



HAL
open science

Modèles continus et "discrets" pour les problèmes de localisation et de rupture fragile et/ou ductile

Delphine Brancherie

► **To cite this version:**

Delphine Brancherie. Modèles continus et "discrets" pour les problèmes de localisation et de rupture fragile et/ou ductile. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2003. Français. NNT: . tel-00132116

HAL Id: tel-00132116

<https://theses.hal.science/tel-00132116>

Submitted on 20 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Spécialité :
MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Présentée à l'École Normale Supérieure de Cachan
par

Delphine BRANCHERIE

pour obtenir le grade de
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE
CACHAN**

Sujet de la thèse :
**Modèles continus et « discrets » pour les problèmes de
localisation et de rupture fragile et/ou ductile**

Thèse soutenue le 17 décembre 2003 devant le jury composé de :

QUOC SON NGUYEN	Président du jury
FÉLIX DARVE	Rapporteur
MILAN JIRÁSEK	Rapporteur
ARNAUD DELAPLACE	Examineur
PIERRE VILLON	Examineur
ADNAN IBRAHIMBEGOVIĆ	Directeur de thèse

Laboratoire de Mécanique et Technologie
(ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6)
61 Avenue Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)

« On ne sait jamais rien. Sauf ce qui est sans importance. »

La tempête, René BARJAVEL.

Après quelques mois à rédiger les quelques pages de ce mémoire et avant de s'envoler vers de nouveaux horizons, l'heure est venue des remerciements ! Une heure qui sonne comme un soulagement mais qui annonce la difficile tâche d'exprimer ses « mercis » en trouvant les mots les plus justes.

C'est paradoxalement la dernière page que j'aurai rédigée que vous croiserez en premier, c'est dire son importance ! J'aurais voulu qu'elle déborde d'originalité, qu'elle ne ressemble à aucune autre mais, l'exercice est périlleux, le ton difficile à trouver et, soyons honnête, l'originalité me fait cruellement défaut. Je me suis donc résignée, après maintes tentatives, à vous présenter une page de remerciements dénuée de toute fantaisie mais, soyez-en assurés, débordante de sincérité (il semblerait que « quand on se croit obligé d'exprimer sa gratitude, on perd la moitié de sa joie » (*Une rose au paradis*, René BARJAVEL) et je ne souhaite en aucun cas altérer cette dernière).

Avant de me lancer - enfin ! - dans cette page de libre expression, je dois préciser que ma crainte la plus profonde est, bien entendu, d'oublier de remercier certains et, sans aucun doute, j'oublierai quelques uns. J'en suis sincèrement désolée et j'espère que vous ferez preuve d'indulgence.

Il est maintenant temps, après ce petit prologue, de me lancer !

Je tiens tout d'abord à remercier Quoc Son NGUYEN d'avoir bien voulu, dans une période chargée, participer à mon jury de thèse et de m'avoir fait l'honneur d'en assurer la présidence. Tous mes remerciements et un respect profond vont également à ceux qui ont accepté la lourde et fastidieuse tâche de rapporter ce travail : Félix DARVE et Milan JIRASEK. Enfin, je remercie très sincèrement les examinateurs : Pierre VILLON et Arnaud DELAPLACE d'avoir accepté de participer à l'examen de ce travail.

Je souhaiterais adresser des remerciements tout particuliers à mon directeur de thèse : A. IBRAHIMBEGOVIC qui a encadré ce travail durant ces trois années au cours desquelles j'ai pu profiter de sa large expérience de la mécanique numérique. Merci de m'avoir fait confiance et de m'avoir offert, dès le DEA, la possibilité « d'expérimenter » le monde de la recherche universitaire et de m'avoir suivi tout au long de mon parcours d' « apprenti-chercheur » : je crois y avoir trouvé ma voie !

Enfin, je voudrais remercier (et là, les choses se compliquent un peu : il ne faut oublier personne !) tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à ce travail, soit en participant à mon équilibre mental (!), soit en me faisant partager leur expérience ou encore en me faisant profiter de leurs précieux conseils.

Tout d'abord un grand merci à tous ceux qui font, tout simplement, que les choses fonctionnent : les personnels administratifs et techniques du labo.

Dans la catégorie sportive, je remercierai bien évidemment l'équipe « Dynamique de l'effort », U.T.R. dissidente du laboratoire mais oh ! combien fréquentée (enfin, à mon époque !) avec les sorties hebdomadaires au parc de Sceaux : son infatigable coach : Xavier mais aussi mes camarades de course : Eric F., Philippe S., Fabien F., Arnaud D., Damijan M., Olivier A. et tous les autres habitués.

L'ambiance au labo participe largement à l'équilibre mental, qui, il faut bien le dire, est parfois mis à rude épreuve. Je souhaite ici remercier tous ceux qui participent

à entretenir une telle ambiance, en particulier, mes compagnons de route :

- ceux qui m’ont montré le chemin, « les anciens » notamment les voisins de mezzanine : Eric B., Gilles A., Yann C., Fabrice B., Vincent M. et bien sûr, ma voisine de bureau : Siham K. ;
- ceux qui ont fait le chemin avec moi : Yann M., Laurent D., Olivier A., François L. et bien sûr, Pierre F. ;
- enfin, ceux qui ont commencé l’aventure un peu après moi et qui se démènent pour que la bonne humeur demeure : David N., Guillaume P., Jayant, Sylvain C., Mathilde, Pierrot, Olivier D., le zozo (Guillaume H.) et tous les autres (je ne peux pas citer tout le monde, mais le cœur y est).

Le bar est un lieu d’échange privilégié au labo et ces remerciements ne seraient pas complets si je ne mentionnais pas toutes ces personnes avec qui j’ai eu, dans ce lieu hautement emblématique, l’occasion d’avoir des conversations (scientifiques ou non), je pense en particulier à Sabine mais aussi à Marc F. ou encore à PAB.

Je tiens également à remercier tout particulièrement ceux qui ont participé dans les dernières touches, les derniers calages à ce travail. Tout d’abord, ceux à qui j’ai fait subir mes répétitions : Yves B., Fabrice G., David N., Pierrot, Olivier D., Hervé R., Norberto et Pierre (qui en a subi plus d’une !). Un grand grand merci à Eric F. d’avoir assuré l’assistance technique le jour J. Enfin, merci à Fabrice G. d’avoir pris le temps de relire quelques chapitres de ce mémoire.

Je finirai, enfin, par les mentions spéciales, les « mercis » plus personnels et, de fait, plus difficiles à exprimer. Je voudrais adresser mes plus sincères remerciements à mes plus fervents supporters, aux spectateurs du premier rang, ceux qui encouragent sans juger ... enfin, vous vous reconnaissez, j’en suis sûre !

À tous, un grand merci.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	ix
Notations	1
Introduction	3
1 Phénomènes de localisation : limites et extensions des modèles continus locaux	7
1.1 Mise en évidence du phénomène de localisation	8
1.1.1 Les aspects expérimentaux : compréhension du phénomène de localisation	8
1.1.2 Aspects numériques de la localisation : limites des modèles continus locaux	12
1.1.2.1 Un problème unidimensionnel	13
1.1.2.2 Unicité et stabilité des matériaux anélastiques	17
1.1.2.3 Bifurcation et problèmes discrétisés : non-objectivité de la solution	21
1.2 Extension des modèles locaux : traitement de la non-objectivité	22
1.2.1 Modèles à conservation de l'énergie de fissuration	23
1.2.2 Modèles continus généralisés : modèles de Cosserat	23
1.2.3 Modèles dépendant du temps	24
1.2.4 Modèles non-locaux	24
1.2.5 Modèles à gradient	25
1.2.6 Modèles à discontinuités	28
1.2.6.1 Discontinuités faibles	28
1.2.6.2 Discontinuités fortes	30
1.3 Définition de nos objectifs	32
2 Discontinuités de déplacement : formulation théorique	33
2.1 Un problème unidimensionnel	34
2.2 Cas des problèmes tridimensionnels	41
2.2.1 Définition du problème	42
2.2.2 Modèle continu classique	43
2.2.3 Champs de déplacement discontinus : cinématique	47

2.2.4	Condition de localisation et modèle constitutif pour la discontinuité	48
2.2.4.1	L'approche « continue »	49
2.2.4.2	L'approche « discrète »	54
2.3	Conclusion	57
3	Aspects numériques de la prise en compte de discontinuités de déplacement	59
3.1	Un problème unidimensionnel	60
3.2	Une revue des techniques de la littérature	67
3.2.1	Définition du problème, formulation variationnelle	67
3.2.2	Discrétisation du problème	68
3.2.3	Choix des interpolations	69
3.2.3.1	Méthode « Statically Optimal Symmetric » (<i>SOS</i>)	69
3.2.3.2	Méthode « Kinematically Optimal Symmetric » (<i>KOS</i>)	70
3.2.3.3	Méthode « Statically and Kinematically Optimal Non-symmetric » (<i>SKON</i>)	70
3.2.3.4	Quelques éléments de comparaison	71
3.2.3.5	Quelques remarques	71
3.3	Méthode de résolution globale : la méthode des modes incompatibles	73
3.3.1	Définition du problème, formulation variationnelle	73
3.3.2	Formulation approchée, choix des interpolations	76
3.3.3	Résolution	81
3.3.3.1	Méthode de résolution : « operator split »	83
3.3.3.2	Quelques remarques sur la méthode de résolution	84
3.4	Conclusion	85
4	Modèles de rupture et implantation numérique : cas de la rupture ductile et fragile	87
4.1	Cas de la rupture ductile : modèle de plasticité	88
4.1.1	Spécificités du modèle	88
4.1.1.1	Le modèle continu local	88
4.1.1.2	Condition de localisation et modèle constitutif pour la discontinuité	90
4.1.1.3	Analyse de la dissipation	95
4.1.2	Les aspects numériques	98
4.1.2.1	Intégration des lois de comportement	98
4.1.2.2	Interpolation EF : la méthode B-bar	101
4.1.3	Quelques résultats numériques	107
4.1.3.1	Un essai de cisaillement pur	107
4.1.3.2	Un essai de cisaillement simple	110
4.1.3.3	Un essai de traction	114
4.2	Cas de la rupture fragile : modèle d'endommagement	117
4.2.1	Spécificités du modèle	117
4.2.1.1	Le modèle continu local	117
4.2.1.2	Condition de « localisation » et modèle constitutif pour la discontinuité	121

4.2.1.3	Analyse de la dissipation	128
4.2.2	Les aspects numériques	129
4.2.2.1	Intégration des lois de comportement	130
4.2.2.2	Interpolation EF	140
4.2.3	Quelques résultats numériques	143
4.2.3.1	Réponse de la surface de discontinuité	143
4.2.3.2	Un essai de traction simple : indépendance de la so- lution au maillage	148
4.2.3.3	Essai de traction simple : effet de la prise en compte d'un endommagement diffus	152
4.2.3.4	Essai de flexion : mise en évidence de l'intérêt de la prise en compte d'une dissipation volumique	155
4.3	Conclusion	159
	Conclusions et perspectives	161
	Bibliographie	167
A	Intégration de la loi de comportement discrète	175

Table des figures

1.1	Bande de cisaillement dans un sable lors d'un essai triaxial, [Colliat-Dangus, 1986] d'après [Desrues et Chambon, 2002]	9
1.2	Processus d'apparition de fissures dans un granite (de Westerly) lors d'un essai triaxial : localisation des événements acoustiques et courbe contrainte/déplacement, d'après [Lockner et al., 1992]	10
1.3	Champ de dissipation et de vitesse de déformation pour un essai de traction simple sur un acier, d'après [Louche et Chrysochoos, 2001]	11
1.4	Détection de la localisation pour un essai de compression sur béton : 1.4(a) courbe effort /déplacement, champs de déplacement, 1.4(b) cartes de distorsion (obtenues par stéréophotogrammétrie), d'après [Torrenti et al., 1988]	12
1.5	Barre unidimensionnelle sollicitée en traction	13
1.6	Réponse effort-déplacement de la barre en fonction de h/L ($E = 1$, $A = 1$, $\sigma_y = 0.05$ et $\varepsilon_f = 0.2$)	15
1.7	Influence de la finesse de maillage sur la réponse effort/déplacement d'une barre en traction	16
1.8	État de déformation dans la barre en fonction du nombre d'éléments ($u = 0.008$)	16
1.9	Domaine Ω , conditions aux limites en efforts et déplacements	17
1.10	Domaine Ω et surface de discontinuité du champ de taux de déformation	20
1.11	Mise en évidence de la dépendance de la solution à la discrétisation EF, d'après [Sluys, 1992]	22
1.12	Élément localisé et fonctions de formes incompatibles ajoutées (dans le cas d'un mode II)	29
1.13	Domaine Ω coupé par une surface de discontinuité Γ_s en deux sous-domaines Ω^- et Ω^+	30
2.1	Barre unidimensionnelle sollicitée en traction	34
2.2	Comportement en traction de la surface de discontinuité : comportement rigide-plastique	41
2.3	Domaine Ω traversé par une surface de discontinuité Γ_s	42
2.4	Domaine Ω coupé par une surface de discontinuité Γ_s en deux sous-domaines Ω^- et Ω^+	47
3.1	Fonctions d'interpolation et champs de déplacement pour un élément de barre à 2 nœuds contenant une discontinuité	62
3.2	Représentation des lois de comportement continue et discrète	65

3.3	Courbes effort-déplacement imposé pour différentes discrétisations EF de la barre	66
3.4	Domaine Ω , conditions aux limites en efforts et déplacements	67
3.5	Points d'intégration pour un élément triangulaire à six nœuds avant et après introduction de la surface de discontinuité. Les croix représentent les points d'intégration du milieu continu, les cercles les points d'intégration associés à la surface de discontinuité (d'après [Wells et Sluys, 2001a])	72
3.6	Schéma itératif à trois niveaux	86
4.1	Élément à 4 noeuds traversé par une surface de discontinuité : points d'intégration et points de calcul des contraintes	105
4.2	Essai de cisaillement pur : conditions aux limites et maillages considérés	108
4.3	Essai de cisaillement pur : courbe effort mesuré / déplacement imposé au point A	109
4.4	Essai de cisaillement pur : lignes de discontinuité	109
4.5	Essai de cisaillement simple : conditions aux limites et maillages considérés	111
4.6	Essai de cisaillement simple : réponse effort/déplacement	111
4.7	Lignes de discontinuité pour le maillage a	112
4.8	Lignes de discontinuité pour le maillage b	112
4.9	Champs de déplacement dans la direction x en fin de test pour le maillage a	113
4.10	Champs de déplacement dans la direction x en fin de test pour le maillage b	113
4.11	Essai de traction : discrétisation EF et conditions aux limites	114
4.12	Évolution de la déformation plastique cumulée et développement des discontinuités	115
4.13	Évolution de la déformation plastique cumulée et développement des discontinuités	116
4.14	Essai de traction : maillage déformé ($\times 20$) et champ de déplacement dans la direction x	117
4.15	Fonction de forme \mathbf{M} permettant de construire \mathbf{G}_r pour un élément à trois nœuds	141
4.16	Barre à deux éléments	144
4.17	Évolution des déplacements imposés	145
4.18	Évolution en fonction des composantes du saut de déplacement des composantes de la traction et de la complaisance	146
4.19	Évolution en fonction du « pseudo-temps » des composantes du saut de déplacement et de la complaisance	147
4.20	Maillages, conditions aux limites et éléments affaiblis	149
4.21	Courbes effort mesuré/déplacement imposé pour le maillage régulier et le maillage irrégulier	150
4.22	Trajet des lignes de discontinuité	151
4.23	Courbe effort mesuré / déplacement imposé à l'extrémité libre pour un maillage régulier fin	152

4.24	Évolution du saut de déplacement sur l'élément affaibli en fonction du déplacement imposé	154
4.25	La structure considérée, ses dimensions (en mm)	156
4.26	Maillage considéré et conditions aux limites	156
4.27	Chargement au cours du temps de la poutre : évolution des déplacements imposés U_x et U_y	156
4.28	Surfaces de discontinuité pour la modélisation avec dissipation volumique ($U_x = 2.0$ mm, $U_y = 2.28$ mm)	157
4.29	Surfaces de discontinuité sans dissipation volumique ($U_x = 0$ mm, $U_y = 0.08$ mm)	157
4.30	Évolution au cours du temps des endommagements continu et localisé dans un élément	158
5.1	Essai de traction	164

Liste des tableaux

2.1	Variables d'état et variables associées pour le modèle de la barre . . .	35
2.2	Notations : variables d'état et variables associées	44
2.3	Notations : variables d'état et variables associées pour la discontinuité	54
2.4	Mise en correspondance des variables et fonctions relatives à la construc- tion des modèles hors discontinuité et sur la discontinuité	57
3.1	Propriétés du matériau hors discontinuité et sur la discontinuité . . .	65
4.1	Variables d'état et variables associées pour le modèle continu de plas- ticité	88
4.2	Variables d'état et variables associées pour le modèle discret de plasticité	94
4.3	Paramètres des modèles continus et discrets	107
4.4	Paramètres des modèles continus et discrets	110
4.5	Paramètres des modèles continus et discrets	114
4.6	Variables d'état et variables associées pour le modèle continu d'en- dommagement	118
4.7	Variables d'état et variables associées pour le modèle localisé d'en- dommagement	122
4.8	Différents cas pour l'intégration numérique de la loi discrète	135
4.9	Paramètres des modèles continu et discret	144
4.10	Propriétés du matériau hors discontinuité et sur la discontinuité . . .	149
4.11	Paramètres des modèles continus et discrets	157

Notations

Tout le long du texte, les règles de notation suivantes ont été adoptées :

- les quantités d’ordre au moins égal à 1 apparaissent en caractères gras ;
- les vecteurs sont désignés par des lettres latines minuscules ;
- les tenseurs d’ordre 2 sont désignés par des lettres grecques minuscules ;
- les tenseurs d’ordre 4 sont désignés par des lettres latines majuscules.

Les exceptions à cette règle de notation seront précisées.

De même, tout au long du texte, les variables relatives au matériau hors discontinuité et à la discontinuité sont différenciées :

- les variables relatives au matériau hors discontinuité sont notées avec une barre superposée ;
- les variables relatives à la discontinuité sont, quant à elles, notées avec deux barres superposées.

Notations spécifiques au cadre théorique (chapitres 2 et 4)

Au chapitre 1 est défini le tenseur acoustique noté : $\mathbf{Q} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}$. Nous en explicitons ici l’expression en notation indicielle :

$$Q_{ij} = n_k C_{ijkl} n_l$$

où la convention de sommation d’Einstein a été adoptée.

Notations spécifiques au cadre éléments finis (chapitres 3 et 4)

Les règles de notation énoncées ci-avant sont encore valables.

En revanche, la manipulation des quantités tensorielles se fait en notation vectorielle pour les tenseurs d’ordre 2 et matricielle pour les tenseurs d’ordre 4.

Ainsi, un tenseur de déformation écrit en notation tensorielle :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

sera écrit en notation vectorielle :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix}$$

Le tenseur de contrainte écrit en notation tensorielle :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

sera écrit en notation vectorielle :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}$$

Les tenseurs d'ordre 4 sont manipulés sous forme matricielle. Vu les conventions adoptées pour l'écriture vectorielle des déformations et des contraintes, le tenseur d'élasticité, dont l'expression en fonction des coefficients de Lamé est :

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}$$

s'écrit sous forme matricielle, en se plaçant dans le cadre des déformations planes :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Les notations matricielles des tenseurs d'ordre 4 sont construites de la même façon.

Introduction

La maîtrise du comportement des structures du Génie Civil est très complexe du fait, en particulier, de la diversité des sollicitations auxquelles elles sont soumises. Leur construction est maintenant réglementée au niveau européen : les normes en vigueur sont de plus en plus strictes et prennent en compte, jusqu'à l'état limite ultime, un grand nombre de scénari de sollicitations : sollicitations mécaniques sévères telles que l'impact ou le séisme, sollicitations multiphysiques en environnement agressif telles que les agressions chimiques, le vieillissement, ...

Les modèles de comportement de matériaux et de structures doivent intégrer l'évolution de ces critères de dimensionnement et deviennent, ainsi, de plus en plus complexes, fortement non linéaires. De plus, ils sont capables de tenir compte de phénomènes multiphysiques et reposent bien souvent sur des approches multiéchelles.

Si les lois de comportement sont de plus en plus fines et complexes, leur emploi dans la simulation numérique du comportement des structures n'en reste pas moins limité. Ces modèles, souvent basés sur des approches phénoménologiques, sont capables de reproduire la réponse du matériau jusqu'au pic. En revanche, ils continuent de se heurter aux problèmes numériques liés au phénomène de localisation des déformations. La réponse post-pic, caractérisée par la localisation des déformations, n'est alors que très rarement décrite de façon satisfaisante.

Le caractère prédictif de ces lois de plus en plus fines, et donc également la perspective de leur utilisation pour des applications pratiques s'en trouvent alors très largement remis en cause.

Néanmoins, la simulation numérique des structures ne peut s'affranchir d'une description objective de la phase post-pic du comportement du matériau. En effet, les structures étudiées, dont le niveau de complexité ne cesse de croître, sont, généralement, très largement hyperstatiques. Ainsi, certaines parties de l'ouvrage peuvent être très fortement endommagées sans que l'intégrité de la structure ne soit, pour autant, remise en cause. L'évaluation de la charge limite ultime impose donc de pouvoir décrire localement, dans les zones dégradées, le comportement post-pic du matériau. Ceci garantit une évaluation fiable de la charge limite ultime ainsi que de l'énergie dissipée dans la structure.

Comme nous l'avons souligné précédemment, l'origine des problèmes numériques que l'on souhaite traiter se trouve dans les phénomènes de localisation des déformations : une réalité physique qui reste encore difficilement appréhendée par les techniques de calcul numérique standards.

Le premier chapitre de ce mémoire s'attache à décrire ces phénomènes de localisation pour différents types de matériaux mais également, et surtout, à passer

en revue les techniques expérimentales qui en permettent la détection. La localisation des déformations est caractérisée par une perte d'homogénéité de l'éprouvette : sa détection expérimentale est donc indispensable à l'exploitation des résultats des essais permettant de qualifier le comportement du matériau.

Par ailleurs, ce premier chapitre met également en évidence les problèmes numériques - dépendance au maillage - engendrés par la simulation de ce phénomène physique. Les aspects mathématiques permettant de mettre en avant le caractère mal posé du problème dans le cas d'un matériau à comportement adoucissant sont également discutés, les critères de localisation sont rappelés.

De nombreuses techniques ont été développées depuis les années 80 afin de pallier les problèmes de dépendance au maillage. Ce premier chapitre tente - très certainement de façon non exhaustive - de les passer en revue en mettant en lumière leurs aspects positifs comme leurs écueils. Cette analyse nous conduira, pour finir, à définir d'une manière très précise les objectifs de notre étude ainsi que son cadre d'application.

Notre étude s'inscrit dans le cadre des modèles à discontinuité de déplacement initiés plus récemment (au début des années 90). L'objet de cette technique de régularisation est de prendre en compte l'effet des bandes de localisation sur le comportement global de la structure étudiée sans chercher à avoir une description fine de ces zones de localisation.

La plupart des travaux réalisés dans ce cadre suppose que la dissipation dans la structure est uniquement liée à l'apparition et au développement des bandes de localisation, le matériau hors bande de localisation est ainsi supposé rester dans le domaine élastique. Ce type de modélisation est adapté à la description du comportement des structures non massives pour lesquelles, les phénomènes de dissipation hors bande de localisation sont effectivement négligeables devant ceux ayant lieu dans les zones de localisation. En revanche, lorsqu'il s'agit de décrire le comportement de structures massives, négliger l'énergie dissipée dans le matériau hors bande de localisation n'est pas une démarche satisfaisante, les phénomènes de dissipation localisés ne sont en effet plus prépondérants mais du même ordre de grandeur que ceux ayant lieu dans la « masse » de la structure.

Ainsi, l'approche développée ici propose d'étendre les modèles à discontinuité de déplacement de façon à combiner deux types de dissipation :

- une dissipation volumique gérée par des modèles continus classiques et qui permet de prendre en compte tous les phénomènes dissipatifs ayant lieu dans le matériau hors bande de localisation ;
- une dissipation surfacique qui rend compte à l'échelle de la structure des phénomènes dissipatifs localisés à l'échelle des bandes de localisation. Cette dissipation est gérée par l'introduction d'une discontinuité de déplacement, traitée comme une interface cohésive. Une loi « traction - saut de déplacement » lui est associée, qui assure le contrôle de cette dissipation localisée.

Les aspects théoriques et numériques du modèle proposé sont présentés, respectivement, aux chapitres 2 et 3 de ce mémoire. Ceci est réalisé dans un cadre très général, sans supposer *a priori* de comportement de matériau particulier. Afin de mettre en évidence les points clés de la méthode dans un cadre simplifié, un exemple unidimensionnel est, néanmoins, traité en début de chacun des deux chapitres.

Dans le chapitre 2, après un rappel concernant la construction des modèles continus classiques, la définition du modèle relatif à la discontinuité est présentée, les conditions d'introduction de la surface de discontinuité sont discutées. Ce chapitre met également en évidence le parallèle entre la construction du modèle continu, qui permet de contrôler les phénomènes de dissipation diffus, et le modèle de type « discret » qui gère, quant à lui, les phénomènes de dissipation localisés.

La prise en compte dans la simulation numérique de discontinuités de déplacement « intra-élément » suppose des modifications des techniques éléments finis classiques. Le chapitre 3 propose une revue des techniques employées dans la littérature afin de décrire des champs de déplacement discontinus puis s'attache à présenter la technique utilisée dans ce travail. Cette dernière s'appuie sur la méthode des modes incompatibles : la base des fonctions de forme est enrichie d'une fonction de forme incompatible présentant une discontinuité. Le formalisme de la méthode des modes incompatibles est alors utilisé afin de résoudre le problème modifié issu de l'enrichissement de la cinématique des éléments.

Enfin, le dernier chapitre particularise les équations développées dans les deux précédentes parties, aux cas de la rupture ductile et de la rupture fragile en considérant, respectivement, un modèle de comportement élasto-plastique et un modèle élasto-endommageable. Pour chacune de ces deux applications, les spécificités des modèles continus et discrets sont précisées, le choix des interpolations ainsi que des techniques numériques de résolution adoptées pour chacun de ces deux cas est discuté. Enfin, des simulations numériques mettant en évidence le caractère régularisant de la technique ainsi que l'intérêt de la prise en compte de deux types de dissipation combinés sont présentées.

Pour finir, nous présentons les conclusions de ce travail et proposons diverses perspectives, envisageables à plus ou moins long terme, à ce travail.

Chapitre 1

Phénomènes de localisation : limites et extensions des modèles continus locaux

La localisation des déformations est un phénomène bien connu : les déformations se concentrent soudainement dans des zones de faibles épaisseurs qui seront le siège de la rupture. Ce phénomène a été très largement étudié tant d'un point de vue expérimental que des points de vue théorique et numérique. Ce premier chapitre tente de passer en revue, sans prétendre à l'exhaustivité, les différents aspects de la localisation : sa caractérisation expérimentale, son approche théorique et son traitement numérique.

Sommaire

1.1	Mise en évidence du phénomène de localisation	8
1.1.1	Les aspects expérimentaux : compréhension du phénomène de localisation	8
1.1.2	Aspects numériques de la localisation : limites des modèles continus locaux	12
1.2	Extension des modèles locaux : traitement de la non-objectivité	22
1.2.1	Modèles à conservation de l'énergie de fissuration	23
1.2.2	Modèles continus généralisés : modèles de Cosserat	23
1.2.3	Modèles dépendant du temps	24
1.2.4	Modèles non-locaux	24
1.2.5	Modèles à gradient	25
1.2.6	Modèles à discontinuités	28
1.3	Définition de nos objectifs	32

1.1 Mise en évidence du phénomène de localisation

1.1.1 Les aspects expérimentaux : compréhension du phénomène de localisation

Lors du chargement d'une éprouvette, il est fréquent d'observer, peu avant rupture, l'apparition de zones de faible épaisseur dans lesquelles se concentrent les déformations. Ces zones sont initiées par des micro-défauts du matériau ou des conditions aux limites (tout ceci conduisant à l'apparition d'hétérogénéités du chargement).

Caractérisées par un fort gradient de déformation, elles sont le siège de la rupture conduisant à la ruine de l'éprouvette.

En fonction de la nature du matériau considéré, ces zones de localisation des déformations sont qualifiées de :

- bandes de cisaillement pour les matériaux métalliques élasto-plastiques et les matériaux granulaires tels que les sables ou les poudres ;
- bandes de localisation dans le cas des matériaux quasi-fragiles tels que les bétons ou les roches.

Les phénomènes mis en jeu lors de la formation et du développement de ces bandes sont très différents et dépendent de la nature des matériaux considérés.

Dans le cas des matériaux métalliques, après une phase de chargement élastique, l'entrée dans la phase de plastification se caractérise par un comportement quasi-homogène : la dissipation (et donc la plastification du matériau) se répartit de façon diffuse dans l'éprouvette, [Chrysochoos et Louche, 2000]. Progressivement, les déformations, initialement homogènes se concentrent dans une bande de faible épaisseur, générant d'importants glissements localisés qui seront responsables de la rupture. La dissipation, quant à elle, se trouve confinée dans ces bandes de cisaillement.

Dans le cas des matériaux granulaires, après un réarrangement des grains, l'apparition des bandes de localisation se caractérise par d'importants glissements intergranulaires localisés (voir la figure 1.1). Ces bandes de cisaillement sont également observables à des échelles bien supérieures à celle des éprouvettes de laboratoire. Ainsi, les glissements de terrain sont la manifestation, à grande échelle, de l'apparition de bandes de cisaillement dans les sols.

Dans le cas des matériaux quasi-fragiles, la réponse de l'éprouvette se caractérise par trois phases :

- une première phase correspond à la réponse élastique de la structure ;
- une deuxième phase se caractérise par l'apparition de microfissures réparties de façon homogène dans l'éprouvette ;
- enfin, si le chargement est poursuivi, certaines microfissures vont coalescer pour donner naissance à une macrofissure responsable de la ruine de l'éprouvette. En géotechnique, l'apparition de failles sur le globe terrestre est la manifestation de ces bandes de localisation.

Quel que soit le matériau, la localisation des déformations se caractérise par un passage plus ou moins brutal d'un état de déformation homogène vers un état



Figure 1.1: *Bande de cisaillement dans un sable lors d'un essai triaxial, [Colliat-Dangus, 1986] d'après [Desrues et Chambon, 2002]*

localisé. Les déformations se concentrent dans des bandes de faible épaisseur alors que, dans le reste de l'éprouvette, elles évoluent peu, voire même diminuent. À ce stade, les gradients de déformations sont tels que l'éprouvette ne peut plus être envisagée que comme une structure. Le dépouillement des essais s'en trouve, alors, modifié : il doit tenir compte de différents modes de déformation du matériau.

Il est donc important de détecter correctement l'instant correspondant au passage en mode localisé. Ainsi, de nombreuses techniques expérimentales ont été développées, visant à identifier le basculement vers un état de déformation localisée.

Ces méthodes peuvent être classées en trois grandes catégories :

- les méthodes directes ;
- les méthodes quantitatives ;
- les méthodes par mesures de champ de déformation.

Les méthodes directes

Elles s'appuient sur l'observation visuelle et/ou microscopique [Wong, 1982] de l'éprouvette au cours du chargement. Ces techniques permettent non seulement de détecter la localisation de la déformation mais offrent également la possibilité par l'observation de l'évolution de l'échantillon de comprendre les mécanismes physiques qui conduisent à cette localisation.

Les méthodes quantitatives

Elles permettent de suivre l'évolution des déformations et de l'état de l'éprouvette en fonction de grandeurs physiques caractéristiques. Les méthodes les plus abondamment utilisées dans le contexte de la détection de la localisation sont l'émission acoustique et les ondes ultrasonores. Ces méthodes ont l'avantage de donner des informations sur l'évolution de l'état de déformation dans le volume, contrairement aux autres méthodes qui ne fournissent des informations que sur des surfaces de l'éprouvette. Parmi ces méthodes dites quantitatives, on peut également citer les méthodes par analyse thermographique infrarouge qui permettent l'analyse des phénomènes de localisation dans les matériaux métalliques élasto-plastiques.

- Les méthodes par émission acoustique [Lockner et al., 1992] s'appuient sur

le fait que l'apparition de déformations locales génère des pulsations acoustiques. L'instant de la localisation est caractérisé par une augmentation des déformations locales et donc également par une augmentation des émissions acoustiques (figure 1.2). Cette technique est plus particulièrement adaptée à l'étude de la localisation dans les matériaux quasi-fragiles pour lesquels les déformations locales sont générées par l'apparition de microfissures.

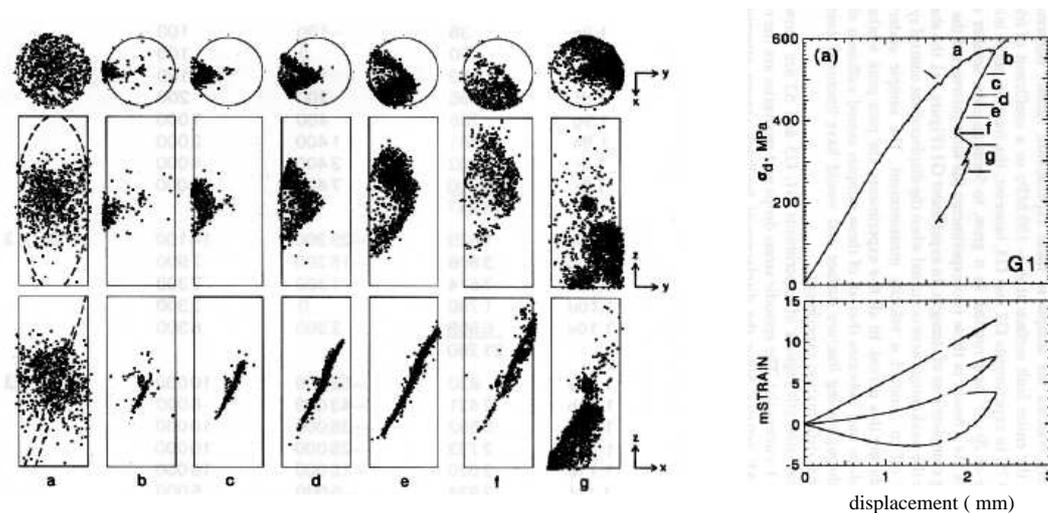


Figure 1.2: *Processus d'apparition de fissures dans un granite (de Westerly) lors d'un essai triaxial : localisation des événements acoustiques et courbe contrainte/déplacement, d'après [Lockner et al., 1992]*

- Les méthodes par ondes ultrasonores [Berthaud, 1987] s'appuient, quant à elles, sur la mesure de la vitesse de propagation des ondes élastiques dans le matériau. Cette propagation est perturbée par la présence d'hétérogénéités : la diffraction sur ces dernières entraîne une atténuation des ondes planes P et S. La mesure des vitesses de propagation fournit des indications sur le niveau d'endommagement de l'échantillon étudié.
- Enfin, pour les matériaux métalliques, la localisation des déformations se caractérise par une forte plastification dans la zone localisée. Or, les phénomènes de plastification sont accompagnés d'augmentations sensibles de la température liées aux phénomènes de dissipation. Ainsi, ont été développées des techniques reposant sur des mesures thermographiques [Louche et Chrysochoos, 2001]. Les champs de température sont directement reliés au niveau de dissipation dans l'échantillon, lui-même directement en correspondance avec les niveaux de déformations plastiques (voir figure 1.3). Contrairement aux méthodes quantitatives présentées précédemment, cette technique ne fournit, *a priori*, que des informations surfaciques.

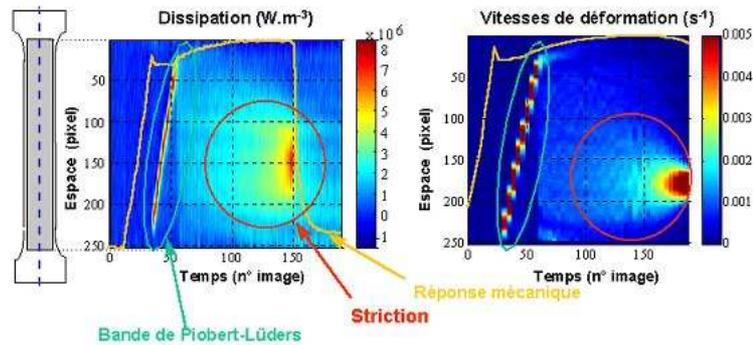
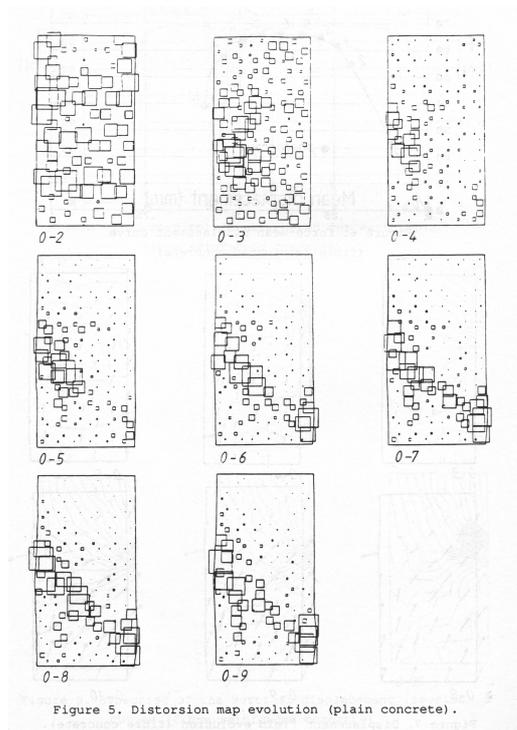
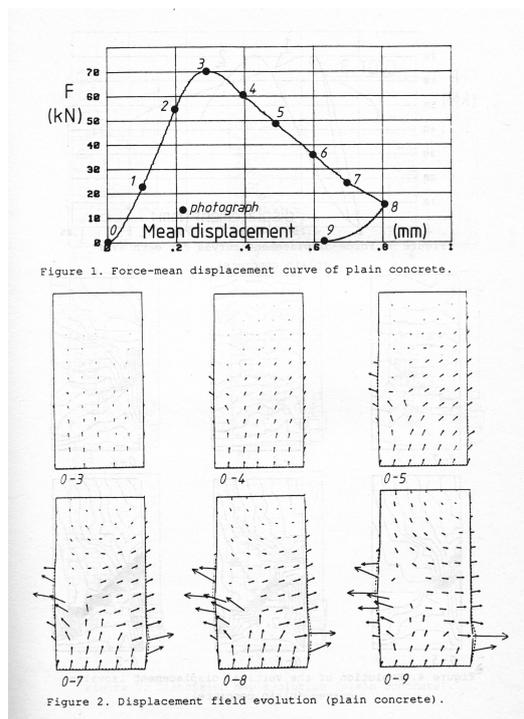


Figure 1.3: *Champ de dissipation et de vitesse de déformation pour un essai de traction simple sur un acier, d'après [Louche et Chrysochoos, 2001]*

Les méthodes de mesures de champs de déformation

Ces méthodes permettent de mesurer les champs de déplacement et/ou de déformation dans l'échantillon. En permettant le suivi de l'évolution des champs de déformation au cours de l'essai, elles permettent de détecter le seuil de localisation des déformations par la perte d'homogénéité du champ mesuré. Plusieurs méthodes de mesures de champs de déformation ont été développées parmi lesquelles :

- La stéréophotogrammétrie de faux relief [Butterfield et al., 1970], [Desrues, 1984], [Torrenti et al., 1988], [Desrues et Chambon, 2002]. Cette méthode repose sur l'analyse par vision stéréoscopique de photographies de l'échantillon prises à des instants différents sous un même angle. La déformation entre deux états consécutifs se matérialise par un faux relief. L'analyse de ces faux reliefs permet de construire une carte de déformation sur la surface de l'échantillon et ainsi de déterminer le seuil de localisation (voir figure 1.4).
- La granularité laser ou SPECKLE [Berthaud, 1991], [Bascoul et al., 1993]. Cette technique consiste à éclairer la surface de l'échantillon étudié par un faisceau de rayons parallèles (par exemple des rayons laser). Les rayons sont réfléchis sur la surface de l'échantillon. Or, les irrégularités de la surface de l'échantillon créent des interférences entre les rayons. La mesure de ces interférences permet de remonter aux déformations et ainsi, d'étudier la localisation de ces dernières. L'inconvénient majeur de la méthode réside dans la taille limitée de la zone d'étude par rapport à la taille de l'échantillon. La zone de localisation peut donc très bien se trouver en dehors de la zone d'étude.
- Les mesures multiples par jauges de déformation [Hadley, 1975], [Santarelli, 1990], [Haied et al., 2000]. Il s'agit dans ce cas de déterminer le seuil de localisation par la perte de linéarité des déformations transversales. Les capteurs de déformation sont placés de façon à fournir des mesures de déformations en différents points de l'éprouvette et dans différentes directions. La détection du seuil de localisation s'appuie alors sur le simple fait que, à la localisation, les champs de déformations perdent leur homogénéité.
- Les mesures de champs par corrélation d'images en lumière blanche [Hild et al., 2002]. Cette technique permet, par intercorrélation d'une image de référence avec une image déformée prise au cours du chargement (à l'aide d'une caméra



(a) Courbe effort/déplacement et champs de déplacement

(b) Champs de distorsion

Figure 1.4: *Détection de la localisation pour un essai de compression sur béton : 1.4(a) courbe effort /déplacement, champs de déplacement, 1.4(b) cartes de distorsion (obtenues par stéréophotogrammétrie), d'après [Torrenti et al., 1988]*

CCD) d'obtenir une carte du champ de déplacement de la zone observée. Par dérivation, une carte du champ de déformation peut également être obtenue. Il est alors possible de déterminer le lieu de la bande de localisation et, si un nombre suffisant d'images a été pris au cours du chargement, l'instant correspondant au passage en mode localisé. Ces techniques sont également utilisées pour déterminer l'apparition de fissures et en suivre l'évolution .

1.1.2 Aspects numériques de la localisation : limites des modèles continus locaux

Difficile à caractériser expérimentalement, la localisation des déformations constitue également une difficulté du point de vue théorique et numérique. Cette dernière met, en effet, en exergue les limites des modèles continus locaux. Nous nous proposons ici de mettre en évidence les difficultés posées par les phénomènes de localisation tant d'un point de vue purement mathématique que d'un point de vue numérique.

Pour ce faire, nous étudions, dans un premier temps, un problème unidimensionnel considérant un matériau adoucissant. Dans un deuxième temps, nous générali-

serons ces résultats à des cas bi- et tridimensionnels.

1.1.2.1 Un problème unidimensionnel

Les aspects mathématiques

Considérons une barre de longueur L et de section A , sollicitée en traction comme représenté sur la figure 1.5(a). L'une des extrémités est supposée fixe, l'autre étant laissée libre. Nous noterons F l'effort appliqué aux extrémités de la barre et u le déplacement de l'extrémité libre. Supposons, de plus, que le comportement du matériau constitutif de la barre est un comportement élasto-plastique présentant deux phases : une première phase élastique jusqu'à atteindre la contrainte σ_y et une deuxième phase adoucissante comme indiqué sur la figure 1.5(b).

Pour ce comportement, la fonction seuil peut être écrite :

$$\phi(\sigma, q) = |\sigma| - (\sigma_y - q) \quad (1.1)$$

où q est la variable associée à la variable interne ξ qui représente la déformation plastique cumulée. q est supposée s'écrire :

$$q = -K\xi \quad (1.2)$$

où K est le module d'adoucissement. Le module d'Young de la barre sera noté : E .

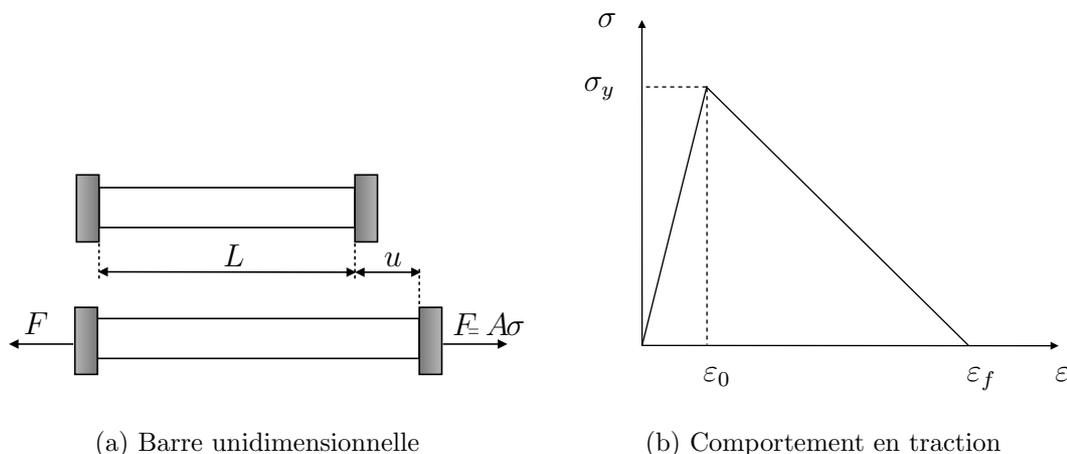


Figure 1.5: *Barre unidimensionnelle sollicitée en traction*

Notons que ce problème de traction simple sur une barre unidimensionnelle admet comme champ de contrainte solution un champ constant :

$$\forall x \in [0, L] \quad \sigma = \text{cste} \quad (1.3)$$

Cette remarque sera importante pour la suite du raisonnement : la contrainte peut être déterminée en tout point de la barre.

Avec les hypothèses précédentes sur le comportement du matériau, le chargement de la barre en traction présente deux phases distinctes.

La première phase correspond à la réponse élastique de la « structure » : tous les points sont sollicités dans la phase élastique du comportement :

$$\forall x \in [0, L] \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad (1.4)$$

La déformation reste homogène et constante tout le long de la barre. Il en est de même pour les contraintes. Ceci reste vrai jusqu'à atteindre la valeur de la contrainte σ_y correspondant à la limite élastique de notre matériau (ou de façon équivalente, la déformation ε_0), la barre entame alors la deuxième phase du comportement.

Si le chargement est poursuivi, la contrainte devant rester constante le long de la barre et vu le comportement supposé du matériau, la contrainte doit diminuer partout dans la barre. Ainsi, pour tout point de la barre, deux trajets de chargement sont possibles :

- une décharge élastique : la déformation et la contrainte diminuent ;
- le passage dans la phase adoucissante du comportement. Dans ce cas, les contraintes diminuent mais les déformations continuent de croître.

Notons h la longueur cumulée des points de la barre qui entrent dans la phase adoucissante du comportement. $L - h$ correspond à la longueur de la barre qui se décharge de façon élastique.

Ainsi, le déplacement u à l'une des extrémités de la barre (l'autre étant supposée fixe) peut s'écrire :

$$u = (L - h) \frac{F}{EA} + h \left(\varepsilon_f - \frac{F}{A} \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_0}{\sigma_y} \right) \quad (1.5)$$

La réponse de la barre en terme d'effort F - déplacement u est ainsi complètement déterminée par la longueur h de barre qui entre dans la phase adoucissante du comportement.

Or, pour une barre supposée homogène initialement, chargée de façon homogène, rien ne permet de déterminer cette grandeur h . Le problème est donc mal posé : il admet une infinité de solutions (autant que de valeurs de h). La figure 1.6 donne une représentation de la réponse effort-déplacement à l'extrémité libre de la barre en fonction de h/L . On constate que la solution est bien évidemment largement dépendante de h/L et que, à la limite, pour $h \rightarrow 0$, la barre peut casser sans dissiper d'énergie (l'aire sous la courbe est nulle).

Dans la pratique, ce sont les défauts du matériau, de la barre (changement de section, ...), du chargement qui décident de cette grandeur h .

Nous avons ainsi mis en évidence le caractère mal posé d'un problème unidimensionnel considérant un matériau adoucissant *i.e* pour lequel, dans le cas 1D, la relation $\sigma - \varepsilon$ n'est pas bijective.

Les aspects numériques

Considérons toujours l'exemple précédent d'une barre unidimensionnelle sollicitée en traction. Une modélisation EF de la barre est réalisée en considérant différentes finesses de maillage. La barre est supposée encastrée à l'une de ses extrémités, l'autre étant soumise à un déplacement imposé u .

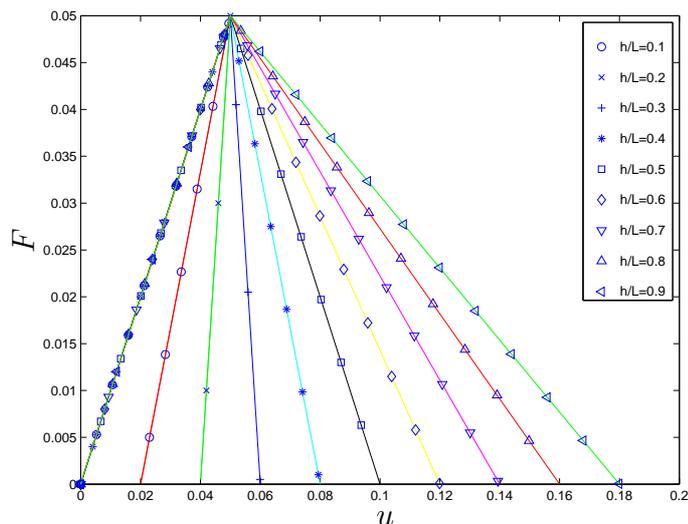


Figure 1.6: Réponse effort-déplacement de la barre en fonction de h/L ($E = 1$, $A = 1$, $\sigma_y = 0.05$ et $\varepsilon_f = 0.2$)

Afin de modifier le problème de bifurcation en un problème de point limite, un élément est affaibli : il s'agira ici de l'élément central de la barre. Sa limite élastique sera prise égale à 99% de la limite élastique du reste de la barre.

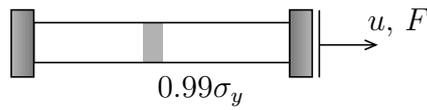
Les calculs sont menés en considérant 5 maillages différents : 3, 7, 15, 25 et 47 éléments. Les résultats en terme de déplacement imposé à l'extrémité libre/effort sont donnés sur la figure 1.7(b). La figure 1.8 donne le profil des déformations le long de la barre pour un déplacement à l'extrémité libre donné.

On constate que la solution dépend pathologiquement du nombre d'éléments choisi pour mailler le problème. Plus le maillage est fin, moins la barre dissipe d'énergie pour se rompre et plus son comportement se rapproche d'un comportement quasi-fragile. On constate également sur la figure 1.8 que toute la déformation se concentre dans un seul élément : l'élément affaibli. Ainsi, seul cet élément entre dans la phase adoucissante du comportement, tous les autres se déchargeant de façon élastique. La dissipation se trouve donc concentrée dans cet élément. Une simple analyse permet d'écrire cette dernière sur un intervalle de temps $[0, t]$ sous la forme :

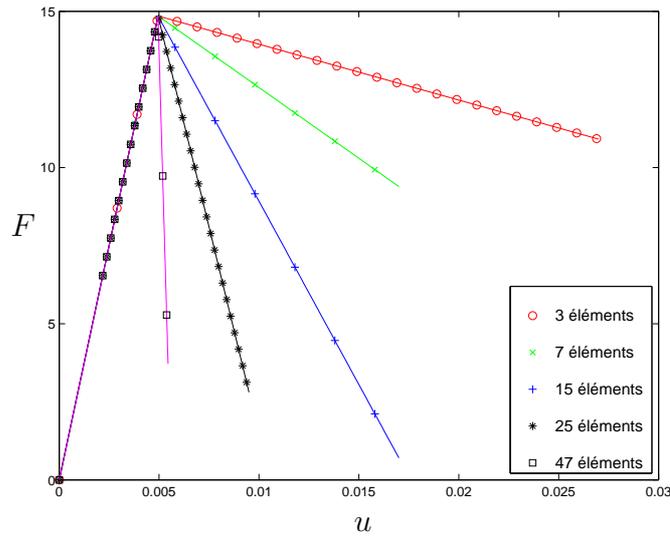
$$\mathcal{D}_{totale} = \int_0^h \int_{t=0}^t \sigma_y \frac{E}{E+K} \dot{\varepsilon} \text{signe}(\sigma) dx dt \quad (1.6)$$

où h correspond à la taille cumulée des éléments qui sont entrés dans la phase adoucissante du comportement. Notons que l'intégrande est borné. Ainsi, lorsque la taille des éléments h tend vers 0, la dissipation dans la barre tend, elle aussi, vers 0. On aboutit alors à un paradoxe : la barre se casse sans dissiper d'énergie.

La solution du problème éléments finis issu du problème continu décrit précédemment et dont nous avons montré le caractère mal posé, est donc pathologiquement dépendante de la discrétisation éléments finis choisie. Cette dépendance au maillage est à relier au caractère mal posé du problème continu (perte d'unicité de la solution) lié, dans notre cas, à la non-bijektivité du comportement matériau choisi.



(a) Barre en traction sollicitée en déplacement imposé



(b) Réponse effort/déplacement imposé à l'extrémité libre de la barre

Figure 1.7: Influence de la finesse de maillage sur la réponse effort/déplacement d'une barre en traction

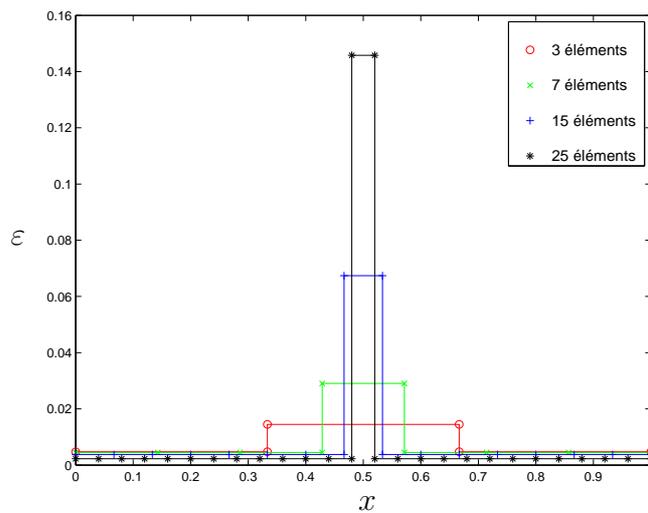


Figure 1.8: État de déformation dans la barre en fonction du nombre d'éléments ($u = 0.008$)

1.1.2.2 Unicité et stabilité des matériaux anélastiques

Nous venons de mettre en évidence les problèmes numériques et mathématiques engendrés par l'utilisation de comportements unidimensionnels adoucissants. Nous nous proposons de voir, dans cette partie, quelles sont les conditions qui conduisent à un problème mal posé dans le cas général d'un problème tri-dimensionnel. Ces conditions sont dites « conditions de bifurcation ». De nombreux travaux ont été réalisés, dans ce cadre, afin de déterminer, pour différentes classes de comportements de matériaux, les conditions de localisation conduisant à un problème mal posé d'un point de vue continu. Nous nous limiterons ici à exposer les conditions de localisation dans le cadre des matériaux indépendants du temps.

Condition d'unicité pour les solides finis

L'étude de la localisation pour les lois de comportement indépendantes du temps est en grande partie due aux travaux de Hadamard [Hadamard, 1903], Hill [Hill, 1958], [Hill, 1962], Thomas [Thomas, 1961], Mandel [Mandel, 1966] et Rice [Rice, 1976].

Considérons un domaine Ω soumis à des efforts volumiques \mathbf{b} , à des efforts imposés \mathbf{h} sur une partie de sa frontière : $\partial_t\Omega$ et à des déplacements imposés \mathbf{g} sur une partie $\partial_u\Omega$ de sa frontière (voir figure 1.9). $\partial_t\Omega$ et $\partial_u\Omega$ sont telles que :

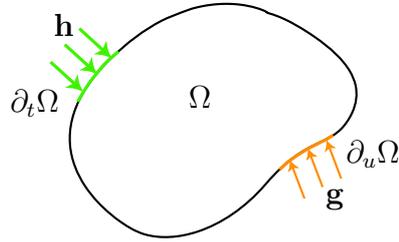


Figure 1.9: *Domaine Ω , conditions aux limites en efforts et déplacements*

$$\partial_t\Omega \cup \partial_u\Omega = \partial\Omega \quad \text{et} \quad \partial_t\Omega \cap \partial_u\Omega = \emptyset \quad (1.7)$$

Soit $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$, la vitesse dans le solide Ω .

Supposons, par ailleurs, que la loi de comportement du matériau considéré s'écrit sous forme incrémentale :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \quad (1.8)$$

où,

$$\mathbf{L} = \begin{cases} \mathbf{C} & \text{si le matériau se charge ou se décharge de façon élastique} \\ \mathbf{H} & \text{si le matériau se charge de façon anélastique} \end{cases} \quad (1.9)$$

et,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \nabla^s \mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) \quad (1.10)$$

Dans ces conditions, l'équation d'équilibre s'écrit sous forme incrémentale :

$$\mathbf{div} [\mathbf{H} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})] + \dot{\mathbf{b}} = 0 \quad (1.11)$$

et les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = [\mathbf{H} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})] \cdot \mathbf{n} = \dot{\mathbf{h}} & \text{sur } \partial_t \Omega \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{g}} & \text{sur } \partial_u \Omega \end{cases} \quad (1.12)$$

La forme faible de ces équations donne alors :

$$\forall \hat{\mathbf{v}} \in CA_0, \quad \int_{\Omega} \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega = \int_{\partial_t \Omega} \dot{\mathbf{h}} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega = 0 \quad (1.13)$$

où CA_0 est l'espace des déplacements cinématiquement admissibles à 0.

Afin de tester l'unicité de la solution, considérons deux champs solutions du problème en vitesse : \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 , ceux-ci vérifient la forme faible des équations d'équilibre écrite précédemment. Nous noterons $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1$ et $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2$ les champs de contrainte associés respectivement à chacun de ces deux champs de vitesse.

On peut donc écrire,

$$\forall \hat{\mathbf{v}} \in CA_0, \quad \int_{\Omega} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1 - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_2) : \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega = 0 \quad (1.14)$$

Soit, en particulier pour le champ de vitesse virtuel $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ cinématiquement admissible à 0 (les deux champs vérifient les mêmes conditions aux limites sur la frontière $\partial_u \Omega$) :

$$\int_{\Omega} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1 - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_2) : [\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2)] d\Omega = 0 \quad (1.15)$$

En se rappelant que :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \quad (1.16)$$

et en notant respectivement \mathbf{L}_1 et \mathbf{L}_2 les modules tangents associés aux champs de vitesse solutions \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 , on obtient :

$$\int_{\Omega} [\mathbf{L}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1) - \mathbf{L}_2 : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2)] : [\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2)] d\Omega = 0 \quad (1.17)$$

Notons alors $\mathcal{I}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ la fonctionnelle définie par :

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \int_{\Omega} [\mathbf{L}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1) - \mathbf{L}_2 : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2)] : [\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2)] d\Omega \quad (1.18)$$

L'unicité de la solution au problème en vitesse est donc assurée par :

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \neq 0 \quad \text{pour } \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \quad (1.19)$$

En fait, on peut montrer que cette condition d'unicité peut toujours s'écrire :

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) > 0, \quad \forall (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in CA \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \quad (1.20)$$

Dans [Hill, 1958], [Hill, 1962], l'auteur a montré que, lorsque le module \mathbf{L} est symétrique, la fonctionnelle $\mathcal{I}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ est toujours supérieure ou égale à la fonctionnelle $\mathcal{H}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. \mathcal{H} est écrite en considérant *le solide linéaire de comparaison* pour lequel il n'y a pas de décharge permise : le matériau se charge uniformément avec le module tangent : \mathbf{H} .

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \geq \mathcal{H}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \int_{\Omega} [\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2)] : \mathbf{H} : [\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2)] d\Omega \quad (1.21)$$

Le critère de Hill fournit donc une condition suffisante d'unicité de la solution au problème en vitesse sur le solide réel : si l'unicité du problème est vérifiée sur le solide linéaire de comparaison, alors, elle l'est aussi pour le solide réel.

Une condition plus forte consiste à imposer que l'intégrande est en tout point positif :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{H} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) > 0 \quad (1.22)$$

Ceci fournit une condition suffisante d'unicité pour le solide linéaire de comparaison.

La condition (1.22) est vraie si le module \mathbf{H} est défini strictement positif.

Ainsi, la condition :

$$\exists \mathbf{n} \quad | \quad \det(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (1.23)$$

constitue une borne inférieure de la bifurcation dans le solide linéaire de comparaison et, par conséquent (en raison de (1.21)), également pour le solide réel. Cette condition correspond à la perte d'ellipticité des équations d'équilibre pour le solide linéaire de comparaison, elle s'interprète physiquement comme l'apparition d'une onde stationnaire de normale \mathbf{n} [Hill, 1962].

Ces résultats issus de la théorie de Hill [Hill, 1958] ont été généralisés à la détermination de la stabilité et des critères de bifurcation pour les systèmes irréversibles obéissant au principe de dissipation maximale [Nguyen, 1984], [Nguyen, 1987].

Condition d'apparition de zones de localisation

Nous venons de voir quelles sont les conditions qui conduisent à un problème mal posé. Nous souhaitons ici écrire les conditions d'apparition de bandes de localisation. Nous considérons ici des matériaux indépendants du temps et de la température. Le taux de contrainte est une fonction homogène de degré 1 du taux de déformation.

Comme nous l'avons vu précédemment, la localisation des déformations se caractérise par le passage d'un état de déformation homogène à un état de déformation hétérogène localisé. Le problème posé ici est d'écrire les conditions sous lesquelles il est possible d'obtenir, dans un solide homogène soumis à un chargement homogène, un champ de déformation localisé. Les travaux sur ce sujet ont été en grande partie initiés par Rice [Rice, 1976].

Considérons, pour cela, un domaine Ω homogène, déformé de façon homogène. Ω est soumis, de façon quasi-statique, à un incrément de déformation qui génère des taux de contraintes solutions du problème :

$$\begin{cases} \mathbf{div} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{b}} = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\mathbf{h}} & \text{sur } \partial_t \Omega \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{g}} & \text{sur } \partial_u \Omega \end{cases} \quad (1.24)$$

L'objectif, ici, est de déterminer sous quelles conditions peut apparaître une bande de localisation, c'est-à-dire une surface de discontinuité du taux de déformation.

Nous noterons Γ_s cette surface de discontinuité et \mathbf{n} le vecteur normal à cette surface. Γ_s coupe le domaine Ω en deux sous-domaines : Ω^+ et Ω^- (voir figure 1.10).

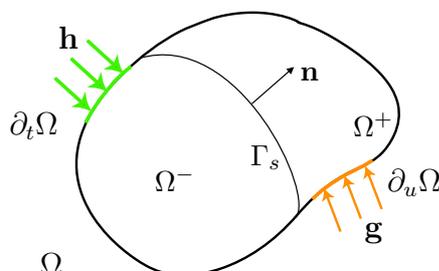


Figure 1.10: *Domaine Ω et surface de discontinuité du champ de taux de déformation*

Les conditions de continuité des taux de contraintes normales à travers la surface de discontinuité s'écrivent :

$$[[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (1.25)$$

et les conditions de compatibilité de Maxwell imposent que le taux de déformation vérifie :

$$[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \quad (1.26)$$

où \mathbf{m} est un vecteur non nul. Si \mathbf{m} est orthogonal à \mathbf{n} , on parle de bande de cisaillement, si \mathbf{m} est colinéaire à \mathbf{n} , il s'agit d'un mode I d'ouverture.

Si on considère le solide linéaire de comparaison, la loi de comportement écrite sous forme incrémentale s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{H} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.27)$$

Ainsi, pour le solide linéaire de comparaison, la condition d'apparition d'une bande de localisation s'obtient en combinant les équations (1.25), (1.26) et (1.27) sous la forme :

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (1.28)$$

$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{n})$ est le tenseur acoustique pour le solide linéaire de comparaison.

Ceci revient à écrire :

$$\det(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (1.29)$$

Cette condition n'est autre que la condition de perte d'ellipticité des équations d'équilibre pour le solide linéaire de comparaison.

Dans le cas du solide réel, la loi de comportement s'écrit sous forme incrémentale :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.30)$$

avec

$$\mathbf{L} = \begin{cases} \mathbf{C}, & \text{en élasticité} \\ \mathbf{H}, & \text{pour un chargement anélastique} \end{cases} \quad (1.31)$$

Nous noterons \mathbf{L}^- , le module dans Ω^- et \mathbf{L}^+ , le module dans Ω^+ .

