



HAL
open science

Contribution à la caractérisation des performances des problèmes conjoints de détection et d'estimation

Eric Chaumette

► **To cite this version:**

Eric Chaumette. Contribution à la caractérisation des performances des problèmes conjoints de détection et d'estimation. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2004. Français. NNT: . tel-00132161

HAL Id: tel-00132161

<https://theses.hal.science/tel-00132161>

Submitted on 22 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**DOCTORAT DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

SPÉCIALITÉ : E.E.A. – DOMAINE : Traitement du signal

THÈSE

PRÉSENTÉE PAR

ERIC CHAUMETTE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

TITRE DE LA THÈSE :

**CONTRIBUTION À LA CARACTÉRISATION DES PERFORMANCES DES
PROBLÈMES CONJOINTS DE DÉTECTION ET D'ESTIMATION.**

SOUTENUE LE 16 DÉCEMBRE 2004 DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :

Mr.	Philippe LOUBATON	Président
Mr.	Jean Jacques FUCHS	Rapporteur
Mr.	Jean Yves TOURNERET	Rapporteur
Mr.	Philippe FORSTER	Examineur
Mr.	Jean Claude GUILLEROT	Examineur
Mr.	Pascal LARZABAL	Directeur de Thèse

LABORATOIRE SATIE, E. N. S. de CACHAN - UMR 8029
61, Avenue du président WILSON, 94235 CACHAN, Cedex

CONTENTS

I	Abréviations et Notations	9
I-A	Abréviations	9
I-B	Notations	9
I-C	Fonctions	10
II	Introduction	11
II-A	Motivation de la recherche	11
II-B	Présentation de la partie théorique (§III-p17, §IV-p45, §V-p48)	12
II-C	Présentation de la partie applicative (§VI-p54, §VII-p62, §VIII-p77)	14
II-D	Contributions	15
II-E	Publications et communications	16
III	Éléments de la théorie de l'estimation	17
III-A	Formulation du problème	17
III-B	Mesure de la qualité d'un estimateur - Introduction	17
III-C	Mesure de la qualité d'un estimateur par l'EQM - Cas gaussien	19
III-D	Mesure de la qualité d'un estimateur par l'EQM - Cas de lois différentes	21
III-E	Mesure de la qualité d'un estimateur par l'EQM - Précision <i>a priori</i>	23
III-F	Minimisation de l'EQM - Choix du critère	23
III-G	Minimisation de l'EQM - Minimisation d'une norme	25
III-H	Minimisation de l'EQM Locale - Estimateurs sans biais	27
III-I	Minimisation de l'EQM Locale - Estimateurs localement sans biais	30
III-J	Minimisation de l'EQM Locale - Des estimateurs localement sans biais aux estimateurs sans biais	32
III-K	Minimisation de l'EQM Locale - Autres bornes inférieures pour estimateurs sans biais	34
III-L	Minimisation de l'EQM Locale - Estimation simultanée de plusieurs fonctions de paramètres multiples	35
III-L.1	Forme générale de la Borne de Barankin	35
III-L.2	Forme générale de la borne de Cramer-Rao	37
III-M	Minimisation de l'EQM Locale - Paramètres complexes	38
III-M.1	Borne de Barankin complexe	39
III-M.2	Borne de Cramer-Rao complexe	41
III-N	Minimisation de l'EQM Locale - Estimateurs avec Biais	43
III-O	Stratégies d'estimation	43
III-O.1	Estimateur au sens du Maximum de Vraisemblance	43
III-O.2	Estimateur solution de la minimisation de l'EQM globale	44
III-O.3	Estimateur solution de la minimisation de l'EQM locale	44

IV	Éléments de la théorie de la détection	45
IV-A	Formulation du problème	45
IV-B	Règles optimales de détection	46
V	Caractérisation des problèmes conjoints Détection-Estimation	48
V-A	Test d'hypothèses composites	48
V-B	Bornes d'estimation conditionnées par un événement observable	49
V-C	Bornes d'estimation conditionnées par un événement clairvoyant	50
	V-C.1 Motivation	50
	V-C.2 Cas des estimateurs localement sans biais	51
V-D	Critère d'optimalité des problèmes conjoints Détection-Estimation	52
VI	Estimation de la Direction d'Arrivée à l'aide d'une antenne à 2 voies de réception	54
VI-A	Principe de la mesure angulaire	54
VI-B	Lois statistiques de l'amplitude du signal source : lois de Swerling dans le cas du Radar	57
VI-C	d.d.p. de l'observation en fonction de la loi d'amplitude	59
VI-D	Estimateur au sens du MV de la direction d'arrivée et rapport d'écartométrie	60
VII	Caractérisation des problèmes conjoints Détection-Estimation d'une antenne à 2 voies de réception	62
VII-A	Un résultat paradoxal historique	62
VII-B	Caractérisation historique	63
VII-C	Caractérisation théorique : test d'hypothèses composites	65
VII-D	Caractérisation théorique : BCR conditionnée par un test de détection	70
VIII	Compléments sur la caractérisation statistique du rapport d'écartométrie $\hat{r} = \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}}$	77
VIII-A	Rappel de l'état de l'art sur la caractérisation statistique de $\hat{r} = \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}}$	77
VIII-B	Contributions nouvelles	77
VIII-C	Caractérisation statistique de \hat{r} conditionné par $\mathcal{D} = \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \geq T \right\}$: cas SW0E	78
VIII-D	Caractérisation statistique de \hat{r} conditionné par $\mathcal{D} = \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \geq T \right\}$: cas SW3-4	78
VIII-E	Caractérisation statistique de \hat{r} conditionné par $\mathcal{D} = \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} + \vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \geq T \right\}$: cas SW0E	80
IX	Conclusion et perspectives	81

X	Annexes Mathématiques	82
X-A	Inégalité de Markov-Bienaymé-Tchebychev	82
X-B	Inégalité de Cauchy-Schwartz généralisée	82
X-C	Minimisation d'une norme sous contraintes linéaires	83
X-D	Inverse d'une matrice partitionnée (inversion par blocs)	84
X-E	Densité de probabilité conditionnelle entre 2 vecteurs aléatoires complexes circulaires mutuellement gaussiens	84
X-F	Certaines propriétés des fonctions de Bessel modifiées de 1ère espèce	84
X-G	Espérance incomplètes de Vecteurs Aléatoires Gaussiens Circulaires à composantes Indépendantes Identiquement Distribuées	87
X-H	Espérance incomplètes de Vecteurs Aléatoires Gaussiens Circulaires à composantes colorées	93
XI	Annexes Détection-Estimation	95
XI-A	Complément sur la Borne de Cramer-Rao	95
XI-B	Complément sur les Bornes de Bhattacharyya	96
XI-C	Complément sur la borne de Barankin	97
XI-D	Complément sur les estimateurs efficaces	97
XI-E	Complément sur les Bornes d'estimation conditionnées par un événement clairvoyant	99
XII	Annexes Ecartométrie Monopulse	103
XII-A	Calcul de $P(\mathcal{D})$, $E[\hat{r} \mathcal{D}]$, $E[\hat{r} ^2 \mathcal{D}]$, $E[\hat{r}^2 \mathcal{D}]$ lors d'observations multiples lorsque la loi de fluctuation d'amplitude est inconnue et $\mathcal{D} = \{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \geq T\}$	103
XII-B	Calcul de $P(\mathcal{D})$, $E[\hat{r} \mathcal{D}]$, $E[\hat{r} ^2 \mathcal{D}]$, $E[\hat{r}^2 \mathcal{D}]$ lors d'observations multiples lorsque la loi de fluctuation d'amplitude de type Swerling 3-4 et $\mathcal{D} = \{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \geq T\}$	107
XII-B.1	Calcul de $f(\vec{v}_i)$	107
XII-B.2	Calcul de $f(\vec{V})$	108
XII-B.3	Changement de variable, calcul du jacobien	108
XII-B.4	Changement de variable, expression de la d.d.p.	109
XII-B.5	Espérance Conditionnelle, formulation intermédiaire	110
XII-B.6	Variance Conditionnelle, formulation intermédiaire	111
XII-B.7	Espérance et Variance Conditionnelles, formules analytiques	111
XII-C	Calcul de $P(\mathcal{D})$, $E[\hat{r} \mathcal{D}]$, $E[\hat{r} ^2 \mathcal{D}]$, $E[\hat{r}^2 \mathcal{D}]$ lors d'observations multiples lorsque la loi de fluctuation d'amplitude est inconnue et $\mathcal{D} = \{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} + \vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \geq T\}$	114
XII-D	Calcul de $P(\mathcal{D})$, $E[\hat{r} \mathcal{D}]$, $E[\hat{r} ^2 \mathcal{D}]$, $E[\hat{r}^2 \mathcal{D}]$ lors d'observations multiples lorsque la loi de fluctuation d'amplitude est une loi de Rayleigh et $\mathcal{D} = \{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} + \vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \geq T\}$	118
XII-E	Borne de Cramer-Rao conditionnée du rapport d'écartométrie lorsque la loi de fluctuation d'amplitude est une loi de Rayleigh et $\mathcal{D} = \{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \geq T\}$	123

XII-E.1	Calcul de $E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{\theta}}(\vec{V})}{\partial \theta_k^* \partial \theta_l} \mid \mathcal{D} \right]$	123
XII-E.2	Calcul de $\frac{\partial^2 -\ln P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})}{\partial \theta_k^* \partial \theta_l}$	126
XII-E.3	Calcul de $\frac{\partial \vec{g}_{\vec{\theta}}}{\partial \vec{\theta}}$	127
XII-F	Borne de Cramer-Rao conditionnée du rapport d'écartométrie lorsque la loi de fluctuation d'amplitude est une loi de Rayleigh et $\mathcal{D} = \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} + \vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \geq T \right\}$	128
XII-F.1	Calcul de $E_{\vec{\theta}} \left[\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}} \mid \mathcal{D} \right]$	128
XII-F.2	Calcul de $\frac{\partial^2 \ln P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})}{\partial \theta_k^* \partial \theta_l}$	129
XII-F.3	Calcul de $\frac{\partial \vec{g}_{\vec{\theta}}}{\partial \vec{\theta}}$	131
XII-G	Optimal Detection Theory Applied to Monopulse Antennas (ICASSP 2004)	133
XII-H	Optimal Monopulse Tracking of Signal of Unknown Amplitude (EUSIPCO 2004)	139
XII-I	Modern Monopulse Tracking (RADAR 2004)	145

References

153

A celine

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Pascal Larzabal (directeur de thèse) pour m'avoir permis de réaliser un rêve d'étudiant : en classes préparatoires je rêvais déjà d'entrer dans un des ces temples du savoir scientifique que représentent les écoles Normales Supérieures. La vie en a décidé autrement, mais ils semblent bien que parfois tous les chemins mènent à Rome ... Je te remercie pour ta confiance qui n'a pas failli bien qu'elle ait eu parfois quelques raisons de vaciller.

Je n'oublierai pas non plus ceux qui à travers toi m'ont également fait confiance, Hisham Abou-Kandil (délégué aux thèses), Thierry Maurin (directeur de l'école doctorale), Sylvain Alano (directeur du LESIR/SATIE). Sachez que je suis particulièrement fier d'avoir pu soutenir une thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan et que je ferai mon possible pour que ma contribution perdure.

Je remercie également Messieurs Jean-Jacques Fuchs et Jean-Yves Tourneret (je me rappelle, 15 ans déjà, sur les bancs du DEA ...) d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse. J'ai été très honoré de leur présence dans mon jury ainsi que celles de Messieurs Philippe Loubaton et Philippe Forster.

J'aimerais également rendre hommage à Jean-Claude Guillerot, pionnier "Thalesien" du traitement du signal appliqué au radar, qui a su réunir en un seul homme, compétence, écoute et modestie, ce qui reste un grand défi pour nombre de scientifiques.

Merci à Pierre Saulais, mon supérieur hiérarchique à Thales Naval France, pour avoir respecté sa parole donnée, ce qui, selon mon expérience (14 ans déjà!), est un fait suffisamment rare de la part d'un manager pour qu'il soit souligné.

Merci également à tous mes amis, guillaume, hassan, françois, wahid, jérôme, einar, jean-yves, karim, steve, ... ainsi qu'à mes parents pour m'avoir encouragé et soutenu pendant cette période difficile.

Enfin, tout ceci n'aurait sans doute pas été possible sans le support inconditionnel et constant de ma femme céline : vivre 4 ans avec eric chaumette pédalant à 200 % (double petit vélo : travail + thèse) n'a pas été une sinécure (ceux qui me connaissent vous le confirmeront ...). Merci pour cela et aussi pour m'avoir permis d'entrevoir à tes cotés le monde des Autres ...

I. ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS

A. Abréviations

EQM : Erreur Quadratique Moyenne
 REQM : Racine carrée de l'Erreur Quadratique Moyenne
 RSB : Rapport Signal à Bruit
 BCR : Borne de Cramer Rao
 MIF : Matrice d'Information de Fisher
 BBK : Borne de Barankin
 BBA : Borne de Bhattacharyya

B. Notations

\vec{X}, \vec{x} représentent des vecteurs colonnes (complexes ou réels)

$\mathbf{C}, \hat{\mathbf{R}}, \mathbf{m}$ représentent des matrices (complexes ou réelles)

$\mathcal{M}(K, N)$ désigne l'ensemble des matrices à K lignes et N colonnes

\mathbf{Id}_I représente la matrice identité de dimensions (I, I)

$\vec{X}^T, \vec{x}^T, \mathbf{C}^T, \hat{\mathbf{R}}^T, \mathbf{m}^T$ représentent les grandeurs transposées

$\vec{X}^*, \vec{x}^*, \mathbf{C}^*, \hat{\mathbf{R}}^*, \mathbf{m}^*$ représentent les grandeurs conjuguées

$\vec{X}^H, \vec{x}^H, \mathbf{C}^H, \hat{\mathbf{R}}^H, \mathbf{m}^H$ représentent les grandeurs transposées conjuguées

$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)^\perp$ désigne le sous espace vectoriel orthogonal à la famille de vecteurs $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$

$\vec{(\)}$ désigne l'application vectorielle qui à tout vecteur \vec{x} associe $\vec{\underline{x}} = (\vec{x}^T, \vec{x}^H)^T = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{x}^* \end{pmatrix}$

Si $\vec{x} = \vec{x}_r + j\vec{x}_j = \text{Re}\{\vec{x}\} + j\text{Im}\{\vec{x}\}$ est un vecteur complexe, alors $\vec{\underline{x}} = [\vec{x}_r^T, \vec{x}_j^T]^T$

Si \vec{x} est un vecteur, x_i ou $(\vec{x})_i$ représentent sa $i^{\text{ème}}$ composante

$C_{i,j}$ représente l'élément de la matrice \mathbf{C} situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne

x_k, θ, f_l représentent des scalaires (complexes ou réels)

$P(\)$ représente une probabilité

$P(A | B)$ représente une probabilité conditionnelle

$f_\theta(x)$ représente une densité de probabilité (d.d.p.) fonction du paramètre θ

$f_\theta(x | y)$ représente une densité de probabilité conditionnelle fonction du paramètre θ

$E[\]$ représente l'espérance mathématique

$\vec{m}_{\vec{x}} = E[\vec{x}]$ représente la valeur moyenne du vecteur aléatoire \vec{x}

$\text{Var}[\]$ représente la variance

$\mathbf{C}_{\vec{x}, \vec{y}} = E[(\vec{x} - \vec{m}_{\vec{x}})(\vec{y} - \vec{m}_{\vec{y}})^H]$ représente la matrice de covariance des vecteurs aléatoires \vec{x}, \vec{y}

$\mathbf{C}_{\vec{x}} = \mathbf{C}_{\vec{x}, \vec{x}}$ représente la matrice de covariance du vecteur aléatoire \vec{x}

$\mathcal{N}(\vec{m}, \mathbf{C})$ représente un vecteur aléatoire gaussien réel d'espérance \vec{m} et de matrice de covariance \mathbf{C}

$\mathcal{N}_c(\vec{m}, \mathbf{C})$ représente un vecteur aléatoire gaussien complexe circulaire d'espérance \vec{m} et de matrice de covariance \mathbf{C}

$\text{Tr}(\mathbf{C})$ représente la trace (somme des éléments diagonaux) de la matrice carrée \mathbf{C}

$|\mathbf{C}|$ représente le déterminant de la matrice carrée \mathbf{C}

$\langle | \rangle$ et $\| \|$ représentent respectivement un produit scalaire et sa norme associée définis sur un espace vectoriel

$$\frac{\partial f_{\theta_0}(x)}{\partial \theta} = \left[\frac{\partial f_{\theta}(x)}{\partial \theta} \right]_{\theta_0}, \quad \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} = \left[\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right]_{\theta_0}$$

$$\text{Si } \vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_L)^T, \text{ alors : } \frac{\partial}{\partial \vec{\theta}^T} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1}, \frac{\partial}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_L} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \vec{\theta}} = \left(\frac{\partial}{\partial \vec{\theta}^T} \right)^T = \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{\theta}}$$

$h^{(n)}(x) = \frac{d^n h(x)}{d^n x}$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $h(\cdot)$ de la variable x

\hat{r} représente un estimateur de r

$$\text{Si } z = x + jy \text{ est une variable complexe, alors : } \int h(z) dz = \iint h(x, y) dx dy$$

$$\text{Si } \vec{x} \text{ est un vecteur de dimension } K, \text{ alors : } \int_{\mathcal{D}} h(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\mathcal{D}} \dots \int h(x_1, \dots, x_K) dx_1 \dots dx_K$$

$$E[g(\vec{x}) \cap \mathcal{D}] = \int_{\vec{x} \in \mathcal{D}} g(\vec{x}) f(\vec{x}) d\vec{x}, \quad E[g(\vec{x}) | \mathcal{D}] = \int_{\vec{x} \in \mathcal{D}} g(\vec{x}) \frac{f(\vec{x})}{P(\vec{x} \in \mathcal{D})} d\vec{x} = \frac{E[g(\vec{x}) \cap \mathcal{D}]}{P(\vec{x} \in \mathcal{D})}$$

$$o(x^n) = x^n \varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\delta_l^k: \text{ est } 1 \text{ si } k = l, 0 \text{ si } k \neq l$$

Si D est un sous-ensemble d'un ensemble Ω , alors \bar{D} désigne le sous-ensemble complémentaire de D

Si D est un sous-ensemble d'un ensemble Ω , alors $\Pi_D(\vec{x})$ désigne la fonction indicatrice associée

C. Fonctions

$$f_{\mathcal{N}(\vec{m}, \mathbf{C})}(\vec{x}) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{m})^T \mathbf{C}^{-1}(\vec{x} - \vec{m}_{\vec{x}})}}{\sqrt{2\pi}^I \sqrt{|\mathbf{C}|}},$$

$$f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}, \mathbf{C})}(\vec{x}) = \frac{e^{-(\vec{x} - \vec{m})^H \mathbf{C}^{-1}(\vec{x} - \vec{m}_{\vec{x}})}}{\pi^I |\mathbf{C}|}$$

$$f_{\chi_{2c}^I}(x, \mu^2, \sigma^2) = \frac{e^{-\frac{x+\mu^2}{\sigma^2}} \mathcal{I}_{I-1}\left(\frac{2\mu\sqrt{x}}{\sigma^2}\right) \left(\frac{\sqrt{x}}{\mu}\right)^{(I-1)}}{\sigma^2},$$

$$f_{\chi_{2c}^I}(x, 0, \sigma^2) = \frac{e^{-\frac{x}{\sigma^2}}}{\sigma^2} \left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^{I-1} \frac{1}{(I-1)!}$$

$$\mathcal{I}_I(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos(\theta)} \cos(I\theta) d\theta$$

$$e_N(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} & \text{si } N \geq 0 \\ 0 & \text{si } N < 0 \end{cases},$$

$$\int_x^{\infty} t^N e^{-t} dt = e_N(x) e^{-T} N!$$

$$E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x},$$

$$\text{cosc}(x) = \frac{\cos(x)}{x}$$

II. INTRODUCTION

A. Motivation de la recherche

Le travail présenté dans ce document est motivé par certains résultats obtenus dans la thèse de Nicolas-Bertaux "Contribution à l'Utilisation des méthodes du Maximum de Vraisemblance en Traitement Radar Actif", thèse de l'ENS-CACHAN soutenue le 14 janvier 2000 et co-encadrée par Pascal Larzabal pour l'ENS, Claude Adnet et Eric chaumette pour Thales. L'un des principaux résultats de cette thèse est que l'on peut étendre les propriétés asymptotiques, au sens d'un nombre d'observations indépendantes tendant vers l'infini [6], des Estimateurs du Maximum de Vraisemblance (EMV) de paramètres déterministes, à savoir :

- la consistance, c'est à dire que les estimées convergent vers les vraies valeurs,
- l'efficacité asymptotique, c'est à dire que la variance d'estimation des paramètres atteint la borne de Cramer-Rao (BCR) qui est la variance minimale accessible à un estimateur localement sans biais,

lorsque asymptotique est pris au sens d'un rapport signal à bruit (RSB) tendant vers l'infini et pour le modèle d'observation général suivant :

$$\vec{x} = \Psi(\vec{\omega}) \vec{\alpha} + \vec{n} \quad (1)$$

où $\vec{\theta} = [\vec{\omega}^T, \vec{\alpha}^T]$ est le vecteur de paramètres déterministes inconnus de dimension finie, \vec{n} est un bruit complexe circulaire gaussien blanc temporellement et spatialement ($\mathbf{C}_{\vec{n}} = \sigma_{\vec{n}}^2 \mathbf{Id}$) [36][38].

Notre objectif était de montrer que l'on pouvait utiliser la BCR comme un estimateur fiable des performances statistiques - au sens de l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) - du vecteur de paramètres $\vec{\theta}$. En effet, il est généralement impossible de fournir une expression analytique valable pour toutes les valeurs du RSB. Cette utilisation prédictive des bornes inférieures de l'EQM a été initiée dans les années 70 [12][13][14] et poursuivie par la suite [23][24][28][34] mais pour des modèles d'observation relativement simples. Notre travail porta donc sur la validation de ce principe appliqué à la BCR pour un modèle d'observation plus général (1) représentatif de l'application radar.

Malheureusement l'ensemble des simulations réalisées durant cette recherche nous montra que la région asymptotique cessait d'être valide pour les RSB d'intérêt dans les applications radar, lesquels sont déterminés par des exigences opérationnelles en détection dans la plage $P_D = [0.5, 0.9]$ (P_D : probabilité de détection) et qui correspondent à des RSB $\leq 13dB$ au niveau du test de détection (donc tous gains de traitement intégrés) pour le modèle d'observation (1).

Ce constat d'échec relatif fut néanmoins bénéfique car il nous poussa à regarder d'un peu plus près ce qui se passe dans la zone où l'EQM s'éloigne de la BCR. Nous arrivâmes alors à la même conclusion que nombre d'autres chercheurs sur le sujet [12][16][23] - mais dont nous n'avions pas connaissance à l'époque - : la dégradation de performance de l'EQM est due à une exploration grandissante (au sens de la probabilité) des lobes secondaires de la fonction d'ambiguïté du filtre adapté généralisé [36], solution au sens du MV du problème d'estimation associé à (1). En effet, comme l'ont fort bien démontré Rife et Boorstyn [16] dans le cadre de l'estimation spectrale appliquée à une unique fréquence noyée dans du bruit, l'EQM peut être modélisée par :

$$EQM(\widehat{\theta}^{MV}) = q\sigma_{BCR}^2 + (1-q)\sigma_{a\text{ priori}}^2$$

où q est la probabilité que l'EMV soit dans le lobe principal de la fonction d'ambiguïté, σ_{BCR}^2 est la BCR et $\sigma_{a\text{ priori}}^2$ est la variance de l'EMV sur bruit seul (variance a priori). Une piste de recherche aurait pu être l'extension des résultats de Rife et Boorstyn au modèle d'observation (1). Mais nous (P. Larzabal et E. Chaumette) fûmes sceptiques sur la possibilité d'évaluer la probabilité q pour une fonction d'ambiguïté quelconque, notamment dans un contexte de sources multiples. Cette approche fut néanmoins étudiée par E. Boyer [42], un autre membre de l'équipe de recherche, qui a étendu les résultats de Rife et Boorstyn au cas d'une moyenne quelconque de périodogrammes indépendants pour une source déterministe ou stochastique, avec application à l'analyse spectrale Doppler pour radars profileur de vents Strato-Troposphériques. Pour l'anecdote et la vérité du cheminement scientifique voilà quelle fut alors notre analyse : puisque le problème est l'exploration des lobes secondaires par l'EMV, il n'y a qu'à contraindre l'EMV à rester dans le lobe principal. C'était une solution simple, il ne restait plus qu'à la mettre en pratique. Pour cela deux solutions nous semblaient théoriquement envisageables :

- construire une fonction d'ambiguïté avec des lobes secondaires suffisamment bas pour que la probabilité q soit négligeable dans la zone de RSB opérationnels pour le radar. Malheureusement, si les avantages et les désavantages de ce type de compromis sont bien connus dans le cas mono-source, il n'existe aucun résultat général exploitable dans le cas de sources multiples. De plus, du point de vue du radariste, c'est prendre le problème à l'envers, car ce sont en général les objectifs opérationnels qui déterminent les traitements et non l'inverse. Cette solution n'était donc pas viable.
- prendre en compte le test de détection qui devait éliminer les observations de faible énergie et donc les observations obtenues sur lobes secondaires de la fonction d'ambiguïté. En effet, dans un radar la détection précède l'estimation.

Si cette idée nous paraît triviale maintenant car découlant naturellement de la bonne formulation des problèmes conjoints Détection-Estimation, elle n'était guère répandue au moment où nous avons commencé notre recherche et ne l'est toujours pas d'ailleurs, ce qui donne une certaine originalité à notre travail. En effet, à notre connaissance et après un examen relativement étendue de la littérature courante sur le sujet, les problèmes de détection et d'estimation ont toujours été abordés séparément par la communauté du traitement du signal, notamment dans les ouvrages de référence même les plus récents [11][22][25][32][33][41]. Seuls certains cas particuliers ont été abordés récemment pour l'estimation de paramètres aléatoires [37] (MAP estimateurs et test d'hypothèses binaires) [63] (performances en poursuite Radar) sans donner lieu à l'exposition d'une théorie générale sur le sujet.

Notre objectif était de ce fait double :

- établir une formulation théorique rigoureuse des BCR conditionnées par un test de détection,
- valider notre intuition quant à l'effet du conditionnement sur la qualité de la prédiction de l'EQM par la BCR pour des RSB dans la plage d'intérêt des applications radar.

B. Présentation de la partie théorique (§III-p17, §IV-p45, §V-p48)

Nous nous sommes donc intéressés à la caractérisation des problèmes conjoints Détection-Estimation les plus fréquemment rencontrés en écoute passive ou active (radar, télécoms, sonar, ...) : l'estimation des paramètres déterministes d'un signal d'intérêt intermittent en présence d'un environnement permanent. Ce problème peut être modélisé par le test d'hypothèses binaires suivant :

$$\begin{aligned} H_0 \text{ (environnement seul)} & : \vec{x} = \vec{b} \left(\vec{\theta}_b \right) \\ H_1 \text{ (environnement et signal)} & : \vec{x} = \vec{b} \left(\vec{\theta}_b \right) + \vec{s} \left(\vec{\theta}_s \right) \end{aligned} \quad (2)$$

où $\vec{\theta}_b$ et $\vec{\theta}_s$ sont respectivement les paramètres déterministes inconnus de l'environnement et du signal d'intérêt, $\vec{\theta} = \left(\vec{\theta}_b^T, \vec{\theta}_s^T \right)^T$ représentant l'ensemble des paramètres inconnus des problèmes conjoints. Dans ce contexte, nous qualifierons de **"clairvoyante"** toute grandeur dont la définition dépend des paramètres inconnus $\vec{\theta}$ et nous qualifierons de **"observable"** toute grandeur dont la définition ne dépend que des observations \vec{x} et de constantes indépendantes des paramètres inconnus $\vec{\theta}$.

On remarquera que le modèle (2) ne préjuge pas de la forme du signal d'intérêt, lequel peut donc être mono-source ou multi-sources; il inclut donc naturellement le modèle (1). Cependant, pour simplifier notre exposé, nous nous plaçons quasi-systématiquement dans le cas d'un seul paramètre inconnu à estimer appartenant implicitement à une unique source de signal, le modèle général (2) devenant :

$$\begin{aligned} H_0 \text{ (environnement seul)} & : \vec{x} = \vec{b} \\ H_1 \text{ (environnement et signal)} & : \vec{x} = \vec{b} + \vec{s}(\theta) \end{aligned} \quad (3)$$

Cette approche est justifiée par le fait que :

- l'étude des performances en estimation dans le cas de paramètres multiples se déduit naturellement de l'étude à paramètre unique (ce que nous développons §III-L-p35),

- la définition d'une règle de décision ne dépend pas, au moins dans son formalisme, du nombre de paramètres inconnus considérés.

Nous avons choisi d'aborder la caractérisation des problèmes conjoints Détection-Estimation, non pas dans leur ordre réel d'apparition (détection puis estimation), mais dans ce qui nous semble être leur ordre naturel de formulation : estimation des paramètres d'un signal ... qui n'est pas toujours présent. Ainsi, nous débutons par quelques éléments de la théorie de l'estimation (§III-p17), puis la prise en compte d'un modèle d'observation non unique nous permettra d'introduire brièvement les concepts fondamentaux de la théorie de la détection (§IV-p45), pour finir par la caractérisation des deux problèmes conjoints (§V-p48).

Les performances en estimation (§III-p17) des estimateurs sont évaluées par leur EQM locale, mesure classique qui pose néanmoins de nombreuses questions sur sa réelle valeur informative, notamment lorsqu'elle tend vers l'infini comme dans notre application (cf. §VII-A-p62). Les premières sections de notre partie théorique y sont consacrées et nous verrons que l'on peut définir différents niveaux d'information sur la précision d'un estimateur et notamment le concept de précision *a priori* pour l'EQM. La propriété remarquable de l'EQM, et qui la distingue des autres mesures possibles de la précision d'estimation, est d'être une grandeur algébrique : c'est en effet une norme associée à un produit scalaire particulier. Cette simple constatation est d'importance fondamentale puisqu'elle donne la clé permettant de comprendre et d'établir toutes les bornes inférieures de l'EQM pour estimateurs sans biais ou localement sans biais. En effet, parmi d'autres démonstrations possibles (Inégalité de Covariance [23][32], vecteur d'information [11]), toutes les bornes inférieures de l'EQM connues sont les solutions d'un problème de minimisation d'une norme sous un ensemble de contraintes linéaires appropriées [14][40]. C'est pourquoi nous consacrons une partie de nos développements théoriques à la généralisation "naturelle" au cas multi-paramètres réels (§III-L-p35) et/ou complexes (§III-M-p38) des résultats établis précédemment par [14] et [40] dans le cas d'un unique paramètre réel.

On pourra être surpris, en première lecture, que nous abordions la formulation des bornes inférieures par la borne de Barankin (BBK), peu utilisée dans la pratique contrairement à la borne de Cramer-Rao (BCR). C'est parce que la caractérisation des estimateurs sans biais introduite par Barankin peut être considérée comme la caractérisation génératrice de toutes les bornes inférieures. Elle offre une compréhension d'ensemble des raffinements possibles dans la définition de la qualité sans biais d'un estimateur - ponctuellement sans biais, localement sans biais, sans biais - et permet de les formaliser rigoureusement et de les relier aux différentes bornes inférieures de l'EQM : la BCR, la borne de Bhattacharyya (BBA) et la BBK.

De plus, elle joue un rôle fondamental dans la caractérisation des problèmes conjoints. En effet, la généralisation de la BCR lorsque le test de détection est observable est une extension "naturelle" de l'approche utilisée par les auteurs d'origine [3][4][5][6] : il s'agit simplement dans les démonstrations de remplacer l'univers d'observation initial Ω et la densité de probabilité (d.d.p.) non conditionnée $f_{\theta}(\vec{x})$ par respectivement, l'événement conditionnant \mathcal{D} et la d.d.p. conditionnelle $f_{\theta}(\vec{x} | \mathcal{D})$. Or si le test de détection est clairvoyant, ce résultat n'est plus applicable (cf. §III-I-p30, Remarques Fondamentales). D'un point de vue pratique, cette limitation n'est guère problématique, car dans une application réelle, les estimateurs et les détecteurs sont nécessairement observables. Par contre d'un point de vue théorique, ce résultat semblait mettre un terme à la caractérisation des problèmes conjoints pour les règles de décision optimales (Bayes ou Neyman-Pearson) généralement clairvoyantes. Or il n'en est rien, et c'est ce que nous avons démontré à l'aide de l'approche de Barankin, même si au final, il s'avère que dans ce cas la BCR est généralement triviale (idem pour les BBA d'ordre fini, cf. §V-C.2-p51).

La problématique du test d'hypothèses multiples (§IV-p45) sur le modèle d'observation est abordée de façon succincte et limitée à notre problème d'intérêt (2) : le test d'hypothèses binaires. Il s'agit d'introduire les notions fondamentales associées à ce type de problème - fondements du problème, règles de décision, règles optimales et éventuellement sous optimales - et nécessaire à la compréhension de la véritable problématique, à savoir que nombre de problèmes pratiques sont la combinaison indissociable d'un problème de détection et d'un problème d'estimation. En effet, dans de tels problèmes, les différentes hypothèses de modèle d'observation dépendent de paramètres déterministes inconnus.

Ceci nous permet finalement d'aborder (§V-p48) les problèmes conjoints de la détection et de l'estimation, les solutions possibles - le test du Rapport de Vraisemblance Généralisé, par exemple - puis les caractérisations

potentielles telles que les bornes inférieures de l'EQM conditionnées par une règle de décision observable. Le problème de ce type de caractérisation est qu'elle dépend du test de détection considéré, elle est donc relative. On peut néanmoins la rendre absolue dans le cas du critère de Neyman-Pearson (ou celui de Bayes) qui établit naturellement une hiérarchie dans la recherche de l'optimalité : il s'agit en premier lieu de trouver la règle de décision optimale, puis une fois cette règle mise en oeuvre, de trouver les estimateurs optimaux. L'application de ce principe permet de définir une borne locale des problèmes conjoints par la donnée :

- de la règle de décision optimale,
- et d'une borne inférieure de l'EQM locale conditionnée par la règle de décision optimale.

Néanmoins ce principe soulève à notre avis la question suivante : ce choix représente il le meilleur compromis en terme de performances conjoints Détection-Estimation ? En réponse à cette question, nous proposons une première analyse intuitive permettant la définition d'un critère alternatif aux règles de décision optimales : la minimisation de la densité d'EQM.

C. Présentation de la partie applicative (§VI-p54, §VII-p62, §VIII-p77)

L'objet de cette section (§VI-p54) est d'introduire une application pratique relevant des problèmes conjoints Détection-Estimation pour illustrer non seulement la mise en oeuvre de ce type d'analyse mais également pour vérifier notre intuition initiale qui a motivé ce travail de recherche : la prise en compte du test de détection permet elle d'étendre le domaine en RSB "prédictif" de la BCR ?

Nous avons choisi la mesure de la Direction d'Arrivée (DA) d'une source de signal à l'aide d'un dispositif d'écoute (antenne) composés de deux voies de réception de type "Monopulse". Ce choix est motivé à la fois :

- par l'importance pratique de cette application, car il faut savoir qu'elle est non seulement l'une des plus anciennes techniques haute résolution - inventée en 1941 par le Naval Research Laboratory (USA) - mais qu'elle reste également la technique la plus répandue dans les systèmes de poursuite actuels, notamment pour son rapport performance à prix. En effet, si nous considérons par exemple l'APAR qui est le radar de poursuite le plus avancé au catalogue Thales (développements exploratoires exclus), constitué de 4 faces rayonnantes (poursuite simultanée sur 360 degrés), chacune composée d'un millier de capteurs, sa mesure angulaire haute résolution est fournie par la mesure du rapport d'écartométrie "Monopulse" obtenue à partir de faisceaux formés par le calcul.
- et par son intérêt théorique car elle correspond en fait à l'estimation au sens du MV du vecteur directionnel d'une antenne à 2 capteurs (cf. §VI-D-p60), estimation qui bénéficie d'une caractérisation statistique étendue (moyenne, variance et BCR conditionnées) pour différents couples (détecteur, estimateur) solution des problèmes conjoints, lorsque la source de signal est de type Rayleigh.

Après avoir exposé les principes généraux de cette mesure de direction d'arrivée ainsi que sa connexion à l'estimation au sens du MV, nous explorons, à l'instar de la partie théorique, la formulation des problèmes conjoints Détection-Estimation :

- estimation avec hypothèse d'observation unique (signal toujours présent), ce qui permet d'introduire le paradoxe apparent soulevé par Kanter [51] (variance infinie), lequel a fortement motivé notre analyse de la valeur informative contenu par l'EQM (précision *a priori*, cf. §III-E-p23),
- estimation avec hypothèse d'observations binaires, dont la première formulation historique (détecteur, estimateur) est plus une réponse au paradoxe introduit par Kanter qu'une réelle analyse théorique des problèmes conjoints, analyse que nous avons introduite et publiée [43][69],
- borne inférieure (BCR) de l'EQM conditionnée par le test de détection dans le cas où le couple solution (détecteur, estimateur) est obtenu au sens du MV (test du Rapport de Vraisemblance Généralisé). Cette partie nous donne l'occasion d'illustrer les nombreux effets de la sélection des observations par un test de détection sur le comportement d'un estimateur (qualité sans biais, efficacité) et fournit un exemple original d'un estimateur au sens du MV asymptotiquement efficace (en la valeur du seuil de détection) à faible RSB.

La dernière partie confirme notre intuition initiale, en ce sens que la prise en compte du test de détection améliore notablement la qualité "prédictive" de la BCR dans la région dite "transitoire" de RSB, laquelle inclut la plage de RSB opérationnels d'un système radar.

Enfin, nous présentons également l'ensemble des nouvelles caractérisations statistiques (moyenne, variance) relative à l'estimation du rapport d'écartométrie conditionné par certains test de détection obtenues durant ce travail de recherche.

D. Contributions

Partie théorique : Détection-Estimation

- nous avons introduit une nouvelle approximation de la borne de Barankin (§III-K-p34) dont la complexité de mise en oeuvre n'excède pas celle de la BCR,
- nous avons formalisé l'extension "naturelle" de l'approche "minimisation d'une norme sous contrainte", introduite par [14] et [40] pour interpréter les bornes inférieures de l'EQM locale, au cas de l'estimation de fonctions multiples dépendant de paramètres multiples réels et/ou complexes,
- nous avons formalisé l'extension "naturelle" de l'approche de Barankin au cas de l'estimation de fonctions multiples complexes dépendant de paramètres multiples complexes,
- nous avons formalisé l'extension "naturelle" des bornes inférieures de l'EQM locale conditionnées par un événement observable,
- nous avons dérivé les expressions de la BCR et des BBA d'ordre fini conditionnées par un événement clairvoyant et démontré qu'elles sont triviales (nulles) en général,
- nous avons proposé un nouveau critère d'optimisation des performance des problèmes conjoints : la densité d'EQM locale

Partie applicative : Antenne Monopulse

- nous avons complété la caractérisation historique des problèmes conjoints Détection-Estimation du rapport d'écartométrie $(E[\hat{r}_r | \mathcal{D}], Var[\hat{r}_r | \mathcal{D}], \mathcal{D} = \{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \geq T\})$ lors d'observations multiples lorsque la loi de fluctuation d'amplitude est de type SW0E [65] et SW3-4 [66] (cf. §VIII-p77),
- nous avons formulé le Test du Rapport de Vraisemblance Généralisé dans le cas d'une antenne à 2 capteurs de type "Monopulse" (cf. Annexes XII-G-p133, XII-H-p139, XII-I-p145) dont nous avons dérivé une nouvelle solution (détecteur, estimateur) que nous avons caractérisé analytiquement $(E[\hat{r}_r | \mathcal{D}], Var[\hat{r}_r | \mathcal{D}], \mathcal{D} = \{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} + \vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \geq T\})$, pour les lois de fluctuations d'amplitude du signal source de type SW1-2 [43] (cf. §VII-C-p65) et SW0E [44] (cf. §VIII-p77),
- nous avons calculé la BCR du rapport d'écartométrie \hat{r}_r conditionné par les test de détection $\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \geq T$ et $\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} + \vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \geq T$ (cf. Annexes XII-E-p123 et XII-F-p128)

Autres

- nous avons établi les expressions de certaines Espérance Incomplètes de Vecteurs Aléatoires Gaussiens Circulaires à composantes Indépendantes Identiquement Distribuées (cf. Annexe X-G-p87)

E. Publications et communications

Les travaux effectués durant cette thèse ont donné lieu aux publications et communications suivantes :

Revues internationales

- E. Chaumette, P. Larzabal, P. Forster, "On the Influence of a Detection Step on Lower Bounds for Deterministic Parameters Estimation", à paraître dans *IEEE Trans. on SP*,
- E. Chaumette and P. Larzabal, "Monopulse-Radar Tracking of Swerling 3-4 Targets using Multiple Observations.", correspondance soumise à *IEEE Trans. on AES*, Novembre 2003, en révision,
- E. Chaumette and P. Larzabal, "Monopulse Tracking of Signal Source of Unknown Amplitude using Multiple Observations", correspondance soumise à *IEEE Trans. on AES*, Septembre 2003, en révision.

Congrès avec comité de lecture et actes

- E. Chaumette, P. Larzabal, "Optimal Detection Theory Applied to Monopulse Antenna", Conférence ICASSP 2004
- E. Chaumette, P. Larzabal, "Optimal Monopulse Tracking of Signal Source of Unknown Amplitude", Conférence EUSIPCO 2004
- E. Chaumette, P. Saulais, N. Colin, "Modern Monopulse Tracking", Conference Radar 2004

III. ELÉMENTS DE LA THÉORIE DE L'ESTIMATION

A. Formulation du problème

Dans un souci de clarté et de simplicité, nous nous placerons dans un premier temps dans le cadre de l'estimation "classique" d'un unique paramètre déterministe réel. Dans ce cadre, les observations disponibles sont des vecteurs aléatoires $\vec{x} \in \mathbb{R}^L$ constituant un sous-ensemble Ω de \mathbb{R}^L appelé espace d'observation ou univers de l'expérience aléatoire. Cet univers Ω est caractérisé par une densité de probabilité $f_\theta(\vec{x})$ de forme connue mais dépendante d'un paramètre réel inconnu θ appartenant à un sous-ensemble Θ de \mathbb{R} appelé espace des paramètres. Dans la suite, et sauf mention du contraire, Θ est un intervalle continu de \mathbb{R} - éventuellement confondu avec \mathbb{R} - et θ_0 est une valeur particulière de θ .

Rappelons que nous qualifierons de "**clairvoyante**" toute grandeur dont la définition dépend du paramètre θ et que nous qualifierons d'"**observable**" toute grandeur dont la définition ne dépend que des observations \vec{x} et de constantes indépendantes du paramètre θ .

Notre problème initial est le suivant : nous désirons, à partir des seules observations \vec{x} , déterminer la valeur d'une fonction du paramètre inconnu $\theta : g(\theta)$. Il s'agit donc de déterminer une fonction observable $h(\vec{x})$ dont le résultat, pour chaque valeur de \vec{x} , constituera une valeur estimée de $g(\theta)$. En effet, puisque \vec{x} est un vecteur aléatoire, toute fonction observable $h(\vec{x})$ de Ω dans \mathbb{R} non réduite à une constante constitue une variable aléatoire (VA). Par conséquent, dans la plupart des cas - par exemple, si la fonction de répartition de $h(\vec{x})$ est continue - la probabilité que la valeur observée $h(\vec{x})$ soit exactement la valeur recherchée $g(\theta)$ est nulle : dans un tel problème on ne peut pas accéder à la valeur recherchée mais à une valeur estimée. Il est alors légitime de se demander si cette valeur estimée aléatoire est d'un intérêt pratique quelconque pour résoudre notre problème initial qui est l'identification d'une grandeur déterministe. Ce paradoxe apparent est le fondement de la théorie de l'estimation dans laquelle une fonction telle que $h(\vec{x})$ est appelée "estimateur de la grandeur $g(\theta)$ " et pour laquelle une notation plus explicite est $\widehat{g}(\theta)(\vec{x})$. Cette théorie repose principalement sur le fait que dans un grand nombre d'applications pratiques (radar, sonar, télécoms, imagerie, ...) une connaissance approchée de la grandeur recherchée est satisfaisante. Néanmoins, la qualité de cette approximation ne peut être arbitraire et dépend étroitement de l'application considérée et de la grandeur recherchée, ce qui pose naturellement le problème de sa mesure. Si l'ensemble des estimateurs considérés est obtenu à partir d'un unique espace d'observation Ω nous utiliserons également l'écriture contractée $\widehat{g}(\theta)$.

B. Mesure de la qualité d'un estimateur - Introduction

La qualité - la précision - d'un estimateur $\widehat{g}(\theta)$ peut être mesurée en prenant comme critère le risque d'erreur d'estimation défini par :

$$\mathcal{R}_\theta \left[\widehat{g}(\theta), \varepsilon \right] = P \left(\left| \widehat{g}(\theta)(\vec{x}) - g(\theta) \right| > \varepsilon \right) \quad (4)$$

où ε définit l'erreur "admissible" sur l'évaluation de $g(\theta)$ et $\mathcal{R}_\theta \left[\widehat{g}(\theta), \varepsilon \right]$ mesure la probabilité que cette erreur dépasse ε . Ce risque sera identifié par la suite comme le risque "canonique", c'est à dire celui se déduisant naturellement du problème étudié : l'adéquation entre les observations d'une variable aléatoire et une valeur déterministe d'intérêt. Nous le qualifierons également d'*exhaustif*, en ce sens qu'il intègre toute l'information disponible sur le problème, à savoir les probabilités. Par conséquent, nous dirons que (4) définit la (mesure de) précision *exhaustive*. Une fois le critère de qualité défini, la question qui survient naturellement est la suivante : existe-t-il un "meilleur" estimateur au sens du critère de qualité retenu ? Pour répondre à cette question, il faut munir l'ensemble des estimateurs de $g(\theta)$ d'une relation binaire d'ordre (réflexive, antisymétrique, transitive). On peut alors s'inspirer de la relation d'ordre dite "stochastique" [39, §3.1.3] existant entre 2 VA x et y :

$$x \stackrel{st}{\geq} y \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad P(x > \varepsilon) \geq P(y > \varepsilon) \quad (5)$$

pour définir à l'aide de notre critère (4) la relation "plus précis que" (p.p.q.) entre 2 estimateurs $\widehat{g}(\theta)$ et $\widehat{g}'(\theta)$:

$$\widehat{g}(\theta) \text{ (p.p.q.) } \widehat{g}'(\theta) \iff \forall \varepsilon \geq 0, \quad \mathcal{R}_\theta \left[\widehat{g}'(\theta), \varepsilon \right] \geq \mathcal{R}_\theta \left[\widehat{g}(\theta), \varepsilon \right] \quad (6)$$

Malheureusement, dans le cas général la relation (p.p.q.) n'est pas antisymétrique. En effet l'application de la propriété d'antisymétrie de la relation $\stackrel{st}{\geq}$ implique seulement que :

$$\left| \widehat{g}(\theta)(\vec{x}) - g(\theta) \right| = \left| \widehat{g}'(\theta)(\vec{x}) - g(\theta) \right|$$

ce qui définit 2 solutions :

$$\widehat{g}'(\theta)(\vec{x}) = 2g(\theta) - \widehat{g}(\theta)(\vec{x}) \quad (7a)$$

$$\widehat{g}'(\theta)(\vec{x}) = \widehat{g}(\theta)(\vec{x}) \quad (7b)$$

On peut rendre la relation (p.p.q.) antisymétrique en restreignant l'ensemble des estimateurs considérés, par exemple en imposant que tous les estimateurs aient la même valeur moyenne : $E_\theta \left[\widehat{g}(\theta)(\vec{x}) \right] = E_\theta \left[\widehat{g}'(\theta)(\vec{x}) \right]$, ce qui permet d'éliminer la solution (7a). Mais même dans ce cas on aboutit seulement à une relation d'ordre partiel (propriété de $\stackrel{st}{\geq}$) : on ne peut pas comparer tous les estimateurs entre-eux. Pour que la relation (p.p.q.) devienne une relation d'ordre total il faut encore limiter l'ensemble des estimateurs considérés, par exemple en se restreignant aux estimateurs gaussiens de valeur moyenne identique (cf. §III-C-p19). Par conséquent, la détermination d'un estimateur observable - de d.d.p. quelconque - "plus précis que" les autres est à notre connaissance un problème non résolu à ce jour (si on rejette la solution triviale $\widehat{g}(\theta)(\vec{x}) = g(\theta)$ qui n'est pas observable).

De plus la mise en oeuvre de la relation (p.p.q.) reste complexe. En effet le calcul de (4) requiert la connaissance de la densité de probabilité (d.d.p.) de la VA $y = \widehat{g}(\theta)(\vec{x})$:

$$\mathcal{R}_\theta \left[\widehat{g}(\theta), \varepsilon \right] = 1 - \int_{g(\theta)-\varepsilon}^{g(\theta)+\varepsilon} f_\theta(y) dy, \quad (8)$$

densité que l'on ne sait pas calculer pour la plupart des fonctions $\widehat{g}(\theta)(\vec{x})$, quelle que soit la forme de $f_\theta(\vec{x})$. Une alternative consiste à introduire un risque plus simple à mettre en oeuvre. Une famille de risques candidats est suggérée par l'inégalité de Markov-Bienaymé-Tchebychev (cf. Annexe X-A-p82) :

$$\mathcal{R}_\theta \left[\widehat{g}(\theta), \varepsilon \right] \leq \frac{E_\theta \left[\left| \widehat{g}(\theta)(\vec{x}) - g(\theta) \right|^k \right]}{\varepsilon^k}, \quad k \in \mathbb{N}^* \quad (9)$$

où :

$$E_\theta \left[\left| \widehat{g}(\theta)(\vec{x}) - g(\theta) \right|^k \right] = \int_{\Omega} \left| \widehat{g}(\theta)(\vec{x}) - g(\theta) \right|^k f_\theta(\vec{x}) d\vec{x} \quad (10a)$$

$$= \int |z|^k f_\theta(z) dz = E_\theta \left[|z|^k \right] \quad (10b)$$

est le moment absolu d'ordre k de la VA $z = \widehat{g}(\theta)(\vec{x}) - g(\theta)$. Le principal gain en simplicité apporté par le risque (9) est de remplacer le calcul de la fonction $f_\theta(y)$ par celui du nombre $E_\theta \left[|z|^k \right]$ dont la forme (10a) permet d'espérer un calcul direct. La forme usuelle du risque (9) est obtenue pour $k = 2$ et correspond à l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) :

$$EQM_\theta \left[\widehat{g}(\theta) \right] = E_\theta \left[\left(\widehat{g}(\theta)(\vec{x}) - g(\theta) \right)^2 \right] = \int_{\Omega} \left(\widehat{g}(\theta)(\vec{x}) - g(\theta) \right)^2 f_\theta(\vec{x}) d\vec{x} \quad (11)$$

La première raison (historique) de ce choix est qu'il permet les calculs les plus simples : c'est en effet la plus petite valeur de k pour laquelle le risque (9) est développable. La seconde raison [3][4][6] est qu'il définit un critère algébrique. Il est en effet fondamental de remarquer que (11) peut également s'écrire :

$$EQM_\theta \left[\widehat{g}(\theta) \right] = \left\| \widehat{g}(\theta)(\vec{x}) - g(\theta) \right\|_\theta^2 \quad (12)$$

où $\|\cdot\|_\theta$ est la norme associée au produit scalaire

$$\langle g(\vec{x}) | h(\vec{x}) \rangle_\theta = E_\theta [g(\vec{x}) h(\vec{x})] = \int_\Omega [g(\vec{x}) h(\vec{x})] f_\theta(\vec{x}) d\vec{x}, \quad (13)$$

défini sur l'espace vectoriel $F_\Omega(\theta) = \left\{ h(\vec{x}) \text{ de } \Omega \text{ dans } \mathbb{R} \text{ tq } \int_\Omega h(\vec{x})^2 f_\theta(\vec{x}) d\vec{x} < \infty \right\}$.

Ainsi, l'utilisation de l'EQM comme critère de précision permet de bénéficier des nombreux résultats établis sur les espaces vectoriels munis d'un produit scalaire (cf. §III-G-p25), dont une application directe est l'établissement de bornes inférieures (minorants) de l'EQM pour certaines classes d'estimateurs (cf. §III-H-p27, §III-I-p30, §III-J-p32).

La contrepartie de cette simplification calculatoire est qu'un tel risque est non *exhaustif*, en ce sens qu'il ne fournit plus qu'une caractérisation partielle du problème initial - au sens du critère (4) - comme le montre l'étude des estimateurs gaussiens (cf. §III-C-p19) ou certains autres exemples choisis (cf. §III-D-p21).

C. Mesure de la qualité d'un estimateur par l'EQM - Cas gaussien

Une VA x est dite gaussienne et sera notée $\mathcal{N}(m_x, \sigma_x)$ si sa d.d.p. suit une loi normale (loi de Laplace-Gauss) définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} \right)^2}, \quad m_x = E[x], \quad \sigma_x = \sqrt{Var[x]}. \quad (14)$$

Les VA gaussiennes occupent une place prépondérante en probabilité par l'intermédiaire du théorème de la limite centrale [39, § 4.3.3] dont l'énoncé est le suivant :

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de VA indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) telles que $E[x_n^2] = E[x^2] < \infty$, alors :

$$\frac{x_1 + \dots + x_n + \dots + x_N}{N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{converge en loi}} \mathcal{N} \left(E[x], \sqrt{\frac{Var[x]}{N}} \right). \quad (15)$$

Rapporté à notre problème initial, le théorème de la limite centrale nous indique que pour un nombre N suffisamment grand d'observations indépendantes \vec{x}_n de la même expérience aléatoire, l'estimateur $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \widehat{g}(\theta)(\vec{x}_n)$ tend vers

la VA gaussienne $\mathcal{N} \left(E_\theta [\widehat{g}(\theta)(\vec{x})], \sqrt{\frac{Var_\theta [\widehat{g}(\theta)(\vec{x})]}{N}} \right)$. Par conséquent, même si tous les estimateurs ne sont pas gaussiens, la propriété précédente justifie l'intérêt que l'on peut porter aux propriétés de cette famille d'estimateurs. Par exemple, si la VA \widehat{g} est un estimateur gaussien de la grandeur réelle g , alors un exercice classique de manipulation des VA gaussiennes montre que (4) devient :

$$\mathcal{R}[\widehat{g}, \varepsilon] = P \left(\left| \mathcal{N}(0, 1) - \frac{|\widetilde{b}|}{\sqrt{1 - \widetilde{b}^2}} \right| > \frac{\widetilde{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \widetilde{b}^2}} \right) = \mathcal{R}[\widetilde{b}, \widetilde{\varepsilon}] \quad (16)$$

$$\widetilde{b} = \frac{m_{\widehat{g}} - g}{\sqrt{EQM[\widehat{g}]}} \quad \widetilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{EQM[\widehat{g}]}} \quad (17)$$

où $m_{\widehat{g}} = E[\widehat{g}]$, $(m_{\widehat{g}} - g)$ et \widetilde{b} représentent respectivement le biais et le biais normalisé (rapporté à son EQM) de l'estimateur \widehat{g} . On remarquera au passage que $\mathcal{R}[\widetilde{b}, \widetilde{\varepsilon}]$ est une fonction paire de \widetilde{b} , ce qui fournit un exemple concret de la non "antisymétrie" de la relation (p.p.q.) dans le cas général. Considérons maintenant l'ensemble des estimateurs de g d'EQM identiques. L'étude de

$$\mathcal{R}[\widetilde{b}, \widetilde{\varepsilon}] = 1 - \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{|\widetilde{b}| + \widetilde{\varepsilon}}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \widetilde{b}^2}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{|\widetilde{b}| - \widetilde{\varepsilon}}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \widetilde{b}^2}} \right) \right] \quad (18)$$

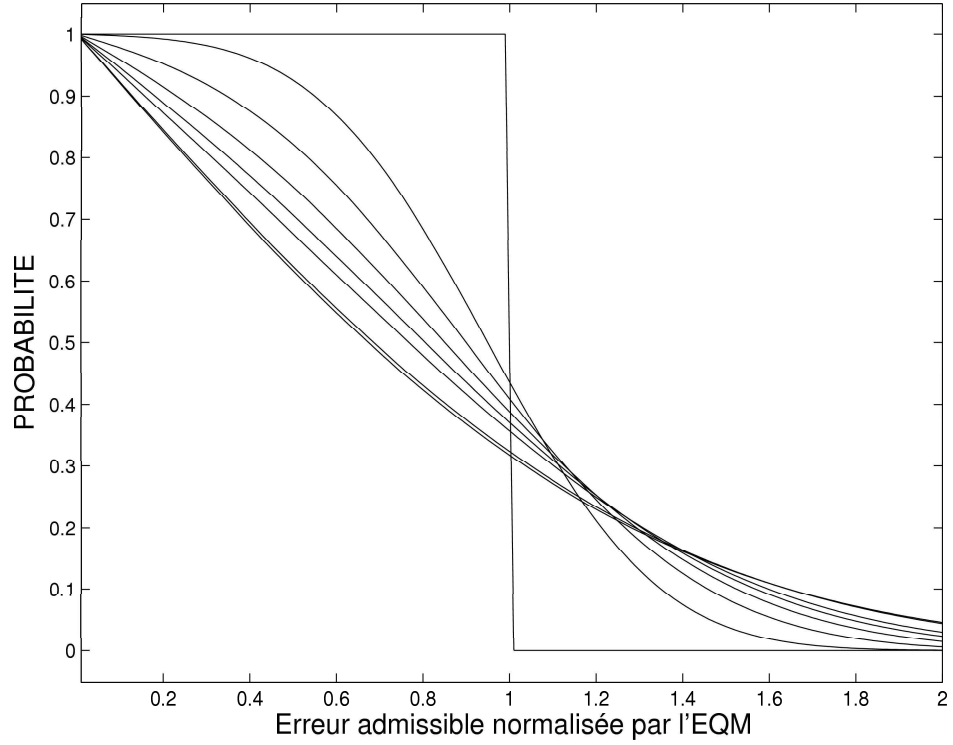


Fig. 1. Risque exhaustif $\mathcal{R}[\tilde{b}, \tilde{\varepsilon}]$ pour estimateurs gaussiens d'EQM fixe en fonction du biais

dans ce cas montre que :

- si $\tilde{\varepsilon} \geq 1$ (précision recherchée supérieure à \sqrt{EQM}) alors $\mathcal{R}[\tilde{b}, \tilde{\varepsilon}]$ est minimale pour $\tilde{b} = \sqrt{EQM} \Leftrightarrow Var[\hat{g}] = 0$.
- si $\tilde{\varepsilon} < 1$ (précision recherchée strictement inférieure à \sqrt{EQM}) alors $\mathcal{R}[\tilde{b}, \tilde{\varepsilon}]$ est minimale pour $\tilde{b} = 0 \Leftrightarrow Var[\hat{g}] = EQM$.

Ces deux exigences antagonistes pour deux domaines complémentaires de l'erreur admissible (ε) montrent que, dans l'ensemble des estimateurs gaussiens (de g) d'EQM identique, la relation (p.p.q.) ne peut être qu'une relation d'ordre partiel : cet ensemble n'admet pas de meilleur estimateur au sens de la relation (p.p.q.). Ceci est également illustré par la figure (1) qui représente le calcul de la précision *exhaustive* $\mathcal{R}[\tilde{b}, \tilde{\varepsilon}]$ pour $\tilde{\varepsilon} \in [0, 2]$ et différentes valeurs du biais normalisé $\tilde{b} = [0, 0.5, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 1.0]$. Cette figure (1), par la grande variabilité de la précision *exhaustive* qu'elle fait apparaître, suggère également de comparer la précision *exhaustive* entre deux familles d'estimateurs d'EQM différentes (EQM_1 et EQM_2). C'est l'objet de la figure (2) qui présente une telle comparaison pour deux représentants (valeur particulière du biais normalisé \tilde{b} , bn sur la figure) de la famille d'estimateur EQM_1 ($\tilde{b} = 0$ et 0.95) et un représentant de la famille EQM_2 ($\tilde{b} = 0$) lorsque $EQM_2 = 2EQM_1$. La principale conclusion provenant de cet exemple est que l'EQM n'est pas une mesure très fiable de la précision d'un estimateur au sens de (p.p.q.). Il s'agit plutôt là d'une "absence" d'information *exhaustive*, en ce sens que rapportée à notre problème initial, elle traduit simplement que l'implication :

$$EQM_{\theta}[\widehat{g}(\theta)] \leq EQM_{\theta}[\widehat{g}'(\theta)] \implies \mathcal{R}_{\theta}[\widehat{g}(\theta), \varepsilon] \leq \mathcal{R}_{\theta}[\widehat{g}'(\theta), \varepsilon]$$

est fautive en général. Une conséquence immédiate est que la minimisation de l'EQM d'un estimateur gaussien ne garantit pas que cet estimateur sera plus précis que tous les autres, même si on réduit cette comparaison à une erreur admissible ε donnée (si $\varepsilon < 0.8\sqrt{EQM_1}$ dans notre exemple figure (2)).

Toutefois, si on restreint l'ensemble des estimateurs gaussiens de g aux estimateurs sans biais ($m_g = g$) alors (18) devient une fonction croissante de l'EQM (égale à la variance dans ce cas) et (p.p.q.) devient une relation d'ordre total sur cet ensemble. Dans ce cas, la recherche de l'estimateur "plus précis que" tous les autres coïncide

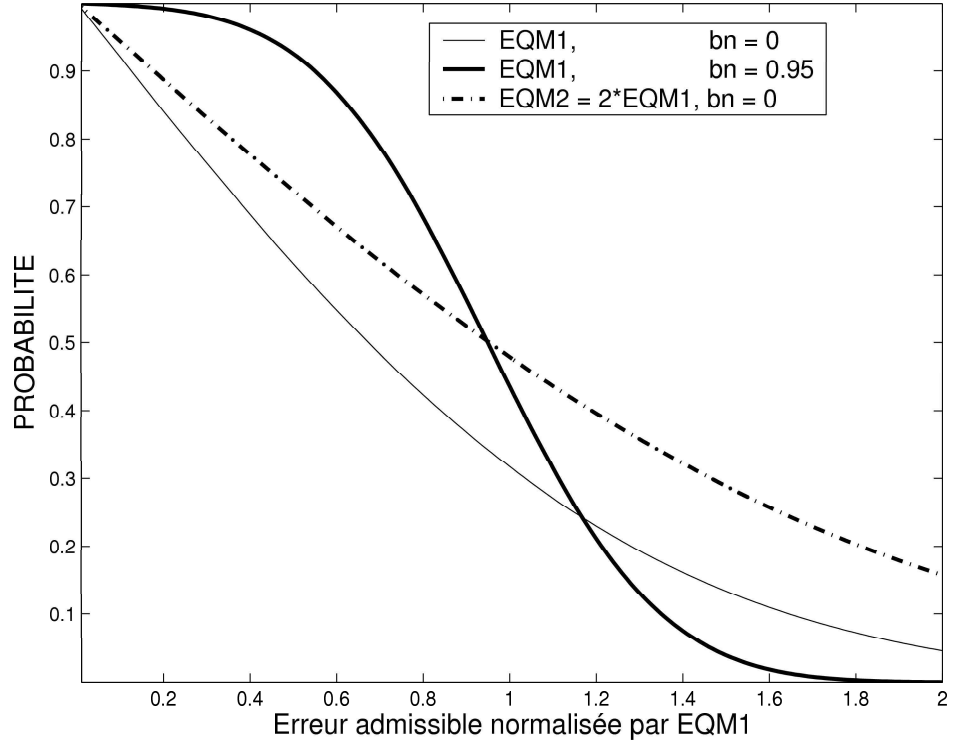


Fig. 2. Risque exhaustif $\mathcal{R}[\tilde{b}, \tilde{\varepsilon}]$ pour estimateurs gaussiens d'EQM différentes

avec la recherche de l'estimateur d'EQM minimale. Hélas, cette propriété ne peut être étendue à l'ensemble des estimateurs sans biais de loi quelconque comme nous le montrons dans le paragraphe suivant.

D. Mesure de la qualité d'un estimateur par l'EQM - Cas de lois différentes

Quel que soit l'estimateur \hat{g} sans biais d'une grandeur réelle g , $EQM(\hat{g}) = Var[\hat{g}]$ et :

$$\mathcal{R}[\hat{g}, \varepsilon] = P(|\mathcal{U}_{\hat{g}}| > \tilde{\varepsilon}) = \mathcal{R}[\tilde{\varepsilon}], \quad \mathcal{U}_{\hat{g}} = \frac{\hat{g} - m_{\hat{g}}}{\sqrt{EQM[\hat{g}]}}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{EQM[\hat{g}]}} \quad (19)$$

où $\mathcal{U}_{\hat{g}}$ constitue la VA centrée ($E(\mathcal{U}_{\hat{g}}) = 0$) réduite ($Var[\mathcal{U}_{\hat{g}}] = 1$) associé à \hat{g} . On peut donc comparer deux estimateurs sans biais de lois de d.d.p. différentes en utilisant (19). Considérons alors deux estimateurs sans biais \hat{g}_1 et \hat{g}_2 de g tels que $\mathcal{U}_{\hat{g}_1}$ et $\mathcal{U}_{\hat{g}_2}$ suivent respectivement une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ et une loi de Student de paramètre n centrée réduite $S(n)$ dont la d.d.p. vérifie :

$$f(x) = \alpha \frac{1}{\sqrt{n}\beta \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{(\alpha x)^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{n}{n-2}} \quad (20)$$

La figure (3) représente l'évolution de la précision *exhaustive* (19) en fonction de l'erreur admissible ($\tilde{\varepsilon}$) normalisée par $EQM.G = EQM[\hat{g}_1]$ (\hat{g}_1 gaussien) lorsque $EQM.S = EQM[\hat{g}_2] = EQM[\hat{g}_1]$ et $EQM.S = EQM[\hat{g}_2] = 2 * EQM[\hat{g}_1]$ (\hat{g}_2 Student) et que le paramètre de la loi de Student est 3 ($n = 3$). Cette figure montre clairement que même pour des estimateurs sans biais, l'EQM ne peut en général permettre de comparer la précision de 2 estimateurs de lois différentes au sens de la relation (p.p.q.). Ceci est confirmé par la figure (4) qui montre la même comparaison mais pour 2 estimateurs \hat{g}_2 de type Student et d'EQM infinie ($n = 2$) qui se révèlent suivant les paramètres de la loi ($M1.ABS = E[|\hat{g}_2|]$) plus ou moins précis que l'estimateur gaussien d'EQM finie !! (voir aussi §VII-A-p62).

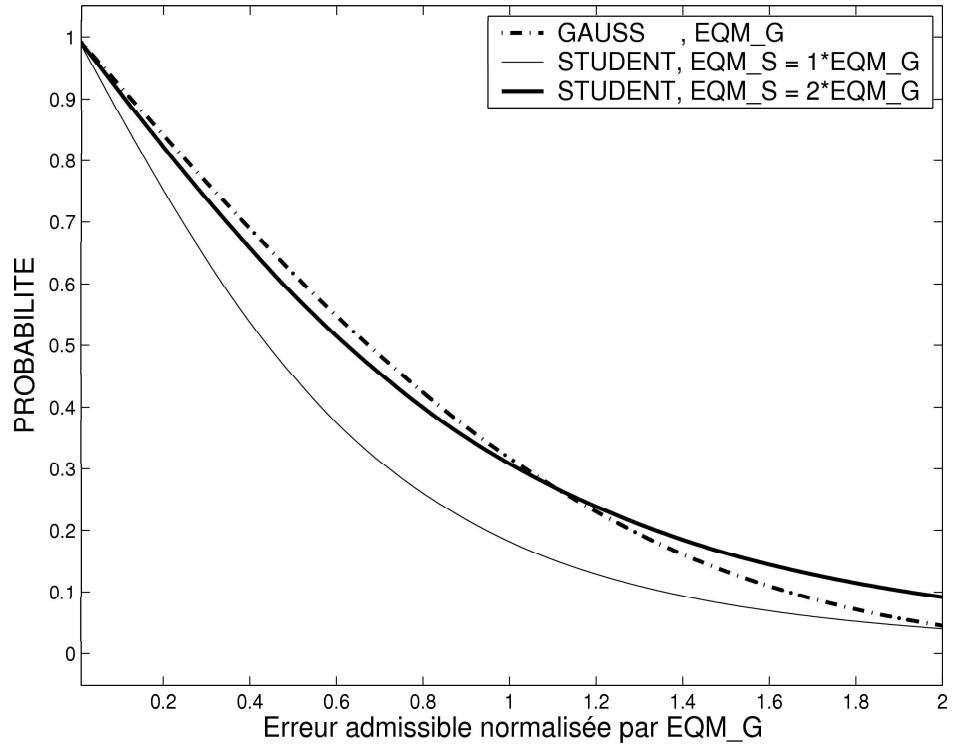


Fig. 3. Risque exhaustif $\mathcal{R}[\tilde{\varepsilon}]$ pour estimateurs sans biais de d.d.p. de nature différente

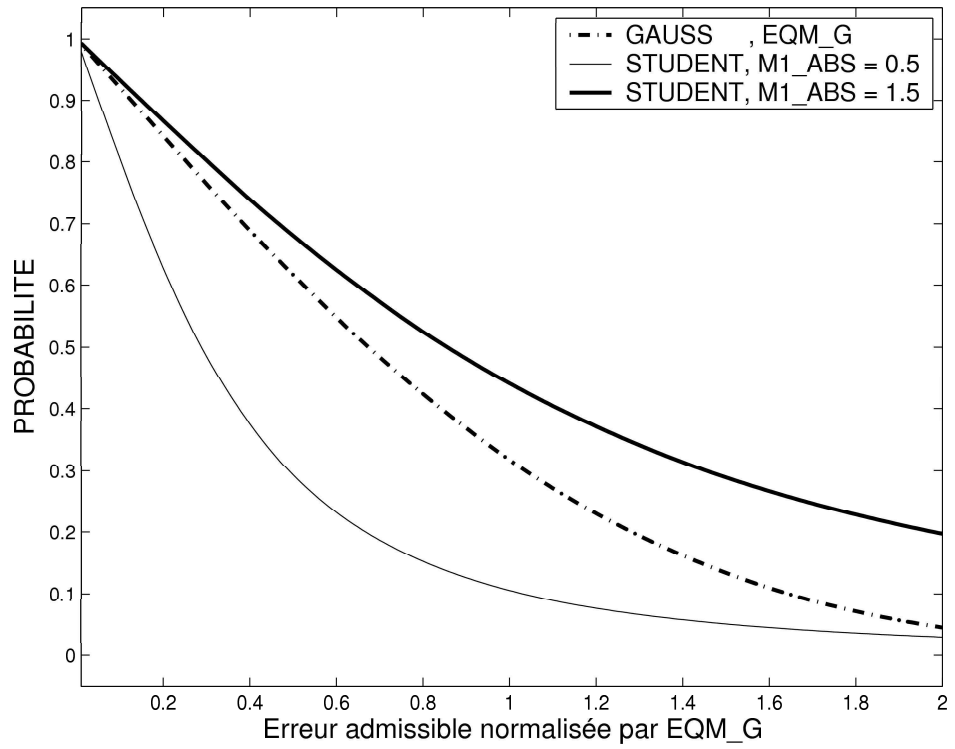


Fig. 4. Risque exhaustif $\mathcal{R}[\tilde{\varepsilon}]$ pour estimateurs sans biais de d.d.p. de nature différente

E. Mesure de la qualité d'un estimateur par l'EQM - Précision a priori

A ce stade de l'analyse, il faut bien comprendre que le choix de l'EQM - ou d'un autre moment absolu - comme mesure de la qualité d'un estimateur représente un compromis entre la capacité à évaluer le critère de qualité - faire les calculs - et sa valeur informative. En effet, les sections §III-C-p19 et §III-D-p21 ont permis de montrer que l'EQM ne permet pas en général de comparer la précision relative - au sens de la relation (p.p.q.) - entre plusieurs estimateurs, qu'ils soient de familles de lois identiques ou différentes. On peut déjà conclure que l'EQM ne permettra pas en général de mettre en oeuvre une stratégie (un critère) visant à l'obtention d'un estimateur plus précis que les autres. Si ce résultat semble négatif au premier abord, il faut néanmoins le relativiser.

En effet dans un grand nombre d'applications pratiques, l'exigence de précision sur un estimateur $\widehat{g}(\theta)$ d'une grandeur $g(\theta)$ se réduit à une contrainte de la forme :

$$P\left(\left|\widehat{g}(\theta)(\vec{x}) - g(\theta)\right| > \varepsilon_0\right) \leq P_0, \quad 0 < P_0 < 1, \quad 0 < \varepsilon_0 \quad . \quad (21)$$

Le problème n'est donc pas tant de trouver l'estimateur le plus précis que de trouver au moins un estimateur satisfaisant cette contrainte. Or, d'après (9) pour $k = 2$, celle ci sera satisfaite si

$$\frac{EQM_\theta \left[\widehat{g}(\theta) \right]}{\varepsilon_0^2} \leq P_0 \iff EQM_\theta \left[\widehat{g}(\theta) \right] \leq P_0 \varepsilon_0^2 \quad , \quad (22)$$

ce qui traduit une condition suffisante (mais non nécessaire) pour que l'estimateur $\widehat{g}(\theta)$ soit une solution possible au problème. Ainsi l'EQM peut être interprétée comme une mesure de précision *a priori* au sens de : "au premier abord, avant toute expérience" [71]. En effet, l'inégalité (22) définit un sous ensemble de contraintes de précision d'estimation $\mathcal{C}_{\widehat{g}(\theta)} = \left\{ (\varepsilon', P') \in \mathbb{R}^* \times]0, 1[\mid P\left(\left|\widehat{g}(\theta)(\vec{x}) - g(\theta)\right| > \varepsilon'\right) \leq P' \right\}$ pour lesquelles l'estimateur $\widehat{g}(\theta)$ est une solution *a priori* possible. Ce sous ensemble constitue le domaine de précision *a priori* d'un estimateur et il est entièrement déterminé par la valeur de son EQM. Ainsi une EQM infinie correspond à $\mathcal{C}_{\widehat{g}(\theta)} = \emptyset$, c'est à dire à une absence de précision *a priori* (voir exemple §VII-A-p62).

On peut alors partitionner l'ensemble des estimateurs de $g(\theta)$ par la relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive) "est *a priori* aussi précis que" qui se traduit par l'égalité des EQM, et définir sur les classes d'équivalence ainsi construites, la relation d'ordre total "est *a priori* plus précis que" (*a priori* p.p.q.) :

$$\widehat{g}(\theta) \text{ (a priori p.p.q.) } \widehat{g}'(\theta) \iff EQM_\theta \left[\widehat{g}'(\theta) \right] \geq EQM_\theta \left[\widehat{g}(\theta) \right] \quad . \quad (23)$$

Cette relation d'ordre permet alors de comparer deux estimateurs quelconques sur la base de leur domaine de précision *a priori*. En effet, selon (21), un estimateur est *a priori* d'autant plus précis que pour un ε_0 donné P_0 est petit. Par conséquent, la valeur de l'EQM d'un estimateur permet de prédire pour chaque ε_0 la valeur de P_0 *a priori* accessible (au sens d'un majorant). Rapporté à cette relation d'ordre, l'estimateur "a priori" le plus précis est donc celui dont l'EQM est la plus petite.

