



**HAL**  
open science

# Groupes libres, groupes triangulaires et tore épointé dans $PU(2,1)$

Pierre Will

► **To cite this version:**

Pierre Will. Groupes libres, groupes triangulaires et tore épointé dans  $PU(2,1)$ . Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2006. Français. NNT: . tel-00130785

**HAL Id: tel-00130785**

**<https://theses.hal.science/tel-00130785>**

Submitted on 13 Feb 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Spécialité : MATHÉMATIQUES

présentée par **Pierre Will**

## Groupes libres, groupes triangulaires et tore épointé dans $PU(2,1)$

Soutenue le 10 novembre 2006, devant le jury composé de :

<b>M. Nicolas Bergeron</b>	examineur
<b>M. Gilles Courtois</b>	rapporteur
<b>M. Martin Deraux</b>	examineur
<b>M. Elisha Falbel</b>	directeur de thèse
<b>M. John Parker</b>	rapporteur



# Remerciements

Je remercie tout d'abord Elisha Falbel pour avoir dirigé ma thèse avec patience, intérêt et gentillesse. Ça a été un plaisir de travailler avec lui.

Gilles Courtois et John Parker ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse et de participer au jury. Je les remercie pour les remarques et suggestions qu'ils ont faites sur mon travail. Merci également à Nicolas Bergeron et Martin Deraux pour avoir accepté de faire partie du jury.

A différents moments de mon travail, Jacques Faraut, Pierre-Vincent Koseleff, John Parker et Patrick Polo m'ont donné des indications qui se sont avérées très utiles. Je voudrais les en remercier ici.

Pour nos nombreuses conversations mathématiques, je voudrais remercier Marcos Diniz, Maseye Gaye, Florent Schaffhauser et Julien Paupert.

Le séminaire de géométrie de contact a joué pour moi un rôle très important dans ces années de thèse. Que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à sa bonne marche et à son dynamisme soient chaleureusement remerciés ici.

Pour terminer, je voudrais avoir une pensée pour Pierre Bret, sans qui tout ceci n'aurait peut-être pas commencé.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 L'espace hyperbolique complexe</b>	<b>21</b>
1.1 Introduction . . . . .	21
1.2 Le plan hyperbolique complexe . . . . .	22
1.2.1 Deux modèles du plan hyperbolique complexe . . . . .	22
1.3 Les automorphismes de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	25
1.3.1 Classification des éléments. . . . .	25
1.3.2 Les isométries elliptiques . . . . .	27
1.3.3 Les isométries loxodromiques . . . . .	28
1.3.4 Les isométries paraboliques . . . . .	29
1.3.5 Isotropie des points de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	31
1.4 Les sous-espaces totalement géodésiques de dimension 2 de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	31
1.4.1 Les droites complexes de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	32
1.4.2 Les $\mathbb{R}$ -plans . . . . .	36
1.4.3 Projections orthogonales sur les $\mathbb{R}$ -plans et les droites complexes. . . . .	46
1.5 L'invariant angulaire de Cartan . . . . .	47
<b>2 L'espace de Teichmüller du tore épointé.</b>	<b>49</b>
2.1 Représentations de $F_2$ et trace dans $SL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	50
2.2 Décomposition en produits d'involutions. . . . .	52
2.3 Tore épointé et groupes triangulaires dans $PSL(2, \mathbb{R})$ . . . . .	52
2.3.1 L'espace de Teichmüller du tore épointé . . . . .	52
2.3.2 Groupes triangulaires dans $PSL(2, \mathbb{R})$ . . . . .	53
<b>3 Représentations du groupe libre <math>F_2</math> dans <math>SU(2,1)</math></b>	<b>59</b>
3.1 Introduction . . . . .	59
3.2 Représentations de $F_2$ dans $SL(3, \mathbb{C})$ . . . . .	61
3.2.1 Cayley-Hamilton dans $M_3(\mathbb{C})$ , et conséquences . . . . .	61
3.2.2 Un analogue du théorème de Fricke-Vogt dans $SL(3, \mathbb{C})$ . . . . .	66
3.3 Représentations de $F_2$ dans $SU(2,1)$ . . . . .	68

3.4	Deux involutions sur $\text{Hom}(F_2, \text{PU}(2,1))/\text{PU}(2,1)$ . . . . .	71
3.5	Trace et groupes triangulaires . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Birapport complexe et tétraèdres idéaux</b>	<b>77</b>
4.1	Le birapport complexe . . . . .	78
4.2	Classification des tétraèdres idéaux . . . . .	80
4.3	Action du groupe symétrique sur les birapports . . . . .	85
4.4	Groupes de symétries des tétraèdres idéaux . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Traces, birapports et sous-groupes à deux générateurs</b>	<b>93</b>
5.1	Introduction . . . . .	93
5.2	Coordonnées KR sur les paires de loxodromiques . . . . .	95
5.2.1	Définition des coordonnées. . . . .	95
5.2.2	Paires décomposables . . . . .	97
5.3	Traces et birapports . . . . .	99
5.4	Le critère de décomposabilité en coordonnées traces . . . . .	102
5.5	Représentations du groupe fondamental de la sphère privée de trois disques	105
<b>6</b>	<b>Groupes triangulaires</b>	<b>107</b>
6.1	Introduction . . . . .	107
6.2	Les triangles idéaux et leurs symétries . . . . .	109
6.3	Coordonnées sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ . . . . .	112
6.3.1	Les involutions échangeant deux points du bord . . . . .	112
6.3.2	Groupes triangulaires complexes : coordonnées sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ . . . . .	113
6.3.3	Le cas $\mathbb{R}$ -décomposable : coordonnées sur $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ . . . . .	115
6.4	Quand le commutateur est-il parabolique? . . . . .	116
6.5	Commutateur elliptique. . . . .	124
6.5.1	Représentations $\mathbb{C}$ -décomposables. . . . .	125
6.5.2	Représentations $\mathbb{R}$ -décomposables. . . . .	126
<b>7</b>	<b>Tore époiné et groupes triangulaires lagrangiens.</b>	<b>127</b>
7.1	Introduction . . . . .	127
7.2	Les surfaces spinales . . . . .	129
7.3	Définition et premières propriétés des $\mathbb{R}$ -surfaces spinales . . . . .	130
7.4	Conditions de disjonction de deux $\mathbb{R}$ -surfaces spinales . . . . .	133
7.5	Preuve du théorème principal . . . . .	139
7.6	Commentaires et remarques . . . . .	146

# Introduction

## Le contexte

Ce travail de thèse se situe dans le domaine de la géométrie hyperbolique complexe. Nous nous intéressons aux sous-groupes discrets de  $\mathrm{PU}(n,1)$ , le groupe d'isométries holomorphes de l'espace hyperbolique complexe  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Nous nous intéresserons notamment aux représentations des groupes fondamentaux de surfaces de Riemann dans  $\mathrm{PU}(n,1)$ , notamment dans le cas où la surface est non-compacte et de volume fini.

Notre objectif initial était de décrire l'ensemble des représentations discrètes, fidèles et préservant le type du groupe fondamental du tore épointé dans  $\mathrm{PU}(2,1)$ , c'est à dire de décrire un analogue de l'espace de Teichmüller du tore épointé dans  $\mathrm{PU}(2,1)$ . Le groupe fondamental du tore épointé étant isomorphe au groupe libre à deux générateurs  $F_2 = \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle$ , nous avons été amenés à étudier l'espace des représentations de  $F_2$  dans  $\mathrm{PU}(2,1)$ . Nos principaux résultats sont les suivants.

**Proposition. 3.23** *Soient  $\rho_1$  et  $\rho_2$  deux représentations  $F_2$  dans  $\mathrm{SU}(2,1)$ , telles que  $\rho_1(F_2)$  et  $\rho_2(F_2)$  sont Zariski-denses. Si*

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} \rho_1(\mathbf{m}) &= \mathrm{tr} \rho_2(\mathbf{m}) & \mathrm{tr} \rho_1(\mathbf{n}) &= \mathrm{tr} \rho_2(\mathbf{n}) \\ \mathrm{tr} \rho_1(\mathbf{mn}) &= \mathrm{tr} \rho_2(\mathbf{mn}) & \mathrm{tr} \rho_1(\mathbf{m}^{-1}\mathbf{n}) &= \mathrm{tr} \rho_2(\mathbf{m}^{-1}\mathbf{n}) \\ \mathrm{tr} \rho_1([\mathbf{m}, \mathbf{n}]) &= \mathrm{tr} \rho_2([\mathbf{m}, \mathbf{n}]) \end{aligned}$$

*alors  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont conjuguées dans  $\mathrm{SU}(2,1)$ .*

Ce résultat a été obtenu de manière indépendante par Khoi dans [Kho]. Parmi les représentations de  $F_2$  dans  $\mathrm{PU}(2,1)$ , nous nous sommes intéressés tout particulièrement à celles qui ont la propriété de  $\mathbb{R}$ -décomposabilité. Une représentation est dite  $\mathbb{R}$ -décomposable s'il existe trois isométries involutives et antiholomorphes  $I_1, I_2$  et  $I_3$  telles que  $A = I_1 \circ I_2$  et  $B = I_3 \circ I_2$ . Il existe une notion analogue de  $\mathbb{C}$ -décomposabilité, pour laquelle les trois involutions sont holomorphes, que nous étudions également. Nous obtenons au chapitre 5 le

**Théorème. 5.19** *Soient  $A$  et  $B$  deux éléments loxodromiques tels que  $C = [A, B]$  soit parabolique pur. Alors :*



1.  $C$  est conjugué à une translation de Heisenberg verticale si et seulement si  $G$  préserve une droite complexe.
2.  $C$  est conjugué à une translation de Heisenberg non-verticale si et seulement si  $(A, B)$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable.

L'outil principal est l'utilisation du birapport complexe sur le groupe de Heisenberg qui, comme l'a montré Falbel, permet la classification des tétraèdres idéaux de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Nous relierons la décomposabilité d'une paire d'éléments loxodromiques  $(A, B)$  à l'existence de symétries du tétraèdre idéal formé par les points fixes de  $A$  et  $B$ . Dans le chapitre 4, nous avons préalablement énuméré les sous-groupes de  $S_4$  susceptibles d'apparaître comme groupes de symétrie d'un tétraèdre idéal. C'est le théorème 4.31.

Le chapitre 6 est consacré à l'étude des groupes triangulaires, c'est à dire engendrés par trois involutions  $I_1, I_2$  et  $I_3$ , telles que  $c = (I_1 I_2 I_3)^2$  est non-elliptique. Notons que si  $\rho$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable  $\rho([\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]) = c$ . Nous décrivons un système de coordonnées permettant de détecter simplement les groupes triangulaires pour lesquels  $c$  est parabolique.

Nous consacrons le chapitre 7 à la démonstration de notre résultat principal ( $T_{1,1}$  désigne l'espace de Teichmüller du tore épointé) :

**Théorème. 7.1** *Il existe une famille à un paramètre  $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$  d'applications*

$$\phi_{\alpha} : T_{1,1} \longrightarrow \text{Hom}(F_2, \text{PU}(2,1))/\text{PU}(2,1)$$

*satisfaisant aux conditions suivantes.*

1.  $\phi_{\alpha_1}([\rho_1]) = \phi_{\alpha_2}([\rho_2])$  si et seulement si  $\alpha_1 = \alpha_2$  et  $[\rho_1] = [\rho_2]$
2. Pour tout  $[\rho] \in T_{(1,1)}$  et pour tout  $\alpha \in [-\pi/4, \pi/4]$ ,  $\phi_{\alpha}([\rho])$  est une classe de représentations discrètes, fidèles, préservant le type et  $\mathbb{R}$ -décomposables du groupe fondamental du tore épointé.
3. Pour tout  $[\rho] \in T_{(1,1)}$ ,  $\phi_{\alpha}([\rho])$  stabilise un  $\mathbb{R}$ -plan si et seulement si  $\alpha = 0$ .
4. Le segment  $(\phi_{\alpha})_{|\alpha| < \pi/4}$  est maximal : si  $\pi/4 < |\alpha| \leq \pi/2$ , il existe  $[\rho] \in T_{(1,1)}$  telle que  $\phi_{\alpha}([\rho])$  contient un élément elliptique, et est par conséquent non-discrète ou non-fidèle.

Résumons les principales difficultés rencontrées dans ce travail.

- Dans le cas classique de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , la paramétrisation par la trace de l'espace de Teichmüller du tore épointé est donnée par la fameuse équation  $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$  (avec  $x, y$  et  $z > 2$ ). L'approche similaire dans le cas de  $\text{PU}(2,1)$  est rendue beaucoup plus lourde par la complexité des calculs (voir par exemple la proposition 3.6 page 63).

- Pour montrer la discrétude d'un sous-groupe de  $\mathrm{PU}(2,1)$ , nous construisons un domaine fondamental.  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  étant de courbure non-constante, il n'existe pas d'hyper-surface réelle totalement géodésique, qui constituerait un modèle de face privilégié pour construire un domaine fondamental. Nous définissons donc une famille d'hyper-surfaces adaptées à notre problème : les  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales (voir la définition 7.9 page 131), qui nous permettent de prouver le théorème 7.1.
- Il est difficile de contrôler l'apparition d'éléments paraboliques ou elliptiques qui viendraient s'opposer à la discrétude, à la fidélité ou à la préservation de type. La famille de représentations décrite dans le théorème 7.1 est contenue dans une famille connexe contenant des représentations non-discrètes. Nous renvoyons à la section 7.6 page 146.

Soit  $\Sigma_{g,n}$  une surface de genre  $g$  et privée de  $n$  points et de caractéristique d'Euler négative (c'est à dire telle que  $2 - 2g - n < 0$ ). L'espace de Teichmüller de  $\Sigma_{g,n}$  est construit à partir des représentations du groupe fondamental de  $\Sigma_{g,n}$

$$\rho : \pi_1(\Sigma_{g,n}) \longrightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \quad (1)$$

satisfaisant aux conditions suivantes

- $\rho$  est discrète : l'image de  $\rho$  est un sous-groupe discret de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ , le groupe des automorphismes du revêtement universel de  $\Sigma_{g,n}$
- $\rho$  est fidèle :  $\rho$  est injective
- $\rho$  préserve le type : les seuls éléments non hyperboliques de  $\rho(\pi_1(\Sigma_{g,n}))$  sont paraboliques et sont associés à la classe d'homotopie d'un lacet autour de l'un des  $n$  points ôtés.

Une représentation vérifiant ces trois conditions définit une structure hyperbolique sur  $\Sigma_{g,n}$ , et s'appelle l'*holonomie* de cette structure. Deux structures hyperboliques associées à  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sur  $\Sigma_{g,n}$  sont dites équivalentes lorsque  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont conjuguées dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . L'espace de Teichmüller de  $\Sigma_{g,n}$  est l'ensemble des classes d'équivalences de structures hyperboliques sur  $\Sigma_{g,n}$ . Il peut donc être vu comme le sous-ensemble de

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,n}), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})) / \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$$

formé des classes de représentations discrètes, fidèles et préservant le type.

Dans le cas des surfaces compactes de genre au moins 2 (c'est à dire pour  $n = 0$  et  $g \geq 2$ ), l'espace de Teichmüller est homéomorphe à une boule de dimension  $6g - 6$ . Goldman a montré dans [Gol88] que la variété des représentations possède  $4g - 3$  composantes, correspondant aux valeurs possibles du nombre d'Euler de la représentation  $\rho$  (qui est entier et vérifie l'inégalité de Milnor-Wood  $|e| \leq 2g - 2$ ). De plus, les cas d'égalités  $|e| = 2g - 2$  correspondent aux composantes formées de représentations discrètes et fidèles. La variété des représentations d'un groupe de surface compacte de genre au moins 2 dans

$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  contient donc deux composantes connexes qui sont des copies de l'espace de Teichmüller.

Cette approche de l'étude de la variété des représentations d'un groupe de surface dans un groupe de Lie  $G$  a donné lieu à de très nombreuses généralisations, dont on trouvera un panorama dans [Gol85] et dans [Wie04].

Un premier exemple est celui où  $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ , le groupe d'isométrie de l'espace hyperbolique réel de dimension 3.  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  apparaît en effet comme le stabilisateur d'un plongement totalement géodésique de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$ . Un sous-groupe discret de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  est dit fuchsien lorsqu'il stabilise une copie de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ , ou, de manière équivalente, lorsque son ensemble limite est contenu dans un cercle de  $\overline{\mathbb{C}}$ . L'inclusion  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  a donc fourni un point de départ à l'étude des variétés de dimension 3 : l'idée est de partir d'une représentation préservant un sous-espace totalement géodésique, et de la déformer en tentant de conserver si possible le caractère discret et fidèle de la représentation. L'étude des déformations a ainsi commencé par les *groupes quasi-fuchsien*s : les sous-groupes discrets de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  dont l'ensemble limite est une courbe fermée simple. L'approche analytique de ces problèmes utilise de façon importante la théorie des applications quasi-conformes. Une représentation est quasi-fuchsienne si et seulement elle est conjuguée à une représentation fuchsienne par un homéomorphisme quasi-conforme de  $\overline{\mathbb{C}}$  (voir [Ber60, Kap]). L'ensemble des représentations quasi-fuchiennes d'un groupe de surface est isomorphe au produit de deux copies de l'espace de Teichmüller de cette surface (voir [Ota96]). L'étude des variétés de dimension trois a suscité un énorme intérêt durant les 40 dernières années, notamment suite aux travaux de Thurston. Ce dernier a émis plusieurs importantes conjectures, parmi lesquelles on peut citer la « Ending Lamination Conjecture », qui fait partie de son « Programme de Géométrisation » (voir [Thu], [Thu82], et le panorama du sujet dû à Minsky, [Min02]). Minsky a étudié séparément le cas du tore épointé dans [Min99], avant de démontrer cette conjecture dans le cas des groupes de surface Kleinien en collaboration avec J. Brock et R. Canary dans [BCM]. Une démonstration du cas général des variétés hyperboliques de dimension trois est annoncée dans [BCM] et [Min02].

Un autre généralisation est le cas où  $G = \mathrm{PSL}(3, \mathbb{R})$ . Dans les deux articles [Gol90] et [CG93], Goldman et Choi ont montré que les holonomies des structures projectives convexes<sup>1</sup> sur une surface compacte forment une composante de la variété des représentations de  $\pi_1(\Sigma_{g,0})$  dans  $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{R})$ . Le cas de  $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$  avec  $n > 2$  a été étudié – entre autres – par Hitchin et par Labourie. Hitchin a identifié dans [Hit92] une composante de l'espace  $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,0}), \mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})) / \mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ , obtenue par déformation du plongement irréductible de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  dans  $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ . Dans le cas  $n = 3$ , la composante de Hitchin coïncide avec celle de Choi et Goldman. La composante de Hitchin est homéomorphe à une boule de di-

---

<sup>1</sup>Une structure projective convexe sur une surface compacte  $\Sigma_{g,0}$  est une paire  $(S, f)$ , où  $S$  est une variété projective convexe et  $f : \Sigma_{g,0} \rightarrow S$  un difféomorphisme. (Une variété projective convexe est le quotient d'un domaine convexe du plan projectif réel  $\mathbb{R}P^2$  par l'action d'un sous-groupe discret de  $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{R})$ .)

mension  $(4g - 4)\dim(G)$ . Labourie a montré dans [Lab] que toute représentation contenue dans la composante de Hitchin est discrète, fidèle et préserve le type.

L'étude des représentations de groupes de surfaces dans  $\mathrm{PU}(n,1)$  fait partie de la famille des généralisations hermitiennes de l'espace de Teichmüller (voir [Wie04]). Dans [Tol89], Toledo a défini un invariant qui généralise le nombre d'Euler d'une représentation dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . A toute représentation  $\rho$  du groupe fondamental  $\pi$  d'une surface compacte  $\Sigma$  dans  $\mathrm{PU}(n,1)$  est associé un fibré plat sur  $\Sigma$  dont la fibre est  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ . La contractibilité de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  garantit l'existence d'une application  $f : \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ ,  $\rho$ -équivariante.  $f^*\omega$ , pull-back par  $f$  de la forme de Kähler sur  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ , définit une forme sur  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$  qui est invariante sous l'action de  $\pi$ . Elle induit donc une forme sur  $\Sigma$ . L'invariant de Toledo  $\tau(\rho)$  de la représentation  $\rho$  est défini comme l'intégrale sur  $\Sigma$  de cette forme (voir [Tol89]) :

$$\tau(\rho) = \int_{\Sigma} f^*\omega \quad (2)$$

Domic et Toledo ont montré dans [DT87] que l'invariant de Toledo satisfaisait à l'inégalité de Milnor–Wood généralisée  $|\tau(\rho)| \leq 4\pi(g - 1)$ , où  $g$  désigne le genre de  $\Sigma$ . Le résultat principal de [Tol89] est une caractérisation géométrique des représentations dont l'invariant de Toledo est maximal :

**Théorème 0.1** (Toledo). *Si  $|\tau(\rho)| = 4\pi(g - 1)$ , alors  $\rho$  laisse une droite complexe de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  invariante.*

En corollaire, si  $|\tau(\rho)|$  est maximal  $\rho$  s'écrit comme somme directe d'une représentation fuchsienne de  $\pi$  et d'une représentation dans  $\mathrm{U}(n - 1)$  (le stabilisateur d'une droite complexe de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  dans  $\mathrm{PU}(n,1)$  est isomorphe à  $\mathrm{P}(\mathrm{U}(1,1) \times \mathrm{U}(n))$ , voir par exemple [CG74]). Ceci prouve la rigidité des actions des groupes de surfaces compactes préservant une droite complexe dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Goldman et Millson avaient auparavant obtenu un théorème de rigidité locale dans [GM87]. Xia a montré dans [Xia00] puis [Xia03] que l'invariant de Toledo distinguait les composantes connexes de l'espace de représentations d'une surface compacte dans  $\mathrm{PU}(n,1)$ . Dans [GKL01], Goldman, Kapovich et Leeb ont montré de plus que l'invariant de Toledo d'une représentation du groupe fondamental d'une surface compacte de genre  $g$  dans  $\mathrm{PU}(n,1)$  est soumis à la condition d'intégralité :

$$\tau \in \frac{4\pi}{n + 1} \mathbb{Z}.$$

Burger, Iozzi et Wienhard ont généralisé dans [BIW03, BIW06] (voir aussi [Wie04]) l'étude de ces problèmes au cas des espaces symétriques hermitiens (c'est à dire admettant une structure complexe invariante par isométrie). Les exemples les plus classiques sont les espaces symétriques associés au groupes unitaires  $\mathrm{U}(p, q)$ , avec par exemple  $p \geq q$  ( $q$  est le rang de l'espace symétrique associé). Le cas de  $\mathrm{U}(p, 2)$  avait déjà été étudié par

Hernández dans [Her91] et celui de  $U(p,q)$  par Bradlow, Garcia-Prada et Gothen dans [BGPG03]. L'espace hyperbolique complexe, associé à  $U(n,1)$ , entre donc dans ce cadre. Des résultats du même type ont été obtenus par Koziarz et Maubon dans [KM04] par des méthodes de géométrie différentielle. Ils montrent ainsi le

**Théorème 0.2.** *Soit  $S$  une surface de Riemann fermée privée d'un nombre fini de points,  $\Gamma$  son groupe fondamental et  $\rho : \Gamma \rightarrow PU(n, 1)$  une représentation. L'invariant de Toledo satisfait  $|\tau(\rho)| \leq -2\pi\chi$  avec égalité si et seulement si  $\rho(\Gamma)$  préserve une droite complexe  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1 \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ ,  $\rho$  est discrète et fidèle, et  $S$  est difféomorphe au quotient  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1/\rho(\Gamma)$ .*

Dans le cas de  $PU(n,1)$ , aucun espace de module de représentations de groupes de surfaces discrètes, fidèles et préservant le type n'a été complètement décrit à ce jour. Les seuls groupes de présentation finie dont on connait l'espace des modules des représentations discrètes et fidèles dans  $PU(2,1)$  sont

1. Les groupes triangulaires idéaux, de présentation  $\langle i_1, i_2, i_3 \mid i_k^2 = 1, (i_j i_k)^\infty \rangle$  (voir [GP92, Sch01, Sch05b]).
2. Le groupe modulaire  $PSL(2, \mathbb{Z})$ , (voir [FP03]).

Notons que si l'on remplace  $PU(2,1)$  par  $\widehat{PU(2,1)}$  dans le premier cas, autorisant ainsi les  $i_k$  à être représentés par des involutions antiholomorphes, on ne connaît qu'un ouvert de l'espace des modules de représentations discrètes et fidèles (voir [FK00]). Dans le cas de  $PU(2,1)$ , et pour les surfaces compactes, Parker et Platis ont montré dans [PP06] la flexibilité des représentations fuchsiennes stabilisant un  $\mathbb{R}$ -plan (voir la section 1.4.2). Ils ont décrit des domaines fondamentaux, basés sur un raffinement des  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales définies dans le chapitre 7 (voir aussi [Wil]). Par cette technique, ils peuvent décrire explicitement un voisinage de dimension maximale  $(16g - 16)$  formé de représentations discrètes, fidèles et préservant le type. Ce résultat découle également du théorème prouvé par O. Guichard dans [Gui04].

Les représentations de groupes fondamentaux de surfaces compactes dans  $PU(2,1)$  préservant une droite complexe ou un  $\mathbb{R}$ -plan, qui sont les deux types de sous-espaces totalement géodésiques maximaux de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , ont donc un comportement opposé : rigidité pour les représentations préservant une droite complexe, flexibilité pour les représentations préservant un  $\mathbb{R}$ -plan. Dans le cas où la surface n'est plus compacte, mais reste de type fini, c'est à dire admet un nombre fini de cusps, cette dichotomie n'existe plus, comme le montre le théorème 0.3 énoncé ci-dessous, démontré par Gusevskii et Parker dans [GP00]. Ce résultat est obtenu par un procédé de passage à un sous-groupe d'indice fini à partir de représentations du groupe modulaire  $PSL(2, \mathbb{Z})$  dans  $PU(2,1)$ . Ces représentations ont fait l'objet de nombreux travaux par Falbel et Koseleff d'une part, Gusevskii et Parker d'autre part, et finalement par Falbel et Parker (voir [FK02b, FK00, FK02a, GP00, GP03, FP03]).

**Théorème 0.3.** *Soit  $S$  une surface de Riemann non-compacte, de volume fini (i.e avec un nombre fini de points ôtés), de caractéristique d'Euler  $\chi$ . Il existe une famille à un*

paramètre  $(\rho_t)_{t \in [-1,1]}$  de représentations du groupe fondamental de  $S$  dans  $PU(2,1)$  satisfaisant aux conditions suivantes.

- L'invariant de Toledo de  $\rho_t$  vaut  $2\pi\chi t$ .
- Pour tout  $t$ ,  $\rho_t$  est une représentation discrète, fidèle et préservant le type du groupe fondamental de  $S$ .
- La représentation  $\rho_0$  préserve une  $\mathbb{R}$ -plan.
- La représentation  $\rho_1$  préserve une droite complexe.

De plus, Goldman, Kapovich et Leeb ont montré dans [GKL01] que pour tout entier  $k$  tel que  $4\pi(1-g) \leq 2k\pi \leq 4\pi(g-1)$ , il existe une représentation du groupe fondamental de la surface compacte de genre  $g$  dans  $PU(2,1)$  qui est convexe-cocompacte, discrète et fidèle, et dont l'invariant de Toledo est  $2k\pi$ .

Posons la

**Définition 0.4.** Un groupe triangulaire est une représentation  $\rho$  de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*3}$  dans  $\widehat{PU}(2,1)$ .

A ce jour, la plupart des groupes discrets connus en géométrie hyperbolique complexe sont des groupes triangulaires, ou des groupes d'indice fini dans un groupe triangulaire, c'est à dire engendrés par trois involutions. Ainsi, Deraux, Falbel et Paupert ont montré dans [DFP05] que les réseaux obtenus par Mostow dans [Mos80] étaient d'indice 2 dans des groupes engendrés par trois involutions antiholomorphes.

Les exemples se présentent souvent comme des familles de groupes dont on cherche à démontrer la discrétude en construisant des domaines fondamentaux. Le cas typique est le suivant : on étudie une famille à un paramètre de représentations, dont une des extrémités est discrète et fidèle, et préserve un sous-espace totalement géodésique. En général, la déformation devient non-discrète (ou non-fidèle) lorsqu'apparaît un élément elliptique. Goldman et Parker, puis Schwartz ont ainsi étudié la famille des groupes triangulaires idéaux qui est un exemple typique de comportements des groupes triangulaires. Ainsi, dans [Sch01], R. Schwartz a démontré le théorème suivant, conjecturé dans [GP92] :

**Théorème 0.5.** Soit  $G$  un sous-groupe de  $PU(n,1)$  engendré par trois réflexions complexes d'ordre deux  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ , dont les produits deux à deux sont paraboliques (groupe triangulaire idéal).  $G$  est une représentation discrète et fidèle du groupe  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*3}$  si et seulement si  $I_1I_2I_3$  est non-elliptique.

Pour prouver la discrétude d'un sous-groupe  $\Gamma$  de  $PU(2,1)$ , on essaie en général de construire un polyèdre  $P$  dont les faces sont identifiées par des éléments de  $\Gamma$ , et d'utiliser le théorème de Poincaré (voir [FZ99]) pour prouver que  $P$  fournit un domaine fondamental. Il s'agit d'une technique classique, illustrée par exemple par la méthode de Dirichlet. Le fait que  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  soit de courbure non-constante implique qu'il n'y existe pas d'hypersurface totalement géodésique. Pour reprendre l'exemple de la méthode de Dirichlet, si  $x$  est un point de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  et  $\gamma$  un élément de  $PU(n,1)$ , la sous variété de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  définie par

$$B = \{z \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n, d(x, z) = d(\gamma \cdot x, z)\}, \quad (3)$$

n'est pas totalement géodésique. La méthode de Dirichlet dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  a été étudiée par Mostow dans [Mos80] (voir aussi [Der05]). Les hypersurfaces (3) ont été définies par Mostow dans [Mos80], et s'appellent des *surfaces spinales* ou *bissecteurs* (voir le chapitre 7). Leur caractère non-géodésique conduit à de grandes difficultés techniques, par exemple pour étudier l'intersection de deux telles surfaces (voir [Gol99, DFP05]).

Suite aux travaux de Goldman et Parker sur les groupes triangulaires idéaux, H. Sandler a établi dans [San95] une relation combinatoire permettant d'exprimer la trace d'un élément du groupe en fonction de son type combinatoire. Dans [San98], Sandler a poursuivi l'étude de la trace dans les groupes triangulaires, s'intéressant au problème des mots « trace-équivalents », c'est à dire qui ont la même trace sous toutes les représentations sans être conjugués dans  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*3}$ . Pratussevitch, dans [Pra05] a décrit des coordonnées sur l'ensemble des groupes triangulaires complexes. Ces coordonnées généralisent l'invariant de Cartan dans le cas des groupes triangulaires idéaux. Elles sont obtenues en utilisant la notion de vecteur polaire à une droite complexe (voir la définition 1.31). Dans ce même travail, Pratussevitch a également généralisé la relation des traces de Sandler des groupes engendrés par trois réflexions complexes quelconques, et étudié les propriétés arithmétiques de la trace. Voir aussi le preprint [Pra]. Les travaux de Sandler et Pratussevitch, ont été la motivation initiale de l'étude de la trace dans les groupes à deux générateurs de  $SU(2,1)$ , exposée au chapitre 3.

Notre travail s'inscrit dans le cadre de l'étude des représentations discrètes de groupes de surfaces à cusps dans  $PU(2,1)$ . D'un point de vue algébrique, ces groupes sont libres, avec un nombre fini de générateurs. Si  $\Sigma$  est une surface de Riemann de genre  $g$  avec  $p$  cusps, son groupe fondamental admet la présentation suivante.

$$\pi_1(\Sigma) \sim \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1 \cdots c_p \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^p c_j = 1 \rangle \quad (4)$$

Un objectif à long terme serait de décrire et classifier les représentations de  $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow PU(2,1)$  satisfaisant aux conditions suivantes :

- $\rho$  est discrète et fidèle.
- $\rho$  préserve le type : les seuls éléments non-loxodromiques de  $\rho(\pi_1(\Sigma))$  sont paraboliques et sont conjugués dans  $\rho(\pi_1(\Sigma))$  à une puissance de l'un des  $\rho(c_j)$ .

Il s'agit donc de décrire un équivalent de l'espace de Teichmüller dans le cas du plan hyperbolique complexe. Un tel objectif est encore hors de portée pour une surface de type topologique quelconque.

Posons la définition suivante (définition 5.9).

**Définition 0.6.** Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $PU(2,1)$ . La paire  $(A, B)$  est dite *décomposable* s'il existe trois involutions  $I_1, I_2, I_3$  telles que

$$A = I_1 \circ I_2 \text{ et } B = I_3 \circ I_2$$

Plus précisément,  $(A, B)$  est dite  $\mathbb{R}$ -*décomposable* si les  $I_k$  sont antiholomorphes, et  $\mathbb{C}$ -*décomposable* si les  $I_k$  sont holomorphes. Une représentation  $\rho : F_2 \rightarrow PU(2,1)$  sera dite  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ )-*décomposable* si la paire  $(\rho(\mathbf{m}), \rho(\mathbf{n}))$  est  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ )-*décomposable*.

Les représentations  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ -décomposables sont donc d'indice deux dans un groupe triangulaire. Rappelons maintenant les principaux résultats obtenus dans l'étude des représentations de surfaces à cusps.

- Dans les travaux [GP92, Sch01, Sch05b], Goldman et Parker, puis Schwartz ont décrit complètement l'espace des représentations discrètes, fidèles, préservant le type, et  $\mathbb{C}$ -décomposables de la sphère moins trois points. Il s'agit un segment  $(\rho_t)$  avec  $t \in [0, 1[$ .  $\rho_0$  stabilise un  $\mathbb{R}$ -plan, et  $\rho_1$  est une représentation discrète et fidèle mais contenant une classe supplémentaire parabolique.
- Dans [FK00], Falbel et Koseleff ont décrit un ouvert de dimension 4 formé de représentations deux à deux non-conjuguées dans  $PU(2,1)$ , discrètes, fidèles, préservant le type, et  $\mathbb{R}$ -décomposables de la sphère moins trois points.
- Le cas des représentations du groupe modulaire  $PSL(2, \mathbb{Z})$  a été traité dans [FK02a, GP00, FP03, GP03]. Toute représentation du groupe modulaire contient alors avec indice fini une représentation du groupe fondamental d'une surface de Riemann de genre  $g$  avec  $p$  pointes,  $g$  et  $p$  étant des entiers quelconques tels que  $2 - 2g - p < 0$  (c'est le théorème de Millington, voir [GP03]).

## Plan de la thèse

Dans le cas du tore épointé, la relation 4 pour  $g = 1$  et  $p = 1$  montre que le groupe fondamental du tore épointé est isomorphe au groupe libre à deux générateurs. Dans tout ce qui suit, nous désignerons par  $F_2 = \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle$  le groupe libre à deux générateurs  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{n}$ , et par  $\text{Hom}(F_2, PU(2,1))^{\text{lox}}$  l'ensemble des représentations  $\rho$  de  $F_2$  dans  $PU(2,1)$  telles que  $\rho(\mathbf{m})$  et  $\rho(\mathbf{n})$  sont loxodromiques.  $T_{g,n}$  désignera l'espace de Teichmüller d'une surface de Riemann de genre  $g$  avec  $p$  pointes. Précisons maintenant nos objectifs.



1. Donner des coordonnées sur  $\text{Hom}(F_2, \text{PU}(2,1))/\text{PU}(2,1)$ . En utilisant les traces, nous obtenons de telles coordonnées dans la proposition 3.23.
2. Décrire les représentations de  $\text{Hom}(F_2, \text{PU}(2,1))^{\text{lox}}$ , et donner un critère de  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ -décomposabilité d'une représentation. Nous obtenons ce critère d'abord en termes de birapport complexe (cf chapitre 4), puis nous le traduisons en termes de traces dans la proposition 5.13, et le théorème 5.17.
3. Identifier dans  $\text{Hom}(F_2, \text{PU}(2,1))^{\text{lox}}$  les représentations  $\rho$  telles que  $\rho([\mathbf{m}, \mathbf{n}])$  est parabolique. Ce résultat est obtenu dans le chapitre 6, propositions 6.24 et 6.25.
4. Décrire une famille de représentations discrètes, fidèles et préservant le type du groupe fondamental du tore épointé dans  $\text{PU}(2,1)$ . Le théorème 7.1 décrit une famille à un paramètre de plongements de l'espace de Teichmüller du tore épointé dans  $\text{Hom}(F_2, \text{PU}(2,1))^{\text{lox}}$ . Il est obtenu au chapitre 7.

Notre travail est organisé de la façon suivante :

- **Chapitre 1.** Il s'agit d'un chapitre de préliminaires, où nous décrivons l'espace hyperbolique complexe, ses sous-espaces et ses isométries. La référence principale est le livre de Goldman ([Gol99]).
- **Chapitre 2.** Ce chapitre est consacré à la description des représentations du groupe libre à deux générateurs dans  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  et  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  (théorème de Fricke-Vogt), ainsi qu'à l'espace de Teichmüller du tore épointé.
- **Chapitre 3.** Dans ce chapitre, nous étudions les représentations du groupe libre à deux générateurs dans  $\text{SL}(3, \mathbb{C})$ . Notre présentation est basée sur le chapitre 10 de [Fog02]. Le problème a aussi été étudié par Lawton dans [Law06]. Si  $A$  et  $B$  sont deux éléments de  $\text{SL}(3, \mathbb{C})$ , les traces des deux commutateurs  $[A, B]$  et  $[A^{-1}, B]$  sont solutions d'une équation

$$T^2 - ST + P$$

où  $S$  et  $P$  sont des polynômes en 8 variables évalués au point

$$(\text{tr}A, \text{tr}B, \text{tr}AB, \text{tr}A^{-1}B, \text{tr}A^{-1}, \text{tr}B^{-1}, \text{tr}A^{-1}B^{-1}, \text{tr}AB^{-1})$$

(voir la proposition 3.6). Ce résultat apparaît déjà dans [Fog02], mais les polynômes  $S$  et  $P$  n'y sont pas explicités. Pour expliciter  $S$  et  $P$ , nous avons utilisé le logiciel de calcul formel MAPLE. Nous déduisons de l'étude de  $\text{SL}(3, \mathbb{C})$  le critère suivant de conjugaison pour les sous-groupes Zariski-denses à deux générateurs de  $\text{PU}(2,1)$ . Nous prouvons la proposition 3.23 à ce stade. Dans le cas où la représentation est  $\mathbb{C}$ -décomposable, ces coordonnées nous permettent de généraliser les coordonnées de Pratussevitch sur l'ensemble des groupes triangulaires complexes, sans hypothèse géométrique sur la position relative des miroirs.

- **Chapitre 4.** Nous décrivons le birapport complexe, introduit par Koranyi et Reimann sur le groupe de Heisenberg dans [KR87]. Nous décrivons la classification des tétraèdres idéaux de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , obtenue par Falbel dans [Falb] : un tétraèdre est déterminé à isométrie près par trois birapports complexes, satisfaisant deux relations réelles (voir la proposition 4.12, et les relations 4.6 et 4.9). Nous terminons le chapitre par un résultat explicitant les groupes de symétries possibles d'un tétraèdre idéal (théorème 4.31).
- **Chapitre 5.** Nous utilisons le birapport complexe pour paramétrer les représentations du groupe libre  $F_2$  envoyant les générateurs sur des isométries loxodromiques. En utilisant le tétraèdre  $\tau_\rho$  formé par les points fixes des images de  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  par une représentation  $\rho$ , nous réinterprétons en termes de birapport le critère de conjugaison obtenu en termes de traces au chapitre 3. Nous relient alors les symétries éventuelles de  $\tau_\rho$  à la  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  décomposabilité de la représentations  $\rho$  (voir la proposition 5.10). Nous en déduisons le résultat suivant, dont le théorème 5.19 énoncé plus haut est un cas particulier.

**Théorème. 5.17** *Soient  $A$  et  $B$  deux isométries loxodromiques de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et  $G = \langle A, B \rangle$ . Supposons que  $G$  ne préserve aucun sous espace totalement géodésique. Alors :*

1. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
  - (a) *L'isométrie  $[A, B]$  est de trace réelle.*
  - (b) *La paire  $(A, B)$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable.*
2. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
  - (a) *Les isométries  $A, B, AB$  et  $A^{-1}B$  sont de trace réelle.*
  - (b) *L'une des deux paires  $(A, B), (A^2, B^2)$  est  $\mathbb{C}$ -décomposable.*

Nous verrons de plus que l'ensemble des représentations décomposables apparaît comme lieu des points fixes des deux involutions définies sur l'espace de représentations  $\text{Hom}(F_2, \text{PU}(2,1))^{\text{lox}}/\text{PU}(2,1)$ . Ce résultat est de même nature que ceux obtenus par F. Schaffhauser dans sa thèse dans le cas de représentations à valeurs dans un groupe de Lie compact connexe (voir [Sch06, Sch05a]). Les ensembles des classes  $\mathbb{C}$ -décomposables et  $\mathbb{R}$ -décomposables sont de dimension respectives 4 et 7 dans  $\text{Hom}(F_2, \text{PU}(2,1))^{\text{lox}}/\text{PU}(2,1)$ , qui est de dimension 8. Si l'on ajoute la condition de parabolicité du commutateur, on obtient alors des dimensions de 3 et 6.

- **Chapitre 6.** L'objet de ce chapitre est de décrire les représentations  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ -décomposables et d'identifier celles pour lesquelles  $\rho([\mathfrak{m}, \mathfrak{n}])$  est parabolique. Notre approche est basée sur la remarque suivante. Si  $G$  est groupe triangulaire  $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$  tel que  $\gamma = (I_1 I_2 I_3)^2 = [I_1 I_2, I_3 I_2]$  est parabolique, il lui est associé  $(p_1, p_2, p_3)$  un triplet de points au bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , tel que  $p_2$  est le point fixe de  $\gamma$ , et tel que  $I_k$  échange  $p_{k+1}$  et  $p_{k+2}$ . En étudiant les triangles idéaux de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , nous décrivons des

coordonnées sur ces groupes dans lesquelles la condition de parabolicité s'écrit simplement (propositions 6.24 et 6.25 page 118). Nous pouvons alors expliciter la trace du commutateur (propositions 6.26 et 6.26). Nous en déduisons la

**Proposition. 6.29** *Soit  $\mathcal{C}$  une classe de conjugaison parabolique. Il existe une représentation  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ -décomposable de  $F_2$  dans  $PU(2,1)$  telle que  $\rho([m, n]) \in \mathcal{C}$ .*

- **Chapitre 7.** Ce chapitre est consacré à la preuve du théorème principal 7.1, énoncé plus haut. Jusqu'à présent les seuls exemples de groupes triangulaires discrets  $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$ , où la seule classe non-loxodromique est celle de  $(I_1 I_2 I_3)^2$  et est parabolique sont ceux liés au groupe modulaire  $PSL(2, \mathbb{Z})$  (voir [FP03]). Pour démontrer le théorème 7.1, nous définissons les  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales. Ce sont des hypersurfaces de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  similaires aux bissecteurs. Les bissecteurs peuvent être décrits comme les image réciproques des géodésiques par la projection orthogonale sur une droite complexe. De manière analogue, les  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales sont les images réciproques des géodésiques par la projection orthogonales sur un  $\mathbb{R}$ -plan. Nous construisons un domaine fondamental dont les faces sont des  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales construite sur un triangle idéal. Il y a deux problèmes techniques. Le premier est de montrer que les faces ne s'intersectent qu'aux sommets du triangle idéal qui forment le cycle parabolique associé à un lacet autour du cusp (voir les propositions 7.18 et 7.21). Le second est de montrer que les représentations impliquées préservent le type, c'est à dire que les seul éléments paraboliques sont associés au lacet autour du cusp. Ce résultat est l'objet principal d'un article à paraître dans *Journal für die reine und angewandte Mathematik* ([Wil05], [Wil]).

Résumons la position relative des différents ensembles de représentations étudiés dans ce travail.

- $\text{Hom}(F_2, PU(2,1))/PU(2,1)$  est de dimension 8. Nous donnons dans le chapitre 3 un critère pour que deux représentations irréductibles  $\rho_1$  et  $\rho_2$  soient égales dans ce quotient.
- $\text{Hom}(F_2, PU(2,1))^{\text{lox}}$  contient les représentations telles que  $\rho(\mathbf{m})$  et  $\rho(\mathbf{n})$  sont loxodromiques.  $\text{Hom}(F_2, PU(2,1))^{\text{lox}}/PU(2,1)$  est de dimension 8.
- $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  est l'ensemble des groupes triangulaires complexes tels  $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$  tels que  $(I_1 I_2 I_3)^2$  est loxodromique ou parabolique.  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}/PU(2,1)$  est de dimension 4.  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\text{par}}$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  contenant les représentations pour lesquelles  $(I_1 I_2 I_3)^2$  est parabolique.  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\text{par}}/PU(2,1)$  est de dimension 3.

- 
- $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  est l'ensemble des groupes triangulaires lagrangiens  $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$  tels que  $(I_1 I_2 I_3)^2$  est loxodromique ou parabolique.  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}/\mathrm{PU}(2,1)$  est de dimension 7.  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{par}}$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  contenant les représentations pour lesquelles  $(I_1 I_2 I_3)^2$  est parabolique.  
 $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{par}}/\mathrm{PU}(2,1)$  est de dimension 6.
  - Nous montrons dans le chapitre 5 que toute représentation de  $\mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{PU}(2,1))^{\mathrm{lox}}$  telle que  $\rho(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$  est parabolique non-vertical est  $\mathbb{R}$ -décomposable. L'intersection entre  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{par}}/\mathrm{PU}(2,1)$  et  $\mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{PU}(2,1))^{\mathrm{lox}}/\mathrm{PU}(2,1)$  est donc de dimension 6.
  - Le théorème 7.1 montre que l'intersection de  $\mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{PU}(2,1))^{\mathrm{lox}}/\mathrm{PU}(2,1)$  et  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{par}}/\mathrm{PU}(2,1)$  contient un sous-ensemble de dimension 3 formé de classes de représentations discrètes, fidèles et préservant le type.

## Directions de travail

Nous terminons cette introduction en posant quelques questions qui s'inscrivent dans la continuité de cette thèse.

- Soit  $\mathcal{C}$  une classe de conjugaison parabolique dans  $\mathrm{PU}(2,1)$ , et  $\mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{PU}(2,1))^{\mathcal{C}}$  l'ensemble des représentations de  $F_2$  dans  $\mathrm{PU}(2,1)$  telles que  $\rho([\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]) \in \mathcal{C}$ . Quel est le nombre de composantes connexes de  $\mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{PU}(2,1))^{\mathcal{C}}/\mathrm{PU}(2,1)$  ?
- Etudier le cas des représentations du groupe fondamental de surfaces épointées quelconques.
- Décrire la structure symplectique des différents espaces de représentations étudiés.



# Chapitre 1

## L'espace hyperbolique complexe

### 1.1 Introduction

L'espace hyperbolique complexe  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  est l'espace symétrique (de rang un) associé au groupe de Lie  $\mathrm{PU}(n,1)$ . On utilise  $\mathrm{PU}(n,1)$  plutôt que  $\mathrm{SU}(n,1)$  pour se débarrasser du centre de  $\mathrm{SU}(n,1)$ . Les sous-groupes compacts maximaux de  $\mathrm{PU}(n,1)$  étant des copies de  $\mathrm{U}(n)$ ,  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  peut donc être vu comme l'espace symétrique  $\mathrm{PU}(n,1)/\mathrm{U}(n)$ . On peut également voir  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  comme un sous-ensemble de  $\mathbb{C}P^n$  via la projectivisation du cône associé à la forme de signature  $(n, 1)$ . Nous exposons cette construction de l'espace dans le cas de la dimension  $n = 2$  (le plan hyperbolique complexe) au début de la partie 1.2. Cette description se généralise sans difficultés au cas de la dimension  $n$ .

En utilisant par exemple la forme hermitienne associée à la matrice diagonale

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

on constate que l'on peut voir  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  comme la boule unité de  $\mathbb{C}^n$  (une carte affine de  $\mathbb{C}P^n$ ). A ce titre,  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  possède donc une structure de Kähler, qui induit une structure riemannienne et une structure symplectique. Toutes ces structures peuvent s'exprimer en utilisant l'algèbre linéaire de  $\mathbb{C}^{n,1}$  ( $\mathbb{C}^{n+1}$  muni de la forme  $J$ ). Ainsi, la distance riemannienne sur  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ , qui correspond à la métrique de Bergman de la boule, s'écrit après normalisation de la courbure holomorphe à  $-1$  :

$$\cosh^2 \frac{d(p_1, p_2)}{2} = \frac{|\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle|^2}{\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1 \rangle \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 \rangle}, \quad (1.1)$$

où  $p_1$  et  $p_2$  sont deux points de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  et  $\mathbf{p}_i$  un relèvement de  $p_i$ .

Il existe bien entendu autant de modèles pour  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  que de formes hermitiennes de signature  $(n, 1)$  sur  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Cette remarque peut être utile dans certains cas, pour choisir le modèle

le plus adapté à une situation donnée. Les applications de passage d'un modèle à l'autre sont appelées des transformations de Cayley. Nous en donnerons un exemple dans le paragraphe 1.2, où nous exposerons les deux modèles les plus utilisés de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

$\text{PU}(n,1)$  et la conjugaison complexe agissent clairement par isométries sur  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Ils épuisent en fait toutes les isométries de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  :

**Théorème 1.1.** *Le groupe d'isométries de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  est  $\widehat{\text{PU}(n,1)}$ , engendré par  $\text{PU}(n,1)$  et la conjugaison complexe.*

Nous renvoyons par exemple à [Gol99] pour une preuve. Passons maintenant à une étude plus systématique du cas du plan hyperbolique complexe  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

## 1.2 Le plan hyperbolique complexe

### 1.2.1 Deux modèles du plan hyperbolique complexe

Parmi les différentes formes hermitiennes utilisées pour donner des coordonnées sur  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , nous décrivons les deux suivantes, qui nous seront les plus utiles. Dans les deux cas, les produits hermitiens seront pris antilinéaires par rapport à la seconde variable.

#### Le modèle de la boule

Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  le produit hermitien sur  $\mathbb{C}^3$  associé à la matrice :

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A ce produit hermitien sont naturellement associés les trois sous-ensembles de  $\mathbb{C}^3$  suivant

$$\begin{aligned} V_1^+ &= \{v \in \mathbb{C}^3 \mid \langle v, v \rangle_1 > 0\} \\ V_1^0 &= \{v \in \mathbb{C}^3 \mid \langle v, v \rangle_1 = 0\} \\ V_1^- &= \{v \in \mathbb{C}^3 \mid \langle v, v \rangle_1 < 0\} \end{aligned}$$

Dans ce modèle,  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbf{P}(V_1^-)$  est entièrement contenu dans la carte affine  $z_3 = 1$  de  $\mathbb{C}P^2$ , et peut-être vu comme la boule unité de  $\mathbb{C}^2$  :

$$\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 = \{(w_1, w_2), |w_1|^2 + |w_2|^2 < 1\}$$

Ce modèle est une généralisation du modèle du disque de Poincaré pour la droite hyperbolique complexe.

### Le modèle de Siegel.

Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  le produit hermitien sur  $\mathbb{C}^3$  associé à la matrice :

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notons que si  $v$  est le vecteur  $[z_1 \ z_2 \ z_3]^T$ ,  $\langle v, v \rangle_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_3) + |z_2|^2$ . De nouveau, définissons les trois sous-ensembles de  $\mathbb{C}^3$  :

$$\begin{aligned} V_2^+ &= \{v \in \mathbb{C}^3 \mid \langle v, v \rangle_1 > 0\} \\ V_2^0 &= \{v \in \mathbb{C}^3 \mid \langle v, v \rangle_1 = 0\} \\ V_2^- &= \{v \in \mathbb{C}^3 \mid \langle v, v \rangle_1 < 0\} \end{aligned}$$

Dans ce modèle,  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbf{P}(V_2^-)$  est de nouveau entièrement contenu dans la carte affine  $z_3 = 1$  de  $\mathbb{C}P^2$ , et peut donc être vu comme le domaine suivant de  $\mathbb{C}^2$ .

$$\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 = \{(z_1, z_2), 2\operatorname{Re}(z_1) < -|z_2|^2\}.$$

Dans ces coordonnées, tout point  $m$  de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  admet un unique relèvement à  $\mathbb{C}^3$  de la forme

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} -|z|^2 - u + it \\ \sqrt{2}z \\ 1 \end{bmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R} \text{ et } u > 0.$$

Le triplet  $(z, t, u)$  définit les *coordonnées horosphériques* du point  $m$ . En effet, les sous-ensembles du type  $\{u = \text{cste}\}$  sont des exemples d'horosphères, centrées à l'infini.

### La transformation de Cayley associée à ces deux modèles.

De même que le disque et le demi-plan sont biholomorphiquement échangés par l'homographie

$$z \mapsto -\frac{iz + 1}{z + i},$$

les deux modèles de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  décrits ci-dessus sont échangés par l'homographie  $c$  dont un relèvement à  $\operatorname{GL}(3, \mathbb{C})$  est

$$\mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{c}$  conjugue  $J_1$  et  $J_2$ , et vérifie  $\mathbf{c}^2 = Id$ . Nous avons vu que les deux modèles ci-dessus sont contenus dans la même carte affine  $z_3 = 1$  de  $\mathbb{C}P^2$ . Dans cette carte,  $c$  se lit

$$c : (w_1, w_2) \mapsto (z_1, z_2) = \left( \frac{w_1 + 1}{w_1 - 1}, \sqrt{2} \frac{w_2}{w_1 - 1} \right)$$



**La métrique**  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  est équipé de la métrique de Bergman (voir [Cha76]). Dans les deux modèles décrits ci-dessus, si  $v$  et  $w$  sont deux points de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , leur distance  $d(v, w)$  pour est donnée par

$$\cosh^2 \left( \frac{d(v, w)}{2} \right) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_i \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_i}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_i \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_i}, \quad i = 1, 2$$

où  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  sont des relèvements de  $v$  et  $w$  à  $\mathbb{C}^3$ . (L'expression ci-dessus ne dépend pas du choix des relèvements.)

**Proposition 1.2.** Voir [Gol99], pages 54 et 76

- La courbure sectionnelle holomorphe de la métrique de Bergman sur  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  est constante et égale à  $-1$ .
- La courbure sectionnelle de de la métrique de Bergman de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  est pincée entre  $-1$  et  $-1/4$ .

**Le bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .** Le bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  vu dans le modèle de la boule est la sphère  $S^3$ . Dans le modèle de Siegel, le bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  correspond en coordonnées horosphériques à l'ensemble  $(z, t, 0) \cup \infty$ , c'est à dire au compactifié de  $\mathbb{R}^3$ . Le point à l'infini se relève à  $\mathbb{C}^3$  en  $[1 \ 0 \ 0]^T$ , et correspond au point de coordonnées  $(1, 0)$  du modèle de la boule. Dans un modèle comme dans l'autre, ce point est le seul du bord à n'être pas contenu dans la carte affine  $z_3 = 1$ . La transformation de Cayley  $c$  induit une projection stéréographique  $\pi$  de  $S^3 \setminus (1, 0)$  sur  $\mathbb{R}^3$ , donnée par

$$\pi(w_1, w_2) = \left[ \frac{w_2}{w_1 - 1}; \frac{-2\text{Im}(w_1)}{|w_1 - 1|^2} \right] \quad \text{et} \quad \pi^{-1}([z, t]) = \left( \frac{-|z|^2 + it + 1}{-|z|^2 + it - 1}, \frac{2z}{-|z|^2 + it - 1} \right).$$

Le bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  s'identifie à l'ensemble des éléments unipotents de  $\text{PU}(2,1)$  fixant un point du bord (voir page 29). il peut être vu comme le groupe de Heisenberg  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  muni du produit

$$[w, \tau].[z, t] = [w + z, \tau + t + 2\text{Im}(w\bar{z})].$$

Posons la

- Définition 1.3.**
- La translation de Heisenberg par  $[w, \tau]$  est l'application définie sur le groupe de Heisenberg par  $[z, t] \mapsto [w, \tau].[z, t]$ . Elle est dite verticale lorsque  $w = 0$ .
  - La dilatation de Heisenberg de facteur  $\lambda \in \mathbb{C}$  est l'application définie sur le groupe de Heisenberg par  $[z, t] \mapsto [\lambda z, |\lambda|^2 t]$ .