Ainsi, en utilisant les équations (1.25), (1.26) et (1.31), on obtient finalement la condition d'apparition d'une surface de discontinuité du champ de taux de déformation sous la forme :

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}^+ \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} + ([\mathbf{L}] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^-) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (1.32)$$

Si $[\mathbf{L}] = \mathbf{0}$ et $\mathbf{L} = \mathbf{H}$, on parle de bifurcation plastique-plastique (le cas $[\mathbf{L}] = \mathbf{0}$ et $\mathbf{L} = \mathbf{C}$ ne peut pas être envisagé en raison du caractère strictement défini positif du module d'élasticité \mathbf{C}).

Dans le cas contraire, on parle de bifurcation élastique-plastique : une partie du domaine se décharge de façon élastique alors que l'autre partie se charge de façon anélastique.

Rice et Rudnicki [Rice et Rudnicki, 1980] ont montré que si le module d'écroutissage est monotone décroissant en charge anélastique, la bifurcation élastique-plastique n'apparaît qu'après la bifurcation plastique-plastique. Ainsi, la condition :

$$\exists \mathbf{n} \quad | \quad \text{le tenseur acoustique } (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \text{ est singulier} \quad (1.33)$$

constitue une condition nécessaire et suffisante de bifurcation en mode localisé pour le solide réel.

Les conditions de localisation ont été largement étudiées, de nombreuses publications sur le sujet ont permis de les préciser pour des classes de comportement très larges [Benallal et al., 1991] allant des matériaux élasto-plastiques [Runesson et al., 1991] en comportement associé ou non associé, aux matériaux granulaires [Laouafa et Darve, 2002], [Servant et al., 2003], ou encore aux lois de comportement endommageables [Ortiz, 1987], [Rizzi et al., 1995], [Carol et Willam, 1997].

1.1.2.3 Bifurcation et problèmes discrétisés : non-objectivité de la solution

Nous venons de voir que les modèles continus locaux peuvent présenter, dans certaines conditions que nous avons brièvement précisées, une perte d'unicité de la solution : les équations d'équilibre écrites sous forme incrémentale constituent un problème mal posé. Le nombre de solutions du problème étant infini, il n'est pas possible, après détection de l'apparition de la localisation, de prédire le comportement post-bifurcation de la structure. Ceci est, en particulier, lié au fait que les modèles continus locaux classiques ne contiennent pas « intrinsèquement » de longueur caractéristique. Ainsi, il est impossible de prédire la taille des zones de localisation, lorsque celles-ci sont détectées.

Lorsque de tels comportements sont modélisés par une approche éléments finis, le problème se trouve modifié. En effet, les approximations EF classiques imposent que les champs de déplacements et de déformations restent continus dans un même élément, les discontinuités du champ de déformation sont alors repoussées aux frontières des éléments. Une longueur « caractéristique » apparaît alors naturellement lors de l'approximation EF : la taille des éléments.

Ainsi, lors du calcul EF d'une structure pour laquelle une zone de localisation apparaît, la taille de la zone de localisation est prise, en raison même de la nature des interpolations EF, égale à la taille des éléments. Le calcul peut alors être poursuivi dans la phase post-localisation et les déformations se trouvent confinées dans

une rangée d'éléments. La dissipation se trouve alors également confinée dans cette même rangée d'éléments. Lorsque le maillage de la structure est raffiné, la taille des éléments diminuant, la taille de la zone de localisation diminue elle aussi et la dissipation se trouve concentrée dans un volume (ou une surface, selon le type de problème traité) dont la mesure tend vers 0. On met ainsi en évidence une dépendance pathologique de la solution à la discrétisation EF en terme de taille des éléments mais, également, en terme d'orientation, de nature, de distorsion des éléments (voir figure 1.11). Le « paradoxe » réside alors dans le fait qu'une structure peut, dans la limite où la taille des éléments tend vers 0, casser sans dissiper globalement d'énergie alors qu'une énergie finie a été dissipée dans les éléments dans lesquels la déformation s'est concentrée.

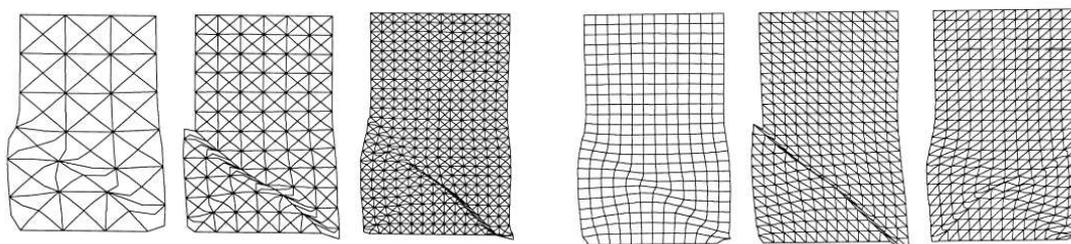


Figure 1.11: *Mise en évidence de la dépendance de la solution à la discrétisation EF, d'après [Sluys, 1992]*

Comme nous venons de le voir, la dépendance de la solution à la discrétisation EF est directement liée à l'absence de longueur interne dans les modèles continus locaux classiques. Pour remédier à cette dépendance de la solution au maillage, il est donc nécessaire de régulariser les équations afin de les rendre bien posées et d'introduire une longueur caractéristique qui permettra de gérer la taille de la zone de localisation lorsque celle-ci est détectée.

1.2 Extension des modèles locaux : traitement de la non-objectivité

Nous venons de montrer que lorsqu'un état bifurqué est atteint, la solution perd son unicité : le problème est mal posé. D'un point de vue éléments finis, cette perte d'unicité de la solution se traduit par une dépendance pathologique de la solution à la discrétisation éléments finis choisie.

Afin de s'affranchir de ces problèmes numériques, différentes méthodes dites « limiteurs de localisation » ont été développées. Nous nous proposons ici de les passer en revue en s'attachant particulièrement à mettre en évidence à la fois leurs points positifs et leurs aspects négatifs. Ces méthodes ont pour objectif de régulariser les équations de façon à pallier les problèmes de dépendance au maillage. Pour cela, deux voies peuvent être adoptées : la première consiste à intervenir au niveau du modèle numérique, la deuxième consiste à intervenir dès l'écriture du modèle continu de façon à assurer l'unicité de la solution.

1.2.1 Modèles à conservation de l'énergie de fissuration

Cette approche a été introduite par des travaux de [Dugdale, 1960] et [Barenblatt, 1962]. L'approche la plus simple qui ait été envisagée est d'ajuster la partie adoucissante du comportement en fonction de la taille des éléments de façon à assurer l'objectivité de la solution par rapport au maillage choisi [Pietruszczak et Mróz, 1981], [Bažant et Oh, 1983]. Dans ce cas, une longueur caractéristique est introduite dans les éléments, longueur à l'intérieur de laquelle se concentrent les déformations anélastiques. Cette longueur permet de régulariser les équations du modèle continu et donc de traiter les problèmes de dépendance au maillage.

Une approche similaire s'appuyant sur la mécanique de la rupture non linéaire a été introduite par [Hillerborg et al., 1976] sous le nom : « fictitious crack model » pour les matériaux quasi-fragiles et par [Needleman, 1987] pour les matériaux élastoplastiques sous l'intitulé « cohesive zone models ».

Pour les matériaux quasi-fragiles, l'idée est d'imposer une énergie de fissuration G_f indépendante de la taille des éléments. L'hypothèse de base consiste à considérer que la « fracture process zone » est traversée par une ligne de discontinuité du déplacement. En notant t_n la traction normale transmise par la discontinuité et w l'ouverture de la fissure, t_n est supposée être une fonction de w :

$$t_n = f(w) \tag{1.34}$$

L'aire sous la courbe $f(w)$ représente l'énergie de fissuration : l'énergie nécessaire par unité d'aire de la surface de discontinuité pour obtenir une complète décohésion. La discontinuité n'est alors pas considérée comme telle mais répartie sur une longueur caractéristique L_c . Le saut de déplacement est alors transformé en une déformation anélastique sur une longueur L_c . Cette longueur L_c est prise égale à la taille des éléments qui correspond à la taille de la bande de localisation telle que déterminée par le calcul EF. Les paramètres matériaux de la partie adoucissante de la loi de comportement sont alors choisis de telle façon que l'énergie dissipée pour « casser » un élément reste la même que celle obtenue par la mécanique de la rupture non linéaire.

L'avantage de telles méthodes est qu'elles sont relativement faciles à implanter : il « suffit » d'ajuster les paramètres de la loi de comportement à la taille des éléments. L'inconvénient réside dans le fait que, de ce fait, les paramètres matériaux dépendant du maillage, perdent toute signification physique. De plus, chaque calcul réalisé avec un maillage différent demande un traitement différent, les paramètres matériaux devant être recalculés pour chaque discrétisation EF.

1.2.2 Modèles continus généralisés : modèles de Cosserat

Cette approche s'appuie sur les travaux des frères Cosserat [Cosserat et Cosserat, 1909]. L'idée est d'introduire, en chaque point matériel du milieu, des degrés de liberté de rotation supposés indépendants des déplacements. Aux équations d'équilibre classiques vient, alors, s'ajouter une équation d'équilibre sur les moments qui permet de gérer les degrés de liberté ajoutés. Cette approche a été reprise par [Muhlhaus et Vardoulakis, 1987] et [De Borst et al., 1993] pour traiter les problèmes de localisation. La description du comportement d'un tel matériau nécessite alors

l'introduction d'un module de flexion par l'intermédiaire duquel une longueur caractéristique est naturellement introduite dans le milieu.

La régularisation des équations est assurée par l'introduction de cette longueur caractéristique qui correspond à la taille des grains. Le degré de liberté de rotation permet alors de décrire les mouvements de rotation des grains dans la bande de localisation.

Il est à noter que le degré de liberté supplémentaire entraîne une modification de l'écriture du comportement du matériau, non seulement dans la phase adoucissante, mais également dans la phase pré-pic. D'autre part, ces modèles ne présentent pas de difficultés d'implantations particulières. En revanche, les mécanismes sous-jacents (rotation des grains) pris en compte ne permettent une utilisation de ces modèles que pour la description du comportement des matériaux élasto-plastiques ou granulaires pour lesquels les phénomènes de localisation se manifestent par l'apparition de bandes de cisaillement. Ces modèles ne sont en aucun cas adaptés à la description de la rupture des matériaux quasi-fragiles.

1.2.3 Modèles dépendant du temps

Les phénomènes de localisation sont des phénomènes dynamiques : les vitesses de déformations dans les bandes de localisation peuvent en témoigner (voir la figure 1.3). Or, l'introduction des effets de vitesse a un effet régularisant. Les modèles que nous nous proposons de présenter dans cette partie s'appuient sur ce constat. L'introduction de paramètres de viscosité permet d'obtenir une longueur caractéristique qui régularise le problème : les équations restent hyperboliques, le problème est bien posé. Cette approche a été développée dans le cadre des matériaux élasto-plastiques par [Needleman, 1988]. Elle a également été adaptée aux matériaux élasto-endommageables (voir par exemple [Dubé et al., 1996]).

Pour ces modèles, les difficultés résident dans le choix du paramètre de viscosité : il ne s'agit pas forcément d'une propriété du matériau mais bien souvent d'un paramètre numérique régularisant. D'autre part, la prise en compte d'effets de vitesse s'accompagne de l'introduction de temps caractéristiques (qui, tout comme le paramètre de viscosité, n'ont pas forcément de réalité physique bien identifiée) ce qui impose des pas de temps limites pour le calcul.

Parmi ces modèles dépendant du temps, nous pouvons également citer les modèles à effet retard [Allix et Deü, 1997], [Deü, 1997]. Ces modèles ont été développés dans le cadre de l'endommagement des composites sous sollicitations dynamiques. A l'instar des méthodes visco-régularisantes précédentes, ces modèles introduisent un paramètre de viscosité, dans ce cas, dans la loi d'évolution de l'endommagement. Cependant, le point clé de ce modèle réside dans l'introduction d'un taux d'endommagement limite ce qui revient à introduire un temps critique minimal de propagation de l'endommagement.

1.2.4 Modèles non-locaux

Cette technique de régularisation a été introduite par Pijaudier-Cabot et Bazant [Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987] puis développée ensuite pour différents types de lois de comportement.

De façon très schématique, cette approche consiste à remplacer une ou plusieurs variables locales du modèle par sa moyenne sur un voisinage du point considéré.

En notant $f(\mathbf{x})$ une variable locale du modèle sur le domaine Ω , la variable non-locale qui lui est associée est calculée par :

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \omega(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \quad (1.35)$$

où $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ est une fonction de pondération dépendant du point considéré.

Cette fonction de pondération est très souvent prise égale à une gaussienne :

$$\omega(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \exp\left(\frac{-\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2}{2\ell_c^2}\right) \quad (1.36)$$

La longueur ℓ_c correspond à la longueur caractéristique du modèle non-local. L'un des inconvénients de ce type de technique de régularisation est que le modèle non-local est très sensible au choix de la fonction de pondération ω [Planas et al., 1993].

En outre, le choix de la longueur caractéristique est loin d'être aisé et constitue un point clé de la méthode dans la mesure où c'est précisément cette longueur qui caractérise la taille du voisinage « d'influence » d'un point donné.

D'autre part, l'implantation numérique de tels modèles est loin d'être triviale et nécessite des modifications importantes de l'architecture globale du code de calcul. En effet, en raison du caractère non-local du modèle, les quantités en un point ne peuvent être connues que par l'intermédiaire de la connaissance de ces mêmes quantités dans le voisinage du point considéré, voisinage dont la taille est indépendante de la taille des éléments. Ainsi, si dans le cas de modèles continus locaux, le comportement peut être calculé localement au niveau de chaque point d'intégration, dans le cas des modèles non-locaux, les éléments doivent pouvoir « communiquer » les uns avec les autres, de façon à correctement évaluer les quantités non-locales.

1.2.5 Modèles à gradient

Deux types de modèles à gradient ont été développés :

- la théorie du second gradient ;
- les modèles à gradient de variables internes.

La théorie du second gradient

Il s'agit d'intervenir dans ce cas, dès l'écriture des équations d'équilibre, en supposant que la puissance des efforts intérieurs dépend non seulement du taux de déformation mais également du gradient de la vitesse. Ainsi, la micro-structure sous-jacente à chaque point matériel est prise en compte par l'introduction d'une cinématique enrichie. En un point du domaine Ω considéré, les variables cinématiques considérées sont :

- le taux de déformation : $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \nabla^s \mathbf{v}$ (premier gradient des vitesses) ;
- le gradient des taux de déformation : $\nabla \nabla \mathbf{v}$ (second gradient des vitesses).

À chacun de ces champs sont associés des champs duaux, respectivement :

- le tenseur des contraintes : $\boldsymbol{\sigma}$;

– un tenseur de contraintes d'ordre 3 : $\boldsymbol{\tau}$.

La puissance des efforts intérieurs s'écrit alors :

$$\mathcal{P}_{int} = - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \nabla \mathbf{v}) d\Omega \quad (1.37)$$

L'application du principe des puissances virtuelles permet alors d'écrire l'équation d'équilibre local sous la forme (en statique) :

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{div} \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (1.38)$$

Les conditions aux limites en effort se trouvent également modifiées, elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{div} \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{h} \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{m} \end{aligned} \quad (1.39)$$

où \mathbf{m} est une densité surfacique de moment.

Les fondements théoriques de ces modèles ont été jetés par Toupin [Toupin, 1962] et Mindlin [Mindlin, 1964] et repris par Germain [Germain, 1973] qui étend l'application du principe des puissances virtuelles aux gradients d'ordre supérieur. Ainsi, le modèle est écrit dans un cadre thermodynamique rigoureux. Il est à noter que les modèles de Cosserat présentés précédemment peuvent être interprétés comme un cas particulier de la théorie du second gradient pour lequel seulement certains gradients des vitesses sont retenus. L'essentiel des travaux réalisés dans ce cadre traitent de comportements adoucissants hyperélastiques [Triantafyllidis et Aifantis, 1986]. Cependant, peu de travaux concernent l'utilisation de tels modèles dans le cadre de comportements anélastiques [Chambon et al., 2001].

S'appuyant sur le cadre thermodynamique strict proposé par Germain, Frémond et Nedjar [Frémond et Nedjar, 1996] ont étendu la théorie du second gradient aux modèles d'endommagement : l'endommagement est représenté par un déplacement microscopique considéré comme lié à l'endommagement du matériau. D'autres auteurs ont développé des modèles comparables s'appuyant sur l'introduction de l'évolution de la porosité du milieu [Pijaudier-Cabot et Burlion, 1996], souvent dans un cadre thermodynamique moins rigoureux que celui proposé initialement par Germain. Dans tous les cas, les équations sont régularisées par l'enrichissement de la cinématique.

L'inconvénient de tels modèles réside dans l'écriture des conditions aux limites qui sont difficiles à évaluer. En outre, l'implantation numérique nécessite l'utilisation d'EF adaptés pour lesquels la prise en compte du second gradient des vitesses est rendue possible. Cela a pour conséquence d'alourdir les calculs réalisés avec ce type de méthodes.

Les modèles à gradient de variables internes

Dans ce cas, il s'agit de régulariser le problème en ajoutant dans les équations du modèle, le gradient des variables internes. Parmi ces approches à gradient de variables internes, on peut distinguer deux catégories :

- les modèles à gradient explicites ;

– les modèles à gradient implicites.

Les modèles à gradient explicites :

Dans ce cas, il s'agit d'introduire directement le gradient de certaines variables internes dans les équations constitutives et lois d'évolution du modèle. Ce type de modèle peut être interprété comme le symétrique des modèles non-locaux, présentés précédemment, par rapport aux modèles continus locaux classiques. En effet, alors que dans le cas des modèles non-locaux il s'agit de remplacer, dans les équations du modèle, les variables internes par leur convolution sur un voisinage spatial donné, dans le cas des modèles à gradient, il s'agit d'introduire dans les équations du modèle, les dérivées spatiales de ces mêmes variables internes.

Cette approche a été, dans un premier temps, développée dans le cadre de la plasticité à écrouissage négatif [Muhlhaus et Aifantis, 1991], [de Borst et Muhlhaus, 1992].

Pour ce type de modèle, le Laplacien de la variable d'écrouissage (déformation plastique cumulée) est introduit dans la définition du seuil de plasticité. En notant ξ la variable d'écrouissage et q sa variable duale, le seuil de plasticité s'écrit :

$$\sigma_{seuil}(\xi) = \sigma_y - q(\xi) = \sigma_y + K(\xi + \ell^2 \Delta \xi) \quad (1.40)$$

où Δ note le Laplacien et ℓ est une longueur caractéristique.

Avec ce type d'expression pour le seuil de plasticité, la condition de cohérence va s'écrire sous la forme d'une équation différentielle du second ordre. Se pose alors le problème de la définition des conditions aux limites : il est, en effet, difficile de déterminer les frontières de la zone de localisation sur lesquelles sont définies les conditions aux limites de l'équation différentielle. D'autre part, la présence des gradients d'ordre 2 des variables internes dans les équations rend l'implantation numérique du modèle peu aisée.

Il est à noter que ce type de méthode de régularisation ne modifie les équations du modèle continu classique que lorsque la localisation a été détectée : tant que les déformations plastiques restent homogènes dans la structure, $\Delta \xi$ reste nul ce qui conduit aux équations classiques.

Les modèles à gradient implicites :

Ces modèles ont été initialement développés dans le cadre de l'endommagement, [Peerlings et al., 1996]. Il s'agit, dans ce cas, non pas d'introduire directement le gradient des variables internes dans les équations mais de définir à partir des variables locales, des variables « non-locales » solutions d'une équation différentielle du second ordre.

Dans le cas du modèle à gradient d'endommagement développé par Peerlings [Peerlings et al., 1996], la force thermodynamique associée à l'endommagement, Y , est remplacée par \bar{Y} définie comme la solution de :

$$\begin{cases} \bar{Y} - \ell^2 \Delta \bar{Y} = Y & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \partial \Omega \end{cases} \quad (1.41)$$

ℓ est une longueur caractéristique, elle permet la régularisation des équations et la définition d'une taille de zone de localisation.

Comme cela a été montré par Peerlings [Peerlings et al., 2001], ces modèles sont proches des modèles non-locaux. Ils sont, en fait, équivalents si la fonction de pondération introduite dans la convolution pour les modèles non-locaux ω est prise égale à la fonction de Green.

Ces modèles ont été plus récemment repris pour décrire la localisation de la déformation dans le cas de la plasticité [Lorentz, 1999], [Engelen et al., 2003].

Là encore, se pose le problème du traitement des conditions aux limites.

1.2.6 Modèles à discontinuités

Ces approches ne cherchent pas à décrire finement les bandes de localisation, mais plutôt, à prendre en compte leurs effets à l'échelle de la structure. La régularisation est assurée par l'enrichissement de la cinématique du milieu continu en permettant l'apparition de surfaces de discontinuité du champ de déformation ou du champ de déplacement. Parmi les méthodes dites « limiteurs de localisation », ces techniques de régularisation sont parmi les plus récemment développées.

1.2.6.1 Discontinuités faibles

L'idée des modèles à discontinuités faibles a été introduite initialement par les travaux de Pietruszczak et Mróz [Pietruszczak et Mróz, 1981] puis Ortiz [Ortiz et al., 1987]. Ces travaux ont ensuite été repris pour des éléments à quatre nœuds [Belytschko et al., 1988], [Klisinski et al., 1991].

L'idée est ici d'intervenir au niveau de la construction des éléments finis afin de les rendre capables de reproduire des champs de déformation discontinus. Si dans les éléments classiques, les discontinuités du champ de déformation sont repoussées aux frontières des éléments (conduisant à la dépendance de la solution à la discrétisation), les éléments finis développés dans le cadre des modèles à discontinuités faibles autorisent l'apparition de discontinuités du champ de déformation à l'intérieur des éléments.

Pour chaque élément, une étude de localisation est réalisée au cours du calcul (dans les travaux d'Ortiz, l'étude est réalisée au niveau du point central de l'élément). Lorsqu'un mode de localisation est détecté, la base des fonctions de forme est enrichie par des fonctions autorisant la prise en compte d'une discontinuité avec les orientations (\mathbf{n}, \mathbf{m}) données par le critère de localisation (\mathbf{n} correspond au vecteur normal à la bande de localisation, \mathbf{m} donne la direction du déplacement).

Des éléments non compatibles sont alors obtenus : les fonctions de forme ne vérifient pas en général les critères de continuité C^0 au niveau des frontières des éléments (voir la figure 1.12 pour un exemple).

Il est à noter que les fonctions de forme ajoutées sont écrites sous forme vectorielle. Une représentation de leur projection sur le repère global (\mathbf{x}, \mathbf{y}) est donnée à la figure 1.12, dans le cas d'une localisation en mode II.

En revanche, un seul paramètre scalaire permet de gérer l'amplitude du saut de déformation dans la direction donnée par \mathbf{m} , un paramètre est introduit pour chaque mode localisé détecté. Ceux-ci constituent des degrés de liberté supplémentaires.

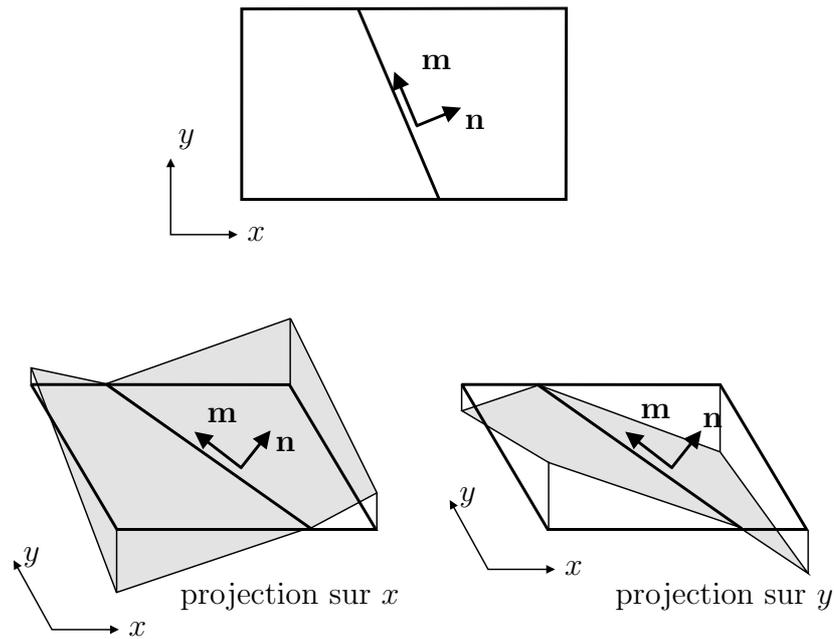


Figure 1.12: *Élément localisé et fonctions de formes incompatibles ajoutées (dans le cas d'un mode II)*

Ces degrés de liberté étant propres à chaque élément, en s'appuyant sur le principe variationnel de Hu-Washizu (à trois champs), ils peuvent être éliminés au niveau global du calcul par condensation statique élémentaire.

L'inconvénient de la méthode proposée par Ortiz [Ortiz et al., 1987] réside dans le fait que seule une surface de discontinuité est introduite dans un élément. L'apparition de bande de localisation reste donc encore dépendante, dans une certaine mesure, de la taille des éléments : les bandes de localisation sont définies par deux surfaces de discontinuité du champ de déformation, chacune ne pouvant apparaître que dans des éléments différents.

Les travaux de Belytschko [Belytschko et al., 1988] quant à eux introduisent, non pas une surface de discontinuité du champ de déformation dans les éléments, mais une bande de localisation (soit deux surfaces de discontinuité). En cela, ils rejoignent les travaux de Pietruszczak et Mróz [Pietruszczak et Mróz, 1981]. Ces derniers introduisent, en effet, dans des éléments à trois nœuds, des bandes de dimension donnée dans lesquelles sont supposées se concentrer les déformations plastiques, le matériau hors bande de localisation est considéré demeurer élastique. Aucune fonction de forme supplémentaire n'est explicitement introduite dans les éléments, en revanche, le comportement à l'échelle de l'élément est modifié par l'introduction des bandes de localisation, Belytschko *et. al* s'appuient sur le principe variationnel à trois champs de Hu-Washizu pour gérer les déformations dans la bande de localisation. Pour ces modèles, la position des bandes de localisation ne peut pas être précisée, en revanche, les aires relatives de la bande de localisation et de la zone non localisée constitue un paramètre important.

On met ainsi en évidence l'un des points faibles de la méthode : la taille minimale des éléments est imposée. En effet, l'épaisseur des bandes de localisation doit rester

inférieure à la taille caractéristique de l'élément. Or, la taille des bandes de localisation n'est pas donnée par le modèle mais plutôt par des résultats expérimentaux, par exemple. Ceci a pour conséquence d'imposer une taille minimale pour les éléments. De plus, Sluys [Sluys, 1997] a montré que si la solution semble indépendante de la taille des éléments, il persiste une dépendance à l'orientation des éléments.

En revanche, le développement de ces modèles à discontinuités faibles a constitué le point de départ à l'écriture des modèles à discontinuités fortes qui font l'objet du paragraphe suivant.

1.2.6.2 Discontinuités fortes

Pour ces modèles, il s'agit d'introduire dans les éléments des discontinuités du champ de déplacement ce qui conduit à un champ de déformation singulier dont le traitement, nous allons le voir, n'est pas forcément aisé.

Ces modèles s'appuient très largement, dans leur principe, sur les idées développées pour les modèles à discontinuités faibles.

Les premiers travaux sur le sujet sont dus à Dvorkin *et al.* [Dvorkin et al., 1990], Klisinski *et al.* [Klisinski et al., 1991] et à Simo, Oliver et Armero [Simo et al., 1993].

La régularisation des équations est assurée par l'introduction d'une longueur caractéristique indépendante de la taille des éléments puisque nulle. En effet, le point clé est de concentrer l'énergie dissipée dans les bandes de localisation sur une surface de mesure nulle dans l'espace dans lequel on travaille. Ainsi, l'objectif n'est pas de décrire finement les bandes de localisation (champs de déformations, champs de contraintes, ...) mais simplement de prendre en compte leurs effets sur la réponse globale de la structure.

Ainsi, un champ de déplacement discontinu est introduit dans le domaine considéré suivant une surface Γ_s (voir la figure 1.13).

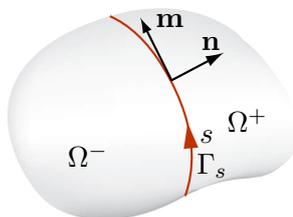


Figure 1.13: *Domaine Ω coupé par une surface de discontinuité Γ_s en deux sous-domaines Ω^- et Ω^+*

Le champ de déplacement s'écrit alors :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \bar{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x})\mathcal{H}_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) \quad (1.42)$$

où $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ correspond à la partie continue du champ de déplacement et $\bar{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x})$ correspond au saut de déplacement sur la surface Γ_s ($\bar{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x})$ est souvent pris constant le long de

la surface Γ_s). Enfin, \mathcal{H}_{Γ_s} note la fonction de Heaviside qui est telle que :

$$\mathcal{H}_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases} \quad (1.43)$$

Ainsi, le champ de déformation se décompose en une partie régulière et une partie singulière sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) + (\bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n})^s \delta_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) \quad (1.44)$$

La difficulté réside, alors, dans le traitement de la singularité du champ de déformation.

Certains auteurs [Simo et al., 1993], [Oliver, 1995], [Oliver, 1996], [Armero et Garikipati, 1995] font l'hypothèse que ces champs de déformation sont compatibles avec les équations de la mécanique des milieux continus, ce qui les conduit à écrire des conditions de compatibilité qui permettent de définir les conditions de localisation (instant auquel la discontinuité est introduite) ainsi que des lois traction/saut de déplacement pour la discontinuité.

Pour d'autres auteurs, la singularité des déformations est traitée par l'introduction d'une loi de comportement pour la discontinuité déduite des phénomènes physiques qui doivent être représentés [Wells et Sluys, 2001a], [Wells et Sluys, 2001b], [Ibrahimbegović et Brancherie, 2003]. La dissipation dans la bande de localisation est gérée par cette loi de comportement discrète.

Il va de soi que l'introduction d'une discontinuité de déplacement dans les éléments n'est pas compatible avec la construction classique des éléments finis, qui n'autorise aucune discontinuité excepté aux frontières des éléments (pour les déformations ou les contraintes).

Ainsi, l'implantation de tels modèles demande un traitement numérique particulier.

La difficulté résidant essentiellement dans la représentation d'un champ de déformation singulier, certains auteurs contournent cet obstacle en régularisant la distribution de Dirac δ_{Γ_s} [Larsson et al., 1995], [Oliver, 1996].

Jirásek [Jirásek, 2000] propose une revue des techniques numériques pour traiter la discontinuité. Il les classe en trois catégories : SOS (*statically optimal symmetric*), KOS (*kinematically optimal symmetric*) et SKON (*statically and kinematically optimal nonsymmetric*).

Nous ne nous attarderons pas ici sur ces différentes techniques, cela faisant l'objet d'une prochaine partie.

En revanche, nous noterons un point important : les modèles développés dans le cadre des méthodes à discontinuités fortes ne s'appliquent qu'à une certaine classe de structures pour lesquelles les phénomènes de dissipation hors bande de localisation restent négligeables devant ceux ayant lieu dans les bandes de localisation.

En effet, les différents travaux réalisés dans ce cadre considèrent, pour la grande majorité, un matériau hors discontinuité qui reste élastique. Ainsi, la seule dissipation permise se trouve confinée sur les bandes de localisation soit, dans le cas présent, sur les surfaces de discontinuité de déplacement.

1.3 Définition de nos objectifs

Nous nous proposons ici de clarifier, au vu des différentes remarques précédentes, les objectifs de notre travail.

Nous avons vu que :

- les phénomènes de localisation observés expérimentalement sont difficiles à modéliser par les techniques numériques classiques ;
- les méthodes développées pour pallier les problèmes de dépendance au maillage présentent quelques inconvénients :
 - une difficulté d’interprétation ou de justification physique pour certaines ;
 - une difficulté d’implantation numérique pour d’autres ;
 - un cadre d’application limité pour d’autres encore.

Ainsi, nos objectifs sont de proposer une démarche permettant de régler les problèmes numériques liés à la localisation des déformations :

- qui soit adaptée à une large classe de matériaux ;
- qui permette une implantation aisée dans les codes de calculs à l’architecture classique ;
- qui soit adaptée à l’étude de structures massives de grande taille que sont les structures du Génie Civil.

Pour cela, nous nous proposons de nous appuyer sur les modèles à discontinuités fortes présentés au 1.2.6.2. Ces techniques sont, en effet, adaptées à la modélisation de divers modes de rupture (bandes de cisaillement, rupture en mode I, ...) et offrent la possibilité d’une implantation numérique ne nécessitant pas de modification de l’architecture globale du code de calcul.

En revanche, comme nous l’avons vu au 1.2.6.2, ces méthodes ne sont adaptées qu’à la modélisation de structures pour lesquelles les phénomènes de dissipation ont essentiellement lieu dans les bandes de localisation (soit des structures minces, par exemple).

Or, nous souhaitons appliquer ces modèles à la simulation du comportement de structures massives pour lesquelles les phénomènes de dissipation hors bandes de localisation ne sont pas négligeables, les « process-zones » dissipant une énergie non négligeable.

Ainsi, nous nous proposons d’étendre les modèles à discontinuités fortes à la modélisation des structures massives. Ceci suppose de :

- réexaminer l’écriture du modèle pour tenir compte de deux types de dissipation : une dissipation volumique (« process-zones ») et une dissipation surfacique (bandes de localisation) ;
- réexaminer les conditions de localisation et l’écriture des lois discrètes introduites sur la discontinuité de déplacement ;
- adapter l’implantation numérique pour tenir compte d’un nouveau mécanisme de dissipation.

Ces différents points font l’objet des développements des chapitres qui suivent.

Nous nous limiterons dans la suite de nos développements à des matériaux indépendants du temps et de la température. En outre, les chargements sont supposés isothermes et vérifier les hypothèses des petites perturbations.

Chapitre 2

Discontinuités de déplacement : formulation théorique

Dans ce chapitre, la formulation théorique du modèle à discontinuité de déplacement est présentée, en particulier, les modifications liées à la prise en compte de deux types de dissipation. Ceci est réalisé dans un cadre très général sans supposer, a priori, un comportement matériau particulier. Les conditions correspondant à l'introduction de la discontinuité sont discutées, les lois discrètes introduites sur la discontinuité sont précisées.

Sommaire

2.1	Un problème unidimensionnel	34
2.2	Cas des problèmes tridimensionnels	41
2.2.1	Définition du problème	42
2.2.2	Modèle continu classique	43
2.2.3	Champs de déplacement discontinus : cinématique	47
2.2.4	Condition de localisation et modèle constitutif pour la discontinuité	48
2.3	Conclusion	57

L'objet de ce chapitre est de présenter les modifications des modèles continus classiques nécessaires à la prise en compte de discontinuités du champ de déplacement. Comme nous l'avons vu précédemment, l'un des objectifs du travail présenté ici est de combiner deux types de dissipation :

- une dissipation volumique qui sera gérée par les modèles continus classiques et qui permet de prendre en compte les phénomènes dissipatifs ayant lieu en dehors des bandes de localisation, phénomènes qui, dans le cas des structures massives, ne sont pas négligeables par rapport aux phénomènes dissipatifs localisés ;
- une dissipation surfacique qui sera gérée par l'introduction d'une discontinuité du champ de déplacement et d'une loi discrète traction/saut de déplacement. Cette discontinuité permet de rendre compte, à l'échelle de la structure, des phénomènes dissipatifs ayant lieu à des échelles bien inférieures (l'échelle des bandes de localisation).

Afin de clarifier les idées et de présenter le modèle dans un cadre particulièrement simple, nous nous proposons, dans un premier temps, de développer les équations dans un cas unidimensionnel en considérant un matériau élasto-plastique (adoucissant).

Nous généraliserons par la suite ces résultats à l'écriture du modèle dans un cadre tri-dimensionnel sans supposer *a priori* un modèle de comportement pour le matériau constitutif de la structure considérée.

2.1 Un problème unidimensionnel

Nous considérons, ici, une barre de longueur L , de section homogène A , sollicitée en traction. La barre est encadrée à l'une de ses extrémités et soumise à un déplacement imposé à l'extrémité libre (voir figure 2.1).

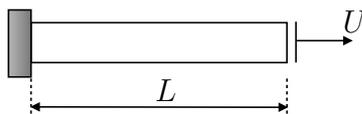


Figure 2.1: Barre unidimensionnelle sollicitée en traction

Nous nous limiterons, ici, à l'étude de la barre en petites déformations. Sous ces hypothèses, les équations d'équilibre de la barre s'écrivent :

$$\frac{d\sigma(x)}{dx} + b(x) = 0 \quad (2.1)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} \quad (2.2)$$

avec pour conditions aux limites :

$$u(0) = 0 \quad \text{et} \quad u(L) = U \quad (2.3)$$

où $u(x)$, $\varepsilon(x)$ et $\sigma(x)$ désignent, respectivement, le déplacement, la déformation et la contrainte de Cauchy en un point x de la barre. $b(x)$ désigne les forces réparties éventuellement appliquées à la barre. Notons que, si $b = 0$, la contrainte σ est constante le long de la barre. Nous ferons cette hypothèse pour la suite des développements.

Comme nous l'avons vu au 1.1.2.1, dès que le matériau entre dans le régime adoucissant, le problème devient mal posé et admet une infinité de solution. L'introduction d'une discontinuité de déplacement permet de rendre la solution du problème unique et donc de régulariser les équations.

Nous allons, dans un premier temps, présenter le modèle adopté pour la phase d'érouissage du comportement, nous précisons ensuite les conditions de basculement dans la phase adoucissante (qui, dans le cas 1D, présenté ici, sont triviales) qui permettent de déterminer l'instant auquel les discontinuités de déplacement sont à introduire. Enfin, nous finirons en développant l'écriture du modèle constitutif pour la discontinuité, modèle qui permet de gérer la dissipation surfacique correspondant à la dissipation ayant lieu dans les bandes de localisation.

Notations

Les variables relatives au modèle hors discontinuité seront surmontées d'une barre, celles relatives à la discontinuité seront surmontées de deux barres.

Le modèle continu hors discontinuité

La barre est supposée constituée d'un matériau élasto-plastique avec érouissage isotrope. Nous n'entrerons pas ici dans le détail de l'obtention des différentes équations relatives à l'écriture du modèle, nous précisons uniquement les grandes lignes du raisonnement. L'écriture des modèles continus locaux est, par ailleurs, développée dans un cadre général au 2.2.

La construction du modèle nécessite de se donner :

- une définition des variables d'état et des variables associées :

Dans notre cas :

Variables d'état	Variables associées
$\bar{\varepsilon}$	σ
la déformation plastique $\bar{\varepsilon}^p$	σ
la déformation plastique cumulée $\bar{\xi}$	\bar{q}

Tableau 2.1: Variables d'état et variables associées pour le modèle de la barre

- une hypothèse de décomposition additive des déformations :

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^e + \bar{\varepsilon}^p \quad (2.4)$$

- une énergie libre de Helmholtz dépendant des variables d'état :

$$\bar{\psi}(\bar{\varepsilon}^e, \bar{\xi}) = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^e E \bar{\varepsilon}^e + \bar{\Xi}(\bar{\xi}) \quad (2.5)$$

où $\bar{\Xi}(\bar{\xi})$ est associé à l'érouissage ;

- une fonction seuil permettant de définir le domaine d'élasticité :

$$\bar{\phi}(\sigma, \bar{q}) = |\sigma| - (\sigma_y - \bar{q}) \leq 0 \quad (2.6)$$

où σ_y désigne la contrainte limite d'élasticité ;

- une écriture de la dissipation sous la forme :

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{D}^p &= \sigma \dot{\bar{\varepsilon}} - \frac{d}{dt} \bar{\psi}(\bar{\varepsilon}^e, \bar{\xi}) \\ &= \left(\sigma - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\varepsilon}^e} \right) \dot{\bar{\varepsilon}} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\varepsilon}^e} \dot{\bar{\varepsilon}}^p - \frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \bar{\xi}} \dot{\bar{\xi}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Il convient alors d'examiner deux cas :

- *le chargement est élastique* : il n'y a pas d'évolution des variables internes.

$$\bar{\phi}(\sigma, \bar{q}) < 0 \quad , \quad \dot{\bar{\varepsilon}}^p = 0 \quad , \quad \dot{\bar{\xi}} = 0 \quad , \quad \bar{D}^p = 0 \quad (2.8)$$

De l'écriture de la dissipation (équation (2.7)), on peut alors déduire les équations d'état sous la forme :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\varepsilon}} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} = E \bar{\varepsilon}^e = E (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^p) \\ \bar{q} = -\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \bar{\xi}} \text{ (par analogie)} \end{cases} \quad (2.9)$$

La deuxième loi d'état ci-dessus est obtenue par analogie à la première.

- *le chargement est plastique* : il y a alors évolution des variables internes.

$$\bar{\phi}(\sigma, \bar{q}) = 0 \quad , \quad 0 < \bar{D}^p = \sigma \dot{\bar{\varepsilon}}^p + \bar{q} \dot{\bar{\xi}} \quad , \quad \dot{\bar{\varepsilon}}^p \neq 0 \quad , \quad \dot{\bar{\xi}} \neq 0 \quad (2.10)$$

L'utilisation du principe du maximum de dissipation plastique et l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange permettent alors d'écrire les équations d'évolution :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} = \dot{\gamma} \text{signe}(\sigma) \\ \dot{\bar{\xi}} = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} = \dot{\gamma} \end{cases} \quad (2.11)$$

et les conditions de charge/décharge (conditions de Kuhn-Tucker) :

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad , \quad \bar{\phi} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma} \bar{\phi} = 0 \quad (2.12)$$

L'écriture de la condition de cohérence ($\dot{\bar{\phi}}(\sigma, \bar{q}) = 0$ pour un chargement plastique) permet alors de déterminer la valeur du multiplicateur de Lagrange :

$$\dot{\gamma} = \frac{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} E \dot{\bar{\varepsilon}}}{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} E \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} \bar{K} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}}} = \frac{E \dot{\bar{\varepsilon}} \text{signe}(\sigma)}{E + \bar{K}} \quad (2.13)$$

$$\text{où } \bar{K} = \frac{d^2 \bar{\Xi}}{d\xi^2}.$$

Ce qui conduit finalement à l'écriture des équations d'évolution des contraintes :

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E \dot{\bar{\epsilon}} & \dot{\bar{\gamma}} = 0 \\ \left[E - \frac{E \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} E \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma}}{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} E \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} \bar{K} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}}} \right] \dot{\bar{\epsilon}} = \frac{E \bar{K}}{E + \bar{K}} \dot{\bar{\epsilon}} & \dot{\bar{\gamma}} > 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

La « condition de localisation »

On peut constater à partir de l'équation précédente (2.14) que, tant que $\bar{K} > 0$, la contrainte croît avec la déformation (pour un chargement plastique). En revanche, si $\bar{K} < 0$, le matériau passe dans la phase adoucissante du comportement. Comme nous l'avons vu au 1.1.2.1, dans ce cas, le problème devient mal posé et admet une infinité de solution.

Nous considérerons que la condition $\bar{K} \leq 0$ correspond à la condition de localisation et donc à l'introduction de la discontinuité de déplacement.

On peut constater que, dans le cas 1D, cette condition correspond à la condition d'apparition d'une bande de localisation telle que écrite au 1.1.2.2 :

$$\det(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad \text{avec ici } \mathbf{H} = C^{ep} = \frac{E \bar{K}}{E + \bar{K}} \quad (2.15)$$

Le modèle pour la discontinuité

Une fois la condition $\bar{K} \leq 0$ vérifiée, une discontinuité de déplacement est introduite dans le milieu, le champ de déplacement s'écrit alors :

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) + \bar{u}(t) \mathcal{H}_{\Gamma_s}(x) \quad (2.16)$$

Notons que t désigne ici un « pseudo-temps » qui nous permet de réaliser l'étude sous chargement quasi-statique.

La discontinuité est introduite en $x = \bar{x} = \Gamma_s$, ceci permet de définir deux sous-domaines de la barre : le domaine Ω^+ défini par $x > \bar{x}$ et le domaine Ω^- défini par $x < \bar{x}$.

La fonction $\mathcal{H}_{\Gamma_s}(x)$ est telle que :

$$\mathcal{H}_{\Gamma_s}(x) = \begin{cases} 0 & x \in \Omega^- \\ 1 & x \in \Omega^+ \end{cases} \quad (2.17)$$

Le champ de déplacement se décompose donc en une partie continue et une partie discontinue.

Notons que cette décomposition du déplacement conduit à une modification de l'écriture des conditions aux limites essentielles (équation (2.3)). Considérons ainsi un intervalle de la barre : $]a, b[$ avec $a \leq \bar{x} \leq b$ et $a, b \in [0, L]$. Soit $\varphi(x)$ une fonction C^1 (au moins) par morceaux sur $[0, L]$, telle que :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, a] \\ 1 & x \in [b, L] \end{cases} \quad (2.18)$$

Avec ces notations, on peut écrire, sans en modifier les valeurs, le champ de déplacement $u(x, t)$ sous la forme :

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + \bar{u}(t) [\mathcal{H}_{\Gamma_s}(x) - \varphi(x)] \quad (2.19)$$

avec,

$$\tilde{u}(x, t) = \bar{u}(x, t) + \bar{u}(t)\varphi(x) \quad (2.20)$$

Le champ de déplacement $\tilde{u}(x, t)$ prend, alors, les mêmes valeurs que le champ de déplacement total $u(x, t)$ sur les bords de la barre où sont appliquées les conditions aux limites essentielles. Les conditions aux limites en déplacement peuvent donc être imposées de façon équivalente à l'un ou l'autre de ces deux champs. L'introduction de cette fonction $\varphi(x)$ aura son importance pour le choix des fonctions d'interpolation. Notons que l'intervalle $]a, b[$ est, *a priori*, quelconque, tout comme la fonction $\varphi(x)$.

Le champ de déplacement se décompose donc en une partie continue et une partie discontinue. Le champ de déformation associé se décompose alors en une partie régulière ε et une partie singulière :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{du(x, t)}{dx} = \bar{\varepsilon}(x, t) + \bar{u}(t) \delta_{\Gamma_s}(x) \quad (2.21)$$

où δ_{Γ_s} désigne la distribution de Dirac au point \bar{x} .

Remarque :

Précisons que la déformation se décompose en une partie régulière et une partie singulière au sens des distributions [Balabane, 1993]. Une distribution T est qualifiée de régulière sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^d si elle peut être définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T, \varphi \rangle = \int_{\Omega} T \varphi d\Omega < \infty \quad (2.22)$$

où $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions infiniment dérivables à support compact dans Ω et T est une fonction localement intégrable.

Ceci est équivalent à dire que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} T \varphi d\Omega = 0 \quad \forall \Omega \text{ de mesure de Lebesgue dans } \mathbb{R}^d \text{ nulle}$$

On parle de distribution singulière dans le cas contraire.

Il reste alors à déterminer la loi de comportement associée à la discontinuité. La littérature propose deux voies permettant de traiter la discontinuité et de déterminer la loi de comportement de cette dernière :

- une approche « continue » s'appuyant sur l'hypothèse que les modèles continus classiques sont compatibles, sous certaines conditions, avec un champ de déplacement discontinu (ou, ce qui est équivalent, un champ de déformation singulier) [Simo et al., 1993], [Armero et Garikipati, 1995], [Oliver, 1996], [Oliver, 2000]. La loi discrète sur la discontinuité et la condition de localisation (ou d'introduction de la discontinuité) se déduisent de ces conditions de compatibilité.

- une approche « discrète » qui considère la surface de discontinuité comme une interface cohésive [Wells et Sluys, 2001a], [Wells et Sluys, 2001b]. Une loi de comportement « traction-saut de déplacement » est construite pour la discontinuité en accord avec les mécanismes dissipatifs qui sont associés à cette dernière.

Dans le cas unidimensionnel traité ici, ces deux approches sont très proches, nous ne présenterons donc que l'approche continue.

L'approche « continue »

Celle-ci s'appuie sur le fait que les modèles continus classiques sont compatibles, moyennant certaines hypothèses, avec un champ de déformation singulier. Nous allons donc nous appuyer sur les équations développées précédemment afin de déterminer le modèle relatif à la surface de discontinuité.

En tenant compte de (2.14) et de l'expression de la déformation, le taux de contrainte peut s'écrire, pour une phase de chargement plastique :

$$\dot{\sigma} = \frac{E\bar{K}}{E + \bar{K}} \left(\dot{\varepsilon} + \dot{\bar{u}}\delta_{\Gamma_s} \right) \quad (2.23)$$

La traction sur la discontinuité étant définie par $\mathbf{t}_{\Gamma_s} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$, soit, dans un cas unidimensionnel, $t_{\Gamma_s} = \sigma|_{\Gamma_s}$, le taux de traction s'écrit alors également :

$$\dot{t}_{\Gamma_s} = \dot{\sigma}|_{\Gamma_s} = \frac{E\bar{K}}{E + \bar{K}} \left(\dot{\varepsilon} + \dot{\bar{u}}\delta_{\Gamma_s}(\bar{x}) \right) \quad (2.24)$$

($\delta_{\Gamma_s}(\bar{x})$ désigne la valeur de la distribution de Dirac au point $x = \bar{x}$).

Or, pour conserver un sens physique (dans le cas 1D traité ici, la contrainte reste homogène et bornée sur la barre), le taux de traction doit rester borné. Ceci impose que la partie singulière de la relation (2.24) soit nulle :

$$\frac{E\bar{K}}{E + \bar{K}} \dot{\bar{u}} = 0 \quad (2.25)$$

ce qui équivaut à $\bar{K} = 0$ ($\dot{\bar{u}} \neq 0$ et $E \neq 0$) : on retrouve la condition de localisation énoncée précédemment.

On a, de plus, d'après l'équation (2.9), les équations d'évolution et l'expression de la déformation :

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = E \left(\dot{\varepsilon} + \dot{\bar{u}}\delta_{\Gamma_s} - \dot{\gamma} \text{signe}(\sigma) \right) \quad (2.26)$$

Le taux de contrainte $\dot{\sigma}$ doit rester borné. Ceci impose que le multiplicateur de Lagrange $\dot{\gamma}$ se décompose, comme la déformation, en une partie régulière et une partie singulière sous la forme :

$$\dot{\gamma} = \dot{\bar{\gamma}} + \dot{\bar{\gamma}}\delta_{\Gamma_s} \quad (2.27)$$

et que la partie singulière de (2.26) soit nulle, soit :

$$\dot{\bar{u}} = \dot{\bar{\gamma}} \text{signe}(\sigma) \quad (2.28)$$

Le saut de déplacement peut, ainsi, être interprété comme une déformation plastique localisée : $\bar{\varepsilon}^p = \bar{u}$. Ceci autorise une décomposition de la déformation plastique en une partie régulière et une partie singulière :

$$\varepsilon^p = \bar{\varepsilon}^p + \bar{\varepsilon}^p \delta_{\Gamma_s} \quad (2.29)$$

Il reste alors à écrire la condition de cohérence du modèle pour un pas de chargement plastique :

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \dot{\sigma} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \dot{q} = 0 = \dot{\sigma} \text{signe}(\sigma) + \dot{q} \quad (2.30)$$

Or, la variable duale q associée à la déformation plastique cumulée est telle que (en tenant compte de (2.9) et de (2.27)) :

$$\dot{q} = -K \dot{\xi} = -K \dot{\gamma} = -K \left(\dot{\gamma} + \dot{\bar{\gamma}} \delta_{\Gamma_s} \right) \quad (2.31)$$

\dot{q} - de la même façon que $\dot{\sigma}$ - doit rester borné ce qui impose que le module d'écrouissage vérifie :

$$\frac{1}{\bar{K}}(x) = \frac{1}{\bar{K}} + \frac{1}{\bar{K}} \delta_{\Gamma_s} \quad (2.32)$$

La condition de cohérence écrite en $x = \bar{x}$ permet alors de déduire la relation liant le vecteur traction $\dot{t}_{\Gamma_s} = \dot{\sigma}|_{\Gamma_s}$ sur la discontinuité et le saut de déplacement :

$$\dot{t}_{\Gamma_s} = \bar{K} \dot{\bar{u}} \quad (2.33)$$

Rappelons que cette expression a été établie en supposant un pas de chargement plastique sur la discontinuité. Elle n'est donc valable que dans le cas où $\dot{\bar{\gamma}} > 0$, ce qui suppose également une évolution du saut de déplacement \bar{u} .

À $t = t_{loc}$, instant de la localisation, $t_{\Gamma_s} = \sigma(t_{loc}) = \sigma_u$. De l'équation (2.33) on peut alors déduire une loi de comportement pour la discontinuité sous la forme :

$$\bar{\phi}(t_{\Gamma_s}, \bar{q}) = |t_{\Gamma_s}| - (\sigma_u - \bar{q}) \leq 0 \quad (2.34)$$

avec \bar{q} tel que $\dot{\bar{q}} = -\bar{K} \dot{\xi}$.

Notons que la surface de discontinuité de déplacement apparaît comme une interface rigide-plastique. Nous avons, en effet, mis en évidence le fait que le saut de déplacement n'est autre qu'une déformation plastique localisée. De plus, aucune déformation élastique n'a été introduite sur Γ_s . La décharge de la surface de discontinuité se fait donc de façon rigide, sans évolution du saut de déplacement. La figure 2.2 donne une représentation du comportement de la surface de discontinuité, dans le cas d'un comportement adoucissant linéaire.

Remarque :

On souhaite représenter des phénomènes adoucissants, le module d'écrouissage \bar{K} est donc négatif. Ceci permet de conclure que, lorsque la discontinuité est active, les points de la barre hors discontinuité se déchargent de façon élastique (avec les hypothèses faites précédemment, la contrainte doit rester constante et homogène dans la barre).

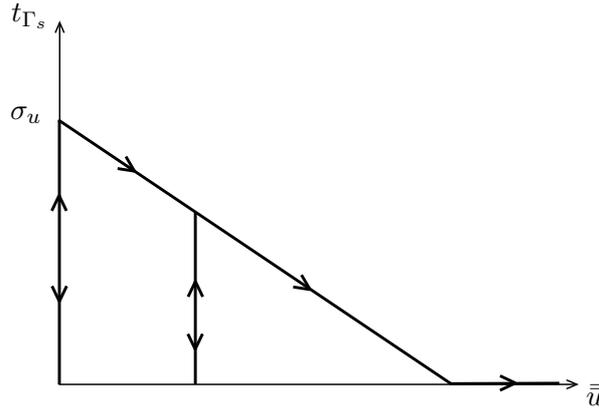


Figure 2.2: *Comportement en traction de la surface de discontinuité : comportement rigide-plastique*

Avec la décomposition des variables internes et de la déformation en une partie régulière et une partie singulière et le fait que les variables duales σ et q restent bornées, la dissipation s'écrit (voir équation (2.7)) :

$$\mathcal{D} = \underbrace{(\sigma \dot{\bar{\varepsilon}}^p + \bar{q} \dot{\bar{\xi}})}_{\bar{\mathcal{D}}} + \underbrace{(t_{\Gamma_s} \dot{\bar{u}} + \bar{q} \dot{\bar{\xi}})}_{\bar{\mathcal{D}}_{\delta_{\Gamma_s}}} \delta_{\Gamma_s} \quad (2.35)$$

On identifie, ainsi, une dissipation volumique $\bar{\mathcal{D}}$ et une dissipation surfacique $\bar{\mathcal{D}}$ localisée en $x = \bar{x}$.

Remarquons, de plus que, en se rappelant que les variables duales σ et q restent bornées, l'énergie libre de Helmholtz peut se décomposer en une partie régulière et une partie singulière sous la forme :

$$\psi(\varepsilon, \varepsilon^p, \xi) = \bar{\psi}(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}^p, \bar{\xi}) + \bar{\bar{\psi}}(\bar{u}, \bar{\xi}) \delta_{\Gamma_s} \quad (2.36)$$

où $\bar{\bar{\psi}}(\bar{u}, \bar{\xi})$ est associée à la surface de discontinuité et permet de construire les lois d'état relatives à cette dernière.

Il est alors aisé de constater que les modèles sont construits de façon similaire : les variables et équations du modèle continu de la phase d'écroutissage (surmontées d'une barre dans notre développement) ont leur équivalent sur la discontinuité (surmontées de deux barres). Les deux modèles sont, par ailleurs, reliés par les conditions de compatibilité du modèle continu classique avec un champ de déformation singulier. Ces conditions fournissent également l'instant de l'introduction de la surface de discontinuité dans le cas 1D traité ici.

2.2 Cas des problèmes tridimensionnels

Nous nous proposons ici de généraliser les résultats obtenus sur un cas 1D au cas des problèmes bi- ou tridimensionnels.

2.2.1 Définition du problème

Considérons un domaine Ω soumis à un déplacement imposé \mathbf{g} , sur une partie de sa frontière $\partial_u\Omega$, et à un effort imposé \mathbf{h} , sur une autre partie de sa frontière $\partial_t\Omega$. $\partial_t\Omega$ et $\partial_u\Omega$ sont telles que :

$$\partial_t\Omega \cup \partial_u\Omega = \partial\Omega \quad \text{et} \quad \partial_t\Omega \cap \partial_u\Omega = \emptyset \quad (2.37)$$

Des efforts volumiques \mathbf{b} sont, par ailleurs, imposés en tout point du milieu considéré.

Le domaine Ω est traversé par une surface de discontinuité supposée régulière, que nous noterons Γ_s (voir figure 2.3).

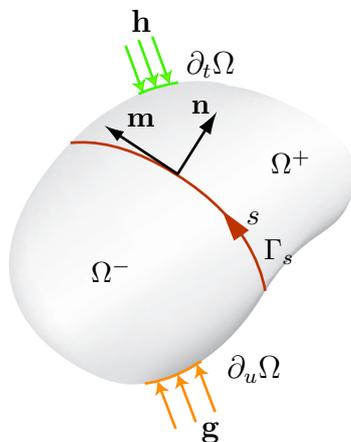


Figure 2.3: Domaine Ω traversé par une surface de discontinuité Γ_s

Nous supposons, dans le reste de nos développements, que le chargement du matériau est isotherme (ce qui est certainement une hypothèse abusive si l'objectif est de représenter des phénomènes de localisation qui, comme nous l'avons vu au chapitre précédent peuvent être accompagnés d'augmentations de température non négligeables). Nous nous plaçons dans le cadre des petites déformations et de la thermodynamique des processus irréversibles. Nous nous limitons, ici, à présenter les développements pour des lois de comportement associées. Ceci constitue, a priori, une limitation importante quant aux types de matériaux pouvant être traités par l'approche proposée ci-après. Néanmoins, les développements qui suivent peuvent, moyennant l'écriture d'un pseudo-potential de dissipation différent de la surface seuil, être généralisés aux cas de matériaux à lois de comportement non associées, matériaux relativement répandus dans le domaine du Génie Civil.

Le problème à résoudre s'écrit sous forme forte :

Trouver (\mathbf{u}) vérifiant :

– l'équation d'équilibre :

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.38)$$

– les conditions aux limites :

– essentielles :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_u \Omega \quad (2.39)$$

– naturelles :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{h} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_t \Omega \quad (2.40)$$

– la condition de continuité des tractions sur la surface Γ_s :

$$[[\boldsymbol{\sigma}]]|_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n} = [[\mathbf{t}_{\Gamma_s}]] = \mathbf{0} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_{\Gamma_s} \quad (2.41)$$

– la relation de compatibilité :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} \quad (2.42)$$

– la relation de comportement (écrite sous forme générique incrémentale) :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = f(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (2.43)$$

– la relation de comportement de l'interface Γ_s (écrite sous forme générique incrémentale) :

$$\dot{\mathbf{t}}_{\Gamma_s} = g(\dot{\bar{\mathbf{u}}}) \quad (2.44)$$

$\mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ note la normale sortante au domaine Ω en tout point de la frontière $\partial\Omega$.

La forme faible de ce problème s'écrit :

Trouver (\mathbf{u}) tel que :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = f(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}), \quad \dot{\mathbf{t}}_{\Gamma_s} = g(\dot{\bar{\mathbf{u}}}) \text{ et}$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_0, \quad \int_{\Omega} (\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} (\mathbf{h} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_s} [[\boldsymbol{\sigma}]]_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_s = 0$$

où nous avons noté \mathcal{V}_0 l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles à 0 : $\mathcal{V}_0 = \{\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in \partial_u \Omega\}$.

2.2.2 Modèle continu classique

Pour résoudre le problème défini précédemment, il est nécessaire de préciser le modèle constitutif considéré (permettant, entre autres, de définir la fonction f de l'équation (2.43)). Pour cela, nous nous placerons dans un cadre général sans supposer *a priori* de comportement de matériau particulier.

Les variables du modèle sont décomposées, de façon classique, en une série de variables d'état et une série de variables associées (ou duales) récapitulées dans le tableau 2.2.

Variables d'état	Variables associées
$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\sigma}$
\mathbf{v}	\mathbf{A}

Tableau 2.2: Notations : variables d'état et variables associées

\mathbf{v} et \mathbf{A} désignent, respectivement, le vecteur des variables internes et le vecteur des variables associées (ces vecteurs peuvent contenir des scalaires, des vecteurs et/ou des tenseurs en fonction du matériau considéré).

La construction du modèle impose alors de se donner :

- l'énergie libre de Helmholtz qui s'écrit, de façon générale, comme une fonction des variables d'état :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v}) \quad (2.45)$$

- la fonction seuil qui permet de définir le domaine d'élasticité *i.e.* aussi, les variables d'état \mathbf{A} admissibles :

$$\phi(\mathbf{A}) \leq 0 \quad (2.46)$$

À partir de ces fonctions, la dissipation dans le matériau peut être définie par :

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathcal{D} &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{d\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v})}{dt} \\ &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \dot{\mathbf{v}} \\ &= \left[\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \dot{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Plusieurs cas sont alors à examiner :

- le matériau se déforme de façon élastique sans évolution des variables internes.

On a alors :

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathcal{D} = 0 \quad , \quad \phi(\mathbf{A}) < 0 \quad (2.48)$$

Avec l'expression de la dissipation (2.47), on peut alors déduire les équations d'état :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.49)$$

et, par analogie, pour les variables associées :

$$\mathbf{A} = - \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \quad (2.50)$$

En tenant compte de ces relations dans l'équation (2.47), on obtient une nouvelle expression pour la dissipation :

$$0 \leq \mathcal{D} = \mathbf{A} \dot{\mathbf{v}} \quad (2.51)$$

- le matériau est chargé de façon anélastique. Dans ce cas, les variables internes évoluent au cours du chargement :

$$\dot{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0} \quad , \quad \mathcal{D} > 0 \quad , \quad \phi(\mathbf{A}) = 0 \quad (2.52)$$

Afin de déterminer l'évolution des variables internes, considérons le principe du maximum de dissipation [Lublinter, 1990], [Maugin, 1992] : *parmi tous les jeux de variables duales \mathbf{A} admissibles, seuls conviennent ceux qui maximisent la dissipation* :

$$(\mathbf{A}) = \arg \left\{ \min_{\phi(\mathbf{A}^*) \leq 0} [-\mathcal{D}(\mathbf{A}^*)] \right\} \quad (2.53)$$

La détermination des variables duales impose donc de résoudre un problème de minimisation sous contraintes. Une fonctionnelle de Lagrange $\mathcal{L}(\mathbf{A})$ et un multiplicateur de Lagrange $\dot{\gamma}$ sont alors introduits, permettant de transformer le problème précédent en :

$$(\mathbf{A}) = \arg \left\{ \max_{\forall \dot{\gamma} > 0} \min_{\forall (\mathbf{A}^*)} \mathcal{L}^p(\mathbf{A}^*, \dot{\gamma}) \right\} \quad (2.54)$$

$$\text{avec } \mathcal{L}(\cdot) = -\mathcal{D}(\cdot) + \dot{\gamma}\phi(\cdot)$$

On obtient, alors, les équations d'évolution des variables internes en écrivant les conditions de stationnarité de la fonctionnelle de Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = 0 = -\dot{\mathbf{v}} + \dot{\gamma} \frac{\partial \phi(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{v}} = \dot{\gamma} \frac{\partial \phi(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} \quad (2.55)$$

Les conditions de Kuhn-Tucker du problème de minimisation précédent permettent également d'écrire les conditions de charge/décharge :

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad , \quad \phi(\mathbf{A}) \leq 0 \quad , \quad \dot{\gamma}\phi(\mathbf{A}) = 0 \quad (2.56)$$

Il reste alors à déterminer la valeur du multiplicateur de Lagrange $\dot{\gamma}$. Pour cela, considérons la condition de cohérence qui apparaît sous la forme :

$$\dot{\gamma}\dot{\phi}(\mathbf{A}) = 0 \quad (2.57)$$

Ainsi, pour un pas de chargement anélastique ($\dot{\gamma} > 0$), on peut écrire :

$$\dot{\phi}(\mathbf{A}) = \frac{\partial \phi(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} \dot{\mathbf{A}} = 0 \quad (2.58)$$

En dérivant les équations d'état (2.50) par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{\mathbf{A}} = -\frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{v}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}^2} \dot{\mathbf{v}} \quad (2.59)$$

En tenant compte de ces expressions et de l'équation d'évolution (2.55), la condition de cohérence (2.58) s'écrit :

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{v}} \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}^2} \right] \dot{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} = 0 \quad (2.60)$$

ce qui permet d'écrire le multiplicateur plastique sous la forme :

$$\dot{\gamma} = -\frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{v}} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}^2} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}}} \quad (2.61)$$

où,

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{v}} = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}_i} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{v}_i} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}^2} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} = \sum_i \sum_j \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}_i} \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_i \partial \mathbf{v}_j} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}_j} \end{cases} \quad (2.62)$$

avec $(\mathbf{A}_i, \mathbf{v}_i)$ le i ème couple de variables associées du modèle (pour le cas d'un modèle de plasticité avec pour variables internes ξ et $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, les couples $(\mathbf{A}_i, \mathbf{v}_i)$ sont : $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p)$ et (q, ξ)).

