



HAL
open science

Méthodes variationnelles en traitement d'image

Ali Haddad

► **To cite this version:**

Ali Haddad. Méthodes variationnelles en traitement d'image. Mathématiques [math]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2005. Français. NNT: . tel-00133405

HAL Id: tel-00133405

<https://theses.hal.science/tel-00133405>

Submitted on 26 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THESE DE DOCTORAT
DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Présenté par

Monsieur **Ali HADDAD**

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN

Domaine :

Mathématiques appliquées

Sujet de la thèse :

Méthodes variationnelles en traitement d'image.

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 13 juin 2005 devant le jury composé de :

M. Jean-Michel Morel
M. Vicent Caselles
M. Albert Cohen
M. Gérard Bourdaud
M. Yves Meyer

Président du Jury
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Directeur de thèse

**CENTRE DE MATHEMATIQUES ET DE LEURS APPLICATIONS
ENS CACHAN/CNRS/UMR 8536
61, Avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN Cedex (FRANCE)**

Table des matières

I	L'Algorithme d'Osher-Rudin-Fatemi	11
1	L'espace des textures $\mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$	15
1.1	Fonctions à variation bornée	15
1.2	Espace dual \mathcal{BV}^*	26
1.3	L'espace $\mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$ et les textures	38
2	Calculs de normes dans l'espace G	51
2.1	Bruit blanc	53
2.2	Exemple construit sur la base de Haar	55
2.3	Cas d'une base d'ondelettes à support compact	56
2.4	Ondelettes de la classe de Schwartz	57
2.5	Généralisation	59
3	Quelques propriétés mathématiques de l'algorithme d'Osher-Rudin-Fatemi	65
3.1	Présentation	66
3.2	Etude de la stabilité	69
3.3	Exemple d'application	76
3.4	Premiers exemples	77
3.5	Etude du support de la solution u_0	78
3.6	Etude de l'asymptotique $\lambda = \theta N$	82
3.7	Comparaison avec le Wavelet shrinkage	85
3.8	L'algorithme ORF et les fonctions radiales	88
3.9	Fonctions radiales constantes par morceaux	99

3.10	Quelques exemples	102
4	Théorème du mini-max et algorithme ORF	105
4.1	Minimisation par projection	105
4.2	Généralisation	106
4.3	Théorème du mini-max	108
4.4	Version abstraite du théorème 4.2.1	109
4.5	Stabilité de la décomposition	111
4.6	Lien avec l'algorithme ORF	113
II	Première variante de l'algorithme ORF	115
5	Espaces de Besov homogènes	117
5.1	Espaces de Lorentz	118
5.2	Réalisation des espaces de Besov homogènes	120
5.3	Caractérisation de $\dot{B}_1^{1,\infty}$	124
5.4	Multiplicateur ponctuel de $\dot{B}_1^{1,\infty}$	130
5.5	Calcul fonctionnel sur $\dot{B}_1^{1,\infty}$	132
6	Comparaison des normes BV et $\dot{B}_1^{1,\infty}$	141
6.1	Ensembles à bords réguliers	141
6.2	Ensembles à bords absolument continus	143
6.3	Généralisation	146
7	Nouvel algorithme	153
7.1	Caractérisation de la solution	154
7.2	Un exemple	159
7.3	Stabilité	159
7.4	Résolution du problème par ondelette	162
7.5	Etude d'un exemple	165

III	Seconde variante de l'algorithme d'ORF	169
8	Algorithme d'Osher-Vese	171
8.1	Présentation	171
8.2	Fonctions extrémales et simples	172
8.3	Lien avec les solutions de " $-\operatorname{div}(\frac{\nabla u}{ \nabla u }) = u$ "	174
8.4	Stabilité	180
A	Méthodes numériques	191

Resumé

L'objet de cette thèse est d'étudier les propriétés mathématiques de quelques modèles utilisés en traitement d'image. Suivant S. J. Osher, L. Rudin et E. Fatemi, nous décomposons une image $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ en une somme $u + v$ où u appartient à un espace de Banach fonctionnel E et v appartient à $L^2(\mathbb{R}^2)$. L'espace E doit modéliser les objets contenus dans l'image et la décomposition optimale minimise l'énergie $J(u) = \|u\|_E + \lambda \|f - u\|_2^2$. La difficulté majeure est de choisir un espace E adapté. Les choix classiques sont $E = \dot{B}_1^{1,1}(\mathbb{R}^2)$, qui conduit au célèbre "wavelet thresholding" de Donoho, ou $E = BV(\mathbb{R}^2)$, l'espace des fonctions à variations bornées. Le dernier choix définit l'algorithme d'Osher-Rudin-Fatemi. Ces deux choix ont des défauts. Le premier efface les bords nets. Le second ne conduit pas à un seuillage des coefficients d'ondelette. Nous proposons alors de prendre $E = \dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$, qui conserve les bords nets et conduit à un seuillage des coefficients d'ondelette. C'est les deux premières parties de la thèse. Dans la troisième partie, nous étudions les propriétés mathématiques de l'algorithme d'Osher-Vese qui traite mieux les composantes texturées.

Mots clés : $BV(\mathbb{R}^n)$, textures, espaces de Besov, fonctions oscillantes, modèles "u+v", wavelet shrinkage, algorithme d'Osher-Rudin-Fatemi, algorithme d'Osher-Vese.

Abstract

The purpose of this thesis is to investigate the mathematical properties of some models which are currently used in image processing. Generalizing an approach by S.J. Osher, L. Rudin and E. Fatemi, we decompose an image $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ as a sum $u + v$ where u belongs to some functional Banach space E while v belongs to $L^2(\mathbb{R}^2)$. The Banach space E is aimed at modeling the objects contained in the given image and the optimal decomposition minimizes the energy $J(u) = \|u\|_E + \lambda \|f - u\|_2^2$. The main difficulty is to choose an adapted Banach space E . The common choices are $E = \dot{B}_1^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ which leads to the well-known Donoho's wavelet thresholding or $E = BV(\mathbb{R}^2)$ the space of functions of bounded variations. The latter choice is the Osher Rudin Fatemi algorithm. These two choices are suffering from severe drawbacks. In the first case, sharp edges are erased. The second choice does not lead to a wavelet thresholding. That is why we propose $E = \dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ which yields sharp edges and is given by wavelet thresholding. This is the the two first parts of the thesis. In the third part, we investigate the mathematical properties of the Osher-Vese newest algorithm which keeps track of the textured components.

Key words : $BV(\mathbb{R}^n)$, textures, besov spaces, oscillating patterns, "u+v" models, wavelet shrinkage, Osher-Rudin-Fatemi algorithm, Osher-Vese algorithm.

Introduction

L'objet de cette thèse est d'étudier et de comparer trois modèles utilisés en traitement de l'image. Plus précisément, nous nous intéresserons à des images fixes, en noir et blanc. Le niveau de gris est noté $f(x)$. On a $f(x) = 1$ (ou 255) si le point x est blanc et fortement éclairé. En revanche $f(x) = 0$ si x est noir. Dans les trois modèles, une image est considérée comme une fonction de carré sommable définie dans le plan tout entier (beaucoup d'auteurs se limitent à des images définies sur le carré unité). Le premier est le célèbre modèle d'Osher, Rudin et Fatemi (ORF)[66]. Dans ce modèle, une image en noir et blanc est, comme nous l'avons dit, considérée comme une fonction de carré sommable qui représente le niveau de gris de l'image. Dans cette image $f(x)$, on cherche à distinguer des structures géométriques dont l'ensemble est noté $u(x)$. Le modèle consiste à écrire $f = u + v$ où v n'est pas structurée. En fait, on trouve dans v les textures incluses dans l'image ainsi que le bruit. La décomposition optimale dépend d'un paramètre $\lambda > 0$ et est définie en minimisant l'énergie $E(u) = \|u\|_{BV} + \lambda \|v\|_2^2$. L'utilisation de la norme BV modélise l'hypothèse que les lignes de niveau et les bords des objets que l'on trouve dans u sont de longueur finie.

Les inconvénients de ce modèle sont maintenant bien connus. Ils sont rappelés dans le Chapitre 1. Leur analyse fait appel à une norme qui, en un sens, est la norme duale de BV . Nous nous familiariserons avec cette norme et l'espace fonctionnel correspondant dans le Chapitre 2. Plus précisément, nous montrerons que *les textures ont une petite norme dans l'espace dual*.

Nous étudierons soigneusement la stabilité (continuité hölderienne) de l'application non linéaire Φ_λ définie par $\Phi_\lambda(f) = u$ dans le modèle ORF. Nous montrerons, au Chapitre 3, que si deux images, f_1 et f_2 , ne diffèrent que par leurs composantes texturées, mais contiennent les mêmes structures géométriques, alors $\Phi_\lambda(f_1)$ et $\Phi_\lambda(f_2)$ sont proches en norme L^2 . Ce résultat et ses généralisations sont originaux et constituent le point de départ de cette thèse.

Le Chapitre 4 nous servira de transition entre l'algorithme d'Osher-Rudin-Fatemi, d'une part, et les nouveaux algorithmes étudiés dans la seconde partie de la thèse. Suivant Antonin Chambolle [29], nous étudions des algorithmes où l'on minimise $\|u\|_X + \lambda \|v\|_2^2$ pour diverses normes fonctionnelles $\|\cdot\|_X$. A partir du Chapitre 5, nous présenterons deux variantes du modèle ORF. Dans la première variante, l'espace BV est remplacé par l'espace très voisin $\dot{B}_1^{1,\infty}$. Pour justifier l'utilisation de $\dot{B}_1^{1,\infty}$, nous montrerons que si $f = \chi_E$ est la fonction indicatrice d'un ensemble Borélien arbitraire, alors les normes BV et $\dot{B}_1^{1,\infty}$ de χ_E diffèrent au plus d'un facteur 2. En suivant Gérard Bourdaud et Yves Meyer [16] [17], nous étendrons ce résultat aux fonctions étagées à N niveaux, $f = c_1\chi_{E_1} + \dots + c_N\chi_{E_N}$.

Comme nous l'avons dit, la première variante consiste à remplacer $\|u\|_{BV}$ par $\|u\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$ dans le modèle ORF. On cherchera à minimiser $\|u\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} + \lambda \|v\|_2^2$ sur l'ensemble de toutes les décompositions $f = u + v$. Cela conduit à une variante du wavelet shrinkage qui sera analysée au Chapitre 7. La seconde variante consiste à introduire directement la "norme texture" dans la formulation de l'énergie. On cherche alors à minimiser $J(u) = \|u\|_{BV} + \lambda \|v\|_*$ (où $\|\cdot\|_*$ est la norme dans le "dual" de BV) sur l'ensemble de toutes les décompositions $f = u + v$.

Nous montrerons les trois résultats suivants :

1) Ce dernier modèle est plus performant que le modèle ORF. Nous montrons, par exemple, que si $f = \chi_\Omega$ où Ω est un ouvert borné régulier, alors

$u = f$ dès que λ est assez grand (théorème 8.4.1). Ceci ne se produit jamais avec le modèle ORF, car il y a toujours une partie de f qui est alors regardée comme une texture. Ce résultat s'étend aux fonctions dites "simples".

2) Nous montrerons ensuite que si $f = g+h$ où g est une fonction "simple" et h est une texture, le nouvel algorithme fournira cette même décomposition, à une erreur près dont la norme L^2 tend vers 0 quand $\|h\|_*$ tend vers 0.

3) Gardons-nous d'un optimisme exagéré! Les résultats précédents doivent être relativisés par une mauvaise nouvelle :

Pour certains f et certaines valeurs de λ , il n'y a pas unicité de la décomposition optimale.

Il convient donc de préciser soigneusement les assertions 1) et 2). Ces résultats ouvrent des perspectives de recherches passionnantes. Nous terminerons par l'énoncé de quelques problèmes ouverts.

Observons que ce dernier modèle (et certaines de ses variantes) a été utilisé par Stanley Osher et Luminita Vese d'une part [74][75], par Jean-François Aujol et ses collaborateurs [11][9][12] et enfin par Jérôme Gilles [52]. Dans les trois cas, les auteurs ont ajouté un terme supplémentaire à $J(u)$ pour remédier au manque d'unicité. Nous rappelons brièvement (voir annexe) les différents algorithmes proposés ainsi que des résultats numériques obtenus par Jérôme Gilles.

Pour conclure, rappelons que certains des résultats de cette thèse ont été présentés lors d'un séminaire au laboratoire Jacques-Louis Lions (université Paris VI), en février 2004, ainsi que lors d'un workshop à l'IPAM (UCLA), durant l'automne 2004.

Première partie

**L'Algorithme
d'Osher-Rudin-Fatemi**

Un ensemble de modèles décrivant les images naturelles consiste à les décomposer en une somme de trois composantes u , v et w . La première composante modélise les *objets* contenus dans l'image fixe f . Ces *objets* sont délimités par des bords qui sont des courbes de longueur finie. Disons plutôt que ceci est la définition des objets dans notre modèle. Le célèbre "flocon de neige" est une image, mais ne sera pas un objet dans notre thèse. Nous reviendrons à l'analyse de ces structures fractales. Comme nous le verrons dans ce chapitre, cela implique que u appartienne à l'espace BV des fonctions à variation bornée. Les deux autres termes v et w sont regroupés en un seul dans le modèle d'Osher-Rudin-Fatemi (ORF) qui servira de point de départ à notre travail. La décomposition optimale $f = u + v$ décrite par le modèle ORF minimise le critère variationnel $\|u\|_{BV} + \lambda \|v\|_2^2$ sur l'ensemble de toutes les décompositions possibles $f = u + v$. La décomposition optimale est caractérisée par les deux conditions suivantes [58] :

- 1) Si $\|f\|_* \leq \frac{1}{2\lambda}$, alors $u = 0$ et $v = f$.
- 2) Si $\|f\|_* > \frac{1}{2\lambda}$, alors $\|v\|_* = \frac{1}{2\lambda}$ et $\int uv dx = \|u\|_{BV} \|v\|_*$

où $\|\cdot\|_*$ est, en un sens qui sera précisé, la norme duale de BV .

Ces deux résultats amènent à modéliser les textures par la condition $\|f\|_* \leq \epsilon$ où ϵ est un seuil qu'il convient de définir. Nous adopterons ce point de vue dans toute cette thèse (nous donnerons par ailleurs d'autres raisons de penser que $\|f\|_* \leq \epsilon$ définit une texture). On peut formuler l'objection suivante : si f est une texture en ce sens, alors, pour λ suffisamment grand, λf cesse d'être une texture, ce qui est gênant.

Le Chapitre 1 débute par des rappels sur la dualité entre \mathcal{BV} (le complété des fonctions de test pour la norme BV) et son dual \mathcal{BV}^* . La norme dans \mathcal{BV}^* est $\|\cdot\|_*$. Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant : la condition $f \in \mathcal{BV}^*$ ne se réduit pas à l'appartenance locale uniforme (vérifiée sur les petites échelles). Il y a aussi une condition portant sur les grandes échelles. *En d'autres termes, \mathcal{BV}^* n'est pas un espace amalgamé.*

Chapitre 1

L'espace des textures $\mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$

L'objet de ce chapitre est de présenter des résultats, maintenant classiques, concernant l'espace BV des fonctions à variation bornée. Nous étudierons son “dual” \mathcal{BV}^* . Ce dual jouera un rôle essentiel dans l'analyse des textures. Ce premier chapitre se conclut par un résultat original. L'espace \mathcal{BV}^* n'est pas un espace amalgamé. Le problème posé est le suivant : une distribution f appartient-elle à \mathcal{BV}^* si et seulement si f appartient localement à \mathcal{BV}^* et si cette propriété locale est vérifiée uniformément par rapport aux translations ? Nous verrons que ce n'est pas le cas (théorèmes 1.3.4 et 1.3.7). L'appartenance à \mathcal{BV}^* est un mélange entre une propriété locale et une propriété globale (comportement aux grandes échelles).

1.1 Fonctions à variation bornée

L'espace $BV(\mathbb{R}^2)$ que nous utiliserons est défini de sorte que sa norme ait la même homogénéité que la norme L^2 . C'est pourquoi nous n'imposerons jamais la condition $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ que certains auteurs introduisent.

Définition 1.1.1 *Nous définissons l'espace $BV(\mathbb{R}^2)$, noté encore BV sauf confusion, comme l'espace des fonctions définies sur \mathbb{R}^2 vérifiant :*

- $f(x)$ tend vers 0 à l'infini, au sens faible,
- le gradient au sens des distributions de f , noté ∇f , est une mesure de Borel (à valeur vectorielle) bornée.

Une définition plus faible serait de ne considérer que les fonctions f vérifiant la deuxième condition. Dans ce cas, on montre que $f = g + c$ où g vérifie les deux conditions de la définition précédente et c est une constante. De plus, la fonction g est dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ et vérifie

$$\|g\|_2 \leq C \|f\|_{BV}. \quad (1.1)$$

On peut alors considérer BV comme un sous-espace de $L^2(\mathbb{R}^2)$. La preuve de 1.1 repose sur la formule de la co-aire. Cela demande aussi de définir la norme dans l'espace BV . Nous y reviendrons plus loin et prouverons, après avoir défini la norme BV , qu'on peut choisir $C = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

La condition à l'infini dit que $f \star \varphi$ tend vers 0 à l'infini dès que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Par exemple, toute fonction de $L^p(\mathbb{R}^2)$ pour $1 \leq p < \infty$ tend vers 0 à l'infini au sens faible. Observons que si $f \in BV$, il existe une constante C telle que pour toute fonction continue à support compact g , on ait $\|\nabla(f \star g)\|_\infty \leq C \|g\|_\infty$. Réciproquement, cette propriété caractérise BV .

Nous sommes tentés de dire que la fonction indicatrice χ_E d'un ensemble E appartient à l'espace BV si et seulement si sa frontière ∂E a une longueur finie. Cette longueur est alors la norme BV de χ_E . Ceci est vrai dans le cas d'un bord de classe \mathcal{C}^1 mais faux en général. Pour traiter le cas général, De Giorgi [39] a introduit la notion de frontière réduite $\partial^* E$ d'un ensemble mesurable E et prouva que la norme BV de χ_E est $\mathcal{H}^1(\partial^* E)$, \mathcal{H}^1 étant la mesure de Hausdorff unidimensionnelle. Afin de définir la frontière réduite, notons $B(x, r)$ la boule ouverte centrée en x et de rayon r . Nous suivons De Giorgi [39].

Définition 1.1.2 *La frontière réduite $\partial^* E$ de E est l'ensemble des points x appartenant au support fermé de $\mu = \nabla \chi_E$ tels que la limite suivante existe :*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu\{B(x, r)\}}{|\mu|\{B(x, r)\}} = \nu(x). \quad (1.2)$$

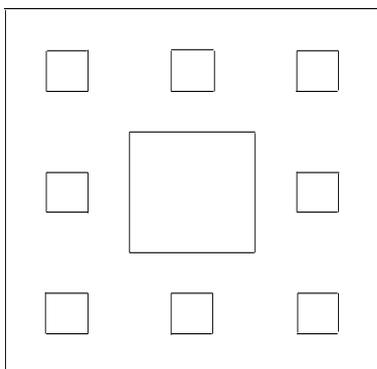


FIG. 1.1 – Frontière réduite

Il établit le théorème suivant :

Théorème 1.1.1 *Une fonction indicatrice χ_E appartient à BV si et seulement si $\mathcal{H}^1(\partial^* E)$ est fini.*

Prenons l'exemple de la figure 1.1. On considère le carré unité $[0, 1]^2$. A l'étape $k = 1$, on divise le carré en 9 carrés de côté $1/3$ et on enlève le carré central. A l'étape $k = 2$, on divise les 8 autres carrés en 9 carrés et on enlève les carrés centraux. Ainsi, à l'étape $k \geq 1$, on enlève 8^{k-1} carrés de côtés mesurant 3^{-k} et on obtient une suite décroissante E_k dont l'intersection est E . L'ensemble final E sera de mesure de Lebesgue $1 - \sum_{k \geq 1} 8^{k-1} 9^{-k} = 0$ alors que sa frontière topologique sera de longueur infinie. Par contre, la frontière réduite de E est l'ensemble vide.

Revenons à la définition de BV . Pour utiliser l'algorithme d'Osher-Rudin-Fatemi (que l'on définira au Chapitre 3), il faut faire un choix d'une norme dans l'espace BV . On la prendra systématiquement isotrope, c'est-à-dire invariante par translation, dilatation et rotation. Dans le cas où $f \in BV$ et $\nabla f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, la norme BV de f sera définie comme étant $\|f\|_{BV} = \|\nabla f\|_1 = \int |\nabla f(x)| dx$. Nous introduisons alors l'espace $\mathcal{BV}(\mathbb{R}^2)$,

Définition 1.1.3 On définit l'espace $\mathcal{BV}(\mathbb{R}^2)$ comme l'ensemble des fonctions f de $BV(\mathbb{R}^2)$ telles que $\nabla f \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Dans le cas général où ∇f est une mesure de Borel, nous posons $\mu_j = \partial_j f$ et considérons la mesure de Borel $\sigma = |\mu_1| + |\mu_2|$. Le théorème de Radon-Nikodym fournit l'existence de fonctions Boréliennes $\theta_j(x)$ à valeurs dans $[-1, 1]$ telles que $\mu_j = \theta_j(x)\sigma$, pour $j = 1, 2$. Finalement, on définit $|\nabla f| = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2} \sigma$ et on conclut par la définition suivante :

Définition 1.1.4 La norme BV d'une fonction f est la masse totale de la mesure borélienne $|\nabla f|$.

Par abus de langage, nous écrivons $\|f\|_{BV} = \int \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2} dx$. Notons que la norme BV ainsi définie se calcule par dualité ;

$$\|f\|_{BV} = \sup \left\{ \int f(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx; \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^2) \text{ et } \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}. \quad (1.3)$$

Nous aurions pu définir deux autres normes BV en considérant, pour une fonction f tendant faiblement vers 0 à l'infini, les normes

$$\sup_{y \neq 0} \frac{\|f(x+y) - f(x)\|_1}{|y|} \quad (1.4)$$

et

$$\sup_{r > 0} \frac{1}{r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(x + ru(\theta)) - f(x)\|_1 d\theta \quad (1.5)$$

où $u(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Il est évident de vérifier que ces deux normes et la norme standard sont invariantes par translation, rotation et vérifient une relation d'homogénéité $\|\lambda f(\lambda \cdot)\| = \|f\|$. Elles sont aussi équivalentes. Pour le voir, notons $C_1 = \|\nabla f\|_1$, C_2 , C_3 les normes définies par 1.4 et 1.5 respectivement. Clairement, on a $C_3 \leq C_2 \leq C_1$. Il reste à prouver que $C_1 \leq \beta C_3$, $\beta > 0$. Pour cela, on considère une approximation de l'identité $\varphi_n(x) = n^2 \varphi(nx)$ où $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ est radiale, positive, d'intégrale 1. On a $\|f \star \varphi_n\|_{BV} = \|f \star \nabla \varphi_n\| = n \|f \star \psi_n(x)\|_1$ où $\psi = \nabla \varphi = \varphi'(r)u(\theta)$. Or $f \star \psi(x) = \int f(x-y)\psi(y)dy = \int (f(x-y) - f(x))\psi(y)dy$. En utilisant les coordonnées polaires, on a $\|f \star \varphi_n\|_{BV} \leq n^3 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \|f(x - ru(\theta)) - f(x)\|_1 r |\varphi'(nr)| d\theta dr$.

En majorant à l'aide de C_3 , on a $\|f \star \varphi_n(x)\|_{BV} \leq 2\pi \int_0^\infty n^3 r^2 |\varphi'(nr)| dr C_3 = (2\pi \int_0^\infty r^2 |\varphi'(r)| dr) C_3$. Pour conclure, il suffit d'utiliser le lemme suivant :

Lemme 1.1.1 (approximation faible-forte) *Soit $f \in BV$ et $f_n = f \star \varphi_n$, où φ_n est une approximation de l'identité, positive, régulière. Alors $f_n \in \mathcal{BV}$; $\|f\|_{BV} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{BV}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = 0$.*

Le fait que $f_n \in \mathcal{BV}$ et que f_n converge dans L^2 est facile. Prouvons la convergence des normes BV . Le fait que $\varphi_n \geq 0$ implique $\|f_n\|_{BV} \leq \|f\|_{BV}$. Cependant, la norme BV se calcule par dualité et f_n tend vers f dans L^2 . On en déduit que $\|f\|_{BV} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{BV}$. Le lemme est prouvé.

Pour compléter le lemme 1.1.1, citons le lemme évident suivant,

Lemme 1.1.2 *Toute suite bornée de $BV(\mathbb{R}^2)$ qui converge dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, converge, au sens de la norme L^2 , vers une fonction de $BV(\mathbb{R}^2)$.*

Cependant, ces normes ne sont pas égales. Pour s'en convaincre, il suffit de calculer ces quantités dans le cas où f est la fonction indicatrice d'un rectangle de longueur L et de largeur l , $L \geq l$. On a $C_2 = 2\sqrt{L^2 + l^2}$, $C_3 = \frac{4}{\pi}(L + l)$ alors que $\|f\|_{BV} = 2(L + l)$. Nous ne choisirons pas ces définitions, mais la définition 1.1.4. Avec ce choix, le calcul de la norme duale est délicat (si l'on veut un calcul exact) alors que pour le choix C_2 où C_3 , ce calcul est impossible. En utilisant l'équivalence des trois normes, on a gratuitement le fait que $\|f^\pm\|_{BV} \leq C \|f\|_{BV}$. En fait, on a mieux : $\|f^\pm\|_{BV} \leq \|f\|_{BV}$, où $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$. En effet, on a la propriété suivante :

Théorème 1.1.2 *Si θ est une fonction Lipschitzienne ($\theta' \in L^\infty$; les dérivées sont prises au sens des distributions), il vient :*

$$\|\theta(f)\|_{BV} \leq \|\theta'\|_\infty \|f\|_{BV}. \quad (1.6)$$

Pour prouver ce résultat, on raisonne en deux temps.

(a) Si $f \in \mathcal{BV}$, alors $\nabla(\theta(f)) = \theta'(f)\nabla f$ (cette formule pose un problème hors de ce cadre, car on multiplie $\theta'(f) \in L^\infty$ par ∇f qui serait, si $f \notin \mathcal{BV}$, une mesure singulière par rapport à la mesure de Lebesgue) et la relation

1.6 est alors triviale.

(b) Si $f \in BV$, on utilise une approximation faible-forte, f_m , définie au lemme 1.1.1. Nous avons $f_m \in \mathcal{BV}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m\|_{BV} = \|f\|_{BV}$ et f_m tend vers f au sens de la norme L^2 . Alors $\theta' \in L^\infty$ et $\|f - f_m\|_2 \rightarrow 0$ impliquent $\|\theta(f) - \theta(f_m)\|_2 \rightarrow 0$. Maintenant, $\|\theta(f_m)\|_{BV} \leq \|\theta'\|_\infty \|f_m\|_{BV}$ et il suffit de passer à la limite.

Ainsi, $f \in BV$ implique $|f| \in BV$. Cependant la réciproque est fautive. Voici un contre-exemple. Prenons la fonction f définie en coordonnées polaires par $f(r) = e^{ir^{-1}} e^{-r^2}$. De façon évidente, $|f| \in BV(\mathbb{R}^2)$ alors que $f \notin BV(\mathbb{R}^2)$ (l'intégrale $\int_0^\infty r |f'(r)| dr$ diverge).

L'approximation "faible-forte" (lemme 1.1.1) converge dans L^2 mais pas dans BV . Voici deux façons d'obtenir la convergence forte dans BV et a fortiori dans L^2 :

Lemme 1.1.3 *Les fonctions bornées de BV sont denses dans BV .*

Pour le voir, on se sert du lemme suivant :

Lemme 1.1.4 *Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ des fonctions lipschitziennes de la variable réelle s'annulant en 0 et $f \in BV$. Posons $m = \|\varphi_1'(x) + \dots + \varphi_N'(x)\|_\infty$. Alors $\sum_{j=1}^N \|\varphi_j(f)\|_{BV} \leq m \|f\|_{BV}$.*

On a $\sum_{j=1}^N \|\varphi_j(f)\|_{BV} = \sum_{j=1}^N \int |\varphi_j'(f)| |\nabla f(x)| dx$, si $f \in \mathcal{BV}$ et l'on conclut immédiatement. Le cas général s'obtient en utilisant la limite faible-forte et la semi-continuité inférieure de la norme BV .

Revenons au lemme 1.1.3. Prenons φ régulière, à support dans $[-1, 1]$, s'annulant en 0 et vérifiant $1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi'(x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi'_k(x)$ et $1 = \sup_x \sum_k |\varphi'_k(x)|$. Alors, par ce qui précède, on a $\sum_k \|\varphi_k(f)\|_{BV} \leq \|f\|_{BV}$. Posons alors $f_N = \sum_{k=-N}^N \varphi_k(f)$ et montrons que f_N tend vers f dans BV . On considère $N' > N$. Alors $\|f_{N'} - f_N\|_{BV} \leq \sum_{k > N} \|\varphi_k(f)\|_{BV} = \epsilon_N \rightarrow 0$. Par ailleurs, $f_{N'}$ tend vers f dans L^2 , d'où la conclusion. ■

Voici une autre façon de prouver le lemme 1.1.3.

Lemme 1.1.5 *Pour $f \in BV$, on construit une fonction f_N en tronquant si $|f(x)| > N$. On définit $f_N = \theta_N(f)$ où $\theta_N(x) = \max(-N, \min(x, N))$. Alors f_N converge vers f dans BV .*

On ne peut, bien évidemment, raisonner par densité. On pose $u = \sup(f, 0)$, $v = \sup(-f, 0)$ et l'on a alors $f_N = u_N - v_N$ et donc $\|f - f_N\|_{BV} \leq \|u - u_N\|_{BV} + \|v - v_N\|_{BV}$. On peut donc se limiter à $f \geq 0$.

On utilise alors la formule de la co-aire (voir théorème 1.1.3). On observe que $\|f - f_N\|_{BV} = \int_0^\infty l(t) dt$ où $l(t) = \|\chi_{\{f - f_N > t\}}\|_{BV}$. Or $\{f - f_N > t\} = \{f > N + t\}$ et donc $\|f - f_N\|_{BV} = \int_N^\infty \|\chi_{\{f > t\}}\|_{BV} dt \rightarrow 0$ ($N \rightarrow +\infty$).

Nous avons donc approché, dans BV , la fonction f par des fonctions bornées f_N . Nous présentons maintenant une façon d'approcher f , toujours dans BV , par des fonctions à supports compacts. Considérons alors une fonction $0 \leq \varphi \leq 1$ régulière, à support dans $|x| \leq 2$ et valant 1 si $|x| \leq 1$. Posons $f_\epsilon(x) = f(x)\varphi(\epsilon x)$. Alors

Lemme 1.1.6 *La suite f_ϵ tend vers f dans BV , quand ϵ tend vers 0.*

Remarquons que $1 - \varphi(\epsilon x) = 0$ si $|x| \leq \epsilon^{-1}$ et $1 - \varphi(\epsilon x) = 1$ si $|x| \geq 2\epsilon^{-1}$. On a $\nabla(f - f_\epsilon)(x) = (1 - \varphi_\epsilon)\nabla f(x) - \operatorname{div} \varphi(\epsilon x)f(x)$. Le premier terme est majorée en norme par $\int_{|x| \geq \epsilon^{-1}} |\nabla f|(x) dx$ qui tend vers 0 quand ϵ tend vers 0. Quant au deuxième terme, il vaut $I = - \int_{\epsilon^{-1} \leq |x| \leq 2\epsilon^{-1}} |\operatorname{div} \varphi(\epsilon x)f(x)| dx$. On le majore en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il vient $|I| \leq C[\int_{\epsilon^{-1} \leq |x| \leq 2\epsilon^{-1}} f^2(x) dx]^{1/2}$. Il est alors évident que I tend vers 0 quand ϵ tend vers 0.

Revenons à la définition 1.1.4. Nous avons alors la formule de la co-aire [76][48][55][59],

Théorème 1.1.3 (Formule de la co-aire) *Soit $f(x)$ une fonction à variation bornée à valeurs réelles. Notons Ω_t , $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble mesurable défini par*

$$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^2 | f(x) > t\}. \quad (1.7)$$

Notons $\partial^*\Omega_t$ la frontière réduite de l'ensemble Ω_t et $l(t) = \mathcal{H}^1(\partial^*\Omega_t)$. Alors $l(t) \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\|f\|_{BV} = \int_{-\infty}^{+\infty} l(t)dt. \quad (1.8)$$

En d'autres mots, la norme BV de f est la somme des longueurs des lignes de niveaux de f . Cette identité est complétée par l'observation suivante :

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\int_{-m}^{\infty} \chi_{\Omega_t}(x)dt - m \right] \quad (1.9)$$

où la limite est prise au sens de la topologie faible* de BV .

Les travaux pionniers de Fleming et Rishel [49] ont fourni une version approchée de ce théorème ; De Giorgi a complété ce résultat. Le théorème 1.1.3 dit, en quelque sorte, que toute fonction de BV peut s'écrire comme combinaison convexe de fonctions indicatrices de domaine à frontières rectifiables. S'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que la norme $\|\cdot\|$ dans un espace de Banach B vérifie $\|\chi_E\| \leq \gamma \mathcal{H}^1(\partial^*E)$ pour tout ensemble Borélien E , alors BV est contenu dans B et $\|f\| \leq \gamma \|f\|_{BV}$. Appliquons cette remarque à $L^2(\mathbb{R}^2)$. L'inégalité isopérimétrique implique $\gamma = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$, ceci prouvant 1.1.

On observera que 1.8 est évidemment faux si $l(t)$ est défini comme la longueur du bord de $E_t = \{x \mid f(x) = t\}$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer $f(x) = \chi_{B(0,1)}$. On aurait, $l(t) = 0$ pour $t \notin \{0, 1\}$ et $l(0) = l(1) = 2\pi$. Donc $\int_{-\infty}^{\infty} l(t)dt = 0$. Même si $f(x)$ est supposée régulière, on ne peut définir $l(t)$ par $\mathcal{H}^1(\partial E_t)$. Voici un contre-exemple où $l(0)$ n'est pas défini. On reprend l'exemple de la figure 1.1 qu'on modifie légèrement. On considère le carré unité auquel on enlève des carrés ouverts Q_k , disjoints deux à deux, tels que $[0, 1]^2 \setminus \bigcup Q_k = E$ soit de mesure strictement positive. Pour chaque carré Q_k , on considère une fonction $\varphi_k(x) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, de support exactement égal à $\overline{Q_k}$ et telle que $\varphi_k(x) > 0$ sur Q_k . Alors la fonction $\sum_{k>0} \varphi_k(x) = f(x)$ est $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $\partial E_0 = E$. Finalement, $\mathcal{H}^1(E) = +\infty$.

Pour conclure cette section rappelons l'inégalité de Poincaré qui sera utile par la suite.

Lemme 1.1.7 (Inégalité de Poincaré) *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour $f \in BV(\mathbb{R}^2)$, on a :*

$$\left[\int_Q (f(x) - \bar{f})^2 dx \right]^{1/2} \leq C \int_Q |\nabla f| dx \quad (1.10)$$

où $Q = [0, 1]^2$ et $\bar{f} = \int_Q f(x) dx$.

Précisons que $\int_Q |\nabla f| dx$ désigne la variation totale de $|\nabla f|$ sur le cube ouvert Q . Celle-ci peut être définie par dualité en utilisant les fonctions test à support dans Q . L'ensemble Q peut être remplacé par n'importe quel domaine lipschitzien Ω et dans ce cas, la constante $C = C(\Omega)$ figurant dans 1.10, est invariante par dilatation : $C(\lambda\Omega) = C(\Omega)$ pour $\lambda > 0$.

Remarque 1.1.1 *L'exposant 2 ne peut être remplacé par $p > 2$, mais L^2 peut aussi être remplacé par l'espace de Lorentz $L^{2,1}$. Nous n'utiliserons pas cette amélioration.*

Pour la commodité du lecteur, nous donnons la preuve usuelle de 1.10. Quitte à remplacer f par $f - \bar{f}$, nous supposons que $\bar{f} = 0$.

- Cas $f \in \mathcal{C}^1(Q)$ et $\int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2 = \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 = 0$.

Posons $A(x_1) = \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, t) \right| dt$ et $B(x_2) = \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2) \right| dt$. Il vient $|f(x_1, x_2)| \leq A(x_1)$ et $|f(x_1, x_2)| \leq B(x_2)$. Donc $|f|^2(x_1, x_2) \leq A(x_1)B(x_2)$, ceci impliquant de façon évidente $\|f - \bar{f}\|_2 \leq \|\nabla f\|_1$.

- Cas $f \in \mathcal{C}^1(Q)$.

Afin d'alléger les notations, et sans ambiguïté, nous notons $\|\cdot\|_i$ la norme $\|\cdot\|_{L^i(Q)}$ où $i = 1$ ou $i = 2$. Posons $\alpha(x_1) = \int_0^1 f(x_1, t) dt$, $\beta(x_2) = \int_0^1 f(t, x_2) dt$. On remarque que $\int_0^1 |\alpha'(x_1)| dx_1 \leq \|\nabla f\|_1$ et $\int_0^1 |\beta'(x_2)| dx_2 \leq \|\nabla f\|_1$. De plus $\int_0^1 \alpha(x_1) dx_1 = \int_0^1 \beta(x_2) dx_2 = 0$. Il vient $|\alpha(x_1)| \leq \|\partial_1 f\|_1$, $|\beta(x_2)| \leq \|\partial_2 f\|_1$. Définissons alors la fonction r de telle sorte que $f(x_1, x_2) = \alpha(x_1) + \beta(x_2) + r(x_1, x_2)$. Alors r vérifie les critères du cas précédent. Donc $\|r\|_2 \leq$

$\|\nabla r\|_1$. De façon évidente, on a $\|\nabla r\|_1 \leq 3 \|\nabla f\|_1$ et $\|f\|_2 \leq \|r\|_2 + \|\alpha\|_2 + \|\beta\|_2 \leq 3 \|\nabla f\|_1 + \|\partial_1 f\|_1 + \|\partial_2 f\|_1$. Donc $\|f\|_2 \leq (3 + \sqrt{2}) \|\nabla f\|_1$.

• Cas général : $f \in BV(\mathbb{R}^2)$.

On considère une approximation de l'identité $\varphi_m = m^2 \varphi(mx)$ telle que φ est positive, régulière à support compact inclus dans $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$ et d'intégrale 1. On définit $Q_m = [\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}]^2$ et f_m la restriction de $f * \varphi_m$ sur Q_m . Alors f_m est $\mathcal{C}^1(Q_m)$ et $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|f - f_m\|_{L^2(Q_m)} = 0$. Par application du cas précédent, on a $\|f_m - \bar{f}_m\|_{L^2(Q_m)} \leq C \|\nabla f_m\|_{L^1(Q_m)}$. Mais $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - \bar{f}_m\|_{L^2(Q_m)} = \|f - \bar{f}\|_{L^2(Q)}$. De plus

$$\begin{aligned} \|\nabla f_m\|_{L^1(Q_m)} &= \int_{Q_m} |\nabla f * \varphi_m(x)| dx \\ &\leq \int_{Q_m} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_m(x-y) |\nabla f|(y) dy dx. \end{aligned}$$

Or $\varphi_m(x-y) = 0$ si $y \notin Q$ et $x \in Q_m$. Donc

$$\begin{aligned} \|\nabla f_m\|_{L^1(Q_m)} &\leq \int_{Q_m} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_Q(y) \varphi_m(x-y) |\nabla f|(y) dy dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_Q(y) \varphi_m(x-y) |\nabla f|(y) dy dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \chi_Q(y) |\nabla f|(y) dy \\ &\leq \int_Q |\nabla f|(y) dy. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\|f - \bar{f}\|_{L^2(Q)} \leq C \int_Q |\nabla f|(y) dy.$$

■

Ceci clôt les définitions et rappels nécessaires à l'énoncé des résultats originaux de cette thèse. Le théorème suivant découle facilement de l'inégalité de Poincaré et nous sera utile à la section 1.3 dans l'étude des textures (ici modélisées par $\mu(x)$).

Théorème 1.1.4 *Soit $f \in BV(\mathbb{R}^2)$ et $\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}^2$, on ait $\int_{Q+k} \mu(x) dx = 0$ où $Q = [0, 1]^2$. Il existe alors une constante $C > 0$ indépendante de f et de μ , telle que :*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \mu(x) dx \right| \leq C \|\mu\|_\infty \|f\|_{BV}. \quad (1.11)$$

Pour le voir, on écrit :

$$\int f(x)\mu(x)dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \int_{Q+k} (f(x) - \bar{f}_k)\mu(x) dx, \quad (1.12)$$

où $\bar{f}_k = \int_{Q+k} f(x)dx$. Après passage à la valeur absolue et en utilisant le lemme de Poincaré, on a

$$\left| \int f(x)\mu(x)dx \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} C \|\mu\|_\infty \int_{Q+k} |\nabla f| dx. \quad (1.13)$$

Donc

$$\left| \int f(x)\mu(x)dx \right| \leq C \|\mu\|_\infty \int |\nabla f| dx \quad (1.14)$$

Finalement

$$\left| \int f(x)\mu(x)dx \right| \leq C \|\mu\|_\infty \|f\|_{BV}, \quad (1.15)$$

ce qui conclut la preuve. ■

Le théorème 1.1.4 nous dit que si $\mu(x) \in L^\infty$ et si $\int_{Q+k} \mu(x)dx = 0$ alors $\mu \in \mathcal{BV}^*$, le dual de \mathcal{BV} . Nous introduisons alors la norme duale sur \mathcal{BV}^* :

Définition 1.1.5 On note $\|\cdot\|_*$, la norme duale dans l'espace \mathcal{BV}^* , le dual de \mathcal{BV} muni de la norme BV .

Cependant, on n'a pas $L^\infty \subset \mathcal{BV}^*$: $1 \notin \mathcal{BV}^*$. Par ailleurs, comme le montre le théorème 1.1.4, la fonction $e^{i\omega \cdot x} \in \mathcal{BV}^*$, pour $\omega \in 2\pi\mathbb{Z}^2$ non nul, et sa norme est $\frac{C}{|\omega|}$ (on utilise l'homogénéité). Si $\omega \notin 2\pi\mathbb{Z}^2$, on utilise l'invariance par rotation de la norme duale pour se ramener au calcul de la norme duale de $e^{i|\omega|x_1}$. A ce stade, on utilise l'invariance par dilatation pour $\lambda = |\omega|$. On a $|\omega| \|e^{i|\omega|x_1}\|_* = \|e^{ix_1}\|_*$. Finalement, pour tout $\omega \in \mathbb{R}_*^2$, $e^{i\omega \cdot x} \in \mathcal{BV}^*$ et sa norme duale est $C|\omega|^{-1}$. Si $\mu \in L^\infty$ est 1-périodique en chaque variable et si $\int_Q \mu(x)dx = 0$, alors les hypothèses du théorème 1.1.4 sont vérifiées et $\mu \in \mathcal{BV}^*$. On a même mieux :

Théorème 1.1.5 *Si Q est le carré unité et si $\mu(x) \in L^\infty$ est 1-périodique en x_1 et x_2 , alors*

$$\int \mu(x) dx = 0 \iff \mu \in \mathcal{BV}^*. \quad (1.16)$$

(a) En sens direct, le théorème 1.1.4 s'applique et répond à la question. Donnons une autre preuve qui exploite la périodicité. On écrit μ , à l'aide de sa décomposition en série de Fourier, sous la forme $\mu = \sum_k \sum_l c_{k,l} e^{2i\pi(kx_1 + lx_2)}$. Or $c_{0,0} = 0$. On écrit alors

$$\mu = \sum_{k \neq 0} \sum_l c_{k,l} e^{2i\pi(kx_1 + lx_2)} + \sum_{l \neq 0} c_{0,l} e^{2i\pi lx_2}. \quad (1.17)$$

Désignons par $A(x_1, x_2)$, le premier terme de droite et par $B(x_1, x_2)$ le second. On peut alors écrire $A(x_1, x_2) = \partial_1 m_1$ et $B(x_1, x_2) = \partial_2 m_2$ où m_1 et m_2 sont des fonctions périodiques de période 1 et appartenant à L^∞ et $\mu = \partial_1 m_1 + \partial_2 m_2$. Il est alors facile de voir que $\mu \in \mathcal{BV}^*$.

(b) En sens inverse, si $\mu \in \mathcal{BV}^*$ et est 1-périodique en chaque variable, alors $\mu = c + r$ où $\int_Q r(x) dx = 0$. Alors d'après (a), $r \in \mathcal{BV}^*$. Donc $c \in \mathcal{BV}^*$, Ce qui est impossible à moins que $c = 0$.

Ceci nous amène naturellement à l'étude de l'espace dual \mathcal{BV}^* .

1.2 Espace dual \mathcal{BV}^*

Commençons par un résultat très utile dans la pratique,

Lemme 1.2.1 *Si $g \in L^2$ et $f \in BV$ alors*

$$\left| \int f(x)g(x) dx \right| \leq \|f\|_{BV} \|g\|_*. \quad (1.18)$$

Par dualité, nous avons ce résultat dans le cas où $f \in \mathcal{BV}$. Pour passer à BV , nous utilisons l'approximation "faible-forte" caractérisée par le lemme 1.1.1. Soit $f_n = f \star \varphi_n$, où $\varphi_n(x) \geq 0$ est une approximation, régulière, de l'identité. Alors $f_n \in \mathcal{BV}$, $\|f_n\|_{BV} \leq \|f\|_{BV}$ et $\|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$. Or $\left| \int f_n(x)g(x) dx \right| \leq$

$\|f_n\|_{BV} \|g\|_*$ et cette intégrale converge vers $\int f(x)g(x)dx$. Donc, par passage à la limite, on a $|\int f(x)g(x)dx| \leq \|f\|_{BV} \|g\|_*$. ■

Ce lemme se généralise ainsi :

Lemme 1.2.2 *Soient $f \in BV$ et $g \in \mathcal{BV}^*$ localement intégrable, telles que $fg \in L^1$. Alors $|\int f(x)g(x)dx| \leq \|f\|_{BV} \|g\|_*$.*

Voici la preuve. On considère d'abord la suite f_ϵ définie par le lemme 1.1.6. Alors $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int f_\epsilon(x)g(x)dx = \int f(x)g(x)dx$. Il suffit alors de montrer le lemme dans le cas où f est à support compact K . On considère maintenant la suite de fonctions bornées $f_{\epsilon,N}$ construites en appliquant le lemme 1.1.5 à la fonction f_ϵ . Il est évident que $\int f_{\epsilon,N}g(x)dx \rightarrow \int f_\epsilon g(x)dx$ quand $N \rightarrow +\infty$. Il suffit alors de prouver le lemme 1.2.2 à la fonction $f_{\epsilon,N}$. Afin d'alléger les notations, on note f cette fonction. Elle est bornée à support compact dans K ; elle n'est pas nécessairement dans \mathcal{BV} . Nous utilisons donc une approximation faible-forte, notée f_m . Il est classique que $f_m(x) \rightarrow f(x)$ presque partout. On a alors $|f_m(x)g(x)| \leq N|g(x)|\chi_K(x)$ et $f_m(x)g(x) \rightarrow f(x)g(x)$ presque partout. Par application du théorème de convergence dominée, on en déduit que $\int f_m(x)g(x)dx \rightarrow \int f(x)g(x)dx$ quand $m \rightarrow \infty$. Mais, $|\int f_m(x)g(x)dx| \leq \|f_m\|_{BV} \|g\|_* \leq \|f\|_{BV} \|g\|_*$. Il reste à passer à la limite pour conclure que $|\int f(x)g(x)dx| \leq \|f\|_{BV} \|g\|_*$. La preuve du lemme 1.2.2 est complète. ■

On s'intéresse maintenant au lien entre \mathcal{BV}^* et les mesures de Guy David :

Définition 1.2.1 (Mesure de Guy David) *Soit μ une mesure de Borel positive. On dit que μ est une mesure de Guy David s'il existe une constante C telle que pour tout disque D du plan, on ait*

$$\mu(D) \leq CR \tag{1.19}$$

où R est le rayon de D .

Par exemple, prenons Γ une courbe rectifiable dans le plan et notons σ la longueur d'arc sur Γ . Alors σ est une mesure de Guy David si et seulement

si Γ est régulière au sens de Ahlfors. Cela signifie que Γ est localement rectifiable et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\mathcal{H}^1(\Gamma \cap B(x, r)) \leq Cr$, pour tout $x \in \Gamma$ et $r > 0$. Guy David a prouvé que cette condition est équivalente à ce que l'opérateur intégral de Cauchy agissant sur $L^2(\Gamma, d\sigma)$ soit borné. Ces courbes Γ s'appellent aussi les courbes de Guy David. Si μ est une mesure de Borel signée, on dit que μ est une mesure de Guy David si $|\mu|$ vérifie 1.19 et la constante optimale C sera notée $\|\mu\|_G$.

L'étude de l'espace \mathcal{BV}^* débute par le théorème suivant [58] :

Théorème 1.2.1 *Les formes linéaires positives continues sur $\mathcal{BV}(\mathbb{R}^2)$ sont des mesures de Guy David. Réciproquement, toutes les mesures de Guy David sont des formes linéaires continues sur $\mathcal{BV}(\mathbb{R}^2)$.*

Ce théorème ne nous permettra malheureusement pas d'effectuer les calculs précis de la norme $\|f\|_*$, $f \geq 0$, dont nous aurons besoin plus loin. En effet, le théorème 1.2.1 ne fournit qu'une équivalence de normes et ne permet, en aucun cas, de faire des calculs exacts. L'énoncé du théorème 1.2.1 est paradoxal. En effet une mesure de Guy David μ est, en général, singulière. Une fonction $f \in \mathcal{BV}$ n'est définie que presque-partout. Il n'est donc pas du tout évident que $\int f d\mu$ ait un sens.

On peut interpréter la conclusion du théorème 1.2.1 dans le cadre des espaces de Morrey-Campanato. Rappelons que $f \in M^{p,\alpha} \Leftrightarrow \exists C \quad \forall B(x_0, R), R > 0, x_0 \in \mathbb{R}^2, (\int_{B(x_0, R)} |f|^p dx)^{1/p} \leq CR^\alpha$ où $0 < \alpha \leq n/p$. Si $p = 1$, on étend cette définition en remplaçant f par une mesure de Radon positive. On lit alors $|\mu|(B(x_0, R)) \leq CR^\alpha$. Le cas des mesures de Guy David est le cas $\alpha = 1$. Le théorème 1.2.1 concerne le pré-dual \mathcal{X} de l'espace de Morrey-Campanato $M^{1,1}$. Il s'agit de l'ensemble E des fonctions qui vérifient $|f| \leq \omega$ où $\omega = \sum \lambda_j \chi_j$, $\lambda_j \geq 0$, $\sum \lambda_j R_j < \infty$, χ_j est la fonction indicatrice d'un disque (par ailleurs arbitraire) de rayon R_j . Nous formulons alors un énoncé équivalent :

Corollaire 1.2.1 $\mathcal{BV} \subset \mathcal{X}$.

Cet énoncé est paradoxal. Le théorème de la co-aire fournirait une décomposition atomique utilisant des fonctions indicatrices d'ensembles rectifiables au lieu de disques. Bien entendu, le théorème 1.2.1 ne signifie pas que le dual de \mathcal{BV} soit l'ensemble des mesures de Guy David. De plus, le théorème 1.2.1 est faux en dimension autre que 2, car un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ vérifiant $\mathcal{H}^2(\partial\Omega) \leq 1$ peut être non borné.

La preuve du théorème 1.2.1 n'est qu'esquissée dans [58]. Pour la commodité du lecteur, nous donnons ici une preuve détaillée.

La preuve de la condition nécessaire est essentiellement triviale. La preuve de la condition suffisante utilisera de façon subtile la formule de la co-aire.

- Soit μ une forme linéaire positive continue sur \mathcal{BV} . Considérons un disque D de rayon R . Quitte à faire une translation, nous supposons que le disque D est centré en 0. Désignons par g_ϵ la fonction, définie en radiale par $g_\epsilon(r) = 1$ pour $r \leq R$, $g_\epsilon(r) = \frac{R+\epsilon-r}{\epsilon}$ pour $R \leq r \leq R + \epsilon$ et $g_\epsilon(r) = 0$ si $r > R + \epsilon$. Alors $g_\epsilon \in \mathcal{BV}$, $\|g_\epsilon\|_{BV} = \pi(2R + \epsilon)$ et $\chi_D \leq g_\epsilon$. Comme μ est positive, $\mu(\chi_D) \leq \mu(g_\epsilon) \leq C \|g_\epsilon\|_{BV}$ car μ est continue sur \mathcal{BV} . Il reste à faire tendre ϵ vers 0 pour conclure.

- Réciproquement, on considère une mesure de Guy David notée μ . Cherchons à montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, si $f \in \mathcal{BV}$, on ait

$$|\mu(f)| \leq C \|\mu\|_G \|f\|_{BV}. \quad (1.20)$$

La relation 1.20 ne peut fonctionner si $f \in BV$ et si μ est une mesure de Guy David car $\mu(f)$ n'a aucun sens. On doit donc se limiter à \mathcal{BV} . Mais alors on ne peut plus raisonner par densité des fonctions étagées dans \mathcal{BV} . En effet, les fonctions étagées ne sont pas denses dans \mathcal{BV} car elles n'appartiennent pas à \mathcal{BV} . On procède donc en deux temps. Tout d'abord on régularise μ . Alors on peut oublier $f \in \mathcal{BV}$ et considérer $f \in BV$. On peut alors utiliser les fonctions étagées. Voici les détails de la preuve.

Nous considérerons d'abord le cas où μ est une fonction régulière et f une fonction "étagée simple". Puis nous généraliserons au cas où f est une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, puis au cas $f \in \mathcal{BV}$ quand μ est une mesure de Guy David quelconque.

Considérons une approximation de l'identité φ_j . Posons $\mu_j = \mu * \varphi_j$. Alors μ_j est une fonction régulière, bornée. Pour alléger les notations, nous remplaçons la mesure μ_j par μ . Désignons par $Q_{k,j}$, le cube dyadique de taille 2^{-j} , $j \in \mathbb{Z}$, situé en $k2^{-j}$.

Définition 1.2.2 (Fonction étagée simple) *On appelle fonction étagée simple, une fonction f de la forme*

$$f(x) = \sum_{k \in F_j} c_{k,j} \chi_{Q_{k,j}} \quad (1.21)$$

où F_j est un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 de cardinal fini.

Lemme 1.2.3 *Il existe une constante C telle que pour toute fonction étagée simple f , on ait $|\mu(f)| \leq C \|\mu\|_G \|f\|_{BV}$.*

Considérons une fonction de BV , f . On écrit $f = f^+ - f^-$ et nous savons que $\|f^+\|_{BV} \leq \|f\|_{BV}$. On peut alors se restreindre au cas où f est positive. Considérons alors une fonction f positive de la forme $f(x) = \sum_{k \in F_j} c_{k,j} \chi_{Q_{k,j}}$. Appelons $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N = 0$ les valeurs prises par f et posons pour tout indice $i, j \in \{1, \dots, N\}$:

- $E_i = \{f(x) = \lambda_i\}$
- $F_i = \{f(x) \geq \lambda_i\}$
- $l_{i,j}$, la longueur de la frontière de l'ensemble $\overline{E_i} \cap \overline{E_j}$
- l_i , la longueur de la frontière de l'ensemble E_i .

Alors f s'écrit $f(x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \chi_{E_i}$. Pour évaluer $\|f\|_{BV}$, on considère la norme équivalente $\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_* + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_*$ où $\|\cdot\|_*$ désigne la norme des mesures de Radon. Or

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_* + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_* = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (\lambda_i - \lambda_j) l_{i,j}. \quad (1.22)$$

Il existe donc une constante C vérifiant,

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (\lambda_i - \lambda_j) l_{i,j} \leq C \|f\|_{BV}.$$

Evaluant $\mu(f)$. Pour cela, on remarque que $E_i = F_i \setminus F_{i-1}$, pour $i \geq 1$ ($F_0 = \emptyset$). Alors

$$\begin{aligned} \mu(f) &= \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i (\mu(F_i) - \mu(F_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \mu(F_i). \end{aligned}$$

Comme μ est une mesure de Guy David, on a $\mu(F_i) \leq \|\mu\|_G l(F_i)$ où $l(F_i)$ désigne la longueur du contour de F_i . De plus,

Lemme 1.2.4

$$l(F_i) = l_1 + l_2 + \cdots + l_i - 2 \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=k+1}^i l_{k,j}, \quad (1.23)$$

$$l(F_i) = \sum_{k=1}^i \sum_{j=i+1}^N l_{k,j}. \quad (1.24)$$

En effet, pour calculer $l(F_i)$, on somme les longueurs des frontières de E_k avec E_j pour $k \leq i < j$. Ceci revient à considérer les longueurs totales l_k et à retrancher les longueurs des frontières avec E_j pour $j \leq i$. Or, $l_k = l_{k,1} + \cdots + l_{k,N}$. Dans l'expression $l_1 + \cdots + l_i$, on compte 2 fois la longueur de la frontière entre E_k et E_j , c'est-à-dire $l_{k,j}$, $1 \leq k \neq j \leq i$. La première formule est alors démontrée. La seconde découle immédiatement de la précédente.

