



HAL
open science

Modèles numériques pour les vagues et les ondes internes

Christophe Fochesato

► **To cite this version:**

Christophe Fochesato. Modèles numériques pour les vagues et les ondes internes. Mathématiques [math]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2004. Français. NNT : . tel-00132969

HAL Id: tel-00132969

<https://theses.hal.science/tel-00132969>

Submitted on 23 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° ENSC-200403

**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

Monsieur Christophe FOCESATO

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine :

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Sujet de la thèse :

**Modèles numériques pour les vagues et les
ondes internes**

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 30 Septembre 2004 devant le Jury composé de :

JEAN-CLAUDE SAUT	professeur	Président
WALTER CRAIG	professeur	Rapporteur
OLIVIER THUAL	professeur	Rapporteur
GÉRARD DELHOMMEAU	professeur	Examineur
PHILIPPE FRAUNIÉ	professeur	Examineur
FRÉDÉRIC DIAS	professeur	Directeur de thèse

Centre de Mathématiques et de Leurs Applications

ENS CACHAN/CNRS/UMR 8536

61, avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)

Remerciements

Je souhaite avant tout remercier la Délégation Générale de l'Armement qui a financé cette thèse dans le cadre de son soutien à la recherche dans le domaine maritime. Mes trois années de thèse se sont déroulées dans un contexte scientifique de grande qualité au Centre de Mathématiques et de Leurs Applications de l'ENS Cachan. Je remercie la direction de m'avoir accueilli et d'avoir mis à ma disposition les outils nécessaires à la poursuite de mes recherches. Je remercie plus particulièrement Pascal Bringas, Micheline Brunetti et Véronique Almodovar de leurs efforts pour mettre les doctorants dans de bonnes conditions de travail.

Je suis très heureux d'avoir eu Professeur Frédéric Dias comme directeur de thèse. Je lui suis reconnaissant de m'avoir guidé et conseillé, soutenu lorsque c'était nécessaire, ainsi que de m'avoir aidé à me faire connaître. Professeur Stephan Grilli a joué un rôle déterminant concernant la première partie de cette thèse. Nos rencontres ont toujours été fructueuses et m'ont permis, à chaque fois, de faire un pas en avant. Je le remercie vivement de cette collaboration, et plus particulièrement, de m'avoir invité à travailler quelques jours avec lui à l'Université de Rhode Island. Mes pensées vont également à Professeur Roger Grimshaw pour les discussions éclairantes sur le second problème étudié dans cette thèse. A travers nos échanges électroniques notamment, Philippe Guyenne et François Enet auront également contribué à cette thèse, je leur adresse mes amitiés.

J'exprime ma gratitude aux Professeurs Walter Craig et Olivier Thual, qui ont accepté d'être rapporteurs, ainsi qu'aux Professeurs Gérard Delhommeau, Philippe Fraunié et Jean-Michel Ghidaglia pour l'intérêt qu'ils portent à mon travail en ayant accepté de faire partie du jury. Je souhaite en particulier remercier Professeur Jean-Claude Saut, et à travers lui l'Université d'Orsay au sein de laquelle j'ai suivi toute ma formation. Je lui dois de m'avoir fait confiance pour accéder au DEA qu'il dirigeait, alors que je provenais d'une filière d'ingénierie. J'en profite pour associer Messieurs Laurent Di Menza et Frédéric Pascal à ces remerciements, de m'avoir soutenu alors dans mon choix de faire de la recherche.

Merci aux doctorants du CMLA pour la vie qu'ils apportent au laboratoire. Tous les instants de détente partagés auront été autant de souffles rafraîchissants sur mon esprit embrouillé. Ce sont peut-être ces détails qui ont permis d'amener ce projet à son terme. Enfin, de doute, je n'en ai aucun concernant le soutien essentiel de Laura au long de ces trois années. Elle a su me faire sortir de ma bulle parfois, tout comme m'y pousser lorsqu'il le fallait. Elle m'a finalement donné à la fois le recul et la motivation dont j'avais besoin pour avancer.

Résumé :

La première partie de la thèse concerne le calcul numérique des ondes de gravité en trois dimensions. Le modèle résout les équations d'Euler incompressibles avec surface libre pour un écoulement potentiel. Il est basé sur la Méthode des Eléments aux Frontières dont le principal inconvénient provient de sa complexité de résolution en $O(N^2)$, où N est le nombre de points utilisé pour discrétiser la frontière du domaine. L'insertion de l'Algorithme des Multipôles Rapides au sein du solveur itératif est réalisée, ce qui a pour effet de réduire la complexité à quasiment $O(N)$. Deux applications sont alors considérées : le déferlement d'une onde solitaire sur un fond tridimensionnel et la focalisation spatiale générée par un batteur à houle.

Dans la seconde partie, une étude plus en amont est effectuée dans le contexte des ondes internes en deux dimensions. A partir d'un système générique de deux équations de Korteweg-de Vries avec non-linéarité cubique, des ondes solitaires généralisées sont discutées dans le cas où la vitesse approche la valeur critique correspondant à l'apparition des fronts. Ces solutions résultent de la résonance entre une onde solitaire large ayant une amplitude limite et une onde courte, qui se propagent à la même vitesse de phase.

Mots clés : Ondes de surface - Méthode des Eléments aux Frontières - Algorithme des Multipôles Rapides - Problème à deux couches - Ondes solitaires généralisées - Fronts

Abstract :

The first part of this dissertation deals with the numerical computation of gravity water waves in three dimensions. The model solves incompressible Euler's equations with a free surface for potential flows. It is based on a Boundary Element Method, whose main drawback lies in the computing complexity in $O(N^2)$, where N is the number of nodes used to discretize the boundary of the domain. The insertion of the Fast Multipole Algorithm inside the iterative solver is realized so that it reduces the complexity to nearly $O(N)$. Two applications are then considered : the overturning of a solitary wave over a three-dimensional bottom and spatial wave focusing caused by a wavemaker.

In the second part, a more qualitative study is carried out in the framework of internal waves in two dimensions. From a generic system composed of two Korteweg-de Vries equations with cubic nonlinearity, generalized solitary waves are discussed when the velocity approaches the critical value corresponding to the occurrence of fronts. These solutions result from the resonance between a "table-top" solitary wave having a limiting amplitude and a short wave, which propagate at the same phase speed.

Keywords : Water waves - Boundary Element Method - Fast Multipole Algorithm - Two-layer flows - Generalized solitary waves - Fronts

Table des matières

Présentation et résumé détaillé	11
1 Présentation	11
2 Insertion de l'Algorithme des Multipôles Rapides	14
3 Applications d'ondes de surface 3D	17
4 Ondes solitaires généralisées stationnaires	20
5 Problème d'évolution	24
Bibliographie	26
I Modèle numérique d'ondes de surface tridimensionnelles	29
1 Insertion de l'Algorithme des Multipôles Rapides	31
1.1 Introduction	32
1.2 The numerical wave tank	35
1.2.1 Mathematical formulation	35
1.2.2 Time Integration	37
1.2.3 Spatial discretisation	37
1.3 The Fast Multipole Algorithm	41
1.4 Application of the FMA to the BEM	44
1.4.1 Expansions	45
1.4.2 Formulation and mesh information	46
1.4.3 Near interactions	47
1.4.4 Far interactions	47
1.4.5 Specific points	49
1.5 Results	50
1.5.1 Accuracy	52
1.5.2 Efficiency	55
1.5.3 Discussion and future improvements	57
1.6 Conclusion	58
Bibliography	59

2	Applications d'ondes de surface 3D	63
2.1	Onde solitaire sur topographie non uniforme	64
2.1.1	Introduction	64
2.1.2	L'onde incidente	65
2.1.3	Un récif à une bosse	66
2.1.4	Une pente avec une double bosse	75
2.2	Focalisation spatiale dans un bassin	83
2.2.1	Introduction	83
2.2.2	Présentation du bassin	84
2.2.3	Evolution de la surface libre	86
2.2.4	Champ de vitesse	91
2.2.5	Champ d'accélération	97
2.3	Conclusion	97
	Bibliographie	102
II	Etude numérique d'un système d'équations de type KdV	105
3	Solutions stationnaires de type onde solitaire généralisée	107
3.1	Introduction	108
3.2	Models	110
3.2.1	Generic derivation	111
3.2.2	The weak coupling case	114
3.3	Simple model	115
3.3.1	Presentation	115
3.3.2	Analytical integration	116
3.3.3	Amplitudes of the oscillations	117
3.3.4	Effect of residuals	120
3.4	Solving the full system	123
3.4.1	Determination of the limiting case	123
3.4.2	Choice of a parameter set	124
3.4.3	Numerical method	126
3.4.4	Description of the numerical solutions	127
3.5	Embedding, cascade and multiplicity	129
3.5.1	Embedded solitary waves in the linear spectrum	131
3.5.2	Cascade of homoclinic solutions	132
3.5.3	Multiplicity of solutions	133
3.6	Conclusion	133
3.7	Appendix : Truncated Fourier integrals	134
	Bibliography	136

4	Problème d'évolution	139
4.1	Introduction	140
4.2	Cas d'un faible couplage	142
4.2.1	Résolution	142
4.2.2	Evolution d'une perturbation initiale	143
4.3	Système couplé	153
4.3.1	Méthode numérique	153
4.3.2	Obtention des ondes solitaires généralisées	155
4.3.3	Evolution d'une perturbation initiale plus générale	177
4.4	Instabilité modulationnelle	180
4.5	Conclusion	187
	Bibliographie	188

Présentation et résumé détaillé

1 Présentation

Deux sujets ont été développés. Ils représentent des points de vue différents, bien qu'ils s'appuient tous deux sur l'utilisation des méthodes numériques. Dans une première partie, un modèle pour les ondes de surface tridimensionnelles est amélioré puis utilisé afin de décrire des phénomènes de vagues de grande amplitude. Le développement de l'outil concerne le calcul scientifique, c'est un travail d'ingénierie qui cherche à apporter une réponse efficace à un problème réel. Cet outil est ensuite utilisé pour expliquer et mesurer certains phénomènes en se plaçant selon un point de vue plus physique. Les sections 2 et 3 de cette introduction résument cette partie. Dans la seconde partie, une étude plus en amont est effectuée dans le contexte des ondes internes en deux dimensions. Des solutions de type onde solitaire sont décrites à partir d'un modèle générique, qui peut se retrouver dans d'autres disciplines. Alors que l'utilisation de modèles simplifiés est largement répandue dans le cas des ondes de surface, elle l'est moins en ce qui concerne les ondes internes. Cette partie a donc pour objectif d'apporter une contribution dans la description qualitative d'un nouveau type de solutions en s'appuyant sur la simulation numérique. Les sections 4 et 5 donnent un aperçu du contenu de cette partie.

La première partie concerne le calcul numérique des ondes de surface en trois dimensions. L'écoulement d'un fluide est gouverné par les équations de Navier-Stokes. Le problème classique des vagues consiste à considérer l'eau comme un fluide parfait incompressible et de se restreindre à un écoulement irrotationnel. Ainsi, les équations de Navier-Stokes se simplifient de sorte que l'équation qui régit l'écoulement à l'intérieur du fluide est linéaire et indépendante du temps. Toute la complexité réside dans les conditions aux limites. En effet, les ondes de surface se caractérisent par la présence d'une surface libre qui est une inconnue du problème. Elle doit vérifier deux conditions qui sont non linéaires et dépendent du temps. La condition cinématique requiert que la vitesse des particules de fluide à la surface soient celle de l'écoulement en ce point. La condition dynamique assure l'égalité des contraintes.

Eventuellement, la tension de surface peut être négligée devant l'effet de la gravité, ce que nous ferons dans la suite pour ne considérer que des ondes de gravité. En fonction des applications en vue, ainsi que des possibilités des méthodes de calcul, un fond est défini où la profondeur est choisie constante ou bien infinie. De plus, des conditions aux limites sont requises. Il est souvent pratique d'imposer des conditions périodiques. Toutefois, lorsqu'il s'agit de simuler un canal à houle, des conditions de Neumann permettent de modéliser des parois solides, fixes ou mobiles. Le développement des méthodes numériques pour ce problème des ondes de surface continue de se poursuivre. Nous ne les passons pas en revue ici, mais en discutons certaines pour présenter celle que nous utilisons. Un aperçu plus complet peut être obtenu en se référant aux articles de Tsai et Yue [28] et Grilli *et al.* [15]. Le calcul des vagues en trois dimensions reste difficile, malgré l'amélioration des calculateurs. Nous pouvons distinguer deux types de méthodes principalement : les méthodes spectrales et les méthodes du type éléments aux frontières. Tout d'abord, les méthodes spectrales sont basées sur la transformée de Fourier, qui leur fournit un cadre devant aboutir à la rapidité d'exécution. Usuellement, ces méthodes s'appuient sur un développement de la surface libre et du potentiel des vitesses, qui limite leur efficacité pour des vagues fortement non linéaires. Elles sont représentées par les travaux de Dommermuth et Yue [10] et West *et al.* [31]. Plus récemment, Bateman *et al.* [1] ont étendu la méthode de Craig et Sulem [7] qui s'appuie sur l'opérateur de Dirichlet-Neumann, de sorte à pouvoir étudier des houles directionnelles. La limitation de ces modèles concernant la nonlinéarité est évitée dans la méthode présentée par Clamond et Grue [6]. En effet, ils utilisent une représentation intégrale qui est divisée en deux parts considérées séparément. La première part est globale et peut être traitée par la transformée de Fourier. La seconde part est locale et peut être évaluée rapidement sur un domaine tronqué. Ces méthodes sont donc mises en œuvre efficacement grâce notamment à l'utilisation de la transformée de Fourier rapide. Elles permettent d'envisager des simulations longues ayant une taille appréciable. Cependant, elles n'autorisent pas que la surface soit multi-valuée et elles s'adaptent difficilement, quand elles le peuvent, à d'autres conditions que des conditions périodiques et une profondeur constante ou infinie. Lorsque l'objectif concerne l'effet de la bathymétrie, des conditions latérales non périodiques ou le déferlement, ces méthodes ne sont pas forcément appropriées. Il vaut mieux alors se tourner vers les méthodes plus classiques basées sur une équation intégrale à la frontière et une discrétisation de type éléments aux frontières. L'utilisation systématique d'interpolations polynômiales d'ordre élevé dans ces méthodes a permis d'améliorer leur précision. Ainsi, la simulation de vagues déferlantes a pu être obtenue en trois dimensions par Xue *et al.* [32] pour des ondes de Stokes en grande profondeur, et par Grilli *et al.* [15] pour une onde solitaire sur une bathymétrie non uniforme. Le problème de ces méthodes réside dans le fait qu'elles nécessitent la résolution de systèmes linéaires denses et non symétriques à chaque pas de temps. Il en résulte que le temps de calcul et le stockage en mémoire sont des facteurs qui limitent l'exploitation de tels modèles. Le premier travail de cette thèse consiste à améliorer le modèle de Grilli-Guyenne-Dias [15] en terme d'efficacité.

C'est le sujet du chapitre 1. Grâce à cet outil plus rapide, deux applications ont été étudiées. Elles sont présentées au chapitre 2. Tout d'abord, l'étude du déferlement d'une onde solitaire sur des fonds tridimensionnels est effectuée. Ensuite, la génération d'une vague extrême par un batteur de houle est décrite.

Le contexte de la deuxième partie est celui des ondes solitaires et des fronts internes. Il s'agit de la propagation d'ondes situées à l'interface entre différentes couches d'un fluide stratifié. Elles sont rencontrées dans les écoulements stratifiés des régions côtières, des fjords ou des lacs. Une stratification en densité est un exemple de ces situations, où deux ou trois couches de densité constante sont superposées. Eventuellement la couche supérieure est bornée par la surface libre. Nous nous intéressons aux cas où deux modes d'ondes sont en présence. Les ondes solitaires généralisées résultent de la résonance entre une onde longue d'un mode d'onde et une onde courte de l'autre mode. Elles sont constituées d'un corps central localisé et d'oscillations périodiques non décroissantes qui se propagent à la même vitesse. Ce type de solutions a été mis en évidence dans différents contextes. En particulier, elles ont été calculées pour le problème à deux couches avec surface libre [20, 22], mais la plupart des résultats sur ces solutions ont été obtenus pour les ondes de surface avec tension superficielle [29, 5]. Si dans ce dernier contexte, elles sont souvent modélisées par des équations de Korteweg-de Vries (KdV) perturbées, la présence de deux modes d'ondes dans les problèmes multi-couches mènent plutôt à des équations de KdV couplées [8, 17]. Dans le cadre des ondes internes, un autre phénomène a suscité beaucoup d'intérêt. Il s'agit des fronts qui relient continûment deux écoulements conjugués [9]. En fait, ils apparaissent comme les cas limites d'ondes solitaires de grande amplitude. En effet, il est connu que lorsque la vitesse d'une onde solitaire interne approche une valeur critique, l'onde atteint une amplitude limite et s'élargit de plus en plus. Ce comportement est modélisé par une équation de KdV avec un terme non linéaire cubique ("extended KdV" ou eKdV). La question naturelle qui apparaît alors est de savoir comment se traduit la résonance onde longue-onde courte des ondes solitaires généralisées lorsque le corps principal est une onde solitaire large proche d'un front. Les oscillations périodiques sont-elles présentes sur la partie élargie de l'onde solitaire? Sont-elles uniquement visibles sur les bords? Il est intéressant de connaître leurs propriétés puisque les deux phénomènes sont susceptibles de coexister dans certains systèmes physiques. L'étude de ces solutions d'ondes solitaires larges généralisées ou de fronts généralisés a été approchée dans les travaux de Michallet et Dias [20], Dias et Il'ichev [8], Rusås et Grue [24]. Michallet et Dias [20] ont effectué une étude numérique des solutions stationnaires de type onde solitaire généralisée pour le problème à deux couches avec surface libre à partir des équations complètes. En augmentant la vitesse de l'onde solitaire, ils se sont confrontés à des difficultés numériques et n'ont pas pu poursuivre les calculs très proches de la vitesse critique des fronts. Dias et Il'ichev [8] ont étudié un modèle constitué de deux équations de KdV en utilisant la technique de la forme normale pour décrire la résonance de l'onde solitaire avec une onde courte. Ils ont

abordé le cas où la nonlinéarité cubique devenait aussi importante que le terme quadratique et considéré la possibilité de la résonance avec un front. Rusås et Grue [24] ont développé une méthode numérique pour résoudre le problème à trois couches de densité différente ayant deux interfaces. Ils ont ainsi pu calculer les deux types de phénomènes décrits ci-dessus. Pour les paramètres et la configuration qu'ils ont considéré, ils n'ont pas pu obtenir la résonance pour une onde solitaire très large. Ces études ont montré que la présence simultanée des deux phénomènes dans une solution stationnaire était possible. L'objectif de cette partie est de mettre en avant certaines propriétés de ces solutions à l'aide d'un modèle simplifié, ainsi que d'observer si nous les obtenons avec le problème d'évolution associé à ce modèle. Le point de vue que nous adoptons est celui de Grimshaw [16] qui a montré qu'un modèle générique d'équations de KdV couplées pouvait être obtenu pour décrire la résonance entre deux modes d'ondes dans la limite faiblement non linéaire des ondes longues. Sa dérivation générique est modifiée pour prendre en compte des nonlinéarités cubiques. Ceci est effectué au chapitre 3, dans lequel sont étudiées les solutions stationnaires. Au chapitre 4, l'évolution de perturbations initiales isolées est décrite. Les ondes solitaires larges généralisées obtenues sont alors comparées aux solutions stationnaires.

Les sections suivantes constituent un résumé détaillé en français du contenu de la thèse dont certains morceaux sont écrits en anglais. Le lecteur qui se destine à lire l'ensemble du document peut sauter ces sections et passer directement au développement des deux parties.

2 Insertion de l'Algorithme des Multipôles Rapides dans un code d'éléments aux frontières

L'inconvénient de la Méthode des Éléments aux Frontières est la nécessité d'assembler et de résoudre des systèmes linéaires denses et non symétriques. En utilisant un algorithme itératif pour la résolution, cela peut être réalisé en $O(N^2)$ opérations, où N est le nombre de points pour discrétiser la frontière. Le temps de calcul et le stockage en mémoire constituent donc des freins à l'exploitation du modèle. Il est indispensable de relaxer cette contrainte si nous voulons considérer des configurations de plus en plus complexes. Une première idée consiste à employer la méthode de décomposition de domaine pour pouvoir traiter des applications plus importantes, en utilisant notamment une architecture parallèle [30]. Seulement, cette possibilité ne réduit pas la complexité en N^2 de la méthode. En fait, il est possible de réduire directement la complexité du problème en accélérant le calcul des produits matrice-vecteur du solveur itératif. Pour cela, il faut obtenir une approximation de la matrice qui ait des propriétés permettant un calcul rapide. Lorsque les éléments de la matrice représentent l'influence de la distance entre deux nœuds, modélisée par la fonction de Green, l'Algorithme des Multipôles Rapides (Fast Multipole Algorithm, FMA) peut être appliqué. À l'origine développé par Greengard et Rokhlin [14] pour le problème à N corps, cet algorithme s'est

répandu à de nombreuses applications nécessitant le calcul rapide de toutes les interactions mutuelles dans un système de particules. Son utilisation dans des modèles numériques d'ondes de surface a été démontrée pour différents types de discrétisation [19, 25, 12], mais elle ne s'est pas généralisée à cause de la relative difficulté de sa mise en œuvre. Le premier objectif de la thèse a donc consisté à introduire cet algorithme dans le modèle de Grilli-Guyenne-Dias [15], en tenant compte des diverses spécificités de ce dernier.

Nous considérons donc les équations pour l'écoulement potentiel d'un fluide parfait incompressible avec surface libre. A l'intérieur du domaine, elles se résument à l'équation de Laplace pour le potentiel des vitesses ϕ défini à partir de la vitesse $\mathbf{u} = \nabla\phi$. La seconde identité de Green transforme cette équation de Laplace en une équation intégrale sur la frontière

$$\alpha(\mathbf{x}_l) \phi(\mathbf{x}_l) = \int_{\Gamma(t)} \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial n}(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) - \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) \right\} d\Gamma, \quad (1)$$

où $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) = 1/4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l|$ est la fonction de Green pour tout l'espace, \mathbf{n} est le vecteur normal à la surface (sortant) et $\alpha(\mathbf{x}_l)$ est proportionnel à l'angle solide extérieur fait par la frontière au point de collocation \mathbf{x}_l . Les conditions cinématique et dynamique sur la surface libre s'écrivent

$$\frac{D\mathbf{R}}{Dt} = \nabla\phi, \quad (2)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = -gz + \frac{1}{2} \nabla\phi \cdot \nabla\phi, \quad (3)$$

où \mathbf{R} est le vecteur position d'une particule de fluide, g est la constante de gravité et D/Dt la dérivée matérielle. Aux autres frontières du domaine, la dérivée normale du potentiel des vitesses est spécifiée. Si la paroi est fixe, une condition de flux nul est imposée. Si la paroi est mobile, la géométrie et le flux sont imposés par le mouvement prescrit de la paroi. Le domaine considéré représente donc un bassin fermé de type canal à houle, dont le fond peut être défini de forme quelconque. Le modèle numérique est présenté en détail dans l'article de Grilli *et al.* [15]. Le schéma en temps consiste à mettre à jour le vecteur position et le potentiel des vitesses à la surface libre grâce à des développements de Taylor au second ordre. A chaque pas de temps, il faut résoudre l'équation intégrale, ce qui est réalisé par la Méthode des Eléments aux Frontières. La frontière est découpée en éléments pour lesquels une interpolation locale est définie à la fois pour la géométrie de la frontière et les variables de champ. Des fonctions de forme polynômiales sont introduites pour cela. Elles définissent également un changement de variables qui ramène les intégrations sur un élément de référence cartésien. Le calcul numérique de ces intégrales par une quadrature de Gauss-Legendre et des techniques appropriées pour tenir compte des singularités de la fonction de Green constituent la phase d'assemblage de la matrice de discrétisation. Celle-ci est modifiée par la prise en compte de la technique du mode rigide qui permet de calculer indirectement les angles solides et d'éviter les intégrations singulières de la dérivée normale de la fonction de Green. L'introduction de la

technique des double nœuds pour traiter les intersections entre les frontières résulte également en une modification de la matrice. Finalement, le potentiel des vitesses, ou sa dérivée normale selon la frontière, est obtenue en résolvant le système linéaire issu de cette discrétisation de l'équation intégrale. Puisque la matrice est dense, la méthode a une complexité computationnelle en N^2 où N est le nombre de nœuds, en utilisant l'algorithme itératif GMRES pour ramener la phase de résolution au même niveau que la phase d'assemblage de la matrice. Afin de réduire sa complexité, l'Algorithme des Multipôles Rapides est introduit. L'idée est de remplacer tous les produits matrice-vecteur provenant de la discrétisation de l'équation intégrale par un appel à cet algorithme.

Celui-ci utilise une propriété de la fonction de Green qui peut être développée en variables séparées lorsque le point source et le point d'évaluation sont suffisamment éloignés. Elle peut s'écrire pour une origine O proche de \mathbf{x} et loin de \mathbf{x}_l

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^p \sum_{m=-k}^k \rho^k Y_k^{-m}(\alpha, \beta) \frac{Y_k^m(\theta, \varphi)}{r^{k+1}}. \quad (4)$$

où $O\mathbf{x} = (\rho, \alpha, \beta)$ et $O\mathbf{x}_l = (r, \theta, \varphi)$ en coordonnées sphériques. Pour déterminer dans quels cas cette nouvelle approximation peut être utilisée, une subdivision hiérarchique de l'espace est définie, dont le partitionnement régulier donne automatiquement des critères de distance. Ainsi, les interactions proches sont obtenues par un calcul direct avec les fonctions de Green originales, alors que les interactions lointaines peuvent être approchées par une succession d'opérations locales basées sur la subdivision en cellules et des développements de la fonction de Green en fonction des harmoniques sphériques. La théorie sous-jacente à cette approximation a été bien établie dans le cas de l'équation de Laplace. En particulier, les analyses d'erreur et de complexité sont données dans le livre de Greengard [13].

Dans notre cas, l'équation de Laplace a été transformée en une équation intégrale et une discrétisation spécifique a été employée. L'algorithme rapide doit être adapté pour s'insérer au sein du modèle d'ondes de surface, mais les développements de la fonction de Green sont les mêmes. L'équation intégrale s'écrit

$$\alpha(\mathbf{x}_l) \phi(\mathbf{x}_l) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^p \sum_{m=-k}^k M_k^m(O) \frac{Y_k^m(\theta, \varphi)}{r^{k+1}}, \quad (5)$$

où $M_k^m(O)$ est le moment à l'origine O :

$$M_k^m(O) = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}) \rho^k Y_k^{-m}(\alpha, \beta) - \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\rho^k Y_k^{-m}(\alpha, \beta) \right) \right\} d\Gamma. \quad (6)$$

Au lieu de considérer les interactions mutuelles entre deux points, il faut regarder la contribution d'un élément de la discrétisation en un point de collocation. Le calcul local des contributions de plusieurs éléments regroupés en multipôles fait appel à une analyse en éléments aux

frontières avec les harmoniques sphériques à la place de la fonction de Green. L'intégration de la dérivée normale des harmoniques sphériques est effectuée en faisant attention d'éviter une singularité apparente qui pourrait générer des erreurs numériques. La discrétisation en éléments aux frontières n'intervient que dans le calcul des moments. Ainsi, le reste de l'Algorithme des Multipôles Rapides est inchangé, notamment les formules de translation et de conversion qui permettent de propager l'information à travers la subdivision hiérarchique, depuis le calcul des contributions jusqu'à l'évaluation aux points de collocation. Du point de vue du modèle d'ondes de surface, il faut adapter tous les aspects qui dépendait de l'existence de la matrice de discrétisation. Le stockage des coefficients qu'on veut réutiliser plusieurs fois à chaque pas de temps se fait désormais au sein des cellules de la subdivision hiérarchique. Les techniques du mode rigide et des double nœuds modifiaient la matrice *a priori* avant le calcul des produits matrice-vecteur. Elles sont maintenant traitées comme des termes de correction du résultat de ces produits, de sorte que la résolution du système linéaire garde les mêmes propriétés.

Le modèle accéléré que nous obtenons est donc inchangé, il bénéficie simplement d'un solveur plus rapide de l'équation de Laplace à chaque pas de temps. Il est testé en le comparant avec l'ancien modèle sur une application tridimensionnelle qui requiert beaucoup de précision. Il s'agit d'une onde solitaire se propageant sur un fond en pente ayant une modulation transversale qui mène à un jet plongeant. Avant tout, la consistance de la nouvelle approximation introduite est vérifiée. Mais, ce qui est important, c'est que la précision et la stabilité globales ne soient pas altérées. En ajustant les paramètres du nouvel algorithme, il est possible d'obtenir le même résultat qu'avec l'ancienne méthode. Dans ce cas, les temps de calcul relevés montre que le modèle accéléré évolue quasiment linéairement en fonction du nombre de nœuds à partir d'environ 4000 nœuds. Un gain effectif d'un facteur six environ est obtenu pour le plus gros cas comparé qui contient 6022 nœuds. Le stockage en mémoire est également réduit. Des exemples d'application du modèle amélioré sont présentés brièvement pour mettre en avant les nouvelles possibilités du code de calcul. Certaines optimisations sont encore possibles. En particulier, l'utilisation d'une version parallélisée de l'Algorithme des Multipôles Rapides apporterait un nouveau gain significatif pour toute taille de discrétisation.

3 Applications d'ondes de surface 3D

La première application concerne le renversement d'une onde solitaire sur un haut-fond. Le fait de suivre directement la surface libre dans la résolution autorise l'étude de la phase de shoaling jusqu'aux premières étapes du déferlement, tant que la formulation potentielle reste valide (voir [11] pour des comparaisons avec les expériences). La seconde application consiste à simuler la génération d'une vague extrême par un batteur de houle de type serpent. Dans ce contexte, l'outil dont nous disposons est un véritable canal à houle numérique qui modélise un

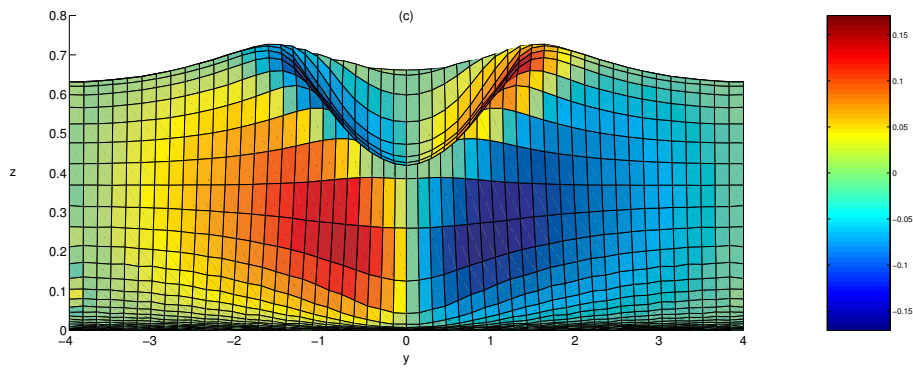


FIG. 1 – Surface libre vue de devant pour une onde solitaire déferlant sur un fond en pente avec une modulation transversale. Les couleurs correspondent à la composante transversale du champ de vitesse.

bassin d'expériences. L'utilisation d'un batteur serpent nous permet d'étudier la focalisation directionnelle comme un mécanisme de génération d'une vague déferlante.

Le contexte de la première étude est celui d'un récif naturel ou artificiel de type foyer. Nous considérons une onde solitaire incidente sur un tel fond pour observer le retournement tridimensionnel de la vague. Le choix d'une onde solitaire est guidé par son intérêt en tant qu'approximation d'une houle de grande période [23], mais aussi pour la modélisation des tsunamis. De plus, considérer plusieurs vagues successives n'est pas très utile avec le modèle en l'état puisque les calculs s'arrêtent au premier déferlement. Nous pourrions introduire de la dissipation artificielle pour regarder le cas d'un train d'ondes incident, mais notre objectif est d'observer le déferlement en lui-même. A des fins de comparaison, un instant caractéristique autre que le point de déferlement est introduit. Il s'agit de l'instant où la vague déferlante a une tangente horizontale sous la langue du jet. C'est un changement géométrique remarquable dans le processus du déferlement plongeant qui est facile à détecter. En considérant un fond en pente avec une modulation transversale dont nous faisons varier le coefficient, nous mesurons l'effet de la tridimensionnalité sur le déferlement de l'onde solitaire. Lorsque le récif est étroit, le déferlement se produit plus loin et plus tard. En outre, il semble que le processus soit plus rapide. Nous mettons en évidence des régions caractéristiques pour les valeurs extrêmes des trois composantes des champs de vitesse et d'accélération. En particulier, la dynamique du jet est discutée. Celui-ci tend à s'étaler et ressemble plus à une langue qu'à un jet pointu (Figure 1). Le module maximum de la vitesse s'avère constant au point de déferlement quelque soit le coefficient de modulation transversale. Pourtant, l'amplitude maximale augmente de façon monotone pour des récifs de plus en plus étroits. Cette élévation maximale n'est pas atteinte dans l'axe de focalisation, mais sur les bords du jet. Il en résulte qu'une vue de face ou arrière de la vague montre deux renflements sur la crête qui sont d'autant plus marqués que le récif

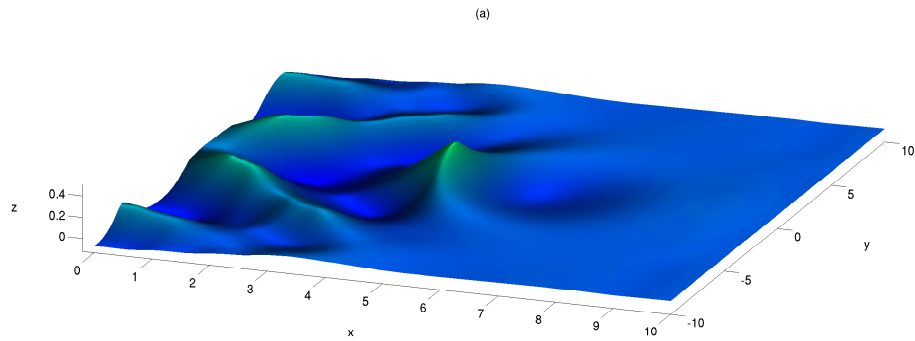


FIG. 2 – Génération d’une vague extrême par un batteur de houle de type serpent, situé à gauche du domaine.

est “tridimensionnel” (Figure 1). Deux exemples de propagation de l’onde solitaire sur un fond plus complexe ayant deux bosses dans le sens transversal sont également montrées. Elles confirment en particulier les difficultés croissantes concernant la gestion du maillage lorsque la complexité du phénomène augmente.

La seconde application consiste à observer une vague extrême générée par un batteur de type serpent. La focalisation directionnelle est un des mécanismes physiques susceptibles de participer à l’apparition d’une vague scélérate. Ce mécanisme est uniquement tridimensionnel. Poursuivant l’étude de Brandini et Grilli [3], nous définissons les conditions du bassin numérique qui mène à une vague extrême déferlante. La description d’une vague focalisée au centre du bassin est effectuée, mais la phase de retournement n’a pas pu être poursuivie. Nous observons qu’une coupe 2D de la solution ressemble tout à fait à la forme caractéristique observée pour les vagues scélérates. Son aspect tridimensionnel est celui d’un front incurvé avancé par un creux circulaire et suivi par un creux plus profond en forme de croissant (Figure 2). La cinématique fait apparaître deux phases. Dans un premier temps, nous observons la propagation d’une ligne de crête courbe qui converge en un point. Lorsque la vague focalisée est obtenue, elle se cambre et les vecteurs vitesses et accélérations sur la face avant de la vague ont une faible composante transversale. Par conséquent, après la phase de focalisation, l’occurrence du déferlement s’approche d’une dynamique essentiellement bidimensionnelle. Cela correspond à l’aspect de “mur d’eau” qui revient dans les descriptions des cas de vagues géantes en mer. La valeur maximale de la vitesse dans la crête juste avant de déferler est mesurée à $0.73\sqrt{gh_{max}}$, où g est la constante de gravité et h_{max} la profondeur du bassin. Afin d’obtenir le déferlement dans cette application, il est nécessaire d’adapter la technique de remaillage sur une grille régulière qui n’est pas encore disponible pour des parois latérales mobiles. En outre, il faut utiliser une résolution plus fine de la solution de sorte à ce que la vague focalisée soit définie avec suffisamment de points. Afin de compenser le surcoût provenant du raffinement, nous avons la possibilité d’utiliser des éléments de symétrie. En effet, la

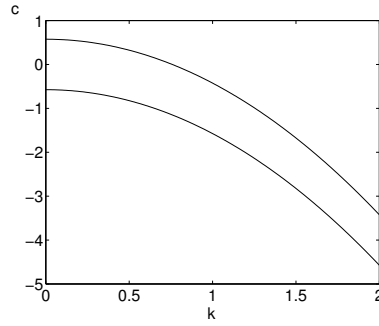


FIG. 3 – La relation de dispersion (8) pour $\Delta = -7/12$, $\lambda_1 = 1$, $\kappa_1 = -0.1$, $\lambda_2 = 1$, $\kappa_2 = 0.1$.

configuration définie ayant un axe de symétrie, seulement la moitié de la solution peut être calculée. De plus, la méthode des images peut être utilisée pour éviter de mailler le fond plat. Ces deux techniques d'optimisation nécessitent d'être adaptées pour être prise en compte dans le modèle accéléré par l'Algorithme des Multipôles Rapides.

4 Solutions stationnaires de type onde solitaire généralisée pour un système d'équations de KdV couplées

Nous considérons un système physique ayant deux modes d'ondes dont les vitesses de phase coïncident. Dans la limite faiblement non linéaire, faiblement dispersive des ondes longues, les équations sont du type Korteweg-de Vries. En étendant la dérivation générique de Grimshaw [16] à des nonlinéarités cubiques, nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} u_t + \Delta u_x + \alpha_1 u u_x + \beta_1 u^2 u_x + \lambda_1 u_{xxx} + \kappa_1 v_x & = 0 \\ v_t - \Delta v_x + \alpha_2 v v_x + \beta_2 v^2 v_x + \lambda_2 v_{xxx} + \kappa_2 u_x & = 0. \end{cases} \quad (7)$$

La relation de dispersion s'écrit

$$c^2 + k^2(\lambda_1 + \lambda_2)c - \Delta^2 - \Delta k^2(\lambda_2 - \lambda_1) + k^4\lambda_1\lambda_2 - \kappa_1\kappa_2 = 0. \quad (8)$$

Nous sommes intéressés par la situation typique représentée à la Figure 3 où il existe un nombre d'onde de la branche supérieure qui a la même vitesse que la vitesse des ondes longues de la branche inférieure. Dans le cas de nonlinéarités quadratiques, Grimshaw et Iooss [18] ont montré l'existence des ondes solitaires généralisées qui résultent de cette configuration. Ils ont également mis en évidence l'existence d'ondes solitaires classiques et d'ondes solitaires d'enveloppe dans ce système.

Dans ce chapitre, nous étudions les solutions stationnaires de type onde solitaire généralisée lorsque l'onde solitaire a une amplitude limite dûe à la présence des termes non linéaires du



FIG. 4 – Profils des forçages u_s : (a) Le forçage de type KdV u_s^1 , (b) Le forçage de type eKdV u_s^2 pour plusieurs valeurs de $-\Delta_1$ (la plus large est obtenue pour $\epsilon = 10^{-8}$).

troisième ordre. Elles sont données par le système

$$\begin{cases} \Delta_1 u + \frac{1}{2}\alpha_1 u^2 + \frac{1}{3}\beta_1 u^3 + \lambda_1 u_{xx} + \kappa_1 v = 0 \\ \Delta_2 v + \frac{1}{2}\alpha_2 v^2 + \frac{1}{3}\beta_2 v^3 + \lambda_2 v_{xx} + \kappa_2 u = 0, \end{cases} \quad (9)$$

où $\Delta_1 = \Delta - c$, $\Delta_2 = -\Delta - c$.

En supposant que l'influence d'un mode sur l'autre est faible, une technique de perturbation classique permet, au premier ordre, de découpler les équations. La première équation est l'équation d'eKdV, dont la solution apparaît comme un forçage pour la seconde équation

$$\Delta_2 v + \lambda_2 v_{xx} = -\kappa_2 u. \quad (10)$$

Avec le signe approprié des coefficients, c'est un oscillateur harmonique forcé qui comporte les deux composantes principales des ondes solitaires généralisées, à savoir une onde longue locale et une équation qui donne des ondes périodiques courtes. C'est le modèle le plus simple qui permette de décrire ce type de solutions. Nous l'utilisons dans le cas d'un forçage large, solution de l'équation d'eKdV.

Nous effectuons la résolution analytique de cette équation avec des conditions périodiques sur un domaine borné $[-L; L]$. Le paramètre L représente le paramètre libre de la famille à un paramètre d'ondes solitaires généralisées. Nous comparons les forçages donnés par les équations de KdV (exposant 1) et d'eKdV (exposant 2), donnés par les solutions explicites

$$u_s^1(x) = \left(\frac{-3\Delta_1}{\alpha_1} \right) \operatorname{sech}^2 \left((-\Delta_1/\lambda_1)^{1/2} x/2 \right), \quad (11)$$

$$u_s^2(x) = \left(\frac{\alpha_1}{-\beta_1} \right) \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cosh \left([-\Delta_1/\lambda_1]^{1/2} x \right)}, \quad (12)$$

$$\text{avec } \epsilon = \frac{(\alpha_1^2 - 6\beta_1 \Delta_1)^{1/2}}{\alpha_1}. \quad (13)$$

Elles sont montrées à la Figure 4. L'amplitude des oscillations aux bords du domaine, $a_L^{1,2}$, ainsi que celle des oscillations sur le dessus de l'onde solitaire large d'eKdV, a_0^2 , peuvent être obtenues directement après avoir intégré l'équation forcée. Elles font intervenir des intégrales de Fourier tronquées qu'il est possible d'évaluer en utilisant l'analyse complexe. Ainsi, nous obtenons des expressions analytiques qui montrent la dépendance de ces amplitudes en fonction du paramètre L , et des coefficients des équations. En notant $q = \sqrt{\Delta_2/\lambda_2}$, $\kappa = \kappa_2/\lambda_2$, l'amplitude des oscillations pour un forçage classique de KdV est approximativement

$$a_L^1 \approx \frac{\kappa}{q^2} u_s^1(L) - \left(\frac{\pi\kappa}{\sin qL} \right) \frac{12\lambda_1}{\alpha_1 \sinh[q\pi(\lambda_1/\Delta_1)^{1/2}]}. \quad (14)$$

La dépendance en L se caractérise par des courbes en U provenant du terme sinusoidal au dénominateur. L'amplitude ne s'annule pas, mais elle peut être exponentiellement petite. Nous retrouvons les propriétés principales mises en évidence pour les ondes solitaires généralisées. Pour le second forçage, les expressions des amplitudes aux bords et sur le dessus sont

$$a_L^2 \approx \frac{\kappa}{q^2} u_s^2(L) - \left(\frac{\pi\kappa}{q \sin qL} \right) \frac{(-6\beta_1\lambda_1)^{1/2} \sin[q(\lambda_1/\Delta_1)^{1/2} \cosh^{-1}(1/\epsilon)]}{-\beta_1 \sinh[q\pi(\lambda_1/\Delta_1)^{1/2}]}, \quad (15)$$

$$a_0^2 \approx \frac{\kappa}{q^2} u_s^2(0) + \frac{\pi\kappa}{q\beta_1} \left(\frac{(-6\beta_1\lambda_1)^{1/2} \sin[q(\lambda_1/\Delta_1)^{1/2} \cosh^{-1}(1/\epsilon)]}{\tan qL \sinh[q\pi(\lambda_1/\Delta_1)^{1/2}]} - \frac{(-6\beta_1\lambda_1)^{1/2} \cos[q(\lambda_1/\Delta_1)^{1/2} \cosh^{-1}(1/\epsilon)]}{\sinh[q\pi(\lambda_1/\Delta_1)^{1/2}]} \right). \quad (16)$$

Elles sont clairement différentes de l'expression pour un forçage de type KdV puisqu'elles ont un comportement oscillatoire en fonction de certains paramètres. Il en résulte que ces amplitudes peuvent s'annuler pour certaines valeurs discrètes des paramètres. En particulier, nous remarquons la dépendance en fonction de ϵ , qui est une mesure de la largeur de l'onde solitaire d'eKdV. Les oscillations aux bords ont une amplitude qui présente la même dépendance en L que pour KdV. En revanche, l'amplitude des oscillations sur le dessus se comportent en $1/\tan(qL)$. Il est important de noter que les deux types d'oscillations ne peuvent pas s'annuler en même temps. Lorsque ces expressions s'annulent, l'approximation faite n'est plus justifiée et il faut considérer les expressions dans leur ensemble. Il en résulte que le comportement en fonction de L peut sembler différent avec des courbes en S au lieu de courbes en U (ou l'inverse pour a_0^2). Ceci est en fait un artefact dû à la troncature en L . Nous décrivons cette possibilité dans le but d'éviter une conclusion erronée lorsque les solutions numériques du système couplé seront décrites. Pour illustration, des ondes solitaires généralisées stationnaires pour chaque forçage sont présentées à la Figure 5.

Afin de résoudre le système couplé (9), nous devons déterminer une configuration des coefficients qui corresponde au cas limite des solutions de type front. Dans le langage des systèmes



FIG. 5 – Exemples d’ondes solitaires généralisées, solutions de l’équation stationnaire forcée. Le forçage est : (a) u_s^1 , (b) u_s^2 .

dynamiques, celles-ci sont des orbites hétéroclines. Dans le contexte du système de dimension 4 que nous étudions, la configuration qui nous intéresse est l’existence d’une orbite hétérocline qui joint des orbites périodiques autour de points fixes de type “saddle-centre”. En nous appuyant sur une caractérisation des orbites hétéroclines pour un système hamiltonien, nous déduisons une condition sur le coefficient Δ_1 qui correspond au cas limite. La valeur des points fixes est l’amplitude limite de l’onde solitaire large pour les deux modes.

L’intégration numérique est effectuée par une méthode spectrale avec la base de Fourier et un algorithme pour résoudre le système algébrique non linéaire fourni par Matlab. Les solutions sont obtenues pour des valeurs de ϵ pas trop proches de 0. La dépendance des amplitudes confirme alors tout à fait les conclusions du problème découplé. Pour des valeurs de ϵ très proches de 0, nous obtenons une multiplicité de solutions ayant une onde solitaire de largeurs différentes. Les ondes solitaires larges généralisées calculées sont en fait associées à trois phénomènes qui sont présents dans la région de l’espace des paramètres que nous observons. Tout d’abord, il s’agit de l’existence d’ondes solitaires localisées, isolées dans l’espace des paramètres au milieu des ondes solitaires généralisées [4]. Elles correspondent aux valeurs discrètes des paramètres qui annulent l’amplitude des oscillations aux bords. Le deuxième phénomène concerne le fait que ces valeurs discrètes s’accumulent au cas limite des fronts ($\epsilon \rightarrow 0$). Il est en fait possible de relier cela aux cascades de solutions qui ont été mis en évidence pour des ondes solitaires à plusieurs bosses associées à un point fixe de type “saddle-centre” [21]. Enfin, lorsque ϵ est très proche de 0, la symétrie ne fixe plus la solution à cause des oscillations présentes sur la partie plate de l’onde solitaire large. Il en résulte une multiplicité d’ondes solitaires généralisées ayant un nombre arbitraire d’oscillations sur le dessus.

Notons finalement que les résultats numériques de Michallet et Dias [20] pour les écoulements à deux couches avec surface libre semblent montrer l’existence de telles ondes solitaires ayant plusieurs oscillations sur le corps principal, isolées parmi les ondes solitaires généralisées. Quand le nombre de Froude augmente, l’amplitude des oscillations sur les bords décroît vers

zéro. Nous pouvons spéculer que les résultats obtenus pour notre modèle se retrouveront pour le problème complet. Mais seule une nouvelle étude numérique du problème complet pourra confirmer la cascade et la multiplicité des solutions comme dans le modèle générique que nous avons présenté.

5 Problème d'évolution pour un système d'équations de KdV couplées

Ce chapitre présente des simulations numériques du problème d'évolution (7) avec des conditions initiales localisées et des conditions aux limites périodiques. L'objectif est de confronter les résultats obtenus sur les solutions stationnaires, ainsi que de décrire la résonance onde longue-onde courte dans le contexte de deux modes d'ondes. L'évolution d'une condition initiale pour l'équation d'eKdV a été décrite par Slyunyaev et Pelinovsky [26]. Elle se caractérise par la possibilité d'obtenir une onde solitaire large, ayant une amplitude limite, avec laquelle d'autres ondes solitaires peuvent interagir. Celles-ci ont une polarité inversée lorsqu'elles sont sur la partie plate de l'onde solitaire large. En ce qui concerne les ondes solitaires généralisées, les travaux de Benilov *et al.* [2] ont permis de montrer les principales caractéristiques de leur évolution dans le cas de l'équation de KdV du 5^{ème} ordre. Les ondes courtes apparaissent sous la forme d'un rayonnement issu de l'onde solitaire mais d'un seul côté de celle-ci conformément à des arguments d'énergie. De plus, ces arguments impliquent que l'amplitude de l'onde solitaire décroît lentement avec le temps.

A l'instar du problème stationnaire, nous considérons tout d'abord le cas d'un faible couplage qui mène au système

$$\begin{cases} u_t + \Delta u_x + \alpha_1 u u_x + \beta_1 u^2 u_x + \lambda_1 u_{xxx} & = & 0 \\ v_t - \Delta v_x + \lambda_2 v_{xxx} & = & -\kappa_2 u_x, \end{cases} \quad (17)$$

où u et v sont fonction de x et de t . La solution u est connue explicitement, et la solution v est intégrée par la méthode de Fourier. L'interaction des oscillations périodiques avec le forçage provoque le rayonnement d'ondes de longueur d'onde constante d'un côté de l'onde solitaire. Le côté dépend de la vitesse de groupe du nombre d'onde résonant. Le rayonnement a la forme d'un train d'ondes modulé à deux niveaux. cependant, l'enveloppe du train d'ondes s'atténue avec le temps et au bout d'un certain temps, c'est un rayonnement d'amplitude constante. Nous obtenons une onde solitaire généralisée non symétrique. Dans le cas d'une onde solitaire très large, l'enveloppe du train d'ondes se complexifie, mais elle s'atténue pareillement. Nous observons des oscillations à la fois sur la partie plate de l'onde solitaire et sur un côté. Si la vitesse de l'onde solitaire correspond à un cas stationnaire pour lequel l'amplitude des oscillations est nulle, l'évolution de la condition initiale se traduit par sa dispersion en paquets d'ondes qui semblent ignorer la présence de l'onde solitaire. En fait, le nombre d'onde résonant

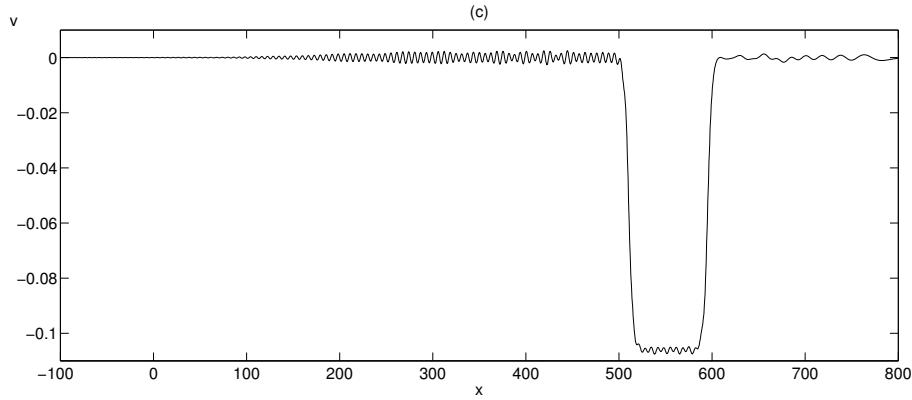


FIG. 6 – Exemple d'une solution v de type onde solitaire large généralisée pour $\epsilon = 10^{-16}$.

se situe à un nœud entre deux paquets, donc l'amplitude de l'onde associée est nulle ce qui explique l'absence de résonance avec l'onde solitaire.

La résolution du système couplé s'effectue par une méthode pseudo-spectrale de Fourier qui utilise la technique du facteur intégrant pour relaxer la contrainte sur le pas de temps [27]. Pour obtenir des ondes solitaires de largeur choisie, nous nous appuyons sur le calcul des solutions stationnaires. Ainsi, nous pouvons spécifier des conditions initiales qui sont proches du corps principal des ondes solitaires larges généralisées. Cela permet de concentrer l'évolution sur la résonance entre l'onde solitaire large et les petites ondes périodiques. Nous parvenons en effet à obtenir les solutions recherchées pour différentes largeurs (un exemple est présenté à la Figure 6). Le rayonnement des ondes résonantes apparaît quasiment identique à celui observé pour le système découplé. La décroissance de l'onde solitaire n'est pas directement observée car cela requerrait des temps de calcul très longs, mais elle est suggérée par l'évolution de l'énergie de chaque mode. L'amplitude des ondes rayonnées correspond au double de la solution stationnaire symétrique dans la mesure où nous pouvons l'évaluer. En effet, la présence de la modulation du train d'ondes rend cette mesure imprécise. En revanche, il n'y a pas une relation aussi simple entre les solutions symétrique et non symétrique en ce qui concerne les ondes sur le dessus de l'onde solitaire. Au pied de l'onde solitaire, nous observons d'autres ondes significatives qui ne se propagent pas à la vitesse de l'onde solitaire. Du côté du rayonnement, ces ondes ne modulent pas le train d'ondes mais se superposent à celui-ci. De l'autre côté, une structure isolée se propage et s'éloigne de l'onde solitaire large. Le comportement oscillatoire de l'amplitude des oscillations en fonction de la vitesse est mis en évidence. En se rapprochant de la vitesse limite correspondant aux fronts, l'amplitude du rayonnement oscille de plus en plus. Cependant, nous n'avons jamais obtenu un cas non résonant. Les simulations effectuées pour des vitesses très proches de ces cas montrent l'apparition du rayonnement au cours du temps, ce qui semble indiquer que les ondes solitaires isolées dans le spectre linéaire ne persistent pas et finissent par rayonner. Enfin, nous décrivons la dynamique provenant

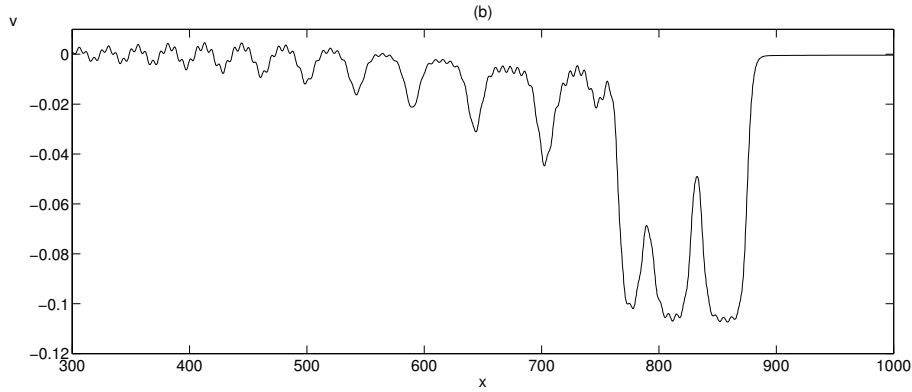


FIG. 7 – Profil de la solution v pour une perturbation initiale en cloche à $t_{max} = 1440$ sur un intervalle centré autour de l'onde solitaire large.

de la décomposition d'une condition initiale en cloche, d'amplitude supérieure à l'amplitude limite. L'évolution est une superposition d'un train d'ondes solitaires tel que celui décrit dans le cas de l'équation d'eKdV seule, et de la résonance avec des ondes courtes étudiée jusqu'ici (Figure 7). Le train d'ondes solitaires interagit avec l'onde solitaire large et certaines sont donc de polarité inversée. Cette dynamique permet de donner des éléments d'explication pour les autres ondes observées au pied de l'onde solitaire dans les simulations précédentes. Les conditions initiales ne correspondaient pas exactement à l'onde solitaire qui rayonne les ondes courtes, donc elles se sont décomposées en plusieurs structures qui se propagent à des vitesses différentes.

En complément à ces observations, l'équation de Schrödinger est dérivée afin de déterminer si le train d'ondes rayonné est stable ou bien s'il est sujet à l'instabilité modulationnelle (ou de Benjamin-Feir). Pour toutes les simulations effectuées, le nombre d'onde n'est pas dans une zone d'instabilité modulationnelle. Cela confirme les observations qui montrent que l'enveloppe du train d'ondes tend vers une constante.

Bibliographie

- [1] Bateman W.J.D., Swan C., Taylor P.H., On the efficient numerical simulation of directionally spread surface water waves, *J. Comp. Phys.* **174**, 277–305 (2001).
- [2] Benilov E.S., Grimshaw R., Kuznetsova E.P., The generation of radiating waves in a singularly perturbed Korteweg - de Vries equation, *Physica D* **69**, 270–278 (1993).
- [3] Brandini C., Grilli S., Modeling of freak wave generation in a 3D-NWT, Proc. 11th Offshore and Polar Engng. Conf. (ISOPE 2001), Stavanger, Norway, Vol III, 124–131 (2001).

-
- [4] Champneys A. R., Malomed B. A., Yang J., Kaup D.J., “Embedded solitons” : solitary waves in resonance with the linear spectrum, *Physica D* **152**, 340–354 (2001).
- [5] Champneys A. R., Vanden-Broeck J.-M., Lord G.J., Do true elevation gravity-capillary solitary waves exist? A numerical investigation, *J. Fluid Mech.* **454**, 403–417 (2002).
- [6] Clamond D., Grue J., A fast method for fully nonlinear water-wave computations, *J. Fluid Mech.* **447**, 337–355 (2001).
- [7] Craig W., Sulem C., Numerical simulation of gravity waves, *J. Comp. Phys.* **108**(1), 73–83 (1993).
- [8] Dias F., Il’ichev A., Interfacial waves with free-surface boundary conditions : an approach via a model equation, *Physica D* **150**, 278–300 (2001).
- [9] Dias F., Vanden-Broeck J.-M., On internal fronts, *J. Fluid Mech.* **479**, 145–154 (2003).
- [10] Dommermuth D.G., Yue D.K.P., A high-order spectral method for the study of non-linear gravity waves, *J. Fluid Mech.* **184**, 267–288 (1987).
- [11] Dommermuth D.G., Yue D.K.P., Lin W.M., Rapp R.J., Chan E.S., Melville W.K., Deep-water plunging breakers : a comparison between potential theory and experiments, *J. Fluid Mech.* **189**, 423–442 (1998).
- [12] Graziani G., Landrini M., Application of Multipoles Expansion Technique to Two-Dimensional Nonlinear Free-Surface Flows, *J. Ship Research.* **43**, 1–12 (1999).
- [13] Greengard L., *The Rapid Evaluation of Potential Fields in Particle Systems*, MIT Press, Cambridge, MA, 1988.
- [14] Greengard L., Rokhlin V., A fast algorithm for particle simulations, *J. Comput. Phys.* **73**, 325–348 (1987).
- [15] Grilli S., Guyenne P., Dias F., A fully nonlinear model for three-dimensional overturning waves over arbitrary bottom, *Int. J. Num. Meth. Fluids* **35**, 829–867 (2001).
- [16] Grimshaw R. : Models for long-wave instability due to a resonance between two waves, in Trends in Applications of Mathematics to Mechanics, ed. Iooss, Guès, Nouri, Chapman & Hall/CRC, 2000.
- [17] Grimshaw R., Cook P. : Solitary waves with oscillatory tails, in Proceedings of the second international conference on hydrodynamics, Hong-Kong, Chwang, Lee & Leung (eds), Balkema, Rotterdam, 327–336, 1996.
- [18] Grimshaw R., Iooss G., Solitary waves of a coupled Korteweg-de Vries system, *Math. and Computers in Simulation* **62**, 31–40 (2003).
- [19] Korsmeyer F.T., Yue D.K.P., Nabors K., Multipole-Accelerated Preconditioned Iterative Methods for Three-Dimensional Potential Problems, presented at *BEM 15*, Worcester, MA (1993).

- [20] Michallet H., Dias F., Numerical study of generalized interfacial solitary waves, *Phys. Fluids* **11**, 1502–1511 (1999).
- [21] Mielke A., Holmes P., O'Reilly O., Cascades of Homoclinic Orbits to, and Chaos near, a Hamiltonian Saddle-Center, *J. Dynamics Diff. Eqns.* **4**, 95–126 (1992).
- [22] Părău E., Dias F., Interfacial periodic waves of permanent form with free-surface boundary conditions, *J. Fluid Mech.* **437**, 325–336 (2001).
- [23] Peregrine D.H., Breaking Waves on Beaches, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **15**, 149–178 (1983).
- [24] Rusås P.-O., Grue J., Solitary waves and conjugate flows in a three-layer fluid, *Eur. J. Mech. - B/Fluids* **21** (2), 185–206 (2002).
- [25] Scorpio S., Beck F., A Multipole Accelerated Desingularized Method for Computing Nonlinear Wave Forces on Bodies, presented at *15th Intl. Conf. Offshore Mech. Arctic Engng.*, Florence, Italy (1996).
- [26] Slyunyaev A., Pelinovsky E., Dynamics of large-amplitude solitons, *JETP* **89** (1), 173–181 (1999).
- [27] Trefethen L.N. : Spectral Methods in Matlab. SIAM, Philadelphia, 2000.
- [28] Tsai W.-T, Yue D.K.P, Computation of nonlinear free-surface flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **28**, 249–278 (1996).
- [29] Vanden-Broeck J.-M., Elevation solitary waves with surface tension, *Phys. Fluids* **3**, 2659–2663 (1991).
- [30] Wang P., Yao Y., Tulin M.P., An efficient numerical wave tank for nonlinear water waves, based on the multi-subdomain approach with BEM, *Int. J. Num. Meth. Fluids* **20**, 1315–1336 (1995).
- [31] West B.J., Brueckner K., Janda R., Milder D., Milton R., A new numerical method for surface hydrodynamics, *J. Geophys. Res.* **92**, 11803–11824 (1987).
- [32] Xue M., Xü H., Liu Y., Yue D.K.P., Computations of fully nonlinear three-dimensional wave-wave and wave-body interactions. Part 1. Dynamics of steep three-dimensional waves, *J. Fluid Mech.* **438**, 11–39 (2001).

Première partie

Modèle numérique d'ondes de
surface tridimensionnelles

Chapitre 1

Insertion de l'Algorithme des Multipôles Rapides dans un code d'éléments aux frontières

Sommaire

1.1	Introduction	32
1.2	The numerical wave tank	35
1.2.1	Mathematical formulation	35
1.2.2	Time Integration	37
1.2.3	Spatial discretisation	37
1.3	The Fast Multipole Algorithm	41
1.4	Application of the FMA to the BEM	44
1.4.1	Expansions	45
1.4.2	Formulation and mesh information	46
1.4.3	Near interactions	47
1.4.4	Far interactions	47
1.4.5	Specific points	49
1.5	Results	50
1.5.1	Accuracy	52
1.5.2	Efficiency	55
1.5.3	Discussion and future improvements	57
1.6	Conclusion	58
	Bibliography	59

Numerical model using the Fast Multipole Algorithm for nonlinear three-dimensional free-surface waves

Cet article, écrit en collaboration avec Frédéric Dias¹, est soumis pour publication dans la revue *Journal of Computational Physics* (JCP).

ABSTRACT

The present numerical model solves the fully nonlinear potential flow equations with a free surface. It uses a high-order three-dimensional boundary element method combined with mixed Eulerian-Lagrangian time updating, based on second-order explicit Taylor expansions with adaptive time steps. The main difference with the code that was developed by Grilli, Guyenne and Dias in 2001 lies in the use of the Fast Multipole Algorithm. This algorithm was designed to compute more efficiently all the pairwise interactions in a system of particles. It has been used successfully in the past for solving numerically Laplace's equation. By replacing every matrix-vector product of the iterative solver GMRES and avoiding the building of the influence matrix, it reduces the computing complexity to nearly $O(N)$ where N is the number of nodes on the boundary. Results on the overturning of a solitary wave over a three-dimensional sloping bottom are presented. On this test case, the accelerated method is indeed found to be much faster than the original code, even for quite coarse grids. For instance, a reduction of the complexity by a factor six is obtained for 6022 nodes on the boundary, for the same global accuracy. The acceleration of the code allows the study of more complex physical problems.

1.1 Introduction

For several decades, fully nonlinear potential flow equations have been used to model water waves. The governing equation is Laplace's equation, subject to nonlinear boundary conditions. The numerical simulation of water waves is a vast topic. The main progress witnessed in the last decade is the advent of three-dimensional calculations. At the same time, two-dimensional calculations have also matured, producing either highly accurate results or calculations over impressively large grids. The reader is referred for example to the reviews [42, 37]. A relatively recent method is the level set method. It has produced a wide range of impressive results, especially in three dimensions [33]. The volume of fluid (VOF) method has

¹Centre de Mathématiques et de Leurs Applications, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan cedex, France

been considerably improved by the systematic use of the higher order piecewise linear interface calculation method. We follow a rather classical approach, in which an integral equation on the boundary of the domain is derived and solved by a Boundary Element Method. This approach is particularly well-suited to free-surface problems. Several studies have focused on the first stages of two-dimensional wave breaking [31, 40, 24, 14]. But only a few attempts dealing with wave overturning in three dimensions can be found in the literature [9, 44]. Computations are often limited by sawtooth instabilities near the wave crests. Grilli, Guyenne and Dias [23] have overcome these instabilities and have presented an accurate three-dimensional numerical wave tank that can simulate wave overturning. In their model, arbitrary waves can be generated over a nonuniform bottom with various boundary conditions. In order to prove the ability of the model to simulate nonlinear wave phenomena, the overturning of a solitary wave over a sloping bottom with a transverse modulation was studied in their original article. The method combines a high-order Boundary Element Method (BEM) with a mixed Eulerian-Lagrangian temporal scheme, based on explicit Taylor expansions. The key features of this model will be reviewed in section 2 (see [23] for more details).

The main drawback of this kind of discretization is the necessity to assemble and solve full linear systems. The use of an iterative solver (GMRES) has reduced the complexity of the problem, so that both assembling and solving are of order N^2 , N being the number of nodes on the boundary. There are two major ways to improve even more the model efficiency. The first one consists in sharing the work and taking advantage of parallel computers. The domain decomposition method can then be used to partition the domain of computation (see for example [43] for an application to water waves). The second way aims at reducing the complexity to order N (almost). Several techniques that speed up the computation of matrix-vector products with a fully populated matrix are available. A decomposition of the matrix can be used through particular transforms, such as fast Fourier transforms for irregular grids [34] or wavelet transforms [1]. Another idea is to use hierarchical algorithms. Several methods share the same idea : \mathcal{H} -matrices (including the panel clustering method) [26], mosaic skeleton matrices [18] and the Fast Multipole Algorithm (FMA) all give a hierarchical block sparse structure to the approximate matrix. The first two are algebraic techniques, whereas the Fast Multipole Algorithm requires the knowledge of the functions involved in the approximation of the interaction kernel by an expansion in separable functions.

First developed by Greengard and Rokhlin [22] for the N -body problem, the Fast Multipole Algorithm allows a faster computation of all pairwise interactions in a system of N particles, in particular the interactions governed by Laplace's equation. So it is well suited to our problem and we chose to apply this technique. The idea of the algorithm is based on the fact that the interaction strength decreases with distance, so that far points can be grouped together to contribute at one collocation point. A hierarchical subdivision of space gives automatically

distance criteria to distinguish close interactions from far ones. In this last case, the kernel is approximated by an expansion where both spatial variables are separated. For Laplace's equation, the interactions are represented by Green's functions which can be expanded into spherical harmonics. The main components of the algorithm are given below and for a detailed description, the reader is referred to the literature [7, 21, 22].