En dérivant l'équation d'état (2.49), on obtient finalement les équations d'évolution des contraintes, dans le cas d'un chargement anélastique, sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\mathbf{v}} \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{v}} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Nous adopterons, pour la suite, les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \quad \text{et} \quad h = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v}^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{v}} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \\ \mathbf{a} &= -\mathbf{C}^{-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{v}} \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{a}^T \end{aligned} \quad (2.64)$$

\mathbf{C} et h sont, respectivement, le tenseur d'élasticité et le module d'écrouissage (ou adoucissement) du matériau.

Les équations d'évolution s'écrivent alors dans le cas général :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{cases} \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} & \dot{\gamma} = 0 \\ \left[\mathbf{C} - \frac{(\mathbf{C} : \mathbf{a}) \otimes (\mathbf{b} : \mathbf{C})}{h + \mathbf{b} : \mathbf{C} : \mathbf{a}} \right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} & \dot{\gamma} > 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

Remarque :

Il était important de rappeler les points clés de la construction des modèles continus classiques. En effet, le modèle continu utilisé pour décrire la dissipation volumique hors bandes de localisation est construit ainsi.

Par ailleurs, nous allons voir, dans la suite, que l'écriture du modèle relatif à la surface de discontinuité et permettant de décrire les phénomènes de dissipation surfacique liés au développement de bandes de localisation se construit d'une façon tout à fait analogue. Ceci fera l'objet du 2.2.4 ci-après.

2.2.3 Champs de déplacement discontinus : cinématique

Comme nous l'avons vu, le point clé du modèle est l'introduction d'une surface de discontinuité du champ de déplacement dans le domaine Ω considéré et ce, afin de prendre en compte les phénomènes localisés ayant lieu dans les bandes de localisation.

Le domaine Ω est donc supposé traversé par une surface de discontinuité : Γ_s de normale \mathbf{n} comme représenté sur la figure 2.4.

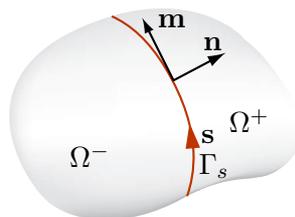


Figure 2.4: *Domaine Ω coupé par une surface de discontinuité Γ_s en deux sous-domaines Ω^- et Ω^+*

La surface Γ_s d'abscisse curviligne \mathbf{s} et de vecteur unitaire normal \mathbf{n} coupe le domaine Ω en deux sous-domaines que nous noterons Ω^+ et Ω^- .

Dans le cas où la surface de discontinuité est une ligne droite, les domaines Ω^+ et Ω^- sont définis par :

$$\begin{aligned}\Omega^+ &= \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} > 0 \} \\ \Omega^- &= \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} < 0 \}\end{aligned}\quad (2.66)$$

(où l'origine des coordonnées est prise sur la surface de discontinuité).

Après l'introduction de la surface de discontinuité de déplacement, le champ de déplacement s'écrit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \bar{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) \mathcal{H}_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) \quad (2.67)$$

où \mathcal{H}_{Γ_s} est la fonction de Heaviside définie par :

$$\mathcal{H}_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^- \\ 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{cases} \quad (2.68)$$

Notons que l'écriture des conditions aux limites essentielles (équation (2.39)) se trouve perturbée par l'introduction de la discontinuité. Imposer une condition sur le champ de déplacement revient, en effet, à écrire une condition sur les deux champs $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ et $\bar{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t)$.

Ainsi, considérons un ouvert Ω_d de Ω entourant la surface de discontinuité Γ_s . Nous supposons que l'on peut construire Ω_d tel que : $\partial_u \Omega \cap \Omega_d = \emptyset$. On peut alors définir une fonction $\varphi(\mathbf{x})$ C^1 par morceaux sur Ω qui vérifie :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^- \setminus \Omega_d^- \\ 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+ \setminus \Omega_d^+ \end{cases} \quad (2.69)$$

On peut alors écrire le champ de déplacement sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \bar{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) (\mathcal{H}_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})) \quad (2.70)$$

où

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \bar{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}) \quad (2.71)$$

Le champ de déplacement $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ prend les mêmes valeurs sur $\partial_u \Omega$ que le champ de déplacement total $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Les conditions aux limites peuvent donc être imposées, de manière équivalente, au champ de déplacement $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ ou au champ de déplacement total.

Ceci aura une importance pour la construction des interpolations éléments finis des différents champs. Notons également que le domaine Ω_d est, tout comme la fonction $\varphi(\mathbf{x})$, choisi de façon arbitraire.

Remarque :

Il est possible d'interpréter les différents champs de déplacement dans une logique multiéchelle. Ainsi, le champ de déplacement $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ peut être vu comme le champ de déplacement associé à l'échelle grossière de l'étude. Le champ de déplacement $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ est alors associé à l'échelle fine de l'analyse, dans notre cas, l'échelle des bandes de localisation. Ceci constitue le point clé de l'analyse multiéchelle réalisée par certains auteurs à partir des modèles à discontinuités fortes [Garikipati et Hughes, 2000].

Le champ de déformation associé à ce champ de déplacement s'écrit alors, en considérant l'équation de compatibilité (2.42) et les résultats sur la dérivation des distributions [Stakgold, 1979], sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) + \left(\bar{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{n} \right)^s \delta_{\Gamma_s} \quad (2.72)$$

où $(\cdot)^s$ note le gradient symétrique, δ_{Γ_s} est la distribution de Dirac associée à la surface Γ_s et

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \nabla^s [\bar{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x})] + \nabla^s \bar{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) \mathcal{H}_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) \quad (2.73)$$

En supposant que la surface Γ_s est une surface matérielle physique qui n'évolue plus une fois créée, le vecteur normal \mathbf{n} est tel que $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$, le taux de déformation s'écrit alors :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{x}, t) + \left(\dot{\bar{\bar{\mathbf{u}}}}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{n} \right)^s \delta_{\Gamma_s} \quad (2.74)$$

2.2.4 Condition de localisation et modèle constitutif pour la discontinuité

L'obtention de la condition de localisation définissant, dans notre cas, l'instant auquel la discontinuité de déplacement est introduite et l'écriture du modèle constitutif relatif à la discontinuité nécessitent de distinguer entre deux approches développées dans la littérature :

- l'approche « continue » qui suppose que les modèles continus sont compatibles avec l'écriture d'un champ de déformation singulier [Simo et al., 1993], [Armero et Garikipati, 1995], [Oliver, 1996], [Oliver, 2000].

- l’approche « discrète » [Wells et Sluys, 2001a], [Wells et Sluys, 2001b] qui considère la discontinuité comme une interface cohésive munie de ces propres lois en accord avec les mécanismes que l’on souhaite prendre en compte au niveau des bandes de localisation. C’est cette approche que nous avons plus particulièrement considérée. Nous nous sommes attachés, ici, à la présenter dans le cadre de la thermodynamique des interfaces. Nous mettrons ainsi en évidence le parallèle qui apparaît naturellement entre le formalisme continu et le formalisme discret.

Nous allons développer chacune de ces deux approches.

2.2.4.1 L’approche « continue »

Le point clé de cette approche est de supposer que si les modèles continus classiques sont capables de prédire l’apparition de sauts dans le champ de déformation, ils sont également capables de prédire l’introduction d’un champ de déplacement discontinu ce qui, en d’autres termes, suppose qu’ils soient compatibles avec un champ de déformation singulier.

Écrivons, dans un premier temps, la puissance des efforts internes sur le domaine Ω en considérant un champ de taux de déformation singulier (voir équation (2.74)) :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{int} &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \left[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\dot{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n} \right)^s \delta_{\Gamma_s} \right] \, d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\sigma} : \left(\dot{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n} \right)^s \, d\Gamma_s
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

La puissance des efforts internes est une quantité bornée. Les contraintes doivent donc rester une distribution régulière (si ces dernières s’écrivaient comme la somme d’une partie régulière et d’une partie singulière, la puissance des efforts intérieurs sur la discontinuité ne serait pas définie). Ceci constituera un point important de la suite du raisonnement.

Les équations écrites dans le cadre de la mécanique des milieux continus classiques sont supposées être encore valables. Ainsi, le champ de taux de contrainte s’écrit, d’après l’équation (2.63) et en tenant compte de l’expression du champ de déformation (équation (2.74)), sous la forme :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \left[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\dot{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n} \right)^s \delta_{\Gamma_s} \right] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \dot{\mathbf{v}} \tag{2.76}$$

Remarque :

Le module d’élasticité \mathbf{C} est une distribution régulière ou distribution-fonction du domaine Ω . Par analogie, nous supposons qu’il en est de même pour toutes les autres dérivées doubles du potentiel d’état : $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v})$.

Avec cette expression du taux de contrainte, le taux de traction sur la discontinuité s'écrit :

$$\dot{\mathbf{t}}_{\Gamma_s} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_s} = \left\{ \mathbf{C} : \left[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\dot{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n} \right)^s \delta_{\Gamma_s}(\mathbf{x}_{\Gamma_s}) \right] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \dot{\mathbf{v}} \right\} \cdot \mathbf{n} \quad (2.77)$$

Les contraintes devant rester une distribution régulière, il en est de même pour le taux de contrainte et le taux de traction. Ainsi, la partie singulière de l'équation précédente doit s'annuler. Pour cela, deux cas sont à examiner :

- $\dot{\mathbf{v}}$ est une distribution régulière. Dans ce cas, on doit avoir :

$$\left[\mathbf{C} : \left(\dot{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n} \right)^s \right] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \forall \dot{\mathbf{u}} \quad \iff \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (2.78)$$

Or, \mathbf{C} est le tenseur d'élasticité du matériau, il s'agit donc d'un tenseur défini positif (symétrique). L'équation précédente ne peut donc être vérifiée que si $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$. Ceci interdit le développement de la discontinuité. L'hypothèse « $\dot{\mathbf{v}}$ régulier » n'est donc pas satisfaisante.

- $\dot{\mathbf{v}}$ est une distribution singulière. On écrira $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\hat{\mathbf{v}}} + \dot{\hat{\mathbf{v}}}\delta_{\Gamma_s}$.

Faire une telle hypothèse, revient à considérer des phénomènes de dissipation localisés. Nous verrons que ceci reste compatible avec le cadre de la thermodynamique des interfaces.

Dans ce cas, le taux de contrainte reste borné (ou régulier, au sens des distributions) si, sur Γ_s :

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}} = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{v}}} \right) \cdot \mathbf{n} \quad (2.79)$$

Soit, en tenant compte de l'équation d'évolution (2.55) donnant l'expression de $\dot{\mathbf{v}}$ en fonction du multiplicateur de Lagrange, on a :

$$\dot{\gamma} = \dot{\hat{\gamma}} + \dot{\hat{\gamma}}\delta_{\Gamma_s} \quad (2.80)$$

et

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}} = -\dot{\hat{\gamma}} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \right) \cdot \mathbf{n} \quad (2.81)$$

La condition imposant que les contraintes restent bornées s'écrit, quant à elle :

$$\mathbf{C} : \left(\dot{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n} \right)^s = -\dot{\hat{\gamma}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \quad (2.82)$$

Écrivons, alors, l'équation de cohérence pour un chargement anélastique (équation (2.58)), on a :

$$\dot{\phi}(\mathbf{A}) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{A}} = 0 \quad (2.83)$$

Soit, en tenant compte de l'équation (2.59) et de l'écriture du champ de déformation :

$$\dot{\phi}(\mathbf{A}) = 0 = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \cdot \left\{ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{v}} \left[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\dot{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n} \right)^s \delta_{\Gamma_s} \right] - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v}^2} \left[\dot{\hat{\gamma}} + \dot{\hat{\gamma}}\delta_{\Gamma_s} \right] \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \right\} \quad (2.84)$$

L'équation précédente ne peut être vérifiée que si la partie singulière de $\dot{\phi}(\mathbf{A})$ s'annule sur Γ_s . Ainsi, on doit avoir :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{v}} \left(\dot{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n} \right)^s + \dot{\bar{\gamma}} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v}^2} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} = 0 \quad (2.85)$$

L'équation (2.82) permet d'écrire (\mathbf{C} est défini positif symétrique donc inversible) :

$$\left(\dot{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n} \right)^s = -\dot{\bar{\gamma}} \mathbf{C}^{-1} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \right] \quad (2.86)$$

Cette expression introduite dans l'équation (2.85) permet, alors, d'écrire :

$$\dot{\bar{\gamma}} \left[-\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{v}} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v}^2} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \right] = 0 \quad (2.87)$$

En tenant compte du fait que $\dot{\bar{\gamma}} > 0$ (pour écrire la condition de cohérence) et en reprenant les notations définies à l'équation (2.64), on peut écrire :

$$h_{|\Gamma_s} = 0 \quad (2.88)$$

Par ailleurs, les résultats de l'équation de cohérence donnent (voir équation (2.85)) :

$$\dot{\bar{\gamma}} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{v}} \left(\dot{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n} \right)^s}{\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v}^2} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}}} \quad (2.89)$$

Soit, en tenant compte du fait que $h_{|\Gamma_s} = 0$,

$$\dot{\bar{\gamma}} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{v}} \left(\dot{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n} \right)^s}{\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{v}} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}}} \quad (2.90)$$

Cette expression de $\dot{\bar{\gamma}}$ dans l'équation (2.81) permet alors d'écrire :

$$\left[\mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{C} - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{v}} \otimes \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}}}{\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{v}} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{v} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}}} \right) \cdot \mathbf{n} \right] \cdot \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (2.91)$$

Ce qui revient à écrire que le tenseur acoustique élasto- « anélastique » (élasto-plastique ou élasto-endommageable ou ...) est singulier.

La condition précédente fournit deux informations :

- l'instant auquel la discontinuité peut-être introduite ;
- l'orientation avec laquelle elle est introduite et ce, par la détermination du vecteur \mathbf{n} , qui, rappelons-le, est un vecteur unitaire normal à la surface de discontinuité.

Notons, également, que cette condition n'est autre qu'une condition de localisation telle que celles présentées au 1.1.2.2. Remarquons cependant qu'elle ne correspond pas à la condition de localisation du matériau constitutif du domaine Ω mais à la condition de localisation pour un matériau élasto- « anélastique » *parfait* ($h_{|\Gamma_s} = 0$).

Enfin, cette condition de localisation donne la direction du vecteur $\dot{\bar{\mathbf{u}}}$:

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}} \in \text{Ker}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{an}|_{h=0} \cdot \mathbf{n})$$

où \mathbf{C}^{an} désigne le module tangent élasto- « anélastique ».

Les équations précédentes *obtenues sur* Γ_s sont similaires aux équations écrites pour le matériau hors discontinuité. Ces équations permettent de définir le comportement de la discontinuité.

Notons que les variables duales \mathbf{A} , comme les contraintes, sont des distributions régulières de Ω . Ainsi, on peut définir : $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ et $\bar{\mathbf{A}}$, les valeurs de \mathbf{A} , respectivement, sur Γ_s et $\Omega \setminus \Gamma_s$.

Dans ce cas, la dissipation s'écrit en tout point \mathbf{x} du domaine Ω :

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) = \bar{\mathcal{D}}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) + \bar{\bar{\mathcal{D}}}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))\delta_{\Gamma_s} = \bar{\mathbf{A}}\dot{\bar{\mathbf{v}}} + \bar{\bar{\mathbf{A}}}\dot{\bar{\bar{\mathbf{v}}}}\delta_{\Gamma_s} \quad (2.92)$$

La dissipation se décompose, alors, naturellement en une partie régulière correspondant à la dissipation volumique sur $\Omega \setminus \Gamma_s$ et une partie singulière correspondant à la dissipation surfacique ayant lieu sur Γ_s .

De plus, en reprenant l'expression de la dissipation écrite à l'équation (2.47), on peut encore écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \boldsymbol{\sigma} : \left(\dot{\bar{\mathbf{u}}} \otimes \mathbf{n} \right)^s \delta_{\Gamma_s} - \frac{d\psi}{dt}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v}) \\ &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{v}}\dot{\bar{\mathbf{v}}} + \left[\boldsymbol{\sigma} : \left(\dot{\bar{\mathbf{u}}} \otimes \mathbf{n} \right)^s - \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \left(\dot{\bar{\mathbf{u}}} \otimes \mathbf{n} \right)^s - \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{v}}\dot{\bar{\mathbf{v}}} \right] \delta_{\Gamma_s} \end{aligned} \quad (2.93)$$

En remarquant que $\boldsymbol{\sigma} : \left(\dot{\bar{\mathbf{u}}} \otimes \mathbf{n} \right)^s = \mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}}$, on peut mettre en évidence deux jeux de couples de variables associées pour la dissipation :

– les couples de variables associées au matériau hors discontinuité :

$$(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad \text{et} \quad (\bar{\bar{\mathbf{A}}}, \bar{\bar{\mathbf{v}}})$$

– les couples de variables associées à la discontinuité :

$$(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{\mathbf{u}}) \quad \text{et} \quad (\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{v}})$$

Ces considérations permettent alors d'écrire l'énergie libre de Helmholtz sous la forme :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v}) = \bar{\psi}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{v}}) + \bar{\bar{\psi}}(\bar{\bar{\mathbf{u}}}, \bar{\bar{\mathbf{v}}})\delta_{\Gamma_s} \quad (2.94)$$

Notons que, dans le cas de l'approche continue, le modèle sur la discontinuité étant directement déduit de celui écrit hors discontinuité, les fonctions $\bar{\psi}$ et $\bar{\bar{\psi}}$ ne sont pas indépendantes : $\bar{\bar{\psi}}$ se déduit de l'écriture de $\bar{\psi}$ en considérant l'expression de cette dernière pour des champs de déformation et de variables internes singuliers.

Finalement, les « ingrédients » de l'approche continue sont les suivants :

- Décomposition des variables internes en une partie régulière et une partie singulière :

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \bar{\bar{\mathbf{v}}}\delta_{\Gamma_s} \quad (2.95)$$

- Décomposition du multiplicateur de Lagrange en une partie régulière et une partie singulière :

$$\dot{\gamma} = \dot{\bar{\gamma}} + \dot{\bar{\bar{\gamma}}}\delta_{\Gamma_s} \quad (2.96)$$

- Décomposition de l'énergie libre de Helmholtz :

$$\psi(\varepsilon, \mathbf{v}) = \bar{\psi}(\bar{\varepsilon}, \bar{\mathbf{v}}) + \bar{\bar{\psi}}(\bar{\bar{\mathbf{u}}}, \bar{\bar{\mathbf{v}}})\delta_{\Gamma_s} \quad (2.97)$$

- Décomposition de la dissipation en une partie régulière et une partie singulière :

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}) = \bar{\mathcal{D}}(\mathbf{A}) + \bar{\bar{\mathcal{D}}}(\mathbf{A})\delta_{\Gamma_s} \quad (2.98)$$

- Condition de localisation :

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{an}|_{h=0} \cdot \mathbf{n}) \dot{\bar{\bar{\mathbf{u}}}} = \mathbf{0} \quad (2.99)$$

permettant de gérer l'introduction de la surface de discontinuité et son comportement.

L'approche « continue » peut paraître insatisfaisante. En effet, la condition d'introduction de la surface de discontinuité ne coïncide pas - sauf dans certaines situations très particulières - avec la condition de localisation classique au sens de Rice [Rice, 1976]. Runesson *et al.* [Runesson et al., 1991] ont montré (pour des lois élasto-plastiques) qu'il existe un module d'écrouissage critique au delà duquel la localisation des déformations ne peut pas avoir lieu. Pour que la condition d'introduction de la discontinuité coïncide avec la condition de localisation, il faudrait donc que le module d'écrouissage critique soit égal à zéro ce qui n'est vrai que pour des situations très particulières (chargement particulier ou matériau particulier).

De plus, certains auteurs ont montré [Garikipati, 1996], [Borja et al., 2000], dans le cas de la plasticité, que la condition d'introduction de la discontinuité est vérifiée après que la condition de localisation ait été atteinte. Ainsi, le limiteur de localisation - la discontinuité de déplacement - n'est pas introduit à l'initiation de la localisation des déformations responsable de la perte d'objectivité de la solution vis à vis du maillage. On peut, alors, tout naturellement remettre en question l'efficacité du limiteur de localisation.

Néanmoins, ceci n'a pas de conséquences dans la plupart des travaux réalisés dans le cadre des modèles à discontinuité forte. En effet, dans la plupart des cas, le matériau hors surface de discontinuité est considéré comme élastique. La condition d'introduction de la surface de discontinuité sert donc uniquement à déterminer l'instant du passage dans le régime adoucissant correspondant, dans ce cas, également au régime dissipatif (puisque toute la dissipation est supposée localisée sur la discontinuité). Cette condition sert, également et surtout, à fixer l'orientation de la discontinuité.

Dans notre cas, le matériau hors discontinuité est considéré comme dissipatif, il se peut donc tout à fait que la condition de localisation des déformations et la condition d'introduction de la discontinuité soit en « conflit ».

2.2.4.2 L'approche « discrète »

Dans ce cas, l'hypothèse de compatibilité des modèles continus classiques avec un champ de déformation singulier n'est pas retenue. La surface de discontinuité de déplacement est alors vue comme une interface cohésive sur laquelle est dissipée une énergie localisée.

La surface de discontinuité introduite est une surface matérielle du domaine Ω , nous pouvons appliquer les méthodes de construction de lois de comportement d'interfaces cohésives qui lient, sur la discontinuité, la traction au saut de déplacement.

Ces lois d'interfaces se construisent, dans le cadre thermodynamique classique, de la même façon que les modèles continus classiques présentés au 2.2.2 (voir [Frémond, 1987], [Klarbring, 1990], [Lemaitre, 1992b],).

Les variables du modèle sont décomposées en variables d'état et variables duales (voir tableau 2.3).

Variables d'état	Variables associées
$\bar{\bar{\mathbf{u}}}$ $\bar{\bar{\mathbf{v}}}$	\mathbf{t}_{Γ_s} $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$

Tableau 2.3: *Notations : variables d'état et variables associées pour la discontinuité*

Il est alors nécessaire de se donner :

- l'énergie libre surfacique de Helmholtz associée à la surface de discontinuité :

$$\bar{\bar{\psi}}(\bar{\bar{\mathbf{u}}}, \bar{\bar{\mathbf{v}}}) \quad (2.100)$$

- une fonction seuil :

$$\bar{\bar{\phi}}(\bar{\bar{\mathbf{A}}}) \leq 0 \quad (2.101)$$

- une dissipation surfacique définie par :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathcal{D}}}(\bar{\bar{\mathbf{A}}}) &= \mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \dot{\bar{\bar{\mathbf{u}}}} - \frac{d\bar{\bar{\psi}}(\bar{\bar{\mathbf{u}}}, \bar{\bar{\mathbf{v}}})}{dt} \\ &= \mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \dot{\bar{\bar{\mathbf{u}}}} - \frac{\partial \bar{\bar{\psi}}(\bar{\bar{\mathbf{u}}}, \bar{\bar{\mathbf{v}}})}{\partial \bar{\bar{\mathbf{u}}}} \cdot \dot{\bar{\bar{\mathbf{u}}}} - \frac{\partial \bar{\bar{\psi}}(\bar{\bar{\mathbf{u}}}, \bar{\bar{\mathbf{v}}})}{\partial \bar{\bar{\mathbf{v}}}} \cdot \dot{\bar{\bar{\mathbf{v}}}} \end{aligned} \quad (2.102)$$

Tout comme pour l'écriture d'un modèle continu classique, deux cas sont à examiner :

- *la discontinuité se déforme sans dissipation d'énergie.* On a alors :

$$\dot{\bar{\bar{\mathbf{v}}}} = \mathbf{0} \quad , \quad \bar{\bar{\mathcal{D}}}(\bar{\bar{\mathbf{A}}}) = 0 \quad , \quad \bar{\bar{\phi}}(\bar{\bar{\mathbf{A}}}) < 0 \quad (2.103)$$

Ceci permet d'écrire les équations d'état :

$$\mathbf{t}_{\Gamma_s} = \frac{\partial \bar{\bar{\psi}}(\bar{\bar{\mathbf{u}}}, \bar{\bar{\mathbf{v}}})}{\partial \bar{\bar{\mathbf{u}}}} \quad (2.104)$$

et par analogie :

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}} = - \frac{\partial \bar{\bar{\psi}}(\bar{\bar{\mathbf{u}}}, \bar{\bar{\mathbf{v}}})}{\partial \bar{\bar{\mathbf{v}}}} \quad (2.105)$$

En tenant compte de ces relations, on peut réécrire la dissipation surfacique sous la forme :

$$\bar{\mathcal{D}}(\bar{\mathbf{A}}) = \bar{\mathbf{A}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{v}}} \quad (2.106)$$

– la discontinuité se déforme de façon anélastique. On a alors :

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}} \neq \mathbf{0} \quad , \quad \bar{\mathcal{D}}(\bar{\mathbf{A}}) > 0 \quad , \quad \bar{\phi}(\bar{\mathbf{A}}) = 0 \quad (2.107)$$

Le principe du maximum de dissipation [Lubliner, 1990], [Maugin, 1992] permet de définir les jeux de variables duales $\bar{\mathbf{A}}$ convenant comme étant ceux qui maximisent la dissipation :

$$\left(\bar{\mathbf{A}} \right) = \arg \left\{ \min_{\bar{\phi}(\bar{\mathbf{A}}^*) \leq 0} \left[-\bar{\mathcal{D}} \left(\bar{\mathbf{A}}^* \right) \right] \right\} \quad (2.108)$$

Ce problème de minimisation sous contraintes est résolu par l'introduction d'une fonctionnelle de Lagrange et d'un multiplicateur de Lagrange $\dot{\bar{\gamma}}$:

$$\left(\bar{\mathbf{A}} \right) = \arg \left\{ \max_{\forall \dot{\bar{\gamma}} \geq 0} \min_{\forall (\bar{\mathbf{A}}^*)} \bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathbf{A}}^*, \dot{\bar{\gamma}}) \right\} \quad (2.109)$$

$$\text{avec } \bar{\mathcal{L}} = -\bar{\mathcal{D}} + \dot{\bar{\gamma}} \bar{\phi}(\cdot)$$

Les conditions de Kuhn-Tucker de ce problème donnent les équations d'évolution des variables internes :

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}} = \dot{\bar{\gamma}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{\mathbf{A}}} \quad (2.110)$$

et les conditions de charge/décharge :

$$\dot{\bar{\gamma}} \geq 0 \quad , \quad \bar{\phi}(\bar{\mathbf{A}}) \leq 0 \quad , \quad \dot{\bar{\gamma}} \bar{\phi}(\bar{\mathbf{A}}) = 0 \quad (2.111)$$

Enfin, la condition de cohérence permet de déterminer l'expression du multiplicateur de Lagrange :

$$\dot{\bar{\gamma}} = - \frac{\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{\mathbf{A}}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})}{\partial \bar{\mathbf{u}} \partial \bar{\mathbf{v}}} \right) \dot{\bar{\mathbf{u}}}}{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{\mathbf{A}}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})}{\partial \bar{\mathbf{v}}^2} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{\mathbf{A}}}} \quad (2.112)$$

Les équations d'évolution de la traction s'écrivent, à partir des résultats précédents, sous la forme :

$$\dot{\mathbf{t}}_{\Gamma_s} = \begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{u}}^2} \dot{\bar{\mathbf{u}}} & \dot{\bar{\gamma}} = 0 \\ \left[\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{u}}^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{u}}^2} : \bar{\mathbf{a}} \right) \otimes \left(\bar{\mathbf{b}} : \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{u}}^2} \right)}{\bar{h} + \bar{\mathbf{b}} : \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{u}}^2} : \bar{\mathbf{a}}} \right] \dot{\bar{\mathbf{u}}} & \dot{\bar{\gamma}} > 0 \end{cases} \quad (2.113)$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{\mathbf{A}}} \left[\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{v}}^2} - \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{v}} \partial \bar{\mathbf{u}}} \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{u}}^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{u}} \partial \bar{\mathbf{v}}} \right] \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{\mathbf{A}}} \\ \bar{\mathbf{a}} &= - \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{u}}^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{v}} \partial \bar{\mathbf{u}}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{\mathbf{A}}} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{b}} = - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{\mathbf{A}}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{u}} \partial \bar{\mathbf{v}}} \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{u}}^2} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.114)$$

Le modèle utilisé pour le matériau hors discontinuité est un modèle continu classique du type de ceux présentés au 2.2.2. Nous noterons les grandeurs relatives au matériau hors discontinuité *i.e.* celui responsable de la dissipation volumique avec une barre superposée.

On vient de montrer que le modèle pour la discontinuité et celui relatif au matériau hors discontinuité se construisent de façon similaire. En remarquant que toutes les grandeurs surfaciques sont des grandeurs volumiques concentrées sur une surface, on peut unifier la construction des deux modèles en notant qu'on obtient les mêmes équations en considérant un seul modèle pour lequel toutes les variables internes, l'énergie libre de Helmholtz et la dissipation seraient décomposées en une partie régulière et une partie singulière.

On retrouve alors les résultats :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) + \bar{\bar{\mathbf{v}}}(\mathbf{x}) \delta_{\Gamma_s} \\ \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x})) = \bar{\psi}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}), \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x})) + \bar{\bar{\psi}}(\bar{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}), \bar{\bar{\mathbf{v}}}(\mathbf{x})) \delta_{\Gamma_s} \\ \mathcal{D}(\mathbf{x}) = \bar{\mathcal{D}}(\mathbf{x}) + \bar{\bar{\mathcal{D}}}(\mathbf{x}) \delta_{\Gamma_s} \end{array} \right. \quad (2.115)$$

Il reste alors à déterminer la condition de passage à un mode de déformation localisé, *i.e.* l'instant auquel la discontinuité peut être introduite et avec quelle orientation.

Pour cela, n'importe quelle condition peut convenir. Cette condition peut, par exemple, découler d'observations expérimentales. Quoiqu'il en soit, elle doit être en accord avec la fonction seuil $\bar{\phi}(\bar{\bar{\mathbf{A}}})$ introduite sur la surface de discontinuité (ou inversement).

À $t = t_{loc}$, instant de la localisation, la discontinuité commence à être active. Ainsi, la fonction seuil doit être telle que :

$$\forall t < t_{loc}, \quad \bar{\phi}(\bar{\bar{\mathbf{A}}}) < 0 \quad \text{et} \quad \bar{\phi}(\bar{\bar{\mathbf{A}}}) = 0 \quad \text{à} \quad t = t_{loc} \quad (2.116)$$

Notons que, dans la mesure où nous souhaitons régler, par l'introduction de discontinuités de déplacement, les problèmes de dépendance au maillage, la condition d'introduction d'un champ de déplacement discontinu doit être simultanée ou antérieure à la condition de localisation classique qui correspond à l'instant de perte d'unicité de la solution.

C'est essentiellement dans l'écriture de la condition d'introduction de la discontinuité que diffèrent les approches « discrète » et « continue » : pour la seconde,

la condition d'introduction de Γ_s et le modèle écrit pour la discontinuité découle directement des lois de comportement écrites pour le matériau hors discontinuité. Pour la première, la condition d'introduction de la discontinuité et la loi de comportement adoptée pour la discontinuité peuvent résulter de considérations physiques, de résultats d'observations expérimentales, de résultats d'analyses multiéchelles, ...

2.3 Conclusion

Nous avons, dans ce chapitre, rappelé les points clés de la construction des modèles continus anélastiques.

Les modifications des modèles continus locaux induites par l'introduction d'une discontinuité de déplacement ont été présentées en considérant deux approches : une approche dite « continue » et une approche dite « discrète » .

Nous avons montré que les approches « discrètes » et « continues » conduisent à des résultats similaires. La différence essentielle, soulignée ci-avant, réside dans l'obtention de la condition d'introduction de la discontinuité et la construction de la fonction seuil relative à cette dernière.

Le tableau 2.4 résume les différents ingrédients nécessaires à la construction du modèle et souligne la similitude entre les variables et grandeurs introduites hors discontinuité et celles introduites sur la discontinuité.

	Matériau hors discontinuité $\Omega \setminus \Gamma_s$	Discontinuité Γ_s
Variables d'état observables	$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	$\bar{\mathbf{u}}$
Variables associées	$\boldsymbol{\sigma}$	\mathbf{t}_{Γ_s}
Variables internes	$\bar{\mathbf{v}}$	$\bar{\bar{\mathbf{v}}}$
Variables associées	$\bar{\mathbf{A}}$	$\bar{\bar{\mathbf{A}}}$
Multiplicateur de Lagrange	$\dot{\gamma}$	$\dot{\bar{\gamma}}$
Énergie libre de Helmholtz	$\bar{\psi}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{v}})$	$\bar{\bar{\psi}}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\bar{\mathbf{v}}})$
Fonction seuil	$\bar{\phi}(\bar{\mathbf{A}})$	$\bar{\bar{\phi}}(\bar{\bar{\mathbf{A}}})$
Dissipation	$\bar{\mathcal{D}}$	$\bar{\bar{\mathcal{D}}}$

Tableau 2.4: *Mise en correspondance des variables et fonctions relatives à la construction des modèles hors discontinuité et sur la discontinuité*

À ces fonctions et variables vient s'ajouter la condition d'introduction de la discontinuité qui permet de déterminer :

- l'instant t_{loc} auquel la discontinuité est introduite dans le domaine Ω ;
- l'orientation de la discontinuité via l'obtention du vecteur normal à la discontinuité : \mathbf{n} .

Notons que la surface de discontinuité est active dès lors que cette condition est vérifiée. Ainsi, la discontinuité n'a aucun effet sur le comportement du matériau avant cet instant. La surface de discontinuité peut donc être considérée comme une interface rigide - « anélastique », l'anélasticité étant activée à partir de $t = t_{loc}$. Le caractère rigide de la discontinuité pose, nous le verrons, des difficultés d'implantation numérique du comportement localisé.

Chapitre 3

Aspects numériques de la prise en compte de discontinuités de déplacement

Dans ce chapitre, nous présentons l'implantation numérique de l'approche présentée au chapitre précédent. Nous développons dans un premier temps l'implantation numérique dans le cas du problème unidimensionnel détaillé au chapitre précédent. Nous présenterons ensuite brièvement les différentes techniques mises en œuvre dans la littérature pour prendre en compte des discontinuités de déplacement. Enfin, nous détaillerons les points clés de la méthode utilisée pour l'implantation numérique du modèle à discontinuité de déplacement présenté précédemment.

Sommaire

3.1	Un problème unidimensionnel	60
3.2	Une revue des techniques de la littérature	67
3.2.1	Définition du problème, formulation variationnelle	67
3.2.2	Discretisation du problème	68
3.2.3	Choix des interpolations	69
3.3	Méthode de résolution globale : la méthode des modes incompatibles	73
3.3.1	Définition du problème, formulation variationnelle	73
3.3.2	Formulation approchée, choix des interpolations	76
3.3.3	Résolution	81
3.4	Conclusion	85

3.1 Un problème unidimensionnel

Nous considérons, ici, toujours le problème unidimensionnel défini au 2.1. L'objet de cette partie est de détailler l'implantation numérique du modèle à discontinuité forte dans un cas particulièrement simple unidimensionnel.

Interpolations des champs de déplacement et déformation

Les éléments finis sont construits, dans leur version standard, à l'aide de fonctions d'interpolations supposées, au moins, continues par morceaux. Ainsi, les champs de déplacement représentés sont continus sur la structure considérée. Nous souhaitons ici prendre en compte une discontinuité du champ de déplacement, un enrichissement de la base des fonctions de forme classiques est donc, à cet effet, nécessaire.

Nous avons vu que le champ de déplacement s'écrit :

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) + \bar{\bar{u}}(t)\mathcal{H}_{\Gamma_s}(x) \quad (3.1)$$

Remarque :

Les quantités relatives à l'approximation éléments finis seront notées avec un h en exposant.

La barre est discrétisée par des éléments de barre à deux nœuds. Nous ne considérons ici que *les restrictions des champs à un élément présentant une surface de discontinuité*.

Nous allons supposer que la partie continue du champ de déplacement s'approche ; de façon classique, sur un élément ; sous la forme :

$$\bar{u}^h(x, t) = \sum_{a=1,2} N_a(x)\bar{u}_a(t) \quad (3.2)$$

où $N_a(x)$ est la fonction de forme associée au nœud a ; $\bar{u}_a(t)$ est la valeur de $\bar{u}(x, t)$ au nœud a .

Ainsi, le champ de déplacement total s'écrit sous forme approchée :

$$u^h(x, t) = \sum_{a=1,2} N_a(x)\bar{u}_a(t) + \bar{\bar{u}}(t)\mathcal{H}_{\Gamma_s}(x) \quad (3.3)$$

Or, nous souhaitons exprimer le déplacement total en fonction des déplacements nodaux $d_a(t)$. Ces derniers sont donnés, d'après les équations (3.2) et (3.3), par :

$$\begin{cases} d_a(t) = u(x_a, t) = \bar{u}_a(t) + \bar{\bar{u}}(t) & \text{si } x_a > \bar{x} \quad (a \in \Omega^+) \\ d_a(t) = u(x_a, t) = \bar{u}_a(t) & \text{si } x_a < \bar{x} \quad (a \in \Omega^-) \end{cases} \quad (3.4)$$

Nous noterons 1 le nœud de l'élément dans Ω^- et 2 celui se trouvant dans Ω^+ . On a ainsi :

$$\begin{cases} d_1(t) = \bar{u}_1(t) \\ d_2(t) = \bar{u}_2(t) + \bar{\bar{u}}(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

L'approximation de $u(x, t)$ peut alors s'écrire :

$$u^h(x, t) = N_1(x)d_1(t) + N_2(x)d_2(t) - N_2(x)\bar{u}(t) + \bar{u}(t)\mathcal{H}_{\Gamma_s}(x) \quad (3.6)$$

ce qui s'écrit, encore, sous forme condensée :

$$u^h(x, t) = \sum_{a=1,2} N_a(x)d_a(t) - N_2(x)\bar{u}(t) + \bar{u}(t)\mathcal{H}_{\Gamma_s}(x) \quad (3.7)$$

ce qui peut, encore, s'écrire :

$$u^h(x, t) = \sum_{a=1,2} N_a(x)d_a(t) + M(x)\bar{u}(t) \quad (3.8)$$

où $M(x) = \mathcal{H}_{\Gamma_s}(x) - N_2(x)$. La fonction $M(x)$ est nulle sur les nœuds de l'élément.

Remarque :

Rappelons que nous avons vu au 2.1 que, afin de ne pas perturber l'écriture des conditions aux limites en déplacement, le champ de déplacement total pouvait s'écrire :

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + \bar{u}(t) (\mathcal{H}_{\Gamma_s}(x) - \varphi(x)) \quad (3.9)$$

où la fonction $\varphi(x)$ est une fonction continue (C^1 par morceaux) définie sur un sous-domaine Ω^d de Ω et vérifiant :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0 & x \in \Omega^- \setminus \Omega^{d-} \\ \varphi(x) = 1 & x \in \Omega^+ \setminus \Omega^{d+} \end{cases} \quad (3.10)$$

La fonction $N_2(x)$ joue ici le rôle de $\varphi(x)$. Nous aurions ainsi pu, pour construire les interpolations des déplacements, partir de la décomposition (3.9), supposer que le champ continu $\tilde{u}(x, t)$ s'interpole de façon classique puis choisir la fonction $\varphi(x)$. Cette dernière est arbitraire. Cependant, pour ne pas modifier les règles d'intégration classiques des éléments enrichis, le sous-domaine Ω^d est confondu avec l'élément considéré et la fonction $\varphi(x)$ appartient à l'espace vectoriel défini par la base des fonctions de forme de l'élément. Dans le cas unidimensionnel traité ici, la fonction $\varphi(x)$ est alors complètement définie par les conditions (3.10).

Avec cette interpolation pour le champ de déplacement, le champ de déformation approché s'écrit :

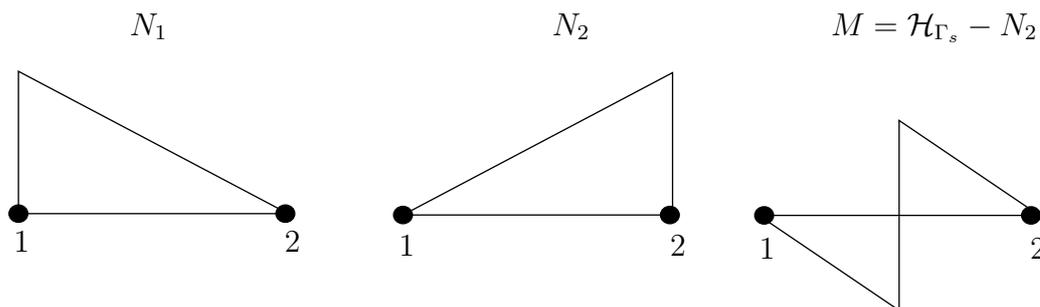
$$\varepsilon^h = \sum_{a=1,2} B_a(x)d_a(t) + G_r(x)\bar{u}(t) \quad (3.11)$$

avec $B_a = LN_a(x)$ et $G_r(x) = LM(x)$, où L est l'opérateur matriciel associé à ∇^s .

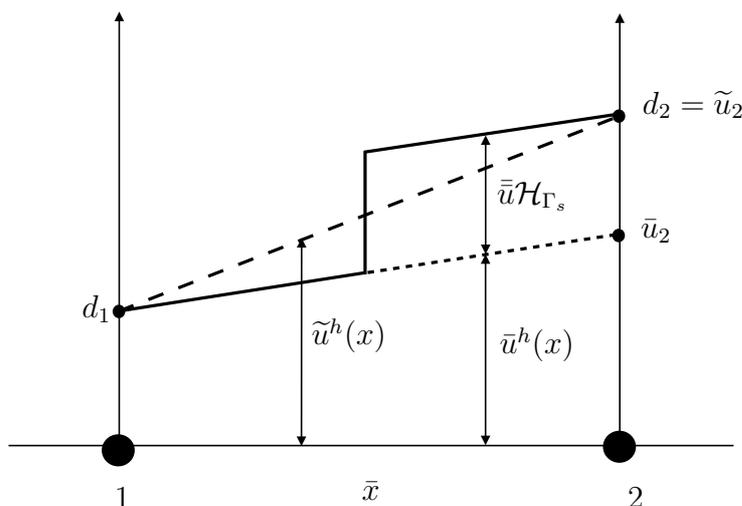
Notons que, vu la forme de la fonction $M(x)$, la fonction d'interpolation $G_r(x)$ peut s'écrire comme la somme d'une partie régulière et d'une partie singulière sous la forme :

$$G_r(x) = \underbrace{-B_2(x)}_{\bar{G}_r(x)} + \underbrace{\delta_{\Gamma_s}}_{\bar{G}_r, \delta_{\Gamma_s}} \quad (3.12)$$

La figure 3.1 donne une représentation des fonctions d'interpolation du champ de déplacement pour un élément à 2 nœuds traversé par une « surface » de discontinuité.



(a) Fonctions d'interpolation des déplacements



(b) Champs de déplacement

Figure 3.1: *Fonctions d'interpolation et champs de déplacement pour un élément de barre à 2 nœuds contenant une discontinuité*

Résolution du problème

En constatant, au vu des équations précédentes, que le degré de liberté $\bar{u}(t)$ est une variable définie au niveau de chaque élément et non au niveau de la structure (contrairement aux déplacements nodaux) et en considérant l'interpolation des déformations de l'équation (3.11), il est aisé de remarquer que le champ $G_r(x)\bar{u}(t)$ peut être considéré comme une déformation ajoutée.

De ceci est née l'idée d'appliquer à ce problème les résultats de la méthode des modes incompatibles [Wilson et al., 1973], [Wilson et Ibrahimbegović, 1990], [Ibrahimbegović et Wilson, 1991], initialement développée afin de régler les problèmes de blocage en flexion de certains éléments. La méthode sera présentée ultérieurement, nous en donnons, ici, simplement les points clés.

Les champs de déformation virtuels sont interpolés avec une fonction d'interpolation éventuellement différente de celle permettant d'interpoler les champs de

déformation réels (équation (3.11)) :

$$\delta\varepsilon^h = \sum_{a=1,2} B_a(x)\delta w_a(t) + G_v(x)\delta\bar{e} \quad (3.13)$$

où $G_v(x)$ est une fonction vérifiant :

$$\int_{\Omega^e} G_v(x) d\Omega^e = 0 \quad (3.14)$$

de façon à assurer le passage du « patch-test ».

De plus, vu la forme de la fonction $G_r(x)$, nous supposons également que $G_v(x)$ se décompose, de même, en une partie régulière et une partie singulière :

$$G_v(x) = \bar{G}_v(x) + \bar{\bar{G}}_v(x)\delta_{\Gamma_s} \quad (3.15)$$

En s'appuyant sur la version modifiée de la méthode des modes incompatibles [Ibrahimbegović et Wilson, 1991], la fonction $G_v(x)$ est construite à partir de la fonction $G_r(x)$:

$$G_v(x) = G_r(x) - \frac{1}{A^e} \int_{\Omega^e} G_r(x) d\Omega^e \quad (3.16)$$

où $A^e = \int_{\Omega^e} d\Omega^e$.

Avec ces interpolations, le problème à résoudre s'écrit, alors :

$$\begin{cases} \sum_{e=1}^{N_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \sigma d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T b d\Omega^e \right] = \mathbf{0} \\ h^e = \int_{\Omega^e} G_v(x)\sigma d\Omega^e = \int_{\Omega^e} \bar{G}_v(x)\sigma d\Omega^e + \bar{\bar{G}}_v(\bar{x})t_{\Gamma_s} = 0 \quad \forall e \in [1, N_{elem}] \end{cases} \quad (3.17)$$

où N_{elem} est le nombre d'éléments utilisés pour la discrétisation de la barre.

La première équation de ce système n'est autre que l'équation d'équilibre global résolue classiquement. Elle est écrite sur toute la structure. En revanche, la deuxième équation est écrite, de façon indépendante, sur chaque élément présentant une discontinuité : il s'agit d'une équation d'équilibre local permettant d'imposer la condition de continuité des tractions le long de la surface de discontinuité sous forme faible.

La linéarisation de ces équations conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \sum_{e=1}^{N_{elem}} \left[\mathbf{K}^{e(i)} \Delta \mathbf{d}^{(i)} + \mathbf{F}_r^{e(i)} \Delta \bar{u}^{(i)} \right] = \mathbf{f}^e - \mathbf{r}^{e(i)} \\ h^{e(i)} + \left(\mathbf{F}_v^{e(i)T} + \bar{G}_v \frac{\partial t_{\Gamma_s}}{\partial \mathbf{d}} \right) \Delta \mathbf{d}^{(i)} + \left(H^{e(i)} + \underbrace{\bar{G}_v \frac{\partial t_{\Gamma_s}}{\partial \bar{u}}}_{-\bar{K}^{(i)}} \right) \Delta \bar{u}^{(i)} = 0 \quad \forall e \in [0, N_{elem}] \end{cases} \quad (3.18)$$

où :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^{e(i)} &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T C^{an(i)} \mathbf{B} \, d\Omega^e & ; & \quad \mathbf{F}_r^{e(i)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T C^{an(i)} \bar{G}_r \, d\Omega^e \\
 \mathbf{f}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T b \, d\Omega^e & ; & \quad \mathbf{r}^{e(i)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \sigma^{(i)} \, d\Omega^e \\
 \mathbf{F}_v^{e(i)} &= \int_{\Omega^e} \bar{G}_v C^{an(i)} \mathbf{B} \, d\Omega^e & ; & \quad H^{e(i)} = \int_{\Omega^e} \bar{G}_v C^{an(i)} \bar{G}_r \, d\Omega^e
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

L'équation d'équilibre local $h^e = 0$ est résolue, de façon incrémentale, au niveau de chaque élément, pour un incrément de déplacements nodaux donné $\Delta \mathbf{d}^{(i)}$. Puis, par condensation statique, l'inconnue « élémentaire » $\Delta \bar{u}^{(i)}$ est éliminée :

$$\Delta \bar{u}^{(i)} = - \left[H^{e(i)} - \bar{K}^{(i)} \right]^{-1} \left[\mathbf{F}_v^{e(i)} + \bar{G}_v \frac{\partial t_{\Gamma_s}}{\partial \mathbf{d}} \right] \Delta \mathbf{d}^{(i)} \tag{3.20}$$

Le système linéarisé (3.18) se réécrit alors :

$$\bigwedge_{e=1}^{N_{elem}} \left[\hat{\mathbf{K}}^{e(i)} \Delta \mathbf{d}^{(i)} = \mathbf{f}^e - \mathbf{r}^{e(i)} \right] \tag{3.21}$$

avec

$$\hat{\mathbf{K}}^{e(i)} = \mathbf{K}^{e(i)} - \mathbf{F}_r^{e(i)} \left[H^{e(i)} - \bar{K}^{(i)} \right]^{-1} \left[\mathbf{F}_v^{e(i)} + \bar{G}_v \frac{\partial t_{\Gamma_s}}{\partial \mathbf{d}} \right] \tag{3.22}$$

On se ramène alors à la résolution d'un problème éléments finis classique. Notons que la matrice $\hat{\mathbf{K}}^{e(i)}$ n'est pas symétrique ; la résolution du problème doit en tenir compte.

Pour le cas 1D que nous présentons ici, les équations sont particulièrement simples et, comme nous l'avons vu au chapitre 2.1, le matériau hors discontinuité se décharge nécessairement lorsque la discontinuité est active ; le module tangent élasto- « anélastique » $C^{an(i)}$ est alors le module d'Young E du matériau.

D'autre part, l'enrichissement de la base des fonctions de forme, afin de prendre en compte un champ de déplacement discontinu dans les éléments, se construit à partir des fonctions d'interpolation classiques. Ceci a pour conséquence de ne pas imposer de modifications des règles d'intégration numérique sur les éléments.

Quelques résultats numériques

Afin de mettre en évidence, l'objectivité de la solution par rapport à la discrétisation éléments finis choisie, nous présentons, ici, les résultats obtenus après implantation du modèle présenté précédemment, dans un cas unidimensionnel.

Pour cela, une modélisation EF de la barre précédente est réalisée en considérant différentes finesses de maillage (3, 7, 15 et 47 éléments). La barre est supposée encastree à l'une de ses extrémités et soumise à un déplacement imposé à son extrémité libre. Afin de modifier le problème de bifurcation en un problème de localisation (si la barre est supposée homogène, la localisation des déformations peut avoir lieu en n'importe quel point de la barre), un élément est affaibli : sa contrainte limite d'élasticité est réduite de 1% par rapport au reste de la structure.

La barre est discrétisée à l'aide d'éléments de barre à deux nœuds. La condition d'introduction de la surface de discontinuité correspond à la condition de localisation $\bar{K}(\bar{\xi}) = 0$.

La fonction seuil choisie pour le matériau hors discontinuité s'écrit :

$$\bar{\phi}(\sigma, \bar{q}) = |\sigma| - (\bar{\sigma}_y - \bar{q}) \leq 0 \quad (3.23)$$

avec $\bar{q} = -\bar{K} \bar{\xi} + (\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_\infty) (1 - \exp[-\bar{\beta} \bar{\xi}])$ (où $\bar{K} < 0$ et $\bar{\sigma}_y < \bar{\sigma}_\infty$).

La fonction seuil choisie pour la discontinuité est la suivante :

$$\bar{\phi}(t_{\Gamma_s}, \bar{q}) = t_{\Gamma_s} - (\bar{\sigma}_u - \bar{q}) \quad (3.24)$$

où $\bar{\sigma}_u = \sigma$ à l'instant de l'introduction de la discontinuité et $\bar{q} = \bar{\sigma}_u (1 - \exp[-\bar{\beta} \bar{\xi}])$.

Les lois de comportement continue et discrète sont schématisées sur la figure 3.2.

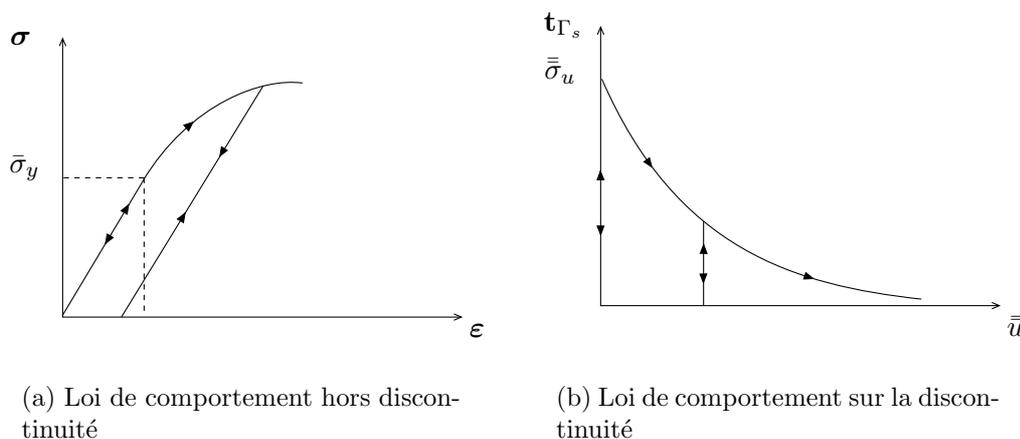


Figure 3.2: Représentation des lois de comportement continue et discrète

La barre est supposée de longueur $L = 1\text{m}$ et de section unitaire $A = 1\text{m}^2$. Les propriétés du matériau hors discontinuité et sur la discontinuité sont récapitulées dans le tableau 3.1.

Modèle continu	
Module d'Young	3000 MPa
$\bar{\sigma}_y$	10.0 MPa
$\bar{\sigma}_\infty$	15.5 MPa
\bar{K}	-5 MPa
$\bar{\beta}$	100
Modèle discret	
$\bar{\beta}$	400 m^{-1}

Tableau 3.1: Propriétés du matériau hors discontinuité et sur la discontinuité

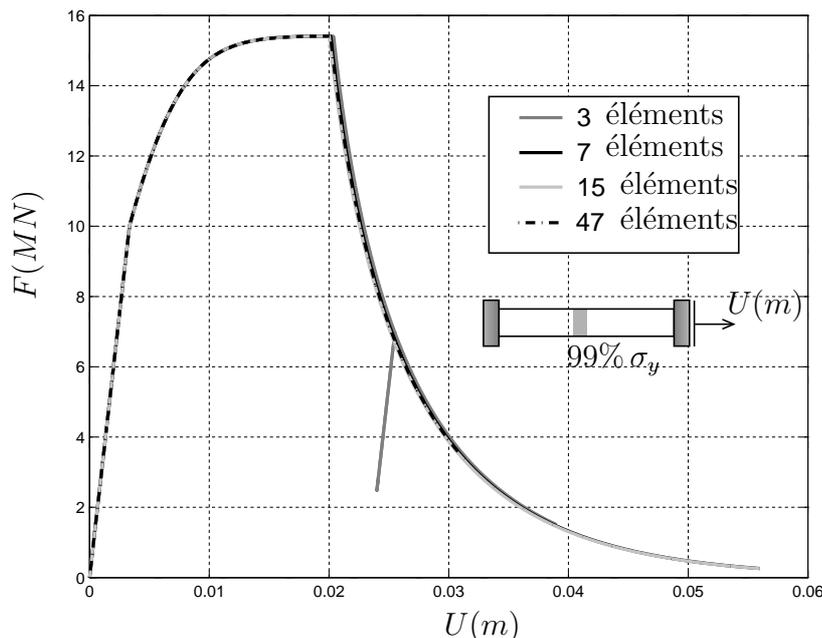


Figure 3.3: *Courbes effort-déplacement imposé pour différentes discrétisations EF de la barre*

Les résultats en terme de déplacement imposé/effort à l'extrémité libre sont donnés pour les différentes discrétisations choisies sur la figure 3.3. On constate aisément que la réponse est indépendante de la discrétisation EF choisie. L'énergie dissipée dans la structure au cours du chargement est la même quel que soit le nombre (et donc la taille) d'éléments choisi pour discrétiser le problème. De même, la charge limite de la structure est également indépendante de la discrétisation.

Pour un cas unidimensionnel comme celui présenté ici, les deux classes de dissipation introduites dans la modélisation - dissipation diffuse et dissipation localisée - sont activées successivement sans jamais « cohabiter ». Ainsi, jusqu'à atteindre le pic, la dissipation trouve son origine dans la plasticification volumique du matériau constitutif de la barre. Le pic ayant été dépassé, les déformations plastiques volumiques demeurent fixes, la dissipation est uniquement liée à l'apparition et au développement d'une surface de discontinuité sur laquelle se concentrent les mécanismes de plastification et donc de dissipation.

Une décharge a été entreprise au cours de la phase post-pic pour le maillage à 3 éléments. Cette dernière conduit à l'apparition d'une déformation plastique résultant à la fois du comportement élasto-plastique du matériau hors discontinuité et du comportement rigide-plastique de la discontinuité.

L'introduction de surfaces de discontinuité permet donc de représenter de façon satisfaisante les trois phases du comportement :

- la phase élastique ;
- la phase de dissipation plastique volumique caractérisée par l'évolution de la plasticité dans le matériau hors discontinuité ;
- la phase post-pic caractérisée par l'apparition et l'évolution de la surface de discontinuité

et ce, de façon indépendante de la taille des éléments choisis.

3.2 Une revue des techniques de la littérature

La représentation numérique d'un champ de déplacement discontinu ne présente pas de réelle difficulté dans le cas unidimensionnel présenté précédemment. En revanche, le cas des problèmes bi- et tridimensionnels est plus difficile à traiter. Diverses méthodes permettant de représenter un champ de déplacement discontinu sont disponibles dans la littérature. Nous nous proposons, ici, de les présenter avant de développer celle que nous avons, plus particulièrement, utilisée.

Cette partie s'appuie, très largement, sur plusieurs articles publiés par Milan Jirásek [Jirásek, 1998], [Jirásek, 2000]. Nous nous limiterons, ici, à présenter uniquement les points clés caractéristiques des différentes techniques utilisées dans la littérature pour prendre en compte des surfaces de discontinuité de déplacement dans les éléments finis. Les lecteurs souhaitant de plus amples développements sont invités à se reporter aux articles mentionnés ci-avant.

3.2.1 Définition du problème, formulation variationnelle

Le domaine considéré ici est celui présenté à la figure 3.4.

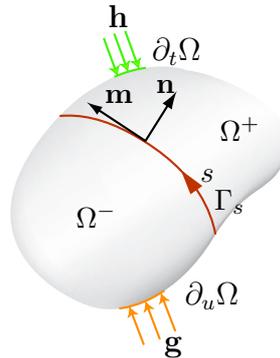


Figure 3.4: *Domaine Ω , conditions aux limites en efforts et déplacements*

\mathbf{b} désigne les forces volumiques appliquées au domaine Ω ; \mathbf{h} et \mathbf{g} sont, respectivement, les efforts et déplacements imposés sur la frontière du domaine Ω .

La formulation variationnelle du problème s'appuie sur le principe variationnel à trois champs de Hu-Washizu [Washizu, 1982]. Trois champs de déplacement, déformation et contrainte, supposés indépendants, sont ainsi pris en compte : \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\tau}$.

Dans ce cas, les équations du problème s'écrivent sous forme faible :

$\forall (\delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \boldsymbol{\tau})$ admissibles,

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\tau} : (\nabla^s \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : (\nabla^s \delta \mathbf{u} - \delta \boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{h} \, d\Gamma = 0 \quad (3.25)$$

où $(\delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \boldsymbol{\tau})$ notent, respectivement, les variations des champs \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\tau}$. $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ est un tenseur de contrainte vérifiant la loi de comportement.

3.2.2 Discrétisation du problème

La discrétisation EF du problème précédent nécessite de se donner les interpolations des champs \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\tau}$. Nous supposons qu'ils s'écrivent, de façon générique, sous la forme discrétisée suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^h = \mathbf{N}\mathbf{d} + \mathbf{M}\bar{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^h = \mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \boldsymbol{\tau}^h = \mathbf{S}\mathbf{s} \end{cases} \quad (3.26)$$

avec $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$ où \mathbf{L} est l'opérateur associé au gradient symétrique ∇^s . Les variables \mathbf{d} , $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et \mathbf{s} sont supposées indépendantes. Nous noterons, de plus, $\mathbf{G}_r = \mathbf{L}\mathbf{M}$; $\mathbf{f}^{ext} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{h} \, d\Gamma$ et $\bar{\mathbf{f}}^{ext} = \int_{\Omega} \mathbf{M}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{M}^T \mathbf{h} \, d\Gamma$.

Avec ces interpolations, l'équation (3.25) se réécrit :

$$\begin{aligned} \forall (\delta \mathbf{d}, \delta \bar{\mathbf{u}}, \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \delta \mathbf{s}), \quad & \delta \mathbf{d}^T \left[\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{h} \, d\Gamma \right] \\ & + \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \left[\int_{\Omega} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \mathbf{S}\mathbf{s} \, d\Omega \right] + \delta \mathbf{s}^T \left[\int_{\Omega} \mathbf{S}^T \mathbf{G}_r \bar{\mathbf{u}} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{S}^T \mathbf{G} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega \right] \\ & + \delta \bar{\mathbf{u}}^T \left[\int_{\Omega} \mathbf{G}_r^T \mathbf{S}\mathbf{s} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{M}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{M}^T \mathbf{h} \, d\Gamma \right] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.27)$$

En tenant compte du fait que les variables $(\delta \mathbf{d}, \delta \bar{\mathbf{u}}, \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \delta \mathbf{s})$ sont indépendantes, on obtient, finalement, les équations :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega = \mathbf{f}^{ext} & (3.28a) \\ \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \mathbf{S}\mathbf{s} \, d\Omega = \mathbf{0} & (3.28b) \\ \int_{\Omega} \mathbf{G}_r^T \mathbf{S}\mathbf{s} \, d\Omega = \bar{\mathbf{f}}^{ext} & (3.28c) \\ \int_{\Omega} \mathbf{S}^T \mathbf{G}_r \bar{\mathbf{u}} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{S}^T \mathbf{G} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega = \mathbf{0} & (3.28d) \end{cases}$$

Pour la suite, nous supposons que les éléments traversés par une surface de discontinuité ne sont pas chargés, on a alors : $\bar{\mathbf{f}}^{ext} = \mathbf{0}$.

En différentiant les équations du système (3.28) par rapport au temps et en tenant compte du fait que :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^h(\boldsymbol{\varepsilon}^h) = \mathbf{C}^{an} \left[\mathbf{B}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{G}\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right] \quad (3.29)$$

où \mathbf{C}^{an} est le module tangent anélastique, on obtient le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{an} \mathbf{B} \, d\Omega & \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{an} \mathbf{G} \, d\Omega & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \mathbf{C}^{an} \mathbf{B} \, d\Omega & \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \mathbf{C}^{an} \mathbf{G} \, d\Omega & - \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \mathbf{S} \, d\Omega & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & - \int_{\Omega} \mathbf{S}^T \mathbf{G} \, d\Omega & \mathbf{0} & \int_{\Omega} \mathbf{S}^T \mathbf{G}_r \, d\Omega \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \int_{\Omega} \mathbf{G}_r^T \mathbf{S} \, d\Omega & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\bar{\mathbf{e}}} \\ \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\bar{\mathbf{u}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{f}}^{ext} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

3.2.3 Choix des interpolations

Les différentes techniques utilisées dans la littérature diffèrent par le choix réalisé pour les fonctions d'interpolation : \mathbf{M} et \mathbf{G} .