Revenons à la preuve du lemme 1.2.3. Ainsi

$$\begin{aligned} \mu(f) &\leq \sum_{i=1}^{N-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \sum_{k=1}^i \sum_{j=i+1}^N l_{k,j} \quad \|\mu\|_G \\ &\leq \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N l_{k,j} \sum_{i=k}^{j-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \quad \|\mu\|_G \\ &\leq \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^N l_{k,j} (\lambda_k - \lambda_j) \quad \|\mu\|_G. \end{aligned}$$

Finalement, en combinant les inégalités obtenues, nous avons, pour toute fonction étagée simple, $\mu(f) \leq C \|\mu\|_G \|f\|_{BV}$. ■

Essayons d'étendre ce résultat aux fonctions $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Lemme 1.2.5 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, il existe une suite de fonction étagée simple $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et un compact K_0 vérifiant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{supp}(f_j) \subset K_0, \quad \text{supp}(f) \subset K_0 \\ f_j \xrightarrow{L^2} f \\ \|f_j\|_{BV} \leq C_0 \|f\|_{BV} \text{ où } C_0 \text{ est indépendante de } f \end{array} \right. .$$

Le cas où $f = 0$ est trivial. Considérons alors le cas f non identiquement nul. Soit K le support de f et K_0 un cube dyadique fermé contenant K . On découpe alors K_0 en cubes dyadiques de taille 2^{-j} , $j \in \mathbb{N}$. Notons F_j tous les points $k \in \mathbb{Z}^2$ tels que $Q_{k,j}$ est inclus dans K_0 . Posons

$$f_j(x) = \sum_{k \in F_j} c_{k,j} \chi_{Q_{k,j}}$$

où $c_{k,j}$ est la valeur moyenne de f sur $Q_{k,j}$. Montrons que $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|f - f_j\|_2 = 0$. On a

$$\|f - f_j\|_2^2 = \sum_{k \in F_j} \int_{Q_{k,j}} |f - f_j|^2 dx = \sum_{k \in F_j} \int_{Q_{k,j}} |f(x) - c_{k,j}|^2 dx.$$

Nous appliquons alors l'inégalité de Poincaré : il vient

$$\int_{Q_{k,j}} |f(x) - c_{k,j}|^2 dx \leq C \left[\int_{Q_{k,j}} |\nabla f|(x) dx \right]^2 \leq C \|\nabla f\|_\infty^2 2^{-4j}.$$

Donc,

$$\|f - f_j\|_2^2 \leq C 2^{-4j} \|\nabla f\|_\infty^2 \text{card} F_j \quad (1.25)$$

Or $\text{card}(F_j) = |K_0| 2^{2j}$. Finalement, $\|f - f_j\|_2 \approx 2^{-j}$, qui tend vers 0 en l'infini.

Maintenant, évaluons $\|f_j\|_{BV}$. Il existe une constante C telle que $\|f_j\|_{BV} \leq C \left(\left\| \frac{\partial f_j}{\partial x_1} \right\|_* + \left\| \frac{\partial f_j}{\partial x_2} \right\|_* \right)$ et, en posant $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$,

$$\left\| \frac{\partial f_j}{\partial x_1} \right\|_* + \left\| \frac{\partial f_j}{\partial x_2} \right\|_* = \frac{1}{2^j} \sum_{k \in F_j} |c_{k,j} - c_{k-e_1,j}| + |c_{k,j} - c_{k-e_2,j}|.$$

Cette expression peut s'écrire

$$\sum_{k \in F_j} \frac{1}{2^j |Q_{k,j}|} \left| \int_{Q_{k,j}} (f(x) - f(x - 2^{-j} e_1)) dx \right| + \sum_{k \in F_j} \frac{1}{2^j |Q_{k,j}|} \left| \int_{Q_{k,j}} (f(x) - f(x - 2^{-j} e_2)) dx \right|.$$

Maintenant, on écrit $f(x) - f(x - 2^{-j} e_1) = \int_0^{2^{-j}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x - te_1) dt$. Alors

$$\left| \int_{Q_{k,j}} (f(x) - f(x - 2^{-j} e_1)) dx \right| \leq \int_0^{2^{-j}} \int_{Q_{k,j}} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|(x - te_1) dx dt \quad (1.26)$$

Mais $x - te_1$ varie dans $Q_{k,j} \cup Q_{k-1,j}$. Donc l'estimation 1.26 devient

$$\left| \int_{Q_{k,j}} (f(x) - f(x - 2^{-j} e_1)) dx \right| \leq 2^{-j} \left(\int_{Q_{k,j}} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|(x) dx + \int_{Q_{k-1,j}} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|(x) dx \right) \quad (1.27)$$

Il ne reste plus qu'à sommer sur $k \in F_j$ pour en déduire que

$$\sum_{k \in F_j} \left| \int_{Q_{k,j}} (f(x) - f(x - 2^{-j} e_1)) dx \right| \leq 2 \cdot 2^{-j} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_*. \quad (1.28)$$

Il suffit de faire la même chose pour la composante $f(x) - f(x - 2^{-j} e_2)$. Ainsi $\|f_j\|_{BV} \leq 2C \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_* + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_* \right) \leq C_0 \|f\|_{BV}$ où C_0 est une constante absolue. La preuve du lemme 1.2.5 est complète. \blacksquare

Appliquons ce lemme. Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ et f_j une suite tendant vers f au sens de la norme $\|\cdot\|_2$ et telle que $\|f_j\|_{BV} \leq C_0 \|f\|_{BV}$. D'après le lemme sur les fonctions étagées simples, on sait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|\mu(f_j)| \leq C \|\mu\|_G \|f_j\|_{BV}$. Les fonctions f et f_j sont à support compact K_0 . La fonction μ est régulière et f_j tend vers f au sens de la norme $\|\cdot\|_2$. Donc $\lim_{j \rightarrow +\infty} \mu(f_j) = \mu(f)$. Ainsi $|\mu(f_j)| \leq C \|\mu\|_G \|f_j\|_{BV} \leq C C_0 \|\mu\|_G \|f\|_{BV}$.

Par passage à la limite, quitte à changer les constantes, on a, pour tout $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $|\mu(f)| \leq C \|\mu\|_G \|f\|_{BV}$.

Etendons ce résultat aux fonctions de \mathcal{BV} . Il suffit d'utiliser la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans \mathcal{BV} pour la norme $\|\cdot\|_{BV}$. Pour conclure la preuve du théorème, il reste à revenir au cas général, c'est-à-dire traiter le cas où μ est une mesure de Guy David quelconque.

Soit μ une mesure de Guy David et φ_j une approximation de l'identité. On note $\mu_j = \mu * \varphi_j$. Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

Lemme 1.2.6 $\lim_{j \rightarrow +\infty} \mu_j(f) = \mu(f)$.

La preuve du théorème 1.2.1 est achevée. ■

Remarque 1.2.1 Dans toute la suite de la thèse, nous désignons par G le dual de \mathcal{BV} et nous notons $\|\cdot\|_*$ où $\|\cdot\|_G$, la norme duale de \mathcal{BV} .

Une caractérisation équivalente de l'espace G et de la norme duale est la suivante :

Lemme 1.2.7 Une distribution $f \in G$ si et seulement si il existe $g = (g_1, g_2) \in (L^\infty(\mathbb{R}^2))^2$ tel que $f = \operatorname{div} g$. On a alors

$$\|f\|_* = \inf \{ \|g\|_\infty = \left\| \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right\|_\infty \mid f = \operatorname{div} g \}. \quad (1.29)$$

Dans un sens, supposons $f \in \mathcal{BV}^*$. On regarde une fonction de $\mathcal{BV}(\mathbb{R}^2)$ comme le couple formé par ses dérivées partielles, qui appartiennent à L^1 . On considère alors l'inclusion continue $\mathcal{BV} \subset L^1(\mathbb{R}^2) \times L^1(\mathbb{R}^2)$ définie par $f \rightarrow (\partial_1 f, \partial_2 f)$; \mathcal{BV} est donc le sous-espace fermé de $L^1 \times L^1$ défini par les couples (u, v) tels que $\partial_2 u = \partial_1 v$. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe un prolongement de f sur $L^1 \times L^1$ tout entier. Il existe alors deux fonctions $g_1, g_2 \in L^\infty$ telles que $\|f\|_* = \|g\|_\infty = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$ et telles que, pour $h \in \mathcal{BV}$, $\int h f dx = - \int \nabla h \cdot g dx$. Donc $\int h f dx = \int h \operatorname{div} g dx$, d'où $f = \operatorname{div} g$. Maintenant, si $\tilde{g} \in L^\infty$ vérifie $f = \operatorname{div} \tilde{g}$, alors, de façon évidente, $\|f\|_* \leq \|\tilde{g}\|_\infty$. Or $\|f\|_* = \|g\|_*$. Finalement, la relation 1.29 est vérifiée. La réciproque est triviale. ■

Le fait que la preuve ne soit pas constructive joue un rôle essentiel dans la théorie. Elle explique la difficulté de calculer la norme duale.

Les mesures de Guy David sont encore utiles pour spécifier les multiplicateurs ponctuels de $BV(\mathbb{R}^2)$. Ces derniers vont intervenir pour délimiter les textures.

Définition 1.2.3 *On dit qu'une fonction mesurable m est un multiplicateur ponctuel de BV si, pour tout $f \in BV$, la fonction $g(x) = m(x)f(x)$ appartient aussi à BV .*

Le théorème du graphe fermé implique la continuité de l'application $T_m : f(x) \mapsto m(x)f(x)$. Il existe alors une constante C vérifiant, pour tout $f \in BV$,

$$\|m(x)f(x)\|_{BV} \leq C \|f\|_{BV}. \quad (1.30)$$

Théorème 1.2.2 *Une fonction m est un multiplicateur ponctuel de $BV(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $m \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et ∇m est une mesure de Guy David.*

La preuve n'est qu'esquissée dans [58].

- Soit m un multiplicateur ponctuel de BV . Du fait de la relation $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_{BV}$, m appartient à L^2_{loc} . Pour prouver que $m \in L^\infty$, il suffit de spécifier $f_n(x) = n\sqrt{\varphi}(n(y-x))$ où φ définit une approximation de l'identité positive, régulière, à support compact, et y est un point de Lebesgue de la fonction m^2 . Pour la commodité du lecteur, nous rappelons la définition

Définition 1.2.4 (Point de Lebesgue) *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, on dit que x_0 est un point de Lebesgue pour $f(x)$ si $\lim_{r \rightarrow 0} r^{-n} \int_{|x-x_0| \leq r} |f(x) - f(x_0)| dx = 0$.*

Alors, presque partout, x_0 est un point de Lebesgue de f .

Par hypothèse, $\|m(x)f_n(x)\|_{BV} \leq C \|f_n\|_{BV}$. Donc, $\|m(x)f_n(x)\|_2 \leq C \|\sqrt{\varphi}\|_{BV}$. Mais $\|m(x)f_n(x)\|_2$ tend vers $|m(y)|$. Finalement, comme la propriété d'être un point de Lebesgue est vraie presque partout, $m \in L^\infty$.

Montrons alors que ∇m est une mesure de Guy David. On prend $f = \chi_D$ où

D est un disque quelconque. Quitte à faire une translation, on suppose que D est centré en 0. On désigne par g_ϵ la fonction radiale dont le profil est une fonction trapèze égale à 1 sur $[-R, R]$, à 0 hors de $[-R-\epsilon, R+\epsilon]$ et affine sur $[-R-\epsilon, -R] \cup [R, R+\epsilon]$. Cette fonction appartient à \mathcal{BV} et vérifie $f \leq g_\epsilon$, $\|g_\epsilon\|_{BV} \rightarrow \|f\|_{BV}$ quand ϵ tend vers 0. On a $\nabla(mg_\epsilon) = m\nabla g_\epsilon + g_\epsilon\nabla m$. Donc $\int g_\epsilon |\nabla m| dx \leq (C + \|m\|_\infty) \|g_\epsilon\|_{BV}$. Mais $\int f |\nabla m| dx \leq \int g_\epsilon |\nabla m| dx$. On fait alors tendre ϵ vers 0. Finalement, ∇m est une mesure de Guy David.

• Réciproquement, posons $\mu = |\nabla m|$. Alors d'après le théorème précédent, μ est une forme linéaire continue positive sur \mathcal{BV} . Il existe donc une constante C vérifiant $|\mu(f)| \leq C \|\mu\|_G \|f\|_{BV}$, $f \in \mathcal{BV}$. Or $\nabla(mf) = m\nabla f + f\nabla m$. Donc $|\nabla(mf)| \leq |m| |\nabla f| + |f| |\nabla m|$. Ainsi mf appartient à $BV(\mathbb{R}^2)$ et $\|mf\|_{BV} \leq C(\|m\|_\infty + \|\mu\|_G) \|f\|_{BV}$.

Il reste alors à considérer le cas où f est une fonction à variation bornée. Pour cela, nous considérons une approximation "faible-forte" f_j , définie par le lemme 1.1.1. La suite f_j vérifie $f_j \in \mathcal{BV}$, $\|f - f_j\|_2 \rightarrow 0$ et $\|f_j\|_{BV} \leq \|f\|_{BV}$. La suite mf_j est alors bornée dans BV et converge vers mf dans L^2 . Par application du lemme 1.1.2, on a $mf \in BV$. Finalement,

$$\|mf\|_{BV} \leq C(\|m\|_\infty + \|\mu\|_G) \|f\|_{BV}.$$

■

Remarque 1.2.2 Soit $f = \chi_\Omega \in BV(\mathbb{R}^2)$ où Ω est un domaine à frontière rectifiable. Alors ∇f est une mesure de Guy David si et seulement si $\partial\Omega$ est une courbe de Guy David.

Définition 1.2.5 Nous définissons une norme équivalente à la norme de l'opérateur de multiplication par $m(x)$, noté T_m , par $\|T_m\|_M = \|m\|_\infty + \|\mu\|_G$.

Remarquons que $\|T_{m(\lambda \cdot)}\|_M = \|T_m\|$, pour $\lambda > 0$.

Dans beaucoup d'application, nous considérerons un modèle de texture, de

la forme $m(x)f(x)$ où, en quelque sorte, m délimite la texture dans l'espace, et $f(x)$ représente le caractère oscillant de la texture (par exemple une fonction de L^∞ de moyenne nulle, périodique en chaque variable). Pour estimer la norme duale de certaines textures, modélisées comme précédemment ($m(x)f(x)$), nous énonçons le théorème suivant :

Théorème 1.2.3 *Il existe une constante $C > 0$, telle que si m est un multiplicateur ponctuel de BV et $f \in L^2$, on ait*

$$\|m(x)f(x)\|_* \leq C \|T_m\|_M \|f\|_*. \quad (1.31)$$

Faisons deux remarques. La première est lorsqu'on utilise l'homogénéité de la norme duale. On remplace uniquement $f(x)$ par $f(\lambda x)$, $\lambda > 0$. Alors, d'après l'homogénéité,

$$\|m(x)f(\lambda x)\|_* \leq C \|T_m\|_M \frac{\|f\|_*}{\lambda}. \quad (1.32)$$

La norme duale de $m(x)f(\lambda x)$ est de l'ordre de λ^{-1} .

La deuxième remarque est que 1.31 n'a pas de sens en général. Par exemple, soit $f(x) = \sigma$, la mesure longueur d'arc sur le cercle $|x| = 1$ et $m = \chi_B$, où B est le disque unité $|x| \leq 1$. Alors $m(x)f(x)$ ne peut être défini.

Démontrons le théorème 1.2.3. On souhaite estimer $\int f(x)m(x)g(x)dx$ pour $g \in \mathcal{BV}$. Nous allons appliquer le théorème 1.2.2. Le problème qui se pose est que l'opérateur T_m envoie BV sur BV , mais n'envoie pas \mathcal{BV} sur \mathcal{BV} : $m \star f$ n'appartient pas, en général à \mathcal{BV} . Nous remplaçons alors m par $m \star \varphi_\epsilon = m_\epsilon$, où $\varphi_\epsilon(x) \geq 0$ est une approximation de l'identité. Alors T_{m_ϵ} envoie \mathcal{BV} sur \mathcal{BV} et $\|T_{m_\epsilon}\|_M \leq \|T_m\|_M$. Ainsi $|\int f(x)m_\epsilon(x)g(x)dx| \leq C \|T_m\|_M \|g\|_{BV} \|f\|_*$. Maintenant, il ne reste plus qu'à faire tendre ϵ vers 0. Remarquons que $f(x)g(x)m_\epsilon(x)$ tend presque sûrement vers $f(x)g(x)m(x)$ et que $|fgm_\epsilon| \leq \|m\|_\infty |fg|$. Par application du théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit 1.31. ■

Remarque 1.2.3 *Le théorème 1.2.3 reste valable si l'on suppose $f \in L^2_{loc}$ et $m \in L^\infty$ à support compact. La preuve est identique.*

Cette remarque nous servira à étudier un modèle de toit, utile pour l'analyse de certaines images SPOT.

Pour traiter les applications aux textures, nous nous proposons d'évaluer, f étant fixée, la norme $\|e^{i\omega \cdot x} f(x)\|_*$ quand $|\omega| \rightarrow +\infty$. Plus précisément, nous cherchons à caractériser les f telles que, pour une certaine constante C , on ait

$$\|e^{i\omega \cdot x} f(x)\|_* \leq \frac{C}{|\omega|}. \quad (1.33)$$

On a alors

a) Si $f \in L^\infty$ et ∇f est une mesure de Guy David, alors la propriété 1.33 est satisfaite.

b) Si $f \in L^\infty \cap BV$, la propriété 1.33 n'a pas lieu, en général.

La preuve du point (a) est facile. Pour $g \in \mathcal{BV}$ et $\|g\|_{BV} \leq 1$, on cherche à estimer $I = \int e^{i\omega \cdot x} f(x)g(x)dx$. Mais $\|fg\|_{BV} \leq C_0(\|f\|_\infty + \|\nabla f\|_G) \|g\|_{BV}$ et il suffit, pour conclure, d'observer que si $g \in BV$, on a $|\int g(x)e^{i\omega \cdot x} dx| \leq \frac{\|g\|_{BV}}{|\omega|}$.

Revenons à la propriété 1.33. Il est trivial d'observer que, pour tout $\lambda > 0$, $f(x)$ et $f(\lambda x)$ conduiront à exactement la même constante C dans 1.33. Si l'on avait $\|e^{i\omega \cdot x} f(x)\|_* \leq C \frac{\|f\|_\infty + \|f\|_{BV}}{|\omega|}$, il suffirait de jouer avec les dilatations pour obtenir en passant à la limite $\|e^{i\omega \cdot x} f(x)\|_* \leq C \frac{\|f\|_\infty}{|\omega|}$, ce qui est évidemment faux (il suffit de prendre $f(x) = \varphi(x)e^{-i\omega \cdot x}$ où $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$).

1.3 L'espace $\mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$ et les textures

Dans [58], Y. Meyer montre que les *structures oscillantes* ont une petite norme dans l'espace G :

Théorème 1.3.1 *On considère une suite de fonctions $(f_n)_n$ vérifiant*
1) *il existe un ensemble compact K tel que toutes les fonctions f_n ont leur support dans K ,*
2) *il existe C et $q > 2$ tels que, pour tout n , $\|f_n\|_q \leq C$,*

3) la suite $(f_n)_n$ tend vers 0 au sens des distributions.
Alors $\|f_n\|_*$ tend vers 0.

On ne peut remplacer la condition $q > 2$ par $q \geq 2$. Prenons, pour s'en convaincre, $q = 2$ et $f_n = n\varphi(nx)$ où φ est régulière à support compact. Cette suite vérifie les hypothèses du théorème 1.3.1. Pourtant $\|f_n\|_* = \|\varphi\|_*$ ne tend pas vers 0.

Une texture est donc vue comme un élément de l'espace G ayant une petite norme. Ceci est justifié par l'exemple qui suit. Nous verrons ensuite que cette hypothèse de travail est contestable.

Nous donnons un exemple de texture rencontrée dans certaines images SPOT (voir figure 1.2). Prenons l'exemple de certaines images SPOT de la ville de Nîmes. On y voit un motif périodique de toits. Ces motifs peuvent être modélisés de la façon suivante. Nous considérons une fonction μ α -périodique en la première variable $\mu(x_1 + \alpha, x_2) = \mu(x_1, x_2)$. La période α doit être vue comme un petit paramètre. Nous supposons que $\int_0^\alpha \mu(t, x_2) dt = 0$. On peut mettre en cause cette dernière hypothèse; on y reviendra plus tard (section 3.3). Cette fonction μ modélise le caractère périodique du toit. Il nous faut encore délimiter la position de celui-ci. Cela est fait en considérant la fonction indicatrice du toit ou plus généralement par une fonction $f \in L^\infty$ telle que ∇f est une mesure de Guy David. Le modèle du toit est alors donné par $\mu(x)f(x)$. Il nous faut estimer $\|\mu\|_*$. Les inégalités de Bernstein impliquent

Lemme 1.3.1 $\|\mu\|_* \leq \frac{\pi}{2}\alpha \|\mu\|_\infty$.

D'après la remarque 1.2.3, le toit a une petite norme dans l'espace G . Plus généralement, en se libérant de l'hypothèse de périodicité, il vient :

Théorème 1.3.2 Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que ∇f soit une mesure de Guy David et soit $\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction vérifiant $\int_{Q+k} \mu(x) dx = 0$ où $Q =$



FIG. 1.2 – Image SPOT de Nîmes

$[0, 1]^2$, $k \in \mathbb{Z}^2$. Alors

$$\|f(x)\mu(x)\|_* \leq C \|\mu\|_\infty \|T_f\|_M. \quad (1.34)$$

Nous allons donner une preuve directe du théorème 1.3.2. Remarquons que, d'après ce qui précède, la fonction f est un multiplicateur ponctuel de $BV(\mathbb{R}^2)$. Il existe $C_0 > 0$, tel que $\|fg\|_{BV} \leq C_0 \|T_f\|_M \|g\|_{BV}$, pour $g \in BV(\mathbb{R}^2)$. Par le théorème 1.1.4, on a $|\int f(x)g(x)\mu(x)dx| \leq C_1 \|\mu\|_\infty \|fg\|_{BV}$. En combinant les deux inégalités, nous obtenons, pour tout $g \in \mathcal{BV}$:

$$\left| \int f(x)\mu(x)g(x)dx \right| \leq C \|\mu\|_\infty \|T_f\|_M \|g\|_{BV}.$$

Donc $f(x)\mu(x) \in \mathcal{BV}^*$ et $\|f(x)\mu(x)\|_* \leq C \|\mu\|_\infty \|T_f\|_M$. ■

Remarque 1.3.1 *En utilisant l'homogénéité de la norme duale, on a, sous les hypothèses du théorème précédent, $\|f(x)\mu(Nx)\|_* = O(\frac{1}{N})$.*

Corollaire 1.3.1 *Si μ désigne toujours une fonction vérifiant les hypothèses du théorème précédent, alors, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$,*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f(x)\mu(Nx)\|_* = 0. \quad (1.35)$$

En effet, pour $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tel que $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$. Or g est clairement un multiplicateur ponctuel de BV . Il vient $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|g(x)\mu(Nx)\|_* = 0$. Il existe un rang pour N , à partir duquel, $\|g(x)\mu(Nx)\|_* \leq \varepsilon$. Il suffit maintenant d'écrire $\|f(x)\mu(Nx)\|_* \leq \|(f(x) - g(x))\mu(Nx)\|_* + \|g(x)\mu(Nx)\|_* \leq \|(f(x) - g(x))\mu(Nx)\|_2 + \varepsilon \leq \varepsilon(\|\mu\|_\infty + 1)$. ■

Nous verrons comment tenir compte de ce résultat pour comprendre ce que fait l'algorithme ORF face à ce type d'images. Nous verrons comment il traite l'image dans le cas où la valeur moyenne sur une période n'est pas nulle.

Cependant, il est faux de croire que la condition $\|\cdot\|_* < \alpha$ définit une texture comme le prouve le théorème suivant :

Théorème 1.3.3 *Pour tout ensemble Borélien E , on a*

$$\|\chi_E\|_* \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} |E|^{1/2}. \quad (1.36)$$

Cette estimation est mauvaise si E est un ensemble très effilé. Par exemple,

Lemme 1.3.2 *Si $E = [0, N] \times [0, 1]$ où $N \gg 1$, alors $\|\chi_E\|_* \approx 1$*

Dans toute la thèse, la notation $a \approx b$ signifie qu'il existe deux constantes absolues $\beta \geq \gamma > 0$, telles que $\gamma a \leq b \leq \beta a$. Le lemme 1.3.2 sera très important dans la suite. Pour la preuve, on a $\|\chi_E\|_2^2 \leq \|\chi_E\|_{BV} \|\chi_E\|_*$. Donc $\|\chi_E\|_* \geq \frac{N}{2N+2}$. Il reste à majorer $\|\chi_E\|_*$. Pour cela, on écrit $\chi_E = \partial_2(\chi_{[0,N]}(x_1)\theta(x_2))$ où $\theta(x_2) = \inf(\sup(-\frac{1}{2}, x_2 - \frac{1}{2}), \frac{1}{2})$. Il vient $\|\chi_E\|_* \leq \|\theta\|_\infty = \frac{1}{2}$. Donc $\|\chi_E\|_* \rightarrow \frac{1}{2}$ quand $N \rightarrow +\infty$.

La preuve du théorème est immédiate. Il suffit d'utiliser la comparaison $\|f\|_* \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \|f\|_2$. Ce théorème justifiera le fait que l'algorithme ORF efface les objets de taille petite.

Le théorème qui suit va encore dans le même sens ; nous construisons des fonctions de normes $\|\cdot\|_*$ petites qui n'ont pas lieu d'être considérées comme des textures,

Théorème 1.3.4 *Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}^2}$, une suite de fonctions (ou distributions) appartenant à $\mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$ et vérifiant, pour tout $k \in \mathbb{Z}^2$,*

- i) $\|f_k\|_* \leq 1$,*
- ii) $\int f_k(x) dx = 0$,*
- iii) $\text{supp } f_k \subset \{x; |x| \leq C_0\}$.*

Alors la fonction

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} f_k(x - k) \quad (1.37)$$

appartient à $\mathcal{BV}^(\mathbb{R}^2)$ et $\|f\|_* \leq C_1$.*

On pourrait penser, à la lecture de ce résultat, que \mathcal{BV}^* est un espace amalgamé et l'on peut poser la question suivante : “Une fonction ou une distribution appartient-elle à \mathcal{BV}^* dès qu'elle appartient localement à \mathcal{BV}^* et que cette propriété est vérifiée uniformément par rapport aux translations ?” Nous verrons qu'il n'en est rien.

La preuve du théorème 1.3.4 débute par deux lemmes.

Lemme 1.3.3 *Si $r \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } r \subset Q = [-\pi, \pi]^2$ et $\int_Q r(x) dx = 0$, alors il existe $r_1, r_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ telles que*

- $r = \partial_1 r_1 + \partial_2 r_2$*
- $\text{supp } r_i \subset Q$ et $\|r_i\|_\infty \leq C \|r\|_\infty$ pour $i = 1, 2$.*

Pour la commodité du lecteur, rappelons la preuve du lemme 1.3.3. Posons $s(x_1) = \int r(x_1, t) dt$. Il est évident que $s \in L^\infty(\mathbb{R})$ et il existe C tel que $\|s\|_\infty \leq C \|r\|_\infty$. On écrit $s = \frac{d}{dx_1} T$ où $T(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} s(t) dt$. Alors $\text{supp } T \subset [-\pi, \pi]$ et $\|T\|_\infty \leq C \|r\|_\infty$. Prenons alors une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[-\pi, \pi]$ et telle que $\int \varphi = 1$. Posons $g(x_1, x_2) = r(x_1, x_2) - s(x_1)\varphi(x_2)$.

Alors, pour tout x_1 , $\int g(x_1, t) dt = 0$ et le support de g est inclus dans Q . Posons $\tau(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} g(x_1, t) dt$. On a alors $g = \partial_2 \tau$ et le support de τ est dans Q , $\|\tau\|_\infty \leq C \|r\|_\infty$, quitte à changer de constante. Finalement, on écrit $\tau(x_1, x_2) = \partial_1(T(x_1)\varphi(x_2)) + \partial_2 \tau(x_1, x_2)$. Le lemme 1.3.3 est démontré. Servons-nous de ce lemme pour montrer le lemme suivant,

Lemme 1.3.4 *Si $f \in \mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$ est à support dans $|x| \leq 1$ et $\int f = 0$, alors il existe deux fonctions u_1, u_2 dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ telles que*

- $f = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2$
- les fonctions u_1, u_2 sont à support dans Q et $\|u_i\|_\infty \leq C \|f\|_*$ pour $i = 1, 2$.

Pour prouver cela, on considère $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[-\pi, \pi]^2$ valant 1 sur $[-1, 1]^2$. On écrit $f = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2$ où $u_1, u_2 \in L^\infty$ et $\left\| \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \right\|_\infty = \|f\|_*$. Ecrivons alors $f = f\varphi = \partial_1(\varphi u_1) + \partial_2(\varphi u_2) - r(x_1, x_2)$, où $r(x_1, x_2) = u_1 \partial_1 \varphi + u_2 \partial_2 \varphi$. Mais $\int_Q f = \int_Q \partial_1(\varphi u_1) = \int_Q \partial_2(\varphi u_2) = 0$; donc $\int r dx = 0$. Son support est inclus dans le support de φ et $\|r\|_\infty \leq C \|f\|_*$. On applique alors le lemme 1.3.3 pour conclure la preuve du lemme 1.3.4.

Revenons au théorème 1.3.4. On peut écrire, $f_k(x - k) = \partial_1 f_{k,1} + \partial_2 f_{k,2}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}^2$, où le support de $f_{k,i}$ est inclus dans $k + Q$ et $\|f_{k,i}\|_\infty \leq C \|f_k\|_*$. Il vient $f = \partial_1(\sum_k f_{k,1}) + \partial_2(\sum_k f_{k,2})$. De façon évidente, $\|f\|_* \leq C \sup_k \|f_k\|_*$. ■

Cependant, comme nous l'avons déjà dit,

Théorème 1.3.5 *\mathcal{BV}^* n'est pas un espace amalgamé du type $l^\infty(\mathbb{Z}^2, F)$ où F désigne la version locale de \mathcal{BV}^* .*

Pour le voir, on considère une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, à support compact, telle que $1 = \sum_k \varphi(x - k)$ identiquement. Alors $\varphi(x - k) \in \mathcal{BV}^*$ et $\|\varphi(x - k)\|_* = \|\varphi\|_*$, pour tout k . Mais $1 \notin \mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$.

Nous pouvons cependant préciser une réciproque au théorème 1.3.4. Pour

cela, nous introduisons l'espace $\mathcal{BV}^*(\mathbb{Z}^2)$, dual de l'espace $\mathcal{BV}(\mathbb{Z}^2)$ que nous définissons juste après avoir défini $BV(\mathbb{Z}^2)$:

Définition 1.3.1

$$BV(\mathbb{Z}^2) = \{x_k, k \in \mathbb{Z}^2 \mid \sum_k |x_{k+e_1} - x_k| + |x_{k+e_2} - x_k| < \infty\}$$

où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

Si $(x_k) \in BV(\mathbb{Z}^2)$, on pose $f(x) = \sum_k x_k \chi_{Q+k}$ où $Q = [0, 1]^2$. Alors $f \in BV(\mathbb{R}^2)$ et $\|f\|_{BV} = \sum_k |x_{k+e_1} - x_k| + |x_{k+e_2} - x_k|$. Il existe alors une constante c et une fonction $g \in BV(\mathbb{R}^2)$ telle que $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et $f = c + g$. Nécessairement, g s'écrit $g(x) = \sum_k (x_k - c) \chi_{Q+k}$ et $\|g\|_2^2 = \sum_k |x_k - c|^2 < \infty$. Il existe alors une unique suite $(y_k) \in BV(\mathbb{Z}^2)$ telle que $(y_k) \in l^2(\mathbb{Z}^2)$ et $(x_k - y_k)$ est constante. On définit ensuite

Définition 1.3.2

$$\mathcal{BV}(\mathbb{Z}^2) = \{y_k \in l^2(\mathbb{Z}^2) \mid \sum_k |y_{k+e_1} - y_k| + |y_{k+e_2} - y_k| < \infty\}.$$

Nous avons $l^1(\mathbb{Z}^2) \subset \mathcal{BV}(\mathbb{Z}^2) \subset l^2(\mathbb{Z}^2)$, avec inclusions continues. Par dualité, nous avons les inclusions continues $l^2(\mathbb{Z}^2) \subset \mathcal{BV}^*(\mathbb{Z}^2) \subset l^\infty(\mathbb{Z}^2)$. Avant d'énoncer une sorte de réciproque au théorème 1.3.4, donnons quelques résultats sur $\mathcal{BV}(\mathbb{Z}^2)$ et son dual. Pour motiver l'étude de $\mathcal{BV}(\mathbb{Z}^2)$, on observe qu'une image numérique est échantillonnée sur une "grille fine" $h\mathbb{Z}^2$ où $h > 0$ est petit. On a alors deux options. Ou bien on construit les opérateurs de restriction et de prolongement notés R_h et P_h vérifiant $R_h P_h = I$, $R_h : BV(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{BV}(\mathbb{Z}^2)$ et $P_h : \mathcal{BV}(\mathbb{Z}^2) \rightarrow BV(\mathbb{R}^2)$; ou bien on étudie directement les espaces de suites. En fait, ces deux points de vue sont équivalents, comme nous allons le montrer.

Nous nous limiterons à $h = 1$ dans la discussion qui suit. Remarquons qu'on ne peut restreindre naïvement une fonction $f \in BV(\mathbb{R}^2)$ à \mathbb{Z}^2 , car elle n'est définie que presque partout. L'opérateur de restriction R est en fait défini sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ par $R(f) = (f \star \varphi(k))_k$ où $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ vérifie $\sum_k \varphi(x - k) = 1$

identiquement. Nous prouvons que R est un morphisme surjectif de $BV(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathcal{BV}(\mathbb{Z}^2)$, d'une part, et de $\mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathcal{BV}^*(\mathbb{Z}^2)$, d'autre part.

Lemme 1.3.5 *Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) $\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \psi(x - k) = 0$.

b) $\psi = \varphi_1(x + e_1) - \varphi_1(x) + \varphi_2(x + e_2) - \varphi_2(x)$ où $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

La propriété (b) implique (a) de façon évidente. Pour montrer la réciproque, on considère une fonction $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vérifiant $\sum_k \varphi_0(x - k) = 1$. Pour prouver le lemme 1.3.5, il suffit de choisir

$$\varphi_1(x) = \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} \psi(x - k) \right) \varphi_0(x_2) \quad (1.38)$$

$$\varphi_2(x) = \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\psi(x - k_2 e_2) - \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi(x - l e_2) \right) \varphi_0(x_2 - k_2) \right). \quad (1.39)$$

La preuve est alors une simple vérification.

Théorème 1.3.6 (a) *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\sum_k \varphi(x - k) = 1$. Alors, pour toute suite $(x_k) \in \mathcal{BV}(\mathbb{Z}^2)$,*

$$\left\| \sum_k x_k \varphi(x - k) \right\|_{BV} \leq C \|x_k\|_{BV}. \quad (1.40)$$

(b) *En sens inverse, considérons $f \in BV(\mathbb{R}^2)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. On pose $x_k = \int f(x) \varphi(x - k) dx$. Alors $(x_k) \in \mathcal{BV}(\mathbb{Z}^2)$. Plus précisément, il existe C telle que $\|x_k\|_{BV} \leq C \|f\|_{BV}$.*

(c) *De même, si $f \in \mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$ et φ vérifie encore $\sum_k \varphi(x - k) = 1$, alors la suite $y_k = \int f(x) \varphi(x - k) dx$ appartient à $\mathcal{BV}^*(\mathbb{Z}^2)$. Plus précisément, il existe une constante C telle que $\|y_k\|_* \leq C \|f\|_*$.*

La preuve de l'estimation 1.40 est laissée au lecteur. Prouvons le point (b).

On écrit $x_k - x_{k-e_1} = \int f(x) (\varphi(x - k) - \varphi(x - k + e_1)) dx$. Il est facile d'écrire $\varphi(x) - \varphi(x + e_1) = \partial_1 \varphi_1$ avec $\varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. On le voit par exemple en passant dans le domaine de Fourier. Ainsi $x_k - x_{k-e_1} = \int f(x) \partial_1 \varphi_1(x - k) dx$ et donc $\|x_k - x_{k-e_1}\|_1 \leq \|\sum_k \varphi_1(x - k)\|_{\infty} \|f\|_{BV}$. En fait de même pour $x_k - x_{k-e_2}$.

Finalement, il existe C , ne dépendant que de φ telle que $\|x_k\|_{BV} \leq C \|f\|_{BV}$. Quant au point (c), on considère une suite (x_k) dans $\mathcal{BV}(\mathbb{Z}^2)$. Posons $g(x) = \sum_k x_k \varphi(x - k)$. Alors $\|g\|_{BV} \leq C \|x_k\|_{BV}$. Donc $\sum_k x_k y_k = \int g(x) f(x) dx \leq C \|f\|_* \|x_k\|_{BV}$. Donc $(y_k) \in \mathcal{BV}^*(\mathbb{Z}^2)$. ■

Complétons ce théorème,

Lemme 1.3.6 *Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ alors, pour toute suite $(y_k) \in \mathcal{BV}^*(\mathbb{Z}^2)$,*

$$\left\| \sum_k y_k \varphi(x - k) \right\|_* \leq C \|y_k\|_* . \quad (1.41)$$

En effet, considérons $g \in BV(\mathbb{R}^2)$. Posons $x_k = \int \varphi(x - k) g(x) dx$. Le théorème 1.3.6 implique $(x_k) \in \mathcal{BV}(\mathbb{Z}^2)$. Or $\int (\sum_k y_k \varphi(x - k)) g(x) dx = \sum_k y_k x_k \leq \|y_k\|_* \|x_k\|_{BV} \leq C \|y_k\|_{BV} \|g\|_{BV}$. Ceci conclut la preuve. ■

Le théorème qui suit est, en quelque sorte, la réciproque du théorème 1.3.4.

Théorème 1.3.7 *Toute fonction $f \in \mathcal{BV}^*$ peut s'écrire sous la forme*

$$f(x) = \sum_k I_k \varphi(x - k) + \sum_k f_k(x - k) \quad (1.42)$$

où

- $f_k \in \mathcal{BV}^*$, $k \in \mathbb{Z}^2$, et $\|f_k\|_* \leq C \|f\|_*$ où C ne dépend que de φ .
- $\text{supp}(f_k) \subset \{x/|x| \leq 1\}$ et $\int f_k = 0$,
- $(I_k) \in \mathcal{BV}^*(\mathbb{Z}^2)$,
- et φ est une fonction régulière vérifiant $\sum_k \varphi(x - k) = 1$ et dont le support est inclus dans $\{|x| \leq 1\}$.

Pour le voir, on considère une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, de support dans $\{|x| \leq 1\}$, vérifiant $\sum_k \varphi(x - k) = 1$. Posons $I_k = \int \varphi(x - k) f(x) dx$ et $f_k(x - k) = (f(x) - I_k) \varphi(x - k)$. On écrit alors $f(x) = \sum_k f_k(x - k) + \sum_k I_k \varphi(x - k)$.

De plus, nous avons dans l'ordre,

- $f(x) \varphi(x - k) \in \mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$ ($\|f(x) \varphi(x - k)\|_* \leq C \|f\|_*$),
- $\int f_k = 0$,
- pour tout $k \in \mathbb{Z}^2$, $|I_k| \leq \|\varphi\|_{BV} \|f\|_*$

$$- \|f_k\|_* \leq C \|f\|_*.$$

D'après le théorème 1.3.4, $\sum_k f_k \in \mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$ et comme $f \in \mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$, il vient $\sum_k I_k \varphi(x - k) \in \mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$.

Le théorème 1.3.6 prouve que $(I_k) \in \mathcal{BV}^*(\mathbb{Z}^2)$. ■

Proposition 1.3.1 *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\sum_k \varphi(x - k) = 1$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes,*

- il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$, on ait

$$\sum_k |\hat{\varphi}|^2(\xi + 2k\pi) \geq C. \quad (1.43)$$

- Pour toute suite (x_k) on a

$$\sum_k x_k \varphi(x - k) \in BV(\mathbb{R}^2) \implies (x_k) \in \mathcal{BV}(\mathbb{Z}^2). \quad (1.44)$$

Commençons par prouver le sens direct. Pour cela, on définit la fonction $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ par

$$\hat{h}(\xi) = \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{\sum_k |\hat{\varphi}|^2(\xi + 2k\pi)}. \quad (1.45)$$

Alors $\int h(x - l)\varphi(x - k) = \delta_{k,l}$. Posons $f = \sum_k x_k \varphi(x - k) \in BV(\mathbb{R}^2)$. On a $x_k = \int f(x)h(x - k)dx$. On applique alors le (b) du théorème 1.3.6.

Réciproquement, on raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe ξ_0 tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}^2$, $\hat{\varphi}(\xi_0 + 2\pi k) = 0$. Comme $\sum_k \varphi(x - k) = 1$, alors $\hat{\varphi}(2\pi k) = \delta_k$. Il en résulte que $\xi_0 \neq 0[2\pi]$. Posons alors $u(x) = \varphi(x)e^{-i\xi_0 \cdot x}$ et $h(x) = \sum_k u(x - k)$. La fonction h est 1-périodique. Ses coefficients de Fourier sont $\hat{h}(k) = \hat{u}(2\pi k) = \hat{\varphi}(\xi_0 + 2\pi k) = 0$. Donc $h = 0$. Ainsi

$$\sum_k e^{-ik \cdot \xi_0} \varphi(x - k) = 0 \quad (1.46)$$

Il suffit d'appliquer l'hypothèse pour en déduire que $(e^{-ik \cdot \xi_0}) \in \mathcal{BV}(\mathbb{Z}^2)$, ce qui est absurde ($\xi_0 \neq 0[2\pi]$). ■

Dans le même ordre d'idée, nous avons

Proposition 1.3.2 *On considère $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\sum_k \varphi(x - k) = 1$, $\sum_k |\hat{\varphi}|^2(\xi + 2\pi k) \geq C > 0$ et $\sum_k y_k \varphi(x - k) \in \mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$. Alors $(y_k) \in \mathcal{BV}^*(\mathbb{Z}^2)$.*

Pour prouver cette proposition, on considère h défini comme précédemment. Alors $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, $\int h(x - k)\varphi(x - l)dx = \delta_{k,l}$ et $\sum_k h(x - k)$ est une fonction constante. On pose alors $g(x) = \sum_k x_k h(x - k)$ pour $(x_k) \in \mathcal{BV}(\mathbb{Z}^2)$. La fonction g est alors dans $BV(\mathbb{R}^2)$ et $\|g\|_{BV} \leq C \|x_k\|_{BV}$. Posons $f(x) = \sum_k y_k \varphi(x - k)$. Alors $|\int g(x)f(x)dx| = |\sum_k x_k y_k| \leq C \|x_k\|_{BV}$. Donc $y_k \in \mathcal{BV}^*(\mathbb{Z}^2)$. ■

Terminons ce chapitre par quelques remarques :

Théorème 1.3.8 $\mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$ n'est pas un espace séparable.

Il suffira de montrer que $\mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$ contient un sous-espace isomorphe à $l^\infty(\mathbb{N})$. En effet, soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$ à support dans $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $\int \psi(x)dx = 0$. On suppose $\psi = \partial_1 \varphi$ où φ est de même support que ψ . Posons pour toute suite $(x_j) \in l^\infty(\mathbb{N})$,

$$T(x_j) = f(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} x_j \psi(x - j). \quad (1.47)$$

Montrons que $f(x) \in \mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$ et que $\|f\|_* \approx \|x_j\|_\infty$.

Pour le premier point, il suffit d'écrire $f(x) = \partial_1(\sum_{j \in \mathbb{N}} x_j \varphi(x - j))$ avec $\left\| \sum_{j \in \mathbb{N}} x_j \varphi(x - j) \right\|_\infty \leq \beta \|x_j\|_\infty$ où $\beta > 0$. On a donc $\|f\|_* \leq \beta \|x_j\|_\infty$. Il reste à prouver l'inégalité inverse. Notons que $x_j = (\int \psi^2(x)dx)^{-1} \int f(x)\psi(x - j)dx$. Donc $|x_j| \leq \gamma \|f\|_*$, où $\gamma > 0$. ■

Indiquons que, malgré les apparences, \mathcal{BV} n'est pas un espace amalgamé.

On pourrait croire que $f \in \mathcal{BV} \Leftrightarrow \varphi(x - k)f(x) = f_k \in \mathcal{BV}$, $k \in \mathbb{Z}^2$, et que $\sum_k \|f_k\|_{BV} < \infty$. Ceci impliquerait que $\sum_k \|f(x)\nabla\varphi(x - k)\|_1 < +\infty$. Il n'en est rien. Il suffit, pour s'en convaincre, de choisir pour f une fonction régulière et égale à $|x|^{-a}$ ($1 < a < 2$) lorsque $|x|$ est grand. Alors $f \in \mathcal{BV}$

mais la somme est divergente.

Pour terminer cette section, observons que si $\xi_0 \neq 2\pi\mathbb{Z}^2$, alors $e^{i\xi_0 \cdot k} \in \mathcal{BV}^*(\mathbb{Z}^2)$. En fait, la propriété continue correspondante est exacte. Si $\omega \neq 0$, $\omega \in \mathbb{R}^2$, alors $e^{i\omega \cdot x} \in \mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$. Pour le voir, on écrit $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ et l'on a soit $\omega_1 \neq 0$, soit $\omega_2 \neq 0$. Dans le premier cas, il vient $e^{i\omega \cdot x} = (i\omega_1)^{-1} \partial_1 e^{i\omega \cdot x}$. Alors $e^{i\omega \cdot x} \in G$ et $\|e^{i\omega \cdot x}\|_* \leq \frac{1}{|\omega_1|}$. En faisant le meilleur choix, il vient

$$\|e^{i\omega \cdot x}\|_* \leq \frac{\sqrt{2}}{|\omega|}. \quad (1.48)$$

Insistons sur le fait que $f \in \mathcal{BV}^*$ n'implique pas $|f| \in \mathcal{BV}^*$. La fonction $x \rightarrow |x|$ n'opère pas sur \mathcal{BV}^* . Il suffit de considérer $f(x) = e^{i\omega \cdot x}$ pour $\omega \neq 0$. Voici un autre contre-exemple. Prenons pour $f(x) = e^{i|x|^2}$. On a $|f(x)| = 1 \notin \mathcal{BV}^*$. Il reste à prouver que $f \in \mathcal{BV}^*$. Pour cela, prenons $0 \leq \varphi \leq 1$ une fonction régulière, à support compact dans $|x| \leq 1$, valant 1 sur $|x| \leq \frac{1}{2}$. Notons $\phi = 1 - \varphi$; ϕ est nul sur $|x| \leq \frac{1}{2}$ et vaut 1 si $|x| \geq 1$. On écrit alors $f(x) = f(x)\varphi(x) + f(x)\phi(x)$. Le premier terme est dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, donc dans \mathcal{BV}^* . Traitons le second terme. On remarque que, uniquement en dimension 2,

$$\partial_1 \frac{x_1}{|x|^2} e^{i|x|^2} + \partial_2 \frac{x_2}{|x|^2} e^{i|x|^2} = 2ie^{i|x|^2}. \quad (1.49)$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} 2ie^{i|x|^2} \phi(x) &= \partial_1 \left(\frac{x_1}{|x|^2} e^{i|x|^2} \phi(x) \right) + \partial_2 \left(\frac{x_2}{|x|^2} e^{i|x|^2} \phi(x) \right) - \\ &\quad \frac{x_1}{|x|^2} e^{i|x|^2} \partial_1 \phi(x) - \frac{x_2}{|x|^2} e^{i|x|^2} \partial_2 \phi(x). \end{aligned}$$

Mais $\frac{x_j}{|x|^2} e^{i|x|^2} \phi(x) \in L^\infty$ et $\frac{x_j}{|x|^2} e^{i|x|^2} \partial_j \phi(x) \in L^2$, pour $j = 1, 2$. Donc $e^{i|x|^2} \phi(x) \in \mathcal{BV}^*$.

Ce chapitre a montré l'utilité et les limites de l'espace $\mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$ pour modéliser les textures. Nous avons énoncé un résultat permettant d'estimer la norme d'un modèle de texture " $\mu(x)f(x)$ ". Le chapitre qui suit montre

toute la difficulté de calculer la norme duale $\|\cdot\|_*$. Dans la plupart des cas, on se contentera d'un ordre de grandeur de $\|\cdot\|_*$.

Chapitre 2

Calculs de normes dans l'espace G

L'algorithme d'Osher, Rudin et Fatemi et les algorithmes apparentés reposent sur l'hypothèse de travail suivante : l'image s'écrit $f = u + v$ où les structures géométriques simples contenues dans l'image sont regroupées dans u tandis que le bruit et les textures sont regroupés dans v . Dans l'algorithme ORF, on a $\|v\|_* \leq \frac{1}{2\lambda}$.

Cet énoncé n'est utile que si l'on sait calculer la norme duale $\|\cdot\|_*$. Nous savons que $\dot{B}_\infty^{-1,1}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2) \subset \dot{B}_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^2)$, avec inclusions continues. Cela implique que l'on a

$$\gamma \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} \leq \|f\|_* \leq \beta \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,1}} \quad (2.1)$$

mais que l'on n'a pas, si $q < \infty$, $\gamma \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,q}} \leq \|f\|_*$ et que l'on n'a pas, si $q > 1$, $\|f\|_* \leq \beta \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,q}}$.

Il y a donc un problème pour estimer $\|f\|_*$. A notre plus grande surprise, ce problème est plus ardu que ce que nous pensions. Pour en savoir plus, nous avons voulu tester (2.1) sur des fonctions pour lesquelles l'écart entre les deux membres de (2.1) est le plus grand possible. C'est le cas si $f = \sum_j \sum_k c_{j,k} \psi_{j,k}(x)$ où $|c_{j,k}| = 1$ et $\psi_{j,k}(x) = 2^j \psi(2^j x - k)$. Alors on a évidemment $\|\sum_k c_{j,k} \psi_{j,k}(x)\|_\infty \approx 2^j$ et il en résulte que $f \notin \dot{B}_\infty^{-1,1}$.

Le premier problème qui se pose est donc de savoir si $\left\| \sum_j \sum_k c_{j,k} \psi_{j,k}(x) \right\|_*$

peut être finie lorsque $|c_{j,k}| = 1$. On peut chercher à en savoir plus en cherchant à mesurer l'explosion de la norme de $\sum_j \sum_k c_{j,k} \psi_{j,k}(x)$ dans \mathcal{BV}^* quand $|c_{j,k}| = 1$. Une mesure est fournie par la conjecture suivante que nous n'avons pas réussi à établir

$$\gamma N \leq \left\| \sum_{j=0}^{N-1} \sum_k c_{j,k} \psi_{j,k}(x) \right\|_* \leq \beta N \quad (2.2)$$

où $\beta > \gamma > 0$ sont deux constantes.

Nous montrerons 2.2 dans certains cas particuliers. Un autre axe de recherche concerne le bruit blanc. Il est donné par sa décomposition en série $Z(x, \omega) = S_0 Z + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j Z$ où $S_0 Z = \sum_k g_k(\omega) \varphi(x-k)$ et $\Delta_j Z = \sum_k g_{j,k}(\omega) \psi_{j,k}(x)$ et où les $g_k(\omega)$, $g_{j,k}(\omega)$ sont i.i.d. de loi $N(0, 1)$. Il est évident que $Z(x, \omega)$ n'appartient pas à \mathcal{BV}^* . En fait $Z(x, \omega)$ n'appartient même pas à $\dot{B}_{\infty}^{-1, \infty}$! Mais la encore on peut chercher à quantifier cette information en remplaçant (1) $\sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j Z$ par $\sum_{j=0}^{N-1} \Delta_j Z$ et en (2) localisant le bruit blanc. On considère alors une version locale filtrée du bruit blanc et l'on cherche à évaluer sa norme dans $G = \mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$. Là encore nous n'obtiendrons pas une information précise (un facteur N sépare les deux estimations).

Nous allons commencer par montrer que $\sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_k c_{j,k} \psi_{j,k}(x) \notin G$, pour $|c_{j,k}| = 1$. Pour cela, nous utiliserons l'inclusion $\mathcal{BV}^* \subset \sqrt{-\Delta} BMO$ (qui résulte par dualité de ce que $\nabla f \in \mathcal{H}^1$ implique $f \in BV$). Ici, nous utilisons la caractérisation que l'on trouve dans le travail de Tataru-Koch sur Navier-Stokes :

$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_k c_{j,k} \psi_{j,k}(x) \in \sqrt{-\Delta} BMO$ si et seulement si $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_k c_{j,k} \psi(2^j x - k) \in BMO$, ce qui revient à la condition de Carleson, à savoir

$$\sum_{Q_{j,k} \subset R} |c_{j,k}|^2 2^{-2j} \leq C_0 |R| \quad (2.3)$$

pour tout cube dyadique R . Mais $|c_{j,k}| = 1$ et, pour chaque niveau j fixé, $\sum_{Q_{j,k} \subset [0,1]^2} 2^{-2j} = 1$. On obtient en sommant sur j une série divergente. On observera que la même démonstration permet de minorer la norme dans G

de $\sum_{j=0}^{N-1} \sum_k c_{j,k} \psi_{j,k}(x)$ par \sqrt{N} .

Le principal message de ce chapitre est que l'on ne peut calculer $\|\cdot\|_*$ en utilisant l'ordre de grandeur des coefficients d'ondelette. Cela reflète le fait que l'espace BV n'est pas caractérisé par des conditions portant sur les modules des coefficients d'ondelette [34]. Cela amènera à comparer, au Chapitre 6, l'espace BV à l'espace $\dot{B}_1^{1,\infty}$ (légèrement plus grand) qui est caractérisé par des conditions simples sur les modules des coefficients d'ondelette.

2.1 Bruit blanc

Dans cette section, nous montrons que le bruit blanc n'appartient pas à l'espace \mathcal{BV}^* . Il en est de même de la version simpliste où les $g_{j,k}(\omega)$ sont remplacés par des tirages de Bernoulli indépendants ± 1 .

Nous commençons par estimer la norme \mathcal{BV}^* de la version localisée du bruit blanc $\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{|k| \leq C_0 2^j} g_{j,k}(\omega) \psi_{j,k}(x) = S_N(x)$. On majore cette norme par la norme dans $\dot{B}_\infty^{-1,1}$, c'est-à-dire par $\sum_{j=0}^{N-1} \sup_{|k| \leq C_0 2^j} |g_{j,k}(\omega)|$. Posons $\sigma_j(\omega) = \sup_{|k| \leq C_0 2^j} |g_{j,k}(\omega)|$. Rappelons un théorème classique sur les tirages i.i.d. $N(0, 1)$,

Théorème 2.1.1 *Soit X_k , $k \in \mathbb{N}$, des variables aléatoires i.i.d. de loi $N(0, 1)$. On pose $Z_n = \max_{1 \leq k \leq n} |X_k|$. Alors $\mathbb{E}(Z_n) \sim \sqrt{2 \ln n}$.*

Appliquons le théorème précédent à $X_k = g_{j,k}$. On a $\mathbb{E}(\sigma_j) \sim C \sqrt{j}$. Or, $\mathbb{E}(\|S_N\|_{\dot{B}_\infty^{-1,1}}) \leq \sum_{j=1}^N \mathbb{E}(\sigma_j)$. Comme $\sum_{j=1}^N \sqrt{j} \sim N\sqrt{N}$, on a

$$\mathbb{E}(\|S_N\|_{\dot{B}_\infty^{-1,1}}) \leq \beta N \sqrt{N}. \quad (2.4)$$

Il importe ici d'avoir une minoration. Nous observons d'abord que $\mathcal{BV}^* \subset \dot{B}_\infty^{-1,\infty}$. Cette inclusion est duale de l'inclusion $\dot{B}_1^{1,1} \subset BV$. L'appartenance d'une série d'ondelettes $f(x) = \sum_j \sum_k c_{j,k} \psi_{j,k}(x)$ à $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$ est triviale car on a, pour deux constantes $C_1 \geq C_2 > 0$,

$$C_1 \sup_{j,k} |c_{j,k}| \leq \|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} \leq C_2 \sup_{j,k} |c_{j,k}|. \quad (2.5)$$

Appliquons ce résultat à S_N . Nous minorons $\mathbb{E}(\|S_N\|_*)$ par $\mathbb{E}(\sup_{\substack{0 \leq j < N \\ |k| \leq C_0 2^j}} |g_{j,k}(\omega)|)$.

Cette espérance est équivalente (théorème 2.1.1) à $\gamma\sqrt{N}$, où $\gamma > 0$ est une constante absolue.

Revenons au bruit blanc. Nous avons

Théorème 2.1.2 *Le bruit blanc n'appartient pas à \mathcal{BV}^* .*

Rappelons, à cet effet, un théorème dû à P.Levy [50] :

Théorème 2.1.3 *Si $X_j(\omega)$, $j \in \mathbb{N}$, sont des variables i.i.d de loi normale $N(0, 1)$, alors on a presque sûrement*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sup_{1 \leq j \leq n} |X_j(\omega)|}{\sqrt{2 \ln n}} = 1. \quad (2.6)$$

Ainsi, dans notre cas, en prenant $X_j = g_{j,k}(\omega)$, on a $\sup_{j,k} |g_{j,k}(\omega)| = +\infty$ presque sûrement. Donc le bruit blanc n'appartient pas à $\dot{B}_\infty^{-1, \infty}$ et a fortiori il n'appartient pas à \mathcal{BV}^* .