The outcome turned out to be very efficient, especially in two dimensions. In three dimensions, optimal implementations have been more difficult to obtain and several improvements have been suggested. Indeed, there is a loss in efficiency if one wants great accuracy in three dimensions, in particular for non-uniform distributions of particles. We do not attempt here to list all the work on the method. We can just indicate that Aluru *et al.* [2] have proposed a method with optimal data structures and that Greengard's team [12] has designed a better version with new translation techniques. However, for a reasonable accuracy, former Fast Multipole Algorithms give sufficiently good results compared to direct evaluation of interactions in order to be incorporated in various numerical models (see [41, 13] in electromagnetics, [30] in molecular dynamics or [16] in elasticity). We can also mention some work which has focused on a generalization of the algorithm so that it becomes kernel-independent [3]. Recently, Ying, Biros and Zorin [45] have developed such a general FMA. This kind of research should lead to black-box implementations of the FMA. Nevertheless, applications often require specific implementations in order to get the best efficiency.

The fast algorithm can be used alone to solve Laplace's equation, but it can also be associated with an integral representation of this equation. The discretization then leads to a linear system with matrix-vector products of an iterative solver that can be accelerated by the FMA. Rokhlin applied this idea to the equations of potential theory [36]. After him, the technique has spread in various areas for different kinds of discretization, in particular for Boundary Element Methods [13, 16, 19].

Applications in fluid mechanics seem to be rather sparse compared to other fields. However there are several possibilities to use the FMA for incompressible flows : potential flow equations as first suggested by Rokhlin [36, 28], but also Stokes flow [29, 17, 32], vortex methods [35, 38] and the possibility to come as a component of Navier-Stokes solvers via generalized Helmholtz decomposition [10]. Water waves computations with multipole accelerated codes also exist. Kormeyer *et al.* applied the fast algorithm with a Boundary Element Method [28] through a Krylov-subspace iterative algorithm. Following Rokhlin's ideas, they designed a modified multipole algorithm for the equations of potential theory. First developed for electrostatic analysis, their code has been generalized to become a fast Laplace solver, which subsequently has been used for potential fluid flows. They got an efficient model but the global accuracy is limited by the use of low order elements. Scorpio and Beck [38] studied

wave forces on bodies with a multipole-accelerated desingularized method, and thus did not use boundary elements to discretize the problem. Neither did Graziani and Landrini [20] who used the Euler-McLaurin quadrature formula in their 2D model. We show below how the Fast Multipole Algorithm can be inserted in the numerical wave tank designed by Grilli *et al.* [23] in order to get a more efficient tool. We decided to modify an available program in order to include specific points of the model, rather than to write a new algorithm that takes into account the most recent improvements. Then the higher-order BEM is kept unchanged; it just benefits from a faster solver at each time step. Numerical experiments are carried out to show the accuracy and the improved efficiency of the new model.

Section 2 describes the numerical wave tank. It is followed in §3 by a brief explanation of what is the Fast Multipole Algorithm, thus allowing a better understanding of §4, devoted to the combination of the BEM and the FMA. In §5, results are given and future possibilities of the model are discussed. Finally the conclusion sums up the characteristics of the accelerated model.

1.2 The numerical wave tank

The main aspects of the numerical wave tank are presented in this section. We focus on the points dealing with building the fast algorithm. Details of the method can be found in Grilli *et al.* [23]. The goal is to compute gravity surface waves under the assumptions that the fluid is incompressible, inviscid and that the flow is irrotational. The numerical method follows the general scheme developed by Longuet-Higgins and Cokelet [31]: a linear boundary value problem for the velocity potential is solved at each time step and the nonlinear free surface boundary conditions are used to update in time the geometry and the velocity potential.

1.2.1 Mathematical formulation

The computational domain is shown in Fig. 1.1. Equations for fully nonlinear potential flows with a free surface are summarized below. The fluid velocity is expressed as $\mathbf{u} = \nabla\phi$ with ϕ the velocity potential. The continuity equation in the fluid domain is Laplace's equation for the velocity potential:

$$\Delta\phi = 0. \tag{1.1}$$

The three-dimensional free space Green's function is defined as

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) = \frac{1}{4\pi r}, \quad \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}, \tag{1.2}$$

where $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_l|$ is the distance from the source point \mathbf{x} to the collocation point \mathbf{x}_l (both are on the boundary) and \mathbf{n} is the normal vector exterior to the boundary. Green's

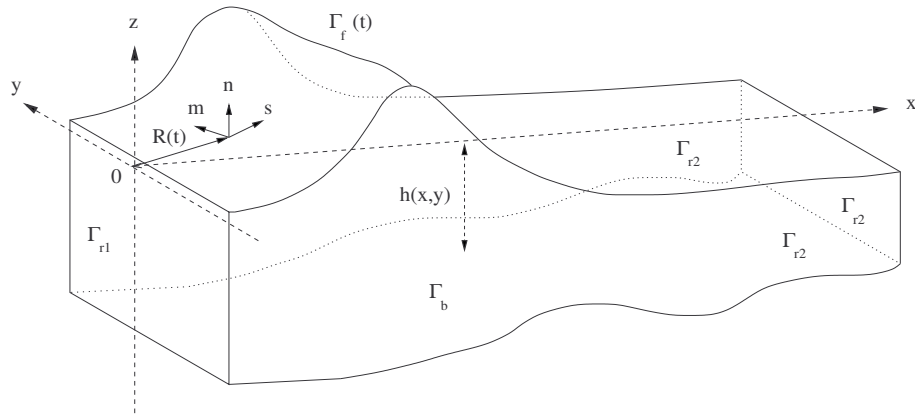


FIG. 1.1 – Computational domain. The free surface $\Gamma_f(t)$ is defined at each time step by the position vector $\mathbf{R}(t)$. Lateral boundaries are denoted by Γ_{r1} and Γ_{r2} . The bottom Γ_b is defined by $z = h(x, y)$. Use is made of the Cartesian coordinate system (x, y, z) and of the local curvilinear coordinate system (s, m, n) , defined at the point $\mathbf{R}(t)$ of the boundary.

second identity transforms this equation into a Boundary Integral Equation (BIE) on the boundary $\Gamma = \Gamma_{r1} \cup \Gamma_{r2} \cup \Gamma_b \cup \Gamma_f$:

$$\alpha(\mathbf{x}_l) \phi(\mathbf{x}_l) = \int_{\Gamma(t)} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) - \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) \right\} d\Gamma, \quad (1.3)$$

where $\alpha(\mathbf{x}_l)$ is proportional to the solid exterior angle made by the boundary at the collocation point \mathbf{x}_l .

On the free surface, the potential ϕ satisfies the nonlinear kinematic and dynamic boundary conditions

$$\frac{D \mathbf{R}}{D t} = \mathbf{u} = \nabla \phi, \quad (1.4)$$

$$\frac{D \phi}{D t} = -gz + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi, \quad (1.5)$$

where \mathbf{R} is the position vector of a fluid particle on the free surface, g the acceleration due to gravity and D/Dt the material derivative defined as

$$\frac{D}{D t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla. \quad (1.6)$$

Lateral boundaries are either fixed or moving boundaries. In the first case, the potential is specified on the free surface in order to determine the initial perturbation. In the second case, waves are generated by a wavemaker at the open boundary, $\Gamma_{r1}(t)$, the motion \mathbf{x}_p and velocity \mathbf{u}_p being specified as

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_p, \quad \overline{\frac{\partial \phi}{\partial n}} = \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n}, \quad (1.7)$$

where overlines denote specified values. An absorbing piston can also be used at the opposite boundary. Along the fixed parts of the boundary, including the bottom that can be defined by an arbitrary shape, the no-flow condition is prescribed :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0. \quad (1.8)$$

1.2.2 Time Integration

Second-order explicit Taylor series expansions are used to express both the new position and the potential on the free surface at time $t + \delta t$:

$$\mathbf{R}(t + \delta t) = \mathbf{R}(t) + \delta t \frac{D \mathbf{R}}{D t}(t) + \frac{(\delta t)^2}{2} \frac{D^2 \mathbf{R}}{D t^2}(t) + O[(\delta t)^3], \quad (1.9)$$

$$\phi(\mathbf{R}(t + \delta t)) = \phi(t) + \delta t \frac{D \phi}{D t}(t) + \frac{(\delta t)^2}{2} \frac{D^2 \phi}{D t^2}(t) + O[(\delta t)^3]. \quad (1.10)$$

Zeroth-order coefficients are given by the geometry and the solution of the BIE (1.3) at time t . First-order coefficients are then directly obtained from the boundary conditions (1.4) and (1.5). The use of second-order terms leads to a better accuracy of the time scheme, but it requires more information than is available. Indeed, the corresponding coefficients depend on the spatial and temporal derivatives of the potential vector. On one hand, tangential derivatives are computed by high-order interpolation on a sliding 5×5 grid. The reader interested in this question is referred to [23, 15]. On the other hand, we need to compute the pairs $(\partial \phi / \partial t, \partial^2 \phi / \partial t \partial n)$. This is done by solving another integral equation on the boundary similar to (1.3). It yields two different algebraic systems to solve at each time step. In the following, we only describe the case of the velocity potential, since the numerical solution is identical for both.

The time step δt is adapted at each time as a function of the minimum distance between two nodes on the free surface and a constant Courant number \mathcal{C}_0 . Grilli *et al.* [23] found an optimal value for \mathcal{C}_0 of roughly 0.45. The time stepping scheme (1.9)-(1.10) presents the advantage of being explicit, and the use of spatial derivatives along the free surface provides a better stability of the computed solution.

1.2.3 Spatial discretisation

The integral equations are solved by a Boundary Element Method (BEM). The boundary is discretized into N collocation nodes and M high-order elements are used to interpolate in between μ of these nodes. Within each element, the boundary geometry and the field variables are discretized using polynomial shape functions $N_j(\xi, \eta)$, where (ξ, η) denote the intrinsic

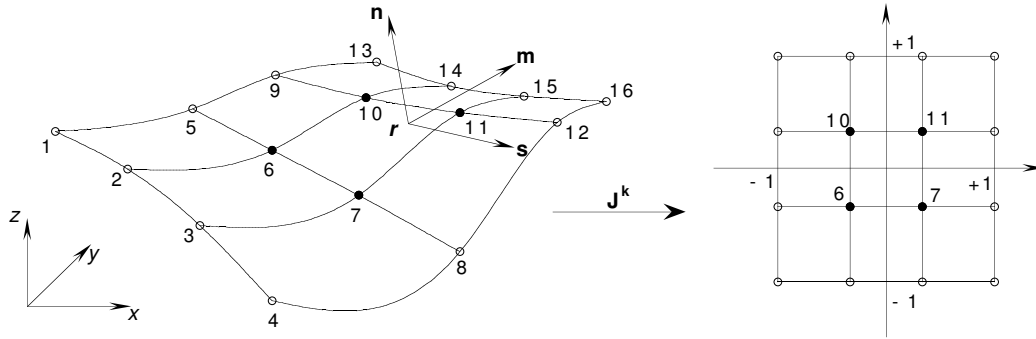


FIG. 1.2 – Sketch of a 16-node cubic three-dimensional Middle-Interval-Interpolation element and of the reference element with intrinsic coordinates (ξ, η) . The Jacobian matrix corresponding to the curvilinear change of variables $\mathbf{x} \rightarrow (\xi, \eta)$ is denoted by \mathbf{J}^k .

coordinates of the reference element :

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{\mu} N_j(\xi, \eta) \mathbf{x}_j, \quad (1.11)$$

$$\phi(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{\mu} N_j(\xi, \eta) \phi_j \quad \text{and} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{\mu} N_j(\xi, \eta) \frac{\partial \phi_j}{\partial n}. \quad (1.12)$$

Here $j = 1, \dots, \mu$ denotes a node within an element.

Isoparametric elements can provide a high-order approximation within their area of definition but only offer C_0 continuity in between elements. Based on the experience in modeling overturning waves in two dimensions, one needs to define elements which are both high-order within their area of definition and at least C_2 continuous in between elements in order to produce stable accurate results. This condition is realized with the so-called Middle-Interval-Interpolation (MII) elements introduced by Grilli and co-workers [23, 24] and shown in Fig. 1.2. The boundary elements are quadrilaterals with cubic shape functions defined using the four nodes of the element and also all the neighboring nodes in each direction, for a total of $\mu = 16$ nodes.

The integrals on the boundary are converted into a sum on the elements, each one being calculated on the reference element $\Gamma_{\xi, \eta}$. The curvilinear change of variables $\mathbf{x} \rightarrow (\xi, \eta)$ leads to a Jacobian matrix \mathbf{J}^k for the k^{th} element Γ^k . The discretized form of the integrals in (1.3)

can thus be written as

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) d\Gamma = \sum_{k=1}^M \left\{ \int_{\Gamma_{\xi, \eta}} \sum_{j=1}^{\mu} \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_j)}{\partial n} N_j(\xi, \eta) \right. \\ \left. \times G(\mathbf{x}(\xi, \eta), \mathbf{x}_l) |\mathbf{J}^k(\xi, \eta)| d\xi d\eta \right\}, \quad (1.13)$$

$$\int_{\Gamma} \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l)}{\partial n} d\Gamma = \sum_{k=1}^M \left\{ \int_{\Gamma_{\xi, \eta}} \sum_{j=1}^{\mu} \phi(\mathbf{x}_j) N_j(\xi, \eta) \right. \\ \left. \times \frac{\partial G(\mathbf{x}(\xi, \eta), \mathbf{x}_l)}{\partial n} |\mathbf{J}^k(\xi, \eta)| d\xi d\eta \right\}. \quad (1.14)$$

The associated discretized BIE leads to a sum on the N boundary nodes

$$\alpha(\mathbf{x}_l) \phi(\mathbf{x}_l) = \sum_{j=1}^N \left(K_{lj}^D \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}_j) - K_{lj}^N \phi(\mathbf{x}_j) \right), \quad (1.15)$$

where $l = 1, \dots, N$ and K_{lj}^D, K_{lj}^N are Dirichlet and Neumann global matrices respectively. According to the boundary type on which lies the current node, the potential, or its normal derivative, is either specified by a boundary condition or is an unknown of the problem.

The matrices are built with the numerical computation of the integrals on the reference element. When the collocation node does not belong to the integrated element, a standard Gauss-Legendre quadrature method is used. When it belongs to the element, special methods are needed to take into account the singularities in the evaluation of the Green's functions. Some of the regular integrals can be nearly singular because of the accumulation of nodes. An adaptive technique that is based on recursive subdivisions is needed.

The matrices are then modified to take into consideration two specific aspects of the solution. First, the rigid mode technique is used to avoid a purely geometric calculation of solid angles at nodes of the discretized boundary. For potential flows, it amounts to specifying that the discretized problem satisfies exactly a zero global flux condition. Besides, it improves the conditioning of the algebraic system. Numerically, it consists in imposing

$$\alpha(\mathbf{x}_l) + K_{ll}^N = - \sum_{j=1, j \neq l}^N K_{lj}^N, \quad l = 1, \dots, N, \quad (1.16)$$

so that diagonal terms are directly substituted in the discretized system. Finally, it avoids the computation of the singular diagonal coefficient of the Neumann matrix K_{ll}^N .

The second point is related to corners. Indeed, boundary conditions and normal directions are in general different on intersecting parts of the boundary, such as the free surface (or the

bottom) and lateral boundaries. To be able to deal with such differences, geometric nodes are represented by two or three numerical nodes in the model. Therefore, more equations are needed for each additional node. If nothing is done, different BIEs are used with different normal vectors, but this solution is not satisfactory. Instead, new equations are obtained from the continuity of the potential. Only the free surface has specified potential values, whereas the potential velocity is unknown on the other boundaries :

- $\phi(\mathbf{x}_{n_2}) = \overline{\phi(\mathbf{x}_{n_1})}$ if n_1 belongs to the free surface,
- $\phi(\mathbf{x}_{n_2}) = \phi(\mathbf{x}_{n_1})$ if n_1 belongs to lateral or bottom boundaries,

where n_1 is the main node number, for which a BIE is solved, and n_2 is either a double or a triple node number. The continuity of $\partial\phi/\partial t$ is imposed similarly. From the implementation point of view, lines in the matrix corresponding to the BIE for multiple nodes are replaced by these compatibility conditions.

Let Γ_D and Γ_N denote the boundaries with respectively Dirichlet and Neumann conditions. The linear system can finally be described as follows :

- if $\mathbf{x}_l \in \Gamma_D$ and is a simple node or the first of multiple nodes,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \Gamma_N} K_{lj}^N \phi(\mathbf{x}_j) - \sum_{j \in \Gamma_D} K_{lj}^D \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}_j) = \\ \sum_{j \in \Gamma_N} K_{lj}^D \overline{\frac{\partial \phi}{\partial n}}(\mathbf{x}_j) - \sum_{j \in \Gamma_D}^{j \neq l} K_{lj}^N \overline{\phi}(\mathbf{x}_j) + \sum_{j \in \Gamma}^{j \neq l} K_{lj}^N \overline{\phi}(\mathbf{x}_l) \end{aligned} \quad (1.17)$$

- if $\mathbf{x}_l \in \Gamma_N$ and is a simple node or the first of multiple nodes,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \Gamma_N}^{j \neq l} K_{lj}^N \phi(\mathbf{x}_j) - \sum_{j \in \Gamma}^{j \neq l} K_{lj}^N \phi(\mathbf{x}_l) - \sum_{j \in \Gamma_D} K_{lj}^D \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}_j) = \\ \sum_{j \in \Gamma_N} K_{lj}^D \overline{\frac{\partial \phi}{\partial n}}(\mathbf{x}_j) - \sum_{j \in \Gamma_D} K_{lj}^N \overline{\phi}(\mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (1.18)$$

- if \mathbf{x}_l is a multiple node (it is necessarily on Γ_N in our case)

$$\phi(\mathbf{x}_l) = \overline{\phi(\mathbf{x}_{\text{main}(l)})} \text{ if } \mathbf{x}_{\text{main}(l)} \in \Gamma_D, \quad \phi(\mathbf{x}_l) - \phi(\mathbf{x}_{\text{main}(l)}) = 0 \text{ if } \mathbf{x}_{\text{main}(l)} \in \Gamma_N,$$

where $\mathbf{x}_{\text{main}(l)}$ denotes the location of the main node number.

The linear algebraic systems resulting from the two BIEs are full and non symmetric. Assembling the matrix as well as performing the integrations accurately are time consuming tasks. They are done only once at each time step, since the same matrix is used for both systems. Solving the linear system is another time consuming task. The classical algorithm, previously used in the two-dimensional implementation, turns out to be very expensive with an $O(N^3)$ complexity. This is why the GMRES (Generalized Minimal RESidual) algorithm with preconditioning has been used to solve the linear systems iteratively. The computational complexity has been reduced to $O(N^2)$, which is the same as the complexity of the assembling

phase.

However, this is not sufficient for practical applications and imposes a limit on the exploitation of the model. In order to accelerate the computations, we applied the Fast Multipole Algorithm. Several reasons led us to this choice. First, it reduces directly the complexity of the problem to nearly $O(N)$. Second, the matrix is not built any more. Far nodes are grouped together, so less time is spent in numerical integrations and memory requirements are reduced. Third, the hierarchical structure involved in the algorithm gives automatically the distance criteria for adaptive integrations. Finally, it gives a way to parallelize the method. The last two are left for future work and are not treated here. However, a serial implementation in the existing numerical wave tank leads to significant improvements as will be shown in § 5.

1.3 The Fast Multipole Algorithm

The Fast Multipole Algorithm (FMA) of Greengard and Rokhlin [22] provides a way to compute all pairwise interactions in large sets of particles. Rather than describing precisely the algorithm, we present below the main components of the method in a general and informal manner (see [7]). Let us consider a sum of the form

$$u(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^N K(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j) w_j, \quad (1.19)$$

where x_i and y_j are points in R^3 and K an interaction kernel. Direct evaluations of such sums at N target points \mathbf{x}_i require $O(N^2)$ operations. The Fast Multipole Algorithm deals with interacting systems represented by a kernel K that can be expressed as a far field expansion in which the influence of source and evaluation points is separated. It is valid for a point O close to \mathbf{y} and far from \mathbf{x} :

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx \sum_{k=1}^p \phi_k(O\mathbf{x}) \psi_k(O\mathbf{y}). \quad (1.20)$$

Thus, the computation of $u(\mathbf{x}_i)$ can be realized in two steps. First, one computes the moments

$$M_k(O) = \sum_{j=1}^N \psi_k(O\mathbf{y}_j) w_j. \quad (1.21)$$

Then one evaluates $u(\mathbf{x}_i)$ at each given point x_i via the formula

$$u(\mathbf{x}_i) \approx \sum_{k=1}^p M_k(O) \phi_k(O\mathbf{x}_i). \quad (1.22)$$

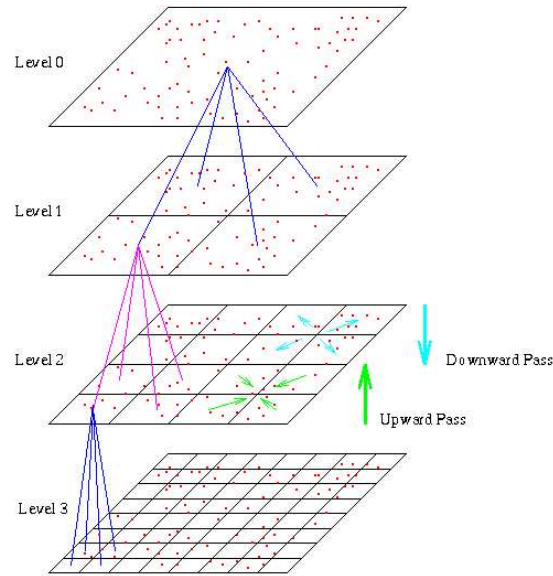


FIG. 1.3 – Hierarchical subdivision of space (in two dimensions) used in the Fast Multipole Algorithm. A tree with finer and finer subdivisions is build recursively.

Consequently, the amount of required work is $O(Np)$, where p is the number of terms kept in the summation (1.20). This estimate is based on the far field expansions and is therefore related to only one part of the distribution of particles. For particles that are close to each other, direct computations of the interactions are necessary. This is the principle of the method.

However, in order to be really effective and achieve an almost linear complexity, this idea must be associated with an algorithmic treatment : a hierarchical subdivision of space. At the top level of the tree is a cube containing the whole set of particles. The cube is cut into eight children cubes to create the first level. The tree is built recursively until a number of levels is reached (Fig. 1.3). Then one can work mainly in terms of the cells of the octree rather than the particles. In fact, one considers the contributions of groups of particles belonging to a same cell. The regular partitioning gives automatically distance criteria to determine the cells for which it is possible to use the multipole expansions. Therefore, interaction lists are created for each cell. The list of near, respectively far, interactions indicates cells for direct computations, respectively multipole approximations.

In the last case, the machinery for far particles must be initiated. The application of the above principle gives rise to an $O(N \log(N))$ implementation. In order to reach a better complexity, one has to apply another technique for the evaluation phase. Indeed the use of

local expansions, similar to the multipole ones, makes it possible to group together particles for this evaluation phase. If we have an expansion for a point Q close to \mathbf{x} ,

$$\phi_k(O\mathbf{x}) \approx \sum_{l=1}^p \alpha_l(Q\mathbf{x})\beta_l^k(OQ), \quad (1.23)$$

then the potential $u(\mathbf{x}_i)$ can be evaluated only with locally dependent terms :

$$u(\mathbf{x}_i) \approx \sum_{l=1}^p \alpha_l(Q\mathbf{x}_i)L_l(Q), \quad (1.24)$$

where the local expansion is related to the moment through

$$L_l(Q) \approx \sum_{k=1}^p M_k(O)\beta_l^k(OQ). \quad (1.25)$$

In order to relate spatially both expansions, translation formulas are required. The algorithm can be briefly described. Each expansion depends on an origin which is the center of the current cell. First, the moments (1.21) are computed at each cell of the finest level. Then, a translation formula allows to climb the tree, the multipole expansions being transported to the center of the parent cell (O') :

$$M_k(O') = \sum_{l=1}^p M_l(O)\gamma_l^k(OO'), \quad (1.26)$$

where γ_l^k is obtained through the available expansion

$$\psi_k(O'\mathbf{y}) = \sum_{l=1}^p \psi_l(O\mathbf{y})\gamma_l^k(OO'). \quad (1.27)$$

The contribution of a distant group of nodes to a local group is computed by the formula (1.25) which converts the multipole expansion into a local expansion. The translation formula for local expansions allows to go down the tree :

$$L_l(Q') = \sum_{m=1}^p L_m(Q)\delta_m^l(QQ'), \quad (1.28)$$

with the available expansion

$$\alpha_l(Q\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^p \alpha_m(Q'\mathbf{x})\delta_m^l(QQ'). \quad (1.29)$$

Back at the finest level, local expansions are evaluated giving the contribution of all distant nodes.

All these expansions depend on the kernel K . For Laplace's equation, Green's functions are expanded into spherical harmonics. Greengard [21] proved the formulas in this case and the reader is referred to his book for a more complete description. In particular, error and complexity analyses are provided. It is important to note here that the Fast Multipole Algorithm presents the advantage over other fast methods that any accuracy can be specified *a priori* through the choice of the number of terms p in the multipole approximation.

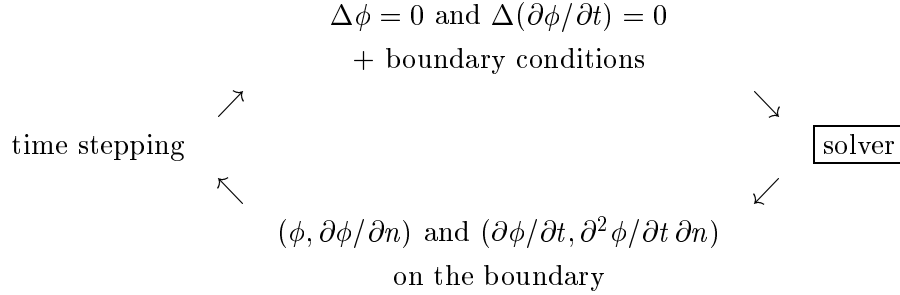
Some improvements have dealt with the choice of appropriate expansions, in particular accurate and efficient translation formulas, some others with the ability of data structures to get a true $O(N)$ algorithm, even for non-uniform distributions of particles. To our knowledge, black-box implementations are not yet available. Among existing programs, two were found to be good candidates for our model. The Fastlap code was used in water waves calculations by Korsmeyer *et al.* [28]. It is based on low-order boundary elements so that a matrix implementation of the various expansions can be kept. The specific optimization features make it difficult to extend to higher-order boundary elements, as explained in the Fastlap manual. Given that specific parts of our model could not be easily included in an existing BEM accelerated by multipoles, we looked for a more classical implementation of the FMA that could be modified according to our needs. A team of Duke University developed the PMTA code for molecular dynamics, and made it available to academic research. It follows quite closely the algorithm designed by Greengard, though not exactly. Details on the implementation of the FMA we finally used can be found in [30].

The recent improvements of the FMA will soon lead to optimal kernel-independent implementations. When ongoing research on the efficiency of this algorithm will be accomplished, it will certainly bring an additional improvement over the code chosen here. However, though not negligible, the acceleration of the computations for large N through the use of a better FMA will not be as drastic as the acceleration obtained with any FMA. Anyhow, this remains a potential improvement if needed in the future.

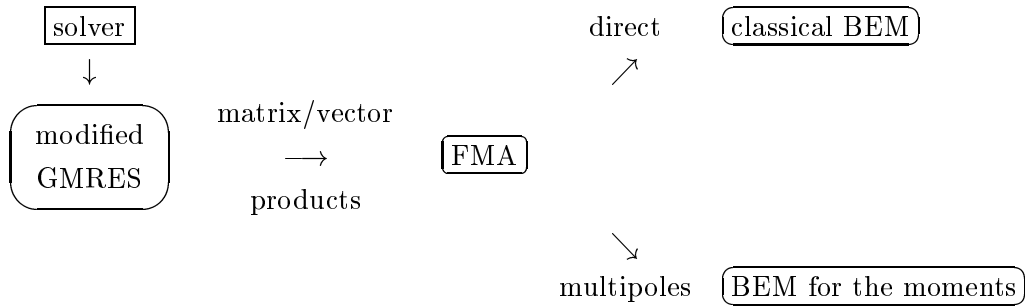
1.4 Application of the FMA to the BEM

In order to apply the Fast Multipole Algorithm to our model, we must first find out where it can be inserted. This fast method could be used by itself to solve Laplace's equation. But it is in our interest to keep the Boundary Element Method to discretize the problem since the efficiency of the BEM method is well recognized. Then the FMA comes as an additional approximation that makes the computations more efficient. What is time consuming in the classical BEM, even with the GMRES algorithm, is to solve the full algebraic linear system that comes from the discretized integral equation involving the Green's function, and to assemble the resulting matrix. The idea is to replace every matrix-vector product in the GMRES

algorithm by an evaluation with the Fast Multipole Algorithm. This avoids assembling the matrix and reduces the complexity to formally nearly $O(N)$ (N is the number of nodes on the boundary of the domain). The general scheme of the modified method is summarized below :



where the solver is :



1.4.1 Expansions

As for the integration of Laplace's equation, the application of the multipole algorithm in our case is based on expansions of the Green's function into spherical harmonics. Given an origin O , a point \mathbf{x}_l far away from the origin and a source point \mathbf{x} near the origin such that $O\mathbf{x} = (\rho, \alpha, \beta)$ and $O\mathbf{x}_l = (r, \theta, \varphi)$ in spherical coordinates, the Green's function can be expanded as

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^p \sum_{m=-k}^k \rho^k Y_k^{-m}(\alpha, \beta) \frac{Y_k^m(\theta, \varphi)}{r^{k+1}}. \quad (1.30)$$

Here the functions $Y_k^{\pm m}$ are the spherical harmonic polynomials (omitting a scaling factor as in [21])

$$Y_k^{-m}(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{(k - |m|)!}{(k + |m|)!}} P_k^{|m|}(\cos \alpha) e^{-im\beta}, \quad k \geq 0, |m| \leq k, \quad (1.31)$$

defined by the associated Legendre polynomials

$$P_k^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^k k!} (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{k+m}(x^2 - 1)^k}{dx^{k+m}}, \quad k \geq 0, 0 \leq m \leq k. \quad (1.32)$$

Similarly, one has

$$\frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^p \sum_{m=-k}^k \frac{\partial}{\partial n} \left(\rho^k Y_k^{-m}(\alpha, \beta) \right) \frac{Y_k^m(\theta, \varphi)}{r^{k+1}} \quad (1.33)$$

where $\partial/\partial n$ is the normal derivative at the point \mathbf{x} . Consequently, the integral equation (1.3) occurring in the surface wave model for the pairs $(\phi, \partial\phi/\partial n)$ (the pairs $(\partial\phi/\partial t, \partial^2\phi/\partial t \partial n)$ are treated similarly) becomes

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{x}_l) \phi(\mathbf{x}_l) \approx & \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial n}(\mathbf{x}) \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^p \sum_{m=-k}^k \rho^k Y_k^{-m}(\alpha, \beta) \frac{Y_k^m(\theta, \varphi)}{r^{k+1}} \right. \\ & \left. - \phi(\mathbf{x}) \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^p \sum_{m=-k}^k \frac{\partial}{\partial n} \left(\rho^k Y_k^{-m}(\alpha, \beta) \right) \frac{Y_k^m(\theta, \varphi)}{r^{k+1}} \right\} d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.34)$$

The double sum can be taken outside of the integral so that

$$\alpha(\mathbf{x}_l) \phi(\mathbf{x}_l) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^p \sum_{m=-k}^k M_k^m(O) \frac{Y_k^m(\theta, \varphi)}{r^{k+1}}, \quad (1.35)$$

where $M_k^m(O)$ is the moment at O :

$$M_k^m(O) = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial n}(\mathbf{x}) \rho^k Y_k^{-m}(\alpha, \beta) - \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\rho^k Y_k^{-m}(\alpha, \beta) \right) \right\} d\Gamma. \quad (1.36)$$

The expansions are valid at a given origin O that represents the point at which the contributions are grouped. In the algorithm, it is the center of the cell in which the expansion is known to be valid.

1.4.2 Formulation and mesh information

It was explained in §2 that at each time step, two mixed Dirichlet-Neumann boundary integral equations must be solved for the velocity potential and its time derivative. Both lead to algebraic linear systems with the same coefficient matrix. The use of the iterative solver implies that this matrix must be available for each intermediate matrix-vector product of the GMRES algorithm. Therefore the information that was stored in the matrix for multiple use must be similarly available in the fast algorithm. We have chosen to store cell by cell all the computed coefficients for either near or far interactions, and either Dirichlet or Neumann boundary conditions. Thus the integrations are done only once at each time step. This is not really a choice since we could not have chosen to compute again the integrations at each PMTA call : the time spent in the integrations would have been too long. So after the geometry has changed, the BEM analysis is performed and the coefficients are stored in each cell for subsequent use with appropriate flags. This storage requires some knowledge of BEM meshes

for the PMTA code. Indeed, though we could have thought that *a priori* the boundary nodes used in the numerical wave tank form a set of particles for the PMTA code, with certain location and weight, we are in fact forced to separate clearly contributing boundary elements and evaluation nodes.

The contribution entity is defined as the boundary element and represented by its center. The elements are put in a cell if their center is inside. Each element contributes through the μ ($= 16$) nodes of the MII element which defines the local interpolations. Thus, in each cell, we store the contributions of all the nodes of MII elements whose quadrilateral element belongs to this cell (i.e. its center belongs to the cell). Then the number of stored coefficients is greater than the number of elements. Moreover the corresponding nodes are different from the collocation nodes that are really within the cell. A new structure was created in each cell that contains the needed mesh information. Since the discretization of the boundary integral does not appear except for this storage, other boundary elements can be used then in the BEM code.

1.4.3 Near interactions

For the cells that are in the list of near interactions, the PMTA program calls a routine for the BEM analysis. The integrations are the same as in the former model, except that they are not performed at each collocation node. The PMTA code works cell by cell. The integrations on each element of the cells belonging to this interaction list are added and evaluated at each collocation node.

1.4.4 Far interactions

First, a BEM analysis has to be performed to compute the moments

$$M_k^m(O) = \sum_{\kappa=1}^M \left\{ \int_{\Gamma^{\xi,\eta}} \sum_{j=1}^{\mu} \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_j)}{\partial n} N_j(\xi, \eta) \rho^k Y_k^{-m}(\alpha, \beta) |\mathbf{J}^{\kappa}(\xi, \eta)| d\xi d\eta \right\} - \sum_{\kappa=1}^M \left\{ \int_{\Gamma^{\xi,\eta}} \sum_{j=1}^{\mu} \phi(\mathbf{x}_j) N_j(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} \left(\rho^k Y_k^{-m}(\alpha, \beta) \right) |\mathbf{J}^{\kappa}(\xi, \eta)| d\xi d\eta \right\}. \quad (1.37)$$

In this case, $\rho^k Y_k^{-m}(\alpha, \beta)$ plays the role of $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l)$. But the numerical integrations are similar. The main question is to know whether there is a singularity. Unlike the Green's function, the spherical harmonics are not singular. The problem can only come from the normal derivative of the spherical harmonics. For $k = 0$, the derivative vanishes, but for $k \neq 0$, it turns out to

bring an apparent singularity when differentiation is performed :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\rho^k Y_k^{-m}(\alpha, \beta) \right) &= k \rho^{k-1} Y_k^{-m}(\alpha, \beta) \nabla \rho \cdot \mathbf{n} + \rho^k \left(\frac{m}{\tan \alpha} Y_k^{-m}(\alpha, \beta) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(k - |m|)(k + |m| + 1)} e^{i\beta} Y_k^{-(m+1)}(\alpha, \beta) \right) \nabla \alpha \cdot \mathbf{n} \\ &\quad - im \rho^k Y_k^{-m}(\alpha, \beta) \nabla \beta \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

The apparent singularity comes from the presence of the “ $\tan \alpha$ ” term, which depends on the relative location of the current point to the origin. Similarly the scalar product $\nabla \beta \cdot \mathbf{n}$ has a “ $\sin \alpha$ ” in its denominator, whereas the other scalar products are regular. Since it is possible to have α small (this corresponds to an origin approximatively on the same vertical as the current point), there is a possibility of near-singularity. Such a large term in the expression could prevent from getting an accurate evaluation of the integral because of the ratio between two large numbers. In fact, the singularity can be removed by writing the spherical harmonics differently. Indeed for $m \neq 0$, they can be expressed with a factor “ $\sin \alpha$ ” which annihilates the denominators :

$$Y_k^{-m}(\alpha, \beta) = \tilde{Y}_k^{-m}(\alpha, \beta) \sin \alpha. \quad (1.39)$$

For $m = 0$, there is no problem since the relevant terms are zero. This operation is possible because we can define a modified Legendre polynomial

$$\tilde{P}_k^{|m|}(x) = \frac{(-1)^m}{2^k k!} (1 - x^2)^{\frac{m-1}{2}} \frac{d^{k+m}(x^2 - 1)^k}{dx^{k+m}}, \quad k \geq 0, 1 \leq m \leq k, \quad (1.40)$$

so that

$$\tilde{Y}_k^{-m}(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{(k - |m|)!}{(k + |m|)!}} \tilde{P}_k^{|m|}(\cos \alpha) e^{-im\beta}, \quad k \geq 0, 1 \leq |m| \leq k. \quad (1.41)$$

Then the partial derivative can be expressed as

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\rho^k Y_k^{-m}(\alpha, \beta) \right) &= k \rho^{k-1} Y_k^{-m}(\alpha, \beta) \nabla \rho \cdot \mathbf{n} + \rho^k \left(m \cos \alpha \tilde{Y}_k^{-m}(\alpha, \beta) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(k - |m|)(k + |m| + 1)} e^{i\beta} Y_k^{-(m+1)}(\alpha, \beta) \right) \nabla \alpha \cdot \mathbf{n} \\ &\quad - im \rho^k \tilde{Y}_k^{-m}(\alpha, \beta) \sin \alpha \nabla \beta \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

This kernel, which is a derivative of the spherical harmonics, does not require particular expansions. All formula are still valid since the derivative only relates to the far field variables. Similarly, the integrations from a boundary element discretization only appear in the computation of the moments, and not in other expansions. Therefore, the translation of a multipole expansion, the conversion to a local expansion, the translation of a local expansion and the local expansion itself are all the same as in the original work by Greengard [21]. To illustrate

this, we can write formally what happens for the multipole translation. Let O' be another origin and let $O'\mathbf{x} = (\rho', \alpha', \beta')$. The moment at O' is written as

$$M_k^m(O') = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}) \rho'^k Y_k^{-m}(\alpha', \beta') - \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\rho'^k Y_k^{-m}(\alpha', \beta') \right) \right\} d\Gamma. \quad (1.43)$$

Since an exact expansion like (1.27) is available for $\rho'^k Y_k^{-m}(\alpha', \beta')$,

$$\rho'^k Y_k^{-m}(\alpha', \beta') = \sum_{n'=0}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} \gamma_{m,m'}^{k,k'}(OO') \rho^{(k-k')} Y_{(k-k')}^{-(m-m')}(\alpha, \beta), \quad (1.44)$$

where the explicit expression for $\gamma_{m,m'}^{k,k'}(OO')$ can be found in Greengard's monograph, the moment at O' (1.43) becomes

$$\begin{aligned} M_k^m(O') &= \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}) \left(\sum_{n'=0}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} \gamma_{m,m'}^{k,k'}(OO') \rho^{(k-k')} Y_{(k-k')}^{-(m-m')}(\alpha, \beta) \right) \right. \\ &\quad \left. - \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\sum_{n'=0}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} \gamma_{m,m'}^{k,k'}(OO') \rho^{(k-k')} Y_{(k-k')}^{-(m-m')}(\alpha, \beta) \right) \right\} d\Gamma \quad (1.45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n'=0}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} \gamma_{m,m'}^{k,k'}(OO') \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}) \left(\rho^{(k-k')} Y_{(k-k')}^{-(m-m')}(\alpha, \beta) \right) \right. \\ &\quad \left. - \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\rho^{(k-k')} Y_{(k-k')}^{-(m-m')}(\alpha, \beta) \right) \right\} d\Gamma. \quad (1.46) \end{aligned}$$

So the translation formula is

$$M_k^m(O') = \sum_{n'=0}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} \gamma_{m,m'}^{k,k'}(OO') M_{k-k'}^{m-m'}(O) \quad (1.47)$$

and it is not related to the Boundary Element Method.

1.4.5 Specific points

The rigid mode technique was applied to the former model in order to compute the factors $\alpha(\mathbf{x}_l)$ of the BIEs. However we could use a geometric calculation of the solid angles. Since it improves the conditioning of the system and avoids the integration of the singular diagonal coefficient of the Neumann matrix, we want to keep this technique. The matrix no longer being available, the implementation must be adapted. In the former model, the technique was applied *a priori* by substituting lines according to equation (1.16). Now we apply it after the matrix-vector product, by correcting the resulting vector. The sum of the off-diagonal terms is seen as a matrix-vector product with the constant vector composed of ones. Then the vector is multiplied by $\phi(\mathbf{x}_l)$, which is either a specified value (Dirichlet condition) or an

estimated value (Neumann condition) since an iterative method is used. Therefore the rigid mode technique appears in the linear systems (1.17) and (1.18) as

$$\begin{aligned}
 & + \left(\sum_{j \in \Gamma}^{j \neq l} K_{lj}^N \times 1 \right) \bar{\phi}(\mathbf{x}_l) \quad \text{on the right hand side,} \\
 & - \left(\sum_{j \in \Gamma}^{j \neq l} K_{lj}^N \times 1 \right) \phi(\mathbf{x}_l) \quad \text{on the left hand side,}
 \end{aligned}$$

depending on the location of the node \mathbf{x}_l . The new product is performed by the fast algorithm, using the stored Neumann coefficients as seen earlier.

The treatment of the corners also led to a modification of the coefficient matrix. Similarly the implementation of double and triple nodes was done *a priori*, replacing lines by the compatibility conditions. In the adapted fast BEM, these continuity relations impose values of the resulting vector. So once the solution of the matrix-vector product is obtained by the FMA, a routine explicitly acts on the resulting vector to force the continuity of the potential at double/triple nodes.

Finally, note that the GMRES algorithm, which is partly at the intersection between the Boundary Element Method and the Fast Multipole Algorithm, is necessarily adapted. First, calls to a specific routine replace the matrix-vector products. But since the matrix is no longer available, the preconditioning must be adapted too. In fact, it remains the same (SSOR preconditioning) and only the matrix is different. The preconditioning of multipole accelerated methods is still under investigation [19, 39, 25]. As noted in [11], the FMA is well suited to a geometric strategy for the sparse approximate matrix. The near interacting coefficients of the matrix are still available and can be used for that purpose. Therefore, we store these coefficients in a sparse matrix during the near interaction phase in order to use the former preconditioning. It turns out to be satisfactory and a more sophisticated technique is not required.

1.5 Results

In this section, results obtained with the new algorithm are presented and compared with those obtained with the classical BEM model. New results are presented as well. Our aim is to show that the same global accuracy is achieved with shorter computing time. Several points concerning current investigations and future possibilities are discussed.

The application from the original article [23] is used first to perform the comparative study. It involves the overturning of a solitary wave over a sloping bottom with a transverse modulation that focuses the energy and leads to a plunging jet. The model has been shown to

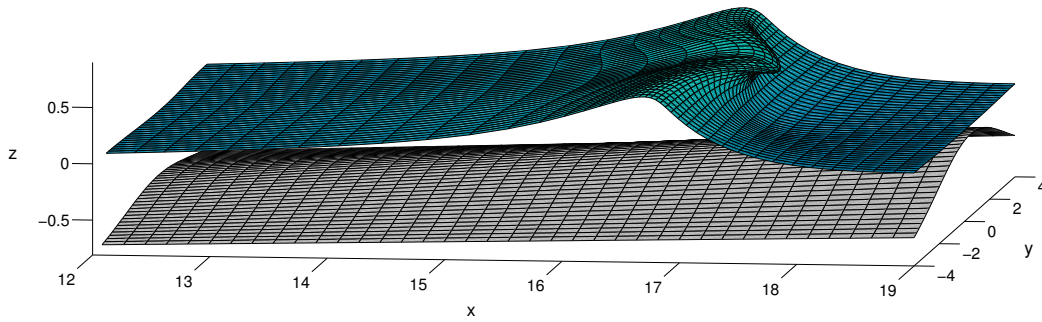


FIG. 1.4 – Overturning of a steep solitary wave with a plunging jet. The solitary wave comes from the far field and propagates over a sloping ridge. The discretization used in the three-dimensional numerical wave tank is $60 \times 40 \times 4$ elements, respectively along the x , y and vertical directions (i.e. 6022 nodes).

reproduce with high accuracy the initiation of the breaking jet. Therefore it is natural to use that example to test the accelerated method. The maximum depth h_{\max} is used as unit length. The unit time is $\sqrt{h_{\max}/g}$. Consequently the unit velocity is the long wave speed $\sqrt{gh_{\max}}$. The numerical wave tank is of length 19 and width 4 (or 8). It is bounded by solid boundaries. The initial wave is a steep solitary wave of amplitude 0.6. Figure 1.4 shows a zoom of the wave overturning on the three-dimensional bottom. The accuracy of the new solution is then compared to that of the former solution (without FMA). Moreover the global stability is monitored in order to get the smallest number of multipole terms that is needed to get the same breaking jet as before. The computing times are also reported for several grids. The computations have been realized on an Intel Pentium 4 processor. Its main characteristics are 2.2 GHz for the CPU and 1Go of memory. The BEM code uses the Intel Fortran Compiler while the PMTA code is compiled by GCC. Some optimizations could be done to better benefit from the architecture. However the main goal of the study is to demonstrate the ability of the FMA to really improve the model, for any platform. So no specific options except classical optimizations are used for the following results.

For the application under consideration, the various parameters of the BEM code are fixed. The number of integration points is ten by direction in order to ensure sufficient accuracy to get the breaking jet. Two parameters of the Fast Multipole Algorithm must be specified with great care : the degree of the multipole expansion and the number of levels in the hierarchical subdivision. The first determines the accuracy of the new approximation, but it also influences the computing time. The second mainly acts on the efficiency and we must choose a good compromise. Indeed one expects the algorithm to be more efficient for more subdivided do-

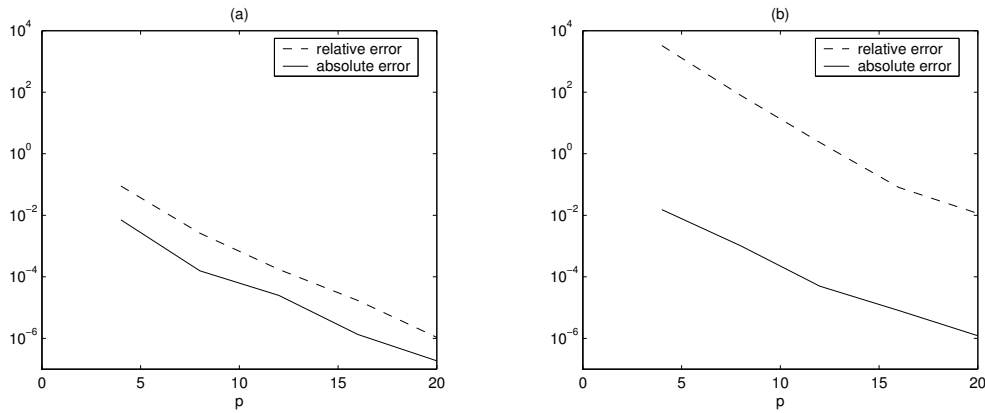


FIG. 1.5 – Maximum errors between the solutions with and without using the FMA versus the number of terms in the multipole expansions. (a) 150 nodes, (b) 1422 nodes.

mains. But the manipulation of the tree structure becomes a big task that limits the benefits of the algorithm. For most of our computations, five levels turned out to give the best times. For very coarse meshes, four levels have been used and for larger systems, a sixth or higher level can be required. Indications for this choice are available by looking at the results for the PMTA code [30].

1.5.1 Accuracy

As shown in § 4, the Fast Multipole Algorithm is based on truncated multipole expansions. They are another approximation in the model and the first comparison consists in verifying that the new results approach the former ones when the number of multipole terms increases. For that purpose we compute the first linear system for two grids (i.e. two different levels of accuracy). The first is a very coarse grid with four elements in each direction (we name it a $4 \times 4 \times 4$ grid) for a total of 150 nodes. Then a more realistic grid is used : $40 \times 10 \times 4$ with 1422 nodes. This allows to observe the consistency of the multipole approximation inside the numerical wave tank. We compare point by point the solution vectors obtained with both methods and look at the maximum of relative and absolute errors as a function of the number of multipole terms (Fig. 1.5).

In each case, we almost get a straight line on a logarithmic scale, thus the convergence is nearly exponential. However we note that the relative errors are greater than the absolute ones, particularly for the finer grid. This comes from the fact that the FMA approximation acts on the weak interactions, so that the small numbers of the solution vector are inaccurately computed. In fact, only the absolute errors are significative for the model accuracy.

We observe that the values for the finer grid are only slightly greater, but the evolution as a function of the number of multipoles is of the same order. This confirms the consistency of the accelerated method with regard to the classical one.

The fast algorithm comes as an additional approximation in the model. What is important is not that the accelerated method matches the former one, but rather that the global accuracy and numerical stability properties remain the same. The only available diagnostic tool consists in following the evolution of volume and energy as a function of time. Indeed these quantities must be constant since there are no sources nor sinks. So we can look at the relative errors with regard to their initial value : they give a good indication on the accuracy and the stability of the computed solution. Big errors or oscillatory variations must lead to loss in accuracy. If these errors are similar to those obtained with the former model, we observe vertical slices of the waves from both methods and compare them.

As said above the overturning of a solitary wave is simulated on a $40 \times 10 \times 4$ grid and eight multipole terms are used in the FMA. Figure 1.6 presents the evolution of the volume and energy relative errors for both methods. The curves are very close : the new model seems to be as good as the former one. The gradual increase of these errors corresponds to the formation of the plunging wave which has propagated along the basin. The quite coarse grid used in this example leads to a lack of nodes to properly locate the jet and to describe the highly deformed parts of the free surface. However it is sufficient to observe the good behaviour of the accelerated model. To confirm this conclusion, Fig. 1.7 shows the slices at the middle of the tank for both solutions at two different times. Within graphical accuracy, we cannot see any difference between these.

Since we have proven that the accelerated model is able to accurately simulate highly non-linear wave phenomena, let us now consider the efficiency. The first question to answer is whether one can get such solutions with fewer multipole terms. That is to say, once the accuracy of the BEM code is given, what is the smallest value for p for which the global accuracy is kept ? For this grid ($40 \times 10 \times 4$), one can keep only six terms in the multipole expansions instead of eight. The errors on the volume and the energy are of the same order but they do not follow exactly the same curves as on Fig. 1.6. The plunging jet is obtained, however there is now a difference in the wave elevation and the back of the wave is slightly oscillatory. For finer grids, this observation is more pronounced since the global accuracy of the BEM code is better. Therefore we keep $p = 8$ for the analysis of computing times in the next paragraph.

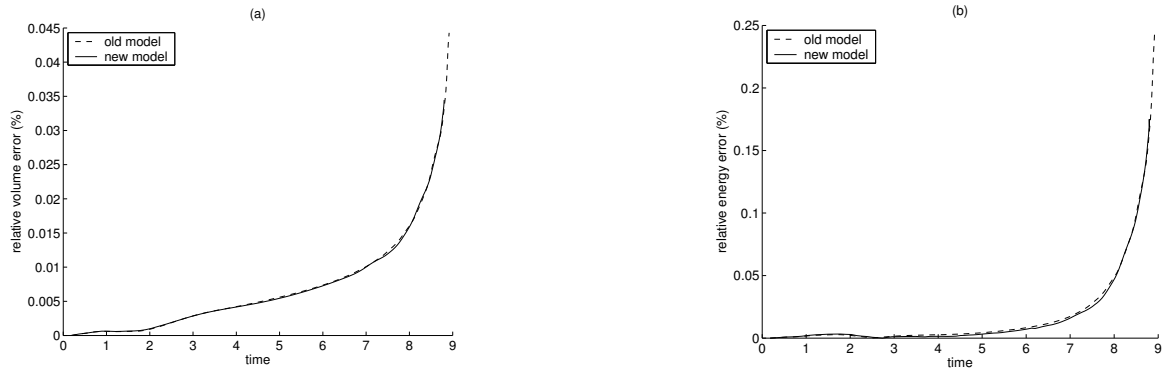


FIG. 1.6 – Relative numerical errors (%) on : (a) volume versus time, (b) energy versus time. The grid is relatively coarse with 1422 nodes for the overturning of a solitary wave over a three-dimensional bottom (see Fig. 1.4).

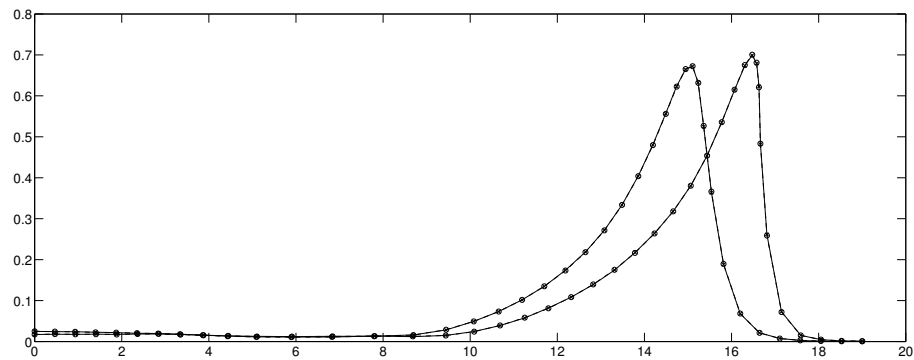


FIG. 1.7 – Profiles of the free surface in the middle of the wave tank ($y = 0$) at two different times for the overturning of a solitary wave over a three-dimensional bottom (see Fig. 1.4). The results of both methods (without the FMA and with the FMA with $p = 8$) are shown. There is no difference within graphical accuracy.

grid	number of nodes	time with FMA	time without FMA
$40 \times 10 \times 4$	1422	45s	41s
$50 \times 20 \times 4$	2862	120s	390s
$50 \times 40 \times 4$	5102	250s	1258s
$60 \times 40 \times 4$	6022	329s	1852s

TAB. 1.1 – Comparison of computing time with and without the use of the Fast Multipole Algorithm as a function of the number of nodes for the overturning of a solitary wave over a three-dimensional bottom (see Fig. 1.4). The times correspond to the solving of one linear system.

1.5.2 Efficiency

Suppose that the best parameter set for the FMA is known. The computing times for various discretizations are observed. The computations are restricted to the solution of the first linear system. The computing times are recorded in Table 1.1.

For the coarser grid, both methods give similar values. By contrast, a reduction of the computing time by a factor close to six is obtained for the $60 \times 40 \times 4$ grid with 6022 nodes. Clearly the new method has a better behaviour as the number of nodes is increased. Recall that we have done the comparisons for the computations until the first linear system is solved. The values for one time step are not exactly the same. Indeed, if the computing time for one time step is measured as the ratio between the total computing time and the number of time steps, one gets values that are even more advantageous for the FMA. For instance, the grid with 1422 nodes yields 49s a time step with the FMA versus 62s without.

These results have been obtained for some prescribed values of the BEM parameters. One may wonder whether the conclusion is the same for a smaller number of integration points. In this case, the time spent in the regular integrations is reduced. This is true for both methods but, since with the FMA less integrals are computed, the difference in time is less significative. However the better computing complexity is conserved. For any value of the integration parameters, it is almost linear for large N . For five integration points per direction (instead of ten), the computing times have been recorded and plotted versus the number of nodes (Fig. 1.8). The observed complexity for the accelerated method is linear above roughly 4000 nodes.

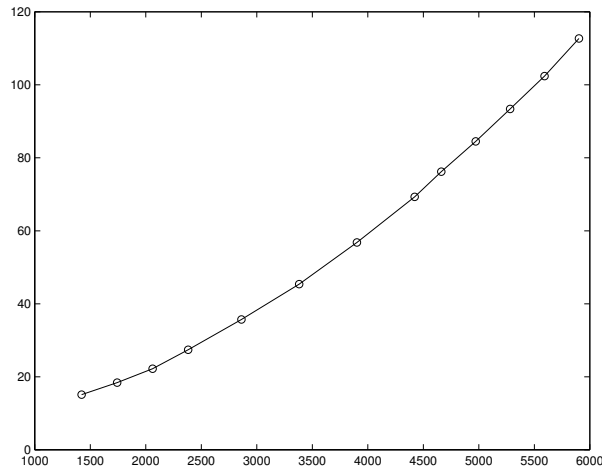


FIG. 1.8 – Evolution of the computing time versus the number of nodes.

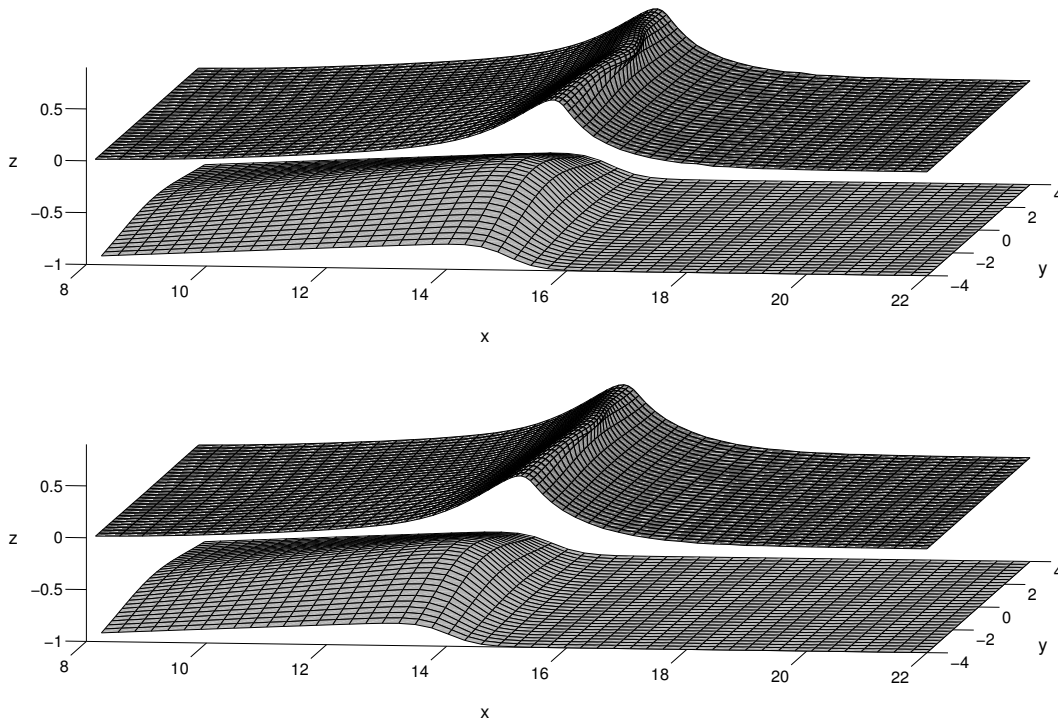


FIG. 1.9 – Effect of a bar on the propagation of a solitary wave. The shoaling of a solitary wave on a slope that stops abruptly leads to various types of breaking depending on the location of the bar. The upper case shows a plunging wave with less inertia than in the case of a regular slope (see Fig. 1.4). For a bar located at a smaller value of x (bottom case), one gets instead an overturning wave with a very small jet. It is nearly a spilling wave. The discretizations are $80 \times 30 \times 4$ elements for 6142 nodes (335s per time step).

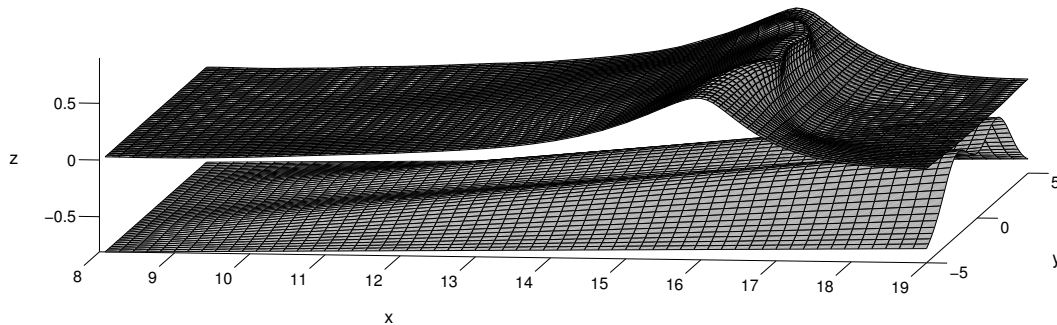


FIG. 1.10 – Overturning of a solitary wave over a sloping bottom with two humps in the transverse direction. As compared to the single hump case (Fig. 1.4), more elements are needed in the y -direction. Here $60 \times 50 \times 4$ elements are used for 7342 nodes. The computing time is 400s a time step.

1.5.3 Discussion and future improvements

The memory requirements of the former BEM code make it practically impossible to use more nodes to discretize the boundary. Thus the comparison stops here. However the new model avoids the storage of most of the $N \times N$ matrices. In fact, the only one that remains is the preconditioning matrix. It is a sparse matrix and an adapted storage is under investigation. Anyhow more memory is available than before to do computations on larger grids. It will be even better once no matrices are stored any longer. Note that the choice of a preconditioning that is easy to implement turns out to be satisfactory. Indeed, the number of iterations for solving the linear systems is only slightly greater and there is no reason to look for more complex techniques.

We have not mentioned error analysis, in particular to get optimal parameters. For the classical Fast Multipole Algorithm, it is well known. But to our knowledge, a rigorous analysis of the Boundary Element Method for a mixed Dirichlet-Neumann boundary integral equation with a piecewise smooth boundary still is an open problem [4] (see [5, 6, 27] for convergence results on boundary integral methods for time-dependent, three-dimensional, doubly periodic water waves). The use of particular techniques would make the analysis even more complicated. So it is not appropriate to use the analysis of the FMA for the choice of the number of multipole terms since we have no access *a priori* to the error due to the BEM approximation. We must apply empirical techniques that are application dependent. However, it will be interesting to be able to adjust each successive approximation to the global order of accuracy of the method : this will reduce the computing time for the desired accuracy.

Examples of computations performed with the new model are shown in Figs 1.9 and 1.10. The motivation for the example shown in Fig. 1.10 was given by the Gold Coast artificial reef designed for coastal protection and surfing [8]. All the computations presented in this paper correspond to scalar implementations. In fact, the old model has a vectorized implementation for which the computing time is reduced on a supercomputer. The new model could also be vectorized, but since the set of nodes has been divided into cells, the vector operations concern smaller arrays. Therefore, a vectorized implementation would be interesting only for a sufficiently large number of nodes by cell.

The development of efficient and highly accurate fast multipole algorithms in three dimensions turned out to be a non trivial task. Some improvements of the method occurred since its discovery, in particular for Laplace's equation. The use of a better FMA may improve our model further, but it is not obvious that much gain can be expected for the level of accuracy needed here. If one wants to include a more recent FMA in the model, one must choose a parallel implementation. The speed-up will then be significative for any grid. In fact, the PMTA code also provides a parallel version. The implementation has been designed *a priori* for a particular machine. If it turns out to be impossible to use this parallel version, another FMA that follows the same methodology as presented in this work will have to be adapted. In this case, we will benefit both from an improved serial algorithm as well as the most recent tools for parallelization.

1.6 Conclusion

The numerical code developed by Grilli, Guyenne and Dias provides a three dimensional numerical wave tank. It solves potential flow equations with a free-surface, and can describe accurately nonlinear waves over a complex bottom topography. For instance, the overturning of a solitary wave over a sloping ridge is well calculated by the model. However, more complex phenomena require finer and finer discretizations so that the $O(N^2)$ complexity of the code, where N is the number of nodes on the boundary of the domain, is too restrictive. To relax this constraint, the Fast Multipole Algorithm has been combined with the Boundary Element Method through the use of an iterative solver. This rapid algorithm has been designed to compute faster the mutual interactions of a set of particles. For far particles, contributions can be grouped together through the use of multipole expansions. Moreover a hierarchical subdivision of space leads to a real reduction of the complexity of the problem. The inclusion of the algorithm in the numerical wave tank means replacing each matrix-vector product by a call to the PMTA code, which is an implementation of the Fast Multipole Algorithm. However, some changes have been undertaken to link the BEM and the FMA. The BEM analysis for far interacting nodes leads to new integrals for which great care is taken in order to avoid

apparent singularities. Particular features of the model must also be taken into account for the implementation such as the rigid mode technique, the double nodes and the need to store some information that was included in the influence matrix. The resulting combined methods turn out to give a more efficient model even for quite coarse discretizations. Several improvements are still possible. The available distance criteria from the hierarchical subdivision can be used to apply adaptive integrations. Since the accurate numerical integrations are the main time consuming task, appropriate choices of the number of nodes for the quadrature according to the distance between nodes should improve the method even further. Finally, even though the Fast Multipole Algorithm is particularly efficient for a large number of nodes, the use of a parallel version will be a valuable improvement for any size of discretization. This way, finer grids and larger domains could be considered to give new insights in free-surface problems.

Bibliography

- [1] Alpert B., Beylkin G., Coifman R., Rokhlin V., Wavelet-like bases for the fast solution of second-kind integral equations, *SIAM J. Sci. Comput.* **14**, 159–184 (1993).
- [2] Aluru S., Prabhu G.M., Gustafson J., Sevilgen F., Distribution-independent hierarchical algorithms for the N -body problem, *J. Supercomp.* **12**, 303–323 (1998).
- [3] Anderson C. R., An implementation of the fast multipole method without multipoles, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* **13**, 923–947 (1992).
- [4] Atkinson K.E., The numerical solution of boundary integral equations, in *The State of the Art in Numerical Analysis*, edited by I. Duff and G. Watson (Oxford Univ. Press), 223–259 (1997).
- [5] Beale J.T., A convergent boundary integral method for three-dimensional water waves, *Mathematics of Computation* **70**, 977–1029 (2000).
- [6] Beale J.T., Hou T.Y., Lowengrub J.S., Convergence of a boundary integral method for water waves, *SIAM J. Numer. Anal.* **33**, 1797–1843 (1996).
- [7] Beatson R.K., Greengard L., A short course on fast multipole methods, in *Wavelets, Multilevel Methods and Elliptic PDEs*, edited by M. Ainsworth, J. Levesley, W. Light and M. Marletta (Oxford Univ. Press), 1–37 (1997).
- [8] Black K., Artificial surfing reefs for erosion control and amenity : theory and application, Proceedings of the International Coastal Symposium (ICS 2000), Rotorua, New Zealand (2000).
- [9] Broeze J., van Daalen E.F.G., Zandbergen P.J., A three-dimensional panel method for nonlinear free surface waves on vector computers, *J. Comput. Mech.* **13**, 12–28 (1993).
- [10] Brown M.J., Mammoli A.A., Ingber M.S., Parallel multipole implementation of the generalized Helmholtz decomposition for solving viscous flow problems, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **58**, 1617–1635 (2003).

