



HAL
open science

Occlusions pulmonaires, entropion oculaire et anévrismes : une approche physique en physiologie

Virginie Duclaux

► To cite this version:

Virginie Duclaux. Occlusions pulmonaires, entropion oculaire et anévrismes : une approche physique en physiologie. Biophysique [physics.bio-ph]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2006. Français. NNT : . tel-00130610

HAL Id: tel-00130610

<https://theses.hal.science/tel-00130610>

Submitted on 12 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE - AIX MARSEILLE I

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

Spécialité : Systèmes Complexes

École doctorale : Physique, modélisation et sciences pour l'ingénieur

Préparée à l'Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre

Présentée par

Virginie DUCLAUX

**Occlusions pulmonaires, Entropion oculaire et Anévrismes :
une approche physique en physiologie**

Dirigée par Christophe CLANET

Soutenue le 28 novembre 2006 devant le jury composé de :

Gilbert	Albinet	(président),
Lydéric	Bocquet	(rapporteur),
Tomas	Bohr	(rapporteur),
Pierre	Boutouyrie,	
Christophe	Clanet,	
François	Gallaire,	
David	Quéré,	
Alain	Tedgui.	

[...] A ce stade du développement, nous appellerons Dieu le tube.

Il y a une métaphysique des tubes. Slawomir Mrozek a écrit sur les tuyaux des propos dont on ne sait s'ils sont confondants de profondeur ou superbement désopilants. Peut-être sont-ils tout cela à la fois : les tubes sont de singuliers mélanges de plein et de vide, de la matière creuse, une membrane d'existence protégeant un faisceau d'inexistence. Le tuyau est la version flexible du tube : cette mollesse ne le rend pas moins énigmatique.

Dieu avait la souplesse du tuyau mais demeurait rigide et inerte, confirmant ainsi sa nature de tube. Il connaissait la sérénité absolue du cylindre. Il filtrait l'univers et ne retenait rien.

A. Nothomb, *Métaphysique des tubes*.

Pour commencer, je tiens à remercier Christophe Clanet de m'avoir accompagnée au long de ces trois années, qui n'ont pas du être de tout repos ! J'admire particulièrement son incroyable capacité à rester passionné et enthousiaste sept jours sur sept vingt quatre heures sur vingt quatre, même au cours des périodes parfois arides de la vie de chercheur, ou ingrates de celle de directeur de thèse. Cette foi en la science a permis à la thésarde peu assurée que j'étais de croire peu à peu à la validité de ses recherches.

J'apprécie aussi chez Christophe le souci permanent de s'adapter afin de trouver le délicat dosage que l'on attend d'un directeur de thèse, entre autonomie et directivité, et afin par dessus tout de rester disponible et ouvert.

Enfin son sens de l'hospitalité nous a valu quelques agréables soirées sous le ciel de Mimet, avec toujours le plaisir de retrouver Isabelle, Théo, Iseult et Noémie.

Merci aussi à David Quéré, pédagogue hors pair sans qui je n'aurai probablement jamais posé ni un œil sur la physique des liquides, ni un pied dans la recherche, ni mes valises à l'IRPHE.

Mes expériences n'auraient jamais pu tourner rond (ma voiture ni mon coup droit non plus !) sans le concours précieux de Jacky, Franck, Raymond et Matthieu : merci du formidable travail que vous faites à l'atelier. Sans oublier Sylvain, Patrice, Eric et Jean-Paul.

Un grand merci (ou plus exactement Mange Tak) à Tomas Bohr, grâce à qui j'ai aimé Copenhague et découvert un peu la recherche à l'étranger. J'ai également eu beaucoup de plaisir à travailler avec François Gallaire, et son optimisme communicatif. Il m'a permis de découvrir les bienfaits d'un code numérique fait avec de la physique, et nos discussions tripartites avec Christophe ont jeté beaucoup de lumière sur les résultats principaux de la troisième partie de cette thèse.

Je suis reconnaissante à Alain Tedgui, Bernard Levy et Pierre Boutouyrie d'avoir accepté de nous rencontrer à plusieurs reprises avec Christophe, malgré les difficultés de langage que soulève un entretien entre un physicien et un médecin. Grâce à ces collaborations régulières, nous avons pu nous assurer de la pertinence de nos travaux sur les artères pour la physiologie.

Au cours de cette thèse, le monitorat d'enseignement a pris quelquefois beaucoup de mes heures et de mon énergie. Je remercie Eléna de m'avoir prise sous son aile, et Laurence et Evelyne avec qui ce fut agréable de travailler dans le souci d'offrir un enseignement cohérent aux étudiants.

Parmi les gens que j'ai rencontrés ces trois années durant, certains tiennent un peu des grands frères et sœurs : je pense en particulier à Manue — agence particulière pour le logement — et José, à l'imagination débordante, sans qui Copenhague aurait sans doute été bien moins ensoleillée ! J'ai aussi beaucoup apprécié les quelques rencontres très amicales avec Lydéric au cours des divers congrès où nous nous sommes croisés.

En vrac et sans ordre, merci à :

Simona pour tant,

Judith et nos innoubliables joutes verbales,

Claire et ta gentillesse sans égale,

François et ton sens du rangement,

Lionel et ton formidable accueil à New-York (et ton sens du rangement également),

Lucienne et ta souriante bonne volonté,

Christophe A. et ta mauvaise foi que je n'arrive même pas à égaler,

Patrice M. et ton fabuleux coaching pour grimper,
Arnaud que j'ai eu un plaisir immense à rencontrer,
Emilie et ton rire qui enfin masquait le mien,
Le groupe du RU des premiers mois : Julien, Xabier, Laurent L, Benjamin...
Pascale la quérette
et une certaine blanquette,
Nicolas V., le modérateur de nos discussions,
Nicolas B. — autant que moi sous pression —
et sans qui la période de rédaction aurait été encore plus dure!
Laurent D. et ton admirable ouverture,
Sunita, pour m'avoir supportée trois ans dans ton bureau!
Laurence et Muriel, les sourires du labo,
les deux Marc qu'il était toujours agréable de croiser,
Mathilde et Etienne que j'ai régulièrement retrouvés,
mais aussi aux étrangers de la recherche, et notamment,
Maud (en souvenir de la Commune) et Guillaume, votre bonne humeur en tout temps,
Cyril et ton assiduité pour la salle d'escalade,
Maryline et ta persévérance légendaire pour la capoeira,
Mes parents, ma famille.

Enfin, il reste ceux sans qui Marseille n'aurait pas eu le même visage pour moi, à savoir
Yann, Ludo, Antony, Jennyfer, Fabrice, Renaud et Christophe L.

Et surtout, le dernier mais non le moindre, Eric, à qui je dédicace ce manuscrit.

Table des matières

I	Occlusions des alvéoles pulmonaires : une question de capillarité?	9
1	Occlusions pulmonaires : introduction et contexte	15
1.1	Données anatomiques	15
1.2	Instabilité capillaire : l'effet de la tension de surface en géométrie cylindrique. . .	19
1.3	Motivation : la place des occlusions pulmonaires en médecine.	22
1.4	Objectifs et domaine d'étude	24
2	Montage expérimental	25
2.1	Matériaux employés	25
2.2	Protocole expérimental	26
3	Influence de la gravité sur l'instabilité capillaire	31
3.1	Observations expérimentales	31
3.2	Modèle classique	34
3.3	Modèle avec gravité	38
3.4	Remarques complémentaires	44
4	La bulle prise à la gorge : les derniers instants de l'instabilité	49
4.1	Protocole pour l'étude de la phase de pincement de l'air	50
4.2	Dynamique d'approche de l'instant du pincement	50
4.3	Dynamique de séparation des bulles filles	53
II	Entropion oculaire : étalement et retournement « visco-élastique »	59
1	Entropion et syndrome de l'œil sec : introduction	65
1.1	Éléments d'anatomie oculaire	65
1.2	Modélisation du système paupières-larmes	69
1.3	Présentation de notre étude	70
2	Dispositif expérimental	73
2.1	Principe général	73
2.2	Les « paupières » : des feuilles élastiques	74
2.3	Les « larmes » : des huiles silicones	75
2.4	Précaution concernant l'effet de la capillarité	75
2.5	Régime de fonctionnement des expériences	75
3	Mesures, modèle et discussion	77
3.1	Observations et mesures	77
3.2	Equations gouvernant le système	79
3.3	Comparaison et discussion	86

3.4	Conclusion de l'étude sur le fonctionnement des paupières et l'entropion	89
III	Approche mécanique du développement des anévrismes de l'aorte abdominale	91
1	Les anévrismes de l'aorte abdominale : introduction	97
1.1	Prévalence de l'anévrisme de l'aorte abdominale	97
1.2	L'aorte, artère principale du réseau sanguin	99
1.3	Écoulement au sein de l'aorte	101
1.4	Objectifs et domaine d'étude	102
2	Montage expérimental	105
2.1	L'aorte : une membrane élastique	105
2.2	Le cœur : un piston piloté par un vérin	115
2.3	Le sang : de l'eau	118
2.4	Pertes régulières imposées par l'écoulement dans le réseau artériel secondaire : le tube aval	118
2.5	Diagnostic : les outils de mesure.	120
2.6	Précautions à prendre avec le montage expérimental	121
3	Comportement ondulatoire à l'échelle du cycle cardiaque	123
3.1	Seuil d'apparition d'ondes	123
3.2	Modèle de propagation d'ondes dans un tube élastique	125
3.3	Comparaison entre notre modèle et nos expériences	133
3.4	Résolution numérique	134
3.5	Applications physiologiques	140
4	Comportement à l'échelle de la vie	143
4.1	Observations expérimentales	143
4.2	Modélisation d'un tube élastique soumis à un forçage et à une résistance	146
4.3	Comparaison avec l'expérience	153
4.4	Expériences numériques de croissance des anévrismes	155
4.5	Applications physiologiques	163
IV	Annexes	169
A	Complément sur les occlusions pulmonaires	i
A.1	Transition vers le cas inertiel, après le pincement	i
B	Compléments sur l'entropion	v
B.1	Caractérisation de la raideur des feuilles de mylar	v
C	Compléments sur les anévrismes	ix
C.1	Colonnes oscillantes	ix
D	Articles	xvii
E	Références bibliographiques	lix

Préambule

Les problèmes que nous abordons dans cette thèse sont d'origine physiologique.

Notre ambition n'est évidemment pas de nous substituer aux médecins, mais plutôt, en interagissant avec eux, de leur apporter notre regard de physicien. Ce point de vue, s'il est pertinent, complétera l'approche des médecins, suscitera de nouvelles réflexions et, peut-être, à terme, des progrès pour les méthodes de diagnostic et de traitement.

Nous avons identifié trois problèmes associés à des pathologies humaines pour lesquelles la physique semble jouer un rôle dominant : les occlusions pulmonaires liquides, le fonctionnement des paupières et leur possible retournement (entropion), et enfin le développement des anévrismes aortiques.

Dans chacune de ces problématiques, nous avons essayé de réduire la complexité du problème physiologique de façon à pouvoir le traiter par un montage mécanique en laboratoire afin d'en tirer des lois physiques. Ces lois permettent d'identifier le rôle de chacun des paramètres retenus et suggèrent des cibles thérapeutiques pour de futures recherches en physiologie et en médecine.

Première partie

Occlusions des alvéoles pulmonaires : une question de capillarité ?

1	Occlusions pulmonaires : introduction et contexte	15
1.1	Données anatomiques	15
1.1.1	Les poumons	15
1.1.2	Le mucus	17
1.2	Instabilité capillaire : l'effet de la tension de surface en géométrie cylindrique. . .	19
1.3	Motivation : la place des occlusions pulmonaires en médecine.	22
1.3.1	Des pathologies	22
1.3.2	Comment soigne-t-on ces pathologies ?	23
1.3.3	Réouverture des lentilles	24
1.4	Objectifs et domaine d'étude	24
2	Montage expérimental	25
2.1	Matériaux employés	25
2.1.1	Notre mucus : une variété de liquides modèles	25
2.2	Protocole expérimental	26
2.2.1	Montage expérimental et mesures	26
2.2.2	Dépôt d'une couche de fluide aux parois d'un tube	27
2.2.3	Remarque sur le nettoyage des tubes	29
3	Influence de la gravité sur l'instabilité capillaire	31
3.1	Observations expérimentales	31
3.1.1	Un seuil de disparition pour l'instabilité	31
3.1.2	La longueur d'onde de la perturbation, λ	31
3.1.3	Le taux de croissance de l'instabilité, τ	33
3.2	Modèle classique	34
3.2.1	Etude de stabilité de l'interface	34
3.2.2	Hypothèses	36
3.2.3	Dynamique	36
3.2.4	Comparaison avec les résultats expérimentaux	37
3.3	Modèle avec gravité	38
3.3.1	Raisonnement en loi d'échelles	38
3.3.2	Notations et hypothèses pour le modèle avec gravité	40
3.3.3	Description théorique de la transition	40
3.3.4	Comparaison entre le modèle et les résultats expérimentaux	42
3.4	Remarques complémentaires	44
3.4.1	Remarque sur la relation de dispersion	44
3.4.2	Quelles sont les régions des poumons concernées par l'instabilité capillaire ?	45
3.4.3	Réouverture des bronches : rupture d'un chapelet de lentilles	47
4	La bulle prise à la gorge : les derniers instants de l'instabilité	49
4.1	Protocole pour l'étude de la phase de pincement de l'air	50
4.2	Dynamique d'approche de l'instant du pincement	50

4.2.1	Conventions de notation	50
4.2.2	Observations expérimentales	50
4.2.3	Modèle en lois d'échelles	51
4.2.4	Comparaison avec l'expérience	52
4.3	Dynamique de séparation des bulles filles	53
4.3.1	Nouvelles notations	53
4.3.2	Résultats des expériences	53
4.3.3	Modèle pour la séparation	53
4.3.4	Comparaison des résultats avec le modèle	54
4.3.5	Parallèle avec la loi d'imprégnation d'un poreux	55

Liste des symboles de la partie I

a	longueur capillaire $a = \sqrt{\sigma/\rho g}$	ε	excentricité normalisée par h_0
Bo	nombre de Bond $Bo = R_{i0}/a$	λ	longueur d'onde
C	courbure de l'interface	μ	viscosité dynamique
Ca	nombre capillaire $Ca = \mu U/\sigma$	ν	viscosité cinématique
d	diamètre des bronches	ξ	amplitude normalisée des déformations variqueuses
E	module d'Young	$h = h_0(1 + \xi \cos(kx))$	
g	pesanteur terrestre, $9,81 \text{ m.s}^{-2}$.	ρ	masse volumique
h	épaisseur de fluide à la paroi	σ	tension de surface
k	nombre d'onde	τ	temps caractéristique
P	pression au sein du fluide		
r	distance à l'axe du cylindre		
R_0	rayon du tube		
R_i	rayon de l'interface, initialement R_{i0}		
Re	nombre de Reynolds $Re = \rho U L/\mu$		
t	temps		
$\underline{u}(u_r; u_\theta)$	vitesse instantanée dans le liquide		

Indices et exposants

X_0	valeur de la grandeur X à vide (écoulement nul)
X^*	valeur seuil de la grandeur X

Chapitre 1

Occlusions pulmonaires : introduction et contexte

Les occlusions pulmonaires sont des obstructions liquides des bronches ou bronchioles. Elles sont prépondérantes dans certaines pathologies et nous allons nous attacher à comprendre leur origine et leur devenir.

1.1 Données anatomiques

1.1.1 Les poumons

a/ Une structure ramifiée pour une grande surface d'échange

Dans le corps humain, les poumons sont le lieu d'échange de dioxygène, de CO_2 , de vapeur d'eau et de température entre l'air et le sang. 10 à 120 fois par minutes (16 à 20 fois en fonctionnement courant [21]), un demi litre d'air doit pouvoir se mettre en contact avec le sang pour effectuer ces échanges, en à peine plus de 3 secondes. Or, les transferts de matière, de chaleur, d'énergie sont en règle générale facilités par une importante surface d'échange entre deux milieux.

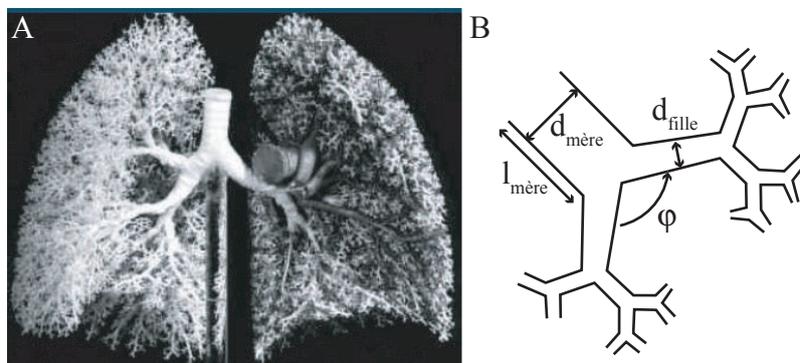


FIG. I.1.1 – **A/** Moulage de poumons. **B/** Embranchement type.

Ainsi, les poumons sont des organes très ramifiés (figure I.1.1-A), qui développent malgré leur faible encombrement (5 litres) une surface d'échange entre l'air et le sang de 70 à 100 m^2 [13, 22] chez l'adulte, soit environ la moitié d'un court de tennis! Pour

atteindre ce chiffre, les poumons adoptent une structure arborescente : le tronc en est la trachée, qui se divise en deux bronches de génération 1, et ainsi de suite, 23 fois, pour aboutir à plus de 8 millions de sacs alvéolaires où ont lieu les échanges de gaz proprement dits.

Les premières générations de bronches sont de simples conduits dans lesquels aucun échange gazeux n'a lieu. Lorsque le diamètre se rétrécit à moins de 0,6 mm (génération 16), les bronchioles deviennent « respirantes », c'est à dire qu'on trouve des alvéoles sur leur paroi. Trois générations plus loin, environ, elles deviennent des conduits alvéolaires entièrement tapissés de sacs alvéolaires [22]. A ce stade, la somme des sections des bronchioles d'une même génération augmente très fortement à chaque embranchement, et la vitesse de l'air devient très faible, permettant les échanges de gaz.

b/ Caractéristiques géométriques d'un embranchement type

Le tableau I.1.1 reprend les données reportées par Pedley [22] d'après les travaux de Weibel [33]. Il liste une évaluation des longueurs et diamètres des conduits pulmonaires de diverses générations. Notons par ailleurs que les travaux de West [34] s'appuient sur les mêmes données de Weibel pour tenter de construire un modèle mathématique fractal décrivant l'évolution du diamètre en fonction de la génération d'une bronche.

Génération	Longueur l (cm)	Diamètre d (cm)	Nombre de Reynolds
Trachée	12,0	1,80	2325 – 9300
1	4,76	1,22	1719 – 6876
2	1,90	0,83	1281 – 5124
3	0,76	0,56	921 – 3684
4	1,27	0,45	594 – 2376
5	1,07	0,35	369 – 1476
10	0,46	0,13	32 – 127
15	0,2	0,066	1,9 – 7,6
20	0,083	0,045	0,09 – 0,37
Sac Alvéolaire	0,015	–	–

TAB. I.1.1 – Caractéristiques géométriques des bronches.[13, 22]

La géométrie type (figure I.1.1-B) pour une bifurcation de génération inférieure à 16 est [33, 34], un rapport d'aspect longueur sur diamètre de chaque conduit constant, qui selon Pedley [22] vaut en moyenne $l/d = 3,5$. La bronche mère donne lieu au niveau de l'embranchement à deux filles écartées d'un angle ϕ compris entre 64° et 100° et dont le diamètre est proportionnel au diamètre de la bronche mère : $d_{\text{fille}}/d_{\text{mère}} = 0,79$.

c/ La respiration

Concernant les propriétés de la paroi pulmonaire, on trouve chez Heil [16] les valeurs suivantes : l'épaisseur de la paroi mesure environ un dixième du rayon d'un conduit, elle présente un module élastique $E = 6.10^3$ Pa et un coefficient de Poisson $\nu = 0,49$. C'est à dire que les parois sont très souples : en effet, un caoutchouc comme celui utilisé en partie

II pour l'étude des anévrismes présente déjà un module d'Young 100 fois plus grand.

Réserve inspiratoire (1.5L)	Capacité vitale (4L)	Capacité Pulmonaire Totale (5L)
Volume courant (0.5L)		
Réserve expiratoire (2L)		
Volume résiduel (1L)		

TAB. I.1.2 – Ramifications et répartition approximative du volume des poumons chez l'homme.

Cette souplesse est mise à profit en permanence, puisque le mécanisme même de la respiration la met en jeu. Lors de l'inspiration, le diaphragme s'abaisse, et le volume des poumons doit augmenter, créant un appel d'air au niveau du nez et de la bouche [22]. La variation courante de volume est d'un demi litre en régime de repos (tableau I.1.2). En cas d'effort ou de toux., on peut inspirer 1,5 L de plus, ou expirer 2 L : ce sont les réserves inspiratoires et expiratoires. Remarquons qu'il reste en permanence dans les poumons un volume mort que l'on qualifie de résiduel, et qui n'est jamais expiré.

Enfin, Grotberg [13] évoque les changements de géométrie des bronches, dont les dimensions l et d changent en même temps que le volume du poumon au cours du cycle respiratoire. Leur variation relative est de l'ordre de la racine cubique de celle du volume total du poumon, on a donc assez couramment des variations de l'ordre de 20% pour l et d .

1.1.2 Le mucus

Les parois des conduits pulmonaires ne se trouvent pas directement en contact avec l'air. Elles sont recouvertes d'un mucus aux fonctions multiples [35].

a/ Son rôle : un filtre multifonctions

Le mucus a pour vocation de piéger les particules inhalées afin qu'elles ne rentrent pas en contact avec le milieu intérieur. Cette fonction est en particulier assurée dans la trachée et les premières générations de bronches. Le deuxième attribut de ce mucus est encore un rôle de protection grâce à ses propriétés antibactériennes. De plus, il hydrate les cellules de la paroi (épithéliales) qui, sans cela, se dessécheraient [13]. Il facilite enfin les échanges gazeux grâce à des surfactants et des protéines.

b/ Sa production et sa régulation

Le mucus est produit dans les grosses bronches par des glandes, appelées submucosales, et des cellules sécrétrices, les cellules caliciformes [35] (figure I.1.2-B). Dans la trachée, on trouve environ une glande par millimètre carré de surface épithéliale, pour un débit surfacique maximum de $120 \mu\text{L}/\text{cm}^2/\text{h}$. Le nombre des glandes diminue au fur et à mesure que l'on parcourt les embranchements. Dans les petites bronchioles, leurs fonctions sont assurées par les cellules de Clara, qui sont en quelque sorte des cellules sécrétrices moins matures.

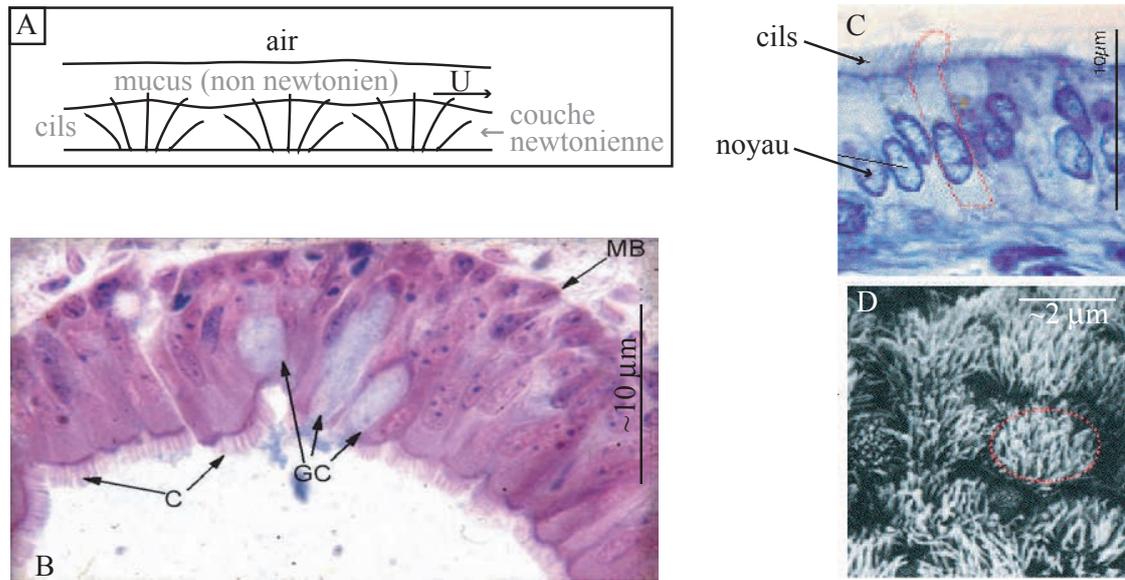


FIG. I.1.2 – Photographies de l'épithélium des conduits pulmonaires :

- A/** Schéma fonctionnel des cils qui, par leurs battements, propulsent le mucus vers le larynx.
- B/** Vue en coupe d'une trachée de mammifère, où l'on distingue les cellules sécrétrices (GC pour goblet cells) et les cellules ciliées (C).
- C/** Epithélium d'une bronchiole vue en coupe au microscope optique (800×; coloration obtenue par bleu de toluidine).
- D/** Tapis de cellules ciliées sur la paroi d'une bronchiole (microscope électronique à balayage, 2000×). Une touffe de cils correspond à une cellule.

En moyenne, une cellule sur cinq de l'épithélium est une cellule sécrétrice. Hormis les bronchioles terminales, le reste de la paroi est tapissé de cellules ciliées [20, 35] (figure I.1.2-C et D). Elles servent à évacuer le mucus souillé vers la trachée, d'où il est soit expectoré, soit détruit dans le système digestif. Là où l'on trouve des cellules ciliées, le mucus est alors constitué de deux phases superposées [13] (voir figure I.1.2-A) : le mucus proprement dit, non newtonien, est maintenu à portée des cils par une couche newtonienne moins visqueuse. Les battements coordonnés des cils qui effleurent la couche supérieure lui imprime un mouvement dans un sens, tandis que lors du retour, la pointe des cils ne touche plus cette couche. Avec un battement à une fréquence de 15 hz, on obtient une vitesse du mucus de 0,2 mm/s. L'efficacité de ce système est assez peu dépendante de la viscosité du mucus, mais est au contraire sensible à l'épaisseur de la couche intermédiaire, c'est à dire de la quantité de sécrétion aqueuse dans les poumons [3, 13].

Dans les bronchioles respirantes (génération 16 et plus), on ne trouve pas de cils : une simple couche de liquide, newtonien [13], est présent. La fonction d'évacuation du mucus est assurée seulement par deux mécanismes complémentaires que sont la respiration et la toux (qui sont aussi présents dans les générations précédentes, en complément des battements de cils). En effet, la respiration étant non symétrique entre l'inspiration (plus lente) et l'expiration (plus brève), une contrainte de cisaillement moyenne est exercée par la circulation de l'air sur la couche de mucus, qui est de ce fait entraîné vers la bouche.

La toux est également un moyen important de faire remonter le mucus, avec des vitesses d'air au sein des poumons supérieures à 200 m/s.

L'équilibre entre le nombre de cellules sécrétrices et l'efficacité des mécanismes de remontée du mucus (cellules ciliées, toux, respiration) est crucial quant à la régulation de la quantité de mucus présent à la surface des conduits aériens. En temps normal, il semble que l'épaisseur de mucus varie assez peu au sein des poumons. On trouve généralement une approximation de h_{mucus} de 5 à 10 μm [22, 35].

c/ Ses propriétés physiques

Selon King [20], le mucus est composé à 95% d'eau, et contient 1 à 2% de protéines, 1% de glycoprotéines et 1% de lipides. C'est un fluide généralement non newtonien, sauf dans les bronchioles terminales [13], et présente en règle générale un seuil de contrainte à partir duquel il s'écoule (assez proche de celui de la mayonnaise selon King [20]). Il adopte également un comportement thixotrope (c'est à dire fonction de son histoire) et viscoélastique. Dans les bronchioles respirantes, néanmoins, il a un comportement newtonien selon Grotberg [13], et on y mesure une viscosité dynamique $\mu = 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ [16, 19]. Par ailleurs, nous appellerons ρ sa masse volumique, qui vaut, selon les mêmes auteurs $10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$.

Etant donnée la surface recouverte et les petites dimensions mises en jeu, les phénomènes interfaciaux vont être prépondérants.

Heil et Kamm [16, 19] s'accordent sur une valeur de tension de surface $\sigma = 20 \text{ mN}/\text{m}$. A partir de ces données, nous déduisons une longueur capillaire a associée au mucus de

$$a = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \approx 1,43 \text{ mm} \quad (\text{I.1.1})$$

Cette longueur borne les échelles où les effets gravitaires sont gommés par les forces de cohésion du liquide : sur des distances plus faibles que a , le liquide peut ainsi s'élever pour former des ménisques (figure I.1.4-B) ou imprégner des tubes très minces.

Si l'on compare la longueur capillaire à celle qui caractérise le système, on forme le nombre de Bond $Bo = L/a$, qui, s'il est petit, indique généralement que l'on peut négliger les effets gravitaires devant les effets capillaires. Kamm [19] indique que, dans les alvéoles terminales, $Bo = 0,123$, ce qui répond à ce critère : les phénomènes pilotés par la tension de surface auront donc de l'importance dans les poumons. Ceci explique pourquoi les effets gravitaires ont jusqu'à présent été négligés [14] dans ces applications. Nous nous proposons dans ce chapitre de revenir sur cette hypothèse.

1.2 Instabilité capillaire : l'effet de la tension de surface en géométrie cylindrique.

Lorsque les effets capillaires dominent, certaines formes géométriques ne sont pas des figures d'équilibre stables. Le cylindre en est un exemple : le système composé d'une

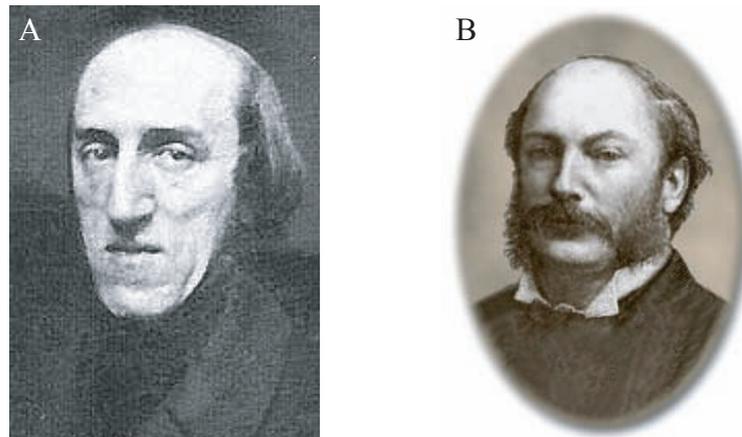


FIG. I.1.3 – Les physiciens qui donnent leur nom à l’instabilité capillaire : **A/** Joseph Plateau (1801-1883). **B/** Lord Rayleigh (1842-1919).

bronche enduite de mucus peut ainsi donner lieu à une instabilité d’origine capillaire.

Félix Savart (1791-1841), médecin chirurgien et physicien français, observe expérimentalement dans son ouvrage de 1833 [27] qu’un jet de liquide se divise parfois en gouttelettes. En 1873, le physicien belge Joseph Plateau (figure I.1.3-A) étudie des systèmes de liquides avec gravité compensée. Il décrit les diverses formes que peut prendre une interface liquide soumise à la tension de surface, et écrit alors [23] : « *Lorsqu’un cylindre liquide¹ est formé entre deux bases solides, si le rapport de sa longueur à son diamètre surpasse une certaine limite dont la valeur exacte est comprise entre 3 et 3,6, le cylindre constitue une figure d’équilibre instable. [...] Si le cylindre a une longueur considérable par rapport à son diamètre, il se convertit spontanément, par la rupture de l’équilibre, en une série de sphères isolées.* ». Quelques années plus tard, Lord Rayleigh étudie également le problème de l’instabilité du jet [25, 26], et exprime la longueur d’onde selon laquelle se déstabilise un système dominé soit par l’inertie soit par la viscosité.

Nous retenons donc que cette instabilité capillaire, qui s’explique géométriquement, affecte toutes les interfaces cylindriques « longues ». C’est ainsi que le jet d’eau émanant d’un robinet vient heurter le fond de l’évier sous forme de gouttelettes bien distinctes (on le ressent très clairement en y plaçant la main), ou encore que la toile d’araignée se couvre au matin de gouttes de rosée, plutôt que d’une couche uniforme d’eau (figure I.1.4-A).

Une couche de liquide recouvrant la surface interne d’un tube a la même géométrie cylindrique : elle est aussi sujette à cette instabilité (figure I.1.5-A). Le dépôt de liquide se déforme donc et vient pincer le cœur constitué d’air, le divisant en bulles distinctes, séparées par des lentilles de liquide.

L’étude de la dynamique de la couche liquide [5, 8, 26] indique alors que la compétition entre les forces capillaires et les dissipations visqueuses entraîne la sélection d’une longueur d’onde privilégiée de déstabilisation $\lambda = 2\pi\sqrt{2}R$ et d’un temps caractéristique de développement $\tau = 12\mu R^4/\sigma h^3$. R dénote le rayon initial de l’interface, et h l’épaisseur de liquide, comme indiqué sur la figure I.1.5-B.

¹plus généralement, fluide



FIG. I.1.4 – **A/** Gouttes d'eau sur toile d'araignée. Photographie de Michel Corboz (<http://www.pbase.com/zobroc/image/42530593/original>). **B/** Ménisque capillaire d'eau sur un barreau de verre.

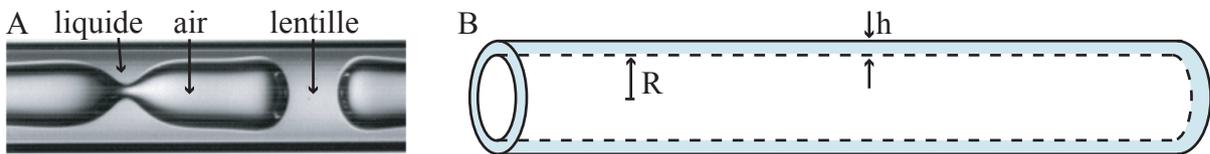


FIG. I.1.5 – **A/** Déstabilisation d'un film d'huile silicone aux parois d'une tube de rayon $420 \mu\text{m}$. **B/** Définition de R et h .

Lors de cette instabilité, le liquide doit se déplacer à une vitesse qui est donc de l'ordre de $U \sim \lambda/\tau \sim \sigma h^3/\mu R^3$. La plus grande vitesse atteinte dans nos poumons le sera dans les petits conduits. On obtient $U_{max} \approx 6 \text{ mm/s}$.

Le nombre de Reynolds compare l'importance de l'inertie à celle de la viscosité. Il s'écrit $Re = \rho UL/\mu$ avec L la longueur caractéristique du système, c'est à dire, ici, h . Dans le cas des poumons, on arrive à $Re_{max} \approx 0,06$. Nous devons donc, dans notre montage expérimental, travailler à faible nombre de Reynolds : pour augmenter l'échelle des tubes, nous utiliserons des liquides visqueux.

On définit également le nombre capillaire $Ca = \mu U/\sigma$. Il décrit l'importance des forces capillaires par rapport aux forces visqueuses. Dans le cas des bronches, en reprenant la même vitesse, on calcule $Ca = 3.10^{-4}$. On se situe donc dans la limite des faibles nombres capillaires, et les forces capillaires prendront le pas sur les forces visqueuses au niveau des sauts de pression interfaciaux.

1.3 Motivation : la place des occlusions pulmonaires en médecine.

Puisque dans les bronchioles, le nombre de Bond est faible et que nous sommes en géométrie cylindrique, l'instabilité capillaire peut avoir lieu. En effet, Grotberg et Kamm [13, 19], par exemple, suggèrent qu'elle peut être à l'origine de la formation de lentilles de mucus obstruant les bronchioles : les occlusions pulmonaires (figure I.1.6). La formation de telles lentilles est normale dans les bronchioles terminales en fin d'expiration, lorsque le volume des poumons est faible [13, 19]. Lors de l'inspiration, le rayon des bronches augmente, les lentilles sont poussées par l'air, et se rouvrent.

Dans certaines pathologies pulmonaires, en revanche, elles constituent un problème épineux en raison de leur trop grand nombre, leur emplacement et/ou leur solidité. En effet, si une lentille est formée, elle isole toutes les bronchioles descendantes successives de la circulation d'air (figure I.1.6). Le volume ainsi contenu participe alors au volume résiduel, qui a été décrit comme un volume mort.

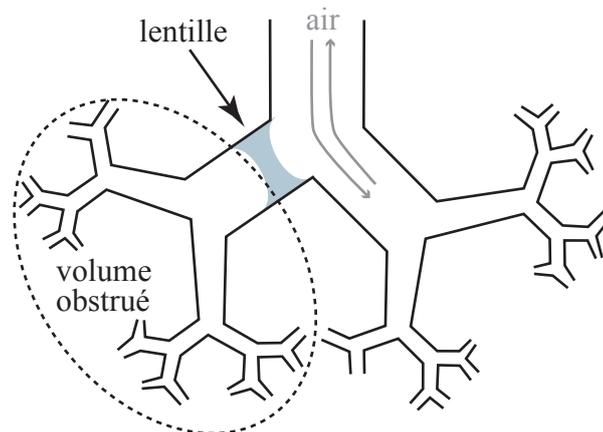


FIG. I.1.6 – Schéma d'une lentille de mucus obstruant un conduit respiratoire et toutes ses ramifications filles (entourées en pointillés).

1.3.1 Des pathologies

Parmi les pathologies pulmonaires dans lesquelles on observe la formation de ces occlusions pulmonaires, on recense en particulier :

La broncho-pneumopathie chronique obstructive (BPCO) qui touche environ un quart des fumeurs et se traduit par un rétrécissement du diamètre des conduits aériens [22], une ventilation pénible et faible, une hyper-réactivité des bronches [20], une toux fréquente, et une diminution non-réversible des débits respiratoires.

L'asthme présente des symptômes similaires, mais réversibles puisqu'il se manifeste par crises.

La fibrose kystique est une affection héréditaire des glandes des muqueuses qui, suite à un déséquilibre ionique [35], secrètent un mucus aux propriétés altérées (plus épais, mal évacué).

La mucoviscidose se traduit également par des difficultés à évacuer un mucus trop visqueux.

Les deux premières maladies présentent une irritation de l'épithélium pulmonaire [35], qui implique une surproduction de mucus par les glandes de la trachée et des bronches principales. King [20] décrit plus particulièrement l'enchaînement des symptômes de la BPCO. Sous l'effet de l'irritation, le mucus, trop abondant, voit ses propriétés rhéologiques modifiées : il est plus visqueux, sa tension de surface change. Il se retrouve piégé dans des conduits rétrécis. Les lentilles alors formées sont suffisamment tenaces pour que la toux n'arrive plus à les détruire. Il en découle une mauvaise ventilation, une grande résistance à l'écoulement de l'air, un gonflement permanent de la poitrine et une intense fatigue respiratoire. Les lentilles formées facilitent également le risque de colonisation bactérienne et favorisent donc l'apparition d'une bronchite infectieuse, d'une bronchiolite ou d'une pneumonie.

Les problèmes communs à ces maladies sont en substance la présence d'une trop grande quantité de mucus dans les poumons, et l'augmentation de sa viscosité, qui entraîne la formation d'occlusions pulmonaires.

1.3.2 Comment soigne-t-on ces pathologies ?

Certaines des thérapies actuellement mises en oeuvre tendent à modifier les propriétés du mucus pour empêcher ou retarder la formation de lentilles, ou faciliter leur rupture. D'autres cherchent à améliorer l'évacuation de mucus par un moyen annexe. King [20] en donne une liste détaillée :

Agents mucolytiques : ils changent les propriétés du mucus pour accroître l'efficacité des cils et de la toux pour faire remonter le mucus.

Expectorants oraux : ils augmentent la sécrétion aqueuse, ce qui a pour effet de rendre le mucus moins visqueux.

Ambroxol : ils amplifient la production de surfactants, réduisant l'importance des phénomènes interfaciaux qui sont également retardés.

Surfactants exogènes : c'est le même principe, sauf que des surfactants artificiels sont injectés.

β -agonistes : ils haussent la fréquence de battement des cils, ce qui est efficace pour remonter le mucus dans la mesure où les cellules ciliées ne sont pas trop endommagées. L'effet est cependant nul dans les générations profondes où il n'y a pas de cellules ciliées. Ils dilatent également les conduits respiratoires (exemple : la ventoline, dans le cas de l'asthme).

Anticholinergiques : ils réduisent la production de mucus.

Corticostréroïdes : si il y a une inflammation (BPCO, athme, fibrose), ils atténuent la réaction productrice de mucus.

Massages : c'est un aide physique directe pour déplacer le mucus et provoquer la toux.

Ces remèdes s'attaquent donc à l'épaisseur de mucus, à sa tension de surface et à sa viscosité. Nous verrons par la suite quels paramètres sont les plus cruciaux dans l'étude de l'instabilité capillaire.

1.3.3 Réouverture des lentilles

En cas de bronchite, d'asthme ou de fibrose, l'équilibre entre les cellules ciliées et les cellules sécrétrices est rompu [20, 35] : les cellules ciliées, moins nombreuses, se révèlent moins efficaces pour évacuer le mucus trop abondant. La toux devient alors le moyen privilégié pour expectorer le mucus, et son efficacité est primordiale.

Le phénomène de réouverture a été étudié [17, 28]. La brisure de la lentille semble mettre en évidence de fortes perturbations de l'interface avec détachement de gouttelettes transportées ensuite avec l'air environnant [28]. Howell [17] étudie théoriquement le déplacement d'une lentille et met en évidence la pression nécessaire pour que la lentille se redépose à la paroi du tube.

1.4 Objectifs et domaine d'étude

Le but de notre étude est d'observer expérimentalement les conditions de formation des lentilles de liquides dans un tube.

Pour cela, nous idéalisons les bronches que nous représentons comme des tubes rigides enduits d'une couche de liquide newtonien. Nous aurons souci de nous placer dans un régime pertinent :

$$Bo \ll 1 \quad ; \quad Re \ll 1 \quad ; \quad Ca \ll 1$$

Le montage expérimental est décrit dans le chapitre suivant. Nous analysons ensuite expérimentalement l'instabilité de Plateau-Rayleigh dans notre « bronche » artificielle, ainsi que les effets de la gravité lorsque le tube est placé horizontalement. Nous décrirons ensuite la phase ultime de la formation de lentilles liquides obstruant un tube : le pincement de l'air.

Chapitre 2

Montage expérimental

Afin d'étudier expérimentalement la formation des lentilles de mucus dans les poumons, nous construisons un montage épuré permettant de déposer une couche de liquide (mucus factice) d'épaisseur contrôlée à la paroi d'un tube (représentant la bronche).

2.1 Matériaux employés

a/ Nos bronches artificielles

Dans notre montage, nous conservons la caractéristique cylindrique des bronches en utilisant des tubes. Néanmoins, nos tubes sont rigides .

Les tubes que nous utilisons ont été commandés auprès du verrier de l'université de Provence. Ils ont des rayons internes s'échelonnant entre $150 \mu\text{m}$ et $2,44 \text{ mm}$. Leur rayon a été mesuré à l'aide d'une pointe jaugée, aux deux extrémités. L'incertitude sur le rayon du tube est de 6% pour les plus gros, et monte jusqu'à 10% pour les plus minces.

On a aussi utilisé des tubes de micropipette, toujours en verre, calibrés en volume par le constructeur. Leurs rayons couvraient une gamme allant de $150 \mu\text{m}$ à $700 \mu\text{m}$, complétant avantageusement les lacunes des tubes du verrier.

Pour s'intéresser à la question du rapport d'aspect des bronches, nous nous sommes aussi procuré des embranchements de tubes en verres fabriqués par le verrier de l'Ecole Polytechnique.

2.1.1 Notre mucus : une variété de liquides modèles

Pour jouer le rôle du mucus, nous avons utilisé des huiles silicones de viscosités variées, du glycérol, de l'hexane et de l'éthanol.

Leurs propriétés sont présentées dans le tableau [I.2.1](#), parallèlement aux caractéristiques du mucus. On observe dans ce tableau qu'elles sont similaires à celles du mucus. Nous avons utilisé beaucoup d'huile silicone qui présente l'avantage de mouiller le verre et d'avoir une viscosité bien calibrée. Le glycérol a été utile pour changer de longueur capillaire (car toutes les huiles silicones ont sensiblement la même), et l'éthanol et l'hexane, moins visqueux, pour obtenir des comportements dominés par l'inertie (voir annexe [A.1](#)).

Nous nous attachons à rester dans le domaine des faibles nombres de Bond. Dans un tube de milieu de gamme, de rayon $400 \mu\text{m}$, le nombre de Bond pour une huile silicone sera d'environ 0,3. Notre gamme de tubes et de liquides paraît donc pertinente pour

l'étude du mucus pulmonaire.

Liquide	Masse volumique ρ (kg.m ⁻³)	Viscosité dynamique μ (kg.m ⁻¹ .s ⁻¹)	Tension de surface σ (mN.m ⁻¹)	Longueur capillaire a (mm)
Mucus [16, 19]	10 ³	10 ⁻³	20	1,43
H.S. V05	920	4,6 10 ⁻³	19,7	1,48
H.S. V20	950	1,9 10 ⁻²	20,6	1,49
H.S. V100	952	1,0 10 ⁻¹	22,5	1,55
H.S. V1000	965	1	22,5	1,54
H.S. V12500	965	12,5	22,5	1,54
Glycérol 98%	1260	9 10 ⁻¹	63	2,25
Éthanol	789	3,7.10 ⁻⁴	22,4	1,70
Hexane	658	3,3.10 ⁻⁴	18,4	1,69

TAB. I.2.1 – Propriétés physiques des différents liquides employés (à 25°C) et du mucus humain. H. S. signifie Huile Silicone.

2.2 Protocole expérimental

Rappelons que nous voulons créer une situation initiale contrôlée pour observer l'instabilité de Plateau-Rayleigh dans un tube : il s'agit donc de déposer à la paroi intérieure de notre tube un film de liquide d'épaisseur uniforme et connue.

2.2.1 Montage expérimental et mesures

Dans notre montage (figure I.2.1), le tube considéré est posé horizontalement sous un binoculaire pour les vues de dessus (figure I.2.1-A). On changera occasionnellement la place du binoculaire pour effectuer des vues de face (figure I.2.1-B) ou de côté (figure I.2.1-C).

Pour conduire notre expérience, nous créons un dépôt capillaire : quelques millilitres de liquide sont introduits à une extrémité du tube pour former ce que nous appellerons un index. Une seringue remplie d'air est alors emmanchée sur le tube et placée sur un pousse-seringue. En mettant l'air sous pression, on fait avancer le liquide vers l'autre extrémité du tube (figure I.2.1-A). En avançant ainsi le ménisque arrière dépose à la paroi du tube une couche de liquide.

Pour les vitesses les plus réduites, le pousse-seringue ne se révèle pas adapté et provoque un déplacement par à-coups de l'index. Pour atteindre les faibles vitesses, nous inclinons le tube après y avoir instillé le liquide : celui-ci s'écoule alors sous son propre poids (figure I.2.1-B). Nous replaçons le tube horizontalement à la fin du dépôt.

La vitesse d'avancée de l'index est obtenue soit par un enregistrement vidéo, soit par un chronométrage direct de son déplacement.

L'observation de l'évolution ultérieure de la couche liquide ainsi déposée se fait avec un binoculaire de marque LEICA® permettant un grossissement jusqu'à $\times 32$. Pour les prises de vues nécessitant un champ plus large (étude de la longueur d'onde, par exemple, nous utilisons un caméscope numérique CANON® DV-XM2-CCD de résolution 576×784

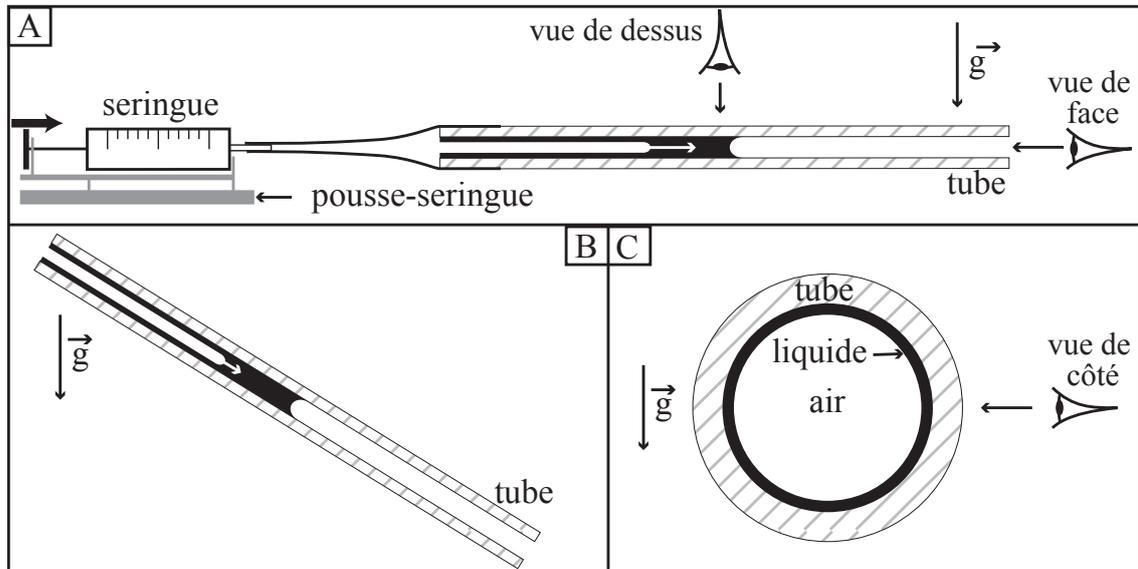


FIG. I.2.1 – **A/** Montage expérimental utilisé pour l'étude des occlusions pulmonaires. Le liquide est en noir. A gauche de l'index, le tube est mouillé. L'index se déplace vers l'extrémité sèche du tube. L'emplacement du binoculaire est parfois au dessus, parfois dans l'alignement du tube (de face).
B/ Dépôt gravitaire, pour les faibles vitesses.
C/ Prises de vues de côté.

pixels.

2.2.2 Dépôt d'une couche de fluide aux parois d'un tube

L'épaisseur de liquide déposée à la paroi du tube est parfois trop mince pour que la mesure directe soit commode, même avec l'utilisation du binoculaire. Nous utilisons donc les propriétés de l'enduction liquide qui a été notamment le sujet d'étude de Bretherton [4] et Taylor [30]. R_0 désigne le rayon du tube sec, h_0 l'épaisseur de liquide déposée, et U la vitesse du ménisque arrière de l'index pendant le dépôt (figure I.2.2).

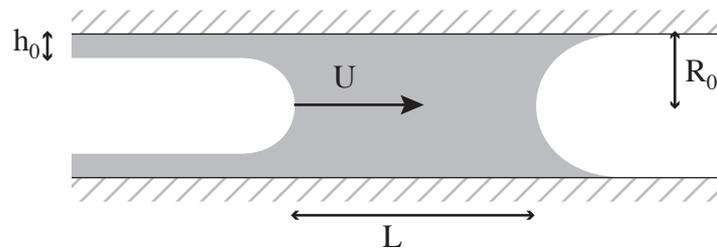


FIG. I.2.2 – Dépôt d'une couche de fluide à la paroi d'un tube de rayon R_0 par mouvement d'un index de liquide : à droite (c'est à dire devant l'index) le tube est sec, tandis qu'à gauche on a une épaisseur h_0 de fluide à la paroi.

a/ Loi du dépôt

Selon Bretherton [4], le comportement attendu dépend du nombre capillaire formé sur la vitesse d'avancée du ménisque arrière de l'index liquide. Il s'établit une compétition entre les forces visqueuses et capillaire : les premières opposent une résistance au mouvement de l'index et retiennent le fluide à la paroi du tube, tandis que les secondes cherchent à minimiser la surface déployée par le fluide, et le tirent pour que justement il ne s'étale pas.

En calculant la forme adoptée par le ménisque arrière au cours du dépôt, Bretherton [4] attend une épaisseur relative de liquide h_0/R_0 proportionnelle à $Ca^{2/3}$ en régime de faible nombre capillaire. L'analogie bidimensionnel de ce problème, c'est à dire l'étalement d'une pellicule liquide sur une plaque sera étudiée précisément au cours de l'étude sur les paupières (paragraphe 3.2.1).

Si l'on augmente le nombre capillaire mais que l'on reste dans un régime visqueux où l'on peut négliger le rôle de l'inertie, Taylor [30] et Aussillous [1] montrent expérimentalement qu'on attend :

$$\frac{h_0}{R_0} = \frac{1.34 Ca^{2/3}}{1 + 3.35 Ca^{2/3}} \quad (\text{I.2.1})$$

b/ Vérification de la validité de l'équation du dépôt dans notre montage.

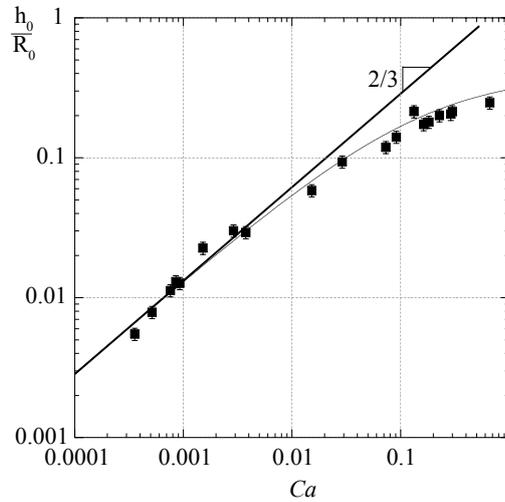


FIG. I.2.3 – Epaisseur relative h_0/R_0 du film de liquide déposé sur le tube en fonction du nombre capillaire de dépôt : $Ca = \mu U/\sigma$. La ligne en trait plein représente la relation (I.2.1) et les carrés nos résultats expérimentaux obtenus avec la méthode décrite ci-dessus.

Afin de vérifier la validité de l'équation I.2.1 dans notre montage, nous cherchons à connaître l'épaisseur h_0 de fluide déposé à la paroi pour une vitesse U donnée. Pour cela, nous mesurons, au cours de l'avancée de l'index liquide, la vitesse à laquelle varie sa longueur : $\delta L/\delta t$. Celle-ci est directement reliée à l'épaisseur du film déposé, via le rayon du tube. Dans l'hypothèse où l'épaisseur est fine ($h_0 \ll R_0$), on peut écrire :

$$\text{variation de volume} = -\pi R_0^2 \delta L/\delta t = 2\pi R_0 h_0 U = \text{volume déposé aux parois}$$

$$h_0 = -\frac{R_0 \delta L}{2U \delta t} \quad (\text{I.2.2})$$

Les résultats que nous obtenons sont rapportés sur la figure [I.2.3](#) (carrés noirs). On retrouve bien la tendance en $h_0 \propto Ca^{2/3}$ aux faibles nombres capillaires. La ligne en traits pleins représente la loi [I.2.1](#). Nos mesures s'accordent à la loi [I.2.1](#) à 10% près.

Pour les expériences ultérieures, nous nous contenterons donc de mesurer la vitesse du ménisque arrière et d'en extraire, via l'équation ([I.2.1](#)), l'épaisseur de fluide.

2.2.3 Remarque sur le nettoyage des tubes

Les tubes que l'on utilise pour l'huile silicone, l'éthanol ou l'hexane sont nettoyés avant usage avec de l'eau et du savon, rincés à l'eau distillés, puis séchés avec du papier absorbant et de l'air sous pression.

Quelques problèmes de démouillage ont été rencontrés lors des expériences avec le glycérol, lorsque le film déposé aux parois du tube devait être très mince : on a utilisé tant que possible des tubes non souillés par l'huile silicone (*i.e.* neufs ou réservés au glycérol) et nettoyés précautionneusement : après nettoyage à l'eau et au savon, rinçage à l'eau distillée et séchage (à l'air sec et avec un morceau de papier absorbant), le tube est trempé plusieurs heures, parfois une nuit entière, dans une éprouvette remplie d'acide sulfochromique. Au moment de l'utilisation, le tube est rincé à l'eau distillée et séché à l'air sec.

Chapitre 3

Influence de la gravité sur l'instabilité capillaire

Une fois le dépôt de liquide effectué, nous filmons au binoculaire l'évolution de la forme de l'interface dans le tube posé à l'horizontale (un exemple est présenté figure I.3.1-A).

3.1 Observations expérimentales

3.1.1 Un seuil de disparition pour l'instabilité

Dans certaines situations, par exemple pour l'expérience menée dans un tube de rayon $R_0 = 420 \mu\text{m}$, pour une épaisseur relative d'huile silicone V1000 $h_0/R_0 = 0.35$, on observe une instabilité : une déformation variqueuse de l'interface (c'est à dire une succession de renflements et de dépressions de l'épaisseur de fluide, voir figure I.3.1-A) s'amplifie et aboutit à la formation de bulles séparées par des lentilles de liquide.

Pour d'autres jeux de paramètres, l'instabilité perd son axisymétrie (figure I.3.1-B ii), voire disparaît complètement (figure I.3.1-B iii). Ceci s'observe notamment pour les épaisseurs de liquide les plus fines. Nous appelons le régime ii) « transition » : l'interface se déforme, mais de façon non axisymétrique, et de façon irrégulière. Il est impossible d'y mesurer une longueur d'onde. Lorsque l'instabilité disparaît, nous appelons le régime correspondant « stable ».

Nous définissons ainsi un seuil de disparition de l'instabilité, qui nous permet d'établir un diagramme de phase (figure I.3.1-C). Ce graphique montre que la transition d'un régime à l'autre dépend du rayon du tube et de l'épaisseur de liquide déposée à sa paroi. En effet, pour un tube de rayon fixé, amoindrir l'épaisseur de fluide h_0 fait passer du régime instable au régime stable. A l'inverse, pour une épaisseur fixée, accroître le rayon du tube stabilise l'interface.

3.1.2 La longueur d'onde de la perturbation, λ

Lorsque l'interface se déforme de façon variqueuse, nous pouvons identifier la longueur d'onde λ de la perturbation (figure I.3.1-A). En pratique, nous mesurons la longueur d'onde tout à la fin de l'expérience, lorsque les différentes bulles sont formées (figure I.3.2 -A). On a pris la peine de vérifier toutefois que cette longueur d'onde n'est pas différente de celle qu'on peut mesurer au début du développement de l'instabilité. Nous établissons une moyenne sur une dizaine de longueurs d'ondes pour gommer les irrégularités éventuelles.

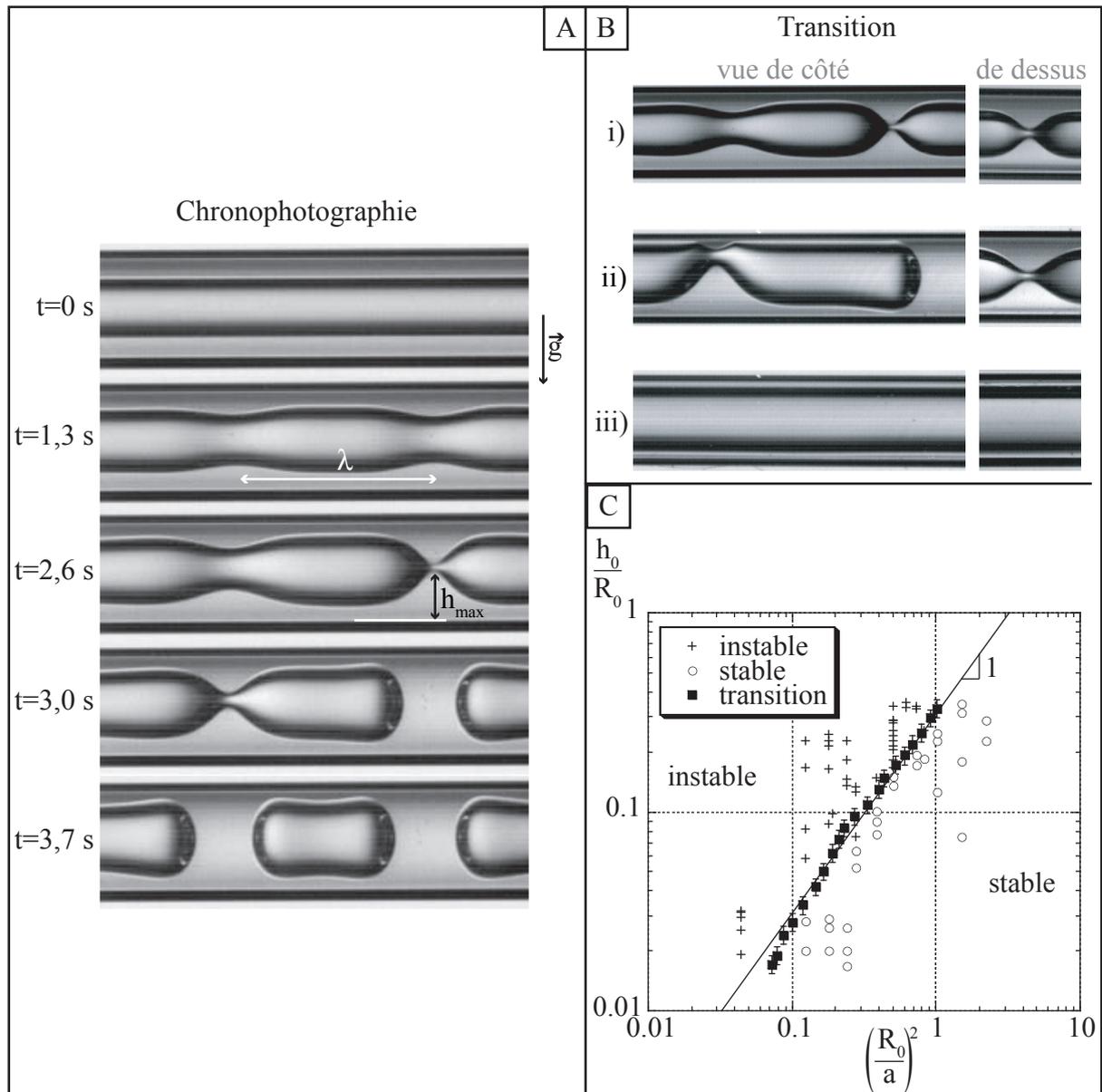


FIG. I.3.1 –

A/ Chronophotographie de l'instabilité capillaire de Plateau-Rayleigh vue de côté ($R_0 = 420 \mu\text{m}$, $h_0/R_0 = 0.35$, huile silicone V1000).

B/ Vues de côté et de dessus des trois situations entrevues au bout d'un temps t ($R_0 = 420 \mu\text{m}$, huile silicone V1000, mais pour différentes épaisseurs de fluide).
 i) $h_0/R_0 = 0.35$, $t = 2.5 \text{ s}$. ii) $h_0/R_0 = 0.19$, $t = 103 \text{ s}$. iii) $h_0/R_0 = 0.034$, $t = 1000 \text{ s}$: l'instabilité n'a pas lieu tout le temps.

C/ Diagramme de phase montrant dans quel régime on observe l'instabilité (+) et dans quel régime on est stabilisé (o).

Quand les bulles sont trop irrégulières, il est impossible de mesurer une longueur d'onde : nous étiquetons l'expérience comme appartenant à la zone de transition entre les régimes stable et instable.

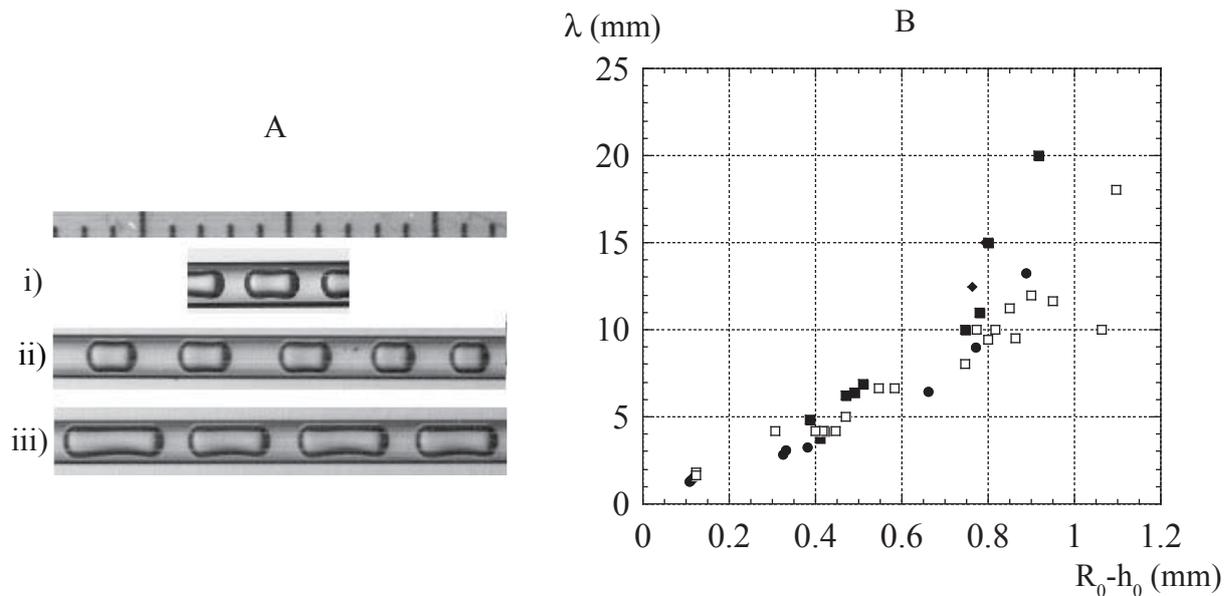


FIG. I.3.2 – **A/** Longueur d'onde observée avec de l'huile silicone V1000 dans un tube de rayon $420 \mu\text{ m}$. i) nombre capillaire de dépôt $Ca = 3.41$; $h_0/R_0 = 0.353$. ii) $Ca = 2.54$; $h_0/R_0 = 0.345$. iii) $Ca = 0.15$; $h_0/R_0 = 0.194$. **B/** Évolution de la longueur d'onde avec $R_0 - h_0$. ■ H.S. V100, ● H.S. V1000, ◆ H.S. V12500, □ Glycérol (H.S. = huile silicone).

Sur la figure I.3.2-A, on constate que, pour un tube donné, la longueur d'onde obtenue évolue avec l'épaisseur de fluide déposée à la paroi d'un tube : pour $h_0/R_0 = 0.353$, on obtient une longueur d'onde de 2,6 mm. Pour $h_0/R_0 = 0.345$, $\lambda = 3,3$ mm, et pour $h_0/R_0 = 0.194$, $\lambda = 4,0$ mm. La longueur d'onde augmente donc lorsque l'épaisseur de liquide diminue, toutes choses étant égales par ailleurs.

Le graphique I.3.2-B confirme cette évolution, et marque plus généralement les tendances observées pour l'évolution de la longueur d'onde pour différents liquides. On a représenté en abscisse le rayon initial de l'interface liquide-air, $R_0 - h_0$. Lorsqu'il augmente, la longueur d'onde observée augmente également, passant ainsi de $\lambda = 1,5$ mm pour $R_0 - h_0 = 0,1$ mm à une vingtaine de millimètres pour $R_0 - h_0 = 1$ mm.

3.1.3 Le taux de croissance de l'instabilité, τ

Au cours de l'instabilité, un traitement d'image nous donne accès à l'épaisseur de fluide à la crête $h_{max}(t)$ (voir figure I.3.1-A). Nous constatons (figure I.3.3-A) que dans un premier temps, l'épaisseur maximale h_{max} croît exponentiellement avec le temps. Nous identifions le coefficient directeur de la droite approchant les données comme l'inverse du taux de croissance de l'instabilité, τ . Aux temps longs, nous observons un autre régime où

deux comportements sont possibles : $h_{max}(t)$ sature si le volume de fluide n'est pas suffisant pour former des lentilles obstruant le tube [19], ou bien au contraire sa variation s'accélère lorsque l'on est dans le cas contraire : le rayon de l'interface liquide-air s'approche de zéro et les forces capillaires deviennent très importantes (à ce sujet, voir le chapitre 4). C'est dans ce cas seulement que l'on aboutit à la formation des lentilles liquides.

Le graphique B de la figure I.3.3 indique les mesures que nous faisons de τ en fonction de l'épaisseur de fluide déposée dans un tube de rayon $400 \mu\text{m}$, pour de l'huile de viscosité 100 ou 1000. Nous constatons alors que le temps est plus court pour une épaisseur plus grande, et que la viscosité retarde l'instabilité.

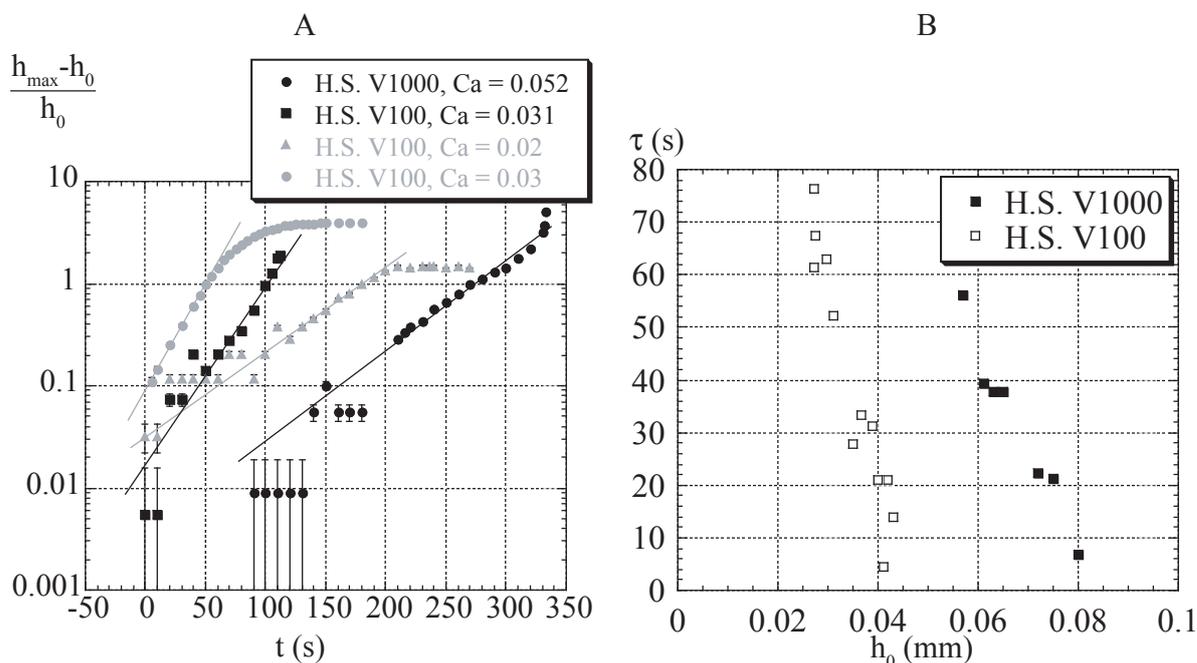


FIG. I.3.3 – A/ Épaisseur maximale de liquide à la paroi du tube $h_{max}(t)$, pour différentes huiles silicones en variant le nombre capillaire de dépôt, dans un tube de rayon $400 \mu\text{m}$. $h_{max}(t)$ présente effectivement un comportement exponentiellement croissant. Nous mesurons les temps caractéristiques suivants : \bullet $\tau = 37\text{s}$; \blacksquare $\tau = 23\text{s}$; \blacktriangle $\tau = 52\text{s}$; \bullet $\tau = 21\text{s}$.

B/ Temps caractéristiques observés pour de l'huile de viscosité 100 ou 1000 dans un tube de rayon $400 \mu\text{m}$, en fonction de l'épaisseur déposée.

3.2 Modèle classique

Comparons les résultats que nous obtenons avec la théorie classique de l'instabilité capillaire.

3.2.1 Etude de stabilité de l'interface

Considérons notre système initial (le tube enduit de liquide, figure I.3.4-A) ainsi que le même système ayant subi une légère déformation variqueuse (figure I.3.4-B).