Pour conclure cette section, on s'intéresse à la version simpliste du bruit blanc, à savoir $\sum_j \sum_k \omega_{j,k} \psi_{j,k}(x)$ où $\omega_{j,k}$ sont des tirages i.i.d. suivant une loi de Bernoulli. Commençons par la version discrète définie par la suite des variables aléatoires ω_k , $k \in \mathbb{Z}^2$, où les ω_k sont des variables de Bernoulli ± 1 . Alors,

Théorème 2.1.4 *On a, presque sûrement, $(\omega_k) \notin \mathcal{BV}^*(\mathbb{Z}^2)$.*

Pour démontrer ce théorème, on raisonne par dualité. En intégrant contre $0 \leq k_1, k_2 \leq R$ ($R \rightarrow +\infty$), il viendrait

$$\left| \sum_{0 \leq k_1, k_2 \leq R} \omega_{k_1, k_2} \right| \leq C(\omega)R, \quad (2.7)$$

où $C(\omega)$ serait presque sûrement finie. Or cette propriété n'a pas lieu. En effet, on le vérifie en utilisant la loi du logarithme itéré [50]. Elle s'écrit, pour

une suite de variables aléatoires i.i.d, $(X_k)_{k \geq 1}$, de moyenne m et de variance σ^2 ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sigma \sqrt{n} \sqrt{2 \ln \ln n}} = 1 \quad p.s \quad (2.8)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sigma \sqrt{n} \sqrt{2 \ln \ln n}} = -1 \quad p.s \quad (2.9)$$

Il suffit de prendre $X_k = \omega(k_1, k_2)$ où on ordonne les couples (k_1, k_2) en une suite en prenant l'ordre spiralé. Nous concluons avec

Théorème 2.1.5 *La version de Bernoulli du bruit blanc n'appartient pas à \mathcal{BV}^* .*

2.2 Exemple construit sur la base de Haar

On considère la base de Haar en dimension 1 définie par $h_{j,k} = 2^{j/2} h(2^j x - k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ avec $h(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2}[} - \chi_{[\frac{1}{2}, 1[}$.

Posons de même $\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$ avec $\varphi(x) = \chi_{[0,1[}(x)$ et définissons $F_N(x, y) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} c_{j,k} h_{j,k_1}(x) \varphi_{j,k_2}(y)$.

Proposition 2.2.1 *Pour $1 \leq c_{j,k} \leq 2$ on a $\|F_N\|_* \approx N$, alors que $F_N \notin L^2(\mathbb{R}^2)$.*

Il est immédiat de voir qu'il existe $\beta > 0$ telle que $\|F_N\|_* \leq \beta N$. Il suffit d'écrire $h(x) = \frac{d}{dx} \theta(x)$ où $\theta(x) = (\min(x, 1-x))^+$ est à support dans $[0, 1]$. Ce raisonnement ne tiendrait plus si l'on remplaçait la fonction oscillante h par φ . Dans ce cas, il viendrait $F_N \approx 2^N$. La fonction F_N n'appartiendrait plus à G . La présence des oscillations permet de tomber de 2^N à N .

Comme annoncé en introduction, la minoration est délicate. Pour ce faire, nous considérons la fonction $g(x, y) = \chi_{[\frac{1}{3}, 1]}(x) \chi_{[0,1]}(y)$ (qui appartient à BV) et calculons $I = \int F_N(x, y) g(x, y) dx dy$. Il suffit de prouver que I est de l'ordre de grandeur de N pour conclure sur la minoration. Nous avons alors

$$I = \sum_{j=1}^N \sum_{k_1} \sum_{k_2} c_{j,k} \int h_{j,k_1}(x) \chi_{[\frac{1}{3}, 1]}(x) dx \int \varphi_{j,k_2}(y) \chi_{[0,1]}(y) dy$$

Un calcul évident donne $\int_0^1 \varphi_{j,k_2}(y)dy = \begin{cases} 2^{-j/2} & 0 \leq k_2 < 2^j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Remarquons que la valeur de l'intégrale en x est nulle si le point $\frac{1}{3}$ n'est pas à l'intérieur du support de h_{j,k_1} . Or il existe un seul coefficient $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{k_0}{2^j} < \frac{1}{3} < \frac{k_0+1}{2^j}$ et dans ce cas, $h_{j,k_0}(\frac{1}{3}) = (-1)^j$. Alors

$$\int_{\frac{1}{3}}^1 h_{j,k_0}(x)dx = \begin{cases} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{k_0+1}{2^j}} h_{j,k_0}(\frac{1}{3})dx = -\frac{2^{-j/2}}{3} & \text{si } j \text{ est impair.} \\ 2^{j/2} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{k_0+1/2}{2^j}} dx - 2^{j/2} \int_{\frac{k_0+1/2}{2^j}}^{\frac{k_0+1}{2^j}} dx = -\frac{2^{-j/2}}{3} & \text{si } j \text{ est pair.} \end{cases}$$

Ainsi $I = -\sum_{j=1}^N \sum_{k_2=0}^{2^j-1} c_{j,(k_0,k_2)} \frac{2^{-j/2}}{3} 2^{-j/2}$. Finalement $|I| \geq \frac{N}{3}$. Ceci prouve que $\|F_N\|_* \geq \gamma N$ avec $\gamma > 0$ constante et donc $\|F_N\|_* \approx N$.

2.3 Cas d'une base d'ondelettes à support compact

On considère une base d'ondelettes à support compact définie par ψ et φ dont les supports sont dans $[-1, 2]$ et $[0, 3]$ (ondelette de Daubechies à un moment). On considère la fonction $F_N(x, y) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k} 2^j \psi(2^j x) \varphi(2^j y - k)$.

Proposition 2.3.1 *Pour $1 \leq c_{j,k} \leq 2$ on a $\|F_N\|_* \approx N$ alors que $\|F_N\|_2 \approx 2^{N/2}$.*

Pour prouver 2.3.1, on procède de la même manière que dans l'exemple fondé sur la base de Haar. La majoration étant triviale, on s'intéresse à la minoration en γN . Pour cela on prend $g(x, y) = \chi_{[0,1]}(x) \chi_{[0,1]}(y)$ et on calcule $I = \int g(x, y) F_N(x, y) dx dy$.

Le calcul de I revient à estimer $A = \int_0^1 \varphi(2^j y - k) dy$. On a

$$A = \begin{cases} 2^{-j} \int_0^3 \varphi(y) dy & 0 \leq k \leq 2^j - 3 \\ 2^{-j} \int_0^2 \varphi(y) dy & k = 2^j - 2 \\ 2^{-j} \int_0^1 \varphi(y) dy & k = 2^j - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $I = \int_0^2 \psi(x) dx \int_0^3 \varphi(y) dy \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{2^j-3} 2^{-j} c_{j,k} + O(1)$. La double somme est équivalente à N . Finalement, il existe $\gamma > 0$ tel que $\|F_N\|_* \geq \gamma N$.

Remarque 2.3.1 *La démonstration précédente reste valable si l'on considère, plus généralement, $F_N(x, y) = \sum_{j=1}^N \sum_{k_1 \leq 0} c_{j,k} 2^j \psi(2^j x - k_1) \varphi(2^j y - k_2)$ avec $1 \leq c_{j,k} \leq 2$.*

2.4 Ondelettes de la classe de Schwartz

Dans cette section, nous reprenons la construction d'une base orthonormée d'ondelettes donnée dans [57]. On considère une fonction $\theta(\xi)$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, paire, avec $0 \leq \theta(\xi) \leq 1$, vérifiant $\theta(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq \frac{2\pi}{3}$, $\theta(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq \frac{4\pi}{3}$ et $\theta^2(\xi) + \theta^2(2\pi - \xi) = 1$ si $0 \leq \xi \leq 2\pi$. On considère alors les fonctions φ et ψ définies par $\hat{\varphi}(\xi) = \theta(\xi)$ et $\hat{\psi}(\xi) = (\hat{\varphi}(\xi/2)^2 - \hat{\varphi}(\xi)^2)^{1/2} e^{-i\xi/2}$. Il vient alors

$$\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \psi(x_1 - k_1) = \cos(2\pi x_1). \quad (2.10)$$

$$\sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} \varphi(x_2 - k_2) = 1. \quad (2.11)$$

On s'intéresse à la fonction $f_N(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^N \sum_k 2^j \psi(2^j x_1 - k_1) \varphi(2^j x_2 - k_2)$, où $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$. Il vient $f_N = \sum_{j=1}^N 2^j \cos(2^j 2\pi x_1)$.

Proposition 2.4.1 $\|f_N\|_* \approx N$

Pour démontrer ce résultat, on utilise le lemme suivant :

Lemme 2.4.1 *En dimension 1, on a l'équivalence :*

$$f \in G \iff \exists A \in L^\infty / f = \frac{d}{dx} A \text{ et } \|f\|_* = \|A\|_\infty$$

La preuve du lemme est laissée au lecteur. De même,

Lemme 2.4.2 *Si $f(x_1, x_2) = g(x_1)$ (f ne dépend que de x_1), alors $\|f\|_{G(\mathbb{R}^2)} = \|g\|_{G(\mathbb{R})}$.*

En effet, on écrit $g(x_1) = \frac{d}{dx_1} h(x_1)$ avec $h(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} g(t) dt$. Et donc $\|f\|_{G(\mathbb{R}^2)} \leq \|h\|_\infty$. Il suffit d'optimiser en x_0 pour conclure que $\|f\|_{G(\mathbb{R}^2)} \leq \|g\|_{G(\mathbb{R})}$.

En sens inverse, c'est moins évident. On écrit $f = \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2$ où $\|g\|_\infty = \|f\|_*$. Alors on forme $\frac{1}{T} \int_0^T f(x_1, x_2 + t) dt = f_T(x_1, x_2) = g(x_1)$. Mais

$$f_T(x_1, x_2) = \partial_1 \left[\frac{1}{T} \int_0^T g_1(x_1, x_2 + t) dt \right] + \frac{1}{T} [g_2(x_1, x_2 + T) - g_2(x_1, x_2)]. \quad (2.12)$$

On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 2.4.3 *Si $g_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, il existe une suite T_j , croissante, de limite $+\infty$, telle que $\frac{1}{T_j} \int_0^{T_j} g_1(x_1, x_2 + t) dt$ tende vers $\nu(x_1) \in L^\infty(\mathbb{R})$ au sens de la topologie $\sigma(L^\infty(\mathbb{R}^2), L^1(\mathbb{R}^2))$. De plus, $\|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|g_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$.*

En effet, la suite $\frac{1}{T} \int_0^T g_1(x_1, x_2 + t) dt$ est bornée par $\|g_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$. On utilise alors la compacité faible* de la boule unité de $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ pour extraire une suite T_j croissante vers $+\infty$ et tel qu'il existe une fonction $\nu \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\frac{1}{T_j} \int_0^{T_j} g_1(x_1, x_2 + t) dt$ tend vers $\nu(x_1, x_2)$ pour la topologie faible*. Il est évident de prouver que ν ne dépend pas de x_2 et $\|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|g_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$.

Revenons à la preuve du lemme 2.4.2. On a $f_{T_j}(x_1, x_2) = g(x_1)$. En passant à la limite, on a $g(x_1) = \frac{d}{dx} \nu(x_1)$. Donc, $\|g\|_{G(\mathbb{R})} \leq \|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|g_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \|f\|_{G(\mathbb{R}^2)}$. La preuve est complète.

Revenons à la preuve de la proposition 2.4.1. On applique le lemme 2.4.2 à la fonction f_N . Il faut alors estimer $\left\| \sum_{j=1}^N \sin(2\pi 2^j x_1) \right\|_\infty$. Clairement, cette norme est majorée par N . Il reste à la minorer. Il suffit de calculer l'expression pour le point particulier $x_1 = \frac{2\pi}{7}$. La particularité de ce point est que $2^3 x_1 \equiv x_1 \pmod{2\pi}$. On obtient un cycle! On vérifie sans peine que $\sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) + \sin(\frac{8\pi}{7}) \neq 0$. La norme L^∞ est alors de l'ordre de grandeur de N .

2.5 Généralisation

On suppose $\epsilon \leq \frac{\pi}{5}$. On désigne par $\theta(\xi) = \theta_\epsilon(\xi)$ une fonction paire de la variable réelle x , appartenant à $C_0^\infty(\mathbb{R})$, nulle sauf si $\pi - \epsilon \leq |\xi| \leq 2\pi + 2\epsilon$, égale à 1 sur $[\pi + \epsilon, 2\pi - 2\epsilon]$ et vérifiant les conditions usuelles conduisant à une base orthogonale d'ondelettes : $\theta^2(\xi) + \theta^2(2\xi) = 1$ si $|\xi - \pi| \leq \epsilon$ et $\theta^2(\pi + t) + \theta^2(\pi - t) = 1$ si $|t| \leq \epsilon$. On pourra supposer $0 \leq \theta(\xi) \leq 1$.

On définit alors ψ par $\hat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2}\theta(\xi)$ et l'on sait que $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. On note $\tilde{\psi}$ la dérivée de ψ . On désigne par φ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vérifiant $\int \varphi(x)dx = 1$.

On cherche à prouver le résultat suivant :

posons

$$f_N(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^N \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_{j,k} 2^j \psi(2^j x_1 - k_1) \varphi(2^j x_2 - k_2). \quad (2.13)$$

Alors

Conjecture :

$$1 \leq c_{j,k} \leq 2 \implies \|f_N\|_* \approx N. \quad (2.14)$$

Nous ne savons démontrer qu'une version faible de cette conjecture, à savoir

Proposition 2.5.1 *Supposons que la suite des coefficients $(c_{j,k})$ est telle que $c_{j,k} = 0$ pour $k_1 \equiv 1, 2 \pmod{4}$ et $1 \leq c_{j,k} \leq 2$ sinon. Posons*

$$f_N(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^N \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_{j,k} 2^j \tilde{\psi}(2^j x_1 - k_1) \varphi(2^j x_2 - k_2) \quad (2.15)$$

Alors $\|f_N\|_* \approx N$.

Nous nous imposons donc deux restrictions, d'une part sur les coefficients $c_{j,k}$, d'autre part, on remplace ψ par sa dérivée $\tilde{\psi}$.

Pour prouver ce résultat, nous nous ramenons en dimension 1 en intégrant par rapport à la deuxième variable y . Appliquons le lemme 2.4.3 à la fonction

f_N . On fait l'hypothèse que φ est à support compact inclus dans $[0, C]$, $c_{j,k} = 0$ si $k = 1, 2 [4]$ et $1 \leq c_{j,k} \leq 2$ sinon. On calcule la moyenne en la deuxième variable sur $[0, T]$. Il vient après de simples calculs,

$$\frac{1}{T} \int_0^T f_N(x_1, t) dt = \frac{1}{T} \sum_{k_1} \sum_{k_2=0}^{[T]-C} c_{j,k} + O\left(\frac{1}{T}\right). \quad (2.16)$$

Posons $A_T = \sum_{k_2=0}^{[T]-C} c_{j,k}$. Alors A_T est bornée pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, $k_1 \in \mathbb{Z}$. On y extrait, par le procédé de Cantor, une sous-suite convergente de sorte que $A_{T_l} \rightarrow d_{j,k_1}$ pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, $k_1 \in \mathbb{Z}$. Il est facile de vérifier que $1 \leq d_{j,k_1} \leq 2$ pour $k_1 = 0, 3 [4]$ et $d_{j,k_1} = 0$ pour $k_1 = 1, 2 [4]$. Posons alors

$$g(x_1) = \sum_{j=1}^N \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} 2^j \tilde{\psi}(2^j x_1 - k). \quad (2.17)$$

Par application du lemme 2.4.3, il vient

$$\frac{1}{T_l} \int_0^{T_l} f_N(x_1, t) dt \rightarrow g(x_1) \quad (2.18)$$

au sens des distributions et $\|g\|_* \leq \|f_N\|_*$. Or

$$\|g\|_* = \left\| \sum_{j=1}^N \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi(2^j x_1 - k) \right\|_{\infty}. \quad (2.19)$$

Remarque 2.5.1 *On obtient le même résultat si l'on suppose $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Posons $f(x) = \sum_{j=1}^N \sum_k d_{j,k} \psi(2^j x - k)$, $x \in \mathbb{R}$. Estimons $\|f\|_{\infty}$. L'estimation repose sur trois idées importantes :

1) Les produits de Riesz [77].

On suppose $n_1 \geq 1$ et $n_{j+1} \geq 2n_j$, $j \geq 1$, $n_j \in \mathbb{N}$. On fixe $r \in [-1, 1]$ et l'on forme

$$d\mu(x) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + r \cos(2\pi n_j x)). \quad (2.20)$$

Alors $d\mu$ est une mesure de probabilité sur $[0, 1]$ et l'on a

$$d\mu(x) = 1 + r \sum_{j=1}^{\infty} \cos(2\pi n_j x) P_{j-1}(x) \quad (2.21)$$

où $P_0(x) = 1$ et $P_j(x) = (1 + r \cos(2\pi n_1 x)) \dots (1 + r \cos(2\pi n_j x))$.

La localisation fréquentielle de $d\mu(x)$ en découle. La transformée de Fourier de $d\mu$ est portée par une réunion de “galaxies” $[n_j - (n_1 + \dots + n_{j-1}), n_j + (n_1 + \dots + n_{j-1})]$ assez éloignées les unes des autres si, comme nous allons le supposer, $n_j = \frac{3}{4}2^{4j}$, $j \geq 1$.

2) La périodisation.

On part de $f(x) = \sum_{j=1}^N \sum_k d_{j,k} \psi(2^j x - k)$ et l'on forme $f_m(x) = \frac{1}{m}[f(x) + f(x-1) + \dots + f(x-m+1)]$. Il vient

$$f_m(x) = \sum_{j=1}^N \sum_k \left(\frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} d_{j,k-2^j l} \right) \psi(2^j x - k). \quad (2.22)$$

Pour tout j et tout k , on peut extraire une sous-suite m_n , $n \geq 1$, telle que $\frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} d_{j,k-2^j l} \rightarrow b_{j,k}$. En utilisant le procédé diagonal de Cantor, on fabrique une suite m_n convenant à tous les j et k . Alors $f_{m_n}(x) \rightarrow F(x)$ uniformément sur tout compact et $\|F\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$, où $F(x) = \sum_{j=1}^N \sum_k b_{j,k} \psi(2^j x - k)$.

Notons $F_j(x) = \sum_k b_{j,k} \psi(2^j x - k)$. Il est clair qu'on a, pour $j > 1$, $b_{j,k} \geq 1$ dès que $k = 0, 3[4]$ et $b_{j,k} = 0$ sinon. Pour $j = 1$, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $b_{1,k} \geq \frac{1}{2}$. De plus $b_{j,k+2^j} = b_{j,k}$ pour tout $j \geq 1$. On a alors $F(x+1) = F(x)$ et $F(x)$ s'écrit comme $F(x) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} \bar{\psi}_{j,k}$ où $\bar{\psi}_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi(2^j x - k - 2^j l)$ est 1-périodique.

3) Les résonances.

On pose $n_j = \frac{3}{4}16^j$, $j \geq 1$. Ce choix implique que pour $0 < \xi < \frac{\pi}{5}$, la “galaxie” $\Gamma_j = 2\pi\{n_j + \epsilon_1 n_{j-1} + \dots + \epsilon_{j-1} n_1; \epsilon_q = 0, 1, -1\}$ est incluse dans $[(\pi + \epsilon)16^j, (2\pi - 2\epsilon)16^j]$. On calcule alors $I = \int_0^1 F(x) d\mu(x)$. On a $\int_0^1 F(x) dx = 0$

et il vient $I = r \sum_{j=1}^{\infty} I_j$ où $I_j = \int_0^1 F(x) \cos(2\pi n_j x) P_{j-1}(x) dx$. Nous montrerons que pour $j > \frac{N}{4}$, $I_j = 0$.

On a par ailleurs, $F(x) = \sum_{j=1}^N F_j(x)$. Maintenant, on observe que les intervalles $[(\pi + \epsilon)2^j, (2\pi - 2\epsilon)2^j]$ sont deux à deux disjoints. Sur chacun de ces intervalles, $\hat{\psi}(2^{-j'}\xi)$, $j' \neq j$, sont nulles. Ceci entraîne que $I_j = \int_0^1 F_{4j}(x) \cos(2\pi n_j x) P_{j-1}(x) dx$ et $4j \leq N$.

Il reste à calculer I_j .

On revient à $F_{4j}(x) = \sum_{k=0}^{2^{4j}-1} b_{4j,k} \bar{\psi}_{4j,k}(x)$. Calculons d'abord

$$I_{j,k} = \int_0^1 \bar{\psi}_{4j,k}(x) \cos(2\pi n_j x) P_{j-1}(x) dx.$$

On part du calcul élémentaire suivant

$$\int_0^1 e^{-2i\pi n x} \bar{\psi}_{j,k}(x) dx = \int_0^1 e^{-2i\pi n x} \psi(2^j x - k) dx = 2^{-j} e^{-2i\pi n k 2^{-j}} \hat{\psi}(2\pi n 2^{-j}).$$

Si maintenant $n \in \Gamma_j$, il en résulte que

$$\int_0^1 e^{-2i\pi n x} \bar{\psi}_{j,k}(x) dx = 2^{-4j} e^{-2i\pi n(k + \frac{1}{2})2^{-4j}},$$

et, en combinant ces intégrales grâce à

$$\cos(2\pi n_j x) P_{j-1}(x) = \sum_{n \in \Gamma_j} c_j(n) e^{2i\pi n x},$$

il vient

$$I_{j,k} = \cos(2\pi n_j(k + \frac{1}{2})2^{-4j}) P_{j-1}((k + \frac{1}{2})2^{-4j}) 2^{-4j}.$$

Mais $n_j = \frac{3}{4}2^{4j}$ et donc

$$I_{j,k} = \cos(\frac{3\pi}{2}(k + \frac{1}{2})) P_{j-1}((k + \frac{1}{2})2^{-4j}) 2^{-4j}.$$

Maintenant, comme on ne considère que $k = 0, 3[4]$, on a $\cos(\frac{3\pi}{2}(k + \frac{1}{2})) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Les $I_{j,k}$ sont tous négatifs; il en est de même de I_j . Il vient

$$|I_j| = \sum_{k=0,3[4]}^{2^{4j}-1} b_{4j,k} |I_{j,k}| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=0,3[4]}^{2^{4j}-1} P_{j-1}((k + \frac{1}{2})2^{-4j}) 2^{-4j}.$$

Pour conclure, on vérifie que la somme de droite est égale à $\frac{1}{2}$. Finalement $\left| \sum_{j=1}^N I_j \right| \geq \frac{\sqrt{2}}{16} N$ et $|I| \geq r \frac{\sqrt{2}}{16} N$. Or $|I| \leq \|F\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Donc $\|f\|_\infty \geq r \frac{\sqrt{2}}{16} N$, ce qui conclut la preuve.

Remarque 2.5.2 *Si l'on supposait que $\int \psi(x) dx \neq 0$, la conjecture 2.14 serait vraie : $\|f_N\|_* \approx N$. Pour le voir, on reprend le même raisonnement mais au lieu d'utiliser les produits de Riesz pour estimer la norme L^∞ , on calcule la valeur moyenne sur $[0, T]$ pour T tendant vers l'infini.*

Le but de ce chapitre a été de prouver, si besoin était, que le calcul de la norme dans l'espace $G = \mathcal{BV}^*(\mathbb{R}^2)$ n'est pas facile. Dans bien des cas, ce calcul dépasse notre compétence.

Chapitre 3

Quelques propriétés mathématiques de l'algorithme d'Osher-Rudin-Fatemi

Le but de ce chapitre est de répondre à la question fondamentale suivante : le modèle d'Osher-Rudin-Fatemi (ORF) est-il cohérent avec la décomposition d'une image en une somme $u + v$ ou $u + v + w$ où u représente les objets contenus dans l'image, v la texture et w le bruit ?

Pour répondre à cette question, nous calculons la décomposition ORF d'une image synthétique construite comme une somme $u+v$ entre un terme $u \in BV$ et une fonction très oscillante v . Nous vérifions qu'effectivement, dans le cas asymptotique (v très oscillante), l'algorithme fournit $\hat{u} + \hat{v}$ lorsqu'il est appliqué à $u + v$ (\hat{u} étant le résultat de l'algorithme appliqué à u seul). C'est à la fois une bonne et une mauvaise nouvelle. En effet, on s'attendrait à retrouver la décomposition de départ (c'est-à-dire $u + v$). Mais nous savons par ailleurs que, même si u est une fonction indicatrice d'un ouvert borné régulier, l'algorithme, appliqué à u seul, ne redonne pas u [58].

3.1 Présentation

L'algorithme d'Osher-Rudin-Fatemi (ORF) consiste à décomposer une image, modélisée par une fonction de deux variables à valeurs réelles à énergie finie, $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, en une somme $u + v$ où la fonction u représente un sketch de l'image, modélisée par l'espace des fonctions à variation bornée, $BV(\mathbb{R}^2)$, et la fonction v représente les textures et le bruit. Les fonctions u et v sont à valeurs réelles. Cet algorithme s'écrit sous la forme d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle J_λ : étant donnée une image f , nous cherchons $u_0 \in BV$, minimisant

$$J_\lambda(u) = \|u\|_{BV} + \lambda \|f - u\|_2^2. \quad (3.1)$$

Le rôle du paramètre de réglage $\lambda > 0$ est de décider à partir de quelle taille les objets sont vus comme des textures. Dans [58], Y. Meyer montre l'existence et l'unicité de la solution u_0 . La fonction $f - u_0$ correspond à la partie texturée de l'image f ; on la note v_0 . On dit alors que le couple (u_0, v_0) est la solution du problème ORF, ou que u_0 est la solution du problème ORF. Enonçons la caractérisation de la solution (u_0, v_0) :

Théorème 3.1.1 (Y. Meyer) *Soient $f \in L^2$ et $(u_0, v_0) \in BV \times L^2$. Si $\|f\|_* \leq \frac{1}{2\lambda}$ alors l'image est regardée comme une texture et l'on a donc $u_0 = 0$.*

Il y a équivalence entre

a) $\|f\|_* > \frac{1}{2\lambda}$ et (u_0, v_0) solution du problème ORF

b) $f = u_0 + v_0$, $\|v_0\|_* = \frac{1}{2\lambda}$ et $\int u_0 v_0 dx = \|u_0\|_{BV} \|v_0\|_* > 0$.

Une première application de ce théorème est donnée par Yves Meyer [58] pour calculer la décomposition d'une fonction indicatrice de disque :

Proposition 3.1.1 *Soit $f = \chi_D$, où D est un disque de rayon R , et $f = u_0 + v_0$ la décomposition optimale au problème ORF. La norme de f dans l'espace G est $\frac{R}{2}$ et*

- si $\lambda > \frac{1}{R}$, $u_0 = (1 - \frac{1}{R})\chi_D$ et $v_0 = \frac{1}{R}\chi_D$.
- si $\lambda \leq \frac{1}{R}$, alors $u_0 = 0$ et $v_0 = f$.

La caractérisation donnée par le théorème 3.1.1 nous amène à introduire la notion de couple optimal :

Définition 3.1.1 (couple optimal) *Un couple $(u, v) \in BV \times L^2$ est dit optimal s'il vérifie*

$$\int uv = \|u\|_{BV} \|v\|_* . \quad (3.2)$$

Dans [29], Antonin Chambolle donne une autre caractérisation de la solution optimale v , ainsi qu'une méthode algorithmique pour résoudre le problème ORF. Pour cela, il introduit l'ensemble $K = \{v \in L^2(\mathbb{R}^2) / \|v\|_* \leq \frac{1}{2\lambda}\}$. Cet ensemble est convexe et fermé dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Il vient alors

Théorème 3.1.2 *Caractérisation par projection [29]*

La fonction $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$ est la solution minimisant l'énergie $J_\lambda(f - v)$ si et seulement si

$$v = P_K(f), \quad (3.3)$$

où P_K est la projection orthogonale sur K (l'espace de Hilbert de référence est ici $L^2(\mathbb{R}^2)$).

Nous reviendrons sur ce résultat dans la section 4.1. Pour la commodité du lecteur, voici la preuve du théorème 3.1.1.

Soit (u, v) la solution de ORF. Alors pour toute fonction $h \in BV$, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, on a $J(u) \leq J(u + \varepsilon h)$. Donc

$$\|u\|_{BV} + \lambda \|v\|_2^2 \leq \|u\|_{BV} + |\varepsilon| \|h\|_{BV} + \lambda(\|v\|_2^2 + \varepsilon^2 \|h\|_2^2 - 2\varepsilon \int v h dx).$$

Après simplification et en faisant tendre ε vers 0 à droite et à gauche, on a, pour tout $h \in BV$:

$$\left| \int v h dx \right| \leq (2\lambda)^{-1} \|h\|_{BV} . \quad (3.4)$$

Donc

$$\|v\|_* \leq \frac{1}{2\lambda} . \quad (3.5)$$

Reprenons le calcul précédent et choisissons $h = u$. Alors $\|u + \varepsilon h\|_{BV} = (1 + \varepsilon) \|u\|_{BV}$. Ceci implique

$$\int uvdx = (2\lambda)^{-1} \|u\|_{BV}. \quad (3.6)$$

Or $\int uvdx \leq \|u\|_{BV} \|v\|_*$ et $\|v\|_* \leq \frac{1}{2\lambda}$.

Supposons, dans un premier temps, $\|f\|_* > \frac{1}{2\lambda}$.

Dans ce cas, u ne peut pas être la fonction nulle car sinon $v = f$, ce qui est contraire à 3.5. Ceci étant, 3.6 et 3.5 impliquent $\|v\|_* = \frac{1}{2\lambda}$.

Réciproquement si $(u, v) \in BV \times L^2$ vérifie 3.6, $\|v\|_* = \frac{1}{2\lambda}$ et u non nulle, alors $\|u + v\|_* > \frac{1}{2\lambda}$. En effet,

$$\|u + v\|_* \|u\|_{BV} \geq \int (u + v)udx = \|u\|_2^2 + \int uvdx$$

donc,

$$\|u + v\|_* \|u\|_{BV} \geq \|u\|_{BV} \|v\|_* + \|u\|_2^2 > \|v\|_* \|u\|_{BV}.$$

Finalement, $\|u + v\|_* > \|v\|_* = \frac{1}{2\lambda}$.

Supposons maintenant $\|f\|_* \leq \frac{1}{2\lambda}$.

Le raisonnement précédent montre que si u est non nulle, alors forcément $\|v\|_* = \frac{1}{2\lambda}$ et, par ce qui précède, $\|f\|_* > \|v\|_*$, ce qui est absurde. Donc $u = 0$ et $v = f$. ■

Définition 3.1.2 *Nous désignons par Φ_λ et $\tilde{\Phi}_\lambda$ les applications qui à une fonction de L^2 associent la solution du problème ORF et la composante texturée respectivement :*

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda : L^2 &\longrightarrow L^2 \\ f &\longrightarrow u \\ \tilde{\Phi}_\lambda : L^2 &\longrightarrow L^2 \\ f &\longrightarrow v \end{aligned}$$

Quand il n'y aura pas de confusion, nous poserons $\Phi = \Phi_\lambda$ et $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_\lambda$. Il est clair que Φ_λ et $\tilde{\Phi}_\lambda$ ne sont pas des applications linéaires. Il est évident que l'image de Φ_λ est incluse dans BV . Cependant, toute fonction de BV n'appartient pas nécessairement à l'image de Φ_λ . Commençons par caractériser l'image de Φ_λ :

Théorème 3.1.3 *Une fonction $u \in BV$ appartient à l'image de Φ_λ , pour tout λ , si et seulement si il existe une fonction non identiquement nulle $v \in L^2$ telle que $\int uv dx = \|u\|_{BV} \|v\|_*$.*

Observons que pour toute fonction $u \in BV$, il existe un élément du dual de BV , noté h tel que $h(u) = \|u\|_{BV}$ et $\|h\|_* = 1$ (où $\|\cdot\|_*$ est la norme duale). Mais h n'est pas une fonction, ni même une distribution tempérée.

Donnons alors un exemple de fonction de BV qui n'est pas dans l'image de Φ . Prenons $u(x) = e^{-|x|^2/2}$ et supposons par l'absurde qu'il existe $v = \operatorname{div} g$, $\|v\|_* = \|g\|_\infty = 1$, telle que $\int u(x)v(x)dx = \|u\|_{BV}$. Alors $\int u(x)v(x)dx = -\int g \cdot \nabla u(x)dx = \int |\nabla u(x)| dx$. On a nécessairement $g(x) = \frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|} = -\frac{x}{|x|}$. Cela entraîne $\operatorname{div} g = -\frac{1}{|x|} \notin L^2$. Donc $u \notin \Phi(L^2)$.

En revanche, une fonction radiale régulière u valant 1 pour $0 \leq r \leq 1$ et 0 pour $r \geq 3$ appartient à l'image de Φ . Nous y reviendrons au chapitre 8.

Nous ne savons pas caractériser l'image de Φ par une propriété qui ne soit pas trivialement équivalente à la définition.

Pour finir cette section, rappelons que $\Phi(f) = 0$ si et seulement si $\|f\|_* \leq (2\lambda)^{-1}$. Étant donné un couple optimal (u, v) avec $v \neq 0$, la démonstration précédente montre que la décomposition de la fonction $u+v$ par l'algorithme ORF de paramètre $\lambda = (2\|v\|_*)^{-1}$ donne $\Phi(u+v) = u$ (cela provenant du fait que $\|u+v\|_* \geq \|v\|_*$).

3.2 Etude de la stabilité

Nous allons établir des résultats de continuité sur les fonctions Φ et $\tilde{\Phi}$. Pour cela, on établit dans un premier lieu, un résultat de stabilité de

l'algorithme d'ORF.

Théorème 3.2.1 (Théorème de stabilité) *Soit $J(u)$ la fonctionnelle d'Osher-Rudin-Fatemi, définie par $\|u\|_{BV} + \lambda \|f - u\|_2^2$ pour $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Notons (u_0, v_0) , la solution du problème ORF associé au paramètre λ vérifiant $\|f\|_* \geq \frac{1}{2\lambda}$. Supposons que $(u, v) \in BV \times L^2$ vérifient :*

$$\begin{cases} f = u + v \\ \|v\|_* = \|v_0\|_* + \beta > 0, \quad \beta \in \mathbb{R} \\ \int u(x)v(x)dx \geq \|u\|_{BV} \|v\|_* - \alpha, \quad \alpha > 0 \end{cases}, \quad (3.7)$$

alors il existe une fonction $\gamma(\alpha, \beta, \lambda, f)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \|u - u_0\|_2 \leq \gamma(\alpha, \beta, \lambda, f) \\ \lim_{(\alpha, \beta) \rightarrow 0} \gamma(\alpha, \beta, \lambda, f) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Nous allons donner deux choix possibles pour γ selon que f est à variation bornée ou simplement dans L^2 . Le second choix (hypothèse plus forte $f \in BV$) sera plus précis que le premier. Donnons une preuve du théorème de stabilité. Ecrivons f sous la forme $f = u_0 + v_0 = u + v$. D'après la caractérisation de la solution du problème ORF, on a $\int u_0 v_0 dx = \|u_0\|_{BV} \|v_0\|_*$. Cette relation reste valable même si $\|f\|_* \leq (2\lambda)^{-1}$, car alors $u_0 = 0$.

On a $u - u_0 = v_0 - v$ et $\|u - u_0\|_2^2 = \int (u - u_0)(v_0 - v) dx$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \|u - u_0\|_2^2 &= \int uv_0 dx + \int u_0 v dx - \int uv dx - \int u_0 v_0 dx \\ &\leq \|u\|_{BV} \|v_0\|_* + \|u_0\|_{BV} \|v\|_* + \alpha - \|u\|_{BV} \|v\|_* - \|u_0\|_{BV} \|v_0\|_* \\ &\leq \alpha + (\|v\|_* - \|v_0\|_*)(\|u_0\|_{BV} - \|u\|_{BV}) \\ &= \alpha + \beta(\|u_0\|_{BV} - \|u\|_{BV}) \end{aligned}$$

Distinguons selon le signe de β .

• $\beta \geq 0$

Nous savons que $J(u_0) \leq J(0)$, donc $\|u_0\|_{BV} \leq \lambda \|f\|_2^2$. Ainsi $\|u - u_0\|_2^2 \leq \alpha + \beta \lambda \|f\|_2^2$.

• $\beta < 0$

On majore simplement $\|u - u_0\|_2^2$ par $\alpha - \beta \|u\|_{BV}$. Tout le problème revient à majorer $\|u\|_{BV}$. Pour cela, on remarque que $4uv = (u + v)^2 - (u - v)^2 \leq$

$(u + v)^2 = f^2$. Donc, en se servant de l'hypothèse et après intégration, on a $4 \|u\|_{BV} \|v\|_* \leq \|f\|_2^2 + 4\alpha$. Ainsi $\|u - u_0\|_2^2 \leq \alpha - \beta \|u\|_{BV}$, c'est-à-dire

$$\|u - u_0\|_2^2 \leq \alpha - \frac{\beta\lambda}{2} \frac{\|f\|_2^2 + 4\alpha}{1 + 2\lambda\beta}. \quad (3.9)$$

• Conclusion : la fonction positive $\gamma(\alpha, \beta, \lambda, f)$, définie par :

$$\gamma^2(\alpha, \beta, \lambda, f) = \begin{cases} \alpha - \frac{\beta\lambda}{2} \frac{\|f\|_2^2 + 4\alpha}{1 + 2\lambda\beta} & \text{si } \beta < 0 \\ \alpha + \beta\lambda \|f\|_2^2 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (3.10)$$

répond à la question.

• Considérons alors le cas où la fonction f est à variation bornée.

a) Dans le cas $\beta \geq 0$, comme $J(u_0) \leq J(f)$, on a

$$\|u - u_0\|_2^2 \leq \alpha + \beta \|u_0\|_{BV} \leq \alpha + \beta \|f\|_{BV}. \quad (3.11)$$

b) Dans le cas $\beta < 0$, on a $\|f\|_{BV} = \|u + v\|_{BV} \geq \|v\|_*^{-1} \int (u + v)v dx$. Donc, en négligeant le terme en $\|v\|_2^2$, il vient $\|f\|_{BV} \geq \|v\|_*^{-1} \int uv dx$. Compte tenu des hypothèses, on a $\|f\|_{BV} \geq \|u\|_{BV} - 2\lambda\alpha(2\lambda\beta + 1)^{-1}$, c'est-à-dire

$$\|u\|_{BV} \leq \|f\|_{BV} + 2\lambda\alpha(2\lambda\beta + 1)^{-1}. \quad (3.12)$$

Ainsi

$$\|u - u_0\|_2^2 \leq \alpha - \beta \|u\|_{BV} \leq \alpha - \beta(\|f\|_{BV} + 2\lambda\alpha(2\lambda\beta + 1)^{-1}). \quad (3.13)$$

Finalement, la fonction positive γ , définie par

$$\gamma^2(\alpha, \beta, \lambda, f) = \begin{cases} \alpha - \beta(\|f\|_{BV} + 2\lambda\alpha(2\lambda\beta + 1)^{-1}) & \text{si } \beta < 0 \\ \alpha + \beta\lambda \|f\|_{BV} & \text{sinon} \end{cases}, \quad (3.14)$$

répond à la question. ■

Remarquons que l'expression 3.14 est stable lorsque λ tend vers $+\infty$ alors que l'expression 3.10 explose. Cette amélioration, dans le cas où $f \in BV$,

nous servira à l'étude asymptotique de l'algorithme ainsi qu'à la comparaison de l'algorithme avec le wavelet shrinkage.

Le cas particulier $\beta = 0$ implique le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.1 *Soit $f = u_0 + v_0$, la décomposition d'Osher-Rudin-Fatemi de la fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ associée au paramètre λ et $f = u + v$, $u \in BV(\mathbb{R}^2)$, une autre décomposition vérifiant :*

$$\begin{cases} \|v\|_* = \frac{1}{2\lambda} \\ \int uv dx \geq \|u\|_{BV} \|v\|_* - \alpha, \quad \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Alors

$$\|u - u_0\|_2 \leq \sqrt{\alpha}.$$

Remarque 3.2.1 *Si α et β sont de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{N}$ alors γ est, dans les deux choix, de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\sqrt{N}}$.*

Le théorème de stabilité nous permet de prouver que la fonction Φ définie sur $(L^2, \|\cdot\|_*)$ dans $(L^2, \|\cdot\|_2)$ est, en un certain sens, lipschitzienne d'exposant de Hölder 1/2.

Corollaire 3.2.2 *Soit $f_0, f_1 \in L^2$. Supposons que $f_0 = u_0 + v_0$ et $f_1 = u_1 + v_1$ sont les décompositions de ORF. Alors, en posant $\varepsilon = \|f_1 - f_0\|_*$, on a*

$$\|\Phi(f_1) - \Phi(f_0)\|_2 \leq C(\lambda) \|f_1 - f_0\|_*^{1/2} (\|f_0\|_2 + \|f_1\|_2). \quad (3.15)$$

La constante $C(\lambda)$ sera explicitée. Ce corollaire découle de l'estimation suivante :

$$\|u_1 - u_0\|_2 \leq 2\sqrt{\frac{\lambda\varepsilon}{1-4\lambda\varepsilon}} (\|f_0\|_2 + \|f_1\|_2), \quad (3.16)$$

pour $\varepsilon < \frac{1}{4\lambda}$ et $\|f_1\|_* \geq \frac{1}{2\lambda}$ ou $\|f_0\|_* \geq \frac{1}{2\lambda}$. En effet, si $\|f_0\|_* < \frac{1}{2\lambda}$ et $\|f_1\|_* < \frac{1}{2\lambda}$, alors $u_1 = u_0 = 0$. Supposons maintenant 3.16 et montrons 3.15.

On distingue deux cas. Pour $\varepsilon \leq \frac{1}{8\lambda}$ (auquel cas on minore le dénominateur de 3.16 par 1/2), on prend $C(\lambda) = 4\sqrt{\lambda}$. Pour $\varepsilon > \frac{1}{8\lambda}$ (on majore $\|u_1 - u_0\|_2$ par $2(\|f_0\|_2 + \|f_1\|_2)$), on prend $C(\lambda) = 4\sqrt{2}\sqrt{\lambda}$.

Notons que l'estimation en $\varepsilon^{1/2}$ est la meilleure possible. Pour s'en convaincre, on considère $f_0 = \chi_D$ et $f_1 = \chi_{D'}$ où D et D' sont deux disques de centres

0 et de rayons respectivement 1 et $1 + \epsilon$. Nous savons alors que, pour $\lambda > 1$, $f_0 = (1 - \frac{1}{\lambda})\chi_D + \frac{1}{\lambda}\chi_D$ et $f_1 = (1 - \frac{1}{\lambda(1+\epsilon)})\chi_{D'} + \frac{1}{\lambda(1+\epsilon)}\chi_{D'}$ représentent les décompositions optimales $f_0 = u_0 + v_0$ et $f_1 = u_1 + v_1$. La fonction $h = f_1 - f_0$ est ici, la fonction indicatrice de la couronne délimitée par les disques D et D' . Pour calculer sa norme dans l'espace G , on passe en coordonnées polaires. Il vient $\|h\|_* = \left\| \frac{1}{r} \int_0^r sh(s)ds \right\|_\infty$ où $h(r) = \chi_{[1,1+\epsilon]}(r)$. Après calcul, on obtient $\|h\|_* \sim \epsilon$ et $\|u_1 - u_0\|_2 \sim \sqrt{\epsilon}$. Les termes de gauche et de droite de l'équation 3.15 sont équivalents.

On ne peut avoir le même résultat sur la partie texturée v . En effet, on aurait $\|v_1 - v_0\|_2 \leq C\sqrt{\epsilon}(\|f_0\|_2 + \|f_1\|_2)$. Ceci, combiné à 3.15, impliquerait $\|f_1 - f_0\|_2 \leq 2C\sqrt{\epsilon}(\|f_0\|_2 + \|f_1\|_2)$. Il suffit de prendre $f_1 = 0$ et de faire tendre ϵ vers 0, pour se convaincre de l'absurdité.

On ne peut avoir la propriété à laquelle on pourrait s'attendre par homogénéité : $\|u_1 - u_0\|_2 \leq C\sqrt{\epsilon}(\|f_0\|_2 + \|f_1\|_2)^{1/2}$. Pour le vérifier, on considère l'ensemble formé de N disques de rayon 1 dont les centres sont alignés et on note f_0 la fonction indicatrice de cet ensemble. Prenons $f_1 = 0$. A l'aide de la proposition 8.3.3, en supposant que les disques sont assez éloignés les uns des autres, on a $\|f_0\|_* = \frac{1}{2}$. On a $\|f_0\|_2^2 = \pi N$ et $\|f_0\|_{BV} = 2\pi N$. La fonction f_0 vérifie $\|f_0\|_2^2 = \|f_0\|_{BV} \|f_0\|_*$. Sa décomposition par l'algorithme ORF est donnée par $f_0 = (1 - \frac{1}{\lambda})f_0 + \frac{1}{\lambda}f_0$ (cette décomposition est un couple optimal dont le terme de texture a une norme duale de $(2\lambda)^{-1}$). Alors $\|u_1 - u_0\|_2 = (1 - \frac{1}{\lambda})2\pi N$, $\epsilon = \|f_1 - f_0\|_* = \frac{1}{2}$. Il suffit de prendre N suffisamment grand pour tomber sur une absurdité.

Ce même contre-exemple montre que les relations suivantes n'ont pas lieu : $\|u_1 - u_0\|_2 \leq C\sqrt{\epsilon} \|f_0\|_2$ et $\|u_1 - u_0\|_{BV} \leq C \|f_1 - f_0\|_2$.

Donnons une preuve du corollaire 3.2.2. On peut supposer, quitte à remplacer f_0 par f_1 , que $\|f_0\|_* \geq \frac{1}{2\lambda}$. On applique le théorème 3.2.1 à la fonction f_0 qui s'écrit de deux manières : d'une part $f_0 = u_0 + v_0$ et d'autre part

$f_0 = u_1 + (v_1 - h)$, où $h = f_1 - f_0$. Posons $u = u_1$ et $v = v_1 - h$. Cherchons à estimer les paramètres β et α . On a

$$|\beta| = |\|v\|_* - \|v_0\|_*| \leq \|h\|_* + |\|v_1\|_* - \|v_0\|_*| \quad (3.17)$$

En distinguant les cas où $\|f_1\|_*$ est supérieur ou inférieur à $(2\lambda)^{-1}$, il est facile de prouver que le dernier membre de droite est majoré par $\|h\|_*$.

Quant à α , on peut dire que :

$$0 \leq \alpha \leq 2 \|u_1\|_{BV} \|h\|_* \leq 2\lambda \|f_1\|_2^2 \|h\|_* . \quad (3.18)$$

D'après le théorème 3.2.1, il vient $\|u_1 - u_0\|_2^2 \leq 2(\alpha + \frac{\varepsilon\lambda}{1-4\lambda\varepsilon}(\|f_0\|_2^2 + 4\alpha))$. Précisons que le facteur 2 de l'expression précédente vient du fait qu'on ne connaît pas le signe de β . Après simplification, on a $\|u_1 - u_0\|_2^2 \leq 2(1 - 4\lambda\varepsilon)^{-1}(\lambda\varepsilon \|f_0\|_2^2 + \alpha)$. On utilise la majoration sur α et on a finalement $\|u_1 - u_0\|_2^2 \leq 4(1 - 4\lambda\varepsilon)^{-1}\lambda\varepsilon(\|f_0\|_2 + \|f_1\|_2)^2$. Ainsi

$$\|u_1 - u_0\|_2 \leq 2\sqrt{\frac{\lambda\varepsilon}{1 - 4\lambda\varepsilon}}(\|f_0\|_2 + \|f_1\|_2). \quad (3.19)$$

■

Le théorème qui suit complète le corollaire 3.2.2. En effet, en utilisant ce corollaire et la domination de la norme $\|\cdot\|_*$ par la norme $\|\cdot\|_2$, on prouve que Φ de $(L^2, \|\cdot\|_2)$ dans lui-même est Hölderienne d'exposant 1/2. Mais on a mieux :

Théorème 3.2.2 *Les applications $\tilde{\Phi}$ et Φ de $(L^2, \|\cdot\|_2)$ dans lui-même sont Hölderienne d'exposant 1.*

La preuve de ce théorème est triviale si on se sert de la caractérisation par projection (théorème 3.1.2) de la solution au problème ORF. Nous donnons ici une preuve différente. Commençons par prouver que $\tilde{\Phi}$ est Hölderienne. Soient $f, h \in L^2$ et posons $J_f(u) = \|u\|_{BV} + \lambda \|v\|_2^2$ pour $f = u + v$. Désignons

par $u_0 = \Phi(f)$, $v_0 = \tilde{\Phi}(f + h)$ et par $u_1 = \Phi(f + h)$, $v_1 = \tilde{\Phi}(f + h)$. Alors $J_f(u_0) \leq J_f(\frac{u_0 + u_1}{2})$ et $J_{f+h}(u_1) \leq J_{f+h}(\frac{u_0 + u_1}{2})$. Nous avons alors

$$\|u_0\|_{BV} + \lambda \|v_0\|_2^2 \leq \left\| \frac{u_0 + u_1}{2} \right\|_{BV} + \lambda \left\| \frac{v_0 + v_1 - h}{2} \right\|_2^2,$$

d'où

$$\|u_0\|_{BV} + \lambda \|v_0\|_2^2 \leq \frac{\|u_0\|_{BV} + \|u_1\|_{BV}}{2} + \frac{\lambda}{4} (\|v_0 + v_1\|_2^2 + \|h\|_2^2 - 2 \int (v_0 + v_1) h dx).$$

Remarquons que $\|v_0 + v_1\|_2^2 = 2(\|v_0\|_2^2 + \|v_1\|_2^2) - \|v_1 - v_0\|_2^2$. En combinant les deux dernières relations et après simplification, on a

$$\frac{\|u_0\|_{BV} + \lambda \|v_0\|_2^2}{2} + \frac{\lambda}{4} \|v_1 - v_0\|_2^2 \leq \frac{\|u_1\|_{BV} + \|v_1\|_2^2}{2} + \frac{\lambda}{4} (\|h\|_2^2 - 2 \int (v_0 + v_1) h dx) \quad (3.20)$$

On fait de même en se servant de $J_{f+h}(u_1) \leq J_{f+h}(\frac{u_0 + u_1}{2})$. Il suffit de remplacer dans 3.20 h par $-h$ et les indices 0 par 1 et vice-versa. Ainsi

$$\frac{\|u_1\|_{BV} + \lambda \|v_1\|_2^2}{2} + \frac{\lambda}{4} \|v_1 - v_0\|_2^2 \leq \frac{\|u_0\|_{BV} + \|v_0\|_2^2}{2} + \frac{\lambda}{4} (\|h\|_2^2 + 2 \int (v_0 + v_1) h dx) \quad (3.21)$$

Il suffit alors de sommer les équations 3.20 et 3.21 pour conclure que $\tilde{\Phi}$ est Hölderienne d'exposant 1 :

$$\|v_1 - v_0\|_2 \leq \|h\|_2 \quad (3.22)$$

Il est alors évident que Φ l'est aussi. ■

Si l'on perturbe $f \in L^2$ par $h \in BV$, on a $\left\| \tilde{\Phi}(f + h) - \tilde{\Phi}(f) \right\|_2 \leq \sqrt{2} \lambda^{-1/2} \|h\|_{BV}^{1/2}$. Pour le voir, on reprend la preuve du théorème 3.2.2 où l'on regarde h comme un objet. Ce résultat ne s'applique pas à la fonction Φ comme on peut le voir en considérant $f = 0$ et $h = \chi_D$, D un disque de rayon suffisamment grand pour que $\|f + h\|_* > (2\lambda)^{-1}$.

Grâce au théorème de continuité 3.2.2, on peut énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.3 *Pour toute fonction f_0 et f_1 appartenant à L^2 on a*

$$\left\| \Phi\left(\frac{f_0 + f_1}{2}\right) - \frac{\Phi(f_0) + \Phi(f_1)}{2} \right\|_2 \leq \|f_1 - f_0\|_2.$$

Ce résultat est évident, il suffit d'appliquer deux fois le théorème 3.2.2 pour f_0 et $\frac{f_0 + f_1}{2}$ et pour f_1 et $\frac{f_0 + f_1}{2}$.

3.3 Exemple d'application

Considérons un domaine Ω du plan \mathbb{R}^2 , représenté par sa fonction caractéristique χ_Ω . On suppose que Ω est un ensemble rectifiable et que sa frontière $\partial\Omega$ est une courbe de Guy David, ou, de façon équivalente, que χ_Ω est un multiplicateur ponctuel de BV . Cette dernière hypothèse sera remise en question. On considère une fonction $p(x)$, 1-périodique en chaque variable de moyenne 1 sur $Q = [0, 1]^2$. On décompose $p(x) = 1 + \mu(x)$ où $\mu \in L^\infty$ vérifie $\int_Q \mu(x) dx = 0$. On définit ensuite, $f_N(x) = p(Nx)\chi_\Omega(x)$. On voudrait avoir une idée de la décomposition d'Osher-Rudin-Fatemi de la fonction f_N , notée $u_N + v_N$.

Typiquement, l'objet représenté par la fonction f_N est une texture (de moyenne égale à 1) délimitée par un domaine Ω . Donc, l'algorithme d'Osher-Rudin-Fatemi devrait retrouver le sketch de l'image, c'est-à-dire séparer le domaine Ω de la partie texturée. Pour le vérifier, on applique le théorème précédent à la fonction f_N qu'on décompose de deux façons différentes.

D'une part, $f_N = u_N + v_N$, c'est-à-dire la décomposition d'Osher-Rudin-Fatemi de la fonction f_N . D'autre part, $f_N = u_0 + v$ où $u_0 + (\chi_\Omega - u_0)$ est la décomposition d'Osher-Rudin-Fatemi de la fonction χ_Ω .

Nous avons $\|f_N\|_2 \leq (1 + \|\mu\|_\infty) \|\chi_\Omega\|_2$. Donc $\|f_N\|_2 + \|\chi_\Omega\|_2$ est borné (par rapport à N). D'après le théorème 1.3.2, on a $\|f_N - \chi_\Omega\|_* = \|\mu(Nx)\chi_\Omega\|_* = O(\frac{1}{N})$. On peut alors appliquer le corollaire 3.2.2, et en déduire que

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses précédentes,*

$$\|u_N - u_0\|_2 = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \quad (3.23)$$

Appliquer l' algorithme d'Osher-Rudin-Fatemi sur f_N revient à l'appliquer sur l'image sans la texture, c'est-à-dire sur χ_Ω .

Remarque 3.3.1 *On a fait l'hypothèse que $\partial\Omega$ est une courbe de Guy David. Ceci implique $\|\mu(Nx)\chi_\Omega\|_* = O(\frac{1}{N})$. Sans cette hypothèse, le corollaire 1.3.1 prouve que α et β tendent vers 0 quand N augmente. Donc, $\|u_N - u_0\|_2$ tend vers 0. On perd uniquement l'estimation de l'ordre de grandeur.*

3.4 Premiers exemples

On se pose le problème de savoir à quelle condition une fonction donnée $g(x_1, x_2)$ peut être la composante u de la décomposition $f = u + v$ dans l'algorithme d'Osher-Rudin-Fatemi. Voici deux résultats. Le premier est positif. Le second est négatif. Dans le Chapitre 8, nous donnerons davantage d'exemples.

Théorème 3.4.1 *Soit Ω , un ouvert borné dont la frontière est une courbe de classe \mathcal{C}^2 . Alors la fonction indicatrice de Ω est la composante u d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, à support compact, dans ORF.*

Remarque 3.4.1 *La même démonstration fournira l'exemple $u = c_1\chi_{\Omega_1} + \dots + c_n\chi_{\Omega_n}$ où Ω_i sont des ouverts emboîtés à frontières \mathcal{C}^2 et où c_1, \dots, c_n sont des constantes. Alors $u(x)$ est une fonction étagée simple.*

La preuve est basée sur la caractérisation $f = u + v$ par $\|v\|_* = \frac{1}{2\lambda}$ et $\int uvdx = \|u\|_{BV} \|v\|_*$. Rappelons que $\|v\|_* = \inf\{\|g\|_\infty / v = \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2\}$. On construit g en partant de la normale unitaire extérieure n en $\Gamma = \partial\Omega$ que l'on prolonge en g (de classe \mathcal{C}^1) de façon à respecter $\|g\|_\infty = 1$. Ensuite on pose $w = \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2$. On a alors $\int_{\mathbb{R}^2} uvdx = \int_\Omega \operatorname{div} gdx = \int_\Gamma n \cdot gds = \mathcal{H}^1(\Gamma) = \|u\|_{BV}$.

Par ailleurs $\|w\|_* \leq \|g\|_\infty = 1$ et donc $\int_{\mathbb{R}^2} uvdx \leq \|u\|_{BV} \|w\|_* \leq \|u\|_{BV}$. Finalement nous avons établi que $\|u\|_{BV} \leq \|u\|_{BV} \|w\|_* \leq \|u\|_{BV}$, ce qui implique $\|w\|_* = 1$ et $\int uvdx = \|u\|_{BV} \|w\|_*$. On forme alors $f = u + \frac{1}{2\lambda}w = \chi_\Omega + \frac{1}{2\lambda}\operatorname{div} g = u + v$. On a, par construction, $\|v\|_* = \frac{1}{2\lambda}$ et $\int uvdx = \|u\|_{BV} \|v\|_*$. Il en résulte que la décomposition de f est optimale, ce qui

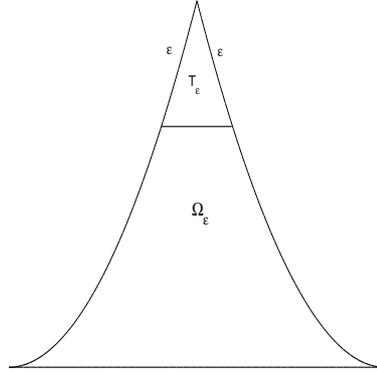


FIG. 3.1 – Un ensemble qui ne peut être solution du problème ORF

démontre le théorème. ■

Théorème 3.4.2 *Si Ω est un ouvert borné dont la frontière est C^1 par morceaux avec des points anguleux, alors $u = \chi_\Omega$ ne peut provenir de ORF.*

Pour le voir, on raisonne par l'absurde. On aurait donc $f = u + v = \chi_\Omega + v$ et $\|u\|_{BV} + \lambda \|v\|_2^2$ est minimale. Nous allons contredire cette minimalité en corrigeant Ω en Ω_ϵ comme indiqué sur la figure 3.1 (on enlève un triangle curviligne de côtés ϵ).