- [11] Carpentieri B., Duff I.S., Giraud L., Robust preconditioning of dense problems from electromagnetics, *Numerical analysis and its applications, Lecture Notes in Computer Science* **1988**, 170–178 (2001).
- [12] Cheng, H., Greengard, L., Rokhlin, V., A fast adaptive multipole algorithm in three dimensions, *J. Comput. Phys.* **155**, 468–498 (1999).
- [13] Darve E., The Fast Multipole Method : numerical implementation, *J. Comput. Phys.* **160**, 195–240 (2000).
- [14] Dommermuth D.G., Yue D.K.P., Lin W.M., Rapp R.J., Chan E.S., Melville W.K., Deep-water plunging breakers : a comparison between potential theory and experiments, *J. Fluid Mech.* **189**, 423–442 (1998).
- [15] Fochesato C., Grilli S., Guyenne P., Note on non-orthogonality of local curvilinear coordinates in a three dimensional boundary element method, submitted to *Int. J. Num. Meth. Fluids*.
- [16] Fu Y., Klimkowski K.J., Rodin G.J., Berger E., Browne J.C., Singer J.K., van de Geijn R.A., Vemaganti K.S., A fast solution method for three-dimensional many-particle problems of linear elasticity, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **42**, 1215–1229 (1998).
- [17] Gómez J.E., Powert H., A multipole direct and indirect BEM for 2D cavity flow at low Reynolds number, *Engng. Anal. Bound. Elem.* **19**, 17–31 (1997).
- [18] Goreinov S. A., Tyrtyshnikov E. E., Yeregin A. Yu., Matrix-free iteration strategies for large dense linear systems, *Numer. Linear Algebra Appl.* **4**, 273–294 (1997).
- [19] Grama A., Kumar V., Sameh A., Parallel Hierarchical Solvers and Preconditioners for Boundary Element Methods, *SIAM J. Sci. Comput.* **20**, 337–358 (1999).
- [20] Graziani G., Landrini M., Application of Multipoles Expansion Technique to Two-Dimensional Nonlinear Free-Surface Flows, *J. Ship Research.* **43**, 1–12 (1999).
- [21] Greengard L., *The Rapid Evaluation of Potential Fields in Particle Systems*, MIT Press, Cambridge, MA, 1988.
- [22] Greengard L., Rokhlin V., A fast algorithm for particle simulations, *J. Comput. Phys.* **73**, 325–348 (1987).
- [23] Grilli S., Guyenne P., Dias F., A fully nonlinear model for three-dimensional overturning waves over arbitrary bottom, *Int. J. Num. Meth. Fluids* **35**, 829–867 (2001).
- [24] Grilli S.T., Svendsen I.A., Subramanya R., Breaking criterion and characteristics for solitary waves on slopes, *J. Waterway, Port. Coastal, Ocean Engng.* **123**, 102–112 (1997).
- [25] Guillaume P., Huard A., Le Calvez C., A block constant approximate inverse for preconditioning large linear systems, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **24**, 822–851 (2003).
- [26] Hackbush W., A sparse matrix arithmetic based on \mathcal{H} -matrices. I. Introduction to \mathcal{H} -matrices, *Computing* **62**, 89–108 (1999).

- [27] Hou T.Y., Zhang P., Convergence of a boundary integral method for 3-D water waves, *Discrete and Continuous Dynamical Systems B* **2**, 1–34 (2002).
- [28] Korsmeyer F.T., Yue D.K.P., Nabors K., Multipole-Accelerated Preconditioned Iterative Methods for Three-Dimensional Potential Problems, presented at *BEM 15*, Worcester, MA (1993).
- [29] Kropinski M.C.A., An Efficient Numerical Method for Studying Interfacial Motion in Two-Dimensional Creeping Flows, *J. Comput. Phys.* **171**, 479–508 (2001).
- [30] Leathrum J.F., Board J.A., *The Parallel Fast Multipole Algorithm in Three Dimensions*, Technical report, Duke University Dept. of Electrical Engineering (1992).
- [31] Longuet-Higgins M.S., Cokelet E.D., The deformation of steep surface waves on water. I. A numerical method of computation, *Proc. R. Soc. Lond.* **A 350**, 1–26 (1976).
- [32] Mammoli A.A., Ingber M.S., Parallel multipole BEM simulation of two-dimensional suspension flows, *Engng. Anal. Bound. Elem.* **24**, 65–73 (2000).
- [33] Osher S., Fedkiw R., Level set methods and dynamic implicit surfaces, *Applied Mathematical Sciences* **153**, Springer, 2003.
- [34] Potts D., Steidl G., Fast summation at nonequispaced knots by NFFTs, *SIAM J. Sci. Comput.* **24**, 2013–2037 (2003).
- [35] Pringle G., *Numerical Study of Three-Dimensional Flow using Fast Parallel Particle Algorithms*, Ph.D. thesis (Napier University, Edinburgh, 1994).
- [36] Rokhlin V., Rapid solution of integral equations of classical potential theory, *J. Comput. Phys.* **60**, 187–207 (1985).
- [37] Scardovelli R., Zaleski S., Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **31**, 567–603 (1999).
- [38] Scorpio S., Beck F., A Multipole Accelerated Desingularized Method for Computing Nonlinear Wave Forces on Bodies, presented at *15th Intl. Conf. Offshore Mech. Arctic Engng.*, Florence, Italy (1996).
- [39] Sertel K., Volakis J.L., Incomplete LU preconditioner for FMM implementation, *Micro. Optic. Tech. Lett.* **26** (7), 265–267 (2000).
- [40] Skyner D.J., A comparison of numerical predictions and experimental measurements of the internal kinematics of a deep-water plunging wave, *J. Fluid Mech.* **315**, 51–64 (1996).
- [41] Song J.M., Lu C.C., Chew W.C., Lee S.W., Fast Illinois Solver Code (FISC). *IEEE Ant. Propag. Mag.* **40** (3), 27–34 (1998).
- [42] Tsai W.-T., Yue D.K.P., Computation of nonlinear free-surface flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **28**, 249–278 (1996).
- [43] Wang P., Yao Y., Tulin M.P., An efficient numerical wave tank for nonlinear water waves, based on the multi-subdomain approach with BEM, *Int. J. Num. Meth. Fluids* **20**, 1315–1336 (1995).

- [44] Xue M., Xü H., Liu Y., Yue D.K.P., Computations of fully nonlinear three-dimensional wave-wave and wave-body interactions. Part 1. Dynamics of steep three-dimensional waves, *J. Fluid Mech.* **438**, 11–39 (2001).
- [45] Ying L., Biros G., Zorin D., A kernel-independent adaptive fast multipole algorithm in two and three dimensions, *J. Comput. Phys.* **196**, 591–626 (2004).

Chapitre 2

Applications d'ondes de surface 3D

Sommaire

2.1	Onde solitaire sur topographie non uniforme	64
2.1.1	Introduction	64
2.1.2	L'onde incidente	65
2.1.3	Un récif à une bosse	66
2.1.3.a	Au point de déferlement	68
2.1.3.b	Obtention d'un jet plongeant	74
2.1.4	Une pente avec une double bosse	75
2.2	Focalisation spatiale dans un bassin	83
2.2.1	Introduction	83
2.2.2	Présentation du bassin	84
2.2.3	Evolution de la surface libre	86
2.2.4	Champ de vitesse	91
2.2.5	Champ d'accélération	97
2.3	Conclusion	97
	Bibliographie	102

2.1 Onde solitaire sur topographie non uniforme

2.1.1 Introduction

Les motivations de ce type d'études proviennent essentiellement du génie côtier. Il s'agit premièrement de mieux comprendre le phénomène de déferlement qui se produit localement dans la zone de surf. Ainsi, les modèles de plus grande échelle peuvent être mieux paramétrés, notamment pour les études de transport de sédiments. L'apparition naturelle de barres ou de bosses sur les fonds sableux, ou plus simplement une bathymétrie accidentée sont des cas d'intérêt où on peut isoler, dans une certaine mesure, l'effet du fond sur le déferlement. L'intérêt croissant pour la construction de récifs artificiels multi-fonctionnels vient augmenter les besoins [26]. En effet, ceux-ci ont souvent deux buts à atteindre : réduire les conséquences néfastes de l'érosion sur la ligne de côte et favoriser les loisirs, notamment la pratique du surf. Dans ce contexte, un récif immergé formant un foyer qui fait converger la houle incidente s'avère être un bon compromis entre les différents intérêts écologiques, économiques et socio-culturels. Des études sur le type de déferlement sont alors nécessaires pour déterminer les dimensions et la forme du récif. Notre modèle pourrait être un outil intéressant pour ces études, qui permet d'observer avec précision comment une vague se cambre en fonction de la topographie, puis se renverse sur ou après le récif. De plus, des expériences ont montré que les équations de la formulation potentielle utilisée par notre modèle sont raisonnables jusqu'à la formation d'un jet plongeant, et qu'elles sont précises dans leur domaine de validité [12, 16, 18]. Ainsi, une autre utilisation importante est la validation de théories approchées en eau peu profonde où des équations de type Boussinesq, par exemple, sont de plus en plus utilisées [30].

L'étude numérique du déferlement bathymétrique n'est pas encore accessible de façon systématique. Les difficultés de précision et d'efficacité qu'il soulève commencent seulement à être surmontées. En particulier, des codes de calcul qui résolvent les équations de Navier-Stokes sont désormais utilisées dans ce but avec l'aide de méthodes spécifiques pour suivre l'interface air-eau. Cependant, ces méthodes restent moins précises durant la phase de propagation et plus lourdes en temps de calcul que celle que nous développons. En fait, il semble qu'un bon compromis réside dans le couplage entre une méthode potentielle comme la nôtre pour la première phase du shoaling, et une de ces méthodes pour la fin du déferlement incluant la turbulence. Des initiatives qui vont dans cette direction existent et ont permis d'aller plus loin dans la compréhension du phénomène du déferlement [19, 23].

L'objectif ici est de poursuivre l'étude du phénomène de shoaling en trois dimensions [13, 20]. Guyenne et Grilli [20] ont effectué l'étude de la cinématique d'un déferlement plongeant pour un fond en pente ayant une modulation transversale qui focalise l'énergie et mène à un jet plongeant, plutôt qu'à un rouleau. Ils ont comparé leurs résultats avec les cas 2D correspondants. Il en ressort une grande similarité, en particulier dans le jet plongeant. Cependant, le

déferlement se produit un peu plus tard et un peu plus loin en 3D. Ils ont mis en évidence les effets tridimensionnels des champs de vitesse et d'accélération à la surface et à l'intérieur du domaine. Dans la continuité de ces travaux, nous cherchons ici à comparer plusieurs cas tridimensionnels, à l'instar de ce qui a été fait pour le déferlement en grande profondeur par Xue *et al.* [32].

2.1.2 L'onde incidente

Concernant le choix de la vague arrivant sur un haut-fond, nous considérons le cas d'une onde solitaire, comme dans [13, 20]. Ce choix repose sur les raisons suivantes. Tout d'abord, nous nous référons à l'article de revue de Peregrine pour le déferlement sur une plage [25]. Il discute le fait de considérer un train d'ondes périodiques qui arrivent en eau peu profonde et de regarder ses variations, notamment l'asymétrie crête-creux. À moins que la pente ne soit très petite (presque plate), deux vagues successives n'ont pas le temps d'interagir et se comportent plutôt comme des entités isolées (des ondes cnoïdales). Une solution de type onde solitaire représente assez bien ces entités et on peut souvent remarquer que les vagues de grande période qui arrivent sur les plages ressemblent à des ondes solitaires. C'est une approximation raisonnable d'un champ de vagues de grande longueur d'onde qui est réfracté près de la côte. En outre, Raichlen et Papanicolaou [27] ont observé de fortes similarités entre le déferlement d'une onde solitaire et celui des ondes cnoïdales. La seconde raison concerne la modélisation des tsunamis. Provoqués par une soudaine variation du niveau de l'eau à la suite d'un glissement de terrain ou d'un tremblement de terre, ils se propagent très rapidement sous la forme d'une ou plusieurs ondes solitaires. Ayant une très grande longueur d'onde, ils sont en eau peu profonde même en plein océan. Leur amplitude, indétectable dans l'océan où la longueur d'onde peut "s'étaler" entièrement, grandit fortement à l'approche des côtes, effet dû à la réfraction. Eventuellement, la vague a tant d'énergie qu'elle provoque des inondations. Sinon elle vient déferler sur les hauts-fonds avant d'atteindre le rivage. C'est exactement le type de phénomène que nous modélisons. Enfin, la dernière raison concerne le modèle lui-même. En effet, nous pourrions étudier la réfraction d'un train d'ondes. Seulement la formulation cesse d'être correcte lorsque la première vague a déferlé. Pour aller plus loin, il faudrait utiliser une plage absorbante pour simuler la dissipation d'énergie et ainsi éviter d'interrompre les calculs au premier déferlement. L'implémentation de ce type de dissipation artificielle existe dans le code 2D [14]. Il suffirait de l'étendre au cas 3D, mais ce n'est pas le sujet de notre étude puisque nous cherchons à observer justement le renversement de la vague en un jet plongeant.

Le choix d'une onde solitaire se trouve donc justifié par ces arguments. Pour la définir, nous utilisons la solution numériquement exacte de Tanaka [29]. Cette vague bidimensionnelle

est étendue au 3D en prenant le même profil selon toutes les coupes longitudinales. Elle se propage sans se déformer sur un fond uniforme. Les caractéristiques de la vague choisie dépendent de son amplitude que nous fixons à 0.6 (rappelons que l'unité de distance est h_{max} , la profondeur à "l'entrée" du domaine et l'unité de temps est $\sqrt{h_{max}/g}$. Il s'ensuit que l'unité de vitesse est $\sqrt{gh_{max}}$ et l'unité d'accélération est la constante de gravité g). L'objectif du travail étant la tridimensionnalité, nous ne faisons pas varier cette donnée. Cette amplitude permet d'obtenir le déferlement plongeant assez rapidement, et est suffisamment en-dessous de la valeur maximale stable (≈ 0.78). Sa vitesse est $c = 1.25$.

2.1.3 Un récif à une bosse

Nous poursuivons donc l'étude d'un fond de type foyer, qui focalise l'énergie en un point et mène à un jet déferlant [13]. Il est caractérisé par une pente dans le sens longitudinal et une modulation transversale en $\text{sech}^2(ky)$, où k caractérise la tridimensionnalité. La pente (au centre) sur laquelle l'onde solitaire arrive perpendiculairement, est un paramètre fixé ici à $1/15$. Le domaine est composé d'une partie plane au dessus de laquelle est initialisée l'onde solitaire de Tanaka. Cette portion est longue de 5.225, la crête de la vague étant située à $x = 5.7$. Compte tenu de la rapide décroissance de l'onde solitaire, l'erreur induite par la troncature à gauche du domaine est petite, et l'effet du début de la pente à droite de la crête est négligeable. La pente commence donc après cette portion plane jusqu'au bout du domaine de longueur totale 19. La profondeur minimale est donc 0.082 au centre ($y = 0$), et sur les bords, elle dépend de k et de la largeur du domaine. Pour $k = 0.25$ et un domaine de largeur 8, cette profondeur minimale est de 0.614 en $y = \pm 4$ et correspond à une pente $1/36$.

Lorsque k est petit, la topographie tend vers une configuration bidimensionnelle. La pente $1/15$ correspond à un déferlement plongeant [17]. Pour $k = 0.25$, l'énergie est focalisée au centre du domaine et un jet se forme. En regardant de plus grandes valeurs de k , la vague arrive sur un fond de même pente mais plus étroit. L'objectif est alors d'observer les différences entre plusieurs fonds ayant des valeurs différentes de k . Avec le fond tel qu'il est défini, nous observons l'effet de la réflexion sur le mur pour les plus grandes valeurs de k . Bien que la pente au centre soit la même, la pente aux bords est plus douce, ce qui retarde le déferlement. En effet, la vague n'est pas ralentie de façon uniforme sur toute la largeur du domaine. Elle garde une célérité plus grande, emmenée par les parties externes qui sont moins freinées par le fond. A cause de cela, ce fond n'est pas approprié pour effectuer une comparaison entre les différents cas tridimensionnels. Il est donc nécessaire d'adapter la topographie. Nous avons donc décidé d'agrandir le domaine. Le haut-fond considéré est donc maintenant composé d'un plateau horizontal sur lequel est disposé un récif qui offre une pente $1/15$ à l'onde incidente en $y = 0$, laquelle pente s'arrête abruptement vers $x = 19$ (Figure 2.1). La hauteur du récif est 0.84 pour une profondeur minimale 0.16. Le domaine est agrandi à 24. Notons que ce type

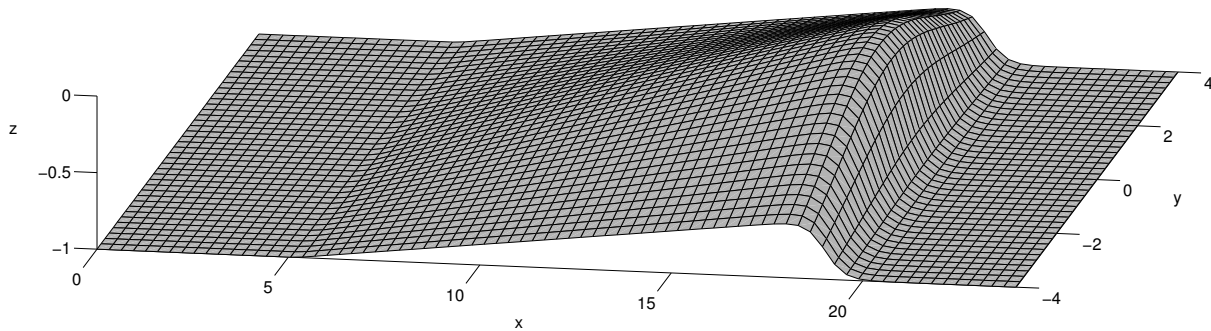


FIG. 2.1 – Topographie du fond. La pente en $y = 0$ est égale à $1/15$. La hauteur maximale du récif est 0.84. La modulation transversale est donnée par la fonction $\text{sech}^2(ky)$ où k est le coefficient que nous faisons varier. Il vaut 0.25 sur cette représentation.

de topographie a un degré de liberté de plus que celui d'avant. En effet, il faut déterminer la pente principale et le coefficient de la modulation transversale, mais il faut aussi fixer la hauteur du récif (ou la longueur de la pente). Au chapitre 1, nous avons donné deux exemples de shoaling d'une onde solitaire sur un tel fond pour deux récifs de hauteur différente. Ils conduisent à des types de déferlement différents. Ici, nous développons la comparaison entre plusieurs cas tridimensionnels avec une même hauteur de récif.

Afin de comparer les résultats entre eux, il est utile de définir deux instants caractéristiques. Le point de déferlement est communément utilisé, c'est le moment t_v où une première tangente verticale se produit sur le profil de la vague. Le second instant doit nous permettre d'effectuer des comparaisons lorsque le jet est formé. Nous ne pouvons pas compter sur l'instant défini par l'impact du jet sur la face avant de la vague, qui est inaccessible en général. De plus, la formulation potentielle atteint ses limites dans cette zone et les résultats ne sont plus assez précis. Cependant, nous pouvons définir un instant intermédiaire par analogie avec le point de déferlement. Il s'agit de l'instant où le dessous de la langue du jet a une première tangente horizontale. Cela correspond à un changement géométrique facile à détecter. Il est l'instant le plus remarquable d'un point de vue géométrique entre le point de déferlement et le point d'impact. Nous le notons t_h .

La phase initiale de shoaling de l'onde solitaire est obtenue avec une grille composée de 76 éléments dans le sens longitudinal pour toute la longueur du domaine. Dans le sens de la largeur, 40 éléments sont utilisés et 4 suffisent pour la verticale sur les faces latérales. Après que l'onde se soit propagée et avant que la vague ne soit trop cambrée, une technique de

remaillage est employée [13]. Elle consiste à redistribuer les points sur une grille régulière. Cela permet d'éviter que les nœuds ne convergent trop rapidement dans la région du jet ce qui induit des intégrales quasi-singulières, sources d'imprécision. Mais surtout, cela permet de poursuivre le calcul sur un domaine réduit et donc d'augmenter la résolution pour un coût identique (notons que nous pouvons faire cela car nous considérons une onde solitaire). En effet, le domaine est tronqué sur la gauche en $x = 8$ à $t = 6$, et le même nombre d'éléments est utilisé. La résolution initiale dans le sens longitudinal est donc réduite de 0.32 à 0.21.

2.1.3.a Au point de déferlement

Les surfaces libres au point de déferlement sont présentées à la Figure 2.2 pour une série de valeurs de k . Nous observons l'augmentation des effets tridimensionnels lorsque la bosse se rétrécit en largeur, i.e. pour des plus grandes valeurs de k . Nous remarquons également que le point de déferlement se situe de plus en plus loin, i.e. pour des x plus grands. Le premier cas est proche d'un cas bidimensionnel et la vague est déjà cambrée sur les bords. A l'opposé, $k = 0.625$ définit un fond qui est plat en $y = \pm 4$ et l'onde solitaire n'est quasiment pas déformée à cet endroit. Avant de discuter des différences quantitatives entre ces cas, les Figures 2.3 et 2.4 montrent les trois composantes des champs de vitesse et d'accélération pour le cas médian $k = 0.375$. Ces visualisations permettent de situer les régions caractéristiques d'un point de vue tridimensionnel à l'instar des observations faites sur le déferlement 2D [25]. Nous présentons ces champs d'un angle de vue orienté face à la vague afin de mettre en valeur ces régions. Commençons par la vitesse. Les fortes valeurs positives de la composante longitudinale font une forme triangulaire dont la base est située sur le dessus de la vague cambrée et qui pointe vers le creux. La composante transversale montre deux zones symétriques par rapport à l'axe $y = 0$ de forme arrondie. Les valeurs positives sont du côté des y négatifs, donc le vecteur vitesse dans ces zones pointe vers le centre du domaine. Cela exprime la focalisation tridimensionnelle du phénomène qui est la plus forte sur la partie interne de ces régions arrondies. La forme caractéristique des fortes valeurs positives de la composante verticale est une sorte de \cup situé sur la face avant de la vague. Au lieu d'avoir une forme ovale, nous constatons en effet qu'au niveau où le jet se forme, les valeurs sont moins grandes. En fait, nous observons que la zone triangulaire de la composante longitudinale est assez séparée des deux autres. Cela est significatif de la direction privilégiée du vecteur vitesse dans le jet qui est projeté vers l'avant. Les deux autres zones expriment le fait que les particules d'eau situées sur la face avant de la vague vont venir alimenter le jet plongeant en convergeant vers le centre du domaine.

L'accélération est une donnée plus imprécise, calculée à partir des dérivées secondes du potentiel des vitesses, lequel est l'inconnue du problème résolu. Elle est donc plus sensible aux erreurs numériques qui commencent à apparaître lors de la formation des jets plongeants. Cela se voit déjà au point de déferlement comme nous pouvons le constater sur la Figure

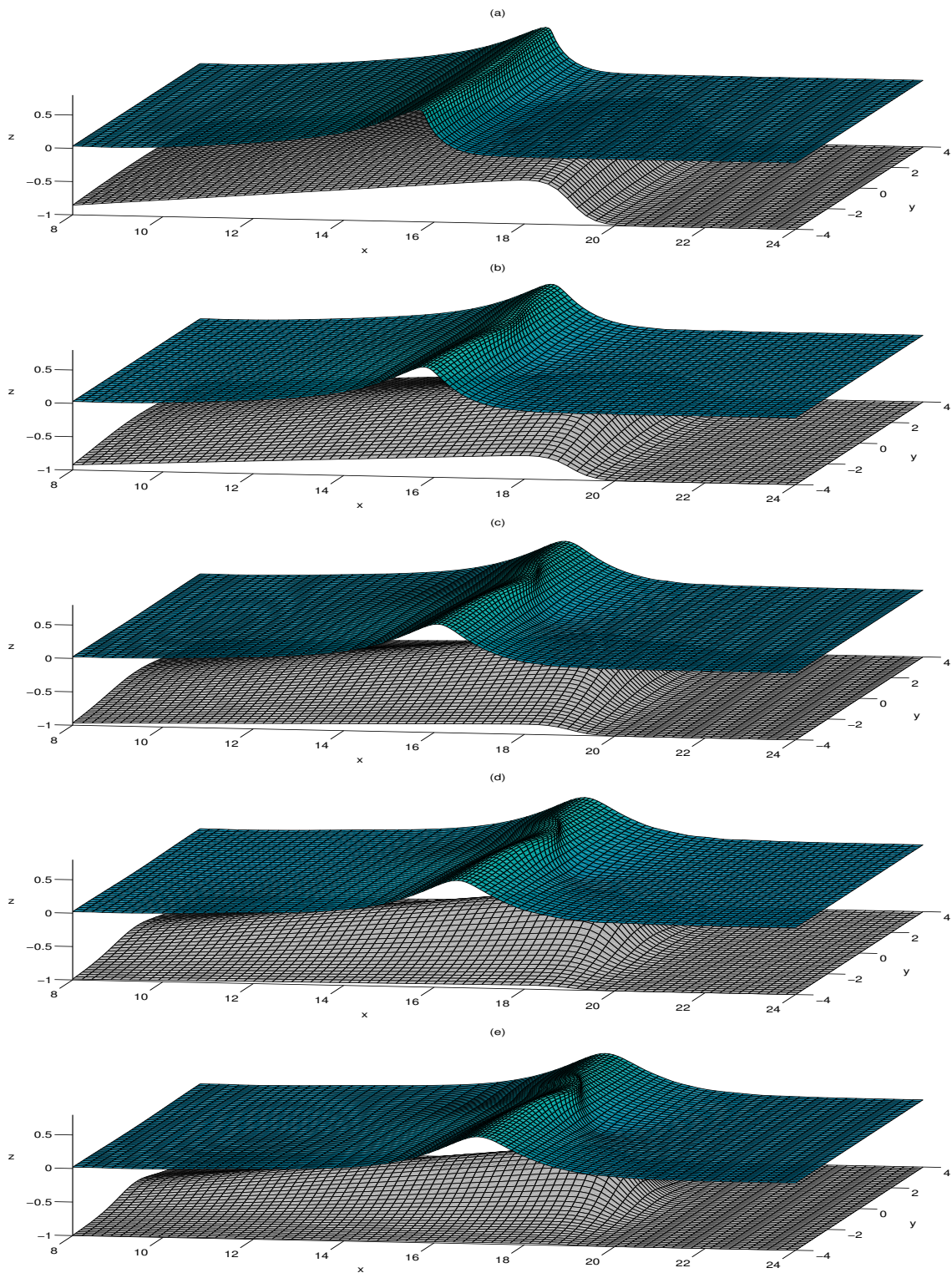


FIG. 2.2 – Surface libre au point de déferlement t_v , pour différentes valeurs de k : (a) $k = 0.125$, (b) $k = 0.250$, (c) $k = 0.375$, (d) $k = 0.500$, (e) $k = 0.625$. Le point de déferlement est défini comme étant l'instant où une première tangente verticale est obtenue.

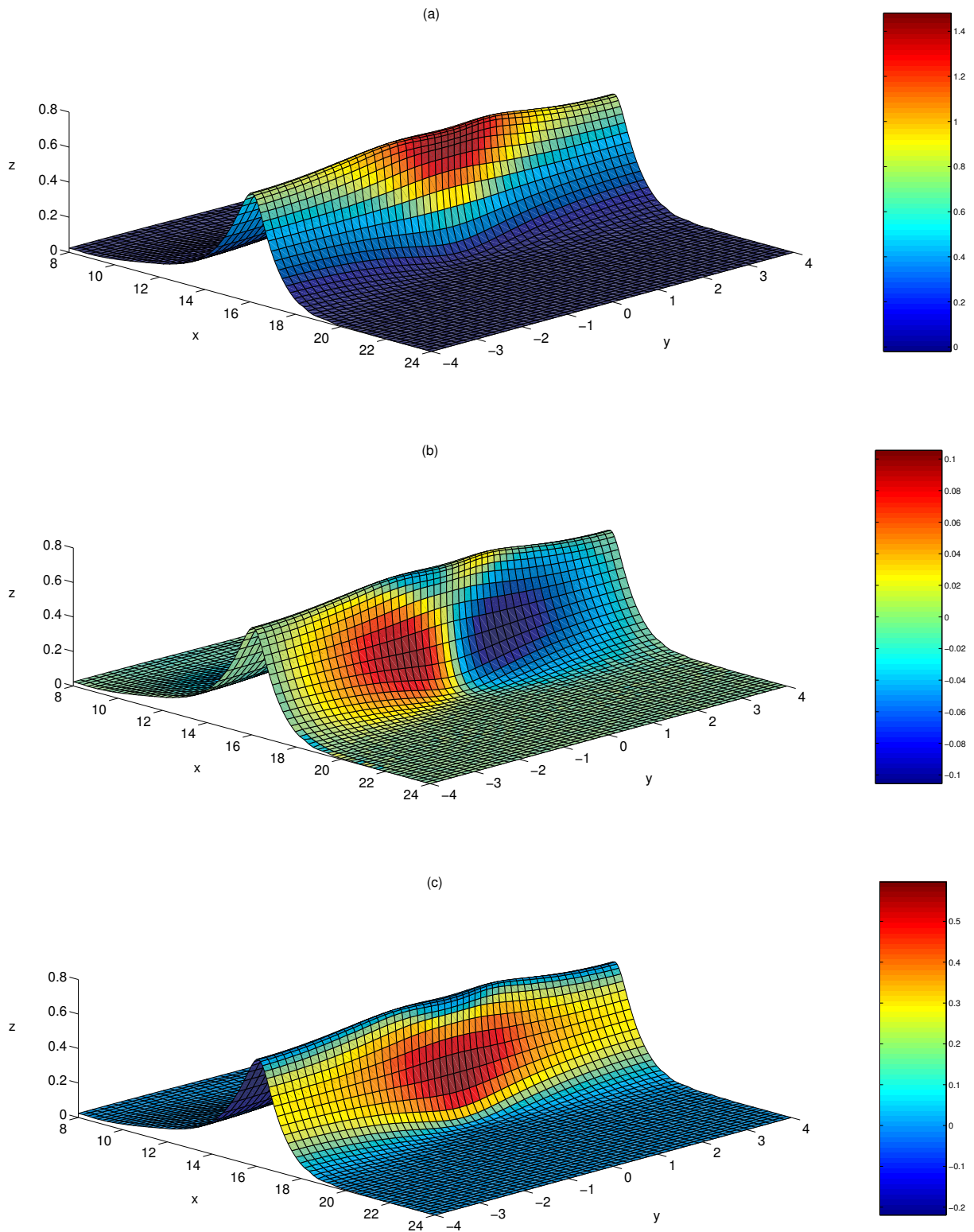


FIG. 2.3 – Champ de vitesse à t_v pour $k = 0.375$: (a) composante longitudinale, (b) composante transversale, (c) composante verticale.

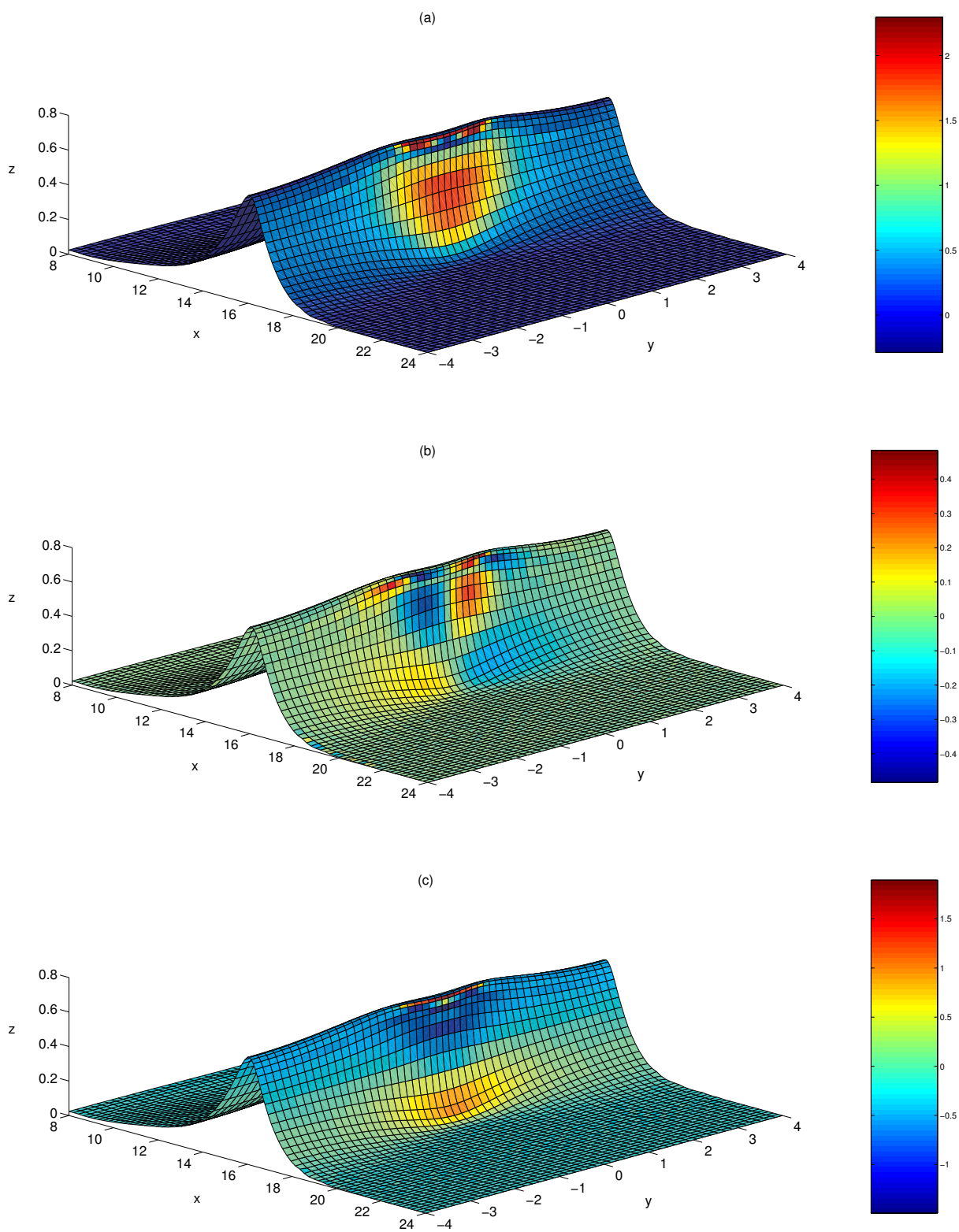


FIG. 2.4 – Champ d'accélération à t_v pour $k = 0.375$: (a) composante longitudinale, (b) composante transversale, (c) composante verticale.

k	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625
t_v	7.673	7.935	8.267	8.658	9.051
V_{max}	1.468	1.514	1.486	1.512	1.492
$(V_x)_{max}$	1.456	1.508	1.481	1.508	1.480
$(V_y)_{max}$	0.032	0.074	0.106	0.126	0.143
$(V_z)_{max}$	0.573	0.584	0.596	0.618	0.600
V_{min}	2.10^{-5}	2.10^{-5}	5.10^{-5}	2.10^{-4}	6.10^{-4}
$(V_x)_{min}$	-0.016	-0.018	-0.020	-0.022	-0.023
$(V_y)_{min}$	-0.032	-0.074	-0.106	-0.126	-0.143
$(V_z)_{min}$	-0.189	-0.206	-0.219	-0.224	-0.231
η_{max}	0.686	0.705	0.727	0.741	0.753
η_{min}	-0.004	-0.003	-0.002	-0.004	-0.010

TAB. 2.1 – Valeurs maximales et minimales sur la surface libre du module de la vitesse V , et ses composantes V_x , V_y , V_z et de l'élévation de la surface η , au temps t_v pour différentes valeurs de k .

2.4. La région où la tangente verticale se produit est le lieu de fortes valeurs anormales pour les trois composantes de l'accélération. Par conséquent, nous ne pourrions pas utiliser cette donnée quantitative. Nous nous restreignons donc à discuter ici les formes caractéristiques en faisant abstraction de ces valeurs erronées. La composante longitudinale présente une zone de fortes valeurs (supérieures à la gravité) sur la face avant de la vague. Elle est de forme ovale, quoiqu'un peu aplatie au niveau du jet naissant. Les composantes transversale et verticale sont assez corrélées, comme pour la vitesse. Elles font apparaître des zones différentes entre le haut de la face avant de la vague et le bas qui correspond au creux. Sur le haut, la composante transversale montre que le vecteur accélération pointe vers l'extérieur, alors que dans le creux il pointe vers le centre du domaine. La composante verticale exprime le fait, avec la composante longitudinale, que le vecteur est orienté en direction de l'intérieur de la courbure formée par la vague cambrée. C'est la zone importante de fortes accélérations repérée dans les premières études numériques 2D sur le déferlement [25]. En trois dimensions, nous pouvons donc ajouter que ces accélérations sont dirigées vers l'extérieur dans le haut de cette région et vers l'axe de symétrie dans le bas.

La Table 2.1 présente les résultats obtenus pour les valeurs extrémales du champ de vitesse et de l'élévation en fonction de 5 valeurs du coefficient k . La première ligne du tableau indique l'instant t_v . Nous observons que le déferlement se produit plus tard pour un fond plus étroit. Ceci confirme bien l'explication donnée précédemment, à savoir que la vague est moins ralentie lorsque le fond pentu est étroit. Le temps t_v augmente donc de façon monotone avec k et nous avons observé visuellement que le lieu de la première tangente verticale s'éloignait également. La vitesse maximale est sensiblement la même pour toutes les valeurs de k et elle est supérieure à la vitesse de l'onde incidente $c = 1.25$ d'environ 20%. Cette valeur maximale suit la même dépendance que la composante longitudinale de la vitesse, qui est bien plus grande que les deux autres composantes $(V_y)_{max}$ et $(V_z)_{max}$. En effet, la région de vitesse maximale est celle du jet qui se forme et porte les particules vers l'avant. L'augmentation régulière des valeurs extrémales de la composante transversale avec k sont caractéristiques des effets tridimensionnels qui augmentent et focalisent de plus en plus l'énergie vers le centre du domaine. Globalement, les valeurs extrémales des composantes transversale et verticale de la vitesse s'amplifient avec la tridimensionnalité. Pourtant, la valeur maximale reste stable comme nous l'avons remarqué. Cela s'explique par le fait que les valeurs maximales ne sont pas obtenues dans la même zone (Figure 2.3). Donc, à cet instant, la vitesse du jet semble être relativement indépendante de k . En revanche, l'effet de focalisation s'accroît sur la face avant de la vague. Notons enfin que le module minimum de la vitesse est quasiment nul, ce qui n'est pas surprenant puisque nous considérons le déferlement d'une onde solitaire qui est un phénomène localisé en espace. Cette remarque montre que cela continue à être vrai pendant le déferlement. Les dernières données de cette Table sont les valeurs maximales et minimales de l'élévation de la surface libre. La valeur minimale reste essentiellement constante, alors que

la hauteur maximale augmente de façon monotone avec le paramètre k . Nous voyons que la focalisation augmente sensiblement l'amplitude de la vague.

2.1.3.b Obtention d'un jet plongeant

En faisant varier la tridimensionnalité, nous n'avons pas pu poursuivre tous les cas jusqu'au second instant caractéristique t_h . D'un côté, le cas $k = 0.125$ est proche d'un cas bidimensionnel. La convergence des nœuds vers la zone du jet est faible. De plus, la vague se cambre fortement sur les bords. A cause de ces deux raisons, le calcul est stoppé un peu après le point de déferlement. De l'autre côté, les cas $k = 0.500$ et $k = 0.625$ correspondent à une bosse transversale si étroite que la forme du jet devient différente. En effet, la vague semble projeter un jet moins pointu, qui ne se dirige pas uniquement vers l'axe $y = 0$. Cela se matérialise par une convergence des nœuds de la face avant de la vague sur les côtés du jet. Cela peut être mis en relation avec l'observation que les vecteurs accélérations sur le haut de la face avant sont dirigés vers l'extérieur, ce qui est déjà visible au point de déferlement (Figure 2.4(b)). Après cet instant, le phénomène s'accroît, et cela d'autant plus que la bosse transversale est étroite.

Seuls deux de ces cas ont donc pu être poursuivis jusqu'au temps t_h . Pour les autres cas et malgré des tentatives en utilisant plus de points de discrétisation, nous nous sommes confrontés à des problèmes de maillage. En effet, la dynamique propre du phénomène peut faire converger les nœuds de façon inadéquate. C'est du moins ce qu'il semble se passer dans ces cas. Les Figures 2.5 et 2.6 présentent les deux solutions respectivement au temps t_h et à un instant proche de la fin du calcul. Nous remarquons que le second cas forme un jet plus étroit, mais les deux sont très similaires. Les composantes du champ de vitesse pour $k = 0.375$ sont montrées à la Figure 2.7. Que sont devenues les régions mises en évidence au point de déferlement ? La composante longitudinale a gardé sa forme triangulaire qui s'est même affirmée. Le jet fait partie de cette zone et les valeurs les plus fortes se trouvent sur la partie inférieure du jet. Les deux régions arrondies relevées dans la composante transversale sont toujours présentes mais elles se concentrent plus vers le creux de la vague. Le fait important est qu'il se passe autre chose au niveau du jet. En effet, de fortes valeurs sous la langue du jet montrent que les vecteurs vitesse s'écartent de l'axe $y = 0$. Le jet a tendance à s'étaler et non à s'affiner. Enfin, le \cup identifié pour la composante verticale est ici nettement marqué. Les branches du \cup correspondent à l'élévation maximale de la vague de chaque côté du jet. Le jet est lui le lieu de fortes valeurs négatives. En résumé, les particules sur la face avant continuent de converger vers le jet pour l'alimenter en suivant ce que nous observons au point de déferlement. En revanche, le jet est maintenant bien formé et la crête ne s'élève plus. Le jet se projette vers l'avant et vers le bas, en prenant la forme d'une langue plutôt qu'un jet pointu.

Les valeurs maximales et minimales du champ de vitesse et de l'élévation pour $k = 0.250$

et $k = 0.375$ sont relevées à l'instant $t = t_v$ et présentées dans la Table 2.2. La première remarque concerne le temps qui s'est écoulé entre les deux instants. Le second cas a mis plus longtemps à atteindre le point de déferlement, mais le processus du déferlement se produit un petit peu plus rapidement que le premier cas. En effet, nous constatons que $t_h(0.375) - t_v(0.375) < t_h(0.250) - t_v(0.250)$. De plus, la valeur maximale de la composante longitudinale du champ de vitesse, qui était plus faible pour le cas 0.375, est désormais supérieure. Il s'ensuit que le module maximal est aussi supérieur. Nous avons vu dans la Table 2.1 que cette valeur maximale était globalement constante pour toutes les valeurs de k . Il est donc difficile de conclure maintenant que la vitesse augmente avec la tridimensionnalité avec ces deux valeurs. Cependant, cela va dans le sens que le processus se déroule plus rapidement dans le cas plus tridimensionnel. La composante transversale a un peu augmenté en intensité dans les deux cas, ces valeurs maximale et minimale étant toujours situées dans les régions symétriques et arrondies. Concernant la composante verticale, nous remarquons que $(V_z)_{max}$ est un peu plus grande et surtout que $(V_z)_{min}$ a doublé dans les deux cas. Alors que la valeur minimale était obtenue à l'arrière de la vague pour $t = t_v$ et correspondait essentiellement à la propagation de l'onde, celle-ci se produit maintenant dans le jet qui a commencé à plonger. La hauteur maximale est encore plus grande pour $k = 0.375$ mais sa valeur a moins augmenté que pour $k = 0.250$. Notons que l'élévation maximale n'est pas obtenue en $y = 0$, mais sur les côtés du jet formant des sortes d'épaules sur la crête. Pour illustrer cela, la Figure 2.8 montre la solution à trois instants différents pour $k = 0.375$. Nous voyons bien se former ces deux épaules. La représentation en couleurs correspond à la composante transversale et permet de souligner le comportement du vecteur vitesse dans le jet. Il se dirige vers les bords ce qui signifie que le jet s'étale.

2.1.4 Une pente avec une double bosse

En marge des observations plus systématiques que nous avons menées sur le premier exemple, nous avons essayé d'utiliser le modèle pour des fonds un peu plus complexes. Pour cela, nous avons défini une topographie caractérisée par la présence de deux bosses dans le sens transversal. Ainsi, cela reste une variante du cas connu. Chaque bosse considérée seule correspond exactement au cas d'une bosse étudié par Grilli *et al.* [13], et sur lequel nous avons basé l'étude de la section précédente. Nous voulons observer l'effet provoqué par la présence d'une seconde bosse de taille similaire. D'un côté, on s'attend à ce que la force augmente lorsque les jets se rejoignent, les deux jets n'en formant plus qu'un. D'un autre côté, l'influence de l'un sur l'autre peut être une interférence qui diminue son intensité. Outre l'intérêt de s'attaquer à la compréhension de topographies de plus en plus complexes que l'on trouve dans la nature, ce type de double bosse a été choisi pour la construction d'un récif artificiel à Narrowneck en Australie [3]. Durant la période d'observation du site construit, il a été relevé que la partie

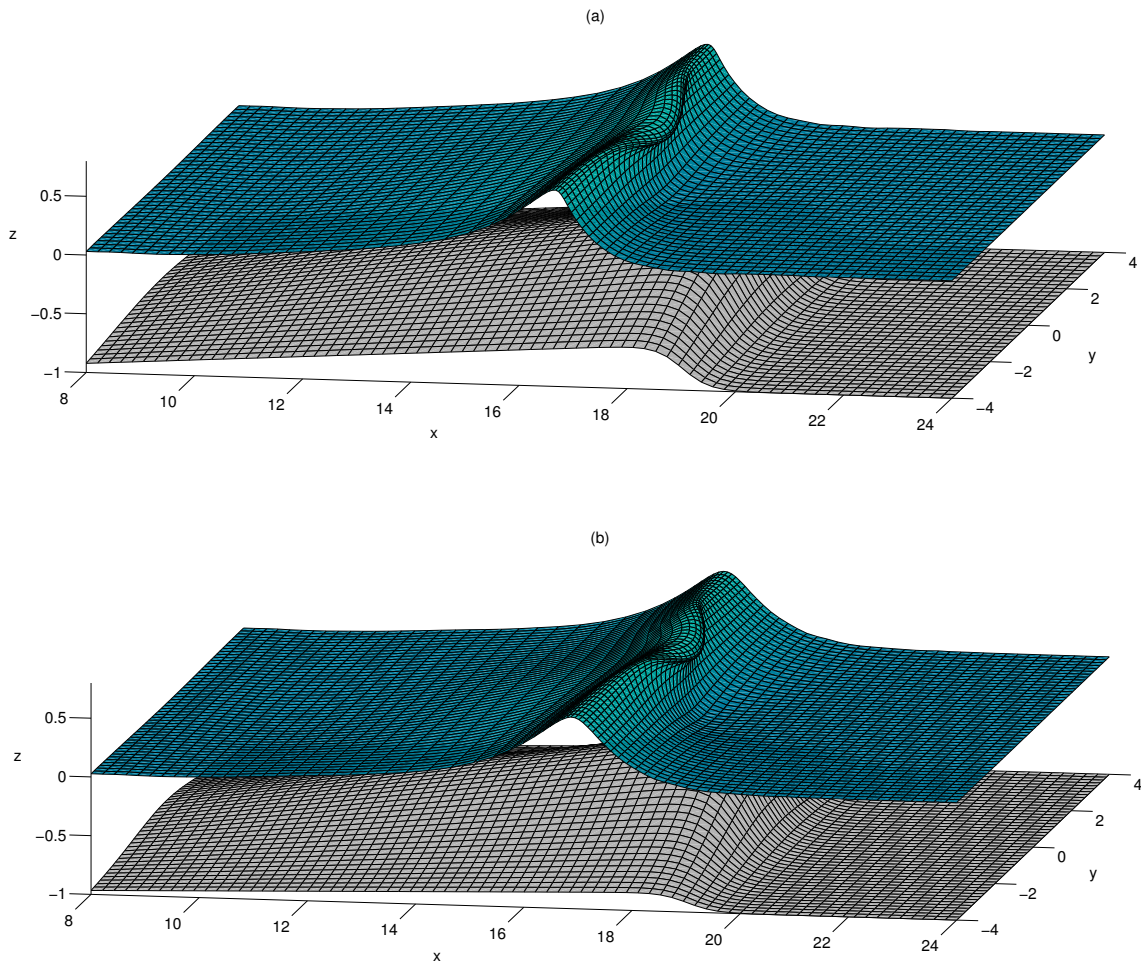


FIG. 2.5 – Surface libre à t_h , pour différentes valeurs de k : (a) $k = 0.250$, (b) $k = 0.375$. L'instant t_h est défini comme étant l'instant où une première tangente horizontale est obtenue sous le jet.

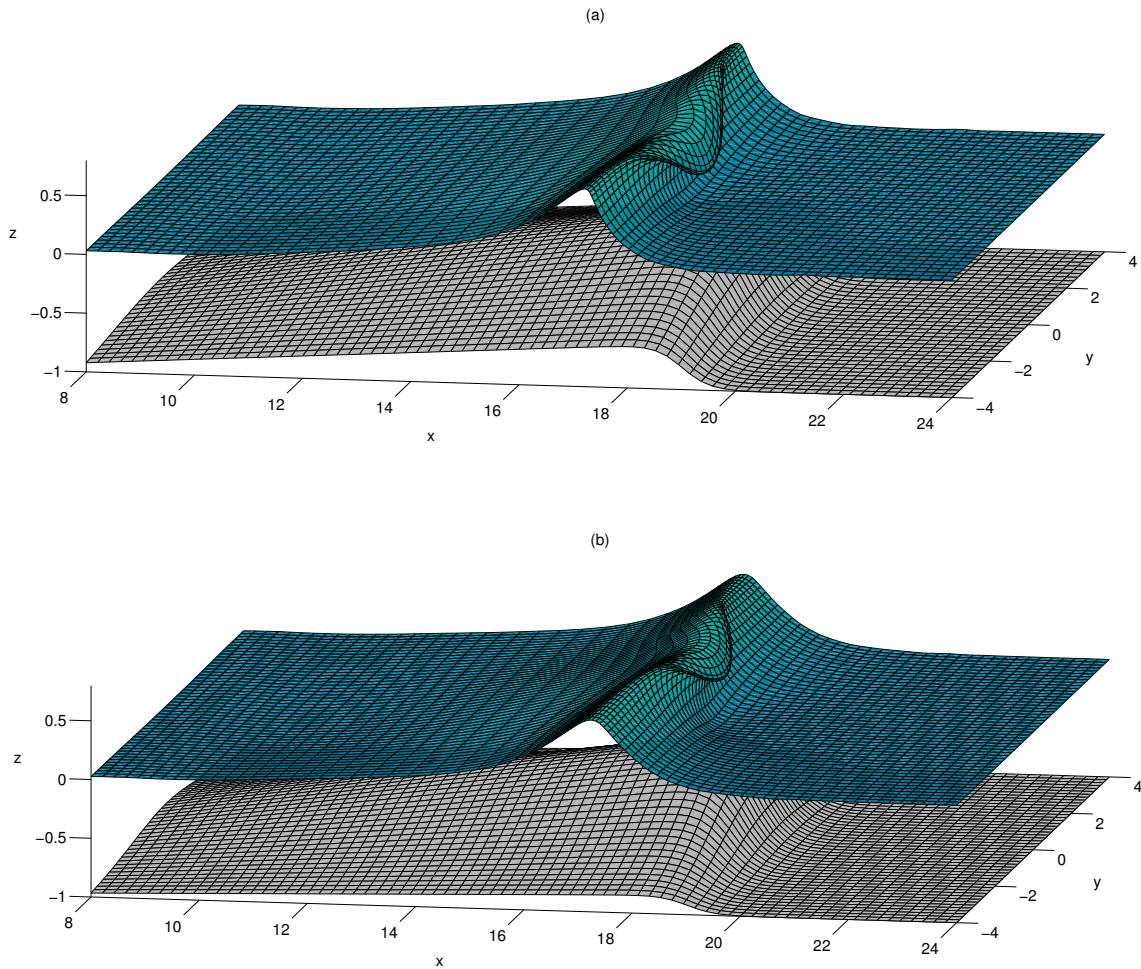


FIG. 2.6 – Surface libre à la fin du calcul, pour différentes valeurs de k : (a) $k = 0.250$ à $t = 9.043$, (b) $k = 0.375$ à $t = 9.209$. Le processus est suivi un peu plus longtemps dans le premier cas.

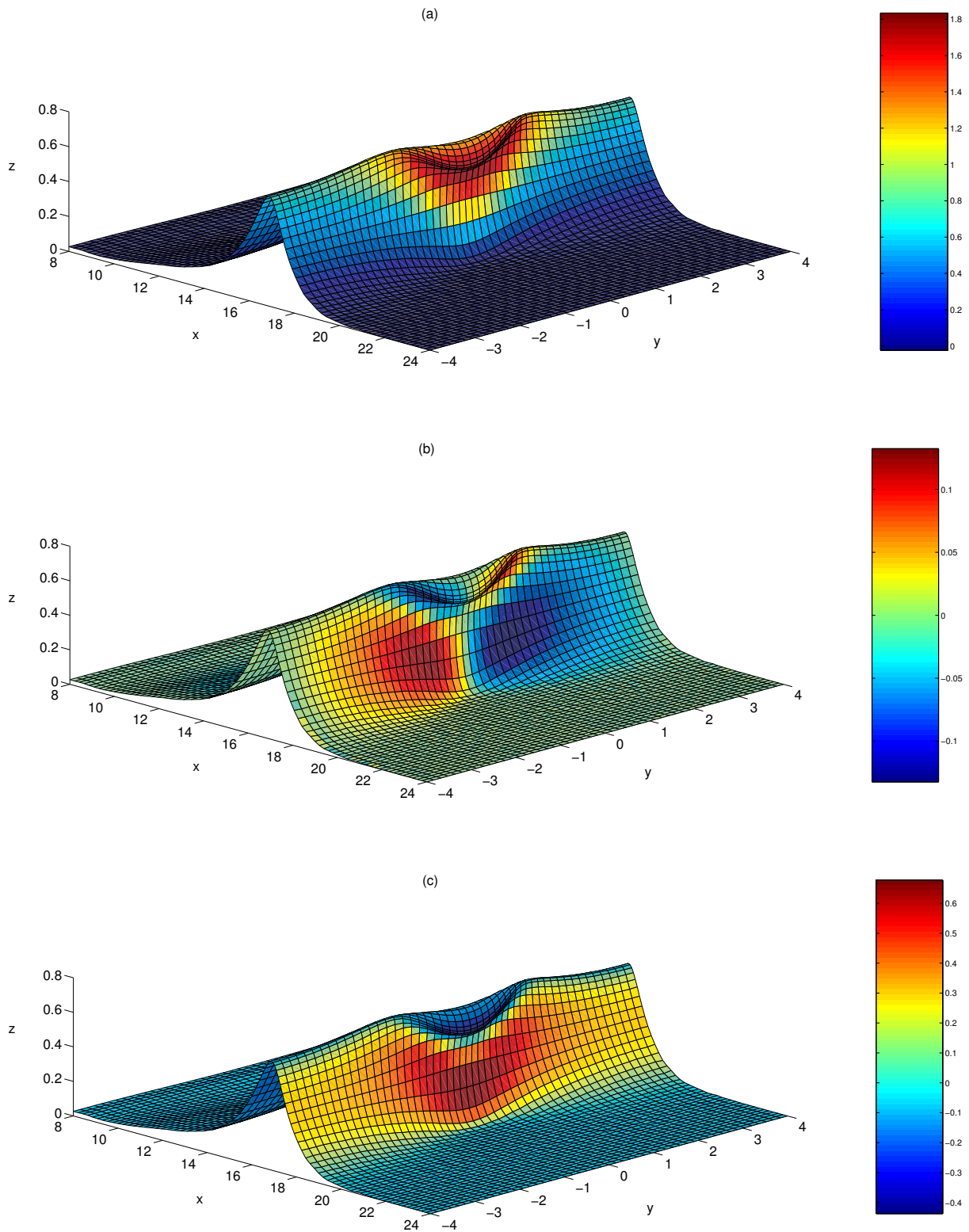


FIG. 2.7 – Champ de vitesse à t_h pour $k = 0.375$: (a) composante longitudinale, (b) composante transversale, (c) composante verticale.

k	0.250	0.375
t_h	8.617	8.920
V_{max}	1.816	1.886
$(V_x)_{max}$	1.783	1.834
$(V_y)_{max}$	0.095	0.132
$(V_z)_{max}$	0.665	0.678
V_{min}	7.10^{-5}	9.10^{-5}
$(V_x)_{min}$	-0.020	-0.022
$(V_y)_{min}$	-0.095	-0.132
$(V_z)_{min}$	-0.450	-0.438
η_{max}	0.712	0.728
η_{min}	-0.004	-0.003

TAB. 2.2 – Valeurs maximales et minimales sur la surface libre du module de la vitesse V , et ses composantes V_x , V_y , V_z et de l'élévation de la surface η , au temps t_h pour différentes valeurs de k .

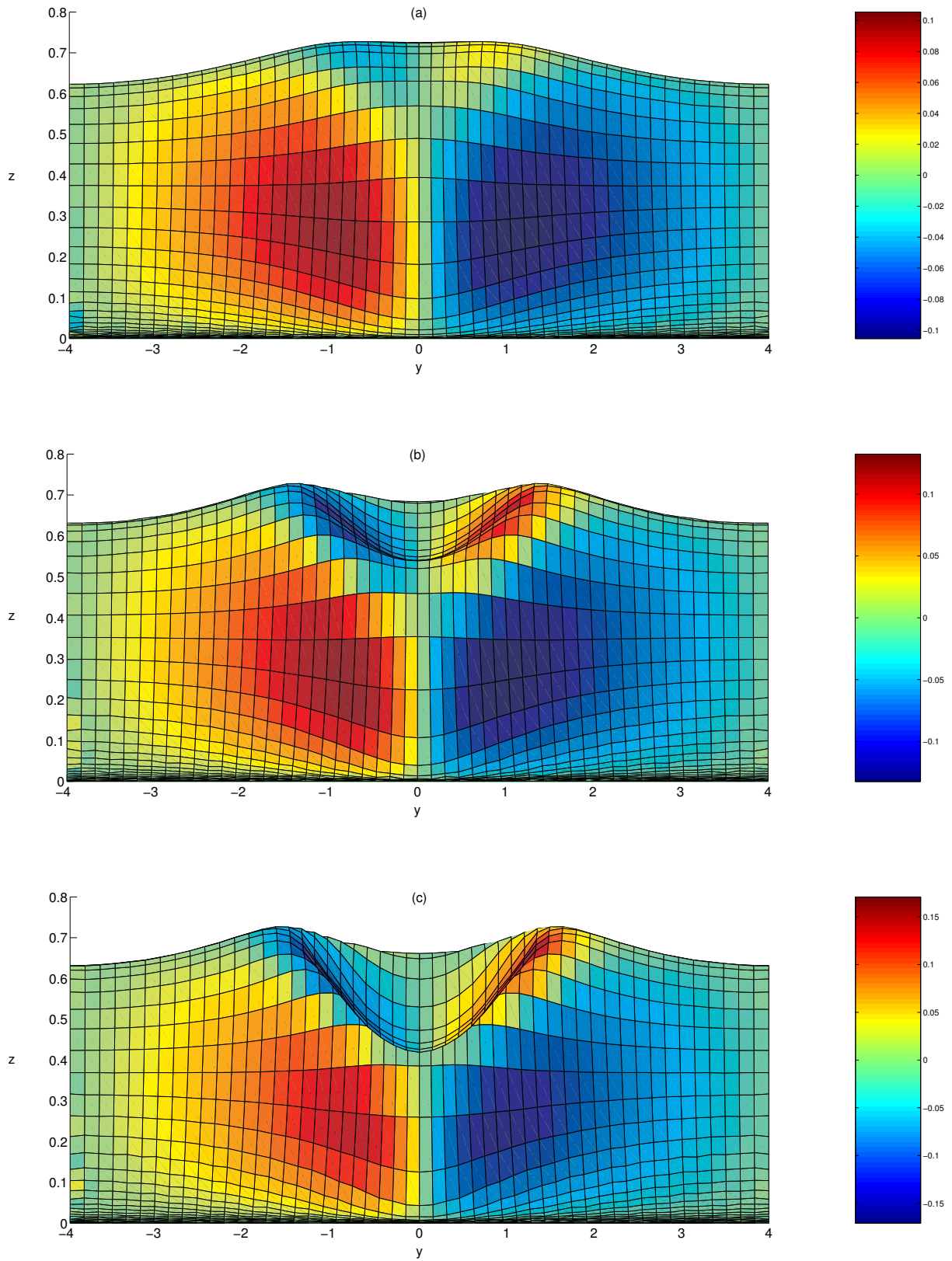


FIG. 2.8 – Surface libre vue de devant pour $k = 0.375$: (a) à $t_v = 8.267$, (b) à $t_h = 8.920$, (c) à $t = 9.209$. Les couleurs correspondent à la composante transversale du champ de vitesse.

centrale donnait lieu à des interférences dues à la réfraction de la houle sur les deux foyers. Il est clair que selon l'écart entre les deux bosses, le déferlement commence au niveau des deux crêtes et se rejoint dans cette zone et la turbulence s'en trouve amplifiée. L'angle d'incidence de la houle est un facteur déterminant dans ce phénomène donnant ou non une position privilégiée à l'une des deux bosses. Ici nous nous intéressons simplement à la rencontre des deux jets, donc à des bosses suffisamment proches par rapport à la dynamique de déferlement. De plus, nous regardons le cas où une vague isolée arrive droit sur les deux bosses, ne privilégiant aucune des deux bosses.

L'idée est de pouvoir à terme utiliser le modèle, dans la limite de ses hypothèses, pour caractériser et quantifier le déferlement provoqué par des hauts-fonds naturels ou non. En regardant des cas qui se rapprochent de plus en plus de la réalité, on s'attend à devoir faire face à différents obstacles "numériques". Ce type d'applications encore académiques mais complexes a pour rôle de se préparer à des cas réels. Dans la même idée, nous avons considéré le cas non symétrique de deux bosses de taille distincte. Nous voyons alors apparaître d'autres difficultés. En particulier, la méthode itérative s'avère être moins bien conditionnée dans ce cas. Environ deux fois plus d'itérations sont requises, et cela est indépendant de l'utilisation de la méthode des multipôles rapides. Quoiqu'il en soit, les méthodes itératives restent bien plus rapides qu'une méthode directe de résolution des systèmes linéaires.

Les solutions sont montrées à la Figure 2.9 au temps maximal. Les calculs n'ont pas pu être poursuivis aussi loin qu'on espérait. En effet, nous constatons que les vagues sont à peu près au point de déferlement. La focalisation s'est effectivement produite au niveau de chaque bosse et relativement à leur taille. Ainsi, le cas symétrique montre l'apparition de deux jets alors que la petite bosse dans le cas asymétrique n'a pas beaucoup cambré la vague. Nous pouvons observer que la focalisation au dessus de chaque bosse n'est pas symétrique par rapport à celle-ci, contrairement aux cas de la section précédente. Les deux jets naissants de la Figure 2.9(a) prennent une direction légèrement convergente l'un vers l'autre. De plus, il semble peu probable que les deux jets se rejoignent pour n'en former qu'un seul comme nous aurions pu l'imaginer. En effet, la partie centrale est emmenée par les deux jets et se cambre plus rapidement que prévu. Nous observons quasiment un segment singulier qui joint les deux jets. Cela a pour effet d'empêcher le calcul de se poursuivre. Dans la discussion de la section précédente, nous avons souligné le fait que la dynamique du jet formé était de s'écarter de l'axe de focalisation. Par conséquent, la présence des deux bosses implique une convergence des deux jets dans un premier temps. Mais lorsqu'ils seront formés, le sens du champ de vitesse dans les jets va s'inverser. Dans la région centrale, les effets transverses vont se compenser en quelque sorte et la vitesse longitudinale va augmenter. Donc, cette région va rattraper les deux jets, et l'ensemble va déferler un peu comme un rouleau bidimensionnel. Le cas asymétrique (Figure 2.9(b)) se présente plus comme les cas à une bosse. Cependant, il s'avère être plus

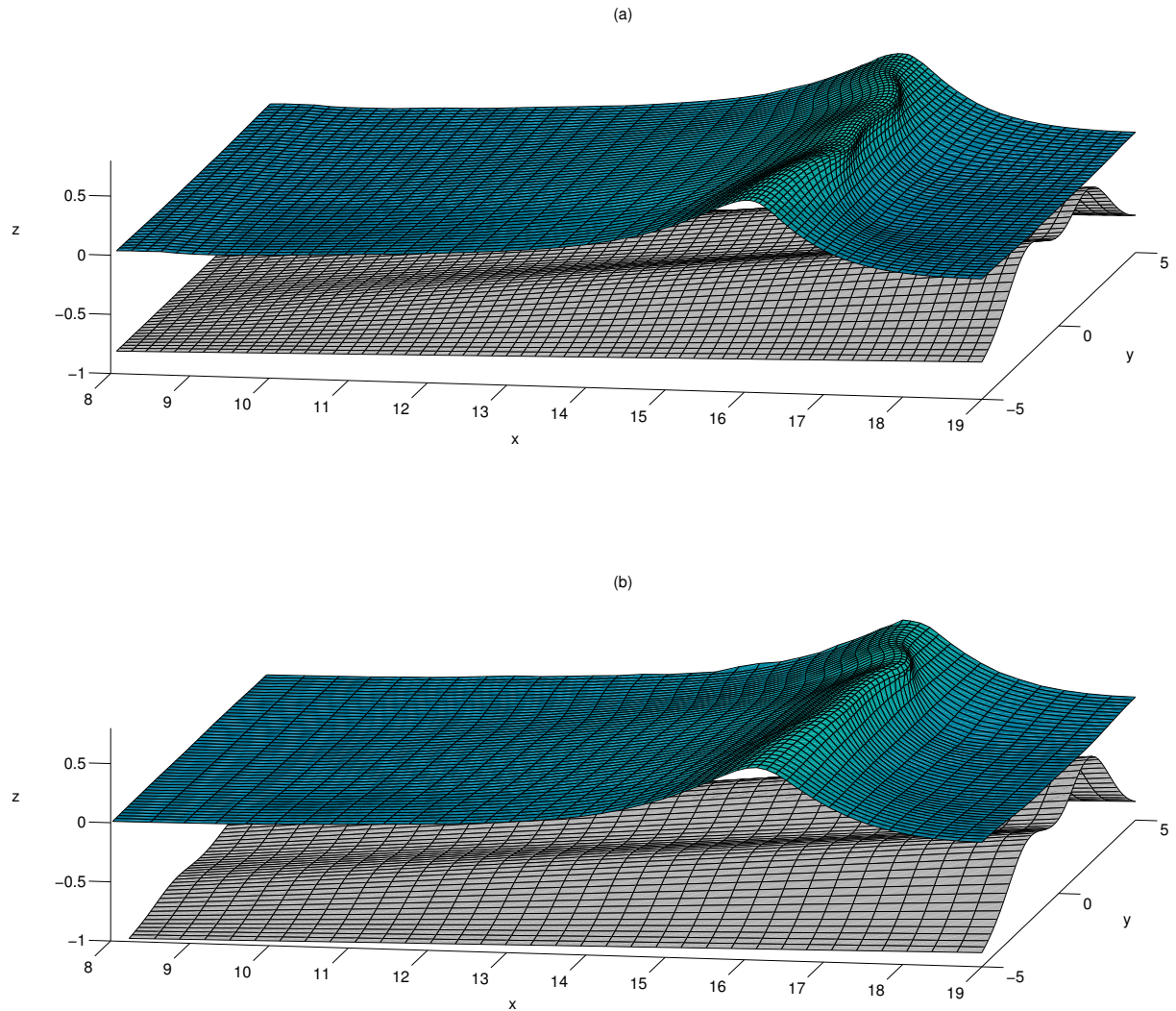


FIG. 2.9 – Shoaling d'une onde solitaire sur un fond en pente avec deux bosses dans la direction transverse : (a) deux bosses symétriques, (b) deux bosses non symétriques.

compliqué d'un point de vue numérique. En plus du fait que les systèmes linéaires à résoudre sont moins bien conditionnés, nous pouvons remarquer la présence d'erreurs numériques sur l'élévation de la surface libre. En effet, des petites oscillations sont visibles sur le bord $y = 5$ au niveau de la crête et derrière l'onde solitaire. Cependant, ce qui empêche de poursuivre les calculs demeure le manque de convergence des nœuds dans la zone qui nécessite le plus de précision. Par conséquent, le travail préliminaire pour aller plus loin dans des cas plus complexes concerne la façon dont le maillage se déforme selon le suivi lagrangien utilisé dans la résolution du problème. Si c'est un atout sans aucun doute pour certaines situations bien identifiées, il faut trouver des moyens pour qu'il y ait suffisamment de points dans toutes les zones de forts gradients qui requièrent plus de précision.