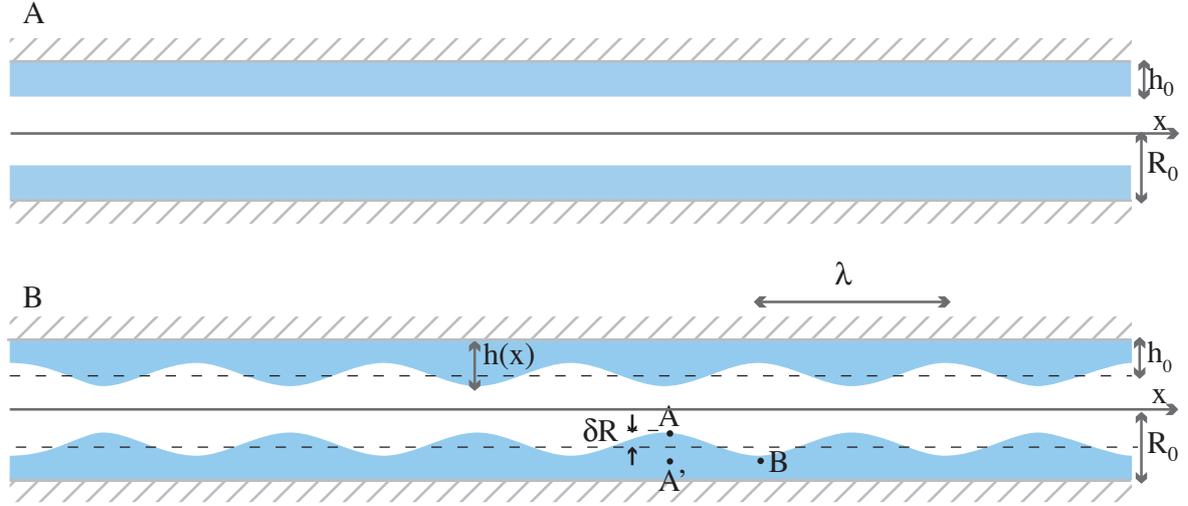


FIG. I.3.4 – Schéma de l'instabilité capillaire : **A**/ Situation initiale pour un tube de rayon R_0 enduit d'une couche de liquide d'épaisseur h_0 . **B**/ Situation perturbée $h(x) = h_0(1 + \xi \cos(2\pi x/\lambda)) = h_0(1 + \xi \cos(kx))$.

On appelle R_0 le rayon du tube, et $h(x, t)$ l'épaisseur actuelle de liquide à sa paroi à l'abscisse x . À l'instant initial, h est uniforme et vaut h_0 . Nous notons $R_i = R_0 - h$ le rayon de l'interface liquide-air (à $t = 0$, $R_{i0} = R_0 - h_0$). On suppose que la perturbation initiale est variatiqueuse (*i.e.* avec des lobes et des creux, comme sur la figure I.3.4-B). Sa longueur d'onde est λ et son amplitude $h_0\xi$: $h(x) = h_0(1 + \xi \cos(2\pi x/\lambda)) = h_0(1 + \xi \cos(kx))$. On désigne par P la pression dans le liquide et par U sa vitesse moyenne selon l'axe x , tandis que \underline{u} est la vitesse instantanée. Nous décrivons notre tube par un système de coordonnées cylindriques (r, θ, x) centrées sur l'axe du tube.

Pour se persuader de l'existence de cette instabilité et des mécanismes qui la pilotent, on peut évaluer rapidement la pression au sein du fluide en $A'(x = 0)$ et en $B(x = \lambda/2)$: En l'absence de gravité, la pression en A' est égale à celle en A . On peut évaluer cette dernière grâce à la courbure de l'interface à cet endroit, qui vaut

$$\mathcal{C}_A \approx \frac{1}{R_{i0} - \delta R} - \left. \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right|_{x=0} \approx \frac{1}{R_{i0} - \delta R} + k^2 \delta R \quad (\text{I.3.1})$$

(la courbure est comptée positivement si le rayon de courbure est dirigé vers le liquide). De même en B , la courbure locale vaut

$$\mathcal{C}_B \approx \frac{1}{R_{i0} + \delta R} - \left. \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right|_{x=\lambda/2} \approx \frac{1}{R_{i0} + \delta R} - k^2 \delta R \quad (\text{I.3.2})$$

Si l'on compare maintenant les pressions, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta P = P_B - P_{A'} &= -\frac{\sigma}{R_{i0} + \delta R} + \frac{\sigma}{R_{i0} - \delta R} - 2\sigma k^2 \delta R \\ &\sim 2 \delta R \sigma \left[\frac{1}{R_{i0}^2} - k^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{I.3.3})$$

Autrement dit ΔP est positif si $k < R_0 + h_0$ c'est à dire si $\lambda > 2\pi R_{i0}$. Dans ce cas, le fluide du point B sera déplacé vers A , c'est à dire que la déformation va s'amplifier. Toute

interface cylindrique *suffisamment longue* est donc instable si elle n'est soumise qu'aux forces de tension de surface, et se soumet alors à la déformation variqueuse.

Dans la démonstration précédente, cependant, toutes les longueurs d'ondes plus grandes que $2\pi(R_0 - h_0)$ sont susceptibles de se développer pareillement. Nous avons besoin d'étudier la dynamique du système pour comprendre quelle est celle qui va l'emporter sur les autres et apparaître finalement.

3.2.2 Hypothèses

Pour décrire l'écoulement le long de la paroi du tube, nous faisons les hypothèses suivantes :

- i). Le fluide est déposé en couche mince à la paroi du tube, et son épaisseur est lentement variable ($\lambda \sim R_0 \gg h_0$) : l'écoulement est quasi parallèle ($u_r \approx u_x h_0 / R_0 \ll u_x$ et $u_\theta = 0$) et on utilise l'approximation de lubrification :

$$\frac{\partial}{\partial r} \gg \frac{\partial}{r\partial\theta} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial r} \gg \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{I.3.4})$$

et de faible pente

$$\frac{\partial h}{\partial x} \ll 1 \quad ; \quad \frac{\partial h}{r\partial\theta} \ll 1 \quad (\text{I.3.5})$$

- ii). Nous restons toujours dans le cas des faibles nombres de Bond

$$Bo = \frac{R_0}{a} \ll 1 \quad (\text{I.3.6})$$

et on néglige donc l'influence de la gravité devant les forces capillaires.

- iii). Nos écoulements se font à faible nombre de Reynolds $Re \ll 1$: ils sont dominés par les effets visqueux. Nous considérons qu'ils sont assez lents pour être quasistatiques.

3.2.3 Dynamique

L'écoulement est régi par l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \text{grad}) \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(P) + \nu \Delta \underline{u} + \underline{g} \quad (\text{I.3.7})$$

Néanmoins, on peut de prime abord négliger les termes instationnaires grâce à l'hypothèse iii), ainsi que la gravité. Concernant les termes d'inertie, l'hypothèse d'écoulement quasi-parallèle permet de considérer que $u_r \approx u_x h_0 / R_0$. En évaluant le poids des différents termes de l'équation de Navier-Stokes, on peut négliger une grande partie d'entre eux [15] et il reste l'équation de Stokes, qui équilibre les forces visqueuses et les forces de pression au sein du fluide :

$$\frac{\partial P}{\partial x} \approx \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (\text{I.3.8})$$

Dans l'hypothèse de lubrification, ces équations sont valables si le nombre de Reynolds est inférieur à $\partial x / \partial h$ [15], ce qui est le cas ici puisque le nombre de Reynolds est petit devant 1 (par hypothèse) et que $\partial x / \partial h$ est, au contraire, grand comparé à un, en vertu de l'hypothèse de pente faible.

La vitesse moyenne U dans un film de liquide d'épaisseur h mû par un gradient de pression $\partial P/\partial x$ indépendant de r , est donnée par l'intégration de l'équation de Stokes I.3.8 en lubrification ($\partial/\partial x \ll \partial/\partial r$, $\vec{u} \sim u\vec{e}_x$) :

$$U = -\frac{\partial P}{\partial x} \frac{h^2}{3\mu} \quad (\text{I.3.9})$$

La conservation du débit dans une tranche de fluide nous indique que $\partial h/\partial t = -\partial(hU)/\partial x$, soit

$$\frac{\partial h}{\partial t} = h_0 \frac{\partial \xi}{\partial t} \cos(kx) \sim \frac{h_0^3}{3\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (\text{I.3.10})$$

Par ailleurs, la pression dans le film, dans notre problème, est donnée par la courbure de l'interface :

$$P(x) = P_0 - \frac{\sigma}{R_{i0}} + \xi h_0 \sigma \cos(kx) \left(k^2 - \frac{1}{R_{i0}^2} \right), \quad (\text{I.3.11})$$

$$\text{D'où} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = k \xi h_0 \sigma \sin(kx) \left(\frac{1}{R_{i0}^2} - k^2 \right) \quad (\text{I.3.12})$$

$$\text{Et} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = k^2 \xi h_0 \sigma \cos(kx) \left(\frac{1}{R_{i0}^2} - k^2 \right) \quad (\text{I.3.13})$$

En remplaçant dans l'équation I.3.10, on obtient

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{h_0^3}{3\mu} k^2 \sigma \left(\frac{1}{R_{i0}^2} - k^2 \right) \xi \quad (\text{I.3.14})$$

Cette équation nous donne donc le taux de croissance correspondant à chaque nombre d'onde k (figure I.3.5). Il s'agit donc de trouver le k_{th} qui maximise le taux de croissance et qui donc va prédominer :

$$\frac{\partial}{\partial k} \left[k^2 \left(\frac{1}{R_{i0}^2} - k^2 \right) \right] \Big|_{k_{th}} = 0 \quad (\text{I.3.15})$$

On trouve donc $k_{th} = 1/\sqrt{2}R_{i0}$. Soit $\lambda_{th} = 2\pi\sqrt{2}R_{i0}$ pour un temps caractéristique de croissance $\tau_{th} = 12\mu R_{i0}^4/\sigma h_0^3$. L'allure de l'évolution du taux de croissance en fonction du nombre d'onde de la perturbation est représenté sur la figure I.3.5. Elle confirme premièrement que seuls les nombres d'ondes plus petits que $1/R_{i0}$ exhibent un taux de croissance positif et donc une instabilité, et deuxièmement que notre k_{th} correspond bien à un maximum (et non un minimum) pour τ .

3.2.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux

Comparons maintenant ces valeurs de λ_{th} et τ_{th} à celles que l'on a mesurées précédemment.

La figure I.3.6-A présente la longueur d'onde mesurée en fonction de R_{i0} , le rayon initial de l'interface. La ligne droite épaisse représente la loi que l'on vient de démontrer : $\lambda_{th} = 2\pi\sqrt{2}R_{i0}$. A faible R_{i0} , nos points sont compatibles avec la théorie de l'instabilité capillaire. À grand R_{i0} , cependant, les résultats théoriques et expérimentaux divergent : les longueurs d'ondes que l'on mesure sont plus grandes. Ainsi pour $R_{i0} = 0,92$ mm, on

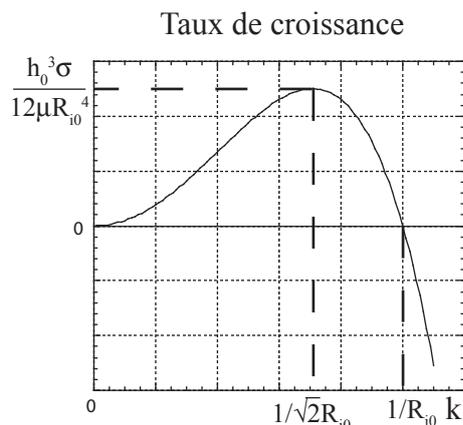


FIG. I.3.5 – Allure des variations du taux de croissance théorique $\frac{h_0^3}{3\mu} k^2 \sigma \left(k^2 - \frac{1}{R_{i0}^2} \right)$ de ξ dans l'instabilité de Plateau-Rayleigh, en fonction du nombre d'onde k considéré.

observe $\lambda = 20$ mm avec de l'huile silicone V100 au lieu de $\lambda_{th} = 8,15$ mm, soit plus du double! Notons que cette tendance est plus prononcée pour les huiles silicones que pour le glycérol. Le jeu d'expériences menées par Goldsmith et Mason [11] continue, lui, à s'accorder à la théorie, même à grand R_{i0} . Dans leur dispositif, cependant, la gravité est réduite : en effet, les fluides situés de part et d'autre de l'interface cylindrique ont des densités identiques. Nous en concluons que la divergence que nous observons est liée à l'influence de la gravité, et ce malgré les faibles nombres de Bond!

Sur la figure I.3.6-B, on trouve le taux de croissance mesuré en fonction du temps de croissance théorique $\tau_{th} = 12\mu R_{i0}^4 / (\sigma h_0^3)$. La ligne épaisse représente la loi théorique, de laquelle nos données s'écartent pour donner des temps plus long : on trouve comme meilleure approximation proportionnelle $\tau \approx 16\mu R_{i0}^4 / (\sigma h_0^3) \approx 4\tau_{th}/3$. Nos données, sont cependant assez dispersées, comme l'étaient celles de Goldsmith et Mason [11], qui ne donnent pas un résultat plus proche de la théorie.

L'étude de l'instabilité capillaire conduit donc un accord approximatif (à 20% près) sur les taux de croissance, et à une divergence marquée concernant les longueurs d'ondes. Elle ne rend par ailleurs pas compte de la transition vers un régime stable : l'instabilité est géométrique et doit théoriquement se développer tant que les échelles sont inférieures à la longueur capillaire. La comparaison avec les expériences menées par Goldsmith et Mason [11] suggère toutefois de s'intéresser à l'action de la gravité dans le modèle. Ceci est également corroboré par l'observation de la figure (figure I.3.1-B ii) qui met en évidence une dissymétrie haut-bas possiblement due à la gravité.

3.3 Modèle avec gravité

3.3.1 Raisonnement en loi d'échelles

Nous envisageons maintenant la présence d'un drainage gravitaire pariétal qui peut survenir conjointement à l'instabilité capillaire. Nous cherchons à savoir quel effet ce drainage a sur l'instabilité.

Pour savoir qui, de l'instabilité ou du drainage, va l'emporter, on peut comparer leurs

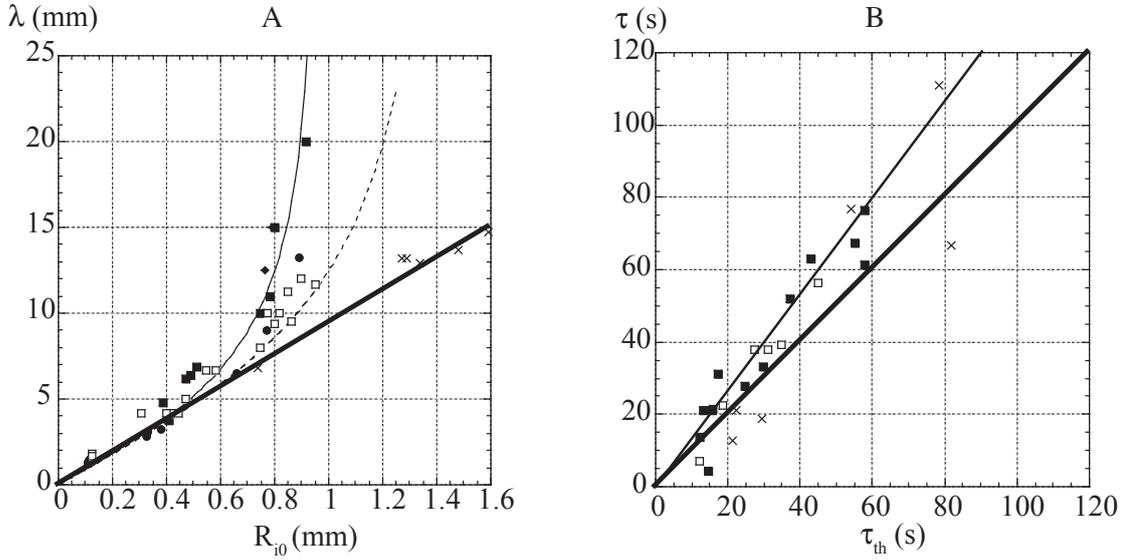


FIG. I.3.6 –

A/ Longueur d'onde observée en fonction de R_{i0} , pour les différents liquides utilisés : ■ H.S. V100, ● H.S. V1000, ◆ H.S. V12500, □ Glycérol, × Résultats de [11]. La droite représente la loi attendue selon la théorie du paragraphe 3.2 ($\lambda_{th} = 2\pi\sqrt{2R_{i0}}$), la ligne continue fine et la ligne pointillée représentent respectivement les lois $\lambda = 2\pi\sqrt{2R_i/\sqrt{1-2.5Bo^2}}$ pour l'huile silicone et pour le glycérol (voir paragraphe 3.3).

B/ Temps caractéristique observé pour l'instabilité capillaire en fonction de sa valeur théorique attendue $\tau = 12\mu R_{i0}^4 / (\sigma h_0^3)$. ■ V100, □ V1000, × Résultats de [11]. La ligne épaisse représente la valeur attendue théoriquement selon le paragraphe 3.2 et la ligne fine la loi linéaire la plus proche des données.

temps caractéristiques : pour l'instabilité, le temps de son développement a été identifié dans le paragraphe 3.2.3 : $\tau \sim \mu R_{i0}^4 / (\sigma h_0^3)$. Pour le drainage, on revient à la vitesse moyenne de chute du liquide contenu dans un film vertical d'épaisseur h_0 , qui s'écrit $U = \rho g h_0^2 / (3\mu)$ et qui a été dérivée pour la première fois par Jeffreys [18]. Le temps qui va décrire le drainage dans notre problème est celui que met le liquide à couler sur le périmètre du tube, à cette vitesse, c'est à dire $\tau_d \sim R\mu / (\rho g h_0^2)$. En comparant ces deux temps l'un à l'autre, il vient :

$$\frac{\tau}{\tau_d} \sim \frac{R_{i0}^3}{a^2 h_0} \quad (\text{I.3.16})$$

On s'attend donc à ce que l'instabilité ait lieu dans la limite $\tau/\tau_d \ll 1$, et à ce qu'elle soit très perturbée par la gravité si $\tau/\tau_d \gg 1$. En effet, dans ce cas, une particule fluide mettra plus longtemps à être soulevée par l'instabilité qu'à tomber sous l'action de la gravité. On peut ainsi s'attendre à ce que l'instabilité disparaisse. Si l'on assimile R_{i0} à R_0 (hypothèse de faible épaisseur), le critère devient $h_0/R_0 < (R_0/a)^2$, ce qui est compatible avec la figure I.3.1-C.

Un autre argument peut également permettre de rendre compte de l'augmentation de la longueur d'onde observée : Nous faisons la même étude de stabilité que dans le cas

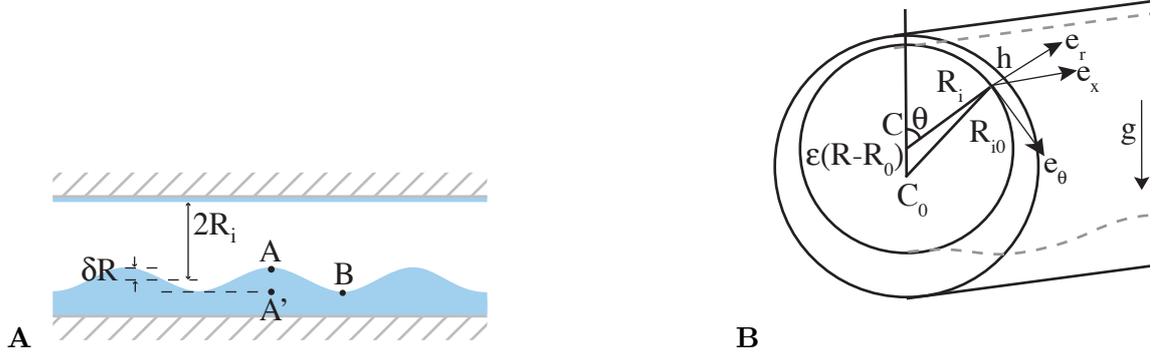


FIG. I.3.7 – Notations utilisées pour l'étude du drainage.

classique en rajoutant la pression hydrostatique reliant P_A et $P_{A'}$ (figure I.3.7-A), ainsi, au lieu de l'équation I.3.3, nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta P = P_B - P_{A'} &= P_B - P_A - 2\rho g \delta R \\ &\sim 2 \delta R \sigma \left[\frac{1}{R_{i0}^2} - \frac{1}{a} - k^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{I.3.17})$$

Pour que l'instabilité ait lieu, il faut que ΔP soit positif, c'est à dire que k soit inférieur à $\sqrt{1 - Bo^2/R_{i0}}$, autrement dit que λ vaille plus que $2\pi R_{i0}/\sqrt{1 - Bo^2}$, qui diverge lorsque le nombre de Bond s'approche de 1.

3.3.2 Notations et hypothèses pour le modèle avec gravité

Dans notre description dynamique, nous autorisons à présent les écoulements tels que $u_{theta} \neq 0$, en revanche nous restons dans une situation de faible nombre de Bond. Ces conditions impliquent que la bulle infinie d'air peut se décentrer par rapport au tube, mais que sa section restera toujours circulaire, puisqu'imposée par la tension de surface. C'est donc à présent le centre de cette bulle que nous prenons comme axe x de notre repère de coordonnées cylindriques (C, r, θ, x) (figure I.3.7-B). L'excentricité de ce repère par rapport au tube est quantifié au moyen de ε défini tel que $CC_0 = \varepsilon(R_{i0} - R_i)$ (avec C_0 le centre du tube). Nous conduisons les calculs dans une limite d'excentricité faible, $\varepsilon \ll 1$.

3.3.3 Description théorique de la transition

Nous utilisons les notations de la figure I.3.7-B avec les équations de Stokes et dans l'approximation de lubrification ($\partial/\partial r \gg \partial/r\partial\theta$, $\partial/\partial r \gg \partial/\partial x$, faible pente $\partial h/\partial x \ll 1$ et $\partial h/r\partial\theta \ll 1$). La conservation de la masse s'écrit alors :

$$\frac{\partial (R_i h)}{\partial t} = -\frac{\partial (h \bar{u}_\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial (R_i h \bar{u}_x)}{\partial x} \quad (\text{I.3.18})$$

où \bar{u}_θ et \bar{u}_x sont les vitesses moyennes dans le film selon \underline{e}_θ et \underline{e}_x . L'équation de Stokes, quant à elle, exprime l'équilibre entre les forces de pression, les forces gravitaires et visqueuses au sein du fluide :

$$-\underline{\nabla} p + \rho \underline{g} + \mu \Delta \underline{u} = 0 \quad (\text{I.3.19})$$

- Selon la direction \underline{e}_r , cette équation se réduit à $\partial p / \partial r = -\rho g \cos \theta$, qui conduit à :

$$p = p_0 - \sigma \mathcal{C} - \rho g \cos \theta (r - R_i) \quad (\text{I.3.20})$$

où p_0 est la pression ambiante et \mathcal{C} la courbure de l'interface.

- Selon \underline{e}_θ , et dans l'hypothèse d'un film mince, l'équation (I.3.19) donne $\mu d^2 u_\theta / dr^2 = \partial p / R_i \partial \theta - \rho g \sin \theta$. On peut alors l'intégrer deux fois (en considérant une vitesse de liquide nulle à la paroi et une condition de contrainte nulle à la surface libre), ce qui donne la vitesse moyenne suivante selon \underline{e}_θ :

$$\bar{u}_\theta = \frac{h^2}{3\mu} \left(\rho g \sin \theta + \frac{\sigma}{R_i} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \theta} \right) \quad (\text{I.3.21})$$

- Selon \underline{e}_x , on procède de même que pour \underline{e}_θ , et on obtient alors pour la vitesse moyenne \bar{u}_x :

$$\bar{u}_x = -\frac{h^2}{3\mu} \left(\rho g \cos \theta \frac{\partial R_i}{\partial x} - \sigma \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} \right) \quad (\text{I.3.22})$$

Il faut ensuite évaluer la courbure totale de l'interface $\mathcal{C}(z, \theta, t)$. Comme on l'a représenté sur la figure I.3.7, nous supposons que l'interface reste circulaire dans le plan $(\underline{e}_r; \underline{e}_\theta)$, ce qui est vrai pourvu que l'on se place à faible nombre de Bond et à faible nombre capillaire ($Ca \equiv \mu \bar{u}_\theta / \sigma \ll 1$; $Bo \equiv R_{i0} / a < 1$). En effet, dans ce cas, les forces de tension de surface dominent les forces visqueuses et gravitaire et assurent cette condition. C'est bien ce qu'on vérifie expérimentalement sur la figure I.3.8 : qu'on soit en régime sans drainage (bulle centrée, séquence photographique A) ou non (séquence B), l'interface garde une forme circulaire. Toute l'étude étant menée dans ces approximations, nous pouvons écrire la courbure totale :

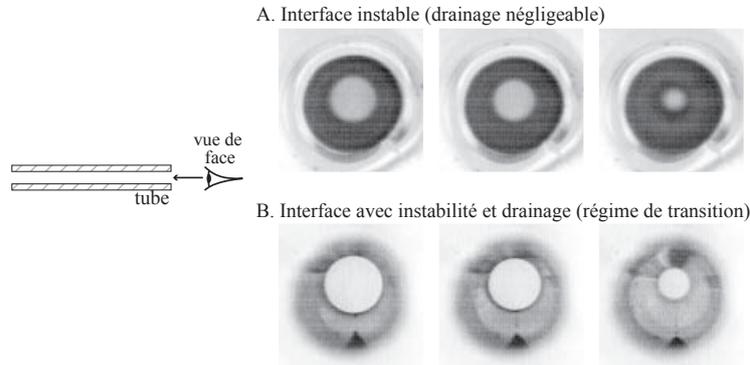


FIG. I.3.8 – Photographies de face de l'interface liquide/air au cours de l'instabilité. **A**/ Interface instable photographiée à trois instant successifs, pour une expérience faite dans un tube de 0.69 mm de rayon avec $h_0/R_0 \sim 0.34$. **B**/ Interface instable dans un régime de transition obtenue dans un tube de rayon 0.6 mm avec $h_0/R_0 \sim 0.07$, vue également à trois instant différents.

$$\mathcal{C} \approx \frac{1}{R_i} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (\text{I.3.23})$$

La forme circulaire de l'interface conduit également (toujours dans l'hypothèse d'un film mince $h/R_i \ll 1$) à une relation géométrique :

$$h(x, \theta, t) = [R_0 - R_i(x, t)] [1 - \varepsilon(t) \cos \theta] \quad (\text{I.3.24})$$

Enfin, en considérant une perturbation variueuse de l'interface

$$h(x, \theta, t) = [R_0 - R_{i0} (1 + \delta e^{i(kx - \omega t)})] [1 - \varepsilon(t) \cos \theta] \quad (\text{I.3.25})$$

avec δ un petit paramètre. Au premier ordre en δ et ε , les trois termes de l'équation (I.3.18) prennent la forme suivante :

$$\frac{\partial (R_i h)}{\partial t} \approx R_{i0} h_0 \left[-\cos \theta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + i\omega \frac{R_{i0}}{h_0} \delta e^{i(kx - \omega t)} \right] \quad (\text{I.3.26})$$

$$\frac{\partial (h \bar{u}_\theta)}{\partial \theta} \approx \frac{\rho g h_0^3}{3\mu} \cos \theta \left[1 - 3 \frac{R_{i0}}{h_0} \delta e^{i(kx - \omega t)} \right] \quad (\text{I.3.27})$$

$$\frac{\partial (R h \bar{u}_z)}{\partial z} \approx \frac{R_{i0}^2 h_0^3 k^2}{3\mu} \delta e^{i(kx - \omega t)} \left(\frac{\sigma}{R_{i0}^2} + \rho g \cos \theta - \sigma k^2 \right) \quad (\text{I.3.28})$$

La conservation de la masse (I.3.18) conduit à une équation sur $\varepsilon(t)$:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\rho g h_0^2}{3\mu R_{i0}} \quad (\text{I.3.29})$$

puis à la relation de dispersion :

$$-i\omega = \frac{\sigma h_0^3}{3\mu R_{i0}^4} \left[(k R_{i0})^2 (1 + Bo^2 \cos \theta - (k R_{i0})^2) - 3Bo^2 \frac{R_{i0}}{h_0} \cos \theta \right] \quad (\text{I.3.30})$$

Comme nous allons le voir dans le paragraphe qui suit, c'est cette relation qui permet de déterminer le rôle de la gravité et son influence sur l'instabilité capillaire.

3.3.4 Comparaison entre le modèle et les résultats expérimentaux

L'équation (I.3.29) contient la dynamique du drainage et son temps caractéristique $\tau_d \approx 3\mu R_{i0} / (\rho g h_0^2)$. La relation de dispersion I.3.30, quant à elle, contient plusieurs informations :

- Dans la limite où la gravité est négligeable ($Bo \ll 1, Bo^2 R_{i0} / h_0 \ll 1$), l'équation (I.3.30) se résume à l'expression classique [12] :

$$-i\omega = \frac{\sigma h_0^3}{3\mu R_{i0}^4} (k R_{i0})^2 [1 - (k R_{i0})^2] \quad (\text{I.3.31})$$

Remarquons que, l'excentricité étant nulle, on peut exprimer le ξ du paragraphe 3.2 : $\xi = R_{i0} \delta e^{-i\omega t} / h_0$. L'équation I.3.31 est alors identique à l'équation I.3.14 de la théorie sans gravité. Elle implique une croissance exponentielle de la perturbation initiale si $k R_{i0} < 1$. Le mode de déstabilisation le plus rapide est $k R_{i0} = 1/\sqrt{2}$ et a pour taux de croissance $(-i\omega)_{max} = \sigma h_0^3 / (12\mu R_{i0}^4)$.

- Si la gravité est présente mais limitée ($Bo \ll 1, Bo^2 R_{i0} / h_0 = O(1)$), le premier effet découlant dans l'équation (I.3.30) est une diminution du taux de croissance dans la partie supérieure du tube ($\cos \theta > 0$) et son augmentation dans le bas ($\cos \theta < 0$) : l'instabilité se développe plus vite en bas qu'en haut. Dans ce cas, la longueur d'onde n'est pas modifiée par la gravité. C'est effectivement un effet que nous observons expérimentalement : la figure I.3.1-B ii) met en évidence cette croissance à deux vitesses.

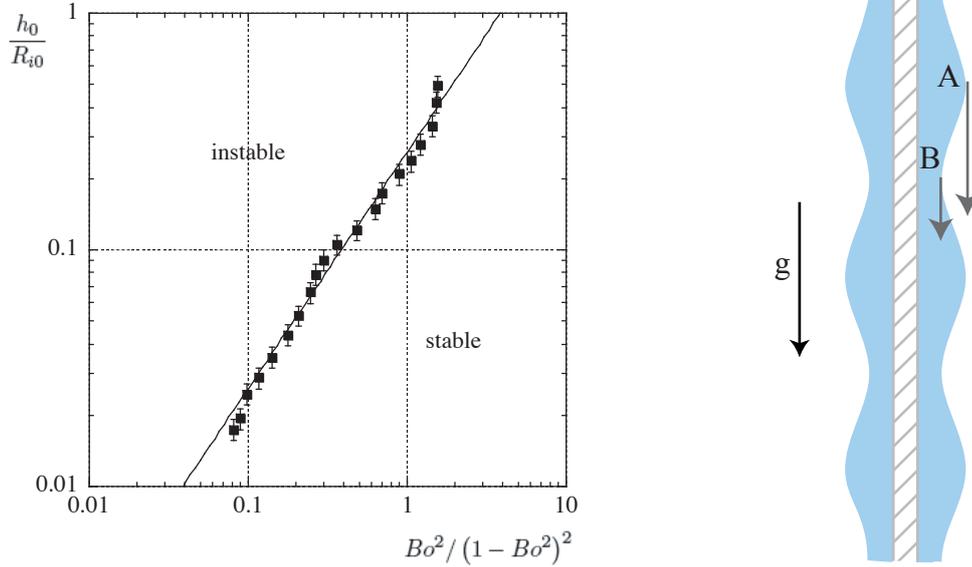


FIG. I.3.9 – (a) Transition entre une interface stable et une interface instable dans le plan $\left[h_0/R_{i0}; Bo^2 / (1 - Bo^2)^2 \right]$: ■ données expérimentales. La ligne correspond à la meilleur approximation linéaire : $h_0/R_{i0} = 0.26 Bo^2 / (1 - Bo^2)^2$. (b) Vue schématique pour le cas vertical. La vitesse de chute dépend de h^2 , donc le fluide placé au point A tombe plus vite que celui au point B.

- Quand le nombre de Bond s’approche de 1, la longueur d’onde du mode le plus instable est altérée par la gravité. Si l’on envisage ce qui se passe dans la partie basse du tube (c’est à dire là où l’évolution est la plus prompte), on trouve $\lambda_{max} = 2\pi\sqrt{2}R_{i0}/\sqrt{1 - Bo^2}$. La longueur d’onde est donc augmentée du fait de la gravité. La divergence en $1/\sqrt{1 - Bo^2}$ est testée sur le graphique A de la figure I.3.6, en ligne continue fine pour l’huile silicone, et en pointillés pour le glycérol. Nous observons expérimentalement une divergence un peu plus forte puisque $1/\sqrt{1 - 2.5Bo^2}$ semble s’accorder à nos mesures.
- Enfin, avec la contrainte d’une interface circulaire, l’interface doit être instable pour tous les azimuts θ si l’on veut développer l’instabilité capillaire. Celle-ci disparaît donc dès que le taux de croissance devient négatif dans la partie supérieure du tube. Si l’on se réfère à l’équation (I.3.30), ceci advient pour $h_0/R_{i0} \leq 12Bo^2 / (1 - Bo^2)^2$. On compare ce critère à nos mesures sur la figure I.3.9. La linéarité entre h_0/R_{i0} et $Bo^2 / (1 - Bo^2)^2$ est correcte, en revanche le préfacteur que nous observons est seulement de 0.26.

Ce modèle permet de rendre compte de plusieurs observations : l’apparition plus précoce de l’instabilité dans le bas du tube, l’évolution qualitative de la longueur d’onde, et le seuil de disparition de l’instabilité. Néanmoins, la prédiction des facteurs numériques

n'est pas correcte. L'étude que nous avons conduite n'est valable que dans les premiers instants, lorsque les déformations variqueuses sont petites, et que le drainage provoque une excentricité limitée. Sur les photographies présentées (figure I.3.1-B), il apparaît que ces hypothèses sont souvent mises en défaut. On peut supposer qu'un modèle plus complet obtiendrait une meilleure pertinence que le nôtre sur les facteurs numériques.

Revenons à notre problématique de départ qu'était la formation des occlusions pulmonaires. La gravité est un moyen de contrer l'instabilité capillaire même dans les petites bronchioles horizontales qui présentent un faible nombre de Bond. Cependant l'orientation des bronches dans nos poumons est variée : que se passe-t-il lorsqu'un conduit n'est pas horizontal ? Ici, nous donnerons seulement un embryon de réponse puisque nous n'avons pas conduit d'étude systématique. Nous nous rapporterons à l'étude conduite par Quéré [24] sur une fibre verticale (figure I.3.9-(b)). Il montre en effet que le drainage gravitaire d'un film de liquide recouvrant une fibre verticale peut empêcher l'instabilité capillaire de s'y établir, pour peu que le film soit mince. En effet, la vitesse de chute d'un film attaché à un support vertical dépend vivement de l'épaisseur de ce fluide. Si une déformation variqueuse survient, les « bosses » tomberont donc bien plus vite que les « creux », venant éventuellement les combler. C'est à dire « restabiliser » l'ensemble.

Les échelles de temps mises en jeu sont comparables aux nôtres, et le seuil se comporte de la même façon : la couche de fluide d'épaisseur h_0 recouvrant une fibre de rayon R_0 n'est pas sujette à l'instabilité capillaire si $h_0 < R_0^3/a^2$ [24]. On s'attendra dès lors au même phénomènes pour des bronches verticales.

On peut par conséquent supposer que pour une bronche d'orientation quelconque, on aura un régime hybride, mais avec toujours une possible suppression de l'instabilité avec un seuil comparable à celui que nous avons décrit ici.

3.4 Remarques complémentaires

3.4.1 Remarque sur la relation de dispersion

La relation de dispersion I.3.30 doit pouvoir décrire, dans la limite des très grands rayons ($R_{i0} \gg a$) et dans la partie haute du tube ($\theta = 0$), l'instabilité de Rayleigh-Taylor d'un film mince de liquide recouvrant la face inférieure d'une plaque et soumis à l'action de l'accélération de la pesanteur [10, 29] (figure I.3.10).

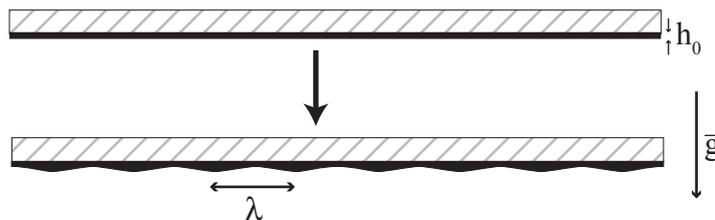


FIG. I.3.10 – Schéma de l'instabilité de Rayleigh-Taylor.

Dans cette limite, on ne garde de l'équation de dispersion que deux termes évoluant

comme R_{i0}^4 :

$$-i\omega = \frac{\sigma h_0^3}{3\mu R_{i0}^4} (kR_{i0})^2 [Bo^2 - (kR_{i0})^2] \quad (\text{I.3.32})$$

Cette expression est maximale pour k_{RT} tel que $1/a^2 - k_{RT}^2 = 0$, c'est à dire pour une longueur d'onde $\lambda_{RT} = 2\pi\sqrt{2}a$ proportionnelle à la longueur capillaire, et avec alors une croissance exponentielle caractérisée par un temps $\tau_{RT} = 12\mu\sigma/(h_0^3\rho^2g^2) = 12\mu a^4/\sigma h_0^3$. On retrouve bien là les expressions habituelles [6, 10]. En comparant ce taux de croissance avec celui de l'instabilité de Plateau-Rayleigh, on obtient $\tau_{th}/\tau_{RT} = Bo^4$. On a donc effectivement prédominance de l'instabilité capillaire aux faibles nombres de Bond, tandis qu'aux grands nombres de Bond, l'instabilité de Rayleigh-Taylor est la plus rapide à se développer.

3.4.2 Quelles sont les régions des poumons concernées par l'instabilité capillaire ?

a/ Comparaison entre le temps caractéristique de la respiration et celui de l'instabilité capillaire

Un cycle respiratoire se produit sur un temps de 3 à 4 secondes, comme nous l'avons remarqué au paragraphe 1.1.1.a. La question soulevée ici est : à partir de quelle génération de bronchioles l'instabilité capillaire se produit-elle sur un temps plus court que la respiration ?

Nous reprenons le taux de croissance du paragraphe 3.2.3, et nous cherchons les rayons qui satisfont :

$$\tau \approx \frac{12\mu R_0^4}{\sigma h_0^3} \leq 3 \text{ s} \quad (\text{I.3.33})$$

Avec les propriétés de mucus répertoriées dans le paragraphe 1.1.2.c, nous calculons que les bronchioles qui vérifient cette condition présentent un rayon inférieur à 0,26 mm. Selon West [34], ceci correspond aux générations 18 et suivantes : pour un sujet sain, seules les conduits alvéolaires situés loin sur l'arbre pulmonaire sont concernés par l'instabilité capillaire. Dans les autres bronchioles, la circulation de l'air a un effet probablement non négligeable sur la formation des lentilles.

En cas de pathologies (mucus épais, rayon réduit), la condition sera remplie à partir de génération d'ordre plus faible : les occlusions « envahissent » les poumons.

b/ Critère de stabilité par drainage gravitaire

Si l'on considère le seuil de stabilité que nous avons mis en évidence avec les lois d'échelle, les bronches qui vérifient $R_{i0}^3/a^2h_0 \approx R_0^3/a^2h_0 > 1$ se situent dans le régime stabilisé (voir paragraphe 3.3.1). En considérant que h_0 vaut 10 μm dans les poumons, ce critère correspond aux bronches de rayon supérieur à 0,27 mm. Cette valeur est très similaire à celle que nous avons dégagée dans le paragraphe précédent : les générations concernées par l'instabilité capillaire sont d'ordre supérieur à 18.

Si l'on considère le seuil expérimental $h_0/R_{i0} \leq 0,26Bo^2/(1-Bo^2)^2$ du paragraphe 3.3.4, le critère est légèrement différent, du fait de la présence du facteur numérique. Le seuil s'écrit *in vivo* $R_0 \geq 0,4 \text{ mm}$: pour les bronches de générations inférieures à 14, la couche de mucus est stabilisée par drainage gravitaire.

c/ Influence des embranchements

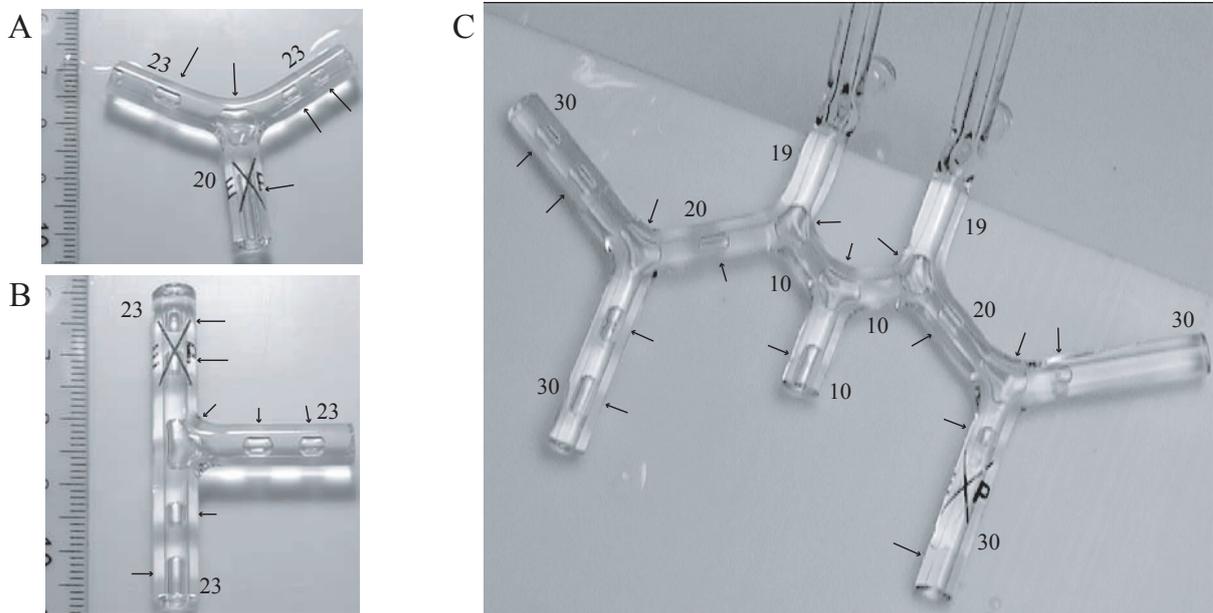


FIG. I.3.11 – Résultat de l'instabilité capillaire de l'huile silicone V1000 dans des embranchements de verre. Les nombres spécifient la longueur des tubes en millimètre, et les flèches soulignent la présence de bulles d'air. A/ Embranchement symétrique. Chaque branche 1,05 mm de rayon interne. B/ Embranchement asymétrique, avec les mêmes dimensions. C/ Embranchements multiples avec de plus faibles rapports d'aspect.

Dans les poumons, nous avons pu constater que les bronches ne sont pas des tuyaux de très grand rapport d'aspect, contrairement à ceux que nous avons utilisés pour nos expériences. Que se passe-t-il si l'on considère des tubes de rapport d'aspect plus réduits ? L'étude de stabilité de l'interface liquide-air nous dit que les cylindres de longueur inférieure à $2\pi R_0$ sont stables. Or, le cas des bronches est quelque peu différent puisqu'arrivé au bout d'une bronche mère, on trouve les bronches filles : la géométrie cylindrique est rompue, mais l'interface est étendue tout de même.

Le verrier de l'école Polytechnique nous a procuré des embranchements de tubes, nous permettant ainsi de tester qualitativement une telle situation. Le dépôt est assez difficile à contrôler, étant donné notamment que la dynamique de la bulle varie lorsqu'elle se scinde, et lorsqu'elle atteint les bouts de l'échantillon. Les remarques faites dans ce paragraphe resteront donc qualitatives. Le rapport d'aspect minimal est atteint dans la bifurcation de l'image I.3.11-C, et vaut $l/d = 9,5$.

Il apparaît sur la figure I.3.11 que la présence d'embranchements ne perturbe pas l'apparition de l'instabilité capillaire. En revanche, une bulle est présente à chaque carrefour : il est donc probable que la longueur d'onde soit imposée par les irrégularités géométriques. Il nous semble donc que le fait d'avoir des tubes branchés les uns sur les autres autorise l'instabilité malgré les faibles rapports d'aspect des bronches et bronchioles : la couche de liquide est continue tout au long de l'arbre pulmonaire et transmet les variations de pression en son sein.

3.4.3 Réouverture des bronches : rupture d'un chapelet de lentilles

Les lentilles de fluide formées dans les poumons sont plus ou moins pénalisantes pour la respiration ; tout dépend de la difficulté qu'elles ont à se résorber.

Si nous considérons un tube obstrué par une série de lentilles, et dans lequel on respire, les lentilles vont se déplacer, déposant ainsi un film de liquide à la paroi (figure I.3.12-A).

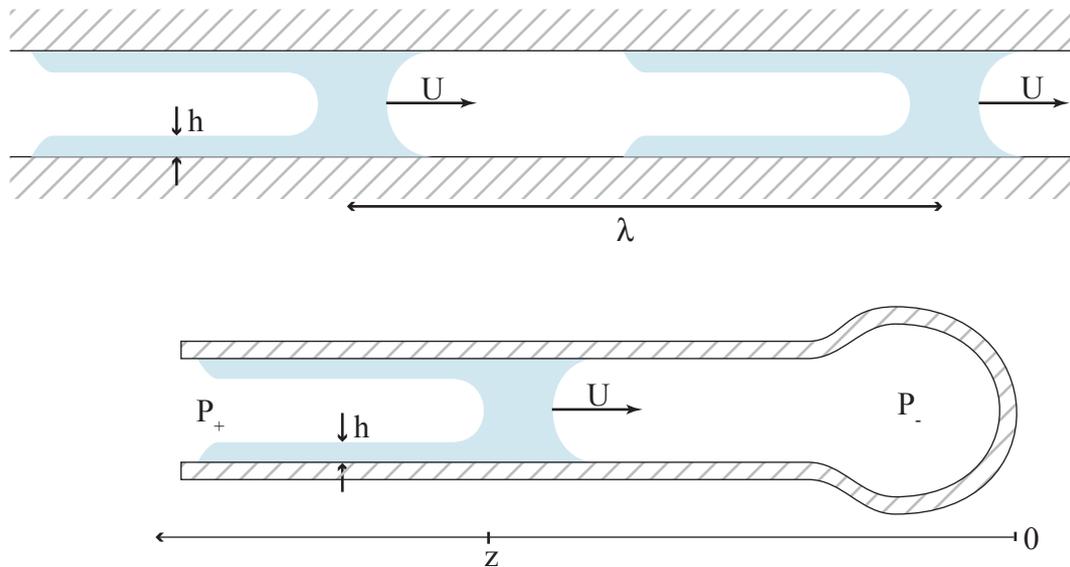


FIG. I.3.12 – Schéma **A/** d'un chapelet de lentilles espacées de λ et se déplaçant à la vitesse U . **B/** d'une lentille proche d'une alvéole pulmonaire.

La redéposition d'un film de liquide sur la paroi d'un tube lors de l'avancée de la lentille a été étudiée théoriquement par Howell [17]. Ici, nous ne considérons pas une seule lentille, mais nous menons un raisonnement simple sur des lentilles qui se suivent : supposons qu'elles avancent toutes à la même vitesse sous l'effet de l'inspiration d'air. Elles redéposent alors à la paroi un film dont l'épaisseur dépend du nombre capillaire d'avancée, en vertu des lois que nous avons évoquées au paragraphe 2.2.2 : $h_0 \sim R_0 Ca^{2/3} = R_0 (\mu U / \sigma)^{2/3}$. Au fur et à mesure qu'elles avancent, les lentilles se vident pour créer chacune un film derrière elles. Ceci est vrai jusqu'à ce qu'elles avancent sur le film de la lentille précédente. Lorsque cette situation se produit, on atteint un état stationnaire où chaque lentille « avale » et redépose des quantités égales de fluide : son volume devient constant.

Pour que les lentilles arrivent à vider tout leur volume dans le film qu'elle créent, il faut donc que la longueur L nécessaire à ce qu'elles redéposent tout leur volume soit inférieur à leur espacement mutuel, λ . L varie comme l'inverse de l'épaisseur déposée, c'est à dire comme $U^{-2/3}$: il existe donc une vitesse seuil en dessous de laquelle on ne détruit pas les lentilles. C'est probablement une des raisons pour laquelle la toux génère une très grande vitesse de l'air : ainsi, les lentilles avancent vite et le mucus est redéposé à la paroi.

Un problème se pose lorsque la lentille est située trop près du bout d'un conduit, c'est à dire d'une alvéole terminale (figure I.3.12-B). On appelle P_- la pression de l'air dans l'alvéole, et z la position de la lentille comptée depuis l'alvéole. Puisque la lentille, créée à la fin de l'expiration, doit se rouvrir pendant une phase d'inspiration, son déplacement nécessite de comprimer l'air contenu dans l'alvéole. En supposant (grossièrement) celle-ci

rigide, le déplacement et la dépression de l'air sont reliés : $\Delta P_-/P_- = \Delta z/z$: pour un même déplacement, la dépression à établir est d'autant plus forte que la lentille est proche de l'alvéole (z petit). Pour vider une lentille par redéposition d'un film à la paroi, il faudra appliquer une dépression d'autant plus forte que la lentille est située près d'une alvéole. Des expériences préliminaires très rudimentaires nous permettent d'intuiter la justesse de ce raisonnement sans nous permettre cependant d'apporter les preuves nécessaires : d'autres expériences sont nécessaires pour préciser ces affirmations.

Chapitre 4

La bulle prise à la gorge : les derniers instants de l'instabilité

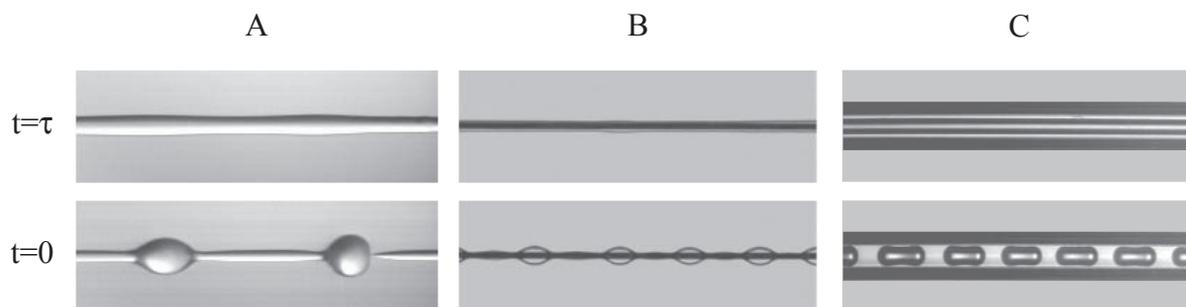


FIG. I.4.1 – Instabilité capillaire **A**/ d'un jet ; **B**/ d'une couche liquide recouvrant une fibre ; **C**/ d'une couche liquide à la paroi interne d'un tube.

Lorsque l'instabilité capillaire se produit sur un jet ou une fibre enduite de liquide, la phase liquide se résout simplement en gouttelettes au fur et à mesure de la croissance (figure I.4.1-A et B). Dans un tube, le rayon de l'interface diminue au cours du temps, et peut éventuellement atteindre zéro au niveau des renflements si le volume de liquide est suffisant [19] : on forme alors des bulles d'air emprisonnées par le liquide (figure I.4.1-C). La figure I.4.2 montre des photographies prises autour de cet instant pour une expérience menée dans un tube de rayon $R_0 = 500 \mu\text{m}$, avec une huile silicone V1000. On observe alors au moment du pincement une singularité, que nous étudions dans ce chapitre.

Ici, ce qui nous intéresse est ce qui entoure l'instant du pincement de l'air. En effet, dans les moments préalables au pincement, on peut supposer que ce n'est plus le temps caractéristique de l'instabilité capillaire qui va régir l'évolution de l'interface puisque l'un des rayons de courbures de l'interface devient extrêmement petit devant l'autre.

Après le pincement, le phénomène auquel on assiste est une relaxation des interfaces liquide-air fraîchement remodelées et singulières puisqu'elles sont pointues : en effet, juste après le pincement, les nouvelles bulles se terminent par des cônes qui relaxent rapidement vers une forme de ménisque partiellement sphérique. C'est cette relaxation que l'on va caractériser. On la reliera aux divers travaux qui ont déjà vu le jour concernant les problèmes de coalescence, c'est à dire de relaxation rapide d'interface sous l'action, entre autres, de la tension de surface [9, 31].

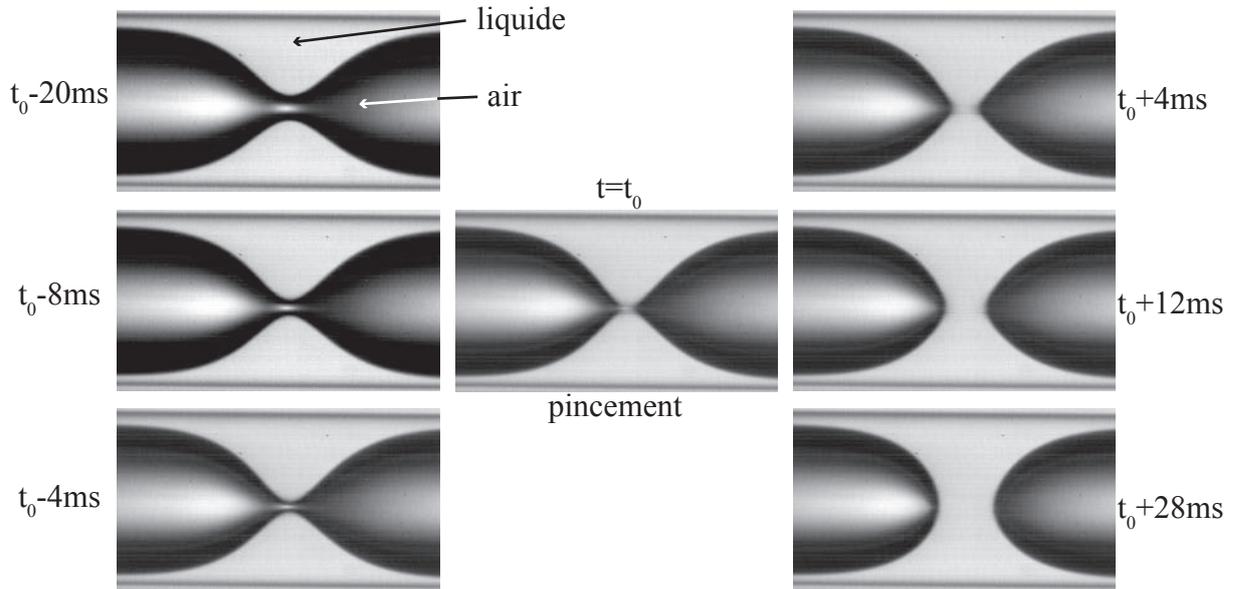


FIG. I.4.2 – Séquence photographique autour de l'instant t_0 du pincement. Expérience menée dans un tube de rayon $R_0 = 500 \mu\text{m}$, avec une huile silicone V1000.

4.1 Protocole pour l'étude de la phase de pincement de l'air

Le mode opératoire est globalement le même que celui du chapitre précédent : on y instille le liquide aux parois d'un tube de rayon R_0 placé horizontalement sous le binoculaire. L'épaisseur est toujours suffisante pour assurer l'existence de l'instabilité capillaire. Une caméra rapide (jusqu'à 27000 images par seconde, pour des résolutions variant de 256×256 à 128×64) permet d'enregistrer l'évolution de l'interface en zoomant sur la partie centrale du tube. Les images sont ensuite traitées à l'aide d'un petit algorithme tournant sous NIH-image, dont le fonctionnement est le suivant : après avoir extrait les contours de l'image, on la binarise (figure I.4.3-A) pour chercher le rayon minimal de l'interface liquide-air, jusqu'à atteindre un rayon d'interface nul à l'instant $t = t_0$, défini à la cadence des images près. Sur les images suivantes, on a désormais deux ménisques qui s'écartent, et dont on mesure la distance entre les apex. On a ainsi accès à la distance entre les deux bulles filles au cours du temps.

4.2 Dynamique d'approche de l'instant du pincement

4.2.1 Conventions de notation

Pour décrire la dynamique du rayon de l'interface à l'approche de la singularité, nous employons les notations de la figure I.4.3-A. Nous appelons t_0 l'instant où le pincement se produit, et R_0 le rayon du tube. Le but, dans ce paragraphe, est donc de déterminer la loi $r(t_0 - t)$ reliant le rayon de l'interface au temps restant pour atteindre le pincement.

4.2.2 Observations expérimentales

Le graphique B de la figure I.4.3 expose les mesures que nous faisons de $r(t_0 - t)$ pour des expériences menées avec de l'huile silicone V1000 dans différents tubes. L'alignement

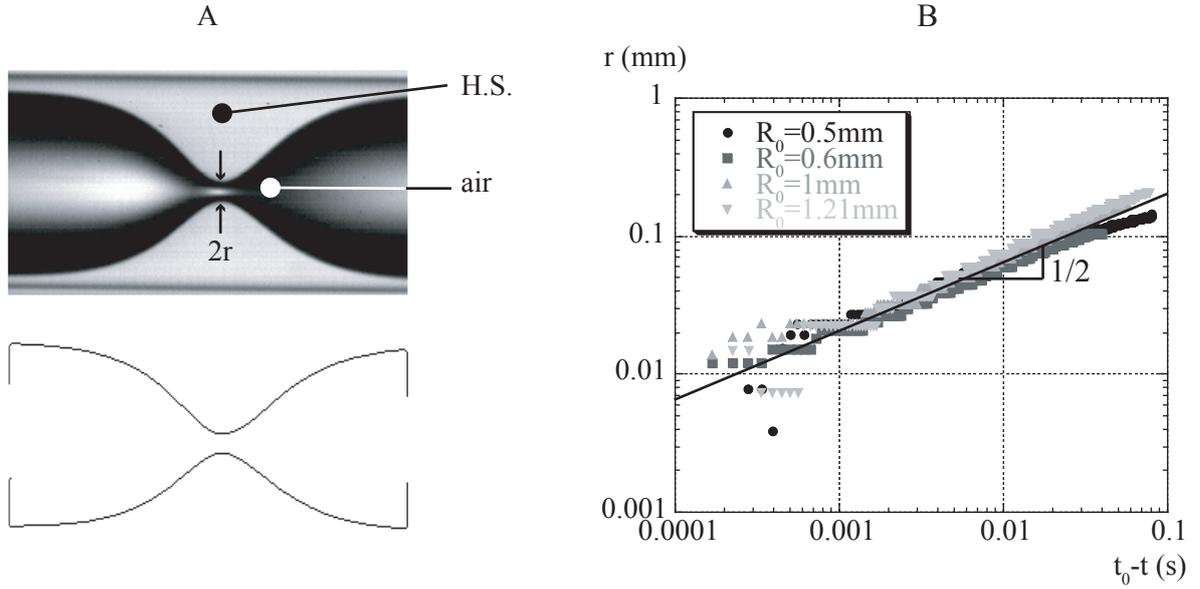


FIG. I.4.3 – **A/** Traitement d'image et notations adoptées. (H.S. = huile silicone) **B/** Mesures de r en fonction de $t_0 - t$, le temps restant avant le pincement. Expériences menées avec de l'huile silicone V1000 dans des tubes de rayons variés.

des points sur des droites de pente comprises entre 0,45 et 0,52 en représentation logarithmique met en évidence un comportement en racine du temps : $r \propto \sqrt{t_0 - t}$. Ceci prouve, en premier lieu, que le régime que nous observons n'est plus piloté par l'instabilité capillaire qui prédit, elle, une progression exponentielle de $r(t)$.

4.2.3 Modèle en lois d'échelles

Nous développons ici un modèle en loi d'échelles pour rendre compte de cette évolution.

Les forces de tension de surface en jeu doivent compenser la dissipation visqueuse : si l'on considère le fluide impliqué dans le mouvement comme étant celui contenu dans une longueur d'onde (volume Ω), nous avons comme échelle naturelle de vitesse \dot{r} . Les gradients de vitesse s'établissent entre l'interface et la paroi du tube, c'est à dire sur une longueur $R_0 - r$. Pour une vitesse radiale et dépendant seulement de r , nous pouvons exprimer la puissance dissipée par viscosité comme étant

$$\mathcal{P}_{visc} = \mu \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 d\Omega \sim \mu R_0 \lambda h_0 \left(\frac{\dot{r}}{R_0 - r} \right)^2 \quad (\text{I.4.1})$$

L'énergie mise en jeu par la tension de surface est σ fois la surface qui scale comme $R_0 \lambda$, et elle est sollicitée sur des échelles de temps de l'ordre de r/\dot{r} :

$$\mathcal{P}_{\sigma} \sim -\sigma R_0 \lambda \left(\frac{\dot{r}}{r} \right) \quad (\text{I.4.2})$$

En se souvenant que la longueur d'onde est un multiple de R_0 et que l'épaisseur initiale h_0 est aussi relié, via le nombre capillaire de dépôt, à R_0 , et en négligeant r devant R_0 puisqu'on regarde les tout derniers instants, on obtient l'équation suivante :

$$r \dot{r} \sim \frac{\sigma R_0}{\mu} \quad (\text{I.4.3})$$

qui s'intègre pour donner

$$r \sim \sqrt{\frac{\sigma R_0}{\mu}} (t_0 - t) \quad (\text{I.4.4})$$

On trouve ainsi un comportement en racine du temps, que l'on compare aux données expérimentales.

4.2.4 Comparaison avec l'expérience

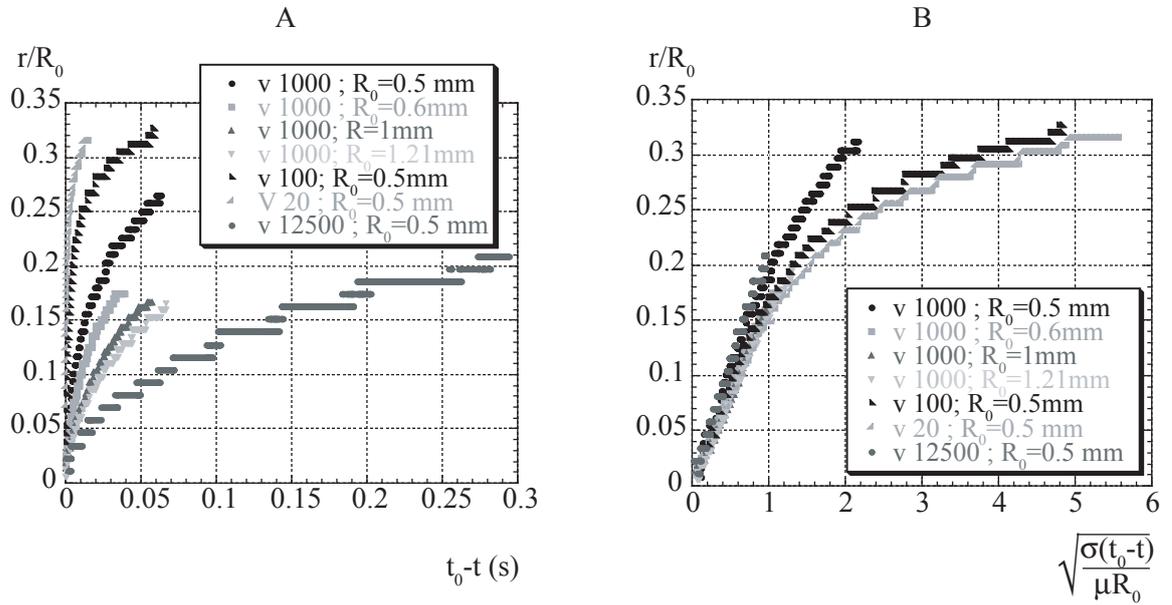


FIG. I.4.4 – Vérification du scaling obtenu en I.4.4 pour les instants précédant le pincement en régime visqueux.

A/ Données brutes obtenues pour différentes viscosités et différents tubes.

B/ Mêmes données présentées dans le plan $(r/R_0 ; \sqrt{\frac{\sigma}{\mu R_0}} (t_0 - t))$.

Nous avons déjà noté que la dépendance en temps se faisait en une puissance proche de 1/2 (figure I.4.3-B). La droite de pente 1/2 qui est tracée sur le graphique montre qu'une puissance 1/2 est une approximation raisonnable pour les données. Le modèle est donc sur ce point cohérent avec les expériences : $r \propto \sqrt{t_0 - t}$.

La vérification de la loi I.4.4 peut aussi se faire au travers de la dépendance en viscosité. C'est ce qui est fait sur la figure I.4.4 qui montre la comparaison entre les données brutes pour des huiles de viscosités variées (A), et les données adimensionnées selon la loi ci-dessus (B). Nous en déduisons que la loi semble vérifiée puisque nous sommes capables de faire concorder des évolutions qui étaient pourtant bien distinctes avant le traitement.

Remarquons que la concordance des courbes ainsi adimensionnées se limite aux instants proches de la singularité : l'évolution qui précède (*i.e* pour des $t_0 - t$ plus grands) est dictée par l'instabilité capillaire étudiée au chapitre précédent, et la loi I.4.4 n'y est pas encore valide.

4.3 Dynamique de séparation des bulles filles

Nous étudions maintenant ce qui se passe après l'instant du pincement : c'est la dynamique de relaxation des deux bulles filles nouvellement formées qui nous intéresse.

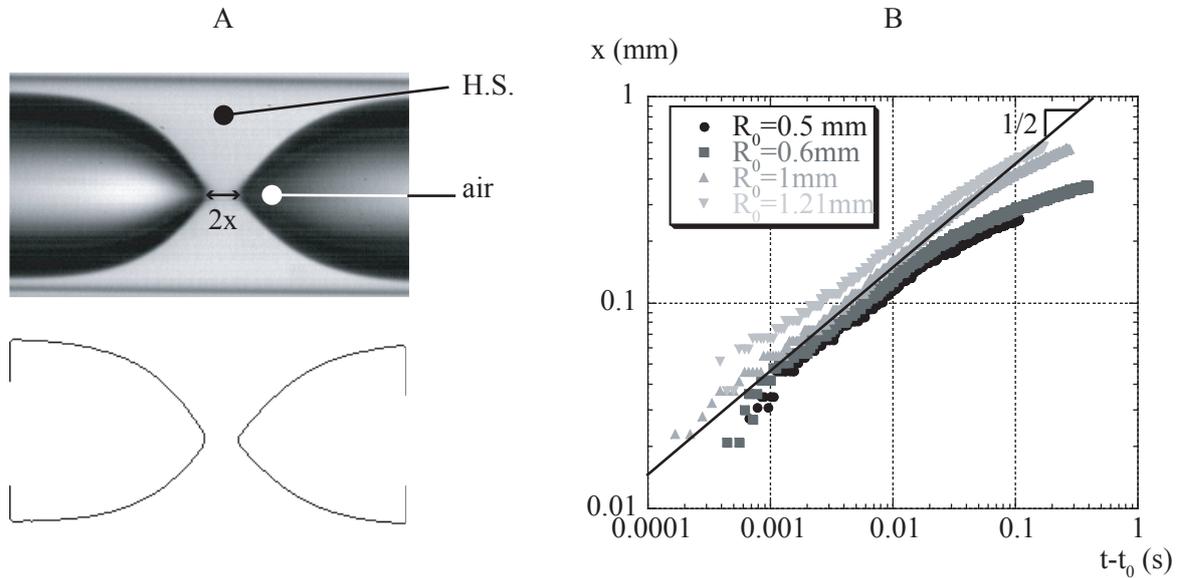


FIG. I.4.5 – **A/** Traitement d'image et notations adoptées. **B/** Mesures de x en fonction de t , le temps écoulé depuis le pincement. Expériences menées avec de l'huile silicone V1000 dans des tubes de rayon variés.

4.3.1 Nouvelles notations

Nous appelons $2x$ la distance entre les apex mutuels des deux nouvelles bulles adjacentes, que nous mesurons grâce au même traitement d'image qu'au paragraphe 4.1 (figure I.4.5-A). Nous la mesurons en fonction du temps écoulé depuis le pincement $t - t_0$.

4.3.2 Résultats des expériences

Le graphique B de la figure I.4.5 expose en échelle logarithmique les mesures que nous faisons de x en fonction de $t - t_0$. Il fait ressortir un comportement en racine du temps, puisque les points obtenus donnent comme meilleure approximation une évolution en loi de puissance d'exposant compris entre 0,43 et 0,49.

4.3.3 Modèle pour la séparation

Le raisonnement en loi d'échelle que nous appliquons dans ce paragraphe est inspiré des études de coalescences menées par Eggers [9] et Thoroddsen [31]. Leurs analyses concerne une géométrie différente puisqu'ils considèrent l'un et l'autre une coalescence de gouttes sphériques. Le développement théorique de Eggers [9] aboutit à une loi pour la taille du contact $x = \sigma t \ln(\sigma t / \mu R_0) / 2\pi\mu$. Cette loi n'est pas observée dans les expériences de Thoroddsen [31], peut-être parce qu'elle n'est valide qu'à de trop petites échelles. Thoroddsen constate en revanche un comportement qui semble linéaire $\dot{x} = \sigma / \mu$. Aucun

de ces deux résultats ne correspond à notre observation, c'est pourquoi nous développons un modèle propre à la géométrie cylindrique de nos tubes.

Lors de leur relaxation, nous observons que l'extrémité des bulles filles créées prennent la forme de cône. La hauteur de ce cône est assimilable à la longueur de la bulle et va donc être proportionnelle à λ . Le rayon du cercle qui en constitue la base n'est autre que le rayon R_0 du tube. (figure I.4.6) A présent, le volume de fluide qui va participer au

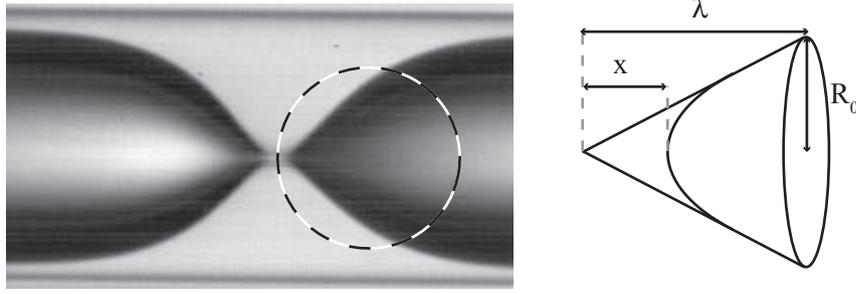


FIG. I.4.6 – Forme de l'interface juste après l'instant du pincement.

mouvement, et donc qui va intervenir dans la dissipation visqueuse est x^3 . La vitesse de l'apex de la bulle est \dot{x} , en revanche, à l'endroit où le pincement a eu lieu, le système est symétrique puisqu'on a une bulle de chaque côté. La vitesse y est donc nulle. C'est pourquoi les gradients de vitesse s'établissent aussi sur x . Il vient :

$$\mathcal{P}_{visc} \sim \mu x^3 \left(\frac{\dot{x}}{x} \right)^2 \quad (\text{I.4.5})$$

Et la force exercée par la tension de surface est σR_0 puisque c'est en quelque sorte le cercle qui est à la base du cône qui tire la pointe vers elle, et elle travaille à la vitesse \dot{x} :

$$\mathcal{P}_\sigma \sim -\sigma R_0 \lambda \dot{x} \quad (\text{I.4.6})$$

Il reste, en équilibrant les deux termes :

$$x \dot{x} \sim \frac{\sigma R_0}{\mu} \quad (\text{I.4.7})$$

Ce qui s'intègre pour donner le même scaling que précédemment :

$$x \sim \sqrt{\frac{\sigma R_0}{\mu} (t - t_0)} \quad (\text{I.4.8})$$

4.3.4 Comparaison des résultats avec le modèle

La droite tracée sur la figure I.4.5-B permet de vérifier l'accord de nos données avec une loi de puissance en racine du temps : les points s'alignent sur des droite de pente proches de 1/2.

De même que pour le cas précédent (étude de r), on peut adimensionner les données expérimentales pour vérifier cette loi (I.4.8). C'est l'objectif de la figure I.4.7 qui présente d'une part les données brutes (A) – dispersées – et d'autre part les données adimensionnées (B), qui concordent, confirmant ainsi la loi I.4.8 dans les premiers instants suivant le pincement.