Au niveau de $\|\chi_{\Omega_\epsilon}\|_{BV}$, on gagne au moins $\gamma\epsilon$ ($\gamma > 0$ ne dépend que de l'angle au sommet). Au niveau de $\|v\|_2^2$, on le remplace par $\|v + w_\epsilon\|_2^2$ où w_ϵ est la fonction indicatrice du triangle curviligne notée T_ϵ . On a alors $\|w_\epsilon\|_2^2 \leq C\epsilon^2$ et $|\int v w_\epsilon dx| = |\int_{T_\epsilon} v dx| \leq C(\int_{T_\epsilon} |v|^2 dx)^{1/2} |T_\epsilon|^{1/2} \leq \omega(\epsilon)\epsilon$, où $\omega(\epsilon)$ tend vers 0 avec ϵ . Finalement on a gagné $\gamma\epsilon$ et l'on a perdu au plus $\omega(\epsilon)\epsilon + O(\epsilon^2)$. Le gain l'emporte et l'on a donc intérêt à rogner les coins. Le théorème 3.4.2 est prouvé. ■

3.5 Etude du support de la solution u_0

Nous allons montrer par deux contre-exemples que le support de la solution u_0 du problème d'Osher-Rudin-Fatemi n'est pas forcément inclus dans

le support de f . Mais commençons d'abord par rappeler un résultat établi par Y. Meyer dans [58] :

Théorème 3.5.1 *Si $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ est telle qu'il existe deux constantes m et M vérifiant $m \leq f \leq M$, alors $m \leq u \leq M$ (presque partout).*

Cependant, le support de u n'est pas nécessairement celui de f . Nous allons donner deux contre-exemples. Le premier est l'exemple des bandes sur le disque unité D . On considère la fonction $\psi(x_1, x_2)$ impaire, 1-périodique en x_1 , valant 1 sur $]0, \frac{1}{2}[\times \mathbb{R}$. Puis on pose $h_N(x) = \chi_D(x)h(Nx)$ où $x = (x_1, x_2)$ et $f_N = \frac{\chi_D + h_N}{2} = f_0 + \frac{h_N}{2}$. Notons que le support de f_N représente en superficie la moitié de celle du disque D . Notons u_N et u_0 , les décompositions obtenues en appliquant l'algorithme ORF pour un paramètre $\lambda > 2$ (de sorte que $u_0 \neq 0$). Comme f_0 est une fonction indicatrice d'un disque, $u_0 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda})\chi_D$. D'après le théorème 1.2.3, $\|h_N\|_* = O(\frac{1}{N})$. Le corollaire 3.2.2 appliqué à f_N et f_0 prouve que $\|u_N - u_0\|_2^2 = O(\frac{1}{N})$. Maintenant, si on suppose que le support de u_N est contenu dans celui de f_N , alors $\|u_N - u_0\|_2^2 \geq \int_{D \setminus \text{supp } f_N} u_0^2(x) dx$. Cette dernière quantité est une constante non nulle : le membre de gauche ne peut donc pas tendre vers 0 quand N est grand. Le support de u_N n'est donc pas contenu dans celui de f_N .

Le deuxième exemple est calqué sur le premier. On considère la fonction f_N définie en coordonnées polaires par :

$$f_N(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho \leq \frac{1}{2} \\ 2 & \text{si } \frac{1}{2} < \rho \leq 1 \text{ et } \theta \in [\frac{2k\pi}{N}, \frac{2k\pi}{N} + \frac{\pi}{N}], k \in \{0, \dots, N\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Concrètement, on considère une fonction f_N définie sur le disque de centre 0 et de rayon 1 et qui prend la valeur 1 sur le disque de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$; qui vaut 2 sur les N rayons régulièrement placés qui relient les deux disques

et 0 ailleurs. Notons

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = \chi_{D(0,1)} \\ r_N = \begin{cases} 1 & \text{sur les rayons} \\ -1 & \text{ailleurs} \end{cases} \\ \chi \text{ la fonction indicatrice de la couronne comprise entre les deux disques} \\ f_N = u_N + v_N \text{ la décomposition d'ORF.} \end{array} \right.$$

Alors $f_N = f_0 + \chi r_N$.

Nous allons établir que pour N "assez grand" le support de u_N n'est pas inclus dans le support de f_N .

Lemme 3.5.1 $\|\chi r_N\|_* \leq \frac{C}{N}$

Pour cela, écrivons $\chi r_N = \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{1}{N} g_N(\theta) \chi)$, où $g_N(\theta)$ est 2π -périodique, paire et vérifie $g_N(\theta) = N\theta$ pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{N}]$. Alors $g_N \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\|g_N\|_\infty \leq \pi$, pour $N \in \mathbb{N}$. Pour calculer la norme dans \mathcal{BV}^* , on se sert de la dualité avec l'espace \mathcal{BV} :

$$\|\chi r_N\|_* = \sup_{\substack{h \in \mathcal{BV} \\ \|h\|_{\mathcal{BV}} \leq 1}} \int \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{1}{N} \chi g_N) h(x) dx. \quad (3.24)$$

Or $\frac{\partial}{\partial \theta} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$. Il faut donc calculer

$$\int_{\Omega} y \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{N} \chi g_N) h(x) dx \text{ et } \int_{\Omega} x \frac{\partial}{\partial y} (\frac{1}{N} \chi g_N) h(x) ds,$$

où Ω désigne le support de χ . La formule de Stokes nous dit :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{g} dx = \int_{\partial \Omega} \vec{g} \cdot \vec{n} dx, \quad (3.25)$$

où \vec{n} est le vecteur normal extérieur sur $\partial \Omega$ et $\vec{i} = (1, 0)$. En particulier si $\vec{g} = g \vec{i}$ alors :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} g dx = \int_{\partial \Omega} g \cdot \vec{n} \cdot \vec{i} ds. \quad (3.26)$$

Dans notre situation, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} y \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{N} \chi g_N) h(x) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{N} \chi g_N \frac{\partial}{\partial x} (yh(x)) dx &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (y \frac{1}{N} \chi g_N h(x)) dx \\ &= \int_{\partial \Omega} \frac{1}{N} \chi g_N y h(x) \vec{n} \cdot \vec{i} ds \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{N} g_N \chi \right) h(x) dx \right| &\leq \frac{1}{N} \left(\int_{\Omega} |y g_N| \left| \frac{\partial}{\partial x} (h(x)) \right| dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial\Omega} |y g_N| |h(x)| ds \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

La première intégrale du membre de droite est facilement majorée par $\pi \|h\|_{BV}$.

Pour majorer la seconde intégrale, on se sert du théorème de trace suivant :

Théorème 3.5.2 *Si Ω est un ouvert lipschitzien, $\Gamma = \partial\Omega$, alors la trace sur Γ de $f \in \mathcal{BV}(\Omega)$ a un sens et appartient à $L^1(\Gamma)$.*

On majore alors le deuxième membre de droite de 3.27 par $\pi \int_{\partial\Omega} |h(x)| ds$ qui est encore majorée par $A \|h\|_{BV}$ car $\mathcal{BV}(D)$ s'injecte continûment dans $L^1(\Gamma)$, Γ étant le cercle unité et D le disque associé.

Finalement, on obtient une majoration du membre de gauche en $O(\frac{1}{N})$.

On obtient le même résultat pour $\int_{\Omega} x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{N} g_N \chi \right) h(x) dx$.

Donc $\|r_N \chi\|_* = O(\frac{1}{N})$, ce qui conclut la démonstration. ■

Reprenons alors notre contre-exemple. Nous écrivons f_N de deux façons différentes, d'une part à l'aide de sa décomposition obtenue par l'algorithme d'Osher-Rudin-Fatemi, c'est-à-dire $f_N = u_N + v_N$, et d'autre part sous la forme $f_N = u_0 + v_0 + r_N \chi$, où $f_0 = u_0 + v_0$ est la décomposition d'Osher-Rudin-Fatemi appliquée à la fonction f_0

Nous allons encore une fois appliquer le corollaire 3.2.2 à partir de f_N et f_0 .

Nous avons, $\|f_N - f_0\|_* = \|\chi r_N\|_* \leq \frac{C}{N}$. Nous aboutissons à $\|u_N - u_0\|_2 = O(\frac{1}{\sqrt{N}})$.

Maintenant, supposons que le support de u_N soit inclus dans celui de f_N .

Alors

$$\int_{D(0,1)} (u_0 - u_N)^2 dx \geq \int_{D(0,1) \setminus \text{supp}(f_N)} u_0^2 dx$$

Cependant, $u_0 = (1 - \frac{1}{2\lambda}) \chi_{D(0,1)}$. Donc $\int_{D(0,1) \setminus \text{supp}(f_N)} u_0^2 dx$ est une constante indépendante de N . On ne peut avoir $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|u_N - u_0\|_2 = 0!$ ■

Nous donnerons, en fin de chapitre, d'autres exemples où l'algorithme d'ORF ne conserve pas le support.

3.6 Etude de l'asymptotique $\lambda = \theta N$

Commençons par fixer $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et à faire tendre λ vers $+\infty$. Appelons $f = u_\lambda + v_\lambda$ la décomposition ORF de f .

Lemme 3.6.1 *On a $\|v_\lambda\|_2 \leq \|f\|_2$.*

En effet, la décomposition $f = u_\lambda + v_\lambda$ l'emporte sur la décomposition triviale $f = 0 + f$.

La croissance de $J(\lambda) = \|u_\lambda\|_{BV} + \lambda \|v_\lambda\|_2^2$ quand λ tend vers $+\infty$ donne un renseignement très précis sur la régularité de f . En effet, on a

Théorème 3.6.1 *Si $0 < \gamma < 1$, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

$$(a) J(\lambda) \leq C\lambda^\gamma, \lambda \geq 1$$

(b) *Les coefficients d'ondelette de f réordonnés en une suite décroissante c_n^* vérifient $c_n^* \leq Cn^{-\beta}$, $\beta = (1 + \gamma)^{-1}$.*

Observons que l'on a toujours $J(\lambda) \leq \lambda \|f\|_2^2$, ce qui explique $\gamma < 1$.

Prouvons que (a) implique (b). Par hypothèse $\|u_\lambda\|_{BV} \leq C\lambda^\gamma$ et $\|v_\lambda\|_2 \leq C\lambda^{-(1-\gamma)/2}$. On pose $\lambda = 2^j$ et l'on estime le cardinal de l'ensemble des ondelettes donnant lieu à un coefficient supérieur à $2 \cdot 2^{-j}$. Cela implique soit que le coefficient d'ondelette de u_λ dépasse 2^{-j} , soit que celui de v_λ dépasse 2^{-j} . Dans le premier cas, on utilise le théorème de A. Cohen, W. Dahmen, I. Daubechies, R. DeVore [34], et il vient

$$\text{Card}\{ \text{ondelettes } \psi_m, |\langle u_\lambda, \psi_m \rangle| \geq 2^{-j} \} \leq C' 2^{j(1+\gamma)}. \quad (3.28)$$

Dans le second cas, on utilise l'estimation triviale ($l^2 \subset l^{2,\infty}$) et il vient

$$\text{Card}\{\text{ondelettes } \psi_m, |\langle v_\lambda, \psi_m \rangle| \geq 2^{-j}\} \leq C^2 2^{2j} 2^{-j(1-\gamma)} = C^2 2^{j(1+\gamma)} \quad (3.29)$$

Finalement, on obtient bien $C'' 2^{j(1+\gamma)}$ comme annoncé par (b).

En sens inverse, on développe f en série d'ondelettes écrite dans l'ordre des modules décroissants des coefficients. Il vient $f = \sum_{m \geq 0} c_m \psi_m$ avec $|c_m| \leq \frac{C}{m^{(1+\gamma)-1}}$. On décompose f en $\sum_{m=0}^N c_m \psi_m + \sum_{m>N} c_m \psi_m = u + v$. On a $\|u\|_{BV} \leq C_0 \sum_{m=0}^N |c_m|$ (car $\|\psi_m\|_{BV} = \|\psi\|_{BV}$) et $\sum_{m=0}^N |c_m| \leq C_\gamma N^{\gamma/(\gamma+1)}$.

Par ailleurs $\sum_{m>N} |c_m|^2 \leq C^2 \sum_{m>N} m^{-2(\gamma+1)-1} = C'_\gamma N^{-(1-\gamma)/(1+\gamma)}$. On lie λ à N par $\lambda = N^{(\gamma+1)^{-1}}$ et l'on a ainsi $\|u\|_{BV} \leq C\lambda^\gamma$ et $\lambda \|v\|_2^2 \leq C\lambda^\gamma$.

Que se passe-t-il dans l'asymptotique suivante :

On traite une image texturée

$$f_N(x) = f_0(x) m(Nx)$$

où $m(x) = 1 + \mu(x)$, μ périodique de période 1 en x_1, x_2 et d'intégrale nulle. On suppose que μ est une fonction $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et que f_0 est à la fois à variation bornée et est un multiplicateur ponctuel de BV . Cette dernière hypothèse est vérifiée par exemple si f_0 est la fonction indicatrice d'un domaine Ω dont la frontière est une courbe de Guy David. L'asymptotique étudiée est celle où $\lambda = \theta N$ où $0 < \theta < 1$ est un petit paramètre. Vérifions que l'algorithme d'Osher-Rudin-Fatemi appliquée à la fonction f_N , à θ fixé et N tendant vers l'infini, fournit un sketch u_N proche de f_0 au sens de la norme $\|\cdot\|_2$.

Théorème 3.6.2 *Sous les hypothèses précédentes,*

$$\|u_N - f_0\|_2 = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \quad (3.30)$$

Notons que le corollaire 3.2.2 ne s'applique pas ici pour donner ce résultat. En reprenant les notations de ce corollaire, on voit que la constante $C(\lambda)$

est de l'ordre de $\sqrt{\lambda}$ alors que $\epsilon = O(\frac{1}{N})$. Donc $C(\lambda)\epsilon^{1/2} \sim \theta^{1/2}$.

Pour prouver le théorème 3.6.2, on se sert du théorème de stabilité 3.2.1.

Ecrivons $f_0 = u_0 + v_0$, sa décomposition d'Osher-Rudin-Fatemi pour $\lambda = \theta N$.

Alors f_N peut s'écrire $f_N = u_0 + (v_0 + \mu(Nx)f_0)$.

Comme d'habitude, posons $\beta = \|v_0 + \mu(Nx)f_0\|_* - \|v_0\|_*$. Alors

$$|\beta| \leq \|\mu(Nx)f_0\|_*$$

Calculons

$$\int u_0(v_0 + \mu(Nx)f_0)dx = \|u_0\|_{BV} \|v_0\|_* + \int u_0 f_0 \mu(Nx) dx.$$

Donc

$$\int u_0(v_0 + \mu(Nx)f_0)dx \geq \|u_0\|_{BV} \|v_0 + \mu(Nx)f_0\|_* - 2 \|u_0\|_{BV} \|\mu(Nx)f_0\|_*.$$

Posons alors $\alpha = 2 \|u_0\|_{BV} \|\mu(Nx)f_0\|_*$. Majorons les coefficients α, β .

Comme f_0 est un multiplicateur ponctuel de BV , le théorème 1.3.2 donne l'existence d'un réel A tel que $\|\mu(Nx)f_0\|_* \leq \frac{A}{N}$. Donc $|\beta| \leq \frac{A}{N}$. De l'inégalité $J(u_0) \leq J(f)$, on en déduit $0 \leq \alpha \leq 2 \|f_0\|_{BV} \frac{A}{N}$.

Par application du théorème 3.2.1, dans le cas d'une fonction à variation bornée, nous écrivons

$$\gamma^2(\alpha, \beta, \lambda, f_0) = \begin{cases} \alpha - \beta(\|f_0\|_{BV} + 2\lambda\alpha(2\lambda\beta + 1)^{-1}) & \text{si } \beta < 0 \\ \alpha + \beta \|f_0\|_{BV} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.31)$$

et

$$\|u_N - u_0\|_2 \leq \gamma(\alpha, \beta, \lambda, f_0) \quad (3.32)$$

Étudions alors la fonction γ selon le signe de β .

– Si $\beta \geq 0$, alors par ce qui précède

$$\gamma^2(\alpha, \beta, \lambda, f_0) \leq \frac{3A}{N}. \quad (3.33)$$

– Si $\beta < 0$, alors en supposant $\theta < \frac{1}{2A}$,

$$\gamma^2(\alpha, \beta, \lambda, f_0) \leq \|f_0\|_{BV} \frac{A}{N} \left(3 + \frac{2A}{\frac{1}{2\theta} - A}\right). \quad (3.34)$$

Ainsi dans les deux cas la fonction γ^2 est de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{N}$.

Montrons maintenant que u_0 est proche de f_0 au sens de la norme $\|\cdot\|_2$.

Pour cela, nous savons que $J(u_0) \leq J(f_0)$. Donc $\lambda \|f_0 - u_0\|_2^2 \leq \|f_0\|_{BV}$.

Finalement

$$\|f_0 - u_0\|_2 \leq \frac{\|f_0\|_{BV}^{1/2}}{\sqrt{\theta N}}. \quad (3.35)$$

Donc $\|u_N - f_0\|_2$ est de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\sqrt{N}}$. ■

3.7 Comparaison avec le Wavelet shrinkage

Dans cette section, on se propose de comparer le résultat obtenu à l'aide de la fonctionnelle ORF $\inf \|u\|_{BV} + \lambda \|v\|_2^2$ et le seuillage des coefficients d'ondelette. On se place dans l'asymptotique $\lambda \rightarrow +\infty$ et l'on suppose que $\lambda = \theta N$ où $0 < \theta < 1$ est un "petit" paramètre. On montre que, dans certains cas, le wavelet shrinkage et l'algorithme d'ORF sont équivalents. Pour finir, on donne un exemple de texture que le wavelet shrinkage efface complètement alors que l'algorithme d'ORF conserve essentiellement cette texture.

Le wavelet shrinkage est défini de la façon suivante. On considère une base orthonormée $\psi_{j,k}$, où $\psi \in \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$. Pour une fonction $f \in L^2$, on met à zéro tous les coefficients $\langle f, \psi_{j,k} \rangle = c_{j,k}$ vérifiant $|c_{j,k}| \leq \epsilon$ où $\epsilon > 0$ est un paramètre dépendant du support de ψ . On sait que le couple optimal (u, v) vérifie dans tous les cas $\|v\|_* \leq \frac{1}{2\lambda}$. Cela entraîne $|\langle v, \psi_{j,k} \rangle| \leq \frac{\|\psi\|_{BV}}{2\lambda}$. Un seuil de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\lambda}$ devrait effacer la composante texturée de f . Mais ce seuillage, appliqué à f , modifie aussi la partie "objet" u .

Pour étudier la réciproque, on considère les images texturées de la forme $f_N(x) = f_0(x)m(Nx)$ où $m(x) \in L^\infty$ est 1-périodique en x_1, x_2 , d'intégrale

égale à 1. La fonction f_0 est supposée être à variation bornée. On écrit $m = 1 + \mu$ où μ est de moyenne nulle sur $[0, 1]^2$. Notons $u_N = \Phi(f_N)$, la solution de l'algorithme d'ORF appliqué à f_N . Si l'on suppose que f_0 est un multiplicateur de BV , alors $\|u_N - u_0\|_2 \leq \frac{C}{\sqrt{N}}$. Pour le voir, on applique le corollaire 3.2.2 et la remarque 1.3.1. Dans le cas contraire on peut juste dire que $\|u_N - u_0\|_2$ tend vers 0 quand N augmente. Ici, $u_0 + v_0$ désigne la décomposition optimale d'Osher-Rudin-Fatemi de f_0 . On se place dans l'asymptotique $\lambda = \theta N$ et $N \rightarrow \infty$. Notons \tilde{f}_0, \tilde{f}_N les fonctions obtenues par seuillage des coefficients d'ondelette des fonctions f_0 et f_N au seuil $\epsilon = \frac{1}{\lambda}$. Posons $v = \mu(Nx)f_0$, et $\alpha = \|v\|_*$, de l'ordre de $\frac{1}{N}$. On suppose $\theta \ll 1$ de sorte que $\alpha \ll \epsilon$. Il vient

Proposition 3.7.1 *Sous les hypothèses précédentes, il existe une constante C , telle que*

$$\|\tilde{f}_N - u_0\|_2 \leq C\lambda^{-1/2} \|f_0\|_{BV}^{1/2} \quad (3.36)$$

Ainsi $\|\tilde{f}_N - u_0\|_2$ est de l'ordre de $N^{-1/2}$: en d'autres termes, appliquer le wavelet shrinkage ou l'algorithme d'ORF à f_N revient essentiellement au même, au sens où les fonctions \tilde{f}_N, u_N et u_0 sont proches dans L^2 .

Passons à la preuve de la proposition 3.7.1. Rappelons qu'on a évidemment

$$\|f_0 - u_0\|_2 \leq \lambda^{-1/2} \|f_0\|_{BV}^{1/2}. \quad (3.37)$$

Nous allons montrer que

$$\|\tilde{f}_N - \tilde{f}_0\|_2 \leq C\lambda^{-1/2} \|f_0\|_{BV}^{1/2} \quad \text{et} \quad \|\tilde{f}_0 - f_0\|_2 \leq C\lambda^{-1/2} \|f_0\|_{BV}^{1/2}. \quad (3.38)$$

Pour cela, on se sert encore du théorème établi par A. Cohen, W. Dahmen, I. Daubechies et R. DeVore [34],

Théorème 3.7.1 *Pour toute fonction f de $BV(\mathbb{R}^2)$, la suite des coefficients d'ondelette $c_{j,k}$ appartient à $l^1(\Lambda)$ faible, où Λ est l'ensemble des indices $j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^2$, et $i \in \{1, 2, 3\}$ définissant l'ondelette ψ_1, ψ_2 ou ψ_3 . En particulier, si on ordonne les coefficients $|c_{j,k}|$ par ordre décroissant, la suite réarrangée c_n^* , $n \in \mathbb{N}^*$, vérifie $c_n^* \leq \frac{C \|f\|_{BV}}{n}$.*

On ordonne alors les coefficients d'ondelette de f_0 de telle sorte que la suite des valeurs absolues soit décroissante ; on les note $f_{0,n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. De même, pour le même réarrangement, on note v_n les coefficients d'ondelette de v . Nous avons $|v_n| \leq \rho\alpha$ où $\rho = \|\psi\|_{BV}$ et $|f_{0,n}| \leq \frac{A}{n}$ où $A = C\|f_0\|_{BV}$, C étant une constante indépendante de f_0 et N . Les coefficients d'ondelette de la fonction f_N sont $f_{0,n} + v_n$. Notons c_n ceux de \tilde{f}_N et d_n ceux de \tilde{f}_0 .

Si $|f_{0,n} + v_n| \leq \epsilon$, alors $c_n = d_n = 0$. En particulier si $\frac{A}{n} + \alpha\rho \leq \epsilon$, c'est-à-dire $n \geq \frac{A}{\epsilon - \alpha\rho}$, alors $c_n = d_n = 0$.

De même, si $|f_{0,n}| > \epsilon + \alpha\rho$, alors $c_n = f_{0,n} + v_n$ et $d_n = f_{0,n}$.

Si $\epsilon - \alpha\rho \leq |f_{0,n}| \leq \epsilon$ alors $d_n = 0$ et $c_n \leq 2\epsilon$. On a nécessairement $n \leq \frac{A}{\epsilon - \alpha\rho}$.

Si $\epsilon \leq |f_{0,n}| \leq \epsilon + \alpha\rho$, alors $d_n = f_{0,n}$ et $|c_n| \leq 2\epsilon$. On a nécessairement $n \leq \frac{A}{\epsilon}$.

On veut estimer $\|\tilde{f}_N - \tilde{f}_0\|_2^2 = \sum_{n \geq 1} |c_n - d_n|^2$. Pour $n \geq \frac{A}{\epsilon - \alpha\rho}$, $c_n = d_n = 0$. Quant aux trois autres cas, on remarque que $|d_n - c_n| \leq 4\epsilon$. Ainsi

$$\|\tilde{f}_N - \tilde{f}_0\|_2^2 \leq \frac{C\|f_0\|_{BV}}{\epsilon - \alpha\rho} \epsilon^2. \quad (3.39)$$

On obtient de façon évidente, la même estimation pour \tilde{f}_0 , c'est-à-dire

$$\|\tilde{f}_0 - f_0\|_2^2 \leq C\|f_0\|_{BV} \epsilon. \quad (3.40)$$

Il suffit alors de combiner les équations 3.37, 3.39, 3.40, d'utiliser le fait que $\epsilon = \frac{1}{\lambda}$ et $\alpha \ll \epsilon$, pour achever la preuve. ■

Remarquons que si α est de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\lambda}$ l'estimation 3.39 n'est plus valable. Dans ce cas, on ne peut rien dire.

Pour conclure, nous allons démontrer, comme annoncé, que, dans certains cas, le wavelet shrinkage efface complètement l'image tandis que l'algorithme ORF conserve essentiellement l'image, au sens où $\|f\|_* \sim \|\Phi(f)\|_*$. Pour cela, on reprend le modèle de texture présenté au Chapitre 2. On

considère une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^2)$, $2^j\psi(2^jx - k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^2$, $\psi \in \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ où $\psi \in \mathcal{C}^1$ est à support compact. On considère alors, pour une suite $c_{j,k}$ de réels de valeurs absolues 1, la fonction

$$f_N(x) = \sum_{j=1}^N \sum_k c_{j,k} 2^j \psi(2^j x - k). \quad (3.41)$$

Il est facile de prouver que $\|f_N\|_* \leq \beta N$ (cf. Chapitre 2). Le problème est la minoration. Nous ne savons pas montrer en général que $\|f_N\|_* \geq \gamma N$ où $\gamma > 0$. Nous avons montré, au Chapitre 2, que cette norme est minorée par $\gamma N^{1/2}$.

Cependant f_N n'est pas dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Pour y remédier, on remplace la somme sur k par une somme finie. Posons alors

$$f_N(x) = \sum_{j=1}^N \sum_{|k| < 2^j} c_{j,k} 2^j \psi(2^j x - k) \quad (3.42)$$

On a $\|f_N\|_2 \approx 2^N$. On renormalise alors notre suite de fonctions en posant $F_N = 2^{-N} f_N$. Cette fonction vérifie alors $\|F_N\|_2 \approx 1$, $\|F_N\|_* \geq \gamma 2^{-N} \sqrt{N}$, toujours par l'argument des mesures de Carleson. Si l'on applique à F_N l'algorithme ORF avec le seuil $\lambda = \beta 2^N$ où $\beta > 0$ est une petite constante, alors on obtient $F_N = u_N + v_N$ où $\|v_N\|_* = (2\lambda)^{-1}$. On a, en fait $\|F_N\|_* \geq \gamma N^{1/2} 2^{-N} \gg \beta^{-1} 2^{-N-1} = (2\lambda)^{-1}$. L'algorithme ORF conserve essentiellement l'image alors que le wavelet shrinkage efface complètement l'image : $|c_{j,k}| 2^{-N} < \frac{1}{2\lambda} = \frac{2^{-N-1}}{\beta}$.

3.8 L'algorithme ORF et les fonctions radiales

Le premier exemple connu de résolution de l'algorithme d'ORF est le cas d'une fonction indicatrice d'un disque [58]. V. Caselles, G. Belletini et M. Novaga ([14] [13] [15]) ont résolu, d'une façon différente, le problème d'ORF sur certaines fonctions. Les auteurs exhibent des solutions au problème

$-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|u|} \right) = u$ et montrent le lien avec la résolution du problème d'ORF. Nous y reviendrons en détail à la section 8.3.

Dans cette section, nous donnons quelques exemples de résolution de l'algorithme d'ORF dans le cas où la fonction est radiale. Nous retrouvons ainsi certains résultats de [13][15]. Nous commençons par caractériser les couples optimaux dont les fonctions sont radiales.

L'invariance par rotation des normes utilisées dans la fonctionnelle J conduit au résultat suivant :

Lemme 3.8.1 *Soit $f \in L^2$ une fonction radiale. Alors $u_0 = \Phi(f)$ et $v_0 = \tilde{\Phi}(f)$ sont aussi des fonctions radiales.*

En effet, considérons θ un paramètre angulaire et r_θ la rotation de centre l'origine et d'angle θ . Posons $f_\theta(x) = f(r_\theta(x))$ et de même pour u_θ et v_θ . On a $\|u_\theta\|_{BV} = \|u_0\|_{BV}$ et $\|v_\theta\|_2 = \|v_0\|_2$. De plus $f(r_\theta(x)) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$. Nous avons alors $f = u_0 + v_0 = u_\theta + v_\theta$ et $J(u_0) = J(u_\theta)$. L'unicité de la solution de ORF implique $u_0 = u_\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. Donc u est radiale. Mais $v = f - u$, donc v est radiale. ■

Dans le cas radial, on peut facilement calculer la norme duale :

Théorème 3.8.1 *On considère une fonction radiale de $L^2(\mathbb{R}^2)$ notée encore $f(r) \in L^2(rdr)$. On a alors*

$$\|f\|_* = \left\| \frac{1}{r} \int_0^r s f(s) ds \right\|_\infty. \quad (3.43)$$

Pour prouver ce résultat, posons $h(r) = \frac{1}{r} \int_0^r s f(s) ds$. Il vient par simple calcul, $f(r) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} h(r) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r} h(r) \right)$. Donc $f = \operatorname{div} g$ avec $g = \left(\frac{x}{r} h(r), \frac{y}{r} h(r) \right)$. Il vient $\|f\|_* \leq \|g\|_\infty = \|h\|_\infty$. Il reste à montrer l'inégalité inverse. Pour cela, nous écrivons

$$\|f\|_* \geq \sup_g 2\pi \int_0^{+\infty} f(r) g(r) r dr$$

où $g(r) \in BV$ vérifie $\|g\|_{BV} = 2\pi \int_0^{+\infty} r |g'(r)| dr \leq 1$. Or $\int_0^{+\infty} g(r)rf(r)dr = - \int_0^{+\infty} rg'(r)h(r)dr$. Il vient alors $\|g\|_* \geq \|h\|_\infty$. ■

Considérons alors un couple (u, v) radial et demandons-nous à quelles conditions il est optimal. Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.8.2 *Soit u et v deux fonctions radiales.*

Posons $\lambda(r) = \frac{1}{r} \int_0^r tv(t)dt$ et $M = \|\lambda\|_\infty$ (on a $M = \|v\|_$). Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) (u, v) est un couple optimal
- ii) $\mu = -ru'(r)$ est une mesure de Radon de masse totale finie, portée par l'ensemble fermé défini par $\lambda(r) = \pm M$ avec accord entre le signe de λ et celui de μ

Ce théorème nous aidera à trouver la solution au problème ORF dans des cas particuliers (théorème 3.8.3). La preuve du théorème 3.8.2 est triviale. Il suffit de noter que $\|u\|_{BV} = \int_0^\infty |u'(r)| r dr$ et que $v(r) = \frac{1}{r}(r\lambda)'$. Le couple (u, v) est optimal si et seulement si il vérifie

$$\int_0^\infty u(r)v(r)rdr = \int_0^\infty |u'(r)| r dr \|\lambda\|_\infty. \quad (3.44)$$

Remplaçons v en fonction de λ , il vient

$$\int_0^\infty u(r)(r\lambda)'(r)dr = \int_0^\infty |u'(r)| r dr \|\lambda\|_\infty.$$

D'où

$$- \int_0^\infty u'(r)r\lambda(r)dr = M \int_0^\infty |u'(r)| r dr.$$

Finalement (u, v) est optimal si et seulement si

$$\int_0^\infty (Mr |u'(r)| + \lambda(r)ru'(r))dr = 0. \quad (3.45)$$

Etant donné que la mesure $\lambda(r)ru'(r)$ est dominée par $Mr |u'(r)|$, l'équation 3.45 est équivalente à

$$Mr |u'(r)| + \lambda(r)ru'(r) = 0. \quad (3.46)$$

Cette identité est une égalité entre mesures. La fonction λ est clairement continue; donc l'ensemble défini par $\lambda(r) = \pm M$ est fermé et la mesure $-ru'(r)$ est portée par cet ensemble. ■

Remarque 3.8.1 *Le théorème 3.8.2 est important. Il donne une allure de la solution v au problème étudié. En effet, si $u(r)$ est par exemple dérivable de dérivée strictement positive (respectivement strictement négative) sur un intervalle ouvert non vide alors $\lambda = M$ et $v = \frac{M}{r}$ (resp. $\lambda = -M$ et $v = -\frac{M}{r}$).*

Remarque 3.8.2 *De même si λ n'atteint pas la valeur M sur un intervalle ouvert non vide, nécessairement u est constante.*

L'idée est alors, étant donnée une fonction radiale f , de chercher pour $u = \Phi(f)$ une fonction radiale qui est constante sur certains intervalles et de la forme $f + \frac{\pm M}{r}$ sur d'autres intervalles.

Théorème 3.8.3 *Soit $f = f(r)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$ vérifiant $\int_0^\infty f^2(r)rdr < \infty$. On suppose qu'il existe un réel t_0 positif tel que sur l'intervalle $[0, t_0]$ la fonction $rf(r)$ soit croissante concave puis décroissante sur $[t_0, +\infty[$. Alors la fonction u , solution du problème ORF de paramètre λ vérifiant $\|f\|_* > (2\lambda)^{-1}$, est de la forme suivante :
il existe $\gamma \geq 0$, $a \geq 0$ et $R > a$ tels que*

$u(r) = \gamma$ pour $0 \leq r \leq a$;
sur l'intervalle $[a, R]$ $u(r) = f(r) - \frac{M}{r}$ où $M = (2\lambda)^{-1}$ et u est décroissante ;
 $u(r) = 0$ pour $r \geq R$.

Les paramètres γ , a et R sont solution du système (\mathcal{E}) défini par

$$(\mathcal{E}) \begin{cases} Rf(R) = M \\ \frac{2}{a} \int_0^a tf(t)dt - af(a) = M \\ \gamma = f(a) - \frac{M}{a} \\ a \leq R \end{cases}$$

Pour prouver ce résultat, il suffit de montrer que le système (\mathcal{E}) admet une solution. Remarquons que le fait que la fonction rf est décroissante à l'infini et que $f \in L^2(rdr)$ implique $\lim_{r \rightarrow \infty} rf(r) = 0$. De plus, f est nécessairement positive.

La fonction f vérifie $\|f\|_* > (2\lambda)^{-1}$, donc la solution (u, v) du problème ORF est un couple optimal et $\|v\|_* = (2\lambda)^{-1}$. En posant $\lambda_v(r) = \frac{1}{r} \int_0^r tv(t)dt$, il vient que (u, v) est solution de ORF si et seulement si

$$\|\lambda_v\|_\infty r |u'(r)| + \lambda_v(r)ru'(r) = 0 \quad (3.47)$$

et

$$\|v\|_* = (2\lambda)^{-1} \quad (3.48)$$

Posons $M = (2\lambda)^{-1}$. On sait par ailleurs que $\|v\|_* = \|\lambda_v\|_\infty$. Pour prouver le théorème il suffit alors de vérifier qu'il existe des constantes γ , a et $R > a$ telles que la fonction u ainsi définie vérifie l'équation 3.47 et que $\|\lambda_v\|_\infty = M$.

Il suffit pour cela que les quatre conditions suivantes soient vérifiées :

- 1) u soit continue sur \mathbb{R}^+
- 2) u est dérivable par morceaux et $u'(r) \leq 0$ pour $r \in [a, R]$
- 3) $\|\lambda_v\|_\infty = (2\lambda)^{-1}$
- 4) $\lambda_v(r) = \|\lambda_v\|_\infty$ sur $[a, R]$

La condition (1) est équivalente à

$$\gamma = f(a) - \frac{M}{a} \text{ et } f(R) = \frac{M}{R}. \quad (3.49)$$

La condition (2) est équivalente à

$$-f'(r)r^2 \geq M. \quad (3.50)$$

La condition (3) nous dit que $M = \|\lambda_v\|_\infty$.

Quant à la condition (4), en tenant compte de la condition (3), remarquons que

$$\lambda_v(r) = \frac{a}{r}\lambda_v(a) + \frac{1}{r} \int_a^r tv(t)dt.$$

Or $v(r) = \frac{M}{r}$ sur l'intervalle $[a, R]$, donc

$$\lambda_v(r) = \frac{a}{r}\lambda_v(a) - \frac{a}{r}M + M.$$

Ainsi la condition (3) est équivalente à

$$\lambda_v(a) = M. \quad (3.51)$$

Calculons $\lambda_v(a)$ en fonction de nos inconnues :

$$\lambda_v(a) = \frac{1}{a} \int_0^a t(f(t) - \gamma) dt = \frac{1}{a} \int_0^a t f(t) dt - (f(a) - \frac{M}{a}) \frac{a}{2},$$

car $\gamma = f(a) - \frac{M}{a}$. Ainsi $\lambda_v(a) = M$ est équivalent à

$$\frac{2}{a} \int_0^a t f(t) dt - a f(a) = M \quad (3.52)$$

Posons alors

$$\begin{cases} s_1(r) = r f(r) \\ s_2(r) = -r^2 f'(r) \\ s_3(r) = \frac{2}{r} \int_0^r t f(t) dt - r f(r) \\ \lambda_f(r) = \frac{1}{r} \int_0^r t f(t) dt \end{cases}$$

Pour prouver le théorème, il suffit de montrer que le système suivant a une solution en les inconnues γ , a et R

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \|\lambda_v\|_\infty = (2\lambda)^{-1} \\ \gamma = f(a) - \frac{M}{a} \\ a \leq R \\ s_1(R) = M \\ s_2(r) \geq M, \quad a \leq r \leq R \\ s_3(a) = M \end{cases} \quad (3.53)$$

Il nous faut étudier les positions relatives des 3 fonctions s_1 , s_2 et s_3 . Mais il sera utile d'étudier dans un premier temps la fonction λ_f de la variable $r \geq 0$.

Notons que λ_f est positive. On a $\lambda_f'(r) = \frac{1}{r^2}(r^2 f(r) - \int_0^r t f(t) dt)$. Appelons $v(r)$ le terme entre parenthèses. On a $v'(r) = r s_1'(r)$. Donc v et s_1 ont les mêmes variations. Ainsi d'après les hypothèses, la fonction v est croissante sur $[0, t_0]$ puis décroissante sur $[t_0, \infty[$.

Du coup, la fonction v ne peut s'annuler avant sur $]0, t_0]$.

En effet les propriétés $v(0) = 0$ et v croissante impliqueraient que $v = 0$

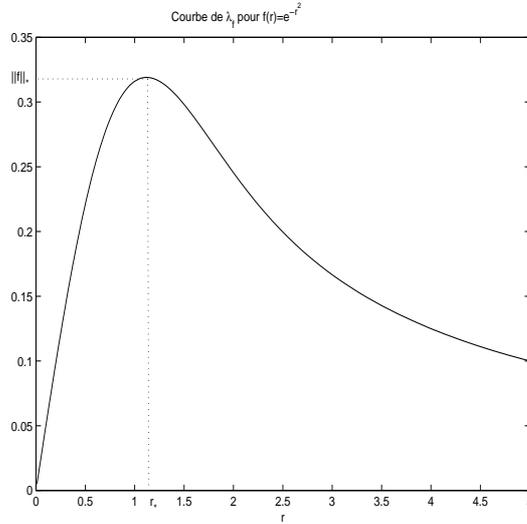


FIG. 3.2 – Fonction λ_f pour $f = e^{-r^2}$.

sur un intervalle $[0, x_0]$; donc f serait de la forme $\frac{\alpha}{r}$ au voisinage de 0, contredisant le fait que $f \in L^2(rdr)$ ou $f \neq 0$.

De plus, $\|\lambda_f\|_\infty < \infty$ car $\|f\|_* < \infty$ et les hypothèses impliquent de façon claire que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \lambda_f(r) = 0$. Donc λ_f atteint sa borne supérieure, qui n'est autre que $\|f\|_*$, en une valeur r_* , supposée être la plus petite possible. Donc $\lambda'_f(r_*) = 0$, c'est-à-dire $v(r_*) = 0$. Ceci implique $\lambda_f(r_*) = s_1(r_*)$.

Donc v est strictement positif sur $]0, r_*[$, puis négatif sur $[r_*, \infty[$. Donc, λ_f est strictement croissante sur $[0, r_*]$ puis décroissante.

Nous pouvons passer à l'étude des fonctions s_i , $i = 1, 2, 3$. Il est facile de vérifier que

$$\begin{cases} s_1 - s_2 = r s'_1(r) \\ s_2 - s_3 = r s'_3(r) \\ s_1 - s_3 = 2r \lambda'_f(r) \end{cases} .$$

• Position relative de s_1 et s_2 :

$s_1 - s_2 \geq 0 \Leftrightarrow s'_1(r) \geq 0$ Donc $s_1 \geq s_2$ sur $[0, t_0]$ et $s_1 \leq s_2$ sinon. Remarquons que $s_1(r) = s_2(r)$ si et seulement si $r = 0$ ou $s'_1(r) = 0$.

• Position relative de s_1 et s_3 :

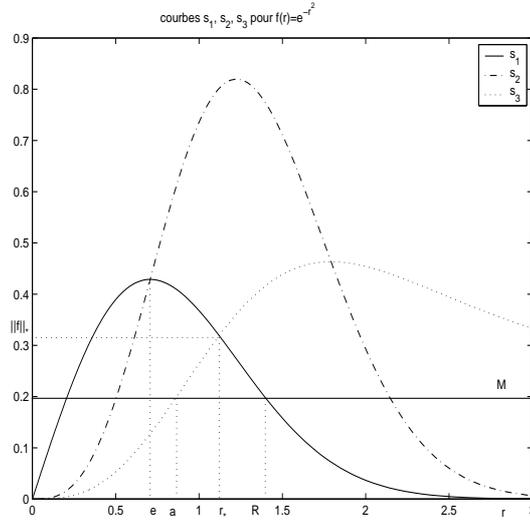


FIG. 3.3 – Fonctions s_1 , s_2 et s_3 pour $f(r) = e^{-r^2}$.

$s_1 - s_3$ est du signe de λ'_f , donc $s_1 > s_3$ sur $]0, r_*[$ et $s_1 \leq s_3$ sinon. Remarquons que $s_3(r_*) = s_1(r_*) = \|f\|_*$.

• Position relative de s_2 et s_3 :

$s_2 - s_3$ est du signe de s'_3 . On a $s'_3(r) = \frac{1}{r^2}(-r^3 f'(r) + r^2 f(r) - 2 \int_0^r t f(t) dt)$. Appelons v le terme entre parenthèses. Il vient que $v'(r) = -r^2 s''_1(r)$. La concavité de s_1 sur $[0, t_0]$ implique que v est croissante sur $[0, t_0]$. Comme $v(0) = 0$, alors $s'_3(r) \geq 0$ sur $[0, t_0]$. Or sur $[t_0, r_*]$ on a prouvé que $s_3 \leq s_1$ et $s_2 \geq s_1$, donc $s_2 \geq s_3$. Alors s'_3 est positif sur $[t_0, r_*]$.

Finalement s_3 est croissante et $s_2 \geq s_3$ sur $[0, r_*]$.

Nous sommes en mesure de prouver l'existence de a et R .

Nous savons que $s_3(0) = 0$, $s_3(r_*) = \|f\|_* > M$ et s_3 est croissante sur $[0, r_*]$; donc par théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $a \in]0, r_*[$ tel que $s_3(a) = M$.

Remarque 3.8.3 *On pourrait démontrer l'unicité de a sur l'intervalle $[0, r_*]$,*

mais on peut s'en passer, car si u est solution au problème ORF, u est unique.

Définissons alors R . Nous savons que s_1 est croissante sur $[0, t_0]$ puis décroissante et tend vers 0. Or $s_1(r_*) = \|f\|_* > M$ et $r_* \geq t_0$, donc $s_1(t_0) > M$. Ainsi il existe un réel $R > r_* > a$ vérifiant $s_1(R) = M$.

Il reste à vérifier que ces choix de a et de R conviennent. Vérifions alors le système (S) 3.53.

- Vérifions que $s_2(r) \geq M$, $r \in [a, R]$:

Sur l'intervalle $[a, r_*]$, on a $s_3 \leq s_2$ et $s_3 \geq s_3(a) = M$, donc $s_2 \geq M$

Sur l'intervalle $[r_*, R]$, on a $s_1 \leq s_2$ et $s_1 \geq s_1(R) = M$, donc $s_2 \geq M$

- Vérifions enfin que $\|\lambda_v\|_\infty = (2\lambda)^{-1}$.

Nous savons déjà que $\lambda_v(a) = M$, par 3.51. Le fait que $v = \frac{M}{r}$ sur $[a, R]$ implique que sur cet intervalle $\lambda_v(r) = M$. Nous savons aussi que $\lambda_v(0) = 0$ (une simple application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Pour montrer que $\|\lambda_v\|_\infty = M$, il suffit de prouver que $0 \leq \lambda_v(r) \leq M$ sur $[R, +\infty[$ et que $\lambda'_v(r) \geq 0$ sur $[0, a]$.

Sur $[R, +\infty[$, $\lambda_v(r) = \frac{1}{r} \int_0^r tv(t)dt = \frac{1}{r}(MR + \int_R^r s_1(t)dt)$. Or $0 \leq s_1(t) \leq M$, donc $0 \leq \lambda_v(r) \leq M$. Sur $[0, a]$, $\lambda_v(r) = \frac{1}{r} \int_0^r tv(t)dt - \gamma \frac{r}{2}$. Alors $\lambda'_v(r) = \frac{1}{r^2}(r^2 f(r) - \int_0^r tf(t)dt) - \frac{\gamma}{2}$. Posons $\eta = r^{-2}(r^2 f(r) - \int_0^r tf(t)dt)$. Un petit calcul prouve que $\eta(a) = \frac{\gamma}{2}$. Donc $\lambda'_v(a) = 0$. Montrons alors que η est décroissante. On vérifie que $\eta'(r) = -\frac{s'_3(r)}{r}$. Or s_3 est croissante sur $[0, a]$ donc η' est négative, c'est-à-dire η est décroissante, et donc $\lambda'_v(r) \geq 0$. Finalement, on a bien $\|\lambda_v\|_\infty = M$.

Ainsi la fonction u , définie comme dans les hypothèses du théorème, est solution du problème ORF. ■

Les figures 3.4 et 3.5 mettent en évidence le fait que u disparaît quand λ diminue jusqu'à atteindre la valeur "d'extinction" $\frac{1}{2\|f\|_*}$. Lorsque λ diminue,

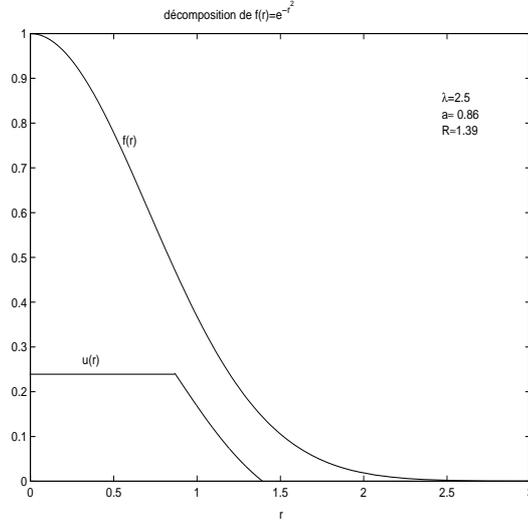


FIG. 3.4 – Décomposition par ORF de $f = e^{-r^2}$.

a croît et R décroît et ces valeurs tendent vers la même limite. Dans le même temps, γ tend vers 0.

Voici un autre exemple d’application du théorème. Considérons la fonction $f(r) = (1 - r)^+$. On a alors $s_1(r) = r(1 - r)$, $s_2(r) = r^2$ et $s_3(r) = \frac{r^2}{3}$ pour $r \leq 1$. Il est facile de vérifier que $\|f\|_* = \frac{3}{16}$. La résolution du système (\mathcal{S}) donne, pour $M = (2\lambda)^{-1}$, $a = \sqrt{3M}$, R est solution de $R(1 - R) = M$ et $R > a$, et $\gamma = 1 - \frac{4}{3}a$. Si $M = \|f\|_*$, alors $a = R = \frac{3}{4}$, $\gamma = 0$ et $u = 0$. Lorsque M décroît vers 0, a tend vers 0 et R tend vers 1. Dans ce cas, γ tend vers 1 et la fonction u tend vers f , au sens de la norme L^2 (même au sens de la norme BV). La figure 3.6 illustre cet exemple.

Les exemples précédents ont illustré le fait que la composante objet u disparaît si M tend vers $\|f\|_*$ et est proche de f lorsque $M \rightarrow 0$. L’étude du comportement de l’algorithme ORF sur les fonctions radiales vérifiant les hypothèses du théorème 3.8.3 a aussi mis en évidence le fait que cet algorithme crée des marches. Ce phénomène n’est pas nouveau. Il a été observé, d’un point de vue numérique, par W. Ring [69].

Le théorème 3.8.3 ne prend pas en compte le cas des fonctions “marche”,

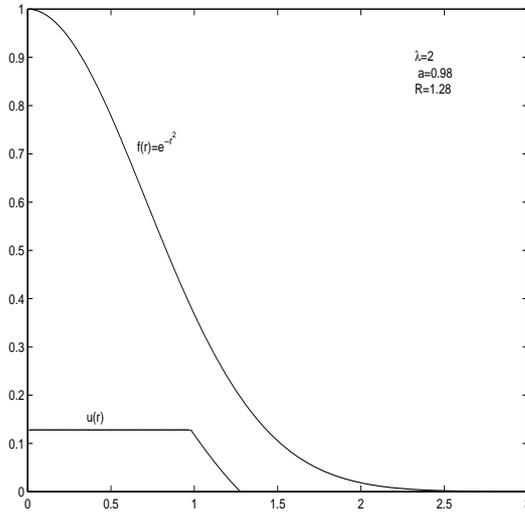


FIG. 3.5 – Décomposition par ORF de $f = e^{-r^2}$.

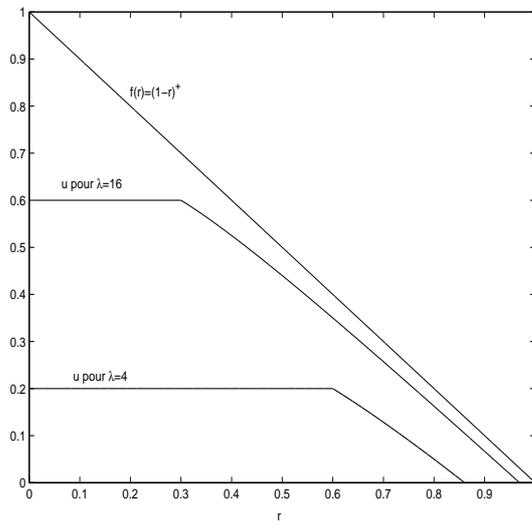


FIG. 3.6 – Décomposition par ORF de $f = (1 - r)^+$.

c'est-à-dire les fonctions radiales étagées. C'est l'objet de la section suivante.

3.9 Fonctions radiales constantes par morceaux

Dans cette section, on se propose de compléter le théorème 3.8.3. Nous montrons que l'algorithme ORF conserve la structure étagée d'une fonction (dans le cas radiale). Cependant, les plateaux sont modifiées.

On considère une fonction radiale f de $L^2(\mathbb{R}^2)$. On note $f(r)$ cette fonction. On fait l'hypothèse que f est d'énergie finie ($\int r f^2(r) dr < \infty$) et est constante par morceaux. Il existe alors des nombres f_0, f_1, \dots, f_N et $r_0 < r_1 < \dots < r_N$ avec $r_0 = 0$ et $f_N = 0$ tel que $f(r) = f_i$ sur $[r_i, r_{i+1}[$ pour $i \in \{0, N-1\}$ et $f(r) = 0$ pour $r \geq r_N$.

La décomposition ORF appliquée à $f(x)$ s'écrit $\hat{u} + \hat{v}$. Les fonctions \hat{u} et \hat{v} sont alors radiales. Que peut-on dire de plus ?

Lorsque $f(r)$ a une seule discontinuité ($N=1$), f est la fonction caractéristique d'un disque, la solution du problème ORF est $u(r) = (1 - \frac{1}{\lambda r_1})f(r)$. Que devient ce résultat pour $N > 1$? Le théorème suivant répond en partie à cette question.

Théorème 3.9.1 *Dans les conditions précisées ci-dessus, la solution \hat{u} du problème ORF associé à un paramètre λ tel que $\|f\|_* > (2\lambda)^{-1}$, est une fonction constante par morceaux construite à partir de la même subdivision $(r_i)_0^N$.*

Dans le cas où $\|f\|_* \leq \frac{1}{2\lambda}$, nous savons que $\hat{u} = 0$. Pour prouver ce théorème, nous considérons un autre problème : on minimise la fonctionnelle $\|u\|_{BV} + \lambda \|f - u\|_2^2$ sur l'ensemble des fonctions constantes par morceaux sur la même subdivision $(r_i)_0^N$. Ce problème (discret) admet clairement une unique solution \bar{u} . On vérifie ensuite que \bar{u} et $\bar{v} = f - \bar{u}$ est solution du système $r(\|h\|_\infty |u'| + h(r)u'(r)) = 0$ et $\|h\|_\infty = \frac{1}{2\lambda}$ où $h(r) = r^{-1} \int_0^r tv(t)dt$.

Considérons une fonction $u(r)$ définie par ses valeurs prises $(u_i)_i$. Posons $v_i = f_i - u_i$. Il vient

$$\|u\|_{BV} + \lambda \|v\|^2 = \sum_{i=1}^N |u_i - u_{i-1}| r_i + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=0}^{N-1} v_i^2 (r_{i+1}^2 - r_i^2).$$

Notons $J(u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$ le terme de droite. Notons $(\bar{u}_i)_0^N$ la solution minimisant J .

Nous traitons dans un premier temps le cas où, pour tout i , $\bar{u}_i \neq \bar{u}_{i+1}$. Nous reviendrons par la suite sur le cas général.

Dans le cas où \bar{u} est discontinu en chaque r_i , $i = 1 \dots N$, on pose $\epsilon_i = \text{signe}(\bar{u}_{i-1} - \bar{u}_i)$ pour $i \geq 1$ et

$$J_2(u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) = \sum_{i=1}^N r_i \epsilon_i (u_{i-1} - u_i) + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^N v_i^2 (r_{i+1}^2 - r_i^2). \quad (3.54)$$

Alors $(\bar{u}_i)_i$ minimise J_2 d'où $\frac{\partial}{\partial u_i} J_2(\bar{u}) = 0$. Après calcul, on obtient

$$\forall i \in \{0 \dots N-1\} \quad r_{i+1} \epsilon_{i+1} - r_i \epsilon_i = \lambda \bar{v}_i (r_{i+1}^2 - r_i^2). \quad (3.55)$$

Pour vérifier que $r((2\lambda)^{-1} |\bar{u}'| + h(r) \bar{u}'(r)) = 0$, il suffit de vérifier que $h(r_i) = \frac{\epsilon_i}{2\lambda}$ pour $i > 0$ ($i = 0$ ne pose pas de problème).

Pour $i = 0$ on a alors $\bar{v}_0 = \frac{\epsilon_1}{\lambda r_1}$. Or par un simple calcul, $h(r_1) = \frac{\bar{v}_0 r_1}{2}$, d'où $h(r_1) = \frac{\epsilon_1}{2\lambda}$. Par récurrence, supposons alors que $h(r_i) = \frac{\epsilon_i}{2\lambda}$. Alors $h(r_{i+1}) = \frac{1}{r_{i+1}} \int_0^{r_{i+1}} t \bar{v}(t) dt = \frac{1}{r_{i+1}} (r_i h(r_i) + \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2}{2} \bar{v}_i)$. On remplace alors $h(r_i)$ par $\epsilon_i (2\lambda)^{-1}$ et utilise 3.55 pour conclure que $h(r_{i+1}) = \epsilon_{i+1} (2\lambda)^{-1}$.

