MD. Ces modèles serviront à la simulation numérique du banc. Ils permettent aussi de définir les matrices intervenant dans la loi de commande LQG (voir chapitres 4 et 8) qui seront utilisées pour la mise en œuvre expérimentale de la commande. Les validations complémentaires que représentent la mesure de la matrice d'interaction et la compensation des NCPA offrent alors d'une part une caractérisation supplémentaire et une optimisation efficace du banc. Elles permettent d'autre part de contrôler indirectement les modèles établis. De ces modélisations on dérive donc les éléments nécessaires à l'implantation de la commande. Or un élément fondamental de l'OA n'a pas été décrit jusque là : le calculateur temps-réel, sur lequel est implantée la loi de commande et qui réalise la fonction centrale de l'OA, commander le miroir à partir des mesures ASO. Le chapitre suivant lui est consacré.



## Chapitre 13

# Le calculateur temps réel : implantation des lois de commandes

Le calculateur temps réel (RTC) est un élément clé d'un système d'OA. Les besoins récents de systèmes d'OA plus performants ou offrant des corrections étendues dans le champ ont toutefois accru l'intérêt porté aux lois de commandes et aux RTC. Ce chapitre décrit le calculateur temps réel utilisé sur le banc BOA. Il s'intéresse d'une part à ses caractéristiques techniques, d'autre part aux étapes d'implantation du RTC et à ses lois de commande, en particulier la commande LQG. Le but de ce chapitre est aussi de présenter la forme particulière de la commande implantée permettant la validation des divers concepts proposés dans le mémoire. La validation de l'implantation de la commande LQG est spécifique. Quelques éléments relatifs à cette validation sont donc donnés.

Le paragraphe 13.1 décrit les caractéristiques techniques du RTC. Sa structure et son interfaçage avec le reste du banc, encore en évolution durant la thèse, sont discutés. L'implantation de la commande à proprement parler est discutée au paragraphe 13.2. On présente notamment au paragraphe 13.2.3 quelques éléments relatifs à la validation de cette implantation.

### 13.1 Description du RTC

Le RTC a pour vocation de permettre la commande en temps réel du système d'OA. Ses fonctionnalités principales sont le traitement des images acquises par la caméra ASO (soustraction de fond, seuillage...), le calcul des pentes par une méthode adaptée, le calcul de la commande selon une loi spécifiée, l'envoi des commandes aux miroirs. Le calculateur temps réel historique du banc est un calculateur devant permettre une fermeture de boucle à 2500 Hz avec une loi de commande de type intégrateur. Il est basé sur des modules C40, et son architecture est semblable à celle utilisée pour le RTC de NAOS. Il fonctionne couramment sur le banc BOA avec une fréquence typique d'utilisation de 275 Hz, pour une correction de type intégrateur. Cette architecture et les ressources matérielles utilisées interdisent toutefois de programmer une commande de type LQG. Par conséquent un nouveau RTC a été défini et développé par la société Shaktiware.

Ce nouveau RTC (voir figure 13.1) prend désormais la forme d'un PC linux AMD 4000+, 64 bits, de 1 Go de RAM [Fleury *et al.*(2004)]. Il se positionne entre la caméra ASO et les amplificateurs haute tension des miroirs. D'un point de vue logiciel, le code source du RTC est basé sur un code C. Il réalise l'ensemble des fonctionnalités décrites précédemment. Plus précisément, les images sont traitées, avec soustraction de fond et seuillage (paragraphe 12.1.1.1). Les pentes sont calculées par une méthode simple de CDG. Les commandes sont calculées selon une loi soit de type intégrateur,



FIG. 13.1 – Photographie du PC-RTC de l'expérience

soit de type LQG. Enfin, ces commandes sont échantillonnées aux tensions maximales ( $\pm 5V$ ) et envoyées au convertisseur numérique analogique puis aux amplificateurs des miroirs.

A terme, l'acquisition des données par le PC sera assurée par une carte d'acquisition numérique, et l'envoi des commandes aux amplificateurs sera géré par un convertisseur numérique-analogique se présentant sous la forme d'un micro-PC. Dans cette configuration, la boucle d'asservissement fonctionnera à 2 kHz en mode intégrateur et plusieurs centaines de Hertz en mode LQG selon le nombre de modes estimés et la méthode de calcul de pente utilisée.

Néanmoins, cette configuration n'a pu être mise en œuvre complètement durant la thèse, en raison de l'attente de composants. Par conséquent, la configuration a été progressivement adaptée pour prendre en compte les divers composants présents. Le résultat est une configuration fonctionnelle mais imparfaite et évolutive. Deux éléments ont subi et subissent encore des évolutions majeures : l'acquisition des données issues de l'analyseur de front d'onde et la commande des miroirs. La commande des miroirs a pu être assurée grâce à un montage matériel adéquat sans perte de performance, exploitant les ressources matérielles du RTC historique. L'acquisition des données de la caméra d'analyse de front d'onde est, quant à elle, plus problématique et a subi diverses évolutions. L'utilisation de la caméra DALSA et d'un mode d'acquisition numérique a posé des problèmes de compatibilité du matériel. Le résultat des adaptations est une limitation de la fréquence d'acquisition à 60 Hz, bien que le RTC ait démontré ses capacités de calcul numérique à 2 kHz.

Notons enfin que le RTC historique a servi de référence durant l'ensemble du développement et de l'intégration du nouveau RTC afin d'en valider le comportement. Il est donc régulièrement fait mention de ce RTC.

## 13.2 Mise en œuvre des lois de commande sur BOA

Cette partie présente l'implantation des lois de commandes mises en œuvre sur le RTC. L'objectif du nouveau RTC est évidemment de proposer une commande LQG. Cependant, il offre avant tout les fonctionnalités de base du précédent RTC et notamment une commande de type intégrateur. Elle sert en effet de point de comparaison pour l'ensemble des tests expérimentaux. Aussi, ce paragraphe rappelle la structure des différentes lois de commandes implantées.

### 13.2.1 Intégrateur (à gain modal optimisé)

L'intégrateur est implanté exactement selon les règles présentées dans le cadre du simulateur numérique 8.3.5.1. La matrice de commande est obtenue par inverse généralisée de la matrice d'interaction mesurée expérimentalement. Ce calcul est réalisé actuellement hors ligne, c'est-à-dire hors du RTC, à partir de codes IDL. Il utilise les méthodes présentées en annexe B. L'algorithme récursif de calcul des commandes est celui de l'équation (8.8). Le gain est choisi uniforme ou défini par mode. Le calcul du gain modal repose sur la méthode développée par Dessenne [Dessenne(1998)] et présentée en annexe B.

### 13.2.2 Implantation de la loi de commande LQG sur le RTC

L'objet des validations expérimentales est avant tout de tester la loi de commande LQG, dans ses diverses formes. Ce paragraphe en décrit l'implantation dans une formulation générique, et donne en outre quelques éléments relatifs à la procédure de validation fonctionnelle d'une telle loi.

#### 13.2.2.1 Formulation générique de la commande LQG

L'implantation de la commande LQG doit permettre la validation de l'ensemble des formes et variations discutées dans ce mémoire (OA classique, filtrage de vibration, de composantes statiques, OAAO...). Une modification simple et parfois considérable de la taille des vecteurs et des matrices impliquées dans la commande, et de leurs valeurs doit donc être possible. On doit pouvoir en outre sauvegarder les diverses données d'intérêt pour contrôler le bon fonctionnement de la commande (voir paragraphe 5.6). Ceci est fait au travers de files circulaires c'est-à-dire l'enregistrement dynamique d'une pile des  $n$  dernières données acquises ou calculées. La pile est de taille fixe et les données trop vieilles sont par conséquent perdues au fur et à mesure.

Par conséquent, la spécification de l'implantation de la loi s'est orientée vers une solution offrant flexibilité et accessibilité aux paramètres et données. Ce choix s'est fait au détriment d'un asservissement haute cadence. Mais rappelons-le, la cadence de la boucle est à mettre en rapport avec la vitesse relative de la turbulence dans la pupille, au travers du paramètre  $\frac{V}{Df_{ech}}$ , pour les essais en laboratoire. On peut donc s'assurer à cadence moindre de la bonne représentativité par notre asservissement d'un système réaliste.

La loi de commande a donc été spécifiée et implantée sous la forme générique décrite par les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{n+1} &= \mathbf{M}_1 \mathbf{X}_n + \mathbf{M}_2 (\mathbf{y}_n + \mathbf{M}_3 \mathbf{u}_{n-2}), \\ \mathbf{u}_n &= \mathbf{M}_4 \mathbf{X}_{n+1}, \end{aligned} \quad (13.1)$$

les différents vecteurs étant initialisés à 0.

Les dimensions et la nature des vecteurs et des matrices sont libres. Seule la matrice  $\mathbf{M}_4$  doit permettre d'obtenir un vecteur de tension  $\mathbf{u}_{n+1}$  de dimensions compatibles avec le système. Il est aisé de faire le lien entre cette formulation et la formulation proposée au paragraphe 7.2.1, avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_1 &= \mathcal{A} - \mathbf{L}_\infty \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{M}_2 &= \mathbf{L}_\infty \\ \mathbf{M}_3 &= -\mathbf{D}\mathbf{N} \\ \mathbf{M}_4 &= -\mathbf{K}'\end{aligned}\tag{13.2}$$

$\mathbf{K}'$  étant défini grâce au projecteur  $\mathbf{P}$  de la phase sur les modes miroir, défini pour l'OA et l'OAMC aux paragraphes 5.5.2 et 5.5.3. Les différentes matrices,  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4$ , sont calculées hors ligne. Elles sont ensuite chargées dans le RTC. On utilise donc la version asymptotique du filtre de Kalman.

On rappelle que cette formulation n'est pas optimisée du point de vue coût calculatoire. On n'utilise aucunement l'aspect creux des matrices impliquées. Comme souligné au paragraphe 7.2.2, plusieurs optimisations des calculs peuvent être envisagées pour en alléger le coût global. Cependant cette formulation autorise aussi d'implanter différentes déclinaisons de la commande LQG (OAAO, filtrage de composantes statiques, vibratoires...). Elle permet aussi d'implanter toutes sortes d'autres lois de commande dès lors que l'on peut les écrire sous la forme (13.1). En particulier, on montre aisément que cette formulation autorise l'implantation d'une commande type intégrateur, à gain optimisé ou non, ou de type POLC (voir paragraphe 5.4.2). Ainsi :

- en choisissant  $\mathbf{M}_4 = 0$ , les autres matrices étant conservées, on peut se ramener à une boucle ouverte, aucune correction n'étant appliquée. L'estimation par filtre de Kalman est néanmoins maintenue. Ce cas est désigné sous le terme de commande LQG. La taille du vecteur d'état est similaire à celle d'un cas d'OA boucle fermée avec commande LQG ordinaire ;
- le choix de  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{Id}$ ,  $\mathbf{M}_2 = -g\mathbf{M}_{com}$ ,  $\mathbf{M}_3 = 0$  et  $\mathbf{M}_4 = \mathbf{Id}$ , où  $\mathbf{Id}$  est la matrice identité,  $g$  un gain d'intégrateur,  $\mathbf{M}_{com}$  la matrice de commande du système, permet de se ramener à une commande de type intégrateur de gain  $g$ . La dimension du vecteur d'état se réduit au nombre de tensions de commande ;
- en choisissant  $\mathbf{M}_1 = 0$ ,  $\mathbf{M}_2 = \mathbf{Id}$ ,  $\mathbf{M}_3 = 0$  et  $\mathbf{M}_4 = \mathbf{Id}$  on a une commande reproduisant le vecteur de pentes (ou du moins les  $v$  premières mesures de pente si  $v$  désigne la taille du vecteur  $\mathbf{u}_n$ , la taille du vecteur d'état étant donc  $v$ ). Ce dernier cas est désigné par la suite comme une commande de type suiveur.

Dans ces divers cas de test, l'asservissement est réalisé en boucle fermée (même si pour le premier cas aucune correction n'est fournie). Ces quelques cas de figure correspondent à des configurations de référence pour la validation de l'implantation de la loi de commande (voir paragraphe 13.2.3).

L'implantation de la commande a été spécifiée pour un vecteur d'état de taille maximale 900. Ceci correspond en OA ou OAAO à l'estimation d'une phase exprimée sur 300 modes. Les calculs matriciels impliquent donc des matrices de taille maximale  $900 \times 900$ . Le RTC doit pouvoir assurer dans ces conditions une fréquence de correction de 500 Hz. Les tests expérimentaux ont été menés jusqu'à 90 Hz pour l'instant en raison des limitations imposées par les autres composants du BOA (ASO, MD).

### 13.2.2.2 Données de sortie du RTC

Le RTC a été spécifié afin que les mesures de pente, les tensions de commande calculées et enfin les vecteurs d'état estimés au cours du temps soient tous sauvegardés, en respectant la synchronisation

des données. Les contraintes mémoire imposent de ne pouvoir évidemment sauvegarder ces données acquises que sur un horizon limité, qui dépend de la taille des données (taille du vecteur d'état). Ainsi, un vecteur d'état de taille  $3 \times 120$ , accompagné de matrices de tailles concordantes, autorise l'acquisition de 7500 données (états, tensions et pentes mesurées). La connaissance des diverses matrices de la commande et de ces vecteurs permet de recalculer *a posteriori* l'ensemble des données d'intérêt, telles que mesure de pente prédite, innovation... Ces éléments seront mis à profit lors des validations expérimentales.

### 13.2.2.3 Gestion des tensions d'offset

Dans un système d'OA, on est généralement amené à appliquer des tensions dites d'*offset*, c'est-à-dire un vecteur de tension constant appliqué initialement, en boucle ouverte, et permettant de recentrer globalement les spots images de l'analyseur, en l'absence même de toute turbulence. En somme, ces tensions d'*offset* représentent une valeur initiale non nulle du vecteur de tensions du système. La raison de l'application d'un tel vecteur est simple. De nombreux éléments font que les spots images ne sont pas centrés sur les positions de référence même en l'absence de turbulence, lorsque la boucle est ouverte. Ces éléments sont notamment la déformée propre du miroir au repos (voir paragraphe 12.2.3.1) et les aberrations optiques résiduelles du montage. Cela équivaut à une aberration fixe du système. Cette aberration est réduite par l'application des tensions d'*offset*, permettant de travailler de nouveau autour de pentes nulles. Lorsque la boucle est fermée avec une loi de commande de type intégrateur, cette tension d'*offset* n'a pas d'importance. La commande intègre les données et la correction est définie relativement aux corrections précédentes. Ainsi ce type de commande présente une réjection infinie pour une fréquence temporelle nulle : les composantes statiques sont corrigées. Dans le cas de la commande LQG, la correction en tension n'est pas incrémentale. Elle est définie à chaque itération à partir de l'état estimé. Si l'on souhaite appliquer un vecteur de tension statique, par exemple pour corriger des aberrations statiques et fonctionner autour d'une mesure de pente nulle, il est donc nécessaire d'ajouter à la correction fournie par la commande LQG ce vecteur de tension. Pour ce faire, il est nécessaire de modifier les équations implantées dans le RTC. Ces équations (équation (13.1)) restent les mêmes en ce qui concerne les calculs pour la commande LQG, à savoir :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{n+1} &= \mathbf{M}_1 \mathbf{X}_n + \mathbf{M}_2 (\mathbf{y}_n + \mathbf{M}_3 \mathbf{u}_{n-2}), \\ \mathbf{u}_n &= \mathbf{M}_4 \mathbf{X}_{n+1}. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Mais la tension effectivement appliquée aux miroirs  $V^{miroir}$  devient maintenant :

$$V_n^{miroir} = V^{offset} + \mathbf{u}_n. \quad (13.4)$$

Cette modification de l'algorithme autorise ainsi un point de fonctionnement en tension de la commande non nul. On verra, en particulier au chapitre 16, que cette modification est indispensable aux tests d'OAAO.

### 13.2.3 Quelques éléments sur la validation fonctionnelle de la commande

Une phase importante des tests expérimentaux, précédant la validation de la loi de commande proprement dite, a été la recette et la validation du RTC. Les diverses fonctionnalités de traitement des images, calcul des pentes et calcul de la commande ont été vérifiées, d'abord sur des données synthétiques, c'est-à-dire des données artificielles générées *via* le code C du RTC lui-même, soit à partir d'outils externes (IDL, Labview). La validation progressive de la chaîne complète de calcul du



RTC a permis ensuite de travailler sur des données réelles acquises en boucle ouverte puis fermée sur le banc. La validation des résultats s'est appuyée sur une comparaison avec le RTC historique du banc. On se concentre ici sur la validation de l'implantation des lois de commande. Le traitement des images acquises, le calcul des pentes par CDG, l'envoi des commandes ont été validés selon des méthodes similaires.

La validation des lois de commande a été progressive et s'est basée sur des formulations particulières des lois de commandes permettant de tracer les éventuelles erreurs. On résume les différentes étapes dans les paragraphes qui suivent.

Dans une première étape, on contrôle l'implantation d'un point de vue purement algorithmique. Il s'agit de vérifier le chargement de matrices, l'application de l'algorithme de calcul, la gestion des données et leur sauvegarde. On s'assure surtout de la synchronisation des données (respect des retards, des décalages temporels entre grandeurs). On vérifie que l'algorithme prend en compte les diverses adjonctions telle que l'addition d'une tension d'offset. Dans cette étape, la nature des résultats obtenus, leur sens physique ne compte pas. Il s'agit juste d'une vérification algorithmique et mathématique des opérations. Aussi on se place dans un contexte entièrement numérique, parfaitement contrôlé, en utilisant des données dites synthétiques, c'est-à-dire générées par un code numérique annexe, et non expérimentales. On connaît donc parfaitement les entrées et les sorties attendues. Ces pentes sont généralement très structurées afin de retrouver aisément des motifs simples (pentes uniformes, croissantes avec le numéro de sous-pupille *etc*). Ces pentes sont réinjectées dans le RTC de sorte que l'opération est transparente du point de vue de la commande et que les calculs peuvent se dérouler en temps réel.

L'utilisation de matrices judicieusement choisies (matrices nulles, égales à l'identité, commande de type suiveur, *etc*, voir paragraphe 13.2.2.1), permet alors de contrôler simplement le déroulement des opérations. On n'utilise donc pas les matrices correspondant à une véritable commande LQG, mais des matrices factices. Enfin, des matrices correspondant à une commande de type intégrateur (voir paragraphe 13.2.2.1) ou LQG sont implantées. Un contrôle complet des calculs dans un contexte de données synthétiques est réalisé.

Dans une seconde étape, la validation de l'implantation est réalisée en contexte expérimental. Là encore, cette validation peut reposer sur le choix judicieux de matrices simples (montage suiveur, ou intégrateur...). Le contrôle doit alors être mené sur les données expérimentales acquises parallèlement. La dernière étape est bien sûr la fermeture effective de la boucle. Les performances obtenues avec ce nouveau RTC sont comparées à celles obtenues avec l'ancien RTC. Evidemment, l'ancien RTC ne peut réaliser qu'une correction par commande de type intégrateur, à une fréquence minimale de 270 Hz environ.

Pour illustrer cette étape de validation expérimentale, la figure 13.2 présente une comparaison de fonctions de transfert de réjection, obtenues en mode intégrateur avec un gain uniforme. La première est obtenue avec le RTC historique, donc de configuration optimisée, fonctionnant à 273 Hz avec un gain de 0,3. La courbe théorique attendue est superposée et montre un comportement tout à fait correct. La seconde courbe a été obtenue avec le nouveau RTC réalisant une commande de type intégrateur de gain 0,3, mais dans la configuration présentée au paragraphe 13.1, c'est-à-dire à 60 Hz. On constate que le transfert de réjection obtenu est conforme à nos attentes, et en particulier, qu'il n'y a pas d'erreur de gain ou de retard de trame.

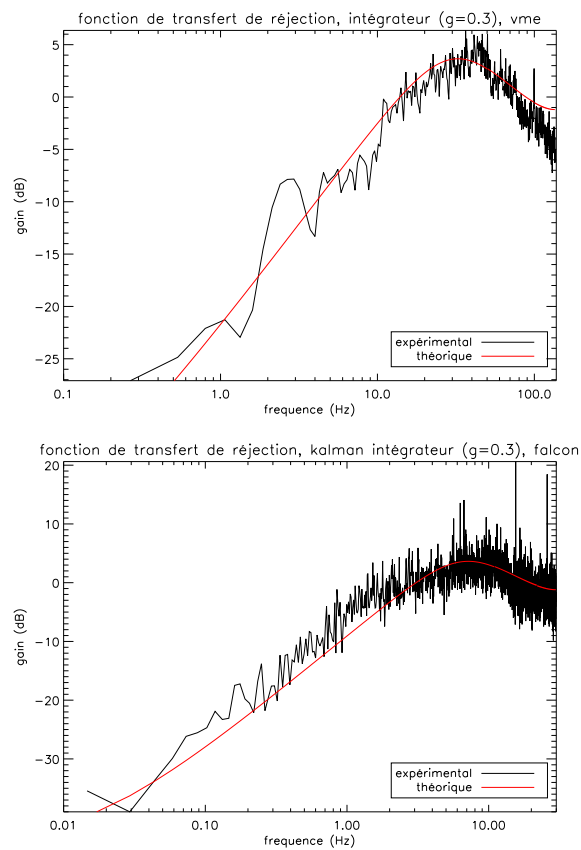


FIG. 13.2 – Comparaison de fonctions de transfert de réjection de l'OA. En haut, la fonction est obtenue avec le RTC historique et un gain uniforme de 0,3, à 273 Hz. En bas, la fonction est obtenue avec le nouveau RTC et un gain de 0,3, à 60 Hz.

### 13.3 Conclusion

Ce chapitre a présenté le calculateur temps réel sur lequel est implantée la commande LQG. Il s'agit du composant fondamentale de la boucle d'OA. Sa structure et ses caractéristiques ont été discutées. Cette structure reste somme toute standard (code C), et permet une implantation souple et versatile de la loi de commande. Malgré des produits matriciels de taille notable, et l'absence d'optimisation du code implanté, le RTC permet un contrôle de la boucle d'OA à des cadences correctes (60 à 90 Hz), et à terme, l'intégration de l'ensemble des nouveaux composants devrait amener ces cadences à des valeurs réalistes de 500 Hz. L'implantation de la commande LQG a été présentée. Cette implantation générique privilégie la versatilité et l'utilisation de diverses formes de la commande LQG au détriment de l'optimisation des calculs numériques. Intégrateur, commande LQG pour l'OA, l'OAMC, le filtrage de vibration seront ainsi disponibles. Plus généralement toute loi de commande respectant une forme proche de la commande LQG pourra être implantée, en particulier la commande POLC (voir paragraphe 5.4.2). Enfin, on a donné quelques éléments relatifs à la validation d'une telle implantation. Ce chapitre offre ainsi un aperçu de l'implantation concrète d'une telle commande sur un système expérimental réaliste. Désormais, connaissant le banc BOA, les caractéristiques de ses composants et leurs modèles, et l'implantation de la commande étant disponible, les chapitres qui vont suivre se consacrent à la validation expérimentale proprement dite de la commande LQG.

## Chapitre 14

# Validation expérimentale de la commande LQG en OA

Nous présentons dans ce chapitre les premières validations de la commande LQG dans un cadre d'OA classique. L'objectif est de démontrer d'abord le bon fonctionnement *in situ* de la loi de commande sur un système expérimental dynamique simple, en caractérisant ses performances et son comportement. En effet, ces premières validations permettent d'évaluer les performances de la commande, malgré des erreurs de modélisation (incontournables en expérimentation) dont nous évaluerons l'impact et le lien avec le nombre de modes estimés. Une première comparaison avec une loi de commande classique, l'intégrateur, est proposée. Nous étudions deux paramètres qui influent sur les résultats : la variance du bruit de mesure modélisé dans le filtre de Kalman  $\sigma_w^2$  et le nombre de modes estimés. Leur choix judicieux permet d'améliorer la performance obtenue et de mettre en évidence expérimentalement une propriété intéressante de la commande LQG, la réduction d'effet d'*aliasing*, déjà évoquée au chapitre 8. L'ensemble des tests réalisés permet ainsi de mieux appréhender le fonctionnement de la commande LQG dans un contexte expérimental et de mettre en évidence des propriétés intéressantes de la commande. Ces tests permettent ainsi de préparer l'utilisation de la commande dans des cadres plus complexes, de filtrage de vibrations ou de correction hors axe. La concordance des résultats avec la simulation numérique ouvre la voie à la simulation de tests plus réalistes, plus complexes, ou impossibles à réaliser actuellement sur le banc BOA.

Le contexte expérimental général de ces tests est abordé au paragraphe 14.1 et la performance de l'intégrateur qui sert de base de comparaison au paragraphe 14.2. Le détail des modèles et de l'implantation sont donnés au paragraphe 14.3. Puis la commande LQG est testée au paragraphe 14.4 et divers paramètres de contrôle sont étudiés au paragraphe 14.5. Le paragraphe 14.7 permet alors de rapprocher les résultats obtenus de la simulation numérique. Enfin le paragraphe 14.8 s'intéresse à l'influence des paramètres de réglage sur la commande LQG.

### 14.1 Conditions expérimentales

Sauf mention explicite, tous les tests expérimentaux présentés désormais ont été réalisés avec l'écran numéro 618 donc à  $\frac{D}{r_0}$  de 2,7 à 633 nm. La fréquence d'échantillonnage est de 60 Hz et la vitesse de vent est telle que  $V/D \simeq 0,28$ . Une source non résolue à 633 nm est placée à l'infini, avec un très bon rapport signal-à-bruit comme expliqué au paragraphe 12.2.2.3. Le banc a été optimisé par une pré-compensation des aberrations non communes, si bien que le SR interne va de 92% à 97% selon les réglages. Sa valeur sera précisée pour chaque mesure expérimentale de SR. La procédure de

calcul expérimental du SR est rappelée en annexe A.1.

## 14.2 Une base de comparaison : l'intégrateur en OA

La loi de commande standard que représente l'intégrateur sert de base de comparaison des performances de la commande LQG dans l'ensemble des validations expérimentales. Par conséquent, il semble de bon goût de s'intéresser avant toute chose aux performances de cette loi de commande en OA.

### 14.2.1 Calcul des éléments de la commande intégrateur

Le détail des calculs relatifs à l'intégrateur, et en particulier l'optimisation modale des gains, est présenté en annexe B. Rappelons seulement que la matrice de commande est calculée avec filtrage du piston et du mode gaufre, transfert de la correction de la pente moyenne sur le miroir de basculement et troncature lors de l'inversion afin de filtrer les modes à valeurs propres faibles (10 sont filtrés pour un conditionnement final de la matrice d'interaction de 25 environ)

### 14.2.2 Lorsque l'optimisation modale perd de son utilité

Dans les conditions de très bon rapport signal-à-bruit qui sont les nôtres, on peut s'interroger sur l'utilité d'une optimisation modale du gain. En effet, l'optimisation modale amène dans ces conditions à des gains élevés, que l'on limite en général aux valeurs garantissant des marges de stabilité (choix d'un gain inférieur à 0,53 pour une marge de phase de 45° et une marge de gain de 3 dB voir [Dessenne(1998)]). L'évolution de la performance de la boucle lorsque le gain varie autour de sa valeur optimale est le plus souvent très faible. Ainsi, on note que la performance de l'intégrateur à gain uniforme de 0,5 est typiquement de  $SR = 91,5\%$ . Dans les mêmes conditions, l'intégrateur à gain modal optimisé donne une performance moyenne de  $SR = 91,7\%$ , c'est-à-dire un résultat moyen identique étant donné le peu de signification de la décimale (les mesures de SR sont données avec une barre d'erreur de 1%).

Par conséquent, on considère tout au long des validations expérimentales présentées dans ce mémoire (réalisées à fort rapport signal-à-bruit), que l'intégrateur à gain uniformément fixé à 0,5 est équivalent à l'intégrateur à gain modal optimisé. Les performances des deux correcteurs seront considérées comme identiques et optimales au sens du gain modal optimisé.

### 14.2.3 Performance de l'intégrateur

Le tableau 14.1 présente une série de performances de l'intégrateur avec un gain de 0,5, en précisant à chaque fois le SR interne (obtenu avec une commande type intégrateur lui aussi). Les valeurs données sont les meilleures valeurs de SR mesurées, et la barre d'erreur sur la mesure de SR est de 1%.

On constate que les valeurs de SR obtenues sont en bon accord avec la formule approximative rappelée en équation (1.30), en considérant une correction des 8 premiers ordres radiaux. Ces résultats seront confrontés à la simulation numérique au paragraphe 14.7. Notons toutefois que les SR constatés évoluent. Cette variation dépend des conditions expérimentales (présence de turbulence locale, présence de vibrations, réglages plus ou moins bons du banc *etc*).

date	19/08/05	24/10/05	27/10/05	07/11/05	29/11/05
SR interne (A)	92	95	95,6	96,5	97
intégrateur sur turbulence (B)	87	92	89,5	89,7	92,3
SR relatif (B)/(A)	0,95	0,97	0,94	0,93	0,95

TAB. 14.1 – Diverses performances de l'intégrateur en OA, avec indication du SR interne pour chaque test et du SR relatif déduit.

## 14.3 Modèles et paramètres de la commande LQG

### 14.3.1 Rappel des équations de la commande LQG en OA

Il s'agit dans ce paragraphe de préciser les éléments de la commande LQG implantée pour ces tests expérimentaux. Rappelons que la forme retenue pour l'implantation de la commande LQG est la forme générique décrite au chapitre 7, équations (7.4), (7.5) et (7.6), où le vecteur d'état est décomposé en une partie relative à la turbulence et l'autre aux tensions.

Pour mémoire, ce modèle d'état conduit à une expression générale de la loi de commande de la forme :

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}^1 = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}^1 + \mathbf{L}_\infty \left( \mathbf{y}_n - \left( \mathbf{c}^1 \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}^1 + \mathbf{c}^2 \mathbf{X}_n^2 \right) \right) \quad (14.1)$$

$$\mathbf{u}_n = -\mathbf{K}' \hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}^1 = \mathbf{P}^{oa} \hat{\phi}_{n+1/n}^{tur} \quad (14.2)$$

avec  $\mathbf{K}' = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{P}^{oa} & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{P}^{oa}$  étant le projecteur de la phase sur les modes miroirs introduit aux paragraphes 5.5.2 et 8.4.4. On rappelle qu'on a délibérément choisi ici d'exprimer  $\mathbf{u}_n$  en fonction de  $\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}^1$  et non de  $\hat{\mathbf{X}}_{n/n}^1$ , supprimant ainsi une étape de calcul de  $\hat{\mathbf{X}}_{n/n}^1$  intermédiaire. Cela ne modifie absolument pas la commande (le vecteur utile  $\hat{\phi}_{n+1/n}^{tur}$  ne subit qu'une recopie entre  $\hat{\mathbf{X}}_{n/n}^1$  et  $\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}^1$ ).

### 14.3.2 Définition des modèles de turbulence et de composants

Le paragraphe 8.4 a décrit la procédure générale de calcul numérique des divers éléments intervenant dans la loi de commande (modèles de turbulence, d'ASO, de MD *etc*). Le chapitre 12 a permis d'identifier la plupart de ces modèles dans le cadre expérimental. Tous ces éléments sont repris ici dans le cas de l'OA.

Les modèles utilisés pour la turbulence (équation (4.32) intervenant dans l'équation d'état de la partie turbulence (7.4)) sont issus des calibrations et modélisations discutées au paragraphe 12.2.5.4. Puisque l'on se place en OA, analyse et correction se font sur axe (directions d'analyse et de correction sont confondues).

Les modèles de composants utilisés pour définir la commande LQG sont issus des modèles expérimentaux, c'est-à-dire que le MD (et le miroir de bascule) est modélisé grâce à sa matrice d'influence expérimentale. La matrice d'interaction  $\mathbf{M}_{inter} = \mathbf{D}\mathbf{N}$  est mesurée sur le banc et le modèle ASO géométrique est dimensionné au banc. Le projecteur  $\mathbf{K}'$  de la phase (exprimée dans la base de Zernike) sur les modes du miroir est calculé selon la méthode expliquée au paragraphe 8.4.4 en utilisant le modèle expérimental du MD. On assure en même temps le découplage entre MD et miroir de bascule (voir paragraphe 8.4.4.2).

Certains paramètres relèvent plus du choix de réglage et restent à définir. Ainsi, la matrice de covariance du bruit de mesure a été choisie diagonale. Cette diagonale est choisie pour les tests suivants uniformément égale à  $\sigma_w^2 = 10^{-2}$  pixels<sup>2</sup>, correspondant à une variance de bruit de mesure modélisé

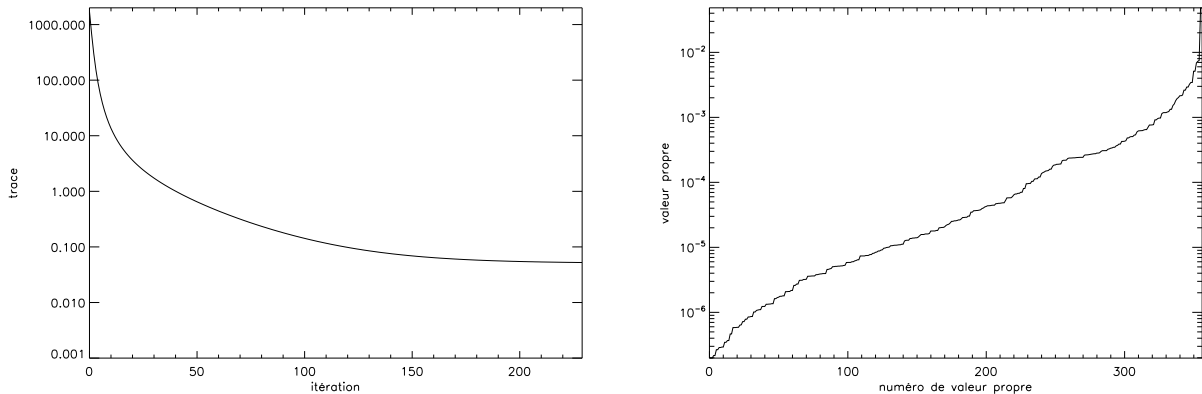


FIG. 14.1 – Exemple de convergence du calcul de la solution de l'équation de Riccati. A gauche est tracée la trace de matrice réduite  $R$  intervenant dans la recherche de la solution de l'équation de Riccati simplifiée. Le critère de convergence choisi est la variation, entre deux itérations, de la trace de la sous-matrice  $R$  de  $\Sigma_\infty$  qui doit être inférieure  $5 \cdot 10^{-5}$ . A droite sont données les valeurs propres de la solution trouvée après convergence.

supérieure à celle déduite des calibration (variance de bruit mesurée de  $10^{-3}$  pixels<sup>2</sup>). Ensuite, l'estimation de la turbulence est faite ici sur 120 modes de Zernike. Il est possible de jouer sur la valeur de  $\sigma_w^2$  et le nombre de modes estimés pour régler les performances du filtre (voir paragraphe 14.8). Les valeurs utilisées ici et pour les tests des paragraphes 14.4 à 14.7 sont celles donnant la meilleure performance de correction.

A partir de l'ensemble de ces éléments, la solution asymptotique  $\Sigma_\infty$  de l'équation de Riccati est estimée par recherche itérative du point fixe (voir paragraphe 7.3.1). On applique en outre les méthodes de simplification de ce calcul proposées au paragraphe 7.2. On travaille ainsi sur une sous-matrice de  $\Sigma_\infty$ ,  $R$ , de taille  $120 \times 120$ . Le critère de convergence choisi est celui proposé au paragraphe 7.3.1, basé sur la variation, d'une itération à l'autre, de la trace de  $R$ . On choisit pour seuil de convergence une variation de la trace inférieure à  $5 \cdot 10^{-5}$ . Dans ces conditions, la figure 14.1 gauche montre que quelques 350 itérations sont nécessaires pour garantir la convergence. Étant donnée la taille des matrices impliquées,  $\Sigma_\infty$  peut ne pas rester symétrique ou définie positive<sup>1</sup>. Nous avons donc comparé  $\Sigma_\infty$  à sa version symétrisée définie par  $(\Sigma_\infty + \Sigma_\infty^T) / 2$ , et constaté que l'égalité est validée entre les deux matrices à la limite de précision numérique de l'ordinateur. La définie-positivité peut être contrôlée par une analyse des valeurs propres. On s'assure alors que ces valeurs sont toutes strictement positives (voir figure 14.1 droite). Ces éléments garantissent une bonne convergence numérique des calculs.

## 14.4 Performance de correction

La première question que l'on se pose est évidemment quelle performance est obtenue en terme de correction et donc de SR. La réponse quantitative dépend évidemment des réglages, notamment de l'optimisation du banc, des conditions d'observation (turbulence locale, vibrations), mais aussi de

<sup>1</sup>Un atout de la simplification du calcul de la solution de l'équation de Riccati est la possibilité de réaliser les calculs en double précision, puisque de base le nombre d'opérations réalisées est 9 fois plus faible.

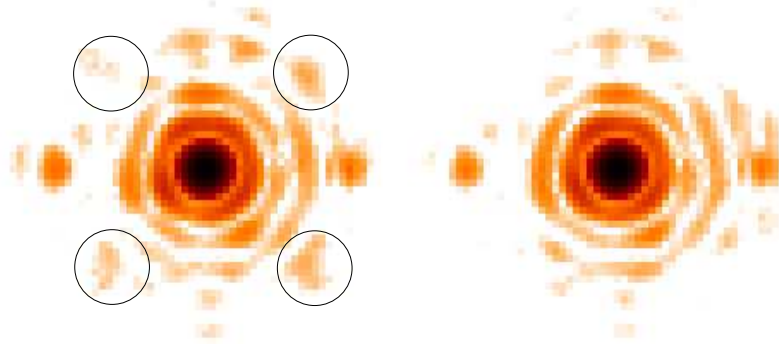


FIG. 14.2 – Exemple de performances comparées en terme de FEP turbulente corrigée, entre intégrateur (à gauche) et commande LQG (à droite), en OA classique. Les SR respectifs sont de 89,5% et 91,5%. Pour l'intégrateur, les 4 pics correspondant au phénomène de gaufre sont entourés.

certains paramètres de réglage (nombre de modes estimés, paramètre de variance du bruit de mesure). Il est plus pertinent de comparer les performances de la commande LQG à celles de l'intégrateur pour des expérimentations réalisées dans les mêmes conditions (même jour, même heure...). Le tableau 14.2 propose donc une liste de performances obtenues à différentes dates pour chaque loi de commande.

date	19/08/05	24/10/05	27/10/05	07/11/05	29/11/05
intégrateur	87	92	89,5	89,7	92,3
LQG	89,4	93,1	91,5	90,6	89,7

TAB. 14.2 – Comparaisons de diverses performances en terme de SR obtenues avec les commandes intégrateur ou LQG en OA classique (barre d'erreur de 1%).

On constate que la performance de la commande LQG est sensiblement la même que pour l'intégrateur avec en général une légère tête d'avance pour la commande optimale.

La figure 14.2 illustre la correction obtenue en date du 27 octobre 2005. On note sur ces FEP une différence notable : la FEP issue d'une correction par intégrateur présente quatre pics placés en carré autour du centre de la FEP. Ces quatre pics correspondent à la présence de gaufre résiduel. Le gaufre est, rappelons-le, un mode du miroir non vu par le système pouvant potentiellement être amplifié par une boucle de commande. La commande intégrateur utilisée est sensée gérer ce mode (voir annexe B). Mais la méconnaissance de la nature de ce mode, surtout en présence de défauts d'alignement des composants, rend sa gestion ardue. On constate que ces quatre pics ont disparus de la FEP obtenue par commande optimale. Cet effet est significatif et tout à fait attendu : le mode gaufre correspond à un mode haute fréquence (spatiale). Il ne saurait donc être amplifié par la commande LQG en raison de la régularisation présente lors de l'estimation de la phase par filtrage de Kalman ; les *a priori* pris en compte n'attribuent en effet que très peu d'énergie à ce mode haute fréquence. Ce résultat



expérimental est intéressant car l'effet de gaufre est difficilement mis en évidence en simulation, et donc cette propriété n'apparaît généralement pas.

On remarque aussi la présence de deux taches, sur l'axe horizontal, de part et d'autre du pic central, mais placées de manière asymétrique. Ces deux taches ne sont pas *a priori* dues à un effet de gaufre (l'asymétrie en témoigne), et n'étaient pas présentes sur les images acquises un an auparavant. Il s'agit d'effets très haute fréquence. Défauts de réglages ? défauts d'une optique ? il est à l'heure actuelle impossible de répondre. Mais les deux FEP en sont affectées de manière semblable.

En conclusion, il s'agit là de la première mise en œuvre expérimentale d'une commande LQG en OA. Notons que cette mise en œuvre a été très rapide, puisqu'une fois les réglages et identification de matrices faits et le RTC validé, la première fermeture de boucle en commande LQG n'a nécessité que quelques jours. Ces premiers résultats démontrent l'aptitude de la commande LQG à fonctionner en expérimentation et témoignent d'excellentes performances. En dépit des inévitables erreurs de modèle, des aléas expérimentaux, la boucle ainsi fermée est stable et légèrement plus performante qu'une boucle de contrôle intégrateur et conduit de surcroît à une réduction du phénomène de gaufre. Une analyse plus détaillée des performances est proposée au paragraphe suivant.

## 14.5 Caractérisation de la commande

Comme expliqué au paragraphe 5.6, il existe divers indicateurs du bon fonctionnement de la commande. Les études menées en simulation ont montré la dégradation sensible de leurs propriétés en présence d'erreurs de modèle simples. Néanmoins, dans un cadre expérimental, peu de données sont réellement accessibles. On ne connaît pas la turbulence incidente et seules les mesures de pentes et les grandeurs calculées par le filtre, en particulier l'innovation et les états estimés, permettent de contrôler son fonctionnement.

### 14.5.1 Caractéristiques de l'innovation

Rappelons que l'innovation  $\tilde{\mathbf{y}}_{n/n-1}$  se présente sous la forme d'un vecteur de pentes, et est définie comme la différence entre la mesure de pentes obtenue en boucle fermée (ou pente résiduelle)  $\mathbf{y}_n$ , et  $\hat{\mathbf{y}}_{n/n-1}$ , sa prédiction faite par le filtre sachant les mesures antérieures, soit :  $\tilde{\mathbf{y}}_{n/n-1} = \mathbf{y}_n - \hat{\mathbf{y}}_{n/n-1}$ . Comme expliqué au paragraphe 5.6, l'innovation doit présenter, lorsqu'aucune erreur de modèle n'est commise, les caractéristiques d'un bruit blanc centré. L'innovation a été calculée à partir des mesures de pentes expérimentales en boucle fermée, et des mesures de pentes prédites, reconstruites grâce aux diverses grandeurs sauvegardées par le RTC (états estimés, commandes, voir paragraphe 13.2.2.2).

#### 14.5.1.1 Moyenne empirique de l'innovation

L'espérance de l'innovation est nulle en l'absence d'erreur de modèle. Dans le cadre expérimental, l'innovation  $\tilde{\mathbf{y}}_{n/n-1}$  a été moyennée sur un grand nombre de mesures temporelles (plus de 7000 soit une rotation complète de l'écran turbulent). Cette moyenne empirique temporelle<sup>2</sup> de l'innovation est proposée en figure 14.3, avec une barre d'erreur. Cette barre d'erreur est faible, on a donc une moyenne d'innovation de valeur stable, et significativement non nulle.

Pour donner un ordre d'idée et comprendre ce qui se passe, on compare maintenant ces caractéristiques à celles de  $\mathbf{y}_n$  et de  $\hat{\mathbf{y}}_{n/n-1}$ . La moyenne de la pente résiduelle  $\mathbf{y}_n$  est presque identique à  $\tilde{\mathbf{y}}_{n/n-1}$ , et présente la même stabilité, puisque  $\hat{\mathbf{y}}_{n/n-1}$  est de moyenne nulle (au bruit près). En somme,

<sup>2</sup>On désigne par la suite par moyenne la moyenne empirique

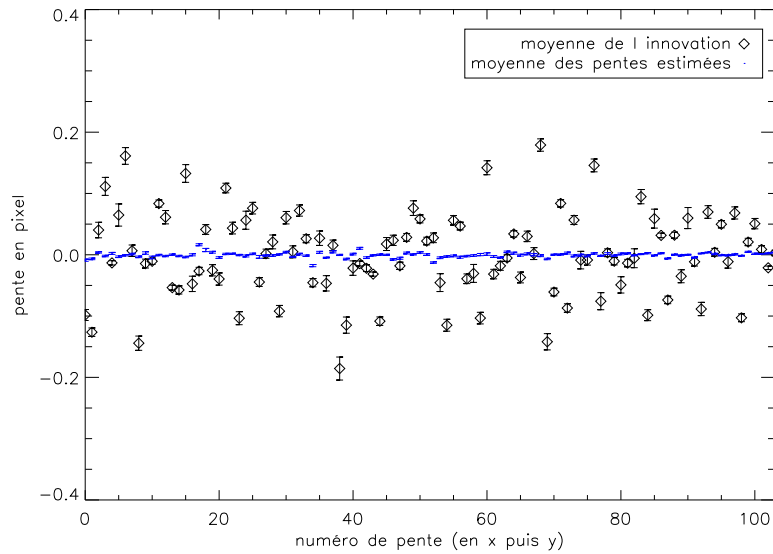


FIG. 14.3 – Comparaison de la moyenne de l’innovation à la moyenne de la pente estimée par le filtre. Les barres d’erreur de la mesure sont indiquées.

$\mathbf{y}_n$  et  $\tilde{\mathbf{y}}_{n/n-1}$  sont à peu de choses identiques.  $\hat{\mathbf{y}}_{n/n-1}$  (figure 14.3) présente quant à elle une moyenne 10 fois plus faible que celles de  $\mathbf{y}_n$  et  $\tilde{\mathbf{y}}_{n/n-1}$ , avec une barre d’erreur elle aussi 10 fois plus faible.

Le fait que la moyenne de la pente estimée  $\hat{\mathbf{y}}_{n/n-1}$  soit quasi-nulle est logique car le modèle repose sur l’hypothèse que l’espérance de  $\mathbf{y}_n$  est nulle pour la commande optimale (14.1). Par contre, il existe un biais constant sur l’innovation. Ce biais traduit la présence d’erreurs de modèle, signe qu’un certain nombre d’éléments ne sont pas correctement modélisés. L’origine de ce biais étant inconnue, il pourrait être envisagé d’inclure dans le modèle une composante statique (voir paragraphe 10.2) pour améliorer encore les performances.

#### 14.5.1.2 Variance empirique de l’innovation

Un autre paramètre de contrôle de l’innovation est sa variance. La variance théorique de l’innovation est entièrement déterminée par les modèles utilisés dans la définition de la commande. En effet rappelons qu’elle vaut asymptotiquement (voir paragraphe 5.3.4.4)  $\Sigma_\infty = \mathbf{C}_1 \Sigma_\infty \mathbf{C}_1^T + \Sigma_w$ . On peut donc vérifier la qualité globale des modèles en comparant cette variance théorique à la variance empirique de l’innovation effectivement constatée à partir des mesures expérimentales. La figure 14.4 compare ainsi les matrices de covariance expérimentale et théorique de l’innovation (gauche), et en particulier les diagonales de chacune de ces matrices (droite). On constate qualitativement une bonne ressemblance de structure des deux matrices, presque diagonales. On note cependant des couplages différents et plus marqués pour la matrice expérimentale. L’analyse de la diagonale (variance) de chaque matrice indique quant à elle une variance empirique 1 à 3 fois inférieure à la variance théorique. Seules certaines valeurs sont du même ordre de grandeur que les valeurs théoriques.

Il est difficile d’interpréter en détails ces résultats, mais on peut tenter d’en donner une explication globale et intuitive. Il apparaît clairement que ces résultats ne sont pas comparables à ceux obtenus en simulation en l’absence d’erreur de modèle (voir au paragraphe 8.5.1). Par contre, on a pu constater

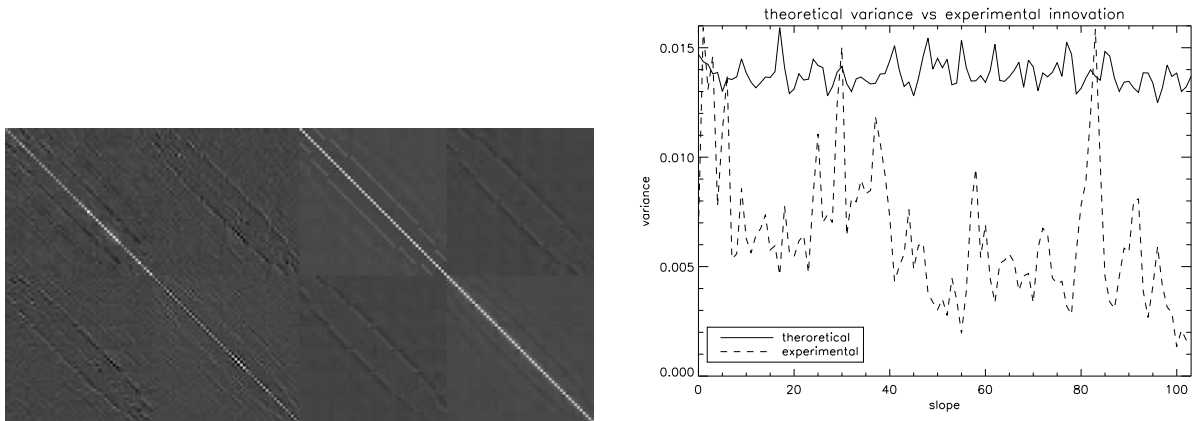


FIG. 14.4 – A gauche : comparaison de la matrice de covariance de l’innovation empirique (gauche) et théorique (droite). A droite : tracé des diagonales de chaque matrice.

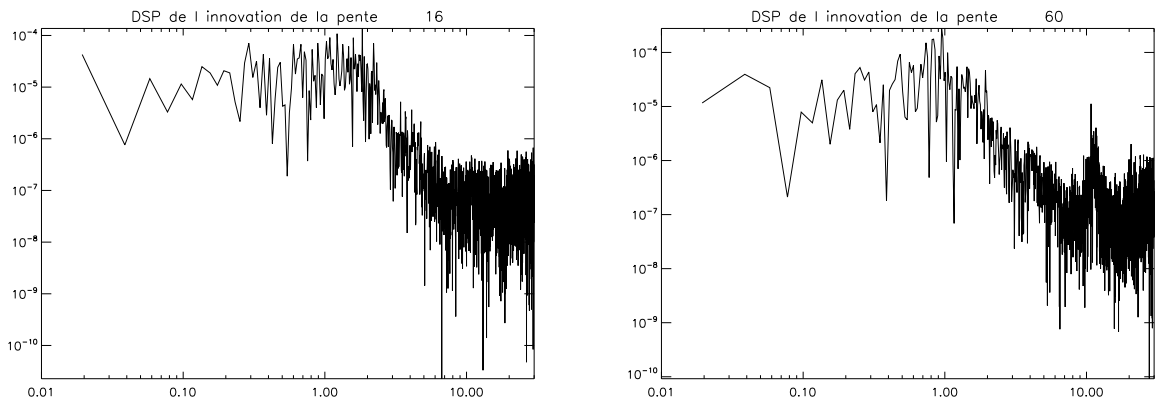


FIG. 14.5 – DSP temporelles des composantes 16 (gauche) et 60 (droite) de l’innovation. La DSP de l’innovation (en pixels<sup>2</sup>) est tracée en fonction de la fréquence en Hz.

que l’introduction d’erreurs de modèle en simulation conduit à une dégradation similaire des propriétés de l’innovation. Ajoutons que ces résultats ont été obtenus avec les meilleurs choix de paramètres, notamment celui de la variance du bruit de mesure  $\sigma_w^2$  dont le réglage est détaillé au paragraphe 14.8.1.

### 14.5.1.3 Blancheur de l’innovation

Un troisième point de contrôle concernant l’innovation est sa blancheur. On souhaite vérifier s’il s’agit bien d’un bruit blanc. Le test de blancheur proposé au paragraphe 5.6.2 et appliqué avec succès au paragraphe 8.5.1, en l’absence d’erreur de modèle, donne ici un résultat indiscutable : quelle que soit la borne d’erreur choisie pour le test, l’innovation se révèle systématiquement non blanche. L’exigence et la sensibilité de ce test (voir paragraphe 8.5.2) n’est ici pas en cause. Il suffit pour s’en convaincre d’examiner les DSP temporelles de deux composantes particulières de l’innovation présentées en figure 14.5.

On constate que la blancheur de l’innovation n’est effectivement pas acquise. Le profil obtenu

(en terme de DSP) fait fortement penser à celui d'une pente résiduelle. Globalement le comportement se rapproche plus de celui d'un bruit coloré. En particulier, on constate pour la composante 60 la présence d'un pic sur la DSP temporelle (oscillation de la corrélation). On verra au paragraphe 15.2.1 que le banc est soumis en permanence à des vibrations, du fait de sa piètre isolation mécanique. Une telle composante est évidemment une erreur de modèle qui se retrouve dans l'innovation.

En conclusion, trop d'éléments non contrôlés sont à même de perturber le système et sa modélisation et introduisent des erreurs de modèles. L'innovation, si elle indique la présence de ces erreurs, n'est pas aisée à interpréter et ne permet pas de les identifier. Malgré l'existence de ces erreurs de modèle et donc la sous-optimalité avérée de la correction, les performances restent très bonnes. Le paragraphe suivant s'intéresse à l'impact de ces erreurs de modèle sur les états estimés.