Nous détaillons trois techniques utilisées dans la littérature afin de prendre en compte numériquement un champ de déplacement discontinu :

- la méthode dite « Statically Optimal Symmetric » ;
- la méthode dite « Kinematically Optimal Symmetric » ;
- la méthode dite « Statically and Kinematically Optimal Nonsymmetric » .

Pour chacune d'entre elles, nous précisons le choix des fonctions d'interpolation.

Notons que, en remarquant que les interpolations des contraintes, des déformations et des déplacements ajoutés ($\mathbf{M}\bar{\mathbf{u}}$) ne sont pas nécessairement continues d'un élément à l'autre, les équations (3.28b) à (3.28d) peuvent être écrites sur chaque élément de discrétisation du domaine Ω . Nous noterons, dans la suite, ces éléments Ω^e et considérerons, uniquement, les restrictions des interpolations à ces sous-domaines.

3.2.3.1 Méthode « Statically Optimal Symmetric » (SOS)

Dans ce cas, les champs de déplacement sont interpolés de façon classique ($\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$), ainsi, toutes les équations relatives à la variable $\bar{\mathbf{u}}$ sont supprimées.

L'équation (3.28c) est alors supprimée et (3.28d) devient :

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{S}^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{e}} \, d\Omega^e = \mathbf{0} \quad (3.31)$$

Pour passer le « patch-test » (contraintes constantes dans les éléments), cette équation doit être vérifiée pour $\mathbf{S} = \mathbf{I}$ (où \mathbf{I} est la matrice identité). Ceci impose alors que la matrice d'interpolation des déformations enrichies \mathbf{G} vérifie :

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{G} \, d\Omega^e = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

Avec ce résultat, le système (3.30) se réduit à :

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{an} \mathbf{B} \, d\Omega^e & \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{an} \mathbf{G} \, d\Omega^e \\ \int_{\Omega^e} \mathbf{G}^T \mathbf{C}^{an} \mathbf{B} \, d\Omega^e & \int_{\Omega^e} \mathbf{G}^T \mathbf{C}^{an} \mathbf{G} \, d\Omega^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\bar{\mathbf{e}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{f}}^{ext,e} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Cette technique est dite « Statically Optimal Symmetric » car la fonction \mathbf{G} est déterminée par des considérations relatives à l'espace des contraintes, permettant d'assurer, le long de la surface de discontinuité, la continuité des tractions sous forme faible. Par ailleurs, si la matrice \mathbf{C}^{an} est symétrique, le système à résoudre est également symétrique.

3.2.3.2 Méthode « Kinematically Optimal Symmetric » (KOS)

Dans ce cas, contrairement à la méthode *SOS*, le déplacement ajouté n'est pas supposé nul. Une fonction \mathbf{M} est choisie et la fonction $\mathbf{G}_r = \mathbf{LM}$ qui lui est associée est également construite. La fonction \mathbf{G} est alors prise égale à la fonction \mathbf{G}_r . Il y a donc compatibilité des champs de déplacement et déformation, d'où le qualificatif « Kinematically » donné à la méthode.

Avec ce choix de fonctions d'interpolation, le système (3.30) s'écrit alors :

$$\left[\begin{array}{cc} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{an} \mathbf{B} \, d\Omega^e & \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{an} \mathbf{G} \, d\Omega^e \\ \int_{\Omega^e} \mathbf{G}^T \mathbf{C}^{an} \mathbf{B} \, d\Omega^e & \int_{\Omega^e} \mathbf{G}^T \mathbf{C}^{an} \mathbf{G} \, d\Omega^e \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\bar{\mathbf{e}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{f}}^{ext,e} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

On retrouve alors le même système à résoudre que pour la méthode *SOS*. Il s'agit d'un système symétrique pour les mêmes raisons que pour la méthode *SOS*.

3.2.3.3 Méthode « Statically and Kinematically Optimal Nonsymmetric » (SKON)

La grande majorité des travaux portant sur les modèles à discontinuités fortes s'appuie sur cette technique de résolution numérique. Dans ce cas, une combinaison des deux précédentes techniques est réalisée (ce qui justifie en partie son nom).

La fonction \mathbf{G} est prise égale à \mathbf{G}_r pour l'interpolation des champs de déformation réels. En revanche, l'interpolation des champs de déformation virtuels s'appuie sur une fonction d'interpolation que nous noterons \mathbf{G}_v et qui vérifie l'équation (3.32).

Ainsi, l'équation (3.28b) s'écrit désormais :

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{G}_v^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\bar{\mathbf{e}}) \, d\Omega^e = \mathbf{0} \quad (3.35)$$

Le système (3.30) se réduit alors à :

$$\left[\begin{array}{cc} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{an} \mathbf{B} \, d\Omega^e & \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{an} \mathbf{G} \, d\Omega^e \\ \int_{\Omega^e} \mathbf{G}_v^T \mathbf{C}^{an} \mathbf{B} \, d\Omega^e & \int_{\Omega^e} \mathbf{G}_v^T \mathbf{C}^{an} \mathbf{G} \, d\Omega^e \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\bar{\mathbf{e}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{f}}^{ext,e} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

En règle générale, les fonctions \mathbf{G}_v et \mathbf{G} sont différentes. Le système précédent n'est donc plus symétrique même si la matrice \mathbf{C}^{an} est symétrique (d'où le « non-symmetric » utilisé pour désigner cette technique).

3.2.3.4 Quelques éléments de comparaison

Les termes choisis afin de désigner les différentes techniques présentées précédemment mettent à jour les points forts et les points faibles de ces dernières.

La méthode *SOS* est optimale du point de vue des équations de la statique : la condition de continuité des tractions est assurée au sens faible sur la surface de discontinuité. En revanche, les conditions de compatibilité entre le champ de déformation et le champ de déplacement ne sont pas assurées. Les redistributions de contraintes, liées à l'évolution du saut de déplacement sur la surface de discontinuité, ne sont alors pas forcément correctement prises en compte.

La méthode *KOS* est, quant à elle, optimale du point de vue des équations de la cinématique : les conditions de compatibilité des champs de déformation et déplacement sont assurées. En revanche, la condition de continuité des tractions (sous forme faible) le long de la surface de discontinuité n'est pas garantie. Ainsi, la méthode *KOS* peut présenter des problèmes de blocage.

Enfin, la méthode *SKON* combine les avantages des deux précédentes méthodes : la condition de continuité des tractions est assurée de façon faible sur la surface de discontinuité et la compatibilité des champs de déformation et déplacement réels est garantie. En revanche, ceci suppose un choix des fonctions d'interpolation des champs de déformation virtuels différent de celui des champs de déformation réels. Ceci conduit à une perte de symétrie de la matrice de rigidité élémentaire. Quoiqu'il en soit les résultats fournis par cette méthode restent plus satisfaisants que ceux fournis par les deux précédentes.

3.2.3.5 Quelques remarques

Pour les méthodes présentées précédemment, le saut de déplacement apparaît comme une inconnue locale qui, par condensation statique, au niveau élémentaire, est éliminée des équations d'équilibre global. Ainsi, les seules inconnues du problème, au niveau global, restent les déplacements nodaux.

Certains auteurs [Wells et Sluys, 2001a], [Wells et al., 2002] se sont appuyés, afin de prendre en compte numériquement une « vraie » surface de discontinuité de déplacement (dans le sens où le champ de déplacement approché est, effectivement, discontinu), sur la méthode de partition de l'unité (ou *PUM*) développée par Babuška et Melenk [Melenk et Babuška, 1996] comme une généralisation des techniques éléments finis classiques.

Dans ce cas, l'interpolation des champs de déplacements nodaux réels et virtuels prend en compte la surface de discontinuité de déplacement par l'introduction d'un enrichissement de la cinématique, en particulier de l'interpolation des champs de déplacement. Ainsi, le champ de déplacement est interpolé par :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{d} + \mathcal{H}_{\Gamma_s}\mathbf{N}(\mathbf{x})\bar{\bar{\mathbf{u}}} \quad (3.37)$$

Les champs de saut de déplacement $\bar{\bar{\mathbf{u}}}$ ne sont alors plus des inconnues élémentaires définies indépendamment d'un élément à son voisin. Il s'agit, dans ce cas, de degrés de liberté supplémentaires introduits sur chaque nœud dont le support est traversé par une surface de discontinuité.

Une telle approche permet de prendre en compte un champ de saut de déplacement qui ne soit pas nécessairement constant par élément (le degré d'interpolation du

champ de saut de déplacement est le même que celui du champ de déplacement) et de reproduire, effectivement, un saut de déplacement d'un point de vue numérique.

En revanche, les champs de saut de déplacement deviennent des inconnues globales. Cette approche conduit donc à une augmentation du nombre de degrés de liberté du problème résolu.

Par ailleurs, l'enrichissement des nœuds dont le support est traversé par une discontinuité se fait au fur et à mesure de l'avancée de la surface de discontinuité. Ainsi, au cours du calcul, la taille du problème évolue.

D'autre part, l'introduction de la fonction \mathcal{H}_{Γ_s} dans l'interpolation des déplacements fait apparaître, dans l'écriture de la forme faible des équations d'équilibre du problème, des intégrales sur les sous-domaines élémentaires définis par la surface de discontinuité : Ω^{e+} et Ω^{e-} . Ceci a pour conséquence de modifier la stratégie d'intégration numérique : des points d'intégration doivent être ajoutés pour assurer une intégration numérique satisfaisante sur les sous-domaines élémentaires. Ainsi, pour un triangle à 6 nœuds comportant avant introduction de la discontinuité de déplacement 3 points d'intégration, le nombre de points d'intégration est considérablement augmenté par la présence d'une discontinuité de déplacement [Wells et Sluys, 2001a] comme représenté sur la figure 3.5. Des points d'intégration supplémentaires sont introduits sur la discontinuité et les sous-domaines définis par la surface de discontinuité sont triangularisés (par exemple, par des méthodes de Delaunay) ; à chaque triangle ainsi défini, sont attribués 3 points d'intégration.

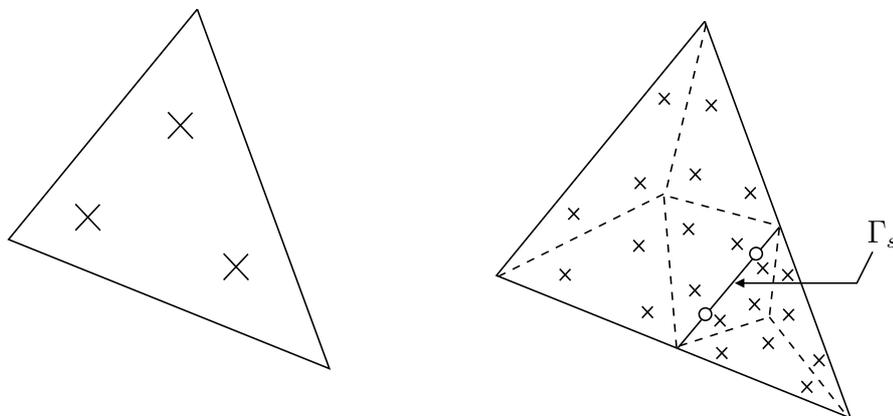


Figure 3.5: *Points d'intégration pour un élément triangulaire à six nœuds avant et après introduction de la surface de discontinuité. Les croix représentent les points d'intégration du milieu continu, les cercles les points d'intégration associés à la surface de discontinuité (d'après [Wells et Sluys, 2001a])*

Si ces techniques ont l'inconvénient d'augmenter la taille du problème par l'introduction de degrés de liberté supplémentaires, elles ont, par ailleurs, l'avantage d'assurer la continuité du trajet de la discontinuité. Des comparaisons de trajets de fissuration « expérience - calcul » sont ainsi envisageables.

Notons que ces méthodes sont très proches de la méthode *XFEM* (eXtended Finite Element Method) développée par Belytschko *et al.* [Belytschko et Black, 1999],

[Sukumar et al., 2000], [Moës et Belytschko, 2002] dans le cadre de la propagation de fissures cohésives dans un milieu élastique.

La différence majeure entre les travaux de Wells et Sluys [Wells et Sluys, 2001a] et ceux de Moës et Belytschko réside dans le choix des fonctions d'enrichissement.

Wells et Sluys [Wells et Sluys, 2001a] ajoutent le produit des fonctions de forme classiques par la fonction de Heaviside alors que Moës et Belytschko prennent également en compte un type d'enrichissement qui permet de représenter le champ de déplacement au niveau de la pointe de fissure ; le choix de ces fonctions est fait à partir des résultats de la mécanique de la rupture linéaire. Ceci suppose l'introduction d'un deuxième type de degré de liberté supplémentaire, ajouté sur les nœuds de l'élément contenant la pointe de fissure.

3.3 Méthode de résolution globale : la méthode des modes incompatibles

Les interpolations classiques des déplacements en méthode éléments finis ne sont capables que de représenter des champs de déplacement continus.

Nous souhaitons ici prendre en compte une discontinuité du champ de déplacement. Il est donc, pour cela, nécessaire d'enrichir la base des fonctions de forme. Cela aura, bien évidemment, pour conséquence une modification du schéma de résolution classique.

Nous nous proposons ici de présenter ces différents aspects dans le cadre de la méthode des modes incompatibles.

3.3.1 Définition du problème, formulation variationnelle

Afin d'écrire la formulation variationnelle du problème, nous nous appuyons sur le principe variationnel à trois champs de Hu-Washizu [Washizu, 1982]. Nous définissons, alors, deux types de champs :

- les champs tests ;
- les champs d'essai.

Les champs tests seront notés \mathbf{w} , $\boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{\eta}$ et correspondent, respectivement, aux champs tests de déplacement, de contrainte et déformation. Ces trois champs sont supposés indépendants (deux à deux).

Les champs d'essai seront, quant à eux, notés \mathbf{u} , $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ (respectivement champs de déplacements, de contrainte et de déformation). Ils seront également supposés indépendants.

Nous traitons, ici, de comportements élasto-anélastiques (dans notre cas, élastoplastiques et élasto-endommageables), or, il a été montré [Temam, 1983], que l'existence d'une solution au problème impose de choisir les champs de déplacements non pas dans $H^1(\Omega)$, comme cela est le cas pour la résolution de problèmes élastiques, mais dans $BD(\Omega)$.

Rappelons que $BD(\Omega)$ correspond à l'espace des fonctions dont l'énergie de déformation est finie [Matthies et al., 1979], [Temam, 1983].

Ainsi, les champs tests et les champs d'essai sont tels que :

$$\mathbf{w}, \mathbf{u} \in BD(\Omega) \quad \text{tel que} \quad BD(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in L^1(\Omega), \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \in M^1(\Omega), i, j = 1, \dots, 3 \right\}$$

$$\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varepsilon} \in M^1(\Omega) \quad \text{tel que} \quad M^1(\Omega) = \left\{ \boldsymbol{\varepsilon} \mid \sup_{\substack{\varphi \in C^\infty(\Omega) \\ |\varphi(\mathbf{x})| < 1}} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} \varphi(\mathbf{x}) \, d\Omega < \infty \right\}$$

$$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S} \quad \text{tel que} \quad \mathcal{S} = \left\{ \boldsymbol{\sigma} \mid \boldsymbol{\sigma}_{ij} \in L^2(\Omega) \right\}$$

Avec ces notations, le principe variationnel à trois champs de Hu-Washizu [Washizu, 1982], associé à notre problème, s'écrit :

$$\forall (\mathbf{w}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}), \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} \, d\Gamma = 0 \quad (3.38a) \\ \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : [\nabla^s \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}] \, d\Omega = 0 \quad (3.38b) \\ \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta} : [\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma}] \, d\Omega = 0 \quad (3.38c) \end{array} \right.$$

où $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ est un tenseur d'ordre deux vérifiant la relation de comportement.

Le point clé de la méthode des modes incompatibles est de supposer que les champs $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\eta}$ s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \boldsymbol{\eta} = \nabla^s \mathbf{w} + \tilde{\boldsymbol{\eta}} \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Avec cette hypothèse, le système (3.38) se réécrit :

$$\forall (\mathbf{w}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}), \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} \, d\Gamma = 0 \quad (3.40a) \\ \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega = 0 \quad (3.40b) \\ \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : [\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma}] \, d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\eta}} : [\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma}] \, d\Omega = 0 \quad (3.40c) \end{array} \right.$$

Notons que les champs \mathbf{w} et $\boldsymbol{\eta}$ sont supposés indépendants. Les trois variables \mathbf{w} , $\boldsymbol{\eta}$ et $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ ne sont reliées que par la relation (3.39), tout couple, composé de deux parmi ces trois variables, est donc un couple de variables indépendantes. Nous considérerons ici le couple $(\mathbf{w}, \tilde{\boldsymbol{\eta}})$.

En combinant les équations (3.40a) et (3.40c), le système (3.40) se réécrit :

$$\forall (\mathbf{w}, \boldsymbol{\tau}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}), \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} \, d\Gamma = 0 \\ \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : [\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma}] \, d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\eta}} : [\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma}] \, d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (3.41)$$

La méthode des modes incompatibles consiste alors à construire l'espace des champs de contraintes, $\boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{\sigma}$, et des champs de déformations ajoutées, $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ et $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, comme orthogonaux.

Ainsi, on a :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \tilde{\boldsymbol{\eta}} \, d\Omega = 0 \quad (3.42)$$

et le système (3.41) s'écrit :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} \, d\Gamma = 0 \\ \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : [\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma}] \, d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega = 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

où il a été tenu compte de l'orthogonalité des espaces des contraintes et des déformations ajoutées.

La dernière étape consiste à supposer que le champ de contrainte vérifie la relation de comportement sous forme forte. On obtient alors le système :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} \, d\Gamma = 0 \\ \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

Supposons, alors, que les champs de déformations ajoutées $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ sont singuliers avec :

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \tilde{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \delta_{\Gamma_s} \\ \tilde{\boldsymbol{\eta}} = \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \tilde{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} \delta_{\Gamma_s} \end{cases} \quad (3.45)$$

$\tilde{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ et $\tilde{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}$ sont choisis dans l'espace vectoriel : $\{\boldsymbol{\alpha} \text{ tenseur d'ordre deux} \mid \alpha_{ij} \in \mathcal{L}^2(\Omega)\}$. Ainsi, on a bien $\tilde{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \text{ et } \tilde{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} \in M^1(\Omega)$ ce qui assure que les équations précédentes soient encore définies en présence de champs de déformations ajoutées singuliers.

Les équations du système (3.44) s'écrivent alors (en tenant compte des résultats sur les distributions) :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} \, d\Gamma = 0 \\ \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_s} \tilde{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} : \boldsymbol{\sigma}_{|\Gamma_s}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Gamma_s = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

Si, par ailleurs, la partie singulière des champs de déformation ajoutée est supposée dériver d'un champ de déplacement discontinu, on peut écrire :

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} = (\bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n})^s \\ \tilde{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = (\bar{\mathbf{w}} \otimes \mathbf{n})^s \end{cases} \quad (3.47)$$

Avec ces notations, le système (3.46) devient alors :

$$\left\{ \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} \, d\Gamma = 0 \right. \quad (3.48a)$$

$$\left. \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\sigma}_{|\Gamma_s}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_s} \bar{\mathbf{w}} \cdot [\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{n}] \, d\Gamma_s = 0 \right. \quad (3.48b)$$

3.3.2 Formulation approchée, choix des interpolations

Nous avons vu que le champ de déplacement s'écrit, après introduction de la surface de discontinuité, sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \bar{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) \mathcal{H}_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) \quad (3.49)$$

Nous avons montré que ce champ peut, également, se mettre sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \bar{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) (\mathcal{H}_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})) \quad (3.50)$$

où $\varphi(\mathbf{x})$ est une fonction $C^1(\Omega)$ par morceaux, définie par :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^- \setminus \Omega_d^- \\ 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+ \setminus \Omega_d^+ \end{cases} \quad (3.51)$$

où Ω_d est un domaine arbitraire inclus dans Ω et entourant la surface de discontinuité Γ_s .

Nous n'allons pas choisir la fonction $\varphi(\mathbf{x})$ *a priori* mais la construire à partir de la forme approchée du champ de déplacement total et en tenant compte du fait que les champs $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ prennent les mêmes valeurs sur $\partial\Omega$.

Considérons une discrétisation Ω^h du domaine Ω en $Nelem$ éléments sous la forme :

$$\Omega^h = \bigcup_{e=1}^{Nelem} \Omega^e \quad (3.52)$$

On peut écrire le champ de déplacement sous forme approchée :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t) + \bar{\bar{\mathbf{u}}}^h(\mathbf{x}, t) \mathcal{H}_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) \quad (3.53)$$

Nous supposons que le champ $\bar{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t)$ (continu sur le domaine Ω^h) peut s'interpoler de façon classique sous la forme :

$$\bar{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{e=1}^{Nelem} \sum_{a=1}^{N_e} \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}_a, t) \quad (3.54)$$

où N_e est le nombre de nœuds de l'élément e , $\mathbf{N}_a(\mathbf{x})$ est la restriction à l'élément e de la fonction de forme associée au nœud a de coordonnées \mathbf{x}_a .

Le champ de déplacement total s'écrit alors :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{e=1}^{Nelem} \sum_{a=1}^{N_e} \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}_a, t) + \bar{\bar{\mathbf{u}}}^h(\mathbf{x}, t) \mathcal{H}_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) \quad (3.55)$$

Nous supposons dans la suite des développements que *les champs de saut de déplacement $\bar{\mathbf{u}}$ et de vecteurs normaux \mathbf{n} sont constants par élément* (la discontinuité est un segment de droite sur chaque élément).

Soit Ω^e un élément de Ω^h traversé par une discontinuité, le champ de déplacement sur Ω^e s'écrit sous forme approchée :

$$\mathbf{u}|_{\Omega^e}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{a=1}^{N_e} \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}_a, t) + \bar{\mathbf{u}}|_{\Omega^e}^h(t) \mathcal{H}_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) \quad (3.56)$$

Les déplacements nodaux sont alors donnés par :

$$\mathbf{d}_a(t) = \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_a, t) = \begin{cases} \bar{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}_a, t) + \bar{\mathbf{u}}|_{\Omega^e}^h(t) & \text{si } a \in \Omega^{e+} \\ \bar{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}_a, t) & \text{si } a \in \Omega^{e-} \end{cases} \quad (3.57)$$

L'approximation du champ de déplacement total peut alors s'écrire :

$$\mathbf{u}|_{\Omega^e}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{a=1}^{N_e} \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \mathbf{d}_a(t) - \sum_{a \in \Omega^{e+}} \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}|_{\Omega^e}^h(t) + \bar{\mathbf{u}}|_{\Omega^e}^h(t) \mathcal{H}_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) \quad (3.58)$$

Notons que le champ $\sum_{a=1}^{N_e} \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \mathbf{d}_a(t)$ prend les mêmes valeurs que \mathbf{u}^h sur les nœuds de Ω^e . Notons, également, que la fonction $\sum_{a \in \Omega^{e+}} \mathbf{N}_a(\mathbf{x})$ est C^1 sur Ω^h (elle est C^1 sur Ω^e) et qu'elle vérifie :

$$\sum_{a \in \Omega^{e+}} \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} = \mathbf{x}_a \quad \text{avec } a \in \Omega^{e-} \\ 1 & \mathbf{x} = \mathbf{x}_a \quad \text{avec } a \in \Omega^{e+} \end{cases} \quad (3.59)$$

La fonction $\sum_{a \in \Omega^{e+}} \mathbf{N}_a(\mathbf{x})$ peut donc être interprétée comme la forme approchée d'une fonction $\varphi(\mathbf{x})$ telle que définie à l'équation (3.51) avec $\Omega_d = \Omega^e$.

Remarque :

Le choix de la fonction $\varphi(\mathbf{x})$ établi précédemment comme une combinaison linéaire des fonctions de forme classiques assure la compatibilité du degré d'interpolation des déformations enrichies - dont, nous allons le voir, la construction dépend de la fonction $\varphi(\mathbf{x})$ - avec les règles d'intégration numériques associées à l'élément considéré. Un degré d'interpolation de la fonction $\varphi(\mathbf{x})$ supérieur à celui des fonctions de forme classiques aurait nécessité une modification du nombre de points d'intégration de l'élément.

Nous noterons $\mathbf{M}^e(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_{\Gamma_s}(\mathbf{x}) - \sum_{a \in \Omega^{e+}} \mathbf{N}_a(\mathbf{x})$.

Le champ de déplacement total, sur l'élément Ω^e , s'écrit alors :

$$\mathbf{u}|_{\Omega^e}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{a=1}^{N_e} \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \mathbf{d}_a(t) + \mathbf{M}^e(\mathbf{x}) \bar{\bar{\mathbf{u}}}|_{\Omega^e}(t) \quad (3.60)$$

Dans la suite, nous ne considérerons que les restrictions des champs à un élément Ω^e de Ω^h , nous abandonnerons donc, afin d'alléger les notations, l'indication de la restriction à Ω^e : $(\cdot)|_{\Omega^e}$.

À partir du champ de déplacement construit à l'équation (3.60), le champ de déformation réel approché apparaît sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{a=1}^{N_e} \mathbf{B}_a(\mathbf{x}) \mathbf{d}_a(t) + \mathbf{G}_r(\mathbf{x}) \bar{\bar{\mathbf{u}}}(t) \quad (3.61)$$

où $\mathbf{B}_a(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \mathbf{N}_a(\mathbf{x})$ et $\mathbf{G}_r(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \mathbf{M}^e(\mathbf{x})$ avec \mathbf{L} la matrice associée à l'opérateur de gradient symétrique : ∇^s . Le terme $\mathbf{G}_r(\mathbf{x}) \bar{\bar{\mathbf{u}}}(t)$ correspond à la partie « ajoutée » (ou incompatible) des déformations. Notons que, vu la forme de la fonction $\mathbf{M}^e(\mathbf{x})$, la fonction de forme $\mathbf{G}_r(\mathbf{x})$ servant à interpoler les déformations incompatibles réelles peut se décomposer en une partie régulière et une partie singulière (au sens des distributions) :

$$\mathbf{G}_r(\mathbf{x}) = - \underbrace{\sum_{a \in \Omega^{e+}} \mathbf{B}_a(\mathbf{x})}_{\bar{\mathbf{G}}_r(\mathbf{x})} + \underbrace{\mathbf{n} \delta_{\Gamma_s}}_{\bar{\bar{\mathbf{G}}}_r(\mathbf{x}) \delta_{\Gamma_s}} \quad (3.62)$$

où

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{n}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{n}_z \\ \mathbf{n}_y & \mathbf{n}_x & 0 \\ \mathbf{n}_z & 0 & \mathbf{n}_x \\ 0 & \mathbf{n}_z & \mathbf{n}_y \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Afin d'écrire la forme faible des équations du problème, nous nous appuyons sur la méthode des modes incompatibles présentée au 3.3.1.

Notons que, pour la méthode des modes incompatibles, les champs de déplacement sont interpolés de façon classique. Un champ de déplacement dit « incompatible » est introduit afin de pouvoir construire - et uniquement afin de construire - le champ de déformation ajoutée (comme dérivant de ce champ de déplacement incompatible) [Ibrahimbegović et Wilson, 1991], [Ibrahimbegović et al., 1998].

Le champ de déplacement discrétisé considéré s'écrit donc sous la forme :

$$\mathbf{u}|_{\Omega^e}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{a=1}^{N_e} \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \mathbf{d}_a(t) \quad (3.64)$$

Afin d'appliquer la méthode des modes incompatibles, il nous reste à construire les champs de déplacement et de déformation virtuels.

Les champs de déplacement virtuels sont construits de la même façon que les champs de déplacement réels et s'écrivent donc sous la forme :

$$\mathbf{w}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{a=1}^{N_e} \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \mathbf{w}_a(t) \quad (3.65)$$

Les champs de déformation virtuels, quant à eux, sont construits de façon similaire aux champs de déformation réels :

$$\boldsymbol{\eta}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{a=1}^{N_e} \mathbf{B}_a(\mathbf{x}) \mathbf{w}_a(t) + \mathbf{G}_v(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{w}}(t) \quad (3.66)$$

La fonction $\mathbf{G}_v(\mathbf{x})$ interpolant la déformation virtuelle ajoutée est, *a priori*, différente de la fonction \mathbf{G}_r interpolant la déformation réelle ajoutée. En effet, l'équation (3.48b) doit être vérifiée pour un champ de contrainte constant par élément afin d'assurer le « patch-test ».

Ainsi, on doit avoir :

$$\forall \bar{\mathbf{w}}(t), \quad \bar{\mathbf{w}}^T(t) \int_{\Omega^e} \mathbf{G}_v^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega^e = \mathbf{0} \quad (3.67)$$

pour $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \text{constante}$, ce qui s'écrit également :

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{G}_v^T d\Omega^e = \mathbf{0} \quad (3.68)$$

Afin de construire \mathbf{G}_v , nous nous appuyons sur la version modifiée de la méthode des modes incompatibles [Ibrahimbegović et Wilson, 1991]. La fonction \mathbf{G}_v est alors construite à partir de \mathbf{G}_r :

$$\mathbf{G}_v(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_r(\mathbf{x}) - \frac{1}{A^e} \int_{\Omega^e} \mathbf{G}_r(\mathbf{x}) d\Omega^e \quad (3.69)$$

où $A^e = \int_{\Omega^e} d\Omega^e$ est la mesure du domaine Ω^e .

La fonction \mathbf{G}_v , ainsi construite, vérifie bien l'équation (3.68) et s'écrit :

$$\mathbf{G}_v(\mathbf{x}) = \underbrace{- \sum_{a \in \Omega^{e+}} \mathbf{B}_a(\mathbf{x}) + \frac{1}{A^e} \int_{\Omega^e} \sum_{a \in \Omega^{e+}} \mathbf{B}_a(\mathbf{x})}_{\bar{\mathbf{G}}_v} - \underbrace{\frac{\ell_{\Gamma_s}^e}{A^e} \mathbf{n} + \mathbf{n} \delta_{\Gamma_s}}_{\bar{\mathbf{G}}_v \delta_{\Gamma_s}} \quad (3.70)$$

$\ell_{\Gamma_s}^e$ note la mesure de la surface de discontinuité : $\ell_{\Gamma_s}^e = \int_{\Gamma_s} d\Gamma_s$.

Remarquons que, tout comme \mathbf{G}_r , \mathbf{G}_v se décompose en une partie régulière $\bar{\mathbf{G}}_v$ et une partie singulière $\bar{\mathbf{G}}_v \delta_{\Gamma_s}$.

Pour la suite, nous noterons :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{x}) &= [\mathbf{N}_1(\mathbf{x}) \cdots \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \cdots \mathbf{N}_{N_e}(\mathbf{x})] \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= [\mathbf{B}_1(\mathbf{x}) \cdots \mathbf{B}_a(\mathbf{x}) \cdots \mathbf{B}_{N_e}(\mathbf{x})] \end{aligned} \quad (3.71)$$

et

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_a(t) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{Ne}(t) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Avec ces interpolations et ces notations, le système (3.48) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \forall (\mathbf{w}(t), \bar{\bar{\mathbf{w}}}(t)), \\ & \begin{cases} \int_{\Omega^e} \mathbf{w}^T(t) \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \mathbf{w}^T(t) \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, d\Omega^e - \int_{\partial_t \Omega^e} \mathbf{w}^T(t) \mathbf{N}^T \mathbf{h} \, d\Omega^e = \mathbf{0} \\ \int_{\Omega^e} \bar{\bar{\mathbf{w}}}(t)^T \bar{\bar{\mathbf{G}}}_v^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega^e + \int_{\Gamma_s} \bar{\bar{\mathbf{w}}}(t)^T \bar{\bar{\mathbf{G}}}_v^T \boldsymbol{\sigma}_{|\Gamma_s}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Gamma_s = \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.73)$$

On obtient alors, après avoir remarqué que la deuxième équation du système précédent (3.73) ne fait intervenir que des grandeurs locales définies indépendamment d'un élément à l'autre, le système :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{e=1}^{Nelem} [\mathbf{f}_{int}^e(t) - \mathbf{f}_{ext}^e(t)] = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}^e(t) = \mathbf{0} \end{cases} \quad \forall e \mid \Omega^e \text{ localisé} \quad (3.74a)$$

$$(3.74b)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{int}^e(t) = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega^e \\ \mathbf{f}_{ext}^e(t) = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, d\Omega^e + \int_{\partial_t \Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{h} \, d\Omega^e \\ \mathbf{h}^e(t) = \int_{\Omega^e} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_v^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega^e + \int_{\Gamma_s} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_v^T \boldsymbol{\sigma}_{|\Gamma_s}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Gamma_s \end{cases} \quad (3.75)$$

$Nelem$

$\mathbf{A}_{e=1}$ est l'opérateur d'assemblage sur la structure Ω^h .

Notons que, avec l'expression de $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_v$ (équation (3.70)), $\mathbf{h}^e(t)$ s'écrit :

$$\mathbf{h}^e(t) = \int_{\Omega^e} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_v^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_s} \underbrace{\mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma}_{|\Gamma_s}(\boldsymbol{\varepsilon})}_{\mathbf{t}_{\Gamma_s}} \, d\Gamma_s \quad (3.76)$$

Sous cette forme, l'équation (3.74b), écrite au niveau local sur chaque élément localisé, apparaît comme la forme faible de l'équation de continuité des tractions le long de la surface de discontinuité Γ_s . L'équation (3.74a), quant à elle, est écrite sur toute la structure et correspond à la forme faible de l'équation d'équilibre, écrite classiquement en méthode EF.

Notons que le saut de déplacement $\bar{\bar{\mathbf{u}}}(t)$ a été supposé constant par élément. La traction sur la discontinuité \mathbf{t}_{Γ_s} est alors également constante par élément.

3.3.3 Résolution

Le système (3.74) est non linéaire (en raison de la non-linéarité des lois de comportement liant $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{t}_{Γ_s} et $\bar{\mathbf{u}}$), sa résolution nécessite donc la linéarisation des équations (3.74a) et (3.74b).

Rappelons le problème que nous souhaitons résoudre :

Trouver le couple $(\mathbf{d}(t), \bar{\mathbf{u}}(t))$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{e=1}^{N_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega^e - \mathbf{f}_{ext}^e(t) \right] = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (3.77a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{h}^e(t) = \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{G}}_v^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega^e + \int_{\Gamma_s} \bar{\mathbf{G}}_v^T \mathbf{t}_{\Gamma_s} d\Gamma = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (3.77b)$$

avec :

$$\boldsymbol{\varepsilon}|_{\Omega^e} = \mathbf{B}\mathbf{d}(t) + \mathbf{G}_r \bar{\mathbf{u}}(t) \quad (3.78)$$

Notons que les contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ sont une distribution régulière sur Ω^e (voir le chapitre 2). Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{B}\mathbf{d}(t) + \bar{\mathbf{G}}_r \bar{\mathbf{u}}(t)) d\Omega^e = \int_{\Omega^e \setminus \Gamma_s} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{B}\mathbf{d}(t) + \bar{\mathbf{G}}_r \bar{\mathbf{u}}(t)) d\Omega^e \\ \text{et} \\ \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{G}}_v^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{B}\mathbf{d}(t) + \bar{\mathbf{G}}_r \bar{\mathbf{u}}(t)) d\Omega^e = \int_{\Omega^e \setminus \Gamma_s} \bar{\mathbf{G}}_v^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{B}\mathbf{d}(t) + \bar{\mathbf{G}}_r \bar{\mathbf{u}}(t)) d\Omega^e \end{array} \right. \quad (3.79)$$

Ceci est justifié par le fait que la surface de discontinuité Γ_s est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue associée à Ω^e .

Considérons l'itération i du pas de temps $n + 1$. Nous noterons :

$$\mathbf{d}(t_{n+1})^{(i)} = \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} \quad \bar{\mathbf{u}}(t_{n+1})^{(i)} = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} \quad (3.80)$$

et

$$\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)} - \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} \quad \Delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} = \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i+1)} - \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} \quad (3.81)$$

La linéarisation complète du système (3.77) par rapport aux inconnues \mathbf{d} et $\bar{\mathbf{u}}$ conduit à la résolution du problème :

Connaissant $(\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)})$, trouver le couple $(\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, \Delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)})$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{e=1}^{Nelem} \left\{ \left[\int_{\Omega^e \setminus \Gamma_s} \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{d}} \Big|_{n+1}^{(i)} d\Omega^e \right] \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} \right. \\ \quad \left. + \left[\int_{\Omega^e \setminus \Gamma_s} \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \Big|_{n+1}^{(i)} d\Omega^e \right] \Delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} \right\} = \sum_{e=1}^{Nelem} \left\{ \mathbf{f}_{n+1}^{e,ext} - \mathbf{f}_{n+1}^{e,int(i)} \right\} \\ \mathbf{h}^{e,(i)} + \left[\int_{\Omega^e \setminus \Gamma_s} \bar{\mathbf{G}}_{\mathbf{v}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{d}} \Big|_{n+1}^{(i)} d\Omega^e + \int_{\Gamma_s} \bar{\mathbf{G}}_{\mathbf{v}}^T \frac{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}}{\partial \mathbf{d}} \Big|_{n+1}^{(i)} d\Gamma \right] \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} \\ \quad + \left[\int_{\Omega^e \setminus \Gamma_s} \bar{\mathbf{G}}_{\mathbf{v}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \Big|_{n+1}^{(i)} d\Omega^e + \int_{\Gamma_s} \bar{\mathbf{G}}_{\mathbf{v}}^T \frac{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \Big|_{n+1}^{(i)} d\Gamma \right] \Delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (3.82)$$

où $(\cdot) \Big|_{n+1}^{(i)} = (\cdot) (\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)})$

Afin de résoudre ce système d'équations, il reste à préciser la valeur des dérivées partielles des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et tractions \mathbf{t}_{Γ_s} par rapport aux inconnues du problème \mathbf{d} et $\bar{\mathbf{u}}$.

Nous avons vu au chapitre précédent que les équations d'évolution des contraintes et tractions s'écrivent, de manière générale, sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{an} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \dot{\mathbf{t}}_{\Gamma_s} = \bar{\mathbf{C}}^{an} \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} \end{array} \right. \quad (3.83)$$

Avec l'interpolation des déformations (équation (3.78)), on peut écrire :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{C}_{n+1}^{an(i)} \left[\mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} + \bar{\mathbf{G}}_{\mathbf{r}} \Delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} \right] \quad (3.84)$$

De même,

$$\Delta \mathbf{t}_{\Gamma_s n+1}^{(i)} = \bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{an(i)} \Delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} \quad (3.85)$$

où $\mathbf{C}_{n+1}^{an(i)}$ et $\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{an(i)}$ sont, ici, les modules tangents cohérents [Simo et Taylor, 1985] associés à chacun des deux modèles.

Ainsi, le système linéarisé (3.82) se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{e=1}^{Nelem} \left\{ \mathbf{K}_{n+1}^{e(i)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} + \mathbf{F}_{\mathbf{r}n+1}^{e(i)} \Delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} \right\} = \sum_{e=1}^{Nelem} \left\{ \mathbf{f}_{n+1}^{e,ext} - \mathbf{f}_{n+1}^{e,int(i)} \right\} \\ \mathbf{h}_{n+1}^{e(i)} + \left[\mathbf{F}_{\mathbf{v}n+1}^{Te(i)} + \mathbf{K}_{dn+1}^{(i)} \right] \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} + \left[\mathbf{H}_{n+1}^{e(i)} + \mathbf{K}_{\alpha n+1}^{(i)} \right] \Delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (3.86)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{n+1}^{e(i)} &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{n+1}^{an(i)} \mathbf{B} d\Omega^e & ; & \quad \mathbf{F}_{\mathbf{r}_{n+1}}^{e(i)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{n+1}^{an(i)} \bar{\mathbf{G}}_{\mathbf{r}} d\Omega^e \\
 \mathbf{F}_{\mathbf{v}_{n+1}}^{e(i)} &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{n+1}^{an(i)} \bar{\mathbf{G}}_{\mathbf{v}} d\Omega^e & ; & \quad \mathbf{H}_{n+1}^{e(i)} = \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{G}}_{\mathbf{v}}^T \mathbf{C}_{n+1}^{an(i)} \bar{\mathbf{G}}_{\mathbf{r}} d\Omega^e \\
 \mathbf{K}_{dn+1}^{(i)} &= \ell_{\Gamma_s}^e \left. \frac{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}}{\partial \mathbf{d}} \right|_{n+1}^{(i)} & ; & \quad \mathbf{K}_{\alpha n+1}^{(i)} = \ell_{\Gamma_s}^e \bar{\bar{\mathbf{C}}}_{n+1}^{an(i)}
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

La résolution du système linéarisé (3.82) par une méthode itérative du type Newton-Raphson - résolution de l'équation globale et de l'équation locale simultanément - nécessite de stocker toutes les matrices de la linéarisation d'une itération à la suivante. Ceci suppose, y compris pour des problèmes de taille raisonnable, des espaces de stockage prohibitifs.

Ainsi, en profitant du fait que le système se compose d'une équation globale et d'une équation locale, il est possible de mettre en place une stratégie de résolution ne nécessitant pas de tels espaces de stockage.

3.3.3.1 Méthode de résolution : « operator split »

L'idée est de résoudre de façon séquentielle le système (3.77) en profitant du fait que les deux équations ne sont pas écrites au même niveau de l'architecture du code de calcul (pour un code de calcul classique).

Ainsi, pour une valeur donnée du champ de déplacements nodaux $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}$ (fournie par la résolution de l'équation d'équilibre global au niveau de la structure), l'équation locale (3.77b) est résolue par une méthode incrémentale itérative et ce, au niveau de chaque élément localisé indépendamment.

Ainsi, en notant j l'indice de l'itération locale, l'équation (3.77b) s'écrit sous forme linéarisée (linéarisation par rapport à $\bar{\bar{\mathbf{u}}}$; \mathbf{d} est supposé fixe) :

$$\mathbf{h}_{n+1}^{e(i,j)} + \left[\mathbf{H}_{n+1}^{e(i,j)} + \mathbf{K}_{\alpha n+1}^{(i,j)} \right] \Delta \bar{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}^{(i,j)} = \mathbf{0} \tag{3.88}$$

où les quantités $\mathbf{h}_{n+1}^{e(i,j)}$, $\mathbf{H}_{n+1}^{e(i,j)}$ et $\mathbf{K}_{\alpha n+1}^{(i,j)}$ sont évaluées en $(\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, \bar{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}^{(i)})$.

À l'issue de la procédure de résolution itérative locale (3.88), le vecteur $\bar{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}^{(i)}$ obtenu vérifie :

$$\mathbf{h}_{n+1}^{e(i)} \left(\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, \bar{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}^{(i)} \right) = \mathbf{0} \tag{3.89}$$

Ainsi, le système linéarisé, à résoudre au niveau global, devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{e=1}^{Nelem} \left\{ \mathbf{K}_{n+1}^{e(i)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} + \mathbf{F}_{\mathbf{r}_{n+1}}^{e(i)} \Delta \bar{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}^{(i)} \right\} = \sum_{e=1}^{Nelem} \left\{ \mathbf{f}_{n+1}^{e,ext} - \mathbf{f}_{n+1}^{e,int(i)} \right\} \\ \left[\mathbf{F}_{\mathbf{v}_{n+1}}^{Te(i)} + \mathbf{K}_{dn+1}^{(i)} \right] \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} + \left[\mathbf{H}_{n+1}^{e(i)} + \mathbf{K}_{\alpha n+1}^{(i)} \right] \Delta \bar{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{0} \end{array} \right. \tag{3.90}$$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \underset{e=1}{\overset{Nelem}{\mathbf{A}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \chi_{\Omega^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{n+1}^{e(i)} & \mathbf{F}_{rn+1}^{e(i)} \\ \mathbf{F}_{vn+1}^{Te(i)} + \mathbf{K}_{dn+1}^{(i)} & \mathbf{H}_{n+1}^{e(i)} + \mathbf{K}_{\alpha n+1}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} \\ \Delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{n+1}^{e,ext} - \mathbf{f}_{n+1}^{e,int(i)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

où $\begin{bmatrix} \underset{e=1}{\overset{Nelem}{\mathbf{A}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \chi_{\Omega^e} \end{bmatrix}$ permet de noter que le premier jeu d'équations doit être assemblé sur toute la structure alors que le second est écrit sur chaque élément e (χ_{Ω^e} est la fonction caractéristique du domaine Ω^e).

Par condensation statique de la deuxième équation au niveau élémentaire, on obtient :

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)} = - \left[\mathbf{H}_{n+1}^{e(i)} + \mathbf{K}_{\alpha n+1}^{(i)} \right]^{-1} \left[\mathbf{F}_{vn+1}^{Te(i)} + \mathbf{K}_{dn+1}^{(i)} \right] \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} \quad (3.92)$$

Ceci permet de réécrire le système (3.91) sous la forme équivalente :

$$\underset{e=1}{\overset{Nelem}{\mathbf{A}}} \left\{ \left[\mathbf{K}_{n+1}^{e(i)} - \mathbf{F}_{rn+1}^{e(i)} \left[\mathbf{H}_{n+1}^{e(i)} + \mathbf{K}_{\alpha n+1}^{(i)} \right]^{-1} \left[\mathbf{F}_{vn+1}^{Te(i)} + \mathbf{K}_{dn+1}^{(i)} \right] \right] \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{f}_{n+1}^{e,ext} - \mathbf{f}_{n+1}^{e,int(i)} \right\} \quad (3.93)$$

Ce qui revient alors à résoudre l'équation classiquement résolue au niveau global d'un code de calcul d'architecture classique :

$$\underset{e=1}{\overset{Nelem}{\mathbf{A}}} \left\{ \widehat{\mathbf{K}}_{n+1}^{e(i)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{f}_{n+1}^{e,ext} - \mathbf{f}_{n+1}^{e,int(i)} \right\} \quad (3.94)$$

avec

$$\widehat{\mathbf{K}}_{n+1}^{e(i)} = \mathbf{K}_{n+1}^{e(i)} - \mathbf{F}_{rn+1}^{e(i)} \left[\mathbf{H}_{n+1}^{e(i)} + \mathbf{K}_{\alpha n+1}^{(i)} \right]^{-1} \left[\mathbf{F}_{vn+1}^{Te(i)} + \mathbf{K}_{dn+1}^{(i)} \right] \quad (3.95)$$

Remarque :

La détermination de l'incrément de saut de déplacement (équation (3.92)) impose que la matrice $\mathbf{H}_{n+1}^{e(i)} + \mathbf{K}_{\alpha n+1}^{(i)}$ admette un inverse.

3.3.3.2 Quelques remarques sur la méthode de résolution

Vu l'équation (3.93) et le choix des fonctions \mathbf{G}_r et \mathbf{G}_v , la matrice de raideur élémentaire $\widehat{\mathbf{K}}_{n+1}^{e(i)}$ n'est, en général, pas symétrique. Ceci suppose d'adapter, en conséquence, la résolution de l'équation globale (3.94).

Par ailleurs, vu la forme de l'équation (3.94) obtenue après condensation statique au niveau élémentaire, on peut remarquer que l'introduction d'une surface de discontinuité au niveau élémentaire est équivalente, au niveau global de l'architecture du code de calcul, à l'intégration d'une loi de comportement. La résolution du problème ne nécessite donc pas de modification de l'architecture globale du code de calcul, mais uniquement une intervention au niveau élémentaire.

Notons également que la résolution du système se fait de façon séquentielle à trois niveaux :

- le niveau global fournit la valeur des champs de déplacements nodaux \mathbf{d} ;
- le niveau élémentaire fournit la valeur des champs de saut de déplacements $\bar{\mathbf{u}}$;
- le niveau du point d'intégration fournit la valeur des variables internes $\bar{\mathbf{v}}$ et $\bar{\bar{\mathbf{v}}}$ respectivement associées au modèle hors discontinuité et au modèle sur la discontinuité.

3.4 Conclusion

Nous avons, ici, présenté l'implantation numérique de l'approche à discontinuité dans le cadre de la méthode des modes incompatibles. Nous avons montré que la résolution du problème est équivalente, au niveau global, à l'intégration d'une loi de comportement supplémentaire au niveau de chaque élément.

L'utilisation de la méthode des modes incompatibles permet, en effet, de prendre en compte les modifications liées à l'introduction d'une surface de discontinuité, uniquement au niveau élémentaire, sans modification de l'architecture globale du code de calcul.

Le schéma 3.6 résume les différentes étapes de la résolution du problème aux différents niveaux du code de calcul.

Pas de temps $n + 1$: \mathbf{f}_{n+1}^{ext}

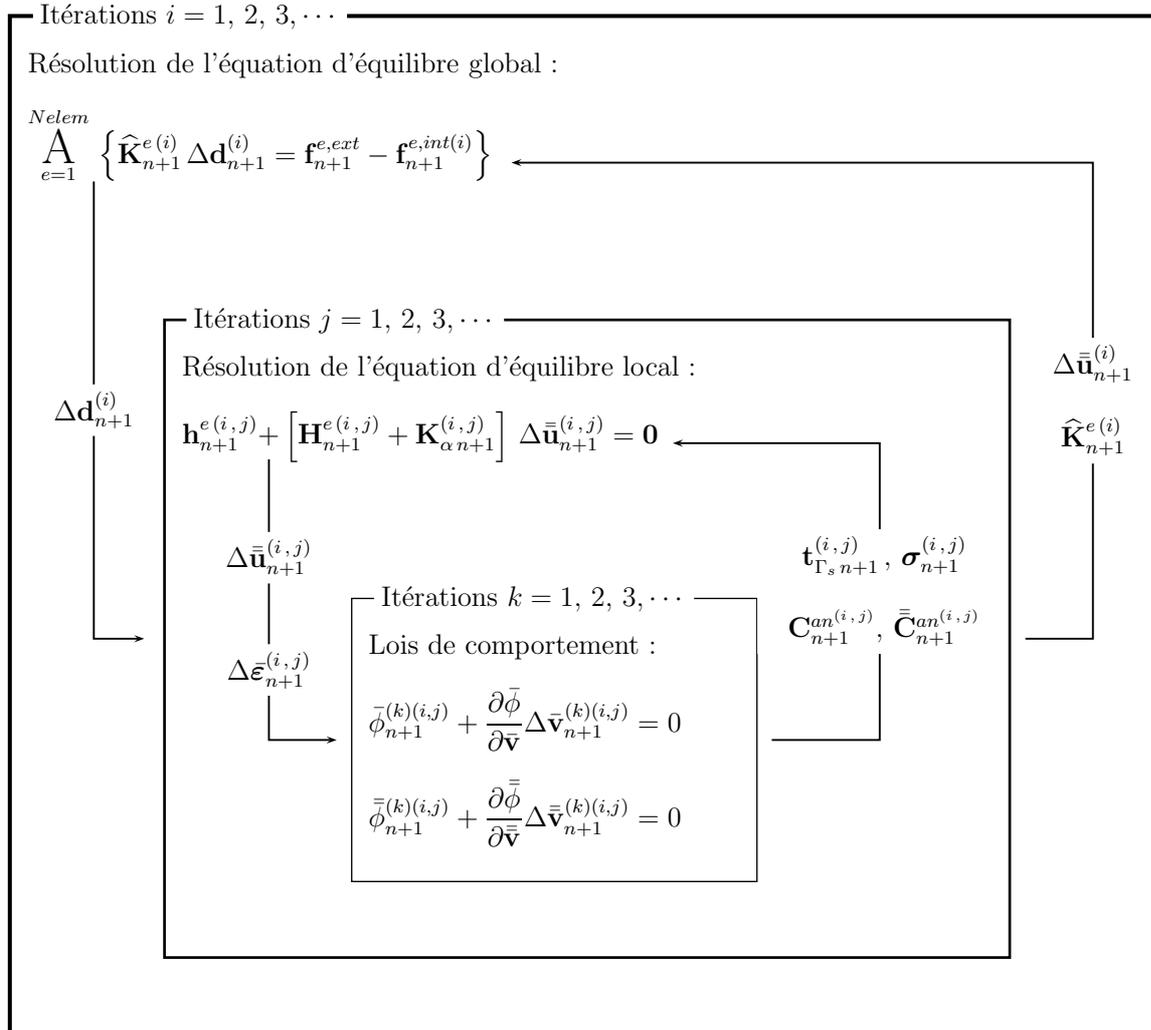


Figure 3.6: Schéma itératif à trois niveaux

Chapitre 4

Modèles de rupture et implantation numérique : cas de la rupture ductile et de la rupture fragile

L'objet de ce chapitre est de particulariser les équations et techniques de résolution présentées aux chapitres précédents aux cas de la rupture ductile et de la rupture fragile. Pour cela, deux modèles de comportement sont considérés : un modèle élasto-plastique et un modèle élasto-endommageable [Brancherie et Ibrahimbegović, 2003]. Pour ces deux cas, les modèles constitutifs associés respectivement au matériau hors discontinuité et à la discontinuité sont précisés. Le choix des interpolations et des méthodes de résolution spécifiques est présenté. Enfin, des résultats de simulations numériques permettant de mettre en avant le caractère régularisant du modèle proposé ainsi que l'intérêt de la prise en compte combinée de deux types de dissipation sont également présentés.

Sommaire

4.1	Cas de la rupture ductile : modèle de plasticité	88
4.1.1	Spécificités du modèle	88
4.1.2	Les aspects numériques	98
4.1.3	Quelques résultats numériques	107
4.2	Cas de la rupture fragile : modèle d'endommagement . . .	117
4.2.1	Spécificités du modèle	117
4.2.2	Les aspects numériques	129
4.2.3	Quelques résultats numériques	143
4.3	Conclusion	159

Dans cette partie, nous nous attachons à appliquer les développements présentés aux chapitres 2 et 3 aux cas de deux modèles : un modèle de plasticité et un modèle d'endommagement. Cette présentation s'appuie très largement sur les développements présentés aux chapitres précédents. Ainsi, seuls les points clés spécifiques à chacun de ces deux modèles seront présentés.

Les développements sont réalisés sous l'hypothèse des petites déformations et en supposant des cas de *chargements en déformations planes*.

4.1 Cas de la rupture ductile : modèle de plasticité

Nous nous proposons, dans cette partie, de préciser les modèles utilisés afin de décrire les phénomènes de dissipation volumique et surfacique dans le cas d'un modèle de plasticité [Ibrahimović et Brancherie, 2003]. Ceci est réalisé dans le cadre précisé au chapitre 2.

L'implantation numérique du modèle, présentée de façon générale au chapitre 3, est, ici, reprise en mettant en évidence les particularités de cette dernière liées, entre autres, aux modèles traités.

Enfin, nous présenterons quelques résultats caractéristiques illustrant le caractère régularisant de la méthode développée ainsi que l'intérêt de la combinaison de deux types de dissipation pour la description de la rupture ductile.

4.1.1 Spécificités du modèle

L'objet de cette partie est d'explicitier les points spécifiques à la construction des modèles tant continus que discrets. Les fonctions seuils choisies sont, en particulier, précisées ainsi que les conditions d'introduction de la surface de discontinuité.

4.1.1.1 Le modèle continu local

Le modèle continu local, utilisé pour décrire les phénomènes de dissipation plastique volumique, est un modèle classique de plasticité associée avec écrouissage isotrope. La surface seuil permettant de définir le domaine élastique est une surface du type von Mises.

Le modèle utilisé étant particulièrement classique, nous ne rappelons, ici, que les résultats clés permettant de le construire sans en détailler l'obtention.

Les variables internes et duales du modèle sont données dans le tableau 4.1.

Variables d'état	Variables associées
$\bar{\epsilon}$	σ
la déformation plastique $\bar{\epsilon}^P$	σ
la variable d'écrouissage $\bar{\xi}$	\bar{q}

Tableau 4.1: Variables d'état et variables associées pour le modèle continu de plasticité

L'énergie libre de Helmholtz s'écrit de façon classique :

$$\bar{\psi}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \bar{\xi}) = \underbrace{\frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) : \mathbf{C}^e : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)}_{\hat{\psi}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e)} + \bar{\Xi}(\bar{\xi}) \quad (4.1)$$

où $\bar{\Xi}(\bar{\xi})$ correspond à l'énergie libre associée à l'érouissage et où la décomposition additive des déformations en une partie élastique et une partie plastique a été considérée :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (4.2)$$

Avec cette expression de l'énergie libre, la dissipation se met sous la forme :

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{\mathcal{D}} &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \frac{d}{dt} \bar{\psi}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \bar{\xi}) \\ &= \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e} \right) : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} - \frac{d\bar{\Xi}(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}} \dot{\bar{\xi}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

En supposant un pas de chargement élastique, on peut alors écrire les équations d'état :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e} = - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \mathbf{C}^e : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \\ \bar{q} = - \frac{d\bar{\Xi}(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}} \end{cases} \quad (4.4)$$

En tenant compte de ces expressions, la dissipation se réécrit alors :

$$\bar{\mathcal{D}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} + \bar{q} \dot{\bar{\xi}} \quad (4.5)$$

Il convient ensuite, afin d'écrire les équations d'évolution des variables internes, de préciser la surface seuil permettant de définir le domaine élastique. Nous avons, comme cela a été souligné précédemment, utilisé un critère de von Mises pour lequel le domaine élastique est défini par :

$$\bar{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{q}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]\| - (\bar{\sigma}_y - \bar{q}) \leq 0 \quad (4.6)$$

où $\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}] = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1}$ désigne le déviateur des contraintes.

L'évolution des variables internes est alors déterminée en considérant le principe du maximum de dissipation plastique [Lubliner, 1990] [Maugin, 1992]. Le problème de maximisation ainsi introduit est résolu par l'introduction d'une fonctionnelle de Lagrange $\bar{\mathcal{L}}^p$ et d'un multiplicateur de Lagrange $\dot{\bar{\gamma}}$. Les équations d'évolution des variables internes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \dot{\bar{\gamma}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\bar{\gamma}} \frac{\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]}{\|\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]\|} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \dot{\bar{\xi}} = \dot{\bar{\gamma}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} = \dot{\bar{\gamma}} \end{cases} \quad (4.7)$$

Les conditions de charge/décharge s'écrivent, quant à elles :

$$\dot{\bar{\gamma}} \geq 0 \quad , \quad \bar{\phi} \leq 0 \quad , \quad \dot{\bar{\gamma}}\bar{\phi} = 0 \quad (4.8)$$

L'écriture des conditions de cohérence : $\dot{\bar{\gamma}}\bar{\phi} = 0$, dans le cas d'un chargement plastique, permet de déterminer la valeur du multiplicateur plastique :

$$\dot{\bar{\gamma}} = \frac{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}}{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} \bar{K}(\bar{\xi}) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}}} = \frac{\sqrt{6}\mu}{(3\mu + \bar{K}(\bar{\xi}))\|\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]\|} \mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}] \quad (4.9)$$

où $\bar{K}(\bar{\xi}) = \frac{d^2 \bar{\Xi}(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}^2}$ est le module d'écroissage (positif ou négatif) du modèle et μ désigne le module de cisaillement du matériau.

Ceci permet, enfin, d'écrire les équations d'évolution des contraintes sous la forme :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{ep} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (4.10)$$

où

$$\mathbf{C}^{ep} = \begin{cases} \mathbf{C}^e & \dot{\bar{\gamma}} = 0 \\ \mathbf{C}^e - \frac{2\mu}{(1 + \frac{\bar{K}(\bar{\xi})}{3\mu})\|\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]\|^2} \mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}] \otimes \mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}] & \dot{\bar{\gamma}} > 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Une étude de localisation d'un tel modèle (voir par exemple [Runesson et al., 1991]) montre que, dans le cas de chargements en déformations planes comme supposé ici, le tenseur acoustique élasto-plastique peut devenir singulier pour des modules d'écroissage (ou adoucissement) négatifs. La loi d'écroissage choisie ici s'écrit sous forme générale :

$$\bar{q}(\bar{\xi}) = -\bar{K}\bar{\xi} + (\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_\infty) [1 - \exp(-\bar{\beta}\bar{\xi})] \quad (4.12)$$

avec $\bar{\sigma}_y \leq \bar{\sigma}_\infty$. Pour une telle loi, l'évolution de $\bar{K}(\bar{\xi})$ est monotone et conduit à des valeurs négatives. Ainsi, la condition de localisation des déformations peut être atteinte au cours du chargement.

4.1.1.2 Condition de localisation et modèle constitutif pour la discontinuité

Nous précisons ici le critère utilisé afin de décider de l'introduction de la surface de discontinuité. Nous présentons, dans un deuxième temps, la loi de comportement associée à la surface de discontinuité permettant de gérer les phénomènes de dissipation localisés.

La condition de localisation

Nous souhaitons, par l'introduction de surfaces de discontinuité, régler les problèmes numériques liés à la localisation des déformations. Ainsi, nous avons choisi comme critère d'introduction de la surface de discontinuité la condition de localisation classique :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{ep} \cdot \mathbf{n} \text{ est singulier}$$

Nous traitons ici de problèmes en déformations planes. Sous de telles hypothèses, il a été montré par Runesson *et al.* [Runesson et al., 1991] que le module d'écroutissement critique correspondant à la bifurcation d'un mode de déformation homogène vers un mode de déformation localisé s'écrit :

$$\bar{K}_{\text{crit}} = -2\mu \frac{9(1+\nu)}{4\bar{\sigma}_y^2} (s_1 + s_2)^2 \quad (4.13)$$

où, μ est le module de cisaillement du matériau, ν est le coefficient de Poisson et où s_1 et s_2 désignent, respectivement, les valeurs principales du déviateur des contraintes avec $s_1 > s_2$.

La discontinuité est donc introduite dès que le module d'écroutissement (ou adoucissement) est inférieur au module critique \bar{K}_{crit} . La direction de la surface de discontinuité est alors donnée par le vecteur \mathbf{n} . En notant :

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

les coordonnées du vecteur \mathbf{n} dans le repère principal défini par les contraintes principales s_1 et s_2 , l'angle θ vérifie [Runesson et al., 1991] :

$$\tan^2(\theta) = \frac{(1-\nu)(s_1 - \nu s_2)}{\nu s_1 - (1-\nu)s_2} \quad (4.15)$$

Remarquons que θ et $-\theta$ sont solutions de l'équation précédente. Il existe donc deux orientations possibles pour la surface de discontinuité. Rien ne permet *a priori* de choisir l'une ou l'autre de ces deux orientations. Dans notre cas, nous avons choisi le vecteur \mathbf{n} tel que l'angle θ soit positif.

Comme nous l'avons déjà noté au chapitre 2, la condition de localisation telle que présentée ici est, en règle générale, différente de la condition d'introduction de la surface de discontinuité résultant d'une approche dite « continue ». Pour une telle approche, la condition d'introduction de la surface de discontinuité s'écrit, en supposant la compatibilité des équations des modèles continus classiques avec un champ de déplacement discontinu, sous la forme :

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{\bar{K}=0}^{ep} \cdot \mathbf{n}) \dot{\bar{\mathbf{u}}} = 0 \quad (4.16)$$

Cette condition n'est équivalente à la condition de localisation classique que dans le cas où $s_1 = -s_2$, soit pour un état de chargement en cisaillement pur ou pour un matériau incompressible (ou quasi-incompressible). Dans ce cas, l'angle θ vaut $\pm 45^\circ$ (par rapport au vecteur \mathbf{x} du repère global (\mathbf{x}, \mathbf{y})).

Il est en fait possible de montrer, moyennant quelques développements, que le critère d'introduction de la surface de discontinuité écrit à l'équation (4.16), où $\dot{\bar{\mathbf{u}}}$ est supposé porté par le vecteur tangent \mathbf{m} à la surface de discontinuité, revient à imposer la valeur maximale du cisaillement maximal défini par $\tau_{max} = \frac{1}{2}(s_1 - s_2)$.