2.2 Focalisation spatiale dans un bassin

2.2.1 Introduction

Le contexte général est l'étude du phénomène rare mais important que sont les vagues scélérates. En effet, malgré leur faible probabilité, ces vagues peuvent causer de gros dommages et les communautés offshore et navales ont besoin de prendre en compte ce type d'évènements pour leurs constructions. Outre leur faible probabilité, les vagues scélérates sont caractérisées par le fait qu'elles sont très localisées à la fois en temps et en espace. Elles se produisent à cause d'une focalisation d'énergie dont les raisons possibles de leur apparition sont multiples. La focalisation spatiale est un des mécanismes communément proposés pour expliquer l'apparition des vagues scélérates. Plus généralement, le point de vue linéaire suggère que différentes composantes d'ondes peuvent avoir des phases et directions telles qu'elles se superposent en une petite région de l'espace et du temps. En fait, la focalisation d'énergie peut se produire pour d'autres raisons. Elle peut résulter de la topographie du fond en eau peu profonde comme à la section précédente ou d'interactions onde-courant [31]. En eau profonde et en l'absence de courant, un mécanisme plus récemment proposé pour expliquer l'occurrence des vagues scélérates est l'instabilité modulationnelle (instabilité de Benjamin-Feir). Enfin, d'autres interactions onde-onde ou des interactions avec les conditions atmosphériques sont susceptibles de jouer un rôle dans ce phénomène. Ces mécanismes sont résumés dans le récent article de revue sur le sujet par Kharif et Pelinovsky [22].

Si la plupart des travaux sur les vagues scélérates se placent dans le contexte de grande profondeur, il a été remarqué que le phénomène peut se produire quelle que soit la profondeur [22]. Dans la présente étude, nous nous plaçons en profondeur finie, mais en spécifiant un fond plat pour se concentrer sur un seul mécanisme de focalisation. En outre, ces vagues extrêmes ont été observées comme étant essentiellement tridimensionnelles, caractérisées par une forme de fronts incurvés, menant éventuellement au déferlement dont la cinématique diffère des cas

2D [24, 28, 21]. La modélisation numérique de vagues scélérates 3D a été principalement axée sur l'étude des instabilités d'un groupe d'ondes. En particulier, avec l'amélioration des outils informatiques et numériques, le phénomène a pu être étudié à l'aide de formulations qui considèrent toute la nonlinéarité du problème [1, 8].

La focalisation spatiale est le mécanisme naturel pour générer des vagues extrêmes en laboratoire. C'est un contexte contrôlé qui représente la superposition de plusieurs houles différentes. La première possibilité est la focalisation fréquentielle qui se produit lorsque des ondes plus rapides rattrapent des ondes générées plus tôt. C'est par ce biais que des études bidimensionnelles ont été conduites pour produire une superposition locale en espace et en temps [7, 11]. La focalisation directionnelle est uniquement un phénomène tridimensionnel. Pour la créer, un batteur serpent peut être utilisé pour générer plusieurs houles qui se croisent en un point du bassin. She *et al.* [28] ont effectué de telles expériences en laboratoire et étudié la cinématique à l'aide de la technique PIV. Brandini et Grilli [6, 4] ont adapté le code d'éléments aux frontières de [13] en y insérant le batteur serpent, et ont entamé une étude numérique sur la focalisation spatiale.

La présente étude se place dans la continuité des travaux de Grilli et Brandini. Grâce à l'amélioration du modèle présentée au chapitre 1, nous présentons des résultats pour un domaine plus grand et une discrétisation plus fine de sorte à obtenir une vague extrême.

2.2.2 Présentation du bassin

Un bassin rectangulaire à fond plat est défini. Il est limité par des parois fixes et des parois mobiles. A une extrémité du bassin, un batteur serpent a été implémenté [6]. C'est un batteur rotatif dont l'axe de rotation est situé au fond du bassin. Il est composé de plusieurs tranches verticales qui peuvent bouger indépendamment. A l'autre extrémité du bassin, l'utilisation d'un piston absorbant permet de limiter la réflexion [9, 14].

Ce type de batteur est utilisé en bassin physique pour générer un champ de vagues tridimensionnel. Avant les études sur la focalisation, plus récentes, l'enjeu était de produire une houle oblique. Pour cela, une théorie linéaire a été développée pour connaître la loi de batteur requise [10]. Cette technique a été adaptée pour obtenir la focalisation de plusieurs houles en un point donné du bassin. En regardant les solutions analytiques au second ordre, Brandini et Grilli ont montré que la vague focalisée était plus haute et plus cambrée que prévue par la théorie linéaire [5, 4]. Ils ont alors entrepris l'étude de la focalisation spatiale à l'aide de modèles numériques qui prennent en compte toute la nonlinéarité du problème. Après avoir inséré un batteur serpent dans le code d'éléments aux frontières de Grilli *et al.* [13], ils ont

présenté deux cas. Le premier est un cas contenant peu de composantes de petite amplitude qui leur a permis de mettre en évidence l'apparition de fronts incurvés. Ceux-ci se produisent périodiquement tant que la réflexion ne perturbe pas la solution, et la plus haute vague est obtenue près du point de focalisation prescrit. Le second cas confirme la possibilité d'obtenir une vague déferlante lorsqu'une forte amplitude d'oscillation du batteur est choisie.

A l'instar des applications de la section précédente, toutes les variables sont adimensionnées, les longueurs par la profondeur du bassin h_{max} , et les temps par $\sqrt{h_{max}/g}$. Nous considérons la superposition de 8 composantes ayant des caractéristiques identiques mais de directions comprises entre -45 et 45 degrés. Cette forte directionnalité accentue les effets tridimensionnels et augmente l'amplitude de la vague focalisée. Cela permet de produire la focalisation plus rapidement et à une distance plus proche du batteur. Il est tout à fait possible de définir une fréquence et une amplitude différente pour chaque composante. En particulier, la fréquence pourrait être ajustée en fonction de la direction pour ajouter de la focalisation fréquentielle. Toutes les composantes sont dans cette application déterminées par une fréquence 1.2816 qui donne une longueur d'onde de 3.725 d'après la relation de dispersion et une vitesse linéaire $c = 0.7599$. L'amplitude commune à toutes les composantes individuelles est fixée à 0.04 impliquant une raideur de 0.0675. Enfin, la focalisation est spécifiée à une distance 7.5 du batteur.

Une fois définies les caractéristiques du champ de vagues, les dimensions du bassin sont adaptées. La longueur est choisie à 10 et la largeur à 20. La discrétisation utilise 50 éléments dans le sens longitudinal, ce qui correspond à un peu moins de 20 nœuds par longueur d'onde. La largeur du domaine est divisée en 70 éléments, et la profondeur en 4. Notons que toutes les frontières sont discrétisées. En effet, la version du code bénéficiant de l'accélération par l'Algorithme des Multipôles Rapides n'a pas encore été adaptée pour prendre en compte la symétrie de la solution, ainsi que la méthode des images pour le fond, comme l'ont fait Brandini et Grilli [6]. L'association des différentes techniques devraient nous apporter un complément d'efficacité qui nous permettra d'effectuer une étude systématique en fonction des paramètres. Pour la simulation présentée, le temps de calcul est d'environ 4min 30s par pas de temps avec un processeur Intel Pentium 4, pour plus de 300 pas de temps.

Pour illustration, la Figure 2.10 présente le type de mouvement effectué par le batteur. A l'autre bout du domaine, un piston absorbant est utilisé. Bien qu'il ne soit pas adapté à ce type de houle tridimensionnelle, il permet de retarder le moment où la réflexion n'est plus négligeable. L'implémentation d'un piston ayant le même type de mouvement que le batteur serpernt permettrait d'améliorer cette fonctionnalité.

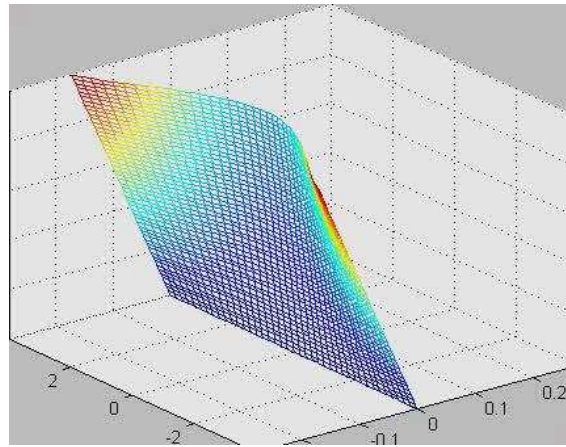


FIG. 2.10 – Illustration du mouvement du batteur serpent implémenté à une extrémité du bassin.

2.2.3 Evolution de la surface libre

Les Figures 2.11 et 2.12 présentent l'évolution du champ de vagues au cours du temps. Notons que seule la surface libre est représentée. Le batteur se met en route progressivement afin de réduire les singularités qui se produisent à l'interface entre la surface libre et la paroi mobile [6]. Nous observons la surface plate se mettre en mouvement près du bassin et générer une première vague focalisée d'amplitude modérée (Figure 2.11). Puis, l'amplitude de cette vague diminue avant de disparaître à l'échelle de la visualisation (Figure 2.12). Le mécanisme étudié produit effectivement une focalisation locale en temps et en espace. Derrière cette première vague, nous voyons se former une seconde vague qui résulte clairement de la superposition des houles de directions différentes (Figure 2.12(b),(c)). L'amplitude des oscillations du batteur augmente et la somme des composantes donnent naissance alors à une vague extrême au centre du bassin (Figure 2.12(d),(e)). Celle-ci se cambre avant d'atteindre le point de focalisation maximal prévu en $x = 7.5$. Au temps final de cette simulation, la crête est située en $x = 4.4$ (Figure 2.12(f)). Derrière, nous observons que le phénomène commençait à se répéter avec l'apparition d'une nouvelle ligne de crêtes courbe convergeant vers le centre du bassin.

Afin de mieux décrire la forme de la vague extrême obtenue, elle est présentée à la Figure 2.13 sous trois angles différents au temps final. Le premier angle nous permet de voir le creux circulaire situé juste devant la vague. Derrière elle, un creux plus grand encore s'est formé la séparant de la ligne de crête courbe qui la suit. Ce creux a la forme d'un croissant. La vue de côté montre la forte asymétrie entre les faces avant et arrière de la vague. Son amplitude est significativement plus grande que les ondes qui la suivent et n'ont pas encore convergé. Elle démontre bien que la vague est sur le point de déferler. Le troisième point de vue fait apparaître la forme de front incurvé. Dans cet exemple où la directionnalité est importante,

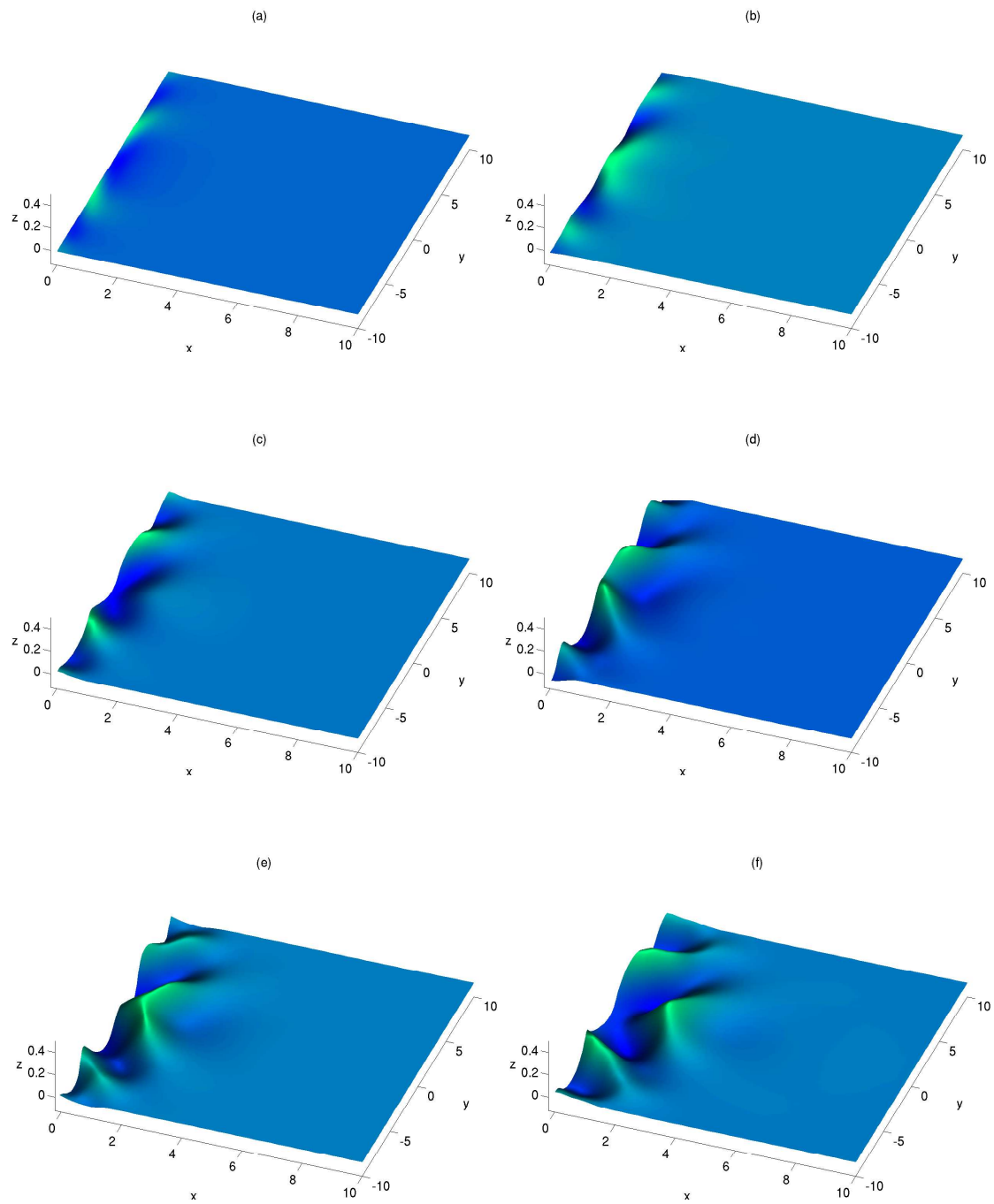


FIG. 2.11 – Evolution de la surface libre : (a) à $t = 2.143$, (b) à $t = 4.243$, (c) à $t = 6.231$, (d) à $t = 8.025$, (e) à $t = 9.465$, (f) à $t = 10.974$.

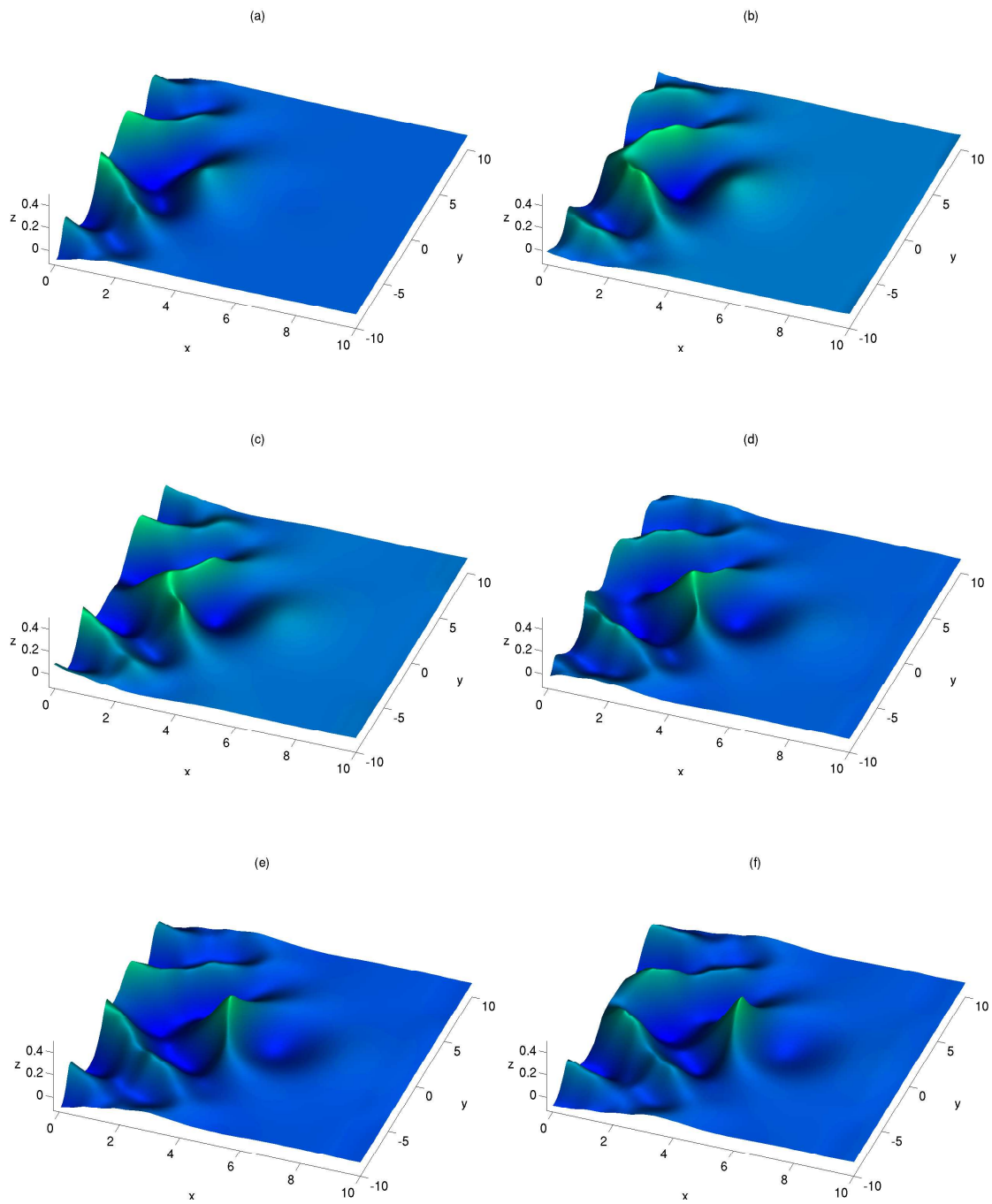


FIG. 2.12 – Suite de l'évolution de la surface libre : (a) à $t = 12.639$, (b) à $t = 14.077$, (c) à $t = 15.431$, (d) à $t = 16.640$, (e) à $t = 17.650$, (f) à $t = 18.308$.

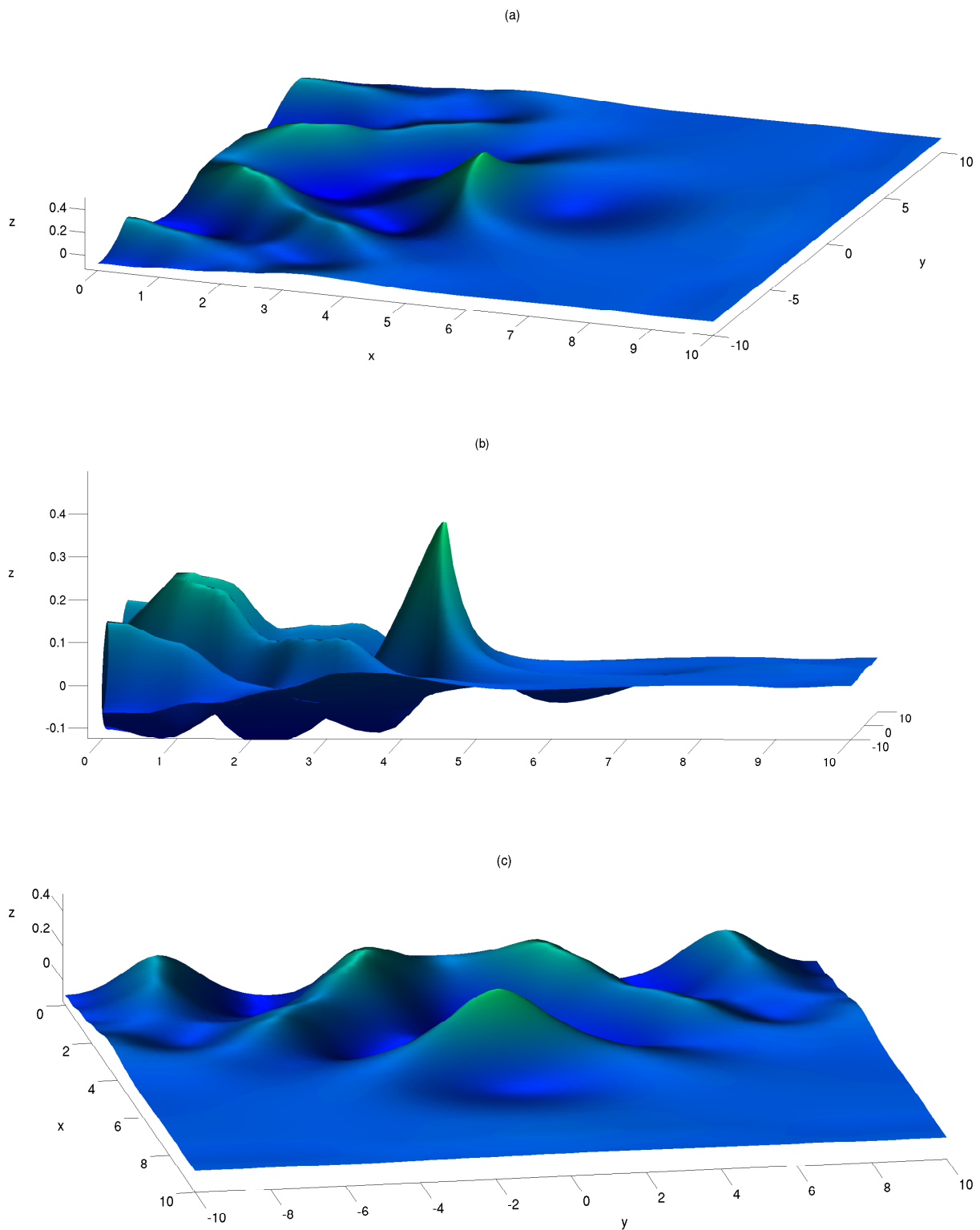


FIG. 2.13 – Elévation de la surface à $t = 18.308$ pour trois angles de vue différents : (a) de biais, (b) de côté, (c) de devant.

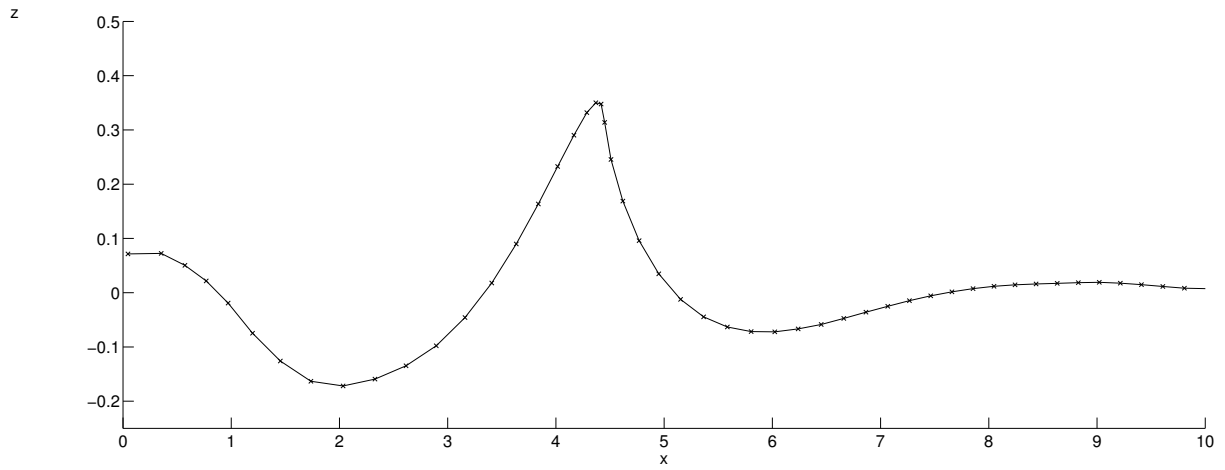


FIG. 2.14 – Coupe verticale de la surface en $y = 0$ à $t = 18.308$.

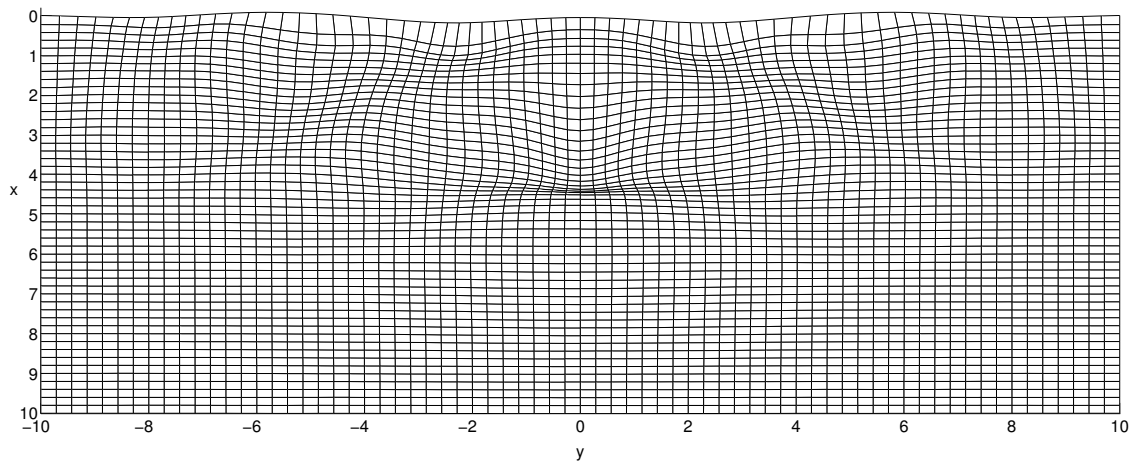


FIG. 2.15 – Maillage de la solution vue de dessus à $t = 18.308$.

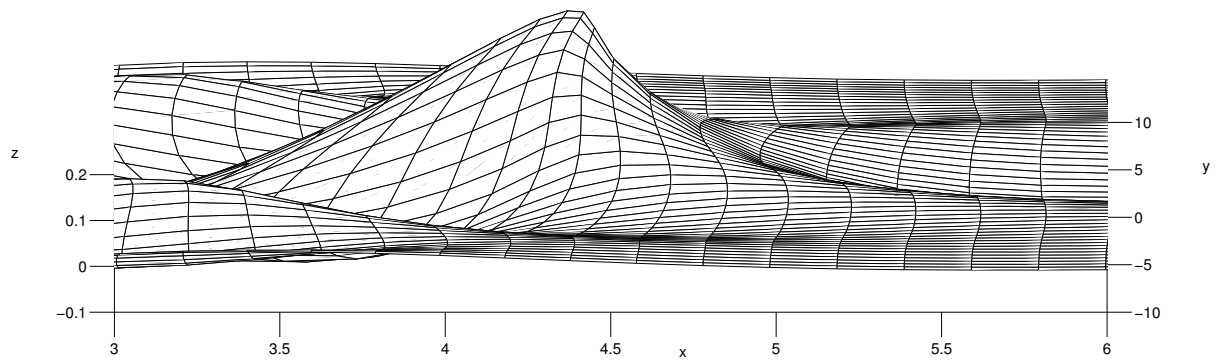


FIG. 2.16 – Maillage de la solution vue de côté et zoomée à $t = 18.308$.

le front n'est pas large et la tridimensionnalité est mise en valeur (sans oublier que les axes ne sont pas à l'échelle). L'observation de cette vague extrême présente les caractéristiques géométriques observées pour les vagues scélérates. En particulier, une coupe de la solution en $y = 0$ permet de faire ressortir la forme caractéristique repérée dans les spectres observés ainsi que dans les études 2D, notamment celles concernant l'instabilité modulationnelle d'un groupe d'ondes [22]. L'amplitude de la crête est sensiblement plus grande que l'amplitude des creux, le creux de derrière étant plus profond (Figure 2.14). L'amplitude est mesurée à 0.35, et les creux de derrière et devant sont mesurés respectivement à 0.17 et 0.07. Il est remarquable de noter que nous obtenons cette forme 2D caractéristique alors que le mécanisme en jeu dans notre application est exclusivement lié à la tridimensionnalité. Cela suggère donc une certaine indépendance de la forme d'une telle vague extrême par rapport aux causes qui l'ont générée.

En fait, la vague obtenue devrait ensuite déferler. Cependant, il n'y a pas assez de nœuds pour pouvoir continuer les calculs. Contrairement aux simulations précédentes où les nœuds convergeaient naturellement dans la zone du jet, le mouvement d'aller et retour du batteur et le rapide changement dans la cambrure de la vague compliquent encore la question du maillage. C'est la raison pour laquelle la simulation s'arrête à cet instant, alors que la formulation autorise le renversement de la vague. Pour illustrer ce mouvement des nœuds du maillage, la Figure 2.15 montre la solution de dessus. Nous voyons que les nœuds s'éloignent peu à peu du batteur (qui est situé en haut de la figure). Afin d'éviter cela, il faudrait par exemple remailler régulièrement sur une grille uniforme comme cela a été fait pour le code 2D [15]. En plus de ce flux, les déformations tridimensionnelles dues à la focalisation sont bien visibles. La Figure 2.16 présente un zoom de cette solution au niveau de la vague focalisée. Nous voyons bien que l'effet de convergence des nœuds est présent mais qu'il est réduit par rapport aux déferlements bathymétriques présentés précédemment. D'un côté, le batteur empêche ceux situés à l'arrière de la vague d'être emmenés par elle. De l'autre côté, les nœuds sur la face avant ne sont pas suffisamment attirés vers la crête. Il est donc nécessaire de travailler sur ce problème pour espérer obtenir le renversement. Une alternative serait d'augmenter encore le nombre de points de discrétisation de sorte qu'il y ait assez de nœuds au niveau de la vague focalisée. L'utilisation de la symétrie et de la méthode des images permettrait de compenser le surcoût que cela entraînerait.

2.2.4 Champ de vitesse

Nous présentons dans ce paragraphe le champ de vitesse sur la surface pour une séquence de quatre instants de l'évolution (Figures 2.17 à 2.20). Chaque Figure montre les composantes longitudinale, transversale et verticale selon le code de couleurs dont l'échelle correspondante est sur la droite. La première figure présente la solution à un instant où la focalisation de

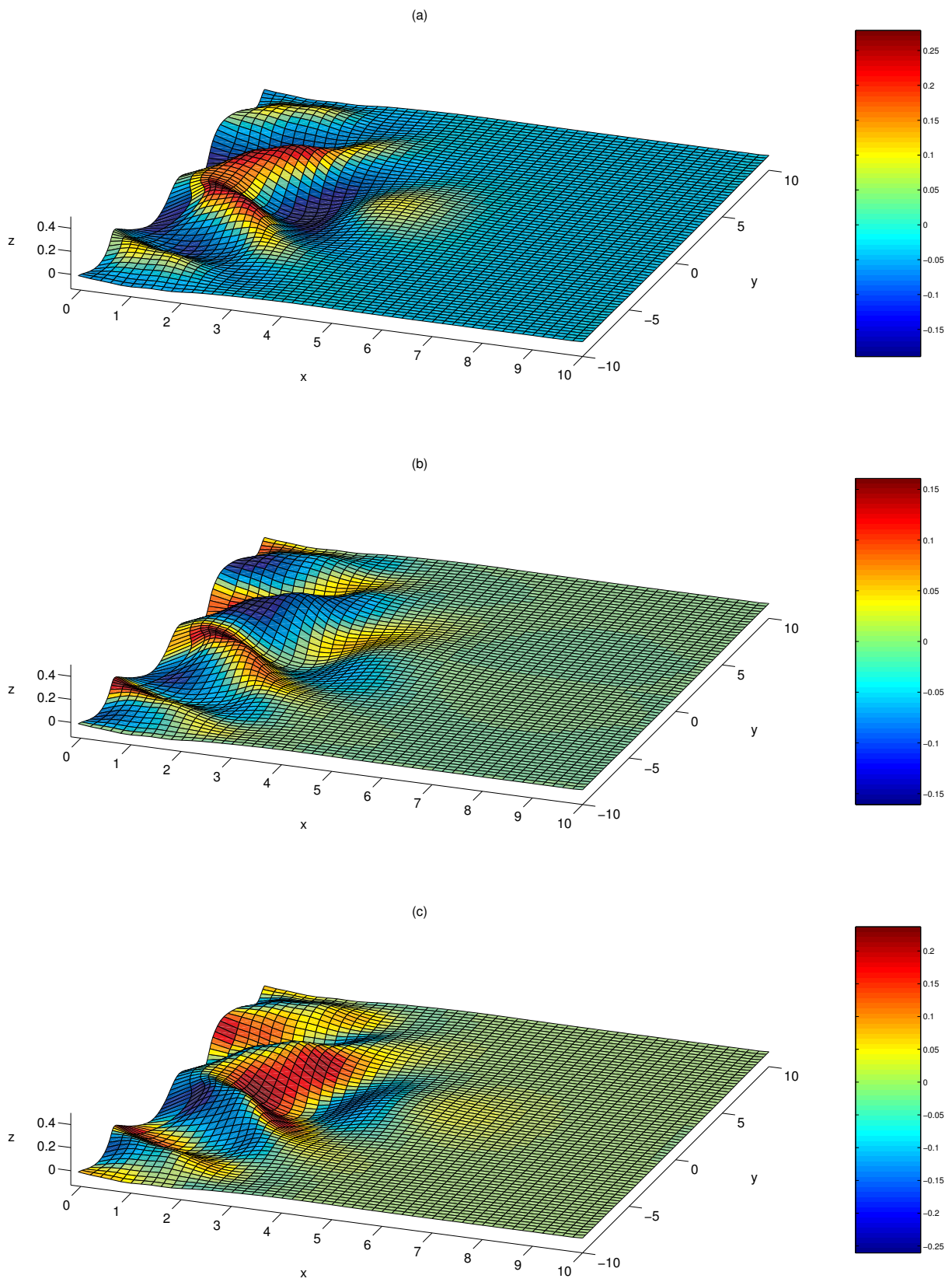
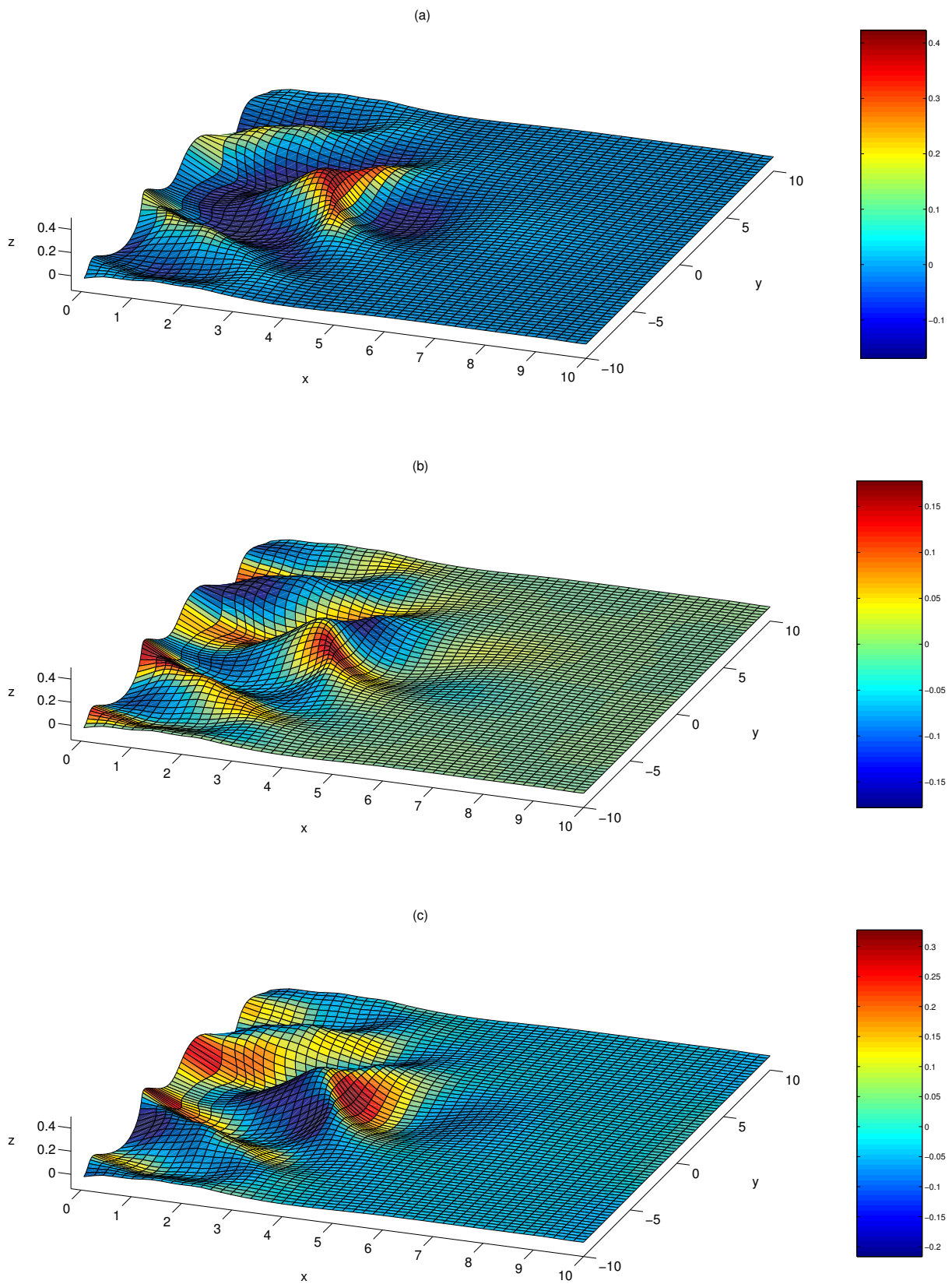


FIG. 2.17 – Champ de vitesse à $t = 14.077$: (a) composante longitudinale, (b) composante transversale, (c) composante verticale.



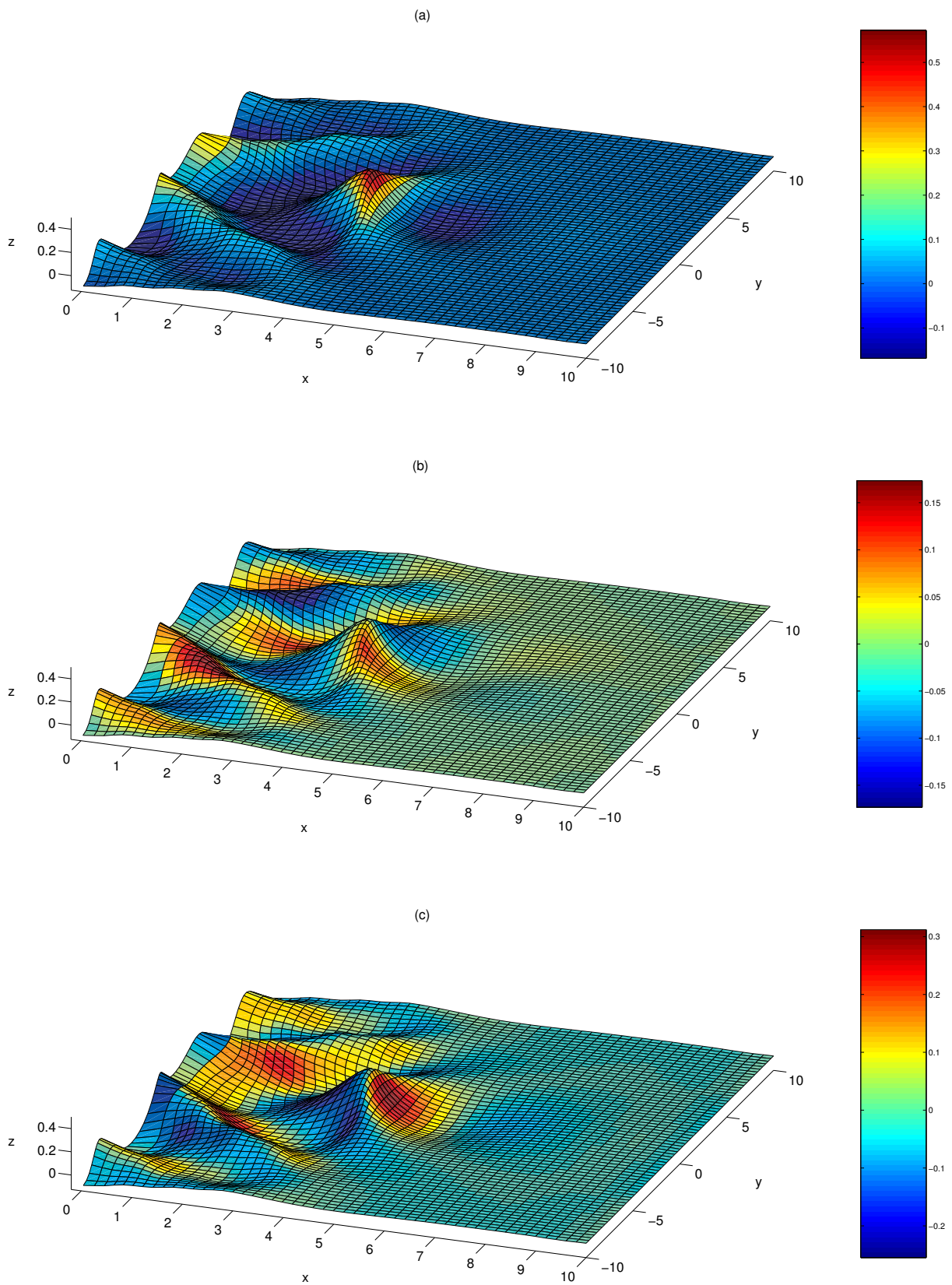
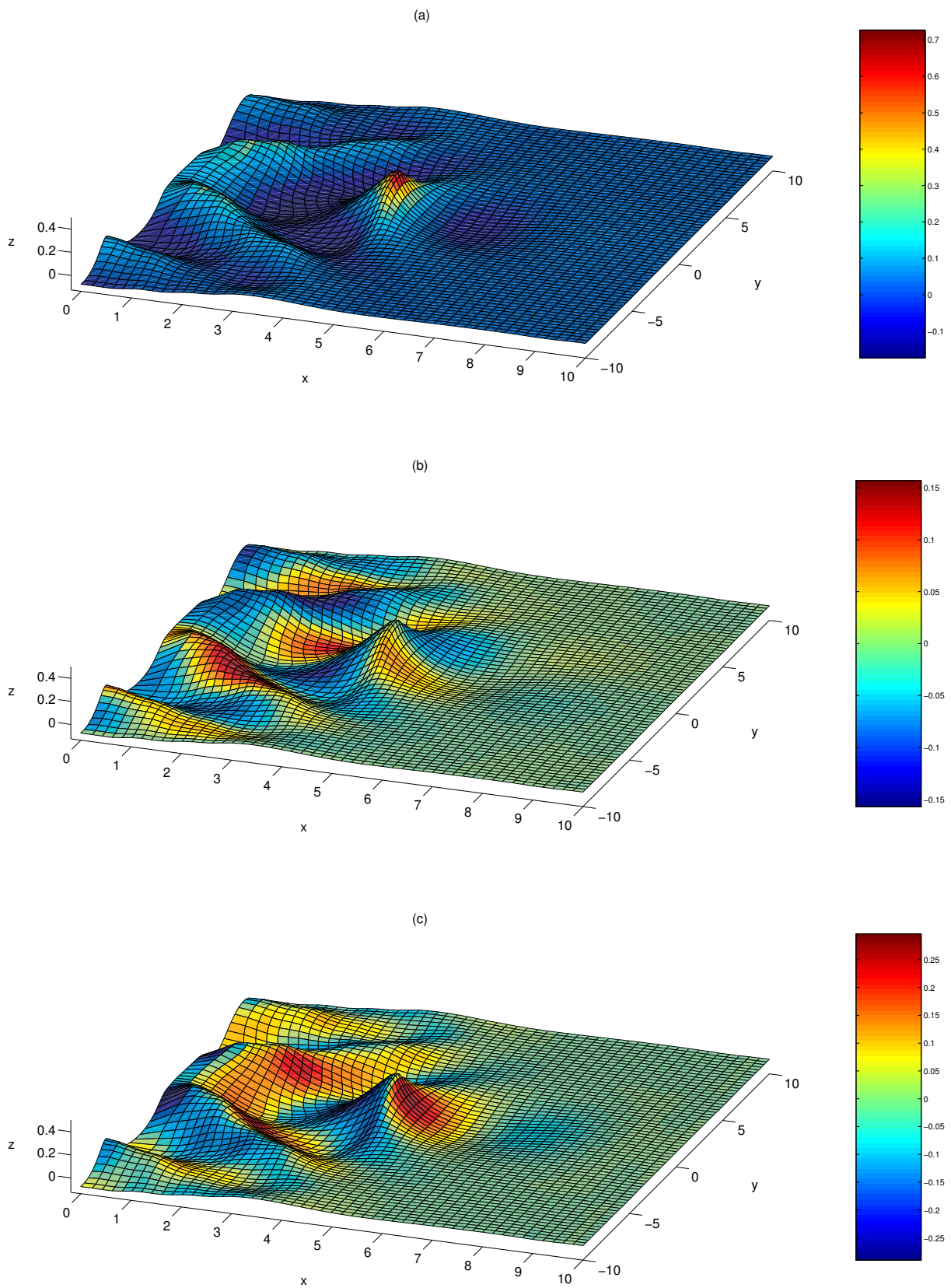


FIG. 2.19 – Champ de vitesse à $t = 17.650$: (a) composante longitudinale, (b) composante transversale, (c) composante verticale.



la vague principale ne s'est pas encore produite. La dynamique que nous suivons est celle de l'arc qui va se concentrer. Il se caractérise par une ligne de crêtes incurvée dont les trois composantes du champ de vitesse se distinguent parfaitement. La composante longitudinale est maximale tout le long de cette crête, alors que le minimum se produit dans le creux situé juste devant. La composante transversale montre que cet arc converge vers le centre du bassin. Enfin, deux zones principales sont visibles sur la composante verticale : la face avant du front convergent a des valeurs positives alors que la face arrière a des valeurs négatives.

Les trois figures suivantes 2.18, 2.19 et 2.20 montrent comment ces caractéristiques ont évolué au cours du temps et comment elles évoluent dans les derniers instants lorsque la vague se cambre. La composante longitudinale de la vitesse se concentre sur la crête de cette vague dénotant la focalisation de l'énergie qui se produit. La valeur maximale augmente de façon monotone, alors que les valeurs sur la face avant se stabilisent. Il en résulte que la crête va plus vite vers l'avant que la base de la vague, celle-ci se cambre donc et annonce l'imminence du déferlement. La vitesse maximale mesurée, 0.73, atteint quasiment la vitesse linéaire des différentes composantes d'ondes. La composante transversale conserve des valeurs extrêmes à peu près constantes. C'est parce qu'elles se produisent sur le nouvel arc généré par le batteur derrière la vague principale. Nous observons que la vague centrale a une composante transversale dont les valeurs diminuent avec le temps. Par conséquent, les effets tridimensionnels sur la vitesse consistent essentiellement à faire converger la houle. En revanche, lorsque la vague focalisée est sur le point de déferler, ces effets se réduisent et le phénomène tend à se rapprocher d'une configuration plus bidimensionnelle. En fait, les effets tridimensionnels sont présents indirectement à travers la forme de la vague cambrée qui nécessairement doit mener à un jet plutôt qu'à un rouleau déferlant (dans le cas d'un déferlement plongeant). Concernant la composante verticale, nous retrouvons la séparation entre les faces avant et arrière. La valeur maximale a augmenté entre l'instant de la Figure 2.17 et le suivant, ce qui s'explique par la montée en amplitude qui s'est produite lorsque le front incurvé s'est concentré en une seule vague. Ensuite, nous remarquons que ce maximum, situé sur l'avant de la vague tend à diminuer légèrement. En effet, après la formation de la vague focalisée, celle-ci continue à augmenter en amplitude mais de moins en moins fort.

En résumé, l'évolution du champ de vitesse montre la concentration de l'énergie cinétique au niveau de la vague focalisée. Sur le point de déferler, celle-ci a une crête où se concentrent les plus grandes vitesses qui sont dirigées essentiellement vers l'avant. Les effets tridimensionnels sont primordiaux durant la phase de génération de la vague focalisée, mais ils s'atténuent au niveau de celle-ci lorsqu'elle se cambre et commence à déferler.

2.2.5 Champ d'accélération

Afin de compléter cette description sur la cinématique, nous présentons le champ d'accélération aux mêmes instants. A l'instar des applications précédentes, cette donnée est très imprécise à la fin de la simulation. Par conséquent, nous ne présentons que les trois premiers instants, le dernier donnant des valeurs erronées. La Figure 2.21 montre le premier instant correspondant à la présence d'un arc qui préfigure la focalisation en un point. Nous observons que les valeurs positives de la composante longitudinale sont situées sur l'avant du front. Nous distinguons des zones plus foncées au centre et sur les côtés qui montrent que la distribution n'est pas uniforme le long de ce front d'ondes. En effet, ce front n'est pas un arc parfaitement régulier et des parties sont plus proches du point de focalisation que d'autres. Il est donc logique que les régions un peu plus éloignées soient plus accélérées pour rattraper les autres et aboutir à la focalisation de toutes les composantes d'ondes au même moment, au même endroit. Comme pour la vitesse, la composante transversale du champ d'accélération met en valeur la convergence des parties du front d'ondes qui sont à l'extérieur du domaine vers l'axe $y = 0$. Elle s'accroît donc durant cette période d'approche. La relative symétrie entre les valeurs positives et négatives entre crête et creux pour la composante verticale, ainsi que la symétrie entre les faces avant et arrière pour les deux autres composantes, est caractéristique de cette phase de propagation multi-directionnelle.

Une fois la vague extrême produite, le schéma change (Figures 2.22 et 2.23). Nous observons que la composante longitudinale a des valeurs maximales qui se concentrent sur la pente avant de la vague, dans une région de plus en plus étroite, et elles augmentent en amplitude. Comme pour la vitesse, la composante transversale montre que les effets tridimensionnels se réduisent sur la face avant de la vague. La composante verticale fait apparaître des valeurs minimales négatives au niveau de la crête avant. Celles-ci sont de plus en plus grandes en valeur absolue. Les creux sont les zones de valeurs positives et diminuent un peu dans le temps. L'asymétrie entre les valeurs positives et négatives autour de la vague focalisée est évidente. La face avant de la vague a peu d'effets tridimensionnels visibles. Essentiellement, les vecteurs accélérations sont dirigés devant la vague cambrée et leur module s'approche de la valeur de la gravité. La configuration devient celle d'un déferlement imminent. Il semble que celui-ci aura une dynamique quasi-bidimensionnelle. C'est ce qui peut expliquer que le front déferlant donne l'impression d'un "mur d'eau" qui revient dans la description d'évènements extrêmes.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux types d'applications d'ondes de surface tridimensionnelles. Les deux requièrent un modèle basé sur les équations d'Euler, comportant toute la

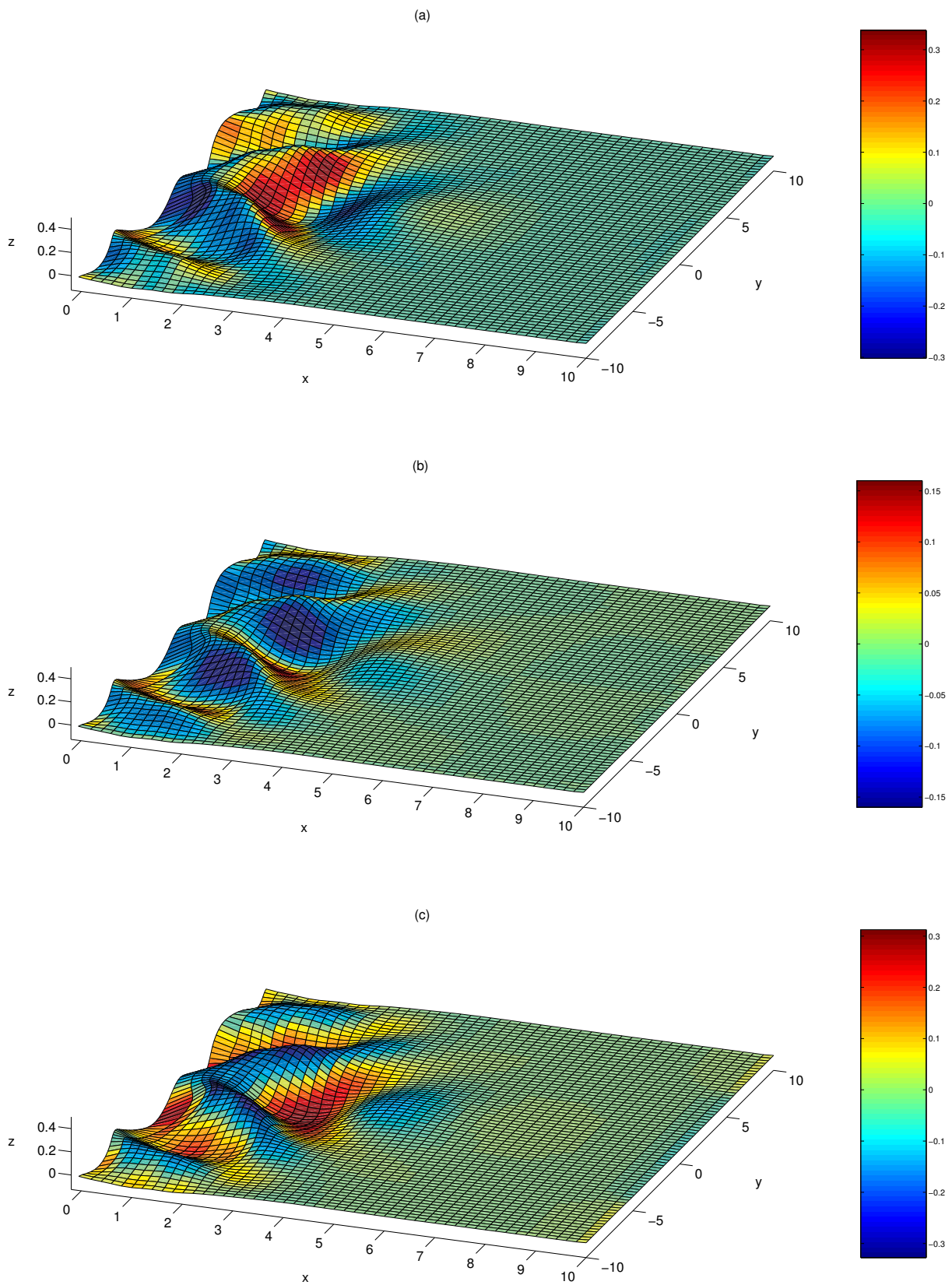


FIG. 2.21 – Champ d'accélération à $t = 14.077$: (a) composante longitudinale, (b) composante transversale, (c) composante verticale.

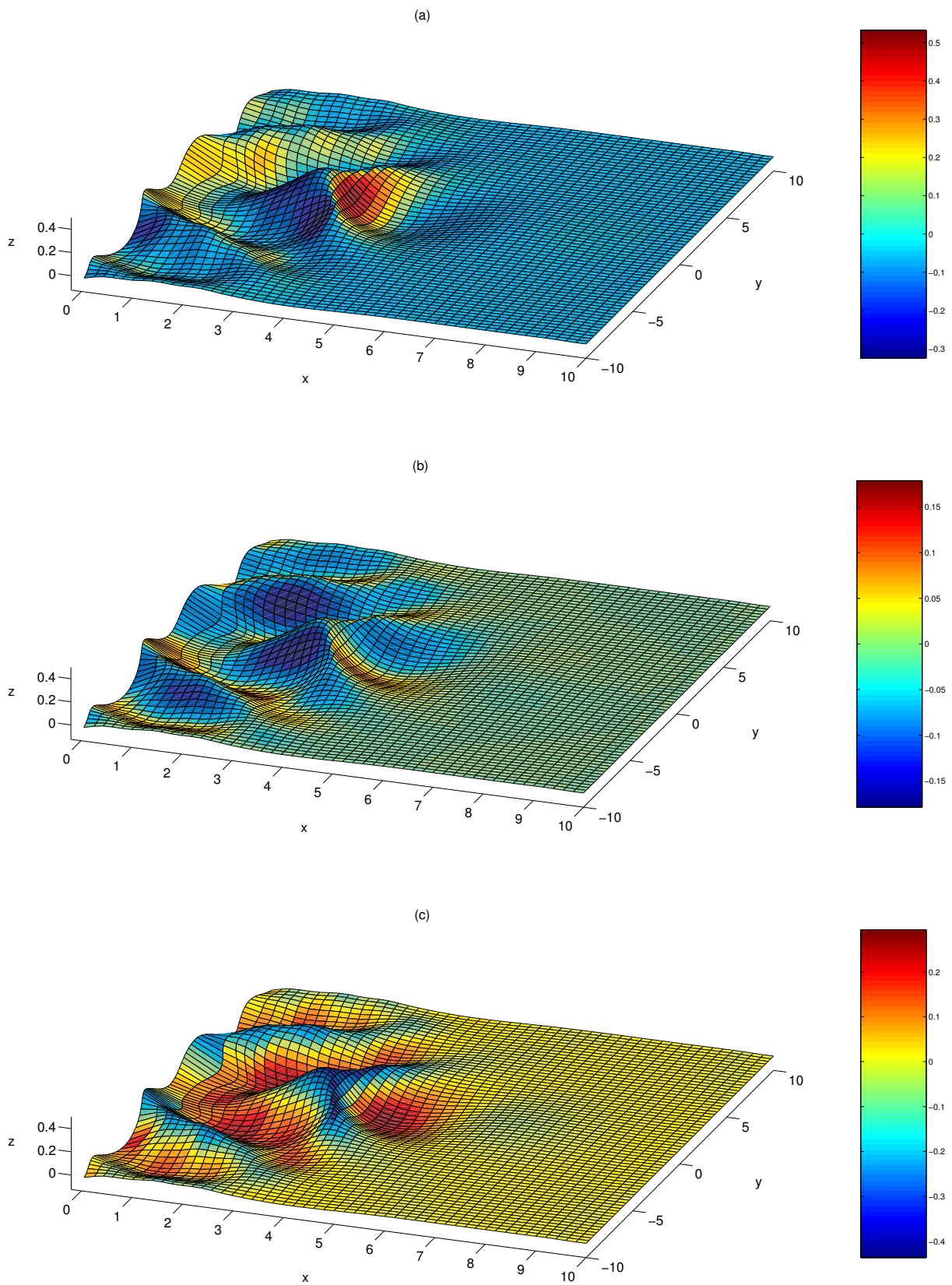


FIG. 2.22 – Champ d'accélération à $t = 16.640$: (a) composante longitudinale, (b) composante transversale, (c) composante verticale.

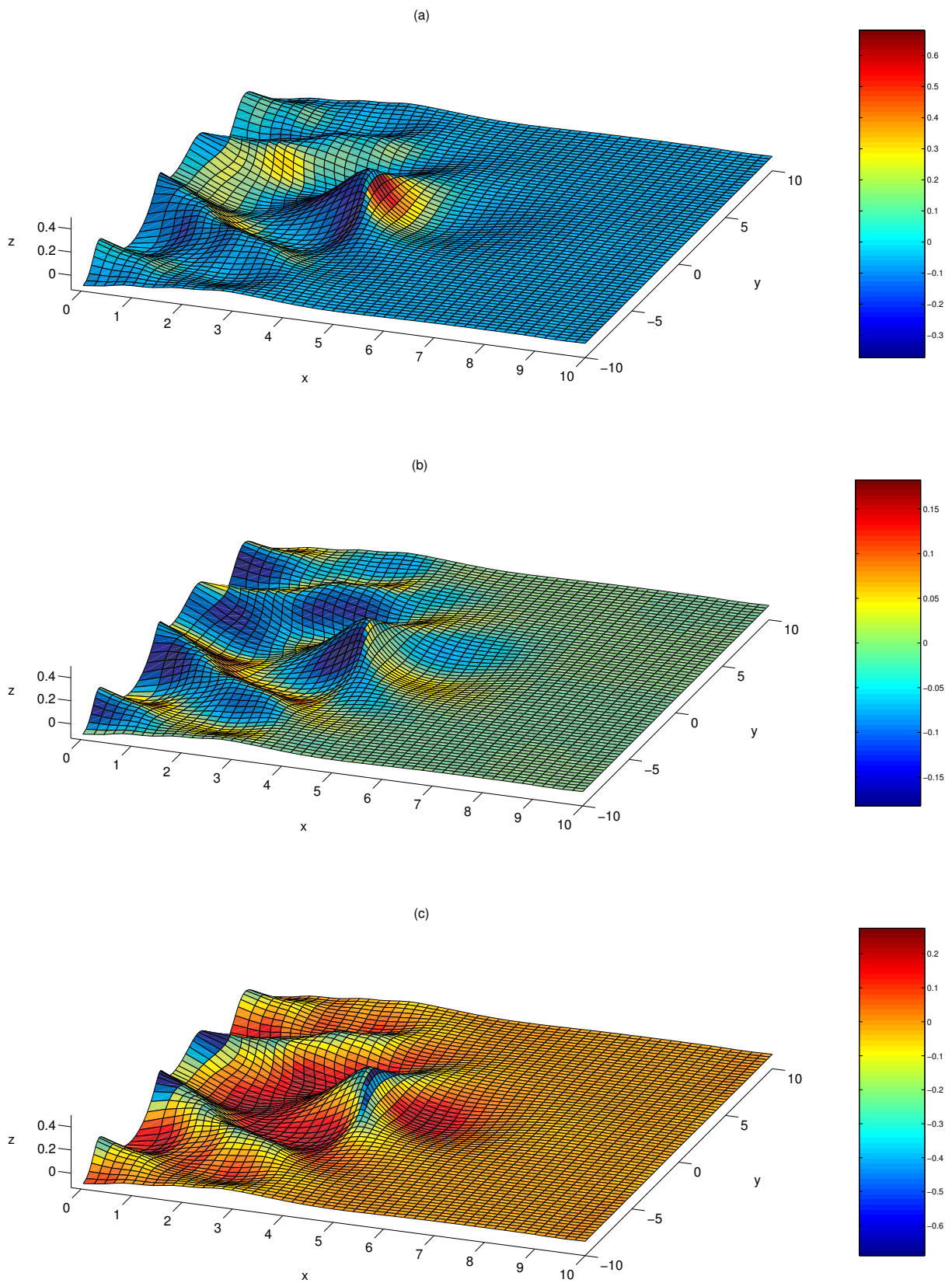


FIG. 2.23 – Champ d'accélération à $t = 17.650$: (a) composante longitudinale, (b) composante transversale, (c) composante verticale.

nonlinéarité du problème, puisque nous considérons des vagues de grande amplitude. L'outil numérique que nous utilisons est la méthode d'éléments aux frontières de Grilli *et al.* [13]. Nous y avons apporté des améliorations, notamment concernant son efficacité (cf chapitre 1).

Le gain obtenu en temps de calcul et en mémoire nous a permis d'effectuer une série d'expériences numériques pour le shoaling d'une onde solitaire sur un haut-fond 3D. Le contexte de cette étude est celui d'un récif naturel ou artificiel de type foyer. A des fins de comparaison, un instant caractéristique autre que le point de déferlement est introduit. Il s'agit de l'instant où la vague déferlante a une tangente horizontale sous la langue du jet. C'est un changement géométrique remarquable dans le processus du déferlement plongeant qui est facile à détecter. En considérant un fond en pente avec une modulation transversale dont nous faisons varier le coefficient, nous mesurons l'effet de la tridimensionnalité sur le déferlement de l'onde solitaire. Lorsque le récif est étroit, le déferlement se produit plus loin et plus tard. En outre, il semble que le processus soit plus rapide. Nous avons mis en évidence des régions caractéristiques pour les valeurs extrêmes des trois composantes des champs de vitesse et d'accélération. En particulier, la dynamique du jet est discutée. Celui-ci tend à s'étaler et ressemble plus à une langue qu'à un jet pointu. Le module maximum de la vitesse s'avère constant au point de déferlement quelque soit le coefficient de modulation transversale. Pourtant, l'amplitude maximale augmente de façon monotone pour des récifs de plus en plus étroits. Cette élévation maximale n'est pas atteinte dans l'axe de focalisation, mais sur les bords du jet. Il en résulte qu'une vue de face ou arrière de la vague montre deux renflements sur la crête qui sont d'autant plus marqués que le récif est "tridimensionnel".

La seconde application consiste à observer une vague extrême générée par un batteur de type serpent. La focalisation directionnelle est un des mécanismes physiques susceptibles de participer à l'apparition d'une vague scélérate. Ce mécanisme est uniquement tridimensionnel. Poursuivant l'étude de Brandini et Grilli [6], nous définissons les conditions du bassin numérique qui mène à une vague extrême déferlante. La description d'une vague focalisée au centre du bassin est effectuée, mais la phase de retournement n'a pas pu être poursuivie. Nous observons qu'une coupe 2D de la solution ressemble tout à fait à la forme caractéristique observée pour les vagues scélérates. Son aspect tridimensionnel est celui d'un front incurvé devancé par un creux circulaire et suivi par un creux plus profond en forme de croissant. La cinématique fait apparaître deux phases. Dans un premier temps, nous observons la propagation d'une ligne de crête courbe qui converge en un point. Lorsque la vague focalisée est obtenue, elle se cambre et les vecteurs vitesses et accélérations sur la face avant de la vague ont une faible composante transversale. Par conséquent, après la phase de focalisation, l'occurrence du déferlement s'approche d'une dynamique essentiellement bidimensionnelle. Cela correspond à l'aspect de "mur d'eau" qui revient dans les descriptions des cas de vagues géantes en mer. La valeur maximale de la vitesse dans la crête juste avant de déferler est

mesurée à $0.73\sqrt{gh_{max}}$, où g est la constante de gravité et h_{max} la profondeur du bassin.

Pour les deux applications, le renversement est difficile à obtenir numériquement. Il faut en effet une grande précision dans la région de formation du jet. Le suivi lagrangien des particules à la surface permet de les faire converger naturellement dans les zones de forts gradients. C'est ce qui permet d'obtenir le déferlement pour certains cas de focalisation sur récif. Cependant, cela peut ne pas suffire, notamment lorsque la complexité du phénomène augmente. Cette dépendance de la précision en fonction du maillage est ce qui a limité la poursuite des simulations dans nos exemples. Pour y remédier, il y a deux possibilités. D'un côté, il est possible de travailler sur le maillage pour que la distribution des points soit bien adaptée à l'application. En particulier, nous devons adapter la technique de remaillage existante au cas des frontières mobiles pour la seconde application. D'un autre côté, il suffit d'augmenter la résolution tant que nécessaire. Cela est désormais envisageable puisque la complexité computationnelle est quasi-linéaire. Le surcoût pourrait même être en partie compensé par la prise en compte des symétries du problème lorsque c'est possible.

Bibliographie

- [1] Bateman W.J.D., Swan C., Taylor P.H., On the efficient numerical simulation of directionally spread surface water waves, *J. Comp. Phys.* **174**, 277–305 (2001).
- [2] Biauxser B., Grilli S.T., Fraunie P., Numerical Simulations of Three-dimensional Wave Breaking by Coupling of a VOF Method and A Boundary Element Method, Proc. 13th Offshore and Polar Engng. Conf. (ISOPE 2003), Honolulu, USA, 333–339 (2003).
- [3] Black K., Artificial surfing reefs for erosion control and amenity : theory and application, Proceedings of the International Coastal Symposium (ICS 2000), Rotorua, New Zealand (2000).
- [4] Brandini C., Nonlinear interaction processes in extreme wave dynamics, Ph.D. Dissertation, University of Firenze (2001).
- [5] Brandini C., S.T. Grilli., On the Numerical Modeling of extreme Highly Nonlinear Deep Water Waves, Proc. IABEM 2000 Symposium, Brescia, Italy, 54–58 (2000).
- [6] Brandini C., Grilli S., Modeling of freak wave generation in a 3D-NWT, Proc. 11th Offshore and Polar Engng. Conf. (ISOPE 2001), Stavanger, Norway, Vol III, 124–131 (2001).
- [7] Chaplin J.R., On frequency-focusing unidirectional waves, *Intl. J. Offshore and Polar Engng.* **6**, 131–137 (1996).
- [8] Clamond D., Grue J., A fast method for fully nonlinear water-wave computations, *J. Fluid Mech.* **447**, 337–355 (2001).