Finalement, on retiendra que l'on peut associer une valeur informative partielle - information *a priori* - à l'EQM d'un estimateur sous la forme d'une relation d'ordre "a priori p.p.q" entre deux estimateurs mais qu'elle ne permet pas en général de les comparer au sens de la relation (p.p.q.). Néanmoins la relation "a priori p.p.q." permet de doter la mesure de qualité d'un estimateur par l'EQM d'un critère de recherche d'un meilleur estimateur, à savoir celui d'EQM minimale, ce qui pose à la fois la question de son existence et de la meilleure précision *a priori* accessible, ce qui est précisément l'objet du calcul de borne inférieure de l'EQM.

F. Minimisation de l'EQM - Choix du critère

Dans les sections précédentes nous nous sommes implicitement limités à l'étude de la précision des estimateurs d'une valeur réelle particulière - $g(\theta)$, θ fixé - afin de poser le problème de la mesure de la qualité d'un estimateur et du choix d'une mesure applicable : l'EQM. Ces résultats peuvent être étendus à notre problème initial : l'estimation d'une fonction du paramètre inconnu $\theta : g(\theta)$, pour $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, Θ étant un intervalle continu de \mathbb{R} . Il s'agit dans

ce cas de trouver un estimateur observable $\widehat{g}(\theta)$ satisfaisant une contrainte de précision éventuellement fonction de θ (21)

$$P \left(\left| \widehat{g}(\theta)(\vec{x}) - g(\theta) \right| > \varepsilon(\theta) \right) \leq P(\theta), \quad 0 < P(\theta) < 1, \quad 0 < \varepsilon(\theta) \quad , \quad (24)$$

traduisant le fait que l'exigence de précision peut dépendre de la grandeur à estimer. La première question que l'on doit se poser est : le problème admet-il au moins une solution ? La seconde est : comment déterminer une solution possible ?

Pour tenter de répondre à ces deux questions, il est judicieux de reformuler la contrainte (24) sous la forme d'une contrainte suffisante (mais non nécessaire, cf. §III-E-p23) correspondant à la recherche d'un estimateur observable $\widehat{g}(\theta)$ tel que :

$$EQM_{\theta} \left[\widehat{g}(\theta) \right] \leq P(\theta) \varepsilon(\theta)^2, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (25)$$

Sous cette forme (25), les deux approches suivantes sont possibles :

- **minimisation de l'EQM globale pondérée.** Cette approche consiste à aborder la contrainte (25) dans son ensemble sous la forme de la recherche d'un estimateur optimal $\widehat{g}(\theta)_{opt}^{glob}$ minimisant l'EQM globale pondérée :

$$EQM \left[\widehat{g}(\theta), \delta \right] = \int_{\Theta} EQM_{\theta} \left[\widehat{g}(\theta) \right] \delta(\theta) d\theta = \iint_{\Theta \Omega} \left(\widehat{g}(\theta)(\vec{x}) - g(\theta) \right)^2 f_{\theta}(\vec{x}) \delta(\theta) d\vec{x} d\theta \quad (26)$$

où $\delta(\theta)$ est une fonction de pondération strictement positive définie sur Θ et vérifiant $\int_{\Theta} \delta(\theta) d\theta = 1$. Le principal intérêt de cette approche est qu'elle bénéficie de l'ensemble des résultats établis sur l'estimation des paramètres aléatoires à travers l'étude du risque Bayésien [11, p 56][27] dont la forme est identique à (26) lorsqu'on interprète la fonction de pondération $\delta(\theta)$ comme la d.d.p. a priori du paramètre θ .

Par exemple, l'étude des bornes d'estimations - bornes inférieures sur le risque Bayésien - [27] peut fournir un moyen d'infirmier l'existence d'une solution à (25). En effet si une telle solution existe, elle doit vérifier, quelle que soit la fonction de pondération strictement positive $\delta(\theta)$:

$$EQM_{\theta} \left[\widehat{g}(\theta) \right] \leq P(\theta) \varepsilon(\theta)^2, \forall \theta \in \Theta \implies \int_{\Theta} EQM_{\theta} \left[\widehat{g}(\theta) \right] \delta(\theta) d\theta \leq \int_{\Theta} P(\theta) \varepsilon(\theta)^2 \delta(\theta) d\theta \quad (27)$$

Par conséquent, si BB_{δ} est une borne inférieure de (26) (Borne Bayésienne associée à la d.d.p. a priori $\delta(\theta)$) et qu'elle vérifie $\int_{\Theta} P(\theta) \varepsilon(\theta)^2 \delta(\theta) d\theta < BB_{\delta}$, cela indique manifestement que (25) ne peut être satisfaite.

Cependant l'étude de ces bornes d'estimations ne permet pas de confirmer l'existence d'une solution pour (25), la réciproque de (27) n'étant pas vraie en général, ce qui limite l'intérêt de ce type d'étude.

Un autre résultat notable est que la minimisation de (26) admet une solution observable [11, p 56] :

$$\widehat{g}(\theta)_{opt}^{glob}(\vec{x}) = \frac{\int_{\Theta} g(\theta) \delta(\theta) f_{\theta}(\vec{x}) d\theta}{\int_{\Theta} \delta(\theta) f_{\theta}(\vec{x}) d\theta} \quad (28)$$

Malheureusement l'exploitation de ce résultat présente 3 difficultés majeures : 1) le calcul de $\widehat{g}(\theta)_{opt}^{glob}$ est souvent impossible, 2) le calcul de l'EQM locale $EQM_{\theta} \left[\widehat{g}(\theta) \right]$ est généralement très difficile même numériquement, 3) il n'existe pas de stratégie connue pour déterminer une fonction de pondération $\delta(\theta)$ permettant d'atteindre le minimum minimorum de l'EQM globale pondérée et par conséquent il n'existe pas de stratégie connue pour déterminer $\delta(\theta)$ tel que (25) soit satisfaite.

Son emploi relève donc plutôt d'une démarche empirique où $\delta(\theta)$ pourra être choisie en fonction de la forme

de $f_\theta(\vec{x})$ afin de permettre l'obtention d'une expression analytique de $\widehat{g(\theta)}_{opt}^{glob}$. L'idéal est alors d'avoir à disposition une famille de fonctions $\delta(\theta)$ fournissant une famille d'estimateurs observables (28) parmi lesquels on retiendra soit celui pour lequel l'EQM globale pondérée est minimale, soit celui qui s'approche au mieux de (25), par exemple celui qui minimise $\int_{\Theta} \left(EQM_\theta \left[\widehat{g(\theta)}_{opt}^{glob} \right] - P(\theta) \varepsilon(\theta)^2 \right) d\theta$.

- **minimisation de l'EQM locale.** Comme nous venons de le voir, la mise en oeuvre d'une approche globale est complexe et ne garantit pas l'obtention d'une solution à notre problème. Une approche alternative est donc une approche locale - pour chaque valeur de θ - que l'on peut décliner en deux étapes :

1) existe-t-il un estimateur $\widehat{g(\theta)}_{opt}^{loc}(\vec{x})$ éventuellement clairvoyant mais non trivial $\left(\widehat{g(\theta)}_{opt}^{loc}(\vec{x}) \neq g(\theta) \right)$ *a priori* suffisamment précis pour que (25) soit vérifiée ? La réponse est oui si :

$$EQM_\theta \left[\widehat{g(\theta)}_{opt}^{loc} \right] = \min \left\{ EQM_\theta \left[\widehat{g(\theta)} \right] \right\} \leq P(\theta) \varepsilon(\theta)^2, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (29)$$

2) existe-t-il un estimateur observable $\widehat{g(\theta)}$ *a priori* suffisamment précis pour que (25) soit vérifiée ? La réponse est : éventuellement si (29) est vérifiée, non dans le cas contraire.

Si la mise en oeuvre de cette approche semble plus simple que l'approche globale, elle ne garantit pas pour autant le succès car il semble assez intuitif que cette méthode ait peu de chance de produire un estimateur observable quelque soit la forme de $f_\theta(\vec{x})$, puisqu'elle repose sur une optimisation locale.

Si aucune des deux approches (globale ou locale) ne semble capable de fournir une stratégie générale pour résoudre notre problème initial, l'approche locale présente l'avantage de fournir une quantification du domaine local - pour chaque valeur de θ - de précision *a priori* accessible (29) pour un modèle d'observation donné $(f_\theta(\vec{x}), \vec{x} \in \Omega)$. Cette information est d'importance, car elle permet de vérifier, avant toute recherche d'un estimateur observable, que le problème d'estimation considéré n'est pas un problème impossible à résoudre. Pour cette raison nous concentrerons notre étude sur la caractérisation des performances locales *a priori* accessibles.

G. Minimisation de l'EQM - Minimisation d'une norme

Comme nous l'avons évoqué au paragraphe §III-B-p17, une propriété fondamentale de l'EQM est d'être une grandeur algébrique, en ce sens qu'elle peut toujours être interprétée comme une norme associée à un produit scalaire $\langle | \rangle$ (forme bilinéaire symétrique définie positive), qu'il s'agisse de l'EQM globale pondérée (26) :

$$EQM \left[\widehat{g(\theta)}, \delta \right] = \left\| \widehat{g(\theta)}(\vec{x}) - g(\theta) \right\|_\delta^2 \quad (30)$$

$$\text{avec } \langle g(\vec{x}, \theta) | h(\vec{x}, \theta) \rangle_\delta = E[g(\vec{x}, \theta) h(\vec{x}, \theta)] = \int_{\Theta \times \Omega} [g(\vec{x}, \theta) h(\vec{x}, \theta)] f(\vec{x}, \theta) d\vec{x} d\theta$$

$$\text{et } f(\vec{x}, \theta) = f_\theta(\vec{x}) \delta(\theta)$$

ou de l'EQM locale (11) :

$$EQM_\theta \left[\widehat{g(\theta)} \right] = \left\| \widehat{g(\theta)}(\vec{x}) - g(\theta) \right\|_\theta^2 \quad (31)$$

$$\text{avec } \langle g(\vec{x}) | h(\vec{x}) \rangle_\theta = E_\theta [g(\vec{x}) h(\vec{x})] = \int_{\Omega} [g(\vec{x}) h(\vec{x})] f_\theta(\vec{x}) d\vec{x}$$

Parmi les nombreux résultats établis sur les espaces vectoriels munis d'un produit scalaire, deux résultats fondamentaux sont plus particulièrement mis en oeuvre lors de la recherche d'une borne inférieure de l'EQM :

- la généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwartz aux matrices de Gram [4][6][20][32][23],
- la minimisation d'une norme sous contraintes linéaires [14][40].

Inégalité de Cauchy-Schwartz généralisée

Soit \mathbb{U} un espace vectoriel euclidien de dimension quelconque (finie ou infinie) sur le corps des réels \mathbb{R} muni d'un produit scalaire $\langle | \rangle$. Alors la matrice de Gram associée aux deux familles de vecteurs $\vec{u}_{[1,N]} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N)$ et $\vec{c}_{[1,K]} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_K)$ de \mathbb{U} est définie par :

$$\mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{c}_{[1,K]}) = \begin{bmatrix} \langle \vec{u}_1 | \vec{c}_1 \rangle & \langle \vec{u}_2 | \vec{c}_1 \rangle & \dots & \langle \vec{u}_N | \vec{c}_1 \rangle \\ \langle \vec{u}_1 | \vec{c}_2 \rangle & \langle \vec{u}_2 | \vec{c}_2 \rangle & \dots & \langle \vec{u}_N | \vec{c}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle \vec{u}_1 | \vec{c}_K \rangle & \langle \vec{u}_2 | \vec{c}_K \rangle & \dots & \langle \vec{u}_N | \vec{c}_K \rangle \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(K, N) \quad (32)$$

Par construction, la matrice $\mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{u}_{[1,N]})$ de $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est positive :

$$\forall \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^N, \vec{\lambda} \neq \vec{0}, \quad \vec{\lambda}^T \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{u}_{[1,N]}) \vec{\lambda} = \left\| \sum_{n=1}^N \lambda_n \vec{u}_n \right\|^2 \geq 0 \iff \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{u}_{[1,N]}) \geq 0 \quad (33)$$

et vérifie (cf. Annexe X-B-p82) :

$$\mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{u}_{[1,N]}) \geq \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{c}_{[1,K]})^T \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}, \vec{c}_{[1,K]})^{-1} \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{c}_{[1,K]}) \quad (34)$$

si $\mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}, \vec{c}_{[1,K]})$ est inversible, c'est à dire si et seulement si $(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_K)$ forme une famille libre de \mathbb{U} . De plus, si $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_N, \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_K)$ forme une famille libre de \mathbb{U} (cf. Annexe X-B-p82) alors l'inégalité (34) est une inégalité stricte. L'inégalité de Cauchy-Schwartz constitue un cas particulier de (34) sous la forme :

$$\mathbf{G}(\vec{u}_1, \vec{u}_1) \geq \mathbf{G}(\vec{u}_1, \vec{c}_1) \mathbf{G}(\vec{c}_1, \vec{c}_1)^{-1} \mathbf{G}(\vec{u}_1, \vec{c}_1)^T \iff \|\vec{u}_1\|^2 \geq \frac{\langle \vec{u}_1 | \vec{c}_1 \rangle^2}{\|\vec{c}_1\|^2}$$

Lorsque le produit scalaire $\langle | \rangle$ correspond à une espérance, comme c'est la cas pour l'EQM (30)-(31), alors l'inégalité (34) est généralement désignée sous le vocable de "Inégalité de Covariance" [32].

Minimisation d'une norme sous contraintes linéaires

Soit \mathbb{U} un espace vectoriel euclidien de dimension quelconque (finie ou infinie) sur le corps des réels \mathbb{R} muni d'un produit scalaire $\langle | \rangle$. Soit $(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_K)$ une famille libre de K vecteurs de \mathbb{U} et $\vec{v} = (v_1, \dots, v_K)^T$ un vecteur de \mathbb{R}^K . Alors le problème de la minimisation de $\|\vec{u}\|^2$ sous les K contraintes linéaires $\langle \vec{u} | \vec{c}_k \rangle = v_k, k \in [1, K]$ admet pour solution (cf. Annexe X-C-p83) :

$$\min \left\{ \|\vec{u}\|^2 \right\} = \vec{v}^T \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}, \vec{c}_{[1,K]})^{-1} \vec{v} \quad \text{pour} \quad \vec{u}_{opt} = \sum_{k=1}^K \alpha_k \vec{c}_k \quad (35a)$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_K)^T = \vec{\alpha} = \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}, \vec{c}_{[1,K]})^{-1} \vec{v} \quad (35b)$$

Equivalence

Bien qu'abordés de façon indépendante dans la littérature courante, ces deux résultats - (34) et (35a-b) - sont équivalents. En effet, considérons une famille de vecteur $\vec{u}_{[1,N]} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N)$ et le problème de minimisation suivant :

$$\min \left\{ \left\| \sum_{n=1}^N \lambda_n \vec{u}_n \right\|^2 \right\} \text{ sous } \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{c}_{[1,K]}) \vec{\lambda} = \mathbf{V}, \quad \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^N, \vec{\lambda} \neq \vec{0} \quad (36)$$

Il est équivalent à :

$$\min \left\{ \left\| \sum_{n=1}^N \lambda_n \vec{u}_n \right\|^2 \right\} \text{ sous } \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{c}_{[1,K]}) \vec{\lambda} = \mathbf{G} \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n \vec{u}_n, \vec{c}_{[1,K]} \right) = \mathbf{V} \vec{\lambda}, \quad \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^N, \vec{\lambda} \neq \vec{0}$$

et vérifie donc d'après (35a) :

$$\left\| \sum_{n=1}^N \lambda_n \vec{u}_n \right\|^2 = \vec{\lambda}^T \mathbf{G}(\vec{u}_{[1..N]}, \vec{u}_{[1..N]}) \vec{\lambda} \geq (\mathbf{v} \vec{\lambda})^T \mathbf{G}(\vec{c}_{[1..K]}, \vec{c}_{[1..K]})^{-1} (\mathbf{v} \vec{\lambda}), \quad \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^N, \vec{\lambda} \neq \vec{0}$$

soit encore :

$$\vec{\lambda}^T \mathbf{G}(\vec{u}_{[1..N]}, \vec{u}_{[1..N]}) \vec{\lambda} \geq \vec{\lambda}^T (\mathbf{v}^T \mathbf{G}(\vec{c}_{[1..K]}, \vec{c}_{[1..K]})^{-1} \mathbf{v}) \vec{\lambda}, \quad \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^N, \vec{\lambda} \neq \vec{0},$$

qui est précisément l'inégalité (34).

Dans la suite nous privilégierons la forme (35a-b) car son utilisation permet une meilleure compréhension des hypothèses associées aux différentes bornes inférieures de l'EQM. En effet, son principal mérite est de poser explicitement en premier lieu le problème de la formulation de contraintes pertinentes, lesquelles déterminent alors la valeur de la borne inférieure de la norme.

H. Minimisation de l'EQM Locale - Estimateurs sans biais

Comme nous l'avons évoqué précédemment dans le cas des estimateurs gaussiens (cf. §III-C-p19), le choix d'un estimateur $\widehat{g}(\theta)(\vec{x})$ sans biais de $g(\theta)$, c'est à dire vérifiant

$$E_{\theta} \left[\widehat{g}(\theta)(\vec{x}) \right] = \int_{\Omega} \widehat{g}(\theta)(\vec{x}) f_{\theta}(\vec{x}) d\vec{x} = g(\theta),$$

est un choix arbitraire lorsqu'une seule observation de l'expérience aléatoire est disponible, en ce sens qu'il ne garantit pas l'obtention d'un estimateur plus précis que les autres.

Par contre, si N observations indépendantes sont possibles, ce choix devient stratégiquement - au sens de la relation (p.p.q.) - recommandable. En effet dans ce cas, une stratégie simple pour améliorer la précision *a priori* est de construire l'estimateur "moyenne"

$$\left\langle \widehat{g}(\theta) \right\rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \widehat{g}(\theta)(\vec{x}_n) \quad (37)$$

dont l'EQM

$$\begin{aligned} EQM_{\theta} \left[\left\langle \widehat{g}(\theta) \right\rangle_N \right] &= \frac{Var_{\theta} \left[\widehat{g}(\theta)(\vec{x}) \right]}{N} + \left(E_{\theta} \left[\widehat{g}(\theta)(\vec{x}) \right] - g(\theta) \right)^2 \\ &\geq \left(E_{\theta} \left[\widehat{g}(\theta)(\vec{x}) \right] - g(\theta) \right)^2 \end{aligned} \quad (38)$$

est décroissante à mesure que le nombre d'observations indépendantes augmente. Il est clair que si $\widehat{g}(\theta)$ admet un biais, cela limitera la précision *a priori* accessible asymptotiquement - quand le nombre d'observations tend vers l'infini -. D'autre part $\left\langle \widehat{g}(\theta) \right\rangle_N$ tend vers la VA gaussienne $\mathcal{N} \left(E_{\theta} \left[\widehat{g}(\theta)(\vec{x}) \right], \sqrt{\frac{Var_{\theta} \left[\widehat{g}(\theta)(\vec{x}) \right]}{N}} \right)$ pour laquelle nous avons montré (cf. §III-C-p19) que si la précision recherchée $\varepsilon(\theta)$ (24) est strictement inférieure à $\sqrt{EQM_{\theta} \left[\left\langle \widehat{g}(\theta) \right\rangle_N \right]}$, alors la précision maximale (risque *exhaustif* minimal (4)) pour une EQM donnée est obtenue pour un biais nul.

Par conséquent, ces 2 résultats, bien qu'asymptotiques ($N \rightarrow \infty$), indiquent qu'il est préférable de rechercher un estimateur $\widehat{g}(\theta)(\vec{x})$ sans biais, en particulier si le problème d'estimation à résoudre est caractérisé par une contrainte de précision d'estimation (24) forte $\left(\varepsilon(\theta) \ll \sqrt{EQM_{\theta} \left[\left\langle \widehat{g}(\theta) \right\rangle_N \right]} \right)$.

Appliqué au problème de la minimisation de l'EQM locale, c'est à dire pour une valeur particulière θ_0 de θ , ce principe se traduit par la recherche d'un estimateur $\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x})$ **ponctuellement sans biais**

$$E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = g(\theta_0) \quad (39)$$

vérifiant :

$$\min \left\{ EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] \right\} \text{ sous } E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = g(\theta_0) \quad (40)$$

Malheureusement, sans autre condition, la solution de (40) est la solution triviale

$$\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) = g(\theta_0) \Leftrightarrow EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] = 0,$$

qui n'est évidemment pas acceptable car elle ne dépend pas des observations. En effet rappelons que notre objectif "idéal" est de trouver le meilleur estimateur observable au sens de la relation (*a priori* p.p.q). Un objectif raisonnable est donc de trouver le meilleur estimateur clairvoyant mais non trivial. Pour cela il suffit d'imposer à $\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x})$ des contraintes que la solution triviale $g(\theta_0)$ ne peut vérifier.

Une telle contrainte "idéale" est que $\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x})$ soit un estimateur sans biais de $g(\theta)$, $\forall \theta \in \Theta$:

$$E_{\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = g(\theta) = \int_{\Omega} \widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) f_{\theta}(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (41)$$

Dans ce cas le problème (40) devient :

$$\min \left\{ EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] \right\} \text{ sous } E_{\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = g(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta \quad (42)$$

et correspond à la recherche de l'estimateur localement le meilleur et sans biais. Ce problème peut être résolu en appliquant les travaux de Barankin [8] qui a établi la forme générale de la plus grande borne inférieure d'un moment absolu quelconque d'un estimateur sans biais. L'EQM est donc un cas d'application de cette théorie. Elle a bénéficié de nombreux travaux complémentaires [10][12][13][14][15][29][30][31][40] visant non seulement à traduire les principaux résultats de la théorie (mathématique) de Barankin en une forme accessible à la plupart des ingénieurs [12][13][14], mais également à obtenir des bornes inférieures "calculables" approchant la borne de Barankin généralement incalculable. Nous proposons ici une synthèse de ces travaux mettant en lumière l'ensemble des résultats clés (43)(44)(47)(49)(50)(51a-c). Si $\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x})$ est un estimateur sans biais (41), il vérifie en particulier :

$$E_{\theta_n} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = g(\theta_n) = \int_{\Omega} \widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) f_{\theta_n}(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \forall \theta_n \in \Theta.$$

Par conséquent $\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^N$:

$$\sum_{n=1}^N w_n E_{\theta_n} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right] = \sum_{n=1}^N w_n (g(\theta_n) - g(\theta_0))$$

soit encore :

$$E_{\theta_0} \left[\left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) \left(\sum_{n=1}^N w_n \frac{f_{\theta_n}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right) \right] = \sum_{n=1}^N w_n (g(\theta_n) - g(\theta_0)) \quad (43)$$

Or d'après (35a-b), la minimisation de $EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right]$ sous la contrainte (43) conduit à [8] :

$$EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] \geq \frac{\left[\sum_{n=1}^N w_n (g(\theta_n) - g(\theta_0)) \right]^2}{E_{\theta_0} \left[\left(\sum_{n=1}^N w_n \frac{f_{\theta_n}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right)^2 \right]} \quad (44)$$

L'inégalité (44) est valide quelque soit le sous-ensemble de points test $\{\theta_n\}_{[1,N]}$ de Θ considéré et $\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^N$. Aussi Barankin en déduit que, si $\widehat{g(\theta_0)}$ est un estimateur sans biais, alors son EQM est bornée par :

$$EQM_{\theta_0} [\widehat{g(\theta_0)}] \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\vec{w}, \{\theta_n\}_{[1,N]}} \left\{ \frac{\left[\sum_{n=1}^N w_n (g(\theta_n) - g(\theta_0)) \right]^2}{E_{\theta_0} \left[\left(\sum_{n=1}^N w_n \frac{f_{\theta_n}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right)^2 \right]} \right\}, \quad (45)$$

(voir [15] pour une interprétation géométrique). Une forme plus concise peut néanmoins être trouvée en remarquant que [12] :

$$\frac{\left[\sum_{n=1}^N w_n (g(\theta_n) - g(\theta_0)) \right]^2}{E_{\theta_0} \left[\left(\sum_{n=1}^N w_n \frac{f_{\theta_n}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right)^2 \right]} = \frac{(\vec{w}^T \vec{\Delta} g)^2}{\vec{w}^T \mathbf{R} \vec{w}}, \quad R_{n,m} = \int_{\Omega} \frac{f_{\theta_n}(\vec{x}) f_{\theta_m}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} d\vec{x}, \quad \Delta g_n = g(\theta_n) - g(\theta_0) \quad (46)$$

En effet, $\frac{(\vec{w}^T \vec{\Delta} g)^2}{\vec{w}^T \mathbf{R} \vec{w}}$ est maximale pour $\vec{w} = \lambda \mathbf{R}^{-1} \vec{\Delta} g$ et vaut alors $\vec{\Delta} g^T \mathbf{R}^{-1} \vec{\Delta} g$. Par conséquent une autre expression de (44) est :

$$EQM_{\theta_0} [\widehat{g(\theta_0)}] \geq \vec{\Delta} g^T \mathbf{R}^{-1} \vec{\Delta} g \quad (47)$$

conduisant à la forme "réduite" de la borne de Barankin (voir aussi Annexe XI-C-p97) :

$$EQM_{\theta_0} [\widehat{g(\theta_0)}] \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\{\theta_n\}_{[1,N]}} \left\{ \vec{\Delta} g^T \mathbf{R}^{-1} \vec{\Delta} g \right\} \quad (48)$$

On remarquera que (47) est également la solution du problème de minimisation suivant :

$$\min \left\{ EQM_{\theta_0} [\widehat{g(\theta_0)}] \right\} \text{ sous } E_{\theta_n} [\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x})] = g(\theta_n), \quad \{\theta_n\}_{[1,N]} \in \Theta \quad (49)$$

ce qui traduit le fait que la plus grande borne inférieure de l'EQM pour un nombre fini de points test $\{\theta_n\}_{[1,N]}$ est obtenue simplement en exprimant la contrainte "sans biais" en les points tests [12]. Considérant directement ce résultat, Glave [14] a alors démontré qu'un maillage uniforme de Θ permet d'assurer une convergence - au sens de l'EQM - de (48) vers (45). Par conséquent l'estimateur sans biais et localement le meilleur vérifie (47) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \left(\frac{\vec{w}}{\lambda} \right) = \vec{\Delta} g \\ \widehat{g(\theta_0)}_{opt}(\vec{x}) - g(\theta_0) = \sum_{n=1}^N \frac{w_n}{\lambda} \frac{f_{\theta_n}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \\ EQM_{\theta_0} [\widehat{g(\theta_0)}] \geq \vec{\Delta} g^T \mathbf{R}^{-1} \vec{\Delta} g = \vec{\Delta} g^T \left(\frac{\vec{w}}{\lambda} \right) \end{array} \right. \quad (50)$$

soit, en posant $\frac{1}{\lambda} = d\theta = \theta_{n+1} - \theta_n$, [29][40] :

$$\int_{\Theta} K(\theta, \theta') w(\theta') d\theta' = g(\theta) - g(\theta_0), \quad K(\theta, \theta') = \int_{\Omega} \frac{f_{\theta}(\vec{x}) f_{\theta'}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} d\vec{x} \quad (51a)$$

$$\widehat{g(\theta_0)}_{opt}(\vec{x}) - g(\theta_0) = \int_{\Theta} \frac{f_{\theta}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} w(\theta) d\theta \quad (51b)$$

$$EQM_{\theta_0} [\widehat{g(\theta_0)}] \geq \int_{\Theta} (g(\theta) - g(\theta_0)) w(\theta) d\theta \quad (51c)$$

Hélas, dans la plupart des cas pratiques, la résolution analytique de (51a) est impossible et ne permet pas d'obtenir une forme explicite de $\widehat{g(\theta_0)}_{opt}$ ni de la borne inférieure de l'EQM. La forme itérative (50) n'est guère plus pratique car il n'existe pas de résultat sur sa vitesse de convergence vers (51a). De plus ce problème n'admet pas toujours

une solution. Il faut en effet que \mathbf{R} existe et soit inversible, $\forall N > 1$ (47). Une condition suffisante à l'existence de \mathbf{R} est que :

$$f_{\theta_0}(\vec{x}) > 0 \text{ et } E_{\theta_0} \left[\left(\frac{f_{\theta}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right)^2 \right] < \infty, \forall \theta, \theta_0 \in \Theta$$

Lorsque \mathbf{R} existe, alors en remarquant que

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{u}_{[1,N]}), \quad \vec{u}_n = \frac{f_{\theta_n}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})}, \quad \langle | \rangle = E_{\theta_0} [],$$

il apparaît qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit inversible est que les vecteurs $\left(\frac{f_{\theta_n}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right)_{[1,N]}$ de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$ forment une famille libre, c'est à dire que la famille $(f_{\theta_n}(\vec{x}))_{[1,N]}$ soit une famille libre, $\forall N > 1$. Autrement dit, il faut que

$$\langle g(\theta) | h(\theta) \rangle_K = \iint_{\Theta \times \Theta} g(\theta) K(\theta, \theta') h(\theta') d\theta d\theta'$$

définisse un produit scalaire sur l'espace vectoriel des fonction de $\Theta \rightarrow \mathbb{R}$.

Ainsi, si la recherche d'un estimateur sans biais minimisant l'EQM locale représente notre problème idéal, sa résolution ne fournit pas en général une solution exploitable dans la pratique ce qui en limite quelque peu l'intérêt. Comme nous venons de le montrer le principal écueil de ce problème est qu'il correspond en fait à un continuum de contraintes "ponctuellement sans biais". Si le nombre de contraintes est fixé à un nombre N arbitraire alors une solution calculable existe généralement ((50), N fixé), ce que nous illustrons dans les sections suivantes.

I. Minimisation de l'EQM Locale - Estimateurs localement sans biais

Rappelons que notre objectif premier est de trouver une solution non triviale au problème :

$$\min \left\{ EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] \right\} \text{ sous } E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = g(\theta_0)$$

Pour éviter la solution triviale, il semble naturel d'introduire 2 contraintes symétriques "ponctuellement sans biais" supplémentaires ($N = 2$) [12] :

$$\begin{cases} E_{\theta_0+d\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = g(\theta_0 + d\theta) \\ E_{\theta_0-d\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = g(\theta_0 - d\theta) \end{cases}$$

associées au vecteur de pondération $\vec{w} = [1, -1]$. Dans ce cas (44) devient :

$$EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] \geq \frac{[g(\theta_0 + d\theta) - g(\theta_0 - d\theta)]^2}{E_{\theta_0} \left[\left(\frac{f_{\theta_0+d\theta}(\vec{x}) - f_{\theta_0-d\theta}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right)^2 \right]}, \quad \forall \theta_0 + d\theta, \theta_0 - d\theta \in \Theta \quad (52)$$

et en particulier :

$$EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] \geq \lim_{d\theta \rightarrow 0} \frac{[g(\theta_0 + d\theta) - g(\theta_0 - d\theta)]^2}{E_{\theta_0} \left[\left(\frac{f_{\theta_0+d\theta}(\vec{x}) - f_{\theta_0-d\theta}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right)^2 \right]} \quad (53)$$

Tout estimateur sans biais au voisinage de θ_0 - c'est à dire sur un intervalle $[\theta_0 - d\theta, \theta_0 + d\theta] \in \Theta, \forall d\theta$ - possède nécessairement une EQM supérieure à (53). Par conséquent, cette borne (53) permet de caractériser les estimateurs de $g(\theta)$ **localement sans biais** au voisinage de θ_0 , c'est à dire vérifiant - pour $g(\theta)$ continue en θ_0 - :

$$\lim_{d\theta \rightarrow 0} \begin{cases} E_{\theta_0+d\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = g(\theta_0 + d\theta) \\ E_{\theta_0-d\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = g(\theta_0 - d\theta) \end{cases}, \quad (54)$$

ce qui représente la définition minimale (limite) que l'on peut associer à la qualité "sans biais" d'un estimateur de $g(\theta)$ au voisinage de θ_0 . D'autre part, on remarquera que (52) est majorée par la borne de Barankin (51a-c) calculée sur un intervalle $]\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta[$, $\delta > 0$. Par conséquent si la borne de Barankin existe alors la limite (53) existe.

Cette limite peut être exprimée de manière plus "compacte", si $g(\theta)$ et $f_\theta(\vec{x})$ sont dérivables en θ_0 et si $E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta} \frac{1}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right)^2 \right]$ existe, par :

$$EQM_{\theta_0} [\widehat{g(\theta_0)}] \geq \frac{\left[\frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \right]^2}{E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta} \frac{1}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right)^2 \right]} = \frac{\left[\frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \right]^2}{E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta} \right)^2 \right]} \quad (55)$$

Sous cette forme (55), la borne (53) est généralement appelée borne de Cramer-Rao bien qu'elle semble avoir initialement été démontrée par Doob [3] puis Fréchet [4]. Dans ce cas, cette borne (55) coïncide avec la plus grande borne inférieure de l'EQM locale (au sens de (47), cf. Annexe XI-A-p95) et la définition d'un estimateur localement sans biais (54) est alors équivalente à :

$$E_{\theta_0+d\theta} [\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x})] = g(\theta_0) + \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} d\theta + o(d\theta) \quad (56)$$

La borne de Cramer-Rao correspond donc à la solution de :

$$\min \left\{ EQM_{\theta_0} [\widehat{g(\theta_0)}] \right\} \text{ sous } E_{\theta_0+d\theta} [\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x})] = g(\theta_0) + \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} d\theta + o(d\theta) \quad (57)$$

soit :

$$\min \left\{ EQM_{\theta_0} [\widehat{g(\theta_0)}] \right\} \text{ sous } \begin{cases} E_{\theta_0} [\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x})] = g(\theta_0) \\ E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta} \right] = \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \end{cases} \quad (58)$$

Remarques Fondamentales

On retiendra que la borne de Cramer-Rao (55) correspond à une exigence locale du caractère sans biais d'un estimateur (58), à la différence de la borne de Barankin qui inclut implicitement le continuum de contraintes :

$$\begin{cases} E_{\theta_0} [\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x})] = g(\theta_0) \\ E_{\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{\partial \ln f_{\theta}(\vec{x})}{\partial \theta} \right] = \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta}, \forall \theta \in \Theta \end{cases}$$

Cette différence est d'importance et ne semble pas avoir été perçue par les auteurs d'origine tels que Doob [3], Fréchet [4, p. 187], Cramer [6, p. 475] ou Rao [5] dont les dérivations respectives reposent sur l'implication "classique" suivante :

$$E_{\theta} [\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x})] = g(\theta), \forall \theta \in \Theta \Rightarrow \frac{\partial E_{\theta} [\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x})]}{\partial \theta} = \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} = E_{\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{\partial \ln f_{\theta}(\vec{x})}{\partial \theta} \right] \quad (59)$$

laquelle présente trois inconvénients :

- le premier, mineur, est le risque de confusion entre les propriétés requises pour un estimateur sans biais (41) - c'est à dire $\forall \theta \in \Theta$ - et celles requises pour un estimateur localement sans biais (56) - c'est à dire au voisinage de θ_0 - qui pourrait conduire à penser que la borne de Cramer-Rao (55) et la borne de Barankin (51a-c) s'appliquent aux mêmes types d'estimateurs.
- le second, plus important, est un cadre d'application limité au cas où l'espace d'observation Ω est implicitement

supposé indépendant du paramètre à estimer θ , les observations ne dépendant de θ que par leur ddp $f_\theta(\vec{x})$. Dans ce cas :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\int_{\Omega} \widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) f_\theta(\vec{x}) d\vec{x} \right) = \int_{\Omega} \widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{\partial f_\theta(\vec{x})}{\partial \theta} d\vec{x}$$

est vraie si $\frac{\partial f_\theta(\vec{x})}{\partial \theta}$ est uniformément continue, ce qui semble a priori une condition suffisamment peu restrictive dans la pratique pour être supposée vraie implicitement. Par contre, si l'espace d'observation dépend du paramètre à estimer - $\Omega = \Omega(\theta) \subset \mathbb{R}^L$ - alors cette égalité n'est plus vraie car dans ce cas - si $\Pi_{\Omega(\theta)}(\vec{x})$ désigne la fonction indicatrice du sous-ensemble $\Omega(\theta)$ - :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_\theta \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right]}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\int_{\mathbb{R}^L} \widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) f_\theta(\vec{x}) \Pi_{\Omega(\theta)}(\vec{x}) d\vec{x} \right) \\ &= \int_{\Omega(\theta)} \widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{\partial f_\theta(\vec{x})}{\partial \theta} d\vec{x} + \int_{\mathbb{R}^L} \widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) f_\theta(\vec{x}) \frac{\partial \Pi_{\Omega(\theta)}(\vec{x})}{\partial \theta} d\vec{x} \\ &\neq \int_{\Omega(\theta)} \widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial \theta} f_\theta(\vec{x}) d\vec{x} \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'impossibilité apparente - mais non réelle - de l'extension des bornes de Cramer Rao (et celles de Bhattacharyya, cf. §III-J-p32) au cas général d'un espace d'observation éventuellement "clairvoyant" (cf. §V-C.2-p51).

• le troisième enfin, est qu'elle limite l'existence la borne de Cramer-Rao (et celles de Bhattacharyya, cf. §III-J-p32) au cas où $f_\theta(\vec{x})$ est dérivable, alors que l'approche de Barankin permet de montrer son existence même lorsque $f_\theta(\vec{x})$ n'est dérivable qu'à gauche et à droite sans être dérivable (cf. Annexe XI-A-p95).

J. Minimisation de l'EQM Locale - Des estimateurs localement sans biais aux estimateurs sans biais

On peut généraliser la borne de Cramer-Rao de la façon suivante. Supposons qu'un critère de qualité pour un estimateur $\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x})$ d'une grandeur $g(\theta)$ soit défini par :

$$E_\theta \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = h(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta \quad (60)$$

Dans le cas où $h(\theta) = g(\theta)$, la qualité recherchée est "sans biais". Alors l'estimateur localement le meilleur et de qualité $h(\cdot)$ est la solution exacte de

$$\min \left\{ EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] \right\} \text{ sous } E_\theta \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = h(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta,$$

laquelle, si elle existe, est fournie par les travaux de Barankin (51a-c). Malheureusement comme nous l'avons vu précédemment, on ne saura pas la calculer dans la plupart des cas. Cependant, on peut tenter d'avoir accès à une forme approchée en relâchant le critère de qualité (60). Parmi les approches possibles, une approximation intéressante est fournie par le développement de Taylor au voisinage de θ_0 des deux termes de l'égalité (60) :

$$h(\theta_0 + d\theta) = h(\theta_0) + \frac{\partial h(\theta_0)}{\partial \theta} d\theta + \dots + \frac{\partial^P h(\theta_0)}{\partial \theta^P} \frac{d\theta^P}{P!} + o(d\theta^P)$$

et

$$f_{\theta_0+d\theta}(\vec{x}) = f_{\theta_0}(\vec{x}) + \frac{\partial f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta} d\theta + \dots + \frac{\partial^P f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta^P} \frac{d\theta^P}{P!} + o_{\vec{x}}(d\theta^P)$$

↓

$$E_{\theta_0+d\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] + E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{\frac{\partial f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta}}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right] d\theta + \dots$$

$$+ E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{\frac{\partial^P f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial^P \theta}}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right] \frac{d\theta^P}{P!} + o(d\theta^P)$$

en supposant bien évidemment que toutes les dérivées et les intégrales existent. En effet, la contrainte

$$E_{\theta_0+d\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] - h(\theta_0 + d\theta) = o(d\theta^P) \quad (61)$$

permet d'introduire une distance locale à la qualité $h(\cdot)$ attendue - plus P est grand, plus l'estimateur est proche localement de la qualité recherchée - qui présente l'avantage de pouvoir s'exprimer à l'aide de $P + 1$ contraintes linéaires (unicité du développement de Taylor) :

$$E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = h(\theta_0) \text{ et } E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{\frac{\partial^p f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial^p \theta}}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right] = \frac{\partial^p h(\theta_0)}{\partial^p \theta}, \quad 1 \leq p \leq P \quad (62)$$

équivalentes à - sachant que $\int_{\Omega} \frac{\partial^p f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial^p \theta} d\vec{x} = 0, 1 \leq p \leq P - :$

$$E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right] = h(\theta_0) - g(\theta_0) \quad (63a)$$

$$E_{\theta_0} \left[\left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) \frac{\frac{\partial^p f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial^p \theta}}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right] = \frac{\partial^p h(\theta_0)}{\partial^p \theta}, \quad 1 \leq p \leq P \quad (63b)$$

Par conséquent, l'estimateur localement le meilleur et localement de qualité $h(\cdot)$ à l'ordre P est fourni par l'application de (35a-b) à la minimisation de $EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right]$ sous les $P + 1$ contraintes (63a-b). Si nous notons $\min \left\{ EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] \right\}_{h(\cdot)|_{P+1}}$ la borne inférieure ainsi obtenue et \mathfrak{C}_{P+1} l'ensemble des $P + 1$ contraintes (62), alors selon (61), les cas $P = 1$ et $P = \infty$ correspondent respectivement à la plus faible et à la plus forte (idéale) formulation de la qualité $h(\cdot)$ attendue, et vérifient (puisque $\mathfrak{C}_1 \subset \mathfrak{C}_P \subset \mathfrak{C}_{\infty}$) :

$$\min \left\{ EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] \right\}_{h(\cdot)|_2} \leq \min \left\{ EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] \right\}_{h(\cdot)|_{P+1}} \leq \min \left\{ EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] \right\}_{h(\cdot)|_{\infty}} \quad (64)$$

où $\min \left\{ EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] \right\}_{h(\cdot)|_2}$, $\min \left\{ EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] \right\}_{h(\cdot)|_{P+1}}$, $\min \left\{ EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] \right\}_{h(\cdot)|_{\infty}}$ sont respectivement la borne de Cramer-Rao, la borne de Bhattacharyya [7] d'ordre P et la borne de Barankin pour les estimateurs de qualité $h(\cdot)$.

Finalement, rappelons qu'un développement de Taylor d'ordre fini est un développement limité local et n'est généralement précis qu'au voisinage de la valeur (θ_0) pour lequel il est établi. Par conséquent, la borne de Cramer-Rao représente une approximation "locale" du critère de "qualité" (60), au contraire de la borne de Barankin qui représente sa satisfaction exacte, alors que la borne de Bhattacharyya permet d'exprimer la transition possible entre ces deux extrêmes à mesure que l'ordre du développement de Taylor augmente - s'il est convergent sur Θ - . On peut d'ailleurs démontrer que la borne de Bhattacharyya correspond à la satisfaction limite des $N = 2P$ contraintes symétriques additionnelles

$$\lim_{d\theta \rightarrow 0} \left\{ \begin{array}{l} E_{\theta_0+pd\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = g(\theta_0 + pd\theta) \\ E_{\theta_0-pd\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = g(\theta_0 - pd\theta) \end{array} \right., \quad 1 \leq p \leq P, \quad (65)$$

et qu'elle est la plus grande borne inférieure satisfaisant ces contraintes (cf. Annexe XI-B-p96).

K. Minimisation de l'EQM Locale - Autres bornes inférieures pour estimateurs sans biais

Alors que les bornes de Cramer-Rao (55) et de Barankin (51a-c) représentent les deux caractérisations extrêmes (la plus faible et la plus forte) de la qualité sans biais d'un estimateur, certains auteurs se sont attachés à dériver des caractérisations intermédiaires, alternatives possibles à l'utilisation des bornes de Bhattacharyya qui sont généralement impossibles à évaluer pour les ordres de dérivation à partir desquels elles se démarquent notablement des bornes de Cramer-Rao. Il s'agit donc généralement de bornes dont la difficulté calculatoire est comparable à celle de la borne de Cramer-Rao mais qui tentent de prendre en compte la propriété sans biais dans son ensemble ($\forall \theta \in \Theta$), à l'instar de la borne de Barankin [8] dont elles découlent. Nous citerons :

- **la borne de Hammersley-Chapman-Robbins** [9] qui correspond au cas $N = 2$ ($\{\theta_n\}_{[1,2]} = \{\theta_0, \theta_0 + d\theta\}$) de la forme "réduite" de la borne de Barankin (48) :

$$EQM_{\theta_0} [\widehat{g(\theta_0)}] \geq \sup_{\theta_0 + d\theta \in \Theta} \left\{ \frac{[g(\theta_0 + d\theta) - g(\theta_0)]^2}{\int_{\Omega} \frac{f_{\theta_0 + d\theta}(\vec{x})^2}{f_{\theta_0}(\vec{x})} d\vec{x} - 1} \right\} = \sup_{\theta_0 + d\theta \in \Theta} \left\{ \frac{[g(\theta_0 + d\theta) - g(\theta_0)]^2}{E_{\theta_0} \left[\left(\frac{f_{\theta_0 + d\theta}(\vec{x}) - f_{\theta_0}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right)^2 \right]} \right\} \quad (66)$$

On remarquera que cette borne est toujours supérieure à celle de Cramer-Rao puisqu'elle la contient (cas $d\theta \rightarrow 0$).

- **la borne de McAulay-Seidman** [12] qui est la forme "réduite" de la borne de Barankin (48) associée à l'ensemble de points test $\{\theta_n\}_{[1, N+1]} = \{\theta_0\} \cup \{\theta_n\}_{[1, N]}$ dont la forme usuelle est :

$$EQM_{\theta_0} [\widehat{g(\theta_0)}] \geq \overline{\Delta} g^T [\mathbf{R} - \overline{\mathbf{1}} \overline{\mathbf{1}}^T]^{-1} \overline{\Delta} g, \quad R_{n,m} = E_{\theta_0} \left[\frac{f_{\theta_n}(\vec{x}) f_{\theta_m}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right], \quad \Delta g_n = g(\theta_n) - g(\theta_0), \quad (67)$$

Cette borne est la forme pratique de la borne de Barankin généralement utilisée [24][30][31][34].

- **la borne de McAulay-Seidman-Hofstetter** [12][13] qui consiste à combiner la borne de Cramer-Rao (55) et la borne de McAulay-Seidman (67) sous la forme du système de contraintes suivantes :

$$\begin{cases} E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta} \right] = \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \\ E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = g(\theta_0) \\ E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{f_{\theta_n}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right] = g(\theta_n), \quad \{\theta_n\}_{[1, N]} \end{cases} \quad (68)$$

dont la généralisation est **la borne d'Abel** [23] qui prend en compte la borne de Bhattacharyya d'ordre K et qui correspond donc au système de contraintes :

$$\begin{cases} E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{\partial^k \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial^k \theta} \right] = \frac{\partial^k g(\theta_0)}{\partial^k \theta}, \quad 1 \leq k \leq K \\ E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = g(\theta_0) \\ E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{f_{\theta_n}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right] = g(\theta_n), \quad \{\theta_n\}_{[1, N]} \end{cases} \quad (69)$$

- **la borne de Chaumette-Larzabal** qui consiste à appliquer la propriété localement sans biais en un ensemble de

points tests $\{\theta_n\}_{[1,N+1]} = \{\theta_0\} \cup \{\theta_n\}_{[1,N]}$:

$$\begin{aligned} E_{\theta_n+d\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] &= g(\theta_n) + \frac{\partial g(\theta_n)}{\partial \theta} d\theta + o(d\theta) \\ &= E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{f_{\theta_n+d\theta}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right] \\ &= E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{f_{\theta_n}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right] + E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{\frac{\partial f_{\theta_n}(\vec{x})}{\partial \theta}}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right] d\theta + o(d\theta) \end{aligned}$$

et correspond par conséquent au système de contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta} \right] = \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \\ E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = g(\theta_0) \\ E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{f_{\theta_n}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right] = g(\theta_n), \quad \{\theta_n\}_{[1,N]} \\ E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \frac{\frac{\partial f_{\theta_n}(\vec{x})}{\partial \theta}}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right] = \frac{\partial g(\theta_n)}{\partial \theta}, \quad \{\theta_n\}_{[1,N]} \end{array} \right. \quad (70)$$

On notera que les bornes (68)(69)(70) sont des formes spécialisées (norme euclidienne, choix particulier du vecteur de pondération \vec{w}) des bornes décrites p. 487 et 488 de [8].

L. Minimisation de l'EQM Locale - Estimation simultanée de plusieurs fonctions de paramètres multiples

Nous supposons maintenant que la d.d.p. des observations $\vec{x} \in \Omega$ dépend d'un vecteur de paramètres $\vec{\theta} : f_{\vec{\theta}}(\vec{x})$. La généralisation des bornes inférieures de l'EQM locale au problème de l'estimation d'un vecteur $\vec{g}(\vec{\theta})$, dont les composantes sont des fonctions du vecteur de paramètres inconnus $\vec{\theta}$, s'obtient par prolongement de la qualité attendue (sans biais par exemple) des composantes d'un estimateur $\widehat{\vec{g}}(\vec{\theta})$ de $\vec{g}(\vec{\theta})$ à toute combinaison linéaire de ces composantes [13]. Pour alléger les notations :

- les dimensions de $\vec{\theta}$ et de $\vec{g}(\vec{\theta})$ seront laissées implicites car la démarche est valide quelles qu'elles soient,
- $\widehat{\vec{g}}(\vec{\theta})$, $\widehat{\vec{g}}(\vec{\theta}_0)$, $\vec{g}(\vec{\theta})$ et $\vec{g}(\vec{\theta}_0)$ seront également notés respectivement $\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}$, $\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}$, $\vec{g}_{\vec{\theta}}$ et $\vec{g}_{\vec{\theta}_0}$.

1) Forme générale de la Borne de Barankin :

Si $\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}$ est un estimateur sans biais de $\vec{g}_{\vec{\theta}_0}$, c'est à dire si :

$$E_{\vec{\theta}} \left[\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) \right] = \vec{g}_{\vec{\theta}} = \int_{\Omega} \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) f_{\vec{\theta}}(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \forall \vec{\theta} \in \Theta$$

alors $\forall \vec{\lambda}$

$$E_{\vec{\theta}} \left[\vec{\lambda}^T \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) \right] = \vec{\lambda}^T E_{\vec{\theta}} \left[\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) \right] = \vec{\lambda}^T \vec{g}_{\vec{\theta}}, \quad \forall \vec{\theta} \in \Theta \quad (71)$$

ce qui exprime que $\vec{\lambda}^T \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}$ est un estimateur scalaire sans biais de $\vec{\lambda}^T \vec{g}_{\vec{\theta}}$. On peut alors lui appliquer l'inégalité de Barankin (43)(44) qui devient :

$$EQM_{\vec{\theta}_0} \left[\vec{\lambda}^T \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0} \right] \geq \frac{\left[\vec{\lambda}^T \sum_{n=1}^N w_n (\vec{g}_{\vec{\theta}_n} - \vec{g}_{\vec{\theta}_0}) \right]^2}{E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\sum_{n=1}^N w_n \frac{f_{\vec{\theta}_n}(\vec{x})}{f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})} \right)^2 \right]} \quad (72)$$

soit encore :

$$\vec{\lambda}^T E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right) \left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right)^T \right] \vec{\lambda} \geq \frac{\vec{\lambda}^T \left[\sum_{n=1}^N w_n \left(\vec{g}_{\vec{\theta}_n} - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right) \right] \left[\sum_{n=1}^N w_n \left(\vec{g}_{\vec{\theta}_n} - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right) \right]^T \vec{\lambda}}{E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\sum_{n=1}^N w_n \frac{f_{\vec{\theta}_n}(\vec{x})}{f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})} \right)^2 \right]} \vec{\lambda}, \quad \forall \vec{\lambda}$$

ce qui matriciellement s'écrit :

$$E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right) \left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right)^T \right] \geq \frac{(\Delta_{\vec{g}} \vec{w}) (\Delta_{\vec{g}} \vec{w})^T}{\vec{w}^T \mathbf{R} \vec{w}}, \quad (73a)$$

$$\Delta_{\vec{g}} = \left[\vec{g}_{\vec{\theta}_1} - \vec{g}_{\vec{\theta}_0}, \dots, \vec{g}_{\vec{\theta}_N} - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right], \quad R_{n,m} = \int_{\Omega} \frac{f_{\vec{\theta}_n}(\vec{x}) f_{\vec{\theta}_m}(\vec{x})}{f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})} d\vec{x} \quad (73b)$$

et représente l'inégalité de Barankin multidimensionnelle, dont la forme "réduite" est donnée par (47)(49) (voir aussi Annexe XI-C-p97) :

$$E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right) \left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right)^T \right] \geq \Delta_{\vec{g}} \mathbf{R}^{-1} \Delta_{\vec{g}}^T \quad (74)$$

On remarquera que (74) peut être obtenue directement en appliquant le résultat établi §III-G-p25, à savoir que :

$$\min \left\{ \left\| \sum_{n=1}^N \lambda_n \vec{u}_n \right\|^2 \right\} \text{ sous } \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{c}_{[1,K]}) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{u}_{[1,N]}) \geq \mathbf{V}^T \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}, \vec{c}_{[1,K]})^{-1} \mathbf{V} \quad (75)$$

En effet, un estimateur $\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}$ sans biais de $\vec{g}_{\vec{\theta}_0}$ vérifie les N contraintes :

$$E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right) \frac{f_{\vec{\theta}_n}(\vec{x})}{f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})} \right] = \vec{g}_{\vec{\theta}_n} - \vec{g}_{\vec{\theta}_0}$$

ce qui est équivalent à :

$$\mathbf{V}^T = \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{c}_{[1,K]})^T = \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}, \vec{u}_{[1,N]}) = \Delta_{\vec{g}}$$

en posant :

$$\begin{aligned} \vec{u}_{[1,N]} &= \widehat{\vec{g}}(\vec{\theta}_0)(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} = \left(g_1(\vec{\theta}_0)(\vec{x}) - g_1(\vec{\theta}_0), g_2(\vec{\theta}_0)(\vec{x}) - g_2(\vec{\theta}_0), \dots \right)^T \\ \vec{c}_{[1,K]} &= \left(\frac{f_{\vec{\theta}_1}(\vec{x})}{f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}, \dots, \frac{f_{\vec{\theta}_N}(\vec{x})}{f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})} \right)^T \\ \langle g(\vec{x}) | h(\vec{x}) \rangle &= E_{\vec{\theta}_0} [g(\vec{x}) h(\vec{x})] \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{c}_{[1,K]}) &= E_{\vec{\theta}_0} \left[\vec{c}_{[1,K]} \vec{u}_{[1,N]}^T \right] \\ \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{u}_{[1,N]}) &= E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right) \left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right)^T \right] \\ \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}, \vec{c}_{[1,K]}) &= \mathbf{R} \end{aligned}$$

ce qui conduit immédiatement à (74).

Cette démarche peut être appliquée à toute extension d'une borne inférieure de l'EQM locale au cas multi-paramètres (puisqu'elles dérivent toutes de l'inégalité de Barankin (72)(74)). A titre d'exemple, considérons le cas de la borne de Cramer-Rao.

2) Forme générale de la borne de Cramer-Rao :

Il s'agit alors d'étendre le critère localement sans biais (à l'ordre 1) :

$$E_{\theta_0+d\theta} [\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x})] = g(\theta_0) + \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} d\theta + o(d\theta)$$

au cas multiparamètres pour chaque composante de $\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}$:

$$E_{\vec{\theta}_0+d\vec{\theta}} \left[\widehat{g_i(\vec{\theta}_0)}(\vec{x}) \right] = g_i(\vec{\theta}_0) + \left(\frac{\partial g_i(\vec{\theta}_0)}{\partial \vec{\theta}} \right)^T d\vec{\theta} + o(\|d\vec{\theta}\|)$$

soit, sous une forme plus concise :

$$E_{\vec{\theta}_0+d\vec{\theta}} \left[\widehat{\vec{g}}(\vec{\theta}_0)(\vec{x}) \right] = \vec{g}(\vec{\theta}_0) + \frac{\partial \vec{g}(\vec{\theta}_0)}{\partial \vec{\theta}^T} d\vec{\theta} + o(\|d\vec{\theta}\|) \quad (76)$$

ce qui combiné avec :

$$f_{\vec{\theta}_0+d\vec{\theta}}(\vec{x}) = f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) + \left(\frac{\partial f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \right)^T d\vec{\theta} + o(\|d\vec{\theta}\|)$$

se traduit en terme de contraintes linéaires par :

$$\begin{cases} E_{\vec{\theta}_0} \left[\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right] = \vec{0} \\ E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right) \left(\frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \right)^T \right] = \frac{\partial \vec{g}(\vec{\theta}_0)}{\partial \vec{\theta}^T} \end{cases} \quad (77)$$

En posant :

$$\vec{u}_{[1,N]} = \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0}, \quad \vec{c}_{[1,K]} = \left(\frac{1}{\frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}}} \right), \quad \langle g(\vec{x}) | h(\vec{x}) \rangle = E_{\vec{\theta}_0} [g(\vec{x}) h(\vec{x})]$$

(77) devient :

$$\mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{c}_{[1,K]}) = E_{\vec{\theta}_0} \left[\vec{c}_{[1,K]} \vec{u}_{[1,N]}^T \right] = \begin{bmatrix} \vec{0}^T \\ \left[\frac{\partial \vec{g}(\vec{\theta}_0)}{\partial \vec{\theta}^T} \right]^T \end{bmatrix} = \mathbf{V}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{u}_{[1,N]}) &= E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right) \left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right)^T \right] \\ \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}, \vec{c}_{[1,K]}) &= \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \right) \left(\frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \right)^T \right] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'inégalité (75) :

$$E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right) \left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right)^T \right] \geq \left[\frac{\partial \vec{g}_{\vec{\theta}_0}}{\partial \vec{\theta}^T} \right] E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \right) \left(\frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \right)^T \right]^{-1} \left[\frac{\partial \vec{g}_{\vec{\theta}_0}}{\partial \vec{\theta}^T} \right]^T \quad (78)$$

où :

$$\mathbf{F}(\vec{\theta}_0) = E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \right) \left(\frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \right)^T \right] \quad (79)$$

représente la Matrice d'Information de Fisher (MIF) [11, p. 80], qui peut également être obtenue par [11, p. 79] :

$$\mathbf{F}(\vec{\theta}_0)_{i,j} = -E_{\vec{\theta}_0} \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \quad (80)$$

On remarquera que ce prolongement par combinaison linéaire permet également de caractériser l'EQM Totale (EQMT) locale définie par :

$$EQMT_{\vec{\theta}_0}[\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}] = E_{\vec{\theta}_0} \left[\left\| \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right\|^2 \right] \quad (81)$$

puisque :

$$EQMT_{\vec{\theta}_0}[\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}] = Tr \left(E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right) \left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right)^T \right] \right)$$

M. Minimisation de l'EQM Locale - Paramètres complexes

L'ensemble des résultats établis dans le cadre de l'estimation de paramètres réels peut être étendu sans difficulté au cadre de l'estimation de paramètres complexes en remplaçant le produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive) par un produit hermitien (forme bilinéaire hermitienne définie positive) :

$$\langle g(\vec{x}) | h(\vec{x}) \rangle_{\theta} = E_{\theta} [g(\vec{x}) h(\vec{x})^*] = \int_{\Omega} [g(\vec{x}) h(\vec{x})^*] f_{\theta}(\vec{x}) d\vec{x} \quad (82)$$

et en définissant l'application vectorielle $\vec{(\cdot)}$ par :

$$\vec{x} = (\vec{x}^T, \vec{x}^H)^T = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{x}^* \end{pmatrix} \quad (83)$$

Ainsi dans ce cas :

- l'inégalité de Cauchy-Schwartz généralisée (34) devient (cf. Annexe X-B-p82) :

$$\mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{u}_{[1,N]}) \geq \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{c}_{[1,K]})^H \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}, \vec{c}_{[1,K]})^{-1} \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{c}_{[1,K]})$$

- le problème de la minimisation de $\|\vec{u}\|^2$ sous les K contraintes linéaires $\langle \vec{u} | \vec{c}_k \rangle = v_k, k \in [1, K]$ admet pour solution (cf. Annexe X-C-p83) :

$$\min \left\{ \|\vec{u}\|^2 \right\} = \vec{v}^H \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}, \vec{c}_{[1,K]})^{-1} \vec{v} \quad \text{pour} \quad \vec{u}_{opt} = \sum_{k=1}^K \alpha_k \vec{c}_k \quad (84a)$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_K)^T = \vec{\alpha} = \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}, \vec{c}_{[1,K]})^{-1} \vec{v} \quad (84b)$$

- l'équivalence entre les deux propriétés prend alors la forme duale :

$$\min \left\{ \left\| \sum_{n=1}^N \lambda_n \vec{u}_n \right\|^2 \right\} \text{ si } \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{c}_{[1,K]}) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{u}_{[1,N]}) \geq \mathbf{V}^H \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}, \vec{c}_{[1,K]})^{-1} \mathbf{V} \quad (85)$$

$$\min \left\{ \left\| \sum_{n=1}^N \lambda_n \vec{u}_n \right\|^2 \right\} \text{ si } \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}^*, \vec{c}_{[1,K]}^*) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}^*, \vec{u}_{[1,N]}^*) \geq \mathbf{V}^H \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}^*, \vec{c}_{[1,K]}^*)^{-1} \mathbf{V} \quad (86)$$

- si $\vec{u}_{[1,N]}$ et $\vec{c}_{[1,K]}$ désignent respectivement des vecteurs de variables aléatoires complexes $\vec{u}(\vec{x})$ et $\vec{c}(\vec{x})$, alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}(\vec{u}, \vec{c}) = E_{\theta} \left[\vec{c}(\vec{x})^* \vec{u}(\vec{x})^T \right] = E_{\theta} \left[\vec{u}(\vec{x}) \vec{c}(\vec{x})^H \right]^T \\ \mathbf{G}(\vec{u}^*, \vec{c}^*) = \mathbf{G}(\vec{u}, \vec{c})^* = E_{\theta} \left[\vec{c}(\vec{x}) \vec{u}(\vec{x})^H \right] \\ \mathbf{G}(\vec{u}, \vec{u}) = E_{\theta} \left[\vec{u}(\vec{x})^* \vec{u}(\vec{x})^T \right] = E_{\theta} \left[\vec{u}(\vec{x}) \vec{u}(\vec{x})^H \right]^T \\ \mathbf{G}(\vec{u}^*, \vec{u}^*) = E_{\theta} \left[\vec{u}(\vec{x}) \vec{u}(\vec{x})^H \right] \end{array} \right. \quad (87)$$

Nous considérons le cas où la d.d.p. des observations et les composantes du vecteur complexe à estimer $\vec{g}(\cdot)$ dépendent d'un vecteur de paramètres complexes $\vec{\theta} = \vec{\theta}_r + j\vec{\theta}_j = \text{Re} \{ \vec{\theta} \} + j \text{Im} \{ \vec{\theta} \}$, où $j^2 = -1$. Puisque $\vec{\theta}_r = \frac{\vec{\theta} + \vec{\theta}^*}{2}$ et $\vec{\theta}_j = \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}^*}{2j}$, ces deux grandeurs peuvent naturellement être reparamétrées sous les deux formes équivalentes suivantes :

- $f_{\vec{\theta}}(\vec{x})$ et $\vec{g}(\vec{\theta}) = \vec{g}_{\vec{\theta}}$ avec $\vec{\theta} = [\vec{\theta}_r^T, \vec{\theta}_j^T]^T$ représentant l'ensemble des paramètres réels du problème,
- $f_{\vec{\theta}}(\vec{x})$ et $\vec{g}(\vec{\theta}) = \vec{g}_{\vec{\theta}}$ avec $\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \vec{\theta} \\ \vec{\theta}^* \end{pmatrix}$ représentant l'ensemble des paramètres complexes associés au problème.

L'estimation du vecteur complexe $\vec{g}_{\vec{\theta}} = \vec{g}_r(\vec{\theta}) + j\vec{g}_j(\vec{\theta}) = \text{Re} \{ \vec{g}_{\vec{\theta}} \} + j \text{Im} \{ \vec{g}_{\vec{\theta}} \}$ est équivalente à l'estimation du vecteur réel $\vec{g}_{\vec{\theta}} = [\vec{g}_r(\vec{\theta})^T, \vec{g}_j(\vec{\theta})^T]^T$. Par conséquent $\widehat{\vec{g}}(\vec{\theta})(\vec{x}) = \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x})$ est un estimateur sans biais de $\vec{g}_{\vec{\theta}}$ si et seulement si $\widehat{\vec{g}}(\vec{\theta})(\vec{x}) = \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) = [\widehat{\vec{g}}_r(\vec{\theta})(\vec{x})^T, \widehat{\vec{g}}_j(\vec{\theta})(\vec{x})^T]^T$ est un estimateur sans biais de $\vec{g}_{\vec{\theta}}$.

1) Borne de Barankin complexe :

Dans ce cas, d'après la section précédente (§III-L-p35) ce problème est entièrement caractérisé par l'étude des combinaisons linéaires de $\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x})$:

$$\vec{\lambda}^T \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) = \vec{\lambda}_r^T \widehat{\vec{g}}_r(\vec{\theta})(\vec{x}) + \vec{\lambda}_j^T \widehat{\vec{g}}_j(\vec{\theta})(\vec{x}), \quad \text{avec } \vec{\lambda} = [\vec{\lambda}_r^T, \vec{\lambda}_j^T]^T$$

que l'on peut reformuler de la façon suivante ($\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_r + j\vec{\lambda}_j$):

$$\vec{\lambda}^T \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) = \text{Re} \left\{ \vec{\lambda}^H \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) \right\} = \frac{\vec{\lambda}^H \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) + \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x})^H \vec{\lambda}}{2} = \frac{\vec{\lambda}^H \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) + \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x})^H \vec{\lambda}}{2}$$

Ainsi, si $\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x})$ est un estimateur sans biais de $\vec{g}_{\vec{\theta}}$, alors il vérifie (71) :

$$E_{\vec{\theta}} \left[\vec{\lambda}^H \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) + \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x})^H \vec{\lambda} \right] = E_{\vec{\theta}} \left[\vec{\lambda}^H \vec{g}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) + \vec{g}_{\vec{\theta}}(\vec{x})^H \vec{\lambda} \right] = \vec{\lambda}^H \vec{g}_{\vec{\theta}} + \vec{g}_{\vec{\theta}}^H \vec{\lambda}, \quad \forall \vec{\theta} \in \Theta,$$

propriété qui peut être étendue aux combinaisons linéaires complexes :

$$E_{\vec{\theta}} \left[\vec{\lambda}^H \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) + \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x})^H \vec{\mu} \right] = \vec{\lambda}^H \vec{g}_{\vec{\theta}} + \vec{g}_{\vec{\theta}}^H \vec{\mu}, \quad \forall \vec{\theta} \in \Theta$$

ce qui conduit à l'inégalité de Barankin Multidimensionnelle complexe (43)(84a), $\forall \vec{w} \in \mathbb{C}^N$:

$$EQM_{\vec{\theta}_0} \left[\vec{\lambda}^H \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) + \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})^H \vec{\mu} \right] \geq \frac{\left| \sum_{n=1}^N w_n \left[\vec{\lambda}^H (\vec{g}_{\vec{\theta}_n} - \vec{g}_{\vec{\theta}_0}) + (\vec{g}_{\vec{\theta}_n} - \vec{g}_{\vec{\theta}_0})^H \vec{\mu} \right] \right|^2}{E_{\vec{\theta}_0} \left[\left| \sum_{n=1}^N w_n \frac{f_{\vec{\theta}_n}(\vec{x})}{f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})} \right|^2 \right]}$$

laquelle, en remarquant que :

$$\vec{\lambda}^H \vec{g} + \vec{g}^H \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\mu}^H \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} \vec{g} \\ \vec{g}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\mu}^H \end{pmatrix}^H \vec{g},$$

est équivalente à :

$$E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right) \left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right)^H \right] \geq \frac{\left[\sum_{n=1}^N w_n (\vec{g}_{\vec{\theta}_n} - \vec{g}_{\vec{\theta}_0}) \right] \left[\sum_{n=1}^N w_n (\vec{g}_{\vec{\theta}_n} - \vec{g}_{\vec{\theta}_0}) \right]^H}{E_{\vec{\theta}_0} \left[\left| \sum_{n=1}^N w_n \frac{f_{\vec{\theta}_n}(\vec{x})}{f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})} \right|^2 \right]}$$

soit encore :

$$E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right) \left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right)^H \right] \geq \frac{(\Delta_{\vec{g}} \vec{w}) (\Delta_{\vec{g}} \vec{w})^H}{\vec{w}^H \mathbf{R} \vec{w}}, \quad (88a)$$

$$\Delta_{\vec{g}} = \left[\vec{g}_{\vec{\theta}_1} - \vec{g}_{\vec{\theta}_0}, \dots, \vec{g}_{\vec{\theta}_N} - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right], \quad R_{n,m} = \int_{\Omega} \frac{f_{\vec{\theta}_n}(\vec{x}) f_{\vec{\theta}_m}(\vec{x})}{f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})} d\vec{x} \quad (88b)$$

dont la forme "réduite" est donnée par (47) (voir aussi Annexe XI-C-p97) :

$$E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right) \left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right)^H \right] \geq \Delta_{\vec{g}} \mathbf{R}^{-1} \Delta_{\vec{g}}^H \quad (89)$$

On se rappellera que cette inégalité matricielle permet de caractériser à la fois :

- les combinaisons linéaires réelles des composantes réelles ($\text{Re}\{ \}, \text{Im}\{ \}$) des estimateurs complexes par comparaison des normes d'un vecteur complexe de type $\vec{\lambda} = \left(\vec{\lambda}^T, \vec{\lambda}^H \right)^T$
- et les combinaisons linéaires complexes des estimateurs complexes par comparaison des normes d'un vecteur complexe $\left(\vec{\lambda}^T, \vec{\mu}^T \right)^T$ quelconque.

2) *Borne de Cramer-Rao complexe* :

Bien que l'on puisse établir l'expression de la borne de Cramer-Rao complexe à partir de l'inégalité de Barankin complexe (88a)(89) comme nous l'avons fait dans le cas réel, une méthode plus simple consiste à transposer le résultat établi dans le cas multidimensionnel réel (cf. §III-L.2-p37) au cas multidimensionnel complexe. En effet, si les composantes du vecteur complexe à estimer $\vec{g}_{\vec{\theta}}$ et la d.d.p. $f_{\vec{\theta}}(\vec{x})$ sont analytiques par rapport à $\vec{\theta}$ et $\vec{\theta}^*$ alors :

$$\begin{aligned} f_{\vec{\theta}+d\vec{\theta}}(\vec{x}) &= f_{\vec{\theta}}(\vec{x}) + \left(\frac{\partial f_{\vec{\theta}}(\vec{x})}{\partial \theta_r} \right)^T d\vec{\theta}_r + \left(\frac{\partial f_{\vec{\theta}}(\vec{x})}{\partial \theta_j} \right)^T d\vec{\theta}_j + o(\|d\vec{\theta}\|) \\ &\Downarrow \\ f_{\vec{\theta}+d\vec{\theta}}(\vec{x}) &= f_{\vec{\theta}}(\vec{x}) + \left(\frac{\partial f_{\vec{\theta}}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \right)^T d\vec{\theta} + \left(\frac{\partial f_{\vec{\theta}}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}^*} \right)^T d\vec{\theta}^* + o(\|d\vec{\theta}\|) \\ f_{\vec{\theta}+d\vec{\theta}}(\vec{x}) &= f_{\vec{\theta}}(\vec{x}) + \left(\frac{\partial f_{\vec{\theta}}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \right)^T d\vec{\theta} + o(\|d\vec{\theta}\|) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\vec{g}_{\vec{\theta}+d\vec{\theta}})_i &= (\vec{g}_{\vec{\theta}})_i + \left(\frac{\partial (\vec{g}_{\vec{\theta}})_i}{\partial \theta_r} \right)^T d\vec{\theta}_r + \left(\frac{\partial (\vec{g}_{\vec{\theta}})_i}{\partial \theta_j} \right)^T d\vec{\theta}_j + o(\|d\vec{\theta}\|) \\ &\Downarrow \\ (\vec{g}_{\vec{\theta}+d\vec{\theta}})_i &= (\vec{g}_{\vec{\theta}})_i + \left(\frac{\partial (\vec{g}_{\vec{\theta}})_i}{\partial \vec{\theta}} \right)^T d\vec{\theta} + \left(\frac{\partial (\vec{g}_{\vec{\theta}})_i}{\partial \vec{\theta}^*} \right)^T d\vec{\theta}^* + o(\|d\vec{\theta}\|) \\ (\vec{g}_{\vec{\theta}+d\vec{\theta}})_i &= (\vec{g}_{\vec{\theta}})_i + \left(\frac{\partial (\vec{g}_{\vec{\theta}})_i}{\partial \vec{\theta}} \right)^T d\vec{\theta} + o(\|d\vec{\theta}\|) \end{aligned}$$

les dérivées réelles et complexes vérifiant [19] :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \vec{\theta}^*} \right) = \mathbf{T} \left(\frac{\partial}{\partial \text{Im}\{\theta\}} \right), \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-j}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = 2\mathbf{T}^H, \quad \frac{\partial}{\partial \vec{\theta}^*} = \left(\frac{\partial}{\partial \vec{\theta}} \right)^*$$

Dans ce cas, le critère localement sans biais à l'ordre 1 s'écrit :

$$\begin{cases} E_{\vec{\theta}_0+d\vec{\theta}} \left[\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) \right] = \vec{g}_{\vec{\theta}_0} + \frac{\partial \vec{g}_{\vec{\theta}_0}}{\partial \vec{\theta}} d\vec{\theta} + \vec{o}(\|d\vec{\theta}\|) \\ E_{\vec{\theta}_0+d\vec{\theta}} \left[\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})^* \right] = \vec{g}_{\vec{\theta}_0}^* + \frac{\partial \vec{g}_{\vec{\theta}_0}^*}{\partial \vec{\theta}^*} d\vec{\theta} + \vec{o}(\|d\vec{\theta}\|) \end{cases}$$

soit finalement :

$$E_{\vec{\theta}_0+d\vec{\theta}} \left[\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) \right] = \vec{g}_{\vec{\theta}_0} + \frac{\partial \vec{g}_{\vec{\theta}_0}}{\partial \vec{\theta}} d\vec{\theta} + \vec{o}(\|d\vec{\theta}\|), \quad (90)$$

ce qui représente la forme la plus générale de (56) et (76), et qui en terme de contraintes linéaires se traduit par :

$$\begin{cases} E_{\vec{\theta}_0} \left[\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right] = \vec{0} \\ E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right) \left(\frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \right)^T \right] = \frac{\partial \vec{g}_{\vec{\theta}_0}}{\partial \vec{\theta}} \end{cases} \quad (91)$$

En posant :

$$\vec{u}_{[1,N]} = \widehat{\vec{g}_{\vec{\theta}_0}}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0}, \quad \vec{c}_{[1,K]} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \left(\frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \right)^* \end{array} \right), \quad \langle g(\vec{x}) | h(\vec{x}) \rangle = E_{\vec{\theta}_0} [g(\vec{x}) h(\vec{x})^*]$$

(91) devient :

$$\mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}^*, \vec{c}_{[1,K]}^*) = E_{\vec{\theta}_0} [\vec{c}_{[1,K]} \vec{u}_{[1,N]}^H] = \begin{bmatrix} \vec{0}^T \\ \left[\frac{\partial \vec{g}_{\vec{\theta}_0}}{\partial \vec{\theta}} \right]^H \end{bmatrix} = \mathbf{V}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}^*, \vec{u}_{[1,N]}^*) &= E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\widehat{\vec{g}_{\vec{\theta}_0}}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right) \left(\widehat{\vec{g}_{\vec{\theta}_0}}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right)^H \right] \\ \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}^*, \vec{c}_{[1,K]}^*) &= \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \right)^* \left(\frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \right)^T \right] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'inégalité (86) :

$$E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\widehat{\vec{g}_{\vec{\theta}_0}}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right) \left(\widehat{\vec{g}_{\vec{\theta}_0}}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0} \right)^H \right] \geq \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{g}_{\vec{\theta}_0}}{\partial \vec{\theta}} \\ \vec{0}^T \end{bmatrix} E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \right)^* \left(\frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \right)^T \right]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{g}_{\vec{\theta}_0}}{\partial \vec{\theta}} \\ \vec{0}^T \end{bmatrix}^H \quad (92)$$

qui est la forme la plus générale de la borne de Cramer-Rao, où :

$$\mathbf{F}(\vec{\theta}_0) = E_{\vec{\theta}_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \right)^* \left(\frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \right)^T \right] \quad (93)$$

est la Matrice d'Information de Fisher Complexe (MIFC) [26], laquelle peut également être obtenue par :

$$\mathbf{F}(\vec{\theta}_0)_{i,j} = -E_{\vec{\theta}_0} \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \theta_i^* \partial \theta_j} \right] \quad (94)$$

On remarquera que cette inégalité matricielle étend la caractérisation initialement décrite par [26], en ce sens qu'elle permet de caractériser à la fois :

- les combinaisons linéaires réelles des composantes réelles ($\text{Re}\{ \cdot \}, \text{Im}\{ \cdot \}$) des estimateurs complexes par comparaison des normes d'un vecteur complexe de type $\vec{\lambda} = \left(\vec{\lambda}^T, \vec{\lambda}^H \right)^T$,
- et les combinaisons linéaires complexes des estimateurs complexes par comparaison des normes d'un vecteur complexe $\left(\vec{\lambda}^T, \vec{\mu}^T \right)^T$ quelconque.