### 14.5.2 Analyse des états estimés

Comme expliqué au paragraphe 5.6, il est aussi intéressant de contrôler les propriétés de la phase estimée par le filtre. Dans des conditions parfaites, les propriétés statistiques de la phase turbulente estimée coïncide avec nos modèles. Dans la pratique, les modèles de turbulence sont approximatifs, les occurrences de turbulence inconnues et la boucle de commande perturbée par toutes les erreurs de modèle.

Tout d'abord, on a vérifié que la moyenne temporelle des états estimés est non nulle. Pour mieux comprendre cette propriété, on peut s'intéresser à la mesure de la turbulence en boucle ouverte. Grâce au modèle géométrique d'ASO et en appliquant le principe de reconstruction de la phase décrit au paragraphe 12.2.5.1, on peut aussi en déduire la reconstruction des premiers modes sur la base de Zernike de cette turbulence au cours du temps. On constate alors que la turbulence présente une moyenne non nulle sur un tour d'écran. Pour expliquer cela, on peut évidemment mettre en avant le peu d'occurrences de turbulence dont on dispose et donc la difficulté à voir le phénomène turbulent se moyennner. En fait, de nombreuses autres composantes viennent biaiser cette moyenne, notamment les aberrations statiques de toutes les optiques présentes sur le trajet optique, depuis la source d'analyse et jusqu'à l'ASO. En particulier, la déformation propre du miroir présente un fort astigmatisme (dont la correction nécessite 40% de sa propre dynamique). Ces composantes sont estimées et se retrouvent dans le vecteur d'état estimé au cours du temps. La commande LQG estime et corrige donc efficacement ces composantes statiques, même si le modèle sous-jacent est à moyenne nulle. Le problème de la composante statique sera rediscuté en OAAO, cadre dans lequel cette composante devient problématique.

La figure 14.6 gauche montre la variance radiale de la phase estimée, comparée à l'*a priori* choisi (turbulence de type Kolmogorov de  $\frac{D}{r_0}$  de 2,7), et la variance mesurée expérimentalement. On constate une très bonne adéquation. Cette concordance implique que d'une part les *a priori* spatiaux étaient bons, et que d'autre part le processus d'estimation rend bien compte de la variance spatiale, même en présence d'erreurs de modèle.

Cependant, du point de vue des propriétés temporelles, la phase estimée présente des caractéristiques contrastées. La corrélation à un pas des modes estimés a été calculée empiriquement, de la même manière que celle utilisée dans la calibration de l'écran turbulent c'est-à-dire par corrélation empirique ou, de manière équivalente, par la transformée de Fourier inverse de la DSP temporelle (voir paragraphe 12.2.5.4 et annexe A.1). La figure 14.6 droite montre que cette corrélation à un pas s'écarte notablement de l'*a priori* donné par le modèle AR1. Il est plus difficile de se prononcer vis-à-vis de la corrélation de l'écran calibrée expérimentalement, étant données les barres d'erreur. En rapprochant cette courbe de la figure 4.6 proposée au paragraphe 4.4.3, on constate que la courbe de corrélation modale à un pas des états estimés s'apparente notablement à la courbe de corrélation modale à un pas d'une turbulence de type Taylor, donc plutôt du type de l'écran turbulent (nous reviendrons sur ce

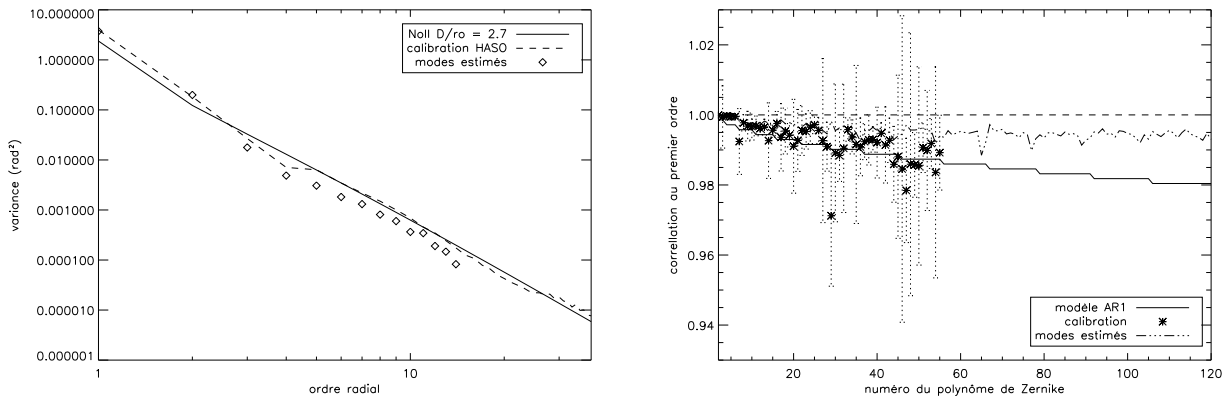


FIG. 14.6 – Gauche : comparaison de la variance radiale des modes estimés de la phase turbulente d’après calibration, ou d’une turbulence Kolmogorov (ou de Noll) théorique. Droite : comparaison de la corrélation à un pas des modes estimés, de la corrélation théorique selon le modèle AR1, et de la corrélation d’après les calibrations de l’écran (avec barre d’erreur de mesure).

point au paragraphe 14.7).

Cette inadéquation entre modèle et états effectivement estimés permet par la même occasion de souligner que contrairement à certaines idées préconçues, cette commande LQG, au travers de ses *a priori*, n’impose pas une structure rigide : les *a priori* sont utilisés pour estimer les états, mais les états estimés peuvent s’écarter de ces *a priori*. L’estimation est alors sous-optimale si une erreur de modèle a été commise, mais les *a priori* ne décident pas complètement du résultat de l’estimation.

Bien que la corrélation à un pas suscite quelques interrogations, les spectres de puissance temporels des modes estimés présentent une très forte concordance avec ceux issus des calibrations. La figure 14.7 montre ainsi les DSP des modes de Zernike 2, 10 et 20 estimés par le filtre, ou les DSP expérimentales.

### 14.5.3 Conclusion sur la caractérisation de la commande

En conclusion, l’étude des propriétés de l’innovation et des états estimés montrent que des erreurs de modèle sont présentes et rendent par conséquent la commande sous-optimale. Ce résultat est peu surprenant dans le cadre d’une mise en œuvre expérimentale. La très bonne performance de la commande montre que ces erreurs ne dégradent pourtant pas significativement sa performance globale en terme de SR. Les défauts constatés au niveau de l’innovation ne permettent pas de conclure quant à l’origine des erreurs de modèle. Les états estimés présentent quant à eux des propriétés globalement conformes aux *a priori* choisis, en terme de variance ou de profil fréquentiel. Néanmoins, les corrélations à un pas des états estimés ne correspondent pas aux *a priori* utilisés. Quelques éléments de réponse seront apportés par l’analyse des simulations numériques au paragraphe 14.7. Une véritable étude de sensibilité paramétrique n’a pu être réalisée faute de temps.

## 14.6 Estimation optimale en boucle ouverte avec le filtre de Kalman

Jusqu’ici la commande LQG considérée a visé évidemment à corriger la turbulence en boucle fermée, en s’appuyant sur une estimation optimale, réalisée par le filtre de Kalman. On peut restreindre

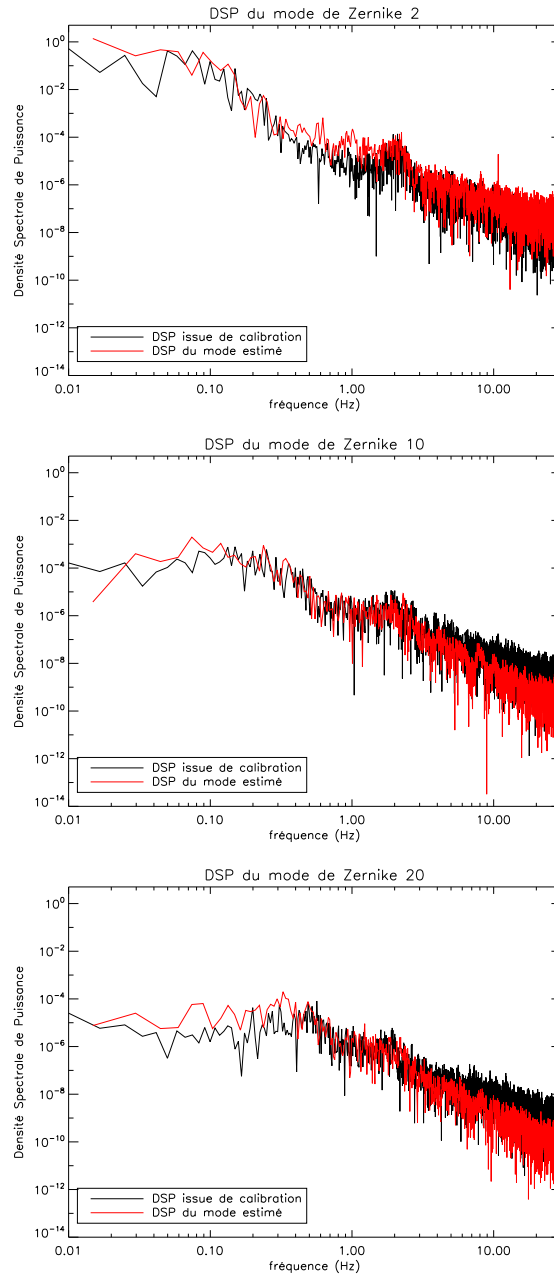


FIG. 14.7 – Comparaison des DSP temporelles des modes 2, 10, 20 estimés par le filtre en OA boucle fermée et fournies par la calibration des écrans.

la commande LQG à une simple fonction d'estimation optimale boucle ouverte. L'estimation est alors réalisée par le filtre de Kalman grâce aux mesures de pentes boucle ouverte (sans correction par le miroir). La commande LQG boucle fermée et cet estimateur boucle ouverte sont cependant de mêmes nature et structure, leur différence résidant dans la prise en compte, ou non, de la contribution du MD sur la mesure de pentes (*via* la matrice d'interaction). Comparer l'estimation de la turbulence en boucle ouverte et en boucle fermée permet notamment de contrôler indirectement la qualité du modèle de matrice d'interaction. Cela offre aussi un premier exemple d'estimation en boucle ouverte en OA, basée sur un filtre de Kalman. On a vu que ce mode de fonctionnement est retenu pour la MOAO (associé évidemment à une correction), et qu'il soulève la question du choix de la commande, à laquelle quelques éléments de réponse sont apportés ici.

Nous avons précisé aux paragraphes 5.5.4 et 13.2.2.1 comment ce mode est obtenu sur le RTC. On peut alors analyser comme précédemment les propriétés de l'innovation et des états estimés. Sans plus rentrer dans le détail de ces diverses grandeurs qu'il serait fastidieux de repasser en vue, la conclusion de ces tests est qu'en boucle fermée ou en boucle ouverte, les propriétés de l'innovation et des états estimés par le filtre de Kalman sont très similaires.

Ceci amène à la conclusion que le procédé permettant en boucle fermée de se ramener à une boucle ouverte par soustraction de la correction se passe bien. En somme on soustrait bien ce qui a été corrigé. Donc la matrice d'interaction est de qualité. On rappelle qu'on utilise la matrice d'interaction mesurée expérimentalement.

Des tests ont aussi été menés en utilisant une matrice d'interaction issue des modèles (modèle miroir issu des mesures des fonctions d'influence, modèle ASO géométrique). La conclusion reste la même : le modèle de matrice d'interaction est donc ainsi conforté, comme déjà souligné au paragraphe 12.3.

Ce cas boucle ouverte a surtout un intérêt dans le cadre de systèmes comme la MOAO (voir paragraphe 3.3.4), et notamment le projet FALCON où une correction boucle ouverte de la turbulence est envisagée. La brique de base d'un tel système reste l'estimation optimale à partir de mesures de pentes boucle ouverte en utilisant des *a priori* spatio-temporels. Le souci majeur du point de vue de la commande est alors de pouvoir fournir une correction de qualité malgré l'absence de rétroaction. Ceci implique que l'efficacité dépendra grandement de la qualité du modèle du ou des miroirs placés en aval du système pour réaliser la correction boucle ouverte.

## 14.7 Confrontation avec la validation numérique

Ce paragraphe propose une confrontation des résultats de simulation et de validation expérimentale dans le cadre de l'OA. Le banc BOA a été en effet précisément modélisé et simulé grâce à l'outil de simulation complet développé durant la thèse (voir chapitre 8) et aux calibrations décrites au chapitre 12. Il est alors possible de comparer la performance de la commande LQG en contexte expérimental ou numérique. Cette comparaison offre de nombreux intérêts. Tout d'abord, il s'agit de confirmer les performances obtenues expérimentalement, ou éventuellement de mettre en évidence des problèmes expérimentaux. L'adéquation des résultats de simulation et de validation expérimentale, si elle se vérifie, permet par la suite de tester numériquement la commande LQG dans des conditions nouvelles ou non disponibles sur le banc, en garantissant une bonne représentativité des résultats obtenus.



### 14.7.1 Conditions de simulation

Du point de vue de la simulation du banc, il est logique de simuler les divers composants à partir des résultats obtenus en calibration. Ainsi :

- la fréquence d'échantillonnage et les retards sont ceux issus des paramètres du banc ;
- l'ASO est un ASO géométrique dimensionné au banc, la covariance de bruit de mesure est toutefois supposée diagonale. La variance de bruit de mesure est cependant fixée à la valeur expérimentale ;
- le MD et le miroir de basculement sont modélisés grâce aux fonctions d'influence mesurées en calibration ;
- la turbulence est simulée par un écran respectant le modèle de Kolmogorov, en translation uniforme, de caractéristiques ( $\frac{D}{r_0}$ , vitesse de vent) déduites des calibrations.

La conséquence directe de ces choix de simulation est qu'il y a correspondance exacte entre les modèles ASO et MD utilisés pour définir la commande LQG et les modèles utilisés pour simuler le banc. En somme, il n'y a pas d'erreur de modèle sur ces composants. Ceci marque une différence avec la validation expérimentale, pour laquelle des erreurs existent, dues aux erreurs de calibration, aux dérives des réglages, à la nature complexe et couplée du bruit de mesure par exemple (toujours supposé de matrice de covariance diagonale). Par contre, on commet en simulation une erreur similaire à celle de la validation expérimentale : on simule un écran turbulent en translation tandis que le modèle d'état est AR1. Évidemment, la simulation ne rend pas compte de tout un ensemble de perturbations que sont la turbulence locale, les vibrations parasites ou les aberrations non communes *etc.*

### 14.7.2 Résultats numériques

La figure 14.8 compare les FEP obtenues en simulation en comparant intégrateur et commande LQG. Notons que les aberrations non communes ne sont pas simulées, les performances en simulations sont donc meilleures. Les SR sont cependant donnés en multipliant le résultat de simulation par le SR interne du banc soit 95% environ. On constate alors une bonne performance des deux lois de commande, avec un SR de 90,12% pour l'intégrateur et 90,16% pour la commande LQG, rendant relativement bien compte de la réalité expérimentale. Cependant on note que l'avantage de la commande LQG du point de vue du SR est moins net en simulation (0,04% en simulation au lieu de quelques % en laboratoire). Ceci peut s'expliquer par l'absence d'effet de gaufre, difficile à reproduire en simulation.

En somme, on retrouve bien les ordres de grandeur de la performance expérimentale, mais l'écart est trop faible pour étayer une comparaison. On s'intéresse donc à l'innovation, dont on va étudier les caractéristiques.

Rappelons que dans ce cadre simulé, les erreurs de modèles se réduisent aux erreurs sur la turbulence. La figure 14.9 gauche compare ainsi la moyenne (empirique) de l'innovation  $\tilde{y}$  à celle des pentes résiduelles  $y$  moyennes, après une simulation de plus de 15000 itérations. On constate sur cette courbe que cette fois, l'innovation présente une moyenne quasi-nulle, stable dans le temps (en appliquant la même technique qu'au paragraphe 14.5.1 de calcul de moyennes sur des fenêtres plus petites de quelques 500 itérations). Les moyennes temporelles des pentes résiduelles mesurées et estimées sont maintenant très similaires. En somme, l'erreur de modèle sur la turbulence, seule erreur de modèle en présence, ne semble pas apporter un biais significatif sur l'innovation. Réciproquement, on peut en conclure que le biais constaté expérimentalement est probablement dû aux erreurs résiduelles sur les modèles de composant et la présence de composantes parasites additives (vibrations, composantes statiques...).





FIG. 14.8 – Illustration de la correction obtenue en simulation, avec intégrateur optimisé ou commande optimale, en terme de FEP. L'échelle est logarithmique, en intensité normalisée à 1.

La figure 14.9 droite compare la matrice de covariance de l'innovation déduite des mesures et celle attendue d'après les modèles utilisés. La matrice déduite des mesures présente plus de couplages mais est très ressemblante qualitativement.

L'application du test de blancheur aux données simulées a conduit logiquement à la conclusion immédiate que l'innovation n'est pas blanche. L'analyse de DSP de l'innovation amène à un résultat très similaire à celui constaté expérimentalement. L'innovation présente des DSP structurées.

L'analyse des états estimés est plus riche. La figure 14.10 gauche montre la variance des états estimés et indique que, comme en validation expérimentale, les états estimés présentent la bonne statistique spatiale. On note toutefois la faiblesse de la variance des modes de bascule (ordre radial 1), liée à une erreur de convergence (pas assez d'occurrences), et la surexcitation des derniers ordres, liée très probablement à l'effet de repliement et de sous-modélisation de la turbulence. La figure 14.10 droite montre quant à elle un effet inattendu. La corrélation à un pas des états estimés présente en simulation le même comportement qu'en validation expérimentale, à savoir une corrélation décroissant plus doucement, surtout aux hauts ordres, atteignant presque un régime de saturation. Ce résultat est enrichissant, car il démontre que l'effet obtenu en validation expérimentale n'est pas lié aux erreurs de modélisation du banc (absentes en simulation), mais plus sûrement au choix d'un modèle AR1 pas assez pertinent du point de vue de la corrélation à un pas. Ce résultat rejoint l'analyse menée au paragraphe 4.4.3 et répond à la question sur ce point soulevée lors de l'expérimentation (paragraphe 14.5.2).

### 14.7.3 Conclusion sur la simulation d'OA

La simulation numérique a permis de reproduire le comportement du banc BOA. En partant du principe que la turbulence générée par l'écran turbulent est proche d'une turbulence de type Kolmogorov en translation uniforme, l'erreur de modélisation de la turbulence est reproduite. Les erreurs

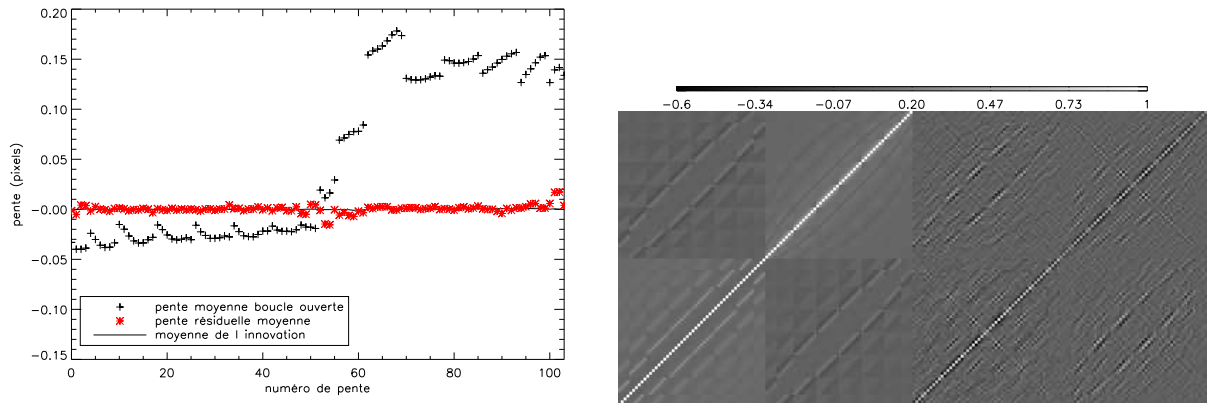


FIG. 14.9 – Analyse de l’innovation obtenue en simulation. A gauche, moyenne de l’innovation comparée à la pente moyenne boucle ouverte, et à la pente résiduelle moyenne. La moyenne de la pente résiduelle estimée (non représentée), se confond avec la pente résiduelle moyenne. A droite, matrice de covariance de l’innovation théorique (gauche) et obtenue de la simulation (droite).

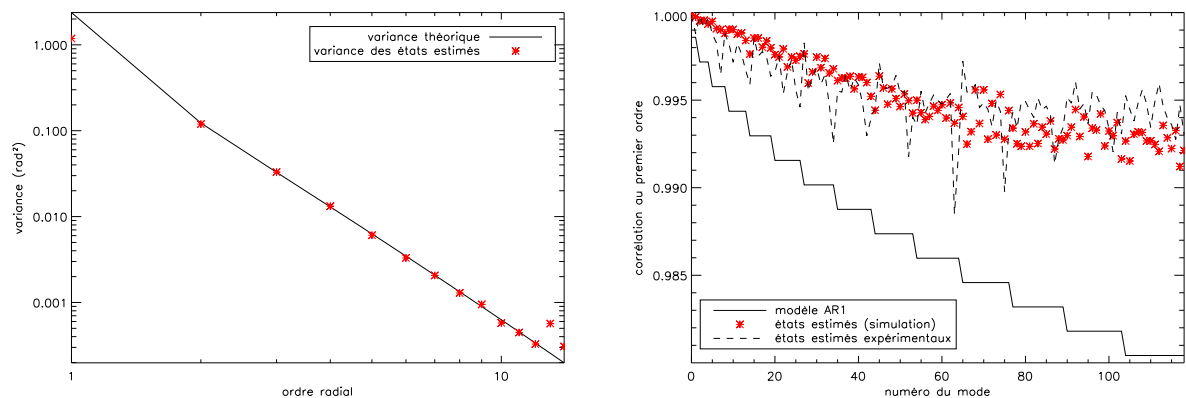


FIG. 14.10 – Analyse des états estimés en simulation. Variance (gauche) et corrélation à un pas (droite) des modes estimés, comparées aux *a priori*.

de modèle des composants ainsi que les perturbations parasites (vibrations, turbulence locale) n'ont cependant pu être reproduites puisqu'inconnues. Dans ces conditions, les performances de la commande LQG, comparées à celles de l'intégrateur, sont semblables. On assiste en simulation numérique, comme en expérimentation, à une dégradation similaire des propriétés de l'innovation, qui reste non blanche en simulation. Les états estimés, quant à eux, gardent une variance très proche des *a priori* et la corrélation modale à un pas ressemble de façon frappante à celle obtenue en expérimentation.

Mais des différences notables sont présentes. En simulation, la commande LQG ne fournit pas une correction notablement meilleure (absence de gaufre), l'innovation présente un biais presque nul, et sa covariance empirique est plus proche de sa valeur théorique.

L'absence d'erreurs de modélisation des composants en simulation suggère donc d'abord que les défauts temporels observés (perte de blancheur, corrélation différente des *a priori*) sont associés à l'erreur de modélisation des propriétés temporelles de la turbulence. Bien que ce défaut ne semble pas réduire notablement les performances de la commande dans les conditions de turbulence choisies, ce résultat tend à remettre en question le modèle AR1. Soit le choix des coefficients de l'AR1 est à repenser, pour mieux rendre compte des décorrélations temporelles, soit le modèle AR1 dans son ensemble est insuffisant pour bien représenter la décorrélation à court terme de la turbulence. Passer à un AR d'ordre plus élevé a un coût calculatoire, qu'il faudrait mettre en rapport avec le gain éventuel en performance apporté par une meilleure modélisation. Ce point est actuellement à l'étude.

Cette première validation est donc positive avec des résultats expérimentaux obtenus dans les meilleures conditions de réglage de la commande. Le paragraphe suivant présente donc l'étude des performances de la commande en fonction de ses deux principaux paramètres de réglage, le nombre de modes estimés et la variance du bruit de mesure du modèle  $\sigma_w^2$ , étude qui a conduit aux meilleurs réglages.

## 14.8 Influence de $\sigma_w^2$ et du nombre de modes estimés sur les performances expérimentales

Lors d'une validation expérimentale, tous les paramètres de la commande sont *a priori* sujets à caution. Estimer la sensibilité des performances de la commande aux diverses erreurs fait l'objet de l'étude de robustesse de la commande. Cette étude n'a été qu'à peine effleurée au cours de cette thèse et représente un travail considérable d'analyse et de validations. Pour autant, et sans remettre en cause tous les modèles, on peut s'intéresser à quelques paramètres de réglage de base de la commande LQG. Le principal paramètre de réglage est  $\sigma_w^2$ , la variance du bruit de mesure introduit dans le modèle de mesure. Un autre paramètre d'intérêt est le nombre de modes estimés. Ce paramètre influe sur la performance globale notamment en permettant de gérer l'effet d'*aliasing* comme vu en simulation, au paragraphe 8.5.2. Il s'agit aussi d'un paramètre clef en OAAO ou OAMC (voir paragraphe 16.7). Il conditionne enfin la complexité calculatoire de la commande.

### 14.8.1 Évolution de la correction avec $\sigma_w^2$

La variance de bruit de mesure du modèle d'état (équation d'observation) est le paramètre principal de réglage du filtre de Kalman. Dans les conditions expérimentales du banc, la variance du bruit de mesure a été estimée à  $10^{-3}$  pixels<sup>2</sup>. Dans le modèle d'état, ce bruit est supposé blanc et gaussien, sans corrélation entre sous-pupilles, malgré une réalité plus complexe (voir paragraphe 12.2.2.3).

On constate sur la figure 14.11 que lorsque  $\sigma_w^2$  est fixée à sa valeur issue des calibrations, soit  $10^{-3}$  pixels<sup>2</sup>, la performance obtenue n'est pas la meilleure. La performance maximale est obtenue

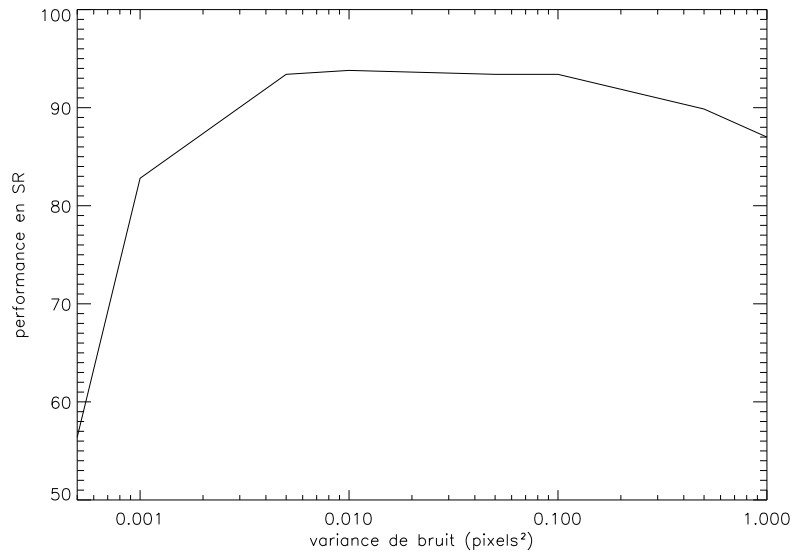


FIG. 14.11 – Évolution de la performance de la commande en fonction de la variance du modèle bruit de mesure (résultats expérimentaux).

plutôt pour  $\sigma_w^2$  de l'ordre de 0,01 pixels<sup>2</sup>, soit 10 fois plus que le niveau expérimental relevé. Ce résultat doit s'interpréter en sachant que des erreurs de modèles sont présentes. Ces erreurs agissent comme un bruit supplémentaire dans la boucle, obligeant, pour une meilleure correction à augmenter  $\sigma_w^2$  au-delà de la valeur calibrée. Augmenter  $\sigma_w^2$  revient à accorder une confiance de moins en moins bonne dans la mesure et une plus forte attache aux modèles. En-deçà de  $10^{-3}$  pixels<sup>2</sup>, la performance chute rapidement (trop d'importance est accordée aux mesures) et le filtre devient même instable en dessous de  $5 \cdot 10^{-4}$  pixels<sup>2</sup>.

On peut par ailleurs analyser de nouveau l'innovation. La figure 14.12 présente ainsi l'évolution de la trace de la matrice de covariance de l'innovation (soit sa variance totale) évaluée expérimentalement, en fonction de  $\sigma_w^2$ . Elle est comparée à la même grandeur calculée grâce à la matrice de covariance théorique déduite des matrices de la commande selon l'équation (5.28). On constate ainsi que la variance d'innovation expérimentale est bien supérieure à sa valeur théorique tant que la variance de bruit de mesure introduite dans la commande ne dépasse pas environ  $3 \cdot 10^{-3}$  pixels<sup>2</sup>, soit une valeur supérieure à la variance de bruit de mesure effectif. Pour illustration, la figure 14.13 compare les matrices de covariance d'innovation expérimentale et théorique, pour chaque variance de bruit. Elles sont les plus ressemblantes pour une variance de bruit de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-3}$  pixels<sup>2</sup> à  $10^{-2}$  pixels<sup>2</sup>.

Ceci confirme qu'une variance de bruit de plus de  $3 \cdot 10^{-3}$  pixels<sup>2</sup> doit être introduite dans le filtre pour prendre en compte les diverses erreurs de modèle et obtenir une meilleure performance.

La conclusion de cette étude paramétrique est que dans un système expérimental, pour lequel les erreurs de modèle sont inévitables, il est préférable de sur-évaluer la variance de bruit  $\sigma_w^2$ , même fortement. Même dans le cas d'une trop grande sur-évaluation, on assiste à une perte de performance plus faible qu'en sous-évaluant  $\sigma_w^2$ , conduisant le filtre à accorder trop de confiance à un modèle imparfait. Enfin, la plage de réglage de  $\sigma_w^2$  est large (au moins une décade), ce qui témoigne de la robustesse en performance du système et de son aptitude à absorber les erreurs de modèle.

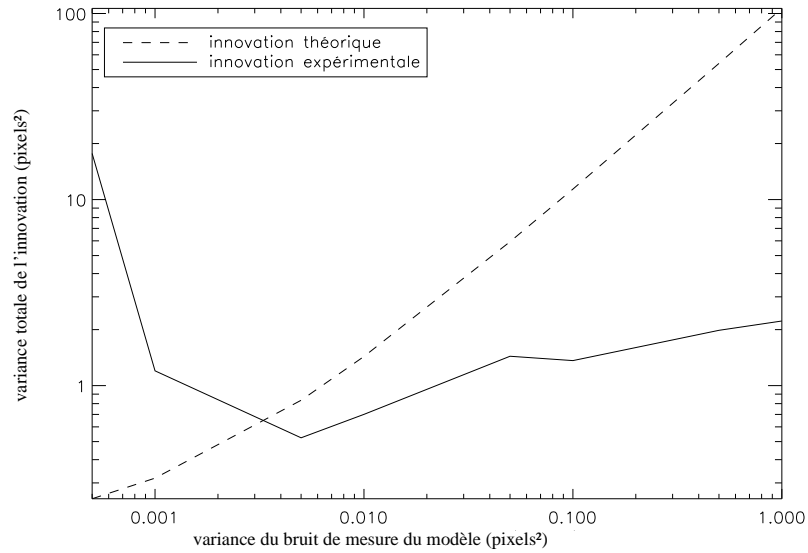


FIG. 14.12 – Évolution de la variance totale de l'innovation, déduite des mesures ou des modèles de la commande (innovation théorique), en fonction du choix de la variance de bruit du modèle de mesure (résultats expérimentaux).

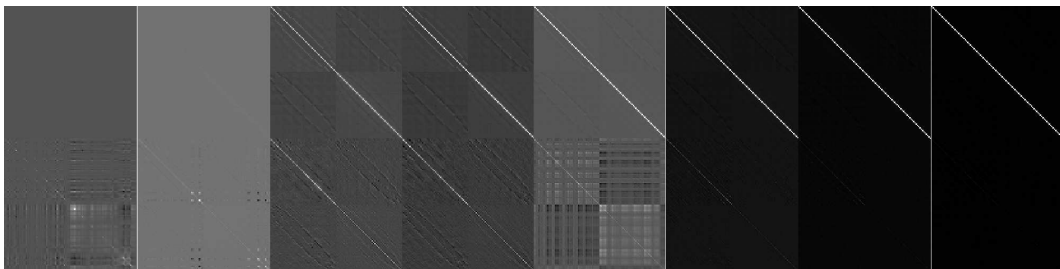


FIG. 14.13 – Évolution de la matrice de covariance de l'innovation, déduite des mesures (en bas) ou des modèles (innovation théorique, en haut), en fonction du choix de  $\sigma_w^2$ . Les valeurs de  $\sigma_w^2$  sont de gauche à droite de  $5 \cdot 10^{-4}$ ,  $10^{-3}$ ,  $5 \cdot 10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ ,  $5 \cdot 10^{-2}$ ,  $10^{-1}$ ,  $5 \cdot 10^{-1}$ ,  $1$ . pixels<sup>2</sup>

### 14.8.2 Évolution de la correction avec le nombre de modes estimés et réduction d'*aliasing*

Le nombre de modes estimés pose une difficulté. Du point de vue de l'estimation, on peut être tenté de l'augmenter fortement afin d'estimer une phase la plus riche possible. L'utilisation d'un estimateur régularisé permet en effet de reconstruire un grand nombre de modes et d'obtenir une meilleure description de l'équation de mesure. Cela permet potentiellement une meilleure gestion du phénomène d'*aliasing* induit par le nombre fini de sous-pupilles. Les résultats de simulation obtenus au paragraphe 8.5.2 tendent à valider cet argument : la réduction de l'effet de troncature et l'effet de repliement a conduit à une augmentation de la performance globale.

Ce raisonnement a cependant des limites. On peut s'interroger sur le degré de confiance dans le modèle ASO pour les hauts ordres. L'impact des modes estimés à partir d'un certain rang est probablement limité compte tenu de la géométrie ASO et MD et de la faible énergie de ces modes dans la turbulence. Il faut aussi garder en tête que le nombre de modes mesurés étant limité, l'augmentation du nombre de paramètres à estimer conduit à un moment donné à une perte de performance si les *a priori* ne sont pas conformes à la réalité. Enfin, la complexité de la commande évolue notablement avec le nombre de modes estimés. Les résultats obtenus au paragraphe 8.5.2 concernent une simulation d'un cas d'OA simplifiée. Les paragraphes suivants analysent donc cette problématique dans le cadre expérimental et en simulation sur un cas plus réaliste.

#### 14.8.2.1 Approche expérimentale

On étudie donc l'évolution de la performance de la commande avec le nombre de modes. Pour cela on fait évoluer ce chiffre entre 80 et 300, limite supérieure autorisée par le RTC et on analyse d'une part l'amélioration du SR et d'autre part, pour une analyse plus fine, on s'intéresse à l'évolution des FEP longue pose obtenues dans les divers cas d'estimation.

La figure 14.14 gauche montre ainsi une coupe de la FEP obtenue avec la commande LQG en estimant 80 modes. On notera l'irrégularité située entre  $4\lambda/D$  et  $5\lambda/D$ , due au repliement. En effet, l'échantillonnage spatial de l'ASO est conditionné par le pas des sous-pupilles  $d$ , définissant une fréquence de Nyquist de  $\lambda/2d = 4\lambda/D$  (voir paragraphe 2.6). La figure 14.14 droite présente des coupes des FEP obtenues pour l'intégrateur et la commande LQG pour deux nombres de modes estimés, 80 et 120. On se concentre autour de la fréquence  $\lambda/2d$ .

On constate alors une réduction sensible de l'effet d'*aliasing*, en particulier comparativement à l'intégrateur. Le gain en SR est notable, puisque le SR passe de 89,5% pour l'intégrateur et 89,7% pour la commande LQG à 80 modes à 91,5% dans le cas 120 modes. Ce second cas tendrait donc à valider le gain apporté par le filtre de Kalman en terme de filtrage d'*aliasing*, dès qu'un nombre supplémentaire de modes est estimé. L'analyse entre 80 et 300 modes estimés a montré que l'amélioration des performances va de paire avec l'augmentation du nombre de modes estimés, et ce jusqu'à environ 120 modes. Au-delà le gain n'est plus sensible.

Néanmoins, l'effet d'*aliasing*, et par conséquent son éventuel filtrage, est peu marqué dans ces résultats expérimentaux, en raison de la faible turbulence. Une simulation numérique est donc nécessaire pour valider le comportement de la commande et se placer dans des conditions de plus fort *aliasing* (en absolu).

#### 14.8.2.2 Comparaison à la simulation, cas d'une turbulence forte

La simulation numérique du banc BOA est exploitée pour confirmer le comportement observé en validation expérimentale. Les paramètres de simulation sont ceux présentés au paragraphe 14.7.

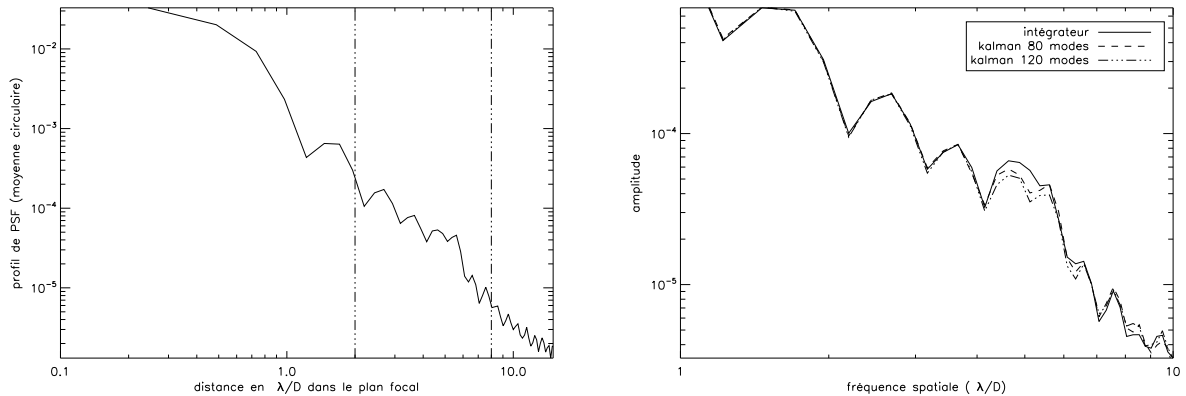


FIG. 14.14 – Gauche : coupe de FEP pour une commande LQG à 80 modes estimés. Droite : comparaison de FEP obtenues pour une correction intégrateur, LQG à 80 modes estimés, LQG à 120 modes estimés. On voit se réduire l’effet de repliement situé autour de  $\lambda/2d = 4\lambda/D$ .

Divers cas de correction sont simulés, c’est-à-dire pour différents nombres de modes estimés. On se place d’abord dans les conditions de turbulence du banc soit un  $\frac{D}{r_0}$  de 2,7.

La figure 14.15 présente le résultat de simulation en terme de réduction de l’effet d’*aliasing* sur les FEP obtenues en simulation. On retrouve comme en validation expérimentale une diminution du niveau de la FEP dans l’intervalle  $4\lambda/D$  et  $5\lambda/D$  lorsque le nombre de modes estimés augmente. Les coupes de FEP ont été tracées uniquement pour un nombre de modes estimés de 80 et 150, mais l’évolution du filtrage d’*aliasing* est régulière entre 80 et 150 modes. Au-delà de 150 modes, il n’y a plus de gain significatif. On retrouve donc en simulation la même propriété de réduction de l’effet d’*aliasing*. Là aussi, cette réduction est cependant faible, l’effet d’*aliasing* étant lui-même peu marqué en raison de la trop faible turbulence.

La réduction de l’effet d’*aliasing* se traduit aussi par un gain en SR. Avec la commande intégrateur, le SR est de 88,9%. Avec la commande LQG, et un nombre de modes estimés croissant de 71, 80, 150 et 300, le SR est respectivement, de 87,7 ; 88,3 ; 89,1 et 89,1.

Par conséquent, la simulation conforte très bien la validation expérimentale. Néanmoins, ces résultats sont peu discriminants en raison du faible niveau de turbulence utilisé, donc d’*aliasing*. Une simulation a donc été menée, toujours dans le cadre de la simulation de BOA, mais avec un niveau de turbulence plus important, de  $\frac{D}{r_0}$  de 8. Le phénomène d’*aliasing* attendu est alors plus fort en absolu. Les conséquences de son éventuelle réduction doivent donc être plus visibles.

La figure 14.16 présente le résultat de cette simulation en terme de coupes de FEP et de performances de SR. A gauche de la figure, les coupes de FEP pour l’intégrateur puis pour la commande LQG à divers nombres de modes estimés montrent une réduction flagrante de l’effet d’*aliasing*, notamment au-delà de 150 modes estimés. Le gain est significatif autour de  $4\lambda/D$  c’est-à-dire la zone d’amplification due à l’*aliasing*. Au-delà de  $5\lambda/D$ , il n’y a plus de gain, puisqu’on est limité par la capacité de correction du miroir. Parallèlement, le SR, présenté à droite de la figure, augmente substantiellement. Un gain de plusieurs % de SR est obtenu comparativement à l’intégrateur. On constate que ce gain croît rapidement avec le nombre de modes estimés. Au-delà de 200 modes estimés, il n’y a plus de gain de SR sensible.

On retrouve ainsi que l’augmentation du nombre de modes estimés (associé à un modèle ASO sur ce même nombre de modes) et l’estimation régularisée permettent de réduire significativement

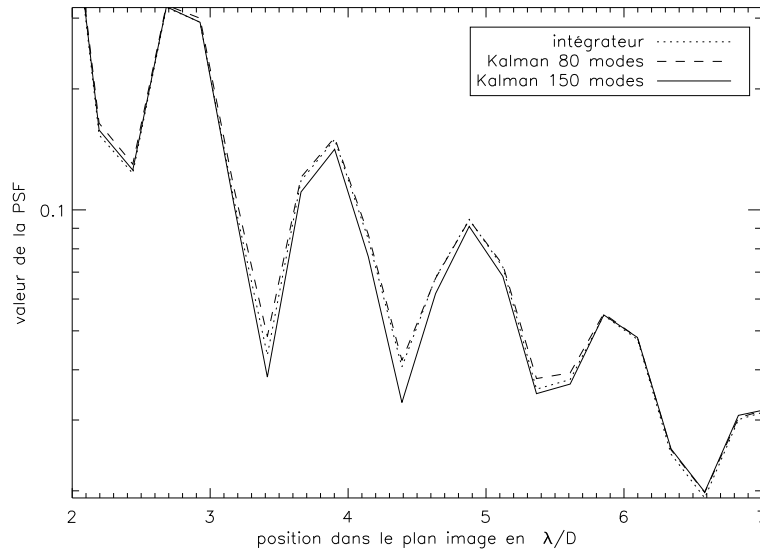


FIG. 14.15 – Coupes des FEP obtenues par simulation numérique de BOA avec une commande de type intégrateur, ou LQG avec estimation de 80 ou 150 modes. On se focalise autour d'une distance de  $4\lambda/D$ .

l'effet d'*aliasing*. Bien sûr, on ne peut dissocier cette réduction de l'effet d'*aliasing* de la réduction de l'erreur de sous-modélisation. Notre action sur ces deux postes d'erreur est simultanée.

Cette simulation montre aussi tout l'intérêt du simulateur et de sa mise en adéquation avec le banc. Il permet d'extrapoler les résultats expérimentaux à des conditions plus réalistes ou non reproductibles sur le banc.

### 14.8.3 Conclusion sur le choix du nombre de modes estimés

Le choix du nombre de modes estimé n'est pas anodin. La validation expérimentale n'a montré qu'un gain faible à estimer plus de modes de la turbulence en raison des conditions de turbulence très faibles choisies et des variations minimales de SR associées. Mais en présence d'une plus forte turbulence, la simulation a mis en évidence un gain notable en performance. En estimant plus de modes, notamment grâce à un modèle ASO établi sur ce grand nombre de modes, on peut réduire simultanément la sous-modélisation de la turbulence et l'effet de repliement de l'ASO, en s'appuyant sur les *a priori* de la turbulence. On limite ainsi l'erreur commise dans l'estimation des modes de basse fréquence spatiale. La correction, même si elle ne porte que sur les bas ordres de par les limitations du miroir, s'en trouve ainsi améliorée. Bien-sûr ce principe a des limites. Les mesures sont peu informatives sur les hauts ordres car très bruitées, rendant leur estimation très difficile. En outre, ces très hauts ordres ne se replient plus significativement sur les bas ordres, seuls modes corrigés. Aussi, au-delà d'un certain nombre de modes estimés, le gain apporté devient nul. Les résultats montrent qu'un nombre de 120 modes est optimal pour un  $\frac{D}{r_0}$  de 2,7, il est plutôt de l'ordre de 150 pour un  $\frac{D}{r_0}$  de 8. Ceci implique un surcoût calculatoire mais pourrait apporter un gain significatif dans certaines conditions.

Des tests expérimentaux à plus forts  $\frac{D}{r_0}$  permettraient de faire ressortir plus significativement le



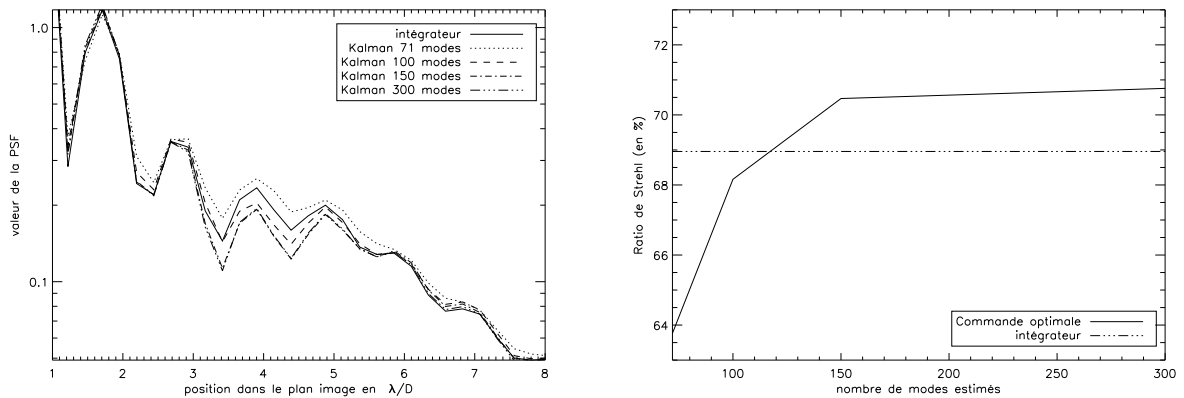


FIG. 14.16 – Simulation d’une réduction d’*aliasing* par la commande optimale sur BOA avec  $D/r_0 = 8$ . A gauche, les coupes des FEP obtenues, avec intégrateur ou avec commande optimale pour divers nombres de modes estimés. A droite, l’évolution du SR avec le nombre de modes estimés par rapport à l’intégrateur.

gain attendu. Ces tests complémentaires pourraient notamment profiter avantageusement d’un montage de type coronographique, pour faire ressortir ce phénomène de réduction d’*aliasing* en réduisant le pic cohérent des FEP longue pose. Ce type de test est d’ores et déjà en cours sur BOA.

Les systèmes d’OA nécessitant de hautes performances pourraient bénéficier de cette méthode numérique de réduction d’*aliasing*. Une solution expérimentale basée sur un filtrage spatial au foyer de l’ASO est également testée [Fusco *et al.*(2005a)].

## 14.9 Conclusion sur les validations en OA

Ce chapitre a été consacré à la validation de la commande LQG en OA. Il s’agit des premières validations expérimentales réalisées avec ce type de commande en OA. Les résultats obtenus sont très positifs. La performance en SR est légèrement meilleure que celle fournie par un intégrateur. La commande est stable. Pourtant, l’analyse des paramètres de contrôle et les résultats de simulation discutés au paragraphe 8.5.1 (en l’absence d’erreurs de modèle) montrent que des erreurs de modèle existent, et donc que la correction n’est pas optimale. En présence de ces erreurs inévitables, certains paramètres permettent cependant d’ajuster la performance de la loi de commande. Le premier et le plus important est la variance de bruit de mesure, qui permet de réguler le fonctionnement de la commande en présence des erreurs de modèle. Le nombre de modes estimés est lui aussi un paramètre de réglage capital. En augmentant raisonnablement ce nombre, il est possible de réduire la sous-modélisation de la turbulence et l’effet d’*aliasing* de l’ASO, conduisant à une amélioration des performances pouvant être substantielle. Il s’agit là d’une propriété importante de la commande LQG, qui sera mise à profit en OAMC, et que Le Roux avait présagée [Le Roux(2003)]. Néanmoins, un travail de fond serait nécessaire pour évaluer l’effet de chaque erreur de modèle sur la performance et la stabilité de la commande. Ce travail nécessiterait notamment de définir des critères de robustesse, par exemple sur les paramètres de contrôle utilisés (innovation, états estimés ...), ou sur de nouvelles grandeurs de contrôle, afin de mieux cerner les effets des diverses erreurs de modèle.

Ce chapitre a aussi été l’occasion de mettre en regard validation expérimentale et simulation nu-

mérique. L'outil de simulation est d'une part utilisé pour modéliser les composants et déduire les matrices de la commande. Les performances expérimentales attestent de la qualité des modélisations introduites dans la commande. Mais le simulateur vise aussi à reproduire le comportement du banc, pour se confronter aux résultats expérimentaux et permettre une étude numérique réaliste de configurations nouvelles. La confrontation entre expérimentation et simulation prouve leur bonne concordance, que ce soit en terme de performance de la correction, ou au travers de l'étude de la réduction d'effet d'*aliasing*. Cette simulation permet notamment de mieux comprendre certains effets constatés en expérimentation et de s'interroger par exemple sur la qualité du modèle de turbulence AR1. Elle indique aussi que les erreurs de modèle ne sont pas, en OA, source d'une perte notable de performance. Elle autorise enfin de prévoir le comportement de la commande dans des cas non encore testés, tel que l'effet de réduction d'*aliasing* à fort  $\frac{D}{r_0}$ .

Enfin, un premier test de commande boucle ouverte a été réalisé, bien qu'en l'absence de correction. La concordance des états estimés en boucle ouverte et en boucle fermée indique que le filtre de Kalman est potentiellement un bon candidat pour une application de type MOAO nécessitant une commande boucle ouverte.

Le chapitre suivant va s'intéresser à l'utilisation de la commande LQG dans la gestion de composantes vibratoires.



## Chapitre 15

# Application de la commande LQG au filtrage de vibrations

### 15.1 Introduction

L'introduction de la commande LQG a avant tout été motivée par l'OAMC. Cependant, un certain nombre de propriétés de cette commande en font aussi un objet d'intérêt notable pour l'optique adaptative classique, et plus particulièrement lorsque de hautes performances sont nécessaires, comme en XAO. On a souligné au paragraphe 14.8.2 l'apport de la commande LQG en OA quant à la réduction de l'effet d'*aliasing*. Cette première propriété peut contribuer à l'augmentation des performances d'une OA, grâce à une solution numérique au problème de repliement, alternative à une solution matérielle (voir paragraphe 14.8.2). Mais le paragraphe 9 a surtout montré l'apport que pourrait apporter la commande LQG dans la gestion simultanée de la turbulence et d'éventuelles vibrations. Ce paragraphe a rappelé les dégradations de performances que de telles composantes génèrent sur certains systèmes d'OA, tels que NAOS. La gestion de ces vibrations serait donc un plus pour les systèmes d'OA et plus particulièrement pour les systèmes à haute performance dédiés à la XAO, comme SPHERE (voir paragraphe 3.2).

La prise en compte dans le modèle d'état de ces vibrations, une fois identifiées, permet d'améliorer les performances de l'OA. On a distingué deux types de vibrations. Les vibrations perturbatives d'une part, présentes sur la voie analyse et scientifique, qui doivent être corrigées par la boucle. D'autre part, le bruit de vibration, présent seulement sur la voie d'analyse, qui doit être estimé et séparé du signal turbulent à corriger, sans pour autant être compensé. Le chapitre 9 a présenté la base théorique de cette gestion des vibrations. Ce chapitre est dédié à la démonstration expérimentale de cette solution dans le cadre d'une vibration perturbative. Il s'agit de mettre en œuvre des conditions de test pertinentes et de valider la solution de commande proposée. Le but est aussi d'illustrer la caractérisation de la vibration et la définition de la commande. Les caractéristiques de la vibration peuvent évoluer ou être mal estimées. L'évolution de la performance en fonction du choix plus ou moins judicieux des paramètres modélisant la vibration est donc analysée. Enfin, on s'appuie sur la simulation numérique présentée au chapitre 14 pour comparer les performances expérimentales et simulées, et étendre les résultats à des cas non traités expérimentalement, tels que les cas multi-vibratoires ou de bruit de vibration. Les résultats expérimentaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une lettre [Petit *et al.*(2007)].

Le paragraphe 15.2 décrit la mise en œuvre des tests expérimentaux et la génération d'une vibration sur BOA. Les effets de ces vibrations sur BOA et leur caractérisation sont abordés au paragraphe 15.3. Ces éléments permettent de définir au paragraphe 15.4 la commande LQG adaptée au filtrage de

ces vibrations. Le paragraphe 15.5 analyse les performances obtenues. L'évolution de la performance en fonction du choix du modèle de vibration est discutée au paragraphe 15.7. L'ensemble de ces résultats expérimentaux est confronté à la simulation numérique au paragraphe 15.9 et la simulation de cas non traités expérimentalement est proposée.

## 15.2 Mise en œuvre expérimentale

Ce paragraphe s'intéresse à la mise en œuvre sur le banc BOA de vibrations permettant la validation expérimentale de la commande LQG dédiée au filtrage des vibrations. Les conditions expérimentales des tests sont rappelées.