Ceci nous conduit à imaginer une autre possibilité quant à l'écriture de la condition d'introduction de la surface de discontinuité et à son interprétation. La surface

de discontinuité peut, en effet, être interprétée comme le lien entre deux échelles de dissipation : l'échelle de la structure et des échelles beaucoup plus fines (comme par exemple, l'échelle des bandes de localisation). À l'échelle de la structure, les phénomènes de dissipation sont pris en compte, de façon homogénéisée, par l'introduction de modèles continus classiques. Aux échelles plus fines ont lieu des phénomènes de dissipation spécifiques qui ne peuvent pas être pris en compte par les modèles continus utilisés aux échelles supérieures. Ces phénomènes dissipatifs ne sont alors pas décrits de façon fine et précise aux échelles auxquelles ils ont lieu, mais pris en compte par l'introduction de la surface de discontinuité. Cette dernière, à laquelle est affecté un comportement dissipatif, permet de rendre compte, à l'échelle de la structure, de l'énergie dissipée à des échelles bien inférieures. Ainsi, en fonction du type de phénomènes que l'on souhaite représenter, l'écriture de la condition d'introduction de la surface de discontinuité peut s'appuyer sur des considérations bien différentes. On pourrait, par exemple, choisir d'introduire la surface de discontinuité dans un milieu élasto-plastique lorsque la contrainte de cisaillement maximal atteint une valeur fixée. Une autre possibilité consisterait à supposer que la surface de discontinuité rend compte de tous les phénomènes adoucissants et est introduite dès que le module d'écroutissage devient négatif ou nul. Il est alors, bien sûr, nécessaire de construire la loi discrète associée à la surface de discontinuité en accord avec les considérations qui ont conduit à son introduction dans le milieu.

Le modèle constitutif sur la discontinuité

Les développements précédents nous ont permis de mettre en évidence diverses possibilités dans l'écriture de la condition d'introduction de la surface de discontinuité pour un matériau hors discontinuité supposé répondre à un critère de plasticité de von Mises. Notons que cette condition nous permet essentiellement de déterminer l'orientation de la surface de discontinuité.

Afin de construire le modèle relatif à la surface de discontinuité, nous nous sommes appuyés sur les développements réalisés en considérant une approche « continue ». Nous considérerons donc les développements présentés dans un cadre général au 2.2.4.1.

Avec ces équations et en supposant un modèle de plasticité de von Mises, on doit avoir :

$$\left(\dot{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n} \right)^s = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]_{\Gamma_s}}{\|\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]_{\Gamma_s}\|} \quad (4.17)$$

où la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est calculée sur la surface de discontinuité Γ_s et $\dot{\gamma}$ est la partie singulière du multiplicateur de Lagrange.

Ainsi, le tenseur $\left(\dot{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n} \right)^s$ doit être déviatorique ce qui impose :

$$\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.18)$$

le vecteur $\dot{\mathbf{u}}$ est donc porté par le vecteur \mathbf{m} tangent à la surface de discontinuité.

Notons également que l'équation (4.17) permet d'interpréter le tenseur $\left(\dot{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n} \right)^s$ comme une déformation plastique localisée sur la surface de discontinuité. La surface de discontinuité apparaît alors comme une interface rigide-plastique. Par ailleurs,

l'équation (4.17) nous permet de déduire que le tenseur $\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]_{\Gamma_s}$, défini *sur la surface de discontinuité*, s'écrit dans le repère $(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{k})$ associé à la surface Γ_s sous la forme :

$$\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]_{\Gamma_s} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{n} \cdot \mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m} & 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{k})} \quad (4.19)$$

Dans la suite, nous noterons $\tau_{\Gamma_s} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}$. Avec cette notation et en considérant l'expression précédente du tenseur $\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]_{\Gamma_s}$, on peut réécrire l'équation (4.17) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{m} = \dot{\bar{\gamma}} \sqrt{3} \text{signe}(\tau_{\Gamma_s}) \\ \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Ceci implique, dans la mesure où $\dot{\bar{\gamma}} \geq 0$, que $\text{signe}(\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{m}) = \text{signe}(\tau_{\Gamma_s})$. De plus, la condition de cohérence (2.83) *sur la surface de discontinuité* s'écrit, dans le cas de la plasticité de von Mises, sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 &= \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \dot{q} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]_{\Gamma_s}}{\|\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]_{\Gamma_s}\|} : \overline{\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]_{\Gamma_s}} + \dot{q} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Or, $\dot{q} = -K(\xi) (\dot{\bar{\gamma}} + \dot{\bar{\gamma}} \delta_{\Gamma_s})$. Ainsi, afin de garantir que \dot{q} reste une distribution régulière (au même titre que les contraintes), le module d'écrouissage (ou adoucissement) K doit être tel que :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\bar{K}(\bar{\xi})} + \frac{1}{\bar{K}(\bar{\xi})} \delta_{\Gamma_s} \quad (4.22)$$

On peut alors écrire sur la surface de discontinuité : $\dot{q}|_{\Gamma_s} = \dot{\bar{q}} = -\bar{K}(\bar{\xi}) \dot{\bar{\gamma}}$, où $\bar{K}(\bar{\xi}) \leq 0$ dans la mesure où nous souhaitons représenter des phénomènes d'adoucissement sur la surface de discontinuité. La condition de cohérence précédente se réécrit alors :

$$\dot{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, q)|_{\Gamma_s} = 0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]_{\Gamma_s}}{\|\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]_{\Gamma_s}\|} : \overline{\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]_{\Gamma_s}} - \bar{K}(\bar{\xi}) \dot{\bar{\gamma}} \quad (4.23)$$

ce qui permet de déduire la valeur du multiplicateur de Lagrange sous la forme :

$$\dot{\bar{\gamma}} = \frac{1}{\bar{K}(\bar{\xi})} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]_{\Gamma_s}}{\|\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]_{\Gamma_s}\|} : \overline{\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]_{\Gamma_s}} \right) = \frac{1}{\bar{K}(\bar{\xi})} \sqrt{3} \dot{\tau}_{\Gamma_s} \text{signe}(\tau_{\Gamma_s}) \quad (4.24)$$

Ainsi, la loi liant le glissement sur la discontinuité à τ_{Γ_s} s'écrit :

$$\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{m} = \frac{3}{\bar{K}(\bar{\xi})} \dot{\tau}_{\Gamma_s} \quad (4.25)$$

Notons que cette équation impose que l'on ait : $\text{signe}(\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{m}) = -\text{signe}(\dot{\tau}_{\Gamma_s})$ car $\bar{K} \leq 0$.

Il est important de remarquer que $\tau_{\Gamma_s} = [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m}]|_{\Gamma_s}$. Ainsi, τ_{Γ_s} n'est autre que la composante tangentielle de la traction sur la surface de discontinuité : $\tau_{\Gamma_s} = \mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}$.

L'équation (4.25) apparaît alors comme reliant le glissement au cisaillement sur la surface de discontinuité. Cette relation n'est autre qu'une loi de Schmid [Asaro, 1983] utilisée en micromécanique pour décrire le comportement des dislocations. Par ailleurs, le domaine élastique associé à la surface de discontinuité est alors défini, en considérant un modèle de plasticité de von Mises, par :

$$\bar{\phi}(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = \sqrt{3}|\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}| - (\bar{\sigma}_y - \bar{q}) \leq 0 \quad (4.26)$$

où $\bar{\sigma}_y$ correspond à la valeur de $|\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}|$ à l'instant où le critère de localisation est vérifié.

Ces développements - en particulier la construction de la fonction seuil $\bar{\phi}$ - peuvent être utilisés pour construire la loi de comportement de la surface de discontinuité avec le formalisme développé au chapitre 2.

Ainsi, souhaitant reproduire des phénomènes de plasticité localisés sur la surface de discontinuité, nous définissons les variables d'état et duales relatives à la surface de discontinuité comme présenté dans le tableau 4.2. où $\bar{\mathbf{u}}^p$ correspond au déplacement

Variables d'état	Variables associées
$\bar{\mathbf{u}}$	\mathbf{t}_{Γ_s}
$\bar{\mathbf{u}}^p$	\mathbf{t}_{Γ_s}
la variable d'érouissage $\bar{\xi}$	\bar{q}

Tableau 4.2: Variables d'état et variables associées pour le modèle discret de plasticité

plastique sur la surface de discontinuité. Dans le cas traité ici d'un modèle rigide-plastique, le déplacement plastique $\bar{\mathbf{u}}^p$ et le saut de déplacement $\bar{\mathbf{u}}$ sont identiques.

L'énergie libre de Helmholtz correspondant au modèle rigide-plastique associé à la surface de discontinuité est définie par :

$$\bar{\psi}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}^p, \bar{\xi}) = I_{\{\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}^p = \mathbf{0}\}} + \bar{\Xi}(\bar{\xi}) \quad (4.27)$$

où $I_{\{\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}^p = \mathbf{0}\}}$ est la fonction indicatrice du convexe défini par $\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}^p = \mathbf{0}$ ($I = 0$ si $\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}^p = \mathbf{0}$ et $I = \infty$ dans le cas contraire) et $\bar{\Xi}(\bar{\xi})$ est l'énergie libre associée à l'érouissage (ou adoucissement) sur la surface de discontinuité.

Par ailleurs, le domaine élastique est supposé défini par la surface seuil $\bar{\phi}(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q})$ supposée s'écrire :

$$\bar{\phi}(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = \sqrt{3}|\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}| - (\bar{\sigma}_y - \bar{q}) \leq 0 \quad (4.28)$$

Avec ces définitions, la dissipation sur la surface de discontinuité s'écrit :

$$\bar{\mathcal{D}} = \mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \bar{q} \dot{\bar{\xi}} \quad (4.29)$$

Les développements réalisés au chapitre 2 nous permettent alors d'écrire les équations d'évolution des variables internes sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{m} = \dot{\bar{\gamma}} \sqrt{3} \text{signe}(\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}) \\ \dot{\bar{\xi}} = \dot{\bar{\gamma}} \end{cases} \quad (4.30)$$

Notons que ces expressions permettent de déduire que :

$$|\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{m}| = \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{\xi} \quad (4.31)$$

(où il a été tenu compte du fait que $\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{m} = 0$ à $t = t_{loc}$, instant de l'introduction de la surface de discontinuité).

L'écriture de la condition de cohérence permet alors de déterminer la valeur du multiplicateur de Lagrange $\dot{\bar{\gamma}}$:

$$\dot{\bar{\gamma}} = \frac{\sqrt{3}}{\bar{K}(\bar{\xi})} \dot{\mathbf{t}}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m} \text{ signe}(\dot{\mathbf{t}}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}) \quad (4.32)$$

Ceci permet finalement d'écrire les équations d'évolution des tractions en fonction du saut de déplacement sous la forme :

$$\dot{\mathbf{t}}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m} = \frac{1}{3} \bar{K}(\bar{\xi}) \dot{\bar{\gamma}} \quad \text{si } \dot{\bar{\gamma}} > 0 \quad (4.33)$$

Dans le cas où $\dot{\bar{\gamma}} = 0$, le caractère rigide-plastique de la surface de discontinuité ne permet pas de calculer le module tangent du modèle discret.

Dans les développements qui suivent, nous avons choisi une loi d'adoucissement associée à la surface de discontinuité linéaire. Ainsi, la variable duale \bar{q} associée à l'adoucissement s'écrit :

$$\bar{q} = -\bar{K} \bar{\xi} \quad (4.34)$$

où \bar{K} est une constante.

4.1.1.3 Analyse de la dissipation

Nous considérons ici un domaine Ω traversé par une surface de discontinuité Γ_s de longueur ℓ_{Γ_s} . Nous avons vu au chapitre 2 que la dissipation en tout point du domaine Ω se décompose en une partie régulière et une partie singulière sous la forme :

$$\mathcal{D} = \bar{\mathcal{D}} + \bar{\mathcal{D}} \delta_{\Gamma_s} \quad (4.35)$$

En tenant compte des expressions de la dissipation volumique (équation (4.5)) et de la dissipation localisée (équation (4.29)), la dissipation sur le domaine Ω dans un intervalle de temps $[0, t]$ s'écrit :

$$\mathcal{D}_{\Omega}^{[0, t]} = \int_0^t \int_{\Omega} \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\bar{\gamma}} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]}{\|\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]\|} + \bar{q} \dot{\bar{\gamma}} \right] d\Omega dt + \int_0^t \int_{\Gamma_s} \left[\sqrt{3} \dot{\bar{\gamma}} \dot{\mathbf{t}}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m} \frac{\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}|} + \bar{q} \dot{\bar{\gamma}} \right] d\Gamma_s dt \quad (4.36)$$

En tenant compte du fait que :

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\bar{\gamma}} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]}{\|\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]\|} + \bar{q} \dot{\bar{\gamma}} = \underbrace{\dot{\bar{\gamma}} \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}]\| - (\bar{\sigma}_y - \bar{q}) \right]}_{\dot{\bar{\gamma}} \bar{\phi} = 0} + \bar{\sigma}_y \dot{\bar{\gamma}} = \bar{\sigma}_y \dot{\bar{\gamma}} \quad (4.37)$$

et

$$\sqrt{3}\dot{\bar{\gamma}}\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m} \frac{\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}|} + \bar{q}\dot{\bar{\gamma}} = \underbrace{\dot{\bar{\gamma}} \left[\sqrt{3}|\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}| - (\bar{\sigma}_y - \bar{q}) \right]}_{\dot{\bar{\gamma}}\bar{\phi}=0} + \bar{\sigma}_y\dot{\bar{\gamma}} = \bar{\sigma}_y\dot{\bar{\gamma}} \quad (4.38)$$

la dissipation sur le domaine Ω dans l'intervalle de temps $[0, t]$ s'écrit :

$$\mathcal{D}_{\Omega}^{[0, t]} = \int_0^t \int_{\Omega} \dot{\bar{\xi}}\bar{\sigma}_y \, d\Omega \, dt + \int_0^t \int_{\Gamma_s} \dot{\bar{\xi}}\bar{\sigma}_y \, d\Gamma_s \, dt \quad (4.39)$$

Ceci permet d'évaluer l'énergie dissipée dans le domaine Ω au cours de l'intervalle de temps $[0, t]$. Nous allons, néanmoins, plus particulièrement nous intéresser à la dissipation sur la surface de discontinuité. Pour cela, nous introduisons l'énergie de rupture G_f correspondant à l'énergie devant être fournie à la surface de discontinuité pour passer de l'état $\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{m} = 0$, correspondant à l'instant $t = t_{loc}$ où la surface de discontinuité est introduite, à un état libre de traction à l'instant $t = t_2$. G_f est définie par :

$$G_f = \int_{\Gamma_s} \int_{t_{loc}}^{t_2} \mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} \, dt \, d\Gamma_s \quad (4.40)$$

Par ailleurs, nous avons vu que le saut de déplacement correspond à une déformation plastique localisée sur la surface de discontinuité. Vu la loi de comportement associée à la surface de discontinuité précisée précédemment, et en particulier, vu l'équation (4.30), on a :

$$G_f = \int_{\Gamma_s} \int_{t_{loc}}^{t_2} \sqrt{3}|\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}| \dot{\bar{\xi}} \, dt \, d\Gamma_s = \int_{\Gamma_s} \int_{t_{loc}}^{t_2} (\bar{\sigma}_y - \bar{q}) \dot{\bar{\xi}} \, dt \, d\Gamma_s \quad (4.41)$$

Ceci s'exprime également en fonction de la dissipation localisée sous la forme :

$$\begin{aligned} G_f &= \int_{\Gamma_s} \int_{t_{loc}}^{t_2} \left[\bar{\mathcal{D}} + \dot{\bar{\psi}} \right] \, dt \, d\Gamma_s \\ &= \int_{\Gamma_s} \int_{t_{loc}}^{t_2} \bar{\mathcal{D}} \, dt \, d\Gamma_s + \ell_{\Gamma_s} \left[\bar{\psi}(t_2) - \bar{\psi}(t_{loc}) \right] \\ &= \bar{\mathcal{D}}_{\Gamma_s}^{[t_2, t_{loc}]} + \ell_{\Gamma_s} \frac{1}{2} \frac{\bar{\sigma}_y^2}{\bar{K}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

En tenant compte du fait que la loi d'écroissage a été supposée linéaire et que la traction est supposée constante sur la surface de discontinuité, on a :

$$G_f = \ell_{\Gamma_s} \int_{t_{loc}}^{t_2} -(\bar{\sigma}_y - \bar{q}) \frac{\dot{\bar{q}}}{\bar{K}} \, dt = \ell_{\Gamma_s} \left[-\bar{\sigma}_y \bar{q} + \frac{\bar{q}^2}{2\bar{K}} \right]_{t_{loc}}^{t_2} \quad (4.43)$$

Or, à l'instant de la localisation $t = t_{loc}$, on a $\bar{q} = 0$ et, à $t = t_2$ instant où la surface de discontinuité devient libre de traction (dans la direction \mathbf{m}), on a $\bar{q} = \bar{\sigma}_y$. Ainsi, l'énergie de rupture G_f s'écrit :

$$G_f = -\ell_{\Gamma_s} \frac{\bar{\sigma}_y^2}{2\bar{K}} \quad (4.44)$$

En notant g_f l'énergie de rupture par unité de longueur, on a :

$$\bar{K} = -\frac{\bar{\sigma}_y^2}{2g_f} \quad (4.45)$$

le paramètre d'adoucissement \bar{K} associé à la surface de discontinuité est donc relié à des quantités de la mécanique de la rupture.

Remarque :

Il est également intéressant d'analyser la dissipation dans une optique multiéchelle. Rappelons, en effet, que la surface de discontinuité peut être interprétée comme le lien entre deux échelles de dissipation : elle permet de condenser, à l'échelle de la structure, l'information émanant des échelles plus fines : l'échelle des bandes de localisation.

Nous avons vu au chapitre 2 (équation (2.70)) que le champ de déplacement se décompose en une partie $\tilde{\mathbf{u}}$ associée à l'échelle grossière ou macro et une partie $\bar{\mathbf{u}}$ associée à l'échelle fine : l'échelle des bandes de localisation. Le champ de déformation construit à partir de ce champ de déplacement peut donc se décomposer en une partie que nous pourrions qualifier de « macro », $\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$, et une partie qualifiée de « micro », $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) + (\bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n})^s \delta_{\Gamma_s} \\ &= \underbrace{\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \nabla^s [\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x})]}_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} + (\bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n})^s \delta_{\Gamma_s} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Ainsi, l'expression de la dissipation sur le domaine Ω s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{D}_\Omega = \int_\Omega \left[\boldsymbol{\sigma} : \dot{\bar{\nabla}}^s \bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \frac{d\psi}{dt} \right] d\Omega \quad (4.47)$$

Or, nous avons vu au chapitre 3 que les champs de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et de déformations ajoutées $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ sont supposés orthogonaux. Ainsi, l'expression précédente de la dissipation s'écrit :

$$\mathcal{D}_\Omega = \int_\Omega \left[\boldsymbol{\sigma} : \dot{\bar{\nabla}}^s \bar{\mathbf{u}} - \frac{d\psi}{dt} \right] d\Omega \quad (4.48)$$

Il apparaît donc que l'expression de la dissipation totale dans le domaine Ω , traversé par une surface de discontinuité, peut s'écrire à partir du champ de déplacement « macro ». La condition d'orthogonalité de l'espace des champs de contraintes et de l'espace des champs de déformations ajoutées, interprétée au chapitre 3 comme la forme faible de la condition de continuité des tractions, peut, ainsi, également être interprétée comme la condition permettant d'assurer le lien entre les deux échelles de dissipation.

4.1.2 Les aspects numériques

Nous présentons, ici, les points clés de l'implantation numérique du modèle présenté précédemment. Nous présenterons rapidement quelques points de l'intégration numérique des lois de comportement développées ci-avant. Nous nous attarderons, ensuite, sur la prise en compte de la surface de discontinuité : le choix des interpolations et les spécificités relatives à la résolution numérique.

4.1.2.1 Intégration des lois de comportement

La résolution du problème tel que nous l'avons présenté au chapitre 3 nécessite l'intégration numérique des lois de comportement, intégration que nous présentons, ici, rapidement.

Intégration numérique du modèle continu

La loi utilisée pour le matériau hors discontinuité est particulièrement classique. Ainsi, nous ne nous attarderons pas, ici, sur son intégration numérique mais en présenterons simplement les quelques points clés.

À chaque pas de temps et pour chaque point de Gauss, sont stockées les variables internes du modèle : $\bar{\epsilon}^p$ et $\bar{\xi}$.

Les champs de déplacements nodaux $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}$ et de sauts de déplacement $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i,j)}$ sont donnés par la résolution, respectivement, des équations d'équilibre global et local (voir schéma 3.6) au pas de temps $n + 1$ que nous considérons ici.

Ainsi, sont connues, à l'entrée de la routine d'intégration de la loi de comportement :

- la déformation calculée par :

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^{(i,j)} = \sum_{a=1}^{Nen} \mathbf{B}_a \mathbf{d}_{a n+1}^{(i)} + \bar{\mathbf{G}}_r \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i,j)} \quad (4.49)$$

(Nous préciserons $\bar{\mathbf{G}}_r$ dans la suite).

- les variables internes $\bar{\epsilon}_n^p$ et $\bar{\xi}_n$ correspondant à l'état convergé du pas de temps précédent n .

Remarque :

Pour des raisons de lisibilité, nous ne rappellerons pas, dans les équations qui suivent, les exposants i et j permettant de désigner les itérations globales et locales. Nous ne reporterons que les indices $n + 1$ et n permettant d'indiquer à quel pas de temps sont calculées les variables.

Une prédiction élastique calculée en supposant aucune évolution des variables internes permet de définir l'état de contrainte d'essai :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbf{C}^e : (\bar{\epsilon}_{n+1} - \bar{\epsilon}_n^p) \quad (4.50)$$

La valeur d'essai de la fonction seuil s'écrit alors :

$$\bar{\phi}_{n+1}^{trial} = \|\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}]\| - (\bar{\sigma}_y - \bar{q}_n) \quad (4.51)$$

Deux cas sont alors à traiter :

$$- \bar{\phi}_{n+1}^{trial} < 0$$

Dans ce cas, l'état d'essai est admissible. On peut écrire :

$$\begin{cases} \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} \\ \bar{\epsilon}_{n+1}^p = \bar{\epsilon}_n^p \\ \bar{\xi}_{n+1} = \bar{\xi}_n \end{cases} \quad (4.52)$$

$$- \bar{\phi}_{n+1}^{trial} \geq 0$$

Dans ce cas, l'état d'essai n'est pas admissible, le pas est plastique avec évolution des variables internes. Il reste alors à déterminer l'évolution de ces dernières. La résolution de la condition de charge $\bar{\phi}_{n+1}(\sigma_{n+1}, \bar{q}_{n+1}) = 0$ permet de déterminer la valeur de $\bar{\gamma}_{n+1}$.

Moyennant quelques développements que nous ne présenterons pas ici [Simo et Hughes, 2000], il est possible d'écrire finalement l'état de contrainte réel en fonction de l'état de contrainte test sous la forme :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - 2\mu\bar{\gamma}_{n+1} \frac{\mathbf{dev}[\sigma_{n+1}^{trial}]}{\|\mathbf{dev}[\sigma_{n+1}^{trial}]\|} \quad (4.53)$$

avec, de plus :

$$\begin{cases} \bar{\epsilon}_{n+1}^p = \bar{\epsilon}_n^p + \bar{\gamma}_{n+1} \frac{\mathbf{dev}[\sigma_{n+1}]}{\|\mathbf{dev}[\sigma_{n+1}]\|} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \bar{\xi}_{n+1} = \bar{\xi}_n + \bar{\gamma}_{n+1} \end{cases} \quad (4.54)$$

Par ailleurs, le module tangent numérique défini par :

$$\mathbf{C}_{n+1}^{ep} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}} \quad (4.55)$$

se calcule comme suit (voir [Simo et Taylor, 1985] ou [Simo et Hughes, 2000]) :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{n+1}^{ep} = & \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \frac{1 - 2\mu\bar{\gamma}_{n+1}}{\|\mathbf{dev}[\sigma_{n+1}^{trial}]\|} \\ & - 2\mu \left[\frac{1}{1 + \bar{K}_{n+1} \frac{1}{3\mu}} - \frac{2\mu\bar{\gamma}_{n+1}}{\|\mathbf{dev}[\sigma_{n+1}^{trial}]\|} \right] \frac{\mathbf{dev}[\sigma_{n+1}^{trial}]}{\|\mathbf{dev}[\sigma_{n+1}^{trial}]\|} \otimes \frac{\mathbf{dev}[\sigma_{n+1}^{trial}]}{\|\mathbf{dev}[\sigma_{n+1}^{trial}]\|} \end{aligned} \quad (4.56)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau et $\bar{K}_{n+1} = \bar{K}(\bar{\xi}_{n+1})$.

Intégration numérique de la loi discrète

Comme nous l'avons précisé précédemment, la surface de discontinuité est une interface cohésive rigide-plastique. Le caractère rigide de cette interface pose certaines difficultés quant à l'implantation numérique d'un tel modèle.

Une possibilité permettant de surmonter cette difficulté consiste à utiliser une méthode de pénalisation : la surface n'est alors plus rigide-plastique mais « quasi-rigide »-plastique. Ceci est réalisé en affectant à l'interface un module d'élasticité choisi suffisamment grand pour assurer le caractère « quasi-rigide » de la surface de discontinuité. Cette méthode revient alors à introduire un saut de déplacement

élastique (négligeable devant le saut de déplacement plastique compte tenu du module d'élasticité pénalisé introduit). L'intégration de la loi de comportement est alors réalisée de façon classique en utilisant une méthode de type « return-mapping » analogue à celle utilisée pour l'intégration de la loi de comportement continue présentée précédemment.

Nous avons, ici, choisi, afin d'intégrer numériquement le comportement de la surface de discontinuité, de profiter de l'équation de continuité des tractions résolue de façon faible au niveau élémentaire.

Considérons le pas de temps $n + 1$. À l'itération i de la résolution de l'équation d'équilibre global (voir schéma 3.6), est donné le champ de déplacement nodal $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}$. Le champ de saut de déplacement $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i,j)}$ est alors donné, à l'itération j , par la résolution locale de l'équation de continuité des tractions.

Seule la composante tangentielle $\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}$ de la traction doit être traitée, l'interface étant purement rigide dans la direction normale.

L'état de traction test est défini à partir de l'équation de continuité des tractions par :

$$\mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial} \cdot \mathbf{m} = -\frac{1}{\ell_{\Gamma_s}^e} \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{G}}_{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega^e \quad (4.57)$$

où le vecteur traction \mathbf{t}_{Γ_s} est supposé constant le long de la surface de discontinuité.

Par ailleurs, à partir du saut de déplacement $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i,j)}$ correspondant, pour la surface de discontinuité, à un déplacement plastique traité comme une variable interne, peut être définie la valeur des variables internes du modèle, *i.e.* le déplacement plastique cumulé $\bar{\xi}_{n+1}^{(i,j)}$.

À partir de cette valeur de $\bar{\xi}_{n+1}^{(i,j)}$, il est possible de définir la valeur seuil de la traction en considérant la surface seuil (équation (4.28)), on doit avoir :

$$\sqrt{3} |\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}| \leq \left(\bar{\sigma}_y - \bar{q}(\bar{\xi}_{n+1}^{(i,j)}) \right) \quad (4.58)$$

Dans le cas où $\sqrt{3} |\mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial} \cdot \mathbf{m}| \leq \left(\bar{\sigma}_y - \bar{q}(\bar{\xi}_{n+1}^{(i,j)}) \right)$, l'état test est admissible, la surface de discontinuité se décharge de façon élastique. Le module tangent relatif à la surface de discontinuité ne peut alors pas être défini, la décharge de la surface de discontinuité est alors prise en compte par le traitement du caractère rigide de l'interface (que nous verrons ci-après).

Dans le cas où $\sqrt{3} |\mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial} \cdot \mathbf{m}| > \left(\bar{\sigma}_y - \bar{q}(\bar{\xi}_{n+1}^{(i,j)}) \right)$, l'état test n'est pas admissible, la traction sur la discontinuité est alors telle que :

$$\mathbf{t}_{\Gamma_s, n+1}^{(i,j)} \cdot \mathbf{m} = \left(\bar{\sigma}_y - \bar{q}(\bar{\xi}_{n+1}^{(i,j)}) \right) \text{signe}(\mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial} \cdot \mathbf{m}) \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4.59)$$

Dans ce cas, la surface de discontinuité se charge de façon plastique, le module tangent élasto-plastique relatif à la discontinuité vaut alors :

$$\bar{\mathbf{C}}_{n+1, mm}^{ep(i,j)} = \frac{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s, n+1}^{(i,j)} \cdot \mathbf{m}}{\partial \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i,j)} \cdot \mathbf{m}} = \bar{K}_{n+1}^{(i,j)} \quad (4.60)$$

4.1.2.2 Interpolation EF : la méthode B-bar

L'implantation numérique du modèle présenté précédemment a été réalisée dans le code de calcul *FEAP* développé par le Pr. R.L. TAYLOR [Zienkiewicz et Taylor, 2000] à l'Université de Berkeley. Nous présentons ici les choix spécifiques réalisés, en particulier, pour le choix des interpolations et des techniques de résolution.

Choix des interpolations

Le choix des interpolations doit ici permettre de traiter deux difficultés :

- les phénomènes de blocage induits par le choix d'un critère de plasticité de von Mises rendant les déformations plastiques incompressibles et donc les déformations quasi-incompressibles [Nagtegaal et al., 1974] [Hughes, 1987] ;
- la représentation de la surface de discontinuité.

Afin de résoudre ces deux points, nous avons choisi de travailler avec des éléments à 4 nœuds hybrides. Le caractère quasi-incompressible des déformations est traité par l'utilisation d'interpolation EF s'appuyant sur la méthode B-bar [Hughes, 1987]. La représentation du champ de déformation singulier se fait, quant à elle, en s'appuyant sur la méthode des modes incompatibles comme cela a été présenté au chapitre 3.

Nous allons ici présenter la méthode B-bar sans, pour le moment, supposer la décomposition du champ de déformation en une partie compatible et une partie incompatible. Afin de construire une interpolation mixte du champ de déformation, nous décomposons cette dernière en une partie déviatorique et une partie volumique sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{dev}[\nabla^s \mathbf{u}] + \frac{1}{3}\theta \mathbf{1} \quad (4.61)$$

où θ est une variable indépendante de \mathbf{u} . Le champ de contrainte, quant à lui, est supposé se décomposer sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})] + p \mathbf{1} \quad (4.62)$$

où p est une variable indépendante de $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ est le tenseur de contrainte vérifiant la loi de comportement.

Les champs \mathbf{u} , θ et p sont donc supposés indépendants, leurs variations seront, respectivement, notées $\delta \mathbf{u}$, $\delta \theta$ et δp .

Avec ces notations, la formulation variationnelle du problème est écrite en considérant le principe variationnel à trois champs de Hu-Washizu [Washizu, 1982] :

$$\forall (\delta \mathbf{u}, \delta p, \delta \theta), \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} [\mathbf{dev}[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})] : \mathbf{dev}[\nabla^s \delta \mathbf{u}] + p \underbrace{\text{tr}[\nabla^s \delta \mathbf{u}]}_{\text{div}[\delta \mathbf{u}]}] d\Omega - \delta \Pi_{ext} = 0 \\ \int_{\Omega} \delta p [\underbrace{\text{tr}[\nabla^s \mathbf{u}]}_{\text{div}[\delta \mathbf{u}]} - \theta] d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \delta \theta [-p + p(\theta)] d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (4.63)$$

où $p(\theta)$ est la pression hydrostatique associée à la contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ vérifiant la loi de comportement ($p(\theta) = \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})]$), $\delta \Pi_{ext} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{h} d\Gamma$ où \mathbf{b} désigne les

forces volumiques appliquées au domaine Ω et \mathbf{h} les efforts appliqués sur la frontière $\partial_t\Omega$ du domaine.

Afin d'écrire cette formulation sous forme discrétisée, il est nécessaire de préciser l'interpolation des trois champs indépendants \mathbf{u} , θ et p .

Les champs de déplacement et de variation de déplacement sont discrétisés, de façon classique, sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\Omega^e} = \sum_a^{Nen} \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \mathbf{d}_a(t) \\ \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\Omega^e} = \sum_a^{Nen} \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \delta \mathbf{d}_a(t) \end{array} \right. \quad (4.64)$$

où $\mathbf{d}_a(t)$ et $\delta \mathbf{d}_a(t)$ sont les champs de déplacements nodaux et variations de déplacements nodaux. $\mathbf{N}_a(\mathbf{x})$ désigne la fonction de forme classique associée au nœud a , Nen correspond au nombre de nœuds de l'élément. Nous noterons $\mathbf{B}_a = \mathbf{L} \mathbf{N}_a$ où \mathbf{L} est la matrice associée à l'opérateur ∇^s . Les fonctions $\mathbf{B}_a(\mathbf{x})$ sont décomposées en leur partie volumique et déviatorique :

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_a^{\text{vol}}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_a^{\text{dev}}(\mathbf{x}) \quad (4.65)$$

on peut ainsi écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tr} \left[\sum_{a=1}^{Nen} \mathbf{B}_a \mathbf{d}_a(t) \right] = \sum_{a=1}^{Nen} \mathbf{B}_a^{\text{vol}} \mathbf{d}_a(t) \\ \text{dev} \left[\sum_{a=1}^{Nen} \mathbf{B}_a \mathbf{d}_a(t) \right] = \sum_{a=1}^{Nen} \mathbf{B}_a^{\text{dev}} \mathbf{d}_a(t) \end{array} \right. \quad (4.66)$$

La formulation variationnelle (4.63) écrite précédemment impose que les champs de déplacement soient continus d'un élément à l'autre. En revanche, les champs de pression p et de déformation volumique θ peuvent être définis indépendamment sur chaque élément sans condition de continuité inter-élément. Leur interpolation sera construite comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta|_{\Omega^e} = \mathbf{N}_\theta^T \theta \quad \delta \theta|_{\Omega^e} = \mathbf{N}_\theta^T \delta \theta \\ p|_{\Omega^e} = \mathbf{N}_p^T p \quad \delta p|_{\Omega^e} = \mathbf{N}_p^T \delta p \end{array} \right. \quad (4.67)$$

où \mathbf{N}_θ et \mathbf{N}_p ne sont, donc, pas forcément continues d'un élément à l'autre. Par ailleurs, elles sont choisies identiques : $\mathbf{N}_\theta = \mathbf{N}_p$ et constantes par élément. Nous les noterons par la suite : $\mathbf{N}_\theta = \mathbf{N}_p = \tilde{\mathbf{N}}$.

Avec ces notations, la formulation variationnelle écrite précédemment se met sous la forme discrétisée (on note Nel le nombre d'éléments servant à discrétiser le

domaine) :

$$\forall (\delta \mathbf{u}, \delta p, \delta \theta), \left\{ \begin{array}{l} \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\Omega^e} (\delta \mathbf{d}^T(t) \mathbf{B}^{\text{dev} T} \text{dev}[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})] + \delta \mathbf{d}^T(t) \mathbf{B}^{\text{vol} T} p) \, d\Omega^e - \delta \Pi_{ext} = 0 \\ \int_{\Omega^e} \delta p \tilde{\mathbf{N}}^T (\mathbf{B}^{\text{vol}} \mathbf{d}(t) - \tilde{\mathbf{N}} \theta) \, d\Omega^e = 0 \quad \forall e \in [1, Nel] \\ \int_{\Omega^e} \delta \theta \tilde{\mathbf{N}}^T (-\tilde{\mathbf{N}} p + p(\theta)) \, d\Omega^e = 0 \quad \forall e \in [1, Nel] \end{array} \right. \quad (4.68)$$

Des équations précédentes, on peut déduire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \bar{\mathbf{B}}^{\text{vol}} \mathbf{d}(t) \\ p = \left(\int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{N}}^T \tilde{\mathbf{N}} \, d\Omega^e \right)^{-1} \int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{N}}^T p(\theta) \, d\Omega^e \end{array} \right. \quad (4.69)$$

où nous avons noté : $\bar{\mathbf{B}}^{\text{vol}} = \int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{H}}^{-1} \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{B}^{\text{vol}} \, d\Omega^e$ avec $\tilde{\mathbf{H}} = \int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{N}}^T \tilde{\mathbf{N}} \, d\Omega^e$.

En remarquant, par ailleurs, que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \delta \mathbf{d}^T(t) \mathbf{B}^{\text{vol} T} p \, d\Omega^e &= \int_{\Omega^e} \delta \mathbf{d}^T(t) \mathbf{B}^{\text{vol} T} \tilde{\mathbf{H}}^{-1} \left(\int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{N}}^T p(\theta) \, d\Omega^e \right) \, d\Omega^e \\ &= \int_{\Omega^e} \delta \mathbf{d}^T(t) \bar{\mathbf{B}}^{\text{vol} T} p(\theta) \, d\Omega^e \end{aligned} \quad (4.70)$$

ces expressions permettent finalement d'écrire la formulation variationnelle (4.68) sous la forme standard :

$$\sum_{e=1}^{Nel} \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega^e - \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{0} \quad (4.71)$$

où le champ de déformation s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) \mathbf{d}(t) \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{\text{dev}}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{B}}^{\text{vol}}(\mathbf{x}) \quad (4.72)$$

L'équation obtenue n'est autre que l'équation d'équilibre global classique pour laquelle l'expression des fonctions d'interpolation des déformations a été modifiée.

Pour des éléments à quatre nœuds, les fonctions d'interpolation \mathbf{N}_θ et \mathbf{N}_p sont choisies constantes par élément. Ainsi, $\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{1}$. La fonction d'interpolation des déformations volumiques sur un élément Ω^e s'écrit alors :

$$\bar{\mathbf{B}}^{\text{vol}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{A^e} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{\text{vol}} \, d\Omega^e \quad (4.73)$$

où $A^e = \int_{\Omega^e} d\Omega^e$. $\bar{\mathbf{B}}^{\text{vol}}(\mathbf{x})$ est donc constante par élément.

Lorsque la surface de discontinuité est introduite, nous devons également construire un champ de déformation incompatible comme cela a déjà été vu au chapitre 3. Chaque élément traversé par la surface de discontinuité Γ_s se trouve partagé en deux sous-domaines : Ω^{e+} et Ω^{e-} . Nous avons vu au chapitre 3 que la fonction d'interpolation des déformations ajoutées réelles notée \mathbf{G}_r est construite à partir

des fonctions de forme classiques. Or, nous souhaitons, ici, combiner la méthode B-bar, permettant de gérer les problèmes d'incompressibilité, à la méthode des modes incompatibles permettant, quant à elle, de représenter le champ de déformation singulier. La construction de la fonction \mathbf{G}_r doit donc tenir compte du choix réalisé précédemment pour représenter les champs de déformation volumique. Ainsi, avec la prise en compte de la modification des fonctions d'interpolation des déformations, la fonction \mathbf{G}_r est construite comme suit :

$$\mathbf{G}_r(\mathbf{x}) = - \sum_{a \in \Omega^{e+}} \bar{\mathbf{B}}_a(\mathbf{x}) + \mathbf{n} \delta_{\Gamma_s} \quad (4.74)$$

\mathbf{n} est ici tel que :

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{n}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{n}_z \\ \mathbf{n}_y & \mathbf{n}_x & 0 \\ \mathbf{n}_z & 0 & \mathbf{n}_x \\ 0 & \mathbf{n}_z & \mathbf{n}_y \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Remarquons que seule la partie régulière de la fonction \mathbf{G}_r est affectée par l'utilisation de la méthode B-bar. Ceci s'explique par le fait que, vu le choix réalisé pour le comportement de la surface de discontinuité (le saut de déplacement $\bar{\mathbf{u}}$ est supposé porté par le vecteur \mathbf{m} tangent à la surface de discontinuité), le champ de déformation singulier est purement déviatorique et ne nécessite donc aucun traitement particulier vis-à-vis des problèmes de blocage liés à la quasi-incompressibilité des déformations.

La fonction \mathbf{G}_v permettant d'interpoler les déformations ajoutées virtuelles s'écrit, quant à elle :

$$\mathbf{G}_v(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_r - \frac{1}{A^e} \int_{\Omega^e} \mathbf{G}_r(\mathbf{x}) \, d\Omega^e \quad (4.76)$$

soit, en tenant compte de l'équation (4.74), de la décomposition des fonctions d'interpolation classiques écrite à l'équation (4.72) et de l'expression (4.73), la fonction \mathbf{G}_v s'écrit :

$$\mathbf{G}_v(\mathbf{x}) = - \underbrace{\sum_{a \in \Omega^{e+}} \left(\mathbf{B}_a^{\text{dev}}(\mathbf{x}) - \frac{1}{A^e} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^{\text{dev}}(\mathbf{x}) \, d\Omega^e \right)}_{\bar{\mathbf{G}}_v} - \underbrace{\frac{\ell_{\Gamma_s}^e}{A^e} \mathbf{n}}_{\bar{\mathbf{G}}_v \delta_{\Gamma_s}} + \mathbf{n} \delta_{\Gamma_s} \quad (4.77)$$

où nous avons tenu compte du fait que $\bar{\mathbf{B}}^{\text{vol}}(\mathbf{x})$ est constante par élément.

Notons que le choix d'une fonction \mathbf{G}_v définie par :

$$\mathbf{G}_v(\mathbf{x}) = - \frac{\ell_{\Gamma_s}^e}{A^e} \mathbf{n} + \mathbf{n} \delta_{\Gamma_s} \quad (4.78)$$

convient également. Cette fonction vérifie, en effet, la condition :

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{G}_v(\mathbf{x}) \, d\Omega = 0 \quad (4.79)$$

qui assure le passage du patch-test. Cependant, contrairement à la fonction \mathbf{G}_v écrite à l'équation (4.77), cette dernière n'assure pas un degré d'interpolation des déformations virtuelles identique à celui des déformations réelles.

Nous avons choisi, comme cela a été précisé précédemment, de travailler avec des éléments à quatre nœuds. Pour de tels éléments, pour lesquels le champ de contrainte n'est pas homogène, se pose la question de la position de la surface de discontinuité. L'une des possibilités consiste à vérifier le critère de localisation sur chaque point de Gauss. Ceci suppose d'être capable de traiter, dans un seul élément, plusieurs surfaces de discontinuité. Nous avons choisi d'introduire la surface de discontinuité sur le point central de l'élément : une seule surface est alors traitée par élément.

Les éléments choisis sont du type de celui représenté à la figure 4.1 où les points marqués d'une croix sont les points d'intégration de l'élément. Un point de calcul des contraintes est rajouté, ce dernier est placé au centre de l'élément. Il ne participe pas à l'intégration numérique mais permet de vérifier le critère de localisation dans l'élément.

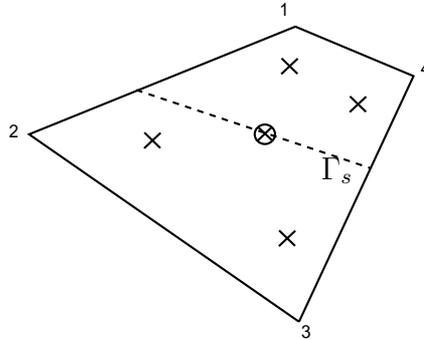


Figure 4.1: *Élément à 4 noeuds traversé par une surface de discontinuité : points d'intégration et points de calcul des contraintes*

Rappelons, par ailleurs, que le champ de saut de déplacement est, comme nous l'avons vu au chapitre 3 supposé constant sur la surface de discontinuité.

Spécificités de la technique de résolution locale

La résolution du problème est alors traitée comme présenté au chapitre 3. Nous décrivons, cependant, ici, les spécificités de la résolution de l'équation de continuité des tractions qui est, comme nous l'avons déjà vu, résolue au niveau élémentaire (voir schéma 3.6).

Avec les interpolations construites précédemment, l'équation résolue localement et permettant de déterminer la valeur du saut de déplacement s'écrit :

$$\mathbf{h}^e(t) = \mathbf{0} = \int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{G}}_v^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega^e + \int_{\Gamma_s} \mathbf{t}_{\Gamma_s} \, d\Gamma_s \quad (4.80)$$

Cette équation est résolue par une méthode itérative au niveau de chaque élément traversé par une surface de discontinuité et ce, pour chaque itération globale i du pas de temps considéré (noté ici $n + 1$). La résolution est menée en supposant le

champ de déplacements nodaux $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}$ fixe (voir schéma 3.6). En notant j l'indice de l'itération locale, le champ de déformation permettant de calculer le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ apparaissant dans l'équation (4.80) s'écrit :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{(i,j)} = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{d}_{n+1}^{(i)} + \bar{\mathbf{G}}_{\mathbf{r}}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i,j)} \quad (4.81)$$

Le champ de traction, quant à lui, est calculé à partir de la valeur du champ de saut de déplacement : $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i,j)}$.

À la fin du processus itératif, on obtient la valeur du champ $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}$ pour laquelle l'équation (4.80) est vérifiée (le champ de déplacements nodaux $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}$ ayant été fixé). Il est alors nécessaire de modifier la matrice de rigidité élémentaire afin de tenir compte, comme cela a été explicité au chapitre 3, du comportement de la surface de discontinuité. Cette correction suppose de calculer les matrices $\mathbf{F}_{\mathbf{r}n+1}^{e(i)}$, $\mathbf{F}_{\mathbf{v}n+1}^{e(i)}$, $\mathbf{H}_{n+1}^{e(i)}$, $\mathbf{K}_{dn+1}^{(i)}$ et $\mathbf{K}_{\alpha n+1}^{(i)}$ définies à l'équation (3.87). Ces dernières se calculent aisément dans le cas où le saut de déplacement évolue. Dans le cas où aucune évolution du champ de saut de déplacement n'est détectée, la surface de discontinuité se décharge de façon « élastique » en suivant son comportement rigide. Il est, alors, nécessaire de traiter le caractère rigide de l'interface afin de pouvoir calculer la matrice de rigidité élémentaire modifiée.

Traitement du caractère rigide de l'interface

Nous avons vu que la surface de discontinuité apparaît comme une interface rigide-plastique dans la direction \mathbf{m} , purement rigide dans la direction \mathbf{n} . Ceci doit être pris en compte dans la résolution de l'équation de continuité des tractions. Dans tous les cas, l'interface est traitée comme rigide dans la direction normale \mathbf{n} , la projection de l'équation (4.80) sur le vecteur \mathbf{n} est automatiquement vérifiée. Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{\alpha n+1}^{(i)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{n+1}^{e(i)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{dn+1}^{(i)} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{F}_{\mathbf{v}n+1}^{T(i)} \cdot \mathbf{n} \end{cases} \quad (4.82)$$

La matrice de rigidité élémentaire n'est alors pas modifiée dans la direction \mathbf{n} puisque $(\mathbf{F}_{\mathbf{v}n+1}^{T(i)} + \mathbf{K}_{dn+1}^{(i)}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$.

Le même type de traitement est réalisé pour la composante selon \mathbf{m} de l'équation (4.80). Si la surface seuil associée à la surface de discontinuité dans la direction du glissement \mathbf{m} n'est pas active, l'interface est gérée comme une interface rigide, la projection de l'équation (4.80) sur le vecteur \mathbf{m} est alors automatiquement vérifiée et l'on a :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{\alpha n+1}^{(i)} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{n+1}^{e(i)} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{dn+1}^{(i)} \cdot \mathbf{m} = -\mathbf{F}_{\mathbf{v}n+1}^{T(i)} \cdot \mathbf{m} \end{cases} \quad (4.83)$$

Dans ce cas, la matrice de rigidité associée à l'élément considéré n'est pas modifiée, on a, en effet : $\mathbf{F}_{\mathbf{v}n+1}^{T(i)} + \mathbf{K}_{dn+1}^{(i)} = \mathbf{0}$.

4.1.3 Quelques résultats numériques

4.1.3.1 Un essai de cisaillement pur

Nous présentons ici un exemple relativement simple permettant de mettre en avant le caractère régularisant de l'approche à discontinuité pour un modèle élasto-plastique. Le test réalisé ici est un essai de cisaillement pur. La géométrie considérée (un carré de 100 mm de côté et d'épaisseur unité) ainsi que les conditions aux limites de l'essai sont représentées à la figure 4.2. Afin de mettre en évidence le caractère régularisant de l'approche proposée, trois discrétisations de la géométrie précédente ont été choisies. Les maillages diffèrent par la taille des éléments (maillages a et b) mais également par leur orientation et leur distorsion (maillages b et c) (voir la figure 4.2).

Les paramètres des modèles continus et discrets sont donnés dans le tableau 4.3.

Modèle continu	
Module d'Young	210 GPa
Coefficient de Poisson	0.4999
$\bar{\sigma}_y$	0.35 GPa
$\bar{\sigma}_\infty$	0.55 GPa
$\bar{\beta}$	200
\bar{K}	-0.5 GPa
Paramètre de la loi discrète	
$\bar{\bar{K}}$	-0.05 GPa/mm

Tableau 4.3: Paramètres des modèles continus et discrets

La loi d'érouissage choisie pour le matériau hors discontinuité s'écrit :

$$\bar{q}(\bar{\xi}) = -\bar{K}\bar{\xi} + (\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_\infty)(1 - \exp(-\bar{\beta}\bar{\xi})) \quad (4.84)$$

avec $\bar{\sigma}_\infty \geq \bar{\sigma}_y$. Le module d'érouissage \bar{K} est choisi négatif. Ainsi, le module d'érouissage total $\bar{K}(\bar{\xi})$ s'écrit :

$$\bar{K}(\bar{\xi}) = \bar{K} + (\bar{\sigma}_\infty - \bar{\sigma}_y)\bar{\beta}\exp(-\bar{\beta}\bar{\xi}) \quad (4.85)$$

Les paramètres $\bar{\sigma}_\infty$, $\bar{\sigma}_y$, \bar{K} et $\bar{\beta}$ sont tels que $\bar{K}(0)$ est positif. Ainsi, le module d'érouissage prend initialement des valeurs positives pour devenir négatif au fur et à mesure de l'évolution de $\bar{\xi}$, la déformation plastique cumulée. Le module d'érouissage prenant des valeurs négatives, la condition de localisation peut être vérifiée au cours du chargement.

Par ailleurs, si la structure considérée est supposée homogène, à la localisation, le problème présente un point de bifurcation : la localisation peut avoir lieu indifféremment en n'importe quel point de la structure. Ainsi, afin de transformer le problème de bifurcation en un problème de localisation, un défaut est introduit dans la barre en réduisant la contrainte limite d'élasticité $\bar{\sigma}_y$ ainsi que $\bar{\sigma}_\infty$ (les éléments affaiblis apparaissent en grisé sur la figure 4.2).

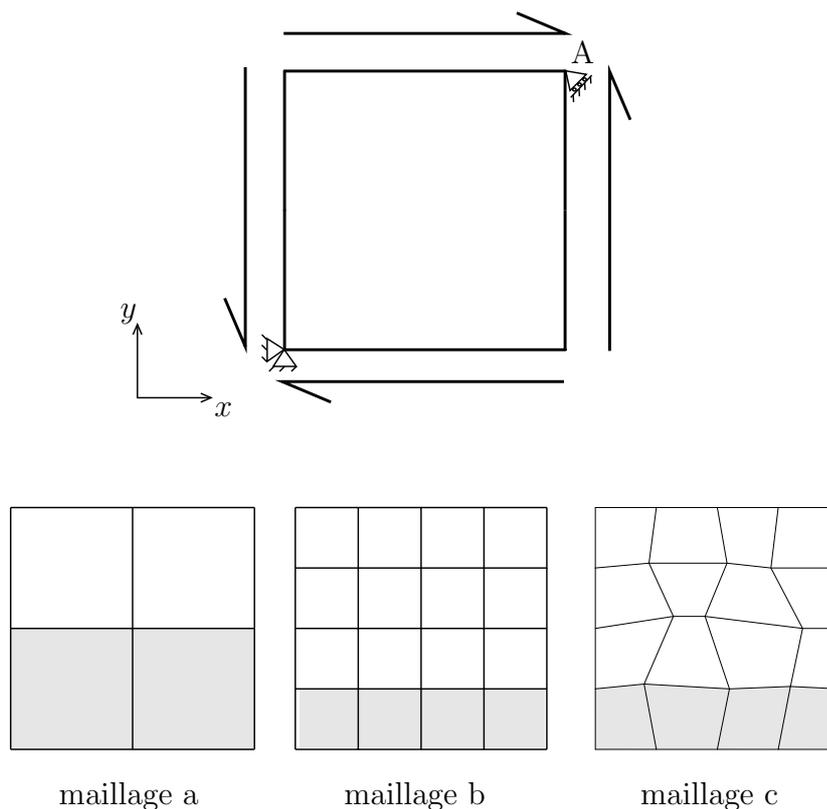


Figure 4.2: *Essai de cisaillement pur : conditions aux limites et maillages considérés*

La résolution du problème est menée par une méthode *Arc-length* (ou longueur d'arc) [Crisfield, 1983]. Les résultats en terme d'effort mesuré dans la direction x sur le bord supérieur de l'éprouvette (voir figure 4.2) en fonction du déplacement horizontal du point A sont donnés, pour les trois maillages, à la figure 4.3. Notons que pour ce cas de chargement en cisaillement pur, la localisation a lieu dès que le module d'écroutissement devient négatif.

L'orientation et la position des surfaces de discontinuité en fin de test sont données sur la figure 4.4.

La figure 4.3 met en évidence les trois phases du comportement :

- une première phase purement élastique ;
- une deuxième phase, jusqu'au pic, caractérisée par de la dissipation volumique générée par l'évolution de la plastification dans le matériau. Cette phase se poursuit jusqu'à ce que le critère de localisation soit atteint dans les éléments affaiblis. À partir de cet instant, des discontinuités sont introduites dans les éléments localisés, la « structure » entre alors dans la phase post-pic du comportement.
- La troisième phase correspond à la phase post-pic du comportement caractérisée ici par de la dissipation surfacique : les surfaces de discontinuité introduites précédemment commencent à glisser de façon irréversible générant de la plasticité localisée. En raison du caractère unidimensionnel de la sollicitation consi-

dérée ici, la plastification diffuse n'évolue plus, le matériau hors discontinuité se décharge de façon élastique.

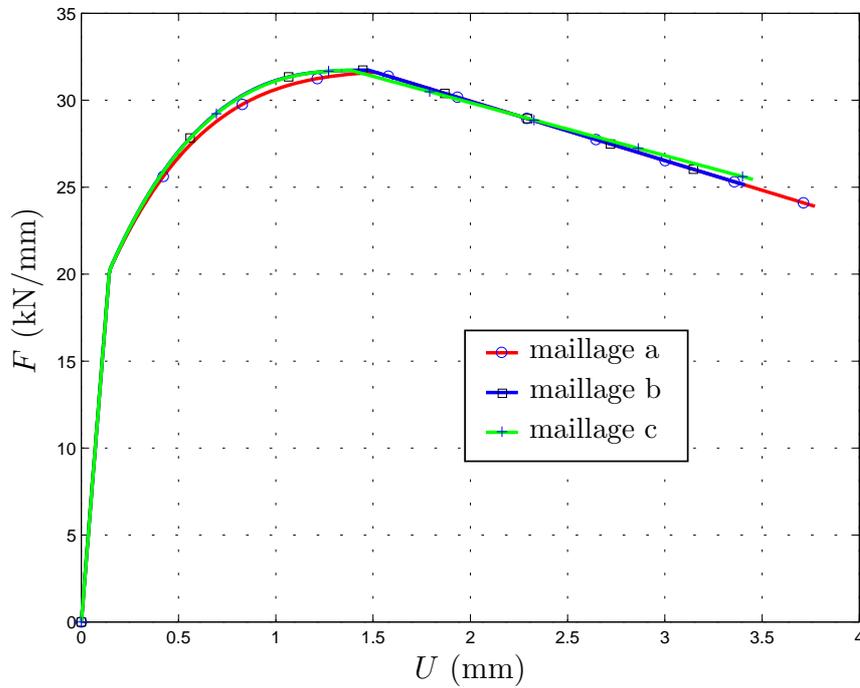


Figure 4.3: *Essai de cisaillement pur : courbe effort mesuré / déplacement imposé au point A*

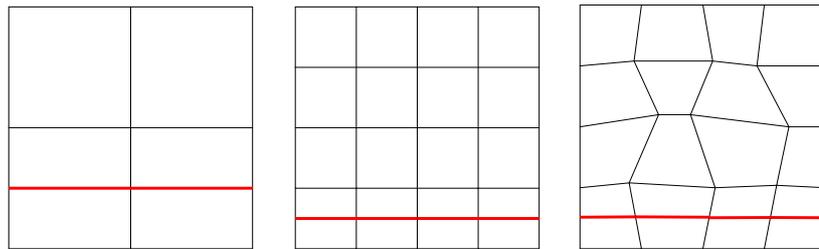


Figure 4.4: *Essai de cisaillement pur : lignes de discontinuité*

L'analyse de la figure 4.3 permet, également, de conclure à l'objectivité de la solution vis-à-vis du maillage : la solution est quasi-indépendante de la taille des éléments et de leur distorsion. Les surfaces de discontinuité sont, dans tous les cas, orientées orthogonalement à l'axe des y soit à 45° par rapport à l'axe de chargement (la diagonale du carré).

Pour cet essai, l'utilisation combinée de la méthode B-bar et de l'approche à discontinuité permet de représenter, de façon satisfaisante, les trois phases du comportement ; aucun problème de blocage - en particulier dans la phase post-pic - n'est détecté.

4.1.3.2 Un essai de cisaillement simple

L'essai présenté ici est un test de cisaillement simple en déformations planes. La géométrie considérée est un rectangle de 200 mm de long, 100 mm de haut et d'épaisseur unitaire. Les paramètres utilisés pour les modèles continus et discrets sont donnés dans le tableau 4.4.

Modèle continu	
Module d'Young	210 GPa
Coefficient de Poisson	0.4999
$\bar{\sigma}_y$	0.55 GPa
$\bar{\sigma}_\infty$	0.75 GPa
$\bar{\beta}$	200
\bar{K}	-1.8 GPa
Paramètre de la loi discrète	
$\bar{\bar{K}}$	-0.05 GPa/mm

Tableau 4.4: Paramètres des modèles continus et discrets

La loi d'érouissage utilisée pour le matériau hors discontinuité est, comme dans le cas précédent, une loi d'érouissage avec saturation telle que le module d'érouissage prenne initialement des valeurs positives et évolue, de façon monotone, vers des valeurs négatives.

Notons que le matériau considéré est supposé quasi-incompressible ($\nu \simeq 0.5$). Ceci nous permettra de tester l'efficacité de l'utilisation combinée de la méthode B-bar et de l'approche à discontinuité.

Par ailleurs, afin de tester le caractère régularisant de l'approche, le calcul est mené pour deux maillages différents (l'un comportant environ 130 éléments - le maillage a - l'autre composé d'environ 380 éléments - le maillage b). Les conditions aux limites du calcul ainsi que les deux maillages considérés sont représentés sur la figure 4.5. Afin de contrôler le passage de la structure dans le régime adoucissant de son comportement, le calcul est mené en déplacements imposés. La réponse de la structure, pour les deux maillages considérés, est donnée à la figure 4.6 en terme d'effort mesuré (par unité d'épaisseur) sur le bord supérieur de la barre en fonction du déplacement imposé. La courbe de réponse pour les deux maillages considérés permet de conclure à l'objectivité de la solution vis à vis de la discrétisation EF : les courbes de réponse sont quasi-identiques ; l'évaluation de la charge limite ultime et de l'énergie dissipée donnent, dans les deux cas, les mêmes résultats.

La figure 4.6 permet, également, de mettre en avant l'efficacité de l'utilisation couplée de la méthode B-bar et de l'approche à discontinuité : aucun phénomène de blocage propre aux problèmes quasi-incompressibles n'est observé (ici essentiellement dans la phase post-pic du comportement, l'efficacité de la méthode B-bar n'est plus à démontrer pour les problèmes classiques).

Comme dans l'essai de cisaillement pur précédent, la courbe de réponse présente trois phases relativement distinctes. En revanche l'interprétation de ces trois phases est modifiée par l'effet de structure intervenant dans cet essai de cisaillement simple :

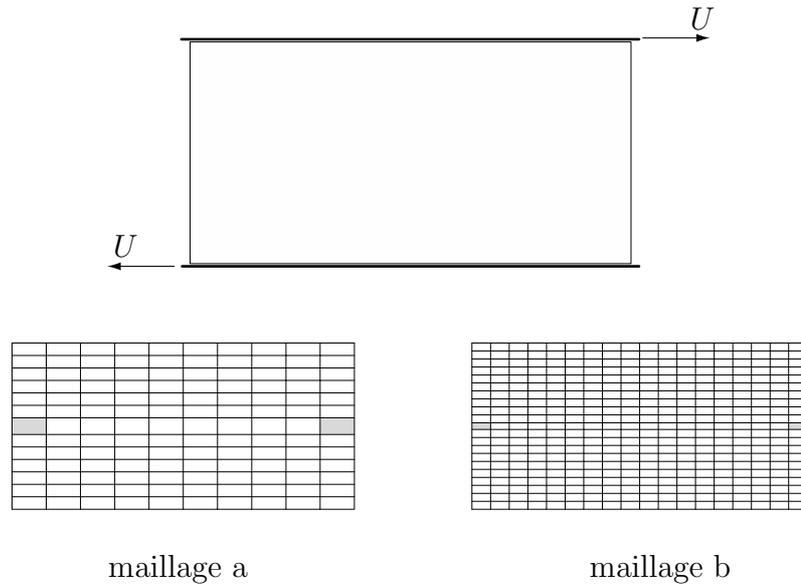


Figure 4.5: Essai de cisaillement simple : conditions aux limites et maillages considérés

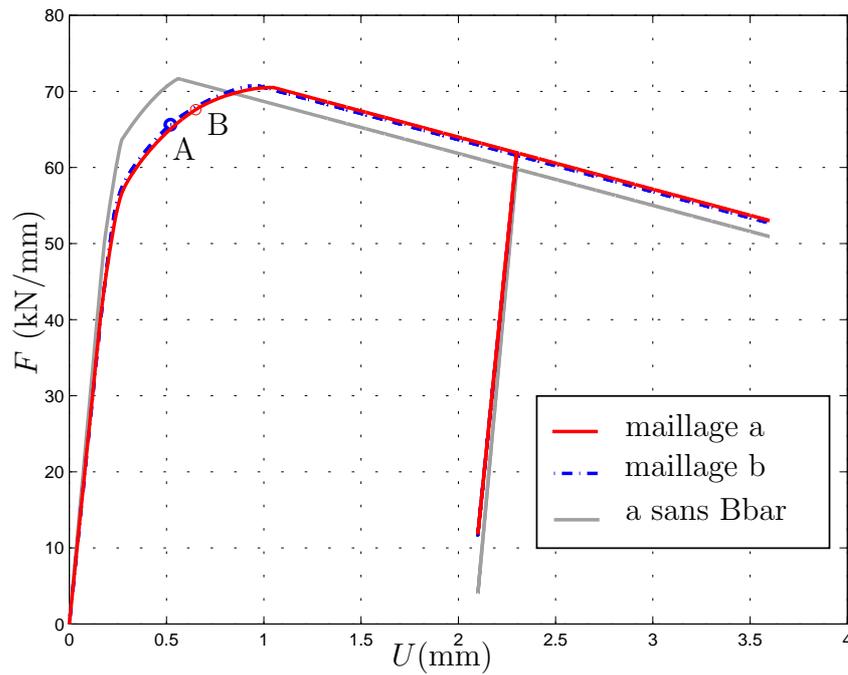


Figure 4.6: Essai de cisaillement simple : réponse effort/déplacement

- la première phase correspond à la réponse élastique de la structure ;
- la deuxième phase voit, dans un premier temps, la plastification diffuse évoluer dans la structure de façon non homogène. Cette phase uniquement caractérisée

par de la dissipation volumique se poursuit jusqu'à ce que le critère de localisation soit atteint dans un élément (points A et B sur la figure 4.6). Une discontinuité est alors introduite dans cet élément. Notons que, à ce stade, la structure n'a pas encore atteint le point limite de la courbe effort/déplacement (figure 4.6). La plastification diffuse se poursuit dans la structure, simultanément la plastification localisée se développe le long de la surface de discontinuité introduite. Au fur et à mesure de l'augmentation du déplacement imposé, le critère de localisation est atteint dans les éléments voisins de celui dans lequel elle s'est initiée. Les surfaces de discontinuité se propagent ainsi, de proche en proche, à travers la barre. Durant cette phase du comportement coexistent les deux types de dissipation : certaines zones sont dominées par des phénomènes de dissipation volumique alors que d'autres sont le siège de phénomènes de dissipation localisée.

- la troisième phase du comportement est entamée dès lors que la barre est traversée de part en part par des surfaces de discontinuité. La réponse de la barre entre alors dans son régime adoucissant ; le glissement le long des surfaces de discontinuité s'intensifie. Si une décharge est entreprise au cours de cette phase, cette dernière se fait en suivant une pente correspondant au module élastique et fait apparaître un déplacement irréversible. Ce dernier est lié au développement de la plastification diffuse mais également au glissement irréversible installé sur les surfaces de discontinuité.