N. Minimisation de l'EQM Locale - Estimateurs avec Biais

Considérons le problème de l'estimation d'un vecteur réel $\vec{g}(\vec{\theta}) = \vec{g}_{\vec{\theta}}$, dont les composantes sont des fonctions du vecteur de paramètres réels inconnus $\vec{\theta}$. Alors si $\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) = \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x})$ est un estimateur de $\vec{g}(\vec{\theta})$, ses performances, au sens de l'EQM locale, sont entièrement déterminées par l'étude de la matrice (cf. §III-L-p35) :

$$E_{\vec{\theta}} \left[\left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}} \right) \left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}} \right)^T \right] = E_{\vec{\theta}} \left[\left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) - \vec{m}_{\vec{g}_{\vec{\theta}}} \right) \left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) - \vec{m}_{\vec{g}_{\vec{\theta}}} \right)^T \right] + \vec{b}_{\vec{g}_{\vec{\theta}}} \vec{b}_{\vec{g}_{\vec{\theta}}}^T \quad (95)$$

en posant :

$$\begin{cases} \vec{m}_{\vec{g}_{\vec{\theta}}} = E_{\vec{\theta}} \left[\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) \right] \\ \vec{b}_{\vec{g}_{\vec{\theta}}} = \vec{m}_{\vec{g}_{\vec{\theta}}} - \vec{g}_{\vec{\theta}} \end{cases} \quad (96)$$

où $\vec{b}_{\vec{g}_{\vec{\theta}}}$ est appelé biais de l'estimateur $\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x})$. Par conséquent l'identité (95) fait clairement apparaître que les performances d'un estimateurs avec biais ($\vec{b}_{\vec{g}_{\vec{\theta}}} \neq \vec{0}$) de $\vec{g}(\vec{\theta})$ se déduisent simplement des performances d'un estimateur sans biais du vecteur $\vec{h}_{\vec{\theta}} = \vec{g}_{\vec{\theta}} + \vec{b}_{\vec{g}_{\vec{\theta}}}$. Il suffit alors de remplacer $\vec{g}_{\vec{\theta}}$ par $\vec{h}_{\vec{\theta}}$ dans toutes les expressions établies §III-L-p35.

Ce résultat s'étend au cas complexe où l'identité (95) devient :

$$E_{\vec{\theta}} \left[\left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}} \right) \left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}} \right)^H \right] = E_{\vec{\theta}} \left[\left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) - \vec{m}_{\vec{g}_{\vec{\theta}}} \right) \left(\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) - \vec{m}_{\vec{g}_{\vec{\theta}}} \right)^H \right] + \vec{b}_{\vec{g}_{\vec{\theta}}} \vec{b}_{\vec{g}_{\vec{\theta}}}^H \quad (97)$$

avec :

$$\begin{cases} \vec{m}_{\vec{g}_{\vec{\theta}}} = \begin{pmatrix} E_{\vec{\theta}} \left[\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) \right] \\ E_{\vec{\theta}} \left[\widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}}(\vec{x}) \right]^* \end{pmatrix} \\ \vec{b}_{\vec{g}_{\vec{\theta}}} = \vec{m}_{\vec{g}_{\vec{\theta}}} - \vec{g}_{\vec{\theta}} \end{cases} \quad (98)$$

O. Stratégies d'estimation

Nous appelons stratégie d'estimation tout principe, méthode, algorithme permettant de formuler de façon systématique à partir des observations, un estimateur observable du paramètre inconnu à estimer. Parmi d'autres stratégies possibles [6][25], nous limiterons notre exposé à 3 stratégies que l'on peut relier aux bornes inférieures de l'EQM.

1) Estimateur au sens du Maximum de Vraisemblance :

La méthode du maximum de vraisemblance introduite par R.A. Fisher [2] est une stratégie très répandue en théorie de l'estimation statistique. Son importance provient non seulement de la variété des modèles d'observation auxquels elle s'applique [41], mais également de ses bonnes performances statistiques asymptotiques. En effet, un estimateur au sens du Maximum de Vraisemblance (EMV) est [6] :

- consistant, c'est à dire que l'estimateur converge asymptotiquement en probabilité vers la vraie valeur,
- asymptotiquement efficace, c'est à dire que la variance de l'estimateur tend vers la BCR,
- asymptotiquement gaussien,

où asymptotique doit être pris au sens d'un nombre d'observations indépendantes tendant vers l'infini. De plus, pour certains modèles d'observation [38][36] (cf. §II-A-p11), cette propriété est également vérifiée dans

le cas d'une unique observation, pour les paramètres des signaux sources lorsque leurs RSB tend vers l'infini. Cette stratégie est la réponse de bon sens à la question : sachant que nous observons \vec{x} et que nous connaissons le modèle de la d.d.p. $f_\theta(\vec{x})$, quelle est la valeur du paramètre θ qui rend notre observation la plus probable ? C'est vraisemblablement la valeur de θ qui maximise la probabilité d'apparition de \vec{x} , car si ce n'était pas le cas, nous observerions certainement une autre valeur de \vec{x} . Mathématiquement ce concept se traduit simplement par la stratégie d'estimation suivante :

$$\widehat{\theta}^{MV}(\vec{x}) = \arg \max_{\theta} \{f_\theta(\vec{x})\} \quad (99)$$

2) Estimateur solution de la minimisation de l'EQM globale:

Comme nous l'avons déjà mentionné (cf. §III-F-p23), une stratégie d'estimation alternative également liée à la minimisation de l'EQM, peut être obtenue comme solution de l'EQM globale pondérée par $\delta(\theta)$:

$$\widehat{\theta}(\vec{x}) = \frac{\int_{\Theta} \theta \delta(\theta) f_\theta(\vec{x}) d\theta}{\int_{\Theta} \delta(\theta) f_\theta(\vec{x}) d\theta}, \quad \int_{\Theta} \delta(\theta) d\theta = 1, \quad \delta(\theta) > 0 \quad (100)$$

Cette stratégie est à notre connaissance peu, voire pas, employée pour l'estimation de paramètres déterministes. Elle n'en constitue pas moins un axe de recherche possible.

3) Estimateur solution de la minimisation de l'EQM locale :

Par construction (35a-b), chaque borne inférieure de l'EQM locale est la variance d'un estimateur spécifique. Malheureusement cet estimateur est généralement clairvoyant, par conséquent ce principe ne constitue donc pas à proprement dit une stratégie d'estimation. Néanmoins, il existe des modèles d'observation pour lesquels l'estimateur atteignant la borne inférieure est observable, ce principe mérite donc d'être pris en considération.

A titre d'exemple, considérons le cas le plus simple : l'estimation d'un unique paramètre inconnu θ dont dépend la d.d.p. d'observation $f_\theta(\vec{x})$. Dans ce cas, l'estimateur atteignant la BCR vérifie (cf. Annexe XI-D-p97) :

$$\widehat{\theta}_{opt}(\vec{x}) - \theta = \frac{1}{F(\theta)} \frac{\partial \ln f_\theta(\vec{x})}{\partial \theta}, \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad (101)$$

Un tel estimateur est dit efficace [6]. La recherche des d.d.p. $f_\theta(\vec{x})$ pour lesquelles l'estimateur efficace $\widehat{\theta}_{opt}(\vec{x})$ est observable a été traitée par Fréchet [4]. Il les qualifia de "d.d.p. distinguées" et montra qu'elles sont de la forme :

$$f_\theta(\vec{x}) = e^{\frac{\partial \mu(\theta)}{\partial \theta} [h(\vec{x}) - \theta] + \mu(\theta) + l(\vec{x})} \text{ avec } h(\vec{x}), l(\vec{x}) \text{ et } \mu(\theta) \text{ telles que } \int_{\Omega} f_\theta(\vec{x}) d\vec{x} = 1,$$

où $\widehat{\theta}_{opt}(\vec{x}) = h(\vec{x})$ constitue l'estimateur efficace, qui est également l'estimateur au sens du MV. En effet, il est dans ce cas solution de l'équation :

$$\frac{\partial \ln f_\theta(\vec{x})}{\partial \theta} = 0$$

Cette propriété a fortement contribué à l'utilisation quasi-systématique des estimateurs au sens du MV pour résoudre les problèmes d'estimation.

IV. ELÉMENTS DE LA THÉORIE DE LA DÉTECTION

Le propos de cette section n'est pas d'exposer la théorie du test d'hypothèses multiples dans son cadre le plus général ($N \geq 2$ hypothèses [11][33]). Il s'agit simplement à partir du cas le plus simple, le test d'hypothèses binaires ($N = 2$), d'introduire les notions fondamentales associées à ce type de problème quel que soit le nombre d'hypothèses considérées : fondements du problème, règles de décision, règles optimales et éventuellement sous optimales. De plus, le test d'hypothèses binaires est le cas le plus fréquemment rencontré dans la pratique où il s'agit en général de savoir si le signal observé contient ou non un signal d'intérêt superposé à un signal de bruit (thermique).

A. Formulation du problème

Jusqu'à maintenant nous avons implicitement supposé que notre espace d'observation $\Omega \subset \mathbb{R}^L$ était caractérisé par une unique densité de probabilité $f_\theta(\vec{x})$. Or un grand nombre de problèmes pratiques ne correspondent pas à cette hypothèse implicite. Parmi d'autres exemples possibles, considérons le problème de l'observation d'un signal d'intérêt - électronique, optique, acoustique - intermittent. La nature même de ce problème indique que l'ensemble des observations possibles se divisent en 2 sous-ensembles :

- l'ensemble des observations faites lorsque le signal d'intérêt est présent,
- l'ensemble des observations faites lorsque le signal d'intérêt est absent.

Une conclusion hâtive conduirait à penser que le problème est finalement très simple à résoudre, s'il était vrai que l'absence du signal d'intérêt correspondait à une observation nulle ($\vec{x} = \vec{0}$). Malheureusement la réalité physique est moins idyllique, en ce sens que quel que soit le système d'observation - électronique, optique, acoustique - il ne peut échapper à l'agitation thermique, sauf à opérer au voisinage du zéro absolu, dont la première conséquence est de générer un signal observable toujours présent que l'on appelle précisément le "bruit thermique". Partant de cette constatation, nous n'avons d'autre choix que de considérer l'existence de 2 modèles (hypothèses) d'observation possibles - que nous désignons arbitrairement par H_0 et H_1 - :

- $H_0 : \vec{x} = \vec{b}$, bruit présent seul,
- $H_1 : \vec{x} = \vec{b} + \vec{s}$, bruit et signal d'intérêt présents.

Il est clair que si $\Omega_{H_0} = \{\vec{x} = \vec{b}\}$ et $\Omega_{H_1} = \{\vec{x} = \vec{b} + \vec{s}\}$ sont disjoints ($\Omega_{H_0} \cap \Omega_{H_1} = \emptyset$) alors la détermination de l'hypothèse observée (choix de H_0 ou de H_1) est un problème déterministe trivial. Malheureusement, un modèle courant pour le bruit thermique est d'être un vecteur aléatoire (généralement gaussien) pouvant prendre toutes les valeurs possibles de \mathbb{R}^L . Par conséquent sous cette hypothèse $\Omega_{H_0} = \Omega_{H_1} = \Omega = \mathbb{R}^L$. Dans ce cas, puisque toute valeur observée \vec{x} peut provenir de l'un ou l'autre des modèles, une solution est de se doter d'une règle de décision, laquelle consiste à partitionner l'ensemble des observations en deux sous-ensembles \mathcal{D}_0 et \mathcal{D}_1 ($\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1 = \Omega$ et $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_1 = \emptyset$) représentant respectivement une hypothèse de modèle d'observation (H_0 ou H_1) :

$$\begin{aligned} \text{si } \vec{x} &\in \mathcal{D}_0 \text{ alors je suppose que j'observe le modèle } H_0 \\ \text{si } \vec{x} &\in \mathcal{D}_1 \text{ alors je suppose que j'observe le modèle } H_1 \end{aligned} \quad (102)$$

A première vue et sans information complémentaire, la détection de la présence ou non du signal d'intérêt (choix de \mathcal{D}_0 et de \mathcal{D}_1) semble relever d'un choix arbitraire aux performances incertaines. Cependant, l'issue de ce problème se trouve grandement modifiée si l'on dispose d'une expression analytique des densités de probabilité (conditionnelles) associées à chaque modèle d'observation possible : $f(\vec{x} | H_0)$ et $f(\vec{x} | H_1)$. En effet dans ce cas, certaines stratégies de décision (règles de décision) peuvent être mises en oeuvre afin de minimiser le risque d'erreur dans le choix du modèle (hypothèse) observé.

B. Règles optimales de détection

Si en plus des expressions de $f(\vec{x} | H_0)$ et $f(\vec{x} | H_1)$, la probabilité que chaque modèle d'observation se réalise $P(H_0)$ et $P(H_1)$ (probabilités a priori) est connue, alors on peut évaluer la probabilité de commettre une erreur de décision induite par une règle donnée (\mathcal{D}_0 et \mathcal{D}_1) - critère de Bayes [11, p. 30] - :

$$\begin{aligned} P_{\text{erreur}} &= P(\text{supposer } H_0 \text{ lorsque } H_1 \text{ se réalise}) + P(\text{supposer } H_1 \text{ lorsque } H_0 \text{ se réalise}) \quad (103) \\ &= P((\vec{x} \in \mathcal{D}_0) \cap H_1) + P((\vec{x} \in \mathcal{D}_1) \cap H_0) \\ &= P(\vec{x} \in \mathcal{D}_0 | H_1) P(H_1) + P(\vec{x} \in \mathcal{D}_1 | H_0) P(H_0) \\ &= \int_{\mathcal{D}_0} f(\vec{x} | H_1) d\vec{x} P(H_1) + \int_{\mathcal{D}_1} f(\vec{x} | H_0) d\vec{x} P(H_0) \end{aligned}$$

La règle de décision optimale s'obtient aisément en se rappelant que, puisque \mathcal{D}_0 et \mathcal{D}_1 sont complémentaires, alors $P(\vec{x} \in \mathcal{D}_0 | H_1) + P(\vec{x} \in \mathcal{D}_1 | H_1) = 1$. Par conséquent la probabilité d'erreur (103) peut également s'écrire :

$$\begin{aligned} P_{\text{erreur}} &= \int_{\mathcal{D}_0} f(\vec{x} | H_1) d\vec{x} P(H_1) + \left[1 - \int_{\mathcal{D}_0} f(\vec{x} | H_0) d\vec{x} \right] P(H_0) \\ &= P(H_0) + \int_{\mathcal{D}_0} [f(\vec{x} | H_1) P(H_1) - f(\vec{x} | H_0) P(H_0)] d\vec{x} \end{aligned}$$

et elle est minimale pour $\mathcal{D}_0 = \{\vec{x} \in \Omega \text{ tq } f(\vec{x} | H_1) P(H_1) - f(\vec{x} | H_0) P(H_0) \leq 0\}$, ce qui correspond à la règle de décision suivante - règle de Bayes - :

$$\frac{f(\vec{x} | H_1)}{f(\vec{x} | H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \quad (104)$$

Malheureusement, dans la plupart des cas pratiques, si le signal est qualifié d'intermittent, c'est que sa présence est irrégulière et non prévisible statistiquement : il se produit de temps en temps. Dans ce cas la règle de bayes (104) basée sur la minimisation de l'erreur globale de décision n'est plus applicable, néanmoins on peut définir un nouveau critère sous-optimal basé sur une analyse opérationnelle.

En effet, dans ce type de problème la vraie question est : pourquoi cherche-t-on à faire la distinction entre les deux hypothèses ? Parce qu'en général la présence d'un signal d'intérêt implique la mobilisation d'une ressource, et que cette ressource est en quantité limitée. A titre d'exemple considérons un radar chargé de la protection d'un navire équipé d'une batterie de N missiles (la ressource) pour assurer sa défense et naviguant au large d'un pays hostile. Le contexte fait que tout signal reçu par le radar qui n'est pas du bruit thermique seul (H_0) provient nécessairement de la superposition du bruit thermique et du signal émis par le radar et rétrodiffusé par un objet volant (H_1) hostile qui devra être détruit par le lancement d'un missile. Si le bateau ne veut pas gaspiller sa ressource de défense (N missiles) sur des erreurs de décision sur bruit seul - fausses alarmes - le radar doit rendre la probabilité de cette erreur

$$P_{FA} = P(\vec{x} \in \mathcal{D}_1 | H_0) = \int_{\mathcal{D}_1} f(\vec{x} | H_0) d\vec{x} \quad (105)$$

aussi petite que possible. Une solution triviale est $P_{FA} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}_1 = \emptyset$. Le problème d'une telle solution est qu'elle ne permet pas non plus de détecter la présence d'un objet volant lorsqu'il est présent, car alors la probabilité de détection

$$P_D = P(\vec{x} \in \mathcal{D}_1 | H_1) = \int_{\mathcal{D}_1} f(\vec{x} | H_1) d\vec{x} \quad (106)$$

est également nulle. Il s'agit donc de trouver le meilleur compromis en terme de perte de ressource acceptable sur fausse alarme (P_{FA}) et d'allocation optimale de ressource lorsque le signal d'intérêt est présent (P_D), compromis que l'on peut formuler à travers le critère suivant - critère de Neyman-Pearson [11, p. 33] - :

$$\max \{P_D\} \text{ pour une } P_{FA} \text{ donnée} \quad (107)$$

Il s'agit donc d'une maximisation sous contrainte égalité :

$$\max_{\mathcal{D}_1} \left\{ \int_{\mathcal{D}_1} f(\vec{x} | H_1) d\vec{x} \right\} \text{ sous } \int_{\mathcal{D}_1} f(\vec{x} | H_0) d\vec{x} = (P_{FA})_0$$

dont la solution s'obtient aisément par la maximisation du Lagrangien associé

$$\Psi(\mathcal{D}_1) = \int_{\mathcal{D}_1} f(\vec{x} | H_1) d\vec{x} + \lambda \left((P_{FA})_0 - \int_{\mathcal{D}_1} f(\vec{x} | H_0) d\vec{x} \right),$$

dont les maxima coïncident avec ceux de $P_{\mathcal{D}}$ lorsque $\int_{\mathcal{D}_1} f(\vec{x} | H_0) d\vec{x} = (P_{FA})_0$. En outre

$$\Psi(\mathcal{D}_1) = \lambda (P_{FA})_0 + \int_{\mathcal{D}_1} [f(\vec{x} | H_1) - \lambda f(\vec{x} | H_0)] d\vec{x},$$

par conséquent, $\forall \lambda$, la fonction $\Psi(\mathcal{D}_1)$ est maximale si $\mathcal{D}_1 = \{\vec{x} \in \Omega \text{ tq } f(\vec{x} | H_1) - \lambda f(\vec{x} | H_0) > 0\}$, ce qui correspond à la règle de décision suivante - règle de Neyman-Pearson - :

$$\frac{f(\vec{x} | H_1)}{f(\vec{x} | H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \lambda \quad (108)$$

Cette règle fixe de façon générale le couple optimal $(\max\{P_{\mathcal{D}}(\lambda)\}, P_{FA}(\lambda))$ pour une valeur de $\lambda \geq 0$ donnée. La solution de notre problème est donnée par la détermination de λ et $\mathcal{D}_1(\lambda)$ selon (108) tel que :

$$\int_{\mathcal{D}_1(\lambda)} f(\vec{x} | H_0) d\vec{x} = (P_{FA})_0$$

Finalement, on retiendra que dans le cas du test entre deux modèles d'observation - test d'hypothèses binaires - les règles de détection optimale (104) ou sous-optimale (108) se présente sous la forme commune suivante :

$$RV(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x} | H_1)}{f(\vec{x} | H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} T \quad (109)$$

où $RV(\vec{x})$ est le Rapport de Vraisemblance et T représente un seuil de décision que nous appellerons également par la suite seuil de détection.

V. CARACTÉRISATION DES PROBLÈMES CONJOINTS DÉTECTION-ESTIMATION

A. Test d'hypothèses composites

En fait, nombre de problèmes pratiques sont la combinaison indissociable d'un problème de détection et d'un problème d'estimation. C'est en effet le cas lorsque les différentes hypothèses de modèle d'observation dépendent de paramètres déterministes inconnus. On parle alors des problèmes conjoints de la détection et de l'estimation ou du problème du test d'hypothèses composites (Composite Hypothesis Testing Problem [11]).

Par souci de simplicité nous ne développerons l'analyse du problème que dans le cas du test d'hypothèses binaires avec un seul paramètre inconnu commun aux deux hypothèses, les cas plus généraux - nombre d'hypothèses ≥ 3 et/ou paramètres multiples non tous communs - s'en déduisant aisément à partir des résultats établis §III-L-p35.

Dans notre cas, non seulement les observations peuvent provenir de 2 modèles différents, mais leurs d.d.p. conditionnelles associées - $f(\vec{x} | H_0)$ et $f(\vec{x} | H_1)$ - et éventuellement leurs probabilités a priori - $P(H_0)$ et $P(H_1)$ - dépendent du paramètre inconnu $\theta \in \Theta$. Il est clair que notre problème initial - estimation de $g(\theta)$ à partir des observations $\vec{x} \in \Omega$ - est devenu un problème composite qui requiert idéalement la démarche en 2 étapes suivante :

- 1) choix du modèle d'observation, c'est à dire choix du modèle de la d.d p. conditionnelle des observations $f_\theta(\vec{x} | H_0)$ ou $f_\theta(\vec{x} | H_1)$, à partir d'une règle de décision optimale (109),
- 2) application d'une stratégie d'estimation pour $g(\theta)$ (cf. §III-O-p43) adaptée au modèle de d.d p. choisie.

Malheureusement, par construction, le Rapport de Vraisemblance définissant la règle de décision optimale (109) est maintenant a priori fonction du paramètre inconnu θ :

$$RV(\vec{x}) = \frac{f_\theta(\vec{x} | H_1)}{f_\theta(\vec{x} | H_0)} = RV_\theta(\vec{x})$$

Si le paramètre inconnu θ ne peut être éliminé du Rapport de Vraisemblance, alors la règle de décision optimale sera clairvoyante. C'est le cas en général, ce qui présente peu d'intérêt en pratique où l'on recherche évidemment une règle de décision observable. Notre première étape se transforme de ce fait en un premier problème : comment déterminer un test de détection observable, si possible le meilleur au sens du critère d'optimalité retenu ((103) ou (107)) ? Une méthode possible est l'application de la théorie de l'estimation à l'estimation de $f_\theta(\vec{x} | H_0)$ sous H_0 et $f_\theta(\vec{x} | H_1)$ sous H_1 afin de construire un estimateur de $RV_\theta(\vec{x})$:

$$\widehat{RV}_\theta(\vec{x}) = \frac{f_{\widehat{\theta}}(\vec{x} | H_1)}{f_{\widehat{\theta}}(\vec{x} | H_0)} \quad (110)$$

dont une forme particulière est obtenue en remplaçant le paramètre inconnu θ par un estimateur obtenu sous chacune des hypothèses :

$$\widehat{RV}_\theta(\vec{x}) = \frac{f_{\widehat{\theta}_{H_1}}(\vec{x} | H_1)}{f_{\widehat{\theta}_{H_0}}(\vec{x} | H_0)} \quad (111)$$

Il semble intuitivement assez évident que l'on cherchera, sous chaque hypothèse $H_0 - H_1$, des estimateurs $\widehat{\theta}_{H_0}(\vec{x})$ et $\widehat{\theta}_{H_1}(\vec{x})$ aussi précis que possible afin que le test observable ainsi construit définisse une règle de décision aussi proche que possible de la règle optimale désirée :

$$\widehat{RV}_\theta(\vec{x}) = \frac{f_{\widehat{\theta}_{H_1}}(\vec{x} | H_1)}{f_{\widehat{\theta}_{H_0}}(\vec{x} | H_0)} \approx \frac{f(\vec{x} | H_1)}{f(\vec{x} | H_0)} = RV(\vec{x})$$

Malheureusement, comme nous l'avons vu précédemment (cf. §III-p17), l'inexistence d'une stratégie générale d'estimation optimale rend le choix de l'estimateur du paramètre inconnu θ sous chaque hypothèse a priori arbitraire, si ce n'est à prendre en considération certaines propriétés asymptotiques - en le nombre d'observations ou en le rapport signal à bruit - en générale non vérifiées par le problème courant. C'est le cas de la détermination de

$\widehat{\theta}_{H_0}(\vec{x})$ et $\widehat{\theta}_{H_1}(\vec{x})$ au sens du Maximum de Vraisemblance (cf. §III-O.1-p43), (111) devenant alors le Rapport de Vraisemblance Généralisé (Generalized Likelihood Ratio - GLR) conduisant au test de détection :

$$\frac{f_{\widehat{\theta}_{H_1}^{MV}}(\vec{x}) (\vec{x} | H_1)}{f_{\widehat{\theta}_{H_0}^{MV}}(\vec{x}) (\vec{x} | H_0)} \underset{H_1}{>} T \underset{H_0}{\leq} \quad (112)$$

Finalement on retiendra que dans la plupart des applications pratiques, les problèmes de détection (choix du modèle d'observation) et d'estimation (estimation des paramètres de chaque modèle θ et des paramètres d'intérêt $g(\theta)$) sont conjoints - joint avec, uni à [71] -. En effet, pour estimer de façon appropriée il faut connaître le modèle d'observation, lequel dépend de paramètres inconnus qui doivent au préalable être estimés également.

B. Bornes d'estimation conditionnées par un événement observable

Comme nous venons de le voir dans la section précédente, un test de détection observable ((110), (111), (112)) réalise une partition de l'ensemble des observations à travers deux sous-ensembles **indépendants des paramètres inconnus** \mathcal{D}_0 et \mathcal{D}_1 ($\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1 = \Omega$ et $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_1 = \emptyset$), lesquels définissent les sous-ensembles d'observations associés à chaque modèle d'observation. Ce sont sur ces sous-ensembles que seront appliquées les stratégies d'estimation du paramètre d'intérêt $g(\theta)$ adaptée à l'hypothèse choisie. D'un point de vue probabiliste, ce procédé correspond à un conditionnement - restriction de l'univers d'observation Ω - par un événement observable $\mathcal{D} \subset \Omega$ caractérisé par la densité de probabilité conditionnelle :

$$f_{\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}) = \frac{f_{\theta}(\vec{x})}{\int_{\mathcal{D}} f_{\theta}(\vec{x}) d\vec{x}} = \frac{f_{\theta}(\vec{x})}{P_{\mathcal{D}}(\theta)}, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{D} \quad (113)$$

où $f_{\theta}(\vec{x})$ est la d.d.p. définie sur Ω . Or les principales propriétés nécessaires au développement de l'inégalité de Barankin (44), à savoir :

- les propriétés algébriques de l'EQM locale (31),
- la définition d'un estimateur sans biais (41),

peuvent être étendues formellement lors du conditionnement des observations par un tel événement, en remplaçant dans toutes les expressions Ω et $f_{\theta}(\vec{x})$ respectivement par \mathcal{D} et $f_{\theta}(\vec{x} | \mathcal{D})$. Pour preuve, la forme adaptée du produit scalaire (31) au nouvel univers \mathcal{D} est :

$$\langle g(\vec{x}) | h(\vec{x}) \rangle_{\theta | \mathcal{D}} = E_{\theta} [g(\vec{x}) h(\vec{x}) | \mathcal{D}] = \int_{\mathcal{D}} [g(\vec{x}) h(\vec{x})] f_{\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}) d\vec{x}, \quad (114)$$

et la définition d'un estimateur sans biais (41) devient :

$$E_{\theta} [\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) | \mathcal{D}] = g(\theta) = \int_{\mathcal{D}} \widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) f_{\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}) d\vec{x}, \quad \forall \theta \in \Theta, \quad (115)$$

l'inégalité de Barankin (44) s'écrivant alors, $\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^N$, $\forall \{\theta_n\}_{[1,N]} \in \Theta$:

$$EQM_{\theta_0} [\widehat{g(\theta_0)} | \mathcal{D}] \geq \frac{\left[\sum_{n=1}^N w_n (g(\theta_n) - g(\theta_0)) \right]^2}{E_{\theta_0} \left[\left(\sum_{n=1}^N w_n \frac{f_{\theta_n}(\vec{x} | \mathcal{D})}{f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D})} \right)^2 | \mathcal{D} \right]} \quad (116)$$

Ce résultat trivial montre que toutes les bornes inférieures se déduisant de l'inégalité de Barankin (44)(116) peuvent être étendues dans le cas où les observations sont conditionnées par un événement observable $\mathcal{D} \subset \Omega$, notamment les bornes de Barankin (51a-c), de Cramer-Rao (55), de Bhattacharyya (§III-J-p32) et autres bornes introduites §III-K-p34.

A titre d'exemple nous développerons dans la suite le cas de la borne de Cramer-Rao car elle est non seulement la plus simple à exprimer, mais elle est également la plus générale, en ce sens qu'elle représente la plus grande borne inférieure associée à la plus faible formulation de la qualité "sans biais" d'un estimateur (cf. §III-J-p32). Ainsi, sous sa forme générale, elle correspond à la solution du problème :

$$\min \left\{ EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \mid \mathcal{D} \right] \right\} \text{ sous } E_{\theta_0+d\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \mid \mathcal{D} \right] = g(\theta_0) + \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} d\theta + o(d\theta) \quad (117)$$

laquelle vérifie :

$$EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \mid \mathcal{D} \right] \geq \frac{\left[\frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \right]^2}{E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x} \mid \mathcal{D})}{\partial \theta} \right)^2 \mid \mathcal{D} \right]} \quad (118)$$

Lors de la mise en oeuvre des calculs, on pourra préférer l'utilisation des 2 formes équivalentes suivantes :

$$E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x} \mid \mathcal{D})}{\partial \theta} \right)^2 \mid \mathcal{D} \right] = E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta} \right)^2 \mid \mathcal{D} \right] - \left(\frac{\partial \ln P_{\mathcal{D}}(\theta_0)}{\partial \theta} \right)^2 \quad (119)$$

$$E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x} \mid \mathcal{D})}{\partial \theta} \right)^2 \mid \mathcal{D} \right] = -E_{\theta_0} \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\theta_0}(\vec{x} \mid \mathcal{D})}{\partial^2 \theta} \mid \mathcal{D} \right] \quad (120a)$$

$$= -E_{\theta_0} \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial^2 \theta} \mid \mathcal{D} \right] + \frac{\partial^2 \ln P_{\mathcal{D}}(\theta_0)}{\partial^2 \theta} \quad (120b)$$

La première (119) se démontre aisément en remarquant que :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \ln f_{\theta}(\vec{x} \mid \mathcal{D})}{\partial \theta} &= \frac{\partial \ln f_{\theta}(\vec{x})}{\partial \theta} - \frac{\partial \ln P_{\mathcal{D}}(\theta)}{\partial \theta} \\ E_{\theta} \left[\frac{\partial \ln f_{\theta}(\vec{x})}{\partial \theta} \mid \mathcal{D} \right] &= \frac{\partial \ln P_{\mathcal{D}}(\theta)}{\partial \theta} \end{aligned} \right\}$$

ce qui permet d'appliquer la formule de la variance : $Var(x) = E[x^2] - E[x]^2$. La seconde (120a-b) est la forme duale classique de (119) qui découle de l'exploitation de la propriété :

$$\int_{\mathcal{D}} f_{\theta}(\vec{x} \mid \mathcal{D}) d\vec{x} = 1 \Rightarrow \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial f_{\theta}(\vec{x} \mid \mathcal{D})}{\partial \theta} d\vec{x} = E_{\theta} \left[\frac{\partial \ln f_{\theta}(\vec{x})}{\partial \theta} \mid \mathcal{D} \right] = 0.$$

C. Bornes d'estimation conditionnées par un événement clairvoyant

1) Motivation : bornes locales de performance des problèmes conjoints Détection-Estimation

Si dans toute application pratique relevant des problèmes conjoints Détection-Estimation, l'objectif premier est la détermination d'une règle de décision et d'estimateurs observables, le calcul de bornes de performances associées à des grandeurs éventuellement clairvoyantes est d'une égale importance. Comme nous l'avons déjà évoqué dans le cas de l'estimation (bornes inférieures de l'EQM) ou de la détection (borne inférieure de l'erreur de décision ou borne supérieure de la probabilité de détection), le calcul de ces bornes peut permettre de savoir si un problème donné mérite un développement pratique ou s'il est par avance voué à l'échec. Il apparaît donc souhaitable de pouvoir déterminer les performances d'ensemble (en détection et en estimation) de certains problèmes conjoints Détection-Estimation. Un cas particulièrement intéressant est la caractérisation du problème d'estimation d'une fonction $g(\theta)$ d'un paramètre inconnu θ d'un signal d'intérêt intermittent superposé à un signal de bruit (thermique, cf. §IV-p45), dont un modèle simplifié est

$$\begin{cases} H_0 : \vec{x} = \vec{b} \\ H_1 : \vec{x} = \vec{b} + \vec{s}_{\theta} \end{cases}, \quad (121)$$

et qui représente les problèmes conjoints Détection-Estimation les plus répandus dans la pratique. Dans ce cas, il est communément admis que l'attribution de probabilité a priori à chaque hypothèse ($P(H_0)$ et $P(H_1)$) relève de l'arbitraire et que le critère de Bayes (103) n'est pas exploitable. Dans ce cas, on préfère appliquer comme critère de décision optimale le critère de Neyman-Pearson (107) qui conduit, rappelons le, à la règle de décision (cf. §IV-B-p46)

$$RV_{\theta}(\vec{x}) = \frac{f_{\theta}(\vec{x} | H_1)}{f(\vec{x} | H_0)} \underset{\mathcal{D}_0^{opt}}{\overset{\mathcal{D}_1^{opt}}{>}} T \text{ et } T \text{ tel que } \int_{\mathcal{D}_1^{opt}} f(\vec{x} | H_0) d\vec{x} = P_{FA}, \quad (122)$$

généralement clairvoyante. Dans ce type de problème, où l'objectif est l'optimisation de la gestion de ressources limitées à mobiliser en présence du signal d'intérêt (cf. §IV-B-p46), les performances d'ensemble optimales sont assez simples à exprimer. Elles sont obtenues lorsque, pour la règle de décision optimale, l'EQM de l'estimateur de $g(\theta)$ est minimale, ce qui traduit l'exigence d'une utilisation de ressources limitées avec parcimonie et précision. Il est alors possible de définir un concept de bornes locales de performance en θ_0 associé à ce problème par la donnée :

- de la règle de décision optimale (122),
- et d'une borne inférieure de l'EQM **locale** conditionnée par la règle de décision optimale.

2) Cas des estimateurs localement sans biais :

Les bornes d'estimation conditionnées par un événement clairvoyant \mathcal{D}_{θ} peuvent être obtenues pour les estimateurs localement sans biais en utilisant l'approche de Barankin, comme le montre la discussion suivante dans le cas "classique" où :

- la d.d.p. $f_{\theta}(\vec{x})$ existe sur Ω , $\forall \theta \in \Theta \Rightarrow$ toute d.d.p. conditionnelle $f_{\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta})$ définie sur \mathcal{D}_{θ} est prolongeable sur Ω , $\forall \theta \in \Theta$.
- les événements \mathcal{D}_{θ} vérifient $\lim_{d\theta \rightarrow 0} \mathcal{D}_{\theta+d\theta} = \mathcal{D}_{\theta}$, $\forall \theta, \theta + d\theta \in \Theta$.

Dans ce contexte, la définition d'un estimateur sans biais (41) de $g(\theta)$ devient :

$$\int_{\mathcal{D}_{\theta}} \widehat{g(\theta)}(\vec{x}) f_{\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta}) d\vec{x} = g(\theta) \quad (123)$$

ce qui, au voisinage de θ_0 , se traduit par :

$$\begin{cases} \int_{\mathcal{D}_{\theta_0+d\theta}} \left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) f_{\theta_0+d\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0+d\theta}) d\vec{x} = g(\theta_0 + d\theta) - g(\theta_0) \\ \int_{\mathcal{D}_{\theta_0}} \left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} = 0 \end{cases} \quad (124)$$

Alors, en remarquant que (124) s'écrit également :

$$\begin{cases} \int_{\mathcal{U}_{\theta_0, d\theta}} \left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) \Pi_{\mathcal{D}_{\theta_0+d\theta}}(\vec{x}) f_{\theta_0+d\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0+d\theta}) d\vec{x} = g(\theta_0 + d\theta) - g(\theta_0) \\ \int_{\mathcal{U}_{\theta_0, d\theta}} \left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) \Pi_{\mathcal{D}_{\theta_0}}(\vec{x}) f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} = 0 \end{cases}, \mathcal{U}_{\theta_0, d\theta} = \mathcal{D}_{\theta_0+d\theta} \cup \mathcal{D}_{\theta_0}$$

on peut calculer la plus grande borne inférieure (47) de la grandeur $\int_{\mathcal{U}_{\theta_0, d\theta}} \left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right)^2 f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x}$ sous les contraintes (124). En effet, celle-ci vérifiant :

$$\lim_{d\theta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{U}_{\theta_0, d\theta}} \left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right)^2 f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} = EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} | \mathcal{D}_{\theta_0} \right] \quad (125)$$

elle permet d'établir que (35a-b, cf. Annexe XI-E-p99) :

$$EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} | \mathcal{D}_{\theta_0} \right] \geq \frac{\left[\frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \right]^2}{\lim_{d\theta \rightarrow 0} \frac{z_{\theta_0}(\theta_0 + d\theta)}{d\theta^2}} \quad (126a)$$

$$z_{\theta_0}(\theta_0 + d\theta) = \int_{\mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta}} \frac{f_{\theta_0 + d\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta})^2}{f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0})} d\vec{x} - \left(\int_{\mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta} \cap \mathcal{D}_{\theta_0}} f_{\theta_0 + d\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta}) d\vec{x} \right)^2 \quad (126b)$$

ce qui est la forme la plus générale de la Borne de Cramer-Rao (incluant notamment (118)).

Malheureusement, l'étude de la fonction $z_{\theta_0}(\theta_0 + d\theta)$ révèle qu'elle est (cf. Annexe XI-E-p99) :

- du second ordre si l'événement conditionnant est observable ($\mathcal{D}_\theta = \mathcal{D}, \forall \theta \in \Theta$),
- du premier ordre si l'événement conditionnant est clairvoyant,

ce qui conduit à des bornes de Cramer-Rao nulles (triviales) lorsqu'elles sont conditionnées par un événement clairvoyant, en général.

Ce résultat s'étend également aux bornes de Bhattacharyya d'ordre fini (cf. Annexe XI-E-p99) auxquelles s'appliquent également la propriété de convergence (125).

Le problème du calcul d'une borne d'estimation conditionnée par un événement clairvoyant **non triviale** reste donc un problème ouvert qui devra faire l'objet de recherches complémentaires. A ce stade de l'analyse, la principale difficulté semble être que la mise en oeuvre de bornes pour estimateurs sans biais - et non plus seulement localement sans biais - ne peut pas faire appel à la propriété de convergence (125).

D. Critère d'optimalité des problèmes conjoints Détection-Estimation

Le critère de Neyman-Pearson est un critère qui optimise le choix du modèle d'observation. L'application de la règle de décision optimale associée où de règles observables qui en dérivent (cf. §V-A-p48) conduit donc implicitement à subordonner les performances en précision *a priori* potentiellement accessibles (borne inférieure de l'EQM locale) à l'optimisation du choix d'hypothèse, ce qui soulève à notre avis la question suivante : ce choix représente il le meilleur compromis en terme de performances conjoints Détection-Estimation ? Pour répondre à cette question, il faut se doter d'un critère de mesure de performances conjoints. Pour cela considérons deux règles de décision \mathcal{R}^1 et \mathcal{R}^2 associant respectivement les domaines (clairvoyant ou observable) $\mathcal{D}^1 \subset \Omega$ et $\mathcal{D}^2 \subset \Omega$ à l'hypothèse H_1 , et $\widehat{g(\theta_0)}$ un estimateur de $g(\theta_0)$. Alors si

$$EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} | \mathcal{D}^1 \right] = EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} | \mathcal{D}^2 \right] \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{D}^1}(\theta_0) > P_{\mathcal{D}^2}(\theta_0)$$

ou si

$$EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} | \mathcal{D}^1 \right] < EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} | \mathcal{D}^2 \right] \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{D}^1}(\theta_0) = P_{\mathcal{D}^2}(\theta_0)$$

on peut dire que la règle \mathcal{R}^1 fournit de meilleures performances conjointes que la règle \mathcal{R}^2 . Dans les deux cas, on vérifie que

$$\frac{EQM_{\theta_0} [\widehat{g}(\theta_0) | \mathcal{D}^1]}{P_{\mathcal{D}^1}(\theta_0)} < \frac{EQM_{\theta_0} [\widehat{g}(\theta_0) | \mathcal{D}^2]}{P_{\mathcal{D}^2}(\theta_0)}. \quad (127)$$

La grandeur ainsi définie ((127), rapport de l'EQM et de la probabilité de détection) est une fonction des performances conjointes. Si la probabilité est interprétée comme une certaine mesure des sous-ensembles de Ω , cette grandeur est homogène à une densité : nous l'appellerons par la suite **la densité d'EQM** associée à un couple (règle de décision, estimateur) donné solution des problèmes conjoints.

L'inégalité (127) suggère qu'un critère d'optimisation des performances conjointes soit la minimisation de la densité d'EQM.

Ce critère est conforté par l'analyse de la densité d'EQM associée à une règle de décision \mathcal{R} observable ($\mathcal{D} \subset \Omega$ associé à l'hypothèse H_1), car dans ce cas, la densité d'EQM admet une borne inférieure **non triviale** (129).

En effet, pour tout estimateur $\widehat{g}(\theta_0)$ localement sans biais de $g(\theta_0)$, la densité d'EQM vérifie :

$$\frac{\left[\frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \right]^2}{E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D})}{\partial \theta} \right)^2 | \mathcal{D} \right] P_{\mathcal{D}}(\theta_0)} \leq \frac{EQM_{\theta_0} [\widehat{g}(\theta_0) | \mathcal{D}]}{P_{\mathcal{D}}(\theta_0)} \quad (128)$$

Or d'après (119) :

$$\begin{aligned} E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D})}{\partial \theta} \right)^2 | \mathcal{D} \right] &\leq E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta} \right)^2 | \mathcal{D} \right] \\ &\leq \frac{1}{P_{\mathcal{D}}(\theta_0)} \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta} \right)^2 f_{\theta_0}(\vec{x}) d\vec{x} \\ &\leq \frac{1}{P_{\mathcal{D}}(\theta_0)} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta} \right)^2 f_{\theta_0}(\vec{x}) d\vec{x} \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\frac{EQM_{\theta_0} [\widehat{g}(\theta_0) | \mathcal{D}]}{P_{\mathcal{D}}(\theta_0)} \geq \frac{\left[\frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \right]^2}{E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta} \right)^2 \right]} \quad (129)$$

On remarquera que la borne inférieure de la densité d'EQM (129) n'est autre que la borne de Cramer-Rao non conditionnée, laquelle est obtenue pour la règle de décision idéale qui ne se trompe jamais et pour laquelle la précision *a priori* est potentiellement la meilleure. Ainsi, cette borne inférieure représente bien la qualité asymptotique recherchée en terme de performances conjointes, renforçant le choix de la densité d'EQM comme mesure de performances conjointes.

Par conséquent, un critère alternatif au critère de Neyman-Pearson peut être l'optimisation des performances conjointes au sens de la densité d'EQM. Il est défini par la recherche de la règle de décision qui minimise la densité d'EQM sous une contrainte de probabilité de fausse alarme donnée :

$$\min \left\{ \frac{EQM_{\theta_0} [\widehat{g}(\theta_0) | \mathcal{D}]}{P_{\mathcal{D}}(\theta_0)} \right\} \text{ sous } \int_{\mathcal{D}} f(\vec{x} | H_0) d\vec{x} = (P_{FA})_0, \quad (130)$$

Sa mise en oeuvre concrète requerra au préalable la dérivation de bornes d'estimation conditionnées par un événement clairvoyant non triviale.

VI. ESTIMATION DE LA DIRECTION D'ARRIVÉE À L'AIDE D'UNE ANTENNE À 2 VOIES DE RÉCEPTION

L'objet de cette section est d'introduire une application pratique relevant des problèmes conjoints Détection-Estimation pour illustrer non seulement la mise en oeuvre de ce type d'analyse mais également pour vérifier notre intuition initiale qui a motivé ce travail de recherche : la prise en compte du test de détection permet elle d'étendre le domaine en RSB "prédictif" de la BCR ?

Nous avons choisi la mesure de la Direction d'Arrivée (DA) d'une source de signal à l'aide d'un dispositif d'écoute (antenne) composé de deux voies de réception de type "Monopulse". Ce choix est motivé à la fois :

- par l'importance pratique de cette application, car il faut savoir qu'elle est non seulement l'une des plus anciennes techniques haute résolution - inventée en 1941 par le Naval Research Laboratory (USA) - mais qu'elle reste également la technique la plus répandue dans les systèmes de poursuite actuels, notamment pour son rapport performance à prix,
- et par son intérêt théorique puisqu'elle bénéficie d'une caractérisation statistique étendue pour une source de signal de type Rayleigh.

A. Principe de la mesure angulaire

L'objectif de ce paragraphe est d'introduire brièvement les principes généraux de la mesure angulaire de type Monopulse. Une étude plus complète du sujet pourra être entreprise en consultant les ouvrages de référence [57] et [58].

D'un point de vue fonctionnel, une voie de réception résulte de l'association d'un capteur - antenne élémentaire caractérisé par un diagramme de rayonnement émission-réception - et d'une chaîne de réception électronique chargée de la "mise en forme" des signaux reçus (démodulations, amplifications, filtrages). Les 2 voies de réception seront désignées par voie "somme" (Σ) et voie "différence" (Δ). Considérons alors une source de signal située sur une droite faisant un angle θ (orienté) avec la bissectrice de l'axe passant par les centres de phase des deux capteurs, comme le montre la figure (5). Sous l'hypothèse d'un système de réception bande étroite, le modèle d'observation usuel du signal reçu sur les deux voies de réception, après filtrage de Hilbert (démodulation en phase et en quadrature), et en présence d'un bruit complexe circulaire centré gaussien blanc temporellement, est le suivant :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \Sigma(t) \\ \Delta(t) \end{pmatrix} = \alpha(t) \begin{pmatrix} g_{\Sigma}(\theta) \\ g_{\Delta}(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{\Sigma}(t) \\ n_{\Delta}(t) \end{pmatrix} = \alpha(t) \vec{g}(\theta) + \vec{n}(t) \quad (131)$$

où :

- $\alpha(t)$ représente l'amplitude complexe de la source de signal au point de la chaîne de réception où est effectuée la mesure angulaire (elle inclut notamment le bilan de propagation, les éventuels gains de traitement de la chaîne de réception),
- $\vec{g}(\theta) = (g_{\Sigma}(\theta), g_{\Delta}(\theta))^T$ représente le vecteur des gains complexes en amplitude (diagramme de rayonnement) de chaque capteur pour une direction d'arrivée θ . Ce vecteur est généralement appelé vecteur directionnel de l'antenne : c'est la fonction de transfert spatiale de l'antenne (en hypothèse bande étroite),
- $n_{\Sigma}(t)$ et $n_{\Delta}(t)$ représentent les bruits thermiques (cosmiques + électroniques) sur chaque voie de réception; ils peuvent éventuellement être corrélés spatialement.

Dans le cas particulier d'une antenne à 2 capteurs, il semble assez évident que la direction d'arrivée est contenue dans le rapport des gains en amplitude $r(\theta) = \frac{g_{\Delta}(\theta)}{g_{\Sigma}(\theta)}$ si la fonction $\theta \rightarrow r(\theta)$ est inversible pour $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dans ce cas, l'équation d'observation (131) s'écrit plus naturellement sous la forme équivalente suivante :

$$\vec{v}(t) = \beta(t) \vec{x}(\theta) + \vec{n}(t), \quad \beta(t) = \alpha(t) g_{\Sigma}(\theta), \quad \vec{x}(\theta) = \left(1, \frac{g_{\Delta}(\theta)}{g_{\Sigma}(\theta)}\right)^T \quad (132)$$

et le rapport $r(\theta) = \frac{g_{\Delta}(\theta)}{g_{\Sigma}(\theta)}$ est alors appelé rapport d'écartométrie. Il est dit "MonoPulse" parce qu'il correspond à une mesure simultanée sur deux voies de réception distinctes, ce qui fut à une certaine époque (1941) une prouesse

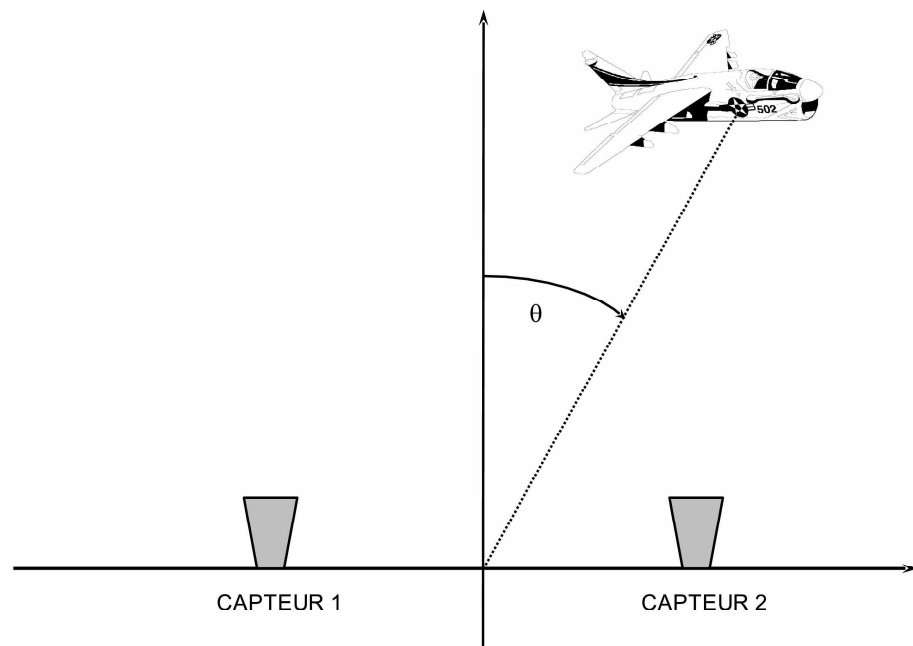


Fig. 5. Antenne à 2 capteurs

suffisamment significative pour qu'on lui attribuât un qualificatif [57]. Historiquement les antennes monopulse sont une mise en oeuvre particulière de ce principe de mesure de la direction d'arrivée. A l'origine, il s'agit d'une antenne à 2 capteurs dont les centres de phases sont colocalisés mais disposant chacun d'un type de diagramme de rayonnement préformé spécifiquement pour satisfaire la condition d'inversibilité de $r(\theta)$. Parmi d'autres réalisations possibles [57][58], la plus simple consiste à combiner linéairement les signaux reçus par 2 capteurs élémentaires de type cornet de diagramme de rayonnement identiques de la façon suivante [58, p. 290] (cf. figure (6)) :

$$\begin{aligned}\Sigma(t) &= C_1(t) + C_2(t) \\ \Delta(t) &= C_1(t) - C_2(t)\end{aligned}$$

Cette combinaison a pour effet :

- d'additionner et de soustraire les signaux reçus en phase (d'où les noms de voie "somme" (Σ) et "différence" (Δ)),
- de synthétiser une fonction $r(\theta) = \frac{g_{\Delta}(\theta)}{g_{\Sigma}(\theta)}$ bijective dans un domaine angulaire égale à l'ensemble du lobe principal de la voie somme Σ (entre les 2 premiers nuls),
- de maintenir la blancheur spatiale du bruit.

Par conséquent, pour obtenir une fonction $r(\theta)$ bijective sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ il suffit simplement d'adapter la taille des cornets pour agrandir le lobe principal de la voie somme Σ . Ce procédé fournit une solution idéale si les signaux observés ne contiennent qu'une seule source de signal à localiser, car en présence de P sources la recombinaison des signaux reçus

$$\vec{v}(t) = \sum_{p=1}^P \alpha_p(t) \vec{g}(\theta_p) + \vec{n}(t) \implies r = \frac{\sum_{p=1}^P \alpha_p(t) g_{\Delta}(\theta_p)}{\sum_{p=1}^P \alpha_p(t) g_{\Sigma}(\theta_p)}$$

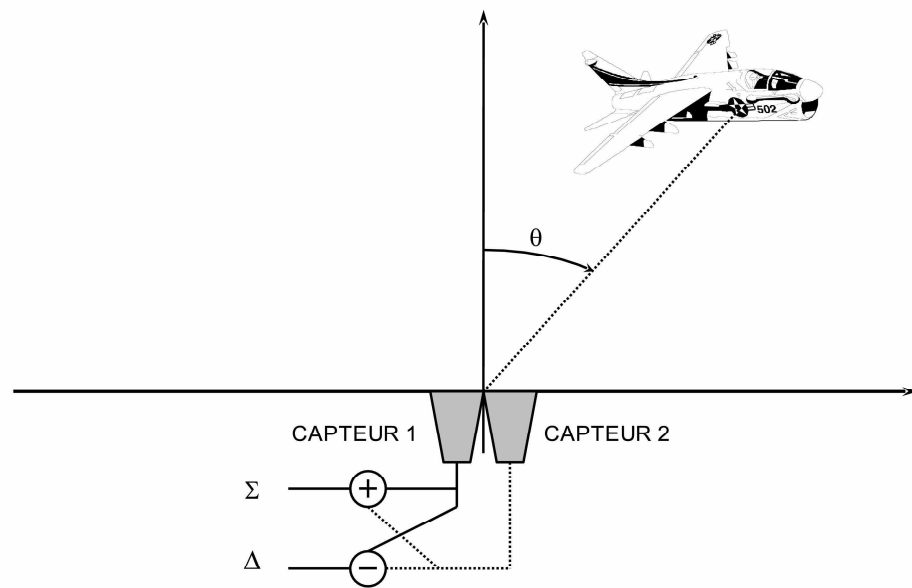


Fig. 6. Antenne Monopulse simple

empêche toute exploitation rationnelle de la relation $\theta \rightarrow r(\theta)$. L'isolation de chaque signal source peut être réalisée par filtrage spatial, c'est à dire par l'introduction de capteurs directifs (spatialement discriminant). Une solution historique simple au problème de l'exploration spatiale discriminante est :

- d'accroître la discrimination angulaire par l'association d'une antenne cornet et d'un réflecteur (antenne à réflecteur) dont l'effet est de concentrer l'énergie au voisinage d'une direction principale de rayonnement,
- d'explorer l'espace par rotation de la direction principale de rayonnement.

On remarquera que depuis l'introduction de cette solution, toutes les antennes de réception fonctionnent sur ce principe, si ce n'est que la rotation n'est plus nécessairement mécanique si l'on considère les antennes à Formation de Faisceaux par le Calcul (FFC). Ainsi, dans un contexte potentiellement multi-sources, la mise en oeuvre d'une mesure de direction d'arrivée par une antenne à 2 capteurs relève d'un compromis : la capacité à isoler chaque source des autres et la capacité à mesurer sa direction d'arrivée sans ambiguïté. En effet, une conséquence de la réduction du lobe principal de rayonnement est l'introduction d'une ambiguïté dans la mesure angulaire car rien n'empêche de mesurer une source de forte puissance en dehors du lobe principal. Pour éviter cette mesure de source par lobe secondaire, on peut réduire le niveau des lobes secondaires (mais on rencontre rapidement une limitation technologique) ou ajouter une voie auxiliaire dite d'annulation d'échos par lobe secondaire dont le diagramme de rayonnement est supérieur à celui de la voie somme Σ sauf dans le lobe principal de la voie somme. Une simple comparaison des amplitudes reçues sur cette voie et la voie somme permet de rejeter les signaux sources provenant d'un lobe secondaire de la voie somme. D'ailleurs la plupart des radars modernes à vocation commerciale (démonstrateurs exclus) y compris les radars à FFC se contentent de synthétiser 3 voies d'écartométrie asservies à la direction de pointage (une voie somme, une voie différence site, une voie différence gisement) complétées éventuellement par une voie d'annulation d'échos par lobe secondaire. La mesure de la direction d'arrivée par rapport d'écartométrie a donc encore de beaux jours devant elle.

Dans la suite nous considérerons que :

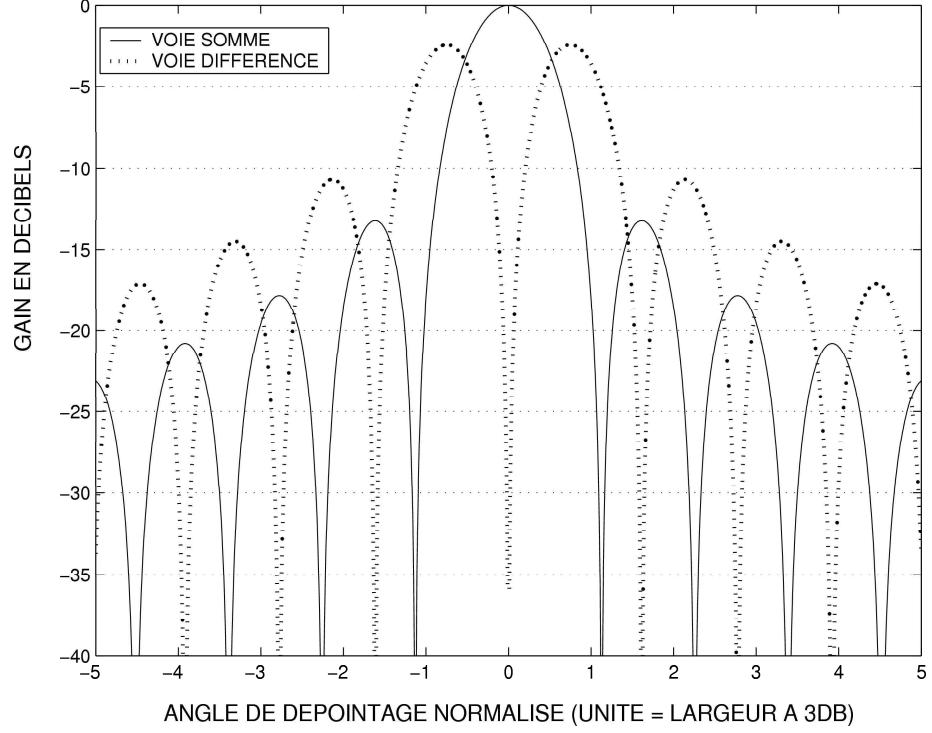


Fig. 7. Gains d'alignement en Décibels des voies Σ et Δ

- les signaux traités sont uniquement reçus dans le lobe principal de la voie somme,
- l'antenne, équivalente à un réflecteur plan illuminé par une distribution uniforme de courant pour la voie somme et linéaire impaire pour la voie différence, génère les gains d'alignement suivants [74, p. 72,73] :

$$g_{\Sigma}(\theta) = \frac{\sqrt{4\pi}}{\lambda} \sqrt{L} \text{sinc}(h(\theta))$$

$$g_{\Delta}(\theta) = \frac{\sqrt{4\pi}}{\lambda} \sqrt{3L} \left[\text{sinc}(h(\theta)) \frac{1}{h(\theta)} - \text{cosec}(h(\theta)) \right]$$

$$h(\theta) = \pi \frac{L}{\lambda} \sin(\theta)$$

où L est la dimension de l'antenne et λ est la longueur d'onde. L et λ sont ajustées pour obtenir un lobe principal à $-3dB$ pour la voie somme de 1° ($\theta_{\Sigma}^{-3dB} = 1^\circ$). Les diagrammes de gains d'alignement des voies Σ et Δ pour $\theta \in [-5, 5] \times \theta_{\Sigma}^{-3dB}$ exprimés en Décibels sont représentés figure (7). La figure (8) propose quant à elle une représentation linéaire des ces gains dans le lobe principal ainsi que le rapport d'écartométrie associé.

- le signal source conserve la même direction d'arrivée (θ) relativement à l'antenne pendant toute la mesure angulaire (scénario statique).

B. Lois statistiques de l'amplitude du signal source : lois de Swerling dans le cas du Radar

En radar actif les cibles - rétrodiffuseurs passifs - sont classiquement répertoriées suivant 3 lois de rétrodiffusion statistiques dites lois de Swerling [48]. Ces lois caractérisent le comportement au cours du temps du coefficient de rétrodiffusion complexe de la cible ρ , et par conséquent celui de l'amplitude complexe de la source de signal α (qui intègre également les autres termes de propagation ainsi que les éventuels gains de traitement de la chaîne de réception) :

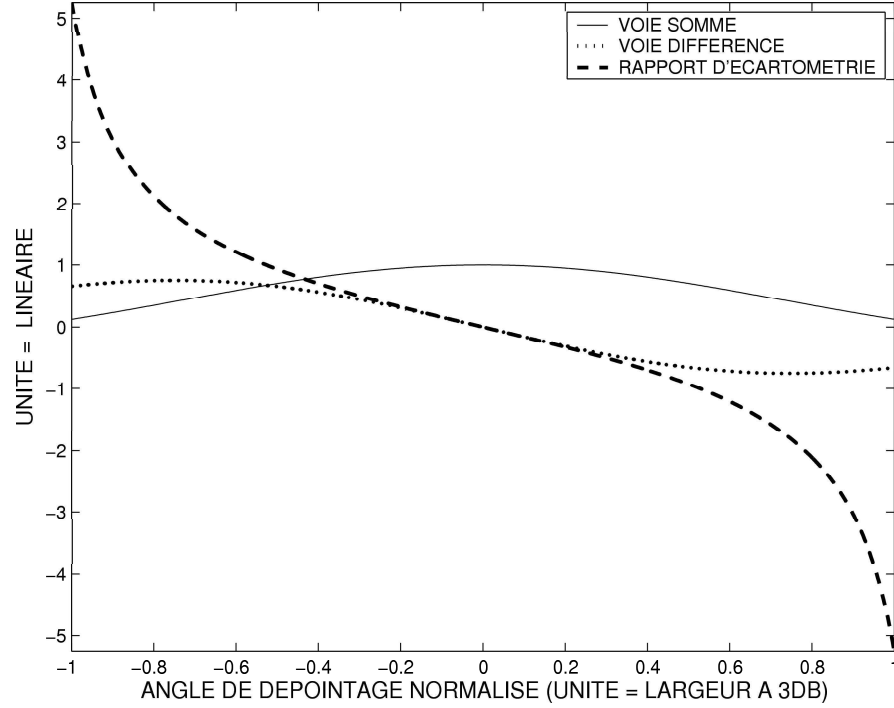


Fig. 8. Gains d'alignement linéaire des voies Σ et Δ et rapport d'écartométrie dans le lobe principal de Σ

- Swerling 0 (SW0) : le coefficient de rétrodiffusion ne fluctue pas au cours du temps :

$$|\rho|^2 = \text{SER}$$

où SER est la Surface Equivalente Radar.

- Swerling 1-2 (SW 1-2) : le coefficient de rétrodiffusion fluctue au cours du temps selon une loi complexe circulaire gaussienne centrée de puissance la SER moyenne de la cible :

$$f(\rho) = f_{\mathcal{N}_c(0, \text{SER})}(\rho) = \frac{e^{-\frac{|\rho|^2}{\text{SER}}}}{\pi \text{SER}} \Leftrightarrow \rho = \sqrt{x} e^{j\varphi}, \quad f(x) = f_{\chi_{2c}^2}(x, 0, \text{SER}), \quad f(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$$

Dans ce cas la SER suit une loi de Rayleigh.

- Swerling 3-4 (SW 3-4) : le coefficient de rétrodiffusion fluctue au cours du temps selon une loi racine carrée du "Khi 2" complexe centrée à 2 degrés de liberté de puissance la SER moyenne de la cible :

$$f(\rho) = \frac{4|\rho|^2}{\pi (\text{SER})^2} e^{-\frac{2|\rho|^2}{\text{SER}}} \Leftrightarrow \rho = \sqrt{x} e^{j\varphi}, \quad f(x) = f_{\chi_{2c}^2}(x, 0, \frac{\text{SER}}{2}), \quad f(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$$

Dans ce cas la SER suit une loi du "Khi 2" complexe centrée à 2 degrés de liberté.

Il s'agit à travers ces 3 lois de remplacer une mesure réelle de diagramme de rétrodiffusion en chambre anéchoïque par un modèle comportemental reposant sur l'analyse au premier ordre suivante :

- si un rétrodiffuseur est de forme simple et de grande dimension devant la longueur d'onde, alors l'approximation de l'optique géométrique s'applique. Sa SER peut être approximée par sa surface optique, peu dépendante de l'angle sous lequel il est observé et peu dépendante d'une faible variation de la longueur d'onde : c'est le modèle SW0.
- si un rétrodiffuseur est de forme complexe alors il admet une décomposition dite en points brillants. Un point brillant est un rétrodiffuseur élémentaire caractérisé par une position dans l'espace et un diagramme de rétrodiffusion constant dans un domaine de longueurs d'onde donné. Si la distribution spatiale des points

brillants n'admet pas d'axe de répartition privilégié (un avion par exemple) alors l'étude du coefficient de rétrodiffusion en fonction de l'angle d'observation pour une longueur d'onde donnée, ou en fonction de la longueur d'onde pour un angle d'observation donné, montre qu'il se comporte statistiquement comme une loi normale complexe circulaire (SW1-2). Par contre, si la distribution spatiale des points brillants admet un axe de répartition privilégié (un missile par exemple) alors l'étude statistique du coefficient de rétrodiffusion montre une "contraction" de la distribution des amplitudes, ce que traduit le passage de la loi de Rayleigh à une loi du "Khi 2" complexe centrée à 2 degrés de liberté (SW3-4)

La différence entre SW1 et SW2 ou entre SW3 et SW4 correspond à une différence de comportement du signal source lors d'observations multiples : pour les lois SW1 et SW3 la rétrodiffusion est déterminée par la première observation et ne varie plus d'observation à observation (une seule réalisation de la loi de fluctuation), pour les lois SW2 et SW4 la rétrodiffusion varie d'observation à observation (autant de réalisations de la loi de fluctuation que d'observations).

A ces 3 lois classiques nous ajouterons la loi Swerling 0 étendue (SW0E) qui correspond à une généralisation de la loi SW0 lorsque I observations sont disponibles mais que la loi de fluctuation est inconnue. La rétrodiffusion de la cible est alors caractérisée par un vecteur de coefficient de rétrodiffusion $\vec{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_I)^T$ et une SER moyenne définie par $SER = \frac{\|\vec{\rho}\|^2}{I}$.

C. d.d.p. de l'observation en fonction de la loi d'amplitude

Nous considérons le cas où pour réaliser la mesure angulaire nous disposons de I observations indépendantes aux instants t_1, \dots, t_I correspondant au modèle d'observation (131). De plus nous supposons que le signal source conserve la même direction d'arrivée (θ) relativement à l'antenne pendant les I observations (scénario statique). Dans ce contexte et par la suite nous adopterons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{g} &= \vec{g}(\theta), \quad \vec{x} = \vec{x}(\theta) \\ \vec{v}_i &= \vec{v}(t_i) = \begin{pmatrix} \Sigma_i \\ \Delta_i \end{pmatrix} = \alpha_i \vec{g} + \vec{n}_i = \beta_i \vec{x} + \vec{n}_i \\ \vec{V} &= (\Sigma_1, \dots, \Sigma_I, \Delta_1, \dots, \Delta_I)^T = (\vec{\Sigma}^T, \vec{\Delta}^T)^T\end{aligned}$$

Alors la d.d.p. associée aux I d'observations en fonction de la loi fluctuation du signal source considérée s'écrit :

- si SW0E :

$$\begin{aligned}f_{SW0E}(\vec{V}) &= \frac{e^{-(\vec{V} - \vec{m}_{\vec{V}})^H \mathbf{C}_{\vec{V}}^{-1} (\vec{V} - \vec{m}_{\vec{V}})}}{\pi^{2I} |\mathbf{C}_{\vec{V}}|} = \frac{e^{-I \text{tr}(\mathbf{C}_{\vec{V}}^{-1} \widehat{\mathbf{C}}_{\vec{V}})}}{(\pi^2 |\mathbf{C}_{\vec{V}}|)^I} \quad (133) \\ \mathbf{C}_{\vec{V}} &= \begin{bmatrix} (\mathbf{C}_{\vec{v}})_{11} \mathbf{Id}_I & (\mathbf{C}_{\vec{v}})_{12} \mathbf{Id}_I \\ (\mathbf{C}_{\vec{v}})_{12}^* \mathbf{Id}_I & (\mathbf{C}_{\vec{v}})_{22} \mathbf{Id}_I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\vec{v}} = \mathbf{C}_{\vec{n}}, \quad \vec{m}_{\vec{V}} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha} g_{\Sigma} \\ \vec{\alpha} g_{\Delta} \end{pmatrix} \\ \widehat{\mathbf{C}}_{\vec{V}} &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (\vec{v}_i - \alpha_i \vec{g}(\theta)) (\vec{v}_i - \alpha_i \vec{g}(\theta))^H\end{aligned}$$

- si SW1-2 :

$$\begin{aligned}f_{SW2}(\vec{V}) &= \frac{e^{-\vec{V}^H \mathbf{C}_{\vec{V}}^{-1} \vec{V}}}{\pi^{2I} |\mathbf{C}_{\vec{V}}|} = \frac{e^{-I \text{tr}(\mathbf{C}_{\vec{V}}^{-1} \widehat{\mathbf{C}}_{\vec{V}})}}{(\pi^2 |\mathbf{C}_{\vec{V}}|)^I} \quad (134) \\ \mathbf{C}_{\vec{V}} &= \begin{bmatrix} (\mathbf{C}_{\vec{v}})_{11} \mathbf{Id}_I & (\mathbf{C}_{\vec{v}})_{12} \mathbf{Id}_I \\ (\mathbf{C}_{\vec{v}})_{12}^* \mathbf{Id}_I & (\mathbf{C}_{\vec{v}})_{22} \mathbf{Id}_I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\vec{v}} = \sigma_{\alpha}^2 \vec{g} \vec{g}^H + \mathbf{C}_{\vec{n}} \\ \widehat{\mathbf{C}}_{\vec{V}} &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \vec{v}_i \vec{v}_i^H\end{aligned}$$

- si SW3-4 (cf. Annexe XII-B-p107) :

$$\begin{aligned}
 f_{SW4}(\vec{V}) &= \frac{e^{-Itr(\tilde{\mathbf{C}}^{-1}\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}})}}{(\pi^2|\tilde{\mathbf{C}}|)^I} \left[\prod_{i=1}^I \left(\frac{1}{1 + \frac{\sigma_\alpha^2 |g_\Sigma|^2}{2} \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}} + \frac{\sigma_\alpha^2 |g_\Sigma|^2}{2} |\vec{v}_i^H \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \vec{g}|^2 \right) \right] \quad (135) \\
 \tilde{\mathbf{C}} &= \frac{\sigma_\alpha^2}{2} \vec{g} \vec{g}^H + \mathbf{C}_{\vec{n}} \\
 \widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}} &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \vec{v}_i \vec{v}_i^H
 \end{aligned}$$

D. Estimateur au sens du MV de la direction d'arrivée et rapport d'écartométrie

La mise en oeuvre de la stratégie d'estimation dite du Maximum de Vraisemblance (cf. §III-O-p43), lorsque le bruit est supposé blanc spatialement ($\mathbf{C}_{\vec{n}} = \sigma_n^2 \mathbf{Id}_2$), pour les fluctuations de type SW0E [68] et SW2 [67] conduit dans les 2 cas à la détermination de l'angle d'arrivée selon le critère :

$$\widehat{\theta}^{MV} = \arg \max \left\{ \frac{\vec{g}(\theta)^H \widehat{\mathbf{R}}_{\vec{v}} \vec{g}(\theta)}{\vec{g}(\theta)^H \vec{g}(\theta)} \right\}, \quad \widehat{\mathbf{R}}_{\vec{v}} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \vec{v}_i \vec{v}_i^H$$

que l'on suppose la puissance de bruit σ_n^2 connue ou non. Ce critère peut prendre la forme équivalente suivante :

$$\widehat{\theta}^{MV} = \arg \max \left\{ \frac{\vec{x}(\theta)^H \widehat{\mathbf{R}}_{\vec{v}} \vec{x}(\theta)}{\vec{x}(\theta)^H \vec{x}(\theta)} \right\}, \quad \vec{x}(\theta) = \begin{pmatrix} 1, \frac{g_\Delta(\theta)}{g_\Sigma(\theta)} \end{pmatrix}^T = (1, r(\theta))^T$$

ou encore, si la fonction $\theta \rightarrow r(\theta)$ est inversible, :

$$\widehat{\theta}^{MV} = r^{-1}(\widehat{r}^{MV}) \quad \text{et} \quad \widehat{r}^{MV} = \arg \max \left\{ \frac{\vec{x}^H \widehat{\mathbf{R}}_{\vec{v}} \vec{x}}{\vec{x}^H \vec{x}} \right\}, \quad \vec{x} = (1, r)^T$$

ce qui admet finalement pour solution [43][44][49] :

$$\widehat{\theta}^{MV} = r^{-1}(\widehat{r}^{MV}) \quad \text{et} \quad \widehat{r}^{MV} = \frac{Tr(\widehat{\mathbf{R}}_{\vec{v}}) + \sqrt{Tr(\widehat{\mathbf{R}}_{\vec{v}})^2 - 4|\widehat{\mathbf{R}}_{\vec{v}}| - 2\|\vec{\Sigma}\|^2}}{2\vec{\Delta}^H \vec{\Sigma}} \quad (136)$$

Par conséquent, ceci démontre que dans le cas particulier d'une antenne à 2 capteurs, la mesure de la direction d'arrivée à l'aide du rapport écartométrie est en fait une mise en oeuvre particulière de la méthode du Maximum de Vraisemblance, que ce soit dans le cas du Maximum de Vraisemblance Déterministe (ou Conditionnel, loi de fluctuation SW0E) ou dans le cas du Maximum de Vraisemblance Stochastique (loi de fluctuation SW2).