### 15.2.1 Génération de vibrations

Le banc BOA présente l'avantage d'être soumis, comme la plupart des bancs expérimentaux, à des vibrations. Plus encore, l'absence de systèmes d'amortissement et de filtrage sophistiqués le rend particulièrement sensible à toute sollicitation extérieure. Seule la structure en nid d'abeille du banc réalise un filtrage passif des vibrations hautes fréquences. Ainsi, il a été constaté que le banc BOA était sensible aux vibrations du bâtiment, au passage des ascenseurs, ou aux diverses vibrations introduites par les systèmes de refroidissement des instruments...

La figure 15.1 illustre ce phénomène en présentant une DSP temporelle d'une mesure de la pente moyenne selon les axes  $x$  et  $y$  du capteur de front d'onde. La mesure est réalisée sur point source, en l'absence de turbulence et sans asservissement. Elle trahit la présence d'un fond constitué de la turbulence locale du banc et de pics de résonance, de nature variée (fréquence centrale et largeur spectrale) et différents selon les deux axes. Le spectre de puissance de la pente moyenne est présenté plutôt que le spectre d'une pente particulière car la pente moyenne permet de moyenniser le bruit de mesure et renseigne principalement sur le basculement du faisceau. On verra par la suite que ce basculement de faisceau sera au cœur des tests réalisés dans ce chapitre.

Il apparaît rapidement que les vibrations en présence sont de nature rapidement variable. La fréquence, la largeur spectrale et l'énergie des vibrations en présence évoluent au cours de la journée. Il devient donc difficile d'envisager des tests systématiques permettant de mettre en évidence de façon simple l'apport de la loi de commande.

Il a donc été choisi de mettre en œuvre sur BOA un système vibrant. L'idée est de générer des vibrations de nature connue, stables et reproductibles. La solution a été trouvée auprès du Département Dynamique des Structures et Systèmes couplés (DDSS) de l'ONERA qui s'intéresse au comportement dynamique et vibratoire des structures. Il s'agit d'un vibreur sismique utilisé pour l'analyse vibratoire de structures telles que des plaques métalliques. Ce vibreur, présenté en figure 15.2 est un électro-aimant, dont l'aimant est rattaché au banc BOA par un embout métallique collé à sa structure. Sa mise en mouvement dans son bobinage fixe transmet l'excitation mécanique à la structure de BOA. La sollicitation peut ainsi atteindre 50 Newtons dans une gamme de fréquence allant de 10 Hz à 20 kHz. L'amplitude de l'oscillation est commandée par la tension, qu'on exprimera en milliVolts (mV). Le système est fixé dans le plan du banc, plan dans lequel se fait la sollicitation (voir figure 15.2).

Cette première validation a été consacrée au filtrage d'une composante vibratoire unique et quasi-pure. Or on sait qu'en soumettant une structure comme celle du banc à une excitation sinusoïdale entretenue, on fait au moins apparaître une vibration du banc lui-même à la fréquence d'excitation. Par conséquent, le vibreur sismique a été alimenté par un courant sinusoïdal de fréquence fixe. Il reste à vérifier que la ou les vibrations générées sur le banc produisent un effet réaliste sur la phase

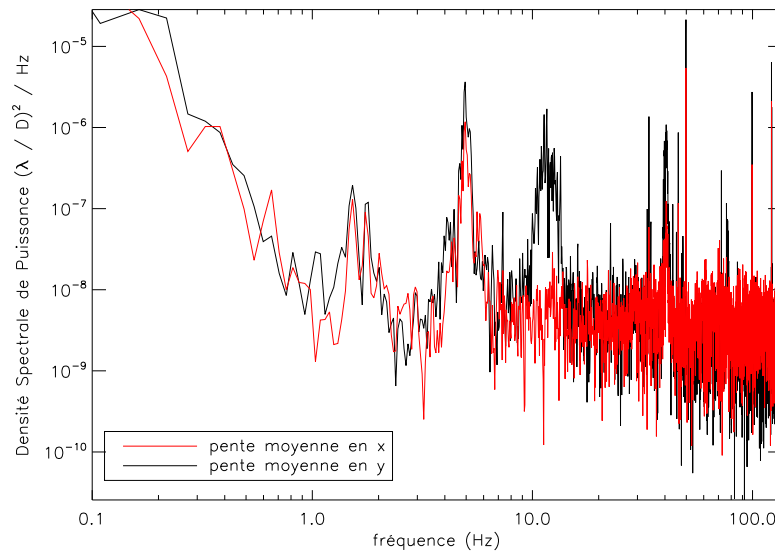


FIG. 15.1 – Densité Spectrale de Puissance des pentes moyennes en  $x$  et  $y$ , obtenue sur source interne, en boucle ouverte. On visualise la présence de pics de vibrations marqués dûs aux vibrations propres du banc.

elle-même, ce qui est l'objet du paragraphe 15.3.

Enfin, le choix de la fréquence de vibration a été guidé par la réponse fréquentielle d'une commande d'OA ne gérant pas les vibrations. Une vibration a un effet d'autant plus dommageable sur l'OA qu'elle se situe près de la zone d'amplification (ou d'*overshoot*) de la commande, c'est-à-dire au-delà de sa bande passante, située en général autour d'un douzième de la demi fréquence d'échantillonnage  $f_{ech}$  pour un asservissement présentant deux trames de retard. Dans notre cas, avec  $f_{ech} = 60$  Hz, on s'intéresse donc à des vibrations comprises entre quelques Hertz et  $f_{ech}/2 = 30$  Hz. Le choix s'est donc porté sur une sollicitation à la fréquence médiane de  $f_{vib} \simeq 15$  Hz (c'est aussi une fréquence dans la bande passante du vibreur).

### 15.2.2 Conditions expérimentales

Pour les tests présentés dans ce chapitre, le SR interne a été optimisé à environ 95%. On va être amené au cours des tests à utiliser concurremment différentes lois de commande dans différentes conditions. Tout d'abord, dans tous les tests menés dans cette partie vibration, on désigne par lois de commande standard celles ne réalisant pas de filtrage de vibrations, mais uniquement une correction classique de la turbulence. Ces lois de commande standard peuvent être soit un intégrateur de gain fixe et unique de valeur 0,5, soit une commande LQG réalisant une correction sur axe de la turbulence. Le choix du gain de l'intégrateur repose sur les remarques faites au paragraphe 14.2. Ces commandes sont évidemment comparées à la commande LQG réalisant le filtrage de vibrations.

En outre, les tests réalisés peuvent être menés soit en présence de turbulence, soit sur source interne, c'est-à-dire sans turbulence sauf locale. Dans le premier cas, on considère un fonctionnement du banc dans les conditions présentées au paragraphe 14.1, autrement dit la boucle d'OA est fermée sur une source non résolue, en présence d'une turbulence de  $\frac{D}{r_0} = 2,7$ , avec  $\frac{V}{Df_{ech}} = 4,7 \cdot 10^{-3}$ ,

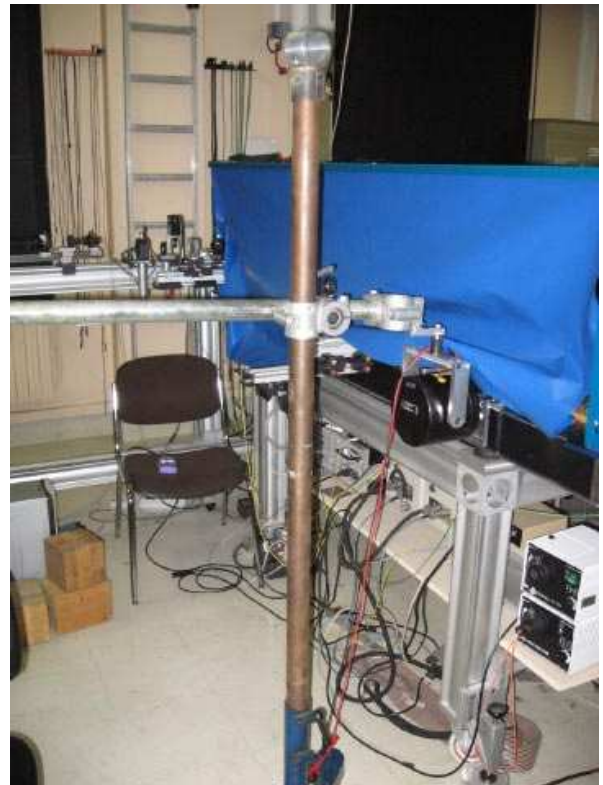


FIG. 15.2 – Photographie du vibreur sismique utilisé pour les tests de vibration (gauche) et dispositif complet d'excitation du banc par le système vibrant. Le banc est sollicité dans son plan horizontal.

et  $f_{ech} = 60$  Hz. La commande LQG standard est alors optimisée selon les procédures décrites au chapitre 14 pour fournir la meilleure correction. Cette correction conduit typiquement à un SR de  $SR = 91\%$  en commande LQG, et  $SR = 90\%$  avec l'intégrateur, hors vibration. Dans le cas des tests menés sur source interne, et donc en l'absence de turbulence, l'intérêt est de faciliter la calibration de la vibration et l'identification de ses caractéristiques fréquentielles.

Enfin, quelles sont les données disponibles pour ces tests vibratoires ? Comme évoqué au chapitre 9, il est indispensable de caractériser les vibrations du point de vue de leurs effets sur l'asservissement. Par conséquent, on exploite essentiellement les mesures offertes par l'OA, c'est-à-dire les mesures de pente. On s'appuie aussi sur des images acquises par la caméra scientifique. Ces images permettent en effet de vérifier si les vibrations sont présentes de manière identique sur la voie d'analyse et la voie d'imagerie. Ces images permettent aussi de chiffrer la dégradation de performance de la boucle en présence de vibrations.

## 15.3 Vibrations sur BOA : effets et caractéristiques

Le générateur de vibrations choisi, il s'agit de contrôler l'effet des vibrations introduites sur BOA et de les caractériser, afin de déduire par la suite la commande LQG adaptée. Durant toute cette première phase de calibration, le générateur est alimenté par un courant de 320 mV.

### 15.3.1 Effets des vibrations

On s'intéresse d'abord à l'effet typiquement observé lors de l'utilisation du vibreur et on le compare aux effets observés sur des systèmes astronomiques. Les conditions de vibration choisies pour obtenir ces résultats sont détaillées au paragraphe 15.3.2. Le système est mis en présence de turbulence. La correction de la turbulence est assurée par une commande standard. On rappelle qu'alors le SR en boucle fermée est de  $SR = 91\%$  en commande Kalman, et  $SR = 90\%$  en intégrateur. Le vibreur est alors utilisé, à la fréquence nominale de  $f_{vib} \simeq 15$  Hz, avec une alimentation de type sinusoïdale. On constate qu'en présence du vibreur le SR chute de manière sensiblement égale pour la commande Kalman et pour l'intégrateur à  $SR = 86\%$ . On a donc un effet notable des vibrations sur les performances de la boucle d'asservissement quelle que soit la commande utilisée. Ces effets sont à comparer avec ceux constatés sur le système NAOS, où les pertes de SR atteignent parfois près de 15% avec une présence forte des vibrations sur les premiers modes [Rousset *et al.*(2002)].

Il est toutefois difficile de faire apparaître sur le banc des vibrations suffisamment fortes pour induire de telles pertes de SR. Le vibreur est en effet légèrement sous-dimensionné par rapport à la masse du banc et est utilisé déjà à 80% de sa puissance maximale. La ou les vibrations créées sur le banc semblent ainsi pertinentes et conformes à ce qu'un système réel pourrait subir. Le paragraphe suivant vise à en évaluer les caractéristiques, et surtout à en identifier les paramètres afin d'en déduire une commande adaptée.

### 15.3.2 Caractérisation des vibrations introduites

Comme souligné au paragraphe 9.8, la mise en œuvre d'un filtrage du phénomène vibratoire nécessite de connaître un certain nombre de caractéristiques des vibrations en présence. En l'occurrence, le modèle de vibration utilisé nécessite d'identifier pour chaque vibration, sur un mode de phase donné, sa fréquence centrale, sa largeur spectrale et son énergie. Enfin, ces informations doivent être fournies pour tous les modes subissant l'effet de vibrations. En effet, on rappelle pour mémoire que



le modèle de vibration discret proposé pour le filtrage de vibrations repose sur l'AR2 suivant (voir paragraphe 9.3.3) :

$$y_k = \alpha_1 y_{k-1} + \alpha_2 y_{k-2} + e_k, \quad (15.1)$$

avec

$$\alpha_1 = 2e^{-\xi\omega_0 T} \cos(\omega_r T) \quad (15.2)$$

$$\alpha_2 = -e^{-2\xi\omega_0 T}. \quad (15.3)$$

La variable  $y_k$  désigne le signal vibratoire de pulsation  $\omega_0 = 2\pi f_{vib}$ , et  $e_k$  le signal d'excitation, modélisé par un bruit blanc de variance  $\sigma_e^2$ . La pulsation de résonance  $\omega_r$  est donnée par  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ . Dès lors, ce modèle ne dépend que de  $\omega_0$ ,  $\xi$  (relié à la largeur spectrale de la vibration), et de  $e_k$  au travers de l'énergie du bruit d'excitation,  $\sigma_e^2$ . L'identification des caractéristiques des vibrations se base sur les mesures de pente. Afin de faciliter cette identification, les paragraphes suivants utilisent une configuration sur source interne, sans turbulence.

### 15.3.2.1 Vibrations en présence et effets sur la phase

Il nous faut connaître avant tout quels modes de la phase sont affectés par des vibrations. On pourra ensuite pour chaque mode identifier les vibrations et leurs paramètres. Pour ce faire, des files circulaires de pentes (voir paragraphe 13.2.2.1) sont acquises en boucle ouverte et hors turbulence. En se basant sur le modèle ASO, on peut alors reconstituer la phase sur les 45 premiers modes de Zernike (comme au paragraphe 12.2.5), c'est-à-dire estimer les coefficients  $\{a_i\}$  de la décomposition  $\phi^{tur}(t) = \sum_{i=2}^{45} a_i(t) Z_i$ . On isole ainsi des séries temporelles des coefficients  $a_i(t)$ . Les effets liés à la reconstruction de la phase sur une base tronquée sont négligés. La présence de vibrations peut alors être mise en évidence par l'analyse du spectre temporel des  $a_i(t)$ . Cependant, comme souligné au paragraphe 9.8, il peut être plus aisé d'exploiter la DSP cumulée. Elle permet en effet de s'affranchir en partie des effets de bruit d'estimation de la DSP par un effet de moyenne. La présence d'une vibration se traduit par une augmentation localisée de la DSP cumulée. On s'intéresse donc à l'éventuelle présence de sauts d'énergie observables sur la DSP temporelle cumulée de chaque  $a_i(t)$ . Pour comparaison, on estime aussi la même DSP temporelle cumulée en l'absence de vibreur. Le résultat est présenté en figure 15.3 pour quelques modes.

On constate tout d'abord qu'une seule vibration semble affecter de manière sensible le système, à la fréquence  $f_{vib} \simeq 15$  Hz, fréquence d'excitation du banc. En outre, cette vibration n'affecte notablement que les modes de bascule ( $a_1, a_2$ ).

Pour confirmation, on estime pour les premiers modes de la phase la valeur de l'éventuel saut d'énergie autour de  $f_{vib}$  en présence et en l'absence de vibration. Dans ce dernier cas le saut est évidemment faible mais jamais nul en raison de la présence de turbulence résiduelle. Cette valeur sert de référence pour quantifier l'impact de la vibration sur chaque mode. Le résultat est présenté en figure 15.4. On vérifie bien que les modes essentiellement affectés par la vibration sont les modes tip et tilt, leur variation d'énergie autour de  $f_{vib}$  ayant augmenté de près de trois ordres de grandeur, celle des autres modes seulement de un. Ce test a aussi été mené en présence de la turbulence et a conduit à un résultat strictement similaire.

Ce résultat a plusieurs conséquences majeures sur la caractérisation des vibrations. Tout d'abord on considère par la suite qu'une seule vibration, de fréquence  $f_{vib}$ , affecte le système. De plus, on prend seulement en compte son effet sur les modes de bascule. On va donc réaliser un filtrage ciblé, n'intervenant que sur les modes tip et tilt de la phase. On peut d'ores et déjà affirmer que le filtrage aura donc un coût calculatoire très limité.

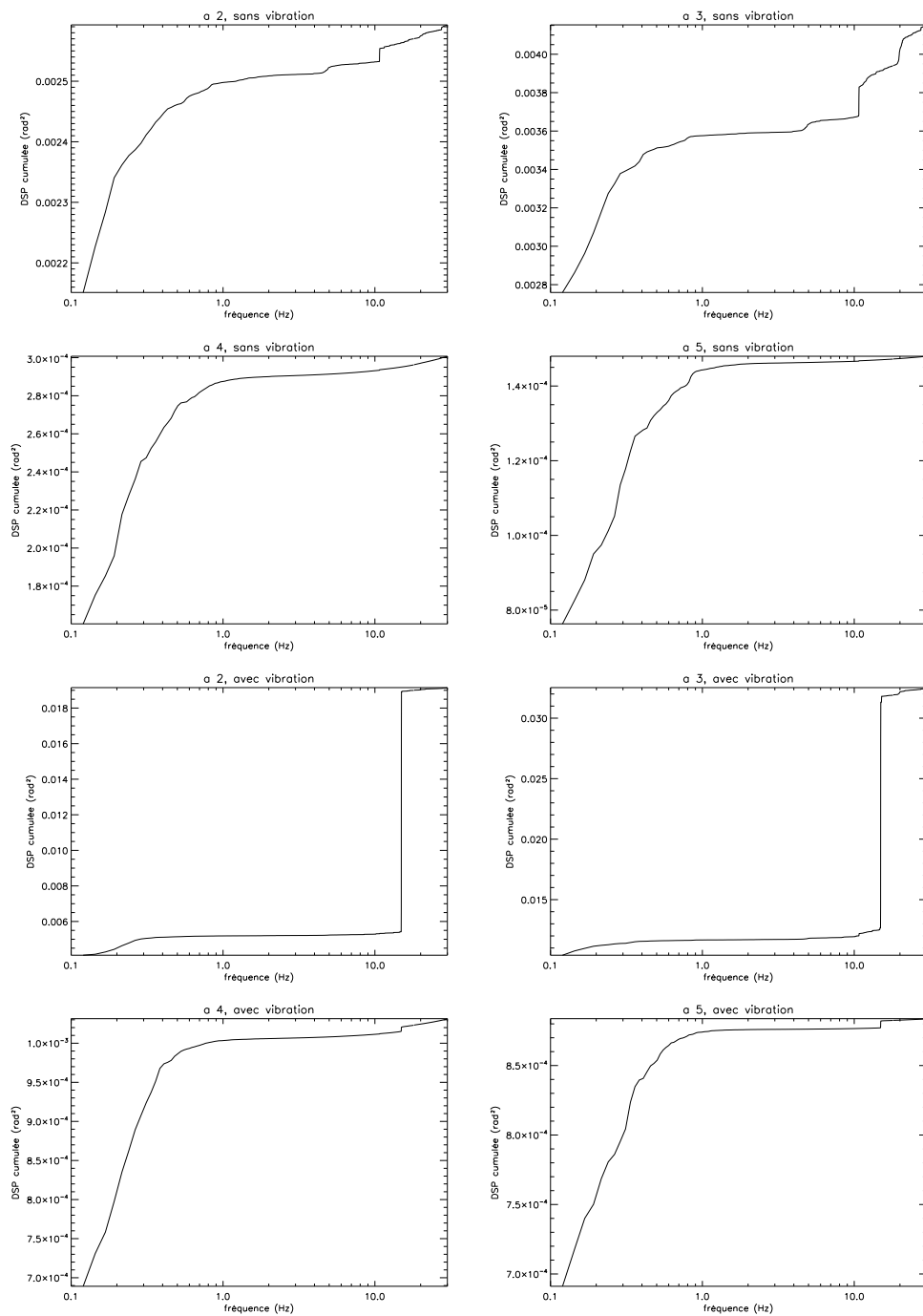


FIG. 15.3 – DSP cumulées de la phase sur les 4 premiers modes de Zernike (hors piston), en l'absence du vibreur (4 premières courbes du haut), puis en sa présence (4 courbes du bas).

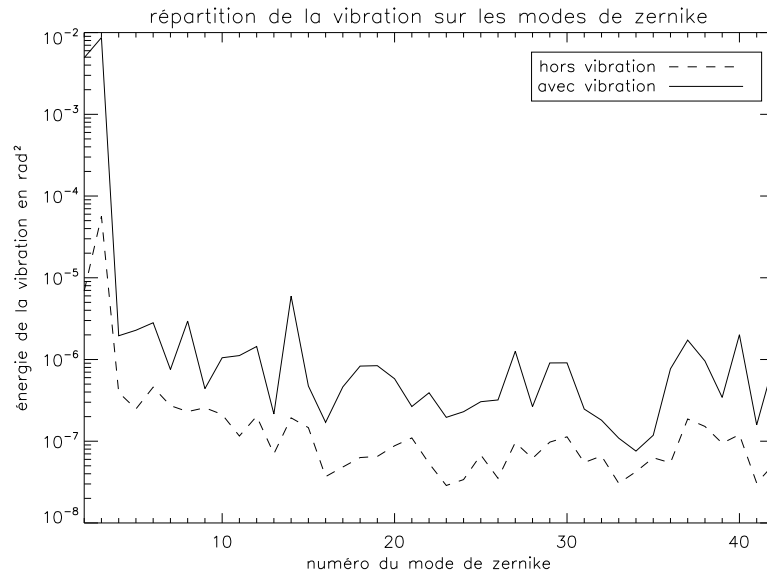


FIG. 15.4 – Saut d'énergie autour de  $f_{vib}$  sur la DSP cumulée, dû à la vibration, pour chaque mode de la phase. Le saut entre les mêmes points de fréquence en l'absence de vibration est donné pour comparaison.

Du point de vue de la caractérisation de la vibration et de ses effets, on se limite logiquement à l'identification des paramètres de la vibration sur les deux modes de bascule. En fait, on peut même s'intéresser principalement à la mesure de la pente moyenne en  $x$  et  $y$ . Même si la pente moyenne n'est pas seulement reliée aux basculements de la phase, elle est cependant entièrement révélatrice des effets de la vibration. On évite en outre les opérations plus lourdes de reconstruction de la phase sur les polynômes de Zernike.

### 15.3.2.2 Caractéristiques de la vibration

Il s'agit donc de déterminer, pour la pente moyenne en  $x$  et en  $y$ , les caractéristiques en fréquence et en énergie de la vibration. L'ensemble de ces paramètres peuvent être déduits de l'analyse des DSP temporelles et des DSP temporelles cumulées obtenues de la mesure de file de pentes moyennes. La figure 15.5 présente ainsi la DSP temporelle de la pente moyenne en  $x$ , et son cumul, sans et avec la vibration (acquise toujours en boucle ouverte, sans turbulence). Cette figure amène à quelques remarques complémentaires. On note un excès d'énergie à basse fréquence en présence de vibration. On peut supposer que le vibreur génère aussi ces effets basse fréquence, sans importance toutefois étant donnée l'atténuation basse fréquence des correcteurs. On note aussi la présence de pics de vibrations d'importance moindre (ils n'apparaissent pas ou peu dans la DSP cumulée). Ces pics sont visibles aussi bien en présence qu'en l'absence de vibreur. Il s'agit de vibrations propres du banc. Ces vibrations secondaires sont globalement instationnaires et varient entre deux mesures, et entre un cas avec ou sans vibreur (excitation d'autres modes de résonance). On ne tentera pas de corriger ces effets.

L'ensemble de ces données spectrales permet de déterminer les caractéristiques de la vibration. Ses caractéristiques spectrales (fréquence centrale  $f_{vib}$ , largeur à mi-hauteur (*Full Width at Half Max* - FWHM)  $\Delta f_{FWHM}$ ) sont identiques pour les deux modes de bascule, à la précision de mesure près.

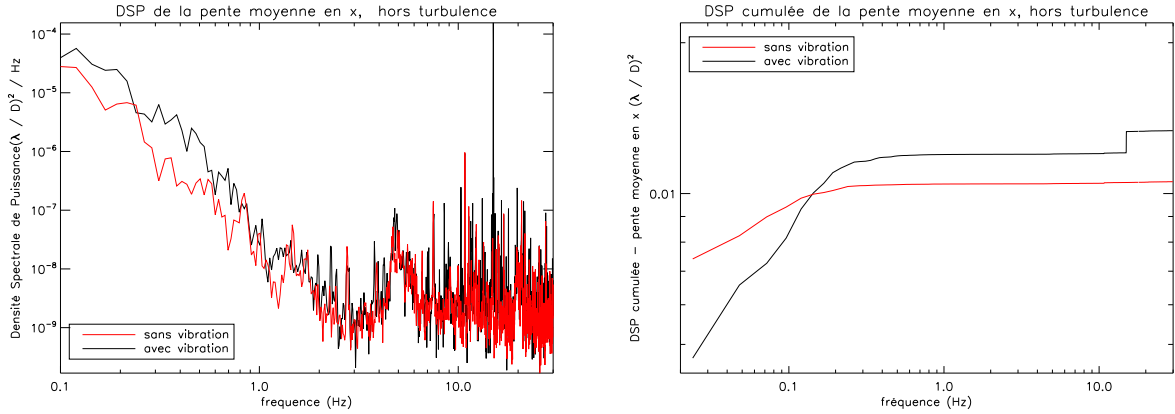


FIG. 15.5 – Densité Spectrale de Puissance de la pente moyenne en  $x$  (gauche) et son cumul (droite) en l'absence de turbulence et en boucle ouverte, avec et sans mise en œuvre du système vibrant. On voit clairement apparaître la vibration à 15,28 Hz par la présence du pic résonnant sur la DSP et un saut brutal d'énergie sur la DSP cumulée.

Ainsi on estime que  $f_{vib} = 15,28$  Hz, valeur qui correspond précisément à la fréquence du signal exciteur du vibreur. L'analyse des spectres montre que cette fréquence centrale est stable dans le temps, puisqu'elle ne s'écarte que d'au plus  $\pm 0,05$  Hz de la fréquence moyenne. Elle est aussi très pure. Il est en effet difficile avec la taille limitée des files acquises (quelques dizaines de milliers de mesures) d'en résoudre la largeur à mi-hauteur. Cette largeur est donc estimée, à la résolution maximale, à environ  $\Delta f_{FWHM} < 6 \cdot 10^{-3}$  Hz, soit un facteur de qualité  $Q = f_{vib}/\Delta f_{FWHM} > 2550$ . Ces paramètres donnent accès évidemment à  $\omega_0 = 2\pi f_{vib}$ , ainsi qu'à  $\xi$ , puisque  $\Delta f_{FWHM} \simeq \sqrt{14}\xi$  (voir paragraphe 9.8). On trouve ainsi que  $\xi \simeq 10^{-4}$ . De plus, on peut chiffrer entièrement l'énergie de la vibration par le saut d'énergie constaté sur la DSP temporelle cumulée des pentes moyennes en  $x$  et  $y$ . L'analyse proposée au paragraphe 9.8 montre que, étant données  $f_{vib}$  et  $\Delta f_{FWHM}$ , l'énergie de la vibration ne dépend plus que d'un facteur multiplicatif, qui n'est autre que l'énergie du bruit utilisé pour modéliser le signal d'excitation  $\sigma_e^2$ . Dans le cas présent, ce facteur multiplicatif peut se déterminer en faisant correspondre le saut d'énergie mesuré expérimentalement et celui donné par le modèle AR2 à variance de bruit d'excitation  $\sigma_e^2$  unitaire. La figure 15.6 présente le résultat de cet ajustement paramétrique. Les valeurs obtenues pour les deux modes de bascule sont du même ordre de grandeur. Sur la même figure est présentée la DSP de la vibration ainsi modélisée.

En conclusion, les paramètres de notre modèle sont (pour chaque mode de basculement) :

$$\begin{aligned} f_{vib} &= 15,28 \text{ Hz} \\ \xi &\simeq 10^{-4} \\ \sigma_{e,x,y}^2 &= 5,4 \cdot 10^{-6} \text{ rad}^2 = 3 \cdot 10^{-7} \text{ pixels}^2. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Le paramètre  $\sigma_e^2$  est exprimé en variance de phase dans la pupille sur le mode tip ou tilt, et est aussi donné en  $\text{pixels}^2$ , unité permettant de faire un lien rapide avec la variance des pentes mesurées. Cette unité sera utilisée le plus souvent par la suite.

Comme l'effet de la vibration se limite à une oscillation périodique des pentes moyennes en  $x$  et  $y$ , l'amplitude de la vibration  $a$  (par exemple exprimée sur la mesure de pente, en pixels donc) se déduit directement de sa variance  $\sigma^2$  par  $a = \sqrt{2}\sigma$ . Des mesures annexes ont montré que la modification

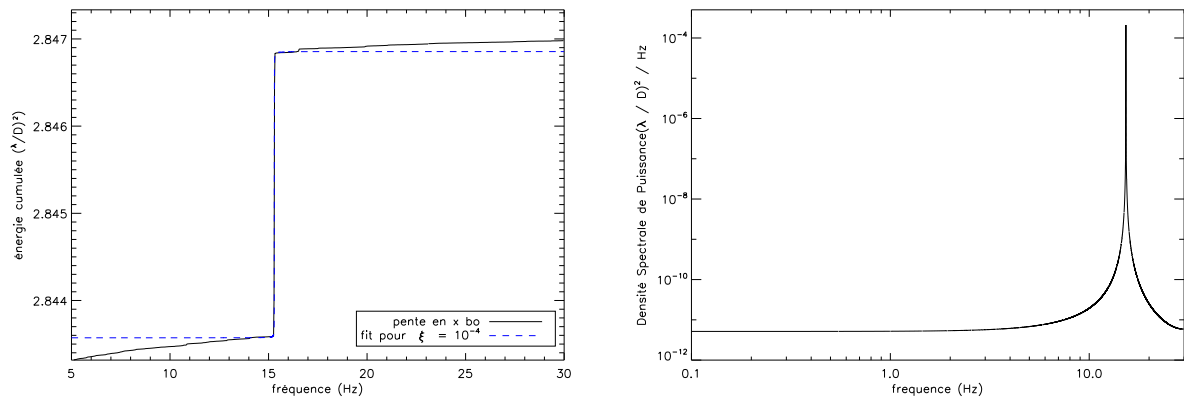


FIG. 15.6 – Gauche : adaptation du modèle AR2 de vibration à la DSP cumulée expérimentale de la pente moyenne en  $x$ , acquise en boucle ouverte (bo). On détermine ainsi pour  $f_{vib}$  et  $\xi$  donnés la variance du bruit d'excitation  $\sigma_e^2$ . Droite : DSP de la vibration modélisée.

de la tension du signal alimentant le vibreur n'entraîne pas de modification sensible des propriétés fréquentielles de la vibration. Seule l'amplitude de la vibration mesurée est modifiée, et ce de manière proportionnelle : le banc se comporte donc bien comme une structure dont la réponse est linéaire (dans la plage de tensions considérée) vis-à-vis de l'excitation mécanique. Les calibrations proposées ici ont été réalisées dans les conditions de tension (320 mV) les plus pertinentes vis-à-vis des effets de la vibration sur le système. Il est cependant aisé de ré-estimer le modèle de vibration pour un autre choix de tension grâce à ce comportement linéaire.

On dispose donc de l'ensemble des éléments nécessaires à la modélisation de la vibration présente sur chaque mode. On peut donc à présent concevoir une loi de commande basée sur le filtre de Kalman pour estimer ces composantes. Reste toutefois à définir si cette vibration n'a d'impact que sur la mesure de front d'onde, représentant donc un bruit à filtrer, ou si elle dégrade aussi la mesure sur la voie imagerie, représentant alors une véritable perturbation à estimer et corriger (voir paragraphe 9.2). Enfin, s'il s'agit d'une perturbation affectant aussi la voie d'imagerie, dégrade-t-elle la mesure d'image de la même manière que la mesure de front d'onde ? Répondre à cette question n'est pas simple car dans l'absolu, rien ne prouve que les vibrations subies sur la voie imagerie seront de même nature que sur la voie analyse. Ce point est l'objet du paragraphe suivant.

### 15.3.2.3 Dégradation des images par la vibration : vibration perturbative

L'objet de ce paragraphe est de déterminer si l'excitation du banc affecte uniquement la voie d'analyse, ou si elle dégrade aussi le front d'onde sur la voie imagerie. Le cas échéant, les vibrations mises en jeu sont-elles de même nature ? Dans le cas présent, les vibrations vues par l'OA sont simples : il s'agit d'une unique vibration affectant les modes tip et tilt. On souhaite donc vérifier que cette vibration agit de même sur la voie image, avec des caractéristiques similaires, en ayant seulement accès à l'énergie.

**Étude des courtes poses** Puisque la vibration sur la voie d'analyse agit essentiellement sur la bascule du faisceau, on peut s'intéresser à l'acquisition de courtes poses afin de pouvoir visualiser, voire chiffrer, le bougé de l'image sur la caméra d'imagerie et le mettre en rapport lui aussi avec

la variance de pente constatée. La caméra d'imagerie est limitée à un temps de pose minimal de 10 ms, et le temps de transfert des données limite la cadence d'acquisition à une image toutes les 2 à 3 secondes. Par contre, le temps de pose est assez court pour être considéré comme négligeable, comparé aux 67 ms de période de la vibration. Par conséquent, on réalise un sous-échantillonnage temporel de la vibration, en l'occurrence asynchrone vis-à-vis de celle-ci. On obtient donc des tirages quasi-aléatoires de l'image au court de son bougé. On réalise l'acquisition de piles de 40 images courte pose de la tache image en boucle ouverte, hors turbulence, en présence ou non de vibration, la tension de commande de vibration est toujours à 320 mV, c'est-à-dire en limite supérieure de commande du vibreur. Le bougé de l'image est estimé par une méthode de corrélation dans l'espace de Fourier, assurant une précision sub-pixellique. Cette méthode est identique à celle utilisée pour le calcul de SR (voir annexe A.1). On constate alors qu'en présence de vibration, la variance de la position de la tache augmente singulièrement de  $\Delta\sigma_{im}^2 = 0,76 \text{ pixels}^2$ . L'amplitude de déplacement de la tache représente alors plus de 30% de la diffraction. Les calibrations du banc permettent de faire la concordance entre pixels ASO et pixels de la caméra d'imagerie. D'après cette relation, la variance de pente mesurée précédemment sur l'ASO conduirait à une augmentation de la variance de position de l'image sur caméra d'imagerie de  $\Delta\sigma_{est}^2 = 0,73 \text{ pixels}^2$ . Cette valeur est tout à fait en accord avec la mesure du bougé des images. Cette concordance atteste que la vibration perturbe aussi la voie imagerie, et que son effet vis-à-vis des modes de basculement y est similaire (énergétiquement parlant) à celui constaté sur la voie ASO.

**Étude du SR** Il s'agit de mesurer l'évolution du SR sur la voie imagerie en fonction de la tension d'excitation. On peut alors comparer ces valeurs au SR estimé à partir de l'énergie des vibrations observées sur la voie ASO, en supposant que les voies ASO et imagerie sont affectées de manière identique par la vibration. La mesure du SR sur la voie imagerie requiert cependant de fermer la boucle d'asservissement (suppression des phénomènes de dérive temporelle, de turbulence locale...). Or en boucle fermée, on peut s'attendre à une amplification du phénomène vibratoire, puisque la vibration a été choisie pour être dans la zone d'amplification du signal des correcteurs standard, intégrateur ou LQG. Les SR estimés doivent donc tenir compte de la fonction de transfert de réjection du contrôleur.

En fait, cette amplification se vérifie très bien sur les DSP des pentes moyennes. En intégrateur, cette amplification correspond tout à fait à la valeur attendue étant donnée la fonction de transfert de réjection.

Sur la figure 15.7 sont tracées les évolutions du SR expérimental en fonction de la tension de commande du vibreur pour l'intégrateur. Le SR a été évalué sur une image longue pose de 30 secondes, permettant de moyenniser l'effet de la vibration. Afin de s'affranchir de la valeur initiale du SR, on présente des SR relatifs, c'est-à-dire que pour une amplitude  $a$  de la vibration, le SR relatif  $SR_{rel}$  est calculé selon la relation  $SR_{rel} = SR(a)/SR(0)$ ,  $SR(0)$  étant le SR interne, mesuré donc sans vibration.

On précise maintenant le calcul de la perte de SR à partir de l'énergie des vibrations mesurées sur l'ASO. Dans l'hypothèse d'une vibration n'affectant que le mode tip ( $Z_2$ ), on peut relier théoriquement la variance de la pente en  $x$  mesurée dans une sous-pupille,  $\sigma_{p_x^{vib}}^2$ , à la variance de différence de phase en bord de pupille,  $\sigma_{\phi_x}^2$ . En effet, dans une approximation géométrique et linéaire du Shack-Hartmann, on a la relation suivante :

$$\sigma_{\phi_x}^2 = (\pi B n_{sspp})^2 \sigma_{p_x^{vib}}^2, \quad (15.5)$$

où  $n_{sspp} = 8$  est le nombre de sous-pupilles (linéaire), et  $B$  est le facteur de sous-échantillonnage (ici  $B \simeq 2/3$ , il vaut 1 pour un échantillonnage à Shannon). La variance  $\sigma_{\phi_x}^2$  est elle même liée à la

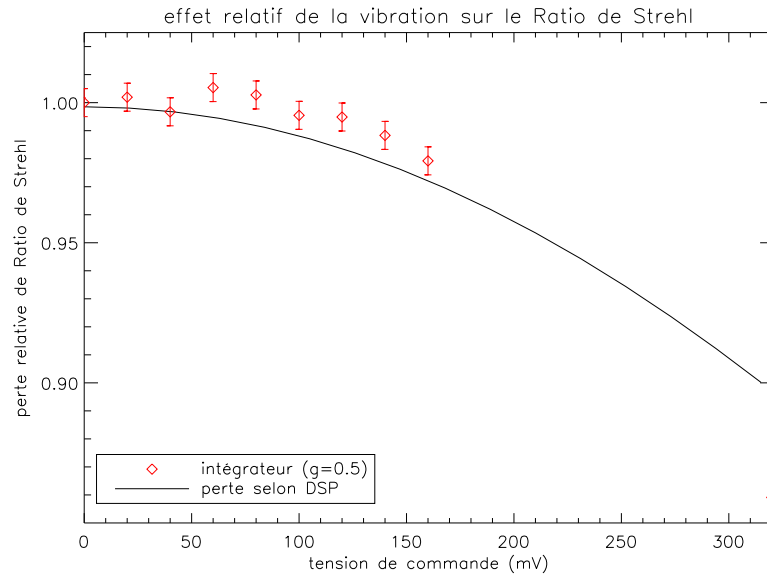


FIG. 15.7 – Évolution du SR relatif en fonction de la tension d’excitation du vibreur pour la commande intégrateur ( $g = 0,5$ ). Cette évolution du SR relatif est comparée à une évolution théorique selon l’énergie de la vibration.

variance du coefficient de Zernike  $a_2$  par la relation  $\sigma_{\phi_x}^2 = (4^2)\sigma_{a_2}^2$ , le facteur 4 étant lié à la définition du polynôme de Zernike. On obtient finalement pour les deux axes la relation :

$$\sigma_{a_2}^2 + \sigma_{a_3}^2 = 4(\pi B)^2(\sigma_{p_x^{vib}}^2 + \sigma_{p_y^{vib}}^2), \quad (15.6)$$

où  $\sigma_{p_x^{vib}}^2$  et  $\sigma_{p_y^{vib}}^2$  peuvent s’identifier aux sauts constatés sur les DSP des pentes moyennes en  $x$  et  $y$ . On a vu au paragraphe 1.6 que lorsque la variance de phase  $\sigma_{\phi}^2$  est faible, le SR peut être approximé par  $SR \simeq \exp(-\sigma^2)$ . On peut donc approcher l’effet de la vibration sur le SR par une multiplication du SR initial (absence de vibration) par  $\exp(-(\sigma_{a_2}^2 + \sigma_{a_3}^2))$ . Enfin, on a souligné que l’énergie de la vibration mesurée sur l’ASO varie linéairement avec la tension d’alimentation du vibreur. Cette relation linéaire a été identifiée. On en déduit donc la perte attendue de  $SR_{rel}$  en fonction de la tension d’alimentation. Cette courbe est ajoutée à la figure 15.7.

L’évolution est bien concordante entre baisse du SR expérimental et théorique, indiquant que l’essentiel de la perte de SR est bien lié à la vibration présente sur les modes de basculement. On en déduit donc que les vibrations présentes sur la voie imagerie affectent essentiellement les modes de bascule, et comme souligné au paragraphe précédent, avec une énergie comparable à celle observée sur la voie ASO. Le phénomène vibratoire est donc de même nature et de même ampleur sur les deux voies.

Ajoutons que les tests proposés jusque-là ont été menés en l’absence de turbulence. Des tests ont été menés en présence de la turbulence de manière similaire. Ils ont permis de vérifier que ces résultats restent inchangés : le phénomène vibratoire reste présent et de même nature.

Enfin, on peut ajouter que la perte de SR constatée (de l’ordre de 5% à 10%) est du même ordre de grandeur que celle constatée sur NAOS (jusqu’à 15%). En reprenant l’analyse faite au paragraphe 9.6, on peut donc envisager la mise en œuvre d’une loi de commande réalisant à la fois l’estimation et la correction de la vibration.

## 15.4 Filtrage de la composante vibratoire : définition du modèle d'état

Ce paragraphe est consacré à la définition du modèle d'état permettant le filtrage de la vibration présente sur le banc, selon le principe décrit au paragraphe 9.4.2.

Il s'agit d'établir les équations d'état et d'observation de notre système à partir desquelles sera calculée la commande optimale. Rappelons que le modèle d'évolution temporelle retenu pour décrire le phénomène vibratoire est un auto-régressif du second ordre :

$$\phi_n^{vib} = \alpha_1 \phi_{n-1}^{vib} + \alpha_2 \phi_{n-2}^{vib} + e_n, \quad (15.7)$$

où les coefficients  $\alpha_1, \alpha_2$  dépendent de la fréquence de la vibration  $f_{vib}$  et de son coefficient d'amortissement  $\xi$ , et  $e_n$  désigne le bruit d'excitation de la vibration. Leurs valeurs sont données en (15.4).

Il a été choisi de considérer pour l'implantation de la commande la solution générale présentée au paragraphe 9.4.2, couplée à la forme générique du paragraphe 7.2.1. Ainsi le vecteur d'état prend la forme suivante :

$$\mathbf{X}_n^1 = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{vib} \\ \phi_n^{vib} \\ \phi_{n-1}^{vib} \\ \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tur} \\ \phi_{n-1}^{tur} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_n^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (15.8)$$

Cette forme n'est évidemment pas la plus compacte, mais permet de mieux visualiser les diverses composantes turbulentes et vibratoires et d'analyser séparément le comportement du filtre pour chaque type de composante estimée. Etant donné que la vibration se retrouve essentiellement sur les deux modes de bascule, le filtrage de la vibration est limité dans une première étape sur ces deux seuls modes. Chaque vecteur  $\phi_n^{vib}$  est donc constitué de deux composantes. Comme au chapitre 9, on fait l'hypothèse de découplage des vibrations présentes sur chaque mode de bascule. On constate que la complexité de la loi de commande n'est guère accrue par le filtrage des composantes vibratoires.

Enfin, il reste à définir les diverses matrices du modèle d'état et de l'équation d'observation. Pour cela, on reprend les matrices utilisées dans le cadre des tests d'OA présentés au chapitre 14. Ainsi les équations du modèles sont (voir paragraphe 9.4.2) :

$$\mathbf{X}_{n+1}^1 = \mathcal{A}^1 \mathbf{X}_n^1 + \mathbf{v}_n' \quad (15.9)$$

$$\mathbf{X}_{n+1}^2 = \mathcal{A}^2 \mathbf{X}_n^2 + \mathcal{B}^2 \mathbf{u}_n \quad (15.10)$$

$$\mathbf{y}_n = \mathcal{C}^1 \mathbf{X}_n^1 + \mathcal{C}^2 \mathbf{X}_n^2 + \mathbf{w}_n, \quad (15.11)$$

où  $\mathbf{v}_n'$  définit un nouveau vecteur de bruit, combinant le bruit  $\mathbf{v}_n$  du modèle d'état de la turbulence et le bruit  $e_n$  du modèle d'état de la vibration (voir équation (9.16)).

Les diverses matrices sont définies par :

$$\mathcal{A}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{vib} & \mathbf{A}_2^{vib} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}^{tur} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (15.12)$$



avec  $\mathbf{A}_1^{vib} = \alpha_1 \mathbf{Id}$  et  $\mathbf{A}_2^{vib} = \alpha_2 \mathbf{Id}$ , ces matrices étant de dimension  $2 \times 2$ , et pour l'équation d'observation :

$$\mathbf{c}^1 = ( 0 \ 0 \ \mathbf{D} \ 0 \ 0 \ \mathbf{D} ), \quad \mathbf{c}^2 = ( 0 \ -\mathbf{DN} ). \quad (15.13)$$

Enfin, la commande se déduit de :

$$\mathbf{u}_n = -\mathbf{K}' \hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}^1 = \mathbf{P}^{oa} \left( \hat{\phi}_{n+1/n}^{tur} + \hat{\phi}_{n+1/n}^{vib} \right), \quad (15.14)$$

avec  $\mathbf{K}' = ( 0 \ -\mathbf{P}^{oa} \ 0 \ 0 \ -\mathbf{P}^{oa} \ 0 )$ . Il faut noter que le calcul de la solution de l'équation de Riccati ne peut plus exploiter les simplifications algorithmiques proposées au paragraphe 7.2 et utilisées en OA classique (paragraphe 14.3). Le calcul du point fixe de l'équation de Riccati se fait sur la matrice  $\Sigma_{inf}$  pleine. En estimant une phase turbulente sur 120 modes et une vibration sur deux modes (tip-tilt) cela représente une matrice de  $378 \times 378$ . Le calcul de point fixe, réalisé en double précision, ne présente pas de difficulté bien qu'il soit plus long. En se fixant un critère de convergence sur la variation de la trace de  $5.10^{-3}$  (voir paragraphe 7.3.1), la convergence est assurée en 800 itérations et la matrice trouvée est bien symétrique définie positive. La commande ainsi définie est de même structure que celle du cas OA classique, et son implantation sur le RTC est donc immédiate.

## 15.5 Résultats expérimentaux

Cette loi de commande LQG avec filtrage de la vibration a été implantée dans le RTC. La validation des performances de la commande est présentée sur source ponctuelle, en présence de turbulence. On reprend ici les conditions expérimentales décrites au paragraphe 15.3.1 conduisant à une chute du SR pour les lois de commandes standard de  $SR = 91\%$  à  $SR = 86\%$  en présence de vibration. La boucle d'asservissement est alors fermée sans difficulté avec la commande optimale pour le filtrage des vibrations décrite au paragraphe précédent, et le comportement est stable. Cela conduit à une remontée du SR à  $SR = 90\%$ , amélioration notable du SR qui indique une atténuation nette de la vibration.

Pour confirmer cet effet, on s'intéresse à la mesure de pente. La figure 15.8 montre les DSP temporelles des pentes moyennes en  $x$ , hors vibration, ou en présence de vibration et sans filtrage, ou en présence de vibration avec filtrage. On retrouve sur la dernière courbe la disparition du pic de vibration. On note une fois de plus la présence systématique sur les DSP de pics secondaires. Ces pics, déjà présents en boucle ouverte, sont plus importants en boucle fermée, car amplifiés par l'asservissement (ils sont en zone d'amplification). La structure des DSP sera rediscutée à la lumière des simulations numériques au paragraphe 15.9.1.

La DSP temporelle cumulée de la pente moyenne, tracée sur la figure 15.9 pour la pente en  $x$ , fait apparaître la disparition quasi-totale du saut précédemment constaté et dû à la vibration. L'énergie de la vibration (ou le saut d'énergie constaté sur ces DSP cumulées) a été réduite de 90%. Il existe cependant un léger résidu, résultat du compromis entre filtrage de la vibration et correction de la turbulence. On peut remarquer qu'en l'absence de vibration, la DSP cumulée semble, jusqu'à la fréquence de 15 Hz, se situer légèrement au-dessus de celles en présence de vibration (avec ou sans filtrage). Cet effet n'est pas significatif, les courbes ne sont pas acquises au même moment et sont sujettes aux vibrations naturelles du banc, à la turbulence locale et à tout autre effet expérimental non contrôlé.

Parallèlement, on vérifie que le bougé des images sur la caméra d'imagerie, obtenu par acquisition de poses courtes est considérablement réduit (de 86%).

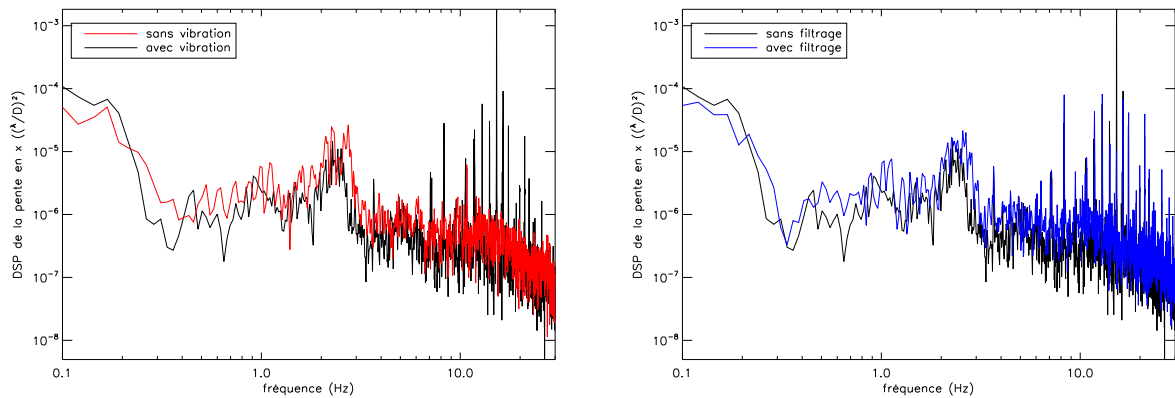


FIG. 15.8 – DSP temporelles de la pente moyenne en  $x$ . Trois courbes sont comparées : à gauche, en boucle fermée avec une loi de commande LQG standard en l'absence de vibration (rouge) ou en présence de la vibration (noir), à droite, en boucle fermée avec une loi de commande LQG standard en présence de vibration (noir, *idem* figure de gauche), puis avec filtrage optimal de la vibration (bleu).

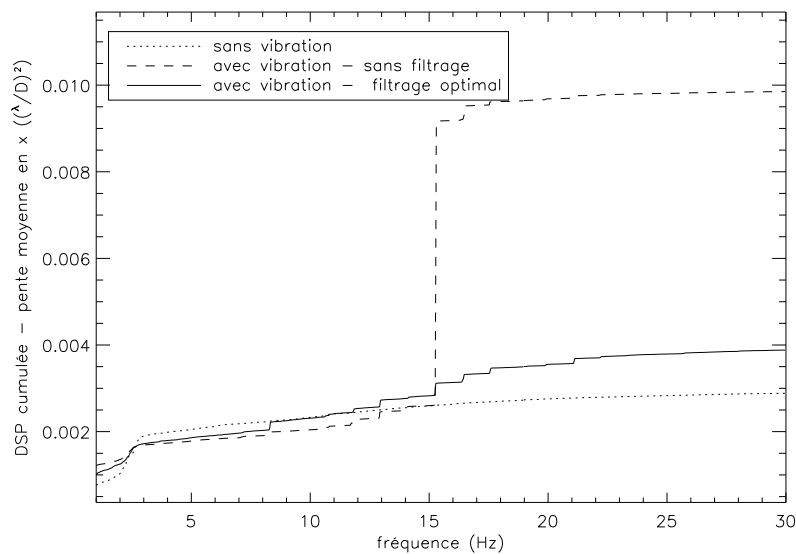


FIG. 15.9 – DSP temporelles cumulées de la pente moyenne en  $x$ . Trois sont comparées : en boucle fermée avec une loi de commande LQG standard en l'absence de vibration (pointillés), puis en présence de la vibration (tirets). Un saut d'énergie trahit la présence de la vibration. Enfin, le cas d'une commande LQG filtrant la vibration est tracé (ligne continue). Le saut d'énergie associé à la vibration est réduit de 90%.

On peut s'interroger sur l'effet de la disparition éventuelle de la vibration sur les performances et la stabilité, alors que le modèle reste défini pour filtrer la vibration. Le test a été mené avec la commande obtenue ci-dessus. L'ensemble des résultats expérimentaux sont résumés dans le tableau 15.1. On note qu'en l'absence de vibration, la commande n'introduit aucune perte significative de SR, laissant le SR à sa valeur initiale de 91% à l'erreur d'estimation du SR près.

	SR interne	SR sur turbulence	SR sur turbulence + vibration
intégrateur	95	91	86
LQG standard	96	91	86
LQG + filtrage	96	91	90

TAB. 15.1 – Tableau récapitulatif des performances expérimentales en SR (%) en utilisant une commande standard (intégrateur ou LQG) et une commande LQG filtrant la vibration.

