



Modélisation du comportement vibratoire des structures par des méthodes énergétiques : formulation moyennée spatialement pour des systèmes unidimensionnels

Cédric Devaux

30 novembre 2006

- 1 Introduction
 - Modélisation en Acoustique et Vibrations
 - Objectifs de la thèse
- 2 Point de départ de la modélisation par variables énergétiques
 - Superposition quadratique
 - Formulation quadratique exacte en ondes planes 1D
- 3 Formulation moyennée spatialement en ondes planes 1D
 - Moyenne spatiale et composantes à grande échelle
 - Conditions limites pour différents types de jonctions
 - Application numérique
- 4 Résultats et perspectives
 - Ondes de flexion 1D
 - Systèmes multidimensionnels
- 5 Conclusion

Basses Fréquences : équations du mouvement

- $div \sigma + \rho F = \rho \omega^2 u$ avec conditions limites
- Eléments Finis (FEM) : formulation variationnelle, choix des éléments
- système linéaire après discrétisation

$$(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M} + j\omega \mathbb{C}) \{u\} = \{F\}$$

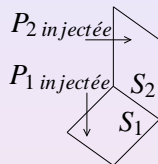
limites des méthodes FEM :

- finesse du maillage quand f augmente
- sensibilité aux perturbations (géométriques, matériau, conditions limites)

Hautes Fréquences : principe d'équilibre énergétique (SEA)

Pour 2 sous-systèmes S_1 et S_2 couplés :

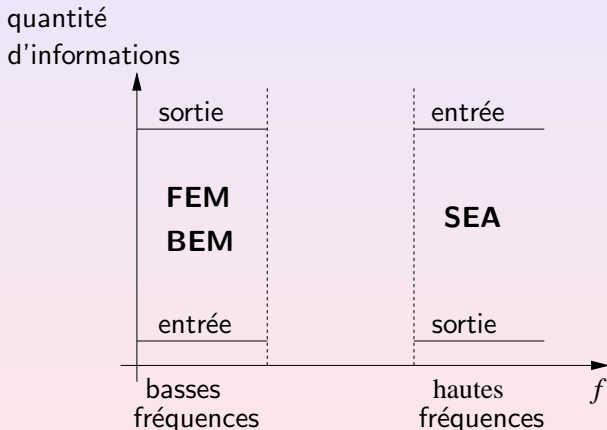
$$\begin{cases} P_1 \text{ injectée} & = & P_1 \text{ dissipée} + P_{12} \\ P_2 \text{ injectée} & = & P_2 \text{ dissipée} + P_{21} \end{cases}$$



hypothèses de la SEA :

- $P_{ij} = \omega(\eta_{ij}E_i - \eta_{ji}E_j)$
- $P_i \text{ dissipée} = \eta_i \omega E_i$
- couplage conservatif et faible : $\eta_{ij} \ll \eta_i$
- densités modales $n_i(\omega) = N_i/\Delta\omega$ suffisamment élevées
- réciprocité : $n_i(\omega)\eta_{ij} = n_j(\omega)\eta_{ji}$

Quantités d'informations en entrée et en sortie pour les méthodes FEM-BEM et SEA



Méthode VCA (Vibrational Conductivity Approach)

objectifs :

- EDP aisément soluble (FEM)
- information spatiale sur la réponse ($>$ SEA)

hypothèses :

- amortissement faible ($\eta \ll 1$)
- ondes évanescentes négligées
- loi de type gradient : $I = -\frac{c^2}{\eta\omega} \text{grad } W$

$$\Rightarrow \Delta W - \frac{\eta^2 \omega^2}{c^2} W = P_{\text{injectée}}$$

Objectifs de la thèse

- formulation en déplacement, sans hypothèse réductrice a priori
⇒ formulation quadratique adéquate quand f augmente
- modélisation analytique (ondes planes 1D)

étapes :

- point de départ = formulation quadratique exacte
- analyse des différentes composantes
- formulation quadratique moyennée spatialement

Variables énergétiques complexes

$$\text{régime harmonique : } \zeta = \frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+2\pi/\omega} \zeta(t) dt$$

intensité de structure	$I = j\omega \overline{\sigma} \otimes u^* / 2$
densité d'énergie cinétique	$T = \rho \omega^2 u \cdot u^* / 4$
densité d'énergie de déformation	$U = \overline{\overline{\sigma}} \otimes \varepsilon^* / 4$
densité d'énergie totale	$W = T + U$
densité lagrangienne	$L = T - U$

avec $\overline{\otimes}$ ($\overline{\overline{\otimes}}$) produit tensoriel (doublement) contracté