Nous allons voir dans la section suivante que ces deux types d'applications sont en fait les restrictions à  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  d'isométries de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  (cf page 29).

## 1.3 Les automorphismes de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Le groupe d'isométries de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  est  $\mathrm{PU}(2,1)$ , le groupe projectif associé à  $\mathrm{U}(2,1)$ .  $\mathrm{U}(2,1)$  est l'ensemble des matrices vérifiant

$$\overline{A}^T J A = J \quad (1.2)$$

Autrement dit,  $\mathrm{U}(2,1)$  est l'ensemble des points fixes de l'involution de Cartan  $A \mapsto J \overline{A}^T J$ , définie sur  $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ .  $\mathrm{SU}(2,1)$  est un revêtement triple de  $\mathrm{PU}(2,1)$ .  $\mathrm{PU}(2,1)$  agit transitivement sur chacune des trois composantes de  $\mathbb{C}P^2$  associées au cône isotrope de la forme hermitienne,  $\mathbf{P}(V^+)$ ,  $\mathbf{P}(V^-)$  et  $\mathbf{P}(V^0)$ .

**Lemme 1.4.** *Soit  $A$  une matrice de  $\mathrm{SU}(2,1)$ . Le spectre de  $A$  est invariant par la transformation  $z \mapsto \bar{z}^{-1}$*

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la relation 1.2. □

**Lemme 1.5.** *Soit  $A$  une matrice de  $\mathrm{SU}(2,1)$ . Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $X^3 - \mathrm{tr} AX^2 + \overline{\mathrm{tr} AX} - \mathrm{Id}$ .*

*Démonstration.*  $A$  étant dans  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ , son polynôme caractéristique est  $X^3 - \mathrm{tr} AX^2 + (v_1 v_2 + v_2 v_3 + v_1 v_3)X - \mathrm{Id}$ , où le spectre de  $A$  est  $\{v_1, v_2, v_3\}$ . Le produit  $v_1 v_2 v_3$  vaut 1, donc, en utilisant le lemme précédent

$$\begin{aligned} v_1 v_2 + v_2 v_3 + v_1 v_3 &= \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} \\ &= \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3. \end{aligned}$$

□

### 1.3.1 Classification des éléments.

Les isométries de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  sont classées en trois types. Si  $h$  est une isométrie de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , on dit que

1.  $h$  est *elliptique* si elle a un point fixe dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$
2.  $h$  est *loxodromique* si elle a exactement deux points fixes dans  $\partial \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$
3.  $h$  est *parabolique* si elle a exactement un point fixe dans  $\partial \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$

Nous allons exposer deux critères qui permettent de distinguer ces trois types d'isométries. Le premier est dû à Chen et Greenberg ([CG74]), et est basé sur la forme de Jordan d'un relèvement de  $h$  à  $\mathrm{U}(2,1)$ .

**Proposition 1.6.** *Soient  $h$  une isométrie holomorphe de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et  $A$  un relèvement de  $h$  à  $\mathrm{U}(2,1)$ .*

1.  $h$  est elliptique si  $A$  est semi-simple et que ses valeurs propres sont toutes de module 1.
2.  $h$  est loxodromique si  $A$  est semi-simple et admet une valeur propre de module différent de 1.
3.  $h$  est parabolique si  $A$  n'est pas semi-simple. Dans ce cas, ses valeurs propres sont de module 1.

Posons la

**Définition 1.7.** – Une isométrie elliptique de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  sera dite régulière si elle admet un relèvement à  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  admettant trois valeurs propres distinctes. Dans le cas contraire, elle sera dite spéciale.  
 – Une isométrie parabolique sera dite parabolique pure si elle admet un relèvement unipotent à  $SU(2,1)$ . Dans le cas contraire, elle sera dite ellipto-parabolique

Le second critère est une conséquence du lemme suivant.

**Lemme 1.8** (Voir [Gol99], chapitre 6). *Soit  $A$  une matrice de  $SU(2,1)$ , et  $\tau$  sa trace.  $A$  possède une valeur propre double si et seulement si  $|\tau|^4 - 8\operatorname{Re}(\tau^3) + 18|\tau|^2 - 27 = 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $\chi$  le polynôme caractéristique de  $A$ .  $A$  possède une valeur propre double si et seulement si le résultant  $\operatorname{Res}(\chi, \chi')$  est nul. On obtient le résultat en utilisant la forme du polynôme caractéristique obtenue dans le lemme 1.5.  $\square$

*Remarque 1.9.* Si une matrice de  $SU(2,1)$  a une valeur propre double, alors ses trois valeurs propres sont de module 1. C'est une conséquence de la stabilité du spectre de  $A$  par  $z \mapsto \bar{z}^{-1}$ .

**Définition 1.10.** Soit  $f$  le polynôme

$$f(z) = |z|^4 - 8\operatorname{Re}(z^3) + 18|z|^2 - 27.$$

Désignons par  $\mathbb{U}_3$  l'ensemble des racines troisièmes de l'unité.

**Lemme 1.11** (Voir [Gol99], chapitre 6). *Soit  $A$  une matrice de  $SU(2,1)$ ,  $\tau$  sa trace, et  $h$  l'isométrie de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  associée à  $A$ . Alors,*

- Si  $f(\tau) < 0$ ,  $h$  est elliptique régulière.
- Si  $f(\tau) > 0$ ,  $h$  est loxodromique.
- Si  $f(\tau) = 0$ , alors
  - soit  $\tau \in 3\mathbb{U}_3$ , auquel cas  $h$  est unipotente
  - soit  $\tau \notin 3\mathbb{U}_3$ , auquel cas  $h$  est parabolique non-unipotente ou elliptique spéciale.

*Remarque 1.12.* Nous appellerons  $\Delta$  le lieu des zéros de  $f$ .  $\Delta$  est paramétré par la fonction  $\varphi : \alpha \rightarrow e^{-2i\alpha} + 2e^{i\alpha}$  pour  $-\pi \leq \alpha < \pi$ . Ce paramétrage traduit le fait que si  $A \in SU(2,1)$ ,  $\operatorname{tr}A$  est sur  $\Delta$  si et seulement si  $A$  a deux valeurs propres de module 1 égales.

Nous allons maintenant nous intéresser de plus près à chacun de ces trois types d'isométries.

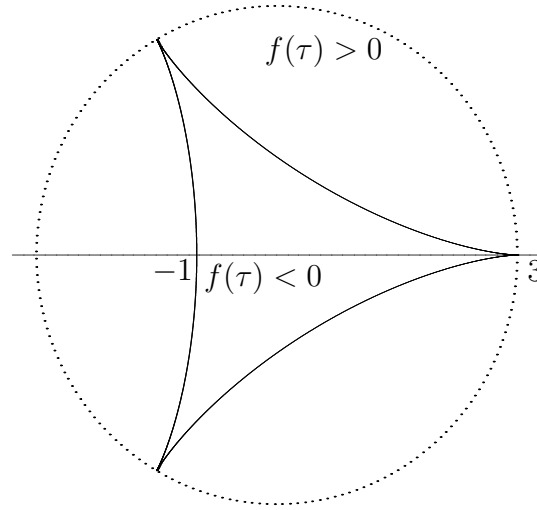


FIG. 1.1 – Classification des éléments par la trace.

### 1.3.2 Les isométries elliptiques

**Les isométries elliptiques régulières** Si  $A \in \mathrm{SU}(2,1)$  est un relèvement d'un élément elliptique régulier, l'homographie associée a trois points fixes dans  $\mathbb{C}P^2$ , qui sont les images des droites propres de  $A$  par la projectivisation.

- L'un de ces points fixes est dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .
- Les deux autres sont dans  $\mathbf{P}(V^+)$  et sont polaires<sup>1</sup> à des droites complexes stables orthogonales, qui se coupent au point fixe dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Utilisons le modèle de la boule. Les éléments elliptiques sont conjugués dans  $\mathrm{SU}(2,1)$  à un élément admettant le relèvement à  $\mathrm{SU}(2,1)$  :

$$A = \begin{bmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_3} \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas le point fixe est le centre de la boule, correspondant au vecteur  $[0 \ 0 \ 1]^T$ , et les droites complexes stables sont les deux axes de coordonnées. La classe de conjugaison d'un élément elliptique est déterminée par les deux quantités  $\alpha_1 - \alpha_3$  et  $\alpha_2 - \alpha_3$ , que nous appellerons les *angles* d'un élément elliptique.

**Les elliptiques spéciaux** Les isométries elliptiques spéciales ont deux valeurs propres égales. Leur spectre est donc du type  $\{e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}\}$ . En conservant les notations du paragraphe précédent, on constate que les angles d'un elliptique spécial  $E$  sont de l'un des trois types :

---

<sup>1</sup>Voir la section 1.4.1

- $\{0, \varphi\}$ , auquel cas on parle de *réflexion complexe* :  $E$  fixe une droite complexe  $D$  et agit dans les droites complexes orthogonales à  $D$  comme une rotation d'angle  $\theta$ .
- $\{\varphi, \varphi\}$ , auquel cas on parle de *réflexion complexe par rapport à un point* :  $E$  stabilise toutes les droites complexes contenant son point fixe, et agit sur chacune d'entre elles comme une réflexion d'angle  $\varphi$ .

*Remarque 1.13.* Parmi les réflexions complexes par rapport à un point, il y a des involutions : les réflexions dont les angles sont  $\{\pi, \pi\}$ . Ces involutions sont aussi appelées demi-tours. A tout point  $p$  de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  est associé un unique demi-tour qui fixe  $p$  et dont la différentielle en  $p$  est  $-Id$ . Ces involutions munissent donc  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  d'une structure d'espace symétrique riemannien (Voir [Gol99], page 82, et [Jos98]).

### 1.3.3 Les isométries loxodromiques

Soit  $h$  un élément loxodromique, et  $A$  un relèvement de  $h$  à  $SU(2,1)$ . Soient  $p_h$  et  $q_h$  les deux points fixes de  $h$  situés au bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

**Définition 1.14.** La géodésique  $\sigma_h$ , joignant  $p_h$  et  $q_h$  est appelée l'*axe* de  $h$ . La droite complexe  $C_h$  engendrée par  $\sigma_h$  est appelée l'*axe complexe* de  $h$ .

La géodésique  $\sigma_h$  et la droite complexe  $C_h$  sont stables par  $h$ . Par conséquent, le point  $r_h = C_h^{\perp}$  est fixé par  $h$ . On en déduit la proposition suivante.

**Proposition 1.15.** *Tout élément loxodromique de  $PU(2,1)$  a trois points fixes dans  $\mathbb{C}P^2$ , dont deux sont situés au bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et le troisième dans  $\mathbf{P}(V^+)$ .*

*Remarque 1.16.* Si  $\mathbf{p}_h$  et  $\mathbf{q}_h$  sont des relèvements de  $p_h$  et  $q_h$ , le point fixe de  $h$  situé dans  $\mathbf{P}(V^+)$  admet le relèvement  $\mathbf{p}_h \boxtimes \mathbf{q}_h$  (voir la définition du produit vectoriel hermitien dans la section 1.4.1). Le vecteur  $\mathbf{p}_h \boxtimes \mathbf{q}_h$  est polaire à la droite complexe  $C_h$  (voir encore la section 1.4.1).

*Remarque 1.17.* Soit  $h$  une isométrie loxodromique, et  $A$  un relèvement à  $SU(2,1)$ . Quitte à conjuguer  $A$  par un élément de  $SU(2,1)$ , on peut supposer que  $p_h$ ,  $q_h$  et  $r_h$  admettent les relèvements à  $\mathbb{C}^3$  suivants :

$$\mathbf{p}_h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{q}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$A$  est alors la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Dans le groupe de Heisenberg,  $A$  induit la transformation

$$[z, t] \longmapsto \left[ z \frac{\bar{\mu}^2}{\mu}, |\mu|^2 t \right]$$

La restriction de  $A$  est donc une dilatation de Heisenberg. Si  $|\mu| > 1$ , alors  $p_h$  est un point fixe attractif et  $q_h$  un point fixe répulsif. Dans le cas contraire, les rôles sont inversés.

La quantité  $d(\omega, h(\omega))$  atteint son minimum en tout point de  $\sigma_h$ . Ce minimum est appelé la *longueur de translation* de  $h$ . On la notera  $l_h$ . Les grandeurs  $l_h$  et  $\mu$  sont liées par la relation

$$\cosh\left(\frac{l_h}{2}\right) = \frac{1}{2} \left( |\mu|^2 + \frac{1}{|\mu|^2} \right)$$

Cette expression est invariante par le changement  $\mu \leftrightarrow \bar{\mu}^{-1}$ .

*Remarque 1.18.* La forme normalisée 1.3 montre que  $\mu$  détermine sans ambiguïté la classe de conjugaison de  $A$ . Or  $\mu$  est obtenu par résolution du polynôme caractéristique de  $A$ , qui s'écrit dans  $\mathrm{SU}(2,1)$

$$X^3 - \mathrm{tr}AX^2 + \overline{\mathrm{tr}AX} - 1.$$

Par conséquent, la classe de conjugaison de  $A$  est entièrement déterminée par sa trace. Ceci est faux pour les isométries elliptiques : il y a trois classes de conjugaisons elliptique par trace elliptique.

**Proposition 1.19.** *Deux isométries loxodromiques commutent si et seulement si elles ont les mêmes points fixes.*

*Démonstration.* Deux isométries loxodromiques commutent si et seulement si elles admettent des relèvements qui sont diagonaux dans une base commune. D'où le résultat.  $\square$

### 1.3.4 Les isométries paraboliques

**Les isométries paraboliques purs** Soit  $h$  un élément parabolique pur. Dans le modèle de Siegel, on peut supposer que le point fixe de  $h$  est  $\infty$ . L'élément parabolique  $h$  admet alors pour relèvement à  $\mathrm{SU}(2,1)$  la matrice

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 & -\bar{w}\sqrt{2} & -|w|^2 + i\tau \\ 0 & 1 & w\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } w \in \mathbb{C} \text{ et } \tau \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

La restriction de  $h$  à  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  est la translation de Heisenberg

$$[z, t] \longmapsto [w, \tau][z, t].$$

Si  $w = 0$ ,  $h$  est une translation verticale. Rappelons que l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente  $N$  est le plus petit entier  $p$  tel que  $N^p = 0$ .

- Proposition 1.20.** 1. L'ensemble des isométries paraboliques pures  $h$  admettant un relèvement  $H$  à  $SU(2,1)$  tel que  $(H - Id)$  est nilpotent d'indice 2 forme une classe de conjugaison dans  $PU(2,1)$ .
2. L'ensemble des isométries paraboliques pures  $h$  admettant un relèvement  $H$  à  $SU(2,1)$  tel que  $(H - Id)$  est nilpotent d'indice 3 forme une classe de conjugaison dans  $PU(2,1)$ .

Les isométries paraboliques pures qui appartiennent à la classe de conjugaison du premier type (indice de nilpotence 2) sont caractérisées géométriquement par le fait qu'elles stabilise une droite complexe (voir la section 1.4.1)

*Remarque 1.21.* Comme nous l'avons vu, l'horosphère de niveau  $u_0$  centrée en  $\infty$  (modèle de Siegel) est formée des points de coordonnées horosphériques  $(z, t, u_0)$  avec  $z \in \mathbb{C}$  et  $t \in \mathbb{R}$ . On vérifie facilement en utilisant la matrice ci dessus qu'elle est préservée par toute translation de Heisenberg. On peut donc voir toute horosphère comme une copie du groupe de Heisenberg.

**Les isométries ellipto-paraboliques** Les éléments ellipto-paraboliques ont une valeur propre double. La valeur propre « seule » correspond à un vecteur propre contenu dans  $V^+$ , polaire à une droite complexe stable.

Soit  $h$  un élément ellipto-parabolique. Quitte à conjuguer, on peut supposer que le vecteur propre positif est  $[0 \ 1 \ 0]^T$ , et que les points fixes, en coordonnées de Heisenberg sont  $\infty$  et  $[0, 0]$ . Dans ces conditions,

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} e^{-i\theta} & 0 & e^{-i\theta}i\tau \\ 0 & e^{2i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} \text{ avec } \tau \in \mathbb{R} \text{ et } \theta > 0$$

En coordonnées de Heisenberg,  $h$  correspond a une translation de Heisenberg verticale de  $[0, \tau]$ , suivie d'une dilatation de Heisenberg de facteur  $e^{3i\theta}$ . La classe de conjugaison de  $h$  est entièrement déterminée par  $\theta$ .

*Remarque 1.22.* Toute matrice triangulaire supérieure de  $SU(2,1)$  qui n'est pas le relèvement d'une isométrie loxodromique s'écrit

$$M = e^{-i\theta/3} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2}\bar{z}e^{i\theta} & -|z|^2 + it \\ 0 & e^{i\theta} & \sqrt{2}z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Un calcul montre que l'homographie associée à  $M$  stabilise la droite verticale  $D$  de groupe de Heisenberg paramétrée par

$$[w, \tau], \tau \in \mathbb{R}, w = \frac{-z}{e^{i\theta} - 1}.$$

Cette droite verticale est le bord d'une droite complexe  $C$ , qui est fixée point par point si et seulement si  $D$  l'est ( $D$  est un exemple de  $\mathbb{C}$ -cercle <sup>2</sup>). La translation verticale (i.e. le long de  $D$ ) est donnée par

$$\frac{|z|^2(1 + \cos \theta)}{\sin \theta} - t. \quad (1.6)$$

L'isométrie associée à  $M$  est parabolique si et seulement si cette translation est non-nulle. Dans le cas contraire, c'est une réflexion complexe de miroir  $C$ . On constate donc qu'à  $z$  et  $\theta$  fixé l'isométrie associée à  $M$  est parabolique, sauf pour une seule valeur de  $t$ .

### 1.3.5 Isotropie des points de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$

**Lemme 1.23.** *L'isotropie  $G_p$  dans  $PU(2,1)$  d'un point de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  contient exactement l'ensemble des isométries elliptiques qui le fixent.  $G_p$  est un plongement de  $U(2)$  dans  $PU(2,1)$ .*

*Démonstration.* Les seules isométries qui fixent  $p$  sont elliptiques, puisque  $p$  est intérieur à  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Quitte à conjuguer, on peut supposer que  $p$  est le point  $(0,0)$ , dans le modèle de la boule. On vérifie alors que les éléments de  $PU(2,1)$  qui fixent ce point correspondent aux éléments de  $SU(2,1)$  de la forme

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A^{-1} \end{bmatrix}, \text{ avec } A \in U(2). \quad (1.7)$$

□

## 1.4 Les sous-espaces totalement géodésiques de dimension 2 de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$

$\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  étant un espace symétrique riemannien, ses sous-espaces totalement géodésiques sont soit totalement réels, soit des sous-espaces linéaires complexes (voir par exemple [Gol99], chapitre 3 page 82). Il y a quatre types de sous-espaces totalement géodésiques :

- les points
- les géodésiques
- les *droites complexes* (voir le paragraphe suivant)
- les  $\mathbb{R}$ -plans (voir le paragraphe 1.4.2).

*Remarque 1.24.*  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  étant de courbure négative, il existe une unique géodésique contenant deux points donnés. Nous reviendrons sur les géodésiques au début du chapitre 6. Voir également [Par03].

---

<sup>2</sup>voir la section 1.4.1



*Remarque 1.25.*  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  n'a pas d'hypersurface totalement géodésique. C'est une conséquence du fait que sa courbure sectionnelle réelle est variable.

Nous allons maintenant nous intéresser aux deux derniers types : les droites complexes et les  $\mathbb{R}$ -plans.

### 1.4.1 Les droites complexes de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$

#### Définitions et exemples

Rappelons que les droites complexes de  $\mathbb{C}P^2$  sont les projections des plans complexes de  $\mathbb{C}^3$ .

**Définition 1.26.** Une droite complexe de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  est l'intersection d'une droite complexe de  $\mathbb{C}P^2$  avec  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , lorsqu'elle est non-triviale.

*Exemple 1.27.* Utilisons le modèle de la boule. Le plan de  $\mathbb{C}^3$  d'équation  $z_2 = 0$  se projette sur la droite complexe vue comme  $\mathbb{C} \times \{0\}$  dans la carte affine  $\{(z_1, z_2, 1)\}$ , qui intersecte  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  selon le disque  $\{(z_1, 0)\}, |z_1| < 1$ .

**Lemme 1.28.** Soient  $p_1$  et  $p_2$  deux points de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Il existe une unique droite complexe contenant  $p_1$  et  $p_2$ .

*Démonstration.* Relevons  $p_1$  et  $p_2$  à  $\mathbb{C}^{2,1}$  en  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$ . Il existe un unique plan complexe contenant  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  : le sous espace vectoriel engendré sur  $\mathbb{C}$ , qui ne dépend pas du choix des relèvements. Son image dans  $\mathbb{C}P^2$  contient  $p_1$  et  $p_2$ .  $\square$

En utilisant la dualité associée à la structure hermitienne, on associe à toute droite complexe de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  un point de  $\mathbb{C}P^2$  situé dans  $P(V^+)$  de la façon suivante.

**Définition 1.29.** Soit  $m$  un point  $\mathbb{C}P^2$  appartenant à  $P(V^+)$ , et  $\mathbf{m}$  un relèvement de  $m$ . Nous appellerons  $m^\perp$  le sous-ensemble de  $\mathbb{C}P^2$  défini par

$$\{\mathbf{P}(Z) \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2, \langle \mathbf{m}, Z \rangle = 0\}.$$

**Proposition 1.30.** –  $m^\perp$  est une droite complexe de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , qui ne dépend pas du choix de  $\mathbf{m}$ .

- A toute droite complexe  $C$  de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  est associé un unique point  $m_C$  de  $\mathbf{P}(V^+)$  tel que  $C = m_C^\perp$ .
- La correspondance  $C \mapsto m_C$  est bijective.

**Définition 1.31.** Soit  $C$  une droite complexe de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Un vecteur  $v$  de  $V^+$  tel que  $\mathbf{P}(v)^\perp = C$  est appelé un *vecteur polaire* à  $C$ .

La transitivité de l'action de  $\mathrm{PU}(2,1)$  sur  $\mathbf{P}(V^+)$  a pour conséquence la

**Proposition 1.32.**  $\text{PU}(2,1)$  agit transitivement sur l'ensemble des droites complexes de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$

*Exemple 1.33.* 1. Dans les coordonnées de la boule, le vecteur  $v = [0 \ 1 \ 0]^T$  est polaire à la droite complexe  $C_1 = \{(w, 0), |w| < 1\}$ .

2.  $v$  est fixé par la transformation de Cayley. Dans les coordonnées de Siegel, le vecteur  $v = [0 \ 1 \ 0]^T$  est associé à la droite complexe paramétrée en coordonnées horosphériques par  $\{(0, t, u), t \in \mathbb{R}, u < 0\}$ , qui est donc l'image de  $C_1$  par la transformation de Cayley.

### Les $\mathbb{C}$ -cercles

Il est souvent utile d'utiliser la version « dans le bord » des droites complexes.

**Proposition 1.34** (cf [Gol99], théorème 4.3.2). *Soit  $C$  une droite complexe de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . L'intersection de l'adhérence de  $C$  avec le bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  est homéomorphe à un cercle.*

*Démonstration.* D'après la proposition 1.32, il suffit de la vérifier sur le cas de l'exemple 1.27, pour lequel on obtient la courbe contenue dans  $S^3$ , paramétrée par  $\{(e^{i\theta}, 0), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ .  $\square$

**Définition 1.35.** Soit  $C$  une droite complexe de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . L'intersection  $\overline{C} \cap \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  s'appelle un  $\mathbb{C}$ -cercle.

Rappelons que le groupe de Heisenberg est muni d'une structure de contact, associée à la 1-forme  $\theta = dt + xdy - ydx$  (voir par exemple [Gol99]).

Utilisons le modèle de Siegel. Soit  $C$  une droite complexe.

- Si  $\overline{C}$  ne contient pas le point à l'infini, le  $\mathbb{C}$ -cercle  $\partial C$  est une ellipse, contenue dans un plan de contact (i.e. le noyau de la forme  $\theta$  en un point).
- Si  $\overline{C}$  contient le point à l'infini, le  $\mathbb{C}$ -cercle  $\partial C$  est une droite verticale, du type  $\{[z_0, t], t \in \mathbb{R}\}$ .

La position relative de deux  $\mathbb{C}$ -cercles traduit celle des droites complexes associées. Ainsi, deux droites complexes de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$

- s'intersectent si et seulement si les  $\mathbb{C}$ -cercles associés sont disjoints et enlacés.
- sont asymptotiques si et seulement si les  $\mathbb{C}$ -cercles associés s'intersectent.
- sont disjointes si et seulement si les  $\mathbb{C}$ -cercles associés sont disjoints et non-enlacés.

A toute droite complexe  $C$  de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  est associé un élément d'ordre deux de  $\text{PU}(2,1)$  qui fixe  $C$  : la réflexion par rapport à  $C$ .

**Précision :** Comme nous l'avons vu au paragraphe 1.3.2, il existe des réflexions complexes fixant  $C$  qui ne sont pas d'ordre deux, mais en l'absence d'indication, nous entendons par réflexion par rapport à  $C$  une involution.

**Proposition 1.36.** *Soit  $C$  une droite complexe de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et  $c$  un vecteur polaire à  $C$ . En coordonnées vectorielles, la réflexion par rapport à  $C$  est donnée par*

$$Z \longmapsto -Z + 2 \frac{\langle Z, c \rangle}{\langle c, c \rangle} c. \quad (1.8)$$

**Le produit vectoriel hermitien dans  $\mathbb{C}^{2,1}$ .**

**Définition 1.37.** Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $\mathbb{C}^3$  et  $J$  une forme hermitienne sur  $\mathbb{C}^3$ . Le produit vectoriel hermitien de  $u$  et  $v$  pour la forme  $J$  est le vecteur

$$u \boxtimes_J v = J \cdot \bar{u} \wedge \bar{v}$$

où  $\wedge$  désigne le produit vectoriel.

Le lemme suivant se vérifie par un calcul direct.

**Lemme 1.38.** *Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $\mathbb{C}^3$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$  le produit hermitien associé à la forme hermitienne  $J$ . Alors*

$$\langle u, u \boxtimes_J v \rangle = \langle v, u \boxtimes_J v \rangle = 0.$$

Par la suite, nous omettrons l'indice  $J$ , la forme hermitienne étant toujours celle associée au modèle de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  que nous utilisons. Le produit vectoriel hermitien est une manière simple de calculer un vecteur polaire à une droite complexe. Ainsi,

**Proposition 1.39.** *Soient  $m_1$  et  $m_2$  deux points distincts de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Fixons  $\mathbf{m}_1$  et  $\mathbf{m}_2$  deux relèvements à  $\mathbb{C}^3$ . Le vecteur  $\mathbf{m}_1 \boxtimes \mathbf{m}_2$  est polaire à la droite complexe contenant  $m_1$  et  $m_2$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 1.38,  $\langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_1 \boxtimes \mathbf{m}_2 \rangle = \langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_1 \boxtimes \mathbf{m}_2 \rangle = 0$ . □

On peut aussi utiliser le produit vectoriel hermitien pour relier la position relative de deux droites complexes au produit hermitien de leurs vecteurs polaires.

**Proposition 1.40.** *Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux droites complexes de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et  $\mathbf{c}_1$  et  $\mathbf{c}_2$  des vecteurs polaires associés. Alors*

- $\mathbf{c}_1 \boxtimes \mathbf{c}_2$  est dans  $V^+$  si et seulement si  $C_1$  et  $C_2$  sont disjointes. Dans ce cas  $\mathbf{c}_1 \boxtimes \mathbf{c}_2$  est polaire à leur orthogonale commune.
- $\mathbf{c}_1 \boxtimes \mathbf{c}_2$  est dans  $V^0$  si et seulement si  $C_1$  et  $C_2$  sont asymptotiques, et dans ce cas  $\mathbf{c}_1 \boxtimes \mathbf{c}_2$  est un relèvement leur de intersection dans  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

- Si  $\mathbf{c}_1 \boxtimes \mathbf{c}_2$  est dans  $V^-$ ,  $C_1$  et  $C_2$  sont sécantes, et  $\mathbf{c}_1 \boxtimes \mathbf{c}_2$  est un relèvement leur de intersection.

Pour déterminer le type de  $\mathbf{c}_1 \boxtimes \mathbf{c}_2$ , on dispose du lemme suivant, qui se prouve par un calcul direct :

**Lemme 1.41.** *Soient  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{d}$  quatre vecteurs de  $\mathbb{C}^{2,1}$ . On a*

$$\langle \mathbf{a} \boxtimes \mathbf{b}, \mathbf{c} \boxtimes \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{d}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{d}, \mathbf{b} \rangle.$$

En particulier, dans le cas où  $\mathbf{a} = \mathbf{c}$  et  $\mathbf{b} = \mathbf{d}$ , on en déduit que

$$\langle \mathbf{a} \boxtimes \mathbf{b}, \mathbf{a} \boxtimes \mathbf{b} \rangle = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle.$$

La proposition suivante est une application directe de cette relation et de la proposition 1.40.

**Proposition 1.42.** *Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux droites complexes de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , dont les vecteurs polaires sont  $\mathbf{c}_1$  et  $\mathbf{c}_2$ . Posons*

$$k = \frac{|\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \rangle|^2}{\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_1 \rangle \langle \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2 \rangle}.$$

Alors

- Si  $k > 1$ ,  $C_1$  et  $C_2$  sont disjointes et leur distance  $\rho$  est donnée par  $k = \cosh^2 \rho/2$ .
- Si  $k = 1$ ,  $C_1$  et  $C_2$  sont confondues ou asymptotiques.
- Si  $k < 1$ ,  $C_1$  et  $C_2$  s'intersectent, et leur angle  $\phi$  est donné par  $k = \cos^2 \phi$ .

### Décomposition des loxodromiques de trace réelle

Nous terminons cette section en décrivant les isométries loxodromiques qui sont le produit de deux réflexions complexes.

**Lemme 1.43.** *Soit  $A$  une isométrie loxodromique dont un relèvement à  $\mathrm{SU}(2,1)$  est de trace réelle. Alors  $A$  (ou  $A^2$ ) est produit de deux réflexions complexes d'ordre deux par rapport à des droites complexes.*

*Démonstration.* Sous ces hypothèses il y a deux possibilités. Soit la trace de  $A$  est plus grande que 3, soit elle est plus petite que  $-1$ . Utilisons la forme normalisée des éléments loxodromiques donnée par la relation 1.3. Dans le premier cas,  $A$  est conjuguée à une isométrie se relevant en

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/x & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } x > 1.$$

Les deux matrices impliquées dans le membre de droite représentant des réflexions complexes d'ordre deux par rapport à des droites complexes.

Dans le second cas  $A$  est conjuguée à une isométrie se relevant en

$$\begin{bmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x \end{bmatrix} \text{ avec } x > 1.$$

$A^2$  est donc de trace plus grande que 3.  $\square$

**Proposition 1.44.** *Soit  $A$  une isométrie loxodromique, admettant un relèvement à  $SU(2,1)$  de trace réelle et plus grande que 3. Il existe une famille à un paramètre de décompositions de  $A$  sous la forme  $I_1 \circ I_2$ , où  $I_1$  et  $I_2$  sont des réflexions complexes d'ordre deux. De plus, une fois fixé  $I_1$  (resp.  $I_2$ ),  $I_2$  (resp.  $I_1$ ) est entièrement déterminé.*

*Démonstration.* Si  $A$  s'écrit  $I_1 \circ I_2$ , où  $I_1$  et  $I_2$  sont des réflexions complexes d'ordre deux, alors  $I_1$  et  $I_2$  échangent  $p_A$  et  $q_A$ , les points fixes de  $A$ . Si cela n'était pas le cas, comme  $A$  fixe  $p_A$ , il existerait un point  $p' \neq q_A$  situé sur  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , tel que

$$I_1(p_A) = I_2(p_A) = p'.$$

Par conséquent,  $I_1$  et  $I_2$  échangeraient  $p_A$  et  $p'$ , et donc  $A$  stabiliserait la géodésique  $p_A p'$ . C'est absurde car la seule géodésique stabilisée par un élément loxodromique est son axe.

Toute réflexion complexe d'ordre deux qui échange  $p_A$  et  $q_A$  a son miroir orthogonal à la géodésique  $p_A q_A$ . Par ailleurs, toute droite complexe orthogonale à la géodésique  $p_A q_A$  est le miroir d'une unique réflexion complexe qui échange  $p_A$  et  $q_A$ . Par conséquent, il existe autant de décompositions que de points de la géodésique  $p_A q_A$ . Finalement, si  $I_1$  est fixé, le miroir de  $I_2$  (donc  $I_2$ ) est entièrement déterminé par la longueur de translation de  $A$ .  $\square$

*Remarque 1.45.* Les isométries loxodromiques  $A$  dont un relèvement  $\mathbf{A}$  à  $SU(2,1)$  est de trace réelle se lisent dans le bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  de la façon suivante :

- Si  $\text{tr}\mathbf{A} > 3$ ,  $A$  est conjuguée à une dilatation de Heisenberg de facteur réel positif.
- Si  $\text{tr}\mathbf{A} < -1$ ,  $A$  est conjuguée à une dilatation de Heisenberg de facteur réel  $\lambda$ , négatif.  $A$  est alors la composée d'une dilatation de Heisenberg de facteur  $-\lambda > 0$  et de la rotation d'angle  $\pi$  autour de la droite verticale

## 1.4.2 Les $\mathbb{R}$ -plans

### Définitions et exemples

**Définition 1.46.** Un sous-espace vectoriel réel  $V$  de  $\mathbb{C}^{2,1}$  est dit lagrangien s'il satisfait aux deux conditions

1.  $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 3$ .

2. Il est totalement réel : pour tous vecteurs  $a$  et  $b$  de  $V$ , le produit hermitien  $\langle a, b \rangle$  est réel.

**Définition 1.47.** Un  $\mathbb{R}$ -plan est un sous-espace de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  de la forme  $\mathbf{P}(V) \cap \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , où  $V$  est un sous espace lagrangien de  $\mathbb{C}^{2,1}$ .

*Exemple 1.48.* Le sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^{2,1}$  est lagrangien. Il lui est associé le  $\mathbb{R}$ -plan  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \cap \mathbb{R}^2\}$

**Proposition 1.49.**  $\mathrm{PU}(2,1)$  agit transitivement sur l'ensemble des  $\mathbb{R}$ -plans de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

*Démonstration.* Ce résultat provient du fait que  $\mathrm{U}(2,1)$  agit transitivement sur l'ensemble des lagrangiens de  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Voir par exemple [Ber00] pages 29–30.  $\square$

Les  $\mathbb{R}$ -plans sont donc les images isométriques de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ , qui est le lieu des points fixes de la conjugaison complexe sur  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . On en déduit alors la

**Proposition 1.50.** *Tout  $\mathbb{R}$ -plan est le lieu des points fixes d'une unique isométrie anti-holomorphe d'ordre 2 de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .*

**Définition 1.51.** L'isométrie antiholomorphe fixant un  $\mathbb{R}$ -plan  $P$  s'appelle l'inversion par rapport à  $P$ . On appellera aussi une inversion par rapport à un  $\mathbb{R}$ -plan une *réflexion lagrangienne*.

Dans une variété riemannienne, le lieu des points fixes d'une isométrie est totalement géodésique.

**Corollaire 1.52** (cf [Par03]). *Les  $\mathbb{R}$ -plans sont des sous espaces totalement géodésiques de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$*

Les  $\mathbb{R}$ -plans sont des sous-espaces lagrangiens de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  pour la forme symplectique associée à la métrique de Bergman (voir le paragraphe 1.2).

*Exemple 1.53.* Dans le modèle de Siegel,  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  est paramétré en coordonnées horosphériques par

$$\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2 = \{(x, 0, u), x \in \mathbb{R}, u > 0\}.$$

**Proposition 1.54** (voir [Gol99] ou [Par03]). *Tout  $\mathbb{R}$ -plan est un plongement isométrique du plan hyperbolique réel dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .*

### Les $\mathbb{R}$ -cercles

De même que pour les droites complexes, on utilise souvent la version « dans le bord » des  $\mathbb{R}$ -plans.

**Proposition 1.55.** *L'intersection avec  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  de l'adhérence d'un  $\mathbb{R}$ -plan dans  $\overline{\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2}$  est homéomorphe à un cercle.*

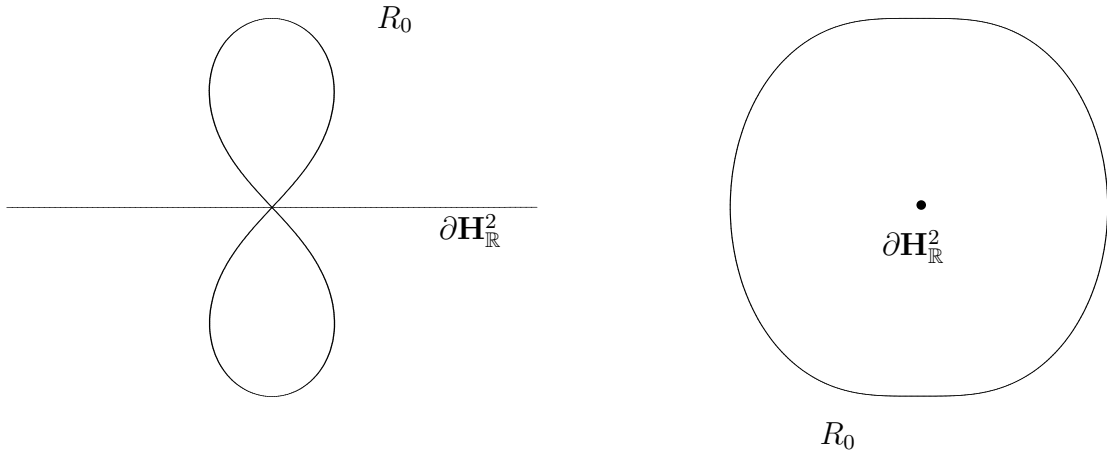


FIG. 1.2 – Projections sur  $\mathbb{C}$  et sur le plan  $(x, 0, t)$  de  $R_0$  et  $\partial L_0$

*Démonstration.* Il suffit de traiter le cas de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ . En utilisant le modèle de Siegel, on obtient dans ce cas que  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  est la droite de  $\mathbb{R}^3$  donnée par  $y = t = 0$ , complétée par le point à l'infini.  $\square$

**Définition 1.56.** Soit  $P$  un  $\mathbb{R}$ -plan de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . L'intersection  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \cap \overline{P}$  s'appelle un  $\mathbb{R}$ -cercle.

*Exemple 1.57.* Soit  $P_0$  le  $\mathbb{R}$ -plan paramétré dans le modèle de la boule par

$$P_0 = \{(ix_1, ix_2) \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2, x_k \in \mathbb{R}\} = i\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$$

Soit  $R_0$  le  $\mathbb{R}$ -cercle associé à  $P_0$ . En coordonnées de Heisenberg,  $R_0$  est paramétré par

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin 2\theta}{2 + 2\sin^2 \theta} \\ y &= \frac{\cos \theta}{1 + \sin^2 \theta} \quad \text{avec } 0 \leq \theta < 2\pi. \\ t &= \frac{2 \sin \theta}{1 + \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

Les deux  $\mathbb{R}$ -cercles  $R_0$  et  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  sont représentés sur la figure 1.2.

*Remarque 1.58.* 1. La correspondance  $\mathbb{R}$ -cercle  $\leftrightarrow$   $\mathbb{R}$ -plan est bijective.

2. Les  $\mathbb{R}$ -cercles ont la propriété remarquable d'être des courbes legendriennes pour la structure de contact du groupe de Heisenberg (donnée par la 1-forme  $\theta = dt + xdy - ydx$ ), c'est à dire qu'elles sont en tout point tangentes au plan de contact, le noyau de  $\theta$ .

Nous allons maintenant définir le centre et le rayon d'un  $\mathbb{R}$ -cercle. Jusqu' à la fin de ce paragraphe nous n'utiliserons que le modèle de Siegel.

**Définition 1.59.** Soit  $P$  un  $\mathbb{R}$ -plan et  $R$  le  $\mathbb{R}$ -cercle correspondant et  $I_P$  l'inversion associée. Le point  $I_P(\infty)$  est appelé le centre de  $R$ .

Si  $R$  contient  $\infty$ , il est dit infini, et son centre est  $\infty$ . Dans le cas contraire, il existe un unique élément parabolique  $T$  fixant  $\infty$  et une unique dilatation de Heisenberg

$$d : [z, t] \longrightarrow [re^{i\theta}z, r^2t]$$

tels que  $T(R) = d(R_0)$ .

**Définition 1.60.** Soit  $R$  un  $\mathbb{R}$ -cercle fini. Le nombre  $r^2e^{2i\theta}$  défini ci-dessus est le *rayon* de  $R$ .

*Exemple 1.61.*  $R_0$ , vu à l'exemple 1.57 est le  $\mathbb{R}$ -cercle de centre  $[0, 0]$  et de rayon 1. Pour cette raison,  $R_0$  sera souvent appelé le  *$\mathbb{R}$ -cercle standard*.

*Remarque 1.62.* Notons que l'on peut lire dans le bord l'éventuelle intersection de deux  $\mathbb{R}$ -plans : deux  $\mathbb{R}$ -plan se coupent en un unique point (resp. le long d'une géodésique) si et seulement si les deux  $\mathbb{R}$ -cercles associés sont entrelacés (resp. se coupent en deux points.)

### Inversions par rapport aux $\mathbb{R}$ -plans

Les inversions par rapport aux  $\mathbb{R}$ -plans jouent un rôle très important dans l'étude des isométries de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

**Définition 1.63.** Soit  $P$  un  $\mathbb{R}$ -plan, et  $I_P$  l'inversion associée. Nous dirons que  $M \in U(2, 1)$  est un *relèvement* de  $I_P$  si pour tout  $z \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  et pour tout relèvement  $\tilde{z}$  de  $z$  à  $\mathbb{C}^3$ ,

$$\mathbf{P}(M.\tilde{z}) = I_P(z). \quad (1.9)$$

(Rappelons que  $\mathbf{P}$  est la projection  $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^2$ .)

*Remarque 1.64.* Si  $h$  est une isométrie de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , c'est à dire un élément de  $\widehat{\text{PU}}(2, 1)$  (voir le théorème 1.1 page 22). Nous entendrons par « une matrice pour  $h$  » ou « un relèvement de  $h$  » tout relèvement de  $h$  à  $U(2, 1)$  si  $h$  est holomorphe, ou toute matrice vérifiant la relation (1.9) si  $h$  est antiholomorphe.

Dans un modèle comme dans l'autre, l'inversion par rapport à  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  admet pour matrice l'identité. Dans le modèle de Siegel, l'inversion par rapport au  $\mathbb{R}$ -plan  $P_0$  peut être vue, en coordonnées vectorielles comme

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \longmapsto J_2 \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Ainsi,  $J_2$  est un relèvement de  $I_{P_0}$ . Il y a donc une légère ambiguïté sur  $J_2$ , à laquelle nous penserons à la fois comme la matrice de la forme hermitienne, et comme celle de l'inversion par rapport à  $P_0$ .

*Remarque 1.65.* 1. Si  $h$  est une isométrie admettant  $M \in U(2, 1)$  comme relèvement, alors  $I_{P_0} \circ h$ , qui est antiholomorphe, se relève en  $J_2 \overline{M}$ .

2. Si  $M$  est un relèvement d'une inversion  $I_P$  par rapport à un  $\mathbb{R}$ -plan  $P$ , le fait que  $I_P$  soit une involution se traduit par la relation  $M \overline{M} = Id$ . Cette relation caractérise les matrices des réflexions lagrangiennes.

Nous utiliserons le lemme suivant au chapitre 6 pour étudier des groupes engendrés par trois réflexions lagrangiennes.

**Lemme 1.66.** *Soit  $P$  un  $\mathbb{R}$ -plan. Soit  $R$  le  $\mathbb{R}$ -cercle associé. Supposons que  $R$  ait le point  $[z, t]$  pour centre et soit de rayon  $r^2 e^{2i\theta}$ . Alors l'inversion par rapport à  $I_P$  admet le relèvement à  $SU(2,1)$  donné par la matrice :*

$$J_P = -\exp(-2i\theta/3) \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & f & b \\ g & d & a \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

avec

$$a = \frac{-|z|^2 + it}{r^2} \quad b = \sqrt{2} (az - \bar{z}e^{2i\theta}) \quad c = r^2 a^2 + 2\bar{z}^2 e^{2i\theta}$$

$$d = \frac{z\sqrt{2}}{r^2} \quad f = \frac{2z^2}{r^2} + e^{2i\theta} \quad g = \frac{1}{r^2}$$

*Démonstration.* C'est un calcul direct à partir de la définition des centres et rayons de  $R$  et de la forme donnée dans la section 1.3 pour les dilatations et translations de Heisenberg :

$$I_P = T^{-1} \circ d \circ I_{P_0} \circ d^{-1} \circ T$$

où  $d$  et  $T$  sont comme dans la discussion précédant la définition 1.60. □

Nous aurons également besoin d'une forme matricelle pour les réflexions lagrangiennes par rapport à un  $\mathbb{R}$ -plan contenant l'infini.

**Lemme 1.67.** *Soit  $P$  un  $\mathbb{R}$ -plan dont l'adhérence contient le point  $\infty$  de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Il existe  $z \in \mathbb{C}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , tels que la réflexion par rapport à  $P$  admette le relèvement à  $SU(2,1)$  donné par la matrice :*

$$J_{z,t,\theta} = -\exp(-2i\theta/3) \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 0 & f & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

avec

$$b = \sqrt{2}(z - \bar{z} \exp(2i\theta)) \quad c = 2(-|z|^2 + it + \bar{z}^2 \exp 2i\theta)$$

$$\text{et } f = \exp 2i\theta$$

*Démonstration.* La preuve est analogue à celle du lemme 1.66 : il suffit de conjuguer la réflexion lagrangienne par rapport à  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ , par un élément parabolique quelconque fixant  $\infty \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ . La réflexion par rapport à  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  admet pour matrice l'identité. Il suffit donc de calculer  $M\overline{M}$ , où  $M$  est un relèvement à  $\text{SU}(2,1)$  d'un élément parabolique de l'isotropie de  $\infty$ . Un tel relèvement s'écrit (cf 1.22 page 30)

$$\exp(-i\theta/3) \begin{bmatrix} 1 & -\bar{z}\sqrt{2}\exp(i\theta) & -|z|^2 + it \\ 0 & \exp(i\theta) & z\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \text{ et } t \in \mathbb{R}.$$

□

Toute isométrie de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  se décompose comme un produit d'au plus trois réflexions lagrangiennes :

**Lemme 1.68.** *Soit  $h$  une isométrie de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .*

1. *Si  $h$  est holomorphe, il existe deux réflexions lagrangiennes  $\iota_1$  et  $\iota_2$  telles que  $h = \iota_1 \circ \iota_2$ .*
2. *Si  $h$  est antiholomorphe, il existe trois réflexions lagrangiennes  $\iota_1, \iota_2$  et  $\iota_3$  telles que  $h = \iota_1 \circ \iota_2 \circ \iota_3$ .*

*Démonstration.* 1. Dans le cas où  $h$  est holomorphe, supposons d'abord  $h$  loxodromique, et utilisons le modèle de Siegel. Quitte à conjuguer, on peut supposer que  $h$  admet le relèvement diagonal  $\mathbf{h}$  donné par la relation 1.3 page 28. Alors,  $\mathbf{h}$  s'écrit  $M_1\overline{M_2}$  avec

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mu^{-1} \\ 0 & -\mu\bar{\mu}^{-1} & 0 \\ -\bar{\mu} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$M_1$  et  $M_2$  sont dans  $\text{SU}(2,1)$  et vérifient  $M_k\overline{M_k} = Id$ . Ce sont donc les matrices d'inversions lagrangiennes. Les cas où  $h$  est elliptique ou parabolique se traitent exactement de la même façon.

2. Si  $h$  est antiholomorphe, alors soit  $\iota$  une réflexion lagrangienne.  $h \circ \iota$  est holomorphe, et on applique le cas précédent.

□

Nous donnerons des précisions sur la décomposition des éléments holomorphes dans le paragraphe suivant. La proposition suivante est due à Falbel et Zocca (voir [FZ99]).

**Lemme 1.69.** *Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux  $\mathbb{R}$ -plans. Alors,*

1.  $I_{P_1} \circ I_{P_2}$  est parabolique si et seulement si  $P_1$  et  $P_2$  ont exactement un point d'intersection situé dans  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .
2.  $I_{P_1} \circ I_{P_2}$  est loxodromique si et seulement si  $P_1$  et  $P_2$  sont disjoints.
3.  $I_{P_1} \circ I_{P_2}$  est elliptique régulier si et seulement si  $P_1$  et  $P_2$  ont exactement un point d'intersection dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .
4.  $I_{P_1} \circ I_{P_2}$  est une réflexion complexe si et seulement si  $P_1$  et  $P_2$  s'intersectent le long d'une géodésique de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Pour finir, énonçons la

**Proposition 1.70.** [CG74] *Le stabilisateur d'un  $\mathbb{R}$ -plan est isomorphe à  $\text{PSO}(2,1)$ .*

### $\mathbb{R}$ -plans disjoints et décomposition des éléments loxodromiques.

Nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

**Lemme 1.71.** *Soit  $f$  une isométrie antiholomorphe de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ . Si  $f$  a un point fixe dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ , alors c'est une réflexion par rapport à une géodésique.*

*Démonstration.* Soit  $p$  le point fixe de  $f$ . Il existe  $w_0 \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$  tel que  $w_0$ ,  $p$ , et  $f(w_0)$  ne sont pas alignés dans cet ordre (sinon  $f$  serait un demi-tour, holomorphe). L'une des deux bissectrices de l'angle  $(p, w_0, f(w_0))$  est fixée par  $f$ . L'isométrie  $f$  est la réflexion par rapport à cette géodésique.  $\square$

**Lemme 1.72.** *Soit  $\varphi$  une isométrie antiholomorphe de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Supposons qu'il existe deux points  $p$  et  $q$  de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  tels que  $\varphi(p) = q$  et  $\varphi(q) = p$ . Alors  $\varphi$  est une réflexion lagrangienne.*

*Démonstration.* Comme  $\varphi$  échange  $p$  et  $q$ , elle stabilise la géodésique  $\sigma = (pq)$  et la droite complexe  $C$  engendrée par  $p$  et  $q$ . De plus,  $\varphi$  a un point fixe  $m$  sur  $\sigma$ . Soit  $C'$  la droite complexe orthogonale à  $C$  en  $m$ .  $C'$  est stable par  $\varphi$ . Le lemme 1.71 nous indique alors que les deux restrictions  $\varphi|_C$  et  $\varphi|_{C'}$  de  $\varphi$  à  $C$  et  $C'$  sont des réflexions par rapports à des géodésiques  $\gamma \subset C$  et  $\gamma' \subset C'$ . Comme  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont contenues dans deux droites complexes orthogonales, elles engendrent un plan lagrangien  $P$ , qui est fixé point par point par  $\varphi$ .  $\varphi^2$  fixant point par point deux droites complexes orthogonales, c'est l'identité sur  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .  $\varphi$  est donc l'inversion par rapport à  $P$ .  $\square$

Nous en déduisons alors la proposition suivante.

**Proposition 1.73.** *Soit  $A$  une isométrie loxodromique. Il existe une famille à deux paramètres de décompositions de  $A$  sous la forme  $A = \iota_1 \circ \iota_2$  où  $\iota_1$  et  $\iota_2$  sont des réflexions lagrangiennes. De plus,  $\iota_1$  (resp.  $\iota_2$ ) est uniquement déterminée par la donnée de  $\iota_2$  (resp.  $\iota_1$ ).*

*Démonstration.* Supposons donnée une telle décomposition :  $A = \iota_1 \circ \iota_2$ . Montrons alors que  $\iota_1$  et  $\iota_2$  échangent  $p_A$  et  $q_A$ , les points fixes de  $A$ . Si cela n'était pas le cas, comme  $A$  fixe  $p_A$ , il existerait un point  $p' \neq q_A$  situé sur  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , tel que

$$\iota_1(p_A) = \iota_2(p_A) = p'.$$

Par conséquent,  $\iota_1$  et  $\iota_2$  échangent  $p_A$  et  $p'$ , et donc  $A$  stabiliserait la géodésique  $p_A p'$ . C'est absurde car la seule géodésique stabilisée par un élément loxodromique est son axe.

Soit  $\iota_1$  une réflexion lagrangienne échangeant  $p_A$  et  $q_A$ . Posons  $\iota_2 = \iota_1 \circ A$ .  $\iota_2$  est antiholomorphe, et échange  $p_A$  et  $q_A$ . D'après le lemme 1.72  $\iota_2$  est une réflexion lagrangienne.

Par suite, une décomposition lagrangienne de  $A$  est entièrement déterminée par le choix d'un  $\mathbb{R}$ -plan  $P$  tel que  $I_P$  échange les points fixes de  $A$ . Il existe une famille à 2 paramètres  $\mathbb{R}^+ \times S^1$  de tels  $\mathbb{R}$ -plans. Pour le voir, on peut supposer que les points fixes de  $A$  sont (dans le modèle de Siegel)  $[0, 0]$  et  $\infty$ . Un  $\mathbb{R}$ -plan convient alors si et seulement si le  $\mathbb{R}$ -cercle associé a pour centre  $[0, 0]$ . Un tel  $\mathbb{R}$ -cercle est alors entièrement déterminé par son rayon  $r^2 e^{2i\theta}$ .  $\square$

### Angle entre deux $\mathbb{R}$ -plans sécants.

**Définition 1.74.** Soient  $(L_1, L_2)$  et  $(L'_1, L'_2)$  deux paires de  $\mathbb{R}$ -plans sécants. On dit qu'elles ont le même angle si et seulement s'il existe un élément de  $g$  de  $\text{PU}(2,1)$  tel que

$$L'_i = g(L_i), i = 1, 2.$$

Pour mesurer l'angle entre deux  $\mathbb{R}$ -plans, on utilise le lemme suivant :

**Lemme 1.75.** Soient deux  $\mathbb{R}$ -plans  $L_1$  et  $L_2$ , s'intersectant en un point  $p$  dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Il existe une isométrie  $g \in \text{PU}(2,1)$  telle que  $g(L_1) = \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2 = \{(x, y), x, y \in \mathbb{R}\}$ , et  $g(L_2) = \{(e^{i\alpha_1}x, e^{i\alpha_2}y), x, y \in \mathbb{R}\}$ , avec  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 < \pi$ .

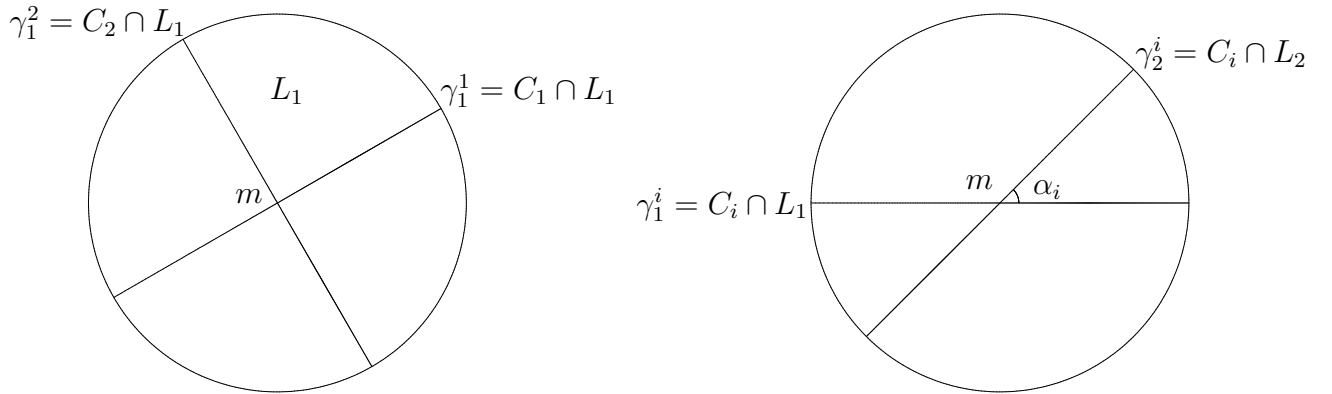
*Démonstration.*  $\text{PU}(2,1)$  agissant transitivement sur l'ensemble des  $\mathbb{R}$ -plans, il existe une isométrie  $g_1$  telle que  $g_1(L_1) = \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ . Par ailleurs, le stabilisateur de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  agit transitivement sur  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ , il existe donc une isométrie  $g_2$  telle que  $g_2 \circ g_1(L_1) = \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  et  $g_2 \circ g_1(p) = (0, 0)$ . Les isométries holomorphes qui fixent  $(0, 0)$  et stabilisent  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  s'écrivent

$$\begin{bmatrix} O & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } O \in \text{O}(2).$$

(cf le lemme 1.7 page 31).