On sait qu'en pratique les vibrations observées sur des systèmes tels que NAOS tendent à évoluer au cours du temps. Le paragraphe 9.8.4 a évoqué le problème de l'automatisation de l'identification des vibrations, et une remise à jour régulière du modèle d'état peut donc être envisagée, pour suivre les évolutions des caractéristiques des vibrations. Sans attendre l'implantation d'un tel processus, ces résultats donnent une idée de l'erreur commise à utiliser une commande LQG filtrant une vibration alors que celle-ci a disparu. Ce peut être le cas par exemple si la source de la vibration (vent, machinerie) s'est arrêtée. Ces résultats tendent à prouver que l'erreur commise ne sera pas significative. Il faut toutefois tempérer cette conclusion : ce résultat se vérifie avec une vibration quasi-pure et en laboratoire. Il sera peut-être à remettre en cause en présence de vibrations de largeur spectrale élevée.

## 15.6 Remarque sur l'hypothèse de découplage

Comme souligné au chapitre 9, l'approche qui a été retenue pour l'estimation de la vibration fait l'hypothèse d'un découplage complet entre les vibrations présentes sur chaque mode de la phase (tip et tilt). Dans le cas présent, cette hypothèse se révèle fautive. La figure 15.10 présente l'évolution simultanée de la pente moyenne en  $x$  et en  $y$ , en boucle fermée, et en présence ou non de vibration. En somme, il s'agit du déplacement moyen de la tache image dans une sous-pupille de l'ASO.

On constate qu'en l'absence de vibration, les pentes moyennes en  $x$  et en  $y$  suivent une évolution de faible amplitude autour d'une valeur nulle et globalement isotrope. En présence de vibration, cette évolution devient tout autre, avec l'apparition marquée d'un axe d'oscillation. Ceci rend compte de la présence de la vibration, non corrigée, mais surtout, cette évolution selon un axe prouve que la vibration présente sur les pentes moyennes en  $x$  et en  $y$  est entièrement couplée (et en l'occurrence présente un déphasage proche de zéro !). Donc, notre hypothèse de découplage était fautive, et mène en outre à l'estimation de deux modes de vibration découplés là où il n'en existe en réalité qu'un seul. Ceci ne remet cependant pas en cause notre démarche car ce n'est qu'une sur-modélisation du phénomène. Le modèle découplé est plus flexible puisqu'on évite l'identification des couplages (difficile en cas de vibrations multiples) et les problèmes d'évolution au cours du temps, au prix d'une augmentation mineure de la complexité du système.

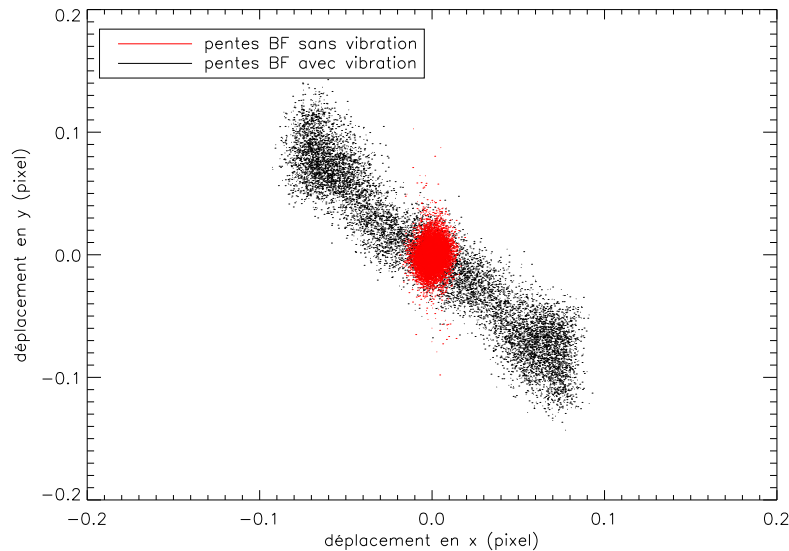


FIG. 15.10 – Tracé du couple (pente en  $x$ -pente en  $y$ ) au cours du temps, en présence (noir) ou non (rouge) de la vibration. Le couplage des vibrations selon chaque axe est clairement visible.

## 15.7 Sensibilité des performances

### 15.7.1 Sensibilité vis-à-vis de $\xi$ et $\sigma_e^2$

Les résultats présentés dans les paragraphes précédents ont été obtenus avec un modèle de vibration issu des caractérisations menées en 15.3.2 et des méthodes d'identification proposées en 9.8. Cependant, il est bon de s'interroger sur l'évolution de la correction en fonction des paramètres choisis, et de vérifier que les performances obtenues sont bien les meilleures atteignables avec la commande que nous avons définie. Cette étude paramétrique s'est concentrée sur les paramètres d'amortissement et d'énergie ( $\xi$ ,  $\sigma_e^2$ ), dont le choix est le plus difficile. La fréquence de vibration est en outre très bien connue et très stable.

Dans ce contexte, la qualité de la correction en terme de SR et de pentes résiduelles a été étudiée en faisant varier ces deux paramètres  $\xi$  et  $\sigma_e^2$ . Dans un cadre expérimental, la plage de variation de ces paramètres se doit d'être limitée. Concernant le paramètre  $\xi$ , il apparaît en simulation que diminuer  $\xi$  en dessous de  $10^{-4}$  ne change plus significativement la finesse du pic. Par contre, le modèle de vibration évolue notablement pour des valeurs plus fortes. Aussi, l'évolution de la performance du filtre a été étudiée avec les valeurs  $\xi = [10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}]$ . La figure 9.2 montre pour illustration les DSP de vibrations modélisées pour ces différents choix de valeurs de  $\xi$ , et pour une fréquence de vibration de  $f_{vib} = 15$  Hz.

Concernant le paramètre  $\sigma_e^2$ , et comme signalé déjà au paragraphe 9.8, l'énergie de la vibration issue du modèle est proportionnelle à  $\sigma_e^2$ . Les valeurs considérées de  $\sigma_e^2$  évoluent entre  $10^{-8}$  pixels<sup>2</sup> et  $10^{-2}$  pixels<sup>2</sup>, selon le choix de  $\xi$ . Pour chaque couple de valeurs de  $\xi$  et  $\sigma_e^2$ , la performance du filtre a été calculée dans les mêmes conditions que précédemment, c'est-à-dire sur turbulence.

Pour chaque valeur de  $\xi$ , on fait donc varier le choix de  $\sigma_e^2$ . La figure 15.11 résume les résultats obtenus en terme de SR dans les diverses configurations. Cette courbe suscite plusieurs remarques. Tout d'abord, elle a le bon goût de confirmer que les paramètres avancés en paragraphe

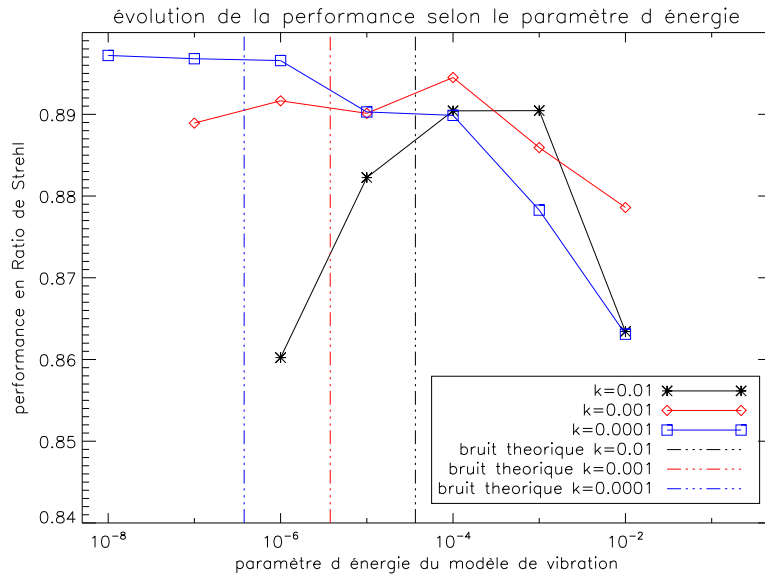


FIG. 15.11 – Evolution du SR en appliquant une commande LQG filtrant la vibration en fonction de la variance du bruit  $\sigma_e^2$  (exprimée ici en pixels<sup>2</sup>) introduit dans le modèle AR2. Trois modèles de vibration sont considérés (coefficient de couplage  $\xi$  noté ici  $k$ ). Pour chaque modèle, le paramètre d'énergie le plus approprié selon les calibrations est indiqué (courbe verticale)

**15.3.2** ( $(\xi, \sigma_e^2) = (10^{-4}, 3 \cdot 10^{-7} \text{ pixels}^2)$ ) pour modéliser la vibration étaient corrects : ils offrent en effet la correction optimale. On constate aussi que  $\xi$  augmentant, la performance maximale en SR pouvant être atteinte décroît. Le modèle de vibration évolue en effet vers un modèle de vibration large, contradictoire avec la vibration en présence. En outre, pour chaque choix de  $\xi$ , on peut calculer la valeur de  $\sigma_e^2$  pour conserver une énergie globale toujours égale à celle de la vibration mesurée. Cette valeur est indiquée pour chaque  $\xi$  sur la figure par un trait vertical. Comme indiqué au paragraphe 9.8, un élargissement de la vibration (augmentation de  $\xi$ ) conduit à une diminution de l'énergie totale de la vibration modélisée à  $\sigma_e^2$  donné : il faut un terme  $\sigma_e^2$  accru pour obtenir la meilleure correction. Ceci se vérifie expérimentalement puisque la meilleure performance pour chaque  $\xi$  est effectivement obtenue pour un choix de  $\sigma_e^2$  proche de cette valeur théorique.

Intéressons-nous alors aux DSP temporelles cumulées des pentes moyennes en  $x$  et  $y$  pour mieux visualiser ce qui se passe. La figure 15.12 montre que l'utilisation d'une valeur forte de  $\sigma_e^2$  permet d'atténuer complètement le saut d'énergie induit par la vibration, et assure donc un bon filtrage de cette perturbation. Par contre, cette atténuation se fait au détriment de la turbulence, à basse fréquence, pour laquelle la commande LQG n'offre plus une atténuation suffisante. Inversement, en réduisant ce terme d'énergie de la vibration, on tend à sous-estimer la contribution de la vibration et à la sous-corriger. Un saut d'énergie reste visible. Mais la turbulence est de nouveau très bien corrigée. Pour le bon paramètre d'énergie, ( $\sigma_e^2 = 3 \cdot 10^{-7} \text{ pixels}^2$ ), la meilleure performance est obtenue, c'est-à-dire le meilleur compromis entre atténuation de la vibration et correction de la turbulence.

Soulignons que ces résultats ont été obtenus dans le cas d'une vibration très étroite et stable. On peut s'attendre à ce qu'un modèle de vibration très étroit soit aussi beaucoup moins robuste en performance vis-à-vis d'une éventuelle instabilité de la fréquence centrale de la vibration. Le filtrage est plus efficace mais plus sélectif. On peut alors privilégier dans la pratique un filtrage moins étroit,

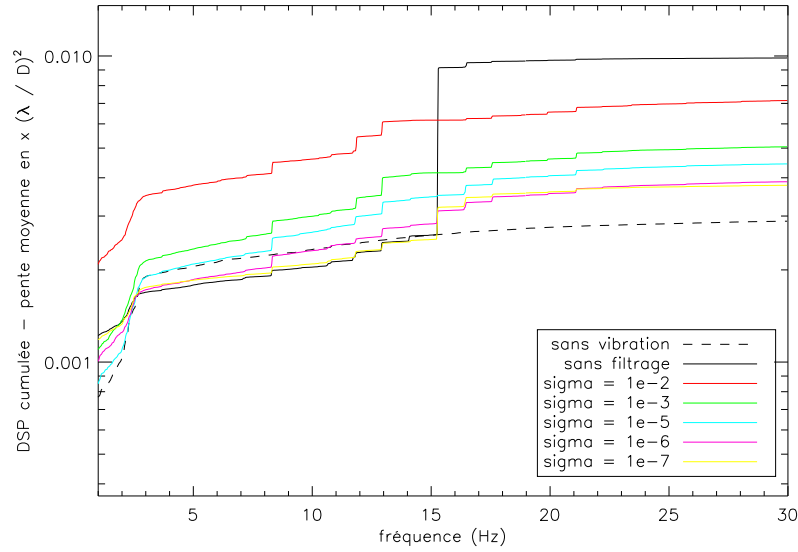


FIG. 15.12 – DSPs temporelles cumulées de la pente moyenne en  $x$ . Les courbes sont tracées pour  $\xi = 10^{-4}$  et pour diverses variances de bruit  $\sigma_e^2$  (exprimées ici en pixels<sup>2</sup>) introduites dans le modèle AR2 de la commande LQG réalisant le filtrage.

probablement moins optimal mais garantissant plus de robustesse.

### 15.7.2 Influence du nombre de modes filtrés

Jusqu'à présent, on a supposé que la vibration n'affectait que les modes tip et tilt. La commande proposée se limitait donc au filtrage de la vibration sur ces deux seules composantes. Cette hypothèse s'appuyait sur la courbe présentée en figure 15.4. Néanmoins, on constate sur cette même courbe que la vibration agit aussi, bien que faiblement, sur les modes d'ordre supérieur. On peut donc s'interroger sur l'éventuelle efficacité d'un filtrage étendu à plus de deux modes. Une loi de commande a donc été implantée en reprenant rigoureusement la même structure que la précédente, mais en étendant l'estimation de la vibration sur 45 modes. Les paramètres  $f_{vib}$  et  $\xi$  du modèle de vibration sont ceux de l'équation (15.4). Il se pose néanmoins le problème du choix de la variance du bruit d'excitation  $\sigma_e^2$  sur chaque mode.

L'utilisation de la même variance de bruit pour les modes tip-tilt, celle définie en équation (15.4), sur l'ensemble des 45 modes serait évidemment une erreur. Cela supposerait que l'énergie de la vibration est la même sur tous les modes, ce qui n'est pas représentatif (cf. figure 15.4). Le résultat est évidemment à la hauteur de la crédulité de cette solution : la performance en SR est à peine égale à celle obtenue avec une commande LQG standard soumise à la vibration c'est-à-dire  $SR = 79\%$ . On peut plus raisonnablement réaliser une pondération de l'énergie de vibration introduite sur chaque mode. En effet, la courbe 15.4 donne de manière explicite la répartition de l'énergie de la vibration sur chaque mode : il existe globalement un facteur 100 entre l'énergie présente sur les modes tip-tilt et sur les modes suivants. On définit donc le paramètre de bruit  $\sigma_e^2(i)$  sur chaque mode  $i$  de la manière suivante :

$$\sigma_e^2(i) = 10^{-4}, \forall i \in [2, 3], \sigma_e^2(i) = 10^{-6}, \forall i \in [4, 45]. \quad (15.15)$$

Le résultat est alors une nette remontée de la valeur du SR à  $SR = 86\%$ , soit une performance comparable à la performance optimale obtenue par filtrage de la vibration sur les deux modes tip-tilt. Ce résultat indique qu'il n'y a pas de gain décelable à raffiner le modèle et qu'il était effectivement inutile de s'attacher au filtrage de la vibration sur plus de modes.

## 15.8 Conclusion sur les tests expérimentaux

Cette première phase de validation a donc démontré l'efficacité du filtrage de composantes vibratoires perturbatives par une commande LQG. Des vibrations simples ont été introduites sur les deux voies de l'OA et caractérisées, permettant ainsi de définir la commande filtrant les vibrations. La performance du filtrage a été évaluée en terme de SR et d'atténuation de la vibration sur les pentes moyennes et s'avère particulièrement satisfaisante, puisque les vibrations sont presque entièrement supprimées, sans détériorer la correction de la turbulence. Ces tests montrent aussi que la méthode d'identification des paramètres des vibrations, si elle est encore manuelle et simple, permet de déterminer la meilleure commande LQG. Les paragraphes qui suivent sont consacrés à l'exploitation du simulateur numérique. Après une confrontation des performances expérimentales à celles obtenues en simulation, le simulateur est utilisé dans le but d'étendre les résultats obtenus expérimentalement à des cas plus complexes ou plus difficilement mis en œuvre expérimentalement.

## 15.9 Confrontation à la simulation numérique et extension à d'autres cas

### 15.9.1 Comparaison avec la simulation numérique

A partir du simulateur numérique du banc, il est possible de reproduire l'expérience menée au paragraphe 15.5. La simulation de la vibration s'est appuyée sur le même modèle auto-régressif du second ordre que celui présenté au paragraphe 15.4. La vibration est générée sur les modes désirés et ajoutée à la carte de phase turbulente. Ainsi, les paramètres de la vibration simulée sont  $f_{vib} = 15,28$  Hz,  $\xi = 10^{-4}$ ,  $\sigma_e^2 = 3.10^{-7}$  pixels<sup>2</sup>. Comme dans le cas expérimental, diverses lois de commande sont utilisées et comparées : intégrateur à gain unique de  $g = 0,5$ , commande LQG standard, commande LQG réalisant le filtrage de la vibration. Cette dernière est évidemment basée sur le modèle AR2 déjà décrit. Il n'y a donc pas d'erreur de modèle. Le tableau 15.2 synthétise les résultats en terme de SR obtenus au cours de cette simulation :

	SR sur turbulence		SR sur turbulence + vibration	
	expérimental	simulation	expérimental	simulation
intégrateur	91	91	86	88
LQG standard	91	91	86	85
LQG + filtrage	91	91	90	91

TAB. 15.2 – Tableau récapitulatif des performances en SR (%) selon la simulation numérique, en présence ou non de vibration, pour chaque type de commande.

Là encore, les valeurs de SR simulé sont renormalisées par rapport au SR interne expérimental (voir paragraphe 14.7). On constate une très bonne adéquation entre la simulation et l'expérience.

Pour conforter ces résultats et proposer un autre angle d'analyse, on peut s'intéresser à l'effet de la boucle sur la pente moyenne. On ne peut pas définir à proprement parler de fonction de transfert



pour la commande LQG, en raison des couplages. Mais on peut évaluer un transfert  $T_{x,y}(\nu)$  de la pente moyenne en  $x$  ou  $y$ , entre boucle ouverte et boucle fermée, trahissant indirectement l'effet de la boucle sur ce signal. On définit  $\|T_{x,y}(\nu)\|^2$  selon :

$$\|T_{x,y}(\nu)\|^2 = \frac{DSP_{bf}^{x,y}(\nu)}{DSP_{bo}^{x,y}(\nu)}, \quad (15.16)$$

$DSP_{bf}^{x,y}$  et  $DSP_{bo}^{x,y}$  désignant les DSP des pentes moyennes en  $x$  et  $y$  en boucle fermée et ouverte respectivement.

A partir des données expérimentales, puis numériques, la norme quadratique du transfert  $T_x(\nu)$  est calculée pour la commande LQG corrigeant la vibration. Le résultat, donné en figure 15.13, suscite plusieurs remarques importantes.

On constate tout d'abord un pic d'atténuation marqué à  $f_{vib}$ , prouvant ainsi l'effet de correction de la vibration souhaité. La commande LQG définie réalise bien un filtrage net de la composante vibratoire.

On remarque aussi la structure complexe du transfert obtenu notamment à basse fréquence (autour de 2 Hz). La concordance du transfert expérimental et numérique montre que cette structure du transfert est inhérente à la commande LQG, et indépendante du filtrage de vibration. Ce résultat a été confirmé par des tests complémentaires.

On note aussi sur la courbe issue de la simulation une chute du gain du transfert près de  $f_{ech}/2$ . Ce comportement est lui aussi structurel, et est confirmé tant par les transferts de réjection analysés au paragraphe 8.6 que par des tests de simulation numérique. Par contre, les mesures expérimentales ne font guère apparaître cette baisse. Elle est vraisemblablement cachée par la présence de *jitter* dans la boucle d'asservissement, perturbant le comportement haute fréquence du système. Des tests complémentaires pourront probablement être faits lorsque la boucle d'OA expérimentale fonctionnera dans sa configuration finale.

Enfin, le transfert expérimental est perturbé par divers pics ou atténuations secondaires, localisées et fins, et absents en simulation. Ces pics sont dûs à la présence de vibrations non stationnaires. Ces vibrations sont d'énergie négligeable comme en atteste le tracé de DSP cumulée en figure 15.9 (absence de saut d'énergie notable), mais elles varient entre les mesures boucle ouverte et boucle fermée et apparaissent donc dans le transfert  $T_x(\nu)$ .

On peut donc là encore exploiter cette conformité entre simulation et expérience pour extrapoler d'autres résultats grâce à la seule simulation. Les paragraphes suivants s'intéressent essentiellement à deux cas de figure, dont la mise en œuvre sur le banc n'a pu être menée : le filtrage de vibrations multiples et l'estimation d'un bruit de vibration ne nécessitant pas de correction.

### 15.9.2 Cas multi-vibratoire

Il s'agit de valider dans ce cas la possibilité de filtrer plus d'une vibration. Le cas de plusieurs vibrations différentes présentes chacune sur un mode différent ne pose pas de difficulté puisqu'il ne requiert qu'un filtrage adapté pour chaque mode (voir paragraphe 9.7). Ce paragraphe s'intéresse plutôt au cas du filtrage de plusieurs vibrations de caractéristiques bien différentes sur un même mode. Le cas de trois vibrations a été simulé et est décrit dans [Petit et al.(2007)]. On en résume ici les principaux éléments. Les conditions de simulation restent celles du banc expérimental. Trois vibrations ont été simulées, affectant les voies d'analyse et d'imagerie. Leurs caractéristiques sont résumées dans le tableau 15.3.

Ces vibrations affectent les modes de basculement comme précédemment. En l'absence d'un filtrage adapté des vibrations, le SR chute, pour une commande intégrateur ou LQG standard, de 91% à



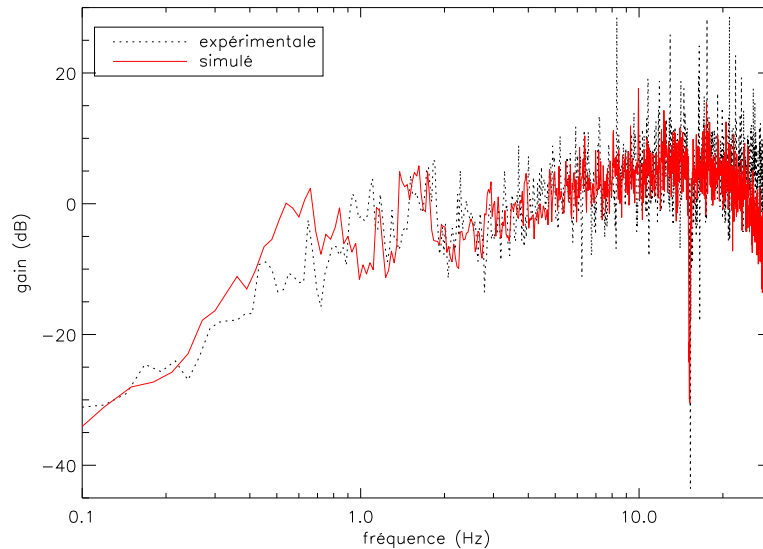


FIG. 15.13 – Transfert  $\|T_x(\nu)\|^2$  de la pente moyenne en  $x$  de la commande LQG, déduit des mesures expérimentales (continu) ou de la simulation numérique du banc (pointillés).

caractéristiques	fréquence centrale	couplage $\xi$	énergie
vibration 1	$f_{vib1} = 6$ Hz	$\xi = 10^{-5}$	$\sigma_e^2 = 10^{-10} \text{rad}^2$
vibration 2	$f_{vib2} = 15$ Hz	$\xi = 10^{-5}$	$\sigma_e^2 = 10^{-10} \text{rad}^2$
vibration 3	$f_{vib3} = 8$ Hz	$\xi = 3 \cdot 10^{-2}$	$\sigma_e^2 = 10^{-3} \text{rad}^2$

TAB. 15.3 – Caractéristiques des modes vibratoires introduits dans la simulation numérique multi-vibratoire. Les mêmes caractéristiques sont utilisées dans les *a priori* de la commande LQG filtrant ces vibrations.

76%. L'introduction d'un filtrage de ces composantes repose sur la méthode proposée au paragraphe 15.4 : pour chaque mode, trois vibrations différentes sont estimées, toujours grâce à un modèle auto-régressif du second ordre (pour chaque vibration), soit 6 vibrations au total. Le vecteur d'état fait apparaître trois états par vibration, soit un total de 18 composantes supplémentaires dans le vecteur d'état. Le coût calculatoire est donc minimale (et peut encore être réduit avec une forme plus compacte de l'observateur, voir chapitre 7).

Pour définir la loi de commande filtrant ces composantes vibratoires, on a supposé l'absence d'erreur de modèle : les caractéristiques des vibrations sont parfaitement connues et les AR2 introduits utilisent les paramètres exacts des vibrations. La mise en œuvre de cette commande conduit alors à une correction sans équivoque des effets des vibrations, avec une remontée sur SR à 89%. La correction n'est évidemment pas parfaite. Un compromis est fait entre correction de la turbulence et filtrage des vibrations. On ne peut gagner sur tous les fronts. Pour illustrer ce filtrage on peut là encore considérer le transfert de la pente moyenne (avec les mêmes précautions). La figure 15.14 montre ainsi le transfert pour la pente moyenne en  $x$ , avec une commande LQG ne corrigeant que la turbulence, ou corrigeant turbulence et vibrations. On voit bien apparaître les pics d'atténuation aux fréquences  $f_{vib1}$ ,  $f_{vib2}$ ,  $f_{vib3}$ , avec des largeurs variables. On constate aussi l'augmentation de zone d'amplification du signal (gain supérieur à 1, ou 0 dB), à relier au théorème de Bode [Mohtadi(1990)].

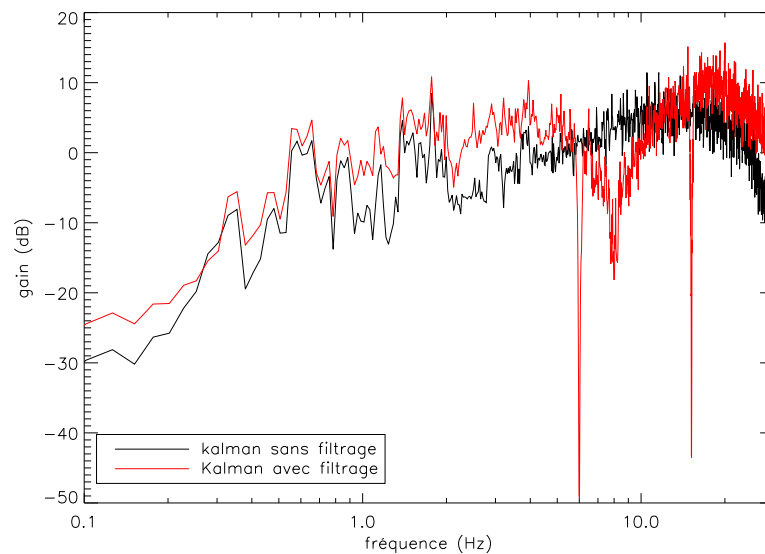


FIG. 15.14 – Transferts de la pente moyenne en  $x$  lors de l'utilisation d'une commande LQG standard, ou filtrant les trois vibrations.

On retrouve la structure caractéristique de ce transfert pour la commande LQG, c'est-à-dire le comportement basse fréquence caractéristique et l'atténuation à haute fréquence.

### 15.9.3 Cas d'un bruit de vibration

On a souligné au paragraphe 9.2 la distinction importante entre vibration jouant le rôle de perturbation (présente sur la voie image et analyse) ou de bruit de mesure (présente uniquement sur la voie analyse). Dans ce dernier cas, la vibration ne doit pas être corrigée par la boucle de rétroaction puisqu'elle n'affecte pas la voie imagerie. Sur le banc, cette situation n'a pu être mise en œuvre, mais il est simple de la faire apparaître en simulation. Il suffit pour cela d'ajouter la vibration uniquement avant la mesure par l'ASO. Une commande de type intégrateur ou LQG standard ne prendra pas en compte cette vibration qui, selon sa fréquence, peut être potentiellement amplifiée au même titre que le bruit. Le paragraphe 9.5 a montré que la gestion d'un bruit de vibration relevait du même processus d'estimation d'une vibration que dans le cas d'une perturbation vibratoire présente sur les deux voies. Le filtre de Kalman utilise les mêmes *a priori* pour l'estimation. Seule l'étape de correction diffère, puisque la perturbation vibratoire est corrigée tandis que le bruit de vibration ne l'est pas. Dans ce dernier cas, seule la turbulence est corrigée. La commande LQG dédiée au filtrage d'un bruit de vibration ne se distingue donc de la commande corrigeant les vibrations (perturbations) que par son mode correction, c'est-à-dire sa matrice de projection de l'état estimé sur le miroir. Cette capacité à gérer les deux types de vibration est un plus de la commande LQG, que des commandes plus classiques telles que l'intégrateur ne peuvent offrir.

Le simulateur numérique a donc été utilisé dans les conditions du banc expérimental (voir paragraphe 14.7), afin de tester les différentes configurations suivantes : absence de vibration, présence d'une vibration sur la voie analyse seule, présence d'une vibration sur les deux voies. Pour chaque cas, on considère les commandes suivantes :

- intégrateur ;
- LQG standard ;
- LQG corrigeant la turbulence et une vibration perturbative sur les deux voies ;
- LQG corrigeant la turbulence et un bruit de vibration (sur la voie analyse seule donc).

La vibration considérée est la même que celle précédemment mise en œuvre sur le banc et dans la simulation numérique : la vibration est présente sur les modes tip et tilt uniquement, avec  $f_{vib} = 15,2$  Hz, et  $\xi = 10^{-4}$ , mais l'énergie de la vibration est multipliée par 4 pour rendre ses effets plus marqués ( $\sigma_e^2 = 12 \cdot 10^{-7}$  pixels<sup>2</sup>). On compare donc le comportement de chaque commande pour chaque configuration. On s'appuie pour l'analyse d'une part sur la performance en terme de SR et d'autre part sur le transfert de la pente moyenne, ici en x (mode tip).

Le tableau 15.4 synthétise les résultats en terme de SR de ces tests.

	turbulence seule	vibration voie ASO	vibration 2 voies
intégrateur	91	90	81
LQG	91	85	69
LQG correction de vibration	91	86	91
LQG estimation de vibration	91	91	83

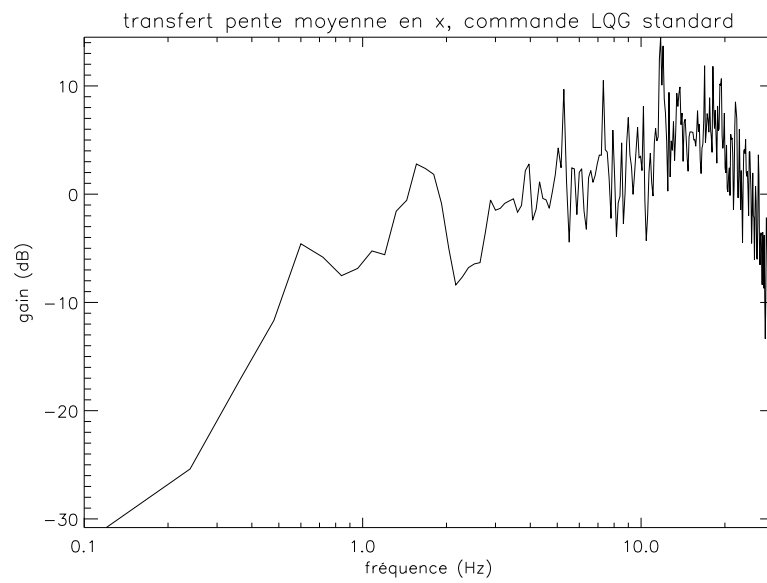
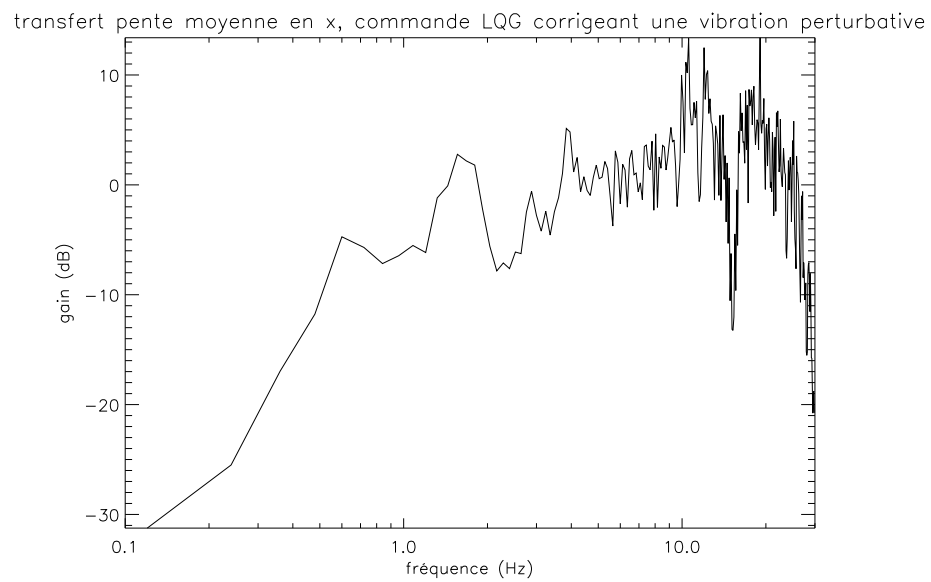
TAB. 15.4 – Tableau récapitulatif des performances en SR obtenues en simulation numérique. On considère le cas d'une vibration présente seulement sur la voie analyse (bruit de mesure) ou sur les deux voies (perturbation). Les diverses commandes sont comparées.

Les deux premières lignes du tableau correspondent aux cas étudiés précédemment : on compare commande LQG et intégrateur standard. La performance de chacune, initialement identique de 91% en la seule présence de turbulence, chute avec l'adjonction d'une vibration, qu'elle soit considérée comme un bruit ou une perturbation. La commande LQG est plus fortement touchée. Le transfert de la pente moyenne en figure 15.15, montre le comportement de cette dernière.

En troisième ligne du tableau 15.4, on introduit la commande LQG, dédiée au filtrage d'une perturbation vibratoire (affectant les deux voies de mesure). On constate l'absence de dégradation notable de la performance lorsque la vibration est absente, et surtout une nette amélioration de la performance en présence d'une vibration perturbative, le SR remontant de 69% à 91%. L'amélioration de la performance en présence d'un bruit de vibration n'est pas significative. La figure 15.16, montre le transfert de pente associé, et le phénomène d'atténuation de la vibration. Il apparaît nettement, sous la forme d'un pic d'atténuation à  $f_{vib}$ .

Enfin, en quatrième ligne du tableau, la commande LQG gérant un bruit de vibration, montre une très bonne amélioration du SR en présence de ce type de bruit, le SR passant de 85% (en l'absence de toute gestion de vibration) à 91%. Là encore, aucune dégradation sensible de la performance en l'absence de bruit de vibration n'est à noter. On constate aussi une légère amélioration de la performance en présence d'une vibration perturbative. Ce résultat peut se comprendre en considérant le transfert de la pente moyenne en figure 15.17. On remarque que pour la fréquence de vibration, il n'y a plus ni amplification ni atténuation du signal, mais une mise à 0 du gain (en dB). En somme, le système est transparent pour cette composante. L'avantage est qu'en présence d'une vibration perturbative, on n'amplifie plus ce signal, sans non plus le corriger. On diminue donc son effet comparativement à une commande LQG standard.

Ainsi, la flexibilité de la commande mise en œuvre permet de gérer les vibrations, dans diverses situations (vibration perturbative ou représentant un bruit de mesure). Dans la pratique, il faudra évidemment pouvoir déterminer la présence ou non de vibrations, leurs caractéristiques et vérifier la

FIG. 15.15 – Transfert de la pente moyenne en  $x$  pour une commande LQG standard .FIG. 15.16 – Transfert de la pente moyenne en  $x$  pour une commande LQG corrigeant la vibration. On constate une atténuation nette de la vibration.

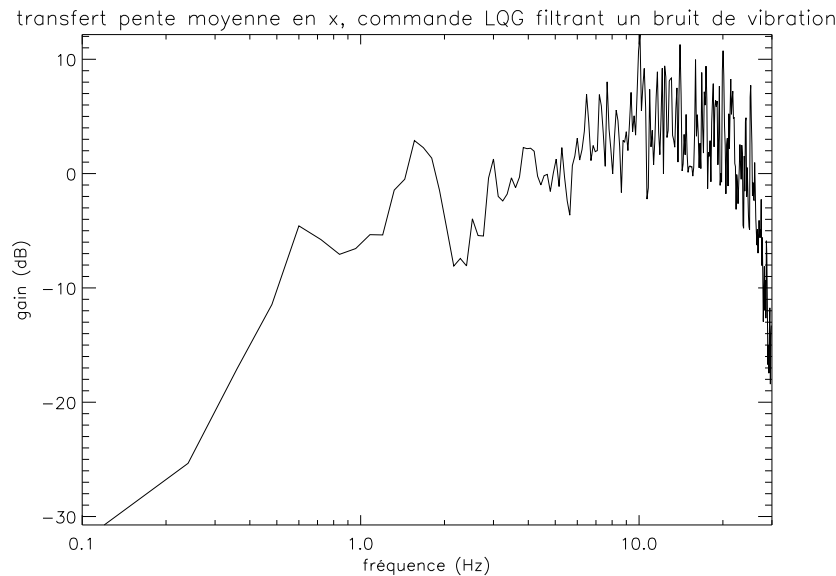


FIG. 15.17 – Transfert de la pente moyenne en  $x$  pour une commande LQG estimant la vibration. On constate que la vibration n'est plus amplifiée par le système (gain en dB nul à  $f_{vib} = 15,28$  Hz).

présence de ces vibrations sur les différentes voies de mesures.

## 15.10 Conclusion sur la gestion des vibrations

Ce chapitre a donc permis de valider expérimentalement l'application de la commande LQG à la correction simultanée de la turbulence et de vibrations perturbatives. Grâce à la caractérisation des vibrations introduites sur BOA, une commande LQG gérant ce type de vibration a été définie et mise en œuvre. Le résultat est une amélioration significative de la performance globale de l'OA par une atténuation nette de la vibration en présence. La pertinence de l'identification de la vibration a été validée par une étude paramétrique, qui fournit en même temps des éléments sur la robustesse de la commande choisie. Ces résultats nécessiteraient évidemment d'être approfondis, notamment par une analyse systématique de la robustesse de la commande définie aux diverses erreurs de modèles possibles. Cela recouvre d'une part les erreurs de modèle concernant la commande LQG standard, et d'autre part la modélisation des vibrations. En outre, seule une unique vibration, présente sur deux modes, quasi-pure et présente sur les deux voies de l'OA a été considérée. Ce cas est démonstratif, mais néanmoins restrictif. L'utilisation du simulateur numérique a donc permis d'étendre les résultats expérimentaux à d'autres cas. D'abord, la confrontation des résultats obtenus expérimentalement avec une simulation a permis une fois de plus de valider la conformité entre simulation et expérience. Cette conformité permet de simuler avec assurance d'autres configurations. Le cas de vibrations multiples, de natures variées a été simulé avec succès. La commande LQG filtrant ces vibrations offre une excellente atténuation des divers composantes. Le cas d'une vibration affectant seulement la voie ASO a été aussi testé et le filtrage de la dite composante validé. Outre l'approfondissement des tests et de l'étude de la robustesse, ces tests n'ont cependant pas résolu le problème de l'identification des vibrations. La méthode utilisée reste manuelle et simple. Une identification automatique et régulière serait pourtant indispensable sur un véritable système, tel que Planet-Finder. Le paragraphe 9.8.4 a discuté

de cette problématique. Une mise en œuvre expérimentale est à considérer. Enfin, la gestion des vibrations n'est pas limitée à l'OA. Elle peut s'appliquer aussi dans le cadre de l'OAMC. L'application de la commande LQG à l'OAMC, au cœur de ce mémoire est traitée dans le chapitre suivant.



## Chapitre 16

# Application de la commande LQG à l'OAAO : validation expérimentale

Les chapitres précédents ont permis de valider la commande LQG dans un cadre d'OA. Des améliorations, telles que le filtrage de vibrations, ont été testées. Mais la motivation principale du développement de la commande LQG est son application à l'OAMC. Ce chapitre est donc consacré à la validation expérimentale de la commande LQG dans un cadre d'OAAO (ou OA hors axe). Rappelons que l'OAAO est un concept proche de l'OAMC, à une seule direction d'analyse (sur axe) et une seule direction d'optimisation de la correction (hors axe) (voir la figure 16.1). Dans notre contexte, la turbulence est située dans une seule couche en altitude, et la correction se fait grâce à un MD placé dans la pupille. L'OAAO correspond à une problématique d'optimisation de la correction dans une direction non analysée similaire à celle rencontrée en OAMC. La configuration est cependant simplifiée et permet d'exploiter les ressources du banc BOA.

L'objectif de ce chapitre est de présenter une validation expérimentale de la commande LQG pour l'OAAO. Cette validation marque une première étape vers l'utilisation de cette commande en OAMC. Comme en OA et en filtrage de vibration, on s'intéresse aussi dans ce chapitre à l'implantation de la commande et à l'optimisation de son fonctionnement. Le but est d'identifier les contraintes d'utilisation de la commande, ses principaux paramètres de réglage. On détermine ainsi les conditions permettant d'obtenir les meilleures performances de correction. Les performances de la commande LQG sont comparées à celles fournies par d'autres lois de commande. L'intégrateur est une fois de plus utilisé comme base de comparaison, mais il est fondamentalement incapable de proposer une correction optimisée hors axe. Aussi, la commande de type POLC, proposée par [Gilles(2005)] et discutée au paragraphe 5.2.2, est implantée et comparée à la commande LQG. Enfin, grâce au simulateur numérique mis en œuvre au cours des derniers chapitre, l'ensemble de ces performances expérimentales sont comparées à celles pouvant être attendues d'après la simulation. Une fois de plus, le simulateur permet de contrôler la pertinence des résultats expérimentaux et de proposer par la suite la simulation de cas plus complexes et réalistes. Ces éléments permettront de discuter de l'implantation effective d'une commande LQG pour l'OAMC au chapitre 17.

Aussi, ce chapitre présente tout d'abord les conditions générales de l'expérience d'OAAO (paragraphe 16.1). Le paragraphe 16.2 s'intéresse à l'effet d'anisoplanétisme sur la commande LQG développée pour l'OA et la commande intégrateur. Il met ainsi en évidence le besoin d'une commande spécifique dédiée à l'OAAO et donne une base de comparaison des performances de la commande LQG dédiée à l'OAAO. Puis la définition pratique et l'implantation de cette commande sont discutées au paragraphe 16.3. Le paragraphe 16.4 présente alors les premiers résultats de correction hors axe. Il



met aussi en évidence le problème des aberrations statiques du banc. Le paragraphe 16.5 s'intéresse à la gestion de ces aberrations, soit *via* la loi de commande elle-même, soit par une méthode expérimentale. La performance finale de la commande LQG en OAAO est alors discutée au paragraphe 16.6. Comme en OA et en filtrage de vibration, le paragraphe 16.7 s'intéresse à l'évolution de ces performances en fonction des principaux paramètres de réglage de la commande. Enfin, les paragraphes 16.8 et 16.9 s'intéressent à la comparaison de la performance de la commande LQG respectivement à celle d'une commande POLC, puis à celles obtenues en simulation.

## 16.1 Conditions expérimentales

Pour l'ensemble des tests suivants, le banc a été adapté aux tests hors axe. Dans la pratique, cela se traduit simplement par le positionnement d'une seconde étoile dans le module d'injection. Il s'agit d'une seconde source identique à celle utilisée en OA, à la même longueur d'onde (voir le paragraphe 12.1.2.2). Le positionnement de cette seconde source est expliqué au paragraphe 12.1.2. L'écart angulaire  $\theta$  entre les deux sources est fixe. C'est la translation en altitude de l'écran turbulent qui va permettre de simuler l'anisoplanétisme. Le schéma expérimental correspond donc exactement à la figure 16.1. Le phénomène d'anisoplanétisme est relié au découvrement  $n = \theta h/D$  des pupilles en altitude (altitude  $h$ ). On raisonne donc désormais uniquement vis-à-vis de ce paramètre  $n$ . Enfin, ajoutons que l'analyse de front d'onde se fait grâce à l'étoile sur axe, qui sert d'étoile guide. Afin de ne pas perturber cette mesure, la seconde étoile doit être occultée au niveau de l'ASO. Ceci est obtenu par l'utilisation d'un diaphragme de champ, placé au foyer de l'ASO. Les conditions de turbulence sont celles présentées au paragraphe 14.1, correspondant à un  $\frac{D}{r_0}$  de 2,7 et un rapport  $V/D \simeq 0,3$  à  $f_{ech} = 60$  Hz. Rappelons que les empreintes des deux faisceaux, issus des deux sources, définissent sur l'écran turbulent deux pupilles, qui sont placées côte-à-côte horizontalement (voir la figure 12.7). Le vent est aussi horizontal et donc quasi-uniforme dans les deux pupilles. Mais surtout, la pupille de l'étoile hors axe se situe en aval de celle de l'étoile sur axe, dans le sens du vent. Cette configuration est *a priori* favorable, car la combinaison du retard temporel et de la décorrélation angulaire réduit la décorrélation de la turbulence. Ce point sera rediscuté ultérieurement au paragraphe 16.9.2.2. Les conditions de rapport signal-à-bruit sont celles présentées au paragraphe 12.2.2 de calibration. Le montage reste un montage d'OA : l'ASO analyse la turbulence sur axe ; la correction, optimisée pour une direction hors axe, est réalisée grâce aux miroirs (miroir déformable et miroir de basculement) conjugués de la pupille d'entrée, en boucle fermée.

Enfin, comme pour toutes les validations expérimentales précédentes, le banc est optimisé, notamment du point de vue des aberrations non communes, par modification des pentes de référence. Le SR interne est ainsi de l'ordre de 95% sauf mention explicite.

## 16.2 Effets de l'anisoplanétisme sur les commandes dédiées à l'OA

Ce paragraphe s'intéresse à l'effet de l'anisoplanétisme sur les commandes dédiées à l'OA que sont l'intégrateur et la commande LQG décrite au chapitre 14. L'évolution dans le champ des performances de ces deux lois motive le développement d'une commande LQG dédiée à l'OAAO, et fournit une base de comparaison pour cette commande implantée au paragraphe 16.3.

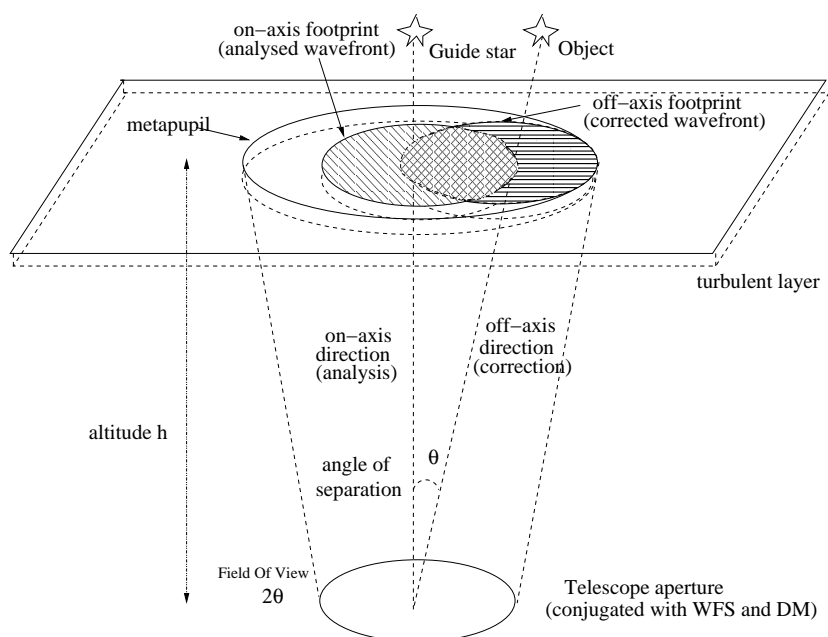


FIG. 16.1 – Schéma de principe du montage expérimental d'OAAO (OA hors axe).

### 16.2.1 L'intégrateur

Cette commande ne réalise évidemment qu'une correction sur axe de la turbulence et va donc subir les effets d'anisoplanétisme (voir le paragraphe 1.3.3.1.4). La figure 16.2 présente ainsi l'évolution du SR de l'étoile sur axe et de l'étoile hors axe, lorsqu'on augmente progressivement l'altitude de la couche turbulente, afin d'accroître l'effet d'anisoplanétisme. Les courbes sont tracées en fonction du découvrement  $n$ . En somme, analyse et correction sont toujours réalisées sur axe, et on analyse le SR pour les deux étoiles.

On constate d'abord l'homogénéité du SR sur axe quel que soit le découvrement (en fait jusqu'à  $n > 50\%$ ), c'est-à-dire pour des déplacements notables de la couche turbulente en altitude. Ce point permet de conclure à l'absence d'effets de scintillations notables, qui conduiraient à une perte de performance de la boucle d'OA. L'analyse de la variance du flux entre sous-pupilles montre toutefois sa légère augmentation avec l'altitude, mais sans conséquences sur la boucle. On peut donc bien négliger les effets de scintillation. La correction sur axe est par conséquent indifférente à l'altitude de la couche turbulente.

On note aussi la décroissance typique du SR de l'étoile hors axe du fait de l'anisoplanétisme croissant avec l'altitude. L'intégrateur, par construction, s'attache à la qualité de correction dans la ou les directions d'analyse. Dans ce cadre, il n'est pas possible de spécifier que la (ou les) direction d'intérêt est différente de celle d'analyse, ce qui constitue bien la problématique de l'OAAO.

On remarque enfin que pour un découvrement nul la performance obtenue pour l'étoile hors axe est inférieure à la performance obtenue pour l'étoile sur axe. En effet, il apparaît que le montage utilisé pour le module d'injection introduit pour l'étoile hors axe des aberrations différentielles fixes supplémentaires, notamment un astigmatisme notable.

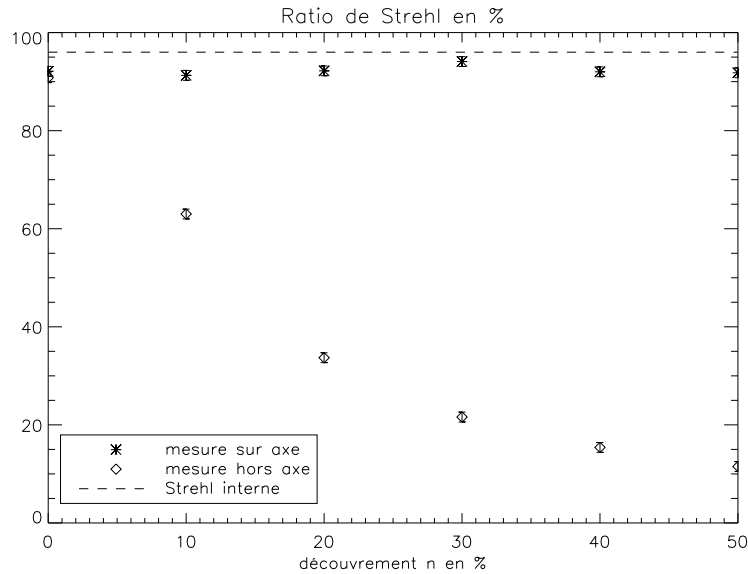


FIG. 16.2 – Évolution de la performance en terme de SR dans le champ pour l'intégrateur (OA classique). Le SR est donné, avec une barre d'erreur de 1%, pour l'étoile sur axe et l'étoile hors axe.

### 16.2.2 La commande LQG pour l'OA

Avant de s'intéresser à la correction hors axe par la commande LQG, on peut s'interroger sur l'effet de l'anisoplanétisme sur la commande LQG optimisée pour une correction sur axe (cas d'OA classique du chapitre 14). La figure 16.3 montre ainsi que la commande LQG présente la même tendance que celle de l'intégrateur face à l'anisoplanétisme : on constate une chute progressive du SR pour l'étoile hors axe. C'est ce phénomène que l'on va évidemment tenter de corriger. Mais contrairement à l'intégrateur, la commande LQG permet d'optimiser la correction hors axe.

## 16.3 Mise en œuvre de la commande LQG pour l'OAAO

La loi de commande LQG en OAAO reprend la structure proposée au paragraphe 5.5.1. Rappelons que l'OAAO est une forme d'OAMC à une seule direction d'analyse et une seule direction d'optimisation de la correction (voir la figure 16.1). De plus, la turbulence est située dans une seule couche, et la correction se fait grâce à un MD placé dans la pupille. Cette configuration simplifie fortement la forme de la commande LQG. On considère toujours un vecteur d'état de la forme (forme générique, paragraphe 7.2.1) :

$$\mathbf{X}_n^1 = \begin{pmatrix} \varphi_{n+1}^{tur} \\ \varphi_n^{tur} \\ \varphi_{n-1}^{tur} \end{pmatrix}, \quad (16.1)$$

et

$$\mathbf{X}_n^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}, \quad (16.2)$$

mais la phase  $\varphi_n^{tur}$  désigne désormais la phase dans la couche turbulente en altitude et dans la métapupille décrite en figure 16.1.