Superposition quadratique

2 composantes A et B (2 sources, 2 types d'ondes) :

$$u = u_A + u_B$$

$$\sigma = \sigma_A + \sigma_B$$

$$I = -j\omega(\sigma_A + \sigma_B)\overline{\otimes}(u_A + u_B)/2$$

$$I = \underbrace{j\omega\sigma_A\overline{\otimes}u_A/2}_{I_{AA}} + \underbrace{j\omega\sigma_B\overline{\otimes}u_B/2}_{I_{BB}} + \underbrace{j\omega\sigma_A\overline{\otimes}u_B/2}_{I_{AB}} + \underbrace{j\omega\sigma_B\overline{\otimes}u_A/2}_{I_{BA}}$$

- I_{AA}, I_{BB} : “intensités directes”
- I_{AB}, I_{BA} : intensités “d’interférences”

⇒ 2 échelles de variation spatiale distinctes *en ondes planes 1D*

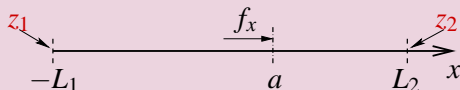
Point de départ

N. Joly and J. C. Pascal, "Energy flow relations from quadratic quantities in three-dimensional isotropic medium and exact solutions for one-dimensional waves", J. Sound Vib. **298**, 934-957 (2006)

hypothèses générales :

- régime harmonique de pulsation $\omega = 2\pi f$,
- petits déplacements et petites déformations,
- milieu élastique homogène isotrope avec amortissement hystérétique (densité ρ , facteur d'amortissement η , coefficients de Lamé complexes $\lambda = \lambda_0(1 + j\eta)$ et $\mu = \mu_0(1 + j\eta)$)

système unidimensionnel étudié :



Formulation en déplacement

$$u(x) = \text{grad } \phi(x)$$

$$(\Delta + k^2) \phi(x) = -\frac{k^2 f_x}{\rho \omega^2} H(x - a)$$

$$\phi(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + \frac{f_x H(x - a)}{\rho \omega^2} (\cos(k(x - a)) - 1)$$

conditions d'impédances :

$$\begin{cases} \phi_{,x^2}(-L_1) - j k z_1 \phi_{,x}(-L_1) & = & 0 \\ -\phi_{,x^2}(L_2) - j k z_2 \phi_{,x}(L_2) & = & 0 \end{cases}$$

Quantités énergétiques

$$T = \frac{\rho\omega^2}{4} u u^*$$

$$U = \frac{\lambda + 2\mu}{4} \Delta\phi \Delta\phi^*$$

$$I = \frac{j\omega}{2} (\lambda + 2\mu) \Delta\phi u^*$$

$$\operatorname{div} I = -2j\omega(T - U) + P$$

P = densité de puissance injectée

Formulation quadratique exacte

$$\begin{cases} \Delta T + (k^2 + k^{*2})T - 2k^2U & = s_{T,x} \delta_a \\ \Delta U + (k^2 + k^{*2})U - 2k^{*2}T & = s_{U,x} \delta_a + s_U \delta_{a,x} \end{cases}$$

conditions limites :

$$T_{,x}(-L_1) - j(k z_1 - k^* z_1^*)T(-L_1) = 0$$

$$U(-L_1) - \frac{k^*}{k} z_1 z_1^* T(-L_1) = 0$$

$$T_{,x}(L_2) - j(k^* z_2^* - k z_2)T(L_2) = 0$$

$$U(L_2) - \frac{k^*}{k} z_2 z_2^* T(L_2) = 0$$

Interprétation des impédances spécifiques

formulation en déplacement	formulation quadratique exacte
$z_1 = \frac{k}{\rho \omega} \frac{\sigma_{xx}(-L_1)}{j \omega u(-L_1)}$	$ z_1 ^2 = \frac{k}{k^*} \frac{U(-L_1)}{T(-L_1)}$
$z_2 = -\frac{k}{\rho \omega} \frac{\sigma_{xx}(L_2)}{j \omega u(L_2)}$	$ z_2 ^2 = \frac{k}{k^*} \frac{U(L_2)}{T(L_2)}$