Les figures 4.7 et 4.8 donnent l'orientation et la position des surfaces de discontinuité introduites pour chacun des deux maillages.

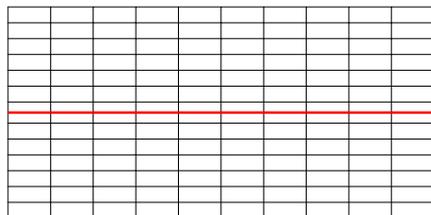


Figure 4.7: *Lignes de discontinuité pour le maillage a*

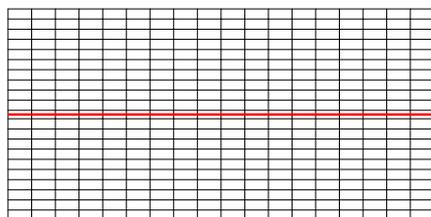


Figure 4.8: *Lignes de discontinuité pour le maillage b*

Les figures 4.9 et 4.10 représentent, sur la configuration déformée, les champs de déplacement dans la direction x , pour les deux maillages, en fin de test soit pour un déplacement imposé $U = 3.6$ mm.

Ces figures permettent de mettre en évidence le fort gradient de déplacement s'installant dans la bande d'éléments localisés. Le déplacement imposé est repris en quasi-totalité par la rangée d'éléments dans lesquels les surfaces de discontinuité ont été introduites. Le reste de la structure se décharge au fur et à mesure que le déplacement imposé croît.

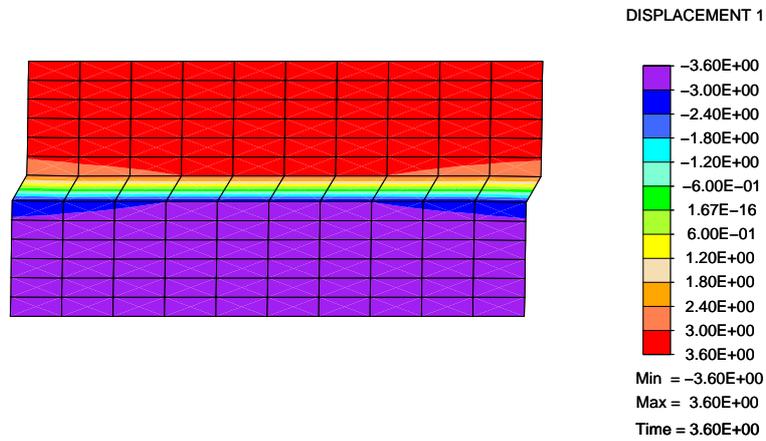


Figure 4.9: *Champs de déplacement dans la direction x en fin de test pour le maillage a*

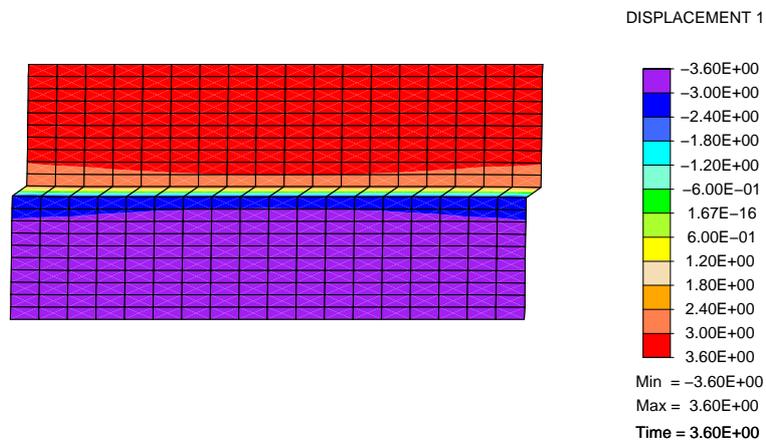


Figure 4.10: *Champs de déplacement dans la direction x en fin de test pour le maillage b*

4.1.3.3 Un essai de traction

L'essai présenté ici est un essai de traction sur une barre bi-entaillée. La structure considérée et les conditions aux limites de l'essai sont précisées à la figure 4.11.

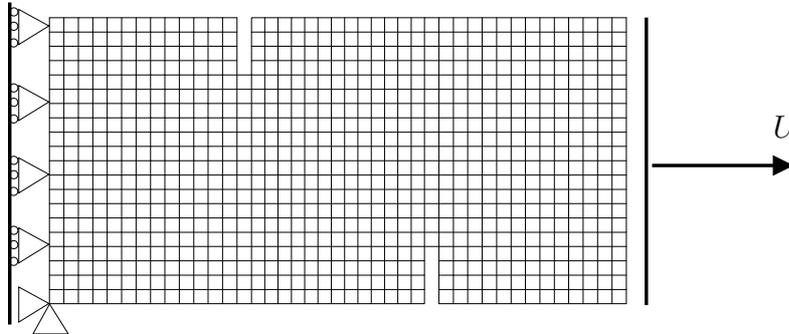


Figure 4.11: *Essai de traction : discrétisation EF et conditions aux limites*

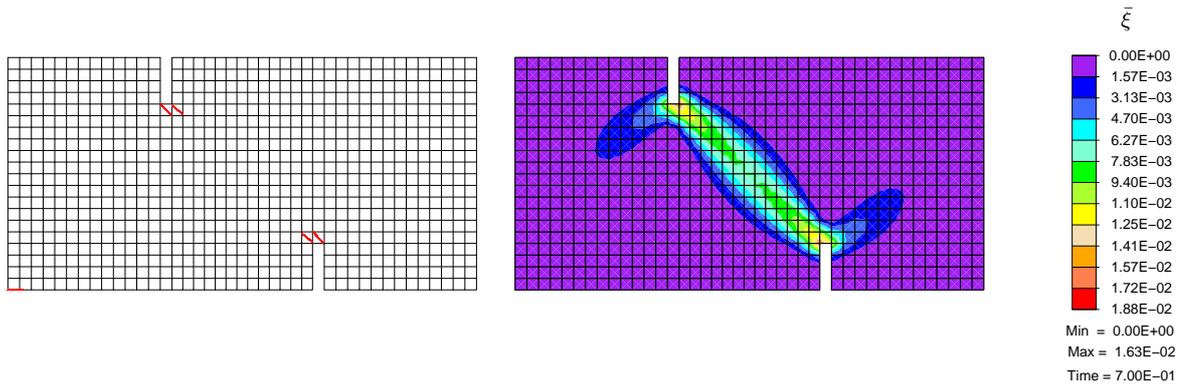
La barre a une longueur de 200 mm, une hauteur de 100 mm et est supposée d'épaisseur unitaire. Les entailles d'une largeur de 5 mm et d'une hauteur de 20 mm sont placées à 65 mm et 130 mm du bord gauche de la barre. L'essai est réalisé à déplacement imposé U croissant.

Les paramètres des modèles continus et discrets sont donnés dans le tableau 4.5.

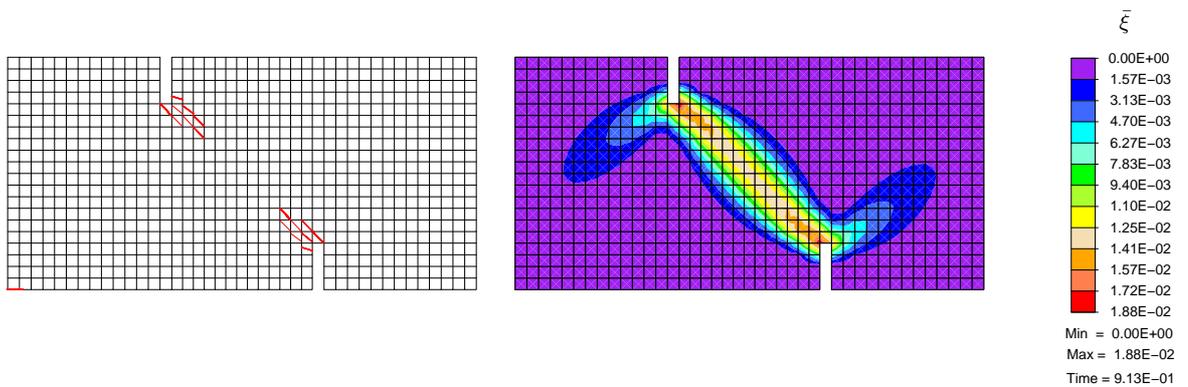
Modèle continu	
Module d'Young	210 GPa
Coefficient de Poisson	0.4999
$\bar{\sigma}_y$	0.55 GPa
$\bar{\sigma}_\infty$	0.75 GPa
$\bar{\beta}$	200
\bar{K}	-1.8 GPa
Paramètre de la loi discrète	
$\bar{\bar{K}}$	-0.001 GPa/mm

Tableau 4.5: *Paramètres des modèles continus et discrets*

Les figures 4.12 et 4.13 présentent les champs de déformation plastique cumulée $\bar{\xi}$ à différents instants de l'essai ainsi que l'évolution des surfaces de discontinuité. On constate aisément que la plasticité diffuse se concentre dans la partie de la poutre située entre les deux entailles. Au fur et à mesure que cette déformation plastique évolue, les surfaces de discontinuité initialement introduites au niveau des entailles se propagent. Il est intéressant de remarquer que la propagation des surfaces de discontinuité est précédée d'une intensification de la plastification dans les éléments en aval sur le trajet de la discontinuité. Cet exemple permet ainsi de mettre en évidence la progression de la « process-zone » au fur et à mesure de la progression des surfaces de discontinuité.

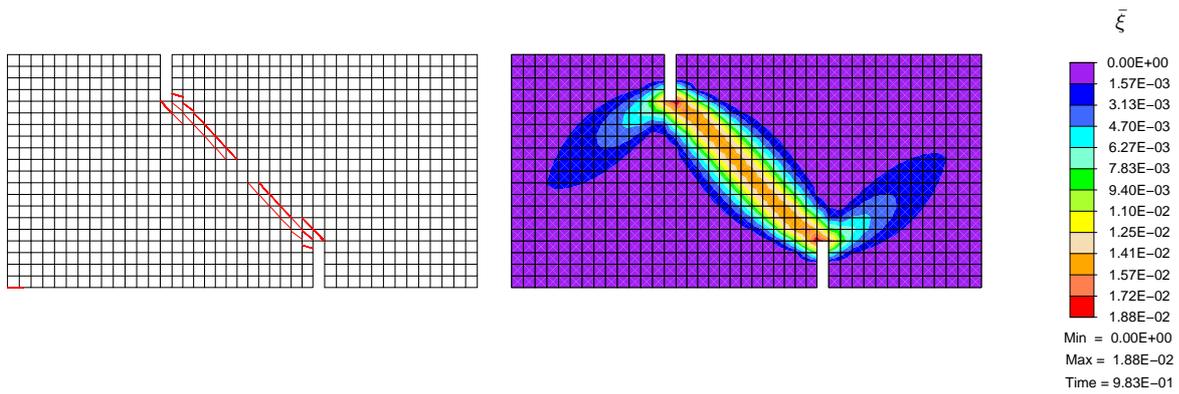


(a) $U = 0.7$ mm

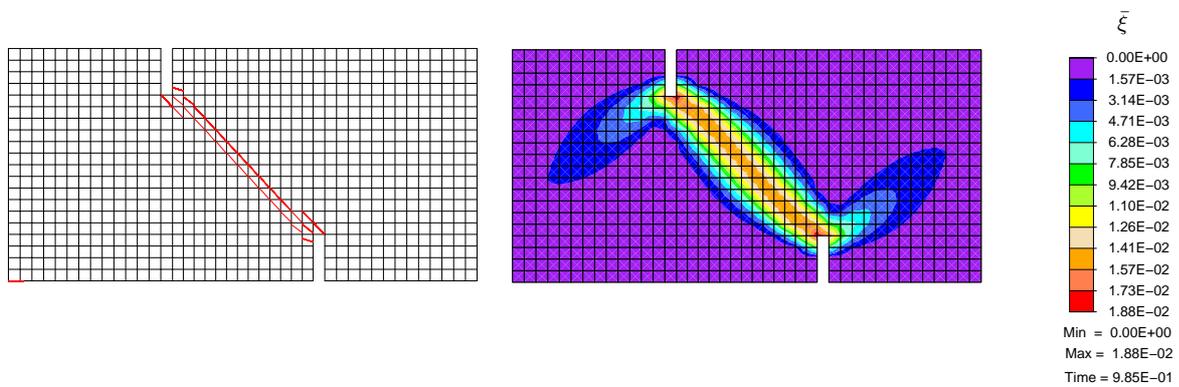


(b) $U = 0.913$ mm

Figure 4.12: *Évolution de la déformation plastique cumulée et développement des discontinuités*



(a) $U = 0.983$ mm



(b) $U = 0.9846$ mm

Figure 4.13: *Évolution de la déformation plastique cumulée et développement des discontinuités*

La figure 4.14 donne, sur la configuration déformée (augmentée 20 fois), le champ de déplacement dans la direction x à la fin de l'essai.

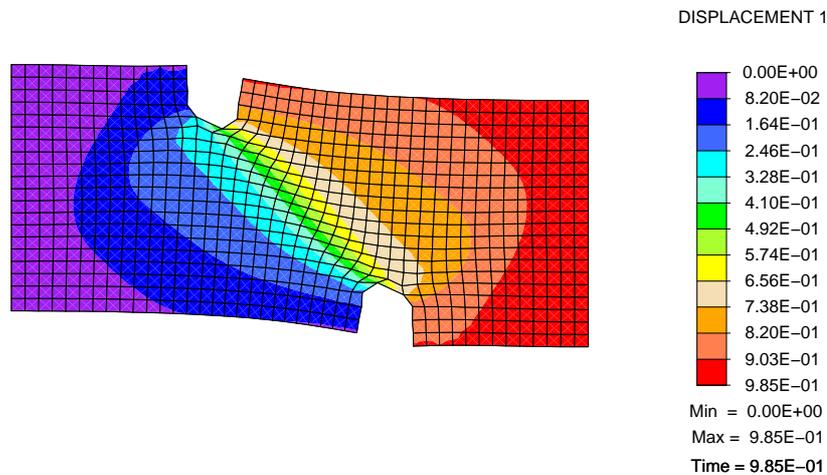


Figure 4.14: *Essai de traction : maillage déformé ($\times 20$) et champ de déplacement dans la direction x*

La déformation se concentre très clairement sur le trajet des surfaces de discontinuité. Le déplacement imposé à l'extrémité libre de la barre est en majeure partie repris par le glissement le long des surfaces de discontinuité introduites dans le milieu.

4.2 Cas de la rupture fragile : modèle d'endommagement

L'objet de cette partie est de « particulariser » les équations développées aux chapitres 2 et 3 au cas de la rupture fragile. Comme pour le cas de la rupture ductile traité précédemment, nous présentons, dans un premier temps, les spécificités des modèles continus et discrets choisis pour décrire, respectivement, les phases de dissipation diffuse et de dissipation localisée. Nous présentons ensuite les choix réalisés quant aux interpolations et aux techniques de résolution utilisées.

4.2.1 Spécificités du modèle

Les principes de construction des modèles permettant de représenter les phénomènes de dissipation volumique et surfacique ont été précisés au chapitre 2. Nous nous proposons ici de les développer dans le cadre de la modélisation de phénomènes de rupture fragile par la prise en compte d'endommagements diffus et localisé.

4.2.1.1 Le modèle continu local

Nous souhaitons prendre en compte dans le matériau hors discontinuité des phénomènes d'endommagement liés à l'apparition progressive de microfissures réparties

de façon quasi-homogène et affectant le comportement du matériau de façon isotrope. Ainsi, le modèle choisi afin de décrire et contrôler la phase de dissipation volumique du matériau est un modèle élasto-endommageable isotrope et associé.

La construction du modèle se fait en reprenant les différents points clés détaillés au chapitre 2. Il est donc, dans un premier temps, nécessaire de préciser les variables internes et associées du modèle. Celles-ci sont indiquées dans le tableau 4.6.

Variables d'état	Variables associées
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	$\boldsymbol{\sigma}$
la variable d'endommagement $\bar{\mathbf{D}}$	$\bar{\mathbf{Y}}$
la variable d'écroissance $\bar{\xi}$	\bar{q}

Tableau 4.6: Variables d'état et variables associées pour le modèle continu d'endommagement

En notant \mathbf{C} le module d'élasticité éventuellement endommagé du matériau, $\bar{\mathbf{D}}$, correspondant à la complaisance du matériau (sain ou endommagé), est défini par :

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{C}^{-1} \quad (4.86)$$

Dans la suite, nous noterons \mathbf{C}^e le module d'élasticité du matériau sain, le module de complaisance initial sera, quant à lui, noté : \mathbf{D}^e .

L'énergie libre de Helmholtz $\bar{\psi}$ associée au modèle sera définie par :

$$\bar{\psi}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{D}}, \bar{\xi}) = \underbrace{\frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \bar{\mathbf{D}}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\hat{\psi}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{D}})} + \bar{\Xi}(\bar{\xi}) \quad (4.87)$$

où $\bar{\Xi}(\bar{\xi})$ correspond à la partie de l'énergie libre associée au phénomène d'écroissance.

Ceci permet d'explicitier la dissipation qui s'écrit, d'après les résultats présentés au chapitre 2 (équations (2.47) et (2.51)) :

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{\mathcal{D}} &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{D}}} \dot{\bar{\mathbf{D}}} - \frac{d}{d\xi} \bar{\Xi}(\bar{\xi}) \dot{\bar{\xi}} \\ &= \left(\boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{D}}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \frac{1}{2} \left(\bar{\mathbf{D}}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\bar{\mathbf{D}}} : \left(\bar{\mathbf{D}}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) - \frac{d}{d\xi} \bar{\Xi}(\bar{\xi}) \end{aligned} \quad (4.88)$$

Cette expression permet, alors, en supposant un pas de chargement élastique, de définir les équations d'état sous la forme :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \bar{\psi}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{D}}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \bar{\mathbf{D}}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \bar{\mathbf{Y}} = -\frac{\partial \bar{\psi}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{D}}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\mathbf{D}}} = \frac{1}{2} \left(\bar{\mathbf{D}}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) \otimes \left(\bar{\mathbf{D}}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} \\ \bar{q} = -\frac{d}{d\xi} \bar{\Xi}(\bar{\xi}) \end{cases} \quad (4.89)$$

La force thermodynamique d'endommagement $\bar{\mathbf{Y}}$ ne dépendant que de l'état de contraintes, nous considérerons comme jeu de variables associées : $(\boldsymbol{\sigma}, \bar{q})$.

En outre, en tenant compte des lois d'état définies précédemment, l'expression de la dissipation peut être réécrite sous la forme :

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\bar{\mathbf{D}}} : \boldsymbol{\sigma} + \bar{q} \dot{\xi} \quad (4.90)$$

Il est alors indispensable de préciser la fonction seuil choisie afin de définir le domaine élastique. Cette dernière a été construite de façon à assurer l'évolution isotrope de l'endommagement. Ainsi, nous verrons par la suite que la variable interne tensorielle $\bar{\mathbf{D}}$ peut, en fait, être remplacée par une variable interne scalaire correspondant à l'état d'endommagement du matériau.

La fonction seuil $\bar{\phi}$ a ainsi été choisie sous la forme :

$$\bar{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{q}) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{\sqrt{E}} (\bar{\sigma}_f - \bar{q}) \leq 0 \quad (4.91)$$

où E est le module d'Young du matériau considéré.

Notons que $\sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\sigma}}$ définit une norme sur l'espace des contraintes. Nous la noterons dans la suite : $\|\cdot\|_{\mathbf{D}^e}$. Il est également important de remarquer que $\hat{\phi} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\sigma}}$ est une fonction homogène de degré 1 des contraintes. Ainsi,

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma} = \hat{\phi}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.92)$$

Ce résultat sera utilisé par la suite afin de simplifier les expressions obtenues.

La dernière étape de la construction du modèle consiste à préciser les lois d'évolution des variables internes. Le principe du maximum de dissipation, permettant de définir les couples de variables duales admissibles, est alors utilisé. Le problème de minimisation ainsi introduit est résolu, comme cela a été présenté au chapitre 2, par l'introduction d'une fonctionnelle de Lagrange \mathcal{L} et un multiplicateur de Lagrange $\dot{\gamma}$. L'écriture des conditions de Kuhn-Tucker du problème de minimisation conduit aux équations d'évolution :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{D}}} : \boldsymbol{\sigma} = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{\xi} = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} \end{cases} \quad (4.93)$$

Avec le choix de la fonction seuil précisé à l'équation (4.91) et en tenant compte de (4.92), l'équation d'évolution des variables internes devient :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{D}}} = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{1}{\hat{\phi}(\boldsymbol{\sigma})} = \dot{\gamma} \frac{\mathbf{D}^e}{\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{D}^e}} \\ \dot{\xi} = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} = \dot{\gamma} \frac{1}{\sqrt{E}} \end{cases} \quad (4.94)$$

L'expression de $\dot{\bar{\mathbf{D}}}$ peut être directement obtenue en considérant l'équation $\dot{\bar{\mathbf{D}}} = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}}$.

Remarquons que, en introduisant un multiplicateur de Lagrange généralisé $\dot{\bar{\mu}}$ défini par $\dot{\bar{\mu}} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{D}^e}}$, l'équation d'évolution de $\bar{\mathbf{D}}$ peut se mettre sous la forme :

$$\dot{\bar{\mathbf{D}}} = \dot{\bar{\mu}} \mathbf{D}^e \quad (4.95)$$

En intégrant cette expression sur l'intervalle de temps $[0, t]$ et en tenant compte du fait que $\bar{\mathbf{D}}(0) = \mathbf{D}^e$ et que $\bar{\mu}(0) = 0$, on obtient :

$$\bar{\mathbf{D}}(t) = [1 + \bar{\mu}(t)] \mathbf{D}^e \quad \text{avec} \quad \bar{\mu} \in [0, +\infty[\quad (4.96)$$

Ceci met en avant le caractère isotrope de la loi d'endommagement introduite dans le matériau hors discontinuité. Il est ainsi aisé de montrer que la fonction seuil choisie permet d'écrire le modèle en utilisant le concept de contraintes effectives [Lemaitre, 1992a]. En effet, en introduisant la variable scalaire d'endommagement d définie par :

$$d = \frac{\bar{\mu}}{1 + \bar{\mu}} \quad ; \quad d \in [0, 1] \quad (4.97)$$

on peut réécrire l'équation d'état associée à la contrainte sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - d) \mathbf{C}^e : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.98)$$

En suivant toujours la démarche proposée au chapitre 2, l'écriture de la condition de cohérence dans le cas d'un chargement « endommageable » permet de déduire l'expression du multiplicateur de Lagrange :

$$\dot{\gamma} = \frac{\frac{1}{1+\bar{\mu}} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}}{\frac{1}{1+\bar{\mu}} + \frac{1}{E} \bar{K}} \quad (4.99)$$

et ainsi de déterminer les équations d'évolution des contraintes :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{1 + \bar{\mu}} \mathbf{C}^e : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} & \dot{\gamma} = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\frac{1}{1 + \bar{\mu}} \mathbf{C}^e - \frac{\frac{\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}}{(1+\bar{\mu})^2 \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{D}^e}^2}}{\frac{1}{1+\bar{\mu}} + \frac{1}{E} \bar{K}} \right] : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} & \dot{\gamma} > 0 \end{cases} \quad (4.100)$$

où $\bar{K} = \frac{\partial^2 \bar{\Xi}(\bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}^2}$.

Nous avons ici choisi comme énergie libre associée à l'écrouissage :

$$\bar{\Xi}(\bar{\xi}) = \frac{1}{2} \bar{K} \bar{\xi}^2 \quad (4.101)$$

où \bar{K} est une constante. Ceci correspond à une loi d'écrouissage linéaire :

$$\bar{q} = -\bar{K} \bar{\xi} \quad (4.102)$$

Le modèle d'endommagement proposé ici est construit de façon tout à fait similaire aux modèles de plasticité. Ceci autorise, comme nous l'avons vu, l'écriture

d'un module tangent élasto-endommageable ce qui permet l'étude de la singularité du tenseur acoustique élasto-endommageable.

Une étude de localisation pour un tel modèle peut être réalisée en suivant la méthodologie proposée par Runesson *et al.* [Runesson et al., 1991]. Il est alors possible de montrer que pour le modèle d'endommagement proposé, la singularité du tenseur acoustique élasto-endommageable ne peut se produire, dans le cas traité ici des déformations planes, que pour des modules d'écroutissement \bar{K} négatifs. Le modèle proposé ici, pour lequel \bar{K} est choisi constant et positif, ne vérifie donc pas la condition de localisation classique.

Notons que les équations (4.87) à (4.90) et (4.93) relatives à la construction du modèle d'endommagement continu sont valables pour un choix différent de la fonction seuil $\bar{\phi}$. Le formalisme présenté ici permet ainsi de construire les modèles continus d'endommagement de façon tout à fait analogue aux modèles de plasticité, ce qui autorise en particulier l'écriture du module tangent nécessaire à une étude de localisation.

4.2.1.2 Condition de « localisation » et modèle constitutif pour la discontinuité

« Condition de localisation »

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, deux voies peuvent être suivies afin de choisir l'instant de l'introduction de la surface de discontinuité. Chacune d'entre elles a été discutée au chapitre 2. Notre choix s'est porté, comme nous l'avons déjà précisé, sur l'approche discrète qui consiste à construire le critère d'introduction de la surface de discontinuité en accord avec les phénomènes dissipatifs qui souhaitent être représentés.

Nous souhaitons, ici, reproduire le comportement de matériaux quasi-fragiles pour lesquels le mode de rupture privilégié est le mode I. Le critère d'introduction de la surface de discontinuité est ainsi basé sur la valeur de la contrainte principale maximale (on peut aussi, afin de déterminer l'instant de l'introduction de la surface de discontinuité, se baser sur un critère en déformations principales). Lorsque celle-ci atteint une valeur limite notée $\bar{\sigma}_f$, la surface de discontinuité est introduite avec pour orientation (donnée par le vecteur normal \mathbf{n}) le vecteur principal associé à la contrainte principale maximale précédente.

La surface de discontinuité Γ_s est ainsi introduite dès que :

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\sigma}_f \quad (4.103)$$

où \mathbf{n} est le vecteur principal associé à la contrainte principale maximale.

L'introduction de la surface de discontinuité est ici décidée, non pas par la singularité du tenseur acoustique élasto-endommageable, mais par une réalité physique correspondant à l'apparition, dans les matériaux quasi-fragiles, de microfissures issues de la coalescence de microfissures.

Dans ce cas, la surface de discontinuité assure la prise en compte des phénomènes dissipatifs qui ne peuvent pas être représentés par le modèle continu d'endommagement qui permet de traiter, de façon homogénéisée, les phénomènes de dissipation ayant lieu dans le volume de la structure [Ibrahimbegović et al., 2003]. La surface de discontinuité est alors associée à un phénomène dissipatif spécifique et localisé.

Modèle constitutif pour la discontinuité

Nous avons construit le modèle associé au matériau hors discontinuité et explicité la « condition de localisation » (ou dans notre cas, la condition d'introduction de la surface de discontinuité). Il reste alors à préciser le modèle discret relatif à la surface de discontinuité.

Tout comme pour le modèle continu, il est nécessaire de préciser :

- les variables primales et duales ;
- l'énergie libre de Helmholtz ;
- et la forme du domaine élastique.

Nous souhaitons ici représenter des phénomènes d'endommagement. La surface de discontinuité est introduite afin de prendre en compte la macrofissuration ayant lieu dans le matériau après coalescence des microfissures produites par la phase d'endommagement volumique. La surface de discontinuité sera, ainsi, considérée comme une interface endommageable avec pour variables internes et associées les variables présentées dans le tableau 4.7.

Variables d'état	Variables associées
$\bar{\mathbf{u}}$	\mathbf{t}_{Γ_s}
la variable d'endommagement $\bar{\mathbf{Q}}$	$\bar{\mathbf{Y}}$
la variable d'érouissage $\bar{\xi}$	\bar{q}

Tableau 4.7: Variables d'état et variables associées pour le modèle localisé d'endommagement

La variable $\bar{\mathbf{Q}}$ est le tenseur de complaisance endommagé de la surface de discontinuité. À l'état « sain » de la surface de discontinuité, c'est-à-dire à l'introduction de cette dernière, le tenseur de complaisance $\bar{\mathbf{Q}}$ est nul : la surface est rigide.

Remarque :

Contrairement à la règle de notation énoncée au début du mémoire, le tenseur $\bar{\mathbf{Q}}$ désigne ici, non pas un tenseur d'ordre 4, mais un tenseur d'ordre 2. Il en est de même pour le tenseur $\bar{\mathbf{Y}}$.

L'énergie libre de Helmholtz associée à la surface de discontinuité est supposée définie, de façon tout à fait similaire à $\bar{\psi}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{D}}, \bar{\xi})$, par :

$$\bar{\psi}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{Q}}, \bar{\xi}) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \bar{\Xi}(\bar{\xi}) \quad (4.104)$$

Avec ce choix, la dissipation sur la surface de discontinuité s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}} &= \left(\mathbf{t}_{\Gamma_s} - \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{u}} \right) \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}} \cdot \overline{\left(\bar{\mathbf{Q}}^{-1} \right)} \cdot \bar{\mathbf{u}} - \frac{d\bar{\Xi}}{d\bar{\xi}} \dot{\bar{\xi}} \\ &= \left(\mathbf{t}_{\Gamma_s} - \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{u}} \right) \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \dot{\bar{\mathbf{Q}}} \cdot \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{u}} - \frac{d\bar{\Xi}}{d\bar{\xi}} \dot{\bar{\xi}} \end{aligned} \quad (4.105)$$

Afin d'écrire les équations d'état pour la discontinuité ainsi que les équations d'évolution des variables internes, deux cas sont à considérer :

- le pas de chargement est élastique : la discontinuité se déforme sans dissipation ni évolution des variables internes.

Dans ce cas, l'expression de la dissipation permet d'écrire les équations d'état sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{t}_{\Gamma_s} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{Y}} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}} = \frac{1}{2} \mathbf{t}_{\Gamma_s} \otimes \mathbf{t}_{\Gamma_s} \\ \bar{q} = -\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \bar{\xi}} \end{array} \right. \quad (4.106)$$

Il est important de remarquer, ici, que vu la forme de la loi d'état liant la traction au saut de déplacement sur la surface de discontinuité et vu que $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$ avant introduction de Γ_s , la surface de discontinuité apparaît comme une interface *rigide*-endommageable. Ceci aura des conséquences sur l'intégration numérique de la loi de comportement associée à la surface de discontinuité.

D'autre part, comme pour le modèle continu précédent, la variable $\bar{\mathbf{Y}}$ ne dépendant que de \mathbf{t}_{Γ_s} , seules sont considérées les variables duales : $(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q})$.

En considérant ces expressions, la dissipation peut se réécrire sous la forme :

$$\bar{D} = \frac{1}{2} \mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \dot{\bar{\mathbf{Q}}} \cdot \mathbf{t}_{\Gamma_s} + \bar{q} \dot{\bar{\xi}} \quad (4.107)$$

- le pas de chargement est anélastique : la surface se charge en s'endommageant. Dans ce cas, il est nécessaire de préciser la forme choisie pour le domaine élastique.

Vu le choix du critère d'introduction de la surface de discontinuité, il est naturel de construire une première fonction seuil permettant de gérer le comportement en mode I de cette dernière. Ainsi, le domaine d'élasticité est défini par une première surface seuil notée $\bar{\phi}_1$ définie par :

$$\bar{\phi}_1(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = \underbrace{\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}}_{\hat{\phi}_1(\mathbf{t}_{\Gamma_s})} - (\bar{\sigma}_f - \bar{q}) \leq 0 \quad (4.108)$$

Notons que cette surface devient active dès lors que la surface de discontinuité est introduite. En effet, à $t = t_{loc}$ instant de l'introduction de la surface de discontinuité, on a : $\bar{q} = 0$ et $\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\sigma}_f$ ce qui conduit à $\bar{\phi}_1 = 0$. Notons également que cette fonction permet d'introduire une unilatéralité du comportement de la discontinuité qui ne peut s'endommager que si la composante normale de la traction est positive. Aucune évolution de l'endommagement sur la discontinuité n'est possible si la composante normale de la traction est négative.

Afin d'introduire les effets du cisaillement sur la surface de discontinuité, une deuxième surface seuil, $\bar{\phi}_2$, est considérée. Celle-ci permet de gérer la composante tangentielle de la traction en fonction de la valeur du glissement sur la discontinuité ; elle s'écrit :

$$\bar{\phi}_2(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = \underbrace{|\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}|}_{\hat{\phi}_2(\mathbf{t}_{\Gamma_s})} - (\bar{\sigma}_s - \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \bar{q}) \leq 0 \quad (4.109)$$

où $\bar{\sigma}_s$ correspond à la valeur limite du cisaillement sur la surface de discontinuité et \mathbf{m} correspond au vecteur tangent à la surface de discontinuité (nous avons choisi \mathbf{m} tel que (\mathbf{n}, \mathbf{m}) soit un repère orthonormé direct). Il est à noter que cette surface ne peut en aucun cas être active à l'introduction de la surface de discontinuité, ceci s'explique par le choix du critère d'introduction de la surface de discontinuité : le vecteur \mathbf{n} est, à l'instant $t = t_{loc}$ un vecteur principal du champ de contrainte, on a donc : $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = \mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m} = 0$.

Notons également que la variable \bar{q} est commune aux deux surfaces seuils, elle permettra ainsi de coupler l'endommagement associé à la surface seuil en traction $\bar{\phi}_1$ à celui associé à la surface seuil en cisaillement $\bar{\phi}_2$. Nous présenterons dans la partie 4.2.3, quelques exemples de chargements sur un cas test extrêmement simple permettant de mettre en avant le « couplage » induit par la variable \bar{q} .

Le modèle choisi pour la discontinuité est donc développé dans le cadre des modèles multisurfaces. Ainsi, l'écriture des équations d'évolution des variables internes nécessite d'adapter la méthodologie proposée au chapitre 2 afin de construire le comportement de la surface de discontinuité. Pour cela, les développements proposés par Govindjee *et al.* [Govinjee et al., 1995] pour un modèle continu d'endommagement multisurface ont été adaptés au traitement d'une loi d'interface gérée par un critère multisurface.

Comme dans le cas d'un critère « monosurface », les équations d'évolution des variables internes sont obtenues en supposant un pas de chargement anélastique. Le principe du maximum de dissipation [Lublinter, 1990], [Maugin, 1992] permet de définir les jeux de variables duales admissibles comme ceux qui maximisent la dissipation sous les contraintes :

$$\begin{cases} \bar{\phi}_1(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) \leq 0 \\ \bar{\phi}_2(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) \leq 0 \end{cases} \quad (4.110)$$

On a ainsi :

$$(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = \arg \left\{ \begin{array}{l} \min \\ \bar{\phi}_1(\mathbf{t}_{\Gamma_s}^*, \bar{q}^*) \leq 0 \\ \bar{\phi}_2(\mathbf{t}_{\Gamma_s}^*, \bar{q}^*) \leq 0 \end{array} \left[-\bar{\mathcal{D}}(\mathbf{t}_{\Gamma_s}^*, \bar{q}^*) \right] \right\} \quad (4.111)$$

Ce problème de minimisation sous contraintes est résolu par l'introduction d'une fonctionnelle de Lagrange que nous noterons $\bar{\mathcal{L}}$ et de deux multiplicateurs de Lagrange $\dot{\bar{\gamma}}_1$ et $\dot{\bar{\gamma}}_2$ associés, respectivement, à $\bar{\phi}_1$ et $\bar{\phi}_2$. Ainsi, le problème à résoudre s'écrit :

$$(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = \arg \left\{ \max_{\substack{\dot{\bar{\gamma}}_1 \geq 0 \\ \dot{\bar{\gamma}}_2 \geq 0}} \min_{(\mathbf{t}_{\Gamma_s}^*, \bar{q}^*)} \bar{\mathcal{L}}(\mathbf{t}_{\Gamma_s}^*, \bar{q}^*) \right\} \quad (4.112)$$

avec

$$\bar{\mathcal{L}}(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = -\bar{\mathcal{D}}(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) + \sum_k \dot{\bar{\gamma}}_k \bar{\phi}_k(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) \quad (4.113)$$

où $k = 1, 2$ dans notre cas.

Les conditions de stationnarité de la fonctionnelle de Lagrange permettent alors d'écrire les équations d'évolution des variables internes sous la forme :

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} = -\dot{\bar{\mathbf{Q}}} \cdot \mathbf{t}_{\Gamma_s} + \sum_k \dot{\bar{\gamma}}_k \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\bar{\mathbf{Q}}} \cdot \mathbf{t}_{\Gamma_s} = \sum_k \dot{\bar{\gamma}}_k \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \quad (4.114)$$

ce qui s'écrit encore, en tenant compte des propriétés des fonctions $\hat{\bar{\phi}}_1$ et $\hat{\bar{\phi}}_2$:

$$\dot{\bar{\mathbf{Q}}} = \sum_k \dot{\bar{\gamma}}_k \frac{1}{\hat{\bar{\phi}}_k} \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \otimes \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \quad (4.115)$$

et

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \bar{q}} = -\dot{\bar{\xi}} + \sum_k \dot{\bar{\gamma}}_k \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \bar{q}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\bar{\xi}} = \sum_k \dot{\bar{\gamma}}_k \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \bar{q}} \quad (4.116)$$

Avec le choix des fonctions seuils précisé précédemment (équations (4.108) et (4.109)) ces expressions se mettent sous la forme :

$$\dot{\bar{\mathbf{Q}}} = \dot{\bar{\gamma}}_1 \frac{1}{\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \dot{\bar{\gamma}}_2 \frac{1}{|\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}|} \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \quad (4.117)$$

et

$$\dot{\bar{\xi}} = \dot{\bar{\gamma}}_1 + \dot{\bar{\gamma}}_2 \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \quad (4.118)$$

Enfin, les conditions de Kuhn-Tucker du problème de minimisation précédent permettent d'écrire les conditions de charge/décharge sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\gamma}}_1 &\geq 0 \quad , \quad \bar{\phi}_1(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) \leq 0 \quad , \quad \dot{\bar{\gamma}}_1 \bar{\phi}_1(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = 0 \\ \dot{\bar{\gamma}}_2 &\geq 0 \quad , \quad \bar{\phi}_2(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) \leq 0 \quad , \quad \dot{\bar{\gamma}}_2 \bar{\phi}_2(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = 0 \end{aligned} \quad (4.119)$$

Les conditions de cohérence permettant de déterminer la valeur des multiplicateurs de Lagrange $\dot{\bar{\gamma}}_1$ et $\dot{\bar{\gamma}}_2$ sont, par ailleurs, données par :

$$\dot{\bar{\gamma}}_1 \bar{\phi}_1(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = 0 \quad \dot{\bar{\gamma}}_2 \bar{\phi}_2(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = 0 \quad (4.120)$$

Ainsi, dans le cas le plus général où l'endommagement évolue sur la discontinuité, les deux surfaces seuils étant actives en même temps, la valeur des multiplicateurs de Lagrange s'obtient en utilisant les conditions de cohérence écrites pour un pas de chargement anélastique ($\dot{\bar{\gamma}}_1 \neq 0$ et $\dot{\bar{\gamma}}_2 \neq 0$) :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\phi}}_1(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = 0 = \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \cdot \dot{\mathbf{t}}_{\Gamma_s} + \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{q}} \dot{\bar{q}} = 0 \\ \dot{\bar{\phi}}_2(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = 0 = \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \cdot \dot{\mathbf{t}}_{\Gamma_s} + \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \bar{q}} \dot{\bar{q}} = 0 \end{cases} \quad (4.121)$$

L'exploitation des dérivées temporelles des équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}_{\Gamma_s} = \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} - \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \dot{\bar{\mathbf{Q}}} \cdot \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{u}} \\ \dot{\bar{q}} = -\bar{K}(\bar{\xi}) \dot{\bar{\xi}} \quad ; \quad \bar{K} = \frac{d^2 \bar{\Xi}(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}^2} \end{cases} \quad (4.122)$$

permet de réécrire les conditions de cohérence en fonction des multiplicateurs de Lagrange sous la forme :

$$\dot{\bar{\phi}}_j = \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \cdot \left[\bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} - \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \sum_k \dot{\bar{\gamma}}_k \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \right] - \bar{K}(\bar{\xi}) \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial \bar{q}} \left[\sum_k \dot{\bar{\gamma}}_k \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \bar{q}} \right] \quad (4.123)$$

Nous noterons $J_{act} = \{i \mid \bar{\phi}_i = 0\}$. Ainsi, dans l'équation précédente, $j \in J_{act}$ et $k \in J_{act}$.

Cette équation peut être réécrite sous forme matricielle :

$$\mathbf{G} \cdot \left[\dot{\bar{\gamma}}_k \right]_{k \in J_{act}} = \left[\frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \cdot \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{u}} \right]_{k \in J_{act}} \quad (4.124)$$

où $\left[\dot{\bar{\gamma}}_k \right]_{k \in J_{act}}$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés aux fonctions seuils actives et \mathbf{G} est une matrice dont les composantes \mathbf{G}_{ij} , $(i, j) \in J_{act} \times J_{act}$, sont définies par :

$$\mathbf{G}_{ij} = \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \cdot \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} + \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \bar{q}} \bar{K} \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial \bar{q}} \quad (4.125)$$

La résolution de l'équation (4.124) permet d'écrire les multiplicateurs de Lagrange sous la forme :

$$\dot{\bar{\gamma}}_i = \sum_{j \in J_{act}} [\mathbf{G}^{-1}]_{ij} \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} \quad (4.126)$$

ce qui, introduit dans les équations (4.122), permet d'exprimer les équations d'évolution des tractions sous la forme :

$$\dot{\mathbf{t}}_{\Gamma_s} = \begin{cases} \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} & \forall \dot{\bar{\gamma}}_k = 0 \quad k = 1, 2 \\ \left[\bar{\mathbf{Q}}^{-1} - \sum_{\substack{i \in J_{act} \\ j \in J_{act}}} [\mathbf{G}^{-1}]_{ij} \left\{ \left[\bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \right] \otimes \left[\bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \right] \right\} \right] \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} & \exists k \mid \dot{\bar{\gamma}}_k > 0 \end{cases} \quad (4.127)$$

Une expression explicite des 4 possibilités (en fonction du nombre de surfaces seuils actives) subsistant dans notre cas pour calculer le taux de traction s'écrit :

$$\dot{\mathbf{t}}_{\Gamma_s} = \begin{cases} \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} & \dot{\bar{\gamma}}_1 = 0, \dot{\bar{\gamma}}_2 = 0 \\ \left[\bar{\mathbf{Q}}^{-1} - \left(\bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \mathbf{n} \right) \otimes \left(\bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \mathbf{n} \right) \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \mathbf{n} + \bar{K}} \right] \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} & \dot{\bar{\gamma}}_1 > 0, \dot{\bar{\gamma}}_2 = 0 \\ \left[\bar{\mathbf{Q}}^{-1} - \left(\bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \mathbf{m} \right) \otimes \left(\bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \mathbf{m} \right) \frac{1}{\mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \mathbf{m} + \bar{K} \left(\frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \right)^2} \right] \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} & \dot{\bar{\gamma}}_1 = 0, \dot{\bar{\gamma}}_2 > 0 \\ \left[\bar{\mathbf{Q}}^{-1} - \sum_{\substack{i=\{1,2\} \\ j=\{1,2\}}} [\mathbf{G}^{-1}]_{ij} \left\{ \left[\bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \right] \otimes \left[\bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \right] \right\} \right] \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} & \dot{\bar{\gamma}}_1 > 0, \dot{\bar{\gamma}}_2 > 0 \end{cases} \quad (4.128)$$

Dans notre cas, la matrice \mathbf{G} s'écrit :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \mathbf{n} + \bar{K}(\bar{\xi}) & \bar{K}(\bar{\xi}) \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \\ \bar{K}(\bar{\xi}) \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} & \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \mathbf{m} + \bar{K}(\bar{\xi}) \left(\frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (4.129)$$

De plus, vu la forme de l'équation d'évolution de la complaisance $\bar{\mathbf{Q}}$ (équation (4.117)) et vu que, initialement $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$, la complaisance peut s'écrire dans le repère de la surface de discontinuité (\mathbf{n}, \mathbf{m}) sous la forme :

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{nn} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{mm} \end{bmatrix}_{(\mathbf{n}, \mathbf{m})} \quad (4.130)$$

ce qui permet de simplifier encore les équations présentées précédemment.

L'intégration du modèle permet de montrer que la matrice \mathbf{G} est toujours inversible quelle que soit l'histoire de chargement.

Il reste, ici, à préciser le choix de la loi d'adoucissement permettant de relier la variable duale associée à l'écroissance \bar{q} et la variable d'écroissance $\bar{\xi}$. Nous avons choisi une fonction exponentielle dont l'expression permet également de définir le module d'adoucissement \bar{K} :

$$\bar{q} = \bar{\sigma}_f \left[1 - \exp \left(-\frac{\bar{\beta}}{\bar{\sigma}_f} \bar{\xi} \right) \right] \Rightarrow \bar{K}(\bar{\xi}) = -\frac{d\bar{q}}{d\bar{\xi}} = -\bar{\beta} \exp \left(-\frac{\bar{\beta}}{\bar{\sigma}_f} \bar{\xi} \right) \quad (4.131)$$

Le paramètre $\bar{\beta}$ permet de contrôler les phénomènes de dissipation ayant lieu sur la surface de discontinuité. Nous montrerons au 4.2.1.3 que ce paramètre peut être relié à l'énergie de fissuration.

En outre, moyennant quelques développements (intégration du modèle) que nous ne présenterons pas ici, il est possible de montrer que le choix d'une telle loi d'adoucissement conduit à une relation bilinéaire entre la traction et le saut de déplacement sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n} = \bar{\sigma}_f - \bar{\beta} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} - \bar{\beta} \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} |\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{m}| \\ |\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}| = \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \left(\bar{\sigma}_f - \bar{\beta} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} - \bar{\beta} \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} |\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{m}| \right) \end{cases} \quad (4.132)$$

Ces expressions ne sont valables que si la surface seuil associée à la composante de la traction considérée est active. Par ailleurs, ceci permet de montrer qu'il existe une valeur limite du saut de déplacement à partir de laquelle la surface de discontinuité est libre de traction et peut alors être considérée comme une fissure non cohésive. Cette valeur limite est définie par :

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} + \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} |\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{m}| = \frac{\bar{\sigma}_f}{\bar{\beta}} \quad (4.133)$$

4.2.1.3 Analyse de la dissipation

Soit un domaine Ω traversé par une surface de discontinuité Γ_s de longueur ℓ_{Γ_s} . Nous avons vu au chapitre 2 que la dissipation se décompose en une partie régulière et une partie singulière sous la forme :

$$\mathcal{D} = \bar{\mathcal{D}} + \bar{\bar{\mathcal{D}}}\delta_{\Gamma_s} \quad (4.134)$$

où $\bar{\mathcal{D}}$ est la dissipation associée au matériau hors discontinuité et $\bar{\bar{\mathcal{D}}}$ correspond à la dissipation localisée sur la surface de discontinuité.

Ainsi, sur le volume Ω on a, en considérant les expressions de la dissipation volumique (équation (4.90)) et de la dissipation surfacique (équation (4.107)) :

$$\mathcal{D}_\Omega = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\bar{\mathbf{D}}} : \boldsymbol{\sigma} + \bar{q} \dot{\bar{\xi}} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_s} \left(\frac{1}{2} \mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \dot{\bar{\mathbf{Q}}} \cdot \mathbf{t}_{\Gamma_s} + \bar{q} \dot{\bar{\xi}} \right) d\Gamma_s \quad (4.135)$$

La dissipation sur la surface de discontinuité n'est activée qu'à partir de l'instant t_{loc} correspondant à l'introduction de la surface Γ_s . Ainsi, l'énergie dissipée dans le domaine Ω sur un intervalle de temps $[0, t]$ s'écrit :

$$\mathcal{D}_\Omega^{[0,t]} = \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\bar{\mathbf{D}}} : \boldsymbol{\sigma} + \bar{q} \dot{\bar{\xi}} \right) d\Omega dt + \int_{t_{loc}}^t \int_{\Gamma_s} \left(\frac{1}{2} \mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \dot{\bar{\mathbf{Q}}} \cdot \mathbf{t}_{\Gamma_s} + \bar{q} \dot{\bar{\xi}} \right) d\Gamma_s dt \quad (4.136)$$

Rappelons, par ailleurs, qu'il a été montré que :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{D}}} : \boldsymbol{\sigma} = \dot{\bar{\gamma}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\bar{\gamma}} \frac{\mathbf{D}^e : \boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{D}^e}} \\ \dot{\bar{\mathbf{Q}}} \cdot \mathbf{t}_{\Gamma_s} = \sum_k \dot{\bar{\gamma}}_k \frac{\partial \phi_k}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \end{cases} \quad (4.137)$$

La dissipation sur le domaine Ω durant l'intervalle de temps $[0, t]$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\Omega^{[0,t]} &= \int_0^t \int_\Omega \frac{1}{2} \dot{\bar{\gamma}} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{D}^e} + \frac{1}{\sqrt{E}} \dot{\bar{\gamma}} \bar{q} d\Omega dt \\ &+ \int_{t_{loc}}^t \int_{\Gamma_s} \left[\frac{1}{2} \left(\dot{\bar{\gamma}}_1 \mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n} + \dot{\bar{\gamma}}_2 |\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}| \right) + \left(\dot{\bar{\gamma}}_1 + \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \dot{\bar{\gamma}}_2 \right) \bar{q} \right] d\Gamma_s dt \end{aligned} \quad (4.138)$$

Cette expression permet d'évaluer la dissipation dans le domaine Ω au cours d'un intervalle de temps donné. Néanmoins, nous allons ici traiter plus particulièrement la dissipation localisée sur la surface de discontinuité. Nous introduisons, pour cela, l'énergie de fissuration G_f . Cette dernière est définie par :

$$G_f = \int_{\Gamma_s} \int_{t_{loc}}^{t_2} \mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} dt d\Gamma_s \quad (4.139)$$

où t_{loc} correspond à l'instant d'introduction de la surface de discontinuité, t_2 correspond à l'instant où cette dernière devient libre de traction.

Nous allons, par ailleurs, supposer que la surface de discontinuité est sollicitée de telle façon que seul le mode I d'ouverture soit actif (la surface $\bar{\bar{\phi}}_1$). Ainsi, l'énergie de fissuration s'écrit :

$$G_f = \int_{\Gamma_s} \int_{t_{loc}}^{t_2} (\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}) (\dot{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{n}) dt d\Gamma_s \quad (4.140)$$

ce qui s'exprime également en fonction de la dissipation localisée sous la forme :

$$G_f = \int_{\Gamma_s} \int_{t_{loc}}^{t_2} (\bar{\bar{D}} + \dot{\bar{\psi}}) dt d\Gamma_s \quad (4.141)$$

Nous avons vu précédemment (équation (4.132)) que l'intégration de la loi de comportement associée à la surface de discontinuité permet, en supposant que la surface de discontinuité s'endommage en mode I, d'écrire la traction dans la direction \mathbf{n} sous la forme :

$$\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n} = \bar{\sigma}_f - \bar{\beta} \bar{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{n} \quad (4.142)$$

Ainsi, l'énergie de fissuration s'écrit, en tenant compte du fait que le saut de déplacement et la traction sont supposés constants le long de la surface de discontinuité, sous la forme :

$$G_f = \int_{\Gamma_s} \int_{t_{loc}}^{t_2} (\bar{\sigma}_f - \bar{\beta} \bar{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{n}) (\dot{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{n}) dt d\Gamma_s \quad (4.143)$$

Par ailleurs, à l'instant $t = t_{loc}$ correspondant à l'introduction de la surface de discontinuité, on a $\bar{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{n} = 0$; à $t = t_2$ correspondant à l'instant où la surface est libre de traction on a $\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n} = 0$ et $\bar{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{n} = \frac{\bar{\sigma}_f}{\bar{\beta}}$.

L'énergie de fissuration s'écrit alors :

$$\begin{aligned} G_f &= \int_{\Gamma_s} \int_{t_{loc}}^{t_2} (\bar{\sigma}_f - \bar{\beta} \bar{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{n}) (\dot{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{n}) dt d\Gamma_s = \ell_{\Gamma_s} \left[\bar{\sigma}_f \bar{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2} \bar{\beta} (\bar{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{n})^2 \right]_{t_{loc}}^{t_2} \\ &= \ell_{\Gamma_s} \frac{1}{2} \frac{\bar{\sigma}_f^2}{\bar{\beta}} \end{aligned} \quad (4.144)$$

En notant g_f l'énergie de fissuration par unité de longueur, on a donc :

$$\bar{\beta} = \frac{\bar{\sigma}_f^2}{2g_f} \quad (4.145)$$

Ainsi, les paramètres de la loi de comportement associée à la surface de discontinuité peuvent être reliés à des quantités issues de la mécanique de la rupture telles que, ici, l'énergie de fissuration.

4.2.2 Les aspects numériques

Nous présentons, ici, les points clés de l'implantation numérique du modèle présenté précédemment. Après avoir montré comment sont intégrées, par une méthode de « return-mapping », les lois de comportement développées ci-avant, nous nous attarderons sur la prise en compte de la surface de discontinuité et plus particulièrement sur le choix des interpolations et des méthodes de résolution.

4.2.2.1 Intégration des lois de comportement

La résolution du problème nécessite l'intégration numérique des lois de comportement présentées précédemment. Nous montrons ici comment ces dernières sont menées. Ceci nous permettra également de montrer comment sont calculés les modules tangents cohérents pour les lois de comportement considérées.

Intégration numérique du modèle continu

Nous avons vu précédemment que la construction du modèle continu d'endommagement se fait de façon tout à fait similaire à celle des modèles de plasticité classique. L'intégration numérique du modèle s'appuie très largement sur ce constat et utilise ainsi une procédure de « return-mapping » afin de déterminer l'état de contrainte et l'évolution des variables internes.

Nous considérons, ici, l'itération globale i du pas de temps $n + 1$, le champ de déplacement nodal \mathbf{d}_{n+1}^i est donné par la résolution globale de l'équation d'équilibre, le saut de déplacement $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i,j)}$ est, quant à lui, fourni par la résolution de l'équation de continuité des tractions. De plus, à chaque pas de temps sont stockées, pour chaque point de Gauss de l'élément, les variables internes : $\bar{\mu}$ et $\bar{\xi}$ du modèle.

Ainsi, sont connues, à l'entrée dans la routine de résolution de la loi de comportement :

- la déformation : $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{(i,j)}$ dépendant de \mathbf{d}_{n+1}^i et $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i,j)}$;
- les variables internes $\bar{\mu}_n$ et $\bar{\xi}_n$ correspondant à l'état convergé du pas de temps précédent n (les variables $\bar{\mathbf{D}}_n$ et \bar{q}_n sont donc également connues).

Remarque :

Afin d'alléger les notations, nous ne rappellerons pas les exposants i et j indiquant que les variables sont calculées à l'itération i globale et l'itération j locale. Seul sera conservé l'indice $n + 1$ permettant d'indiquer que la résolution est faite au pas de temps $n + 1$

L'état d'essai est calculé en supposant aucune évolution des variables internes. Ainsi, les contraintes d'essai sont calculées par :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \bar{\mathbf{D}}_n^{-1} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} \quad (4.146)$$

et la valeur d'essai de la fonction seuil s'écrit :

$$\bar{\phi}_{n+1}^{trial} = \|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}\|_{\mathbf{D}^e} - \frac{1}{\sqrt{E}}(\sigma_f - q_n) \quad (4.147)$$

Deux cas sont alors à traiter :

- $\bar{\phi}_{n+1}^{trial} \leq 0$.

Dans ce cas, l'état d'essai est admissible, le pas est élastique sans évolution des variables internes. On a alors :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} \\ \bar{\xi}_{n+1} = \bar{\xi}_n \\ \bar{\mu}_{n+1} = \bar{\mu}_n \end{cases} \quad (4.148)$$

– $\bar{\phi}_{n+1}^{trial} > 0$.

Dans ce cas, l'état d'essai n'est pas admissible, le pas est anélastique avec évolution des variables internes. Il reste alors à évaluer cette évolution, telle que $\bar{\phi}_{n+1}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{q}_{n+1}) = 0$.

L'intégration temporelle des équations d'évolution (4.94) permet d'écrire les variables internes au pas de temps $n + 1$ sous la forme :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{D}}_{n+1} = \bar{\mathbf{D}}_n + \Delta\bar{\mathbf{D}}_{n+1} \\ \bar{\xi}_{n+1} = \bar{\xi}_n + \Delta\bar{\xi}_{n+1} \end{cases} \quad (4.149)$$

où

$$\begin{cases} \Delta\bar{\mathbf{D}}_{n+1} = \bar{\gamma}_{n+1} \frac{\mathbf{D}^e}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\|_{\mathbf{D}^e}} = \Delta\bar{\mu}_{n+1} \mathbf{D}^e \\ \Delta\bar{\xi}_{n+1} = \bar{\gamma}_{n+1} \frac{1}{\sqrt{E}} \end{cases} \quad (4.150)$$

Les équations d'état (équation (4.89)) permettent, quant à elles, d'écrire :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} = \begin{cases} \bar{\mathbf{D}}_n : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} \\ \bar{\mathbf{D}}_{n+1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (\bar{\mathbf{D}}_n + \Delta\bar{\mathbf{D}}_{n+1}) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \end{cases} \quad (4.151)$$

dont on peut tirer l'expression de la contrainte d'essai en fonction de l'état de contrainte réel (ou inversement) :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \underbrace{\frac{\mathbf{C}^e}{(1 + \bar{\mu}_n)}}_{\bar{\mathbf{D}}_n^{-1}} : \underbrace{\Delta\bar{\mu}_{n+1} \mathbf{D}^e}_{\Delta\bar{\mathbf{D}}_{n+1}} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (4.152)$$

Dans la suite, nous noterons $\mathbf{N}_{n+1} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\|_{\mathbf{D}^e}}$. Ainsi, l'équation (4.152) se réécrit :

$$\mathbf{N}_{n+1}^{trial} \|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}\|_{\mathbf{D}^e} = \mathbf{N}_{n+1} \|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\|_{\mathbf{D}^e} + \bar{\gamma}_{n+1} \bar{\mathbf{D}}_{n+1}^{-1} : \frac{\mathbf{D}^e : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\|_{\mathbf{D}^e}} \quad (4.153)$$

En remarquant que :

$$\bar{\mathbf{D}}_{n+1}^{-1} : \frac{\mathbf{D}^e : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\|_{\mathbf{D}^e}} = \bar{\mathbf{D}}_{n+1}^{-1} : \mathbf{D}^e : \mathbf{N}_{n+1} = \frac{1}{1 + \bar{\mu}_n} \quad (4.154)$$

on obtient :

$$\mathbf{N}_{n+1}^{trial} \|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}\|_{\mathbf{D}^e} = \mathbf{N}_{n+1} \underbrace{\left[\frac{\bar{\gamma}_{n+1}}{1 + \bar{\mu}_n} + \|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\|_{\mathbf{D}^e} \right]}_{>0} \quad (4.155)$$

Ceci permet finalement de conclure que :

$$\begin{cases} \mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{N}_{n+1}^{trial} \quad (\|\mathbf{N}_{n+1}\|_{\mathbf{D}^e} = \|\mathbf{N}_{n+1}^{trial}\|_{\mathbf{D}^e} = 1) \\ \|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}\|_{\mathbf{D}^e} = \frac{\bar{\gamma}_{n+1}}{1 + \bar{\mu}_n} + \|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\|_{\mathbf{D}^e} \end{cases} \quad (4.156)$$

Il est alors possible de réécrire la fonction seuil $\bar{\phi}_{n+1}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{q}_{n+1})$ sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}_{n+1}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{q}_{n+1}) &= 0 \quad \|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\|_{\mathbf{D}^e} - \frac{1}{\sqrt{E}}(\bar{\sigma}_f - \bar{q}_{n+1}) \\
 &= \|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}\|_{\mathbf{D}^e} - \frac{\bar{\gamma}_{n+1}}{1 + \bar{\mu}_n} - \frac{1}{\sqrt{E}}(\bar{\sigma}_f - \bar{q}_n) + \frac{1}{\sqrt{E}}(\bar{q}_{n+1} - \bar{q}_n) \\
 &= \bar{\phi}_{n+1}^{trial} - \frac{\bar{\gamma}_{n+1}}{1 + \bar{\mu}_n} + \frac{1}{\sqrt{E}} - \underbrace{\bar{K} [(\bar{\xi}_{n+1} - \bar{\xi}_n)]}_{\frac{1}{\sqrt{E}}\bar{\gamma}_{n+1}}
 \end{aligned} \tag{4.157}$$

Ainsi, le multiplicateur de Lagrange s'écrit :

$$\bar{\gamma}_{n+1} = \frac{\bar{\phi}_{n+1}^{trial}}{\frac{1}{1 + \bar{\mu}_n} + \bar{K} \frac{1}{E}} \tag{4.158}$$

ce qui permet de déterminer la valeur des variables internes et des contraintes sous la forme :

$$\begin{cases}
 \bar{\mu}_{n+1} = \bar{\mu}_n + \frac{\bar{\gamma}_{n+1}}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\|_{\mathbf{D}^e}} = \bar{\mu}_n + \frac{\bar{\gamma}_{n+1}}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}\|_{\mathbf{D}^e} - \frac{\bar{\gamma}_{n+1}}{1 + \bar{\mu}_n}} \\
 \bar{\xi}_{n+1} = \bar{\xi}_n + \frac{1}{\sqrt{E}}\bar{\gamma}_{n+1} \\
 \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \frac{\bar{\gamma}_{n+1}}{1 + \bar{\mu}_n} \mathbf{N}_{n+1}^{trial}
 \end{cases} \tag{4.159}$$

Il reste alors à calculer le module tangent cohérent correspondant au module tangent numérique du modèle.

Ce dernier est défini par :

$$\mathbf{C}_{n+1}^{ed} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} \tag{4.160}$$

En tenant compte des développements précédents, il est possible d'écrire :

$$\mathbf{C}_{n+1} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} - \bar{\gamma}_{n+1} \frac{1}{1 + \bar{\mu}_n} \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}^{trial}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} - \frac{1}{1 + \bar{\mu}_n} \frac{\partial \bar{\gamma}_{n+1}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} \otimes \mathbf{N}_{n+1}^{trial} \tag{4.161}$$

Il est alors nécessaire de calculer les différentes dérivées par rapport à la déformation $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}$. On a ainsi, vu l'expression de la contrainte d'essai (équation (4.146)) :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} = \mathbf{D}_n^{-1} = \frac{\mathbf{C}^e}{1 + \bar{\mu}_n} \tag{4.162}$$

En remarquant que :

$$\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}^{trial}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} = \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}^{trial}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} = \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}^{trial}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}} : \bar{\mathbf{D}}_n^{-1} \tag{4.163}$$

et que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}^{trial}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}\|_{\mathbf{D}^e}} \right) \\
 &= \frac{\mathbf{I}}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}\|_{\mathbf{D}^e}} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} \otimes (\mathbf{D}^e : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial})}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}\|_{\mathbf{D}^e}^3} \\
 &= \frac{\mathbf{I}}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}\|_{\mathbf{D}^e}} - \frac{\mathbf{D}^e}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}\|_{\mathbf{D}^e}} : (\mathbf{N}_{n+1}^{trial} \otimes \mathbf{N}_{n+1}^{trial})
 \end{aligned} \tag{4.164}$$

on peut, de plus, écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}^{trial}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} &= \frac{\mathbf{C}^e}{1 + \bar{\mu}_n} : \left[\frac{1}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}\|_{\mathbf{D}^e}} \{ \mathbf{I} - \mathbf{D}^e : (\mathbf{N}_{n+1}^{trial} \otimes \mathbf{N}_{n+1}^{trial}) \} \right] \\ &= \frac{1}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}\|_{\mathbf{D}^e} (1 + \bar{\mu}_n)} [\mathbf{C}^e - \mathbf{N}_{n+1}^{trial} \otimes \mathbf{N}_{n+1}^{trial}] \end{aligned} \quad (4.165)$$

Le calcul de la dérivée partielle du multiplicateur de Lagrange $\bar{\gamma}_{n+1}$ se fait en considérant :

$$\frac{\partial \bar{\gamma}_{n+1}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} = \frac{\partial \bar{\gamma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} \quad (4.166)$$

Or, on a vu que $\bar{\gamma}_{n+1}$ s'écrit en fonction de la valeur d'essai de la fonction seuil (équation (4.158)), ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\gamma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}} &= \frac{1}{\frac{1}{1+\bar{\mu}_n} + \frac{\bar{K}}{E}} \frac{\partial \bar{\phi}_{n+1}^{trial}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{1+\bar{\mu}_n} + \frac{\bar{K}}{E}} \mathbf{D}^e : \mathbf{N}_{n+1}^{trial} \end{aligned} \quad (4.167)$$

On peut alors en déduire :

$$\frac{\partial \bar{\gamma}_{n+1}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{1+\bar{\mu}_n} + \frac{\bar{K}}{E}} \frac{1}{1 + \bar{\mu}_n} \mathbf{N}_{n+1}^{trial} \quad (4.168)$$

Ces développements permettent, finalement, d'écrire le module tangent cohérent sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{n+1}^{ed} &= \frac{\mathbf{C}^e}{1 + \bar{\mu}_n} \left(1 - \bar{\gamma}_{n+1} \frac{1}{(1 + \bar{\mu}_n) \|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}\|_{\mathbf{D}^e}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(1 + \bar{\mu}_n)^2} \left(\frac{\bar{\gamma}_{n+1}}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}\|_{\mathbf{D}^e}} - \frac{1}{\frac{1}{1+\bar{\mu}_n} + \frac{\bar{K}}{E}} \right) \mathbf{N}_{n+1}^{trial} \otimes \mathbf{N}_{n+1}^{trial} \end{aligned} \quad (4.169)$$

Intégration numérique de la loi discrète

L'implantation numérique de la loi de comportement associée à la surface de discontinuité est, comme nous l'avons déjà évoqué, alourdie par l'utilisation d'un modèle multisurface et par le caractère rigide de l'interface avant activation des deux surfaces seuils permettant de décrire le domaine élastique.