On peut alors choisir  $g_3$  dans  $\text{PU}(2,1)$  qui préserve  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ , fixe  $(0, 0)$  et envoie les deux espaces propres de  $I_{L_1} \circ I_{L_2}$  sur les axes de coordonnées de la boule. L'isométrie  $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1$  convient.  $\square$

**Définition 1.76.** Soit  $(L_1, L_2)$  une paire de  $\mathbb{R}$ -plans sécants. Notons  $\widehat{(L_1, L_2)}$  l'angle entre  $L_1$  et  $L_2$ . La mesure de l'angle  $\widehat{(L_1, L_2)}$  est la paire  $(\alpha_1, \alpha_2)$  fournie par le lemme 1.75.

Intersection de  $C_1$  et  $C_2$  avec  $L_1$ .Intersection de  $L_1$  et  $L_2$  avec  $C_i$ FIG. 1.3 – Angle entre  $L_1$  et  $L_2$ , droites complexes stables de  $I_1 \circ I_2$ .

*Remarque 1.77.* L'élément elliptique  $E = I_{L_2} \circ I_{L_1}$  agit sur deux droites complexes orthogonales stables  $C_1$  et  $C_2$ , polaires à ses points fixes situés dans  $\mathbf{P}(V^+)$ .  $E$  agit sur  $C_1$  (resp.  $C_2$ ) comme une rotation d'angle  $2\alpha_1$  (resp.  $2\alpha_2$ ). En conséquence, nous appellerons  $\alpha_1$  (resp.  $\alpha_2$ ) l'angle entre  $L_1$  et  $L_2$  *lu dans*  $C_1$  (resp. *lu dans*  $C_2$ ). Cette terminologie est justifiée par le fait que  $L_1$  et  $L_2$  intersectent  $C_i$  le long de géodésiques  $\gamma_1^i$  et  $\gamma_2^i$ . L'angle entre  $\gamma_1^i$  et  $\gamma_2^i$  a pour mesure  $\alpha_i$ .

De même que pour les droites complexes, la position relative de deux  $\mathbb{R}$ -plans peut se lire dans le bord comme suit (voir [FZ99]). Deux  $\mathbb{R}$ -plans

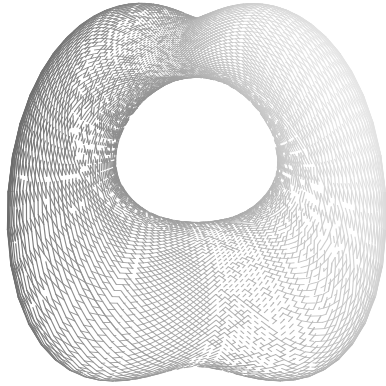
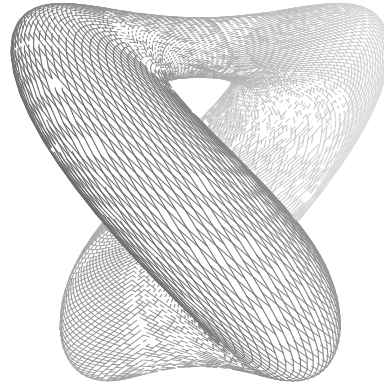
- se coupent en un point si et seulement si les  $\mathbb{R}$ -cercles associés sont disjoints et enlacés.
- se coupent le long d'une géodésique si et seulement si les  $\mathbb{R}$ -cercles associés se coupent en deux points
- sont disjoints si et seulement si les deux  $\mathbb{R}$ -cercles associés sont disjoints et non enlacés.

Dans [FZ99], Falbel et Zocca ont défini la notion d'angle entre deux  $\mathbb{R}$ -cercles entrelacés. Cette notion coïncide avec celle d'angle entre deux  $\mathbb{R}$ -plans définie ci-dessus.

Le lemme 1.75 et la remarque 1.77 montrent l'existence d'un cercle de  $\mathbb{R}$ -plans passant par un point  $m \in L_1$  d'angle avec  $L_1$  donné. Si  $\alpha_1 = \alpha_2$ , le cercle dégénère en un point car alors le produit des deux inversions commute avec tous les éléments du stabilisateur de  $m$ .

**Proposition 1.78.** *Soient  $P$  un  $\mathbb{R}$ -plan et  $m$  un point de  $P$ .*

1. *Si  $\alpha \neq \beta$ , il existe un cercle de  $\mathbb{R}$ -plans  $Q$  passant par  $m$  et tels que la mesure de l'angle entre  $P$  et  $Q$  soit  $(\alpha, \beta)$ .*
2. *Pour tout  $\alpha$ , il existe un unique  $\mathbb{R}$ -plan  $Q$  tel que l'angle entre  $P$  et  $Q$  soit de mesure  $(\alpha, \alpha)$ .*

vue depuis l'axe  $x = t = 0$ vue depuis l'axe  $y = t = 0$ FIG. 1.4 – Tore associé aux  $\mathbb{R}$ -plans d'angle  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$  avec  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  passant par l'origine.

- Démonstration.*
1. Si  $\alpha \neq \beta$ ,  $E = I_P \circ I_Q$  est un élément elliptique régulier. La seule indétermination est la paire de droites complexes stables par  $E$  et contenant  $m$ . Il existe un cercle de telles droites.
  2. Dans ce cas,  $E = I_P \circ I_Q$  est une réflexion complexe par rapport au point  $m$ , d'angle  $2\alpha$ . Elle est entièrement déterminée par son point fixe et son angle.

□

*Exemple 1.79.* Supposons que  $L_1 = \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  et  $m = (0, 0)$ . L'ensemble des  $\mathbb{R}$ -cercles correspondant aux  $\mathbb{R}$ -plans dont l'angle avec  $L_1$  a pour mesure  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$  est représenté sur la figure 1.4. C'est un tore feuilleté par des  $\mathbb{R}$ -cercles deux à deux entrelacés (voir le lemme 1.82).

*Exemple 1.80.* L'angle entre  $i\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  et  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  a pour mesure  $(\pi/2, \pi/2)$ .

*Exemple 1.81.* Soit  $P$ , un  $\mathbb{R}$ -plan intersectant  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ . Le  $\mathbb{R}$ -cercle  $\partial P$  est centré au point  $p$  de coordonnées Heisenberg  $[x, 0]$  avec  $x \in \mathbb{R}$  si et seulement si  $I_P(\infty) = p$ . Dans ce cas  $I_P$  stabilise la droite complexe  $C$  contenant  $\infty$  et  $p$ , et son angle avec  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  lu dans  $C$  a pour mesure  $\pi/2$ .

Nous terminons ce chapitre par les deux lemmes suivants.

**Lemme 1.82.** *Soient trois  $\mathbb{R}$ -plans  $P$ ,  $P_1$  et  $P_2$  deux à deux disjoints, contenant un point  $m$ , et tels que les angles entre  $P_1$  et  $P$  et l'angle entre  $P_2$  et  $P$  soient égaux, de mesure  $(\alpha, \beta)$  avec  $\alpha \neq \beta$ .*

*Alors l'intersection de  $P_1$  et  $P_2$  est réduite à  $\{m\}$ .*

La preuve est une conséquence directe de la normalisation donnée dans le lemme 1.75.

**Lemme 1.83.** *Soient  $P$  et  $Q$  deux  $\mathbb{R}$ -plans sécants, d'angle  $(\alpha, \beta)$ .  $I_P$  stabilise  $Q$  si et seulement si l'une des conditions suivante est réalisée :*

1.  $\alpha = \beta = 0$ . Dans ce cas,  $P$  et  $Q$  sont confondus.
2.  $\alpha = 0$  et  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . Dans ce cas,  $I_P|_Q$  est la réflexion par rapport à la géodésique  $P \cap Q$ .
3.  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ . Dans ce cas,  $I_P|_Q$  est le demi-tour de point fixe  $P \cap Q$ .

*Démonstration.* Utilisons le modèle de la boule. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $Q = \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ , et  $P \cap Q \ni (0, 0)$ , et que  $P$  est paramétré par

$$P = \{(e^{i\alpha}x_1, e^{i\beta}x_2), x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

Dans ces conditions  $I_P$  s'écrit

$$(w_1, w_2) \longrightarrow (\bar{w}_1 e^{2i\alpha}, \bar{w}_2 e^{2i\beta}).$$

Le résultat suit. □

### 1.4.3 Projections orthogonales sur les $\mathbb{R}$ -plans et les droites complexes.

Le plan hyperbolique complexe est un exemple d'espace CAT(0) (voir par exemple [BH99]). A ce titre, à tout sous-ensemble convexe  $V$  de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  est associée une projection orthogonale  $\Pi_V$ . Les  $\mathbb{C}$ -plans et les  $\mathbb{R}$ -plans étant totalement géodésiques, ils rentrent dans ce cadre. La proposition suivante décrit les fibres de ces projections. Voir par exemple [Gol99] ou [PP06]

**Proposition 1.84.** 1. *Soit  $C$  une droite complexe et  $m$  un point de  $C$ . La fibre de  $\Pi_C$  au dessus de  $m$  est une droite complexe. De plus, si  $C$  est polaire à  $\mathbf{c}$  et si  $m$  se relève en  $\mathbf{m}$ ,  $\Pi_C^{-1}(m)$  est polaire à  $\mathbf{m} \boxtimes \mathbf{c}$ .*

2. *Soit  $P$  un  $\mathbb{R}$ -plan, et  $m$  un point de  $P$ . La fibre de  $\Pi_P$  au dessus de  $m$  est le  $\mathbb{R}$ -plan passant par  $m$  d'angle  $(\pi/2, \pi/2)$  avec  $P$ .*

Nous renvoyons de nouveau à [Gol99] ou [PP06] (pour le point 2) pour la preuve de la proposition suivante.

**Proposition 1.85.** *Soit  $m$  un point de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  et  $Z$  un relèvement de  $m$  tel que  $\langle Z, Z \rangle = -1$ .*

1. *Soit  $C$  une droite complexe, polaire à  $\mathbf{c}$  tel que  $\langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle = 1$ .  $\Pi_C(m)$  admet le relèvement à  $\mathbb{C}^3$  donné par*

$$Z - \langle Z, \mathbf{c} \rangle \mathbf{c}.$$

2. *Soit  $P$  un  $\mathbb{R}$ -plan, et  $I_P$  un relèvement de la réflexion par rapport à  $P$ . La projection de  $m$  sur  $P$  admet le relèvement à  $\mathbb{C}^3$  donné par*

$$Z - \frac{\langle Z, I_P(Z) \rangle}{|\langle Z, I_P(Z) \rangle|} I_P(Z)$$

## 1.5 L'invariant angulaire de Cartan

**Définition 1.86.** Soient  $p_1, p_2$  et  $p_3$  trois points de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . L'invariant de Cartan du triplet (ordonné)  $(p_1, p_2, p_3)$  est défini par

$$\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = -\arg(\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_3 \rangle \langle p_3, p_1 \rangle)$$

L'invariant de Cartan admet l'interprétation géométrique suivante : (Théorème 7.1.2 de [Gol99]) :

**Théorème 1.87.** Soient  $p_1, p_2$  et  $p_3$  trois points de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Appelons  $C$  (resp.  $\sigma$ ) la droite complexe (resp. géodésique) contenant  $p_1$  et  $p_2$ , et  $\Pi$  la projection orthogonale sur  $C$ . Alors :

$$|\tan(\mathbb{A}(x_1, x_2, x_3))| = \sinh(d(\Pi(x_3), \sigma)).$$

Voir figure 1.5.

*Remarque 1.88.* Le signe de l'invariant de Cartan est déterminé par les deux composantes connexes de  $C \setminus \sigma$  :  $\mathbb{A}(x_1, x_2, x_3)$  et  $\mathbb{A}(x_1, x_2, x_4)$  ont même signe si et seulement si  $x_3$  et  $x_4$  se projettent dans la même composante.

Nous utiliserons le résultat suivant de manière importante dans le chapitre 6 (Théorème 7.1.1 de [Gol99]) :

**Théorème 1.89.** Soient  $(p_1, p_2, p_3)$  et  $(q_1, q_2, q_3)$  deux triplets de points de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  tels que

$$\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = \mathbb{A}(q_1, q_2, q_3)$$

Dans ces conditions, il existe  $g \in PU(2,1)$  tel que  $g(p_i) = q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

*Remarque 1.90.* Pour  $n > 2$ , trois points situés au bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$  sont contenus dans un unique plan hyperbolique complexe, copie de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  plongée dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ . L'invariant de Cartan classe donc les triplets de points dans le bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ .

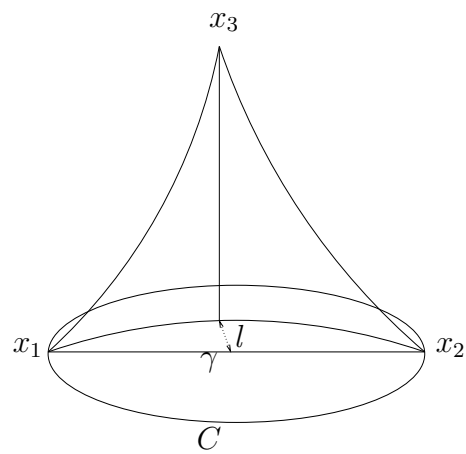
*Remarque 1.91.* –  $\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = 0$  si et seulement si les trois points sont contenus dans un  $\mathbb{R}$ -plan.  $\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = \pm\pi/2$  si et seulement si les trois points sont contenus dans une droite complexe.

- Si  $n = 2$ , l'élément  $g$  fourni par le théorème 1.89 est unique sauf si les trois points sont contenus dans une droite complexe.
- Si  $n > 2$ , l'élément  $g$  est unique modulo le stabilisateur du plan complexe engendré par  $p_1, p_2$  et  $p_3$ .

L'invariant de Cartan satisfait de plus à la relation de cocycle suivante (voir le chapitre 7 de [Gol99]). Si  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  sont quatre points de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ , alors

$$\mathbb{A}(x_1, x_2, x_3) - \mathbb{A}(x_1, x_2, x_4) + \mathbb{A}(x_1, x_3, x_4) - \mathbb{A}(x_2, x_3, x_4) = 0. \quad (1.12)$$





$$l = d(\Pi(x_3), \gamma) = \sinh^{-1} (|\tan (\mathbb{A}(x_1, x_2, x_3))|)$$

FIG. 1.5 – Interprétation géométrique de l'invariant de Cartan.

# Chapitre 2

## L'espace de Teichmüller du tore épointé.

$\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$  a été défini dans le chapitre précédent. Rappelons que son groupe d'isométries est  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ , qui est conjugué dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  à  $\mathrm{PU}(1, 1)$ . Dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ , les éléments loxodromiques sont appelés *hyperboliques*. Nous noterons  $\widehat{\mathrm{PSL}}(2, \mathbb{R})$  le groupe complet d'isométries de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ , engendré par  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et les involutions antiholomorphes, qui sont les symétries par rapport aux géodésiques. Les groupes discrets d'isométries de la droite hyperbolique complexe  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$  sont souvent appelés *fuchsien*s. Dans ce chapitre, nous allons donner une description de  $T_{1,1}$ , l'espace de Teichmüller du tore épointé. Rappelons que  $\Gamma = \pi_1(\Sigma_{1,1})$ , le groupe fondamental du tore épointé, admet la présentation

$$\langle a, b, c \mid [a, b] \cdot c = 1 \rangle.$$

Il s'agit donc de décrire l'ensemble des représentations  $\rho$  discrètes, fidèles et préservant le type du groupe fondamental de  $\Sigma_{1,1}$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Rappelons par soucis de clarté qu'une représentation est dite discrète si son image est un sous-groupe discret de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et fidèle si elle est injective. Dans le cas d'un sous-groupe  $G$  de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  la discrétude est équivalente au fait que  $G$  agit proprement discontinûment sur  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$  : pour tout compact  $K$  de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ , l'ensemble de éléments  $g$  de  $G$  tels que  $g \cdot K \cap K \neq \emptyset$  est de cardinal fini. Cette équivalence est l'idée de base du théorème de Poincaré. Pour un énoncé précis de ce théorème, et une discussion sur les propriétés des domaines fondamentaux, voir [Bea83]. Dans ce chapitre nous allons seulement utiliser une version simple du théorème de Poincaré, connue sous le nom de « lemme des colliers de perles », ou « lemme du ping-pong ». Nous reportons au chapitre 7 une discussion plus précise de ces résultats. La condition de préservation du type revient à demander que les seuls éléments de  $\Gamma$  dont les images par  $\rho$  sont non hyperboliques ont des images paraboliques, et sont conjugués dans  $\Gamma$  à  $c$  (ou à  $[a, b]$ ). Cette condition traduit le fait que les classes de conjugaison dans  $G$  d'éléments pa-

raboliques primitifs<sup>1</sup> d'un groupe fuchsien  $G$  sont en bijection avec les cusps de la surface de Riemann  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1/G$ .

Le groupe fondamental du tore épointé,  $\Gamma$ , est isomorphe au groupe libre à deux générateurs, que nous noterons  $F_2 = \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle$ .  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  étant une forme réelle de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , notre premier paragraphe est consacré à la description de la classification des représentations de  $F_2$  dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  à conjugaison près. Le résultat de classification est dû à indépendamment à Fricke ([Fri96]) et Vogt ([Vog86]). Il est prouvé de manière élémentaire dans le preprint en ligne [Gol] (Voir également la discussion dans [Gol88]). Une conséquence simple de ce résultat est le fait que deux représentations  $\rho_1$  et  $\rho_2$  de  $F_2$  dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  telles que

$$\mathrm{tr} \rho_1(\mathbf{m}) = \mathrm{tr} \rho_2(\mathbf{m}), \mathrm{tr} \rho_1(\mathbf{n}) = \mathrm{tr} \rho_2(\mathbf{n}) \text{ et } \mathrm{tr} \rho_1(\mathbf{mn}) = \mathrm{tr} \rho_2(\mathbf{mn}) \quad (2.1)$$

sont conjuguées.

L'objet du deuxième paragraphe est un résultat de décomposabilité des groupes à deux générateurs dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Si  $A$  et  $B$  sont deux isométries de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ , on dit que la paire  $(A, B)$  est décomposable s'il existe trois involutions  $I_1, I_2$  et  $I_3$  telles que

$$A = I_1 \circ I_2 \text{ et } B = I_3 \circ I_2.$$

Cette propriété est le point de départ de la classification des groupes à deux générateurs dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . En effet, « presque » toutes les représentations de  $F_2$  dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  sont décomposables (voir la proposition 2.6).

Nous exposons ensuite la description classique de l'espace de Teichmüller du tore épointé : en utilisant le critère de conjugaison donné par la relation 2.1, on peut voir l'espace de Teichmüller comme l'hypersurface de  $\mathbb{R}^3$  définie par la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$$

avec  $x, y$  et  $z$  réels et supérieurs à 2.

Nous utilisons ensuite la décomposition en produits d'involutions pour donner une description différente de l'espace de Teichmüller basée sur l'étude des groupes engendrés par trois demi tours. Nous généraliserons ce point de vue au cas du plan hyperbolique complexe dans les chapitres 6 et 7.

## 2.1 Représentations de $F_2$ et trace dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$

Commençons par énoncer un critère de conjugaison des représentations de  $F_2$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

**Proposition 2.1.** *Soient  $\rho_1$  et  $\rho_2$  deux représentations irréductibles de  $F_2$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ , telles que*

$$\mathrm{tr} \rho_1(\mathbf{m}) = \mathrm{tr} \rho_2(\mathbf{m}), \mathrm{tr} \rho_1(\mathbf{n}) = \mathrm{tr} \rho_2(\mathbf{n}) \text{ et } \mathrm{tr} \rho_1(\mathbf{mn}) = \mathrm{tr} \rho_2(\mathbf{mn}).$$

---

<sup>1</sup>c'est à dire engendrant le stabilisateur d'un point au bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$  dans  $G$ .

Alors,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont conjuguées dans  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

Ce résultat découle du théorème de Fricke-Vogt (voir [Gol]), qui traite du cas de  $SL(2, \mathbb{C})$  :

**Théorème 2.2.** – Soit  $P$  un polynôme sur  $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$  invariant par conjugaison. Il existe  $Q \in \mathbb{C}[x, y, z]$  tel que

$$P(A, B) = Q(\text{tr}A, \text{tr}B, \text{tr}AB)$$

– L'application

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ (A, B) &\longmapsto (\text{tr}A, \text{tr}B, \text{tr}AB) \end{aligned}$$

est surjective.

– Soient  $(A_1, B_1)$  et  $(A_2, B_2)$  deux éléments de  $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$  tels que

$$\text{tr}A_1 = \text{tr}A_2 = x, \text{tr}B_1 = \text{tr}B_2 = y, \text{tr}A_1B_1 = \text{tr}A_2B_2 = z.$$

Si  $x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2 \neq 2$ , il existe  $g \in SL(2, \mathbb{C})$  tel que  $(A_2, B_2) = g \cdot (A_1, B_1)$ .

Notons que si  $x = \text{tr}A$ ,  $y = \text{tr}B$  et  $z = \text{tr}AB$ , alors

$$x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2 = \text{tr}[A, B]. \quad (2.2)$$

Cette relation est obtenue grâce au Théorème de Cayley-Hamilton, qui s'écrit dans  $SL(2, \mathbb{C})$  :

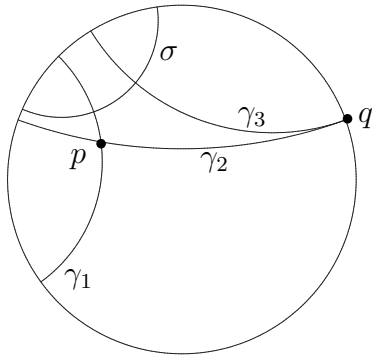
$$A^2 - \text{tr}A \cdot A + Id = 0, \text{ pour } A \in SL(2, \mathbb{C}).$$

*Remarque 2.3.* Le cas  $x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2 = 2$  correspond aux représentations réductibles, pour lesquelles  $[A, B]$  est l'identité.

*Remarque 2.4.* Le théorème 2.2 exprime le fait que le quotient catégorique de  $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$  par  $SL(2, \mathbb{C})$  agissant par conjugaison diagonale est  $\mathbb{C}^3$  (voir [Dol03]).

*Remarque 2.5.* La proposition 2.1 reste valable si l'on remplace  $SL(2, \mathbb{R})$  par  $SU(2)$ . Si  $\rho$  est une représentation d'un groupe de type fini dans  $SL(2, \mathbb{C})$ , dont caractère est réel, alors  $\rho$  est conjuguée à une représentation dans l'une des deux formes réelles de  $SL(2, \mathbb{C})$  :  $SL(2, \mathbb{R})$  et  $SU(2)$ . Dans [Gol88], Goldman donne un critère sur  $x$ ,  $y$  et  $z$  pour distinguer celle des deux formes réelles qui est atteinte, dans le cas d'une représentation du groupe libre à deux générateurs.

Nous suivrons au chapitre 3 la même démarche que dans cette section pour obtenir un critère de conjugaison des représentations de  $F_2$  dans  $SU(2, 1)$  à partir d'un critère dans  $SL(3, \mathbb{C})$ .



$I_k$  est la réflexion par rapport à  $\gamma_k$   
 $A = I_1 \circ I_2$  est elliptique et fixe  $p$   
 $B = I_2 \circ I_3$  est parabolique et fixe  $q$   
 $AB = I_1 \circ I_3$  est loxodromique, d'axe  $\sigma$

FIG. 2.1 – Décomposition d'un groupe engendré par un elliptique et un parabolique.

## 2.2 Décomposition en produits d'involutions.

Cette proposition est l'outil de base de la classification des sous-groupes à deux générateurs de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  (voir [Mat82, Gil95]).

**Proposition 2.6.** *Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Supposons que si  $A$  et  $B$  sont tous deux hyperboliques, ils n'ont pas de point fixe en commun. Alors*

1. *Si  $A$  et  $B$  sont hyperboliques et que leurs axes s'intersectent, il existe trois demi-tours  $I_1, I_2$  et  $I_3$  tels que*

$$A = I_1 \circ I_2 \text{ et } B = I_2 \circ I_3.$$

2. *Dans tous les autres cas, il existe trois réflexions par rapport à des géodésiques (donc antiholomorphes)  $\iota_1, \iota_2$  et  $\iota_3$  telles que*

$$A = \iota_1 \circ \iota_2 \text{ et } B = \iota_2 \circ \iota_3.$$

Nous traiterons le premier cas plus en détail dans le paragraphe 2.3.

La figure 2.1 représente la décomposition d'un groupe engendré par un élément parabolique et un élément elliptique. L'impossibilité de décomposer les groupes engendrés par deux loxodromiques dont les axes se croisent en utilisant des réflexions antiholomorphes est liée au théorème de Gauss-Bonnet : il est impossible de trouver une géodésique simultanément orthogonale à deux géodésiques qui s'intersectent.

## 2.3 Tore époiné et groupes triangulaires dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$

### 2.3.1 L'espace de Teichmüller du tore époiné

Nous commençons par rappeler une proposition classique, qui décrit les sous-groupes  $G$  de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  uniformisant un tore époiné, c'est à dire tels que le quotient de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$  par l'action de  $G$  soit un tore époiné. Posons la

**Définition 2.7.** Un *groupe de tore époiné* est une représentation  $\rho : F_2 \longrightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  telle  $A = \rho(a)$  et  $B = \rho(b)$  vérifient les conditions suivantes.

1.  $A$  et  $B$  sont hyperboliques, et leurs axes s'intersectent en un point de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ .
2. Le commutateur  $[A, B]$  de  $A$  et  $B$  est parabolique.

**Proposition 2.8.** *Tout groupe de tore époiné  $G$  est discret et sans points fixes, et la surface de Riemann associée,  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1/G$ , est un tore époiné. Réciproquement, tout tore époiné est uniformisé par un groupe de tore époiné.*

D'après la proposition 2.8, l'espace de Teichmüller du tore époiné est l'ensemble des classes de conjugaison sous  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  de groupes de tores époinés. Soient  $A, B$  et  $C$  les images respectives de  $a, b$  et  $c$  par  $\rho$ . Supposons choisis des relèvements  $\tilde{A}, \tilde{B}$  et  $\tilde{C}$  de  $A, B$  et  $C$  à  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  vérifiant

$$x = \mathrm{tr} \tilde{A} > 2, \quad y = \mathrm{tr} \tilde{B} > 2 \quad \text{et} \quad z = \mathrm{tr} \tilde{A} \tilde{B} > 2.$$

Alors le groupe engendré par  $A$  et  $B$  est un groupe de tore époiné si et seulement si  $x, y$  et  $z$  satisfont à la relation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz \quad x > 2, \quad y > 2, \quad z > 2. \quad (2.3)$$

La relation ci-dessus est une paramétrisation de l'espace de Teichmüller du tore époiné. Une démonstration peut être trouvée dans [Kee71].

Dans le cas d'un groupe de tore époiné, les axes des deux générateurs hyperboliques s'intersectent. D'après la proposition 2.6, il existe un groupe  $G^*$  engendré par trois demi-tours, et tel que  $G$  soit d'indice deux dans  $G^*$ . De manière plus explicite :

**Lemme 2.9.** *Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  satisfaisant à la condition 1 de la définition 2.7. Il existe un unique triplet de demi-tours  $(E_1, E_2, E_3)$  tel que  $A = E_1 \circ E_2$  et  $B = E_3 \circ E_2$ .*

Remarquons qu'avec les notations du lemme 2.9, on a  $[A, B] = (E_1 E_2 E_3)^2$

### 2.3.2 Groupes triangulaires dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

Soient  $i_1, i_2$  et  $i_3$  les générateurs du groupe  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*3}$ , qui admet donc la présentation  $\langle i_1, i_2, i_3 \mid i_k^2 = 1 \rangle$ .

**Définition 2.10.** Un groupe triangulaire est une représentation  $\rho : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*3} \longrightarrow \widehat{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}$

Dans le reste de ce chapitre, nous ne nous intéresserons qu'aux groupes triangulaires ayant des générateurs holomorphes, c'est à dire, ceux dont l'image est incluse dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Ceci revient à supposer que  $\rho(i_k)$  est un demi-tour, pour  $k = 1, 2, 3$ . Un groupe triangulaire engendré par trois demi-tours est déterminé par les points fixes de chacun des  $\rho(i_k)$ . Une analyse systématique de ce type de groupes est effectuée dans [Bea83] et [Gil95].

Posons la

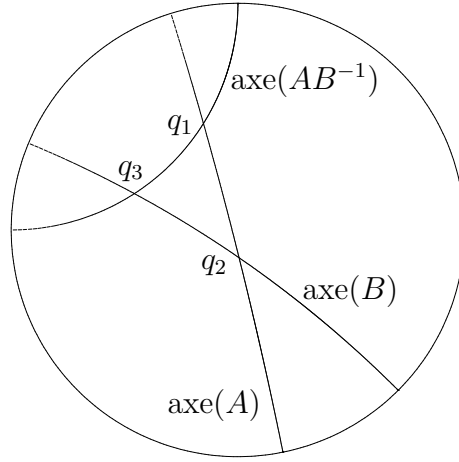


FIG. 2.2 – Décomposition de  $A$  et  $B$ , deux isométries hyperboliques dont les axes se coupent.

**Définition 2.11.** Soit  $\mathcal{T}$  l'ensemble défini par

$$\mathcal{T} = \left\{ \rho \text{ groupe triangulaire} \left| \begin{array}{l} \text{les } \rho(i_k) \text{ sont des demi-tours distincts} \\ \rho(\gamma) \text{ est parabolique} \end{array} \right. \right\} / \widehat{\text{PSL}(2, \mathbb{R})}$$

où  $\gamma$  désigne l'élément  $(i_1 i_2 i_3)^2$  de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*3}$ .

Nous allons maintenant décrire une famille de groupe triangulaires qui, par normalisation, nous fournira des coordonnées sur  $\mathcal{T}$ . Pour plus de commodité, nous allons utiliser le modèle du demi-plan supérieur pour  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ . Soient  $p_1, p_2$  et  $p_3$  les trois points de  $\partial \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$  ayant pour coordonnées dans ce modèle :

$$p_1 = 1, p_3 = -1 \text{ et } p_2 = \infty.$$

Soit  $\gamma_{kl}$  la géodésique reliant  $p_k$  à  $p_l$  ( $k \neq l$ ) et  $\Delta$  le triangle idéal  $p_1 p_2 p_3$ , orienté comme suit :  $\gamma_{12}$  vers  $p_2$ ,  $\gamma_{32}$  vers  $p_3$ , et  $\gamma_{13}$  vers  $p_1$ . Fixons les notations suivantes :

- Pour  $k, l, m$  distincts, soit  $s_k$  la projection orthogonale de  $p_k$  sur  $\gamma_{lm}$  (en coordonnées :  $s_2 = i, s_1 = -1 + 2i$  et  $s_3 = 1 + 2i$ ).
- Pour  $r > 0$  et  $r \neq 1$ , soit  $h_{kl}^r$  l'élément hyperbolique fixant  $p_k$  et  $p_l$  et ayant pour multiplicateur  $r$ . Supposons de plus que  $r > 1$  si et seulement si  $h_{kl}^r$  translate le long de  $\gamma_{kl}$  dans la direction positive. Si  $r = 1$ , posons  $h_{kl}^1 = Id$ .
- Posons  $q_k^r = h_{lm}^r(s_k)$  pour  $k, l, m$  distincts et  $r > 0$ . Soit  $E_k^r$  le demi-tour fixant  $q_k^r$ .

Les trois points  $s_1, s_2$  et  $s_3$  vont jouer le rôle d'une configuration de référence. Ces différents objets sont représentés sur la figure 2.3 dans le modèle du disque pour  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ .

**Définition 2.12.** Pour tout triplet  $(r_1, r_2, r_3)$  de nombres positifs, soit  $T(r_1, r_2, r_3)$  le groupe triangulaire défini par  $\rho(i_k) = E_k^{r_k}$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

Par construction, les trois demi-tours  $E_1^{r_1}$ ,  $E_2^{r_2}$  et  $E_3^{r_3}$  sont distincts. Le lemme suivant fournit donc une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe triangulaire  $T(r_1, r_2, r_3)$  représente un point de  $\mathcal{T}$ .

**Lemme 2.13.** *Soit  $(r_1, r_2, r_3)$  un triplet de nombres positifs. L'isométrie  $(E_1^{r_1} E_2^{r_2} E_3^{r_3})^2$  est parabolique si et seulement si  $r_1 r_2 r_3 = 1$ .*

*Démonstration.* Pour tout point du demi-plan supérieur  $m = u + iv$ , avec  $u \in \mathbb{R}$  et  $v > 0$ , le demi tour fixant  $m$  admet le relèvement à  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  donné par la matrice

$$d_{u,v} = \begin{bmatrix} -u/v & (u^2 + v^2)/v \\ -1/v & u/v \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Un calcul simple montre que dans la normalisation ci-dessus,

$$q_1^{r_1} = -1 + \frac{2i}{r_1^2}, \quad q_3^{r_3} = 1 + 2ir_3^2, \quad \text{et} \quad q_2^{r_2} = \frac{r_2^4 - 1}{r_2^4 + 1} + i \frac{2r_2^2}{r_2^4 + 1}. \quad (2.5)$$

Il s'en suit que  $(E_1^{r_1} \circ E_2^{r_2} \circ E_3^{r_3})^2$  admet le relèvement à  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} (r_1 r_2 r_3)^{-4} & \tau \\ 0 & (r_1 r_2 r_3)^4 \end{bmatrix}$$

où l'on a posé

$$\tau = - \left( 2 + (r_1 r_2 r_3)^4 + (r_1 r_2 r_3)^{-4} + 2r_2^4 r_3^4 + 2r_3^4 + \frac{2}{r_1^4} + \frac{2}{r_1^4 r_2^4} \right).$$

Le coefficient  $\tau$  n'étant jamais nul,  $(E_1^{r_1} \circ E_2^{r_2} \circ E_3^{r_3})^2$  est parabolique si et seulement si les coefficients diagonaux de la matrice ci-dessus valent 1.  $\square$

*Remarque 2.14.* Il aurait été plus léger de calculer  $E_1^{r_1} \circ E_2^{r_2} \circ E_3^{r_3}$  au lieu de son carré. Cependant, pour généraliser cette construction à  $\mathrm{PU}(2, 1)$ , nous allons remplacer au chapitre 6 les demi-tours  $E_k$  par des involutions anti-holomorphes  $I_k$ . Dans ce cadre,  $I_1 I_2 I_3$  est anti-holomorphe, et l'étude de son carré, qui est holomorphe est plus aisée.

**Proposition 2.15.** *Tout point de  $\mathcal{T}$  est représenté par un unique triplet  $(r_1, r_2, r_3)$  vérifiant  $r_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) et  $r_1 r_2 r_3 = 1$ .*

*Démonstration.* Soient  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  trois demi-tours distincts.  $(E_1 E_2 E_3)^2$  est parabolique si et seulement si  $E_1 E_2 E_3$  l'est aussi. Dans ces conditions, soit  $m_2$  le point fixe de  $E_1 E_2 E_3$ . Au point  $m_2$  est associé le cycle de longueur 3, obtenu par :

$$m_2 \xrightarrow{E_3} m_1 \xrightarrow{E_2} m_3 \xrightarrow{E_1} m_2.$$



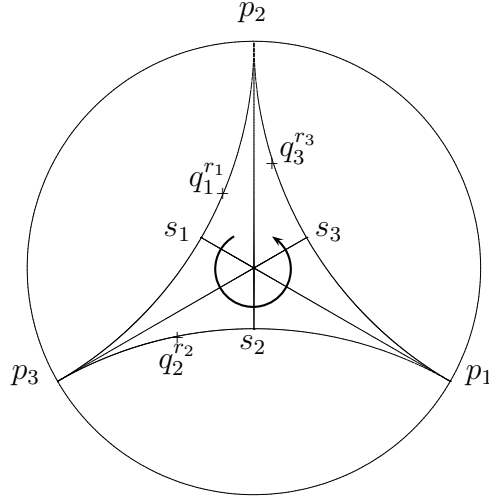


FIG. 2.3 –  $\Delta$  et  $T(r_1, r_2, r_3)$  pour  $r_1 < 1$ ,  $r_2 < 1$  et  $r_3 > 1$ .

Ce cycle est non-dégénéré. En effet si, par exemple,  $m_1$  et  $m_2$  étaient confondus,  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  stabiliseraient la géodésique reliant  $m_1$  à  $m_3$ , le groupe engendré par  $E_1E_2$  et  $E_3E_2$  serait abélien, et le commutateur  $(E_1E_2E_3)^2 = [E_1E_2, E_3E_2]$  serait l'identité. En conjuguant les  $E_k$  par l'unique élément de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  vérifiant  $g(m_k) = p_k$  pour  $i = 1, 2, 3$ , on obtient le résultat.  $\square$

Le lemme 2.9 montre que tout groupe de tore époiné est d'indice deux dans un groupe triangulaire conjugué à un unique  $T(r_1, r_2, r_3)$  avec  $r_1r_2r_3 = 1$ . Réciproquement, si  $\rho$  est un point de  $\mathcal{T}$  représenté par  $T(r_1, r_2, r_3)$ , le sous-groupe engendré par  $E_1^{r_1} \circ E_2^{r_2}$  et  $E_3^{r_3} \circ E_2^{r_2}$  est un groupe de tore époiné. En effet, le triangle  $p_1p_2p_3$  est un domaine fondamental pour  $T(r_1, r_2, r_3)$ , qui permet de montrer la discrétude et la fidélité de la représentation, ainsi que le fait qu'elle préserve le type. Nous verrons une preuve plus détaillée dans le chapitre 7 dans un cas analogue dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Par suite, à tout groupe de tore époiné  $G$  est associé un unique couple  $(r_1, r_3)$  de nombres positifs tels que  $G$  est conjugué au sous-groupe d'indice deux de  $\langle E_1^{r_1}, E_2^{(r_1r_3)^{-1}}, E_3^{r_3} \rangle$  engendré par  $E_{r_1}^1 \circ E_2^{(r_1r_3)^{-1}}$  et  $E_3^{r_3} \circ E_2^{(r_1r_3)^{-1}}$ . Par conséquent, le couple  $(r_1, r_3)$  fournit des coordonnées sur l'espace de Teichmüller du tore époiné.

Les coordonnées  $(x, y, z)$  décrites au paragraphe 2.3.1 décrivent la structure d'un tore époiné via la longueur des géodésiques représentant les générateurs du groupe fondamental. Le lien entre trace du représentant et longueur de la géodésique est donné par

$$\cosh^2(l/2) = \text{tr}(g)^2/4,$$

où  $l$  est la longueur de translation de  $g$ , relèvement à  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  de l'isométrie représentant la géodésique. Le tore époiné symétrique est celui pour lequel  $x = y = z = 3$ . Il est d'indice deux dans le groupe triangulaire  $T(1, 1, 1)$ .

*Remarque 2.16.* En utilisant le relèvement des demi-tours donné par (2.4), ainsi que les formes normalisées des  $q_i^{r_i}$  données par (2.5), on vérifie que, dans le cas d'un groupe de

tore épointé, les trois traces  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont données par :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 + r_2^4 + r_2^4 r_1^4}{r_1^2 r_2^2} \\ y &= \frac{1 + r_2^4 + r_1^4 r_2^4}{r_1^2 r_2^4} \\ z &= \frac{(1 + r_2^4 + r_1^4 r_2^4)(1 + r_2^4)}{r_1^4 r_2^6} \end{aligned}$$

On en déduit les formules inverses :

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \frac{x^2 + y^2}{xz} \\ r_2^2 &= \frac{x}{y} \\ r_3^2 &= \frac{yz}{x^2 + y^2} \end{aligned} \tag{2.6}$$

*Remarque 2.17.* 1.  $\Delta$  est un domaine fondamental pour le groupe  $T(r_1, r_2, r_3)$  lorsque  $r_1 r_2 r_3 = 1$ . Un domaine fondamental pour le groupe de tore épointé associé est obtenu en considérant  $\Delta \cup E_2^{r_2}(\Delta)$ , muni des identifications  $A = E_1^{r_1} \circ E_2^{r_2}$  et  $B = E_3^{r_3} \circ E_2^{r_2}$  (voir figure 2.5).

2. Lorsque  $r_1 r_2 r_3 \neq 1$ , bien que  $\Delta$  soit un polygone dont les faces sont identifiées par des éléments de  $T(r_1, r_2, r_3)$ , et ayant la propriété que pour tout  $g \in T(r_1, r_2, r_3)$  différent de l'identité,  $g(\Delta) \cap \Delta = \emptyset$ , il n'est pas un domaine fondamental pour  $T(r_1, r_2, r_3)$ . Dans ce cas, la transformation  $E_1 E_2 E_3$ , associée au cycle  $p_1 p_2 p_3$  est hyperbolique et les images de  $\Delta$  ne peuvent pas  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ . Les images  $g(\Delta)$  s'accablent sur les axes de  $E_1 E_2 E_3$  et de ses conjugués (voir la figure 2.4). Dans ce cas,  $\Delta$  permet de montrer que la représentation est discrète, fidèle, mais pas qu'elle préserve le type.
3. En utilisant  $\Delta$  comme domaine fondamental, nous avons décrit une famille à deux paramètres de groupes de tore épointé.

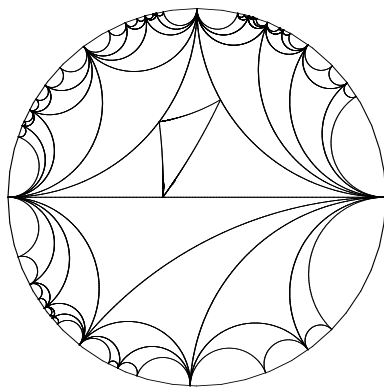
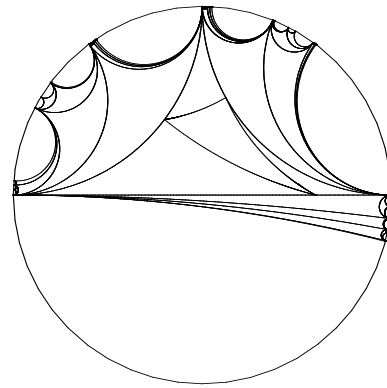
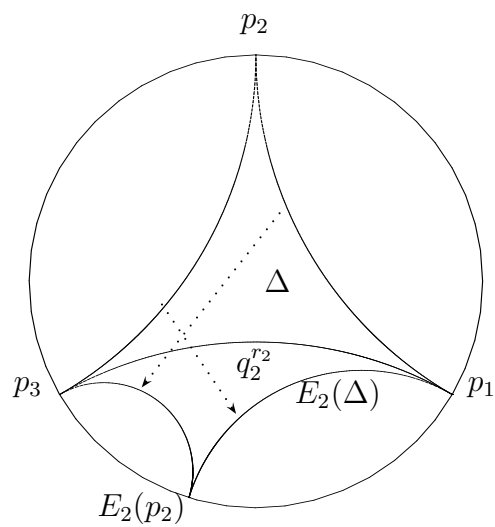
 $\rho(\gamma)$  parabolique $\rho(\gamma)$  hyperboliqueFIG. 2.4 – Translatés de  $\Delta$  par les mots de longueur  $\leq 4$ 

FIG. 2.5 – Tore épointé associé à un groupe triangulaire.

# Chapitre 3

## Représentations du groupe libre $F_2$ dans $SU(2,1)$

### 3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à une étude algébrique des représentations du groupe libre à deux générateurs  $F_2$  dans  $PU(2,1)$ . Plus précisément, nous nous intéressons au caractère d'une telle représentation. Dans tout le chapitre, nous noterons  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{n}$  les deux générateurs de  $F_2$ .

Notre démarche est la suivante :

1. Comprendre le comportement des traces dans le cas d'une représentation dans  $SL(3, \mathbb{C})$ . Nous donnons dans ce but une description effective de l'anneau des invariants de  $SL(3, \mathbb{C}) \times SL(3, \mathbb{C})$  sous l'action diagonale de  $SL(3, \mathbb{C})$  par conjugaison. Pour cela, nous suivons la méthode exposée par J. Peyrière dans le chapitre 10 de [Fog02] (voir aussi [Wen94]).
2. Passer de  $SL(3, \mathbb{C})$  à  $SU(2,1)$ , forme réelle de  $SL(3, \mathbb{C})$  fixée par l'involution  $A \mapsto (J \bar{A}^T J)^{-1}$ .

Notre objectif principal dans ce chapitre est de montrer la proposition suivante. Elle a été indépendamment démontrée par V. T. Khoi dans [Kho].

**Proposition.** *Soient  $\rho_1$  et  $\rho_2$  deux représentations de  $F_2$  dans  $SU(2,1)$ , telles que  $\rho_1(F_2)$  et  $\rho_2(F_2)$  sont Zariski-denses. Si*

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \rho_1(\mathbf{m}) &= \operatorname{tr} \rho_2(\mathbf{m}) & \operatorname{tr} \rho_1(\mathbf{n}) &= \operatorname{tr} \rho_2(\mathbf{n}) \\ \operatorname{tr} \rho_1(\mathbf{mn}) &= \operatorname{tr} \rho_2(\mathbf{mn}) & \operatorname{tr} \rho_1(\mathbf{m}^{-1}\mathbf{n}) &= \operatorname{tr} \rho_2(\mathbf{m}^{-1}\mathbf{n}) \\ \operatorname{tr} \rho_1([\mathbf{m}, \mathbf{n}]) &= \operatorname{tr} \rho_2([\mathbf{m}, \mathbf{n}]) \end{aligned}$$

alors  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont conjuguées dans  $SU(2,1)$ .

La démonstration est faite dans le paragraphe 3.3. Elle est basée sur le cas des représentations dans  $SL(3, \mathbb{C})$ , étudiées au cours du paragraphe 3.2.

Dans le cas d'une représentation dans  $SL(n, \mathbb{C})$ , si deux représentations irréductibles  $\rho_1$  et  $\rho_2$  ont même caractère (i.e. si  $\text{tr}\rho_1(\mathbf{w}) = \text{tr}\rho_2(\mathbf{w})$  quel que soit  $\mathbf{w} \in F_2$ ), elles sont conjuguées (voir par exemple [Lan93] p. 648–651). Un critère effectif de conjugaison est la donnée d'une famille finie de mots  $\mathcal{F}_n = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{p_n}\}$  ayant la propriété suivante :

$$\text{pour tout } \mathbf{w} \in F_2 \text{ il existe un polynôme } P_{\mathbf{w}} \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_{p_n}] \text{ tel que} \\ \text{tr}\rho(\mathbf{w}) = P_{\mathbf{w}}(\text{tr}(\mathbf{f}_1), \dots, \text{tr}(\mathbf{f}_{p_n})) \text{ pour tout } \rho \in \text{Hom}(F_2, SL(n, \mathbb{C}))$$

Le théorème suivant, dû à Procesi, garantit l'existence d'une telle famille, et donne une borne supérieure pour son cardinal (voir [Pro76]). Le groupe  $GL(n, \mathbb{C})$  agit sur  $M_n(\mathbb{C})$  par conjugaison : si  $g \in GL(n, \mathbb{C})$  et  $(M_1, \dots, M_k) \in M_n(\mathbb{C})^k$

$$g \cdot (M_1, \dots, M_k) = (gM_1g^{-1}, \dots, gM_kg^{-1}) \quad (3.1)$$

Soit alors  $T_{k,n}$  l'anneau des fonctions polynomiales sur  $(M_n(\mathbb{C}))^k$  invariantes par l'action 3.1.

**Théorème 3.1** (Procesi).  $T_{k,n}$  est engendré sur  $\mathbb{C}$  par les fonctions  $\text{tr}(M_{i_1}M_{i_2} \cdots M_{i_j})$ , avec  $j \leq 2^n - 1$ .

D'après ce résultat, il suffit donc de prendre pour  $\mathcal{F}_n$  l'ensemble des mots de longueur inférieure ou égale à  $2^n - 1$ , qui dans le cas où  $n = 3$  est de cardinal 255.  $SL(3, \mathbb{C})$  étant de dimension (complexe) 8, la dimension de  $\mathbb{C}[SL(3, \mathbb{C}) \times SL(3, \mathbb{C})]^{SL(3, \mathbb{C})}$  est 8 aussi. La différence est due à l'existence de relations entre les produits de puissances de deux matrices. Nous verrons au cours du paragraphe 3.2 que ces relations proviennent toutes de la relation obtenue par le théorème de Cayley-Hamilton.

Pour passer de  $SL(3, \mathbb{C})$  à  $SU(2,1)$ , nous utiliserons les deux lemmes suivants.

**Lemme 3.2.** Soient  $\rho_1$  et  $\rho_2$  deux représentations d'un groupe  $G$  dans  $SU(2,1)$ , telles que  $\rho_1(G)$  et  $\rho_2(G)$  soient Zariski-denses. Si  $\text{tr}(\rho_1(g)) = \text{tr}(\rho_2(g))$  pour tout  $g$  dans  $G$  alors  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont conjugués dans  $SU(2,1)$ .

*Démonstration.* Sous ces hypothèses,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont conjugués dans  $SL(3, \mathbb{C})$ . Il existe donc  $A \in SL(3, \mathbb{C})$  tel que pour tout  $g$  dans  $G$ ,

$$\rho_2(g) = A\rho_1(g)A^{-1}$$

Sur  $\mathbb{C}^3$ , considérons la forme hermitienne associée à  $N(x) = \|Ax\|$ ,  $\|y\| = \langle y, y \rangle$ . Pour tout  $g$  dans  $G$ ,  $\rho_1(g)$  préserve  $N$  :  $N(\rho_1(g)x) = \|A\rho_1(g)x\| = \|\rho_2(g)Ax\| = N(x)$  car  $\rho_2(g)$  appartient à  $SU(2,1)$ . Comme  $\rho_1(G)$  est Zariski-dense,  $N$  est  $SU(2,1)$ -invariant. La conclusion résulte du lemme suivant  $\square$

**Lemme 3.3.** *Soit  $h$  une forme hermitienne  $SU(2,1)$ -invariante.  $h$  est proportionnelle à  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .*

*Démonstration.* Soit  $SU(h)$  le groupe spécial unitaire associé à  $h$ .  $SU(h)$  contient  $SU(2, 1)$ , donc n'est pas compact.  $h$  a donc signature  $(2, 1)$ .  $\square$

Nous terminons ce chapitre en appliquant le critère de conjugaison 3.23 à l'étude des groupes triangulaires complexes, qui apparaissent lorsqu'une représentation est  $\mathbb{C}$ -décomposable (voir la définition 5.9 page 97).

## 3.2 Représentations de $F_2$ dans $SL(3, \mathbb{C})$

Soient  $M$  et  $N$  deux éléments de  $SL(3, \mathbb{C})$ . Nous allons montrer que  $\text{tr}[M, N]$  et  $\text{tr}[M^{-1}, N]$  sont les deux racines d'un polynôme

$$T^2 - ST + P$$

où  $S$  et  $P$  sont deux polynômes en les traces des éléments de l'ensemble  $t_{M,N}$  (voir définition 3.4).

Pour effectuer ce calcul nous suivons la méthode exposée par J. Peyrière dans le chapitre 10 de [Fog02]. La proposition 3.6 semble avoir été explicitée indépendamment dans plusieurs travaux, parmi lesquels [ADS05] et [Wen94]. S. Lawton expose ce même résultat dans [Law06]. A. Sikora a obtenu le résultat de génération de l'anneau des invariants de  $SL(3, \mathbb{C}) \times SL(3, \mathbb{C})$  par des méthodes différentes, liées à la théorie de graphes, dans [Sik01].

### 3.2.1 Cayley-Hamilton dans $M_3(\mathbb{C})$ , et conséquences

Dans toute cette section,  $M$  et  $N$  désigneront deux éléments de  $SL(3, \mathbb{C})$ .

**Définition 3.4.** Soit  $t_{M,N}$  l'ensemble ordonné de traces :

$$(\text{tr}M, \text{tr}N, \text{tr}MN, \text{tr}M^{-1}N, \text{tr}M^{-1}, \text{tr}N^{-1}, \text{tr}(MN)^{-1}, \text{tr}(M^{-1}N)^{-1})$$

Dans ce qui suit, nous désignerons par  $x$  l'octuplet  $(x_1, \dots, x_8)$ . Si  $P \in \mathbb{C}[x]$ ,  $P(t_{M,N})$  désignera donc l'évaluation du polynôme  $P$  au point  $x_1 = \text{tr}M, \dots, x_8 = \text{tr}(M^{-1}N)^{-1}$ .

Notre premier but est d'exprimer les deux quantités

$$s = \text{tr}[M, N] + \text{tr}[M^{-1}, N] \text{ et } p = \text{tr}[M, N]\text{tr}[M^{-1}, N]$$

en fonction des éléments de  $t_{M,N}$ . L'outil essentiel est l'identité matricielle fournie par le théorème de Cayley-Hamilton : si  $A \in M_3(\mathbb{C})$ , qui s'écrit en terme de traces

$$\begin{aligned}\chi(A) &= A^3 - \operatorname{tr}(A)A^2 + \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2))A - \frac{1}{6}(\operatorname{tr}(A)^3) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)(\operatorname{tr}A^2) - \frac{1}{3}\operatorname{tr}(A^3) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

En trilinearisant l'identité (3.2), on obtient une relation liant trois matrices quelconques  $A_1, A_2$  et  $A_3$  de  $M_3(\mathbb{C})$ . En posant alors  $A_1 = M, A_2 = N$  et  $A_3 = M^{-1}$ , on obtient une relation liant  $M$  et  $N$ , qui n'est autre que

$$\begin{aligned}&\chi(M + M^{-1} + N) \\ &- (\chi(M + M^{-1}) + \chi(M^{-1} + N) + \chi(M + N)) \\ &+ \chi(M) + \chi(N) + \chi(M^{-1}) = 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

En utilisant la forme explicite de  $\chi$  donnée ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}N + MNM^{-1} + M^{-1}NM &= \operatorname{tr}M \cdot (M^{-1}N + NM^{-1}) + \operatorname{tr}M^{-1} \cdot (MN + NM) \\ &- \operatorname{tr}M \operatorname{tr}M^{-1} \cdot N - \operatorname{tr}M \operatorname{tr}N \cdot M^{-1} - \operatorname{tr}M^{-1} \operatorname{tr}N \cdot M \\ &+ \operatorname{tr}MN \cdot M^{-1} + \operatorname{tr}M^{-1}N \cdot M \\ &- (\operatorname{tr}M \operatorname{tr}M^{-1} \operatorname{tr}N - \operatorname{tr}M \operatorname{tr}M^{-1}N - \operatorname{tr}M^{-1} \operatorname{tr}MN + \operatorname{tr}N) \cdot \operatorname{Id}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Seules les traces contenues dans  $t_{M,N}$  apparaissent dans le membre de droite de 3.4.