Intensité de structure

$$\operatorname{div} I = -2j\omega(T - U) + P$$

$$P = -\frac{j\omega}{2} f_x \cdot u^*$$

$$z_1 I_{,x}(-L_1) - j(k - k^* |z_1|^2) I(-L_1) = 0$$

$$z_2 I_{,x}(L_2) + j(k - k^* |z_2|^2) I(L_2) = 0$$

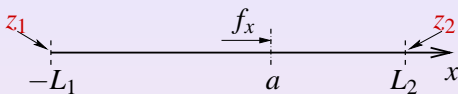
Termes de discontinuités

$$s_{T,x} = -\frac{1}{4} \left(k^2 \underbrace{f_x u^*(a)}_{\propto P} + k^{*2} \underbrace{f_x^* u(a)}_{\propto P^*} \right)$$

$$s_{U,x} = \frac{k^{*2}}{4} \left(\underbrace{f_x u(a)}_{?} + \underbrace{f_x^* u^*(a)}_{?} \right)$$

$$s_U = \frac{k^{*2}}{4} \left(\underbrace{\frac{f_x f_x^*}{\rho \omega^2}}_{?} - \underbrace{\frac{f_x^* u_{,x}(a^-)}{k^2}}_{?} - \underbrace{\frac{f_x u_{,x}^*(a^-)}{k^{*2}}}_{?} \right)$$

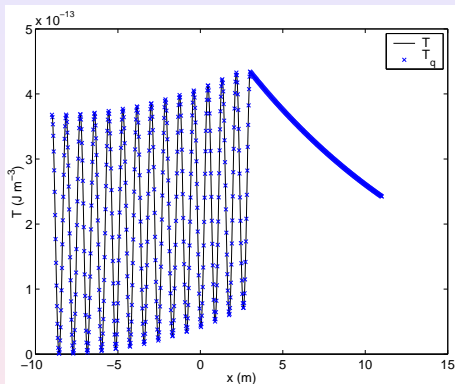
Application numérique



Masse volumique ρ ($kg\ m^{-3}$)	7800
Module d'Young E (Pa)	$2.1 \cdot 10^{11} (1 + j\ 0.01)$
Coefficient de Poisson ν	0.3

- $f = 5000\ Hz$
- $f_x = 1\ Nm^{-2}$ en $a = 3m$
- $z_1 = 0$
- $z_2 = 1$

Echelles de variation spatiale

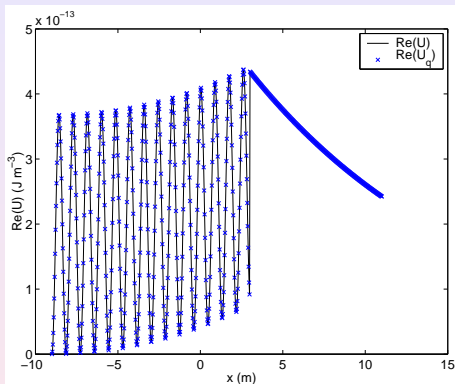


densités d'énergie cinétique :

T à partir de la formulation en déplacement,

T_q à partir de la formulation quadratique exacte

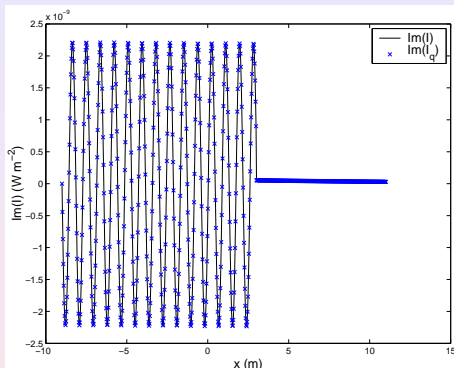
Echelles de variation spatiale



parties réelles des densités d'énergie de déformation :

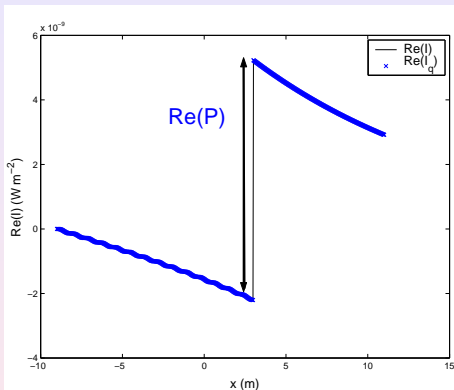
- $Re(U)$ à partir de la formulation en déplacement,
- $Re(U_q)$ à partir de la formulation quadratique exacte