On remarquera que ce résultat ne requiert pas a priori que le rapport d'écartométrie soit une grandeur réelle. Toutefois dans la pratique, les voies de réception Σ et Δ d'une antenne monopulse sont appariées en phase de façon à obtenir un rapport d'écartométrie réel. Cette contrainte facilite non seulement l'inversion de la fonction $\theta \rightarrow r(\theta)$, mais fournit également un test de détection simple de la présence simultanée de plusieurs sources de signal [57][56][58][59]. En effet dans ce cas $\text{Im}\{r(\theta)\} \neq 0$, alors que $\text{Im}\{r(\theta)\} = 0$ dans le cas d'une unique source. Par conséquent, il est préférable d'estimer la forme complexe (136) du rapport d'écartométrie dont la partie réelle fournit la mesure angulaire :

$$\widehat{\theta}^{MV} = r_r^{-1}(\widehat{r}_r^{MV}) \quad \text{avec} \quad \widehat{r}_r^{MV} = \text{Re}\{\widehat{r}^{MV}\}. \quad (137)$$

et dont la partie imaginaire fournit un critère de validité de cette mesure angulaire. L'étude du rapport d'écartométrie réel au voisinage de la direction principal de rayonnement de l'antenne ($\theta = 0$) montre que c'est une fonction

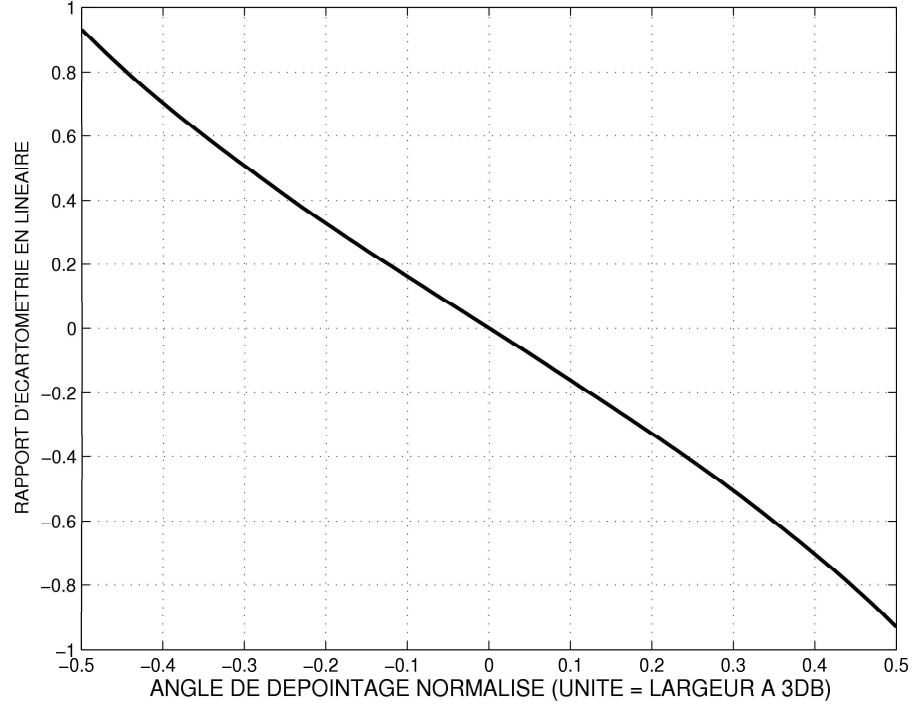


Fig. 9. Rapport d'écartométrie dans le lobe à 3dB de la voie somme Σ

linéaire de la direction d'arrivée recherchée dans le lobe principal à 3dB (cf. figure 9). C'est pourquoi dans la littérature courante [57][58] on approxime généralement la relation $\theta \rightarrow r_r(\theta)$ par une relation linéaire $r_r(\theta) \approx k\theta$. La principale conséquence de cette approximation est que l'estimateur de la direction d'arrivée retenu n'est plus l'estimateur au sens du Maximum de Vraisemblance, par conséquent il ne sera vraisemblablement pas asymptotiquement (lorsque le nombre d'observation ou le RSB tend vers l'infini) efficace (cf. §III-O-p43). Ce "défaut" doit cependant être relativisé si l'estimateur obtenu permet d'atteindre la précision exigée (opérationnelle) sur l'estimation de la direction d'arrivée, laquelle en terme d'EQM s'écrit :

$$E \left[\left(\theta - \frac{r_r^{MV}(\theta) (\vec{V})}{k} \right)^2 \right] = \frac{Var [r_r^{MV}(\theta) (\vec{V})]}{k^2} + \left(\frac{E [r_r^{MV}(\theta) (\vec{V})]}{k} - \theta \right)^2 \quad (138)$$

Ainsi, sous cette approximation, la caractérisation statistique de l'estimateur de la direction d'arrivée se déduit immédiatement de celle - de la partie réelle - du rapport d'écartométrie. Nous nous placerons par la suite sous cette hypothèse et limiterons de ce fait notre discussion à la caractérisation de l'estimation du rapport d'écartométrie.

La forme exacte (136) de l'estimateur au sens du MV du rapport d'écartométrie est connu depuis les années 1970. Elle a été obtenue par Mosca [49] qui en a dérivé la formulation approchée suivante :

$$\widehat{r}^{MV} \approx \widehat{r} = \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \quad (139)$$

valide lorsque $\|\vec{\Sigma}\| \gg \|\vec{\Delta}\|$, c'est à dire au voisinage de la direction principale de rayonnement de la voie somme Σ . C'est cette formulation qui a été étudiée par la suite et que nous utiliserons également. On remarquera que dans le cas d'une seule observation ($I = 1$), la forme exacte (136) et la forme approchée (139) sont identiques et :

$$\widehat{r} = \frac{\Delta}{\Sigma}$$

VII. CARACTÉRISATION DES PROBLÈMES CONJOINTS DÉTECTION-ESTIMATION D'UNE ANTENNE À 2 VOIES DE RÉCEPTION

Nous nous plaçons dans le cas d'un signal source de loi de fluctuation d'amplitude de type Swerling 2 lorsque le bruit additif est blanc temporellement et spatialement et de puissance connue ($\sigma_{\vec{n}}^2$). Dans ce cas la d.d.p des signaux observés au cours de I observations indépendantes (134) devient :

$$f_{SW2}(\vec{V}) = \frac{e^{-\vec{V}^H \mathbf{C}_{\vec{V}}^{-1} \vec{V}}}{\pi^{2I} |\mathbf{C}_{\vec{V}}|} = \frac{e^{-I \text{tr}(\mathbf{C}_{\vec{V}}^{-1} \widehat{\mathbf{C}}_{\vec{V}})}}{(\pi^2 |\mathbf{C}_{\vec{V}}|)^I}$$

$$\mathbf{C}_{\vec{V}} = \begin{bmatrix} C_{11} \mathbf{Id}_I & C_{12} \mathbf{Id}_I \\ C_{12}^* \mathbf{Id}_I & C_{22} \mathbf{Id}_I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} = \sigma_{\Sigma}^2 & C_{12} \\ C_{12}^* & C_{22} = \sigma_{\Delta}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{\vec{v}} = \sigma_{\beta}^2 \vec{x} \vec{x}^H + \sigma_{\vec{n}}^2 \mathbf{Id}_2$$

$$\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \vec{v}_i \vec{v}_i^H$$

A. Un résultat paradoxal historique

Les premières caractérisations statistiques (moyenne, variance) de l'estimateur du rapport d'écartométrie sous sa forme approchée $\hat{r}_r = \text{Re} \left\{ \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \right\}$ (139) pour un nombre quelconque d'observations I furent obtenues par Kanter [51] qui calcula la d.d.p. et tous les moments absolus centrés de cet estimateur. Il démontra en outre que :

$$E[\hat{r}_r] = \frac{C_{12}^*}{C_{11}}, \quad \text{Var}[\hat{r}_r] = \frac{|\mathbf{C}|}{2C_{11}} \int_0^{\infty} \frac{f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11})}{t} dt = \begin{cases} \frac{|\mathbf{C}|}{2(C_{11})^2} \frac{1}{I-1}, & I \geq 2 \\ \infty, & I = 1 \end{cases}$$

Le fait d'obtenir une variance infinie dans le cas mono-observation posa alors un réel problème à la communauté scientifique travaillant sur la mesure Monopulse, sauf peut être à l'auteur qui dans ce cas déclara simplement : "When $I = 1$, a measure of the spread of the pdf is its absolute first central moment which is easily shown to be given by ..." sans plus d'analyse. L'explication laconique de Kanter est pourtant correcte et évidente si au préalable on a pris le soin d'analyser l'information réellement contenue dans un moment absolu : une information de précision *a priori* (cf. §III-E-p23). Dans ce cas, une valeur infinie pour un ordre donné signifie simplement une absence d'information sur la précision *a priori* à cet ordre et qu'il faut donc avoir recours à un ordre différent. Sans cette analyse, une confusion assez répandue est d'assimiler l'absence de précision *a priori* avec une absence de précision *exhaustive* (cf. §III-B-p17). En effet cette variance infinie fut interprétée par la suite par différents auteurs [57][54][59][60] comme un résultat paradoxal qui contredisait les bonnes performances obtenues dans les radars de poursuite opérationnels, lesquels fonctionnaient déjà depuis 40 ans avant que Kanter ne publie ses résultats. Ils levèrent le paradoxe non pas en analysant l'information réellement contenue dans un moment absolu mais en montrant que les calculs de Kanter ne s'appliquaient pas aux systèmes réels. En effet dans un système réel :

- la loi d'inversion non approchée $\theta^{\widehat{MV}} = r_r^{-1} \left(r_r^{\widehat{MV}} \right)$ définit un domaine borné puisque limité par la taille du lobe principal de la voie somme Σ (cf. §VI-A-p54) [57][54],
- une étape de détection de la présence du signal utile précède l'estimation du rapport d'écartométrie associé [59][60],

par conséquent dans un tel système tout moment absolu est borné.

Une conséquence de cette analyse est qu'elle introduisit la première caractérisation [59][60] des problèmes conjoints Détection-Estimation associés à la mesure d'écartométrie Monopulse (cf. §VII-B-p63).

Pour illustrer le véritable sens d'une variance infinie, c'est à dire l'absence d'information sur la précision *a priori*, nous allons comparer les performances au sens de la précision *exhaustive* (4) :

$$\mathcal{R}[\hat{r}_r, \varepsilon] = P(|\hat{r}_r(\vec{v}) - r_r| > \varepsilon)$$

de l'estimateur $\widehat{S}r_r(\vec{v}) = \text{Re} \left\{ \frac{\Delta}{\Sigma} \right\}$ et d'un estimateur fictif Gaussien $\widehat{G}r_r(\vec{v})$ de variance égale à la BCR du paramètre r_r . Nous considérons le cas où le signal source se trouve dans la direction principale de rayonnement de la voie somme Σ ($\theta = 0$), ce qui correspond à la fois au maximum du RSB sur la voie Σ (RSB_Σ) et au cas où le rapport d'écartométrie est nul ($r = 0$). La comparaison des BCR du paramètre r_r pour estimateur avec ou sans biais (cf. Annexe XII-E-p123) en prenant en compte le biais de l'estimateur $\widehat{S}r_r(\vec{v})$ ($E[\widehat{S}r_r(\vec{v})] = \text{Re} \left\{ \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right\}$) fournit un critère pratique pour définir la zone de RSB_Σ à partir de laquelle cet estimateur peut être considéré sans biais, comme le montre la figure (10). Par exemple, cette zone correspondra à $RSB_\Sigma \geq 20dB$ si l'on se fixe comme critère une différence entre les 2 bornes $\leq 0.05dB$. Dans cette zone, l'EQM se réduit à la variance (cf. §III-N-p43) dont la borne inférieure est la BCR pour estimateur sans biais. Le calcul de $\mathcal{R}[\widehat{S}r_r, \varepsilon]$ s'obtient aisément par intégration numérique puisque la forme de la d.d.p. de $\widehat{S}r_r(\vec{v})$ est une loi de Student [51] :

$$\mathcal{R}[\widehat{S}r_r, \varepsilon] = \int_{r_r - \varepsilon}^{r_r + \varepsilon} f_{SW2}(\widehat{S}r_r) d\widehat{S}r_r$$

où :

$$\begin{aligned} f_{SW2}(\widehat{S}r_r) &= \frac{|\mathbf{C}|}{2(C_{11})^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{|\mathbf{C}|}{(C_{11})^2} + \left(\widehat{S}r_r - \text{Re} \left\{ \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right\}\right)^2}^3} \\ &= \frac{1 + s \vec{x}^H \vec{x}}{2(1+s)^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1+s \vec{x}^H \vec{x}}{(1+s)^2} + \left(\widehat{S}r_r - \frac{s}{s+1} r_r\right)^2}^3}, \quad s = RSB_\Sigma = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_n^2} \end{aligned}$$

soit encore pour $r = 0$:

$$f_{SW2}(\widehat{S}r_r) = \frac{1}{2(1+s)} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(1+s)} + \widehat{S}r_r^2}^3} \quad (140)$$

Le calcul de $\mathcal{R}[\widehat{G}r_r, \varepsilon]$ s'obtient par :

$$\mathcal{R}[\widehat{G}r_r, \varepsilon] = 1 - \frac{1}{2} \left[\text{erf} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{BCR(s)}} \right) - \text{erf} \left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{BCR(s)}} \right) \right], \quad s = RSB_\Sigma = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_n^2}$$

Les comparaisons de $\mathcal{R}[\widehat{S}r_r, \varepsilon]$ et $\mathcal{R}[\widehat{G}r_r, \varepsilon]$ en fonction de RSB_Σ pour $\varepsilon = 0.1$ et $\varepsilon = 0.01$ sont présentées figures (11) et (12). Elles illustrent parfaitement l'absence d'information sur la précision *a priori* dans ce cas, en ce sens que, bien que la variance de $\widehat{S}r_r(\vec{v})$ soit infinie quelque soit RSB_Σ , sa précision *exhaustive* relativement à $\widehat{G}r_r$ varie notablement avec RSB_Σ pour l'atteindre à fort RSB_Σ alors que $\widehat{G}r_r$ est un estimateur à variance minimale !!!

B. Caractérisation historique

Comme nous l'avons évoqué dans la section précédente (§VII-A-p62), la première caractérisation [59][60] des problèmes conjoints Détection-Estimation associés à la mesure d'écartométrie Monopulse fut une réponse au paradoxe apparent soulevé par Kanter. Elle s'inscrit dans la conception historique de cette mesure pour laquelle l'adjonction de la voie différence Δ était uniquement destinée à s'affranchir de la limite de résolution (lobe à 3dB) qu'impose le critère de Rayleigh lors de la réception d'un signal source sur une unique voie somme. Lorsque la détection est uniquement obtenue à partir de la voie somme Σ , alors la loi de détection optimale selon le critère de Neyman-Pearson (107) s'écrit (cf. Annexe XII-G-p133, §3.1) :

$$\sum_{i=1}^I \frac{|g_\Sigma(\theta)^* \vec{v}_i|^2}{|g_\Sigma(\theta)|^2} = \left\| \vec{\Sigma} \right\|_{H_0}^2 \underset{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} T \quad (141)$$

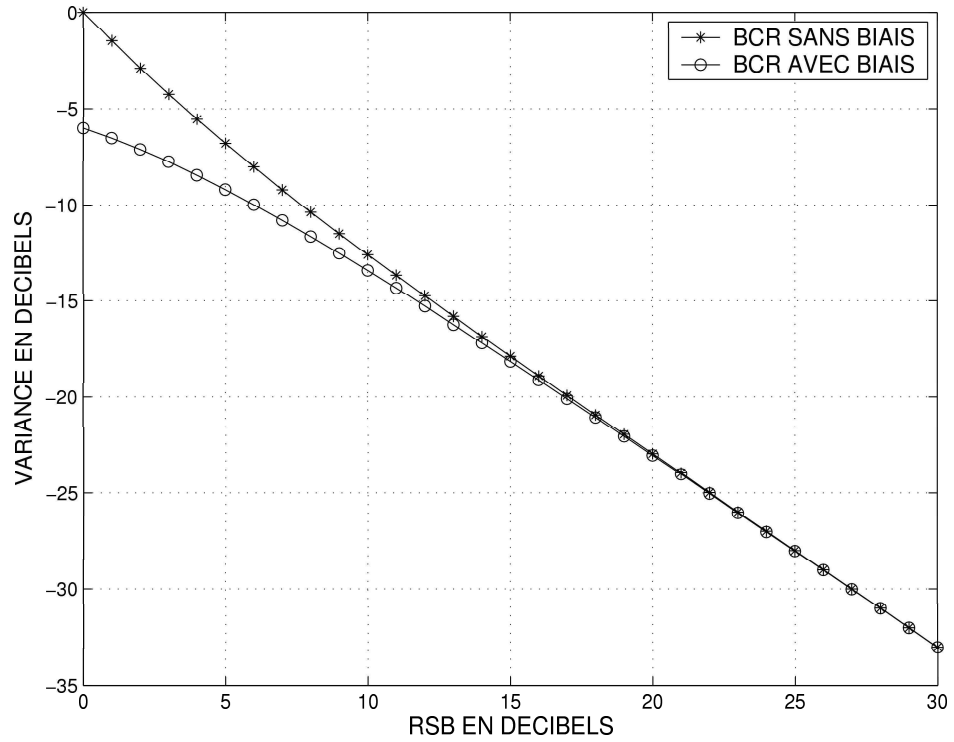


Fig. 10. Bornes de Cramer-Rao de $\hat{r}_r = \text{Re} \left\{ \frac{\Delta}{\Sigma} \right\}$ avec ou sans biais, signal source dans l'axe principal de la voie somme Σ

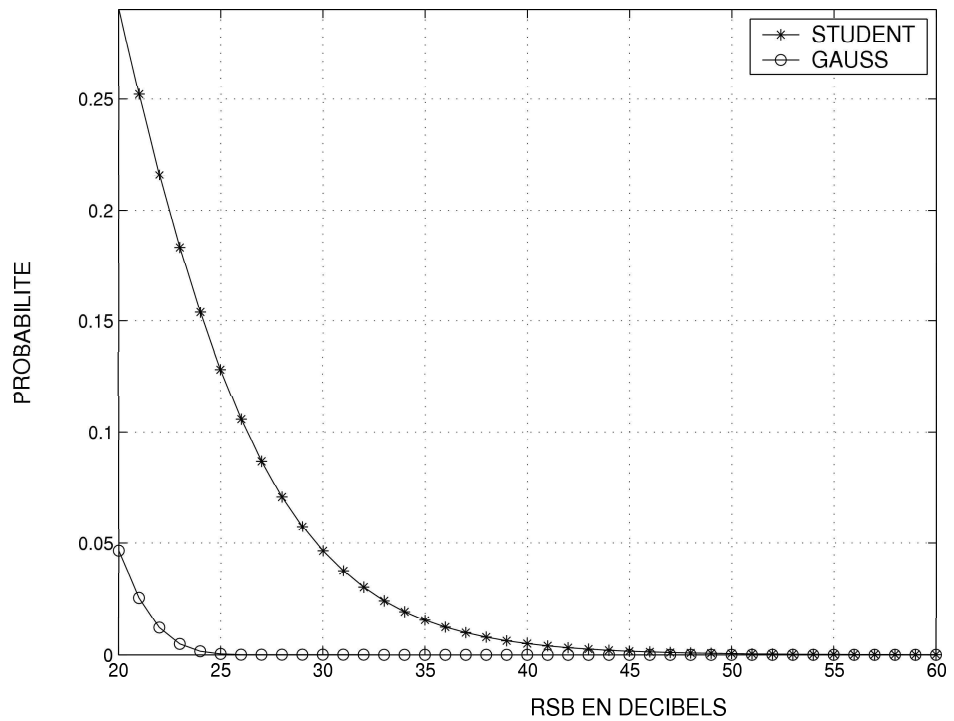


Fig. 11. Comparaison de la précision *exhaustive* ($\varepsilon = 0.1$) de $\hat{r}_r = \text{Re} \left\{ \frac{\Delta}{\Sigma} \right\}$, signal source dans l'axe principal de la voie somme Σ

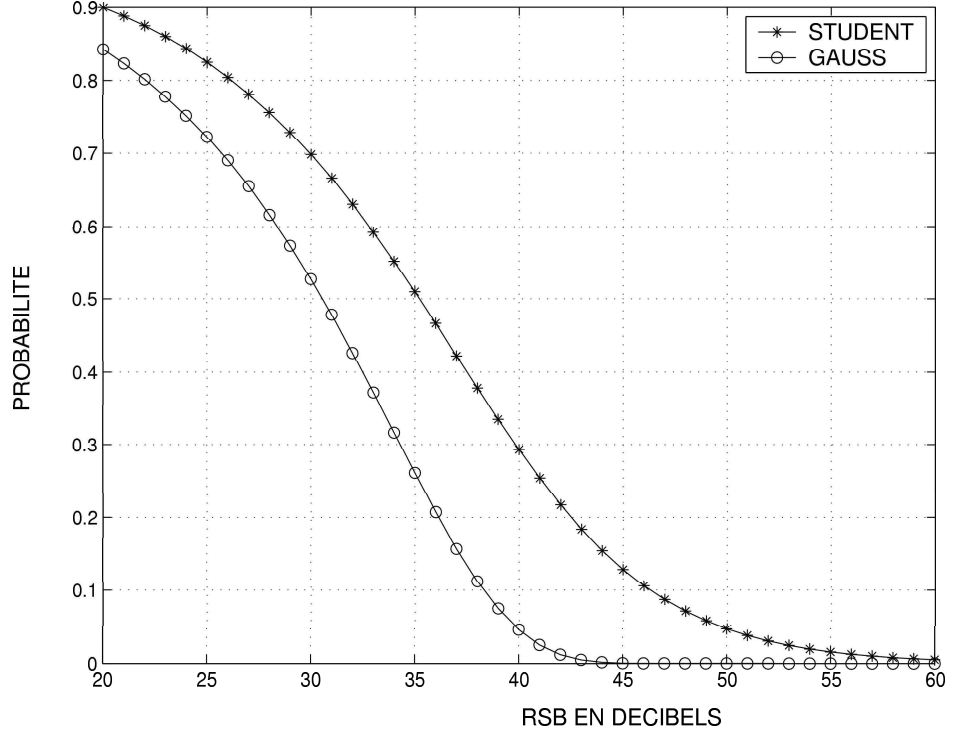


Fig. 12. Comparaison de la précision *exhaustive* ($\varepsilon = 0.01$) de $\hat{r}_r = \text{Re} \left\{ \frac{\Delta}{\Sigma} \right\}$, signal source dans l'axe principal de la voie somme Σ

ce qui définit un test observable. Utilisant les propriétés des densités conditionnelles de variables aléatoires mutuellement gaussiennes (cf. Annexe X-E-p84), Tullson [59] étend de façon simple tous les résultats établis par Kanter [51] (qui utilisa les fonctions caractéristiques) conditionné par l'événement $\mathcal{D} = \left\{ \left\| \vec{\Sigma} \right\|^2 \geq T \right\}$:

$$E[\hat{r}_r | \mathcal{D}] = \frac{C_{12}^*}{C_{11}}$$

$$Var[\hat{r}_r | \mathcal{D}] = \frac{|C|}{2P_D C_{11}} \int_{t \geq T} \frac{f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11})}{t} dt = \begin{cases} \frac{|C|}{2(C_{11})^2} e^{\frac{T}{C_{11}}} E_1\left(\frac{T}{C_{11}}\right), & I = 1 \\ \frac{|C|}{2(I-1)(C_{11})^2} \frac{e_{I-2}\left(\frac{T}{C_{11}}\right)}{e_{I-1}\left(\frac{T}{C_{11}}\right)}, & I \geq 2 \end{cases}$$

$$P_D = e^{\frac{-T}{C_{11}}} e_{I-1}\left(\frac{T}{C_{11}}\right)$$

où :

- $\hat{r}_r = \text{Re} \left\{ \frac{\vec{\Sigma}_H \vec{\Delta}}{\vec{\Sigma}_H \vec{\Sigma}} \right\}$
- le seuil de détection T est fixé par la Probabilité de Fausse Alarme désirée :

$$P_{FA} = e^{\frac{-T}{\sigma_{\vec{\Sigma}}^2}} e_{I-1}\left(\frac{T}{\sigma_{\vec{\Sigma}}^2}\right)$$

- $E_1(x)$ et $e_I(x)$ sont définies §I-C-p10

C. Caractérisation théorique : test d'hypothèses composites

Si nous avons qualifié d'historique la caractérisation précédente, c'est pour illustrer le poids de l'histoire dans certaines techniques et notamment la mesure monopulse. En effet jusqu'à nos travaux, le couple (détection sur

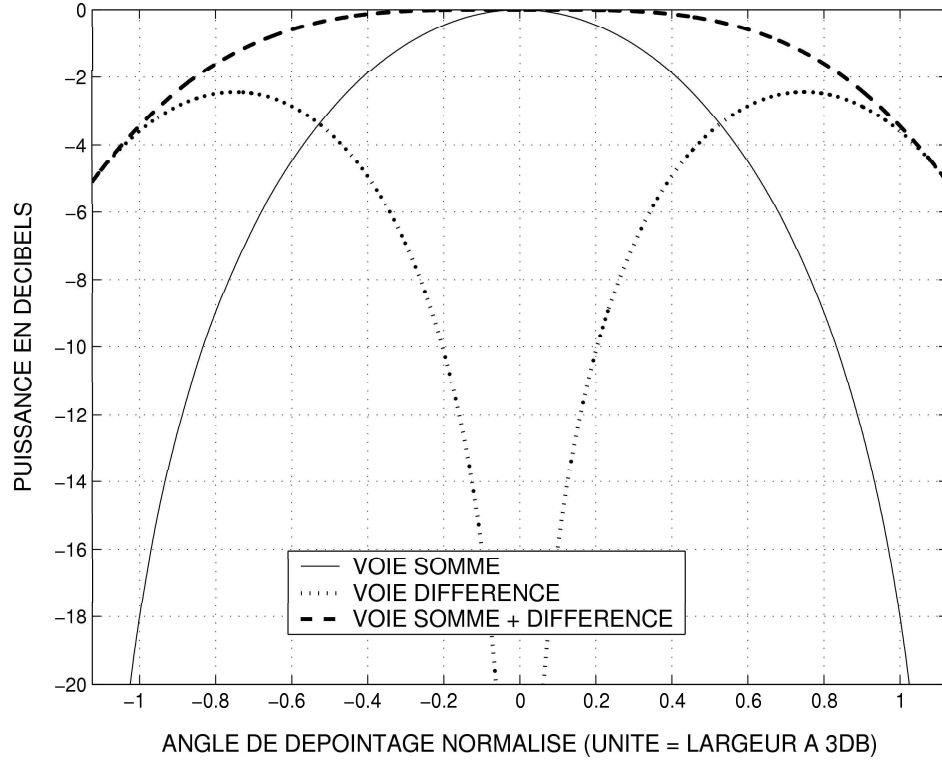


Fig. 13. Puissances (normalisées) reçues en Décibels sur les voies Σ , Δ , $\Sigma + \Delta$

la voie somme, estimateur approchée de Mosca (139)) n'avait jamais été remis en cause, par ce que l'approche "séparée" traditionnelle des problèmes de détection et d'estimation avait prévalu, alors que le simple fait d'ajouter un capteur change naturellement la nature du problème à traiter : les problèmes conjoints de Détection-Estimation d'un système à 2 capteurs. Et pourtant, sans même penser à une application systématique de la théorie de la détection optimale, revisiter les fondements théoriques de la mesure monopulse est suggérée assez intuitivement si l'on compare les puissances reçues sur les différentes voies (somme, différence, somme + différence) dans le lobe principal de la voie somme comme le montre la figure (13). Il apparaît alors assez évident qu'en dehors du lobe à 3dB de la voie somme Σ , la détection devrait se faire non plus sur la voie somme Σ mais sur la voie différence Δ , ou du moins à partir d'une mesure combinant les 2 puissances, comme leur somme par exemple. Cette intuition est confirmée par la comparaison des probabilités de détection obtenues pour les 3 tests de détection suivants : le test de Neyman-Pearson (142), le test sur la voie somme $\left\| \vec{\Sigma} \right\|^2 \geq T$, et le test sur la puissance totale $\left\| \vec{\Sigma} \right\|^2 + \left\| \vec{\Delta} \right\|^2 \geq T$. La figure (14) montre les résultats obtenus pour une $P_{FA} = 10^{-4}$ et une source de signal dont le RSB_{Σ} est adapté pour obtenir $P\left(\left\| \vec{\Sigma} \right\|^2 \geq T\right) = 0.9$ pour $\theta = 0$ (lorsque la source est dans l'axe principal de rayonnement), ce qui est en général l'exigence contractuelle pour un radar de poursuite.

Si l'amélioration globale de la probabilité de détection est flagrante, un doute subsiste néanmoins à ce stade de l'analyse sur les conséquences potentielles du test de détection "puissance totale" sur la précision de $\hat{r}_r = \text{Re}\left\{\frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}}\right\}$ en dehors du lobe à 3dB : le dénominateur ne va-t-il pas faire "diverger" la précision, annulant ainsi le bénéfice obtenu sur la probabilité de détection ?

C'est pour répondre à cette question et comparer les performances d'ensemble du couple solution historique (détecteur, estimateur de \hat{r}_r) avec d'autres couples solution que nous avons entrepris de revisiter le problème de la mesure de la direction d'arrivée par une antenne à 2 capteurs de type monopulse sous l'angle général des problèmes conjoints de Détection-Estimation.

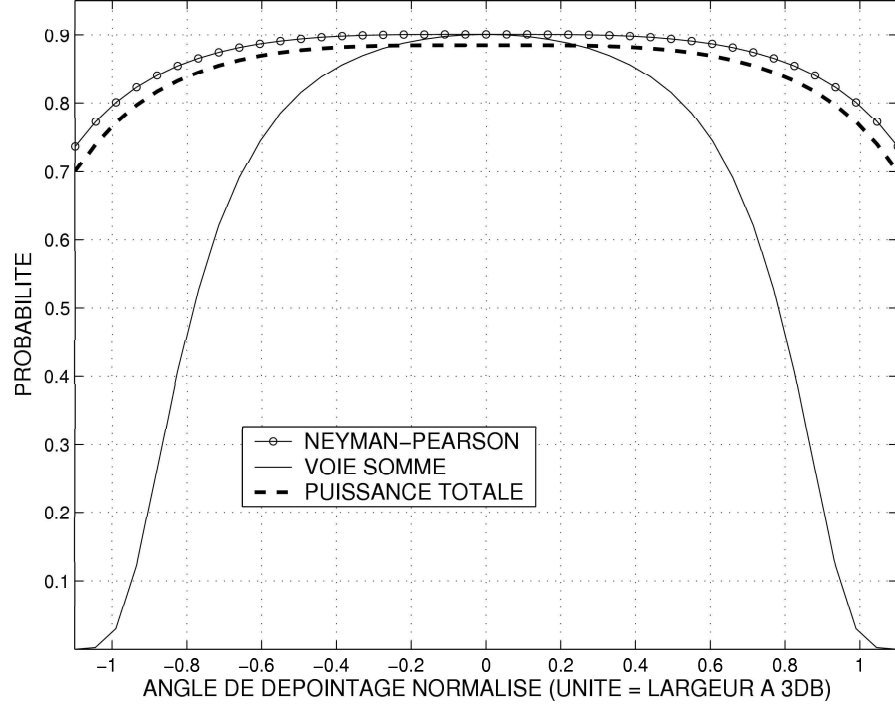


Fig. 14. Probabilités de Détection, $I = 1$, $P_{FA} = 10^{-4}$

En fait notre problème est l'estimation de \hat{r}_r sachant qu'il y a 2 modèles d'observation possibles (cf. §IV-p45) :

$$\begin{aligned}
 H_0 \text{ (bruit seul)} & : f_{SW2}(\vec{V} | H_0) = \frac{e^{-I \text{tr}(\mathbf{C}_{\vec{v}}^{-1} \widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}})}}{(\pi^2 |\mathbf{C}_{\vec{v}}|)^I}, \quad \mathbf{C}_{\vec{v}} = \sigma_{\vec{n}}^2 \mathbf{Id}_2 \\
 H_1 \text{ (bruit et signal)} & : f_{SW2}(\vec{V} | H_1) = \frac{e^{-I \text{tr}(\mathbf{C}_{\vec{v}}^{-1} \widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}})}}{(\pi^2 |\mathbf{C}_{\vec{v}}|)^I}, \quad \mathbf{C}_{\vec{v}} = \sigma_{\beta}^2 \vec{x} \vec{x}^H + \sigma_{\vec{n}}^2 \mathbf{Id}_2
 \end{aligned}$$

où $\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \vec{v}_i \vec{v}_i^H$. La règle de détection optimale de Neyman-Pearson (cf. §IV-B-p46) s'écrit alors (cf. Annexe XII-G-p133, §3.1) :

$$\text{Tr} \left(\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}}^{-1} \frac{\vec{g}(\theta) \vec{g}(\theta)^H}{\|\vec{g}(\theta)\|^2} \right) = \sum_{i=1}^I \left| \frac{\vec{g}(\theta)^H \vec{v}_i}{\|\vec{g}(\theta)\|} \right|^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T \quad (142)$$

et elle est caractérisée par :

$$P_{FA} = e^{-\frac{T}{\sigma_{\vec{n}}^2}} e_{I-1} \left(\frac{T}{\sigma_{\vec{n}}^2} \right) \quad (143a)$$

$$P_D = e^{-\frac{T}{C_{11}}} e_{I-1} \left(\frac{T}{C_{11}} \right), \quad C_{11} = \sigma_{\vec{n}}^2 + \sigma_{\beta}^2 \|\vec{x}(\theta)\|^2 \quad (143b)$$

Pour obtenir une règle de décision observable à partir du test clairvoyant de Neyman-Pearson (142), on peut remplacer les paramètres inconnus ($\sigma_{\vec{n}}^2$, σ_{β}^2 , $r(\theta) = r_r(\theta) + jr_j(\theta)$) par leur estimateur au sens du MV sous chacune des hypothèses (cf. §V-A-p48) et obtenir ainsi le test du Rapport de Vraisemblance Généralisé (cf. Annexe

XII-G-p133, §3.2) :

$$\frac{\text{Tr}(\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}}) + \sqrt{\text{Tr}(\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}})^2 - 4|\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}}|}}{2\widehat{\sigma}_{\vec{n}}^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} T, \quad \begin{cases} \widehat{\sigma}_{\vec{n}}^2 = \sigma_{\vec{n}}^2 & , \text{ si } \sigma_{\vec{n}}^2 \text{ connue} \\ \widehat{\sigma}_{\vec{n}}^2 = \frac{\text{Tr}(\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}}) - \sqrt{\text{Tr}(\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}})^2 - 4|\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}}|}}{2} & , \text{ si } \sigma_{\vec{n}}^2 \text{ inconnue} \end{cases} \quad (144)$$

ainsi que l'estimateur au sens du MV de \widehat{r}_r (139) :

$$\widehat{r}_r^{MV} = \text{Re} \left\{ \frac{\text{Tr}(\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}}) + \sqrt{\text{Tr}(\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}})^2 - 4|\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}}|} - 2\|\vec{\Sigma}\|^2}{2\vec{\Delta}^H \vec{\Sigma}} \right\} \quad (145)$$

Le couple (détecteur (144), estimateur de \widehat{r}_r (145)) forme la solution au sens du MV des problèmes conjoints Détection-Estimation, solution alternative à la solution historique.

Si une comparaison des performances des 2 solutions est toujours possible de nos jours par simulation de Monte-Carlo à grand nombre de tirages, il est toujours néanmoins intéressant d'obtenir une formulation analytique des performances en détection et en estimation de chaque couple solution candidat. La complexité du couple solution au sens du MV ne permet pas d'obtenir facilement une caractérisation analytique. Aussi, nous nous sommes attachés à obtenir un couple solution approché basé sur une approximation différente de celle de Mosca et respectant la forme symétrique en $\vec{\Sigma}$ et $\vec{\Delta}$ du couple solution au sens du MV (cf. Annexe XII-G-p133, §3.3). Lorsque la puissance de bruit est connue, cette approximation prend la forme suivante :

$$\text{Tr}(\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}}) = \|\vec{\Sigma}\|^2 + \|\vec{\Delta}\|^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} T \quad \text{et} \quad \widehat{r}_r = \text{Re} \left\{ \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \right\} \quad (146)$$

Finalement, hormis le test de détection, l'estimateur de \widehat{r}_r est celui déjà dérivé par Mosca : nous appellerons par la suite ce couple solution (détecteur, estimateur) le couple Mosca-Puissance. Le couple historique :

$$\|\vec{\Sigma}\|^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} T \quad \text{et} \quad \widehat{r}_r = \text{Re} \left\{ \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \right\} \quad (147)$$

sera appelé couple Mosca-Somme et le couple au sens du MV sera appelé couple MV.

La caractérisation analytique du couple Mosca-Puissance est détaillée en Annexe XII-D-p118. Les principaux résultats sont les suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \left\{ \vec{V} \mid \|\vec{\Sigma}\|^2 + \|\vec{\Delta}\|^2 \geq T \right\} \\ P_{FA} &= e^{\frac{T}{\sigma_{\vec{n}}^2}} e_{2I-1} \left(\frac{T}{\sigma_{\vec{n}}^2} \right) \\ P(\mathcal{D}) &= \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11}) dx dt \\ E[\widehat{r} \mid \mathcal{D}] &= \frac{1}{P(\mathcal{D})} \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11}) dx dt \\ E[|\widehat{r}|^2 \mid \mathcal{D}] &= \frac{1}{P(\mathcal{D})} \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}} \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) \frac{f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11})}{t} dx dt \\ &\quad + \frac{1}{P(\mathcal{D})} \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11}) dx dt \end{aligned}$$

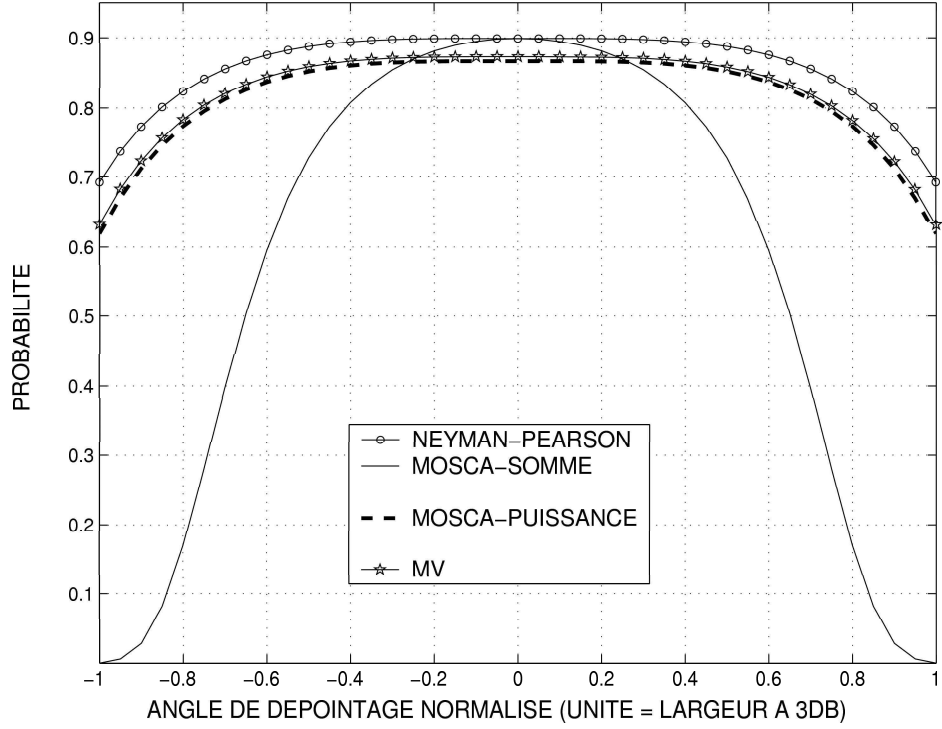


Fig. 15. Probabilités de Détection, $I = 2$, $P_{FA} = 10^{-4}$

$$E[\hat{r}^2 | \mathcal{D}] = \frac{1}{P(\mathcal{D})} \left(\frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right)^2 \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11}) dx dt$$

où $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\vec{\nu}} = \sigma_{\beta}^2 \vec{x} \vec{x}^H + \mathbf{C}_{\vec{n}}$.

Le calcul de $E[\hat{r}_r | \mathcal{D}]$ et $Var[\hat{r}_r | \mathcal{D}]$ s'en déduit alors aisément, notamment en exploitant l'identité :

$$\text{Re}\{\hat{r}\}^2 = \frac{1}{2} \left[|\hat{r}|^2 + \text{Re}\{\hat{r}^2\} \right] \quad (148a)$$

$$\text{Var}[\text{Re}\{\hat{r}\} | \mathcal{D}] = E[\text{Re}\{\hat{r}\}^2 | \mathcal{D}] - \text{Re}\{E[\hat{r} | \mathcal{D}]\}^2 \quad (148b)$$

On remarquera que le calcul de $E[\hat{r} | \mathcal{D}]$, $E[|\hat{r}|^2 | \mathcal{D}]$, $E[\hat{r}^2 | \mathcal{D}]$ lorsque $I \geq 2$ se réduit au calcul d'intégrales simples de fonctions bornées sur $[0, T]$. La seule difficulté survient lorsque $I = 1$ pour le calcul de $E[|\hat{r}|^2 | \mathcal{D}]$ qui fait apparaître l'intégrale d'une fonction non bornée sur $[0, T]$ (cf. Annexe XII-D-p118).

Finalement il reste à comparer nos 3 couples solutions pour vérifier si notre intuition a été fructueuse. Pour cela nous nous plaçons dans le cas de référence pour un radar moderne : le radar multifonctions qui doit assurer non seulement la veille (détection) à longue portée mais également la poursuite d'un certain nombre de cibles et la conduite de tir de missiles pour intercepter les cibles menaçantes. Dans ce type de radar "à tout faire", la principale contrainte est le temps radar, c'est à dire la cadence à laquelle le radar doit renouveler l'ensemble de ses informations. Pour un radar multifonctions, il est rare que cette contrainte de temps lui permettent de réaliser plus de 2 observations par cible poursuivie pour calculer la mesure du rapport d'écartométrie. Nous nous placerons donc dans ce cas ($I = 2$) qui représentera par la suite notre situation opérationnelle de référence. Pour un tel radar, la P_{FA} standard au niveau de la mesure d'écartométrie est $P_{FA} = 10^{-4}$ et les exigences contractuelles de performance en précision angulaire portent sur une source de signal dont le RSB_{Σ} est adapté pour obtenir $P\left(\left\|\vec{\Sigma}\right\|^2 \geq T\right) = 0.9$ pour $\theta = 0$ (lorsque la source est dans l'axe principal de rayonnement).

Les résultats sont présentés figures (15) et (16) qui représentent respectivement la probabilité de détection et la REQM (racine carré de l'EQM) obtenue pour chaque couple (détecteur, estimateur de r_r). Les performances

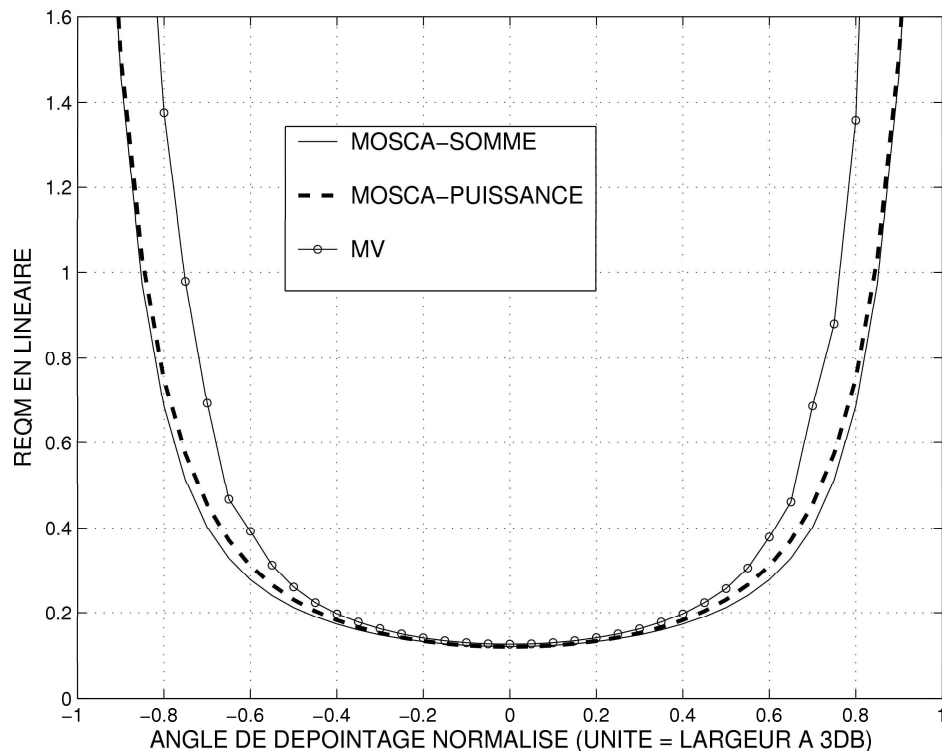


Fig. 16. \sqrt{EQM} de $\hat{r}_r = \text{Re} \left\{ \frac{\Delta}{\Sigma} \right\}$, $I = 2$, $P_{FA} = 10^{-4}$

des solutions Mosca-Puissance et Mosca-Somme ont été obtenues à l'aide des expressions analytiques précédentes, alors que celles de la solution MV ont été obtenues par tirages de Monté-Carlo (10^9 tirages pour la P_{FA} et 10^6 tirages pour la P_D et la REQM).

Ils montrent clairement la supériorité du couple Mosca-Puissance sur le couple historique Mosca-Somme en ce sens, que pour une EQM comparable, le couple Mosca-Puissance fournit une performance globale en probabilité de détection - sur le lobe principal de la voie somme - bien supérieure. Dans notre cas de figure ($I = 2$), la solution Mosca-Puissance fournit même une meilleure solution que la solution MV, prouvant une fois de plus que le Test du Rapport de Vraisemblance Généralisé ne conduit pas nécessairement au couple (détecteur, estimateur) optimal.

D. Caractérisation théorique : BCR conditionnée par un test de détection

Historiquement [3][4][5][6], les bornes inférieures de l'EQM locales furent introduites pour évaluer la précision d'estimation *a priori* (cf. §III-E-p23) potentiellement accessible pour un problème d'estimation donné et par conséquent, pour mesurer la précision relative d'un estimateur observable solution possible du problème d'estimation. Néanmoins, à partir des années 70 [12][13][14] une nouvelle application pour ces bornes apparut : la prédiction de la précision *a priori* des estimateurs au sens du MV (cf. §III-O.1-p43). En effet, si cette stratégie d'estimation est très populaire, parce qu'elle est généralement simple à mettre en oeuvre (filtre adapté) et qu'elle bénéficie de l'efficacité asymptotique (en nombre d'observation ou en RSB) lorsque le nombre de paramètres est fini (cf. §III-O.1-p43), le calcul analytique exact de son EQM est généralement impossible. L'avantage de la plupart des bornes inférieures de l'EQM locale est qu'elles bénéficient d'une expression analytique (cf. de §III-H-p27 à §III-K-p34) : on peut donc espérer pouvoir les calculer pour le problème d'estimation considéré. Ainsi depuis les années 70, de nombreux travaux [24][28][34][23][40] ont été consacrés à la mesure de la valeur "prédictive" - lower bound tightness - associable aux différentes bornes inférieures. Ces travaux ont montré que l'ensemble des bornes inférieures de l'EQM locale pour estimateurs sans biais pouvait être divisé en 2 classes : la classe des bornes pour "Erreur Faible" - Small Error bounds - et la classe des bornes pour "Erreur Forte" - Large-Error bounds - dont les représentant caractéristiques sont respectivement la BCR et la BBK. En effet, dans les problèmes

d'estimation non linéaires en les paramètres à estimer, trois régions comportementales peuvent être distinguées. La région dite "Asymptotique", dans laquelle l'EQM est faible et généralement proche des bornes pour "Erreur Faible" et notamment la BCR. La région dite "a priori" correspondant soit à un faible nombre d'observations ou à un faible RSB. Dans cette région le signal d'intérêt ne participe que très faiblement aux observations si bien que la valeur de l'EQM est proche de celle obtenue en l'absence de signal, ce qui constitue en général l'information a priori du problème (hypothèse H_0). Enfin, entre ces deux régions extrêmes se trouve la région dite "de transition". Dans cette région, l'EQM des estimateurs au sens du MV s'éloigne rapidement des bornes pour "Erreur Faible" et fait souvent apparaître un effet de "décrochement" (dégradation brutale de la précision) dont rendent compte les bornes pour "Erreur Forte". Dans le cas du filtre adapté, ce comportement est imputable [12][16] à l'exploration des lobes secondaires de la fonction d'ambiguïté lorsque le RSB devient faible.

Toutefois, l'ensemble de ces résultats a toujours été établi en supposant que le modèle d'observation était unique. Or dans la plupart des domaines scientifiques et d'ingénierie, nombre de systèmes mettent en oeuvre un test d'hypothèses de modèle d'observation. Comme nous l'avons déjà évoqué (cf. §IV-A-p45), un cas pratique courant (radar, sonar, télécoms, ...) consiste en l'observation d'un signal d'intérêt intermittent mélangé à du bruit. Il s'agit alors de définir une règle de décision - si possible optimale - qui déterminera le sous-ensemble des observations \mathcal{D} à partir duquel les paramètres recherchés seront estimés (cf. §IV-B-p46, §V-A-p48). Ainsi d'un point de vue purement théorique, toute caractérisation des performances en estimation doit tenir compte de ce changement d'Univers d'observation, ce qui en probabilité correspond au conditionnement par un événement \mathcal{D} . Il est clair que le conditionnement peut apparaître comme une difficulté majeure car il faut non seulement savoir exprimer la d.d.p. conditionnelle mais également pouvoir calculer les différentes bornes inférieures. C'est pourquoi nous limiterons notre caractérisation à l'étude des BCR conditionnelles. Outre le point de vue théorique, l'intérêt majeur de la prise en compte du conditionnement est l'espoir intuitif que le test de détection devrait permettre d'étendre le domaine "prédictif" des bornes pour "Erreur Faible". En effet, un tel test devrait majoritairement sélectionner les observations à forte énergie constituées de signal et de bruit, et rejeter les observations à faible énergie constituées de bruit seul qui dégradent l'EQM et l'éloignent des bornes pour "Erreur Faible".

Une application pratique mettant en oeuvre un test d'hypothèses binaires est par exemple la mesure de la direction d'arrivée par une antenne monopulse. La section précédente §VII-C-p65 nous a permis d'établir la forme générale, au sens du MV, du couple solution observable (détecteur, estimateur) des problèmes conjoints Détection-Estimation. Dans le cas particulier mono-observation ($I = 1$) cette solution coïncide avec la forme approchée que nous avons pu caractérisée analytiquement (146) :

$$|\Sigma|^2 + |\Delta|^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T \quad \text{et} \quad \widehat{r_r^{MV}} = \text{Re} \left\{ \frac{\Delta}{\Sigma} \right\},$$

elle constituera donc notre cas d'étude pour valider ou infirmer notre intuition. Le calcul de la BCR de r_r est détaillée en Annexe XII-F-p128 dans le cas général $I \geq 1$. Bien que le calcul aurait pu être conduit en utilisant le formalisme réel (cf. §III-L.2-p37), la forme de la d.d.p. des observations (134) rend le formalisme complexe (cf. §III-M-p38) plus approprié. La puissance de bruit ($\sigma_{\vec{n}}^2$) étant supposée connue, le vecteur de paramètres inconnus se réduit à $\vec{\theta} = \left(\sigma_{\beta}^2, r, r^H \right)^T$, ce qui offre un exemple de calcul des BCR dans le cas d'un vecteur de paramètres hybride, c'est à dire composé de paramètres réels et complexes. Nous considérons le cas où le signal source se trouve dans la direction principale de rayonnement de la voie somme Σ ($\theta = 0$), ce qui correspond à la fois au maximum du RSB sur la voie Σ (RSB_{Σ}) et au cas où le rapport d'écartométrie est nul ($r = 0$).

Les résultats les plus significatifs sont fournis par les figures (17), (18) et (19). Sur ces courbes sont représentées la REQM de $\widehat{r_r^{MV}} = \text{Re} \left\{ \frac{\Delta}{\Sigma} \right\}$ et les BCR (conditionnée ou non) de r_r pour un estimateur localement sans biais en fonction du RSB sur la voie somme Σ , pour une P_{FA} donnée. En effet, dans le problème du test d'hypothèses binaires, la P_{FA} est la grandeur d'importance pratique car elle représente la proportion de bruit seul capable de franchir l'étape de détection et qui sera transmise au processus d'estimation. A chaque P_{FA} ($0.9999, 10^{-4}, 10^{-10}$) correspond un seuil de détection T (0.01, 5.9, 13.2) calculé à l'aide de la relation :

$$P_{FA} = e^{-\frac{T}{\sigma_{\vec{n}}^2}} e_1 \left(\frac{T}{\sigma_{\vec{n}}^2} \right)$$

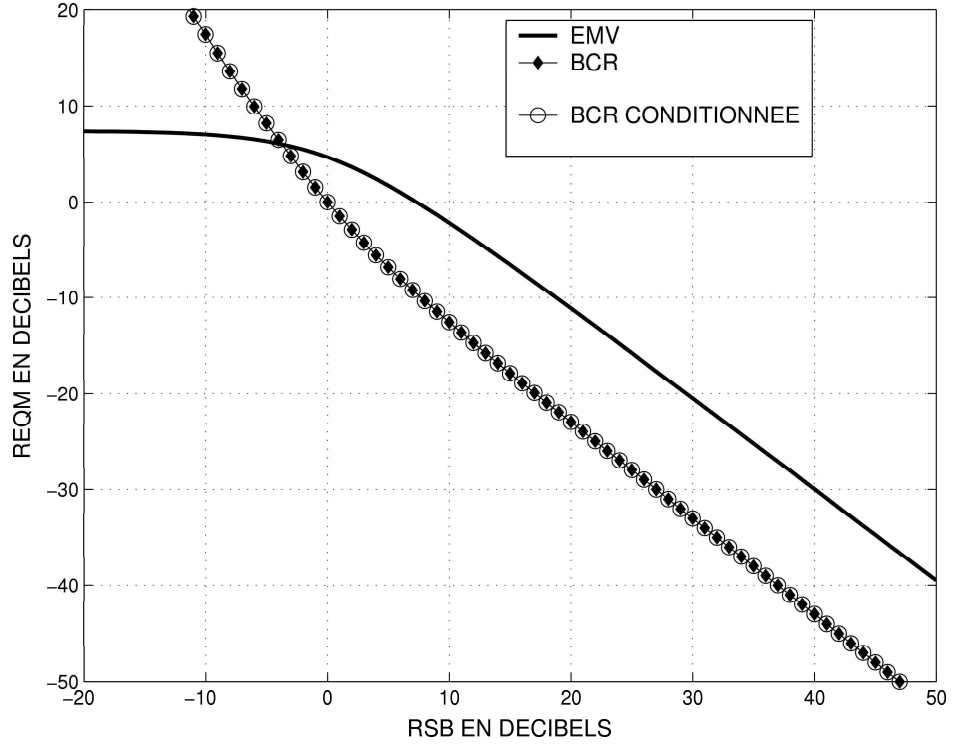


Fig. 17. \sqrt{EQM} et BCR de $\widehat{r_r^{MV}} = \text{Re} \left\{ \frac{\Delta}{\Sigma} \right\}$, $I = 1$, $P_{FA} = 0.9999$

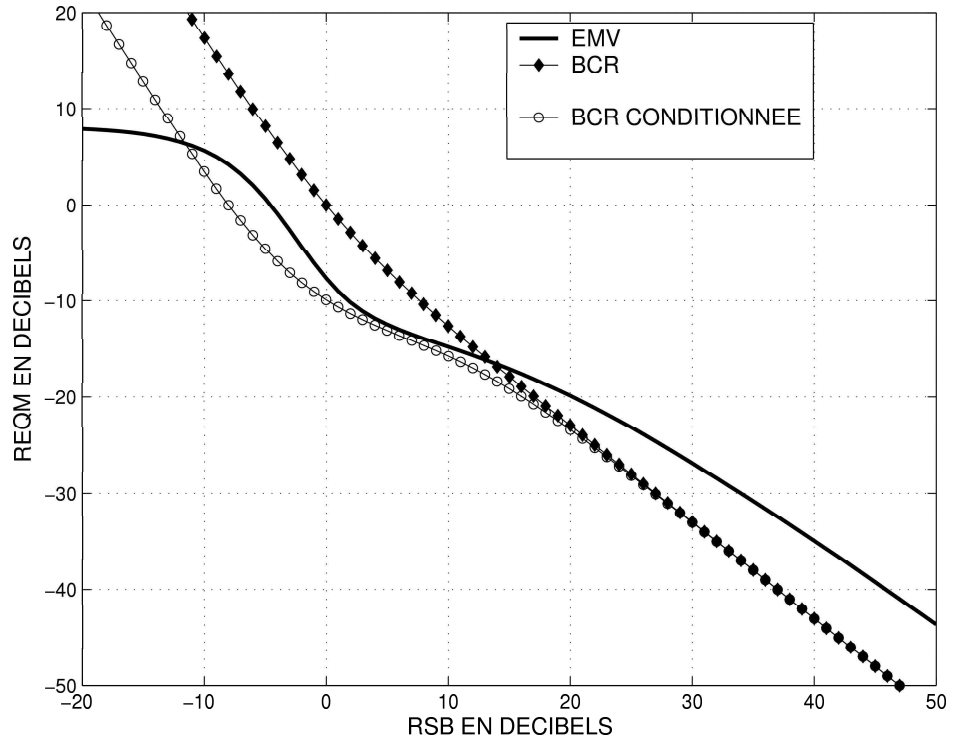


Fig. 18. \sqrt{EQM} et BCR de $\widehat{r_r^{MV}} = \text{Re} \left\{ \frac{\Delta}{\Sigma} \right\}$, $I = 1$, $P_{FA} = 10^{-4}$

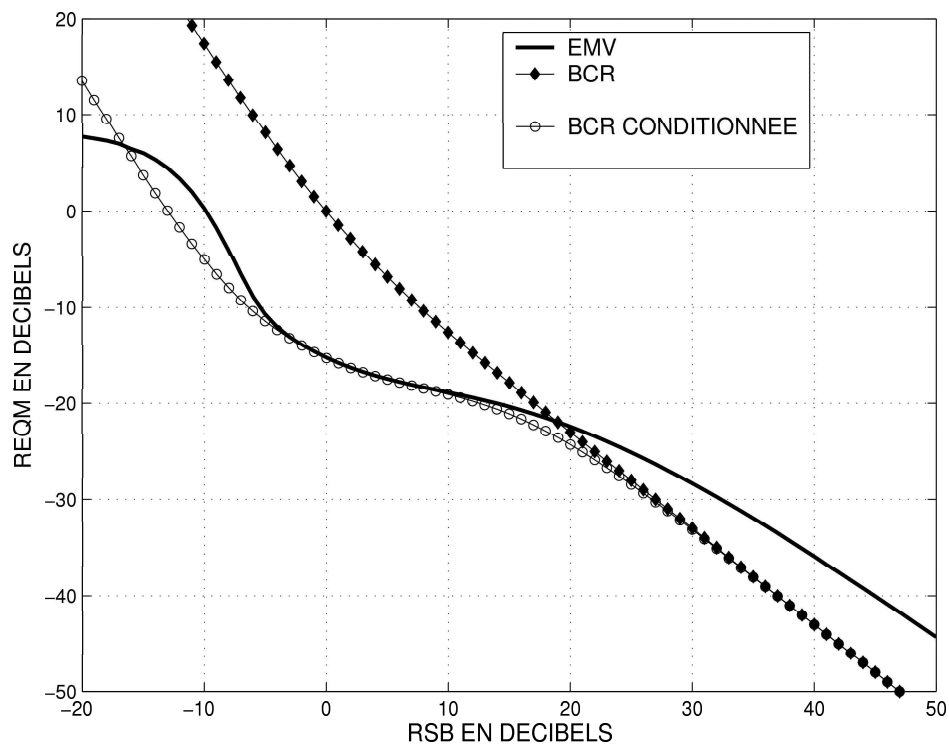


Fig. 19. \sqrt{EQM} et BCR de $\widehat{r}_r^{MV} = \text{Re} \left\{ \frac{\Delta}{\Sigma} \right\}$, $I = 1$, $P_{FA} = 10^{-10}$

Dans notre exemple, nous sommes dans le cas un peu particulier où la région dite "de transition" ne présente pas d'effet de décrochement (cf. figure (17)) en l'absence de conditionnement ($P_{FA} = 0.9999$). En effet dans ce cas, l'estimateur au sens du MV du paramètre recherché r_r présente une d.d.p. unimodale (loi de Student (140)) de moyenne constante nulle et de variance lentement décroissante en fonction du RSB. Néanmoins cet exemple permet déjà de formuler certaines considérations d'ordre général.

La première, conforme à la théorie, est la nécessité de prendre en compte le conditionnement par le test de détection pour qu'une borne inférieure donnée conserve sa propriété de bonne inférieure pour les problèmes conjoints Détection-Estimation. Ceci est parfaitement bien illustré pour le domaine de RSB $[-10, 10] dB$ sur les figures (18) et (19) où seule la forme conditionnée de la BCR est pertinente.

La seconde est la confirmation de notre intuition : la prise en compte d'un test de détection peut notablement modifier le comportement des bornes pour "Erreur Faible" dans la région de transition. Le test de détection joue le rôle de sélecteur des observations de plus fortes énergies qui contiennent nécessairement le signal utile (tant que $P_D \gg P_{FA}$), puisque les observations ne contenant que du bruit ne peuvent franchir ce seuil que dans la proportion fixée par la P_{FA} . Ce mécanisme a globalement pour effet d'améliorer la représentativité de la BCR conditionnée sur ce sous-ensemble d'observations et il est parfaitement illustré par les figures (18) et (19) où l'accroissement du seuil de détection étend progressivement le domaine "prédictif" de la BCR conditionnée. Toutefois nous ne nous attendions pas à une telle prédictivité de la BCR dans la zone de transition. En effet, comme \widehat{r}_r^{MV} suit une loi de Student, il ne peut être efficace (atteindre la BCR, cf. §III-O.1-p43) à fort RSB. Il est par conséquent assez original d'exhiber un estimateur au sens du MV asymptotiquement (en le seuil de détection) efficace au voisinage de $0dB$! Ceci révèle simplement que le conditionnement par un test de détection peut modifier notablement les conditions requises pour atteindre la BCR. Ce phénomène est illustrée également par la figure (20) qui représente, pour un RSB donné ($0dB$) dans la région de transition, la convergence de \widehat{r}_r^{MV} vers un estimateur efficace à mesure que le seuil de détection augmente. L'analyse théorique de ce phénomène est un sujet pour de futures recherches, car il relève d'un problème plutôt complexe consistant à rechercher les d.d.p $f_\theta(\vec{x})$ vérifiant (cf. §III-O.3-p44)

$$\widehat{\theta}_{opt}(\vec{x}) - \theta = F(\theta | \mathcal{D})^{-1} \left[\frac{\partial \ln f_\theta(\vec{x})}{\partial \theta} - \frac{\partial \ln P_D(\theta)}{\partial \theta} \right], \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{D} \subset \Omega$$

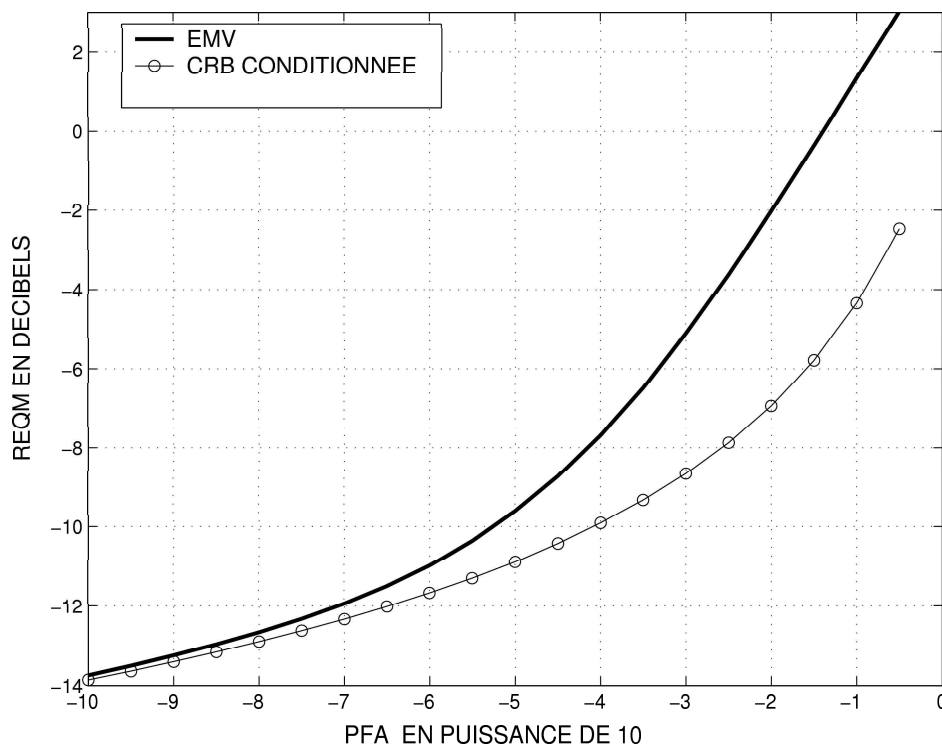


Fig. 20. Efficacité conditionnelle de $\widehat{r_r^{MV}} = \text{Re} \left\{ \frac{\Delta}{\Sigma} \right\}$, en fonction de la P_{FA} , $I = 1$

La troisième est qu'il existe une limite à la pertinence de l'information fournie par la BCR même conditionnée pour les estimateurs sans biais à faible RSB, puisqu'il apparaît clairement (figures (18) et (19)) que l'accroissement du seuil de détection n'a pratiquement aucun effet sur la valeur "prédictive" de la BCR dans la région dite "a priori". La principale raison est qu'un estimateur localement sans biais d'un paramètre du signal source n'existe généralement pas lorsque le RSB tend vers 0. Pour dépasser cette limitation, on peut avoir recours à la BCR avec biais (cf. §III-N-p43), si ce dernier est connu. Comme le montre la figure (21) ce raffinement théorique permet de restituer à la BCR avec biais sa propriété de borne inférieure, sans toutefois prolonger sa valeur "prédictive" à la région dite "a priori". Malheureusement le biais dépend toujours de l'estimateur spécifique considéré et n'est en général pas connu en pratique, ce qui limite l'utilisation pratique de la BCR avec biais.

Enfin, on peut se demander si l'absence de valeur prédictive de la BCR conditionnée pour estimateur localement sans biais dans la région "a priori" constitue un réel problème pratique pour la caractérisation des problèmes conjoints Détection-Estimation. En effet, d'un point de vue opérationnel, la caractérisation des performances en estimation n'a d'intérêt que si le signal utile a été détecté avec une probabilité suffisamment grande représentant un objectif opérationnel. Généralement, en deçà de cette probabilité le signal d'intérêt est tout simplement considéré comme non détecté. A titre d'exemple, convenons de définir le domaine de valeurs de RSB où l'estimateur $\widehat{r_r^{MV}}$ est localement sans biais comme le domaine où la BCR conditionnée avec biais et la BCR conditionnée sans biais sont identiques à $0.1dB$ près. La borne inférieure de ce domaine (RSB minimal) est représentée en fonction de la P_{FA} figure (22). La probabilité de détection P_D obtenue pour ce RSB minimal est représentée en fonction de la P_{FA} figure (23). Ces 2 figures montrent que :

- lorsque les observations sont conditionnées par un événement, la qualité sans biais (localement ou globalement) devient également une qualité "conditionnelle" : son domaine de validité dépend du test considéré et de son point de fonctionnement (P_{FA}),
- si les probabilités de détection opérationnelles de notre problème sont ≥ 0.1 , alors dès que l'exigence sur la P_{FA} est $P_{FA} \leq 10^{-2.5}$ l'estimateur $\widehat{r_r^{MV}}$ est toujours sans biais et le problème d'estimation est parfaitement caractérisé par la BCR conditionnée sans biais.

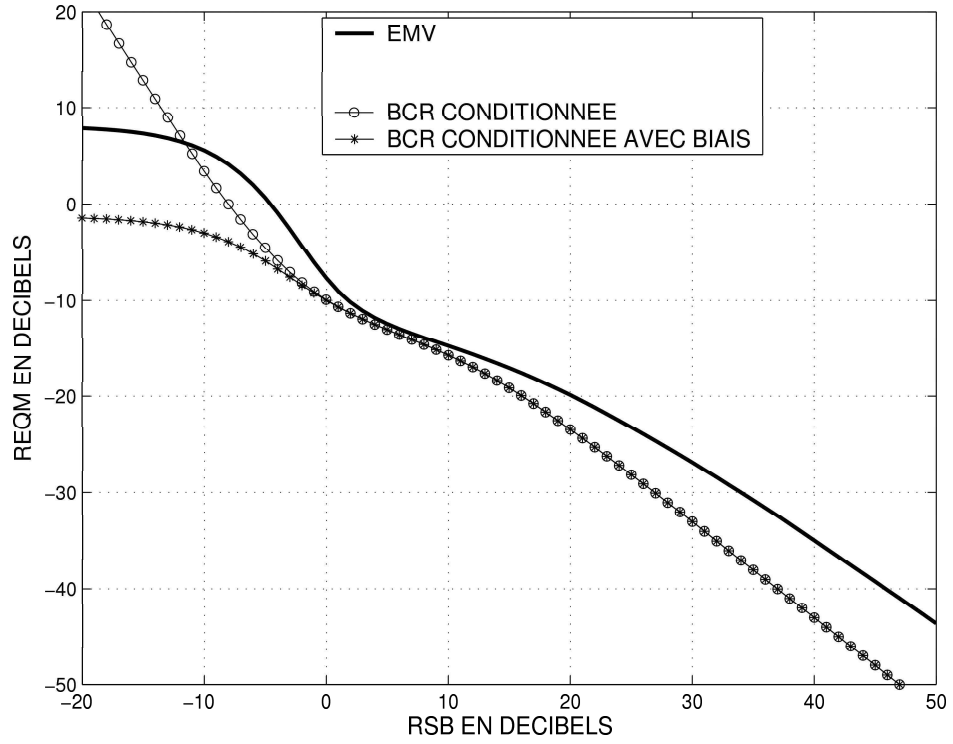


Fig. 21. \sqrt{EQM} et BCR avec et sans biais de $\widehat{r}_r^{MV} = \text{Re} \left\{ \frac{\Delta}{\Sigma} \right\}$, $I = 1$, $P_{FA} = 10^{-4}$

Cet exemple montre que les contraintes opérationnelles dans la pratique peuvent exclure la région dite "a priori" de la zone où la prédiction des performances en estimation présente un intérêt pratique. Par conséquent, il est donc opérationnellement plus intéressant de porter ses efforts de caractérisation sur la prise en compte du conditionnement des observations et de son effet sur la région dite "transitoire" que sur la description fine des performances en estimation dans la région "a priori".

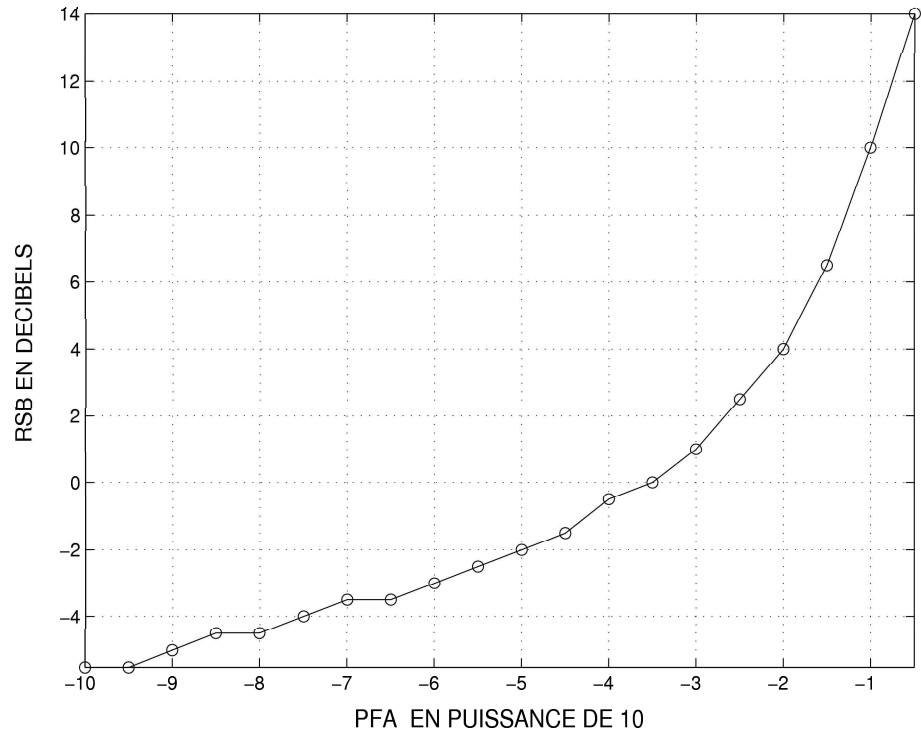


Fig. 22. RSB minimal pour un estimateur localement sans biais en fonction de la P_{FA} , $I = 1$

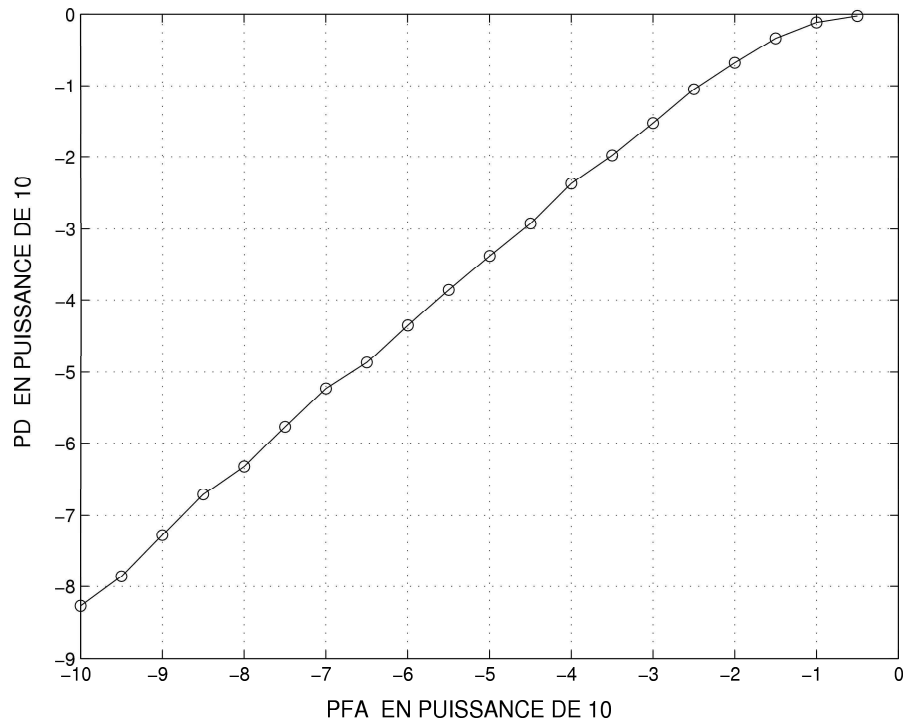


Fig. 23. P_D obtenue pour la valeur du RSB minimal définissant un estimateur localement sans biais, en fonction de la P_{FA} , $I = 1$

VIII. COMPLÉMENTS SUR LA CARACTÉRISATION STATISTIQUE DU RAPPORT D'ÉCARTOMÉTRIE $\hat{r} = \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}}$

A. Rappel de l'état de l'art sur la caractérisation statistique de $\hat{r} = \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}}$

Lorsque nous avons commencé notre recherche, les caractérisations statistiques suivantes avaient été établies :

- le calcul de la d.d.p de $\text{Re}\{\hat{r}\}$ pour I observations indépendantes, lorsque les signaux observés résultent du mélange d'un signal source non fluctuant (SW0) et d'un bruit gaussien éventuellement corrélé spatialement. Ce calcul fut établi par Kanter en passant par les fonctions caractéristiques [52]. Malheureusement, la forme de la solution obtenue est peu pratique, si bien que le calcul des moments d'ordre 1 et 2 (moyenne et variance) n'a pu être réalisé que dans le cas mono-observation ($I = 1$). De plus, cette technique interdit toute prise en compte d'un conditionnement des observations.
- Cependant, dans le cas où la composante non fluctuante (SW0) disparaît, l'expression de la d.d.p. précédemment obtenue se simplifie notablement et permet l'obtention de tous les moments absolus de $\text{Re}\{\hat{r}\}$. On obtient alors la caractérisation d'une source fluctuant en SW1-2 en présence d'un bruit gaussien éventuellement corrélé spatialement [51].
- Ce résultat fut redémontré très simplement par Tullsson [59] en utilisant les propriétés des d.d.p. conditionnelles de vecteurs aléatoires mutuellement gaussiens (cf. Annexe X-E-p84). Contrairement à l'utilisation des fonctions caractéristiques, la technique proposée par Tullsson est compatible du conditionnement des observations par le test de détection sur la voie somme ($\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \geq T$), ce qui lui permet de formuler la d.d.p. et tous les moments absolus de $\text{Re}\{\hat{r}\}$, conditionnés ou non.
- Parallèlement, Seifer [60] étendit, dans le cas mono-observation, la caractérisation initiale de Kanter en introduisant le conditionnement des observations par le test de détection sur la voie somme ($|\Sigma|^2 \geq T$). Il établit ainsi les expressions de la moyenne et de la variance conditionnées de $\text{Re}\{\hat{r}\}$, lorsque la source de signal est non fluctuante (SW0) en présence d'un bruit gaussien éventuellement corrélé spatialement.