Il reste à vérifier que $\|h\|_\infty = (2\lambda)^{-1}$. Nous avons $|h(r_i)| = (2\lambda)^{-1}$. Montrons que $h(r)$ ne dépasse pas cette valeur pour $r \in [r_i, r_{i+1}]$. Par le même calcul que précédemment, on a $rh(r) = \frac{r_i \epsilon_i}{2\lambda} + \bar{v}_i \frac{r^2 - r_i^2}{2}$. Mais $\bar{v}_i = \frac{r_{i+1} \epsilon_{i+1} - r_i \epsilon_i}{\lambda (r_{i+1}^2 - r_i^2)}$, donc

$$2\lambda rh(r) = r_i \epsilon_i + \frac{r_{i+1} \epsilon_{i+1} - r_i \epsilon_i}{\lambda (r_{i+1}^2 - r_i^2)} (r^2 - r_i^2).$$

On peut réécrire cette expression sous la forme

$$\frac{1}{r_{i+1}^2 - r_i^2} [\epsilon_i r_i (r_{i+1}^2 - r^2) + \epsilon_{i+1} r_{i+1} (r^2 - r_i^2)].$$

Tout revient à montrer que

$$|\epsilon_i r_i (r_{i+1}^2 - r^2) + \epsilon_{i+1} r_{i+1} (r^2 - r_i^2)| \leq r (r_{i+1}^2 - r_i^2).$$

On majore le terme de gauche par $r_i (r_{i+1}^2 - r^2) + r_{i+1} (r^2 - r_i^2)$ qui s'écrit $(r^2 + r_i r_{i+1})(r_{i+1} - r_i)$. Comparons-le avec $r (r_{i+1}^2 - r_i^2)$. La différence s'écrit $(r_{i+1} - r_i)(r^2 - r(r_{i+1} + r_i) + r_i r_{i+1})$ ou encore $(r_{i+1} - r_i)(r - r_i)(r - r_{i+1})$ qui est négatif pour $r \in [r_i, r_{i+1}]$.

Ainsi le théorème est vérifié dans le cas particulier où pour tout i , $\bar{u}_i \neq \bar{u}_{i+1}$.

Revenons au cas général. Notons $s_0 = 0, s_1, \dots, s_p$ les valeurs r_i pour lesquelles \bar{u} est discontinue. Notons pour $k \in \{0, \dots, p\}$, I_k l'ensemble des indices i tel que $s_k \leq r_i < s_{k+1}$ et \bar{l}_k la valeur prise par \bar{u} sur $[s_{k-1}, s_k]$. Posons $\epsilon_k = \text{signe}(\bar{l}_{k-1} - \bar{l}_k)$. Alors \bar{l} minimise

$$J_3(l) = \sum_{k=1}^p s_k \epsilon_k (l_{k-1} - l_k) + \frac{\lambda}{2} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i \in I_k} (f_i - l_k)^2 (r_{i+1}^2 - r_i^2). \quad (3.56)$$

En écrivant $\frac{\partial}{\partial l_k} J_3(\bar{l}) = 0$, il vient la relation

$$s_{k+1} \epsilon_{k+1} - s_k \epsilon_k = \lambda \sum_{i \in I_k} v_i (r_{i+1}^2 - r_i^2).$$

Comme précédemment, pour vérifier $r((2\lambda)^{-1} |u'| + h(r)u'(r)) = 0$, on prouve que $h(s_k) = \epsilon_k (2\lambda)^{-1}$. Il restera ensuite à prouver que $\|h\|_\infty = (2\lambda)^{-1}$.

Le premier point est trivial (même preuve que le premier cas). Il reste à prouver que $\|h\|_\infty = (2\lambda)^{-1}$. On procède comme dans le premier cas. On se place sur $[r_i, r_{i+1}]$. La seule différence est que $|h(r_i)|$ et $|h(r_{i+1})|$ ne sont pas connus. Cependant nous prouvons d'abord que ces valeurs sont majorées par $(2\lambda)^{-1}$. Pour cela, on revient à la fonctionnelle J . On sait que \bar{u} minimise J . Soit alors u une autre fonction étagée sur la subdivision $(r_i)_i$. On a $J(\bar{u}) \leq J(\bar{u} + tu)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Par le même raisonnement que dans la preuve du

théorème 3.1.1, il vient que

$$2\lambda \left| \int \bar{v}u \right| \leq \|u\|_{BV}.$$

Choisissons $u(r) = \chi_{[0, r_i]}$. Alors $\|u\|_{BV} = r_i$; d'où $|h(r_i)| \leq (2\lambda)^{-1}$.

Posons $a = r_i$ et $b = r_{i+1}$, par simple commodité. On a $rh(r) = ah(a) + \frac{v_i}{2}(r^2 - a^2)$. Donc $bh(b) = ah(a) + \frac{v_i}{2}(b^2 - a^2)$. On en déduit $\frac{v_i}{2} = \frac{bh(b) - ah(a)}{b^2 - a^2}$. Alors $rh(r)(b^2 - a^2)$ s'écrit, après calcul, $ah(a)(b^2 - r^2) + bh(b)(r^2 - a^2)$. Il ne reste plus qu'à conclure comme dans le premier cas. ■

Dans le cas où f est étagée, l'algorithme d'ORF conserve donc la structure étagée. Les calculs précédents ont montré que la solution u est alors construite à partir de la même subdivision : les *marches* de f se retrouvent (au sens large) dans u . Rien n'empêche à l'algorithme d'ORF, a priori, d'effacer certaines discontinuités de f . Il se peut donc que l'algorithme efface les trous. Dans la section suivante, nous présentons quelques exemples qui illustrent ces phénomènes.

3.10 Quelques exemples

Nous sommes toujours dans le cadre des fonctions radiales. Le but des exemples suivants est de prouver d'une part, que si $f = \chi_E$, l'algorithme ORF ne donne pas systématiquement $u = \alpha\chi_E$, et d'autre part que l'algorithme d'ORF efface les "petits trous". Pour cela, on choisit $E = [0, \frac{1-\epsilon}{2}] \cup [\frac{1+\epsilon}{2}, 1]$, où ϵ est supposé petit. Un calcul simple donne $\|f\|_* = \frac{1-\epsilon}{2}$. On suppose alors $1 - \epsilon > \lambda^{-1}$.

On cherche alors une fonction u , constante sur $[0, 1]$, de valeur $a > 0$, minimisant $J = \|u\|_{BV} + \lambda \|v\|_2^2$. On a $J(a) = a + \frac{\lambda}{2}((1-a)^2(1-\epsilon) + a^2\epsilon)$. La valeur optimale vérifie $\frac{\partial}{\partial a} J(\bar{a}) = 0$. Il vient $\bar{a} = 1 - \frac{1}{\lambda} - \epsilon$. Cette valeur est bien strictement positive. Pour que u ainsi défini soit solution de ORF, il suffit que $h(1) = (2\lambda)^{-1}$ et $\|h\|_\infty = (2\lambda)^{-1}$. On rappelle que $h(r) = r^{-1} \int_0^r tv(t)dt$.

Le premier point est une simple vérification. Pour calculer $\|h\|_\infty$, on constate que $|h(r)| \leq h(1)$, pour $r \geq 1$, car $v(r) = 0$ à partir de $r = 1$. On calcule $h(\frac{1-\epsilon}{2})$ et $h(\frac{1+\epsilon}{2})$. On vérifie facilement que ces valeurs sont de l'ordre de grandeur de $(4\lambda)^{-1}$. On se sert alors du lemme évident suivant,

Lemme 3.10.1 *Pour $R > 0$, si $|h(a)| \leq R$, $|h(b)| \leq R$ et si v est constante sur $[a, b]$, alors h est bornée par R sur $[a, b]$.*

Ainsi $|h(r)| \leq (2\lambda)^{-1}$.

Théorème 3.10.1 *Le problème ORF appliqué à f donne $u = \bar{a}\chi_{[0,1]}$, avec $\bar{a} = 1 - \lambda^{-1} - \epsilon$.*

Remarquons que pour $f = \chi_{[0,1]}$, $\bar{a} = 1 - \lambda^{-1}$. L'algorithme ORF ne prend pas en compte la discontinuité et ne conserve pas le support. La fonction $u(r)$ est alors proche de $(1 - \lambda^{-1})\chi_{[0,1]}$. On vérifie ainsi le théorème de stabilité. En effet, posons f_0 la fonction indicatrice du disque unité et f_1 la fonction indicatrice de l'ensemble $r \in E$. Alors $u_0 = (1 - \lambda^{-1})f_0$ et $u_1 = (1 - \lambda^{-1} - \epsilon)f_0$. On a $\|f_1 - f_0\|_* = \epsilon(1 + \epsilon)^{-1}$, $\|u_1 - u_0\|_2 = \epsilon\sqrt{\pi}$.

Prenons un second exemple. On considère encore la fonction $f_0(r) = \chi_{[0,1]}$ et $f_1 = \chi_{[\epsilon,1]}$. Alors $\|f_1\|_* = \frac{1-\epsilon^2}{2}$. Supposons $\lambda > 1$. Par la même méthode que précédemment, les solutions u_0, u_1 de l'algorithme ORF appliqué à f_0, f_1 , sont $u_1 = (1 - \lambda^{-1} - \epsilon^2)f_0$ et $u_0 = (1 - \lambda^{-1})f_0$. Alors $\|u_1 - u_0\|_2 \sim \epsilon^2$, alors que $\|f_1 - f_0\|_* \sim \epsilon$. Ceci est en accord avec le théorème de stabilité. Par ces deux exemples, nous avons vérifié que les "petits trous" disparaissent.

Concluons cette section et ce chapitre par un dernier exemple. On considère la fonction $f(r) = \chi_{[1,2]}$. On vérifie que $\|f\|_* = \frac{3}{4}$. Supposons $\lambda \geq \frac{2}{3}$. On cherche u constante par morceaux. Il existe alors deux constantes a et b (qu'on sait appartenir à l'intervalle $[0,1]$) telles que $u = a\chi_{[0,1]} + b\chi_{[1,2]}$. La recherche de a et b se fait par minimisation de la fonctionnelle $J(a, b) = |b - a| + |b| + \frac{\lambda}{2}(a^2 + 3(1 - b)^2)$. En distinguant les différents cas, il reste deux

situations possibles :

1) $a = b = \frac{3-\lambda}{4}$ et $J(a, a) = 2a + \frac{\lambda}{2}(4a^2 - 6a + 3)$.

2) $a < b$ avec $a = \lambda^{-1}$ et $b = 1 - \lambda^{-1}$ pour $\lambda > 2$.

Pour $\lambda \in [\frac{2}{3}, 2[$, seul le premier cas est possible. On obtient $u = a\chi_{[0,2]}$. Pour $\lambda = \frac{2}{3}$, on a $u = 0$ comme prévu. Pour $\lambda = 2$ les deux situations sont identiques. Pour $\lambda > 2$, il faut comparer les valeurs prises par J . Sans faire de calculs explicites, on peut s'intéresser à λ très grand. Dans le premier cas, $J(a, a)$ tend vers l'infini alors que dans le second cas, a tend vers 0 et b vers 1. La fonction u est alors donnée par le deuxième cas et u se "rapproche" de f quand λ tend vers l'infini.

On vient de mettre en évidence par cet exemple que l'algorithme ORF ne conserve pas la propriété $f = \alpha\chi_E$ où α est une constante et χ_E est une fonction indicatrice : $f = \alpha\chi_E$ n'implique pas $u = \beta\chi_F$!

Chapitre 4

Théorème du mini-max et algorithme ORF

Ce chapitre a deux buts. D'une part nous y présentons et démontrons l'analyse faite par Antonin Chambolle de l'algorithme ORF. Nous généraliserons cet algorithme en y remplaçant $\|\cdot\|_{BV}$ par une autre norme fonctionnelle et démontrerons l'analogie du théorème de Chambolle. Ceci nous sera très utile au Chapitre 7. D'autre part, nous démontrerons le théorème fondamental (4.5.1), qui est un résultat de stabilité semblable à ceux développés au Chapitre 3. Cette seconde partie est originale.

4.1 Minimisation par projection

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus par Antonin Chambolle [29]. Ce dernier compare l'algorithme de minimisation ORF au problème de minimisation suivant :

$$\inf_{\|v\|_* \leq \frac{1}{2\lambda}} \|f - v\|_2 \quad (4.1)$$

f étant une fonction de L^2 donnée, $\|\cdot\|_*$ désignant la norme duale de \mathcal{BV} . Il s'agit en fait d'un problème de projection. Notons $K = \{v \in L^2 / \|v\|_* \leq \frac{1}{2\lambda}\}$. L'ensemble K est évidemment une partie convexe, fermée dans L^2 , car $\|v\|_* \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \|v\|_2$. Il n'est cependant pas compact dans L^2 , car non borné.

Alors 4.1 admet une unique solution $v_0 = P_K(f)$ où P_K est la projection orthogonale de L^2 sur K . Cette projection est caractérisée par,

$$v_0 = P_K(f) \iff v_0 \in K \text{ et } \int (f - v_0)(v - v_0) \leq 0 \text{ pour tout } v \in K. \quad (4.2)$$

Théorème 4.1.1 *La solution du problème d'ORF est donnée par u_0 si et seulement si $v_0 = f - u_0$ est solution de (4.1).*

Dans le cas où $\|f\|_* \leq (2\lambda)^{-1}$, on a $P_K(f) = f$ et donc le théorème est vérifié.

Considérons alors le cas $\|f\|_* > (2\lambda)^{-1}$ et désignons par u_0 la solution du problème ORF, appliqué à f . Il suffit de prouver que v_0 ainsi défini vérifie la caractérisation (4.2). Pour cela, on utilise le fait que le couple (u_0, v_0) est "optimal", c'est-à-dire $\int u_0 v_0 = \|u_0\|_{BV} \|v_0\|_*$ et que $\|v_0\|_* = \frac{1}{2\lambda}$. Soit $v \in K$. Alors, on a $\int u_0 v \leq \|u_0\|_{BV} \|v\| \leq \|u_0\|_{BV} \|v_0\|_*$. Donc, $\int u_0 v \leq \int u_0 v_0$; c'est-à-dire $\int (f - v_0)(v - v_0) \leq 0$. De plus $v_0 \in K$. Donc, la caractérisation (4.2) est vérifiée. La fonction v_0 est bien la solution de (4.1).

Réciproquement, considérons v_0 solution de (4.1). On décompose $f = u_1 + v_1$ par l'algorithme ORF. D'après ce qui précède, on a $v_1 = v_0$. Donc, $u_0 = f - v_0 = u_1$ est solution du problème ORF. ■

Ce théorème donne gratuitement le fait que $\tilde{\Phi} : L^2 \rightarrow L^2$ est Hölderienne d'exposant 1 et que Φ et $\tilde{\Phi}$ vérifient la propriété de convexité. Dans le Chapitre 3, nous avons montré que $\Phi : \mathcal{BV}^* \rightarrow L^2$ est Hölderienne d'exposant 1/2. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, la preuve de ce résultat n'a rien à voir avec l'espace \mathcal{BV} . Dans la section suivante, nous présentons le cadre général où le théorème fondamental est énoncé et démontré.

4.2 Généralisation

Nous désignons par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de la classe de Schwartz et par $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des distributions tempérées. Nous considérons un

espace de Banach fonctionnel E muni d'une norme notée $\|\cdot\|$, c'est-à-dire un espace de Banach vérifiant

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset E \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad (4.3)$$

où les inclusions sont continues. La fermeture de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans E n'est pas E en général. Nous la désignons par E_0 . Nous notons alors E^* l'espace de Banach dual de E_0 muni de la norme duale notée $\|\cdot\|_*$. Notons que E^* n'est pas forcément le dual de E . Prenons l'exemple $E = BV(\mathbb{R}^2)$. Alors E_0 est l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\nabla f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Le dual de E_0 est inclus dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ tandis que le dual de BV n'est pas un espace fonctionnel [58]. En effet, $BV \neq \mathcal{BV}$ qui est défini par $\nabla f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ où, ce qui est équivalent, par \mathcal{BV} est la fermeture de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ dans BV . Il existe donc une forme linéaire continue λ sur BV qui est nulle sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et est égale à 1 sur la fonction χ_Q où $Q = [0, 1]^2$. Cette forme linéaire continue λ n'est pas de la forme $\lambda(f) = \langle S, f \rangle$ où S est une distribution. En effet, cette distribution serait identiquement nulle.

Revenons au cas général. On se place en dimension n et on fixe un espace de Banach fonctionnel E . Considérons une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et définissons pour $u \in E \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, l'énergie $J(u)$ par

$$J(u) = \|u\| + \lambda \|f - u\|_2^2. \quad (4.4)$$

Le lemme qui suit prouve que la décomposition optimale $f = \bar{u} + \bar{v}$ existe et est unique dès lors que l'espace de Banach E est quasi-complet :

Définition 4.2.1 *Un espace de Banach E est quasi-complet si la propriété suivante est vérifiée :*

Si une suite u_j , $j \in \mathbb{N}$, converge vers u dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et vérifie $\|u_j\| \leq 1$ alors $u \in E$ et $\|u\| \leq 1$.

Lemme 4.2.1 *Sous cette hypothèse, la décomposition optimale $f = \bar{u} + \bar{v}$ existe et est unique.*

En effet, posons $\mu = \inf_u J(u)$ et considérons une suite u_j minimisante, $\lim_{j \rightarrow \infty} J(u_j) = \mu$. Montrons que la suite u_j est de Cauchy. On a

$$J\left(\frac{u_j + u_k}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \|u_j\| + \frac{1}{2} \|u_k\| + \frac{\lambda}{2} (\|u_j\|_2^2 + \|u_k\|_2^2) - \frac{\lambda}{4} \|u_j - u_k\|_2^2.$$

Ainsi

$$\frac{\lambda}{4} \|u_j - u_k\|_2^2 \leq \frac{J(u_j) + J(u_k)}{2} - J\left(\frac{u_j + u_k}{2}\right).$$

Il existe $j_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour $j, k > j_0(\epsilon)$ on ait $J(u_j), J(u_k) \leq \mu + \epsilon$. Or $J\left(\frac{u_j + u_k}{2}\right) \geq \mu$. Il vient $\|u_j - u_k\|_2 \leq 2\sqrt{\frac{2}{\lambda}\epsilon}$. Ainsi u_j converge dans L^2 vers une fonction notée $u \in L^2$. D'après l'hypothèse faite sur E , il vient $u \in E$ et $\|u\| \leq \liminf_j \|u_j\|$. Donc $J(u) \leq \liminf_j J(u_j) = \mu$. L'existence d'une décomposition optimale est alors prouvée. L'unicité est évidente, par stricte convexité. ■

Après avoir prouvé l'unicité et l'existence du problème de décomposition sous contrainte, nous souhaitons prouver le théorème suivant

Théorème 4.2.1 *La décomposition optimale $f = \bar{u} + \bar{v}$ définie par le lemme 4.2.1 est donnée par*

$$\bar{v} = \text{Arg} \inf \{ \|f - v\|_2 / \|v\|_* \leq \frac{1}{2\lambda} \} \quad (4.5)$$

Avant de prouver ce résultat fondamental dans la section suivante, observons que le sous-espace $F \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ défini par $\|v\|_* \leq \frac{1}{2\lambda}$ est fermé dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. La preuve du théorème 4.2.1 est une conséquence du théorème du minimax de John von Neumann [10].

4.3 Théorème du mini-max

Théorème 4.3.1 (Théorème du mini-max) *Soit E un espace compact et convexe, F un ensemble convexe et V une application de $E \times F$ à valeurs réelles ayant les propriétés suivantes :*

- (1) $x \rightarrow V(x, y)$ est convexe et s.c.i. sur E , pour tout $y \in F$.
- (2) $y \rightarrow V(x, y)$ est concave sur F , pour tout $x \in E$.

On pose $\alpha = \inf_{x \in E} \sup_{y \in F} V(x, y)$ et $\beta = \sup_{y \in F} \inf_{x \in E} V(x, y)$.
Alors, il existe $\bar{x} \in E$ tel que

$$\sup_{y \in F} V(\bar{x}, y) = \alpha = \beta. \quad (4.6)$$

Si de plus, (3) F est compact, alors il existe un point selle $(\bar{x}, \bar{y}) \in E \times F$, c'est-à-dire vérifiant pour tout $x \in E, y \in F$,

$$V(\bar{x}, y) \leq V(\bar{x}, \bar{y}) \leq V(x, \bar{y}). \quad (4.7)$$

Nous nous servirons, par la suite, d'un corollaire du théorème du mini-max,

Corollaire 4.3.1 *Supposons (1), (2) et (3') : " il existe $\bar{y} \in F$ tel que $\beta = \inf_{x \in E} V(x, \bar{y})$ et $x \mapsto V(x, \bar{y})$, est strictement convexe sur E , pour tout $y \in F$ ". Alors (\bar{x}, \bar{y}) est encore un point selle.*

En effet, il existe $x' \in E$ tel que $\beta = \inf_{x \in E} V(x, \bar{y}) = V(x', \bar{y})$ car E est compact et $x \mapsto V(x, \bar{y})$ est s.c.i. Il vient

$$V(x', \bar{y}) = \beta = \inf_{x \in E} V(x, \bar{y}) \leq V(\bar{x}, \bar{y}) \leq \sup_{y \in F} V(\bar{x}, y) = \alpha. \quad (4.8)$$

Le théorème du mini-max implique $\alpha = \beta$. Donc les inégalités de 4.8 sont des égalités. Il vient $V(x', \bar{y}) = V(\bar{x}, \bar{y})$. On en déduit par stricte convexité que $x' = \bar{x}$. Montrons alors que (\bar{x}, \bar{y}) est un point selle. On a $V(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha = \sup_{y \in F} V(\bar{x}, y) \geq V(\bar{x}, y)$. De même, $\beta = V(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_{x \in E} V(x, \bar{y}) \leq V(x, \bar{y})$. ■

4.4 Version abstraite du théorème 4.2.1

On considère H un espace de Hilbert sur \mathbb{R} . On note $\|\cdot\|$ la norme sur H et le produit scalaire associé est noté $x \cdot y$. On considère $F \subset H$ un ensemble convexe, fermé, non vide. On définit $p : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ par

$$p(x) = \sup_{y \in F} x \cdot y. \quad (4.9)$$

Il est facile de vérifier que $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour $\lambda > 0$. De plus p est convexe et semi-continu inférieurement. La version abstraite du modèle ORF est définie par ce qui suit. Parmi toutes les décompositions $f = x + y$ pour

$f \in H$ donnée, nous cherchons celle minimisant $J(x) = p(x) + \lambda \|f - x\|^2$. Nous cherchons à étudier les propriétés de la solution $\bar{x} \in H$ solution de $J(\bar{x}) = \inf_{x \in H} J(x)$. Le théorème suivant répond à cette question. On prend $\lambda = \frac{1}{2}$. Pour revenir au cas général il suffit de remplacer F par $(2\lambda)^{-1}F$,

Théorème 4.4.1 *La décomposition optimale $f = \bar{x} + \bar{y}$ est définie par*

$$\bar{y} = \text{Arg} \inf \{ \|f - y\| / y \in F \}. \quad (4.10)$$

Ce théorème découle du théorème du mini-max. Choisissons $y_0 \in F$ et prenons $R > \|f - y_0\|$. On définit E comme la boule fermée de H définie par $\|x\| \leq R$. Cette boule est équipée de la topologie faible*. Alors E est métrisable et compact. On définit la fonction V sur $E \times F$ par

$$V(x, y) = x \cdot y + \lambda \|f - x\|^2. \quad (4.11)$$

Nous avons

$$J(x) = \sup_{y \in F} V(x, y). \quad (4.12)$$

Nous définissons $Q(y) = \inf_{x \in E} V(x, y)$. La fonction J est s.c.i sur E . Alors J atteint son minimum en \bar{x} et $\alpha = J(\bar{x})$. Nous allons prouver que

- Q atteint son maximum $\beta = Q(\bar{y})$ avec $f = \bar{x} + \bar{y}$
- (\bar{x}, \bar{y}) est un point selle
- ni \bar{x} , ni \bar{y} ne dépendent de R pour R assez grand.

Calculons \bar{y} . Posons $\tilde{f} = f - y$. Il vient

$$V(x, y) = \frac{1}{2} (\|\tilde{f} - x\|^2 + \|f\|^2 - \|\tilde{f}\|^2). \quad (4.13)$$

On a $Q(y) = \inf_{\|x\| \leq R} V(x, y)$. Pour cela, on distingue les cas $y \in F_0$ et $y \in F_1$ avec $F_0 = \{y \in F / \|y - f\| \leq R\}$ et $F_1 = \{y \in F / \|y - f\| > R\}$.

Pour $y \in F_0$, $Q(y) = \frac{1}{2} (\|f\|^2 - \|f - y\|^2)$ et, si $y \in F_1$, $Q(y) = \frac{1}{2} (R^2 + \|f\|^2 - 2R\|f - y\|)$. Dans le premier cas, la borne inférieure est atteinte pour $x' = f - y$; dans le second cas la borne inférieure est atteinte pour $x' = R \|\tilde{f}\|^{-1} \tilde{f}$. Alors si $y \in F_0$ et $y' \in F_1$, il vient $Q(y') < Q(y)$. Donc

$\sup_{y \in F} Q(y) = \sup_{y \in F_0} Q(y) = \frac{1}{2} \sup_{y \in F} (\|f\|^2 - \|f - y\|^2)$. Nous venons de démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.4.1 *On a $\beta = \sup_{y \in F} Q(y) = \frac{1}{2}(\|f\|^2 - \|f - \bar{y}\|^2) = Q(\bar{y})$ où $\bar{y} \in F$ est le point le plus proche de f . De plus, $Q(\bar{y}) = V(x', \bar{y})$ avec $x' = f - \bar{y}$.*

Il reste à combiner ce lemme avec le corollaire 4.3.1. Les hypothèses (1), (2) et (3') sont vérifiées. On obtient $\beta = \inf_{x \in E} V(x, \bar{y}) = V(x', \bar{y}) = V(\bar{x}, \bar{y})$. Par stricte convexité, il vient $x' = \bar{x}$. De plus, \bar{y} est la projection orthogonale de f sur F . Le coefficient β ne dépend pas de R , pour R assez grand. La preuve du théorème 4.4.1 est alors complète. ■

4.5 Stabilité de la décomposition

On considère un espace de Hilbert H muni d'une norme notée $\|\cdot\|$ et une norme notée $\|\cdot\|_*$ définie sur H , qui est finie sur un sous-espace V dense de H . On définit $\|x\|_* = +\infty$ si $x \notin V$. On suppose que $\|x\|_*$ est semi-continue inférieurement sur H :

$$\|x_j\|_* \leq 1 \quad \text{et} \quad \|x - x_j\| \rightarrow 0 \implies \|x\|_* \leq 1. \quad (4.14)$$

Notons $F = \{x \in H / \|x\|_* \leq 1\}$. L'ensemble F est alors une partie convexe, fermée de V . Notons P_F la projection orthogonale sur F , définie sur H . Si $x \in H$, on note $z = P_F(x)$ le point de F qui minimise la distance de x à F . On écrit l'algorithme ORF comme $x = y + z$, $y = R_F(x) = x - P_F(x)$. Le résultat de cette section est le suivant :

Théorème 4.5.1 *Si $x \in H$, $x' \in H$ et $\|x' - x\|_* \leq 1$, alors*

$$\|R_F(x') - R_F(x)\| \leq 11 \|x - x'\|_*^{1/2} (\|x\| + \|x'\|). \quad (4.15)$$

Ce théorème doit être mis en relation avec le corollaire 3.2.2. On y a prouvé que $\|\Phi(f_1) - \Phi(f_0)\|_2 \leq C(\lambda) \|f_1 - f_0\|_*^{1/2} (\|f_0\|_2 + \|f_1\|_2)$, où $C(\lambda) \approx \sqrt{\lambda}$. Nous verrons à la section 4.6 comment retrouver ce résultat à partir du

théorème général 4.5.1. Si l'on remplace F par $(2\lambda)^{-1}F$, alors, la constante 11, dans 4.15, doit être remplacée par $C(\lambda) \approx \sqrt{\lambda}$.

La preuve commence par le lemme suivant :

Lemme 4.5.1 *Soit $F \subset H$ un ensemble fermé convexe contenant le point 0. Soit $z_0 = P_F(x_0)$ la projection orthogonale sur F et $y_0 = x_0 - z_0$. Soit $d = \|y_0\|$ la distance de x_0 à F . Si $x_0 = y_1 + z_1$ avec $\|y_1\| \leq d + \epsilon$ et $z_1 \in F$, alors*

$$\|y_1 - y_0\| \leq 2(\epsilon \|x_0\| + \frac{\epsilon^2}{2})^{1/2}. \quad (4.16)$$

La preuve est facile. Il suffit d'évaluer $\left\| \frac{y_0 + y_1}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{y_0 - y_1}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|y_0\|^2 + \|y_1\|^2)$. En observant que $\frac{z_0 + z_1}{2} \in F$, on a $\left\| \frac{y_0 + y_1}{2} \right\|^2 \geq d^2$. Or $\|y_0\|^2 + \|y_1\|^2 \leq d^2 + (d + \epsilon)^2 = 2d^2 + 2d\epsilon + \epsilon^2$. Ainsi, $\left\| \frac{y_1 - y_0}{2} \right\|^2 \leq d\epsilon + \frac{\epsilon^2}{2}$. On conclut en notant que $0 \in F$, donc $d \leq \|x_0\|$.

A partir de maintenant on considère $F = \{x \in H / \|x\|_* \leq 1\}$. On se donne $x_0 \in H$, s'écrivant comme précédemment $x_0 = y_0 + z_0$, avec $z_0 = P_F(x_0)$. Il vient

Lemme 4.5.2 *Si $0 < \epsilon \leq 1$, $0 < \eta \leq 1$, $\gamma \geq \|x_0\|$, $x_0 = y_1 + z_1$ avec $\|y_1\| \leq d + \epsilon\gamma$ et $\|z_1\|_* \leq 1 + \eta$, alors*

$$\|y_1 - y_0\| \leq 7\sqrt{\epsilon + \eta}\gamma. \quad (4.17)$$

Pour prouver ce lemme, on écrit $x_0 = \tilde{y}_1 + \tilde{z}_1$ avec $\tilde{z}_1 = (1 + \eta)^{-1}z_1$. Il vient $\|\tilde{z}_1\|_* \leq 1$, $\|\tilde{y}_1\| \leq d + \beta$ avec $\beta = \frac{\epsilon + \eta}{1 + \eta}\gamma - \frac{\eta d}{1 + \eta} \geq 0$. De plus la définition de \tilde{y}_1 implique $\tilde{y}_1 - y_1 = \frac{\eta}{\eta + 1}z_1$. Or $\|z_1\| \leq \|x_0\| + \|y_1\|$. Comme $\|y_1\| \leq d + \epsilon\gamma$ et $d \leq \|x_0\| \leq \gamma$, alors

$$\|\tilde{y}_1 - y_1\| \leq \frac{\eta}{1 + \eta}(2 + \epsilon)\gamma \quad (4.18)$$

Finalement, le lemme 4.5.1 appliqué à $x_0 = \tilde{y}_1 + \tilde{z}_1$ entraîne $\|\tilde{y}_1 - y_0\| \leq 2(\beta \|x_0\| + \frac{\beta^2}{2})^{1/2}$. Nous pouvons majorer β par $(\epsilon + \eta)\gamma$. Alors $2(\beta \|x_0\| + \frac{\beta^2}{2})^{1/2} \leq 4\sqrt{\epsilon + \eta}\gamma$. De même, la relation 4.18 se majore trivialement par $3\sqrt{\epsilon + \eta}\gamma$ car η est majorée par $\leq \sqrt{\epsilon + \eta}$ et ϵ par 1. Mais $\|y_1 - y_0\| \leq \|y_1 - \tilde{y}_1\| + \|\tilde{y}_1 - y_0\| \leq 7\sqrt{\epsilon + \eta}\gamma$.

Nous arrivons enfin au lemme principal

Lemme 4.5.3 *Si x et x' sont des éléments de H et $z = P_F(x)$, $z' = P_F(x')$ et $x = y + z$, $x' = y' + z'$ et $\|x - x'\|_* \leq 1$ alors*

$$\|y - y'\| \leq 11 \|x' - x\|_*^{1/2} (\|x\| + \|x'\|). \quad (4.19)$$

Pour le voir, on commence par prouver que

$$|d - d'| \leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon} (\|x\| + \|x'\|) \quad (4.20)$$

où $d = \|y\|$, $d' = \|y'\|$ et $\epsilon = \|x - x'\|_*$.

Pour cela, on écrit $x = x' + x - x' = y' + z' + x - x' = y'' + z''$, avec $z'' = (1 + \epsilon)^{-1}(z' + x - x')$ et $y'' = y' + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}(z' + x - x')$. Alors, $\|z''\|_* \leq 1$. Il vient $\|y\| \leq \|y''\|$ car $x = y + z$ est optimal. Nous avons $\|y''\| \leq \|y'\| + \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \|z' + x - x'\|$. Or $z' + x - x' = x - y'$ et $\|y'\| \leq \|x'\|$. Il vient donc $\|z' + x - x'\| \leq \|x\| + \|x'\|$. En combinant ces estimations, on a

$$d \leq d' + \frac{\epsilon}{1+\epsilon} (\|x\| + \|x'\|). \quad (4.21)$$

Mais x et x' jouent un rôle symétrique. Il vient

$$d' \leq d + \frac{\epsilon}{1+\epsilon} (\|x\| + \|x'\|). \quad (4.22)$$

L'estimation 4.20 s'ensuit.

On écrit ensuite $x = y + z$ et $x = y' + w$ où $w = z' + x - x'$. Alors $\|w\|_* \leq 1 + \epsilon$ et $\|y'\| \leq d + \epsilon(\|x\| + \|x'\|)$, d'après 4.20. On peut alors appliquer le lemme 4.5.2 où $\eta = \epsilon$ et $\gamma = \|x\| + \|x'\|$. Il vient $\|y - y'\| \leq 7\sqrt{2\epsilon}\gamma$. On obtient bien 4.19. ■

Donnons sans plus tarder, une application à ces résultats.

4.6 Lien avec l'algorithme ORF

Nous allons appliquer le théorème 4.4.1 dans le cas où $H = L^2(\mathbb{R}^2)$ et $F = \{v \in L^2 / \|v\|_* \leq 1\}$. Rappelons que $\|\cdot\|_*$ est la norme duale de la norme dans \mathcal{BV} . L'ensemble F est alors convexe et fermé. Il n'est ni compact pour la

topologie $\sigma(F, L^2)$, ni pour la topologie $\sigma(F, \mathcal{BV})$. Toute la difficulté provient de ce que $\int u w dx$ n'a pas de sens si $u \in BV$ et $w \in \mathcal{BV}^*$. Pour contourner les difficultés, nous disposons du lemme 1.2.1 ainsi que du lemme suivant :

Lemme 4.6.1 *Si $u \in L^2$, on a $\|u\|_{BV} = \sup_{v \in F} \int uv$.*

On désigne par φ une fonction positive de classe \mathcal{C}^2 , à support compact et d'intégrale égale à 1. On pose $\varphi_\epsilon = \epsilon^{-2} \varphi(\frac{x}{\epsilon})$ et $u_\epsilon = u * \varphi_\epsilon$. Alors (lemme 1.1.1), $\|u - u_\epsilon\|_2$ tend vers 0 quand ϵ tend vers 0 et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_\epsilon\|_{BV} = \|u\|_{BV}$. Il existe aussi une suite $w_\epsilon \in G$ telle que $\int u_\epsilon w_\epsilon dx = \|u_\epsilon\|_{BV}$ et $\|w_\epsilon\|_* = 1$. On écrit alors $w_\epsilon = \operatorname{div} G_\epsilon$ où $\|G_\epsilon\|_\infty = 1$. Alors il vient $\int u_\epsilon w_\epsilon dx = -\int \nabla u_\epsilon G_\epsilon dx$. Or $\nabla u_\epsilon \in L^1$. Il existe donc un réel R suffisamment grand, tel que, si l'on pose $G_{\epsilon,R} = G_\epsilon \chi_{|x| \leq R}$, on ait

$$\left| \int \nabla u_\epsilon G_{\epsilon,R} dx + \|u_\epsilon\|_{BV} \right| \leq \epsilon. \quad (4.23)$$

On écrit enfin $\int \nabla u_\epsilon G_{\epsilon,R} dx = -\int u \operatorname{div} (\varphi_\epsilon * G_{\epsilon,R}) dx$ (on suppose que $\varphi(-x) = \varphi(x)$). On a $\|\operatorname{div} (G_{\epsilon,R} * \varphi_\epsilon)\|_* \leq \|G_{\epsilon,R} * \varphi_\epsilon\|_\infty \leq \|G_{\epsilon,R}\|_\infty \leq 1$. Alors $\left| \|u\|_{BV} - \int u \operatorname{div} (\varphi_\epsilon * G_{\epsilon,R}) \right|$ tend vers 0 quand ϵ tend vers 0. Le fait que $\operatorname{div} (\varphi_\epsilon * G_{\epsilon,R}) \in L^2$ permet de conclure. ■

Dans ce cas, la fonction p définie sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ par $p(u) = \sup_{v \in F} \int u v dx$ est $p(u) = \|u\|_{BV}$. La fonctionnelle J est alors $J(u) = \|u\|_{BV} + \lambda \|f - u\|_2^2$. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème 4.4.1 pour retrouver le fait que \bar{v} est la projection orthogonale de $f \in L^2$ sur $(2\lambda)^{-1}F$. Le théorème de stabilité 4.5.1 s'ensuit.

Concluons cette partie en indiquant que nous allons utiliser les résultats de ce chapitre à l'espace $\dot{B}_1^{1,\infty}$. La partie qui suit a pour but de montrer le lien entre les espaces BV et $\dot{B}_1^{1,\infty}$. Puis, nous étudierons un nouvel algorithme basé sur la fonctionnelle $\|u\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} + \lambda \|v\|_2^2$.

Deuxième partie

Première variante de
l'algorithme ORF

Chapitre 5

Espaces de Besov homogènes

Comme nous l'avons montré au Chapitre 2, le calcul des normes dans l'espace \mathcal{BV}^* est difficile et même impossible dans certains cas. Ceci explique pourquoi l'on cherchera à remplacer \mathcal{BV} et \mathcal{BV}^* par deux espaces plus simples, dont les normes soient d'accès direct. Dans [40], Ronald De Vore et ses collaborateurs proposent d'utiliser l'espace $\dot{B}_1^{1,1}$ qui est caractérisé par la propriété suivante. Soit $2^j\psi(2^jx - k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^2$, $\psi \in \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$, une base orthonormée d'ondelettes régulières et localisées. Alors $f \in \dot{B}_1^{1,1}$ équivaut à $f(x) = \sum_j \sum_k c_{j,k} 2^j \psi(2^j x - k)$ où $\sum_j \sum_k |c_{j,k}| = \|f\|_{\dot{B}_1^{1,1}}$ (cette égalité qui définit le membre de droite doit être remplacée par une équivalence si une autre norme est choisie pour $\dot{B}_1^{1,1}$).

Le défaut de cette approche est que les fonctions indicatrices d'ensembles rectifiables n'appartiennent pas à $\dot{B}_1^{1,1}$. La vertu de cette approche est que minimiser $\|u\|_{\dot{B}_1^{1,1}} + \lambda \|v\|_2^2$ sur l'ensemble des décompositions $f = u + v$ conduit au wavelet shrinkage. Plus précisément, notons $u_{j,k}$ et $f_{j,k}$ les coefficients d'ondelette des fonctions u et f . On cherche alors à minimiser $\sum_j \sum_k |u_{j,k}| + \lambda |f_{j,k} - u_{j,k}|^2$. Cela revient à minimiser, pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^2$, $|u_{j,k}| + \lambda |f_{j,k} - u_{j,k}|^2$. La solution est donnée par $u_{j,k} = \epsilon_{j,k} (|f_{j,k}| - \frac{1}{2\lambda})^+$ où $\epsilon_{j,k}$ est le signe de $f_{j,k}$.

Dans ce chapitre et le suivant, nous étudions une variante de l'algorithme d'ORF où $\dot{B}_1^{1,1}$ est remplacé par $\dot{B}_1^{1,\infty}$. Non seulement nous montrerons que

l'on a

$$\|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \leq 2 \|f\|_{BV} \leq 2 \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \quad (5.1)$$

si f est la fonction indicatrice d'un ensemble Borélien arbitraire, mais nous verrons que cette équivalence de normes est encore vraie si, l'entier N étant fixé, $f = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{E_j}$ où les c_j sont des constantes arbitraires et E_j des ensembles Borélien arbitraires. On a alors

$$\frac{1}{2} \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \leq \|f\|_{BV} \leq C_0 N \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}. \quad (5.2)$$

Ces remarques montrent que l'algorithme d'ORF basé sur la norme $\dot{B}_1^{1,\infty}$ a, en un sens, une triple vertu :

- (a) il permet d'obtenir des bords nets,
- (b) la solution est fournie par un algorithme trivial,
- (c) pour des images étagées, la fonctionnelle d'énergie est du même ordre de grandeur que celle utilisée dans ORF.

5.1 Espaces de Lorentz

Commençons par quelques rappels sur les espaces de Lorentz. Pour une fonction f , définie sur \mathbb{R}^n , à valeur dans \mathbb{R} , on définit f_* par

$$f_*(\alpha) = |\{x \in \mathbb{R}^n / |f(x)| > \alpha\}|, \quad (5.3)$$

où $\alpha > 0$ et $|E|$ est la mesure de Lebesgue de E . La fonction f_* est alors une fonction décroissante. On définit la "fonction inverse" $f^*(t)$, pour $t > 0$,

$$f^*(t) = \inf\{\alpha / f_*(\alpha) \leq t\}.$$

La fonction f^* est alors décroissante. A partir de là, on définit l'espace de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p, q \leq \infty$, comme étant l'espace des fonctions mesurables de \mathbb{R}^n à valeur dans \mathbb{R} vérifiant

$$\left(\int_0^{+\infty} (f^*(t) t^{1/p})^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \quad (5.4)$$

Le lecteur modifiera la définition dans le cas où $p = \infty$ ou $q = \infty$. Cette dernière quantité définit la norme dans cet espace, notée $\|\cdot\|_{p,q}$.

Quant à $L^{p,\infty}$, $p > 1$, on pose en général $\|f\|_{p,\infty} = \sup_{\lambda>0} \lambda |\{ |f(x)| > \lambda \}|^{1/p}$. Ceci ne définit pas une norme. L'inégalité triangulaire est mise en défaut. Pour remédier à ce problème, on se sert de l'inégalité de Kolmogorov :

Lemme 5.1.1 *Une fonction f appartient à l'espace de Lorentz $L^{p,\infty}$ si et seulement si il existe une constante C telle que pour tout ensemble Borélien de mesure finie E ,*

$$\left| \int_E f(x) dx \right| \leq C |E|^{1/q} \quad (5.5)$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On définit alors $\|f\|_{p,\infty} = \sup_E |E|^{-1/q} |\int_E f(x) dx|$. L'inégalité triangulaire est alors immédiate. Cette nouvelle fonction définit bien une norme sur $L^{p,\infty}$. Cette observation ne s'applique pas à $L^{1,\infty}$.

Pour la commodité du lecteur, nous donnons une preuve du lemme 5.1.1.

Montrons le sens direct. Pour cela on introduit $\Omega_0 = \{ |f(x)| < 2^{j_0} \}$ et $F_j = \{ 2^j \leq |f(x)| < 2^{j+1} \}$ pour $j \geq j_0$. Considérons un ensemble Borélien E de mesure finie. On écrit $E = (E \cap \Omega_0) \cup \bigcup_{j \geq j_0} (E \cap F_j)$.

Alors, on obtient

$$\left| \int_E f(x) dx \right| \leq \int_{E \cap \Omega_0} |f(x)| dx + \sum_{j \geq j_0} \left| \int_{E \cap F_j} f(x) dx \right| \leq 2^{j_0} |E| + \sum_{j \geq j_0} C 2^{j+1} 2^{-pj}.$$

D'où

$$\left| \int_E f(x) dx \right| \leq C(2^{j_0} |E| + 2^{(1-p)j_0}).$$

Prenons j_0 tel que $2^{j_0} \approx |E|^{-1/p}$. Il vient alors $|\int_E f(x) dx| \leq C |E|^{1/q}$.

Réciproquement, supposons que 5.5 soit vérifiée. Pour tout $\lambda > 0$, posons $E = \{|f(x)| > \lambda\}$. On écrit $E = E^+ \cup E^- = \{f(x) > \lambda\} \cup \{f(x) < -\lambda\}$. Montrons que E^+ et E^- sont de mesures finies. Pour cela, considérons $E_k = E^+ \cap \{|x| \leq k\}$ pour $k > 0$. Alors $\lambda|E_k| \leq \int_{E_k} f(x)dx \leq C|E_k|^{1/q}$. Donc $|E_k| \leq C^p\lambda^{-p}$. En faisant tendre $k \rightarrow \infty$, on a $|E^+| \leq C^p\lambda^{-p}$. De même, on a $|E^-| \leq C^p\lambda^{-p}$.

Or $|E| = |E^+| + |E^-|$. Donc $|E| \leq 2C^p\lambda^{-p}$, ce qui achève la preuve. ■

5.2 Réalisation des espaces de Besov homogènes

Dans cette section, nous rappelons la définition des espaces de Besov, homogènes et inhomogènes en dimension n . Pour cela, nous suivons G. Bourdaud et Y. Meyer [16] [17]. Puis, nous parlerons brièvement des problèmes de “réalisation” des espaces de Besov homogènes en vue de faire du calcul fonctionnel [18].

On considère une partition dyadique de l'unité

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^j \xi) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (5.6)$$

où $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est telle que sa transformée de Fourier $\hat{\psi}$ est portée par la couronne $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$. On définit la fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par sa transformée de Fourier

$$\hat{\varphi}(\xi) = 1 - \sum_{j \geq 1} \hat{\psi}(2^{-j} \xi). \quad (5.7)$$

On vérifie aisément que $\hat{\varphi}$ est portée par $|\xi| \leq 2$ et que $\hat{\varphi}(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$. On introduit alors les opérateurs Δ_j , $j \in \mathbb{Z}$, définis sur les distributions tempérées par $\Delta_j f = f \star \psi_j$ et $S_0 f = f \star \varphi$ où $\psi_j(\xi) = 2^{nj} \hat{\psi}(2^j \xi)$. A ce stade, on observe que pour tout polynôme f , $\Delta_j f = 0$, $j \in \mathbb{Z}$. Les opérateurs Δ_j opèrent sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ où \mathcal{P} est l'espace des polynômes. Le

fait que $\hat{\varphi}(\xi) + \sum_{j \geq 1} \hat{\psi}(2^{-j}\xi) = 1$ implique

$$f = S_0 f + \sum_{j \geq 1} \Delta_j f \quad \forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (5.8)$$

Cette série converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On voudrait le même énoncé en exploitant la relation $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^j \xi) = 1$, $\xi \neq 0$, et écrire

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f. \quad (5.9)$$

Mais cette relation ne peut avoir lieu dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Pour s'en convaincre, on considère pour f un polynôme non nul. Alors le membre de droite est identiquement nul. La relation 5.9 est valable pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ et la convergence a lieu dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$.

On définit alors l'espace de Besov homogène $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq +\infty$, comme le sous-espace de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ défini par

$$\|\Delta_j f\|_p \leq 2^{-sj} \epsilon_j. \quad (5.10)$$

où $\epsilon_j \in l^q(\mathbb{Z})$. On définit la norme de Besov par

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} = \left\| (2^{sj} \|\Delta_j f\|_p)_j \right\|_q. \quad (5.11)$$

Cette norme est *presque homogène* : il existe deux constantes $0 < c_1 \leq c_2$ tel que pour tout $f \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ et tout $\lambda > 0$,

$$c_1 \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \leq \lambda^{n/p-s} \|f(\lambda x)\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \leq c_2 \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}. \quad (5.12)$$

Pour obtenir une norme homogène, on remplace la partition discrète 5.6 par une partition continue [73], où on définit

$$\|f\| = \left\| t^s \|f \star \psi_t(x)\|_p \right\|_{L^q(dt/t)} \quad (5.13)$$

où $\psi_t(x) = t^n \psi(tx)$. Cette nouvelle norme est équivalente à celle définie par 5.11 et est homogène : $\|f(\lambda \cdot)\| = \lambda^{s-n/p} \|f(\cdot)\|$.

On définit l'espace de Besov inhomogène $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, comme le sous-espace de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ défini par

$$S_0 f \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{et pour } j \geq 1, \|\Delta_j f\|_p \leq 2^{-sj} \epsilon_j \quad (5.14)$$

où $\epsilon_j \in l^q(\mathbb{N})$.

On définit la norme de Besov par

$$\|f\|_{B_p^{s,q}} = \|S_0 f\|_p + \left\| (2^{sj} \|\Delta_j f\|_p)_{j \geq 1} \right\|_q. \quad (5.15)$$

Cette norme est composée de deux termes d'homogénéité différente (au sens strict, aucun des termes n'est homogène, mais *presque homogène*). En vue de nos applications en traitement d'image, on préférera utiliser les espaces de Besov homogènes. Les deux normes de Besov définies par 5.11 et 5.13 sont invariantes par translation. La définition équivalente 5.13 est aussi invariante par dilatation. Pour imposer l'invariance par rotation, on impose à la fonction ψ d'être radiale. Une façon de construire une telle fonction est de considérer une fonction radiale $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\hat{\varphi}(0) = 1$. La fonction $\hat{\varphi}$ est alors radiale. On impose que $\hat{\varphi}(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$ et $\hat{\varphi}(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq 2$. On pose alors $\psi(x) = \varphi(x) - 2^{-n}\varphi(x/2)$. Alors $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^j \xi) = 1$ pour $\xi \neq 0$ et $\hat{\psi}$ est portée par la couronne $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$. Par ce choix de la fonction ψ , les normes 5.11 et 5.13 sont invariantes par rotation.

Après avoir défini les espaces de Besov homogènes et une norme invariante par translation, rotation et dilatation (définition donnée par 5.13), nous souhaitons faire du calcul fonctionnel. Le problème qui se pose est que $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ est défini modulo les fonctions polynômes. Par exemple, faire "opérer" la fonction $|\cdot|$ sur $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ n'a pas de sens. Pour y remédier, il faut choisir un représentant pour chaque classe d'équivalence de façon linéaire et continue. C'est ce qu'on appelle "réaliser l'espace $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ ". Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [16] [18]. Nous donnons quelques

exemples de réalisations.

Le premier exemple est $0 \leq s < n/p$, $q = 1$. Soit $f \in \dot{B}_p^{s,1}(\mathbb{R}^n)$. En utilisant les inégalités de Bernstein [57] [63], pour $\tilde{p} \geq p$, on a

$$\|\Delta_j f\|_{\tilde{p}} \leq C 2^{nj(1/p-1/\tilde{p})} \|\Delta_j f\|_p \leq C 2^{nj(1/p-1/\tilde{p})-sj} \epsilon_j \quad (5.16)$$

où $\epsilon_j \in l^1(\mathbb{Z})$. En choisissant \tilde{p} telle que $1/p - 1/\tilde{p} = s/n$, on réalise $\dot{B}_p^{s,1}(\mathbb{R}^n)$ en ayant démontré la continuité de l'inclusion $\dot{B}_p^{s,1}(\mathbb{R}^n) \subset L^{\tilde{p}}(\mathbb{R}^n)$.

Le deuxième exemple est $s = n/p$, $p < +\infty$, et $q = 1$. Dans ce cas, les inégalités de Bernstein, pour $\tilde{p} = +\infty$, donnent $\|\Delta_j f\|_\infty \leq C 2^{nj/p} \|\Delta_j f\|_p \leq C \epsilon_j$. Ainsi $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f$ converge normalement dans \mathcal{C}_0 . Or $\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{P} = \{0\}$. On réalise alors $\dot{B}_p^{n/p,1}(\mathbb{R}^n)$ en considérant l'inclusion continue $\dot{B}_p^{n/p,1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}_0$.

Le troisième exemple est $s = 0$, $p = +\infty$ et $q = 1$. On reprend le deuxième exemple. La différence est que la série $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f$ converge normalement dans L^∞ . Or $L^\infty \cap \mathcal{P} = \{\text{constantes}\}$. On n'a donc pas encore réalisé $\dot{B}_\infty^{0,1}(\mathbb{R}^n)$. On a $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f \in L^\infty$. De plus, la distribution f tend faiblement vers 0 à l'infini [16][18], c'est-à-dire $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\frac{\cdot}{\lambda}) = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On considère alors $\tilde{\mathcal{C}}_0$ l'ensemble des distributions tendant faiblement vers 0 à l'infini. Alors $\tilde{\mathcal{C}}_0 \cap \mathcal{P} = \{0\}$. On réalise alors $\dot{B}_\infty^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ en considérant l'inclusion $\dot{B}_\infty^{0,1}(\mathbb{R}^n) \subset \tilde{\mathcal{C}}_0$.

Le dernier exemple est $s = p = 1$, $q = +\infty$ et $n > 1$. Nous nous proposons de réaliser l'espace $\dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ en établissant que $\dot{B}_1^{1,\infty} \subset L^{n',\infty}$, $n' = \frac{n}{n-1}$. En fait, $f(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Delta_j f$ et $\|\Delta_j f\|_1 \leq C 2^{-j}$. Grâce aux inégalités de Bernstein, on a $\|\Delta_j f\|_\infty \leq C 2^{(n-1)j}$. Considérons alors l'ensemble $E = \{|f(x)| > \lambda\}$, $\lambda > 0$. Désignons par m , un entier tel que $\frac{\lambda}{4} \leq C 2^{(n-1)m} < \frac{\lambda}{2}$. Alors $|\sum_{j < m} \Delta_j f(x)| < \frac{\lambda}{2}$ et donc $|f(x)| > \lambda$ implique $|\sum_{j \geq m} \Delta_j f| \geq$

$\frac{\lambda}{2}$. On a $\left\| \sum_{j \geq m} \Delta_j f \right\|_1 \leq 2C2^{-m}$. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la fonction $\sum_{j \geq m} \Delta_j f(x)$. La mesure de l'ensemble E est majorée par $|\{|\sum_{j \geq m} \Delta_j f(x)| > \frac{\lambda}{2}\}|$ qui est majorée par $\frac{4C2^{-m}}{\lambda} \approx \lambda^{-n'}$. Donc $f \in L^{n', \infty}$.

L'inclusion $\dot{B}_1^{1, \infty} \subset L^{n', \infty}$ implique (en fait est équivalente à)

$$\int_E |f(x)| dx \leq C |E|^{1/n} \quad (5.17)$$

Pour conclure cette section, nous rappelons l'inclusion continue de $\dot{B}_1^{s, 1}(\mathbb{R})$, $1 < s < 2$, dans l'espace de Hölder homogène \dot{C}^{s-1} . Cet espace est défini par la condition $\sup_{x \neq y} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^{s-1}} < +\infty$. Nous nous servons de ce résultat à la section 5.5. En fait, nous avons mieux. Nous montrons l'inclusion continue de $\dot{B}_1^{s, \infty}(\mathbb{R})$ dans \dot{C}^{s-1} . Pour prouver cette inclusion, on considère j_0 tel que $|y - x| \approx 2^{-j_0}$. On écrit $f(y) - f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta_j f(y) - \Delta_j f(x)$. On découpe cette somme en deux morceaux selon $j \geq j_0$ et $j < j_0$. Le fait que $\|\Delta_j f\|_1 \leq 2^{-sj} \epsilon_j$, $\epsilon_j \in l^\infty$, implique, en utilisant les inégalités de Bernstein, $\|\Delta_j f\|_\infty \leq C2^{(1-s)j} \epsilon_j$. Alors, dans l'expression de $f(y) - f(x)$, on majore la somme sur $j \geq j_0$ par la norme infinie. On a une majoration en $2^{-(s-1)j_0}$, c'est-à-dire, de l'ordre de $|y - x|^{s-1}$. Il reste à traiter la somme sur $j < j_0$. On écrit $\Delta_j f(y) - \Delta_j f(x) = \int_x^y \Delta_j \frac{d}{dx} f(t) dt$. Or $\frac{d}{dx} f \in \dot{B}_1^{s-1, \infty}$. On a $\left\| \Delta_j \left(\frac{d}{dx} f \right) \right\|_\infty \leq 2^j 2^{-(s-1)j} \epsilon'_j$, $\epsilon'_j \in l^\infty$. Ainsi la majoration sur $j < j_0$ est de l'ordre de $|y - x| 2^{(2-s)j_0}$, c'est-à-dire de l'ordre de $|y - x|^{s-1}$.

5.3 Caractérisation de $\dot{B}_1^{1, \infty}$

Nous allons nous concentrer sur $\dot{B}_1^{1, \infty}(\mathbb{R}^n)$ et définir une norme équivalente à celle définie par 5.11 ;

Théorème 5.3.1 *Soit $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, $n > 1$. Alors $f \in \dot{B}_1^{1, \infty}$ si et seulement si il existe une constante C telle que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|f(x + y) + f(x - y) - 2f(x)\|_1 \leq C |y|. \quad (5.18)$$

On définit alors une norme sur $\dot{B}_1^{1,\infty}$ en considérant la borne inférieure des constantes C vérifiant 5.18. Il s'agit d'une norme équivalente à celle définie par

$$\sup_j 2^j \|f \star 2^{nj} \psi(2^j x)\|_1 \quad (5.19)$$

où $\psi(x)$ est une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ définie comme dans la section 5.2.

Commençons par prouver le sens évident. On suppose 5.18 et on veut montrer que $f \in \dot{B}_1^{1,\infty}$. Avant de calculer $\Delta_j f$, il faut prouver que c'est bien défini. Pour cela, on montre qu'une fonction f vérifiant 5.18 est forcément à croissance lente, vérifiant

$$\int_{B(0,R)} |f(x)| dx = O(R^N) \quad (5.20)$$

où N fixé.

En effet, posons $c_k = \int_{Q+k} |f(x)| dx$ où $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ et $Q = [0, 1]^2$ et $g_i(x) = f(x + e_i) - f(x)$ où $i \in \{1, 2\}$ et $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Alors 5.18 entraîne

$$\int_{Q+k} |g_1(x)| dx \leq \int_{Q+k-e_1} |g_1(x)| dx + C. \quad (5.21)$$

Il en résulte, de façon évidente, que

$$\int_{Q+k} |g_1(x)| dx \leq |k_1| C + \int_{Q+k_2 e_2} |g_1(x)|. \quad (5.22)$$

Remarquons aussi que

$$c_{k+e_1} - c_k \leq \int_{Q+k} |g_1(x)| dx. \quad (5.23)$$

En effet, $|g_1(x)| \geq |f(x + e_1)| - |f(x)|$ que l'on intègre sur $Q + k$.