- [9] Clément A., Coupling of two absorbing boundary conditions for 2D time-domain simulations of free surface gravity waves, *J. Comp. Phys.* **26**, 139–151 (1996).
- [10] Dalrymple R.A., Directional wavemaker theory with sidewall reflection, *J. Hydraulic Res.* **27** (1), 23–34 (1989).
- [11] Dommermuth D.G., Yue D.K.P., A high-order spectral method for the study of non-linear gravity waves, *J. Fluid Mech.* **184**, 267–288 (1987).
- [12] Dommermuth D.G., Yue D.K.P., Lin W.M., Rapp R.J., Chan E.S., Melville W.K., Deep-water plunging breakers : a comparison between potential theory and experiments, *J. Fluid Mech.* **189**, 423–442 (1998).
- [13] Grilli S., Guyenne P., Dias F., A fully nonlinear model for three-dimensional overturning waves over arbitrary bottom, *Int. J. Num. Meth. Fluids* **35**, 829–867 (2001).
- [14] Grilli S.T., Horrillo J, Numerical Generation and Absorption of Fully Nonlinear Periodic Waves, *J. Engng. Mech.* **123** (10), 1060–1069 (1997).
- [15] Grilli S.T., Horrillo J, Shoaling of periodic waves over barred-beaches in a fully nonlinear numerical wave tank, *Intl. J. Offshore and Polar Engng.* **9** (4), 257–263 (1999).
- [16] Grilli S.T., Subramanya R., Svendsen I.A., Veeramony J., Shoaling of Solitary Waves on Plane Beaches, *J. Waterway, Port. Coastal, Ocean Engng.* **120**, 609–628 (1994).
- [17] Grilli S.T., Svendsen I.A., Subramanya R., Breaking criterion and characteristics for solitary waves on slopes, *J. Waterway, Port. Coastal, Ocean Engng.* **123**, 102–112 (1997).
- [18] Grilli S.T., Svendsen I.A., Subramanya R., Closure of : Breaking criterion and characteristics for solitary waves on slopes, *J. Waterway, Port. Coastal, Ocean Engng.* **124**, 333–335 (1998).
- [19] Guignard S., Grilli S.T., Marcer R., Rey V. Computation of shoaling and breaking waves in nearshore areas by the coupling of BEM and VOF methods, Proc. 9th Offshore and Polar Engng. Conf. (ISOPE99), Brest, France, Vol. III, 304–309 (1999).
- [20] Guyenne P., Grilli S.T., Numerical study of three-dimensional overturning waves in shallow water, *J. Fluid Mech.* (soumis).
- [21] Johannessen T.B., C.Swan C., A laboratory study of the focusing of transient and directionally spread surface water waves, *Proc. Roy. Soc. Ser. A.* **457**, 971–1006 (2001).
- [22] Kharif C., Pelinovsky E., Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon, *Eur. J. Mech. B-Fluids* **22** (6), 603–634 (2003).
- [23] Lachaume C., Biausser B., Grilli S.T., Fraunie P., Guignard S., Modeling of breaking and post-breaking waves on slopes by coupling of BEM and VOF methods, Proc. 13th Offshore and Polar Engng. Conf. (ISOPE03), Honolulu, USA, 353-359 (2003).
- [24] Nepf H.M., Wu C.H., Chan E.S., Comparison of two- and three-dimensional wave breaking, *J. Physical Ocean.* **28**, 1496–1510 (1998).

-
- [25] Peregrine D.H., Breaking Waves on Beaches, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **15**, 149–178 (1983).
- [26] Ranasinghe R., Hacking N., Evans P., Multi-functional Artificial Surf Breaks : A Review, Report published by New South Wales Department of Land and Water Conservation, Parramatta (2001).
- [27] Raichlen F., Papanicolaou P., Some characteristics of breaking waves, Proc. 21st Intl. Conf. on Coastal Engng. (ICCE21), Malaga, Spain, 377–392 (1988).
- [28] She K., Greated C.A., Easson W.J., Experimental study of three-dimensional wave breaking, *J. of Am. Soc. C. E.* **120**, 20–36 (1994).
- [29] Tanaka M., The stability of solitary waves, *Phys. Fluids* **29** (3), 650–655 (1986).
- [30] Wei J., Kirby J.T, Grilli S.T., Subramanya R., A Fully Nonlinear Boussinesq Model for Surface Waves. Part1. Highly Nonlinear Unsteady Waves. *J. Fluid Mech.* **294**, 71–92 (1995).
- [31] White B.S., Fornberg B., On the chance of freak waves at sea, *J. Fluid. Mech.* **355**, 113–138 (1998).
- [32] Xue M., Xü H., Liu Y., Yue D.K.P., Computations of fully nonlinear three-dimensional wave-wave and wave-body interactions. Part 1. Dynamics of steep three-dimensional waves, *J. Fluid Mech.* **438**, 11–39 (2001).

Deuxième partie

**Etude numérique d'un système
d'équations de type KdV**

Chapitre 3

Solutions stationnaires de type onde solitaire généralisée

Sommaire

3.1	Introduction	108
3.2	Models	110
3.2.1	Generic derivation	111
3.2.2	The weak coupling case	114
3.3	Simple model	115
3.3.1	Presentation	115
3.3.2	Analytical integration	116
3.3.3	Amplitudes of the oscillations	117
3.3.3.a	“Classical KdV forcing” : ripples on the sides	118
3.3.3.b	“Table-top” forcing : ripples on the sides	119
3.3.3.c	“Table-top” forcing : ripples on the top	120
3.3.4	Effect of residuals	120
3.4	Solving the full system	123
3.4.1	Determination of the limiting case	123
3.4.2	Choice of a parameter set	124
3.4.3	Numerical method	126
3.4.4	Description of the numerical solutions	127
3.5	Embedding, cascade and multiplicity	129
3.5.1	Embedded solitary waves in the linear spectrum	131
3.5.2	Cascade of homoclinic solutions	132
3.5.3	Multiplicity of solutions	133
3.6	Conclusion	133
3.7	Appendix : Truncated Fourier integrals	134
	Bibliography	136

Generalized solitary waves and fronts

Cet article, écrit en collaboration avec Frédéric Dias¹ et Roger Grimshaw², est une publication soumise à la revue *Physica D*.

ABSTRACT

Waves in a two-layer system with free-surface boundary conditions (or in a three-layer system) can be modelled by a system of two coupled long wave equations. The study of the resonance between a solitary wave of one of the two equations and a copropagating periodic wave of the other equation is carried out numerically. The resulting wave is a generalized solitary wave. It is shown that in the case of a “table-top” solitary wave (solution of an extended Korteweg–de Vries equation with a cubic nonlinearity), the generalized solitary waves do not behave like common sech^2 generalized solitary waves. Simplified models are introduced, which allow a better understanding of these stationary long wave solutions.

3.1 Introduction

Generalized solitary waves arise in many physical systems, including water waves with surface tension and multi-layered fluids [7, 19, 21, 22]. They are nonlinear long waves consisting of a localized central core and periodic non-decaying oscillations extending to infinity. They arise whenever there is a resonance between a linear long wave speed of one wave mode in the system and a wave speed with a finite wavenumber of another mode. They have been proved to exist in specific parameter regimes, and are often conveniently modelled by perturbed Korteweg–de Vries (KdV) equations, or by coupled KdV systems [8, 14].

When dealing with interfacial waves with rigid boundaries, the amplitude of the central core can be bounded by the configuration. In the case of solitary waves, it is known that when the wave speed approaches a critical value the solution reaches a maximum amplitude while becoming indefinitely wider; these waves are often called “table-top” waves. Such behaviour is conveniently modelled by an extended Korteweg-de Vries (eKdV) equation, i.e. a KdV equation with a cubic nonlinear term. In the limit, one has to consider fronts, which are

¹Centre de Mathématiques et de Leurs Applications, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan cedex, France

²Department of Mathematical Sciences, Loughborough University

related to conjugate flows [9]. Some questions arise when dealing with generalized solitary waves close to fronts : Do oscillations appear on the “table-top” part of the wave ? Or do oscillations only appear on the sides ? What are their properties ? The main goal of this work is to learn more about these waves by examining certain models which allow a comparison between generalized fronts and the more common generalized solitary waves.

Several systems have been used to model generalized solitary waves with oscillatory tails. For instance Grimshaw and Cook [14] considered two coupled KdV equations. They showed that this system exhibits the phenomenon of a nonlinear resonance of a solitary wave of one mode with short waves of another mode, and the consequent slow decay of the solitary wave due to radiation of the short waves. They calculated the amplitude of the radiated waves by the techniques of exponential asymptotics when the solitary wave amplitude is small and by direct perturbation methods when the coupling parameter for the system is small. Dias and Il'ichev [8] derived a system based on two KdV equations with cubic nonlinear terms as well as coupling terms. They briefly considered analytically the case with small oscillations on top of a front. Grimshaw [13] showed that the coupled KdV model can be derived in a general way, thus showing that it can arise generically in many physical systems as a description in the weakly nonlinear limit of a long wave resonance between two wave modes. Generalized solitary waves, which as said above are solitary waves with resonant periodic oscillations co-propagating with the long wave, appear naturally in this model. This system has been studied by Grimshaw and Iooss [15], who showed the existence of such nonlocal solutions. But the detailed discussion and calculation of the solutions was left for future work.

Generalized solitary waves have been computed numerically as solutions of the full incompressible Euler equations in the presence of a free surface (or an interface) by various authors [22, 23, 19, 21]. Michallet and Dias [19] computed solutions that look somewhat like the solutions studied in the present paper. In a certain configuration of the two-layer system and for speeds close to the critical value for fronts, they observed oscillations on the main core of the long wave. Moreover the amplitude of the small oscillations in the tail may vanish in certain regions of parameter space.

Section 3.2 presents the generic derivation of two coupled KdV equations which may include cubic nonlinear terms. For weak coupling, the system reduces to a linear equation forced by the solution of an eKdV equation, which is the simplest model describing generalized solitary waves with a “table-top” profile. Extending the results given in [10], we focus in section 3.3 on the analytical study of this forced equation, yielding explicit expressions for the amplitudes of the ripples, where the dependence on the system parameters is displayed. We underline the difference between small-amplitude solitary wave solutions of the eKdV equation with a common sech^2 profile, and the larger-amplitude solutions with a “table-top” profile. Then,

the system of coupled KdV equations is solved numerically (section 3.4), and the solutions compared with those of the forced equation. The main conclusions from the simple forced equation remain valid for the coupled system. Moreover some further specific properties of the full coupled system are outlined.

3.2 Models

The main application we are concerned with in this paper is the propagation of waves in multi-layer flows of inviscid fluids. The density is constant in each layer, and in the unperturbed state, each layer has a constant horizontal velocity. The flow in each layer is assumed to be irrotational. In the long wave limit, coupled KdV equations for each interface can be derived under certain parameter conditions. For example, Grimshaw [13] derived a KdV system with linear coupling to study the resonance between two wave modes having the same wave speeds. Earlier, Gear and Grimshaw [11] considered the interactions of internal solitary waves in continuously stratified fluids. They distinguished two cases : weak interactions correspond to different wave mode speeds, whereas strong interactions occur when the speeds are nearly equal. Indeed the first case leads in the weakly nonlinear long wave limit to uncoupled KdV equations for each mode. In the opposite, the second case gives a KdV coupled system. Dias and Il'ichev [8] also derived a system of two KdV equations with nonlinear coupling terms. They considered a two-layer configuration with an interface and a free-surface, which thus contains two wave modes.

As noted by Champneys et al. [5], such systems appear in different situations. Besides multi-layer flows, they also occur in nonlinear optics (see for example the systems derived in [17] and [12] which have linear coupling). It turns out that all these systems are equivalent through appropriate changes of variables and redefinition of the coefficients, assuming certain non-degeneracy conditions on these coefficients [5]. Champneys et al. [5] dealt with gap solitary wave solutions. On the other hand, starting from the system of Gear and Grimshaw [11], Grimshaw and Cook [14] studied the nonlinear resonance between a long internal wave mode with a shorter internal wave. They were able to describe solitary waves with oscillatory tails. Although these KdV systems are derived for long waves, and hence are not strictly appropriate to study a resonance with a short wave mode, they are interesting in their own right for the qualitative understanding of such nonlocal solitary waves.

Our objective here is to follow the same strategy to describe generalized solitary waves for the situation when the long wave is a solution to an eKdV equation. Taking into account the fact that such models cannot be expected to give quantitative results, it is not essential to provide a rigorous derivation up to cubic order based on the full nonlinear problem. Instead, we extend the generic derivation described in [13] for a long-wave resonance between two wave

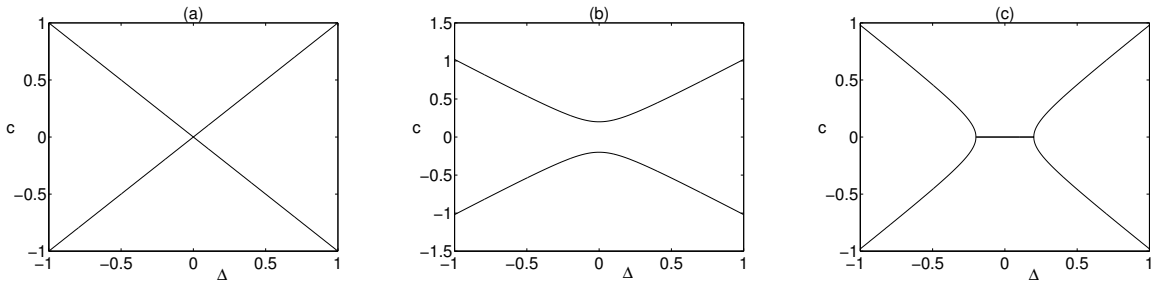


FIG. 3.1 – A schematic sketch of the dispersion relation (3.1), in which the phase speed c is plotted as a function of an external parameter Δ , for various values of the unfolding parameter δ : (a) $\delta = 0$, (b) $\delta = 0.04$, (c) $\delta = -0.04$.

modes. We note that Grimshaw and Iooss [15] studied the case of quadratic nonlinear terms in a certain linearly coupled KdV system and showed the existence of generalized solitary waves.

3.2.1 Generic derivation

Here we reconsider the generic derivation used to obtain the system studied in [15], and introduce another scaling in order to introduce cubic nonlinear terms. Thus let us consider a physical system admitting sinusoidal linearized waves with wavenumber k and frequency ω . We shall be concerned with the long wave limit in which the phase speeds $c = \omega/k$ are finite as $k \rightarrow 0$. Suppose that we are in a situation where the linear long wave phase speeds of two wave modes coincide as an appropriate external parameter Δ is varied. A generic unfolding of this resonance is typically described by a dispersion relation of the form

$$c^2 = \Delta^2 + \delta, \quad (3.1)$$

where δ is the unfolding parameter. The branching behavior as δ varies is shown in Figure 3.1.

The dispersion relation can be formally converted into a partial differential equation, by replacing ik by $\partial/\partial x$ and $-i\omega$ by $\partial/\partial t$. In the case where there are two modes $u(x, t)$ and $v(x, t)$ at the resonance point $\Delta = 0$, $\delta = 0$, the generic set of equations describing linearized long waves is given by

$$\begin{cases} u_t + \Delta u_x + \kappa_1 v_x = 0, \\ v_t - \Delta v_x + \kappa_2 u_x = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

with $\delta = \kappa_1 \kappa_2$. Indeed seeking solutions for which (u, v) are given by $(A, B) \exp[ik(x - ct)] + \text{c.c.}$ yields

$$\begin{cases} -(c - \Delta)A + \kappa_1 B = 0, \\ -(c + \Delta)B + \kappa_2 A = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Nontrivial solutions can be found if (3.1) is satisfied, that is, $c^2 = \Delta^2 + \kappa_1\kappa_2$.

Let us now consider the generic weakly nonlinear, weakly dispersive unfolding of (3.2). If ν is a small parameter characterising weak dispersion so that $\partial/\partial x$ is $O(\nu)$, the appropriate balance is that κ_1, κ_2 are $O(\nu^2)$, Δ is $O(\nu^2)$ and $\partial/\partial t$ is $O(\nu^3)$. Anticipating the nonlinearity to be quadratic, one can assume that u, v are of order $O(\nu^2)$ and infer the canonical set of model equations

$$\begin{cases} u_t + \Delta u_x + \alpha_1 u u_x + \lambda_1 u_{xxx} + \kappa_1 v_x & = 0 \\ v_t - \Delta v_x + \alpha_2 v v_x + \lambda_2 v_{xxx} + \kappa_2 u_x & = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

In the set of coupled Korteweg–de Vries equations (3.4), the parameters $\alpha_{1,2}$ and $\lambda_{1,2}$ are respectively the nonlinear and dispersive coefficients. If one wants to consider larger amplitudes with u, v of order $O(\nu)$, a similar system is obtained under the condition that the coefficients of the quadratic nonlinear terms are $O(\nu)$ (note that in a certain three-layer configurations, it can happen that the coefficient of the quadratic term is small, [16], [8]),

$$\begin{cases} u_t + \Delta u_x + \alpha_1 u u_x + \beta_1 u^2 u_x + \lambda_1 u_{xxx} + \kappa_1 v_x & = 0 \\ v_t - \Delta v_x + \alpha_2 v v_x + \beta_2 v^2 v_x + \lambda_2 v_{xxx} + \kappa_2 u_x & = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Here cubic nonlinearities have been added to system (3.4), resulting in a system of two coupled extended KdV equations. Seeking solutions of the linearizations of systems (3.4) or (3.5) for which (u, v) are given by $(A, B) \exp[ik(x - ct)] + \text{c.c.}$ yields

$$\begin{cases} -(c - \Delta)A - k^2 \lambda_1 A + \kappa_1 B & = 0, \\ -(c + \Delta)B - k^2 \lambda_2 B + \kappa_2 A & = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Nontrivial solutions can be found if the determinant of the above system vanishes. The resulting dispersion relation of (3.4) or (3.5) is given by

$$c^2 + k^2(\lambda_1 + \lambda_2)c - \Delta^2 - \Delta k^2(\lambda_2 - \lambda_1) + k^4 \lambda_1 \lambda_2 - \kappa_1 \kappa_2 = 0. \quad (3.7)$$

In order to get a real-valued c for real k , the quantity $[2\Delta + (\lambda_1 - \lambda_2)k^2]^2 + 4\kappa_1\kappa_2$ must be positive. Note that this is ensured for all k, Δ if $\kappa_1\kappa_2 > 0$. Then the solution can be written as

$$c^\pm(k) = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2)k^2 \pm \sqrt{[2\Delta + (\lambda_2 - \lambda_1)k^2]^2 + 4\kappa_1\kappa_2}}{2}. \quad (3.8)$$

In the case $\lambda_{1,2} > 0$, one gets two branches that decrease similarly. Looking at the solitary wave $k \rightarrow 0$ along the lower branch, one sees that a shorter wave from the upper branch propagates at the same speed (Figure 3.2). This is one particular configuration for generalized solitary waves.

Grimshaw and Iooss [15] studied the quadratic system (3.4) in detail. Based on the properties of the linearized system, they showed that, in general, there are three different kinds

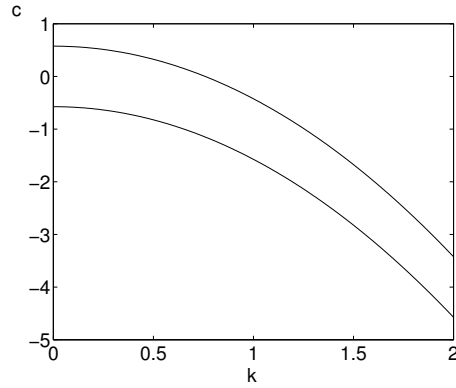


FIG. 3.2 – The dispersion relation (3.7) for $\Delta = -7/12$, $\lambda_1 = 1$, $\kappa_1 = -0.1$, $\lambda_2 = 1$, $\kappa_2 = 0.1$.

of solitary waves, pure “KdV” solitary waves, generalized solitary waves and envelope solitary waves. In their figure 2, they summed up the local bifurcations of these solitary waves in a parameter plane, showing the positions of the four eigenvalues ik associated with the linearization. Generalized solitary waves occur in regions where zero is a saddle-centre equilibrium, i.e. a non-hyperbolic equilibrium with two real and two purely imaginary eigenvalues.

The present paper is concerned with the stationary version of system (3.5). Considering waves of permanent form travelling at speed c and integrating (3.5) once with respect to x yields

$$\begin{cases} \Delta_1 u + \frac{1}{2}\alpha_1 u^2 + \frac{1}{3}\beta_1 u^3 + \lambda_1 u_{xx} + \kappa_1 v = 0 \\ \Delta_2 v + \frac{1}{2}\alpha_2 v^2 + \frac{1}{3}\beta_2 v^3 + \lambda_2 v_{xx} + \kappa_2 u = 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

where $\Delta_1 = \Delta - c$, $\Delta_2 = -\Delta - c$. The constants of integration have been set equal to 0 in order to allow localized solitary wave solutions ($u, v \rightarrow 0$ at infinity). The system (3.9) is Hamiltonian and this property will be useful later. The Hamiltonian can be written as

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_1}{\lambda_1} \right) p_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_2}{\lambda_2} \right) p_2^2 + V(u, v), \quad (3.10)$$

with $p_1 = u_x \lambda_1 / \kappa_1$, $p_2 = v_x \lambda_2 / \kappa_2$ and

$$V(u, v) = \frac{1}{\kappa_1} \left(\frac{1}{2}\Delta_1 u^2 + \frac{1}{6}\alpha_1 u^3 + \frac{1}{12}\beta_1 u^4 \right) + \frac{1}{\kappa_2} \left(\frac{1}{2}\Delta_2 v^2 + \frac{1}{6}\alpha_2 v^3 + \frac{1}{12}\beta_2 v^4 \right) + uv.$$

Henceforth, we will focus on solutions characterized by a resonance between a long wave and a periodic wave. The long wave can be a “table-top” solution with frontal behaviour, or a more classical solitary wave (in sech^2). However in order to get the specific case of a frontal-type solution to the eKdV equation, some conditions on the coefficients must be satisfied. For the coupled system (3.9), a global characterization of the solutions is still lacking.

In order to study generalized solitary waves, two main techniques have been used to get estimates of the amplitude of the ripples. Exponential asymptotics is an extension of standard perturbation methods adapted to the exponential dependence of the solution on the bifurcation parameter [2, 14, 18]. The normal form can be built around the saddle-centre zero to reduce the study to an integrable system [8, 15]. But both techniques deal with small amplitude waves, and are not necessarily appropriate to observe large amplitude “table-top” waves. Grimshaw and Cook [14] used a more direct perturbation method assuming that the coupling is weak. In this case, one equation can be considered to be approximately the long wave equation, while the second one corresponds to the small oscillations. One advantage is that the main core of the nonlocal solitary wave is almost given by an explicit solution to the eKdV equation. Thus the coefficients can be chosen to get the desired long wave with a “table-top” profile.

In the present paper we focus on the situation where the underlying parameter sets allow for such a weak coupling. First we derive a simple model taking into account this additional assumption (next subsection) and we solve it in section 3.3. Second, we report on numerical solutions of the steady-state coupled system (3.9), whose solutions can be compared to those of section 3.3 and we underline the specific properties associated to solutions of this higher order problem.

3.2.2 The weak coupling case

The system (3.9) can be solved numerically and numerical results will be presented in §4. Nevertheless, useful information can be obtained analytically on a simpler system. Indeed the scaling used in the previous generic derivation deals with the balance of dynamical aspects. If we assume moreover that the mutual influence of each mode on the other one is weak, i.e. the coupling coefficients are small, say $O(\mu)$, we can use a perturbation technique based on this other scale. So let us write

$$(u, v) = \sum_{n \geq 0} \mu^n (u_n, v_n). \quad (3.11)$$

At zeroth order, we have the uncoupled system. For the study of generalized solitary waves, we are interested in dispersion relations like the one shown in Figure 3.2. Here we have chosen the coefficients $\lambda_{1,2} > 0$ and the speed of the long wave we want to observe is between the two curves. Hence we must choose $\Delta_1 < 0 < \Delta_2$ (that is, $\Delta < 0$ and $\Delta < c < -\Delta$ in Figure 3.2). Thus, at leading order, the first equation

$$\Delta_1 u_0 + \frac{1}{2} \alpha_1 u_0^2 + \frac{1}{3} \beta_1 u_0^3 + \lambda_1 u_{0xx} = O(\mu), \quad (3.12)$$

has a solitary wave solution, whereas the solution $v_0 = 0$. At the first order, the second equation is the linearized, forced equation

$$\Delta_2 v_1 + \lambda_2 v_{1xx} = -\kappa_2 u_0 + O(\mu). \quad (3.13)$$

The homogeneous part of the forced equation is a harmonic oscillator (since $\Delta_2, \lambda_2 > 0$). We clearly see the two components of generalized solitary waves. The forcing gives the local, exponentially decaying part of the solution. The harmonic equation brings in the small periodic waves. As noted by Boyd [2], the main difficulties associated with generalized solitary waves are present in such a forced equation. They come from the simultaneous presence of two spatial scales : a rapid oscillatory equation forced by a slow long wave.

In the introduction to his monograph [18], Lombardi also studied a simple model to expose his ideas on oscillatory integrals and beyond-all-orders phenomena. He solved it analytically for a given forcing which allowed him to demonstrate what happens with phenomena like generalized solitary waves. We follow the same approach here, but for the description of a particular case. Our analysis is purely formal and the results are presented in the next section.

3.3 Simple model

3.3.1 Presentation

Generalized solitary waves arise due to a resonance between a localized long wave and a periodic oscillation. Here, the long wave (i.e. u_0 in (3.13)) can be either a classical KdV solitary wave or a “table-top” solitary wave. Let us rewrite equation (3.13) as

$$v_{xx} + q^2 v = -\kappa u_s, \quad (3.14)$$

where $q^2 = \Delta_2/\lambda_2$ and $\kappa = \kappa_2/\lambda_2$ are real constants. The stationary eKdV equation (3.12) with the error term omitted admits periodic solutions, solitary wave solutions and fronts. The solitary wave solutions can be written as

$$u_s(x) = \left(\frac{\alpha_1}{-\beta_1} \right) \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cosh([- \Delta_1/\lambda_1]^{1/2} x)}, \quad (3.15)$$

$$\text{with } \epsilon = \frac{(\alpha_1^2 - 6\beta_1 \Delta_1)^{1/2}}{\alpha_1}. \quad (3.16)$$

Here the coefficients are such that $\beta_1 < 0$, $\Delta_1 < 0$, $\alpha_1 > 0$, $\lambda_1 > 0$. The parameter is the speed Δ_1 ($0 > \Delta_1 > \alpha_1^2/6\beta_1$), related to ϵ by (3.16), so that $0 < \epsilon < 1$. At the critical value $\epsilon = 0$ the solution reaches a limiting amplitude $-\alpha_1/\beta_1$ and becomes infinitely wide. In the limit $\Delta_1 = 0$ ($\epsilon = 1$) we find the well-known sech^2 solution to the KdV equation. It turns out that the classical KdV solitary wave and the limiting “table-top” solitary wave lead to quite

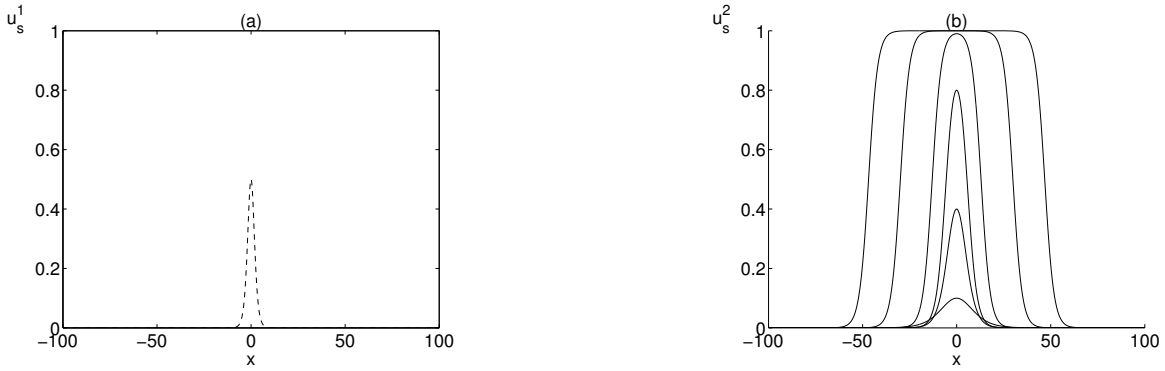


FIG. 3.3 – Profiles of the forcing function u_s : (a) The KdV-type forcing u_s^1 is a solution to (3.12) with $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $-\Delta_1 = 1/6$, (b) The eKdV-type forcing u_s^2 is a solution to (3.12) with $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -1$, $\lambda_1 = 1$, and several values of $-\Delta_1$ (the larger solution is obtained for $\epsilon = 10^{-8}$).

different forcings. That is why we choose to treat them separately in this section, in order to compare respective solutions. Quantities related to a KdV forcing are denoted with the superscript 1, whereas the “table-top” case is denoted by the superscript 2. Both forcings are shown in Figure 3.3. For the KdV type forcing, we use the solitary wave solution of (3.12) with $\beta_1 = 0$, which is the limit of the solutions described by (3.15) as ϵ goes to 1. It reads

$$u_s^1(x) = \left(\frac{-3\Delta_1}{\alpha_1} \right) \operatorname{sech}^2 \left((-\Delta_1/\lambda_1)^{1/2} x/2 \right). \quad (3.17)$$

The shape of the solution does not depend on the parameter $-\Delta_1$ as for the eKdV forcing. Therefore, we will present the results only for one value of $-\Delta_1$. On the opposite, we will discuss the solutions obtained with the second forcing for several values of ϵ . For the analytical integration of the forced equation, we use a Fourier method in order to allow a comparison between these explicit solutions and numerical ones of the whole system in the next section. Therefore periodic boundary conditions are imposed on a fixed domain of length $2L$

$$v(-L) = v(L), \quad v'(-L) = v'(L). \quad (3.18)$$

3.3.2 Analytical integration

The general solution to Eq. (3.14) can be written as the sum of harmonic oscillations and of an integral involving the forcing :

$$v(x) = A \cos(qx) + B \sin(qx) - \frac{\kappa}{q} \left(\sin(qx) \int_0^x u_s^{1,2}(y) \cos(qy) dy + \cos(qx) \int_x^\infty u_s^{1,2}(y) \sin(qy) dy \right). \quad (3.19)$$

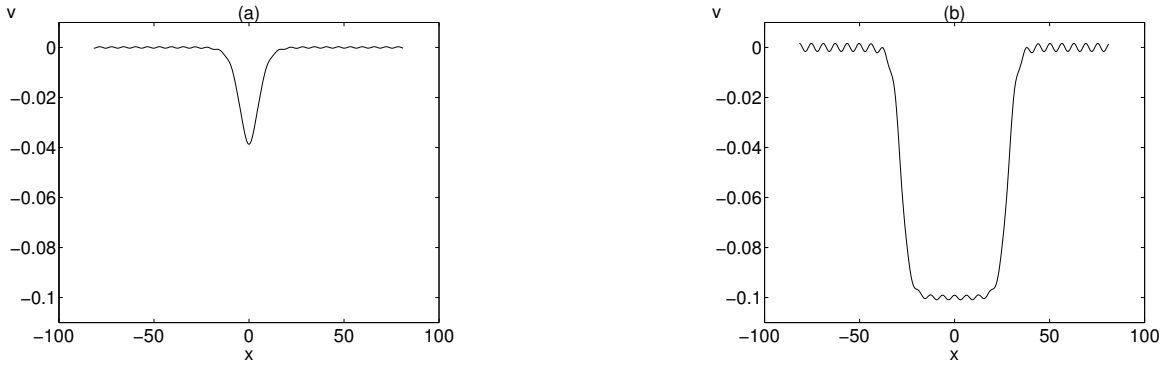


FIG. 3.4 – Solutions to the forced equation (3.14). The forcing is : (a) u_s^1 , (b) u_s^2 .

The constants A and B are fixed by satisfying the periodic boundary conditions (3.18). This leads to

$$v(x) = -\frac{\kappa}{q} \left(\sin(qx) \int_0^x u_s^{1,2}(y) \cos(qy) dy + \cos(qx) \left(\int_x^L u_s^{1,2}(y) \sin(qy) dy + \frac{1}{\tan(qL)} \int_0^L u_s^{1,2}(y) \cos(qy) dy \right) \right). \quad (3.20)$$

We assume that $qL \neq 0 [\pi]$. In other words we assume that $2L$ is not a multiple of the short wave length. We see immediately that the wavenumber of the ripples is always q , whether on the sides or on the top. Because of the periodic boundary conditions and the parity of the forcing functions, the solution is a local extremum on each side, as well as at $x = 0$. Consequently, we can directly get an evaluation of the amplitude of the oscillations on the sides, denoted by $a_L^{1,2}$, and on the top for the forcing u_s^2 , denoted by a_0^2 :

$$a_L^{1,2} = v(L) - \left(-\frac{\kappa}{q^2} u_s^{1,2}(L) \right) = \frac{\kappa}{q^2} u_s^{1,2}(L) - \frac{\kappa}{q \sin qL} \int_0^L u_s^{1,2}(y) \cos(qy) dy, \quad (3.21)$$

$$a_0^2 = v(0) - \left(-\frac{\kappa}{q^2} u_s^2(0) \right) = \frac{\kappa}{q^2} u_s^2(0) - \frac{\kappa}{q} \left(\frac{1}{\tan qL} \int_0^L u_s^2(y) \cos(qy) dy + \int_0^L u_s^2(y) \sin(qy) dy \right). \quad (3.22)$$

We have taken into account the part due to the main core. For the ripples on the top, it is necessary to get the proper amplitude. At the boundaries, the value $u_s^{1,2}(L)$ is very small for L large enough. We see that these amplitudes depend on two truncated Fourier integrals, which will determine their behaviour. They can be evaluated using complex analysis (see Appendix).

3.3.3 Amplitudes of the oscillations

Using (3.42)–(3.44) from the appendix, we can express the amplitudes and discuss their properties. First, we consider the case where the terms $R^{1,2}(L)$ (given by 3.45, 3.46), which

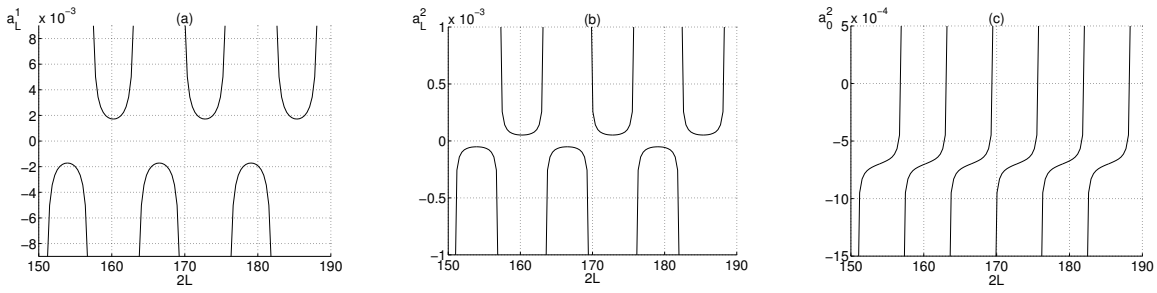


FIG. 3.5 – Amplitude of the oscillations versus $2L$. (a) Oscillations on the sides with u_s^1 forcing, (b) Oscillations on the sides with u_s^2 forcing, (c) Oscillations on the top with u_s^2 forcing.

we will simply call the residuals, are negligible compared to the main terms related to the residues at the complex poles. Then we will look specifically at the case where these residuals become important. Once a certain parameter set is given, the residues are fixed. Generally they are not zero, and we can take L large enough in order for the residual to be negligible. Next we describe the amplitudes for the three kinds of ripples : ripples in the tail of a sech^2 solitary wave, ripples in the tail of a “table-top” solitary wave and ripples on the top of that wave.

3.3.3.a “Classical KdV forcing” : ripples on the sides

The amplitude of such ripples is approximately given by

$$a_L^1 \approx \frac{\kappa}{q^2} u_s^1(L) - \left(\frac{\pi \kappa}{\sin qL} \right) \frac{12\lambda_1}{\alpha_1 \sinh[q\pi(\lambda_1/\Delta_1)^{1/2}]}. \quad (3.23)$$

A typical solution to (3.14) is shown in Figure 3.4(a). As expected, the amplitude of the ripples is given by a non-vanishing function. The exponential dependence on the parameter Δ_1 has generated a lot of studies on generalized solitary waves. Indeed, studying the long wave solution which bifurcates from the state of rest at $\Delta_1 = 0$ leads to an exponentially small amplitude of the ripples as a function of Δ_1 . On the other hand, the resonance between two periodic waves, a long wave of wavelength $2L$ and a short wave of wavenumber q , is characterized by the dependence on L through $\sin(qL)^{-1}$. Here we deal with a linear case, so the amplitude tends to infinity when the ratio between the wavelengths is an integer. For the full multi-layer problem, one observes that the ripples amplitude reaches the solitary wave amplitude. We will not focus on this point in this paper, since it is the same phenomenon for any long wave solution. The reader interested in this question is referred to [19, 21].

One can plot the amplitude a_L^1 as a function of L in order to get a diagnostic tool to check the possible vanishing of the amplitude (which would mean the existence of true solitary waves with exponential decay at infinity). We see in Figure 3.5(a) that some U-curves are obtained, separated by vertical asymptotes $qL = 0[\pi]$ related to the “periodic” resonance just mentio-

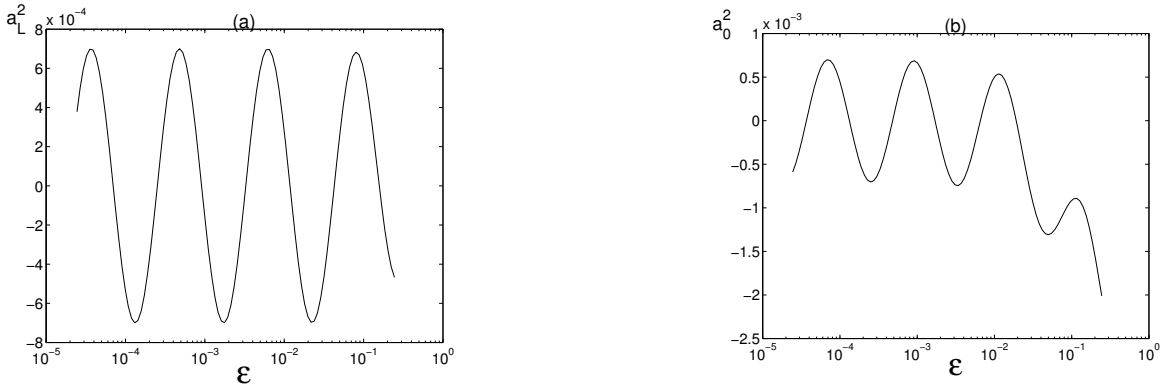


FIG. 3.6 – Amplitude of the oscillations versus ϵ , for the forcing u_s^2 , with a fixed domain length L : (a) Oscillations on the side, (b) Oscillations on the top.

ned. Each curve reaches an extremum and never crosses zero. When the amplitude jumps to the following U-curve, it means that the domain length is increased enough to contain one additional oscillation. So we find the main characteristics of well-known generalized solitary waves.

3.3.3.b “Table-top” forcing : ripples on the sides

First we write the expression for the amplitude. It reads

$$a_L^2 \approx \frac{\kappa}{q^2} u_s^2(L) - \left(\frac{\pi\kappa}{q \sin qL} \right) \frac{(-6\beta_1\lambda_1)^{1/2} \sin[q(\lambda_1/ - \Delta_1)^{1/2} \cosh^{-1}(1/\epsilon)]}{-\beta_1 \sinh[q\pi(\lambda_1/ - \Delta_1)^{1/2}]}. \quad (3.24)$$

A typical solution to (3.14) is depicted in Figure 3.4(b). The dependence on the parameters is different. It comes from the presence of an oscillating function arising in the computation of the residue. So the amplitude can vanish in this case. However, it occurs only for discrete values of the parameters. In particular, for a generic parameter set, we get the same behaviour for $a_L^2(L)$ as in the previous case (Figure 3.5b). Here the word *generic* is used to specify that the sinusoidal term in the numerator is non zero.

If we fix the domain length L and plot the amplitude versus the parameter ϵ , which is a measure of the solitary wave width, we observe the oscillatory behaviour (see Figure 3.6(a), where the sinusoidal function is emphasized with a logarithmic scale for ϵ). It means that the ripples disappear for an infinite number of values of ϵ accumulating to zero. In the limit, these values are given by

$$\epsilon_n \sim \exp\left(-\frac{2n\pi\alpha_1}{q(-6\beta_1\lambda_1)^{1/2}}\right). \quad (3.25)$$

3.3.3.c “Table-top” forcing : ripples on the top

As can be seen on the solution plotted in Figure 3.4(b), there are some ripples on top of the central part of the long wave. Their amplitude is given by

$$a_0^2 \approx \frac{\kappa}{q^2} u_s^2(0) + \frac{\pi\kappa}{q\beta_1} \left(\frac{(-6\beta_1\lambda_1)^{1/2} \sin[q(\lambda_1 - \Delta_1)^{1/2} \cosh^{-1}(1/\epsilon)]}{\tan qL \sinh[q\pi(\lambda_1 - \Delta_1)^{1/2}]} - \frac{(-6\beta_1\lambda_1)^{1/2} \cos[q(\lambda_1 - \Delta_1)^{1/2} \cosh^{-1}(1/\epsilon)]}{\sinh[q\pi(\lambda_1 - \Delta_1)^{1/2}]} \right). \quad (3.26)$$

The behaviour as L varies is then clearly different because of the term $1/\tan(qL)$. Indeed, Figure 3.5(c) clearly shows the behaviour of the term $a_0^2(L)$. It leads to the vanishing of the amplitude on each interval corresponding to a certain number of oscillations on $[-L; L]$. Hence, for each number of ripples in the solution, we can find a L -value such that only ripples in the tail of the main pulse are present. However because of the last term in (3.26), these vanishing L -values do not cross zero at the center of the interval. The amplitude is shifted vertically and the S-curves are not centered around zero. Consequently, we cannot have a value of L so that both a_L^2 is at an extremum and a_0^2 is zero.

Thus in the one-parameter family of solutions, there exists one value such that there are no ripples on top of the central core, and another one with ripples of minimum size in the tail of the solitary wave.

To emphasize the oscillatory behaviour, the amplitude a_0^2 is shown as a function of ϵ in Figure 3.6(b), again in logarithmic scale. In this case, we do not get immediately the oscillations around zero for ϵ close to 1, i.e. for classical solitary waves. But this is due to the way we measure the amplitude at $x = 0$, by removing the amplitude of the main core. This is valid only for flat main cores. We observe a difference in phase with the amplitude of the ripples on the sides. When the amplitude a_L^2 vanishes, the solution necessarily has oscillations on its “table-top” part.

Note also that the enlargement of the central core as $\epsilon \rightarrow 0$ gives more space for ripples. The oscillations in Figure 3.6 correspond to the change in the distribution of ripples between the central part and the tails.

3.3.4 Effect of residuals

From the above expressions for the ripple amplitudes we see that the main terms, related to the residue of the poles, may be very small or even zero. Let us now comment on this case.

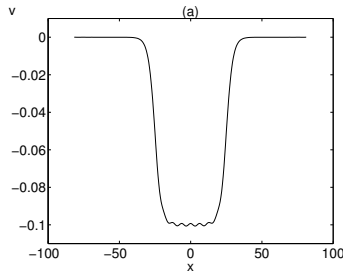


FIG. 3.7 – Solution for u_s^2 when the residue vanishes in a_L^2 .

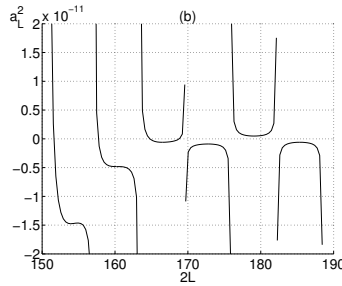


FIG. 3.8 – Amplitude of the oscillations on the side versus $2L$, for u_s^2 , when the residue vanishes.

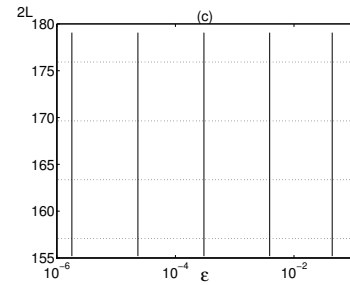


FIG. 3.9 – Lines of zero amplitude (solid) and of linear resonances (dotted) in the (ϵ, L) -plane.

On one hand, the sinh term in the denominator leads to an exponential dependence on the parameters q and Δ_1 . Therefore, in order to get a negligible residual, we must use a very large domain so that the amplitude is well given by the exponentially small residue term with the $\sin(qL)^{-1}$ behaviour. But what happens if L is not large enough? Then both terms compete or possibly even the residual dominates. A plot of the amplitude versus L could show the behaviour of this residual.

For the “table-top” forcing case, the residue can be equal to zero for an infinite number of parameter values. For such values, the residual cannot be neglected any more. Moreover, in numerical computations, the residue is not exactly zero so that a very large domain should be used in order to get a small enough residual.

Practically, if we choose such a parameter set, the solution depicted in Figure 3.7 has no ripples on the sides within graphical accuracy. Moreover a plot of the amplitude for this value of ϵ , for a given interval $[-L; L]$, can lead to a transition from S-curves to U-curves (or vice versa). For instance, Figure 3.8 shows the amplitude on the sides in this case. For the smallest L -values, the behaviour of the residual is significant, and for the largest values, we see the expected U-curves. It is an interval on which both terms compete. This is misleading : one may be tempted to conclude that the amplitude vanishes at some values of L . Even the very small amplitude values can be justified by the exponential dependence and there is no reason *a priori* to suspect the validity of these observations.

What is surprising and misleading is that the behaviour of the residual looks similar to the normal behaviour, that is an S-curve or a U-curve. In fact, we can formally write the residual

in a form which makes its behaviour as a function of L explicit :

$$a_L^1 = \frac{\kappa}{q^2} u_s^1(L) - \frac{\kappa}{q} \left(\frac{12\pi\lambda_1 q}{\alpha_1 \sin qL \sinh[q\pi(\lambda_1/ - \Delta_1)^{1/2}]} + \frac{1}{1 - \exp[-2q\pi(\lambda_1/ - \Delta_1)^{1/2}]} \left(J_1^1(L) - \frac{J_2^1(L)}{\tan qL} \right) \right), \quad (3.27)$$

$$a_L^2 = \frac{\kappa}{q^2} u_s^2(L) + \frac{\kappa}{q} \left(\frac{\pi(-6\beta_1\lambda_1)^{1/2} \sin[q(\lambda_1/ - \Delta_1)^{1/2} \cosh^{-1}(1/\epsilon)]}{\beta_1 \sin qL \sinh[q\pi(\lambda_1/ - \Delta_1)^{1/2}]} - \frac{1}{1 - \exp[-2q\pi(\lambda_1/ - \Delta_1)^{1/2}]} \left(J_2^2(L) - \frac{J_1^2(L)}{\tan qL} \right) \right), \quad (3.28)$$

$$a_0^2 = \frac{\kappa}{q^2} u_s^2(0) + \frac{\kappa}{q} \left(\frac{\pi(-6\beta_1\lambda_1)^{1/2} \sin[q(\lambda_1/ - \Delta_1)^{1/2} \cosh^{-1}(1/\epsilon)]}{\beta_1 \tan qL \sinh[q\pi(\lambda_1/ - \Delta_1)^{1/2}]} - \frac{\pi(-6\beta_1\lambda_1)^{1/2} \cos[q(\lambda_1/ - \Delta_1)^{1/2} \cosh^{-1}(1/\epsilon)]}{\beta_1 \sinh[q\pi(\lambda_1/ - \Delta_1)^{1/2}]} - \frac{1}{1 - \exp[-2q\pi(\lambda_1/ - \Delta_1)^{1/2}]} \left(J_3^2(L) - \frac{J_1^2(L)}{\sin qL} \right) \right). \quad (3.29)$$

We get expressions depending on $\sin(qL)^{-1}$ or $\tan(qL)^{-1}$ and some integrals $J_{1,2,3}^{1,2}$ which turn out to be mainly monotonic in L . Then we clearly see that for small residue terms, related to the U-curves of $\sin(qL)^{-1}$, the behaviour is dominated by residuals with a $\tan(qL)^{-1}$ term leading to S-curves (and the opposite for a_0^2). For this explicit example, we can go even further. Indeed, the values of the parameters ϵ and L for which the ripples disappear on the sides, obtained from the simplified expression (3.24), are located along regularly spaced vertical lines in the (ϵ, L) plane (see Figure 3.9 with a logarithmic scale for ϵ). They are lines of existence of solitary waves with exponential decay. By varying L for a fixed ϵ , even very close to one of these lines of zero amplitude, one always follows a line which is parallel to these vertical lines. Therefore we cannot in fact find vanishing values of the amplitude due to the predominance of the residual. In contrast, following the solution by varying ϵ for a fixed L , as in Figure 3.6, corresponds to a continuation along lines perpendicular to the lines of existence of true solitary waves.

A summary of the observations for the “table-top” generalized solitary wave is as follows. First, the ripples can be present simultaneously on the top and on the sides of “table-top” solitary waves, although there exists a value of the one-parameter family of solutions for which the ripples disappear on the top. Second, as opposed to the sech^2 forcing, the amplitude of the ripples in the tail can vanish for some isolated values of the parameter space, along lines in the (ϵ, L) plane. Third, they cannot vanish both at the same time. Fourth and last, some confusion may come from the interpretation of numerical results. One must be very careful with generalized “table-top” solitary waves, and expect different results from those for common generalized solitary waves with the sech^2 core.

3.4 Solving the full system

Next we return to the system (3.9). The objective is to compute some solitary wave solutions of these coupled eKdV equations and to compare the results with the theory of the previous section. However we do not have an explicit knowledge of the long wave solutions in this coupled system. First we give some general properties of the system. Then we choose a suitable parameter set, for which we compute numerical solutions.

3.4.1 Determination of the limiting case

The system (3.9) can be written as a spatial dynamical system of dimension four, in contrast to the eKdV equation which leads to a two-dimensional dynamical system :

$$w_x = \mathcal{F}(w) \tag{3.30}$$

with $w = \{u, v, u_x, v_x\}^t$ and

$$\mathcal{F}(w) = \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \\ -\frac{1}{\lambda_1}(\Delta_1 u + \frac{1}{2}\alpha_1 u^2 + \frac{1}{3}\beta_1 u^3 + \kappa_1 v) \\ -\frac{1}{\lambda_2}(\Delta_2 v + \frac{1}{2}\alpha_2 v^2 + \frac{1}{3}\beta_2 v^3 + \kappa_2 u) \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

From the dynamical system point of view, solitary waves are homoclinic solutions to the zero equilibrium point, which is hyperbolic. The orbit connects zero to itself by turning around a centre. Here we are particularly interested in homoclinic orbits which are close to heteroclinic orbits between zero and another hyperbolic fixed point. Let us look at the eKdV equation from a geometrical view. The equation as well as its solitary wave solutions are given in section 2. When u_x is plotted versus u , the phase planes shown in Figure 3.10 are obtained.

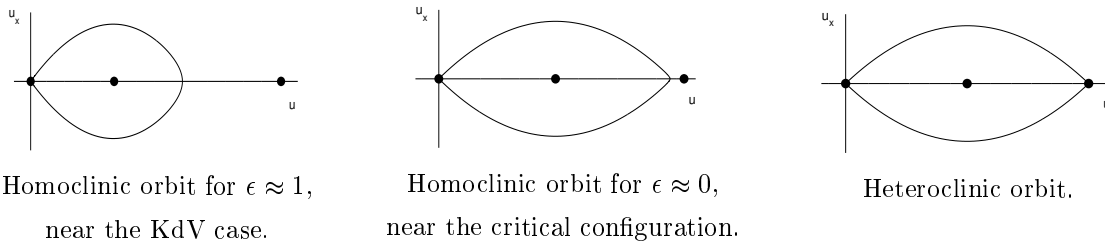


FIG. 3.10 – Various phase planes corresponding to the eKdV equation. The dots represent fixed points.

Generalized solitary waves are solutions which are homoclinic to periodic orbits around the zero fixed point, which is then a saddle-centre equilibrium for a four-dimensional system. In the present paper, we are interested in “almost heteroclinic” orbits connecting the saddle-centre zero and coming close to a second saddle-centre equilibrium.

Therefore, the first conditions the system must satisfy are related to the fixed points. There must be such a saddle-centre equilibrium besides the saddle-centre zero, as well as a centre between them. In the coupled system, there are more than three fixed points; the others must not be too close so that they do not disturb this configuration. The equilibrium points are the solutions of the algebraic system

$$\begin{cases} \Delta_1 \bar{u} + \frac{1}{2}\alpha_1 \bar{u}^2 + \frac{1}{3}\beta_1 \bar{u}^3 + \kappa_1 \bar{v} &= 0, \\ \Delta_2 \bar{v} + \frac{1}{2}\alpha_2 \bar{v}^2 + \frac{1}{3}\beta_2 \bar{v}^3 + \kappa_2 \bar{u} &= 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

The local behaviour around such critical points is determined by the eigenvalues of the Jacobian at these points. One could find the expression of the fixed points and linearize explicitly, but there are now nine fixed points to consider. Moreover one would obtain some complicated inequalities, making it unpractical to determine explicitly a convenient parameter set. Instead, it is simpler to enter the parameters in a Matlab program that computes the fixed points and their eigenvalues. We then check that we are in a “good” case.

But satisfying these conditions on the fixed points is not sufficient to get a heteroclinic orbit. There is another condition that involves the Hamiltonian of the system (3.10). When a system has a heteroclinic orbit between two fixed points, these two fixed points lie on the same energy level, that is

$$V(\bar{u}, \bar{v}) = V(0, 0) = 0. \quad (3.33)$$

In fact, in the system (3.9) under consideration, such a true heteroclinic orbit connecting the equilibrium points may not exist. Indeed, as we showed for the uncoupled case, the small oscillations cannot vanish simultaneously in the tail and on the top of the “table-top” solitary wave. Thus, the heteroclinic orbit would in general connect periodic orbits around the fixed points, and in special cases it may connect one fixed point to a periodic orbit of the other one, but it cannot connect both directly. So it is possible that the condition is only an approximate one. However this is enough to give us a configuration we are able to solve.

Finally, in order to determine the limiting case, we have to solve three equations (two for the fixed points and one for the zero energy). The unknowns are the equilibria \bar{u} and \bar{v} , and one of the parameters that we will use to specify the difference from the limiting configuration. We choose this parameter to be Δ_1 . Explicit solutions are not available, even with Maple, so the solutions are computed numerically with great accuracy. For these computed solutions, we look at the eigenvalues to check that the local spatial dynamics is the expected one.

3.4.2 Choice of a parameter set

As discussed above, we are not going to review all possible parameter sets. Instead we note that the weak coupling case presents the advantage that it is quite close to an explicitly known

configuration. Hence we focus our attention on this case.

Let us next assume we know an appropriate parameter set. The system to be solved is nonlinear and the numerical method should use an iterative algorithm to find the solution. Thus it is necessary to have an initial estimate which is close enough to this solution. At least, we need to know something about the shape of the main core, otherwise convergence will be difficult to obtain. In the general case, the heteroclinic orbit is not necessarily given by a tanh function, as for the eKdV model. Indeed, in the particular case of the eKdV equation, the centre is exactly in the middle between the two hyperbolic fixed points. This provides a certain symmetry to the heteroclinic solution. This is usually not the case.

Thus we consider that the first equation mainly defines the solitary wave, while the second equation brings in the small ripples. The dispersive coefficients are chosen to be $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ and we choose the nonlinear coefficients in the first equation to be $\alpha_1 = -\beta_1 = 1$. The coupling coefficients are $\kappa_1 = -\kappa_2 = -0.1$. The parameter Δ_2 approximately determines the wavelength of the ripples. We set $\Delta_2 = 1$ so that the ripple wavelength $\lambda_{ripples}$ is approximately 2π . The nonlinear coefficients of the second equation are seen only as perturbations in this context. They are chosen to be equal to those of the first equation ($\alpha_2 = -\beta_2 = 1$), but since $v = O(\kappa_2)$, the nonlinear terms are small. Finally, the parameter Δ_1 is found numerically as explained in the previous subsection. Then it is shifted by a small parameter ϵ in order to get a homoclinic solution :

$$\Delta_1 = \overline{\Delta}_1 + \epsilon, \quad \epsilon > 0. \quad (3.34)$$

The new parameter ϵ plays the same role as the one in section three (with a different scaling).

Satisfying the three conditions for the fixed points with these coefficients leads to several real solutions. We choose the triplet which is close to the uncoupled case. With eleven significative numbers, it reads

$$\begin{cases} \bar{u} & \simeq & 1.0013184532, \\ \bar{v} & \simeq & -0.10616637224, \\ \overline{\Delta}_1 & \simeq & -0.17704900313. \end{cases} \quad (3.35)$$

The u equilibria of the system for this parameter set are shown in Figure 3.11. The scheme for the v equilibria is similar. We see that there are five real fixed points. If we look for solutions roughly in the interval $[0; 1]$, the two exterior ones are not relevant. The linearization around the three equilibria in the middle is represented on the graph and leads to the required situation : two saddle-centres and a centre in between.

Note that the value for $\overline{\Delta}_1$ is roughly a shift of order $O(|\kappa_1|\kappa_2)$ from the critical value for the uncoupled eKdV equation $\alpha_1^2/6\beta_1 = -1/6$. Consequently, we expect the main core charac-

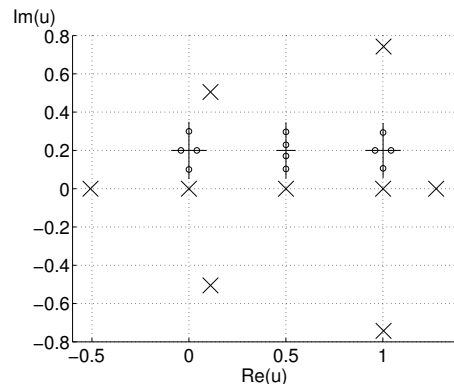


FIG. 3.11 – Fixed points of u in the complex plane with the eigenvalues for the three real equilibrium points of interest.

teristics to be given by the explicit solution of the eKdV equation, taking into account the difference ϵ from the critical value and the real limiting amplitudes given by \bar{u} and \bar{v} .

3.4.3 Numerical method

The numerical integration of the boundary problem is performed by a spectral method. Since we are looking for periodic waves, the Fourier basis is chosen. The system is therefore solved on a truncated interval with periodic boundary conditions. The domain length $2L$ corresponds to an approximation of the wavelength of long waves. As explicitly emphasized in section 3.3, this new parameter influences the solution, in particular the amplitude of the ripples. It corresponds to the free parameter of the one-parameter family of generalized solitary waves.

The numerical procedure was as follows : the iterations are initiated with the solitary wave only and then the algorithm finds the ripples. Most of the time, we succeeded in converging to a solution except when the solitary wave shape was not well estimated. The Matlab function “fsolve” was used to solve the nonlinear algebraic system of equations. Based on a trust-region method, it turned out to be more robust than Newton’s method.

An accurate knowledge of the critical value $\bar{\Delta}_1$ is necessary to get the solution. Moreover, the choice of a parameter quite close to the parameter used in the uncoupled case allows us to consider a solution of the eKdV equation with the same slight shift ϵ to get a “table-top” solitary wave that matches the main core of the solution. In the same way, the actual limiting amplitude is known from the fixed point, and it can be used for the initial estimate.

The method was applied successfully to the forced equation for which we know the explicit solution. “Table-top” waves with arbitrarily small ϵ were well computed and the behaviour as a function of L and ϵ correctly reproduced. In particular, this shows that all the difficulties

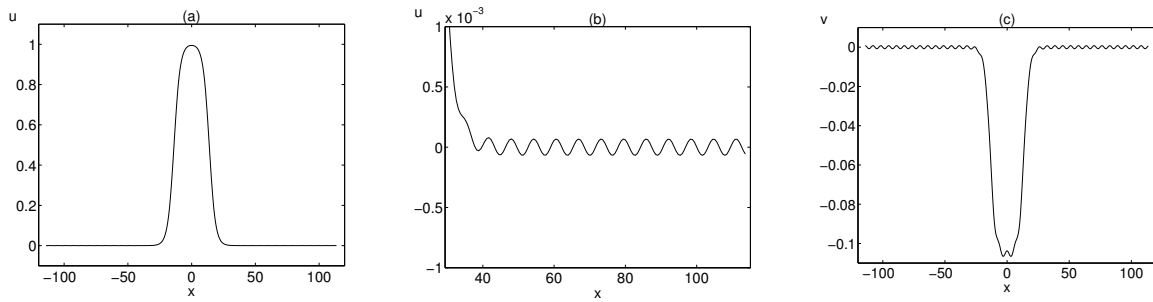


FIG. 3.12 – Solution of the full system for $\Delta_1 = \overline{\Delta}_1 + 10^{-5}$, $2L = 228.45$; $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -1$, $\lambda_1 = 1$, $\kappa_1 = -0.1$, $\Delta_2 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\kappa_2 = 0.1$: (a) Profile of $u(x)$, (b) Tail of $u(x)$ with ripples, (c) Profile of $v(x)$.

we encountered in solving the full system are due to its higher dimensionality.

3.4.4 Description of the numerical solutions

Because of the particular behaviour of the solutions we are interested in, we distinguish two cases. First, we deal with values of ϵ not too close to zero. In this case the homoclinic solution does not pass too close to the nonzero saddle-centre fixed point. The main core is a bit rounded but has not yet flattened. Thus, we are not quite discussing front-like solutions, but rather solitary waves having a more rounded shape than the sech^2 solitary wave of the KdV equation. Second, we focus on ϵ -values very close to zero. It turns out to be more complicated since many solutions have been found to exist for a given parameter set, i.e. there is multiplicity of generalized “table-top” solitary waves with different shapes (mainly different widths of the main core).

Figure 3.12 shows a solution for a value of ϵ which is greater than the threshold value where multiplicity occurs. As explained before, the main core is large but not as thick as in the examples of section 3.3. The main observations one can make for this particular parameter set are the following. First, both u and v are generalized thick solitary waves because of the coupling. The ripples of the solution u are one order of magnitude smaller than those of v since we have chosen weak coupling coefficients. We need to zoom in to observe them (Figure 3.12b). Second, small oscillations appear upon the rounded part of the long wave as well as small ripples on each side. This is not surprising in view of the results in section 3.3. The choice of an arbitrary parameter set has a very low (but not zero) probability to lead to vanishing ripples. Indeed, solutions with ripples of zero amplitude only exist on a set of measure zero in the parameter space. Third, the two kinds of ripples have approximately the same wavelength, nearly equal to the wavelength calculated by the dispersion relation. Fourth, their amplitude is different and they are not in phase. We found the same characteristics for the uncoupled case.

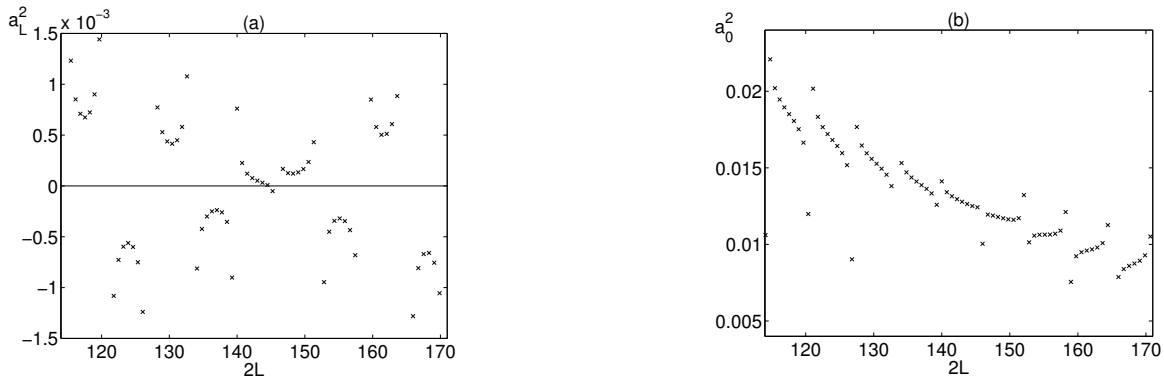


FIG. 3.13 – Solutions of the full system. Amplitude of the ripples along the curve $L = L(\epsilon)$: (a) on the sides, (b) on the top.

According to the conclusions of section 3.3, we do not compute solutions of the system for various domain lengths. Instead, we define a curve in the (ϵ, L) plane by choosing L to be exactly a prescribed integer multiplied by the estimated width of the main core, which is function of ϵ . The resulting measured amplitudes are depicted on Figure 3.13. Ripples on the sides turn out to vanish at one point along the followed curve. Otherwise, we observe the U-curves reaching local extrema and increasing for qL close to an integer. Conversely, the oscillations on top of the main pulse have a one-parameter amplitude given by S-curves, except in the region where a_L vanishes.

As suggested in section 3.3, we plot the amplitudes as functions of ϵ to detect the vanishing of the side ripples. We only computed solutions for ϵ not too small. Nevertheless we get enough values to confirm for the coupled system the same behaviour we observed for the forced equation. Indeed Figure 3.14(a) shows that the behaviour of $a_L(\epsilon)$ is oscillatory around zero, the number of zero amplitudes growing with smaller ϵ . The amplitude of the ripples in the middle is also oscillatory (Figure 3.14b). However we note that for the full nonlinear system, these oscillations are not as regular as for the uncoupled system. By solving the same coupled system without the nonlinear terms in the second equation ($\alpha_2 = \beta_2 = 0$) (but is still a fourth-dimensional system) we get a regular behaviour. This shows that the irregularity comes from the influence of these terms.

Although it is not possible to get numerically exact solutions with no ripples on the side or on the flat part of the long wave, we can show examples which seem to have no oscillations within graphical accuracy (Figure 3.15). As opposed to the exponentially small but non-vanishing oscillations of sech^2 generalized solitary waves, we have shown here that the amplitude may really vanish.

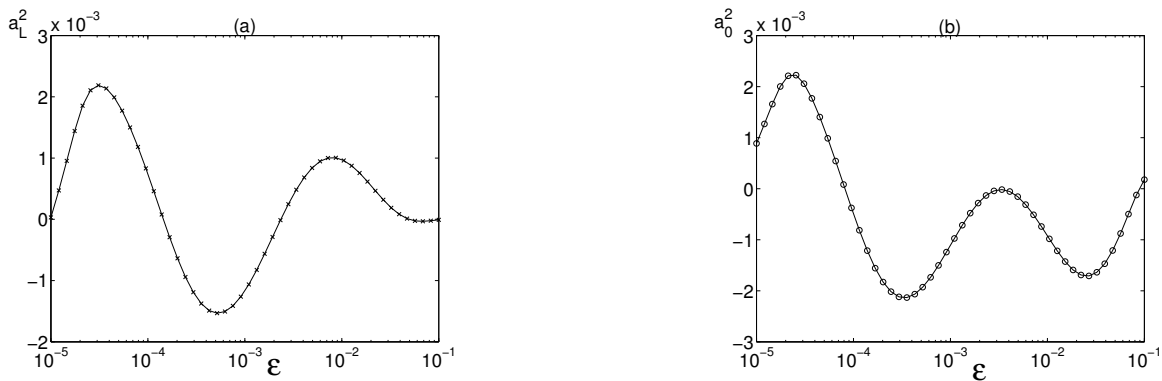


FIG. 3.14 – Solutions of the full system. Amplitude of the ripples versus ϵ : (a) on the sides, (b) on the top.

Next we discuss the very flat solutions. Using a continuation method, we had difficulties in staying on the continuation branch. Even with smaller and smaller continuation steps, the solutions were lost when approaching the limiting configuration. Finally, we decided to use instead a more direct approach to initiate the nonlinear algorithm, and we tried to find solutions with different initial shapes. We found different solutions for a given parameter set. Once a certain threshold in ϵ is reached, solutions with different widths could be computed (for a fixed domain length, this limits the number of solutions). Figure 3.16 shows three converged solutions found from three initial estimates. If we increase the width of the estimate even further, we get a discrete number of solutions, corresponding to a different number of ripples on top of the long wave and on the sides. In fact, for all the values of ϵ below the threshold, we got similar solutions. Only the amplitude of the ripples slightly varies, as can be seen on Figure 3.17 which shows the solutions obtained with the same three initial estimates, but for a different system since Δ_1 is $\bar{\Delta}_1 + 10^{-10}$ instead of $\bar{\Delta}_1 + 10^{-6}$.