L'implantation numérique est réalisée en utilisant, comme pour le modèle associé au matériau hors-discontinuité, une méthode de « return-mapping ». Nous nous placerons à l'itération j de l'étape de résolution locale de l'équation de continuité des tractions, l'itération globale sera notée i et le pas de temps considéré $n + 1$. La résolution de l'équation de continuité des tractions permet de déterminer la valeur du saut de déplacement $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i,j)}$. On cherche ici la valeur de la traction correspondant à ce saut de déplacement (voir le schéma 3.6). À chaque pas de temps sont stockées les variables internes : $\bar{\mathbf{Q}}$ et $\bar{\xi}$.

Afin d'intégrer la loi de comportement présentée précédemment, nous définissons un état d'essai construit en supposant que les variables internes n'ont pas évolué du pas de temps n au pas de temps $n + 1$ (prédiction élastique). La définition de cette prédiction élastique est rendue complexe par le caractère rigide de la surface de discontinuité.

Nous traiterons, dans un premier temps, le cas le plus simple pour lequel les deux mécanismes d'endommagement ont déjà été activés, *i.e.* $\bar{\bar{\mathbf{Q}}} \neq \mathbf{0}$. Le cas où l'une ou l'autre des composantes de $\bar{\bar{\mathbf{Q}}}$ dans le repère (\mathbf{n}, \mathbf{m}) , $\bar{\bar{Q}}_{nn}$ ou $\bar{\bar{Q}}_{mm}$, est nulle sera traité ensuite.

Ainsi, dans le cas où $\bar{\bar{Q}}_{nn} \neq 0$ et $\bar{\bar{Q}}_{mm} \neq 0$, l'état d'essai est défini par :

$$\begin{cases} \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_{n+1}^{trial} = \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_n \\ \bar{\bar{\xi}}_{n+1}^{trial} = \bar{\bar{\xi}}_n \end{cases} \quad (4.170)$$

ce qui permet de calculer la traction d'essai comme :

$$\mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial} = \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_n^{-1} \cdot \bar{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}^{(i,j)} \quad (4.171)$$

Notons que l'état de traction « réel » vérifie :

$$\mathbf{t}_{\Gamma_s} = \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_{n+1}^{-1} \cdot \bar{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}^{(i,j)} \quad (4.172)$$

Ainsi, on peut écrire en considérant les équations (4.171) et (4.172) :

$$\bar{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}^{(i,j)} = \begin{cases} \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_n \cdot \mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial} \\ \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_{n+1}^{(i,j)} \cdot \mathbf{t}_{\Gamma_s} \end{cases} \quad (4.173)$$

Par ailleurs, l'évolution des variables internes entre le pas de temps n et le pas de temps $n + 1$ s'écrit sous forme incrémentale :

$$\begin{cases} \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_{n+1}^{(i,j)} = \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_n + \Delta \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_{n+1}^{(i,j)} \\ \bar{\bar{\xi}}_{n+1}^{(i,j)} = \bar{\bar{\xi}}_n + \Delta \bar{\bar{\xi}}_{n+1}^{(i,j)} \end{cases} \quad (4.174)$$

avec

$$\begin{cases} \Delta \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_{n+1}^{(i,j)} = \frac{\bar{\gamma}_1}{\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{\bar{\gamma}_2}{|\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}|} \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \\ \Delta \bar{\bar{\xi}}_{n+1}^{(i,j)} = \bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \end{cases} \quad (4.175)$$

Ceci permet d'exprimer l'état de traction « réel » en fonction de l'état de traction test sous la forme :

$$\mathbf{t}_{\Gamma_s} = \mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial} - \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_n^{-1} \cdot [\bar{\gamma}_1 \mathbf{n} + \bar{\gamma}_2 \mathbf{m} \text{signe}(\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m})] \quad (4.176)$$

En projetant cette équation sur le repère (\mathbf{n}, \mathbf{m}) de la discontinuité et en remarquant que $\text{signe}(\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}) = \text{signe}(\mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial} \cdot \mathbf{m})$, on peut écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial} \cdot \mathbf{n} - \bar{\gamma}_1 \bar{\bar{Q}}_{nn,n}^{-1} \\ |\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}| = |\mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial} \cdot \mathbf{m}| - \bar{\gamma}_2 \bar{\bar{Q}}_{mm,n}^{-1} \end{cases} \quad (4.177)$$

où $\bar{Q}_{nn,n}$ et $\bar{Q}_{mm,n}$ désignent les valeurs des composantes de $\bar{\mathbf{Q}}$ dans le repère de la discontinuité au pas de temps convergé précédent n .

Avec la définition de l'état d'essai donnée à l'équation (4.171), sont testées les valeurs d'essai des fonctions seuils :

$$\begin{cases} \bar{\phi}_1^{trial}(\mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial}, \bar{q}_{n+1}^{trial}) = \mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial} \cdot \mathbf{n} - (\bar{\sigma}_f - \bar{q}_{n+1}^{trial}) \\ \bar{\phi}_2^{trial}(\mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial}, \bar{q}_{n+1}^{trial}) = |\mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial} \cdot \mathbf{m}| - \left(\bar{\sigma}_s - \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \bar{q}_{n+1}^{trial} \right) \end{cases} \quad (4.178)$$

Quatre cas doivent alors être considérés (tableau 4.8).

	$\bar{\phi}_2^{trial} > 0$	$\bar{\phi}_2^{trial} \leq 0$
$\bar{\phi}_1^{trial} > 0$	Cas 1	Cas 2
$\bar{\phi}_1^{trial} \leq 0$	Cas 3	Cas 4

Tableau 4.8: Différents cas pour l'intégration numérique de la loi discrète

Les cas 2 et 3 sont traités de façon analogue en échangeant le rôle joué par chacune des deux surfaces seuils. Nous ne traiterons donc que les cas 1, 2 et 4. On définit alors J_{act}^{trial} l'ensemble des surfaces seuils tests actives $J_{act}^{trial} = \{i \mid \bar{\phi}_i^{trial} > 0\}$. Simo *et al.* [Simo et al., 1988] ont montré que l'ensemble des surfaces seuils supposées actives lors de la prédiction élastique, J_{act}^{trial} , ne correspond pas forcément à l'ensemble des surfaces seuils effectivement actives, le processus d'intégration de la loi de comportement doit donc permettre de déterminer les surfaces seuils actives.

Cas 4 : $\bar{\phi}_1^{trial} \leq 0$ et $\bar{\phi}_2^{trial} \leq 0$.

Dans ce cas, la discontinuité se charge ou décharge de façon élastique, l'état test est admissible :

$$\begin{cases} \mathbf{t}_{\Gamma_s} = \mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial} \\ \bar{\mathbf{Q}}_{n+1} = \bar{\mathbf{Q}}_n \\ \bar{\xi}_{n+1} = \bar{\xi}_n \end{cases} \quad (4.179)$$

Cas 2 (ou *Cas 3*) : $\bar{\phi}_1^{trial} > 0$ et $\bar{\phi}_2^{trial} \leq 0$ (ou $\bar{\phi}_1^{trial} > 0$ et $\bar{\phi}_2^{trial} \leq 0$).

Dans ce cas, la surface 1 est active, on doit donc avoir :

$$\bar{\phi}_1(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = 0 \quad (4.180)$$

En reprenant, l'expression de la traction « réelle » établie à l'équation (4.177), l'équation à résoudre peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_1(\bar{\gamma}_1) = 0 &= \bar{\phi}_1^{trial} - \bar{\gamma}_1 \left(\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} \cdot \mathbf{n} \right) - \left(\bar{q}_{n+1}^{(i,j)} - \bar{q}_n \right) \\ &= \bar{\phi}_1^{trial} - \bar{\gamma}_1 \left(\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} \cdot \mathbf{n} \right) - \bar{\sigma}_f \exp\left(-\frac{\bar{\beta}}{\bar{\sigma}_f} \bar{\xi}_n\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\bar{\beta}}{\bar{\sigma}_f} \bar{\gamma}_1\right) \right] \end{aligned} \quad (4.181)$$

Cette équation est résolue par une méthode itérative du type Newton-Raphson. La valeur du multiplicateur de Lagrange choisie pour initialiser le schéma itératif est prise égale à :

$$\bar{\gamma}_1^0 = \frac{\bar{\phi}_1^{trial}}{\left(\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} \cdot \mathbf{n}\right) + \bar{K}(\bar{\xi}_n)} \quad (4.182)$$

Il est alors important de remarquer que, une fois obtenue la valeur du multiplicateur de Lagrange vérifiant l'équation (4.181), la valeur de la variable d'érouissage $\bar{\xi}$ est réactualisée. Ainsi, la variable duale \bar{q} est également modifiée conduisant à une diminution du seuil en traction et donc également en cisaillement sur la surface de discontinuité. Il est alors nécessaire avec les valeurs actualisées des variables internes de vérifier, à nouveau, l'état de la surface 2. Si $\bar{\phi}_2^{trial}(\bar{\gamma}_1) < 0$, la surface 2 est encore inactive et on a $J_{act} = \{1\}$. Dans le cas contraire, la surface 2 doit être supposée active et le *cas 1* doit alors être considéré.

Cas 1 : $\bar{\phi}_1^{trial} > 0$ et $\bar{\phi}_2^{trial} > 0$. Dans ce cas, les deux surfaces seuils sont supposées actives. On doit donc avoir :

$$\begin{cases} \bar{\phi}_1(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = 0 \\ \bar{\phi}_2(\mathbf{t}_{\Gamma_s}, \bar{q}) = 0 \end{cases} \quad (4.183)$$

En considérant les expressions établies à l'équation (4.177), ce système peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \bar{\phi}_1(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2) = \bar{\phi}_1^{trial} - \bar{\gamma}_1 \left(\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} \cdot \mathbf{n}\right) - \left(\bar{q}_{n+1}^{(i,j)} - \bar{q}_n\right) \\ \bar{\phi}_2(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2) = \bar{\phi}_2^{trial} - \bar{\gamma}_2 \left(\mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} \cdot \mathbf{m}\right) - \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \left(\bar{q}_{n+1}^{(i,j)} - \bar{q}_n\right) \end{cases} \quad (4.184)$$

avec :

$$\left(\bar{q}_{n+1}^{(i,j)} - \bar{q}_n\right) = \bar{\sigma}_f \exp\left(-\frac{\bar{\beta}}{\bar{\sigma}_f} \bar{\xi}_n\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\bar{\beta}}{\bar{\sigma}_f} \left(\bar{\gamma}_1 + \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \bar{\gamma}_2\right)\right)\right] \quad (4.185)$$

Ce système est résolu par une méthode itérative du type Newton-Raphson, les valeurs initiales des multiplicateurs de Lagrange sont calculées par :

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_1^0 = \frac{\bar{\phi}_1^{trial}}{\left(\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} \cdot \mathbf{n}\right) + \bar{K}(\bar{\xi}_n)} \\ \bar{\gamma}_2^0 = \frac{\bar{\phi}_2^{trial}}{\left(\mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} \cdot \mathbf{m}\right) + \bar{K}(\bar{\xi}_n) \left(\frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f}\right)^2} \end{cases} \quad (4.186)$$

Par ailleurs, comme cela a été montré par Simo *et al.* [Simo et al., 1988], on n'a pas forcément $J_{act}^{trial} = J_{act}$. Ainsi, après la résolution du système (4.183), les valeurs de $\bar{\gamma}_1$ et $\bar{\gamma}_2$ doivent être contrôlées (rien n'assure que ces dernières soient effectivement positives).

Ainsi, trois cas doivent être considérés :

- $\bar{\gamma}_1 \geq 0$ et $\bar{\gamma}_2 \geq 0$
Les deux surfaces sont réellement actives et on a $J_{act} = \{1, 2\}$.
- $\bar{\gamma}_1 \geq 0$ et $\bar{\gamma}_2 \leq 0$
Seule la surface 1 est réellement active. Il faut alors reconsidérer le cas 2.
- $\bar{\gamma}_1 \leq 0$ et $\bar{\gamma}_2 \geq 0$
Dans ce cas, seule la surface 2 est active et le cas 3 doit être considéré.

Nous avons ici uniquement traité le cas où les deux mécanismes de dissipation pris en compte au niveau de la surface de discontinuité ont déjà été activés, c'est-à-dire, de manière équivalente, le cas où les composantes \bar{Q}_{nn} et \bar{Q}_{mm} du tenseur de complaisance au pas de temps n sont non nulles.

Or, nous avons vu que le comportement de la surface de discontinuité est rigide-endommageable. Ainsi, le cas où $\bar{Q}_{nn} = 0$ et/ou $\bar{Q}_{mm} = 0$ ne peut pas être ignoré. Vu la forme du tenseur de complaisance dans le repère de la discontinuité et vu la loi d'état liant la traction au saut de déplacement, la composante normale $\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}$ de la traction et la composante tangentielle $\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}$ peuvent être traitées séparément. Nous ne traiterons donc que le cas de la composante normale de la traction.

Toute la difficulté réside alors dans l'écriture de l'état d'essai (ou prédiction élastique).

Nous distinguons, pour cela, deux cas :

- $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i,j)} \cdot \mathbf{n} = 0$ et $\bar{Q}_{nn} = 0$.

Dans ce cas, la prédiction élastique est calculée en profitant du fait que la traction sur la surface de discontinuité vérifie encore l'équation de continuité des tractions sous forme forte (les mécanismes d'endommagement n'ont pas encore été activés). Ainsi, la composante normale de l'état de traction test est calculée, à partir de l'état de contrainte hors discontinuité, par :

$$\mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Omega \setminus \Gamma_s} \cdot \mathbf{n} \quad (4.187)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est calculée, par l'intégration de la loi de comportement associée au matériau hors discontinuité, sur un point appartenant à la surface de discontinuité. Remarquons que la prédiction élastique telle qu'écrite à l'équation (4.173) indique que la composante normale de la traction test est bornée mais ne permet pas d'en estimer la valeur.

- $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i,j)} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ et $\bar{Q}_{nn} = 0$.

Dans ce cas, la prédiction élastique écrite à l'équation (4.171) permet de déduire directement que la valeur test de la composante normale de la traction prend une valeur infinie. La surface seuil $\bar{\phi}_1$ est donc forcément active.

Remarquons que, dans ce cas, la dérivée temporelle de la loi d'état liant la traction au saut de déplacement permet d'écrire :

$$\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = \left(\mathbf{n} \cdot \dot{\bar{\mathbf{Q}}} \cdot \mathbf{n} \right) (\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}) + \left(\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n} \right) (\dot{\mathbf{t}}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}) \quad (4.188)$$

Or, $(\mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\mathbf{Q}}} \cdot \mathbf{n}) = 0$ et $\dot{\mathbf{t}}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}$ est borné. Ainsi, on peut écrire :

$$\dot{\bar{\bar{\mathbf{u}}}} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \dot{\bar{\bar{\mathbf{Q}}}} \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}) = \dot{\bar{\bar{\gamma}}}_1 \quad (4.189)$$

Ce qui, sous forme incrémentale (entre le pas de temps n et le pas de temps $n + 1$), s'écrit :

$$\Delta \bar{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}^{(i,j)} = \bar{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}^{(i,j)} = \bar{\bar{\gamma}}_1 \quad (4.190)$$

car $\bar{\bar{\mathbf{u}}}_n \cdot \mathbf{n} = 0$. Ceci permet de réactualiser les variables internes et de calculer l'état de traction « réel ».

Tous les cas à traiter, tant pour le calcul de la prédiction élastique que pour le calcul des incréments de variables internes, sont présentés à l'annexe A.

Il reste alors à déterminer le module tangent numérique ou module tangent cohérent du modèle. Pour cela, nous nous appuyons sur les développements établis pour les critères multisurfaces par Simo *et al.* [Simo et al., 1988] pour déterminer le module tangent cohérent.

Les équations écrites dans la suite ne sont, *a priori*, valables que dans le cas où les deux surfaces seuils ont déjà été activées *i.e.* dans le cas où les composantes dans le repère (\mathbf{n}, \mathbf{m}) du tenseur de complaisance $\bar{\bar{\mathbf{Q}}}_n$ sont non nulles au pas de temps n . En fait, nous verrons que cette condition n'est pas nécessaire et que l'expression établie pour le module tangent consistant, sous cette hypothèse, est encore valable si l'une et/ou l'autre des composantes de $\bar{\bar{\mathbf{Q}}}_n$ sont nulles.

Le module tangent cohérent au pas de temps $n + 1$ est défini par :

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}}_{n+1}^{ed} = \frac{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s, n+1}}{\partial \bar{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1}} \quad (4.191)$$

Pour en évaluer l'expression, écrivons, dans un premier temps, l'évolution des variables internes et duales sous forme différentielle, nous avons :

$$\begin{cases} [d\bar{\bar{\mathbf{Q}}}_{n+1}] \mathbf{t}_{\Gamma_s, n+1} = - [\bar{\bar{\mathbf{Q}}}_{n+1} - \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_n] dt_{\Gamma_s, n+1} + d\bar{\bar{\gamma}}_1 \frac{\partial \bar{\bar{\phi}}_1}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} + d\bar{\bar{\gamma}}_2 \frac{\partial \bar{\bar{\phi}}_2}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \\ d\bar{\bar{\xi}}_{n+1} = d\bar{\bar{\gamma}}_1 \frac{\partial \bar{\bar{\phi}}_1}{\partial \bar{\bar{q}}} + d\bar{\bar{\gamma}}_2 \frac{\partial \bar{\bar{\phi}}_2}{\partial \bar{\bar{q}}} \end{cases} \quad (4.192)$$

avec

$$\begin{cases} dt_{\Gamma_s, n+1} = \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_{n+1}^{-1} [d\bar{\bar{\mathbf{u}}}_{n+1} - [d\bar{\bar{\mathbf{Q}}}_{n+1}] \mathbf{t}_{\Gamma_s, n+1}] \\ d\bar{\bar{q}}_{n+1} = -\bar{\bar{K}}(\bar{\bar{\xi}}_{n+1}) d\bar{\bar{\gamma}}_1 \frac{\partial \bar{\bar{\phi}}_1}{\partial \bar{\bar{q}}} - \bar{\bar{K}}(\bar{\bar{\xi}}_{n+1}) d\bar{\bar{\gamma}}_2 \frac{\partial \bar{\bar{\phi}}_2}{\partial \bar{\bar{q}}} \end{cases} \quad (4.193)$$

Par ailleurs, en différentiant les conditions de cohérence, on obtient (si les deux surfaces seuils sont actives) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\bar{\phi}}_1}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} dt_{\Gamma_s, n+1} + \frac{\partial \bar{\bar{\phi}}_1}{\partial \bar{\bar{q}}} d\bar{\bar{q}}_{n+1} = 0 \\ \frac{\partial \bar{\bar{\phi}}_2}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} dt_{\Gamma_s, n+1} + \frac{\partial \bar{\bar{\phi}}_2}{\partial \bar{\bar{q}}} d\bar{\bar{q}}_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (4.194)$$

Ainsi, en remplaçant dans le système (4.194) $d\bar{q}_{n+1}$ et $d\mathbf{t}_{\Gamma_s, n+1}$ par leurs expressions établies à l'équation (4.193), on obtient :

$$\mathbf{A}_{n+1} \begin{bmatrix} d\bar{\gamma}_1 \\ d\bar{\gamma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} d\bar{\mathbf{u}}_{n+1} \\ \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} d\bar{\mathbf{u}}_{n+1} \end{bmatrix} \quad (4.195)$$

où

$$\mathbf{A}_{n+1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} + \bar{K}_{n+1} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{q}} \right)^2 & \bar{K}_{n+1} \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{q}} \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \bar{q}} \\ \bar{K}_{n+1} \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{q}} \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} + \bar{K}_{n+1} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \bar{q}} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (4.196)$$

Ceci permet finalement, d'écrire l'incrément de multiplicateur de Lagrange sous la forme :

$$\begin{bmatrix} d\bar{\gamma}_1 \\ d\bar{\gamma}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{n+1}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} d\bar{\mathbf{u}}_{n+1} \\ \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} d\bar{\mathbf{u}}_{n+1} \end{bmatrix} \quad (4.197)$$

Nous désignerons, à partir d'ici, par $[\mathbf{A}_{n+1}^{-1}]_{ij}$ la composante (i, j) de la matrice \mathbf{A}_{n+1}^{-1} . Avec cette notation, on peut écrire :

$$d\bar{\gamma}_i = \sum_j [\mathbf{A}_{n+1}^{-1}]_{ij} \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} d\bar{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (4.198)$$

En combinant ceci à l'équation (4.193), on obtient :

$$d\mathbf{t}_{\Gamma_s, n+1} = \left[\bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} - \sum_{i,j} \left(\bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \otimes \bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \right) [\mathbf{A}_{n+1}^{-1}]_{ij} \right] d\bar{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (4.199)$$

ce qui permet de calculer le module tangent cohérent de la discontinuité sous la forme :

$$\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{ed} = \bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} - \sum_{i,j} \left(\bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \otimes \bar{\mathbf{Q}}_n^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \right) [\mathbf{A}_{n+1}^{-1}]_{ij} \quad (4.200)$$

si les deux surfaces seuils sont actives. En fait, avec l'expression des surfaces seuils choisies, le module tangent cohérent se met, dans le repère (\mathbf{n}, \mathbf{m}) de la discontinuité sous la forme :

$$\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{ed} = \frac{1}{1 + \bar{K}_{n+1} \left(\bar{Q}_{mm,n} \left(\frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \right)^2 + \bar{Q}_{nn,n} \right)} \begin{bmatrix} \bar{K}_{n+1} & \bar{K}_{n+1} \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \text{signe}(\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}) \\ \bar{K}_{n+1} \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \text{signe}(\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}) & \bar{K}_{n+1} \left(\frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (4.201)$$

si les deux surfaces seuils sont actives. Notons que cette expression peut être calculée même si les composantes $\bar{Q}_{nn,n}$ et/ou $\bar{Q}_{mm,n}$ sont nulles. En revanche, il apparaît clairement que le module tangent cohérent $\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{ed}$ n'est pas inversible. L'incrément de saut de déplacement n'est pas défini de façon unique en fonction de l'incrément de traction sur la surface de discontinuité. Cependant, si la résolution locale est menée

à saut de déplacement imposé, ceci ne pose pas de difficulté : l'incrément de traction est alors défini de façon unique. Dans le cas contraire, il est nécessaire de revoir la technique de résolution locale. Cette indétermination est due au fait que lorsque les deux surfaces seuils sont actives, la composante tangentielle de la traction est liée à la composante normale par une loi de type Coulomb.

Un raisonnement similaire à celui présenté dans le cas où les deux surfaces sont actives permet d'obtenir le module tangent cohérent dans le cas où une seule surface seuil est active :

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}}_{n+1}^{ed} = \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_n^{-1} - \left(\bar{\bar{\mathbf{Q}}}_n^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \otimes \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_n^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \right) \frac{1}{\frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_n^{-1} \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}} + \bar{K}_{n+1} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \bar{q}} \right)^2} \quad (4.202)$$

où i correspond à l'indice de la surface seuil active.

Si, par exemple, seule la surface 1 est active, on peut écrire le module tangent cohérent dans (\mathbf{n}, \mathbf{m}) sous la forme :

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}}_{n+1}^{ed} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + \bar{K}_{n+1} \bar{Q}_{nn,n}} \bar{K}_{n+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{Q}_{mm,n}} \end{bmatrix} \quad (4.203)$$

Remarquons que cette expression n'est valable que dans le cas où la surface seuil 2 a déjà été activée. Si tel n'est pas le cas, *i.e* si la surface de discontinuité est rigide dans la direction \mathbf{m} , le caractère rigide de l'interface doit être pris en compte. Ceci est réalisé, non pas au niveau de l'intégration de la loi de comportement, mais au niveau, juste supérieur (voir schéma 3.6), de la résolution locale de l'équation de continuité des tractions. Nous détaillerons la prise en compte du caractère rigide de l'interface ci-après.

4.2.2.2 Interpolation EF

L'implantation numérique de l'approche à discontinuité présentée précédemment a été réalisée dans le code de calcul *FEAP* développé par le Pr. R.L. TAYLOR [Zienkiewicz et Taylor, 2000] à Berkeley. Nous présentons, ici, les spécificités liées à l'implantation numérique de ce modèle, en particulier, les choix réalisés pour les interpolations et la résolution numérique.

Choix des interpolations

L'implantation numérique du modèle a été réalisée sur des éléments à trois nœuds. Pour de tels éléments, l'état de déformation et donc également de contrainte est constant par élément. Ainsi, la condition d'introduction de la surface de discontinuité est vérifiée partout dans l'élément au même moment. La discontinuité peut alors être introduite en n'importe quel point de l'élément. Les contraintes étant calculées sur le point de Gauss de l'élément, nous avons choisi d'introduire la surface de discontinuité sur ce point.

Par ailleurs, le critère d'introduction de la surface de discontinuité est contrôlé à chaque fin de pas de temps. Ainsi, si ce dernier est vérifié à la fin du pas de temps

n , la discontinuité est introduite au pas de temps $n + 1$. Ceci permet de contrôler le critère d'introduction de la surface de discontinuité sur un état de contrainte convergé (vérifiant les équations d'équilibre global).

Lorsque le critère d'introduction de la surface de discontinuité est vérifié, la surface Γ_s est introduite dans le domaine avec pour orientation le vecteur principal associé à la contrainte principale maximale. Le sens de ce vecteur \mathbf{n} n'est pas, *a priori*, fixé. Nous avons, dans notre cas, choisi le vecteur \mathbf{n} tel qu'il soit orienté dans le sens des x positifs ((\mathbf{x}, \mathbf{y}) est le repère global de notre problème).

Avec un tel choix d'élément, il reste alors à spécifier les fonctions d'interpolation permettant d'approcher le champ de déformation ajoutée induit par la présence de la surface de discontinuité.

Pour cela, nous devons préciser, comme cela a été développé dans un cadre général au chapitre 3, le choix des fonctions \mathbf{G}_r et \mathbf{G}_v permettant de construire l'interpolation des champs de déformation ajoutée réels et virtuels.

Nous avons vu au chapitre 3 que la fonction \mathbf{G}_r est construite à partir des fonctions de forme classiques sous la forme :

$$\mathbf{G}_r(\mathbf{x}) = - \underbrace{\sum_{a \in \Omega^{e+}} \mathbf{B}_a(\mathbf{x})}_{\bar{\mathbf{G}}_r(\mathbf{x})} + \underbrace{\mathbf{n} \delta_{\Gamma_s}}_{\bar{\mathbf{G}}_r \delta_{\Gamma_s}} \quad (4.204)$$

Ce choix de la fonction \mathbf{G}_r découle de la construction d'une fonction de forme discontinue \mathbf{M} du type de celle présentée sur la figure 4.15

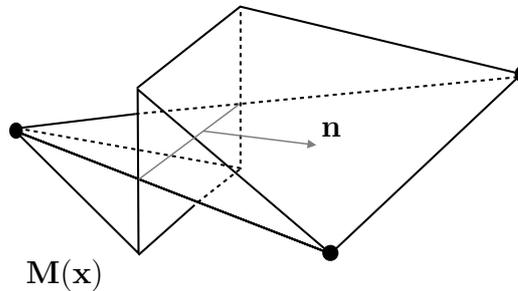


Figure 4.15: *Fonction de forme \mathbf{M} permettant de construire \mathbf{G}_r pour un élément à trois nœuds*

Les éléments considérés étant des éléments à trois nœuds, les fonctions $\mathbf{B}_a(\mathbf{x})$ sont constantes par élément. Il en est alors de même pour la fonction $\bar{\mathbf{G}}_r$.

La fonction \mathbf{G}_v permettant de construire l'approximation des déformations ajoutées virtuelles se construit, quant à elle, sous la forme :

$$\mathbf{G}_v(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_r(\mathbf{x}) - \frac{1}{A^e} \int_{\Omega^e} \mathbf{G}_r(\mathbf{x}) \, d\Omega^e \quad (4.205)$$

ce qui, en tenant compte de l'équation (4.204) et du fait que $\bar{\mathbf{G}}_r$ est constante par élément, s'écrit :

$$\mathbf{G}_v(\mathbf{x}) = - \frac{\ell_{\Gamma_s}^e}{A^e} \mathbf{n} + \mathbf{n} \delta_{\Gamma_s} \quad (4.206)$$

où $\ell_{\Gamma_s}^e$ est la longueur de la surface de discontinuité introduite dans l'élément e considéré et \mathbf{n} s'écrit comme défini à l'équation (3.63).

Spécificités de la technique de résolution locale

Nous décrivons ici les spécificités de la résolution de l'équation de continuité des tractions, équation résolue au niveau de chaque élément dans lequel une surface de discontinuité a été introduite. Ces spécificités sont liées à la fois aux modèles et aux interpolations choisis.

Avec les interpolations construites précédemment, l'équation résolue localement s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^e(t) = \mathbf{0} &= \int_{\Omega^e} -\frac{\ell_{\Gamma_s}^e}{A^e} \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega^e + \int_{\Gamma_s} \mathbf{t}_{\Gamma_s} \, d\Gamma_s \\ &= -\ell_{\Gamma_s}^e \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} + \ell_{\Gamma_s}^e \mathbf{t}_{\Gamma_s} \end{aligned} \quad (4.207)$$

Ainsi, dans le cas d'éléments à trois nœuds, l'équation de continuité des tractions est vérifiée sous forme forte (les formes fortes et faibles sont, en fait, équivalentes).

Rappelons que cette équation est résolue au niveau élémentaire par une méthode itérative du type « operator-split ». La résolution est ainsi réalisée pour chaque itération globale i du pas de temps $n + 1$ en supposant le déplacement nodal fixé à $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}$ (voir le schéma 3.6). Ainsi, en notant j l'indice de l'itération locale, le champ de déplacement permettant de calculer le champ de contrainte s'écrit :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{(i,j)}(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{Nen} \mathbf{B}_a(\mathbf{x}) \mathbf{d}_{a,n+1}^{(i)} - \sum_{a \in \Omega^{e+}} \mathbf{B}_a(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i,j)} \quad (4.208)$$

Ce champ de déformation sert d'entrée à l'intégration de la loi de comportement associée au matériau hors discontinuité.

Afin de faciliter la résolution, l'équation (4.207) est projetée sur le repère de la discontinuité (\mathbf{n}, \mathbf{m}) . La résolution est alors complètement menée dans ce repère local.

La valeur du saut de déplacement $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(i)}$ permettant de vérifier (pour le champ de déplacements nodaux fixé $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}$) l'équation (4.207) ayant été déterminée, il reste à corriger la matrice de rigidité élémentaire. Pour cela, il est nécessaire de calculer les différentes matrices définies par l'équation (3.87). Ces dernières sont calculées, comme cela a été précisé au chapitre 3, en tenant compte des modules tangents cohérents de chacun de deux modèles, modules tangents cohérents dont le calcul a été développé précédemment.

Notons que lorsque les deux mécanismes associés à la surface de discontinuité sont activés, les composantes de la traction ne dépendent que du saut de déplacement. Ainsi, la matrice $\mathbf{K}_{dn+1}^{(i)} = \frac{\partial \mathbf{t}_{\Gamma_s}}{\partial \mathbf{d}}$ est nulle. Il est important de remarquer que c'est par l'intermédiaire de cette matrice que se fait le traitement du caractère rigide de l'interface.

Ainsi, les seules particularités de la résolution numérique de l'équation (4.207) par rapport aux développements présentés au chapitre 3 résident dans le traitement

de la rigidité de l'interface dans la direction \mathbf{n} ou \mathbf{m} et dans la prise en compte du caractère unilatéral de l'ouverture en mode I de la surface de discontinuité.

Traitement du caractère rigide de l'interface

Nous avons vu que l'interface demeure rigide, par exemple dans la direction \mathbf{m} , si la composante \bar{Q}_{mm} du tenseur de complaisance de la discontinuité est nulle. Dans ce cas, la composante $\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{m}$ du saut de déplacement est également nulle. La traction sur la surface de discontinuité n'est alors pas calculée en intégrant la loi de comportement discrète associée à la surface de discontinuité mais, simplement, en considérant la condition de continuité des tractions. Ainsi, tant que le mécanisme d'endommagement associé, ici, à la surface 2 n'a pas été activé, l'état de traction ne dépend que des déplacements nodaux et pas du saut de déplacement :

$$\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = \left(\frac{\mathbf{C}^e}{1 + \bar{\mu}_{n+1}} \sum_{a=1}^{N_{en}} \mathbf{B}_a(\mathbf{x}) \mathbf{d}_{a,n+1} \right) \cdot \mathbf{m} \quad (4.209)$$

La projection de l'équation (4.207) sur \mathbf{m} est alors automatiquement vérifiée. Dans ce cas, on peut écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{\alpha n+1}^{(i)} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{n+1}^{e(i)} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{dn+1}^{(i)} \cdot \mathbf{m} = \ell_{\Gamma_s}^e \mathbf{C}_{n+1}^{ed(i)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{m} = -\mathbf{F}_{\mathbf{v}_{n+1}}^{T(i)} \cdot \mathbf{m} \end{cases} \quad (4.210)$$

Ainsi, la matrice de rigidité élémentaire n'est pas modifiée dans la direction \mathbf{m} puisque $\left(\mathbf{F}_{\mathbf{v}_{n+1}}^{T(i)} + \mathbf{K}_{dn+1}^{(i)} \right) \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0}$.

Traitement du caractère unilatéral de l'interface

La surface de discontinuité est considérée comme une surface matérielle représentant, dans notre cas, une fissure cohésive. Ainsi, seules les valeurs positives ou nulles de la composante normale du saut de déplacement dans la direction normale \mathbf{n} sont autorisées. Lorsque la surface de discontinuité est détectée comme étant totalement refermée, la surface est supposée ne plus être active dans la direction normale, elle reprend son caractère rigide traité comme cela a été présenté ci-avant.

4.2.3 Quelques résultats numériques

Nous présentons ici quelques résultats numériques permettant de mettre en avant le caractère régularisant de la méthode ainsi que l'intérêt de la prise en compte combinée d'une dissipation surfacique et d'une dissipation volumique.

4.2.3.1 Réponse de la surface de discontinuité

Afin de mettre en évidence, la réponse de la surface de discontinuité lorsque les deux modes d'endommagement localisés sont activés, nous considérons, ici, un exemple extrêmement simple permettant de tester le comportement des éléments construits. Le maillage considéré est composé de deux éléments (voir figure 4.16).

La réponse de l'un des deux éléments (l'élément 1) est donnée en terme d'évolution des quantités relatives à la surface de discontinuité. La barre est supposée homogène de longueur 20 mm et de largeur 10 mm pour une épaisseur supposée unitaire, les paramètres des modèles continus et discrets sont donnés dans le tableau 4.9.

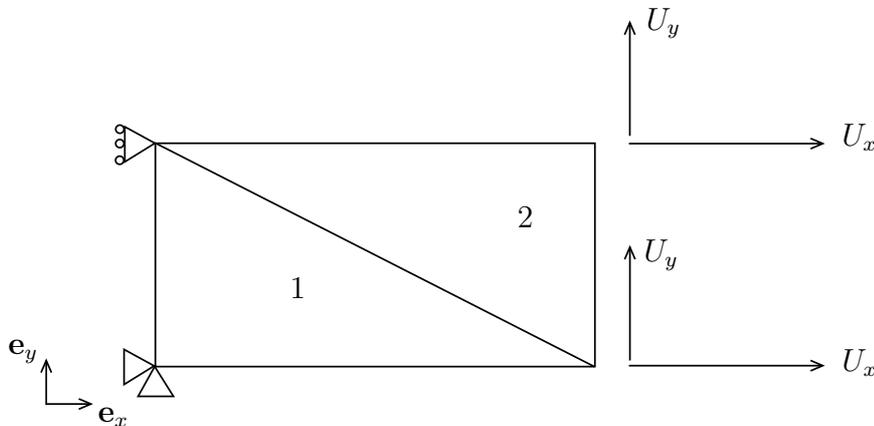


Figure 4.16: Barre à deux éléments

Modèle continu	
Module d'Young	38 GPa
Coefficient de Poisson	0.0
$\bar{\sigma}_f$	2 MPa
\bar{K}	100 MPa
Modèle discret	
$\bar{\bar{\sigma}}_f$	2.55 MPa
$\bar{\bar{\sigma}}_s / \bar{\bar{\sigma}}_f$	0.3
$\bar{\bar{\beta}}_f$	2.55 MPa/mm

Tableau 4.9: Paramètres des modèles continu et discret

La barre est chargée à son extrémité libre par des déplacements imposés U_x et U_y dans les directions x et y . L'évolution de ces déplacements en fonction du temps (en fait, ici, un « pseudo-temps ») est donnée à la figure 4.17. Une première phase du chargement consiste à imposer le déplacement dans la direction x , le déplacement dans la direction y étant maintenu constant. La deuxième étape consiste, à l'inverse, à incrémenter le déplacement dans la direction y , le déplacement dans la direction x étant maintenu constant.

En raison de la valeur du coefficient de Poisson, la première étape de chargement correspond à un chargement des éléments en traction simple. Le déplacement imposé dans la direction x est tel que le critère d'introduction de la surface de discontinuité est vérifié au cours de cette phase. Les discontinuités apparaissent dans les 2 éléments au même instant avec pour orientation : $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$.

L'évolution des composantes $\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}$ et $\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}$ de la traction sur la surface de discontinuité et de la complaisance \bar{Q}_{nn} et \bar{Q}_{mm} en fonction, respectivement, de $\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}$ et $\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{m}$ est donnée à la figure 4.18.

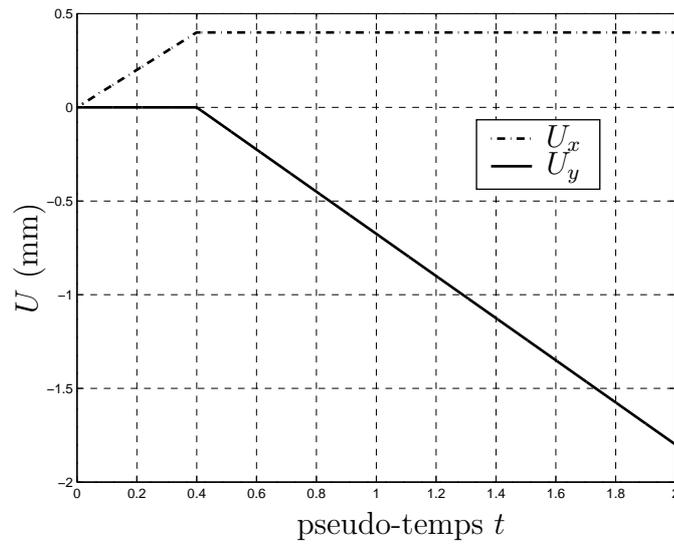
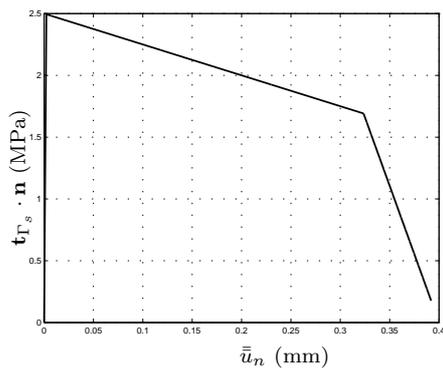
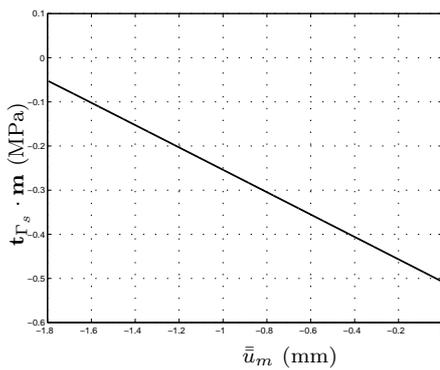


Figure 4.17: Évolution des déplacements imposés

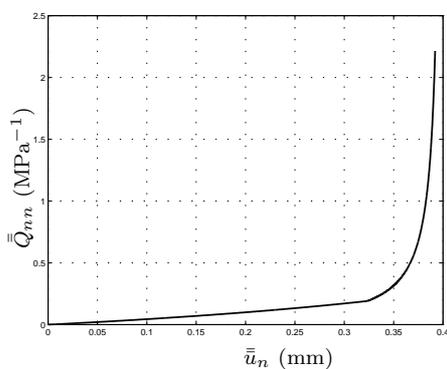
Nous donnons également à la figure 4.19, l'évolution en fonction du temps des composantes du saut de déplacement, \bar{u}_n et \bar{u}_m , ainsi que de la complaisance, \bar{Q}_{nn} et \bar{Q}_{mm} .



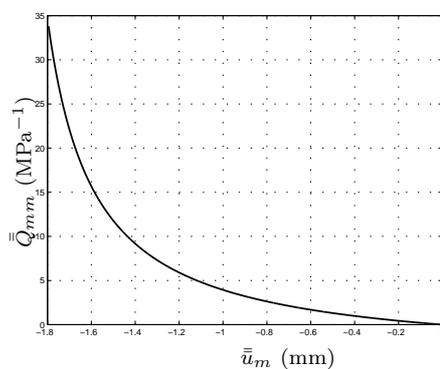
(a) $\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n} / \bar{u}_n$



(b) $\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m} / \bar{u}_m$

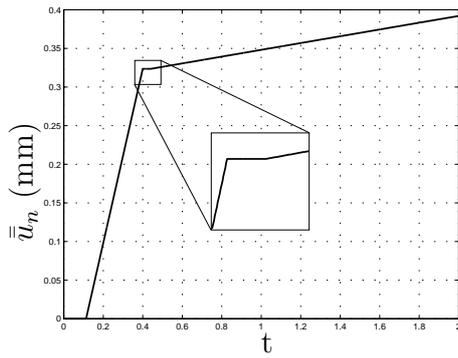


(c) \bar{Q}_{nn} / \bar{u}_n

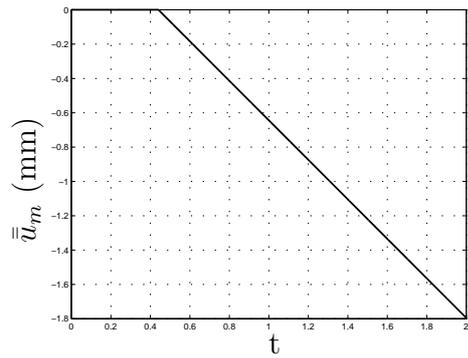


(d) \bar{Q}_{mm} / \bar{u}_m

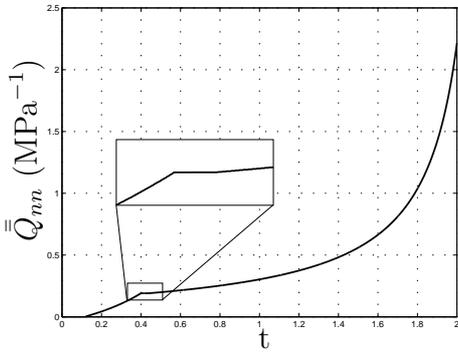
Figure 4.18: Évolution en fonction des composantes du saut de déplacement des composantes de la traction et de la complaisance



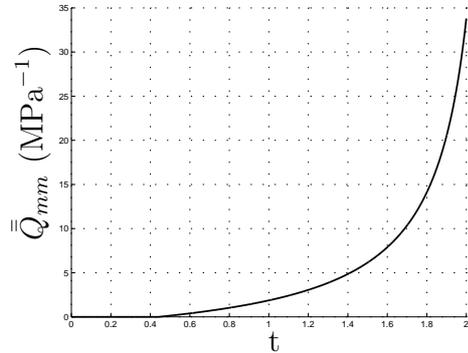
(a) \bar{u}_n



(b) \bar{u}_m



(c) \bar{Q}_{nn}



(d) \bar{Q}_{mm}

Figure 4.19: Évolution en fonction du « pseudo-temps » des composantes du saut de déplacement et de la complaisance

Lors de la première étape du chargement, seule la surface $\bar{\phi}_1$ est active : la composante normale du saut de déplacement évolue alors que la traction sur la surface de discontinuité diminue. Dans le même temps, la composante de la complaisance \bar{Q}_{nn} augmente reflétant l'évolution de l'endommagement sur la discontinuité.

Durant la seconde étape du chargement correspondant à l'évolution du déplacement dans la direction y , le déplacement dans la direction x étant maintenu constant, deux phases de la réponse de la surface de discontinuité peuvent être distinguées. Au cours de la première phase, les quantités \bar{u}_n , \bar{u}_m , \bar{Q}_{nn} et \bar{Q}_{mm} ainsi que $\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}$ demeurent constantes (voir figure 4.19). Parallèlement, la composante tangentielle de la traction sur la surface de discontinuité commence à évoluer dans le régime rigide de l'interface et ce, jusqu'à atteindre sa valeur limite. Cette valeur dépend de l'état d'endommagement déjà atteint sur la surface de discontinuité dans la direction normale. À partir de cet instant, la surface $\bar{\phi}_2$ est activée. Ceci s'accompagne d'une évolution de \bar{Q}_{mm} et \bar{u}_m . Cette deuxième phase du comportement est également caractérisée par une évolution de \bar{Q}_{nn} et \bar{u}_n . Ceci est dû au couplage induit par la variable associée à l'adoucissement \bar{q} . L'activation de la surface $\bar{\phi}_2$ conduit à une évolution (augmentation) de \bar{q} qui, elle-même, entraîne l'activation de la surface $\bar{\phi}_1$.

On peut également noter, en observant les courbes 4.18(a) et 4.18(b) que l'introduction d'une loi d'adoucissement exponentielle reliant \bar{q} et $\bar{\xi}$ conduit à une relation linéaire entre $\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}$ et \bar{u}_n , $\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}$ et \bar{u}_m ainsi que entre $\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}$ et \bar{u}_m et, réciproquement, entre $\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}$ et \bar{u}_n (ceci n'est pas représenté ici mais peut être facilement montré).

Conclusion

Cet exemple relativement simple a permis de tester la réponse de la surface de discontinuité dans un cas de chargement activant les deux mécanismes d'endommagement introduits. Le couplage entre les deux mécanismes induit par la présence de la variable \bar{q} commune aux deux surfaces seuils a ainsi pu être mis en évidence.

4.2.3.2 Un essai de traction simple : indépendance de la solution au maillage

Afin de mettre en évidence le caractère régularisant de la méthode proposée, nous présentons ici les résultats obtenus en considérant un essai de traction simple. La structure considérée est une barre de 200 mm de long, 100 mm de haut et d'épaisseur unitaire. Le test est réalisé en considérant deux maillages différents : l'un grossier et non structuré, l'autre fin et structuré et ce, afin de mettre en évidence les propriétés d'objectivité de la solution par rapport à la taille des éléments mais également par rapport à leur orientation et leur distorsion. Les conditions aux limites imposées sont indiquées sur la figure 4.20 représentant, également, les deux maillages considérés. Les propriétés du matériau sont données dans le tableau 4.10.

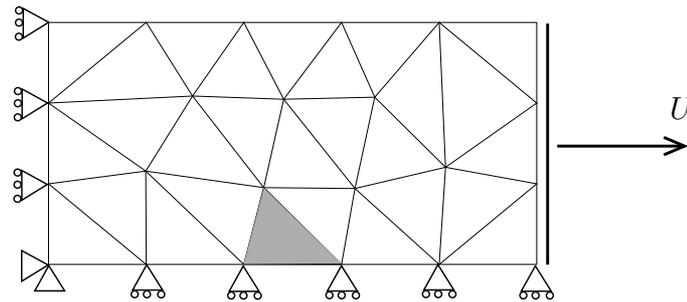
Afin de simuler un défaut dans la barre et de transformer le problème de bifurcation en un problème de point limite (l'état de contrainte est homogène : la localisation peut avoir lieu en n'importe quel point de la barre), un élément est affaibli en réduisant la contrainte $\bar{\sigma}_f$ correspondant à l'introduction de la surface de discontinuité. Ces éléments apparaissent en grisé sur la figure 4.20.

En vue de contrôler le passage de la réponse dans la phase adoucissante, le test est réalisé en déplacements imposés. Les résultats sont donnés en terme d'efforts mesurés

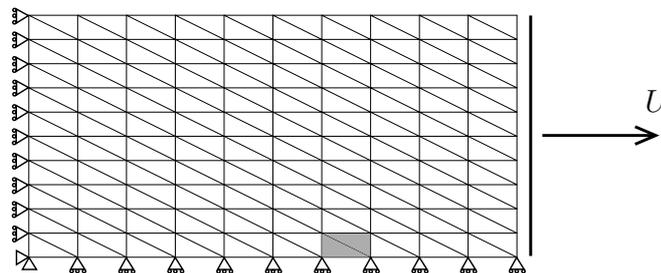
sur l'extrémité libre de la barre en fonction du déplacement imposé U (figure 4.21) (les efforts sont mesurés par unité d'épaisseur de la barre).

Modèle continu	
Module d'Young	38 GPa
Coefficient de Poisson	0.18
$\bar{\sigma}_f$	2 MPa
\bar{K}	1000 MPa
Modèle discret	
$\bar{\sigma}_f$	2.55 MPa
	2.5 MPa (élément affibli)
$\bar{\sigma}_s/\bar{\sigma}_f$	0.3
$\bar{\beta}_f$	2.55 MPa/mm

Tableau 4.10: *Propriétés du matériau hors discontinuité et sur la discontinuité*



(a) Maillage grossier non structuré



(b) Maillage fin structuré

Figure 4.20: *Maillages, conditions aux limites et éléments affaiblis*

La courbe de réponse (figure 4.21) permet de mettre, très clairement, en évidence les trois phases du comportement :

- la première phase élastique ;

- la deuxième phase est caractérisée essentiellement par la dissipation volumique liée à l'évolution de l'endommagement continu. L'évolution des propriétés élastiques du matériau au cours de cette phase est mise en évidence par une décharge. Cette dernière se fait en suivant une pente correspondant au module apparent endommagé de la structure ;
- enfin, la troisième phase du comportement marque l'entrée du comportement dans sa phase adoucissante. Cette phase est caractérisée par l'apparition de surfaces de discontinuité traversant, de part en part, la barre (voir figure 4.22). La dissipation au cours de cette phase du comportement est uniquement surfacique : les surfaces de discontinuité s'ouvrent et s'endommagent.

Ces trois phases du comportement seront décrites de façon plus précises dans l'exemple numérique suivant.

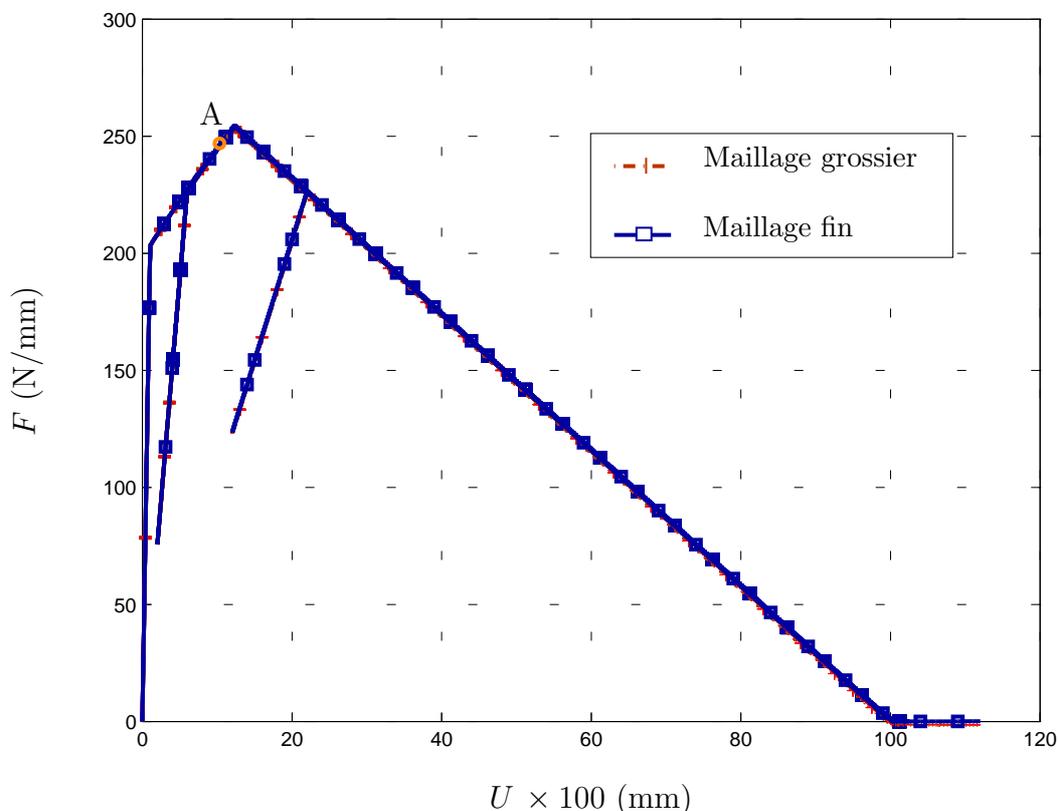
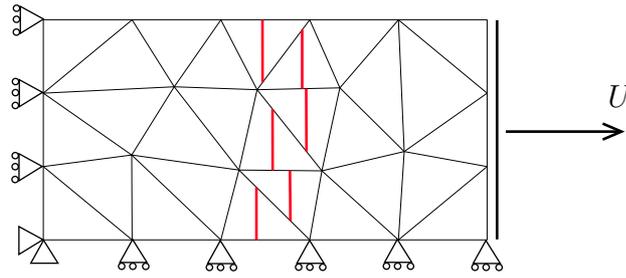


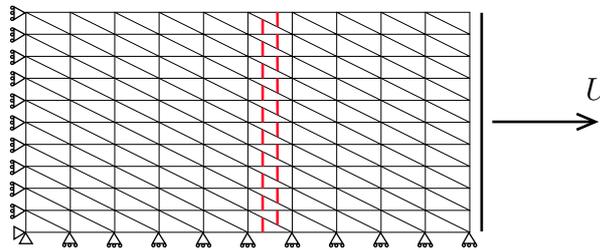
Figure 4.21: *Courbes effort mesuré/déplacement imposé pour le maillage régulier et le maillage irrégulier*

Notons que les décharges entreprises au cours de la phase d'endommagement diffus et également au cours de la phase d'endommagement localisé témoignent de l'évolution des propriétés élastiques apparentes de la barre : ces décharges se font avec un module d'élasticité endommagé qui évolue très clairement au fil du chargement.

La figure 4.21 permet, également et surtout, de conclure à l'objectivité de la solution vis à vis du maillage en terme de réponse effort/déplacement mais également en terme d'évaluation de la charge limite ultime de la structure ainsi que d'énergie dissipée.



(a) Maillage grossier non structuré



(b) Maillage fin structuré

Figure 4.22: *Trajet des lignes de discontinuité*

La figure 4.22 représente les surfaces de discontinuité créées dans la barre au cours du chargement, leur orientation est indépendante du maillage choisi.

En revanche, on peut constater que la longueur cumulée des surfaces de discontinuités est liée au choix de maillage réalisé. Ceci est dû au fait qu'aucune contrainte de continuité des lignes de discontinuité n'est imposée d'un élément à son voisin.

La longueur cumulée des surfaces de discontinuité vaut, pour le maillage régulier fin, environ 133 mm et, pour le maillage non structuré grossier, environ 157 mm. Cette différence n'a cependant, au regard des courbes présentées à la figure 4.21, pas de conséquence sur la réponse globale de la structure. En fait, il est aisé de montrer (voir équation (4.207)) que la réponse de la surface de discontinuité est indépendante de la longueur de cette ligne.

Conclusion

Cet exemple a, essentiellement, permis de mettre en avant la caractère régularisant de la surface de discontinuité : les résultats obtenus pour un essai de traction simple en considérant deux maillages qui diffèrent par la taille des éléments, leur orientation et leur distorsion sont similaires en terme d'évaluation de la charge limite ultime et de l'énergie dissipée et en terme de prédiction de l'orientation des surfaces de discontinuité.

4.2.3.3 Essai de traction simple : effet de la prise en compte d'un endommagement diffus

L'objet de cet exemple est de mettre en évidence sur un test de traction simple, l'effet de la prise en compte d'un endommagement diffus. Pour cela, nous considérons la barre déjà considérée dans l'exemple précédent. Ayant déjà démontré l'indépendance de la solution à la discrétisation EF, dans l'exemple précédent et pour ce type d'essai, nous nous limiterons à analyser la réponse du maillage fin (figure 4.20(b)). Comme précédemment, le mécanisme de localisation est contrôlé par l'introduction d'un défaut obtenu en diminuant la contrainte limite $\bar{\sigma}_f$ de deux éléments du maillage (en grisé sur la figure 4.20(b)). La barre est soumise à un déplacement imposé à son extrémité libre. Le déplacement imposé est alternativement positif et négatif afin de reproduire des phases de charge et décharge dans le matériau hors discontinuité mais également sur la surface de discontinuité.

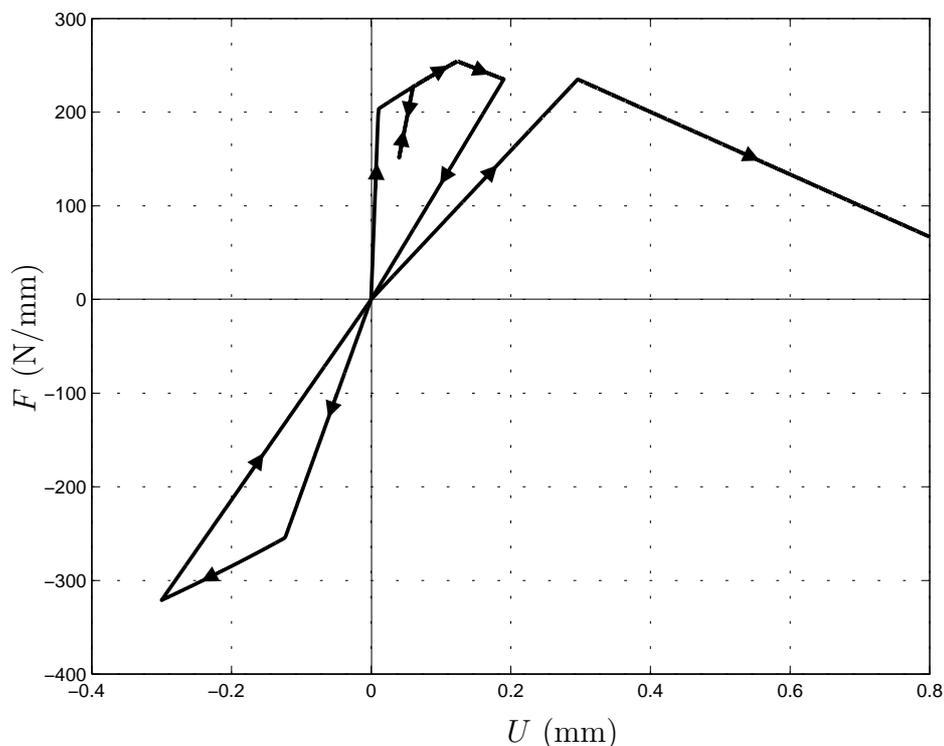


Figure 4.23: Courbe effort mesuré / déplacement imposé à l'extrémité libre pour un maillage régulier fin

La réponse de la barre est donnée en terme d'effort mesuré (par mm d'épaisseur) à l'extrémité libre en fonction du déplacement imposé (figure 4.23). Cet essai, bien que relativement simple, permet de mettre en évidence diverses phases du comportement de la barre.

Le chargement de la barre comporte plusieurs étapes :

- une première étape est réalisée à déplacement imposé positif croissant ;
- une deuxième étape correspond à une décharge, le déplacement imposé demeurant positif ;

- au cours de la troisième étape, le déplacement est à nouveau augmenté ;
- la quatrième étape correspond, à nouveau, à une décharge, le déplacement imposé est, cette fois, autorisé à prendre des valeurs négatives ;
- enfin, la dernière étape correspond à un accroissement du déplacement imposé jusque dans les valeurs positives.

Sous ce chargement, la réponse de la barre présente également différentes phases.

- la première phase correspond à la réponse élastique de la barre ;
- la deuxième phase s'initie à partir d'un effort $F = 200 \text{ N/mm}$ correspondant à une contrainte dans la barre de 2 MPa, contrainte limite élastique du matériau constitutif de la barre. À partir de cet instant, l'endommagement diffus évolue : la décharge entreprise au cours de cette phase de chargement témoigne de l'évolution des propriétés élastiques du matériau. Cette phase d'endommagement diffus, caractérisée par des champs de contrainte et de déformation homogènes se poursuit jusqu'à atteindre l'état de contrainte correspondant à l'introduction de la surface de discontinuité dans les éléments affaiblis. Les surfaces de discontinuité sont alors introduites dans les éléments affaiblis et le champ de contrainte perd son homogénéité. Notons que, à ce stade, la barre n'a pas encore atteint le point limite de la courbe effort/déplacement imposé, point limite correspondant à la charge limite ultime de la barre. L'endommagement diffus poursuit alors son évolution précédant l'apparition des surfaces de discontinuité qui, au fur et à mesure de l'augmentation du déplacement imposé, se propagent d'élément en élément jusqu'à atteindre le bord opposé de la barre.
- La barre a alors atteint l'effort limite ultime et entame la phase adoucissante de son comportement. Le déplacement imposé augmentant, les discontinuités introduites « s'ouvrent », le saut de déplacement dans la direction normale augmente. Si une décharge est entamée dans cette phase du comportement, les discontinuités ouvertes dans la phase précédente se referment jusqu'à atteindre le point ($U = 0, F = 0$).
- Si la décharge est poursuivie en compression, les discontinuités créées dans la phase de traction sont totalement refermées. En raison du caractère unilatéral du comportement de ces dernières, les surfaces de discontinuité sont totalement inactives, seul le matériau hors discontinuité est sollicité. Le module de chargement en compression est différent du module de décharge ; on observe en effet une rupture de pente au point ($U = 0, F = 0$) correspondant à une restauration de rigidité lors du passage en compression.

Ainsi, la première phase de la réponse en compression se fait avec un module d'élasticité apparent correspondant au module du matériau hors discontinuité endommagé par la première phase de chargement en traction.

Si le chargement est poursuivi en compression, le seuil d'endommagement est à nouveau atteint et l'endommagement diffus évolue à nouveau.

- La dernière phase de la réponse correspond au rechargement de la barre. Tant que le matériau demeure en compression (soit tant que $U < 0$), la recharge de la barre se fait avec le module d'élasticité endommagé à la fois par la phase de traction et la phase de compression.