Composantes actives et réactives



parties imaginaires des intensités de structure :
 $Im(I)$ à partir de la formulation en déplacement,
 $Im(I_q)$ à partir de la formulation quadratique exacte

Densité de puissance injectée



parties réelles des intensités de structure

$Re(I)$: à partir de la formulation en déplacement,

$Re(I_q)$: à partir de la formulation quadratique exacte

Perspectives

Formulation quadratique exacte :

- équations d'ordre plus élevé
- conditions limites plus nombreuses
- interprétation des termes de discontinuité

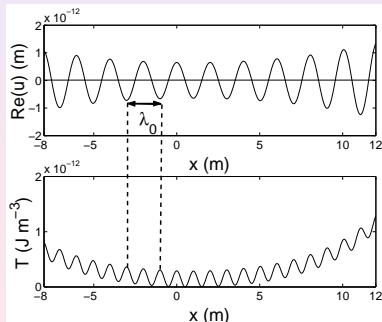
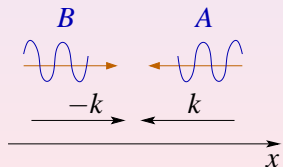
Solution envisagée :

- formulation moyennée spatialement pour supprimer certaines composantes
- redéfinition des conditions limites : jonctions passives (z) et actives (P)

Echelles de variation

ondes planes 1D en milieu dissipatif : $k = k_0(1 - j\theta)$

$$(\Delta + k^2) u = 0$$

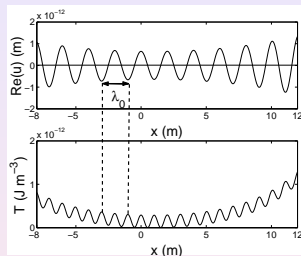
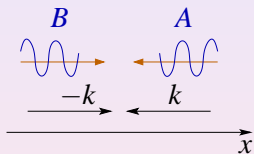


partie réelle
du déplacement

densité
d'énergie
cinétique

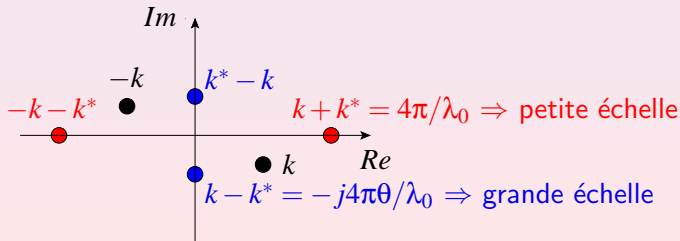
ondes planes 1D en milieu dissipatif : $k = k_0(1 - j\theta)$

$$(\Delta + k^2) u = 0$$



partie réelle
du déplacement

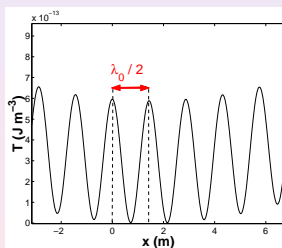
densité
d'énergie
cinétique



hypothèse : système de grande dimension devant λ_0

Moyenne spatiale des grandeurs quadratiques :

$$\langle Q \rangle (x) = \frac{2}{\lambda_0} \int_{x-\lambda_0/4}^{x+\lambda_0/4} Q(u) du$$



$$\langle T \rangle (x) = \underbrace{\frac{\rho\omega^2}{4} kk^* \left(AA^* e^{j(k-k^*)x} + BB^* e^{-j(k-k^*)x} \right)}_{\text{composantes à grande échelle}} f(\theta)$$

Moyenne spatiale et composantes à grande échelle

Dissipation :

$$\bullet f(\theta) = \frac{\text{sh}(\pi \theta)}{\pi \theta} \quad \theta = (\sqrt{1 + \eta^2} - 1)/\eta$$

• amortissement faible :

$$\theta \ll 1 \Rightarrow f(\theta) = 1 + \frac{\pi^2}{6} \theta^2 + O(\theta^4) \quad \text{et} \quad \theta = \eta/2$$

Densités d'énergie :

$$\bullet \langle T \rangle = - \left(\frac{1 - j\theta}{4\omega\theta} \right) (\langle I \rangle_{,x} - P\delta_a)$$

$$\bullet \langle U \rangle = \frac{1 + j\theta}{1 - j\theta} \langle T \rangle \quad | \langle U \rangle | = | \langle T \rangle |$$