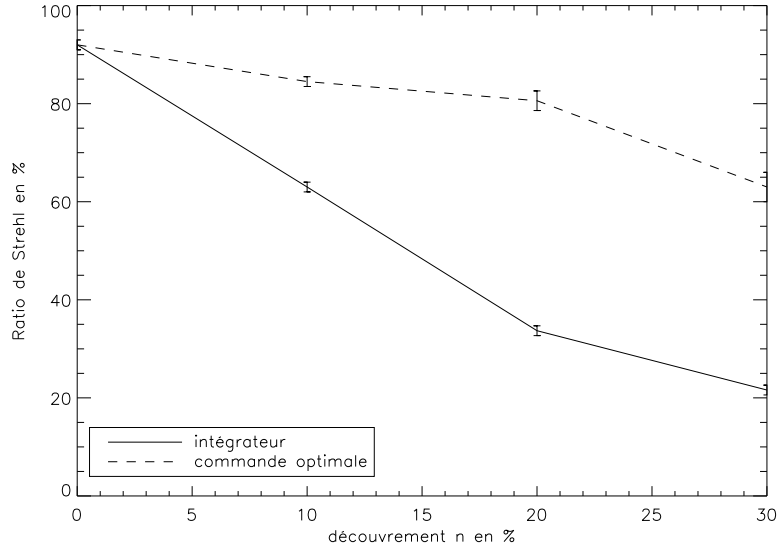


FIG. 16.3 – Évolution de la performance en terme de SR dans le champ pour l'intégrateur et une commande LQG optimisée sur axe (OA classique).

Les modèles de composants restent inchangés. Le modèle de turbulence est dimensionné par rapport à la turbulence en altitude, dans la méta-pupille, qui englobe la pupille sur axe et la pupille hors axe. Ceci implique une modification du diamètre de pupille considéré et donc une mise à l'échelle des vitesses de décorrélation et de la variance de la phase turbulente. Le modèle d'état garde cependant la forme utilisée en OA :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{n+1}^1 &= \mathbf{A}^1 \mathbf{X}_n^1 + \mathbf{v}_n \\ \mathbf{X}_{n+1}^2 &= \mathbf{A}^2 \mathbf{X}_n^2 + \mathbf{B}^2 \mathbf{u}_n \\ \mathbf{y}_n &= \mathbf{C}^1 \mathbf{X}_n^1 + \mathbf{C}^2 \mathbf{X}_n^2 + \mathbf{w}_n, \end{aligned} \quad (16.3)$$

avec toujours

$$\mathbf{A}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{tur} & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (16.4)$$

Notons que l'équation d'observation est désormais modifiée, car il faut distinguer l'analyse de la turbulence (sur axe) de la correction (hors axe) :

$$\mathbf{C}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{D}\mathbf{M}_\alpha^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{D}\mathbf{M}_\alpha^M \mathbf{N} \end{pmatrix}. \quad (16.5)$$

De ces modèles on déduit la commande sous la forme désormais classique :

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}^1 = \mathbf{A}^1 \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}^1 + \mathbf{L} \left( \mathbf{y}_n - \left( \mathbf{C}^1 \hat{\mathbf{X}}_{n/n-1}^1 + \mathbf{C}^2 \mathbf{X}_n^2 \right) \right), \quad (16.6)$$

et le calcul de la correction sous la forme :

$$\mathbf{u}_n = -\mathbf{K}' \hat{\mathbf{X}}_{n+1/n}^1 = \mathbf{P}^{oamc} \hat{\varphi}_{n+1/n}^{tur}, \quad (16.7)$$

où

$$\mathbf{P}^{oamc} = \left( \left( \mathbf{M}_\beta^M \mathbf{N} \right)^T \mathbf{M}_\beta^M \mathbf{N} \right)^\dagger \left( \mathbf{M}_\beta^M \mathbf{N} \right)^T \mathbf{M}_\beta^L. \quad (16.8)$$

Le calcul des matrices  $\mathbf{M}_\alpha^L, \mathbf{M}_\beta^L, \mathbf{M}_\alpha^M, \mathbf{M}_\beta^M$  a été décrit au paragraphe 8.4.2. Mais il est ici simplifié. En effet, le miroir étant conjugué de la pupille, les matrices  $\mathbf{M}_\alpha^M, \mathbf{M}_\beta^M$  sont égales à l'identité. Ensuite, le calcul de  $\mathbf{M}_\alpha^L, \mathbf{M}_\beta^L$  ne fait intervenir ici que la direction d'analyse sur axe pour  $\alpha$ , et une direction de correction hors axe pour  $\beta$ . Ainsi, en notant par  $(\psi, \phi)$  les angles de déclinaison et d'azimut, alors  $(\psi, \phi)_\alpha = (0, 0)$  et  $(\psi, \phi)_\beta = (\theta, 0)$ ,  $\theta$  étant défini selon le paragraphe 16.1 par  $n = \theta h/D$ . Les matrices  $\mathbf{M}_\alpha^L$  et  $\mathbf{M}_\beta^L$  sont calculées pour chaque angle  $\theta$  (la dimension de la métapupille augmente lorsque  $\theta$  augmente). La figure 8.3 présente un exemple d'une matrice  $\mathbf{M}_\beta^L$  pour  $n = 10\%$  sur le montage expérimental.

L'ensemble des matrices intervenant dans les modèles d'état et de mesure étant défini, le calcul du gain de l'observateur passe par la résolution de l'équation de Riccati. Les résultats proposés ici sont obtenus, sauf mention contraire, par estimation de la phase sur 150 modes. Dans ce contexte, la résolution de l'équation de Riccati peut exploiter les méthodes de simplification du paragraphe 7.3.2 (en l'absence de filtrage de toute autre composante particulière, vibratoire ou statique). La résolution par recherche itérative du point fixe se fait donc sur une sous-matrice de taille  $150 \times 150$  et converge alors en 1437 itérations pour une variation de la trace inférieure à  $1 \cdot 10^{-5}$  (voir le paragraphe 7.3.1). Là encore, la symétrie et la définie positivité de la solution sont vérifiées.

Enfin, l'implantation de la loi de commande sur le RTC se base sur les remarques du paragraphe 14.3.2.

## 16.4 Premières performances dans le champ et problème des aberrations statiques

Ce paragraphe présente un premier essai de correction hors axe, pour  $n = 20\%$ , et une première évaluation de performance. La loi de commande spécifiée au paragraphe précédent est implantée dans le RTC. La boucle est alors fermée, et l'asservissement est stable. Une correction de la turbulence hors axe est alors réalisée, optimisée pour ce découvrement de  $n = 20\%$ . Les SR obtenus hors axe pour l'intégrateur et la commande LQG hors axe sont respectivement de 34,5% et 57,3% soit un gain notable en performances. Pourtant, il reste inférieur aux gains obtenus en simulation (voir le paragraphe 16.9). Un SR de plus de 75% dans les conditions expérimentales choisies pourrait en effet être attendu.

Divers postes d'erreur possibles ont été testés (modèles de composants, de bruit, erreur angulaire entre les étoiles, défaut de réglage des sources...) En fait, il apparaît que cet écart est dû aux aberrations statiques du montage. On peut détecter l'effet des aberrations statiques lorsqu'une correction hors axe est menée, en boucle fermée. On constate sur l'ASO un décalage de l'ensemble des spots après convergence de la boucle vers une structure fixe et éloignée des pentes de référence. Cette structure est parfois très aberrante. La performance est évidemment dégradée, et pour les forts découvements la stabilité de la boucle peut être compromise. Enfin, l'analyse fine des pentes mesurées sur axe et des états estimés confirme l'existence d'une composante turbulente statique, mal gérée par la boucle d'asservissement. Le paragraphe suivant s'emploie à comprendre ce phénomène et propose des solutions.

## 16.5 Gestion des aberrations statiques

Ce paragraphe traite de la gestion des aberrations statiques en OAAO. Il discute tout d'abord de l'origine du phénomène. Puis, afin de répondre au problème posé, nous mettons à profit les résultats du chapitre 10. Ce chapitre a discuté de la possibilité d'inclure dans le modèle d'état l'existence d'une composante de phase statique, et donc d'en réaliser l'estimation et la correction. Cette méthode est exploitée ici. Néanmoins, sa difficulté de mise en œuvre amène à considérer aussi une méthode plus expérimentale.

### 16.5.1 Position du problème

Le montage présente des aberrations dites statiques, c'est-à-dire des aberrations non évolutives dans le temps et situées sur la voie commune de l'OA, depuis les sources, et jusqu'à l'ASO. L'origine de ces aberrations statiques est multiple. Il s'agit de l'ensemble des composantes statiques du montage. Cela inclut donc tous les défauts des optiques ou de réglage du banc, les défauts de planéité résiduels du miroir déformable après application des tensions d'*offset* de remise à plat (voir les paragraphes 12.2.3.1 et 13.2.2.3). Cela inclut aussi la composante moyenne de l'écran turbulent en rotation, puisqu'il ne fournit pas une turbulence de moyenne nulle sur une rotation d'un tour complet. Enfin, nous avons indiqué que la correction des aberrations non communes du montage était basée sur la modification des pentes de référence de l'ASO. Cette opération revient donc à introduire délibérément et artificiellement une aberration statique supplémentaire.

Par souci de simplicité, et à défaut de données supplémentaires, nous allons faire l'hypothèse dans tout ce chapitre, que les aberrations statiques sont invariantes dans le champ et donc équivalentes à une phase localisée dans la pupille. Nous avons mentionné précédemment l'existence d'un astigmatisme différentiel entre la source sur axe et la source hors axe. Néanmoins, il s'agit là d'une composante différentielle inconnue qui sort donc du cadre de notre problème et sera négligée.

En OA classique, ces aberrations n'ont aucune conséquence. Elles sont mesurées, tout comme la turbulence, et sont corrigées dans la direction sur axe grâce au miroir déformable. L'intégrateur, comme la commande LQG optimisée sur axe, présente d'ailleurs une forte réjection à fréquence nulle (voir le chapitre 8).

En OAAO, le problème est différent. Compte tenu du modèle de perturbation utilisé dans notre commande LQG pour l'OAAO, la composante statique est interprétée comme de la turbulence en altitude. Cette composante est donc extrapolée hors axe, à tort. Elle sera donc mal corrigée dans la direction d'intérêt hors axe.

### 16.5.2 Mise en œuvre d'une commande gérant la composante statique

Comme on vient de l'expliquer, l'OAAO requiert une gestion spécifique des aberrations statiques. On propose donc d'utiliser la méthode d'estimation et filtrage des composantes statiques décrite au paragraphe 10.2. Tout d'abord, on tente de valider sa mise en œuvre dans un cas simple d'OA classique, même si cette configuration ne nécessite pas un filtrage spécifique. L'analyse est ensuite étendue au cas de l'OAAO.

#### 16.5.2.1 Modification de la commande LQG pour l'OA

On considère donc d'abord un cas d'OA. L'idée est d'introduire dans le modèle d'état une composante de phase, statique, supposée être dans la pupille. On souhaiterait estimer la composante statique et l'isoler de la turbulence dynamique.

La loi de commande pour l'OA classique est donc modifiée selon la méthode proposée au paragraphe 10.2. On définit un nouveau vecteur d'état et la composante statique est modélisée grâce à un modèle d'état de la forme  $\phi_{n+1}^{stat} = \phi_n^{stat}$ . Tous les autres éléments de la commande restent identiques au cas d'OA classique. De manière plus précise, le vecteur d'état est défini selon :

$$\mathbf{X}_n^1 = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{stat} \\ \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tur} \\ \phi_{n-1}^{tur} \end{pmatrix}, \quad (16.9)$$

et

$$\mathbf{X}_n^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (16.10)$$

Les équations d'état (7.4) et (7.5), et d'observation (7.6) deviennent alors :

$$\mathbf{X}_{n+1}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{tur} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n^1 + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \nu_n, \quad (16.11)$$

$$\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & 0 & 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{X}_n^1 + \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{DN} \end{pmatrix} \mathbf{X}_n^2 + \mathbf{w}_n, \quad (16.12)$$

et la correction est donnée cette fois par :

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{P}^{oa} \left( \hat{\varphi}_{n+1/n}^{tur} + \hat{\varphi}_{n+1/n}^{stat} \right). \quad (16.13)$$

L'équation récursive d'estimation de l'état reste identique aux cas d'OA précédents. On peut donc aisément calculer les nouvelles matrices intervenant dans la commande, et implanter la loi de commande modifiée dans le RTC.

La résolution de l'équation de Riccati selon la méthode proposée au paragraphe 7.3.2 est cette fois non simplifiable, en raison de la présence de la composante de phase statique. En considérant une estimation de la phase turbulente sur 120 modes et de la composante statique sur 30 modes, la recherche du point fixe doit être menée sur une matrice de  $390 \times 390$ . Le calcul est plus long, puisque en 1000 itérations la variation finale de la trace d'itération à itération n'est qu'au mieux de  $10^{-2}$ . Néanmoins, malgré cette complexité calculatoire accrue, la symétrie et la définie positivité sont toujours vérifiées tout au long des calculs.

### 16.5.2.2 Validation expérimentale du concept en OA

Afin de vérifier le fonctionnement de cette solution, on suit quelques étapes préliminaires. Tout d'abord, on simplifie le problème et on considère la seule présence d'une aberration statique que l'on cherche à estimer et à corriger. Puis, on se place dans un cas où aberration statique et turbulence dynamique sont présentes et l'on gère simultanément les deux composantes.

Dans une première étape, on considère donc un cas d'OA simple, avec un écran turbulent immobile. Il s'agit d'estimer et de corriger la composante statique du système. Ceci revient à supprimer dans la commande décrite par les équations (16.11) et (16.12) toute la partie turbulente, et à ne conserver que la partie de la commande correspondant à la phase statique.

Cette opération est une réussite : la boucle fermée est stable et apporte une bonne correction.

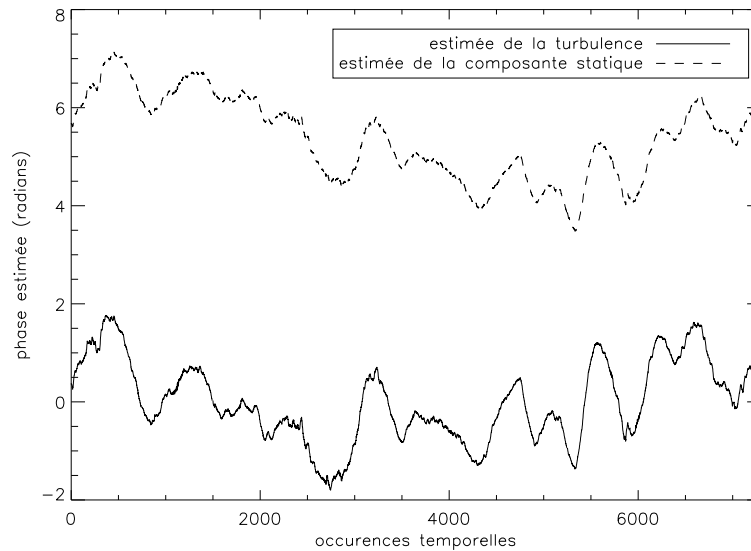


FIG. 16.4 – Comparaison des composantes de tilt estimées dans le cas d’une turbulence dynamique et d’une estimation couplée des composantes statique et dynamique de la turbulence. On constate que la turbulence estimée est globalement à moyenne nulle, tandis que la composante statique estimée n’est pas constante mais au contraire fortement corrélée avec la composante de turbulence dynamique estimée.

On considère maintenant un cas d’OA tel que la turbulence dynamique est présente (écran en rotation) ainsi que les aberrations statiques. On souhaite donc estimer et corriger désormais conjointement la turbulence dynamique et les aberrations statiques. La commande LQG associée, filtrant la composante statique, est celle décrite au paragraphe précédent. A l’application de cette commande, on constate que la performance en SR est identique à celle obtenue avec la commande LQG standard (sans gestion des aberrations statiques, voir le paragraphe 14.4). On n’attendait pas de gain en performance puisque la commande LQG standard atténue les composantes statiques. Par contre, il est plus intéressant de se pencher sur la figure 16.4. Cette figure présente la composante de tilt estimée au cours du temps par le commande LQG filtrant les composantes statiques, d’une part pour la composante statique  $\hat{\phi}_{n/n}^{stat}$  et d’autre part pour la composante turbulente  $\hat{\phi}_{n/n}^{tur}$ . On constate ainsi que la composante turbulente dynamique estimée est à moyenne globalement nulle. Mais le procédé est inefficace, au sens où la composante statique estimée ne correspond pas à une composante constante (ou de variation temporelle bien plus lente que la composante turbulente estimée). Elle ne tend pas vers la moyenne temporelle effective de la turbulence, mais reste très fortement corrélée avec la composante dynamique estimée. En somme, le processus d’estimation n’a pas permis de différencier efficacement la composante statique de la composante dynamique. Au final, la correction reste globalement correcte mais le but recherché n’est pas atteint.

### 16.5.2.3 Modification de la commande LQG pour l’OAAO

On applique la même méthode de filtrage que celle appliquée précédemment en OA mais sur la base de la commande d’OAAO. On distingue cette fois le traitement de la turbulence dynamique qui



est extrapolée dans la direction hors axe et projetée sur le miroir (action du projecteur  $\mathbf{P}^{oamc}$ ), du traitement de la composante statique qui est directement projetée sur le miroir (action du projecteur  $\mathbf{P}^{oa}$ ). On espère éviter ainsi d'extrapoler à tort la composante statique.

Cependant l'approche n'a pas été très satisfaisante en OA classique. Dans le scénario OAAO l'analyse de front d'onde est similaire, on s'attend donc aux mêmes difficultés pour séparer les composantes dynamiques et statiques. Mais les conséquences en terme de performance risquent d'être plus dramatiques : une partie de la turbulence dynamique sera interprétée comme une composante «statique» dans la pupille, dégradant de fait la correction hors axe. On vérifie ce point.

La loi de commande LQG pour l'OAAO est donc modifiée selon la méthode proposée au paragraphe 10.2 et de manière similaire à celle appliquée au paragraphe 16.5.2.1.

Les équations du modèle d'état et d'observation de (16.3) deviennent alors :

$$\mathbf{X}_{n+1}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{tur} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n^1 + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n, \quad (16.14)$$

$$\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & 0 & 0 & \mathbf{DM}_\alpha^L \end{pmatrix} \mathbf{X}_n^1 + \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{DM}_\alpha^M \mathbf{N} \end{pmatrix} \mathbf{X}_n^2 + \mathbf{w}_n, \quad (16.15)$$

et la correction est donnée cette fois par :

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{P}^{oamc} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{n+1/n}^{tur} + \mathbf{P}^{oa} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{n+1/n}^{stat}. \quad (16.16)$$

Les matrices  $\mathbf{M}_\alpha^L$ ,  $\mathbf{M}_\alpha^M$ ,  $\mathbf{P}^{oamc}$  sont définies au paragraphe 16.3.  $\mathbf{P}^{oa}$  est le projecteur défini en OA au paragraphe 5.5.2.

L'équation récursive d'estimation de l'état reste identique aux cas précédents. On peut donc aisément calculer les nouvelles matrices intervenant dans la commande et implanter la loi de commande modifiée dans le RTC. La résolution de l'équation de Riccati est obtenue de manière analogue au cas précédent (OA).

#### 16.5.2.4 Validation expérimentale du concept en OAAO

Comme attendu, le résultat en OAAO est négatif. En terme de SR, on constate une dégradation des performances de correction hors axe par rapport à une correction hors axe sans filtrage de la composante statique (cas du paragraphe 16.4). On constate même assez souvent une dérive voire une instabilité de la boucle, lorsque l'erreur commise devient trop importante (perte des spots).

La conclusion de ces tests est que la solution proposée ne fonctionne pas dans un cadre expérimental. La commande ne peut séparer efficacement composantes dynamiques et composantes statiques sur la seule base d'un *a priori* temporel, particulièrement dans ces cas d'analyse unidirectionnelle. Cette difficulté est probablement due à l'évolution lente de la turbulence relativement à la fréquence d'asservissement.

Face à l'échec momentané de la solution de filtrage de la composante statique, une méthode expérimentale a été mise en œuvre. Elle est présentée au chapitre suivant.

### 16.5.3 Mise en œuvre d'une solution expérimentale

#### 16.5.3.1 Principe

Le principe de cette solution expérimentale est simple : il s'agit de précompenser la phase statique, de sorte qu'elle ne soit plus mesurée en boucle fermée. Elle ne perturbe donc plus l'estimation de la

phase turbulente et son extrapolation hors axe. Pour cela, l'idée est d'acquérir des mesures de pentes de la turbulence, en boucle ouverte, sur un ou plusieurs tours d'écran. On moyenne ensuite les mesures pour obtenir la pente moyenne  $\mathbf{p}^{moy}$  associée à la phase statique. On peut alors corriger cette phase, en boucle ouverte, en utilisant la matrice de commande et la méthode de correction présentée au paragraphe 2.4, c'est-à-dire en calculant les tensions  $\mathbf{u}_{corr}$  permettant de corriger cette phase, définies selon :

$$\Delta \mathbf{u}_{corr} = -\mathbf{M}_{com} \mathbf{p}^{moy}. \quad (16.17)$$

On calcule ainsi un nouveau point de fonctionnement du système. C'est le principe d'application de tensions d'*offset*, décrit au paragraphe 13.2.2.3. On souhaite ainsi que la mesure de pente moyenne  $\mathbf{p}^{moy}$  après application des tensions d'*offset* soit proche de zéro. On compense naturellement la composante statique présente dans le système par les tensions d'*offset* du miroir.

Néanmoins, la mesure de pente est bruitée, et se fait en boucle ouverte, avec des pentes moyennes potentiellement fortes. La mesure de pente peut dans certains cas être en limite de linéarité. Aussi, ce protocole est répété itérativement et de manière incrémentale jusqu'à convergence et stabilisation des pentes moyennes résiduelles à une valeur faible et homogène sur les différentes pentes. C'est-à-dire qu'à chaque itération, on applique une tension d'*offset*  $\mathbf{u}_{offset}$ , on mesure la pente résiduelle moyenne, on calcule  $\Delta \mathbf{u}_{corr}$  via (16.17) et on met à jour  $\mathbf{u}_{offset}$  selon :

$$\mathbf{u}_{offset} \leftarrow \mathbf{u}_{offset} + \Delta \mathbf{u}_{corr}, \quad (16.18)$$

et ce jusqu'à convergence de la tension d'*offset*  $\mathbf{u}_{offset}$ .

En suivant la méthode décrite au paragraphe 13.2.2.3, cette tension d'*offset* est utilisée comme nouveau point de fonctionnement du miroir en boucle fermée. Le vecteur de tension d'*offset*  $\mathbf{u}_{corr}$  est systématiquement additionné aux tensions de commande calculées par la commande LQG. Avec ce procédé, la commande continue à fonctionner autour d'une tension nulle.

Enfin, cette méthode peut être encore raffinée. En effet, le produit  $\mathbf{M}_{inter} \mathbf{M}_{com}$  n'étant pas exactement égal à l'identité, l'application de  $\mathbf{u}_{offset}$  ne permet pas d'obtenir une pente résiduelle moyenne rigoureusement nulle. En effet, la mesure de pente moyenne finale  $\mathbf{p}^{fin}$  est donnée par :

$$\mathbf{p}^{fin} = \mathbf{p}^{moy} + \mathbf{M}_{inter} \mathbf{u}_{offset} = \mathbf{p}^{moy} - \mathbf{M}_{inter} \mathbf{M}_{com} \mathbf{p}^{moy} \neq 0, \quad (16.19)$$

Il existe donc un résidu de pente correspondant à un résidu de phase statique, qui peut une fois de plus perturber la correction hors axe. Ce résidu de pente ne pourra jamais être corrigé par définition (il appartient au noyau de  $\mathbf{M}_{com}$ ). Aussi, une solution consiste à modifier les pentes de référence de l'ASO (voir le paragraphe 12.4), et à leur additionner le résidu de pente obtenu  $\mathbf{p}^{fin}$ . Les pentes résiduelles après applications de  $\mathbf{u}_{offset}$  sont alors nulles. Aucune phase statique résiduelle n'est donc mesurée. La correction hors axe ne sera donc pas biaisée.

### 16.5.3.2 Validation expérimentale

L'utilisation de cette technique a d'abord été validée avec succès en OA. La méthode est ensuite appliquée à l'OAAO pour un découvrement de  $n = 20\%$ . La tension d'*offset* est calculée itérativement en boucle ouverte sur la turbulence et sur un tour d'écran. Les pentes de référence sont modifiées en prenant en compte la pente moyenne résiduelle (cf. équation (16.19)). La commande LQG standard pour l'OAAO est appliquée (pas de gestion des aberrations statiques, cf. équations du paragraphe 16.3). La figure 16.5 montre alors l'évolution de la performance en SR lorsque le protocole est appliqué avec un nombre croissant d'itérations pour le calcul de  $\mathbf{p}^{moy}$ .

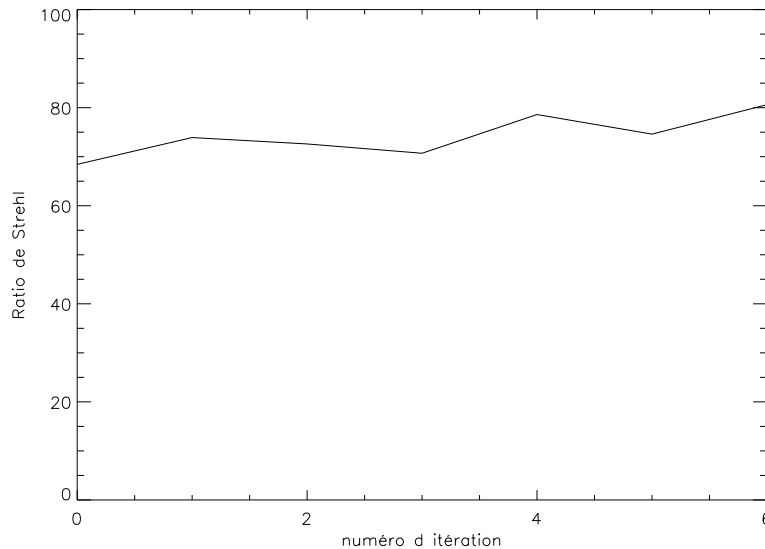


FIG. 16.5 – Évolution de la performance de la commande LQG en terme de SR avec l'optimisation des tensions d'offset (réduction de la composante statique du système). Le découvrement est de  $n = 20\%$ .

On constate une nette amélioration de la correction. Là encore, il y a une diminution flagrante de la composante moyenne de la turbulence estimée. On constate aussi que quelques itérations sont nécessaires pour améliorer la précision du calcul de la pente moyenne  $\mathbf{p}^{moy}$  et des tensions d'offset associées.

#### 16.5.4 Conclusion sur le filtrage des composantes statiques

Ces tests ont donc montré l'importance d'un filtrage de la composante statique. Ils ont aussi montré comment la solution initialement proposée pour réaliser ce filtrage est inadéquate dans le cadre expérimental. Le filtre de Kalman ne semble pas en mesure d'identifier les composantes statiques des composantes turbulentes dynamiques sur la seule base des *a priori* temporels, trop peu différents. Ce résultat *a priori* négatif montre cependant que les solutions envisagées théoriquement peuvent échouer dans le cadre expérimental. Les simulations numériques ne permettaient pas de conclure étant donné les résultats variables obtenus (voir le paragraphe 10.2.2).

Une solution expérimentale a été cependant proposée pour résoudre le problème de la composante statique. Cette solution expérimentale reste simple et conduit à une amélioration nette des performances de correction hors axe. Néanmoins, une solution utilisant directement la loi de commande serait plus satisfaisante, car plus adaptée à un usage expérimental intensif et répétitif.

Ce problème de compensation des aberrations statiques amène donc à plusieurs interrogations. Tout d'abord, peut-on envisager une solution s'appuyant directement sur la loi de commande ? Il semble qu'en OAAO, la solution proposée soit fortement limitée par la difficulté à séparer nettement phase statique et phase dynamique. Une nouvelle piste a été proposée au paragraphe 10.2.3.

Ensuite, on peut s'interroger sur l'étendue de ce problème des aberrations statiques. Tout d'abord, leur impact dépend évidemment de leur énergie et de la performance recherchée. On peut penser qu'en présence d'une turbulence bien plus forte (et plus réaliste), les aberrations statiques représentent un

défaut relativement minime. Sans effet en OA, elles sont pénalisantes en OAAO, bien que des solutions aient été proposées pour les gérer.

Dans le cadre de l'OAMC, on peut s'attendre à ce que le problème des aberrations statiques soit moindre. En effet, la difficulté d'estimation de ces aberrations en OAAO réside notamment dans l'évolution lente de la turbulence ne permettant pas de différencier aberrations et turbulence grâce aux *a priori* temporels. En OAMC, la mesure multi-directionnelle devrait permettre d'exploiter à la fois les *a priori* spatiaux et temporels, et donc d'identifier plus certainement chaque composante.

## 16.6 Performances finales de la commande LQG

Ce paragraphe présente les performances finales de la commande LQG obtenues lorsque le principe de compensation des aberrations statiques par application de tensions d'*offset* a été mis en place. Ces performances sont obtenues avec les meilleurs choix de paramètres (variance de bruit de mesure, nombre de modes estimés). Ce choix des paramètres est discuté au paragraphe 16.7. Ces résultats originaux de correction dynamique de la turbulence dans une direction hors axe grâce à une commande LQG ont fait l'objet d'un article dans les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences [Petit *et al.*(2005)].

### 16.6.1 Performances pour diverses directions d'optimisation dans le champ

La figure 16.6 représente les meilleures performances obtenues sur le banc lorsque la correction a été optimisée pour diverses directions. Plus précisément, pour chaque choix de découvrement (ou de manière équivalente d'altitude), la correction a été optimisée pour le découvrement en question et on évalue le SR de l'étoile hors axe. On en déduit une courbe de performance selon le découvrement. On peut comparer le résultat obtenu à  $n = 20\%$  au résultat initial du paragraphe 16.4 ( $SR = 57\%$ ). On peut aussi comparer la courbe obtenue à celle proposée dans [Petit *et al.*(2006)], obtenue quelques mois auparavant, avec une procédure d'optimisation des tensions d'*offset* moins bonne. En effet, une seule itération était utilisée, sans modification des pentes de référence. On constate une franche amélioration des performances de correction hors axe. Les SR doivent être évidemment évalués relativement au SR interne. Or celui-ci a été amélioré par l'optimisation des procédures de réglage du banc entre ces tests et ceux proposés dans [Petit *et al.*(2006)]. Néanmoins, même en tenant compte de cette amélioration du SR interne, la performance hors axe reste très nettement supérieure grâce à cette procédure itérative de compensation des aberrations statiques. Il est à noter que dans le cadre d'une correction hors axe, la performance obtenue en terme de SR présente une variance plus forte.

Ces performances sont aussi illustrées par les trois paires d'images présentées en figure 16.7. Il s'agit des images obtenues sur les deux étoiles, lorsque  $n = 20\%$ , et pour trois modes : en boucle ouverte, avec correction par intégrateur, avec correction optimisée hors axe à  $n = 20\%$  avec la commande LQG. On note la nette amélioration de la FEP de l'étoile hors axe, et la quasi inversion en fait de correction entre les deux étoiles, pour une correction par intégrateur puis par commande LQG. Ces images sont obtenues par le cumul de 4 images de 30 secondes chacune, représentant ainsi une pose globale sur un tour complet d'écran.

On constate évidemment que la correction apportée sur axe est dégradée lorsque la correction est optimisée pour une direction hors axe. C'est en cela que la correction réalisée se rapproche d'une correction de type MCAO : on optimise réellement la correction pour une direction d'intérêt, conduisant potentiellement à une dégradation de la correction dans les autres directions.

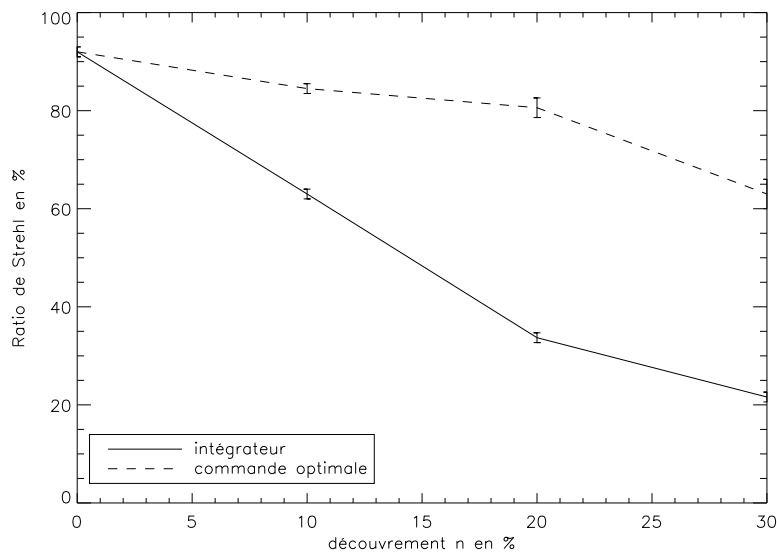


FIG. 16.6 – Évolution de la performance en terme de SR dans le champ de la commande LQG, comparée à une correction sur axe par intégrateur.

### 16.6.2 Performance dans le champ pour une direction d'optimisation

On s'intéresse donc à l'évolution du SR dans le champ lorsque la correction est optimisée dans une direction donnée. La figure 16.8 compare l'évolution des SR dans la direction de l'étoile hors axe et de l'étoile sur axe, pour chaque découvrement. Pour chacun d'eux, la correction est optimisée dans la direction hors axe. La correction sur axe est donc dégradée, d'autant plus que le découvrement est grand, tout simplement par effet d'anisoplanétisme.

Plus généralement, on peut s'interroger sur l'évolution du SR dans le champ lorsque la correction a été optimisée dans une direction précise. Fusco a déjà étudié cet aspect [Fusco *et al.*(2001)] dans un cadre similaire à l'OAAO, avec une seule étoile guide et un seul miroir. Cependant, il considère un problème boucle ouverte, sans retard, et pour un profil turbulent à 4 couches. De plus, son miroir est conjugué en altitude à une couche turbulente équivalente aux 4 couches présentes. Son approche est alors basée sur une reconstruction optimale de la phase en statique (occurrence par occurrence), s'apparentant en somme à une version statique de la reconstruction optimale réalisée par le filtre de Kalman [Le Roux(2003)]. Il propose dans ce cadre (voir la figure 16.9) une correction optimale à un miroir pour une direction hors axe donnée (angle de 40 arcsecondes), et compare la performance obtenue (courbe tirets-points) dans le champ à une correction optimale à 4 miroirs, conjugués à chaque couche turbulente, c'est-à-dire à la meilleure correction possible de la turbulence dans le champ (trait plein). Il montre alors que la courbe de performance obtenue pour la direction d'optimisation tangente la courbe de performance optimale à 4 miroirs et atteint son maximum pour une direction d'angle inférieure (20 arcsecondes) à la direction d'optimisation.

On peut rapprocher ses résultats des résultats obtenus en expérimentation. Dans le cadre des tests sur BOA, une seule couche turbulente existe. Le cas d'une correction optimale dans le champ serait donc obtenue pour un miroir conjugué de la couche turbulente en altitude. Ce n'est pas le cas ici, et on ne peut obtenir directement la courbe en trait plein. Par contre, on doit pouvoir observer le décalage

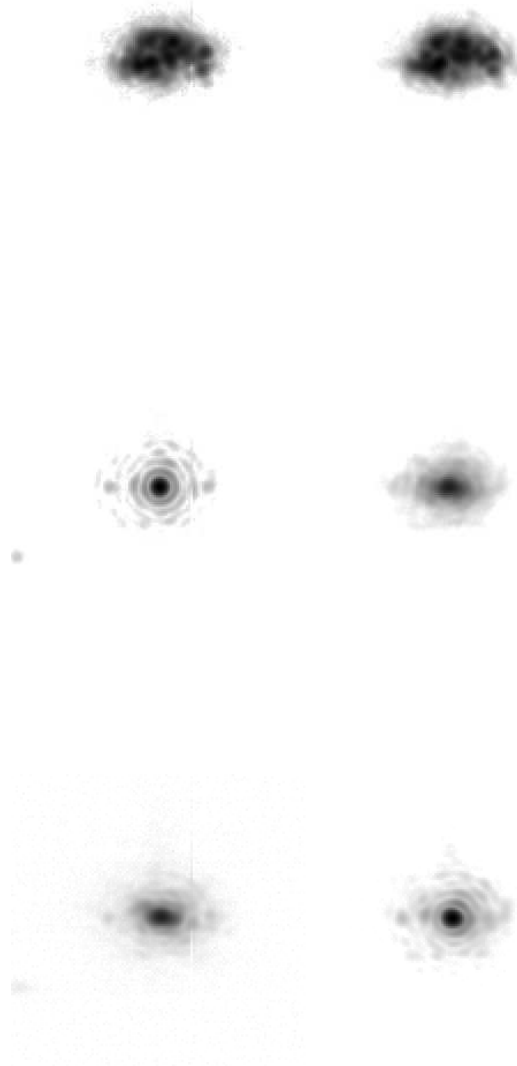


FIG. 16.7 – FEP des étoiles sur axe (gauche) et hors axe (droite) pour  $n = 20\%$ , en boucle ouverte (haut), avec correction par intégrateur (milieu), ou par commande LQG optimisée pour  $n$  (en bas). Les SR sont respectivement de gauche à droite : en haut : 7%, 7% , au milieu : 93%, 34%, en bas : 43%, 81%.

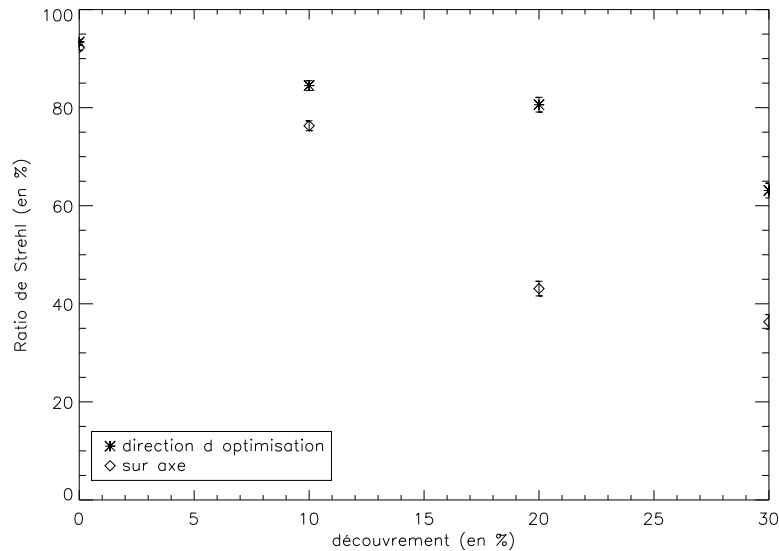


FIG. 16.8 – Évolution de la performance en terme de SR dans la direction d'optimisation hors axe et dans la direction sur axe pour chaque découvrement.

du maximum de la courbe de performance dans le champ par rapport à la direction d'optimisation.

Ce résultat se retrouve dans notre approche expérimentale : la figure 16.10 montre ainsi l'évolution de la correction dans le champ lorsque la direction d'optimisation est de  $n = 10\%$  ou  $n = 20\%$  (dans la réalité, ceci correspond à faire varier l'altitude de la couche autour de la position pour laquelle la commande LQG a été calculée). On constate ainsi que le maximum de correction est atteint quelques 4% de découvrement en-deçà de la position de calcul de la commande LQG. Ces deux courbes confirment donc expérimentalement le comportement annoncé par Fusco. La figure 16.10 montre aussi qu'une erreur angulaire sur la direction d'optimisation de quelques pourcents est tolérable, induisant une perte de performance en SR de quelques pourcents elle aussi.<sup>1</sup>

Ce résultat confirme expérimentalement les observations de Fusco. On pourrait aussi penser que pour maximiser la performance dans une direction d'intérêt donnée, il serait préférable d'optimiser la correction pour une direction angulaire légèrement plus forte (quelques % de découvrement au-delà). Comme le souligne déjà Fusco, cette conclusion est erronée, et la meilleure performance dans une direction d'intérêt est toujours obtenue en optimisant la correction dans cette direction.

### 16.6.3 Propriétés de l'innovation et des états estimés

Les analyses menées en OA sur l'innovation et les états estimés ne sont pas reprises en OAAO. Les résultats sont en effet très similaires. Les états estimés présentent notamment les mêmes propriétés qu'en OA, c'est-à-dire un très bon respect des *a priori* spatiaux et un écart de leurs corrélations à un pas vis-à-vis du modèle AR1. Du point de vue de l'innovation, celle-ci est assurément non blanche et biaisée, attestant de la persistance des erreurs de modèle. On peut toutefois noter que ces défauts de l'innovation s'amplifient à fort découvrement, attendu que les conditions d'estimation et de correction

<sup>1</sup>Ces courbes ont été obtenues avec un procédé de correction des aberrations statiques encore non optimal, expliquant un léger écart avec les courbes de performance obtenues en figure 16.8

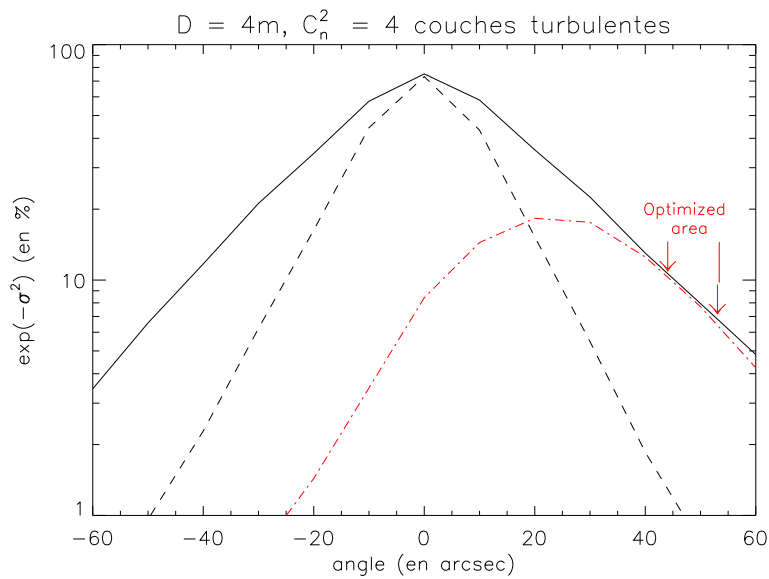


FIG. 16.9 – Performance dans le champ pour un profil turbulent à 4 couches (configuration type Gemini, miroir de 4m), 1 étoile guide et 1 MD. En trait plein, la performance optimale possible en utilisant 4 MD conjugués de chacune des couches. En tirets-points, la performance dans le champ lors d’une optimisation de la correction pour une direction de 40 arcsecondes, en utilisant un MD. Le maximum de cette courbe de performance est décalé de la direction d’optimisation. (*Remerciements à T. Fusco*).

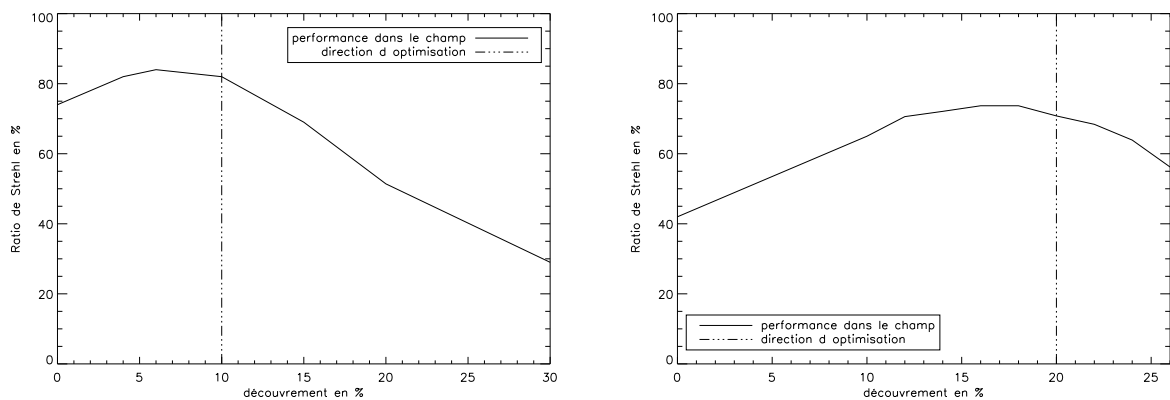


FIG. 16.10 – Évolution de la correction dans le champ lorsque la commande est optimisée pour une direction d’intérêt de  $n = 10\%$  (à gauche) ou  $n = 20\%$  (à droite).



sont de plus en plus extrêmes. Néanmoins, les performances et la stabilité restent bonnes.

#### 16.6.4 Conclusion sur les performances obtenues

Ces résultats démontrent donc expérimentalement les performances de la commande LQG en OAAO. Le gain de correction dans des directions non analysées et notablement éloignées de la direction d'analyse est très significatif. Ces résultats ont été obtenus dans les meilleures conditions de réglage de la commande. On s'intéresse donc dans le paragraphe suivant à l'évolution de ces performances en considérant les deux paramètres principaux de réglage de la commande LQG : la variance du bruit de mesure et le nombre de modes estimés.

### 16.7 Étude paramétrique de la correction hors axe

Ce paragraphe fait écho aux tests paramétriques faits en OA classique, dans le cadre de l'OAAO. Il s'agit d'évaluer l'impact des paramètres de réglage de la commande que sont la variance du bruit de mesure et le nombre de modes estimés sur la performance globale de la commande LQG en OAAO. Cette étude a déjà été menée et discutée en OA. On s'intéresse ici l'évolution des conclusions obtenues en OA avec le découvrément.

#### 16.7.1 Étude en fonction de la variance de bruit de mesure

Le paramètre de variance de bruit de mesure joue le rôle de régulateur dans la commande LQG. C'est un paramètre de réglage essentiel. En OA classique on a montré que sa valeur est généralement un peu supérieure à sa valeur théorique et qu'en cela il permet de rendre compte des erreurs de modèle. On peut s'intéresser à sa valeur optimale en fonction de la correction dans le champ.

La figure 16.11 représente ainsi les courbes d'évolution de la performance de la commande LQG pour diverses variances de bruit, et ce pour divers découvrément. On y retrouve un comportement identique à celui observé en correction sur axe : il existe une valeur optimale de la variance du bruit, et en-deçà de cette valeur, le SR chute rapidement. Dans le cas  $n = 30\%$  et pour un bruit de  $5 \cdot 10^{-3}$  la boucle devient même instable. Pour des variance de bruit supérieures à l'optimal, la décroissance de la performance est plus lente et aucune instabilité n'apparaît. On remarque aussi que la valeur de la variance de bruit optimale est toujours supérieure au bruit de mesure théorique de  $10^{-3}$  pixels<sup>2</sup> et qu'elle tend à augmenter avec le découvrément : d'une valeur d'environ 10 fois la variance de bruit théorique pour  $n = 0\%$ , la variance de bruit optimale est de 60 puis 200 fois environ la variance théorique, pour  $n = 10\%$  et  $n = 30\%$  respectivement. On pourrait comme pour l'étude sur axe considérer la variance de l'innovation et mettre en évidence un minimum de cette variance pour la variance de bruit optimale.

Ceci conforte l'idée que la variance de bruit de mesure est un paramètre de réglage de la commande, qu'il faut savoir augmenter avec les erreurs de modèle. Ces erreurs de modèles seront d'autant plus pénalisantes à fort découvrément, expliquant la valeur croissante de la variance du bruit de mesure optimale. Ceci donne une bonne idée de la manière d'optimiser les performances de la commande.

#### 16.7.2 Étude en fonction du nombre de modes

Cette étude a été menée de nouveau pour le cas d'un découvrément de  $n = 20\%$ , afin d'être confrontée à celle menée sur axe, dont les résultats montraient une tendance sensiblement positive. En effet, l'évolution du SR avec le nombre de modes estimés en OA était peu marquée, mais l'étude des

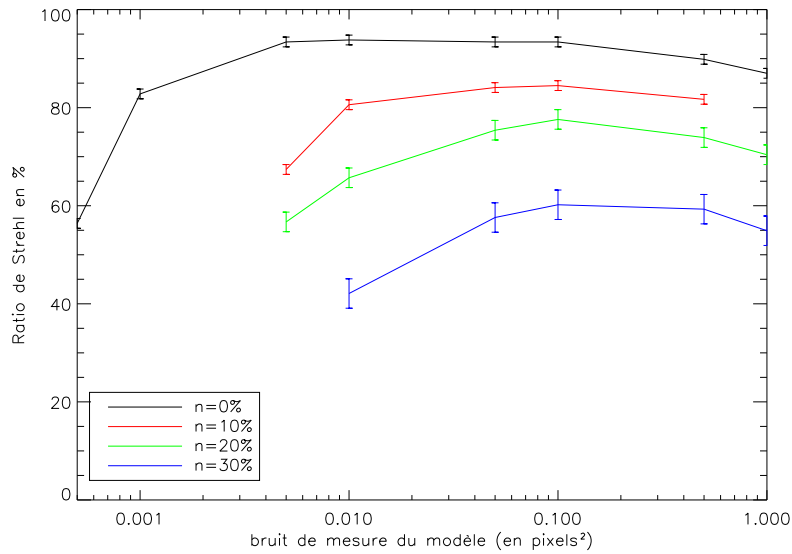


FIG. 16.11 – Évolution de la performance en terme de SR de la correction hors axe en fonction du bruit de mesure, pour divers découplements.

FEP et les simulations ont montré que l'augmentation du nombre de modes estimés jouait notablement sur la réduction de l'effet d'*aliasing* (voir le paragraphe 14.8.2). Il est important de noter qu'ici la phase turbulente est estimée dans la méta-pupille (voir la figure 16.1), et que le nombre de modes estimés est donc relatif à la dimension de cette méta-pupille.

La figure 16.12 montre l'évolution du SR en fonction du nombre de modes estimés à  $n = 20\%$ . On constate cette fois une augmentation régulière de la performance, avec une augmentation de presque 4% du SR lorsque le nombre de modes estimés passe de 80 à 200. Au-delà, la performance semble baisser légèrement, mais la tendance n'est pas très nette (moins les *a priori* sont bons pour ces modes, moins bonne sera la performance).

Malgré tout, ces tests confortent l'idée qu'une augmentation du nombre de modes reste positive. Sur axe, le gain est notable par la réduction de l'*aliasing*. Hors axe, cet effet est probablement encore vrai, mais il s'ajoute à la nécessité d'estimer la turbulence dans une méta-pupille en altitude. Il devient alors nécessaire d'estimer plus de modes dans cette méta-pupille, afin de réaliser l'extrapolation hors axe. Le nombre de modes à estimer dans la méta-pupille à fréquence spatiale égale augmente en effet dans le rapport des diamètres au carré, soit à  $n = 20\%$  d'un facteur presque 2, par rapport au cas sur axe. Ceci justifie aussi la nécessité d'utiliser plus de modes dans l'estimation hors axe.

## 16.8 Comparaison de la performance de la commande LQG avec d'autres lois sur le banc BOA

Jusqu'à présent, les performances de la commande LQG en OAAO ont été comparées à celles d'un intégrateur. Par construction, ce correcteur ne peut que fournir une correction de la turbulence sur axe. Par conséquent, la comparaison entre les deux commandes peut sembler biaisée. Le paragraphe 5.2.2 a permis d'introduire une solution de commande très similaire à la commande LQG, basée

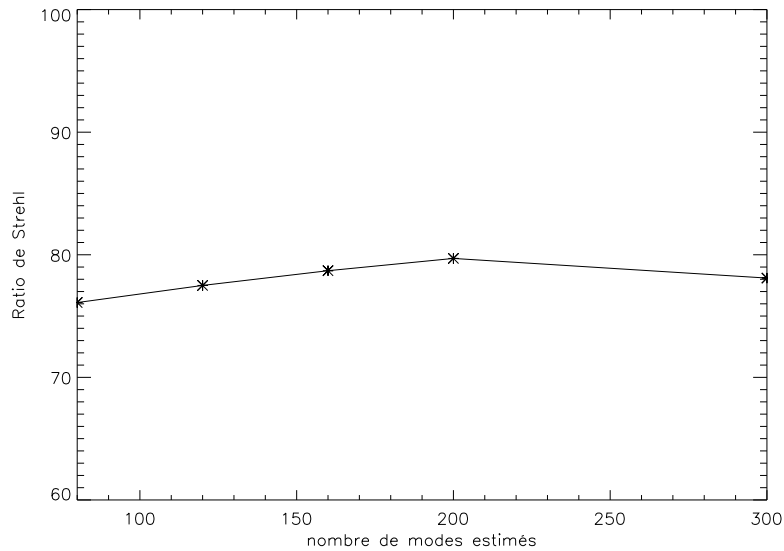


FIG. 16.12 – Évolution de la performance en terme de SR de la correction hors axe à  $n = 20\%$  en fonction du nombre de modes estimés.

sur une reconstruction de type MMSE dans une pseudo-boucle ouverte, associée à un contrôleur dynamique du second ordre : la méthode POLC. Cette solution s'adapte aisément à l'OAAO, de par sa ressemblance avec la commande LQG. Elle présente une structure très similaire à notre commande et peut être implantée sur le RTC sans difficulté. On exploite pour cela le vecteur d'état et l'équation d'état décrits en équations (5.50) et (5.53). On a donc choisi de tester expérimentalement cette solution concurrente.

La figure 16.13 présente donc la performance obtenue dans le champ pour divers découplements et pour les trois types de correction que sont l'intégrateur, le POLC, la commande LQG.

On constate une performance très similaire des deux solutions LQG et POLC pour des découplements allant de 0 à 20%. On a déjà souligné au paragraphe 5.4.2 la similarité de ces deux solutions. On constate que leur efficacité est aussi comparable dans une bonne mesure. Néanmoins, la sous-optimalité de la solution POLC apparaît dans les conditions plus exigeantes que sont les forts découplements : la performance du POLC semble chuter plus vite au-delà de  $n = 20\%$ . Ce comportement est confronté à la simulation numérique dans le paragraphe suivant.