En combinant les relations 5.22 et 5.23, et en majorant $\int_{Q+(0,k_2)} |g_1(x)| dx$ par $c_{(0,k_2)} + c_{(1,k_2)}$, on obtient

$$c_{(k_1,k_2)} \leq C[(1 + |k_1|)(c_{(0,k_2)} + c_{(1,k_2)}) + k_1^2]. \quad (5.24)$$

Il suffit de faire la même chose par rapport à e_2 . On obtient alors $c_{(0,k_2)} \leq c_{(0,0)} + C k_2^2$, de même pour c_{1,k_2} . Finalement $c_k \leq C(1 + |k|^2)$. La relation 5.20 s'ensuit.

Ensuite, désignons par $\psi(x)$ une fonction radiale définie comme dans la section 5.2, alors

$$\Delta_j f(x) = \int f(x-2^{-j}y)\psi(y)dy = \frac{1}{2} \int [f(x+2^{-j}y)+f(x-2^{-j}y)-2f(x)]\psi(y)dy.$$

Et donc $\|\Delta_j f\|_1 \leq C2^{-(j+1)} \int |y| |\psi| (y) dy$.

En sens inverse, on suppose $\|\Delta_j f\|_1 \leq C2^{-j}$ et l'on utilise le lemme suivant

Lemme 5.3.1 *Pour toute fonction f , on a*

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)\|_{L^1(dx)} \leq 4\sqrt{2} |y|^2 \sup_{j,k} \|\partial_{j,k}^2 f\|_1. \quad (5.25)$$

Pour prouver le lemme 5.3.1, on utilise la fonction auxiliaire $\phi(t) = f(x+ty) + f(x-ty) - 2f(x)$ à laquelle on applique la formule de Taylor avec reste intégral

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \int_0^1 (1-t)\phi''(t)dt. \quad (5.26)$$

Le résultat 5.25 s'ensuit.

Revenons à la preuve du théorème 5.3.1. On part de

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta_j f = \sum_{-\infty}^{\infty} f_j. \quad (5.27)$$

On définit $m \in \mathbb{Z}$ par $2^{-m} \approx |y|$ et l'on pose

$$g = \sum_{-\infty}^m \Delta_j f, \quad h = \sum_{m+1}^{\infty} \Delta_j f.$$

Alors, sans tenir compte de la différence seconde et en utilisant la majoration $\|f_j\|_1 \leq C2^{-j}$, on a

$$\|h(x+y) + h(x-y) - 2h(x)\|_1 \leq 4 \sum_{m+1}^{\infty} \|f_j\|_1 \leq C2^{-m}. \quad (5.28)$$

En ce qui concerne g , on utilise le lemme 5.3.1 et le lemme de Bernstein :

$\|\partial_{j,k}^2 f_j\|_1 \leq C2^{2j} \|f_j\|_1$. Alors

$$\|g(x+y) + g(x-y) - 2g(x)\|_1 \leq C|y|^2 \sum_{-\infty}^m 2^j \leq C|y|^2 2^m. \quad (5.29)$$

Pour compléter la preuve du théorème 5.3.1, il suffit de combiner 5.28, 5.29 et $2^{-m} \approx |y|$. ■

Le résultat suivant est original à notre connaissance. Généralisons le théorème 5.3.1 de la manière suivante : on considère $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$ et l'on a alors

Théorème 5.3.2 *Soit $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, $n > 1$. Alors $f \in \dot{B}_1^{1,\infty}$ si et seulement si il existe une constante C telle que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|qf(x+py) + pf(x-qy) - f(x)\|_1 \leq C|y|. \quad (5.30)$$

Montrons le sens direct. On commence par les lemmes suivants

Lemme 5.3.2 *Soit f une fonction de la variable réelle x . Alors on a*

$$qf(x+py) + pf(x-qy) - f(x) = pqy \int f''(t) \theta\left(\frac{t-x}{y}\right) dt,$$

où $\theta(t)$ est la fonction définie à la figure 5.1.

La preuve de ce lemme s'obtient facilement en intégrant deux fois par partie. Cela s'écrit aussi

$$qf(x+py) + pf(x-qy) - f(x) = pqy^2 \int f''(x+ty) \theta(t) dt,$$

et finalement

$$\|qf(x+py) + pf(x-qy) - f(x)\|_{L^1(dx)} \leq \frac{pq}{2} y^2 \|f''\|_1. \quad (5.31)$$

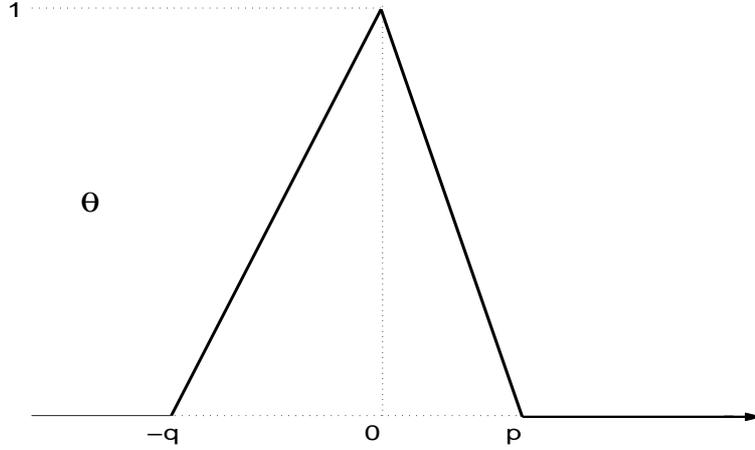


FIG. 5.1 – Fonction θ

Lemme 5.3.3 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^n . Alors il existe une constante C telle que, pour $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|qf(x + py) + pf(x - qy) - f(x)\|_{L^1(dx)} \leq C |y|^2 \|\nabla^2 f\|_1 \quad (5.32)$$

où $\nabla^2 = (\partial_{j,k}^2)$.

Pour démontrer 5.32, on peut se ramener, par rotation, au cas où $y = (h, 0, \dots, 0)$. On commence par geler les variables x_2, \dots, x_n et l'on interprète $qf(x + py) + pf(x - qy) - f(x)$ comme une fonction de la variable réelle x_1 . On obtient donc, pour tout x_2, \dots, x_n fixés,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |qf(x + py) + pf(x - qy) - f(x)| dx_1 \leq C |y|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| dx_1. \quad (5.33)$$

Il suffit ensuite d'intégrer 5.33 en x_2, \dots, x_n . ■

Lemme 5.3.4 Si $f \in \dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\|qf(x + py) + pf(x - qy) - f(x)\|_{L^1(dx)} \leq C |y| \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}.$$

Pour le voir, on définit l'entier $m \in \mathbb{Z}$ par $2^{-m} \leq |y| \leq 2^{-m+1}$. On écrit la série de Littlewood-Paley de f sous la forme $f = g + h$ où $g = \sum_{-\infty}^m f_j$ et

$h = \sum_{m+1}^{\infty} f_j$ avec $f_j = \Delta_j f$.

En ce qui concerne les f_j , on utilise le lemme 5.3.3 et les inégalités de Bernstein. Il vient

$$\|qf(x+py) + pf(x-ky) - f(x)\|_1 \leq C|y|^2 2^{2j} \|f_j\|_1. \quad (5.34)$$

Mais $f \in \dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ signifie $\|f_j\|_1 \leq C2^{-j} \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$. Cela entraîne

$$\|qg(x+py) + pg(x-ky) - g(x)\|_1 \leq C|y|^2 \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \sum_{-\infty}^m 2^j.$$

Donc, comme $|y| \approx 2^{-m}$, $\|qg(x+py) + pg(x-ky) - g(x)\|_1 \leq C \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} |y|$.

Quant à h , on écrit $\|qf_j(x+py) + pf_j(x-ky) - f_j(x)\|_1 \leq 2 \|f_j\|_1$. Il vient alors $\|qh(x+py) + ph(x-ky) - h(x)\|_1 \leq C2^{-m} \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$.

Réciproquement, supposons que $\|qf(x+py) + pf(x-ky) - f(x)\|_{L^1(dx)} \leq C|y|$, pour tout y . Estimons $\|\Delta_j f\|_1$ où $\Delta_j f = f \star \psi_j$ sont les blocs dyadiques. Posons $R(x, y) = qf(x+py) + pf(x-ky) - f(x)$. Alors $\|R(\cdot, y)\|_1 \leq C|y|$, pour tout y . Ceci implique $\|\Delta_j R(\cdot, y)\|_1 \leq C|y|$. La transformée de Fourier envoie L^1 dans l'algèbre de Wiener A : $\|\hat{f}\|_A = \|f\|_1$. Donc $\|\hat{R}(\xi, y)\hat{\psi}(2^{-j}\xi)\|_A \leq C|y|$. Or $\hat{R}(\xi, y) = (qe^{ip\xi \cdot y} + pe^{-iq\xi \cdot y} - 1)\hat{f}(\xi) = g(\xi, y)\hat{f}(\xi)$. On calcule alors la valeur moyenne de g sur la sphère $|y| = 2^{-j}$. Appelons $d\sigma(y)$ la mesure surfacique et notons $B(\xi) = \int_{|y|=2^{-j}} g(\xi, y) d\sigma(y)$. Alors

$$\left\| \hat{f}(\xi)\hat{\psi}(2^{-j}\xi)B(\xi) \right\|_A \leq C2^{-j}. \quad (5.35)$$

Remarquons que B ne s'annule qu'en $\xi = 0$ et au voisinage de 0, $B(\xi) = (|\xi|2^{-j})^2 + o(|\xi|^2)$. Alors, quitte à changer ψ , la relation 5.35 peut s'écrire

$$\left\| \hat{\psi}(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi) \right\|_A \leq C2^{-j} \quad (5.36)$$

Ainsi $\|\Delta_j f\|_1 \leq C2^{-j}$. Donc $f \in \dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Ceci clôt la démonstration du théorème 5.3.2. ■

5.4 Multiplicateur ponctuel de $\dot{B}_1^{1,\infty}$

Dans cette section, on se place en dimension 2. On s'intéresse aux multiplicateurs ponctuels de $\dot{B}_1^{1,\infty}$. Commençons par la remarque suivante. La fonction $\frac{1}{|x|}$ appartient à $\dot{B}_1^{1,\infty}$ qui est inclus dans $L^{2,\infty}$. Mais si l'on considère $\omega \neq 0$, alors $\frac{1}{|x|}e^{i\omega \cdot x}$ n'appartient plus à $\dot{B}_1^{1,\infty}$ mais reste toujours dans $L^{2,\infty}$. Pour éclaircir cette remarque, on est amené à étudier les multiplicateurs de $\dot{B}_1^{1,\infty}$. Le théorème suivant répond partiellement à la question.

Théorème 5.4.1 *Si $m \in \dot{B}_1^{2,\infty}(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, alors m est un multiplicateur ponctuel de $\dot{B}_1^{1,\infty}$. On a $\|mf\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \leq C(\|m\|_\infty + \|m\|_{\dot{B}_1^{2,\infty}})\|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$.*

Ce théorème n'est pas contradictoire avec la remarque précédente : $e^{i\omega \cdot x} \notin \dot{B}_1^{2,\infty}$ pour $\omega \neq 0$. En effet on remarque que $\Delta_0(e^{i\omega \cdot x}) = e^{i\omega \cdot x} \notin L^1$ si $|\omega| = 1$. Ce théorème se démontre par l'algorithme du "paraproduit" [2]. Par ailleurs, ce résultat n'est pas une caractérisation des multiplicateurs de $\dot{B}_1^{1,\infty}$. Voici les détails de la preuve.

Soit $f \in \dot{B}_1^{1,\infty}$. On décompose, par la méthode des paraproducts la fonction mf en

$$m(x)f(x) = \sum_j S_{j-3}(m)\Delta_j(f) + \sum_j S_{j-3}(f)\Delta_j(m) + \sum_{|j-j'|\leq 1} \Delta_j(f)\Delta_{j'}(m) \quad (5.37)$$

Notre démarche est la suivante. Nous allons traiter chacun des trois termes séparément et montrer qu'ils appartiennent à $\dot{B}_1^{1,\infty}$.

D'après les hypothèses, $\|\Delta_j(f)\|_1 \leq C2^{-j}$ et que $\|\Delta_j(m)\|_1 \leq C2^{-2j}$. De plus, le fait que $m \in L^\infty$ implique clairement que $\|S_{j-3}(m)\|_\infty \leq \|m\|_\infty$.

Lemme 5.4.1 *Si les f_j sont des fonctions, par ailleurs arbitraires, telles que $\|f_j\|_1 \leq C2^{-j}$ et $\|\Delta f_j\|_1 \leq C2^j$, alors $\sum_j f_j$ est dans $\dot{B}_1^{1,\infty}$.*

Ici Δf_j désigne le laplacien de f_j , à ne pas confondre avec le bloc dyadique dans l'analyse de Littlewood-Paley $\Delta_j f = f \star \psi_j$. Laissons la

preuve de ce lemme de côté et revenons au théorème principal. Nous traitons d'abord le premier membre de droite de l'équation 5.37. Il suffit d'appliquer le lemme 5.4.1. En effet posons $f_j = S_{j-3}(m)\Delta_j(f)$. On a $\|f_j\|_1 \leq \|S_{j-3}(m)\|_\infty \|\Delta_j(f)\|_1 \leq C \|m\|_\infty \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} 2^{-j}$. Les inégalités de Bernstein peuvent s'appliquer à f_j , car le support de la transformée de Fourier de f_j est inclus dans $|\xi| \leq C2^j$. Elles fournissent $\|\Delta f_j\|_1 \leq C2^j$. Donc $\sum_j f_j$ est dans $\dot{B}_1^{1,\infty}$.

Traitons le dernier terme de l'équation 5.37. Posons $f_{j,j'} = \Delta_j(f)\Delta_{j'}(m)$ pour $|j - j'| \leq 1$. Il vient

$$\|f_{j,j'}\|_1 \leq \|\Delta_j(f)\|_1 \|\Delta_{j'}(m)\|_\infty \leq C2^{-j}$$

De même les inégalités de Bernstein donnent $\|\Delta f_{j,j'}\|_1 \leq C2^j$. Donc, par le lemme 5.4.1, $\sum_{|j-j'|\leq 1} f_{j,j'}$ est dans $\dot{B}_1^{1,\infty}$.

Il reste à traiter le second terme de l'équation 5.37. On écrit $S_{j-3}(f) = \sum_{j' \leq j} \Delta_{j'}(f)$. Or, toujours d'après les inégalités de Bernstein, $\|\Delta_{j'}(f)\|_\infty \leq 2^{2j'} \|\Delta_{j'}(f)\|_1 \leq C2^{j'}$. Donc $\|S_{j-3}(f)\|_\infty \leq C2^j$. Posons maintenant $f_j = S_{j-3}(f)\Delta_j(m)$. Alors $\|f_j\|_1 \leq \|S_{j-3}(f)\|_\infty \|\Delta_j(m)\|_1 \leq C2^{-j}$. Toujours d'après les inégalités de Bernstein on a $\|\Delta f_j\|_1 \leq C2^j$. Donc par application du lemme 5.4.1 on a $\sum_j f_j \in \dot{B}_1^{1,\infty}$.

La preuve du théorème 5.4.1 est alors complète.

Revenons maintenant à la preuve du lemme 5.4.1.

On écrit $f_j = \sum_k \Delta_k(f_j)$. Notons $f_{j,k} = \Delta_k(f_j)$. Posons alors $F_k = \sum_j f_{j,k}$. Cherchons à estimer $\|F_k\|_1$.

Pour cela on estime de deux manières $\|f_{j,k}\|_1$. D'abord on écrit $\|f_{j,k}\|_1 \leq \|f_j\|_1 \leq C2^{-j}$. D'où $\sum_{j \geq k} \|f_{j,k}\|_1 \leq C2^{-k}$.

Ensuite pour $j < k$, on fait intervenir Δf_j . Pour cela on écrit $\widehat{\Delta f_j}(\xi) = |\xi|^2 \widehat{f_j}(\xi)$. Donc $\widehat{f_{j,k}} = \widehat{f_j} \widehat{\psi}(\frac{\xi}{2^k})$. On introduit alors $\widetilde{\psi}$ défini par $\widetilde{\psi}(\xi) = \frac{\widehat{\psi}(\xi)}{|\xi|^2}$.

Il vient alors que $f_{j,k} = \tilde{\psi}(2^k x) * \Delta f_j$. Donc

$$\|f_{j,k}\|_1 \leq \|\Delta f_j\|_1 \left\| \tilde{\psi}(2^k x) \right\|_1 \leq C 2^j 2^{-2k}$$

D'où $\sum_{j < k} \|f_{j,k}\|_1 \leq C \sum_{j < k} 2^{j-2k} \leq C 2^{-k}$. Finalement $\|F_k\|_1 \leq C 2^{-k}$ et donc $\sum_j f_j \in \dot{B}_1^{1,\infty}$. ■

5.5 Calcul fonctionnel sur $\dot{B}_1^{1,\infty}$

Dans cette section, nous suivons [16][17], et montrons que la fonction $x \rightarrow |x|$ opère sur l'espace de Besov homogène $\dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Dans [17], Y. Meyer et G. Bourdaud montrent ce résultat dans l'espace de Besov $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ où $p \in [1, +\infty]$, $q \in [1, +\infty]$ et $s \in]0, 1+1/p[$. Dans [16], les auteurs montrent ce résultat dans les espaces de Besov homogènes associés. Nous présentons, pour la commodité du lecteur, une preuve légèrement plus simple. Pour cela, nous adoptons la même démarche et montrons dans un premier temps que $x \rightarrow |x|$ opère sur $\dot{B}_1^{s,1}(\mathbb{R})$ pour $1 < s < 2$, puis nous étendons ce résultat à la dimension n en utilisant la propriété de Fubini que possède $\dot{B}_1^{s,1}(\mathbb{R}^n)$. On conclut sur $\dot{B}_1^{1,\infty}$ par approximation non linéaire.

Rappelons qu'une fonction f est élément de l'espace $\dot{B}_1^{\sigma,1}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \sigma < 1$, si et seulement si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, avec $1 - 1/p = \sigma/n$ et

$$I_\sigma = \int \int \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|^{n+\sigma}} dx dy < \infty$$

On définit alors la norme de f dans $\dot{B}_1^{\sigma,1}$ par

$$\|f\|_{\dot{B}_1^{\sigma,1}} = I_\sigma \tag{5.38}$$

Il est alors trivial de vérifier que, pour toute fonction lipschitzienne Φ telle que $\Phi(0) = 0$, on a $f \in \dot{B}_1^{\sigma,1}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \Phi(f) \in \dot{B}_1^{\sigma,1}(\mathbb{R}^n)$. Plus précisément,

$$\|\Phi(f)\|_{\dot{B}_1^{\sigma,1}} \leq \|\Phi'\|_\infty \|f\|_{\dot{B}_1^{\sigma,1}} \tag{5.39}$$

Si $1 < s < 2$, il faut remplacer I_σ par

$$J_\sigma = \int \int \frac{|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)|}{|y-x|^{n+\sigma}} dx dy$$

et le raisonnement précédent n'est plus valable. Si $n = 1$, rappelons que $\dot{B}_1^{s,1} \subset \dot{C}^{s-1}$ (section 5.2). Dans ce cas, on observera que $f \in \dot{B}_1^{s,1}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f' \in \dot{B}_1^{\sigma,1}(\mathbb{R})$, $\sigma = s - 1$; on a donc

$$\|f\|_{\dot{B}_1^{s,1}} = \int \int \frac{|f'(y)-f'(x)|}{|y-x|^s} dx dy$$

Lemme 5.5.1 *En dimension 1, pour $1 < s < 2$, $\sigma = s - 1$, on a*

$$J_\sigma \approx \|f\|_{\dot{B}_1^{s,1}} \quad (5.40)$$

.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\theta_\lambda(x) = (x - \lambda)^+$.

Théorème 5.5.1 *Si $1 < s < 2$ et $n \geq 1$, il existe une constante C dépendant de n et s telle que, uniformément en λ , on ait, pour tout $f \in \dot{B}_1^{s,1}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|\theta_\lambda(f)\|_{\dot{B}_1^{s,1}} \leq C \|f\|_{\dot{B}_1^{s,1}} \quad (5.41)$$

Remarque 5.5.1 *Le théorème 5.5.1 est trivial dans le cas $0 < s < 1$ et $n \geq 1$. On étudiera plus loin les cas extrêmes $s = 0$ et $s = 2$ ainsi que le cas particulier $s = 1$.*

Nous débutons la preuve du théorème par le cas $n = 1$ et les deux lemmes suivants :

Lemme 5.5.2 *Soit $0 < \sigma < 1$ et $p = 1/(1 - \sigma)$, alors*

$$\dot{B}_1^{\sigma,1} \subset L^{p,1}$$

Lemme 5.5.3 *Soit $0 < \sigma < 1$. Il existe une constante C telle que, pour tout $f \in \dot{B}_1^{\sigma,1}$,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{-\sigma} |f(x)| dx \leq C \|f\|_{\dot{B}_1^{\sigma,1}}.$$

Le lemme 5.5.2 implique de façon immédiate le lemme 5.5.3 car la fonction $|x|^{-\sigma} \in L^{q,\infty}$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Démontrons le lemme 5.5.2. Pour cela, montrons d'abord qu'il existe une constante C telle que pour toute fonction f vérifiant $\|f\|_1 \leq 1$ et $\|f\|_\infty \leq 1$, on a $\|f\|_{p,1} \leq C$. En effet, il est facile de vérifier que $f^*(t) \leq \frac{\|f\|_1}{t}$ et $f^*(t) \leq \|f\|_\infty$. Il suffit alors de décomposer $\|f\|_{p,1}$ (défini par (5.4)) en deux morceaux

$$\|f\|_{p,1} = \int_0^\infty f^*(t) t^{-\sigma} dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty t^{-\sigma} dt + \int_1^\infty \|f\|_1 t^{-1-\sigma} dt.$$

Le fait que $0 < \sigma < 1$ assure l'existence de la constante C annoncée.

Cela entraîne que pour $f \in L^1 \cap L^\infty$, on a $\|f\|_{p,1} \leq C \|f\|_1^{1/p} \|f\|_\infty^{1-1/p}$ comme on le voit en jouant sur les dilatations pour se ramener à $\|f\|_1 = \|f\|_\infty = 1$. Pour achever la démonstration du lemme 5.5.2, il suffit d'appliquer cette dernière estimation à chaque bloc dyadique $\Delta_j(f)$ pour $f \in \dot{B}_1^{\sigma,1}$. On se servant des inégalités de Bernstein, on a $\|\Delta_j(f)\|_\infty \leq C2^j \|\Delta_j(f)\|_1$; donc $\|\Delta_j(f)\|_{p,1} \leq C2^{j\sigma} \|\Delta_j(f)\|_1$. Ainsi, après sommation en $j \in \mathbb{Z}$, on a $\|f\|_{p,1} \leq \tilde{C} \|f\|_{\dot{B}_1^{\sigma,1}}$, où \tilde{C} est une constante ne dépendant que de σ .

Lemme 5.5.4 *Si $0 < \sigma < 1$, $f \in L^1[a, b]$ et $\int_a^b f(x) dx = 0$, alors on a*

$$\int_a^b |f(x)| |x - a|^{-\sigma} dx \leq C \int_a^b \int_a^b \frac{|f(y) - f(x)|}{|x - y|^{1+\sigma}} dx dy \quad (5.42)$$

où C ne dépend que de σ

Pour démontrer cette estimation fondamentale, on commence, par un changement d'échelle pour se ramener au cas où $a = 0$ et $b = 1$.

Pour établir (5.42) on découpe $[0, 1] \times [0, 1]$ en $\cup_{j \geq 0} W_j$ où la partition W_j , $j \in \mathbb{N}$, est définie par la figure 5.2 (où par les lignes qui suivent) Posons $I_{j,k} =$

		w_i	
			w_i
w_i			
	w_i		

FIG. 5.2 – Construction de W_j .

$[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$. Remarquons que $I_{j,k} = I_{j+1,2k} \cup I_{j+1,2k+1}$ et définissons W_j par

$$W_j = \bigcup_{0 \leq k < 2^j} (I_{j+1,2k} \times I_{j+1,2k+1}) \cup (I_{j+1,2k+1} \times I_{j+1,2k}).$$

Remarquons que si $(x, y) \in W_j$ alors $|x - y| \leq 2^{-j}$. Posons

$$\epsilon_j = \int \int_{W_j} |f(y) - f(x)| |y - x|^{-s} dx dy$$

A fortiori, il vient $\int \int_{W_j} |f(x) - f(y)| dx dy \leq 2^{-js} \epsilon_j$. Appelons $m_{j,k}$ la moyenne de f sur $I_{j,k}$. On a donc

$$\sum_{0 \leq k < 2^j} \left| \int_{I_{j+1,2k}} \int_{I_{j+1,2k+1}} (f(x) - f(y)) dx dy \right| \leq \epsilon_j 2^{-js},$$

ce qui entraîne

$$\sum_{0 \leq k < 2^j} |m_{j+1,2k} - m_{j+1,2k+1}| \leq \epsilon_j 2^{(2-s)j}$$

De façon évidente $m_{j,k} = \frac{1}{2}(m_{j+1,2k} + m_{j+1,2k+1})$, donc

$$\sum_{0 \leq k < 2^j} |m_{j,k} - m_{j+1,2k}| \leq \epsilon_j 2^{(2-s)j} \quad (5.43)$$

et de même

$$\sum_{0 \leq k < 2^j} |m_{j,k} - m_{j+1,2k+1}| \leq \epsilon_j 2^{(2-s)j} \quad (5.44)$$

Revenons alors à $\int \int_{W_j} |f(x) - f(y)| dx dy$ que l'on minore par

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{2^j-1} \int_{I_{j+1,2k}} \left| \int_{I_{j+1,2k+1}} (f(x) - f(y)) dy \right| dx + \sum_{k=0}^{2^j-1} \int_{I_{j+1,2k+1}} \left| \int_{I_{j+1,2k}} (f(x) - f(y)) dy \right| dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^j-1} \int_{I_{j+1,2k}} |f(x) - m_{j+1,2k+1}| 2^{-j} dx + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^j-1} \int_{I_{j+1,2k+1}} |f(x) - m_{j+1,2k}| 2^{-j} dx. \end{aligned}$$

Appelons alors $f_j(x)$ la fonction égale à $m_{j,k}$ sur $I_{j,k}$. En remplaçant $m_{j+1,2k}$ et $m_{j+1,2k+1}$ par $m_{j,k}$ grâce à 5.43 et 5.44, il vient

$$\int_0^1 |f(x) - f_j(x)| dx \leq 2^{-js} \epsilon_j. \quad (5.45)$$

Or $m_{0,0} = \int_0^1 f(x) dx = 0$. De proche en proche (5.43) et (5.44) entraîne qu'il existe une suite $\bar{\epsilon}_j \in l^1(\mathbb{N})$ vérifiant $|m_{j,k}| \leq \bar{\epsilon}_j 2^{(2-s)j}$. Ceci implique que $\|f_j\|_\infty \leq \bar{\epsilon}_j 2^{(2-s)j}$. Alors, quitte à modifier $\bar{\epsilon}_j$ et ϵ_j , on a

$$\|f_j - f_{j-1}\|_\infty \leq \bar{\epsilon}_j 2^{(2-s)j} \quad (5.46)$$

et grâce à (5.45),

$$\|f_j - f_{j-1}\|_1 \leq \epsilon_j 2^{-sj}. \quad (5.47)$$

Ceci entraîne que $\|f_j - f_{j-1}\|_{p,1} \leq (\epsilon_j + \bar{\epsilon}_j)$. Il suffit alors de sommer sur j pour en déduire que $f \in L^{p,1}[0, 1]$. Si f est prolongée par 0 en dehors de $[0, 1]$, cette nouvelle fonction appartient alors à $L^{p,1}(\mathbb{R})$. Puisque $|x|^{-\sigma} \in L^{q,\infty}$, cela conclut la preuve du lemme 5.5.4.

Revenons à la preuve du théorème 5.5.1 en commençant par la dimension 1. Considérons une fonction $f \in \dot{B}_1^{s,1}(\mathbb{R})$, $1 < s < 2$ et $\sigma = s - 1$. Rappelons que dans ce cas $f \in \dot{C}^\sigma$. A ce titre, f est continue, modulo les fonctions constantes. On raisonne sur un représentant de cette classe, noté encore f .

L'ensemble $\Omega = \{f(x) > \lambda\}$ est ouvert ; il est donc réunion d'intervalles ouverts disjoints $]a_j, b_j[$ auxquels il convient, peut-être, d'ajouter une ou deux demi-droites $] - \infty, \beta[$ ou $] \alpha, \infty[$.

Posons $f_j(x) = f(x) - \lambda$ si $a_j \leq x \leq b_j$, $f_j(x) = 0$ ailleurs, $g(x) = f(x) - \lambda$ si $x \leq \beta$, $g(x) = 0$ ailleurs et $h(x) = f(x) - \lambda$ si $x \geq \alpha$ et $g(x) = 0$ ailleurs. On a évidemment $\theta_\lambda f(x) = g(x) + h(x) + \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$. On a alors

Lemme 5.5.5 *Il existe une constante C_0 ne dépendant que de s , telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute $f \in \dot{B}_1^{s,1}(\mathbb{R})$, on ait*

$$\|g\|_{\dot{B}_1^{s,1}} + \|h\|_{\dot{B}_1^{s,1}} + \sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_{\dot{B}_1^{s,1}} \leq C_0 \|f\|_{\dot{B}_1^{s,1}} \quad (5.48)$$

Le lemme 5.5.5 entraîne évidemment la version unidimensionnelle du théorème 5.5.1. Pour établir 5.48, nous montrerons que

$$\|f_j\|_{\dot{B}_1^{s,1}} \leq C_0 \int_{a_j}^{b_j} \int_{a_j}^{b_j} \frac{|f'(x) - f'(y)|}{|x - y|^s} dx dy \quad (5.49)$$

et que

$$\|g\|_{\dot{B}_1^{s,1}} + \|h\|_{\dot{B}_1^{s,1}} \leq C_0 \|f\|_{\dot{B}_1^{s,1}}. \quad (5.50)$$

On a $\|f_j\|_{\dot{B}_1^{s,1}} = \int \int \frac{|f'_j(x) - f'_j(y)|}{|x - y|^s} dx dy$. On écrit alors

$$\|f_j\|_{\dot{B}_1^{s,1}} = I_1 + I_2 + I_3,$$

avec

$$I_1 = \int_{a_j}^{b_j} \int_{a_j}^{b_j} \frac{|f'(x) - f'(y)|}{|x - y|^s} dx dy$$

$$I_2 = \int_{\{x \in [a_j, b_j], y \notin [a_j, b_j]\}} |f'(x)| |x - y|^{-s} dx dy$$

et

$$I_3 = \int_{\{x \notin [a_j, b_j], y \in [a_j, b_j]\}} |f'(y)| |x - y|^{-s} dx dy.$$

Le premier terme d'erreur vaut $(s-1)^{-1} \int_{a_j}^{b_j} |f'(x)| (|x - a_j|^{-\sigma} + |x - b_j|^{-\sigma}) dx$ et est estimé grâce au lemme 5.5.4. On observera que $\int_{a_j}^{b_j} f'(x) dx = f(b_j) - f(a_j) = \lambda - \lambda = 0$. Le second terme d'erreur est identique. La preuve de 5.50 utilise les mêmes arguments.

Le théorème 5.5.1 est alors démontré pour $n = 1$. Passons à la dimension n et $1 < s < 2$. Pour cela on se sert de la méthode des rotations.

Rappelons qu'on peut choisir comme norme équivalente dans l'espace $\dot{B}_1^{s,1}(\mathbb{R}^n)$, pour $1 < s < 2$, la norme

$$\|f\|_{\dot{B}_1^{s,1}} = \int \int |f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)| |y|^{-n-s} dx dy$$

Employons la méthode des rotations. On pose, à cet effet, $y = \rho\nu$ et $x = t\nu + z$ où $r, t \in \mathbb{R}$, $\nu \in S^{n-1}$ et $z \cdot \nu = 0$. Alors, on a $2dxdy = |\rho|^{n-1} d\rho dt d\sigma_\nu(z) d\sigma(\nu)$, où $d\sigma_\nu(z)$ est la mesure superficielle sur $z \cdot \nu = 0$ et $d\sigma(\nu)$ la mesure sur S^{n-1} . Posons $g = \theta_\lambda(f)$. On a alors

$$\int \int |g(x+y) + g(x-y) - 2g(x)| |y|^{-n-s} dx dy =$$

$$\frac{1}{2} \int \int |g((\rho+t)\nu + z) + g((t-\rho)\nu + z) - 2g(t\nu + z)| |\rho|^{-1-s} d\rho dt d\sigma_\nu(z) d\sigma(\nu)$$

Considérons alors la fonction $\tilde{f}(t) = f(t\nu + z)$, ν et z fixés. \tilde{f} est clairement élément de $\dot{B}_1^{s,1}(\mathbb{R})$. On applique donc le théorème 5.5.1 à la fonction \tilde{f} puis on intègre par rapport à z et ν pour achever la démonstration. ■

Prouvons maintenant que $f \rightarrow \theta_\lambda(f)$ opère sur $\dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Pour cela on utilise une méthode d'approximation non linéaire.

Lemme 5.5.6 *Une fonction f appartient à $\dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si il existe une suite $(f_j)_{j \geq 0}$ dans l'espace $\dot{B}_1^{s,1}(\mathbb{R}^n)$, $s > 1$ et une suite positive $(\varepsilon_j)_{j \geq 0} \in l^\infty$ telles que*

- (i) $\|f_j\|_{\dot{B}_1^{s,1}} \leq \varepsilon_j 2^{j(s-1)}$
- (ii) $\|f - f_j\|_1 \leq \varepsilon_j 2^{-j}$;

de plus la norme $\|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$ est estimée par la borne inférieure des $\|\varepsilon_j\|_\infty$ associée à toutes les suites f_j que l'on peut envisager.

La preuve de ce lemme n'est pas compliquée. Il suffit de prendre $f_j = S_j(f)$. Les propriétés (i) et (ii) se vérifient immédiatement. La réciproque est aussi évidente.

Venons-en au théorème principal de cette section :

Théorème 5.5.2 *Il existe une constante C_0 telle que, pour tout λ réel, on ait*

$$\|\theta_\lambda(f)\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \leq C_0 \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \quad (5.51)$$

Pour le démontrer, nous allons appliquer le théorème 5.5.1 aux fonctions f_j . En effet, soit $f \in \dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. La suite $f_j = S_j(f)$ est dans $\dot{B}_1^{s,1}(\mathbb{R}^n)$, pour $s > 1$, et vérifie les hypothèses du lemme 5.5.6. Posons $g_j = \theta_\lambda(f_j)$. Nous savons que $f \rightarrow \theta_\lambda(f)$ opère sur $\dot{B}_1^{s,1}(\mathbb{R}^n)$. Le théorème 5.5.1 donne l'existence d'une constante C , indépendante de j , telle que $\|g_j\|_{\dot{B}_1^{s,1}} \leq C \|f_j\|_{\dot{B}_1^{s,1}}$. Il en résulte que

$$\|g_j\|_{\dot{B}_1^{s,1}} \leq C \varepsilon_j 2^{j(s-1)} \quad (5.52)$$

Or $\|\theta_\lambda(f) - g_j\|_1 \leq \|f - f_j\|_1$, donc

$$\|\theta_\lambda(f) - g_j\|_1 \leq \varepsilon_j 2^{-j} \quad (5.53)$$

On est alors en mesure d'appliquer à la fonction $\theta_\lambda(f)$ la réciproque du lemme 5.5.6 et conclure. ■

Revenons au cas $s = 1$. Nous étendons le théorème 5.5.1 pour $s = 1$. Pour cela, on utilise un lemme d'approximation non linéaire similaire au lemme 5.5.6 :

Lemme 5.5.7 *Une fonction f appartient à $\dot{B}_1^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si il existe une suite $(f_j)_{j \geq 0}$ dans l'espace $\dot{B}_1^{s,1}(\mathbb{R}^n)$, $1 < s < 2$ et une suite positive $(\varepsilon_j)_{j \geq 0} \in l^1$ telles que*

- (i) $\|f_j\|_{\dot{B}_1^{s,1}} \leq \varepsilon_j 2^{j(s-1)}$
 - (ii) $\|f - f_j\|_1 \leq \varepsilon_j 2^{-j}$;
- de plus la norme $\|f\|_{\dot{B}_1^{1,1}}$ est estimée par la borne inférieure des $\|\varepsilon_j\|_1$.

Il suffit de reprendre le raisonnement utilisé pour $\dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Etudions les cas extrêmes $s = 2$, $s = 0$ et considérons la fonction $x \rightarrow |x| = \theta_0(x) + \theta_0(-x)$. Plaçons-nous en dimension 1 et vérifions que le théorème 5.5.1 n'est plus valable. Prenons f_0 une fonction régulière à support compact vérifiant $f_0(x) = x$ sur $[-1, 1]$ et posons $f(x) = |f_0(x)|$. En raisonnant par l'absurde, supposons que f est dans $\dot{B}_1^{2,\infty}$. Alors $\|f\|_{\dot{B}_1^{2,\infty}} = \int \int \frac{|f'(x+y) + f'(x-y) - 2f'(x)|}{|x-y|^s} dx dy$. On minore le terme de droite par l'intégrale double sur le pavé $[-\frac{1}{2}, 0] \times [0, \frac{1}{2}]$ et on remarque que sur ce pavé on a la relation $f'(x+y) + f'(x-y) - 2f'(x) = 2$ si $x+y > 0$ et $f'(x+y) + f'(x-y) - 2f'(x) = 0$ si $x+y < 0$. On obtient alors

$$\|f\|_{\dot{B}_1^{2,\infty}} \geq \int_{-\frac{1}{2}}^0 \int_{-x}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{|x-y|^s} dy dx$$

Or l'intégrale de droite est divergente pour $s = 2$ (même pour $s \geq 2$).

Pour $s = 0$, il suffit de considérer $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 |x|} \theta(x)$ où θ est une fonction positive, régulière, valant 1 sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et à support inclus strictement dans $[-1, 1]$. Alors $\|\Delta_j f\|_1 \approx \frac{1}{j^2}$ alors que $\|\Delta_j |f|\|_1 \approx \frac{1}{|j|}$ (voir [77] chapitre V). Donc $f \in \dot{B}_1^{0,1}$ alors que $|f| \notin \dot{B}_1^{0,1}$!

Pour conclure, disons que le théorème 5.5.2 permettra de comparer les normes BV et $\dot{B}_1^{1,\infty}$. Ce sera l'objet du chapitre suivant. Notre motivation est de remplacer, dans le modèle ORF, la norme BV par la norme $\dot{B}_1^{1,\infty}$. L'inclusion continue $BV \subset \dot{B}_1^{1,\infty}$ nous donne une majoration de la norme $\dot{B}_1^{1,\infty}$ par la norme BV . La minoration, dans le cadre des fonctions étagées à un nombre de niveaux fixe, découlera du théorème 5.5.2.

Chapitre 6

Comparaison des normes BV et $\dot{B}_1^{1,\infty}$

Nous commençons par traiter deux cas particuliers avant d'accéder au théorème général (théorème 6.3.1). Ce théorème contient les cas particuliers, mais les preuves données ont leur intérêt propre. Dans tout ce chapitre, nous nous plaçons en dimension 2.

6.1 Ensembles à bords réguliers

On considère une partie A de \mathbb{R}^2 telle que ∂A soit \mathcal{C}^2 et $\chi_A \in BV$. On souhaite montrer que, dans ce cas, les normes BV et $\dot{B}_1^{1,\infty}$ sont équivalentes. Pour cela, on considère une fonction ψ définie par $\psi(x) = \varphi(x) - \frac{1}{4}\varphi(\frac{x}{2})$ où φ est positive, radiale, régulière, à support dans $|x| \leq \frac{1}{2}$ et d'intégrale 1. On pose $\psi_t(x) = t^{-2}\psi(\frac{x}{t})$, $t > 0$. Cette fonction est radiale, d'intégrale nulle et à support dans $|x| \leq t$. On a alors

Lemme 6.1.1 *Il existe une constante C ne dépendant que de ψ telle que*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|\chi_A \star \psi_t\|_1}{t} = C \|\chi_A\|_{BV}$$

En effet, notons $B(x, t)$ la boule de centre x et de rayon t . On a $I = \chi_A \star \psi_t(x) = \int_{A \cap B(x, t)} \psi_t(x - u) du$. Si $x \notin \partial A + B(x, t)$, soit $B(x, t) \subset A$ soit $A \cap B(x, t) = \emptyset$. Dans ce cas $\chi_A \star \psi_t(x) = 0$.

Considérons alors un point $x \in \partial A + B(x, t)$. On peut écrire $x = x_0 + \alpha tn$ pour $x_0 \in \partial A$, $\alpha \in [-1, 1]$ et n désigne le vecteur normal extérieur à la courbe ∂A en x_0 . Nous utilisons une méthode Blow up, expliquée par L.Evans dans [48] :

Notons $H(x_0) = \{y/n \cdot (y - x_0) = 0\}$, $H^+(x_0) = \{y/n \cdot (y - x_0) \geq 0\}$, $H^-(x_0) = \{y/n \cdot (y - x_0) \leq 0\}$ et $A_t(x_0) = \{y/t(y - x_0) + x_0 \in A\}$. Alors

Lemme 6.1.2

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\chi_{H^-(x_0)} - \chi_{A_t}\|_{L^1_{loc}} = 0 \quad (6.1)$$

Remarque 6.1.1 *Ce résultat reste valable si A est de périmètre fini et x_0 appartient à la frontière réduite $\partial^* A$.*

En faisant le changement de variable $y = \frac{u-x}{t} + x$, il vient $I_t = \int_{A_t(x) \cap B(x, 1)} \psi(x - y) dy$. Or $y \in A_t(x)$ signifie $y - \alpha tn + \alpha n \in A_t(x_0)$. Donc

$$I_t = \int_{B(x, 1)} \psi(x - y) \chi_{A_t(x_0)}(y - \alpha tn + \alpha t) dy. \quad (6.2)$$

Posons $J_t = \int_{B(x, 1)} \psi(x - y) \chi_{H^-(x_0)}(y - \alpha tn + \alpha t) dy$. D'après 6.1, $\lim_{t \rightarrow 0} |I_t - J_t| = 0$. Effectuons le changement de variable $u = y - \alpha tn$ sur J_t . Il vient

$$J_t = \int_{B(x_0, t)} \psi(x_0 - u) \chi_{H^-(x_0)}(u + \alpha n) du = J. \quad (6.3)$$

Ainsi $\lim_{t \rightarrow 0} I_t = J$. Or ψ est invariante par rotation et $H^-(x_0)$ est un demi-plan, donc $J = \int_{B(0, 1)} \psi(-u) \chi_{H^-(x_0) - x_0}(u + \alpha n) du = G(\alpha)$ avec $G(\alpha) = \int_{\Delta_\alpha} \psi(u) du$ où $\Delta_\alpha = \{x = (x_1, x_2) / x_1^2 + x_2^2 \leq 1; x_2 \geq \alpha\}$.

Revenons à notre problème. On veut estimer $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\partial A + B(0, t)} \frac{1}{t} |\chi_A \star \psi_t(x)| dx$. Pour cela, on utilise les nouvelles variables s et α où s désigne une abscisse curviligne sur ∂A et α est défini par $x = x_0(s) + \alpha tn(s)$; $n(s)$ désigne encore la normale extérieure en $x_0(s)$. Appelons γ la courbure en x_0 . Il vient

$$K_t = \frac{1}{t} \int_{\partial A + B(0, t)} |\chi_A \star \psi_t(x)| dx = \frac{1}{t} \int_{\partial A} \int_{-1}^1 (1 + \alpha \gamma(s) t) |\chi_A \star \psi_t(x)| d\alpha ds$$

Cette expression se décompose en deux termes

$$K_t = \int_{\partial A} \int_{-1}^1 |\chi_A \star \psi_t(x)| d\alpha ds + t \int_{\partial A} \int_{-1}^1 \alpha \gamma(s) |\chi_A \star \psi_t(x)| d\alpha ds$$

Le second terme tend vers 0 avec t car γ est bornée.

Quant au premier, nous savons que $|\chi_A \star \psi_t(x_0 + \alpha t n)|$ converge presque partout vers $|G(\alpha)|$. En fait, il y a même convergence uniforme. Le théorème d'Egorov [22] permet d'affirmer que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\partial A} \int_{-1}^1 |\chi_A \star \psi_t(x)| d\alpha ds = \int_{-1}^1 |G(\alpha)| d\alpha \int_{\partial A} ds. \quad (6.4)$$

Or $\int_{\partial A} ds = \|\chi_A\|_{BV}$. Posons $C = \int_{-1}^1 |G(\alpha)| d\alpha$. Il ne reste plus qu'à montrer que $C > 0$. Montrons que $G(\alpha) \neq 0$ si $\alpha = \frac{1}{2}$. On a $G(\frac{1}{2}) = \int_{\Delta_{1/2}} \psi(u) du$. On remplace alors ψ en fonction de φ . Il vient $G(\frac{1}{2}) = \int_{\Delta_\alpha} \varphi(u) du - \int_{\frac{1}{2}\Delta_\alpha} \varphi(u) du$. Mais, comme φ est à support dans $|u| \leq \frac{1}{2}$, le premier terme est nul. Finalement, $G(\frac{1}{2}) = - \int_{\frac{1}{2}\Delta_\alpha} \varphi(u) du < 0$. Ainsi la constante C est non nulle et convient. ■

Remarque 6.1.2 *Le lemme 6.1.1 reste valable lorsque $f = c_1 \chi_{E_1} + \dots + c_N \chi_{E_N}$, où E_i sont des ensembles fermés disjoints deux à deux, à frontière régulière et c_i des constantes arbitraires.*

Peut-on généraliser à des ensembles Boréliens moins réguliers ?

6.2 Ensembles à bords absolument continus

On considère un ensemble E défini à partir d'une fonction absolument continue $A(x_1)$:

Définition 6.2.1 *Une fonction $A(x)$ de la variable réelle x est absolument continue si sa dérivée $A'(x)$, prise au sens des distributions, appartient à $L^1(\mathbb{R})$.*

Théorème 6.2.1 Soit $A(x_1)$ une fonction absolument continue sur $[0, 1]$ vérifiant $A(x_1) > 0$ pour tout $x_1 \in [0, 1]$. On appelle $E = \{x = (x_1, x_2); 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq A(x_1)\}$. Alors, il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\|\chi_E\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \geq \gamma \|\chi_E\|_{BV} \quad (6.5)$$

où γ ne dépend que du choix de la norme $\dot{B}_1^{1,\infty}$.

Pour le voir, on appelle $\varphi(x)$ la fonction $c e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ pour $|x| < 1$ et 0 sinon où c est défini par $\int_{-1}^1 \varphi(x) dx = 1$. On posera $\psi(x) = \varphi''(x)$ et $\theta(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$. Ensuite $\varphi_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} \varphi(\frac{t}{\epsilon})$, $\psi_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} \psi(\frac{t}{\epsilon})$ et $\theta_\epsilon(t) = \theta(\frac{t}{\epsilon})$. On pose finalement

$$\begin{cases} \psi(x_1, x_2) = \psi(x_1)\psi(x_2) \\ \psi_\epsilon(x_1, x_2) = \psi_\epsilon(x_1)\psi_\epsilon(x_2) \end{cases}$$

Le théorème découle alors évidemment du lemme suivant :

Lemme 6.2.1

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \|\chi_E \star \psi_\epsilon\|_1 \geq \gamma \|\chi_E\|_{BV}. \quad (6.6)$$

Avant de donner la preuve du lemme 6.2.1, prévenons le lecteur de ce que $\sup_{\epsilon > 0} \|f \star \psi_\epsilon\|_1$ n'est pas une norme équivalente à la norme de f dans $\dot{B}_1^{1,\infty}$. En effet, l'ondelette utilisée est dégénérée : sa transformée de Fourier $\hat{\psi}$ ne vérifie pas la condition d'admissibilité $0 < c_1 \leq \int_0^\infty \left| \hat{\psi}(t\xi) \right|^2 \frac{dt}{t} \leq c_2 < \infty$ presque partout en ξ . Mais $\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1} \|\chi_E \star \psi_\epsilon\|_1 \leq \|\chi_E\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$.

La preuve du lemme 6.2.1 se décompose en plusieurs étapes. Tout d'abord on a,

Lemme 6.2.2 Posons

$$J_\epsilon(x_1, x_2) = - \int_{-1}^1 \varphi'(t) \varphi\left(\frac{x_2 - A(x_1 - \epsilon u)}{\epsilon}\right) A'(x_1 - \epsilon u) du. \quad (6.7)$$

Alors on a $\chi_E \star \psi_\epsilon(x) = J_\epsilon(x_1, x_2)$ pour $\epsilon \leq x_1 \leq 1 - \epsilon$.

En effet,

$$\chi_E \star \psi_\epsilon(x) = \int_{\{0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq A(y_1)\}} \int \psi_\epsilon(x_1 - y_1) \varphi_\epsilon(x_2 - y_2) dy_1 dy_2 =$$

$$\int_{\{0 \leq y_1 \leq 1\}} \int \psi_\epsilon(x_1 - y_1) \theta_\epsilon(x_2 - A(y_1)) dy_1$$

car $\theta_\epsilon(x_2) \int_0^1 \psi_\epsilon(x_1 - y_1) dy_1 = 0$ pour $\epsilon \leq x_1 \leq 1 - \epsilon$.

Arrivés à ce point, on intègre par partie. Les termes intégrés sont nuls car $\varphi'(\frac{x_1}{\epsilon}) = 0$ et $\varphi'(\frac{x_1-1}{\epsilon}) = 0$. Il vient

$$\chi_E \star \psi_\epsilon(x) = - \int_0^1 \varphi'(\frac{x_1-y_1}{\epsilon}) \varphi_\epsilon(x_2 - A(y_1)) A'(y_1) dy_1.$$

On fait alors le changement de variable $y_1 = x_1 - \epsilon u$. Il vient

$$\chi_E \star \psi_\epsilon(x) = - \int_{-1}^1 \varphi'(u) \varphi(\frac{x_2 - A(x_1 - \epsilon u)}{\epsilon}) A'(x_1 - \epsilon u) du$$

comme annoncé.

Revenons au lemme 6.2.1. Il vient, en faisant le changement de variable $x_2 = A(x_1) + \epsilon v$,

$$\epsilon^{-1} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \int | \chi_E \star \psi_\epsilon(x) | dx_2 dx_1 = \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \int | K_\epsilon(x_1, v) | dv dx_1$$

avec

$$K_\epsilon(x_1, v) = \int \varphi'(u) \varphi(\frac{A(x_1) + \epsilon v - A(x_1 + \epsilon u)}{\epsilon}) A'(x_1 + \epsilon u) du.$$

Il vient :

Lemme 6.2.3 *On a presque-partout en x_1 ,*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} K_\epsilon(x_1, v) = A'(x_1) \int \varphi'(u) \varphi(v - A'(x_1)u) du. \quad (6.8)$$

La preuve de ce lemme repose sur la notion de point de Lebesgue d'une fonction intégrable. Nous renvoyons le lecteur à la définition 1.2.4. Dans notre situation, la fonction intégrable est $A'(x_1)$ et nous avons donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 | A'(x_1) - A'(x_1 + \epsilon u) | du = 0.$$

Puisque φ est continue, il vient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} K_\epsilon(x_1, v) = A'(x_1) \int \varphi'(u) \varphi(v - A'(x_1)u) du = K(x_1, v)$$

comme annoncé.

Maintenant, considérons la fonction $\omega_\lambda(t) = \int \varphi'(u) \lambda \varphi(\lambda(t - u)) du$. On a

Lemme 6.2.4 *Il existe une constante $c_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda \geq 1$, $\int |\omega_\lambda(t)| dt \geq c_0$.*

La preuve facile de ce lemme est laissée au lecteur.

Nous pouvons conclure. Le lemme de Fatou implique

$$\int_0^1 \int |K(x_1, v)| dv dx_1 \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^{1-\epsilon} \int |K_\epsilon(x_1, v)| dv dx_1 \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1} \|\chi_E \star \psi_\epsilon\|_1.$$

Il reste à minorer le terme de gauche. On commence par intégrer en v , x_1 étant fixé. On a $\int |K(x_1, v)| dv = \int |A'(x_1)| \left| \int \varphi'(u) \varphi(v - A'(x_1)u) du \right| dv \geq c_0 |A'(x_1)|$ si $|A'(x_1)| \geq 1$ grâce au lemme 6.2.4. Il ne reste plus qu'à intégrer en x_1 . Il vient une minoration en $c_0 \int_{\{|A'(x_1)| \geq 1\}} |A'(x_1)| dx_1$.

Par ailleurs, on a $\int_{\{|A'(x_1)| < 1\}} |A'(x_1)| dx_1 \leq 1$ et il existe $c_1 > 0$, ne dépendant que de ψ , tel que $\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \|\chi_E \star \psi_\epsilon(x)\|_1 \geq c_1(|A(0)| + |A(1)| + 1)$ (on le voit par exemple en reprenant la preuve vue dans la section précédente). Finalement il existe $\gamma > 0$ tel que $\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \|\chi_E \star \psi_\epsilon(x)\|_1 \geq \gamma \|\chi_E\|_{BV}$. La preuve du lemme 6.2.1 est complète. ■

6.3 Généralisation

Nous souhaitons nous libérer des hypothèses faites sur le bord des ensembles considérés. Nous commençons par un résultat très utile, établi par Yves Meyer :

Théorème 6.3.1 *Si $f = \chi_E$, on a $\frac{1}{2} \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \leq \|f\|_{BV} \leq \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$*

La preuve du théorème 6.3.1, utilise le lemme évident suivant :

Lemme 6.3.1 *Si $a, b, c \in \{0, 1\}$, alors*

$$|a - b| \leq |a - 2b + c| \quad (6.9)$$

Alors si $\|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \leq 1$, on a

$$I(y) = \|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)\|_{L^1(dx)} \leq |y|.$$

Mais on a

$$|f(x+y) - f(x)| \leq |f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)|$$

et donc

$$\|f(x+y) - f(x)\|_{L^1(dx)} \leq |y|.$$

Finalement, $\|f\|_{BV} \leq 1$. En toute généralité, il en résulte que $\|f\|_{BV} \leq \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$ si $f = \chi_E$.

L'autre inégalité est immédiate, il suffit d'utiliser

$$|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)| \leq |f(x+y) - f(x)| + |f(x-y) - f(x)|.$$

■

Essayons de généraliser ce résultat à des fonctions qui prennent plusieurs valeurs. Voici un premier résultat :

Corollaire 6.3.1 *Soit $F \subset \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} un ensemble fini et soit $f \in \dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ une fonction à valeurs dans F . Alors $f \in BV(\mathbb{R}^2)$ et il existe une constante $C(F)$ telle que $\|f\|_{BV} \leq C(F) \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$.*

Pour le voir, on choisit $p \in]0, 1[$ et $q = 1-p$ de telle sorte qu'aucun élément de F ne s'écrive comme barycentre de deux autres points de F , à coefficients p et q . Alors si a, b et c appartiennent à F , on a bien $|b - a| \leq C(F) |pa + qb - c|$. On prend $a = f(x + qy)$, $b = f(x - py)$ et $c = f(x)$. On conclut en utilisant le théorème 5.3.2. ■

Dans l'énoncé qui suit, nous montrons que $C(F)$ ne dépend en fait que de la cardinalité de F , ce que la méthode précédente ne permettait pas d'établir.

Théorème 6.3.2 *Soit N un entier, $E_1, E_2, \dots, E_n \subset \mathbb{R}^2$ des ensembles Boréliens arbitraires et c_1, c_2, \dots, c_N des constantes réelles arbitraires. Posons $f(x) = c_1\chi_{E_1} + \dots + c_N\chi_{E_N}$. Alors il existe une constante C telle que*

$$\frac{1}{2} \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \leq \|f\|_{BV} \leq CN \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}. \quad (6.10)$$

L'inégalité 6.10 pose le problème ouvert de savoir si la constante CN est nécessaire. La première inégalité de 6.10 est évidente et ne suppose pas que $f(x)$ soit une fonction étagée à N niveaux.

Pour démontrer la seconde, nous utilisons le théorème 5.5.1.

Posons $\theta_\lambda(t) = (t - \lambda)^+$. Alors il existe C tel que pour tout λ on ait

$$\|\theta_\lambda(f)\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \leq C \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}. \quad (6.11)$$

Alors, posons pour $I = [a, b]$ un segment de \mathbb{R} , $a < b$, posons $\tau_I(t) = 0$ si $t \leq a$, $\tau_I(t) = t - a$ si $a < t \leq b$ et $\tau_I(t) = b - a$ si $t > b$. En remarquant que $\tau_I(x) = (x - a)^+ - (x - b)^+ = \theta_a(x) - \theta_b(x)$ et en utilisant le théorème 5.5.2, il vient

$$\|\tau_\lambda f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \leq C \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}. \quad (6.12)$$

Considérons une fonction f , étagée à N niveaux. On écrit $f = u - v$ où $u = \sup(f, 0)$ et $v = \sup(-f, 0)$. Nous savons alors, grâce à 6.11 pour $\lambda = 0$, que $\|u\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \leq C \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$ et de même pour v . On se ramène donc au cas où $f \geq 0$. On change alors un peu les notations et l'on range les valeurs prises par f dans l'ordre croissant, soit $0 < c_1 < c_2 < \dots < c_N$.