Equation différentielle dans le cas d'un amortissement faible ($\eta \ll 1$)

- $\Delta \langle W \rangle + (k - k^*)^2 \langle W \rangle = 0$
- $\Delta \langle W \rangle - 4(\text{Im}(k))^2 \langle W \rangle = 0$
- $k = k_0(1 - j\theta)$

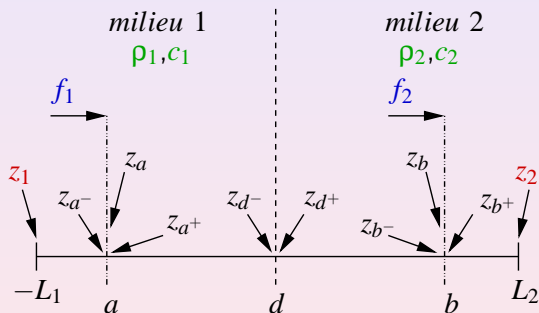
- $\eta \ll 1 \Rightarrow k_0^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda_0 + 2\mu_0}$ et $\theta^2 = \frac{\eta^2}{4}$

- $\Delta \langle W \rangle - \frac{\eta^2\omega^2}{c^2} \langle W \rangle = 0$ avec $c^2 = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho} = \frac{\omega^2}{k_0^2}$

- VCA : $\Delta W - \frac{\eta^2\omega^2}{c^2} W = 0$

ondes longitudinales 1D, avec :

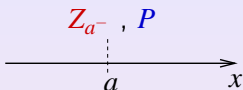
- densités de force f_1, f_2
- changement de milieu (ρ_1, c_1 ; ρ_2, c_2)
- impédances spécifiques (z_1, z_2)



⇒ Equation différentielle pour l'intensité moyenne $\langle I \rangle$:

$$\Delta \langle I \rangle + (k - k^*)^2 \langle I \rangle = 0$$

Jonctions actives

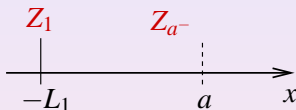


u	$\langle I \rangle$
densité de force f_1	densité de puissance injectée P impédance Z_{a^-} en $x = a^-$

$$\langle I \rangle (a^+) - \langle I \rangle (a^-) = \frac{P}{2} \left(1 + \frac{k^* P^*}{k P} \right) f(\theta)$$

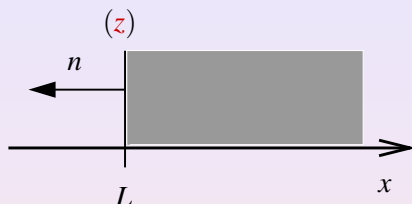
$$\frac{\langle I \rangle (a^+)}{\langle I \rangle (a^-)} = 1 + \frac{P \left(1 + \frac{k^* P^*}{k P} \right)}{2j \frac{P P^*}{f_1 f_1^*} \left(Z_{a^-} - \frac{k^* Z_{a^-}^*}{k} \right)}$$

Impédance ramenée



$$Z_{a^-} = \frac{e^{jk(L_1+a)} - e^{-jk(L_1+a)} + Z_1(e^{jk(L_1+a)} + e^{-jk(L_1+a)})}{Z_1(e^{jk(L_1+a)} - e^{-jk(L_1+a)}) - e^{jk(L_1+a)} - e^{-jk(L_1+a)}}$$

Jonctions passives : conditions d'impédance



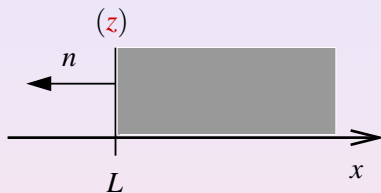
$$L = -L_1 \Rightarrow n = -e_x \text{ et } z = z_1$$

$$L = L_2 \Rightarrow n = e_x \text{ et } z = z_2$$

⇒ **Conditions mixtes pour $\langle I \rangle$:**

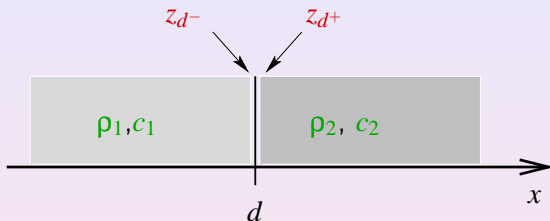
$$\langle I \rangle_{,n}(L) + j(k - k^*) \frac{1 + zz^*}{z + z^*} \langle I \rangle(L) = 0$$