*Remarque 3.5.* D'une manière analogue nous aurions pu obtenir :

$$\begin{aligned}MNM + M^2N + NM^2 &= \operatorname{tr}M \cdot (MN + NM) + \operatorname{tr}N \cdot M^2 \\ &+ \operatorname{tr}MN \cdot M + \frac{1}{2}(\operatorname{tr}M^2 - (\operatorname{tr}M)^2) \cdot N - \operatorname{tr}M \operatorname{tr}N \cdot M \\ &+ \left( \operatorname{tr}M^2N - \operatorname{tr}M \operatorname{tr}MN - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(M^2) \operatorname{tr}N + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(M)^2 \operatorname{tr}N \right) \cdot \operatorname{Id}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

En multipliant (3.4) par  $N^{-1}$  à droite et en prenant la trace dans la relation ainsi obtenue, il vient

$$\begin{aligned}s &= \operatorname{tr}M \operatorname{tr}M^{-1} + \operatorname{tr}N \operatorname{tr}N^{-1} + \operatorname{tr}MN \operatorname{tr}(MN)^{-1} + \operatorname{tr}M^{-1}N \operatorname{tr}(M^{-1}N)^{-1} \\ &- \operatorname{tr}M \operatorname{tr}N \operatorname{tr}(MN)^{-1} - \operatorname{tr}M^{-1}N \operatorname{tr}M^{-1} \operatorname{tr}N^{-1} - \operatorname{tr}N \operatorname{tr}M^{-1} \operatorname{tr}(M^{-1}N)^{-1} - \operatorname{tr}M \operatorname{tr}M^{-1}N \operatorname{tr}N^{-1} \\ &+ \operatorname{tr}M \operatorname{tr}M^{-1} \operatorname{tr}N \operatorname{tr}N^{-1} - 3.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Pour exprimer  $p$ , multiplions (3.4) à droite par une matrice  $L$  quelconque, et effectuons le changement

$$M \rightarrow MN, N \rightarrow M^{-1}N^{-1} \text{ et } L \rightarrow NM.$$

Après avoir appliqué la trace, il vient

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}[M, N]\operatorname{tr}[M^{-1}, N] &= 2\operatorname{tr}MN\operatorname{tr}(MN)^{-1} + \operatorname{tr}M^2M^2\operatorname{tr}M^{-2}N^{-2} - (\operatorname{tr}MN)^2\operatorname{tr}M^{-2}N^{-2} \\ &\quad - (\operatorname{tr}(MN)^{-1})^2 \operatorname{tr}M^2N^2 + (\operatorname{tr}MN)^2 (\operatorname{tr}(MN)^{-1})^2 \\ &\quad - \underbrace{\operatorname{tr}[M, N][N^{-1}, M^{-1}]}_{\text{(I)}} - \underbrace{\operatorname{tr}[N, M][M^{-1}, N^{-1}]}_{\text{(II)}} \\ &\quad - \operatorname{tr}MN\operatorname{tr}(MN)^{-1} \underbrace{(\operatorname{tr}[M, N] + \operatorname{tr}[M^{-1}, N])}_{= s, \text{ calculé en (3.6)}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Pour terminer le calcul, nous devons exprimer les termes (I) et (II). (II) s'obtient à partir de (I) par le changement  $M \leftrightarrow N$ . Il suffit donc de calculer la quantité

$$\text{(I)} = \operatorname{tr}(MNM^{-1}N^{-1}N^{-1}M^{-1}NM) = \operatorname{tr}(M^2NM^{-1}N^{-2}M^{-1}N).$$

Nous le faisons en deux étapes :

- Dans un premier temps, nous utilisons l'identité de Cayley-Hamilton dans  $SL(3, \mathbb{C})$ , qui se réduit à

$$A^2 = \operatorname{tr}A \cdot A - \operatorname{tr}A^{-1} \cdot \operatorname{Id} + A^{-1}, \tag{3.8}$$

pour remplacer  $M^2$  et  $N^{-2}$ , et casser le mot  $M^2NM^{-1}N^{-2}M^{-1}N$  en une somme de mot plus courts.

- Dans un second temps, nous utilisons les relations (3.4) et (3.5) pour casser les mots obtenus après l'étape 1 et obtenir une relation polynomiale en les  $t_{M, N}$ .

Les calculs sont assez lourds, et sont facilités par l'utilisation d'un logiciel de calcul formel (ici, MAPLE). Les résultats sont rassemblés dans la proposition suivante. Les polynômes  $S$  et  $P$  apparaissent également dans [Law06].

**Proposition 3.6.** *Soient  $M$  et  $N$  deux matrices dans  $SL(3, \mathbb{C})$ . Soient  $S$  et  $P$  les deux polynômes de  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_8]$  définis par*

$$S = x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_7 + x_4x_8 - x_1x_2x_7 - x_5x_6x_3 - x_5x_2x_8 - x_1x_6x_4 + x_1x_2x_5x_6 - 3$$



et

$$\begin{aligned}
P = & x_5^2 x_6 x_1^2 x_2 + x_5 x_6^2 x_1 x_2^2 \\
& + x_4 x_5^2 x_2^2 + x_5^2 x_6^2 x_7 + x_6^2 x_8 x_1^2 + x_1^2 x_2^2 x_3 \\
& - x_4 x_5 x_6 x_1^2 - x_4 x_6^2 x_1 x_2 - x_5^2 x_6 x_1 x_3 - x_5^2 x_8 x_1 x_2 \\
& - x_5 x_6^2 x_2 x_3 - x_5 x_6 x_8 x_2^2 - x_5 x_7 x_1^2 x_2 - x_6 x_7 x_1 x_2^2 \\
& - x_5^3 x_6 x_2 - x_5 x_6^3 x_1 - x_5 x_1 x_2^3 - x_6 x_1^3 x_2 \\
& - x_4 x_5 x_6 x_7 x_2 - x_4 x_5 x_1 x_2 x_3 - x_5 x_6 x_7 x_8 x_1 - x_6 x_8 x_1 x_2 x_3 \\
& + x_4^2 x_6 x_7 + x_4^2 x_1 x_3 + x_4 x_5^2 x_6 + x_4 x_5 x_3^2 + x_4 x_6^2 x_3 \\
& + x_4 x_7^2 x_2 + x_4 x_7 x_1^2 + x_4 x_1 x_2^2 + x_5^2 x_7 x_2 + x_5^2 x_8 x_3 \\
& + x_5 x_6^2 x_8 + x_5 x_7 x_8^2 + x_5 x_2^2 x_3 + x_6^2 x_7 x_1 + x_6 x_8 x_3^2 \\
& + x_6 x_1^2 x_3 + x_7^2 x_8 x_1 + x_7 x_8 x_2^2 + x_8^2 x_2 x_3 + x_8 x_1^2 x_2 \\
& - 2 x_4^2 x_5 x_2 - 2 x_5 x_6 x_7^2 - 2 x_6 x_8^2 x_1 - 2 x_1 x_2 x_3^2 \\
& + x_4 x_5 x_8 x_1 + x_4 x_6 x_8 x_2 + x_4 x_7 x_8 x_3 + x_5 x_6 x_1 x_2 + x_5 x_7 x_1 x_3 + x_6 x_7 x_2 x_3 \\
& + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 + x_7^3 + x_8^3 \\
& - 3 x_4 x_5 x_7 - 3 x_4 x_2 x_3 - 3 x_6 x_7 x_8 - 3 x_8 x_1 x_3 \\
& + 3 x_4 x_6 x_1 + 3 x_5 x_6 x_3 + 3 x_5 x_8 x_2 + 3 x_7 x_1 x_2 \\
& - 6 x_4 x_8 - 6 x_5 x_1 - 6 x_6 x_2 - 6 x_7 x_3 + 9.
\end{aligned}$$

$\text{tr}[M, N]$  et  $\text{tr}[M^{-1}, N]$  sont les deux racines du polynôme

$$\Pi = T^2 - S(t_{M,N}) \cdot T + P(t_{M,N}).$$

*Remarque 3.7.* Si  $M$  et  $N$  ont une direction fixe commune dans  $\mathbb{C}^3$ , et un supplémentaire stable commun, alors on peut supposer que

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix} \text{ et } N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{bmatrix} \text{ avec } M_1, N_1 \in \text{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Dans ce cas,  $S$  et  $P$  deviennent

$$S = 2 \left( (\text{tr}M_1)^2 + (\text{tr}N_1)^2 + (\text{tr}M_1N_1)^2 - \text{tr}M_1\text{tr}N_1\text{tr}M_1N_1 - 1 \right) \text{ et } P = \frac{S^2}{4},$$

qui sont prévus par la relation dans  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  (relation 2.2). Dans ce cas,  $\text{tr}[M, N] = 1 + \text{tr}[M_1, N_1]$ .

*Remarque 3.8.* Les transformations de Nielsen

$$n_1 : (M, N) \longrightarrow (M^{-1}, N)$$

$$n_2 : (M, N) \longrightarrow (N, M)$$

$$n_3 : (M, N) \longrightarrow (MN, N)$$

engendrent le groupe d'automorphismes de  $F_2$  (voir [LS01]). Elles laissent invariant l'ensemble  $\{\text{tr}[M, N], \text{tr}[M^{-1}, N]\}$ . Les transformations correspondantes en coordonnées  $x$  laissent donc invariants les deux polynômes  $S$  et  $P$ . Elles sont données par

$$\begin{aligned} \tilde{n}_1 & : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \longrightarrow (x_5, x_2, x_3, x_4, x_1, x_6, x_7, x_8) \\ \tilde{n}_2 & : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \longrightarrow (x_2, x_1, x_3, x_4, x_6, x_5, x_7, x_8) \\ \tilde{n}_3 & : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \longrightarrow \\ & \quad (x_3, x_2, x_2x_3 - x_6x_1 + x_8, x_5, x_7, x_6, x_6x_7 - x_2x_5 + x_4, x_1) \end{aligned}$$

$\tilde{n}_1, \tilde{n}_2$  et  $\tilde{n}_3$  sont des exemples de « trace map » (voir [Fog02], ainsi que [Wol83]). Elles traduisent en termes de traces l'action du groupe modulaire  $PSL(2, \mathbb{Z})$  sur la variété des représentations de  $F_2$  dans  $SL(3, \mathbb{C})$ .

**Proposition 3.9.** *Soit  $\mathfrak{w}$  un élément de  $F_2$ . Il existe un polynôme  $Q_{\mathfrak{w}} \in \mathbb{C}[x, T]$  tel que*

$$\text{tr}\rho(\mathfrak{w}) = Q_{\mathfrak{w}}(t_{M,N}, \text{tr}[M, N]) \text{ pour tout } \rho \in \text{Hom}(F_2, SU(2,1))$$

où  $M$  et  $N$  désignent respectivement  $\rho(\mathfrak{m})$  et  $\rho(\mathfrak{n})$ .

La démonstration de cette proposition suit exactement la même méthode que celle que nous avons utilisée pour calculer  $s$  et  $p$ . Bien qu'une preuve simple se trouve dans [Fog02], nous résumons l'argument. Ce résultat a été prouvé par A. Sikora dans [Sik01] par des moyens différents.

*Démonstration.* Le théorème de Cayley-Hamilton implique que la  $k$ -ième puissance d'une matrice  $A \in SL(3, \mathbb{C})$  s'écrit

$$A^k = \lambda_k A + \mu_k \text{Id} + \nu_k A^{-1}, \quad (3.9)$$

où  $\lambda_k, \mu_k$  et  $\nu_k$  sont des polynômes en  $\text{tr}A$  et  $\text{tr}A^{-1}$ . (Ces polynômes généralisent les polynômes de Chebyshev obtenus dans le cas de  $SL(2, \mathbb{C})$ , voir [Gol, San95]). Une utilisation répétée de la relation (3.9) pour  $M$  et  $N$  montre que  $W = \rho(\mathfrak{w})$  peut se développer sous la forme

$$W = p_1 \cdot W_1 + \cdots + p_n \cdot W_n$$

où les  $p_i$  sont des polynômes en  $t_{M,N}$  et les  $W_i$  sont des mots en  $M$  et  $N$  de la forme

$$M^{\epsilon_1} N^{\sigma_1} \cdots M^{\epsilon_k} N^{\sigma_k} \text{ avec } \epsilon_i = \pm 1 \text{ et } \sigma_j = \pm 1.$$

On utilise alors les deux relations (3.4) et (3.5) pour casser ces mots. On en déduit alors que  $W$  s'écrit sous la forme

$$W = \sum_{V \in \mathfrak{M}} p_V(t_{M,N}) V,$$

où l'ensemble  $\mathcal{M}$  est

$$\mathcal{M} = \{M, N, MN, M^{-1}N, M^{-1}, N^{-1}, M^{-1}N^{-1}, MN^{-1}, [M, N], [M^{-1}, N]\}$$

et les  $p_V$  sont des polynômes en les  $t_{M,N}$ . Comme  $\text{tr}[M, N] + \text{tr}[M^{-1}, N]$  est un polynôme en les  $t_{M,N}$  (proposition 3.6), on obtient le résultat.  $\square$

Le corollaire suivant est une conséquence simple de la proposition 3.9, et du fait qu'une représentation semi-simple est déterminée à conjugaison près par son caractère (voir [Lan93] p. 648–651).

**Corollaire 3.10.** *Soient  $\rho_1$  et  $\rho_2$  deux représentations semi-simples de  $F_2$  dans  $SL(3, \mathbb{C})$ , définies par deux paires  $(M_1, N_1)$  et  $(M_2, N_2)$ . Si les deux ensembles ordonnés*

$$\{t_{M_1, N_1}, \text{tr}[M_1, N_1]\} \text{ et } \{t_{M_2, N_2}, \text{tr}[M_2, N_2]\}$$

*sont égaux, alors  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont conjuguées.*

*Remarque 3.11.* Il existe donc deux classes de conjugaisons  $[\rho_1]$  et  $[\rho_2]$  de représentations de  $F_2$  dans  $SL(3, \mathbb{C})$ , qui ne diffèrent « que par la trace du commutateur des générateurs ». Ces deux classes de conjugaison sont associées chacune à l'une des racines de  $\Pi$  (cf proposition 3.6).

### 3.2.2 Un analogue du théorème de Fricke-Vogt dans $SL(3, \mathbb{C})$

Commençons par la proposition suivante.

**Proposition 3.12.** *Le polynôme  $\Pi \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_8]$  est irréductible sur  $\mathbb{C}$ .*

*Démonstration.* Si  $\Pi$  était réductible, alors le discriminant  $S^2 - 4P$  serait un carré. Dans le cas où

$$M = \rho(\mathbf{m}) = \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1/t \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } N = \rho(\mathbf{n}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

on obtient  $S^2 - 4P = -(y+1)(y-3)^3$  avec  $y = 1 + t + 1/t$ , qui n'est pas carré.  $\square$

$M_3(\mathbb{C})$  est l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients complexes. Le groupe  $SL(3, \mathbb{C})$  peut être vu comme la sous-variété algébrique de  $\mathbb{C}^9 \sim M_3(\mathbb{C})$  associée à l'équation  $\det M = 1$ , avec

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

Un polynôme sur  $SL(3, \mathbb{C})$  est donc un élément de l'anneau des fonctions des cette variété, qui est le quotient

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_9]/(\det M = 1).$$

Les polynômes sur  $SL(3, \mathbb{C}) \times SL(3, \mathbb{C})$  sont définis de manière analogue.

**Théorème 3.13.** *Soit  $f$  un polynôme sur  $SL(3, \mathbb{C}) \times SL(3, \mathbb{C})$  invariant par conjugaison. Il existe un polynôme  $Q$  tel que pour toute paire  $(M, N) \in SL(3, \mathbb{C}) \times SL(3, \mathbb{C})$*

$$f(M, N) = Q(t_{M, N}, \text{tr}[M, N]).$$

De plus, si  $f$  est fixé,  $Q$  ainsi déterminé est unique modulo l'idéal engendré par  $\Pi$ .

*Démonstration.* La proposition 3.9 montre que l'ensemble de traces  $t_{M, N}$  suffit à engendrer  $\mathbb{C}[SL(3, \mathbb{C}) \times SL(3, \mathbb{C})]^{SL(3, \mathbb{C})}$ .

Par conséquent,  $\mathbb{C}[SL(3, \mathbb{C}) \times SL(3, \mathbb{C})]^{SL(3, \mathbb{C})}$  est un quotient de l'algèbre de type fini  $\mathcal{R} = \mathbb{C}[x, T]/(\Pi)$  par un idéal  $\mathcal{I}$ . Comme  $\Pi$  est irréductible,  $\mathcal{R}$  est intègre, et donc, si  $\mathcal{I}$  est différent de 0

$$\dim \left( \mathbb{C}[SL(3, \mathbb{C}) \times SL(3, \mathbb{C})]^{SL(3, \mathbb{C})} \right) < \dim \mathcal{R}.$$

La variété algébrique  $V$  associée à  $\Pi$  est de dimension 8 et est irréductible.  $R(V)$ , l'ensemble des points réguliers de  $V$  est un ouvert de Zariski.

Soit  $\Phi$  l'application

$$\begin{aligned} SL(3, \mathbb{C}) \times SL(3, \mathbb{C}) &\longrightarrow V \\ (A, B) &\longmapsto (t_{A, B}, \text{tr}[A, B]). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Le rang de  $\Phi$  en un point  $(A, B)$  est au plus 8. L'ensemble  $\mathcal{M}$  des points où  $\Phi$  est de rang maximal est un ouvert de Zariski. Comme  $V$  est irréductible,  $\mathcal{M} \cap R(V)$  est non-vidé. Il suffit donc d'exhiber un point  $(A, B)$  où  $\Phi$  est de rang 8 pour conclure que  $\mathcal{I}$  est (0). Le point donné par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

convient. Pour le vérifier, on peut écrire la matrice de l'application tangente à  $\Phi$  au point  $(A, B)$  dans une base de l'espace tangent à  $SL(3, \mathbb{C}) \times SL(3, \mathbb{C})$  en  $(A, B)$ , obtenue par transport d'une base de  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ . On trouve alors un mineur d'ordre 8 non-nul.  $\square$

*Remarque 3.14.* Par une étude plus détaillée de l'application  $\Phi$  on constate :

1.  $d\Phi_{A, B}$  est de rang au plus 4 si la représentation est totalement réductible, i.e. si  $A$  et  $B$  sont simultanément diagonalisables.

2.  $d\Phi_{A,B}$  est de rang au plus 7 si  $A$  et  $B$  ont une direction propre commune.

Ce phénomène est dû à l'apparition de relations supplémentaires entre les traces lorsque  $A$  et  $B$  ont un drapeau commun stable. Ces relations additionnelles sont détaillées dans [Wen94].

*Remarque 3.15.* Le théorème 3.13 montre que la variété  $V$  associée au polynôme  $\Pi$  est le quotient catégorique de  $SL(3,\mathbb{C}) \times SL(3,\mathbb{C})$  par  $SL(3,\mathbb{C})$  agissant par conjugaison (voir [Dol03]).

### 3.3 Représentations de $F_2$ dans $SU(2,1)$

Rappelons que  $M$  si est un élément de  $U(2,1)$ ,  $J\overline{M}^T J = M^{-1}$ , et donc,

$$\mathrm{tr}(M^{-1}) = \overline{\mathrm{tr}M}. \quad (3.11)$$

Posons la

**Définition 3.16.** Pour tout  $M \in SU(2,1)$ , soit  $M^* = \overline{M^{-1}} = JM^T J$

*Remarque 3.17.* i Usuellement, la notation  $M^*$  désigne la « transconjuguée »  $\overline{M}^T$  de  $M$ . La notation  $M^*$ , qui est assez proche, peut prêter à confusion, mais comme nous n'utiliserons jamais  $M^* = \overline{M}^T$  dans ce travail, nous nous autorisons cet abus.

Rappelons que  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  désignent les générateurs de  $F_2$ . Nous désignerons par  $z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$  les coordonnées sur  $\mathbb{C}^5$ .

**Définition 3.18.** 1. Soit  $\mathcal{V}$  l'ensemble des représentations  $\rho$  de  $F_2$  dans  $SU(2,1)$  telles que  $\rho(F_2)$  est Zariski dense.

2. Si  $\rho \in \mathcal{V}$ , posons

$$T_\rho = (\mathrm{tr} \rho(\mathfrak{m}), \mathrm{tr} \rho(\mathfrak{n}), \mathrm{tr} \rho(\mathfrak{m}\mathfrak{n}), \mathrm{tr} \rho(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n}))$$

et

$$\tilde{T}_\rho = (T_\rho, \mathrm{tr} \rho([\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]))$$

Rappelons qu'un sous-groupe de  $SU(2,1)$  est Zariski-dense si et seulement si il ne fixe pas un point de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et ne stabilise aucune droite complexe. C'est en fait vrai dans les espaces symétriques de type non compact. I. Kim donne une preuve dans [Kim01]. Dans notre cas, ceci est équivalent à dire que le sous-groupe agit sur  $\mathbb{C}P^2$  sans point fixe global.

En utilisant le fait que  $\mathrm{tr}M^{-1} = \overline{\mathrm{tr}M}$  dans  $SU(2,1)$ , et la proposition 3.9, qui exprime  $\mathrm{tr}\rho(\mathfrak{w})$  dans le cas où  $\rho$  est à valeurs dans  $SL(3,\mathbb{C})$ , on obtient le

**Lemme 3.19.** *Soit  $\mathbf{w}$  un élément  $F_2$ . Il existe un polynôme  $Q_{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}[z, \bar{z}]$  tel que pour toute représentation  $\rho$  de  $F_2$  dans  $SU(2,1)$ ,*

$$\mathrm{tr}(\rho(\mathbf{w})) = Q_{\mathbf{w}}\left(\tilde{T}_\rho, \overline{\tilde{T}_\rho}\right)$$

*Remarque 3.20.* Comme dans le cas de  $SL(3, \mathbb{C})$  les variables ne sont pas indépendantes. En effet, si  $A$  et  $B$  sont deux éléments de  $SU(2,1)$  alors  $[A, B]$  est conjugué par  $A$  à  $[A^{-1}, B]^{-1}$ . La relation 3.11 implique alors que ces deux commutateurs sont conjugués :

$$\mathrm{tr}[A, B] = \overline{\mathrm{tr}[A^{-1}, B]}$$

Le produit et la somme des traces des ces deux commutateurs sont donc réels :

$$\mathrm{tr}[A, B] + \mathrm{tr}[A^{-1}, B] = 2\mathrm{Re}(\mathrm{tr}[A, B]) \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}[A, B]\mathrm{tr}[A^{-1}, B] = |\mathrm{tr}[A, B]|^2$$

On obtient donc à partir des deux polynômes  $S$  et  $P$  explicités dans la proposition 3.6 deux polynômes  $\tilde{S}$  et  $\tilde{P}$  éléments de  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_8]$  tels que pour toute représentation  $\rho$ ,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} \rho([\mathbf{m}, \mathbf{n}]) + \mathrm{tr} \rho([\mathbf{m}^{-1}, \mathbf{n}]) &= \tilde{S}(\mathrm{Re} T_\rho, \mathrm{Im} T_\rho) \\ \mathrm{tr} \rho([\mathbf{m}, \mathbf{m}]) \mathrm{tr} \rho([\mathbf{m}^{-1}, \mathbf{n}]) &= \tilde{P}(\mathrm{Re} T_\rho, \mathrm{Im} T_\rho) \end{aligned}$$

On en déduit les deux relations suivantes, valables pour toute représentation  $\rho$  de  $F_2$  dans  $SU(2,1)$  :

$$2\mathrm{Re} \mathrm{tr} \rho([\mathbf{m}, \mathbf{n}]) = \tilde{S}(\mathrm{Re} T_\rho, \mathrm{Im} T_\rho) \quad (3.12)$$

$$4(\mathrm{Im} \mathrm{tr} \rho([\mathbf{m}, \mathbf{n}]))^2 = (4\tilde{P} - \tilde{S}^2)(\mathrm{Re} T_\rho, \mathrm{Im} T_\rho) \quad (3.13)$$

Par suite,  $T_\rho$  détermine entièrement la partie réelle de  $\mathrm{tr} \rho([\mathbf{m}, \mathbf{n}])$ , et sa partie imaginaire au signe près.

**Définition 3.21.** Soit  $V'$  la sous-variété algébrique de  $\mathbb{R}^9$  associée au polynôme  $\Pi = x_9^2 - (4\tilde{P} - \tilde{S}^2)$ . Soit  $\mathbb{R}[V']$  l'anneau des polynômes sur  $V'$ .

En application de la remarque 3.20, on a une description un peu plus précise du polynôme  $Q_{\mathbf{w}}$  ci-dessus : pour tout  $\mathbf{w} \in F_2$ , la trace de  $\rho(\mathbf{w})$  s'écrit

$$Q_{\mathbf{w}}^{(1)}(\mathrm{Re} T_\rho, \mathrm{Im} T_\rho, \mathrm{Im} \mathrm{tr} \rho([\mathbf{m}, \mathbf{n}])) + iQ_{\mathbf{w}}^{(2)}(\mathrm{Re} T_\rho, \mathrm{Im} T_\rho, \mathrm{Im} \mathrm{tr} \rho([\mathbf{m}, \mathbf{n}]))$$

En d'autres termes, nous obtenons une application

$$\begin{aligned} F_2 &\longrightarrow \mathbb{R}[V'] \times \mathbb{R}[V'] \\ \mathbf{w} &\longmapsto \left( Q_{\mathbf{w}}^{(1)}, Q_{\mathbf{w}}^{(2)} \right) \end{aligned}$$

Si  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{w}'$  sont conjugués dans  $F_2$ , alors  $Q_{\mathbf{w}}^{(i)} = Q_{\mathbf{w}'}^{(i)}$  pour  $i = 1, 2$ . La réciproque est fautive : H. Sandler a montré dans [San98] l'existence d'éléments non-conjugués de  $F_2$  ayant la même trace sous toutes les représentations dans  $SU(2,1)$ .

Notons que  $\mathbb{R}[V']$  est un anneau intègre :

**Lemme 3.22.** *Le polynôme  $\Pi$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[x_1 \dots x_9]$ .*

*Démonstration.* Soient  $A$  et  $B$  les deux éléments de  $SU(2,1)$  :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

La trace de  $[A, B]$  est réelle. Par suite, d'après la relation 3.13,  $F = 4\tilde{P} - \tilde{S}^2$  s'annule au point  $\tilde{t}_{A,B}$ . Cependant, on vérifie qu'en ce point  $dF$  est non-nulle. En conséquence,  $F$  n'est pas un carré, et  $4y_5^2 - F$  est irréductible.  $\square$

D'après la proposition 3.9, il suffit de connaître les 9 traces  $t_{M,N}$  et  $\text{tr}[M, N]$  pour connaître une représentation dans  $SU(2,1)$  modulo conjugaison dans  $SL(3, \mathbb{C})$ . En utilisant le fait que  $\text{tr} M^{-1} = \overline{\text{tr} M}$ , on peut réduire ces neuf traces aux 5 traces intervenant dans  $\tilde{T}_\rho$ . Finalement, le lemme 3.2, vu dans l'introduction du chapitre, permet d'obtenir la proposition annoncée dans l'introduction :

**Proposition 3.23.** *Soient  $\rho_1$  et  $\rho_2$  deux représentations  $F_2$  dans  $SU(2,1)$ , telles que  $\rho_1(F_2)$  et  $\rho_2(F_2)$  sont Zariski-denses. Si*

$$\begin{aligned} \text{tr } \rho_1(\mathbf{m}) &= \text{tr } \rho_2(\mathbf{m}) & \text{tr } \rho_1(\mathbf{n}) &= \text{tr } \rho_2(\mathbf{n}) \\ \text{tr } \rho_1(\mathbf{mn}) &= \text{tr } \rho_2(\mathbf{mn}) & \text{tr } \rho_1(\mathbf{m}^{-1}\mathbf{n}) &= \text{tr } \rho_2(\mathbf{m}^{-1}\mathbf{n}) \\ \text{tr } \rho_1([\mathbf{m}, \mathbf{n}]) &= \text{tr } \rho_2([\mathbf{m}, \mathbf{n}]) \end{aligned}$$

alors  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont conjuguées dans  $SU(2,1)$ .

*Remarque 3.24.* L'application  $\rho \mapsto (\text{Re } T_\rho, \text{Im } T_\rho, \text{Im } \text{tr} \rho([\mathbf{m}, \mathbf{n}]))$ , à valeurs dans  $V'$ , n'est pas surjective. Fixons par exemple trois classes de conjugaisons d'éléments elliptiques  $C_1, C_2$  et  $C_3$ . Dans [Pau05], Julien Paupert donne des conditions sur les  $C_i$  garantissant l'existence de  $A \in C_1$  et  $B \in C_2$  tels que  $AB \in C_3$ . Par ailleurs, Falbel et Wentworth ont montré dans [FW] que si les  $C_i$  sont des classes de conjugaison loxodromiques, il existe toujours  $A \in C_1$  et  $B \in C_2$  tels que  $AB \in C_3$ . Nous retrouverons ce résultat au chapitre 5 par une méthode différente.

*Remarque 3.25.* Supposons la représentation  $\rho$  décomposable : il existe trois involutions  $I_1, I_2$  et  $I_3$  telles que  $\rho(\mathbf{m}) = I_1 \circ I_2$  et  $\rho(\mathbf{n}) = I_3 \circ I_2$ . Le groupe engendré par  $\rho(\mathbf{m})$  et  $\rho(\mathbf{n})$  est d'indice deux dans le groupe triangulaire engendré par  $I_1, I_2$  et  $I_3$ . Les traces impliquées dans la proposition 3.23 sont donc  $\text{tr}(I_1 \circ I_2)$ ,  $\text{tr}(I_3 \circ I_2)$ ,  $\text{tr}(I_1 \circ I_2 \circ I_3 \circ I_2)$ ,  $\text{tr}(I_1 \circ I_3)$  et  $\text{tr}((I_1 \circ I_2 \circ I_3)^2)$ . Cette famille de traces joue un rôle déterminant dans l'étude des groupes triangulaires, et la plupart des résultats de discrétude de groupes triangulaires connus proviennent d'une analyse de cette famille de mots. Dans [Sch02] (2002) R. Schwartz donne un panorama de ces groupes. Nous renvoyons également au paragraphe 3.5.

### 3.4 Deux involutions sur $\text{Hom}(F_2, \text{PU}(2,1))/\text{PU}(2,1)$

**Définition 3.26.** Soit  $\rho$  une représentation de  $F_2$  dans  $\text{SU}(2,1)$  donnée par

$$\rho(\mathbf{m}) = A \text{ et } \rho(\mathbf{n}) = B.$$

Définissons alors les deux représentations

- $\rho^*$  donnée par  $\rho^*(\mathbf{m}) = A^*$  et  $\rho^*(\mathbf{n}) = B^*$ .
- $\rho'$  donnée par  $\rho'(\mathbf{m}) = A^{-1}$  et  $\rho'(\mathbf{n}) = B^{-1}$ .

(cf la remarque 3.17 page 68).

Les deux applications  $\rho \rightarrow \rho^*$  et  $\rho \rightarrow \rho'$  sont des involutions sur  $\mathcal{V}$ . Elles induisent des involutions  $I^*$  et  $I'$  sur  $\mathcal{V}/\text{PU}(2,1)$ , données par

$$I^*([\rho]) = [\rho^*] \text{ et } I'([\rho]) = [\rho']$$

**Proposition 3.27.** Soit  $\rho$  un point de  $\mathcal{V}$ . Posons  $\tilde{T}_\rho = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ .

Alors :

$$\tilde{T}_{\rho^*} = (z_1, z_2, z_3, z_4, \bar{z}_5)$$

et

$$\tilde{T}_{\rho'} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4, z_5)$$

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la définition de  $\text{SU}(2,1)$ . □

$T_\rho = T_{\rho^*}$  et  $\text{tr} \rho^*([\mathbf{m}, \mathbf{n}]) = \overline{\text{tr} \rho([\mathbf{m}, \mathbf{n}])}$ . Ainsi,  $\rho$  et  $\rho^*$  correspondent aux deux traces possibles pour le commutateur une fois fixées les traces de  $\rho(\mathbf{m})$ ,  $\rho(\mathbf{n})$ ,  $\rho(\mathbf{mn})$  et  $\rho(\mathbf{m}^{-1}\mathbf{n})$ .

*Remarque 3.28.* Si  $\rho(F_2)$  est Zariski dense, la proposition 3.23 montre que  $\tilde{T}_\rho = \tilde{T}_{\rho^*}$  si et seulement si  $\rho$  et  $\rho^*$  sont conjuguées, c'est à dire si  $[\rho]$  est fixée par l'involution  $I^*$ . Nous verrons dans le chapitre 5 que si  $\rho(\mathbf{m})$  et  $\rho(\mathbf{n})$  sont loxodromiques, ceci est équivalent au fait que la paire  $(\rho(\mathbf{m}), \rho(\mathbf{n}))$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable, c'est à dire qu'il existe trois réflexions lagrangiennes telles que

$$\rho(\mathbf{m}) = I_1 \circ I_2 \text{ et } \rho(\mathbf{n}) = I_3 \circ I_2$$

(Voir la définition 5.9 et la proposition 5.13).

*Remarque 3.29.* En conservant toujours l'hypothèse que  $\rho(F_2)$  est Zariski dense, la proposition 3.23 montre que  $\tilde{T}_\rho = \tilde{T}_{\rho'}$  si et seulement si  $\rho$  et  $\rho'$  sont conjuguées, c'est à dire si  $[\rho]$  est fixe par  $I'$ . Nous verrons que si  $\rho$  est  $\mathbb{C}$ -décomposable, c'est à dire s'il existe trois réflexions d'ordre deux telles que

$$\rho(\mathbf{m}) = I_1 \circ I_2 \text{ et } \rho(\mathbf{n}) = I_3 \circ I_2$$

alors  $[\rho]$  est fixe par  $I'$ . (Voir la définition 5.9 et la proposition 5.13).



En général,  $\rho$  et  $\rho^*$  sont deux représentations non-conjuguées de  $F_2$ , qui correspondent aux deux racines de l'équation  $4x_9^2 - F = 0$ . Dans le cas où  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$  ont des images loxodromiques, Parker et Platis ont remarqué dans [PP] qu'il existait des représentations non-conjuguées  $\rho_1$  et  $\rho_2$  telles que  $\text{tr } \rho_1(\mathfrak{m}) = \text{tr } \rho_2(\mathfrak{m})$ ,  $\text{tr } \rho_1(\mathfrak{n}) = \text{tr } \rho_2(\mathfrak{n})$ ,  $\text{tr } \rho_1(\mathfrak{mn}) = \text{tr } \rho_2(\mathfrak{mn})$  et  $\text{tr } \rho_1(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n}) = \text{tr } \rho_2(\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{n})$ .

### 3.5 Trace et groupes triangulaires

Commençons par la définition suivante :

**Définition 3.30.** Un *groupe triangulaire complexe* est un groupe engendré par trois réflexions complexes d'ordre deux.

Nous appellerons *miroir* d'une réflexion complexe la droite complexe de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  qu'elle fixe. Suivant la terminologie de Pratoševitch, nous dirons qu'un groupe triangulaire complexe  $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$  est *ultra-parallèle* si les miroirs de  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  sont deux à deux disjoints. Si les trois miroirs sont deux à deux asymptotiques, le groupe triangulaire est dit *idéale*. Nous qualifierons d'*elliptique* un groupe triangulaire dont les miroirs sont deux à deux sécants (c'est à dire tel que les trois isométries  $I_1I_2$ ,  $I_2I_3$  et  $I_1I_3$  sont elliptiques).

Dans [Pra05], Pratoševitch a donné des critères pour déterminer quand deux groupes triangulaires ultraparallèles ou elliptique sont conjugués. Ces critères généralisent la classification des groupes triangulaires idéaux par l'invariant de Cartan (voir [GP92] ou [San95]). Nous allons voir dans ce paragraphe que ces critères découlent de la proposition 3.23 et sont en fait valables sans hypothèses sur la position relative des trois miroirs.

Soit  $\mathcal{G}$  l'ensemble des triplets de réflexions complexes. Via la dualité entre les droites complexes de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  et leurs vecteurs polaires, la donnée d'un élément de  $\mathcal{G}$  est équivalente à celle d'un triplet de vecteurs  $(n_1, n_2, n_3)$  tels que

$$\langle n_k, n_k \rangle = 1. \quad (3.14)$$

Notons que la réflexion  $I_k$  est donnée alors par

$$I_k(Z) = -Z + 2\langle Z, n_k \rangle n_k.$$

Nous allons utiliser les notations suivantes :

- $z_k = \langle n_{k+1}, n_{k+2} \rangle$ , les indices étant pris modulo 3.
- $r_k = |z_k|$
- $\alpha = \arg \left( \prod_{k=1}^3 \langle n_{k+1}, n_{k+2} \rangle \right)$

$\alpha$  est appelé *l'invariant angulaire* du triplet  $(I_1, I_2, I_3)$ . Si l'on pose  $\theta_k = \arg(z_k)$ ,  $\alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \pmod{2\pi}$ . Les quatre quantités  $r_1, r_2, r_3$  et  $\alpha$  sont indépendantes des relèvements vérifiant (3.14) choisis.

Définissons alors sur l'ensemble des triplets de réflexions complexes d'ordre deux l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \times S^1 \\ (I_1, I_2, I_3) &\longrightarrow (r_1, r_2, r_3, \alpha) \end{aligned}$$

Tous les points de  $\mathbb{R}^3 \times S^1$  ne sont pas atteints par  $\varphi$ . Plus précisément, le lemme suivant est dû à Anna Pratoussevitch dans [Pra05]

**Lemme 3.31.** *L'image de  $\varphi$  est l'ensemble*

$$\{(r_1, r_2, r_3, \alpha), 2r_1r_2r_3 \cos \alpha < r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - 1\}.$$

*Démonstration.* L'existence d'un triplet de réflexions complexes satisfaisant  $\varphi(I_1, I_2, I_3) = (r_1, r_2, r_3, \alpha)$  est équivalente à celle d'un triplet de vecteurs  $(n_1, n_2, n_3)$  satisfaisant (3.14). Ces valeurs sont réalisées par un triplet de vecteurs si et seulement si la matrice de Gram associée à ces trois vecteurs,  $Q = (\langle n_i, n_j \rangle)_{(i,j)}$  est de signature  $(2, 1)$ .  $Q$  est de trace 3. Elle a donc une seule valeur propre négative si et seulement si son déterminant est négatif. On vérifie alors que

$$\det Q = 2r_1r_2r_3 \cos \alpha - (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + 1.$$

□

Il existe donc un groupe triangulaire pour les paramètres  $(r_1, r_2, r_3, \alpha)$  si et seulement ces paramètres satisfont la relation

$$2r_1r_2r_3 \cos \alpha < r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - 1. \quad (3.15)$$

Vu le lemme 1.42 les paramètres  $r_k$  s'interprètent de la manière suivante :

- $r_k > 1$  si et seulement si les droites complexes  $C_{k+1}$  et  $C_{k+2}$  sont disjointes i.e. si et seulement si  $I_{k+1}I_{k+2}$  est loxodromique.
- $r_k = 1$  si et seulement si  $C_{k+1}$  et  $C_{k+2}$  sont asymptotiques ou confondues, i.e. si et seulement si  $I_{k+1}I_{k+2}$  est parabolique ou l'identité.
- $r_k < 1$  si et seulement si  $C_{k+1}$  et  $C_{k+2}$  se coupent en un point de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , i.e. si et seulement si  $I_{k+1}I_{k+2}$  est elliptique régulier.

Un groupe triangulaire est donc idéal (resp. ultra-parallèle, resp. elliptique) si et seulement si  $r_k = 1$  (resp.  $r_k > 1$ , resp.  $r_k < 1$ ) pour  $k = 1, 2, 3$ . Dans le cas des groupes triangulaires idéaux, où les trois miroirs sont deux à deux asymptotiques (i.e.  $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ ),  $\alpha$  est relié à l'invariant de Cartan  $\mathbb{A}$  du triplet de points de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  formé par les points d'intersections  $\{q_{k+2}\} = \overline{C_k} \cap \overline{C_{k+1}}$  par

$$\mathbb{A} = \frac{\alpha - \pi}{2}[2\pi].$$

$\mathbb{A}$  classe les groupe triangulaires idéaux à conjugaison près dans  $\text{PU}(2,1)$ , il en est de même pour  $\alpha$  (voir [GP92, San95]).

**Proposition 3.32.** *Soient  $(I_1, I_2, I_3)$  et  $(I'_1, I'_2, I'_3)$  deux triplets de réflexions complexes, et  $G$  et  $G'$  les groupes triangulaires associés. Supposons que  $G$  et  $G'$  soient Zariski denses. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1.  $\varphi(I_1, I_2, I_3) = \varphi(I'_1, I'_2, I'_3)$
2. Il existe une isométrie holomorphe  $g \in PU(2,1)$  telle que  $I'_k = gI_kg^{-1}$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

*Démonstration.* – 2.  $\Rightarrow$  1. est clair car les quantités  $r_1, r_2, r_3$  et  $\alpha$  sont des invariants de conjugaisons.

- Pour l'autre implication nous utilisons le calcul des traces dans les groupes triangulaires complexes effectué dans [San95] et [Pra05]. Il est basé sur les deux remarques suivantes :
- Soit  $c$  vecteur de  $\mathbb{C}^{2,1}$  polaire à une droite complexe  $C$  de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , vérifiant  $\langle c, c \rangle = 1$ . La réflexion complexe par rapport à  $C$  s'écrit  $-\text{Id} + 2cc^*$ , où  $c^*$  désigne la forme linéaire duale de  $c$ .
- Si  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}^{2,1}$ ,

$$\text{tr}((c_1c_1^*)(c_2c_2^*) \cdots (c_nc_n^*)) = \langle c_2, c_1 \rangle \langle c_3, c_2 \rangle \cdots \langle c_1, c_n \rangle.$$

Notons  $A = I_1I_2$  et  $B = I_3I_2$ . Alors :

$$\text{tr}A = 4r_3^2 - 1, \text{tr}B = 4r_1^2 - 1 \text{ et } \text{tr}A^{-1}B = \text{tr}I_1I_3 = 4r_2^2 - 1$$

$$\text{tr}AB = \text{tr}I_1I_2I_3I_2 = 16r_1r_3(r_1r_3 - r_1 \cos \alpha) + 4r_2^2 - 1$$

$$\text{tr}I_1I_2I_3 = 8r_1r_2r_3e^{i\alpha} - 4(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + 3.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, si  $M \in SU(2,1)$

$$M^2 = \text{tr}(M) \cdot M - \text{tr}M^{-1} \cdot \text{Id} + M^{-1}.$$

Par suite,

$$\text{tr}[A, B] = \text{tr}(I_1I_2I_3)^2 = (\text{tr}I_1I_2I_3)^2 - 2\overline{\text{tr}I_1I_2I_3}.$$

Les quantités  $r_1, r_2, r_3$  et  $\alpha$  déterminent donc les traces de  $A, B, AB, A^{-1}B$  et  $[A, B]$ . La proposition 3.23 permet alors de conclure.  $\square$

*Remarque 3.33.* Dans [San95], Sandler a démontré une formule combinatoire permettant un calcul récursif des traces dans un groupe triangulaire idéal. Dans [Pra05], Pratussevitch a généralisé cette formule au cas des groupes engendrés par trois réflexions complexes quelconques.

*Remarque 3.34.* Reformulons les invariants  $r_1, r_2, r_3$  et  $\alpha$  en termes de traces, en posant  $A = I_1 I_2$  et  $B = I_3 I_2$  :

$$r_1^2 = \frac{1 + \operatorname{tr} B}{4}, \quad r_2^2 = \frac{1 + \operatorname{tr} A^{-1} B}{4} \quad \text{et} \quad r_3^2 = \frac{1 + \operatorname{tr} A}{4}.$$

Il s'en suit que

$$\operatorname{tr} AB = (1 + \operatorname{tr} A)(1 + \operatorname{tr} B) - 16r_1 r_2 r_3 \cos \alpha + \operatorname{tr} A^{-1} B.$$

Et finalement,

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \frac{(1 + \operatorname{tr} A)(1 + \operatorname{tr} B) + \operatorname{tr} A^{-1} B - \operatorname{tr} AB}{\sqrt{(1 + \operatorname{tr} A)(1 + \operatorname{tr} B)(1 + \operatorname{tr} A^{-1} B)}}.$$

En remplaçant dans 3.15  $r_1^2, r_2^2, r_3^2$  et  $r_1 r_2 r_3 \cos \alpha$ , par les valeurs obtenues ci-dessus, on peut récrire la condition d'existence d'un groupe triangulaire uniquement en termes de traces :

$$\operatorname{tr} A \operatorname{tr} B - (\operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B + \operatorname{tr} AB + \operatorname{tr} A^{-1} B) + 3 < 0. \quad (3.16)$$



# Chapitre 4

## Birapport complexe et tétraèdres idéaux

Les birapports sont des invariants géométriques classiques utilisés depuis longtemps en géométrie projective. Ainsi, les transformations de Möbius sont caractérisées par le fait qu'elles préservent le birapport.

L'utilisation du birapport est donc naturelle dans le cadre du modèle projectif de la géométrie hyperbolique. Le birapport permet par exemple d'exprimer la distance hyperbolique et classifie à isométrie près les tétraèdres idéaux de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$ . A ce titre, il joue un rôle important dans l'étude des triangulations des variétés hyperboliques de dimension 3 (voir [Thu]).

Durant les vingt dernières années, la notion de birapport a été généralisée à des classes d'espaces plus larges.

Otal a ainsi élargi la notion de birapport aux variétés riemanniennes simplement connexes de courbure négative dans [Ota92]. Il a défini la notion de birapport symplectique de quatre points dans  $\overline{M}$ , où  $M$  est une variété riemannienne de courbure négative. Le caractère symplectique de ce birapport vient de ce qu'il est obtenu d'abord dans le cas de quatre points au bord d'un disque muni d'une métrique à courbure négative via la structure symplectique sur l'espace des géodésiques d'un tel disque.

Dans [Bou96], Bourdon a étudié le birapport au bord des espaces  $\text{CAT}(-1)$ , qui constituent une généralisation des variétés à courbure négative (voir par exemple [BH99]). De même que dans le cas particulier de l'espace hyperbolique, le birapport au bord d'un espace  $\text{CAT}(-1)$  détermine la métrique de l'espace (voir le théorème 0.1 de [Bou96]).

Ce chapitre est consacré à l'étude du birapport complexe, défini sur le groupe de Heisenberg par Korányi et Reimann dans [KR87], et qui est une version hermitienne du birapport projectif. Le birapport étudié par Bourdon et Otal coïncide dans le cas de l'espace hyperbolique avec le logarithme du module du birapport projectif (voir par exemple [Ota92], ou [Kim01] qui traite le cas des espaces symétriques de rang 1, et fait le lien avec la version hermitienne). Nous allons voir dans ce chapitre et dans le suivant que

le caractère complexe du birapport joue un rôle important.

Comme dans le cas de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$ , nous utiliserons le birapport pour classifier les tétraèdres idéaux. Nous allons voir que contrairement au cas de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$ , un seul ne suffit pas. La classification des tétraèdres idéaux de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  sous l'action de  $\widehat{\text{PU}}(2,1)$  a été obtenue par Falbel dans [Falb].

Rappelons que les triangles idéaux sont classifiés à isométrie holomorphe près par l'invariant de Cartan, que nous avons décrit au chapitre 1.

## 4.1 Le birapport complexe

Par abus de notation, nous appellerons *tétraèdre idéal* tout quadruplet ordonné de points de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Usuellement, ce terme désigne un simplexe, qui donc, possède des arrêtes et des faces. Nous n'aurons pas besoin de considérer faces et arêtes, c'est pourquoi nous nous autorisons cette approximation.

**Définition 4.1.** Soit  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  un tétraèdre idéal de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ . Soient  $X_1, X_2, X_3, X_4$  des relèvements des  $x_i$  à  $\mathbb{C}^{n,1}$ . La quantité

$$\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\langle X_3, X_1 \rangle \langle X_4, X_2 \rangle}{\langle X_4, X_1 \rangle \langle X_3, X_2 \rangle} \in \mathbb{C}^* \quad (4.1)$$

est indépendante du choix des relèvements, et s'appelle le *birapport complexe* du tétraèdre idéal  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

$\mathbf{X}$  est invariant sous l'action de  $PU(n, 1)$ , et est changé en  $\bar{\mathbf{X}}$  sous l'action des isométries antiholomorphes. On vérifie simplement que le birapport complexe satisfait aux relations

$$\mathbf{X}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \mathbf{X}(p_2, p_1, p_3, p_4)^{-1} = \mathbf{X}(p_1, p_2, p_4, p_3)^{-1} = \overline{\mathbf{X}(p_3, p_4, p_1, p_2)}. \quad (4.2)$$

*Remarque 4.2.* Par un calcul direct, on vérifie la relation suivante.

$$\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\langle X_1, X_2 \rangle \langle X_2, X_3 \rangle \langle X_3, X_1 \rangle}{\langle X_1, X_2 \rangle \langle X_2, X_4 \rangle \langle X_4, X_1 \rangle} \cdot \frac{|\langle X_2, X_4 \rangle|^2}{|\langle X_2, X_3 \rangle|^2}.$$

Le birapport complexe est donc relié à l'invariant de Cartan par

$$\begin{aligned} \arg(\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)) &= \arg(\langle X_1, X_2 \rangle \langle X_2, X_3 \rangle \langle X_3, X_1 \rangle) - \arg(\langle X_1, X_2 \rangle \langle X_2, X_4 \rangle \langle X_4, X_1 \rangle) \\ &\equiv \mathbb{A}(x_1, x_2, x_4) - \mathbb{A}(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

On pourrait exprimer d'une manière analogue  $\arg(\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4))$  grâce à  $\mathbb{A}(x_1, x_3, x_4)$  et  $\mathbb{A}(x_2, x_3, x_4)$ . Les termes extrémaux de la relation (4.2) montrent que le produit

$$\mathbf{X}(p_1, p_2, p_3, p_4) \mathbf{X}(p_3, p_4, p_1, p_2)$$

est réel et positif. Par conséquent, l'argument de ce produit est nul. En utilisant, la relation (4.2), on retrouve ainsi la relation de cocycle de l'invariant de Cartan (relation (1.12)).

Le lemme suivant donne une interprétation géométrique de  $\mathbf{X}$  (voir [Gol99], chapitre 7).

**Proposition 4.3.** *Soit  $C$  la droite complexe contenant  $x_1$  et  $x_2$ , et  $\Pi$  la projection orthogonale sur  $C$ . Soit  $z_{12} : C \rightarrow \mathbb{C}$  une coordonnée complexe telle que  $z_{12}(C) \subset \mathbb{C}$  est le demi-plan  $\operatorname{Re} z > 0$ , et satisfaisant  $z_{12}(x_1) = \infty$  et  $z_{12}(x_2) = 0$ . Alors*

$$\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{z_{12}(\Pi(x_4))}{z_{12}(\Pi(x_3))}$$

Voir la figure 4.1.

*Démonstration.* Soit  $c$  un vecteur polaire à  $C$  de norme unité. Soient  $X_1$  et  $X_2$  des relèvements de  $x_1$  et  $x_2$ . Utilisons la base  $(X_1, X_2, c)$  pour décrire les relèvements de  $x_3$  et  $x_4$  à  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Il existe des scalaires  $\lambda_i$  et  $\mu_i$  tels que

$$X_3 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 c \text{ et } X_4 = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 c.$$

La projection orthogonale sur  $C$  est l'homographie associée à

$$Z \rightarrow Z - \langle Z, c \rangle c$$

L'image de  $z_{12}$  étant le demi-plan droit, il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que l'application  $z_{12}$  s'écrive

$$z_{12} : \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma c \rightarrow e^{i\theta} \frac{\alpha}{\beta}.$$

En utilisant le fait que  $\langle X_i, X_i \rangle = \langle X_i, c \rangle = 0$  pour  $i = 1, 2$ , on obtient

$$\Pi(x_3) = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = \frac{\langle X_3, X_2 \rangle}{\langle X_1, X_2 \rangle} X_1 + \frac{\langle X_3, X_1 \rangle}{\langle X_2, X_1 \rangle} X_2$$

et

$$\Pi(x_4) = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 = \frac{\langle X_4, X_2 \rangle}{\langle X_1, X_2 \rangle} X_1 + \frac{\langle X_4, X_1 \rangle}{\langle X_2, X_1 \rangle} X_2.$$

Le résultat en découle. □

On en déduit directement le

**Corollaire 4.4.** *Soient  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  quatre points de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  tels que  $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  soit réel et négatif. Alors les quatre points sont situés dans une droite complexe, et  $x_1$  et  $x_2$  séparent  $x_3$  et  $x_4$ .*

*Remarque 4.5.* La proposition 4.3 a pour conséquence que pour  $x_1$  et  $x_2$  fixés, l'application

$$\begin{aligned} \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \times \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x_3, x_4) &\longmapsto \mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{aligned}$$

est surjective.



## 4.2 Classification des tétraèdres idéaux

**Définition 4.6.** (Voir [Fala]). Soient  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  quatre points distincts de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Définissons

$$[[p_1, p_2, p_3, p_4]] = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(p_1, p_2, p_3, p_4) \\ \mathbf{X}(p_1, p_4, p_2, p_3) \\ \mathbf{X}(p_1, p_3, p_4, p_2) \end{bmatrix}.$$

Exprimons maintenant  $[[p_1, p_2, p_3, p_4]]$  dans une situation normalisée.

*Exemple 4.7.* Quatre points distincts de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  sont images par un élément de  $\text{PU}(2,1)$  de quatre points  $p_1, p_2, p_3, p_4$  admettant, dans le modèle de Siegel, les relèvements suivants :

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix},$$

où  $z_1, z_2, w_2, w_3$  satisfont aux relations traduisant la nullité de  $\langle \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k \rangle$  :

$$z_1 + \bar{z}_1 + |z_2|^2 = 0 \text{ et } w_3 + \bar{w}_3 + |w_2|^2 = 0.$$

Dans ce cas

$$\omega_a = \mathbf{X}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{1 + w_2 \bar{z}_2 + w_3 \bar{z}_1}{w_3 \bar{z}_1} \quad (4.3)$$

$$\omega_b = \mathbf{X}(p_1, p_4, p_2, p_3) = \frac{1}{1 + z_2 \bar{w}_2 + z_1 \bar{w}_3} \quad (4.4)$$

$$\omega_c = \mathbf{X}(p_1, p_3, p_4, p_2) = w_3 z_1 \quad (4.5)$$

En faisant le produit de ces trois nombres, on vérifie que

$$|\omega_a \omega_b \omega_c| = 1. \quad (4.6)$$

Si  $z_2$  est non-nul, c'est à dire si  $p_2$  n'appartient pas à la droite complexe engendrée par  $p_1$  et  $p_3$ , on peut préciser la normalisation, et écrire

$$z_1 = -1 + it, z_2 = \sqrt{2}, w_2 = \sqrt{2}w \text{ et } w_3 = |w|^2(-1 + is)$$

avec  $s, t \in \mathbb{R}$  et  $w \in \mathbb{C}$ . Tout tétraèdre idéal est alors équivalent à un unique tétraèdre tel que celui-ci sous l'action de  $\text{SU}(2,1)$ .

L'exemple 4.8 ci-dessous traite du cas où trois des quatre points sont situés sur une même droite complexe.

Les trois birapports deviennent

$$\begin{aligned} \omega_a &= \frac{1 + 2w + |w|^2(-1 + is)(1 + it)}{|w|^2(-1 + is)(1 + it)} \\ \omega_b &= \frac{1}{|w|^2(-1 + it)(1 + is) + 2\bar{w} + 1} \\ \omega_c &= -|w|^2(-1 + is)(-1 + it) \end{aligned}$$

Dans beaucoup de situations, nous préférons cependant avoir une normalisation moins précise, et des relations plus légères.

*Exemple 4.8.* Si trois des quatre points sont dans une même droite complexe – par exemple  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$  – on peut supposer que

$$p_1 = \infty, p_2 = [0, 0], p_3 = [0, 1] \text{ et } p_4 = [x, t], \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq 0$$

Un calcul analogue montre que

$$\omega_a = t + ix^2, \omega_b = 1 - \frac{1}{\bar{\omega}_a} \text{ et } \omega_c = \frac{1}{1 - \omega_a}. \quad (4.7)$$

On constate alors que si  $x = 0$ , c'est à dire si les quatre points sont sur une même droite complexe les trois birapports sont réels, et valent

$$\omega_a = t, \omega_b = 1 - \frac{1}{t}, \omega_c = \frac{1}{1 - t}.$$

L'un des trois birapports au moins est donc négatif

A l'opposé, si les quatre points sont au bord d'un  $\mathbb{R}$ -plan, on peut supposer que

$$p_1 = \infty, p_2 = [0, 0], p_3 = [1, 0] \text{ et } p_4 = [x, t] \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

Par suite,

$$\omega_a = x^2, \omega_b = 1 - \frac{(1-x)^2}{x^2}, \omega_c = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Dans ce cas, les trois birapports sont réels et positifs.