On appelle Ω_1 l'ensemble des x tel que $f(x) > 0$, $\Omega_2 = \{x/f(x) > c_1\}, \dots$, $\Omega_N = \{x/f(x) > c_{N-1}\}$. Alors

$$f(x) = c_1\chi_{\Omega_1} + (c_2 - c_1)\chi_{\Omega_2} + \dots + (c_N - c_{N-1})\chi_{\Omega_N}.$$

Appelons $I_1 = [0, c_1], \dots, I_N = [c_{N-1}, c_N]$ et $f_1 = \tau_{I_1}(f), \dots, f_N = \tau_{I_N}(f)$.

Alors

$$\begin{cases} \tau_{I_1}(f) = C_1 \chi_{\Omega_1} \\ \tau_{I_2}(f) = (C_2 - C_1) \chi_{\Omega_2} \\ \dots \\ \tau_{I_N}(f) = (C_N - C_{N-1}) \chi_{\Omega_N} \end{cases}.$$

On en déduit, en appliquant A.2,

$$\begin{cases} c_1 \|\chi_{\Omega_1}\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \leq C \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \\ \dots \\ (c_N - c_{N-1}) \|\chi_{\Omega_N}\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \leq C \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \end{cases}.$$

Arrivés à ce point, on utilise le fait que pour une fonction indicatrice, les normes BV et $\dot{B}_1^{1,\infty}$ sont équivalentes. Il vient donc

$$\begin{cases} c_1 \|\chi_{\Omega_1}\|_{BV} \leq C \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \\ \dots \\ (c_N - c_{N-1}) \|\chi_{\Omega_N}\|_{BV} \leq C \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \end{cases}.$$

Finalement, $\|f\|_{BV} \leq CN \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$. ■

Encore une fois, nous ne savons pas si la constante CN est nécessaire.

Nous allons maintenant examiner un cas particulier où la fonction f prend une infinité de valeurs de la forme 2^{-j} avec $j \geq 0$. On établira un résultat de même nature. Pour cela, on a besoin d'un lemme préparatoire

Lemme 6.3.2 *Soit $p \in]0, 1[$, $p \notin \mathbb{Q}$ et $q = 1 - p$. Alors il existe $\gamma(p, q) > 0$ tel que, pour tout $(j_1, j_2, j_3) \in \mathbb{N}^3$, on ait, soit $p2^{j_1} + q2^{j_2} - 2^{j_3} = 0$ et alors $j_1 = j_2 = j_3$ soit $|p2^{j_1} + q2^{j_2} - 2^{j_3}| \geq \gamma(p, q) \sup(2^{j_1}, 2^{j_2}, 2^{j_3})$.*

En effet, posons $m = \sup(j_1, j_2)$. On distingue trois cas :

- Si $j_3 \leq m - C$, alors 2^{j_3} est beaucoup plus petit que $p2^{j_1} + q2^{j_2} \geq \inf(p, q) 2^m$. On peut prendre par exemple C tel que $2^{-C} \leq \frac{1}{2} \inf(p, q)$. Et alors

$$|p2^{j_1} + q2^{j_2} - 2^{j_3}| \geq \frac{1}{2} \inf(p, q) 2^m \quad (6.13)$$

- Si $j_3 \geq m + 1$, alors $p2^{j_1} + q2^{j_2} \leq 2^m$ et

$$|p2^{j_1} + q2^{j_2} - 2^{j_3}| \geq \frac{1}{2} 2^{j_3}. \quad (6.14)$$

• Si $m - C + 1 \leq j_3 \leq m$, alors on met 2^m en facteur en supposant, pour simplifier les notations, $j_1 \geq j_2$. Il vient

$$p2^{j_1} + q2^{j_2} - 2^{j_3} = 2^m(p + q2^{-r} - 2^{-s}) \quad (6.15)$$

où $r \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s \leq C - 1$. On a par hypothèse $p \neq 2^{-s}$ pour ces valeurs de s ($p \notin \mathbb{Q}$). Donc, il existe $\beta > 0$ tel que $|p - 2^{-s}| \geq \beta$. Alors, il existe une constante positive C_1 , ne dépendant que de p et q , telle que, si $r \geq C_1(p, q)$, l'expression $p + q2^{-r} - 2^{-s}$ ne peut s'annuler. On peut prendre, par exemple, C_1 tel que $q2^{-C_1} \leq \frac{\beta}{2}$. Il ne reste alors qu'un nombre fini de valeurs de r à tester.

Supposons alors que $p + q2^{-r} - 2^{-s} = 0$. Alors, comme $p \notin \mathbb{Q}$, $r = s = 0$ et donc $j_1 = j_2 = j_3$ comme annoncé. La preuve du lemme est alors complète. ■

Lemme 6.3.3 *Sous les hypothèses du lemme 6.3.2, on a*
soit $|p2^{-j_1} + q2^{-j_2} - 2^{-j_3}| = 0$ et alors $j_1 = j_2 = j_3$
soit $|p2^{-j_1} + q2^{-j_2} - 2^{-j_3}| \geq \gamma(p, q)2^{-l}$ où $l = \inf(j_1, j_2, j_3)$.

La preuve découle du lemme précédent. ■

Théorème 6.3.3 *Soit $f \in \dot{B}_1^{1, \infty}(\mathbb{R}^2)$ une fonction à valeurs dans $\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^l}, \dots, 0\}$. Alors $f \in BV(\mathbb{R}^2)$.*

En effet, il suffit de remarquer que $|2^{-j_1} - 2^{-j_2}| \leq 2^{-l}$. Donc

$$|f(x + qy) - f(x - py)| \leq \frac{1}{\gamma(p, q)} |pf(x + qy) + qf(x - py) - f(x)|$$

Il ne reste qu'à intégrer en x et utiliser le théorème 5.3.2. ■

Pour conclure, disons néanmoins que les espaces $BV(\mathbb{R}^2)$ et $\dot{B}_1^{1, \infty}(\mathbb{R}^2)$ sont distincts. En effet nous savons que la fonction $f(x) = \frac{1}{|x|}$ appartient à $\dot{B}_1^{1, \infty}(\mathbb{R}^2)$. De même que $(|x|^2 + 1)^{-1/2}$. Mais f n'est évidemment pas dans $BV(\mathbb{R}^2)$. Cet exemple prouve que $\dot{B}_1^{1, \infty}(\mathbb{R}^2)$ n'est pas inclus dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Par ailleurs, $\dot{B}_1^{1, \infty}(\mathbb{R}^2)$ est inclus strictement dans $L^{2, \infty}(\mathbb{R}^2)$, comme

le prouve l'exemple de la fonction g définie par $g(x) = 2^{-j}$ si $2^j \leq |x| < 2^{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$ et $g(x) = 2$ si $|x| < 1$. En effet, il est clair qu'il existe C tel que, pour tout $\lambda > 0$, on ait $|\{|g(x)| > \lambda\}| \leq C\lambda^{-2}$. Il est évident que g n'appartient pas à $BV(\mathbb{R}^2)$, donc ne peut appartenir à $\dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ d'après le théorème précédent.

Rappelons aussi que les fonctions bornées de BV sont denses dans BV . Ce résultat est faux dans $\dot{B}_1^{1,\infty}$. Pour le voir, on montre qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\|f - g\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \geq \delta$, où $f(x) = |x|^{-1}$ et $g \in \dot{B}_1^{1,\infty} \cap L^\infty$. Posons $h = f - g$ et utilisons un argument de "Blow-up" ou "zoom". On forme $\lambda h(\lambda x)$. On obtient $f(x) - \lambda g(\lambda x) \rightarrow f(x)$ au sens des distributions. Si l'on avait $\|f(x) - \lambda g(\lambda x)\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \rightarrow 0$, on aurait $f = 0$ ce qui est absurde.

Après avoir traité ces différents cas, fort de la remarque 6.1.2, on peut énoncer la conjecture suivante

Conjecture : Existe-t-il deux constantes $C_1 > C_0 > 0$ telle que si $f = c_1\chi_{E_1} + \dots + c_N\chi_{E_N}$, on ait

$$C_0 \|f_N\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \leq \|f_N\|_{BV} \leq C_1 \|f_N\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \quad (6.16)$$

En utilisant le lemme 6.1.1, on peut étayer cette conjecture : si les ensembles E_i sont tous des cubes dyadiques $Q_{j,i}$ à une résolution j fixée, alors l'inégalité de droite est vraie avec une constante C_1 calculée comme dans le lemme 6.1.1, donc ne dépendant pas de la résolution.

On peut compléter le théorème 6.3.3 en se posant la question suivante : si f est à valeurs dans \mathbb{N} , a-t-on $\|f\|_{BV} \leq C \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$?

Observons pour commencer que c'est le cas si la progression arithmétique $\{0, 1, 2, \dots\}$ est remplacée par la progression géométrique $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^j, \dots\}$. Le raisonnement est le même que pour le théorème 6.3.3.

Chapitre 7

Nouvel algorithme

Nous avons mis en évidence, au Chapitre 6, le lien entre la norme $\dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ et la norme $BV(\mathbb{R}^2)$. Il est naturel de remplacer, dans la fonctionnelle d'Osher-Rudin-Fatemi, la norme BV par la norme $\dot{B}_1^{1,\infty}$ et d'étudier ce nouveau problème. On cherche alors à décomposer une image $f = u + v$ supposée à énergie finie, $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, en un sketch u dans l'espace de Besov homogène $\dot{B}_1^{1,\infty}$ et une composante texture ou bruit v dans $\dot{B}_\infty^{-1,1}$ en minimisant la fonctionnelle

$$\|u\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} + \lambda \|v\|_2^2 \quad (7.1)$$

L'espace $\dot{B}_\infty^{-1,1}$ jouera, en quelque sorte, le rôle de dual de $\dot{B}_1^{1,\infty}$. Nous définissons alors cette norme duale

Définition 7.0.1 *Par analogie avec le chapitre 3, nous posons $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_{\dot{B}_\infty^{-1,1}}$.*

Un problème se pose immédiatement : quelle norme sur $\dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ choisir ? Le choix de la norme définie par le théorème 5.3.1, c'est-à-dire $\|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} = \inf_{y \neq 0} |y|^{-1} \|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)\|_{L^1(dx)}$ a l'avantage d'être invariante par translation, dilatation et rotation. On a, pour $\lambda > 0$,

$$\|\lambda f(\lambda x)\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} = \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}. \quad (7.2)$$

L'inconvénient est qu'on ne sait pas calculer la norme duale correspondante. Dans la pratique, on lui préfère la norme, équivalente, définie à partir des

coefficients d'ondelette.

Considérons une base d'ondelettes orthonormale $2^j \psi(2^j x - k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^2$ et $\psi \in \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ où ψ_1 , ψ_2 et ψ_3 sont des fonctions de la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Nous définissons alors une norme équivalente à celle définie par le théorème 5.3.1, en posant

$$\|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} = \sup_j \sum_k |c_{j,k}| \quad (7.3)$$

où les $c_{j,k}$ sont les coefficients d'ondelette de la fonction f . De même, on considère l'espace E_0 , la fermeture de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ dans $\dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$. On définit alors sur $\dot{B}_\infty^{-1,1}$ une norme, équivalente à la norme duale de E_0 , en posant

$$\|f\|_* = \sum_j \sup_k |c_{j,k}| \quad (7.4)$$

L'utilisation des ondelettes permet alors de calculer la décomposition optimale pour le problème 7.1. Nous verrons qu'il s'agit d'une forme de wavelet shrinkage. Cependant, cette méthode présente deux inconvénients. La décomposition dépend du choix de l'ondelette et les normes définies par 7.3 et 7.4 ne sont plus invariantes par translation, rotation et dilatation.

7.1 Caractérisation de la solution

Rappelons que $\dot{B}_\infty^{-1,1}$ est un espace de distributions tempérées. Par exemple, $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} 2^j \cos(2^j x_1)$, $x = (x_1, x_2)$, appartient à $\dot{B}_\infty^{-1,1}$. En outre, $\dot{B}_1^{1,\infty}$ n'est pas inclus dans L^2 , mais est inclus dans l'espace de Lorentz $L^{2,\infty}$.

Lemme 7.1.1 *Supposons $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $u \in \dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ et $v \in \dot{B}_\infty^{-1,1}(\mathbb{R}^2)$. Si $f = u + v$ alors u et v appartiennent nécessairement à $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

Pour prouver le lemme, nous établirons une propriété plus précise, à savoir que

$$\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + 2 \|v\|_* \|u\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \quad (7.5)$$

Pour démontrer 7.5, le plus commode est d'utiliser une base d'ondelettes et d'utiliser les normes équivalentes définies par 7.3 et 7.4. On appelle $\alpha_{j,k}$

les coefficients de f , $\beta_{j,k}$ ceux de u et $\gamma_{j,k}$ ceux de v , pour $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^2$. On a donc $\alpha_{j,k} = \beta_{j,k} + \gamma_{j,k}$ et $\alpha \in l^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2)$, $\sup_j \sum_k |\beta_{j,k}| = \|u\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$, $\sup_k |\gamma_{j,k}| = \epsilon_j \in l^1(\mathbb{Z})$ avec $\|\epsilon_j\|_1 = \|v\|_*$.

Ceci étant, on en déduit que $\sum_k \beta_{j,k}^2$ est finie et la même propriété s'applique à $\gamma_{j,k} = \alpha_{j,k} - \beta_{j,k}$. On a $\alpha_{j,k}^2 = \beta_{j,k}^2 + \gamma_{j,k}^2 + 2\beta_{j,k}\gamma_{j,k}$. Il en résulte que

$$\sum_k \alpha_{j,k}^2 \geq \sum_k \beta_{j,k}^2 + \sum_k \gamma_{j,k}^2 - 2\|u\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \epsilon_j$$

ou encore

$$\sum_k \beta_{j,k}^2 + \sum_k \gamma_{j,k}^2 \leq \sum_k \alpha_{j,k}^2 + 2\|u\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \epsilon_j.$$

Il suffit de sommer en j pour conclure. ■

Notons, $F = \{v \in L^2 / \|v\|_{\dot{B}_\infty^{-1,1}} \leq 1\}$. L'ensemble F est une partie convexe, fermée de L^2 : on le vérifie en considérant les coefficients d'ondelettes. Considérons une suite $v^l \in F$ convergeant vers $v \in L^2$ dans L^2 . Notons $v_{j,k}^l$ les coefficients d'ondelettes associés. La convergence L^2 implique $v_{j,k}^l \rightarrow v_{j,k}$ quand $l \rightarrow \infty$. De plus, $\sup_j \sum_k |v_{j,k}^l| \leq 1$. Il suffit alors d'appliquer le lemme de Fatou pour en déduire que $\sup_j \sum_k |v_{j,k}| \leq 1$. Donc $v \in F$.

Pour toute fonction $u \in \dot{B}_1^{1,\infty}$, on a

Lemme 7.1.2

$$\|u\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} = \sup_{v \in F} \int uv dx. \quad (7.6)$$

On peut alors appliquer les résultats du Chapitre 4. En particulier, nous avons,

Théorème 7.1.1 *Pour toute fonction $f \in L^2$, la solution v_0 du problème 7.1, est caractérisée par*

$$v_0 = P_K(f), \quad (7.7)$$

où $K = (2\lambda)^{-1}F$.

En particulier si $\|f\|_* > \frac{1}{2\lambda}$, on a $\|v_0\|_* = (2\lambda)^{-1}$. Dans le cas contraire, $v_0 = f$. Comme l'a montré A. Chambolle dans le cadre du modèle ORF, ce théorème est équivalent au résultat suivant :

Théorème 7.1.2 (*Caractérisation*)

Considérons $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et soit $u_0 + v_0$ la décomposition optimale au problème 7.1.

Si $\|f\|_* \leq (2\lambda)^{-1}$, $u_0 = 0$

Dans le cas contraire, $f = u + v$ est la solution optimale au problème 7.1 si et seulement si $\|v\|_* = (2\lambda)^{-1}$ et $\int uv dx = \|u\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \|v\|_*$.

Avant de démontrer ce théorème, indiquons une conséquence essentielle. La composante v ne peut être nulle, sauf dans le cas trivial où $f = 0$. Le nouvel algorithme a le même défaut que l'algorithme ORF : si f est une image composée uniquement d'objets, l'algorithme ne redonne pas f . La composante v contient aussi des structures géométriques. Démontrons alors le théorème 7.1.2.

Soit $h \in \dot{B}_1^{1,\infty} \cap L^2$. On a, pour tout $\epsilon > 0$, $\|u_0\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} + \lambda \|v_0\|_2^2 \leq \|u_0 + \epsilon h\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} + \lambda \|v_0 - \epsilon h\|_2^2$. Il est classique d'éliminer le terme en ϵ^2 , $|\epsilon| \|h\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \leq 2\lambda \epsilon \int hv_0 dx$.

Ainsi pour tout $h \in L^2 \cap \dot{B}_1^{1,\infty}$, on a $\int hv_0 dx \leq (2\lambda)^{-1} \|h\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$. Il vient $\|v_0\|_* \leq (2\lambda)^{-1}$. Maintenant, fixons $h = u_0$. En reprenant les calculs précédents, on a $(2\lambda)^{-1} \|u_0\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} = \int u_0 v_0 dx$. Or $\int u_0 v_0 dx \leq \|u_0\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \|v_0\|_*$.

Ainsi, dès que $u_0 \neq 0$, $\|v_0\|_* = (2\lambda)^{-1}$.

•Supposons $\|f\|_* > (2\lambda)^{-1}$. On a nécessairement, par ce qui précède, $u_0 \neq 0$; donc $\|v_0\|_* = (2\lambda)^{-1}$ et $\int u_0 v_0 dx = \|u_0\|_* \|v_0\|_*$.

•Supposons $\|f\|_* \leq (2\lambda)^{-1}$. Montrons par l'absurde que $u_0 = 0$. Dans le cas contraire, on aurait $u_0 \neq 0$ et donc $\|v_0\|_* = (2\lambda)^{-1}$. On montre comme dans le cas du modèle ORF 3.1.1 que $\|f\|_* > \|v_0\|_*$, ce qui est absurde. Donc $u_0 = 0$ et $v_0 = f$.

Réciproquement, supposons que $u, v \in \dot{B}_1^{1,\infty} \times \dot{B}_\infty^{-1,1}$ vérifient $f = u + v$ et $\|u\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \|v\|_* = \int uv dx$ et $\|v\|_* = (2\lambda)^{-1}$. D'après le lemme 7.1.1, u et v appartiennent à L^2 . La démonstration est alors identique à celle du théorème

3.1.1. ■

Nous pouvons énoncer un premier théorème de stabilité, identique à celui du modèle ORF, à savoir

Théorème 7.1.3 *stabilité*

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Supposons que $\|f\|_* > \frac{1}{2\lambda}$. Notons $u_0 + v_0$ la décomposition obtenue par le nouvel algorithme. On considère un couple $(u, v) \in \dot{B}_1^{1,\infty} \times \dot{B}_\infty^{-1,1}$ vérifiant $f = u + v$, $\int uv dx \geq \|u\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \|v\|_* - \alpha$ et $\|v - v_0\|_* \leq \beta$, où $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{(\alpha,\beta) \rightarrow 0} \|u - u_0\|_2 = 0. \quad (7.8)$$

Nous verrons, quelques sections plus loin, d'autres théorèmes de stabilité utiles dans l'étude de cas concrets. Ce théorème ne découle pas de son analogue dans le modèle d'ORF (théorème 3.2.1) car $\dot{B}_\infty^{-1,1} \subset \mathcal{BV}^*$. La preuve de ce résultat est identique à celle rencontrée dans le cas du modèle ORF.

Il nous faut néanmoins justifier l'utilisation de l'espace $\dot{B}_\infty^{-1,1}(\mathbb{R}^2)$ pour modéliser les textures. Nous nous plaçons en dimension 2.

Théorème 7.1.4 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions vérifiant :*

- a) *supp $f_n \subset K$, pour tout n , et K est un compact fixé,*
- b) *il existe $q > 2$ et $C > 0$ tels que pour tout n , $\|f_n\|_q \leq C$,*
- c) *$f_n \rightharpoonup 0$ au sens des distributions.*

Alors, f_n tend vers 0 pour la norme $\dot{B}_\infty^{-1,1}$.

Pour prouver le théorème 7.1.4, nous montrons que pour $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour $n > N$, $\|f_n\|_* \leq \epsilon$. Pour cela on choisit une base ortho-normée d'ondelettes $\psi_{j,k} = 2^j \psi(2^j x - k)$ pour $j \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}^2$. La norme de f_n dans l'espace $\dot{B}_\infty^{-1,1}(\mathbb{R}^2)$ est estimée par $\|f_n\|_* = \sum_j \sup_k |c_{j,k}|$ où $c_{j,k} = \int f_n(x) \psi_{j,k}(x) dx$.

Nous allons donner deux majorations différentes de $|c_{j,k}|$. Les deux se servent des hypothèses (a) et (b). Soit p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $|c_{j,k}| \leq \|f_n\|_q \|\psi_{j,k}\|_p \leq C 2^{(1-2/p)j} \|\psi\|_p$. Remarquons que $p < 2$, donc $1 - 2/p < 0$. Ainsi nous avons

$$|c_{j,k}| \leq C_0 2^{(1-2/p)j}. \quad (7.9)$$

De même, nous savons que $\|f_n\|_1$, $n \in \mathbb{N}$, est une suite bornée. Il vient

$$|c_{j,k}| \leq C_0 2^j. \quad (7.10)$$

Grâce aux majorations 7.9 et 7.10, il existe un rang $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier n , $\sum_{j/|j| \geq j_0} \sup_k |c_{j,k}| \leq \epsilon$. Il reste à majorer $I = \sum_{|j| < j_0} \sup_k |c_{j,k}|$. Prenons ψ à support compact. Le nombre de coefficients $c_{j,k}$ non nuls, à j fixé, est fini, majoré par 2^{j_0} (à une constante multiplicative près). L'expression à majorer, I , est composée d'un nombre fini de termes ne dépendant que de ϵ . Or par l'hypothèse (c), on sait que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{j,k} = 0$. On peut alors trouver un rang N tel que pour $n \geq N$, $\sum_{|j| < j_0} \sup_k |c_{j,k}| \leq \epsilon$. La preuve est complète. ■

Cet algorithme a aussi la propriété d'effacer de la composante u les objets de taille petite. En effet on a

Théorème 7.1.5 *Il existe une constante C telle que pour tout ensemble Borélien E on ait*

$$\|\chi_E\|_* \leq C |E|^{1/2}. \quad (7.11)$$

Rappelons ici que L^2 n'est pas inclus dans $\dot{B}_\infty^{-1,1}$. Ce résultat est plus fort que l'énoncé correspondant où $\|\cdot\|_*$ est la norme dans \mathcal{BV}^* . Pour prouver le théorème 7.1.5, considérons une ondelette ψ et posons $\psi_{j,k} = 2^j \psi(2^j x - k)$ pour $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^2$. Posons $c_{j,k} = \int \chi_E(x) \psi_{j,k}(x) dx$, les coefficients d'ondelette de la fonction χ_E . Fixons $j_0 \in \mathbb{Z}$ que nous spécifierons plus tard. Clairement, si $j \geq j_0$, $|c_{j,k}| \leq 2^{-j} \|\psi\|_1$ et si $j < j_0$, $|c_{j,k}| \leq 2^j \|\psi\|_\infty |E|$. On utilise alors la norme équivalente dans $\dot{B}_\infty^{-1,1}$ définie par $\sum_j \sup_k |c_{j,k}|$. Il existe alors une constante C , ne dépendant que du choix de l'ondelette ψ telle que

$$\|\chi_E\|_* \leq C(2^{-j_0} + |E| 2^{j_0}). \quad (7.12)$$

Il suffit de trouver le j_0 optimal. Il vérifie $2^{j_0} \approx |E|^{-1/2}$. La preuve est complète. ■

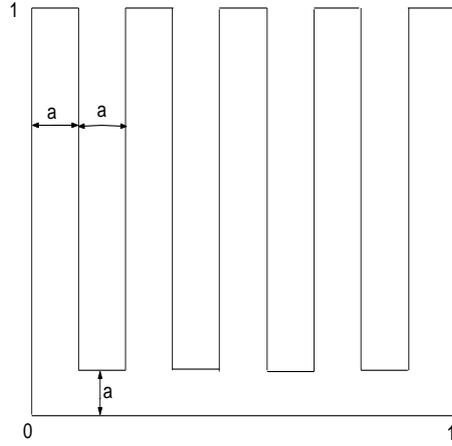


FIG. 7.1 – Fonction peigne.

7.2 Un exemple

On considère la fonction f_N définie comme la fonction indicatrice de l'ensemble représenté par la figure 7.1. On choisit a de sorte que $\|f_N\|_1 = \frac{1}{2}$. Le paramètre a est de l'ordre de $\frac{1}{4N}$. On note C le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. Nous écrivons $f_N = \frac{1}{2}\chi_C + g_N$ où $g_N = f_N - \frac{1}{2}\chi_C$. La suite g_N vérifie les hypothèses du théorème 7.1.4. Il vient $\lim_{N \rightarrow \infty} \|g_N\|_* = 0$. Décomposons, de façon optimale, f_N en $u_N + v_N$ et $\frac{1}{2}\chi_C$ en $u_0 + v_0$. Par le théorème de stabilité, nous avons $\lim_{N \rightarrow \infty} \|u_N - u_0\|_2 = 0$.

7.3 Stabilité

On note toujours Φ l'application de $L^2(\mathbb{R}^2)$ dans $\dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ qui à une fonction f , associe la composante u du nouvel algorithme. En reprenant la démonstration du corollaire 3.2.2, en posant $\epsilon = \|f_1 - f_0\|_*$, nous établissons, pour $f_0, f_1 \in L^2(\mathbb{R}^2)$,

Théorème 7.3.1

$$\|\Phi(f_1) - \Phi(f_0)\|_2 \leq C\epsilon^{1/2} (\|f_0\|_2 + \|f_1\|_2). \quad (7.13)$$

Ce résultat est, en fait, une conséquence des résultats obtenus au Chapitre 4. En effet le théorème de stabilité 4.5.1, entraîne l'estimation 7.13. Toutefois, nous ne pouvons remplacer ϵ par $\|f_1 - f_0\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$: on ne peut avoir, pour $\gamma > 0$ fixé,

$$\forall f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^2) \quad \|\Phi(f_2) - \Phi(f_1)\|_2 \leq C \|f_2 - f_1\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}^\gamma. \quad (7.14)$$

Pour le voir, nous considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{|x| |\ln(|x|)|^{1/3}} \varphi(x)$ où φ est une fonction radiale régulière à support compact de valeur 1 au voisinage de 0. Nous allons prouver que f est dans la fermeture de $L^2(\mathbb{R}^2)$ dans $\dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$. Pour cela, on considère $f_n = \min(f(x), n)$. Nous montrons que $\|f - f_n\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$ tend vers 0 pour n tendant vers l'infini.

En effet, remarquons que $f - f_n = (f - n)^+$. Notons $h = (f - n)^+$ et r_n la solution de $\frac{1}{r_n |\ln(r_n)|^{1/3}} = n$. Alors pour n assez grand,

$$(f - n)^+ = \begin{cases} \frac{1}{|x| |\ln(|x|)|^{1/3}} - n & \text{si } |x| \leq r_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Evaluons $\|h\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}$. Pour cela, on choisit une ondelette radiale ψ à support dans $|x| \leq 1$, uniquement pour des raisons techniques. Calculons $\Delta_j h(x) = \int h(x - y) 2^{2j} \psi(2^j y) dy$. De façon évidente $\Delta_j h(x) = 0$ pour $|x| \geq r_n + 2^{-j}$.

Il nous faut estimer $\|\Delta_j h\|_1$. Commençons par les échelles j vérifiant $r_n \leq 2^{-j}$. Il vient

$$\|\Delta_j h\|_1 \leq \int_{|x| \leq r_n} |h|(x) dx \leq \int_{|x| \leq r_n} \frac{1}{|x| |\ln(|x|)|^{1/3}} dx = 2\pi \int_0^{r_n} \frac{1}{|\ln r|^{1/3}} dr \leq 2\pi \frac{2^{-j}}{|\ln(r_n)|}.$$

Ainsi pour j tel que $r_n \leq 2^{-j}$,

$$\|\Delta_j h\|_1 \leq 2\pi \frac{2^{-j}}{|\ln(r_n)|}. \quad (7.15)$$

On peut remarquer que l'estimation précédente reste valable pour les j tels que $\frac{r_n}{10} \leq 2^{-j} \leq r_n$. Il reste à considérer les j tel que $2^{-j} \leq \frac{r_n}{10}$.

On décompose $\|\Delta_j h\|_1 = I_1 + I_2 + I_3$ avec $I_1 = \int_{|x| \leq 2^{-j+1}} |\Delta_j h(x)| dx$, $I_2 = \int_{2^{-j+1} \leq |x| \leq r_n - 2^{-j}} |\Delta_j h(x)| dx$ et $I_3 = \int_{r_n - 2^{-j} \leq |x| \leq r_n + 2^{-j}} |\Delta_j h(x)| dx$. I_1 et I_3 s'estiment simplement :

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{|x| \leq 2^{-j+1}} |\Delta_j h(x)| dx \leq \int_{|x| \leq 2^{-j+1}} \int_{|y| \leq 2^{-j}} |h(x-y)| 2^{2j} |\psi(2^j y)| dy dx \\ &\leq \|\psi\|_1 \int_{|x| \leq 3 \cdot 2^{-j}} |h(x)| dx \leq C \int_0^{3 \cdot 2^{-j}} \frac{1}{|\ln(r)|^{1/3}} dr. \end{aligned}$$

Il vient $I_1 \leq C \frac{2^{-j}}{|\ln(r_n)|^{1/3}}$. On obtient la même estimation pour I_3 . Estimons I_2 . Comme ψ est radiale d'intégrale nulle, on écrit $2\Delta_j h(x) = \int_{|y| \leq 1} (h(x+2^{-j}) + h(x-2^{-j}) - 2h(x))\psi(y)dy$. Remarquons que pour $|x| \leq r_n - 2^{-j}$ et $|y| \leq 1$, on a $x+2^j y$, $x-2^{-j}y$ et x sont de norme inférieure à r_n . On peut alors remplacer h par f dans le calcul de $\Delta_j h(x)$ pour $|x| \leq r_n - 2^{-j}$. Un petit calcul permet de majorer $|f(x+2^{-j}y) + f(x-2^{-j}y) - 2f(x)| \leq C \frac{(2^{-j}|y|)^2}{(|x-2^{-j}|)^3 |\ln(r_n)|^{1/3}}$. Alors

$$I_3 \leq C \frac{2^{-2j}}{|\ln(r_n)|^{1/3}} \int_{2^{-j+1} \leq |x| \leq r_n - 2^{-j}} \frac{dx}{(|x-2^{-j}|)^3} \leq \frac{2^{-j}}{|\ln(r_n)|^{1/3}}. \quad (7.16)$$

Ainsi, en combinant les estimations de I_1 , I_2 , I_3 , pour j tel que $2^{-j} \leq \frac{r_n}{10}$, il vient

$$\|\Delta_j h\|_1 \leq C \frac{2^{-j}}{|\ln(r_n)|}. \quad (7.17)$$

Finalement, grâce aux estimations 7.15, 7.17, nous avons $\|h\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \frac{C}{|\ln(r_n)|^{1/3}}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ainsi la suite f_n tend vers f dans $\dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$.

Considérons alors une suite n_j telle que $\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \leq 2^{-j}$. Si on suppose 7.14, il vient $\|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\|_2 \leq C 2^{-\gamma j}$. Donc la suite (u_{n_j}) converge vers u dans L^2 . Or nous avons déjà prouvé que $\|v_{n_{j+1}} - v_{n_j}\|_2 \leq C \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}^{1/2} \leq C 2^{-j/2}$. On en déduit que la suite v_{n_j} converge vers v dans L^2 . Or $f_{n_j} =$

$u_{n_j} + v_{n_j}$. Donc f_{n_j} converge dans L^2 , donc dans $L^{2,\infty}$. De plus, nous avons prouvé que f_{n_j} converge vers f dans $\dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$, donc dans $L^{2,\infty}$. Par unicité de la limite, on a $f = u + v$. Donc $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, ce qui est absurde. La conjecture 7.14 est fausse. ■

7.4 Résolution du problème par ondelette

Nous nous servons des coefficients en ondelette pour résoudre le problème 7.1. On considère $f \in L^2$ et $f = u + v$ sa décomposition optimale. On appelle $f_{j,k}$, $u_{j,k}$, $v_{j,k}$ les coefficients en ondelette de f , u , v respectivement. On suppose aussi $\|f\|_* > (2\lambda)^{-1}$.

Nous avons

$$\begin{aligned}\|u\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} &= \sup_j \sum_k |u_{j,k}| \\ \|v\|_* &= \sum_j \sup_k |v_{j,k}|.\end{aligned}$$

L'inconvénient de ce choix est que l'on perd l'invariance par rotation et par translation. L'avantage est de pouvoir calculer "explicitement" la décomposition. Le théorème qui suit montre que ce nouvel algorithme consiste à faire un "threshold" sur chaque échelle j , le seuil dépendant de j . Plus précisément,

Théorème 7.4.1 *Sous les hypothèses précédentes et si $\|f\|_* \geq \frac{1}{2\lambda}$, il existe une unique suite $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ à termes positifs vérifiant $\sum_j v_j = (2\lambda)^{-1}$ et*

- $v_{j,k} = \epsilon_{j,k} \min(v_j, |f_{j,k}|)$
- $u_{j,k} = \epsilon_{j,k} \max(|f_{j,k}| - v_j, 0)$
- $\epsilon_{j,k} = \text{signe}(f_{j,k})$.

Le fait que $|u_{j,k}| \leq |f_{j,k}|$ implique le corollaire suivant :

Corollaire 7.4.1 *Si f appartient à un espace de Banach fonctionnel E , caractérisé par les coefficients en ondelette, alors $u = \Phi(f)$ appartient à E . En particulier, $f \in L^p \Rightarrow u \in L^p$, $1 < p < \infty$; si f appartient à un espace de Besov, ou de Sobolev, alors u appartient à ce même espace.*

Pour prouver ce théorème, on utilise le théorème de caractérisation 7.1.2.

Posons $v_j = \sup_k |v_{j,k}|$ et $u_j = \sum_k |u_{j,k}|$. Alors on a $\sum_j v_j = (2\lambda)^{-1}$. Il reste

à montrer que $v_{j,k} = \epsilon_{j,k} \min(v_j, |f_{j,k}|)$.

Nous avons $\int uvdx = \|u\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \|v\|_*$. Ceci s'écrit à l'aide des coefficients en ondelette

$$\sum_{j,k} u_{j,k} v_{j,k} = \left(\sum_j v_j \right) \sup_j u_j.$$

Or

$$\sum_{j,k} u_{j,k} v_{j,k} \leq_{(1)} \sum_{j,k} |u_{j,k}| |v_{j,k}| \leq_{(2)} \sum_j v_j u_j \leq_{(3)} \left(\sum_j v_j \right) \sup_j u_j.$$

Pour avoir égalité, il faut qu'il y ait égalité dans chaque inégalité.

Il y a égalité en (1) uniquement si $u_{j,k} v_{j,k}$ est positif, donc si $u_{j,k}$ et $v_{j,k}$ de même signe. Or $f_{j,k} = u_{j,k} + v_{j,k}$. Donc $u_{j,k}$ et $v_{j,k}$ sont du signe de $f_{j,k}$. En particulier si $f_{j,k} = 0$, on a nécessairement $u_{j,k} = v_{j,k} = 0$. Supposons alors pour simplifier les notations que $f_{j,k} > 0$. Il s'en suit $u_{j,k} \geq 0$ et $v_{j,k} \geq 0$.

Il y a égalité en (2) si et seulement si, pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}^2$, $(v_j - v_{j,k})u_{j,k} = 0$. Donc $v_{j,k} = v_j$ dès que $u_{j,k} \neq 0$.

Il y a égalité en (3) si et seulement si, pour tout $l \in \mathbb{Z}$, $(\sup_j u_j - u_l)v_l = 0$.

•Supposons $f_{j,k} > v_j$. Alors $u_{j,k} = f_{j,k} - v_{j,k} \geq f_{j,k} - v_j > 0$. Donc d'après l'inégalité (2), $v_{j,k} = v_j$.

•Supposons $f_{j,k} < v_j$. Comme $u_{j,k} \geq 0$, il vient $v_{j,k} < v_j$. Donc par (2) $u_{j,k} = 0$ et donc $v_{j,k} = f_{j,k}$.

•Supposons $f_{j,k} = v_j$. Montrons que $v_{j,k} = v_j$. Dans le cas contraire, on aurait $v_{j,k} < v_j$. Toujours par (2), $u_{j,k} = 0$. D'où $v_{j,k} = f_{j,k} = v_j$! Donc $v_{j,k} = v_j$.

Finalement, dans tous les cas, $v_{j,k} = \min(v_j, f_{j,k})$ et donc $u_{j,k} = \max(f_{j,k} - v_j, 0)$. Donc la suite (v_j) convient. Remarquons que l'inégalité (3) n'a pas

encore servi.

Quant à l'unicité, considérons une suite v_j , positive, vérifiant $\sum_j v_j = (2\lambda)^{-1}$, $v_{j,k} = \min(v_j, f_{j,k})$ (on suppose encore $f_{j,k} \geq 0$). Nous allons montrer que nécessairement $v_j = \sup_k v_{j,k}$. Clairement, $\sup_k v_{j,k} \leq v_j$. On a toujours $v_{j,k} \leq v_j$ et il y a encore égalité dans les inégalités (1) et (2). Par l'absurde, supposons qu'il existe un j_0 tel que $\sup_k v_{j_0,k} < v_{j_0}$. Nous devons avoir égalité dans l'inégalité (3). Il vient $u_{j_0} = \sup_j u_j$. Or par l'égalité (2) et le fait que $v_{j_0,k} < v_{j_0}$, nous avons $u_{j_0,k} = 0$ pour tout k . Donc $u_{j_0} = 0$ et $\sup_j u_j = 0$. Ainsi on doit avoir $u = 0$ et $v = f$. Or $\|v\|_* \leq \sum_j v_j = (2\lambda)^{-1} < \|f\|_*$. C'est absurde. Finalement, $v_j = \sup_k v_{j,k}$. ■

Il nous faut trouver une méthode pour déterminer algorithmiquement la suite v_j . Pour cela, on fait toujours l'hypothèse $f_{j,k} \geq 0$ et $\|f\|_* > (2\lambda)^{-1}$. Posons $f_j = \sup_k f_{j,k}$. Il vient $\sum_j f_j > (2\lambda)^{-1}$. Alors nous savons que $f_j = 0$ implique $u_{j,k} = v_{j,k} = 0$. Supposons alors $f_j > 0$ et ordonnons les indices j de sorte que $\sum_k f_{j,k}$ décroisse. On note encore $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ cette suite. Nous avons remarqué qu'il y a égalité en (1) et (2). Pour déterminer la suite $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ il faut donc se servir de (3). Posons, pour $j \in \mathbb{N}$, $g_j(x) = \sum_k (f_{j,k} - x)^+$. Cette fonction est continue, décroissante, affine par morceaux et s'annule si et seulement si $x \geq f_j$. Elle n'est pas forcément définie en 0 car $\sum_k f_{j,k}$ n'a aucune raison de converger. Posons $M = \|u\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} > 0$. Si $v_j > 0$, nécessairement $g_j(v_j) = \sum_k u_{j,k} = M$. Il est facile de voir que si $v_{j_0} = 0$ alors pour $j \geq j_0$, $v_j = 0$. En effet, on a pour $j \geq j_0$, $g_j(0) \leq g_{j_0}(0) \leq M$. Donc en posant $v_j = 0$ pour $j > j_0$, on obtient égalité dans (3). Par unicité, c'est la solution. De même, par contraposée, si $v_{j_0-1} > 0$, alors pour tout indice $j < j_0$, $v_j > 0$. Supposons alors que la suite v_j s'annule pour la première fois à l'instant j_0 . Il reste à déterminer v_0, \dots, v_{j_0-1} . Pour cela, on

écrit

$$g_0(v_0) = g_1(v_1) = \dots = g_{j_0-1}(v_{j_0-1}) = M \quad (7.18)$$

et

$$v_0 + v_1 + \dots + v_{j_0-1} = \frac{1}{2\lambda}. \quad (7.19)$$

Ainsi, pour $0 \leq j < j_0$, on a $v_j = g_j^{-1}(M)$ où g_j^{-1} est la fonction réciproque (aussi continue affine par morceaux, strictement décroissante) de g_j quand celle-ci existe. L'inconnue M est alors l'unique solution de

$$(g_0^{-1} + g_1^{-1} + \dots + g_{j_0-1}^{-1})(M) = \frac{1}{2\lambda}. \quad (7.20)$$

On est alors en mesure de calculer v_j . L'algorithme est alors le suivant :

- (1) On pose $v_0 = (2\lambda)^{-1}$. On calcule $M = g_0(v_0)$. On pose $j_0 = 1$.
- (2) Si $M \geq g_{j_0}(0)$ alors, pour $j \geq j_0$, $v_j = 0$. FIN
- (3) $j_0 := j_0 + 1$. On calcule M solution de $(g_0^{-1} + \dots + g_{j_0-1}^{-1})(M) = (2\lambda)^{-1}$ et, pour $j < j_0$, $v_j = g_j^{-1}(M)$.
- (4) Retour à (2).

Il faut pouvoir calculer $g_0^{-1} + \dots + g_{j_0-1}^{-1}$. Cela ne pose aucun problème compte-tenu du fait que chacune des fonctions est affine par morceaux.

7.5 Etude d'un exemple

On prend l'exemple d'une route définie par la fonction indicatrice de l'ensemble $[0, N] \times [0, 1]$ notée f_N . On définit u_N et v_N comme étant la décomposition $f_N = u_N + v_N$ minimisant $\|u\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} + \lambda \|v\|_2^2$. Nous avons

Lemme 7.5.1 *On a $\|f_N\|_* \approx \ln N$,*

où $\|\cdot\|_*$ désigne la norme dans $\dot{B}_\infty^{-1,1}$. La preuve est facile. Pour la domination de $\|f_N\|_*$ par $\ln N$, le lecteur se reportera à l'étude des coefficients d'ondelette de f_N faite plus loin. Quant à la minoration, il suffit d'intégrer f_N contre la fonction $|x|^{-1} \in \dot{B}_1^{1,\infty}$. Après calcul, on a $\int f_N(x) |x|^{-1} dx \approx \ln N$. Rappelons que dans le cas du modèle ORF, $\|f_N\|_G \approx 1$ où $G = \mathcal{BV}^*$. Pour

un paramètre λ choisi de sorte que $\|f_N\|_G < (2\lambda)^{-1}$ et $\|f_N\|_* \gg (2\lambda)^{-1}$, c'est-à-dire $\frac{1}{\ln N} \ll \lambda < 1$, l'algorithme ORF efface la route; elle est interprétée comme du bruit alors que le nouveau modèle l'interprète comme un objet. Nous avons $\|v_N\|_* = o(\ln N)$, ou encore $\|f_N - u_N\|_* = o(\|f_N\|_*)$. Visiblement, u_N sera proche de f_N . Cependant, la fonction u_N sera très compliquée; elle ne peut pas être de la forme $u = \alpha_1 \chi_{E_1} + \dots + \alpha_p \chi_{E_p}$ pour p fixé. En effet, soit u de cette forme et $v = f_N - u$. Le problème ORF nous dit que $\lambda N = \lambda \|f\|_2^2 < \|u\|_{BV} + \lambda \|v\|_2^2$. Supposons que $\|u\|_{\dot{B}_1^1, \infty} + \lambda \|v\|_2^2 \ll \lambda N$. Il existe C_0 vérifiant $\|u\|_{BV} \leq C_0 \|u\|_{\dot{B}_1^1, \infty}$, C_0 ne dépendant que de p (théorème 6.3.2). Alors $\lambda N < \|u\|_{\dot{B}_1^1, \infty} + \lambda \|v\|_2^2 \ll C_0 \lambda N$, ce qui est absurde. Cherchons alors à modéliser notre route par les coefficients d'ondelette.

Nous prenons les normes équivalentes définies à partir d'une base d'ondelettes de Daubechies. Les ondelettes utilisées sont $\psi(x) = \psi(x_1)\varphi(x_2)$, $\psi(x_1)\psi(x_2)$ ou enfin $\varphi(x_1)\psi(x_2)$. Les premières donnent un résultat nul après intégration en x_1 . Finalement, il reste à traiter $2^j \varphi(2^j x_1) \psi(2^j x_2)$ et donc à évaluer les coefficients d'ondelette de la forme $\int_0^N \int_0^1 2^j \varphi(2^j x_1 - k_1) \psi(2^j x_2 - k_2) dx_1 dx_2$. Pour l'essentiel, l'intégrale en x_1 vaut 1 (sauf effets de bords dus aux ondelettes qui chevauchent le bord). Il reste $\int_0^1 \psi(2^j x_2 - k_2) dx_2$. Si $j \geq 0$, on obtient des termes qui sont dus aux effets de bords et seront négligés. Il reste $j < 0$ et alors l'intégrale en x_2 est essentiellement $\psi(-k_2)$, c'est-à-dire un ensemble fini de constantes. Ces remarques conduisent au modèle suivant :

les coefficients d'ondelette de f_N , pour $N = 2^q$, valent 1 si $-q \leq j \leq 0$ et $0 \leq k_1 2^{-j} \leq 2^q$ et 0 sinon. Dans toute la suite, on changera j en $-j$ et on adoptera ce modèle.

On considère une suite $f_{j,k}$, non nulle uniquement pour $0 \leq j \leq q$ et $0 \leq k < N_j$. Notons $s_j = \sum_k f_{j,k}$. Appliquons l'algorithme. Repré-

nous les notations de la section précédente. Nous avons pour $0 \leq j \leq q$, $g_j(x) = s_j - N_j x$. Or si $v_j > 0$ alors $g_j(v_j) = M$. Donc $v_j = \frac{s_j - M}{N_j}$. Or $\sum_j v_j = (2\lambda)^{-1}$. D'où $M = \frac{\sum_j \frac{s_j}{N_j} - \frac{1}{2\lambda}}{\sum_j \frac{1}{N_j}}$.

Supposons alors (s_j) décroissante. La suite v_j est déterminée de la façon suivante :

on cherche $0 \leq j_0 < q$ tel que $\frac{\sum_{j=0}^{j_0} \frac{s_j}{N_j} - \frac{1}{2\lambda}}{\sum_{j=0}^{j_0} \frac{1}{N_j}} \geq s_{j_0+1}$ et $j_0 = q$ sinon. Alors M

est le terme de gauche et $v_j = \frac{s_j - M}{N_j}$ pour $0 \leq j \leq j_0$ et $v_j = 0$ pour $j > j_0$.

Dans notre cas, $N_j = 2^{q-j}$ et $s_j = N_j$. On a $\|f\|_* = q_0 + 1$. On suppose $q_0 + 1 > (2\lambda)^{-1}$. L'instant j_0 est alors défini par $\frac{2^{j_0+1}(j_0 + 1 - (2\lambda)^{-1})}{\sum_{j=0}^{j_0} 2^j} \geq 1$

et $j_0 < q$ et $j_0 = q$ si l'inéquation précédente n'a pas de solution. Cela s'écrit après simplification, $2^{j_0+1}(j_0 - \frac{1}{2\lambda}) \geq -1$. Alors $j_0 = E(\frac{1}{2\lambda})$ ou $j_0 = E(\frac{1}{2\lambda}) + 1$. On a $M = 2^q \frac{j_0 + 1 - (2\lambda)^{-1}}{2^{j_0+1} - 1}$ et pour $j \leq j_0$, $v_j = 1 - (j_0 + 1 - (2\lambda)^{-1}) \frac{2^j}{2^{j_0+1} - 1}$. Calculons $\|v_N\|_2^2 = \sum_{j,k} v_{j,k}^2$. Un calcul simple montre que $\|v_N\|_2 \approx 1$. Donc u_N est proche de f_N .

Dans ce chapitre, nous avons étudié un nouvel algorithme basé sur l'espace de Besov $\dot{B}_1^{1,\infty}$. Nous avons établi le lien et les différences entre cet espace et l'espace BV . Nous avons mis en place une méthode de résolution du nouveau modèle, basée sur les coefficients d'ondelette, qui est une forme de wavelet shrinkage. De ce fait, nous perdons les invariances par translation, rotation et dilatation. Cet algorithme possède les mêmes inconvénients que l'algorithme d'Osher-Rudin-Fatemi : la composante texturée n'est jamais nulle (sauf cas trivial). Concluons en disant que tous les modèles de la forme $\|u\|_E + \lambda \|v\|_2^2$, où E est un espace de Banach fonctionnel, ont ce défaut.

En effet, dans ce cas, on a, avec les notations du Chapitre 4, $\|v\|_* = (2\lambda)^{-1}$ dès lors que $\|f\|_* > (2\lambda)^{-1}$. Pour pallier ce problème, Yves Meyer [58] a proposé de remplacer $\|v\|_2^2$ par la norme dans l'espace des textures $\|v\|_*$. Ce sera l'objet du chapitre suivant.

Troisième partie

Seconde variante de
l'algorithme d'ORF

Chapitre 8

Algorithme d'Osher-Vese

8.1 Présentation

L'algorithme d'Osher-Vese est une variante de l'algorithme ORF. L'image n'est plus considérée comme une fonction de L^2 , mais comme une distribution tempérée dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Plus précisément, l'image appartiendra à l'espace G . Le but est de décomposer l'image en deux composantes u et v : les objets contenus dans l'image définissent la composante u alors que les composantes texturées ainsi que le bruit constituent la composante v . La fonctionnelle à minimiser est $\Theta(u) = \|u\|_{BV} + \lambda \|v\|_*$. Ici et dans tout ce chapitre, $\|\cdot\|_*$ est la norme dans G (l'espace $\dot{B}_1^{1,\infty}$ du chapitre précédent est abandonné). Une décomposition optimale existe mais n'est plus unique en général comme nous le prouverons en détail. Nous considérerons deux classes de fonctions particulières : les fonctions simples et les fonctions extrémales. Nous prouverons,

- (a) si f est extrémale, alors, pour un paramètre λ convenablement choisi, toute décomposition de la forme $\alpha f + (1 - \alpha)f$, $0 \leq \alpha \leq 1$, convient.
- (b) Pour f simple, et λ suffisamment grand, l'algorithme d'Osher-Vese donne une unique solution $u = f$.

Les réciproques des points (a) et (b) sont des problèmes ouverts. Disons, pour finir, que le rôle du paramètre λ n'est plus le même que dans ORF, comme le montre le lemme 8.2.2.

8.2 Fonctions extrémales et simples

Commençons par une remarque évidente :

Lemme 8.2.1 *Pour toute fonction $f \in BV$, nous avons $\|f\|_2^2 \leq \|f\|_{BV} \|f\|_*$ et*

$$\|f\|_* \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \|f\|_2 \leq \frac{1}{4\pi} \|f\|_{BV} \quad (8.1)$$

L'estimation de droite est l'inégalité isopérimétrique, celle de gauche découle de celle de droite par dualité.

Lemme 8.2.2 *Pour $0 < \lambda < 4\pi$ l'algorithme Osher-Vese admet l'unique solution minimisante $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = f$.*

Ceci doit être comparé au résultat similaire dans l'algorithme ORF : $\|f\|_* \leq (2\lambda)^{-1} \Rightarrow u = 0$, $v = f$. La preuve du lemme est immédiate. Nous avons pour tout $u \in BV$, $\|f\|_* \leq \|u\|_* + \|f - u\|_* \leq \frac{1}{4\pi} \|u\|_{BV} + \|f - u\|_*$. Ceci implique $\lambda \|f\|_* \leq \frac{\lambda}{4\pi} \|u\|_{BV} + \lambda \|f - u\|_*$. Pour $0 < \lambda < 4\pi$, $\Theta(0)$ est strictement inférieur à $\Theta(u)$ pour $u \neq 0$. Le problème d'Osher-Vese a alors une solution unique $u = 0$.

Remarque 8.2.1 *Dans le cas $\lambda = 4\pi$, $u = 0$ est toujours solution du problème Osher-Vese, mais nous perdons l'unicité. En effet, si f désigne la fonction indicatrice d'un disque de rayon R , alors $\|f\|_* = \frac{R}{2}$ et $\|f\|_{BV} = 2\pi R$. Il vient, pour $\lambda = 4\pi$, $\Theta(0) = \Theta(f)$!*

L'étude du manque d'unicité nous conduira à la classe suivante,

Définition 8.2.1 *Une fonction $u \in BV$ est dite simple s'il existe une fonction non nulle $v \in BV$ vérifiant $\int uv dx = \|u\|_{BV} \|v\|_*$. Elle est dite extrémale si on peut choisir $v = u$.*

Proposition 8.2.1 *Une fonction $u \in BV$ est simple si et seulement si elle est, pour un certain $\lambda > 0$, la composante "objet" ou BV du problème d'ORF appliqué à une fonction $f \in BV$.*

La preuve de la proposition 8.2.1 est évidente. Elle vient de la caractérisation de la solution au problème ORF.

Nous connaissons en théorie toutes les fonctions simples, sans pour autant savoir les caractériser. Des exemples seront donnés plus loin. Qu'en est-il des fonctions extrémales ? La première qui vient à l'esprit est la fonction indicatrice d'un disque. Donnons une famille d'exemples de fonctions extrémales dans le cas radial.

Pour cela, on considère $f(r)$ une fonction radiale de BV . Cela signifie que $rf'(r)$ est une mesure de Radon bornée portée par $[0, +\infty[$. On la suppose extrémale. Posons $h(r) = \frac{1}{r} \int_0^r tf(t)dt$. Cette fonction est continue, nulle en 0 et $\|h\|_\infty = \|f\|_*$. Il vient, comme nous l'avons déjà vu,

Lemme 8.2.3 *$f(r) \in BV$ est extrémale si et seulement si la mesure de Radon bornée $r(\|h\|_\infty |f'(r)| + h(r)f'(r))$ est nulle.*

Nous allons chercher les solutions de ce problème parmi les fonctions $f(r)$ constantes par morceaux avec discontinuités sur une subdivision donnée par $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_n$. Notons λ_k , $k = 0 \dots n-1$, la valeur prise par $f(r)$ sur $]a_k, a_{k+1}[$ et $\lambda_n = 0$ la valeur de $f(r)$ pour $r > a_n$. On impose de plus $\|f\|_* = \frac{1}{2}$.

Proposition 8.2.2 *Pour chaque $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, il existe une unique fonction extrémale $f(r)$ vérifiant les conditions précédentes et $\text{signe}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = \epsilon_k$ pour $1 \leq k \leq n$. Les coefficients λ_k seront explicités.*

Le fait que f est constante par morceaux et $\|f\|_* = \|h\|_\infty = \frac{1}{2}$ impliquent, comme nous l'avons déjà vu au lemme 3.10.1, que si $|h(a_k)| = \frac{1}{2}$ et $|h(a_{k+1})| = \frac{1}{2}$, alors $h(r)$ est bornée par $\frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$. Grâce à ce résultat et au lemme 8.2.3, on a

$$f(r) \text{ est extrémale} \iff \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad h(a_k) = \frac{\text{signe}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)}{2}. \quad (8.2)$$

Or, par un calcul direct, $h(a_1) = \lambda_0 \frac{a_1}{2}$; cela implique $\lambda_0 = \frac{\epsilon_1}{a_1}$. De même $h(a_{k+1}) = \frac{\epsilon_{k+1}}{2} = \frac{1}{a_{k+1}}(a_k h(a_k) + \lambda_k \frac{a_{k+1}^2 - a_k^2}{2})$. On en déduit pour $1 \leq k \leq n$,

$$\lambda_k = \frac{\epsilon_{k+1}a_{k+1} - \epsilon_k a_k}{a_{k+1}^2 - a_k^2}.$$

Une simple vérification montre que $\text{signe}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = \epsilon_k$ pour $1 \leq k \leq n$.
La preuve est complète. ■

Remarque 8.2.2 *Ce résultat a été démontré de façon indépendante par G. Bellettini, V. Caselles et M. Novaga ([13], exemple 5) en cherchant à résoudre l'équation $u = -\text{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|})$. Nous y revenons à la section suivante.*

Demandons-nous alors quelles sont les fonctions radiales simples $u(r)$ vérifiant les mêmes hypothèses que précédemment. En fait,

Proposition 8.2.3 *Toute fonction radiale constante par morceaux est simple.*

La preuve consiste à exhiber une fonction radiale $v(r)$ constante par morceaux sur la même subdivision telle que $\int u(x)v(x)dx = \|u\|_{BV} \|v\|_*$ ou encore $r(\|h\|_\infty |u'(r)| + h(r)u'(r)) = 0$ en mesure avec, dans le cas “fonction simple”, $h(r) = \frac{1}{r} \int_0^r tv(t)dt$. La fin de la preuve est laissée au lecteur.

Nous disposons d'une grande famille de fonctions simples. On peut rajouter, comme nous l'avons déjà vu, les fonctions indicatrices d'ensembles à bords \mathcal{C}^2 (section 3.4).