Cas particuliers de conditions mixtes avec des impédances spécifiques réelles



terminaison libre	terminaison bloquée	terminaison anéchoïque
$z = 0$	$ z \rightarrow +\infty$	$z = 1$
$u_{,n}(L) = 0$	$u(L) = 0$	$u_{,n}(L) + jk u(L) = 0$
$\langle I \rangle (L) = 0$	$\langle I \rangle (L) = 0$	$\langle I \rangle_{,n} (L) + j(k - k^*) \langle I \rangle (L) = 0$

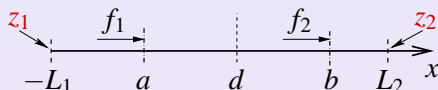
Jonctions passives : changement de milieu



$$\langle I \rangle (d^+) = \langle I \rangle (d^-)$$

$$\frac{\langle I \rangle_{,x} (d^+)}{\langle I \rangle_{,x} (d^-)} = - \frac{k_2 - k_2^*}{k_1 - k_1^*} \frac{1 + z_{d^+} z_{d^+}^*}{1 + z_{d^-} z_{d^-}^*} \frac{z_{d^-} + z_{d^-}^*}{z_{d^+} + z_{d^+}^*}$$

Application numérique

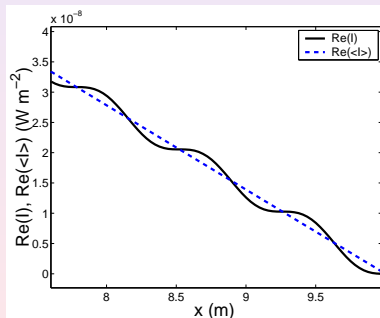
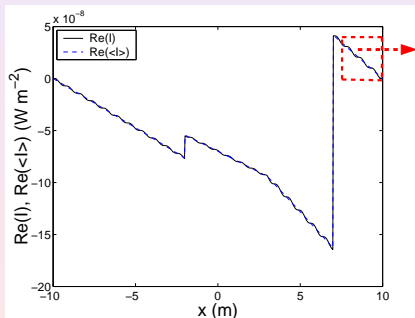


	milieu 1	milieu 2
Masse volumique ρ ($kg\ m^{-3}$)	7800	2700
Module d'Young E (Pa)	$2.1 \cdot 10^{11}(1 + j\ 0.01)$	$0.7 \cdot 10^{11}(1 + j\ 0.01)$
Coefficient de Poisson ν	0.3	0.3

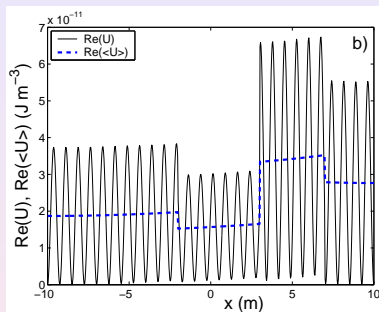
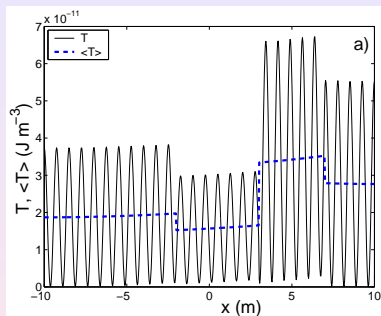
- $f_1 = 1\ Nm^{-2}$ en $a = -2m$ $f_2 = 2\ Nm^{-2}$ en $b = 7m$
- $z_1 = 0.05 + j\ 0.01$
- $z_2 = 0.1$

Description spatiale des transferts d'énergie

Intensités de structure actives (4000 Hz) :



Densités d'énergie

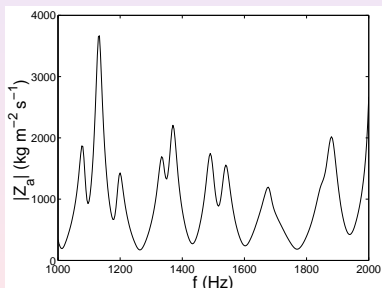


- a) densités d'énergie cinétique : T à partir de u ,
 $\langle T \rangle$: à partir de $\langle I \rangle$;
- b) parties réelles de la densité d'énergie de déformation :
 $\text{Re}(U)$ à partir de u , $\text{Re}(\langle U \rangle)$ à partir de $\langle I \rangle$