*Remarque 4.9.* En utilisant la normalisation précisée (coordonnées  $w, s, t$ ), on vérifie que

$$\omega_a \bar{\omega}_b \omega_c = \frac{1 - it}{1 + it} \text{ et } \omega_a \bar{\omega}_b \bar{\omega}_c = \frac{1 + is}{1 - is}. \quad (4.8)$$

On peut alors exprimer  $s$  et  $t$  en termes de  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  et  $\omega_c$ . Il est ensuite possible d'exprimer séparément  $w$  et  $|w|^2$  mais il apparaît une relation de compatibilité :

$$2\operatorname{Re}(\omega_c) = \frac{1}{|\omega_b|^2} \left( \left| 1 - \frac{1}{\omega_a} \right|^2 - 1 \right) + \left| 1 - \frac{1}{\omega_b} \right|^2. \quad (4.9)$$

Cette relation est équivalente à la nullité du déterminant de la matrice de Gram ( $\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle$ ) ( $1 \leq i, j \leq 4$ ) (Voir [Gol99]). Elle a été redécouverte via la compatibilité ci-dessus par Falbel (voir [Fala]). En utilisant la relation (4.6), on pourrait obtenir des relations similaires exprimant  $\omega_a$  ou  $\omega_b$  en termes des deux autres birapports. Par exemple :

$$2\operatorname{Re}(\omega_a) = \frac{1}{|\omega_c|^2} \left( \left| 1 - \frac{1}{\omega_b} \right|^2 - 1 \right) + \left| 1 - \frac{1}{\omega_c} \right|^2. \quad (4.10)$$

Les deux propositions 4.10 et 4.12 sont dues à Falbel (voir [Fala]).

**Proposition 4.10.** *Soient  $\omega_a, \omega_b$  et  $\omega_c$  des nombres complexes. Il existe  $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in (\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2)^4$  tel que*

$$[[p_1, p_2, p_3, p_4]] = \begin{bmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \end{bmatrix}$$

si et seulement si  $\omega_a, \omega_b$  et  $\omega_c$  vérifient les relations (4.6) et (4.10) ci-dessus.

*Remarque 4.11.* Si  $\omega_b$  et  $\omega_c$  sont deux nombres complexes fixés, il existe  $\omega_a$  tel que  $\omega_a, \omega_b$  et  $\omega_c$  vérifient (4.6) et (4.10) si et seulement si les valeurs de  $\operatorname{Re} \omega_a$  et  $|\omega_a|^2$  données par ces deux relations sont compatibles, c'est à dire si

$$\ll \operatorname{Re} (\omega_a)^2 \leq |\omega_a|^2 \gg.$$

Cette condition se traduit après un calcul par la double inégalité suivante :

$$\left( |\omega_c| - \frac{1}{|\omega_b|} \right)^2 \leq 2\operatorname{Re} \left( \frac{1}{\omega_b} + \omega_c \right) - 1 \leq \left( |\omega_c| + \frac{1}{|\omega_b|} \right)^2. \quad (4.11)$$

La preuve donnée par Falbel de la proposition suivante utilise la normalisation «  $w, s, t$  » ci-dessus. Nous donnons ici une preuve indépendante de la normalisation.

**Proposition 4.12** (Falbel). *Soient  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  et  $(q_1, q_2, q_3, q_4)$  deux tétraèdres idéaux. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une isométrie  $f \in \operatorname{PU}(2, 1)$  telle que  $f(p_i) = q_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )*
2.  $[[p_1, p_2, p_3, p_4]] = [[q_1, q_2, q_3, q_4]]$ .

*Démonstration.* 1. implique 2. car le birapport complexe est préservé par  $\operatorname{PU}(2, 1)$ .

Prouvons donc que 2. implique 1..

Soit  $\tau = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  un tétraèdre idéal. Par un calcul direct utilisant la relation 4.2, on vérifie que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(p_4, p_1, p_2, p_3)\mathbf{X}(p_4, p_3, p_1, p_2)\mathbf{X}(p_4, p_2, p_3, p_1) &= (\bar{\omega}_a \omega_b \bar{\omega}_c)^{-1} \\ &= \exp(-2i\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3)) \end{aligned}$$

Par conséquent, si la condition 2. est satisfaite, il existe une unique isométrie  $h$  telle que  $h(p_i^1) = p_i^2$  pour  $i = 1, 2, 3$ , (où les  $p_i^1$  et les  $p_i^2$  sont respectivement les points de  $\tau_1$  et  $\tau_2$ ). Par suite, pour prouver le résultat ci-dessus, nous devons montrer que  $h(p_4^1) = p_4^2$ . Il est donc suffisant de ne considérer qu'un seul tétraèdre idéal, et de montrer que les trois birapports déterminent  $p_4$  une fois  $p_1, p_2$  et  $p_3$  connus.

Revenons-donc à  $\tau$ , et choisissons des relèvements de  $p_1, p_2$  et  $p_3$  :  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  et  $\mathbf{p}_3$ . Nous les utiliserons jusqu'à la fin de la démonstration. Nous devons donc montrer qu'un relèvement de  $p_4$  est déterminé par  $\omega_a, \omega_b$  et  $\omega_c$  à multiplication par un scalaire complexe près.

Lorsque les quatre points ne sont pas contenus dans une droite complexe, nous pouvons supposer que  $p_1, p_2$  et  $p_3$  ne sont pas contenus dans une droite complexe. Sous cette hypothèse,  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$  est une base de  $\mathbb{C}^3$ , dans laquelle tout relèvement  $\mathbf{p}_4$  de  $p_4$  s'écrit

$$\alpha \mathbf{p}_1 + \beta \mathbf{p}_2 + \gamma \mathbf{p}_3 \text{ avec } \alpha, \beta \text{ et } \gamma \in \mathbb{C}.$$

Utilisons cette écriture pour calculer les produits hermitiens  $\langle \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_1 \rangle, \langle \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_2 \rangle$  et  $\langle \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_3 \rangle$ . En notant  $\langle p_i, p_j \rangle = t_{ij}$ , nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} 0 & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & 0 & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{41} \\ t_{42} \\ t_{43} \end{bmatrix}$$

La résolution de ce système conduit à

$$\alpha = d^{-1} (t_{32}t_{21}t_{34} - t_{32}t_{23}t_{14} + t_{24}t_{23}t_{31})$$

$$\beta = d^{-1} (t_{31}t_{12}t_{34} - t_{31}t_{13}t_{24} + t_{14}t_{13}t_{32})$$

$$\gamma = d^{-1} (t_{12}t_{23}t_{14} - t_{12}t_{21}t_{24} + t_{21}t_{13}t_{24})$$

où  $d = 2\text{Re}(t_{12}t_{23}t_{31})$  est le déterminant de la matrice ci-dessus.

Ces relations se réécrivent en utilisant  $\omega_a, \omega_b$  et  $\omega_c$

$$\alpha = \frac{t_{32}t_{23}t_{14}}{d} \left( -1 + \frac{t_{31}}{t_{13}}\omega_b\bar{\omega}_a + \frac{t_{21}}{t_{12}}\omega_b^{-1}\bar{\omega}_c^{-1} \right)$$

$$\beta = \frac{t_{31}t_{13}t_{24}}{d} \left( -1 + \frac{t_{32}}{t_{23}}\bar{\omega}_c^{-1}\bar{\omega}_a^{-1} + \frac{t_{12}}{t_{21}}\omega_b\bar{\omega}_c \right)$$

$$\gamma = \frac{t_{12}t_{21}t_{34}}{d} \left( -1 + \frac{t_{13}}{t_{31}}\omega_b^{-1}\bar{\omega}_a^{-1} + \frac{t_{23}}{t_{32}}\bar{\omega}_a\bar{\omega}_c \right)$$

Lorsque  $\gamma$  est non-nul, calculons les quotients  $\alpha/\gamma$  et  $\beta/\gamma$  :

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{t_{23}}{t_{21}}\bar{\omega}_c \left( -1 + \frac{t_{31}}{t_{13}}\omega_b\bar{\omega}_a + \frac{t_{21}}{t_{12}}\omega_b^{-1}\bar{\omega}_c^{-1} \right) \left( -1 + \frac{t_{13}}{t_{31}}\omega_b^{-1}\bar{\omega}_a^{-1} + \frac{t_{23}}{t_{32}}\bar{\omega}_a\bar{\omega}_c \right)^{-1}$$

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{t_{13}}{t_{12}}\bar{\omega}_b^{-1} \left( -1 + \frac{t_{32}}{t_{23}}\bar{\omega}_c^{-1}\bar{\omega}_a^{-1} + \frac{t_{12}}{t_{21}}\omega_b\bar{\omega}_c \right) \left( -1 + \frac{t_{13}}{t_{31}}\omega_b^{-1}\bar{\omega}_a^{-1} + \frac{t_{23}}{t_{32}}\bar{\omega}_a\bar{\omega}_c \right)^{-1}$$

Le vecteur  $[\alpha \ \beta \ \gamma]^T$  est donc déterminé à dilatation complexe près par  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  et  $\omega_c$ . Les  $t_{ij}$  restant n'impliquent que  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$ , et ne dépendent donc que du choix de base effectué ci-dessus.

Lorsque  $\gamma$  est nul, alors  $\alpha$  ou  $\beta$  ne l'est pas (sinon  $p_4$  coïnciderait avec  $p_1$  ou  $p_2$ ). Le même calcul conduit à la même conclusion.

Dans le cas particulier où les quatre points sont contenus dans une droite complexe commune, les 3 birapports sont réels, et liés entre eux par

$$\omega_b = \omega_a^{-1} \text{ et } \omega_c = \frac{1}{1 - \omega_a}.$$

Ce cas est analogue à celui des quadruplets de points au bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ , qui sont classifiés sous  $\text{PU}(1,1)$  par le birapport.  $\square$

Le corollaire suivant est une conséquence simple.

**Corollaire 4.13.** *Soient  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  et  $(q_1, q_2, q_3, q_4)$  deux tétraèdres idéaux. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une isométrie antiholomorphe  $f \in \widehat{\text{PU}}(2,1)$  telle que  $f(p_i) = q_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )*
2.  $[[p_1, p_2, p_3, p_4]] = \overline{[[q_1, q_2, q_3, q_4]]}$ .

*Démonstration.* D'après la définition du birapport

$$\overline{[[q_1, q_2, q_3, q_4]]} = [[f(q_1), f(q_2), f(q_3), f(q_4))].$$

Il existe une isométrie holomorphe  $h$  telle que  $h(p_i) = f(q_i)$ ,  $i = 1 \dots 4$ . D'où le résultat.  $\square$

**Définition 4.14.** On dit qu'un tétraèdre idéal  $(p_1, p_2, p_3, p_4) \subset \partial(\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2)^4$  est *non-plat* s'il n'est contenu dans le bord d'aucun sous-espace totalement géodésique de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Le corollaire suivant est une conséquence directe et de la remarque 4.9, et de l'exemple 4.8 (voir aussi [Gol99] et [PP]).

**Corollaire 4.15.** *Un tétraèdre idéal  $T = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  est plat si et seulement si  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  et  $\omega_c$  sont réels.*

1.  *$T$  est contenu dans une droite complexe si et seulement si l'un des trois birapports  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  et  $\omega_c$  est négatif.*
2.  *$T$  est contenu dans un plan lagrangien si et seulement si les trois birapports  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  et  $\omega_c$  sont positifs.*

### 4.3 Action du groupe symétrique sur les birapports

Dans cette section, nous décrivons comment  $[[p_1, p_2, p_3, p_4]]$  varie lorsque l'on permute les positions des  $p_i$ . Le cas classique de  $\mathbb{C}P^1$  est traité dans [Bea83]. Nous désignerons par  $S_4$  le groupe des permutations d'un ensemble à quatre éléments.

**Définition 4.16.** Soient  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  quatre points de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et  $\sigma$  un élément de  $S_4$ . Définissons  $\Omega^\sigma$ , le vecteur

$$\Omega^\sigma = [[p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, p_{\sigma(3)}, p_{\sigma(4)}]] = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, p_{\sigma(3)}, p_{\sigma(4)}) \\ \mathbf{X}(p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(4)}, p_{\sigma(2)}, p_{\sigma(3)}) \\ \mathbf{X}(p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(3)}, p_{\sigma(4)}, p_{\sigma(2)}) \end{bmatrix}.$$

En utilisant les notations de la section précédente,

$$\Omega^{id} = \begin{bmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \end{bmatrix} = [[p_1, p_2, p_3, p_4]].$$

Nous allons exprimer  $\Omega^\sigma$  pour toute permutation  $\sigma$  de  $S_4$ .

Désignons par  $(a_1 \cdots a_n)$  le cycle de  $S_4$  envoyant  $a_k$  sur  $a_{k+1}$ . Soit  $G_1$  stabilisateur de 1 dans  $S_4$ .  $G_1$  est une copie de  $S_3$ , et nous identifions  $G_1$  à  $\mathfrak{S}\{a, b, c\} \sim S_3$  via

$$2 \leftrightarrow a, 3 \leftrightarrow b \text{ et } 4 \leftrightarrow c.$$

Soit  $V_4$  le sous-groupe (normal) de  $S_4$ ,

$$V_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Le groupe  $S_4$  est isomorphe au produit semi-direct  $S_3 \ltimes V_4$ . Ceci fournit une unique décomposition de tout élément  $\sigma$  de  $S_4$  sous la forme  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2$  avec  $\sigma_2 \in V_4$  et  $\sigma_1 \in \mathfrak{S}\{a, b, c\}$  modulo l'identification ci-dessus. En notant  $Z = [Z_a \ Z_b \ Z_c]^T$  les coordonnées sur  $\mathbb{C}^3$ , définissons les applications

$$f_{id}(Z) = Z, f_{(12)(34)}(Z) = \begin{bmatrix} Z_a \\ \overline{Z_b} \\ \overline{Z_c} \end{bmatrix}, f_{(13)(24)}(Z) = \begin{bmatrix} \overline{Z_a} \\ \overline{Z_b} \\ Z_c \end{bmatrix}, f_{(14)(23)}(Z) = \begin{bmatrix} \overline{Z_a} \\ Z_b \\ \overline{Z_c} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

La relation 4.1 montre que si  $\sigma \in V_4$ ,  $\Omega^\sigma = f_\sigma(\Omega)$ .

Par un calcul simple utilisant la relation 4.2, on démontre la proposition suivante.

**Proposition 4.17.** *Soit  $\sigma$  dans  $S_4$ .*

$$\Omega^\sigma = f_{\sigma_2} \left( \begin{bmatrix} \omega_{\sigma_1(a)}^{\epsilon(\sigma_1)} \\ \omega_{\sigma_1(b)}^{\epsilon(\sigma_1)} \\ \omega_{\sigma_1(c)}^{\epsilon(\sigma_1)} \end{bmatrix} \right)$$

avec  $\sigma = \sigma_1\sigma_2$ ,  $\sigma_1 \in \mathfrak{S}\{a, b, c\}$ ,  $\sigma_2 \in V_4$ , et  $\epsilon(\sigma_1)$  la signature de  $\sigma_1$ .

La preuve se fait par une utilisation répétée de la relation 4.2. On obtient ainsi pour tout  $\sigma$  une fonction  $f_\sigma$  vérifiant  $\Omega^\sigma = f_\sigma(\Omega)$ .

Explicitons les fonctions  $f_\sigma$  :

– **transpositions**

$$\begin{aligned} f_{(12)}(\Omega) &= \begin{bmatrix} \omega_a^{-1} \\ \bar{\omega}_c^{-1} \\ \bar{\omega}_b^{-1} \end{bmatrix}, f_{(13)}(\Omega) = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_b^{-1} \\ \bar{\omega}_a^{-1} \\ \omega_c^{-1} \end{bmatrix}, f_{(14)}(\Omega) = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_c^{-1} \\ \omega_b^{-1} \\ \bar{\omega}_a^{-1} \end{bmatrix} \\ f_{(34)}(\Omega) &= \begin{bmatrix} \omega_a^{-1} \\ \omega_c^{-1} \\ \omega_b^{-1} \end{bmatrix}, f_{(24)}(\Omega) = \begin{bmatrix} \omega_b^{-1} \\ \omega_a^{-1} \\ \omega_c^{-1} \end{bmatrix}, f_{(23)}(\Omega) = \begin{bmatrix} \omega_c^{-1} \\ \omega_b^{-1} \\ \omega_a^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.13)$$

– **Groupe de Klein**

$$f_{(12)(34)}(\Omega) = \begin{bmatrix} \omega_a \\ \bar{\omega}_b \\ \bar{\omega}_c \end{bmatrix}, f_{(13)(24)}(\Omega) = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_a \\ \bar{\omega}_b \\ \omega_c \end{bmatrix}, f_{(14)(23)}(\Omega) = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_a \\ \omega_b \\ \bar{\omega}_c \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

– **Cycles de longueur 3**

$$\begin{aligned} f_{(234)}(\Omega) &= \begin{bmatrix} \omega_c \\ \omega_a \\ \omega_b \end{bmatrix}, f_{(124)}(\Omega) = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_c \\ \omega_a \\ \bar{\omega}_b \end{bmatrix}, f_{(123)}(\Omega) = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_b \\ \bar{\omega}_c \\ \omega_a \end{bmatrix}, f_{(134)}(\Omega) = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_b \\ \omega_c \\ \bar{\omega}_a \end{bmatrix} \\ f_{(243)}(\Omega) &= \begin{bmatrix} \omega_b \\ \omega_c \\ \omega_a \end{bmatrix}, f_{(142)}(\Omega) = \begin{bmatrix} \omega_b \\ \bar{\omega}_c \\ \bar{\omega}_a \end{bmatrix}, f_{(132)}(\Omega) = \begin{bmatrix} \omega_c \\ \bar{\omega}_a \\ \bar{\omega}_b \end{bmatrix}, f_{(143)}(\Omega) = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_c \\ \bar{\omega}_a \\ \omega_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.15)$$

– **Cycles de longueur 4**

$$\begin{aligned} f_{(1234)}(\Omega) &= \begin{bmatrix} \bar{\omega}_b^{-1} \\ \omega_a^{-1} \\ \bar{\omega}_c^{-1} \end{bmatrix}, f_{(1342)}(\Omega) = \begin{bmatrix} \omega_c^{-1} \\ \bar{\omega}_b^{-1} \\ \bar{\omega}_a^{-1} \end{bmatrix}, f_{(1423)}(\Omega) = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_a^{-1} \\ \bar{\omega}_c^{-1} \\ \omega_b^{-1} \end{bmatrix} \\ f_{(1432)}(\Omega) &= \begin{bmatrix} \omega_b^{-1} \\ \bar{\omega}_a^{-1} \\ \bar{\omega}_c^{-1} \end{bmatrix}, f_{(1243)}(\Omega) = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_c^{-1} \\ \bar{\omega}_b^{-1} \\ \omega_a^{-1} \end{bmatrix}, f_{(1324)}(\Omega) = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_a^{-1} \\ \omega_c^{-1} \\ \bar{\omega}_b^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.16)$$

## 4.4 Groupes de symétries des tétraèdres idéaux

Nous désignons par  $\mathfrak{S}(\{p_1, p_2, p_3, p_4\})$  le groupe de permutations de  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ .

**Définition 4.18.** Soit  $T = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  un tétraèdre idéal. Une symétrie de  $T$  est un isométrie de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  stabilisant  $T$ .

**Lemme 4.19.** Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux symétries d'un tétraèdre idéal non-plat  $T$ .  $f_1$  et  $f_2$  sont égales si et seulement si elles sont égales sur  $T$ .

*Démonstration.* Si  $f_1$  et  $f_2$  sont égales sur  $T$ , alors  $f_1 \circ f_2^{-1}$  a quatre points fixes qui ne sont pas contenus dans un sous-espace totalement géodésique, car  $T$  est non-plat. Donc  $f_1 = f_2$ .  $\square$

**Définition 4.20.** Le groupe de symétrie d'un tétraèdre idéal  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  est le plus gros sous-groupe  $G$  de  $S_4$  tel qu'il existe une représentation fidèle  $\tau : G \longrightarrow \widehat{\mathrm{PU}(2, 1)}$  vérifiant la condition que pour tout  $\sigma \in G$ ,  $\tau(\sigma)$  stabilise l'ensemble  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ .

*Remarque 4.21.* Si  $\sigma \in S_4$  appartient au groupe de symétrie  $G$  d'un tétraèdre, et si  $\tau$  est la représentation associée,  $\tau(\sigma)$  peut-être holomorphe ou antiholomorphe.

**Définition 4.22.** Soit  $T$  un tétraèdre idéal dont le groupe de symétrie est  $G \subset S_4$ . Soit  $\tau$  la représentation associée. Nous dirons que  $\sigma \in G$  est *holomorphe* (resp. *antiholomorphe*) si  $\tau(\sigma)$  est holomorphe (resp. antiholomorphe).

En appliquant la proposition 4.12 et son corollaire 4.13, qui classifient les tétraèdres à isométries holomorphes et antiholomorphes près, on montre la proposition suivante.

**Proposition 4.23.** Soit  $T = (p_1, p_2, p_3, p_4) \subset (\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2)^4$  un tétraèdre.  $[[p_1, p_2, p_3, p_4]] = \Omega$ .

1.  $\sigma \in S_4$  est une symétrie holomorphe de  $T$  si et seulement si  $\Omega^\sigma = \Omega$ .
2.  $\sigma$  est une symétrie antiholomorphe si et seulement si  $\Omega^\sigma = \overline{\Omega}$ .

Les corollaires qui suivent sont obtenus en analysant les équations fournies par la proposition 4.23 (nous donnons une démonstration différente pour le corollaire 4.25).

**Corollaire 4.24.** Soit  $T$  un tétraèdre non-plat. Si (12) est une symétrie holomorphe de  $T$ , alors (34) est une symétrie antiholomorphe de  $T$ .

*Démonstration.* En utilisant les expressions des  $f_\sigma$  données dans la section précédente :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \end{bmatrix}, \quad \Omega^{(12)} = \begin{bmatrix} \omega_a^{-1} \\ \bar{\omega}_c^{-1} \\ \bar{\omega}_b^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Omega^{(34)} = \begin{bmatrix} \omega_a^{-1} \\ \omega_c^{-1} \\ \omega_b^{-1} \end{bmatrix}.$$

Donc, si  $\Omega = \Omega^{(12)}$ , alors  $\omega_a = \omega_a^{-1}$ , et  $\omega_a$  vaut 1 ou  $-1$ . Si  $\omega_a$  valait  $-1$ ,  $T$  serait plat d'après le corollaire 4.4. Ainsi,  $\omega_a$  vaut 1.



Par suite, (12) est une symétrie holomorphe de  $T$  si et seulement si

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_b \\ \bar{\omega}_b^{-1} \end{bmatrix}.$$

Dans ces conditions,  $f_{34}(\Omega) = \bar{\Omega}$ . □

**Corollaire 4.25.** [Goldman] Soit  $T = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  tétraèdre non-plat. (12)(34) est une symétrie antiholomorphe de  $T$  si et seulement si  $\mathbf{X}(p_1, p_2, p_3, p_4)$  est réel et strictement positif

Ce résultat a été prouvé initialement par Goldman dans [Gol99] (chap. 7). Il est possible de le montrer de façon très simple en utilisant les fonctions  $f_\sigma$  ci-dessus, cependant nous allons en donner une démonstration un peu plus lourde, mais plus éclairante.

*Démonstration.* L'existence de cette symétrie antiholomorphe signifie qu'il existe une isométrie antiholomorphe  $\phi$  telle que  $\phi(x_1) = x_2$  et  $\phi(x_3) = x_4$ . Supposons l'existence d'une telle isométrie. Alors, en utilisant la relation 4.2,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \mathbf{X}(x_2, x_1, x_4, x_3) \\ &= \mathbf{X}(\phi(x_1), \phi(x_2), \phi(x_3), \phi(x_4)) \\ &= \overline{\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)}. \end{aligned}$$

Par suite,  $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  est réel. Pour déterminer son signe, utilisons la remarque 4.2 :

$$\arg(\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)) = \mathbb{A}(x_1, x_2, x_4) - \mathbb{A}(x_1, x_2, x_3).$$

$\phi$  est antiholomorphe, donc change  $\mathbb{A}$  en  $-\mathbb{A}$ . Par suite

$$\arg(\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)) = \mathbb{A}(\phi(x_1), \phi(x_2), \phi(x_4)) - \mathbb{A}(\phi(x_1), \phi(x_2), \phi(x_3)) \quad (4.17)$$

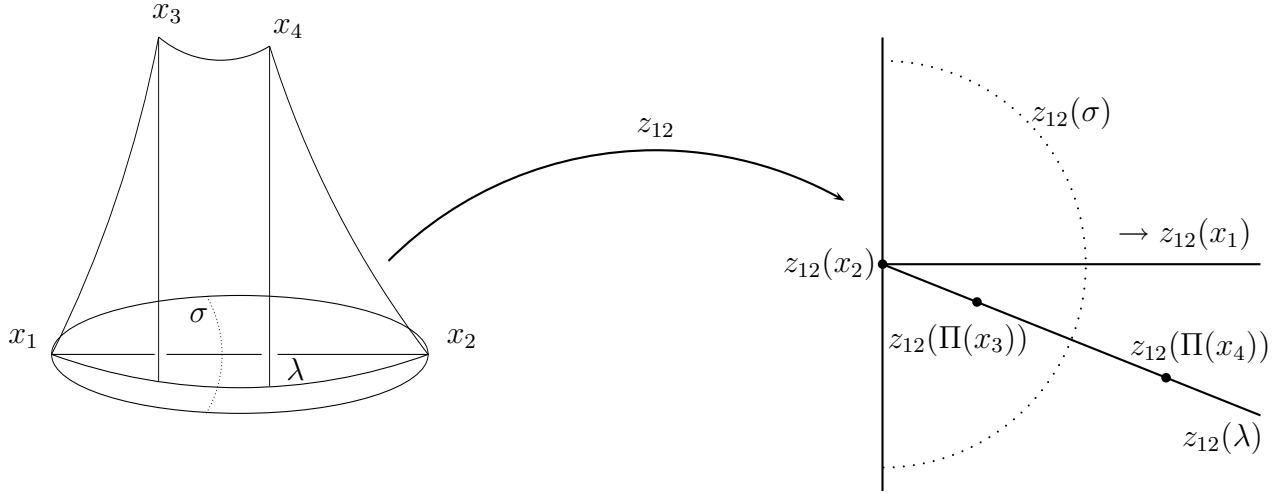
$$= -\mathbb{A}(x_1, x_2, x_4) + \mathbb{A}(x_1, x_2, x_3). \quad (4.18)$$

Par suite  $\arg(\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0$ , et donc  $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  est positif.

Supposons maintenant que  $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4) > 0$ . Soient  $\gamma$  la géodésique reliant  $x_1$  et  $x_2$ , et  $C$  la droite complexe engendrée par  $\gamma$ .

D'après la remarque 4.2,  $\mathbb{A}(x_1, x_2, x_3) = \mathbb{A}(x_1, x_2, x_4)$ , donc il existe  $g \in PU(2, 1)$  tel que  $g(x_1) = x_1$ ,  $g(x_2) = x_2$  et  $g(x_3) = x_4$ . Il y a deux possibilités :

- Si  $\Pi(x_3) = \Pi(x_4)$ , alors  $g$  est une réflexion complexe.  $C$  et  $C'$  (la droite complexe contenant  $x_3$  et  $x_4$ ) sont orthogonales. Soit  $\sigma$ , la géodésique tracée dans  $C$ , orthogonale à  $\gamma$  au point  $\Pi(x_3)$ , et  $\sigma'$  la géodésique tracée dans  $C'$  passant par  $\Pi(x_3)$ , et telle que la symétrie par rapport à  $\sigma'$  échange  $x_3$  et  $x_4$ . Comme  $C$  et  $C'$  sont orthogonales,  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont contenues dans un  $\mathbb{R}$ -plan  $P$ , et la réflexion par rapport à  $P$  échange  $x_1$  et  $x_2$  d'une part, et  $x_3$  et  $x_4$  d'autre part.

FIG. 4.1 –  $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}$ .

- Si  $\Pi(x_3) \neq \Pi(x_4)$ ,  $g$  est loxodromique. Dans ce cas, soit  $\sigma$  la géodésique orthogonale à  $\gamma$  dans  $C$  en  $\Pi(x_3)$ , et  $\sigma'$  la géodésique reliant  $\Pi(x_3)$  et  $x_3$ .  $\sigma$  et  $\sigma'$  engendrent un  $\mathbb{R}$ -plan  $P$ , et la réflexion par rapport à  $P$  ( $I_P$ ) échange  $x_2$  et  $x_3$ . Il existe un unique  $\mathbb{R}$ -plan  $Q$  tel que  $g = I_Q \circ I_P$ .  $Q$  convient.

□

**Corollaire 4.26.** Soit  $T = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  un tétraèdre non-plat. Si (12)(34) est une symétrie holomorphe de  $T$ , alors (13)(24) et (14)(23) sont des symétries antiholomorphes de  $T$ .

*Démonstration.* Si (12)(34) est une symétrie holomorphe, alors  $\omega_b$  et  $\omega_c$  sont réels (voir la relation 4.14 page 86). Si l'un d'entre eux était négatif, le tétraèdre serait plat. Donc ils sont positifs, et le résultat est une conséquence de 4.25. □

*Remarque 4.27.* De plus, si  $R$  est la réflexion complexe associée à (12)(34) et si  $\iota_3$  (resp.  $\iota_4$ ) est la réflexion lagrangienne associée à (13)(24) (resp. (14)(23)), alors  $R = \iota_3 \circ \iota_4$ .

**Lemme 4.28.** Un tétraèdre dont le groupe de symétrie est  $S_4$  est plat.

*Démonstration.* Considérons d'abord les éléments du groupe de Klein (12)(34), (13)(24) et (14)(23). Ils sont tous des symétries de  $T$ . Si  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  et  $\omega_c$  ne sont pas tous réels, la seule possibilité est que une de ces trois symétries soit holomorphe, et les deux autres antiholomorphes. Supposons que (12)(34) soit holomorphe. D'après le lemme 4.24, (12) et (34) sont tous deux antiholomorphes.

Par ailleurs, (13)(24) étant antiholomorphe, (13) et (24) sont de types opposés. Supposons que (13) soit holomorphe. Alors, (12)(13) = (132) est antiholomorphe. La forme donnée ci-dessus pour  $\Omega^{(132)}$  montre qu'alors les composantes de  $\Omega$  doivent être réelles. □

**Corollaire 4.29.** *Soit  $T = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  un tétraèdre non-plat dont le groupe de symétrie  $G$  contient un élément holomorphe d'ordre 4. Alors  $G$  est une copie du groupe diédral  $D_4$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $G$  contienne le 4-cycle  $c = (1234)$ . Alors  $G$  contient  $c^2 = (13)(24)$ , qui est une symétrie holomorphe. D'après le corollaire 4.26,  $G$  contient les deux symétries antiholomorphes  $(12)(34)$  et  $(14)(23)$ . Donc  $G$  contient  $(12)(34)(1234) = (24)$ . Par suite,  $G$  contient une copie de  $D_4$ , engendrée par  $(13)$  et  $(1234)$ . Si  $G \neq D_4$  alors  $8 = |D_4|$  divise  $|G|$ , et  $|G|$  divise 24. Donc  $G = S_4$ , ce qui est absurde car  $T$  est non-plat.  $\square$

Nous étudions maintenant une configuration spéciale.

**Corollaire 4.30.** *Soit  $T = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  un tétraèdre non-plat dont le groupe de symétrie contient un élément d'ordre trois. Alors :*

1. *trois des quatre points sont contenus dans une droite complexe.*
2.  *$G$ , le groupe de symétrie de  $T$  est isomorphe à  $S_3$ .*

*Démonstration.* Supposons que l'élément d'ordre trois soit le 3-cycle  $c = (123)$ .  $c$  est holomorphe. La relation  $f_{(123)}(\Omega) = \Omega$  implique

$$\bar{\omega}_b = \omega_a, \bar{\omega}_c = \omega_b, \omega_a = \omega_c.$$

Les deux relations 4.6 et 4.10 montrent qu'il n'y a que deux possibilités :

$$\Omega = \Omega_1 = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{3}} \\ e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ e^{i\frac{\pi}{3}} \end{bmatrix} \text{ ou } \Omega = \Omega_2 = \bar{\Omega}_1.$$

Par suite, il y a exactement deux tels tétraèdres modulo  $\text{PU}(2,1)$ , qui sont identifiés par une isométrie antiholomorphe. Si les quatre points sont distincts, on est dans la situation de l'exemple 4.8 avec  $t = 1/2$  et  $x = (\sqrt{3}/2)^{1/2}$  :  $p_1, p_2$  et  $p_3$  sont dans une même droite complexe. On vérifie alors sur la relation 4.13 que  $(12)$ ,  $(23)$  et  $(13)$  sont des symétries antiholomorphes de  $T$ . Une analyse directe des éléments restant de  $S_4$  montre qu'aucun d'entre eux ne peut être une symétrie de  $T$  sauf si  $T$  est plat.  $\square$

Le théorème suivant énumère les groupes de symétries possibles d'un tétraèdre idéal. La preuve est une application des résultats ci-dessus.

**Théorème 4.31.** *Soit  $T$  tétraèdre idéal non-plat. Le groupe de symétrie de  $T$  est l'un des suivants :*

1.  $\{1\}$ , dans ce cas,  $T$  est dit générique.
2.  $\langle \sigma \rangle \sim \mathbb{Z}_2$  où  $\sigma \in S_4$  est une transposition antiholomorphe.
3.  $\langle \sigma \rangle \sim \mathbb{Z}_2$  où  $\sigma$  est un élément du groupe de Klein.

4.  $\langle \sigma, \sigma' \rangle \sim \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  où  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont des transpositions à supports disjoints,  $\sigma$  est holomorphe et  $\sigma'$  antiholomorphe.
5. Le groupe de Klein, avec une symétrie holomorphe, et deux antiholomorphes.
6.  $S_3$  comme dans le corollaire 4.30 (les deux 3-cycles holomorphes, et les transpositions antiholomorphes).
7.  $D_4$  le groupe diédral d'ordre 8, engendré par une transposition antiholomorphe et un 4-cycle holomorphe.



# Chapitre 5

## Traces, birapports et sous-groupes à deux générateurs

### 5.1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'ensemble suivant.

**Définition 5.1.** Nous désignerons par  $\text{Hom}(F_2, \text{PU}(2,1))^{\text{lox}}$  l'ensemble des représentations de  $F_2 = \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle$  dans  $\text{PU}(2,1)$  telles que  $\rho(\mathbf{m})$  et  $\rho(\mathbf{n})$  sont loxodromiques.

Notre objectif est de décrire l'ensemble des classes de conjugaisons de telles représentations sous  $\text{PU}(2,1)$ . D'après les résultats du chapitre 3 deux représentations irréductibles  $\rho_1$  et  $\rho_2$  de  $\text{Hom}(F_2, \text{PU}(2,1))^{\text{lox}}$  sont conjuguées si et seulement si les cinq éléments de  $F_2$   $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{mn}, \mathbf{m}^{-1}\mathbf{n}$  et  $[\mathbf{m}, \mathbf{n}]$  ont mêmes traces dans  $\rho_1$  et dans  $\rho_2$ .

En utilisant le birapport complexe, défini au chapitre précédent, nous allons décrire des coordonnées géométriques sur  $\text{Hom}(F_2, \text{PU}(2,1))^{\text{lox}}$ . Pour toute représentation  $\rho$  de  $\text{Hom}(F_2, \text{PU}(2,1))^{\text{lox}}$ , nous appellerons  $\tau_\rho$  le tétraèdre formé par les points fixes de  $\rho(\mathbf{m})$  et  $\rho(\mathbf{n})$  (voir définition 5.5).

En utilisant l'invariant  $[[\tau_\rho]]$  formé de trois birapports, et en l'associant aux classes de conjugaison de  $\rho(\mathbf{m})$  et  $\rho(\mathbf{n})$ , nous allons classifier les représentations de  $F_2$  sous  $\text{PU}(2,1)$ . Nous obtenons ainsi la

**Proposition 5.2.** *L'application*

$$\begin{aligned} \text{Hom}(F_2, \text{PU}(2,1))^{\text{lox}} / \text{PU}(2,1) &\longrightarrow \mathbb{C}^5 \\ [\rho] &\longmapsto (\text{tr } \rho(\mathbf{m}), \text{tr } \rho(\mathbf{n}), [[\tau_\rho]]) \end{aligned}$$

*est injective, et son image est le sous-ensemble de  $\mathbb{C}^5$*

$$\left\{ \begin{array}{l} (z_A, z_B, \omega_a, \omega_b, \omega_c, ) \\ \left. \begin{array}{l} |\omega_a \omega_b \omega_c| = 1 \\ 2\operatorname{Re}(\omega_c) = \frac{1}{|\omega_b|^2} \left( \left| 1 - \frac{1}{\omega_a} \right|^2 - 1 \right) + \left| 1 - \frac{1}{\omega_b} \right|^2 \\ f(z_A) > 0 \text{ et } f(z_B) > 0 \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

Rappelons que  $f(z) = |z|^4 - 8\operatorname{Re}(z^3) + 18|z|^2 - 27$ , et que  $f(z)$  est positif si et seulement si  $z$  est la trace d'un relèvement à  $\operatorname{SU}(2,1)$  d'une isométrie loxodromique.

En les appliquant au « tétraèdre des points fixes » d'une paire d'isométries loxodromiques (cf définition 5.5), les corollaires 4.25 et 4.26, qui décrivent les éventuelles symétries d'ordre deux des tétraèdres idéaux, se traduisent par un critère de décomposition des paires d'isométries loxodromiques en triplets d'involutions. Le groupe engendré par deux isométries loxodromiques  $A$  et  $B$  apparaît alors comme un sous-groupe d'indice deux d'un groupe triangulaire  $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$  via

$$A = I_1 \circ I_2 \text{ et } B = I_3 \circ I_2.$$

On dit alors que la paire  $(A, B)$  est  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ -décomposable selon que  $I_1, I_2$  et  $I_3$  sont holomorphes ou antiholomorphes (voir la définition 5.9).

*Remarque 5.3.* Rappelons avant d'aller plus loin qu'une isométrie holomorphe de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  admet trois relèvements à  $\operatorname{SU}(2,1)$  obtenus les uns à partir des autres par multiplication par une racine cubique de l'unité. Deux isométries seront dites de même trace si elles admettent des relèvements à  $\operatorname{SU}(2,1)$  de même trace. De même, on dira qu'une isométrie est de trace réelle si elle admet un relèvement à  $\operatorname{SU}(2,1)$  qui est de trace réelle.

Un des objectifs de ce chapitre est de montrer résultat suivant :

**Théorème. (5.17)** *Soient  $A$  et  $B$  deux isométries loxodromiques de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et  $G = \langle A, B \rangle$ . Supposons que  $G$  ne préserve aucun sous espace totalement géodésique. Alors :*

1. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
  - (a) *L'isométrie  $[A, B]$  est de trace réelle.*
  - (b) *La paire  $(A, B)$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable.*
2. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
  - (a) *Les isométries  $A, B, AB$  et  $A^{-1}B$  sont de trace réelle.*
  - (b) *L'une des deux paires  $(A, B), (A^2, B^2)$  est  $\mathbb{C}$ -décomposable.*

Ce critère est exprimé en terme de traces, et les symétries des tétraèdres idéaux sont exprimées en termes de birapport. La traduction « traces–birapports » s'effectue par le biais de la proposition technique 5.15.

Posons la définition suivante.

**Définition 5.4.** Soit  $\rho$  une représentation de  $F_2 = \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle$  dans  $\mathrm{PU}(2,1)$ . On appellera  $\rho^2$  la représentation de  $F_2$  dans  $\mathrm{PU}(2,1)$  définie par  $\rho^2(\mathbf{m}) = (\rho(\mathbf{m}))^2$  et  $\rho^2(\mathbf{n}) = (\rho(\mathbf{n}))^2$

Le théorème 5.17 se reformule en termes de points fixes des deux involutions  $I^*$  et  $I'$  définies au chapitre 3. On obtient ainsi :

**Proposition.** Soit  $[\rho]$  une classe de représentation Zariski dense du groupe libre à deux générateurs dans  $\mathrm{PU}(2,1)$ , telle que  $\rho(\mathbf{m})$  et  $\rho(\mathbf{n})$  soient loxodromiques,

- $[\rho]$  est fixée par l'involution  $I^*$  si et seulement si  $\rho$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable.
- $[\rho]$  est fixée par l'involution  $I'$  si et seulement si  $\rho$  ou  $\rho^2$  est  $\mathbb{C}$ -décomposable.

Nous appliquons ensuite le théorème 5.17 au cas où le commutateur de  $A$  et  $B$  est parabolique pur, pour obtenir le résultat de rigidité suivant.

**Proposition. 5.19** Soient  $A$  et  $B$  deux éléments loxodromiques tels que  $C = [A, B]$  soit parabolique pur. Alors :

1.  $C$  est conjugué à une translation de Heisenberg verticale si et seulement si  $G$  préserve une droite complexe.
2.  $C$  est conjugué à une translation de Heisenberg non-verticale si et seulement si  $(A, B)$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable.

La dernière section du chapitre est consacrée à l'étude de l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 &\longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{lox}} \\ (A, B) &\longmapsto [AB] \end{aligned}$$

où  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont deux classes de conjugaisons loxodromiques, et  $\mathcal{C}^{\mathrm{lox}}$  désigne l'ensemble des classes de conjugaison loxodromiques de  $\mathrm{PU}(2,1)$ . Le fait que le passage des traces au birapports soit très simple (affine) nous permet pour finir de montrer que quelles que soient  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , toute classe de conjugaison loxodromique est atteinte par cette application. De manière équivalente, ceci prouve qu'il existe des représentations du groupe fondamental de la sphère moins trois points à classes de conjugaison prescrites dans  $\mathrm{PU}(2,1)$  quel que soit le triplet de classes de conjugaison loxodromiques (corollaire 5.22). Ce résultat a été prouvé par des méthodes différentes et dans une plus grande généralité par Falbel et Wentworth dans le preprint [FW].

## 5.2 Coordonnées KR sur les paires de loxodromiques

### 5.2.1 Définition des coordonnées.

Rappelons qu'une isométrie loxodromique  $A$  a deux points fixes. L'un, noté  $p_A$ , est attractif, l'autre,  $q_A$ , est répulsif.



**Définition 5.5.** Soient  $A$  et  $B$  deux isométries loxodromiques. Soit  $\tau(A, B)$  le tétraèdre idéal  $(p_A, q_A, p_B, q_B)$ . Si  $\rho$  est une représentation de  $F_2$  dans  $\text{PU}(2,1)$ , nous appellerons  $\tau_\rho$  le tétraèdre  $\tau(\rho(\mathbf{m}), \rho(\mathbf{n}))$ .

La proposition suivante est un critère de conjugaison pour les paires d'isométries loxodromiques.

**Lemme 5.6.** Soient  $(A_1, B_1)$  et  $(A_2, B_2)$  deux paires d'éléments loxodromiques. Sont équivalentes :

1. Il existe  $C$  tel que  $A_2 = CA_1C^{-1}$  et  $B_2 = CB_1C^{-1}$
2. (a)  $[[p_{A_1}, q_{A_1}, p_{B_1}, q_{B_1}]] = [[p_{A_2}, q_{A_2}, p_{B_2}, q_{B_2}]]$   
(b)  $\text{tr}A_1 = \text{tr}A_2$  et  $\text{tr}B_1 = \text{tr}B_2$

*Démonstration.* – 1 entraîne 2 car toutes les quantités impliquées sont des invariants de conjugaison.

- Supposons (a) et (b) vérifiées. D'après la proposition 4.12, 1 entraîne l'existence de  $g \in \text{SU}(2,1)$  envoyant  $\tau(A_1, B_1)$  sur  $\tau(A_2, B_2)$ . La paire  $(A_2, B_2)$  est donc conjuguée à une paire ayant les mêmes points fixes que  $(A_1, B_1)$ . (b) montre alors que  $A_1$  et  $A_2$  sont conjugués ainsi que  $B_1$  et  $B_2$  (voir page la remarque 1.18 page 29). Une isométrie loxodromique étant déterminée par sa classe de conjugaison et ses points fixes, ceci prouve le résultat. □

Prouvons maintenant la proposition 5.2.

*Démonstration.* Un point de  $\text{Hom}(F_2, \text{PU}(2,1))^{\text{lox}}/\text{PU}(2,1)$  est une classe pour l'action diagonale par conjugaison de  $\text{PU}(2,1)$  sur  $4\text{Hom}(F_2, \text{PU}(2,1))^{\text{lox}}$ . Il est donc représenté par une paire normalisée  $(A, B) \in \text{PU}(2,1)^{\text{lox}} \times \text{PU}(2,1)^{\text{lox}}$  (voir le lemme 5.8 ci-dessous). Le résultat est donc une conséquence du lemme 5.6, en notant

$$\omega_a = \mathbf{X}(p_A, q_A, p_B, q_B) \quad \omega_b = \mathbf{X}(p_A, q_B, q_A, p_B) \quad \omega_c = \mathbf{X}(p_A, p_B, q_B, q_A)$$

$$z_A = \text{tr}A \quad z_B = \text{tr}B.$$

□

*Remarque 5.7.* Les équations décrivant  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  et  $\omega_c$  montrent qu'une fois fixés deux des trois birapports, le troisième est déterminé modulo conjugaison complexe.

Le lemme technique suivant nous sera utile dans la preuve de la proposition 5.15.

**Lemme 5.8.** Toute paire d'isométries loxodromiques est conjuguée à une paire  $(A, B)$  donnée par

$$A = \begin{bmatrix} \bar{\mu}^{-1} & \bar{z}_2 g(\bar{\mu}^{-1}) & z_1 g(\mu) + \bar{z}_1 g(\mu^{-1}) \\ 0 & \bar{\mu} \mu^{-1} & z_2 g(\mu) \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} \nu & 0 & 0 \\ w_2 g(\nu) & \bar{\nu} \nu^{-1} & 0 \\ w_3 g(\nu) + \bar{w}_3 g(\bar{\nu}^{-1}) & \bar{w}_2 g(\bar{\nu}^{-1}) & \bar{\nu}^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

où :

- $\mu, \nu \in \mathbb{C}$  sont de module inférieur à 1,
- $g$  désigne la fonction définie sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  par  $z \mapsto z - \bar{z}z^{-1}$
- et  $z_1, z_2, w_2$  et  $w_3$  satisfont aux relations

$$z_1 + \bar{z}_1 + |z_2|^2 = 0 \text{ et } w_3 + \bar{w}_3 + |w_2|^2 = 0.$$

*Démonstration.* Quitte à conjuguer, on peut supposer que le point fixe attractif de  $A$  (resp.  $B$ ) est  $\infty$  (resp.  $[0, 0]$ ), et que son point fixe répulsif admet le relèvement

$$\mathbf{q}_A = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \text{resp. } \mathbf{q}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \right).$$

Les deux relations  $z_1 + \bar{z}_1 + |z_2|^2 = 0$  et  $w_3 + \bar{w}_3 + |w_2|^2 = 0$  traduisent l'appartenance des points fixes de  $A$  et  $B$  à  $\partial \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .  $\square$

Notons que si  $A$  et  $B$  sont telles que ci-dessus,  $A^{-1}$  (resp.  $B^{-1}$ ) est obtenu à partir de  $A$  (resp.  $B$ ) en changeant  $\mu$  (resp.  $\nu$ ) en  $1/\mu$  (resp.  $1/\nu$ ).

### 5.2.2 Paires décomposables

**Définition 5.9.** Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\text{PU}(2, 1)$ . La paire  $(A, B)$  est dite *décomposable* s'il existe trois involutions  $I_1, I_2, I_3$  telles que

$$A = I_1 \circ I_2 \text{ et } B = I_3 \circ I_2$$

Plus précisément  $(A, B)$  est dite  $\mathbb{R}$ -*décomposable* si les  $I_k$  sont antiholomorphes, et  $\mathbb{C}$ -*décomposable* si les  $I_k$  sont holomorphes. Une représentation  $\rho \in \text{Hom}(F_2, \text{PU}(2, 1))$  sera dite  $\mathbb{R}$ -décomposable (resp.  $\mathbb{C}$ -décomposable) si la paire  $(\rho(\mathbf{m}), \rho(\mathbf{n}))$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable (resp.  $\mathbb{C}$ -décomposable).

**Proposition 5.10.** 1. La paire d'éléments loxodromiques  $(A, B)$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable si et seulement si la permutation (12)(34) est une symétrie antiholomorphe du tétraèdre  $\tau(A, B)$ .

2. La paire d'éléments loxodromiques  $(A, B)$  est  $\mathbb{C}$ -décomposable si et seulement si la permutation (12)(34) est une symétrie holomorphe du tétraèdre  $\tau(A, B)$ , et si  $A$  et  $B$  admettent des relèvements à  $SU(2, 1)$  de trace réelle et plus grande que 3.

- Démonstration.* 1. Si (12)(34) est une symétrie antiholomorphe du tétraèdre  $\tau(A, B)$ , alors il existe une réflexion lagrangienne qui échange  $p_A$  et  $q_A$  d'une part, et  $p_B$  et  $q_B$  d'autre part. Appelons la  $I_2$ . Alors  $A \circ I_2$  échange les deux points  $p_A$  et  $q_A$ . D'après le lemme 1.72 page 42,  $A \circ I_2$  est une réflexion lagrangienne, que nous appelons  $I_1$ . De même,  $B \circ I_2 = I_3$  est une réflexion lagrangienne.
2. Réciproquement, si la paire  $(A, B)$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable sous la forme  $A = I_1 \circ I_2$  et  $B = I_3 \circ I_2$ , la proposition 1.73 montre que  $I_2$  permute les points fixes de  $A$  ainsi que ceux de  $B$ . Le tétraèdre  $\tau(A, B)$  admet donc une symétrie (12)(34).
3. Supposons que la paire  $(A, B)$  soit  $\mathbb{C}$ -décomposable :  $A = I_1 \circ I_2$  et  $B = I_3 \circ I_2$ . Le lemme 1.43 montre que  $A$  et  $B$  admettent tous deux des relèvements de traces réelles et plus grandes que 3. D'après la preuve du lemme 1.44  $I_2$  échange d'une part les points fixes de  $A$ , et d'autre part ceux de  $B$ .  $I_2$  réalise donc une symétrie holomorphe du tétraèdre  $\tau(A, B)$ .
4. Réciproquement, si la permutation (12)(34) est une symétrie holomorphe du tétraèdre  $\tau(A, B)$ , et si  $A$  et  $B$  admettent des relèvements à  $SU(2,1)$  de trace réelle et plus grande que 3, soit  $I_2$  la réflexion complexe réalisant (12)(34). D'après la proposition 1.44 page 36, il existe  $I_1$  et  $I_3$  des réflexions complexes telles que  $A = I_1 \circ I_2$  et  $B = I_3 \circ I_2$ . La paire  $(A, B)$  est donc  $\mathbb{C}$ -décomposable. □

**Lemme 5.11.** *Soit  $\rho \in \text{Hom}(F_2, PU(2,1))^{lox}$ , une représentation préservant un  $\mathbb{R}$ -plan  $P$ , et telle que  $\rho(\mathfrak{m})$  et  $\rho(\mathfrak{n})$  ne partage aucun point fixe.  $\rho$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable, et la décomposition est unique.*

*Démonstration.* Puisque  $\rho$  stabilise un  $\mathbb{R}$ -plan, le tétraèdre  $\tau_\rho$  est contenu dans  $P$ . Il y a deux possibilités : soit les axes de  $\rho(\mathfrak{m})$  et  $\rho(\mathfrak{n})$  sont disjoints, soit ils se coupent en un point  $m \in P$ .

Dans le premier cas, soit  $\gamma$  l'orthogonale commune aux axes des  $\rho(\mathfrak{m})$  et  $\rho(\mathfrak{n})$  et  $P'$  le  $\mathbb{R}$  plan contenant  $\gamma$ , d'angle  $\langle(0, \pi/2)\rangle$  avec  $P$ . Tout  $\mathbb{R}$ -plan  $Q$  qui permute d'une part les points fixes de  $\rho(\mathfrak{m})$  et d'autre part ceux de  $\rho(\mathfrak{n})$  doit contenir  $\gamma$ . Son angle avec  $P$  a donc pour mesure  $(0, \beta)$ .  $I_Q$  doit également préserver  $P$ . Le lemme 1.83 montre donc que  $I_{P'}$  est la seule réflexion lagrangienne décomposant la paire  $(\rho(\mathfrak{m}), \rho(\mathfrak{n}))$ .

Dans le second cas, soit  $p$  le point d'intersection des axes, et  $P'$  le  $\mathbb{R}$ -plan orthogonal à  $P$  en  $p$ . De même que ci-dessus, on vérifie en utilisant le lemme 1.83 que  $I_{P'}$  est la seule réflexion lagrangienne qui décompose la paire  $(\rho(\mathfrak{m}), \rho(\mathfrak{n}))$ . □

**Corollaire 5.12.** *Soit  $\rho \in \text{Hom}(F_2, PU(2,1))^{lox}$  une représentation  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ -décomposable ne préservant pas une droite complexe. La décomposition est unique.*

*Démonstration.* D'après le lemme 4.19, page 87, si un tétraèdre idéal non plat admet une symétrie (12)(34), elle est unique. Or, toute décomposition de la paire  $(A, B)$  correspond est associée à une symétrie (12)(34) du tétraèdre idéal  $\tau(A, B)$ . Si le tétraèdre  $\tau(A, B)$  est contenu dans un  $\mathbb{R}$ -plan, on applique le lemme ci-dessus. □

La proposition 5.13 est une réinterprétation en termes de birapport de la proposition 5.10.

**Proposition 5.13.** *Soient  $A$  et  $B$  deux isométries loxodromiques. Supposons que le groupe  $\langle A, B \rangle$  ne stabilise aucune droite complexe.*

Alors :

1.  $(A, B)$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable si et seulement si  $\omega_a = \mathbf{X}(p_A, q_A, p_B, q_B)$  est réel et positif.
2.  $(A, B)$  est  $\mathbb{C}$ -décomposable si et seulement si
  - (a)  $\omega_b = \mathbf{X}(p_A, q_B, q_A, p_B)$  et  $\omega_c = \mathbf{X}(p_A, p_B, q_B, q_A)$  sont tous deux réels et positifs.
  - (b)  $\operatorname{tr} A$  et  $\operatorname{tr} B$  sont réelles et vérifient  $\operatorname{tr} A > 3$  et  $\operatorname{tr} B > 3$ .

**Proposition 5.14.** *Soient  $A$  et  $B$  deux éléments loxodromiques ayant un point fixe en commun. La paire  $(A, B)$  n'est ni  $\mathbb{R}$  ni  $\mathbb{C}$ -décomposable*

*Démonstration.*  $A$  et  $B$  ayant un point fixe en commun, leurs axes sont asymptotiques. Si la paire  $(A, B)$  était décomposable, il existerait un plan totalement géodésique simultanément orthogonal aux deux axes, donc un triangle ayant un angle nul et deux angles droits. C'est en contradiction avec la courbure négative de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .  $\square$

## 5.3 Traces et birapports

Soient  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux classes de conjugaison loxodromiques. La proposition 5.2 implique qu'un point de  $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$  est déterminé à conjugaison près dans  $\mathrm{SU}(2,1)$  par  $(\omega_a, \omega_b, \omega_c)$ . D'après la proposition 3.23 (page 70), il est également déterminé à conjugaison près les trois de traces

$$(\operatorname{tr} AB, \operatorname{tr} A^{-1}B, \operatorname{tr} [A, B]).$$

( $\operatorname{tr} A$  et  $\operatorname{tr} B$  sont fixées par le choix de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ ).

Nous allons maintenant expliciter la relation entre ces deux ensembles de coordonnées. Les trois relations 5.3, 5.4 et 5.7 sont apparues dans [PP].

**Proposition 5.15.** *Soient  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux classes de conjugaison loxodromiques dans  $\mathrm{SU}(2,1)$ . Il existe une bijection affine  $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  déterminée par  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  telle que pour tout  $(A, B) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ ,*

$$(\operatorname{tr} AB, \operatorname{tr} A^{-1}B) = \Phi \left( \frac{1}{\omega_b}, \omega_c \right).$$

*Démonstration.* Rappelons que  $g$  est définie sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  par  $g(z) = z - \bar{z}z^{-1}$  (cf page 97).