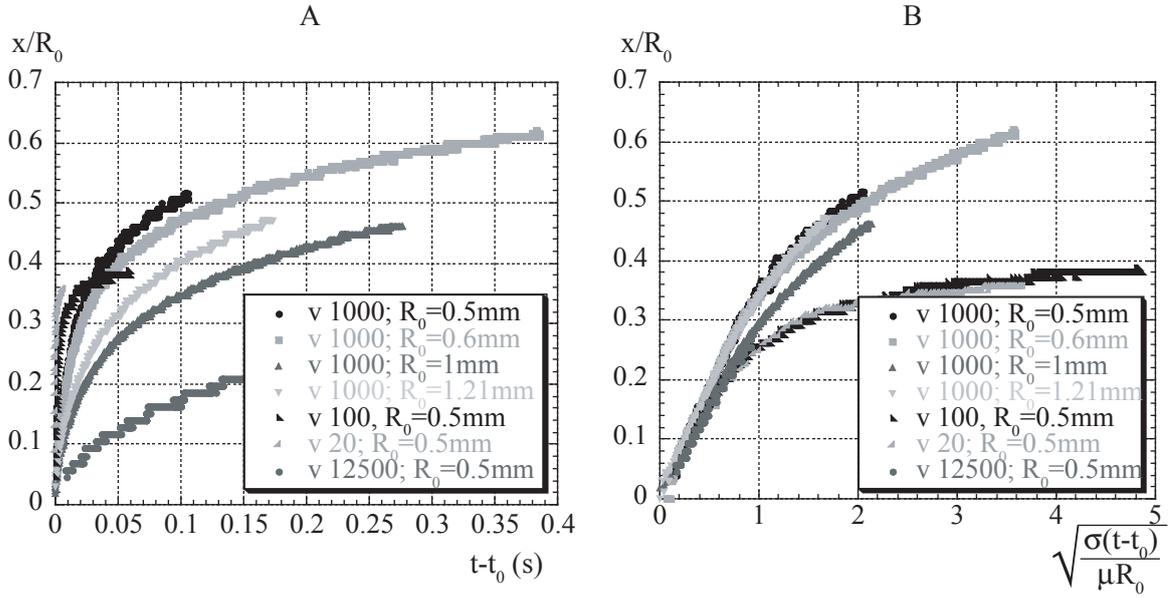


FIG. I.4.7 – Vérification du scaling obtenu en I.4.8 pour les instants suivant le pincement en régime visqueux.

A/ Données brutes pour diverses viscosités et différents rayons de tube.

B/ Les mêmes données sont présentées dans le plan $(x/R_0; \sqrt{\frac{\sigma(t-t_0)}{\mu R_0}})$.

4.3.5 Parallèle avec la loi d'imprégnation d'un poreux

Remarquons que la loi (I.4.8) n'est autre que la loi d'imprégnation d'un tube capillaire de rayon R_0 mis en contact à l'instant $t = 0$ avec un liquide (figure I.4.8). Cette loi porte le nom de Washburn [32]. Si nous appelons x la hauteur de liquide atteinte dans le tube, la loi d'imprégnation s'écrit :

$$x \sim \sqrt{\frac{\sigma R_0}{\mu}} t \quad (\text{I.4.9})$$

La montée de liquide obéit donc à la même loi que l'écartement des bulles filles (équation I.4.8). Pourtant s'il est vrai que les deux lois sont similaires, la construction des raisonnements qui y conduisent diffèrent : en effet, dans le cas de l'imprégnation, le volume de liquide qui est mis en mouvement est celui contenu dans le tube, xR_0^2 , et les gradients de vitesse s'établissent entre le milieu du tube et sa paroi, c'est à dire sur R_0 . Il en résulte

$$\mu x R_0^2 \left(\frac{\dot{x}}{R_0} \right)^2 \sim \sigma R_0 \dot{x} \quad (\text{I.4.10})$$

Par élimination des R_0 du membre de gauche, l'équation I.4.10 donne la même loi qu'en I.4.8, mais plus par une coïncidence mathématique que grâce à une physique comparable.

On trouvera en annexe A.1 une étude complémentaire de l'étude de l'écartement des bulles en régime inertiel.

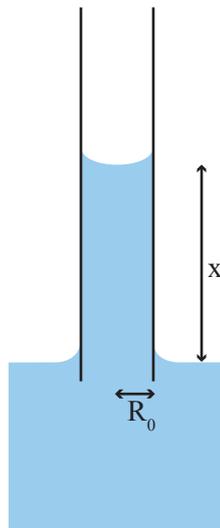


FIG. I.4.8 – Schéma de notation pour la loi de Washburn.

Conclusion de l'étude sur les occlusions pulmonaires

A partir de la problématique des occlusions pulmonaires, nous avons étudié expérimentalement l'instabilité capillaire d'une couche de liquide visqueux recouvrant la paroi interne d'un tube horizontal, dans la limite des faibles nombres de Bond. Nous avons constaté que la longueur d'onde de déstabilisation n'obéissait pas toujours à la loi $\lambda = 2\pi\sqrt{2}R_{i0}$ attendue d'après le modèle classique, et que l'instabilité n'avait pas toujours lieu malgré les prédictions théoriques.

Nous avons mis en évidence dans notre modèle l'influence de la gravité sur la relation de dispersion, qui se traduit par

- le développement plus rapide des perturbations de l'interface liquide-air dans le bas du tube,
- une augmentation de la longueur d'onde de déstabilisation de l'interface par rapport à la situation sans gravité : $\lambda = 2\pi\sqrt{2}R_{i0}/\sqrt{1 - Bo^2}$,
- la saturation de l'instabilité dès que le taux de croissance s'annule en haut du tube, c'est-à-dire pour $h_0/R_{i0} \leq 12Bo^2/(1 - Bo^2)^2$.

Si les tendances qualitatives sont correctes, ce modèle ne prédit toutefois pas les bons facteurs numériques. Il faudrait pour augmenter la précision du modèle prendre en compte des déformations et des excentricités qui ne soient pas petites devant le rayon du tube.

La géométrie cylindrique permet d'atteindre, à l'issue du développement de l'instabilité, de très faibles rayons d'interfaces. Nous nous sommes intéressés à la dynamique du pincement de l'air, dans ce régime dominé par la tension de surface. Nous dégageons, à partir d'un raisonnement en loi d'échelle, une tendance pour l'approche de la singularité en $r \sim \sqrt{\sigma R_0(t_0 - t)}/\mu$, que les expériences confirment. L'équilibre des dissipations visqueuses et du travail de la tension de surface conduit également à une loi pour l'écartement des deux bulles nouvellement formées $x \sim \sqrt{\sigma R_0(t - t_0)\mu}$, qui est également en accord avec les expériences.

Les perspectives sur lesquelles débouche cette partie sont les études de l'instabilité capillaire dans des tubes ramifiés qui reproduisent mieux la situation pulmonaire réelle, et surtout les conditions de rupture des occlusions pulmonaires. Le but étant de dégager quels paramètres sont les plus pertinents pour aider à détruire ces lentilles liquides lorsqu'elles surviennent dans le cadre d'une pathologie.

Deuxième partie

Entropion oculaire : étalement et retournement « visco-élastique »

1	Entropion et syndrome de l'œil sec : introduction	65
1.1	Éléments d'anatomie oculaire	65
1.1.1	Le film lacrymal isole l'œil du milieu extérieur	66
1.1.2	La paupière	68
1.2	Modélisation du système paupières-larmes	69
1.2.1	Simplification établie par Wong	69
1.2.2	Le modèle de Landau, Levich et Derjaguin pour l'enduction d'une plaque solide tirée d'un bain de liquide	69
1.3	Présentation de notre étude	70
2	Dispositif expérimental	73
2.1	Principe général	73
2.2	Les « paupières » : des feuilles élastiques	74
2.3	Les « larmes » : des huiles silicones	75
2.4	Précaution concernant l'effet de la capillarité	75
2.5	Régime de fonctionnement des expériences	75
3	Mesures, modèle et discussion	77
3.1	Observations et mesures	77
3.1.1	Influence des propriétés de la paupière sur l'épaisseur de liquide déposé	77
3.1.2	Influence de la vitesse U	78
3.1.3	Influence des propriétés des larmes	79
3.2	Equations gouvernant le système	79
3.2.1	Rappel détaillé sur le modèle de Landau Levich et Derjaguin	79
3.2.2	Modèle décrivant l'enduction par une paupière	83
3.3	Comparaison et discussion	86
3.3.1	Confrontation du modèle avec les expériences	86
3.3.2	Ouverture sur l'entropion	88
3.4	Conclusion de l'étude sur le fonctionnement des paupières et l'entropion	89

Liste des symboles de la partie II

a	longueur capillaire $a = \sqrt{\sigma/\rho g}$	μ	viscosité dynamique
b	largeur de la feuille de mylar	ν	viscosité cinématique du liquide, module de Poisson du mylar
B	rigidité à la flexion, par unité de largeur $B = Ee^3/12(1 - \nu^2)$	ρ	masse volumique
\mathcal{C}	courbure de l'interface	ρ_l	masse linéique du transparent
Ca	nombre capillaire $Ca = \mu U/\sigma$	σ	tension de surface
e	épaisseur de la feuille de mylar	Σ	surface du transparent récepteur
E	module d'Young	Ω	volume du réservoir liquide
Ec	nombre « élasto-capillaire », $Ec = L^3\sigma/aB$		
g	pesanteur terrestre, $9,81 \text{ m.s}^{-2}$.		
h_{tot}	épaisseur totale du film lacrymal		
h_∞	épaisseur du film liquide		
H	hauteur atteinte par le ménisque statique		
l	étendue du ménisque dynamique		
L	longueur de la feuille de mylar		
p	pression au sein du fluide		
Re	nombre de Reynolds, $Re = \rho UL/\mu$		
\underline{u}	vitesse instantanée dans le liquide		
U	vitesse de translation du récepteur		
Ve	nombre « visco-élastique », $Ve = \mu UL^2/B$		
Y_0	hauteur de la potence au dessus du récepteur		

Chapitre 1

Entropion et syndrome de l'œil sec : introduction

Cette partie est consacrée à l'étude de la paupière et du film lacrymal qui recouvre l'œil. Nous mettons l'accent sur la mécanique de son étalement par le mouvement de la paupière.

1.1 Éléments d'anatomie oculaire

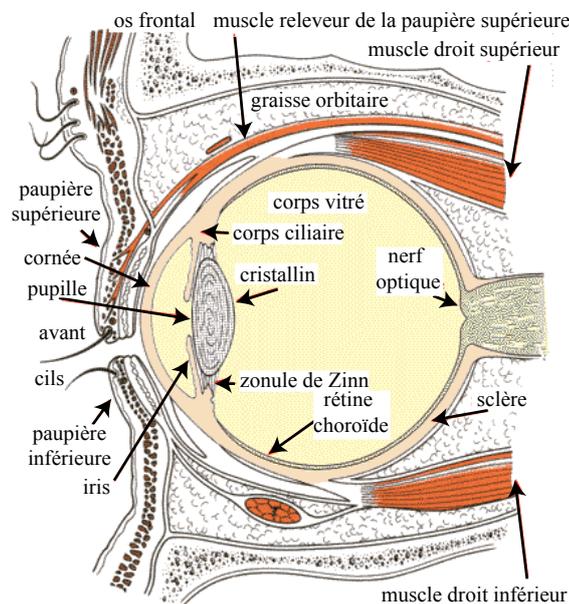


FIG. II.1.1 – Schéma d'une coupe latérale du globe oculaire.

En tant qu'organe de la vue, l'œil doit offrir aux rayons lumineux un chemin transparent jusqu'à la rétine où se forme l'image qui est destinée au cerveau. La figure II.1.1 offre une vue schématique d'un globe oculaire. La lumière pénètre successivement à travers la cornée, la pupille le cristallin et le corps vitré jusqu'à la rétine. Celle-ci est tapissée de cellules photosensibles reliées au nerf optique. Le traitement de l'image formée sur la rétine est complexe, et se distribue entre la rétine elle-même, le nerf optique, le cerveau et le cerveau [43]. La cornée est protégée du milieu extérieur par un film de liquide qui

l'enrobe : le film lacrymal. Lorsque les paupières sont fermées, elle jouent également un rôle de protection.

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'interaction entre les paupières et le film de larmes, en fonctionnement normal ou pathologique.

1.1.1 Le film lacrymal isole l'œil du milieu extérieur

Le film lacrymal recouvre la cornée de l'œil. Nous décrivons dans ce paragraphe son utilité, sa composition et la façon dont il est produit puis éliminé.

a/ Rôle : un fluide optique, nourricier et assainissant

Les fluides qui baignent les organes exposés au milieu extérieur ont généralement un rôle de protection, et les larmes n'échappent pas à cette règle. Néanmoins, l'organisation du corps met à profit ce liquide pour remplir bien d'autres fonctions. Voici les principales :

- i). le film lacrymal qui recouvre la cornée permet de lisser les défauts qu'elle contient éventuellement, afin d'offrir une **surface optiquement lisse**, de grande qualité [47, 53].
- ii). les larmes **lubrifient l'œil et les paupières** pour faciliter leur glissement [47].
- iii). le film est un milieu contenant des **enzymes** [47], dont certaines sont **bactéricides** [54]. Il participe ainsi du système immunitaire.
- iv). c'est aussi un fluide **nettoyant** [47]. Il a notamment pour vocation de piéger les petits corps étrangers (poussières, acariens), et de les évacuer lors de sa propre élimination.
- v). l'une des fonctions majeures des larmes est d'**hydrater la cornée** [54], constituées de cellules vivantes et qui donc exigent d'être baignées de liquide.
- vi). Vis-à-vis de ces cellules épithéliales, il joue aussi le rôle de **fluide nourricier** : il contient des protéines, par exemple. La cornée a en outre la contrainte d'être transparente pour transmettre au mieux la lumière. Elle n'est donc que très peu vascularisée, et seulement à sa périphérie. Le fluide lacrymal lui fournit alors l'oxygène dont elle a besoin et évacue le dioxyde de carbone qu'elle produit [53].
- vii). Il sert aussi, bien sûr, à exprimer les émotions ...

b/ Structure et propriétés : trois phases superposées

Selon Jones [47] et Wong [54], le film est composé de trois couches superposées :

- i). la couche principale (90% en volume [54]), centrale, est composée à 98% d'**eau** et à 2% de sels [47, 54]. Elle mesure en moyenne 7 à 11 microns d'épaisseur.
- ii). la couche superficielle est beaucoup plus mince. Elle mesure 0,1 micron d'épaisseur [47, 54], et contient essentiellement des **lipides**. Elle permet de retarder l'évaporation de la couche aqueuse [51, 53], elle prévient les déséquilibres que ferait un contact purement aqueux avec la peau, grasse, des paupières [53], et diminue l'énergie interfaciale larmes/air [53].
- iii). la troisième phase est en contact avec la cornée, en dessous de la couche aqueuse. La mesure de son épaisseur est sujette à controverse. Il semble que les méthodes les plus récentes s'accordent sur une valeur d'environ un micron [53, 54]. Il semble que cette

couche, plus **visqueuse** et composée en partie de macromolécules (mucine) puisse jouer un rôle d'agent mouillant entre la cornée, qui serait hydrophobe, et les larmes [38, 54]. Cependant, là encore, il y a désaccord [53].

Les mesures de l'épaisseur du fluide lacrymal semble varier beaucoup en fonction de la méthode utilisée. L'ordre de grandeur de l'épaisseur totale h_{tot} des trois couches semble être, selon Jones [47] et Wong [54], entre 4 et 40 microns. Toujours selon Jones [47], un volume de 4 microlitres de fluide lacrymal est exposé à l'air (dont 2,9 μL dans les ménisques au bord des paupières), pour 4,5 microlitres non-exposés, c'est à dire restant sous les paupières.

Les propriétés physiques qui sont reportées pour le liquide lacrymal sont les suivantes : sa tension de surface vaut $\sigma = 45 \text{ mN/m}$ selon Wong [54], ce qui s'accorde avec les données de Bron [38] ($43,6 \pm 2,7 \text{ mN/m}$). Sa masse volumique est assimilable à celle de l'eau [47] : $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Ceci nous permet d'évaluer la longueur capillaire $a = \sqrt{\sigma/\rho g} \approx 2,14 \text{ mm}$. La viscosité dynamique semble varier entre $0,97.10^{-3}$ et $2,33.10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ selon Gouveia [45]. L'indice optique des larmes est de 1,333 [53], à comparer avec l'air (1), la cornée (1,376), ou les humeurs aqueuse et vitreuse (1,336) [53]. Le passage de l'air aux larmes est donc le saut d'indice le plus important rencontré par la lumière avant son impact sur la rétine.

c/ Régulation

Tiffany [53] offre une description assez précise de l'origine des larmes : la figure II.1.2 situe les organes de production du fluide lacrymal. La couche lipidique supérieure est produite par des glandes situées dans la partie mobile (figure II.1.2-A) de la paupière et dont l'orifice est situé juste sur son pourtour, sous les cils et dans la zone repérées sur la figure II.1.2-B. La phase aqueuse est sécrétée par les glandes lacrymales situées dans la paupière, sous l'arcade sourcilière, et repérées sur la figure II.1.2-B. Elles s'écoulent le long de l'œil jusqu'aux conduits lacrymaux qui débouchent dans la fosse nasale. Une partie de l'évacuation est aussi due à l'évaporation dans l'air. Lorsque le débit augmente trop, les canaux sont submergés et les larmes débordent : on pleure. La phase visqueuse est produite par des cellules glandulaires caliciformes placées sur l'intérieur de la paupière, contre la cornée.

L'étalement de ces trois liquides le long de la cornée se fait au cours du clignement, et plus exactement pendant le mouvement d'ouverture de l'œil. La paupière inférieure bouge peu [53], mais la paupière supérieure parcourt la surface de l'œil en 0,2 s [47]. La taille de l'œil étant de l'ordre du centimètre, on obtient des vitesses caractéristiques $U \approx 0,05 \text{ m.s}^{-1}$. Le nombre capillaire maximum de dépôt mesuré par Wong vaut $Ca = \mu U/\sigma \approx 0,002$. Le nombre de Reynolds atteint s'écrit $Re = \rho U h_{tot}/\mu \approx 0,5$. Les effets visqueux dominent donc l'inertie.

Une fois étalé, le film doit rester en place jusqu'au prochain clignement d'œil, parfois 5 à 10 secondes plus tard [47].

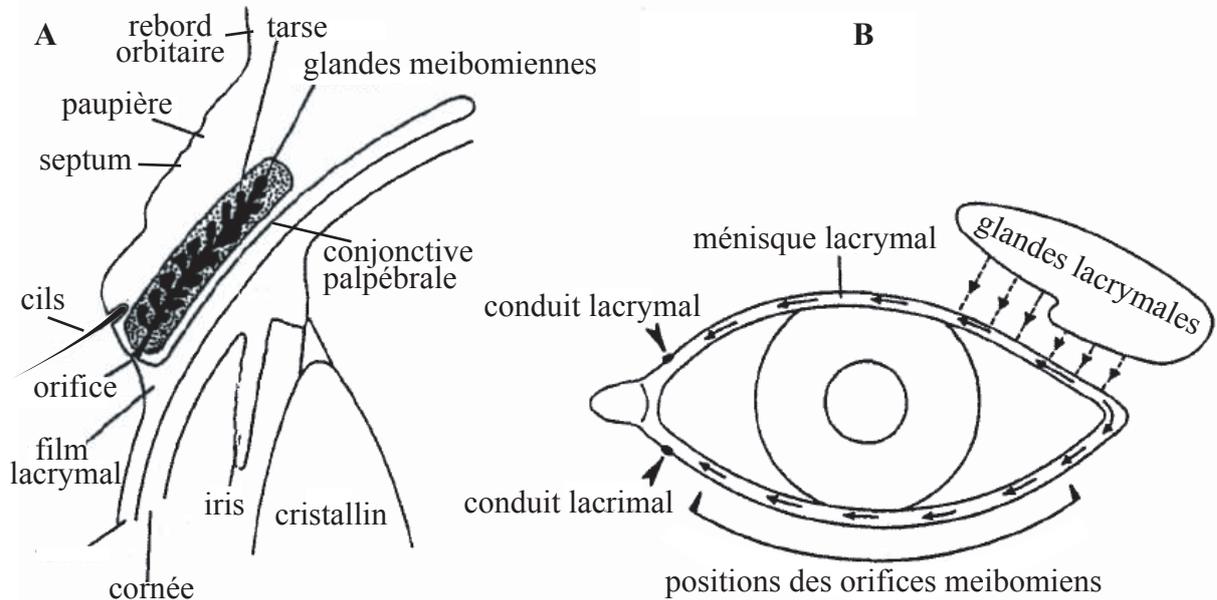


FIG. II.1.2 – Schémas tirés de [53] présentant **A/** une vue en coupe de la paupière et **B/** une vue de face de l'œil permettant de situer les glandes productrices du fluide lacrymal.

1.1.2 La paupière

a/ En fonctionnement normal

L'étalement des larmes est assuré, comme nous venons de l'indiquer, par le mouvement des paupières. Elles effectuent en moyenne 3 à 25 clignements par minute, selon les individus, leur activité mentale et leur environnement [36]. Seule la paupière du haut bouge, celle du bas restant essentiellement statique [47, 54]. Outre ce rôle de dépôt, la paupière a aussi pour vocation de protéger l'œil du milieu extérieur et des très fort rayonnements, en se fermant.

La paupière est composée de deux parties : le tarse (figure II.1.2-A), au centre, contient les glandes meibomiennes. C'est lui qui assure la rigidité de la paupière supérieure. Le second composant, le septum orbitaire, est un corps cartilagineux semi-rigide qui permet le maintien des cils et qui relie le tarse au rebord orbitaire. Il est recouvert de la peau [42]. Nous n'avons pas trouvé de valeurs pour les caractéristiques mécaniques de la paupière. On estime sa taille de l'ordre du centimètre. En prenant un module d'Young $E = 10$ MPa, un coefficient de poisson ν de 0,3 et une épaisseur de paupière $e = 1$ mm, on peut construire un nombre « visco-élastique » Ve comparant les effets visqueux aux contraintes élastiques de la membrane : $Ve = 12\mu UL^2(1 - \nu^2)/Ee^3 \approx 0,6 \cdot 10^{-5}$. Les effets élastiques sont donc fortement prépondérants dans ce système, pour décrire les conditions de pression à l'interface liquide/membrane.

b/ Pathologies impliquant la paupière et/ou le film lacrymal

Nous distinguons deux pathologies principales faisant intervenir le film lacrymal et/ou la paupière : l'œil sec et l'entropion.

L'œil sec se manifeste par des douleurs et des irritations de la cornée, avec dans les stades les plus avancés, de la morbidité des cellules épithéliales. Il peut être causé par une trop faible sécrétion de lipides ou d'eau [47], ou bien une évaporation trop rapide [53]. Il peut aussi être la conséquence d'un mauvais étalement palpébral (des paupières). C'est le cas si les paupières ne se rejoignent pas complètement pendant le clignement, ou si leur fréquence de fermeture diminue [47]. En cas d'assèchement extrême, le film peut démouiller par endroit, et les variations de chemin optique entre les différents faisceaux lumineux peuvent dégrader fortement l'image perçue par le sujet [51]. Presque la moitié des femmes de 35 à 60 ans se plaignent de symptômes d'yeux secs occasionnels, et 10 à 15% des personnes âgées souffrent d'un syndrome d'œil sec avéré [51]. Le principal mode de soulagement est l'instillation de larmes artificielles plus ou moins visqueuses [51].

L'entropion est un enroulement en dedans du bord libre de la paupière qui amène les cils au contact avec la cornée. Les cils frottent ainsi contre le globe oculaire, créant des irritations et parfois un abcès de la cornée [42]. L'entropion est souvent causé, chez les personnes âgées notamment, par un affaiblissement musculaire de la paupière [42], qui entraîne un enroulement de la paupière au lieu de son glissement sur le fluide lacrymal. La seule solution actuellement mise en œuvre pour corriger cette malposition est l'opération chirurgicale [42].

1.2 Modélisation du système paupières-larmes

1.2.1 Simplification établie par Wong

Wong [54] propose dans son article une modélisation du type Landau-Levich-Derjaguin pour expliquer l'enduction de la cornée lors de l'ouverture de la paupière supérieure. En se plaçant dans le plan de la figure II.1.3-B qui est une coupe transverse de l'œil (figure II.1.3-A), l'écartement de la paupière supérieure (figures II.1.3-B et C) produit un étalement de liquide piloté par la courbure du ménisque. C'est un étalement dicté par les forces capillaires et visqueuses. Les modèles élaborés ajoutent progressivement une prise en compte des effets d'évaporation et des modifications des conditions aux interfaces dues à la structure en trois couches des larmes [47, 54]. D'autres modèles prennent aussi en compte les éventuels effets de démouillage sur la cornée.

1.2.2 Le modèle de Landau, Levich et Derjaguin pour l'enduction d'une plaque solide tirée d'un bain de liquide

Le problème de l'application d'un liquide sur un solide n'est pas vierge. Il faut remonter à 1942 et aux travaux de Landau et Levich [49] pour trouver la première analyse théorique du dépôt capillaire d'un liquide visqueux sur un solide. Leur système est représenté sur la figure II.1.4-A : on tire d'un bain de liquide parfaitement mouillant une plaque, à une vitesse faible et constante ($Ca \ll 1$). La plaque se couvre ainsi d'un film uniforme de liquide dont l'épaisseur h_∞ est le résultat de la compétition entre forces gravitaire, visqueuses et capillaires. La loi obtenue par Landau et Levich en régime visco-capillaire est

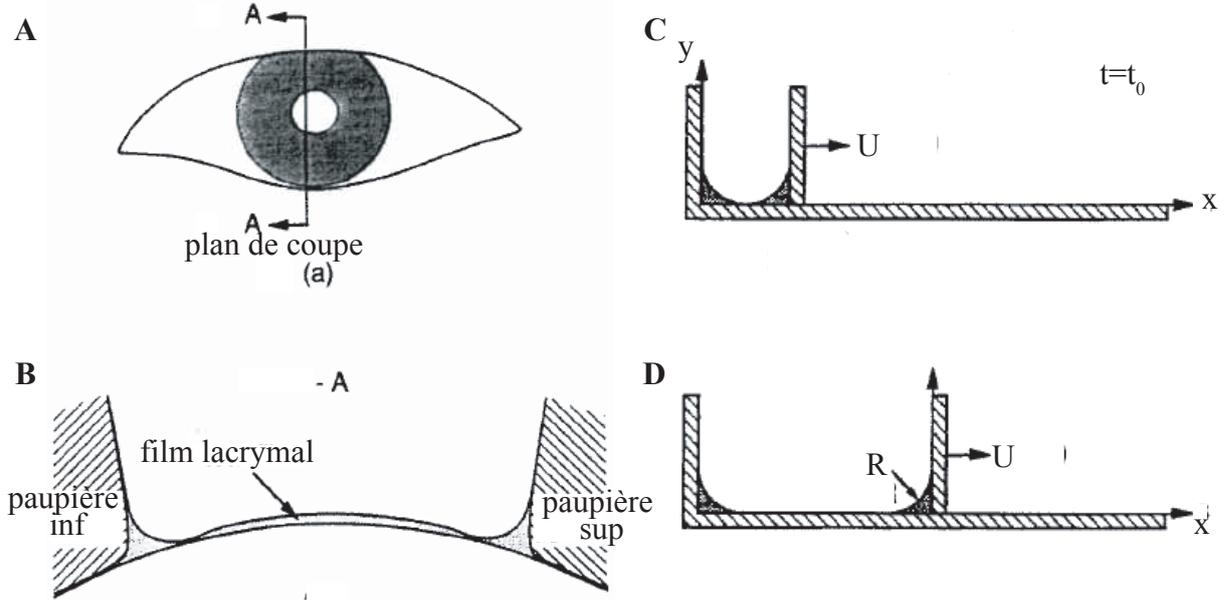


FIG. II.1.3 – Modélisation de Wong [54] : schémas tirés de l'article. **A**/ plan de coupe pour la figure B. **B**/ Vue en coupe du film lacrymal et des deux paupières. **C**/ Situation de départ pour la modélisation de l'ouverture des paupières **D**/ Ouverture de la paupière supérieure selon le modèle de Wong.

$h_\infty = 0,94 a Ca^{2/3}$ [49] (lorsque les gradients de pression de Laplace sont dominés par la gravité, on obtient cependant le régime visco-gravitaire de Derjaguin : $h_\infty \sim a Ca^{1/2}$ [41, 44]).

Partant de cette base, on peut rajouter des ingrédients ou modifier la géométrie : on en tire l'élégante démonstration de Bretherton [4] pour le dépôt de fluide dans des tubes. Vient aussi, en rajoutant la prise en compte de l'inertie, la divergence de l'épaisseur entraînée (sa convergence dans le cas des tubes) quand on augmente le nombre capillaire de dépôt [1]. Snoeijer [52] et Blake [37] posent également le problème en terme de ligne triple : si le fluide n'est que partiellement mouillant, au début de l'entraînement, on a une ligne de contact entre l'air, le solide et le liquide. Cette ligne impose d'une part de nouvelles conditions pour la résolution des équations, et a d'autre part une propriété particulière : elle admet une vitesse limite de déplacement et vient dans certains cas à se déformer. En rajoutant le drainage gravitaire du film entraîné, de Ryck et Quéré [40] bornent l'épaisseur maximale que l'on peut atteindre. Enfin, en remplaçant la surface libre par une membrane élastique, on peut aussi s'attendre à des comportements nouveaux, avec des équations qui restent « assez » ; similaires comme l'ont remarqué Hosoi et Mahadevan [46].

1.3 Présentation de notre étude

En suivant le modèle de l'étalement capillaire de Landau-Levich, Wong [54] a choisi de considérer des paupières infiniment rigides. Son expression pour l'épaisseur du film lacrymal est $h_{tot} = 2,12 R Ca^{2/3}$, avec R le rayon de courbure des ménisques. Cette expression (qui rappelle la loi de Bretherton du paragraphe 2.2.2) conduit à des épaisseurs de 1 à 10 μm , ce qui est proche des épaisseurs constatées *in vivo* (voir paragraphe 1.1.1.b). Cette

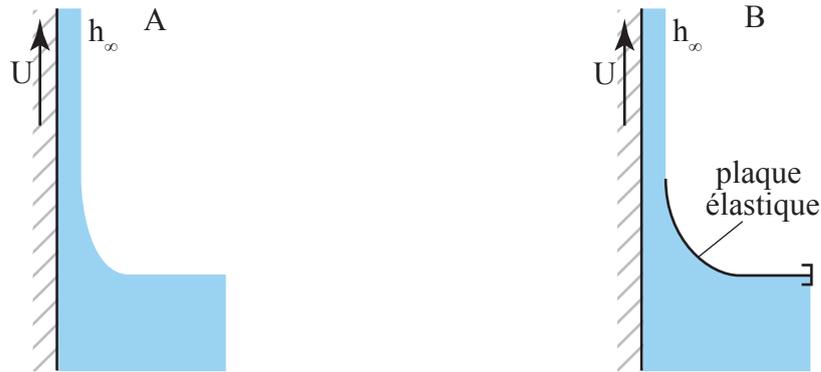


FIG. II.1.4 – **A/** Schéma utilisé pour le raisonnement de Landau, Levich et Derjaguin pour la démonstration de la loi de dépôt capillaire d'un liquide mouillant. Les trois zones définies correspondent aux trois zones à raccorder : 1- une zone d'épaisseur constante h_∞ loin du bain de liquide, 2- le ménisque dynamique, 3- le ménisque statique. **B/** Modélisation utilisée pour notre étude des paupières.

approche ne fait cependant jamais intervenir la rigidité des paupières qui sont supposées rigides : elle ne permet pas de rendre compte, par exemple de l'entropion.

Nous avons donc choisi d'adopter le point de vue complémentaire, et de considérer que seule l'élasticité de la paupière participe à l'étalement des larmes. Nous considérons la paupière comme une feuille élastique venant racler la paroi de la cornée en y étalant le fluide lacrymal (figure II.1.4-B). Le but que nous nous fixons est de comprendre la loi qui fixe l'épaisseur de liquide déposé. Nous évoquons également le mouvement inverse, correspondant à la fermeture de l'œil.

Pour être pertinents, nous nous plaçons dans le domaine des très faibles nombres capillaires, des faibles nombres de Reynolds, et des très faibles nombres visco-élastiques :

$$Ca \ll 1 \quad ; \quad Re < 1 \quad ; \quad Ve \ll 1$$

Nous parlerons de l'enduction à l'aide d'une paupière élastique. Les expériences ont été conduites en très grande partie par Bertrand Selva dans le cadre de son stage de DEA. Nous les comparons au modèle de type Landau-Levich modifié pour prendre en compte l'élasticité au lieu de la capillarité. pour terminer sur des considérations qualitatives permettant d'appréhender le problème de l'entropion.

Chapitre 2

Dispositif expérimental

2.1 Principe général

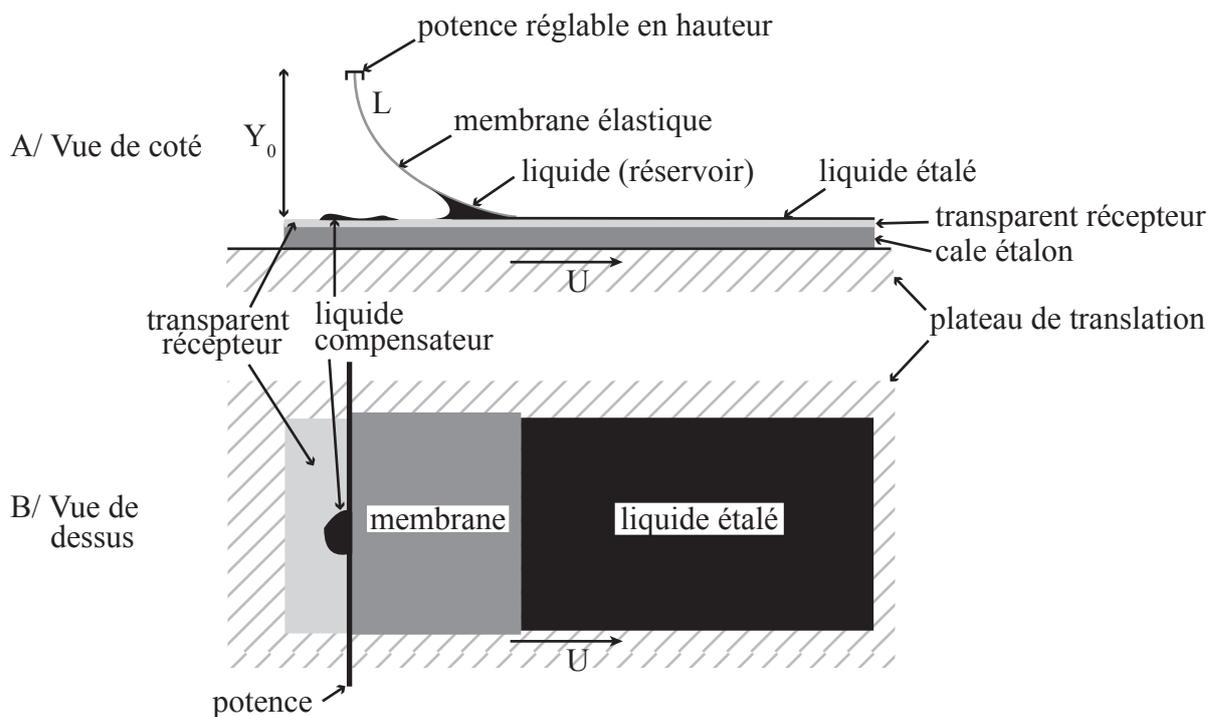


FIG. II.2.1 – **A/** Schéma de côté du dispositif expérimental pour l'étude des paupières. **B/** Même dispositif représenté de dessus.

Le principe général est d'enduire de liquide une plaque à l'aide d'une membrane élastique. Un aperçu du montage expérimental sur lequel a travaillé Bertrand Selva est présenté sur la figure II.2.1. Un plateau permettant une translation horizontale supporte une cale étalon. Sur cette cale, une feuille de transparent est déposée : c'est le récepteur pour la couche mince de liquide (la « cornée »).

Une membrane élastique (la « paupière ») de largeur b et de longueur L est par ailleurs maintenue par une potence. La différence de hauteur entre le récepteur et la potence, Y_0 , est réglable avec des vis micrométriques. Elle est inférieure à L de façon à ce que celle-ci

vienne appuyer sur le transparent récepteur.

Un volume Ω de liquide (« lacrymal ») est initialement déposé dans le coin formé par le transparent et la membrane (figure II.2.2). Lors du déplacement du plateau, la membrane étale ce liquide sur le récepteur. La membrane est légèrement plus large que le transparent et la cale (voir figure II.2.1-B), ce qui permet au fluide qui déborde d'être évacué sur le plateau, et non sur la membrane ni sur le transparent : on s'affranchit ainsi des effets de bords. De façon à garder un volume Ω approximativement constant pendant le déplacement, on place au préalable du liquide sur le transparent (liquide compensatoire). Au cours du mouvement, ce liquide va venir s'ajouter au réservoir, pour remplacer le volume de fluide déposé sur le transparent.

Une fois le dépôt terminé, on pèse le transparent pour connaître la masse m de liquide étalé. On en déduit l'épaisseur moyenne h_∞ en divisant par la surface Σ du transparent et en utilisant la masse volumique ρ du liquide : $h_\infty = m/\rho\Sigma$.

Le moteur pas à pas (Cool Muscle, série CM1) qui entraîne le plateau permet d'atteindre des vitesses comprises entre 0,3 mm/s et 16 cm/s, pour des accélérations de 120 cm/s².

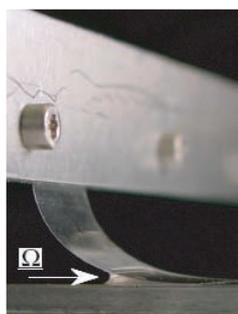


FIG. II.2.2 – Photographie de la membrane et du réservoir de liquide.

2.2 Les « paupières » : des feuilles élastiques

Les paupières artificielles que nous utilisons sont constituées de feuilles de transparent en mylar de différentes épaisseurs. Le lecteur trouvera en annexe la méthode utilisée pour les caractériser. Le tableau II.2.1 présente le module d'Young E et la rigidité à la flexion par unité de largeur des feuilles employées $B = Ee^3/12(1 - \nu^2)$ [50] (avec e l'épaisseur et ν le module de Poisson, pour lequel nous retenons une valeur de 0,3).

e (μm)	E (GPa)	B (10^{-6} kg.m ² .s ⁻²)
55	4,2	57
75	4,18	162
100	3,8	354
150	2,7	795
180	2,53	1232
490	1	10041

TAB. II.2.1 – Propriétés mécaniques des feuilles de mylar utilisées.

2.3 Les « larmes » : des huiles silicones

Deux huiles silicones ont été utilisées pour servir de liquide lacrymal. Leurs propriétés sont répertoriées dans le tableau II.2.2, avec le rappel des valeurs pour le fluide lacrymal réel à titre de comparaison.

Liquide	Masse volumique ρ (kg.m ⁻³)	Viscosité dynamique μ (kg.m ⁻¹ .s ⁻¹)	Tension de surface σ (mN.m ⁻¹)	Longueur capillaire a (mm)
Larmes [38, 47, 54]	1000	0,97.10 ⁻³ à 2,33.10 ⁻³	45	2,14
H.S. V100	952	1,0 10 ⁻¹	22,5	1,55
H.S. V1000	965	1	22,5	1,54

TAB. II.2.2 – Propriétés physiques des différents liquides employés (à 25°C) et des larmes humaines. H. S. signifie Huile Silicone.

2.4 Précaution concernant l'effet de la capillarité

Dans notre expérience, nous n'avons pas utilisé un bain de liquide comme schématisé sur la figure II.1.4-B, mais un réservoir d'assez petite taille (voir figure II.2.1-A et C). Nous devons donc nous assurer que le ménisque de liquide qui se trouve sous la paupière ne change pas sa forme.

Comparons à cette fin la force par unité de largeur de la membrane F_c exercée par le réservoir liquide sur la paupière à celle exercée par le récepteur F_e . Le plus gros volume Ω que l'on puisse déposer est limité en extension puisque sa hauteur doit être inférieure à la longueur capillaire a (ce résultat classique du ménisque est rappelé au paragraphe 3.2.1.c). Le rayon de courbure du ménisque est alors a , et la pression de Laplace dans le liquide est de l'ordre de $P = P_0 - \sigma/a$. Elle s'exerce sur une portion de paupière de longueur environ $L/3$. Donc $F_c \sim -\sigma L/a$.

On verra au paragraphe 3.2.2.c que $F_e \sim B/L^2$ (par unité de largeur). Il vient donc

$$Ec = \frac{-F_c}{F_e} \sim \frac{\sigma}{Ea} \left(\frac{L}{e}\right)^3 \sim \frac{L^3\sigma}{aB} \quad (\text{II.2.1})$$

Nous appelons désormais ce nombre sans dimension le nombre « élasto-capillaire ». S'il est grand, la forme de la feuille est affectée par le ménisque du réservoir, et s'il est petit, le réservoir n'a au contraire aucune influence sur le profil de la paupière.

2.5 Régime de fonctionnement des expériences

Vérifions que les nombres sans dimension que nous avons écrits pour le fonctionnement des paupières gardent le même ordre de grandeur dans notre expérience (tableau II.2.3). La lecture du tableau II.2.3 nous indique que les nombres de Reynolds sont de l'ordre de 10⁻³ dans notre expérience, ce qui nous permet de négliger les effets inertiels.

Les nombres visco-élastiques varient, selon les paramètres de l'expérience, entre 87.10⁻⁵ et 1,5. Ils sont donc généralement petit. Nous considérons donc que les forces élastiques dominent les forces visqueuses.

Quant au nombre élasto-capillaire, il est petit pour les grandes épaisseurs de paupière

(0,082 pour $e = 490 \mu\text{m}$). Dans cette limite, il est légitime de considérer que le ménisque du réservoir liquide ne modifie pas la forme de la paupière. Ec atteint toutefois 14,5, pour une épaisseur de mylar de $55 \mu\text{m}$. Il faut donc s'attendre à des résultats qui seront peut-être affectés par la capillarité.

$e (\mu\text{m})$	55		75		100		150		180		490	
$\mu (\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1})$	0,1	1	0,1	1	0,1	1	0,1	1	0,1	1	0,1	1
$10^3.Re$	14	1,4	14	1,4	14	1,4	14	1,4	14	1,4	14	1,4
$10^3.Ve$	1500	150	540	54	250	25	110	11	71	7,1	87	0,87
Ec	14,5		5,10		2,33		1,04		0,670		0,0822	

TAB. II.2.3 – Nombres sans dimension ($Re = \rho U h / \mu$; $Ec = L^3 \sigma / a B$; $Ve = \mu U L^2 / B$) des expériences. Les valeurs sont calculées pour une paupière de longueur $L = 40 \text{ mm}$, une épaisseur déposée de $50 \mu\text{m}$ et une vitesse de $28,8 \text{ mm/s}$. A titre de rappel, pour les larmes, on a $Re = 0,5$.

Chapitre 3

Mesures, modèle et discussion

3.1 Observations et mesures

3.1.1 Influence des propriétés de la paupière sur l'épaisseur de liquide déposé

a/ Influence de la distance réduite Y_0/L

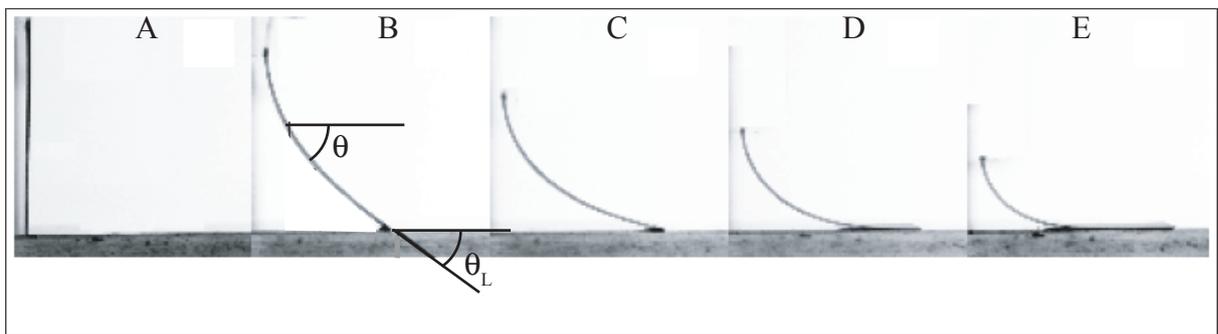


FIG. II.3.1 – Forme prise par la paupière (sans liquide) en fonction de Y_0/L ($L = 28,5$ mm ; $e = 100$ μm). **A/** $Y_0/L=1$ **B/** $Y_0/L=0,8$ **C/** $Y_0/L=0,6$ **D/** $Y_0/L=0,44$ **E/** $Y_0/L=0,3$

On peut voir sur la figure II.3.1 la forme que prend la feuille élastique, sans réservoir liquide, pour différentes valeurs de Y_0/L . Nous constatons sur ces photographies que l'angle θ au niveau du contact avec le transparent récepteur diminue de $\pi/2$ pour $Y_0/L = 1$ à 0 pour $Y_0/L = 0,44$. Si l'on diminue encore Y_0/L , l'angle reste égal à 0, et une portion de plus en plus importante de la feuille se met à l'horizontale : la courbure au niveau de la potence augmente.

L'effet de Y_0/L sur la valeur de l'épaisseur h_∞ du film déposé est représentée sur le graphique II.3.2-A. On y observe un maximum pour h_∞ à $Y_0/L \approx 0,4 - 0,43$, c'est à dire quand $\theta = 0$, mais avec une longueur de feuille en contact avec le transparent quasi-nulle. Tout le reste de l'étude est mené dans cette limite $Y_0/L = 0.42$.

b/ Influence de la largeur b

L'évolution de l'épaisseur h_∞ du film déposé en fonction de la largeur de la feuille élastique, pour une même huile (V100), une longueur L fixée à 35,5 mm, une hauteur

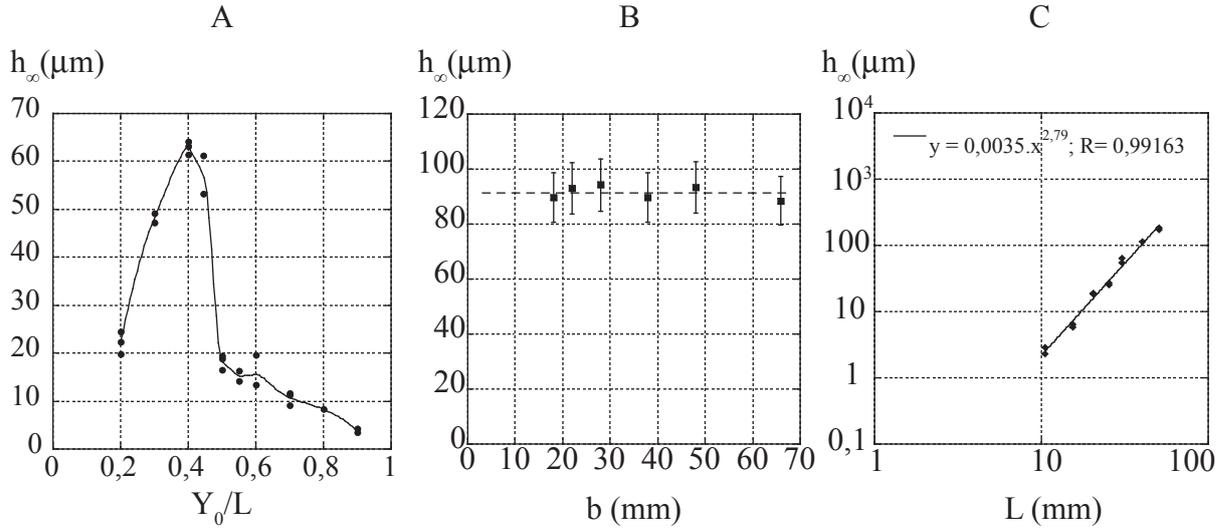


FIG. II.3.2 – **A/** Effet de Y_0/L sur h_∞ (huile silicone V100; $U = 28,8$ mm/s; $b = 38$ mm; $L = 28,5$ mm; $e = 180$ μm ; $\Omega = 800$ μL).
B/ Effet de b sur h_∞ (huile silicone V100; $U = 28,8$ mm/s; $L = 35,5$ mm; $Y_0/L = 0,42$; $e = 100$ μm ; $\Omega = 800$ μL).
C/ Effet de L sur h_∞ (huile silicone V100; $U = 28,8$ mm/s; $b = 38$ mm; $L = 35,5$ mm; $Y_0/L = 0,42$; $e = 100$ μm ; $\Omega = 800$ μL).

réduite de la puissance $Y_0/L = 0,42$ et une même vitesse d'étalement de $28,8$ mm/s est présentée sur la figure II.3.2-B. Compte tenu d'une incertitude de 10% sur la mesure de h_∞ , on peut conclure que b n'a pas d'influence sur h_∞ . Ceci permet de s'assurer que les effets de bord n'influencent pas le résultat.

c/ Influence de la longueur L

En variant la longueur de la membrane avec tous les autres paramètres constants (huile silicone V100; $U = 28,8$ mm/s; $b = 38$ mm; $L = 35,5$ mm; $Y_0/L = 0,42$; $e = 100$ μm ; $\Omega = 800$ μL), on obtient le graphique II.3.2-C. Nous y observons une dépendance en loi de puissance : $h_\infty \propto L^{2,79}$.

d/ Influence de la raideur B

Tous paramètres par ailleurs égaux (huile silicone V100; $U = 28,8$ mm/s; $b = 38$ mm; $L = 55,5$ mm; $Y_0/L = 0,42$; $\Omega = 800$ μL), nous varions B en utilisant les différents transparents dont nous avons dressé la liste dans le paragraphe 2.2. Nous lisons dès lors sur le graphique II.3.3-A une dépendance qui est aussi en loi de puissance : $h_\infty \propto B^{-0,70}$.

3.1.2 Influence de la vitesse U

L'influence de la vitesse de translation est donnée sur la figure II.3.3-B. Elle a été testée sur les deux huiles silicones (V100 et V1000), et on peut approximer les données par des lois de puissance, par exemple $h_\infty \propto U^{0,84}$ pour l'huile V100.

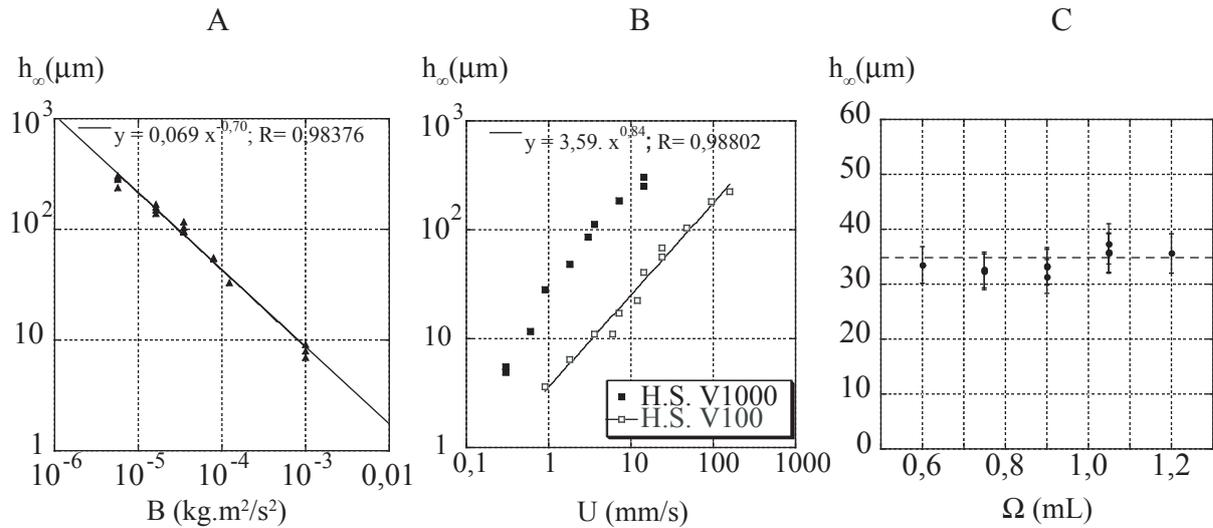


FIG. II.3.3 –

- A/ Effet de B sur h_∞ (huile silicone V100; $U = 28,8$ mm/s; $b = 38$ mm; $L = 55,5$ mm; $Y_0/L = 0,42$; $\Omega = 800$ μL).
- B/ Effet de U et μ sur h_∞ ($b = 38$ mm; $L = 35,5$ mm; $Y_0/L = 0,42$; $e = 100$ μm ; $\Omega = 800$ μL).
- C/ Effet de Ω sur h_∞ (huile silicone V100; $U = 12$ mm/s; $b = 38$ mm; $L = 45,5$ mm; $Y_0/L = 0,42$; $e = 100$ μm).

3.1.3 Influence des propriétés des larmes

a/ Influence du volume du réservoir Ω

Nous avons testé (figure II.3.3-C) l'influence de la quantité de liquide contenue dans le réservoir, pour une huile V100, une vitesse $U = 12$ mm/s, une largeur $b = 38$ mm, $Y_0/L = 0,42$, une longueur $L = 45,5$ mm et une feuille de mylar d'épaisseur $e = 100$ μm . Le graphique montre qu'en comparaison de l'incertitude expérimentale de 10%, l'épaisseur déposée est indépendante du volume du réservoir.

b/ Influence de la viscosité μ

L'influence de la viscosité est visible sur la même figure que celle de la vitesse (figure II.3.3-B). Pour un liquide plus visqueux, on a une épaisseur plus importante : nous en déduisons la viscosité joue aussi un rôle dans la détermination de h_∞ .

3.2 Equations gouvernant le système

3.2.1 Rappel détaillé sur le modèle de Landau Levich et Derjaguin

a/ Système considéré et schéma de résolution

Nous considérons (figure II.3.4) un bain de liquide de surface $x = 0$ et une plaque verticale placée en $y = 0$. L'interface liquide air est située en $y = h(x)$. Nous appelons $\underline{u}(u; v)$ la vitesse instantanée du liquide. Lorsque la plaque est immobile, un ménisque statique se forme à son voisinage pour satisfaire la condition de mouillage total à l'interface

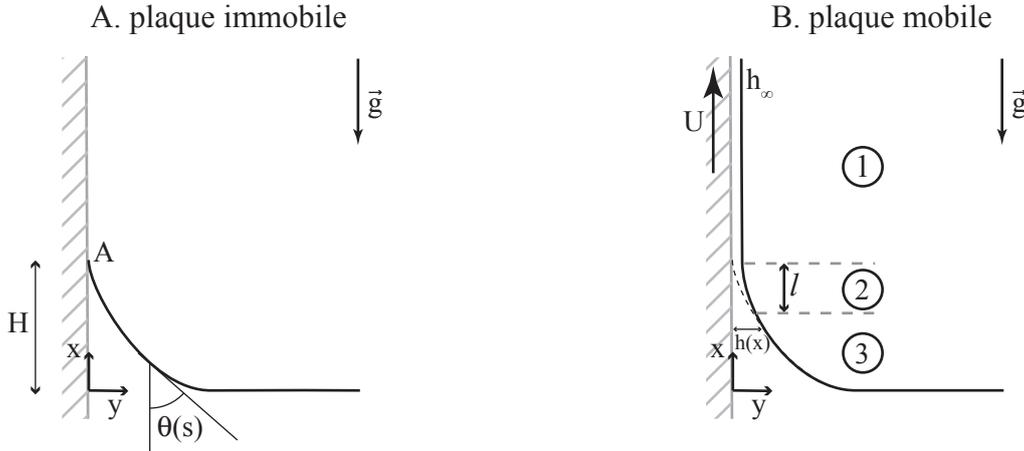


FIG. II.3.4 – Notations adoptées pour l'étude du modèle LLD. **A/** Ménisque statique. **B/** Entraînement d'un film. Le ménisque statique (pour $U = 0$) est représenté en pointillés, tandis que l'interface dans le cas $U \neq 0$ est en trait plein.

solide-liquide-air. Sa forme, représentée schématiquement sur la figure II.3.4-A résulte de l'équilibre entre la pression hydrostatique et celle de Laplace.

Si l'on soulève ensuite la plaque à la vitesse U , elle entraîne un film de liquide (figure II.3.4-B). Le raisonnement de Landau et Levich distingue trois régions, que l'on a représentées sur la figure II.3.4-B. Très loin du bain (région 1), le film formé est uniforme et nous cherchons à en déterminer l'épaisseur h_∞ . Au niveau du bain se trouve la région 3 : nous nous plaçons dans un régime de faible nombre capillaire, ce qui permet de présupposer que la région 3 garde la forme du ménisque statique imposée par l'équilibre capillarité/gravité. Pour relier ces deux régions, il est nécessaire d'envisager la présence d'une région 2 intermédiaire, de longueur l . Dans cette région, la forme de l'interface est sensible au mouvement de la plaque et ne coïncide donc plus avec le ménisque statique (en pointillés sur la figure II.3.4-B) : c'est le ménisque dynamique. Nous supposons qu'il est peu étendu par rapport au ménisque statique :

épaisseur à l'infini, $h_\infty \ll$ étendue de la région 2, $l \ll$ longueur capillaire, a

Dans un premier temps, nous résolvons les équations qui régissent l'écoulement dans la région 2, et trouvons analytiquement la forme de l'interface à la frontière entre les régions 1 et 2. Après avoir ensuite calculé la forme du ménisque statique, nous procédons au raccordement des régions 2 et 3.

b/ Ecoulement dans la région 2 : le ménisque dynamique

Nous nous plaçons dans le régime des faibles nombres de Reynolds. Nous supposons que les écoulements de la région 2 sont quasi-parallèles dans la direction x , ce qui fait que nous utiliserons l'approximation de lubrification : $v \ll u$ et $\partial/\partial x \ll \partial/\partial y$. Enfin, on étudie le régime stationnaire : h ne dépend pas du temps.

Grâce à nos hypothèses de faible nombre de Reynolds, d'écoulement permanent et de lubrification, nous décrivons l'écoulement par l'équation de Stokes, dans laquelle ν désigne la viscosité cinématique

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad } p + g + \nu \Delta u = 0 \quad (\text{II.3.1})$$

que l'on peut projeter sur les deux axes et simplifier grâce à l'hypothèse de lubrification :

$$-\frac{1}{\rho}p_x - g + \nu u_{yy} = 0 \quad (\text{II.3.2})$$

$$p_y = 0 \quad (\text{II.3.3})$$

Nous utilisons ici la notation indicielle pour les dérivées. L'équation II.3.3 indique que la pression au sein du fluide ne varie pas selon y : elle est égale à la pression qui découle de la courbure de l'interface à la même abscisse : $p(x) = p_0 - \sigma h_{xx}$ avec p_0 la pression atmosphérique. En posant $K = p_x/\mu + g/\nu$, on peut intégrer l'équation II.3.2 deux fois, avec une condition de vitesse $u(y=0) = U$ et de cisaillement $u_y(y=h) = 0$:

$$u = K(y^2/2 - hy) + U \quad (\text{II.3.4})$$

En intégrant cette vitesse sur chaque tranche horizontale, on a accès à la vitesse moyenne $\langle u \rangle = U - Kh^2/3$. La conservation du débit implique par ailleurs que pour tout x :

$$hU - Kh^3/3 = h\langle u \rangle = h_\infty\langle u \rangle_\infty = h_\infty U - Kh_\infty^3/3 \quad (\text{II.3.5})$$

avec $\langle u \rangle_\infty$ la vitesse moyenne dans le film à l'infini (loin du bain). En exprimant alors le terme K en fonction de h grâce à la courbure de l'interface, il vient :

$$U(h - h_\infty) = -\frac{\sigma}{3\mu}h_{xxx}h^3 + \frac{g}{3\nu}(h^3 - h_\infty^3) \quad (\text{II.3.6})$$

Dans cette équation, le premier terme crée l'entraînement du fluide, tandis que les deux autres sont des termes résistants, soit par capillarité, soit par drainage gravitaire. On adimensionne l'équation ainsi :

$$\bar{y} = y/h_\infty \quad ; \quad \bar{x} = (3Ca)^{1/3}x/h_\infty \quad (\text{II.3.7})$$

Il apparaît alors que, si on présuppose le résultat $h_\infty \sim Ca^{2/3}$, l'ordre de grandeur du terme gravitaire est $Ca^{1/3}$, ce qui, dans notre limite de faibles nombres capillaires, est négligeable devant 1, qui est l'ordre de grandeur des autres termes. On néglige donc l'influence de la gravité dans la région 2. Il reste

$$\bar{h}^3 \bar{h}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = 1 - \bar{h} \quad (\text{II.3.8})$$

$\bar{h} = 1$ est solution dans la région 1. Dans notre région de faible pente, on cherche une solution asymptotique à celle-ci, sous la forme $\bar{h}(\bar{x}) = 1 + \varepsilon(\bar{x})$. ε doit satisfaire $\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = -\varepsilon$. Nous en déduisons que les formes $\varepsilon(\bar{x}) = A_i e^{\alpha_i \bar{x}}$ en sont solution pour $\alpha_i^3 = -1$. Parmi les trois racines possibles, nous choisissons la seule solution ayant une partie réelle négative, c'est à dire ne divergeant pas quand \bar{x} tend vers l'infini : $\varepsilon(\bar{x}) = A e^{-\bar{x}}$. Nous utilisons cette solution pour déterminer les conditions initiales qui serviront à l'intégration numérique de l'équation non linéaire II.3.8. Remarquons que $\bar{h}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}$ varie comme $(1 - \bar{h})/\bar{h}^3$. On s'attend donc à ce que la dérivée troisième de \bar{h} tende vers zéro aux grands \bar{h} , ce qui doit se traduire par une courbure constante.

L'intégration numérique de l'équation II.3.8 est présentée sur la figure II.3.5, qui présente l'allure de $\bar{h}(\bar{x})$ (A) et de $\bar{h}_{\bar{x}\bar{x}}(\bar{x})$ (B) pour trois valeurs de A (0,1 ; 10 et 1000). Comme on l'attendait, \bar{h} augmente quand \bar{x} diminue (on s'approche du bain). Non seulement la courbure devient constante (figure II.3.5-B), mais sa valeur est indépendante de A : $\lim_{\bar{x} \rightarrow -\infty} \bar{h}_{\bar{x}\bar{x}} = 0,642$.

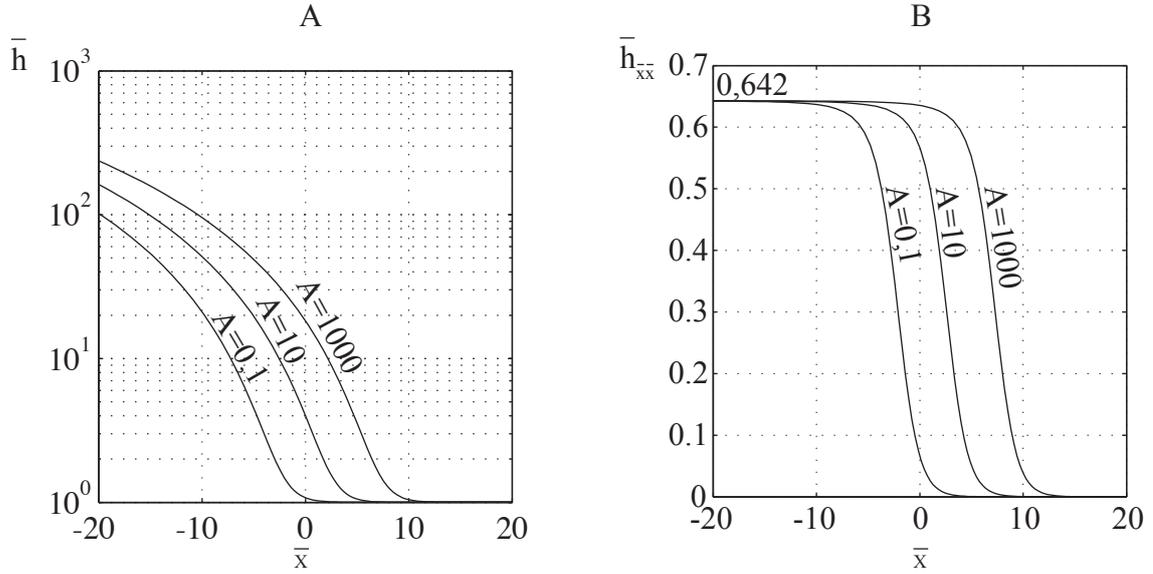


FIG. II.3.5 – Résultat de l'intégration numérique de l'équation II.3.8 pour trois valeurs de A : 0,1 ; 10 et 1000. **A/** $\bar{h}(\bar{x})$. **B/** Dérivée seconde : $\bar{h}_{xx}(\bar{x})$.

Remarquons par ailleurs que le graphique figure II.3.5-B permet aussi d'identifier l'étendue de la région 2. Sa position change en fonction de A (elle est plus loin du bain si A augmente), mais son étendue ne varie pas : elle vaut environ $\bar{l} \approx 10$ en variable adimensionnée, soit $l \sim h_\infty Ca^{-1/3}$. En présupposant encore une fois que $h_\infty \sim Ca^{2/3}$, on peut estimer que $l/a \sim Ca^{1/3} \ll 1$: l'hypothèse sur la petitesse de la région 2 devant la région 3 est validée.

c/ Forme du ménisque statique : la région 3

Lorsque x tend vers $-\infty$, on sort de la région de faible pente, et l'on doit se reconnecter avec le ménisque statique (région 3). Nous raccordons alors la courbure constante que nous venons d'obtenir à celle de la région 3 : en supposant que la région 2 est peu étendue, on doit se raccorder sur la courbure qu'on atteint tout en haut du ménisque statique. Cette courbure s'obtient en écrivant l'équilibre hydrostatique au niveau du ménisque

La figure II.3.4-A présente les notations utilisées pour décrire la forme du ménisque statique. On utilise les coordonnées cartésiennes ou les coordonnées curvilignes ayant pour origine le point de contact, A , selon les cas.

La hauteur H du ménisque est reliée à la courbure \mathcal{C} au même point grâce à l'équilibre entre pression de Laplace et pression hydrostatique :

$$p_A = p_0 - \sigma \mathcal{C} = p_0 - \rho g H \quad \text{donc } \mathcal{C} = H/a^2 \quad (\text{II.3.9})$$

Cette courbure vaut également $d\theta/ds$. En remarquant que $\cos \theta = -dx/ds$, on peut intégrer selon x , et il vient

$$\sin \theta = -\frac{x^2}{2a^2} + 1 \quad (\text{II.3.10})$$

Au contact, θ est nul, donc $x = \sqrt{2}a$ et $\mathcal{C} = \sqrt{2}/a$ [39].

d/ Raccordement du ménisque dynamique avec le ménisque statique

L'égalisation des deux courbures mène à

$$\frac{\sqrt{2}}{a} = h_{xx} = \bar{h}_{\bar{x}\bar{x}} (3Ca)^{2/3} / h_{\infty} \quad (\text{II.3.11})$$

Avec notre $\bar{h}_{\bar{x}\bar{x}} = 0,64$ il vient donc

$$h_{\infty} = \frac{0,64}{\sqrt{2}} (3Ca)^{2/3} a = 0,94 Ca^{2/3} a \quad (\text{II.3.12})$$

L'épaisseur du film déposé varie donc comme la longueur capillaire, et augmente avec le nombre capillaire, c'est à dire lorsque les forces visqueuses prennent de l'importance par rapport aux forces de tension de surface.

e/ Confirmation expérimentale

Mathilde Callies-Reyssat a procédé au Laboratoire de Physique de la Matière Condensée à l'expérience d'enduction d'une plaque. La mesure de l'épaisseur de liquide a été faite par réflectométrie. Les résultats qu'elle obtient sont reportés sur la figure II.3.6 en fonction du nombre capillaire, et leur approximation en loi de puissance donne $h_{\infty} = 0,91 a Ca^{0,659}$, ce qui est en très bon accord avec la loi théorique II.3.12.

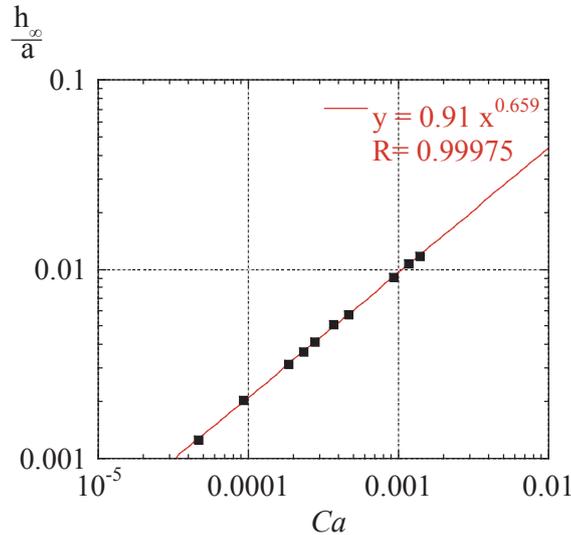


FIG. II.3.6 – Résultat de l'expérience d'enduction faite par Mathilde Callies-Reyssat, avec de l'huile silicone V10. ($\rho = 930 \text{ kg/m}^3$; $\sigma = 20 \text{ mN/m}$; $\nu = 20 \text{ cP}$.)

3.2.2 Modèle décrivant l'enduction par une paupière

Revenons à présent au problème de l'enduction d'un liquide sur un solide à l'aide d'une paupière élastique.

La plaque va jouer, au travers de son module de courbure, le même rôle que la tension de surface dans le problème de Landau et Levich : elle va imposer la pression du fluide qui

est en contact avec elle. Le raisonnement suivra donc le même cours dans cette section que pour l'étude du dépôt capillaire précédent.

a/ Système étudié

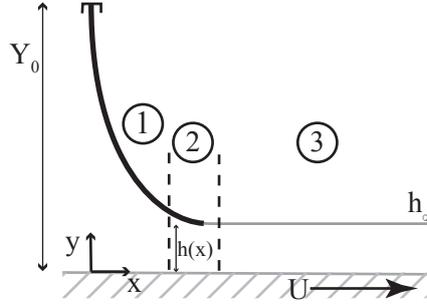


FIG. II.3.7 – Notations adoptées pour l'étude du modèle avec paupière

Nous utilisons le même type de système que pour l'étude de l'enduction de Landau-Levich : la plaque se translate vers les x positifs (voir figure II.3.7), tandis que la feuille élastique de longueur L , accrochée sur la ligne $x = 0$, tente de retenir le liquide à sa gauche. On considère trois régions : dans la première, la feuille élastique a sa forme de repos déterminée par le rapport Y_0/L : c'est l'équivalent du ménisque statique dans la description de Landau-Levich. Dans la région 2, l'écoulement du liquide produit une perturbation de la forme de la paupière : c'est l'homologue du ménisque dynamique. On cherche à expliciter l'écoulement dans cette région, et, de même que précédemment, on y applique l'approximation de lubrification. La région 3, enfin, consiste en un film de liquide d'épaisseur h_∞ constante.