B. Contributions nouvelles

Au cours de notre recherche nous avons établi les résultats complémentaires suivants :

- l'extension des résultats de Seifer pour un nombre I quelconque d'observations indépendantes : c'est le cas d'une source de signal SW0E en présence d'un bruit gaussien éventuellement corrélé spatialement (cf. §VIII-C-p78).
- le calcul analytique de la moyenne et la variance de $\text{Re}\{\hat{r}\}$ conditionnée par le test de détection sur la voie somme ($\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \geq T$) pour un nombre I quelconque d'observations indépendantes lorsque le signal source fluctue en SW3-4 en présence d'un bruit gaussien éventuellement corrélé spatialement (cf. §VIII-D-p78).
- la formulation du Test du Rapport de Vraisemblance Généralisé dans le cas d'une antenne à 2 capteurs de type "Monopulse" (cf. Annexes XII-G-p133, XII-H-p139, XII-I-p145) dont nous avons dérivé une nouvelle solution (détecteur, estimateur) que nous avons caractérisé analytiquement ($E[\hat{r}_r | \mathcal{D}], \text{Var}[\hat{r}_r | \mathcal{D}]$, $\mathcal{D} = \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} + \vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \geq T \right\}$), pour les lois de fluctuations d'amplitude du signal source de type SW1-2 (cf. §VII-C-p65) et SW0E (cf. §VIII-E-p80).

C. Caractérisation statistique de \hat{r} conditionné par $\mathcal{D} = \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \geq T \right\}$: cas SW0E

Le détail des calculs est fourni Annexe XII-A-p103, $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\vec{n}}$.

$$P_{FA} = e^{\frac{T}{\sigma_{\vec{n}}^2}} e_{I-1} \left(\frac{T}{\sigma_{\vec{n}}^2} \right)$$

$$P(\mathcal{D}) = \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) dt$$

$$E[\hat{r} | \mathcal{D}] = \frac{C_{12}^*}{C_{11}} + \frac{I\sigma_{\vec{\beta}}^2}{P(\mathcal{D})} \left(r - \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right) \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t}$$

$$\begin{aligned} E[|\hat{r}|^2 | \mathcal{D}] &= \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 + \frac{|\mathbf{C}|}{P(\mathcal{D}) C_{11}} \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t} + \frac{\sigma_{\vec{\Sigma}}^2}{P(\mathcal{D})} I\sigma_{\vec{\beta}}^2 \left| r - \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t^2} \\ &\quad + \frac{1}{P(\mathcal{D})} \left(I\sigma_{\vec{\beta}}^2 \right)^2 \left| r - \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t^2} \\ &\quad + \frac{I\sigma_{\vec{\beta}}^2}{P(\mathcal{D})} 2 \operatorname{Re} \left\{ \left(r - \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right) \frac{C_{12}}{C_{11}} \right\} \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\hat{r}^2 | \mathcal{D}] &= \left(\frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right)^2 + \frac{\left(I\sigma_{\vec{\beta}}^2 \right)^2}{P(\mathcal{D})} \left(r - \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right)^2 \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t^2} \\ &\quad + \frac{I\sigma_{\vec{\beta}}^2}{P(\mathcal{D})} 2 \left(r - \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right) \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

D. Caractérisation statistique de \hat{r} conditionné par $\mathcal{D} = \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \geq T \right\}$: cas SW3-4

Le détail des calculs est fourni Annexe XII-B-p107.

$$P_{FA} = e^{\frac{T}{\sigma_{\vec{n}}^2}} e_{I-1} \left(\frac{T}{\sigma_{\vec{n}}^2} \right)$$

$$P(\mathcal{D}) = \frac{e^{-\frac{T}{C_{11}}}}{\left(\tilde{C}_{11} \right)^I} A_0$$

$$E[\operatorname{Re}\{\hat{r}\} | \mathcal{D}] = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\tilde{C}_{12}^*}{\tilde{C}_{11}} \right\} + E[s(\vec{U}) | \mathcal{D}]$$

$$\operatorname{Var}[\operatorname{Re}\{\hat{r}\} | \mathcal{D}] = E[s(\vec{U})^2 | \mathcal{D}] - E[s(\vec{U}) | \mathcal{D}]^2$$

où :

• si $I = 1$:

$$E \left[s \left(\vec{U} \right) \mid \mathcal{D} \right] = \frac{\sigma_\alpha^2}{2} |k_2|^2 \operatorname{Re} \{n\} \left| \tilde{\mathbf{C}} \right| \frac{1}{\tilde{C}_{11} + \frac{T}{\tilde{C}_{11}} \frac{\sigma_\alpha^2}{2} |g_\Sigma|^2}$$

$$E \left[s \left(\vec{U} \right)^2 \mid \mathcal{D} \right] = \frac{\left| \tilde{\mathbf{C}} \right|}{2 \left(\tilde{C}_{11} \right)^2} \left[\frac{\frac{\sigma_\alpha^2}{2} \frac{|g_\Sigma|^2}{\tilde{C}_{11}} + \left(1 + \frac{\sigma_\alpha^2}{2} |k_2|^2 \left| \tilde{\mathbf{C}} \right| \right) \frac{e^{\frac{T}{\tilde{C}_{11}}}}{\tilde{C}_{11}} E_1 \left(\frac{T}{\tilde{C}_{11}} \right)}{1 + \frac{T}{\tilde{C}_{11}} \frac{\sigma_\alpha^2}{2} \frac{|g_\Sigma|^2}{\tilde{C}_{11}}} \right]$$

• si $I \geq 2$:

$$E s \left[\left(\vec{U} \right) \mid \mathcal{D} \right] = \frac{I \sigma_\alpha^2}{2} |k_2|^2 \operatorname{Re} \{n\} \left| \tilde{\mathbf{C}} \right| A_4$$

$$E \left[s \left(\vec{U} \right)^2 \mid \mathcal{D} \right] = \frac{\left| \tilde{\mathbf{C}} \right|}{2 \left(\tilde{C}_{11} \right)^2} A_1 + \frac{I \sigma_\alpha^2}{2} |k_2|^2 \frac{\left| \tilde{\mathbf{C}} \right|^2}{2 \left(\tilde{C}_{11} \right)^2} A_2 + I(I-1) \left[\frac{\sigma_\alpha^2}{2} |k_2|^2 \operatorname{Re} \{n\} \left| \tilde{\mathbf{C}} \right| \right]^2 A_3$$

et :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \frac{\sigma_\alpha^2 |g_\Sigma|^2}{2} \vec{x} \vec{x}^H + \mathbf{C}_{\vec{n}}$$

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_\Sigma \\ g_\Delta \end{pmatrix} = g_\Sigma \vec{x} \quad , \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \vec{g} \quad , \quad n = \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{\tilde{C}_{12}}{\tilde{C}_{11}} \right)^*$$

$$A_0 = \sum_{m=0}^I p_I^m \left(\tilde{C}_{11} \right)^m e_{I-1+m} \left(\frac{T}{\tilde{C}_{11}} \right) (I-1+m)!$$

$$A_1 = \frac{1}{A_0} \left[\sum_{m=0}^I p_I^m \left(\tilde{C}_{11} \right)^m e_{I-2+m} \left(\frac{T}{\tilde{C}_{11}} \right) (I-2+m)! \right]$$

$$A_2 = \frac{1}{A_0} \left[\sum_{m=0}^{I-1} h_{I-1}^m \left(\tilde{C}_{11} \right)^m e_{I-2+m} \left(\frac{T}{\tilde{C}_{11}} \right) (I-2+m)! \right]$$

$$A_3 = \frac{1}{A_0} \left[\sum_{m=0}^{I-2} h_{I-2}^m \left(\tilde{C}_{11} \right)^m e_{I-1+m} \left(\frac{T}{\tilde{C}_{11}} \right) \frac{(I-1+m)!}{(I+m)(I+m+1)} \right]$$

$$A_4 = \frac{1}{A_0} \left[\sum_{m=0}^{I-1} h_{I-1}^m \left(\tilde{C}_{11} \right)^m e_{I-1+m} \left(\frac{T}{\tilde{C}_{11}} \right) (I-1+m)! \right]$$

où p_I^m et h_I^m sont les coefficients des polynômes récurrents $P_I(t)$ et $H_I(t)$ définis par :

$$P_I(t) = Q_{I-1}(t) + b H_{I-1}(t) = \left[\sum_{m=0}^I p_I^m t^m \right] t^{I-1} \quad \text{et} \quad b = \frac{\sigma_\alpha^2}{2} \frac{|g_\Sigma|^2}{\tilde{C}_{11}}$$

$$Q_I(t) = \int_0^t P_I(z) dz = \left[\sum_{m=0}^I q_I^m t^m \right] t^I \quad \text{et} \quad Q_0(t) = 1$$

$$H_I(t) = \int_0^t Q_I(z) dz = \left[\sum_{m=0}^I h_I^m t^m \right] t^{I+1} \quad \text{et} \quad H_0(t) = t$$

E. Caractérisation statistique de \hat{r} conditionné par $\mathcal{D} = \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} + \vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \geq T \right\}$: cas SWOE

Le détail des calculs est fourni Annexe XII-C-p114.

$$\begin{aligned}
 P_{FA} &= e^{\frac{T}{\sigma_{\vec{r}}^2}} e_{2I-1} \left(\frac{T}{\sigma_{\vec{r}}^2} \right) \\
 P(\mathcal{D}) &= \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, I\sigma_{\vec{\beta}}^2 |r|^2, \sigma_{\vec{\Delta}}^2) f_{\chi_{2c}^I}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) dx dt \\
 E[\hat{r} | \mathcal{D}] &= \frac{r \left(I\sigma_{\vec{\beta}}^2 \right)}{P(\mathcal{D})} \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, I\sigma_{\vec{\beta}}^2 |r|^2, \sigma_{\vec{\Delta}}^2) \frac{f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2)}{t} dx dt \\
 E[|\hat{r}|^2 | \mathcal{D}] &= \frac{1}{P(\mathcal{D})} \left\{ \sigma_{\vec{\Delta}}^2 \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, I\sigma_{\vec{\beta}}^2 |r|^2, \sigma_{\vec{\Delta}}^2) \frac{f_{\chi_{2c}^I}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2)}{t} dx dt \right. \\
 &\quad + |r|^2 \left(I\sigma_{\vec{\beta}}^2 \right) \sigma_{\vec{\Sigma}}^2 \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, I\sigma_{\vec{\beta}}^2 |r|^2, \sigma_{\vec{\Delta}}^2) \frac{f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2)}{t^2} dx dt \\
 &\quad \left. + |r|^2 \left(I\sigma_{\vec{\beta}}^2 \right)^2 \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, I\sigma_{\vec{\beta}}^2 |r|^2, \sigma_{\vec{\Delta}}^2) \frac{f_{\chi_{2c}^{I+2}}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2)}{t^2} dx dt \right\} \\
 E[\hat{r}^2 | \mathcal{D}] &= \frac{r^2 \left(I\sigma_{\vec{\beta}}^2 \right)^2}{P(\mathcal{D})} \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, I\sigma_{\vec{\beta}}^2 |r|^2, \sigma_{\vec{\Delta}}^2) \frac{f_{\chi_{2c}^{I+2}}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2)}{t^2} dx dt
 \end{aligned}$$

IX. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

- Le travail rapporté dans ce document a concerné la caractérisation des performances des problèmes conjoints de détection-estimation. Nous avons mis en évidence les limites des approches traditionnelles qui travaillent dans une vision de l'estimation déconnectée de la validation de l'hypothèse d'observation. Nous avons été vraiment surpris de constater que personne, à notre connaissance, ne remet en question cette approche qui n'est satisfaisante que pour de fortes valeurs de probabilités de détection. On pourrait penser que cela est imputable à l'accroissement de complexité introduit par le conditionnement. Or une complexité au moins aussi grande apparaît également lorsqu'on cherche à caractériser les performances de l'EQM dans les zones non asymptotiques, sujet sur lequel nombre de chercheurs travaillent ... Ce constat nous conforte dans l'idée que nous sommes en présence d'une réminiscence historique avec laquelle il faut rompre si nous voulons progresser dans la caractérisation des vrais problèmes.
- Pour développer cette thèse, nous avons proposé un cadre statistique autorisant de nouvelles approches dont nous montrons qu'elles doivent être conjointes, et auxquelles nous associons des critères de performances pertinents. Ce travail a été rendu possible par l'extension d'un formalisme général (minimisation d'une norme sous contrainte linéaire) suggéré par un examen approfondi des hypothèses et mécanismes sous jacents au développement des bornes. Il reste néanmoins à compléter par la recherche de bornes non triviales de l'EQM locale conditionnée par un événement clairvoyant, grandeurs nécessaires au calcul pratique des critères de performances conjointes proposés.
- L'application que nous avons retenue pour valider notre thèse reste un cas particulier en traitement du signal : en effet la fonction d'ambiguïté associée est monomodale. Pour confirmer la validité de notre intuition initiale, il nous semblerait pertinent de la confronter au cas le plus généralement rencontré, à savoir une fonction d'ambiguïté présentant des lobes secondaires. Une première application candidate sera la caractérisation des problèmes conjoints détection-estimation en estimation spectrale monofréquence à l'occasion de la thèse de Cédric TAILLANDIER dont j'assurerai le co-encadrement au sein du laboratoire SATIE. Ce travail constituera une première étape vers la caractérisation conjointe des problèmes d'estimation plus généraux relevant du type de l'équation (1).
- On pourra également contribuer à la caractérisation des zones non asymptotiques en mettant en application la variante que nous avons proposée (70) pour la borne de Barankin.

X. ANNEXES MATHÉMATIQUES

A. Inégalité de Markov-Bienaymé-Tchebychev

Soit $D_\varepsilon = \left\{ \vec{x} \in \Omega \text{ tq } \left| \widehat{g(\theta)}(\vec{x}) - g(\theta) \right| \geq \varepsilon \right\}$. Si $E_\theta \left[\left| \widehat{g(\theta)}(\vec{x}) - g(\theta) \right|^k \right]$ existe, alors :

$$\begin{aligned} E_\theta \left[\left| \widehat{g(\theta)}(\vec{x}) - g(\theta) \right|^k \right] &= \int_{\Omega} \left| \widehat{g(\theta)}(\vec{x}) - g(\theta) \right|^k f_\theta(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \int_{D_\varepsilon} \left| \widehat{g(\theta)}(\vec{x}) - g(\theta) \right|^k f_\theta(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{\overline{D_\varepsilon}} \left| \widehat{g(\theta)}(\vec{x}) - g(\theta) \right|^k f_\theta(\vec{x}) d\vec{x} \\ &\geq \int_{D_\varepsilon} \varepsilon^k f_\theta(\vec{x}) d\vec{x} \\ &\geq \varepsilon^k P(D_\varepsilon) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$P \left(\left| \widehat{g(\theta)}(\vec{x}) - g(\theta) \right|^k > \varepsilon \right) \leq P \left(\left| \widehat{g(\theta)}(\vec{x}) - g(\theta) \right|^k \geq \varepsilon \right) \leq \frac{E_\theta \left[\left| \widehat{g(\theta)}(\vec{x}) - g(\theta) \right|^k \right]}{\varepsilon^k}$$

B. Inégalité de Cauchy-Schwartz généralisée

Soit \mathbb{U} un espace vectoriel de dimension quelconque (finie ou infinie) sur le corps des complexes \mathbb{C} muni d'un produit hermitien (forme bilinéaire hermitienne définie positive) noté $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$, si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs de \mathbb{U} . Alors la matrice de Gram associée aux deux familles de vecteurs $\vec{u}_{[1,N]} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N)$ et $\vec{c}_{[1,K]} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_K)$ de \mathbb{U} est définie par :

$$\mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{c}_{[1,K]}) = \begin{bmatrix} \langle \vec{u}_1 | \vec{c}_1 \rangle & \langle \vec{u}_2 | \vec{c}_1 \rangle & \dots & \langle \vec{u}_N | \vec{c}_1 \rangle \\ \langle \vec{u}_1 | \vec{c}_2 \rangle & \langle \vec{u}_2 | \vec{c}_2 \rangle & \dots & \langle \vec{u}_N | \vec{c}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle \vec{u}_1 | \vec{c}_K \rangle & \langle \vec{u}_2 | \vec{c}_K \rangle & \dots & \langle \vec{u}_N | \vec{c}_K \rangle \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(K, N) \quad (149)$$

Par construction, si $\vec{w}_{[1,N+K]} = \vec{u}_{[1,N]} \cup \vec{c}_{[1,K]} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_N, \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_K)$, alors la matrice $\mathbf{G}(\vec{w}_{[1,N+K]}, \vec{w}_{[1,N+K]})$ de $\mathbb{C}^{N+K} \rightarrow \mathbb{C}^{N+K}$ est positive :

$$\forall \vec{\lambda} \in \mathbb{C}^{N+K}, \vec{\lambda} \neq \vec{0}, \quad \vec{\lambda}^H \mathbf{G}(\vec{w}_{[1,N+K]}, \vec{w}_{[1,N+K]}) \vec{\lambda} = \left\| \sum_{l=1}^{N+K} \lambda_l \vec{w}_l \right\|^2 \geq 0 \iff \mathbf{G}(\vec{w}_{[1,N+K]}, \vec{w}_{[1,N+K]}) \geq 0$$

En reformulant $\mathbf{G}(\vec{w}_{[1,N+K]}, \vec{w}_{[1,N+K]})$ sous la forme "bloc" suivante :

$$\mathbf{G}(\vec{w}_{[1,N+K]}, \vec{w}_{[1,N+K]}) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{u}_{[1,N]}) & \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}, \vec{u}_{[1,N]}) \\ \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{c}_{[1,K]}) & \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}, \vec{c}_{[1,K]}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^H & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

alors, si \mathbf{C}^{-1} existe et si $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{Id}_N & -\mathbf{BC}^{-1} \end{bmatrix}$, par construction la matrice :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^H & \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{D}^H &= \begin{bmatrix} \mathbf{Id}_N & -\mathbf{BC}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^H & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Id}_N \\ (-\mathbf{BC}^{-1})^H \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Id}_N & -\mathbf{BC}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^H & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Id}_N \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^H \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Id}_N & -\mathbf{BC}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BC}^{-1}\mathbf{B}^H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A} - \mathbf{BC}^{-1}\mathbf{B}^H \end{aligned}$$

est positive. Par conséquent :

$$\mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{u}_{[1,N]}) \geq \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}, \vec{u}_{[1,N]}) \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}, \vec{c}_{[1,K]})^{-1} \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}, \vec{u}_{[1,N]})^H \quad (150a)$$

$$\geq \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{c}_{[1,K]})^H \mathbf{G}(\vec{c}_{[1,K]}, \vec{c}_{[1,K]})^{-1} \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{c}_{[1,K]}) \quad (150b)$$

Il y a égalité si et seulement si $\exists \vec{\lambda} \in \mathbb{C}^N$ tel que :

$$\vec{\lambda}^H \left(\mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^H & \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{D}^H \right) \vec{\lambda} = 0 = \left(\mathbf{D}^H \vec{\lambda} \right)^H \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^H & \mathbf{C} \end{bmatrix} \left(\mathbf{D}^H \vec{\lambda} \right)$$

c'est à dire si et seulement si $\exists \vec{\mu} \in \mathbb{C}^{N+K}$ tel que :

$$\vec{\mu}^H \mathbf{G}(\vec{w}_{[1,N+K]}, \vec{w}_{[1,N+K]}) \vec{\mu} = \left\| \sum_{l=1}^{N+K} \mu_l \vec{w}_l \right\|^2 = 0 \iff \sum_{l=1}^{N+K} \mu_l \vec{w}_l = \vec{0}$$

Autrement dit l'inégalité (150a-b) est stricte si et seulement $\vec{w}_{[1,N+K]} = \vec{u}_{[1,N]} \cup \vec{c}_{[1,K]} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_N, \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_K)$ est une famille libre.

Par analogie formelle, on établit le même résultat pour les espaces vectoriels sur le corps des réels où $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$ désigne alors un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive). Dans ce cas, il suffit de remplacer l'opérateur de transposition conjugaison (H) par l'opérateur de transposition seule (T).

C. Minimisation d'une norme sous contraintes linéaires

Soit \mathbb{U} un espace vectoriel de dimension quelconque (finie ou infinie) sur le corps des nombres complexes \mathbb{C} muni d'un produit hermitien (forme bilinéaire hermitienne définie positive) noté $\langle \vec{u} | \vec{w} \rangle$, si \vec{u} et \vec{w} sont deux vecteurs de \mathbb{U} . Soient $(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_K)$ une famille libre de K vecteurs de \mathbb{U} et $\vec{v} = (v_1, \dots, v_K)^T$ un vecteur de \mathbb{C}^K . Nous cherchons la solution du problème de minimisation de $\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle$ sous les K contraintes linéaires $\langle \vec{u} | \vec{c}_k \rangle = v_k$, $k \in [1, K]$.

Appelons C le sous-espace vectoriel généré par les K vecteurs $(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_K)$. Alors $\forall \vec{u} \in \mathbb{U}$, $\vec{u} = \vec{u}_C + \vec{d}_u$ où \vec{u}_C est la projection orthogonale de \vec{u} sur C , c'est à dire le vecteur $\vec{u}_C \in C$ tel que $\langle \vec{u} - \vec{u}_C | \vec{c}_k \rangle = 0$, $k \in [1, K]$. Soit $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_K)^T$ les coordonnées de \vec{u}_C dans la base $(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_K)$ de C ($\vec{u}_C = \sum_{k=1}^K \alpha_k \vec{c}_k$), elles vérifient $\langle \vec{u} | \vec{c}_k \rangle = \langle \vec{u}_C | \vec{c}_k \rangle$, $k \in [1, K]$. Si de plus \vec{u} satisfait les K contraintes $\langle \vec{u} | \vec{c}_k \rangle = v_k$, $k \in [1, K]$ alors ses coordonnées vérifient finalement $\mathbf{G} \vec{\alpha} = \vec{v}$, où \mathbf{G} est la matrice de Gram (149) associée à la famille de vecteurs $(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_K)$: $\mathbf{G}_{k,l} = \langle \vec{c}_k | \vec{c}_l \rangle$. L'équation $\mathbf{G} \vec{\alpha} = \vec{v}$ admet pour solution unique $\vec{\alpha} = \mathbf{G}^{-1} \vec{v}$; notons alors $\vec{u}_{C,\vec{v}}$ le vecteur de C correspondant à cette solution. Par conséquent, $\forall \vec{u} \in \mathbb{U}$ et vérifiant les K contraintes alors $\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}_{C,\vec{v}} | \vec{u}_{C,\vec{v}} \rangle + \langle \vec{d}_u | \vec{d}_u \rangle \geq \langle \vec{u}_{C,\vec{v}} | \vec{u}_{C,\vec{v}} \rangle$, et le minimum est atteint pour $\vec{d}_u = \vec{0}$, ce qui signifie que $\vec{u}_{C,\vec{v}}$ est la solution du problème, la norme minimale valant $\langle \vec{u}_{C,\vec{v}} | \vec{u}_{C,\vec{v}} \rangle = \vec{v}^H \mathbf{G}^{-1} \vec{v}$.

De plus, ce problème de minimisation est invariant par transformation bijective des K contraintes linéaires.

En effet, soit $\mathbf{T} \in \mathcal{M}(K, K)$ une matrice inversible et $\vec{c}'_k = \sum_{i=1}^{i=K} T_{ik} \vec{c}_i$, alors le problème de minimisation de $\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle$ sous les K contraintes linéaires $\langle \vec{u} | \vec{c}'_k \rangle = v'_k$, $k \in [1, K]$, $\vec{v}' = \mathbf{T}^H \vec{v}$ admet pour solution $\min \{ \langle \vec{u} | \vec{u} \rangle \} = \vec{v}'^H (\mathbf{G}')^{-1} \vec{v}'$.

Or $\mathbf{G}'_{k,l} = \langle \vec{c}'_k | \vec{c}'_l \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{j=K} T_{jl} \vec{c}_j \mid \sum_{i=1}^{i=K} T_{ik} \vec{c}_i \right\rangle = \vec{T}_k^H \mathbf{G} \vec{T}_l$ où \vec{T}_k et \vec{T}_l représentent respectivement la $k^{\text{ème}}$ et la $l^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \mathbf{T} . Par conséquent, $\mathbf{G}' = \mathbf{T}^H \mathbf{G} \mathbf{T}$ et $\min \{ \langle \vec{u} | \vec{u} \rangle \} = (\mathbf{T}^H \vec{v})^H (\mathbf{T}^H \mathbf{G} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^H \vec{v} = \vec{v}^H \mathbf{G}^{-1} \vec{v}$.

Par analogie formelle, on établit les mêmes résultats pour les espaces vectoriels sur le corps des réels où $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$ désigne alors un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive). Dans ce cas, la norme minimale vaut $\langle \vec{u}_{C,\vec{v}} | \vec{u}_{C,\vec{v}} \rangle = \vec{v}^H \mathbf{G}^{-1} \vec{v} = \vec{v}^T \mathbf{G}^{-1} \vec{v}$.

D. Inverse d'une matrice partitionnée (inversion par blocs)

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(N, N)$ une matrice inversible partitionnée de la manière suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{A}_{11} \in \mathcal{M}(N_1, N_1)$ et $\mathbf{A}_{22} \in \mathcal{M}(N_2, N_2)$ avec $N_1 + N_2 = N$. Alors, sous réserve que l'ensemble des inverses mises en jeu existent [72] :

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}]^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}[\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}]^{-1} \\ -[\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}]^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & [\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}]^{-1} \end{bmatrix}$$

E. Densité de probabilité conditionnelle entre 2 vecteurs aléatoires complexes circulaires mutuellement gaussiens

La d.d.p. conditionnelle entre 2 vecteurs aléatoires $\vec{u} = (u_1, \dots, u_K)$ et $\vec{v} = (v_1, \dots, v_N)$ mutuellement gaussiens est également gaussienne [21]. Dans le cas de vecteurs complexes circulaires, si $\vec{w} = (\vec{u}^T, \vec{v}^T)^T$ alors :

$$f(\vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{e^{-(\vec{w} - \vec{m}_{\vec{w}})^H \mathbf{C}_{\vec{w}}^{-1} (\vec{w} - \vec{m}_{\vec{w}})}}{\pi^{K+N} |\mathbf{C}_{\vec{w}}|} = f(\vec{v} | \vec{u}) f(\vec{u}) \quad (151)$$

avec :

$$f(\vec{v} | \vec{u}) = \frac{e^{-(\vec{v} - \vec{m}_{\vec{v}|\vec{u}})^H \mathbf{C}_{\vec{v}|\vec{u}}^{-1} (\vec{v} - \vec{m}_{\vec{v}|\vec{u}})}}{\pi^N |\mathbf{C}_{\vec{v}|\vec{u}}|} \quad (152)$$

et :

$$f(\vec{u}) = \frac{e^{-(\vec{u} - \vec{m}_{\vec{u}})^H \mathbf{C}_{\vec{u}}^{-1} (\vec{u} - \vec{m}_{\vec{u}})}}{\pi^K |\mathbf{C}_{\vec{u}}|}$$

où : $\mathbf{C}_{\vec{w}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\vec{u}} & \mathbf{C}_{\vec{u}, \vec{v}} \\ \mathbf{C}_{\vec{u}, \vec{v}}^H & \mathbf{C}_{\vec{v}} \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}_{\vec{v}|\vec{u}} = \mathbf{C}_{\vec{v}} - \mathbf{C}_{\vec{u}, \vec{v}}^H \mathbf{C}_{\vec{u}}^{-1} \mathbf{C}_{\vec{u}, \vec{v}}$, $\vec{m}_{\vec{v}|\vec{u}} = \vec{m}_{\vec{v}} + \mathbf{C}_{\vec{u}, \vec{v}}^H \mathbf{C}_{\vec{u}}^{-1} (\vec{u} - \vec{m}_{\vec{u}})$

F. Certaines propriétés des fonctions de Bessel modifiées de 1ère espèce

$$\mathcal{I}_I(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{z \cos(\theta)} \cos(I\theta) d\theta, \quad I \in \mathbb{N} \quad [73, 03.02.07.0007.01] \quad (153)$$

$$\mathcal{I}_I(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+I)!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+I}, \quad I \in \mathbb{N} \quad [73, 03.02.02.0001.01] \quad (154)$$

$$\frac{\partial \mathcal{I}_I(z)}{\partial z} = \mathcal{I}_{I-1}(z) - \left(\frac{I}{z}\right) \mathcal{I}_I(z), \quad I \in \mathbb{N}, \quad I \geq 1 \quad [73, 03.02.20.0004.01] \quad (155)$$

$$\frac{\partial \mathcal{I}_I(z)}{\partial z} = \mathcal{I}_{I+1}(z) + \left(\frac{I}{z}\right) \mathcal{I}_I(z), \quad I \in \mathbb{N}, \quad I \geq 0 \quad [73, 03.02.20.0005.01] \quad (156)$$

$$\frac{\partial \mathcal{I}_I(z)}{\partial z} = \frac{1}{2} [\mathcal{I}_{I-1}(z) + \mathcal{I}_{I+1}(z)], \quad I \in \mathbb{N}, \quad I \geq 1 \quad [73, 03.02.20.0006.01] \quad (157)$$

$$\mathcal{I}_I(z) = \frac{2(I+1)}{z} \mathcal{I}_{I+1}(z) + \mathcal{I}_{I+2}(z), \quad I \in \mathbb{N}, \quad I \geq 0 \quad [73, 03.02.17.0001.01] \quad (158)$$

$$\mathcal{I}_I(z) = \mathcal{I}_{I-2}(z) - \frac{2(I-1)}{z} \mathcal{I}_{I-1}(z), \quad I \in \mathbb{N}, \quad I \geq 2 \quad [73, 03.02.17.0002.01] \quad (159)$$

$$\mathcal{I}_I(z) = \frac{z[\mathcal{I}_{I-1}(z) - \mathcal{I}_{I+1}(z)]}{2I}, \quad I \in \mathbb{N}, \quad I \geq 1 \quad [73, 03.02.17.0005.01] \quad (160)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\mathcal{I}_I(2a\sqrt{z}) \left(\frac{\sqrt{z}}{a} \right)^I \right] = \mathcal{I}_{I-1}(2a\sqrt{z}) \left(\frac{\sqrt{z}}{a} \right)^{I-1}, \quad I \in \mathbb{N}, \quad I \geq 1 \quad (161)$$

$$\begin{aligned} \int_0^x \mathcal{I}_0(2a\sqrt{z}) \frac{(x-z)^{I-1}}{(I-1)!} dz &= \int_0^x \mathcal{I}_1(2a\sqrt{z}) \left(\frac{\sqrt{z}}{a} \right) \frac{(x-z)^{I-2}}{(I-2)!} dz \\ &= \int_0^x \mathcal{I}_{I-1}(2a\sqrt{z}) \left(\frac{\sqrt{z}}{a} \right)^{I-1} dz = \mathcal{I}_I(2a\sqrt{x}) \left(\frac{\sqrt{x}}{a} \right)^I, \quad I \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (162)$$

$$\int_0^x \sqrt{z} \mathcal{I}_1(2a\sqrt{z}) \frac{(x-z)^{I-2}}{(I-2)!} dz = a \left(\frac{\sqrt{x}}{a} \right)^I \mathcal{I}_I(2a\sqrt{x}), \quad I \in \mathbb{N} \quad (163)$$

$$\int_0^x z \mathcal{I}_0(2a\sqrt{z}) \frac{(x-z)^{I-2}}{(I-2)!} dz = \left(\frac{\sqrt{x}}{a} \right)^I \mathcal{I}_I(2a\sqrt{x}) + a^2 \left(\frac{\sqrt{x}}{a} \right)^{I+1} \mathcal{I}_{I+1}(2a\sqrt{x}), \quad I \in \mathbb{N} \quad (164)$$

$$\int_0^x z \mathcal{I}_2(2a\sqrt{z}) \frac{(x-z)^{I-2}}{(I-2)!} dz = a^2 \left(\frac{\sqrt{x}}{a} \right)^{I+1} \mathcal{I}_{I+1}(2a\sqrt{x}), \quad I \in \mathbb{N} \quad (165)$$

$$\int_0^x (x-z) \mathcal{I}_{I-1}(2a\sqrt{z}) \left(\frac{\sqrt{z}}{a} \right)^{I-1} dz = \left(\frac{\sqrt{x}}{a} \right)^{I+1} \mathcal{I}_{I+1}(2a\sqrt{x}), \quad I \in \mathbb{N} \quad (166)$$

Démonstrations:

- (161) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[\mathcal{I}_I(2a\sqrt{z}) \left(\frac{\sqrt{z}}{a} \right)^I \right] &= \frac{\partial \mathcal{I}_I(2a\sqrt{z})}{\partial z} \frac{a}{\sqrt{z}} \left(\frac{\sqrt{z}}{a} \right)^I + \mathcal{I}_I(2a\sqrt{z}) \left(\frac{\sqrt{z}}{a} \right)^{I-1} \frac{I}{2a\sqrt{z}} \\ &= \left[\mathcal{I}_{I-1}(2a\sqrt{z}) - \frac{I}{2a\sqrt{z}} \mathcal{I}_I(2a\sqrt{z}) \right] \left(\frac{\sqrt{z}}{a} \right)^{I-1} + \mathcal{I}_I(2a\sqrt{z}) \left(\frac{\sqrt{z}}{a} \right)^{I-1} \frac{I}{2a\sqrt{z}} \\ &= \mathcal{I}_{I-1}(2a\sqrt{z}) \left(\frac{\sqrt{z}}{a} \right)^{I-1} \end{aligned}$$

• (162) :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \mathcal{I}_0(2a\sqrt{z}) \frac{(x-z)^{I-1}}{(I-1)!} dz &= \left[-\mathcal{I}_1(2a\sqrt{z}) \frac{\sqrt{z}(x-z)^{I-2}}{a(I-2)!} \right]_0^x + \int_0^x \mathcal{I}_1(2a\sqrt{z}) \frac{\sqrt{z}(x-z)^{I-2}}{a(I-2)!} dz \\
&= \int_0^x \mathcal{I}_1(2a\sqrt{z}) \frac{\sqrt{z}(x-z)^{I-2}}{a(I-2)!} dz \\
&= \int_0^x \mathcal{I}_2(2a\sqrt{z}) \left(\frac{\sqrt{z}}{a} \right)^2 \frac{(x-z)^{I-3}}{(I-3)!} dz \\
&= \vdots \\
&= \int_0^x \mathcal{I}_{I-1}(2a\sqrt{z}) \left(\frac{\sqrt{z}}{a} \right)^{I-1} dz \\
&= \mathcal{I}_I(2a\sqrt{x}) \left(\frac{\sqrt{x}}{a} \right)^I
\end{aligned}$$

• (163) :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sqrt{z} \mathcal{I}_1(2a\sqrt{z}) \frac{(x-z)^{I-2}}{(I-2)!} dz &= a \int_0^x \mathcal{I}_1(2a\sqrt{z}) \frac{\sqrt{z}(x-z)^{I-2}}{a(I-2)!} dz \\
&= a \int_0^x \mathcal{I}_0(2a\sqrt{z}) \frac{(x-z)^{I-1}}{(I-1)!} dz \\
&= a \mathcal{I}_I(2a\sqrt{x}) \left(\frac{\sqrt{x}}{a} \right)^I
\end{aligned}$$

• (164) :

$$\begin{aligned}
\int_0^x z \mathcal{I}_0(2a\sqrt{z}) \frac{(x-z)^{I-2}}{(I-2)!} dz &= x \int_0^x \mathcal{I}_0(2a\sqrt{z}) \frac{(x-z)^{I-2}}{(I-2)!} dz - \int_0^x \mathcal{I}_0(2a\sqrt{z}) \frac{(x-z)^{I-1}}{(I-2)!} dz \\
&= x \mathcal{I}_{I-1}(2a\sqrt{x}) \left(\frac{\sqrt{x}}{a} \right)^{I-1} - (I-1) \mathcal{I}_I(2a\sqrt{x}) \left(\frac{\sqrt{x}}{a} \right)^I \\
&= x \left[\frac{I}{a\sqrt{x}} \mathcal{I}_I(2a\sqrt{x}) + \mathcal{I}_{I+1}(2a\sqrt{x}) \right] \left(\frac{\sqrt{x}}{a} \right)^{I-1} - (I-1) \mathcal{I}_I(2a\sqrt{x}) \left(\frac{\sqrt{x}}{a} \right)^I \\
&= \left(\frac{\sqrt{x}}{a} \right)^I \mathcal{I}_I(2a\sqrt{x}) + a^2 \left(\frac{\sqrt{x}}{a} \right)^{I+1} \mathcal{I}_{I+1}(2a\sqrt{x})
\end{aligned}$$

• (165) :

$$\begin{aligned}
\int_0^x z \mathcal{I}_2(2a\sqrt{z}) \frac{(x-z)^{I-2}}{(I-2)!} dz &= a^2 \int_0^x \mathcal{I}_2(2a\sqrt{z}) \left(\frac{\sqrt{z}}{a} \right)^2 \frac{(x-z)^{I-2}}{(I-2)!} dz \\
&= a^2 \int_0^x \mathcal{I}_0(2a\sqrt{z}) \frac{\sqrt{z}(x-z)^I}{a I!} dz \\
&= a^2 \mathcal{I}_{I+1}(2a\sqrt{x}) \left(\frac{\sqrt{x}}{a} \right)^{I+1}
\end{aligned}$$

• (166) :

$$\int_0^x (x-z) \mathcal{I}_{I-1} (2a\sqrt{z}) \left(\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^{I-1} dz = \int_0^x \mathcal{I}_I (2a\sqrt{z}) \left(\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^I dz = \mathcal{I}_{I+1} (2a\sqrt{x}) \left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right)^{I+1}$$

G. Espérance incomplètes de Vecteurs Aléatoires Gaussiens Circulaires à composantes Indépendantes Identiquement Distribuées

Soit \vec{x} un vecteur aléatoire gaussien complexe circulaire $\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{x}}, \sigma^2 \mathbf{I}_I)$ à composantes indépendantes et identiquement distribuées caractérisé par la d.d.p. :

$$f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{x}}, \sigma^2 \mathbf{I}_I)}(\vec{x}) = \frac{e^{-\frac{1}{\sigma^2}(\vec{x}-\vec{m}_{\vec{x}})^H(\vec{x}-\vec{m}_{\vec{x}})}}{(\pi\sigma^2)^I}$$

et $\mathcal{X}_{2c}^I = \|\vec{x}\|^2$ la variable aléatoire du "Khi 2" complexe à I degrés de liberté vérifiant [18] :

$$\begin{aligned} E[\mathcal{X}_{2c}^I] &= I\sigma^2 + \|\vec{m}_{\vec{x}}\|^2 \\ f_{\mathcal{X}_{2c}^I}(x, \|\vec{m}_{\vec{x}}\|^2, \sigma^2) &= \frac{e^{-\frac{x+\|\vec{m}_{\vec{x}}\|^2}{\sigma^2}}}{\sigma^2} \mathcal{I}_{I-1} \left(\frac{2\|\vec{m}_{\vec{x}}\|\sqrt{x}}{\sigma^2} \right) \left(\frac{\sqrt{x}}{\|\vec{m}_{\vec{x}}\|} \right)^{(I-1)} \\ f_{\mathcal{X}_{2c}^I}(x, 0, \sigma^2) &= \frac{e^{-\frac{x}{\sigma^2}}}{\sigma^2} \left(\frac{x}{\sigma^2} \right)^{I-1} \frac{1}{(I-1)!} \end{aligned}$$

alors, $\forall I \geq 1$:

$$E[\vec{x} \cap (\vec{x}^H \vec{x} \geq T)] = \vec{m}_{\vec{x}} \int_{x \geq T} f_{\mathcal{X}_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{x}}\|^2, \sigma^2) dx \quad (167)$$

$$E[\vec{x} \vec{x}^H \cap (\vec{x}^H \vec{x} \geq T)] = \mathbf{C}_{\vec{x}} \int_{x \geq T} f_{\mathcal{X}_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{x}}\|^2, \sigma^2) dx + \vec{m}_{\vec{x}} \vec{m}_{\vec{x}}^H \int_{x \geq T} f_{\mathcal{X}_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{x}}\|^2, \sigma^2) dx \quad (168)$$

$$E[\vec{x} \vec{x}^T \cap (\vec{x}^H \vec{x} \geq T)] = \vec{m}_{\vec{x}} \vec{m}_{\vec{x}}^T \int_{x \geq T} f_{\mathcal{X}_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{x}}\|^2, \sigma^2) dx \quad (169)$$

$$P[\vec{x}^H \vec{x} \geq T] = \int_{x \geq T} f_{\mathcal{X}_{2c}^I}(x, \|\vec{m}_{\vec{x}}\|^2, \sigma^2) dx \quad (170)$$

et $\forall n \geq 0$:

$$E\left[\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^n} \cap (\vec{x}^H \vec{x} \geq T)\right] = \vec{m}_{\vec{x}} \int_{x \geq T} f_{\mathcal{X}_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{x}}\|^2, \sigma^2) \frac{dx}{\sqrt{x}^n} \quad (171)$$

$$E\left[\frac{\vec{x} \vec{x}^H}{\|\vec{x}\|^n} \cap (\vec{x}^H \vec{x} \geq T)\right] = \mathbf{C}_{\vec{x}} \int_{x \geq T} f_{\mathcal{X}_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{x}}\|^2, \sigma^2) \frac{dx}{\sqrt{x}^n} + \vec{m}_{\vec{x}} \vec{m}_{\vec{x}}^H \int_{x \geq T} f_{\mathcal{X}_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{x}}\|^2, \sigma^2) \frac{dx}{\sqrt{x}^n} \quad (172)$$

$$E\left[\frac{\vec{x} \vec{x}^T}{\|\vec{x}\|^n} \cap (\vec{x}^H \vec{x} \geq T)\right] = \vec{m}_{\vec{x}} \vec{m}_{\vec{x}}^T \int_{x \geq T} f_{\mathcal{X}_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{x}}\|^2, \sigma^2) \frac{dx}{\sqrt{x}^n} \quad (173)$$

Démonstrations : $\|\vec{m}_{\vec{x}}\| \neq 0, I \geq 2$

Considérons le changement de variable défini par (théorème d'orthogonalisation de Gram-Schmidt [72, p. 15]) :

$$\begin{cases} u_1 = \left(\frac{\vec{m}_{\vec{x}}}{\|\vec{m}_{\vec{x}}\|} \right)^H \vec{x} \\ u_2 = \vec{m}_2^H \vec{x} \\ \vdots \\ u_I = \vec{m}_I^H \vec{x} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} = \mathbf{M} \vec{x} \text{ avec } \mathbf{M}^H \mathbf{M} = \mathbf{M} \mathbf{M}^H = \mathbf{Id}_I$$

alors \vec{u} est un vecteur aléatoire gaussien circulaire de dimension I tel que :

$$\begin{aligned} \vec{m}_{\vec{u}} &= \mathbf{M}^H \vec{m}_{\vec{x}} = (\|\vec{m}_{\vec{x}}\|, 0, \dots, 0)^T \\ \mathbf{C}_{\vec{u}} &= \mathbf{M}^H \mathbf{C}_{\vec{x}} \mathbf{M} = \sigma^2 \mathbf{Id}_I \\ \vec{u}^H \vec{u} &= (\mathbf{M} \vec{x})^H \mathbf{M} \vec{x} = \vec{x}^H \mathbf{M}^H \mathbf{M} \vec{x} = \vec{x}^H \vec{x} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} E[\vec{x} \cap (\vec{x}^H \vec{x} \geq T)] &= \mathbf{M} E[\vec{u} \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] \\ E[\vec{x} \vec{x}^H \cap (\vec{x}^H \vec{x} \geq T)] &= \mathbf{M} E[\vec{u} \vec{u}^H \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] \mathbf{M}^H \\ E[\vec{x} \vec{x}^T \cap (\vec{x}^H \vec{x} \geq T)] &= \mathbf{M} E[\vec{u} \vec{u}^T \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] \mathbf{M}^T \end{aligned}$$

avec

$$\vec{u}^H \vec{u} = |u_1|^2 + \sum_{i=2}^I |u_i|^2 = z + \omega_{I-1} \text{ où } \begin{cases} u_1 = \sqrt{z} e^{j\theta} \\ \omega_{I-1} = \sum_{i=2}^I |u_i|^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(u_1) = f_{\mathcal{N}_c(m_{u_1}, \sigma^2)}(u_1) \\ f(\omega_{I-1}) = f_{\chi_{2c}^{I-1}}(\omega_{I-1}, 0, \sigma^2) \end{cases}$$

• Démonstration de (167)

$\forall i \geq 2 :$

$$\begin{aligned} E[u_i \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] &= \int_{\vec{u}^H \vec{u} \geq T} u_i f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{u}}, \sigma^2 \mathbf{Id}_I)}(\vec{u}) d\vec{u} \\ &= \int_{\vec{u}^H \vec{u} \geq T} u_i \left[\prod_{j=2}^I f_{\mathcal{N}_c(0, \sigma^2)}(u_j) \right] f_{\mathcal{N}_c(m_{u_1}, \sigma^2)}(u_1) d\vec{u} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car :

- $f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{u}}, \sigma^2 \mathbf{Id}_I)}(\vec{u})$ est une fonction paire de u_i ($m_{u_i} = 0$)
 - si $(u_1, \dots, u_i, \dots, u_I) \in \mathcal{D} = \{\vec{u}^H \vec{u} \geq T\} \Rightarrow (u_1, \dots, -u_i, \dots, u_I) \in \mathcal{D}$
- donc $u_i f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{u}}, \sigma^2 \mathbf{Id}_I)}(\vec{u})$ est une fonction impaire sur \mathcal{D}

Par contre pour $i = 1$, considérons le changement de variable $u_1 = \sqrt{z} e^{j\theta}$ et $\omega_{I-1} = \sum_{i=2}^I |u_i|^2$. Alors

$$\begin{aligned} E[u_1 \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] &= \int_{\vec{u}^H \vec{u} \geq T} u_1 f_{\mathcal{N}_c(m_{u_1}, \sigma^2)}(u_1) \left[\prod_{j=2}^I f_{\mathcal{N}_c(0, \sigma^2)}(u_j) \right] d\vec{u} \\ &= \iint_{z + \omega_{I-1} \geq T} f_{\chi_{2c}^{I-1}}(\omega_{I-1}, 0, \sigma^2) \frac{e^{-\frac{z + |m_{u_1}|^2}{\sigma^2}}}{\sigma^2} \sqrt{z} \left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{j\theta} e^{\frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Re}\{\sqrt{z} e^{j\theta} m_{u_1}^*\}}}{2\pi} d\theta \right] dz d\omega_{I-1} \\ &= e^{j\psi} \iint_{z + \omega_{I-1} \geq T} f_{\chi_{2c}^{I-1}}(\omega_{I-1}, 0, \sigma^2) \frac{e^{-\frac{z + |m_{u_1}|^2}{\sigma^2}}}{\sigma^2} \sqrt{z} \mathcal{I}_1 \left(\frac{2\sqrt{z} |m_{u_1}|}{\sigma^2} \right) dz d\omega_{I-1} \end{aligned}$$

car si $m_{u_1} = |m_{u_1}| e^{j\psi}$ alors :

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{j\theta} e^{\frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Re}\{\sqrt{z} e^{j\theta} m_{u_1}^*\}}}{2\pi} d\theta = e^{j\psi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{j(\theta-\psi)} e^{\frac{2}{\sigma^2} \sqrt{z} |m_{u_1}| \cos(\theta-\psi)}}{2\pi} d\theta = e^{j\psi} \mathcal{I}_1 \left(\frac{2\sqrt{z} |m_{u_1}|}{\sigma^2} \right)$$

Finalement, si nous posons $x = z + \omega_{I-1}$ et $y = z$, alors

$$E[u_1 \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] = e^{j\psi} \int_{x \geq T} \frac{e^{-\frac{x+|m_{u_1}|^2}{\sigma^2}}}{(\sigma^2)^I} \left[\int_0^x \sqrt{y} \mathcal{I}_1 \left(\frac{2|m_{u_1}| \sqrt{y}}{\sigma^2} \right) \frac{(x-y)^{I-2}}{(I-2)!} dy \right] dx$$

et on reconnaît (163) avec $a = \frac{|m_{u_1}|}{\sigma^2}$ ce qui permet d'aboutir à :

$$\begin{aligned} E[u_1 \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] &= e^{j\psi} \int_{x \geq T} \frac{e^{-\frac{x+|m_{u_1}|^2}{\sigma^2}}}{\sigma^2} |m_{u_1}| \left(\frac{\sqrt{x}}{|m_{u_1}|} \right)^I \mathcal{I}_I \left(\frac{2|m_{u_1}| \sqrt{x}}{\sigma^2} \right) dx \\ &= m_{u_1} \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, |m_{u_1}|^2, \sigma^2) dx \end{aligned}$$

Finalement nous avons montré que :

$$\begin{aligned} E[\vec{u} \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] &= \vec{m}_{\vec{u}} \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{u}}\|^2, \sigma^2) dx \\ &\Downarrow \\ E[\vec{x} \cap (\vec{x}^H \vec{x} \geq T)] &= \vec{m}_{\vec{x}} \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{x}}\|^2, \sigma^2) dx \end{aligned}$$

• Démonstration de (168)

$\forall i, j \geq 2, i \neq j :$

$$\begin{aligned} E[u_i u_j^* \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] &= \int_{\vec{u}^H \vec{u} \geq T} u_i u_j^* f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{u}}, \sigma^2 \mathbf{Id}_I)}(\vec{u}) d\vec{u} \\ &= \int_{\vec{u}^H \vec{u} \geq T} u_i u_j^* \left[\prod_{k=2}^I f_{\mathcal{N}_c(0, \sigma^2)}(u_k) \right] f_{\mathcal{N}_c(m_{u_1}, \sigma^2)}(u_1) d\vec{u} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car :

• $f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{u}}, \sigma^2 \mathbf{Id}_I)}(\vec{u})$ est une fonction paire de u_i et de u_j ($m_{u_i} = m_{u_j} = 0$)

• si $(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_I) \in \mathcal{D} = \{\vec{u}^H \vec{u} \geq T\} \Rightarrow \begin{cases} (u_1, \dots, -u_i, \dots, u_j, \dots, u_I) \in \mathcal{D} \\ (u_1, \dots, u_i, \dots, -u_j, \dots, u_I) \in \mathcal{D} \\ (u_1, \dots, -u_i, \dots, -u_j, \dots, u_I) \in \mathcal{D} \end{cases}$

donc $u_i u_j^* f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{u}}, \sigma^2 \mathbf{Id}_I)}(\vec{u})$ est une fonction impaire sur \mathcal{D}

$\forall i \geq 2 :$

$$\begin{aligned} E[u_i u_1^* \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] &= \int_{\vec{u}^H \vec{u} \geq T} u_i u_1^* f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{u}}, \sigma^2 \mathbf{Id}_I)}(\vec{u}) d\vec{u} \\ &= \int_{\vec{u}^H \vec{u} \geq T} u_i u_1^* \left[\prod_{k=2}^I f_{\mathcal{N}_c(0, \sigma^2)}(u_k) \right] f_{\mathcal{N}_c(m_{u_1}, \sigma^2)}(u_1) d\vec{u} \\ &= 0 \\ &= E[u_i^* u_1 \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] \end{aligned}$$

car :

- $f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}, \sigma^2 \mathbf{I}_I)}(\vec{u})$ est une fonction paire de u_i ($m_{u_i} = 0$)
 - si $(u_1, \dots, u_i, \dots, u_I) \in \mathcal{D} = \{\vec{u}^H \vec{u} \geq T\} \Rightarrow (u_1, \dots, -u_i, \dots, u_I) \in \mathcal{D}$
- donc $u_i u_1^* f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}, \sigma^2 \mathbf{I}_I)}(\vec{u})$ est une fonction impaire sur \mathcal{D}

Pour $i = 1$, considérons le changement de variable $u_1 = \sqrt{z} e^{j\theta}$ et $\omega_{I-1} = \sum_{i=2}^I |u_i|^2$. Alors :

$$\begin{aligned}
E \left[|u_1|^2 \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T) \right] &= \int_{\vec{u}^H \vec{u} \geq T} |u_1|^2 f_{\mathcal{N}_c(m_{u_1}, \sigma^2)}(u_1) \left[\prod_{j=2}^I f_{\mathcal{N}_c(0, \sigma^2)}(u_j) \right] d\vec{u} \\
&= \iint_{z + \omega_{I-1} \geq T} f_{\chi_{2c}^{I-1}}(\omega_{I-1}, 0, \sigma^2) \frac{e^{-\frac{z + |m_{u_1}|^2}{\sigma^2}}}{\sigma^2} z \left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{\sigma^2}{2} \operatorname{Re}\{\sqrt{z} e^{j\theta} m_{u_1}^*\}}}{2\pi} d\theta \right] dz d\omega_{I-1} \\
&= \iint_{z + \omega_{I-1} \geq T} f_{\chi_{2c}^{I-1}}(\omega_{I-1}, 0, \sigma^2) \frac{e^{-\frac{z + |m_{u_1}|^2}{\sigma^2}}}{\sigma^2} z \mathcal{I}_0 \left(\frac{2\sqrt{z} |m_{u_1}|}{\sigma^2} \right) dz d\omega_{I-1} \\
&= \int_{x \geq T} \frac{e^{-\frac{x + |m_{u_1}|^2}{\sigma^2}}}{(\sigma^2)^I} \left[\int_0^x y \mathcal{I}_0 \left(\frac{2|m_{u_1}| \sqrt{y}}{\sigma^2} \right) \frac{(x-y)^{I-2}}{(I-2)!} dy \right] dx
\end{aligned}$$

alors en appliquant (164) pour $a = \frac{|m_{u_1}|}{\sigma^2}$ on aboutit à :

$$E \left[|u_1|^2 \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T) \right] = \sigma^2 \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, |m_{u_1}|^2, \sigma^2) dx + |m_{u_1}|^2 \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, |m_{u_1}|^2, \sigma^2) dx$$

Pour $i \geq 2$, posons $u_i = \sqrt{z} e^{j\theta}$ et $\delta_{I-1} = |u_1|^2 + \sum_{j=2, j \neq i}^I |u_j|^2$ avec $f(\delta_{I-1}) = f_{\chi_{2c}^{I-1}}(\delta_{I-1}, |m_{u_1}|^2, \sigma^2)$, alors :

$$\begin{aligned}
E \left[|u_i|^2 \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T) \right] &= \int_{\vec{u}^H \vec{u} \geq T} |u_i|^2 f_{\mathcal{N}_c(m_{u_1}, \sigma^2)}(u_1) \left[\prod_{j=2}^I f_{\mathcal{N}_c(0, \sigma^2)}(u_j) \right] d\vec{u} \\
&= \iint_{z + \delta_{I-1} \geq T} f_{\chi_{2c}^{I-1}}(\delta_{I-1}, |m_{u_1}|^2, \sigma^2) \left[\int_0^{2\pi} z \frac{e^{-\frac{z}{\sigma^2}}}{2\pi \sigma^2} d\theta \right] dz d\delta_{I-1} \\
&= \iint_{z + \delta_{I-1} \geq T} f_{\chi_{2c}^{I-1}}(\delta_{I-1}, |m_{u_1}|^2, \sigma^2) z \frac{e^{-\frac{z}{\sigma^2}}}{\sigma^2} dz d\delta_{I-1} \\
&= \int_{x \geq T} \frac{e^{-\frac{x + |m_{u_1}|^2}{\sigma^2}}}{(\sigma^2)^I} \left[\int_0^x (x-y) \mathcal{I}_{I-2} \left(\frac{2|m_{u_1}| \sqrt{y}}{\sigma^2} \right) \left(\frac{\sigma^2 \sqrt{y}}{|m_{u_1}|} \right)^{I-2} dy \right] dx
\end{aligned}$$

et on reconnaît (162) avec $a = \frac{|m_{u_1}|}{\sigma^2}$ ce qui permet d'aboutir à :

$$E \left[|u_1|^2 \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T) \right] = \sigma^2 \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, |m_{u_1}|^2, \sigma^2) dx$$

Finalement nous avons montré que :

$$\begin{aligned} E [\vec{u} \vec{u}^H \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] &= \mathbf{C}_{\vec{u}} \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{u}}\|^2, \sigma^2) dx + \vec{m}_{\vec{u}} \vec{m}_{\vec{u}}^H \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{u}}\|^2, \sigma^2) dx \\ &\quad \Updownarrow \\ E [\vec{x} \vec{x}^H \cap (\vec{x}^H \vec{x} \geq T)] &= \mathbf{C}_{\vec{x}} \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{x}}\|^2, \sigma^2) dx + \vec{m}_{\vec{x}} \vec{m}_{\vec{x}}^H \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{x}}\|^2, \sigma^2) dx \end{aligned}$$

• Démonstration de (169)

Pour les raisons évoquées lors de la démonstration de (168) ci dessus,

$\forall i, j \geq 2, i \neq j :$

$$E [u_i u_j \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] = 0$$

$\forall i \geq 2 :$

$$E [u_i u_1 \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] = 0$$

Pour $i = 1$, considérons le changement de variable $u_1 = \sqrt{z} e^{j\theta}$ et $\omega_{I-1} = \sum_{i=2}^I |u_i|^2$. Alors :

$$\begin{aligned} E [u_1^2 \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] &= \int_{\vec{u}^H \vec{u} \geq T} u_1^2 f_{\mathcal{N}_c}(m_{u_1}, \sigma^2)(u_1) \left[\prod_{j=2}^I f_{\mathcal{N}_c}(0, \sigma^2)(u_j) \right] d\vec{u} \\ &= \iint_{z + \omega_{I-1} \geq T} f_{\chi_{2c}^{I-1}}(\omega_{I-1}, 0, \sigma^2) \frac{e^{-\frac{z + |m_{u_1}|^2}{\sigma^2}}}{\sigma^2} z \left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{j2\theta} e^{\frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Re}\{\sqrt{z} e^{j\theta} m_{u_1}^*\}}}{2\pi} d\theta \right] dz d\omega_{I-1} \\ &= e^{j2\psi} \iint_{z + \omega_{I-1} \geq T} f_{\chi_{2c}^{I-1}}(\omega_{I-1}, 0, \sigma^2) \frac{e^{-\frac{z + |m_{u_1}|^2}{\sigma^2}}}{\sigma^2} z \mathcal{I}_2 \left(\frac{2\sqrt{z} |m_{u_1}|}{\sigma^2} \right) dz d\omega_{I-1} \end{aligned}$$

car si $m_{u_1} = |m_{u_1}| e^{j\psi}$ alors :

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{j2\theta} e^{\frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Re}\{\sqrt{z} e^{j\theta} m_{u_1}^*\}}}{2\pi} d\theta = e^{j2\psi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{j2(\theta-\psi)} e^{\frac{2}{\sigma^2} \sqrt{z} |m_{u_1}| \cos(\theta-\psi)}}{2\pi} d\theta = e^{j2\psi} \mathcal{I}_2 \left(\frac{2\sqrt{z} |m_{u_1}|}{\sigma^2} \right)$$

Finalement :

$$E [u_1^2 \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] = e^{j2\psi} \int_{x \geq T} \frac{e^{-\frac{x + |m_{u_1}|^2}{\sigma^2}}}{(\sigma^2)^I} \left[\int_0^x y \mathcal{I}_2 \left(\frac{2|m_{u_1}| \sqrt{y}}{\sigma^2} \right) \frac{(x-y)^{I-2}}{(I-2)!} dy \right] dx$$

et on reconnaît (165) avec $a = \frac{|m_{u_1}|}{\sigma^2}$ ce qui permet d'aboutir à :

$$\begin{aligned} E [u_1^2 \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] &= e^{j2\psi} \int_{x \geq T} \frac{e^{-\frac{x + |m_{u_1}|^2}{\sigma^2}}}{\sigma^2} |m_{u_1}|^2 \left(\frac{\sqrt{x}}{|m_{u_1}|} \right)^{I+1} \mathcal{I}_{I+1} \left(\frac{2|m_{u_1}| \sqrt{x}}{\sigma^2} \right) dx \\ &= m_{u_1}^2 \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, |m_{u_1}|^2, \sigma^2) dx \end{aligned}$$

Pour $i \geq 2$, posons $u_i = \sqrt{z} e^{j\theta}$ et $\delta_{I-1} = |u_1|^2 + \sum_{j=2, j \neq i}^I |u_j|^2$ avec $f(\delta_{I-1}) = f_{\chi_{2c}^{I-1}}(\delta_{I-1}, |m_{u_1}|^2, \sigma^2)$, alors :

$$\begin{aligned}
E [u_i^2 \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] &= \int_{\vec{u}^H \vec{u} \geq T} u_i^2 f_{\mathcal{N}_c(m_{u_1}, \sigma^2)}(u_1) \left[\prod_{j=2}^I f_{\mathcal{N}_c(0, \sigma^2)}(u_j) \right] d\vec{u} \\
&= \iint_{z + \delta_{I-1} \geq T} f_{\chi_{2c}^{I-1}}(\delta_{I-1}, |m_{u_1}|^2, \sigma^2) \left[\int_0^{2\pi} z \frac{e^{-\frac{z}{\sigma^2}}}{2\pi\sigma^2} e^{j2\theta} d\theta \right] dz d\delta_{I-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Finalement nous avons montré que :

$$\begin{aligned}
E [\vec{u} \vec{u}^T \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] &= \vec{m}_{\vec{u}} \vec{m}_{\vec{u}}^T \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{u}}\|^2, \sigma^2) dx \\
&\Downarrow \\
E [\vec{x} \vec{x}^T \cap (\vec{x}^H \vec{x} \geq T)] &= \vec{m}_{\vec{x}} \vec{m}_{\vec{x}}^T \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{x}}\|^2, \sigma^2) dx
\end{aligned}$$

Démonstrations : $\|\vec{m}_{\vec{x}}\| = 0, I \geq 2$

Dans ce cas toutes les composantes sont centrées et \mathbf{M} représentent une matrice unitaire quelconque, par exemple Id_I pour laquelle $\vec{u} = \vec{x}$ ($\vec{m}_{\vec{u}} = \vec{m}_{\vec{x}} = \vec{0}$).

- Démonstration de (167)

$$\forall i \geq 1, E [u_i \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] = 0 \Rightarrow E [\vec{u} \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] = \vec{0} = \vec{m}_{\vec{u}} \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{u}}\|^2, \sigma^2) dx$$

- Démonstration de (168)

Les calculs pour $|u_1|^2$ et $|u_i|^2, i \geq 2$ sont identiques, par conséquent :

$$E [\vec{u} \vec{u}^H \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] = \mathbf{C}_{\vec{u}} \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{u}}\|^2, \sigma^2) dx$$

- Démonstration de (169)

$$\forall i, j, E [u_i u_j \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] = 0 \Rightarrow E [\vec{u} \vec{u}^T \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T)] = \mathbf{0} = \vec{m}_{\vec{u}} \vec{m}_{\vec{u}}^T \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{u}}\|^2, \sigma^2) dx$$

Démonstrations : $I = 1$

Dans ce cas $x = u_1 = \sqrt{z} e^{j\theta}, m_x = |m_x| e^{j\psi}$.

- Démonstration de (167)

$$\begin{aligned}
E [x \cap (|x|^2 \geq T)] &= \int_{z \geq T} \frac{e^{-\frac{z+|m_x|^2}{\sigma^2}}}{\sigma^2} \sqrt{z} \left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{j\theta} e^{\frac{z}{\sigma^2} \text{Re}\{\sqrt{z} e^{j\theta} m_x^*\}}}{2\pi} d\theta \right] dz \\
&= (|m_x| e^{j\psi}) \int_{z \geq T} \frac{e^{-\frac{z+|m_x|^2}{\sigma^2}}}{\sigma^2} \left(\frac{\sqrt{z}}{|m_x|} \right) \mathcal{I}_1 \left(\frac{2\sqrt{z}|m_x|}{\sigma^2} \right) dz \\
&= m_x \int_{z \geq T} f_{\chi_{2c}^2}(z, |m_x|^2, \sigma^2) dz
\end{aligned}$$

- Démonstration de (168)

$$\begin{aligned} E \left[|x|^2 \cap (|x|^2 \geq T) \right] &= \int_{z \geq T} \frac{e^{-\frac{z+|m_x|^2}{\sigma^2}}}{\sigma^2} z \left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Re}\{\sqrt{z} e^{j\theta} m_x^*\}}}{2\pi} d\theta \right] dz \\ &= \int_{z \geq T} \frac{e^{-\frac{z+|m_x|^2}{\sigma^2}}}{\sigma^2} z \mathcal{I}_0 \left(\frac{2\sqrt{z} |m_x|}{\sigma^2} \right) dz \end{aligned}$$

or $\mathcal{I}_0(z) = \frac{2}{z} \mathcal{I}_1(z) + \mathcal{I}_2(z)$ (158) par conséquent :

$$z \mathcal{I}_0 \left(\frac{2\sqrt{z} |m_x|}{\sigma^2} \right) = \frac{\sigma^2 \sqrt{z}}{|m_x|} \mathcal{I}_1 \left(\frac{2\sqrt{z} |m_x|}{\sigma^2} \right) + z \mathcal{I}_2 \left(\frac{2\sqrt{z} |m_x|}{\sigma^2} \right)$$

ce qui conduit finalement à :

$$E \left[|x|^2 \cap (|x|^2 \geq T) \right] = \sigma^2 \int_{z \geq T} f_{\chi_{2c}^2}(z, |m_x|^2, \sigma^2) dz + |m_x|^2 \int_{z \geq T} f_{\chi_{2c}^3}(z, |m_x|^2, \sigma^2) dz$$

- Démonstration de (169)

$$\begin{aligned} E \left[x^2 \cap (|x|^2 \geq T) \right] &= \int_{z \geq T} \frac{e^{-\frac{z+|m_x|^2}{\sigma^2}}}{\sigma^2} z \left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{j2\theta} e^{\frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Re}\{\sqrt{z} e^{j\theta} m_x^*\}}}{2\pi} d\theta \right] dz \\ &= (|m_x|^2 e^{j2\psi}) \int_{z \geq T} \frac{e^{-\frac{z+|m_x|^2}{\sigma^2}}}{\sigma^2} \left(\frac{\sqrt{z}}{|m_x|} \right)^2 \mathcal{I}_2 \left(\frac{2\sqrt{z} |m_x|}{\sigma^2} \right) dz \\ &= m_x^2 \int_{z \geq T} f_{\chi_{2c}^3}(z, |m_x|^2, \sigma^2) dz \end{aligned}$$

Démonstrations : (171) (172) (173)

Elles se déduisent aisément des démonstrations (167) (168) (169) en remplaçant respectivement \sqrt{z} par $\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z+\omega_{I-1}}}$, z par $\frac{z}{\sqrt{z+\omega_{I-1}}^n}$ et z par $\frac{z}{\sqrt{z+\omega_{I-1}}}$ lors du changement de variable initial.

H. Espérance incomplètes de Vecteurs Aléatoires Gaussiens Circulaires à composantes colorées

Soit \vec{x} un vecteur aléatoire gaussien circulaire $\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{x}}, \mathbf{C}_{\vec{x}})$ caractérisé par la d.d.p.

$$f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{x}}, \mathbf{C}_{\vec{x}})}(\vec{x}) = \frac{e^{-(\vec{x} - \vec{m}_{\vec{x}})^H \mathbf{C}_{\vec{x}}^{-1} (\vec{x} - \vec{m}_{\vec{x}})}}{\pi^I |\mathbf{C}_{\vec{x}}|}$$

alors une extension immédiate des résultats de l'Annexe X-G-p87 s'écrit : $\forall I \geq 1, \forall n \geq 0$:

$$E \left[\frac{\vec{x}}{(\vec{x}^H \mathbf{C}_{\vec{x}}^{-1} \vec{x})^{\frac{n}{2}}} \cap (\vec{x}^H \mathbf{C}_{\vec{x}}^{-1} \vec{x} \geq T) \right] = \vec{m}_{\vec{x}} \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \vec{m}_{\vec{x}}^H \mathbf{C}_{\vec{x}}^{-1} \vec{m}_{\vec{x}}, 1) \frac{dx}{\sqrt{x}^n}$$

$$\begin{aligned}
E \left[\frac{\vec{x}^H \vec{x}^H}{(\vec{x}^H \mathbf{C}_{\vec{x}}^{-1} \vec{x})^{\frac{n}{2}}} \cap (\vec{x}^H \mathbf{C}_{\vec{x}}^{-1} \vec{x} \geq T) \right] &= \mathbf{C}_{\vec{x}} \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \vec{m}_{\vec{x}}^H \mathbf{C}_{\vec{x}}^{-1} \vec{m}_{\vec{x}}, 1) \frac{dx}{\sqrt{x^n}} + \\
&\quad \vec{m}_{\vec{x}} \vec{m}_{\vec{x}}^H \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \vec{m}_{\vec{x}}^H \mathbf{C}_{\vec{x}}^{-1} \vec{m}_{\vec{x}}, 1) \frac{dx}{\sqrt{x^n}} \\
E \left[\frac{\vec{x}^H \vec{x}^T}{(\vec{x}^H \mathbf{C}_{\vec{x}}^{-1} \vec{x})^{\frac{n}{2}}} \cap (\vec{x}^H \mathbf{C}_{\vec{x}}^{-1} \vec{x} \geq T) \right] &= \vec{m}_{\vec{x}} \vec{m}_{\vec{x}}^T \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \vec{m}_{\vec{x}}^H \mathbf{C}_{\vec{x}}^{-1} \vec{m}_{\vec{x}}, 1) \frac{dx}{\sqrt{x^n}} \\
P[\vec{x}^H \mathbf{C}_{\vec{x}}^{-1} \vec{x} \geq T] &= \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, \vec{m}_{\vec{x}}^H \mathbf{C}_{\vec{x}}^{-1} \vec{m}_{\vec{x}}, 1) dx
\end{aligned}$$

XI. ANNEXES DÉTECTION-ESTIMATION

A. Complément sur la Borne de Cramer-Rao

Un estimateur sans biais vérifie (43), $\forall \theta_0 + d\theta, \theta_0 - d\theta \in \Theta$:

$$(S) \quad \begin{cases} E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = g(\theta_0) \\ E_{\theta_0 + d\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = g(\theta_0 + d\theta) \\ E_{\theta_0 - d\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = g(\theta_0 - d\theta) \end{cases} \quad (174)$$

Pour la minimisation de $EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right]$, le système de 3 contraintes (S) est équivalent (transformation bijective, cf. Annexe X-C-p83) à :

$$(S') \quad \begin{cases} E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right] = 0 \\ E_{\theta_0} \left[\left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) \left(\frac{f_{\theta_0 + d\theta}(\vec{x}) - f_{\theta_0}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right) \right] = g(\theta_0 + d\theta) - g(\theta_0) \\ E_{\theta_0} \left[\left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) \left(\frac{f_{\theta_0 - d\theta}(\vec{x}) - f_{\theta_0}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right) \right] = g(\theta_0 - d\theta) - g(\theta_0) \end{cases}$$

Supposons que $f_{\theta}(\vec{x})$ soit dérivable à gauche $\left(\frac{\partial f_{\theta}(\vec{x})}{\partial \theta^-} \right)$ et à droite $\left(\frac{\partial f_{\theta}(\vec{x})}{\partial \theta^+} \right)$ en θ_0 . Alors deux cas sont possibles :

• $f_{\theta}(\vec{x})$ est dérivable en θ_0 , par conséquent les fonctions $c_1(\vec{x}) = \frac{f_{\theta_0 + d\theta}(\vec{x}) - f_{\theta_0}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})}$ et $c_{-1}(\vec{x}) = \frac{f_{\theta_0 + d\theta}(\vec{x}) - f_{\theta_0}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})}$ sont asymptotiquement ($d\theta \rightarrow 0$) liées et (S') se réduit asymptotiquement à :

$$(S') \quad \begin{cases} E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right] = 0 \\ E_{\theta_0} \left[\left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) \frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta} \right] = \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \end{cases}$$

conduisant à (35a-b) :

$$\begin{aligned} EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] &\geq \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta} \right)^2 \right] \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\ &\geq \frac{\left[\frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \right]^2}{E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta} \right)^2 \right]}, \end{aligned}$$

ce qui est la forme classique de la borne de Cramer-Rao (55) lorsque $f_{\theta}(\vec{x})$ est dérivable en θ_0 .

• $f_{\theta}(\vec{x})$ n'est pas dérivable en θ_0 , par conséquent les fonctions $c_1(\vec{x}) = \frac{f_{\theta_0 + d\theta}(\vec{x}) - f_{\theta_0}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})}$ et $c_{-1}(\vec{x}) = \frac{f_{\theta_0 + d\theta}(\vec{x}) - f_{\theta_0}(\vec{x})}{f_{\theta_0}(\vec{x})}$ sont asymptotiquement ($d\theta \rightarrow 0$) libres et (S') devient asymptotiquement :

$$(S') \quad \begin{cases} E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right] = 0 \\ E_{\theta_0} \left[\left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) \frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta^+} \right] = \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \\ E_{\theta_0} \left[\left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) \frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta^-} \right] = \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \end{cases}$$

conduisant à :

$$EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta^+} \right)^2 \right] & E_{\theta_0} \left[\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta^+} \frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta^-} \right] \\ 0 & E_{\theta_0} \left[\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta^+} \frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta^-} \right] & E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta^-} \right)^2 \right] \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\ \geq \left[\frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \right]^2 \left(\frac{E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta^-} \right)^2 \right] + E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta^+} \right)^2 \right] - 2E_{\theta_0} \left[\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta^+} \frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta^-} \right]}{E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta^-} \right)^2 \right] E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta^+} \right)^2 \right] - E_{\theta_0} \left[\frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta^+} \frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta^-} \right]^2} \right)$$

ce qui est la forme non classique de la borne de Cramer-Rao lorsque $f_{\theta}(\vec{x})$ n'est pas dérivable en θ_0 .

Dans les 2 cas, on obtient la plus grande borne inférieure (49) satisfaisant asymptotiquement (S).