Soit  $h$  la fonction définie sur  $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$  par  $h(x, y) = g(x)g(y)$ . Notons que  $h$  vérifie :

$$h(x, y)h\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) - h\left(\frac{1}{x}, y\right)h\left(x, \frac{1}{y}\right) = 0 \quad (5.2)$$

pour tout  $x, y \in \mathbb{C}$ . En utilisant la normalisation (5.1) fournie par le lemme 5.8, exprimons  $\text{tr } AB$  et  $\text{tr } A^{-1}B$  en termes de  $\mu, \nu, z_1, z_2, w_2$  et  $w_3$ . Dans cette normalisation, les birapports  $\omega_a, \omega_b$  et  $\omega_c$  sont fournis par les trois relations (4.3), (4.4). Nous obtenons les relations

$$\text{tr } AB = \omega_c h(\mu, \nu) + \bar{\omega}_c h(\bar{\mu}^{-1}, \bar{\nu}^{-1}) + \frac{1}{\omega_b} h(\mu, \bar{\nu}^{-1}) + \frac{1}{\bar{\omega}_b} h(\bar{\mu}^{-1}, \nu) + \alpha \quad (5.3)$$

$$\text{tr } A^{-1}B = \omega_c h(\mu^{-1}, \nu) + \bar{\omega}_c h(\bar{\mu}, \bar{\nu}^{-1}) + \frac{1}{\omega_b} h(\mu^{-1}, \bar{\nu}^{-1}) + \frac{1}{\bar{\omega}_b} h(\bar{\mu}, \nu) + \beta \quad (5.4)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\bar{\mu}}{\mu} (\nu + \bar{\nu}^{-1}) + \frac{\bar{\nu}}{\nu} (\mu + \bar{\mu}^{-1}) - \frac{\bar{\nu}\bar{\mu}}{\mu\nu} \\ \beta &= \frac{\mu}{\bar{\mu}} (\nu + \bar{\nu}^{-1}) + \frac{\bar{\nu}}{\nu} (\mu^{-1} + \bar{\nu}) - \frac{\bar{\nu}\mu}{\nu\bar{\mu}}. \end{aligned}$$

Appliquons la relation (5.2) vérifiée par  $h$  pour calculer les combinaisons linéaire suivantes.

$$\begin{aligned} &(5.3) \cdot h(\bar{\mu}, \bar{\nu}^{-1}) - (5.4) \cdot h(\bar{\mu}^{-1}, \bar{\nu}^{-1}) \\ &\quad \overline{(5.3)} \cdot h(\bar{\mu}^{-1}, \bar{\nu}) - \overline{(5.4)} \cdot h(\bar{\mu}, \bar{\nu}), \end{aligned}$$

où  $\overline{(5.3)}$  et  $\overline{(5.4)}$  désignent les relations obtenues en conjuguant (5.3) et (5.4). Nous obtenons de cette manière :

$$\begin{aligned} &\omega_c (h(\mu, \nu)h(\bar{\mu}, \bar{\nu}^{-1}) - h(\mu^{-1}, \nu)h(\bar{\mu}^{-1}, \bar{\nu}^{-1})) \\ &+ \frac{1}{\omega_b} (h(\mu, \bar{\nu}^{-1})h(\bar{\mu}, \bar{\nu}^{-1}) - h(\mu^{-1}, \bar{\nu}^{-1})h(\bar{\mu}^{-1}, \bar{\nu}^{-1})) \\ &= (\text{tr } AB - \alpha) h(\bar{\mu}, \bar{\nu}^{-1}) - (\text{tr } A^{-1}B - \beta) h(\bar{\mu}^{-1}, \bar{\nu}^{-1}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

et

$$\begin{aligned} &\omega_c (h(\mu^{-1}, \nu^{-1})h(\bar{\mu}^{-1}, \bar{\nu}) - h(\mu, \nu^{-1})h(\bar{\mu}, \bar{\nu})) \\ &+ \frac{1}{\omega_b} (h(\mu^{-1}, \bar{\nu})h(\bar{\mu}^{-1}, \bar{\nu}) - h(\mu, \bar{\nu})h(\bar{\mu}, \bar{\nu})) \\ &= (\overline{\text{tr } AB} - \bar{\alpha}) h(\bar{\mu}^{-1}, \bar{\nu}) - (\overline{\text{tr } A^{-1}B} - \bar{\beta}) h(\bar{\mu}, \bar{\nu}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Les birapports complexes  $\omega_b^{-1}$  et  $\omega_c$  sont donc solutions d'un système affine. Les coefficients de la partie linéaire de ce système ne dépendent que de  $\mu$  et  $\nu$  c'est à dire de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . Le déterminant de ce système vaut

$$\delta = \frac{(|\mu|^2 - 1)^2 |\mu - \bar{\mu}^2|^4 (\nu - \bar{\nu}^2)^3 (\nu^2 - \bar{\nu}) (|\nu|^2 - 1)}{|\mu|^8 |\nu|^6 \bar{\nu}}.$$

Les deux facteurs  $(\nu^2 - \bar{\nu})$  et  $(\mu - \bar{\mu}^2)$  s'annulent respectivement si et seulement si  $\nu^3 = 1$  ou  $\mu^3 = 1$ .  $\delta$  est donc nul si et seulement si  $\mu$  ou  $\nu$  est de module 1, c'est à dire si  $A$  ou  $B$  est elliptique spécial. Par suite, lorsque  $A$  et  $B$  sont loxodromiques, il existe toujours deux nombres complexes  $\omega_b$  et  $\omega_c$  satisfaisant les équations ci-dessus. Cependant, ces deux solutions peuvent être vues comme deux birapports si et seulement si elle satisfont l'inégalité (4.11) :

$$\left( |\omega_c| - \frac{1}{|\omega_b|} \right)^2 \leq 2\operatorname{Re} \left( \frac{1}{\omega_b} + \omega_c \right) - 1 \leq \left( |\omega_c| + \frac{1}{|\omega_b|} \right)^2.$$

Ceci prouve le résultat.  $\square$

Nous avons vu au chapitre 3 qu'une fois fixées  $\operatorname{tr} A$ ,  $\operatorname{tr} B$ ,  $\operatorname{tr} AB$ ,  $\operatorname{tr} A^{-1}B$ , il y a (génériquement) deux classes de conjugaisons de groupes correspondants. Suivant le choix des coordonnées (traces ou birapports), ces deux classes correspondent à l'indétermination d'ordre deux sur  $\omega_a$  ou  $\operatorname{tr}[A, B]$ . Nous montrons maintenant comment relier  $\omega_a$  et  $\operatorname{tr}[A, B]$ .

La relation 4.10 procure  $\operatorname{Re}(\omega_a)$  en fonction de  $\omega_b$  et  $\omega_c$ , qui sont obtenus en fonction des traces en résolvant le système exposé dans la preuve ci-dessus. Pour obtenir  $\operatorname{Im}(\omega_a)$ , nous calculons la trace du commutateur en utilisant toujours pour  $A$  et  $B$  la normalisation donnée par le lemme 5.8 :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}[A, B] &= 3 - 2\operatorname{Re} \left( \bar{\omega}_c h(\mu, \nu) h(\mu^{-1}, \nu^{-1}) + \frac{1}{\omega_b} (h(\bar{\mu}, \nu) h(\bar{\mu}^{-1}, \nu^{-1})) \right) \\ &+ \left| \left( \omega_c h(\bar{\mu}, \bar{\nu}) + \bar{\omega}_c h(\mu^{-1}, \nu^{-1}) + \frac{1}{\omega_b} h(\bar{\mu}, \nu^{-1}) + \frac{1}{\bar{\omega}_b} h(\bar{\mu}^{-1}, \bar{\nu}) \right) \right|^2 \\ &- |\omega_c|^2 (|h(\mu, \nu)|^2 + |h(\mu^{-1}, \nu^{-1})|^2) - \frac{1}{|\omega_b|^2} (|h(\mu, \nu^{-1})|^2 + |h(\mu^{-1}, \nu)|^2) \\ &+ |\omega_c|^2 \left( \omega_a (|h(\mu, \nu^{-1})|^2 + |h(\mu^{-1}, \nu)|^2) + \bar{\omega}_a (|h(\mu, \nu)|^2 + |h(\mu^{-1}, \nu^{-1})|^2) \right). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Nous obtenons alors la relation suivante, qui lie  $\operatorname{Im}(\operatorname{tr}[A, B])$  et  $\operatorname{Im}(\omega_a)$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{Im} \operatorname{tr} [A, B]}{\operatorname{Im} (\omega_a)} &= |\omega_c|^2 \left( (|h(\mu, \nu^{-1})|^2 + |h(\mu^{-1}, \nu)|^2) - (|h(\mu, \nu)|^2 + |h(\mu^{-1}, \nu^{-1})|^2) \right) \\
&= |\omega_c|^2 (|g(\mu)|^2 - |g(\mu^{-1})|^2) (|g(\nu)|^2 - |g(\nu^{-1})|^2). \tag{5.8}
\end{aligned}$$

Or la relation suivante est vérifiée pour tout nombre complexe  $z$  non-nul.

$$|g(z)|^2 - |g(z^{-1})|^2 = (1 - |z|^2) \left| \frac{z^2}{\bar{z}} + 1 \right|^2$$

$z^2/\bar{z} + 1$  est nul si et seulement si  $z^3 = -1$ . Cette quantité est donc non-nulle si et seulement si  $|z| \neq 1$ . Comme  $\mu$  et  $\nu$  sont de module inférieur à 1 (cf lemme 5.8 page 96),  $\operatorname{Im} \operatorname{tr} [A, B]$  et  $\operatorname{Im} (\omega_a)$  sont de même signe.

*Remarque 5.16.* En terminant la résolution du système ci-dessus, nous obtenons les expressions suivantes de  $\omega_b$  et  $\omega_c$  :

$$\begin{aligned}
\frac{D_b}{|\mu|^2 |\nu|^2} \cdot \frac{1}{\omega_b} &= \mu \operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(A^{-1}B) + \bar{\nu} \overline{\operatorname{tr}(AB)} + \mu \overline{\nu \operatorname{tr}(A^{-1}B)} \\
&\quad - \left( \mu^2 + \frac{1}{\mu} \right) \left( \frac{\bar{\nu}}{\nu} + \nu \right) - \left( \bar{\nu}^2 + \frac{1}{\bar{\nu}} \right) \left( \frac{\mu}{\bar{\mu}} + \bar{\mu} \right) - \left( \frac{\bar{\nu}}{\nu} + \nu \right) \left( \frac{\mu}{\bar{\mu}} + \bar{\mu} \right) \tag{5.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{D_c}{|\mu|^2 |\nu|^2} \omega_c &= \mu \nu \operatorname{tr}(AB) + \nu \operatorname{tr}(A^{-1}B) + \overline{\operatorname{tr}(AB)} + \mu \overline{\operatorname{tr}(A^{-1}B)} \\
&\quad - \left( \mu^2 + \frac{1}{\mu} \right) \left( \frac{\nu}{\bar{\nu}} + \bar{\nu} \right) - \left( \nu^2 + \frac{1}{\nu} \right) \left( \frac{\mu}{\bar{\mu}} + \bar{\mu} \right) - \left( \frac{\nu}{\bar{\nu}} + \bar{\nu} \right) \left( \frac{\mu}{\bar{\mu}} + \bar{\mu} \right) \tag{5.10}
\end{aligned}$$

où  $D_b$  et  $D_c$  désignent les quantités

$$\begin{aligned}
D_b &= (|\mu|^2 - 1) (|\nu|^2 - 1) (\mu^2 - \bar{\mu}) (\nu^2 - \bar{\nu}) \\
D_c &= (|\mu|^2 - 1) (|\nu|^2 - 1) (\mu^2 - \bar{\mu}) (\nu - \bar{\nu}^2)
\end{aligned}$$

## 5.4 Le critère de décomposabilité en coordonnées traces

La proposition suivante (5.17) traduit le critère de décomposabilité des paires d'isométries loxodromiques donné par la proposition 5.13 en un critère exprimé en termes de traces.

**Théorème 5.17.** *Soient  $A$  et  $B$  deux isométries loxodromiques de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  et  $G = \langle A, B \rangle$ . Supposons que  $G$  ne stabilise aucun sous-espace totalement géodésique de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Alors*

1. Sont équivalentes :

(a) La trace du commutateur  $[A, B]$  est réelle.

(b)  $G$  stabilise une droite complexe ou la paire  $(A, B)$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable.

2. Si  $G$  ne préserve aucune droite complexe, sont équivalentes

(a) Les quatre traces  $\operatorname{tr} A$ ,  $\operatorname{tr} B$ ,  $\operatorname{tr} AB$ ,  $\operatorname{tr} A^{-1}B$  sont réelles.

(b)  $G$  stabilise un  $\mathbb{R}$ -plan de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  ou la paire  $(A, B)$  est  $\mathbb{C}$ -décomposable, ou la paire  $(A^2, B^2)$  est  $\mathbb{C}$ -décomposable.

*Remarque 5.18.* Soit  $A$  une isométrie loxodromique ou de trace réelle. Les valeurs propres de  $A$  sont réelles. En effet, le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$X^3 - tX^2 + tX - 1, \text{ avec } t = \operatorname{tr} A.$$

On vérifie simplement que ce polynôme a trois racines réelles si et seulement si  $(t+1)(t-3) \geq 0$ , ce qui est réalisé lorsque  $A$  est loxodromique.

*Démonstration.* (a) Si  $(A, B)$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable, alors  $\operatorname{tr}[A, B]$  est réelle : nous verrons dans la preuve du théorème 5.19 ci-dessus proposition que dans ce cas  $[A, B]$  s'écrit  $M\overline{M}$ , avec  $M \in \operatorname{SU}(2,1)$ . Si  $G$  préserve une droite complexe,

(b) La relation (5.7) montre que  $\omega_a$  est réel si et seulement si  $\operatorname{tr}[A, B]$  l'est. On utilise ensuite le corollaire 4.25. Si  $\omega_a$  est positif, on conclut à la  $\mathbb{R}$ -décomposabilité de  $(A, B)$ , s'il est négatif,  $G$  préserve une droite complexe, car le tétraèdre formé par les points fixes de  $A$  et  $B$  est contenu dans une droite complexe.

Si  $G$  préserve un  $\mathbb{R}$ -plan, les traces de tous ses éléments sont réelles. Si la paire  $(A, B)$  est  $\mathbb{C}$ -décomposable, les quatre éléments  $A$ ,  $B$ ,  $AB$  et  $A^{-1}B$  sont des produits de deux réflexions complexes, donc ont de trace réelle. Si la paire  $(A^2, B^2)$  alors  $A^2$  et  $B^2$  ont tous deux trace réelle et plus grande que trois (cf le lemme 1.43). Or par Cayley-Hamilton, on obtient  $\operatorname{tr} A^2 = (\operatorname{tr} A)^2 - 2\overline{\operatorname{tr} A}$ . Cette dernière quantité étant réelle, on en déduit que soit la trace de  $A$  est réelle, soit elle est de partie réelle  $-1$ . Dans ce dernier cas, on vérifie alors que  $\operatorname{tr} A^2$  est inférieure à trois. Donc  $\operatorname{tr} A$  est réelle, de même que  $\operatorname{tr} B$ . On conclut grâce à la remarque 5.18.

(b) D'après, la remarque 5.18, les hypothèses ci-dessus garantissent que  $\mu, \nu, \operatorname{tr} AB$  et  $\operatorname{tr} A^{-1}B$  sont réels, où  $\mu$  et  $\nu$  sont les valeurs propres de modules plus grand que 1 de  $A$  et  $B$ . En prenant la partie imaginaire dans les relations (5.3) et (5.4), on obtient le système linéaire

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Im}(\omega_c) (h(\mu, \nu) - h(\mu^{-1}, \nu^{-1})) + \operatorname{Im}(\omega_b^{-1}) (h(\mu, \nu^{-1}) - h(\mu^{-1}, \nu)) \\ 0 &= \operatorname{Im}(\omega_c) (h(\mu^{-1}, \nu) - h(\mu, \nu^{-1})) + \operatorname{Im}(\omega_b^{-1}) (h(\mu^{-1}, \nu^{-1}) - h(\mu, \nu)) \end{aligned}$$



Si  $x$  et  $y$  sont réels,  $h(x, y) = (x-1)(y-1)$ . Le déterminant du système ci-dessus vaut

$$-\frac{(\mu-1)^3(\nu-1)^3(\mu+1)(\nu+1)}{\mu^2\nu^2}.$$

Il est donc non-nul, car  $|\mu| \neq 1$  et  $|\nu| \neq 1$ . Par suite  $\omega_b$  et  $\omega_c$  sont tous deux réels. On obtient alors le résultat grâce à la proposition 5.13 et au lemme 1.43.  $\square$

Notons que les hypothèses de la proposition 5.17 sont des conditions nécessaires :

1. Si  $(A, B)$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable, alors  $\text{tr}[A, B]$  est réelle : nous verrons dans la preuve de la prochaine proposition que dans ce cas  $[A, B]$  s'écrit  $M\overline{M}$ , avec  $M \in \text{SU}(2,1)$
2. Si  $(A, B)$  est  $\mathbb{C}$ -décomposable, alors  $\text{tr} A$ ,  $\text{tr} B$ ,  $\text{tr} AB$ ,  $\text{tr} A^{-1}B$  sont réels et contenus dans l'intervalle  $] -1, \infty[$  : dans ce cas  $A$ ,  $B$ ,  $AB$ ,  $A^{-1}B$  sont produits de deux réflexions complexes d'ordre deux.

De la proposition 5.17, nous allons maintenant déduire un résultat de rigidité pour les groupes engendrés par deux éléments loxodromiques dont le commutateur est parabolique pur (voir page 29).

**Théorème 5.19.** *Soient  $A$  et  $B$  deux éléments loxodromiques tels que  $C = [A, B]$  soit parabolique pur. Alors :*

1.  $C$  est conjugué à une translation de Heisenberg verticale si et seulement si  $G$  préserve une droite complexe.
2.  $C$  est conjugué à une translation de Heisenberg non-verticale si et seulement si  $(A, B)$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable.

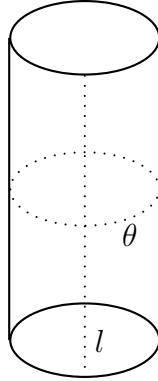
*Démonstration.* Si  $C = [A, B]$  est unipotent, il est de trace 3 et donc, soit la paire  $(A, B)$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable, soit  $G$  préserve une droite complexe.

1. Si  $G$  préserve une droite complexe,  $C$  aussi.  $C$  est donc conjugué à une translation de Heisenberg préservant une droite complexe, donc à une translation verticale.
2. Si la paire  $(A, B)$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable, il existe trois matrices  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  dans  $\text{SU}(2,1)$  telles que  $A = M_1\overline{M}_2$ ,  $B = M_3\overline{M}_2$  et  $M_k\overline{M}_k = \text{Id}$ . Par suite  $C$  s'écrit  $M\overline{M}$  avec  $M = M_1\overline{M}_2M_3$ . Par conséquent, l'homographie associée à  $C$  est le carré de l'isométrie antiholomorphe dont un relèvement est

$$Z \longrightarrow M\overline{Z}.$$

Ces deux isométries ont le même point fixe dans  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . On peut supposer que ce point est  $\infty$  (dans le modèle de Siegel), qui admet le relèvement

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

FIG. 5.1 –  $\mathcal{C}^{\text{lox}}$ 

Il s'en suit que  $C$  et  $M$  sont deux éléments triangulaires supérieurs de  $SU(2,1)$ . On vérifie alors que tout élément triangulaire supérieur de  $SU(2,1)$   $M$ , tel que  $M\overline{M}$  est soit unipotent soit une translation non-verticale, soit l'identité. Ce dernier cas ne correspond pas à une isométrie parabolique.

□

## 5.5 Représentations du groupe fondamental de la sphère privée de trois disques

Désignons par  $\mathcal{C}^{\text{lox}}$  l'ensemble des classes de conjugaisons loxodromiques de  $PU(2,1)$ .  $\mathcal{C}^{\text{lox}}$  est un cylindre. En effet, la classe de conjugaison d'un élément loxodromique est entièrement déterminée par  $\mu$ , sa valeur propre de module plus grand que 1. Le module de  $\mu$  détermine la longueur de translation  $l$ , et son argument détermine l'angle de rotation  $\theta$ .  $\mathcal{C}^{\text{lox}}$  est donc paramétré par  $\mathbb{R} \times S^1$ . Nous appellerons les sous-ensembles de  $\mathcal{C}^{\text{lox}}$  donnés par  $\{\theta = \text{constante}\}$  les *génératrices* de  $\mathcal{C}^{\text{lox}}$ .

Fixons  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux telles classes de conjugaisons, et définissons l'application

$$\begin{aligned} \pi \quad \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 &\longrightarrow \mathcal{C}^{\text{lox}} \\ (A, B) &\longmapsto [AB] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Nous allons montrer que quelles que soient  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ ,  $\pi$  est surjective. Dans ce but, nous commençons par étudier les représentations réductibles, i.e. les groupes engendrés par deux éléments loxodromiques ayant le même axe complexe. Nous noterons  $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^{\text{red}}$  l'ensemble des paires d'isométries loxodromiques ayant même axe complexe.

**Lemme 5.20.** *L'image de la restriction de  $\pi$  à  $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^{\text{red}}$  est une génératrice du cylindre  $\mathcal{C}^{\text{lox}}$ .*

*Démonstration.* Soient  $l_i$  et  $\theta_i$  ( $i = 1, 2$ ) les longueurs de translation et angles de rotation associés à  $\mathcal{C}_i$ . Si  $A$  et  $B$  sont respectivement dans  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , on vérifie facilement que l'angle de rotation de  $AB$  est  $\theta_1 + \theta_2$ . (On peut pour cela écrire des relèvements de  $A$  et  $B$  à  $SU(2,1)$  dans une base contenant un vecteur polaire à leur axe complexe commun). C'est un résultat classique qu'il n'y a alors aucune restriction sur la longueur de translation de  $AB$ . (En d'autres termes, l'espace de Teichmüller de la sphère privée de trois disques est  $\mathbb{R}^3$  tout entier). D'où le résultat.  $\square$

**Proposition 5.21.** *L'application  $\pi$  est surjective.*

*Démonstration.*  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  déterminent  $\text{tr } A$  et  $\text{tr } B$ . D'après la proposition 5.2, on peut donc voir  $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$  comme l'ensemble

$$\left\{ (\omega_a, \omega_b, \omega_c) \in \mathbb{C}^3 \left| \begin{array}{l} |\omega_a \omega_b \omega_c| = 1 \\ 2\text{Re}(\omega_c) = \frac{1}{|\omega_b|^2} \left( \left| 1 - \frac{1}{\omega_a} \right|^2 - 1 \right) + \left| 1 - \frac{1}{\omega_b} \right|^2 \end{array} \right. \right\}$$

Soit  $T$  l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (A, B) & \longmapsto & \text{tr } AB. \end{array}$$

L'image de  $T$  contient toutes les traces d'éléments loxodromiques. En effet, d'après la relation (5.3), dans les coordonnées birapport, cette application est affine réelle :

$$\text{tr } AB = \omega_c h(\mu, \nu) + \bar{\omega}_c h(\bar{\mu}^{-1}, \bar{\nu}^{-1}) + \frac{1}{\omega_b} h(\mu, \bar{\nu}^{-1}) + \frac{1}{\bar{\omega}_b} h(\bar{\mu}^{-1}, \nu) + \alpha. \quad (5.14)$$

(Voir la preuve de la proposition 5.15.)

Elle est donc ouverte et fermée. Son image est donc un sous-ensemble ouvert et fermé du cylindre  $\mathcal{C}^{\text{lox}}$ . Elle contient de plus une génératrice d'après le lemme 5.20 donc est non-vide. D'où le résultat.  $\square$

Rappelons que le groupe fondamental de la sphère privée de trois points admet la présentation

$$\langle c_1, c_2, c_3 \mid c_1 c_2 c_3 = 1 \rangle$$

On en déduit de la proposition 5.21 le

**Corollaire 5.22.** *Soient  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$  trois classes de conjugaisons loxodromiques dans  $SU(2,1)$ . Il existe une représentation  $\rho$  du groupe fondamental de la sphère moins trois points dans  $SU(2,1)$  telle que  $\rho(c_i) \in \mathcal{C}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).*

# Chapitre 6

## Groupes triangulaires

### 6.1 Introduction

Rappelons la

**Définition 6.1.** Un groupe triangulaire est une représentation  $\rho$  du groupe de présentation  $\langle i_1, i_2, i_3 \mid i_k^2 = 1 \rangle$  dans  $\widehat{\text{PU}}(2,1)$ . Un groupe triangulaire est dit lagrangien (resp. complexe) si pour  $k = 1, 2, 3$   $\rho(i_k)$  est une réflexion lagrangienne (resp. une réflexion complexe d'ordre deux).

Nous parlerons souvent du groupe triangulaire  $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$ , où  $I_k \in \widehat{\text{PU}}(2,1)$  pour dire que  $\rho(i_k) = I_k$ .

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux représentations de  $F_2 = \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle$  par des paires décomposables d'éléments d'isométries. Si  $\rho$  est une telle représentation, il existe trois involutions isométriques  $I_1, I_2$  et  $I_3$  telles que

$$\rho(\mathbf{m}) = I_1 \circ I_2 \text{ et } \rho(\mathbf{n}) = I_3 \circ I_2. \quad (6.1)$$

$I_1, I_2$  et  $I_3$  sont soit des réflexions lagrangiennes, soit des réflexions complexes d'ordre deux, fixant point par point une droite complexe.

$$\begin{aligned} \rho([\mathbf{m}, \mathbf{n}]) &= I_1 I_2 I_3 I_2 I_2 I_1 I_2 I_3 \\ &= (I_1 I_2 I_3)^2 \end{aligned}$$

Notre approche est basée sur la remarque suivante. Supposons que l'isométrie  $(I_1 I_2 I_3)^2$  soit loxodromique, parabolique ou elliptique régulière. Définissons alors  $p_2$  de la manière suivante :

- Si  $(I_1 I_2 I_3)^2$  est elliptique régulier ou parabolique,  $p_2$  est son point fixe.
- Si  $(I_1 I_2 I_3)^2$  est loxodromique,  $p_2$  est son point fixe attractif.

Posons  $p_3 = I_1(p_2)$  et  $p_1 = I_3(p_2)$ . Nous sommes alors dans la situation suivante :

$$p_2 \xleftarrow{I_1} p_3 \xleftarrow{I_2} p_1 \xleftarrow{I_3} p_2. \quad (6.2)$$

*Remarque 6.2.* Avec ces notations,  $p_1$  est le point fixe de  $I_2I_1I_3$ , et  $p_3$  celui  $I_1I_3I_2$ .

**Définition 6.3.** Nous dirons que  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  vérifient la condition (C) si le cycle décrit ci-dessus est non-dégénéré, c'est à dire si  $i \neq j$  implique  $p_i \neq p_j$ .

*Remarque 6.4.* Si  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$  sont confondus en un point de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , le groupe  $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$  est discret si et seulement si il est fini : son sous-groupe d'indice 2 engendré par  $\langle I_1I_2, I_3I_2 \rangle$  est contenu dans un plongement de  $U(2)$  dans  $PU(2,1)$ . Ces groupes ont été étudiés par Falbel et Paupert dans [FP04].

$(p_1, p_2, p_3)$  est un cycle de longueur trois associé au triplet  $(I_1, I_2, I_3)$ . Une fois fixés les trois points du cycle, il suffit de connaître les triplets d'involutions tels que  $I_k(p_{k+1}) = p_{k+2}$  (indices pris modulo 3) pour décrire les groupes admettant ce cycle. Posons donc les définitions suivantes.

**Définition 6.5.** Nous appellerons  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  (respectivement  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ ) l'ensemble des groupes triangulaires complexes (resp. lagrangiens)  $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$  satisfaisant aux conditions suivantes.

- L'isométrie  $(I_1I_2I_3)^2$  est parabolique ou loxodromique.
- $(I_1, I_2, I_3)$  vérifie la condition (C).

**Définition 6.6.** Nous appellerons  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\text{par}}$  (respectivement  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{\text{par}}$ ) l'ensemble des groupes triangulaires dans  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  (respectivement  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ ) tels que  $(I_1I_2I_3)^2$  est parabolique.

*Remarque 6.7.* A tout élément de  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  est donc associé une représentation  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  décomposable de  $F_2$  dans  $PU(2,1)$  en posant

$$\rho(\mathfrak{m}) = I_1I_2 \text{ et } \rho(\mathfrak{n}) = I_3I_2.$$

Notons que contrairement au chapitre précédent, nous n'imposons aucune restriction sur les éléments  $\rho(\mathfrak{m})$  et  $\rho(\mathfrak{n})$ . En particulier  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  contiennent des groupes triangulaires pour lesquels  $\rho(\mathfrak{m})$  et  $\rho(\mathfrak{n})$  ne sont pas loxodromiques.

En adoptant le point de vue explicité ci-dessus, nous allons définir des coordonnées sur  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ . Dans les deux cas, le cycle  $(p_1, p_2, p_3)$  est situé dans  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , car  $p_2$  est un point fixe de  $\rho([\mathfrak{m}, \mathfrak{n}])$ , et est donc situé dans  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Ces coordonnées sont obtenues via une construction géométrique permettant de paramétrer les triplets d'involutions vérifiant (6.2).

Nous allons ainsi définir deux applications

$$\begin{aligned} c_{\mathbb{C}} & : \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ c_{\mathbb{R}} & : \mathcal{D}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times (S^1)^3 \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Ces deux applications associent à une représentation des invariants géométriques. Dans les deux cas le facteur  $\mathbb{R}^3$  correspond à un triplet de longueurs, mesurées sur les côtés du triangle idéal  $p_1p_2p_3$ . Le facteur  $[-\pi/2, \pi/2]$  correspond à l'invariant de Cartan du triplet  $(p_1, p_2, p_3)$ , et, dans le cas de  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ , le facteur  $(S^1)^3$  correspond à un triplet d'angles entre  $\mathbb{R}$ -plans.

Nous allons montrer les propositions suivantes, qui fournissent des critères de conjugaisons dans  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ .

**Proposition 6.8.** *L'application  $c_{\mathbb{C}}$  a les propriétés suivantes.*

1.  $c_{\mathbb{C}}$  est surjective
2. Soient  $\rho_1$  et  $\rho_2$  dans  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ . Sont équivalentes
  - (a)  $c_{\mathbb{C}}(\rho_1) = c_{\mathbb{C}}(\rho_2)$
  - (b)  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont conjuguées dans  $PU(2,1)$ .

**Proposition 6.9.** *L'application  $c_{\mathbb{R}}$  a les propriétés suivantes.*

1.  $c_{\mathbb{R}}$  est surjective.
2. Soient  $\rho_1$  et  $\rho_2$  dans  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ . Sont équivalentes :
  - (a)  $c_{\mathbb{R}}(\rho_1) = c_{\mathbb{R}}(\rho_2)$
  - (b)  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont conjuguées dans  $PU(2,1)$ .

Notre but est d'identifier les représentations  $\rho$  appartenant à  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\text{par}}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{\text{par}}$ . Nous obtenons un critère de parabolicité en termes des deux applications  $c_{\mathbb{C}}$  et  $c_{\mathbb{R}}$  dans la section 6.4.

Nous terminerons ce chapitre par une brève description du cas où  $(I_1I_2I_3)^2$  est elliptique.

## 6.2 Les triangles idéaux et leurs symétries

Dans cette section, nous allons rappeler quelques faits au sujet des triangles idéaux. Un triangle idéal est un triplet ordonné de points (ses sommets) du bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Les arêtes de ce triangles sont les géodésiques reliant les sommets. Nous avons vu dans le chapitre 1 (page 47) que les triangles idéaux étaient classifiés modulo  $PU(2,1)$  par l'invariant de Cartan  $\mathbb{A} \in [-\pi/2, \pi/2]$  (voir théorème 1.89).

**Paramétrisation standard des géodésiques** Tout au long de ce chapitre, nous allons utiliser de manière importante la paramétrisation suivante des géodésiques reliant deux points du bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Soient  $p$  et  $q$  deux points au bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Choisissons des relèvements  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  de  $p$  et  $q$  tels que  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = -1$ . Dans ces conditions, la géodésique  $\sigma$  reliant  $p$  et  $q$  est paramétrée – en version relevée – par :

$$\sigma(t) = e^{\frac{t}{2}}\mathbf{p} + e^{-\frac{t}{2}}\mathbf{q}. \quad (6.3)$$

$t$  est la longueur d'arc :

$$d(\sigma(t), \sigma(s)) = |t - s|.$$

Voir [Par03] pour plus de détails. Nous appellerons ce choix de paramétrisation des géodésiques la *paramétrisation standard associée aux relèvements  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  de  $p$  et  $q$* . Il faut prendre garde au fait que cette paramétrisation dépend du choix des relèvements.

**Les symétries des triangles idéaux** Le lemme suivant, dû à Goldman, décrit les symétries des triangles idéaux.

**Lemme 6.10.** *Soit  $(p_1, p_2, p_3)$  un triplet de points de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , non contenu dans une droite complexe. Il existe un unique triplet de  $\mathbb{R}$ -plans  $\mathcal{L}(p_1, p_2, p_3) = (L_1, L_2, L_3)$ , vérifiant*

$$I_{L_i} \text{ échange } p_{i+1} \text{ et } p_{i+2} \text{ et fixe } p_i$$

les indices étant pris modulo trois (voir [Gol99] lemme 7.1.7).

*Démonstration.* Soit par exemple  $C_{23}$  la droite complexe contenant  $p_2$  et  $p_3$ , et  $q_1$  le projeté orthogonal de  $p_1$  sur  $C_{23}$ . Par hypothèse,  $p_1$  et  $q_1$  sont distincts. Soient donc  $\gamma$  la géodésique reliant  $p_1$  et  $q_1$ , et  $\gamma'$  la géodésique tracée dans  $C_{23}$  passant par  $q_1$  et orthogonale à la géodésique  $(p_2p_3)$ .  $\gamma$  et  $\gamma'$  s'intersectent en  $q_1$  et engendrent des droites complexes qui sont orthogonales.  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont donc contenues dans un  $\mathbb{R}$ -plan  $L_1$ , qui contient  $p_1$ , et intersectent  $C_{23}$  le long d'une géodésique orthogonale à  $(p_2p_3)$ .  $\square$

*Remarque 6.11.* En définissant le groupe de symétrie d'un triangle idéal de la même façon que pour les tétraèdres idéaux (voir le chapitre 4), le lemme 6.10 implique que génériquement, les triangle idéaux admettent  $S_3$  comme groupe de symétrie, les transpositions étant antiholomorphes. Les éléments d'ordre trois du groupe de symétrie sont  $E$  et  $E^{-1}$ , avec  $E = I_{L_1} \circ I_{L_2} = I_{L_2} \circ I_{L_3} = I_{L_3} \circ I_{L_1}$ .  $E$  est un élément elliptique d'ordre trois qui permute cycliquement  $p_1, p_2$  et  $p_3$ . Les trois  $\mathbb{R}$ -plans  $L_1, L_2$  et  $L_3$  s'intersectent au point fixe de  $E$ , qui est en fait le barycentre de  $p_1, p_2$  et  $p_3$ .

Etant donné trois points de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , le lemme 6.10 nous fournit trois réflexions lagrangiennes de référence, vérifiant (6.2). Les  $\mathbb{R}$ -plans  $L_1, L_2$  et  $L_3$ , fixés par ces trois réflexions lagrangiennes vont nous servir de configurations de référence pour définir les application  $c_{\mathbb{C}}$  et  $c_{\mathbb{R}}$  sur  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ . Le premier pas est donné par le lemme suivant.

**Lemme 6.12.** *Soient  $p_1, p_2$  et  $p_3$  trois points dans  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Il existe un choix de relèvements des ces trois points tel que le  $\mathbb{R}$ -plan  $L_i$  coupe la géodésique  $(p_{i+1}p_{i+2})$  en son point de paramètre 0 pour la paramétrisation standard.*

*Démonstration.* Relevons  $p_1, p_2$  et  $p_3$  en  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  et  $\mathbf{p}_3$  de sorte que

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle = -1 \text{ et } \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1 \rangle = -e^{i\mathbf{A}} \quad (6.4)$$

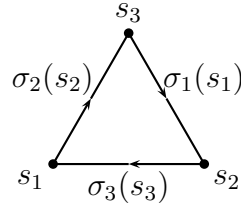


FIG. 6.1 – Orientation des géodésiques reliant les points du cycle.

Les trois géodésiques  $\sigma_1 = (p_2p_3)$ ,  $\sigma_2 = (p_3p_1)$  et  $\sigma_3 = (p_1p_2)$  admettent les paramétrisations standards

$$\begin{cases} \sigma_1(s_1) &= e^{s_1/2}\mathbf{p}_2 + e^{-s_1/2}\mathbf{p}_3 \\ \sigma_2(s_2) &= e^{-i\mathbb{A}}e^{s_2/2}\mathbf{p}_3 + e^{-s_2/2}\mathbf{p}_1 \text{ avec } s_i \in \mathbb{R} \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leq \mathbb{A} \leq \frac{\pi}{2}. \\ \sigma_3(s_3) &= e^{s_3/2}\mathbf{p}_1 + e^{-s_3/2}\mathbf{p}_2 \end{cases} \quad (6.5)$$

Les géodésiques  $\sigma_i$  sont donc orientées comme indiqué sur la figure 6.1.

Si  $p$  et  $q$  sont deux points de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  relevés de sorte de  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = -1$ , la projection d'un point  $z$  sur la géodésique  $(pq)$  admet le relèvement suivant (voir [Par03]).

$$\sqrt{\frac{|\langle \mathbf{z}, \mathbf{q} \rangle|}{|\langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle|}} \cdot \mathbf{p} + \sqrt{\frac{|\langle \mathbf{z}, \mathbf{p} \rangle|}{|\langle \mathbf{z}, \mathbf{q} \rangle|}} \cdot \mathbf{q}$$

Dans le cas qui nous intéresse,  $|\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle| = 1$ . Les composantes selon  $p_{i+1}$  et  $p_{i+2}$  de la projection de  $p_i$  sur  $\sigma_i$  sont donc égales. Le résultat en découle.  $\square$

*Remarque 6.13.* Pour écrire cette paramétrisation de  $\sigma_2$  en utilisant la forme 6.3, nous nous sommes ramenés au cas où  $\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3 \rangle = -1$ , en multipliant le relèvement initial de  $\mathbf{p}_3$  par  $e^{-i\mathbb{A}}$ .

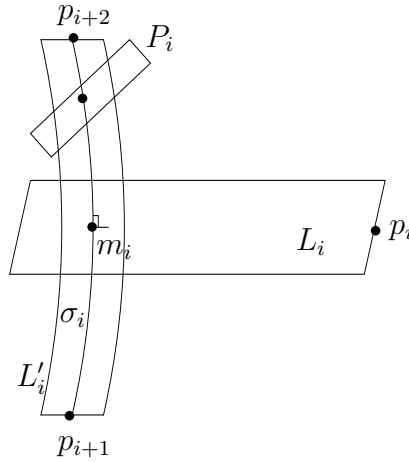
**Notations** Par la suite, nous appellerons  $m_k$  l'intersection de  $\sigma_k$  et  $L_k$ . Nous appellerons  $L'_k$  le  $\mathbb{R}$ -plan passant par  $m_k$ , orthogonal à  $L_k$  (i.e. d'angle  $(\pi/2, \pi/2)$ ).  $L'_k$  contient donc  $\sigma_k$  et  $m_k$ .

Dans le cas où les trois points  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$  sont situés dans une droite complexe, les trois  $\mathbb{R}$ -plans  $L_i$  ne sont plus uniques : il existe un cercle de  $\mathbb{R}$ -plans  $P$  tels que  $I_P(p_i) = p_i$  et  $I_P(p_{i+1}) = p_{i+2}$ .

Nous terminons ce paragraphe par le lemme suivant, qui nous servira dans la définition de  $c_{\mathbb{R}}$  (voir le paragraphe 6.3.3).

**Lemme 6.14.** *Soit  $P$  un  $\mathbb{R}$ -plan tel que  $I_P$  échange  $p_{i+1}$  et  $p_{i+2}$ .  $P$  intersecte  $L'_i$  en un point de  $\sigma_i$ , et l'angle entre  $P$  et  $L'_i$  a pour mesure  $(\pi/2, \theta_i)$  avec  $\theta_i \in [0, \pi[$ .*



FIG. 6.2 – Positions relatives de  $P_i$  et  $L_i$ .

*Démonstration.*  $I_P$  échange les extrémités de  $\sigma_i$ , donc admet un point fixe à l'intérieur de  $\sigma_i$ . C'est l'intersection de  $P$  avec  $\sigma_i \subset L_i'$ . Le fait que  $I_P$  échange les extrémités de  $\sigma_i$  impose que l'angle entre  $P$  et  $L_i'$  lu dans la droite complexe engendrée par  $\sigma_i$  a pour mesure  $\pi/2$ . Voir la figure schématique 6.2.  $\square$

*Remarque 6.15.* Notons que  $\theta_i$  peut prendre n'importe quelle valeur dans  $[0, \pi[$  : pour tout  $\theta \in [0, \pi[$ , il existe un  $\mathbb{R}$ -plan échangeant  $p_{i+1}$  et  $p_{i+2}$  dont l'angle avec  $L_i'$  a pour mesure  $(\pi/2, \theta)$ .

## 6.3 Coordonnées sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$

### 6.3.1 Les involutions échangeant deux points du bord

Commençons par la

**Proposition 6.16.** Soient  $p$  et  $q$  deux points de  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

- Il existe une famille à un paramètre  $t \in \mathbb{R}$  de réflexions complexes d'ordre deux  $R$  telles que  $R(p) = q$ .
- Il existe une famille à deux paramètres  $(t, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \pi[$  de  $\mathbb{R}$ -plans  $P$  tels que  $I_P(p) = q$ .

*Démonstration.* Soient  $L$  la droite complexe contenant  $p$  et  $q$ , et  $\sigma$  la géodésique reliant  $p$  et  $q$ . On paramètre  $\sigma$  par l'abscisse curviligne  $t \in \mathbb{R}$ . Soit  $Q$  un  $\mathbb{R}$ -plan quelconque contenant  $p$  et  $q$  (donc  $\sigma$ ).

- Toute réflexion complexe d'ordre deux échangeant  $p$  et  $q$  a pour miroir la droite complexe orthogonale à  $L$  en un point de paramètre  $t$  de  $\sigma$ .

- Tout  $\mathbb{R}$ -plan  $P$  tels que  $I_P(p) = q$  contient une géodésique tracée dans  $L$ , orthogonale à  $\sigma$ . A tout point de  $\sigma$ , de paramètre  $t \in \mathbb{R}$  est associé un cercle de tels  $\mathbb{R}$ -plans, paramétrés par leur angle avec  $Q$ , de mesure  $(\pi/2, \theta)$  ( $\theta \in [0, \pi]$ ).

□

Nous allons maintenant expliciter ces deux familles d'involutions échangeant deux points du bord. Etant donnés  $p$  et  $q$ , deux points au bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , choisissons deux relèvements  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  tels que  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 1$ , et munissons la géodésique  $\sigma$  qui les relie de la paramétrisation donné par 6.3. Soit alors pour tout réel  $t$  le vecteur

$$\mathbf{c}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{t}{2}}\mathbf{p} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{t}{2}}\mathbf{q} \quad (6.6)$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , le vecteur  $\mathbf{c}(t)$  vérifie  $\langle \mathbf{c}(t), \mathbf{c}(t) \rangle = 1$ . En utilisant la proposition 1.36 page 34, on vérifie que la réflexion par rapport à la droite complexe  $C(t)$  à laquelle  $\mathbf{c}(t)$  est polaire échange  $p$  et  $q$ .

Pour obtenir des matrices associées aux réflexions lagrangiennes échangeant  $p$  et  $q$ , travaillons dans la base  $(\mathbf{p}, \mathbf{p} \boxtimes \mathbf{q}, \mathbf{q})$ . Dans cette base, la forme hermitienne a pour matrice

$$J_{p,q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \langle \mathbf{p} \boxtimes \mathbf{q}, \mathbf{p} \boxtimes \mathbf{q} \rangle & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient cette fois pour les réflexions échangeant  $p$  et  $q$

$$M_{t,\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -e^{-t-i\alpha} \\ 0 & -e^{2i\alpha} & 0 \\ -e^{t-i\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si l'on travaille dans un modèle associé à une forme  $J$  fixée, il est attaché à  $J$  et  $J_{p,q}$  une transformation de Cayley. Pour obtenir des matrices, dans le modèle dans lequel on travaille, il faut conjuguer  $M_{t,\alpha}$  par la transformation de Cayley en respectant l'antiholomorphie des réflexions lagrangienne (voir la remarque 1 page 40). Si  $P$  est un relèvement de la transformation de Cayley, la nouvelle matrice s'écrit  $PM_{t,\alpha}\overline{P^{-1}}$ . On vérifie alors que

$$PM_{t,\alpha}\overline{P^{-1}}\overline{PM_{t,\alpha}\overline{P^{-1}}} = Id.$$

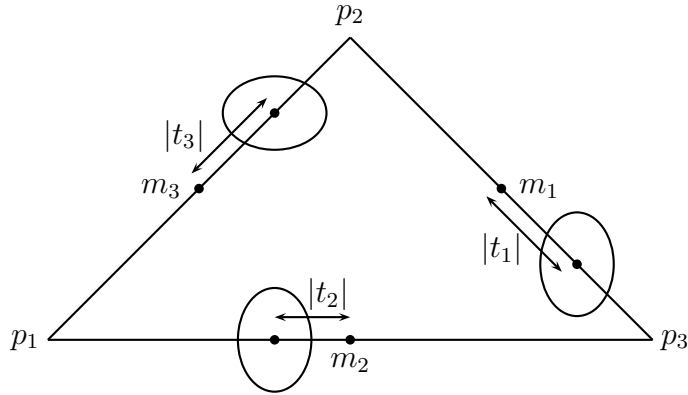
### 6.3.2 Groupes triangulaires complexes : coordonnées sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ .

Définissons maintenant l'application  $c_{\mathbb{C}}$ .

A tout triplet de réflexions complexes d'ordre deux  $(I_1, I_2, I_3)$  tel que  $I_1I_2I_3$  est non-elliptique on associe le quadruplet

$$c_{\mathbb{C}}(I_1, I_2, I_3) = (t_1, t_2, t_3, \mathbb{A}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (6.7)$$

de la manière suivante :

FIG. 6.3 – Coordonnées sur  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ .

- $\mathbb{A}$  est l'invariant de Cartan du triplet  $(p_1, p_2, p_3)$ .
- Le miroir de  $I_k$  coupe  $\sigma_k$  au point de paramètre  $t_k$  (en utilisant la paramétrisation des trois géodésiques donnée par la relation 6.5 page 111.) Voir la figure 6.3.

D'après la proposition 6.16 et la relation (6.6), les trois réflexions complexes  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  ont pour miroirs respectifs les droites complexes polaires aux vecteurs

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{t_1/2} \mathbf{p}_2 - e^{-t_1/2} \mathbf{p}_3) \\ \mathbf{c}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\mathbb{A}} e^{t_2/2} \mathbf{p}_3 - e^{-t_2/2} \mathbf{p}_1) \text{ avec } (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leq \mathbb{A} \leq \frac{\pi}{2}. \\ \mathbf{c}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{t_3/2} \mathbf{p}_1 - e^{-t_3/2} \mathbf{p}_2) \end{cases} \quad (6.8)$$

*Remarque 6.17.* La valeur absolue de  $t_i$  est la distance  $d(\sigma_k(t_k), m_k)$ .

Nous pouvons maintenant prouver la proposition 6.8.

*Démonstration.* de la proposition 6.8

1.  $c_{\mathbb{C}}$  est surjective. En effet, soit  $(t_1, t_2, t_3, \mathbb{A}) \in \mathbb{R}^3 \times [-\pi/2, \pi/2]$ . Fixons un triplet de points  $(p_1, p_2, p_3)$  au bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , d'invariant de Cartan  $\mathbb{A}$ . Pour  $i, j$  et  $k$  deux à deux distincts, soit  $\sigma_i$  la géodésique joignant  $p_j$  et  $p_k$ . Munissons  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  d'un paramétrage standard adapté, tel qu'en (6.5). D'après la proposition 6.16, il existe un unique triplet de réflexions complexes  $(I_1, I_2, I_3)$  tel que  $I_i$  échange  $p_j$  et  $p_k$  et fixe le point de paramètre  $t_i$  de  $\sigma_i$ . Par construction  $c_{\mathbb{C}}(I_1, I_2, I_3) = (t_1, t_2, t_3, \mathbb{A})$ .
2. –  $b$  implique  $a$  car les quantités  $t_1, t_2, t_3$  et  $\mathbb{A}$  sont des invariants de conjugaison de la configuration.
  - Prouvons l'autre implication. Soient  $(I_1, I_2, I_3)$  et  $(I'_1, I'_2, I'_3)$  deux triplets de réflexions complexes tels que

$$c_{\mathbb{C}}(I_1, I_2, I_3) = c_{\mathbb{C}}(I'_1, I'_2, I'_3).$$

Soient  $(p_1, p_2, p_3)$  et  $(p'_1, p'_2, p'_3)$  les triplets de points associés respectivement à  $(I_1, I_2, I_3)$  et  $(I'_1, I'_2, I'_3)$  comme en (6.2). Par hypothèse, ces deux triplets ont même invariant de Cartan. Il existe donc  $g \in \text{PU}(2,1)$  tel que  $g(p_i) = p'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Appelons  $c_k$  (resp.  $c'_k$ ) le miroir de  $I_k$  (resp.  $I'_k$ ). Vu le choix fait pour la paramétrisation des trois géodésiques  $\sigma_i$ , et l'expression ci-dessus pour les  $c_k$ , le fait que  $t_k = t'_k$  implique que  $g(c_k) = c'_k$ .

□

### 6.3.3 Le cas $\mathbb{R}$ -décomposable : coordonnées sur $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ .

Dans ce cas, le produit  $I_1 I_2 I_3$  est antiholomorphe. Nous dirons qu'il est non-elliptique s'il n'a pas de point fixe à l'intérieur de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Si c'est le cas,  $I_1 I_2 I_3$  et son carré  $(I_1 I_2 I_3)^2 = \rho([\mathfrak{m}, \mathfrak{n}])$  ont exactement les mêmes points fixes.

Rappelons qu'au triplet  $(I_1, I_2, I_3)$  sont associés canoniquement les objets suivants :

- $P_1, P_2$  et  $P_3$ , les trois  $\mathbb{R}$ -plans fixés respectivement par  $I_1, I_2$  et  $I_3$ .
- le triplet de points  $(p_1, p_2, p_3)$  tel que  $I_i(p_j) = p_k$ , pour  $i, j$  et  $k$  deux à deux distincts.
- les trois géodésiques  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  reliant respectivement  $p_2$  et  $p_3, p_1$  et  $p_3$  et  $p_1$  et  $p_2$ .
- les trois points  $\iota_k$ , intersections de  $P_k$  avec  $\sigma_k$ .
- les trois  $\mathbb{R}$ -plans  $L_1, L_2$  et  $L_3$  tels que  $I_{L_i}(p_i) = p_i$  et  $I_{L_i}(p_j) = p_k$  (voir le lemme 6.10). Nous appellerons  $m_k$  l'intersection (orthogonale) de  $L_k$  avec  $\sigma_k$ .
- les trois  $\mathbb{R}$ -plans  $L'_k$  intersectant  $L_k$  au point  $m_k \in \gamma_k$  avec un angle de mesure  $(\pi/2, \pi/2)$ . Notons que  $L'_k$  contient  $\gamma_k$  car il est orthogonal à  $L_k$ .

$I_k$  intersecte donc  $L'_k$  au point  $\iota_k$ .  $P_k$  échangeant les extrémités de  $\gamma_k$ , le produit  $I_k \circ I_{P'_k}$  stabilise la droite complexe engendrée par  $\gamma_k$ . De plus, l'angle entre  $P_k$  et  $L'_k$  est de la forme  $(\pi/2, \beta_k)$ . Par conséquent, la donnée de  $\beta_k$  détermine un unique  $\mathbb{R}$ -plan parmi tous ceux qui intersectent  $\gamma_k$  en  $\iota_k$  et qui permutent les extrémités de  $\gamma_k$ .

Nous supposons les trois géodésiques  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  équipées d'un paramétrage standard satisfaisant aux conditions du lemme 6.12. En conséquence  $m_k$  est le point de paramètre 0 de  $\sigma_k$ .

Définissons l'application  $c_{\mathbb{R}}$ .

Soit  $(I_1, I_2, I_3)$  un triplet de réflexions lagrangiennes tel que  $I_1 I_2 I_3$  est non-elliptique. Au triplet  $(I_1, I_2, I_3)$ , on associe

$$c_{\mathbb{R}}(I_1, I_2, I_3)(t_1, \theta_1, t_2, \theta_2, t_3, \theta_3, \mathbb{A}) \in (\mathbb{R} \times [0, \pi])^3 \times \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (6.9)$$

de la manière suivante :

- $\mathbb{A}$  est l'invariant de Cartan du triplet  $(p_1, p_2, p_3)$ .
- $\iota_k$ , intersection de  $P_k$  et  $L'_k$ , est le point de paramètre  $t_k$  de la géodésique  $\sigma_k$ .
- L'angle entre  $P_k$  et  $L'_k$  a pour mesure  $(\pi/2, \theta_k)$  (voir le lemme 6.14)

*Remarque 6.18.* La valeur absolue de  $t_i$  est exactement la distance séparant  $m_i = L_i \cap \sigma_i$  et le point  $\iota_i = P_i \cap \sigma_i$

*Remarque 6.19.* Il n'existe pas d'équivalent des vecteurs polaires pour les réflexions lagrangiennes. Il n'existe donc pas de description aussi simple que 6.8 pour les groupes triangulaires lagrangiens. Il serait possible de donner des matrices de relèvement de  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ , mais leur complexité les rend peu parlantes.

*Démonstration.* de la proposition 6.9

1. La preuve de la surjectivité de  $c_{\mathbb{R}}$  est la même que pour  $c_{\mathbb{C}}$ , à ceci près qu'il faut utiliser la remarque 6.15 pour montrer que  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$  parcourent  $[0, \pi[$ .
2. – De même que précédemment,  $b$  implique  $a$  car toutes les quantités impliquées sont des invariants de conjugaison.
  - Si deux groupes triangulaires lagrangiens  $(I_1, I_2, I_3)$  et  $(I'_1, I'_2, I'_3)$  ont même image par  $c_{\mathbb{R}}$ , quitte à conjuguer dans  $\text{PU}(2,1)$ , on peut supposer qu'ils ont le même cycle  $(p_1, p_2, p_3)$ . Pour tous  $t_i$  et  $\theta_i$  il existe un unique  $\mathbb{R}$ -plan échangeant  $p_j$  et  $p_k$ , coupant  $\sigma_i$  en son point de paramètre  $t_i$ , ayant un angle de mesure  $(\pi/2, \theta_i)$  avec  $L'_i$ . Le résultat en découle directement.

□

## 6.4 Quand le commutateur est-il parabolique ?

Nous nous intéressons dans cette section à l'éventuelle parabolicité du commutateur de  $[I_1 I_2, I_3 I_2] = (I_1 I_2 I_3)^2$ . Nous allons commencer par donner une condition nécessaire de parabolicité du commutateur commune à  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ . Cette condition repose sur le fait que si  $(I_1 I_2 I_3)^2$  est parabolique et fixe  $p_2$ , alors  $I_1 I_2 I_3$  stabilise toute horosphère centrée en  $p_2$ . Nous commençons donc par le lemme suivant, qui décrit les horosphères centrées en un point  $p$  en utilisant le paramétrage standard des géodésiques issue de  $p$ .