3.5 Embedding, cascade and multiplicity

The previous observations correspond to three phenomena which occur in the region of the parameter space under consideration. First, we focus on the existence of true solitary waves, in the sense that only a localized pulse is present in the solution, isolated among nonlocal solitary waves. Second, approaching a second saddle-centre equilibrium leads to a cascade of such local solitary waves, which explains the accumulation of solutions with ripples of zero amplitude when $\epsilon \rightarrow 0$. Last, since we are looking for generalized solitary waves, we can state that sufficiently close to the heteroclinic case, the connection from the periodic orbits of zero to themselves is not unique.

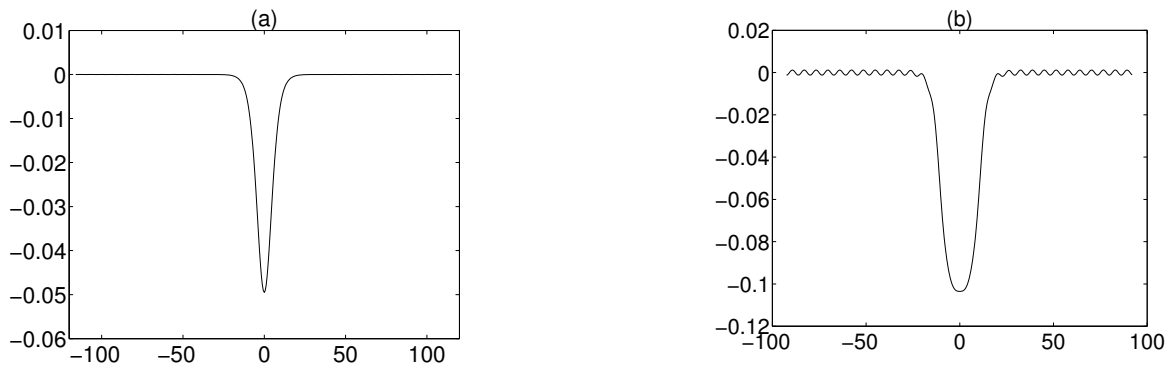


FIG. 3.15 – Solution with no ripples : (a) on the sides (first zero from the right of Figure 3.14a), (b) on the top.

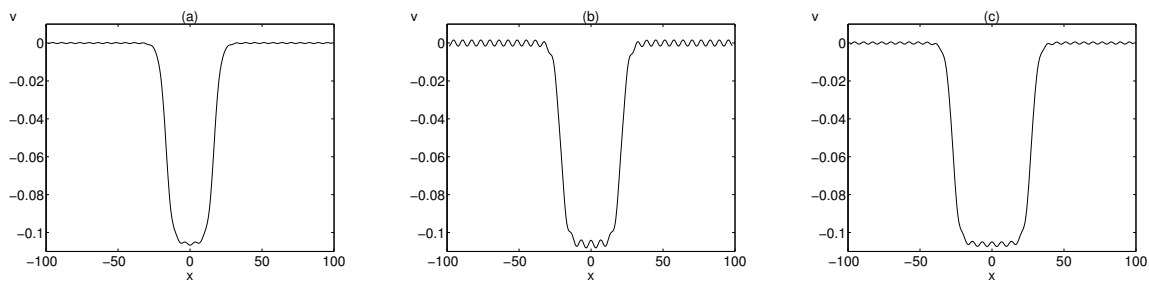


FIG. 3.16 – Solution v for $\epsilon = 10^{-6}$ with an initial estimate whose width is found from the critical value by a shift equal to (a) 10^{-6} , (b) 10^{-8} , (c) 10^{-10} .

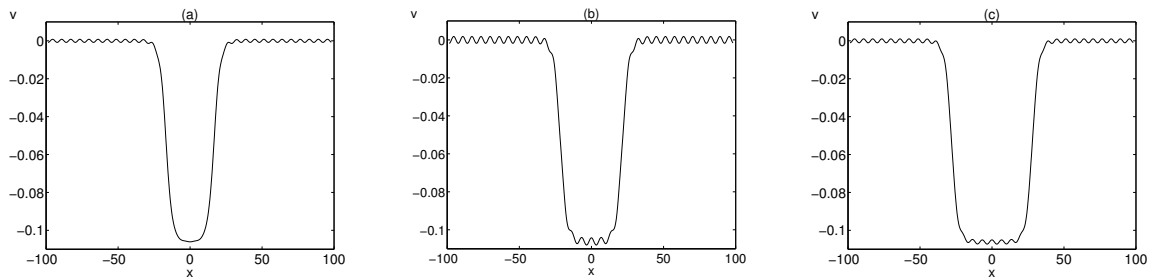


FIG. 3.17 – Solution v for $\epsilon = 10^{-10}$, with the same initial estimates as in Figure 3.16.

3.5.1 Embedded solitary waves in the linear spectrum

One of the main conclusions from our computations is that solutions with no oscillations on the side occur along curves in a parameter plane. That is, these solutions belong to a set of measure zero in the parameter space, which is presumably why they initially did not attract interest. For instance, Lombardi [18] proved for the water wave problem with surface tension that true elevation solitary waves cannot exist in a generic sense when the Froude number is greater than one and the Bond number smaller than one third. The word *generic* means that even if they exist, they belong to a set of measure zero in the parameter space. Indeed, constant periodic oscillations get caught onto the main pulse, as expected in view of the dispersion relation, which clearly illustrates how a solitary wave can be in resonance with the linear spectrum. For the water wave problem with surface tension, the resonance comes from the change of curvature of the dispersion relation. On the other hand Figure 3.2 shows a possible case with two wave modes that is considered in the present paper. Recently, there has been increased interest in these solitary waves with vanishing ripples, which are embedded in the linear spectrum, and hence are called embedded solitary waves [3, 6].

Champneys et al. [7] studied numerically the water wave problem with surface tension in order to determine whether or not the ripple amplitudes could vanish. It turns out that true elevation solitary waves seem not to exist, although a rigorous proof for this nongeneric possibility has not yet been obtained as far as we are aware. Note that a fifth-order KdV equation with complicated nonlinearities can lead to zero-amplitude ripples [4].

Concerning the multi-layer problem, numerical studies have not yet addressed this point, although Akylas and Grimshaw [1] showed in an analytical study using exponential asymptotics that certain stratifications could lead to embedded solitary waves. According to the present results, we argue that the possibility is relevant, although the example of the fifth-order KdV model imposes some caution. We can refer to the numerical results obtained by Michallet and Dias [19]. They computed solutions for increasing Froude numbers and plotted the absolute amplitude of the ripples for these values (figure 16 of [19]). In the case where the depth of the bottom layer is below a critical value (for a small density ratio), the ripple amplitude is not monotonic. It seems to go through zero, even though it is not so obvious as in our computations since they use absolute values for the amplitude. The corresponding solutions have several oscillations on top of the main core (figure 17 of [19]). Michallet and Dias concluded from their calculations that the computed solutions may be surrounded by more complicated multimodal solutions, so that different generalized long waves exist in a narrow region of the parameter space. We can now expand on this statement. The two-layer problem seems to have embedded solitary waves for certain conditions on the relative depths. Moreover, as the Froude number increases, it approaches the critical value where front solutions occur.

The computed solutions with oscillations on top of the main core are likely to be generalized “table-top” solitary waves like those studied in the present article. Therefore, we infer that the difficulties encountered here for the coupled eKdV system are also present in the full problem. That is, a cascade of vanishing ripples occurs as the Froude number approaches its front-related critical value, and there is non-uniqueness of the generalized solitary waves near this critical value. In the next subsection, we expand on this point.

3.5.2 Cascade of homoclinic solutions for a saddle-centre fixed point

Two observations have led us to this explanation. On one hand, the behaviour of the amplitude as a function of ϵ clearly shows an accumulation near zero. The analytic computation for the uncoupled system in section 3.3 showed explicitly how the accumulation occurs. On the other hand, difficulties in the computations near the critical value made us look at the various and complicated solutions obtained in solving another four-dimensional system, namely the fifth-order KdV-type equations. In these well studied examples, it was discovered that a cascade of homoclinic solutions with many pulses exist when zero is a saddle-centre equilibrium [20]. These solutions are characterized by an increasing number of oscillations between the pulses as one gets closer to the zero fixed point. But what was more striking is that the asymptotic values of the accumulating parameter match ours.

Indeed, by looking at the proof of this cascade of solutions, we see that a similar phenomenon occurs in the present situation. We can summarize the argument used for the fifth-order KdV models as follows. Consider the spatial dynamics around a saddle-centre equilibrium (zero, for example). As discussed before, the solutions are isolated in the linear spectrum, leading more to generalized solitary waves. Suppose that a parameter is defined so that a homoclinic orbit exists when this parameter is zero. Then, a symmetric solution with two (or more) pulses occurs for a parameter value close to zero, the two pulses being linked by some periodic oscillations. The orbit comes from the unstable manifold of zero, follows closely the homoclinic orbit which comes back near the zero equilibrium, after having turned around the centre equilibrium. It connects to a periodic orbit around zero, then goes again around the centre and finally returns to zero on its stable manifold in a symmetrical way. Based on geometrical arguments using the normal form around the zero saddle-centre, it was proved that the homoclinic solution has more and more oscillations between the two pulses as the parameter approaches zero. This is the cascade of homoclinic solutions.

In our situation, these kinds of solutions are found for values of ϵ close to 1. *A priori*, the above argument applies here. However what is of concern to us are the homoclinic orbits which pass in the neighborhood of a second saddle-centre equilibrium. Such orbits can almost be viewed as being two heteroclinic orbits symmetrically connecting the two equilibria. Let the

parameter be defined now as the critical case where heteroclinic orbits are exactly obtained. For values close to it, we can describe what happens in a similar geometrical way. The solution leaves zero, follows mainly a heteroclinic orbit to reach the other equilibrium. Arriving in its neighborhood, it connects to a periodic orbit before coming back to zero symmetrically.

Here, we get only one hump where the oscillations connect two almost-heteroclinic orbits, while in [20] they connect two almost-homoclinic orbits. All the steps of the proof can be adapted by considering this second saddle-centre critical point. In particular, the normal form is identical, thus the computations leading to the estimation of the accumulation of parameter values are the same. That explains the observed agreement for the cascade.

3.5.3 Multiplicity of homoclinic, almost heteroclinic, solutions to periodic orbits

The third phenomenon is the existence of a multiplicity of solutions when ϵ is beyond a threshold value, which comes in addition to the cascade just described. Indeed, if we consider generalized solitary waves, there is a difference, in that, instead of connecting the zero fixed point, these solutions connect to a periodic orbit around zero.

If ϵ is not too small, the homoclinic orbit to this periodic orbit passes far enough from the second equilibrium, so that the symmetry fixes it uniquely.

On the opposite, if ϵ is below the threshold, we are in a configuration of almost-heteroclinic orbits. But they are in fact heteroclinic orbits connecting a periodic orbit around zero to a periodic orbit around the second fixed point. And symmetry does not fix these heteroclinic orbits. The connection can be made at any location (in space since it is a spatial dynamical system!). In other words, for our computations on a bounded domain, the distribution of the ripples between the top and bottom parts of the solution is arbitrary.

3.6 Conclusion

We have studied some steady solutions of two models in the weakly nonlinear limit for two-layer flows. These solutions are a kind of generalized solitary waves, i.e. a long solitary wave in resonance with shorter periodic waves with constant amplitude. The interactions of the two wave modes can be generically modelled by two coupled KdV equations with cubic nonlinear terms (that is, two coupled eKdV equations). When the coupling coefficient is small, a simple model can be solved analytically. It consists in a harmonic linear oscillator equation forced by the “table-top” solution of the eKdV equation. This simple model can be studied explicitly, and from our analysis, we can express the amplitude of the oscillations and compare with the

more classical forcing of sech^2 . It turns out to be quite different. Indeed, the singularities in the complex plane are simple poles outside the imaginary axis for the “table-top” solution. It turns out that the amplitude of the ripples can vanish for a discrete set of parameter values. Moreover, in the one-parameter family of generalized solitary waves, there exists one value such that there are no ripples on the top of the main core, although the oscillations cannot vanish on the sides at the same time.

For the full coupled system, a spectral Fourier method is used to solve it numerically. For “table-top” long waves, but not so large that the wave is totally flat on the top, we find the same characteristics as for the uncoupled system. In particular, we found the existence of true solitary waves, in the sense that no ripples are present on the sides of the main core, along certain curves in a parameter plane. They are embedded solitary waves. But for larger and flat solitary waves, two other phenomena turn out to be relevant. First, the limiting case corresponding to fronts is characterized by a heteroclinic connection between two saddle-centre equilibria. As for multi-pulse homoclinic orbits for a single saddle-centre equilibrium, we can show that a cascade of homoclinic, almost heteroclinic, orbits are possible if we are close enough to the limiting configuration. Second, since we are looking for generalized solitary waves, the homoclinic orbits connect to a periodic orbit around zero, rather than to zero itself. In the case of almost heteroclinic orbits, this implies that symmetry no longer fixes the uniqueness of the connection.

Lastly, the numerical results of Michallet and Dias [19] for two-layer flows seem to show the existence of such embedded solitary waves with oscillations on the top of the main core. When the Froude number increases, the amplitude of the oscillations on the sides decreases to zero. We can speculate that the results obtained for our model will be found for the full problem. In [19], the computations were stopped before the Froude number was very close to the critical value for fronts. Only a new numerical study of the full problem could confirm the cascade and multiplicity of solutions as in the generic model presented in this paper.

3.7 Appendix : Truncated Fourier integrals

In order to evaluate the truncated Fourier integrals in (3.21) or (3.22), let us consider $u_s^{1,2}(z)e^{iqz}$, whose extension in the complex plane is analytic, except at some isolated points. For u_s^1 , the singularities are double poles, located periodically on the imaginary axis. For u_s^2 , they are symmetrical simple poles located on each side of the imaginary axis :

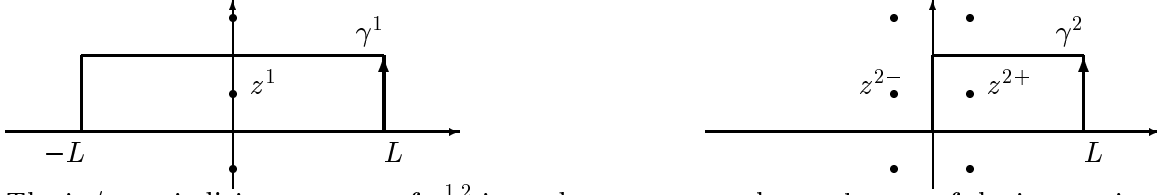
$$z^1 = i\frac{\pi}{2\chi} \begin{bmatrix} i\frac{\pi}{\chi} \\ \chi \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

$$z^{2\pm} = \pm \frac{\cosh^{-1}(1/\epsilon)}{2\chi} + i\frac{\pi}{2\chi} \begin{bmatrix} i\frac{\pi}{\chi} \\ \chi \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

$$\text{with } \chi = (-\Delta_1/\lambda_1)^{1/2}/2. \quad (3.38)$$

For each case, we use an integration contour $\gamma^{1,2}$ on which the residue theorem is applied :

$$\int_{\gamma^{1,2}} u_s^{1,2}(z) \exp(iqz) dz = 2\pi i \sum \text{Res}(u_s^{1,2}(z)e^{iqz}, z^{1,2\pm}). \quad (3.39)$$



The $i\pi/\chi$ -periodicity property of $u_s^{1,2}$ is used to group together real parts of the integrations :

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L u_s^1(x) e^{iqx} dx + \int_L^{-L} u_s^1\left(x + i\frac{\pi}{\chi}\right) e^{iq(x+i\pi/\chi)} dx &= (1 - e^{-q\pi/\chi}) \int_{-L}^L u_s^1(x) e^{iqx} dx, \\ \int_0^L u_s^2(x) e^{iqx} dx + \int_L^0 u_s^2\left(x + i\frac{\pi}{\chi}\right) e^{iq(x+i\pi/\chi)} dx &= (1 - e^{-q\pi/\chi}) \int_0^L u_s^2(x) e^{iqx} dx. \end{aligned}$$

According to Jordan's lemma, the integrations along the vertical part of the path far away tend to zero when L tends to infinity. Here we leave these parts explicitly and name them $R^{1,2}(L)$. Thus the residue theorem leads to

$$\int_{-L}^L u_s^1(x) e^{iqx} dx = \frac{2\pi i \text{Res}(u_s^1(z)e^{iqz}, z^1) - R^1(L)}{1 - e^{-q\pi/\chi}}, \quad (3.40)$$

$$\int_0^L u_s^2(x) e^{iqx} dx = \frac{2\pi i \text{Res}(u_s^2(z)e^{iqz}, z^{2+}) - R^2(L)}{1 - e^{-q\pi/\chi}}. \quad (3.41)$$

The residues are computed with series expansions, taking into account the main difference between the two forcings (z^1 is double whereas z^{2+} is a simple pole) :

$$\begin{aligned} \text{Res}(u_s^1(z)e^{iqz}, z^1) &= -\frac{24iq\lambda_1}{\alpha_1} \exp(-q\pi/2\chi), \\ \text{Res}(u_s^2(z)e^{iqz}, z^{2+}) &= \frac{(-6\beta_1\lambda_1)^{1/2}}{\beta_1} \exp(-q\pi/2\chi) \exp(iq \cosh^{-1}(1/\epsilon)/2\chi). \end{aligned}$$

Therefore the truncated Fourier integrals are explicitly given by

$$\int_0^L u_s^1(x) \cos(qx) dx = \frac{12\pi q\lambda_1}{\alpha_1 \sinh(q\pi/2\chi)} - \frac{R^1(L)/2}{1 - \exp(-q\pi/\chi)}, \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L u_s^2(x) \cos(qx) dx &= \frac{\pi(-6\beta_1\lambda_1)^{1/2} \sin(q \cosh^{-1}(1/\epsilon)/2\chi)}{-\beta_1 \sinh(q\pi/2\chi)} \\ &\quad - \frac{\text{Re}(R^2(L))}{1 - \exp(-q\pi/\chi)}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L u_s^2(x) \sin(qx) dx &= \frac{\pi(-6\beta_1\lambda_1)^{1/2} \cos(q \cosh^{-1}(1/\epsilon)/2\chi)}{\beta_1 \sinh(q\pi/2\chi)} \\ &\quad - \frac{\text{Im}(R^2(L))}{1 - \exp(-q\pi/\chi)}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

where

$$\begin{aligned} R^1(L) &= ie^{iqL} \int_0^{\pi/\chi} u_s^1(L+iy)e^{-qy} dy - ie^{-iqL} \int_0^{\pi/\chi} u_s^1(L-iy)e^{-qy} dy \quad (3.45) \\ &= 2\operatorname{Re} \left(ie^{iqL} \int_0^{\pi/\chi} u_s^1(L+iy)e^{-qy} dy \right), \end{aligned}$$

$$R^2(L) = ie^{iqL} \int_0^{\pi/\chi} u_s^2(L+iy)e^{-qy} dy - i \int_0^{\pi/\chi} u_s^2(iy)e^{-qy} dy. \quad (3.46)$$

Bibliography

- [1] Akylas T.R., Grimshaw R.H.J., Solitary internal waves with oscillatory tails, *J. Fluid Mech.* **242**, 279–298 (1992).
- [2] Boyd J.P. : Weakly Nonlinear Solitary Waves and Beyond-All-Orders Asymptotics. Kluwer, Boston, 1998.
- [3] Champneys A.R., Codimension-one persistence beyond all orders of homoclinic orbits to singular saddle centres in reversible systems, *Nonlinearity* **14**, 87–112 (2000).
- [4] Champneys A. R., Groves M.D., A global investigation of solitary wave solutions to a two-parameter model for water waves, *J. Fluid Mech.* **342**, 199–229 (1997).
- [5] Champneys A. R., Groves M.D., Woods P.D., A global characterization of gap solitary-wave solutions to a coupled KdV system, *Phys. Letters A* **271**, 178–190 (2000).
- [6] Champneys A. R., Malomed B. A., Yang J., Kaup D.J., “Embedded solitons” : solitary waves in resonance with the linear spectrum, *Physica D* **152**, 340–354 (2001).
- [7] Champneys A. R., Vanden-Broeck J.-M., Lord G.J., Do true elevation gravity-capillary solitary waves exist? A numerical investigation, *J. Fluid Mech.* **454**, 403–417 (2002).
- [8] Dias F., Il’ichev A., Interfacial waves with free-surface boundary conditions : an approach via a model equation, *Physica D* **150**, 278–300 (2001).
- [9] Dias F., Vanden-Broeck J.-M., On internal fronts, *J. Fluid Mech.* **479**, 145–154 (2003).
- [10] Fochesato C., Dias F., Amplitude des oscillations d’ondes solitaires généralisées, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **337**, 137–142 (2003).
- [11] Gear J.A., Grimshaw R., Weak and strong interactions between internal solitary waves, *Studies in Applied Math.* **70**, 235–258 (1984).
- [12] Gottwald G., Grimshaw R., Malomed B.A., Parametric envelope solitons in coupled Korteweg-de Vries equations, *Phys. Letters A* **227**, 47–54 (1997).
- [13] Grimshaw R. : Models for long-wave instability due to a resonance between two waves, in Trends in Applications of Mathematics to Mechanics, ed. Iooss, Guès, Nouri, Chapman & Hall/CRC, 2000.

-
- [14] Grimshaw R., Cook P. : Solitary waves with oscillatory tails, in Proceedings of the second international conference on hydrodynamics, Hong-Kong, Chwang, Lee & Leung (eds), Balkema, Rotterdam, 327–336, 1996.
- [15] Grimshaw R., Iooss G., Solitary waves of a coupled Korteweg-de Vries system, *Math. and Computers in Simulation* **62**, 31–40 (2003).
- [16] Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova, T., The modified Korteweg-de Vries equation in the theory of the large-amplitude internal waves, *Nonlinear Processes in Geophysics* **4**, 237–250 (1997).
- [17] Grimshaw R., Malomed B.A., New type of gap soliton in a coupled Korteweg-de Vries wave system, *Phys. Rev. Letters* **72**, 949–953 (1994).
- [18] Lombardi E. : Oscillatory integrals and phenomena beyond all algebraic orders. Lecture Notes in Mathematics 1741, Springer-Verlag, 2000.
- [19] Michallet H., Dias F., Numerical study of generalized interfacial solitary waves, *Phys. Fluids* **11**, 1502–1511 (1999).
- [20] Mielke A., Holmes P., O'Reilly O., Cascades of Homoclinic Orbits to, and Chaos near, a Hamiltonian Saddle-Center, *J. Dynamics Diff. Eqns.* **4**, 95–126 (1992).
- [21] Părău E., Dias F., Interfacial periodic waves of permanent form with free-surface boundary conditions, *J. Fluid Mech.* **437**, 325–336 (2001).
- [22] Vanden-Broeck J.-M., Elevation solitary waves with surface tension, *Phys. Fluids* **3**, 2659–2663 (1991).
- [23] Yang T.S., Akylas T.R., Weakly nonlocal gravity–capillary solitary waves, *Phys. Fluids* **8**, 1506–1514 (1996).

Chapitre 4

Problème d'évolution

Sommaire

4.1	Introduction	140
4.2	Cas d'un faible couplage	142
4.2.1	Résolution	142
4.2.2	Evolution d'une perturbation initiale	143
4.3	Système couplé	153
4.3.1	Méthode numérique	153
4.3.2	Obtention des ondes solitaires généralisées	155
4.3.2.a	Onde solitaire "arrondie"	156
4.3.2.b	Onde solitaire très large	164
4.3.2.c	Onde solitaire classique	169
4.3.2.d	Amplitude des oscillations en fonction de ϵ	170
4.3.2.e	Faible résonance	174
4.3.3	Evolution d'une perturbation initiale plus générale	177
4.4	Instabilité modulationnelle	180
4.5	Conclusion	187
	Bibliographie	188

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le système d'évolution composé de deux équations de KdV avec nonlinéarité cubique ("extended KdV")

$$\begin{cases} u_t + \Delta u_x + \alpha_1 u u_x + \beta_1 u^2 u_x + \lambda_1 u_{xxx} + \kappa_1 v_x & = 0 \\ v_t - \Delta v_x + \alpha_2 v v_x + \beta_2 v^2 v_x + \lambda_2 v_{xxx} + \kappa_2 u_x & = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

La dérivation d'un tel modèle a déjà été discutée. L'objectif est d'observer l'évolution des ondes solitaires larges généralisées, que nous avons mises en évidence dans le chapitre précédent. En effet, nous avons montré que ce système admet des solutions stationnaires de type onde solitaire généralisée avec un corps central correspondant à l'onde solitaire "large" de l'équation d'eKdV.

Typiquement, nous considérons un jeu de paramètres dont le graphe de la relation de dispersion ressemble à la Figure 3.2. Deux branches décroissantes représentent les deux modes en présence. La résonance onde longue-onde courte que nous étudions intervient entre une onde courte de la branche supérieure qui a la même vitesse de phase que l'onde solitaire de la branche inférieure. Une onde solitaire bifurque de la limite $k \rightarrow 0$ et a une vitesse

$$C = c_-(0) + \nu, \quad \nu > 0.$$

La résonance provient donc du fait qu'il existe un nombre d'ondes k_{res} tel que

$$C = c_+(k_{res}).$$

Le point de vue classique, hérité de l'équation de KdV est que si ν est petit, l'onde solitaire est de faible amplitude, et plus la vitesse C s'éloigne de $c_-(0)$, plus l'onde solitaire est ample. Ce n'est pas nécessairement le cas. En effet, dans le cas des solutions d'onde solitaire de l'équation d'eKdV, une vitesse faible correspond à une solution de faible amplitude dont la forme se rapproche de l'onde solitaire de KdV, mais lorsqu'on augmente la vitesse, l'amplitude grandit jusqu'à atteindre une amplitude limite. La valeur critique de la vitesse correspond à un front reliant deux valeurs constantes. En s'approchant de cette vitesse critique, l'onde solitaire s'élargit, prenant d'abord une forme arrondie, puis très proche de la limite, la forme de deux fronts symétriques. L'expression exacte de la solution est donnée à la section 3.3, ainsi que son profil pour différentes vitesses.

Notons que la vitesse est une quantité relative. Par conséquent et dû au fait que les vitesses en question sont négatives dans les exemples étudiés, une vitesse plus grande signifie qu'elle est moins négative. Donc dans les simulations, la plupart des ondes se propageront vers la gauche du domaine, et les ondes les moins amples d'une même branche de la relation de dispersion iront plus rapidement vers les x négatifs. Seules les ondes correspondant au début

de la branche supérieure auront une vitesse positive et se propageront vers la droite.

Pelinovskii et Slyunyaev [14] ont effectué des simulations numériques pour l'équation d'eKdV dépendant du temps. Ils ont mis en évidence le comportement de type soliton en observant la collision entre une onde solitaire large et une onde solitaire plus petite (qui n'a pas atteint l'amplitude limite). Lorsque l'onde large, plus rapide, rattrape la seconde, elles interagissent. Mais satisfaisant à la limite sur l'amplitude, la petite onde solitaire change de polarité avant de "ressortir", inchangée, derrière l'onde solitaire large. Ils ont considéré aussi l'évolution d'une perturbation initiale (quelconque). Si celle-ci est inférieure à l'amplitude limite, la solution se compose d'une ou plusieurs ondes solitaires et d'une traînée dispersive, comme ce qu'il se passe pour KdV. Si elle est supérieure, alors elle fait apparaître au moins une onde solitaire large, ainsi que des ondes solitaires de plus petite amplitude dont certaines ont une polarité inversée, étant situées sur l'onde large. De façon plus générale, Grimshaw *etal* [10] ont prouvé que le nombre et le type d'ondes solitaires formées dépend crucialement de la forme de la perturbation initiale, contrairement au cas de KdV dont la solution reste qualitativement la même en partant d'une condition initiale rectangulaire ou en cloche.

Il apparaît donc qu'une perturbation initiale quelconque pour le système (4.1) doit générer des solutions relativement complexes. Dans un premier temps et afin de centrer l'étude sur la génération d'une onde solitaire généralisée, nous voulons des conditions initiales localisées qui donnent lieu principalement à une onde solitaire, qui puisse en particulier être proche de la vitesse critique. Pour cela, nous fixons une onde solitaire en fixant sa vitesse *a priori*. En l'occurrence, nous fixons ainsi sa forme également. Nous connaissons la solution stationnaire se propageant à cette vitesse, puisque nous l'avons calculée au chapitre précédent. En particulier, nous avons acquis la connaissance de la forme de la partie principale de la solution, sans les oscillations. Elle nous a servi à initialiser le système pour la méthode itérative, nous l'utilisons ici comme condition initiale du problème d'évolution. Cela nous permet d'étudier la propagation de cette onde solitaire ou à défaut une qui soit suffisamment proche de celle attendue. La résonance avec des ondes courtes présente dans le système peut ainsi être clairement observée. Dans un deuxième temps, nous effectuons une simulation pour observer comment se comporte le système en partant d'une perturbation de forme plus générale, de type sech, comme dans [14, 10]. Nous décrivons alors la dynamique obtenue, en soulignant l'apparition d'une onde solitaire généralisée le cas échéant.

L'évolution d'une onde solitaire généralisée présente des caractéristiques importantes mises en évidence pour l'équation de KdV du 5^{ème} ordre [6, 4]. Nous les résumons ici. Benilov *etal* [6] ont montré qu'une solution stationnaire symétrique et non locale ne pouvait pas être obtenue à partir d'une condition initiale localisée. En effet, toute solution périodique de cette équation correspond à un flux d'énergie non nul. Donc, les oscillations rayonnées doivent provenir d'une

source d'énergie et arriver dans un puits. En fait, les ondes sont rayonnées d'un seul côté de l'onde solitaire, le côté dépendant de la vitesse de groupe. L'onde solitaire non locale obtenue n'est pas exactement stationnaire car la perte d'énergie due à la radiation de ces ondes entraîne une décroissance lente de l'amplitude de l'onde solitaire. A la suite de ce travail, Bakholdin et Il'ichev [1] ont étudié la possibilité que le rayonnement des oscillations soit sujet à l'instabilité modulationnelle (ou de Benjamin-Feir). Pour cela, l'équation de Schrödinger non linéaire est dérivée. Selon le signe des coefficients obtenus, la modulation du train d'ondes rayonnées est stable ou instable.

Nous effectuons des expériences numériques pour observer si ces caractéristiques sont confirmées dans le système couplé que nous étudions. Nous sommes en particulier intéressés de savoir ce qu'il va se passer sur l'onde solitaire large. Nous voulons également confronter les conclusions de l'étude du problème stationnaire. Peut-on obtenir des ondes solitaires locales, car les oscillations sont d'amplitude zéro ou que le rayonnement n'a pas lieu ? Eventuellement, quelle solution stationnaire obtient-on parmi celles mises en évidence précédemment, lorsqu'on est proche du cas limite des fronts ? Pour répondre à ces questions et obtenir des informations qualitatives sur ce type de solutions, nous suivons un schéma similaire au cas stationnaire. La résolution du système découplé, sous l'hypothèse d'un couplage faible, nous apporte des renseignements intéressants, que nous confrontons ensuite à la résolution du système couplé plus délicate. Enfin, nous effectuons la dérivation de l'équation de Schrödinger pour savoir si l'instabilité modulationnelle est liée aux phénomènes observés.

4.2 Cas d'un faible couplage

4.2.1 Résolution

Dans un premier temps, nous résolvons le système découplé suivant

$$\begin{cases} u_t + \Delta u_x + \alpha_1 u u_x + \beta_1 u^2 u_x + \lambda_1 u_{xxx} & = 0 \\ v_t - \Delta v_x + \lambda_2 v_{xxx} & = -\kappa_2 u_x, \end{cases} \quad (4.2)$$

où u et v sont fonction de x et de t . C'est la version instationnaire du modèle simplifié de la section 3.2 obtenu sous l'hypothèse que l'influence d'un mode sur l'autre est petite. La première équation est l'équation d'eKdV, dont les coefficients sont choisis de sorte à obtenir la solution d'onde solitaire. La seconde équation est l'équation de KdV linéarisée, forcée localement. Dans un référentiel en mouvement à la vitesse C de l'onde solitaire d'eKdV, le forçage reste en 0. En effet, en posant $X = x - Ct$, $T = t$, l'équation devient

$$v_T(X, T) + (-\Delta - C)v_X(X, T) + \lambda_2 v_{XXX}(X, T) = -\kappa_2 u_X(X). \quad (4.3)$$

Nous cherchons des solutions qui tendent vers zéro à l'infini. En fait, nous faisons l'approximation de conditions périodiques sur un domaine borné, ce choix étant dicté notamment par

le calcul numérique du système dans la section suivante. Nous passons dans le domaine de Fourier, de sorte à obtenir une équation différentielle en temps

$$\widehat{v}_T(k, T) + ik(-\Delta - C)\widehat{v}(k, T) - ik^3\lambda_2\widehat{v}(k, T) = -ik\kappa_2\widehat{u}(k). \quad (4.4)$$

La forme générale de la solution est donnée par la formule de Duhamel

$$\widehat{v}(k, T) = e^{-i(k(-\Delta - C) - k^3\lambda_2)T}\widehat{v}(k, 0) + \int_0^T (ik\kappa_2\widehat{u}(k)e^{-i(k(-\Delta - C) - k^3\lambda_2)(T-S)})dS. \quad (4.5)$$

Dans ce repère en mouvement, le forçage est indépendant du temps ce qui permet de calculer l'intégrale explicitement

$$\widehat{v}(k, T) = e^{-i(k(-\Delta - C) - k^3\lambda_2)T}\widehat{v}(k, 0) + \frac{\kappa_2}{-\Delta - C - k^2\lambda_2}\widehat{u}(k)(1 - e^{-i(k(-\Delta - C) - k^3\lambda_2)T}). \quad (4.6)$$

Le forçage est très régulier et tend vers zéro exponentiellement. Etant donnée une condition initiale suffisamment régulière, la formule précédente a du sens et nous pouvons calculer la solution à l'aide des transformées de Fourier directe et inverse. L'analyse n'est pas poussée plus loin. Notre but est d'observer les caractéristiques de la dynamique dans ce cadre simplifié afin de faire ressortir les effets du couplage et de la nonlinéarité dans la section suivante. Nous utilisons donc la formule (4.6) avec les transformées de Fourier rapides pour obtenir la solution numériquement.

4.2.2 Evolution d'une perturbation initiale

Nous initialisons l'équation avec une perturbation localisée, proportionnelle au forçage. Si une telle solution ne persiste pas comme nous nous y attendons, elle correspond à la partie principale de l'onde solitaire généralisée. L'équation homogène, sans le forçage, a pour effet de disperser la perturbation initiale. Selon leur longueur d'onde, les ondes se propagent à la vitesse donnée par la relation de dispersion

$$c(k) = -\Delta - \lambda_2 k^2 \quad (4.7)$$

où k est le nombre d'onde. La présence du forçage implique la persistance d'une entité non dispersive. L'évolution de la solution au cours du temps est présentée aux Figures 4.1 et 4.2. Notons que les profils sont donnés pour des domaines différents et que la largeur de l'onde solitaire est bien constante au cours du temps.

Comme pour l'équation de KdV du 5^{ème} ordre, nous observons le rayonnement d'ondes courtes d'un seul côté du corps central de l'onde solitaire. Cela se produit à gauche de celle-ci. En fait, la vitesse C est négative dans l'exemple calculé, donc les ondes sont rayonnées devant l'onde solitaire, ce que nous pouvons voir en écrivant la vitesse de groupe

$$\begin{aligned} c_g(k_{res}) &= -\Delta - 3\lambda_2 k_{res}^2 \\ &= -\Delta - 3\lambda_2 \left(\frac{-C - \Delta}{\lambda_2}\right) \\ &= 3C + 2\Delta. \end{aligned} \quad (4.8)$$

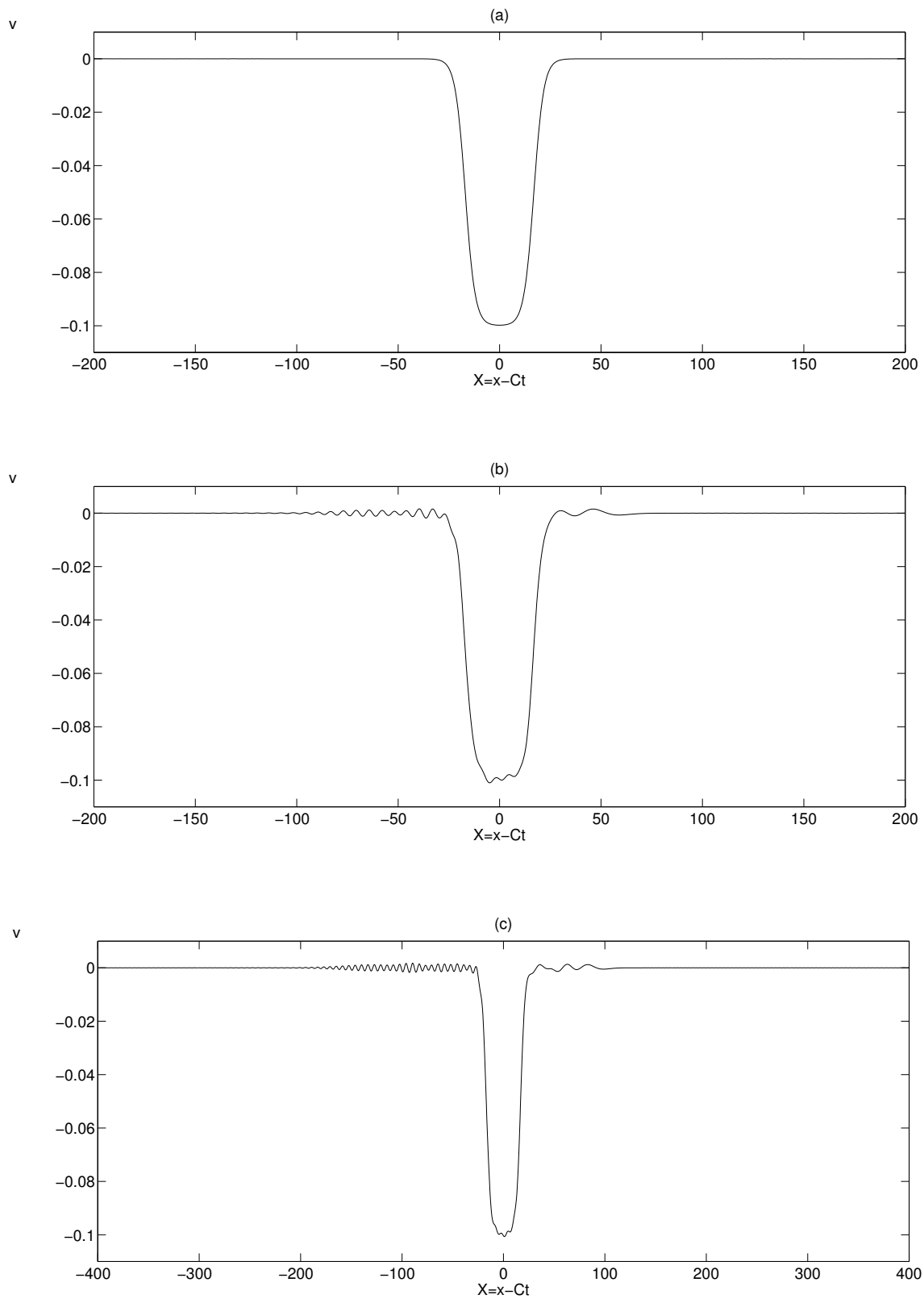
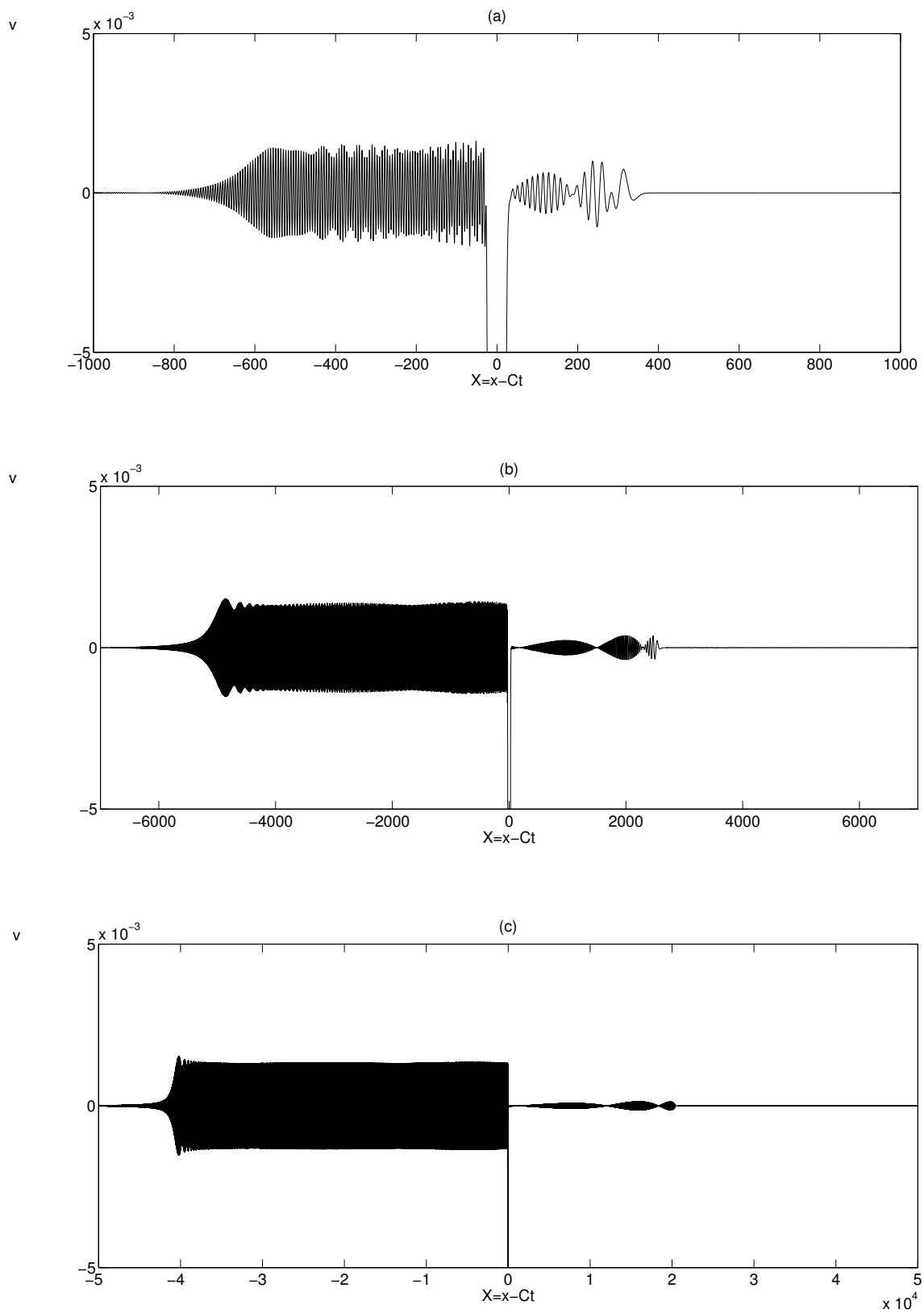


FIG. 4.1 – Evolution de la solution pour le cas d'un forçage qui est solution de l'équation d'eKdV : (a) condition initiale, (b) à $t = 40$, (c) à $t = 80$.



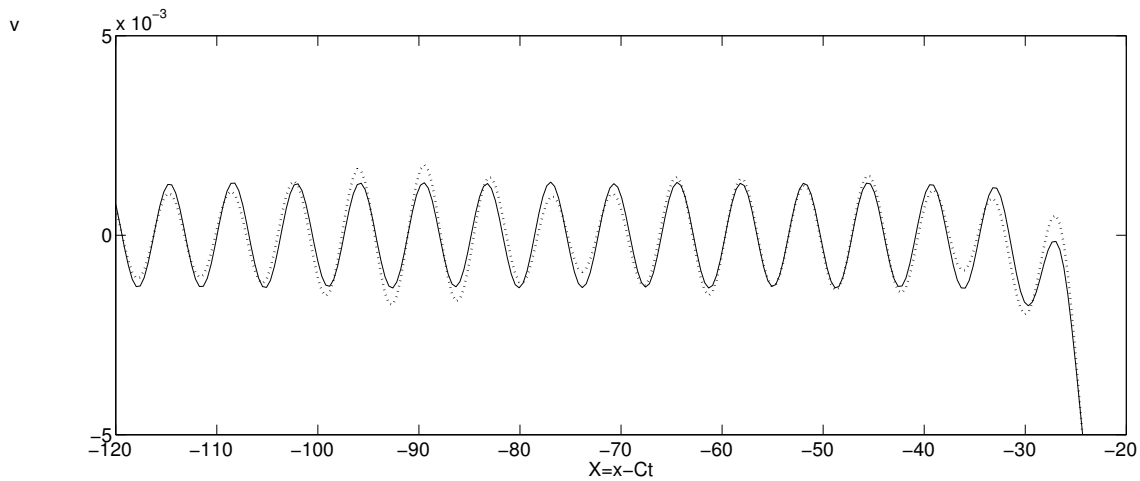


FIG. 4.3 – Solutions des Figures 4.1(c) (...) et 4.2(c) (-) superposées et zoomées sur les oscillations au pied de l'onde solitaire.

Pour le jeu de paramètres utilisé, C et Δ sont négatifs donc elle est inférieure à C , et c'est pourquoi le groupe se propage plus vite (en valeur absolue) que l'onde solitaire. Ces ondes présentent une modulation et ne sont donc pas constantes lorsqu'elles sortent de la bosse centrale pour des temps petits. L'enveloppe oscille, mais nous pouvons voir que celle-ci s'atténue pour des temps longs. Dans ce cadre linéaire, la stabilité de ce groupe d'ondes quasi-planes ne se pose pas. En revanche, pour la résolution du système, il faudra se poser la question de savoir si l'instabilité modulationnelle (ou de Benjamin-Feir) est présente.

De l'autre côté de l'onde longue apparaissent des ondes se propageant plus rapidement. En regardant l'évolution pendant longtemps, cela nous permet de mieux voir ce qui se passe. En effet, ces ondes provenant de la décomposition de la condition initiale (qui n'est pas solution du problème) s'organisent en paquets d'ondes. En fonction de la vitesse de groupe, ceux-ci traversent l'onde solitaire. A l'intérieur de ces groupes se propagent des ondes courtes dont certaines ont sensiblement la même vitesse de phase que l'onde longue. Elles entrent donc en résonance avec elle ce qui se caractérise par une augmentation de leur amplitude. De plus, ces ondes ont une vitesse de groupe différente de C , il en résulte que l'onde solitaire semble rayonner ces oscillations.

La résonance ne produit pas immédiatement un rayonnement d'amplitude constante. En effet, nous observons sur le graphe 4.2(a) que l'enveloppe du train d'ondes est modulée à deux niveaux. D'un côté, nous distinguons l'enveloppe correspondant aux paquets d'ondes, dans une certaine continuité avec ceux situés à droite de l'onde solitaire. Mais en plus de cette modulation de grande largeur, nous constatons que l'enveloppe du train d'ondes est sujette à des oscillations dont la fréquence s'accélère près de l'onde solitaire. Après un certain temps, cette

phase transitoire laisse place à un rayonnement stationnaire (Figure 4.2(b) et (c)). Il reste l'onde solitaire généralisée, constituée ici d'une dépression centrale et d'une traînée d'ondes courtes d'amplitude et de longueur d'ondes constantes (Figure 4.2(b)). La Figure 4.3, qui montre la solution pour un temps très grand tronquée à un petit intervalle et superposée sur la solution pour un temps court, illustre bien cette atténuation de l'enveloppe.

En ce qui concerne les oscillations sur l'onde solitaire, le phénomène de résonance est également présent. Afin d'en savoir plus sur ce point, nous résolvons l'équation avec un forçage plus large (Figures 4.4 et 4.5). Nous observons que la dynamique sur la partie plate de l'onde solitaire n'est pas régulière au début (Figure 4.4(b)). En effectuant un zoom sur le train d'ondes rayonnées au pied de l'onde solitaire, nous constatons que l'enveloppe a pris une forme plus complexe, ainsi que les ondes situées à droite (Figure 4.4(c)). Cependant, pour des temps longs, l'organisation en paquets d'ondes à droite est évidente, et la modulation de l'enveloppe s'atténue pour donner un rayonnement quasiment constant (Figure 4.4(d)). A ce moment là, si nous effectuons un zoom autour de l'onde solitaire, nous obtenons une onde solitaire large généralisée (Figure 4.5(a)). Elle n'est pas symétrique. Les oscillations sont quasiment d'amplitude constante, mais pas tout à fait. Il subsiste des mouvements de l'enveloppe que nous apercevons encore au temps maximal en regardant ces oscillations de plus près (Figures 4.5(b) et (c)).

A l'opposé, nous pouvons observer un cas où l'onde solitaire (et la perturbation initiale) n'est pas large, qui s'approche donc plutôt de l'onde solitaire de KdV. Les résultats sont présentés Figure 4.6. Nous remarquons que l'amplification due à la résonance est petite et que la modulation des ondes rayonnées suit la décroissance du paquet d'ondes situé à droite. Il s'ensuit que le rayonnement n'est pas constant pendant une longue période de temps.

Enfin, nous regardons un cas pour lequel la solution stationnaire n'a pas d'oscillations sur les côtés. Nous obtenons les résultats montrés à la Figure 4.7. La partie dispersive de la décomposition de la perturbation initiale semble ignorer la présence de l'onde solitaire et la résonance n'a pas lieu. Nous voyons qu'il n'y a pas d'amplification de l'amplitude, que les paquets d'ondes ne contiennent pas l'onde correspondant au nombre d'onde résonant, et que les oscillations de l'enveloppe au sein de chaque paquet d'ondes ont disparu. L'onde solitaire se propage seule à la vitesse C , les autres ondes se dispersent. Au bout d'un certain temps, nous avons donc une onde solitaire large isolée, qui contient plusieurs oscillations sur sa partie plate (Figure 4.8).

Pour terminer cette section, nous discutons les observations faites. Tout d'abord, cela nous a permis de voir quelle était la dynamique liée à la génération d'une onde solitaire généralisée lorsque deux modes (découplés) sont en présence. Le mode correspondant à la branche

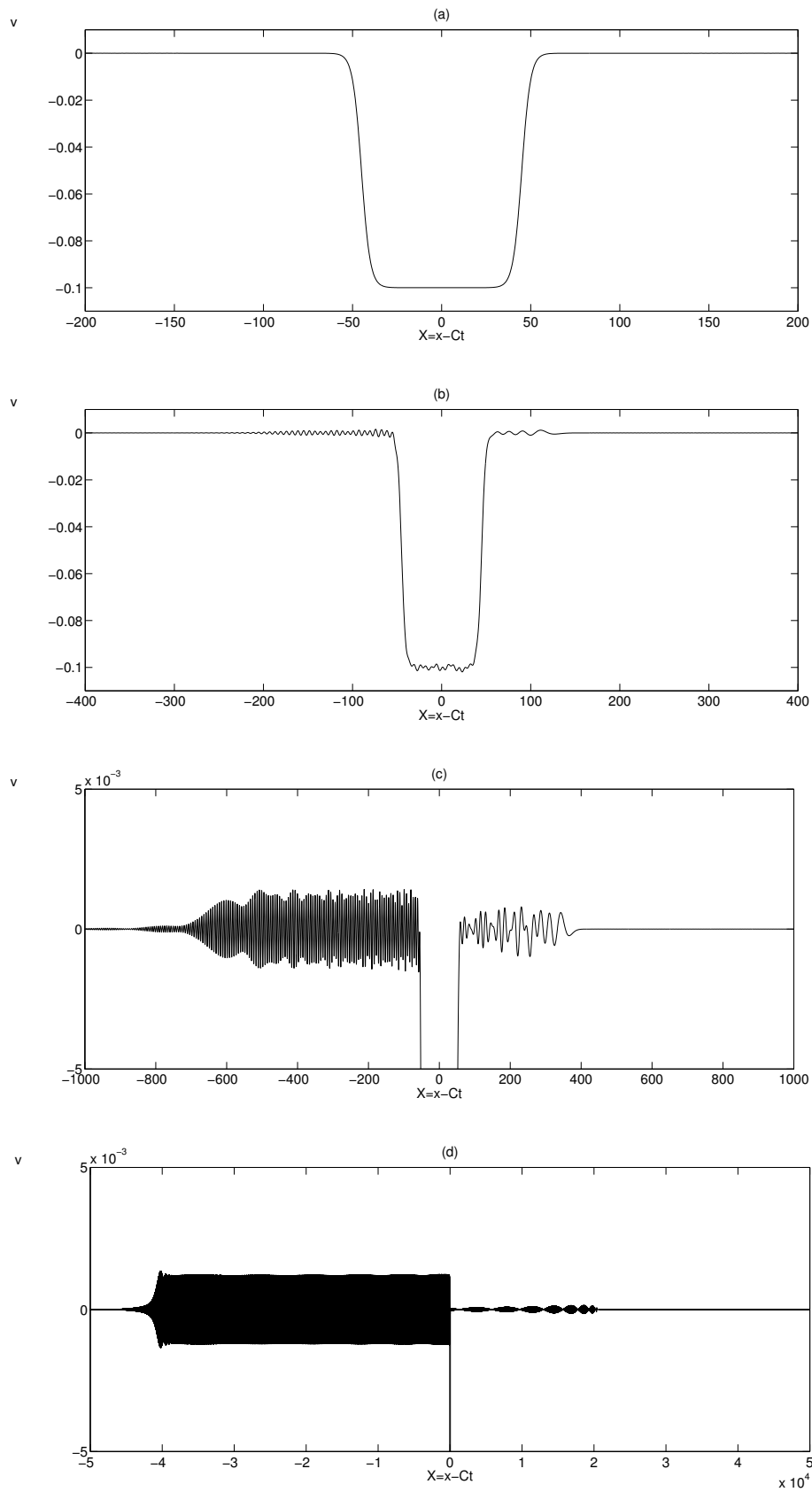


FIG. 4.4 – Evolution de la solution pour le cas d'un forçage très large, proche d'un front : (a) condition initiale, (b) à $t = 80$, (c) à $t = 320$, zoomée sur le rayonnement, (d) à $t = 20480$, zoomée sur le rayonnement.

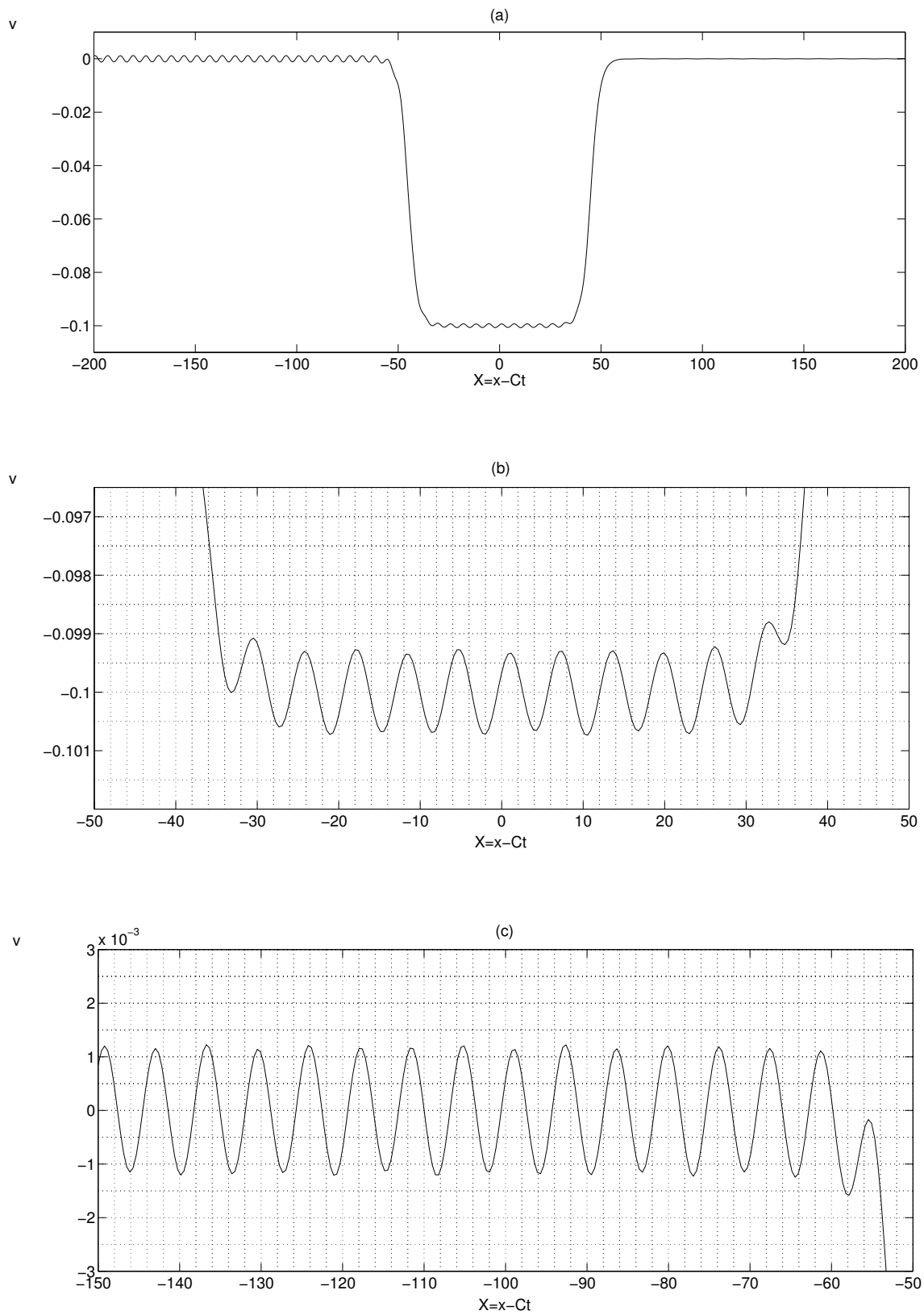


FIG. 4.5 – Solution de la Figure 4.4(c) : (a) sur un intervalle réduit, (b) zoom sur les oscillations sur l'onde solitaire, (c) zoom sur les oscillations au pied de l'onde solitaire.

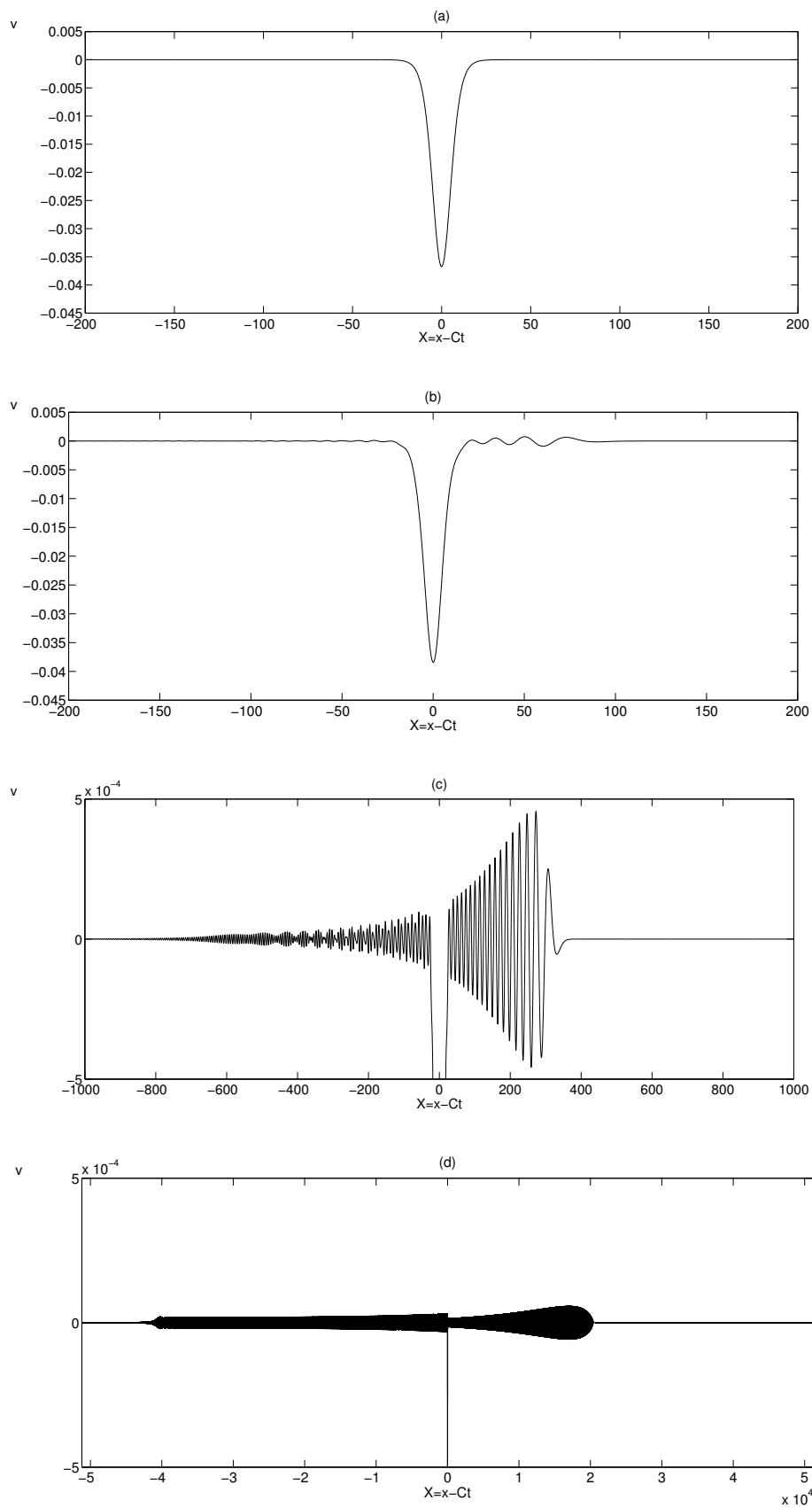


FIG. 4.6 – Evolution de la solution pour le cas d'un forçage en cloche, proche de l'onde solitaire de KdV : (a) condition initiale, (b) à $t = 80$, (c) à $t = 320$, zoomée sur le rayonnement, (d) à $t = 20480$, zoomée sur le rayonnement.

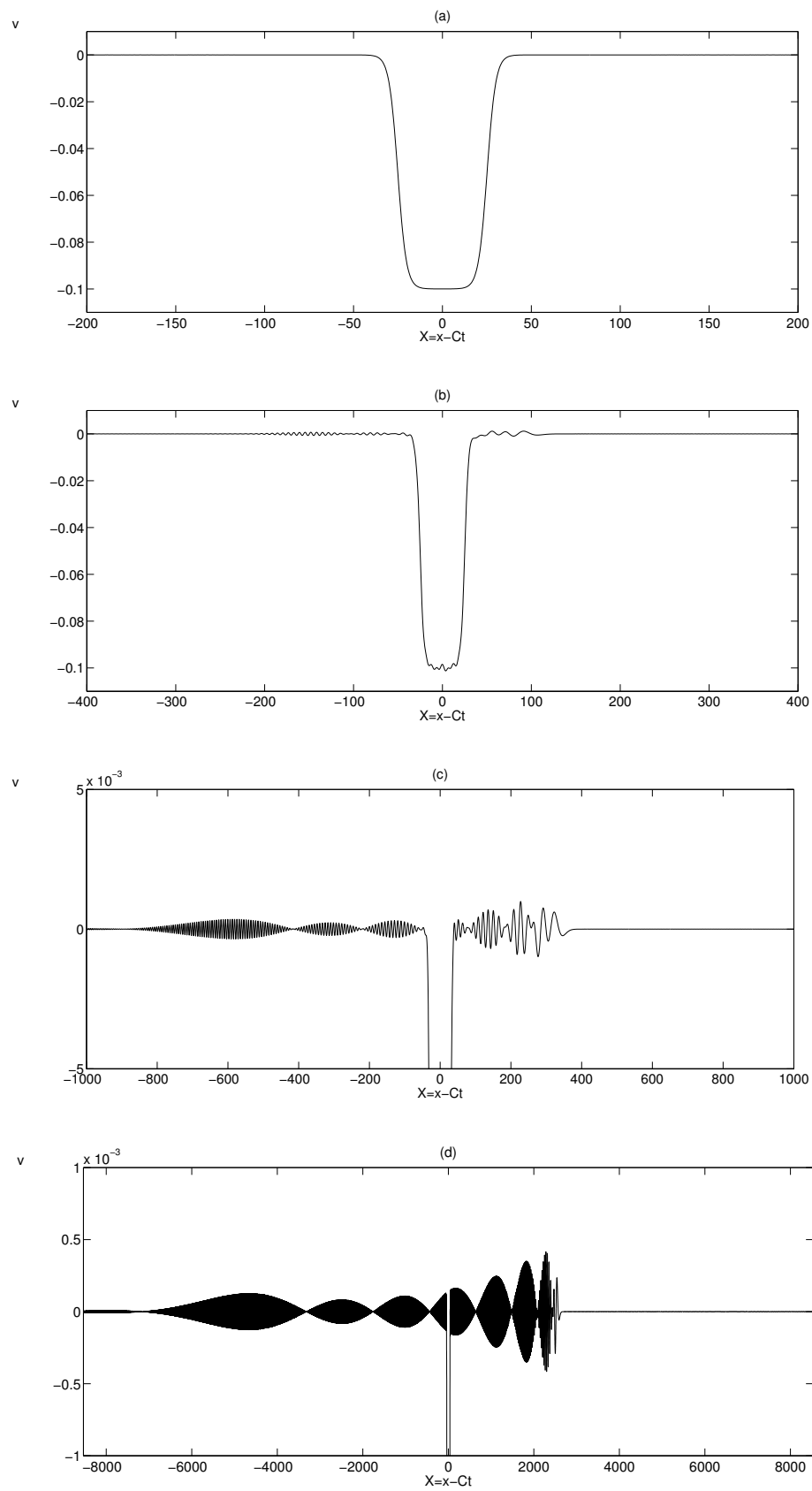


FIG. 4.7 – Evolution de la solution pour le cas d'un forçage large sans résonance : (a) condition initiale, (b) à $t = 80$, (c) à $t = 320$, zoomée sur le rayonnement, (d) à $t = 2560$, zoomée sur le rayonnement.