B. Complément sur les Bornes de Bhattacharyya

A titre d'exemple, considérons le cas $P = 2$ ($N = 4$). Par transformation bijective (cf. Annexe X-C-p83), le système des $N + 1$ contraintes initiales (S)

$$(S) \quad \begin{cases} E_{\theta_0+2d\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = h(\theta_0 + 2d\theta) \\ E_{\theta_0+d\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = h(\theta_0 + d\theta) \\ E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = h(\theta_0) \\ E_{\theta_0-d\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = h(\theta_0 - d\theta) \\ E_{\theta_0-2d\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) \right] = h(\theta_0 - 2d\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E_{\theta_0+2d\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right] = h(\theta_0 + 2d\theta) - g(\theta_0) \\ E_{\theta_0+d\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right] = h(\theta_0 + d\theta) - g(\theta_0) \\ E_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right] = h(\theta_0) - g(\theta_0) \\ E_{\theta_0-d\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right] = h(\theta_0 - d\theta) - g(\theta_0) \\ E_{\theta_0-2d\theta} \left[\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right] = h(\theta_0 - 2d\theta) - g(\theta_0) \end{cases}$$

est équivalent à (S')

$$(S') \quad \begin{cases} E_{\theta_0} \left[\left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) c_2(\vec{x}) \right] = v_2 = \frac{h(\theta_0+2d\theta) - 2h(\theta_0+d\theta) + h(\theta_0)}{(d\theta)^2} \\ E_{\theta_0} \left[\left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) c_1(\vec{x}) \right] = v_1 = \frac{h(\theta_0+d\theta) - h(\theta_0)}{d\theta} \\ E_{\theta_0} \left[\left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) c_0(\vec{x}) \right] = v_0 = h(\theta_0) - g(\theta_0) \\ E_{\theta_0} \left[\left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) c_{-1}(\vec{x}) \right] = v_{-1} = \frac{h(\theta_0) - h(\theta_0-d\theta)}{d\theta} \\ E_{\theta_0} \left[\left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) c_{-2}(\vec{x}) \right] = v_{-2} = \frac{h(\theta_0-2d\theta) - 2h(\theta_0-d\theta) + h(\theta_0)}{(d\theta)^2} \end{cases} \quad (175)$$

où :

$$\begin{cases} c_2(\vec{x}) = \frac{f_{\theta_0+2d\theta}(\vec{x}) - 2f_{\theta_0+d\theta}(\vec{x}) + f_{\theta_0}(\vec{x})}{(d\theta)^2 f_{\theta_0}(\vec{x})} \\ c_1(\vec{x}) = \frac{f_{\theta_0+d\theta}(\vec{x}) - f_{\theta_0}(\vec{x})}{(d\theta) f_{\theta_0}(\vec{x})} \\ c_0(\vec{x}) = 1 \\ c_{-1}(\vec{x}) = \frac{f_{\theta_0}(\vec{x}) - f_{\theta_0-d\theta}(\vec{x})}{(d\theta) f_{\theta_0}(\vec{x})} \\ c_{-2}(\vec{x}) = \frac{f_{\theta_0-2d\theta}(\vec{x}) - 2f_{\theta_0-d\theta}(\vec{x}) + f_{\theta_0}(\vec{x})}{(d\theta)^2 f_{\theta_0}(\vec{x})} \end{cases}$$

Par conséquent, la forme générale de la borne de Bhattacharyya d'ordre 2 pour les estimateurs sans biais est :

$$EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] \geq \lim_{d\theta \rightarrow 0} \vec{v} \mathbf{G}^{-1} \vec{v}, \quad \vec{v} = [v_{-2}, \dots, v_{-2}], \quad \mathbf{G}_{i,j} = E_{\theta_0} [c_j(\vec{x}) c_i(\vec{x})], \quad i, j \in [-2, 2] \quad (176)$$

et elle correspond (au sens de (47)) à la plus grande borne inférieure satisfaisant (65) pour $P = 2$. Cette limite peut être exprimée de manière plus "compacte" si $h(\theta)$ et $f_\theta(\vec{x})$ sont dérivables au second ordre en θ_0 , et si $E_{\theta_0} \left[\frac{\partial^i f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial^i \theta} \frac{\partial^j f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial^j \theta} \frac{1}{(f_{\theta_0}(\vec{x}))^2} \right]$ existe pour $i, j \in [-2, 2]$. En effet dans ce cas le système (175) se réduit à (égalité des dérivées à gauche et à droite) :

$$(S') \quad \begin{cases} E_{\theta_0} \left[\left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) \left(\frac{\partial^2 f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial^2 \theta} \frac{1}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right) \right] = \frac{\partial^2 h(\theta_0)}{\partial^2 \theta} \\ E_{\theta_0} \left[\left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) \left(\frac{\partial f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta} \frac{1}{f_{\theta_0}(\vec{x})} \right) \right] = \frac{\partial h(\theta_0)}{\partial \theta} \\ E_{\theta_0} \left[\left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) \right] = h(\theta_0) - g(\theta_0) \end{cases}$$

ce qui n'est autre que l'expression de (63a-b) lorsque $P = 2$.

Comme nous l'avons détaillé précédemment dans le cas de la borne de Cramer-Rao (cf. Annexe XI-A-p95), rappelons que plusieurs formes asymptotiques sont possibles pour (S') suivant que les dérivées successives à gauche et à droite de $h(\theta)$ existent sans que $h(\theta)$ soit pour autant dérivable.

C. Complément sur la borne de Barankin

On peut introduire un raffinement supplémentaire dans la forme "réduite" de la borne de Barankin :

$$EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] \geq \overrightarrow{\Delta g}^T \mathbf{R}^{-1} \overrightarrow{\Delta g}$$

en prenant pour l'un des points test θ_0 . En effet, considérons $N+1$ points test tels que $\{\theta_n\}_{[1, N+1]} = \{\theta_0\} \cup \{\theta_n\}_{[1, N]}$. Dans ce cas (46)

$$\overrightarrow{\Delta g} = [0, g(\theta_1) - g(\theta_0), \dots, g(\theta_N) - g(\theta_0)] \text{ et } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & R_{1,1} & \dots & R_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & R_{N,1} & \dots & R_{N,N} \end{bmatrix},$$

ce qui permet, par inversion par bloc (cf. Annexe X-D-p84), d'obtenir la formule suivante :

$$EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] \geq \overrightarrow{\Delta g}'^T \left[\mathbf{R}' - \overrightarrow{1} \overrightarrow{1}'^T \right]^{-1} \overrightarrow{\Delta g}'$$

$$\text{où } \overrightarrow{\Delta g}' = [g(\theta_1) - g(\theta_0), \dots, g(\theta_N) - g(\theta_0)] \text{ et } \mathbf{R}' = \begin{bmatrix} R_{1,1} & \dots & R_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N,1} & \dots & R_{N,N} \end{bmatrix}$$

qui présente l'intérêt d'être d'une complexité réduite (inversion matrice (N, N) au lieu de $(N+1, N+1)$) pour une borne inférieure identique.

D. Complément sur les estimateurs efficaces

Nous nous plaçons dans le cadre défini par la section §III-L-p35 : la d.d.p. des observations $\vec{x} \in \Omega$ dépend d'un vecteur de paramètres $\vec{\theta} : f_{\vec{\theta}}(\vec{x})$. Rappelons que nous considérons le problème de l'estimation d'un vecteur $\vec{g}(\vec{\theta})$, dont les composantes sont des fonctions du vecteur de paramètres inconnus $\vec{\theta}$. Dans ce cas, nous avons

établi (cf. §III-L-p35) que l'estimateur efficace (dont l'EQM coïncide avec la Borne de Cramer-Rao) $\widehat{\vec{g}}(\widehat{\vec{\theta}_0})_{opt}$ de $\vec{g}(\vec{\theta}_0)$ est la solution du problème de minimisation :

$$\min \left\{ \left\| \sum_{n=1}^N \lambda_n \vec{u}_n(\vec{x}) \right\|_{\vec{\theta}_0}^2 \right\} \text{ sous } \mathbf{G}(\vec{u}_{[1,N]}, \vec{c}_{[1,K]}) = E_{\vec{\theta}_0} \left[\vec{c}_{[1,K]} \vec{u}_{[1,N]}^T \right] = \begin{bmatrix} \vec{0}^T \\ \left[\frac{\partial \vec{g}(\vec{\theta}_0)}{\partial \vec{\theta}^T} \right]^T \end{bmatrix} = \mathbf{V} \quad (177)$$

où :

$$\vec{u}_{[1,N]} = \widehat{\vec{g}}_{\vec{\theta}_0}(\vec{x}) - \vec{g}_{\vec{\theta}_0}, \quad \vec{c}_{[1,K]} = \left(\frac{1}{\frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}}} \right), \quad \langle g(\vec{x}) | h(\vec{x}) \rangle = E_{\vec{\theta}_0} [g(\vec{x}) h(\vec{x})]$$

Pour simplifier les écritures, posons :

$$\vec{u}_n(\vec{x}) = u_n(\vec{x}), \quad \vec{u}_{[1,N]} = \vec{u}(\vec{x}), \quad \vec{c}_{[1,K]} = \vec{c}(\vec{x})$$

ce qui permet de réécrire (177) sous la forme suivante :

$$\min \left\{ \left\| \vec{\lambda}^T \vec{u}(\vec{x}) \right\|_{\vec{\theta}_0}^2 \right\} \text{ sous } \mathbf{G}(\vec{u}, \vec{c}) = E_{\vec{\theta}_0} \left[\vec{c}(\vec{x}) \vec{u}(\vec{x})^T \right] = \begin{bmatrix} \vec{0}^T \\ \left[\frac{\partial \vec{g}(\vec{\theta}_0)}{\partial \vec{\theta}^T} \right]^T \end{bmatrix} = \mathbf{V}$$

laquelle est équivalente à :

$$\min \left\{ \left\| \vec{\lambda}^T \vec{u}(\vec{x}) \right\|_{\vec{\theta}_0}^2 \right\} \text{ sous } \mathbf{G}(\vec{u}, \vec{c}) \vec{\lambda} = \mathbf{V} \vec{\lambda} \Leftrightarrow \min \left\{ \left\| \vec{\lambda}^T \vec{u}(\vec{x}) \right\|_{\vec{\theta}_0}^2 \right\} \text{ sous } \mathbf{G}(\vec{\lambda}^T \vec{u}, \vec{c}) = \mathbf{V} \vec{\lambda}$$

problème admettant pour solution (34-b) :

$$\vec{\lambda}^T \vec{u}(\vec{x}) = \vec{\alpha}^T \vec{c}(\vec{x}), \quad \mathbf{G}(\vec{c}, \vec{c}) \vec{\alpha} = \mathbf{V} \vec{\lambda}, \quad \mathbf{G}(\vec{c}, \vec{c}) = \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \mathbf{F}(\vec{\theta}_0) \end{bmatrix}$$

soit :

$$\vec{\lambda}^T \vec{u}(\vec{x}) = \vec{\lambda}^T \mathbf{V}^T \mathbf{G}(\vec{c}, \vec{c})^{-1} \vec{c}(\vec{x}) \Leftrightarrow \vec{u}(\vec{x}) = \mathbf{V}^T \mathbf{G}(\vec{c}, \vec{c})^{-1} \vec{c}(\vec{x}),$$

solution qui conduit finalement à :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \widehat{\vec{g}}(\widehat{\vec{\theta}_0})_{opt}(\vec{x}) - \vec{g}(\vec{\theta}_0) = \left[\frac{\partial \vec{g}(\vec{\theta}_0)}{\partial \vec{\theta}^T} \right] \mathbf{F}(\vec{\theta}_0)^{-1} \frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}_0}(\vec{x})}{\partial \vec{\theta}} \quad (178)$$

et se réduit dans le cas de l'estimation d'une seule fonction dépendante d'un seul paramètre à :

$$\widehat{g(\theta_0)}_{opt}(\vec{x}) - g(\theta_0) = \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \frac{1}{F(\theta_0)} \frac{\partial \ln f_{\theta_0}(\vec{x})}{\partial \theta}$$

E. Complément sur les Bornes d'estimation conditionnées par un événement clairvoyant

En reprenant les notations développées §V-C.2-p51, la forme "classique" de la borne de Cramer-Rao pour les estimateurs localement sans biais correspond à la satisfaction des contraintes ($\mathcal{U}_{\theta_0, d\theta} = \mathcal{D}_{\theta_0} \cup \mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta}$) :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathcal{U}_{\theta_0, d\theta}} \left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) \Pi_{\mathcal{D}_{\theta_0}}(\vec{x}) f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} = 0 \\ \int_{\mathcal{U}_{\theta_0, d\theta}} \left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) \Pi_{\mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta}}(\vec{x}) \frac{f_{\theta_0 + d\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta})}{f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0})} f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} = g(\theta_0 + d\theta) - g(\theta_0) \end{array} \right. \quad (179)$$

conduisant à (propriété de convergence (125) et lemme de minimisation (35a-b)) :

$$\begin{aligned} EQM_{\theta_0} \left[\widehat{g(\theta_0)} \right] &\geq \left(\frac{0}{\frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta}} \right)^T \left(\lim_{d\theta \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{G}_{\theta_0}(\theta_0 + d\theta)}{d\theta^2} \right]^{-1} \right) \left(\frac{0}{\frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta}} \right) \\ &\geq \frac{\left[\frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \right]^2}{\lim_{d\theta \rightarrow 0} \frac{z_{\theta_0}(\theta_0 + d\theta)}{d\theta^2}} \end{aligned} \quad (180)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\theta_0}(\theta_0 + d\theta) &= \begin{bmatrix} G_{11} = 1 & G_{12} = \int_{\mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta} \cap \mathcal{D}_{\theta_0}} f_{\theta_0 + d\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta}) d\vec{x} \\ G_{21} = G_{12} & G_{22} = \int_{\mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta}} \frac{f_{\theta_0 + d\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta})^2}{f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0})} d\vec{x} \end{bmatrix} \\ z_{\theta_0}(\theta_0 + d\theta) &= \int_{\mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta}} \frac{f_{\theta_0 + d\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta})^2}{f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0})} d\vec{x} - \left(\int_{\mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta} \cap \mathcal{D}_{\theta_0}} f_{\theta_0 + d\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta}) d\vec{x} \right)^2 \end{aligned} \quad (182)$$

ce qui est la forme (126a-b) de la Borne de Cramer-Rao introduite §V-B-p49.

Posons :

$$\begin{aligned} w_{\theta_0}(\theta) &= \int_{\mathcal{D}_{\theta}} \frac{(f_{\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta}) - f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0}))^2}{f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0})} d\vec{x} \\ u_{\theta_0}(\theta) &= \int_{\mathcal{D}_{\theta}} \frac{f_{\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta})^2}{f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0})} d\vec{x} - 1 \\ v_{\theta_0}(\theta) &= \int_{\mathcal{D}_{\theta}} f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} - 1 \\ t_{\theta_0}(\theta) &= 1 - \left(\int_{\mathcal{D}_{\theta} \cap \mathcal{D}_{\theta_0}} f_{\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta}) d\vec{x} \right)^2 \end{aligned}$$

On vérifie alors que :

- $z_{\theta_0}(\theta_0 + d\theta) = u_{\theta_0}(\theta_0 + d\theta) + t_{\theta_0}(\theta_0 + d\theta)$,
- $w_{\theta_0}(\theta) = u_{\theta_0}(\theta) + v_{\theta_0}(\theta)$,

- $w_{\theta_0}(\theta_0) = u_{\theta_0}(\theta_0) = v_{\theta_0}(\theta_0) = t_{\theta_0}(\theta_0) = 0$,
- sous des conditions assez générales, $w_{\theta_0}(\theta)$, $u_{\theta_0}(\theta)$, $v_{\theta_0}(\theta)$ sont deux fois dérivables au voisinage de θ_0 ,
- $w_{\theta_0}(\theta)$ est une fonction du 2^{nd} ordre au voisinage de θ_0 (elle est minimale en θ_0),
- $v_{\theta_0}(\theta)$ est une fonction du 1^{er} ordre au voisinage de θ_0 ($v_{\theta_0}(\theta)$ n'a aucune raison d'être extrémale pour $\theta = \theta_0$, $\forall \theta_0 \in \Theta$, sauf si $\mathcal{D}_{\theta_0} = \mathcal{D}$ est un événement observable),

par conséquent $u_{\theta_0}(\theta)$ est une fonction du 1^{er} ordre au voisinage de θ_0 .

De plus, la fonction $t_{\theta_0}(\theta)$ est minimale en θ_0 , donc si elle est dérivable, sa dérivée est nulle, sinon elle n'est dérivable qu'à gauche et à droite.

Ainsi, dans tous les cas, $z_{\theta_0}(\theta)$ est une fonction du 1^{er} ordre au voisinage de θ_0 vérifiant :

$$\frac{1}{\lim_{d\theta \rightarrow 0} \frac{z_{\theta_0}(\theta_0 + d\theta)}{d\theta^2}} = \lim_{d\theta \rightarrow 0} \frac{d\theta}{z_{\theta_0}(\theta_0 + d\theta)} = 0$$

ce qui traduit que (sous des conditions assez générales) la Borne de Cramer-Rao conditionnée par un événement clairvoyant est nulle.

Par contre si $\mathcal{D}_{\theta_0} = \mathcal{D}$ est observable, alors $v_{\theta_0}(\theta) = t_{\theta_0}(\theta) = 0$ et $z_{\theta_0}(\theta) = u_{\theta_0}(\theta) = w_{\theta_0}(\theta)$ est du second ordre, aboutissant à une Borne de Cramer-Rao non triviale.

Cette analyse est généralisable aux bornes de Bhattacharyya d'ordre fini pour lesquelles la propriété de convergence (125) s'applique également. Elles correspondent alors à la prise en compte de contraintes additionnelles du type :

$$\int_{\mathcal{U}_{\theta_0, d\theta}} \left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) \Pi_{\mathcal{D}_{\theta_0 + pd\theta}}(\vec{x}) f_{\theta_0 + pd\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0 + pd\theta}) d\vec{x} = g(\theta_0 + pd\theta) - g(\theta_0)$$

où $\mathcal{U}_{\theta_0, d\theta} = \mathcal{D}_{\theta_0} \cup \mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta} \cup \dots \cup \mathcal{D}_{\theta_0 + pd\theta} \cup \dots$

A titre d'exemple, considérons le cas particulier de l'ordre 2, pour lequel les contraintes localement sans biais deviennent ($\mathcal{U}_{\theta_0, d\theta} = \mathcal{D}_{\theta_0} \cup \mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta} \cup \mathcal{D}_{\theta_0 + 2d\theta}$) :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathcal{U}_{\theta_0, d\theta}} \left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) \Pi_{\mathcal{D}_{\theta_0}}(\vec{x}) f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} = 0 \\ \int_{\mathcal{U}_{\theta_0, d\theta}} \left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) \Pi_{\mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta}}(\vec{x}) \frac{f_{\theta_0 + d\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0 + d\theta})}{f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0})} f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} = g(\theta_0 + d\theta) - g(\theta_0) \\ \int_{\mathcal{U}_{\theta_0, d\theta}} \left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) \Pi_{\mathcal{D}_{\theta_0 + 2d\theta}}(\vec{x}) \frac{f_{\theta_0 + 2d\theta}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0 + 2d\theta})}{f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0})} f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} = g(\theta_0 + 2d\theta) - g(\theta_0) \end{array} \right.$$

Par transformation bijective (cf. Annexe X-C-p83) le système (S) est équivalent à :

$$(S') \left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathcal{U}_{\theta_0, d\theta}} \left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) c_0(\vec{x}) f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} = 0 \\ \int_{\mathcal{U}_{\theta_0, d\theta}} \left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) c_1(\vec{x}) f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} = \frac{g(\theta_0 + d\theta) - g(\theta_0)}{(d\theta)} \\ \int_{\mathcal{U}_{\theta_0, d\theta}} \left(\widehat{g(\theta_0)}(\vec{x}) - g(\theta_0) \right) c_2(\vec{x}) f_{\theta_0}(\vec{x} | \mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} = \frac{g(\theta_0 + 2d\theta) - 2g(\theta_0 + d\theta) + g(\theta_0)}{(d\theta)^2} \end{array} \right.$$

où :

$$\begin{cases} c_0(\vec{x}) = \Pi_{\mathcal{D}_{\theta_0}}(\vec{x}) \\ c_1(\vec{x}) = \frac{\Pi_{\mathcal{D}_{\theta_0+d\theta}}(\vec{x})f_{\theta_0+d\theta}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0+d\theta}) - \Pi_{\mathcal{D}_{\theta_0}}(\vec{x})f_{\theta_0}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0})}{(d\theta)f_{\theta_0}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0})} \\ c_2(\vec{x}) = \frac{\Pi_{\mathcal{D}_{\theta_0+2d\theta}}(\vec{x})f_{\theta_0+2d\theta}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0+2d\theta}) - 2\Pi_{\mathcal{D}_{\theta_0+d\theta}}(\vec{x})f_{\theta_0+d\theta}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0+d\theta}) + \Pi_{\mathcal{D}_{\theta_0}}(\vec{x})f_{\theta_0}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0})}{(d\theta)^2f_{\theta_0}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0})} \end{cases},$$

ce qui conduit à (propriété de convergence (125) et lemme de minimisation (35a-b)) :

$$EQM_{\theta_0}[\widehat{g(\theta_0)}] \geq \lim_{d\theta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 g(\theta_0)}{\partial^2 \theta} \end{pmatrix}^T \mathbf{G}_{\theta_0}(\theta_0 + d\theta)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 g(\theta_0)}{\partial^2 \theta} \end{pmatrix}$$

où :

$$\mathbf{G}_{\theta_0}(\theta_0 + d\theta) = \begin{bmatrix} G_{11}=1 & G_{12} = \int_{\mathcal{U}_{\theta_0,d\theta}} c_0(\vec{x}) c_1(\vec{x}) f_{\theta_0}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} & G_{13} = \int_{\mathcal{U}_{\theta_0,d\theta}} c_0(\vec{x}) c_2(\vec{x}) f_{\theta_0}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} \\ G_{21}=G_{12} & G_{22} = \int_{\mathcal{U}_{\theta_0,d\theta}} c_1(\vec{x}) c_1(\vec{x}) f_{\theta_0}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} & G_{23} = \int_{\mathcal{U}_{\theta_0,d\theta}} c_1(\vec{x}) c_2(\vec{x}) f_{\theta_0}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} \\ G_{31}=G_{13} & G_{32}=G_{23} & G_{33} = \int_{\mathcal{U}_{\theta_0,d\theta}} c_2(\vec{x}) c_2(\vec{x}) f_{\theta_0}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} \end{bmatrix}$$

soit encore (après inversion par bloc, cf. Annexe X-D-p84) :

$$EQM_{\theta_0}[\widehat{g(\theta_0)}] \geq \begin{pmatrix} \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial^2 \theta} \end{pmatrix}^T \lim_{d\theta \rightarrow 0} \frac{\begin{bmatrix} G_{33} - G_{13}^2 & G_{12}G_{13} - G_{23} \\ G_{12}G_{13} - G_{23} & G_{22} - G_{12}^2 \end{bmatrix}}{(G_{22}G_{33} - G_{23}^2) - (G_{22}G_{13}^2 + G_{33}G_{12}^2 - 2G_{12}G_{13}G_{23})} \begin{pmatrix} \frac{\partial g(\theta_0)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 g(\theta_0)}{\partial^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (184)$$

Pour analyser la limite (184), considérons le développement limité suivant :

$$f_{\theta_0+k d\theta}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0+k d\theta}) = f_{\theta_0}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0}) + (k d\theta) \left[\frac{\partial f_{\theta}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta})}{\partial \theta} \right]_{\theta_0} + \frac{(k d\theta)^2}{2} \left[\frac{\partial^2 f_{\theta}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta})}{\partial^2 \theta} \right]_{\theta_0} + o_{\vec{x}}(d\theta^2)$$

lequel conduit à :

$$\begin{aligned} f_{\theta_0+k d\theta}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0+k d\theta}) f_{\theta_0+l d\theta}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0+l d\theta}) &= f_{\theta_0}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0})^2 + d\theta(k+l) f_{\theta_0}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0}) \left[\frac{\partial f_{\theta}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta})}{\partial \theta} \right]_{\theta_0} \\ &+ d\theta^2 f_{\theta_0}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0}) \left\{ \left(\frac{k^2+l^2}{2} \right) \left[\frac{\partial^2 f_{\theta}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta})}{\partial^2 \theta} \right]_{\theta_0} + \frac{kl}{f_{\theta_0}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0})} \left(\left[\frac{\partial f_{\theta}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta})}{\partial \theta} \right]_{\theta_0} \right)^2 \right\} + o_{\vec{x}}(d\theta^2) \end{aligned}$$

ce qui, par intégration, permet d'aboutir à :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_{\theta_0+k d\theta} \cap \mathcal{D}_{\theta_0+l d\theta}} \frac{f_{\theta_0+k d\theta}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0+k d\theta}) f_{\theta_0+l d\theta}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0+l d\theta})}{f_{\theta_0}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0})} d\vec{x} &= \int_{\mathcal{D}_{\theta_0+k d\theta} \cap \mathcal{D}_{\theta_0+l d\theta}} f_{\theta_0}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} + d\theta(k+l) \int_{\mathcal{D}_{\theta_0+k d\theta} \cap \mathcal{D}_{\theta_0+l d\theta}} \left[\frac{\partial f_{\theta}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta})}{\partial \theta} \right]_{\theta_0} d\vec{x} \\ &+ d\theta^2 \int_{\mathcal{D}_{\theta_0+k d\theta} \cap \mathcal{D}_{\theta_0+l d\theta}} \left\{ \left(\frac{k^2+l^2}{2} \right) \left[\frac{\partial^2 f_{\theta}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta})}{\partial^2 \theta} \right]_{\theta_0} + \frac{kl}{f_{\theta_0}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta_0})} \left(\left[\frac{\partial f_{\theta}(\vec{x}|\mathcal{D}_{\theta})}{\partial \theta} \right]_{\theta_0} \right)^2 \right\} d\vec{x} + o(d\theta^2) \end{aligned}$$

soit, au 1^{er} ordre, à :

$$\int_{\mathcal{D}_{\theta_0+k d\theta} \cap \mathcal{D}_{\theta_0+l d\theta}} \frac{f_{\theta_0+k d\theta}(\vec{x} \mid \mathcal{D}_{\theta_0+k d\theta}) f_{\theta_0+l d\theta}(\vec{x} \mid \mathcal{D}_{\theta_0+l d\theta})}{f_{\theta_0}(\vec{x} \mid \mathcal{D}_{\theta_0})} d\vec{x} - 1 = \int_{\mathcal{D}_{\theta_0+k d\theta} \cap \mathcal{D}_{\theta_0+l d\theta}} f_{\theta_0}(\vec{x} \mid \mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} - 1 + \quad (185)$$

$$d\theta (k+l) \int_{\mathcal{D}_{\theta_0+k d\theta} \cap \mathcal{D}_{\theta_0+l d\theta}} \left[\frac{\partial f_{\theta}(\vec{x} \mid \mathcal{D}_{\theta})}{\partial \theta} \right]_{\theta_0} d\vec{x} + o(d\theta)$$

Considérons maintenant la fonction :

$$\xi_{\theta_0}(k, l, d\theta) = \int_{\mathcal{D}_{\theta_0+k d\theta} \cap \mathcal{D}_{\theta_0+l d\theta}} f_{\theta_0}(\vec{x} \mid \mathcal{D}_{\theta_0}) d\vec{x} - 1 = \frac{\int_{\mathcal{D}_{\theta_0+k d\theta} \cap \mathcal{D}_{\theta_0+l d\theta}} f_{\theta_0}(\vec{x}) d\vec{x}}{\int_{\mathcal{D}_{\theta_0}} f_{\theta_0}(\vec{x}) d\vec{x}} - 1$$

$\xi_{\theta_0}(k, l, d\theta)$ vérifie $\xi_{\theta_0}(k, l, 0) = 0$ mais n'a aucune raison d'être extrémale pour $\theta = \theta_0$, $\forall \theta_0 \in \Theta$ (sauf en des valeurs particulières de $\theta_0 \in \Theta$ ou si $\mathcal{D}_{\theta_0} = \mathcal{D}$ est un événement observable, cas pour lequel $\xi_{\theta_0}(k, l, d\theta) = 0$).

Par conséquent $\xi_{\theta_0}(k, l, d\theta)$ est du 1^{er} ordre (sauf en des valeurs particulières de $\theta_0 \in \Theta$), ce qui implique que l'expression (185) est également du 1^{er} ordre (sauf en des valeurs particulières de $\theta_0 \in \Theta$).

On en déduit que dans la limite (184) :

$$\lim_{d\theta \rightarrow 0} \begin{cases} G_{12} \approx \alpha_{12} \\ G_{13} \approx \frac{\alpha_{13}}{d\theta} \\ G_{22} \approx \frac{\alpha_{22}}{d\theta} \\ G_{23} \approx \frac{\alpha_{23}}{d\theta^2} \\ G_{33} \approx \frac{\alpha_{33}}{d\theta^3} \end{cases} \Rightarrow \lim_{d\theta \rightarrow 0} \frac{\begin{bmatrix} G_{33} - G_{13}^2 & G_{12}G_{13} - G_{23} \\ G_{12}G_{13} - G_{23} & G_{22} - G_{12}^2 \end{bmatrix}}{(G_{22}G_{33} - G_{23}^2) - (G_{22}G_{13}^2 + G_{33}G_{12}^2 - 2G_{12}G_{13}G_{23})} = \lim_{d\theta \rightarrow 0} \alpha d\theta = 0$$

ce qui traduit que (sous des conditions assez générales) la Borne de Bhattacharyya d'ordre 2 (184) conditionnée par un événement clairvoyant est nulle.

XII. ANNEXES ECARTOMÉTRIE MONOPULSE

A. Calcul de $P(\mathcal{D})$, $E[\hat{r} | \mathcal{D}]$, $E[|\hat{r}|^2 | \mathcal{D}]$, $E[\hat{r}^2 | \mathcal{D}]$ lors d'observations multiples lorsque la loi de fluctuation d'amplitude est inconnue et $\mathcal{D} = \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \geq T \right\}$.

Rappelons que les I observations sont indépendantes et que le bruit additif (\vec{n}_i) est blanc temporellement et éventuellement corrélé spatialement :

$$\vec{v}_i = \begin{pmatrix} \Sigma_i \\ \Delta_i \end{pmatrix} = \beta_i \vec{x} + \vec{n}_i, \quad \beta_i = \alpha_i g_\Sigma, \quad \vec{x} = (1, r)^T, \quad r = \frac{g_\Delta}{g_\Sigma}$$

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_I), \quad \vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_I), \quad \sigma_{\vec{\beta}}^2 = \frac{\|\vec{\beta}\|^2}{I} = |g_\Sigma|^2 \sigma_{\vec{\alpha}}^2$$

$$\vec{V} = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_I, \Delta_1, \dots, \Delta_I)^T = (\vec{\Sigma}^T, \vec{\Delta}^T)^T$$

$$f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{V}}, \mathbf{C}_{\vec{V}})}(\vec{V}) = \frac{e^{-(\vec{V} - \vec{m}_{\vec{V}})^H \mathbf{C}_{\vec{V}}^{-1} (\vec{V} - \vec{m}_{\vec{V}})}}{\pi^{2I} |\mathbf{C}_{\vec{V}}|} = f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}, \mathbf{C}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}})}(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{\Sigma}}, \mathbf{C}_{\vec{\Sigma}})}(\vec{\Sigma})$$

$$\mathbf{C}_{\vec{V}} = \begin{bmatrix} C_{11} \mathbf{Id}_I & C_{12} \mathbf{Id}_I \\ C_{12}^* \mathbf{Id}_I & C_{22} \mathbf{Id}_I \end{bmatrix}, \quad \vec{m}_{\vec{V}} = \begin{pmatrix} \vec{m}_{\vec{\Sigma}} \\ \vec{m}_{\vec{\Delta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\beta} \\ r \vec{\beta} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} = \sigma_{\vec{\Sigma}}^2 & C_{12} \\ C_{12}^* & C_{22} = \sigma_{\vec{\Delta}}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{\vec{n}}$$

$$\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} = \vec{m}_{\vec{\Delta}} + \frac{C_{12}^*}{C_{11}} (\vec{\Sigma} - \vec{m}_{\vec{\Sigma}}) = \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \vec{\Sigma} + \vec{\gamma}, \quad \vec{\gamma} = \vec{m}_{\vec{\Delta}} - \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \vec{m}_{\vec{\Sigma}}$$

$$\mathbf{C}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} = \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2 \mathbf{Id}_I, \quad \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2 = \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}}, \quad \mathcal{D} = \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \geq T \right\}$$

Pour simplifier les écritures nous conviendrons que :

$$f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}, \mathbf{C}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}})}(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) = f(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}), \quad f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{\Sigma}}, \mathbf{C}_{\vec{\Sigma}})}(\vec{\Sigma}) = f(\vec{\Sigma})$$

• Calcul de $P(\mathcal{D})$

$$P(\mathcal{D}) = \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} = \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) dt$$

$$(170) = \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) dt$$

• Calcul de $E[\hat{r} | \mathcal{D}]$

$$\begin{aligned}
E[\hat{r} \cap \mathcal{D}] &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \left[\int \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} f(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
&= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \frac{\vec{\Sigma}^H}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \left[\int \vec{\Delta} f(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
&= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \frac{\vec{\Sigma}^H}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \left[\vec{\gamma} + \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \vec{\Sigma} \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
E[\hat{r} \cap \mathcal{D}] &= \frac{C_{12}^*}{C_{11}} P(\mathcal{D}) + \left[\int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \frac{\vec{\Sigma}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \right]^H \vec{\gamma} \\
(171) &= \frac{C_{12}^*}{C_{11}} P(\mathcal{D}) + \left[\vec{m}_{\vec{\Sigma}} \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{\sqrt{t^2}} \right]^H \vec{\gamma} \\
&= \frac{C_{12}^*}{C_{11}} P(\mathcal{D}) + \vec{m}_{\vec{\Sigma}}^H \vec{\gamma} \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t} \\
E[\hat{r} | \mathcal{D}] &= \frac{C_{12}^*}{C_{11}} + \frac{I\sigma_{\vec{\Sigma}}^2}{P(\mathcal{D})} \left(r - \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right) \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, I\sigma_{\vec{\Sigma}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

• Calcul de $E[|\hat{r}|^2 | \mathcal{D}]$

$$\begin{aligned}
E[|\hat{r}|^2 \cap \mathcal{D}] &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \left[\int \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta} \vec{\Delta}^H \vec{\Sigma}}{(\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma})^2} f(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
&= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \frac{\vec{\Sigma}^H}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \left[\int \vec{\Delta} \vec{\Delta}^H f(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] \frac{\vec{\Sigma}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
&= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \frac{\vec{\Sigma}^H}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \left[\mathbf{C}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} + \vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} \vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^H \right] \frac{\vec{\Sigma}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
E[|\hat{r}|^2 \cap \mathcal{D}] &= \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2 \left[\int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \frac{f(\vec{\Sigma})}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} d\vec{\Sigma} \right] + \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \left| \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \right|^2 f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma}
\end{aligned}$$

avec :

$$\left| \vec{\Sigma}^H \vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} \right|^2 = \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} + \vec{\Sigma}^H \vec{\gamma} \right|^2 = \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 (\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma})^2 + \vec{\gamma}^H \vec{\Sigma} \vec{\Sigma}^H \vec{\gamma} + 2 \operatorname{Re} \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\gamma} \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right\} \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}$$

par conséquent :

$$E \left[|\hat{r}|^2 \cap \mathcal{D} \right] = \sigma_{\Delta|\vec{\Sigma}}^2 \left[\int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \frac{f(\vec{\Sigma})}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} d\vec{\Sigma} \right] + \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 \left[\int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \right] \\ + \vec{\gamma}^H \left[\int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \frac{\vec{\Sigma} \vec{\Sigma}^H}{(\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma})^2} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \right] \vec{\gamma} + 2 \operatorname{Re} \left\{ \left[\int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \frac{\vec{\Sigma}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \right]^H \vec{\gamma} \frac{C_{12}}{C_{11}} \right\}$$

or :

$$\int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \frac{f(\vec{\Sigma})}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} d\vec{\Sigma} = \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t} \\ \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \frac{\vec{\Sigma} \vec{\Sigma}^H}{(\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma})^2} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} = \int_{t \geq T} \mathbf{C}_{\vec{\Sigma}} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) + \vec{m}_{\vec{\Sigma}} \vec{m}_{\vec{\Sigma}}^H f_{\chi_{2c}^{I+2}}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{\sqrt{t^4}} \\ \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \frac{\vec{\Sigma}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} = \vec{m}_{\vec{\Sigma}} \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{\sqrt{t^2}}$$

donc :

$$E \left[|\hat{r}|^2 \cap \mathcal{D} \right] = \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 P(\mathcal{D}) + \sigma_{\Delta|\vec{\Sigma}}^2 \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t} + \sigma_{\vec{\Sigma}}^2 \vec{\gamma}^H \vec{\gamma} \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t^2} \\ + \left| \vec{\gamma}^H \vec{m}_{\vec{\Sigma}} \right|^2 \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t^2} + 2 \operatorname{Re} \left\{ \vec{m}_{\vec{\Sigma}}^H \vec{\gamma} \frac{C_{12}}{C_{11}} \right\} \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t}$$

Finalement :

$$E \left[|\hat{r}|^2 \mid \mathcal{D} \right] = \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 + \frac{|\mathbf{C}|}{P(\mathcal{D}) C_{11}} \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t} + \frac{\sigma_{\vec{\Sigma}}^2}{P(\mathcal{D})} I\sigma_{\vec{\beta}}^2 \left| r - \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t^2} \\ + \frac{1}{P(\mathcal{D})} \left(I\sigma_{\vec{\beta}}^2 \right)^2 \left| r - \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t^2} \\ + \frac{I\sigma_{\vec{\beta}}^2}{P(\mathcal{D})} 2 \operatorname{Re} \left\{ \left(r - \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right) \frac{C_{12}}{C_{11}} \right\} \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t}$$

• Calcul de $E \left[\hat{r}^2 \mid \mathcal{D} \right]$

$$\begin{aligned}
E[\hat{r}^2 \cap \mathcal{D}] &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \left[\int \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta} \vec{\Delta}^T \vec{\Sigma}^*}{(\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma})^2} f(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
&= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \frac{\vec{\Sigma}^H}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \left[\int \vec{\Delta} \vec{\Delta}^T f(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] \frac{\vec{\Sigma}^*}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
&= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \frac{\vec{\Sigma}^H}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \left[\vec{m}_{\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}} \vec{m}_{\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}}^T \right] \frac{\vec{\Sigma}^*}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
E[\hat{r}^2 \cap \mathcal{D}] &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \left(\frac{\vec{\Sigma}^H \vec{m}_{\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \right)^2 f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma}
\end{aligned}$$

avec :

$$\left(\vec{\Sigma}^H \vec{m}_{\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}} \right)^2 = \left(\frac{C_{12}^*}{C_{11}} \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} + \vec{\Sigma}^H \vec{\gamma} \right)^2 = \left(\frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right)^2 (\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma})^2 + \vec{\gamma}^T \vec{\Sigma}^* \vec{\Sigma}^H \vec{\gamma} + 2 \vec{\Sigma}^H \vec{\gamma} \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}$$

par conséquent :

$$\begin{aligned}
E[\hat{r}^2 \cap \mathcal{D}] &= \left(\frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right)^2 \left[\int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \right] + \vec{\gamma}^T \left[\int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \frac{\vec{\Sigma} \vec{\Sigma}^T}{(\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma})^2} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \right]^* \vec{\gamma} \\
&\quad + 2 \left[\int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \frac{\vec{\Sigma}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \right]^H \vec{\gamma} \frac{C_{12}^*}{C_{11}}
\end{aligned}$$

or :

$$\int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \frac{\vec{\Sigma} \vec{\Sigma}^T}{(\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma})^2} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} = \vec{m}_{\vec{\Sigma}} \vec{m}_{\vec{\Sigma}}^T \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{\sqrt{t^4}}$$

donc :

$$E[\hat{r}^2 \cap \mathcal{D}] = \left(\frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right)^2 P(\mathcal{D}) + \left(\vec{m}_{\vec{\Sigma}}^H \vec{\gamma} \right)^2 \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t^2} + 2 \vec{m}_{\vec{\Sigma}}^H \vec{\gamma} \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t}$$

Finalemnt :

$$\begin{aligned}
E[\hat{r}^2 | \mathcal{D}] &= \left(\frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right)^2 + \frac{(I \sigma_{\vec{\beta}}^2)^2}{P(\mathcal{D})} \left(r - \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right)^2 \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(t, I \sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t^2} \\
&\quad + \frac{I \sigma_{\vec{\beta}}^2}{P(\mathcal{D})} 2 \left(r - \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right) \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, I \sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

B. Calcul de $P(\mathcal{D})$, $E[\hat{r} | \mathcal{D}]$, $E[|\hat{r}|^2 | \mathcal{D}]$, $E[\hat{r}^2 | \mathcal{D}]$ lors d'observations multiples lorsque la loi de fluctuation d'amplitude de type Swerling 3-4 et $\mathcal{D} = \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \geq T \right\}$

Rappelons que les I observations sont indépendantes et que le bruit additif (\vec{n}_i) est blanc temporellement et éventuellement corrélé spatialement :

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \begin{pmatrix} \Sigma_i \\ \Delta_i \end{pmatrix} = \beta_i \vec{x} + \vec{n}_i, \quad \beta_i = \alpha_i g_{\Sigma}, \quad \vec{x} = (1, r)^T, \quad r = \frac{g_{\Delta}}{g_{\Sigma}}, \quad \vec{g} = (g_{\Sigma}, g_{\Delta})^T \\ \vec{\alpha} &= (\alpha_1, \dots, \alpha_I), \quad \vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_I), \quad \sigma_{\beta}^2 = E[|\beta_i|^2] = |g_{\Sigma}|^2 \sigma_{\alpha}^2, \quad \sigma_{\alpha}^2 = E[|\alpha_i|^2] \\ \hat{r} &= \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}}, \quad \mathcal{D} = \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \geq T \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{N}_c}(\vec{v}, \mathbf{C}_{\vec{n}})(\vec{n}_i) &= \frac{e^{-\vec{n}_i^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{n}_i}}{\pi^2 |\mathbf{C}_{\vec{n}}|} \\ f(\alpha_i) &= \frac{4|\alpha_i|^2}{\pi (\sigma_{\alpha}^2)^2} e^{-\frac{2|\alpha_i|^2}{\sigma_{\alpha}^2}}, \quad \alpha_i = \sqrt{x_i} e^{j\varphi_i}, \quad f(x_i) = \frac{4x_i}{(\sigma_{\alpha}^2)^2} e^{-\frac{2x_i}{\sigma_{\alpha}^2}}, \quad f(\varphi_i) = \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

1) Calcul de $f(\vec{v}_i)$:

Pour simplifier les écritures nous poserons $\vec{v}_i = \vec{v}$, $\alpha_i = \alpha$ et $\sigma^2 = \frac{\sigma_{\alpha}^2}{2}$. Alors :

$$f(\vec{v}) = \int f(\alpha) f_{\mathcal{N}_c}(\vec{v}, \mathbf{C}_{\vec{n}})(\vec{v} - \alpha \vec{g}) d\alpha = \int \frac{|\alpha|^2}{\pi (\sigma^2)^2} \frac{e^{-\frac{1}{\sigma^2} [|\alpha|^2 + \sigma^2 (\vec{v} - \alpha \vec{g})^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} (\vec{v} - \alpha \vec{g})]}}{\pi^2 |\mathbf{C}_{\vec{n}}|} d\alpha$$

or :

$$\begin{aligned} A &= |\alpha|^2 + \sigma^2 (\vec{v} - \alpha \vec{g})^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} (\vec{v} - \alpha \vec{g}) \\ &= \sigma^2 \vec{v}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{v} + |\alpha|^2 (1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}) - 2\sigma^2 \operatorname{Re} \left\{ \vec{v}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g} \alpha \right\} \\ &= \sigma^2 \vec{v}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{v} + (1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}) \left[\left| \alpha - \frac{\sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{v}}{1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}} \right|^2 - \left| \frac{\sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{v}}{1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}} \right|^2 \right] \\ &= \sigma^2 \left[\vec{v}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{v} - \frac{\sigma^2 |\vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{v}|^2}{1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}} \right] + (1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}) \left| \alpha - \frac{\sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{v}}{1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}} \right|^2 \\ A &= \sigma^2 \vec{v}^H \left[\mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} - \frac{\sigma^2 \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g} \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1}}{1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}} \right] \vec{v} + (1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}) \left| \alpha - \frac{\sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{v}}{1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}} \right|^2 \\ &= \sigma^2 \vec{v}^H \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \vec{v} + (1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}) \left| \alpha - \frac{\sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{v}}{1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}} \right|^2 \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}_{\vec{n}} + \sigma^2 \vec{g} \vec{g}^H = \mathbf{C}_{\vec{n}} + \frac{\sigma_{\alpha}^2}{2} \vec{g} \vec{g}^H, \quad |\tilde{\mathbf{C}}| = |\mathbf{C}_{\vec{n}}| (1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}) \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= \frac{e^{-\vec{v}^H \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \vec{v}}}{\pi^2 |\mathbf{C}_{\vec{n}}|} \int \frac{|\alpha|^2}{\pi (\sigma^2)^2} e^{-\frac{1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}}{\sigma^2} \left| \alpha - \frac{\sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{v}}{1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}} \right|^2} d\alpha \\ &= \frac{e^{-\vec{v}^H \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \vec{v}}}{\sigma^2 \pi^2 |\mathbf{C}_{\vec{n}}| (1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g})} \left[\int \frac{|\alpha|^2}{\pi \left(\frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}} \right)} e^{-\frac{1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}}{\sigma^2} \left| \alpha - \frac{\sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{v}}{1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}} \right|^2} d\alpha \right] \\ &= \frac{e^{-\vec{v}^H \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \vec{v}}}{\sigma^2 \pi^2 |\tilde{\mathbf{C}}|} \left[\frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}} + \left| \frac{\sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{v}}{1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}} \right|^2 \right] \end{aligned}$$

et :

$$f(\vec{v}) = \frac{e^{-\vec{v}^H \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \vec{v}}}{\pi^2 |\tilde{\mathbf{C}}|} \frac{1}{1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}} \left[1 + \frac{\sigma^2 |\vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{v}|^2}{1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}} \right]$$

Or :

$$\tilde{\mathbf{C}}^{-1} \vec{g} = \frac{\mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}}{1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}}$$

Finalement :

$$f(\vec{v}) = \frac{e^{-\vec{v}^H \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \vec{v}}}{\pi^2 |\tilde{\mathbf{C}}|} \left[\frac{1}{1 + \sigma^2 \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{g}} + \sigma^2 |\vec{v}^H \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \vec{g}|^2 \right] \quad (186)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_{\vec{n}} + \frac{\sigma_\alpha^2}{2} \vec{g} \vec{g}^H, \quad \mathbf{C}_{\vec{v}} = \mathbf{C}_{\vec{n}} + \sigma_\alpha^2 \vec{g} \vec{g}^H$$

2) Calcul de $f(\vec{V})$:

Lorsque I observations indépendantes sont disponibles, alors la d.d.p. de

$$\vec{V} = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_I, \Delta_1, \dots, \Delta_I)^T = (\vec{\Sigma}^T, \vec{\Delta}^T)^T$$

est donnée par (186) :

$$f(\vec{V}) = f_{\vec{\Sigma}, \vec{\Delta}}(\vec{\Sigma}, \vec{\Delta}) = \prod_{i=1}^I \frac{e^{-\vec{v}_i^H \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \vec{v}_i}}{\pi^2 |\tilde{\mathbf{C}}|} \left(\frac{1}{1 + \frac{\sigma_\beta^2}{2} \vec{x}^H \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \vec{x}} + \frac{\sigma_\beta^2}{2} |\vec{v}_i^H \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \vec{x}|^2 \right), \quad \tilde{\mathbf{C}} = \frac{\sigma_\beta^2}{2} \vec{x} \vec{x}^H + \mathbf{C}_{\vec{n}} \quad (187)$$

3) Changement de variable, calcul du jacobien:

La forme (187) de $f(\vec{V})$ ne permet pas d'appliquer le schéma de calcul précédent (cf. Annexe XII-A-p103) reposant sur les propriétés des variables aléatoires gaussiennes. Néanmoins une méthode alternative basée sur le même principe consiste à décomposer $f(\vec{V})$ sous la forme d'un produit de polynômes et de d.d.p. gaussiennes pour se ramener au calcul de moments de variables aléatoires gaussiennes. Pour cela, il suffit de considérer le changement de variable :

$$\left(U_i = \frac{\Sigma_i^* \Delta_i}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}}, W_i = \Sigma_i \right)_{i \in [1, I]}, \quad \hat{r} = \sum_{i=1}^I U_i \quad (188)$$

Le jacobien de la transformation s'écrit alors :

$$J_{\vec{\Sigma}, \vec{\Delta}}(\vec{U}, \vec{W}) = \frac{\partial (\vec{\Sigma}_r^T, \vec{\Sigma}_j^T, \vec{\Delta}_r^T, \vec{\Delta}_j^T)}{\partial (\vec{W}_r^T, \vec{W}_j^T, \vec{U}_r^T, \vec{U}_j^T)^T}, \quad \begin{cases} \vec{\Sigma} = \vec{\Sigma}_r + j \vec{\Sigma}_j, & \vec{\Delta} = \vec{\Delta}_r + j \vec{\Delta}_j \\ \vec{U} = \vec{U}_r + j \vec{U}_j, & \vec{W} = \vec{W}_r + j \vec{W}_j \end{cases}$$

avec :

$$\left(\Delta_i = (\vec{W}^H \vec{W}) \frac{U_i W_i}{|W_i|^2}, \Sigma_i = W_i \right)_{i \in [1, I]}$$

Or :

$$\begin{aligned} J_{\vec{\Sigma}, \vec{\Delta}}(\vec{U}, \vec{W}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{Id}_I & \mathbf{0} & \frac{\partial (\vec{\Delta}_r^T, \vec{\Delta}_j^T)}{\partial (\vec{W}_r^T, \vec{W}_j^T)^T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Id}_I & \frac{\partial (\vec{\Sigma}_r^T, \vec{\Sigma}_j^T)}{\partial (\vec{U}_r^T, \vec{U}_j^T)^T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \vec{\Delta}_r^T}{\partial \vec{W}_r} & \frac{\partial \vec{\Delta}_j^T}{\partial \vec{W}_j} \\ \frac{\partial \vec{\Sigma}_r^T}{\partial \vec{U}_r} & \frac{\partial \vec{\Sigma}_j^T}{\partial \vec{U}_j} \end{vmatrix} \\ &= \left| \frac{\partial \vec{\Delta}_r^T}{\partial \vec{U}_r} \right| \left| \frac{\partial \vec{\Delta}_j^T}{\partial \vec{U}_j} - \frac{\partial \vec{\Delta}_r^T}{\partial \vec{U}_j} \left(\frac{\partial \vec{\Delta}_r^T}{\partial \vec{U}_r} \right)^{-1} \frac{\partial \vec{\Delta}_j^T}{\partial \vec{U}_r} \right| [72, p. 21] \end{aligned}$$

avec :

$$\frac{\partial \vec{\Delta}_r^{\rightarrow T}}{\partial \vec{U}_r} = \vec{W}^H \vec{W} \begin{bmatrix} \frac{\text{Re}\{W_1\}}{|W_1|^2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\text{Re}\{W_I\}}{|W_I|^2} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{\Delta}_r^{\rightarrow T}}{\partial \vec{U}_j} = \vec{W}^H \vec{W} \begin{bmatrix} \frac{-\text{Im}\{W_1\}}{|W_1|^2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\text{Im}\{W_I\}}{|W_I|^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{\Delta}_j^{\rightarrow T}}{\partial \vec{U}_r} = \vec{W}^H \vec{W} \begin{bmatrix} \frac{\text{Im}\{W_1\}}{|W_1|^2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\text{Im}\{W_I\}}{|W_I|^2} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{\Delta}_j^{\rightarrow T}}{\partial \vec{U}_j} = \vec{W}^H \vec{W} \begin{bmatrix} \frac{\text{Re}\{W_1\}}{|W_1|^2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\text{Re}\{W_I\}}{|W_I|^2} \end{bmatrix}$$

Finalement :

$$J_{\vec{\Sigma}, \vec{\Delta}}(\vec{U}, \vec{W}) = (\vec{W}^H \vec{W})^{2I} \left(\prod_{i=1}^I \frac{\text{Re}\{W_i\}}{|W_i|^2} \right) \begin{vmatrix} \frac{1}{\text{Re}\{W_1\}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\text{Re}\{W_I\}} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^I \frac{(\vec{W}^H \vec{W})^2}{|W_i|^2}$$

4) *Changement de variable, expression de la d.d.p.:*

Les calculs précédents conduisent donc à :

$$f(\vec{\Sigma}, \vec{U}) = f_{\vec{\Sigma}, \vec{\Delta}}(\vec{\Sigma}, \vec{\Delta} = \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \begin{pmatrix} U_1 \\ \Sigma_1^* \\ \vdots \\ U_I \\ \Sigma_I^* \end{pmatrix}^T) \left(\prod_{i=1}^I \frac{(\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma})^2}{|\Sigma_i|^2} \right)$$

ce qui peut être décomposé sous la forme :

$$f(\vec{\Sigma}, \vec{U}) = f_{\mathcal{N}_c}(\vec{0}, \mathbf{C}_{\vec{\Sigma}}^{eq})(\vec{\Sigma}) f_{\mathcal{N}_c}(\vec{m}_{\vec{U}}^{eq}, \mathbf{C}_{\vec{U}}^{eq})(\vec{U}) B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \quad (189)$$

où :

$$\mathbf{C}_{\vec{\Sigma}}^{eq} = \tilde{\mathbf{C}}_{11} \mathbf{Id}_I$$

$$\mathbf{C}_{\vec{U}}^{eq} = \frac{|\tilde{\mathbf{C}}|}{\tilde{\mathbf{C}}_{11}} \frac{1}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \begin{bmatrix} |\Sigma_1|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & |\Sigma_I|^2 \end{bmatrix}, \quad \vec{m}_{\vec{U}}^{eq} = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{12}^*}{\tilde{\mathbf{C}}_{11}} \frac{1}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \begin{pmatrix} |\Sigma_1|^2 \\ \vdots \\ |\Sigma_I|^2 \end{pmatrix}$$

$$B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) = \prod_{i=1}^I b_i(U_i, \vec{\Sigma})$$

$$b_i(U_i, \vec{\Sigma}) = h + \frac{\sigma_\alpha^2}{2} |k_2|^2 \frac{|\tilde{\mathbf{C}}|}{\tilde{\mathbf{C}}_{11}} \frac{1}{(\mathbf{C}_{\vec{U}}^{eq})_{ii}} \left| (U_i - m_{U_i}^{eq}) + n \frac{|\Sigma_i|^2}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \right|^2$$

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_\Sigma \\ g_\Delta \end{pmatrix} = g_\Sigma \vec{x}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \vec{g}, \quad n = \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}_{12}}{\tilde{\mathbf{C}}_{11}} \right)^*, \quad h = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_\alpha^2}{2} \vec{g}^H \mathbf{C}_{\vec{\Sigma}}^{-1} \vec{g}}$$

L'idée directrice est d'utiliser le changement de variable défini ci-dessus pour traduire les calculs d'espérances conditionnelles en calculs d'espérances de polynômes de variables aléatoires complexes circulaires gaussiennes. En effet, quelle que soit la fonction $s(\vec{U})$, d'après (189) :

$$E[s(\vec{U}) | \mathcal{D}] = \iint_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} s(\vec{U}) \frac{f(\vec{\Sigma}, \vec{U})}{P_{\mathcal{D}}} d\vec{\Sigma} d\vec{U} = \int E[s(\vec{U}) B(\vec{U}, \vec{\Sigma})] \frac{f_{\mathcal{N}_c}(\vec{0}, \mathbf{C}_{\vec{\Sigma}}^{eq})(\vec{\Sigma})}{P_{\mathcal{D}}} d\vec{\Sigma} \quad (190)$$

avec :

$$E \left[s(\vec{U}) B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right] = \int \left[s(\vec{U}) B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right] f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{U}}^{eq}, \mathbf{C}_{\vec{U}}^{eq})}(\vec{U}) d\vec{U} \quad (191)$$

Afin de pouvoir utiliser les résultats disponibles pour les variables aléatoires complexes circulaires gaussiennes centrées [21], il est judicieux de considérer la fonction $s(\vec{U})$ définie par :

$$s(\vec{U}) = \sum_{i=1}^I \operatorname{Re} \{ U_i - m_{U_i}^{eq} \} = \operatorname{Re} \{ \hat{r} \} - \operatorname{Re} \left\{ \frac{\tilde{C}_{12}^*}{\tilde{C}_{11}} \right\} \quad (192)$$

où :

$$\begin{aligned} \cdot W_i = U_i - m_{U_i}^{eq} \text{ sont des variables aléatoires complexes circulaires gaussiennes centrées de d.d.p. } f_{\mathcal{N}_c(\vec{0}, \mathbf{C}_{\vec{U}}^{eq})}(\vec{W}), \\ \cdot B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) = B(\vec{W}, \vec{\Sigma}) = \prod_{i=1}^I b_i(W_i, \vec{\Sigma}), \quad b_i(W_i, \vec{\Sigma}) = h + \frac{\sigma_\alpha^2}{2} |k_2|^2 \frac{|\tilde{\mathbf{C}}|}{\tilde{C}_{11}} \frac{1}{(\mathbf{C}_{\vec{U}}^{eq})_{ii}} \left| W_i + n \frac{|\Sigma_i|^2}{\Sigma^H \Sigma} \right|^2, \end{aligned}$$

car alors :

$$\begin{aligned} E(\operatorname{Re} \{ \hat{r} \} | \mathcal{D}) &= E \left[s(\vec{U}) | \mathcal{D} \right] + \operatorname{Re} \left\{ \frac{\tilde{C}_{12}^*}{\tilde{C}_{11}} \right\} \\ \operatorname{Var}(\operatorname{Re} \{ \hat{r} \} | \mathcal{D}) &= \operatorname{Var} \left[s(\vec{U}) | \mathcal{D} \right] \\ &= E \left[s(\vec{U})^2 | \mathcal{D} \right] - E \left[s(\vec{U}) | \mathcal{D} \right]^2 \end{aligned}$$

5) Espérance Conditionnelle, formulation intermédiaire :

D'après (190), pour obtenir $E \left[s(\vec{U}) | \mathcal{D} \right]$, nous devons commencer par évaluer $E \left[s(\vec{U}) B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right]$.

$$\begin{aligned} E \left[s(\vec{U}) B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right] &= \sum_{i=1}^I E \left[\operatorname{Re} \{ U_i - m_{U_i}^{eq} \} b_i(U_i, \vec{\Sigma}) \right] \prod_{j \neq i} E \left[b_j(U_j, \vec{\Sigma}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^I E \left[\operatorname{Re} \{ U_i - m_{U_i}^{eq} \} b_i(U_i, \vec{\Sigma}) \right] \frac{E \left[B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right]}{E \left[b_i(U_i, \vec{\Sigma}) \right]} \end{aligned}$$

où :

$$E \left[b_i(U_i, \vec{\Sigma}) \right] = \frac{1}{\tilde{C}_{11}} + \frac{\sigma_\alpha^2 |g_\Sigma|^2 |\Sigma_i|^2}{2 \tilde{C}_{11} \tilde{C}_{11}} \quad (193)$$

$$E \left[B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right] = \prod_{i=1}^I E \left[b_i(U_i, \vec{\Sigma}) \right] \quad (194)$$

$$E \left[\operatorname{Re} \{ U_i - m_{U_i}^{eq} \} b_i(U_i, \vec{\Sigma}) \right] = \frac{\sigma_\alpha^2}{2} |k_2|^2 \frac{|\tilde{\mathbf{C}}|}{\tilde{C}_{11}} \operatorname{Re} \{ n \} \frac{|\Sigma_i|^2}{\left\| \frac{\Sigma}{\Sigma} \right\|^2} \quad (195)$$

égalités obtenues à partir des identités suivantes :

$$\left| (U_i - m_{U_i}^{eq}) + n \frac{|\Sigma_i|^2}{\Sigma^H \Sigma} \right|^2 = |W_i|^2 + |n|^2 \left(\frac{|\Sigma_i|^2}{\Sigma^H \Sigma} \right)^2 + 2 \operatorname{Re} \{ W_i n^H \} \frac{|\Sigma_i|^2}{\Sigma^H \Sigma}$$

$$E[W_i] = 0, \quad E[W_i^2] = 0, \quad E[W_i^2 W_i^H] = 0, \quad E[|W_i|^2] = \sigma_{W_i}^2 = \sigma_{U_i}^2$$

$$h + \frac{\sigma_\alpha^2}{2} |k_2|^2 \frac{|\tilde{\mathbf{C}}|}{\tilde{C}_{11}} = \frac{1}{\tilde{C}_{11}}, \quad |nk_2|^2 = \left(\frac{|g_\Sigma|}{\tilde{C}_{11}} \right)^2$$

Finalement :

$$E \left[s(\vec{U}) B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right] = \left(\frac{\sigma_\alpha^2 |k_2|^2}{2} \frac{|\tilde{\mathbf{C}}|}{\tilde{C}_{11}} \operatorname{Re}\{n\} \right) \sum_{i=1}^I \frac{|\Sigma_i|^2}{\|\vec{\Sigma}\|^2} \frac{E \left[B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right]}{E \left[b_i(U_i, \vec{\Sigma}) \right]} \quad (196)$$

6) *Variance Conditionnelle, formulation intermédiaire :*

D'après (190), pour obtenir $E \left[s(\vec{U})^2 \mid \mathcal{D} \right]$, nous devons commencer par évaluer $E \left[s(\vec{U})^2 B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right]$. Or (192) :

$$s(\vec{U})^2 = \sum_{i=1}^I \operatorname{Re}\{W_i\}^2 + 2 \sum_{i < j} \operatorname{Re}\{W_i\} \operatorname{Re}\{W_j\}$$

ce qui permet de décomposer le calcul de $E \left[s(\vec{U})^2 B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right]$ en 2 composantes :

$$E \left[\operatorname{Re}\{W_i\}^2 B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right] = \frac{\sigma_{U_i}^2}{2} E \left[B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right] \left\{ 1 + \frac{\sigma_\alpha^2 |k_2|^2}{2} \frac{|\tilde{\mathbf{C}}|}{\tilde{C}_{11}} \frac{1}{E \left[b_i(U_i, \vec{\Sigma}) \right]} \right\}$$

$$E \left[\operatorname{Re}\{W_i\} \operatorname{Re}\{W_j\} B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right] = \left(\frac{\sigma_\alpha^2 |k_2|^2}{2} \frac{|\tilde{\mathbf{C}}|}{\tilde{C}_{11}} \operatorname{Re}\{n\} \right)^2 \frac{|\Sigma_i|^2 |\Sigma_j|^2 E \left[B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right]}{\|\vec{\Sigma}\|^4 E \left[b_i(U_i, \vec{\Sigma}) \right] E \left[b_j(U_j, \vec{\Sigma}) \right]}$$

égalités obtenues à partir de (195) et des identités suivantes :

$$E \left[\operatorname{Re}\{W_i\}^2 W_i \right] = 0, \quad E \left[\operatorname{Re}\{W_i\}^2 \right] = E \left[\operatorname{Im}\{W_i\}^2 \right] = \frac{\sigma_{W_i}^2}{2}$$

$$E \left[\operatorname{Re}\{W_i\}^4 \right] = 3E \left[\operatorname{Re}\{W_i\}^2 \right]^2, \quad E \left[\operatorname{Re}\{W_i\}^2 \operatorname{Im}\{W_i\}^2 \right] = E \left[\operatorname{Re}\{W_i\}^2 \right] E \left[\operatorname{Im}\{W_i\}^2 \right]$$

$$E \left[\operatorname{Re}\{W_i\}^2 b_i(W_i, \vec{\Sigma}) \right] = \left(h + \frac{\sigma_\alpha^2 |nk_2|^2 |\Sigma_i|^2}{2} \right) \frac{\sigma_{U_j}^2}{2} + \left(\frac{\sigma_\alpha^2 |k_2|^2}{2} \frac{|\tilde{\mathbf{C}}|}{\tilde{C}_{11}} \frac{1}{\sigma_{U_j}^2} \right) \left[3 \left(\frac{\sigma_{U_j}^2}{2} \right)^2 + \frac{\sigma_{U_j}^2 \sigma_{U_i}^2}{2} \right]$$

Finalement :

$$E \left[s(\vec{U})^2 B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right] = \frac{|\tilde{\mathbf{C}}|}{2\tilde{C}_{11}} \frac{E \left[B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right]}{\|\vec{\Sigma}\|^2} + \frac{\sigma_\alpha^2 |k_2|^2}{4} \left(\frac{|\tilde{\mathbf{C}}|}{\tilde{C}_{11}} \right)^2 \sum_{i=1}^I \frac{E \left[B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right]}{E \left[b_i(U_i, \vec{\Sigma}) \right]} \frac{|\Sigma_i|^2}{\|\vec{\Sigma}\|^4}$$

$$+ \left(\frac{\sigma_\alpha^2 |k_2|^2}{2} \frac{|\tilde{\mathbf{C}}|}{\tilde{C}_{11}} \operatorname{Re}\{n\} \right)^2 \sum_{i < j} \frac{2 |\Sigma_i|^2 |\Sigma_j|^2 E \left[B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right]}{\|\vec{\Sigma}\|^4 E \left[b_i(U_i, \vec{\Sigma}) \right] E \left[b_j(U_j, \vec{\Sigma}) \right]} \quad (197)$$

7) *Espérance et Variance Conditionnelles, formules analytiques :*

En reportant (196) dans (190) nous parvenons à :

$$E \left[s(\vec{U}) \mid \mathcal{D} \right] = \left(\frac{\sigma_\alpha^2 |k_2|^2}{2} \frac{|\tilde{\mathbf{C}}|}{\tilde{C}_{11}} \operatorname{Re}\{n\} \right) \sum_{i=1}^I \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \frac{|\Sigma_i|^2}{\|\vec{\Sigma}\|^2} \frac{E \left[B(\vec{U}, \vec{\Sigma}) \right]}{E \left[b_i(U_i, \vec{\Sigma}) \right]} \frac{f_{\mathcal{N}_c}(\vec{0}, \mathbf{C}_{\vec{\Sigma}}^{eq})(\vec{\Sigma})}{P_{\mathcal{D}}} d\vec{\Sigma}$$

Or :

$$f\left(\vec{\Sigma}\right) = f_{\mathcal{N}_c}\left(\vec{0}, \mathbf{C}_{\vec{\Sigma}}^{eq}\right)\left(\vec{\Sigma}\right) \int B\left(\vec{U}, \vec{\Sigma}\right) f_{\mathcal{N}_c}\left(\vec{m}_{\vec{U}}^{eq}, \mathbf{C}_{\vec{U}}^{eq}\right)\left(\vec{U}\right) d\vec{U} = f_{\mathcal{N}_c}\left(\vec{0}, \mathbf{C}_{\vec{\Sigma}}^{eq}\right)\left(\vec{\Sigma}\right) E\left[B\left(\vec{U}, \vec{\Sigma}\right)\right]$$

par conséquent :

$$E\left[s\left(\vec{U}\right) \mid \mathcal{D}\right] = \left(\frac{\sigma_\alpha^2}{2} |k_2|^2 \frac{|\tilde{\mathbf{C}}|}{\tilde{C}_{11}} \operatorname{Re}\{n\}\right) \sum_{i=1}^I E\left[\frac{|\Sigma_i|^2}{\|\vec{\Sigma}\|^2} \frac{1}{E\left[b_i\left(U_i, \vec{\Sigma}\right)\right]} \mid \mathcal{D}\right] \quad (198)$$

De la même façon (197) devient :

$$\begin{aligned} E\left[s\left(\vec{U}\right)^2 \mid \mathcal{D}\right] &= \frac{|\tilde{\mathbf{C}}|}{2\tilde{C}_{11}} E\left[\frac{1}{\|\vec{\Sigma}\|^2} \mid \mathcal{D}\right] \\ &\quad + \frac{\sigma_\alpha^2 |k_2|^2}{4} \left(\frac{|\tilde{\mathbf{C}}|}{\tilde{C}_{11}}\right)^2 \sum_{i=1}^I E\left[\frac{|\Sigma_i|^2}{\|\vec{\Sigma}\|^4} \frac{1}{E\left[b_i\left(U_i, \vec{\Sigma}\right)\right]} \mid \mathcal{D}\right] \\ &\quad + \left(\frac{\sigma_\alpha^2}{2} |k_2|^2 \frac{|\tilde{\mathbf{C}}|}{\tilde{C}_{11}} \operatorname{Re}\{n\}\right)^2 \sum_{i < j} E\left[\frac{2}{\|\vec{\Sigma}\|^4} \frac{|\Sigma_i|^2 |\Sigma_j|^2}{E\left[b_i\left(U_i, \vec{\Sigma}\right)\right] E\left[b_j\left(U_j, \vec{\Sigma}\right)\right]} \mid \mathcal{D}\right] \end{aligned} \quad (199)$$

Enfin, pour calculer les espérances conditionnelles restantes, nous avons procédé de la façon suivante :

1) Reformulation des espérances conditionnelles en fonction des espérances des variables aléatoires ω_I , x_I et y_I définies par :

$$z_i = |\Sigma_i|^2, \quad \omega_I = \sum_{i=1}^I z_i, \quad \begin{cases} x_1 = u_1 \\ x_I = \omega_{I-1} + u_I, \quad I \geq 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_2 = u_1 + u_2 \\ y_I = \omega_{I-2} + u_{I-1} + u_I, \quad I \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{avec } f(z_i) = \frac{1}{\tilde{C}_{11}} \frac{e^{-\frac{z_i}{\tilde{C}_{11}}}}{\tilde{C}_{11}} \left(1 + \frac{\sigma_\alpha^2 |g_\Sigma|^2}{2 \tilde{C}_{11}} z_i\right), \quad f(u_i) = \frac{e^{-\frac{u_i}{\tilde{C}_{11}}}}{\tilde{C}_{11}}$$

Alors :

$$P_{\mathcal{D}} = \int_T^\infty f(\omega_I) d\omega_I, \quad E\left[\frac{1}{\|\vec{\Sigma}\|^2} \mid \mathcal{D}\right] = \frac{1}{P_{\mathcal{D}}} \int_T^\infty \frac{f(\omega_I)}{\omega_I} d\omega_I, \quad E\left[\frac{1}{\|\vec{\Sigma}\|^4} \mid \mathcal{D}\right] = \frac{1}{P_{\mathcal{D}}} \int_T^\infty \frac{f(\omega_I)}{(\omega_I)^2} d\omega_I$$

et :

$$E\left[\frac{1}{\|\vec{\Sigma}\|^2} \mid \mathcal{D}\right] = \frac{1}{P_{\mathcal{D}} \tilde{C}_{11}} \int_T^\infty \frac{f(x_I)}{x_I} dx_I + \frac{b}{\tilde{C}_{11}} E\left[\frac{1}{\|\vec{\Sigma}\|^2} \frac{|\Sigma_i|^2}{E\left[b_i\left(U_i, \vec{\Sigma}\right)\right]} \mid \mathcal{D}\right]$$

$$E\left[\frac{1}{\|\vec{\Sigma}\|^4} \mid \mathcal{D}\right] = \frac{1}{P_{\mathcal{D}} \tilde{C}_{11}} \int_T^\infty \frac{f(x_I)}{(x_I)^2} dx_I + \frac{b}{\tilde{C}_{11}} E\left[\frac{1}{\|\vec{\Sigma}\|^4} \frac{|\Sigma_i|^2}{E\left[b_i\left(U_i, \vec{\Sigma}\right)\right]} \mid \mathcal{D}\right]$$

$$E\left[\frac{1}{\|\vec{\Sigma}\|^4} \mid \mathcal{D}\right] = \frac{2}{P_{\mathcal{D}} \tilde{C}_{11}} \int_T^\infty \frac{f(x_I)}{(x_I)^2} dx_I - \frac{1}{P_{\mathcal{D}} (\tilde{C}_{11})^2} \int_T^\infty \frac{f(y_I)}{(y_I)^2} dy_I + \frac{b^2}{(\tilde{C}_{11})^2} E\left[\frac{1}{\|\vec{\Sigma}\|^4} \frac{|\Sigma_i|^2 |\Sigma_j|^2}{E\left[b_i\left(U_i, \vec{\Sigma}\right)\right] E\left[b_j\left(U_j, \vec{\Sigma}\right)\right]} \mid \mathcal{D}\right]$$

$$\text{avec } b = \frac{\sigma_\alpha^2 |g_\Sigma|^2}{2 \tilde{C}_{11}}$$

2) Calcul de $f(\omega_I)$, $f(x_I)$ et $f(y_I)$. Par récurrence, on montre que :

$$f(\omega_I) = \frac{1}{(\tilde{C}_{11})^I} \frac{e^{-\frac{\omega_I}{\tilde{C}_{11}}}}{(\tilde{C}_{11})^I} P_I(\omega_I), \quad I \geq 1$$

$$f(x_I) = \frac{1}{(\tilde{C}_{11})^I} \frac{e^{-\frac{x_I}{\tilde{C}_{11}}}}{(\tilde{C}_{11})^{I-1}} Q_{I-1}(x_I), \quad I \geq 1$$

$$f(y_I) = \frac{1}{(\tilde{C}_{11})^I} \frac{e^{-\frac{y_I}{\tilde{C}_{11}}}}{(\tilde{C}_{11})^{I-2}} H_{I-2}(y_I), \quad I \geq 2$$

avec :

$$P_I(t) = Q_{I-1}(t) + bH_{I-1}(t) = \left[\sum_{m=0}^I p_I^m t^m \right] t^{I-1}$$

$$Q_I(t) = \int_0^t P_I(z) dz = \left[\sum_{m=0}^I q_I^m t^m \right] t^I \text{ et } Q_0(t) = 1$$

$$H_I(t) = \int_0^t Q_I(z) dz = \left[\sum_{m=0}^I h_I^m t^m \right] t^{I+1} \text{ et } H_0(t) = t$$

3) Reformulation des espérances conditionnelles en fonction de $P_I(t)$, $Q_I(t)$ et $H_I(t)$:

$$P_{\mathcal{D}} = \int_T^{\infty} \frac{e^{-\frac{t}{\tilde{C}_{11}}}}{(\tilde{C}_{11})^{2I}} P_I(t) dt$$

$$E \left[\frac{1}{\|\vec{\Sigma}\|^2} \mid \mathcal{D} \right] = \frac{1}{P_{\mathcal{D}}} \int_T^{\infty} \frac{e^{-\frac{t}{\tilde{C}_{11}}}}{(\tilde{C}_{11})^{2I}} \frac{P_I(t)}{t} dt$$

$$E \left[\frac{1}{\|\vec{\Sigma}\|^4} \mid \mathcal{D} \right] = \frac{1}{P_{\mathcal{D}}} \int_T^{\infty} \frac{e^{-\frac{t}{\tilde{C}_{11}}}}{(\tilde{C}_{11})^{2I}} \frac{P_I(t)}{t^2} dt$$

$$E \left[\frac{1}{\|\vec{\Sigma}\|^2} \frac{|\Sigma_i|^2}{E[b_i(U_i, \vec{\Sigma})]} \mid \mathcal{D} \right] = \frac{1}{P_{\mathcal{D}}} \int_T^{\infty} \frac{e^{-\frac{t}{\tilde{C}_{11}}}}{(\tilde{C}_{11})^{2I-1}} \frac{H_{I-1}(t)}{t} dt$$

$$E \left[\frac{1}{\|\vec{\Sigma}\|^4} \frac{|\Sigma_i|^2}{E[b_i(U_i, \vec{\Sigma})]} \mid \mathcal{D} \right] = \frac{1}{P_{\mathcal{D}}} \int_T^{\infty} \frac{e^{-\frac{t}{\tilde{C}_{11}}}}{(\tilde{C}_{11})^{2I-1}} \frac{H_{I-1}(t)}{t^2} dt$$

$$E \left[\frac{1}{\|\vec{\Sigma}\|^4} \frac{|\Sigma_i|^2 |\Sigma_j|^2}{E[b_i(U_i, \vec{\Sigma})] E[b_j(U_j, \vec{\Sigma})]} \mid \mathcal{D} \right] = \frac{1}{P_{\mathcal{D}}} \int_T^{\infty} \frac{e^{-\frac{t}{\tilde{C}_{11}}}}{(\tilde{C}_{11})^{2I-2}} \frac{1}{t^2} \left(\int_0^t \left[\int_0^z H_{I-2}(u) du \right] dz \right) dt$$

4) Finalisation des calculs grâce à l'identité : $\int_T^{\infty} t^I e^{-t} dt = e^{-T} I! e_I(T)$, $I \geq 0$

C. Calcul de $P(\mathcal{D})$, $E[\hat{r} | \mathcal{D}]$, $E[|\hat{r}|^2 | \mathcal{D}]$, $E[\hat{r}^2 | \mathcal{D}]$ lors d'observations multiples lorsque la loi de fluctuation d'amplitude est inconnue et $\mathcal{D} = \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} + \vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \geq T \right\}$.