Le régime que nous étudions est celui des faibles nombres de Reynolds et des faibles nombres visco-élastiques ($Ve = \mu UL^2/B$). La gravité n'est pas prise en compte.

b/ Modèle sans tension de surface et avec élasticité : écoulement dans la région 2

Les équations régissant l'écoulement sont les mêmes que dans le paragraphe 3.2.1.b, avec le terme gravitaire en moins :

$$u_{yy} = \frac{p_x}{\mu} \quad (\text{II.3.13})$$

$$p_y = 0 \quad (\text{II.3.14})$$

En revanche, le terme de pression n'est plus imposé par la pression de Laplace à l'interface, mais par les contraintes élastiques de la membrane. Si l'on suppose que nos feuilles de mylar n'ont pas d'inertie et ne subissent pas d'élongation, la pression est reliée à la forme de l'interface via le module de courbure [46, 48] par l'expression suivante : $p(x) = Bh_{xxxx}$. L'équation hydrodynamique aux dimensions qui dérive de l'équations de Stokes et de la conservation du débit s'écrit, au lieu de l'équation II.3.6

$$U(h - h_\infty) - \frac{h^3 B}{6\mu} h_{xxxx} = 0 \quad (\text{II.3.15})$$

Equation que l'on choisit d'adimensionner en prenant h_∞ comme échelle pour h et $(Bh_\infty^3/6\mu U)^{1/5}$ pour x , pour obtenir

$$\bar{h}^3 \bar{h}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = \bar{h} - 1 \quad (\text{II.3.16})$$

Une solution de l'équation II.3.16 est bien entendu $\bar{h} = 1$. On recherche, suivant le mode de raisonnement de Landau et Levich, toujours, les autres solutions sous la forme $\bar{h} = 1 + A_i e^{\alpha_i x}$. Les α_i solutions sont donc les racines cinquièmes de l'unité donc la partie réelle est négative puisque \bar{h} doit tendre vers 1 à l'infini : $\bar{h} = 1 + Ae^{4i\pi\bar{x}/5} + Be^{-4i\pi\bar{x}/5}$. Quand \bar{h} devient grand, la relation II.3.16 peut se réécrire :

$$\lim_{\bar{h} \rightarrow \infty} \bar{h}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} \sim \lim_{\bar{h} \rightarrow \infty} \left(\frac{\bar{h} - 1}{\bar{h}^3} \right) = 0 \quad (\text{II.3.17})$$

Ce qui montre que la dérivée cinquième de \bar{h} va s'annuler, et c'est donc la dérivée quatrième qui devient constante et qu'il faudra raccorder à la dérivée quatrième de \bar{h} dans le cas non perturbé (statique). Nous suivons le même raisonnement que pour la loi d'induction classique, sauf qu'en lieu et place de la dérivée seconde que nous avons dans le cas de l'étalement capillaire, nous avons une dérivée quatrième à ajuster.

c/ Forme statique du « ménisque élastique »

La forme que décrit la paupière élastique sur la figure II.3.1 est régie par l'équation de l'Elastica [50] :

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{F}{B} \cos \theta \quad (\text{II.3.18})$$

avec l'angle θ défini sur la figure II.3.1, l'abscisse curviligne s comptée à partir de l'extrémité supérieure de la paupière, et F le module de la force (par unité de largeur) exercée sur l'autre extrémité de la paupière par la plaque horizontale. Les conditions aux limites sont données par la façon dont on maintient la membrane : $\theta(s=0) = \pi/2$, et par l'absence de contrainte au niveau du bord libre $d\theta/ds(s=L) = 0$.

Dans l'hypothèse où l'on affleure à l'horizontale en $s=L$, on peut exprimer grâce à la relation II.3.18 que $h_{xxx} \approx d^2\theta/ds^2 \approx -F/B$. Pour une distance réduite $Y_0/L = 0,44$, l'intégration numérique aboutit en outre à $F = 3,43B/L^2$, on a alors $h_{xxx} \approx -3,43/L^2$. En dérivant une fois de plus, on montre que $h_{xxxx} = 0$ en $s=L$.

d/ Raccordement des dérivées

Nous faisons une intégration numérique de l'équation II.3.16 avec la solution asymptotique $\bar{h} = 1 + Ae^{4i\pi\bar{x}/5} + Be^{-4i\pi\bar{x}/5}$ pour des couples de paramètres A et B qui vérifient la nullité de la dérivée quatrième de \bar{h} en $\bar{s} = 1$. La figure II.3.8-A montre l'allure de la dérivée quatrième de \bar{h} . Elle tend en moins l'infini vers une constante, qui est nulle. C'est donc cohérent avec le paragraphe précédent. Nous remontons donc à la dérivée troisième qui, de ce fait, tend vers une constante. Cette constante, identifiable sur la figure II.3.8-B, vaut $-0,832$.

En comparant avec la forme statique, on a

$$-0,832 \frac{h_\infty}{(6\mu U/Bh_\infty^3)^{3/5}} = \frac{-3,43}{L^2} \quad (\text{II.3.19})$$

$$h_\infty = \left(\frac{0,832}{3,43} \right)^{5/4} L \left(\frac{6\mu UL^2}{B} \right)^{3/4} = 0,65 L V e^{3/4} \quad (\text{II.3.20})$$

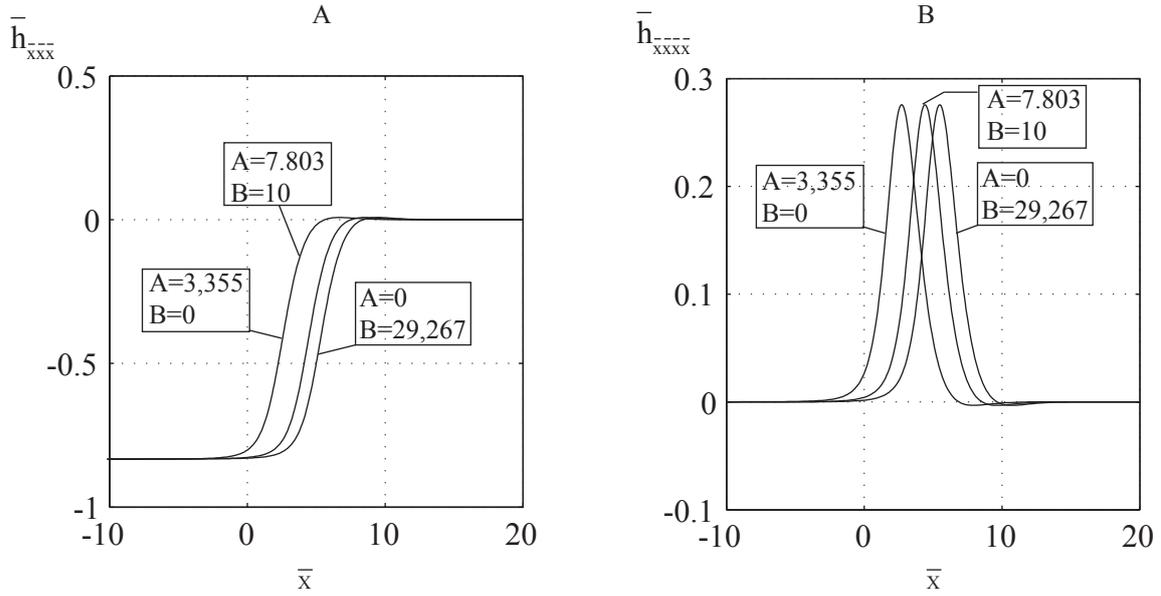


FIG. II.3.8 – Résultat de l'intégration numérique de l'équation II.3.8 pour trois couples de valeurs de A et B, notée le long des courbes.

Ceci justifie donc l'utilisation de notre nombre visco-élastique comme nombre sans dimension important puisqu'il joue un rôle équivalent à celui du nombre capillaire dans l'enduction capillaire.

3.3 Comparaison et discussion

3.3.1 Confrontation du modèle avec les expériences

Si l'on met en regard nos observations expérimentales et le modèle, nous avons $h_\infty \propto L^{2,79} B^{-0,70} U^{0,84}$ là où le modèle prédit $h_\infty \propto L^{5/2} B^{-3/4} U^{3/4} \mu^{3/4}$. Les expériences et le modèle tombent donc d'accord sur les lois de puissance.

La figure II.3.9 récapitule les résultats obtenus expérimentalement pour h_∞ en fonction de la valeur théorique attendue selon la loi II.3.20. Le graphique A met plus particulièrement évidence le scaling en μ : la représentation de h_∞ en fonction de μU regroupe les séries de points des viscosités 100 et 1000 de la figure II.3.3-B, donc μ et U pilotent h_∞ avec la même loi de puissance, conformément au modèle.

Le graphique II.3.9-B confirme que les lois de puissance trouvés sont correctes puisque les points s'alignent sur une droite de pente 1. Il en résulte que la longueur de la membrane élastique est le facteur qui influence le plus fortement l'épaisseur de liquide laissé à la paroi au cours du mouvement. Viennent ensuite, à part égale, sa raideur, la vitesse de la plaque et la viscosité du liquide.

La meilleure approximation linéaire nous donne cependant un préfacteur de 0,064 là où on attendait 0,65. On obtient donc expérimentalement des épaisseurs dix fois plus fines que ce que prédit le modèle.

Cette disparité peut sans doute s'expliquer par la présence d'une recirculation en amont de la paupière qui n'a pas été prise en compte ici : dans notre modèle, toute l'énergie mise en jeu vise à infléchir la paupière pour étaler le liquide, tandis qu'une partie

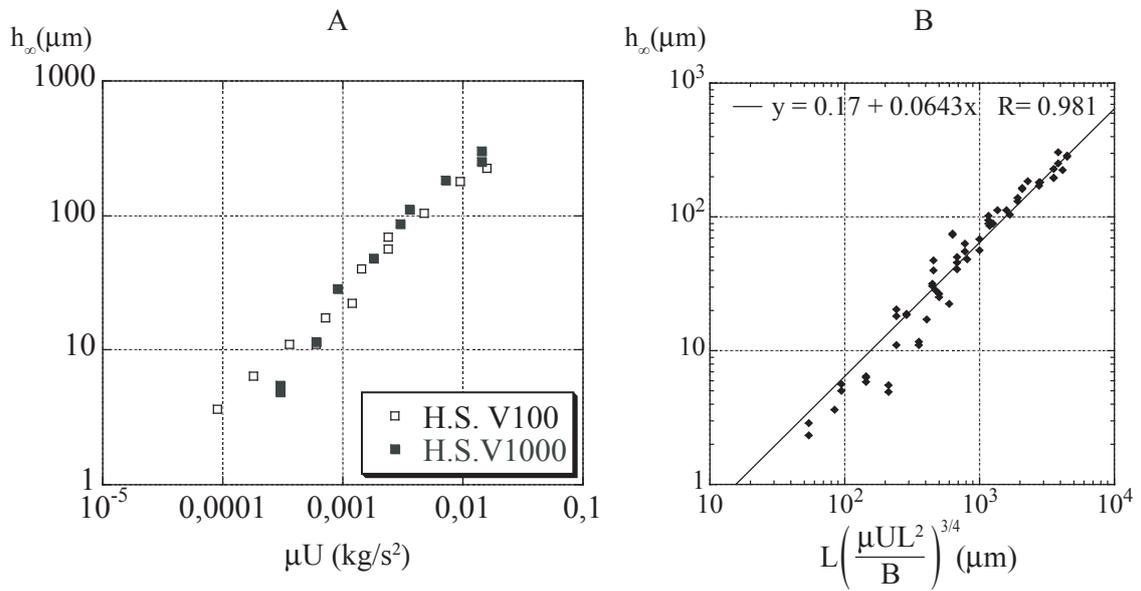


FIG. II.3.9 – Comparaison données-modèle. **A**/ Vérification du scaling en μU . **B**/ Vérification de la formule totale. La ligne représente la meilleure approximation linéaire $h_\infty = 0,64 L V e^{3/4}$.

non négligeable est peut-être dissipée par viscosité dans les recirculations.

3.3.2 Ouverture sur l'entropion

Lorsque l'on a fini d'étaler la couche liquide (d'ouvrir les paupières), on peut inverser la vitesse de la plaque (fermer les yeux). Dans certaines conditions, il s'opère alors un retournement de la feuille élastique. la figure II.3.10 en montre un exemple : l'étalement que l'on a étudié jusqu'ici se fait entre les images A et C. Puis on inverse le sens de déplacement du plateau. La couche de liquide crée alors au niveau de la plaque des contraintes horizontales qui peuvent l'entraîner (images D à H), puis la retourner (image H) sur un temps très court. La feuille reprend ensuite une position similaire à celle que l'on a étudiée.

Ce phénomène appelle à de nouvelles études, notamment pour comprendre les grandeurs qui régissent le seuil de retournement. Le module de courbure B doit par exemple intervenir, puisqu'une feuille totalement rigide ne se retournerait pas. Par ailleurs notons que la forme de la membrane sur les figures II.3.10-A et I correspondent à des minima d'énergie puisque ce sont les formes que l'on obtient en résolvant l'élastica sans contrainte sur la position du bord libre de la membrane. Toutes les formes intermédiaires sont alors des formes de plus haute énergie : on doit franchir, lors du retournement de la paupière, une barrière d'énergie. L'ordre de grandeur en est B , la rigidité à la flexion. Les forces qui fournissent l'énergie nécessaire sont d'origine visqueuse. Leur travail sur une distance d'ordre L est $W \sim \mu U S L / h_\infty$, avec S la surface de contact entre le liquide et la paupière. Autrement dit, on pourra avoir un retournement si $\mu U S L / h_\infty > B$, donc pour de grandes vitesses et viscosités, et de petites rigidité. A l'issue de ce travail, une perspective serait notamment de comprendre dans quelle mesure l'affaiblissement du tonus des paupières chez les personnes âgées peut favoriser cet « entropion ».

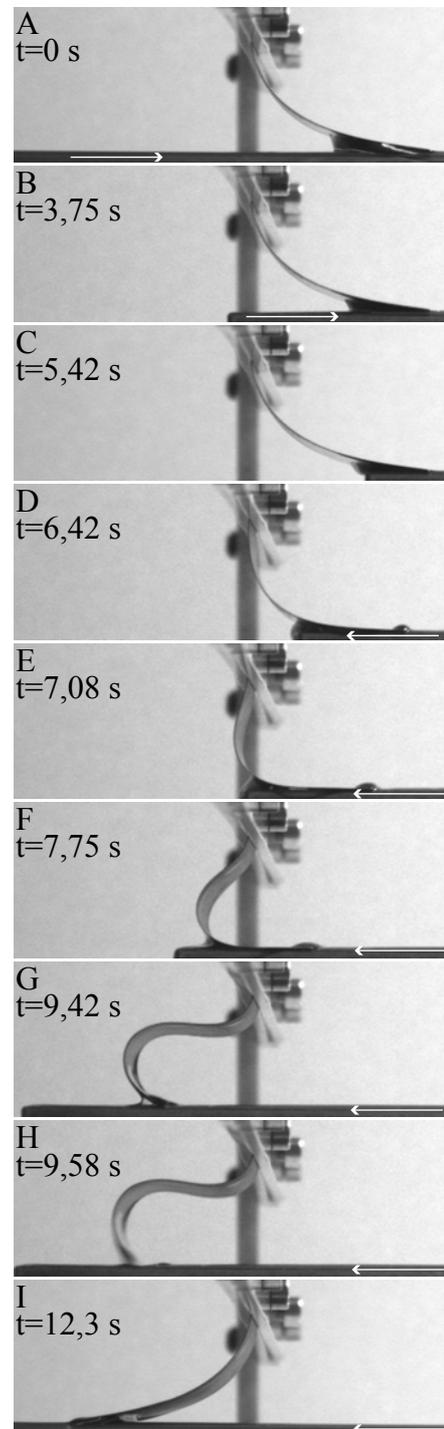


FIG. II.3.10 – Séquence d'image montrant un retournement de notre feuille élastique après inversion du sens de la vitesse (indiquée par la flèche blanche).

3.4 Conclusion de l'étude sur le fonctionnement des paupières et l'entropion

Nous avons étudié un système idéalisé de paupière étalant un film de larme : l'expérience de l'étalement d'un liquide visqueux sur une plaque par une feuille élastique conduite par Bertrand Selva concorde, à un facteur numérique 10 près, avec la théorie décrite dans le cadre des hypothèses de lubrifications. Il en résulte que l'épaisseur déposée suit la loi

$$h_{\infty} \sim L V e^{3/4} \quad (\text{II.3.21})$$

Une étude théorique plus complète est toutefois requise pour obtenir la valeur du facteur numérique (0,065 selon nos expériences et 0,65 dans la théorie de la lubrification).

La perspective de ce travail est de se tourner vers la problématique de l'entropion. Les expériences exploratoires sur le retournement de la feuille élastique par inversion du mouvement offrent des débouchés intéressants sur ce point.

Troisième partie

Approche mécanique du développement des anévrismes de l'aorte abdominale

1	Les anévrismes de l'aorte abdominale : introduction	97
1.1	Prévalence de l'anévrisme de l'aorte abdominale	97
1.2	L'aorte, artère principale du réseau sanguin	99
1.2.1	Elasticité des artères	100
1.2.2	Vitesse du pouls et influence des bifurcations	100
1.3	Écoulement au sein de l'aorte	101
1.3.1	Le sang	101
1.3.2	Vitesse du sang dans l'aorte	102
1.4	Objectifs et domaine d'étude	102
2	Montage expérimental	105
2.1	L'aorte : une membrane élastique	105
2.1.1	Équilibre statique de la membrane	108
2.1.2	Module de Poisson	114
2.1.3	Propriétés dynamiques de la membrane	114
2.2	Le cœur : un piston piloté par un vérin	115
2.3	Le sang : de l'eau	118
2.4	Pertes régulières imposées par l'écoulement dans le réseau artériel secondaire : le tube aval	118
2.5	Diagnostic : les outils de mesure.	120
2.5.1	Pression, débit	120
2.5.2	Déformations	120
2.6	Précautions à prendre avec le montage expérimental	121
2.6.1	Vieillessement du caoutchouc	121
2.6.2	Fuites	122
3	Comportement ondulatoire à l'échelle du cycle cardiaque	123
3.1	Seuil d'apparition d'ondes	123
3.2	Modèle de propagation d'ondes dans un tube élastique	125
3.2.1	Approche classique	126
3.2.2	Modèle d'ondes courtes	129
3.3	Comparaison entre notre modèle et nos expériences	133
3.3.1	Influence de l'amplitude sur le seuil de transition ondes/déformations synchrones	133
3.3.2	Comparaison du seuil expérimental avec la théorie	134
3.4	Résolution numérique	134
3.4.1	Code Numérique	135
3.4.2	Expériences Numériques : Mise en évidence de la transition	137
3.4.3	Résultats numériques et comparaison avec les expériences et le modèle	139
3.5	Applications physiologiques	140

4	Comportement à l'échelle de la vie	143
4.1	Observations expérimentales	143
4.1.1	Mesure expérimentale de la forme des anévrismes	143
4.1.2	Observation expérimentale d'un seuil de croissance	144
4.2	Modélisation d'un tube élastique soumis à un forçage et à une résistance	146
4.2.1	Modèle de windkessel linéarisé	147
4.2.2	Modèle non-linéaire : définition du seuil de gonflement, comportement consécutif	150
4.3	Comparaison avec l'expérience	153
4.4	Expériences numériques de croissance des anévrismes	155
4.4.1	Expériences numériques	155
4.4.2	Pertinence des expériences numériques : effet d'une zone de célérité plus faible	157
4.4.3	Expériences numériques : localisation privilégiée des anévrismes dans les ventres des ondes	161
4.5	Applications physiologiques	163
4.5.1	Remarque sur l'influence de la rigidité.	164
4.5.2	Comparaison du seuil d'apparition des ondes et du seuil de formation des anévrismes	165

Liste des symboles de la partie III

a	amplitude des oscillations du vérin	Δ	paramètre de variation d'élasticité numérique $\Delta = (c_0^2 - c_1^2)/c_0^2$
$A(x, t)$	section locale et instantanée de la membrane élastique	ε	extension mécanique
c_0	célérité des ondes élastiques	η	perturbation du rayon de la membrane $\eta(x, t) = R(x, t) - R_0$
d_0	épaisseur initiale de la membrane	μ	viscosité dynamique
E	module d'Young	ν	viscosité cinématique
g	pesanteur terrestre, $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.	ρ	masse volumique
h_0	hauteur, généralement du bac d'eau	σ	contrainte mécanique
k	nombre d'onde	ϕ	potentiel des vitesses
K	facteur de résistance hydraulique	ω	pulsation des oscillations du vérin
L	longueur de la membrane élastique	Ω	Volume contenu dans la membrane
L_1	longueur du tuyau aval		
Ma	nombre de Mach $Ma = U/c_0$		
p	pression transmurale		
$P(x, t)$	pression dans la membrane		
P_0	pression atmosphérique		
$Q(x, t)$	débit volumique		
Q_{in}	débit volumique entrant dans la membrane		
Q_{out}	débit volumique sortant		
r	distance à l'axe du cylindre		
$R(x, t)$	rayon de la membrane		
R_0	rayon initial de la membrane		
Re	nombre de Reynolds $Re = UL/\nu$		
s	abscisse curviligne		
t	temps		
$u(x, r, t)$	vitesse du fluide dans la membrane		
$U(x, t)$	vitesse moyenne du fluide dans la membrane		
Wo	nombre de Womersley $Wo = R\sqrt{\omega/\nu}$		
x	abscisse cartésienne		
z	ordonnée cartésienne		

Indices et exposants

X_0	valeur de la grandeur X à vide (écoulement nul)
X^*	valeur seuil de la grandeur X

Chapitre 1

Les anévrismes de l'aorte abdominale : introduction

L'utilisation du terme anévrisme en médecine (du verbe grec $\tilde{\alpha}\nu\epsilon\nu\rho\acute{\iota}\nu\omega$: « dilater ») semble remonter [64] à l'époque du chanoine Guy de Chauliac. Médecin de quatre papes, il est considéré comme le père de la chirurgie au Moyen Âge. Il emploie ce terme en 1373 dans *La grande Chirurgie* [65] et désigne par *anévrisme* une dilatation locale, en particulier d'une artère, c'est à dire d'un vaisseau qui conduit le sang du cœur aux différentes parties du corps.

L'étude des anévrismes se développe parallèlement aux techniques médicales, en commençant par le stéthoscope de Laennec, qui note en 1819 dans son ouvrage *Traité du diagnostic des maladies des poumons et du coeur* [80] :

« On entend par **anévrisme** la dilatation d'une artère, ou sa communication, au moyen d'une ouverture plus ou moins large, avec une sorte de sac formé ordinairement aux dépens de sa tunique externe, et quelquefois en partie aux dépens des organes environnants. Le premier cas constitue ce que les chirurgiens appellent anévrisme vrai; le second est désigné par eux sous le nom d'anévrisme faux. » (figure III.1.1-B₂ et C₂)

1.1 Prévalence de l'anévrisme de l'aorte abdominale

Une des implantations majeures des anévrismes est la partie abdominale de l'artère aorte [55, 71, 78]. On en trouve un exemple sur la figure III.1.1 qui présente des angiographies (radiographies) d'une aorte normale (A) et d'une autre atteinte d'un anévrisme de l'aorte abdominale (AAA) (B₁).

Sur cette figure, on distingue deux sortes d'anévrismes, de formes différentes : « fusiforme » (c'est à dire en forme de fuseau à filer la laine, autour de l'artère, figure III.1.1-B₂) et « sacculaire » (en forme de sac, figure III.1.1-C₂). Les AAA (figure III.1.1-B₁) sont essentiellement fusiformes tandis que d'autres anévrismes, dans le cerveau en particulier (figure III.1.1-C₁), sont sacculaires.

L'AAA occupe une place prépondérante dans la médecine cardiovasculaire : dans les pays occidentaux, les estimations d'incidence des AAA varient entre 50 et 500 pour 100 000 personnes par année [93]. L'âge moyen des personnes présentant un AAA est de 69 ans. L'AAA est de 3 à 11 fois plus fréquent chez les hommes que chez les femmes, selon l'âge [57, 93], le ratio diminuant avec l'âge.

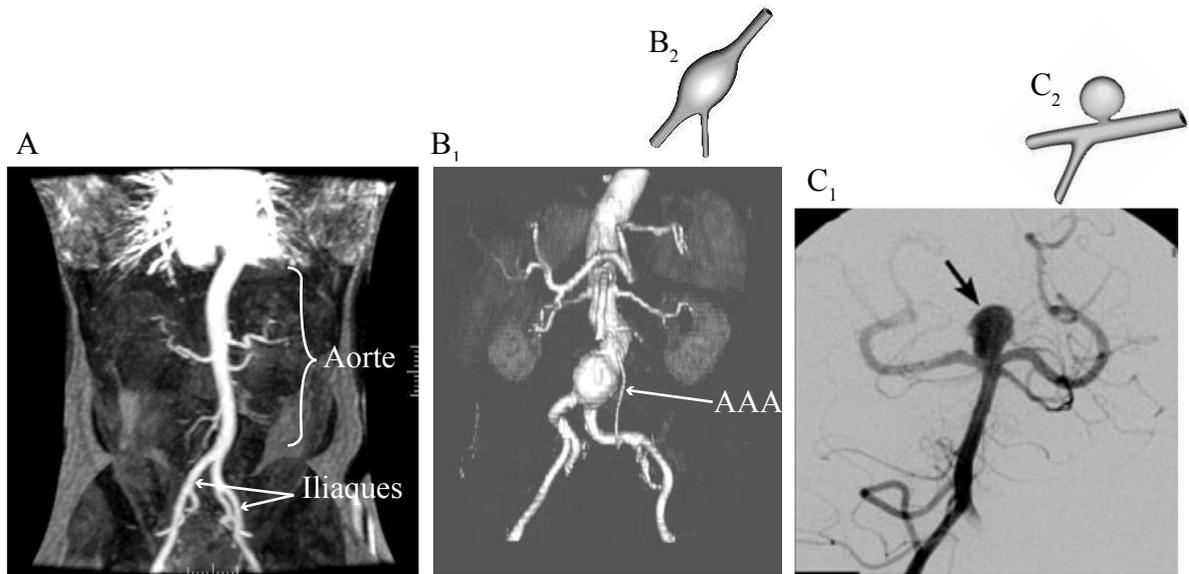


FIG. III.1.1 – A/ Angiographie d'une aorte saine, avec la bifurcation des artères iliaques.
 B/ B₁ : anévrisme situé sur l'aorte, dans l'abdomen. B₂ : forme d'un anévrisme fusiforme.
 C/ B₁ : anévrisme situé dans le cerveau. C₂ : forme d'un anévrisme sacculaire.

Selon les études récentes de Alexander [56] et McAuley [84], on ne connaît pas la cause de l'AAA, mais les facteurs de risque comprennent l'athérosclérose (affection caractérisée par des dépôts de plaques lipidiques à l'intérieur des artères) et l'hypertension (pression supérieure à la normale exercée par le sang sur les parois des vaisseaux). L'athérosclérose peut affaiblir les parois de l'aorte. Selon des estimations, il y a de l'athérosclérose connexe dans environ 80 % des cas d'AAA.

Durant leur développement, la plupart des petits anévrismes sont asymptomatiques et peuvent le demeurer pendant des années. Les praticiens relient le taux de croissance des anévrismes à leur taille. Plus l'anévrisme est gros, plus il se développe vite, et plus le risque de sa rupture augmente. Dans une étude prospective, le taux médian de croissance après 10 mois des anévrismes de moins de 4 cm, de 4 cm à 5 cm, de 5 cm à 6 cm et de plus de 6 cm s'établissait respectivement à 0,2 cm, 0,3 cm, 0,4 cm et 0,8 cm par année [74].

La présence d'une douleur (dorsale et/ou abdominale) associée à la pathologie indique habituellement une fissure ou une rupture, qui est la complication la plus grave de l'AAA. Toujours selon l'étude [74] de Guirguis, le risque de rupture augmente avec la taille de l'anévrisme. Avec un recul de six ans, le risque de rupture s'établissait respectivement à 1 %, 2 % et 20 % pour les anévrismes de moins de 4 cm, de 4 cm à 5 cm et de plus de 5 cm. Cette rupture entraîne le décès dans 75 % [66] à 85% des cas [77]. À peine la moitié des patients présentant une rupture de l'AAA parviennent à l'hôpital en vie. De plus, ceux qui sont vivants à leur arrivée à l'hôpital courent encore un risque de mortalité d'environ 50 % [66].

Au cours de cette partie, nous concentrerons notre étude sur les anévrismes fusi-

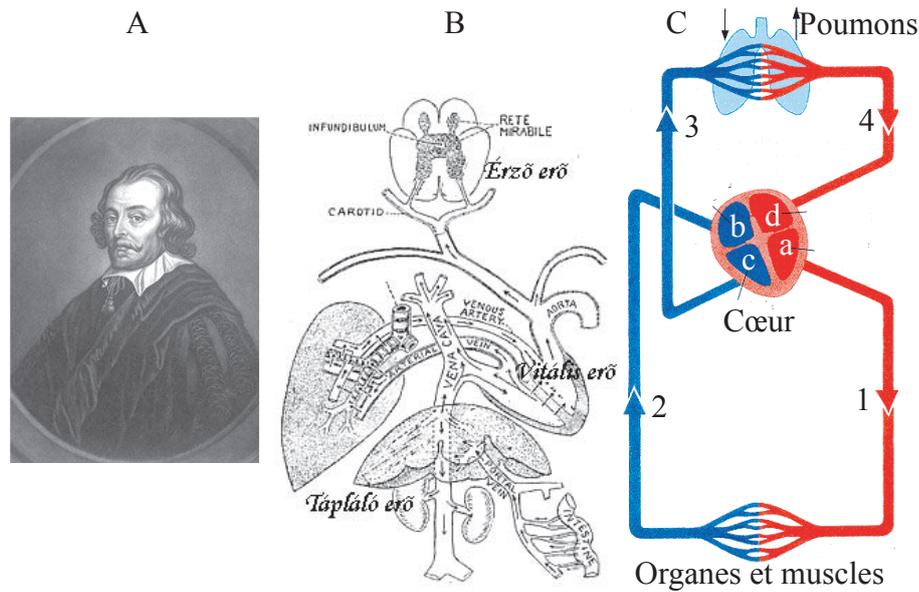


FIG. III.1.2 – A/ Portrait de William Harvey (1578-1657).
 B/ Schéma de la circulation sanguine selon Harley.
 C/ Schéma de la circulation sanguine. Légende : a) ventricule gauche b) oreillette droite c) ventricule droit d) oreillette gauche. Le sang est oxygéné dans les trajets 1 et 4. Les trajets 1 et 2 représentent la circulation systémique (ou grande circulation), les trajets 3 et 4 la circulation pulmonaire (ou petite circulation).

formes de l'aorte abdominale, et donc en tout premier lieu sur les caractéristiques de cette dernière.

1.2 L'aorte, artère principale du réseau sanguin

Selon l'historique de C. Richet dans sa traduction de W. Harvey [76], les grandes étapes de la physiologie sanguine et artérielle sont la découverte du pouls par C. Galien [70] (médecin des gladiateurs en 131 après J.C.) et celle de la circulation du sang par W. Harvey en 1628 (figure III.1.2-A).

Harvey distingue deux boucles de circulation du sang (figure III.1.2-B) que l'on peut discuter à partir de la figure III.1.2-C : le sang oxygéné (rouge) est envoyé par le ventricule gauche (a) via l'aorte et les artères secondaires vers les différents muscles et organes (trajet 1). Cette phase d'éjection du sang porte le nom de systole et correspond à la contraction du cœur. L'oxygène est ensuite prélevé par les organes, et le sang chargé de CO_2 revient par les veines (trajet 2) dans l'oreillette droite du cœur (b). Le ventricule droit (c) l'envoie ensuite vers les poumons (trajet 3) où il échange le CO_2 pour de l'oxygène. Le sang revient alors (trajet 4) vers l'oreillette gauche (d), et le cycle recommence.

L'aorte est l'artère principale du réseau sanguin systémique (trajets 1+2) (figure III.1.2-C) : elle prend racine (figure III.1.3-B) en haut du ventricule gauche du cœur, dessert les artères carotides et sous-clavières qui irriguent respectivement la tête et les membres supérieurs, décrivant un demi-tour (une « crosse ») pour redescendre le long de la colonne vertébrale avant de se diviser en deux artères secondaires, les iliaques, qui alimentent les jambes. Dans la partie descendante de l'aorte, le tronçon thoracique désigne la partie située en amont des reins tandis qu'on appelle abdominale celle qui est en aval. On

observe sur cette figure que le diamètre de l'aorte (de l'ordre de 2 cm) est bien supérieur à celui des vaisseaux qu'elle irrigue. Nous reviendrons plus loin sur cette remarque.

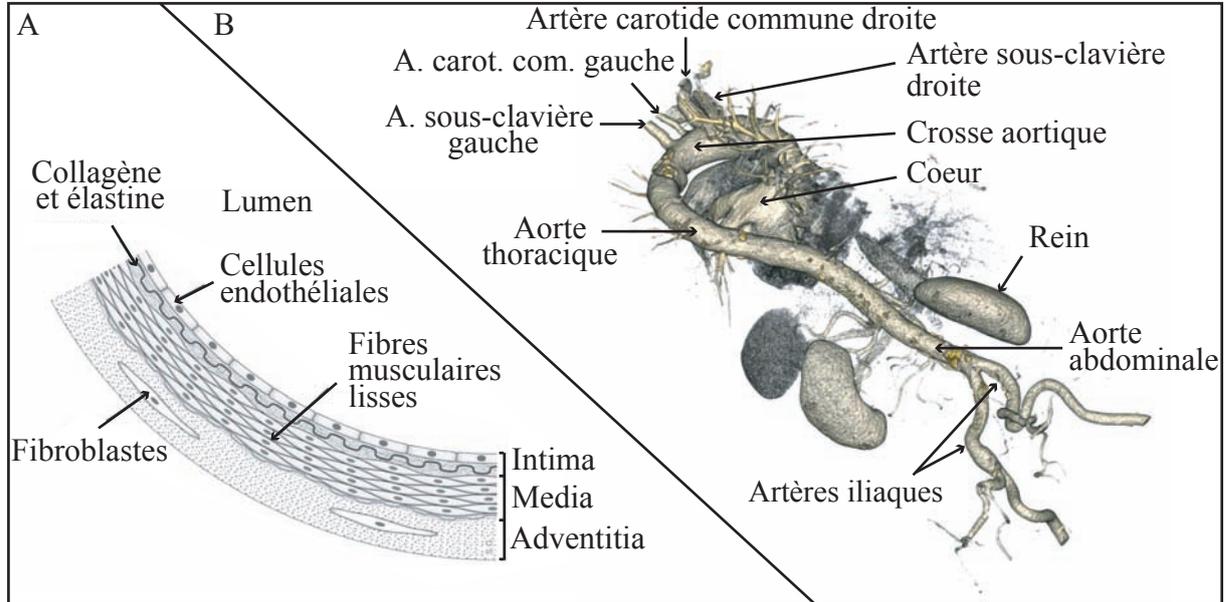


FIG. III.1.3 – **A/** Structure de la paroi des artères : le lumen est le côté où passe le sang. L'élastine confère à la paroi son caractère élastique. **B/** Angiographie 3D de l'aorte.

1.2.1 Élasticité des artères

Les artères, qui subissent de fortes variations de pression imprimée par le cœur, ont une structure en trois couches présentée sur la figure III.1.3-A. La couche media comportant de l'élastine leur permet de se dilater en cas d'augmentation de pression. L'ordre de grandeur des fluctuations de pression transmembranaire chez les mammifères est de l'ordre de $\delta p \approx \rho g H$, où H est la taille de l'animal [85, 86], soit $\delta p \approx 10^4$ Pa chez l'homme. Les variations relatives de section $\delta A/A = 2\delta D/D$ qui s'ensuivent sont de l'ordre de 10%. De façon à décrire ce comportement élastique de la membrane, les physiologistes introduisent la notion de distensibilité $\mathcal{D} \equiv A^{-1}\delta A/\delta p$ de l'ordre de 10^{-5} m²/N chez l'homme [68, 85]. Elle traduit la capacité de l'artère à augmenter son rayon en cas de surpression.

1.2.2 Vitesse du pouls et influence des bifurcations

Comme nous le montrerons au paragraphe 3.2, les fluctuations de section de l'artère peuvent être localisées et se déplacer le long de l'artère suite à la systole. Cette propagation d'onde de déformation est non dispersive pour une artère de section et de propriétés constantes [82] et est caractérisée par la vitesse : $c = 1/\sqrt{\rho\mathcal{D}} \approx 10$ m/s.

Lorsque les propriétés de l'artère varient brusquement sur une région de taille petite devant les longueurs d'ondes mises en jeu, des phénomènes de réflexion surviennent. C'est le cas au niveau de la bifurcation des iliaques, notamment. Le taux de transmission et de

réflexion dépend du rapport des admittances des tuyaux amont et aval. L'admittance d'un tuyau s'écrit $Y_i = A_i/(\rho_i c_i)$ avec A_i , la section de chaque vaisseau, c_i , sa vitesse d'ondes élastiques et ρ_i la densité du fluide contenu. Dans notre problème, nous considérons que ρ_i est le même pour tous les vaisseaux, qui transportent tous du sang dans des conditions similaires. Lighthill [82] indique qu'il existe une onde réfléchie si $Y_1 < \sum_{i>2} Y_i$.

Pour le cas de la bifurcation iliaque (figure III.1.4-A), la somme des sections des artères filles est inférieure d'au moins 20% à celle de l'aorte, et la vitesse des ondes y est aussi plus élevée ($c_{iliaque} \approx 10$ m/s et $c_{aorte} \approx 5$ m/s [69, 73]). C'est donc effectivement un site de réflexion.

Pour les bifurcations du type aorte-artère intercostale (figure III.1.4-B) que l'on trouvera à de nombreux endroits sur l'aorte thoracique (figure III.1.3-B), la situation n'est pas la même. En effet, le vaisseau 4 est la continuation du vaisseau 1, et ses propriétés en sont très peu différentes. Il en résulte que $Y_1 \approx \sum_{i>2} Y_i$ et qu'il n'y a pratiquement pas de réflexion d'onde à ce niveau.

Sur les sites de réflexion importants, Lighthill [82] souligne que la pression atteint des valeurs jusqu'à deux fois plus élevées qu'ailleurs. En conséquence de quoi les déformations seront à cet endroit plus importantes qu'ailleurs.

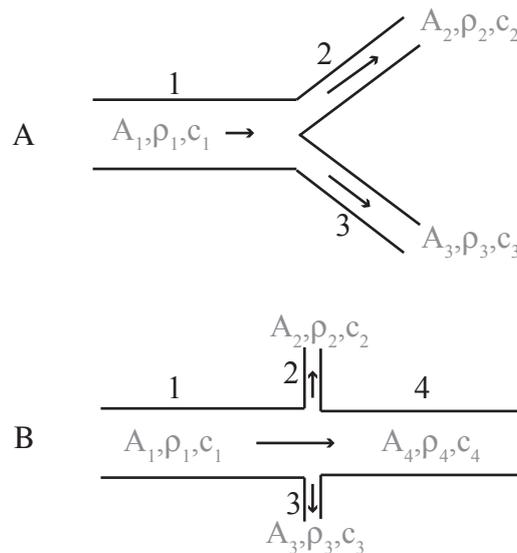


FIG. III.1.4 – **A/** Bifurcation de type aorte-iliaque. **B/** Bifurcation de type aorte-intercostale. A_i est la section de chaque vaisseau, c_i dénote leur vitesse d'ondes élastiques et ρ_i la densité du fluide contenu.

1.3 Écoulement au sein de l'aorte

1.3.1 Le sang

Le sang est le fluide nourricier du corps humain. Il transporte également l'information hormonale, immunitaire et les déchets produits par les organes et les muscles. Pour assurer ces fonctions, un grand nombre de molécules et de cellules s'y trouvent en suspension.

C'est donc un fluide complexe et non-newtonien, ce qui se manifeste dans les vaisseaux minces [98]. Cependant, lesdites cellules sont petites (les plus grosses, les globules blancs, mesurent $22 \mu\text{m}$ de diamètre[77]), ce qui permet de considérer le sang comme un liquide newtonien [60, 79, 94] de viscosité $\nu \approx 4 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ dès lors qu'il s'écoule dans des vaisseaux de gros diamètre. C'est en particulier le cas dans l'aorte, dont le diamètre mesure environ $D \approx 2 \text{cm}$, c'est à dire mille fois le diamètre des globules blancs.

1.3.2 Vitesse du sang dans l'aorte

Les mesures non intrusives de l'écoulement dans l'aorte sont rendues possibles, soit par ultrasons soit par imagerie par résonance magnétique (IRM). Un exemple de mesure par IRM est présenté sur la figure III.1.5 issue de l'article de Cheng *et al.* [63]. Sur cette figure, les auteurs présentent leur mesure du profil de vitesse chez un patient de 59 ans en bonne santé initialement au repos. Ces mesures sont conduites en deux plans de l'aorte présentés sur la figure III.1.5-A. Les résultats au repos sont présentés en (B₂) et (B₃) à trois instants différents du cycle cardiaque présentés en (B₁). Les contraintes tangentielles correspondantes sont présentées en (B₄). Les résultats équivalents obtenus avec le même individu au cours de l'effort sont présentés en (C_i).

On déduit de ces mesures que la vitesse dans l'aorte est toujours inférieure au mètre par seconde ($U \approx 1 \text{m/s}$) et que son profil est plus bouchon que parabolique. La vitesse du sang étant petite devant la vitesse des ondes élastiques évoquée ci-avant, nous conduirons notre analyse des ondes dans la limite « acoustique » des petits nombres de Mach $Ma \equiv U/c \ll 1$.

L'évaluation de la vitesse conduit à une estimation du nombre de Reynolds $Re \equiv UD/\nu \approx 10^3$ qui compare les forces d'inertie ($\rho D^2 U^2$) aux forces visqueuses $\rho \nu UD$. Dans cette limite des grands nombres de Reynolds, l'inertie domine et les effets visqueux sont concentrés dans la couche limite d'épaisseur δ . Pour un écoulement oscillant (pulsation ω), le second problème de Stokes nous permet d'évaluer $\delta \approx \sqrt{\nu/\omega}$.

Comparant le rayon du tube à l'épaisseur de la couche limite, le rapport R/δ permet d'évaluer l'importance de la région pariétale où les effets visqueux se concentrent. Dans les applications physiologiques, ce rapport $Wo \equiv R\sqrt{\omega/\nu}$ est appelé le nombre de Womersley [104]. Pour l'aorte, on l'évalue à $Wo \approx 20$ [68, 77]. La couche limite est donc petite devant le diamètre du tube ce qui corrobore l'observation faite sur les profils de vitesse présentés sur la figure III.1.5.

On peut alors estimer les contraintes pariétales dues au cisaillement $\tau_t \sim \mu U/\delta \approx 4 \text{Pa}$, c'est à dire l'ordre de grandeur observé sur les graphiques (B₄) et (C₄) de cette même figure.

Enfin les écoulements au pic de systole (a) sont bien plus forts qu'aux deux autres instants (b et c), soulignant ainsi le caractère pulsé de l'écoulement qui subit de brusques accélérations à chaque contraction du cœur.

1.4 Objectifs et domaine d'étude

Nous étudions expérimentalement l'écoulement pulsé dans une artère modèle dans le but de déterminer les conditions physiques d'apparition d'un anévrisme de type aortique. De façon à respecter les paramètres physiologiques que nous venons de discuter, l'étude

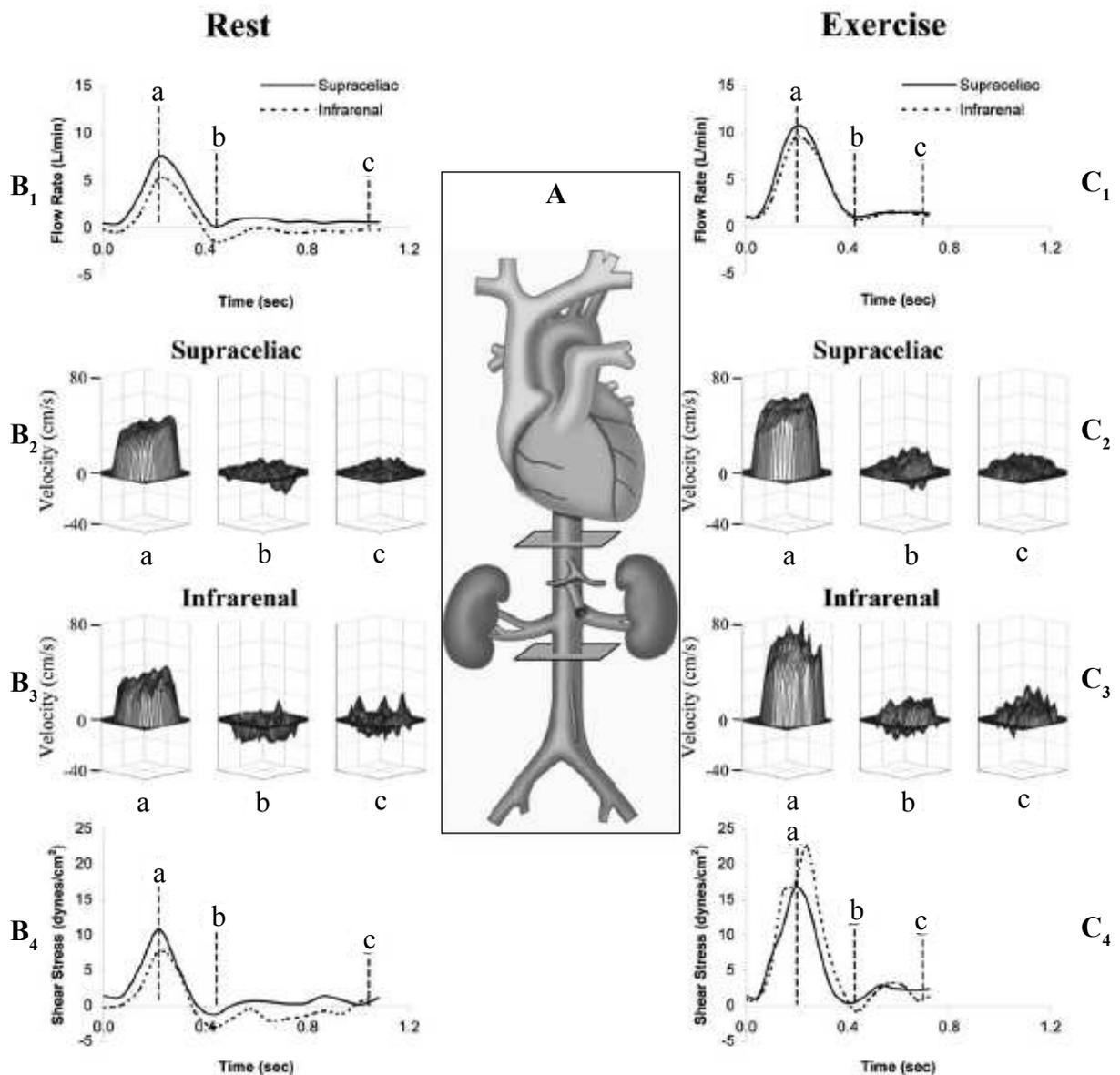


FIG. III.1.5 – Figure issue de l'article de Cheng [63] : A/ Schéma de l'aorte avec emplacement des deux plans de visualisation de l'écoulement ("supraceliac" et "Infrarenal") effectués par IRM sur un patient en bonne santé de 59 ans. Ces mesures sont faites au cours du cycle cardiaque pour deux conditions de fonctionnement : au repos (B_i) et en exercice (C_i). 3 instants sont choisis dans le cycle cardiaque : (a) pour le pic de systole (b) pour la fin de systole et (c) pour la fin de diastole.

est menée dans la limite :

$$Re \gg 1 \quad Wo \gg 1 \quad Ma \ll 1$$

Le premier chapitre est consacré à la présentation du montage expérimental et de ses caractéristiques pour comparaison avec le cas d'une aorte humaine. Nous étudions ensuite le comportement de notre membrane sur des temps caractéristiques de l'ordre du cycle cardiaque, et en particulier sa capacité à propager des ondes de déformation. Enfin viennent des expériences menées à plus long terme, c'est à dire sur une période qui couvre entre cent et mille cycles cardiaques. Nous appréhendons alors les conditions de forçage qui peuvent faire dévier la membrane d'un comportement de type artère saine.

Chapitre 2

Montage expérimental

Nichols et O'Rourke écrivent : « Décrite dans sa forme la plus simpliste, la circulation sanguine se résume à une pompe, le cœur, qui force périodiquement le sang à s'écouler dans un système ramifié de tubes élastiques »[90]. C'est précisément ce que nous avons retenu. La figure (III.2.1) représente le montage expérimental qui a été réalisé au cours de cette thèse : il tend à modéliser un écoulement pulsé dans une artère du type aorte. Il est donc centré autour d'une membrane souple, en traits gras sur la figure III.2.1-B. En amont de cette membrane, un piston (qui représente le cœur), actionné par un vérin, pompe l'eau d'un réservoir et l'éjecte périodiquement dans la membrane. En aval, un tuyau de recirculation ramène l'eau au réservoir, situé à une hauteur h_0 au dessus de la membrane.

2.1 L'aorte : une membrane élastique

Chez l'humain, l'aorte est une artère longue de 40 cm et située juste en sortie de cœur (figure III.2.2-B). Ses caractéristiques sont notées dans le tableau III.2.1. Son diamètre (environ 2 cm) est aussi l'un des plus importants du réseau vasculaire, puisqu'elle doit transporter tout le sang qui n'est pas destiné aux poumons. Son module d'Young est le résultat d'une combinaison subtile et évolutive entre deux principaux types de molécules constituant la paroi des vaisseaux sanguins (voir dans l'introduction la figure III.1.3-A) : l'élastine et le collagène. La première lui permet de se dilater en fonction de la pression interne. Quant au collagène, beaucoup moins élastique, il agit principalement à partir d'une certaine déformation, comme une sorte de gaine limitant le gonflement de l'artère. En raison de cette combinaison, les caractéristiques des artères vont varier selon les personnes, le long de l'arbre artériel et au cours de la vie. Nous nous cantonnerons ici à considérer un module d'Young moyen et réaliste pour discuter de nos résultats. La plupart du temps, nous avons utilisé pour notre expérience des membranes en latex provenant de chambres à air de bicyclette Michelin[®], en latex. Le tableau III.2.1 compare leurs propriétés à celles de l'aorte humaine. Les dimensions géométriques sont donc du même ordre de grandeur que celles de l'aorte, c'est à dire que les rayons de l'aorte et de la chambre à air valent environ 1 cm (deux fois plus que pour l'iliaque) pour une épaisseur légèrement inférieure au millimètre et une longueur d'environ 50 cm (dix fois plus que pour l'iliaque). Les célérités c_0 , qui seront commentées plus largement dans le paragraphe et dans le chapitre suivants, s'élèvent à seulement 6 m/s environ, ce qui les place parmi les plus basses du réseau artériel, aorte thoracique non-comprise [81]. Ceci est relié au module d'Young, qui caractérise l'élasticité de la paroi artérielle, et qui est plus faible dans l'aorte (5,3 MPa)

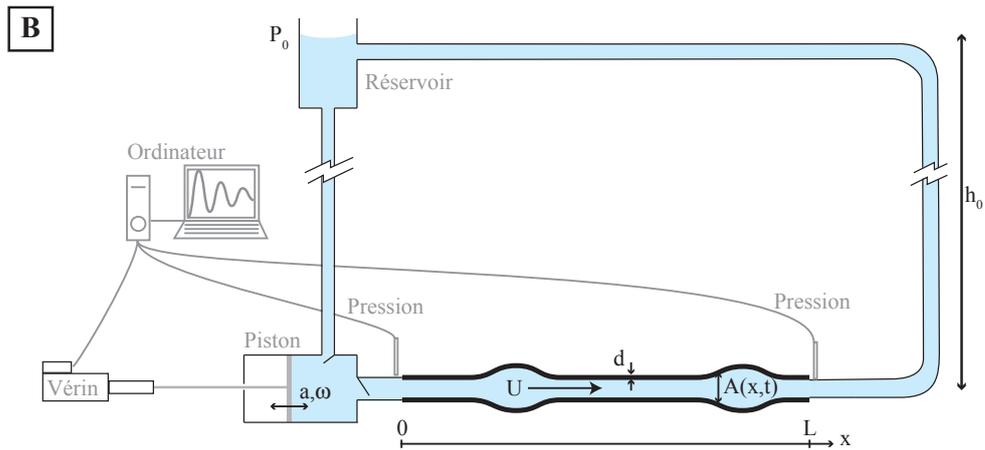
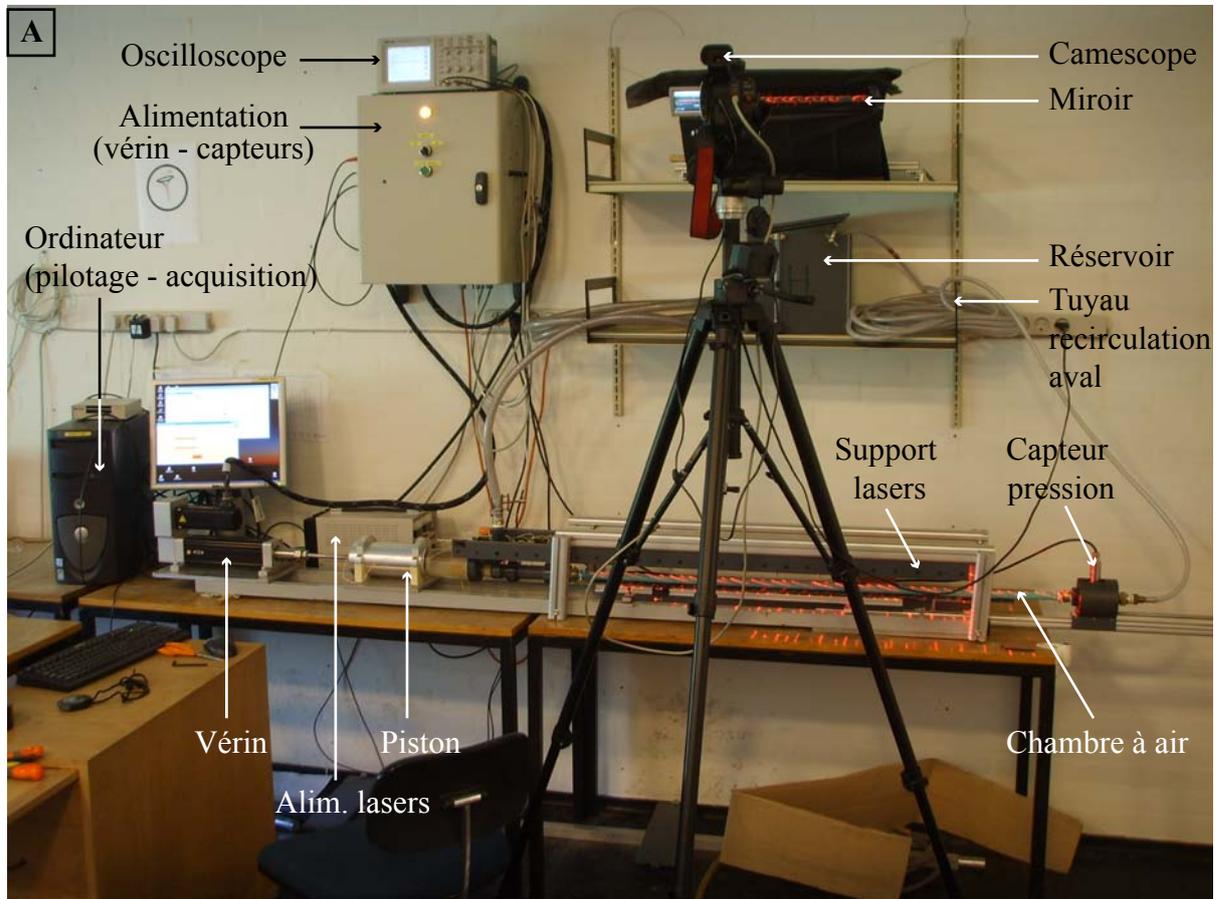


FIG. III.2.1 – **A** Photographie et **B** schéma du montage expérimental et définition des notations utilisées pour l'étude des anévrismes.

que, par exemple, dans l'iliaque (10 MPa). Notre chambre à air paraît donc adaptée à l'étude des écoulements aortiques, si l'on s'en réfère à ces propriétés.

Dans le montage, la membrane repose sur un support horizontal qui soutient son poids mais sur lequel elle est libre de glisser.

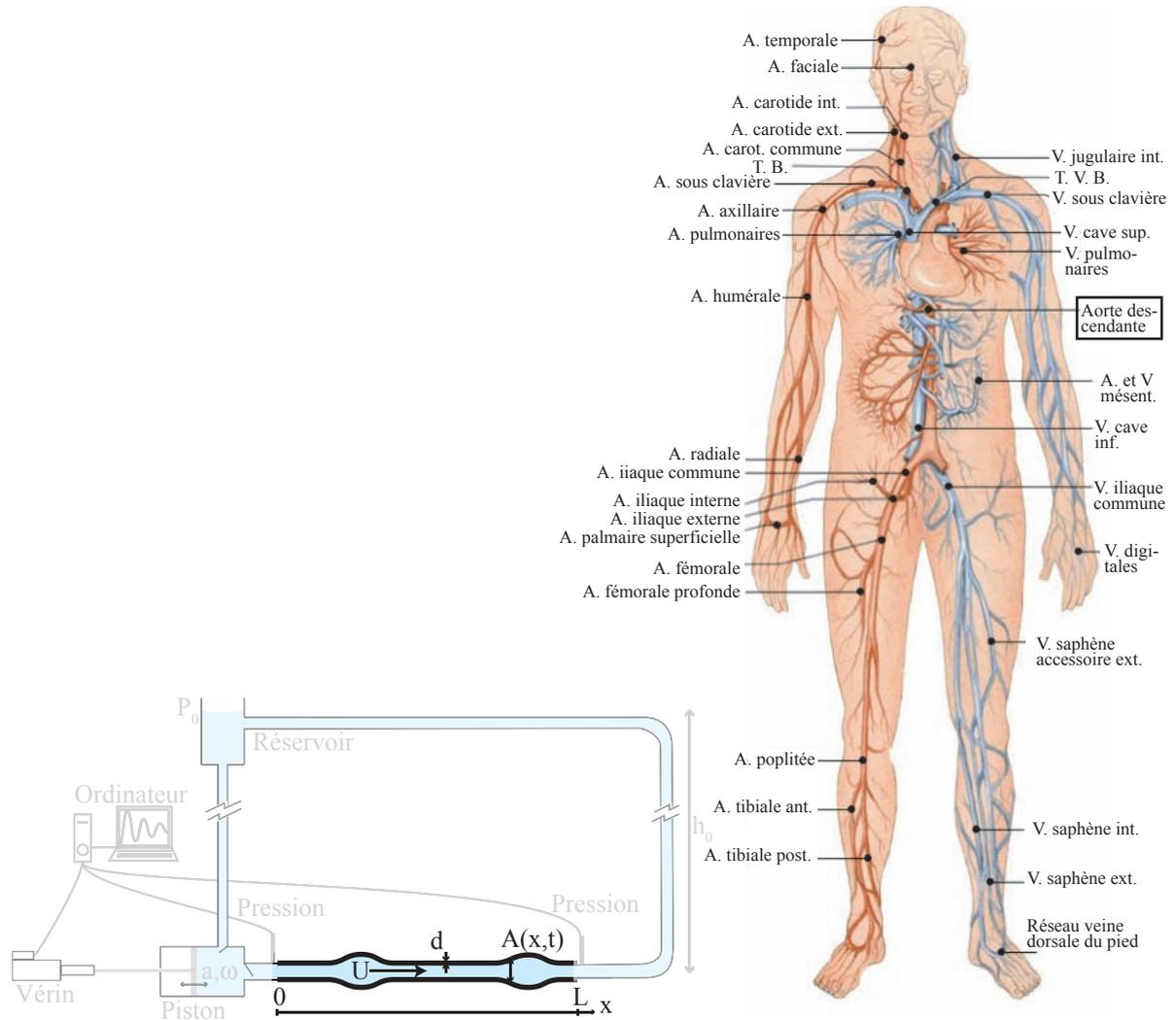


FIG. III.2.2 –

A/ L'aorte factice. A_0 et $A(x, t) = A_0 + \delta A(x, t)$ sont la section à vide et la section locale de la membrane cylindrique, avec R_0 et $R(x, t)$ les rayons correspondants ; $U(x, t)$ est la vitesse axiale moyenne du fluide à l'abscisse x et à l'instant t ; et d est l'épaisseur de la membrane.

B/ Vue schématique du réseau vasculaire humain.

¹ cf paragraphe suivant

	$L (cm)$	$R_0(mm)$	$d_0(mm)$	$c_0(m/s)$	$E(MPa)$	
Aorte humaine [69, 73]	40	7,4 à 11,3	≈ 1	5,15 6^m	Elastine	2,4
					Collagène	114
					Global	5,3
Chambre à air Michelin [®]	0 à 200	9,5	0,7	6	1,07 (¹)	
Iliaque humaine [72, 81, 87]	5	$\approx 5,5$	$\approx 0,7$	9 ; 11,5 ^m	Global	10

TAB. III.2.1 – Longueur, rayon à vide, épaisseur, vitesse des ondes élastiques (*cf.* chapitre 3) et module d'Young des artères et des chambres à air utilisées pour l'expérience. Les valeurs présentées avec un m en exposant ont été directement mesurées sur un sujet sain (Antoine Santoni) avec un capteur de pression et corroborées avec un Sphygmocor[®], dans un contexte médical.

2.1.1 Équilibre statique de la membrane

a/ Élasticité du caoutchouc

Pour caractériser l'élasticité des chambres à air que nous utilisons, nous avons utilisé, avec Benoît Roman, chercheur au P.M.M.H., une machine de traction hydraulique, à l'E.S.P.C.I. Le principe est assez simple : on découpe dans une chambre à air une bande de latex (de longueur L , largeur b , et d'épaisseur a) que l'on maintient entre deux pinces dont on contrôle la position (figure III.2.3-A). On les force alors à s'écarter à une vitesse donnée, en mesurant la force requise. La figure III.2.3-B en montre les résultats. Le graphique présente la contrainte $\sigma \approx F/(a_0b_0)$ (c'est à dire la force divisée par la section transversale) en fonction de l'étirement adimensionné $\varepsilon = (L-L_0)/L_0$. La courbe obtenue, traditionnelle pour un matériau caoutchoutique [58, 89], n'est assimilable à une droite que pour les très faibles déformations ($\varepsilon < 0,25$ environ), c'est donc à ce régime seulement qu'on pourra appliquer une approximation hookéenne (*cf.* 2.1.1.c). Au delà, on atteint un régime de plateau (entre les deux flèches), que l'on qualifie de caoutchoutique, et qui traduit les grandes déformations accessibles à ce type de matériaux. Enfin, à de très grandes déformations, le raidissement de la courbe traduit l'apparition d'effets plastiques dans la déformation de la chambre à air. En règle générale, nous travaillerons dans des régimes de faibles déformations ($\varepsilon < 1$), et nous utiliserons donc une loi proportionnelle, dite loi de Hooke, pour décrire notre relation $\sigma(\varepsilon)$. Le module d'Young qui nous permet de faire une bonne approximation de la courbe aux petites déformations vaut 1,07 MPa. On sortira toutefois de ce régime lorsqu'on atteindra de grandes déformations comme l'équilibre élasto-plastique décrit au paragraphe 2.1.1.d.

Nous avons pris la précaution de travailler sur des membranes neuves autant que possible, afin de s'affranchir de l'effet d'usure décrit par Bouasse [58] puis Mullins [77, 89]. En effet, lorsque le caoutchouc vulcanisé a été précontraint sévèrement, ses propriétés élastiques changent, et la contrainte diminue alors par rapport à un matériau neuf dans le même état d'élongation. Deux solutions permettent de s'affranchir de ce problème : fixer systématiquement les chambres à air en leur appliquant de nombreux cycles d'élongation sévère et de relaxation, ou bien les utiliser neuves, ce qui a été notre option.

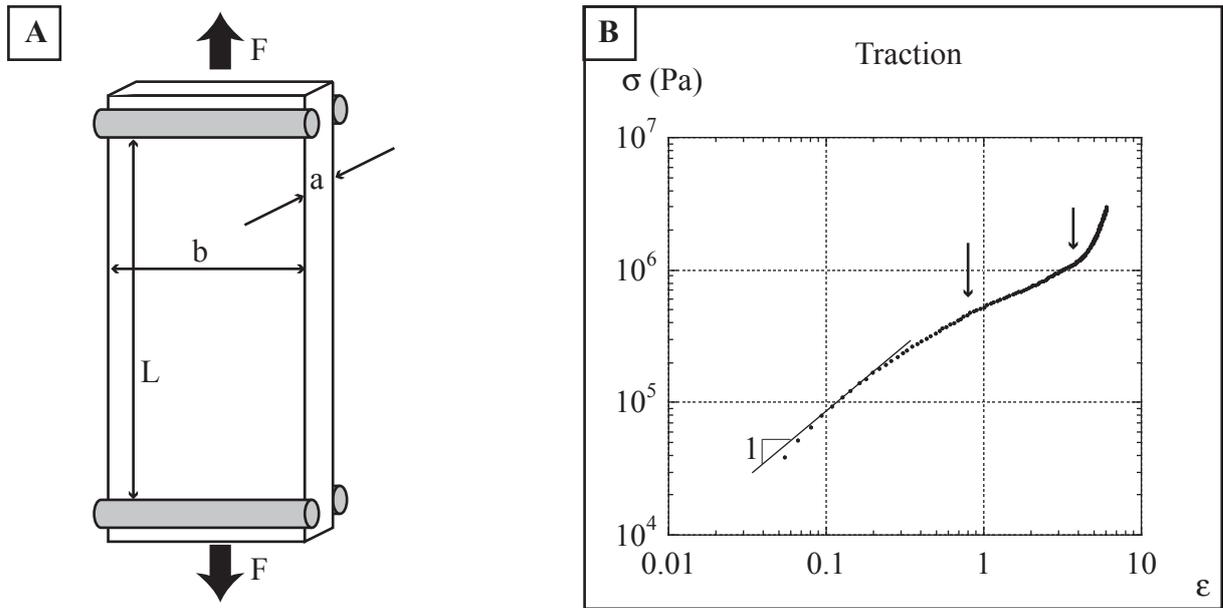


FIG. III.2.3 – Essais de traction sur le caoutchouc de la chambre à air.
A/ Schéma de principe de l'expérience : on tire verticalement sur deux pinces qui enserrant les extrémités d'un morceau de caoutchouc de longueur, largeur et épaisseur initiales respectives L_0 , b_0 et a_0 .
B/ Résultat pour un échantillon caractérisé par $L_0 = 68$ mm, $a_0 = 0,7$ mm et $b_0 = 30$ mm, étiré à une vitesse de 4 cm/min. On représente en abscisse l'élongation $\epsilon = (L - L_0)/L_0$, et en ordonnée la contrainte $\sigma = F/(a.b) \sim F/(a_0.b_0)$. La droite a une pente 1, et les deux flèches matérialisent les bords du plateau caoutchoutique.

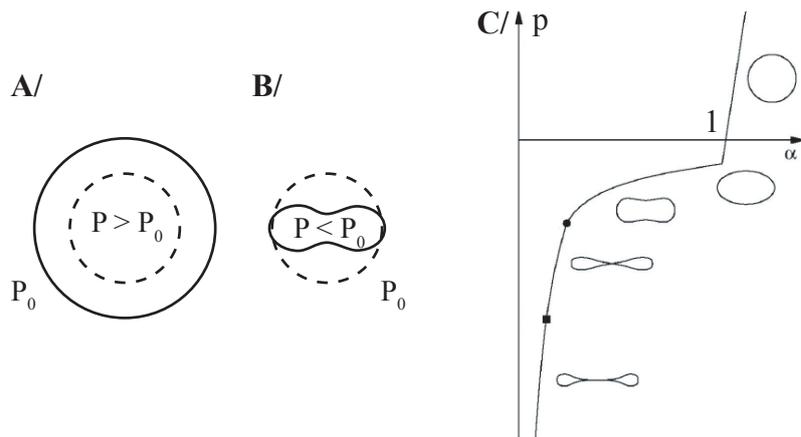


FIG. III.2.4 – Régimes de fonctionnement d'un tube élastique.
A/ La pression interne est plus forte que la pression atmosphérique, et le tube est gonflé par rapport à son volume initial (en pointillés).
B/ La pression transmurale $P - P_0$ est négative, le tube se déforme et flambe.
C/ Report de la loi schématique d'évolution de la pression transmurale en fonction de $\alpha = A/A_0$, tirée de [14].

b/ Régimes de déformation de la membrane

Deux régimes de déformation sont possibles pour la membrane, selon que la pression transmurale ($P - P_0$) est positive ou négative. Si elle est positive, la membrane est gonflée comme un ballon, et elle garde une forme cylindrique, en adaptant son rayon à la surpression (figure III.2.4-A), selon une loi dont nous parlerons dans les paragraphes suivants. En revanche, si la pression à l'intérieur de la membrane est plus faible que la pression atmosphérique P_0 , la membrane brise sa symétrie cylindrique pour adopter une forme complexe, à périmètre approximativement constant (figure III.2.4 - B) [59, 61, 62] : elle flambe. Ce régime est étranger au mode de fonctionnement des artères qui travaillent avec une pression transmurale ($P - P_0$) positive. En revanche, il serait pertinent si l'on cherchait à s'inquiéter des modes de déformation des veines qui travaillent, à l'inverse, à pression transmurale négative. Dans notre expérience, nous maintenons donc toujours notre réservoir à une hauteur h_0 suffisante pour que la pression transmurale ne chute jamais en dessous de zéro.

c/ Dilatation d'une membrane élastique (hookéenne) et cylindrique sous pression

Nous nous attachons à comprendre comment se comporte un tuyau élastique (d'élasticité hookéenne) lorsqu'il est soumis à une pression transmurale positive et statique. Les hypothèses majeures seront de considérer un état de faible déformation dû à une pression modérée. Dans ce contexte, on supposera que notre matériau suit une loi de déformation linéaire, dite de Hooke (figure III.2.5-B). C'est-à-dire que les contraintes (σ) et les déformations (ε) au sein du matériau sont liées par une loi proportionnelle [99] $\sigma = E\varepsilon$. Le coefficient de proportionnalité E est le module d'Young (figure III.2.5-C), grandeur qui permet de caractériser un matériau : un solide de module élevé devra être étiré avec force si l'on veut obtenir une faible déformation. Au contraire, si le module d'Young est faible, il est facile d'étirer l'objet considéré.

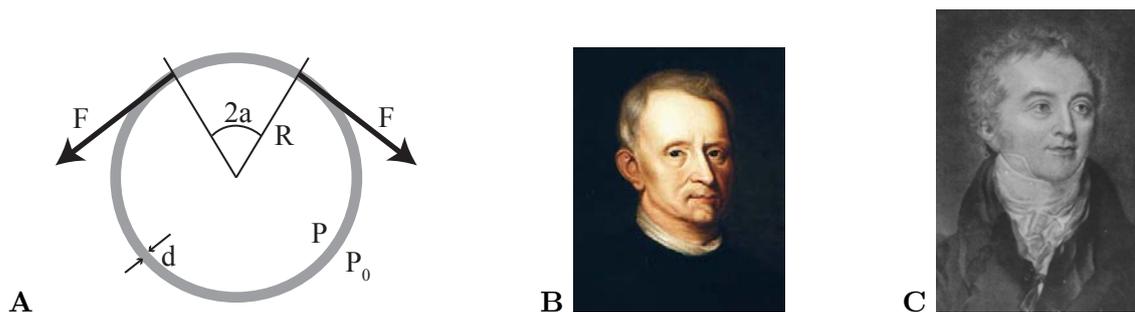


FIG. III.2.5 – **A/** Mise sous pression d'une membrane élastique cylindrique.
B/ Robert Hooke (1635-1703), savant anglais.
C/ Thomas Young (1773-1829), physicien et médecin et égyptologue britannique.

Considérons donc ici une membrane élastique caractérisée par un module d'Young E , en introduisant une géométrie cylindrique, un rayon initial (sans contrainte) R_0 , une épaisseur initiale d_0 , et une longueur unité. Elle est soumise à une pression P supérieure à la pression externe P_0 , c'est à dire à une pression transmurale $p = P - P_0$. Si nous prenons en compte une portion angulaire ($a \ll 1$) de membrane comme définie sur la

figure (III.2.5-A), de rayon R et d'épaisseur d , la tension F va venir équilibrer les forces de pression.

$$p \, 2 \sin(a) \, R = 2F \sin(a) \quad (\text{III.2.1})$$

La tension F dans la membrane est reliée à sa déformation via le module d'Young et l'épaisseur de la membrane :

$$\begin{aligned} F &= \sigma d \\ &= E \varepsilon d \\ &= E \frac{R - R_0}{R_0} d \end{aligned} \quad (\text{III.2.2})$$

À partir de (III.2.1) et (III.2.2), et toujours dans la limite des faibles déformations, on peut écrire :

$$p = d \, E \frac{R - R_0}{R_0 R} \quad (\text{III.2.3})$$

Or, la conservation du volume de la membrane implique (en supposant son module de Poisson égal à 1/2) :

$$d = d_0 \frac{R_0}{R} \quad (\text{III.2.4})$$

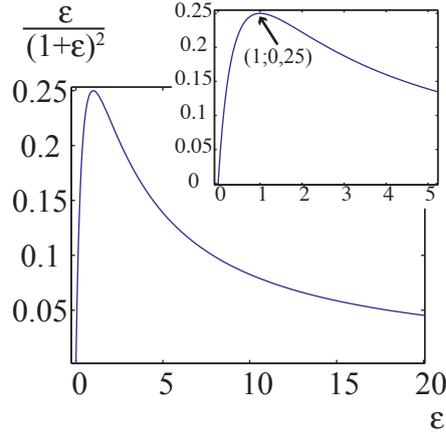
Ce qui nous donne désormais une relation directe entre la pression transmurale et la section de notre tuyau élastique ($\delta R = R - R_0$).

$$p = d_0 E \frac{\delta R}{R^2} = d_0 E \frac{\varepsilon}{R_0 (1 + \varepsilon)^2} \quad (\text{III.2.5})$$

La fonction $f(\varepsilon) = \varepsilon/(1 + \varepsilon)^2$ est tracée sur la figure III.2.6. Il apparaît, aux faibles déformations que la pression transmurale est une fonction croissante de ε . Il faut donc mettre le fluide intérieur sous pression pour gonfler la membrane. Cependant, la courbe admet un maximum (pour $\varepsilon = 1$) au delà duquel la pression est une fonction décroissante de ε . Autrement dit, toute augmentation de rayon du tube s'accompagne d'une baisse de pression du fluide intérieur, qui occupe ainsi plus de volume. Chaque point de cette partie de courbe décroissante correspond donc à un état instable vis-à-vis d'une augmentation de ε : une fois que la déformation a atteint ce maximum, c'est à dire $\varepsilon = 1$, la membrane gonfle indéfiniment (selon Young [105] : « There is a finite [pressure] which will cause an infinite extension »). C'est exactement la sensation que l'on retrouve en soufflant dans un ballon de baudruche (qui est décrit par une courbe semblable à un facteur 2 près) : le début du gonflement se fait au prix d'une forte augmentation de pression, mais une fois passé le pic, il est assez facile d'atteindre une grande déformation. Dans ce modèle d'élasticité linéaire, on obtient un gonflement infini, ce qui, bien entendu, n'est pas acceptable physiquement. On se reportera donc au paragraphe suivant pour comprendre le comportement réel de notre membrane, qui nécessite la prise en compte du comportement caoutchoutique du matériau.