**Lemme 6.20.** *Soit  $p$  un point de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  et  $\mathbf{p}$  un relèvement fixé de  $p$ . Pour tout point  $q \in \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , on choisit  $\mathbf{q}$  le seul relèvement de  $q$  tel que  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 1$ , et on munit la géodésique  $\gamma_q = (pq)$  du paramétrage standard  $t \rightarrow \gamma_q(t)$  associé à  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$ . Alors, les horosphères centrées en  $p$  sont exactement les ensembles*

$$H_s = \{ \gamma_q(s), q \in \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \{p\} \}.$$

*Démonstration.* Utilisons le modèle de Siegel. Soient alors  $q_1$  et  $q_2$  deux points distincts de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , distincts de  $p$ , et  $\mathbb{A}$  l'invariant de Cartan du triplet  $(q_1, p, q_2)$  (voir définition 1.86). En normalisant la situation, on peut supposer que  $p$  est à l'infini, et que  $p$ ,  $q_1$  et  $q_2$  admettent les relèvements

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -e^{-i\mathbb{A}} \\ i\sqrt{2 \cos \mathbb{A}} e^{-i\mathbb{A}/2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

En écrivant les paramétrages standards des deux géodésiques  $\mathbf{p}\mathbf{q}_1$  et  $\mathbf{p}\mathbf{q}_2$ , puis en les renormalisant de façon à ce que la dernière coordonnée soit 1, on obtient les paramétrages suivants :

$$\gamma_{q_1}(t_1) = \begin{bmatrix} -e^{t_1} - e^{-i\mathbb{A}} \\ i\sqrt{2 \cos \mathbb{A}} e^{-i\mathbb{A}/2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma_{q_2}(t_2) = \begin{bmatrix} -e^{t_2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Les coordonnées horosphériques de  $\gamma_{q_1}(t_1)$  et  $\gamma_{q_2}(t_2)$  sont donc (voir le chapitre 1 page 23) :

$$\begin{aligned} \gamma_{q_1}(t_1) &: \left( \sqrt{i \cos \mathbb{A}} e^{-i\mathbb{A}/2}, \sin \mathbb{A}, e^{t_1} \right) \\ \gamma_{q_2}(t_2) &: (0, 0, e^{t_2}). \end{aligned}$$

Par conséquent, les points  $\gamma_1(t_1)$  et  $\gamma_2(t_2)$  sont situés sur une même horosphère centrée en  $p$  si et seulement si  $t_1 = t_2$ .  $\square$

*Remarque 6.21.* Dans le lemme précédent, il est crucial de fixer un relèvement de  $p$ , et d'utiliser le même pour tous les points  $q$  de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Le lemme 6.22 va nous permettre de « suivre » une horosphère le long du cycle  $p_1 - p_2 - p_3$ .

**Lemme 6.22.** *Soit  $I$  une isométrie d'ordre deux échangeant deux points  $p$  et  $q$  de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Munissons la géodésique  $\gamma = (pq)$  du paramétrage standard. Soit alors  $s \in \mathbb{R}$  l'abscisse curviligne du point de  $\gamma$  fixé par  $I$ .*

*L'image par  $I$  de l'horosphère centrée en  $p$  et intersectant  $\gamma$  en son point de paramètre  $t$  est l'horosphère centrée en  $q$  intersectant  $\gamma$  en son point de paramètre  $2s - t$ .*

*Démonstration.*  $I$  agit sur  $\gamma$  comme un demi tour euclidien sur  $\mathbb{R}$ . Par conséquent, le point de paramètre  $t$  de  $\gamma$  est envoyé par  $I$  sur le point de paramètre  $2s - t$ . Le résultat découle alors de ce qu'une horosphère est entièrement définie par la donnée de son centre et d'un point qu'elle contient.  $\square$

**Proposition 6.23.** *Soient  $p_1, p_2$  et  $p_3$  trois points de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et soit  $\gamma_i$  la géodésique reliant  $p_{i+2}$  à  $p_{i+1}$  munie du paramétrage standard. Soient  $I_1, I_2$  et  $I_3$  trois involutions isométriques telles que  $I_k$  échange  $p_{k+1}$  et  $p_{k+2}$ , et fixe le point de paramètre  $t_k$  de  $\gamma_k$ . Si l'élément  $I_1 I_2 I_3$  est parabolique, alors*

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0$$

Voir la figure 6.1.

*Démonstration.* Soit  $H$  une horosphère centrée en  $p_2$ . On suppose que  $H$  intersecte  $\gamma_3$  en son point de paramètre  $a \in \mathbb{R}$ . Vu le lemme 6.22,  $I_3$  envoie  $H$  sur  $H'$ , l'horosphère centrée en  $p_1$ , intersectant  $\gamma_3$  en son point de paramètre  $2t_3 - a$ . D'après le lemme 6.20,  $H'$  intersecte la géodésique  $\gamma_2 = (p_1 p_3)$  en son point de paramètre  $a - 2t_3$  (on a changé de signe pour tenir compte de l'orientation des géodésiques). En appliquant, ensuite  $I_2$  et  $I_1$ , on constate que  $I_1 I_2 I_3$  envoie  $H$  sur l'horosphère centrée en  $p$ , intersectant  $\gamma_3$  en son point de paramètre  $a + 2(t_1 + t_2 + t_3)$ . Comme les éléments paraboliques stabilisent les horosphères, on obtient le résultat.  $\square$

La proposition 6.23 donne donc une condition nécessaire de parabolicité sur  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ . Elle n'est pas suffisante : une transformation stabilisant une horosphère de centre  $p$  peut être parabolique, mais elle peut aussi être une réflexion complexe dont le miroir contient  $p$  dans son adhérence. Les deux propositions 6.24 et 6.25 identifient ces cas dégénérés, nous les énonçons avant de les prouver successivement.

**Proposition 6.24.** *Soit  $\rho$  une représentation appartenant à  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ , telle que*

$$c_{\mathbb{C}}(\rho) = (t_1, t_2, t_3, \mathbb{A}).$$

$\rho$  appartient à  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\text{par}}$  si et seulement si  $t_1 + t_2 + t_3 = 0$  et

$$\cos(\mathbb{A}) \neq \frac{1 + r_1^2(1 + r_2^2)}{2r_1(1 + r_2 + r_1 r_2)}$$

où  $r_k = e^{t_k}$  ( $k = 1, 2$ ).

**Proposition 6.25.** *Soit  $\rho$  une représentation appartenant à  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ , telle que*

$$c_{\mathbb{R}}(\rho) = (t_1, \theta_1, t_2, \theta_2, t_3, \theta_3, \mathbb{A}).$$

$\rho$  appartient à  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{\text{par}}$  si et seulement si  $t_1 + t_2 + t_3 = 0$  et

$$e^{2i(\theta_1 - \theta_2 + \theta_3)} \neq \frac{\tau}{\bar{\tau}} \text{ avec } \tau = r_1^2 r_2^2 - r_2^2 e^{2i\theta_1} + e^{2i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

*Dans le cas d'égalité,  $\rho(\mathfrak{m})$  et  $\rho(\mathfrak{n})$  commutent.*

La démonstration de ces deux résultats se fait par le calcul. Nous normalisons le triplet  $(p_1, p_2, p_3)$ , écrivons des matrices pour les trois involutions associées à un point de  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  et déterminons par un calcul direct si le produit  $I_1 I_2 I_3$  pour  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  et  $(I_1 I_2 I_3)^2$  pour  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  est une réflexion complexe ou l'identité.

- Pour le cas de  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ , il faut utiliser la matrice pour l'inversion par rapport à un  $\mathbb{R}$ -plan donnée en terme de centre et rayon du  $\mathbb{R}$ -cercle au premier chapitre (voir le lemme 1.66 page 40).

– Pour le cas de  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ , il faut utiliser les vecteurs polaires au miroirs des réflexions. Nous donnons à la fin de la section les éléments nécessaires à ce calcul. En utilisant les matrices que nous donnons, on peut calculer de façon précise la trace de  $(I_1 I_2 I_3)^2$  dans  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ . On montre alors les résultats suivant :

**Proposition 6.26.** *Soit  $\rho$  un point de  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  tel que  $c_{\mathbb{C}}(\rho) = (t_1, t_2, t_3, \mathbb{A})$ . Soit  $I_1, I_2$  et  $I_3$  les trois réflexions complexes associées. On a*

$$\mathrm{tr} \rho([\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]) = \mathrm{tr}(I_1 I_2 I_3)^2 = e^{-2i\mathbb{A}} (e^{2i(t_1+t_2+t_3)} + e^{-2i(t_1+t_2+t_3)}) + e^{4i\mathbb{A}}.$$

**Proposition 6.27.** *Soit  $\rho$  un point de  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  tel que  $c_{\mathbb{R}}(\rho) = (t_1, \theta_1, t_2, \theta_2, t_3, \theta_3 \mathbb{A})$ . Soit  $I_1, I_2$  et  $I_3$  les trois réflexions lagrangiennes associées. On a*

$$\mathrm{tr} \rho([\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]) = \mathrm{tr}(I_1 I_2 I_3)^2 = e^{2i(t_1+t_2+t_3)} + e^{-2i(t_1+t_2+t_3)} + 1.$$

On retrouve ainsi le fait que la condition  $t_1 + t_2 + t_3 = 0$  est nécessaire. De plus, on constate la différence de comportement pour les points de  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  où  $(I_1 I_2 I_3)^2$ , le commutateur de  $I_1 I_2$  et  $I_3 I_2$  est parabolique :

- Si le groupe triangulaire  $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$  appartient à  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  et est tel que  $(I_1 I_2 I_3)^2$  est parabolique, alors  $(I_1 I_2 I_3)^2$  est une translation de Heisenberg (de trace réelle égale à 3).
- Si le groupe triangulaire  $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$  appartient à  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ , et est tel que  $(I_1 I_2 I_3)^2$  est parabolique, alors  $(I_1 I_2 I_3)^2$  est ellipto-parabolique et sa trace vaut  $2e^{-2i\mathbb{A}} + e^{4i\mathbb{A}}$ . Cette dernière quantité paramétrise le « triangle des traces paraboliques »,  $\Delta$  (cf page 26).

Nous déduisons de cette dernière remarque la

**Proposition 6.28.** *Soit  $\mathcal{C}$  une classe de conjugaison ellipto-parabolique. Il existe une représentation  $\rho$ ,  $\mathbb{C}$ -décomposable de  $F_2$  dans  $\mathrm{PU}(2,1)$  telle que  $\rho([\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]) \in \mathcal{C}$ .*

D'où

**Proposition 6.29.** *Soit  $\mathcal{C}$  une classe de conjugaison parabolique. Il existe une représentation  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ -décomposable de  $F_2$  dans  $\mathrm{PU}(2,1)$  telle que  $\rho([\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]) \in \mathcal{C}$ .*



### Preuve des propositions 6.24 et 6.26

Choisissons un représentant particulier d'un point de  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  en normalisant les trois points  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$ . Quitte à conjuguer, on peut supposer que le cycle est

$$p_1 = \begin{bmatrix} -e^{-i\mathbb{A}} \\ i\sqrt{2 \cos \mathbb{A}} e^{-i\mathbb{A}/2} \\ 1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soit donc le point de  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  de coordonnées  $(t_1, t_2, t_3, \mathbb{A})$ . Les miroirs des trois réflexions complexes décomposant  $\rho(\mathbf{m})$  et  $\rho(\mathbf{n})$  sont polaires aux vecteurs  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  obtenus par les relations 6.8.

Les trois vecteurs étant de norme unité, l'inversion  $I_k$  s'écrit  $Z \rightarrow -Z + 2\langle Z, c_k \rangle c_k$  ou encore, sous forme matricielle

$$-Id + 2c_k c_k^*,$$

où  $c_k^*$  désigne la forme linéaire duale de  $c_k$  :  $c_k^*(Z) = \langle Z, c_k \rangle$ . Matriciellement,  $c_k^* = J\bar{c}_k$ . Nous obtenons de cette manière les trois matrices suivantes pour  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ .

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{t_1} \\ 0 & -1 & 0 \\ e^{-t_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} -e^{-(t_2+i\mathbb{A})} & i\sqrt{2 \cos \mathbb{A}} e^{-(t_2+i\mathbb{A}/2)} & e^{-t_2} \\ -i\sqrt{2 \cos \mathbb{A}} e^{i\mathbb{A}/2} (1 - e^{-(t_2+i\mathbb{A})}) & 2 \cos \mathbb{A} e^{-t_2} - 1 & -i\sqrt{2 \cos \mathbb{A}} e^{-t_2+i\mathbb{A}/2} \\ 2 \cosh t_2 - 2 \cos \mathbb{A} & i\sqrt{2 \cos \mathbb{A}} e^{-i\mathbb{A}/2} (1 - e^{-(t_2-i\mathbb{A})}) & -e^{-(t_2-i\mathbb{A})} \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} -e^{t_3-i\mathbb{A}} & -i\sqrt{2 \cos \mathbb{A}} e^{i\mathbb{A}/2} (1 - e^{-(-t_3+i\mathbb{A})}) & 2 \cosh t_3 - 2 \cos \mathbb{A} \\ i\sqrt{2 \cos \mathbb{A}} e^{-(-t_3+i\mathbb{A}/2)} & 2 \cos \mathbb{A} e^{t_3} - 1 & i\sqrt{2 \cos \mathbb{A}} e^{-i\mathbb{A}/2} (1 - e^{t_3+i\mathbb{A}}) \\ e^{t_3} & -i\sqrt{2 \cos \mathbb{A}} e^{t_3+i\mathbb{A}/2} & -e^{t_3+i\mathbb{A}} \end{bmatrix}$$

Dans ces conditions,  $\rho([\mathbf{m}, \mathbf{n}])$  est parabolique si et seulement si  $(I_1 I_2 I_3)$  l'est. L'isométrie  $(I_1 I_2 I_3)$  fixant le point à l'infini, elle est représentée par une matrice triangulaire supérieure de  $SU(2,1)$  dont la forme est donnée par la relation 1.5 page 30. On vérifie par le calcul

que, dans le cas où  $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ , les paramètres  $z$ ,  $\theta$  et  $t$  de la relation 1.5 sont alors donnés par

$$z = i\sqrt{\cos \mathbb{A}} e^{3i\mathbb{A}/2} (e^{i\mathbb{A}} - e^{t_1+t_2} + e^{t_1-i\mathbb{A}}), \quad (6.12)$$

$$t = -2e^{t_1} \sin \mathbb{A} - |z|^2 \tan \mathbb{A}, \quad (6.13)$$

$$\theta = 3\mathbb{A} + \pi.$$

D'après le critère donné page 30,  $I_1 I_2 I_3$  est parabolique si et seulement si

$$\frac{|z|^2 (1 + \cos \theta)}{\sin \theta} - t \neq 0.$$

Cette condition se réécrit

$$|z|^2 \frac{\cos(2\mathbb{A}) - \cos \mathbb{A}}{\cos \mathbb{A} \sin 3\mathbb{A}} + 2e^{t_1 \sin \mathbb{A}} \neq 0$$

ou encore

$$|z|^2 \neq 2e^{t_1} \cos \mathbb{A} \frac{\sin \mathbb{A} \sin(3\mathbb{A})}{\cos \mathbb{A} - \cos 2\mathbb{A}}$$

et après simplification

$$|z|^2 \neq 2e^{t_1} \cos \mathbb{A} (\cos \mathbb{A} + \cos 2\mathbb{A})$$

On obtient alors le résultat annoncé dans la proposition 6.24 en injectant dans cette dernière relation la valeur de  $z$  donnée ci-dessus.

Lorsque la relation  $t_1 + t_2 + t_3$  n'est pas vérifiée,  $I_1 I_2 I_3$  est donnée par la matrice

$$I_1 I_2 I_3 = \begin{bmatrix} -w & a & b \\ 0 & \frac{w}{w} & c \\ 0 & 0 & \frac{-1}{w} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} w &= \exp(t_1 + t_2 + t_3 - i\mathbb{A}) \\ a &= i\sqrt{2 \cos \mathbb{A}} (\exp(t_1 + t_2 + t_3 - i\mathbb{A}/2) - \exp(t_1 + t_2 + i\mathbb{A}/2) + \exp(t_1 + 3i\mathbb{A}/2)) \\ b &= \exp(t_1) + \exp(t_1 + t_2 + t_3) + \exp(t_1 + t_2 - t_3) + \exp(t_1 - t_2 - t_3) \\ &\quad - 2 \cos \mathbb{A} (\exp(t_1 + t_2) + \exp(t_1 - t_3)) + \exp(t_1 + 2i\mathbb{A}) \\ c &= -i\sqrt{2 \cos \mathbb{A}} (\exp(3i\mathbb{A}/2) - \exp(i\mathbb{A}/2 - t_3) + \exp(-t_2 - t_3 - i\mathbb{A}/2)) \end{aligned}$$

On obtient ainsi la valeur de la trace annoncée dans la proposition 6.26.

### Preuve des propositions 6.25 et 6.27

On procède de la même manière que pour la proposition 6.24, mais en utilisant une autre normalisation des trois points  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$ . Cette fois,

$$p_1 = \sqrt{\cos \mathbb{A}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \frac{-1}{\sqrt{\cos \mathbb{A}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad p_3 = \sqrt{\cos \mathbb{A}} \begin{bmatrix} -1 + i \tan \mathbb{A} \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ces trois vecteurs satisfont les conditions 6.4. Dans cette normalisations, les  $\mathbb{R}$ -plans de référence  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  sont fixés par les trois involutions lagrangiennes associées aux matrices  $I_1^{\text{ref}}(\mathbb{A})$ ,  $I_2^{\text{ref}}(\mathbb{A})$  et  $I_3^{\text{ref}}(\mathbb{A})$  :

$$I_1^{\text{ref}}(\mathbb{A}) = \begin{bmatrix} -e^{-i\mathbb{A}} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} \cos \mathbb{A} & e^{i\mathbb{A}} & 0 \\ \cos \mathbb{A} & \sqrt{2} \cos \mathbb{A} & -e^{-i\mathbb{A}} \end{bmatrix} \quad I_2^{\text{ref}}(\mathbb{A}) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & -1 + i \tan \mathbb{A} \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3^{\text{ref}}(\mathbb{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/\cos \mathbb{A} \\ 0 & -e^{i\mathbb{A}} & 0 \\ \cos \mathbb{A} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Définition 6.30.** Soit  $P_{t_i, \theta_i, \mathbb{A}}^i$  le  $\mathbb{R}$ -plan qui intersecte  $\sigma_i$  au point de paramètre  $t_i$  et fait un angle  $(\pi/2, \theta)$  avec  $L_i$ , tel que dans le lemme 6.14. Soit  $I_{t_i, \theta, \mathbb{A}}^i$  l'inversion lagrangienne associée.

Notons  $r_k = \exp t_k$ . Les inversions  $I_{t_i, \theta, \mathbb{A}}^i$  sont associées aux matrices

$$M_{t_1, \theta_1, \mathbb{A}}^1 = \begin{bmatrix} -e^{-i\mathbb{A}} r_1^2 & -\sqrt{2} e^{-i\mathbb{A}} (r_1^2 - e^{2i\theta_1}) & \frac{1}{r_1^2 \cos \mathbb{A}} (1 - r_1^2 e^{2i\theta_1} (1 + e^{-2i\mathbb{A}}) + r_1^4 e^{-2i\mathbb{A}}) \\ \sqrt{2} \cos \mathbb{A} r_1^2 & 2r_1^2 \cos \mathbb{A} - e^{2i(\theta_1 - \mathbb{A})} & -\sqrt{2} e^{-i\mathbb{A}} (r_1^2 - e^{2i\theta_1}) \\ r_1^2 \cos \mathbb{A} & \sqrt{2} \cos \mathbb{A} r_1^2 & -e^{-i\mathbb{A}} r_1^2 \end{bmatrix}$$

$$M_{t_2, \theta_2, \mathbb{A}}^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_2^2} & \frac{\sqrt{2}}{r_2^2} & \frac{(-1 + i \tan \mathbb{A})}{r_2^2} \\ \frac{\sqrt{2} \cos \mathbb{A} e^{i\mathbb{A}} (r_2^2 e^{2i\theta_2} - 1)}{r_2^2} & -\frac{1 + e^{2i\mathbb{A}} - r_2^2 e^{2i(\theta_2 + \mathbb{A})}}{r_2^2} & \frac{\sqrt{2}}{r_2^2} \\ \frac{\cos \mathbb{A}}{r_2^2} (2r_2^2 e^{2i\theta_2} \cos \mathbb{A} - e^{i\mathbb{A}} - r_2^4 e^{-i\mathbb{A}}) & \sqrt{2} \cos \mathbb{A} e^{i\mathbb{A}} \left( e^{2i\theta_2} - \frac{1}{r_2^2} \right) & \frac{1}{r_2^2} \end{bmatrix}$$

$$M_{t_3, \theta_3, \mathbb{A}}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{r_3^2}{\cos \mathbb{A}} \\ 0 & -e^{i(\mathbb{A}+2\theta_3)} & 0 \\ \frac{\cos \mathbb{A}}{r_3^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En calculant le produit  $M = M^1 \overline{M^2} M^3$ , on obtient un relèvement  $C$  du commutateur par  $C = M \overline{M}$ .

*Remarque 6.31.* Les matrices  $M_{t_i, \theta_i, \mathbb{A}}^i$ , ci-dessus, ainsi que  $M$  ne sont pas dans  $SU(2,1)$ , mais dans  $U(2,1)$ . Cependant la matrice  $C = M \overline{M}$  est, elle, dans  $SU(2,1)$ . Nous n'avons pas normalisé ces trois matrices pour ne pas alourdir leur écriture.

Dans le cas où  $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ ,  $C$  est soit parabolique, soit l'identité. Si  $C$  est l'identité, alors  $M^{-1} = \overline{M}$ . Nous allons obtenir la condition de la proposition 6.25 en calculant  $\overline{M} - M^{-1}$ .

Calculons  $M$ . On obtient

$$M = \begin{bmatrix} (r_1 r_2 r_3)^{-2} & \bar{z} (r_1 r_2 r_3)^{-2} e^{2i(\theta_1 + \theta_3 - \theta_2)} \sqrt{2} & (r_1 r_2 r_3)^{-2} (-|z|^2 + it) \\ 0 & -e^{2i(\theta_1 + \theta_3 - \theta_2)} & z \sqrt{2} \\ 0 & 0 & (r_1 r_2 r_3)^2 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

avec

$$z = r_3^2 e^{2i(\theta_1 - \theta_2)} - r_3^2 r_2^3 e^{2i\theta_1} + (r_1 r_2 r_3)^2$$

$$\begin{aligned} \text{et } t &= \tan \mathbb{A} ((r_1 r_2 r_3)^4 - (r_2 r_3)^4 + r_3^4) + 2r_1^2 (r_2 r_3)^4 \sin(2\theta_1) \\ &\quad + 2(r_1 r_2)^2 r_3^4 \sin 2(\theta_2 - \theta_1) - 2r_2^2 r_3^4 \sin(2\theta_2) \end{aligned}$$

En supposant vérifiée l'égalité  $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ , qui se traduit par  $r_1 r_2 r_3 = 1$ , calculons  $\overline{M} - M^{-1}$ . Nous obtenons

$$\overline{M} - M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -a\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & a\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où

$$a = -\frac{e^{2i(\theta_2 - \theta_1)}}{r_1^2 r_2^2} + \frac{e^{-2i\theta_1}}{r_1^2} - 1 + e^{-2i\theta_2} \left( e^{2i(\theta_2 - \theta_1)} + \frac{1}{r_1^2 r_2^2} - \frac{e^{2i\theta_2}}{r_1^2} \right)$$

Par conséquent, l'isométrie  $(I_1 I_2 I_3)^2$  est parabolique si et seulement si  $a \neq 0$ , ce qui se traduit par

$$e^{2i\theta_3} \neq e^{2i(\theta_2-\theta_1)} \frac{r_1^2 r_2^2 - r_2^2 e^{2i\theta_1} + e^{2i(\theta_1-\theta_2)}}{r_1^2 r_2^2 - r_2^2 e^{-2i\theta_1} + e^{2i(\theta_2-\theta_1)}}.$$

On en déduit le résultat

*Remarque 6.32.* La condition donnée par la proposition 6.25x ne fait pas intervenir l'invariant de Cartan  $\mathbb{A}$ . Dans la forme de  $M$  donnée par la relation 6.14,  $\mathbb{A}$  n'intervient que dans  $t$ , et disparaît lorsque l'on calcule  $\overline{M} - M^{-1}$ .

## 6.5 Commutateur elliptique.

Nous terminons ce chapitre par une brève description des cas où  $\rho([m, n])$  est elliptique régulier. Dans ces conditions, nous appelons toujours  $p_2$  son point fixe,  $p_3 = I_1(p_2)$  et  $p_1 = I_3(p_2)$ . Cette fois, les trois points sont situés à l'intérieur de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Comme dans le cas où le commutateur est non-elliptique, nous commençons par décrire les réflexions complexes qui échangent deux points de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

**Proposition 6.33.** *Soient  $p$  et  $q$  deux points de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .*

- *Il existe une unique réflexion complexe d'ordre deux  $R$  telle que  $R(p) = q$ .*
- *Il existe un cercle de  $\mathbb{R}$ -plans  $P$  tels que  $I_P(p) = q$ .*

*Démonstration.* Soient  $C$  la droite complexe contenant  $p$  et  $q$ ,  $\sigma$  la géodésique reliant  $p$  et  $q$ , et  $m$  le milieu du segment géodésique  $[pq]$ . Toute involution échangeant  $p$  et  $q$  fixe  $m$  et stabilise  $C$ . Par conséquent :

- La seule réflexion complexe d'ordre deux échangeant  $p$  et  $q$  a pour miroir la droite complexe orthogonale à  $C$  en  $m$ .
- Les seuls  $\mathbb{R}$ -plans  $P$  tels que  $I_P(p) = q$  sont ceux qui contiennent la géodésique tracée dans  $C$  orthogonale à  $\sigma$  en  $m$ . Il existe un cercle de tels  $\mathbb{R}$ -plans.

□

Nous allons maintenant donner une forme explicite de ces involutions dans les deux cas holomorphes et antiholomorphes.

Dans le cadre des hypothèses de la proposition 6.33, on peut choisir des relèvements  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  de  $p$  et  $q$  tels que

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = -1 \text{ et } \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle > 0$$

Notons qu'alors  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle^2 = \cosh(\rho(p, q)/2) > 1$ . Par suite, le vecteur  $\mathbf{p} + \mathbf{q}$  est de norme positive :

$$\langle \mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p} + \mathbf{q} \rangle = -2 + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$$

Posons alors

$$\mathbf{u}_{pq} = \frac{1}{2(\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle - 1)}(\mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

Le vecteur  $\mathbf{u}_{pq}$  est polaire à une droite complexe  $C_{pq}$ , et la réflexion complexe d'ordre deux par rapport à  $C_{pq}$  échange  $p$  et  $q$ . Pour ce qui est des réflexions lagrangiennes échangeant  $p$  et  $q$ , elles ont pour matrices dans la base (non-orthogonale)  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p} \boxtimes \mathbf{q})$

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & e^{-i\alpha} & 0 \\ e^{-i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{2i\alpha} \end{bmatrix} \text{ avec } \alpha \in [0, \pi[.$$

$M$  vérifie  $M_\alpha \overline{M_\alpha} = Id$ . Ecrire la matrice d'une isométrie dans la base  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p} \boxtimes \mathbf{q})$  revient à travailler dans le modèle de  $\mathbf{H}_\mathbb{C}^2$  associé à la forme de signature (2,1) ayant pour matrice

$$J_{p,q} = \begin{bmatrix} -1 & \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle & 0 \\ \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{p} \boxtimes \mathbf{q}, \mathbf{p} \boxtimes \mathbf{q} \rangle \end{bmatrix}.$$

On obtient ensuite des matrices dans le modèle de travail de même que dans la section 6.3.1.

### 6.5.1 Représentations $\mathbb{C}$ -décomposables.

D'après la proposition 6.33, pour toute paire de point de  $\mathbf{H}_\mathbb{C}^2$ , il existe une unique réflexion d'ordre deux par rapport à une droite complexe qui les échange. En conséquence, on obtient directement le lemme suivant

**Lemme 6.34.** *Soit  $(p_1, p_2, p_3)$  un triplet de points distincts de  $\mathbf{H}_\mathbb{C}^2$ . Il existe un unique triplet de droites complexes  $(C_1, C_2, C_3)$ , tel que, en notant  $I_k$  la réflexion d'ordre deux par rapport à  $C_k$  tel que  $I_k(p_{k+1}) = p_{k+2}$  (indices pris modulo 3).*

La proposition suivante est une conséquence directe.

**Proposition 6.35.** *Soient  $(I_1, I_2, I_3)$  et  $(I'_1, I'_2, I'_3)$  deux triplets de réflexions complexes tels que les produit  $I_1 I_2 I_3$  et  $I'_1 I'_2 I'_3$  soient elliptiques réguliers. Soient  $(p_1, p_2, p_3)$  et  $(p'_1, p'_2, p'_3)$  les cycles associés. Les deux conditions suivantes son équivalentes*

- $g \in \text{PU}(2,1)$  vérifie  $g I_k g^{-1} = I'_k$  pour  $k = 1, 2, 3$ .
- $g \in \text{PU}(2,1)$  vérifie  $g(p_k) = p'_k$ .

On peut donc obtenir un ensemble de coordonnées en normalisant le cycle : tout triplet de points de  $\mathbf{H}_\mathbb{C}^2$  est équivalent sous  $\text{PU}(2,1)$  à un triplet  $(q_1, q_2, q_3)$  donné dans le modèle de la boule par

$$q_1 = (0, x_2), q_2 = (0, 0) \text{ et } q_3 = (x_1, z_2) \text{ où } x_1, x_2 \in ]0, 1[ \quad (6.15)$$

### 6.5.2 Représentations $\mathbb{R}$ -décomposables.

Toujours d'après la proposition 6.33, il existe un cercle de réflexions lagrangiennes échangeant deux points donnés de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Nous allons décrire une famille de référence qui nous fournira des coordonnées.  $q_1, q_2$  et  $q_3$  désignent toujours les points définis par 6.15. Fixons un triplet de  $\mathbb{R}$ -plans  $Q_1, Q_2$  et  $Q_3$  tels que  $Q_i$  contienne  $q_{i+1}$  et  $q_{i+2}$  (indices pris modulo 3). Pour  $i = 1, 2, 3$ , soit alors  $P_i^{\theta_i}$  le  $\mathbb{R}$ -plan défini de la manière suivante :

- La réflexion par rapport  $I_i^{\theta_i}$  par rapport à  $P_i^{\theta_i}$  échange  $q_{i+1}$  et  $q_{i+2}$ .
- L'angle entre  $P_i^{\theta_i}$  et  $Q_i$  a pour mesure  $(\pi/2, \theta_i)$  avec  $\theta_i \in [0, \pi[$

Ces conditions définissent un unique  $\mathbb{R}$ -plan, car le fait que  $I_i^{\theta_i}$  échange  $q_{i+1}$  et  $q_{i+2}$  impose que la composée  $I_{Q_i} \circ I_i^{\theta_i}$  stabilise la droite complexe engendrée par  $q_{i+1}$  et  $q_{i+2}$ .

On en déduit la proposition suivante

**Proposition 6.36.** *Soit  $(I_1, I_2, I_3)$  un triplet de réflexions lagrangiennes tel que  $(I_1 I_2 I_3)^2$  est elliptique régulier. Il existe un unique  $(x_1, x_2, z_2)$  vérifiant  $x_i \in ]0, 1[$  et  $z_2 \in \mathbb{C}$  tel et un unique triplet  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in [0, \pi[$  tel que le triplet  $(I_1, I_2, I_3)$  est conjugué dans  $\text{PU}(2,1)$  à  $(I_1^{\theta_1}, I_2^{\theta_2}, I_3^{\theta_3})$ .*

# Chapitre 7

## Tore époiné et groupes triangulaires lagrangiens.

### 7.1 Introduction

Dans le chapitre 5, nous avons donné un critère de décomposabilité des groupes engendrés par deux éléments loxodromiques en un groupe triangulaire lagrangien. Nous avons vu de plus que si  $\rho$  est une représentation telle que  $\rho(\mathfrak{m})$  et  $\rho(\mathfrak{n})$  sont loxodromiques, et telle que le commutateur  $\rho([\mathfrak{m}, \mathfrak{n}])$  est parabolique pur et conjugué à une translation de Heisenberg non verticale, alors  $\rho$  est  $\mathbb{R}$ -décomposable. Nous allons maintenant décrire une famille de représentations discrètes, fidèles, préservant le type et  $\mathbb{R}$ -décomposables du groupe fondamental du tore époiné (voir définition 5.9). Nous allons utiliser pour la décrire les coordonnées sur  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  décrites au chapitre précédent. Une telle représentation peut être vue comme la donnée de trois réflexions lagrangiennes  $I_1, I_2$  et  $I_3$  vérifiant

- Le groupe engendré par  $I_1, I_2$  et  $I_3$  est discret et isomorphe au produit libre de trois copies de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
- Les deux éléments  $A = I_1 \circ I_2$  et  $B = I_3 \circ I_2$  sont loxodromiques.
- Leur commutateur  $[A, B]$  est parabolique.
- Tout élément non loxodromique du sous-groupe d'indice deux engendré par  $A$  et  $B$  est parabolique, et conjugué dans  $\langle A, B \rangle$  à une puissance de  $[A, B]$ .

Rappelons que  $T_{1,1}$  désigne l'espace de Teichmüller du tore époiné. Notre objectif principal est de démontrer le

**Théorème 7.1.** *Il existe une famille à un paramètre  $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$  d'applications*

$$\phi_{\alpha} : T_{1,1} \longrightarrow \text{Hom}(F_2, \text{PU}(2,1))$$

*satisfaisant aux conditions suivantes.*

1.  $\phi_{\alpha_1}([\rho_1]) = \phi_{\alpha_2}([\rho_2])$  si et seulement si  $\alpha_1 = \alpha_2$  et  $[\rho_1] = [\rho_2]$



2. Pour tout  $[\rho] \in T_{(1,1)}$  et pour tout  $\alpha \in [-\pi/4, \pi/4]$ ,  $\phi_\alpha([\rho])$  est une classe de représentations discrètes, fidèles, préservant le type et  $\mathbb{R}$ -décomposables du groupe fondamental du tore épointé.
3. Pour tout  $[\rho] \in T_{(1,1)}$ ,  $\phi_\alpha([\rho])$  stabilise un  $\mathbb{R}$ -plan si et seulement si  $\alpha = 0$ .
4. Le segment  $(\phi_\alpha)_{|\alpha| < \pi/4}$  est maximal : si  $\pi/4 < |\alpha| \leq \pi/2$ , il existe  $[\rho] \in T_{(1,1)}$  telle que  $\phi_\alpha([\rho])$  contient un élément elliptique, et est par conséquent non-discrète ou non-fidèle.

Pour ce faire, nous allons devoir prouver la discrétude de groupes engendrés par des réflexions lagrangiennes. Nous allons dans ce but appliquer le résultat suivant.

**Théorème 7.2.** *Soit  $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  des sous-groupes de  $PU(2,1)$  tels que la réunion des  $\Gamma_i$  engendre  $\Gamma$ . Supposons qu'il existe des ensembles ouverts  $U_1, \dots, U_n$  de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  satisfaisant aux conditions suivantes*

- Pour tout  $g$  dans  $\Gamma_i$ ,  $g.U_i \cap U_i = \emptyset$
- $U = \bigcap U_i$  est non-vide
- $U_i \cup U_j = \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  si  $i \neq j$ .

Alors

1. Le groupe  $\Gamma$  est le produit libre des  $\Gamma_i$ .
2. Pour tout  $g$  dans  $\Gamma$ ,  $g \cdot D \cap D = \emptyset$
3.  $\Gamma$  est discret.

Ce théorème, qui est bien connu pour les groupes de Schottky, est de nature topologique. Il est donc également valable dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et la démonstration est identique (voir [Rat94], page 584). On peut également considérer l'action d'un groupe sur  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  au lieu de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Le résultat reste valable en remplaçant les ouverts de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  par des ouverts de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Dans notre cas, le groupe  $\Gamma$  est engendré par trois réflexions lagrangiennes  $I_1, I_2$  et  $I_3$ , et il y a trois sous-groupes  $\langle I_1 \rangle, \langle I_2 \rangle$  et  $\langle I_3 \rangle$ .

Pour appliquer le théorème ci-dessus, nous allons associer à l'involution chaque  $I_k$  une hypersurface stable par  $I_k$ , séparant l'espace en deux composantes connexes échangées par  $I_k$ . Dans ce but, nous allons introduire les  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales (voir la définition 7.9). Ce sont des hypersurfaces de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  feuilletées par des  $\mathbb{R}$ -plans, et stables par l'inversion par rapport à chacune de leurs feuilles. La principale difficulté dans la preuve est de montrer que deux  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales sont disjointes. Les deux propositions 7.18 et 7.21 fournissent des conditions suffisantes pour garantir que deux  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales sont disjointes.

Ces hypersurfaces sont similaires dans leur définition aux surfaces spinales (aussi appelées bissecteurs) définies par Mostow. Nous commençons donc par rappeler quelques faits au sujet des surfaces spinales.

## 7.2 Les surfaces spinales

**Définition 7.3.** Soit  $\gamma$  une géodésique de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  et  $C$  la droite complexe qu'elle engendre. La surface spinale de spine réelle  $\gamma$ , est l'image réciproque de  $\gamma$  par la projection orthogonale sur  $C$ .  $C$  est sa *spine complexe*.

De nombreuses propriétés des bissecteurs sont décrites dans le chapitre 5 de [Gol99]. La terminologie de surface spinale est due à Mostow, mais on lui préfère souvent le terme de bissecteur. Dans tout le chapitre, nous allons utiliser le terme de spine. Malgré de longues discussions, il n'existe pas encore de terme satisfaisant pour traduire spine. A défaut, nous continuerons donc à appeler la spine spine.

*Remarque 7.4.* Soit  $\gamma$  une géodésique de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et  $C$ , l'unique droite complexe contenant  $\gamma$  (voir le lemme 1.28, page 32). L'unicité de  $C$  montre qu'il y a une correspondance bijective entre les géodésiques de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  et les surfaces spinales : toute géodésique est contenue dans une unique surface spinale dont elle est la spine réelle. On appelle parfois les extrémités de la spine réelle les *sommets* de la surface spinale.

Les surfaces spinales apparaissent naturellement lors de l'utilisation du procédé de Dirichlet pour construire des domaines fondamentaux (voir [Mos80, Der05]), qui nécessite l'utilisation des hypersurfaces de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  formées des points équidistants de deux points donnée (voir [Gol99]) :

**Proposition 7.5.** 1. Soient  $p$  et  $q$  deux points de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , et  $\mathcal{E}(p, q)$  l'ensemble des points  $m$  de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  équidistants de  $p$  et  $q$ .  $\mathcal{E}(p, q)$  est une surface spinale.  
2. Toute surface spinale est obtenue comme lieu des points équidistants de deux points de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Les bissecteurs ont la remarquable propriété de posséder un double feuilletage par des sous-espaces totalement géodésiques. Ainsi,  $S$ , la surface spinale associée à la géodésique  $\gamma$  contenue dans la droite complexe  $C$ , possède :

- Un feuilletage en droite complexes, donné par les fibres de la projection sur  $\mathbb{C}$  au dessus de  $\gamma$ . Ces fibres s'appellent les *parallèles* de  $S$ .
- Un feuilletage singulier en  $\mathbb{R}$ -plans, dont les feuilles sont les  $\mathbb{R}$ -plans contenant  $\gamma$ . Ce feuilletage a deux points singuliers, qui sont les extrémités de  $\gamma$ . Ces  $\mathbb{R}$ -plans s'appellent les *méridiens* de  $S$ .

A chacune des feuilles complexes ou réelles est associée une involution, réflexion complexe ou lagrangienne, qui préserve le bissecteur.

Si  $B$  est un bissecteur,  $\overline{B} \cap \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  est appelée une *sphère spinale*. Les deux feuilletages en  $\mathbb{R}$ -plans et droites complexes de  $S$  se traduisent par deux feuilletages de la sphère spinale associée, en  $\mathbb{R}$ -cercles et  $\mathbb{C}$ -cercles, qui sont représentés sur la figure 7.1.

Malgré la simplicité de leur définition, les bissecteurs sont des objets assez complexes. A titre d'exemple, la proposition suivante est due à Goldman (voir [Gol99], théorème 5.5.1).

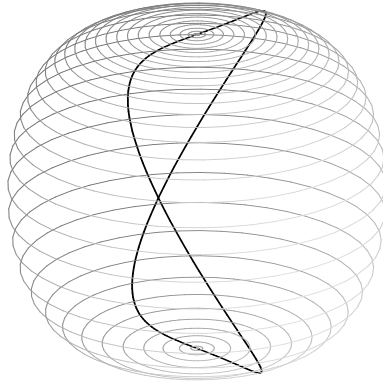
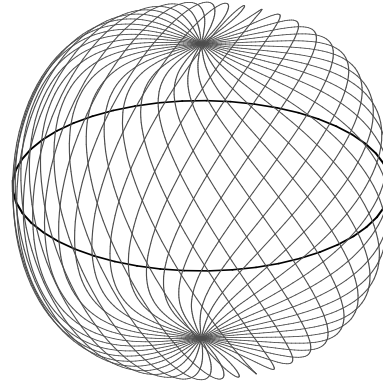
Feuilletage en  $\mathbb{C}$ -cerclesFeuilletage singulier en  $\mathbb{R}$ -cercles

FIG. 7.1 – Les deux feuilletages de la sphère spinale associée à un bissecteur.

**Proposition 7.6.** *Soient  $B$  un bissecteur, et  $x$  et  $y$  deux points de  $B$ . La géodésique reliant  $x$  et  $y$  est contenue dans  $B$  si et seulement si  $x$  et  $y$  sont contenus dans un parallèle commun ou dans un méridien commun.*

De plus, si  $B$  est un bissecteur, aucun des deux demi-espaces définis par  $B$  n'est convexe.

### 7.3 Définition et premières propriétés des $\mathbb{R}$ -surfaces spinales

Posons la définition suivante :

**Définition 7.7.** Une  $\mathbb{R}$ -surface est une hypersurface de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  feuilletée par des  $\mathbb{R}$ -plans.

Cette définition autorise une grande flexibilité dans la construction d'une  $\mathbb{R}$ -surface. Le principal objet de cette partie va être l'étude d'un type particulier de  $\mathbb{R}$ -surface : les  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales (voir définition 7.9).

**Lemme 7.8.** *Soit  $P$  un  $\mathbb{R}$ -plan et  $\gamma \subset P$  une géodésique. Soit  $\Pi$  la projection orthogonale sur  $P$ , et  $S$  l'image inverse de  $\gamma$  par  $\Pi$ .  $S$  est une  $\mathbb{R}$ -surface.*

*Démonstration.* Le feuilletage de  $S$  est donné par les fibres de  $\Pi$  au-dessus de  $\gamma$ , et  $S$  est homéomorphe à  $] - 1, 1[ \times D$ , où  $D$  est le disque ouvert (voir la section 1.4.3).  $\square$

Suivant Mostow, posons la

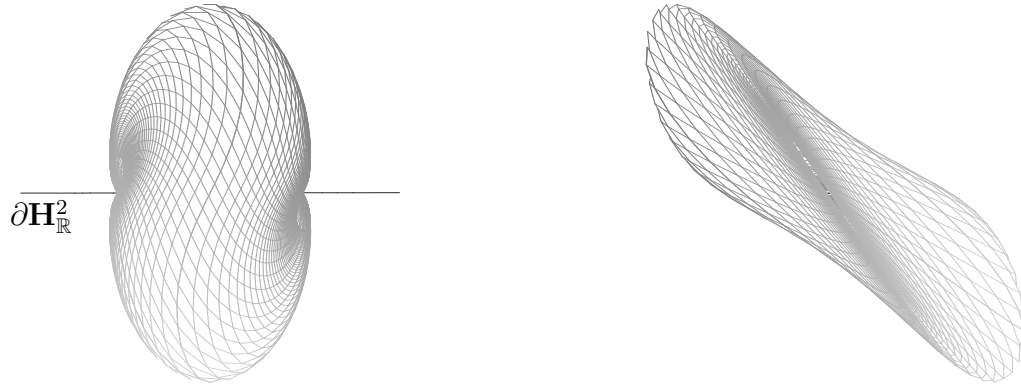


FIG. 7.2 – Vues depuis les axes des  $x = y = 0$  et  $y = t = 0$  d'une  $\mathbb{R}$ -sphère spinale orthogonale à  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

**Définition 7.9.** On appellera  *$\mathbb{R}$ -surface spinale* toute  $\mathbb{R}$ -surface obtenue comme image réciproque d'une géodésique  $\gamma$  par la projection orthogonale sur un  $\mathbb{R}$ -plan  $P$ . Nous noterons cette  $\mathbb{R}$ -surface spinale  $S_{\gamma,P}$ , et l'appellerons la  *$\mathbb{R}$ -surface spinale construite sur  $\gamma$  par rapport à  $P$* .

Si  $S$  est une  $\mathbb{R}$ -surface, il lui est naturellement associé l'hypersurface du bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ ,  $\partial\bar{S} = \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \cap S$ .  $\partial\bar{S}$  est appelée la  *$\mathbb{R}$ -sphère* associée à  $S$ . Nous appellerons  *$\mathbb{R}$ -sphère spinale* une  $\mathbb{R}$ -sphère associée à une  $\mathbb{R}$ -surface spinale.

**Proposition 7.10.** Soient  $P$  un  $\mathbb{R}$ -plan, et  $\gamma = (\gamma(s))_{s>0}$  une géodésique tracée dans  $P$ , et  $C$  la droite complexe engendrée par  $\gamma$ . Fixons  $\beta \in [0, \pi/2]$ .

Pour tout  $s > 0$ , soit  $Q_s$  le  $\mathbb{R}$ -plan contenant  $\gamma(s)$ , d'angle  $(\pi/2, \beta)$  par rapport à  $P$  et tel que  $I_{Q_s} \circ I_P$  stabilise  $C$ .

Alors,  $S = \bigcup_{s>0} Q_s$  est une  $\mathbb{R}$ -surface spinale.

(Voir le chapitre 1, section 1.4.2 pour la définition des angles entre  $\mathbb{R}$ -plans sécants.)

*Démonstration.* Soit  $P'$  le  $\mathbb{R}$ -plan contenant  $\gamma$ , d'angle  $(0, \pi/2 - \beta)$  avec  $P$ . L'angle 0 signifie que  $P$  et  $P'$  contiennent tous deux  $\gamma$ . On vérifie simplement que  $Q_s$  est orthogonal à  $P'$  pour tout  $s > 0$  (i.e. d'angle  $(\pi/2, \pi/2)$ ).  $S$  est donc l'image réciproque de  $\gamma$  par la projection orthogonale sur  $P'$ .  $\square$

Dans la preuve du théorème 7.1, nous utiliserons cette description des  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales.

**Définition 7.11.** Nous appellerons la  $\mathbb{R}$ -surface spinale construite dans la proposition 7.10 la  *$\mathbb{R}$ -surface spinale sur  $\gamma$  d'angle  $\beta$  par rapport à  $P$* . Elle sera notée  $S_{\gamma,P}^{\beta}$ .

Notons ici pour la cohérence des notations, que  $S_{\gamma,P}^{\frac{\pi}{2}} = S_{\gamma,P}$ .

*Remarque 7.12. Comparaison des  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales et des bissecteurs*

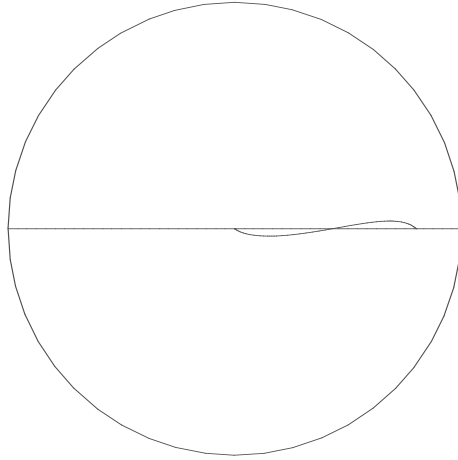


FIG. 7.3 – Projection de la géodésique reliant deux points de  $S_{\gamma,P}$  sur  $P$ .

1. De même que deux bissecteurs, deux  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales sont isométriques. C'est une conséquence directe de leur définition.
2. Soit  $S_{\gamma,P}$  une  $\mathbb{R}$ -surface spinale. La géodésique  $\gamma$  est l'analogie de la spine réelle, et  $P$  l'analogie de la spine complexe.  $P$  peut être vu comme la spine lagrangienne.
3. Contrairement, au cas des bissecteurs (voir la remarque 7.4),  $\gamma$  ne détermine pas uniquement  $P$  : il existe un cercle de  $\mathbb{R}$ -plans contenant un géodésique  $\gamma$  donnée, et donc un cercle de  $\mathbb{R}$ -sphères spinales de spine  $\gamma$ .
4. Une  $\mathbb{R}$ -surface spinale possède, par définition, un feuilletage régulier par des  $\mathbb{R}$ -plans, mais en revanche ne contient qu'une seule droite complexe, qui est celle engendrée par  $\gamma$ .

Comme toutes les hypersurfaces d'une variété à courbure non constante, les  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales ne sont pas totalement géodésiques. Plus précisément, le résultat suivant est un équivalent pour les  $\mathbb{R}$ -surfaces de la proposition 7.6 sur les bissecteurs. Elle découle du fait que la projection orthogonale d'une géodésique sur un  $\mathbb{R}$ -plan n'est en général pas un segment géodésique.

**Proposition 7.13.** *Soit  $S$  une  $\mathbb{R}$ -surface spinale. Soient  $x$  et  $y$  deux points contenus dans  $S$ . La géodésique reliant  $x$  et  $y$  est contenue dans  $S$  si et seulement si  $x$  et  $y$  sont contenus dans une même feuille de  $S$  ou dans la droite complexe engendrée par la spine de  $S$ .*

La proposition suivante est une conséquence directe de la définition des  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales et du fait qu'une réflexion lagrangienne préserve l'orthogonalité.

**Proposition 7.14.** *Soit  $P$  un  $\mathbb{R}$ -plan et  $\gamma \subset P$  une géodésique. Soit  $Q$  une feuille de la  $\mathbb{R}$ -surface spinale  $S_{\gamma,P}$ . La réflexion lagrangienne  $I_Q$  stabilise  $S_{\gamma,P}$ , et échange les deux composantes connexes de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \setminus S_{\gamma,P}$ .*

## 7.4 Conditions de disjonction de deux $\mathbb{R}$ -surfaces spinales

Dans la section 7.5, où nous allons montrer le théorème 7.1 annoncé dans l'introduction du chapitre, nous allons construire des domaines fondamentaux dont les faces sont des  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales. Nous aurons besoin de pouvoir garantir que ces faces sont disjointes. Le critère que nous allons obtenir est basé sur le lemme suivant.

**Lemme 7.15.** *Soient  $S_1 = S_{\gamma_1, P_1}$  et  $S_2 = S_{\gamma_2, P_2}$  deux  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales, dont les feuilletages sont donnés par*

$$S_1 = \bigcup_{s_1} Q_{s_1}^{(1)} \text{ et } S_2 = \bigcup_{s_2} Q_{s_2}^{(2)}.$$

*Soit  $I_{s_k}^{(k)}$  l'inversion par rapport au  $\mathbb{R}$ -plan  $Q_{s_k}$ . Alors  $S_1$  et  $S_2$  sont disjointes si et seulement si pour tout couple  $(s_1, s_2)$  de paramètres l'isométrie  $I_{s_1}^{(1)} \circ I_{s_2}^{(2)}$  est loxodromique.*

*Démonstration.*  $S_1$  et  $S_2$  sont disjointes si et seulement si toute feuille de  $S_1$  est disjointe de toute feuille de  $S_2$ . Le résultat est une conséquence directe du lemme 1.69.  $\square$

La proposition 7.15 montre la nécessité de pouvoir tester quand le produit de deux réflexions lagrangiennes est loxodromique, donc de calculer sa trace. Nous disposons d'après le chapitre 1, d'une forme matricielle pour les réflexions lagrangiennes en terme des paramètres du  $\mathbb{R}$ -cercle associé (centre et rayon). Le lemme suivant fait le lien entre ces paramètres et les angles entre  $\mathbb{R}$ -plans à l'aide desquels nous avons écrit la proposition 7.10.

**Lemme 7.16.** *Soit  $P$  un  $\mathbb{R}$ -plan vérifiant  $I_P([0, 0]) = \infty$ , d'angle  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \alpha)$  avec le  $\mathbb{R}$ -plan  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ . Alors*

- *Le  $\mathbb{R}$ -cercle associé est centré en  $[0, 0]$ .*
- *Il existe  $r > 0$  tel que le rayon de  $\partial P$  soit  $r^2 e^{2i\alpha}$ .*

*Démonstration.* La première assertion est juste la définition du centre d'un  $\mathbb{R}$ -cercle (voir définition 1.59). Remarquons que le fait que  $I_P([0, 0]) = \infty$  impose que l'angle entre  $P$  et  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  lu dans la géodésique complexe engendrée par  $\infty$  et  $[0, 0]$  a pour mesure  $\pi/2$ . Considérons alors le  $\mathbb{R}$ -cercle centré en  $[0, 0]$  et de rayon  $r^2 e^{2i\alpha}$ . D'après le lemme 1.66, la matrice (dans  $SU(2,1)$ ) de l'inversion associée est

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -u^{-1}r^2 \\ 0 & -u^2 & 0 \\ -u^{-1}r^{-2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } u = e^{\frac{2i\alpha}{3}} \text{ et } r > 0.$$

L'action de  $I_P$  s'écrit vectoriellement  $Z \rightarrow M\bar{Z}$ . L'inversion par rapport à  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  a pour matrice l'identité. L'application linéaire  $Z \rightarrow MZ$  est donc un relèvement de  $I_P \circ I_{\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2}$ . Les angles de l'élément elliptique  $I_P \circ I_{\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2}$  sont  $\pi/2$  et  $\pi/2 + \alpha$ .

$\square$

**Définition 7.17.** Dans la suite de ce chapitre, nous appellerons  $M_{r,\beta}$  la matrice ci-dessus pour l'inversion par rapport au  $\mathbb{R}$ -cercle de centre  $[0, 0]$  et de rayon  $r^2 e^{2i\beta}$ .

Nous allons maintenant donner une condition de disjonction de deux  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales qui suffira à la preuve du théorème 7.1.

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$g(l) = \frac{-\cosh(l) - 3 + \sqrt{9 \cosh^2(l) + 70 \cosh(l) + 65}}{4(\cosh(l) + 1)}$$

(Voir la figure 7.5)

**Proposition 7.18.** Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux géodésiques ultraparallèles tracées dans un  $\mathbb{R}$ -plan  $P$ , à distance mutuelle  $l > 0$ . Soient  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  deux réels satisfaisant aux conditions suivantes.

1.  $-\frac{\pi}{2} < \frac{2}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2) < \frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{2} < \frac{2}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2) < \frac{\pi}{2}$ .
2.  $g(l) < \cos \frac{2}{3}(\alpha_1 - \alpha_2) < 1$ .

Alors

$$S_{\gamma_1, P}^{\pi/2+\alpha_1} \cap S_{\gamma_2, P}^{\pi/2+\alpha_2} = \emptyset.$$

*Démonstration.* Utilisons les coordonnées du modèle de Siegel pour le calcul. Soient  $Q_{r_1}$  et  $Q_{r_2}$  (avec  $r_1$  et  $r_2$  positifs) les feuilles de  $S_{\gamma_1, P}^{\pi/2+\alpha_1}$  et  $S_{\gamma_2, P}^{\pi/2+\alpha_2}$  respectivement. En normalisant, on peut se ramener à la situation suivante :

- $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont tracées dans le  $\mathbb{R}$ -plan  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2 \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .
- En coordonnées de Heisenberg, les extrémités de  $\gamma_1$  sont  $[0, 0]$  et  $\infty$ , les extrémités de  $\gamma_2$  sont  $[1, 0]$  et  $[x, 0]$  avec  $x > 1$  (voir la figure) .

Les deux paramètres  $x$  et  $l$  sont liés par la relation suivante

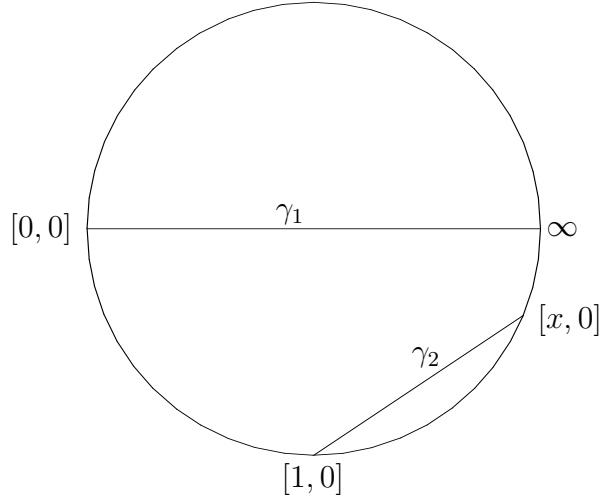
$$x = \frac{\cosh(l/2) + 1}{\cosh(l/2) - 1}. \quad (7.1)$$

Nous allons utiliser  $x$ , qui est plus commode pour les calculs.

Dans les conditions de la normalisation ci-dessus, les feuilles de  $S_{\gamma_1, P}^{\pi/2+\alpha_1}$  correspondent aux  $\mathbb{R}$ -cercles centrés en  $[0, 0]$  de rayon  $r_1 e^{2i\alpha_1}$  avec  $r_1 > 0$  (cf lemme 7.16).