Une fois le point ($U = 0, F = 0$) atteint, la barre est à nouveau soumise à de la

traction ; les surfaces de discontinuité - également sollicitées en traction - sont à nouveau actives et se réouvrent. Néanmoins, cette phase de réouverture des surfaces de discontinuité se fait sans évolution de l'endommagement localisé. Il est important de noter que cette phase se caractérise par un module d'élasticité apparent différent de celui avec lequel la fermeture des discontinuités s'est produite. Ceci s'explique par le fait que le module d'élasticité apparent de la barre fait intervenir le comportement des surfaces de discontinuité mais également celui du matériau hors discontinuité. L'endommagement de ce dernier ayant évolué dans la phase de compression, le module d'élasticité apparent de la barre s'en trouve modifié. Notons que ceci n'aurait pas pu être reproduit si le matériau hors discontinuité avait été supposé non dissipatif.

Enfin, si le chargement est poursuivi, la barre entre à nouveau dans la phase adoucissante de son comportement dès lors que l'effort a atteint la valeur correspondant à l'initiation de la décharge précédente. À partir de cet instant, le saut de déplacement sur les surfaces de discontinuité évolue à nouveau de même que l'endommagement localisé.

La figure 4.24 donne, pour l'un des éléments affaiblis, l'évolution du saut de déplacement dans la direction normale \mathbf{n} en fonction du déplacement imposé.

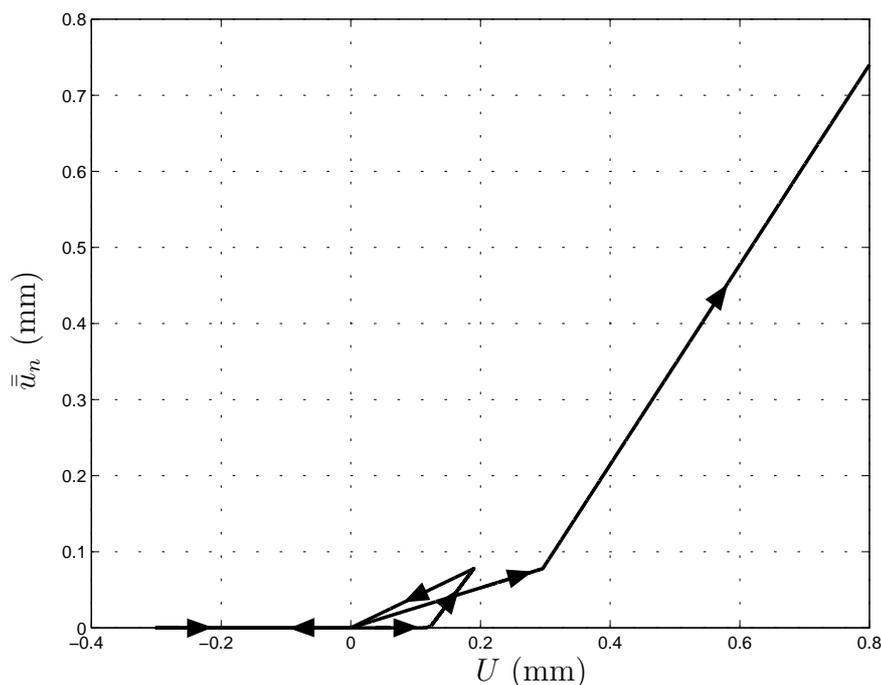


Figure 4.24: *Évolution du saut de déplacement sur l'élément affaibli en fonction du déplacement imposé*

On retrouve une première phase où le saut de déplacement n'évolue pas ; les surfaces de discontinuité n'ont alors pas encore été créées. Lorsque le déplacement imposé est tel que la contrainte atteinte dans l'élément considéré correspond au critère d'introduction de la surface de discontinuité, le saut de déplacement commence à évoluer, la surface de discontinuité « s'ouvre ». Lorsque la décharge est entreprise,

la surface de discontinuité se referme alors très clairement. Pour des déplacements imposés négatifs, le saut de déplacement demeure nul, la surface de discontinuité est fermée et inactive.

Lorsque le déplacement imposé atteint à nouveau, lors de la phase de recharge de la barre, des valeurs positives, la surface de discontinuité se réouvre à nouveau jusqu'à atteindre la valeur d'ouverture atteinte à l'initiation de la phase de décharge. À partir de cet instant, le saut de déplacement évolue plus rapidement, l'évolution de l'endommagement sur la surface de discontinuité a repris.

Notons que le comportement de la barre reproduit ici est très clairement anisotrope. Cette anisotropie est induite par le comportement unilatéral des surfaces de discontinuité mais également par la prise en compte d'une dissipation volumique dans le matériau hors discontinuité. L'approche à discontinuité de déplacement a ainsi permis de construire un modèle d'endommagement anisotrope pour lequel l'anisotropie n'est pas inhérente à la construction du modèle mais induite par l'apparition des surfaces de discontinuité. Il est également important de noter que cette anisotropie est ici décrite à l'aide de relativement peu de paramètres (les paramètres indiqués dans le tableau 4.10).

Conclusion

Cet exemple a permis de mettre en évidence l'intérêt de la prise en compte d'une dissipation volumique. Nous avons montré que, avec relativement peu de paramètres (les paramètres des modèles continus et discrets), il est possible de reproduire un comportement complexe anisotrope prenant en compte la fermeture des fissures, le caractère unilatéral de ces dernières et la restauration, en compression, des propriétés élastiques du matériau hors discontinuité. Ce type de comportement n'aurait pas pu être reproduit sans la prise en compte de phénomènes de dissipation volumique.

4.2.3.4 Essai de flexion : mise en évidence de l'intérêt de la prise en compte d'une dissipation volumique

L'objet de cet exemple est de mettre en évidence l'intérêt de la prise en compte de la combinaison de deux types de dissipation. Pour ce faire, le calcul d'une même structure soumise à un chargement complexe est mené en considérant deux modélisations différentes :

- la première prend en compte la combinaison d'une dissipation surfacique au niveau des bandes de localisation et d'une dissipation volumique ayant lieu dans le matériau hors discontinuité ;
- la deuxième considère que la dissipation dans la structure a lieu uniquement au niveau des bandes de localisation ; le comportement du matériau hors discontinuité est supposé demeurer élastique.

La structure considérée est une poutre entaillée telle que représentée à la figure 4.25. Le maillage considéré afin de discrétiser la structure est le même pour les deux modélisations et est donné à la figure 4.26, les conditions aux limites sont également précisées sur cette figure. Le chargement auquel est soumise la poutre consiste à imposer les déplacements dans les directions x et y sur le bord droit de la poutre selon le trajet de chargement donné à la figure 4.27.

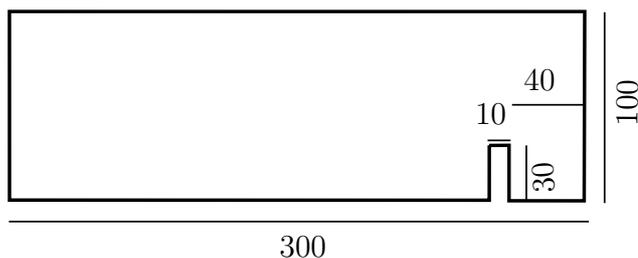


Figure 4.25: *La structure considérée, ses dimensions (en mm)*

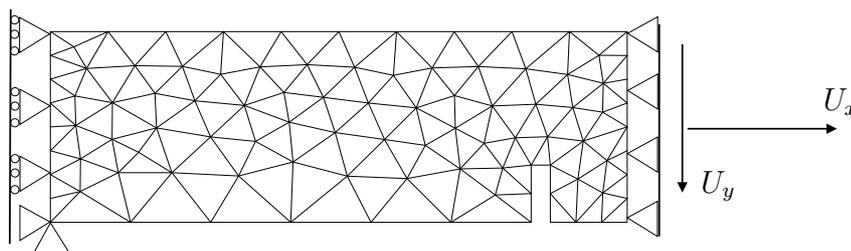


Figure 4.26: *Maillage considéré et conditions aux limites*

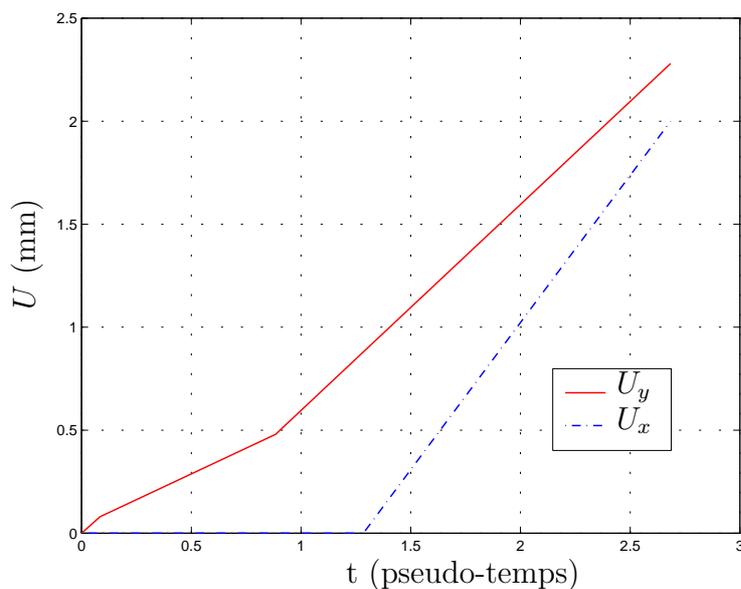


Figure 4.27: *Chargement au cours du temps de la poutre : évolution des déplacements imposés U_x et U_y*

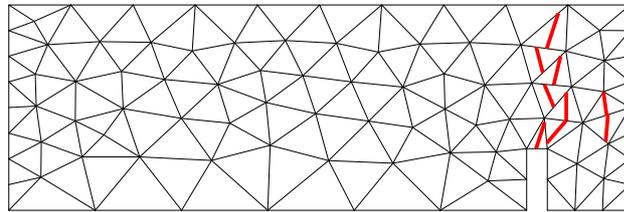
La première modélisation considérée prend en compte deux types de dissipation. Les paramètres des modèles continus et discrets sont donnés dans le tableau 4.11.

Les surfaces de discontinuité à la fin du chargement ($U_x = 2.0$ mm, $U_y = 2.28$ mm) sont représentées sur la figure 4.28. Ces discontinuités apparaissent essentiellement durant la phase pendant laquelle les déplacements U_x et U_y évoluent simultanément. La phase de flexion précédente voit essentiellement se produire de

Modèle continu	
Module d'Young	38 GPa
Coefficient de Poisson	0.0
$\bar{\sigma}_f$	0.5 MPa
\bar{K}	1000 MPa
Modèle discret	
$\bar{\bar{\sigma}}_f$	2.55 MPa
$\bar{\bar{\sigma}}_s / \bar{\bar{\sigma}}_f$	0.3
$\bar{\beta}_f$	2.55 MPa/mm

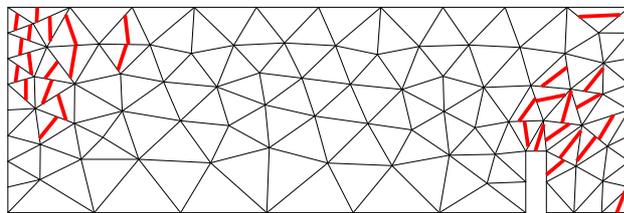
Tableau 4.11: Paramètres des modèles continus et discrets

la dissipation diffuse par évolution de l'endommagement continu dans le matériau.

Figure 4.28: Surfaces de discontinuité pour la modélisation avec dissipation volumique ($U_x = 2.0$ mm, $U_y = 2.28$ mm)

La deuxième modélisation suppose que la dissipation dans la structure est uniquement liée à l'apparition de bandes de localisation : le matériau hors discontinuité est ainsi supposé demeurer élastique. Les propriétés élastiques du matériau et les paramètres du modèle discret sont les mêmes que pour la modélisation précédente (voir tableau 4.11). Pour ce type de modélisation, l'apparition des surfaces de discontinuité a lieu beaucoup plus tôt que dans le cas précédent.

La figure 4.29 donne la position et l'orientation des surfaces de discontinuité pour un état de déplacement imposé tel que $U_x = 0$ mm et $U_y = 0.08$ mm (« pseudo-temps » $t = 0.084$).

Figure 4.29: Surfaces de discontinuité sans dissipation volumique ($U_x = 0$ mm, $U_y = 0.08$ mm)

Ces résultats permettent de mettre en avant le fait - plus ou moins trivial - que la prise en compte d'une dissipation volumique retarde notablement l'apparition des

surfaces de discontinuité. Ce retard est, en grande partie, dépendant des paramètres de la loi d'érouissage du modèle continu. La conséquence, dans le cas d'un chargement complexe, est que le trajet final des surfaces de discontinuité et le mode de rupture de la structure peuvent se trouver complètement modifiés. L'évaluation de la charge limite ultime et de l'énergie dissipée se trouve alors, également, totalement modifiée.

Pour des structures massives fortement hyperstatiques et soumises à des chargements complexes, comme celles communément rencontrées dans le domaine du Génie Civil, l'intérêt de la prise en compte d'une dissipation volumique semble évidente. Pour ces structures, la taille des « process-zones » et l'énergie dissipée dans ces dernières ne sont plus négligeables (contrairement aux structures minces). Ces « process-zones » engendrent localement des redistributions d'efforts qui modifient l'orientation des macrofissures apparaissant plus tardivement et responsables de la rupture. La prise en compte de la dissipation diffuse *i.e.*, en d'autres termes, d'une microfissuration précédant l'apparition de macrofissures, assure une meilleure représentation du comportement des structures, de leur mode de rupture, ...

L'exploitation des résultats fournis par cet essai permet d'étendre encore les conclusions liées à la prise en compte combinée de deux types de dissipation. La figure 4.30 représente l'évolution au cours du temps des variables permettant de quantifier les endommagements continu et discret :

- la variable interne $\bar{\mu}$ associée au modèle continu et permettant de quantifier l'endommagement continu ;
- la variable \bar{Q}_{nn} correspondant à la complaisance dans la direction \mathbf{n} de la surface de discontinuité et permettant également de qualifier l'état d'endommagement de la surface de discontinuité.

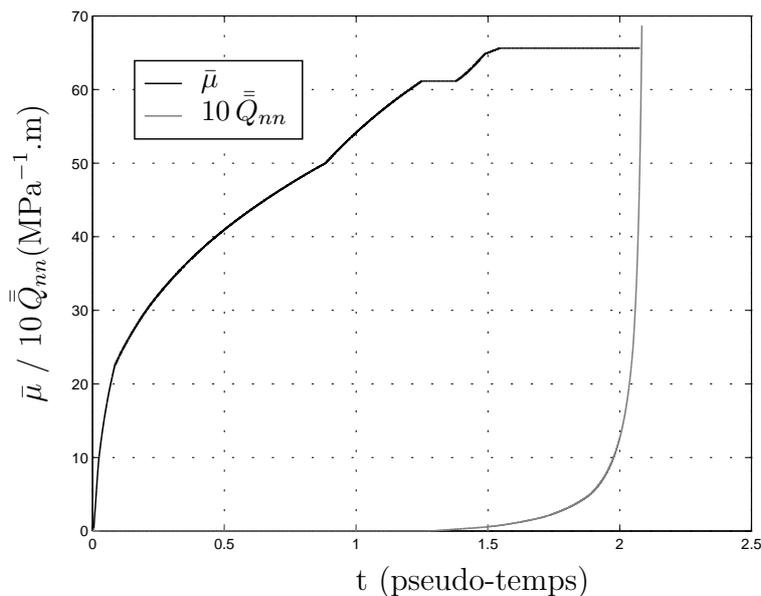


Figure 4.30: Évolution au cours du temps des endommagements continu et localisé dans un élément

Après une première phase correspondant au développement de l'endommagement diffus - la surface de discontinuité n'a pas encore été introduite - l'introduction de la surface de discontinuité se traduit par le début de l'évolution de l'endommagement localisé, l'endommagement continu demeurant dans un premier temps constant.

Puis, plus tard au cours du chargement, l'évolution de l'endommagement continu reprend, l'endommagement localisé continuant, parallèlement, à évoluer. Ceci permet de mettre en évidence le fait que les deux mécanismes d'endommagement et donc de dissipation peuvent coexister et se développer simultanément dans un même élément. Ceci s'explique par le fait que la complexité du chargement et de la structure conduit à des redistributions d'efforts qui ont pour conséquence de faire évoluer le champ de repères principaux, les axes principaux des contraintes tournent au cours du chargement. Ainsi, il est tout à fait envisageable, sous certaines conditions de chargement, que le critère d'introduction de la surface de discontinuité soit à nouveau atteint dans un élément dans lequel une discontinuité est déjà présente. Ceci nous conduit à évoquer des perspectives à ce travail. La simulation de structures complexes soumises à des chargements complexes nécessite de pouvoir prendre en compte plusieurs surfaces de discontinuité dans un même élément.

4.3 Conclusion

Nous avons, dans ce chapitre, appliqué les résultats présentés aux chapitres 2 et 3 à deux classes de comportement : un comportement élasto-plastique et un comportement élasto-endommageable.

Les développements théoriques mais également numériques relatifs à chacun des deux modèles ont été explicités.

Le caractère régularisant de l'approche à discontinuité a été mis en avant à travers quelques exemples et l'intérêt de la prise en compte d'une dissipation volumique a également été souligné.

Il apparaît, d'un point de vue théorique, que la surface de discontinuité, qui constitue l'outil de régularisation de l'approche proposée ici, peut être interprétée comme le lien entre deux échelles différentes de dissipation : l'échelle de la structure et l'échelle des bandes de localisation. La surface de discontinuité permet de condenser, à l'échelle de la structure, l'information relative aux échelles fines dont le comportement ne peut pas être décrit par les modèles continus classiques.

D'un point de vue numérique, nous avons vu que l'intégration du comportement de la surface de discontinuité nécessite de traiter des comportements rigides-anélastiques. Une technique d'intégration a ici été proposée. En revanche, ces performances ne sont pas garanties dans toutes les configurations : la résolution de l'équation d'équilibre local (équation de continuité des tractions) constitue, dans certains cas, un facteur limitant du choix du pas de temps.

La similitude entre les cas d'interfaces rigides-anélastiques traités, ici, et les problèmes de contact avec frottement nous conduit à imaginer une alternative à la résolution de l'équation d'équilibre local. L'idée serait de résoudre cette équation en utilisant le formalisme développé pour les méthodes de Lagrangien augmenté [Simo et Laursen, 1992], couramment utilisées pour les problèmes de contact.

Conclusions et perspectives

L'objectif de ce travail était de proposer et construire une base théorique et une modélisation numérique permettant de régler les problèmes numériques liés à la localisation des déformations qui soient :

- adaptées à une large classe de matériaux caractérisés par des modes de rupture différents ;
- facilement mises en œuvre dans un code de calcul à architecture classique ;
- adaptées à l'étude des structures massives de grande taille caractéristiques du domaine du Génie Civil.

L'approche développée ici propose d'étendre les modèles à discontinuités fortes à la prise en compte combinée de deux types de dissipation :

- une dissipation volumique représentative des phénomènes de dissipation ayant lieu dans la « masse » de la structure et pouvant être représentés, de façon homogénéisée, par un modèle continu classique ;
- une dissipation surfacique rendant compte à l'échelle de la structure de phénomènes dissipatifs ayant lieu à l'échelle des bandes de localisation et pris en compte par l'introduction d'un modèle de type « discret ».

Nous avons montré que la combinaison de ces deux types de dissipation peut se faire dans le cadre combiné de la thermodynamique des modèles continus et de la thermodynamique des interfaces. Ceci nous a conduit à mettre en évidence le parallèle pouvant être fait entre la construction du modèle continu et celui de l'interface ou surface de discontinuité.

Une question importante réside dans l'écriture de la condition d'introduction de la surface de discontinuité. Nous avons discuté les différentes possibilités et montré que le fait de se placer dans le cadre de la thermodynamique des interfaces permet de considérer la surface de discontinuité, dans une perspective multiéchelle, comme le lien entre deux échelles de dissipation. La surface de discontinuité apparaît alors comme un outil permettant de condenser l'information des échelles inférieures vers l'échelle de la structure. L'écriture de la condition d'introduction de la surface de discontinuité dépend, alors, des phénomènes dissipatifs localisés qui souhaitent être pris en compte.

Une part importante du travail a également consisté en l'implantation numérique, dans un cadre éléments finis standard - le code de calcul *FEAP* développé par le Pr. R.L. TAYLOR à Berkeley - du modèle. Ceci a été réalisé en s'appuyant sur la méthode des modes incompatibles. Les discontinuités de déplacement ne sont pas prises en compte comme telles, un enrichissement du champ de déformation

par des fonctions singulières permet de rendre compte de l'apparition, dans un élément, d'une surface de discontinuité. Aucune contrainte de continuité des surfaces de discontinuité d'un élément à son voisin n'étant imposée, l'enrichissement a lieu au niveau local sans affecter l'architecture globale du code de calcul. Ceci consistait l'un des objectifs fixés à ce travail.

Les aspects théoriques et numériques ont été abordés dans un cadre très général sans supposer, *a priori*, de comportements de matériaux particuliers. Deux applications à des modèles élasto-plastique et élasto-endommageable ont été présentées.

Dans le cadre de la plasticité, l'écriture des modèles continus et discrets demeure classique. L'implantation numérique a été réalisée sur des éléments à 4 nœuds. L'originalité du travail a été de coupler l'approche à discontinuité de déplacement à la méthode B-bar permettant de gérer les problèmes de blocage liés à la quasi-incompressibilité du matériau.

Dans le cadre de l'endommagement, le formalisme proposé pour l'écriture du modèle continu permet l'obtention du module tangent ce qui autorise une étude de localisation. Ceci constitue l'écueil de certains modèles d'endommagement pour lesquels le module tangent n'est pas disponible. Le modèle discret a été construit dans un formalisme similaire adapté aux critères multisurfaces.

Les simulations numériques présentées ont permis de mettre en avant le caractère régularisant de l'approche adoptée. L'intérêt de la prise en compte de deux types de dissipation a également été mis en évidence.

Cependant, certaines réserves ont été émises quant à l'efficacité de la résolution de l'équation d'équilibre local.

Ceci nous conduit à évoquer les diverses perspectives qui pourraient être envisagées à ce travail à plus ou moins long terme.

- Nous avons évoqué les difficultés de résolution au niveau local liées, en particulier, au caractère rigide de l'interface. Une technique de résolution a été proposée. Cependant, ses performances, dans certaines configurations, restent limitées. Les problèmes traités ici présentent une certaine similitude avec les problèmes de contact : la rigidité de l'interface peut être assimilée à la condition de non interpénétrabilité des solides en mécanique du contact. Ainsi, une alternative envisageable à la résolution de l'équation d'équilibre local pourrait être développée dans le formalisme des méthodes de Lagrangien augmenté, utilisées pour la résolution numérique des problèmes de contact.
- Nous avons également noté que, par le jeu des redistributions d'efforts liées, entre autres, à la complexité des chargements considérés, il peut s'avérer nécessaire (la condition d'introduction de la surface de discontinuité ayant été atteinte) d'introduire de nouvelles surfaces de discontinuité dans des éléments dans lesquels ces dernières sont déjà présentes. Ceci suppose d'être capable de gérer plusieurs surfaces de discontinuité, en particulier leur interaction, dans un même élément. Une telle démarche a déjà été envisagée pour des comportements ne prenant pas en compte la phase de dissipation volumique [Manzoli et Shing, 2003]. Une extension à la prise en compte combinée de deux types de dissipation pourrait être envisagée.

– *Vers une analyse multiéchelle*

Nous avons vu que les modèles développés ici supposent l'introduction d'une loi d'interface permettant de condenser, à l'échelle de la structure, les phénomènes de dissipation ayant lieu à des échelles beaucoup plus fines. L'identification de ce type de loi nécessite donc une connaissance des phénomènes ayant lieu à des échelles fines du matériau : l'échelle des bandes de localisation. La question se pose de l'identification de la loi d'interface à introduire afin de reproduire au mieux, à l'échelle de la structure, les phénomènes dissipatifs localisés.

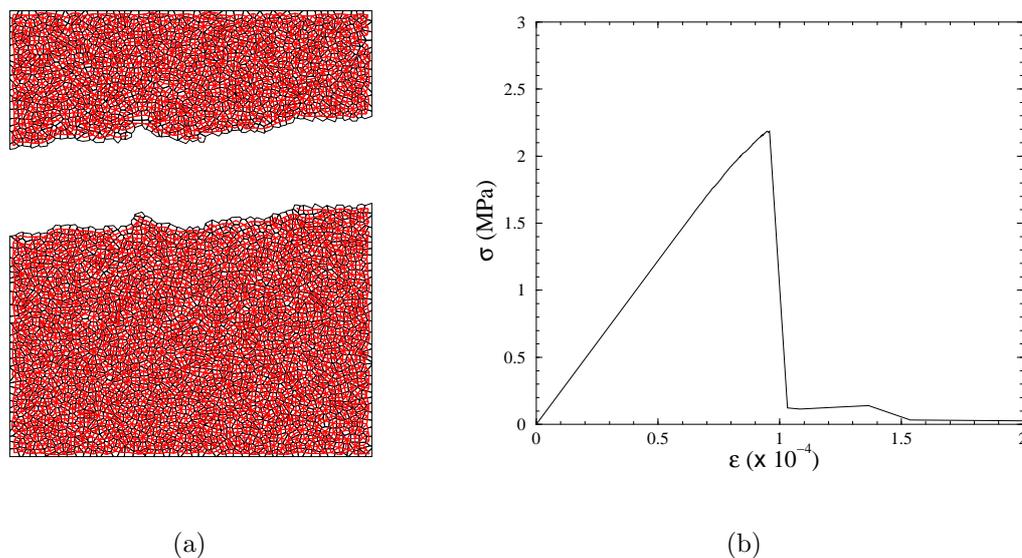
L'une des possibilités pouvant être envisagée, afin de contruire les lois d'interface, consiste en l'observation expérimentale fine des mécanismes dissipatifs localisés.

Une autre possibilité consiste à envisager, dans une approche que nous pourrions qualifier de multiéchelle, d'identifier le comportement « macroscopique » de l'interface par des techniques numériques permettant de décrire les matériaux à l'échelle de leurs hétérogénéités. Parmi ces méthodes, les modèles discrets dont une version est développée au *LMT – Cachan* [Ibrahimbegović et Delaplace, 2003] (voir [Brancherie et al., 2002] pour une comparaison des deux modèles). Ce type de modèle permet, par la prise en compte des hétérogénéités du matériau, de qualifier le comportement de ce dernier dans un cadre statistique. Le matériau est représenté par un assemblage de particules indéformables liées par un réseau de poutres dont les propriétés mécaniques (dans le cas présent, la contrainte à rupture) sont supposées réparties de façon aléatoire. Une analyse à l'échelle de la bande de localisation par ces approches discrètes pourrait nous permettre d'appréhender le comportement dissipatif « macroscopique » de l'interface. La figure 5.1 représente un résultat caractéristique fourni par les modèles discrets. Le test réalisé ici consiste en un essai de traction sur un carré de 10 cm de côté et d'épaisseur unitaire. La figure 5.1(a) représente le volume considéré après rupture de ce dernier. La figure 5.1(b) donne la courbe de réponse homogénéisée de l'échantillon.

Notons que les modèles discrets permettent de décrire finement le mode de rupture des matériaux. Une étude des trajets des fissures, de leur tortuosité, de leur rugosité peut être raisonnablement envisagée par le biais des modèles discrets.

– Dans l'optique multiéchelle déjà évoquée précédemment, une approche couplant les modèles discrets et les modèles à discontinuité forte pourrait être envisagée. Ceci pourrait permettre des zooms structuraux sur des zones sur lesquelles une information précise concernant le trajet de fissuration, son profil, ... est nécessaire. Ces zones pourraient être calculées par des modèles discrets qui, comme nous l'avons vu, autorisent une description fine du mode de rupture, le reste de la structure étant modélisé à l'aide des modèles à discontinuité. Une difficulté se pose alors : comment définir les conditions aux limites de l'un et l'autre des deux modèles aux interfaces modèle discret/modèle à discontinuité ?

– Dans le cas des matériaux à rupture fragile, les surfaces de discontinuité introduites peuvent être interprétées, nous l'avons vu, comme des fissures cohésives.

Figure 5.1: *Essai de traction*

Néanmoins, si les surfaces de discontinuité ont une interprétation physique aisée, l'utilisation des modèles à discontinuité pour des analyses multiphysiques des structures, n'est pas encore possible. Dans cette perspective, des informations telles que l'espacement des fissures, leur ouverture, leur tortuosité, ... sont nécessaires.

Dans l'état actuel, l'espacement des fissures, et donc également leur ouverture, dépend de la finesse du maillage et ce, essentiellement parce que, seule une surface de discontinuité est autorisée par élément.

La perspective, déjà évoquée précédemment, d'étendre ces modèles à la prise en compte de plusieurs surfaces de discontinuité dans un même élément paraît donc nécessaire à l'utilisation des modèles à discontinuité dans le cadre de l'analyse des structures dans leur environnement soit sous des sollicitations autres que purement mécaniques, par exemple, des sollicitations chemo-hydro-mécaniques.

Par ailleurs, une deuxième perspective envisageable afin d'affiner les informations telles que l'espacement des fissures ou la description de la « process-zone » précédant l'apparition de la surface de discontinuité consiste à enrichir, localement, les interpolations. Ceci peut passer par des techniques de remaillage ou maillage adaptatif permettant d'augmenter le nombre d'éléments et donc également la finesse de la représentation des champs. Cependant, ces méthodes restent coûteuses. Une alternative intéressante à ces techniques de remaillage consiste à coupler les méthodes éléments finis classiques aux méthodes sans maillage [Nayroles et al., 1992], [Li et Liu, 2002]. Dans ce cas, le maillage éléments finis reste inchangé, l'enrichissement de la description des champs est obtenue en ajoutant des particules dans les zones où une meilleure précision est souhaitée. Ce type de couplage a déjà été envisagé par divers auteurs [Liu et al., 1997], [Huerta et Fernández-Méndez, 2000]. L'idée de combiner les

méthodes sans maillage aux modèles à discontinuité forte pourrait permettre d'accéder à une meilleure représentation des champs de déformation et ainsi, également, une meilleure représentation de la localisation des déformations et de l'apparition des surfaces de discontinuité.

- Enfin, les bases théoriques des modèles à discontinuité forte avec combinaison de deux types de dissipation ayant été jetées, une perspective à plus court terme consisterait à étendre l'implantation numérique à des problèmes tridimensionnels. Si une telle extension est assortie d'une application à des lois de comportement plus représentatives du comportement des matériaux du domaine du Génie Civil, des simulations numériques d'ouvrages massifs pourraient être envisagées et, espérons-le, fournir des résultats prédictifs en terme de calcul des charges limites ultimes, énergie dissipée, et également modes de rupture.

Bibliographie

- [Allix et Deü, 1997] O. Allix et J.F. Deü (1997). Delay-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering Transactions*, 45 :29–46.
- [Armero et Garikipati, 1995] F. Armero et K. Garikipati (1995). Recent advances in the analysis and numerical simulation of strain localization in inelastic solids. In E.D.R.J; Oñate Owen et E. Hinton, editors, *Proceedings of Computational Plasticity IV*, pages 547–561, Barcelona. CIMNE.
- [Asaro, 1983] R. Asaro (1983). Micromechanics of crystals and polycrystals. *Advanced in Applied Mechanics*, 23 :1–115.
- [Balabane, 1993] M. Balabane (1993). *Analyse 2, Théorie élémentaire des distributions, applications aux équations de Laplace*. Cours de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- [Barenblatt, 1962] G.I. Barenblatt (1962). The mathematical theory of equilibrium crack in the brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 7 :55–125.
- [Bascoul et al., 1993] A. Bascoul, E.H. Benaija, Y. Berthaud, C. Fond, M. Massat, et J.M. Torrenti (1993). Analysis of localisation in concrete and rocks through stereophotogrammetry, speckle laser and replica. *Cement and Concrete Research*, 26(6) :1340–1350.
- [Bažant et Oh, 1983] Z.P. Bažant et B.H. Oh (1983). Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, 16 :155–177.
- [Belytschko et Black, 1999] T. Belytschko et T. Black (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5) :601–620.
- [Belytschko et al., 1988] T. Belytschko, J. Fish, et B.E Engleman (1988). A finite element with embedded localization zones. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70 :59–89.
- [Benallal et al., 1991] A. Benallal, R. Billardon, et G. Geymonat (1991). Bifurcation and localization in rate-independent materials. Some general considerations. In Q.S. Nguyen, editor, *Bifurcation and stability of dissipative systems*, pages 1–44. Springer Verlag.
- [Berthaud, 1987] Y. Berthaud (1987). *Mesure de l'endommagement du béton par une méthode ultrasonore*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- [Berthaud, 1991] Y. Berthaud (1991). *Mesures et modélisation de l'endommagement des matériaux*. Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris VI.

- [Borja et al., 2000] R.I Borja, R.A Regueiro, et T.Y Lai (2000). FE modeling of strain localization in soft rock. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, pages 335–343.
- [Brancherie et Ibrahimbegović, 2003] D. Brancherie et A. Ibrahimbegović (2003). Modélisation « macro » de phénomènes dissipatifs localisés à l'échelle « micro » : formulation et implantation numérique. In 6^e *Colloque National en Calcul des Structures*, Giens.
- [Brancherie et al., 2002] D. Brancherie, A. Ibrahimbegović, et A. Delaplace (2002). Formulation and finite element implementation of continuum/discrete strain softening. In H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer, et J. Eberhardsteiner, editors, *Fifth Congress on Computational Mechanics*, Vienna, Austria.
- [Butterfield et al., 1970] R. Butterfield, R. Harkness, et K.Z. Andrawes (1970). A stereophotogrammetric method for measuring displacement fields. *Géotechnique*, 20(3) :308–314.
- [Carol et Willam, 1997] I. Carol et K. Willam (1997). Application of analytical solutions in elasto-plasticity to localization analysis of damage models. In D.R.J. Owen, E. Oñate, et E. Hinton, editors, *Computational plasticity V. Fundamentals and Applications*, pages 957–964, Barcelona.
- [Chambon et al., 2001] R. Chambon, D. Caillerie, et T. Matsushima (2001). Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials, localization studies. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :8503–8527.
- [Chrysochoos et Louche, 2000] A. Chrysochoos et H. Louche (2000). An infrared image processing to analyse the calorific effects accompanying strain localisation. *International Journal of Engineering Science*, 38 :1759–1788.
- [Colliat-Dangus, 1986] J.L. Colliat-Dangus (1986). *Comportement des matériaux granulaires sous fortes contraintes*. Thèse de doctorat, USMG-INPG.
- [Cosserat et Cosserat, 1909] E. Cosserat et F. Cosserat (1909). *Théorie des corps déformables*. Hermann et fils.
- [Crisfield, 1983] M.A. Crisfield (1983). An arc-length method including the line searches and accelerations. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 19 :1269–1289.
- [de Borst et Muhlhaus, 1992] R. de Borst et H. Muhlhaus (1992). Gradient dependent plasticity : formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35 :521–540.
- [De Borst et al., 1993] R. De Borst, L.J. Sluys, H.-B. Mülhaus, et J. Pamin (1993). Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. *Engineering Computations*, 2(10) :99–121.
- [Desrues, 1984] J. Desrues (1984). *La localisation de la déformation dans les matériaux granulaires*. Thèse de doctorat, USMG-INPG Grenoble.
- [Desrues et Chambon, 2002] J. Desrues et R. Chambon (2002). Shear band analysis and shear moduli calibration. *International Journal of Solids and Structures*, 39 :3757–3776.

-
- [Deü, 1997] J.F. Deü (1997). *Rupture des composites stratifiés sous chargement dynamique : apport des méso-modèles avec endommagement retardé*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- [Dubé et al., 1996] J.F. Dubé, G. Pijaudier-Cabot, et C. La Borderie (1996). A rate dependent damage model for concrete in dynamics. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, pages 939–947.
- [Dugdale, 1960] D.S. Dugdale (1960). Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8 :100–104.
- [Dvorkin et al., 1990] E.N Dvorkin, A.M Cuitiño, et G. Gioia (1990). Finite element with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30 :541–564.
- [Engelen et al., 2003] R.A.B. Engelen, M.G.D Geers, et F.P.T Baaijens (2003). Non-local implicit gradient-enhanced elasto-plasticity for the modelling of softening behaviour. *International Journal of Plasticity*, 19(4) :403–433.
- [Frémond, 1987] M. Frémond (1987). Adhérence des solides. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 6(3) :383–407.
- [Frémond et Nedjar, 1996] M. Frémond et B. Nedjar (1996). Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International Journal of Solids and Structures*, 33(8) :1083–1103.
- [Garikipati, 1996] K. Garikipati (1996). *On strong discontinuities in inelastic solids and their numerical simulation*. Thèse de doctorat, Stanford University.
- [Garikipati et Hughes, 2000] K. Garikipati et T.J.R Hughes (2000). A variational multiscale approach to strain localization - formulation for multidimensional problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188 :39–60.
- [Germain, 1973] P. Germain (1973). La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus : Première partie : théorie du second gradient. *Journal de Mécanique*, 12 :235–274.
- [Govinjee et al., 1995] S. Govinjee, G.J Kay, et J.C Simo (1995). Anisotropic modeling and numerical simulation of brittle damage in concrete. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 :3611–3633.
- [Hadamard, 1903] J. Hadamard (1903). *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*. Hermann, Paris.
- [Hadley, 1975] K. Hadley (1975). Azimuthal variation of dilatancy. *Journal of Geophysics Research*, 80 :4845–4850.
- [Haied et al., 2000] A. Haied, D. Kondo, et J.P. Henry (2000). Strain localization in fontainebleau sandstone. *Mechanics of Cohesive and Frictional Materials*, 5(3) :239–253.
- [Hild et al., 2002] F. Hild, B. Raka, M. Baudequin, S. Roux, et F. Cantelaube (2002). Multiscale displacement field measurements of compressed mineral-wool samples by digital image correlation. *Applied optics*, 41(32) :6815–6828.
- [Hill, 1958] R. Hill (1958). A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of Mechanics and Physics of solids*, 6 :236–249.
-

- [Hill, 1962] R. Hill (1962). Acceleration waves in solids. *J. Mech. Phys. Solids.*, 10 :1–16.
- [Hillerborg et al., 1976] A. Hillerborg, M. Modeer, et P.E Petersson (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6 :773–782.
- [Huerta et Fernández-Méndez, 2000] A. Huerta et S. Fernández-Méndez (2000). Enrichment and coupling of the finite element and meshless methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48 :1615–1636.
- [Hughes, 1987] T.J.R Hughes (1987). *The Finite Element Methods*. Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, N.J.
- [Ibrahimbegović et Brancherie, 2003] A. Ibrahimbegović et D. Brancherie (2003). Combined hardening and softening constitutive model of plasticity : precursor to shear slip line failure. *Computational Mechanics*, 31 :88–100.
- [Ibrahimbegović et Delaplace, 2003] A. Ibrahimbegović et A. Delaplace (2003). Microscale and mesoscale discrete models for dynamic fracture of structures built of brittle material. *Computers and Structures*, 81(12) :1255–1266.
- [Ibrahimbegović et al., 1998] A. Ibrahimbegović, F. Gharzeddine, et L. Chorfi (1998). Classical plasticity and viscoplasticity models reformulated : theoretical basis and numerical implementation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42 :1499–1535.
- [Ibrahimbegović et al., 2003] A. Ibrahimbegović, D. Markovic, et D. Brancherie (2003). Micro-macro modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures. In *Second MIT Conference*, Boston, USA.
- [Ibrahimbegović et Wilson, 1991] A. Ibrahimbegović et E.L Wilson (1991). A modified method of incompatible modes. *Communications in Applied Numerical Methods*, 7 :187–194.
- [Jirásek, 1998] M. Jirásek (1998). Embedded crack models for concrete fracture. In R. de Borst, H.N. Mang Bicanic, et G. Meschke, editors, *Computational Modelling of Concrete Structures (EURO-C)*, pages 291–300, Badgastein, Austria. Balkema, Rotterdam.
- [Jirásek, 2000] M. Jirásek (2000). Comparative study on elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188 :307–330.
- [Klarbring, 1990] A. Klarbring (1990). Derivation and analysis of rate boundary-value problems of frictional contact. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 9(1) :53–85.
- [Klisinski et al., 1991] M. Klisinski, K. Runesson, et S. Sture (1991). Finite element with inner softening band. *Journal of Engineering Mechanics*, 117(3) :575–587.
- [Laouafa et Darve, 2002] F. Laouafa et F. Darve (2002). Modelling of slope failure by a material instability mechanism. *Computers and Geotechnics*, 29 :301–325.
- [Larsson et al., 1995] R. Larsson, K. Runesson, et M. Akesson (1995). Embedded localization band based on regularized strong discontinuity. In D.R.J. Owen, E. Oñate, et E. Hinton, editors, *Computational plasticity IV. Fundamentals and Applications*, pages 957–964, Barcelona.

-
- [Lemaitre, 1992a] J. Lemaitre (1992a). *A course on damage mechanics*. Springer-Verlag.
- [Lemaitre, 1992b] J. Lemaitre (1992b). Formulation de l'endommagement des interfaces. *C.R.A.S., Série II*, 315 :1047–1050.
- [Li et Liu, 2002] S. Li et W.K. Liu (2002). Meshfree and particle methods and their applications. *Applied Mechanics Review*, 55(1) :1–34.
- [Liu et al., 1997] W.K. Liu, R.A. Uras, et Y. Chen (1997). Enrichment of the finite element method with reproducing kernel particle method. *Journal of Applied Mechanics*, 64 :861–870.
- [Lockner et al., 1992] D.A. Lockner, J.D. Byerlee, V. Kuksenko, A. Ponomarev, et Sidorin A. (1992). *Observations of quasistatic fault growth from acoustic emissions*, chapter 1, pages 4–31. Academic Press.
- [Lorentz, 1999] E. Lorentz (1999). *Lois de comportement à gradients de variables internes : construction, formulation variationnelle et mise en œuvre numérique*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- [Louche et Chrysochoos, 2001] H. Louche et A. Chrysochoos (2001). Thermal and dissipative effects accompanying lüders band propagation. *Materials Science and Engineering A*, 307 :15–22.
- [Lubliner, 1990] J. Lubliner (1990). *Plasticity Theory*. Mac-Millan.
- [Mandel, 1966] J. Mandel (1966). Conditions de stabilité et postulat de Drucker. In J. Kravtchenko et P.M. Sirieys, editors, *Rheology and Soil Mechanics*, Grenoble 1964. IUTAM Symposium.
- [Manzoli et Shing, 2003] O.L. Manzoli et P.B. Shing (2003). Finite elements with embedded multiple cracks and non uniform discontinuity modes. In A. Benallal et S.P.B. Proença, editors, *Recent developments in the modelling of rupture in solids*, pages 99–104.
- [Matthies et al., 1979] H. Matthies, G. Strang, et E. Christiansen (1979). The saddle point of a differential program. In R. Glowinski, E. Rodin, et O.C. Zienkiewicz, editors, *Energy Methods in Finite Element*, Paris. Gauthier-villars.
- [Maugin, 1992] G.A. Maugin (1992). The thermodynamics of plasticity and fracture. In H. Aref et D.G Crighton, editors, *Cambridge Texts in Applied Mathematics*. Cambridge University Press.
- [Melenk et Babuška, 1996] J.M Melenk et I. Babuška (1996). The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136 :289–314.
- [Mindlin, 1964] R.D. Mindlin (1964). Microstructure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16 :51–78.
- [Moës et Belytschko, 2002] N. Moës et T. Belytschko (2002). Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69 :813–833.
- [Muhlhaus et Aifantis, 1991] H.B. Muhlhaus et E.C. Aifantis (1991). A variational principle for gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 28 :845–857.
-

- [Muhlhaus et Vardoulakis, 1987] H.B. Muhlhaus et I. Vardoulakis (1987). The thickness of shear bands in granular materials. *Geotechnique*, 37 :271–283.
- [Nagtegaal et al., 1974] J.C Nagtegaal, D.M Parks, et J.R Rice (1974). On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 4 :153–178.
- [Nayroles et al., 1992] B. Nayroles, G. Touzot, et P. Villon (1992). Generalizing the finite element method : diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 10 :307–318.
- [Needleman, 1987] A. Needleman (1987). A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *Journal of Applied Mechanics*, 54 :525–531.
- [Needleman, 1988] A. Needleman (1988). Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63 :69–85.
- [Nguyen, 1984] Q.S. Nguyen (1984). Bifurcation et stabilité des systèmes irréversibles obéissant au principe de dissipation maximale. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 3(1) :41–61.
- [Nguyen, 1987] Q.S. Nguyen (1987). Bifurcation and post-bifurcation analysis in plasticity and brittle fracture. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 35(3) :303–324.
- [Oliver, 1995] J. Oliver (1995). Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics. In D.R.J. Owen, E. Oñate, et E. Hinton, editors, *Computational plasticity IV. Fundamentals and Applications*, pages 455–480, Barcelona.
- [Oliver, 1996] J. Oliver (1996). Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 :3575–3623.
- [Oliver, 2000] J. Oliver (2000). On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. *International Journal of Solids and Structures*, 37 :7207–7229.
- [Ortiz, 1987] M. Ortiz (1987). An analytical study of the localized failure modes of concrete. *Mechanics of Materials*, pages 159 – 174.
- [Ortiz et al., 1987] M. Ortiz, Y. Leroy, et A. Needleman (1987). A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61 :189–214.
- [Peerlings et al., 1996] R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, et J.H.P. de Vree (1996). Gradient-enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 39 :3391–3403.
- [Peerlings et al., 2001] R.H.J. Peerlings, M.G.D Geers, R. de Borst, et W.A.M. Brekelmans (2001). A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :7723–7746.
- [Pietruszczak et Mróz, 1981] S.T. Pietruszczak et Z. Mróz (1981). Finite element analysis of deformation of strain-softening materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17 :327–334.

-
- [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987] G. Pijaudier-Cabot et Z.P Bažant (1987). Non-local damage theory. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 113 :1512–1533.
- [Pijaudier-Cabot et Burlion, 1996] G. Pijaudier-Cabot et N. Burlion (1996). Damage and localisation in elastic materials with voids. *Mechanics of Cohesive and Frictionnal Materials*, 1 :129–144.
- [Planas et al., 1993] J. Planas, M. Elices, et G.V. Guinea (1993). Cohesive cracks versus nonlocal models : closing the gap. *International Journal of Fracture*, 63 :173–187.
- [Rice, 1976] J.R Rice (1976). The localization of plastic deformation. In *Theoretical and Applied Mechanics*, pages 207–220. Proceedings of the 14th IUTAM Congress, Delft (North-Holland, Amsterdam).
- [Rice et Rudnicki, 1980] J.R Rice et J.W Rudnicki (1980). A note on some features of the theory of localization of deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 16 :597–605.
- [Rizzi et al., 1995] E. Rizzi, I. Carol, et K. Willam (1995). Localization analysis of elastic degradation with application to scalar damage. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(4) :541–553.
- [Runesson et al., 1991] K. Runesson, N.S Ottosen, et D. Peric (1991). Discontinuous bifurcations of elastic–plastic solutions at plane stress and plane strain. *International Journal of Plasticity*, 7 :99–121.
- [Santarelli, 1990] F.J. Santarelli (1990). Étude expérimentale de la bifurcation dans les roches. *Revue Française de Géotechnique*, 50 :61–70.
- [Servant et al., 2003] G. Servant, H.D.V. Khoa, et F. Darve (2003). Rupture diffuse dans les géomatériaux : un exemple. In *Congrès français de mécanique*, Nice.
- [Simo et Hughes, 2000] J.C Simo et T.J.R Hughes (2000). *Computational Inelasticity*. Springer Verlag.
- [Simo et al., 1988] J.C Simo, J.G Kennedy, et S. Govindjee (1988). Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26 :2161–2185.
- [Simo et Laursen, 1992] J.C. Simo et T.A. Laursen (1992). An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers and structures*, 42(1) :97–116.
- [Simo et al., 1993] J.C Simo, J. Oliver, et F. Armero (1993). An analysis of strong discontinuity induced by strain softening solutions in rate-independent solids. *Journal of Computational Mechanics*, 12 :277–296.
- [Simo et Taylor, 1985] J.C Simo et R.L Taylor (1985). Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48 :101–118.
- [Sluys, 1992] L.J. Sluys (1992). *Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids*. Thèse de doctorat, Delft.
- [Sluys, 1997] L.J Sluys (1997). Discontinuous modelling of shear banding. In D.R.J. Owen, E. Oñate, et E. Hinton, editors, *Computational plasticity V. Fundamentals and Applications*, pages 957–964, Barcelona.
-

- [Stakgold, 1979] I. Stakgold (1979). *Green's Functions and Boundary Value Problems*. Wiley.
- [Sukumar et al., 2000] N. Sukumar, N. Moës, B. Moran, et T. Belytschko (2000). Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48 :1549–1570.
- [Temam, 1983] R. Temam (1983). *Problèmes mathématiques en plasticité*. Gauthier-villars.
- [Thomas, 1961] T.Y. Thomas (1961). *Plastic flow and fracture of solids*. Academic Press, New-York.
- [Torrenti et al., 1988] J.M. Torrenti, J. Desrues, P. Acker, et C. Boulay (1988). Application of stereophotogrammetry to the strain localization in concrete compression. In J. Mazars et Z.P. Bažant, editors, *Cracking and Damage : strain localization and size effect*, pages 30–41, Cachan.
- [Toupin, 1962] R.A. Toupin (1962). Elastic materials with couple stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11 :385–414.
- [Triantafyllidis et Aifantis, 1986] N. Triantafyllidis et E.C. Aifantis (1986). A gradient approach to localization of deformation. I. Hyperelastic materials. *Journal of Elasticity*, 16 :225–237.
- [Washizu, 1982] K. Washizu (1982). *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon Press.
- [Wells et Sluys, 2001a] G.N Wells et L.J Sluys (2001a). A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :2667–2682.
- [Wells et Sluys, 2001b] G.N Wells et L.J Sluys (2001b). Three-dimensional embedded discontinuity model for brittle fracture. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :897–913.
- [Wells et al., 2002] G.N Wells, L.J Sluys, et R. de Borst (2002). Simulating the propagation of displacement discontinuities in a regularized strain-softening medium. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53 :1235–1256.
- [Wilson et Ibrahimbegović, 1990] E.L Wilson et A. Ibrahimbegović (1990). Use of incompatible displacement modes for the calculation of element stiffnesses or stresses. *Finite Elements in Analysis and Design*, 7 :229–241.
- [Wilson et al., 1973] E.L Wilson, R.L Taylor, W.P Doherty, et J. Ghaboussi (1973). Incompatible displacement models. In S.J. Fenves et al., editors, *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, pages 43–57. Academic Press.
- [Wong, 1982] T.F. Wong (1982). Micromechanics of faulting in westerly granite. *International Journal of Rock Mechanics*, 19 :49–62.
- [Zienkiewicz et Taylor, 2000] O.C Zienkiewicz et R.L Taylor (2000). *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 5th ed.

Annexe A

Intégration de la loi de comportement discrète

Calcul de l'état d'essai

Vu la forme de $\dot{\bar{\mathbf{Q}}}$ et vu que initialement $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{Q}}$ au pas de temps n s'écrit :

$$\bar{\mathbf{Q}}_n = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{nn} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{mm} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Les composantes $\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}$ et $\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m}$ de \mathbf{t}_{Γ_s} peuvent être calculées séparément.

Plusieurs cas doivent être traités (on ne considère ici que la composante $\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}$, les mêmes équations peuvent être écrites pour l'autre composante) :

$\bar{Q}_{nn} \neq 0$ Dans ce cas, $\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}$ s'écrit :

$$t_n^{trial} = \frac{1}{\bar{Q}_{nn}} \bar{u}_n \quad (\text{A.2})$$

$\bar{Q}_{nn} = 0$ Dans ce cas, deux cas sont à considérer :

$\bar{u}_n = 0$ On est, alors, sur la partie rigide du comportement,

$$t_n^{trial} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.3})$$

l'équation de continuité des tractions est encore vérifiée sous forme forte : la discontinuité n'est pas encore ouverte.

$\bar{u}_n \neq 0$ On est, ici, assuré que la surface 1 est active :

$$t_n^{trial} \rightarrow \infty \quad (\text{A.4})$$

On prend également :

$$\begin{cases} \bar{q}_{n+1}^{trial} = \bar{q}_n \\ \bar{\xi}_{n+1}^{trial} = \bar{\xi}_n \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Test des fonctions seuils

Avec les valeurs d'essai précédentes, les valeurs d'essai des fonctions seuils sont calculées :

$$\begin{cases} \bar{\phi}_1^{trial}(\mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial}, \bar{q}_{n+1}^{trial}) = \mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial} \cdot \mathbf{n} - (\bar{\sigma}_f - \bar{q}_{n+1}^{trial}) \\ \bar{\phi}_2^{trial}(\mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial}, \bar{q}_{n+1}^{trial}) = |\mathbf{t}_{\Gamma_s}^{trial} \cdot \mathbf{m}| - \left(\bar{\sigma}_s - \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \bar{q}_{n+1}^{trial} \right) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

4 cas doivent alors être traités :

	$\bar{\phi}_2^{trial} > 0$	$\bar{\phi}_2^{trial} \leq 0$
$\bar{\phi}_1^{trial} > 0$	Cas 1	Cas 2
$\bar{\phi}_1^{trial} \leq 0$	Cas 3	Cas 4

Il suffit de traiter les cas 1 et 2 : le cas 3 est équivalent au cas 2 en échangeant les rôles joués par chacune des deux surfaces seuils. Le cas 4 correspond au cas où les valeurs d'essai sont admissibles.

Cas1

Plusieurs cas sont à envisager en fonction des valeurs de $\bar{\mathbf{Q}}$ et $\bar{\mathbf{u}}$:

	$\bar{Q}_{mm} \neq 0$	$\bar{Q}_{mm} = 0$ et $\bar{u}_m = 0$	$\bar{Q}_{mm} = 0$ et $\bar{u}_m \neq 0$
$\bar{Q}_{nn} \neq 0$	Cas 1.1	Cas 1.2	Cas 1.3
$\bar{Q}_{nn} = 0$ et $\bar{u}_n = 0$	Cas 1.4	Cas 1.5	Cas 1.6
$\bar{Q}_{nn} = 0$ et $\bar{u}_n \neq 0$	Cas 1.7	Cas 1.8	Cas 1.9

Il suffit de traiter les cas 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6 et 1.9.

Le cas 1.4 est équivalent au cas 1.2 où les indices désignant chacune des surfaces seuils sont échangés. De même, le cas 1.7 est équivalent au cas 1.3 ; le cas 1.8 au cas 1.6.

Cas 1.1

La détermination de $\bar{\gamma}_1$ et $\bar{\gamma}_2$ se fait par la résolution simultanée des équations :

$$\begin{cases} \bar{\phi}_1(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2) = 0 \\ \bar{\phi}_2(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Les valeurs obtenues pour $\bar{\gamma}_1$ et $\bar{\gamma}_2$ doivent alors être vérifiées :

- $\bar{\gamma}_1 > 0$ et $\bar{\gamma}_2 > 0$: $J_{act} = \{1, 2\}$;
- $\bar{\gamma}_1 > 0$ et $\bar{\gamma}_2 < 0$: $J_{act} = \{1\}$, le cas 2 doit alors être considéré ;
- $\bar{\gamma}_1 < 0$ et $\bar{\gamma}_2 > 0$: $J_{act} = \{2\}$, le cas 3 doit alors être considéré.

Cas 1.2

Dans ce cas, il est nécessaire de résoudre :

$$\bar{\phi}_1(\bar{\gamma}_1) = 0 \quad (\text{A.8})$$

La fonction seuil $\bar{\phi}_2^{trial}$ doit être vérifiée avec la valeur de $\bar{\gamma}_1$ calculée précédemment. Deux cas sont alors à considérer :

$$- \bar{\phi}_2^{trial}(\bar{\gamma}_1) > 0 : J_{act} = \{1, 2\}$$

$$\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m} = \left(\bar{\sigma}_s - \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \bar{q}(\bar{\gamma}_1) \right) \text{signe}(t_m^{trial}) \quad (\text{A.9})$$

$$- \bar{\phi}_2^{trial}(\bar{\gamma}_1) \leq 0 : J_{act} = \{1\}$$

Cas 1.3

La surface seuil $\bar{\phi}_2$ est forcément active.

On a de plus,

$$\bar{\gamma}_2 = |\bar{u}_m| \quad (\text{A.10})$$

La fonction seuil $\bar{\phi}_1^{trial}$ doit être vérifiée avec la valeur de $\bar{\gamma}_2$ calculée précédemment. Deux cas sont à considérer :

$$- \bar{\phi}_1^{trial}(\bar{\gamma}_2) > 0 : J_{act} = \{1, 2\}$$

La détermination de $\bar{\gamma}_1$ se fait par la résolution de :

$$\bar{\phi}_1(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2) = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$- \bar{\phi}_1^{trial}(\bar{\gamma}_2) \leq 0 : J_{act} = \{2\}$$

Cas 1.5

Les deux surfaces seuils sont actives : $J_{act} = \{1, 2\}$ et :

$$\begin{cases} \mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n} = (\bar{\sigma}_f - \bar{q}_n^{trial}) \\ \mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{m} = \left(\bar{\sigma}_s - \frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{\sigma}_f} \bar{q}_n^{trial} \right) \text{signe}(t_m^{trial}) \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Cas 1.6

La surface seuil $\bar{\phi}_2$ est forcément active.

On a de plus,

$$\bar{\gamma}_2 = |\bar{u}_m| \quad (\text{A.13})$$

La fonction seuil $\bar{\phi}_1^{trial}$ doit être vérifiée avec la valeur de $\bar{\gamma}_2$ calculée précédemment. Deux cas sont à considérer :

$$- \bar{\phi}_1^{trial}(\bar{\gamma}_2) > 0 : J_{act} = \{1, 2\}$$

On a alors :

$$\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n} = (\bar{\sigma}_f - \bar{q}(\bar{\gamma}_2)) \quad (\text{A.14})$$

$$- \bar{\phi}_1^{trial}(\bar{\gamma}_2) \leq 0 : J_{act} = \{2\}$$

Cas 1.9

Dans ce cas, les deux surfaces seuils sont actives : $J_{act} = \{1, 2\}$.

On a de plus,

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_1 = \bar{u}_n \\ \bar{\gamma}_2 = |\bar{u}_m| \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Cas2

Il faut à nouveau considérer plusieurs cas :

	$\bar{Q}_{mm} \neq 0$	$\bar{Q}_{mm} = 0$ et $\bar{u}_m = 0$
$\bar{Q}_{nn} \neq 0$	Cas 2.1	Cas 2.2
$\bar{Q}_{nn} = 0$ et $\bar{u}_n = 0$	Cas 2.3	Cas 2.4
$\bar{Q}_{nn} = 0$ et $\bar{u}_n \neq 0$	Cas 2.5	Cas 2.6

Les cas ($\bar{Q}_{mm} = 0$ et $\bar{u}_m \neq 0$) ne sont pas considérés car ils correspondent forcément à $\bar{\phi}_2^{trial} > 0$ (or, nous traitons, ici, le cas 2 pour lequel $\bar{\phi}_2^{trial} \leq 0$).

Cas 2.1

$\bar{\gamma}_1$ est déterminé par la résolution de l'équation :

$$\bar{\phi}_1(\bar{\gamma}_1) = 0 \quad (\text{A.16})$$

La surface seuil $\bar{\phi}_2^{trial}$ doit alors être vérifiée avec la valeur de $\bar{\gamma}_1$ calculée précédemment.

- $\bar{\phi}_2^{trial} > 0 : J_{act} = \{1, 2\}$, il faut alors se reporter au cas 1.1 ;
- $\bar{\phi}_2^{trial} \leq 0 : J_{act} = \{1\}$.

Cas 2.2

$\bar{\gamma}_1$ est déterminé par la résolution de l'équation :

$$\bar{\phi}_1(\bar{\gamma}_1) = 0 \quad (\text{A.17})$$

La surface seuil $\bar{\phi}_2^{trial}$ doit alors être vérifiée avec la valeur de $\bar{\gamma}_1$ calculée précédemment.

- $\bar{\phi}_2^{trial} > 0 : J_{act} = \{1, 2\}$, il faut alors se reporter au cas 1.2 ;
- $\bar{\phi}_2^{trial} \leq 0 : J_{act} = \{1\}$.

Cas 2.3

On a alors $J_{act} = \{1\}$ et :

$$\mathbf{t}_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n} = (\bar{\sigma}_f - \bar{q}_{n+1}^{trial}) \quad (\text{A.18})$$

Cas 2.4

Même cas que précédemment.

Cas 2.5

La surface 1 est, dans ce cas, forcément active.

On a de plus :

$$\bar{\bar{\gamma}}_1 = \bar{\bar{u}}_n \quad (\text{A.19})$$

La surface seuil $\bar{\bar{\phi}}_2^{trial}$ doit alors être vérifiée avec la valeur de $\bar{\bar{\gamma}}_1$ calculée précédemment.

- $\bar{\bar{\phi}}_2^{trial} > 0 : J_{act} = \{1, 2\}$, il faut alors se reporter au cas 1.4;
- $\bar{\bar{\phi}}_2^{trial} \leq 0 : J_{act} = \{1\}$.

Cas 2.6

La surface 1 est forcément active.

On a de plus :

$$\bar{\bar{\gamma}}_1 = \bar{\bar{u}}_n \quad (\text{A.20})$$

La surface seuil $\bar{\bar{\phi}}_2^{trial}$ doit alors être vérifiée avec la valeur de $\bar{\bar{\gamma}}_1$ calculée précédemment.

- $\bar{\bar{\phi}}_2^{trial} > 0 : J_{act} = \{1, 2\}$, il faut alors se reporter au cas 1.8. (équivalent au cas 1.6);
- $\bar{\bar{\phi}}_2^{trial} \leq 0 : J_{act} = \{1\}$.

RÉSUMÉ :

Lors du chargement d'une structure jusqu'à rupture, il est fréquent d'observer l'apparition de zones de faible épaisseur (dites zones de localisation) dans lesquelles se concentrent les déformations. La représentation numérique de ces phénomènes pose des difficultés liées, en particulier, à la dépendance pathologique de la solution à la discrétisation éléments finis. De nombreuses techniques dites « limiteurs de localisation » ont été développées afin d'assurer l'objectivité de la solution vis-à-vis du maillage.

Notre étude s'appuie sur les modèles à discontinuités fortes et vise à en étendre l'application au calcul des structures massives dans lesquelles cohabitent des phénomènes dissipatifs volumiques liés au développement de « process-zone » et des phénomènes dissipatifs localisés liés à l'apparition de bandes de localisation. Ainsi, l'originalité de la méthode proposée est de combiner deux types de dissipation : une dissipation volumique produite à l'échelle de la structure et prise en compte par des modèles continus classiques et une dissipation surfacique produite à l'échelle des bandes de localisation et décrite par l'introduction de champs de déplacement discontinus associés à des lois « discrètes » liant traction et saut de déplacement.

Cette approche a été développée et implantée pour des modèles de plasticité (représentation de bandes de cisaillement) et pour des modèles d'endommagement (prise en compte de l'apparition de « macro-fissures »).

MOTS-CLÉS : *problèmes de localisation, rupture, plasticité, endommagement, discontinuité forte, méthode éléments finis.*

ABSTRACT :

When loading a structure up to rupture, it is often the case that the strains concentrate in very thin zones referred to as "localization zones". The numerical description of such phenomena raises some problems due, in particular, to the mesh dependency of the computed response. A lot of remedies known as "localization limiters" had been developed in order to eliminate this pathological dependence on the discretization.

Our study lies in the framework of the strong discontinuity models and aims at enlarging their applications to the computation of the behavior of massive structures. For such structures, bulk dissipative phenomena due to the development of "process-zones" cohabit with localized dissipative phenomena produced by the apparition of localization zones. The main originality of this work is then to combine two types of dissipation : a bulk dissipation produced at the scale of the structure and taken into account by classical continuum models and a localized dissipation taking place at the scale of the localization zones and described by the introduction of discontinuous displacement fields and discrete laws linking the traction and the displacement jump.

This approach has been developed and implemented for plasticity models (for the description of shear bands) and for damage models (to take into account the apparition of "macro-cracks").

KEYWORDS : *localization problems, rupture, plasticity, damage, strong discontinuity, finite element method.*