Avant cela, faisons quelques remarques sur cette équation III.2.5. On se limitera parfois à son approximation au premier ordre en $\delta R/R_0$, qui donne :

$$p = d_0 E \frac{\delta R}{R_0^2} = \frac{d_0 E}{2R_0} \cdot \frac{\delta A}{A_0} \quad (\text{III.2.6})$$

FIG. III.2.6 – $f(\varepsilon) = \varepsilon/(1 + \varepsilon)^2$

Avec A_0 la section au repos de la membrane, et δA son accroissement lorsqu'on applique la pression transmurale p . Nous verrons par ailleurs au chapitre 3 que la célérité c_0 des ondes élastiques parcourant la membrane vaut $\sqrt{d_0 E / 2\rho R_0}$. En remplaçant il reste alors

$$p = 2\rho c_0^2 \frac{\delta R}{R_0} = \rho c_0^2 \frac{\delta A}{A_0} \quad (\text{III.2.7})$$

Selon les cas, nous utiliserons pour les expériences numériques et pour les modèles soit l'expression III.2.5, soit son équivalent simplifié III.2.7. Nous pouvons enfin remarquer que dans certains articles, les auteurs utilisent la notion de distensibilité des artères, $\mathcal{D} = 2R_0/d_0 E$ [83].

d/ Équilibre élasto-plastique d'une membrane caoutchoutique et cylindrique sous pression

Dans la réalité, notre latex n'a pas un comportement véritablement hookéen : accordons un peu plus d'attention à la rhéologie exacte de la membrane. Dans les expériences de traction du paragraphe 2.1.1.a, nous dégagons une relation non-linéaire entre la contrainte et la déformation de notre caoutchouc. Ceci met en évidence le caractère non hookéen de notre chambre à air, et notamment, l'existence d'un plateau caoutchoutique et d'un raidissement plastique aux grandes déformations. Il nous faut donc garder, au lieu de III.2.3, la relation plus générale

$$p = \frac{\sigma(\varepsilon)}{R} d = \frac{\sigma(\varepsilon)}{R_0(1 + \varepsilon)} d \quad (\text{III.2.8})$$

Dans cette relation, la fonction $\sigma(\varepsilon)$ est encore corrigée par un facteur $1/R$. Ce facteur permet de même que précédemment l'apparition dans la relation $p(R)$ d'une branche de pente négative représentée en grisé (entre les points A et C) sur la figure III.2.7-B. Cette fois cependant, la remontée plastique permet d'empêcher le gonflement infini irréaliste du paragraphe précédent : on définit alors (comme pour les transitions de phase liquide-gaz) un plateau de Maxwell entre les points A et D, qui appartiennent tous deux à des portions stables de la courbe $p(R)$. Lorsque l'on augmente la pression dans la membrane, elle se gonfle jusqu'à atteindre le point B. Il suffit alors d'une perturbation minime pour

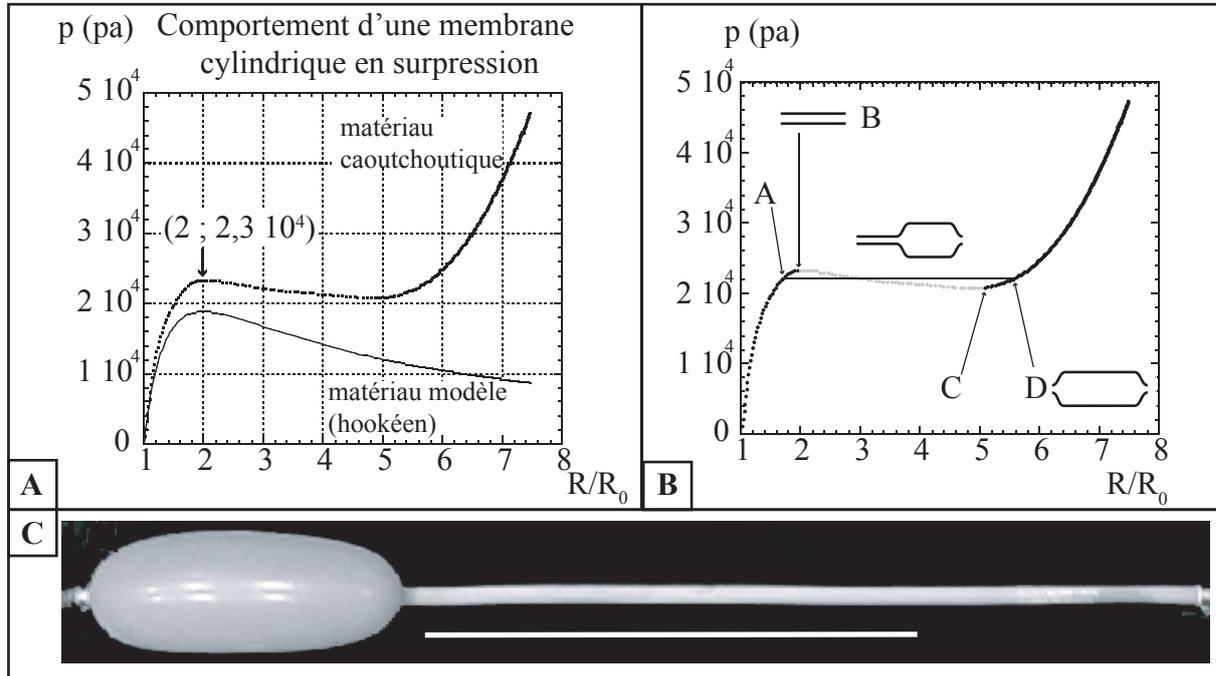


FIG. III.2.7 –

Evolution de la pression en fonction du rayon de la membrane élastique.

A/ On compare l'expression III.2.5 $p = d_0 E \delta R / R^2$ (élasticité linéaire) à la relation III.2.8 (caoutchouc). On remarque que dans ce second cas, l'intervention de la plasticité du matériau implique l'apparition d'une nouvelle branche à pente positive, à très grande déformation.

B/ On met en évidence l'équilibre élasto-plastique. Les points B et D désignent les maximum et minimum locaux, et A et C les extrémités du plateau de Maxwell.

C/ Coexistence de deux phases mécaniques pour notre membrane. Le segment blanc mesure 50 cm.

qu'une partie de la membrane gonfle jusqu'à atteindre le point D, isobare de A. On aura alors la coexistence entre deux « phases » mécaniques [61, 62], la proportion entre les deux dépendant du volume de fluide contenu dans le système (figure III.2.7-B). En l'augmentant, on parcourt le plateau de Maxwell jusqu'à ce que toute la membrane soit dans l'état D. Au delà, Toute augmentation de volume supplémentaire s'accompagne d'un gonflement plastique et d'une forte augmentation de pression au sein de la chambre à air, répondant alors de nouveau selon la courbe $p(R)$, dans sa dernière portion.

C'est exactement ce que l'on observe lorsqu'un sculpteur sur ballon gonfle son ballon : une zone de grand rayon se propage le long du cylindre et l'envahit peu à peu (voir la membrane, en équilibre, sur la figure III.2.7-C).

Nous avons donc mis en évidence deux éléments dans la section 2.1.1 :

- l'existence d'un maximum à la courbe pression-rayon, qui permet un gonflement spontané de la membrane à partir d'une certaine pression ($2,3 \times 10^4$ Pa), et qui est dû à la géométrie cylindrique associée à l'élasticité (équation III.2.5),
- une remontée plastique spécifique à notre matériau qui permet le retour à un équilibre

« élasto-plastique » .

2.1.2 Module de Poisson

Étirer un matériau élastique conduit également à une contraction dans les directions transverses. Cette contraction est déterminée par le module de Poisson ν du matériau. Dans le cas d'un matériau isotrope, ν vérifie :

$$\nu = -\frac{L_0(b-b_0)}{b_0(L-L_0)} = -\frac{L_0(a-a_0)}{a_0(L-L_0)} \quad (\text{III.2.9})$$

Pour un matériau incompressible, $\nu = 0,5$. Dans le cas d'une membrane élastique cylindrique soumise à une surpression, les contraintes en circonférence sont ainsi reliées à des contraintes ou à des déformations longitudinales. Selon Lighthill [83, 103], pour une membrane qui ne serait pas libre de glisser sur le support, la vitesse des ondes s'en trouve divisée par un facteur $1 - \nu^2$. Cependant, dans un cas comme le nôtre, la membrane, libre de glisser sur son support s'adapte aux contraintes longitudinales, et la vitesse des ondes reste $c_0 = d_0 E / (2\rho R_0)$. Par acquit de conscience, nous avons mesuré (dans une expérience de traction du même type qu'au paragraphe 2.1.1.a) le module de Poisson, qui se trouve évoluer en fonction de la déformation : les résultats se trouvent sur la figure III.2.8. A faible déformation, le module vaut 0,5, ce qui caractérise un matériau incompressible, tandis qu'il diminue lorsqu'on augmente la déformation.

Le matériau présente donc un module de Poisson dépendant de la déformation, mais dont nous ne tiendrons plus compte, en vertu des remarques de Lighthill.

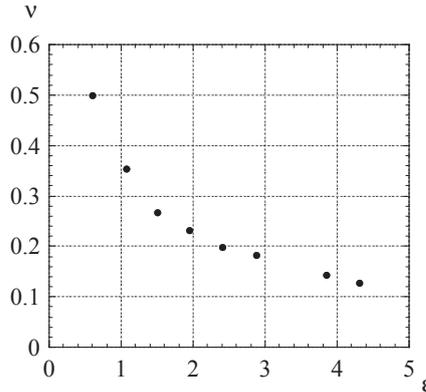


FIG. III.2.8 – Module de Poisson $\nu = -\frac{L_0(b-b_0)}{b_0(L-L_0)}$ mesuré en fonction de l'élongation $\epsilon = (L - L_0)/L_0$.

2.1.3 Propriétés dynamiques de la membrane

L'épaisseur relative d_0/R_0 de l'aorte vaut moins de 0,1 (0,07 pour notre chambre à air). L'ouvrage de Peyrard [97] donne l'expression des forces dues à l'inertie de la membrane (F_i) et de celles dues à la pression provoquée par son augmentation de rayon F (voir

équation III.2.2) que l'on peut alors comparer : l'inertie de la membrane est négligeable si

$$F_i = \rho d_0 \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} \ll F = E d_0 \frac{R - R_0}{R_0} \quad (\text{III.2.10})$$

C'est à dire, en loi d'échelle :

$$\omega \ll \frac{c_0}{\sqrt{R_0 d_0}} \approx 2000 \quad (\text{III.2.11})$$

Cette condition est toujours remplie dans nos expériences, pour lesquelles $\omega \leq 20$. Nous considérons par la suite que la masse de la membrane joue un rôle négligeable par rapport à celle du liquide contenu, et qu'elle réagit instantanément aux fluctuations de pression sans montrer d'inertie.

Le système composé de la membrane élastique, du tuyau de recirculation aval et du réservoir se comporte comme un oscillateur amorti, dont on trouvera les propriétés et la caractérisation en annexe C.1. On retient de cette étude que les fréquences observées sont compatibles avec l'hypothèse d'une élasticité linéaire.

2.2 Le cœur : un piston piloté par un vérin

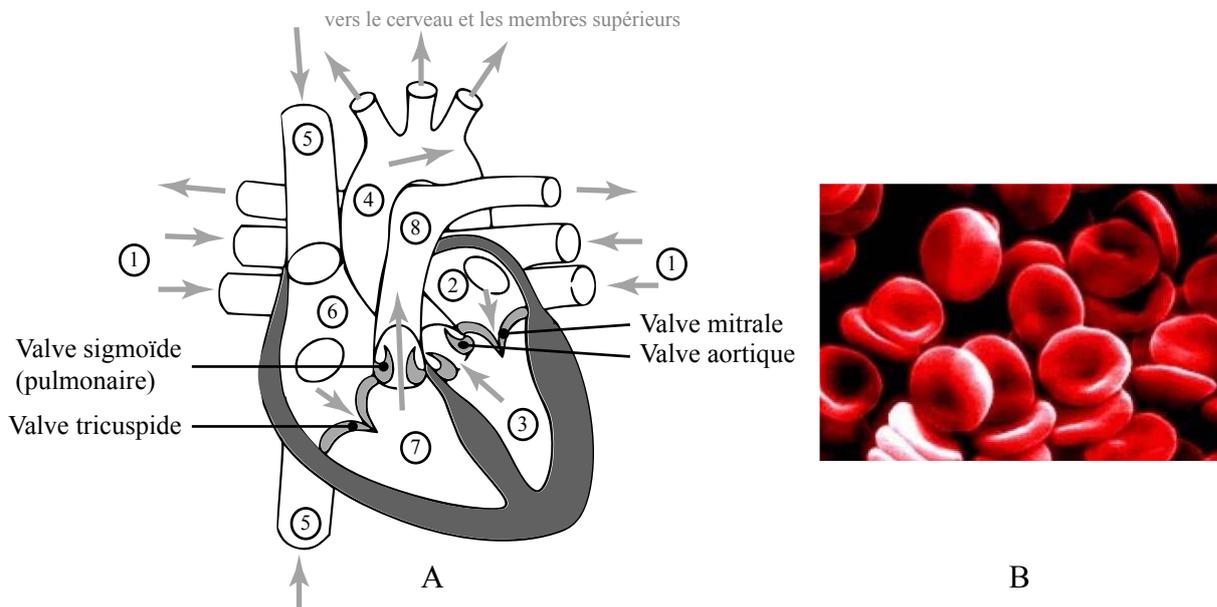


FIG. III.2.9 –

A/ Schéma fonctionnel du cœur humain. Les flèches grises représentent le sens de circulation du sang qui arrive par (1) les veines pulmonaires dans (2) l'oreillette gauche, descend dans (3) le ventricule gauche qui l'éjecte alors dans (4) l'aorte. Après avoir alimenté les organes et les muscles, il revient par (5) les veines caves supérieure et inférieure dans (6) l'oreillette droite, puis dans (7) le ventricule droit, pour se diriger alors via (8) l'artère pulmonaire vers les poumons, et revenir oxygéné au point de départ.

B/ Photo de globule rouges (hématie) mettant en évidence leur forme biconcave caractéristique.

du logiciel Labview 7.0 . Le mouvement qu'il décrit est programmable. Dans beaucoup de cas, nous prenons simplement une course sinusoïdale qui permet de retrouver des résultats pertinents pour les artères. L'amplitude et la fréquence du mouvement sont alors des paramètres de contrôle.

	f (Hz)	Volume éjecté ($cm^3/cycle$)	Nb Womersley $Wo = R\sqrt{\omega/\nu}$	Nb Reynolds $Re = UR/\nu$	Nb Mach $Ma = U/c_0$
Cœur humain	1,25 – 3	~ 80	~ 20	700 – 2500	0,1 – 0,25
Piston-vérin	0,1 – 10	5,6 – 168	7 – 40	900 – 10^4	0,1 – 0,16

TAB. III.2.2 – Propriétés du cœur humain et de son homologue expérimental [60, 68, 73, 77, 79, 102].

Pour s'assurer que le caractère pulsatile de l'écoulement du sang est conservé, il convient de comparer le nombre de Womersley Wo , qui caractérise l'écoulement aortique avec celui de notre expérience. C'est en effet ce nombre qui compare l'importance des forces d'inerties instationnaires à celle des forces visqueuses tendant à régulariser le flot. En évaluant l'importance spatiale des couches limites dans le tube, on écrit $Wo = R\sqrt{\omega/\nu}$ (R est le rayon de l'aorte, ω la pulsation cardiaque et ν la viscosité cinématique du sang (cf. § suivant). Selon Fung [68], Wo vaut environ 20 chez l'homme (pour 14 chez le chien, 8 chez le chat et 3 chez le rat), ce que confirme Humphrey [77] avec une valeur de 22, 2 pour l'aorte humaine (4 pour la fémorale), ou encore Ku [79] avec une estimation de 16. Dans notre expérience, il peut varier entre 7 et 40 environ, ce qui montre que nous sommes dans les mêmes domaines de fonctionnement.

Les vitesses que le cœur imprime au sang permettent également d'établir le nombre de Reynolds $Re = UR/\nu$ (avec U la vitesse moyenne de l'eau dans la membrane). Il compare l'importance des forces inertielles par rapport aux forces visqueuses, et on l'évalue dans l'aorte entre 700 et 2500 [60, 68, 73] en activité normale (jusqu'à 6000 à l'effort). Notre montage permet, quant à lui de naviguer entre 900 et 10^4 , ce qui recouvre largement le domaine physiologique. Les nombres de Reynolds mis en jeu sont assez grands pour considérer que la viscosité joue un rôle négligeable, et nous permettront désormais d'utiliser une approche potentielle pour les modélisations de l'écoulement. Remarquons au passage que le nombre de Reynolds vaut entre 10^{-2} et 10^{-3} dans les conduits capillaires [68], ce qui rend notre étude parfaitement impropre à ce domaine : nous ne parlons ici que des grosses artères !

Enfin, il nous faut aussi faire attention au nombre de Mach $Ma = U/c = U/\sqrt{Ed/2\rho R_0}$ (avec ρ la masse volumique du fluide) [102], parfois aussi appelé nombre de Shapiro [91]. Le tube élastique a en effet propension à créer et transmettre des ondes élastiques, et il est important de savoir si la vitesse de ces ondes est plus ou moins grande que la vitesse effective du fluide en son sein. En estimant la vitesse des ondes à partir des propriétés élastiques reportées dans [73], on trouve un nombre de Mach entre 0,1 et 0,2, que confirme Pedley [94], ce qui signifie que nous sommes en régime subsonique. Notre montage, quant à lui, présente une célérité des ondes élastiques de 6m/s, pour un nombre de Mach entre 0,1 et 0,16, ce qui nous place dans un régime réaliste.

2.3 Le sang : de l'eau

Le sang a pour fonction de transporter en tout point du corps humain protéines, nutriments, oxygène et cellules du système immunitaire. Il contient donc quantité de cellules et de molécules fonctionnelles [77]. Lorsqu'on le centrifuge, on peut séparer le plasma de tout un ensemble de cellules sanguines. Le plasma est essentiellement composé d'eau (90 %), de sels et de protéines, et est newtonien, avec une viscosité dynamique de $1,2 \cdot 10^{-3}$ Pa.s à 37°C (contre $0,7 \cdot 10^{-3}$ Pa.s pour l'eau à cette température), et une densité de 1,3. Viennent ensuite les cellules sanguines (dont 95 % de globules rouges (figure III.2.9-B), 4,9 % de plaquettes et des globules blancs, principalement). Les globules rouges contiennent l'hémoglobine qui est porteuse d'oxygène, et dont la viscosité est de $6 \cdot 10^{-3}$ Pa.s. Toutefois toutes ces cellules sont petites, les plus grosses étant les globules blancs avec $22 \mu\text{m}$ de diamètre maximum ($7,6 \mu\text{m}$ pour les globules rouges). Elles tendent à s'aggréger au repos, mais dans un vaisseau suffisamment gros et avec suffisamment de cisaillement, on peut estimer que leur présence modifie simplement la viscosité du sang, qui peut alors être considéré comme newtonien, avec une viscosité cinématique voisine de $4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ [60, 79, 94]. Nous utilisons donc de l'eau dans notre montage.

2.4 Pertes régulières imposées par l'écoulement dans le réseau artériel secondaire : le tube aval

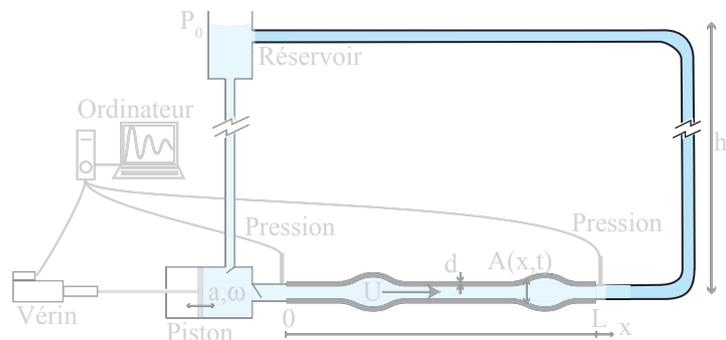


FIG. III.2.11 – Le réseau artériel secondaire dans notre montage

À la sortie de l'aorte, le sang se déverse dans les artères iliaques, alimentant tout le réseau systémique secondaire des membres inférieurs (figure III.2.2-B). L'influence de ce réseau semble se manifester de deux façons : tout d'abord, la soudaine augmentation de rigidité à l'embranchement iliaque crée un site de réflexion d'ondes [67, 83]. Le raccordement de la chambre à air à une portion de tube rigide va jouer le même rôle dans notre montage, de façon probablement plus intense encore, puisque l'on passe à une vitesse c_0 infinie.

Les artères secondaires créent également une résistance sous forme de perte de charge que l'écoulement doit vaincre. C'est Poiseuille [86], vers 1830, qui met en évidence cet effet, car il mesure des pressions bien plus basses dans les veines que dans les artères, même les plus petites. Il en déduit que c'est le réseau des capillaires sanguins au niveau des muscles et des organes qui créent cette forte perte de charge. Dans notre expérience, ce réseau est

matérialisé par le tuyau en aval de la membrane, qui remonte au bac réservoir. En changeant la longueur et le diamètre de ce tube, nous modifions la résistance à l'écoulement en sortie de tube, qui devient un paramètre ajustable dans notre système.

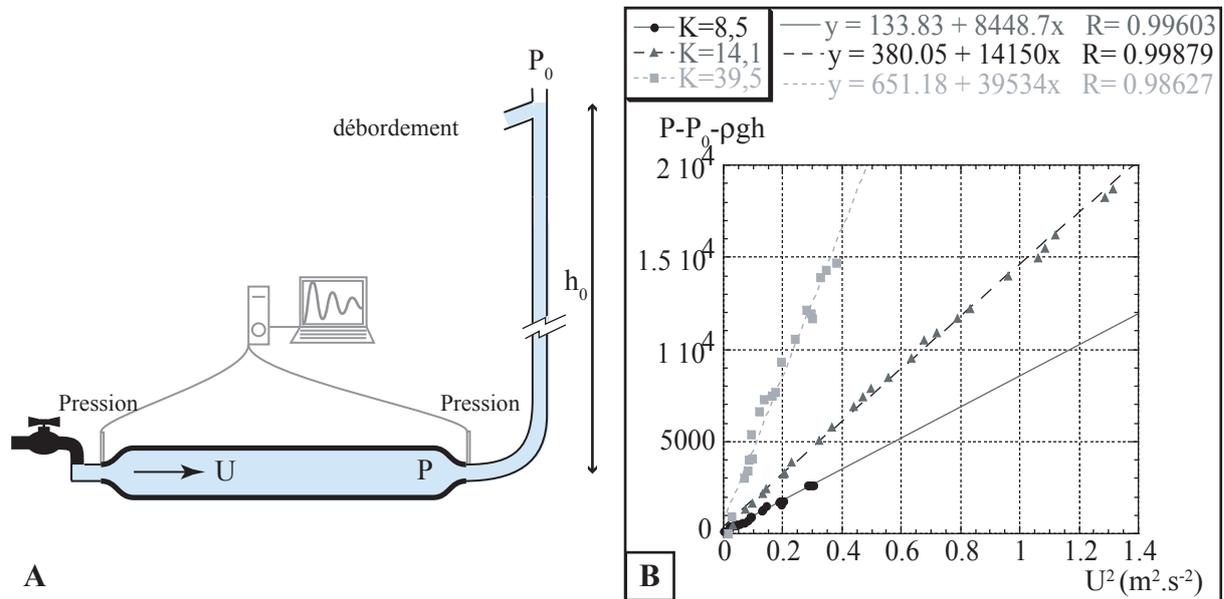


FIG. III.2.12 – Mesure des pertes dans trois différents systèmes de tuyaux placés en aval de la membrane.
A/ montage expérimental.
B/ résultats expérimentaux. Les lignes continues représentent la meilleure approximation linéaire pour chacun des cas.

Pour évaluer les pertes de charge engendrées, nous mesurons la perte de charge créée par ces tuyaux avals lorsqu'ils sont parcourus par un fluide en écoulement permanent. À cette fin, nous modifions le montage expérimental pour court-circuiter le vérin et connecter l'entrée de fluide à une source continue (en pratique, le robinet d'eau courante), et pour supprimer le bac réservoir au profit d'un simple débordement (figure III.2.12-A). Les capteurs de pression nous fournissent la valeur de $P - P_0$, à laquelle il faut retrancher la pression hydrostatique. Le débit est quant à lui mesuré soit à l'aide d'un débitmètre magnétique, soit en mesurant la quantité de fluide s'écoulant pendant un laps de temps chronométré.

Nous constatons alors que les pertes de charges sont proportionnelles au carré de la vitesse mesurée (figure III.2.12-B). Pour comprendre ces résultats, il faut prendre en compte le régime de l'écoulement dans notre tuyau aval. En théorie, la perte de charge régulière créée par un tube n'est pas la même en régime de couche limite laminaire ($Re < 2000$; $\Delta P \propto U$ pour un profil de Poiseuille) ou en régime turbulent ($Re > 4000$; $\Delta P \propto U^2$) [105]. En pratique, il est très rare de se trouver dans le cas laminaire : il faut utiliser des liquides très visqueux (pétrole brut, huile, mazout) ou des tubes très fins (capillaires). Dans notre cas, nous pouvons calculer un nombre de Reynolds moyen construit sur une vitesse de 1 m/s, un diamètre de tube de 8 mm et une viscosité cinématique pour l'eau de $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. On trouve alors $Re \approx 4000$. Nous sommes donc effectivement en régime turbulent. Nous mesurons expérimentalement le coefficient de proportionnalité K ($\Delta P =$

perte de charge créée par le tuyau $= K\rho U^2$). En changeant la longueur et le diamètre du tube aval, on varie dans une certaine mesure la résistance que rencontre l'écoulement en sortie du tube élastique. On a trois valeurs possibles pour K : 8, 14 ou 40. En pratique, K croît lorsque l'on augmente la longueur du tube, lorsque l'on diminue son diamètre ou qu'on le remplace par un matériau plus rugueux. Pour une vitesse du sang de 1 m/s, notre perte de charge vaudra donc 8 000 , 14 000 ou 40 000 Pa, pour une valeur de perte de charge entre l'aorte humaine et l'oreillette du cœur de 13 500 Pa selon McDonald [86].

2.5 Diagnostic : les outils de mesure.

2.5.1 Pression, débit

Enfin, venons-en à ce que nous mesurons : des capteurs piézoélectriques de pression (SCAIME® ATM-231) sont placés de part et d'autre du tube souple. Un débitmètre électromagnétique à insertion (Serv'Instrumentations 8045 DN 15, capacité 10L/min) est parfois placé à sa sortie. Leurs signaux sont soit observés durant les expériences sur un oscilloscope, soit enregistrés sur l'ordinateur via une carte d'acquisition National Instruments® PCI-MIO-16XE10 pilotée sous le logiciel Labview.

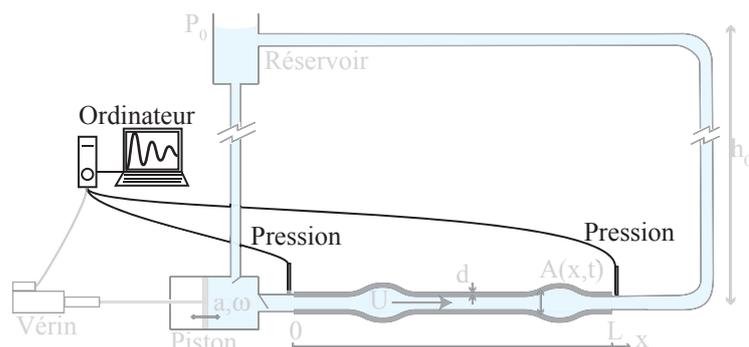


FIG. III.2.13 – Capteurs de pression.

2.5.2 Déformations

Les variations de diamètre de la membrane au cours d'un cycle sont typiquement de l'ordre du millimètre, tandis que la membrane elle-même mesure souvent un mètre de long. Cette différence d'échelle (10^3) pose un problème de résolution pour l'observation de ces déformations à la caméra dont le nombre de pixels dans la plus grande direction est de l'ordre de mille. C'est pourquoi nous utilisons un zoom géométrique constitué d'une série de plans laser parallèles éclairant le tube avec une faible inclinaison α (figure III.2.14-A). Ils dessinent sur le tube des paraboloides lumineuses, qui se déplacent horizontalement de $\delta x = 2\delta R/\tan(\alpha)$ lorsque le rayon de la membrane s'accroît de δR . Avec $\alpha = 11^\circ$, un petit gonflement du tube provoque un déplacement horizontal de la ligne lumineuse dix fois plus grand $\delta x = 10\delta R$ (figure III.2.14). Cette amplification des déformations nous permet d'observer la membrane de façon plus précise que la simple observation directe. La figure III.2.14 montre ainsi le déplacement des lignes lumineuses en cas de gonflement homogène (B) ou localisé (C).

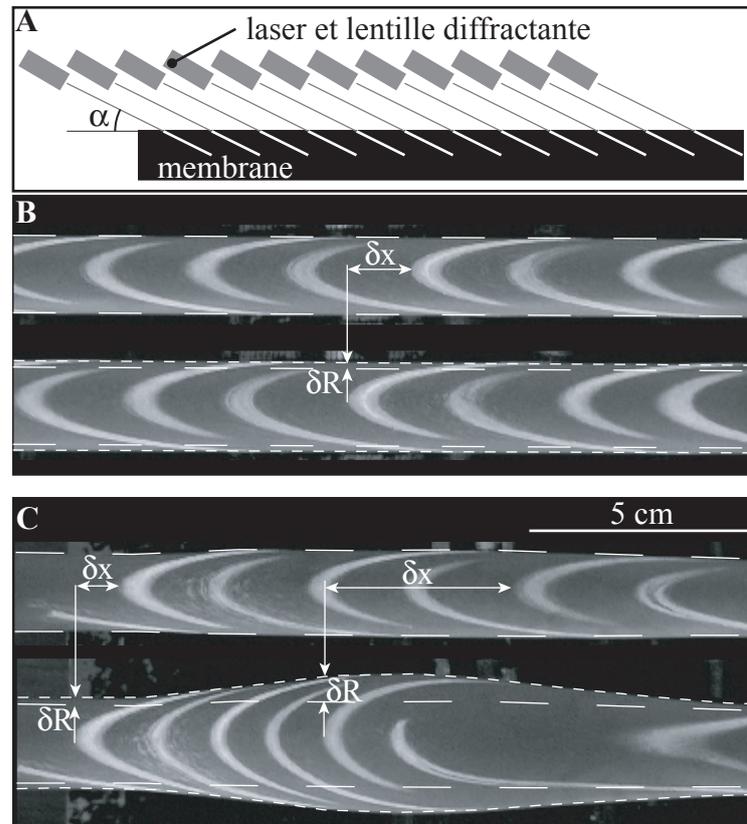


FIG. III.2.14 –

Amplification des déformations de la membrane grâce aux plans laser en éclairage rasant.

A/ Vue schématique de côté. Les diodes lasers envoient des nappes qui éclairent la membrane avec un angle α .

B et C/ Vue de dessus. Les zones éclairées apparaissent en clair sur la membrane grise, et se déplacent de δx quand le rayon de la membrane augmente de δR . (La taille de référence de la membrane est représentée par les pointillés larges). Dans notre système, $\delta x = 10 \delta R$.

Les lignes lumineuses sont alors visualisées par dessus via un miroir, avec un caméscope numérique CANON[®] DV-XM2-CCD de résolution 576×784 pixels, ou une caméra IMPERX[®] IPX2M30 de résolution 1200×1600 pixels, selon les cas. Chaque paraboloïde nous donne alors la valeur du gonflement là où elle éclaire la membrane.

2.6 Précautions à prendre avec le montage expérimental

2.6.1 Vieillessement du caoutchouc

Le latex qui constitue nos membranes est manifestement sujet au vieillissement : les chambres à air qui sont restées longtemps sur le montage expérimental sous contrainte, même légère, blanchissent. Parfois elles deviennent plus souples et cela se sent à la main ! Nous mesurons donc ce vieillissement pour l'influence qu'il a sur nos résultats. Pour cela, nous découpons une portion de tube, y dessinons deux traits espacés de 10 cm, et y suspendons une masse de 1,704 kg. Nous mesurons alors l'élongation en fonction du temps

(figure III.2.15-A).

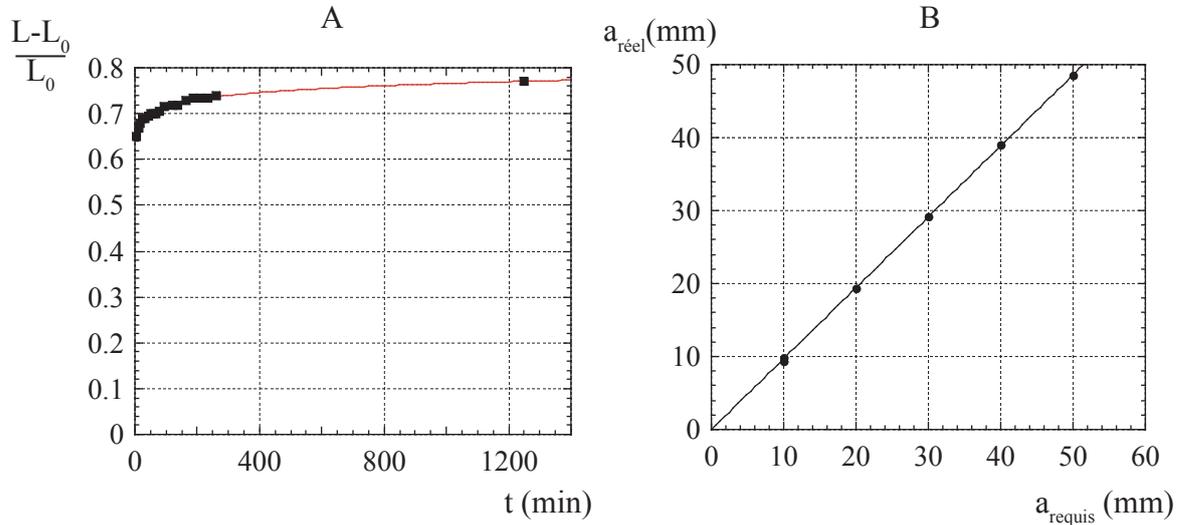


FIG. III.2.15 – **A/** Vieillesse sous contrainte. La ligne représente le meilleur ajustement logarithmique $y = 0,62 + 0,050 \log x$; $R = 0,99201$.
B/ Amplitude des mouvements du piston vus par la membrane en fonction de celle commandée au vérin. La droite représente la meilleure approximation proportionnelle $y = 0,97x$; $R = 0,99996$.

La dépendance en temps est lente : elle suit une loi de type logarithmique et conduit à des variations d'élongation de 15% sur une heure. Toutefois, dans les expériences qui viendront, nous devons veiller à travailler sur des échelles de temps assez courtes pour que cet effet ne se fasse pas trop sentir. C'est à dire sur un ordre de grandeur inférieur à l'heure. Quelques minutes semblent convenir.

2.6.2 Fuites

La conception et l'utilisation répétée du piston a conduit à une usure parfois importante du joint d'étanchéité. Certaines de nos expériences peuvent ainsi présenter des fuites d'eau au niveau du piston. Ce qui signifie qu'au lieu d'envoyer tout le liquide requis dans la membrane élastique, une partie de ce liquide s'évacue ailleurs. L'amplitude apparente des mouvements du piston vue par la membrane ($a_{réel}$) est dans ce cas plus faible que celle dictée par l'ordinateur (a_{requis}). Pour évaluer l'importance de cette différence, on impose un régime de marche du piston, et on mesure le temps que le circuit met à perdre un litre d'eau par fuite. On remonte alors à la fuite pour chaque cycle. La figure III.2.15-B indique la relation entre $a_{réel}$ et a_{requis} pour des fréquences de 0,4 Hz (qui correspond au réglage pour lequel on enregistre les pertes les plus importantes) et 1 Hz. La différence entre l'amplitude requise et celle réelle n'excède pas les 3%, nous considérons par la suite que ces fuites ne sont pas un problème pour les conclusions que nous tirons de nos expériences.

Chapitre 3

Comportement ondulatoire à l'échelle du cycle cardiaque

Nous sommes à présent en mesure d'utiliser notre montage. Comme nous l'avons évoqué, une membrane cylindrique ainsi soumise à écoulement pulsé a vocation à propager des ondes. Celles-ci caractérisent la réaction de la membrane à la sollicitation brutale du piston à chaque cycle. Dans ce chapitre, nous mesurons les déformations de la membrane pour mettre en évidence ces ondes et nous développons les outils permettant de les appréhender. Nous fixons la valeur expérimentale du paramètre de perte de charge K à 8 pour l'ensemble du chapitre.

3.1 Seuil d'apparition d'ondes

Une première constatation s'impose lors de nos expériences en écoulement pulsé : selon le régime de fonctionnement du piston, la résistance en sortie et la longueur du tube élastique, ce dernier présente deux types de comportements différents. Dans certains cas, on peut observer (à l'œil) une claire propagation d'ondes de déformation le long de la membrane. Cependant dans d'autres situations, les déformations sont synchrones tout au long de la membrane, comme si l'on gonflait périodiquement le tube, mais de façon quasistatique.

La figure III.3.1 présente deux diagrammes spatiotemporels construits à partir de nos séquences vidéos de paraboloides laser : pour chaque expérience, nous retenons, sur chaque prise de vue, la ligne de crête contenant les sommets des paraboloides (en blanc sur la figure III.3.1-A). Nous les reportons alors sur une image unique, en décalant vers le bas à chaque nouvelle prise de vue. Nous obtenons ainsi les diagrammes spatiotemporels présentés en B et C. Ceci nous permet de suivre l'évolution de la déviation des lignes lasers (et donc des déformations de la membrane) au cours du temps. Sur le diagramme de la figure III.3.1-B, les déformations sont synchrones, c'est à dire qu'elles sont sensiblement les mêmes pour tout x à un instant t donné. Ce n'est pas le cas de la figure III.3.1-C : des ondes de déformation se propagent. On mesure pour cette expérience la vitesse de propagation c en comptant le nombre d'images nécessaires pour parcourir la membrane sur un aller-retour (mis en évidence par les lignes grises sur la figure III.3.1-C). Soit 52 images à raison de 168,28 images par secondes, pour parcourir deux fois 1,03 m, c'est à dire une célérité $c = 6,66$ m/s. Nous sommes donc passés d'une déformation synchrone pour $f = 0,5$ Hz (figure III.3.1-B) à une déformation ondulatoire pour $f = 0,6$ Hz (figure III.3.1-C).

Le signal de pression que l'on mesure révèle également cette transition sur la figure

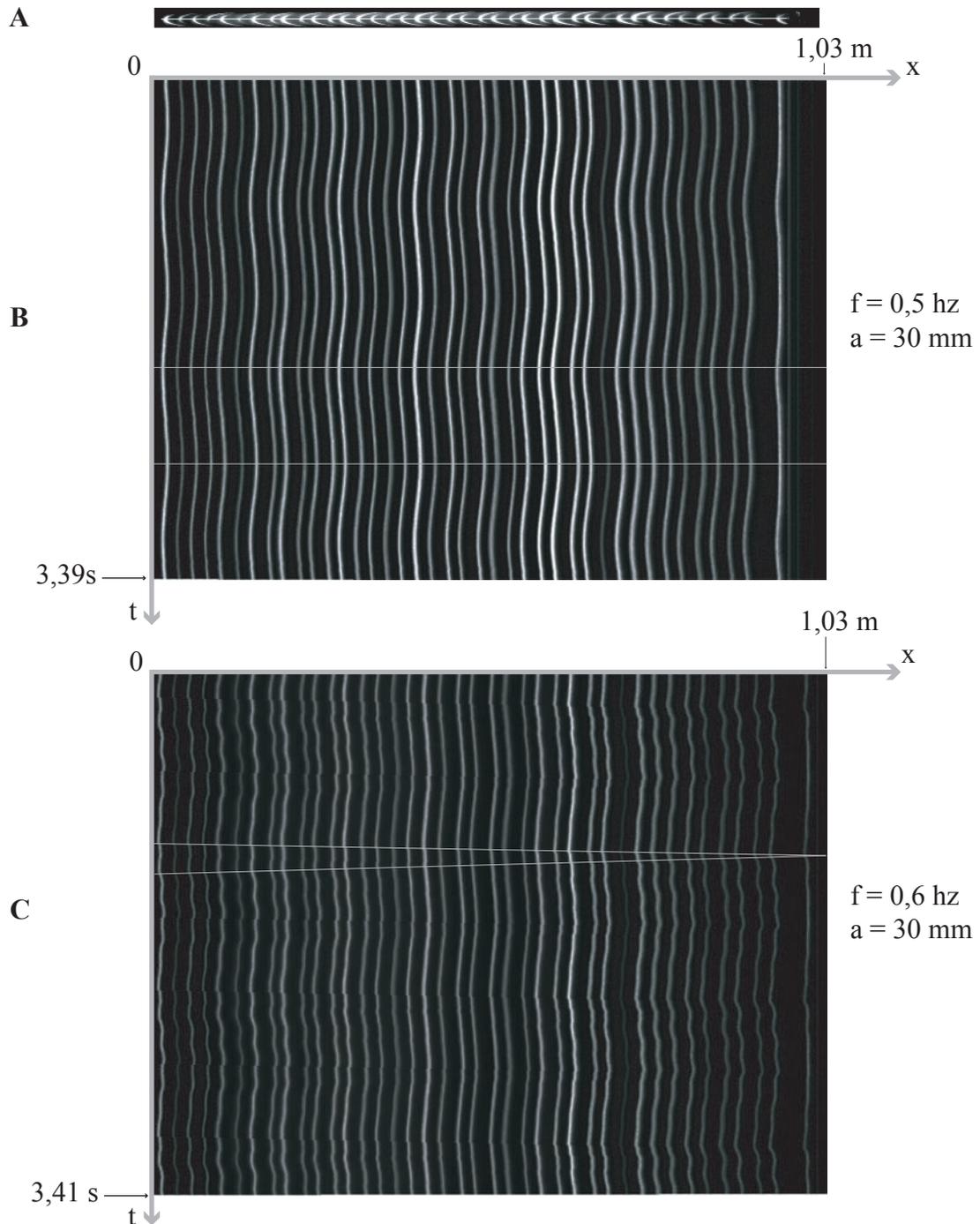


FIG. III.3.1 – **A/** Construction des diagrammes spatiotemporels.
B/ Diagramme spatiotemporel obtenu pendant 3,39 s de forçage à $f = 0,5 \text{ Hz}$ et $a = 30 \text{ mm}$ sur une membrane de longueur $L = 1,03 \text{ m}$.
C/ Diagramme spatiotemporel obtenu pendant 3,39 s de forçage à $f = 0,6 \text{ Hz}$ et $a = 30 \text{ mm}$ sur une membrane de longueur $L = 1,03 \text{ m}$.

III.3.2. Pour les bas régimes, la pression suit en effet quasiment une fonction sinusoidale calée sur le forçage à 0.9 Hz, tandis qu'en augmentant la course du piston, de nouvelles fréquences apparaissent, résultant de l'interférence entre les ondes principales et réfléchies parcourant la membrane. La transition du régime homogène (à faible amplitude) au régime d'ondes (grande amplitude) a lieu dans cet exemple pour $a = 40$ mm environ.

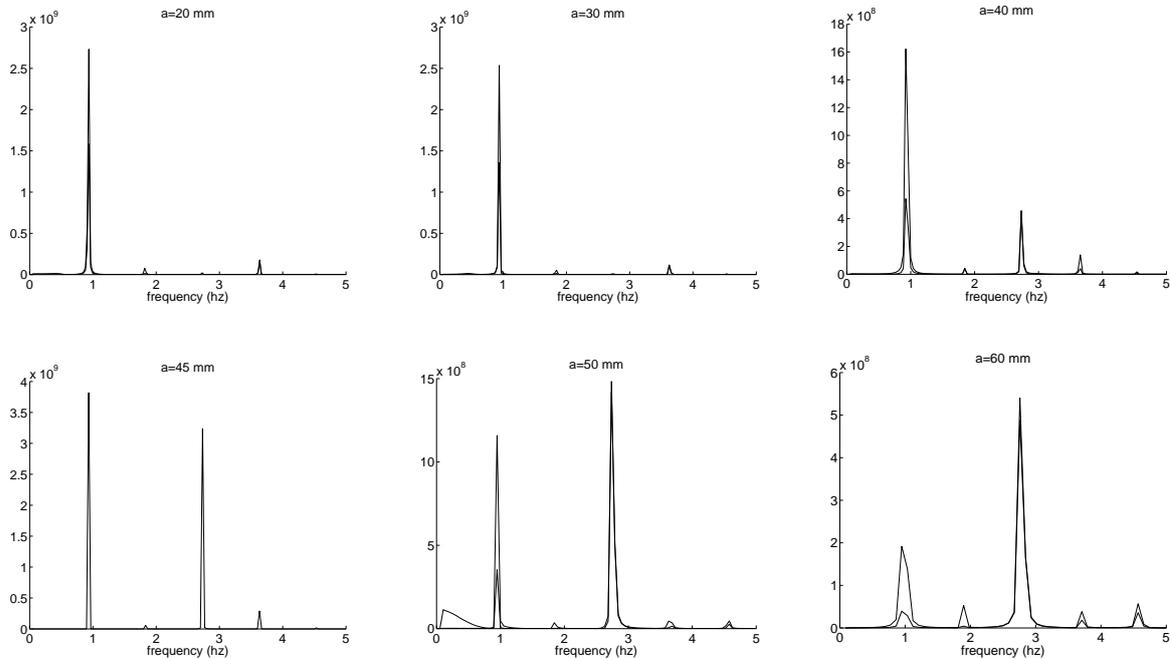


FIG. III.3.2 – Transformée de Fourier des deux signaux de pression enregistrés (à chaque bout de la membrane élastique), pour une fréquence de forçage de 0.9 Hz et une amplitude variable.

Le système quitte le mode de déformation homogène pour le mode d'ondes lorsque (figure III.3.3) l'on augmente la course a du piston, sa fréquence f , ou encore la longueur L du tube élastique (les lettres étoilées désigneront leurs valeurs au seuil de transition). La figure III.3.3 précise les tendances observées : pour une membrane longue de 50 cm, par exemple, on passe le seuil de transition pour une fréquence d'environ 1,5 Hz lorsque l'amplitude des mouvements du piston est de $a = 3$ mm, mais seulement pour $f = 0,65$ Hz lorsque a vaut 30 mm (figure III.3.3-A). De même, à amplitude fixée (3 mm), il faut une longueur supérieure à 50 cm pour observer des ondes avec une fréquence de 1,5 Hz, et cette limite descend à 10 cm si on augmente la fréquence à 4 Hz (figure III.3.3-B).

Nous étudions dans ce chapitre la transition entre ces deux régimes, de façon expérimentale, théorique et numérique.

3.2 Modèle de propagation d'ondes dans un tube élastique

Dans ce paragraphe, nous cherchons à expliciter le phénomène de la propagation d'ondes de pression dans un tube élastique. Nous considérons donc un écoulement irrotationnel de fluide parfait et homogène.

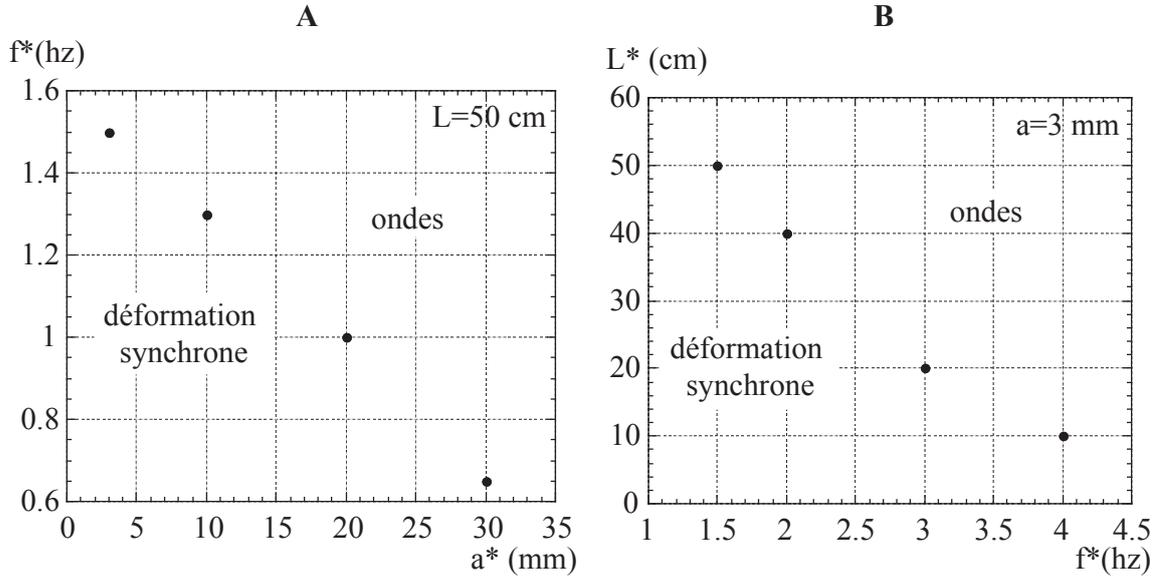


FIG. III.3.3 –

Valeurs de a^* , f^* et L^* observées au seuil de transition.

A/ On a fixé L , et on observe que l'on passe du régime de déformation homogène à celui des ondes en augmentant la fréquence ou l'amplitude des mouvements du piston.

B/ On observe de même que l'augmentation de la longueur du tube élastique provoque l'apparition des ondes.

3.2.1 Approche classique

a/ Repère adopté, notations

Nous choisissons pour décrire notre montage, un système de coordonnées cylindriques (r, θ, x) , où l'axe x est confondu avec celui de notre membrane (voir figure III.3.4). Le fluide qui la remplit a pour densité ρ , et nous appelons $U(x, t)$ sa vitesse moyenne à l'abscisse x à l'instant t ($u(r, x, t)$ est la vitesse instantanée), et $R(x, t)$ le rayon du tube au même endroit et au même moment. Sa valeur à vide est R_0 . L'expression $A(x, t) = \pi R(x, t)^2$ relie alors la section du tube à son rayon. On définit $\eta(x, t) = R(x, t) - R_0$ comme la perturbation du rayon de la membrane.

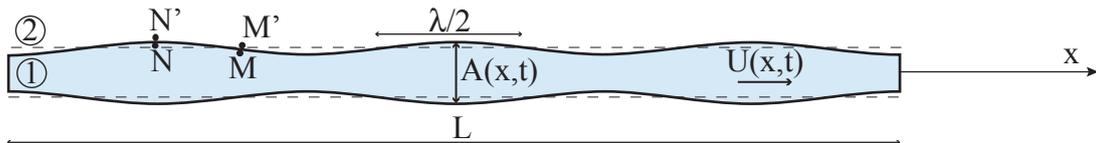


FIG. III.3.4 – Notations utilisées pour l'étude des ondes. L'intérieur de la membrane constitue le milieu 1, de longueur L , de section $A(x, t)$.

Nous supposons que la membrane subisse sur une région de taille $\lambda/2$ une augmentation δA de sa section (figure III.3.4). Si $\lambda/2$ est plus petite que L , alors cette région se

comporte comme une demi longueur d'onde élastique et se propage à la vitesse c_0 le long du tuyau. À l'inverse, si $\lambda/2$ est plus grand que L , toute la membrane appartient à une seule et même demi-longueur d'onde, elle gonfle et dégonfle donc de manière homogène au cours des cycles de forçage. Il s'agit donc maintenant d'évaluer λ et de le comparer à L pour comprendre la transition dans notre système. Pour refléter les résultats expérimentaux, nous devons donc trouver un rapport λ/L décroissant selon f et a .

b/ Modèle d'ondes longues

Nous rappelons ici le point de vue classique [83, 94] permettant de retrouver la vitesse des ondes évoquées dans le chapitre 2 : notre système est alors le siège d'ondes élastiques transversales (nous ne prendrons jamais en compte les ondes longitudinales éventuelles).

Conservation de la masse dans un volume de contrôle :

Pour commencer, nous considérons l'évolution de la masse de fluide que contient la membrane entre les abscisses x et $x + \delta x$ entre les instants t et $t + \delta t$:

$$\left[\rho A \delta x \right]_{(t)}^{(t+\delta t)} = \left[\rho U \delta t A \right]_{(x+\delta x)}^{(x)} \quad (\text{III.3.1})$$

Ce qui mène à l'équation de continuité suivante :

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U A)}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.3.2})$$

Equation d'Euler dans le fluide :

Si l'on admet que le fluide est parfait, le terme visqueux de l'équation de Navier-Stokes est nul, il reste donc l'équation d'Euler :

$$\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{III.3.3})$$

Equation d'onde :

Dans une première approximation linéaire (faible pente, $\lambda/R \gg 1$), on peut approcher le terme en $\frac{\partial(\rho U A)}{\partial x}$ de (III.3.2) par $\rho_0 A_0 \frac{\partial U}{\partial x}$ (avec ρ_0 la valeur autour de laquelle la densité varie en fonction de la pression) et négliger le terme en $U \frac{\partial U}{\partial x}$ dans (III.3.3). Les équations (III.3.2) et (III.3.3) se combinent alors en :

$$\frac{\partial^2 \rho A}{\partial t^2} = A_0 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (\text{III.3.4})$$

Soit

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{A_0} \cdot \frac{\partial \rho A}{\partial p} \right)_{p=0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III.3.5})$$

Cette équation est caractéristique d'un phénomène de propagation d'ondes, dont la célérité c vérifie :

$$\frac{1}{\rho_0 c^2} = \frac{1}{\rho_0 A_0} \cdot \frac{\partial \rho A}{\partial p} = \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial p}}_K + \underbrace{\frac{1}{A_0} \cdot \frac{\partial A}{\partial p}}_D \quad (\text{III.3.6})$$

Cette vitesse c dépend du matériau et de la géométrie de la membrane, ainsi que de la masse volumique du fluide. Elle comprend deux contributions distinctes : la compressibilité relative K du fluide et la distensibilité \mathcal{D} du tube [83]. Dans un tube rigide, K permet de décrire les ondes acoustiques. Dans le cas présent, nous considérons le sang comme incompressible, et décrivons la propagation d'ondes élastiques le long de la membrane. La loi de membrane (III.2.6) $\delta A = 2pR_0A_0/d_0E$ nous conduit ainsi à :

$$\mathcal{D} = \frac{2R_0}{d_0E} \quad \text{et} \quad c = c_0 = \sqrt{\frac{d_0E}{2\rho R_0}} \quad (\text{III.3.7})$$

La vitesse des ondes élastiques c_0 est une caractéristique du tube utilisé : c'est un paramètre que l'on peut ajuster, notamment au travers de d_0 et R_0 . La longueur d'onde qui y est associée est $\lambda = 2\pi c_0/\omega$.

c/ Mesure expérimentale de la longueur d'onde λ

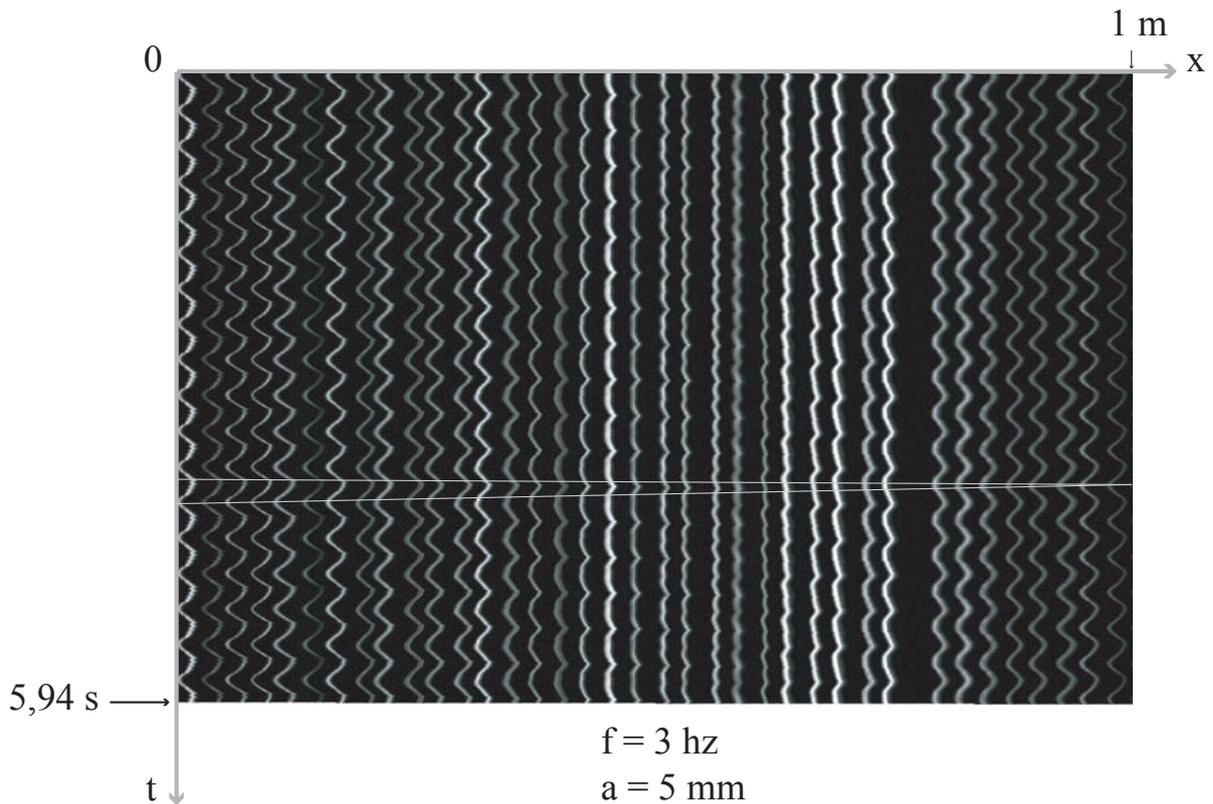


FIG. III.3.5 – Diagramme spatiotemporel obtenu pendant 5,94 s de forçage à $f = 3$ Hz et $a = 5$ mm sur une membrane de longueur $L = 1$ m.

Nous avons vu (§ 3.1) que l'étude des diagrammes spatiotemporels nous permettait de mesurer la célérité des ondes élastiques. Sur la figure III.3.5, obtenue pour une fréquence de $f = 3$ Hz et une amplitude $a = 5$ mm sur une membrane de longueur $L = 1$ m, il faut 34 images pour parcourir deux fois la membrane, à 168 images par secondes, soit une célérité $c = 9,90$ m/s. On peut alors remonter à la valeur de la longueur d'onde

par la relation $c = \omega/k = \lambda f$. Il vient alors $\lambda = 3,3$ m dans cette expérience. On en déduit $\lambda/R_0 \approx 330$. Dans ce régime, la longueur d'onde est donc grande devant R_0 . On peut néanmoins se demander si l'approximation de faible pente est toujours valable, c'est pourquoi nous développons un modèle d'ondes courtes.

3.2.2 Modèle d'ondes courtes

Nous développons ici une approche permettant de prendre en compte l'évolution du système lorsqu'il est soumis à des déformations de longueur d'ondes moins grande que dans l'approche linéaire. Ce modèle nous permettra également d'appréhender l'importance du milieu extérieur pour la propagation.

a/ Relation de dispersion des ondes élastiques

Nous adoptons à présent une approche potentielle, avec ϕ le potentiel des vitesses ($\text{grad}\phi = \underline{u}$). L'équation de continuité se traduit alors par une équation de Laplace, qui prend en coordonnées cylindriques la forme d'une relation de Bessel :

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{r\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{III.3.8})$$

Expression du potentiel des vitesses ϕ :

Les solutions de l'équation III.3.8 sont des combinaisons de fonctions de Bessel (l'équivalent en coordonnées cylindriques des fonctions circulaires sinus ou cosinus associées à une exponentielle croissante ou décroissante ($\alpha \cos(kz) e^{-ky}$) en coordonnées cartésiennes). Il faut alors associer une fonction harmonique à une fonction de type I (fonction de Bessel modifiée de première espèce) ou K (de seconde espèce). Ces dernières (K) nous sont interdites car elles divergent en $r = 0$ (figure III.3.6-A). Il nous reste donc des solutions qui s'écrivent

$$\phi(r, x, t) = Ux + \alpha I_0(kr) \cos(kx - \omega t) \quad (\text{III.3.9})$$

Pour expliciter U et ϕ , on a besoin des conditions à l'interface, où la vitesse radiale de la membrane (la dérivée particulière dR/dt de sa position) est égale à celle de l'eau :

$$\frac{dR}{dt} \approx U \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = k\alpha I_1(kR) \cos(kx - \omega t) \quad (\text{III.3.10})$$

En supposant que $\eta(x, t) = \beta \sin(kx - \omega t)$, on obtient la valeur de α en fonction de η , et, en remplaçant dans l'expression de ϕ :

$$\phi(r, x, t) = Ux - \frac{\beta\omega I_0(kr)}{k I_1(kR)} \left(1 - \frac{Uk}{\omega}\right) \cos(kx - \omega t) \quad (\text{III.3.11})$$

Le deuxième théorème de Bernoulli :

Nous pouvons alors exprimer tous les termes dont nous aurons besoin pour appliquer

le théorème de Bernoulli.

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{r=R} &= -\frac{\omega^2 \eta I_0(kR)}{k I_1(kR)} \left(1 - \frac{Uk}{\omega} \right) & \text{(III.3.12)} \\
u_r(R) &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R} = -\beta \omega \left(1 - \frac{Uk}{\omega} \right) \cos(kx - \omega t) \\
u_x(R) &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{r=R} = U + \frac{\eta \omega I_0(kR)}{I_1(kR)} \left(1 - \frac{Uk}{\omega} \right) \\
u^2 &\simeq U^2 + 2\eta U \omega \frac{I_0(kR)}{I_1(kR)} \left(1 - \frac{Uk}{\omega} \right)
\end{aligned}$$

Appliquons alors le deuxième théorème de Bernoulli au premier ordre en $\beta\omega/U$ (faibles déformations) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t) \quad \text{(III.3.13)}$$

Pour appliquer l'équation III.3.13, nous choisissons un point M proche de la membrane en un point de déformation nulle ($r_M = R = R_0$ avec $\eta_M = 0$, voir figure III.3.4) d'une part, et d'autre part un point N quelconque, mais toujours proche de la membrane ($r_N = R = R_0 + \eta_N$). Il découle alors

$$\frac{P_N - P_M}{\rho} \simeq \omega \frac{I_0(kR)}{I_1(kR)} \eta \left(1 - \frac{Uk}{\omega} \right) \left[\frac{\omega}{k} - U \right] \quad \text{(III.3.14)}$$

La relation de dispersion :

À ce stade, nous avons besoin d'introduire les propriétés de la membrane pour expliciter les pressions. On peut remarquer au passage que pour l'instant rien n'a été supposé de ce côté là, nous en sommes donc à un stade encore très général : si nous introduisons une tension de surface, on peut décrire l'instabilité capillaire d'un jet de liquide, par exemple [26].

Dans le cas présent, nous reprenons la loi de membrane III.2.6 avec $\delta R|_M = 0$ et $\delta R|_N = \eta$. L'équation précédente devient alors la relation de dispersion :

$$\frac{Ed}{\rho R_0^2} \simeq \omega \frac{I_0(kR)}{I_1(kR)} \left(1 - \frac{Uk}{\omega} \right) \left[\frac{\omega}{k} - U \right] \quad \text{(III.3.15)}$$

L'allure de la fonction $I_0(x)/I_1(x)$ est tracée sur la figure III.3.6-B.

- *Écoulements subsoniques* : dans la limite des petits nombres de Mach ($U/c \ll 1$), on a d'après [88] $I_1(X)/I_0(X) \underset{X \rightarrow 0}{\sim} X/2$ (voir figure III.3.6-C). Dans la limite où la longueur d'onde λ est grande devant R ($\lambda \gg R$), la célérité c_0 est donnée par :

$$\frac{\omega}{k} = \text{vitesse de phase} = c_0 = \sqrt{\frac{Ed}{2\rho R_0}} \quad \text{(III.3.16)}$$

On retrouve bien la même expression que l'équation III.3.7 précédemment établie.

- *Écoulements rapides* : lorsque la vitesse moyenne s'approche de la vitesse des ondes, la relation de dispersion s'écrit

$$\frac{\omega^2}{k^2} - \frac{2\omega U}{k} + U^2 - F(kR)c_0^2 = 0 \quad \text{avec } F(x) = 2 \frac{I_1(x)}{xI_0(x)} \quad \text{(III.3.17)}$$

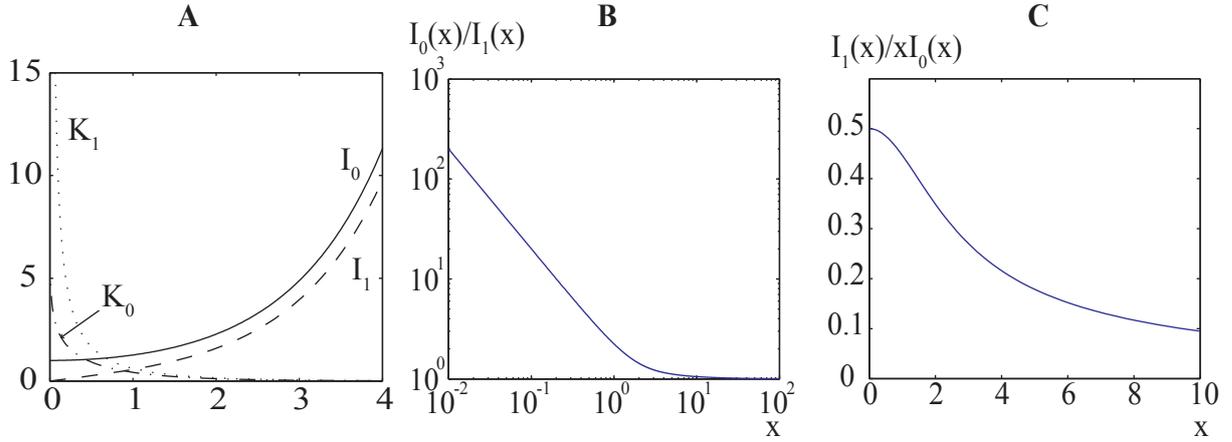


FIG. III.3.6 – **A/** Fonctions de Bessel I_0 ; I_1 ; K_0 et K_1 .
B/ $I_0(x)/I_1(x)$ en fonction de x .
C/ Comportement à l'origine de $I_1(x)/(xI_0(x))$

et c_0 défini comme précédemment. La vitesse de phase $c = \omega/k$ qui caractérise la propagation des ondes obéit donc à une équation du second degré dont le discriminant $\Delta = 4c_0^2 F(kR)$ est positif (d'après la figure III.3.6-C qui montre que F est positive). Les deux solutions s'écrivent par conséquent :

$$c_{\pm} = U \pm c_0 \sqrt{F(kR)} \quad (\text{III.3.18})$$

Toujours d'après la figure III.3.6-C $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$. Pour les petits nombres d'ondes, c'est à dire les grandes longueurs d'ondes, l'expression III.3.18 se simplifie en

$$c_{\pm} = U \pm c_0 \quad (\text{III.3.19})$$

La prise en compte des termes non-linéaires entraîne donc que si l'onde se propage dans le sens de l'écoulement moyen, elle a une vitesse de propagation c_+ supérieure à c_0 en valeur absolue, et inversement si elle se propage vers l'amont avec la vitesse c_- . Ceci confirme les considérations de Pedley [94].

b/ Le milieu extérieur joue-t-il un rôle important ?

Dans l'étude du paragraphe précédent, nous n'avons pas pris en compte d'écoulement externe à la membrane. Pourtant, dans le corps humain, les vaisseaux sanguins sont immergés dans les tissus environnants (muscles, lymphe...). Il s'agit maintenant de savoir si – dans le modèle comme dans le montage expérimental – cette approximation est légitime.

Considérons à présent un milieu 2 fluide et extérieur à la membrane (milieu 1, voir figure III.3.4). L'équation de Laplace pour le potentiel des vitesses doit être vérifiée dans les deux régions : $\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = 0$.

Expression des potentiels des vitesses ϕ_1 et ϕ_2 :

La solution de l'équation III.3.9 reste valable pour ϕ_1 puisque toutes les hypothèses relatives au milieu 1 sont inchangées. Pour le milieu extérieur, la vitesse moyenne de l'écoulement est nulle, et la fonction de Bessel qui satisfera à notre équation sera de seconde

espèce puisqu'on ne peut pas autoriser de divergence à l'infini, tandis qu'au contraire, celle en $r = 0$ ne pose pas de problème pour le milieu 2 qui ne s'étend pas jusque là. On obtient dès lors :

$$\phi_2 = \alpha_2 K_0(kr) \cos(kx - \omega t) \quad (\text{III.3.20})$$

On suit alors le même schéma que précédemment, la vitesse moyenne étant nulle dans le milieu extérieur.

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \Big|_{r=R} = -k\alpha_2 K_1(kR) \cos(kx - \omega t) \quad (\text{III.3.21})$$

donne par intégration

$$\eta(x, t) = \frac{k\alpha_2}{\omega} K_1(kR) \sin(kx - \omega t) = -\beta_2 \sin(kx - \omega t) \quad (\text{III.3.22})$$

$$\phi_2(r, x, t) = \frac{\beta_2 \omega K_0(kr)}{k K_1(kR)} \cos(kx - \omega t) \quad (\text{III.3.23})$$

Le deuxième théorème de Bernoulli :

En lieu et place des points M et N considérés pour l'étude du milieu 1, nous appliquons le théorème de Bernoulli entre les points M' et N' qui sont situés juste de l'autre côté de la membrane.