8.3 Lien avec les solutions de “ $-\text{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) = u$ ”

Nous nous intéressons au lien entre les fonctions extrémales et les solutions de l'équation, au sens des distributions,

$$-\text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = u. \tag{8.3}$$

La définition du membre de gauche sera précisée. En toute généralité, considérons une fonction simple $u \in BV$ associée à la fonction non nulle $v \in BV$. Il vient $\int uv dx = \|u\|_{BV} \|v\|_*$. On peut supposer $\|v\|_* = 1$. Alors Y. Meyer montre dans [58], que l'on a

$$v = -\text{div}g, \quad g \in L^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \|g\|_\infty = 1 \text{ et } g = \theta \tag{8.4}$$

où $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ et θ_i sont les dérivées de Radon Nikodym de $\partial_i u$ par rapport à $|\nabla u|$. Rappelons que $\|g\|_\infty = \left\| \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2} \right\|_\infty$.

On a $\int uv dx = \int g \cdot \nabla u dx = \int |\nabla u| dx$. Ceci s'écrit $\int (|\nabla u| - g \nabla u) dx = 0$. Or $g \cdot \nabla u$ est dominée par la mesure $|\nabla u|$. Donc $g \cdot \nabla u = |\nabla u|$. C'est en ce sens que l'on écrit que (u, v) est solution de

$$v = -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right). \quad (8.5)$$

Dans le cas où u est extrémale, $v = \frac{u}{\|u\|_*}$ et u est solution de l'équation suivante

$$\frac{u}{\|u\|_*} = -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right). \quad (8.6)$$

Ainsi $\frac{u}{\|u\|_*}$ est solution du problème 8.3.

Réciproquement, supposons que u soit solution de 8.3. Alors il existe $g \in L^\infty$ telle que $\|g\|_\infty = 1$, $g = \theta$ où $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ est défini comme dans 8.4. Posons alors $v = -\operatorname{div} g$ et remarquons que $\|v\|_* \leq 1$. On a $\int uv dx = \|u\|_{BV} \leq \|u\|_{BV} \|v\|_* \leq \|u\|_{BV}$. Donc $\|v\|_* = 1$. Par hypothèse, $v = u$. On a alors $\|u\|_2^2 = \|u\|_{BV} \|u\|_*$. La fonction u est extrémale.

Lemme 8.3.1 *Une fonction $u \in BV$ est extrémale si et seulement si $\|u\|_*^{-1} u$ vérifie 8.3.*

Remarquons que la proposition 8.2.2 donne des exemples de solutions de l'équation 8.3. Dans [15], V. Caselles, G. Bellettini et M. Novaga donnent plusieurs types de solutions de l'équation 8.3. Avant d'énoncer les résultats obtenus par ces derniers, rappelons quelques définitions.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\chi_\Omega \in BV$. On note $\lambda_\Omega = \frac{\|\chi_\Omega\|_{BV}}{|\Omega|}$. On dit que $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^{1,1}$ si, quitte à changer de système de coordonnées, $\partial\Omega$ peut s'écrire localement en chaque point comme le graphe d'une fonction f de classe \mathcal{C}^1 telle que $\frac{d}{dx_1} f$, soit une fonction lipschitzienne continue; en outre Ω est localement l'épigraphe de f . Si $\partial\Omega \in \mathcal{C}^{1,1}$ alors on note $\kappa_{\partial\Omega}$ la courbure de $\partial\Omega$.

Cette courbure est définie \mathcal{H}^1 -presque partout. Nous pouvons enfin donner des exemples de solutions de 8.3.

Théorème 8.3.1 (V. Caselles, G. Belletini, M. Novaga [14]) *Soit Ω un ensemble connexe rectifiable. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes : (a) la fonction $u = \lambda_\Omega \chi_\Omega$ est solution de 8.3; (b) Ω est convexe, $\partial\Omega \in \mathcal{C}^{1,1}$ et $\text{ess sup}_{\partial\Omega} \kappa_{\partial\Omega} \leq \lambda_\Omega$.*

Ce premier exemple englobe le cas où f est la fonction indicatrice d'un disque. Dans ce cas $\kappa_{\partial C} = \frac{1}{R}$ et $\lambda_C = \frac{2}{R}$ où R est le rayon du disque.

Plus généralement, si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ n'est plus supposé connexe, mais est la réunion d'un nombre fini d'ensembles connexes C_1, \dots, C_m , on a [14],

Théorème 8.3.2 *La fonction $u = \sum_{i=1}^m b_i \chi_{C_i}$ vérifie 8.3 si et seulement si les quatre propriétés suivantes sont vérifiées : (i) $b_i = \lambda_{C_i}$, pour tout $1 \leq i \leq m$; (ii) C_i est convexe et $\partial C_i \in \mathcal{C}^{1,1}$; (iii) $\text{ess sup}_{\partial C_i} \kappa_{\partial C_i} \leq \lambda_{C_i}$;*

(iv) $\left\| \chi_{E_{i_1, \dots, i_k}} \right\|_{BV} \geq \sum_{j=1}^k \left\| \chi_{C_{i_j}} \right\|_{BV}$ pour tout $1 \leq k \leq m$, où $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, m\}$ sont quelconques, deux à deux distincts et E_{i_1, \dots, i_k} est un ensemble réalisant le minimum de la fonctionnelle $\left\| \chi_E \right\|_{BV}$ parmi les ensembles E contenant $\bigcup_{j=1}^k C_{i_j}$ et contenus dans $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{j=k+1}^m C_{i_j}$.

Remarque 8.3.1 *Dans le cas où $\lambda_{C_i} = \lambda_{C_j}$ pour $i \neq j$, il vient $\lambda_\Omega = \lambda_{C_i}$ et $u = \lambda_\Omega \chi_\Omega$ est solution de 8.3, dès lors que les ensembles C_i vérifient les hypothèses du théorème précédent.*

La condition (iv) impose que les ensembles C_i sont assez éloignés les uns des autres. Pour le vérifier, on considère le cas particulier $m = 2$ et l'on montre le résultat suivant :

Proposition 8.3.1 *Soit $m = 2$ et C_1, C_2 deux ensembles convexes, connexes. La condition (iv) est équivalente à*

$$\left\| \chi_{\text{conv}(C_1 \cup C_2)} \right\|_{BV} \geq \left\| \chi_{C_1} \right\|_{BV} + \left\| \chi_{C_2} \right\|_{BV}. \quad (8.7)$$

Ici, $\text{conv}(\cdot)$ désigne l'enveloppe convexe. Pour prouver cette proposition, on se sert du lemme suivant :

Lemme 8.3.2 Soit E un ensemble contenant un ensemble convexe fermé C_1 . Alors $\|\chi_E\|_{BV} \geq \|\chi_{C_1}\|_{BV}$.

Ce lemme découle du résultat suivant :

Proposition 8.3.2 Si $a, b \in C_1$ et si l'on peut joindre a à b par une courbe de longueur L située en dehors de C_1 , alors on peut joindre a à b par une courbe de longueur L' située sur la frontière de C_1 avec $L' \leq L$.

Pour prouver cette proposition, on désigne par $P_{C_1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow C_1$, l'application réalisant la projection orthogonale sur C_1 . On a $|P_{C_1}(x') - P_{C_1}(x)| \leq |x' - x|$. Donc P_{C_1} réduit les longueurs. L'inégalité $L \geq L'$ s'établit en projetant L sur C_1 .

Revenons à la proposition 8.3.1. On considère deux ensembles convexes connexes C_1, C_2 . La condition (iv) est toujours vérifiée pour $k = 1$. Considérons le cas $k = 2$. Prenons un ensemble ouvert E contenant $C_1 \cup C_2$. Si E n'est pas connexe, C_1 est inclus dans l'une des composantes connexes de E ainsi que C_2 . Les convexités de C_1 et C_2 impliquent, d'après le lemme 8.3.2, $\|\chi_E\|_{BV} \geq \|\chi_{C_1}\|_{BV} + \|\chi_{C_2}\|_{BV}$. La condition (iv) est encore vérifiée. Considérons alors le cas où E est connexe. On diminue la norme BV en considérons l'enveloppe convexe de E , $\text{conv}(E)$. Il vient $\text{conv}(C_1 \cup C_2) \subset \text{conv}(E)$ et $\|\chi_{\text{conv}(C_1 \cup C_2)}\|_{BV} \leq \|\chi_{\text{conv}(E)}\|_{BV} \leq \|\chi_E\|_{BV}$. Ainsi, la condition (iv) revient à prouver que $\|\chi_{C_1}\|_{BV} + \|\chi_{C_2}\|_{BV} \leq \|\chi_{\text{conv}(C_1 \cup C_2)}\|_{BV}$. ■

Reprenons l'exemple 1 [14]. Les ensembles C_1 et C_2 sont des disques de rayon R distants de L . L'équation 8.7 devient $L \geq \pi R$ et dans ce cas, $f = \chi_{C_1} + \chi_{C_2}$ est une fonction extrémale. Si, maintenant C_1, \dots, C_N sont des disques de rayon R dont les centres sont alignés et distants d'au moins πR , alors

Proposition 8.3.3 La fonction $f = \chi_{C_1} + \dots + \chi_{C_N}$ est extrémale.

On a $\|f\|_{BV} = 2\pi NR$, $\|f\|_2 = \sqrt{\pi N}R$ et $\|f\|_* = \frac{R}{2}$.

Nous allons donner une démonstration de l'implication (b) \Rightarrow (a) du théorème 8.3.1 différente de celle donnée par V. Caselles, G. Belletini et M. Novaga [14]. Nous conservons les notations précédentes et posons, pour tout ensemble de périmètre fini E , $P(E) = \|\chi_E\|_{BV} < \infty$. Le point de départ est le lemme suivant ; celui-ci découle de la définition des fonctions extrémales,

Lemme 8.3.3 *Soit un ensemble Borélien E . La fonction indicatrice χ_E est extrémale si et seulement si*

$$\|\chi_E\|_* = \frac{|E|}{P(E)} \quad (8.8)$$

Notons qu'on a toujours $|E| \leq \|\chi_E\|_{BV} \|\chi_E\|_*$. La seule difficulté est de prouver que $\|\chi_E\|_* \leq \frac{|E|}{P(E)}$.

Notre preuve de l'implication (b) \Rightarrow (a) du théorème 8.3.1, est basée sur le théorème de E. Giusti que nous rappelons :

Théorème 8.3.3 [54]

Soit Ω un domaine convexe de \mathbb{R}^2 tel que $\partial\Omega$ soit de classe \mathcal{C}^1 . Notons $\kappa(x, y)$ la courbure de $\partial\Omega$ au point (x, y) . Alors les propositions suivantes sont équivalentes,

– *Pour tout ensemble de périmètre finie $E \subset \Omega$, $E \neq \emptyset$, Ω , on a*

$$\frac{P(E)}{|E|} > \frac{P(\Omega)}{|\Omega|} \quad (8.9)$$

–

$$\text{ess sup}_{\partial\Omega} \kappa \leq \frac{P(\Omega)}{|\Omega|} \quad (8.10)$$

Nous revenons maintenant à la preuve de (b) \Rightarrow (a). Considérons alors un ensemble convexe Ω tel que $\partial\Omega$ est de classe \mathcal{C}^1 et tel que la norme $L^\infty(\partial\Omega)$ de la courbure est majorée par $\frac{P(\Omega)}{|\Omega|}$. On applique le théorème 8.3.3. Pour tout sous-ensemble $D \subset \Omega$, on a $\frac{P(D)}{|D|} \geq \frac{P(\Omega)}{|\Omega|}$.

Lemme 8.3.4 *Sous les hypothèses précédentes, on a, pour tout ensemble de périmètre fini D ,*

$$\frac{P(D)}{|D \cap \Omega|} \geq \frac{P(\Omega)}{|\Omega|} \quad (8.11)$$

La preuve est facile. On applique le théorème 8.3.3 à l'ensemble $D \cap \Omega$. Il vient $\frac{P(D \cap \Omega)}{|D \cap \Omega|} \geq \frac{P(\Omega)}{|\Omega|}$. Maintenant, il suffit de prouver que $P(D) \geq P(D \cap \Omega)$. En effet le fait que Ω soit convexe implique que, pour tout ensemble E contenant Ω , on a $P(E) \geq P(\Omega)$ (lemme 8.3.2). Posons alors $E = \Omega \cup D$, $A = D \cap \Omega$ et $B = D \setminus \Omega$. Il vient [15], comme $|\Omega \cap B| = 0$, $P(E) = P(B) + P(\Omega) - 2\mathcal{H}^1(\partial^* B \cap \partial^* \Omega) \geq P(\Omega)$, d'où

$$P(B) \geq 2\mathcal{H}^1(\partial^* \Omega \cap \partial^* B) \quad (8.12)$$

De même, $D = A \cup B$, $|A \cap B| = 0$. Il vient $P(D) = P(A) + P(B) - 2\mathcal{H}^1(\partial^* A \cap \partial^* B)$. Donc $P(D) - P(A) = P(B) - 2\mathcal{H}^1(\partial^* \Omega \cap \partial^* B)$. Cependant, il est clair que $\mathcal{H}^1(\partial^* A \cap \partial^* B) = \mathcal{H}^1(\partial^* \Omega \cap \partial^* B)$. Ceci, combiné avec le résultat 8.12, implique $P(D) \geq P(D \cap \Omega)$.

Finalement, on étend ce résultat aux fonctions de BV par le lemme suivant,

Lemme 8.3.5

$$\forall f \in BV(\mathbb{R}^2), \quad \int_{\Omega} f(x) dx \leq \frac{|\Omega|}{P(\Omega)} \|f\|_{BV} \quad (8.13)$$

Le lemme 8.3.4 permet d'établir ce lemme dans le cas où f est une fonction caractéristique. De façon générale, on sait que la suite $f_m = \int_{-m}^{+\infty} \chi_{\Omega_t}(x) dt - m$ tend vers f pour la topologie faible* de BV et que $\|f\|_{BV} = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\chi_{\Omega_t}\|_{BV} dt$, avec $\Omega_t = \{x/f(x) > t\}$. Il vient

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_m(x) \chi_{\Omega}(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

De plus $|\int_{\Omega} f_m(x) dx| \leq \frac{|\Omega|}{P(\Omega)} \int_{-m}^{+\infty} \|\chi_{\Omega_t}\|_{BV} dt$. Il reste à faire tendre m vers l'infini pour conclure.

Le lemme précédent implique évidemment que $\|\chi_{\Omega}\|_* \leq \frac{|\Omega|}{P(\Omega)}$. Or $\int \chi_{\Omega} \chi_{\Omega} dx = |\Omega|$. Donc $\|\chi_{\Omega}\|_* \geq \frac{|\Omega|}{P(\Omega)}$. Finalement, χ_{Ω} est une fonction extrémale.

8.4 Stabilité

Montrons que dans certains cas, l'algorithme d'Osher-Vese est meilleur que *ORF*. En particulier, nous montrons que, pour f simple et λ convenable, l'algorithme d'Osher-Vese fournit $u = f$ alors que ceci ne se produit jamais pour l'algorithme d'ORF.

Théorème 8.4.1 Invariance et stabilité

- a) Soit $f \in BV$ une fonction simple. Il existe une constante $\lambda_0 > 0$ telle que pour $\lambda > \lambda_0$, l'algorithme d'Osher-Vese ait une unique solution donnée par $\bar{u} = f$, $\bar{v} = 0$.
- b) Pour $f = g + h$ où g est simple et $\|h\|_* \leq \epsilon$, il existe une constante $\lambda_0 > 0$, ne dépendant que de g , telle que pour $\lambda > \lambda_0$, l'algorithme d'Osher-Vese donne une décomposition $f = \bar{u} + \bar{v}$ où \bar{u} est proche de g dans L^2 . Plus précisément

$$\|\bar{u} - g\|_2 \leq C(\lambda)\sqrt{\epsilon}, \quad \|\bar{u} - g\|_* \leq \frac{2\lambda\epsilon}{\lambda - \lambda_0}. \quad (8.14)$$

Les constantes λ_0 et $C(\lambda)$ sont explicitées. La partie (a) du théorème ne se produit jamais dans l'algorithme ORF : quelques parties significatives des objets sont toujours incorporées dans la composante \bar{v} . Dans la partie (b) de ce théorème, on ne peut affirmer l'unicité de la décomposition Osher-Vese comme le montre la remarque 8.4.3. C'est pourquoi l'on parle d'une décomposition. Insistons sur le problème de la réciproque de a). Nous ne savons pas si $\bar{u} = f$, $\bar{v} = 0$ pour $\lambda > \lambda_0$ caractérise les fonctions simples.

Ce théorème justifie les expériences faites par Jérôme Gilles [52]. Ce dernier considère des images contenant des routes fines et longues. Ses résultats montrent que l'algorithme d'Osher-Vese considère ces routes comme des textures : on les retrouve dans la composante v de l'image. Pour le justifier, on modélise une route par la fonction $h = \chi_{[0, \frac{1}{\epsilon}] \times [0, \epsilon]}$. Alors, en utilisant l'invariance par dilatation et le fait que $\|\chi_{[0, T] \times [0, 1]}\|_* \sim 1$ quand $T \gg 1$, on obtient $\|h\|_* \sim \epsilon$. Le point (b) du théorème 8.4.1 nous dit que h est

essentiellement dans la composante texturée.

L'exposant $1/2$ dans 8.14 est optimal comme le montre l'exemple suivant. On prend pour g la fonction indicatrice du disque de centre 0 et de rayon 1 et prenons h comme la fonction indicatrice de la couronne délimitée par $1 \leq r \leq 1 + \epsilon$. Alors $\lambda_0 = 4\pi$. Un petit calcul donne $\|h\|_* = \epsilon \frac{2+\epsilon}{2+2\epsilon} \sim \epsilon$. Alors $f = g+h$ est la fonction indicatrice du disque de centre 0 de rayon $1+\epsilon$. Cette fonction est extrémale. L'algorithme Osher-Vese donne, par application du théorème précédent pour $\lambda > 4\pi$, $\bar{u} = f$. Il vient $\|\bar{u} - g\|_2 = \|h\|_2 \sim \sqrt{2\pi\epsilon}$.

L'application que nous avons à l'esprit est le cas où f représente une image texturée. Alors g est vue comme la fonction indicatrice des objets présents dans l'image et h représente la texture. Nous savons que les textures de moyenne nulle ont une petite norme duale. Supposons que la fonction g est simple. Comme nous l'avons vu, cela signifie grossièrement, que les objets sont convexes, leurs bords n'ont pas de points anguleux et que les objets sont éloignés les uns des autres. Sous ces conditions, pour un paramètre λ assez grand, les solutions de l'algorithme Osher-Vese appliqué à l'image texturée (on ne sait pas s'il y a unicité) sont proches (au sens de la norme duale) de l'image objet. Encore une fois, les expériences de Jérôme Gilles [52] le montrent.

Commençons par prouver la partie (a) du théorème 8.4.1. La fonction f est simple; il existe alors une fonction non nulle $g \in BV$ vérifiant $\int f g dx = \|f\|_{BV} \|g\|_*$. Pour $u \in BV$, comparons $\Theta(u)$ et $\|f\|_{BV}$. On peut écrire $\|f - u\|_* \|g\|_{BV} \geq \int (f-u)g dx = \int f g dx - \int u g dx \geq \|f\|_{BV} \|g\|_* - \|u\|_{BV} \|g\|_*$. Divisons cette inégalité par $\|g\|_*$. Il vient $\|f\|_{BV} \leq \|u\|_{BV} + \frac{\|g\|_{BV}}{\|g\|_*} \|f - u\|_*$. Posons alors $\lambda_0 = \frac{\|g\|_{BV}}{\|g\|_*}$. Pour $\lambda > \lambda_0$ et $u \neq f$ on a $\Phi(f) < \Phi(u)$; l'algorithme Osher-Vese a donc une unique solution $\bar{u} = f$.

La preuve de la partie (b) est similaire. La fonction g étant simple, il existe $v_0 \in BV$ non nulle telle que $\int gv_0 dx = \|g\|_{BV} \|v_0\|_*$. Posons $\lambda_0 = \frac{\|v_0\|_{BV}}{\|v_0\|_*}$. Calculons de deux manières $I = \int fv_0 dx$.

$$I = \int (g + h)v_0 dx = \|g\|_{BV} \|v_0\|_* + \int hv_0 dx \geq \|g\|_{BV} \|v_0\|_* - \epsilon \|v_0\|_{BV}. \quad (8.15)$$

Nous avons aussi

$$I = \int (\bar{u} + \bar{v})v_0 dx \leq \|\bar{u}\|_{BV} \|v_0\|_* + \|v_0\|_{BV} \|\bar{v}\|_*. \quad (8.16)$$

Comparons les inéquations 8.15 et 8.16. Il vient après division par $\|v_0\|_*$,

$$\|g\|_{BV} - \lambda_0 \epsilon \leq \|\bar{u}\|_{BV} + \lambda_0 \|\bar{v}\|_*. \quad (8.17)$$

Mais

$$\|\bar{u}\|_{BV} + \lambda \|\bar{v}\|_* \leq \|g\|_{BV} + \lambda \|h\|_*. \quad (8.18)$$

En combinant 8.17 et 8.18, il vient pour $\lambda > \lambda_0$,

$$\|\bar{v}\|_* \leq \frac{\lambda + \lambda_0}{\lambda - \lambda_0} \epsilon. \quad (8.19)$$

Comme $g - \bar{u} = \bar{v} - h$, il vient immédiatement $\|g - \bar{u}\|_* \leq \frac{2\lambda\epsilon}{\lambda - \lambda_0}$. Quant à la deuxième estimation, nous écrivons que $\|\bar{u}\|_{BV} \leq \|g\|_{BV} + \lambda\epsilon$. Donc $\|g - \bar{u}\|_{BV} \leq 2\|g\|_{BV} + \lambda\epsilon \leq 2\|g\|_{BV} + \lambda$ pour $\epsilon \leq 1$. Il vient $\|g - \bar{u}\|_2^2 \leq \|g - \bar{u}\|_* \|g - \bar{u}\|_{BV} \leq \frac{2\lambda(2\|g\|_{BV} + \lambda)}{\lambda - \lambda_0} \epsilon$, ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 8.4.1 Dans tous les cas $\lambda_0 \geq 4\pi$. Ceci est en accord avec le lemme 8.2.2.

Remarque 8.4.2 Si f est extrémale et si $\lambda = \lambda_0 = \frac{\|f\|_{BV}}{\|f\|_*}$, alors $\bar{u} = f$, $\bar{v} = 0$ minimise la fonctionnelle Θ . Mais toute décomposition de la forme $f = \alpha f + (1 - \alpha)f$, $0 \leq \alpha \leq 1$, a la même énergie. Il n'y a pas unicité dans le problème d'Osher-Vese.

Dans le cas où f est simple, le raisonnement de la remarque précédente ne tient plus.

Remarque 8.4.3 *Les hypothèses de (b) du théorème 8.4.1 ne peuvent fournir l'unicité de la décomposition d'Osher-Vese. Pour s'en convaincre, on considère une fonction extrémale f telle que $\lambda_f = \frac{\|f\|_{BV}}{\|f\|_*} > 4\pi$. On décompose f en la somme $g + h$ où g est la fonction indicatrice d'un disque quelconque et $h = f - g$. Alors le coefficient λ_0 du point (b) vaut 4π . Pour $\lambda = \lambda_f > \lambda_0$, la remarque précédente montre qu'il n'y a pas unicité.*

Le point (a) du théorème 8.4.1 ne peut s'étendre aux fonctions de BV en général comme le montre le contre-exemple suivant. En effet prenons pour f la fonction radiale $e^{-|x|^2/2}$ notée encore $f(r)$ et supposons qu'il existe un rang λ_0 à partir duquel l'algorithme Osher-Vese pour $\lambda > \lambda_0$ donne $\bar{u} = f$, $\bar{v} = 0$. Ecrivons $f = u_\lambda + v_\lambda$ la décomposition ORF associée au paramètre λ (section 3.8). On connaît dans ce cas la fonction u_λ qui est alors radiale :

$$u_\lambda(r) = \begin{cases} \gamma & 0 \leq r \leq a \\ f(r) - M/r & a \leq r \leq R \\ 0 & r \geq R \end{cases}.$$

Les inconnues sont déterminées par le système suivant

$$\begin{cases} M = (2\lambda)^{-1} \\ 2a^{-1} \int_0^a r f(r) dr - af(a) = M \\ Rf(R) = M \\ a \leq R \end{cases}.$$

Considérons alors le problème d'Osher-Vese pour une valeur $\tilde{\lambda}$ qu'on spécifiera en fonction de λ . Mettons en compétition $u = f$, $v = 0$ avec $u = u_\lambda$, $v = v_\lambda$.

Cela revient à comparer $\|f\|_{BV}$ avec $I = \|u_\lambda\|_{BV} + \tilde{\lambda} \|v_\lambda\|_*$. On a

$$\|f\|_{BV} = \int_0^\infty r |f'(r)| dr = \int_0^\infty f(r) dr. \quad (8.20)$$

Estimons I . Après calcul, il vient

$$I = af(a) + M(\tilde{\lambda} - 1 - \ln(\frac{R}{a})) + \int_a^R f(r) dr \quad (8.21)$$

Faisons maintenant le choix $\tilde{\lambda} = 1 + \ln(\frac{R}{a})$. Puisque f est décroissante, il vient $I < \int_0^R f(r) dr$. Donc $I < \|f\|_{BV}$. Il suffit alors de fixer λ suffisamment grand pour que $\tilde{\lambda}$ dépasse λ_0 (si λ tend vers l'infini, $\tilde{\lambda}$ tend vers

l'infini car R tend vers l'infini et a tend vers 0). Il y a donc une contradiction !

Pour $\|f\|_* \leq (2\lambda)^{-1}$, l'algorithme ORF donne $u = 0$, $v = f$. Qu'en est-il de l'algorithme d'Osher-Vese. Etant donné le rôle joué par le paramètre λ , on peut se poser la question suivante :

Conjecture : $\|f\|_{BV} \geq \lambda \|f\|_* \implies \bar{u} = 0, \bar{v} = f$ dans l'algorithme d'Osher-Vese.

La conjecture est vraie si $0 < \lambda < 4\pi$ et est fausse sinon. Nous avons déjà traité le cas $\lambda < 4\pi$ et $\lambda = 4\pi$ en considérant la fonction indicatrice d'un disque. Prenons maintenant $\lambda > 4\pi$ et montrons que la conjecture est fausse. On reprend l'exemple de la roue dentée 3.5. Pour N entier, on pose f_N la fonction polaire définie par $f_N(r, \theta) = \chi_D(r) + r_N(\theta)\chi_C(r)$ où D désigne le disque de centre 0 de rayon 1 et $C = \{\frac{1}{2} \leq r \leq 1\}$, $r_N(\theta) = (-1)^k$ pour $\theta \in [\frac{k\pi}{N}, \frac{(k+1)\pi}{N}]$. On sait que $\|r_N\chi_C\|_* \leq \frac{C_0}{N}$. Donc $\|f_N\|_* \sim \frac{1}{2}$. De plus, $\|f_N\|_{BV} \sim 2N$. Pour N assez grand, il vient $\|f_N\|_{BV} \geq \lambda \|f_N\|_*$, $\Theta(0) \sim \frac{\lambda}{2}$ et $\Theta(\chi_D) \sim 2\pi$. Comme $\lambda > 4\pi$, il vient $\Theta(\chi_D) < \Theta(0)$ pour N assez grand. On ne peut alors avoir $\bar{u} = 0$!

En résumé, en dehors du cas trivial $\lambda < 4\pi$, nous ne connaissons pas de critère d'unicité pour l'algorithme d'Osher-Vese. Dans le cas des fonctions simples et pour certaines valeurs de λ , il y a une décomposition unique qui est $f = f + 0$. Cet algorithme est donc une amélioration de celui d'ORF et des autres modèles rencontrés au Chapitre 4. Quant au cas particulier des fonctions extrémales et pour un λ bien choisi, nous avons mis en évidence une infinité de fonctions minimisants $\|u\|_{BV} + \lambda \|v\|_*$. Cependant, ces solutions sont de la forme $\alpha f + (1 - \alpha)f$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Ces solutions sont, d'un point de vue numérique, les mêmes : on y retrouve les mêmes objets et textures. On peut alors énoncer la conjecture suivante :

Conjecture : Supposons que, pour le paramètre $\lambda_0 = \frac{\|f\|_{BV}}{\|f\|_}$, toute décomposition $\alpha f + (1 - \alpha)f$, $0 \leq \alpha \leq 1$, soit solution du problème d'Osher-Vese, appliqué à f pour ce paramètre λ_0 . Alors f est extrémale.*

Enfin, le théorème de stabilité 8.4.1, même s'il n'y a pas unicité au problème d'Osher-Vese, donne une idée des résultats possibles. Toute solution u est proche, au sens de la norme L^2 , de la *partie objet* de l'image initiale.

Conclusion et Perspectives

Le travail effectué par Y. Meyer [58] sur le modèle d'Osher-Rudin-Fatemi a été le point de départ de cette thèse. Nous y avons présenté quelques problèmes variationnels en traitement d'image. Nous les avons résolus dans certains cas (radial). Notre contribution majeure a été d'établir (en toute généralité) un théorème de stabilité de l'algorithme d'ORF. Ce théorème donne une idée de la solution u . Cependant, comme annoncé dès le début, l'algorithme ne sépare pas entièrement les objets des textures : il y a toujours une partie texturée, même si l'image n'est composée que d'objets. C'est un des défauts majeurs de l'algorithme ORF. De plus, l'utilisation de la norme BV complique les calculs. Cela provient du fait que BV n'est pas caractérisé par une relation sur les coefficients d'ondelette [34]. Nous établissons alors un théorème qui compare, dans le cas des fonctions étagées, la norme BV et la norme dans $\dot{B}_1^{1,\infty}$. Suivant G. Bourdaud et Y. Meyer, nous avons observé qu'il existe une constante $C > 0$, telle que pour $f = c_1\chi_{E_1} + \dots + c_N\chi_{E_N}$, on ait

$$\frac{1}{2} \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} \leq \|f\|_{BV} \leq CN \|f\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}}. \quad (8.22)$$

Nous avons observé que dans certains cas la majoration ne dépend pas de N . Peut-on généraliser 8.22 au cas où f prend une infinité de valeurs discrètes ? Ceci étant, nous avons alors proposé un nouveau modèle : $\|u\|_{\dot{B}_1^{1,\infty}} + \lambda \|v\|_2^2$. Dans ce cas, nous avons mis en place une méthode de résolution basée sur les coefficients d'ondelette de f dans une base orthonormée. Nous obtenons une forme de wavelet shrinkage. La différence est que le seuillage

dépend de l'échelle. Cette méthode est un moyen efficace pour résoudre le problème. L'inconvénient est qu'on perd l'invariance par translation, rotation et dilatation. C'est gênant. L'autre inconvénient est que, comme pour le modèle ORF, la composante v contient toujours de l'information, même si l'image est un objet. Nous avons établi le lien entre l'algorithme d'ORF et le nouveau en généralisant ces résultats aux problèmes variationnels de la forme $\|u\|_E + \lambda \|v\|_2^2$, où E est un espace de Banach fonctionnel. Nous avons redémontré, de façon générale, le théorème de projection de A. Chambolle [29] : lorsque $\|u\|_E = \sup_{v \in F} \int uv dx$ où $F = \{v \in L^2 \mid \|v\|_* \leq 1\}$, alors la solution v est la projection orthogonale (dans L^2) de f sur $(2\lambda)^{-1}F$. De plus, nous avons, un théorème de stabilité

$$\|u_1 - u_0\|_2 \leq C \|f_1 - f_0\|_*^{1/2} (\|f_0\|_2 + \|f_1\|_2). \quad (8.23)$$

Rappelons, dans le cas $E = \dot{B}_1^{1,\infty}$, que l'algorithme est une forme de wavelet shrinkage. De ce fait, si la fonction a certaines propriétés de régularité, caractérisable par les modules des coefficients d'ondelette, alors u aura les mêmes. En particulier, si f est dans un espace de Besov homogène (ou L^p pour $1 < p < \infty$), alors u le sera aussi. Cette question reste ouverte dans le cadre de l'algorithme d'ORF.

Enfin, pour pallier ce défaut $\|v\|_* = \frac{1}{2\lambda}$, nous avons étudié l'algorithme d'Osher-Vese. Nous avons mis en évidence le problème majeur : le manque d'unicité. C'est une question ouverte. Cependant, nous y avons apporté une réponse dans des cas particuliers. Pour cela, nous avons introduit deux classes de fonctions ; celles dites simples et celles dites extrémales. Ces fonctions nous ont montré, dans ces cas, la supériorité de l'algorithme d'Osher-Vese sur celui d'Osher-Rudin-Fatemi. Le cas des fonctions extrémales est particulièrement intéressant. Nous avons montré que pour un choix particulier de λ , il n'y a pas unicité : les autres décompositions optimales $u+v$ qu'on connait sont de la forme $\alpha f + (1-\alpha)f$. En un sens, la décomposition peut

être considérée comme unique. Cette propriété est-elle uniquement vérifiée par les fonctions extrémales ?

Concluons en rappelant le lien entre les fonctions extrémales et certains problèmes d'EDP étudiés par V. Caselles et ses collaborateurs [14]

$$u = -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right). \quad (8.24)$$

Une fonction u est extrémale si et seulement si $\frac{u}{\|u\|_*}$ vérifie 8.24.

Annexe A

Méthodes numériques

Dans cet annexe, nous rappelons quelques algorithmes pour résoudre le problème d'Osher-Rudin-Fatemi [29] ainsi que celui d'Osher-Vese [74] [11]. Nous présentons quelques résultats obtenus par Jérôme Gilles [52].

Dans [29], A. Chambolle propose un algorithme de projection pour résoudre le problème d'ORF,

$$\inf_{u \in BV} \|u\|_{BV} + \frac{1}{2\lambda} \|f - u\|_2^2 \quad (\text{A.1})$$

Comme nous l'avons prouvé, la solution u_0 est telle que $v_0 = f - u_0$ correspond à la projection orthogonale de f sur λK où $K = \{v \in L^2(\mathbb{R}^2) / \|v\|_* \leq 1\}$. Cet ensemble est convexe et fermée dans L^2 . Pour résoudre le problème A.1, il suffit de pouvoir calculer la projection orthogonale de f sur λK , c'est-à-dire minimiser $\|f - \lambda \operatorname{div} g\|_2^2$ pour $g \in K$. A. Chambolle propose l'algorithme suivant :

- 1) On pose $g^0 = 0$.
- 2) Puis on calcule g^{n+1} par la relation

$$g^{n+1} = \frac{g^n + \tau(\nabla(\operatorname{div}(g^n) - f/\lambda))}{1 + \tau|(\nabla(\operatorname{div}(g^n) - f/\lambda))|} \quad (\text{A.2})$$

- 3) On fait un test d'arrêt quand l'écart entre g^n et g^{n+1} est suffisamment faible.

Théorème A.0.2 (A. Chambolle [29]) *Pour un paramètre de $\tau < 1/8$, la fonction $\lambda \operatorname{div}(g^n)$ converge vers v_0 .*

Pour résoudre le problème d'Osher-Vese,

$$\inf_{u \in BV} \|u\|_{BV} + \lambda \|v\|_* \quad (\text{A.3})$$

L. Vese et S.J. Osher propose de remplacer A.3 par

$$\inf_{(u,v) \in BV \times G} \|u\|_{BV} + \lambda \|f - u - \operatorname{div} g\|_2^2 + \mu \left\| \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right\|_p \quad (\text{A.4})$$

Ils remplacent v par $\operatorname{div} g$ où $g = (g_1, g_2) \in L^\infty$ et approchent la norme duale de v par $\left\| \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right\|_p$. L'idée est d'approcher la norme L^∞ par la norme L^p , pour p assez grand. Le lecteur trouvera tous les détails de la résolution et discrétisation du problème A.4 dans [74]. Cependant, il n'y a aucun résultat permettant de comparer les solutions de A.3 et A.4.

Toujours pour résoudre le problème D'Osher-Vese, J.F. Aujol et al. proposent la méthode des projections non linéaires. Ils considèrent le problème suivant :

$$\inf_{(u,v) \in BV \times G_\mu} \|u\|_{BV} + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_2^2 \quad (\text{A.5})$$

où $G_\mu = \{v \in G / \|v\|_* \leq \mu\}$. Ils proposent alors de résoudre A.5 en minimisant d'abord par rapport à v puis par rapport à u . La minimisation par rapport à v correspond à une projection orthogonale de $f - u$ sur μK : $\hat{v} = P_{\mu K}(f - u)$ où P_E est l'opérateur de projection orthogonale sur un ensemble convexe, fermé E . Quant à la minimisation par rapport à u , on obtient $\hat{u} = f - v - P_{\lambda K}(f - v)$. L'algorithme est alors le suivant. On initialise $u^0 = v^0 = 0$ puis on calcule, dans cet ordre, $v^{n+1} = P_{\mu K}(f - u^n)$ et $u^{n+1} = f - v^{n+1} - P_{\lambda K}(f - v^{n+1})$. Les projections orthogonales sont calculées par l'algorithme de Chambolle. Dans [11], le lecteur trouvera de plus amples détails (la preuve de la convergence de cet algorithme, le rôle du paramètre λ). A. Aujol et al. montrent le lien entre la solution (unicité) de A.5 pour



FIG. A.1 – Image originale f : Barbara

$\lambda \rightarrow 0$ et une solution de A.3.

Passons aux résultats numériques. Nous reprenons quelques résultats donnés par J. Gilles [52]. Nous considérons l'image de Barbara (512×512) et nous présentons les décompositions $u + v$ obtenus pour les algorithmes *ORF*, d'Aujol et al. et d'Osher-Vese pour $p = 1$. La décomposition d'ORF est obtenue pour $\lambda = 10$ et $\tau = 0.004$. Le test d'arrêt est soit 500 itérations soit la norme L^∞ entre g^n et g^{n+1} est inférieure à 0.005.

La décomposition d'Osher-Vese est obtenue pour $p = 1$ et $\lambda = \mu = 0.1$.

La décomposition d'Aujol et al. est obtenue pour $\lambda = \mu = 10$. Les projections sont calculées jusqu'à 50 itérations ou une erreur inférieure à 0.005.

La décomposition est obtenue après 10 itérations des projections successives selon v et u .



FIG. A.2 – Composante u (en haut) et v (en bas) par l'algorithme ORF

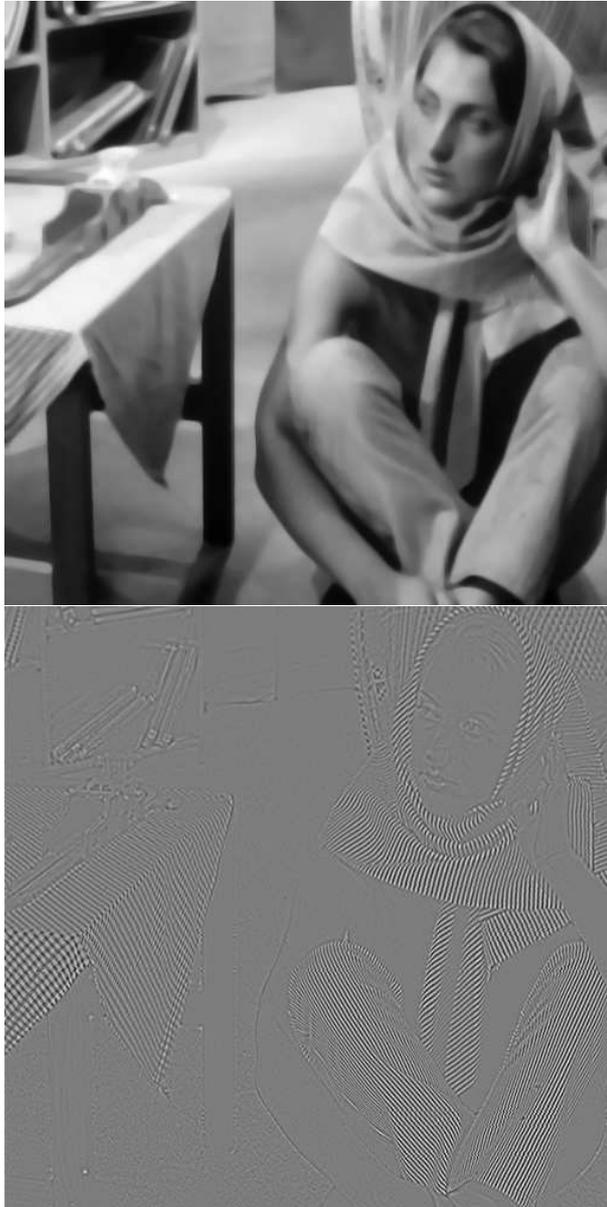


FIG. A.3 – Composante u (en haut) et v (en bas) par l’algorithme d’Osher-Vese ($p=1$)

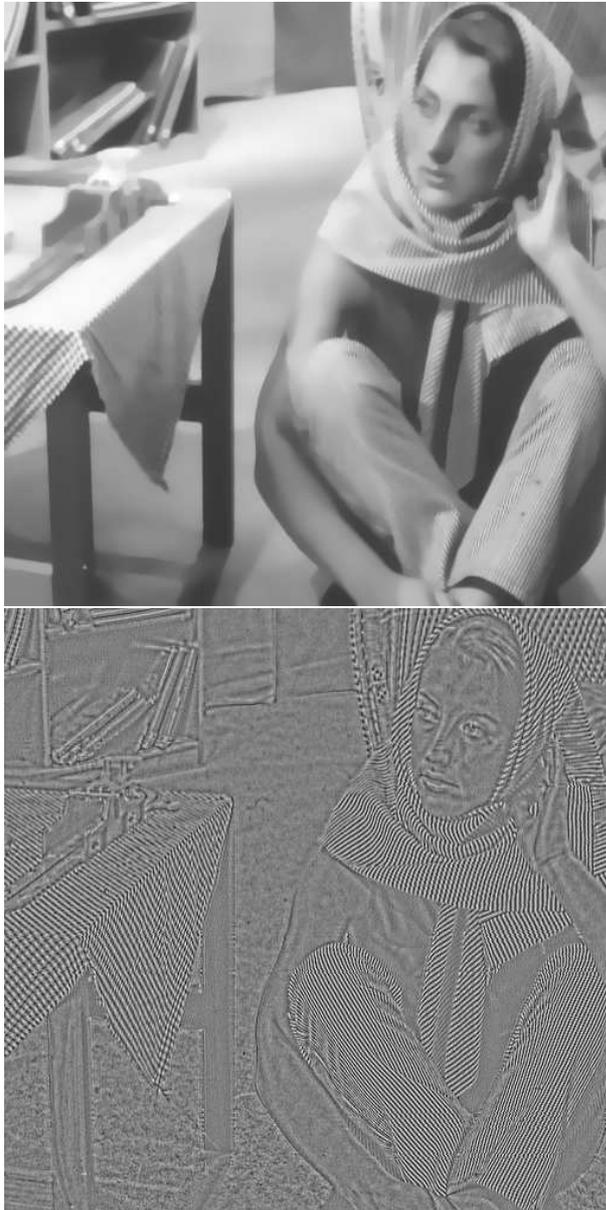


FIG. A.4 – Composante u (en haut) et v (en bas) par l’algorithme d’Aujol et al.

Bibliographie

- [1] E. Adelson, R. Hingorani, E. Simoncelli. *Orthogonal pyramid transform for image coding*. Proceedings SPIE Conference on Visual Communications and Image Processing II, vol 845, October 27-29 (1987) pp. 50-58.
- [2] S. Alinhac, P. Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Morse*. Editions du CNRS.
- [3] S.-I. Amari, J.-F. Cardoso. *Blind source separation -semiparametric statistical approach*. IEEE Trans. on Sig. Proc. 45 (11) : 2692-2700, November 1997, Special issue on neural networks.
- [4] L. Ambrosio. *Corso introduttivo alla teoria geometrica delle Misura ed alle Superfici Minime*. Scuola Normale Superiore Lecture Notes, Pisa, 1997.
- [5] L. Ambrosio, V. Caselles, S. Masnou, J.-M. Morel. *Connected components of sets of finite perimeter and applications to image processing*. J. European Math. Soc., 3 (2001), 39-92.
- [6] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles, J.M. Mazón. *Minimizing total variational flow*. Comptes Rendus Acad. Sciences, t 311, Sér. I, pp. 867-872,(2000).
- [7] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles, J.M. Mazón. *Minimizing Total Variational Flow*. Differential and Integral Equations, vol. 14 (3), 321-360 (2001).

- [8] A. Antoniadis, G. Oppenheim, eds. *Wavelets and Statistics*. Lecture Notes in Statistics, 103, XV^{eme} Rencontres Franco-Belges, Springer-Verlag (1995).
- [9] G. Aubert, J.F. Aujol. *Modeling very oscillating signals. Application to image processing*. INRIA Research report 4878 (2003). <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4878.html>.
- [10] J.P. Aubin. *Applied Functional Analysis*. John Wiley and Sons Inc., New York, USA (1979).
- [11] J.F. Aujol. *Contribution à l'analyse de textures en traitement d'images par méthodes variationnelles et équations aux dérivées partielles*. Thèse de doctorat, Université Nice Sophia Antipolis (juin 2004).
- [12] J.F. Aujol, G. Aubert, L. Blanc-Féraud, A. Chambolle. *Image decomposition into a bounded variation component and an oscillating component*. Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol. 22, n. 1, pages 71-88 (January 2005).
- [13] G. Bellettini, V. Caselles, M. Novaga. *The total variation flow in \mathbb{R}^N* . J. Differential Equations, 184, 475-525 (2002).
- [14] G. Bellettini, V. Caselles, M. Novaga. *The total variation flow in \mathbb{R}^N* . Preprint (2001).
- [15] G. Bellettini, V. Caselles, M. Novaga. *Explicit solutions of the eigenvalue problem $-\operatorname{div}(\frac{Du}{|Du|}) = u$* . Preprint (June 2003). <http://www.iaa.upf.es/vcaselles/>
- [16] G. Bourdaud, Y. Meyer. *Le calcul fonctionnel sous-linéaire dans les espaces de Besov homogènes*. Prépublication 382 de l'institut de Mathématiques de Jussieu (Nov 2004).
- [17] G. Bourdaud, Y. Meyer. *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov*. J. Funct. Anal., 97 (1991),351-360.

- [18] G. Bourdaud. *Réalisations des espaces de Besov homogènes*. Ark. für Mat., 26 (1988) 41-54.
- [19] G. Bourdaud. *The functional calculus in Sobolev spaces*. Function Spaces, Differential Operators and Non Linear Analysis, H.-J. Schmeisser, H.Triebel (eds.); Teubner, Stuttgart, Leipzig (1993).
- [20] G. Bourdaud, M.E.D. Kateb. *Calcul fonctionnel dans l'espace de Sobolev fractionnaire*. Math. Zeit., 210 (1992), 607-613.
- [21] G. Bourdaud, M.E.D. Kateb. *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov*. Math. Ann., 303 (1995), 653-675.
- [22] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et application*. Dunod (1983).
- [23] Andrea Braides. *Approximation of free discontinuity problems*. Lecture Notes in Mathematics no. 1694, Springer (1991).
- [24] P.J. Burt, E.H. Adelson. *The laplacian pyramid as a compact code*. IEEE Trans. Commun. 31(4) :525-540, April 1983.
- [25] E. Candès, D. Donoho. *Ridgelets : a key to higher-dimensional intermittency*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A (1999) no.1760, 2495-2509.
- [26] E. Candès, D. Donoho. *New tight frames of curvelets and optimal representation of objects with piecewise C^2 singularities*. Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. LVII, (2004) 0219-0226.
- [27] J.F. Cardoso. *Blind signal separation : statistical principles*. Proceedings of the IEEE Special Issue on blind identification and estimation 9 (10) : 2009-2025, October 1998.
- [28] R. Carmona, Wen-Liang Hwang, B. Torrèsani. *Practical time-frequency analysis*. Academic Press (1998).
- [29] A. Chambolle. *An algorithm for total variation minimization and applications*. JMIV 20 :89-97 (2004).

- [30] A. Chambolle, P.L. Lions. *Image recovery via total variation minimization and related problems*. Numerische Mathematik, 76 (3) :167-188 (1997).
- [31] A. Cohen, R. Ryan. *Wavelets and multiscale signal processing*. Chapman and Hall, London (1995).
- [32] A. Cohen. *Numerical Analysis of Wavelet Methods*. Elsevier (2003)
- [33] A. Cohen, R. DeVore, P. Petrushev, Hong Xu. *Nonlinear approximation and the space $BV(\mathbb{R}^2)$* . American Journal of Mathematics, 121 (1999) 587-628.
- [34] A. Cohen, W. Dahmen, I. Daubechies and R. DeVore. *Harmonic Analysis of the space BV* . Revista Mathematica Iberoamericana 19, 235-263, 2003.
- [35] R. R. Coiffman. *Adapted multiresolution analysis, Computation, Signal Processing, and Operator theory*. Proceedings of the ICM, Kyoto (1990) pp. 879-888, Springer-Verlag.
- [36] R. R. Coiffman, M. V. Wickerhauser. *Entropy-based algorithms for best-basis selection*. IEEE Trans. Info. Theory, March 1992.
- [37] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. SIAM Philadelphia (1992).
- [38] G. David. *Singular sets of minimizers for the Mumford-Shah functional*. Birkhäuser (2004).
- [39] E. De Giorgi. *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r - 1)$ -dimensionali inn uno spazio ad r dimensioni*. Recherche Mat. 4 (1955), 95-113.
- [40] R. DeVore, B.J. Lucier. *Fast wavelet techniques for near optimal image compression*. IEEE Military Communications Conference, October 11-14 (1992).
- [41] D. Donoho. *Nonlinear Solution of Linear Inverse Problems by Wavelet-Vaguelette Decomposition*. Applied and Computational Harmonic Analysis 2, 101-126 (1995).

- [42] D. Donoho. *Abstract statistical estimation and modern harmonic analysis*. Proceedings of the ICM Zürich (1994) pp. 997-1005 Birkhäuser.
- [43] D. Donoho, R. DeVore, I. Daubechies, M. Vetterli. *Data compression and harmonic analysis*. IEEE Trans. on Information Theory, Vol. 44, No 6, October 1998, 2435-2476.
- [44] D. Donoho. *Denoising via soft-thresholding*. IEEE Transactions Inf. theory, 41, 613-627 (1995).
- [45] D. Donoho, I. Johnstone, G. Kerkyacharian, D. Picard. *Wavelet shrinkage : Asymptotia ?* Journal R. Stat. Soc. B, 57, 301-369 (1995).
- [46] D. Donoho. *Unconditionnal bases are optimal for data compression and statistical estimation*. Appl. Comp. Harm. Anal. 1, 100-105 (1993)
- [47] I. Ekeland, R. Temam. *Convex Analysis and Variational Problems*. North Holland, Amsterdam (1976).
- [48] L.C. Evans, R.F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Math., CRC Press, Ann Harbor (1992).
- [49] W.H. Fleming, R. Rishel. *An integral formula for total gradient variation*. Arch. Math. 11 (1960), 218-222.
- [50] D. Foata, A. Fuchs. *Calcul des probabilités Cours, exercices et problèmes corrigés*. Dunod (1998).
- [51] D. Gabor. *Theory of communication*. J. IEE, 93 (1946) pp. 429-457. 339-342.
- [52] J. Gilles. *Textures- Décomposition d'images*.
- [53] B. Gidas, D. Mumford. *Stochastic Models For Generic Images*. Quaterly of App. Math., volume LIX, number 1, 85-111 (march 2001).
- [54] E. Giusti. *On the equation of surfaces of prescribed mean curvature. Existence and uniqueness without boundary conditions*. Invent. Math., 46, 111-137 (1978).

- [55] E. Giusti. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*. Birkhäuser (1994).
- [56] D. Marr. *Vision, A computational investigation into the human representation and processing of visual information*. W. H. Freeman and Co. (1982).
- [57] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs*. tomes I, II. Hermann, Paris (1990).
- [58] Y. Meyer. *Oscillating patterns in image processing and in some non-linear evolution equations*. The fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis memorial lectures. University Lectures Series, 22, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [59] Y. Meyer. *Note de cours de DEA à l'école normale supérieure de Cachan*.
- [60] J. M. Morel, S. Solimini. *Variational Methods in image segmentation*. Birkhäuser, Boston (1995).
- [61] D. Mumford. *Book review on [56]*. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 33, n. 2, April 1996.
- [62] D. Mumford, J. Shah. *Optimal representations by piecewise smooth functions and associated variational problems*. Comm. Pure Applied Mathematics, 42 (5) (1989) 577-685.
- [63] F. Oru. *Rôle des oscillations dans quelques problèmes d'analyse non-linéaire*. PhD thesis, Thèse CMLA, ENS-Cachan, France (1998).
- [64] S. Osher, L. Rudin. *Total variation based image restoration with free local constraints*. In Proc. IEEE ICIP, vol I, pages 31-35, Austin (Texas) USA, Nov. 1994.
- [65] S.J. Osher, A. Solé, L. Vese. *Image decomposition and restoration using total variation minimization and the H^{-1} norm*. Multiscale Modeling and Simulation : A SIAM Interdisciplinary Journal, 1 (3) :349-370 (2003).

- [66] L. Rudin, S. Osher, E. Fatemi. *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*. Physica D, 60 :259-268 (1992).
- [67] P. Oswald. *On the boundedness of the mapping $f \rightarrow |f|$ in Besov spaces*. Comment. Univ. Carolinae, 33 (1992), 57-66.
- [68] J. Peetre. *New Thoughts on Besov Spaces*. Duke Univ. Math. Series. Number 1 (1976).
- [69] W. Ring. *Structural Properties of Solutions of Total Variation Regularization Problems*. August 1999. www.kfunigraz.ac.at/imawww/ring/publist.html
- [70] N. Saito. *Local Feature Extraction and its applications using a Library of Bases*. in "Topics in Analysis and its applications" (R. R. Coiffman Ed.) World Scientific Pub. Co. (1999).
- [71] N. Saito, B.M. Larson, B. Benichou. *Sparsity vs. statistical independence from a best basis view-point*. To appear in Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII (A. Aldroubi, A. F. Laine, M.A. Unser eds) Proc. SPIE 4119 (2000), Invited Paper.
- [72] N. Saito. *Least statistically-dependent basis and its application to image modeling*. Wavelet Applications in Signal and Image Processing VI (A. Aldroubi, A.F. Laine, M.A. Unser eds) "Proc. SPIE 3458 pp. 24-37 (1998).
- [73] H. Triebel. *Theory of function Spaces II*. Birkhäuser, Basel (1992).
- [74] L. Vese, S.J. Osher. *Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing*. UCLA C.A.M. Report 02-19, (May 2002).
- [75] L. Vese, S.J. Osher. *Image denoising and decomposition with total variation minimization and oscillatory functions*. JMIV, 20 :7-18, 2004.
- [76] W.P. Ziemer. *Weakly Differentiable Functions*. Springer Verlag, Berlin (1989).

[77] A. Zygmund. *Trigonometric series*. Vol. I, II. Cambridge University Press. Second edition (1977).

Resumé

L'objet de cette thèse est d'étudier les propriétés mathématiques de quelques modèles utilisés en traitement d'image. Suivant S. J. Osher, L. Rudin et E. Fatemi, nous décomposons une image $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ en une somme $u + v$ où u appartient à un espace de Banach fonctionnel E et v appartient à $L^2(\mathbb{R}^2)$. L'espace E doit modéliser les objets contenus dans l'image et la décomposition optimale minimise l'énergie $J(u) = \|u\|_E + \lambda \|f - u\|_2^2$. La difficulté majeure est de choisir un espace E adapté. Les choix classiques sont $E = \dot{B}_1^{1,1}(\mathbb{R}^2)$, qui conduit au célèbre "wavelet thresholding" de Donoho, ou $E = BV(\mathbb{R}^2)$, l'espace des fonctions à variations bornées. Le dernier choix définit l'algorithme d'Osher-Rudin-Fatemi. Ces deux choix ont des défauts. Le premier efface les bords nets. Le second ne conduit pas à un seuillage des coefficients d'ondelette. Nous proposons alors de prendre $E = \dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$, qui conserve les bords nets et conduit à un seuillage des coefficients d'ondelette. C'est les deux premières parties de la thèse. Dans la troisième partie, nous étudions les propriétés mathématiques de l'algorithme d'Osher-Vese qui traite mieux les composantes texturées.

Mots clés : $BV(\mathbb{R}^n)$, textures, espaces de Besov, fonctions oscillantes, modèles "u+v", wavelet shrinkage, algorithme d'Osher-Rudin-Fatemi, algorithme d'Osher-Vese.

Abstract

The purpose of this thesis is to investigate the mathematical properties of some models which are currently used in image processing. Generalizing an approach by S.J. Osher, L. Rudin and E. Fatemi, we decompose an image $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ as a sum $u + v$ where u belongs to some functional Banach space E while v belongs to $L^2(\mathbb{R}^2)$. The Banach space E is aimed at modeling the objects contained in the given image and the optimal decomposition minimizes the energy $J(u) = \|u\|_E + \lambda \|f - u\|_2^2$. The main difficulty is to choose an adapted Banach space E . The common choices are $E = \dot{B}_1^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ which leads to the well-known Donoho's wavelet thresholding or $E = BV(\mathbb{R}^2)$ the space of functions of bounded variations. The latter choice is the Osher Rudin Fatemi algorithm. These two choices are suffering from severe drawbacks. In the first case, sharp edges are erased. The second choice does not lead to a wavelet thresholding. That is why we propose $E = \dot{B}_1^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ which yields sharp edges and is given by wavelet thresholding. This is the the two first parts of the thesis. In the third part, we investigate the mathematical properties of the Osher-Vese newest algorithm which keeps track of the textured components.

Key words : $BV(\mathbb{R}^n)$, textures, besov spaces, oscillating patterns, "u+v" models, wavelet shrinkage, Osher-Rudin-Fatemi algorithm, Osher-Vese algorithm.