Rappelons que les I observations sont indépendantes et que le bruit additif (\vec{n}_i) est blanc temporellement et non corrélé spatialement :

$$\vec{v}_i = \begin{pmatrix} \Sigma_i \\ \Delta_i \end{pmatrix} = \beta_i \vec{x} + \vec{n}_i, \quad \beta_i = \alpha_i g_\Sigma, \quad \vec{x} = (1, r)^T, \quad r = \frac{g_\Delta}{g_\Sigma}$$

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_I), \quad \vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_I), \quad \sigma_{\vec{\beta}}^2 = \frac{\|\vec{\beta}\|^2}{I} = |g_\Sigma|^2 \sigma_\alpha^2$$

$$\vec{V} = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_I, \Delta_1, \dots, \Delta_I)^T = (\vec{\Sigma}^T, \vec{\Delta}^T)^T$$

$$f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{V}}, \mathbf{C}_{\vec{V}})}(\vec{V}) = \frac{e^{-(\vec{V} - \vec{m}_{\vec{V}})^H \mathbf{C}_{\vec{V}}^{-1} (\vec{V} - \vec{m}_{\vec{V}})}}{\pi^{2I} |\mathbf{C}_{\vec{V}}|} = f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}, \mathbf{C}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}})}(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{\Sigma}}, \mathbf{C}_{\vec{\Sigma}})}(\vec{\Sigma})$$

$$\mathbf{C}_{\vec{V}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\vec{\Sigma}}^2 \mathbf{Id}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_{\vec{\Delta}}^2 \mathbf{Id}_I \end{bmatrix}, \quad \vec{m}_{\vec{V}} = \begin{pmatrix} \vec{m}_{\vec{\Sigma}} \\ \vec{m}_{\vec{\Delta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\beta} \\ r \vec{\beta} \end{pmatrix}$$

$$f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}, \mathbf{C}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}})}(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) = f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{\Delta}}, \mathbf{C}_{\vec{\Delta}})}(\vec{\Delta}), \quad \vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} = \vec{m}_{\vec{\Delta}}, \quad \mathbf{C}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} = \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2 \mathbf{Id}_I, \quad \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2 = \sigma_{\vec{\Delta}}^2$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}}, \quad \mathcal{D} = \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} + \vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \geq T \right\}$$

Pour simplifier les écritures nous conviendrons que :

$$f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}, \mathbf{C}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}})}(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) = f(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}), \quad f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{\Sigma}}, \mathbf{C}_{\vec{\Sigma}})}(\vec{\Sigma}) = f(\vec{\Sigma})$$

• Calcul de $P(\mathcal{D})$

1) Calcul général :

$$\begin{aligned} P(\mathcal{D}) &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\int_{\|\vec{\Delta}\|^2 \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} f(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\ (170) &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\int_{x \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} f_{\chi_{2c}^I}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2) dx \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\ (170) &= \int_{t \geq 0} \left[\int_{x \geq \max(T-t, 0)} f_{\chi_{2c}^I}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2) dx \right] f_{\chi_{2c}^I}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) dt \\ P(\mathcal{D}) &= \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2) f_{\chi_{2c}^I}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) dx dt \\ &= \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, I\sigma_{\vec{\beta}}^2 |r|^2, \sigma_{\vec{\Delta}}^2) f_{\chi_{2c}^I}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) dx dt \end{aligned}$$

2) Calcul direct si $\sigma_{\vec{\Sigma}}^2 = \sigma_{\vec{\Delta}}^2 = \sigma_{\vec{V}}^2$:

$t = \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} + \vec{\Delta}^H \vec{\Delta} = \vec{V}^H \vec{V}$ est une loi du \mathcal{X}_2 "complexe" à $2I$ degrés de liberté de d.d.p. $f_{\chi_{2c}^{2I}}(t, \|\vec{m}_{\vec{V}}\|^2, \sigma_{\vec{V}}^2) = f_{\chi_{2c}^{2I}}(t, \|\vec{\beta}\|^2 \|\vec{x}\|^2, \sigma_{\vec{V}}^2)$. Par conséquent :

$$P(\mathcal{D}) = \int_{t \geq T} f_{\chi_{2c}^{2I}}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2 \|\vec{x}\|^2, \sigma_{\vec{V}}^2) dt$$

• Calcul de $E[\hat{r} | \mathcal{D}]$

$$\begin{aligned} E[\hat{r} \cap \mathcal{D}] &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\int_{\|\vec{\Delta}\|^2 \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} f(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\ &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \frac{\vec{\Sigma}^H}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \left[\int_{\|\vec{\Delta}\|^2 \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} \vec{\Delta} f(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\ (167) &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \frac{\vec{\Sigma}^H}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \left[\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} \int_{x \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2) dx \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\hat{r} \cap \mathcal{D}] &= \int_{x \geq 0} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2) \left[\int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq \max(T-x, 0)} \frac{\vec{\Sigma}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \right]^H \vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} dx \\ (171) &= \int_{x \geq 0} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2) \left[\vec{m}_{\vec{\Sigma}} \int_{t \geq \max(T-x, 0)} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{\sqrt{t}} \right]^H \vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} dx \\ &= \vec{m}_{\vec{\Sigma}}^H \vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2) \frac{f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2)}{t} dx dt \end{aligned}$$

$$E[\hat{r} | \mathcal{D}] = \frac{r(I\sigma_{\vec{\beta}}^2)}{P(\mathcal{D})} \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, I\sigma_{\vec{\beta}}^2 |r|^2, \sigma_{\vec{\Delta}}^2) \frac{f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, I\sigma_{\vec{\beta}}^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2)}{t} dx dt$$

• Calcul de $E[|\hat{r}|^2 | \mathcal{D}]$

$$\begin{aligned}
E \left[|\hat{r}|^2 \cap \mathcal{D} \right] &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\int_{\|\vec{\Delta}\|^2 \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta} \vec{\Delta}^H \vec{\Sigma}}{(\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma})^2} f(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
&= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \frac{\vec{\Sigma}^H}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \left[\int_{\|\vec{\Delta}\|^2 \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} \vec{\Delta} \vec{\Delta}^H f(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] \frac{\vec{\Sigma}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma}
\end{aligned}$$

or d'après (168) :

$$\int_{\|\vec{\Delta}\|^2 \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} \vec{\Delta} \vec{\Delta}^H f(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} = \int_{x \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} \mathbf{C}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2) + \vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} \vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^H f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2) dx$$

donc :

$$\begin{aligned}
E \left[|\hat{r}|^2 \cap \mathcal{D} \right] &= \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2 \int_{x \geq 0} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2) \left[\int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq \max(T-x, 0)} \frac{1}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \right] dx \\
&\quad + \int_{x \geq 0} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2) \vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^H \vec{\Sigma} \left[\int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq \max(T-x, 0)} \frac{\vec{\Sigma} \vec{\Sigma}^H}{(\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma})^2} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \right] \vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} dx
\end{aligned}$$

or :

$$\begin{aligned}
\int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq \max(T-x, 0)} \frac{1}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} &= \int_{t \geq \max(T-x, 0)} f_{\chi_{2c}^I}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t} \\
\int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq \max(T-x, 0)} \frac{\vec{\Sigma} \vec{\Sigma}^H}{(\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma})^2} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} &= \int_{t \geq \max(T-x, 0)} \left[\mathbf{C}_{\vec{\Sigma}} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) + \vec{m}_{\vec{\Sigma}} \vec{m}_{\vec{\Sigma}}^H f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \right] \frac{dt}{t^2} \quad (\text{cf. (172)})
\end{aligned}$$

Finalemment :

$$\begin{aligned}
E \left[|\hat{r}|^2 \cap \mathcal{D} \right] &= \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2 \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2) \frac{f_{\chi_{2c}^I}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2)}{t} dx dt \\
&\quad + \sigma_{\vec{\Sigma}}^2 \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}\|^2 \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2) \frac{f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2)}{t^2} dx dt \\
&\quad + \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^H \vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2 \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2) \frac{f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2)}{t^2} dx dt
\end{aligned}$$

et:

$$E \left[|\hat{r}|^2 \mid \mathcal{D} \right] = \frac{1}{P(\mathcal{D})} \left\{ \begin{aligned} & \sigma_{\Delta}^2 \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, I\sigma_{\beta}^2 |r|^2, \sigma_{\Delta}^2) \frac{f_{\chi_{2c}^I}(t, I\sigma_{\beta}^2, \sigma_{\Sigma}^2)}{t} dx dt \\ & + |r|^2 \left(I\sigma_{\beta}^2 \right) \sigma_{\Sigma}^2 \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, I\sigma_{\beta}^2 |r|^2, \sigma_{\Delta}^2) \frac{f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, I\sigma_{\beta}^2, \sigma_{\Sigma}^2)}{t^2} dx dt \\ & + |r|^2 \left(I\sigma_{\beta}^2 \right)^2 \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, I\sigma_{\beta}^2 |r|^2, \sigma_{\Delta}^2) \frac{f_{\chi_{2c}^{I+2}}(t, I\sigma_{\beta}^2, \sigma_{\Sigma}^2)}{t^2} dx dt \end{aligned} \right\}$$

• Calcul de $E \left[\hat{r}^2 \mid \mathcal{D} \right]$

$$\begin{aligned} E \left[\hat{r}^2 \mid \mathcal{D} \right] &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\int_{\|\vec{\Delta}\|^2 \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta} \vec{\Delta}^T \vec{\Sigma}^*}{(\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma})^2} f(\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\ &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \frac{\vec{\Sigma}^H}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \left[\int_{\|\vec{\Delta}\|^2 \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} \vec{\Delta} \vec{\Delta}^T f(\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] \frac{\vec{\Sigma}^*}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\ (169) \quad &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \frac{\vec{\Sigma}^H}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} \left[\int_{x \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} \vec{m}_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}} \vec{m}_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}}^T f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}}^2) dx \right] \frac{\vec{\Sigma}^*}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\ E \left[\hat{r}^2 \mid \mathcal{D} \right] &= \int_{x \geq 0} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}}^2) \vec{m}_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}}^T \left[\int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq \max(T-x, 0)} \frac{\vec{\Sigma} \vec{\Sigma}^T}{(\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma})^2} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \right]^* \vec{m}_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}} dx \\ (173) \quad &= \int_{x \geq 0} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}}^2) \vec{m}_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}}^T \left[\vec{m}_{\vec{\Sigma}} \vec{m}_{\vec{\Sigma}}^T \int_{t \geq \max(T-x, 0)} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) \frac{dt}{t^2} \right]^* \vec{m}_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}} dx \\ &= \left(\vec{m}_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}}^T \vec{m}_{\vec{\Sigma}}^* \right)^2 \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}}^2) \frac{f_{\chi_{2c}^{I+2}}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2)}{t^2} dx \end{aligned}$$

Finalement :

$$E \left[\hat{r}^2 \mid \mathcal{D} \right] = \frac{r^2 \left(I\sigma_{\beta}^2 \right)^2}{P(\mathcal{D})} \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, I\sigma_{\beta}^2 |r|^2, \sigma_{\Delta}^2) \frac{f_{\chi_{2c}^{I+2}}(t, I\sigma_{\beta}^2, \sigma_{\Sigma}^2)}{t^2} dx$$

D. Calcul de $P(\mathcal{D})$, $E[\hat{r} | \mathcal{D}]$, $E[|\hat{r}|^2 | \mathcal{D}]$, $E[\hat{r}^2 | \mathcal{D}]$ lors d'observations multiples lorsque la loi de fluctuation d'amplitude est une loi de Rayleigh et $\mathcal{D} = \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} + \vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \geq T \right\}$.

Rappelons que les I observations sont indépendantes et que le bruit additif (\vec{n}_i) est blanc temporellement et éventuellement corrélé spatialement :

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \begin{pmatrix} \Sigma_i \\ \Delta_i \end{pmatrix} = \beta_i \vec{x} + \vec{n}_i, \quad \beta_i = \alpha_i g_{\Sigma}, \quad \vec{x} = (1, r)^T, \quad r = \frac{g_{\Delta}}{g_{\Sigma}} \\ \vec{\alpha} &= (\alpha_1, \dots, \alpha_I), \quad \vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_I), \quad \sigma_{\beta}^2 = E[|\beta_i|^2] = |g_{\Sigma}|^2 \sigma_{\alpha}^2, \quad \sigma_{\alpha}^2 = E[|\alpha_i|^2] \\ \vec{V} &= (\Sigma_1, \dots, \Sigma_I, \Delta_1, \dots, \Delta_I)^T = (\vec{\Sigma}^T, \vec{\Delta}^T)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{N}_c(\vec{0}, \mathbf{C}_{\vec{V}})}(\vec{V}) &= \frac{e^{-\vec{V}^H \mathbf{C}_{\vec{V}}^{-1} \vec{V}}}{\pi^{2I} |\mathbf{C}_{\vec{V}}|} = f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}, \mathbf{C}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}})}(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) f_{\mathcal{N}_c(\vec{0}, \mathbf{C}_{\vec{\Sigma}})}(\vec{\Sigma}) \\ \mathbf{C}_{\vec{V}} &= \begin{bmatrix} C_{11} \mathbf{Id}_I & C_{12} \mathbf{Id}_I \\ C_{12}^* \mathbf{Id}_I & C_{22} \mathbf{Id}_I \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} C_{11} = \sigma_{\vec{\Sigma}}^2 & C_{12} \\ C_{12}^* & C_{22} = \sigma_{\vec{\Delta}}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{\vec{v}_i} = \sigma_{\beta}^2 \vec{x} \vec{x}^H + \mathbf{C}_{\vec{n}} \\ \vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} &= \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \vec{\Sigma}, \quad \mathbf{C}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} = \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2 \mathbf{Id}_I, \quad \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2 = \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}} \\ \hat{r} &= \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}}, \quad \mathcal{D} = \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} + \vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \geq T \right\} \end{aligned}$$

Afin de simplifier les écritures nous conviendrons que :

$$f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}, \mathbf{C}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}})}(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) = f(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}), \quad f_{\mathcal{N}_c(\vec{0}, \mathbf{C}_{\vec{\Sigma}})}(\vec{\Sigma}) = f(\vec{\Sigma})$$

Pour faire les calculs, on applique l'approche développée Annexe X-G-pX-G pour le changement de variable :

$$\begin{cases} u_1 = \left(\frac{\vec{\Sigma}}{\|\vec{\Sigma}\|} \right)^H \vec{\Delta} \\ u_2 = \vec{m}_2^H \vec{x} \\ \vdots \\ u_I = \vec{m}_I^H \vec{x} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} = \mathbf{M} \vec{x} \text{ avec } \mathbf{M}^H \mathbf{M} = \mathbf{M} \mathbf{M}^H = \mathbf{Id}_I,$$

lorsque $\vec{\Delta}$ est conditionné par $\vec{\Sigma}$. Alors \vec{u} est un vecteur aléatoire gaussien circulaire de dimension I conditionné également par $\vec{\Sigma}$ et il vérifie :

$$\begin{aligned} \vec{m}_{\vec{u}|\vec{\Sigma}} &= \mathbf{M}^H \vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} = \left(\frac{C_{12}^*}{C_{11}} \|\vec{\Sigma}\|, 0, \dots, 0 \right)^T \\ \mathbf{C}_{\vec{u}|\vec{\Sigma}} &= \mathbf{M}^H \mathbf{C}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} \mathbf{M} = \sigma_{\vec{u}|\vec{\Sigma}}^2 \mathbf{Id}_I, \quad \sigma_{\vec{u}|\vec{\Sigma}}^2 = \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2 = \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}} \\ \vec{u}^H \vec{u} &= (\mathbf{M} \vec{\Delta})^H \mathbf{M} \vec{\Delta} = \vec{\Delta}^H \mathbf{M}^H \mathbf{M} \vec{\Delta} = \vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \end{aligned}$$

D'après l'Annexe X-G-p87 :

$$\begin{aligned} E \left[\frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\|\vec{\Sigma}\|} \cap (\vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \geq T) \mid \vec{\Sigma} \right] &= E \left[u_1 \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T) \mid \vec{\Sigma} \right] \\ &= m_{u_1 | \vec{\Sigma}} \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{u} | \vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{u} | \vec{\Sigma}}^2) dx \end{aligned} \quad (200)$$

$$\begin{aligned} E \left[\left| \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\|\vec{\Sigma}\|} \right|^2 \cap (\vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \geq T) \mid \vec{\Sigma} \right] &= E \left[|u_1|^2 \cap (\vec{u}^H \vec{u} \geq T) \mid \vec{\Sigma} \right] \\ &= \sigma_{u_1 | \vec{\Sigma}}^2 \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{u} | \vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{u} | \vec{\Sigma}}^2) dx \\ &\quad + |m_{u_1 | \vec{\Sigma}}|^2 \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{u} | \vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{u} | \vec{\Sigma}}^2) dx \end{aligned} \quad (201)$$

$$E \left[\frac{\vec{\Delta} \vec{\Delta}^T}{\|\vec{\Delta}\|^n} \cap (\vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \geq T) \mid \vec{\Sigma} \right] = m_{u_1 | \vec{\Sigma}}^2 \int_{x \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{u} | \vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{u} | \vec{\Sigma}}^2) dx \quad (202)$$

• Calcul de $P(\mathcal{D})$

$$\begin{aligned} P(\mathcal{D}) &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\int_{\|\vec{\Delta}\|^2 \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} f(\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\ (170) &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\int_{x \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} f_{\chi_{2c}^I}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}}^2) dx \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\ P(\mathcal{D}) &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\int_{x \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} f_{\chi_{2c}^I}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 \|\vec{\Sigma}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}}^2) dx \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\ (170) &= \int_{t \geq 0} \left[\int_{x \geq \max(T-t, 0)} f_{\chi_{2c}^I}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \sigma_{\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}}^2) dx \right] f_{\chi_{2c}^I}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) dt \\ P(\mathcal{D}) &= \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \sigma_{\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}}^2) f_{\chi_{2c}^I}(t, \|\vec{m}_{\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) dx dt \\ &= \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11}) dx dt \end{aligned} \quad (203)$$

• Calcul de $E[\hat{r} \mid \mathcal{D}]$

$$\begin{aligned}
E[\hat{r} \cap \mathcal{D}] &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\int_{\|\vec{\Delta}\|^2 \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\|\vec{\Sigma}\|^2} f(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
(200) &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\frac{m_{u_1|\vec{\Sigma}}}{\|\vec{\Sigma}\|} \int_{x \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2) dx \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\hat{r} \cap \mathcal{D}] &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\frac{C_{12}^*}{C_{11}} \int_{x \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 \|\vec{\Sigma}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2) dx \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
&= \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11}) dx dt
\end{aligned}$$

$$E[\hat{r} | \mathcal{D}] = \frac{1}{P(\mathcal{D})} \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11}) dx dt \quad (204)$$

• Calcul de $E[|\hat{r}|^2 | \mathcal{D}]$

$$\begin{aligned}
E[|\hat{r}|^2 \cap \mathcal{D}] &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\int_{\|\vec{\Delta}\|^2 \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} \left| \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\|\vec{\Sigma}\|} \right|^2 \frac{1}{\|\vec{\Sigma}\|^2} f(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
(201) &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\frac{\sigma_{u_1|\vec{\Sigma}}^2}{\|\vec{\Sigma}\|^2} \int_{x \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2) dx \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
&\quad + \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\frac{|m_{u_1|\vec{\Sigma}}|^2}{\|\vec{\Sigma}\|^2} \int_{x \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2) dx \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[|\hat{r}|^2 \cap \mathcal{D}] &= \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}} \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) \frac{f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11})}{t} dx dt \\
&\quad + \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11}) dx dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E \left[|\hat{r}|^2 \mid \mathcal{D} \right] &= \frac{1}{P(\mathcal{D})} \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}} \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) \frac{f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11})}{t} dx dt \\
&+ \frac{1}{P(\mathcal{D})} \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11}) dx dt
\end{aligned}$$

• Calcul de $E \left[\hat{r}^2 \mid \mathcal{D} \right]$

$$\begin{aligned}
(202) \quad E \left[\hat{r}^2 \mid \mathcal{D} \right] &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\int_{\|\vec{\Delta}\|^2 \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} \left(\frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\|\vec{\Sigma}\|} \right)^2 \frac{1}{\|\vec{\Sigma}\|^2} f(\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
&= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\frac{m^2}{\|\vec{\Sigma}\|^2} \int_{\|\vec{\Delta}\|^2 \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \|\vec{m}_{\vec{u} \mid \vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{u} \mid \vec{\Sigma}}^2) dx \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
&= \left(\frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right)^2 \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11}) dx dt \\
E \left[\hat{r}^2 \mid \mathcal{D} \right] &= \frac{1}{P(\mathcal{D})} \left(\frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right)^2 \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+2}}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11}) dx dt
\end{aligned}$$

• Mise en oeuvre des calculs

Pour calculer les expressions précédentes, il peut être astucieux de remarquer que :

$$\iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) f_{\chi_{2c}^J}(t, 0, C_{11}) dx dt + \iint_{x+t < T} f_{\chi_{2c}^I}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) f_{\chi_{2c}^J}(t, 0, C_{11}) dx dt = 1, \quad \forall i, j \geq 1$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
P(\mathcal{D}) &= 1 - \int_0^T f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11}) \left[\int_0^{T-t} f_{\chi_{2c}^I}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) dx \right] dt \\
\iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) f_{\chi_{2c}^J}(t, 0, C_{11}) dx dt &= 1 - \int_0^T f_{\chi_{2c}^J}(t, 0, C_{11}) \left[\int_0^{T-t} f_{\chi_{2c}^I}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) dx \right] dt \\
\iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) \frac{f_{\chi_{2c}^J}(t, 0, C_{11})}{t} dx dt &= \\
&= \frac{1}{C_{11}(I-1)} \left(1 - \int_0^T f_{\chi_{2c}^{J-1}}(t, 0, C_{11}) \left[\int_0^{T-t} f_{\chi_{2c}^I}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) dx \right] dt \right), \quad J \geq 2
\end{aligned}$$

$$\iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^2}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) \frac{f_{\chi_{2c}^1}(t, \mathbf{0}, C_{11})}{t} dx dt = \int_T^\infty \frac{e^{-\frac{t}{C_{11}}}}{C_{11}t} dt +$$

$$\int_0^T \frac{f_{\chi_{2c}^1}(t, \mathbf{0}, C_{11})}{t} \left[1 - \int_0^{T-t} f_{\chi_{2c}^2}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) dx \right] dt$$

E. Borne de Cramer-Rao conditionnée du rapport d'écartométrie lorsque la loi de fluctuation d'amplitude est une loi de Rayleigh et $\mathcal{D} = \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \geq T \right\}$

Rappelons que les I observations sont indépendantes et que le bruit additif (\vec{n}_i) est blanc temporellement et non corrélé spatialement de puissance connue :

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \begin{pmatrix} \Sigma_i \\ \Delta_i \end{pmatrix} = \beta_i \vec{x} + \vec{n}_i, \quad \beta_i = \alpha_i g_{\Sigma}, \quad \vec{x} = (1, r)^T, \quad r = \frac{g_{\Delta}}{g_{\Sigma}} \\ \vec{\alpha} &= (\alpha_1, \dots, \alpha_I), \quad \vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_I), \quad \sigma_{\beta}^2 = E[|\beta_i|^2] = |g_{\Sigma}|^2 \sigma_{\alpha}^2, \quad \sigma_{\alpha}^2 = E[|\alpha_i|^2] \\ \vec{V} &= (\Sigma_1, \dots, \Sigma_I, \Delta_1, \dots, \Delta_I)^T = (\vec{\Sigma}^T, \vec{\Delta}^T)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\vec{V} | H_1) &= f_{\mathcal{N}_c}(\vec{0}, \mathbf{C}_{\vec{v}}) (\vec{V}) = \prod_{i=1}^I f_{\mathcal{N}_c(0, \mathbf{C})} (\vec{v}_i) = \prod_{i=1}^I \frac{e^{-\vec{v}_i^H \mathbf{C}_{\vec{v}}^{-1} \vec{v}_i}}{(\pi^2 |\mathbf{C}_{\vec{v}}|)^I} \\ \mathbf{C}_{\vec{v}} &= \sigma_{\beta}^2 \vec{x} \vec{x}^H + \mathbf{C}_{\vec{n}}, \quad \mathbf{C}_{\vec{n}} = \sigma_{\vec{n}}^2 \mathbf{Id}_2 \end{aligned}$$

Puisque $f(\vec{V} | H_1)$ dépend naturellement du vecteur de paramètres $\vec{\theta} = (\sigma_{\beta}^2, r, r^H)^T$ nous considérerons

l'expression de la borne de Cramer Rao complexe (92) conditionnée par un événement D associée à la matrice de Fisher sous la forme (120a) :

$$\mathbf{F}(\vec{\theta})_{k,l} = - \left(E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{\theta}}(\vec{V})}{\partial \theta_k^* \partial \theta_l} \mid \mathcal{D} \right] - \frac{\partial^2 \ln P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})}{\partial \theta_k^* \partial \theta_l} \right), \quad P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta}) = \int_{\mathcal{D}} f_{\vec{\theta}}(\vec{V}) d\vec{V}$$

Le calcul de $\mathbf{F}(\vec{\theta})$ peut donc être décomposé en deux étapes : le calcul de $E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{\theta}}(\vec{V})}{\partial \theta_k^* \partial \theta_l} \mid \mathcal{D} \right]$ puis de $\frac{\partial^2 \ln P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})}{\partial \theta_k^* \partial \theta_l}$. De plus les propriétés de symétrie hermitienne de $\mathbf{F}(\vec{\theta})$ limitent ces calculs à l'évaluation des termes $\frac{\partial^2}{\partial \sigma_{\beta}^2 \partial \sigma_{\beta}^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial r^* \partial \sigma_{\beta}^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial r \partial r^*}$, $\frac{\partial^2}{\partial r^* \partial r^*}$.

1) Calcul de $E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{\theta}}(\vec{V})}{\partial \theta_k^* \partial \theta_l} \mid \mathcal{D} \right]$:

Les calculs de dérivations sont simplifiés s'ils sont effectués sur le rapport de log-vraisemblance car $f(\vec{V} | H_0)$ ne dépend pas des paramètres inconnus et :

$$\begin{aligned} \frac{f(\vec{V} | H_1)}{f(\vec{V} | H_0)} &= \frac{f_{\mathcal{N}_c}(\vec{0}, \mathbf{C}_{\vec{v}}) (\vec{V})}{f_{\mathcal{N}_c}(\vec{0}, \mathbf{C}_{\vec{n}}) (\vec{V})} = \frac{e^{-I \text{tr}(\mathbf{C}_{\vec{v}}^{-1} \widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}})}}{|\mathbf{C}_{\vec{v}}|^I} \frac{|\mathbf{C}_{\vec{n}}|^I}{e^{-I \text{tr}(\mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1} \widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}})}}, \quad \widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}} = \sum_{i=1}^I \frac{\vec{v}_i \vec{v}_i^H}{I} \\ &= \frac{e^{-I \text{tr}((\mathbf{C}_{\vec{v}}^{-1} - \mathbf{C}_{\vec{n}}^{-1}) \widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}})}}}{\left| \frac{\mathbf{C}_{\vec{v}}}{(\sigma_{\vec{n}}^2)^2} \right|^I} \end{aligned}$$

or :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\vec{v}}^{-1} &= (\sigma_{\beta}^2 \vec{x} \vec{x}^H + \sigma_{\vec{n}}^2 \mathbf{Id}_2)^{-1} = \frac{1}{\sigma_{\vec{n}}^2} \left[\mathbf{Id}_2 - \frac{\sigma_{\beta}^2 \vec{x} \vec{x}^H}{\sigma_{\vec{n}}^2 + \sigma_{\beta}^2 \vec{x}^H \vec{x}} \right] \\ |\mathbf{C}_{\vec{v}}| &= |\sigma_{\beta}^2 \vec{x} \vec{x}^H + \sigma_{\vec{n}}^2 \mathbf{Id}_2| = \sigma_{\vec{n}}^2 (\sigma_{\vec{n}}^2 + \sigma_{\beta}^2 \vec{x}^H \vec{x}) \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\frac{f(\vec{V} | H_1)}{f(\vec{V} | H_0)} = \frac{e^{I \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_\alpha^2} \frac{\vec{x}^H \widehat{\mathbf{C}}_{\vec{V}} \vec{x}}{\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 \vec{x}^H \vec{x}}}}{\left(1 + \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_\alpha^2} \vec{x}^H \vec{x}\right)^I}$$

et finalement :

$$\ln \left[\frac{f(\vec{V} | H_1)}{f(\vec{V} | H_0)} \right] = I \left[\frac{s}{1 + s \vec{x}^H \vec{x}} \vec{x}^H \widehat{\mathbf{R}} \vec{x} - \ln(1 + s \vec{x}^H \vec{x}) \right], \quad \widehat{\mathbf{R}} = \frac{\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{V}}}{\sigma_\alpha^2}, \quad s = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_\alpha^2} \quad (206)$$

Il est donc plus simple de reparamétriser le modèle d'observation par $\vec{\theta} = (s, r, r^H)^T$ où s représente le RSB sur la voie Somme (Σ). Le calcul de $E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{\theta}}(\vec{V})}{\partial \theta_k^* \partial \theta_l} \mid \mathcal{D} \right]$ se fait alors en 3 étapes :

a) Calcul des dérivées du 1^{er} ordre :

$$\frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}}(\vec{V})}{\partial s} = I \frac{n_1(\widehat{\mathbf{R}})}{(1 + s \vec{x}^H \vec{x})^2}, \quad \frac{\partial \ln f_{\vec{\theta}}(\vec{V})}{\partial r^*} = I s \frac{n_2(\widehat{\mathbf{R}})}{(1 + s \vec{x}^H \vec{x})^2}$$

où :

$$\begin{aligned} n_1(\widehat{\mathbf{R}}) &= \vec{x}^H \widehat{\mathbf{R}} \vec{x} - \vec{x}^H \vec{x} (1 + s \vec{x}^H \vec{x}) \\ n_2(\widehat{\mathbf{R}}) &= \vec{e}_2^H \widehat{\mathbf{R}} \vec{x} (1 + s \vec{x}^H \vec{x}) - r (s \vec{x}^H \widehat{\mathbf{R}} \vec{x} + 1 + s \vec{x}^H \vec{x}), \quad \vec{e}_2 = (0, 1)^T \end{aligned}$$

b) Espérance des dérivées du 2nd ordre :

$$\begin{aligned} E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{\theta}}(\vec{V})}{\partial^2 s} \mid \mathcal{D} \right] &= \frac{-I \vec{x}^H \vec{x}}{(1 + s \vec{x}^H \vec{x})^2} \left(\vec{x}^H \vec{x} + \frac{2}{1 + s \vec{x}^H \vec{x}} E_{\vec{\theta}} [n_1(\widehat{\mathbf{R}}) \mid \mathcal{D}] \right) \\ E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{\theta}}(\vec{V})}{\partial r^* \partial s} \mid \mathcal{D} \right] &= \frac{I}{(1 + s \vec{x}^H \vec{x})^2} \left(\vec{e}_2^H \widehat{\mathbf{R}} \vec{x} - r (1 + 2s \vec{x}^H \vec{x}) - \frac{2rs}{1 + s \vec{x}^H \vec{x}} E_{\vec{\theta}} [n_1(\widehat{\mathbf{R}}) \mid \mathcal{D}] \right) \\ E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{\theta}}(\vec{V})}{\partial^2 r^*} \mid \mathcal{D} \right] &= \frac{-Is^2 r}{(1 + s \vec{x}^H \vec{x})^2} \left(r - \frac{2}{1 + s \vec{x}^H \vec{x}} E_{\vec{\theta}} [n_2(\widehat{\mathbf{R}}) \mid \mathcal{D}] \right) \\ E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{\theta}}(\vec{V})}{\partial r \partial r^*} \mid \mathcal{D} \right] &= -\frac{Is}{(1 + s \vec{x}^H \vec{x})^2} 2r^* s \frac{E_{\vec{\theta}} [n_2(\widehat{\mathbf{R}}) \mid \mathcal{D}]}{1 + s \vec{x}^H \vec{x}} \\ &\quad - \frac{Is}{(1 + s \vec{x}^H \vec{x})^2} \left[(s \vec{x}^H E_{\vec{\theta}} [\widehat{\mathbf{R}} \mid \mathcal{D}] \vec{x} + 1 + s \vec{x}^H \vec{x}) + r (s \vec{x}^H E_{\vec{\theta}} [\widehat{\mathbf{R}} \mid \mathcal{D}] \vec{e}_2 + sr^*) \right] \\ &\quad + \frac{Is}{(1 + s \vec{x}^H \vec{x})^2} \left[(1 + s \vec{x}^H \vec{x}) \vec{e}_2^H E_{\vec{\theta}} [\widehat{\mathbf{R}} \mid \mathcal{D}] \vec{e}_2 + sr^* \vec{e}_2^H E_{\vec{\theta}} [\widehat{\mathbf{R}} \mid \mathcal{D}] \vec{x} \right] \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} E_{\vec{\theta}} [n_1(\widehat{\mathbf{R}}) \mid \mathcal{D}] &= \vec{x}^H E_{\vec{\theta}} [\widehat{\mathbf{R}} \mid \mathcal{D}] \vec{x} - \vec{x}^H \vec{x} (1 + s \vec{x}^H \vec{x}) \\ E_{\vec{\theta}} [n_2(\widehat{\mathbf{R}}) \mid \mathcal{D}] &= \vec{e}_2^H E_{\vec{\theta}} [\widehat{\mathbf{R}} \mid \mathcal{D}] \vec{x} (1 + s \vec{x}^H \vec{x}) - r (s \vec{x}^H E_{\vec{\theta}} [\widehat{\mathbf{R}} \mid \mathcal{D}] \vec{x} + 1 + s \vec{x}^H \vec{x}) \end{aligned}$$

On remarquera que si $\mathcal{D} = \Omega$, alors :

$$\begin{aligned}
E_{\vec{\theta}} \left[n_1 \left(\widehat{\mathbf{R}} \right) \right] &= E_{\vec{\theta}} \left[n_2 \left(\widehat{\mathbf{R}} \right) \right] = 0 \\
E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{\theta}} \left(\vec{V} \right)}{\partial^2 s} \right] &= \frac{-I \left(\vec{x}^H \vec{x} \right)^2}{\left(1 + s \vec{x}^H \vec{x} \right)^2}, & E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{\theta}} \left(\vec{V} \right)}{\partial r^H \partial s} \right] &= \frac{-I \vec{x}^H \vec{x} r s}{\left(1 + s \vec{x}^H \vec{x} \right)^2} \\
E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{\theta}} \left(\vec{V} \right)}{\partial^2 r^H} \right] &= \frac{-I \vec{x}^H \vec{x} \left(1 + s \right) s^2}{\left(1 + s \vec{x}^H \vec{x} \right)^2}, & E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\vec{\theta}} \left(\vec{V} \right)}{\partial r \partial r^H} \right] &= \frac{-I s^2 r^2}{\left(1 + s \vec{x}^H \vec{x} \right)^2}
\end{aligned}$$

c) Calcul de $E_{\vec{\theta}} \left[\widehat{\mathbf{R}} \mid \mathcal{D} \right]$:

Par définition :

$$E_{\vec{\theta}} \left[\widehat{\mathbf{R}} \mid \mathcal{D} \right] = \frac{1}{\sigma_{\vec{n}}^2} E_{\vec{\theta}} \left[\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}} \mid \mathcal{D} \right], \quad E_{\vec{\theta}} \left[\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}} \mid \mathcal{D} \right] = E_{\vec{\theta}} \left[\left[\begin{array}{c|c} \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}}{I} & \frac{\vec{\Delta}^H \vec{\Sigma}}{I} \\ \hline \left(\frac{\vec{\Delta}^H \vec{\Sigma}}{I} \right)^H & \frac{\vec{\Delta}^H \vec{\Delta}}{I} \end{array} \right] \mid \mathcal{D} \right]$$

avec :

$$\begin{aligned}
f_{\mathcal{N}_c(\vec{0}, \mathbf{C}_{\vec{v}})} \left(\vec{V} \right) &= \frac{e^{-\vec{V}^H \mathbf{C}_{\vec{v}}^{-1} \vec{V}}}{\pi^{2I} |\mathbf{C}_{\vec{v}}|} = f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}, \mathbf{C}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}})} \left(\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma} \right) f_{\mathcal{N}_c(\vec{0}, \mathbf{C}_{\vec{\Sigma}})} \left(\vec{\Sigma} \right) \\
\mathbf{C}_{\vec{v}} &= \begin{bmatrix} C_{11} \mathbf{Id}_I & C_{12} \mathbf{Id}_I \\ C_{12}^* \mathbf{Id}_I & C_{22} \mathbf{Id}_I \end{bmatrix} \\
\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} C_{11} = \sigma_{\vec{\Sigma}}^2 & C_{12} \\ C_{12}^* & C_{22} = \sigma_{\vec{\Delta}}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{\vec{v}_i} = \sigma_{\beta}^2 \vec{x} \vec{x}^H + \mathbf{C}_{\vec{n}} \\
\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} &= \frac{C_{12}^* \vec{\Sigma}}{C_{11}}, \quad \mathbf{C}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}} = \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2 \mathbf{Id}_I, \quad \sigma_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}^2 = \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}
\end{aligned}$$

Afin de simplifier les écritures nous conviendrons que :

$$f_{\mathcal{N}_c(\vec{m}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}}, \mathbf{C}_{\vec{\Delta}|\vec{\Sigma}})} \left(\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma} \right) = f \left(\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma} \right), \quad f_{\mathcal{N}_c(\vec{0}, \mathbf{C}_{\vec{\Sigma}})} \left(\vec{\Sigma} \right) = f \left(\vec{\Sigma} \right)$$

Alors :

$$\begin{aligned}
E_{\vec{\theta}} \left[\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \cap \mathcal{D} \right] &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \left[\int_{\vec{\Delta}} \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} f \left(\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma} \right) d\vec{\Delta} \right] f \left(\vec{\Sigma} \right) d\vec{\Sigma} = \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} f \left(\vec{\Sigma} \right) d\vec{\Sigma} \\
&= \int_{t \geq T} t f_{\chi_{2c}^2}(t, 0, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\vec{\theta}} \left[\vec{\Delta}^H \vec{\Sigma} \cap \mathcal{D} \right] &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \left[\int_{\vec{\Delta}} \vec{\Delta} f \left(\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma} \right) d\vec{\Delta} \right]^H f \left(\vec{\Sigma} \right) d\vec{\Sigma} = \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \left(\frac{C_{12}^* \vec{\Sigma}}{C_{11}} \right)^H \vec{\Sigma} f \left(\vec{\Sigma} \right) d\vec{\Sigma} \\
&= \frac{C_{12}}{C_{11}} \int_{t \geq T} t f_{\chi_{2c}^2}(t, 0, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\vec{\theta}} \left[\vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \cap \mathcal{D} \right] &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \left[\int_{\vec{\Delta}} \vec{\Delta}^H \vec{\Delta} f(\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
&= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \left(I \sigma_{\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}}^2 + \|\vec{m}_{\vec{\Delta} | \vec{\Sigma}}\|^2 \right) f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
&= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T} \left(I \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}} + \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \right) f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
&= I \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}} P(\mathcal{D}) + \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 \int_{t \geq T} t f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) dt
\end{aligned}$$

Finalemment :

$$\begin{aligned}
E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}}{I} \mid \mathcal{D} \right] &= \frac{\int_{t \geq T} t f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) dt}{IP(\mathcal{D})} = C_{11} \frac{e_I \left(\frac{T}{C_{11}} \right)}{e_{I-1} \left(\frac{T}{C_{11}} \right)} \\
E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\vec{\Delta}^H \vec{\Sigma}}{I} \mid \mathcal{D} \right] &= \frac{C_{12} \int_{t \geq T} t f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) dt}{C_{11} IP(\mathcal{D})} = C_{12} \frac{e_I \left(\frac{T}{C_{11}} \right)}{e_{I-1} \left(\frac{T}{C_{11}} \right)} \\
E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\vec{\Delta}^H \vec{\Delta}}{I} \mid \mathcal{D} \right] &= \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}} + \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 \frac{\int_{t \geq T} t f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, \sigma_{\vec{\Sigma}}^2) dt}{IP(\mathcal{D})} = C_{22} \frac{e_I \left(\frac{T}{C_{11}} \right)}{e_{I-1} \left(\frac{T}{C_{11}} \right)} - \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}} \frac{\left(\frac{T}{C_{11}} \right)^I}{I! e_{I-1} \left(\frac{T}{C_{11}} \right)}
\end{aligned}$$

2) Calcul de $\frac{\partial^2 -\ln P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})}{\partial \theta_k^* \partial \theta_l}$:

$$-\ln P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta}) = \frac{T}{\sigma_{\vec{n}}^2 + \sigma_{\beta}^2} - \ln \left[e_{I-1} \left(\frac{T}{\sigma_{\vec{n}}^2 + \sigma_{\beta}^2} \right) \right] = \frac{\tilde{T}}{1+s} - \ln \left[e_{I-1} \left(\frac{\tilde{T}}{1+s} \right) \right], \quad \tilde{T} = \frac{T}{s}$$

Par conséquent :

$$-\ln P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta}) = h(s) = g[f(s)] \Rightarrow \begin{cases} h^{(1)}(s) = g^{(1)}[f(s)] f^{(1)}(s) \\ h^{(2)}(s) = g^{(2)}[f(s)] [f^{(1)}(s)]^2 + g^{(1)}[f(s)] f^{(2)}(s) \end{cases}$$

avec :

$$f(s) = \frac{\tilde{T}}{1+s} \Rightarrow f^{(1)}(s) = \frac{-1}{(1+s)^2} \Rightarrow f^{(2)}(s) = \frac{2}{(1+s)^3}$$

$$g(x) = x - \ln[e_{I-1}(x)] \Rightarrow g^{(1)}(x) = 1 - \frac{e_{I-2}(x)}{e_{I-1}(x)} \Rightarrow g^{(2)}(x) = -\frac{e_{I-3}(x)}{e_{I-1}(x)} + \left[\frac{e_{I-2}(x)}{e_{I-1}(x)} \right]^2$$

Finalemment :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})}{\partial^2 s} &= \left[1 - \frac{e_{I-2} \left(\frac{\tilde{T}}{1+s} \right)}{e_{I-1} \left(\frac{\tilde{T}}{1+s} \right)} \right] \frac{2\tilde{T}}{(1+s)^3} + \left[\frac{e_{I-2} \left(\frac{\tilde{T}}{1+s} \right)}{e_{I-1} \left(\frac{\tilde{T}}{1+s} \right)} \right]^2 - \frac{e_{I-3} \left(\frac{\tilde{T}}{1+s} \right)}{e_{I-1} \left(\frac{\tilde{T}}{1+s} \right)} \left[\frac{\tilde{T}}{(1+s)^2} \right]^2 \\
\frac{\partial^2 \ln P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})}{\partial r^* \partial s} &= \frac{\partial^2 \ln P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})}{\partial^2 r^*} = \frac{\partial^2 \ln P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})}{\partial r \partial r^*} = 0
\end{aligned}$$

3) Calcul de $\frac{\partial \vec{g}_{\vec{\theta}}}{\partial \vec{\theta}^T}$:

Nous nous intéressons à $\vec{g}_{\vec{\theta}} = g_{\vec{\theta}} = E_{\vec{\theta}} [\widehat{\text{Re}\{r\}}(\vec{x}) \mid \mathcal{D}]$. Or [59] :

$$E_{\vec{\theta}} [\widehat{r}(\vec{x}) \mid \mathcal{D}] = \frac{C_{12}^*}{C_{11}} = \frac{[\sigma_{\alpha}^2 g_{\Sigma} g_{\Delta}^*]^*}{\sigma_{\vec{r}}^2 + \sigma_{\alpha}^2 g_{\Sigma} g_{\Sigma}^*} = \frac{s}{1+s} r$$

par conséquent :

$$E_{\vec{\theta}} [\widehat{\text{Re}\{r\}}(\vec{x}) \mid \mathcal{D}] = \frac{s}{1+s} \left(\frac{r+r^*}{2} \right)$$

et :

$$\frac{\partial \vec{g}_{\vec{\theta}}}{\partial \vec{\theta}^T} = \frac{\partial E_{\vec{\theta}} [\widehat{\text{Re}\{r\}}(\vec{x}) \mid \mathcal{D}]}{\partial \vec{\theta}^T} = \left(\frac{1}{(1+s)^2} \left(\frac{r+r^*}{2} \right), \frac{s}{1+s} \frac{1}{2}, \frac{s}{1+s} \frac{1}{2} \right)$$

F. Borne de Cramer-Rao conditionnée du rapport d'écartométrie lorsque la loi de fluctuation d'amplitude est une loi de Rayleigh et $\mathcal{D} = \left\{ \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} + \vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \geq T \right\}$

Le principe des calculs est identique à celui mis en oeuvre Annexe XII-E-p123, à ceci près que l'événement \mathcal{D} ayant changé, il faut mettre à jour $E_{\vec{\theta}} \left[\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}} \mid \mathcal{D} \right]$, $\frac{\partial^2 - \ln P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})}{\partial \theta_i^* \partial \theta_i}$ et $\frac{\partial \vec{g}_{\vec{\theta}}}{\partial \vec{\theta}}$.

1) Calcul de $E_{\vec{\theta}} \left[\widehat{\mathbf{C}}_{\vec{v}} \mid \mathcal{D} \right]$:

$$\begin{aligned}
 E_{\vec{\theta}} \left[\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \cap \mathcal{D} \right] &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\int_{\|\vec{\Delta}\|^2 \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} f(\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
 (170) &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\int_{x \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} f_{\chi_{2c}^I}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}}^2) dx \right] \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
 &= C_{11} \int_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) \left(\frac{t}{C_{11}} \right) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11}) dx dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{\vec{\theta}} \left[\vec{\Delta}^H \vec{\Sigma} \cap \mathcal{D} \right] &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\int_{\|\vec{\Delta}\|^2 \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} \vec{\Delta} f(\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}) d\vec{\Delta} \right] \vec{\Sigma} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
 (167) &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\vec{m}_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}} \int_{x \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \|\vec{m}_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}}\|^2, \sigma_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}}^2) dx \right] \vec{\Sigma} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{\vec{\theta}} \left[\vec{\Delta}^H \vec{\Sigma} \cap \mathcal{D} \right] &= \frac{C_{12}}{C_{11}} \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\int_{x \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}, \sigma_{\vec{\Delta} \mid \vec{\Sigma}}^2) dx \right] \vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} f(\vec{\Sigma}) d\vec{\Sigma} \\
 &= C_{12} \int_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) \left(\frac{t}{C_{11}} \right) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11}) dx dt
 \end{aligned}$$

$$E_{\vec{\theta}} \left[\vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \cap \mathcal{D} \right] = \int_{\|\vec{\Delta}\|^2 \geq 0} \left[\int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq \max(T - \|\vec{\Delta}\|^2, 0)} f(\vec{\Sigma} \mid \vec{\Delta}) d\vec{\Sigma} \right] \vec{\Delta}^H \vec{\Delta} f(\vec{\Delta}) d\vec{\Delta}$$

où :

$$\begin{aligned}
 f_{N_c(\vec{m}_{\vec{\Sigma} \mid \vec{\Delta}}, \mathbf{C}_{\vec{\Sigma} \mid \vec{\Delta}})}(\vec{\Sigma} \mid \vec{\Delta}) &= f(\vec{\Sigma} \mid \vec{\Delta}), \quad f_{N_c(\vec{m}_{\vec{\Delta}}, \mathbf{C}_{\vec{\Delta}})}(\vec{\Delta}) = f(\vec{\Delta}) \\
 \vec{m}_{\vec{\Sigma} \mid \vec{\Delta}} &= \frac{C_{12}}{C_{22}} \vec{\Sigma}, \quad \mathbf{C}_{\vec{\Sigma} \mid \vec{\Delta}} = \sigma_{\vec{\Sigma} \mid \vec{\Delta}}^2 \mathbf{Id}_I, \quad \sigma_{\vec{\Sigma} \mid \vec{\Delta}}^2 = \frac{|\mathbf{C}|}{C_{22}}
 \end{aligned}$$

soit, par analogie avec le calcul de $E_{\vec{\theta}} \left[\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma} \cap \mathcal{D} \right]$:

$$E_{\vec{\theta}} \left[\vec{\Delta}^H \vec{\Delta} \cap \mathcal{D} \right] = C_{22} \int_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, \left| \frac{C_{12}}{C_{22}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{22}}) \left(\frac{t}{C_{22}} \right) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{22}) dx dt$$

Finalement, en remarquant que :

$$\left(\frac{t}{I\sigma^2} \right) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, \sigma^2) = f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, 0, \sigma^2)$$

$$E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Sigma}}{I} \mid \mathcal{D} \right] = \frac{C_{11}}{P_{\mathcal{D}}} \int_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, 0, C_{11}) dx dt$$

$$E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\vec{\Delta}^H \vec{\Sigma}}{I} \mid \mathcal{D} \right] = \frac{C_{12}}{P_{\mathcal{D}}} \int_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, 0, C_{11}) dx dt$$

$$E_{\vec{\theta}} \left[\frac{\vec{\Delta}^H \vec{\Delta}}{I} \mid \mathcal{D} \right] = \frac{C_{22}}{P_{\mathcal{D}}} \int_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, \left| \frac{C_{12}}{C_{22}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{22}}) f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, 0, C_{22}) dx dt$$

2) Calcul de $\frac{\partial^2 \ln P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})}{\partial \theta_k^* \partial \theta_l}$:

Une autre forme de $P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})$ peut être obtenue en remarquant que :

$$\mathbf{C} = \sigma_{\vec{n}}^2 (s \vec{x} \vec{x}^H + \mathbf{Id}_2) = \sigma_{\vec{n}}^2 \left[s \|\vec{x}\|^2 \left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right) \left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right)^H + \mathbf{Id}_2 \right], \quad s = \frac{\sigma_{\beta}^2}{\sigma_{\vec{n}}^2}$$

ce qui signifie que \mathbf{C} peut être diagonalisée sur la base orthonormée de vecteur propres $\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right)^{\perp} \right) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ associées aux valeurs propres $\lambda_1 = \sigma_{\vec{n}}^2 (s \|\vec{x}\|^2 + 1)$ and $\lambda_2 = \sigma_{\vec{n}}^2$. Considérons alors le changement de variable $\vec{v}_i = [\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2]^H \vec{v}_i$, et posons $\vec{V}^T = (v_1^T, \dots, v_I^T)^T$. Dans ce cas :

$$f_{\vec{\theta}}(\vec{V}^T) = f_{\vec{\theta}}(\vec{\Sigma}^T) f_{\vec{\theta}}(\vec{\Delta}^T)$$

et :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta}) &= \int_{\|\vec{V}\| \geq T} f_{\vec{\theta}}(\vec{V}^T) d\vec{V} = \int_{\|\vec{V}\| \geq T} f_{\vec{\theta}}(\vec{V}^T) d\vec{V}^T = \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\int_{\|\vec{\Delta}\|^2 \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} f(\vec{\Delta}^T) d\vec{\Delta}^T \right] f(\vec{\Sigma}^T) d\vec{\Sigma}^T \\ (170) &= \int_{\|\vec{\Sigma}\|^2 \geq 0} \left[\int_{x \geq \max(T - \|\vec{\Sigma}\|^2, 0)} f_{\chi_{2c}^I}(x, 0, \lambda_2) dx \right] f(\vec{\Sigma}^T) d\vec{\Sigma}^T = \int_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, 0, \lambda_2) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, \lambda_1) dx dt \\ &= \int_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, 0, \sigma_{\vec{n}}^2) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, \sigma_{\vec{n}}^2 (s \|\vec{x}\|^2 + 1)) dx dt \end{aligned}$$

L'utilisation de cette forme de $P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})$ permet de calculer les dérivées recherchées de la façon suivante :

a) Reformulation de $\left(-\ln P_{\mathcal{D}}\left(\vec{\theta}\right)\right)$ sous la forme :

$$-\ln P_{\mathcal{D}}\left(\vec{\theta}\right) = g\left(\lambda\left(\vec{\theta}\right)\right)$$

$$g(\lambda) = \ln\left(\iint_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, 0, \sigma_{\vec{n}}^2) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, \lambda) dx dt\right), \quad \lambda\left(\vec{\theta}\right) = \sigma_{\vec{n}}^2 (s\mathbf{x}^H \mathbf{x} + 1)$$

b) Reformulation de $\frac{\partial^2 -\ln P_{\mathcal{D}}\left(\vec{\theta}\right)}{\partial \theta_k^* \partial \theta_l}$ en fonction des dérivées de $g(\lambda)$ et $\lambda\left(\vec{\theta}\right)$:

$$\frac{\partial^2 -\ln P_{\mathcal{D}}\left(\vec{\theta}\right)}{\partial \theta_k^* \partial \theta_l} = \frac{\partial g\left(\lambda\left(\vec{\theta}\right)\right)}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \lambda\left(\vec{\theta}\right)}{\partial \theta_k^* \partial \theta_l} + \frac{\partial^2 g\left(\lambda\left(\vec{\theta}\right)\right)}{\partial^2 \lambda} \frac{\partial \lambda\left(\vec{\theta}\right)}{\partial \theta_k^*} \frac{\partial \lambda\left(\vec{\theta}\right)}{\partial \theta_l}$$

c) Calcul de $\frac{\partial g(\lambda)}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial^2 g(\lambda)}{\partial^2 \lambda}$:

Puisque :

$$\frac{\partial f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{I}{\lambda} \left[f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, 0, \lambda) - f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, \lambda) \right]$$

il s'ensuit que :

$$\frac{\partial g(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{1}{P_{\mathcal{D}}} \int_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, 0, \sigma_{\vec{n}}^2) f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, 0, \lambda) dx dt \right]$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g(\lambda)}{\partial^2 \lambda} = & \frac{-1}{\lambda} \frac{\partial g(\lambda)}{\partial \lambda} - \frac{I}{\lambda^2 P_{\mathcal{D}}} \left\{ \int_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, 0, \sigma_{\vec{n}}^2) f_{\chi_{2c}^{I+2}}(t, 0, \lambda) dx dt (I+1) \right. \\ & - \int_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, 0, \sigma_{\vec{n}}^2) f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, 0, \lambda) dx dt \\ & \left. - \frac{I}{P_{\mathcal{D}}} \left(\int_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, 0, \sigma_{\vec{n}}^2) f_{\chi_{2c}^{I+1}}(t, 0, \lambda) dx dt \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

d) Calcul de $\frac{\partial \lambda\left(\vec{\theta}\right)}{\partial \theta_k}$ et $\frac{\partial^2 \lambda\left(\vec{\theta}\right)}{\partial \theta_k^* \partial \theta_l}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda\left(\vec{\theta}\right)}{\partial s} &= \sigma_{\vec{n}}^2 \vec{x}^H \vec{x}, & \frac{\partial \lambda\left(\vec{\theta}\right)}{\partial r^*} &= \sigma_{\vec{n}}^2 s r, & \frac{\partial \lambda\left(\vec{\theta}\right)}{\partial r} &= \sigma_{\vec{n}}^2 s r^* \\ \frac{\partial^2 \lambda\left(\vec{\theta}\right)}{\partial s^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \lambda\left(\vec{\theta}\right)}{\partial r \partial s} &= \sigma_{\vec{n}}^2 r^*, & \frac{\partial^2 \lambda\left(\vec{\theta}\right)}{\partial r \partial r^*} &= s \sigma_{\vec{n}}^2, & \frac{\partial^2 \lambda\left(\vec{\theta}\right)}{\partial r^* \partial r^*} &= 0 \end{aligned}$$

e) Recombinaison finale :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P_D(\vec{\theta})}{\partial^2 s} &= \frac{\partial^2 g(\lambda(\vec{\theta}))}{\partial^2 \lambda} (\sigma_{\vec{n}}^2 \vec{x}^H \vec{x})^2 \\
\frac{\partial^2 P_D(\vec{\theta})}{\partial r \partial s} &= \frac{\partial g(\lambda(\vec{\theta}))}{\partial \lambda} \sigma_{\vec{n}}^2 r^* + \frac{\partial^2 g(\lambda(\vec{\theta}))}{\partial^2 \lambda} (\sigma_{\vec{n}}^2)^2 \vec{x}^H \vec{x} s r^* \\
\frac{\partial^2 P_D(\vec{\theta})}{\partial r \partial r^*} &= \frac{\partial g(\lambda(\vec{\theta}))}{\partial \lambda} \sigma_{\vec{n}}^2 s + \frac{\partial^2 g(\lambda(\vec{\theta}))}{\partial^2 \lambda} (\sigma_{\vec{n}}^2)^2 s r s r^* \\
\frac{\partial^2 P_D(\vec{\theta})}{\partial r^* \partial r^*} &= \frac{\partial^2 g(\lambda(\vec{\theta}))}{\partial^2 \lambda} (\sigma_{\vec{n}}^2 s r^*)^2
\end{aligned}$$

3) Calcul de $\frac{\partial \vec{g}_{\vec{\theta}}}{\partial \vec{\theta}}$:

Nous nous intéressons à $\vec{g}_{\vec{\theta}} = g_{\vec{\theta}} = E_{\vec{\theta}}[\text{Re}\{\widehat{r}\}(\vec{x}) | \mathcal{D}]$. Or d'après (204) :

$$E_{\vec{\theta}}[\widehat{r}(\vec{x}) | \mathcal{D}] = \frac{\mathbf{C}_{12}^H}{\mathbf{C}_{11}} \frac{P(\vec{\theta})}{P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})} = r \frac{s r}{1+s} \frac{P(\vec{\theta})}{P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})}$$

où :

$$\begin{aligned}
P(\vec{\theta}) &= \int_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^{I+1}}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11}) dx dt \\
P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta}) &= \int_{x+t \geq T} f_{\chi_{2c}^I}(x, \left| \frac{C_{12}^*}{C_{11}} \right|^2 t, \frac{|\mathbf{C}|}{C_{11}}) f_{\chi_{2c}^I}(t, 0, C_{11}) dx dt
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$E_{\vec{\theta}}[\widehat{\text{Re}\{r\}}(\mathbf{x}) | \mathcal{D}] = \left(\frac{r+r^*}{2} \right) \frac{s}{1+s} \frac{P(\vec{\theta})}{P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})}$$

et :

$$\frac{\partial \vec{g}_{\vec{\theta}}}{\partial \vec{\theta}} = \frac{\partial E_{\vec{\theta}}[\widehat{\text{Re}\{r\}}(\vec{x}) | \mathcal{D}]}{\partial \vec{\theta}} = \frac{P(\vec{\theta})}{P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})} \frac{\partial \left(\frac{s}{1+s} \frac{r+r^*}{2} \right)}{\partial \vec{\theta}} + \frac{\partial}{\partial \vec{\theta}} \left(\frac{P(\vec{\theta})}{P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})} \right) \left(\frac{s}{1+s} \frac{r+r^*}{2} \right)$$

Lorsque $r = 0$ alors $\vec{\theta} = (s, 0, 0)$ et :

$$\frac{\partial \vec{g}_{\vec{\theta}}}{\partial \vec{\theta}} = \frac{P(\vec{\theta})}{P_{\mathcal{D}}(\vec{\theta})} \left(\frac{\text{Re}\{r\}}{(1+s)^2}, \frac{s}{1+s}, \frac{1}{2}, \frac{s}{1+s}, \frac{1}{2} \right)^T = \frac{P(s, 0, 0)}{P_{\mathcal{D}}(s, 0, 0)} \left(0, \frac{s}{1+s}, \frac{1}{2}, \frac{s}{1+s}, \frac{1}{2} \right)^T$$

OPTIMAL DETECTION THEORY APPLIED TO MONOPULSE ANTENNAS

Eric Chaumette

Thales Naval France, Bagneux, France.

Pascal Larzabal

Ecole Normale Supérieure, Cachan, France.

ABSTRACT

Estimation of the direction of arrival of a signal source by means of a monopulse antenna is one of the oldest and most widely used high resolution techniques. Although the statistical performance of this estimation technique has been extensively investigated, it has never been analyzed from the view point of a two-sensor system. This deficiency is responsible for the form of the common solution (detector/estimator) which restricts the accessible performance. Applying the optimal detection theory to this problem, when a Raleigh-type signal source is present, shows that changing the detector is necessary to optimize the overall performance. The analytical performance of the new solution has been established, thus complementing the existing characterization of the common solution.

1. NOTATION

\vec{X}, \vec{x} denote vectors (complex or real)

$\mathbf{C}, \hat{\mathbf{R}}, \mathbf{m}$ denote matrices (complex or real)

$\Sigma_i, \beta_i, g_\Sigma, n_{\Sigma_i}, r, \dots$ denote scalar values (complex or real)

$P()$ denotes a probability

$f()$ denotes a probability density function (pdf)

$F()$ denotes a cumulative distribution function (cdf)

\hat{r} denotes an estimator of r

$\mathbf{C}_{\vec{X}}$ denotes the covariance matrix of random vector \vec{X}

\mathbf{Id}_I denotes Identity matrix with dimensions (I,I)

$$f_{\chi^2_I}(t, \mu^2, \sigma^2) = \frac{e^{-\frac{(t+\mu^2)}{\sigma^2}}}{\sigma^2} I_{I-1} \left(\frac{2\mu\sqrt{t}}{\sigma^2} \right) \left(\frac{\sqrt{t}}{\mu} \right)^{(I-1)}$$

$$e_N(T) = \sum_{n=0}^N \frac{T^n}{n!}, \quad I_I(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{t \cos(\theta)} \cos(I\theta) d\theta$$

2. INTRODUCTION

A monopulse antenna (radar or telecom) determines the angular location of a signal source (radar target or telecom transmitter) by comparing the returns from difference (Δ) and sum (Σ) antenna pattern [2] [1]. Although simple (only 2 parameters if the noise power is assumed to be known, see (6)) it has – to our knowledge – never been covered by a full technical analysis from the view

point of a composite hypotheses testing problem applied to a 2-sensors reception device. The open literature [1]-[7] on this subject reveals a separate analysis of detection and estimation. The contribution of the difference channel has always been limited to the estimation part of the problem, which as early as the sixties was covered by theoretical work on the formulation of a monopulse ratio estimator (exact MLE, approximated form) [2], then of its statistical performance [3]. The first analyses [4] [5] which included the detection test appeared as late as the nineties. However, when reading these papers, it seems that the major motivation of the authors was the paradoxical result introduced by Kanter [3]: in the single-observation case, the variance (non conditioned) of the monopulse ratio's MLE is infinite. Seiffer [5] indeed wrote in his abstract: "Such conditioning is shown here to be necessary in order that the noise power be finite ..." and Tullson [4] only covers the thresholding aspect in an appendix. Even lately, authors [6] [7] involved in target tracking have introduced and characterized a new statistical description of monopulse parameters dedicated to support Kalman Filter Tracking performance study: for each independent monopulse measurement, the complex monopulse ratio is conditioned on the measured amplitude ... of the sum signal. In this paper, we formulate the optimal detector – the Neyman-Pearson criterion – applied to the monopulse antenna, and the associated composite hypotheses testing problem, as certain parameters are unknown. To solve the composite hypotheses testing problem, we apply the GLRT method and establish the analytical expressions of the detector and associated estimators, in particular that of the monopulse ratio. Lastly, we develop two approximations of the (detector, monopulse ratio estimator) pair. The first is based on the common "historical" approach. The second, which we characterized analytically, proposes an appreciable improvement of the performances of the composite hypotheses testing problem. While retaining a comparable estimation Root Mean Square Error (RMSE), it helps achieve detection performance characteristics close to the optimum over the complete main lobe of the sum channel, an improvement which is illustrated by an example.

3. PROBLEM FORMULATION

A common model for the receiver signal vector is:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \Sigma(t) \\ \Delta(t) \end{pmatrix} = \alpha(t) \vec{g}(\theta_0) + \vec{n}(t) \quad (1)$$

where $\vec{g}(\theta) = (g_\Sigma(\theta), g_\Delta(\theta))^T$ is the array response vector (steering vector). It represents the array complex response to a narrow-band point source situated at an angle θ . The complex envelope of the source (including power budget equation, signal processing gains) is denoted by $\alpha(t)$, and $\vec{n}(t)$ is a 2x1 additive noise

vector. Consider the following detection problem:

$$\begin{aligned} H_0: \vec{v}(t) &= \vec{n}(t) \\ H_1: \vec{v}(t) &= \alpha(t) \vec{g}(\theta_0) + \vec{n}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Based on I independent array snapshots $\vec{v}(t_1), \dots, \vec{v}(t_I)$, we want to decide whether to accept the null hypothesis (noise only) H_0 , or to accept the alternate hypothesis (signal plus noise) H_1 .

3.1. Optimal Detector: LRT

If the pdf of the measurement is known under both hypotheses, the optimal detector - in the Neyman-Pearson sense [8] - is the Likelihood Ratio Test (LRT). In the problem at hand, the additive noise $\vec{n}(t)$ is a circular, zero mean, white (both temporally and spatially), complex Gaussian random vector process with variance σ_n^2 . The signal $\alpha(t_i)$ is (Rayleigh case) a circular zero mean, temporally white, complex Gaussian discrete random process with variance σ_α^2 , independent from the noise. The signal source does not alter its relative position with respect to the array during the I snapshots (static situation: θ_0 is constant). Denote by $\vec{V} = (\vec{\Sigma}^T, \vec{\Delta}^T)^T$, where $\vec{\Sigma} = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_I)^T$ and $\vec{\Delta} = (\Delta_1, \dots, \Delta_I)^T$, the $2I$ dimensional observation vector related to the I snapshots, then:

$$\begin{aligned} f(\vec{V} | H_0) &= \frac{e^{-\frac{1}{\sigma_n^2} \text{Tr}(\hat{\mathbf{R}})}}{(\pi^2 (\sigma_n^2)^2)^I}, \quad \hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \vec{v}(t_i) \vec{v}(t_i)^H \\ f(\vec{V} | H_1) &= \frac{e^{-I \text{Tr}(\mathbf{C}^{-1} \hat{\mathbf{R}})}}{(\pi^2 |\mathbf{C}|)^I} \end{aligned}$$

where: $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\vec{v}(t)} = \sigma_\alpha^2 \vec{g}(\theta_0) \vec{g}(\theta_0)^H + \sigma_n^2 I_{d_2}$

Under these assumptions the LRT takes the form of:

$$LRT = \frac{f(\vec{V} | H_1)}{f(\vec{V} | H_0)} = \frac{e^{-I \text{Tr}(\left[\mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{\sigma_n^2} I_{d_2} \right] \hat{\mathbf{R}})}}{\left| \frac{I_{d_2}}{\sigma_n^2} \mathbf{C} \right|^I} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T' \quad (3)$$

and can be reduced to:

$$T_r \left(\hat{\mathbf{R}} \frac{\vec{g}(\theta_0) \vec{g}(\theta_0)^H}{\|\vec{g}(\theta_0)\|^2} \right) = \sum_{i=1}^I \left| \frac{\vec{g}(\theta_0)^H \vec{v}(t_i)}{\|\vec{g}(\theta_0)\|} \right|^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T$$

Denote by D the event of a threshold detection. Then, Probability of False Alarm - $P_{FA} = P(D | H_0)$ - and Probability of Detection - $P_D = P(D | H_1)$ - are given by (Chi-Square law):

$$P_{FA} = e^{-\frac{T}{\sigma_n^2}} e_{I-1} \left(\frac{T}{\sigma_n^2} \right) \quad (4a)$$

$$P_D = e^{-\frac{T}{\sigma_n^2 + \sigma_\alpha^2 \|\vec{g}(\theta_0)\|^2}} e_{I-1} \left(\frac{T}{\sigma_n^2 + \sigma_\alpha^2 \|\vec{g}(\theta_0)\|^2} \right) \quad (4b)$$

3.2. GLRT

For cases in which some of parameters are unknown, the detection problem in (2) becomes a composite hypotheses testing problem (CHTP) [8]. Although not necessarily optimal, the GLRT (Generalized LRT [8]) is widely used in such problem. Let's denote by

$\vec{\varphi}_j$ the unknown parameters vector under hypothesis j , the GLRT for deciding whether to accept H_0 or to accept H_1 is given by:

$$GLRT = \frac{\max_{\vec{\varphi}_1} f(\vec{V} | \vec{\varphi}_1)}{\max_{\vec{\varphi}_0} f(\vec{V} | \vec{\varphi}_0)} = \frac{f(\vec{V} | \hat{\vec{\varphi}}_1)}{f(\vec{V} | \hat{\vec{\varphi}}_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T \quad (5)$$

where $\hat{\vec{\varphi}}_j$ stands for the Maximum Likelihood Estimates (MLE) [8] of the unknown parameters under hypothesis j .

In the problem at hand, the observation equation (1) may be rewritten according to an equivalent form:

$$\vec{v}(t) = \beta(t) \vec{x} + \vec{n}(t) \quad (6)$$

where: $\beta(t) = \alpha(t) g_\Sigma(\theta_0)$, $\vec{x} = (1, r(\theta_0))^T$, $r(\theta) = \frac{g_\Delta(\theta)}{g_\Sigma(\theta)}$

This is the "Monopulse Ratio" reformulation of the observation equation. Under this formulation, the possible unknown parameters are $\{\sigma_n^2, \sigma_\beta^2, r\}$, and the final form of (5) depends on whether the noise power (σ_n^2) is an unknown parameter (7) or not (8) [9]:

$$GLRT \iff \frac{\text{Tr}(\hat{\mathbf{R}})^2}{|\hat{\mathbf{R}}|} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T \quad (7)$$

$$GLRT \iff \frac{\text{Tr}(\hat{\mathbf{R}}) + \sqrt{\text{Tr}(\hat{\mathbf{R}})^2 - 4|\hat{\mathbf{R}}|}}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T \quad (8)$$

In both cases:

$$\hat{r} = \frac{\text{Tr}(\hat{\mathbf{R}}) + \sqrt{\text{Tr}(\hat{\mathbf{R}})^2 - 4|\hat{\mathbf{R}}|} - 2\|\vec{\Sigma}\|^2}{2\vec{\Delta}^H \vec{\Sigma}} \quad (9)$$

Form (7) of GLRT is a constant false alarm rate (CFAR) detector which tests the sensors correlation under H_0 and H_1 [9]. As most of CFAR process, its performance (P_D vs P_{FA}) is poor for small number of snapshots. This is the reason why σ_n^2 estimation is always performed at a different stage of the processing, generally at the output of the Matched Filter, where a large amount of samples is available. Therefore, hereinafter, it is assumed that σ_n^2 can be estimated precisely enough to be a known parameter of observation model (6) leading to form (8) of GLRT.

3.3. Practical GLRT approximations

Except for case $I = 1$, where:

$$GLRT \iff |\Delta|^2 + |\Sigma|^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T, \quad \hat{r} = \frac{\Delta}{\Sigma} \quad (10)$$

the exact solution of the CHTP, forms (8) of the GLRT and (9) of the MLE of r , is unpractical for establishing analytical results. Although the computing power of today's computers allows a precise study of its performance through a Monte-Carlo type simulation with a large number of draws, it is always interesting to be able to establish analytical results based on approximated solutions which may be used as calibration tools for this type of simulation (number of draws necessary for a representative measurement).

The usual "historical" approximation consists in restricting the use of the difference channel Δ to computation of MLE of r only, where detection is achieved using the sum channel Σ only. Under

this assumption, the samples which pass the detection test and participate in the estimation process mostly belong to the sum beam width (see figure 1) and verify $\|\vec{\Sigma}\|^2 > \|\vec{\Delta}\|^2$. In this case:

$$\sqrt{Tr(\hat{\mathbf{R}})^2 - 4|\hat{\mathbf{R}}|} \approx \|\vec{\Sigma}\|^2 - \|\vec{\Delta}\|^2 + \frac{2|\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}|^2}{\|\vec{\Sigma}\|^2}$$

$$GLRT \iff \|\vec{\Sigma}\|^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T, \hat{r} \approx \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\|\vec{\Sigma}\|^2} \quad (11)$$

This approximated form of r was introduced by Mosca [2] as the solution of "the problem of estimation of angle of arrival in amplitude comparison monopulse radars", but with no reference to the associated detection test (see introduction).

A more global approach is the theoretical approach disclosed above. It leads to a symmetrical form (relative to $\vec{\Delta}$ and $\vec{\Sigma}$) of the GLRT (8) and therefore suggests an approximation based on a symmetrical criterion, such as the correlation of the 2 channels under H_1 with σ_α^2 large. In this case $\frac{|\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}|^2}{\|\vec{\Sigma}\|^2 \|\vec{\Delta}\|^2} \approx 1$ and:

$$\sqrt{Tr(\hat{\mathbf{R}})^2 - 4|\hat{\mathbf{R}}|} \approx Tr(\hat{\mathbf{R}}) - 2\frac{|\hat{\mathbf{R}}|}{Tr(\hat{\mathbf{R}})}$$

$$GLRT \iff Tr(\hat{\mathbf{R}}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T, \hat{r} \approx \frac{\|\vec{\Delta}\|^4 + |\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}|^2}{\vec{\Delta}^H \vec{\Sigma} (\|\vec{\Sigma}\|^2 + \|\vec{\Delta}\|^2)} \quad (12)$$

Under this form, the GLRT becomes a simple quadratic detector based on the use of the energy available on the 2 reception channels. The detection performance (P_D vs P_{FA}) of this type of detector are well known (2I order Chi-Square laws) and is very close to that of the optimal detector (4a-b) (see figure 1 for an example). However, the form of \hat{r} obtained is not a great deal simpler than (9). It is simplified when $\|\vec{\Sigma}\|^2 > \|\vec{\Delta}\|^2$. We then have again the form (11) of \hat{r} and (12) becomes:

$$GLRT \iff \|\vec{\Sigma}\|^2 + \|\vec{\Delta}\|^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T, \hat{r} \approx \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\|\vec{\Sigma}\|^2} \quad (13)$$

A large number of Monte-Carlo simulations have shown [9] that solution (13) offers better performances than solution (12) over the complete main lobe of channel Σ : same P_D but lower RMSE (see figure 2 for an example). Solution (13) is therefore a near-optimal solution of the CHTP for which an analytical formulation of the performances has been derived. We shall designate hereinafter the various solutions (8-9) (11) (12) and (13) of the CHTP as "exact glrt", "mosca sum", "power glrt", "mosca power", respectively.