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} \Big|_{r=R} = \frac{\omega^2}{k} \frac{K_0(kR)}{K_1(kR)} \eta(x, t) \quad (\text{III.3.24})$$

$$u_r(R) = \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\beta_2 \omega \cos(kx - \omega t)$$

$$u_x(R) = \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \Big|_{r=R} = \frac{\eta \omega K_0(kR)}{K_1(kR)}$$

$$u^2 = \eta^2 \omega^2 \left(\tan^2(kx - \omega t) + \frac{I_0(kR)}{I_1(kR)} \right)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho_2} = g(t) \quad (\text{III.3.25})$$

Il vient alors :

$$\frac{P_{N'} - P_{M'}}{\rho_2} \simeq -\frac{K_0(kR)}{K_1(kR)} \eta \frac{\omega^2}{k} \quad (\text{III.3.26})$$

La relation de dispersion avec milieu extérieur :

Par conséquent, en supposant que les deux milieux ont la même densité ($\rho_1 = \rho_2$) :

$$\frac{(P_N - P_{N'}) - (P_M - P_{M'})}{\rho \eta} \simeq \frac{\omega^2}{k} \left[\left(1 - \frac{Uk}{\omega} \right) \frac{I_0(kR)}{I_1(kR)} + \frac{K_0(kR)}{K_1(kR)} \right] - U \omega \frac{I_0(kR)}{I_1(kR)} \quad (\text{III.3.27})$$

La figure III.3.7 montre le comportement des combinaisons de fonctions de Bessel intervenant ici. Nous avons déjà vu que $I_1(X)/I_0(X) \underset{X \rightarrow 0}{\sim} X/2$. Ici, le graphe A montre que $K_0(x)/K_1(x)$ tend alors vers zéro : on peut négliger ce terme. Il en résulte que, pour les longueurs d'ondes grandes devant R ($x = 2\pi R/\lambda < 0.1$ soit $\lambda > 20\pi R$), la contribution du milieu extérieur est négligeable devant celle du milieu 1. C'est ce qu'on vérifie sur le

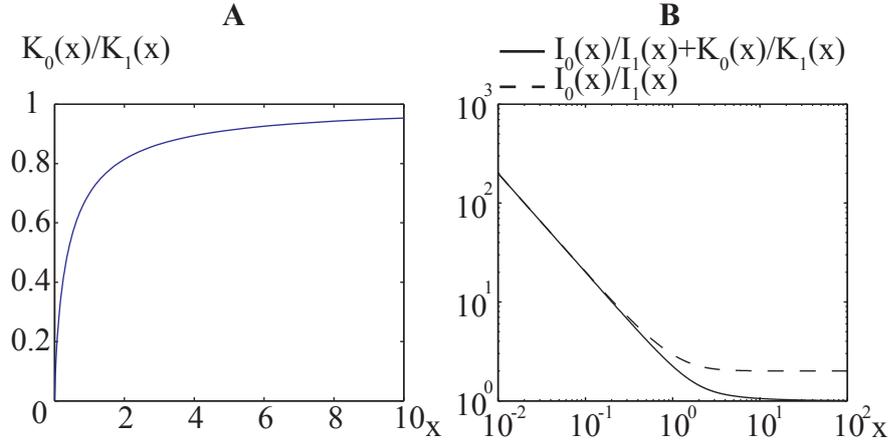


FIG. III.3.7 – Fonctions de Bessel intervenant dans la contribution du milieu extérieur.
A/ $K_0(x)/K_1(x)$ en fonction de x .
B/ $I_0(x)/(xI_1(x)) + K_0(x)/K_1(x)$

graphique B.

Ce que nous venons de démontrer justifie ainsi notre démarche : l'expérience reproduisant le comportement de l'artère n'a pas besoin d'être immergée dans un milieu extérieur pour rendre compte des déformations élastiques car c'est le fluide intérieur qui présente l'essentiel des accélérations. Nous oublierons donc désormais ce milieu extérieur.

3.3 Comparaison entre notre modèle et nos expériences

3.3.1 Influence de l'amplitude sur le seuil de transition ondes/déformations synchrones

Arrêtons-nous un instant pour comparer notre approche théorique à nos résultats expérimentaux. En effet, nous avons noté (§ 3.1) l'influence de la course a du piston sur le seuil d'apparition des ondes. Cette influence ne ressort pas dans l'expression à laquelle nos deux calculs (équations III.3.7 et III.3.16) aboutissent : $\lambda/L = 2\pi c/\omega L$. Ce n'est donc pas ce régime qui régit la transition que nous observons expérimentalement.

La théorie de perturbation linéaire que nous venons de développer considère des déformations radiales autour de l'équilibre de la membrane. Ceci suppose que, lorsque la membrane est sollicitée, elle se met à l'équilibre sur un temps court devant le temps de propagation des ondes. Une fois cet équilibre atteint on peut observer des ondes linéaires si $2\pi c/\omega L \leq 1$. C'est sur cette condition de mise à l'équilibre que nous revenons ici. Nous exprimerons au paragraphe 4.2.1 le temps t_{eq} qui est nécessaire à un tube élastique pour se mettre en équilibre lorsqu'il est soumis à un débit entrant. Le tube en question mesure une longueur \mathcal{L} et est soumis, en amont, à un débit Q et, en aval, à une résistance de facteur K . Alors, $t_{eq} = QK\mathcal{L}/A_0c_0^2$. C'est à dire que, sur le temps de forçage $2\pi/\omega$ du piston, une portion de tube de taille $\lambda \sim c_0^2/aK\omega^2$ a la possibilité de se gonfler pour atteindre une position d'équilibre lui permettant d'absorber tout le volume éjecté par le piston. Si cette valeur est plus petite que la longueur totale L du tube, on gonfle une

petite portion du tube qui se propagera de proche en proche, et on observe des ondes. À partir du moment où la valeur de λ atteint L , le tube entier gonfle à chaque cycle. On quitte le régime d'ondes pour entrer dans le régime homogène. Le seuil d'apparition qui ressort de ce raisonnement est

$$\frac{c_0^2}{aL\omega^2 K} = \text{constante} \quad (\text{III.3.28})$$

Pour des valeurs de $c_0^2/aL\omega^2 K$ plus petites, on a des ondes qui se propagent, et pour les valeurs plus grandes, une déformation homogène.

3.3.2 Comparaison du seuil expérimental avec la théorie

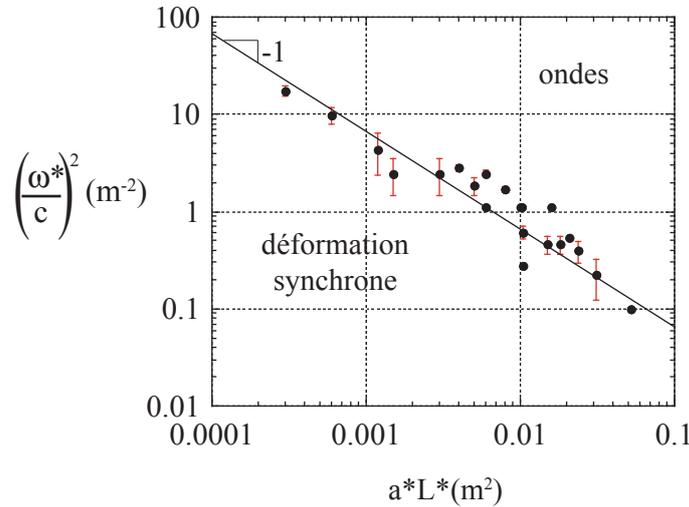


FIG. III.3.8 – Transition observée expérimentalement entre le régime d'ondes et celui de déformation synchrone.

La comparaison entre la loi III.3.28 et nos résultats expérimentaux est décrite sur la figure III.3.8. Elle montre qu'en effet le seuil de transition ondes–déformation synchrone se situe à une valeur constante du rapport $c_0^2/aL\omega^2$. Nous mesurons un facteur proche de 143, qu'il faut diviser par K pour obtenir la valeur de la constante : 17,9. Les mesures et le modèle s'accordent donc sur les phénomènes observés de façon qualitative sans toutefois expliquer correctement le facteur numérique.

3.4 Résolution numérique

François Gallaire, chercheur au laboratoire J.A. Dieudonné de Nice, a mis au point un code de résolution numérique à une dimension du système formé par les équations III.3.2 et III.3.3. Ces expériences numériques permettent de compléter les gammes de paramètres

explorées par les expériences. Voici les principales caractéristiques de ce code.

3.4.1 Code Numérique

Considérons une membrane comprise entre $x = 0$ et $x = L$ dans laquelle le fluide s'écoule avec une vitesse négative depuis l'entrée (située en $x = L$) vers la sortie (en $x = 0$). Nous partons de la situation d'équilibre statique : dans toutes ces équations A_0 est l'aire du tube sous la pression p_0 , qui est donnée par la colonne d'eau : $p_0 = p_{atm} + \rho g H$.

Nous commençons par simplifier le système d'équations en utilisant la loi de membrane III.2.5 :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial UA}{\partial x} = 0, \quad (\text{III.3.29})$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{U^2}{2} + 2\sqrt{A_0}c_0^2 \frac{\sqrt{A} - \sqrt{A_0}}{A} \right] = 0. \quad (\text{III.3.30})$$

Au paragraphe 2.1.1.c, nous avons évoqué la possibilité de linéariser la vitesse des ondes en approchant A par A_0 , pour obtenir l'équation III.2.7 au lieu de III.2.5. Dans le code numérique, ceci revient à utiliser :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial uA}{\partial x} = 0, \quad (\text{III.3.31})$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{U^2}{2} + c_0^2 \frac{A - A_0}{A_0} \right] = 0. \quad (\text{III.3.32})$$

On impose alors les conditions aux limites suivantes :

- A l'entrée, on impose un débit sinusoïdal $D(t)$:

$$D(L, t) = 9A_0a\omega(-1 + \cos \omega t) < 0 \quad (\text{III.3.33})$$

a est la course du vérin, et ω sa pulsation. Le facteur 9 traduit la contraction entre le rayon du piston et celui de la membrane, et permet d'obtenir des résultats directement comparables à ceux des expériences réelles.

- A la sortie, la pression élastique équilibre la perte de charge du tuyau aval :

$$U(0, t) = -\rho c_0^2 \sqrt{A_0} \frac{\sqrt{A} - \sqrt{A_0}}{\mathcal{R}A} \quad (\text{III.3.34})$$

où la résistance totale en sortie est la somme de deux contributions :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{in} + \rho K U(0, t) \quad (\text{III.3.35})$$

La première est constante, vaut $1\,000 \text{ Pa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$, et permet d'assurer la stabilité numérique. La seconde, linéaire en U , reproduit les comportements constatés expérimentalement. Pour un facteur K de 100 et une vitesse caractéristique de 1 m/s , la résistance linéaire est 100 fois plus grande que la contribution constante. Cette dernière ne perturbe donc pas les résultats obtenus.

Nous résolvons les équations par différences finies en utilisant le schéma de discrétisation Lax-Friedrich. Il introduit une dissipation numérique qui, à $\delta x / (v_{max} \delta t) = CFL > 1$ fixé, est proportionnelle à $CFL \times v_{max} \delta x$. Il est en effet possible de montrer, au moins dans la

limite de $p(A)$ linéaire en A , que la vitesse des ondes dans le système vaut localement $U(x) \pm c(x)$ (§ 3.2.2.a). Dans la condition de stabilité, nous choisissons $v_{max} = U_{max} + c$. Nous essayons de travailler à $CFL = 2$ constant, si bien que la dissipation effective est plus grande pour les longs tuyaux et augmente quand la vitesse maximum augmente. Les équations discretisées sont les suivantes (on note en indice la position spatiale et en exposant le temps itératif) :

– Pour le schéma de résolution complet :

$$A_n^{p+1} = \frac{A_{n-1}^p + A_{n+1}^p}{2} + \frac{dt}{2dx} (U_{n+1}^p A_{n+1}^p - U_{n-1}^p A_{n-1}^p), \quad (\text{III.3.36})$$

$$U_n^{p+1} = \frac{U_{n-1}^p + U_{n+1}^p}{2} + \frac{dt}{2dx} \left(\frac{(U_{n+1}^p)^2}{2} + c_{n+1}^2 2\sqrt{\pi} R_0 \frac{\sqrt{A_{n+1}^p} - \sqrt{A_0}}{A_{n+1}^p} - \frac{(U_{n-1}^p)^2}{2} \dots \right. \\ \left. - c_{n-1}^2 2\sqrt{\pi} R_0 \frac{\sqrt{A_{n-1}^p} - \sqrt{A_0}}{A_{n-1}^p} \right). \quad (\text{III.3.37})$$

Nous remarquons dans ces équations que c_0 a été remplacé par c , une fonction de x qui nous permettra de considérer des membranes aux propriétés non uniformes. Les conditions aux limites employées sont, en entrée :

$$A_N^{p+1} = A_N^p + \frac{dt}{dx} (U_N^p A_N^p - U_{N-1}^p A_{N-1}^p), \quad (\text{III.3.38})$$

$$U_N^{p+1} = \frac{D^{p+1}}{A_N^p}, \quad (\text{III.3.39})$$

avec $D^{p+1} = D(L, t = (p+1)\delta t) = 9A_0 a \omega (-1 + \cos[\omega(p+1)\delta t])$. À la sortie, on impose :

$$A_1^{p+1} = A_1^p + \frac{dt}{dx} (U_2^p A_2^p - U_1^p A_1^p), \quad (\text{III.3.40})$$

$$U_1^{p+1} = -2\rho c_1^2 \sqrt{\pi} R_0 \frac{\sqrt{A_1^p} - \sqrt{A_0}}{\mathcal{R}A_1^p}. \quad (\text{III.3.41})$$

– Pour le schéma de résolution linéarisé :

$$A_n^{p+1} = \frac{A_{n-1}^p + A_{n+1}^p}{2} + \frac{dt}{2dx} (U_{n+1}^p A_{n+1}^p - U_{n-1}^p A_{n-1}^p), \quad (\text{III.3.42})$$

$$U_n^{p+1} = \frac{U_{n-1}^p + U_{n+1}^p}{2} + \frac{dt}{2dx} \left(\frac{(U_{n+1}^p)^2}{2} + c_{n+1}^2 \frac{A_{n+1}^p - A_0}{A_0} - \frac{(U_{n-1}^p)^2}{2} \dots \right. \\ \left. - c_{n-1}^2 \frac{A_{n-1}^p - A_0}{A_0} \right). \quad (\text{III.3.43})$$

avec les conditions aux limites en entrée :

$$A_N^{p+1} = A_N^p + \frac{dt}{dx} (U_N^p A_N^p - U_{N-1}^p A_{N-1}^p), \quad (\text{III.3.44})$$

$$U_N^{p+1} = \frac{D^{p+1}}{A_N^p}. \quad (\text{III.3.45})$$

et en sortie :

$$A_1^{p+1} = A_1^p + \frac{dt}{dx} (U_2^p A_2^p - U_1^p A_1^p), \quad (\text{III.3.46})$$

$$U_1^{p+1} = -\rho c_1^2 \frac{A_1^p - A_0}{\mathcal{R}A_0}. \quad (\text{III.3.47})$$

3.4.2 Expériences Numériques : Mise en évidence de la transition

Cette résolution numérique des équations a permis, comme dans nos expériences, de mettre en évidence une transition entre les régimes d'ondes et de déformation homogène.

La figure III.3.9 présente trois diagrammes spatiotemporels obtenus numériquement pour différents jeux de paramètres. Sur le premier (A), on s'aperçoit qu'à chaque temps t fixé, la membrane présente la même déformation $A - A_{eq}$ quel que soit x : on est en régime homogène. Pour les deux autres diagrammes (B et C), la présence simultanée de blanc et de noir traduit la présence d'ondes de déformation.

Si les diagrammes spatio-temporels permettent de déterminer à l'oeil la présence ou non d'ondes dans le système, leur examen détaillé reste trop subjectif pour déceler de manière systématique le caractère ondulatoire ou homogène. Afin de s'en affranchir, nous cherchons un critère mathématique permettant de trancher objectivement. L'examen des coefficients de Fourier des harmoniques élevés utilisé pour effectuer le diagnostic dans l'expérience ne peut être employé ici car le signal de débit en entrée de la membrane est choisi sinusoïdal dans toute l'étude. Ceci est une limitation actuelle de notre étude, rendue nécessaire par la volonté de limiter le nombre de paramètres.

Afin de déterminer si des ondes sont présentes ou non dans le tuyau, nous introduisons la fonction de corrélation croisée suivante :

$$F(x, y) = \int_0^T \left(\left(U(x, t) - \frac{1}{T} \int_0^T U(x, t) dt \right) \left(U(y, t) - \frac{1}{T} \int_0^T U(y, t) dt \right) \right) dt, \quad (\text{III.3.48})$$

ainsi que la fonction d'intercorrélation croisée normalisée F_n :

$$F_n(x, y) = \frac{F(x, y)}{\sqrt{F(x, x)} \sqrt{F(y, y)}}. \quad (\text{III.3.49})$$

Lorsque le mouvement de la membrane est parfaitement homogène, la vitesse (mais aussi la section A) est en phase en tout point à chaque instant temps et $F_n(x, y)$ vaut uniformément 1. En revanche si deux points x et y sont en opposition de phase à chaque instant alors $F_n(x, y) = -1$, dans ce cas, on est en présence d'ondes stationnaires. Si deux points ont des mouvements non corrélés, alors $F_n(x, y) = 0$. Pour les valeurs intermédiaires de $-1 < F_n < 1$, des ondes se propagent et induisent un déphasage.

Afin de définir l'existence ou non d'ondes, le minimum spatial de la fonction de corrélation normalisée $\min(F_n(x, y))$ est déterminé puis son évolution est tracée en fonction du paramètre de contrôle, comme indiqué sur l'exemple de la figure III.3.9-D.

Le critère de transition adopté est $\min(F_n) < 0.95$, donnant un côté certes arbitraire mais systématique à sa détermination.

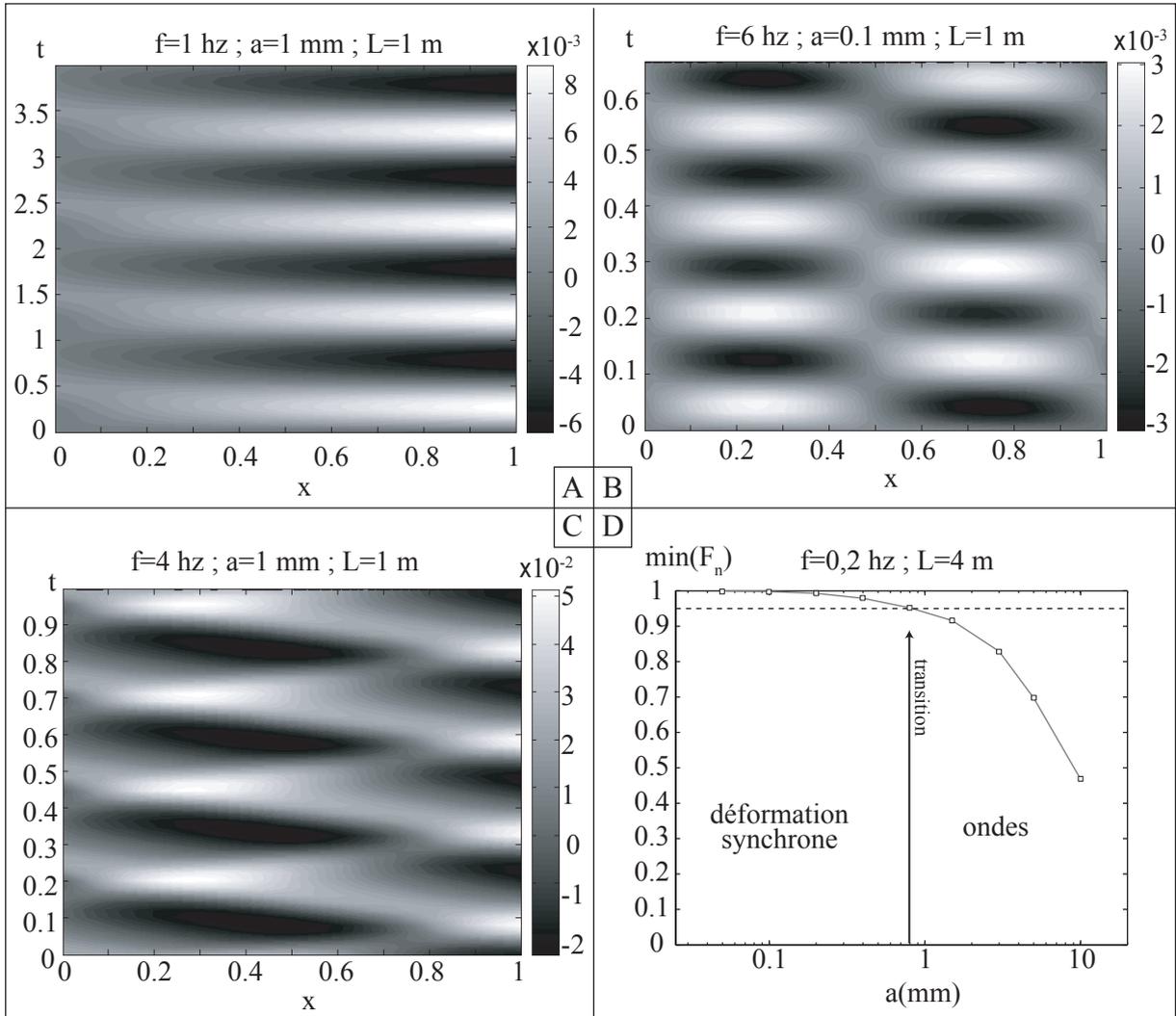


FIG. III.3.9 –

Diagrammes spatiotemporels obtenu par simulation numérique. On y représente $A - A_{\text{éq}}$ en tout point de la membrane (abscisse adimensionnée par L_0) au cours du temps.

A/ Met en évidence des déformations synchrones (à un instant donné, la déformation de la membrane est la même sur toute la ligne horizontale).

B/ met en évidence des ondes stationnaires, avec un nœud au milieu de la membrane.

C/ Montre des ondes se propageant et se réfléchissant aux bouts de la membrane.

D/ Minimum de la fonction de corrélation normalisée F_n en fonction de a pour une fréquence et une longueur fixées respectivement à 2 Hz et 4 m. On décide que la transition se fait lorsque la valeur obtenue passe en dessous de 0,95 c'est à dire, ici pour $a = 0,8 \text{ mm}$.

3.4.3 Résultats numériques et comparaison avec les expériences et le modèle

Sur le graphique de la figure III.3.10, qui est présenté dans le plan $\left\{ \left(\frac{\omega^* L^*}{c_0} \right)^2 ; a^* K / L^* \right\}$, on met en évidence grâce aux expériences numériques l'existence de deux régimes de transition :

- *aux faibles amplitudes* a , le seuil de transition ne varie pas selon a , et dépend simplement de f et L .
- *aux grandes amplitudes* au contraire, $(\omega^* L^* / c_0)^2$ varie en LK/a , ce qui signifie que $c_0^2 / a K L \omega^2$ est constant, en accord avec l'équation III.3.28. Nos mesures expérimentales (losanges noirs) se situent dans cette gamme et s'accordent qualitativement aux observations numériques : la valeur du seuil de transition est $c_0^2 / a K L \omega^2 \approx 33$. Notons par ailleurs que les points de transition obtenus numériquement pour $K = 8$ et $K = 100$ se regroupent sur une même courbe, ce qui confirme le scaling en K .

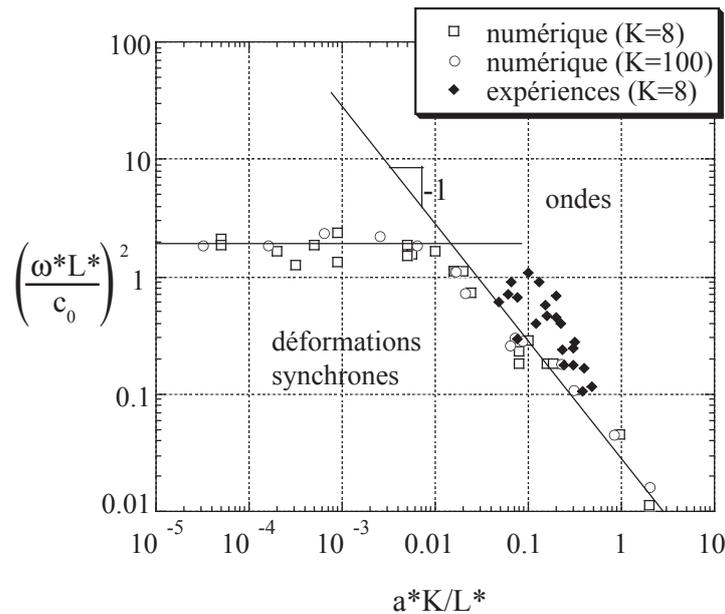


FIG. III.3.10 – Seuil de transition ondes/synchrone résultant du code numérique. Deux comportements apparaissent. À faible amplitude, la valeur seuil ne dépend pas de l'amplitude des mouvements du piston, a (ce qui est compatible avec notre théorie linéaire), tandis qu'à plus grande amplitude, $(\omega^* L^* / c)^2$ varie en L/aK , ce qui signifie que $c_0^2 / a K L \omega^2$ est constant, en accord avec l'équation III.3.28.

Il semble donc que le régime linéarisé que nous avons décrit dans les paragraphes précédents puisse bel et bien exister, néanmoins dans une gamme de paramètres inaccessible à notre expérience (*i.e.* à des amplitudes plus faibles). Le seuil que nous décrivons en terme de compétition entre le temps de mise à l'équilibre de la membrane et le temps de forçage est en revanche adapté pour décrire le comportement de notre montage.

3.5 Applications physiologiques

Le rapport $c_0^2/aKL\omega^2$ est une fonction des caractéristiques du vaisseau sanguin dans lequel on se place et de la sollicitation cardiaque. Dans le corps humain, on peut évaluer ce facteur dans différentes régions. Nous estimons l'amplitude équivalente dispensée par le cœur à chaque éjection systolique de 80 cm^3 : $a \approx 80 \cdot 10^{-6}/(\pi R_{piston}^2)$ (en mètres). On estime le facteur K grâce à la valeur de la perte de charge de $13\,500 \text{ Pa}$ rapportée par McDonald [86], la vitesse du sang dans l'aorte ($\sim 1 \text{ m/s}$) mesurée par Cheng [63] et la masse volumique du sang estimée à 1300 kg/m^3 : $K \approx 10,4$. Pour une longueur de 10 cm , une fréquence cardiaque de 1 Hz et une célérité d'environ 10 m/s dans l'artère carotide, le rapport $c_0^2/aKL\omega^2$ vaut $86,1$. Dans l'artère aorte, longue, elle, de 40 cm en moyenne, et avec une vitesse d'onde moitié moindre, on trouve un rapport valant $5,4$. Si l'on compare au seuil que l'on trouve expérimentalement, c'est à dire 33 , on se trouve alors de part et d'autre du seuil : Pour la carotide on a une valeur plus grande, ce qui signifie qu'on se trouverait dans le régime de déformation synchrone, tandis que l'aorte présenterait des ondes. Nous avançons toutefois cette conclusion avec prudence, dans la mesure où le seuil n'a pas véritablement été mesuré dans le corps humain. En utilisant les méthodes de mesure de déformation des artères, par echo doppler, par exemple, il serait intéressant de comparer les déformations sur des artères courtes de type carotides et sur des artères plus longues, de façon à confirmer ou infirmer notre observation *ex vivo* grâce à des mesures *in vivo*.

En effet, cette observation peut porter à conséquence en ce qui concerne la localisation des anévrismes. Nous avons évoqué en introduction et dans la présentation du montage expérimental l'importance des réflexions d'ondes. Selon [83], lorsqu'il y a une réflexion d'onde de pression, par exemple à la bifurcation iliaque, les fluctuations de pression juste en amont s'ajoutent pour donner une pression deux fois plus grande. En présence d'ondes de déformations, le phénomène sera le même, sollicitant particulièrement l'aorte sous-rénale, et entraînant alors une fatigue particulière de la paroi à cet endroit (figure III.3.11-A). Alexander [56] évoque un affaiblissement de la paroi artérielle comme étant une raison possible de développement d'un anévrisme (à partir du moment où la paroi n'arrive plus à résister à la pression transmurale). Or, cette partie de l'artère est précisément l'emplacement privilégié pour 80% des anévrismes aortiques [55] (voir figure III.1.1-B). La localisation des contraintes que nous venons de discuter expliquerait-elle alors en partie la croissance de ces pathologies ?

La localisation des anévrismes dans le cerveau est souvent différente (figure III.1.1-C). Or, dans un vaisseau qui se contracte et se dilate de façon synchrone, les contraintes ne sont plus distribuées de la même façon que dans le cas des ondes : les contraintes sont homogènes tout le long du vaisseau amont, en revanche, à chacune de ses contractions, il éjecte brutalement un jet de sang qui bute de l'autre côté de la bifurcation. Le tissu cellulaire à ce niveau va donc être confronté à de fortes variations de cisaillement et de pression, et s'il est une zone qui risque de s'affaiblir, c'est, selon nous, celle-ci. Ceci favoriserait possiblement la croissance d'anévrismes sacculaires en aval d'une bifurcation (figure III.3.11-B). Ces considérations demandent encore une fois confirmation médicale et *in vivo*, néanmoins ces pistes nous semblent dignes d'intérêt.

A titre de remarque, on peut souligner que Pedrizzetti [95] évoque un comportement qualitativement similaire dans des expériences numériques : en jouant sur le dosage entre

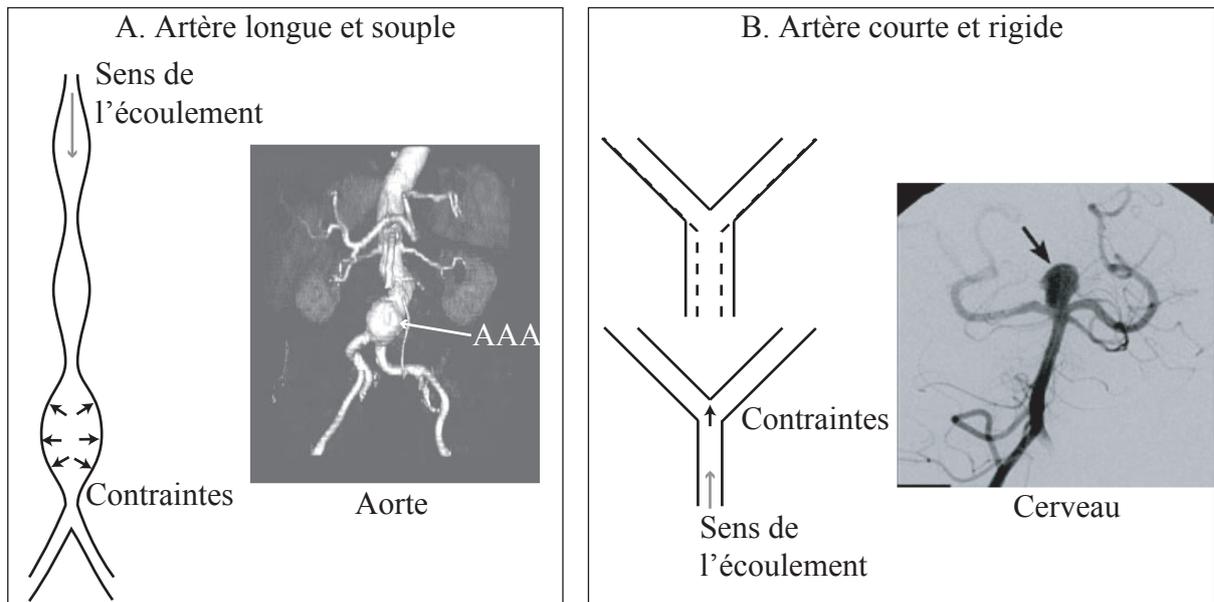


FIG. III.3.11 – Mise en parallèle de la localisation des contraintes et de la localisation des anévrismes. Les photos sont des rappels de la figure III.1.1.

l'élasticité de la membrane et sa viscosité, il passe d'un régime de déformation synchrone pour une membrane parfaitement élastique à un régime de propagation d'ondes pour une membrane viscoélastique. Dans notre travail, les propriétés de la membrane ne varient pas : notre transition ne doit donc rien à la viscoélasticité de la membrane. La transition dont nous rendons compte ici n'est donc pas la même que celle de Pedrizzetti.

Chapitre 4

Comportement à l'échelle de la vie

4.1 Observations expérimentales

Un anévrisme met parfois des dizaines d'années à se développer dans le corps humain, ce qui représente des milliers de cycles cardiaques. Peut-on prédire ou comprendre ce développement et la rupture qui lui fait suite ? Le principal critère pris en compte de nos jours est la taille de l'anévrisme [55], et nous souhaitons à présent identifier quelques facteurs possiblement liés à l'écoulement sanguin dans les artères.

Dans notre montage expérimental, nous avons vu (§ 2.1.1.d) qu'il est possible, en imposant une pression statique suffisante, de provoquer la dilatation d'une partie de la membrane par dépassement du maximum local de la courbe pression-rayon de la figure III.2.7 (équilibre élasto-plastique). Ici, nous cherchons à comprendre les facteurs entraînant une croissance similaire à partir d'un écoulement de fluide au sein de la membrane.

4.1.1 Mesure expérimentale de la forme des anévrismes

Afin de détecter la présence et la croissance d'un tel renflement, nous avons besoin de connaître la forme de la membrane au cours du temps. Nous utilisons pour cela le système des nappes laser présenté au paragraphe 2.5.2. Ce système comporte un inconvénient : il est discret. Pour trouver la bonne fonction d'interpolation de ces points discrets, nous étalonnons ce système de mesure grâce à un camescope. En vue rapprochée, il nous permet d'accéder à une mesure continue de la déformation. Cet étalonnage est conduit sur une portion réduite (une vingtaine de centimètres) de la membrane, adaptée à la résolution du camescope (560×784) (voir la photo incluse dans la figure III.4.1). La figure III.4.1 expose le résultat d'une de ces expériences. Elle montre de façon superposée le diamètre de la membrane à un instant t fixé, mesuré par les lasers et observé par le camescope. Pour chacun des deux modes de mesure, on peut approcher la forme de la membrane par une gaussienne dont le sommet se situe là où le renflement apparaît. Nous en concluons qu'il est raisonnable d'approcher la forme de nos « anévrismes » par une gaussienne, et nous validons également le mode de mesure de nos déformations avec les lasers. L'intérêt de connaître maintenant la forme que prend la membrane lorsqu'elle gonfle est de pouvoir accéder par approximation —gaussienne dans le cas présent— à une information continue sur son diamètre, et ce malgré le fait que nous ayons des points de mesure directe discrets. Nous pouvons par exemple estimer le diamètre maximal de la membrane au cours du temps, même lorsqu'aucun laser n'illumine directement son point culminant.

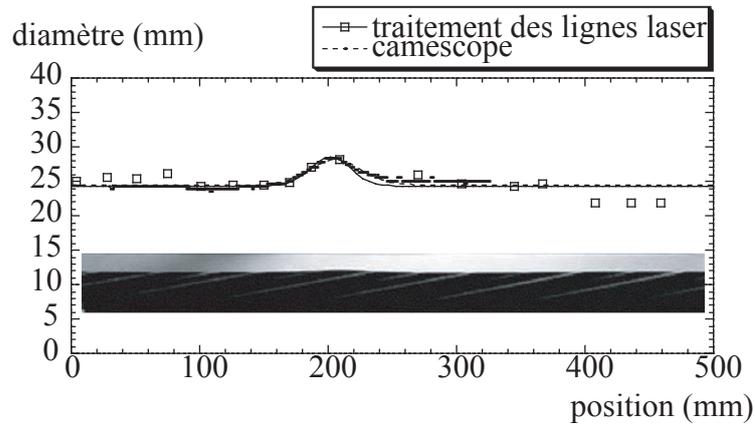


FIG. III.4.1 – Diamètre en millimètres de la membrane en fonction de la position sur la membrane, obtenu avec deux traitements simultanés : une vue latérale rapprochée d’un caméscope numérique (cf. photographie incluse), et une vue de dessus des paraboles lasers. Chacun des deux profils est approché par une gaussienne. Pour le caméscope, on trouve comme meilleur ajustement gaussien $24.5 + 3.64 \exp[-(x - 205.45)^2/820]$, et pour les lasers $24.32 + 4.29 \exp[-(x - 201.79)^2/490]$. Sur la photographie, on voit la membrane de côté. Elle apparaît en noir, avec les traits laser en plus clair. Un très léger renflement se distingue à la position 200 mm.

4.1.2 Observation expérimentale d’un seuil de croissance

Nous nous intéressons désormais à l’évolution du diamètre maximal D de la membrane au cours du temps. La figure III.4.2-A présente les variations de D pour des expériences menées avec un facteur de résistance $K = 40$, une longueur $L_0 = 1$ m, une fréquence de 0.75 Hz et une amplitude a des mouvements du piston variable (notée le long des courbes). Deux comportements distincts sont mis en évidence, de part et d’autre de la valeur seuil $a^* = 10$ mm :

- Pour les amplitudes de moins de 10 mm, le diamètre maximal de la membrane tend vers une valeur limite D_∞ , croissant avec a : $D_\infty(a = 8 \text{ mm}) = 21 \text{ mm}$; $D_\infty(a = 9 \text{ mm}) = 22,1 \text{ mm}$; $D_\infty(a = 10 \text{ mm}) = 24,3 \text{ mm}$.
- Pour les amplitudes supérieures à 10 mm, la déformation maximale ne cesse d’augmenter au cours du temps. On obtient des courbes avec un point d’inflexion. La déformation n’est plus homogène, mais devient localisée sur une zone d’une dizaine de centimètres (comme sur la figure III.4.1).

Nous mesurons donc l’évolution de l’amplitude a^* et de la fréquence f^* au seuil de croissance de tels « anévrismes » pour différentes résistances hydrauliques $K\rho U^2$ en aval. Les résultats sont donnés sur la figure III.4.2-B. Nous remarquons qu’à une fréquence donnée, l’amplitude a^* requise pour passer le seuil de croissance diminue lorsque K augmente : ainsi, à une fréquence $f^* = 1$ Hz et pour une membrane d’un mètre de long, on observe $a_{K=40} = 19$ mm et $a_{K=14} = 9$ mm. En revanche, la longueur de la membrane ne semble pas influencer cette valeur, puisque pour une membrane deux fois plus courte ($L = 50$ cm), on observe $a_{K=14} = 20$ mm, c’est à dire proche des 19 mm trouvés pour $L = 1$ m. Pour une résistance fixée, l’amplitude-seuil et la fréquence-seuil sont inversement proportionnelles, ce que met en évidence l’échelle logarithmique du graphique : $f^* \sim a^{*-1}$.

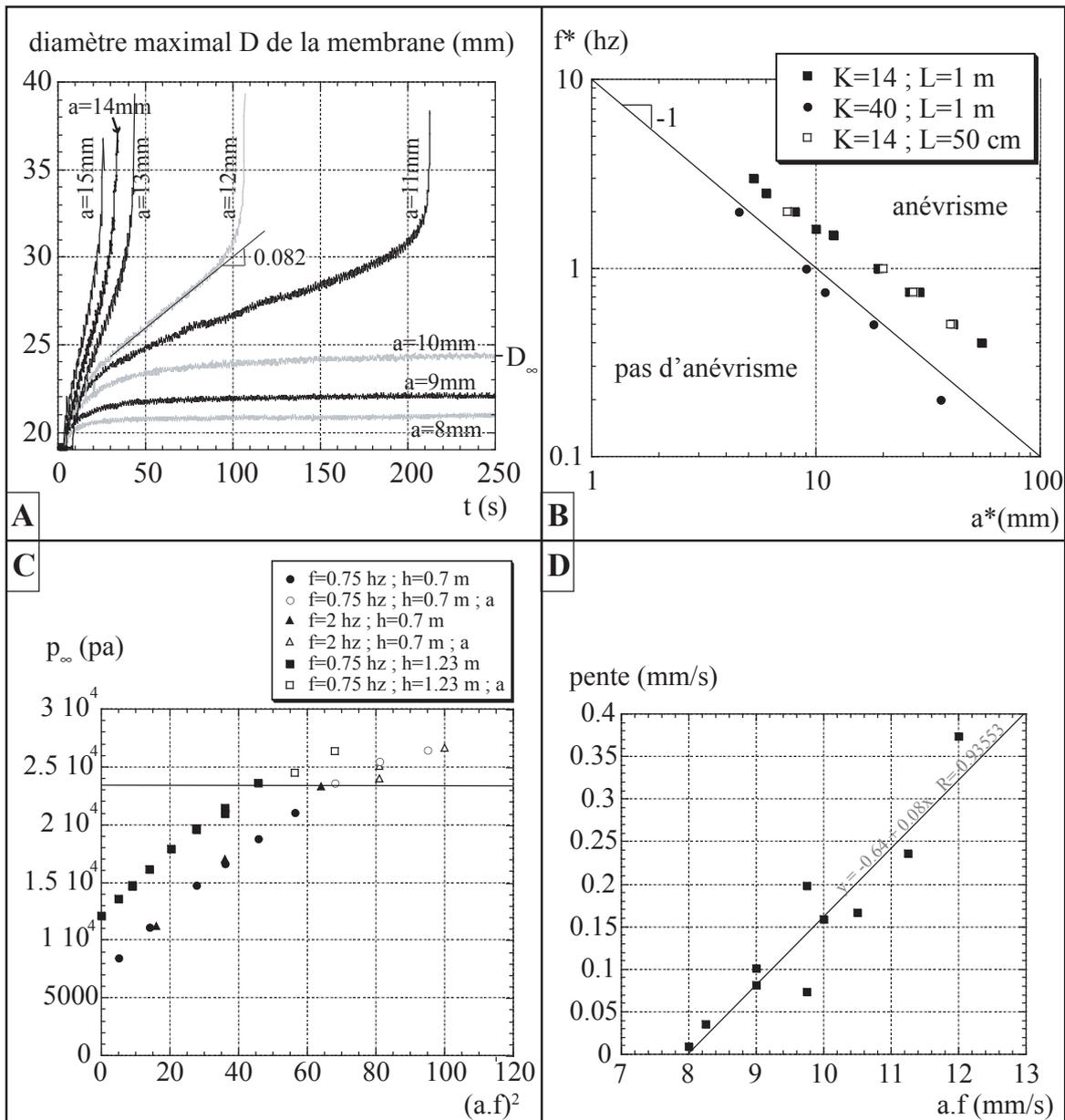


FIG. III.4.2 –

A/ Mise en évidence des deux comportements possibles. Diamètre maximal D de la membrane au cours du temps, pour un facteur de résistance $K = 40$, une longueur $L_0 = 1$ m, une fréquence de 0.75 Hz et une amplitude variable (notée le long des courbes). Aux amplitudes inférieures à 10 mm, la membrane atteint un état stationnaire, tandis que son diamètre maximum diverge lorsque l'amplitude est plus grande.

B/ Seuil (en amplitude et fréquence de forçage) de développement d'un « anévrisme » sur la membrane, pour différentes résistances et différentes longueurs de tube.

C/ Plateau de pression atteint dans la membrane, en fonction de $(a.f)^2$. $K = 40$ et $L_0 = 1$ m. La mention « a » dans la légende indique les cas où la membrane n'atteint pas de plateau en terme de déformation, mais développe un anévrisme. La ligne horizontale indique la position du maximum local statique de $p(R)$.

D/ Pente au point d'inflexion des courbes du graphique A (qui en ont un) en fonction de $a.f$, avec leur meilleur fit linéaire. $K = 40$ et $L_0 = 1$ m.

En dessous du seuil, nous mesurons la pression transmurale limite p_∞ atteinte, pour $K = 40$ et $L = 1$ m. (voir figure III.4.2-C). On s'aperçoit que cette pression évolue linéairement avec $(a.f)^2$, et que le seuil est atteint lorsque $p_\infty = 2,3 \cdot 10^4$ Pa, c'est à dire quand la valeur de p_∞ atteint le maximum local de pression de la courbe $p(R)$ (voir figure III.2.7-A). Lorsque l'on augmente la hauteur du bac réservoir h_0 à amplitude et fréquence fixées, p_∞ augmente. Il en résulte que le seuil est atteint pour un produit $a^* f^*$ plus faible si le bac est plus haut. Au delà du seuil, on est contraint de stopper l'expérience juste après le moment où l'anévrisme apparaît, car la membrane grossit trop et risque d'abîmer le montage. On note alors la pression transmurale maximale atteinte (qui ne correspond plus à un plateau). On remarque qu'elle est systématiquement plus grande que celle qui correspond au maximum local de la courbe $p(R)$ ($2,3 \cdot 10^4$ Pa, voir figure III.2.7-A), ce qui prouve que l'on est sorti de la branche stable pour entrer dans le domaine $\partial p / \partial R < 0$, et qu'ensuite la membrane évolue vers l'équilibre élasto-plastique (§ 2.1.1.d), qui n'est pas notre objet d'étude.

Au delà du seuil, la pente au point d'inflexion de la courbe $D(t)$ (figure III.4.2-A) quantifie en quelque sorte la rapidité de développement de notre « anévrisme ». Nous reportons cette pente sur la figure III.4.2-D. Malgré une dispersion certaine, on peut avancer qu'elle évolue linéairement avec le produit $a.f$.

4.2 Modélisation d'un tube élastique soumis à un forçage et à une résistance

En 1733, Stephen Hales [75] mesure la pression sanguine en différents endroits du corps (chez le chien, le cheval. . .). Il évoque alors le rôle de l'élasticité des artères pour expliquer que les fluctuations de pression dans l'aorte sont moindres que dans le ventricule gauche du cœur.

Selon Salisbury [100], c'est à Ernst Heinrich Weber¹ (figure III.4.3), en 1834, que l'on doit cependant attribuer les prémices de la conception du système artériel en tant que régulateur élastique. Il aurait en effet émis l'hypothèse — à présent généralement admise — que le volume éjecté par le cœur en phase de systole est momentanément stocké dans les larges artères comme l'aorte (et en particulier²) une zone très distensible de la crosse aortique, de célérité $c_0 \sim 2$ m/s). Les artères restituent peu à peu le sang au réseau secondaire pendant la diastole. Elles gomment ainsi, d'une part, les discontinuités de débit en sortie de cœur (elles jouent un rôle de filtre passe-bas). D'autre part, le cœur, au lieu de communiquer de l'accélération à tout le sang contenu dans le réseau, n'a plus qu'à fournir la pression suffisante pour gonfler ces premières artères, ce qui lui demande un travail moindre (§ 4.5.1). Weber a émis l'hypothèse que les caractéristiques des artères permettaient un tel stockage élastique, et a comparé ce fonctionnement au système « windkessel » (de *wind* vent et *kettel* bouilloire) qui permettaient, dans les années 30, de transformer un flux pulsatile en flux continu dans les engins de lutte contre les incendies. C'est sur le même principe que sont régulées les chambres à air pressurisé des orgues.

Ces idées ont été popularisées grâce aux travaux d'Otto Franck³ (1865-1944) qui consis-

¹les latinistes avertis pourront consulter « *De utilitate parietis elastici arteriarum – Annotationes Anat. et Physiol. – Programmata Collecta* » – Leipzig 1834, vol. 1, p.8. . .

²communication P. Boutouyrie

³cette fois pour les germanistes. . . « *Zur Dynamic des Hertz Muskels* », *Z. Biol.*, p 370 , 1895.

taient en une observation de l'évolution du signal cardiaque par remplacement des artères les plus souples par des tuyaux rigides, étayant ainsi l'intuition de Hales [68].

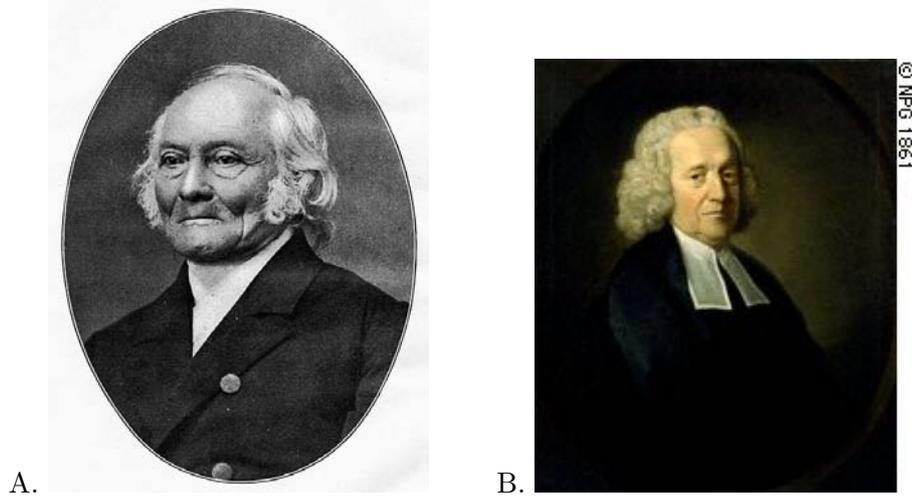


FIG. III.4.3 – A/ Ernst Heinrich Weber (1795-1878), médecin-psychologue et physiologue allemand, professeur à l'université de Leipzig. B/ Stephen Hales (1677-1761).

Nous reprenons dans cette section ce modèle de windkessel pour expliquer la survenue des anévrismes dans nos expériences.

4.2.1 Modèle de windkessel linéarisé

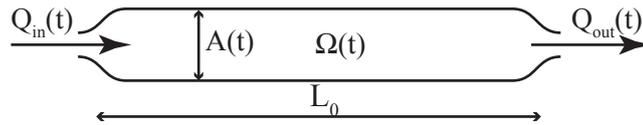


FIG. III.4.4 – Notations employées pour l'étude du modèle de windkessel. $Q_{in}(t)$ est le débit entrant dans le tuyau (forcé par le vérin), $Q_{out}(t)$ est le débit sortant, Ω est le volume d'eau contenu dans la membrane, et $A(t)$ la section moyenne de la membrane à l'instant t .

Le modèle de windkessel est un modèle qui ne considère pas l'équilibre local de la membrane, qui est simplement représentée comme un réservoir élastique : nous considérons des grandeurs globales, comme par exemple le volume total Ω de la chambre élastique (représenté sur la figure III.4.4). Le tube est alimenté par un débit entrant $Q_{in}(t)$ imposé par l'expérimentateur, et a la possibilité de se déverser dans un tuyau aval avec un débit $Q_{out}(t)$ moyennant une perte de charge fonction de la résistance à l'écoulement dans ce tuyau aval.

Écrivons pour commencer la conservation de la masse dans notre système :

$$\frac{d\Omega}{dt} = Q_{in}(t) - Q_{out}(t) \quad (\text{III.4.1})$$

L'écoulement sortant est fonction de la résistance rencontrée en sortie selon la loi $p = K\rho U^2$ (§ 2.4). On en déduit le débit sortant :

$$Q_{out}(t) = A_{out} \sqrt{\frac{p}{K\rho}} \quad (\text{III.4.2})$$

Avec A_{out} la section du tuyau de sortie d'eau. On considère ici la chambre élastique à travers son volume total, et on utilisera donc pour la décrire des paramètres moyennés sur sa longueur : par exemple $A = \Omega/L_0$. La pression transmurale p s'exprime quant-à elle grâce à la loi de membrane III.2.5, il vient donc :

$$Q_{out}(t) = \frac{A_{out}}{\sqrt{K}} \sqrt{\frac{dE}{\rho R_0}} \sqrt{\frac{\delta R/R_0}{(1 + \delta R/R_0)^2}} \quad (\text{III.4.3})$$

Qui s'écrit également

$$Q_{out}(t) = \frac{A_{out} \sqrt{2} c_0}{\sqrt{K}} \sqrt{\frac{\sqrt{A/A_0} - 1}{A/A_0}} \quad (\text{III.4.4})$$

À ce stade on adimensionne :

$$A = A_0 \bar{A} \quad ; \quad t = \tau \bar{t} = \frac{L \sqrt{K/2}}{c_0} \bar{t} \quad ; \quad Q_{in} = \frac{\Omega_0}{\tau} \bar{Q}_{in} = \frac{A_0 c_0}{\sqrt{K/2}} \bar{Q}_{in} \quad (\text{III.4.5})$$

τ est choisi pour que le préfacteur du terme non-linéaire vaille 1. Avec ces variables sans dimension, il reste de la combinaison de III.4.1 avec III.4.4 :

$$\frac{d\bar{A}}{d\bar{t}} = \bar{Q}_{in}(\bar{t}) - \sqrt{\frac{\sqrt{\bar{A}} - 1}{\bar{A}}} \quad (\text{III.4.6})$$

Regardons dans un premier temps le comportement de notre membrane aux faibles déformations $\bar{A} = 1 + \varepsilon$, avec ε un petit paramètre. L'équation précédente se simplifie alors en :

$$\frac{d\varepsilon}{d\bar{t}} = \bar{Q}_{in}(\bar{t}) - \sqrt{\varepsilon/2} \quad (\text{III.4.7})$$

a/ Vidange d'un tube initialement gonflé à travers une résistance

Si l'on regarde un problème libéré de tout débit entrant, avec une membrane initialement gonflée, nous avons

$$\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} = -\frac{d\bar{t}}{\sqrt{2}} \quad (\text{III.4.8})$$

Qui s'intègre en

$$\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_{t=0}} - \frac{\bar{t}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\varepsilon_{t=0}} - \frac{t}{2\sqrt{2}\tau} \quad (\text{III.4.9})$$

Le tube s'est donc vidé au bout d'un temps (dimensionné) $t_{vid} = 2\sqrt{2\varepsilon_{t=0}}\tau$. C'est donc τ qui caractérise le temps de vidange de la membrane.

b/ Mise à l'équilibre sous débit constant

Partons d'une membrane initialement au repos, et soumettons la à un débit \bar{Q}_{in} constant. Nous cherchons quel est l'état d'équilibre vers lequel la membrane évolue, et en combien de temps elle l'atteint. A l'équilibre, $d\varepsilon/d\bar{t} = 0$, il découle donc de l'équation III.4.7 que $\varepsilon_{eq} = 2(\bar{Q}_{in})^2$. Pour trouver le temps qu'il faut pour atteindre cet état, on considère l'instant initial où, la membrane étant au repos, l'équation III.4.7 s'exprime sous la forme $d\varepsilon/dt = \bar{Q}_{in}$. En loi d'échelle, ceci donne : $\varepsilon_{eq}/\bar{t}_{eq} \sim \bar{Q}_{in}$, ce qui donne pour le temps de mise à l'équilibre $\bar{t}_{eq} \sim 2\bar{Q}_{in}$. En remettant les dimensions, il vient

$$t_{eq} = Q_{in} \frac{LK}{A_0 c_0^2} \approx \left[\frac{A_{in}}{A_0} \right] \frac{a\omega KL}{c_0^2} \quad (\text{III.4.10})$$

c/ Mise à l'équilibre sous débit périodique lentement variable

Avec un débit entrant non nul et périodique, nous avons dans ce problème une seconde échelle de temps en présence : la période de la source Q_{in} , que nous appellerons τ_s .

Considérons dans ce paragraphe que la source varie lentement par rapport au temps τ qui caractérise la membrane couplée à la résistance : $\tau_s > \tau$. Le système a le temps de se mettre à l'équilibre au cours de la période de la source. On a dans ce cas $\sqrt{\varepsilon} = \bar{Q}_{in}(\bar{t})$. L'équilibre, qui est atteint à chaque période puisque la source est « lente », est alors marqué par un plateau dont la hauteur est proportionnelle au carré du débit entrant : $\varepsilon_{eq} = 2[\bar{Q}_{in}(\bar{t})]^2$ donc $\langle \varepsilon_{eq} \rangle = 2\langle [\bar{Q}_{in}(\bar{t})]^2 \rangle$: la situation est comparable au cas précédent.

d/ Mise à l'équilibre sous débit périodique rapidement variable

Si $\tau_s < \tau$, la membrane n'a pas le temps d'atteindre son équilibre à chaque cycle, et il faut considérer l'équation III.4.7 complète. Cependant, la source variant « vite », on peut supposer que la membrane ne la voit que comme un débit moyen constant $\langle \bar{Q}_{in} \rangle$.

Dans ce dernier cas, on peut effectuer le changement de variable $\xi = \sqrt{\varepsilon/2\langle \bar{Q}_{in} \rangle^2}$. Pour alléger, nous utiliserons désormais simplement la notation $\langle Q \rangle$ pour désigner $\langle \bar{Q}_{in} \rangle$. On a alors $d\varepsilon = 4\xi d\xi \langle Q \rangle^2$ et :

$$\frac{\xi d\xi}{1-\xi} = \frac{d\bar{t}}{4\langle Q \rangle} \quad (\text{III.4.11})$$

Qui s'intègre avec la condition de départ $\varepsilon_{t=0} = 0$ et en repassant avec la variable ε en :

$$\ln \left(\left| 1 - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}\langle Q \rangle} \right| \right) - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}\langle Q \rangle} = \frac{\bar{t}}{4\langle Q \rangle} \quad (\text{III.4.12})$$

- Aux temps longs $\bar{t} \rightarrow \infty$ il faut nécessairement que le logarithme diverge pour équilibrer le terme de droite. Ceci implique que $\varepsilon \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 2\langle Q \rangle^2$. Pour savoir au bout de combien de temps on atteint ce régime, il faut regarder comment se comporte la membrane aux temps courts.
- Aux temps courts $\varepsilon \ll d\varepsilon/d\bar{t}$. On peut estimer le temps \bar{t}_∞ nécessaire pour atteindre le plateau de la façon suivante :

$$\frac{d\varepsilon}{d\bar{t}} \sim \frac{\varepsilon_\infty}{\bar{t}_\infty} = \langle Q \rangle \quad (\text{III.4.13})$$

Il reste donc $\bar{t}_\infty = 2\langle Q \rangle$, soit, avec les dimensions $t_\infty \approx A_{in} a\omega KL / A_0 c_0^2$. Autrement dit, plus le débit d'eau est élevé, plus la membrane est gonflée dans sa position d'équilibre, et plus elle met de temps à atteindre cet état.

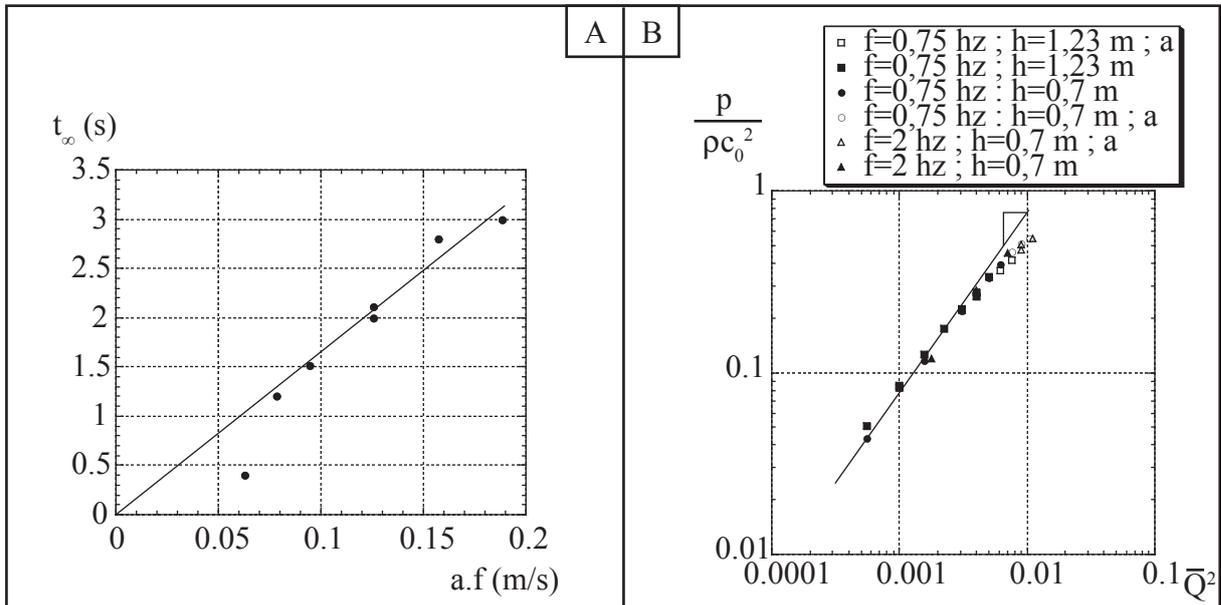
Comparaison avec les résultats expérimentaux.

FIG. III.4.5 – Comparaison entre le modèle de Windkessel linéaire et les expériences.
A/ Mesure du temps caractérisant le transitoire, en fonction de $a.f$.
B/ Pression atteinte au plateau (voir figure III.4.2-C), adimensionnée, en fonction du carré du débit adimensionné. (les a en légende marquent les expériences développant une anévrisme, c'est à dire au delà du seuil.)

La figure III.4.5-A représente les mesures qui ont été faites pour le temps de mise à l'équilibre de la membrane sollicitée avec un débit variable : la linéarité est correcte entre le temps mesuré et le débit moyen imposé (qui est proportionnel à $a.f$) : le modèle est qualitativement vérifié.

La figure III.4.5-B présente la pression adimensionnée que l'on obtient au plateau (voir figure III.4.2-C) en fonction du carré du débit adimensionné. On obtient effectivement une relation proportionnelle, tout au moins pour les expériences ne développant pas d'anévrisme. Cette relation proportionnelle est valable également pour la déformation puisque $p \propto \epsilon$ (voir équation III.2.7). L'ordre de grandeur n'est cependant pas respecté puisqu'au lieu d'avoir un préfacteur de 2, on obtient un facteur d'environ 40 : par exemple pour un $\langle \bar{Q}^2 \rangle = 0,001$ on obtient $\bar{p} = 0,08$ au lieu de 0,002. Ceci tient peut-être à l'approche moyenne que nous avons adoptée à travers le modèle de windkessel : si les tendances dégagées sont bonnes, il faut s'attendre à des disparités sur les facteurs numériques. En deçà du seuil, le modèle est donc qualitativement correct.

Les principaux résultats dont ne rend pas compte ce modèle de windkessel linéarisé sont l'existence du seuil de croissance des anévrismes et les comportements qui y sont subséquents.

4.2.2 Modèle non-linéaire : définition du seuil de gonflement, comportement consécutif

Afin de rendre compte du seuil de croissance de nos anévrismes, nous repartons de l'équation III.4.6, que nous ne linéarisons pas, cette fois. Ceci nous permet de regarder

ce qui se passe à plus grande déformation. La figure III.4.2-A montre en effet que les déformations ne sont pas toujours faibles puisqu'on dépasse parfois 35 mm de diamètre, c'est à dire qu'on double presque le diamètre initial de 19 mm !

On peut alors faire le changement de variable suivant : $\chi = \sqrt{\sqrt{A} - 1}$. Par ailleurs, nous raccourcirons désormais la notation de \bar{Q}_{in} à Q pour alléger l'écriture, ce qui conduit à

$$\frac{d\chi}{d\bar{t}} = \frac{Q\chi^2 - \chi + Q}{4\chi(\chi^2 + 1)^2} \quad (\text{III.4.14})$$

Il faut donc chercher une primitive de la fonction $f(\chi) = \frac{4\chi(\chi^2+1)^2}{Q\chi^2-\chi+Q}$. Pour cela nous avons besoin de décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples, ce qui implique de trouver les racines du polynôme dénominateur. Son discriminant vaut $\Delta = 1 - 4Q^2$.

– *Si le discriminant est positif ($Q \leq 1/2$).*

Le polynôme $Q\chi^2 - \chi + Q$ admet deux racines réelles qui sont

$$\chi^+ = \frac{1 + \sqrt{1 - 4Q^2}}{2Q} \quad \text{et} \quad \chi^- = \frac{1 - \sqrt{1 - 4Q^2}}{2Q} \quad (\text{III.4.15})$$

Une décomposition en éléments simples de notre $f(\chi)$ s'écrit alors

$$f(\chi) = 4 \left[\frac{\chi^3}{Q} + \frac{\chi^2}{Q^2} + \chi \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{Q^3} \right) + \frac{1}{Q^4} + \frac{\xi^-}{\chi - \chi^-} + \frac{\xi^+}{\chi - \chi^+} \right], \quad (\text{III.4.16})$$

avec

$$\xi^\pm = \frac{\chi^\pm (1/Q^2 - 1) - 1/Q}{Q^3 (\chi^\pm - \chi^\mp)}. \quad (\text{III.4.17})$$

Et dans ce cas une primitive de f est

$$\int f(\chi) = \frac{\chi^4}{Q} + \frac{4\chi^3}{3Q^2} + 2\chi^2 \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{Q^3} \right) + \frac{4\chi}{Q^4} + 4 \left[\xi^- \log(|\chi - \chi^-|) + \xi^+ \log(|\chi - \chi^+|) \right] \quad (\text{III.4.18})$$

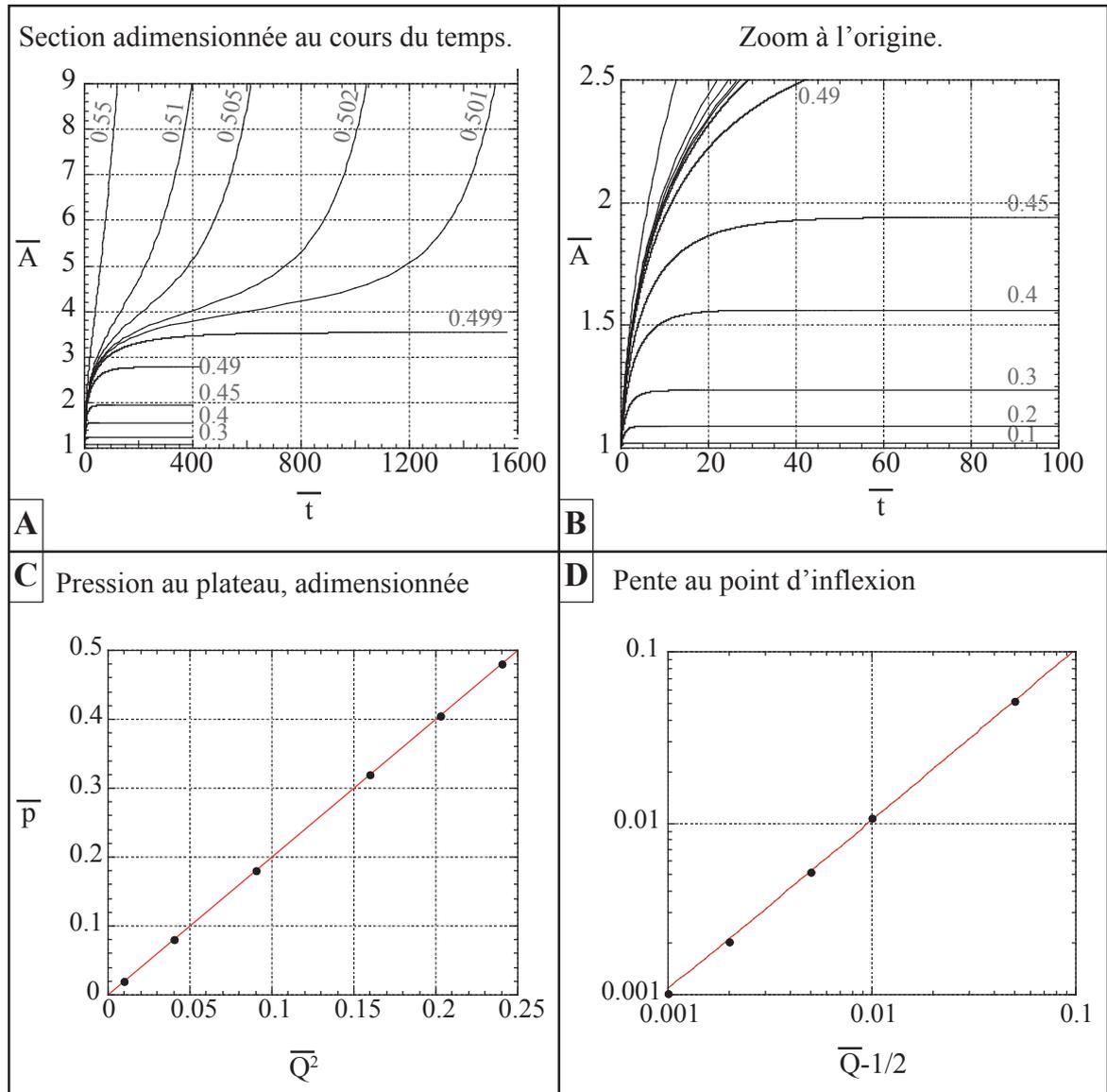
– *Si le discriminant est négatif ($Q > 1/2$).*

Alors la décomposition en éléments simples s'écrit

$$f(\chi) = 4 \left[\frac{\chi^3}{Q} + \frac{\chi^2}{Q^2} + \chi \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{Q^3} \right) + \frac{1}{Q^4} + \dots \right. \\ \left. \frac{-1/Q^2 + 1/Q^4}{2Q} \cdot \frac{2Q\chi - 1}{Q\chi^2 - \chi + Q} + \frac{-3/Q^2 + 1/Q^4}{2Q} \cdot \frac{1}{Q\chi^2 - \chi + Q} \right], \quad (\text{III.4.19})$$

et sa primitive vaut alors :

$$\int f(\chi) = \frac{\chi^4}{Q} + \frac{4\chi^3}{3Q^2} + 2\chi^2 \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{Q^3} \right) + \frac{\chi}{Q^4} + \left(-\frac{2}{Q^3} + \frac{2}{Q^5} \right) \log(|Q\chi^2 - \chi + Q|) + \dots \\ \frac{-12/Q^3 + 4/Q^5}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \arctan \left(\frac{2Q\chi - 1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \right). \quad (\text{III.4.20})$$



Intégration numérique des fonctions analytiques du modèle windkessel.

A Résultats de l'intégration numérique de l'équation III.4.6 pour certaines valeurs de \bar{Q}_{in} notées sur les courbes.

B/ Zoom à l'origine.

C/ Pression adimensionnée (par ρc_0^2) au plateau (extraite du graphique A) pour les débits inférieurs à $\bar{Q}_{in} = 0.5$. La ligne continue représente le meilleur ajustement linéaire : $y = -1,4 \cdot 10^{-5} + 2x$ ($R = 1$).

D/ Pente au point d'inflexion (extraite de A également) pour les débits supérieurs à $\bar{Q}_{in} = 0.5$. La ligne continue représente le meilleur ajustement linéaire : $y = 5.45 \cdot 10^{-5} + 1.04x$ ($R = 0.99998$).

FIG. III.4.6 –

Sur la figure III.4.6, nous représentons ces résultats : une intégration numérique de la fonction f pour différentes valeurs de Q (en dessous et au dessus de la valeur $1/2$) conduit aux courbes $\bar{A}(t)$ du graphique A. Elles représentent la section (adimensionnée) de la membrane élastique au cours du temps. Cette valeur ($1/2$) apparaît alors comme un seuil.

– En deçà du seuil : $Q < 1/2$

La membrane tend, après un transitoire, vers un état stable avec une déformation moyenne stationnaire représentée par un plateau (graphique B).

La hauteur de ce plateau est reportée sur le graphique C. Elle est proportionnelle au carré du débit entrant. Ce résultat est cohérent avec le modèle linéarisé que nous avons développé en premier lieu : il prédisait en effet que la déformation ε variait comme $2\langle Q \rangle^2$. Or la déformation et la pression transmurale p sont proportionnelles en vertu de la loi de membrane. Il vient donc $\bar{p} \sim 2\langle Q \rangle^2$ pour le modèle linéaire, ce qui est en accord avec le graphique C.

– Au delà du seuil : $Q > 1/2$

L'intégration conduit à des courbes qui présentent un point d'inflexion puis une divergence (figure III.4.6-A) : le rayon de la membrane augmente indéfiniment (en pratique, les propriétés plastiques de la membrane permettront d'éviter cet « indéfiniment » non réaliste).

Sur ces courbes, nous mesurons la pente de la courbe au point d'inflexion pour caractériser la rapidité du gonflement de la chambre élastique. Cette pente est reportée sur le graphique D de la même figure. Elle dépend linéairement de l'écart entre le débit entrant et le débit seuil (graphique D). Plus le débit est fort, donc, plus la croissance de la section de la membrane sera rapide.

En résumé, ce que nous dit ce modèle, c'est que lorsqu'on impose un faible débit à la membrane, elle se met dans une situation gonflée qui lui permet de maintenir une pression suffisante en son sein pour éjecter le même débit en aval. Si le débit est trop fort, trouver cette position devient impossible, et la membrane se met à gonfler. D'autant plus vite que le débit est important.

4.3 Comparaison avec l'expérience

La figure III.4.7 présente les résultats expérimentaux de façon adimensionnée, pour permettre leur comparaison avec les résultats de l'intégration théorique (figure III.4.6). Le graphique A reprend ainsi la figure III.4.2-A. Le débit adimensionné correspondant est noté le long des courbes. On observe un phénomène de seuil similaire à l'intégration théorique, mais avec un seuil qui n'est pas $1/2$.