## 16.9 Comparaisons à la simulation numérique

Les validations en OA ont permis de valider la concordance entre le simulateur numérique et l'expérimentation et d'exploiter le simulateur dans des configurations plus réalistes. Cette confrontation entre simulation et expérimentation est une fois de plus proposée, afin de valider les performances obtenues expérimentalement. Les simulations restent toutefois limitées ici au contexte de BOA. Le chapitre 17 s'attachera à exploiter le simulateur pour tester la commande LQG dédiée à l'OAAO et l'OAMC dans des configurations réalistes.

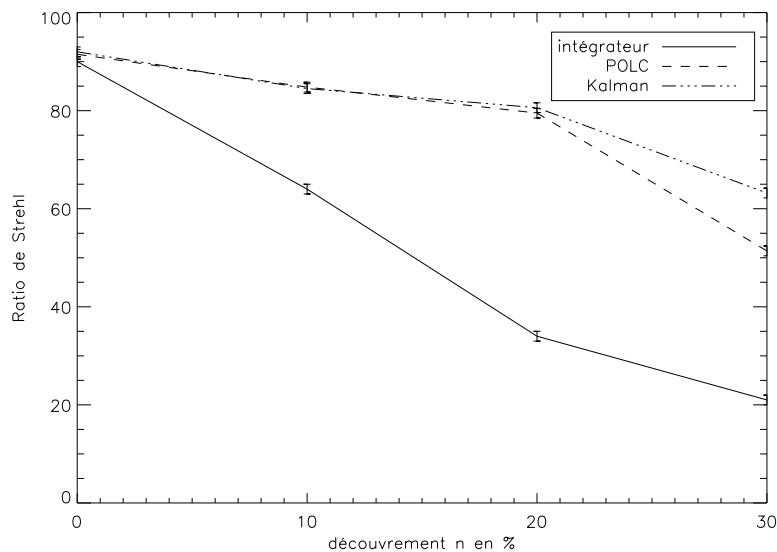


FIG. 16.13 – Performances comparées en terme de SR de corrections par intégrateur, POLC ou commande LQG pour divers découvements.

### 16.9.1 Conditions de simulation

Les conditions de simulations numériques en OAAO sont les mêmes qu'en OA. Les composants du banc BOA sont simulés avec les modèles issus des calibrations, les mêmes que ceux utilisés pour définir la commande LQG. La turbulence est de type Kolmogorov, en translation uniforme. La commande LQG implantée est celle utilisée en validation expérimentale. Rappelons que dans ce contexte, il n'y a pas d'erreur de modélisation des composants. Seule la modélisation de la turbulence (AR1) induit une erreur de modèle. Pour l'OAAO, une seconde source hors axe est simulée, et conduit à l'analyse de la turbulence dans une direction sur axe et à la correction de la turbulence dans une seconde direction hors axe, selon le schéma décrit en figure 16.1. Enfin, la simulation ne prenant pas en compte les aberrations non communes et donc l'imperfection du système, les SR obtenus en simulations ont tous été multipliés par la valeur du SR interne mesuré sur le banc, qui fixe donc la meilleure performance atteignable.

### 16.9.2 Simulation de l'OAAO sur BOA

#### 16.9.2.1 Simulation des performances des diverses commandes

La figure 16.14 présente ainsi la comparaison des performances des trois lois de commandes, intégrateur, LQG, POLC, obtenues expérimentalement ou par simulation numérique. On trace toujours la performance en terme de SR pour l'étoile hors axe en fonction du découvrement.

On constate une très bonne concordance des résultats expérimentaux avec les résultats de simulation numérique. Tous les comportements sont globalement reproduits. En particulier, on note :

- la très bonne concordance des SR sur axe, après pondération des SR obtenus en simulation par le SR interne du banc. Les corrections obtenues sur axe en simulation et expérimentalement correspondent ainsi très bien ;

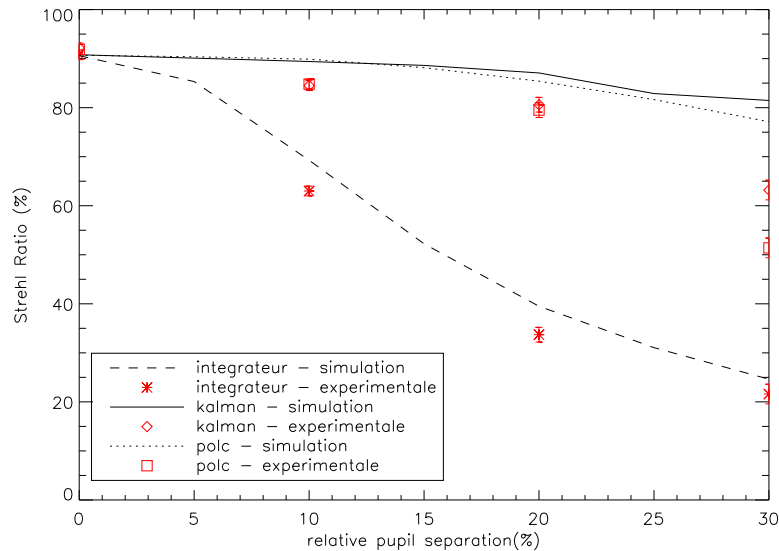


FIG. 16.14 – Comparaison des performances sur l'étoile hors axe, en terme de SR, pour les commandes intégrateur, LQG ou POLC, obtenues expérimentalement ou par simulation numérique du banc.

- la très bonne similitude de la performance de l'intégrateur dans le champ, assurant la bonne simulation de l'effet d'anisoplanétisme expérimental ;
- le comportement très similaire, voire identique des commandes LQG et POLC sur un champ allant de  $n = 0\%$  à près de  $n = 20\%$ , tant expérimentalement que numériquement ;
- on note aussi la diminution de la performance au-delà de  $n = 20\%$  pour les deux lois de commandes, avec une chute plus rapide pour la commande POLC.

Ces éléments attestent du très bon comportement de la commande LQG dans le cadre expérimental, et de son apport vis-à-vis des autres lois de commande.

On note aussi malgré tout la chute de performance plus rapide des commandes LQG et POLC en expérimentation comparé à la simulation. Cette perte de performance est évidemment à mettre sur le compte des erreurs de modèle lors de la mise en œuvre expérimentale. On rappelle en effet que la seule erreur de modèle en simulation numérique est l'erreur de modélisation de la turbulence (voir le paragraphe 14.7).

### 16.9.2.2 Effet du sens du vent

La configuration choisie en expérimentation et jusque-là en simulation peut sembler favorable. En effet, l'étoile hors axe est située en aval de l'étoile sur axe par rapport au vent, limitant l'effet de décorrélation de la turbulence entre les deux pupilles. La simulation numérique a été reprise en faisant varier l'angle du vent par rapport à l'orientation des deux étoiles. On fait varier cet angle de 0 (vent dans le sens source sur axe-source hors axe), à 90 puis 180 degrés (vent de sens opposé offrant la plus faible corrélation temporelle entre la turbulence sur axe et la turbulence hors axe). La figure 16.15 présente le résultat de cette simulation. Pour chaque angle de vent, on trace la performance de la commande LQG optimisée successivement pour chaque découvrément, comme précédemment.

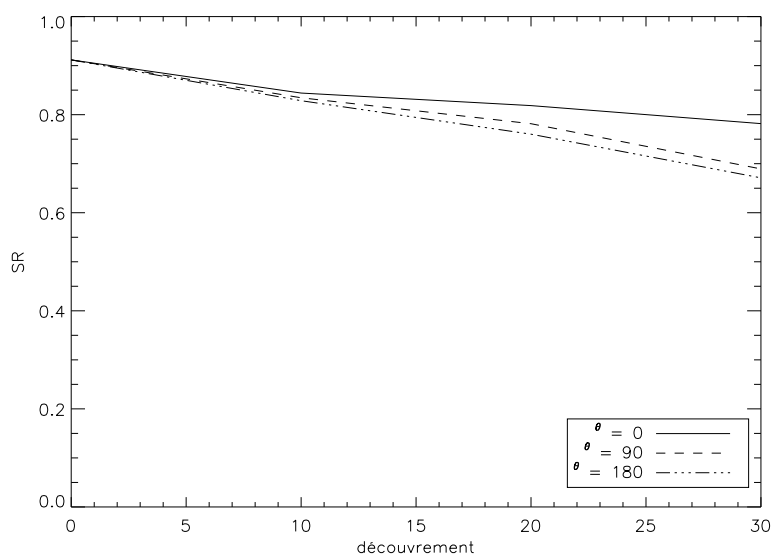


FIG. 16.15 – Évolution de la performance de la commande LQG pour les divers découvements en fonction du sens d'orientation du vent dans la couche turbulente (mesuré par rapport à l'axe étoile sur axe - étoile hors axe).

On constate sur cette figure que le sens du vent a effectivement un impact sur la performance obtenue, mais essentiellement pour les forts découvements. Ce résultat est peu surprenant, étant donnée la décorrélation temporelle de la turbulence entre les pupilles sur et hors axe pour des angles allant vers 180 degrés. L'effet de cette décorrélacion est évidemment d'autant plus fort que le découvement est élevé et que l'effort d'extrapolation de la phase est grand. La configuration expérimentale choisie était donc relativement favorable dans le cas de forts découvements, mais ce choix ne remet en cause ni la démonstration de l'apport de la commande LQG, ni les caractérisations réalisées en expérimentation ou en simulation.

## 16.10 Conclusion

Les résultats présentés dans ce chapitre démontrent le fonctionnement et la performance de la commande LQG dans un cadre d'OAAO. Une augmentation très significative du SR est obtenue dans la direction d'optimisation, et ce pour des découvements allant de 0 à 30%, comparativement à une correction sur axe standard, sujette aux effets d'anisoplanétisme. La boucle d'asservissement est en outre stable. Ces résultats sont toutefois obtenus après une prise en compte des aberrations statiques du montage. En effet, le montage présente des aberrations statiques qui ne sont pas prises explicitement en compte dans le modèle d'état. Or l'extrapolation de la turbulence hors axe conduit à une gestion erronée de ces composantes et la dégradation des performances. Une solution a été proposée, reposant sur l'introduction des aberrations statiques dans le modèle d'état. Mais la validation expérimentale montre que le modèle choisi ne permet pas la séparation de la turbulence dynamique et de ces aberrations statiques. Un protocole expérimental a donc été mis en œuvre, permettant de prendre en compte et de pré-compenser ces aberrations statiques. Cette solution permet d'obtenir de bien meilleures performances.

Ce chapitre a aussi évalué l'évolution de ces performances en fonction des deux paramètres clé que sont la variance du bruit de mesure et le nombre de modes estimés. Cette étude montre ainsi que, comme pour la commande LQG en OA, la variance du bruit de mesure doit être sur-évaluée par rapport à sa valeur calibrée, en raison des erreurs de modèle présentes. Ces erreurs sont, ici encore, décelables au travers de l'analyse de l'innovation et des états estimés. Mais en OAAO, l'impact de ces erreurs de modèle semble croître avec le découvrement, amenant à choisir une variance de bruit de mesure croissante avec celui-ci. Le nombre de modes estimés quant à lui doit être choisi suffisamment grand afin, d'une part, de prendre en compte l'augmentation de la taille de la méta-pupille avec le découvrement, et d'autre part, de réduire l'effet de sous-modélisation et d'*aliasing* de l'ASO. Ces paramètres choisis, la performance finale de la commande LQG obtenue en expérimentation est donc très bonne. Elle est surtout en bon accord avec la simulation numérique. Cette concordance se dégrade évidemment aux plus forts découvremments, la simulation numérique ne prenant pas en compte toutes les erreurs de modèle. On retrouve cependant en expérimentation comme en simulation le gain apporté par la commande LQG face à un intégrateur simple, mais aussi à une commande de type POLC pour les forts découvremments. Ces tests illustrent plus que l'efficacité de la commande LQG en OAAO, ils démontrent aussi la faisabilité d'une implantation simple. La commande est définie et calculée de manière simple et efficace, notamment en résolvant l'équation de Riccati, et ce malgré des tailles matricielles élevées. Le fonctionnement est garanti, déjà à 60 Hz, avec une bonne stabilité. Les limites actuelles des composants ne permettent pas toutefois d'aller au-delà de 60 Hz et de tester le RTC à plus grande cadence. Cet obstacle sera bientôt levé.

Ces résultats valident donc une étape vers une implantation réelle de la commande LQG. Néanmoins, un certain nombre de points doivent être encore étudiés. Tout d'abord, la configuration expérimentale choisie est simple. Elle se base sur une structure d'OA, à un analyseur et un miroir déformable conjugué de la pupille. La turbulence est monocouche et faible. L'étape suivante consiste donc à évaluer les performances de la commande LQG dans des configurations plus réalistes, telles qu'une OAMC sur un système de type NAOS.

## Chapitre 17

# Application de la commande LQG aux OA tomographiques

Les performances que nous avons obtenues en expérimentation dans les contextes d'OA ou d'OA hors axe nous permettent d'être très optimistes sur l'apport de la commande LQG en OA tomographique. Notre objectif est donc, dans ce chapitre d'étudier l'applicabilité de la commande LQG à des systèmes d'OA tomographique dans un contexte de type VLT (voir 3.3.1.2) et d'évaluer les performances obtenues en terme de SR.

Pour cela, le simulateur numérique est étendu à ce nouveau cadre applicatif, en conservant le caractère «bout-en-bout» des simulations. Le Roux a montré que la commande LQG pouvait apporter une correction très significative dans le champ en OAMC, surpassant ainsi les performances des commandes classiques basées sur l'intégrateur, même optimisé modalement. Ses simulations ont cependant été effectuées dans un cadre simplifié : simulation de la phase sur un nombre fini de modes de Zernike suivant un modèle AR1, ASO et MD idéaux fonctionnant sur cette même base. L'objectif est ici d'approfondir ces résultats dans un cadre de simulation plus réaliste. D'une part, on simule ici une turbulence atmosphérique multi-couches par des écrans (cartes de pixels) en translation (évolution de type Taylor, voir le paragraphe 1.2). D'autre part, on utilise les modèles plus réalistes d'ASO et MD décrits au chapitre 8. Nous présentons aussi pour la première fois les performances attendues en commande LQG dans un contexte de type LTAO (voir le paragraphe 3.3.3) : analyse multi-directionnelle sur étoiles naturelles et optimisation de la correction dans une unique direction d'intérêt par un miroir placé dans la pupille. Une commande de type intégrateur n'est pas en mesure de répondre à cette problématique.

Le paragraphe 17.1 décrit les conditions de simulation communes à l'ensemble des validations présentées dans ce chapitre. Elles sont choisies pour être représentatives d'un système de type VLT. Un cas d'OA avec commande intégrateur est simulé afin de donner une base de comparaison pour les tests suivants. Le paragraphe 17.2 s'intéresse ensuite aux performances de la commande LQG dans un cadre d'OAMC. Ces performances sont comparées à celle d'un intégrateur basé sur une matrice d'interaction généralisée (voir le paragraphe 5.2.1). Enfin, un cas de LTAO est analysé dans le paragraphe 17.3.

### 17.1 Conditions de simulation communes

On présente ici les conditions de simulation numérique du système communes à l'OA et l'OA tomographique (OAMC ou LTAO). Les caractéristiques de la turbulence et des composants du système



sont détaillées, en précisant quels modèles ont été exploités pour la simulation. Enfin, une simulation d'OA classique est proposée pour donner une idée des performances en correction du système considéré, lorsque direction d'analyse et de correction sont confondues.

### 17.1.1 Description du système et des modèles

L'architecture générale du système est décrite sur la figure 17.1. On considère un système de type VLT, de diamètre  $D = 8$  m, fonctionnant dans l'infra-rouge ( $2,2 \mu\text{m}$ ). On suppose qu'analyse et correction sont réalisées à cette longueur d'onde. La turbulence est constituée de trois couches, situées à 0, 3,5 et 7,8 kilomètres d'altitude. La force de la turbulence dans chacune de ces couches ( $C_n^2$  relatif) est de 60%, 25% et 15% respectivement. Cette configuration amène à un  $\frac{D}{r_0} \simeq 9$  à  $2,2 \mu\text{m}$  (soit un *seeing* de 0,69 arcsec à  $0,5 \mu\text{m}$ ) et un angle isoplanétique (calculé selon (1.13)) de  $\theta_0 = 18,6$  arcsec à  $2,2 \mu\text{m}$ . Les trois couches sont supposées animées d'un mouvement en translation rectiligne uniforme, de vitesses respectives 12,5, 8 et 20 mètres par secondes, conduisant à un temps caractéristique d'évolution (équation (1.21))  $\tau_0 = 22$  ms à  $2,2 \mu\text{m}$  (soit  $\tau_0 = 3,7$  ms à  $0,5 \mu\text{m}$ ). Les vitesses de vent sont choisies non colinéaires. En considérant les orientations du schéma en figure 17.2, les vitesses de vent présentent ainsi des angles respectifs de  $180^\circ$ ,  $0^\circ$  et  $135^\circ$  par rapport à l'axe des abscisses. On modélise chaque couche de turbulence grâce au modèle décrit au paragraphe 8.3.2, de carte de phase de statistique de Kolmogorov (taille physique des écrans supérieure à 400 m), en translation (hypothèse de Taylor). Ces conditions de turbulence (altitudes, profil de  $C_n^2$  et vents) sont représentatives d'un site de type Paranal au Chili dans de bonnes conditions d'observations.

Les étoiles guides sont situées aux sommets d'un triangle équilatéral (losanges sur le schéma 17.2), inscrit dans un cercle de rayon 1 arcminute, définissant un champ d'observation (FoV) de 2 arcminutes. Ce FoV délimite donc au sein de chaque couche turbulente des méta-pupilles de respectivement, 8, 10 et 12,6 mètres. Ces méta-pupilles définiront les supports sur lesquels la phase turbulente sera estimée dans chaque couche. L'ensemble de ces paramètres est rappelé dans le tableau 17.1.

Les analyseurs, mesurant dans la direction de ces trois étoiles guides, sont trois Shack-Hartmann (voir le paragraphe 2.3.1), de  $8 \times 8$  sous-pupilles. On suppose qu'ils fonctionnent à 200 Hz et présentent un bruit évalué grâce aux relations (2.3) et (2.4). Sa variance est ainsi de 0,2 radians carrés de phase par sous-pupille, pour un flux de plus de 600 photons par sous-pupille et par trame. Ces conditions nous placent dans un contexte de fort rapport signal-à-bruit. On suppose que la matrice de covariance de bruit des ASO est diagonale. La modélisation de ces analyseurs repose sur le modèle d'ASO géométrique présenté au paragraphe 8.3.3.2. Chaque ASO réalise donc directement l'analyse d'une carte pixellisée de phase et fournit une mesure de pentes bruitée. L'ensemble de ces caractéristiques sont résumées dans le tableau 17.2.

Les miroirs déformables sont au nombre de deux (MD1 et MD2). Il s'agit de miroirs de type SAM (miroir à empilement de piézo-électriques, voir le paragraphe 2.3.2). Leur réponse est supposée instantanée et linéaire, exempte de toute saturation. Le MD1 est conjugué de la pupille, de sorte que  $h_{dm1} = 0$ . Il se compose de  $9 \times 9$  actionneurs, dont 69 utiles. Le MD2 est conjugué à une altitude  $h_{dm2}$  correspondant à une couche turbulente équivalente aux deux couches turbulentes situées en altitude, c'est-à-dire que  $h_{dm2}$  est définie par la moyenne pondérée :

$$h_{dm2} = \frac{\sum_{i=2}^{i=3} h(i) C_n^2(i)}{\sum_{i=2}^{i=3} C_n^2(i)}, \quad (17.1)$$

$h(i)$ ,  $i \in \{2, 3\}$ , désignant l'altitude des couches turbulentes 2 et 3, et  $C_n^2(i)$ ,  $i \in \{2, 3\}$ , désignant leur force respective. Dans la pratique, cela conduit à conjuguer le second miroir à  $h_{dm2} \simeq 5,15$  km.

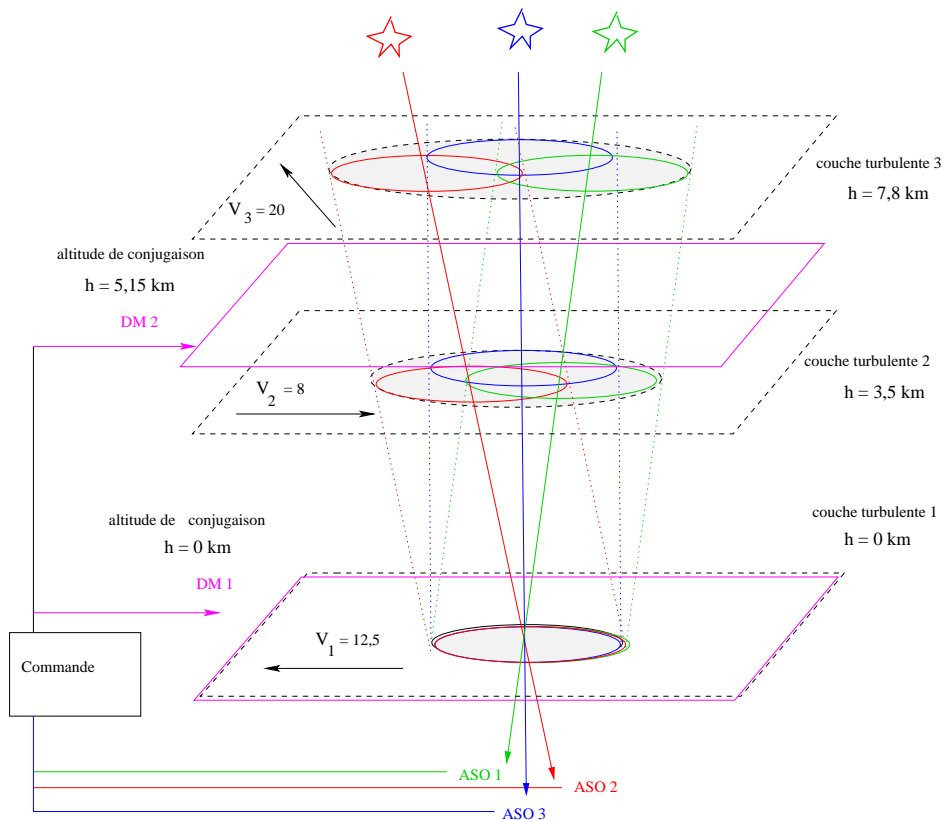


FIG. 17.1 – Représentation schématique de la structure du système d’OA tomographique simulé. L’atmosphère se compose de trois couches turbulentes en translation rectiligne uniforme. 3 analyseurs de type Shack-Hartmann analysent la turbulence dans les directions des trois étoiles guides. La correction est assurée par 1 ou 2 miroirs déformables, le premier dans la pupille, le second, optionnel, étant conjugué en altitude. Un champ de 2 arcminutes est considéré.

On souhaite conserver la même fréquence spatiale maximale de correction entre les deux miroirs. Cette fréquence est directement liée au rapport du diamètre de pupille sur le nombre de pas inter-actionneur. Le miroir MD1 a 8 pas inter-actionneur pour un diamètre de  $D = 8$  m, ce qui conduit à choisir un second miroir (diamètre de méta-pupille de 11 m à  $h_{dm2}$ ) possédant  $12 \times 12$  actionneurs, dont 185 utiles. La simulation des miroirs repose sur le modèle gaussien des fonctions d’influence des miroirs SAM, décrit au paragraphe 8.3.4. Il est entièrement déterminé par le choix du couplage mécanique, ici de 25%, et du nombre d’actionneurs. On notera l’absence de miroir de basculement. On suppose en effet que les MD bénéficient d’une grande dynamique. Ces caractéristiques sont résumées dans le tableau 17.3.

L’asservissement présente enfin deux trames de retard. L’ensemble de la simulation fait appel à une représentation pixellisée des phases turbulentes. Ainsi, les phases dans la pupille sont représentées sur une carte de  $80 \times 80$  pixels.

Pour évaluer la performance de correction des lois de commande utilisées pour asservir le système d’OAMC, on évalue la FEP corrigée dans un certain nombre de directions choisies (champ d’étoiles). Il y en a 21, réparties dans le champ, et représentées sur la figure 17.2 par des étoiles. On simule ainsi pour chaque direction une acquisition d’images, et on réalise une somme cumulée de ces FEP

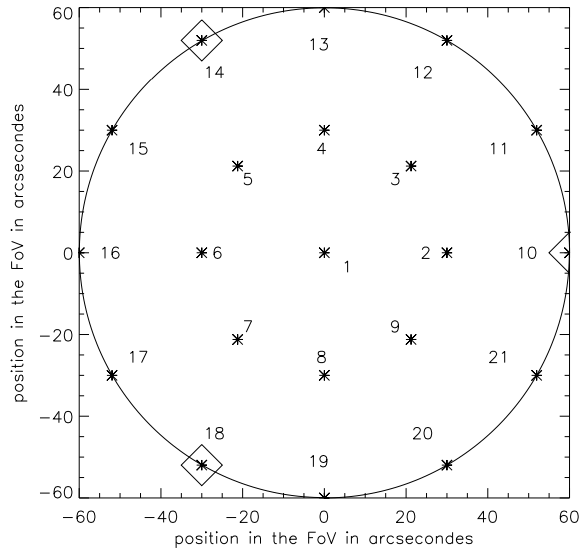


FIG. 17.2 – Répartition des 3 étoiles guides (losanges) et des directions d'intérêt (étoiles) dans le champ (FoV) de 2 arcminutes.

au cours du temps afin de générer des images longue pose. On évalue alors la performance en terme de SR sur ces longues poses selon la procédure décrite en annexe A.1. Dans la pratique, on considère une simulation sur 4000 itérations, et le cumul des images est amorcé à partir de 1000 itérations pour négliger la phase transitoire de la correction. Notons que les cartes de SR obtenues sont lissées pour une meilleure représentation dans le champ, mais ce lissage présente l'inconvénient d'être appliqué dans un champ carré de 2 arcminutes, et non dans le FoV circulaire. Les données hors champ ne sont donc pas à considérer.

Pour donner un élément de comparaison avec les tests d'OA hors axe menés au chapitre 16, on évalue le taux de découverte  $n$  existant entre la direction du centre du champ (étoile n°1) et la direction d'une des étoiles guides, c'est-à-dire pour une séparation angulaire d'une arcminute (séparation maximale rencontrée dans le champ). Ce taux de découverte varie avec l'altitude : il est ainsi de 0% dans la pupille (couche turbulente 1), de 12,7 % pour la couche 2 et de 28,6% pour la couche 3. Ces chiffres sont de l'ordre de grandeur des découverts traités jusqu'à présent en validation expérimentale et numérique en OA hors axe.

Soulignons que les choix réalisés ici assurent un réalisme accru de la simulation par rapport à celles menées par Le Roux. La turbulence étant simulée sous la forme d'une carte pixellique, elle n'est pas définie sur un nombre restreint de modes (elle n'est limitée en terme de fréquences spatiales que par la résolution des cartes). Les conséquences sont multiples. Les effets de sous-modélisation sont donc correctement reproduits. L'utilisation conjointe d'un ASO de type Shack-Hartmann permet une bonne représentation des effets de repliement. On rappelle qu'on utilise aussi un modèle réaliste de miroir. Ces conditions nous placent donc dans un cadre représentatif permettant de reproduire la plupart des sources d'erreurs couramment rencontrées par les systèmes d'OA ou d'OAMC.

	couche 1	couche 2	couche 3
altitude (km)	0	3,5	7,8
$C_n^2$ (en %)	60	25	15
vitesse de vent (m.s <sup>-1</sup> )	12,5	8	20
sens du vent (angle par rapport aux abscisses)	180°	0°	135°
diamètre de la méta-pupille (m) pour un FoV de 2°	8	10	12,6

TAB. 17.1 – Caractéristiques des couches turbulentes simulées.

nombre de sous-pupilles	fréquence	bruit de mesure	flux
8 × 8	200 Hz	0,2 rad <sup>2</sup> de phase/ss pupille/trame	> 600 phot./ss pupille/trame

TAB. 17.2 – Caractéristiques des ASO pour la simulation d'OAMC.

	MD 1	MD 2
altitude (km)	0	5,15
nombre d'actionneurs	9 × 9	12 × 12
dont utiles	69	185
couplage mécanique	25 %	25 %
diamètre de la méta-pupille (m)	8	11
type de miroir	SAM	SAM

TAB. 17.3 – Caractéristiques des miroirs déformables simulés.

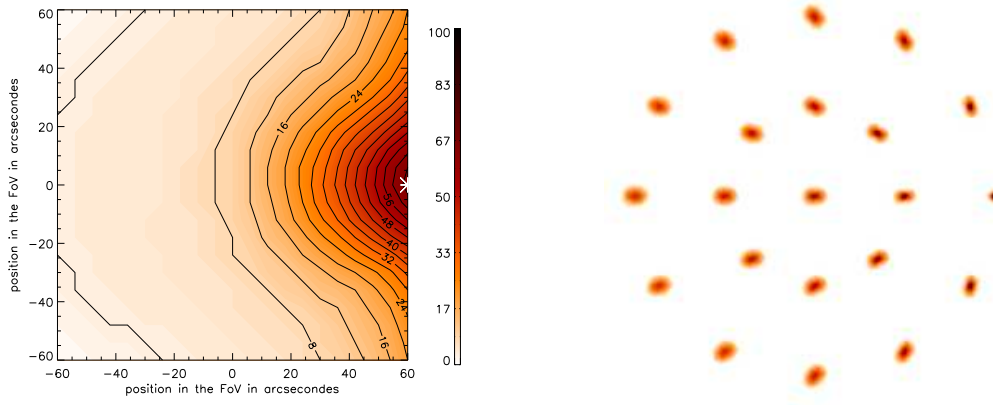


FIG. 17.3 – Performance dans le champ d’une correction de type OA par intégrateur, à gauche en terme de SR, à droite en terme de FEP longue pose (échelle logarithmique commune à toutes les FEP, non respect de l’échelle angulaire). Le SR sur l’étoile guide (étoile 10) est de 66%, il est de 9% au centre du champ (étoile 1), son écart-type est de 15% dans le FoV.

### 17.1.2 Illustration d’un cas d’OA

On considère ici un cas d’OA classique, qui va servir de référence pour les tests suivants. On n’utilise donc que le miroir MD1 et un seul ASO, pointant dans la direction de l’étoile guide numérotée 10 sur la figure 17.2. La loi de commande considérée est un intégrateur classique. Sa matrice d’interaction a été évaluée selon le processus décrit au paragraphe 2.4.1. La matrice de commande est obtenue par inverse généralisée avec filtrage du mode piston, et troncature de 2 modes mal vus additionnels (voir le paragraphe 2.4.1 et l’annexe A.1). On n’applique pas ici d’optimisation modale du gain. Le gain d’intégrateur est général à l’ensemble des modes, choix qui se justifie par le très bon rapport signal-à-bruit. La valeur de ce gain est toutefois choisie pour donner la meilleure performance, soit un gain de 0,5 (avec une faible sensibilité de la performance à cette valeur).

La boucle étant fermée dans la direction de l’étoile guide n°10, on évalue la performance dans le champ de 2 arcminutes. Le résultat est donné en figure 17.3. On constate une bonne correction dans la direction de l’étoile guide avec un SR maximal dans cette direction de 66%. On constate la décroissance rapide de cette valeur dans le champ du fait de l’anisoplanétisme. Le SR au centre du champ (direction de l’étoile 1) est de l’ordre de 9%. On note enfin que le maximum de performance semble légèrement décalé de la direction d’analyse. Ce phénomène se retrouvera en OAMC et tient à la direction dominante du vent, conduisant à une plus forte corrélation temporelle de la turbulence avec la correction apportée par le miroir dans une direction comprise entre 180° et 135°.

La figure 17.3 droite montre les FEP longue pose obtenues dans les 20 directions de mesure. Les FEP sont positionnées dans le champ de 2 arcminutes, mais elles sont grossières, les échelles angulaires ne sont donc pas respectées (cette remarque est vraie pour toutes les cartes de FEP de ce chapitre). On note le phénomène d’élongation des FEP dans la direction de l’EG, caractéristique de l’effet de décorrélation angulaire de la turbulence. La qualité des FEP se dégrade rapidement dans le champ, mettant en évidence le phénomène qui a motivé le développement de l’OAMC.

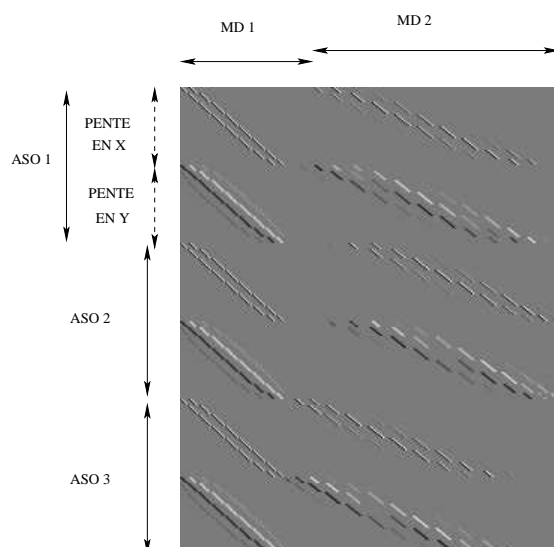


FIG. 17.4 – Matrice d’interaction du système d’OAMC, dont la structure est en rapport avec la configuration choisie : 3 ASO et 2 MD.

## 17.2 La commande LQG pour une OAMC au VLT

Les validations expérimentales n’ont pu être menées en OAMC en l’absence d’un banc approprié. L’objectif de ce paragraphe est donc de simuler numériquement l’implantation d’une commande LQG sur un système de type OAMC dans un environnement de type VLT.

On utilise l’intégralité du système décrit au paragraphe 17.1 : les trois analyseurs pointent les trois étoiles guides numérotées 10, 14 et 18, et les deux miroirs MD1 et MD2 sont exploités. Notre objectif est de réaliser une correction dans l’ensemble du champ de 2 arcminutes. Pour cela, on compare les corrections apportées par deux solutions de commande : une commande de type intégrateur classique adaptée à l’OAMC et une commande LQG. On précise d’abord les lois de commandes testées.

### 17.2.1 Description des lois de commande

**La commande intégrateur** La commande par intégrateur est obtenue par calcul d’une matrice d’interaction généralisée entre les deux MD et les trois ASO (voir le paragraphe 5.2.1). Cette matrice est présentée en figure 17.4. Le calcul de la matrice de commande repose sur une inverse généralisée tronquée de la matrice d’interaction, dont le conditionnement est en effet déplorable (environ  $5 \cdot 10^{10}$ ). On règle le niveau de troncature pour obtenir la meilleure performance dans le champ. Ajoutons que le mode piston est explicitement filtré selon la procédure décrite en annexe B. La commande intégrateur n’est pas optimisée par mode (Quiros a étudié cette optimisation modale, complexifiée en OAMC [Quiros-Pacheco(2006)]); le gain est choisi uniforme et de valeur optimisée pour la performance globale. On obtient après réglages une troncature de 60 modes propres (en plus du mode piston), pour un conditionnement final de 272 et un gain de 0,5.

**La commande LQG** Le modèle d’état pour la commande LQG est défini rigoureusement selon la procédure décrite au paragraphe 4.6.3. Les modèles de composants employés sont les mêmes que

ceux employés pour la simulation des composants. On utilise la matrice de covariance de bruit des ASO pour le modèle de bruit de mesure.

Concernant le modèle de turbulence, chaque couche est modélisée indépendamment par un AR1 défini selon la procédure détaillée au paragraphe 4.4.3. Un certain nombre de paramètres sont à choisir de manière plus arbitraire : les directions d'optimisation de la correction, ainsi que le nombre de modes de Zernike estimés dans chaque couche. Nous avons choisi de corriger dans les 21 directions du champ désignées sur la figure 17.2, ce qui représente une bonne couverture du champ de 2 arcminutes dans lequel on souhaite réaliser l'optimisation. Ensuite, il s'agit de définir le nombre de modes de Zernike estimés dans chaque couche. Ce choix peut être fait de sorte que, d'une couche à l'autre, la plus haute fréquence spatiale représentée soit sensiblement la même, c'est-à-dire que ce nombre de modes par couche croisse dans le rapport des diamètres des méta-pupilles. Dans la pratique, le nombre de modes réellement choisi est légèrement supérieur à ce chiffre. En supposant qu'un ASO de  $8 \times 8$  sous-pupilles mesure relativement bien les modes de Zernike jusqu'à un ordre 7 à 8 (36 à 45 modes de Zernike), et afin de prendre en compte les effets de repliement, le nombre de modes estimés dans la première couche ( $h_1 = 0$ ) a été fixé à 105 (13 ordres radiaux). On a ensuite considéré pour les couches 2 et 3 une estimation de la phase sur 153 et 210 modes (resp. 16 et 19 ordres radiaux). Ces chiffres assurent une bonne estimation de la turbulence pour un coût calculatoire acceptable. Ce choix signifie notamment que le modèle ASO **D** est établi sur la base des modes de Zernike.

La commande LQG prend alors la forme décrite au paragraphe 5.5.3. La résolution de l'équation de Riccati exploite les simplifications détaillées au paragraphe 7.3.2, la convergence étant obtenue après 1194 itérations pour une variation de la trace inférieure à  $10^{-3}$  (voir le paragraphe 7.3.1).

Notons que les choix réalisés en termes de modèles de turbulence et de composants impliquent l'existence d'erreurs de modélisation. Tout d'abord, le modèle de turbulence AR1 implique une erreur sur le modèle d'évolution spatio-temporel de la turbulence (mais la statistique de Kolmogorov est bien respectée). Comme souligné au paragraphe 17.1, une erreur de sous-modélisation est aussi présente, la turbulence étant estimée sur un nombre de modes restreint (et correspondant à une fréquence spatiale maximale bien inférieure à celle de la turbulence simulée). Enfin, l'ASO géométrique utilisé dans la simulation réalise l'analyse de la phase turbulente pixellisée et fournit une mesure de pentes (voir le paragraphe 17.1). Cependant, dans le cadre de la commande LQG, on identifie une matrice ASO **D** (reliant modes de la base de Zernike et mesures de pentes) nécessairement de dimension réduite. Il existe donc une erreur de sous-modélisation du composant qui contribue à sous-estimer l'effet de repliement.

### 17.2.2 Résultats de simulation

Les résultats de la simulation d'OAMC sont donnés en figures 17.5 et 17.6 respectivement pour l'intégrateur et la commande LQG. En considérant le cas de l'intégrateur, on retrouve un comportement très classique de cette commande en OAMC : la correction est la meilleure dans les directions des étoiles guides (de l'ordre de 55% de SR), permettant malgré tout d'offrir une correction sensible au centre du champ avec un SR de 32% (à comparer avec les 9% obtenus en OA). Néanmoins, cette correction pâtit d'une forte inhomogénéité dans le champ le SR variant dans le FoV de 23% à 57% (écart-type de 9% dans le FoV). Comme en OA, on note aussi une certaine asymétrie de la carte de SR, liée à la présence d'un vent moyen orienté entre  $180^\circ$  et  $135^\circ$ . La carte des FEP présente aussi une structure particulière : les FEP possèdent une structure étirée selon des axes privilégiés, phénomène similaire à celui rencontré en OA classique mais dans un cadre de directions de correction multiples. Il est à noter que malgré des conditions de simulation légèrement différentes (type de miroir, conditions de turbulence *etc*) les résultats obtenus ici en OA et en OAMC avec intégrateur sont très similaires à



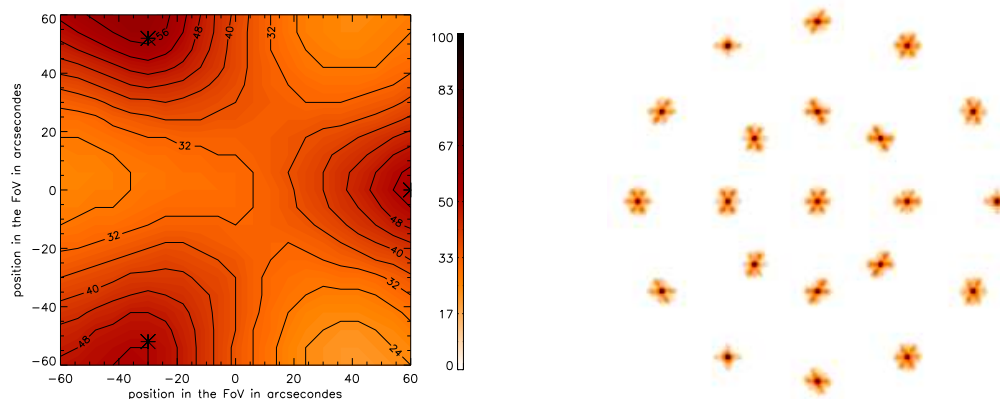


FIG. 17.5 – Gauche : performances (SR) dans le champ d’une correction de type OAMC par intégrateur. On note que la correction est la meilleure dans les directions des étoiles guides 10, 14 et 18 (resp. 54%, 57%, 52% de SR). Le SR au centre du champ est de 32%, l’écart-type est de 9% dans le FoV. Droite : FEP correspondantes dans le champ (échelle logarithmique commune à toutes les FEP). On note la forme asymétrique des FEP.

ceux obtenus par Quiros [[Quiros-Pacheco\(2006\)](#)]. En particulier la carte de SR dans le champ présente les mêmes caractéristiques générales.

Les performances de la commande LQG sont très supérieures, à la fois en terme de SR et de qualité de FEP (cartes présentées en figure 17.6). L’uniformité de la correction est remarquable, le SR variant entre 42% et 62% dans le FoV (écart-type dans le FoV inférieur à 4,5%). Le SR au centre du champ (étoile 1) atteint 55%. Ce résultat est confirmé par la carte des FEP, qui présente une très bonne homogénéité dans le champ et par FEP. On retrouve par ailleurs le phénomène d’asymétrie globale de la carte de performance liée au vent.

Ces résultats témoignent du bon fonctionnement de la commande LQG en OAMC permettant d’apprécier l’apport d’une commande optimale. Il est à noter que ces performances sont obtenues malgré l’existence d’erreur de modélisation. Ces erreurs tiennent au choix de la structure des modèles (modèle de turbulence AR1, sous-modélisation de l’ASO) et sont représentatives de celles que pourront subir une commande LQG sur un véritable système. Toutefois les paramètres des composants et de la turbulence ont été respectés lors de la modélisation (pas d’erreurs ou d’incertitudes introduites sur la vitesse du vent, la force de la turbulence, la position des couche, la covariance du bruit de mesure, *etc*). L’analyse des performances de la commande en présence de telles incertitudes relève d’une étude de robustesse qui devrait être réalisée spécifiquement pour chaque système. Ces résultats permettent donc d’illustrer la qualité de correction pouvant être atteinte par la commande LQG même en présence d’erreurs de modélisation structurelles.

### 17.3 Correction de type LTAO

Nous proposons dans ce paragraphe de valider en simulation le fonctionnement de la commande LQG dans un contexte de type LTAO (mais avec étoiles naturelles). Pour ce faire, la configuration d’OAMC précédente est reprise : la turbulence, constituée de trois couches, est analysée selon les trois directions 10, 14 et 18 par les ASO. Cependant, on suppose ici que seul le miroir MD1, conjugué



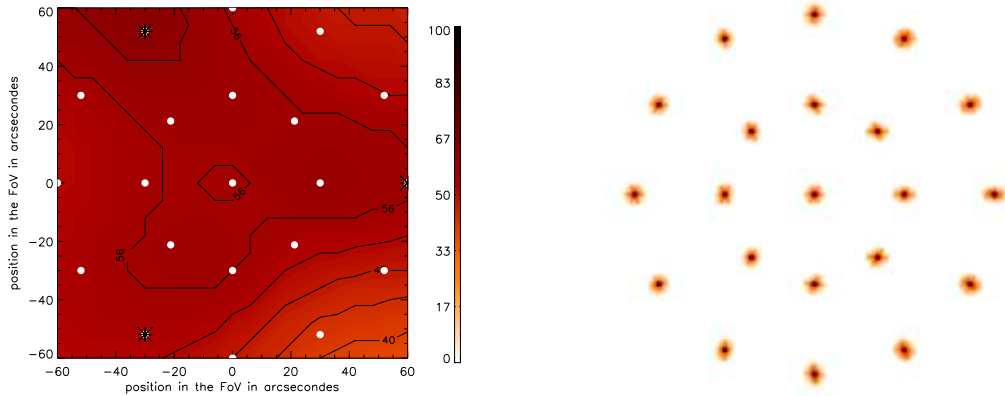


FIG. 17.6 – Gauche : performances (SR) dans le champ d’une correction de type OAMC par commande LQG. On constate une performance très significative et homogène dans le champ. Le SR est de 57%, 62% et 54% (resp.) pour les trois étoiles guides 10, 14, 18 (resp.) et de 55% au centre du champ (étoile 1). L’écart-type est inférieur à 4,5% dans le FoV. Droite : FEP correspondantes dans le champ (échelle logarithmique commune à toutes les FEP).

de la pupille est utilisé. L’objectif est alors d’optimiser la correction au centre du champ (étoile 1). Pour ce faire, la commande LQG conserve la même structure qu’en OAMC. On ne modifie que la matrice d’influence, désormais restreinte au seul miroir MD1, et les projecteurs  $\mathbf{M}_\alpha^M$ ,  $\mathbf{M}_\beta^M$ ,  $\mathbf{M}_\beta^L$  afin de prendre en compte l’existence d’un unique miroir (pour  $\mathbf{M}_\alpha^M$  et  $\mathbf{M}_\beta^M$ ) et d’une seule direction de correction (pour  $\mathbf{M}_\beta^M$  et  $\mathbf{M}_\beta^L$ ).

La figure 17.7 présente la performance dans le champ en SR de la commande LQG. On constate une très nette correction de la turbulence au centre du champ, avec une performance de 55% de SR (à comparer avec les 9% de SR obtenus en correction par OA pour la même direction). La structure des FEP dans le champ correspond à celle que donnerait une correction de type OA au centre du champ (voir la figure 17.3) mais avec une performance légèrement plus faible (à comparer aux 66% de SR obtenus en OA dans la direction de l’étoile guide). On note toujours l’effet de décalage de la carte de performance du fait du vent.

On constate donc que la commande LQG a permis de réaliser une correction très significative au centre du champ. Cette correction est comparable à celle qu’aurait donnée une OA pointant l’étoile n°1, et équipée par exemple d’une commande intégrateur. Le champ considéré, de 2 arcminutes, est pourtant conséquent. Cette première démonstration de correction par commande optimale dans un cadre de LTAO montre tout le potentiel de la commande LQG dans ce type de contexte.

Ce résultat a été obtenu avec des étoiles naturelles, c’est-à-dire en ondes planes. Toutefois, en restant dans un régime d’optique géométrique, le formalisme présenté dans cette thèse permet de prendre en compte des géométries plus complexes liées à l’utilisation d’étoiles laser : onde sphérique, sources étendues...

## 17.4 Conclusion

Ce chapitre s’est intéressé à l’application de la commande LQG à des systèmes astronomiques de type OA tomographique. Pour cela, il s’est appuyé sur la simulation numérique des systèmes d’OA et

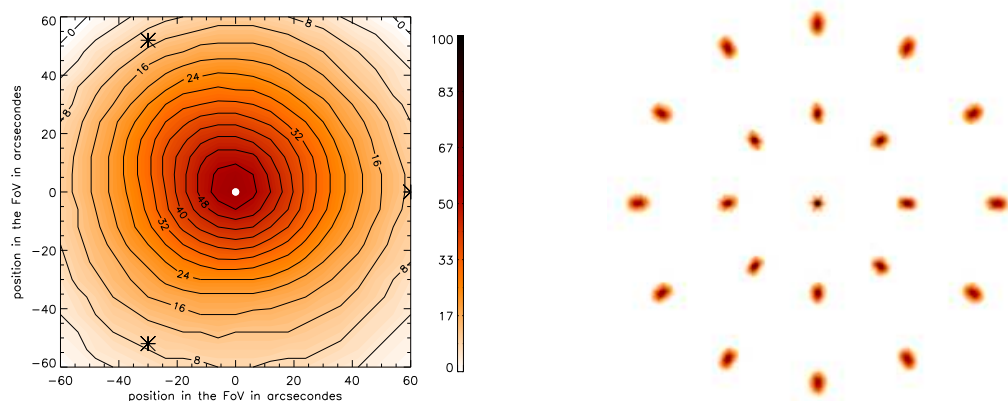


FIG. 17.7 – Gauche : performances (SR) dans le champ d’une correction de type LTAO par commande LQG. On constate une optimisation de la correction dans la direction d’intérêt (centre du champ étoile 1) avec un SR atteignant 55%. Droite : FEP correspondantes dans le champ (échelle logarithmique commune à toutes les FEP).

d’OAMC. La phase turbulente, simulée sous forme de carte de pixels, est multi-couches et respecte précisément la statistique de Kolmogorov et l’hypothèse de Taylor. Les composants ASO et MD sont simulés avec réalisme. Ces conditions permettent de reproduire la plupart des phénomènes limitant les performances des lois de commande : sous-modélisation, effet de repliement. Le contexte de simulation est ainsi relativement réaliste, et permet d’approfondir les travaux menés par Le Roux dans un cadre simplifié. La commande LQG définie présente des erreurs de modélisation structurelles représentatives de celles rencontrées sur un véritable système (modélisation AR1 de la turbulence *etc.*), mais les paramètres des modèles (conditions de turbulence, variance de bruit d’ASO) sont respectés.

Dans ces conditions, la commande LQG démontre toutefois des performances excellentes par rapport à l’intégrateur en OAMC. L’optimisation de la correction selon une vingtaine de directions d’intérêt réparties dans le champ conduit à une correction très significative et homogène de la turbulence. La simulation numérique permet également de tester la commande LQG dans une configuration de type LTAO, démontrant une performance tout à fait significative. Ces résultats gagneraient à être comparés aux performances d’autres lois de commande telles l’intégrateur à gain modal optimisé (IGMO) en OAMC et le POLC en OAMC et en LTAO. Néanmoins, comme le souligne Quiros [[Quiros-Pacheco\(2006\)](#)] la mise en œuvre d’une commande IGMO en OAMC est difficile. De plus, si la commande POLC a montré des performances intéressantes en OA hors axe (voir le chapitre 16), elle reste sous-optimale.

Ces simulations montrent aussi la souplesse d’utilisation de la commande LQG. La modélisation d’état choisie permet de traiter tout aussi aisément un cas d’OAMC et de LTAO, tout en conservant une correction optimale. Seules des étoiles naturelles ont été considérées mais le formalisme permet de prendre en compte les spécificités des étoiles laser (effet de cône...).

Durant ces validations numériques, aucune optimisation des calculs, autre que les simplifications présentées au chapitre 7, n’a été apportée. Les dimensions des matrices utilisées sont pourtant conséquentes et représentatives d’un cas concret. Cela met en évidence la stabilité et la précision des calculs numériques lors de la résolution de l’équation de Riccati. Des optimisations sont toutefois encore possible comme souligné au chapitre 7.

Ce chapitre a démontré l’efficacité de la commande LQG dans des contextes d’OA tomographique

relativement réalistes. Il a permis aussi de concrétiser une implantation numérique de la commande pour ces applications. Tous les outils sont désormais réunis pour une validation expérimentale de la commande LQG en OA tomographique.

# Conclusion et Perspectives

## Bilan

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire avait pour objectif l'étude ainsi que la validation numérique et expérimentale de lois de commande optimales en OA et OAMC. Le but était de démontrer l'intérêt et l'applicabilité de cette approche pour les futurs systèmes d'OA astronomiques.

L'OA équipe en effet un nombre croissant de systèmes astronomiques, mais présente des limitations qui ont motivé le développement de nouveaux concepts visant à de hautes performances (XAO) ou à élargir le champ de correction (OA tomographiques). Ces systèmes sont cependant de complexité accrue et requièrent des lois de commande plus sophistiquées que celles classiquement employées en OA. Actuellement, la commande pour ces systèmes d'OAMC est le plus souvent issue de correcteurs boucle fermée adaptés des méthodes utilisés en OA simple, comme l'intégrateur. Cette adaptation est faite soit en partant de lois de commande qui prennent en compte les aspects dynamiques mais qui ne sont pas optimales, soit en partant de lois optimales statiques, ne prenant pas en compte la dynamique du système.

La démarche sur laquelle nous nous sommes appuyés s'inscrit dans la continuité des travaux de l'équipe en OA et OAMC : modélisation par espaces d'état et critère de performance quadratique, conduisant à une commande de type LQG. L'intérêt de cette approche réside dans le fait que l'élaboration de la loi de commande rend compte simultanément et de façon simple des divers aspects que sont dynamique, multi-conjugaison et optimalité. Sur la base d'un modèle d'état linéaire, la commande optimale au sens du minimum de la variance d'estimation est la commande LQG bien connue des automaticiens.

Nous avons donc rappelé dans cette thèse le contexte applicatif de l'OA en introduisant les modèles des composants et de la turbulence nécessaires à la mise en œuvre de la commande LQG. Nous avons discuté le critère de performance de la commande. Le problème de commande a pu ainsi être exprimé dans un formalisme d'état, en conservant le sens physique des variables. Cet outil, largement répandu en automatique, permet l'extension à diverses problématiques tout en conservant l'optimalité de la commande. La commande LQG dans le cadre de l'OA et l'OAMC a été rediscutée, en approfondissant les travaux menés précédemment par Le Roux [[Le Roux\(2003\)](#)]. Les outils de caractérisation de bon fonctionnement ont été présentés afin d'évaluer leur pertinence en expérimentation.