La  $\mathbb{R}$ -sphère spinale  $S_{\gamma_2, P}^{\pi/2+\alpha_2}$  est l'image de  $S_{\gamma_1, P}^{\pi/2+\alpha_2}$  par un élément loxodromique  $h$  vérifiant

- $h([0, 0]) = [1, 0]$
- $h(\infty) = [x, 0]$

FIG. 7.4 –  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  tracées dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ .

– L'axe de  $h$  est transverse à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .<sup>1</sup>

Un tel  $h$  est fourni par l'élément de  $SU(2,1)$  suivant :

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} x^2 & \frac{x\sqrt{2}}{1-x} & \frac{-1}{(1-x)^2} \\ -x\sqrt{2} & \frac{x+1}{x-1} & \frac{\sqrt{2}}{(1-x)^2} \\ -1 & \frac{\sqrt{2}}{x-1} & \frac{1}{(1-x)^2} \end{bmatrix}.$$

Un relèvement à  $SU(2,1)$  de  $I_{Q_{r_1}} \circ I_{Q_{r_2}}$  est donc donné par la matrice

$$M = M_{r_1, \alpha_1} \mathbf{h} \overline{M_{r_2, \alpha_2}} \mathbf{h}^{-1}.$$

Calculons la trace de  $M$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{T} &= \left( r_1^2 r_2^2 + \frac{x^4 r_1^2}{r_2^2} + \frac{1}{r_1^2 r_2^2 (x-1)^4} + \frac{r_2^2}{r_1^2 (x-1)^4} \right) \exp\left(\frac{2i}{3}(\alpha_2 - \alpha_1)\right) \\ &+ \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \exp\left(-\frac{4i}{3}(\alpha_2 - \alpha_1)\right) \\ &+ \frac{2}{(x-1)^2} \left( r_1^2 x^2 (x-1)^2 + \frac{1}{(x-1)^2 r_1^2} \right) \exp\left(-\frac{2i}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2)\right) \\ &+ \frac{2}{(x-1)^2} \left( r_2^2 + \frac{x^2}{r_2^2} \right) \exp\left(\frac{2i}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2)\right). \end{aligned} \quad (7.2)$$

<sup>1</sup>Cette condition garantit que  $h$  n'est pas une symétrie glissée. Si c'était le cas,  $h$  enverrait  $S_{\gamma_1, P}^{\pi/2+\alpha_2}$  sur  $S_{\gamma_2, P}^{\pi/2-\alpha_2}$



Si les conditions de l'énoncé sont satisfaites, alors

$$\begin{aligned} \cos \frac{2}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2) > 0 \quad , \quad \cos \frac{2}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2) > 0 \\ \cos \frac{2}{3}(\alpha_2 - \alpha_1) > 0 \quad , \quad \cos \frac{4}{3}(\alpha_2 - \alpha_1) > 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme  $x > 1$ , nous avons <sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \left( r_1^2 r_2^2 + \frac{x^4 r_1^2}{r_2^2} + \frac{1}{r_1^2 r_2^2 (x-1)^4} + \frac{r_2^2}{r_1^2 (x-1)^4} \right) &= \frac{1}{(x-1)^2} \left( r_1^2 r_2^2 + \frac{1}{r_1^2 r_2^2} \right) \\ &\quad + \frac{x^2}{(x-1)^2} \left( \frac{x^2 (x-1)^2 r_1^2}{r_2^2} + \frac{r_2^2}{x^2 (x-1)^2 r_1^2} \right) \\ &\geq \frac{2(1+x^2)}{(x-1)^2} \\ &= 1 + \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \end{aligned} \tag{7.3}$$

Nous en déduisons donc une minoration de la partie réelle de T :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} (T) &> \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \cos(2\alpha) + \left( 1 + \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \right) \cos(\alpha) \\ &= 2 \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \cos^2 \alpha + \left( 1 + \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \right) \cos \alpha - \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

avec  $\alpha = 2/3(\alpha_2 - \alpha_1)$ .

Nous obtenons alors par résolution directe par rapport à  $\cos \alpha$  que  $\operatorname{Re} (T)$  est plus grand que 3 lorsque

$$-\frac{1+F^2}{4} + \frac{1}{4} (F^4 + 26F^2 + 9)^{1/2} < \cos(\alpha) < 1 \quad \text{où } F = \frac{x-1}{x+1} = \cosh(l/2)^{-1}.$$

Le membre de gauche de la double inégalité ci-dessus est égal à  $g(l)$ . □

*Remarque 7.19.* La zone de non-intersection des deux surfaces  $S_{\gamma_1, P}^{\pi/2+\alpha_1}$  et  $S_{\gamma_2, P}^{\pi/2+\alpha_2}$  peut-être vue, dans le plan  $(\alpha_1, \alpha_2)$  comme l'hexagone délimité par les droites

---

<sup>2</sup>Je remercie John Parker pour m'avoir suggéré une amélioration dans cette inégalité.

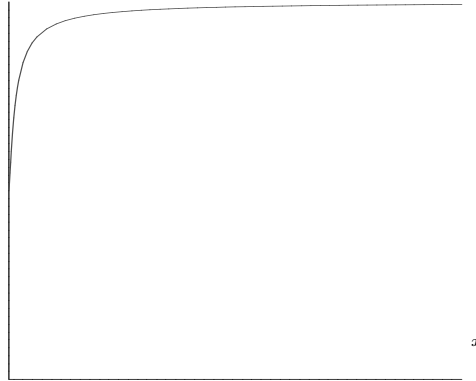


FIG. 7.5 – Graphe de  $g = -\frac{1 + F^2}{4} + \frac{1}{2} (F^4 + 26F^2 + 9)^{1/2}$  en fonction de  $x$ .

$$d_1 : \alpha_1 + 2\alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$d'_1 : \alpha_1 + 2\alpha_2 = -\frac{3\pi}{4}$$

$$d_2 : 2\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$d'_2 : 2\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{3\pi}{4}$$

$$d_l : \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{3}{2} \arccos(g(l)) \quad d'_l : \alpha_1 - \alpha_2 = -\frac{3}{2} \arccos(g(l)).$$

Lorsque  $x$  tend vers l'infini, la distance  $l$  entre les deux géodésiques décroît vers 0, et  $g(l)$  tend vers 1. En conséquence, la zone de non-intersection se ramasse autour de la droite  $\delta_\infty : \alpha_1 = \alpha_2$ .

*Remarque 7.20.*

La proposition suivante est un raffinement de la proposition 7.18 à un cas un plus délicat, où les deux géodésiques  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont asymptotiques. C'est l'outil technique que nous utiliserons dans la preuve du théorème 7.1.

**Proposition 7.21.** *Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux géodésiques asymptotiques contenues dans un  $\mathbb{R}$ -plan  $P$ . Les deux  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales  $S_{\gamma_1, P}^{\pi/2+\alpha_1}$  et  $S_{\gamma_2, P}^{\pi/2+\alpha_2}$  sont disjointes si et seulement si*

$$-\frac{\pi}{4} \leq \alpha_1 = \alpha_2 \leq \frac{\pi}{4}$$

*Démonstration.* Le sens ( $\Leftarrow$ ) découle de la preuve de la proposition précédente en passant à la limite quand  $x$  tend vers  $\infty$ .

Pour prouver l'autre implication, nous devons montrer deux choses :

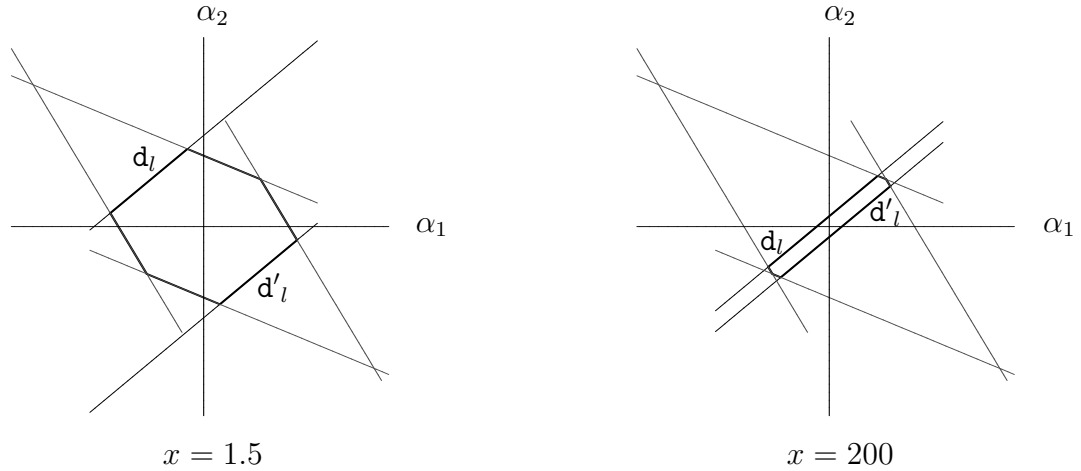


FIG. 7.6 – Zones de non-intersection de  $S_{\gamma_1, P}^{\pi/2+\alpha_1}$  et  $S_{\gamma_2, P}^{\pi/2+\alpha_2}$

1. Si  $\alpha_1 = \alpha_2$  est plus grand (resp. petit) strictement que  $\pi/4$  (resp.  $-\pi/4$ ), alors il existe  $r_1$  et  $r_2$  tels que  $I_{Q_{r_1}} \circ I_{Q_{r_2}}$  soit elliptique.
2. Si  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  alors il existe  $r_1$  et  $r_2$  tels que  $I_{Q_{r_1}} \circ I_{Q_{r_2}}$  soit elliptique.

On peut cette fois normaliser la situation de sorte que  $\gamma_1$  relie  $[0, 0]$  et  $\infty$ , et  $\gamma_2$  relie  $[1, 0]$  et  $\infty$ . De même que dans la preuve de la proposition 7.18, tout se ramène à l'étude de la trace de la matrice,  $M = M_{r_1, \alpha_1} \mathbf{h} \overline{M_{r_2, \alpha_2}} \mathbf{h}^{-1}$ , où cette fois  $\mathbf{h}$  désigne l'élément parabolique unipotent fixant  $\infty$  :

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

L'isométrie parabolique  $h$  envoie  $[0, 0]$  sur  $[1, 0]$ . Ici,

$$\begin{aligned} \text{tr } M &= \exp\left(-\frac{4i}{3}(\alpha_2 - \alpha_1)\right) + \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{r_2^2}{r_1^2} + \frac{1}{r_1^2 r_2^2}\right) \exp\left(\frac{2i}{3}(\alpha_2 - \alpha_1)\right) \\ &\quad + \frac{2}{r_2^2} \exp\left(\frac{2i}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2)\right) + \frac{2}{r_1^2} \exp\left(-\frac{2i}{3}(2\alpha_2 + \alpha_1)\right). \end{aligned} \quad (7.4)$$

1. Supposons que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ .  
Alors, si de plus  $r_1 = r_2 = r$  et  $\cos 2\alpha < 0$

$$\text{tr } M = 3 + \frac{4 \cos 2\alpha}{r^2} + \frac{1}{r^4}.$$

Dans ces conditions,  $M$  est elliptique si et seulement si  $0 < r < (2\sqrt{-\cos 2\alpha})^{-1}$

2. Supposons maintenant que  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ .

Posons maintenant  $r_1 = r_2 = 1/\sqrt{r}$ . Après un calcul,  $\text{tr } M$  devient en posant  $\alpha = 2/3(\alpha_2 - \alpha_1)$

$$\text{tr } M = \varphi(\alpha) + r^2 e^{i\alpha} + 4r e^{-i\alpha/2} \cos(\alpha_1 + \alpha_2). \quad (7.5)$$

Rappelons que  $\varphi(\alpha) = 2e^{i\alpha} + e^{-2i\alpha}$ , est un paramétrage du bord du « triangle elliptique »  $\Delta$  (voir la remarque 1.12 page 26). De plus la tangente à  $\Delta$  en un point de paramètre  $\alpha$  tel que  $\alpha_3 \neq 1$  a pour direction  $e^{-i\alpha/2}$ .

La relation 7.5 montre donc qu'à  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  fixés, et lorsque  $r = r_1^{-2} = r_2^{-2}$  varie,  $\text{tr } M$  décrit un arc de parabole  $\mathcal{P}$  donc l'origine est au point  $\varphi(\alpha)$ , et correspond à  $r$  nul. De plus, on vérifie que  $\mathcal{P}$  et  $\Delta$  partagent la même tangente  $T$  à l'origine de  $\mathcal{P}$ . Or le contact entre  $\mathcal{P}$  et  $T$  est d'ordre 2, celui entre  $\Delta$  et  $T$  est d'ordre 1. Il s'en suit qu'au voisinage de  $r = 0$ ,  $\mathcal{P}$  est situé entre  $\Delta$  et  $T$ .

Les points de  $\mathcal{P}$  situés entre  $\Delta$  et  $T$  correspondent à des traces elliptiques, donc à des feuilles des deux  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales qui s'intersectent.

□

## 7.5 Preuve du théorème principal

### Description de la famille $\phi_\alpha$

Nous allons utiliser sur l'espace de Teichmüller de tore épointé  $T_{(1,1)}$  les coordonnées que nous avons décrites au chapitre 2. Tout point  $[\rho]$  de  $T_{(1,1)}$  est donc représenté par un unique triplet  $(t_1, t_2, t_3)$  tel que  $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ .

Rappelons que la  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  est l'ensemble des groupes triangulaires lagrangiens tels que  $(I_1 I_2 I_3)^2$  est parabolique ou loxodromique, et qui satisfont à la condition de non-dégénérescence (C) (voir la définition 6.3 page 108).

Supposons fixée une famille  $\Lambda$  de représentants des classes de conjugaison des points de  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ , par exemple, celle utilisée au chapitre précédant. Tout point de  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}/\text{PU}(2,1)$  est donc représenté par un unique groupe triangulaire  $\Lambda(t_1, \theta_1, t_2, \theta_2, t_3, \theta_3, \mathbb{A})$  tel que

$$c_{\mathbb{R}}(\Lambda(t_1, \theta_1, t_2, \theta_2, t_3, \theta_3, \mathbb{A})) = (t_1, \theta_1, t_2, \theta_2, t_3, \theta_3, \mathbb{A}).$$

Associons finalement à tout groupe triangulaire  $G = \langle I_1, I_2, I_3 \rangle$  son sous-groupe d'indice deux  $G_2 = \langle I_1 I_2, I_3 I_2 \rangle$ . A tout point de  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}/\text{PU}(2,1)$  est donc associée une classe de représentation de  $F_2$  dans  $\text{PU}(2,1)$ , dont un représentant est  $\Lambda(t_1, \theta_1, t_2, \theta_2, t_3, \theta_3, \mathbb{A})_2$ .

Définissons alors  $\phi_\alpha$  par

$$\phi_\alpha : \begin{array}{ccc} T_{(1,1)} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathbb{R}} \\ (t_1, t_2, t_3) & \longmapsto & [\Lambda(t_1, \frac{\pi}{2} + \alpha, t_2, \frac{\pi}{2} + \alpha, t_3, \frac{\pi}{2} + \alpha, 0)_2] \end{array} \quad (7.6)$$

Avant de poursuivre, notons que pour tout  $\alpha$  et pour tout triplet  $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$  le cycle  $(p_1, p_2, p_3)$  associé au groupe  $\Lambda(t_1, \frac{\pi}{2} + \alpha, t_2, \frac{\pi}{2} + \alpha, t_3, \frac{\pi}{2} + \alpha, 0)$  comme en 6.2 (page 108) est contenu dans un  $\mathbb{R}$ -plan, car la dernière composante, qui correspond à l'invariant de Cartan, est nulle. Nous supposons dès lors ces trois points fixés jusqu'à la fin du chapitre.

### Injectivité de $\phi_\alpha$

Vue la définition des coordonnées sur  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  donnée au chapitre 6, les paramètres  $t_i$ ,  $\theta_j$  et  $\mathbb{A}$  (nul ici) sont des invariants, qui d'après la proposition 6.9 déterminent la classe de conjugaison de  $\Lambda(t_1, \theta_1, t_2, \theta_2, t_3, \theta_3, \mathbb{A})$ . La première assertion du théorème en découle donc :  $\phi_\alpha$  est injective.

### Discrétude, fidélité, préservation du type

Nous allons montrer dans ce paragraphe que pour tout  $\alpha \in [-\pi/4, \pi/4]$ , toute représentation  $\rho$  donnée par un triplet de réflexions lagrangiennes  $I_1, I_2, I_3$  telle que

$$c_{\mathbb{R}}(\rho) = (t_1, \pi/2 + \alpha, t_2, \pi/2 + \alpha, t_3, \pi/2 + \alpha, 0)$$

est discrète et fidèle et que les seuls éléments paraboliques dans le groupe  $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$  sont conjugués à des puissances d'un produit cyclique  $I_i I_j I_k$  avec  $i, j$  et  $k$  deux à deux distincts. La famille  $\Lambda$  de représentants des classes de conjugaison étant fixée, à tout triplet  $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$  est associé par  $\phi_\alpha$  un triplet de réflexions lagrangiennes  $(I_1^{t_1, \alpha}, I_2^{t_2, \alpha}, I_3^{t_3, \alpha})$ . Pour tout réel  $s$ , notons  $P_k^{s, \alpha}$  le  $\mathbb{R}$ -plan fixé par  $I_k^{s, \alpha}$ . Pour  $k = 1, 2, 3$ , posons alors

$$S_k^\alpha = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} P_k^{s, \alpha}.$$

D'après les deux propositions 7.10 et 7.14,  $S_k$  est une  $\mathbb{R}$ -surface spinale stable par  $I_k^{t_k, \alpha}$  et telle que  $I_k^{t_k, \alpha}$  échange les deux composantes de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \setminus S_k^\alpha$ . Comme  $p_1, p_2$  et  $p_3$  sont contenus dans un  $\mathbb{R}$ -plan commun, la proposition 7.21 s'applique :  $S_i^\alpha$  et  $S_j^\alpha$  sont disjointes, et leurs adhérences s'intersectent en  $p_k$ .

**Nous travaillerons jusqu'à la fin de ce paragraphe à  $\alpha$  fixé, et à  $t_1, t_2$  et  $t_3$  fixés tels que  $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ .**

Pour simplifier l'écriture nous omettrons désormais  $t_1, t_2, t_3$  et  $\alpha$  dans les notations : nous noterons les trois réflexions lagrangiennes  $I_1, I_2$  et  $I_3$ , et les trois  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales  $S_1, S_2$  et  $S_3$ . Nous allons donc montrer que le groupe engendré par  $I_1 I_2$  et  $I_3 I_2$  est une représentation discrète, fidèle et préservant le type du groupe fondamental du tore époiné. Nous allons utiliser les notations suivantes :

- Pour  $k = 1, 2, 3$ , soit  $B_k$  la composante de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \setminus S_k$  ne contenant pas  $p_k$  et  $B'_k$  la composante contenant  $p_k$ .
- Soit l'intersection  $\Delta = \bigcap_{k=1}^3 \overline{B'_k}$ .

— Discrétude et fidélité —

Les trois ensembles ouverts  $B'_1$ ,  $B'_2$  et  $B'_3$ , associées respectivement aux sous-groupes  $\langle I_1 \rangle$ ,  $\langle I_2 \rangle$ , et  $\langle I_3 \rangle$  satisfont aux hypothèses du théorème 7.2 (voir page 128). Par suite le groupe engendré par  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  est discret et admet la présentation  $\langle i_1, i_2, i_3 \mid i_k^2 = 1 \rangle$ . De plus, l'ouvert  $\Delta$  a la propriété suivante

$$g \cdot \Delta \cap \Delta = \emptyset, \text{ pour tout } g \neq Id. \quad (7.7)$$

Le sous-groupe d'indice deux de  $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$  engendré par  $I_1 I_2$  et  $I_3 I_2$  est donc également discret. La représentation  $\rho$  de  $F_2$  dans  $\text{PU}(2,1)$  définie par  $\rho(\mathbf{m}) = I_1 I_2$  et  $\rho(\mathbf{n}) = I_3 I_2$  est une représentation fidèle du groupe fondamental du tore épointé. En effet, (7.7) contredit l'existence d'un mot non-trivial  $w \in F_2$  tel que  $\rho(w) = Id$ .

*Remarque 7.22.* Le fait que  $I_k(\Delta) \cap \Delta = \emptyset$  montre que  $\Delta$  est contenu dans un domaine fondamental pour l'action de  $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$ .

— Préservation du type —

Notons  $A = I_1 I_2$  et  $B = I_3 I_2$ . Nous allons maintenant montrer la proposition suivante.

**Proposition 7.23.** *Soit  $g$  un élément du groupe  $\langle A, B \rangle$  différent de l'identité. Alors*

- *ou  $g$  est loxodromique*
- *ou  $g$  est parabolique, et est alors conjugué à une puissance, éventuellement négative, de  $[A, B]$ .*

*Démonstration.* Soit  $g$  un mot en  $A$  et  $B$ , distinct de l'identité. Il s'écrit  $g_n \cdots g_1$ , où chaque  $g_k$  désigne l'une des involutions  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ . Quitte à réduire cycliquement  $g$  (dans le groupe  $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$ ), on peut supposer que  $g_n \neq g_1$ . Soit alors, pour tout  $k$ ,  $D_k$ , celle des trois boules  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  qui est associée à  $g_k$ <sup>3</sup>.

Dans ces conditions,  $g$  a un point fixe dans  $\overline{D_1}$  et un point fixe dans  $\overline{D_n}$ . En effet, soit  $x \in D_n$ . Nous avons supposé que  $g_1 \neq g_n$ . Par suite,  $D_1 \cap D_n$  est vide, et  $g_1 \cdot x \in D_1$ . On vérifie alors que pour tout  $k$ ,  $g_k \cdots g_1 \cdot x \in D_k$ , et donc que  $g \cdot x \in D_n$ . Le mot  $g$  stabilise donc  $D_n$  et admet par conséquent un point fixe dans  $\overline{D_n}$ . Le même raisonnement appliqué à  $g^{-1}$  montre que  $g$  admet un point fixe dans  $\overline{D_1}$ . Par conséquent, si  $g$  admet un seul point fixe, c'est forcément l'un des  $p_k$  : il est dans  $\overline{D_1} \cup \overline{D_n}$ .

Le groupe  $\langle A, B \rangle$  étant une représentation discrète et fidèle de  $F_2$ ,  $g$  ne peut être elliptique. Les points fixes de  $g$  sont donc situés au bord de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Il y a donc a priori trois possibilités :

---

<sup>3</sup>en convenant que  $B_j$  est associée à  $I_j$

1.  $g$  est loxodromique, admet deux points fixes distincts qui sont respectivement contenus dans  $D_1$  et  $D_n$ .
2.  $g$  est loxodromique et ses deux points fixes sont : l'un des trois points  $(p_1, p_2, p_3)$ , ainsi qu'un autre point, contenu dans l'une des boules  $\overline{B_k}$ .
3.  $g$  est parabolique et son point fixe est l'un des  $p_k$ .

Nous pouvons d'ores et déjà écarter la seconde possibilité, car elle s'oppose à la discrétude : dans ce cas  $\langle A, B \rangle$  contiendrait un sous-groupe non discret car engendré par un élément parabolique et un élément loxodromique ayant un point fixe en commun.

Il nous reste donc à montrer que dans le dernier cas  $g$  est conjugué à une puissance de  $[A, B]$ . Pour ce faire, commençons par étudier l'action du groupe monogène engendré par  $[A, B]$ , qui fixe  $p_2$ . Supposons dorénavant que  $p_2$  est le point  $\infty$  de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Avant tout, remarquons que  $[A, B]$  est parabolique pur, et conjugué à une translation de Heisenberg non-verticale. En effet, la paire  $(A, B)$  étant  $\mathbb{R}$ -décomposable, d'après le théorème 5.19 et la proposition 6.25, si ce n'était pas le cas,  $A$  et  $B$  commuteraient. D'après la discussion précédente,  $A = I_1 I_2$  a un point fixe dans  $B_1$  et un dans  $B_2$ , et  $B = I_3 I_2$  a un point fixe dans  $B_3$ , et un dans  $B_2$ . Ils n'ont donc pas les mêmes points fixes. Or deux éléments loxodromiques commutent si et seulement si ils ont les mêmes points fixes (proposition 1.19).

Soit  $\Delta^2$  la réunion de  $\overline{\Delta}$  et de  $I_2(\overline{\Delta})$ .  $\Delta^2$  est un polyèdre qui a quatre faces :  $S_1, S_3, S'_3 = I_2(S_3)$  et  $S'_1 = I_2(S_1)$ . Comme  $I_k(S_k) = S_k$ , ces faces sont identifiées de la manière suivante :

$$A(S'_1) = S_1 \text{ et } B(S'_3) = S_3.$$

*Remarque 7.24.* Appliquons le théorème 7.2 à l'action du groupe  $\langle A, B \rangle$  sur  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  en utilisant les deux sous-groupes  $\langle A \rangle$  et  $\langle B \rangle$ , dont l'union engendre  $\langle A, B \rangle$ . Nous obtenons que  $\partial\Delta^2$  est contenu dans un domaine fondamental pour l'action de  $\langle A, B \rangle$  sur  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Nous désignons ici par  $\partial\Delta^2$  l'intersection de l'adhérence de  $\Delta^2$  dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  avec  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Considérons alors les quatre images de  $\Delta^2$  suivantes :

$$\Delta_A^2 = A(\Delta^2), \Delta_{AB}^2 = AB(\Delta^2), \Delta_{ABA^{-1}}^2 = ABA^{-1}(\Delta^2), \Delta_{[A,B]}^2 = [A, B](\Delta^2).$$

Les cinq polyèdres  $\Delta^2, \Delta_A^2, \Delta_{AB}^2, \Delta_{ABA^{-1}}^2$  et  $\Delta_{[A,B]}^2$ , ainsi que les identifications de leurs faces par des éléments du groupe  $\langle A, B \rangle$  sont représentés schématiquement sur la figure 7.7. Soit  $\Omega$ , la partie de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  comprise entre les  $\mathbb{R}$ -sphères spinales  $\partial S_1$  et  $[A, B](\partial S_1)$  (ces deux  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales sont marquées d'un carré noir ■ sur la figure 7.7).  $\Omega$  contient la réunion  $\mathcal{W} = \partial\Delta^2 \cup \partial\Delta_A^2 \cup \partial\Delta_{AB}^2 \cup \partial\Delta_{ABA^{-1}}^2$ , qui est un voisinage de  $p_2 = \infty$  dans  $\Omega$ .

Les deux  $\mathbb{R}$ -sphères spinales qui bordent  $\Omega$  sont identifiées par  $[A, B]$ . Par ailleurs, la représentation étudiée étant  $\mathbb{R}$ -décomposable,  $[A, B]$  est parabolique pur. Il découle alors du lemme 7.25 ci-dessous que les images de  $\Omega$  pavent  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Soit alors  $g$  un élément du stabilisateur de  $p_2 = \infty$  non-inclu dans le groupe engendré par  $[A, B]$ . L'isométrie  $g$  étant parabolique (et fixant  $\infty$ ), pour tout  $x \in \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \cap \partial\Delta^2$ , la suite  $g^n(x)$  tend vers  $\infty$ . Par ailleurs, comme  $\mathcal{W}$  est un voisinage de l'infini dans  $\Omega$ ,  $\mathcal{W}'$ , défini comme la réunion  $\cup_{k \in \mathbb{Z}} [A, B]^k(\mathcal{W})$  est un voisinage de l'infini dans  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Par suite,  $g^n(x)$  appartient à  $\mathcal{W}'$  pour  $n$  assez grand. Par conséquent, il existe  $y \in \partial\Delta^2$  et  $k$  un entier relatif tels que

$$g^n(x) = [A, B]^k(y)$$

Ceci s'oppose à la remarque 7.24, sauf si  $g$  est dans le groupe engendré par  $[A, B]$ .  $\square$

**Lemme 7.25.** *Soit  $m$  un point de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  et  $p$  un élément parabolique fixant  $m$ . Supposons données  $S_1$  et  $S_2$ , deux  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales adjacentes en  $m$  et telles que  $p(S_1) = S_2$ , et soit  $U$  la partie de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  comprise entre les deux  $\mathbb{R}$ -sphères spinales  $\partial S_1$  et  $\partial S_2$ . Les images de  $\bar{U}$  par le groupe engendré par  $p$  pavent  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .*

*Démonstration.* Quitte à conjuguer, on peut supposer que  $m$  est l'infini (dans le modèle de Siegel), et que  $p$  admet le relèvement

$$\begin{bmatrix} 1 & x\sqrt{2} & -x^2 \\ 0 & 1 & -x\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

Soit alors  $q_1 \in \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  un point de  $\partial S_1$ , de coordonnées de Heisenberg  $[z_1, t_1]$ . L'orbite de  $q_1$  sous le groupe engendré par  $p$  est l'ensemble  $\{[(z_1 + kx, t_1 - 2kx\text{Im}(z_1))], k \in \mathbb{Z}\}$ , qui est contenu dans le  $\mathbb{R}$ -cercle  $D_{q_1}$  paramétré par  $\{[z_1 + s, t_1 - 2s\text{Im}(z_1)], s \in \mathbb{R}\}$ . Ce  $\mathbb{R}$ -cercle est exactement l'orbite de  $q_1$  pour le groupe à un paramètre  $G = \{[s, 0], s \in \mathbb{R}\}$ .

Par hypothèse,  $q_2 = p(q_1)$  appartient à  $\partial S_2 \cap D_{q_1}$ . Les images de l'intervalle  $[q_1, q_2]$  pavent donc le  $\mathbb{R}$ -cercle  $D_{q_1}$ .

Les orbites du groupe à un paramètre  $G$  feuilletent le groupe de Heisenberg. Il suffit donc pour conclure de vérifier qu'elles intersectent toutes  $\partial S_1$ . Cela découle de la proposition 7.26 et de la remarque qui la suit.  $\square$

**Proposition 7.26.** *Soit  $S$  une  $\mathbb{R}$ -surface spinale de spine  $\gamma$ , et  $P$  un  $\mathbb{R}$ -plan contenant une extrémité de  $\gamma$ , notée  $p \in \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .  $P$  et  $S$  s'intersectent dans  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .*

*Démonstration.* Utilisons le modèle de Siegel. Quitte à normaliser la situation, on peut supposer que  $S$  est la  $\mathbb{R}$ -surface spinale construite sur la géodésique reliant  $[0, 0]$  et  $\infty$ , par rapport au  $\mathbb{R}$ -plan  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ , et que  $p$  est le point  $\infty$ . Les feuilles de  $S$ , sont donc orthogonales au  $\mathbb{R}$ -plan  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ , et correspondent donc à des  $\mathbb{R}$ -cercles centrés en  $[0, 0]$ . Soit  $I_r$  la réflexion par rapport à la feuille de paramètre  $r$  de  $S$  ( $r = e^t$ , où  $t$  désigne l'abscisse curviligne). Les lemmes 7.16 et 1.66 montrent alors que les réflexions lagrangiennes par rapport aux



feuilles de  $S$  admettent les relèvements suivant

$$M_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/r^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } r > 0.$$

Par ailleurs, le lemme 1.67 (page 40) fourni un relèvement  $J_{z,t,\theta}$  de la réflexion  $I_P$  par rapport à  $P$  pour tout  $\mathbb{R}$ -plan contenant  $\infty$ . Les trois nombres  $z$ ,  $t$  et  $\theta$  sont les paramètres définissant le  $\mathbb{R}$ -plan  $P$ .

Calculons la trace d'un relèvement à  $SU(2,1)$  de  $I_P \circ I_r$ . Nous obtenons :

$$\text{tr} (J_{z,t,\theta} \overline{M_r}) = \text{tr} (J_{z,t,\theta} M_r) = - \left( \frac{2\bar{z}^2}{r^2} + 1 \right) \exp(4i\theta/3) - 2 \frac{(-|z|^2 + it)}{r^2} \exp(-2i\theta/3).$$

Les trois paramètres  $z$ ,  $t$  et  $\theta$  étant fixés par le choix de  $P$ , lorsque  $r$  tend vers l'infini, la trace ci-dessus tend vers  $\tau = -\exp(4i\theta/3)$ .  $\tau$  étant de module 1, en notant  $f$  la fonction définie en 1.10

$$f(\tau) = -8(1 + \text{Re}(\tau^3)) \leq 0.$$

Par suite, le lemme 1.11 montre que

- Si  $\tau \notin \{-1, \exp(i\pi/3), \exp(-i\pi/3)\}$ ,  $\tau$  est une « trace elliptique régulière ». Pour  $r$  suffisamment grand, la matrice  $J_{z,t,\theta} \overline{M_r}$  correspond à une isométrie elliptique régulière.
- Si  $\tau = -1$ , alors  $\theta$  est congru à 0 modulo  $3\pi/2$ . Si  $\theta = 0$ , alors

$$\text{tr} (J_{z,t,0} \overline{M_r}) = -1 + \frac{2(|z|^2 - \bar{z}^2)}{r^2} - \frac{2it}{r^2}.$$

Par conséquent, la partie réelle de cette trace est plus grande que  $-1$ , et pour  $r$  assez grand, correspond à une trace elliptique régulière (voir la figure 1.1 page 27). On conclut de la même manière si  $\theta = 3\pi/2$ . Les cas où  $\tau = \exp(\pm i\pi/3)$  s'obtiennent en changeant de relèvement pour  $I_P \circ I_r$  : il suffit de le multiplier par une racine cubique de 1.

Ceci montre que pour  $r$  assez grand,  $I_P \circ I_r$  est elliptique, donc que  $P$  intersecte la feuille de paramètre  $r$  de  $S$ . □

*Remarque 7.27.* En conséquence de la proposition 7.26, tout  $\mathbb{R}$ -cercle infini intersecte la  $\mathbb{R}$ -sphère spinale  $\partial S$ , où  $S$  est une  $\mathbb{R}$ -surface spinale construite sur une géodésique  $\gamma$  issue de  $P$ .

*Remarque 7.28.* Il existe bien entendu d'autres points fixes d'éléments paraboliques dans le groupe  $\langle A, B \rangle$ , qui correspondent à des conjugués de puissances de  $[A, B]$ . Ces éléments ne sont pas cycliquement réduits.



## Représentations stabilisant un $\mathbb{R}$ -plan

Nous allons montrer que si  $\alpha$  est non-nul, le groupe  $\langle A, B \rangle$  ne préserve aucun  $\mathbb{R}$ -plan. Tout découle du lemme suivant.

**Lemme 7.29.** *Soit  $G$  un sous-groupe de  $PU(2,1)$  préservant un sous-espace totalement géodésique  $\mathcal{E}$ , et ne contenant aucun élément elliptique. Soit  $g$  un élément de  $G$ . Les points fixes de  $g$  sont contenus dans  $\mathcal{E}$ .*

*Démonstration.* Soit en effet  $m$  un point fixe de  $g \in G$  qui n'appartient pas à  $P$ , soit  $\Pi(m)$  la projection de  $m$  sur  $P$ . Le point  $\Pi(m)$  est à l'intérieur de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Par ailleurs,  $g(\Pi(m))$  appartient également à  $P$ . Si  $\Pi(m)$  n'est pas fixé par  $g$ , le triangle géodésique  $(m, \Pi(m), g(\Pi(m)))$  a deux angles droits et un angle nul (en  $m$ ). Ceci s'oppose au fait que  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  soit de courbure négative. Comme  $g$  n'est pas elliptique,  $\Pi(m)$  ne peut être fixé par  $g$ . D'où le résultat.  $\square$

Par conséquent, le seul  $\mathbb{R}$ -plan susceptible d'être stabilisé par  $[A, B]$  est celui qui contient les trois points  $(p_1, p_2, p_3)$ . Appelons-le  $P$ . D'après le lemme 1.83 (page 46), si une réflexion lagrangienne  $I_Q$  stabilise le  $\mathbb{R}$ -plan  $P$  et que  $P$  et  $Q$  s'intersectent en exactement un point, alors ils sont orthogonaux (i.e. leur angle a pour mesure  $(\pi/2, \pi/2)$ ). Par conséquent, si  $\alpha \neq 0$ , aucun des trois points  $I_1(p_1)$ ,  $I_2(p_2)$  et  $I_3(p_3)$  n'appartient à  $P$ . Comme  $A(p_3) = I_1 I_2(p_3) = I_1(p_1)$ , le groupe  $\langle A, B \rangle$  ne préserve aucun  $\mathbb{R}$ -plan.

### Maximalité du segment $(\phi_\alpha)_{|\alpha| \leq \pi/4}$

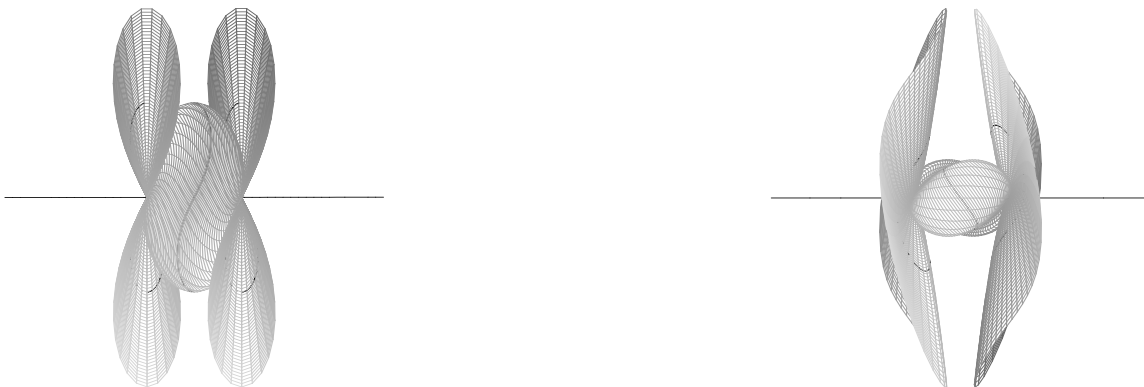
A  $\alpha$  fixé,  $\phi_\alpha(T_{(1,1)})$  peut être vu comme l'ensemble des groupes engendrés par trois réflexions lagrangiennes fixant chacune une feuille des trois  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales  $S_{\gamma_k}^{\pi/2+\alpha}$ . Nous avons vu dans la preuve de la proposition 7.21 que si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux géodésiques asymptotiques tracées dans un  $\mathbb{R}$ -plan commun  $P$ , alors, dès que  $|\alpha| > \pi/4$ , les deux  $\mathbb{R}$ -sphères  $S_{\gamma_1, P}^{\pi/2+\alpha}$  et  $S_{\gamma_2, P}^{\pi/2+\alpha}$  s'intersectent. Par suite, si  $|\alpha| > \pi/4$  il existe des valeurs de  $t_1, t_2$  et  $t_3$  pour lesquelles un mot de longueur deux est elliptique.

## 7.6 Commentaires et remarques

*Remarque 7.30.* L'existence des trois  $\mathbb{R}$ -surfaces spinales construite à la section précédente garantit que toutes les représentations  $\rho$ , éléments de  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  telles que

$$c_{\mathbb{R}}(\rho) = (t_1, \pi/2 + \alpha, t_2, \pi/2 + \alpha, t_3, \pi/2 + \alpha, 0)$$

avec  $-\pi/4 < \alpha < \pi/4$  sont discrètes. Cependant, ces trois  $\mathbb{R}$ -surfaces ne définissent un domaine fondamental que si  $\rho(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  est parabolique, c'est à dire si  $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ . Si le commutateur est loxodromique, alors le polyèdre délimité par les trois  $\mathbb{R}$ -surfaces et ses images ne peuvent pas  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  (voir la figure 2.4 page 58).

FIG. 7.8 – Deux vues du domaine fondamental pour le cas  $\alpha = 0$ .

*Remarque 7.31.* On peut considérer des familles moins grosses de représentations pour essayer de comprendre ce qui arrive pour  $|\alpha| > \pi/4$  lorsque l'on maintient la parabolicité du commutateur. Si l'on se restreint ainsi à la famille  $t_1 = -t_3$  (donc  $t_2 = 0$ ), le mot  $I_1 I_3$  est loxodromique tant que  $e^{2t_1} + \cos 2\alpha$  est négatif. Si cette dernière condition n'est pas remplie, un autre mot peut devenir elliptique, mais il est difficile de déterminer lequel. Considérons, par exemple la famille à un paramètre pour laquelle  $t_1 = -t_3 = \log 2$ , et  $t_2 = 0$ . On vérifie par le calcul que les trois mots de longueur deux restent loxodromiques pour  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ . Une étude expérimentale montre que le mot de longueur 8  $I_1 I_3 I_1 I_2 I_3 I_2 I_3 I_2$ , dont la trace vaut

$$3 + 1154 \cos^4 \alpha - 429 \cos^2 \alpha - 1150 i \sin \alpha \cos^3 \alpha$$

est elliptique sur le segment  $\alpha_0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , avec  $0.468\pi < \alpha_0 < 0.469\pi$ . C'est le mot le plus court qui devienne elliptique pour ces valeurs de  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ . Pour une valeur donnée de  $\alpha$ , il est en général très difficile de déterminer quel mot devient elliptique le premier dans une famille à un paramètre.

*Remarque 7.32.* En généralisant l'approche du chapitre 6, on peut considérer des groupes « polygonaux » au lieu de triangulaires, c'est à dire engendrés par  $n$  involutions  $I_1, I_2 \dots I_n$  telles que le mot  $I_1 I_2 \dots I_n$  soit parabolique. De tels groupes possèdent un cycle de longueur  $n$

$$p_{n-1} \xleftrightarrow{I_n} p_n \xleftrightarrow{I_{n-1}} p_1 \xleftrightarrow{I_{n-2}} p_2 \cdots \xleftrightarrow{I_1} p_{n-1}. \quad (7.8)$$

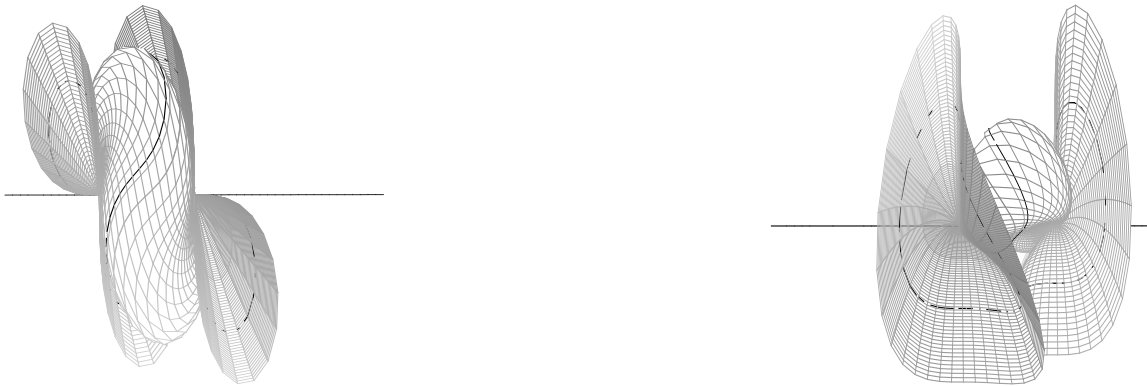


FIG. 7.9 – Deux vues du domaine fondamental pour le cas  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .



FIG. 7.10 – La  $\mathbb{R}$ -sphère  $\partial S_2$  seule, pour  $\alpha = \frac{\pi}{10}$ .

En munissant toutes les géodésiques ci-dessus de leur paramétrage standard, si  $I_1 I_2 \dots I_n$  est parabolique,  $t_1 + \dots + t_n = 0$  (où  $t_k$  désigne l'abscisse curviligne le long de la géodésique stabilisée par  $I_k$ ). Dans le cas où les  $n$  involutions sont antiholomorphes, on montre alors que le groupe engendré par  $I_1, I_2, \dots, I_n$  est discret si

- les points  $p_1 \dots p_n$  sont contenus dans un  $\mathbb{R}$ -plan  $P$
- les  $\mathbb{R}$ -plans fixés par les  $I_k$ , ont un angle de mesure  $(\pi/2, \pi/2 + \alpha)$  avec  $P$ , où  $|\alpha| < \pi/4$ .



# Bibliographie

- [ADS05] H. Aslaksen, V. Drensky, and L. Sadikova. Defining relations of invariants of two  $3 \times 3$  matrices. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 58, 2005.
- [BCM] J. Brock, R. Canary, and Y. Minsky. The classification of Kleinian surface groups II : The Ending Lamination Conjecture. *preprint*, [www.math.yale.edu/~yhm3/research/](http://www.math.yale.edu/~yhm3/research/).
- [Bea83] A. Beardon. *The geometry of discrete groups*. Springer, New York, 1983.
- [Ber60] L. Bers. Simultaneous uniformization. *Bull. AMS*, 66 :94–97, 1960.
- [Ber00] R. Berndt. *An introduction to Symplectic Geometry*. Graduate Studies in Mathematics. AMS, Providence, Rhode Island, 2000.
- [BGPG03] S.B. Bradlow, O. García-Prada, and P.B. Gothen. Surface group representations and  $U(p, q)$ -higgs bundles. *J. Diff. Geom.*, 64 :111–170, 2003.
- [BH99] M. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer, New York, 1999.
- [BIW03] M. Burger, A. Iozzi, and A. Wienhard. Surface group representations with maximal Toledo invariant. *C. R. Acad. Sci Paris*, 336 :95–104, 2003.
- [BIW06] M. Burger, A. Iozzi, and A. Wienhard. Surface group representations with maximal Toledo invariant. *preprint*, 2006.
- [Bou96] M. Bourdon. Sur le birapport au bord des CAT(-1)-espaces. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 83 :95–104, 1996.
- [CG74] S. Chen and L. Greenberg. Hyperbolic spaces. In *Contribution to Analysis*, pages 49–87. Academic Press, New York, 1974.
- [CG93] S. Choi and W. M. Goldman. Convex real projective structures on closed surfaces are closed. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118 :657–661, 1993.
- [Cha76] B. Chabat. *Introduction l'analyse complexe II*. Mir, 1976.
- [Der05] M. Deraux. Dirichlet Domains for the Mostow Lattices. *Exper. Math.*, 14 :467–490, 2005.
- [DFP05] M. Deraux, E. Falbel, and J. Paupert. New constructions of fundamental polyhedra in complex hyperbolic space. *Acta Math.*, 194 :155–201, 2005.



- [Dol03] I. Dolgashev. *Lectures on Invariant Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [DT87] A. Domic and D. Toledo. The Gromov norm of the Kähler class of symmetric domains. *Math. Ann*, 276 :425–432, 1987.
- [Fala] E. Falbel. Geometric structures associated to triangulations as fixed point sets of involutions. preliminary version.
- [Falb] E. Falbel. Spherical CR structures on the complement of the figure eight knot. preliminary version.
- [FK00] E. Falbel and P.V. Koseleff. Flexibility of ideal triangle groups in complex hyperbolic geometry. *Topology*, 39 :1209–1223, 2000.
- [FK02a] E. Falbel and P.V. Koseleff. A circle of modular groups in  $PU(2,1)$ . *Math. Res. Let.*, 9 :379–391, 2002.
- [FK02b] E. Falbel and P.V. Koseleff. Rigidity and flexibility of triangle groups in complex hyperbolic geometry. *Topology*, 41, 2002.
- [Fog02] N. Pytheas Fogg. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*. Springer, Berlin Heidelberg, 2002.
- [FP03] E. Falbel and J. Parker. The moduli space of the modular group. *Inv. Math.*, 152, 2003.
- [FP04] E. Falbel and J. Paupert. Fundamental domains for finite subgroups in  $U(2)$  and configurations of Lagrangians. *Geom. Dedicata*, 109 :221–238, 2004.
- [Fri96] R. Fricke. Über die Theorie der Automorphen Funktionen. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, 1896.
- [FW] E. Falbel and R. Wentworth. Produit de deux isométries d’un espace symétrique de rang un et compacité la Mumford-Mahler. *In preparation*.
- [FZ99] E. Falbel and V. Zocca. A Poincaré polyhedron theorem for complex hyperbolic geometry. *J. reine angew. Math.*, 516 :133–158, 1999.
- [Gil95] J. Gilman. Two-generator discrete subgroups of  $PSL(2, \mathbb{R})$ . *Mem. of AMS*, 117, 1995.
- [GKL01] W. Goldman, M. Kapovich, and B. Leeb. Complex hyperbolic manifolds homotopy equivalent to a Riemann surface. *Comm. Anal. Math.*, 9 :61–95, 2001.
- [GM87] W. Goldman and J. Millson. Local rigidity of discrete groups acting on complex hyperbolic space. *Invent. Math.*, 88 :495–520, 1987.
- [Gol] W. Goldman. An exposition of results of Fricke and Vogt, [www.math.umd.edu/wmg](http://www.math.umd.edu/wmg).
- [Gol85] W. Goldman. Representations of fundamental groups of surfaces. In *Geometry and Topology (College Park, Md., 1983/84)*, pages 95–117. Springer, 1985.

- [Gol88] W. Goldman. Topological components of spaces of representations. *Invent. math.*, 93 :557–607, 1988.
- [Gol90] W. Goldman. Convex real projective structures on compact surfaces. *J. Differential Geometry*, 31, 1990.
- [Gol99] W. Goldman. *Complex Hyperbolic Geometry*. Oxford University Press, Oxford, 1999.
- [GP92] W. Goldman and J. Parker. Complex hyperbolic ideal triangle groups. *Journal für die reine und angewandte Math.*, 425 :71–86, 1992.
- [GP00] N. Gusevskii and J.R. Parker. Representations of free fuchsian groups in complex hyperbolic space. *Topology*, 39 :33–60, 2000.
- [GP03] N. Gusevskii and J.R. Parker. Complex hyperbolic quasi-fuchsian groups and toledo’s invariant. *Geom. Ded.*, 97 :151–185, 2003.
- [Gui04] O. Guichard. Groupes plongés quasi isométriquement dans un groupe de Lie. *Math. Ann.*, 330 :331–351, 2004.
- [Her91] L. Hernández. Maximal representations of surface groups in bounded symmetric domains. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 324, 1991.
- [Hit92] N.J. Hitchin. Lie groups and Teichmüller space. *Topology*, 31, 1992.
- [Jos98] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer, Berlin, 1998.
- [Kap] M. Kapovich. *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups*. Progress in Mathematics. Birkhäuser.
- [Kee71] L. Keen. On Fricke moduli. In *Advances in the Theory of Riemann Surfaces (Proc. Conf., Stony Brook, N.Y., 1969)*, volume 66 of *Ann. of Math. Studies*, pages 205–224. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.
- [Kho] V. T. Khoi. On the  $SU(2,1)$  character variety of the brieskorn homoly spheres. *Preprint*.
- [Kim01] Inkang Kim. Marked length rigidity of rank one symmetric spaces and their product. *Topology*, 40 :1295–1323, 2001.
- [KM04] V. Koziarz and J. Maubon. Harmonic maps and representations of non-uniform lattices of  $PU(m,1)$ . *arXiv :math.DG/0309193 v2*, 2004.
- [KR87] A. Koranyi and H.M. Reimann. The complex cross-ratio on the Heisenberg group. *L’Enseign. Math.*, 33 :291–300, 1987.
- [Lab] F. Labourie. Anosov flows, surface groups and curves in projective space. to appear in. *Invent. Math.*
- [Lan93] S. Lang. *Algebra*. Third Edition, Addison-Wesley, 1993.
- [Law06] S. Lawton. Relations and Symmetries of  $SL(3, \mathbb{C})^2 // SL(3, \mathbb{C})$ . *arXiv :math.AG/0601132v2*, 2006.

- [LS01] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp. *Combinatorial Group Theory*. Classics in Mathematics. Springer, Berlin, 2001.
- [Mat82] J.Peter Matelski. The classification of discrete 2-generators subgroups of  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . *Israel J. Math.*, 42 :309–317, 1982.
- [Min99] Y. Minsky. The classification of punctured-torus groups. *Ann. of Math. (2)*, 149, 1999.
- [Min02] Y. Minsky. End invariants and the classification of hyperbolic 3-manifolds. *Curr. dev. in Math.*, 2002.
- [Mos80] G. D. Mostow. A remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space. *Pac. J. Math.*, 86 :171–276, 1980.
- [Ota92] J.P. Otal. Sur la géométrie symplectique de l'espace des géodésiques d'une variété à courbure négative. *Revista Matemática Iberoamericana*, 3, 1992.
- [Ota96] J.P. Otal. *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension trois*. SMF, Astérisque 235, Paris, 1996.
- [Par03] J. Parker. Notes on complex hyperbolic geometry. 2003.
- [Pau05] J. Paupert. *Configurations of Lagrangians, fundamental domains and discrete subgroups of  $PU(2,1)$* . PhD thesis, Université Paris VI, 2005.
- [PP] J. Parker and I. Platis. Complex hyperbolic Fenchel-Nielsen coordinates, *Preprint*. [www.maths.dur.ac.uk/dma0jrp/](http://www.maths.dur.ac.uk/dma0jrp/).
- [PP06] J. Parker and I. Platis. Open sets of maximal dimension in complex hyperbolic quasi-fuchsian space. *J. Diff. Geom.*, 73 :319–350, 2006.
- [Pra] A. Pratussevitch. Non-discrete complex hyperbolic triangle groups of type  $(m, m, \infty)$ . *preprint*, [www.math.uni-bonn.de/people/anna/publications.html](http://www.math.uni-bonn.de/people/anna/publications.html).
- [Pra05] A. Pratussevitch. Traces in complex hyperbolic triangle groups. *Geometriae Dedicata*, 111 :159–185, 2005.
- [Pro76] C. Procesi. The invariant theory of  $n \times n$  Matrices. *Advances in Math.*, 19 :306–381, 1976.
- [Rat94] John G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Springer, New York, 1994.
- [San95] H. Sandler. Traces on  $SU(2, 1)$  and complex hyperbolic ideal triangle groups. *Algebras groups and geometries*, 12 :139–156, 1995.
- [San98] H. Sandler. Trace equivalence in  $SU(2, 1)$ . *Geometriae Dedicata*, 69 :317–327, 1998.
- [Sch01] R. E. Schwartz. Ideal triangle groups, dented tori, and numerical analysis. *Ann. of Math. (2)*, 153 :533–598, 2001.

- [Sch02] R. E. Schwartz. Complex hyperbolic triangle groups. *Proc. Int. Math. Cong.*, 1 :339–350, 2002.
- [Sch05a] F. Schaffhauser. *Decomposable representations and Lagrangian submanifolds of moduli spaces associated to surface groups*. Thèse de l'université Paris VI, 2005.
- [Sch05b] R. E. Schwartz. A better proof of the Goldman-Parker conjecture. *Geometry and Topology*, 9, 2005.
- [Sch06] F. Schaffhauser. Representations of the fundamental group of an  $l$ -punctured sphere generated by products of lagrangian involutions. *Canad. J. Math.*, 2006.
- [Sik01] A. S. Sikora.  $SL_n$ -character varieties as spaces of graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353 :2773–2804, 2001.
- [Thu] W. Thurston. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>.
- [Thu82] W. Thurston. Three dimensionnal manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 6 :357–381, 1982.
- [Tol89] D. Toledo. Representations of surface groups in complex hyperbolic space. *J. Differ. Geom.*, 29 :125–133, 1989.
- [Vog86] H. Vogt. Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre. *Ann. Sci. E. N. S. 3<sup>ème</sup> série*, 1886.
- [Wen94] Z.X. Wen. Relations polynomiales entre les traces de produits de matrices. *C.R. Acad. Sci Paris*, 314 :99–104, 1994.
- [Wie04] A. Wienhard. A generalisation of teichmüller space in the hermitian context. *Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, 22 :103–123, 2004.
- [Wil] P. Will. Punctured torus and lagrangian triangle groups in  $PU(2,1)$ , to appear in. *J. reine angew. Math.*
- [Wil05] P. Will. Lagrangian decomposability of some two generator subgroup of  $PU(2,1)$ . *C.R. Acad. Sci. Paris*, 340 :353–358, 2005.
- [Wol83] S. Wolpert. On the Kähler form of the moduli space of once punctured tori. *Comment. Math. Helvetici.*, 58 :246–256, 1983.
- [Xia00] E.Z. Xia. The moduli of flat  $PU(2,1)$ -structures on riemann surfaces. *Pacific. J. Math.*, 195 :231–256, 2000.
- [Xia03] E.Z. Xia. The moduli of flat  $U(p,1)$ -structures on riemann surfaces. *Geom. Dedicata*, 97 :33–43, 2003.