Le graphique B permet l'étude plus précise du seuil de croissance trouvé dans les expériences. On représente la fréquence au seuil adimensionnée $\bar{f}^* = f^* L_0 \sqrt{K/2}/c_0$ en fonction de $1/2\bar{a}^* = A_0 L_0 / (2\pi R_{piston}^2 a^*)$. On obtient bien une relation proportionnelle, mais le seuil est atteint pour un débit environ sept fois plus faible que ce que le modèle prédit. On a donc un facteur 0,13 entre les expériences et la théorie :

$$Q_{exp}^* = 0.13 \frac{A_0 c_0}{\sqrt{2K}} \quad (\text{III.4.21})$$

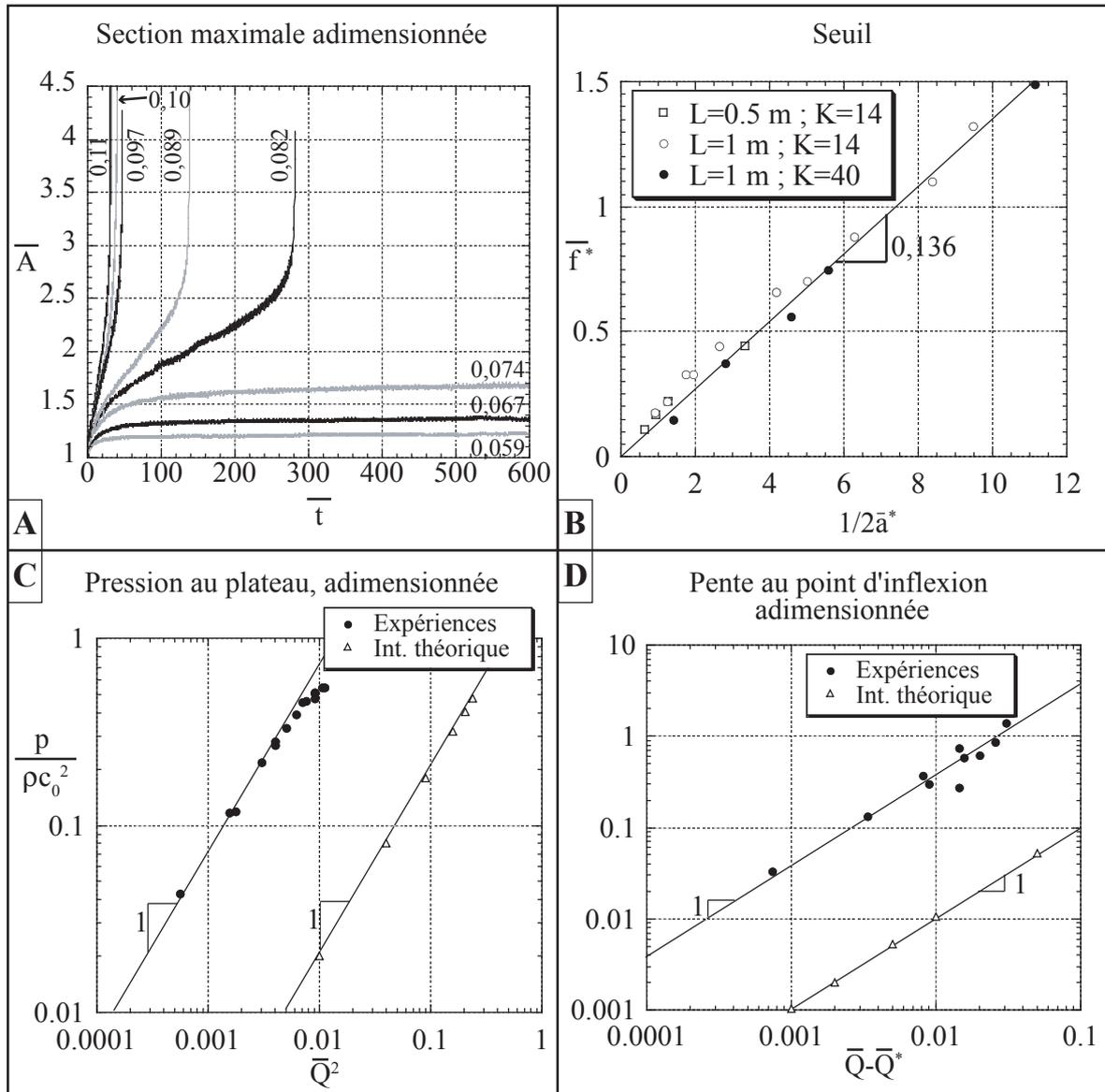


FIG. III.4.7 –

A/ Rappel de la figure III.4.2 : Section adimensionnée au cours du temps (lui aussi sans dimension), pour des expériences menées avec $K = 40$, pour une fréquence de 0.75 Hz et $L = 1$ m. Le débit, adimensionné, est noté le long des courbes.

B/ Débit seuil trouvé dans les expériences. On représente la fréquence au seuil adimensionnée $\bar{f}^* = f^* L_0 \sqrt{K/2}/c_0$ en fonction de $1/2\bar{a}^* = A_0 L_0 / (2\pi R_{piston}^2 a^*)$. On obtient bien une relation proportionnelle, mais le seuil est atteint pour un débit environ sept fois plus faible que ce que le modèle prédit, puisqu'on a un préfacteur de 0,136.

C/ Pour les débits inférieurs au débit critique, pression au plateau (adimensionnée) en fonction du carré du débit adimensionné. La droite a une pente 1.

D/ Quand le débit est supérieur à celui du seuil : Pente de $\bar{A}(\bar{t})$ au point d'inflexion (c'est à dire la pente de $A(t)$ adimensionnée par $L\sqrt{K}/A_0 c_0$) en fonction de l'écart au seuil en débit adimensionné.

Pour les débits inférieurs au débit critique, le graphique C présente la pression au plateau (adimensionnée) en fonction du carré du débit adimensionné. On y reporte également les points issus de l'intégration théorique. L'accord entre les points théoriques et expérimentaux est qualitativement correct : la pression est proportionnelle au carré du débit entrant. Les points s'écartent lorsqu'on s'approche du seuil, toutefois (aux grands débits). Il y a de plus un facteur 30 de décalage entre les points expérimentaux et théoriques : la pression atteinte dans l'expérience est plus forte que celle qu'on attend.

Pour les débits plus grands que le débit seuil, on trouve sur le graphique D la pente au point d'inflexion de $\bar{A}(\bar{t})$ en fonction de l'écart au seuil pour le débit $\bar{Q} - \bar{Q}^*$. Néanmoins, l'accord n'est que qualitatif entre les expériences et notre théorie. La tendance est la même puisque les expériences peuvent, comme les points obtenus par intégration des équations, être rassemblées sur une droite de pente 1 qui montre la proportionnalité entre la pente et l'écart au seuil : plus l'on s'écarte du seuil, plus la croissance de la membrane se fait rapidement. Toutefois, la croissance expérimentale se fait encore 30 fois plus vite que la croissance théorique. L'accord n'est pas quantitatif.

Le modèle rend donc effectivement compte de la présence d'un seuil de débit entrant qui provoque la croissance infinie de la membrane. Que ce soit en dessous du seuil ou pour la croissance au delà du seuil, les comportements ne sont décrits que de façon qualitative par le modèle de windkessel. Le seuil est atteint pour un débit plus bas dans les expériences, et lorsqu'il y a un gonflement, celui-ci est également plus rapide. Autrement dit, il semble que le forçage expérimental soit en quelque sorte plus « violent » que le forçage théorique.

4.4 Expériences numériques de croissance des anévrismes

4.4.1 Expériences numériques

Faire croître la membrane en entier dans le code numérique pour vérifier notre modèle de windkessel n'est pas possible, pour des raisons de stabilité. En revanche, l'introduction d'une zone de célérité diminuée permet de faire ressortir des comportements très similaires aux expériences.

La figure III.4.8 indique les résultats auxquels ont conduit des expériences numériques menées sur une membrane inhomogène : une zone centrale de célérité $c_1 = c_0/\sqrt{2}$ a été introduite. Nous varions alors, de même que dans l'expérience réelle, le débit à l'entrée de la membrane. Le graphique III.4.8-A présente l'évolution de la section maximale de la membrane au cours du temps pour $\{f = 1 \text{ Hz}; L = 4 \text{ m}; c_0^2 = 35 \text{ m/s}; K = 60\}$ et pour une amplitude variable. Aux faibles amplitudes (inférieures à 27 mm), la membrane tend vers un état stationnaire, sa déformation étant alors caractérisée par un plateau. En augmentant a , on franchit une valeur critique au delà de laquelle la membrane gonfle, dans la zone de moindre célérité : elle développe un anévrisme.

Le seuil de croissance des anévrismes est reporté sur les deux graphiques de la figure III.4.8-B, en échelle logarithmique (pour faire ressortir aussi les résultats des expériences réelles par comparaison) et en échelle linéaire. On trouve, de même que pour les expériences, que le seuil est franchi à débit constant puisque \bar{f}^* évolue linéairement en $1/2\bar{a}^*$. En revanche, le coefficient de proportionnalité vaut 0,445. C'est environ trois fois plus que pour les expériences, et deux fois moins que la valeur théorique attendue, 1 : les expériences numériques se situent entre le modèle de windkessel et les expériences réelles. On franchit

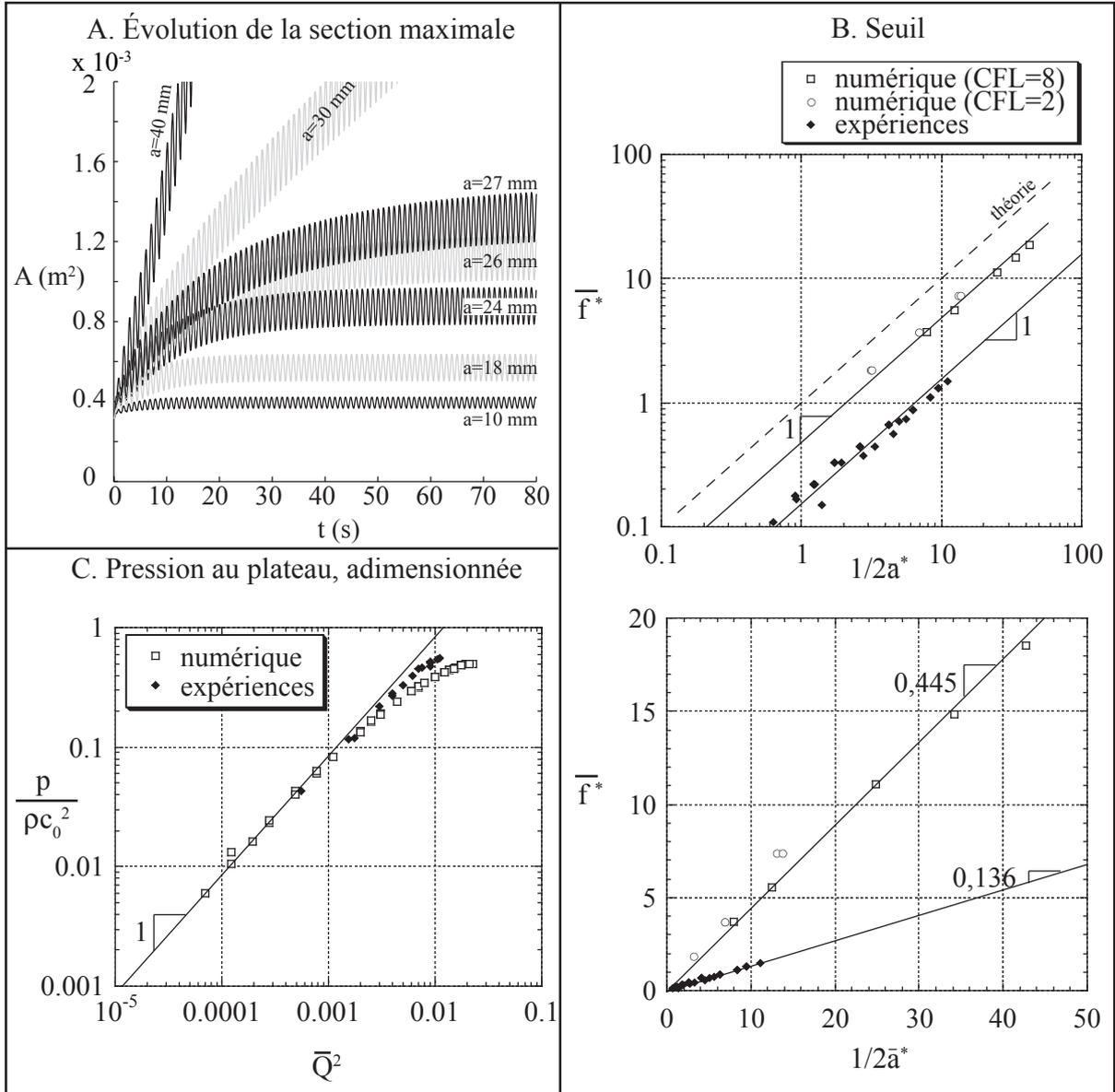


FIG. III.4.8 – Expériences numériques avec une zone de célérité réduite au centre de la membrane

- A/** Evolution de la section maximale de la membrane A au cours du temps, pour $\{f = 1 \text{ Hz}; L = 4 \text{ m}; c_0^2 = 35 \text{ m/s}; K = 60\}$, et une amplitude variable, notée le long des courbes.
- $(c_1 = c_0/\sqrt{2})$. **B/** Valeur de \bar{f}^* en fonction de $1/2\bar{a}^*$ au seuil de croissance des anévrismes, en échelle logarithmique et linéaire.
- C/** Valeur de \bar{p} en fonction de \bar{Q}^2 au plateau pour les expériences qui ne donnent pas lieu à un anévrisme.

donc le seuil dans les expériences numériques pour un débit valant :

$$Q_{num}^* = 0.45 \frac{A_0 c_0}{\sqrt{2K}} \quad (\text{III.4.22})$$

En deçà du seuil, nous mesurons comme précédemment la pression atteinte au plateau. Elle apparaît sur la figure III.4.8-C, sous forme adimensionnée. Les points sont en très bon accord avec ceux que nous avons obtenus dans l'expérience réelle. On vérifie donc toujours en particulier la relation de proportionnalité entre la surpression au plateau et le carré du débit entrant, ce qui valide le modèle que nous avons développé.

Cette confirmation apportée par les expériences numériques est particulièrement précieuse. Le modèle de windkessel que nous avons utilisé pour décrire le comportement expérimental présente en effet un inconvénient majeur : il s'appuie sur des variables globales, c'est à dire moyennées dans l'espace, et aussi sur des moyennes temporelles (les débits, en particulier). Le code numérique, pour sa part, a pour base les équations locales III.3.2 et III.3.3. Retrouver les mêmes comportements qualitatifs avec les deux méthodes permet de réconcilier l'approche du chapitre 3 sur les ondes avec celle de windkessel.

4.4.2 Pertinence des expériences numériques : effet d'une zone de célérité plus faible

Dans nos expériences, la membrane ne gonfle pas non plus en bloc. C'est généralement une portion d'une dizaine de centimètres de long qui va se développer en premier (voir figure III.4.1). On peut se demander si c'est la conséquence d'une certaine inhomogénéité dans la membrane, de défauts locaux, par exemple. Cela reviendrait à mettre en série deux chambres windkessel de propriétés légèrement différentes. Il apparaît en effet dans l'écriture du débit seuil, que celui-ci est plus bas dans des vaisseaux de faible diamètre, ou de faible vitesse d'ondes, et qui rencontrent une grande résistance en aval. Si deux vaisseaux de caractéristiques différentes (célérité par exemple) se suivent, examinons dans quelle mesure ce modèle de windkessel est affecté.

a/ Modèle de windkessel modifié

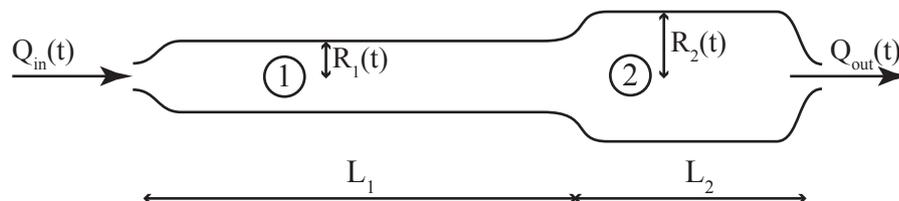


FIG. III.4.9 – Schéma de notations pour l'étude du windkessel à deux zones d'élasticité différentes, annotées respectivement 1 et 2.

La figure III.4.9 explicite les notations que nous utiliserons dans ce paragraphe : nous considérons désormais deux zones $i = 1$ ou 2 , de longueur L_i , de rayon $R_i(t)$ avec $R_i(0) =$

R_0 , et dont l'élasticité est caractérisée par la vitesse des ondes élastiques c_i . Nous partons avec les hypothèses suivantes :

- i). Les deux compartiments ont des pressions égales à tout moment
- ii). La résistance dans le tuyau de sortie a les mêmes caractéristiques que dans l'étude précédente
- iii). Nous revenons à une élasticité linéarisée, comme au paragraphe 4.2.1 :
 $p = 2\rho c_i^2(R_i - R_0)/R_0$ (voir III.2.7).

En appelant $\delta R_i = R_i - R_0$, les hypothèses (i) et (iii) impliquent :

$$\frac{\delta R_2}{\delta R_1} = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \quad (\text{III.4.23})$$

et par ailleurs, la conservation du volume conduit à :

$$R_0(U_{in}(t) - U_{out}(t)) = \frac{d\Omega}{dt} = 2L_1 \frac{d\delta R_1}{dt} \left[1 + \frac{L_2 c_1^2}{L_1 c_2^2} \right]. \quad (\text{III.4.24})$$

En rajoutant la résistance en sortie (cf. III.4.3), il vient

$$2L_1 \frac{d\delta R_1}{dt} \left[1 + \frac{L_2 c_1^2}{L_1 c_2^2} \right] + c_1 \sqrt{\frac{2R_0 \delta R_1}{K}} = R_0 U_{in}(t). \quad (\text{III.4.25})$$

Si l'on a un débit nul en entrée (vidange du tube élastique), on peut réécrire cette formule comme suit :

$$\frac{\sqrt{\delta R_1}}{\sqrt{R_0}} = \frac{\sqrt{\delta R_1(t=0)}}{\sqrt{R_0}} - t \frac{c_1}{2\sqrt{2K}L_1 \left[1 + \frac{L_2 c_1^2}{L_1 c_2^2} \right]} \quad (\text{III.4.26})$$

C'est à dire que dans l'expression caractéristique du temps de vidange τ , L est remplacé par $L_1 [1 + (L_2 c_1^2)/(L_1 c_2^2)]$.

- Si $c_1 = c_2$, on retrouve alors le cas du paragraphe 4.2.1 et $L = L_1 + L_2$.
- Si $c_1 \ll c_2$, ou l'inverse, alors seul le segment souple fait office de réservoir windkessel. L'autre agit comme une portion de tube rigide, et on reprend de nouveau la même expression pour τ , mais $L = L_1$ et $c = c_1$.
- Si c_1 et c_2 sont différents mais comparables, on peut alors mener une comparaison entre notre tube « inhomogène » et un tube homogène de longueur $L = L_1 + L_2$ et de vitesse du pouls c_1 . On obtient la relation

$$\frac{\tau_{inhomo}}{\tau_{homo}} = \frac{\sqrt{K}L_1 [1 + L_2 c_1^2/c_2^2]}{c_1} \cdot \frac{c_1}{(L_1 + L_2)\sqrt{K}} = \frac{1 + \alpha X}{1 + X} \quad (\text{III.4.27})$$

Avec $X = L_2/L_1$ et $\alpha = (c_1/c_2)^2$. X comme α sont positifs, et donc

$$\frac{\tau_{inhomo}}{\tau_{homo}} < 1 \Leftrightarrow \alpha < 1 \quad (\text{III.4.28})$$

Autrement dit, si l'on rigidifie une partie du tube élastique, le temps de vidange du tube diminue, tandis que si on la rend moins rigide, ce temps augmente. Et ce, d'autant plus que la vitesse est modifiée. Si τ est modifié, le débit seuil le sera aussi, de façon contraire (s'il faut plus de temps à la membrane pour se vider, elle supportera de plus faibles débits) : il apparaît donc plus facile de faire dépasser le seuil à un tube dont l'élasticité a été diminuée.

b/ Expériences avec une zone affaiblie

Quelques expériences exploratoires ont été menées avec une portion de membrane précontrainte de façon à tester l'influence d'une zone plus faible sur la croissance d'un anévrisme.

Protocole expérimental permettant de créer une zone affaiblie :

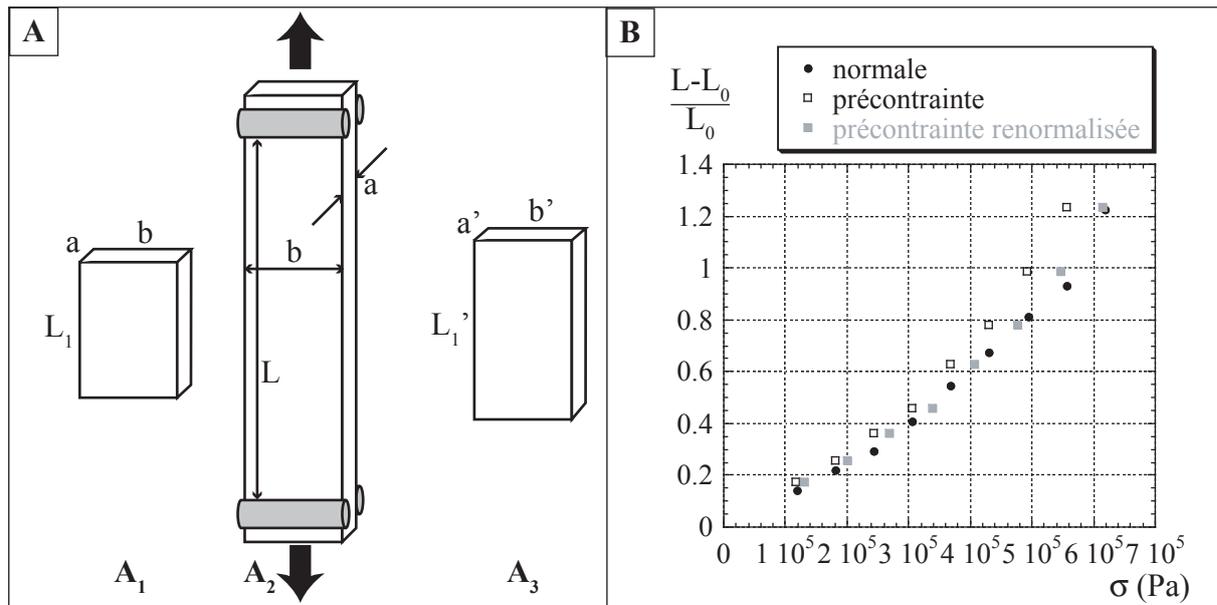


FIG. III.4.10 – **A** Protocole de précontrainte. Un segment de longueur L_1 , largeur b et épaisseur a (A_1) est étiré pendant une nuit à $L \approx 6L_1$ (A_2). Lorsqu'on le relâche, ses nouvelles dimensions sont L'_1 , b' et a' .
B/ Élongation en fonction de la contrainte ($\sigma = F/ab$ pour une force appliquée F) pour des expériences de traction effectuées sur une membrane, précontrainte ou non. Si l'on renormalise la contrainte $\sigma = F/a'b$ pour la membrane précontrainte, on retrouve son comportement d'origine.

Le principe du protocole reprend les remarques sur les propriétés de fatigue du caoutchouc (§ 2.1.1.a) : un morceau de caoutchouc précontraint, c'est à dire étiré fortement, change de longueur d'équilibre L_0 (figure III.4.10-A). Si nous prenons ainsi un segment de caoutchouc de longueur $L_1 = 10$ cm, que nous l'étirons pendant une nuit à $L = 60$ cm, il adopte le lendemain une longueur de relaxation que nous appelons L'_1 , et qui vaut environ 11 cm. Sa largeur b n'a pas varié en revanche.

Lorsque nous mesurons ses propriétés élastiques par de nouvelles expériences de traction menées comme au paragraphe 2.1.1.c, la membrane précontrainte semble s'allonger plus que la membrane de contrôle, ce que met en évidence le graphique III.4.10-B qui présente des élongations différentes pour deux morceaux de caoutchouc, dont l'un est précontraint. Si l'on considère que la membrane ne change pas de volume au cours de notre protocole, elle mincit forcément au cours de la précontrainte : il vient $a' = aL_1/L'_1$. Si l'on renormalise alors la contrainte subie par le matériau sur lequel on applique une force F on obtient $\sigma' = F/a'b = FL'_1/L_1b$. La courbe représentant l'élongation $(L - L_0)/L_0$ en fonction de la contrainte vient alors se superposer à la courbe de contrôle effectuée sur une membrane neuve (figure III.4.10-B). Nous retenons donc que notre protocole a pour effet

d'amincir la membrane à l'endroit étiré. Cet effet va se répercuter ensuite sur la vitesse des ondes en son sein qui s'écrit, on le rappelle, $c_0 = \sqrt{dE/2\rho R_0}$. Une augmentation de L_1 de 10% se solde alors par une diminution de 5% de c_0 . Ceci nous permet alors de tester notre hypothèse précédente sur une membrane à deux vitesses.

Croissance d'anévrisme sur membrane inhomogène :

Nous menons à présent des expériences de croissance sur des membranes de longueur totale L_0 dont un segment de longueur L_1 a été précontraint.

En premier lieu, nous regardons le seuil de croissance des anévrismes : il se trouve très peu modifié par la présence de la région faible, et on retrouve souvent les mêmes valeurs seuil que pour une membrane homogène. C'est ce que montre le graphe A de la figure III.4.11, qui représente la fréquence au seuil adimensionnée $\bar{f}^* = f^*L\sqrt{K/2}/c_0$ en fonction de $1/2\bar{a}^* = A_0L/(2\pi R_{piston}^2 a^*)$. Pour les cas homogènes, nous prenons $L = L_0$, et pour les cas inhomogènes, $L = L_1$. Les points viennent tous s'aligner sur une même droite de pente 1 dans le graphique en échelle logarithmique : le seuil est donc peu affecté par l'inhomogénéité de la membrane, et les résultats tirés des expériences numériques peuvent donc bien être comparés aux résultats expérimentaux obtenus sur la membrane homogène.

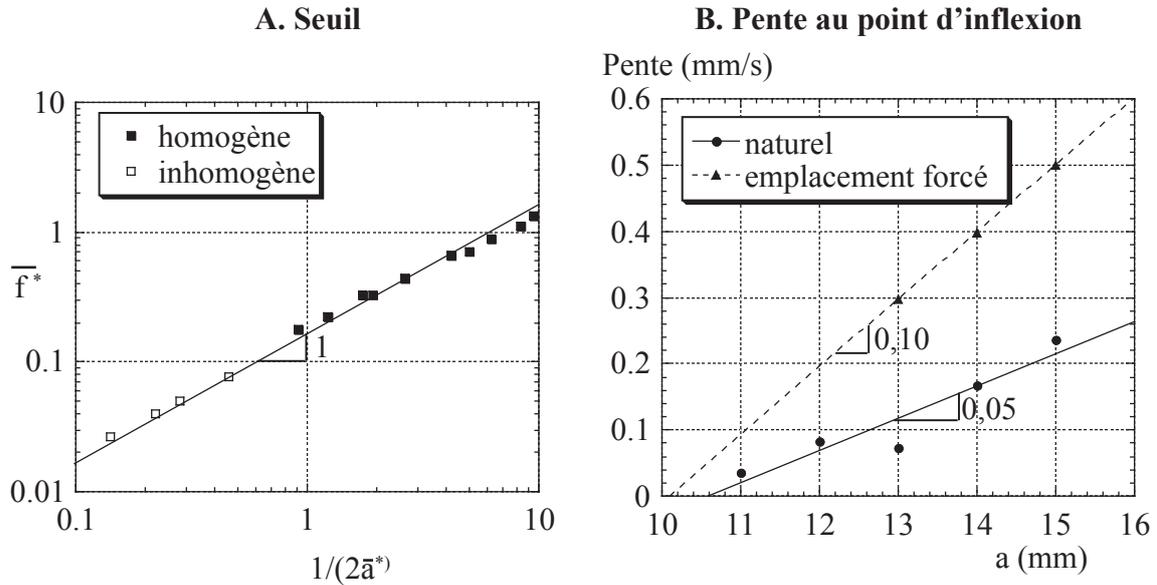


FIG. III.4.11 – **A** Seuil de croissance d'un anévrisme sur membrane homogène ou non. Fréquence au seuil adimensionnée $\bar{f}^* = f^*L\sqrt{K/2}/c_0$ en fonction de $1/2\bar{a}^* = A_0L/(2\pi R_{piston}^2 a^*)$. Pour les cas homogènes, nous prenons $L = L_0$, et pour les cas inhomogènes, $L = L_1$.
B/ Influence de l'inhomogénéité de la membrane sur la rapidité de croissance de l'anévrisme : pente au point d'inflexion en fonction de a pour quelques expériences menées avec $f = 0,75$ Hz et $K = 40$.

Lorsqu'un anévrisme croît sur une membrane inhomogène, cependant, nous observons qu'il prend systématiquement place à l'endroit de la zone précontrainte, qu'on l'ait placée en amont, en aval ou au milieu du tube. Il existe donc une influence certaine de l'affai-

blissement d'une partie de la membrane. Cette observation vient par ailleurs corroborer les remarques du paragraphe 4.4 selon lesquelles l'anévrisme doit trouver sa place là où c_0 est minimal.

Quelques expériences préliminaires ont également été conduites de façon à caractériser la rapidité du développement d'un anévrisme sur une zone précontrainte par rapport à un anévrisme sur membrane homogène. Les résultats sont présentés sur la figure III.4.11-B : la pente au point d'inflexion de la courbe $D(t)$ est tracée en fonction de l'amplitude de forçage, pour des expériences menées avec $K = 14$ et $f = 0,75$ Hz, au delà du seuil $a^* = 10$ mm. Sur membrane précontrainte, la pente est deux fois plus forte que sur membrane homogène. Les anévrismes se développent donc plus vite sur des membranes affaiblies.

En résumé, l'existence d'une zone faible sur la membrane permet de forcer l'emplacement de l'anévrisme sans changer le débit seuil de croissance. Il semble cependant que le temps de croissance des anévrismes, lui, en soit affecté.

4.4.3 Expériences numériques : localisation privilégiée des anévrismes dans les ventres des ondes

Le code numérique permet de jouer aisément sur l'inhomogénéité du tube élastique : on peut en particulier choisir l'emplacement de la zone faible (comme dans les expériences), et surtout varier l'intensité de la variation de célérité. Nous caractérisons cette dernière par le paramètre $\Delta = (c_0^2 - c_1^2)/c_0^2$.

En changeant la position du défaut, pour un défaut donné ($\Delta = 0,12$), on observe un changement de comportement significatif. La figure III.4.12-A en rend compte. Sur le graphique A1 qui trace la section maximale de la membrane au cours du temps, on observe que le développement d'un anévrisme a lieu si le défaut est placé au milieu de la membrane, tandis que les déformations restent stationnaires si le défaut est placé au tiers ou aux deux tiers du tube. Ces déformations ne sont toutefois pas les mêmes. Le graphique A2 trace l'enveloppe de la section, c'est à dire la section maximale, moyenne et minimale atteintes en un point x au cours du temps. On y a superposé l'enveloppe pour un cas sans défaut (qui présente des ventres et des nœuds dus aux réflexions d'ondes), et les enveloppes avec les défauts en $x = L/3$ et $2L/3$. Les deux défauts ressortent : ils sont particulièrement gonflés. Celui qui est placé en $x = 2L/3$ plus que celui de $x = L/3$. Or ce dernier est placé dans un nœud. On remarque qu'un ventre prend place en $L/2$, qui est l'emplacement où le défaut donne lieu à un anévrisme. Il semble donc qu'il y ait une corrélation entre, d'une part, les déformations engendrées dans le cas homogène par les interférences des ondes parcourant la membrane et se réfléchissant, et, d'autre part, la section maximale atteinte au niveau d'un défaut, voire le développement d'un anévrisme.

La figure III.4.12-B souligne cette tendance : pour chaque emplacement testé, on augmente Δ — c'est à dire qu'on diminue c_1 — jusqu'à ce qu'un anévrisme se développe. On reporte alors la valeur Δ^* de Δ sur le graphique B1. Les bords posent des problèmes numériques et ne sont pas explorés. Des variations non négligeables de Δ^* sont observées (entre 10 et 17%). Elles semblent corrélées aux positions des nœuds et des ventres repérés sur le graphe B2 : il suffit d'un défaut d'élasticité de 10% pour gonfler en $x = L/2$ (un ventre), alors qu'il faut monter à 17% en $x = L/3$ qui est un nœud.

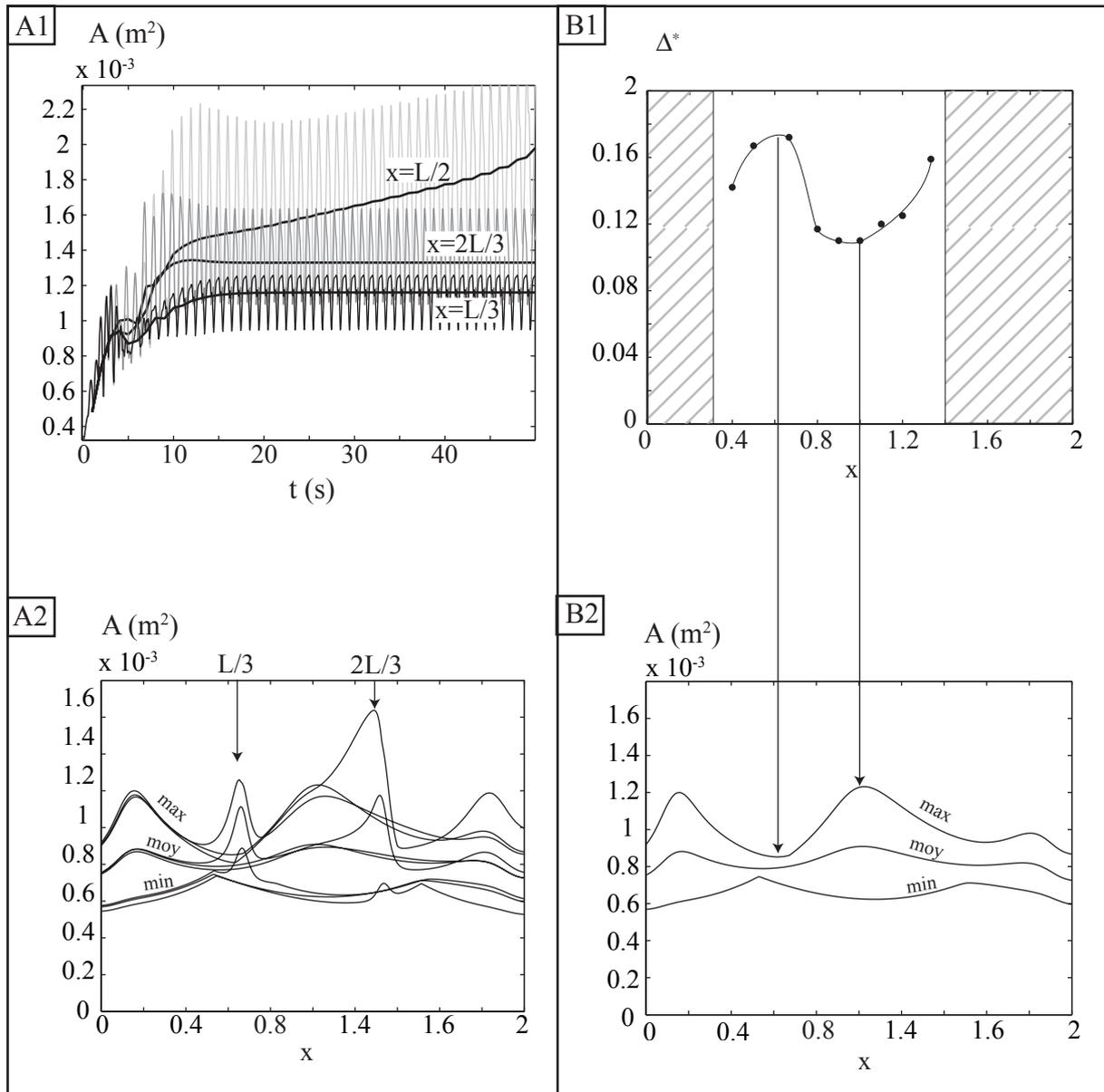


FIG. III.4.12 – Expériences numériques sur l'effet de la position de la zone (5 % de la longueur totale) de célérité faible.

A1/ Evolution de la section maximale de la membrane au cours du temps, pour trois localisations différentes d'un même défaut ($\Delta = 0, 12$).

A2/ Enveloppe contenant la section de la membrane en fonction de la position. Superposition trois situations : lorsque la membrane est homogène, lorsqu'elle comporte un défaut en $x = L/3$ et lorsque le défaut est en $x = 2L/3$.

B1/ Valeur de Δ à partir de laquelle le défaut donne lieu à un anévrisme, en fonction de la position.

B2/ Enveloppe correspondant à B1, mais dans le cas homogène. Elle met en évidence les creux et les ventres de la résultante des ondes transmises et réfléchies.

Ceci concorde-t-il avec les expériences réelles ? Aucune exploration systématique de ce résultat n'a pour l'instant été menée, cependant quelques éléments de réponse peuvent être apportés. Le diagramme spatio-temporel III.3.5 montre que dans notre expérience avec $L = 1$ m, les ventres sont situés au bord, et le nœud au milieu. Or, la croissance d'anévrismes sur membrane homogène a eu lieu quasi-systématiquement au bord, amont ou aval selon les cas. Nous avons observé des anévrismes ailleurs aussi, mais en proportion bien moindre. Aucune étude statistique n'a pourtant été conduite jusqu'à présent.

Expérimentalement, la plupart des résultats sont obtenus pour une membrane mesurant 1 m de long. Les résultats numériques obtenus avec cette même longueur sont présentés dans la figure III.4.13. Il sont obtenus avec $L = 1$ m ; $f = 1$ Hz ; $a = 40$ mm ; $K = 200$; et $CFL = 3$. Comme dans la figure III.4.12-B, Δ^* est plus faible au niveau des ventres de l'enveloppe : les anévrismes développent à ces endroits pour des défauts moins marqués qu'ailleurs. Ces ventres se sont rapprochés des bords du tube, ce qui correspond à l'observation expérimentale : le code numérique et les expériences donnent des résultats similaires, ce qui est très encourageant pour les études à venir : la piste de la localisation des anévrismes par un mécanisme d'interaction d'ondes doit être privilégiée dans le futur.

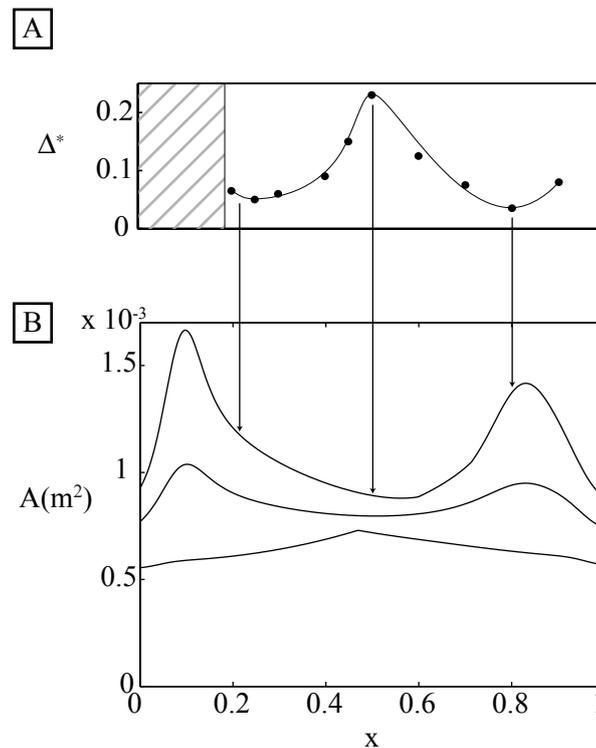


FIG. III.4.13 – Expériences numériques sur l'effet de la position de la zone de célérité faible (1,5 % de la longueur totale). Cette figure est construite de la même manière que la figure III.4.12-B, avec les paramètres : $L = 1$ m ; $f = 1$ Hz ; $a = 40$ mm ; $K = 200$; ; $CFL = 3$.

4.5 Applications physiologiques

Si l'on utilise la formule III.4.21 avec des valeurs adaptées à l'aorte, c'est à dire une section $A_0 = \pi 10^{-4}$ m, une célérité $c_0 = 5$ m/s, une résistance $K = 10$, on calcule $Q^* \approx 45$ ml/s. Le débit cardiaque (80 ml/cycle) étant sommairement distribué entre les

artères coronaires (10 à 20%), les membres supérieurs, les artères carotides (20 à 30%) et l'artère aorte descendante, cette valeur de 45 ml/s est de l'ordre de grandeur du débit aortique moyen. Nous en concluons que des variations du seuil par modification des propriétés artérielles peuvent permettre son dépassement, et donc le développement d'un gonflement selon le mécanisme identifié dans ce chapitre.

Considérons les facteurs de risques qui ont été identifiés dans la survenue des anévrismes, et qui modifient l'état des artères : on peut citer [90]

- (i) le vieillissement du sujet, qui se traduit par une dilatation, une fragilisation et une rigidification des vaisseaux sanguins, surtout dans les grosses artères, et d'une augmentation de la résistance périphérique ;
- (ii) l'hypertension, sorte de vieillissement précoce accompagné d'une augmentation de la pression moyenne et de la pression systolique ainsi que d'une rigidification des artères ;
- (iii) l'athérosclérose, c'est à dire le dépôt local de plaques lipidiques et calcifiées qui forment un rétrécissement (sténose) ou une obstruction de l'artère, avec éventuellement à long terme un affaiblissement local de la membrane. Lorsque l'athérosclérose est généralisée, la résistance rencontrée en sortie de cœur est augmentée ;
- (iv) le syndrome de Marfan, maladie congénitale se manifestant par une baisse du taux d'élastine dans la paroi des artères, qui encourent alors une dilatation excessive.

Dans (i) et (ii), la rigidification du système périphérique peut entraîner par exemple l'augmentation de la résistance rencontrée en sortie d'aorte. C'est la même chose en cas de sténose athérosclérotique (iii). Dans ce cas, le seuil Q^* voit sa valeur diminuer : on pourra donc éventuellement entrer dans le domaine de paramètre où la mécanique, indépendamment des autres facteurs biologiques ou cellulaire, prédit un gonflement de l'artère. Il en est de même si la paroi est fragilisée, suite à une plaque athérosclérotique, par exemple. Dans le cas du syndrome de Marfan (iv), on peut assimiler le comportement des artères à une modification de la loi de membrane, c'est à dire une diminution de c_0 , qui provoquerait alors une dilatation excessive.

4.5.1 Remarque sur l'influence de la rigidité.

Nous avons souligné au paragraphe 4.4.1 que le modèle de windkessel proposait une approche moyenne du problème. Pourtant, les variations de pression autour de sa valeur moyenne est une observable mise en avant par les praticiens : elle semble corrélée au risque d'accident cardiovasculaire.

Nous comparons sur la figure III.4.14 les signaux de pression obtenus en plaçant dans le dispositif une membrane élastique puis un tube armé en PVC, pour un même régime de fonctionnement du piston. Nous constatons que les fluctuations de pression autour de la moyenne sont nettement plus importantes lorsque l'écoulement a lieu dans le tube rigide. Ceci est en accord avec les diagnostics médicaux exprimés à l'observation de la pression sanguine. La mesure des fluctuations du signal de pression est donc un moyen précieux de contrôler la santé du réseau artériel. Le modèle théorique de windkessel, qui considère des valeurs moyennes, ne permet pas de rendre compte de ce phénomène, en revanche, on peut s'attendre à ce qu'il ressorte à travers l'approche ondulatoire et le code numérique.

L'hypertension systolique qui vient d'être évoquée comme facteur de risque pour les

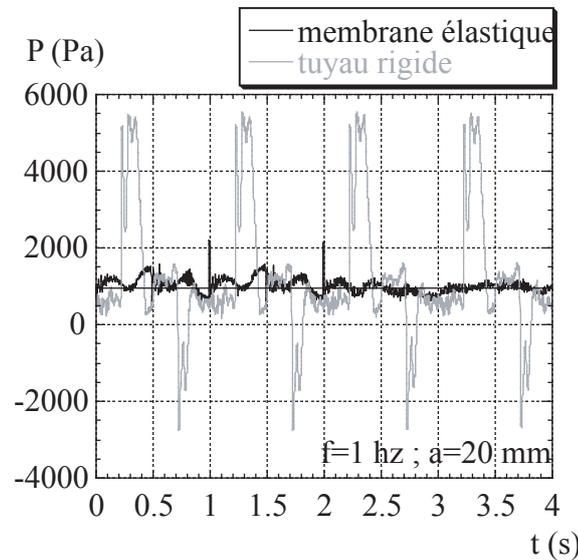


FIG. III.4.14 – Influence de la rigidité d'un tuyau sur les fluctuations de pression en son sein.

anévrismes reflète donc une augmentation de la rigidité des artères périphériques, et de la résistance qu'elles exercent sur l'écoulement, aortique par exemple. Ceci participe donc à l'abaissement du débit critique de gonflement de l'artère.

Remarquons en outre que de plus fortes variations de pressions autour d'une même moyenne impliquent un travail plus important de la part du cœur, qui injecte dans les artères un volume de sang fixé. Autrement dit, un réseau artériel plus rigide fatigue plus le cœur qu'un réseau élastique qui permet un stockage de type windkessel : le critère de l'amplitude des variations de pression paraît adapté pour évaluer l'état de santé cardiovasculaire d'un patient.

4.5.2 Comparaison du seuil d'apparition des ondes et du seuil de formation des anévrismes

La figure III.4.15 montre sur un même graphique le seuil ondes/déformations synchrones, mis en évidence au chapitre 3, et le seuil de croissance des anévrismes, que nous avons tiré de ce chapitre 4. Les points choisis ont tous été obtenus avec les expériences numériques. Le seuil des anévrismes est représenté dans ce graphique par une droite de pente -2 dont la position dépend de K . Nous avons choisi le K physiologique 10,4 pour placer la droite. Les transitions découpent donc le plan en quatre zones :

- À faible amplitude et faible pulsation, le tube élastique (l'artère) se déforme de façon homogène, et atteint un régime stable, sans anévrisme. Cette zone est de couleur blanche sur la figure.
- Si l'on passe le seuil des anévrismes (à faible pulsation), on va dans la zone jaune : la membrane ne présente pas d'ondes de propagation, mais finit par développer un anévrisme.
- Si, au contraire, on passe le seuil des ondes, on arrive dans la zone bleue : des ondes de déformation se propagent sur le tube, qui ne développe pas d'anévrisme.
- On peut alors ensuite passer aussi le seuil des anévrismes, et transiter vers la zone

verte : il y a des ondes, et un anévrisme se développe. Celui-ci est alors sujet aux phénomènes de localisation mis en évidence dans le paragraphe 4.4.3.

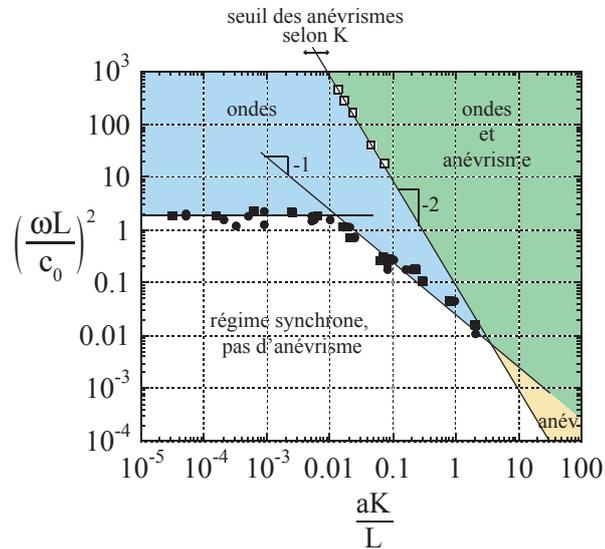


FIG. III.4.15 – Comparaison du seuil d'apparition des ondes et du seuil de formation des anévrismes obtenus dans les simulations numériques. Les symboles pleins proviennent de la figure III.3.10 et représentent le seuil ondes/déformation synchrones. Les symboles vides sont tirés de la figure III.4.8-B. Ils figurent le seuil de croissance des anévrismes, et on a utilisé pour positionner la droite le facteur K physiologique 10,4.

Conclusion de l'étude sur les anévrismes

Notre étude expérimentale d'une membrane élastique cylindrique soumise à écoulement pulsé a permis de dégager deux points principaux : Premièrement, nous avons mis en lumière l'existence d'un seuil à l'observation d'ondes de déformation, que l'on explique par la capacité de la membrane à absorber suffisamment rapidement le volume de liquide qu'on lui délivre à chaque cycle. Le seuil qui a été dégagé est caractérisé par la relation

$$c_0^2/aL\omega^2K = \text{constante} \quad (\text{III.4.29})$$

En deçà, des ondes de déformation se propagent, et au delà, la membrane se déforme comme un tout à chaque cycle. Cette différence peut conduire, du point de vue physiologique, à des contraintes localisées de différentes manières selon l'emplacement choisi sur l'arbre artériel. Elle pourrait expliquer les différents types d'anévrismes que l'on observe : fusiformes (comme la majorité des anévrismes de l'aorte abdominale) dans les artères qui propagent et réfléchissent des ondes, ou sacculaires dans les artères qui se déforment de façon homogène (dans le cerveau par exemple).

Le second résultat est l'importance des facteurs mécaniques dans le gonflement d'une artère. Une membrane élastique soumise à un écoulement en amont et à une résistance en aval trouve, aux faibles débits, une position gonflée qui lui permet d'atteindre un régime stationnaire. Le dépassement d'un débit critique

$$Q_{exp}^* = 0.13 A_0 c_0 / \sqrt{2K} \quad (\text{III.4.30})$$

fait basculer dans un régime où la membrane se met à gonfler indéfiniment sans plus trouver cette position stationnaire. Si jamais une zone de la membrane est plus souple que le reste, on développe le gonflement dans cette région-ci. Nous en déduisons que les modifications des propriétés physiologiques que sont la rigidité des artères et la résistance périphérique peuvent jouer un grand rôle dans le développement des anévrismes sanguins.

Le rôle des ondes dans la localisation des anévrismes a été abordé de façon préliminaire à l'aide du code numérique, et les corrélations entre les déformations ondulatoires et la facilité de développement d'un anévrisme nous semblent une piste particulièrement intéressante à explorer à l'avenir.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Complément sur les occlusions pulmonaires

1.1 Transition vers le cas inertiel, après le pincement

Nous menons ici l'étude de la loi de séparation des apex des bulles nouvelles consécutives à l'instabilité capillaire, non pas dans la limite des faibles nombres de Reynolds, comme au paragraphe 4.3, mais dans l'hypothèse où l'inertie domine la viscosité.

1.1.1 Notations

Nous utilisons le même protocole et les mêmes appellations que dans le paragraphe 4.3.1 (figure IV.A.1-A).

1.1.2 Observations expérimentales

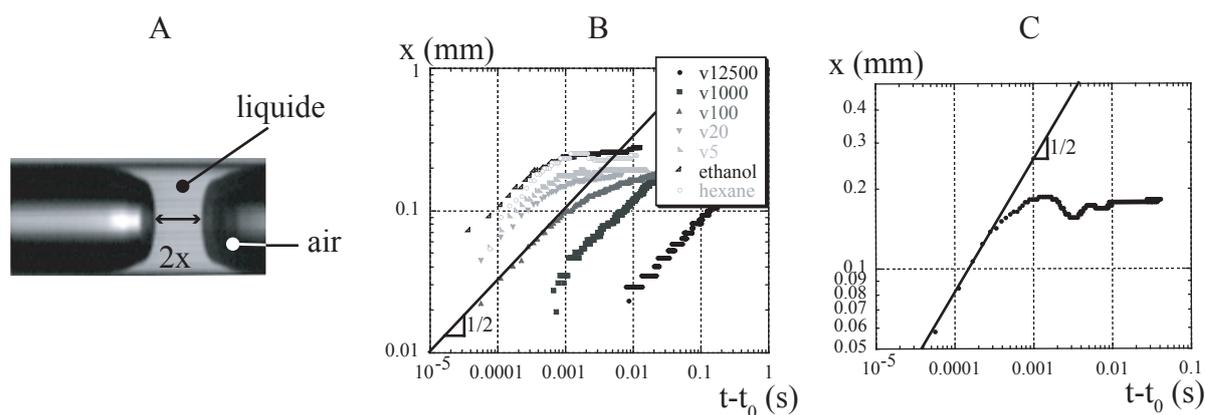


FIG. IV.A.1 – **A** Notations adoptées. **B** Saturation de la dépendance en viscosité pour la loi $x(t - t_0)$. **C** Mise en évidence des ondes capillaires sur la valeur de $x(t)$.

Lorsque l'on baisse la viscosité des liquides employés, on perd la dépendance en viscosité que nous avons dégagée dans le paragraphe 4.3.3 (équation I.4.8). La figure IV.A.1-B montre en effet que les courbes correspondant à l'huile V5, l'éthanol et l'hexane ne sont pas décalées les unes par rapport aux autres comme les courbes des huiles V12000, V1000

et V100. On observe par ailleurs très distinctement la présence d'ondes capillaires, mises en évidence par les oscillations sur la figure IV.A.1-C, et qui soulignent l'importance que prend l'inertie. En effet, on ne peut plus alors s'en tenir à notre raisonnement de dissipation visqueuse.

1.1.3 Modèle

Le modèle ci-après est conçu sur le même principe que dans le cas visqueux, mais nous devons ici équilibrer les forces de tension de surface par les forces inertielles, c'est à dire :

$$\rho \frac{d(x^3 \dot{x})}{dt} \sim \sigma R \quad (\text{IV.A.1})$$

Il vient en intégrant (comme au paragraphe 4.3.3) :

$$x \sim \left(\frac{\sigma R}{\rho} \right)^{1/4} \sqrt{t} \quad (\text{IV.A.2})$$

Cette relation ne fait effectivement pas apparaître μ . Elle est identique à celle que dérive Bianco [2] pour le cas d'une coalescence sphère-plan (figure IV.A.2).

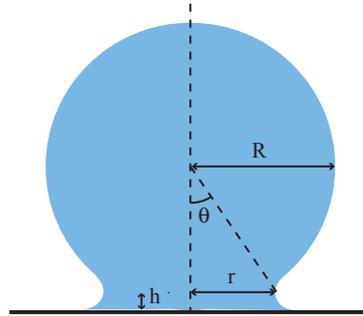


FIG. IV.A.2 – Schéma de notation pour la coalescence en géométrie sphère-plan.

La force de tension de surface établie sur la taille du contact fournit au volume hr^2 de liquide son accélération :

$$\rho \frac{dhr^2 \dot{r}}{dt} = \sigma r \quad (\text{IV.A.3})$$

Or géométriquement, $h = r^2/R$. Il reste donc à intégrer

$$\frac{dr^4 \dot{r}}{dt} = \frac{\sigma R}{\rho} \quad (\text{IV.A.4})$$

On arrive donc bien à la loi IV.A.2. C'est également la même relation à laquelle parvient, en géométrie sphère-sphère, la théorie de Eggers, Lister et Stone [9]. Les simulations numériques de Duchemin [7] et les expériences de Thoroddsen [31] confirment cette tendance.

1.1.4 Discussion

La loi IV.A.2 reflète bien le comportement $x \propto \sqrt{t - t_0}$ observé, et ne contient plus la viscosité comme paramètre.

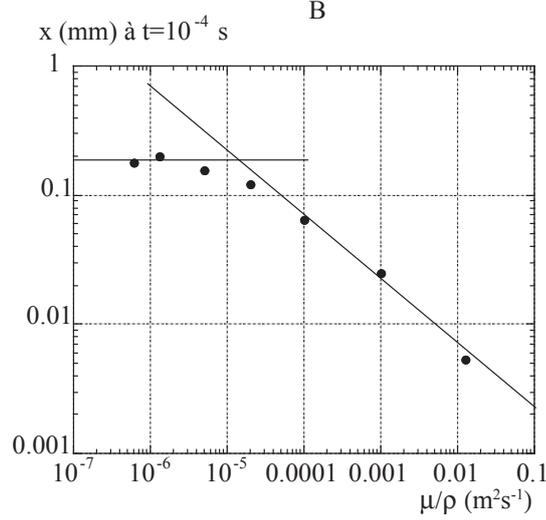


FIG. IV.A.3 – Transition du régime inertiel ($\mu/\rho < 10^{-5}$) à un régime visqueux où $x(t = t_0 + 10^{-4} \text{ s}) \propto \mu/\rho^{-1/2}$.

Pour caractériser la transition du régime visqueux au régime inertiel, nous reportons sur un même graphe (figure IV.A.3) la valeur de x à un même temps $t = t_0 + 10^{-4}$ s. Si la valeur obtenue évolue avec la viscosité, on est en régime visqueux, et au contraire, lorsqu'on obtient une valeur indépendante de μ , c'est la signature du régime inertiel. Le passage entre les deux régimes est logiquement repéré par un nombre de Reynolds, dont la fonction est de comparer l'importance des forces visqueuses et inertielles. Nous le notons Re_{inert} lorsqu'on est en régime inertiel et Re_{visq} dans le cas visqueux. Remarquons que les deux formulations ne sont pas tout à fait identiques, même si elles sont liées :

$$Re_{inert} \sim \frac{x\dot{x}}{\nu} \sim \sqrt{\frac{\sigma R\rho}{\mu^2}} \sim \sqrt{Re_{visq}} \quad (\text{IV.A.5})$$

La transition observée sur la figure IV.A.3 se fait pour $Re_{inert} \sim 10$.

Annexe B

Compléments sur l'entropion

2.1 Caractérisation de la raideur des feuilles de mylar

2.1.1 forme d'une feuille élastique soumise à la gravité

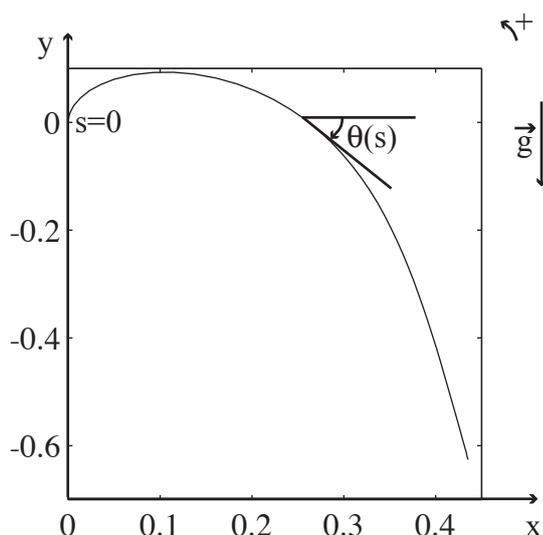


FIG. IV.B.1 – Forme d'une feuille élastique soumise à la gravité. La feuille, de longueur L , est maintenue verticalement au point $(0,0)$ que l'on prend aussi comme origine des abscisses curvilignes.

Nous cherchons la loi qui donne la forme d'une feuille élastique de raideur par unité de largeur B qui se courbe sous l'effet de la gravité.

La figure IV.B.1 introduit les notations que nous utilisons : l'axe (Ox) est horizontal, (Oy) est vertical, et on décrit la forme de la feuille par la quantité $\theta(s)$ avec s l'abscisse curviligne. La feuille présente une largeur b .

Si ρ_l est la densité linéique de la feuille ($\rho_l = \rho_e b$), on peut écrire l'énergie totale de la feuille, qui se décompose en un terme élastique dû à la courbure, et un terme d'énergie

de pesanteur :

$$\mathcal{E} = \int_0^L \left[\frac{Bb}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \rho_l g y(s) \right] ds \quad (\text{IV.B.1})$$

On remarque en outre que $y(s) = \int_0^s \sin \theta(t) dt$. Une intégration par partie de l'énergie gravitaire conduit à

$$\mathcal{E} = \int_0^L \left[\frac{Bb}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \rho_l g (L - s) \sin \theta(s) \right] ds \quad (\text{IV.B.2})$$

La forme qu'adopte la tige minimise cette énergie. Nous appelons $\theta_e(s)$ la valeur d'équilibre de θ qui remplit cette condition. Si on imagine une variation $\delta\theta$ (avec $\delta\theta(0) = 0$) autour de cette fonction θ_e , on peut calculer l'accroissement d'énergie correspondant.

$$\delta\mathcal{E} = \left[Bb \frac{d\theta_e}{ds} \delta\theta \right]_0^L + \int_0^L \left[-Bb \left(\frac{d\theta_e}{ds} \right)^2 + \rho_l g (L - s) \cos \theta_e(s) \right] ds \quad (\text{IV.B.3})$$

Or, à l'équilibre, ce $\delta\mathcal{E}$ doit tendre vers zéro, ce qui se traduit par deux conditions :

$$\begin{cases} \left. \frac{d\theta_e}{ds} \right|_s = L = 0 \\ Bb \left(\frac{d\theta_e}{ds} \right)^2 = \rho_l g (L - s) \cos \theta_e \end{cases} \quad (\text{IV.B.4})$$

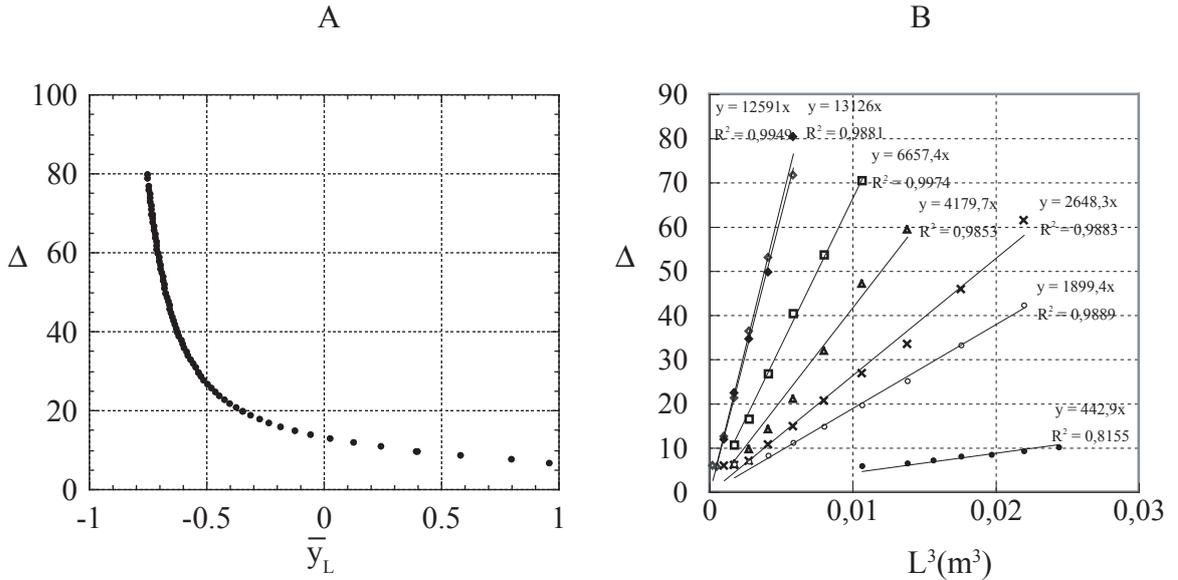


FIG. IV.B.2 – **A/** Relation $\Delta(y_L/L)$ obtenue par intégration numérique. **B/** Mesure expérimentale de y_L/L en fonction de L^3 pour les différentes feuilles de mylar. \diamond et \blacklozenge : $e = 55 \mu\text{m}$; \square : $e = 75 \mu\text{m}$; \triangle : $e = 100 \mu\text{m}$; \times : $e = 150 \mu\text{m}$; \circ : $e = 180 \mu\text{m}$; \bullet : $e = 490 \mu\text{m}$.

C'est cette deuxième équation qui détermine la forme de la feuille, et on cherche à l'intégrer avec les conditions aux limites $\theta_e(0) = \pi/2$ et $\dot{\theta}_e(L) = 0$. Pour cela, nous commençons par adimensionner l'équation : si $s = L\bar{s}$, il vient

$$\left(\frac{d\theta_e}{d\bar{s}}\right)^2 = \frac{\rho_l g L^3}{Bb}(1 - \bar{s}) \cos \theta_e = \Delta(1 - \bar{s}) \cos \theta_e \quad (\text{IV.B.5})$$

Δ est un paramètre sans dimension qui permet de définir une longueur $\mathcal{L} = (Bb/\rho_l g)^{1/3}$ qui est la longueur sur laquelle la gravité arrive à courber la feuille. En intégrant, à présent, avec la condition $d\theta/ds(\bar{s} = 1) = 0$ nous trouvons

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta_e}{d\bar{s}}\right)^2 = \Delta [(1 - \bar{s}) \sin \theta_e + (\bar{y} - \bar{y}_L)] \quad (\text{IV.B.6})$$

Pour un Δ fixé, on peut intégrer numériquement cette équation. On trouve une relation univoque entre Δ et $\bar{y}_L = y_L/L$, qui est représentée sur la figure IV.B.2-A.

2.1.2 Caractérisation des feuilles de mylar utilisés pour les expériences

Le but ici est de trouver, pour chaque feuille de mylar, sa raideur B . Nous utilisons le résultat précédent. Nous découpons donc une feuille de mylar de longueur L que nous plaçons comme sur la figure IV.B.1. Nous mesurons y_L/L en faisant varier la longueur L de la feuille. Le graphique A de la figure IV.B.2 nous permet d'accéder à $\Delta(L) = (L/\mathcal{L})^3$. La représentation dans le plan $(L^3; \Delta)$ conduit donc à une droite dont la pente est $\rho_l g/Bb = \rho e g/B$. Ayant mesuré ρ , on en trouve B , qui est donné, pour chaque transparent, dans le tableau IV.B.1. Le module d'Young E est calculé suivant la formule $B = Ee^3/12(1 - \nu^2)$ (avec e l'épaisseur de la feuille et ν son module de Poisson).

e (μm)	ρ (kg/m^3)	B ($10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$)	E (GPa)
55	1359	57	4,2
75	1330	162	4,18
100	1352	354	3,8
150	1365	795	2,7
180	1320	1232	2,53
490	906	10041	1

TAB. IV.B.1 – Propriétés mécaniques des feuilles de mylar utilisées.

Annexe C

Compléments sur les anévrismes

3.1 Colonnes oscillantes

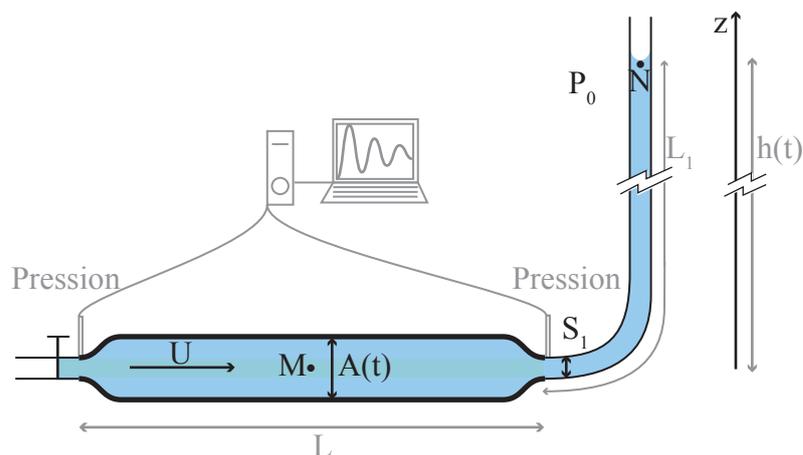


FIG. IV.C.1 – Montage expérimental pour l'étude de la fréquence propre de la membrane

3.1.1 Principe du montage expérimental et des mesures

Le tube souple de longueur L_0 , bouché en amont, est relié en aval à une colonne d'eau de longueur L_1 . Dans cette colonne, nous fixons une hauteur d'eau statique (à l'équilibre) h_0 . Par aspiration nous élevons la surface eau/air de quelques centimètres (typiquement une dizaine), ce qui communique de l'énergie potentielle de gravitation à notre système. La membrane dégonfle donc un peu par rapport à l'équilibre. Le relâchement soudain de l'aspiration donne lieu à la redescente du niveau d'eau et au gonflement de la membrane, qui emmagasine de l'énergie élastique. S'en suivent des oscillations quasi-périodiques amorties aussi bien pour la hauteur d'eau que pour la pression dans le tube. C'est cette dernière que nous mesurons. Nous observons par ailleurs que les déformations encourues par la membrane sont homogènes.

3.1.2 Résultats expérimentaux

Nous mesurons les oscillations que présente le signal de pression (amont ou aval, ils sont superposables) à partir de l'instant où on relâche la dépression exercée sur la colonne d'eau. L'amplitude initiale ne modifie pas la pulsation propre mesurée, ni l'amortissement. Les oscillations se font de manière quasi-harmonique et amortie. On peut approcher de près le signal de pression par une fonction du type $P(t) = A + B \cos(\omega_0 t) e^{-mt}$, où la constante A est la pression moyenne dans le tube au cours du temps et où B est l'amplitude de la première oscillation.

Par ailleurs, nous pouvons faire varier la longueur de notre membrane ainsi que la hauteur d'eau moyenne dans le tube aval.

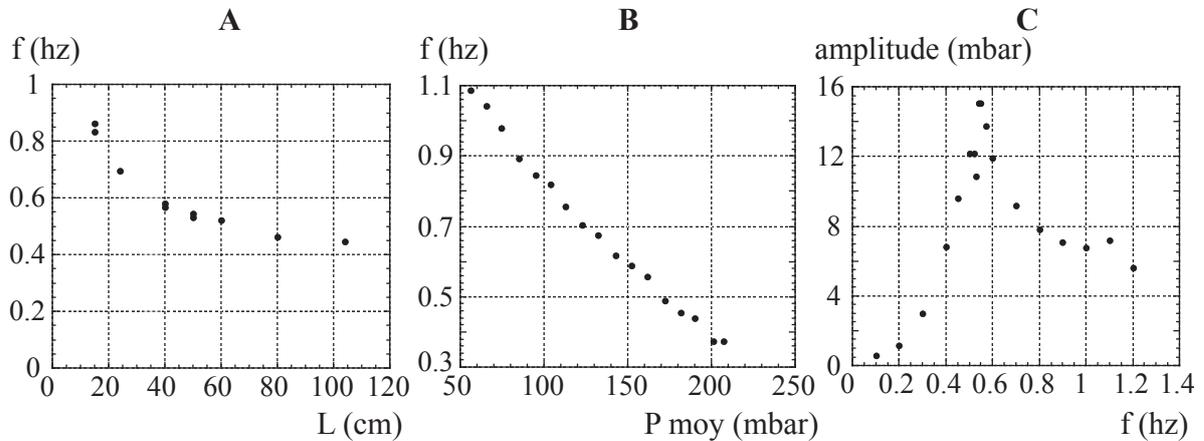


FIG. IV.C.2 – Evolution de la fréquence propre de notre membrane en fonction
 A/ de sa longueur (la surpression moyenne est de 90mbar)
 B/ de la charge en sortie (la membrane mesure 1m de long).
 C/ Amplitude des fluctuations de pression dans la membrane en fonction de
 la fréquence de forçage. La fréquence propre mesurée pour ce montage (i.e.
 sans modifier le tube de sortie) est de $0,53\text{Hz}$, et correspond à très-peu près à
 l'emplacement du pic de résonance sur le graphe.

La figure (IV.C.2–A) montre comment évolue la fréquence propre observée en fonction de la longueur de la membrane souple. Dans cette expérience, la quantité $L + L_1(t = 0)$ est gardée constante, mais une partie du tube souple est enserrée dans un tube rigide l'empêchant de gonfler. Plus la longueur de la membrane souple est grande, plus sa fréquence propre est faible.

Dans l'expérience suivante, c'est la hauteur d'eau dans la colonne que nous avons varié. Elle a également une influence sur la fréquence propre des oscillations, puisque la figure (IV.C.2–B) montre également que f est une fonction décroissante de la pression moyenne imposée.

Enfin, pour être sûr de se trouver devant un mode propre de la membrane, la dernière chose que nous avons faite est de forcer les oscillations grâce au vérin. Si notre hypothèse d'oscillateur pseudo-périodique est valable, nous devons pouvoir obtenir une résonance. C'est en effet ce qui apparaît figure (IV.C.2–C). Alors que l'amplitude des mouvements

du vérin ne change pas, l'amplitude des variations de pression au sein du fluide change avec la fréquence imposée, de même que les déformations de la membrane.