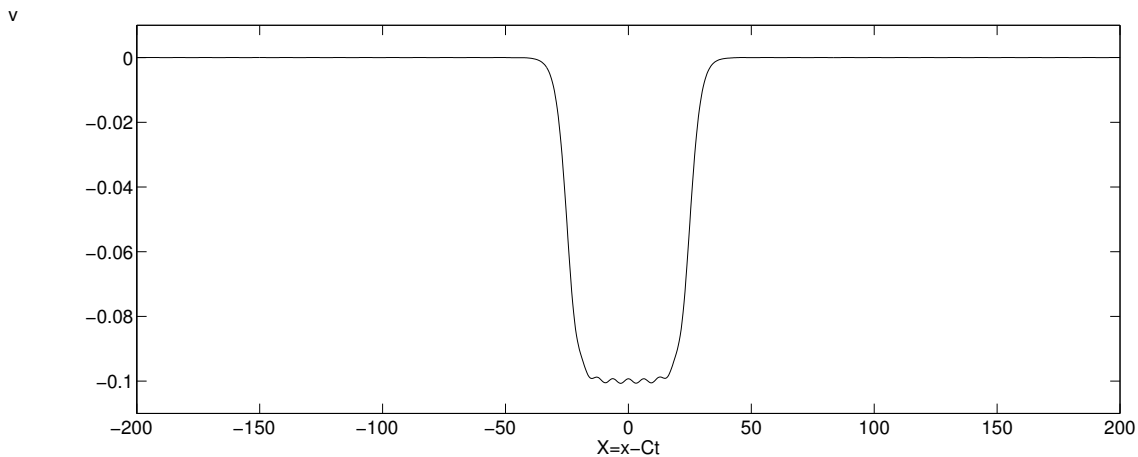


FIG. 4.8 – Onde solitaire large obtenue pour t grand, le domaine ayant été tronqué sur le même intervalle que la condition initiale.

supérieure de la relation de dispersion est présent dans la solution à travers tout son spectre continu. La propagation de ces ondes se fait sous la forme de paquets d'ondes. Si on repère une onde par sa crête, elle se propage à la vitesse de phase à travers les groupes en se dispersant, i.e. que son amplitude diminue (en moyenne) et sa longueur d'onde augmente. Si on repère une certaine longueur d'onde, elle se propage à la vitesse de groupe, donc elle suit les paquets d'ondes. La résonance avec l'onde solitaire se produit avec une onde qui a une vitesse de phase égale à la vitesse de l'onde solitaire. Celle-ci est déterminée par sa longueur d'onde, laquelle correspond à cette vitesse de phase (d'après la relation de dispersion). Mais, comme nous venons de le rappeler, elle se propage à la vitesse de groupe. Par conséquent, la résonance est associée à un paquet d'ondes en particulier, celui qui contient le nombre d'onde résonant. L'effet de la résonance est d'amplifier cette onde, mais aussi et surtout d'empêcher sa dispersion. Elle reste accrochée à l'onde solitaire et se propage conjointement avec elle. Puisque le groupe continue lui de se propager, la résonance entre l'onde solitaire et l'onde courte se manifeste par un train d'ondes planes qui est accroché à l'onde solitaire : celle-ci semble rayonner des ondes dont la tête du rayonnement suit le groupe. A partir de cette description du phénomène de résonance, nous pouvons faire d'autres remarques d'importance. La première est que ce train d'ondes est modulé à deux niveaux, plus ou moins irrégulièrement en fonction de la largeur de la perturbation initiale. Lorsque celle-ci est large, la phase transitoire du rayonnement est plus complexe, mais dans tous les cas la modulation s'atténue et tend vers un rayonnement constant. Pour une onde solitaire proche de l'onde solitaire de KdV, nous avons observé que le paquet d'ondes contenant le nombre d'onde résonant est plus large et asymétrique que pour les cas des ondes solitaires larges. De plus, la résonance est de faible amplitude. Il en résulte que la modulation du train d'ondes résonant prend l'allure d'une longue décroissance. Ceci est dû à la différence de l'impulsion initiale : en effectuant la simulation avec une perturbation

initiale plus large, nous obtenons des paquets plus étroits et plus symétriques. Enfin, lorsque le nombre d'onde résonant se propage exactement à un nœud entre deux paquets, nous obtenons une onde solitaire isolée. Ce cas non résonant est caractérisé par trois propriétés : l'absence d'amplification de l'amplitude des oscillations ; l'absence d'ondes ayant le nombre d'onde résonant accrochées au pied à gauche de l'onde solitaire ; la présence de paquets d'ondes bien définis en lieu et place du train d'ondes résonant (doublement) modulé.

4.3 Système couplé

4.3.1 Méthode numérique

Nous entreprenons à présent la résolution numérique du système couplé (4.1). Le problème est complété par une condition initiale pour chaque mode et deux paires de conditions aux limites. L'étude de ce problème de Cauchy n'est pas effectuée ici. Notons simplement que des travaux ont été réalisés concernant le problème de Cauchy d'un système d'équations de KdV similaire au nôtre [3, 13]. Les conditions aux limites sont des conditions périodiques sur un domaine borné $[-L; L]$, et les conditions initiales sont localisées. Puisque le système est un système d'ondes se propageant à vitesse finie, la périodicité de la solution représente une approximation de sa décroissance vers zéro à l'infini. Concrètement, l'utilisation de conditions périodiques implique que des ondes atteignant une frontière vont ressortir par l'autre bord. La validité des simulations s'arrête donc quand des ondes d'amplitude non négligeable "traversent" la frontière et viennent perturber la solution.

La méthode numérique choisie est une méthode pseudo-spectrale avec la base de Fourier [7, 5, 16]. Le schéma en temps utilisé est Runge Kutta 4 dans le domaine de Fourier. Mais pour éviter de très petits pas de temps causés par les hautes fréquences dues à la présence du terme dispersif du 3^{ème} ordre, la technique du facteur intégrant est employée [12, 16]. Dans le domaine de Fourier, le système s'écrit

$$\begin{cases} \widehat{u}_t + ik\Delta\widehat{u} + ik\frac{\alpha_1}{2}\widehat{u}^2 + ik\frac{\beta_1}{3}\widehat{u}^3 - ik^3\lambda_1\widehat{u} + ik\kappa_1\widehat{v} & = 0 \\ \widehat{v}_t - ik\Delta\widehat{v} + ik\frac{\alpha_2}{2}\widehat{v}^2 + ik\frac{\beta_2}{3}\widehat{v}^3 - ik^3\lambda_2\widehat{v} + ik\kappa_2\widehat{u} & = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

où $\widehat{u} = \widehat{u}(k, t)$ et $\widehat{v} = \widehat{v}(k, t)$ sont les transformées de Fourier de $u(x, t)$ et $v(x, t)$. En multipliant chaque équation par le facteur intégrant $\exp(-ik^3\lambda_{1,2}t)$, (4.9) devient

$$\begin{cases} e^{-ik^3\lambda_1 t}\widehat{u}_t + ik e^{-ik^3\lambda_1 t}(\Delta\widehat{u} + \frac{\alpha_1}{2}\widehat{u}^2 + \frac{\beta_1}{3}\widehat{u}^3 + \kappa_1\widehat{v}) - ik^3 e^{-ik^3\lambda_1 t}\lambda_1\widehat{u} & = 0 \\ e^{-ik^3\lambda_2 t}\widehat{v}_t + ik e^{-ik^3\lambda_2 t}(-\Delta\widehat{v} + \frac{\alpha_2}{2}\widehat{v}^2 + \frac{\beta_2}{3}\widehat{v}^3 + \kappa_2\widehat{u}) - ik^3 e^{-ik^3\lambda_2 t}\lambda_2\widehat{v} & = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Nous posons alors $\widehat{U} = \exp(-ik^3\lambda_1 t)\widehat{u}$ et $\widehat{V} = \exp(-ik^3\lambda_2 t)\widehat{v}$, ce qui implique

$$\begin{cases} \widehat{U}_t = -ik^3\lambda_1\widehat{U} + e^{-ik^3\lambda_1 t}\widehat{u}_t, \\ \widehat{V}_t = -ik^3\lambda_2\widehat{V} + e^{-ik^3\lambda_2 t}\widehat{v}_t. \end{cases} \quad (4.11)$$

Les termes en k^3 sont donc “absorbés” dans la dérivée en temps des nouvelles variables et nous obtenons un système d'évolution pour \widehat{U} et \widehat{V}

$$\begin{cases} \widehat{U}_t + ike^{-ik^3\lambda_1 t}(\Delta\widehat{u} + \frac{\alpha_1}{2}\widehat{u}^2 + \frac{\beta_1}{3}\widehat{u}^3 + \kappa_1\widehat{v}) & = 0 \\ \widehat{V}_t + ike^{-ik^3\lambda_2 t}(-\Delta\widehat{v} + \frac{\alpha_2}{2}\widehat{v}^2 + \frac{\beta_2}{3}\widehat{v}^3 + \kappa_2\widehat{u}) & = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Les termes non linéaires sont calculés dans le domaine physique comme une multiplication classique et les passages du domaine physique au domaine de Fourier (et inversement) sont effectués à l'aide des transformées de Fourier rapide directe et inverse de Matlab, i.e. `fft` et `fft-1`. Nous appliquons le schéma en temps Runge Kutta 4 à ce système. Pour assurer la convergence de la méthode, il faut que le pas de temps vérifie une condition de stabilité. Grâce à l'utilisation du facteur intégrant, cette condition est relaxée. Suivant la discussion sur la stabilité dans le livre de Trefethen sur les méthodes spectrales [16], la présence du terme dispersif d'ordre 3 implique, formellement, une condition en N^{-3} , où N est le nombre de modes de Fourier utilisé. En effet, en travaillant dans le domaine de Fourier, nous voyons que la matrice de différenciation a des valeurs propres dépendant de k^3 , k prenant les valeurs entières entre $-N/2+1$ et $N/2-1$. Donc, les plus grandes valeurs propres sont bien en N^{-3} . Une évaluation de la constante peut s'établir alors en fonction du domaine de stabilité de la méthode en temps utilisé, à savoir Runge Kutta 4. En employant la technique du facteur intégrant, nous nous attendions peut-être à ce que la condition soit en N^{-1} . En fait, ce n'est pas le cas à cause des termes exponentiels rapidement oscillants que nous avons fait intervenir. En nous appuyant sur l'exemple de KdV résolu dans [16] par cette méthode, nous adaptons le pas de temps en fonction de N^{-2} . Des tests d'essai-erreur nous permettent de fixer la constante.

En fait, nous avons utilisé deux facteurs intégrants pour les deux équations séparément. Nous aurions pu considérer le facteur $\exp(-Lt)$ où L est l'opérateur linéaire du système (4.9) en suivant la méthode dans sa généralité. Cependant, la technique n'est pas appropriée lorsque l'opérateur n'est pas diagonal. En effet, Kassam et Trefethen [11] ont comparé plusieurs techniques pour les schémas en temps, dont celle du facteur intégrant. Ils ont montré qu'elle est efficace lorsque l'opérateur est diagonal. En revanche, elle s'avère inutilisable lorsqu'il n'est pas diagonal. Le choix fait dans notre cas est donc un compromis qui permet d'utiliser la technique pour les termes les plus restreignants tout en restant dans un cas diagonal. Une alternative serait d'utiliser le schéma qu'ils ont proposés à la fois plus général et un petit peu plus efficace. Les résultats de la méthode choisie étant satisfaisants, nous n'avons pas implémenté cette nouvelle méthode.

Enfin, nous mettons en évidence une quantité conservée, qui peut être utilisée pour mesurer l'erreur de la méthode numérique. Pour cela, nous multiplions chaque équation respectivement

par $\kappa_2 u$ et $\kappa_1 v$, Le système (4.1) devient

$$\begin{cases} \kappa_2(uu_t + \Delta uu_x + \alpha_1 u^2 u_x + \beta_1 u^3 u_x + \lambda_1 uu_{xxx}) + \kappa_1 \kappa_2 uv_x & = 0 \\ \kappa_1(vv_t - \Delta vv_x + \alpha_2 v^2 v_x + \beta_2 v^3 v_x + \lambda_2 vv_{xxx}) + \kappa_1 \kappa_2 vu_x & = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Nous additionnons alors les deux équations précédentes et nous écrivons le résultat sous forme conservative

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \kappa_2 u^2 + \frac{1}{2} \kappa_1 v^2 \right)_t + \left(\frac{1}{2} \Delta \kappa_2 u^2 + \frac{1}{3} \alpha_1 \kappa_2 u^3 + \frac{1}{4} \beta_1 \kappa_2 u^4 + \lambda_1 \kappa_2 (uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \Delta \kappa_1 v^2 + \frac{1}{3} \alpha_2 \kappa_1 v^3 + \frac{1}{4} \beta_2 \kappa_1 v^4 + \lambda_2 \kappa_1 (vv_{xx} - \frac{1}{2} v_x^2) + \kappa_1 \kappa_2 uv \right)_x = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Formellement, nous voyons que si nous intégrons sur tout le domaine en espace, le second terme disparaît à cause des conditions périodiques. Il reste

$$\frac{d}{dt} \int_{-L}^L \left(\frac{1}{2} \kappa_2 u^2 + \frac{1}{2} \kappa_1 v^2 \right) dx = 0. \quad (4.15)$$

C'est une quantité liée à l'énergie ou moment du système, mais il faut bien noter que les coefficients κ_1 et κ_2 peuvent être négatifs. Donc, ce n'est pas une énergie au sens physique du terme.

4.3.2 Obtention des ondes solitaires généralisées

Comme indiqué en introduction, nous considérons la solution du système stationnaire étudié au chapitre 6 qui se propage à la vitesse C . Nous isolons la partie principale, i.e. le corps central de l'onde solitaire, et nous initialisons le système (4.1) ainsi. Nous nous attendons à ce que les ondes solitaires se propagent simultanément sur les deux modes, tout en rayonnant des oscillations comme nous l'avons vu dans le cas découplé. La vitesse critique C_{lim} est déduite des paramètres du système d'après le moyen décrit à la section 3.4 pour la solution stationnaire. En l'occurrence, le jeu de paramètre suivant

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, & \beta_1 &= -1, & \lambda_1 &= 1, & \kappa_1 &= -0.1, \\ \alpha_2 &= 1, & \beta_2 &= -1, & \lambda_2 &= 1, & \kappa_2 &= 0.1, \end{aligned} \quad (4.16)$$

et la condition $-\Delta - C_{lim} = 1$ correspondent à l'exemple utilisé pour le problème stationnaire. Cela donne la vitesse critique $C_{lim} \approx -0.4115$, ainsi que les amplitudes limites $u_{lim} \approx 1.0013$ et $v_{lim} \approx -0.1062$. Les conditions initiales sont donc définies par les solutions stationnaires ayant la vitesse $C = C_{lim} - \epsilon$, $0 < \epsilon < 1$. Notons bien que cet ϵ a pour rôle de choisir la condition initiale, conformément aux solutions stationnaires. Pour les cas qui nous intéressent (ϵ petit), la valeur de Δ est essentiellement constante. La perturbation initiale n'est pas placée en 0, de sorte à "centrer" le domaine sur les phénomènes intéressants. Puisque la plupart des vitesses sont négatives, nous la plaçons sur la droite du domaine. Enfin, le phénomène de rayonnement des oscillations fait intervenir deux échelles d'observation, à savoir l'amplitude de l'onde solitaire et celles des oscillations. Donc, le meilleur moyen pour visualiser les résultats est de regarder les profils à différents instants, en zoomant éventuellement sur les oscillations.

4.3.2.a Onde solitaire “arrondie”

Le premier cas que nous regardons correspond à une onde solitaire arrondie, mais pas encore très plate, donnée par $\epsilon = 5.10^{-5}$. Il s'agit d'une valeur de ϵ pour laquelle nous n'avons trouvé qu'une seule forme pour la solution stationnaire. De plus, il s'agit d'une valeur proche d'un maximum de la courbe représentant l'amplitude des oscillations au pied de l'onde solitaire en fonction de ϵ (Figure 3.14). Pour ce jeu de paramètres, la relation de dispersion donne des oscillations résonantes de longueur d'onde $\lambda_{res} \approx 6.3103$, et la vitesse de groupe correspondante est $c_g(k_{res}) \approx -2.8333$.

Les résultats sont présentés séparément pour u et v aux Figures 4.9 à 4.12. Nous voyons qu'une onde solitaire se propage simultanément sur chaque mode à la même vitesse, qui correspond à C . Conformément à ce que nous attendions, des ondes courtes entrent en résonance avec l'onde solitaire. Nous détaillons les observations séparément, et nous commençons par v pour lequel la résonance est plus visible. Nous observons que les ondes immédiatement à gauche de l'onde solitaire sont amplifiées par rapport à celles de droite. Nous reconnaissons les caractéristiques observées pour le problème découplé. En effet, à droite de l'onde solitaire se propagent des ondes de longueur d'onde supérieure à λ_{res} , sous la forme de paquets d'ondes. La dispersion agissant sur ces ondes fait que l'amplitude de ces groupes d'ondes diminue. Cependant, des ondes se propageant à la même vitesse de phase que l'onde solitaire entrent en résonance avec elle : celle-ci rayonne un train d'ondes. Il ressemble beaucoup à celui de la Figure 4.2, ainsi qu'au rayonnement de l'équation de KdV du 5^{ème} ordre étudiée par Benilov *etal* [6], Bakholdin *etal* [1] et Boyd [4]. Concernant la possible résonance sur l'onde solitaire, nous observons à la Figure 4.11 que des ondes modifient la crête de l'onde solitaire. Cependant, celle-ci n'est pas assez large pour pouvoir décrire le phénomène. Nous le ferons donc au paragraphe suivant pour une onde solitaire plus plate.

Nous passons à la description de u maintenant. Les premiers graphes semblent montrer une onde solitaire se propager seule (Figure 4.9). A cause des valeurs faibles du couplage, les oscillations sont plusieurs ordres de grandeur plus petites que l'onde solitaire. Elles sont donc invisibles à cette échelle. C'est bien le contexte que nous avons choisi pour les simulations, i.e. que u représente principalement la solution de l'équation d'eKdV. Le couplage n'étant pas nul toutefois, nous pouvons observer ce qu'il se passe au pied de l'onde solitaire (Figure 4.10). En regardant vers la gauche, nous observons la tête du groupe d'ondes rayonnées dont l'amplitude est plus petite que celui de v puisque nous avons gardé la même échelle pour comparer. En revanche, plus près de l'onde solitaire, des phénomènes plus importants sont présents. Si les ondes rayonnées sont toujours présentes, elles modifient juste localement des ondes de plus grande longueur d'onde et de plus grande amplitude qui se propagent à une vitesse comprise entre la vitesse de groupe des ondes rayonnées et la vitesse de l'onde solitaire. Ces ondes de

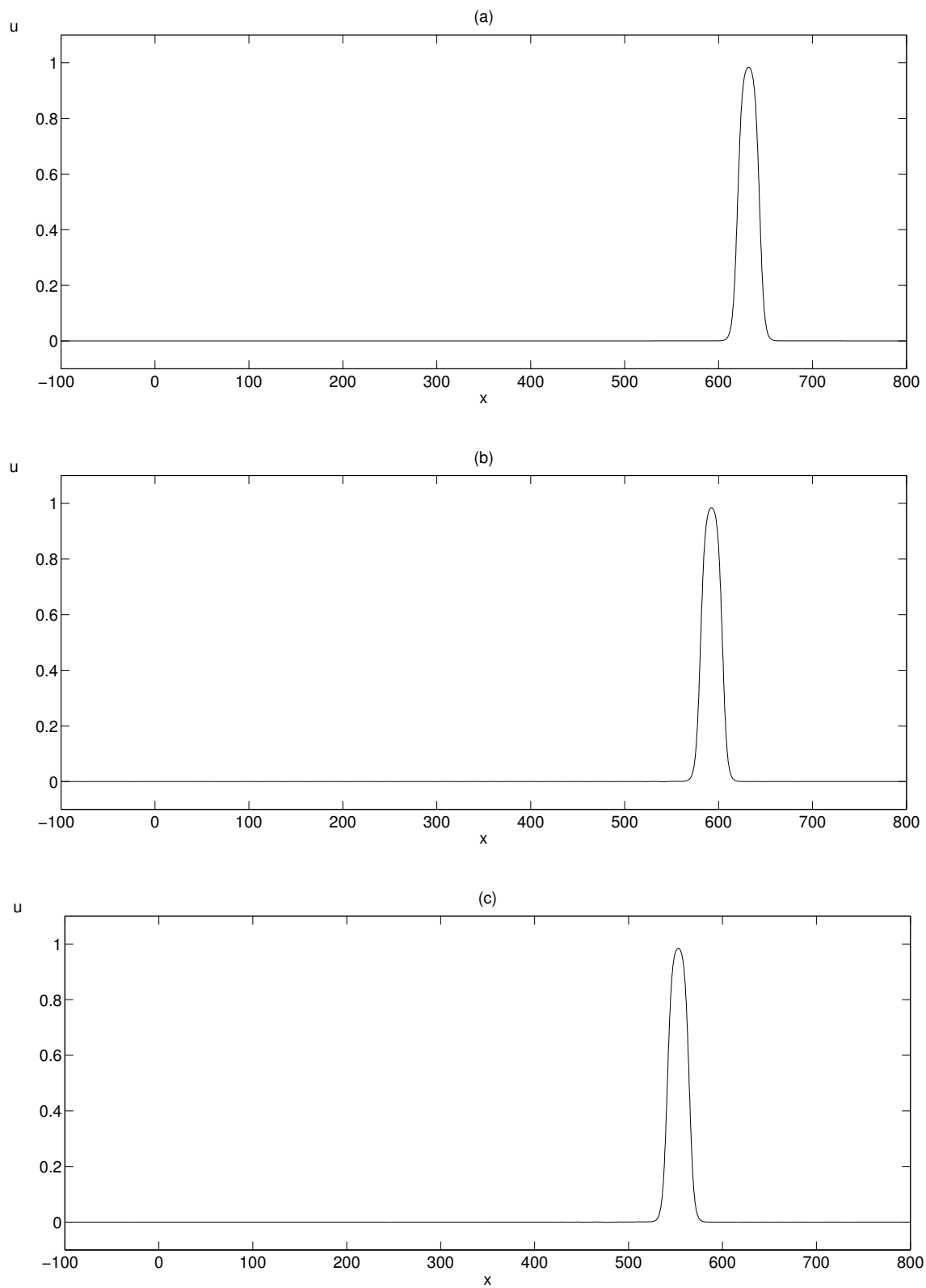


FIG. 4.9 – Evolution de la solution u pour $\epsilon = 5 \cdot 10^{-5}$: (a) condition initiale, (b) à $t = 96$, (c) à $t = 192$.

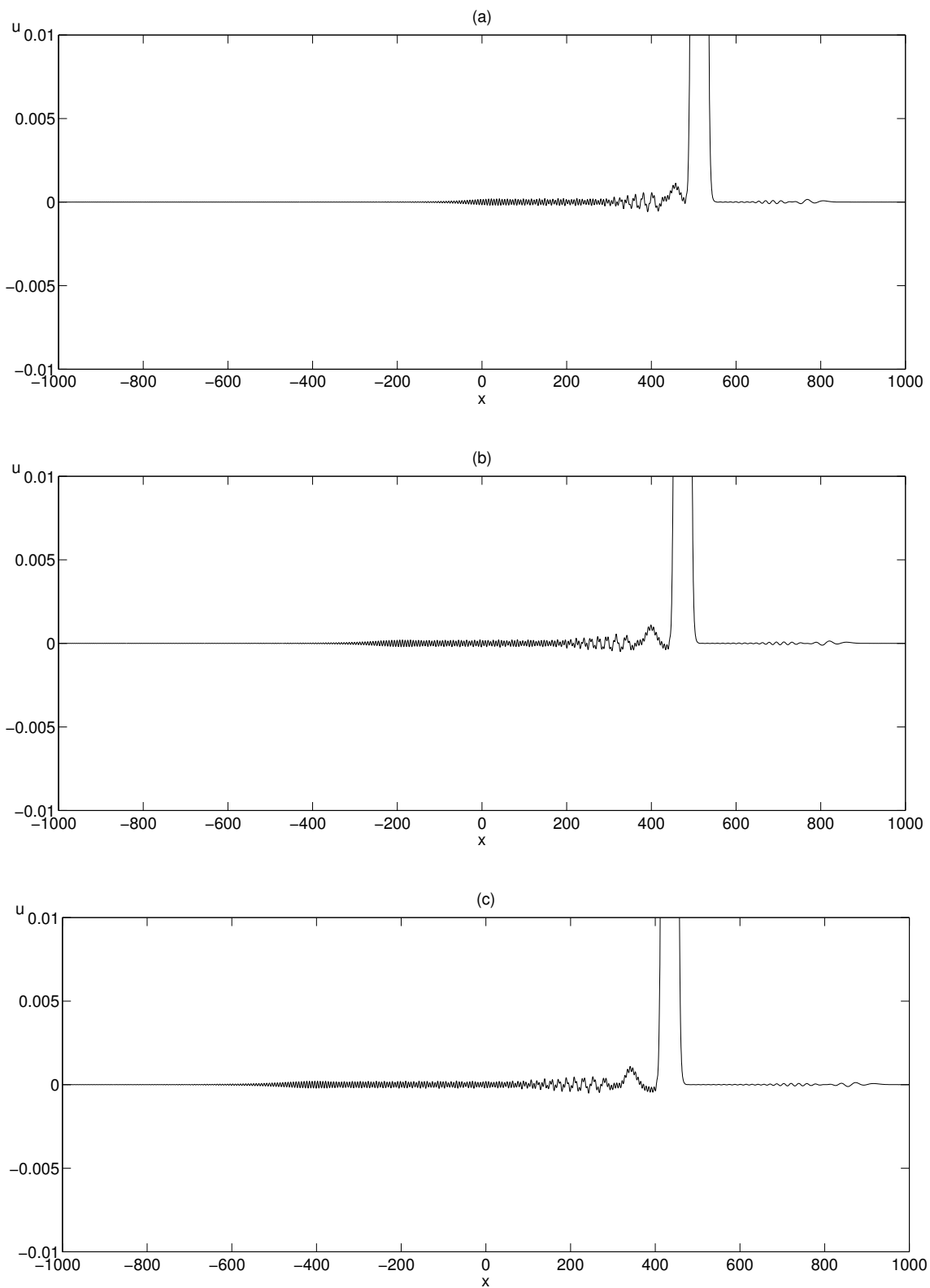


FIG. 4.10 – Suite de l'évolution de la solution u pour $\epsilon = 5.10^{-5}$, zoomée sur les ondes rayonnées : (a) à $t = 288$, (b) à $t = 384$, (c) à $t = 480$.

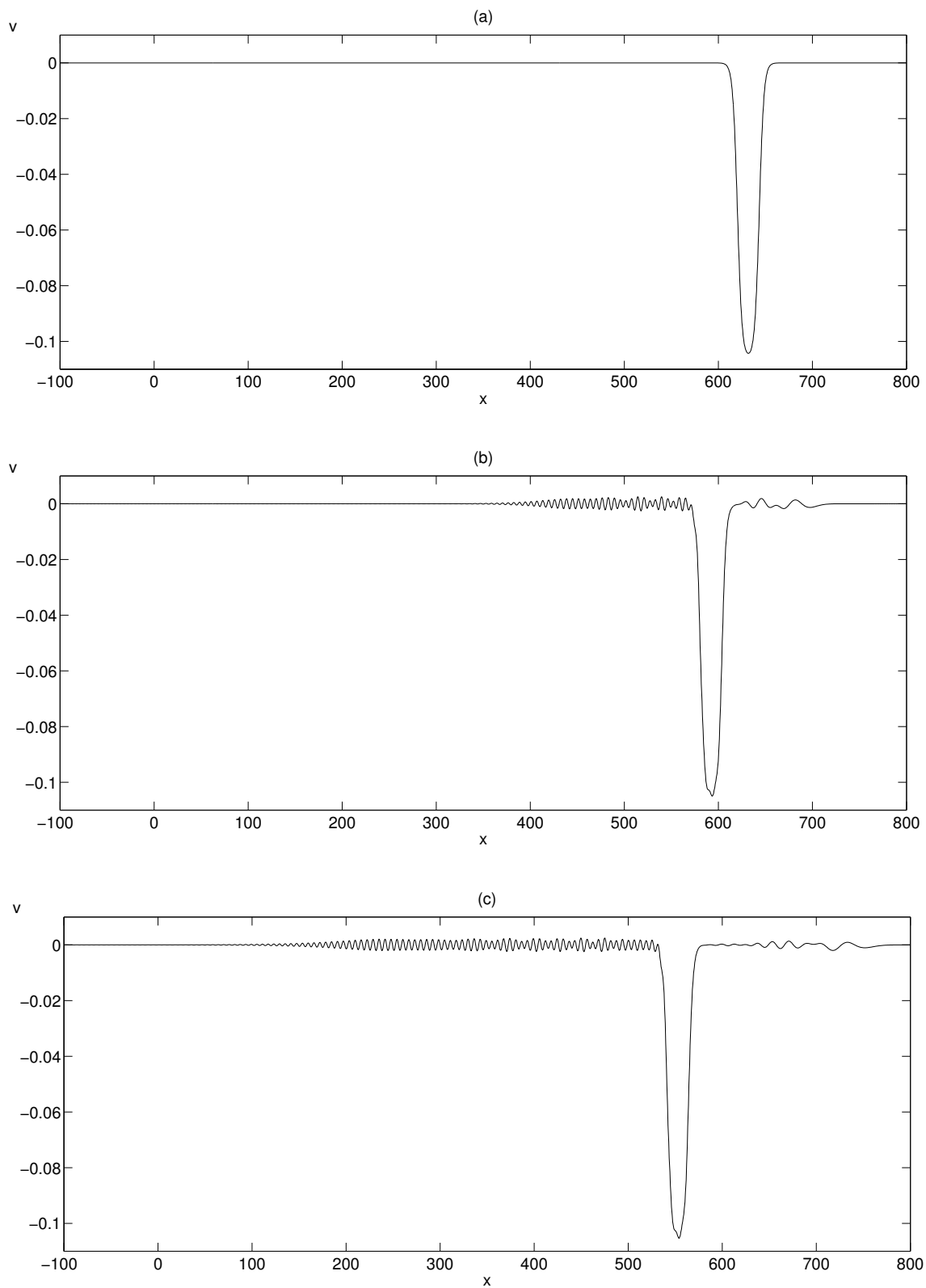


FIG. 4.11 – Evolution de la solution v pour $\epsilon = 5 \cdot 10^{-5}$: (a) condition initiale, (b) à $t = 96$, (c) à $t = 192$.

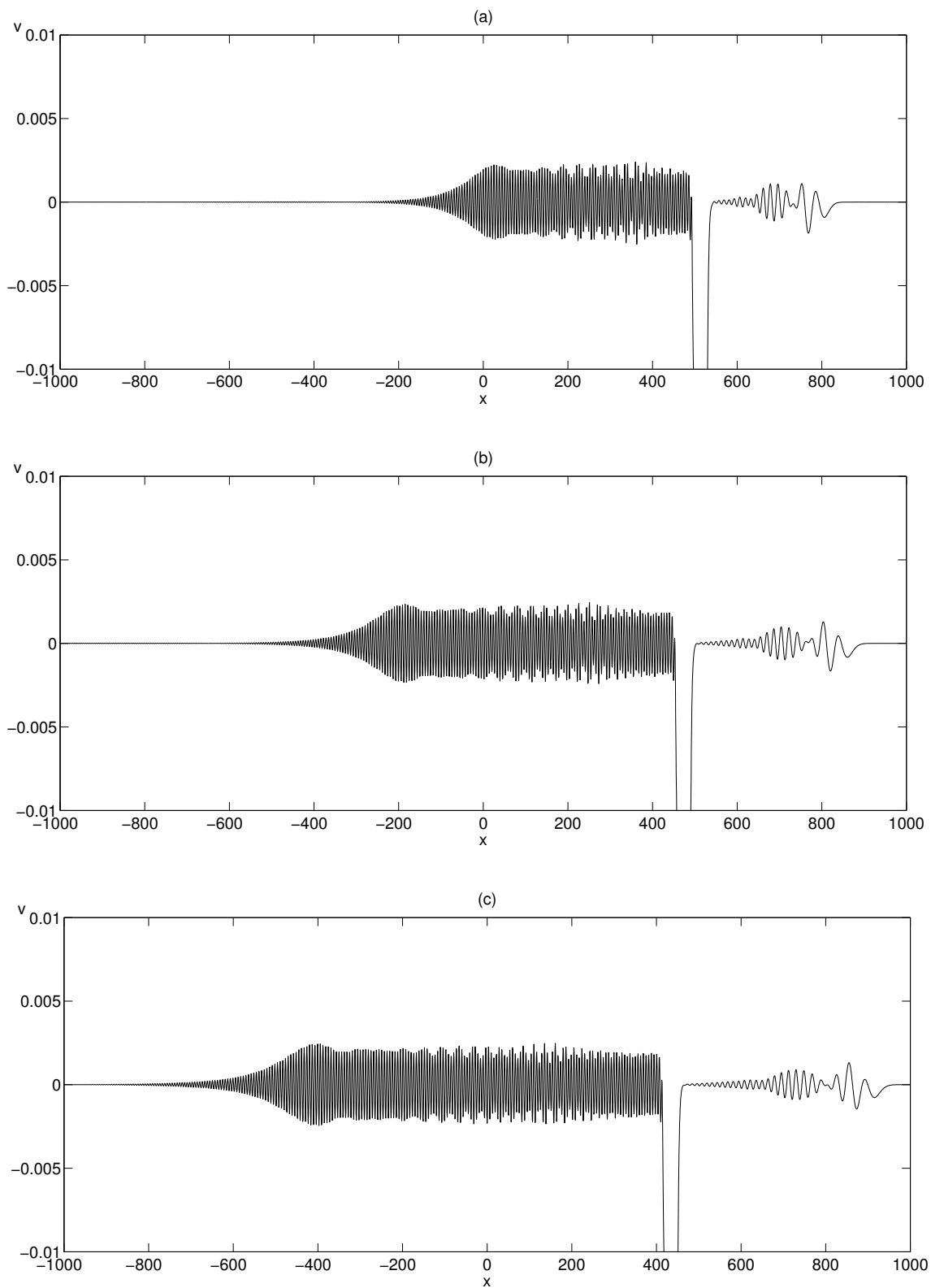


FIG. 4.12 – Suite de l'évolution de la solution v pour $\epsilon = 5.10^{-5}$, zoomée sur les ondes rayonnées : (a) à $t = 288$, (b) à $t = 384$, (c) à $t = 480$.

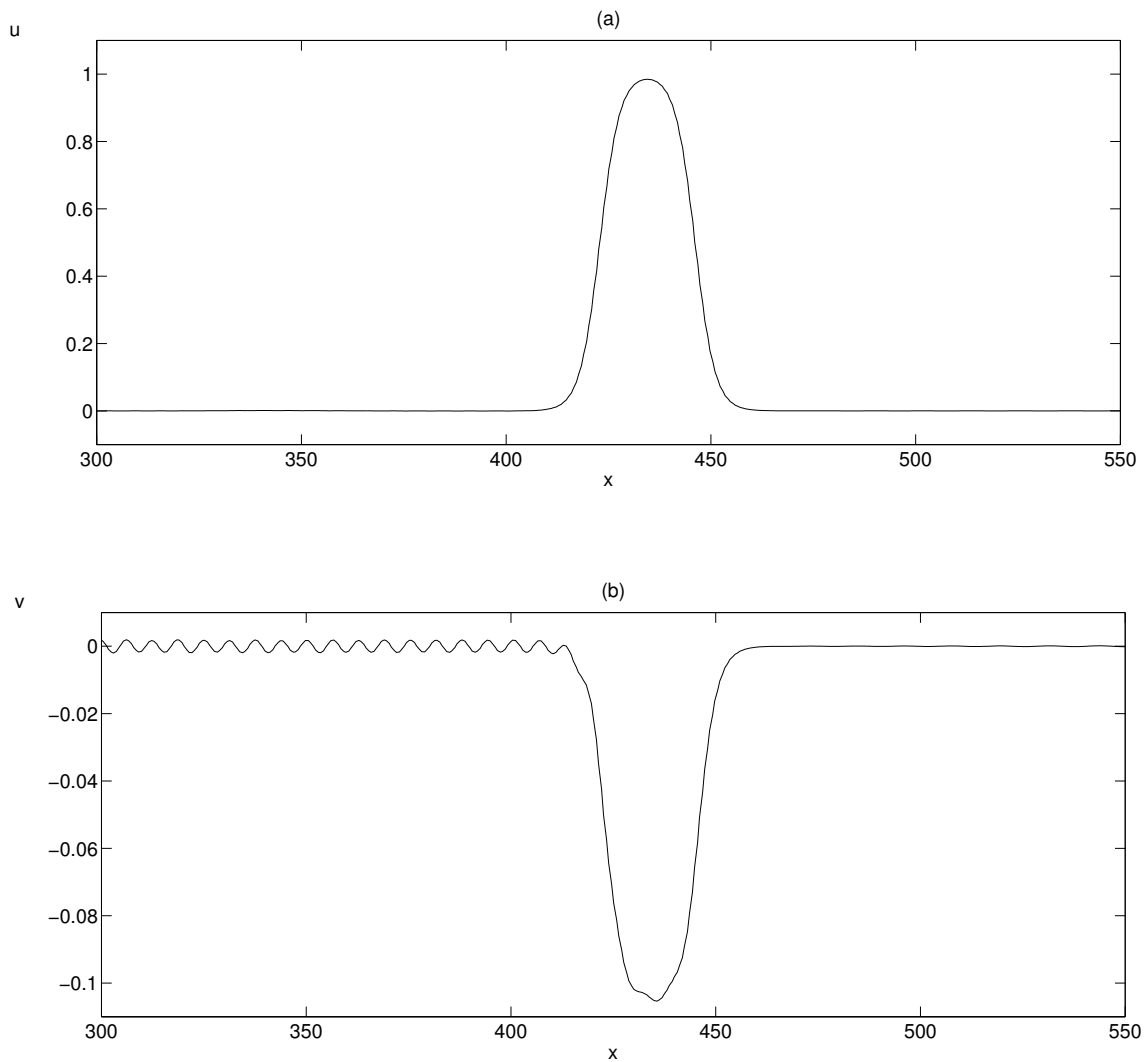


FIG. 4.13 – Profil des solutions pour $\epsilon = 5.10^{-5}$ à $t_{max} = 480$: (a) u , (b) v .

plus grande longueur d'onde ne modulent pas le train d'ondes. Elles gardent leur forme en se propageant, ce qui a pour effet de réduire l'impression de rayonnement, bien que la résonance des ondes courtes (λ_{res}) continue de se produire. L'apparition d'un tel phénomène provient de la décomposition de la condition initiale qui ne produit pas exactement l'onde solitaire large.

Afin de mieux observer les ondes solitaires, nous effectuons un zoom sur un intervalle réduit autour d'elles (Figure 4.13). Alors que u semble être une onde solitaire isolée à cette échelle, la solution v est une onde solitaire généralisée non symétrique. A l'échelle de l'onde solitaire, les oscillations sont essentiellement d'amplitude constante. La crête de l'onde solitaire de v est perturbée par la présence d'oscillations résonantes. Mesurer l'amplitude des oscillations résonantes est difficile. En effet, la modulation de l'enveloppe, avec la présence éventuelle

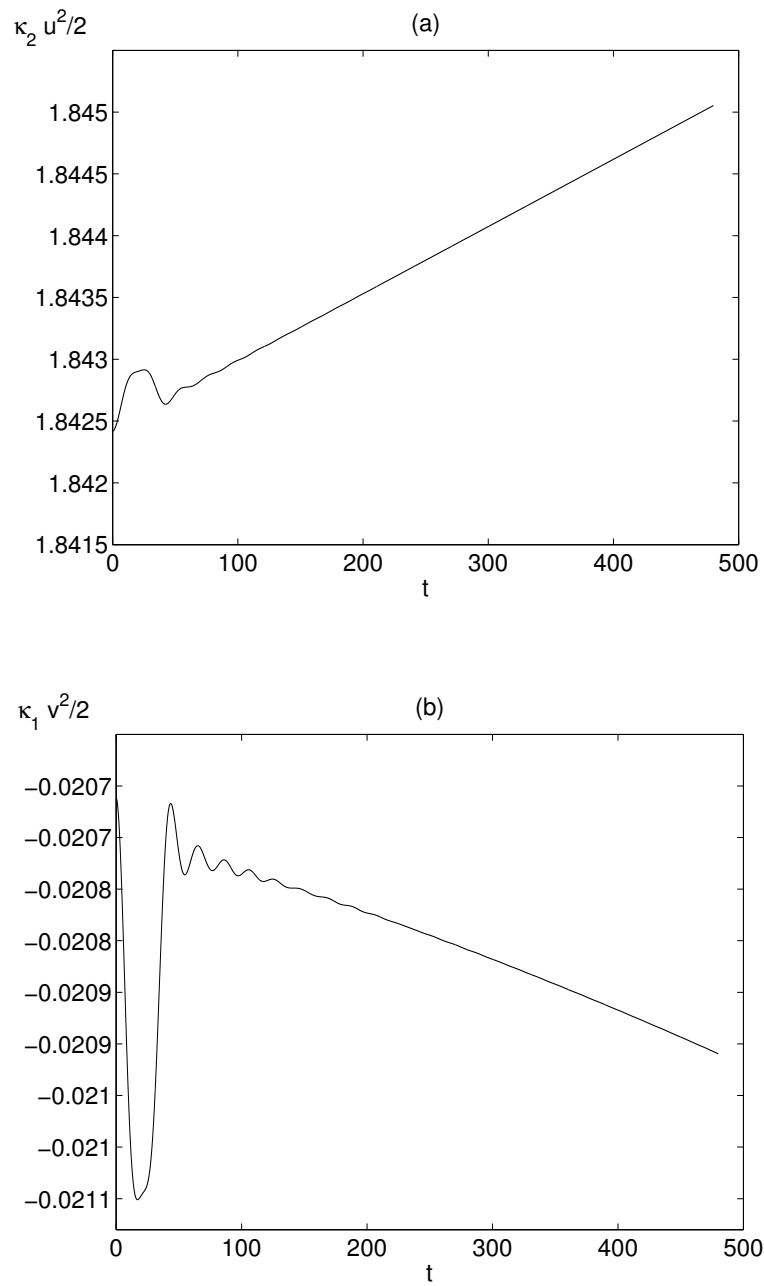


FIG. 4.14 – Evolution de l'énergie de chaque mode pour $\epsilon = 5 \cdot 10^{-5}$: (a) $\frac{1}{2}\kappa_2 u^2$, (b) $\frac{1}{2}\kappa_1 v^2$.

d'autres phénomènes superposés, rend cette donnée quasiment inaccessible. Nous pouvons seulement l'évaluer grossièrement pour avoir un ordre de grandeur. Nous avons choisi de regarder les ondes situées juste au pied de l'onde solitaire et nous évaluons l'amplitude à environ $a_{\text{pied}} \approx 2.10^{-3}$ pour cet exemple. En comparaison avec la famille à un paramètre de la solution stationnaire associée, nous trouvons que la valeur minimum de l'amplitude pour la solution stationnaire est proche de la moitié de cette valeur. Cela tend donc à confirmer les conclusions obtenues pour KdV du 5^{ème} ordre concernant la relation entre la solution du problème d'évolution et la solution stationnaire symétrique associée [4].

Comme nous l'avions supposé en introduction, le choix des conditions initiales ne nous donne pas exactement l'onde solitaire, mais une onde suffisamment proche pour que nous puissions observer les ondes solitaires larges généralisées qui sont le sujet de notre étude. L'apparition des phénomènes observés ayant une vitesse différente de C apparaissent certainement à cause de ce décalage. Le système étant de nonlinéarité cubique, il n'est pas surprenant que d'autres structures cohérentes coexistent à des vitesses différentes. De plus, puisque le couplage est faible, chaque composante qui apparaît spontanément sur un mode se retrouve sur l'autre mais un ordre de grandeur plus petit. C'est pourquoi nous ne les observons pas sur les deux solutions.

A propos des calculs numériques, notons que l'erreur maximale relative sur la quantité conservée (4.15) pour cette simulation est environ 10^{-3} à la fin des calculs. Afin d'observer la solution assez longtemps, nous avons limité la précision en utilisant environ 5 points par longueur d'onde, ce qui est convenable pour une méthode spectrale, soit 2048 modes pour un domaine de longueur $2L = 2528$ correspondant à 400 longueurs d'onde λ_{res} . Augmenter le nombre de modes ne modifie pas les résultats. Le pas de temps est environ $1,5.10^{-2}$. En utilisant un plus petit pas de temps, la précision s'améliore très légèrement. Les plus petites oscillations sont modifiées d'un ordre de grandeur de 10^{-5} , mais la dynamique est identique.

En dessinant l'évolution des termes de la quantité conservée (4.15), associés respectivement à u et à v , nous observons un temps d'ajustement de la solution (Figure 4.14). Après cette période, les courbes se rapprochent en oscillant d'une configuration quasiment stationnaire. En fait, la variation linéaire observée correspond à l'ordre de grandeur de l'erreur numérique. En augmentant la précision, nous constatons que les courbes tendent vers une constante. Par conséquent, après que les deux modes aient échangé de l'énergie, le phénomène de rayonnement semble être un phénomène stationnaire pour chaque mode. Il en résulte que l'énergie nécessaire au rayonnement des ondes résonantes doit correspondre à la décroissance de l'onde solitaire comme pour l'équation de KdV du 5^{ème} ordre [6]. Toutes les simulations que nous avons effectuées ne nous ont pas permis d'observer cette décroissance directement. A cause de la petite amplitude des ondes rayonnées, il faudrait des temps maximum plus longs que ceux

utilisés. De plus, la présence des oscillations sur le dessus de l'onde solitaire rend l'évaluation de son amplitude plus difficile.

4.3.2.b Onde solitaire très large

Nous effectuons la simulation pour une onde solitaire la plus large possible. L'évolution des solutions obtenues est présentée aux Figures 4.15 à 4.18. Nous constatons en premier lieu que nous parvenons à obtenir la propagation de cette onde très large, en quelque sorte la juxtaposition de deux fronts symétriques. L'amplitude limite est atteinte pour chacun des deux modes, et les valeurs observées correspondent tout à fait à u_{lim} et v_{lim} . Nous retrouvons les caractéristiques du cas précédent. La solution u semble ne contenir que l'onde solitaire large (Figure 4.15). Il faut zoomer pour voir apparaître le train d'ondes rayonnées (Figure 4.16). Celui-ci est perturbé par des ondes longues qui ne le modulent pas, mais gardent leur forme. Le rayonnement est clairement présent dans la solution v (Figures 4.17 et 4.18). Il ressemble à celui du premier cas, quoiqu'un peu plus irrégulier (Figure 4.12). En effet, les ondes situées à droite de l'onde solitaire n'ont pas une forme bien définie de paquets d'ondes, et l'enveloppe du train d'ondes rayonnées ne présente pas le même caractère général, notamment en tête du train d'ondes. Ces observations correspondent à celles faites pour le problème découplé. En particulier, les Figures 4.4(c) et 4.16(b) sont qualitativement les mêmes.

Ce qui nous intéresse particulièrement dans cette simulation, ce sont les ondes résonantes sur la partie plate de l'onde solitaire large. Durant la période transitoire du début, elles apparaissent très irrégulières (Figure 4.17(b)). Lorsque les ondes se propageant à des vitesses différentes se séparent de l'onde solitaire, les ondes résonantes se stabilisent (Figure 4.17(c)). A l'instant final de la simulation, nous obtenons une onde solitaire large généralisée, ayant des oscillations à la fois au pied et sur le dessus de l'onde solitaire (Figure 4.19). Comme précédemment, il serait utile de mesurer ces amplitudes, mais il n'est pas possible de le faire précisément. Cependant, une évaluation "à la main" confirme là encore que l'amplitude des oscillations au bord est environ le double de la valeur minimale obtenue pour la solution stationnaire. En revanche, ce n'est pas le cas pour les oscillations situées sur la partie plate de l'onde solitaire. Il ne semble pas exister de relation simple entre cette valeur et la valeur obtenue pour la solution stationnaire correspondant au minimum pour l'amplitude des oscillations aux bords.

Pour cette très petite valeur de ϵ , nous sommes dans le cas où nous avons mis en évidence une multiplicité de solutions stationnaires. Celles-ci se différencient par la largeur de l'onde solitaire, et donc par le nombre d'oscillations sur la partie plate. Cependant, pour observer l'obtention de deux ondes stationnaires différentes, il faudrait pouvoir différencier deux vitesses d'un ordre de grandeur inférieur à 10^{-5} . Cela requerrait des temps de simulation très grands pour que la différence de distance parcourue soit décelable. Supposons que nous ini-

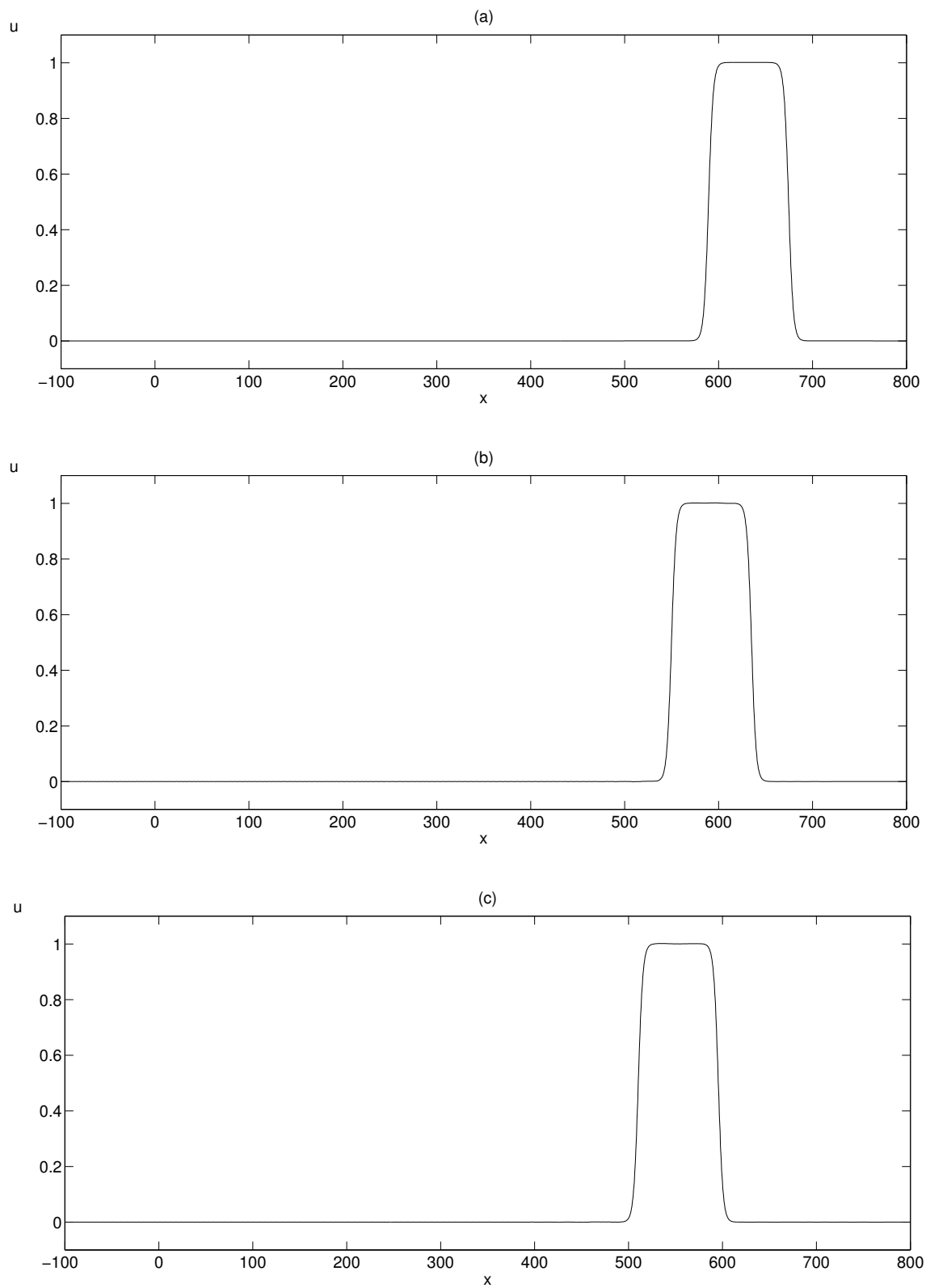


FIG. 4.15 – Evolution de la solution u pour $\epsilon = 5.10^{-16}$: (a) condition initiale, (b) à $t = 96$, (c) à $t = 192$.

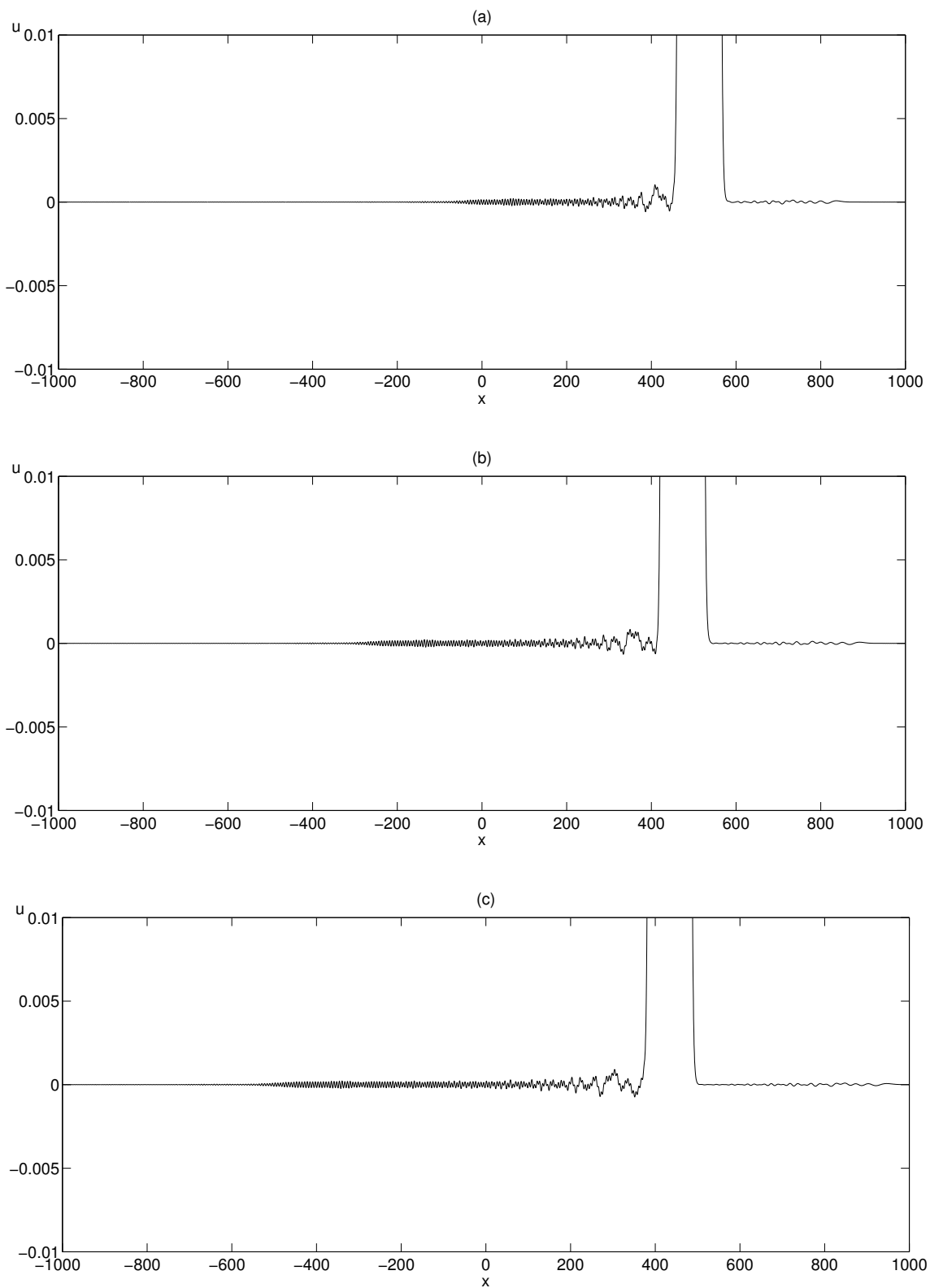


FIG. 4.16 – Suite de l'évolution de la solution u pour $\epsilon = 5.10^{-16}$, zoomée sur les ondes rayonnées : (a) à $t = 288$, (b) à $t = 384$, (c) à $t = 480$.

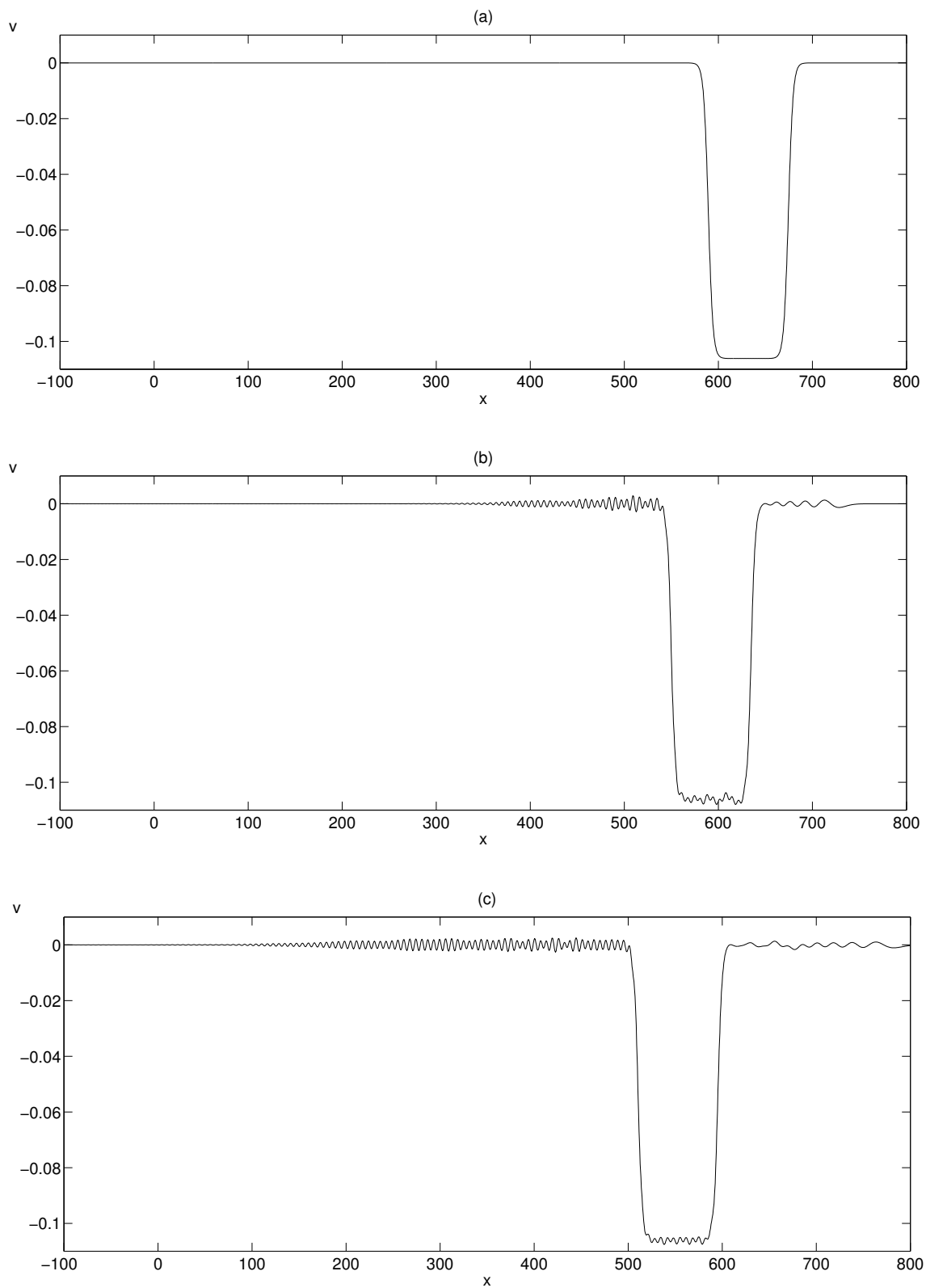


FIG. 4.17 – Evolution de la solution v pour $\epsilon = 5.10^{-16}$: (a) condition initiale, (b) à $t = 96$, (c) à $t = 192$.

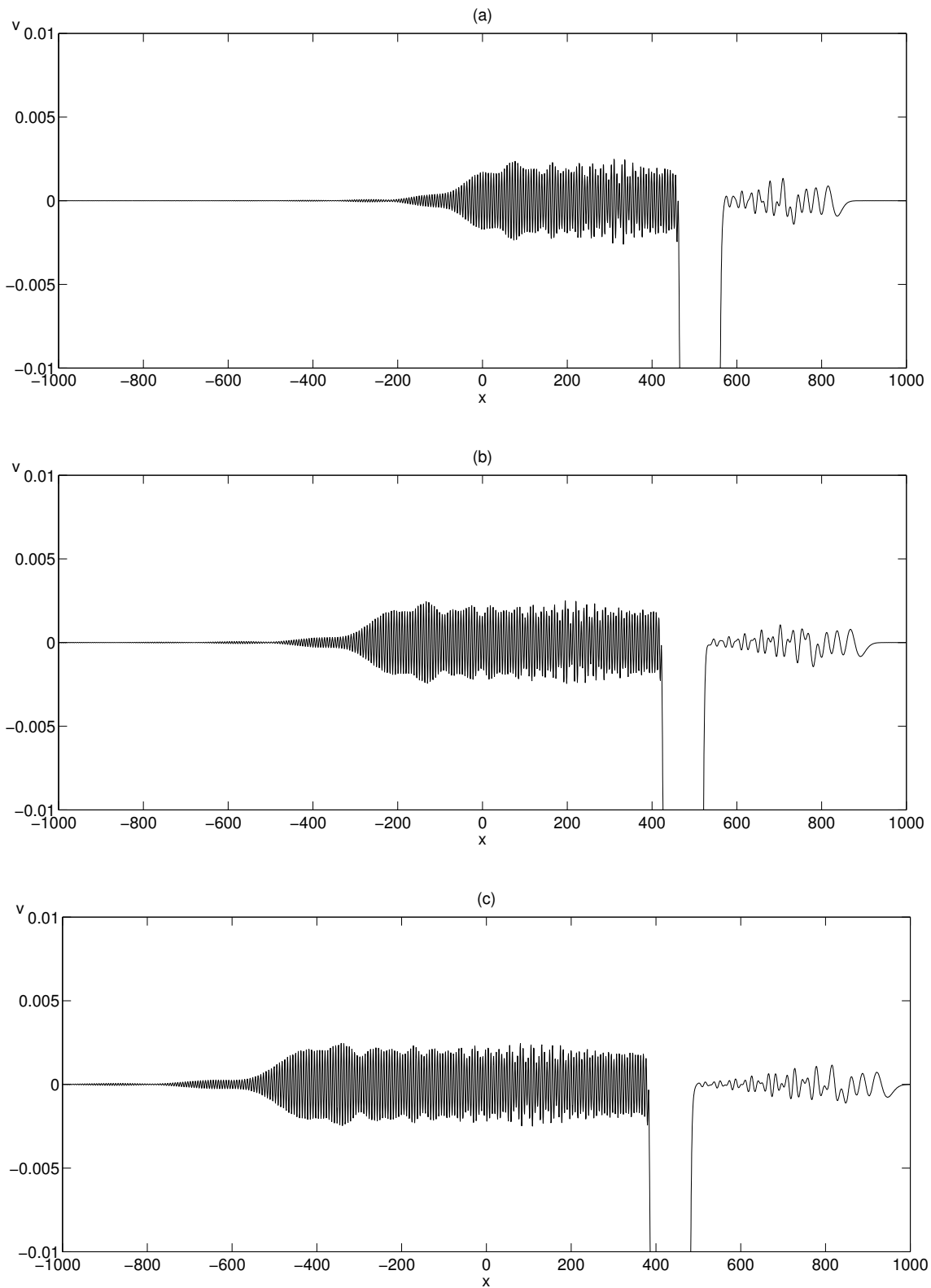


FIG. 4.18 – Suite de l'évolution de la solution v pour $\epsilon = 5.10^{-16}$, zoomée sur les ondes rayonnées : (a) à $t = 288$, (b) à $t = 384$, (c) à $t = 480$.

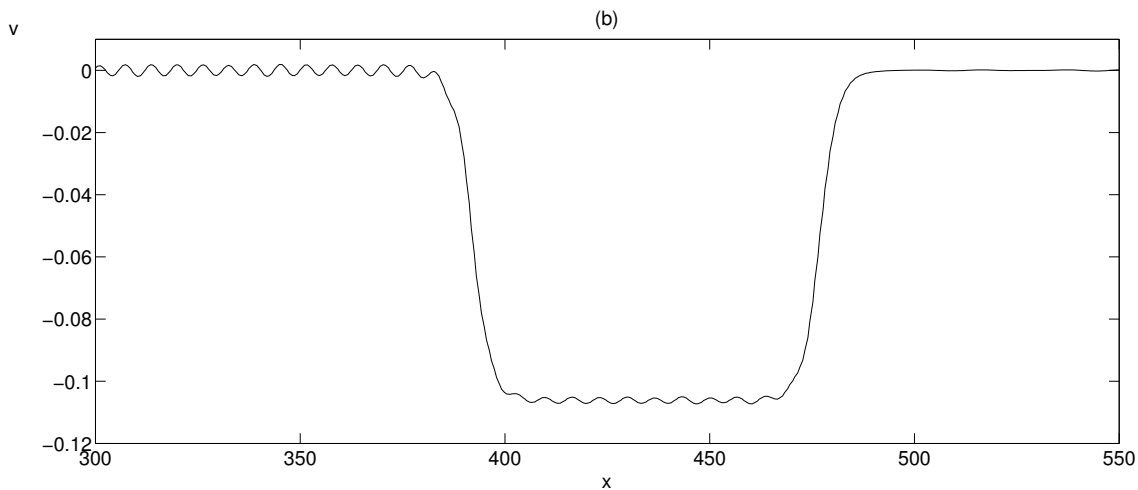


FIG. 4.19 – Profil de la solution v pour $\epsilon = 5.10^{-16}$ à $t_{max} = 480$.

tialisons le système avec une onde moins large, correspondant disons à $\epsilon = 10^{-10}$. L'onde solitaire large obtenue contiendrait moins d'oscillations sur la partie plate. Mais se propage-t-elle à la vitesse $C_{lim} - 10^{-10}$ ou $C_{lim} - 5.10^{-16}$? Il est clair qu'une fois arrivé très proche de la vitesse limite, ce qui compte c'est uniquement cette valeur limite. En fait, l'onde solitaire n'est plus vraiment une onde solitaire : c'est la juxtaposition de deux fronts, indépendants l'un de l'autre en un certain sens. C'est d'une certaine manière ce que nous dit cette multiplicité de solutions stationnaires : la symétrie d'une onde solitaire fixe son unicité, la multiplicité de solutions symétriques suggère que ce ne sont plus des ondes solitaires. Cela nous amène à penser que la définition d'un front généralisé pourrait être élargi et ne pas se limiter à la seule vitesse limite. Il existerait une fine bande de l'espace de paramètres où la solution de type front généralisé (i.e. avec des oscillations résonantes) est possible.

4.3.2.c Onde solitaire classique

Cet exemple correspond à une onde solitaire de plus petite amplitude, dont la forme s'approche de la solution en cloche de KdV. Nous présentons brièvement l'évolution à la Figure 4.20 pour la solution v . Elle ressemble beaucoup à celle du problème découplé. L'amplitude des oscillations augmente en se rapprochant de l'onde solitaire, à cause d'une dispersion insuffisante de la partie située à la droite de l'onde solitaire. Pour des temps bien plus longs, l'amplitude de cette partie dispersive va diminuer de sorte que la résonance du train d'ondes de l'autre côté ne ressentira plus cette décroissance. La seule différence notable est la présence, comme pour les cas précédents, d'ondes qui modifient la dynamique juste à gauche de l'onde solitaire. Nous voyons donc des ondes de plus grande longueur d'onde qui ne module pas le train d'ondes rayonnées. Notons que nous l'observons ici pour la solution v , puisque l'ampli-

tude des oscillations rayonnées est petite.

4.3.2.d Amplitude des oscillations en fonction de ϵ

Le résultat principal du chapitre sur les solutions stationnaires affirme que l'amplitude des oscillations aux pieds d'une onde solitaire généralisée large peut s'annuler pour un ensemble discret de valeurs de la vitesse. Ces valeurs s'accumulent en s'approchant de la vitesse critique correspondant à un front. Les solutions associées sont caractérisées par un nombre différent d'oscillations sur le dessus de l'onde solitaire. La courbe de l'amplitude de ces petites oscillations en fonction de ϵ oscille autour de 0, régulièrement en échelle logarithmique (Figure 3.14).

Nous présentons la solution instationnaire obtenue correspondant à 12 des 50 valeurs de cette figure, régulièrement espacées en échelle logarithmique (Figures 4.21 et 4.22). La solution à l'instant final est sur la gauche, zoomée sur le train d'ondes rayonnées, et le spectre de Fourier est montré juste à côté. Ainsi, nous pouvons observer comment varie la résonance en fonction de ϵ . Trois éléments nous permettent de juger de celle-ci. Tout d'abord, l'amplitude des oscillations dans le train d'ondes à gauche. Cependant, comme nous l'avons discuté plus haut, la modulation de l'enveloppe gêne l'évaluation de l'amplitude. De plus, l'amplification peut être petite mais non nulle, de sorte qu'elle ne se voit pas. En effet, nous avons vu, en résolvant le problème découplé, que l'absence de résonance se manifestait par la propagation des paquets d'ondes à travers l'onde solitaire sans qu'ils ne changent leur forme. Il faut donc observer l'amplitude des oscillations au nœud entre deux paquets. En revanche, même si l'amplification due à la résonance est petite, le spectre de Fourier doit faire un pic au nombre d'ondes résonant.