Résonances : impédance d'entrée Z_a en $x = a$

définition : $Z_a = f_1 / (j\omega u(a))$

- obtenue à partir de z_1 and z_2
- $|Z_a| = |Z_{a^+} + Z_{a^-}|$



Résultats obtenus :

- description des transferts énergétiques à grande échelle à l'aide d'une formulation pour l'intensité de structure moyenne $\langle I \rangle$
- caractérisation des jonctions actives : P, Z_a
- caractérisation des jonctions passives : z (conversion d'ondes)

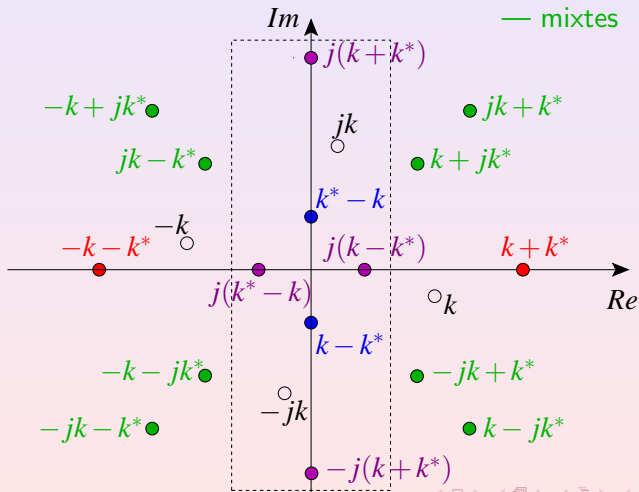
Perspectives :

- prise en compte d'autres types d'ondes 1D (ex : ondes de flexion)
- modélisation de systèmes multi-dimensionnels

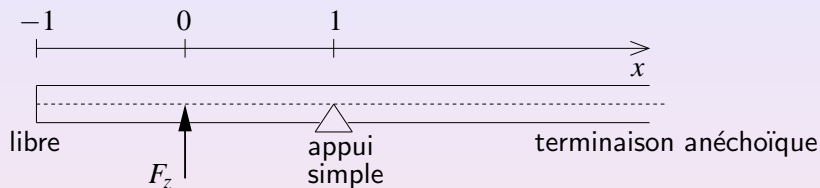
Composantes pour des ondes de flexion 1D

$$w(x) = Ae^{-jkx} + Be^{jkx} + Ce^{kx} + De^{-kx}$$

- petite échelle
- grande échelle
- évanescentes
- mixtes



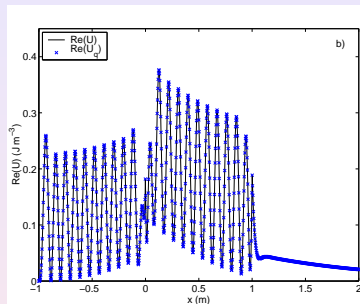
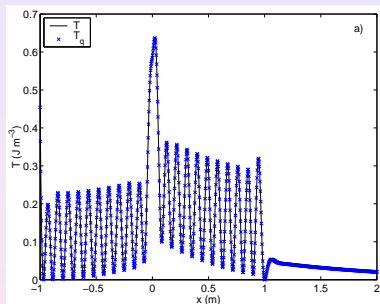
Point de départ : formulation quadratique exacte



Plaque semi-infinie : ondes de flexion suivant x ($-\infty < y < +\infty$)

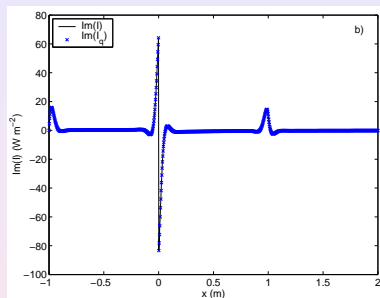
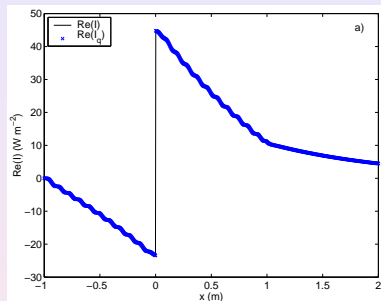
- $F_z = 1 \text{ Nm}^{-2}$
- acier ($\eta = 0.05$)
- épaisseur 1 mm
- $f = 300 \text{ Hz}$