4. STATISTICAL PREDICTION

Assessing the statistical performances of the CHTP requires a joint analysis of the performance of the detector (GLRT) and the MLEs of the unknown parameters. It is indeed the expressions of the unknown parameters estimators which determine the form of the

GLRT, which in turns selects (conditions) the observations participating in the estimation. Thus, in strict logic, studying the performances (mean, variance) of the MLEs should make use of conditional expectation, as the estimation is conditioned by the detection test. This aspect is seldom covered in the open literature, including in reference works [8] (and others) where detection performance and estimation performance are covered as separable problems. The main reason is probably the fact that the formulation and assessment complexity increases significantly in the general case. Further, this approximation is fully justified when the detection probability is close to 1, i.e. for SNRs high "enough" – per the detection test. The problem of estimating the angle of arrival of a monopulse antenna is therefore of special interest for the theory of the CHTP as it is a true practical problem which has an analytical solution.

Characterization of solution "mosca sum" has been covered in [4]:

$$D = \left\{ \vec{V} \mid \|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T \right\}$$

$$P_{FA} = e^{-\frac{T}{\sigma_n^2}} e_{I-1} \left(\frac{T}{\sigma_n^2} \right), \quad P_D = e^{-\frac{T}{C_{11}}} e_{I-1} \left(\frac{T}{C_{11}} \right)$$

$$E(\hat{r} \mid D) = \gamma, \quad Var(\text{Re}\{\hat{r}\}) = \frac{\sigma^2}{2P_D} \int_{t \geq T} \frac{f_{\chi_2^I}(t, 0, \mathbf{C}_{11})}{t} dt$$

where $\gamma = \frac{C_{12}^H}{C_{11}}$, $\sigma^2 = \frac{\det(\mathbf{C})}{C_{11}}$. In the case of solution "mosca power":

$$D = \left\{ \vec{V} \mid \|\vec{\Sigma}\|^2 + \|\vec{\Delta}\|^2 \geq T \right\}$$

$$P_{FA} = e^{-\frac{T}{\sigma_n^2}} e_{2I-1} \left(\frac{T}{\sigma_n^2} \right)$$

$$P_D = \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_2^I}(x, |\gamma|^2 t, \sigma^2) f_{\chi_2^I}(t, 0, \mathbf{C}_{11}) dx dt$$

$E(\text{Re}\{\hat{r}\} \mid D)$ and $Var(\text{Re}\{\hat{r}\} \mid D)$ are computed from $E(\hat{r} \mid D)$, $E(|\hat{r}|^2 \mid D)$, $E(\hat{r}^2 \mid D)$ using the following identities:

$$\text{Re}\{\hat{r}\}^2 = \frac{1}{2} [|\hat{r}|^2 + \text{Re}\{\hat{r}^2\}]$$

$$Var(\text{Re}\{\hat{r}\}) = E(\text{Re}\{\hat{r}\}^2 \mid D) - \text{Re}\{E(\hat{r} \mid D)\}^2$$

which enables to assess also statistical prediction of $\text{Im}\{\hat{r}\}$ (see [4](Sec. V), [5](Sec. V) and [3] for applications):

$$E(\hat{r} \mid D) = \frac{\gamma}{P_D} \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_2^{I+1}}(x, |\gamma|^2 t, \sigma^2) f_{\chi_2^I}(t, 0, \mathbf{C}_{11}) dx dt$$

$$E(\hat{r}^2 \mid D) = \frac{\gamma^2}{P_D} \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_2^{I+2}}(x, |\gamma|^2 t, \sigma^2) f_{\chi_2^I}(t, 0, \mathbf{C}_{11}) dx dt$$

$$E(|\hat{r}|^2 \mid D) = \frac{\sigma^2}{P_D} \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_2^{I+1}}(x, |\gamma|^2 t, \sigma^2) \frac{f_{\chi_2^I}(t, 0, \mathbf{C}_{11})}{t} dx dt$$

$$+ \frac{|\gamma|^2}{P_D} \iint_{x+t \geq T} f_{\chi_2^{I+2}}(x, |\gamma|^2 t, \sigma^2) f_{\chi_2^I}(t, 0, \mathbf{C}_{11}) dx dt$$

The above expressions have been derived in the general case of a complex correlation matrix between Σ and Δ . Therefore they can

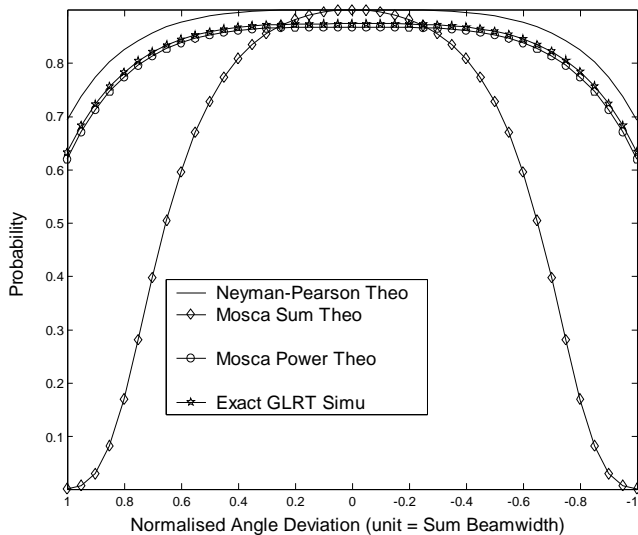


Fig. 1. Probability of Detection, $P_{FA} = 10^{-4}$

take into account any mixture of Raleigh targets, jammers and correlated thermal noise. Additionally there are simple to compute [9]. When $I \geq 2$, they can all be reduced to the simple integral on domain $[0, T]$ of a bounded function and assessed using numerical integration. The only difficulty arises when $I = 1$ for computing $E(|\hat{\tau}|^2 | D)$ which requires the evaluation of an integral on domain $[0, T]$ of a unbounded function.

5. PERFORMANCE COMPARISON

As an example of performance comparison, we consider the case where 2 independent observations are available ($I = 2$). The probability of false alarm is $P_{FA} = 10^{-4}$. The Signal to Noise Ratio (SNR) is adapt to obtain $P_D = 0.9$ when signal source is on boresight and detected on Σ channel only. The monopulse antenna model corresponds to a rectangular surface sum antenna (1° beamwidth) with a plane surface uniform current distribution associated with an appropriate difference beam. Figure (1) and (2) depicts respectively the variation of P_D and RMSE within Σ channel main lobe, according to (detector, estimator) solution pair of the CHTP. In figures (1) and (2) "Theo" and "Simu" stands for Theoretical (assessed using analytical formula) and Simulation (assessed using Monte-Carlo runs). All P_{FA} measurements has been performed on 10^9 independent trials. All P_D and RMSE measurements has been performed on 10^6 independent trials. The two figures clearly illustrates the superiority of "mosca power" solution over "mosca sum" solution (almost equal RMSE and improved P_D close to the optimum), and additionally demonstrate the perfect adequacy between simulations and theoretical formulas derived for "mosca power" solution.

5.1. Conclusion

This paper emphasizes the existence of a better detection test associated with the common monopulse ratio estimator and sets forth an analytical characterization of the new (detector, estimator) solution pair. In addition to the expected impact on the future imple-

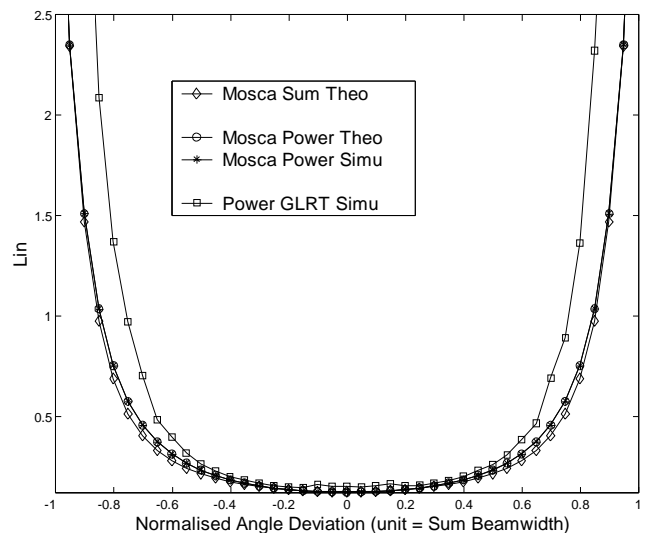


Fig. 2. Conditional RMSE, $P_{FA} = 10^{-4}$

mentation of monopulse antennas, it depicts the often unacknowledged or underestimated interaction between the components of the (detector, estimator) solution pairs of the CHTP. This is particularly true in real systems (radar, telecoms, sonar) where the (contractual) operating area of interest seldom corresponds to $P_D \approx 1$, which is the only case where detection and estimation are disconnected problems.

6. REFERENCES

- [1] S. M. Sherman, "Monopulse Principles and Techniques", Dedham, MA: Artech House, 1984
- [2] E. Mosca, "Angle estimation in amplitude comparison monopulse", IEEE Trans. AES, vol. AES-17, pp. 205-212, 1969
- [3] I. Kanter, "Multiple Gaussian targets, the track-on_jam problem", IEEE Trans. AES, vol. AES-13, pp 620-623, 1977
- [4] B-E. Tullsson, "Monopulse tracking of Rayleigh targets, a simple approach", IEEE Trans. AES, vol. AES-27, pp 520-531, 1991
- [5] A-D. Seifer, "Monopulse-radar angle tracking in noise or noise jamming", IEEE Trans. AES, vol. AES-28, pp 622-637, 1992
- [6] W.D. Blair, M. Brandt-Pierce, "Statistical description of monopulse parameters for Tracking Rayleigh targets", IEEE Trans. AES, vol. AES-34, pp 597-610, 1998
- [7] P-K. Willet, W.D. Blair, Y Bar-Shalom, "Correlation Between Horizontal and Vertical Monopulse Measurements", IEEE Trans. AES, vol. AES-39, pp 533-548, 2003
- [8] H-L. Van Trees, "Detection, estimation and modulation theory, Part 1", New York, Wiley, 1968
- [9] E. Chaumette, "Optimal Detection theory applied to monopulse antennas: new theoretical results", Memo TNF/BRS/EPR - 248/03, Thales Naval France, Bagnaux, France, 2003

OPTIMAL MONOPULSE TRACKING OF SIGNAL SOURCE OF UNKNOWN AMPLITUDE

(1)(2) *Eric Chaumette and (2) Pascal Larzabal*

(1) Thales Naval France, Bagneux, France.

(2) SATIE/CNRS, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Cachan, France

ABSTRACT

Estimation of the direction of arrival of a signal source by means of a monopulse antenna is one of the oldest and most widely used high resolution techniques [1]. Although the statistical performance of this estimation technique has been extensively investigated for decades, recent work [2] based on an analysis of the problem from the point of view of optimal detection applied to a two-sensors system, has shown that the common solution (detector/estimator) restricts the accessible performance. Indeed, changing the detector is necessary to optimize the overall performance. First derived in the particular case of Rayleigh-type signal source, this approach can be extended to the case of a signal source of unknown amplitude (including the non fluctuating case). The present paper establishes analytical performance of both new and common solutions in that case.

1. NOTATION

\vec{X}, \vec{x} denote vectors (complex or real)

$\mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{m}$ denote matrices (complex or real)

$\Sigma_i, \beta_i, g_\Sigma, n_{\Sigma_i}, r, \dots$ denote scalar values (complex or real)

$P()$ denotes a probability

$f()$ denotes a probability density function (pdf)

$F()$ denotes a cumulative distribution function (cdf)

\hat{r} denotes an estimator of r

$\mathbf{C}_{\vec{X}}$ denotes the covariance matrix of random vector \vec{X}

\mathbf{Id}_I denotes Identity matrix with dimensions (I,I)

$$f_{\chi^2_I}(t, \mu^2, \sigma^2) = \frac{e^{-\frac{(t+\mu^2)}{\sigma^2}}}{\sigma^2} I_{I-1} \left(\frac{2\mu\sqrt{t}}{\sigma^2} \right) \left(\frac{\sqrt{t}}{\mu} \right)^{(I-1)}$$

$$e_N(T) = \sum_{n=0}^N \frac{T^n}{n!}, \quad I_I(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{t \cos(\theta)} \cos(I\theta) d\theta$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

2. INTRODUCTION

A monopulse antenna (radar or telecom) determines the angular location of a signal source (radar target or telecom transmitter) by comparing the returns from difference (Δ) and sum (Σ) antenna pattern [1][3]. It is a particular solution of the more general problem of finding the direction of arrival (DOA) of a signal source. As mentioned lately in [2], the usual approach related to this particular solution [3][4][5](ref.[3],[12],[20],[27]) limits the contribution of the difference channel to the estimation part of the problem, and therefore reveals an "historical" separate analysis of detection and estimation. A improved (detector, estimator) couple has been derived in [2] in the case of Rayleigh-type signal source by applying optimal detection theory to the monopulse antenna. Nevertheless, if the Rayleigh case is of

fundamental interest for some applications (mainly radar applications), most of signal sources (telecom for example) have different amplitude fluctuation laws. If it seems unrealistic to try to solve the problem of optimal detection/estimation using the statistics averaged over all possible observations, for every amplitude fluctuation law of interest, a suboptimal but very general approach consists in solving the problem for each observation, regarding the amplitude fluctuation law as unknown (the most likely hypothesis when measuring an unknown actual signal source). Additionally, this characterization may also be useful to support tracking performance analysis where monopulse measurement is a preliminary step of nonstationary process as the Kalman Filter.

In order to allow straightforward comparison with results derived in [2], the present paper keeps the same analysis breakdown of the optimal detection problem [6], including equations numbering. Thus, we first formulate the optimal detector – the Neyman-Pearson criterion – applied to the monopulse antenna, and its associated composite hypotheses testing problem, as certain parameters are unknown. To solve the composite hypotheses testing problem, we apply the GLRT method and establish the analytical expressions of the detector and associated estimators, in particular that of the monopulse ratio. Lastly, we develop two approximations of the (detector, monopulse ratio estimator) pair. The first is based on the common "historical" approach [4][7]. The second, which we characterized analytically, proposes an appreciable improvement of the performances of the composite hypotheses testing problem. While retaining a comparable estimation Root Mean Square Error (RMSE), it helps achieve better on average detection performance characteristics, an improvement which is illustrated by an example.

3. PROBLEM FORMULATION

A common model for the receiver signal vector is:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \Sigma(t) \\ \Delta(t) \end{pmatrix} = \alpha(t) \vec{g}(\theta_0) + \vec{n}(t) \quad (1)$$

where $\vec{g}(\theta) = (g_\Sigma(\theta), g_\Delta(\theta))^T$ is the array response vector (steering vector). It represents the array complex response to a narrowband point source situated at an angle θ . The complex envelope of the source is denoted by $\alpha(t)$, and $\vec{n}(t)$ is a 2x1 additive noise vector. Consider the following detection problem:

$$\begin{aligned} H_0 : \vec{v}(t) &= \vec{n}(t) \\ H_1 : \vec{v}(t) &= \alpha(t) \vec{g}(\theta_0) + \vec{n}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Based on an observation consisting of I independent array snapshots $\vec{v}(t_1), \dots, \vec{v}(t_I)$, we want to decide whether to accept the null hypothesis (noise only) H_0 , or to accept the alternate hypothesis (signal plus noise) H_1 .

3.1 Optimal Detector: LRT

If the pdf of the measurement is known under both hypotheses, the optimal detector - in the Neyman-Pearson sense [6] -

is the Likelihood Ratio Test (LRT). In the problem at hand, the additive noise $\vec{n}(t)$ is a circular, zero mean, white (both temporally and spatially), complex Gaussian random vector process with variance σ_n^2 . The signal $\alpha(t)$ represents the complex envelope of the source (including power budget equation, signal processing gains) at time t and its a priori fluctuation law is unknown. The signal source does not alter its relative position with respect to the array during the I snapshots (static situation: θ_0 is constant). Denote by $\vec{V} = (\vec{\Sigma}^T, \vec{\Delta}^T)^T$, where $\vec{\Sigma} = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_I)^T$ and $\vec{\Delta} = (\Delta_1, \dots, \Delta_I)^T$, the $2I$ dimensional observation vector related to the I snapshots, then:

$$f(\vec{V} | H_0) = \frac{e^{-\frac{1}{\sigma_n^2} \text{Tr}(\hat{C}_{H_0})}}{(\pi^2 \sigma_n^2)^I}$$

$$f(\vec{V} | H_1) = \frac{e^{-\frac{1}{\sigma_n^2} \text{Tr}(\hat{C}_{H_1})}}{(\pi^2 \sigma_n^2)^I}$$

$$\hat{C}_{H_0} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \vec{v}(t_i) \vec{v}(t_i)^H$$

$$\hat{C}_{H_1} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I [\vec{v}(t_i) - \alpha(t_i) \vec{g}(\theta_0)] [\vec{v}(t_i) - \alpha(t_i) \vec{g}(\theta_0)]^H$$

Under these assumptions the LRT takes the form of:

$$LRT = \frac{f(\vec{V} | H_1)}{f(\vec{V} | H_0)} = e^{-\frac{1}{\sigma_n^2} \text{Tr}(\hat{C}_{H_1} - \hat{C}_{H_0})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T' \quad (3)$$

and can be reduced to:

$$\frac{\text{Re} \left\{ \vec{g}(\theta_0)^H \left[\sum_{i=1}^I \alpha(t_i)^H \vec{v}(t_i) \right] \right\}}{\sqrt{\frac{\sigma_n^2}{2} \left[\|\vec{g}(\theta_0)\|^2 \left(\sum_{i=1}^I |\alpha(t_i)|^2 \right) \right]}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T$$

Denote by D the event of a threshold detection. Then, Probability of False Alarm - $P_{FA} = P(D | H_0)$ - and Probability of Detection - $P_D = P(D | H_1)$ - are given by (real Gaussian law):

$$P_{FA} = \frac{1 - \text{erf}(T)}{2} \quad (4a)$$

$$P_D = \frac{1 - \text{erf} \left(T - \sqrt{2I\sigma_n^2} \|\vec{g}(\theta_0)\|^2 \right)}{2} \quad (4b)$$

$$\text{where: } \sigma_n^2 = \frac{\vec{\alpha}^H \vec{\alpha}}{I} = \frac{1}{I} \left(\sum_{i=1}^I |\alpha_i|^2 \right)$$

3.2 GLRT

For cases in which some of parameters are unknown, the detection problem in (2) becomes a composite hypotheses testing problem (CHTP) [6]. Although not necessarily optimal, the GLRT (Generalized LRT [6]) is widely used in such problem. Let's denote by $\widehat{\varphi}_j$ the unknown parameters vector under hypothesis j , the GLRT for deciding whether to accept H_0 or to accept H_1 is given by:

$$GLRT = \frac{\max_{\widehat{\varphi}_1} f(\vec{V} | \widehat{\varphi}_1)}{\max_{\widehat{\varphi}_0} f(\vec{V} | \widehat{\varphi}_0)} = \frac{f(\vec{V} | \widehat{\varphi}_1)}{f(\vec{V} | \widehat{\varphi}_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T \quad (5)$$

where $\widehat{\varphi}_j$ stands for the Maximum Likelihood Estimates (MLE) [6] of the unknown parameters under hypothesis j . In the problem at hand, the observation equation (1) may be rewritten according to an equivalent form:

$$\vec{v}(t_i) = \beta(t_i) \vec{x} + \vec{n}(t_i) \quad (6)$$

where: $\beta(t_i) = \alpha(t_i) g_{\Sigma}(\theta_0)$, $\vec{x} = (1, r(\theta_0))^T$, $r(\theta) = \frac{g_{\Delta}(\theta)}{g_{\Sigma}(\theta)}$

This is the "Monopulse Ratio" reformulation of the observation equation. Under this formulation, the possible unknown parameters are $\{\sigma_n^2, r, \vec{\beta}\}$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_I)^T$, and the final form of (5) depends on whether the noise power (σ_n^2) is an unknown parameter (7) or not (8) [8]:

$$GLRT \iff \frac{\text{Tr}(\hat{\mathbf{R}}) + \sqrt{\text{Tr}(\hat{\mathbf{R}})^2 - 4|\hat{\mathbf{R}}|}}{2\hat{\sigma}_n^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T \quad (7)$$

$$GLRT \iff \frac{\text{Tr}(\hat{\mathbf{R}}) + \sqrt{\text{Tr}(\hat{\mathbf{R}})^2 - 4|\hat{\mathbf{R}}|}}{2\sigma_n^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T \quad (8)$$

where: $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \vec{v}(t_i) \vec{v}(t_i)^H$

In both cases:

$$\hat{r} = \frac{\text{Tr}(\hat{\mathbf{R}}) + \sqrt{\text{Tr}(\hat{\mathbf{R}})^2 - 4|\hat{\mathbf{R}}|} - 2\|\vec{\Sigma}\|^2}{2\vec{\Delta}^H \vec{\Sigma}} \quad (9)$$

Form (7) of GLRT is a constant false alarm rate (CFAR) detector which assesses the noise power (σ_n^2) under H_0 and H_1 [8] using the smallest eigenvalue of $\hat{\mathbf{R}}$:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{\text{Tr}(\hat{\mathbf{R}}) - \sqrt{\text{Tr}(\hat{\mathbf{R}})^2 - 4|\hat{\mathbf{R}}|}}{2}$$

As most of CFAR process, its performance (P_D vs. P_{FA}) is poor for small number of snapshots. This is the reason why σ_n^2 estimation is always performed at a different stage of the processing, generally at the output of the Matched Filter, where a large amount of samples is available. Therefore, hereinafter, it is assumed that σ_n^2 can be estimated precisely enough to be a known parameter of observation model (6) leading to form (8) of GLRT. It is worth noticing that in case of Rayleigh signal source (8) and (9) have the same form [2].

For completeness, let's mention that in the particular case where $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_I$ (non fluctuating case), expressions (7), (8), (9) and $\hat{\sigma}_n^2$ are different [8]. From an operational point of view, it is preferable not to use expressions derived in that case because of their specificity and the dubious validity of the hypothesis of non fluctuating signal source in most cases.

3.3 Practical GLRT approximations

Except for case $I = 1$, where:

$$GLRT \iff |\Delta|^2 + |\Sigma|^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T, \hat{r} = \frac{\Delta}{\Sigma} \quad (10)$$

the exact solution of the CHTP, forms (8) of the GLRT and (9) of the MLE of r , is unpractical for establishing analytical results. Although the computing power of today's computers

allows a precise study of its performance through a Monte-Carlo type simulation with a large number of draws, it is always interesting to be able to establish analytical results based on approximated solutions which may be used as calibration tools for this type of simulation (number of draws necessary for a representative measurement).

The usual "historical" approximation consists in restricting the use of the difference channel Δ to computation of MLE of r only, where detection is achieved using the sum channel Σ only. Under this assumption, the samples which pass the detection test and participate in the estimation process mostly belong to the sum beam width (see figure 1) and verify $\|\vec{\Sigma}\|^2 > \|\vec{\Delta}\|^2$. In this case [2]:

$$GLRT \iff \|\vec{\Sigma}\|^2 \underset{H_0}{\underset{H_1}{\gtrless}} T, \hat{r} \approx \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\|\vec{\Sigma}\|^2} \quad (11)$$

This approximated form of r was introduced by Mosca [3] as the solution of "the problem of estimation of angle of arrival in amplitude comparison monopulse radars", but with no reference to the associated detection test (see introduction). A more global approach is the theoretical approach disclosed above. It leads to a symmetrical form (relative to $\vec{\Delta}$ and $\vec{\Sigma}$) of the GLRT (8) and therefore suggests an approximation based on a symmetrical criterion, such as the correlation of the 2 channels under H_1 with $\|\vec{\beta}\|$ large. In this case $\frac{|\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}|^2}{\|\vec{\Sigma}\|^2 \|\vec{\Delta}\|^2} \approx 1$ and [2]:

$$GLRT \iff Tr(\hat{\mathbf{R}}) \underset{H_0}{\underset{H_1}{\gtrless}} T, \hat{r} \approx \frac{\|\vec{\Delta}\|^4 + |\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}|^2}{\vec{\Delta}^H \vec{\Sigma} (\|\vec{\Sigma}\|^2 + \|\vec{\Delta}\|^2)} \quad (12)$$

Under this form, the GLRT becomes a simple quadratic detector based on the use of the energy available on the 2 reception channels. The detection performance (P_D vs. P_{FA}) of this type of detector are well known (21 order non central Chi-Square laws). However, the form of \hat{r} obtained is not a great deal simpler than (9). It is simplified when $\|\vec{\Sigma}\|^2 > \|\vec{\Delta}\|^2$. We then have again the form (11) of \hat{r} and (12) becomes:

$$GLRT \iff \|\vec{\Sigma}\|^2 + \|\vec{\Delta}\|^2 \underset{H_0}{\underset{H_1}{\gtrless}} T, \hat{r} \approx \frac{\vec{\Sigma}^H \vec{\Delta}}{\|\vec{\Sigma}\|^2} \quad (13)$$

A large number of Monte-Carlo simulations have shown [8] that solution (13) offers better performances than solution (12) over the complete main lobe of channel Σ : same P_D but lower RMSE (see figure 2 for an example). Solution (13) is therefore a better solution of the CHTP for which an analytical formulation of the performances has been derived. We shall designate hereinafter the various solutions (8-9) (11) (12) and (13) of the CHTP as "exact glrt", "mosca sum", "power glrt", "mosca power", respectively.

4. STATISTICAL PREDICTION

Assessing the statistical performances of the CHTP requires a joint analysis of the performance of the detector (GLRT) and the MLEs of the unknown parameters. It is indeed the expressions of the unknown parameters estimators which determine the form of the GLRT, which in turns selects (conditions) the observations participating in the estimation.

Thus, in strict logic, studying the performances (mean, variance) of the MLEs should make use of conditional expectation, as the estimation is conditioned by the detection test. This aspect is seldom covered in the open literature, including reference works [6] (and others) where detection performance and estimation performance are covered as separable problems. The main reason is probably the fact that the formulation and assessment complexity increases significantly in the general case. Further, this approximation is fully justified when the detection probability is close to 1, i.e. for SNRs high "enough" – per the detection test. $E(\text{Re}\{\hat{r}\} | D)$ and $\text{Var}(\text{Re}\{\hat{r}\} | D)$ can be computed from $E(\hat{r} | D)$, $E(|\hat{r}|^2 | D)$, $E(\hat{r}^2 | D)$ using the following identities:

$$\begin{aligned} \text{Re}\{\hat{r}\}^2 &= \frac{1}{2} [\|\hat{r}\|^2 + \text{Re}\{\hat{r}^2\}] \\ \text{Var}(\text{Re}\{\hat{r}\}) &= E(\text{Re}\{\hat{r}^2\} | D) - \text{Re}\{E(\hat{r} | D)\}^2 \end{aligned}$$

which also enables to assess statistical prediction of $\text{Im}\{\hat{r}\}$ (see [5](ref.[12],[27]) for applications). For sake of simplicity in formulas, we assume that the noise has been normalized ($\sigma_n^2 = 1$). Characterization of solution "mosca sum" in the general case of colored noise has been covered in [4] ($I = 1$) and [7] ($I \geq 1$). In the case of white noise, it comes:

$$\begin{aligned} D &= \left\{ \vec{V} | \|\vec{\Sigma}\|^2 \geq T \right\} \\ P_{FA} &= e^{-T} e_{I-1}(T), \quad P_D = \int_{t \geq T} f_{x_2^I}(t, I\sigma_\beta^2, 1) dt \\ E(\hat{r} | D) &= \mu \int_{t \geq T} \frac{f_{x_2^{I+1}}(t, I\sigma_\beta^2, 1)}{P_D t} dt \\ E(\hat{r}^2 | D) &= \mu^2 \int_{t \geq T} \frac{f_{x_2^{I+2}}(t, I\sigma_\beta^2, 1)}{P_D t^2} dt \\ E(|\hat{r}|^2 | D) &= \int_{t \geq T} \frac{f_{x_2^I}(t, I\sigma_\beta^2, 1)}{P_D t} dt \\ &\quad + \lambda \int_{t \geq T} \frac{f_{x_2^{I+1}}(t, I\sigma_\beta^2, 1)}{P_D t^2} dt \\ &\quad + |\mu|^2 \int_{t \geq T} \frac{f_{x_2^{I+2}}(t, I\sigma_\beta^2, 1)}{P_D t^2} dt \end{aligned}$$

where: $\mu = rI\sigma_\beta^2$, $\lambda = |r|^2 I\sigma_\beta^2$, $\sigma_\beta^2 = \frac{1}{I} \left(\sum_{i=1}^I |\beta_i|^2 \right)$.

In the case of solution "mosca power" [8]:

$$\begin{aligned} D &= \left\{ \vec{V} | \|\vec{\Sigma}\|^2 + \|\vec{\Delta}\|^2 \geq T \right\} \\ P_{FA} &= e^{-T} e_{2I-1}(T) \\ P_D &= \iint_{x+t \geq T} f_{x_2^I}(x, I\sigma_\beta^2 |r|^2, 1) f_{x_2^I}(t, I\sigma_\beta^2, 1) dx dt \\ E(\hat{r} | D) &= \mu \iint_{x+t \geq T} \frac{f_{x_2^{I+1}}(x, I\sigma_\beta^2 |r|^2, 1) f_{x_2^{I+1}}(t, I\sigma_\beta^2, 1)}{P_D t} dx dt \\ E(\hat{r}^2 | D) &= \mu^2 \iint_{x+t \geq T} \frac{f_{x_2^{I+2}}(x, I\sigma_\beta^2 |r|^2, 1) f_{x_2^{I+2}}(t, I\sigma_\beta^2, 1)}{P_D t^2} dx dt \end{aligned}$$

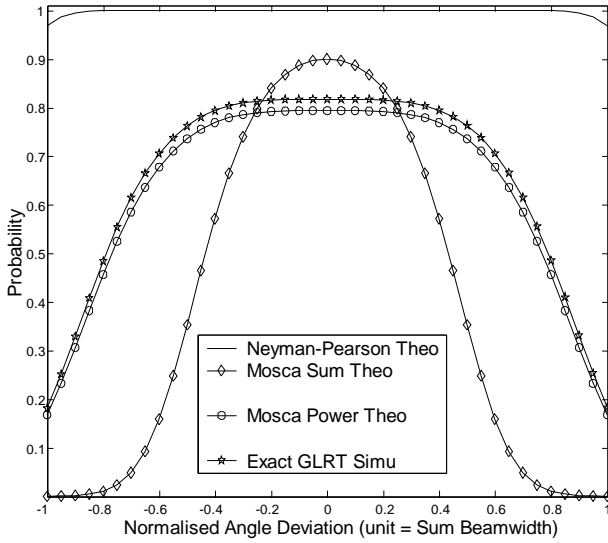


Figure 1: Probability of Detection, $P_{FA} = 10^{-4}$

$$\begin{aligned}
 E(|\hat{r}|^2 | D) &= \iint_{x+t \geq T} f_{x_2^{I+1}}(x, I\sigma_\beta^2 | r|^2, 1) \frac{f_{x_2^I}(t, I\sigma_\beta^2, 1)}{P_D t} dx dt \\
 &+ \lambda \iint_{x+t \geq T} f_{x_2^{I+2}}(x, I\sigma_\beta^2 | r|^2, 1) \frac{f_{x_2^{I+1}}(t, I\sigma_\beta^2, 1)}{P_D t^2} dx dt \\
 &+ |\mu|^2 \iint_{x+t \geq T} f_{x_2^{I+2}}(x, I\sigma_\beta^2 | r|^2, 1) \frac{f_{x_2^{I+2}}(t, I\sigma_\beta^2, 1)}{P_D t^2} dx dt
 \end{aligned}$$

The above expressions ("mosca power") are simple to compute [8]. When $I \geq 2$, they can all be reduced to simple convergent integrals of bounded functions and assessed using numerical integration. The only difficulty arises when $I = 1$ for computing $E(|\hat{r}|^2 | D)$ which requires the evaluation of a simple integral on domain $[0, T]$ of a unbounded function.

5. PERFORMANCE COMPARISON

As an example of performance comparison, we consider the multifunction Radar case. Due to time budget constraint, the maximum number of observations available per target is generally 2 ($I = 2$). A likely probability of false alarm is $P_{FA} = 10^{-4}$. The Signal to Noise Ratio (SNR) is adapted to obtain $P_D = 0.9$ when signal source is on bore-sight and detected on Σ channel only. The monopulse antenna model corresponds to a rectangular surface sum antenna (1° beamwidth) with a plane surface uniform current distribution associated with an appropriate difference beam. Figure (1) and (2) depicts respectively the variation of P_D and RMSE within Σ channel main lobe, according to (detector, estimator) solution pair of the CHTP. In figures (1) and (2) "Theo" and "Simu" stands for Theoretical (assessed using analytical formula) and Simulation (assessed using Monte-Carlo runs). All P_{FA} measurements has been performed on 10^9 independent trials. All P_D and RMSE measurements has been performed on 10^6 independent trials. The two figures illustrates the on average superiority of "mosca power" solution over "mosca sum" solution (almost equal RMSE and improved on average P_D), and additionally

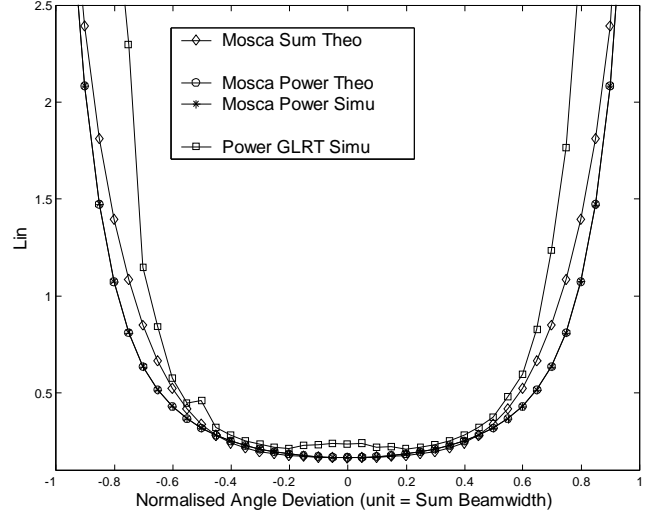


Figure 2: Conditional RMSE, $P_{FA} = 10^{-4}$

demonstrate the perfect adequacy between simulations and theoretical formulas derived for "mosca power" solution.

6. CONCLUSION

This paper, generalizing results derived in [2], emphasizes the existence of a better (detector, estimator) solution pair of the monopulse antenna CHTP, whatever the amplitude fluctuation law, and sets forth its analytical characterization. In addition to the expected impact on the future implementation of monopulse antennas, it contributes to illustrate the often unacknowledged or underestimated interaction between the components of the (detector, estimator) solution pairs of the CHTP. This is particularly true in real systems (radar, telecoms, sonar) where the (contractual) operating area of interest seldom corresponds to $P_D \approx 1$, which is the only case where detection and estimation are disconnected problems.

REFERENCES

- [1] S. M. Sherman, "Monopulse Principles and Techniques", Dedham, MA: Artech House, 1984
- [2] E. Chaumette and P. Larzabal, "Optimal Detection theory applied to monopulse antennas", ICASSP 2004
- [3] E. Mosca, "Angle estimation in amplitude comparison monopulse", IEEE Trans. AES, vol. AES-17, pp. 205-212, 1969
- [4] A-D. Seifer, "Monopulse-radar angle tracking in noise or noise jamming", IEEE Trans. AES, vol. AES-28, pp 622-637, 1992
- [5] P-K. Willet, W.D. Blair, Y Bar-Shalom, "Correlation Between Horizontal and Vertical Monopulse Measurements", IEEE Trans. AES, vol. AES-39, pp 533-548, 2003
- [6] H-L. Van Trees, "Detection, estimation and modulation theory, Part 1", New York, Wiley, 1968
- [7] E. Chaumette and P. Larzabal, "Monopulse Tracking of Signal Source of Unknown Amplitude using Multiple Observations", submitted to IEEE Trans. AES, sept 2003
- [8] E. Chaumette, "Optimal Detection theory applied to monopulse antennas: the unknow amplitude case", Memo TNF/BRS/EPR - 03/04, Thales Naval France, Bagneux, France, 2004

Modern Monopulse Tracking

Eric Chaumette¹, Pierre Saulais¹, Nathalie Colin¹

1: Thales Naval France, 7-9 av. des Mathurins, 92 Bagneux, France

Abstract : Estimation of the direction of arrival (DOA) of a signal source by means of a monopulse antenna is one of the oldest and most widely used high resolution techniques [1]. However, an analysis of the problem from the point of view of optimal detection applied to a two-sensors system allows to design a new (detector / angle estimator) solution improving the overall accessible performance. Performance comparison with standard monopulse (detector / angle estimator) solution is illustrated by Monte-Carlo runs.

Keywords: monopulse antenna, optimal detection theory

1 Notation

\bar{x} denotes a – column – vector (complex or real)

$P(D)$ denotes a probability (of event D)

$P(A | D)$ denotes a conditional probability

$f(x)$ denotes a probability density function (pdf)

$f(x | D)$ denotes a conditional pdf

\hat{r} denotes an estimator of r

$E(x)$ denotes the expectation of random variable x

$\text{Var}(x)$ denotes the variance of random variable x

2 Introduction to standard monopulse DOA estimation

A monopulse antenna (radar or telecom) determines the angular location of a signal source (radar target or telecom transmitter) by comparing the returns from difference (Δ) and sum (Σ) antenna pattern [1]. Indeed, a common model for the received signal vector at time t - after Hilbert Filtering – is:

$$\bar{v}(t) = \begin{pmatrix} \Sigma(t) \\ \Delta(t) \end{pmatrix} = \alpha(t) \begin{pmatrix} g_{\Sigma} \\ g_{\Delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{\Sigma}(t) \\ n_{\Delta}(t) \end{pmatrix} = \beta(t) \bar{x} + \bar{n}(t) \quad (1)$$

where:

- $\beta(t) = \alpha(t) g_{\Sigma}$, $\bar{x} = \left(1, r_x = \frac{g_{\Delta}}{g_{\Sigma}} \right)^T$,
- $\bar{n}(t) = (n_{\Sigma}(t), n_{\Delta}(t))^T$ represents an additive receiver noise. In the problem at hand, the receiver noise is a circular zero mean, white (both spatially and temporally) complex Gaussian random vector process with covariance matrix $C_{\bar{n}} = E[\bar{n}(t)\bar{n}(t)^H] = \sigma_n^2 \text{Id}$,
- g_{Σ} and g_{Δ} represents the one way real antenna voltage pattern for each channel, at angle θ - off-boresight angle - where a narrow band point source is situated,

- $\alpha(t)$ represents the complex envelope of the source (including power budget equation, signal processing gains),
- $r_x = \frac{g_{\Delta}}{g_{\Sigma}}$ is called the monopulse ratio.

The angular information θ is contained in the monopulse ratio curve $r_x(\theta) = \frac{g_{\Delta}(\theta)}{g_{\Sigma}(\theta)}$. Between the first sum pattern nulls, this curve/relation can be inverted, leading to the deviation angle function $\theta = \text{daf}(r_x)$, as shown on Figure 1.

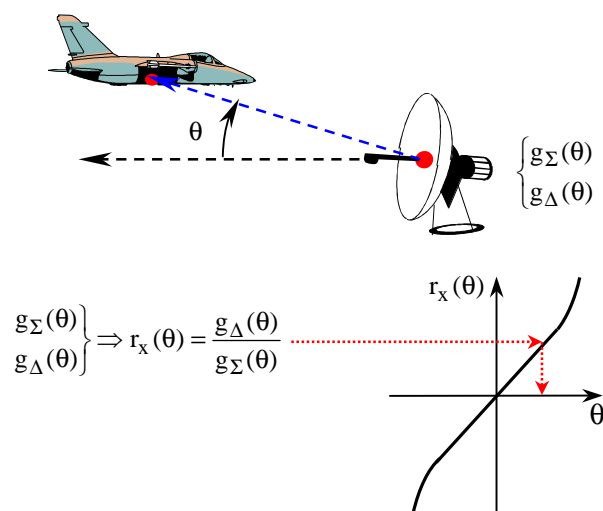


Figure 1: Monopulse Measurement Principle

If we focus on the static situation in which the signal source does not alter its relative position (angle θ) with respect to the monopulse antenna during I independent observations at times (t_1, t_2, \dots, t_I) , Mosca [2] - in the sixties - derived the exact maximum likelihood estimator (MLE) of the monopulse ratio and proposed the following more practical approximated form – for point source close to boresight –:

$$\hat{r}_x = \text{Re}\{\hat{r}\} \approx \text{Re}\left\{ \frac{\bar{\Sigma}^H \bar{\Delta}}{\bar{\Sigma}^H \bar{\Sigma}} \right\} \quad (2)$$

where $\bar{\Sigma} = [\Sigma(t_1), \dots, \Sigma(t_I)]^T$, $\bar{\Delta} = [\Delta(t_1), \dots, \Delta(t_I)]^T$.

If a linear relation $r_x = k\theta$ is assumed – which is true at the vicinity of boresight, as shown on Figure 1 (see [1] and [12] for a more detailed analysis) –, then statistical

prediction of $\hat{\theta} = \frac{\hat{r}_x}{k}$ can be easily derived from statistical prediction of \hat{r}_x . It's the reason why, in open literature:

- the deviation angle function is generally reduced to a linear function characterised by a Monopulse Slope,
- most of statistical performance analysis are related to \hat{r}_x (monopulse ratio statistical prediction).

Lastly, a monopulse tracking system is generally completed – after various analogue and/or digital processing dedicated to maximize the Signal-to-Noise Ratio (SNR) – by a detection step. On this subject, the open literature shows an “historical” separate analysis of detection and estimation. Although, as early as the sixties, monopulse ratio estimation was covered by theoretical work on the formulation of its MLE (2), then of its statistical performance [2][3][4], questioning on detection step fell somewhat into oblivion. Indeed, the contribution of the difference channel has always been limited to the estimation part of the problem, since it was originally introduced to overcome the Rayleigh resolution limit – the well known beamwidth at (-3dB) - inherent to a single sum antenna pattern. As a consequence, monopulse tracking systems has kept since the same detection scheme as surveillance systems: a threshold detection applied to the receiver sum-channel,

$$\bar{\Sigma}^H \bar{\Sigma} \geq T \quad (3)$$

As the monopulse measurement is performed only on detected samples, if we denote the event of a threshold detection by $D = \{\bar{\Sigma} / \bar{\Sigma}^H \bar{\Sigma} \geq T\}$, probability density function, mean and variance must be computed taking into account this observation selection criterion requesting use of conditional statistics: $f(\hat{r}_x | D)$, $E(\hat{r}_x | D)$, $\text{Var}(\hat{r}_x | D)$. First statistical predictions including the detection test appeared as late as the nineties [5][6] and have been completed lately [7]-[9].

Unfortunately, all these statistical predictions do not exactly provide the relevant information, which is the statistical predictions of DOA θ . Indeed as previously mentioned, actual angle inference characteristics (deviation angle function) are not linear functions but rather closed to $\theta = \frac{a r_x}{\sqrt{b^2 + r_x^2}}$ [12]. Therefore, exact

computations of $E(\hat{\theta} | D)$ and $\text{Var}(\hat{\theta} | D)$ request the knowledge of $f(\hat{r}_x | D)$, since for any function $h(\hat{\theta})$:

$$E(h(\hat{\theta}) | D) = E(h(\hat{\theta}(\hat{r}_x)) | D) = \int h(\hat{\theta}(\hat{r}_x)) f(\hat{r}_x | D) d\hat{r}_x \quad (4)$$

$f(\hat{r}_x | D)$ has only been derived so far for:

- mixture of unknown amplitude signals and Rayleigh type signals [4] and unconditional statistics ($T = 0$),
- Rayleigh type signal source [5] and conditional statistics.

3 Improved monopulse processing

3.1) Theoretical Background

As far as we know, the “historical” monopulse processing was never questioned until recent works [10][11] that have shown the interest of investigating monopulse processing from the point of view of optimal detection theory [13] applied to a two-sensors system. In the particular case of the monopulse measurement, the detection problem is to decide, based on I independent snapshots $\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_I)$, whether to accept the null hypothesis (noise only) H_0 , or to accept the alternative hypothesis (signal plus noise) H_1 when the observation model is described by (1):

$$H_0 : \bar{v}(t) = \bar{n}(t)$$

$$H_1 : \bar{v}(t) = \beta(t) \bar{x} + \bar{n}(t)$$

If the pdf of the measurement is known under both hypothesis, the optimal detector – in the Neyman-Pearson sense – is the Likelihood Ratio Test (LRT)

$$\frac{f[\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_I) | H_1]}{f[\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_I) | H_0]} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} T$$

that maximises the probability of Detection $P_D = P(D | H_1)$ for a given probability of False Alarm $P_{FA} = P(D | H_0)$, if D denotes the event of a threshold detection. Nevertheless, the LRT is not directly usable as some parameters are unknown (at least r_x). They must be replaced by estimators and the detection problem becomes a composite hypotheses testing problem (CHTP). Although not necessarily optimal, the GLRT method (Generalized LRT) is widely used in such problem. It consists in replacing the unknown parameters by their Maximum Likelihood Estimates (MLE). Application of the theory to the monopulse observation model has been detailed in the case of a point source with a Rayleigh [10] or unknown [11] amplitude fluctuation law. One of the meaningful results - under the hypothesis of a spatially and temporally white noise of power σ_n^2 - is the demonstration of the following common GLRT and monopulse ratio MLE expressions for both amplitude fluctuation laws:

$$\frac{\hat{\lambda}_{\max}^{H_1}}{\hat{\sigma}_n^2} \geq T \quad (5)$$

$$\hat{r} = \frac{\text{Tr}(\hat{R}) + \sqrt{\text{Tr}(\hat{R})^2 - 4|\hat{R}| - 2\|\bar{\Sigma}\|^2}}{2\bar{\Delta}^H \bar{\Sigma}} \quad (6)$$

- $\hat{R} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \bar{v}(t_i) \bar{v}(t_i)^H$,
- $\hat{\sigma}_n^2 = \hat{\lambda}_{\min}$ or $\hat{\sigma}_n^2 = \sigma_n^2$ depending on whether the noise power σ_n^2 is an unknown parameter or not,
- $\hat{\lambda}_{\max}$ and $\hat{\lambda}_{\min}$ are the 2 eigenvalues of \hat{R} .

Form (6) of \hat{r} is a generalization of Mosca result [2] for complex monopulse ratio (see [3] and [5] for applications involving the imaginary part). Form (5) of GLRT is a constant false alarm rate (CFAR) detector which assesses the noise power σ_n^2 using the smallest eigenvalue of \hat{R} . As most CFAR process, its performance (P_D vs. P_{FA}) is poor for small number of snapshots. This is the reason why σ_n^2 estimation is always performed at a different stage of the processing, generally at the output of the Range-Doppler Matched Filter, where a large amount of samples is available.

It is quite obvious that the exact solution of the CHTP - forms (5) of the GLRT and (6) of the MLE - seems unpractical for establishing analytical results. However, two approximations of the (detector, monopulse ratio estimator) pair can be derived from GLRT:

$$\frac{\|\bar{\Sigma}\|^2}{\hat{\sigma}_n^2} \geq T, \hat{r} = \frac{\bar{\Sigma}^H \bar{\Delta}}{\|\bar{\Sigma}\|^2} \quad (7)$$

$$\frac{\|\bar{\Sigma}\|^2 + \|\bar{\Delta}\|^2}{\hat{\sigma}_n^2} \geq T', \hat{r} = \frac{\bar{\Sigma}^H \bar{\Delta}}{\|\bar{\Sigma}\|^2} \quad (8)$$

based on the standard "historical" approach (7) - point source close to boresight - or on the correlation between the two receiving channels (8) [10][11]. In the case where σ_n^2 can be estimated precisely enough to be a known parameter of observation model, (7) and (8) have been characterized analytically [5]-[11] in terms of conditional mean and variance. These analytical statistical predictions show that expression (8) proposes an appreciable improvement of the performances of the CHTP. While retaining a comparable estimation Root Mean Square Error (RMSE), it helps to improve overall detection performance over the main lobe of the sum channel. A restriction on the interest of these results is the underlying assumption of a linear deviation angle function in order to be extended to angle statistical prediction (see §1). Unfortunately, this is a quite general restriction, as actual forms of deviation angle functions combined with the difficulty of evaluating $f(\hat{r}_x | D)$ prevent from performing analytical computation.

Therefore, a step forward consists in not focusing on statistical predictions but in investigating the DOA estimation performance of exact (5)-(6) or approximate (7)(8) solutions of the GLRT scheme through a Monte-Carlo type simulation with a large number of draws, as it is possible nowadays with the computing power available.

3.2) Improved Monopulse Processing

According to section 3.1, the recommended monopulse processing is the following (detector, estimator) pair:

$$\frac{\text{Tr}(\hat{R}) + \sqrt{\text{Tr}(\hat{R})^2 - 4|\hat{R}|}}{\hat{\sigma}_n^2} \geq T \quad (9)$$

$$\hat{r} = \frac{\text{Tr}(\hat{R}) + \sqrt{\text{Tr}(\hat{R})^2 - 4|\hat{R}|} - 2\|\bar{\Sigma}\|^2}{2\bar{\Delta}^H \bar{\Sigma}} \quad (10)$$

$$\hat{\theta} = \text{daf}(\hat{r}_x), \quad \hat{r}_x = \text{Re}\{\hat{r}\} \quad (11)$$

where $\hat{\sigma}_n^2$ is a noise power estimator.

This processing can be easily implemented in actual single floating point DSP, what could have been a major issue a few decades ago.

We shall designate hereinafter the various solutions (9-10), (7) and (8) of the CHTP as "glrt", "mosca sum" and "mosca power" respectively.

3.3) Generalisation

The problem is to find out if expressions (9) and (10) can be the solution of the GLRT method for any kind of amplitude fluctuation law. Unfortunately, some basic computations leads rapidly to a negative answer. Let's consider the simplest case where the noise power σ_n^2 is a known parameter ($\sigma_n^2 = 1$). In that case, all unknown parameters of the LRT belongs to hypothesis H_1 and the GLRT method now only consists in assessing them in the ML sense. Assume that $\beta(t_1), \dots, \beta(t_I)$ are I independent identical random variables with a known pdf $f(\beta)$, independent from the noise. Then the pdf of observation model (1) is:

$$f[\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_I) | H_1] = \int f[\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_I) | r, \bar{\beta}] f(\bar{\beta}) d\bar{\beta}$$

and the MLE of r - the only unknown parameter left - is solution of:

$$\frac{\partial f[\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_I) | H_1]}{\partial r^H} = 0 \quad (12)$$

where: $f(\bar{\beta}) = f[\beta(t_1), \dots, \beta(t_I)] = \prod_{i=1}^I f(\beta_i)$

$$f[\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_I) | r, \bar{\beta}] = \frac{e^{-\sum_{i=1}^I \|\bar{v}(t_i) - \beta(t_i) \bar{x}\|^2}}{\pi^{2I}}$$

After some straightforward calculi, (12) can be rewritten as:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^I \int \beta(t_i)^H \Delta(t_i) f[\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_I) | r, \bar{\beta}] f(\bar{\beta}) d\bar{\beta}}{\sum_{i=1}^I \int |\beta(t_i)|^2 f[\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_I) | r, \bar{\beta}] f(\bar{\beta}) d\bar{\beta}}$$

which is an implicit equation in r whose solution has obviously no reason to be the same whatever the form of $f(\beta)$. Therefore (9) and (10) can not be the general solution of the GLRT method applied to monopulse measurement.

However, the GLRT method originates from asymptotic ML Estimates properties [13] which are - under reasonably general conditions - unbiasedness and efficiency (estimator variance reaches the Cramer Rao lower bound),

when the number of independent observations tends to infinity. A thorough implementation of the GLRT method consists in finding ML estimates not only of the monopulse ratio r but also of the parameters $\bar{\omega}$ of the amplitude fluctuation law $f(\bar{\beta}|\bar{\omega})$. Actually the use of (10) as MLE of r for any given value of $\bar{\beta} = [\beta(t_1), \dots, \beta(t_I)]^T$ is equivalent to look for estimators of r (and $\bar{\beta}$) that are unbiased for each value of the nuisance parameter $\bar{\beta}$, whereas the true GLRT method looks for estimator of r (and $\bar{\omega}$) that are unbiased only over the set of possible values of the nuisance parameter $\bar{\beta}$. Such estimation scheme can be related to Miller and Chang lower bound [14] (a modified Cramer-Rao lower bound) as optimality criterion. Thus, the use of (9) and (10) whatever the amplitude fluctuation law can be regarded as a Modified GLRT method and therefore as a reasonable general (detector, estimator) solution pair of the CHTP as shown in next section.

4 Performance Comparison

As an example of performance comparison, we consider the multifunction Radar case tracking a signal source which amplitude fluctuation law is either of Swerling 0, Swerling 2 or Swerling 4 type. Due to time budget constraint, the maximum number of observations available per target is generally 2 ($I = 2$). The noise power is assumed to be known. A likely probability of false alarm for such radar mission is $P_{FA} = 10^{-4}$. Whatever the Swerling case, the Signal-to-Noise-Ratio (SNR) is matched to obtain $P_D = 0.9$ when signal source is on boresight and detected on sum (Σ) channel only. The monopulse antenna model corresponds to a rectangular surface sum antenna (Σ , 1° beamwidth) with a plane surface uniform current distribution associated with an appropriate difference beam (Δ , linear odd current distribution).

All simulation results have been gathered on a single page to offer an overview. They are divided in 2 figures (Figure 2 and 3) consisting of 3 plots, one per Swerling case, from SW0 to SW4 (top to bottom). On each plot, the performance of the 3 solutions “glrt”, “mosca sum” and “mosca power” of the CHTP are displayed.

Figure 2 and Figure 3 depicts respectively the variation of P_D and normalized RMSE of the angle estimator (11) within the main sum beam $[-\theta_{3dB}, \theta_{3dB}]$. In Figure 2 “Theo” stands for Theoretical, i.e. assessed using analytical formulas.

All P_{FA} measurements have been performed on 10^9 independent trials. All P_D and RMSE measurements have been performed on 10^6 independent trials.

The two figures illustrates the on average superiority of GLRT solution (9)-(10) over Standard solution (7): almost equal RMSE and improved on average P_D . This result is also obtained for non Gaussian pdf of observations (SW4 mixture) that confirms the robustness of the Modified GLRT method applied to monopulse measurement. Another valuable result is the almost equivalent

performance of “glrt” and “mosca power” solutions, which makes statistical prediction of “mosca power” solutions a very attractive problem in future.

5 Conclusion

This paper, generalizing results established lately in [10] and [11], emphasizes the existence of a better (detector, estimator) solution pair than the “historical” one for the monopulse CHTP. It provides a significant improvement of overall performance and proves to be robust to amplitude fluctuation law type. In addition to the expected impact on the future implementation of monopulse antennas and tracking performance, it contributes to illustrate the often unacknowledged or underestimated interaction between the components of the (detector, estimator) solution pairs of the CHTP.

6 References

- [1] S.M. Sherman: "Monopulse Principles and Techniques", Artech House, 1984
- [2] E. Mosca: "Angle estimation in amplitude comparison monopulse", IEEE Trans. AES. Vol. 17, March 1969.
- [3] I. Kanter: "Multiple Gaussian targets, the track-on -jam problem", IEEE Trans. AES, vol. AES-13, pp 620-623, 1977
- [4] I. Kanter: "The probability density function of the monopulse ratio for N looks at a combination of constant and Rayleigh targets", IEEE Trans., IT-23, pp 643-648, 1977
- [5] B-E Tullsson: "Monopulse tracking of Rayleigh targets, a simple approach", IEEE Trans., AES-27, May 1991
- [6] A-D. Seifer: "Monopulse-radar angle tracking in noise or noise jamming", IEEE Trans. AES, vol. AES-28, pp 622-637, 1992
- [7] E. Chaumette and P. Larzabal: "Monopulse Tracking of Signal Source of Unknown Amplitude using Multiple Observations", submitted to IEEE Trans. AES, sept 2003
- [8] E. Chaumette and P. Larzabal: "Monopulse-Radar Tracking of Swerling 3-4 Targets using Multiple Observations.", submitted to IEEE Trans. AES, Nov 2003
- [9] E. Chaumette and P. Larzabal: "Statistical Prediction of Monopulse Tracking: General Expressions", submitted to IEEE Trans. AES, Nov 2003
- [10] E. Chaumette and P. Larzabal: "Optimal Detection theory applied to monopulse antennas", ICASSP 2004, 2004
- [11] E. Chaumette and P. Larzabal: "Optimal Monopulse Tracking of Signal Source Of Unknown Amplitude", submitted to EUSIPCO 2004
- [12] T. E. Connolly: "Statistical Prediction of Monopulse errors for fluctuating targets", IEEE Radar conference 1980
- [13] H-L Van Trees : "Detection, estimation and modulation theory, Part 1", New York Wiley, 1968
- [14] R.W. Miller, C.B. Chang: "A modified Cramer-Rao Bound and its Application", IEEE Trans., IT. vol 24, p398-400, May 1978

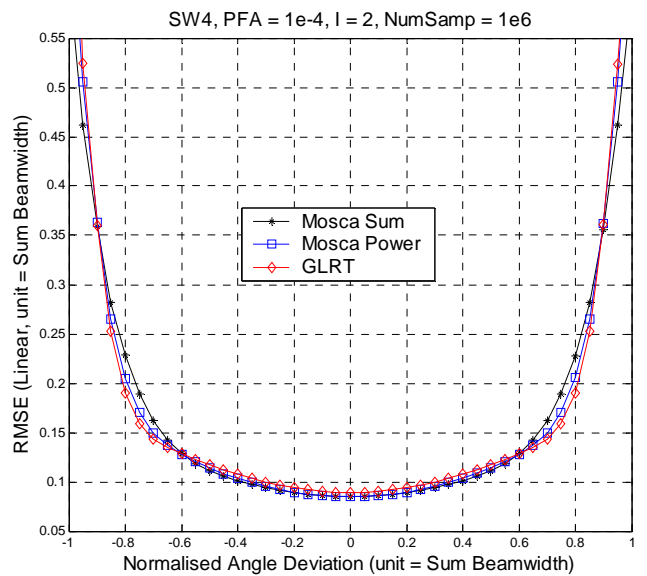
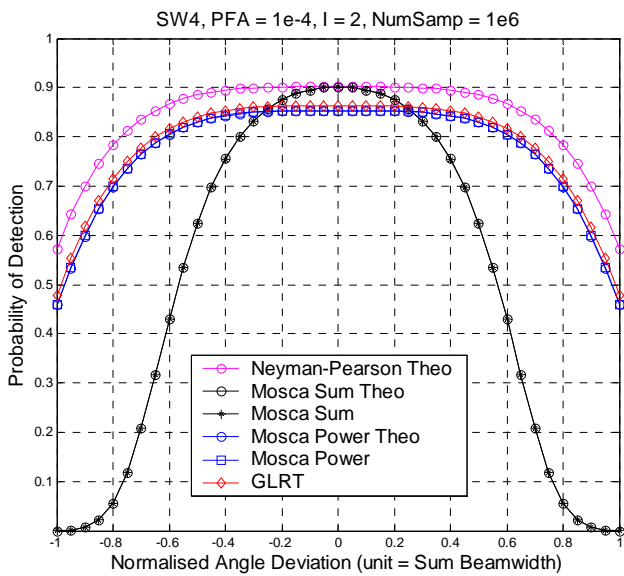
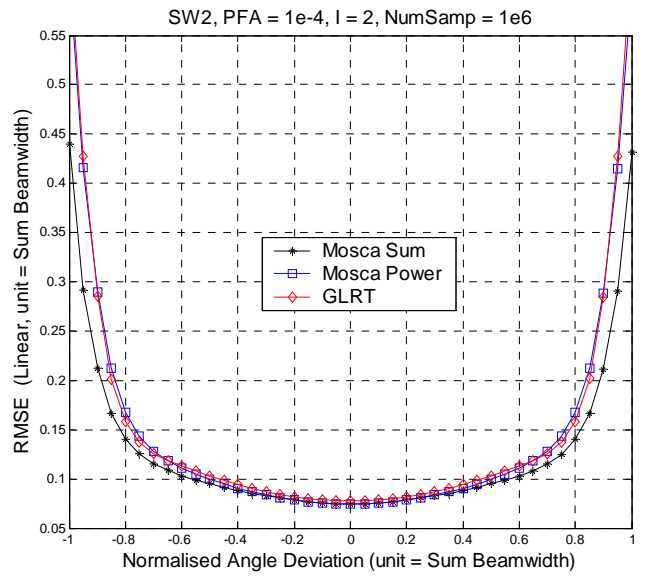
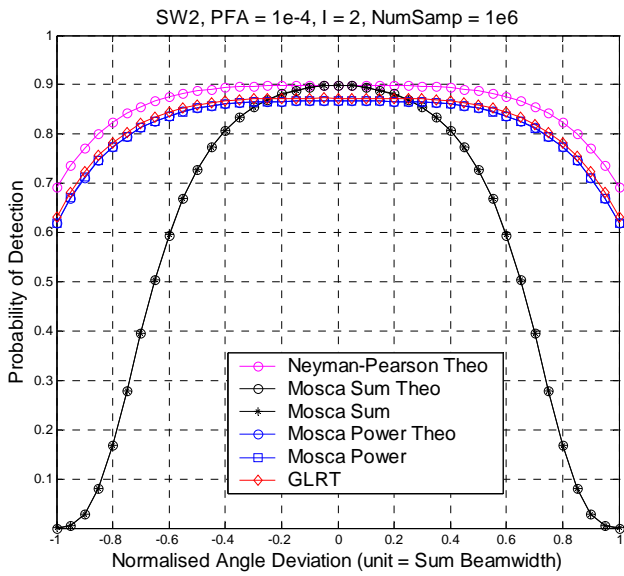
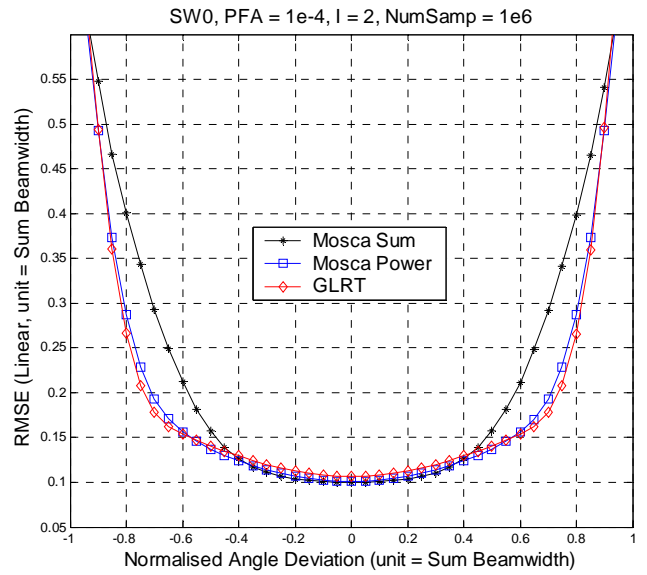
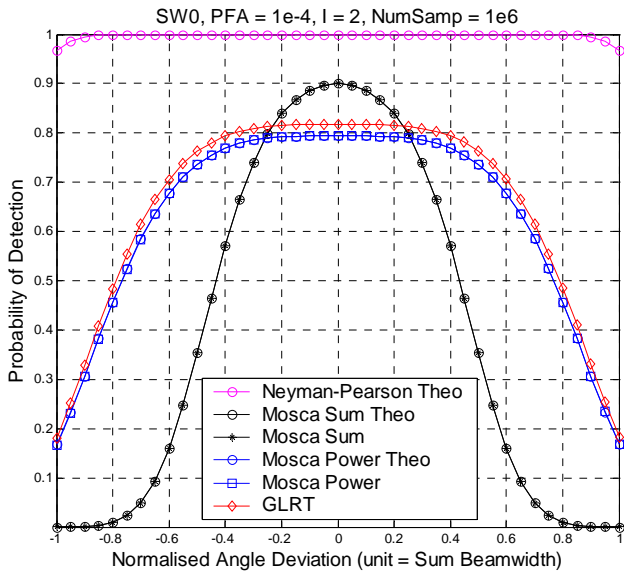


Figure 2: Probability of Detection

Figure 3: Normalized RMSE of angle estimator

REFERENCES

- [1] **BIBLIOGRAPHIE PROBABILITES-DETECTION-ESTIMATION**
- [2] R.A. Fisher, "On an absolute criterion for fitting frequency curves", *Mess. of Math.*, vol 41, p. 155-160, 1912
- [3] Doob, "Statistical Estimation", *Trans. American Math. Soc.*, vol 39, pp. 410-421, 1935
- [4] M. Fréchet, "Sur l'extension de certaines évaluations statistiques au cas de petits échantillons", *Rev. Int. Stat.*, vol. 11, pp. 182-205, 1943
- [5] C.R. Rao, "Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters", *Bull. Calcutta Math. Soc.*, vol. 37, pp. 81-91, 1945
- [6] H. Cramer, "Mathematical Methods of Statistics", Princeton, Princeton University Press 1946
- [7] A. Bhattacharyya, "On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation", *Sankya*, vol. 8, pp. 1-14, 1946
- [8] E.W. Barankin, "Locally best unbiased estimates", *Ann. Math. Stat.*, vol. 20, pp. 477-501, 1949
- [9] D.G. Chapman, H. Robbins, "Minimum variance estimation without regularity assumptions", *Annals of Math. Stat.*, vol. 22, pp. 581-586, 1951
- [10] J. Kiefer, "On minimum variance estimation", *Ann. Math. Stat.*, vol. 23, pp. 627-629, 1952
- [11] H.L. Van Trees, "Detection, Estimation and Modulation Theory, Part 1", New York, Wiley, 1968
- [12] R. McAulay, L.P. Seidman, "A usefull form of the Barankin Lower Bound and its application to PPM threshold analysis", *IEEE Trans. IT* vol 15, pp. 273-279, 1969
- [13] R. McAulay, E.M. Hofstetter, "Barankin Bounds on parameter estimation", *IEEE Trans., IT* vol 17, pp. 669-676, Nov 1971
- [14] F.E. Glave, "A new look at the Barankin Lower Bound", *IEEE Trans., IT* vol 18, pp. 349-356, May 1972
- [15] J.P. Albuquerque, "The Barankin Bound : a Geometric Interpretation", *IEEE Trans., IT* July, pp. 559-561, 1973
- [16] D.C. Rife, R.R. Boorstyn, "Single tone parameter estimation from discrete-time observations", *IEEE Trans., IT* vol 20, pp. 591-598, Sept. 1974
- [17] R.W. Miller, C.B. Chang, "A modified Cramer-Rao Bound and its Application", *IEEE Trans., IT.* vol 24, p398-400, May 1978
- [18] R.J. Muirhead, "Aspects of multivariate statistical theory", New York, Wiley, 1982
- [19] D.H. Brandwood, "A complex gradient operator and its application in adaptive array theory", *IEE Proc. F and H*, vol. 130, pp. 11-16, 1983
- [20] B.Z. Bobrovsky, E. Mayer-Wolf, M. Zakai, "Some classes of global Cramer-Rao Bounds", *Ann. Stat.*, vol 15, pp. 1421-1438, 1987.
- [21] A. Papoulis, "Probability, Random Variables and Stochastic Processes", 3rd Ed., New York, McGraw-Hill, 1991
- [22] L.L. Scharf, "Detection, Estimation and Time Series Analysis", Adison-Wesley, 1991
- [23] J.S. Abel, "A bound on mean-square-estimate error", *IEEE Trans., IT* vol 39, pp. 1675-1680, Sept. 1993
- [24] A. Zeira, M.Schultheiss, "Realizable Lower Bounds for Time Delay Estimation", *IEEE Trans., SP* vol. 41, pp. 3102-3113, 1993
- [25] S.M. Kay, "Fundamentals of statistical signal processing : Estimation Theory", Prentice Hall Signal Processing Series, 1993
- [26] A. van den Bos, "A Cramer-Rao Lower Bound for Complex Parameters", *IEEE Trans., SP* vol. 42, pp. 2859, Oct. 1994
- [27] K. Lacroix Bell, "Performance Bounds in Parameter Estimation with Application to Bearing Estimation", Phd dissertation, George Mason University, Fairfax, Virginia, 1995
- [28] L. Knockaert, "The Barankin bound and threshold behaviour in frequence estimation", *IEEE Trans, SP* vol 45, pp. 2398-2401, Sep. 1997
- [29] T.L. Marzetta, "Computing the Barankin bound, by solving an unconstrained quadratic optimization problem", *Conférence ICASSP*, pp. 3829-3832, 1997
- [30] I.Reuven, H. Messer, "A Barankin-Type Lower Bound on the Estimation Error of a Hybrid Parameter Vector", *IEEE Trans., IT* vol. 43, pp. 1084-1093, 1997
- [31] I.Reuven, H. Messer, "On the Effect of Nuisance Parameters on the Threshold RSB Value of the Barankin Bound", *IEEE Trans., IT* vol. 47, pp. 523-527, 1997
- [32] E.L. Lehmann, "Theory of point estimation", 2nd Ed., New York, Springer 1998
- [33] S.M. Kay, "Fundamentals of statistical signal processing : Detection theory", Prentice Hall Signal Processing Series, 1998
- [34] J. Tabrikian, J.L. Kromik, "Barankin bounds for source localization in an uncertain ocean environment", *IEEE Trans., SP* vol 47, pp. 2917-2927, Nov. 1999
- [35] N. Bertaux, P. Larzabal, C. Adnet, E. Chaumette, "A Parameterized Maximum Likelihood Method For Multipaths Channels Estimation", *SPAWC Conf.*, pp. 391-393, 1999
- [36] N. Bertaux, P. Larzabal, C. Adnet et E. Chaumette, "Maximum de Vraisemblance paramétré : application à la localisation spatio-temporelle radar", *Revue TS*, vol. 16, pp. 188-201, 1999
- [37] G. Olmo, E. Magli, L. Lo Presti, "Joint statistical signal detection and estimation. Part I: theoretical aspects of the problem", *revue Signal Processing*, vol 80, p 57-73, 2000
- [38] N. Bertaux, "Contribution à l'Utilisation des méthodes du Maximum de Vraisemblance en Traitement Radar Actif", Thèse SATIE-ENS Cachan, 2000
- [39] V. Girardin, N. Limnios, "Probabilités", Vuibert "Les grands cours", Paris, mai 2001
- [40] P. Forster, P. Larzabal, "On lower Bounds For Deterministics Parameter Estimation", *ICASSP Conf.*, pp.1137-1140, 2002
- [41] H.L. Van Trees, "Detection, Estimation and Modulation Theory, Part IV: Optimum Array Processing", Wiley-Interscience, Wiley 2002
- [42] E. Boyer, "Estimation Paramétrique des Moments Spectraux d'Echos Doppler : Application aux Radars Strato-Troposphériques", Thèse SATIE-ENS Cachan, 2002
- [43] E. Chaumette, P. Larzabal, "Optimal Detection Theory Applied to Monopulse Antenna", *ICASSP Conf.*, vol. 2, pp. 1065-1068, 2004
- [44] E. Chaumette, P. Larzabal, "Optimal Monopulse Tracking of Signal Source of Unknown Amplitude", *EUSIPCO Conf.*, 2004

- [45] A. Renaux, P. Forster, E. Boyer, P. Larzabal, "Non Efficiency and Non Gaussianity of a Maximum Likelihood Estimator at High Signal To Noise Ratio and Finite Number of Samples", ICASSP Conf., vol. 2, pp. 121-124, 2004
- [46] E. Chaumette, P. Larzabal, P. Forster, "On the Influence of a Detection Step on Lower Bounds for Deterministic Parameters Estimation", IEEE SP, accepté Déc. 2004.

[47] **BIBLIOGRAPHIE RADAR-MONOPULSE RATIO**

- [48] P. Swerling, "Probability of detection for fluctuating targets", IEEE Trans., IT vol. 6, pp. 269- 308, 1960
- [49] E. Mosca, "Angle estimation in amplitude comparison monopulse", IEEE Trans., AES vol. 17, pp. 205-212, 1969
- [50] I. Kanter, "The Ratios of Functions of Random Variables", IEEE Trans., AES vol. 13, pp. 624-630, 1977
- [51] I. Kanter, "Multiple Gaussian targets, the track-on-jam problem", IEEE Trans., AES vol. 13, pp. 620-623, 1977
- [52] I. Kanter, "The probability density function of the monopulse ratio for N looks at a combination of constant and Rayleigh targets", IEEE Trans., IT vol. 23, pp 643-648, 1977
- [53] I. Kanter, "Three Theorems on the Moments of the Monopulse Ratio", IEEE Trans., IT vol. 24, pp 272-276, 1978
- [54] T. E. Connoly, "Statistical Prediction of Monopulse errors for fluctuating targets", IEEE Radar conference, 1980
- [55] I. Kanter, "Varieties of Average Monopulse Responses to Multiple Targets", IEEE Trans., AES vol. 17, pp 25-28, 1981
- [56] S. Asseo, "Detection of Target Multiplicity using Monopulse Quadrature Angle", IEEE Trans., AES vol. 17, pp 271-280, 1981
- [57] S. M. Sherman, "Monopulse Principles and Techniques", Dedham, MA: Artech House, 1984
- [58] N. Levanon, "Radar Principles", Wiley-Interscience, Wiley 1988
- [59] B-E. Tullsson, "Monopulse tracking of Rayleigh targets, a simple approach", IEEE Trans., AES vol. 27, pp. 520-531, 1991
- [60] A-D Seifer, "Monopulse-radar angle tracking in noise or noise jamming", IEEE Trans., AES vol. 28, pp. 622-637, 1992
- [61] W.D. Blair, M. Brandt-Pierce, "Statistical description of monopulse parameters for Tracking Rayleigh targets", IEEE Trans., AES vol. 34, pp. 597-610, 1998
- [62] W.D. Blair, M. Brandt-Pierce, "Monopulse DOA estimation of two unresolved Rayleigh targets", IEEE Trans., AES vol. 37, pp. 452-469, 2001
- [63] A. Farina, B. Ristic, Luca Timmoneri, "Cramer-Rao Bound for Nonlinear Filtering with $P_d < 1$ and Its application to Target Tracking", IEEE Trans., SP vol 50, p 1916-1924, 2002
- [64] A. Sinha, T. Kirubarajan, Y. Bar-Shalom, "Maximum Likelihood Angle Extractor for Two Closely Spaced Target", IEEE Trans., AES vol. 38, pp. 183-201, 2002
- [65] E. Chaumette and P. Larzabal, "Monopulse Tracking of Signal Source of Unknown Amplitude using Multiple Observations", soumis à IEEE Trans. AES, 2003
- [66] E. Chaumette and P. Larzabal, "Monopulse-Radar Tracking of Swerling 3-4 Targets using Multiple Observations.", soumis à IEEE Trans. AES, 2003
- [67] E. Chaumette, "Optimal Detection theory applied to monopulse antennas: new theoretical results", Memo TNF/BRS/EPR - 248/03, Thales Naval France, Bagneux, France, 2003
- [68] E. Chaumette, "Optimal Detection theory applied to monopulse antennas: the unknow amplitude case", Memo TNF/BRS/EPR - 03/04, Thales Naval France, Bagneux, France, 2004
- [69] E. Chaumette, P. Saulais, N. Colin, "Modern Monopulse Tracking", Radar Conference, Toulouse, 2004

[70] **BIBLIOGRAPHIE AUTRE**

- [71] Paul Robert, "Le petit Robert, Dictionnaire analogique et alphabétique de la langue française", 1996
- [72] R.A.Horn, C.R. Johnson, "Matrix Analysis", Cambridge University Press, 1999
- [73] <http://functions.wolfram.com>, "A comprehensive online compendium of formulas involving the special functions of mathématiques", 2001
- [74] E. Chaumette, "RSL, Modélisations : modélisation électromagnétique de la scène Radar/Télécom", Mémo TNF/BRS/EPR, Thales Naval France, Bagneux, France, 2002