Un des aspects originaux de ce travail repose sur la démonstration de l'équivalence entre critère de performance à temps continu et à temps discret. Cette équivalence fait apparaître un terme d'erreur incompressible, indépendant de la commande et commun à la plupart des systèmes d'OA. Ce terme a été calculé analytiquement. Nous avons aussi approfondi l'extension à l'OAMC, en analysant les lois de commande actuellement développées pour cette application.

La mise en œuvre pratique d'une telle loi de commande pose des problèmes d'algorithmie et de coût calculatoire. Nous avons proposé une réduction des dimensions des vecteurs et des matrices im-

pliquées qui conserve le sens physique des variables, conduisant à une diminution sensible du coût calculatoire. Des techniques simples de calcul ont été mises en œuvre pour simplifier et résoudre l'équation de Riccati. Tous les éléments (modèles, matrices,...) d'une OA (dans divers contextes applicatifs) ont été décrits et leur calcul explicité, afin d'une part de mettre en œuvre la commande optimale, et d'autre part de présenter un outil complet d'étude et de validation numérique. Cet outil permet aussi une analyse pertinente des résultats expérimentaux.

Les premières simulations prouvent le fonctionnement performant de la commande et évaluent son comportement face à deux erreurs de modèle. Ces résultats mettent en évidence les propriétés de réduction d'*aliasing* de la commande LQG. L'utilisation de la commande LQG sur des systèmes réels implique de pouvoir gérer divers postes d'erreur potentiels : vibrations parasites, composantes aberrantes statiques, saturation des tensions de commande. La souplesse de la modélisation a permis de prendre en compte ces diverses problématiques. Le filtrage de composantes vibratoires a été mis en œuvre, en montrant que ces composantes peuvent être modélisées par un AR2 et estimées par filtrage de Kalman, autorisant leur filtrage et leur correction. Les composantes statiques sont une problématique essentiellement restreinte à l'OA hors axe. Une modélisation a été proposée par Le Roux pour gérer ces composantes, mais elle présente des défauts majeurs qui la rendent inexploitable. Une autre modélisation a été proposée, avec des propriétés augurant un comportement satisfaisant. Enfin, la gestion de la saturation des commandes est une problématique épineuse avec les commandes intégrateur, en raison de leur instabilité intrinsèque. Nous avons proposé une prise en compte de ces saturations dans la commande LQG en conservant une estimation optimale et stable de la turbulence.

Enfin, nous avons procédé à la validation numérique et expérimentale de la commande. Cette validation, menée sur le banc d'OA de l'ONERA, a d'abord nécessité la calibration et l'identification des modèles des divers composants. Cette étape a permis de mettre en évidence les limites des modèles utilisés : défauts de linéarité des composants, structure complexe du bruit de mesure de l'ASO, aberrations propres du miroir, difficulté à évaluer les propriétés temporelles de la turbulence. Les modélisations obtenues ont permis toutefois d'établir une simulation précise du fonctionnement du banc. Les résultats expérimentaux ont été confrontés avec succès à la simulation numérique. La loi de commande a été implantée sur un ordinateur temps réel décrit dans le manuscrit. Sa programmation dans un langage souple (C), et le choix d'une structure versatile de la loi de commande permettent d'envisager aisément divers contextes applicatifs.

La validation de la commande a été abordée initialement dans le contexte de l'OA. La mise en œuvre s'est avérée rapide et efficace : la commande LQG a démontré un fonctionnement stable et sensiblement plus performant qu'une loi de commande classique de type intégrateur optimisé. L'analyse détaillée des paramètres de contrôle du fonctionnement de la commande indiquent pourtant l'existence d'erreurs de modèle et donc une certaine sous-optimalité. Ces erreurs sont à porter au crédit des erreurs de calibration, et aux limites des modélisations. Une analyse paramétrique des performances de la commande montre toutefois que ces termes d'erreur peuvent être partiellement absorbés. Dans ce cadre d'OA simple, la commande LQG démontre déjà certaines propriétés d'intérêt, comme la réduction des phénomènes de gaufre et de repliement spectral. La confrontation avec la simulation numérique prouve une bonne concordance des résultats, autorisant à simuler des configurations non reproductibles sur le banc. On montre ainsi que l'effet de réduction du repliement spectral peut être significatif dans un contexte de forte turbulence.

L'amélioration des performances en OA grâce à la commande LQG s'est ensuite poursuivie par la validation du filtrage de composantes vibratoires. Un système vibrant, installé sur le montage expérimental, a permis d'introduire une vibration quasi-pure et stable, générant sur l'OA une perte de performance semblable à celle observée sur le système NAOS. L'effet de la vibration sur le système

a été caractérisé, et la vibration modélisée, permettant d'introduire un filtrage adéquat de cette composante. Le résultat est significatif : l'énergie totale de la vibration est atténuée de plus de 90 %. La conformité avec la simulation a été vérifiée et a permis de simuler des cas plus complexes, multi-vibratoires. Le filtrage de vibrations grâce à la commande LQG est donc avéré.

La validation expérimentale de la commande en OAMC n'est pas faisable sur notre banc d'OA. Une expérience d'OA hors axe a donc été mise en œuvre visant à analyser le front d'onde sur axe et optimiser la correction dans une direction hors axe grâce au montage d'OA classique. Ce concept exploite fortement les capacités d'extrapolation de la commande LQG et représente une brique élémentaire des OA tomographiques. L'expérience prouve les performances très significatives de la commande LQG hors axe. Le gain par rapport à une OA classique est évidemment indiscutable. On montre aussi que l'optimalité de la commande conduit à des performances supérieures à une solution sous-optimale proposée récemment, le POLC. L'étude paramétrique des performances permet une fois de plus d'évaluer les conditions optimales de fonctionnement de la commande en présence d'erreurs de modèle. Le comportement est aussi concordant avec la simulation numérique.

Pour la première fois en OA, une commande de type LQG a été testée en expérimentation. Que ce soit en OA simple ou en OAMC simplifiée, avec vibrations ou composantes statiques, les résultats obtenus montrent un gain en performance indiscutable par rapport à l'intégrateur, classiquement utilisé sur les systèmes réels. De plus, le bon comportement du système commandé vis-à-vis d'erreurs de modèle, nécessairement présentes dans ce type d'expérimentations (erreurs de calibration, non-linéarités négligées,...) permet maintenant d'envisager l'application de la commande LQG à des systèmes réels.

Enfin, les performances de la commande LQG sur des systèmes d'OAMC et de LTAO pour le VLT ont été étudiées grâce à une simulation numérique réaliste. Ces résultats confirment l'apport très significatif de cette approche, permettant d'optimiser la correction dans des directions spécifiques. Bien qu'ayant considéré uniquement des étoiles naturelles, sa souplesse permet de prendre en compte des géométries d'analyse complexe et l'utilisation d'étoiles laser.

## Perspectives

Les résultats de ces travaux soulèvent de nombreuses questions et ouvrent sur de multiples applications de la commande optimale LQG.

Tout d'abord, ces résultats appellent à quelques approfondissements. D'un point de vue expérimental et numérique, de nombreux tests restent à mener pour valider la commande dans des contextes variés (bas flux, forte turbulence, turbulence multi-couches *etc*). Diverses applications potentielles doivent être encore testées comme la gestion des saturations de la commande, le filtrage de vibrations multiples de nature variée et bien évidemment l'OAMC à proprement parler, en boucle ouverte et fermée. L'introduction de composantes statiques dans le modèle d'état reste encore un point à approfondir.

Plus généralement, on peut se pencher sur les problématiques liées à la commande qui seront communes à la plupart des applications envisageables, et que nos travaux ont partiellement déflorées.

En premier lieu, se pose la délicate question du choix des modèles et du calcul de leurs paramètres, ou identification. Cela inclut les modèles de composants (MD, ASO) et de turbulence, et par exemple on peut s'interroger sur le modèle d'évolution temporelle de la turbulence, pour l'heure très simple. Il s'agirait d'évaluer la pertinence d'un modèle plus évolué et bien-sûr le moyen de l'identifier. L'identification des paramètres des modèles doit faire appel à des calibrations précises. Enfin, les conditions

d'observations évoluant systématiquement au cours du temps, l'identification doit pouvoir devenir un processus dynamique, réactualisé au moins à intervalles réguliers.

Se pose ensuite le problème de la robustesse de la commande vis-à-vis des variations des divers paramètres du modèle. Il est essentiel d'évaluer l'impact de ces erreurs sur les performances de la commande. Nos travaux nous ont apporté quelques éléments, mais une étude intensive s'avère indispensable pour une mise en œuvre pratique. On pourra notamment s'intéresser aux commandes robustes.

Du point de vue de la correction, une solution a été proposée au problème de saturation des commandes. Néanmoins diverses solutions existent dans la littérature et devraient être analysées. La prise en compte d'une dynamique du miroir déformable, de non-linéarités (hystérésis) doit aussi être étudiée. En particulier inclure une dynamique de commande peut modifier la complexité et la robustesse de la commande. Une étude fine des caractéristiques de la dynamique est donc nécessaire.

La mise en œuvre pratique de la commande soulève le plus souvent des interrogations concernant les coûts calculatoires et les aspects numériques. Une part non négligeable des calculs peut être menée hors ligne et nous avons proposé des optimisations simples et efficaces de la commande, réduisant la charge du calculateur temps réel. Mais ce travail d'optimisation doit être poursuivi pour répondre aux besoins de systèmes toujours plus rapides et plus grands. Il doit s'accompagner d'une analyse des calculs numériques, notamment associés à la résolution d'une équation de Riccati, afin d'améliorer la précision numérique et la vitesse de convergence des calculs.

Enfin, on peut considérer l'ensemble des applications potentielles de la commande LQG et leurs problématiques spécifiques.

Nous avons souligné l'intérêt de la commande LQG pour l'OA à très haute dynamique (XAO), principalement en raison de ses capacités à filtrer les vibrations. Ces composantes représentent une perturbation potentiellement majeure du système. L'utilisation de la commande LQG est donc d'ores et déjà étudiée par l'équipe du DOTA pour le projet SPHERE, conjointement à une commande intégrateur à gain modal optimisé. Les résultats obtenus durant cette thèse ont en effet été très encourageants. Le filtrage de vibrations multiples et de diverses natures doit être encore approfondi, et en particulier se pose le difficile problème d'identification automatique de ces composantes. L'utilisation conjointe des deux lois de commande soulève aussi des interrogations quant à leur cohabitation et l'absence de couplages.

Nous avons aussi souligné récemment [Savage *et al.*(2006)] l'intérêt potentiel de la commande LQG dans le processus de mesure des aberrations non-communes. Cette application originale participerait à l'amélioration des performances globales d'une XAO. S'agissant d'un processus hors ligne, les problèmes de coût calculatoire sont absents. On peut être plus sceptique quant à l'utilisation de la commande LQG pour ses propriétés de filtrage d'*aliasing* en XAO : le surcoût calculatoire pourrait être bien trop élevé par rapport au gain potentiel, alors que des solutions matérielles existent (trou filtre) et ont été testées avec succès sur le banc BOA [Fusco *et al.*(2005a)].

Le gain majeur de la commande LQG est toutefois pressenti en OAMC. Suite aux résultats très significatifs obtenus en OA hors axe ou en simulation numérique, la validation expérimentale d'un cas concret d'OAMC reste à réaliser. Le banc d'OAMC HOMER actuellement en cours de développement à l'ONERA permettra une telle validation. Des tests sur le démonstrateur MAD sont aussi programmés. Ces validations expérimentales permettraient évidemment de confirmer le gain substantiel d'une commande LQG pour l'OAMC. Quiros [Quiros-Pacheco(2006)] a souligné que la mise en œuvre d'un intégrateur à gain modal optimisé en OAMC se heurte à une «*remaining error*» et la nécessité d'*a priori* plus important. De telles validations permettraient donc de comparer aussi la diffi-

culté de mise en œuvre de ces deux lois, leurs gains respectifs face à cette erreur, implicitement gérée en commande LQG. Enfin, ces tests permettraient d'aborder les aspects de calibration et modélisation de ces systèmes complexes. Des applications plus spécifiques liées à l'OAMC sont aussi à explorer. Nous avons évoqué l'apport essentiel de la commande LQG pour des applications telles que la LTAO ou la MOAO (au travers du projet FALCON) qui ne peuvent s'appuyer sur les lois de commande classiques étant donnée la nature de l'asservissement requis. Les performances en OA hors axe, ainsi que les capacités de fonctionnement en boucle ouverte de la commande LQG en font un candidat sérieux pour ces applications.

Enfin, à plus long terme, les projets actuels s'orientent vers de très grands systèmes, soit pour des OA à très hautes performances, soit pour des OA et OAMC sur de très grands télescopes (projet européen de 42 mètres). Les contraintes de coût calculatoire et de précision numérique deviennent critiques sur de tels systèmes dont le nombre de degrés de liberté devrait s'échelonner entre le millier et la dizaine de milliers, ce qui requiert un travail important d'optimisation des calculs. Ajoutons que ces grands systèmes prévoient pour la plupart la mise en œuvre de miroirs secondaires adaptatifs. Ces systèmes de correction de grande dimension possèdent en général une dynamique de réponse finie, voire des non-linéarités, qu'il faut pouvoir intégrer à la commande.





# **Annexes**



# Annexe A

## Outils de traitement de donnée

### A.1 Calcul expérimental du Ratio de Strehl

Le calcul de SR peut sembler simple étant donnée sa définition rappelée en équation (A.1). Dans la pratique son calcul à partir de données expérimentales est plus difficile, et de nombreuses méthodes de calcul du SR existent. L'important est surtout de conserver la même méthode pour tous les résultats, permettant de comparer l'évolution, au moins relative, du SR. Nous décrivons la méthode retenue dans l'ensemble de ce mémoire.

Cette méthode consiste d'abord en un retraitement de l'image brute. L'image contenant la FEP doit être soustraite d'un éventuel fond de la caméra préalablement calibré. Pour plus de sûreté (dérive éventuelle de ce fond), on soustrait à l'image sa médiane afin d'en retirer tout fond uniforme résiduel, en supprimant les pixels négatifs. On va comparer cette FEP à une FEP limitée par la diffraction (tache d'Airy). Celle-ci est générée en connaissant précisément l'échantillonnage de la caméra (taille du pixel en unité de diffraction). Cette FEP de référence est centrée, entre 4 pixels. La FEP image ne l'est pas. Or Il est important de ne pas biaiser l'analyse de la FEP en raison de l'échantillonnage fini de l'image.

On pratique donc un recentrage sub-pixellique de la tache image, en se donnant pour référence la tache d'Airy. Le décalage de la FEP image est estimé par corrélation, puis corrigé par transformée de Fourier. On revient ensuite dans l'espace direct pour retrouver une image centrée. La figure A.1 présente une image obtenue sur le banc BOA, avant puis après traitement.

L'image bruitée résultante et la tache d'Airy sont ensuite normalisées par rapport à leur flux total, et sont découpées pour gérer des images de taille plus modeste (typiquement  $128 \times 128$  pixels).

Le calcul proprement dit du SR peut être alors réalisé, soit directement par le rapport des maxima des deux taches, soit par le rapport des intégrales de leur transformée de Fourier, les Fonctions de Transfert Optiques ou FTO. En effet, le SR est donné par :

$$SR = \frac{FEP(\alpha = 0)}{Airy(\alpha = 0)} = \frac{\int FTO(f)df}{\int FTO_{Airy}(f)df}. \quad (A.1)$$

Cette seconde solution est préférée, elle permet en effet de traiter le problème du fond résiduel de l'image. En effet, l'image acquise peut présenter un fond résiduel malgré les traitements déjà évoqués (soustraction d'un fond mesuré et de la médiane). Ce fond va se traduire sur la FTO par un pic pour une fréquence spatiale nulle. Il est alors possible de le filtrer, en pratiquant une approximation polynômiale (sur 3 à 4 points typiquement) de la FTO au-delà de la fréquence nulle. Cette approximation est extrapolée en zéro et permet de s'affranchir du pic lié au bruit. Après renormalisation, on peut calculer

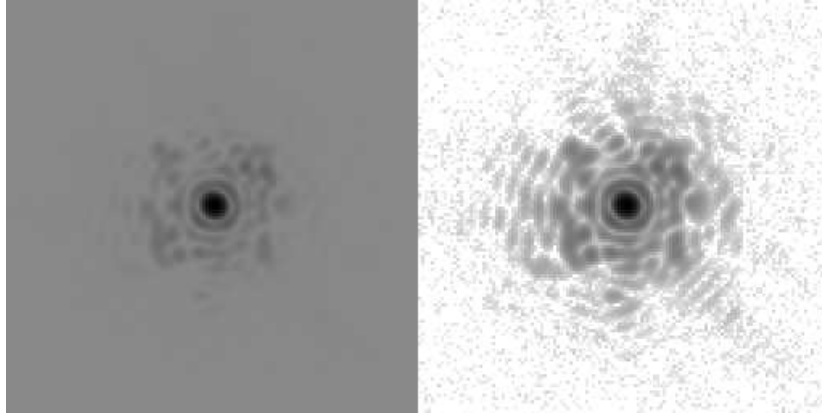


FIG. A.1 – Images brute (gauche) et pré-traitée (droite) obtenue sur BOA. La FEP de droite a subi un traitement du fond et un recentrage sub-pixellique.

le rapport des intégrales des FTO de l'image et de la tache d'Airy pour en déduire le SR. La figure A.2 montre les coupes des FTO calculées pour les deux images proposées en figure A.1, et comparées à la FTO de la tache d'Airy. La première image étant une image brute, sans pré-traitement, elle contient un fond. Ceci se traduit sur la FTO par un pic significatif en 0. L'approximation polynômiale sur 3 points permet de retrouver un profil de FTO très similaire à celui obtenu après traitement. Il est toutefois préférable pour la précision numérique de traiter le fond au sein de l'image de la FEP, puis au sein de la FTO pour supprimer tout fond résiduel.

## A.2 Calcul de la Densité Spectrale de Puissance d'un signal

Dans ce mémoire, il est très souvent fait appel au calcul de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) spatiale ou temporelle de signaux, échantillonnés, obtenus sur un horizon fini. Se pose donc la question de la méthode d'estimation de cette DSP. Il s'agit d'un problème d'analyse spectrale classique, dont on résume ici les solutions généralement retenues.

Soit  $X_n$  un signal scalaire aléatoire discret stationnaire du second ordre centré. On souhaite estimer sa DSP  $\phi_X(\nu)$  (qui s'écrit aussi comme la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation  $\phi_X(\nu) = \text{TF}(C_X(k))$ ) à partir d'une ou plusieurs réalisations d'un extrait  $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$  de  $\{X_n\}$ . La méthode la plus intuitive, obtenue par analogie avec l'analyse fréquentielle des signaux déterministes, consiste à calculer :

$$\hat{\phi}_n(\nu) = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} X_k e^{-2i\pi\nu k} \right|^2. \quad (\text{A.2})$$

Cette fonction est appelée périodogramme. Elle est généralement calculée par une méthode de transformée de Fourier discrète rapide.

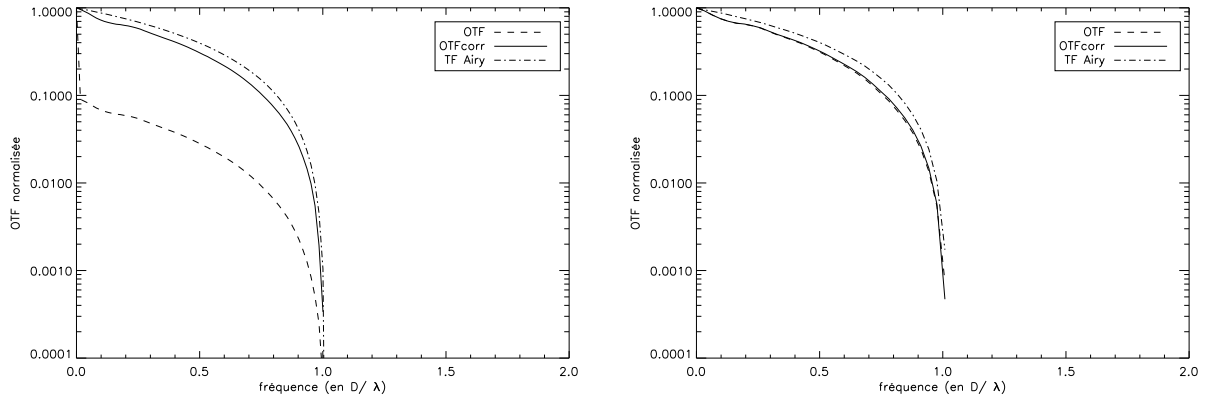


FIG. A.2 – A gauche : coupe d’une FTO obtenue sans pré-traitement de la FEP (gauche). La FTO est ensuite post-traitée pour supprimer l’effet du fond. A droite, FTO obtenue à partir d’une image pré-traitée.

Néanmoins cette solution présente le premier inconvénient d’être biaisée, c’est-à-dire que l’espérance du périodogramme est différente de la DSP de  $X_n$ . Mais on montre que ce biais tend asymptotiquement vers 0. Un second inconvénient bien plus important est que le périodogramme ne converge pas en général en moyenne quadratique vers la DSP. C’est-à-dire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E((\hat{\phi}_n(\nu) - \phi_X(\nu))^2) \neq 0, \quad (\text{A.3})$$

où  $E(X)$  désigne l’espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$ . Ceci se traduit en général par un périodogramme très chahuté, même en augmentant le nombre d’échantillons.

Une solution proposée par Welch [Welch(1967)] consiste à travailler sur un périodogramme moyenné, c’est-à-dire que le  $n$ -échantillon obtenu est divisé en  $l$  sous-séquences de longueur  $m$  telle que  $n = lm$ . Sur chaque sous-séquence un périodogramme est calculé selon la méthode précédente. Le périodogramme moyenné est défini par la moyenne des  $l$  périodogrammes calculés sur les  $l$  sous-séquences. On montre alors que la convergence en moyenne et en moyenne quadratique est assurée.

### A.3 Calcul de l’autocorrélation d’un signal

Le calcul de l’autocorrélation d’un signal relève de la même problématique. On considère les mêmes hypothèses qu’au paragraphe précédent. On s’intéresse à l’estimation de l’autocorrélation  $C_X(k)$  de  $X_n$ , définie pour une variable centrée par :

$$C_X(k) = E(X_n X_{n+k}), \quad (\text{A.4})$$

que l’on désigne aussi par corrélation à  $k$  pas. L’autocorrélation empirique biaisée du  $n$ -échantillon  $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$  est donnée par :

$$\hat{C}_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-|k|-1} X_j X_{j+|k|} \text{ pour } |k| < n. \quad (\text{A.5})$$

Comme son nom l'indique, cette estimée de l'autocorrélation de  $X_n$  est biaisée mais converge en moyenne vers  $C_X(k)$ .

On peut aussi montrer que  $\hat{\phi}_n(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{C}_n(k) e^{-2i\pi k\nu}$  sous hypothèse de circularité. On en conclut qu'une seconde solution pour calculer  $\hat{C}_n(k)$  consiste à calculer la transformée de Fourier inverse du périodogramme.

## Annexe B

# Loi de commande à base d'intégrateur : optimisation modale du gain

L'intégrateur est la loi de commande standard d'une OA. Présent sur la majorité des systèmes, l'intégrateur représente donc une référence en terme de performance en OA. C'est aussi la commande utilisée avant cette thèse sur le banc BOA.

Ce paragraphe présente tout d'abord l'algorithme exact de la commande intégrateur de BOA et notamment la méthode de calcul de la matrice de commande. Cette méthode est empirique, et on ne vise pas à en démontrer ici la validité mathématique. Cette méthode a été retenue pour ses réelles performances. On en décrit uniquement le principe. D'autre part, on rappelle la méthode générale d'optimisation modale du gain d'intégrateur présentée dans [Gendron(1995), Dessenne(1998)]. On pourra aussi trouver des compléments intéressants dans [Quiros-Pacheco(2006)].

### B.1 Loi de commande intégrateur et calcul de la matrice de commande

La commande intégrateur à gain uniforme se définit par la relation suivante :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n - g\mathbf{M}_{com}\mathbf{y}_n. \quad (\text{B.1})$$

On détaille maintenant le calcul de la matrice de commande  $\mathbf{M}_{com}$ . On rappelle que la matrice d'interaction est définie comme étant la matrice  $\mathbf{M}_{inter}$  associant à un vecteur de tensions de commande des miroirs  $\mathbf{u}$  les mesures de pentes  $\mathbf{p}$  associées selon :

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}_{inter}\mathbf{u}. \quad (\text{B.2})$$

Chaque colonne  $i$  de la matrice d'interaction correspond à la mesure sur l'ASO de l'effet de l'excitation nominale de l'actionneur  $i$  du miroir déformable. Elle se compose des mesures de pente selon l'axe  $x$  puis selon l'axe  $y$ . La figure B.1 présente une telle matrice mesurée sur le banc BOA de l'ONERA. On distingue sur cette matrice la première partie de 69 colonnes correspondant au miroir déformable, et la seconde de deux colonnes correspondant au miroir de basculement (réponse quasi uniforme sur chaque axe  $x$  ou  $y$ ).

Le calcul de la matrice de commande  $\mathbf{M}_{com}$  repose sur une inversion généralisée de la matrice d'interaction, rectangulaire, dont la solution est donnée par :

$$\mathbf{M}_{com} = \left( \mathbf{M}_{inter}^T \mathbf{M}_{inter} \right)^\dagger \mathbf{M}_{inter}^T, \quad (\text{B.3})$$



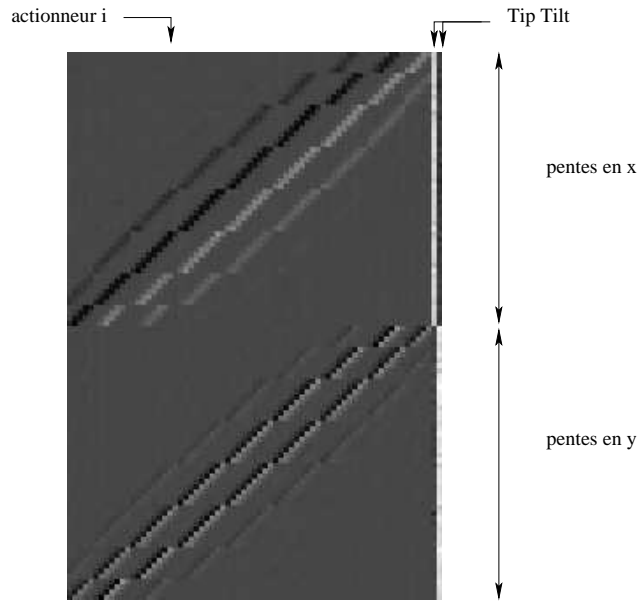


FIG. B.1 – Matrice d’interaction expérimentale mesurée sur le banc BOA

Le symbole † rappelant que l’inversion de  $\mathbf{M}_{inter}^T \mathbf{M}_{inter}$  n’est pas systématiquement possible, en raison de possibles valeurs propres nulles. Dans la pratique, le bruit de calibration, les erreurs numériques font que le noyau de  $\mathbf{M}_{inter}$  est réduit à zéro. Néanmoins, il existe des modes associés à de très faibles valeurs propres, conduisant à un très mauvais conditionnement (rapport de la plus haute valeur propre sur la plus faible) de  $\mathbf{M}_{inter}^T \mathbf{M}_{inter}$ . Ces modes sont en général à l’origine d’une amplification du bruit propagé dans la boucle. Il est donc souhaitable de les filtrer. Leur identification et leur filtrage sont réalisés grâce à une décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{M}_{inter}$ , associée à une troncature. L’origine de ces modes mal vus est multiple. Ce sont certains modes que l’ASO ne peut pas, ou très mal, mesurer (modes piston et gaufre, voir le paragraphe B.1.2). Rappelons aussi que l’ASO réalise une mesure échantillonnée spatialement du front d’onde. Il existe donc un repliement spectral des hautes fréquences spatiales sur les plus basses. Ainsi, des combinaisons de hautes et basses fréquences spatiales peuvent conduire à une mesure faible (voire nulle). Dans un contexte d’OAMC on aurait aussi des modes mal-vus liés à la géométrie des directions d’analyse et à la distribution dans le volume de la turbulence (voir le paragraphe 3.3.1.2).

Enfin, le calcul de la matrice de commande se complique en raison de contraintes supplémentaires. On souhaite en effet corriger la pente moyenne avec le miroir de basculement afin de ne pas trop solliciter la course du miroir déformable. Il faut donc filtrer cette composante sur la partie de la matrice de commande contrôlant le miroir déformable, de sorte que la correction de la pente moyenne soit assurée par le miroir de basculement. Ceci impose un traitement supplémentaire de la matrice d’interaction lors de son inversion généralisée.

### B.1.1 Filtrage de la pente moyenne

L’objet de ce filtrage est d’interdire au miroir déformable de générer une pente moyenne (en  $x$  et en  $y$ ), composante qui est corrigée par le miroir de bascule. On réduit ainsi les sollicitations du miroir déformable et on évite les couplages entre les miroirs. Le principe du filtrage est le suivant. On ne

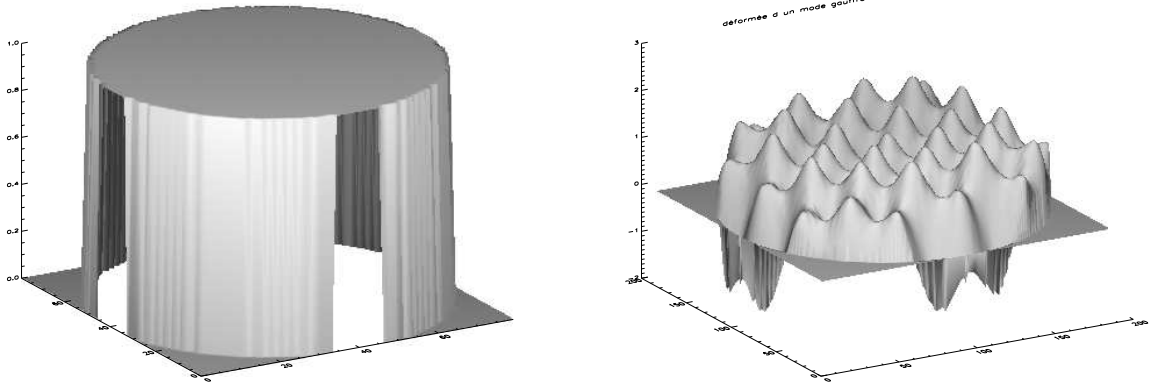


FIG. B.2 – Modes piston (gauche) et gaufre (droite) théoriques, générés par le miroir déformable et conduisant à une mesure (presque) nulle.

considère que la première partie de la matrice d'interaction, notée  $C$ , correspondant à l'interaction entre miroir déformable et ASO. Chaque colonne  $C^i$  de cette sous-matrice subit une correction : la première moitié de la colonne  $C_x^i$ , correspondant à la mesure du déplacement en  $x$  est soustraite de sa valeur moyenne multipliée par un coefficient  $\alpha_{pm}$ . La même opération est appliquée à la seconde moitié de la colonne (pente en  $y$ )  $C_y^i$ . L'algorithme se résume par :

Pour  $i = 1, \dots, 69$  répéter :

$$C_x^i \leftarrow C_x^i - \alpha_{pm} \times \overline{C_x^i} \quad (\text{B.4})$$

$$C_y^i \leftarrow C_y^i - \alpha_{pm} \times \overline{C_y^i} \quad (\text{B.5})$$

En choisissant  $\alpha_{pm}$  élevé (plusieurs dizaines), ceci conduit à la mise en évidence de deux modes (pente moyenne en  $x$  et en  $y$ ) de valeurs singulières très élevées, donc aisément identifiables. Lors du calcul de la matrice de commande ces modes seront filtrés par troncature (voir le paragraphe B.1.3).

## B.1.2 Filtrage des modes piston et gaufre

Deux types de modes *a priori* non vus par l'ASO sont à gérer : le mode piston et le mode gaufre. Ces deux modes sont présentés en figure B.2.

Ces modes appartenant théoriquement au noyau de  $\mathbf{M}_{inter}$  n'apparaissent pourtant pas de manière évidente au sein des modes propres du système en raison du bruit de calibration et du bruit numérique. On les force à apparaître par l'ajout de mesures «virtuelles» dans la matrice d'interaction, correspondant pour le piston à la mesure de la tension moyenne (plus exactement la somme des tensions) et pour le mode gaufre à la projection du vecteur de tension sur le mode gaufre. Là encore, on ne traite que la sous-matrice  $C$  de la matrice d'interaction correspondant à l'interaction miroir déformable-ASO. Le filtrage du mode piston correspond donc à ajouter à  $C$  une ligne remplie de 1.

Le mode gaufre quant à lui est un mode de structure plus complexe. Il correspond à tirer et pousser sur chacun des actionneurs selon une structure en échiquier : si on tire sur un actionneur, on pousse

sur ses 4 plus proches voisins. Cela revient donc à une structure de commande en tension de la forme :

$$\begin{pmatrix} & & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & & & \\ & & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \\ & & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & & & \\ & & & & 1 & -1 & 1 & & & \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

On ajoute donc une ligne de mesure supplémentaire donc la structure dépend de celle du miroir et de ses actionneurs valides. Dans le cas du miroir déformable de BOA, cette ligne de mesure  $L$  n'est que la réécriture de (B.6) sous la forme d'un vecteur ligne.

Là encore, on applique un coefficient multiplicatif sur chacun de ces deux vecteurs de mesure additionnels de sorte à faire apparaître de manière significative dans la décomposition en valeur singulière les valeurs singulières associées à ces deux modes. Lors du calcul de la matrice de commande ces modes seront filtrés par troncature (voir le paragraphe B.1.3). Notons que cette méthode devrait être améliorée en prenant en compte le coefficient de réponse en tension de chacun des actionneurs.

### B.1.3 Décomposition en valeurs singulières et inversion

Cette méthode est des plus classiques, et on pourra se référer à [Golub & Loan(1985), Quiros-Pacheco(2006)] pour plus de détails. On rappelle que la décomposition en valeurs singulières d'une matrice  $\mathbf{D}$  de dimension  $n \times p$  s'écrit :

$$\mathbf{D} = \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{V}^T, \quad (\text{B.7})$$

avec :

- $\mathbf{W}$  la matrice diagonale contenant les valeurs singulières notées  $\lambda_i$  de  $\mathbf{D}$ . Il est à noter que les carrés de ces valeurs singulières correspondent aux valeurs propres de  $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$  ;
- $\mathbf{U}$  est la matrice de modes propres de  $\mathbf{D} \mathbf{D}^T$  ;
- $\mathbf{V}$  est la matrice de modes propres de  $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$ , appelée aussi matrice des modes propres de  $\mathbf{D}$  par abus de langage.

On a alors les relations suivantes :

$$\mathbf{D}^T \mathbf{D} = \mathbf{V} \mathbf{W}^2 \mathbf{V}^T, \quad (\text{B.8})$$

$$(\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T = \mathbf{V} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{U}^T. \quad (\text{B.9})$$

Ce calcul suppose que  $\mathbf{D}$  n'ait pas de valeur singulière nulle et donc que  $\mathbf{W}$  soit inversible. Quand bien même aucune valeur singulière ne serait nulle, on peut être confronté à des valeurs singulières très faibles. Comme souligné au paragraphe B.1 ces composantes sont à l'origine de l'amplification du bruit. Elles doivent donc être filtrées. Dans les deux cas de figure, on peut calculer une pseudo-inverse de  $\mathbf{D}$  en appliquant une décomposition en valeur singulière tronquée. Il s'agit là d'une méthode de régularisation par contrôle de dimension, dont le principe est d'inverser  $\mathbf{W}$  (qui, rappelons-le, est diagonale), sur un sous-espace orthogonal à celui généré par les modes non-vus (valeurs singulières nulles) ou mal-vus (valeurs singulières très faibles). Pour cela, on inverse  $\mathbf{W}$  uniquement sur ses

valeurs diagonales non nulles, et supérieures à un certain seuil  $s$  fixé. Les autres valeurs propres ne sont pas inversées, mais laissées à zéro pour celles déjà nulles, ou mises à zéro pour les autres. Ceci se résume par :

$$\mathbf{W}^\dagger = \text{diag}(\sigma_i) \text{ avec } \sigma_i = \begin{cases} \lambda_i^{-1} & \text{si } \lambda_i > s \\ 0 & \text{si } \lambda_i < s \end{cases} . \quad (\text{B.10})$$

Le conditionnement de la matrice  $\mathbf{D}$  après troncature est directement relié au seuil  $s$ . Le problème consiste alors à choisir  $s$  de sorte à améliorer les conditionnements en filtrant les modes mal-vus indésirables sans toutefois priver le système de trop de degrés de liberté utiles.

Dans la pratique, les valeurs singulières de  $\mathbf{M}_{inter}$  ne sont jamais nulles, en raison des bruits de calibration. La figure B.3 en montre leur répartition. Le nombre de conditionnement initial (rapport  $\lambda_{max}/\lambda_{min}$ ) de  $\mathbf{M}_{inter}$  est cependant en général supérieur à 5500, trahissant l'existence de modes mal-vus. A cela s'ajoute le besoin de filtrer les modes précédemment décrits (pentes moyennes, piston, gaufre).

Le principe du calcul de  $\mathbf{M}_{com}$  consiste donc à suivre les étapes suivantes :

- réaliser une décomposition en valeurs singulières de la matrice d'interaction restreinte au MD  $C$ , après lui avoir fait subir les modifications décrites précédemment, c'est-à-dire de préparation au filtrage de la pente moyenne et des modes gaufre et piston ;
- les valeurs singulières sont ordonnées et classées par ordre croissant ;
- les valeurs singulières artificiellement très fortes associées aux modes de pente moyenne, de piston et de gaufre sont ainsi les dernières. Elles sont isolées et mises à zéro ;
- les autres valeurs singulières sont analysées. Toutes celles en-dessous d'un certain seuil sont mises à zéro, et ne sont pas inversées. Toutes les autres sont inversées ;
- l'inverse généralisée tronquée de  $C$  est enfin calculée grâce à (B.9) en remplaçant  $\mathbf{W}^{-1}$  par  $\mathbf{W}^\dagger$  ;
- on réalise une inverse généralisée de la matrice d'interaction entre miroir de basculement et ASO ;
- on regroupe les inverses obtenues pour recomposer la matrice  $\mathbf{M}_{com}$ .

Avec cette méthode, les quatre modes associés aux pentes moyennes (en  $x$  et en  $y$ ), au piston et au gaufre sont filtrés. Les modes mal-vus sont filtrés de sorte que le nombre de conditionnement de la matrice d'interaction après modification et troncature de 5 à 10 modes (en plus des 4 précédents) est environ de 35. On limite ainsi la propagation-amplification du bruit, et l'absence d'amplification des modes non-vus que sont le piston et le gaufre (voir le chapitre 10).

Le choix du nombre de modes tronqués (ou du seuil de troncature), des coefficients d'amplification pour le filtrage du piston, du gaufre et de la pente moyenne est bien-sûr délicat. Les meilleurs réglages dépendent du rapport signal-à-bruit, des réglages du banc et des calibrations (impact de défauts d'alignements). Ces problèmes ne se posent pas avec la commande LQG.

## B.2 Optimisation modale du gain

L'optimisation d'une commande de type intégrateur repose sur le découplage modal de l'asservissement multi-variable en une série d'asservissements découplés. On choisit pour cela une base, de modes  $\{m_i\}$  diagonalisant la matrice d'interaction du système. Par la suite, on peut optimiser le gain  $g_i$  pour chacun de ces asservissements, c'est-à-dire pour chaque mode  $m_i$  de la base choisie. On considère ici la base des modes propres du système, une base relativement naturelle qui rend bien compte du système, de ses modes mal-vus, et qui est directement fournie par la décomposition en

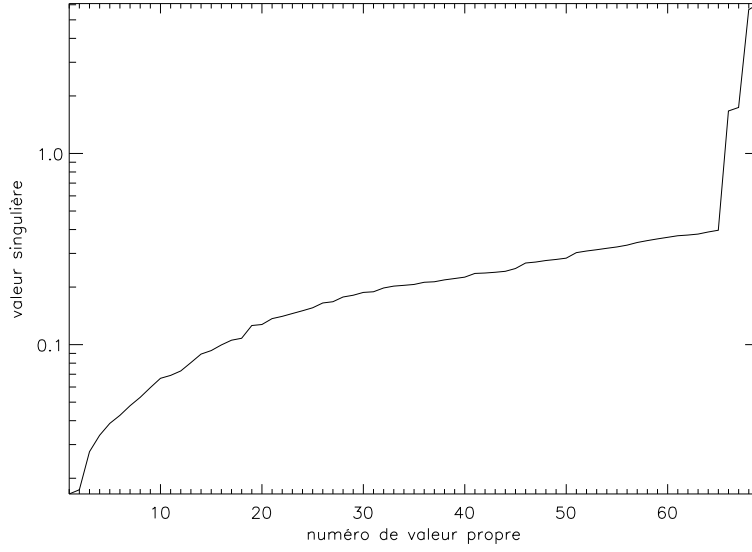


FIG. B.3 – . Valeurs singulières de la matrice d'interaction (hors miroir de basculement), avec amplification de la pente moyenne et du gaufre. On note donc les 4 dernières valeurs singulières amplifiées.

valeurs singulières. On suppose que l'ensemble des opérations de pré-traitement de la matrice d'interaction décrites précédemment a été appliqué. Une décomposition en valeurs singulières a été menée et la base des modes propres identifiée.

La phase turbulente est supposée appartenir à l'espace des phases engendré par le miroir déformable (et le miroir de bascule), de sorte que pour toute phase turbulente  $\phi^{tur}$ , il existe  $\mathbf{u}$  tel que :

$$\phi^{tur} = \mathbf{N}\mathbf{u}. \quad (\text{B.11})$$

Ce faisant, on néglige l'ensemble (infini) des composantes de la phase turbulente n'appartenant pas à l'espace des phases engendré par le miroir. Cet ensemble est considéré en général comme négligeable en OA. Comme le montre Quiros [Quiros-Pacheco(2006)], cela n'est plus du tout vrai en OAMC.

De manière équivalente, on peut donc considérer la décomposition de la phase turbulente sur la base diagonalisant la matrice d'interaction. On note par  $\phi_i^{tur}$  la décomposition de la phase turbulente sur le mode propre  $m_i$ . De la même manière, on note par  $\phi_i^{cor}$  et  $\phi_i^{res}$  les composantes de la phase corrigée et de la phase résiduelle après correction sur le mode propre  $m_i$ , de sorte que  $\phi_i^{res} = \phi_i^{tur} - \phi_i^{cor}$ . Enfin, on note par  $\mathbf{w}_i$  le bruit de mesure ASO propagé sur le mode propre  $m_i$ .

On considère donc désormais le problème d'asservissement modal restreint à un mode propre  $m_i$  du système, et les décompositions des phases et du bruit sur ce même mode. On est donc ramené à un problème de commande totalement découplé, où chaque transfert est donc scalaire.

On montre alors que la phase résiduelle  $\phi_i^{res}$  est reliée à  $\phi_i^{tur}$  et  $\mathbf{w}_i$  par :

$$\tilde{\phi}_i^{res} = \mathbf{E}_i(j\omega, g_i)\tilde{\phi}_i^{tur} - \mathbf{H}_i(j\omega, g_i)\tilde{\mathbf{w}}_i, \quad (\text{B.12})$$

où  $\tilde{a}$  désigne la transformée de Fourier de la grandeur  $a$ ,  $\mathbf{E}_i$  est la fonction de transfert de réjection modale associée au mode  $m_i$  et  $\mathbf{H}_i$  est la fonction de transfert de bruit modale associée au mode  $m_i$ . Les fonctions de transfert  $\mathbf{E}_i$  et  $\mathbf{H}_i$  sont directement dépendantes du gain modal  $g_i$  de l'intégrateur sur le mode  $m_i$ .

L'optimisation modale du gain vise à minimiser la variance de la phase résiduelle, c'est-à-dire à minimiser le critère suivant [Gendron(1995)] :

$$\mathbf{J}(g_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{E}_i(j\omega, g_i)\|^2 \|\tilde{\phi}_i^{tur}(j\omega)\|^2 d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{H}_i(j\omega, g_i)\|^2 \|\tilde{\mathbf{w}}_i(j\omega)\|^2 d\omega. \quad (\text{B.13})$$

La minimisation de ce critère pose cependant un problème. Si l'expression des fonctions de transfert est bien connue pour un système d'OA commandé par un intégrateur de gain  $g_i$  (voir [Dessenne(1998)]), et si le bruit  $\mathbf{w}_i$  peut être évalué, ce critère nécessite cependant de connaître *a priori* le spectre temporel de la turbulence sur le mode  $m_i$ . Pour contourner cette difficulté, Dessenne simplifie ce critère [Dessenne(1998)]. Elle montre que, sous certaines hypothèses simplificatrices que l'on peut supposer comme vérifiées dans le cadre des applications expérimentales sur BOA, le critère (B.13) peut être simplifié en :

$$\mathbf{J}(g_i) = \int \|\mathbf{E}_i(j\omega, g_i)\|^2 \|\tilde{\phi}_i^{tur,ol}(j\omega)\|^2 d\omega, \quad (\text{B.14})$$

où  $\tilde{\phi}_i^{tur,ol}$  désigne la phase turbulente exprimée sur le mode  $m_i$ , mesurée en boucle ouverte. Le problème donc se résume à minimiser (B.14) relativement au gain modal  $g_i$ . La minimisation est réalisée directement par dérivation du critère par rapport au gain  $g_i$ . On montre que la dérivée est monotone croissante et possède en général une valeur nulle, si bien que la minimisation du critère se fait par une recherche dichotomique de la valeur annulant la dérivée. Le gain est recherché sur une plage de valeur pouvant aller de 0 à 1 (limite de stabilité pour un asservissement présentant deux trames de retard). Dans la pratique, imposer des marges de gain et de phase suffisantes conduit à limiter la valeur du gain, le plus couramment à 0,53, ce qui correspond à une marge de gain de 3dB et une marge de phase de 45° [Dessenne(1998)].

Enfin, se pose la question du calcul de  $\tilde{\phi}_i^{tur,ol}$ . Cette grandeur peut être obtenue en faisant fonctionner le système d'OA en boucle ouverte et en enregistrant les pentes  $\mathbf{y}^{ol}(t)$  acquises. Ces pentes permettent alors, grâce à la matrice de commande, de retrouver l'expression de la phase turbulente dans la base des modes propres du système selon :

$$\tilde{\phi}^{tur,ol}(t) = (\mathbf{W}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y}^{ol}(t)). \quad (\text{B.15})$$

La figure B.4 montre les gains modaux obtenus sur le banc BOA pour tous les modes hormis les 10 premiers modes qui sont filtrés *manu militari* (gains mis à zéro), et les 4 correspondant au modes piston, gaufre et pentes moyennes. Ces gains ont été obtenus dans un cas de fort rapport signal-à-bruit, ce qui explique leur forte homogénéité et leur valeur relativement élevée.

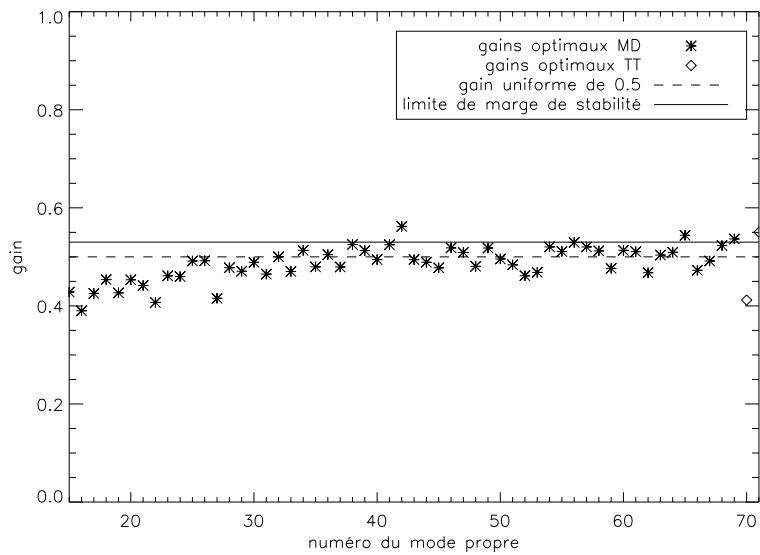


FIG. B.4 – Gains optimaux pour le MD calculés sur la base des modes propres du système, exception faite des 10 modes propres filtrés, du piston, gaufre et pente moyenne. On adjoint (losange) les gains pour le miroir de basculement (TT).

## Annexe C

# Non-observabilité de la représentation d'état

Il s'agit ici de justifier de la non-observabilité de la représentation d'état proposée en OA et OAMC. On se place par souci de simplicité dans le cas de l'OA. Rappelons cette représentation d'état. Elle se base sur le choix du vecteur d'état :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tur} \\ \phi_{n-1}^{tur} \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

et sur les équations d'état et d'observation suivantes :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_n + \begin{pmatrix} \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_n, \quad (\text{C.2})$$

et :

$$\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{D} & 0 & -\mathbf{DN} \end{pmatrix} \mathbf{X}_n + \mathbf{w}_n. \quad (\text{C.3})$$

Le calcul de la matrice d'observabilité  $\mathbf{O}$  associée à  $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$  conduit à :

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{D} & 0 & -\mathbf{DN} \\ 0 & \mathbf{D} & 0 & -\mathbf{DN} & 0 \\ \mathbf{D} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{DA}^{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{DA}^{tur^{n-3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

Les 4 dernières colonnes sont indubitablement liées, prouvant la non-observabilité du système. Comme le souligne Le Roux [Le Roux(2003)] cette non-observabilité découle d'abord de la présence des vecteurs de commandes dans le vecteur d'état. Or, ces composantes sont inobservables. Mais l'inobservabilité du système est bien plus fondamentale, si bien que, même en se restreignant à la partie



turbulente du vecteur d'état, le système reste inobservable. La raison de cette inobservabilité tient à l'existence de retards de mesure. Pour vérifier ce point, nous allons simplifier le système. Plus précisément, considérons un premier modèle d'état (sans terme de commande, puisque c'est évidemment hors sujet en termes d'observabilité) :

$$x_{n+1} = \mathcal{A}x_n \quad (\text{C.5})$$

$$y_n = \mathcal{C}x_n, \quad (\text{C.6})$$

et un système identique, mais avec retard de mesure, soit

$$z_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \mathcal{A}_2 z_n = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

$$y_n = \mathcal{C}_2 z_n = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

Notons  $d$  la dimension de  $x_n$ . La matrice d'observabilité du système sans retard est alors

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \mathcal{C} \\ \mathcal{C}\mathcal{A} \\ \vdots \\ \mathcal{C}\mathcal{A}^{d-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.9})$$

celle du deuxième valant :

$$\mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_2 \\ \mathcal{C}_2\mathcal{A}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{C}_2\mathcal{A}_2^{2d-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

Calculons les premiers termes de  $\mathcal{O}_2$  :

$$\mathcal{C}_2\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$\mathcal{C}_2\mathcal{A}_2^2 = \begin{pmatrix} \mathcal{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}\mathcal{A} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

$$\mathcal{C}_2\mathcal{A}_2^3 = \begin{pmatrix} \mathcal{C}\mathcal{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}\mathcal{A}^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.13})$$

et ainsi de suite. On a donc

$$\mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & 0 \\ \mathcal{C}\mathcal{A} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{C}\mathcal{A}_2^{2d-2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.14})$$

En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, on constate que

$$\text{rang}(\mathcal{O}_2) = \text{rang} \left( \begin{pmatrix} \mathcal{C} \\ \mathcal{C}\mathcal{A} \\ \vdots \\ \mathcal{C}\mathcal{A}_2^{2d-2} \end{pmatrix} \right) + \text{rang}(\mathcal{C}) = \text{rang}(\mathcal{O}) + \text{rang}(\mathcal{C}). \quad (\text{C.15})$$

Ainsi, pour que  $(\mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2)$  soit observable, il faudrait que  $\text{rang}(\mathcal{O}_2) = 2d$ . Si l'on suppose que  $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$  est observable, c'est-à-dire que  $\text{rang}(\mathcal{O}) = d$ , il faudrait donc que  $\text{rang}(\mathcal{C}) = d$ , autrement dit que dans le système sans retard on ait autant de mesures que d'états, ou ramené à notre problème d'OA, autant de mesures que de modes de phase estimés, ce qui est évidemment rarement le cas. Quand bien même le nombre de modes estimés serait inférieur ou égal au nombre de mesures de pentes, il reste à vérifier que  $\text{rang}(\mathcal{C}) = d$ .

Comment doit-on comprendre ce résultat apparemment paradoxal ? Comme souvent en pareil cas, il est utile de revenir à la définition de l'observabilité : un système est inversible si l'on peut inverser la fonction qui, en l'absence de commande, relie l'état initial à la suite des sorties. Posons donc :

$$z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

On vérifie alors immédiatement que la suite des sorties de  $s = 0$  à  $s = n$  est

$$Y_n \triangleq \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}x_{-1} \\ \mathcal{C}x_0 \\ \mathcal{C}\mathcal{A}x_0 \\ \vdots \\ \mathcal{C}\mathcal{A}^{n-2}x_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.17})$$

Par définition, le système est non-observable s'il existe des conditions initiales  $z_0 \neq 0$  telles que  $Y_n = 0$  pour tout  $n \geq 0$ , l'ensemble des combinaisons linéaires de ces conditions initiales constituant alors la partie non-observable du système. Dans ce cas précis, il est clair que si  $x_{-1} \in \ker(\mathcal{C})$ , alors la condition initiale

$$z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{C.18})$$

sera inobservable. Cela signifie simplement que l'état initial du registre à décalage utilisé pour matérialiser le retard de mesure dans notre modèle d'état ne pourra pas être reconstitué car il n'influence que la première mesure. Plus subtilement, ceci souligne le fait que notre modèle n'oblige pas la condition initiale à être cohérente avec la dynamique du système, ce qui imposerait de la contraindre à avoir comme forme particulière

$$z_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{A}x_{-1} \\ x_{-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.19})$$

En pratique, cette perte d'observabilité ne tirera guère à conséquence puisque cette partie non-observable n'aura pas non plus d'influence sur  $z_n$  à partir de  $n = 1$ . Mathématiquement, ceci se traduit par le fait que  $(\mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2)$  sera détectable quand  $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$  est observable.