Densités d'énergie



- a) densités d'énergie cinétique : T à partir de w ,
 T_q à partir de la form. quadratique exacte ;
- b) parties réelles des densités d'énergie de déformation :
 $Re(U)$ à partir de w ,
 $Re(U_q)$: à partir de la form. quadratique exacte

Intensité de structure



- a) intensités actives : $Re(I)$ à partir de w ,
 $Re(I_q)$ à partir de la form. quadratique exacte ;
- b) intensités réactives : $Im(I)$ à partir de w ,
 $Im(I_q)$ à partir de la form. quadratique exacte

Ondes de flexion 1D

Formulation quadratique exacte :

- conditions limites plus compliquées
- équation d'ordre plus élevé (ondes évanescentes)

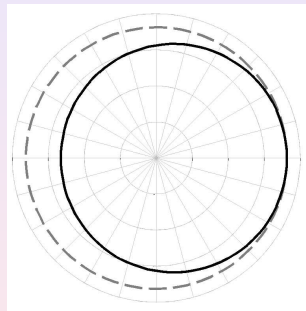
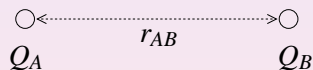
$$k^4 = k_0^4(1 + 2j\eta) \quad \eta \ll 1:$$

$$(\Delta - \eta^2 k_0^2)(\Delta + \eta^2 k_0^2)(\Delta - 4k_0^2)(\Delta + 4k_0^2) \left((\Delta - 2jk_0^2)(\Delta + 2jk_0^2) \right)^2 Q = 0$$

Perspectives envisagées :

- tri des composantes en champ lointain
- redéfinition des conditions limites par paires de composantes

Diagrammes de directivité en champ lointain pour 2 monopôles acoustiques



intensité "directe" $I_{AA} + I_{BB}$ (---)
 intensité totale I (—)

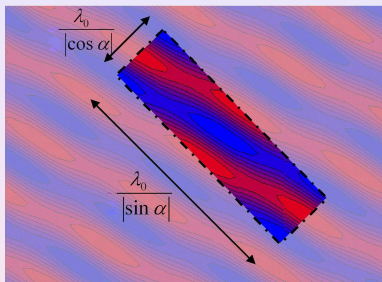
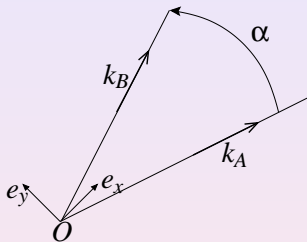
Perspectives envisageables

sources ponctuelles en 2D et 3D :

- décomposition en ondes planes et évanescentes [1]
- moyennes spatiales sur une cellule de pseudo-périodicité pour deux ondes planes interférant

[1] R. Gunda and al., "Harmonic Green's functions of a semi-infinite plate with clamped or free edges", J. Acoust. Soc. Am. **103** (2), 888-899 (1998)

Ondes planes interférant



- $\langle T \rangle = \frac{\rho \omega^2}{4} k k^* \left(A A^* e^{-j(k_A - k_A^*) \cdot r} + B B^* e^{-j(k_B - k_B^*) \cdot r} \right) f_2(\theta)$
- $f_2(\theta) = \left(\frac{\text{sh}(\pi \theta)}{\pi \theta} \right)^2$

Perspectives envisageables

sources ponctuelles en 2D et 3D :

- décomposition en ondes planes et évanescentes [1]
- moyennes spatiales sur une cellule de pseudo-périodicité pour deux ondes planes interférant

[1] R. Gunda and al., "Harmonic Green's functions of a semi-infinite plate with clamped or free edges", J. Acoust. Soc. Am. **103** (2), 888-899 (1998)

plaques de dimensions finies :

- décomposition en fonctions élémentaires + série de Fourier tronquée sur les bords [2]
- 2D \Rightarrow 1D

[2] P.H. Kulla, "High precision finite elements", Finite Elem. Anal. Des. **298**, 97-114 (1997)

difficultés :

- problème de départ : formulation exacte \Rightarrow formulation moyenne
- écriture de conditions limites

résultats :

- conditions limites rigoureuses pour $\langle I \rangle$
- perspectives : ondes de flexion