Nous observons tout d'abord que l'allure générale est similaire dans tous ces cas. Clairement, la force de la résonance oscille. Le pic dans le spectre au niveau du nombre d'onde résonant est notamment moins élevé aux Figures 4.21(a), 4.21(e), 4.22(b) et surtout 4.22(f). Comme nous nous y attendions, la modulation en paquets d'ondes à gauche de l'onde solitaire est plus visible dans ces cas moins résonants. En particulier, la Figure 4.22(f) montre nettement deux paquets. Cependant, nous observons que l'autre modulation du train d'ondes, de largeur intermédiaire entre les ondes courtes résonantes et les paquets, est toujours présente. Cela va à l'encontre de l'exemple non résonant du problème découplé qui montrait des paquets d'ondes bien définis (Figure 4.7). Par conséquent, les effets non linéaires influent sur cette modulation d'enveloppe, qui peut être importante par rapport à l'amplitude de la tête du train d'ondes. Cependant, si elle est plus marquée, cette modulation semble bien s'atténuer avec le temps, comme nous pouvons le constater en regardant le train d'ondes rayonnées près de l'onde solitaire.

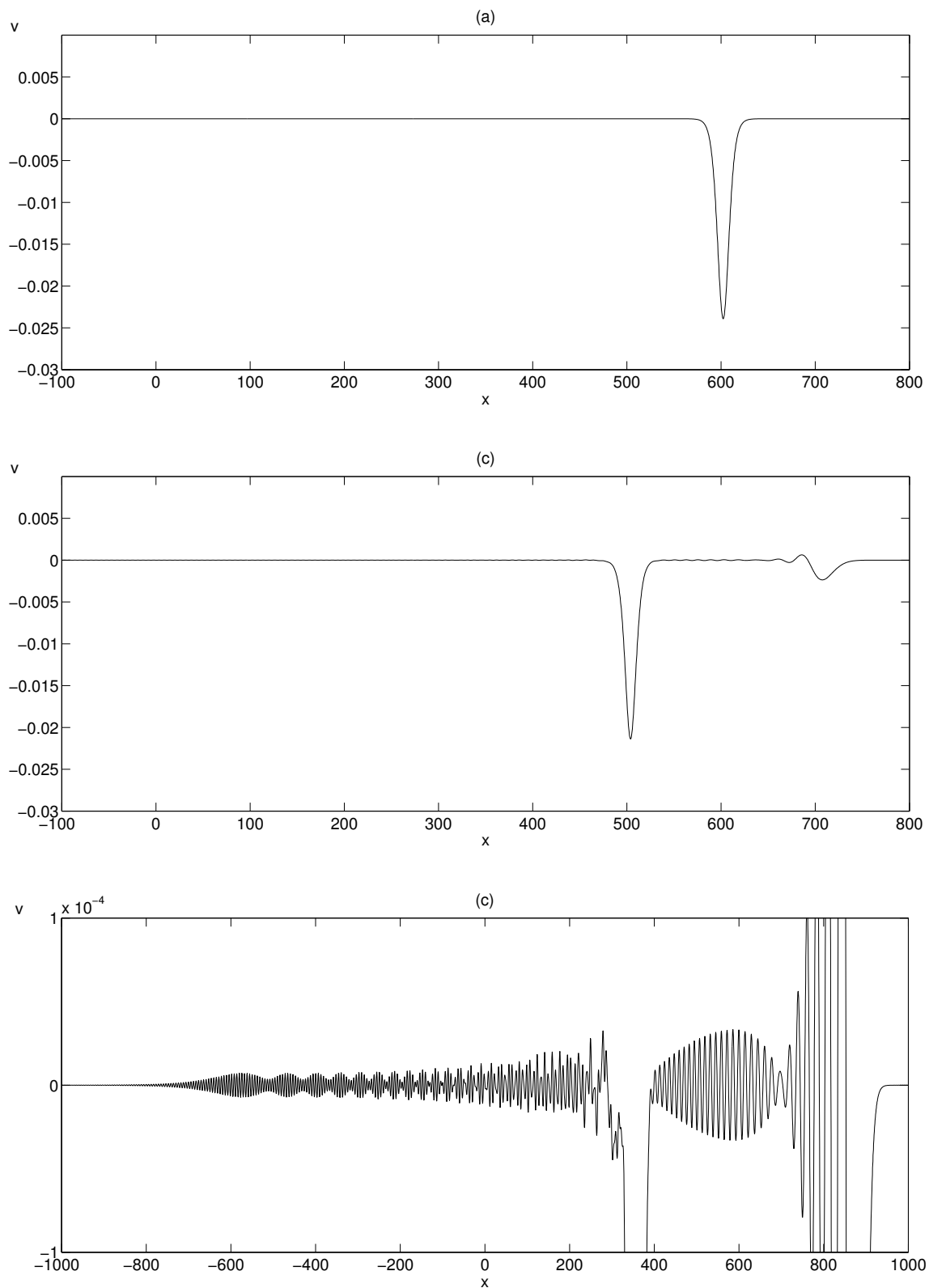


FIG. 4.20 – Evolution de la solution v pour $\epsilon = 10^{-1}$: (a) condition initiale, (b) à $t = 192$, (c) à $t = 480$, zoomée sur le rayonnement.

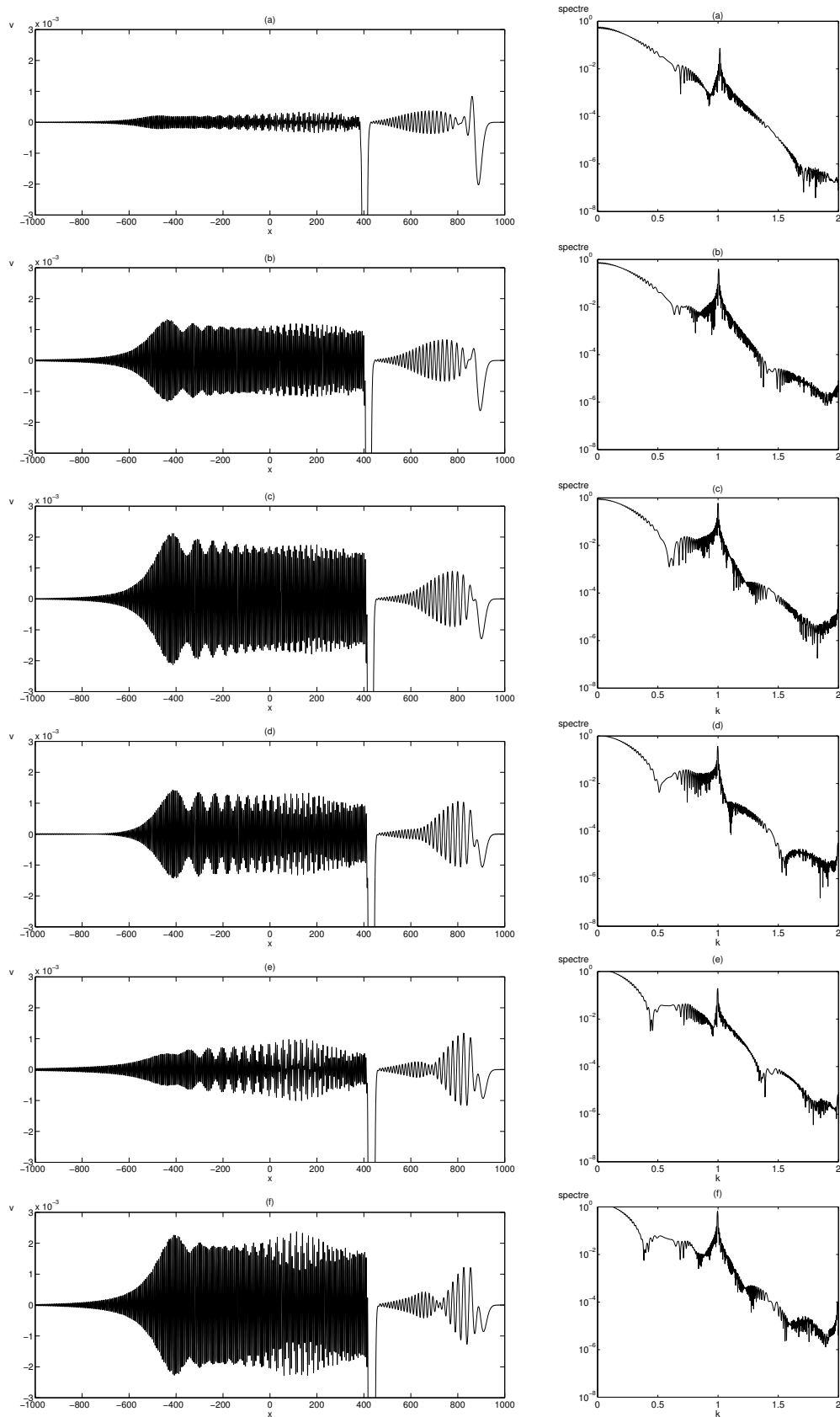


FIG. 4.21 – Solution v zoomée sur le rayonnement (gauche) et spectre de Fourier en valeur absolue (droite) à $t = 480$ pour différentes valeurs de ϵ : (a) $\epsilon = 3.907 \cdot 10^{-2}$, (b) $\epsilon = 1.842 \cdot 10^{-2}$, (c) $\epsilon = 8.685 \cdot 10^{-3}$, (d) $\epsilon = 4.095 \cdot 10^{-3}$, (e) $\epsilon = 1.931 \cdot 10^{-3}$, (f) $\epsilon = 9.103 \cdot 10^{-4}$.

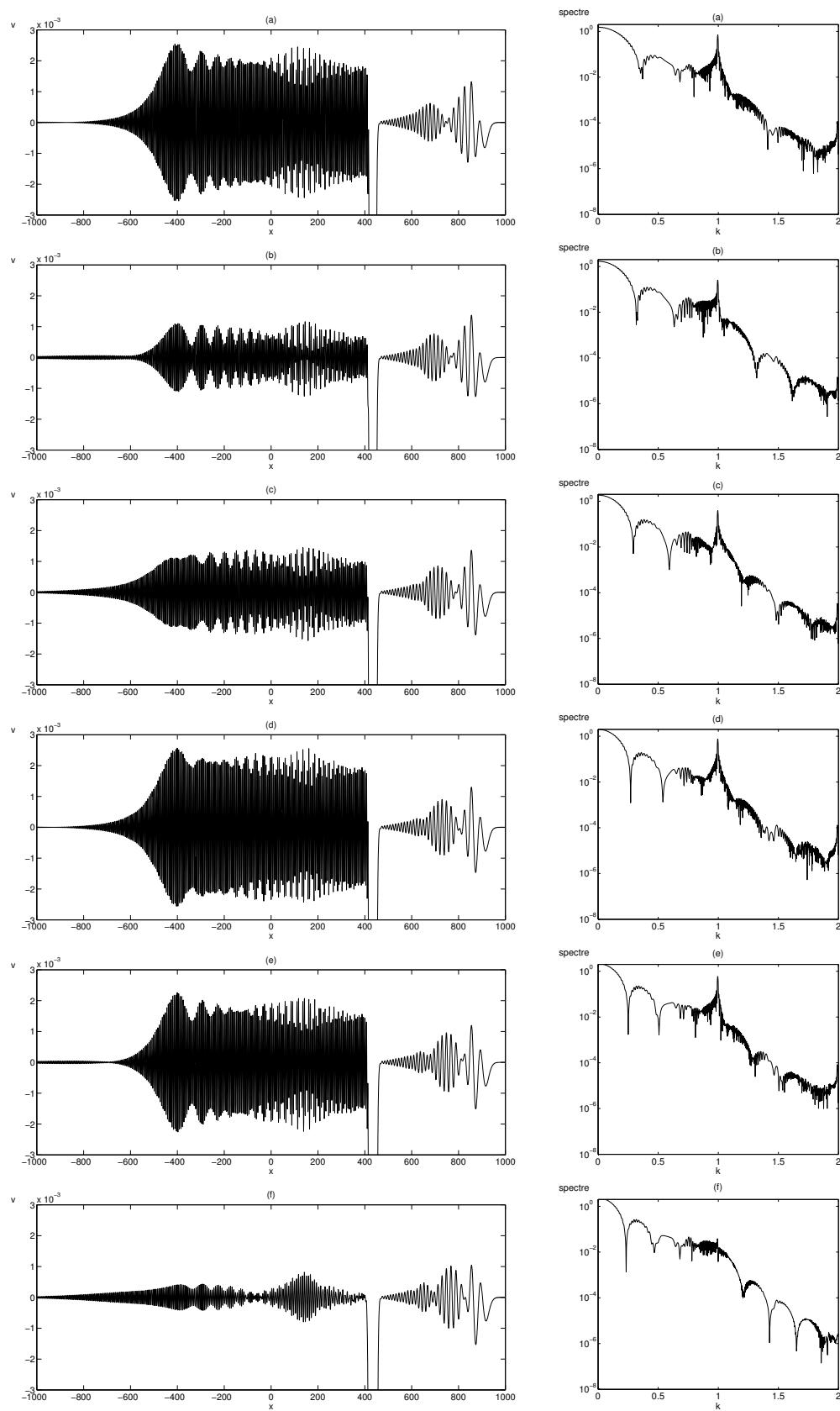


FIG. 4.22 – Solution v zoomée sur le rayonnement (gauche) et spectre de Fourier en valeur absolue (droite) à $t = 480$ pour différentes valeurs de ϵ : (a) $\epsilon = 4.292 \times 10^{-4}$, (b) $\epsilon = 2.024 \times 10^{-4}$, (c) $\epsilon = 9.541 \times 10^{-5}$, (d) $\epsilon = 4.498 \times 10^{-5}$, (e) $\epsilon = 2.121 \times 10^{-5}$, (f) $\epsilon = 1.000 \times 10^{-5}$.

4.3.2.e Faible résonance

La question est de savoir si le cas non résonant peut persister dans le temps. Nous venons de mettre en évidence le caractère oscillatoire de l'amplitude des ondes résonantes. Nous regardons l'évolution de la solution lorsque nous choisissons la condition initiale telle que la solution stationnaire n'a pas d'oscillations sur les côtés. Pour le problème découplé, nous avons observé cette possibilité qui se manifeste par l'absence de résonance entre les paquets d'ondes et l'onde solitaire. Nous connaissions précisément la valeur de ϵ qui donnait ce cas. Pour le système couplé, c'est plus délicat. Nous estimons cette valeur en faisant des tests sur le problème stationnaire. De plus, nous avons vu plus haut que l'onde solitaire de la solution n'était pas exactement celle prévue pour initialiser le système. Nous considérons donc un cas très peu résonant et nous désirons constater si l'onde solitaire tend à rayonner plus, ou si au contraire la résonance semble disparaître.

La Figure 4.23 montre le résultat que nous obtenons dans ce cas. Le premier graphe montre le train d'ondes en début de simulation sur un petit intervalle. Cela permet de s'apercevoir qu'il n'y a pas d'amplification visible. De plus, la longueur d'onde des ondes juste à gauche de l'onde solitaire ne correspond pas à q_{res} . Cela signifie que lorsque le paquet d'ondes contenant le nombre d'onde résonant s'est séparé de l'onde centrale, celle-ci n'a pas "accroché" les ondes courtes se propageant à la vitesse de l'onde solitaire. La résonance n'a donc, semble-t-il, pas eu lieu au départ. En fait, celle-ci est complètement masquée par les autres ondes. La différence d'amplitude est telle que les ondes résonantes ne se voient pas. Les deux graphes suivants présentent la suite de l'évolution sur des intervalles plus grands. Le deuxième instant est le même que celui utilisé au paragraphe précédent. Nous retrouvons une forme similaire au dernier cas de la Figure 4.22 (bien que la valeur de ϵ ne corresponde pas au même zéro). En poussant la simulation un peu plus loin, nous observons qu'une amplification semble se produire près de l'onde solitaire. La mesure des longueurs d'onde dans cette zone confirme bien la présence des oscillations résonantes. Elles sont visibles à cet endroit car c'est un nœud entre deux paquets d'ondes. L'évolution de la résonance apparaît plus clairement sur le spectre de Fourier (Figure 4.24). En effet, nous voyons qu'un pic grandit en q_{res} au cours du temps. Cela correspond au rayonnement qui se propage. Nous voyons que le pic est invisible au début, pourtant la suite prouve que la résonance est bien présente. Tous nos essais pour se rapprocher d'un zéro de la courbe 3.14 qui représente l'amplitude des oscillations en fonction de ϵ ont inévitablement mené à cette constatation. Notamment, près du premier zéro de la courbe, la solution suit la même évolution que les autres. Remarquons enfin que l'interaction entre les paquets d'ondes et l'onde solitaire fait apparaître une forme spéciale au pied et de chaque côté de l'onde solitaire, que nous n'avons pas observé pour le système découplé.

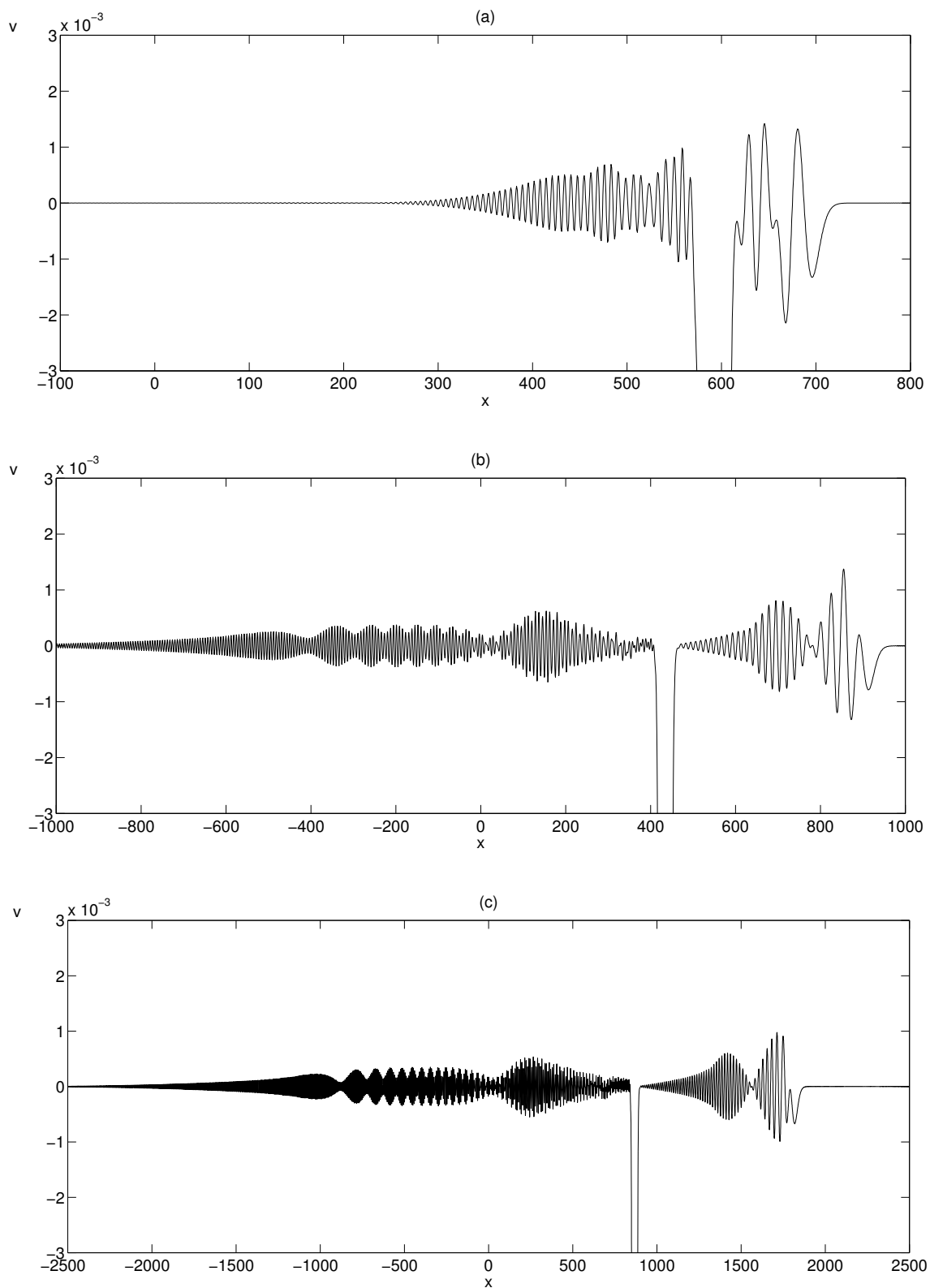


FIG. 4.23 – Evolution de la solution v pour $\epsilon = \epsilon^*$, zoomée sur le rayonnement : (a) à $t = 192$, (b) à $t = 480$, (c) à $t = 960$.

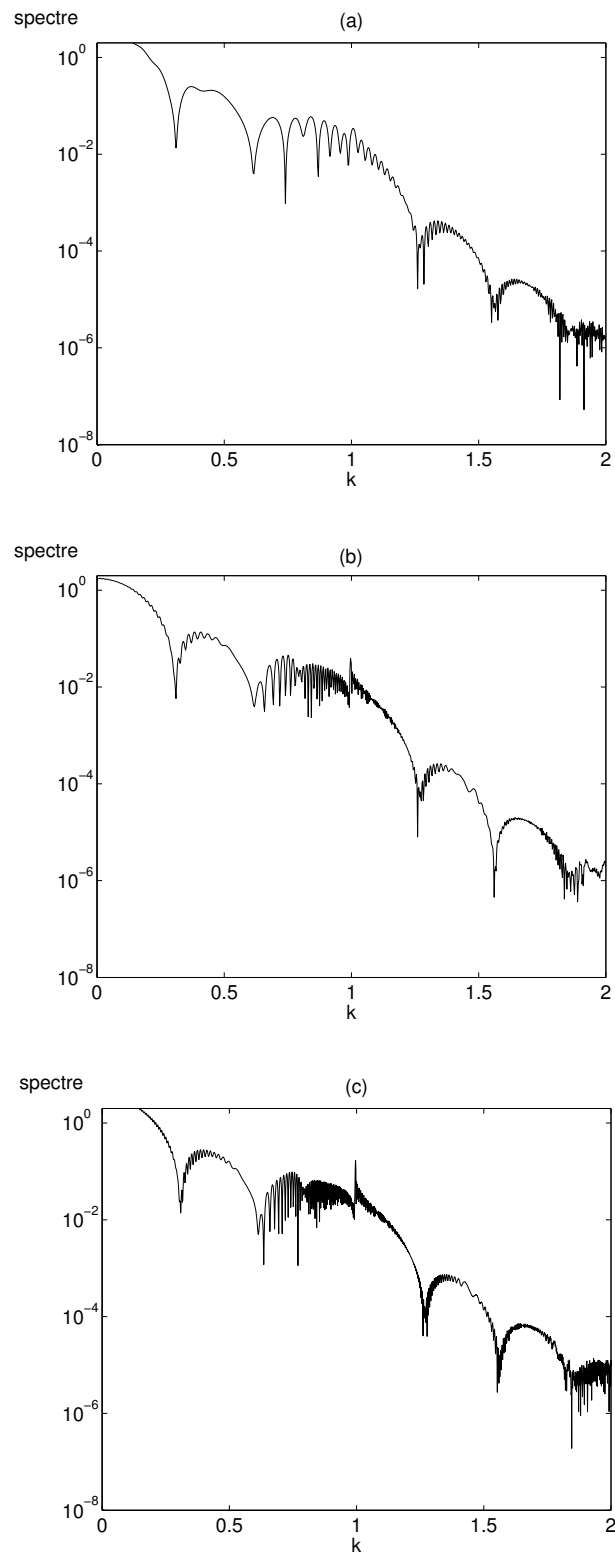


FIG. 4.24 – Evolution du spectre de Fourier en valeur absolue associé aux solutions de la Figure 4.23 : (a) à $t = 192$, (b) à $t = 480$, (c) à $t = 960$.

4.3.3 Evolution d'une perturbation initiale plus générale

Depuis le début de cette section, nous nous sommes efforcés de définir les conditions initiales de sorte à maîtriser en quelque sorte l'onde solitaire principale. L'objectif était de pouvoir décrire le rayonnement d'ondes courtes par cette onde solitaire, et d'observer l'obtention de la solution (quasi-)stationnaire telle que nous l'avions étudiée au premier chapitre de cette partie. A présent, nous faisons l'expérience avec une perturbation initiale en cloche, mais de taille supérieure à l'amplitude limite. L'évolution d'une telle condition initiale pour l'équation d'eKdV peut générer une onde solitaire large, mais aussi plusieurs ondes solitaires moins amples, dont certaines sont situées sur l'onde solitaire large avec une polarité inversée [14]. A ceci s'ajoute un train d'ondes dispersives dont l'amplitude diminue avec le temps.

Nous regardons avec cet exemple comment la résonance onde longue-onde courte peut résulter d'une perturbation quelconque. En particulier, nous sommes intéressés par la dynamique sur la partie plate de l'onde solitaire en présence de cette résonance. Les résultats sont présentés aux Figures 4.25 à 4.28. Pour la même raison que pour les exemples précédents, les oscillations résonantes ne sont pas visibles sur les premiers graphes de la solution u . En effet, le couplage faible entraîne que même si elles sont présentes, elles sont invisibles à l'échelle des ondes les plus grandes. Cela permet de voir distinctement ce qu'il se passe au niveau des ondes longues. Nous observons donc la décomposition de la perturbation initiale en une onde solitaire large et un train d'ondes (Figure 4.25). Ce scénario ressemble tout à fait au résultat de Pelinovskii et Slyunyaev [14] pour eKdV. Le train d'ondes est constitué d'ondes courtes qui se propagent le plus rapidement vers la gauche (vitesses les plus négatives), et plus on se rapproche de l'onde solitaire large, plus le train d'ondes prend l'aspect d'un train d'ondes solitaires. Celles-ci proviennent en quelque sorte de la décomposition de la base de la perturbation en cloche. Mais il s'ajoute à cela la décomposition en ondes qui prennent naissance sur le dessus de l'onde large. Nous constatons que les ondes solitaires qui y sont présentes ont une polarité inversée. En outre, elles ont des vitesses qui ne sont pas dans la continuité de celles du train d'ondes solitaires nées au pied de l'onde large. Par conséquent, après avoir changé de polarité en "descendant" de l'onde large, elles entrent successivement en collision avec les ondes solitaires du train d'ondes longues nées en bas. En complément à cette dynamique d'ondes longues, qui est prépondérante pour u , nous retrouvons un faible rayonnement (Figure 4.26). Ceci nous permet aussi d'observer la présence d'une onde solitaire de dépression ayant une vitesse positive et qui se trouve donc à droite de l'onde large.

Ces deux phénomènes sont plus visibles pour v . En effet, ils y sont d'échelle plus comparable à l'amplitude des ondes longues. La Figure 4.27 montre clairement l'apparition d'un train d'ondes courtes de même longueur d'ondes, rayonnées vers la gauche du domaine. A cause de la présence des ondes solitaires près de l'onde large, nous distinguons mal où commence

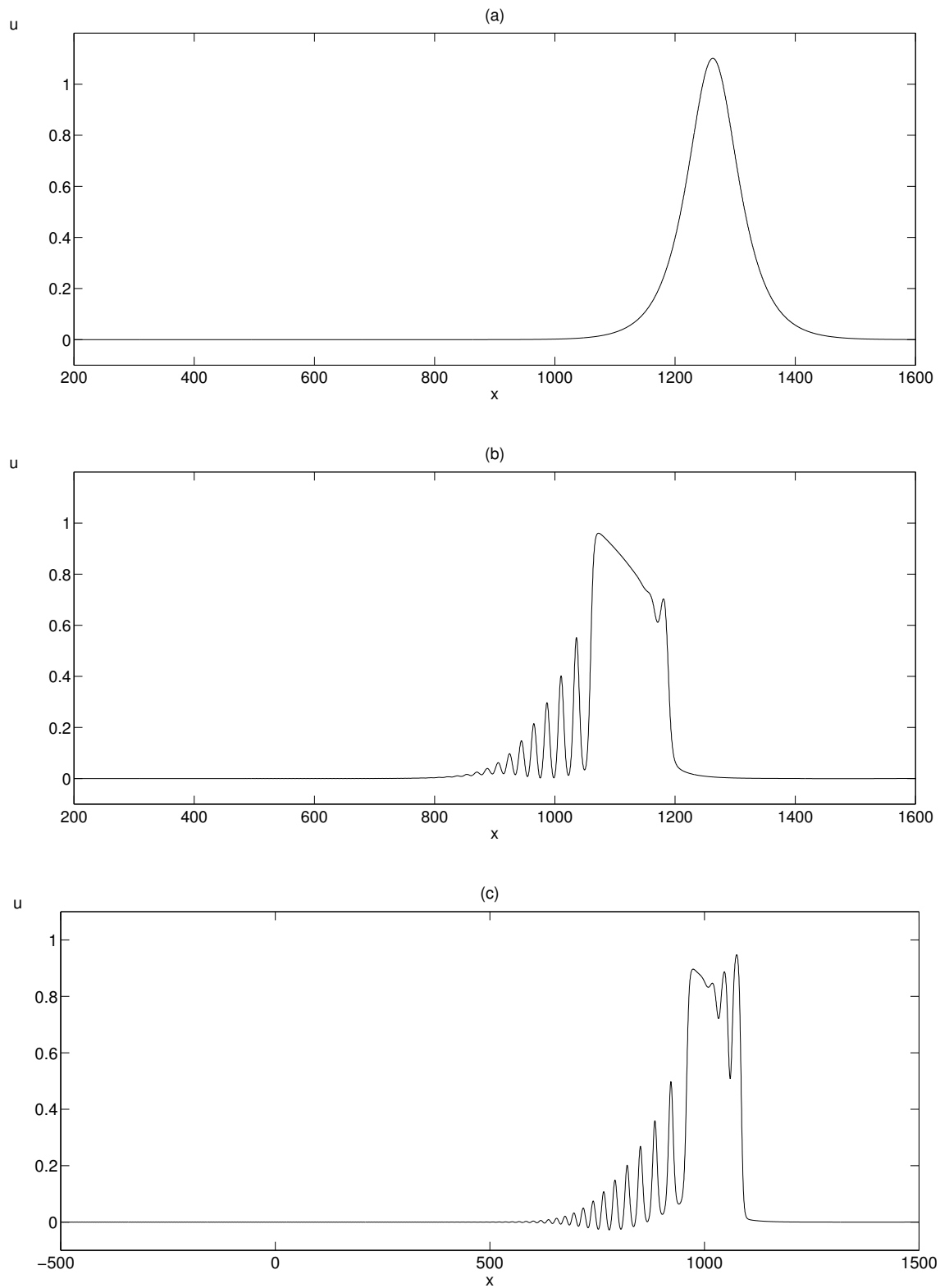


FIG. 4.25 – Evolution de la solution u pour une perturbation initiale en cloche : (a) condition initiale, (b) à $t = 360$, (c) à $t = 720$.

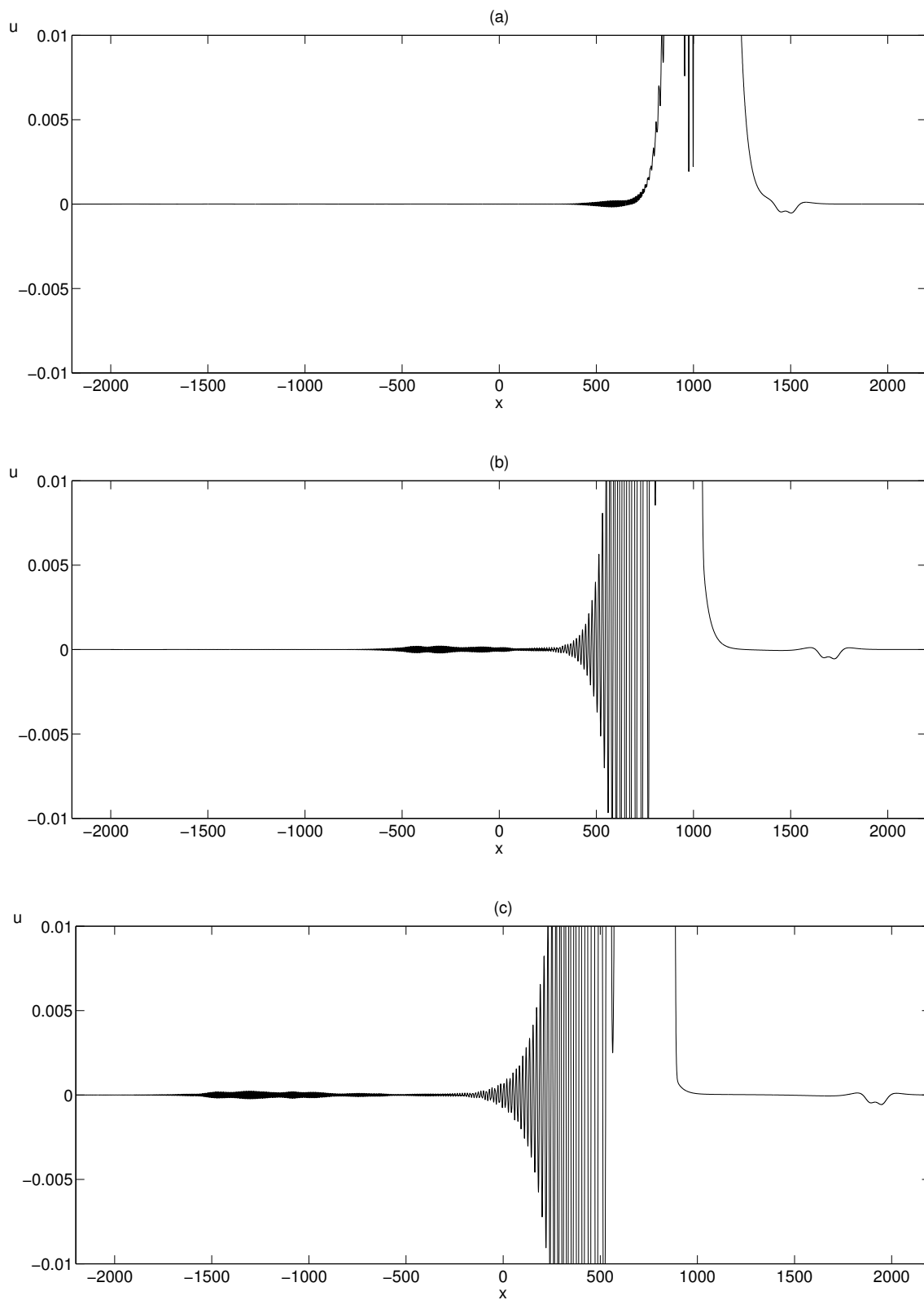


FIG. 4.26 – Suite de l'évolution de la solution u , zoomée autour de 0, pour une perturbation initiale en cloche : (a) à $t = 1080$, (b) à $t = 1440$, (c) à $t = 1440$.

le rayonnement. A l'aide d'un zoom, nous constatons que la modulation du train d'ondes rayonnées s'est grandement complexifiée (Figure 4.28). L'interaction de la modulation du train d'ondes avec les ondes solitaires successivement rencontrées a créé une géométrie très particulière de l'enveloppe. En outre, la structure cohérente présente à droite de l'onde solitaire apparaît très clairement ici. Elle est isolée, mais elle a une forme qui n'est pas celle d'une onde solitaire classique.

Enfin, si nous ramenons les solutions sur un intervalle réduit autour des ondes solitaires larges, nous distinguons nettement le train d'ondes solitaires (Figure 4.29). Pour u , seules ces ondes longues sont visibles. En revanche pour v , le résonance étudiée se manifeste en superposition du train d'ondes longues, à la fois au pied de l'onde large et sur sa partie plate. Le rayonnement des ondes courtes par l'onde solitaire (principale) s'avère donc être un phénomène persistant malgré la présence d'une dynamique complexe. Nous pouvons extrapoler que pour des temps plus longs, il ne restera plus que l'onde solitaire large généralisée se propageant à la vitesse C , comme celle de la Figure 4.18.

Finalement, en regardant une perturbation initiale quelconque, nous en déduisons de l'information concernant les phénomènes "non attendus" des cas précédents. En effet, la génération de multiples ondes solitaires peut expliquer les ondes irrégulières observées juste à gauche de l'onde solitaire des solutions u , et qui ne modulent pas les ondes rayonnées. La condition initiale étant très proche de l'onde solitaire principale, les ondes longues subalternes sont de faible amplitude, et même indiscernables sur la solution v . L'apparition d'une structure persistante de vitesse positive est également confirmée. Quoiqu'il en soit, cela nous donne un aperçu de la richesse des solutions du système. Les structures cohérentes qui sont visiblement présentes dans nos simulations n'ont pas été détaillées dans ce travail, puisque l'objectif était d'étudier les ondes solitaires larges généralisées. Une perspective serait donc de déterminer l'ensemble des solutions stationnaires possibles dans l'espace des paramètres, puis d'étudier quels sont les attracteurs du système dépendant du temps.

4.4 Instabilité modulationnelle

L'étude des paquets d'ondes non linéaires s'effectue communément dans le contexte de l'équation de Schrödinger non linéaire. La stabilité d'un groupe d'ondes faiblement perturbé dépend du signe des coefficients de cette équation, dérivée du système initial. Si le produit des coefficients (paramètre de Lighthill) est négatif, le paquet d'ondes s'avère être stable et la perturbation de l'enveloppe disparaît. S'il est positif, il est instable et l'instabilité modulationnelle (l'instabilité de Benjamin-Feir) se développe [2]. Les ondes rayonnées par l'onde solitaire peuvent être vues dans une certaine mesure comme un groupe d'ondes faiblement modulé, susceptible d'être modifié par la présence de cette instabilité. Bakholdin et Il'ichev

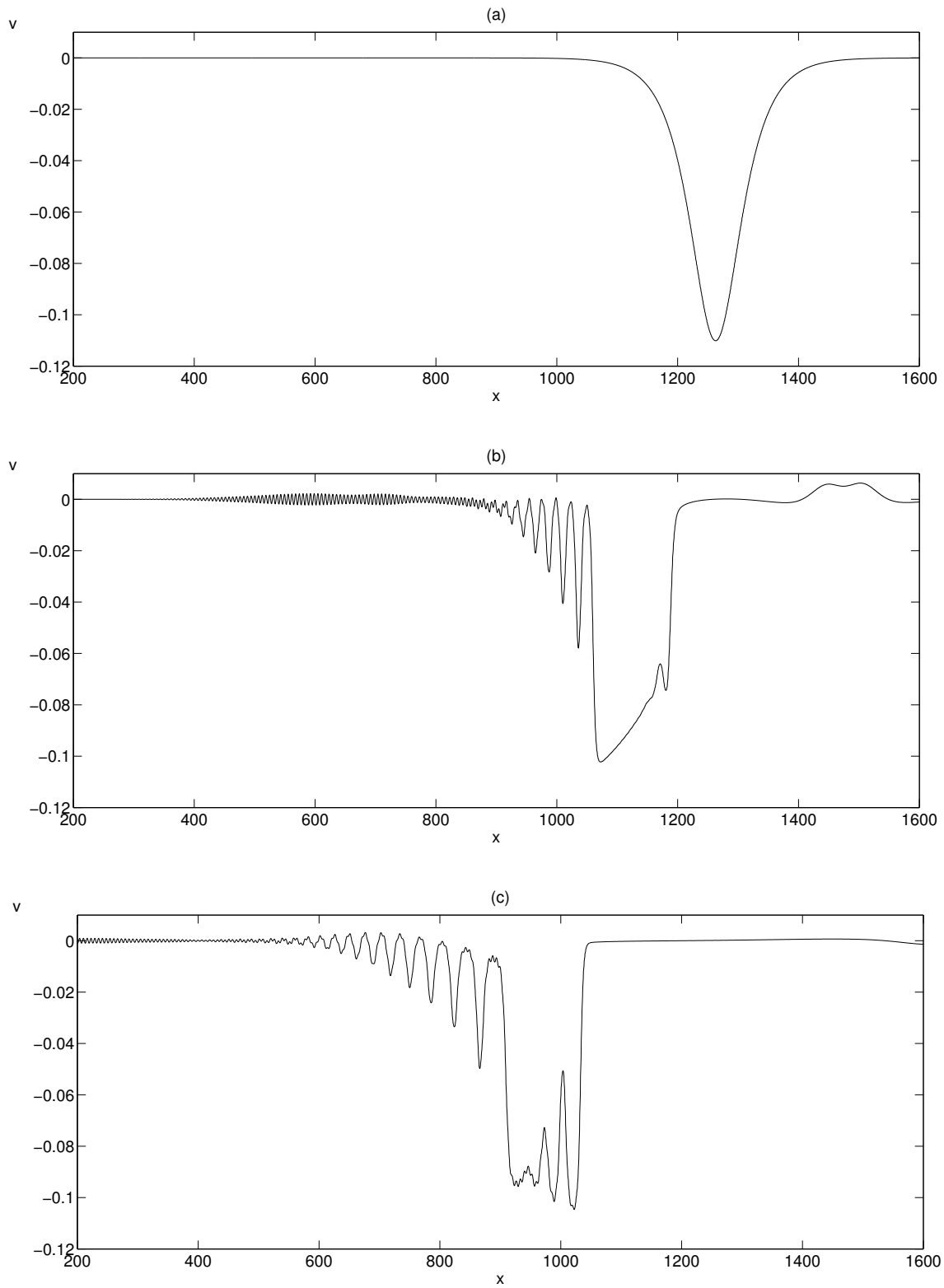


FIG. 4.27 – Evolution de la solution v pour une perturbation initiale en cloche : (a) condition initiale, (b) à $t = 360$, (c) à $t = 720$.

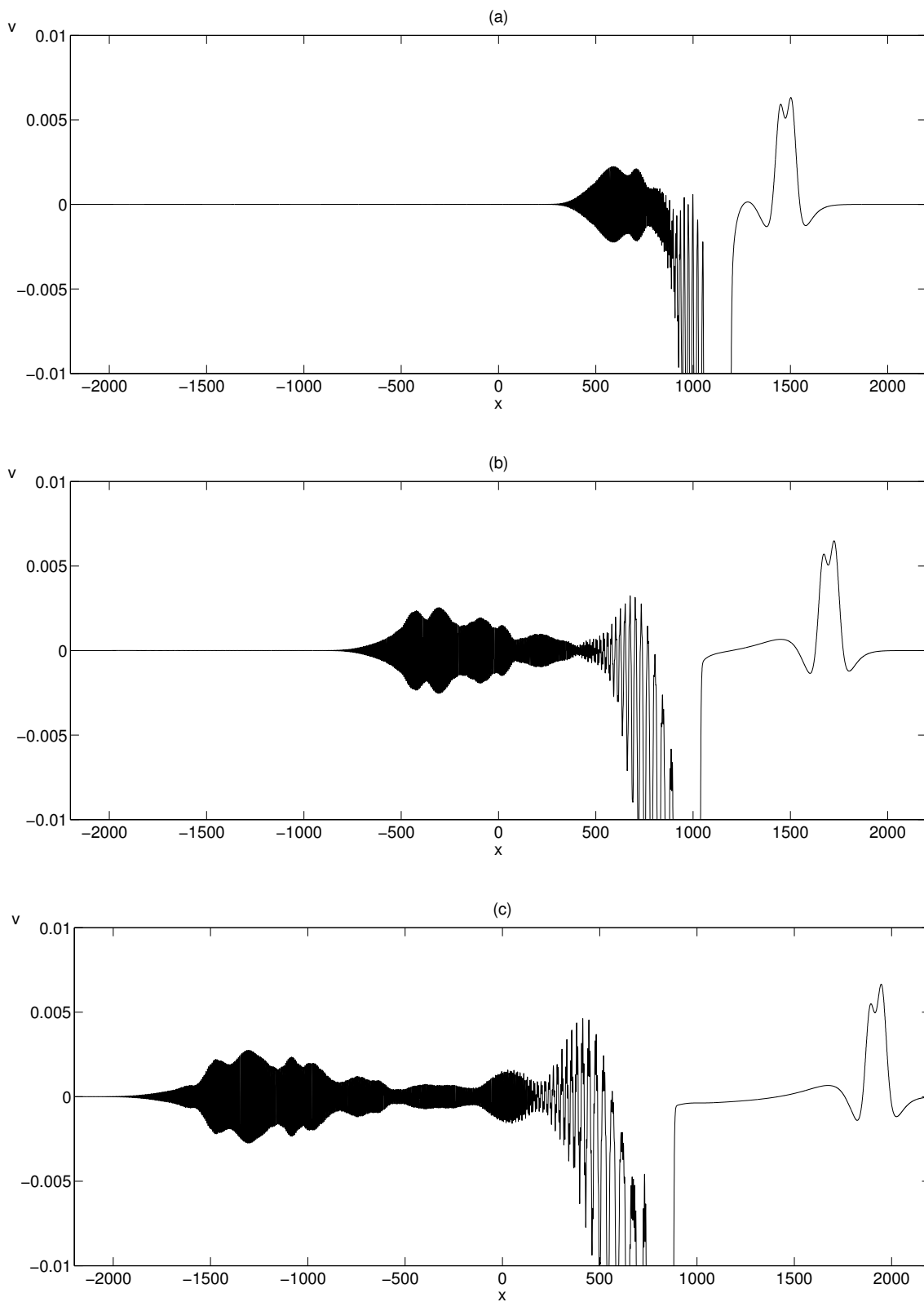


FIG. 4.28 – Suite de l'évolution de la solution v pour une perturbation initiale en cloche, zoomée sur les ondes rayonnées : (a) à $t = 720$, (b) à $t = 1080$, (c) à $t = 1440$.

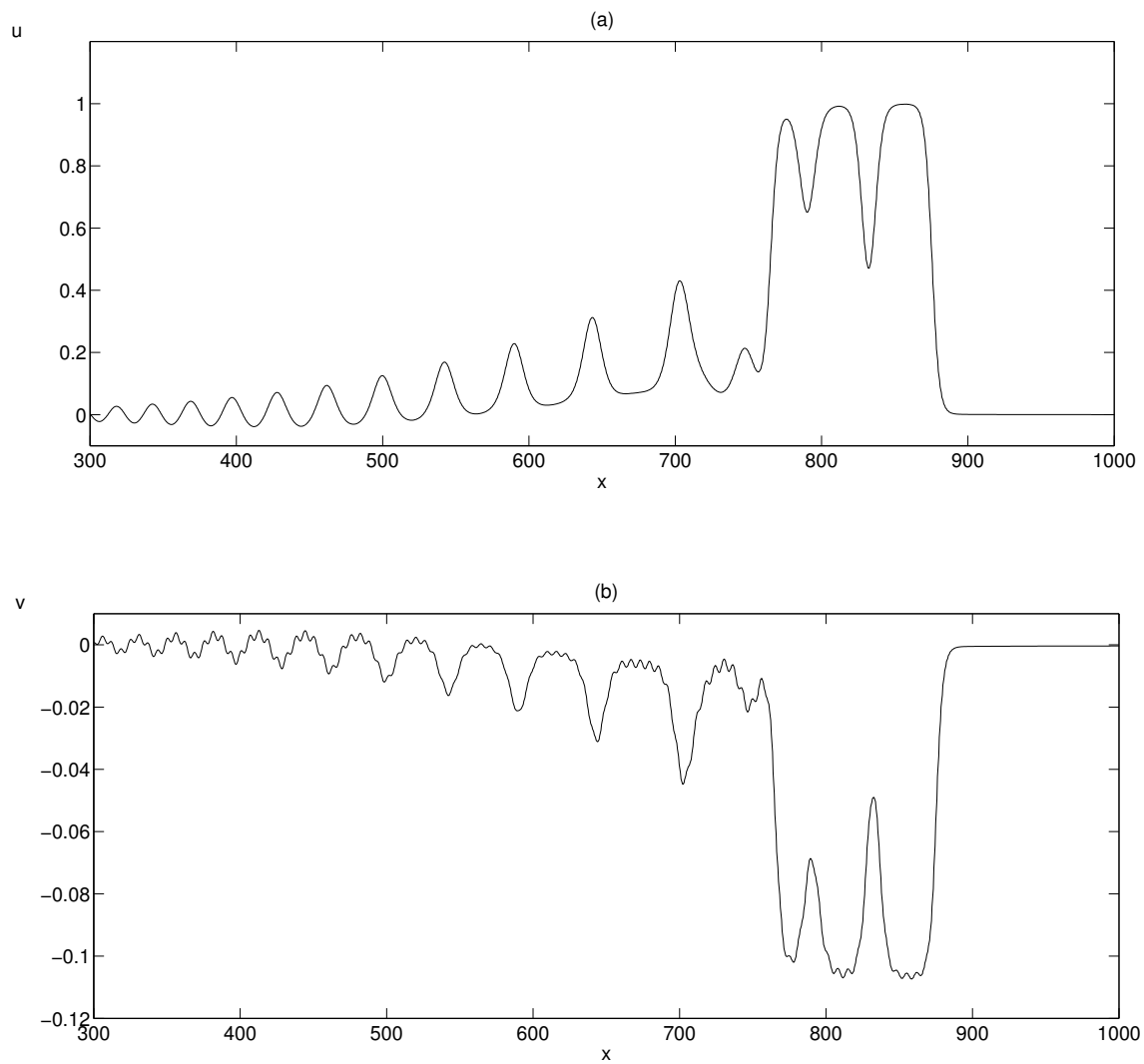


FIG. 4.29 – Profil des solutions pour une perturbation initiale en cloche à $t_{max} = 1440$ sur un intervalle centré autour de l'onde solitaire large : (a) u , (b) v .

[1] ont soulevé cette possibilité à propos de l'équation de KdV du 5^{ème} ordre. En fait, nous avons observé que la modulation est importante lorsque la résonance est faible. Mais dans ce cas, la dynamique du rayonnement n'est plus prépondérante. A l'opposé, nous avons montré que la modulation s'atténuait lorsque la résonance était au plus fort. La dynamique du train d'ondes rayonnées est alors significative.

Afin de déterminer la présence de l'instabilité modulationnelle dans le système d'équations d'eKdV, nous entreprenons la dérivation de l'équation de Schrödinger en utilisant la méthode des échelles multiples (en suivant une procédure asymptotique comme dans [9]). Une solution du système (4.1) est cherchée sous la forme

$$\begin{aligned} u &= \epsilon A e^{i\theta} + c.c. + \epsilon^2 A_2 e^{2i\theta} + c.c. + \epsilon^2 A_0 + O(\epsilon^3), \\ v &= \epsilon B e^{i\theta} + c.c. + \epsilon^2 B_2 e^{2i\theta} + c.c. + \epsilon^2 B_0 + O(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (4.17)$$

où $\theta = kx - \omega t$, $\epsilon \ll 1$ et $c.c.$ est le complexe conjugué. En substituant (4.17) dans (4.1), nous obtenons un ensemble de systèmes correspondant aux différentes harmoniques. Pour le premier harmonique, il s'écrit

$$\begin{cases} \epsilon(D_1(\omega, k)A + E_1(\omega, k)B) &= \epsilon^3 F_1 + O(\epsilon^4), \\ \epsilon(D_2(\omega, k)B + E_2(\omega, k)A) &= \epsilon^3 F_2 + O(\epsilon^4). \end{cases} \quad (4.18)$$

où

$$\begin{aligned} D_1(\omega, k) &= -i\omega + ik(\Delta - \lambda_1 k^2), \\ E_1(\omega, k) &= ik\kappa_1, \\ D_2(\omega, k) &= -i\omega + ik(-\Delta - \lambda_2 k^2), \\ E_2(\omega, k) &= ik\kappa_2, \end{aligned} \quad (4.19)$$

et $F_{1,2}$ sont les termes non linéaires

$$\begin{aligned} F_1 &= -ik\alpha_1(A_2\bar{A} + A_0A) - ik\beta_1|A|^2A, \\ F_2 &= -ik\alpha_2(B_2\bar{B} + B_0B) - ik\beta_2|B|^2B. \end{aligned} \quad (4.20)$$

En multipliant la première équation de (4.18) par $-D_2$ et la seconde par E_1 , puis en ajoutant les deux équations, nous obtenons

$$\epsilon D(\omega, k)A = \epsilon^3 F + O(\epsilon^4). \quad (4.21)$$

où $D = -D_1D_2 + E_1E_2$ et $F = -D_2F_1 + E_1F_2$.

Nous introduisons alors les variables lentes $X = \epsilon x$, $T = \epsilon t$, et nous supposons que toutes les amplitudes dépendent de ces variables. Dans ce cas, les dérivées du système de départ sont données par

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= -i\omega + \epsilon \frac{\partial}{\partial T}, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= ik + \epsilon \frac{\partial}{\partial X}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

pour le premier harmonique (2ω et $2k$ pour le second, ...). Par conséquent, (4.18) et donc (4.21) doivent être ajustés pour tenir compte de cette dépendance en remplaçant ω par $\omega + i\epsilon\partial/\partial T$ et k par $k - i\epsilon\partial/\partial X$. Puisque ϵ est un petit paramètre, ceci peut être fait à l'aide d'un développement en ϵ au point (ω, k) . Le terme non linéaire reste inchangé car les nouveaux termes sont d'ordre supérieur. En revanche, les membres de gauche font apparaître des termes en ϵ^2 et ϵ^3 . En particulier, le développement du coefficient D est

$$D = D(\omega, k) + i\epsilon \frac{\partial D}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial T} - i\epsilon \frac{\partial D}{\partial k} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{1}{2}\epsilon^2 \frac{\partial^2 D}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 D}{\partial \omega \partial k} \frac{\partial^2}{\partial X \partial T} - \frac{1}{2}\epsilon^2 \frac{\partial^2 D}{\partial k^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2}. \quad (4.23)$$

Les dérivées par rapport à ω et à k peuvent être calculées explicitement à partir des expressions (4.19). Il est cependant plus pratique ici de garder une certaine généralité dans les calculs. Au premier ordre, nous obtenons la relation de dispersion

$$D(\omega(k), k) = O(\epsilon). \quad (4.24)$$

Nous avons également les deux propriétés suivantes obtenues en dérivant par rapport à k

$$\frac{\partial D}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial k} + \frac{\partial D}{\partial k} = O(\epsilon), \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial \omega^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 D}{\partial \omega \partial k} \frac{\partial \omega}{\partial k} + \frac{\partial^2 D}{\partial k^2} + \frac{\partial D}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} = O(\epsilon). \quad (4.26)$$

Au second ordre, il ressort de (4.21), où D est maintenant donné par (4.23), que

$$\frac{\partial D}{\partial \omega} \frac{\partial A}{\partial T} - \frac{\partial D}{\partial k} \frac{\partial A}{\partial X} = O(\epsilon). \quad (4.27)$$

qui devient, en utilisant (4.25),

$$\frac{\partial A}{\partial T} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial A}{\partial X} = O(\epsilon). \quad (4.28)$$

La vitesse de groupe $c_g = \partial\omega/\partial k$ apparaît ici naturellement. Nous introduisons alors le système de coordonnées se déplaçant à la vitesse de groupe $\xi = X - c_g T$ et $\tau = \epsilon T = \epsilon^2 t$. Dans ce référentiel, le troisième ordre de (4.21) s'écrit

$$i \frac{\partial D}{\partial \omega} \frac{\partial A}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \omega \partial k} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} = F + O(\epsilon). \quad (4.29)$$

Il suffit alors d'utiliser (4.26) et (4.28) dans (4.29) pour obtenir l'équation suivante

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} = \left(\frac{\partial D}{\partial \omega}\right)^{-1} F + O(\epsilon). \quad (4.30)$$

Afin d'obtenir le terme non linéaire, nous devons regarder le second harmonique et la composante moyennée. Pour le second harmonique, le système est au premier ordre

$$\begin{cases} \epsilon^2 (D_1(2\omega, 2k)A_2 + E_1(2\omega, 2k)B_2) & = -\epsilon^2 ik\alpha_1 A^2 + O(\epsilon^3), \\ \epsilon^2 (D_2(2\omega, 2k)B_2 + E_2(2\omega, 2k)A_2) & = -\epsilon^2 ik\alpha_2 B^2 + O(\epsilon^3). \end{cases} \quad (4.31)$$

Il ne contient pas de dérivée par rapport aux variables lentes car celles-ci n'interviennent qu'à l'ordre suivant. Après avoir effectué la même combinaison linéaire que pour le premier harmonique, nous obtenons

$$D(2\omega, 2k)A_2 = D_2(2\omega, 2k)ik\alpha_1 A^2 - E_1(2\omega, 2k)ik\alpha_2 B^2 + O(\epsilon). \quad (4.32)$$

Puisque B est proportionnel à A au premier ordre (donné par la seconde équation de (4.18)), nous en déduisons l'expression de A_2 sous l'hypothèse que $D(2\omega, 2k) \neq 0$ (et $D_2(\omega, k) \neq 0$)

$$A_2 = \frac{D_2(2\omega, 2k)D_2(\omega, k)^2 ik\alpha_1 - E_1(2\omega, 2k)E_2(\omega, k)^2 ik\alpha_2}{D(2\omega, 2k)D_2(\omega, k)^2} A^2 + O(\epsilon). \quad (4.33)$$

De manière analogue, B_2 s'écrit

$$B_2 = \frac{-E_2(2\omega, 2k)D_2(\omega, k)^2 ik\alpha_1 + D_1(2\omega, 2k)E_2(\omega, k)^2 ik\alpha_2}{D(2\omega, 2k)D_2(\omega, k)^2} A^2 + O(\epsilon). \quad (4.34)$$

Pour la composante moyennée, nous effectuons la même chose. Le système issu de (4.1), qui tient compte de la forme de la solution (4.17) et des variables lentes, s'écrit pour A_0, B_0

$$\begin{cases} \epsilon^3(A_{0T} + \Delta A_{0X} + \kappa_1 B_{0X}) = -\epsilon^3 \alpha_1 |A|_X^2 + O(\epsilon^4), \\ \epsilon^3(B_{0T} - \Delta B_{0X} + \kappa_2 A_{0X}) = -\epsilon^3 \alpha_2 |B|_X^2 + O(\epsilon^4). \end{cases} \quad (4.35)$$

Après avoir remplacé la dérivée temporelle selon (4.28), il peut être intégré en espace. La combinaison linéaire mène alors à

$$(-(\Delta - c_g)(-\Delta - c_g) + \kappa_1 \kappa_2)A_0 = \alpha_1(-\Delta - c_g)|A|^2 - \alpha_2 \kappa_1 |B|^2 + O(\epsilon). \quad (4.36)$$

Cela nous permet donc d'obtenir A_0 en fonction de $|A|^2$ et B_0 s'obtient de façon similaire

$$A_0 = \frac{\alpha_1(-\Delta - c_g)D_2(\omega, k)^2 - \alpha_2 \kappa_1 E_2(\omega, k)^2}{(-(\Delta - c_g)(-\Delta - c_g) + \kappa_1 \kappa_2)D_2(\omega, k)^2} |A|^2 + O(\epsilon). \quad (4.37)$$

$$B_0 = \frac{-\alpha_1 \kappa_2 D_2(\omega, k)^2 + \alpha_2(\Delta - c_g)E_2(\omega, k)^2}{(-(\Delta - c_g)(-\Delta - c_g) + \kappa_1 \kappa_2)D_2(\omega, k)^2} |A|^2 + O(\epsilon). \quad (4.38)$$

Par conséquent, les termes non linéaires F_1 et F_2 s'écrivent

$$\begin{aligned} F_1 &= -ik(\alpha_1(a_2 + a_0) + \beta_1)|A|^2 A, \\ F_2 &= ik \frac{E_2(\omega, k)}{D_2(\omega, k)} (\alpha_2(b_2 + b_0) + \beta_2 \frac{E_2(\omega, k)^2}{D_2(\omega, k)^2}) |A|^2 A, \end{aligned} \quad (4.39)$$

où les constantes a_2, b_2, a_0 et b_0 sont données respectivement par les formules (4.33), (4.34), (4.37) et (4.38). Il en résulte que l'équation (4.30), dépendant des variables τ et ξ , est l'équation de Schrödinger cubique

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A}{\partial \tau} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial D}{\partial \omega} \right)^{-1} \left(ik D_2(\omega, k) (\alpha_1(a_2 + a_0) + \beta_1) \right. \\ &\quad \left. + ik \frac{E_2(\omega, k)}{D_2(\omega, k)} E_1(\omega, k) \left(\alpha_2(b_2 + b_0) + \beta_2 \frac{E_2(\omega, k)^2}{D_2(\omega, k)^2} \right) \right) |A|^2 A + O(\epsilon). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Compte tenu du couplage, les expressions sont compliquées. Les coefficients sont donc calculés directement par un programme Matlab en fonction des paramètres du système. Dans tous les cas présentés à la section précédente, le paramètre de Lighthill était négatif pour le nombre d'onde résonant et donc le rayonnement stable. Ceci confirme les observations qui suggéraient que la modulation du rayonnement avait tendance à s'atténuer avec le temps.

4.5 Conclusion

Ce chapitre constitue une étude préliminaire du problème d'évolution composé de deux équations de KdV avec nonlinéarité cubique, linéairement couplées, que nous avons présenté au chapitre 3. Ce modèle d'ondes longues pour des problèmes multi-couches ayant deux modes d'ondes en présence comprend les ondes solitaires généralisées parmi ses solutions. A cause de la nonlinéarité cubique, le corps central de l'onde solitaire peut être limité en amplitude et présenter une partie plate sur le dessus. Cette solution représente la juxtaposition de deux fronts symétriques. Nous nous sommes intéressés à décrire la résonance onde longue-onde courte dans ce contexte d'ondes solitaires larges.

Nous avons observé le rayonnement des ondes résonantes d'un seul côté de l'onde solitaire, le côté dépendant de la vitesse de groupe de l'onde courte. La résonance est présente sur la partie centrale de l'onde solitaire. Le train d'ondes rayonnées est modulé, d'autant plus irrégulièrement que l'onde solitaire est large. Cependant, cette modulation s'atténue avec le temps et tend vers un rayonnement d'amplitude constante. Pour confirmer cette observation, nous avons dérivé l'équation de Schrödinger pour montrer que le nombre d'onde résonant n'était pas situé dans une zone d'instabilité modulationnelle. Il en résulte qu'une onde solitaire large généralisée est obtenue pour des temps longs. Le phénomène de rayonnement est quasiment stationnaire après une première phase durant laquelle les deux modes échangent de l'énergie. L'onde solitaire large généralisée est naturellement obtenue à partir d'une perturbation localisée générale d'amplitude supérieure à l'amplitude limite. La résonance se produit au sein d'une dynamique complexe où sont présentes plusieurs ondes solitaires dont certaines interagissent avec l'onde solitaire large et sont de polarité inversée sur sa partie plate. Le rayonnement des ondes résonantes traverse ce train d'ondes longues, ce qui lui confère une géométrie compliquée.

Enfin, nous avons confronté le résultat principal du chapitre 3 sur les solutions stationnaires. L'amplitude des ondes rayonnées est effectivement une fonction oscillante de la vitesse de résonance. En particulier, ce caractère oscillatoire s'accélère près de la vitesse critique. Cependant, nous avons toujours observé la présence de la résonance, même faible, malgré des tentatives pour se placer à un cas où la solution stationnaire n'a pas d'oscillation sur les côtés. Pour conclure sur la possibilité d'obtenir ces solutions stationnaires particulières, il faut se poser la question de leur stabilité. Par conséquent, une perspective immédiate à cette étude consiste à appliquer les méthodes récemment développées pour conclure sur la stabilité des ondes solitaires isolées parmi les ondes solitaires généralisées, appelées "embedded solitary waves" [17, 8, 18, 15]. Le résultat principal qui ressort de ces travaux est que l'onde solitaire à une bosse, correspondant au premier zéro (et appelée fondamentale), est linéairement stable, mais est sujette à une faible instabilité non linéaire. Cette instabilité, dite semi-stabilité, signifie

qu'une faible perturbation qui augmente l'énergie de l'onde solitaire isolée va s'atténuer, alors qu'une faible perturbation qui diminue l'énergie va faire grandir le rayonnement. Les autres ondes solitaires isolées, ayant plusieurs bosses, s'avèrent linéairement instables en général. Dans nos simulations, les ondes solitaires semblent se comporter de la même manière qu'elles soient à une bosse ou multi-bosses. Lorsque la condition initiale est choisie proche d'une onde solitaire isolée, nous avons toujours obtenu le rayonnement des ondes courtes.

Toute cette étude est centrée sur un des types d'ondes solitaires présent dans le système. Il en contient d'autres. Une perspective plus large consiste à déterminer l'ensemble des solutions stationnaires, notamment les diverses ondes solitaires, pour ce modèle générique dans la limite des ondes longues lorsque deux modes sont en présence. A partir de là, l'étude de la stabilité de ces solutions, puis la recherche des attracteurs du système permettrait de comprendre de façon globale quelle doit être la dynamique d'une perturbation initiale quelconque.

Bibliographie

- [1] Bakholdin I., Il'ichev A., Radiation and modulational instability described by the fifth-order Korteweg-de Vries equation, *Contemporary Math.* **200**, 1–15 (1996).
- [2] Benjamin T.B., Feir J.E., The disintegration of wave trains on deep water. Part 1. Theory, *J. Fluid Mech.* **27**, 417–430 (1967).
- [3] Bona J.L., Ponce G., Saut J.-C., Tom M.M., A model system for strong interaction between internal solitary waves, *Commun. Math. Phys.* **143**, 287–313 (1992).
- [4] Boyd J.P. : Weakly Nonlinear Solitary Waves and Beyond-All-Orders Asymptotics. Kluwer, Boston, 1998.
- [5] Boyd J.P. : Chebyshev and Fourier Spectral Methods. Dover, New York, 2001.
- [6] Benilov E.S., Grimshaw R., Kuznetsova E.P., The generation of radiating waves in a singularly perturbed Korteweg - de Vries equation, *Physica D* **69**, 270–278 (1993).
- [7] Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A., Spectral Methods in Fluid Dynamics. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [8] Champneys A.R., Malomed B.A., Yang J., Kaup D.J., “Embedded solitons” : solitary waves in resonance with the linear spectrum, *Physica D* **152**, 340–354 (2001).
- [9] Grimshaw R., Pelinovsky D., Pelinovsky E., Talipova, T., Wave group dynamics in weakly nonlinear long-wave models, *Physica D* **159**, 35–57 (2001).
- [10] Grimshaw R., Pelinovsky D., Pelinovsky E., Slunyaev A., Generation of large-amplitude solitons in the extended Korteweg-de Vries equation, *Chaos* **12** (4), 1070–1076 (2002).
- [11] Kassam A.-K., Trefethen L.N., Fourth-order time stepping for stiff PDEs, *SIAM J. Sci. Comp.* (soumis).

-
- [12] Milewski P.A., Tabak E.G., A pseudo-spectral procedure for the solution of nonlinear wave equations with examples from free-surface flows, *SIAM J. Sci. Comput.* **21**, 1102–1114 (1999).
 - [13] Saut J.C., Tzvetkov N., On a model system for the oblique interaction of internal gravity waves, *M2AN* **34** (2), 510–523 (2000).
 - [14] Slyunyaev A., Pelinovsky E., Dynamics of large-amplitude solitons, *JETP* **89** (1), 173–181 (1999).
 - [15] Tan T., Yang J., Pelinovsky D., Semi-stability of embedded solitons in the general fifth-order KdV equation, *Wave Motion* **36**, 241–255 (2002).
 - [16] Trefethen L.N. : Spectral Methods in Matlab. SIAM, Philadelphia, 2000.
 - [17] Yang J. Dynamics of embedded solitons in the extended Kortaweg-de Vries equations, *Stud. Appl. Math.* **106**, 337–365 (2001).
 - [18] Yang J., Malomed B.A., Kaup D.J., Champneys A.R., Embedded solitons : a new type of solitary wave, *Math. Comput. Simul.* **56**, 585–600 (2001).