Pour le démontrer, il suffit de se rappeler qu'un système est détectable quand sa partie inobservable est stable. Dans le cas qui nous occupe, toujours sous l'hypothèse que  $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$  est observable, la partie non-observable est très exactement égale au sous espace vectoriel :

$$\mathcal{I} \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ \ker(\mathcal{C}) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.20})$$

En effet, d'après ce qui précède,  $\mathcal{I}$  est inclus dans la partie inobservable. Mais par ailleurs, celle-ci a comme dimension

$$2d - \text{rang}(\mathcal{O}_2) = 2d - \text{rang}(\mathcal{O}) - \text{rang}(\mathcal{C}) = d - \text{rang}(\mathcal{C}) = \dim(\mathcal{I}), \quad (\text{C.21})$$

et cette partie non-observable est évidemment stable, puisque si  $z_0 \in \mathcal{I}$ , alors  $\mathcal{A}_2 z_0 = 0$ .

Ces résultats s'étendent sans difficulté à un système avec un retard de mesure quelconque.



## Annexe D

# Simplification de l'équation de Riccati

On suppose que l'équation de Riccati converge vers un point fixe unique et indépendant des conditions initiales, noté  $\Sigma_\infty$ , et solution de l'équation de Riccati suivante :

$$\Sigma_\infty = \mathcal{A}\Sigma_\infty\mathcal{A}^T + \Sigma_{\mathcal{V}} - \mathcal{A}\Sigma_\infty^T\mathcal{C}^T(\mathcal{C}\Sigma_\infty\mathcal{C}^T + \Sigma_{\mathcal{W}})^{-1}\mathcal{C}\Sigma_\infty\mathcal{A}^T, \quad (\text{D.1})$$

En prenant comme vecteur d'état :

$$\mathbf{x}_n^1 = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}^{tur} \\ \phi_n^{tur} \\ \phi_{n-1}^{tur} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.2})$$

et la matrice d'état :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{tur} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.3})$$

On structure par blocs la matrice  $\Sigma_\infty$  sous la forme :

$$\Sigma_\infty = \begin{pmatrix} J & K & L \\ M & N & O \\ P & Q & R \end{pmatrix} \quad (\text{D.4})$$

Nous démontrons que :

$\Sigma_\infty$  est point fixe de l'équation de Riccati (D.1) si et seulement si les relations suivantes sont

vérifiées :

$$R = \mathbf{A}^{tur} R \mathbf{A}^{turT} + \Sigma_{\nu} - \mathbf{A}^{tur} R^T \mathbf{D}^T (\mathbf{D} R \mathbf{D}^T + \Sigma_w)^{-1} \mathbf{D} R \mathbf{A}^{turT} \quad (\text{D.5})$$

$$N = \mathbf{A}^{tur} R \mathbf{A}^{turT} + \Sigma_{\nu} \quad (\text{D.6})$$

$$J = \mathbf{A}^{tur} N \mathbf{A}^{turT} + \Sigma_{\nu} \quad (\text{D.7})$$

$$Q = R \mathbf{A}^{turT} \quad (\text{D.8})$$

$$O = Q^T \quad (\text{D.9})$$

$$P = Q \mathbf{A}^{turT} \quad (\text{D.10})$$

$$L = P^T \quad (\text{D.11})$$

$$M = N \mathbf{A}^{turT} \quad (\text{D.12})$$

$$K = M^T \quad (\text{D.13})$$

On exploite pour cela une propriété fondamentale de la matrice de covariance d'erreur d'estimation : elle est symétrique.

**Démonstration** : on calcule le membre de droite, noté Y, de (D.1) :

$$Y_{11} = \mathbf{A}^{tur} J \mathbf{A}^{turT} + \Sigma_{\nu} + \mathbf{A}^{tur} P^T \mathbf{D}^T (\mathbf{D} R \mathbf{D}^T + \Sigma_w)^{-1} \mathbf{D} P \mathbf{A}^{turT} \quad (\text{D.14})$$

$$Y_{21} = Y_{12}^T = J \mathbf{A}^{turT} + P^T \mathbf{D}^T (\mathbf{D} R \mathbf{D}^T + \Sigma_w)^{-1} \mathbf{D} P \mathbf{A}^{turT} \quad (\text{D.15})$$

$$Y_{31} = Y_{13}^T = M \mathbf{A}^{turT} + Q^T \mathbf{D}^T (\mathbf{D} R \mathbf{D}^T + \Sigma_w)^{-1} \mathbf{D} P \mathbf{A}^{turT} \quad (\text{D.16})$$

$$Y_{22} = J + P^T \mathbf{D}^T (\mathbf{D} R \mathbf{D}^T + \Sigma_w)^{-1} \mathbf{D} P \quad (\text{D.17})$$

$$Y_{32} = Y_{23}^T = M + Q^T \mathbf{D}^T (\mathbf{D} R \mathbf{D}^T + \Sigma_w)^{-1} \mathbf{D} P \quad (\text{D.18})$$

$$Y_{33} = N + Q^T \mathbf{D}^T (\mathbf{D} R \mathbf{D}^T + \Sigma_w)^{-1} \mathbf{D} Q \quad (\text{D.19})$$

On constate déjà que :

$$Y_{31} = Y_{32} \mathbf{A}^{turT} \quad (\text{D.20})$$

$$Y_{21} = Y_{22} \mathbf{A}^{turT} \quad (\text{D.21})$$

$$Y_{11} = \mathbf{A}^{tur} Y_{21} + \Sigma_{\nu} = \mathbf{A}^{tur} Y_{22} \mathbf{A}^{turT} + \Sigma_{\nu} \quad (\text{D.22})$$

Montrons alors l'équivalence. Supposons d'abord que  $\Sigma_{\infty}$  est point fixe de l'équation de Riccati. Alors on déduit successivement :

$$(\text{D.16}) + (\text{D.18}) \rightarrow P = Q \mathbf{A}^{turT} \quad (\text{D.23})$$

$$(\text{D.15}) + (\text{D.17}) \rightarrow M = N \mathbf{A}^{turT} \quad (\text{D.24})$$

$$(\text{D.14}) + (\text{D.17}) \rightarrow J = \mathbf{A}^{tur} N \mathbf{A}^{turT} + \Sigma_{\nu} \quad (\text{D.25})$$

$$(\text{D.19}) + (\text{D.22}) + (\text{D.17}) \rightarrow \mathbf{A}^{tur} R \mathbf{A}^{turT} = N - \Sigma_{\nu} \quad (\text{D.26})$$

$$(\text{D.19}) + (\text{D.18}) + (\text{D.24}) \rightarrow Q = R \mathbf{A}^{turT} \quad (\text{D.27})$$

$$(\text{D.19}) + (\text{D.26}) + (\text{D.27}) \rightarrow R = \mathbf{A}^{tur} R \mathbf{A}^{turT} + \Sigma_{\nu} \quad (\text{D.28})$$

$$-\mathbf{A}^{tur} R \mathbf{D}^T (\mathbf{D} R \mathbf{D}^T + \Sigma_w)^{-1} \mathbf{D} R \mathbf{A}^{turT}$$

et l'implication est directement vérifiée.

Réciproquement, supposons vérifiées les relations (D.5) à (D.13). Le calcul du membre de droite conduit toujours aux équations (D.14) à (D.19). Il suffit alors de combiner les équations (D.5) à (D.13). Par exemple, prenons le cas de  $R$ . Les équations :

$$R = \mathbf{A}^{tur} R \mathbf{A}^{turT} + \Sigma_{\nu} - \mathbf{A}^{tur} R^T \mathbf{D}^T (\mathbf{D} R \mathbf{D}^T + \Sigma_{\mathbf{w}})^{-1} \mathbf{D} R \mathbf{A}^{turT} \quad (\text{D.29})$$

$$N = \mathbf{A}^{tur} R \mathbf{A}^{turT} + \Sigma_{\nu} \quad (\text{D.30})$$

$$Q = R \mathbf{A}^{turT} \quad (\text{D.31})$$

mènent à :

$$R = N - Q^T \mathbf{D}^T (\mathbf{D} R \mathbf{D}^T + \Sigma_{\mathbf{w}})^{-1} \mathbf{D} Q = Y_{33}. \quad (\text{D.32})$$

On montre alors aisément de la même manière que  $\Sigma_{\infty}$  vérifie bien l'équation (D.1).



**Quatrième partie**

**Bibliographie**





# Liste des publications

## Revue à comité de lecture

**C. Petit**, J.-M. Conan, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, T. Fusco, *First laboratory validation of vibration filtering with LQG optimal control law for Adaptive Optics*, Optics Letter, 2007, Soumis.

**C. Petit**, J.-M. Conan, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, T. Fusco, J. Montri, D. Rabaud, *Optimal Control for Multi-conjugate Adaptive Optics*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Physique, Volume 6, pages 1059-1069, 2005.

C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, **C. Petit**, J.-M. Conan, P. Viaris de Lesegno, *Optimal control, observers and integrators in adaptive optics*, Optics Express, Volume 14, numéro 17, pages 7464-7476, 2006.

J.-F. Sauvage, T. Fusco, G. Rousset, **C. Petit**, *Calibration and Pre-Compensation of Non-Common Path Aberrations for eXtreme Adaptive Optics.*, Journal of the Optical Society of America, 2006, soumis.

T. Fusco, **C. Petit**, G. Rousset, J.-M. Conan, J.-L. Beuzit, *Closed-loop experimental validation of the spatially filtered Shack-Hartmann concept*, Optics Letter, Volume 30, numéro 11, pages 1255, 2005.

## Conférences

**C. Petit**, J.-M. Conan, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, T. Fusco, J. Montri, D. Rabaud, *First laboratory demonstration of closed-loop Kalman based optimal control for vibration filtering and simplified MCAO*, SPIE Proceedings, Orlando, Volume 6272, 2006.

**C. Petit**, J.-M. Conan, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, T. Fusco, J. Montri, *Off-Axis Adaptive Optics with Optimal Control : Laboratory Validation*, Optical Society of America, Charlotte, Volume AWA 4, 2005.

**C. Petit**, J.-M. Conan, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, T. Fusco, J. Montri, F. Chemla, D. Rabaud, *Off-Axis Adaptive Optics with Optimal Control : Experimental and Numerical Validation*, SPIE Proceedings, San Diego, Advancements in Adaptive Optics, Volume 5903, 2005.

**C. Petit**, F. Quiros-Pacheco, J.-M. Conan, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, T. Fusco, G. Rousset, *Kalman Filter based control loop for Adaptive Optics*, SPIE Proceedings, Glasgow, Advancements in Adaptive Optics, Volume 5490, 2004.

**C. Petit**, F. Quiros-Pacheco, J.-M. Conan, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, T. Fusco, *Kalman filter based control for Adaptive Optics*, SF2A, F. Combes, D. Barret, T. Contini, F. Meynadier, L. Pagani, Scientific Highlights 2004, EDP Sciences, 2004.

K. Dohlen, J.-L. Beuzit, M. Feldt, D. Mouillet, P. Puget, J. Antichi, A. Baruffolo, P. Baudoz, A. Berton, A. Boccaletti, M. Carbillet, J. Charton, R. Claudi, M. Downing, C. Fabron, P. Feautrier, E. Fedrigo, T. Fusco, J.-L. Gach, R. Gratton, N. Hubin, M. Kasper, M. Langlois, A. Longmore, C. Moutou, **C. Petit**, J. Pragt, P. Rabou, G. Rousset, M. Saisse, H.-M. Schmid, E. Stadler, D. Stamm, M. Turatto, R. Waters, F. Wildi, *SPHERE : A planet finder instrument for the VLT*, Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy , SPIE Proceedings I. S McLean, M. Iye, Volume 6269, 2006

T. Fusco, **C. Petit**, J.-F. Sauvage, K. Dohlen, D. Mouillet, J. Charton, P. Baudoz, M. Kasper, E. Fedrigo, P. Rabou, P. Feautrier, M. Downing, J.-M. Conan, J.-L. Beuzit, N. Hubin, F. Wildi, P. Puget, *Design of the extreme AO system for SPHERE, the planet finder instrument of the VLT*, SPIE Proceedings, Advances in Adaptive Optics II, B. Ellerbroek, L. Bonaccini, D. Calia, Volume 6272, 2006

T. Fusco, G. Rousset, J.-L. Beuzit, D. Mouillet, K. Dohlen, R. Conan, **C. Petit**, G. Montagnier, *Conceptual design of an extreme AO dedicated to extra-solar planet detection by the VLT-planet Finder instrument*, SPIE Proceedings, San Diego, Advancements in Adaptive Optics, Volume 5903, 2005.

T. Fusco, **C. Petit**, G. Rousset, J.-F. Sauvage, J.-M. Conan, *Optimization of the pre-compensation of non-common path aberrations for Adaptive Optics systems*, Optical Society of America, Charlotte, Volume AWB 1, 2005.

C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, **C. Petit**, J.-M. Conan, B. Le Roux, *Optimality, observers and correctors in adaptive optics*, Optical Society of America, Charlotte, Volume AWC 1, 2005.

J.-F. Sauvage, T. Fusco, G. Rousset, **C. Petit**, *Real-time and post-facto correction for differential aberrations in direct planet imaging by adaptive optics*, IAUC 200, Direct Imaging of Exoplanets : Science & Techniques, Nice, France, 2005

J.-F. Sauvage, T. Fusco, G. Rousset, **C. Petit**, A. Blanc, J.-L. Beuzit, *Fine calibration and pre-compensation of NCPA for high performance AO system*, SPIE Proceedings, San Diego, Advancements in Adaptive Optics, Volume 5903, 2005.

R. Conan, T. Fusco, G. Rousset, D. Mouillet, J.-L. Beuzit, M. Nicolle, **C. Petit**, *Modeling and analysis of XAO systems. Application to VLT-Planet Finder*, SPIE Proceedings, Glasgow, Advancements in Adaptive Optics, Volume 5490, 2004.

T. Fusco, G. Rousset, R. Conan, N. Nicolle, **C. Petit**, J.-L. Beuzit, *End-to-end model for XAO simulations. Application to Planet-Finder*, SF2A, F. Combes, D. Barret, T. Contini, F. Meynadier, L.

Pagani, Scientific Highlights 2004, EDP Sciences, 2004.

F. Quiros-Pacheco, **C. Petit**, J.-M. Conan, T. Fusco, E. Marchetti, *Control law for the multiconjugate adaptive optics demonstrator (MAD)* , SPIE Proceedings, Glasgow, Advancements in Adaptive Optics, Volume 5490, 2004.



# Bibliographie

- [Anderson & Moore(1990)] Anderson, B. & Moore, J., 1990. *Optimal control, linear quadratic methods*. London Prentice Hall.
- [Babcock(1953)] Babcock, H. W., 1953. The possibility of compensating astronomical seeing. *Pub. Astron. Soc. Pacific* **65**, 229.
- [Bar-Shalom & Tse.(1974)] Bar-Shalom, Y. & Tse., E., 1974. Dual effect, certainty equivalence and separation in stochastic control. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **19**, 494–500.
- [Beckers(1988)] Beckers, J. M., 1988. Increasing the size of the isoplanatic patch with Multiconjugate Adaptive Optics. Dans *Very Large Telescopes and their Instrumentation* (M.-H. Ulrich, ed.), volume 2 de *ESO Conference and Workshop Proceedings*, pp. 693–703, ESO, ESO, Garching Germany.
- [Bello *et al.*(2003)] Bello, D., Conan, J.-M., Rousset, G., & Ragazzoni, R., 2003. Signal to noise ratio of layer oriented measurements for multiconjugate adaptive optics. *Astron. Astrophys.* **410**, 1101–1106.
- [Beuzit *et al.*(1994)] Beuzit, J.-L., Hubin, N., Gendron, E., Demailly, L., Gigan, P., Lacombe, F., Chazalet, F., Rabuad, D., & Rousset, G., 1994. ADONIS : a user-friendly adaptive optics system for the ESO 3.6 meter telescope. Dans *Adaptive Optics in Astronomy* (M. A. Ealey & F. Merkle, eds.), volume 2201, pp. 955–961, SPIE, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Washington.
- [Blanc *et al.*(2003)] Blanc, A., Fusco, T., Hartung, M., Mugnier, L. M., & Rousset, G., 2003. Calibration of NAOS and CONICA static aberrations. Application of the phase diversity technique. *Astron. Astrophys.* **399**, 373–383.
- [Charton *et al.*(2003)] Charton, J., Hubert, Z., Stadler, E., Schartz, W., & Beuzit, J.-L., 2003. System level simulation of micro-mirrors for adaptive optics. Dans *Specialized Optical developments in Astronomy*, volume 4842, pp. 207–218.
- [Chassat(1992)] Chassat, F., 1992. *Propagation optique à travers la turbulence atmosphérique. Etude modale de l'anisoplanétisme et application à l'optique adaptative*. Thèse de doctorat, Université Paris Sud.
- [Chauvin *et al.*(06)] Chauvin, G., Lagrange, A.-M., Zuckerman, B., Dumas, C., Mouillet, D., Song, I., Beuzit, J.-L., Lowrance, P., & Bessell, M., 06. A companion at the brown dwarf/planet boundary to the young star AB Pic. *Astron. Astrophys.* To be published.
- [Conan(1994)] Conan, J.-M., 1994. *Étude de la correction partielle en optique adaptative*. Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay.
- [Conan *et al.*(1995)] Conan, J.-M., Rousset, G., & Madec, P.-Y., 1995. Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence. *J. Opt. Soc. Am. A* **12** 12, 1559–1570.

- [Conan(2000)] Conan, R., 2000. *Modélisation des effets de l'échelle externe de cohérence spatiale du front d'onde pour l'observation à Haute Résolution Angulaire en Astronomie*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis.
- [Conan *et al.*(2006)] Conan, R., Bradley, C. H., Hampton, P. J., Hilton, A., Wallace, B., Keskin, O., Mead-Robin, O., & Kennedy, J. D., 2006. The woofer tweeter experiment. volume 6272, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Orlando.
- [Consortini *et al.*(1973)] Consortini, A., Ronchi, L., & Moroder, E., 1973. Role of the outer scale of turbulence in atmospheric degradation of optical images. *J. Opt. Soc. Am.* **63** 10, 1246–1248.
- [Cottet(2002)] Cottet, F., 2002. *Traitement des signaux et acquisition de données*. Dunod edition.
- [Dessenne(1998)] Dessenne, C., 1998. *Commande modale et prédictive en optique adaptative classique*. Thèse de doctorat, Université Paris VII.
- [Dessenne *et al.*(1997)] Dessenne, C., Madec, P. Y., & Rousset, G., 1997. Modal prediction for closed loop adaptive optics. *Opt. Lett.* **22** 20, 1535–1537.
- [Dicke(1975)] Dicke, R. H., 1975. Phase-contrast detection of telescope seeing and their correction. *Astron. J.* **198** 4, 605–615.
- [Ellerbroek(1994)] Ellerbroek, B., 1994. First-order performance evaluation of adaptive optics systems for atmospheric turbulence compensation in extended field of view astronomical telescopes. *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 783–805.
- [Ellerbroek & Rhoadarmer(2001)] Ellerbroek, B. & Rhoadarmer, T., 2001. Adaptive wave-front algorithms for closed loop adaptive optics. *Mathematical and computer modelling* **33**, 145–158.
- [Ellerbroek *et al.*(2002)] Ellerbroek, B., Rigaut, F., Boyer, C. and D'Orgeville, C., & Hunten, M., 2002. MCAO for Gemini South. Dans *Adaptive Optical Systems Technologies II* (P. L. Wizinowich, ed.), volume 4839-07, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., SPIE.
- [Ellerbroek *et al.*(2003)] Ellerbroek, B., *et al.*, 2003. MCAO for Gemini South. volume 4839, pp. 55–66, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., SPIE.
- [Ellerbroek & Rigaut(2000)] Ellerbroek, B. L. & Rigaut, F. J., 2000. Scaling Multi-Conjugate Adaptive Optics Performance Estimates to Extremely Large Telescopes. Dans *Adaptive Optical Systems Technology* (P. L. Wizinowich, ed.), volume 4007, pp. 1088–1099, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Bellingham, Washington.
- [Femeña *et al.*(2002)] Femeña, B., Carillet, M., Riccardi, A., Esposito, S., & Brusa, G., 2002. Numerical simulations of MCAO modal systems in open-loop and closed-loop operation. Dans *Adaptive Optical Systems Technologies II* (M. C. Roggeman, R. K. Tyson, & D. Bonaccini, eds.), volume 4494, pp. 132–143, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., SPIE.
- [Fleury *et al.*(2004)] Fleury, B., Conan, J.-M., Coudrain, C., Mendez, F., Michau, V., Montri, J., & Robert, C., 2004. INCA passif : définition des moyens expérimentaux. Rapport Technique de Synthèse 1/08467 DOTA, ONERA, Contrat STTC.
- [Flicker & Mc Guire(2003)] Flicker, R. & Mc Guire, P. C., 2003. Efficient simulation of adaptive optics technologies for the Euro50 telescope. volume 5382, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., SPIE.
- [Foy & Labeyrie(1985)] Foy, R. & Labeyrie, A., 1985. Feasibility of adaptive optics telescope with laser probe. *Astron. Astrophys.* **152**, 129–131.
- [Fried(1966)] Fried, D., 1966. Optical Resolution Through a Randomly Inhomogeneous Medium for Very Long and Very Short Exposures. *J. Opt. Soc. Am.* **56**, 1372–1379.

- [Fried(1982)] Fried, D. L., 1982. Anisoplanatism in adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am.* **72** 1, pp 52–61.
- [Fusco(2000)] Fusco, T., 2000. *Correction partielle et anisoplanetisme en Optique Adaptative : traitements a posteriori et Optique Adaptative Multiconjuguée*. Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia-Antipolis.
- [Fusco *et al.*(2000)] Fusco, T., Conan, J.-M., Michau, V., Rousset, G., & Mugnier, L., 2000. Isoplanatic angle and optimal guide star separation for multiconjugate adaptive optics. Dans *Adaptive Optical Systems Technology* (P. Wizinowich, ed.), volume 4007, pp. 1044–1055, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Bellingham, Washington.
- [Fusco *et al.*(2001)] Fusco, T., Conan, J.-M., Rousset, G., Mugnier, L. M., & Michau, V., 2001. Optimal wavefront reconstruction strategies for Multiconjugate Adaptive Optics. *J. Opt. Soc. Am. A* **18** 10, 2527–2538.
- [Fusco *et al.*(2006a)] Fusco, T., Nicolle, M., Rousset, G., Michau, V., Blanc, A., Beuzit, J.-L., & Conan, J.-M., 2006a. Wavefront sensing issues in MCAO. *C. R. Physique* **6** .
- [Fusco *et al.*(2005a)] Fusco, T., Petit, C., Rousset, G., Conan, J.-M., & Beuzit, J.-L., 2005a. Closed-loop experimental validation of the spatially filtered Shack-Hartmann concept. *Opt. Lett.* **30**, 1255.
- [Fusco *et al.*(2005b)] Fusco, T., Petit, C., Rousset, G., Sauvage, J.-F., & Conan, J.-M., 2005b. Optimization of the pre-compensation of non-common path aberrations for Adaptive Optics systems. volume AWB 1, Proc. Opt. Soc. Am., OSA, 2005, Charlotte, USA.
- [Fusco *et al.*(2006b)] Fusco, T., *et al.*, 2006b. High order Adaptive Optics requirements for direct detection of Extra-solar planets. Application to the SPHERE instrument. *Opt. Eng.* **17**, 7515–7534.
- [Gaessler *et al.*(2005)] Gaessler, W., *et al.*, 2005. LINC-NIRVANA : MCAO toward Extremely Large Telescopes. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Physique* **6**, 1129–1138.
- [Gavel & Wiberg(2002)] Gavel, D. & Wiberg, D., 2002. Toward strehl-optimizing adaptive optics controllers. Dans *Adaptive Optical Systems Technologies II* (P. L. Wizinowich, ed.), volume 4839-107, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., SPIE.
- [Gendron(1995)] Gendron, E., 1995. *Optimisation de la commande modale en optique adaptative : applications à l'astronomie*. Thèse de doctorat, Université Paris VII.
- [Gendron & Léna(1994)] Gendron, E. & Léna, P., 1994. Astronomical adaptive Optics : I. Modal control optimization. *Astron. Astrophys.* **291** 337.
- [Gendron *et al.*(2005)] Gendron, E., *et al.*, 2005. FALCON : Multi-object AO. *C. R. Physique* **6**, 1110–1117.
- [Gilles(2005)] Gilles, L., 2005. Closed-loop stability and performance analysis of least-squares and minimum-variance control algorithms for multiconjugate adaptive optics. *Appl. Opt.* **44** 6.
- [Gilles *et al.*(2003)] Gilles, L., Ellerbroek, B. L., & Vogel, C. R., 2003. Layer-Oriented Multigrid Wavefront Reconstruction Algorithms for Multi-Conjugate Adaptive Optics. volume 4839, pp. 1011–1022, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., SPIE.
- [Golub & Loan(1985)] Golub, G. & Loan, C. V., 1985. *Matrix computations*. The John's Hopkins University Press, Baltimore.
- [Gonsalves(1982)] Gonsalves, R. A., 1982. Phase retrieval and diversity in adaptive optics. *Optical Engineering* **21** 5, 829–832.



- [Hammer *et al.*(2004)] Hammer, F., Puech, M., Assémat, F., Gendron, E., Sayède, F., Laporte, P., Marteaud, M., Liotard, A., & Zamkotsian, F., 2004. Second Workshop on ELT. volume 5382, p. 727, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., SPIE.
- [Hampton *et al.*(2006)] Hampton, P. J., Conan, R., Bradley, C. H., & Agathoklis, P., 2006. Control of a woofer tweeter system of deformable mirrors. volume 6274, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Orlando.
- [Hartung *et al.*(2003)] Hartung, M., Blanc, A., Fusco, T., Lacombe, F., Mugnier, L. M., Rousset, G., & Lenzen, R., 2003. Calibration of NAOS and CONICA static aberrations. Experimental results. *Astron. Astrophys.* **399**, 385–394.
- [Herriot *et al.*(2000)] Herriot, G., *et al.*, 2000. Progress on Altair : The Gemini North Adaptive Optics System. Dans *Adaptive Optical Systems Technology* (P. L. Wizinowich, ed.), volume 4007, pp. 115–125, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Hubin *et al.*(2005)] Hubin, N., Arsenault, R., Conzelmann, R., Delabre, B., Le Louarn, M., Stroebele, S., & Stuik, R., 2005. Ground Layer Adaptive Optics. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Physique* **6**, 1099–1109.
- [Hufnagel(1974)] Hufnagel, R. E., 1974. Variation of atmospheric turbulence. Dans *Digest of technical Papers, Topical meeting on Optical Propagation through Turbulence*, Boulder, Co.
- [Idier(2001)] Idier, J., 2001. *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*. Hermès Science, Paris, lavoisier edition.
- [Idier *et al.*(1993)] Idier, J., Le Besnerais, G., & Champagnat, F., 1993. Traitement numérique du signal. Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, cours de traitement du signal, version révisée de 2004.
- [Jazwinski(1970)] Jazwinski, A. H., 1970. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press.
- [Johnston & Welsh(1994)] Johnston, D. C. & Welsh, B. M., 1994. Analysis of multiconjugate adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A* **11** 1, pp 394–408.
- [Joseph & Tou(1961)] Joseph, P. & Tou, J., 1961. On Linear Control Theory. *AIEE trans. on Appl. and Indus.* **80**, 193–196.
- [Kern *et al.*(1989)] Kern, P., Léna, P., Gigan, P., Fontanella, J. C., Rousset, G., & Merkle, F., 1989. Come-On : an adaptive optics prototype dedicated to infrared astronomy. Dans *Active telescope systems*, volume 1114, pp. 54–65, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Orlando, United States of America.
- [Knutsson & Owner-Petersen(2003)] Knutsson, A. & Owner-Petersen, M., 2003. Emulation of dual-conjugate adaptive optics on an 8-m class telescope. *Opt. Eng.* **11**.
- [Kolb(2005)] Kolb, J., 2005. *Outils de test et de calibration pour les systèmes d'OAMC : application au démonstrateur MAD de l'ESO*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- [Kolmogorov(1941)] Kolmogorov, A. N., 1941. Local structure of turbulence in incompressible fluids with very high Reynolds number. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **30** 4, 301–305.
- [Kulcsár *et al.*(2006)] Kulcsár, C., Raynaud, H.-F., Petit, C., Conan, J.-M., & Viaris de Lesegno, P., 2006. Optimal control, observers and integrators in adaptive optics. *Opt. Eng.* **14** 17, 7464–7476.
- [Langlois *et al.*(2004)] Langlois, M., Saunter, C. D., Dunlop, C. N., Myers, R. M., & Love, G. D., 2004. Multiconjugate adaptive optics : laboratory experience. *Opt. Eng.* **12**.

- [Le Louarn(2000)] Le Louarn, M., 2000. *Étoiles laser pour les grands télescopes : effet de cône et implications astrophysiques*. Thèse de doctorat, Université Lyon I - Claude Bernard.
- [Le Louarn(2002)] Le Louarn, M., 2002. Multi-conjugate adaptive optics with laser guide stars : performance in the infra-red and the visible. *MNRAS* **334** 4, 865–874.
- [Le Louarn *et al.*(2005)] Le Louarn, M., Verinaud, C., & Korhonen, V., 2005. Simulation of MCAO on (extremely) large telescopes. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Physique* **6**, 1070–1080.
- [Le Roux(2003)] Le Roux, B., 2003. *Commande Optimale en Optique Adaptative Classique et Multiconjuguée*. Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia-Antipolis.
- [Le Roux *et al.*(2004)] Le Roux, B., Conan, J.-M., Kulcsár, C., Raynaud, H.-F., Mugnier, L., & Fusco, T., 2004. Optimal control law for classical and multiconjugate adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A* **21** 7, 1261–1276.
- [Liotard(2004)] Liotard, A. and Zamkotsian, F., 2004. Static and dynamic micro deformable mirror characterization by phase-shifting and time-averaged interferometry. volume 5494, pp. 480–491.
- [Lloyd-Hart & Milton(2003)] Lloyd-Hart, M. & Milton, N., 2003. Fundamental limits on isoplanatic correction with multiconjugate adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A* **20** 10, 1949–1957.
- [Looze *et al.*(2003)] Looze, D. P., Kasper, M., Hippler, S., Beker, O., & Weiss, R., 2003. Optimal compensation and implementation for adaptive optics systems. *Experimental Astronomy* **15**, 67–88.
- [Love *et al.*(2002)] Love, G. D., Clark, P., Dunlop, C. N., Kelly, T.-L., Langlois, M., Myers, R. M., & Sharples, R. M., 2002. Emulating Multiconjugate Turbulence. Dans *Beyond conventional adaptive optics*, volume 58, pp. 313–319, Proc. ESO.
- [Mahé(2000)] Mahé, F., 2000. *Application d'un modèle atmosphérique à l'étude des fluctuations d'indice de réfraction dans la couche limite. Influence de la scintillation sur l'analyse de front d'onde*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, Nice France.
- [Marchetti *et al.*(2002)] Marchetti, E., *et al.*, 2002. MAD the ESO Multiconjugate Adaptive optics Demonstrator. Dans *Adaptive Optical Systems Technologies II* (P. L. Wizinowich, ed.), volume 4839-38, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., SPIE.
- [Martin *et al.*(1994)] Martin, F., Tokovinin, A., Agabi, A., Borgnino, J., & Ziad, A., 1994. G.S.M. : a Grating Scale Monitor for atmospheric turbulence measurements. I. The instrument and first results of angle of arrival measurements. *Astronomy and Astrophysics - Supplement Series* **108**, 173–180, divers.
- [Mawet(2002)] Mawet, D., 2002. *Etude d'un coronographe à 4 quadrants au moyen de l'optique diffractive*. Rapport de Maitrise, Univ. de Liège.
- [Michau *et al.*(1992)] Michau, V., Rousset, G., & Fontanella, J.-C., 1992. Wavefront sensing from extended sources. Dans *Real Time and Post Facto Solar Image Correction* (R. R. Radick, ed.), volume 13 de *NSO/SP Summer Workshop Series*, pp. 124–128, National Solar Observatory/Sacramento Peak, Sunspot, New Mexico, USA.
- [Mohtadi(1990)] Mohtadi, C., 1990. Bode's integral theorem for discrete-time systems. volume 137, pp. 57–66, Proceedings of the IEE.
- [Nicolle *et al.*(2006)] Nicolle, M., Fusco, T., Michau, V., Rousset, G., & Beuzit, J.-L., 2006. Optimization of star oriented and layer oriented wave-front sensing concepts for ground layer adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A* **23** 9, 2233–2245.

- [Nicolle *et al.*(2004)] Nicolle, M., Fusco, T., Rousset, G., & Michau, V., 2004. Improvement of Shack-Hartmann wavefront sensor measurement for Extreme Adaptive Optics. *Opt. Lett.* **29** 23, 2743–2745.
- [Noll(1976)] Noll, R. J., 1976. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am.* **66** 3, 207–211.
- [Noël(1997)] Noël, T., 1997. *Caractérisation spatiale et temporelle de la turbulence atmosphérique par analyse de surface d'onde*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- [Oberti(2002)] Oberti, S., 2002. *Etude de l'effet d'anisoplanétisme sur une optique adaptative et correction par multiconjugaison*. Rapport de Maîtrise, Ecole Supérieure d'Optique.
- [Obukhov(1949)] Obukhov, A. M., 1949. Structure of the temperature field in a turbulent current. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geograf. Geofiz.* **13** 1, 58–69.
- [Oppenheimer & Pachter(2002)] Oppenheimer, M. W. & Pachter, M., 2002. Adaptive optics for airborne platforms-Part 2 : controller design. *Optics and Laser Technology* **34**, 159–176.
- [Paschall & Anderson(1993)] Paschall, R. & Anderson, D., 1993. Linear Quadratic Gaussian control of a deformable mirror adaptive optics system with time-delayed measurements. *Applied Optics* **32** 31, 6347–6358.
- [Patchell & Jacobs(1971)] Patchell & Jacobs, 1971. Separability, neutrality and certainty equivalence. *Int. J. Control* **13**.
- [Paxman *et al.*(1992)] Paxman, R. G., Schulz, T. J., & Fienup, J. R., 1992. Joint estimation of object and aberrations by using phase diversity. *Journal of the Optical Society of America A* **9** 7, 1072–1085.
- [Petit *et al.*(2007)] Petit, C., Conan, J.-M., Kulcsár, C., Raynaud, H.-F., & Fusco, T., 2007. First laboratory validation of vibration filtering with LQG optimal control law for Adaptive Optics. *Opt. Lett.* Submitted.
- [Petit *et al.*(2005)] Petit, C., Conan, J.-M., Kulcsár, C., Raynaud, H.-F., Fusco, T., Montri, J., & Rabaud, D., 2005. Optimal Control for Multi-conjugate Adaptive Optics. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Physique* **6**, 1059–1069.
- [Petit *et al.*(2006)] Petit, C., Conan, J.-M., Kulcsár, C., Raynaud, H.-F., Fusco, T., Montri, J., & Rabaud, D., 2006. First laboratory demonstration of closed-loop Kalman based optimal control for vibration filtering and simplified MCAO. volume 6272, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., SPIE, Orlando.
- [Petit *et al.*(2004)] Petit, C., Quiros-Pacheco, F., Conan, J.-M., Kulcsár, C., Raynaud, H.-F., Fusco, T., & Rousset, G., 2004. Kalman Filter based control loop for Adaptive Optics. Dans *Advancements in Adaptive Optics*, volume 5490, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., SPIE, 2004, Glasgow, UK.
- [Piatrou & Gilles(2005)] Piatrou, P. & Gilles, L., 2005. Robustness study of the pseudo open-loop controller for multiconjugate adaptive optics. *Appl. Opt.* **44** 6, 1003–1010.
- [Pilkington *et al.*(1987)] Pilkington, J., Thompson, L., & Gardner, C., 1987. Artificial Guide Stars for Adaptive Imaging. *Nature* **330**, 116.
- [Poyneer *et al.*(2003)] Poyneer, L., LaFortune, K., & Awwal, A., 2003. Correlation wavefront sensing for Shack-Hartmann-based Adaptive Optics with a point source. Rapport Technique CA 94551, Lawrence Livermore National Lab.

- [Poyneer & Macintosh(2004)] Poyneer, L. A. & Macintosh, B., 2004. Spatially filtered wave-front sensor for high-order adaptive optics. *Josaa* **21** 5, 810–819.
- [Proakis & Manolakis(1996)] Proakis, J. & Manolakis, D., 1996. *Digital Signal Processing - Principles, algorithms and applications*. Upper Saddle River, New Jersey, prentice hall edition, 3rd ed.
- [Quiros-Pacheco(2006)] Quiros-Pacheco, F., 2006. *Reconstruction and Control Laws for Multi-Conjugate Adaptive Optics in Astronomy*. Thèse de doctorat, Imperial College, London.
- [Ragazzoni(1996)] Ragazzoni, R., 1996. Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism. *J. Mod. Opt.* **43** 2.
- [Ragazzoni et al.(2002)] Ragazzoni, R., Diolaiti, E., Farinato, J., Fedrigo, E., Marchetti, E., Tordi, M., & Kirkman, D., 2002. Multiple Field of View Layer Oriented Adaptive Optics. Nearly whole sky coverage on 8m class telescopes and beyond. *Astron. Astrophys.* **396**, 731–744.
- [Ragazzoni et al.(2000a)] Ragazzoni, R., Farinato, J., & Marchetti, E., 2000a. Adaptive optics for 100m class telescopes : new challenges require new solutions. volume 4007, pp. 1076–1087, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Ragazzoni et al.(2005)] Ragazzoni, R., Le Roux, B., & Arcidiacomo, C., 2005. Multi-Conjugate Adaptive Optics for ELTs : constraints and limitations. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Physique* **6**, 1081–1088.
- [Ragazzoni et al.(1999)] Ragazzoni, R., Marchetti, E., & Rigaut, F., 1999. Modal tomography for adaptive optics. *Astron. Astrophys.* **342**, 53–56.
- [Ragazzoni et al.(2000b)] Ragazzoni, R., Marchetti, E., & Valente, G., 2000b. Adaptive-optics correction available for the whole sky. *Nature (London)* **403**, 54–56.
- [Ragazzoni et al.(2003)] Ragazzoni, R., et al., 2003. A visible MCAO channel for NIRVANA at the LBT. volume 4839, pp. 536–543, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., SPIE.
- [Raynaud(2005)] Raynaud, H.-F., 2005. *Quatre problèmes de commande et une digression automatique*. Thèse de doctorat, HDR - Université Paris XIII, Institut Galilée.
- [Riccardi et al.(2004)] Riccardi, A., et al., 2004. The adaptive secondary mirrors for the Large Binocular Telescope : a progress report. Dans *Advancements in Adaptive Optics* (D. B. Calia, B. Ellerbroek, & R. Ragazzoni, eds.), volume 5490, pp. 1564–1571, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Riehl et al.(1988)] Riehl, J., Taufflieb, E., & Séchaud, M., 1988. Modulateurs spatiaux de phase : applications à l'optique adaptative. Rapport Technique 65/7177 SY, ONERA Technical Report.
- [Rigaut(2001)] Rigaut, F., 2001. Ground-conjugate wide field adaptive optics for the ELTs. Dans *Beyond Conventional Adaptive Optics* (R. R. E. Vernet & S. Esposito, eds.), p. 58, Proc. ESO, ESO, Padova, Italy.
- [Rigaut et al.(1992)] Rigaut, F., Cuby, J.-G., Caes, M., Monin, J.-L., Vittot, M., Richard, J.-C., Rousset, G., & Léna, P., 1992. Visible and infrared wavefront sensing for astronomical adaptive optics. *Astron. Astrophys.* **259**, 57–60.
- [Rigaut & d'Orgeville(2005)] Rigaut, F. & d'Orgeville, C., 2005. On practical aspects of Laser Guide Stars. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Physique* **6**, pp 1089–1098.
- [Robert et al.(2006)] Robert, C., Conan, J.-M., Michau, V., Fusco, T., & Vedrenne, N., 2006. Scintillation and Phase Anisoplanatism in Shack-Hartmann Wavefront Sensing. *J. Opt. Soc. Am. A* **23** 3, 613–624.

- [Roddier(1981)] Roddier, F., 1981. The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy. Dans *Progress in Optics* (E. Wolf, ed.), volume XIX, pp. 281–376, North Holland, Amsterdam.
- [Roddier(1988)] Roddier, F., 1988. Curvature sensing and compensation : a new concept in adaptive optics. *Appl. Opt.* **27**, 1223–1225.
- [Roddier(1999)] Roddier, F. (ed.), 1999. *Adaptive Optics in Astronomy*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [Rouan *et al.*(2000)] Rouan, D., Riaud, P., Boccaletti, A., Clénet, Y., & Labeyrie, A., 2000. The four-quadrant phase-mask coronagraph. I. principle. volume 112, pp. 1479–1486, The Astronomical Society of the Pacific.
- [Rousset(1993)] Rousset, G., 1993. Wavefront sensing. Dans *Adaptive Optics for Astronomy* (D. Al-Loain & J.-M. Mariotti, eds.), volume 243, pp. 115–137, ASI, Kluwer Academic Publisher, Car-gèse, France.
- [Rousset(1999)] Rousset, G., 1999. Wave-front sensors. Dans [Roddier(1999)], chapitre 5, pp. 91–130.
- [Rousset *et al.*(1987)] Rousset, G., Fontanella, J.-C., Primot, J., & Sève, A., 1987. Imagerie optique à travers la turbulence atmosphérique. *La Recherche Aérospatiale* **5**, 47–58.
- [Rousset *et al.*(1991)] Rousset, G., Madec, P. Y., & Rabaud, D., 1991. Adaptive optics partial correction simulation for two telescope. Dans *High Resolution Imaging by interferometry II*, volume 39 de *ESO proc.*, pp. 1095–1104, Garching, Germany.
- [Rousset *et al.*(1990)] Rousset, G., *et al.*, 1990. First diffraction-limited astronomical images with adaptive optics. *Astron. Astrophys.* **230**, 29–32.
- [Rousset *et al.*(1992)] Rousset, G., *et al.*, 1992. The Come-On-Plus project. Dans *Adaptive Optics for Large Telescopes*, OSA, Maui.
- [Rousset *et al.*(2000)] Rousset, G., *et al.*, 2000. Status of the VLT Nasmyth Adaptive Optics System (NAOS). Dans *Adaptive Optical Systems Technology* (P. L. Wizinowich, ed.), volume 4007, pp. 72–81, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., SPIE, Bellingham, Washington.
- [Rousset *et al.*(2002)] Rousset, G., *et al.*, 2002. NAOS, the first AO system of the VLT : on sky performance. Dans *Adaptive Optical System Technology II* (P. L. Wizinowich & D. Bonaccini, eds.), volume 4839, pp. 140–149, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., SPIE, Bellingham, Washington.
- [Saddlemyer *et al.*(2000)] Saddlemyer, L. K., Herriot, G., & Véran, J.-P., 2000. Design and current status of the reconstructor for Altair : The Gemini North Adaptive Optics System. Dans *Adaptive Optical Systems Technology* (P. Wizinowich, ed.), volume 4007, pp. 649–658, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [Salinari *et al.*(1993)] Salinari, P., Del Vecchio, C., & Billiotti, V., 1993. A study of an adaptive secondary mirror. Dans *Active and Adaptive Optics* (F. Merkle, ed.), volume 353, pp. 247–253, ESO Conf. Proc., iCO-16 Conf.
- [Sarazin(1986)] Sarazin, M., 1986. ESO-VLT instrumentation for site evaluation in Northern Chile. Dans *Advanced technology optical telescopes*, volume 628, pp. 138–141, SPIE, SPIE.
- [Sauvage *et al.*(2005)] Sauvage, J.-F., Fusco, T., Rousset, G., & Petit, C., 2005. Real-time and post-facto correction for differential aberrations in direct planet imaging by adaptive optics. Dans *IAUC 200, Direct Imaging of Exoplanets : Science & Techniques*, Date conférence : Octobre 2005, Nice, France.

- [Sauvage *et al.*(2006)] Sauvage, J.-F., Fusco, T., Rousset, G., & Petit, C., 2006. Calibration and Pre-Compensation of Non-Common Path Aberrations for eXtreme Adaptive Optics. *J. Opt. Soc. Am.* Submitted.
- [Schwartz *et al.*(1994)] Schwartz, C., Baum, G., & Ribak, E. N., 1994. Turbulence-degraded wave fronts as fractal surfaces. *J. Opt. Soc. Am. A* **11** 1, 444–451.
- [Séchaud *et al.*(1991)] Séchaud, M., Rousset, G., Michau, V., Fontanella, J. C., Cuby, J. G., Rigaut, F., & Richard, J. C., 1991. Wavefront sensing in imaging through the atmosphere : a detector strategy. Dans *Active and Adaptive optical components*, volume 1543, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., San Diego, United States of America.
- [Shack & Platt(1971)] Shack, R. B. & Platt, B. C., 1971. Production and use of a lenticular Hartmann Screen. *J. Opt. Soc. Am.* **61**, 656.
- [Soltau *et al.*(2002)] Soltau, D., Berkefeld, T., von der Lüche, O., Wöger, F., & Schelenz, T., 2002. Adaptive optics and multi-conjugate adaptive optics with the VTT. *Astr. Notes* **323**, 236–240.
- [Sorenson(1970)] Sorenson, H. W., 1970. Least-squares estimation : from Gauss to Kalman. *IEEE Spectrum* pp. 63–68), volume = 7.
- [Stoica(1977)] Stoica, P., 1977. A test for whiteness. *IEEE transactions on automatic control* **ac-22** 6.
- [Séchaud(1999)] Séchaud, M., 1999. Wave-front compensation devices. Dans [Roddier(1999)], chapitre 4, pp. 57–90.
- [Tallon(1989)] Tallon, M., 1989. *Contributions à l'imagerie à haute résolution angulaire : analyse de surface d'onde, source laser de référence, optique adaptative*. Thèse de doctorat, Université de Nice, thèse.
- [Tallon & Foy(1990)] Tallon, M. & Foy, R., 1990. Adaptive telescope with laser probe : isoplanatism and cone effect. *Astron. Astrophys.* **235**, 549–557.
- [Tallon *et al.*(1992)] Tallon, M., Foy, R., & Vernin, J., 1992. 3-D wavefront sensing and multiconjugate adaptive optics. Dans *Progress in Telescope and Instrumentation Technologies* (M.-H. Ulrich, ed.), volume 42, pp. 517–521, ESO, Munich, Germany.
- [Tatarski(1961)] Tatarski, V., 1961. *Wave Propagation In a Turbulent Medium*. Dover Publications, Inc. New York.
- [Taylor(1938)] Taylor, G. I., 1938. The spectrum of turbulence. *Proc. R. Soc. London. Ser. A* **64**, 476.
- [Thomas(2005)] Thomas, S., 2005. *Etude d'une optique adaptative pour l'astronomie dans le visible*. Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia-Antipolis.
- [Thomas *et al.*(2006)] Thomas, S., Fusco, T., Tokovinin, A. and Nicolle, M., Michau, V., & Rousset, G., 2006. Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor. *MNRAS* .
- [Tokovinin *et al.*(2004)] Tokovinin, A., Thomas, S., Gregory, B., Van der Bliëk, N., Schurter, P., Cantarutti, R., & Mondaca, E., 2004. Design of ground-layer turbulence compensation with a Rayleigh beacon. volume 5490, pp. 870–878, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [van Dam *et al.*(2004)] van Dam, M. A., Le Mignant, D., & Macintosh, B. A., 2004. Performance of the Keck observatory adaptive-optics system. *Appl. Opt.* **43** 29, 5458–5467.
- [Vdovin(1998)] Vdovin, G. V., 1998. Optimization-based operation of micromachined deformable mirrors. Dans *Adaptive Optical System Technologies*, volume 3353, p. 902, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

- [von der Lühe *et al.*(2005)] von der Lühe, O., Berkefeld, T., & Soltau, D., 2005. Multi-conjugate solar adaptive optics at the Vacuum Tower Telescope on Tenerife. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Physique* **6**, pp 1139–1147.
- [von der Lühe *et al.*(2003)] von der Lühe, O., Soltau, D. Berkefeld, T., & Schelenz, T., 2003. KAOS : adaptive optics system for the Vacuum Tower Telescope at Teide Observatory. volume 4853, pp. 187–193, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., SPIE.
- [Wallner(1983)] Wallner, E. P., 1983. Optimal wave-front correction using slope measurements. *J. Opt. Soc. Am. A* **73**, 1771–1776.
- [Welch(1967)] Welch, P. D., 1967. The use of FFT for the estimation of power spectra : a method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* **AU-15**, 70–73.
- [Wiberg & Gavel(2004a)] Wiberg, D. & Gavel, D. T., 2004a. A Spatial Non-dynamic LQG Controller : Part I, Application to Adaptive Optics. volume 3, pp. 3326–3332, IEEE Conf. on Decision and Control, Nassau, Bahamas.
- [Wiberg & Gavel(2004b)] Wiberg, D. & Gavel, D. T., 2004b. A Spatial Non-dynamic LQG Controller : Part II, theory. volume 3, pp. 3333–3338, IEEE Conf. on Decision and Control, Nassau, Bahamas.
- [Wirth *et al.*(1998)] Wirth, A., Navetta, J., Looze, D., Hippler, S., Glindemann, A., & Hamilton, D., 1998. Real-time modal control implementation for adaptive optics. *Appl. Opt.* **37** 21, 4586–4597.
- [Wolfe & Zissis(1989)] Wolfe, B. & Zissis, G. J., 1989. *The Infrared Handbook*. IRIA, Environmental Research Institute of Michigan, first ed. 1978 edition.
- [Ziad(1993)] Ziad, A., 1993. *Estimation des échelles limites de cohérence spatiale des fronts d'onde et optimisation des observations à haute résolution angulaire en astronomie*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia-Antipolis, thèse.

## Résumé

La turbulence atmosphérique limite sévèrement la formation d'images par les télescopes astronomiques au sol. L'Optique Adaptative (OA) est une technique de correction en temps réel des effets de la turbulence permettant d'améliorer la résolution angulaire des télescopes. Aujourd'hui mûre, cette technique se heurte toutefois à certaines limitations technologiques et fondamentales ayant amené au développement de nouveaux concepts d'OA, à très haute dynamique ou à grand champ (OA Multi-Conjuguée ou OAMC). Les lois de commande classiquement utilisées dans les systèmes d'OA sont toutefois peu adaptées à ces nouveaux concepts plus complexes.

L'objectif de cette thèse est d'étudier une commande optimale au sens de la variance minimale, à la fois sur le plan théorique et expérimental, dans un contexte d'OA et d'OAMC. La loi de commande obtenue, de type Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG), est analysée et les contraintes d'implantation, du point de vue algorithmique et modélisation, sont évaluées. Nous proposons également de gérer des perturbations additionnelles généralement rencontrées sur les systèmes (vibrations...). Enfin, nous présentons les premières validations expérimentales d'une commande de ce type en OA et dans un cadre d'OAMC simplifiée. Le gain en performance, par rapport à des lois de commande classiques, est très important et corrobore les résultats de simulation numérique. Nous évaluons enfin les performances de la commande LQG sur des systèmes d'OAMC pour le VLT par le biais d'une simulation numérique réaliste. L'ensemble des résultats obtenus confirment l'apport très significatif de cette approche et sa souplesse pour gérer à la fois des géométries d'analyse complexes et l'optimisation de la correction dans des champs d'intérêt spécifiques.

**Mots-Clés :** instrumentation astronomique ; turbulence atmosphérique ; imagerie haute résolution ; optique adaptative ; automatique ; commande optimale ; filtre de Kalman ; modèles d'état ; estimation.

## Summary

Astronomical imaging from ground-based telescopes is strongly degraded by the atmospheric turbulence. Adaptive Optics (AO) provides real time correction of the turbulence effects, increasing angular resolution. However, technological and fundamental limitations restrict the performance of AO. High dynamic AO (or eXtreme AO - XAO) and wide field of view AO (Multi-Conjugate AO - MCAO) have been proposed to overcome these effects. But control laws classically used in AO are unsuited for these more complex applications.

The goal of this thesis is to investigate an optimal control law, in terms of minimum variance, on both theoretical and experimental grounds. This Linear Quadratic Gaussian type control law is analysed and its implementation constraints are evaluated in terms of algorithms and models. We also propose to deal with additive perturbations such as vibrations, present on most systems. Finally, we present the first laboratory validation of this kind of control law in AO and on a simplified MCAO system. A huge gain in performance is brought by our control law compared to more classical ones. These results are comforted by numerical simulations. Performance of the LQG control on VLT-like MCAO systems is then estimated thanks to numerical simulation. All these results confirm the significant gain brought by our approach and its flexibility to handle both complex wave-front sensing geometries and optimisation of the correction in specific fields of interest.

**Keywords :** astronomical instrumentation ; atmospheric turbulence ; high resolution imaging ; adaptive optics ; automatic ; optimal control ; Kalman filter ; state-space representation ; estimation.