3.1.3 Modèle

Il s'agit à présent d'expliquer un peu plus quantitativement les résultats que nous obtenons en terme de pulsation propre de notre membrane. Nous élaborons donc dans ce paragraphe un modèle d'oscillateur non-amorti.

a/ Notations et état d'équilibre de la membrane

Les notations sont définies conformément à la figure (IV.C.1) Nous appelons P_0 la pression atmosphérique ambiante, et h la hauteur d'eau instantanée dans le tuyau vertical. Plaçons un point M au milieu de la membrane. L , Ω , R , A , U et P désignent respectivement la longueur de la membrane élastique, le volume qu'elle contient, son rayon et sa section au point M , la vitesse moyenne du fluide sur cette section (comptée positive de gauche à droite), et la pression en M . L est fixé alors que les quatre autres grandeurs sont libres de varier au cours du temps, tout en étant bien entendu liées. Les indices 0 désignent des valeurs à pression transmurale nulle (lorsque $P = P_0$), et les indices eq les valeurs à l'équilibre (lorsque la colonne d'eau est remplie jusqu'à h_{eq}). Les mêmes notations seront indicées du chiffre 1 pour les grandeurs qui concernent la portion de tube rigide en aval : L_1 dénote la longueur de tube rigide remplie de liquide (libre donc de varier au cours du temps selon que h augmente ou diminue), R_1 son rayon et S_1 sa section, constants le long du tube, U_1 la vitesse moyenne du fluide dans une section du tube et P_1 la pression en N , égale à P_0 . On définit x comme la distance au point le plus amont de la membrane élastique. Par exemple, les coordonnées du point N s'écrivent $(L + L_1; h)$.

Au repos, la membrane est gonflée grâce à la surpression $P_{eq} - P_0 = \rho g h_{eq}$, avec $h_{eq} \sim L_1$ par construction de l'expérience. L'équation (III.2.7) indique alors que :

$$P_{eq} - P_0 = 2 \rho c^2 \frac{R_{eq} - R_0}{R_0} \sim \rho g L_{1eq} \quad (\text{IV.C.1})$$

b/ Perturbation de l'équilibre

Nous considérons à présent des variations par rapport à l'équilibre :

$$\begin{aligned} R &= R_{eq} [1 + \varepsilon(t)] \\ L_1 &= L_{1eq} + \delta L_1 \\ h &= h_{eq} + \delta h \\ P &= P_{eq} + \delta P \\ U &= \delta U \end{aligned} \quad (\text{IV.C.2})$$

Remarquons ici que ε est toujours supérieur à $R_0/R_{eq} - 1$ puisqu'on se place dans un régime où la membrane est toujours gonflée, et jamais collabée.

Notre fluide, supposé parfait et en écoulement non turbulent, obéit à la loi de Bernoulli :

$$\dot{\phi} + \frac{U^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = Cte \quad (\text{IV.C.3})$$

Il s'agit donc à présent de trouver le potentiel des vitesses ϕ ($U = -\text{grad } \phi$) qui caractérise notre écoulement sans présenter de discontinuité entre les points d'application du théorème de Bernoulli.

Évaluation du potentiel ϕ au sein de la membrane élastique (au point M) :

La conservation de la masse au sein de la membrane s'écrit

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho U A}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV.C.4})$$

Si on se place dans l'hypothèse réaliste d'un fluide incompressible, et si l'on se souvient que les déformations encourues par la membrane sont homogènes ($\partial R / \partial x = 0$), il reste :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\dot{A}}{A} = -2\frac{\dot{R}}{R} \quad (\text{IV.C.5})$$

En intégrant deux fois ($U = \partial \phi / \partial x$),

$$U(x) = -2\frac{\dot{R}}{R}x \quad (\text{IV.C.6})$$

$$\phi(x) = -\frac{\dot{R}}{R}x^2 \quad (\text{IV.C.7})$$

En moyenne (spatiale), dans la membrane, on trouve alors

$$\langle \dot{\phi} \rangle = -\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) \frac{L^2}{3} = -\dot{\varepsilon} \frac{L^2}{3} \quad (\text{IV.C.8})$$

Dans la membrane, nous pouvons désormais exprimer au premier ordre les termes qui nous serviront à appliquer le théorème de Bernoulli :

$$\left[\dot{\phi} + \frac{U^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right]_M = -\frac{L^2}{3} \dot{\varepsilon} + 2c^2 \varepsilon \frac{R_{eq}}{R_0} + \frac{P_0}{\rho} + 2c^2 \frac{\delta R_{eq}}{R_0} \quad (\text{IV.C.9})$$

Évaluation du potentiel ϕ_1 dans le tube rigide (au point N) :

La vitesse de l'eau dans le tube rigide est partout la même. Elle se raccorde en $x = L$ à la vitesse dans la membrane en fonction de la contraction locale :

$$\pi R^2 U|_{x=L} = \pi R_1^2 U_1|_{x=L} \quad (\text{IV.C.10})$$

Or $R_1 = R_0$. En intégrant suivant x , on trouve alors le potentiel suivant :

$$\phi_1(x) = U_{x=L} \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 (x - L) - \frac{\dot{R}}{R} L^2 \quad (\text{IV.C.11})$$

On connaît $U_{x=L}$ d'après (IV.C.6), et donc :

$$\phi_1(x) = -2L \frac{\dot{R}}{R} \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 (x - L) - \frac{\dot{R}}{R} L^2 \quad (\text{IV.C.12})$$

Et en particulier au point N, c'est à dire en $x = L + L_1$, au premier ordre :

$$\dot{\phi}_1(N) = -2\frac{R}{R_0^2}LL_1\ddot{R} - \frac{L^2}{R}\ddot{R} = -L\ddot{\varepsilon} \left(\frac{2L_1R_{eq}^2}{R_0^2} + L \right) \quad (\text{IV.C.13})$$

L'expression faisant le pendant de IV.C.9 dans la section de tube rigide est celle-ci :

$$\left[\dot{\phi}_1 + \frac{U^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right]_N = -L\ddot{\varepsilon} \left(\frac{2L_1R_{eq}^2}{R_0^2} + L \right) + \frac{P_0}{\rho} + gz_N \quad (\text{IV.C.14})$$

Or, on peut connaître z_N par conservation du volume d'eau :

$$z_N = L_{1eq} + \delta L_1 = L_{1eq} - 2\frac{R_{eq}^2L}{R_0^2}\varepsilon \quad (\text{IV.C.15})$$

Au premier ordre en ε , il reste alors de l'égalité entre (IV.C.9) et (IV.C.14) :

$$2L \left[\frac{L}{3} + \frac{L_1R_{eq}}{R_0^2} \right] \ddot{\varepsilon} + 2\frac{R_{eq}}{R_0} \left[c^2 + gL\frac{R_{eq}}{R_0} \right] \varepsilon + 2gL_{1eq} = 0 \quad (\text{IV.C.16})$$

L'équation (IV.C.16) caractérise bien un oscillateur harmonique, non amorti. L'amortissement viendra de l'inclusion dans le modèle des pertes liées à l'écoulement de l'eau dans le système. Pour l'instant, notre oscillateur est donc caractérisé uniquement par sa pulsation propre ω_0 qui vérifie :

$$\omega_0^2 = \frac{c^2 + gL\frac{R_{eq}}{R_0}}{L_{1eq}L\frac{R_{eq}}{R_0} + \frac{L^2}{3}\frac{R_0}{R_{eq}}} \quad (\text{IV.C.17})$$

Cela signifie plusieurs choses : Les oscillations sont très sensibles à la longueur et au rayon d'équilibre de la membrane, c'est-à dire à la charge qu'on lui impose au travers de h_{eq} . Et puisque nous arrivons à dégager un mode propre d'oscillation de la membrane, cela explique la survenue d'une résonance lorsqu'on essaye de forcer cette oscillateur avec notre vérin.

Il s'agit maintenant de vérifier si la valeur ainsi calculée pour ω_0 correspond au résultat des expériences.

La figure (IV.C.3) indique que l'on approche une relation de proportionnalité entre la pulsation que l'on observe et celle que nous calculons grâce à notre modèle, qui semble donc qualitativement acceptable. Cependant nos droites n'ont pas des coefficients directeurs de 1, et ne passent pas par l'origine. Ceci appelle donc à un modèle plus développé. Cette annexe est en cours d'amélioration. Enfin, et surtout, nous n'avons pas approfondi le problème de l'amortissement de nos oscillations. Un frottement de type poiseuille dans le tube aval semble un peu trop faible pour expliquer un tel amortissement, en revanche on peut envisager une couche limite qui, laminaire ou turbulente, suffirait peut-être à amortir les oscillations.

3.1.4 La résonance en physiologie

Il est difficile de trouver des équivalents physiologiques aux paramètres qui déterminent ici la pulsation propre du système. Il faudrait pouvoir déterminer L_1 et R_1 alors que le

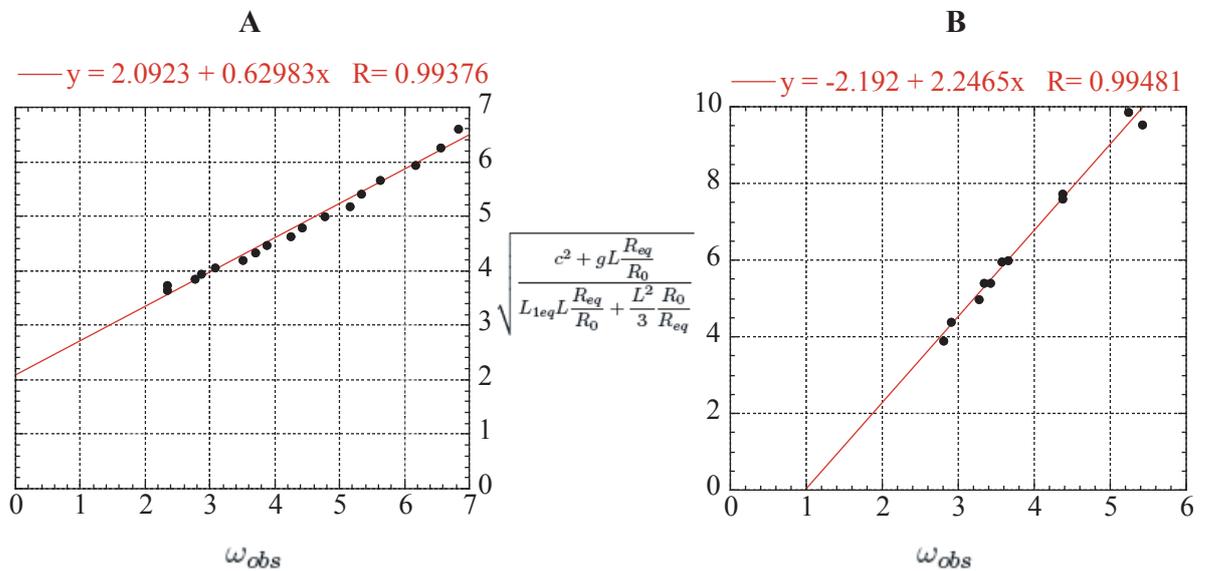


FIG. IV.C.3 – Comparaison modèle - expériences pour l'étude de la membrane en oscillateur libre.
 A/ L_{1eq} change.
 B/ la longueur de la membrane élastique est le paramètre variable. Dans les deux cas, on représente en abscisse la pulsation mesurée et en ordonnée la pulsation calculée selon le modèle. Les droites représentent pour chaque cas la meilleure approximation linéaire.

réseau secondaire est ramifié, l'influence de la gravité alors que le flux est globalement dirigé vers les pieds, en d'autres termes, le problème est très différent. Des phénomènes de résonance ont été prédits et observés dans des expériences numériques [101, 95], pour des nombres de Strouhal ($St = R_0 f / U_0$ avec U_0 un échelle caractéristique de vitesse dans la membrane) néanmoins d'un ordre de grandeur trop grands [96]. Humphrey [77] évoque cependant une hypothèse : une entrée en résonance des anévrismes sacculaires sous l'effet du forçage du cœur provoquerait des augmentations sensibles de volume, de contrainte, et donc éventuellement leur rupture.

Annexe D

Articles

The effects of gravity on the capillary instability in tubes

By VIRGINIE DUCLAUX¹, CHRISTOPHE CLANET¹
AND DAVID QUÉRÉ²

¹IRPHE, UMR 6594, 49 rue F. Joliot-Curie, BP 146, 13384 Marseille, France

²Laboratoire de Physique de la Matière Condensée, FRE 2844 du CNRS, Collège de France,
75231 Paris Cedex 05, France

(Received 24 October 2005 and in revised form 14 February 2006)

We study the capillary instability of a liquid film (thickness h_0) coating a horizontal cylindrical tube (radius R_0). We show experimentally that the instability only occurs if $h_0/R_0 > 0.3(R_0/a)^2$, where a is the capillary length. If this criterion is not fulfilled, the liquid film does not destabilize into an array of drops, owing to the gravitational drainage.

1. Introduction

The capillary instability of cylindrical liquid interfaces is a classical topic of interfacial science (Savart 1833; Plateau 1873; Rayleigh 1892; Chandrasekhar 1961; Eggers 1997). Three examples are displayed in figure 1: a liquid jet (figure 1*a*), a liquid film coating a fibre (figure 1*b*) and a liquid film deposited on the inner wall of a tube (figure 1*c*). In each case, the image at the top presents the initial situation and the image at the bottom the shape of the interface after a time τ characterizing the instability.

Introducing the fluid properties (Newtonian liquid with density ρ , surface tension σ , dynamic viscosity μ), the different scaling laws for τ are summarized in table 1, depending on the Reynolds number (Johnson *et al.* 1991). R_i stands for the initial radius of the liquid–air interface and h_0 for the film thickness. In the case of a tube of radius R_0 , we have $R_i = R_0 - h_0$.

Here, we study the effect of gravity on the capillary instability in tubes (figure 1*c*) in the ‘viscous regime’ ($Re \ll 1$) and show how it can affect and even suppress the instability.

2. Experimental setup

The experimental setup is presented in figure 2(*a*). A liquid slug of length L is first introduced into a horizontal glass tube. We only use wetting liquids (silicone oils and glycerol 98 %) whose characteristics are displayed in table 2. The last column of the table gives the capillary length $a \equiv \sqrt{\sigma/\rho g}$. The tube radius R_0 ranges from 150 μm to 1.5 mm.

Once inserted, the liquid slug is pushed by air at a velocity U , using a syringe pump. As it moves, it deposits a film of thickness h_0 on the tube wall. The relative thickness h_0/R_0 is fixed by the capillary number $Ca \equiv \mu U/\sigma$. The relation $h_0/R_0(Ca)$ was

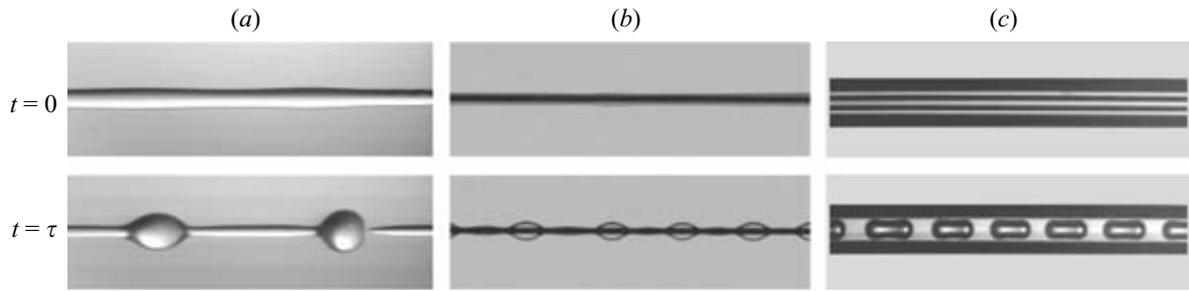


FIGURE 1. Capillary instability of cylindrical interfaces: (a) liquid jet, (b) liquid film on a fibre, (c) liquid film in a tube.

	Jet	Fibre	Tube
$Re \gg 1$	$\tau \sim \sqrt{\rho R_i^3 / \sigma}$	$\tau \sim \sqrt{\rho R_i^4 / (\sigma h_0)}$	$\tau \sim \sqrt{\rho R_i^4 / (\sigma h_0)}$
$Re \ll 1$	$\tau \sim \mu R_i / \sigma$	$\tau \sim \mu R_i^4 / (\sigma h_0^3)$	$\tau \sim \mu R_i^4 / (\sigma h_0^3)$

TABLE 1. Scaling for the characteristic time τ of the capillary instability for the three different cases displayed in figure 1. For the jet, R_i is the jet radius. For the fibre $R_i = R_0 + h_0$ where R_0 is the fibre radius and h_0 the film thickness. For the tube $R_i = R_0 - h_0$ where R_0 is the inner tube radius and h_0 the film thickness.

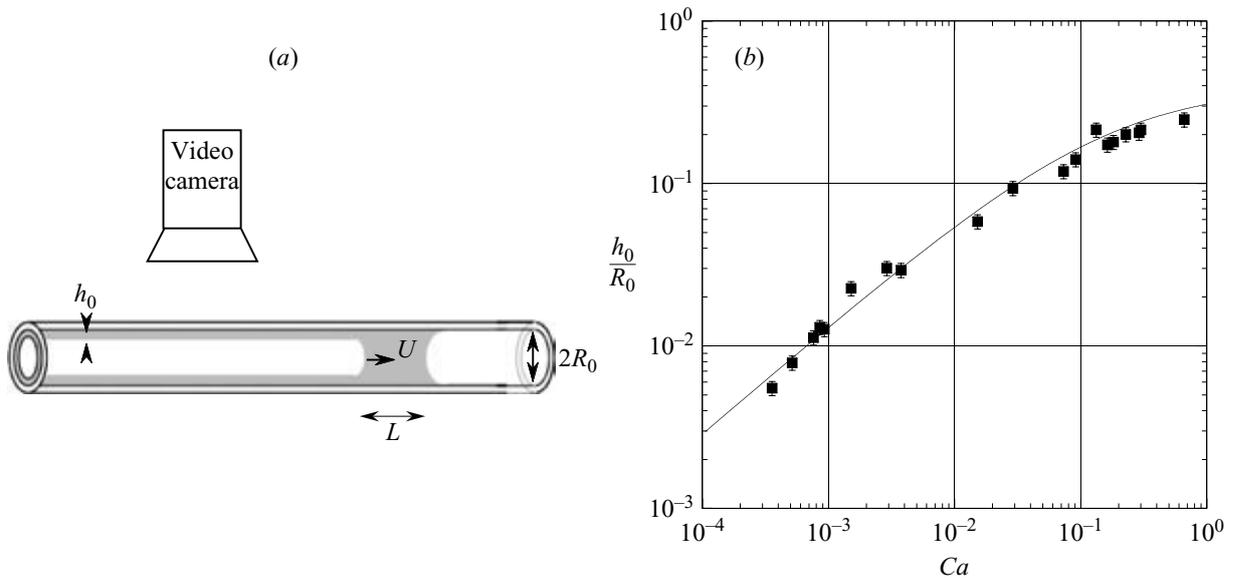


FIGURE 2. (a) Experimental setup. (b) Evolution of the relative film thickness h_0/R_0 as a function of the capillary number Ca (the continuous line is equation (2.1) and the symbols correspond to our measurements).

Liquid	ρ (kg m^{-3})	μ ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$)	σ (kg s^{-2})	a (m)
SO V100	952	0.1	0.0225	$1.6 \cdot 10^{-3}$
SO V1000	965	1	0.0225	$1.5 \cdot 10^{-3}$
SO V12500	965	12.5	0.0225	$1.5 \cdot 10^{-3}$
Glycerol 98 %	1260	0.9	0.063	$2.25 \cdot 10^{-3}$

TABLE 2. Physical properties of the different Newtonian liquids (at 25°C). SO is silicone oil.

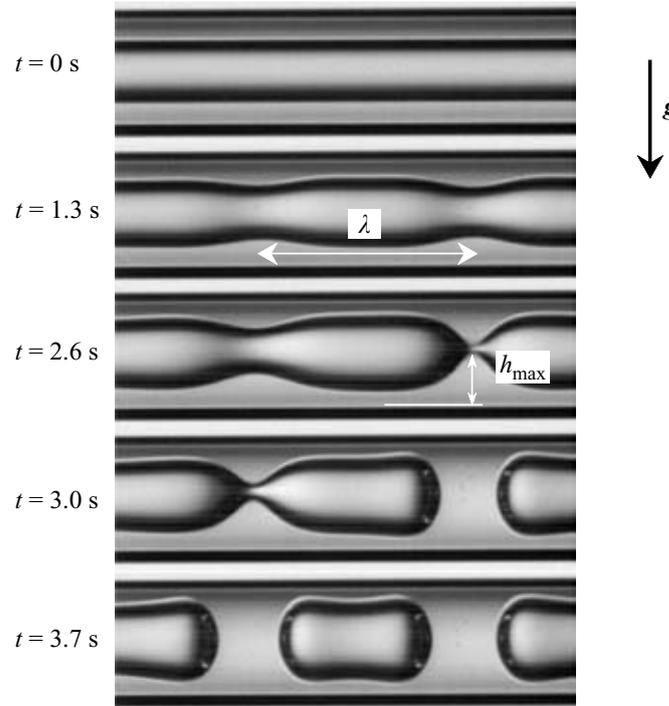


FIGURE 3. Chronophotography of the capillary instability visualized from the side ($R_0 = 420 \mu\text{m}$, $h_0/R_0 = 0.35$, SO V1000). The corresponding characteristic time is $\tau = 1 \text{ s}$.

experimentally determined by Taylor (1961), and found to obey the law (Aussillous & Quéré 2000):

$$\frac{h_0}{R_0} = \frac{1.34 Ca^{2/3}}{1 + 3.35 Ca^{2/3}}. \quad (2.1)$$

This equation extends the small-capillary-number limit derived theoretically by Bretherton (1961) and applies as long as inertia is negligible. We checked the accuracy of this relation by measuring the slug length L as it moves, and deducing the thickness from mass conservation. The film thickness is given in figure 2(b) as a function of the capillary number and compared to equation (2.1) (continuous line). This comparison shows that within 10 %, equation (2.1) does predict the measured thickness.

After the film deposition, the interface generally undergoes a varicose-like instability (Rayleigh 1902), as shown in figure 3. This deformation is observed with a video camera under a binocular lens. We measured the wavelength λ and the dynamics of the deformation $h_{\text{max}}(t)$, where h_{max} is the maximum film thickness (see figure 3). In the example of figure 3, we find $\lambda/R_i \approx 8$, and it takes about 3 s for the interface to form plugs. The characteristic time τ of the instability can be evaluated using the expression for the most unstable mode (see §4) $\tau \equiv 12\mu R_i^4/(\sigma h_0^3) \approx 1 \text{ s}$.

3. Results

3.1. When the capillary instability does not occur

The first striking observation is that the capillary instability is not always observed: this is shown in figure 4(a) where we present side and top views of the interface for different thicknesses (at a time $t > \tau$) in the same tube ($R_0 = 420 \mu\text{m}$) and with the same liquid.

(i) For $h_0/R_0 = 0.35$ (figure 4a(i)), the instability does occur and both views present a top/bottom symmetry: the phenomenon is axisymmetric.

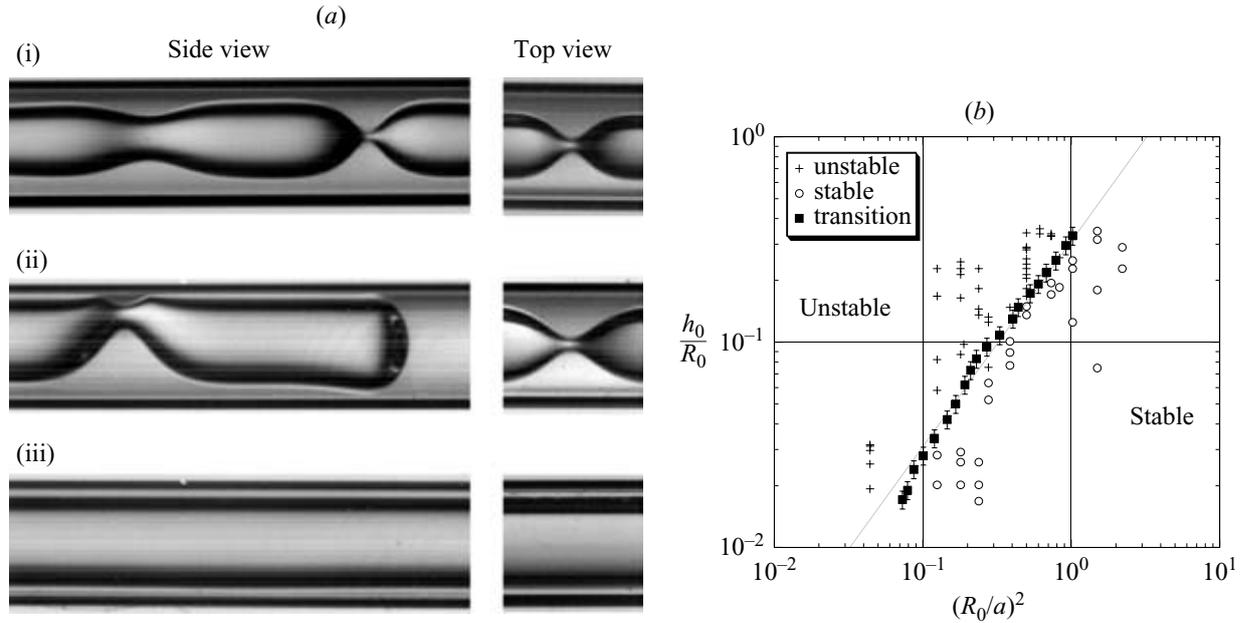


FIGURE 4. Experimental results concerning the transition. (a) Side and top views of the interface obtained at $t \gg \tau$ in the same tube ($R_0 = 420 \mu\text{m}$), with the same silicone oil (V1000) but different thicknesses: (i) $h_0/R_0 = 0.35$ ($t = 2.5 \text{ s}$, $\tau = 1 \text{ s}$), (ii) $h_0/R_0 = 0.19$ ($t = 103 \text{ s}$, $\tau = 14 \text{ s}$) (iii) $h_0/R_0 = 0.034$ ($t = 10000 \text{ s}$, $\tau = 5075 \text{ s}$). (b) Transition between stable and unstable interfaces in the plane $[h_0/R_0; (R_0/a)^2]$. For clarity, the errors bars have only been shown on the square symbols, but they are similar in all experiments. The continuous line represents the function $h_0/R_0 = 0.3(R_0/a)^2$.

(ii) For $h_0/R_0 = 0.19$ (figure 4a(ii)), the instability occurs but the side view reveals that the phenomenon is no longer axisymmetric: the instability grows from the bottom. We call this regime ‘transition’ from now on.

(iii) For $h_0/R_0 = 0.03$ (figure 4a(iii)), the instability is never observed. In this case, our video camera enables us to record images only up to $t = 10000 \text{ s}$, but the situation remains much longer.

The ‘phase diagram’ for the state of the interface is presented in figure 4(b), where we summarize the results obtained in different tubes with different liquids. In this figure, the relative thickness h_0/R_0 is plotted as a function of the square of the reduced radius $(R_0/a)^2$. We observe that the instability only occurs if $h_0/R_0 > 0.3(R_0/a)^2$ (continuous line).

3.2. When the capillary instability occurs

The classical theory of the capillary instability of a cylindrical interface predicts an exponential growth of a varicose deformation of wavelength λ if $\lambda > 2\pi R_i$ (Plateau 1873; Rayleigh 1902; Chandrasekhar 1961). The most unstable wavelength is $\lambda_{th} \equiv 2\pi\sqrt{2}R_i$ with a corresponding growth time $\tau_{th} = 12\mu R_i^4/(\sigma h_0^3)$. The latter expression holds provided the Reynolds number in the film remains smaller than unity, $Re \equiv \rho u h_0/\mu \ll 1$, where u is the typical velocity of the flow.

We present in figure 5(a) the evolution of the observed wavelength λ as a function of the interface radius R_i , for different liquids. Ten wavelengths were measured for each experiment to get an accurate mean value. The expected theoretical value is shown by the thick solid line. We observe that the wavelength converges toward the theoretical value for ‘small’ R_i . When the interface radius becomes of the order of 1 mm, the wavelength increases more than expected by the theory. This tendency is

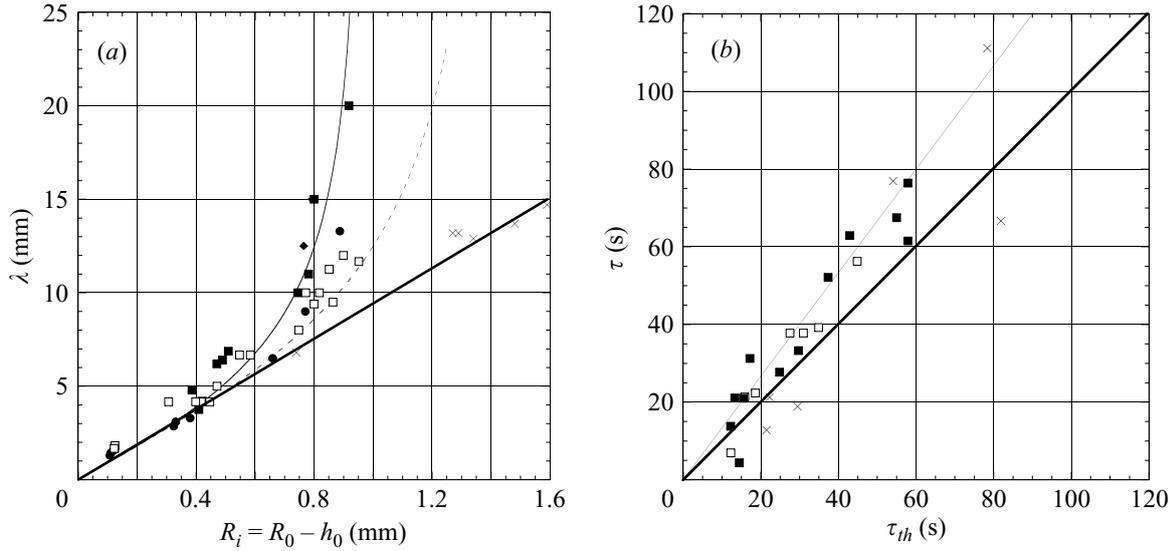


FIGURE 5. (a) Evolution of the wavelength λ as a function of the interface radius R_i for different liquids: \square , V100; \blacksquare , V1000; \circ , V12500; \bullet , glycerol; \times , experiments by Goldsmith & Mason (1963). The thick continuous line is the classical result $\lambda = 2\pi\sqrt{2}R_i$, the thin continuous line and the dashed line respectively represent the curves $\lambda = 2\pi\sqrt{2}R_i/\sqrt{1-2.5Bo^2}$ for the silicone oils and the glycerol. (b) Comparison between the measured characteristic time τ and the theoretical expression $\tau_{th} \equiv 12\mu R_i^4/(\sigma h_0^3)$ for different liquids: \square V100, \blacksquare V1000, \times Experiments by Goldsmith & Mason (1963). The thick continuous line stands for the theoretical value and the thin continuous line for the best fit.

more pronounced for silicone oils than for glycerol. Experiments by Goldsmith & Mason (1963) are reported in figure 5(a). In their system the influence of gravity has been minimized by matching the densities of the core and annulus fluids. The wavelengths they measure are always very close to the expected theoretical values. This suggests that the deviation observed in our measurements could be due to gravity. The thin continuous and dashed lines represent the function $\lambda = 2\pi\sqrt{2}R_i/\sqrt{1-2.5Bo^2}$, with $Bo \equiv R_i/a$ the Bond number, for silicone oils and glycerine respectively. This fitting function (which will be justified in §4.2) suggests that the wavelength diverges when the interface radius tends to the capillary length.

The measured growth rate $1/\tau$ is the slope of the curve $\ln[h_{\max}(t)]$ extracted from the linear part of the growth. This time is smaller than the time to completely form the liquid plug. τ is plotted in figure 5(b) as a function of τ_{th} , the value expected for the most unstable mode. In these experiments the tube radius was constant ($R = 0.4$ mm) and both the viscosity and the thickness were varied. A linearity between τ and τ_{th} is found but the measured values are systematically above the theoretical ones (thick line). A best fit of the data (thin line) suggests that $\tau \approx 1.34\tau_{th}$. The experiments by Goldsmith & Mason (1963) also give the same result, with a larger dispersion.

3.3. Evidence for drainage

In order to show the gravitational drainage, we visualize the interface using a video camera aligned along the axis of symmetry z of the tube. The resulting pictures are displayed in figure 6 for an unstable interface (a) and for an interface in the transition region (b). In both cases, drainage can be observed, but it is much more pronounced

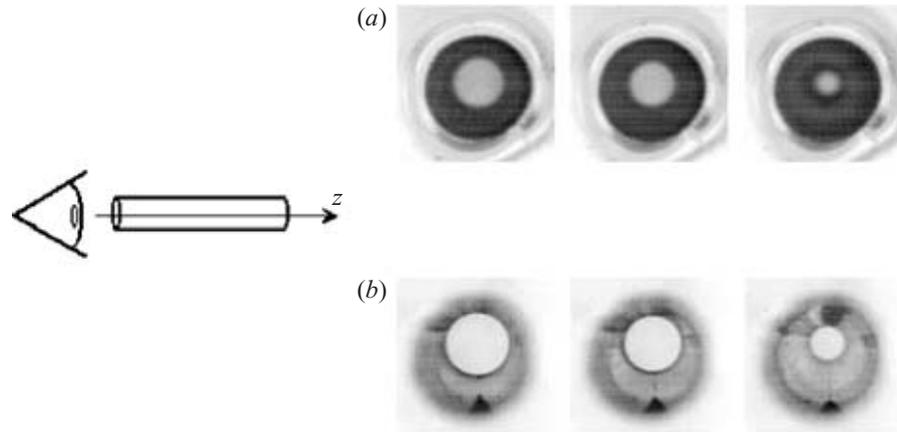


FIGURE 6. Evidence for drainage: (a) unstable interface observed at three different times in a tube of radius 0.69 mm with $h_0/R_0 \sim 0.34$; (b) unstable interface in the transition regime, observed at three different times in a tube of radius 0.6 mm with $h_0/R_0 \sim 0.07$.

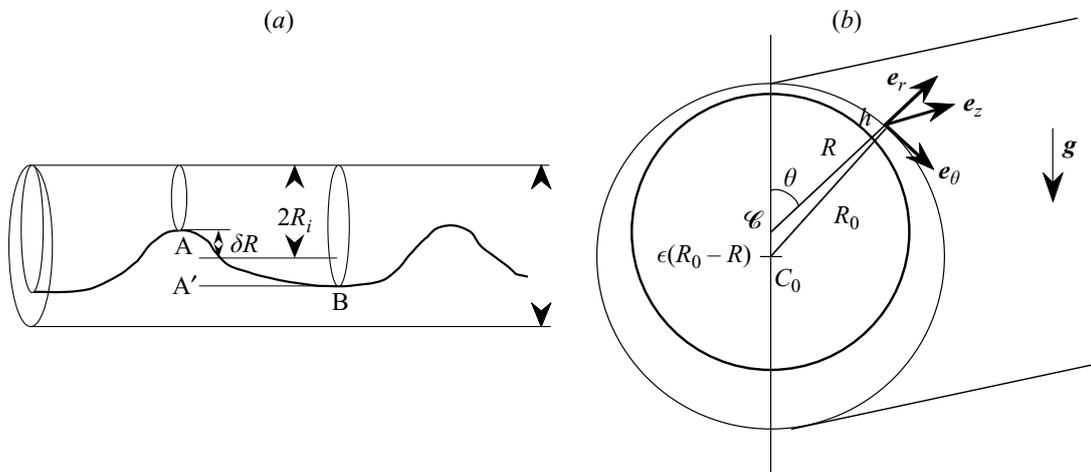


FIGURE 7. Notation used for the theoretical description; (a) side view; (b) cross-section.

in the transition region. Figure 6 also shows that despite the drainage, the interface always remains circular.

4. Model

The theoretical description of the interface evolution is discussed using the conventions shown in figure 7(a): the liquid/air interface has a radius $R(z, t)$ and a centre C which moves with time vertically from its initial location C_0 (centre of the tube) to $R_0 - R$. We use cylindrical coordinates centred at C and denote $\epsilon(R_0 - R)$ as the excentricity of the interface with respect to the tube.

4.1. Qualitative arguments

A criterion for the transition can be obtained by comparing the characteristic time of the instability $\tau \sim \mu R_i^4 / (\sigma h_0^3)$ to the characteristic time of drainage $\tau_d \sim \mu R_i / (\rho g h_0^2)$. The latter is simply the time required for a vertical viscous film of thickness h_0 to fall under its weight a distance R_i . The ratio τ / τ_d is written

$$\frac{\tau}{\tau_d} \sim \frac{R_i^3}{a^2 h_0} \quad (4.1)$$

where $a \equiv \sqrt{\sigma/(\rho g)}$ is the capillary length. The instability is expected to occur in the limit $\tau/\tau_d \ll 1$ and to be affected by gravity when $\tau/\tau_d \gg 1$: then a liquid particle falls faster under gravity than it is raised by capillarity, so that one might expect the instability to be suppressed. For $R_i \sim R_0$, this criterion is: $h_0/R_0 < (R_0/a)^2$, in good agreement with the results shown in figure 4(b).

A physical argument can also be proposed to understand the increase of the wavelength due to gravity. Using Laplace and hydrostatic equations to evaluate the pressure difference between A' and B (isolevel points in figure 7a) leads to

$$P_B - P_{A'} = 2\delta R \frac{\sigma}{R_i^2} \left[1 - \left(\frac{R_i}{a} \right)^2 - (kR_i)^2 \right]. \quad (4.2)$$

Since the instability only develops if $P_B > P_{A'}$, we deduce that the wavelength must satisfy the relation: $\lambda > 2\pi R_i / \sqrt{1 - Bo^2}$, which diverges when the Bond number approaches unity.

4.2. Theoretical approach to the transition

The description of the interface motion is classically based on mass conservation, Stokes equation and boundary conditions at the interface, using lubrication approximations ($\partial/\partial r \gg \partial/r\partial\theta$, $\partial/\partial r \gg \partial/\partial z$) and small slope limit ($\partial h/\partial z \ll 1$ and $\partial h/r\partial\theta \ll 1$). Using the conventions of figure 7, mass conservation is written

$$\frac{\partial(Rh)}{\partial t} = -\frac{\partial(h\bar{u}_\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial(Rh\bar{u}_z)}{\partial z} \quad (4.3)$$

where \bar{u}_θ and \bar{u}_z stand for the mean velocities in the film along the \mathbf{e}_θ and \mathbf{e}_z directions. Stokes' equation expresses the balance between pressure gradient, gravity and viscous force acting on a liquid element.

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (4.4)$$

(i) Along \mathbf{e}_r , this force balance reduces to $\partial p/\partial r = -\rho g \cos\theta$, which yields

$$p = p_0 - \sigma \mathcal{C} - \rho g \cos\theta (r - R) \quad (4.5)$$

where p_0 is the atmospheric pressure and \mathcal{C} is the total curvature.

(ii) Along \mathbf{e}_θ , and in the thin-film limit, equation (4.4) leads to $\mu d^2 u_\theta/dr^2 = \partial p/R\partial\theta - \rho g \sin\theta$. This equation can be integrated twice (using the no-slip condition at the wall and continuity of stress at the interface), which gives the mean velocity along \mathbf{e}_θ :

$$\bar{u}_\theta = \frac{h^2}{3\mu} \left(\rho g \sin\theta + \frac{\sigma}{R} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial\theta} \right). \quad (4.6)$$

(iii) Along \mathbf{e}_z , Stokes' equation can be treated in the same way as along the \mathbf{e}_θ -direction which provides the mean velocity \bar{u}_z :

$$\bar{u}_z = -\frac{h^2}{3\mu} \left(\rho g \cos\theta \frac{\partial R}{\partial z} - \sigma \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \right). \quad (4.7)$$

The next step is to evaluate the total curvature of the interface $\mathcal{C}(z, \theta, t)$. As sketched in figure 7, and confirmed in figure 6, we assume that the interface always remains circular. This assumption holds provided surface tension dominates viscous and gravity effects, that is, at small capillary and Bond numbers ($Ca \equiv \mu \bar{u}_\theta/\sigma \ll 1$; $Bo \equiv R_i/a < 1$), which is the case in this study. This condition leads to the expression

for the total curvature, which in the small-slope limits

$$\mathcal{C} \approx \frac{1}{R} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}. \quad (4.8)$$

The circular condition also provides a geometrical relation between h and R which reduces in the thin-film limit ($h/R \ll 1$) to

$$h(z, \theta, t) = [R_0 - R(z, t)][1 - \epsilon(t) \cos \theta]. \quad (4.9)$$

The last step is to impose a varicose-like perturbation to the interface $h(z, \theta, t) = [R_0 - R_i(1 + \delta e^{i(kz - \omega t)})][1 - \epsilon(t) \cos \theta]$, where R_i is the initial radius of the interface and δ is a small parameter. At the leading order in δ and ϵ , the different terms of equation (4.3) take the form

$$\frac{\partial(Rh)}{\partial t} \approx R_i h_0 \left[-\cos \theta \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + i\omega \frac{R_i}{h_0} \delta e^{i(kz - \omega t)} \right], \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial(h\bar{u}_\theta)}{\partial \theta} \approx \frac{\rho g h_0^3}{3\mu} \cos \theta \left[1 - 3 \frac{R_i}{h_0} \delta e^{i(kz - \omega t)} \right], \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial(Rh\bar{u}_z)}{\partial z} \approx \frac{R_i^2 h_0^3 k^2}{3\mu} \delta e^{i(kz - \omega t)} \left(\frac{\sigma}{R_i^2} + \rho g \cos \theta - \sigma k^2 \right). \quad (4.12)$$

The mass conservation (4.3) leads to an equation for $\epsilon(t)$:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\rho g h_0^2}{3\mu R_i} \quad (4.13)$$

and to the dispersion relation

$$-i\omega = \frac{\sigma h_0^3}{3\mu R_i^4} \left[(kR_i)^2 (1 + Bo^2 \cos \theta - (kR_i)^2) - 3Bo^2 \frac{R_i}{h_0} \cos \theta \right]. \quad (4.14)$$

Equation (4.13) describes the dynamics of the drainage and provides an estimate of its characteristic time $\tau_d \approx 3\mu R_i / (\rho g h_0^2)$. On the other hand, the dispersion relation (4.14) can be interpreted as follows:

(i) In the zero-gravity limit ($Bo \ll 1$, $Bo^2 R_i / h_0 \ll 1$), equation (4.14) reduces to the classical expression (Goren 1961)

$$-i\omega = \frac{\sigma h_0^3}{3\mu R_i^4} (kR_i)^2 [1 - (kR_i)^2]. \quad (4.15)$$

This dispersion relation implies that the initial perturbation will grow exponentially in time if $kR_i < 1$. The fastest mode is $kR_i = 1/\sqrt{2}$ and the corresponding growth rate $(-i\omega)_{max} = \sigma h_0^3 / (12\mu R_i^4)$.

(ii) For finite gravity ($Bo \ll 1$, $Bo^2 R_i / h_0 = O(1)$), the first effect predicted by equation (4.14) is a reduction of the growth rate in the upper part of the tube ($\cos \theta > 0$) and its enhancement in the lower part ($\cos \theta < 0$). In this limit, the wavelength of the fastest mode is not affected by gravity. This effect is indeed observed experimentally in the transition region (see figure 4).

(iii) When the Bond number approaches unity, the wavelength of the fastest mode is affected. If we focus on the lower part of the tube we find $\lambda_{max} = 2\pi\sqrt{2}R_i/\sqrt{1 - Bo^2}$. The wavelength thus increases owing to the effect of gravity. The divergence in $1/\sqrt{1 - Bo^2}$ is shown in figure 5. Experimentally, the divergence is slightly faster since we find that $1/\sqrt{1 - 2.5Bo^2}$ agrees better with our measurements.

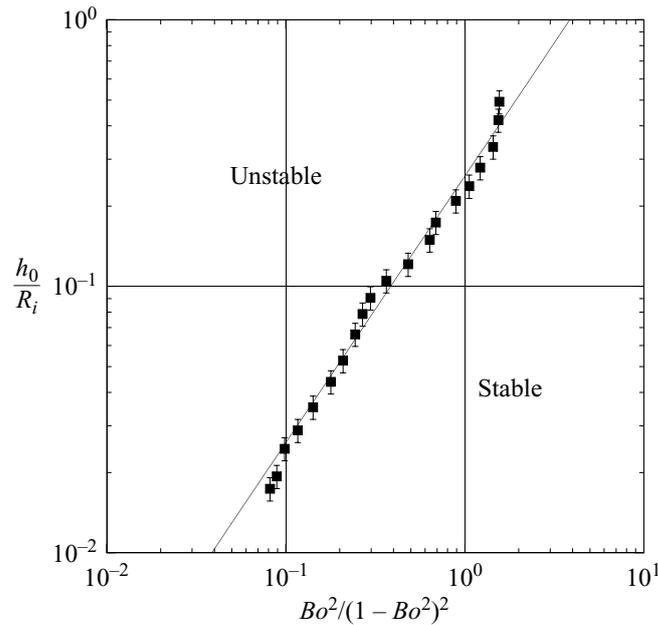


FIGURE 8. Transition between stable and unstable interfaces in the plane $[h_0/R_i; Bo^2/(1 - Bo^2)^2]$: \blacksquare , experimental data. The continuous line is the best linear fit: $h_0/R_i = 0.26Bo^2/(1 - Bo^2)^2$.

(iv) Finally, with the constraint of a circular interface, the instability develops if the interface is unstable for all θ . The capillary instability is thus suppressed by gravity as soon as the upper part becomes stable. According to equation (4.14) this happens for $h_0/R_i \geq 12Bo^2/(1 - Bo^2)^2$. This criterion is compared to our experimental results in figure 8. The linearity between h_0/R_i and $Bo^2/(1 - Bo^2)^2$ is almost satisfied but the prefactor is only 0.26.

Although the model explains several experimental observations (evolution of the wavelength, preferential growth at the bottom, threshold for the instability), it fails in predicting the correct numerical factors.

5. Conclusion

We have studied the effect of gravity on the capillary instability in tubes at low Reynolds numbers. We have shown that the classical results are recovered provided that gravity is negligible ($Bo \ll 1$, $Bo^2 R_i/h_0 \ll 1$). When gravity is increased ($Bo \ll 1$, $Bo^2 R_i/h_0 = O(1)$) the wavelength is not affected but the instability develops faster in the lower part of the tube. Finally, when the Bond number approaches one, the wavelength increases. But a main result of the study is that the capillary instability is screened by gravity effects: thin films drain towards the bottom of the tube faster than they develop the instability. This result can be compared to what is observed for films flowing on vertical curved objects – such as tubes or fibres. Then, the instability can generate a ‘saturation’ of the instability, that is, prevent the drops from developing, provided that the film thickness is smaller than the critical thickness R^3/a^2 (Quére 1990; Chang 1999). The origin of this effect is quite different, but the physical ingredients being the same, it is logical to find a similar scaling for the critical thickness.

We are grateful to Professor Marc Fermigier from ESPCI for his contribution in figure 1.

REFERENCES

- AUSSILLOUS, P. & QUÉRÉ, D. 2000 Quick deposition of a fluid on the wall of a tube. *Phys. Fluids* **12**, 2367–2371.
- BRETHERTON, F. P. 1961 The motion of long bubbles in tubes. *J. Fluid Mech.* **10**, 166–188.
- CHANDRASEKHAR, S. 1961 *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover.
- CHANG, H.-C. & DEMEKHIN, E. A. 1999 Mechanism for drop formation on a coated vertical fibre. *J. Fluid Mech.* **380**, 233–255.
- CHAUHAN, A., MALDARELLI, C., RUMSCHITZKI, D. & PAPAGEORGIOU, D. T. 2003 An experimental investigation of the convective instability of a jet. *Chem. Engng Sci.* **58**, 2421–2432.
- EGGERS, J. 1997 Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows. *Rev. Mod. Phys.* **69**, 865–930.
- GOLDSMITH, H. L. & MASON, S. G. 1963 The flow of suspensions through tubes; II. Single large bubbles. *J. Colloid Sci.* **18**, 237–261.
- GOREN, S. L. 1961 The instability of an annular thread of fluid. *J. Fluid Mech.* **12**, 309–319.
- JOHNSON, M., KAMM, R., HO, L. W., SHAPIRO, A. & PEDLEY, T. J. 1991 The nonlinear growth of surface-tension-driven instabilities of a thin annular film. *J. Fluid Mech.* **233**, 141–156.
- PLATEAU, J. 1873 *Statique Expérimentale et Théorique des Liquides*. Gauthier-Villars.
- QUÉRÉ, D. 1990 Thin films flowing on vertical fibers. *Europhys. Lett.* **13**, 721–726.
- RAYLEIGH, LORD 1892 On the instability of cylindrical fluid surfaces. *Phil. Mag.* **34**, 177–180.
- RAYLEIGH, LORD 1902 On the instability of cylindrical fluid surfaces. In *Scientific Papers*, vol. 3, pp. 594–596. Cambridge University Press.
- SAVART, F. 1833 Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. *Ann. de Chim.* **53**, 337–386.
- TAYLOR, G. I. 1961 Deposition of a viscous fluid on the wall of a tube. *J. Fluid Mech.* **10**, 161–165.

Dynamics of transient cavities

By V. Duclaux¹, F. Caillé¹, C. Duez², C. Ybert², L. Bocquet²
AND C. Clanet¹

¹ IRPHE, UMR 6594, 49 rue F. Joliot-Curie, BP 146, 13384 Marseille, France

² Laboratoire P.M.C.N., UMR CNRS 5586, Université Lyon I, 69622 Villeurbanne, France

(Received 1 December 2005)

We study the collapse of a transient cavity of air in water created by the impact of a solid body. Experimentally, we first show that the creation of such cavities is very sensitive to the solid surface (roughness and wettability). We then characterise the dynamics of the cavity from its creation ($t = 0$) until it collapses ($t = \tau$). Theoretically, we find an approximate analytical solution which describes the evolution of the shape of the cavity from $t = 0$ to $t = \tau$. This theoretical solution predicts the existence of two different type of cavities that we indeed observe experimentally, using two different geometries, namely spheres and cylinders.

1. Introduction

What happens when a solid body impacts in water ?

Few decades ago, this question was of interest for seaplane engineers Von Karman (1929), Wagner (1932), naval architects Cointem (1989), Fridman (1998), torpedo designers May (1952) and physicists interested in fast transient phenomena Worthington (1908). Lately, it became of interest for physiologists Glasheen and McMahon (1996-b) and physicists working on granular flows Thoroddsen and Shen (2001), Lohse et al. (2004).

This question belongs to the general subject of *water entry problems* which is mainly composed of two different kinds of studies: the initial stages of contact Korobkin and Pukhnachov (1988), Howison et al. (1991) and the creation of the associated cavity Birkhoff and Zarantonello (1957). The present article belongs to this second class of studies.

A typical impact is presented in figure 1. This chronophotography presents the evolution of the cavity during the first 140 ms after the impact of the sphere ($R_0 = 12$ mm) at $U = 2.1$ m/s ($Fr = 39$). The digging of the cavity extends from image 1 to image 8 where it pinches. We note H the depth of the cavity at pinching and H_p the position of the neck. The diameter of the hole at the surface ($z = 0$) is referred to as $2R$. if $t = 0$ stands for the time at which the sphere touches the interface, the time of pinching is defined as $t = \tau$.

After the pinching (images 9 to 16) both cavities ($0 < z < H_p$ and $H_p < z < H$) retract, one towards the surface ($0 < z < H_p$) and the other towards the sphere ($H_p < z < H$). In this article, we focus on the dynamic of the cavity from its digging to its pinching

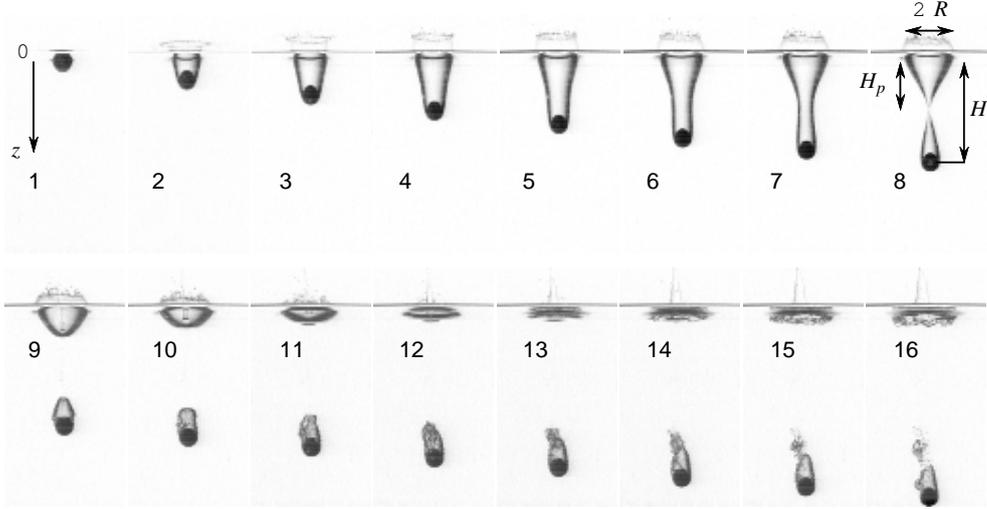


FIGURE 1. Chronophotography of the impact of a sphere ($R_0 = 12$ mm) at $U = 2.1$ m/s ($Fr = 39$). The time step between images is $\Delta t = 9.3$ ms.

(images 1 to 8).

For the impact of a disc (radius R), Glasheen and McMahon (1996-a) summarise their experimental results for the characteristics of the cavity as :

- the depth of the cavity scales as $H/R \approx 2.297U/\sqrt{gR}$.
- the time for pinching scales as $\tau \approx 2.285\sqrt{R/g}$ and is reported to be "nearly independent of the velocity".

These experimental results are obtained for "low Froude numbers": $1 \leq U^2/gR \leq 80$. No theoretical model is proposed to account for these laws.

On the other end, considering the impact in soft sand, Lohse et al. (2004) propose an hydrodynamic approach to describe the cavity created by the impact of a solid sphere in sand and propose the following scaling behavior for its depth : $H/R \sim Fr^{1/3}$.

In the present article, we first present the experimental results on cavities created in water by spheres and cylinders. A model is then presented to account for the experimental observations and to understand the origin of the different laws proposed by Glasheen and McMahon (1996-a) and Lohse et al. (2004).

2. Experimental set up

2.1. Synopsis of the experiment

The synopsis of the experiment is presented in figure 2: the solid sphere (or cylinder) is initially fixed at a height H above the water using a suction disc. Suddenly, the depression is released, the sphere accelerates towards the water and impacts at $t = 0$ with a velocity close to $U \approx \sqrt{2gH}$. The velocity is precisely measured at the impact using the high speed video camera, which also records the whole impact sequence.

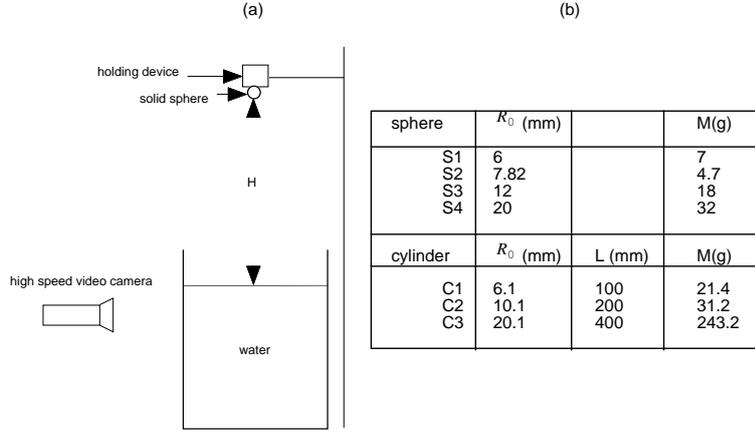


FIGURE 2. (a) Synopsis of the experiment (b) characteristics of the spheres and cylinders.

H	R_0	$Re \equiv \frac{UR_0}{\nu}$	$We \equiv \frac{\rho U^2 R_0}{\sigma}$	$Fr \equiv \frac{U^2}{gR_0}$
m	mm			
0.1	6	$8.4 \cdot 10^3$	168	33
1	6	$2.6 \cdot 10^4$	1680	330
0.1	20	$2.8 \cdot 10^4$	560	10
1	20	$8.8 \cdot 10^4$	5605	100

TABLE 1. Orders of magnitude of the characteristic nondimensional numbers, Reynolds, Weber and Froude.

2.2. Characteristics of the spheres and cylinders

The characteristics of the spheres and cylinders we use are presented in figure 2-(b). Their radius R_0 ranges from 6 mm to 20mm. Their impact in water (density $\rho \approx 10^3 \text{ kg/m}^3$, surface tension $\sigma \approx 0.07 \text{ kg/s}^2$, kinematic viscosity $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) is characterised by three nondimensional numbers: **Reynolds** $Re \equiv UR_0/\nu$, **Weber** $We \equiv \rho U^2 R_0/\sigma$ and **Froude** $Fr \equiv U^2/gR_0$. The range of variation of these numbers is presented in table 1. This table shows that the experiments are conducted in the limit of high Reynolds and high Weber numbers. Inertia thus dominates viscous and capillary effects.

3. Experimental results

3.1. Threshold of entrainment

In figure 3 we present the impact of a sphere ($R_0 = 12 \text{ mm}$) at the velocity $U = 2.1 \text{ m/s}$ ($Fr = 39$) either smooth [figure 3-(a)], either rough (coated with soot) [figure 3-(b)]. We observe that the cavity described in figure 1 only exists in the "rough" case.

The same experiment conducted with a higher impact velocity $U = 8 \text{ m/s}$ ($Fr = 543$) is presented in figure 4. Here, we do not observe any significant difference between the cavity created by the smooth sphere [figure 4-(a)] and the one created by the rough one

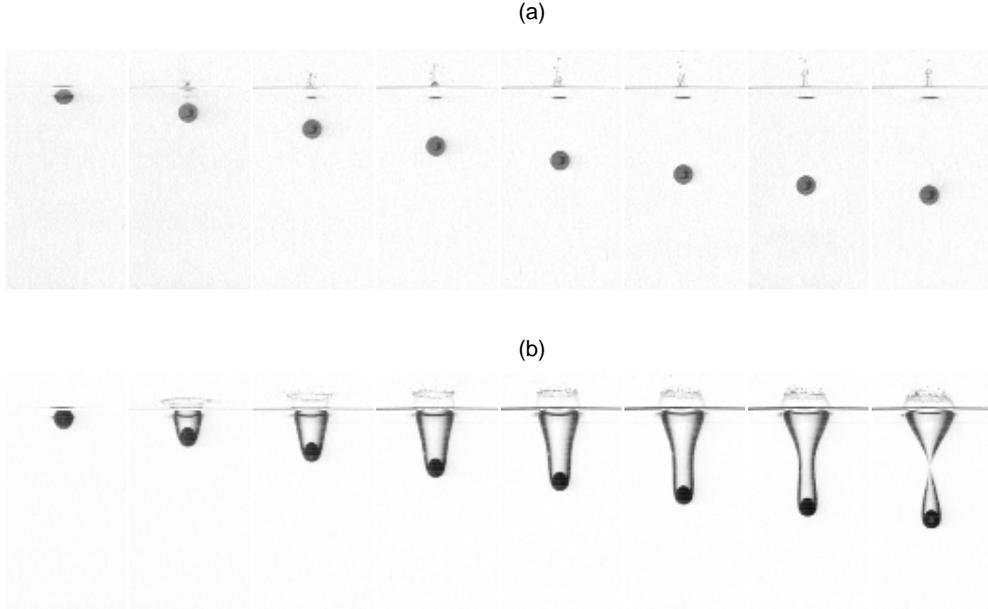


FIGURE 3. (a) Chronophotography of the impact of a smooth sphere of glass ($R_0 = 12$ mm) at $U = 2.1$ m/s ($Fr = 39$). (b) Chronophotography of the same sphere ($R_0 = 12$ mm) at $U = 2.1$ m/s ($Fr = 39$) coated with carbon soot. The time step between images is $\Delta t = 9.3$ ms in both sequences.

[figure 4-(b)].

From both experiment, one can conclude that the cavity presented in figure 1 only exists above a threshold velocity, the value of which depends on the surface state. Above this velocity, no significant difference can be observed on the shape of the cavity created.

To understand the influence of the surface roughness (and coating) on the threshold of entrainment, one must focus on the dynamics of the liquid film which develops during the first instants of the contact between the sphere and the interface. This is done in figure 5, where we show that the liquid film (the position of which is indicated with arrows) moves along the surface while the sphere crosses the interface. In the smooth case [figure 5-(a)] the film reaches the "north pole" in a time τ_{film} smaller than the time $2R_0/U$ needed for the sphere to cross the interface.

In the second sequence [figure 5-(b)] the liquid film created at the impact does not converge towards the "north pole" and the sphere thus entrains air and create the cavity.

This influence of the surface "roughness" on the creation of the cavity is known since the pioneering work of Worthington (1900) as can be seen in figure 6. In this figure, the film dynamics observed in the smooth sphere impact is presented in figure 6-(a), that of the rough sphere in figure 6-(b) and a proposed scenario to understand the influence of the roughness is sketched in figure 6-(c). This landmark study is even more complete than the present on the transition from smooth to rough since it discusses the influence of the liquid viscosity, surface tension, the influence of the air, and even that of the sphere temperature. Here, we just wanted to underline that the origin of the transition lies in the dynamics of the thin film which develops in the very first instants of the impact. The

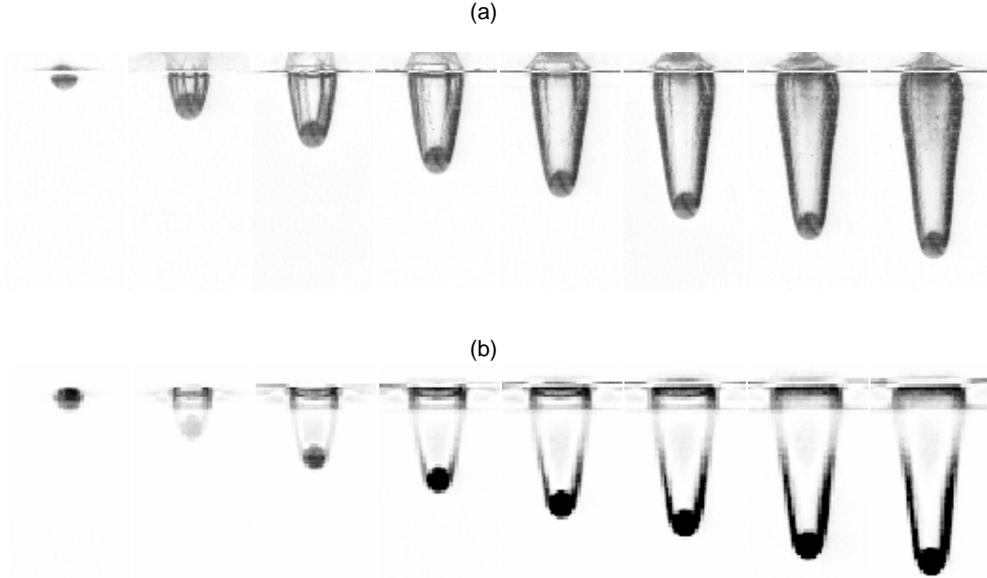


FIGURE 4. (a) Chronophotography of the impact of a smooth sphere of glass ($R = 12$ mm) at $U = 8$ m/s ($Fr = 543$). (b) Chronophotography of the same sphere ($R = 12$ mm) at $U = 8$ m/s ($Fr = 543$) coated with carbon soot. The time step between images is $\Delta t = 3.65$ ms.

study of the initial stage of contact belongs to the first kind of studies dedicated to water entry Oliver (2002). The threshold problem is out of the scope of the present work and in the remaining part of the article, we focus on the dynamics of the transient cavities and only consider cases where the impact velocity stand above the critical velocity of entrainment.

3.2. Influence of the impact velocity U for a fixed radius R_0

The influence of the impact velocity for a fixed radius ($R_0 = 7.8$ mm) is presented in figure 7 for three different velocities ($U = 1.3$ m/s, $U = 2.4$ m/s and $U = 3.7$ m/s). The first striking observation is that the pinching of the cavities occurs at the same time in the three sequences $\tau \approx 52$ ms.

Considering the relative cavity depth H/R_0 , one measures $H/R_0 \approx 7.5$ for $U = 1.3$ m/s, $H/R_0 \approx 13$ for $U = 2.4$ m/s and $H/R_0 \approx 17$ for $U = 3.7$ m/s. The cavity depth seems to increase linearly with the velocity.

Considering the relative size of the hole at the surface R/R_0 , we measure $R/R_0 \approx 1.9$ for $U = 1.3$ m/s, $R/R_0 \approx 3$ for $U = 2.4$ m/s and $R/R_0 \approx 3.3$ for $U = 3.7$ m/s. The size of the hole increases with the velocity but less than linearly.

Considering the neck location, the three chronophotographies indicate that H_p is of the order of $H/2$.

Finally, we observe in figure 7 that the velocity of the solid body remains almost constant during the cavity creation and collapse. This approximation is well verified with $U = 1.3$ m/s. With larger ones ($U = 2.4$ m/s and $U = 3.7$ m/s), we observe a decelera-

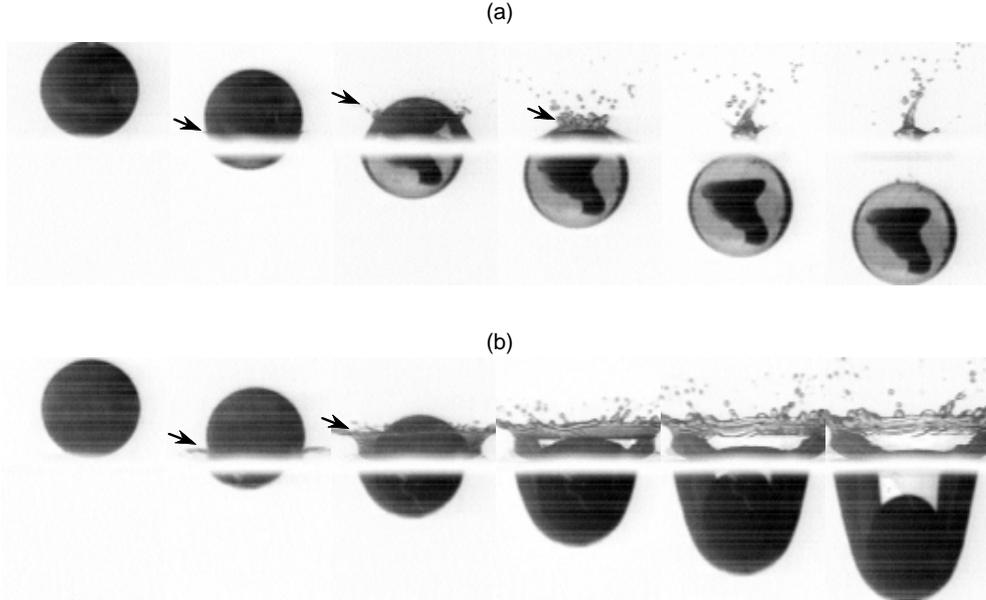


FIGURE 5. (a) Chronophotography of the impact of a smooth sphere of glass ($R_0 = 7.8$ mm) at $U = 1.34$ m/s ($Fr = 23$). (b) Chronophotography of the same sphere ($R_0 = 7.8$ mm) at $U = 1.34$ m/s ($Fr = 23$) coated with carbon soot. The time step between images is $\Delta t = 3.3$ ms. The arrows indicate the position of the liquid film along the sphere.

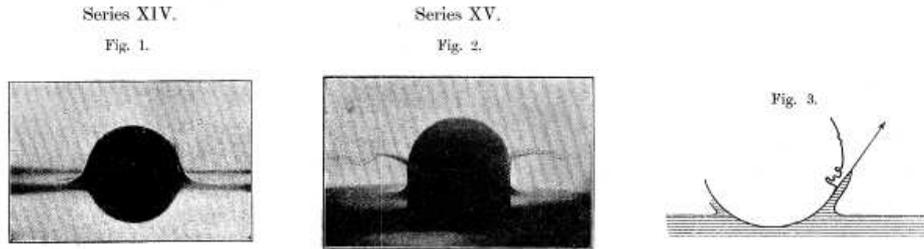


FIGURE 6. (a) impact in water of a smooth sphere (b) impact with the same conditions of a rough sphere (c) proposed mechanism for the influence of the roughness.

tion on the two last pictures.

3.3. Influence of the radius R_0 , for a fixed velocity U

The influence of the radius, for a fixed velocity $U = 1.3$ m/s, is presented in figure 8. The time for pinching is $\tau \approx 52$ ms for $R_0 = 7.8$ mm and increases with R_0 to reach $\tau \approx 66$ ms for $R_0 = 12$ mm.

The relative depth H/R_0 decreases with R_0 : indeed we measure $H/R_0 \approx 7.5$ for $R_0 = 7.8$ mm and $H/R_0 \approx 6.7$ for $R_0 = 12$ mm.

Finally, the relative crater size R/R_0 remains almost constant: indeed we measure $R/R_0 \approx 1.9$ for both cases.



FIGURE 7. Influence of the impact velocity U for a fixed radius $R_0 = 7.8$ mm. The time step between the images is constant for the three chronophotographies $\Delta t = 7.3$ ms (a) $U = 1.3$ m/s, $Fr = 22$ (b) $U = 2.4$ m/s, $Fr = 80$ (c) $U = 3.7$ m/s, $Fr = 188$.

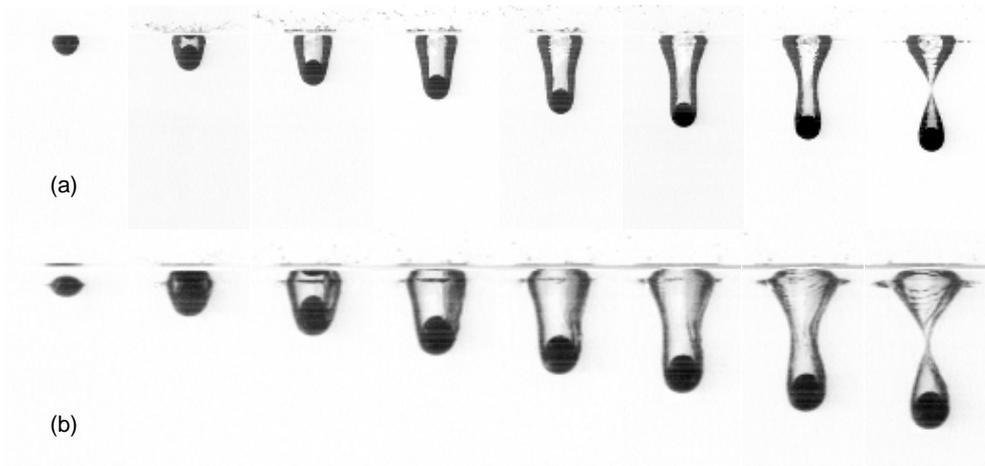


FIGURE 8. Influence of the radius R_0 for a fixed impact velocity $U = 1.3$ m/s. (a) $R_0 = 7.8$ mm, $Fr = 22$. The time step between images is $\delta t = 7.3$ ms. (b) $R_0 = 12$ mm, $Fr = 14.3$. The time step between images is $\delta t = 9.3$ ms.

3.4. Impact of cylinders

An example of impact with cylinders is presented in figure 9 where a cylinder ($R_0 = 10$ mm) impacts at $U = 1.06$ m/s ($Fr = 11$). When the back of the cylinder crosses the interface, it entrains air and forms a cavity which pinches in a characteristic time

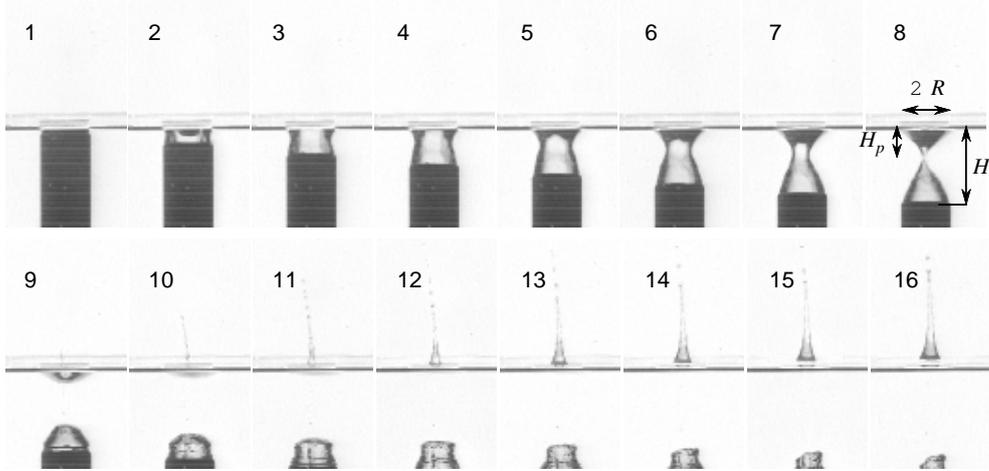


FIGURE 9. Impact of a cylinder ($R_0 = 10$ mm) at $U = 1.06$ m/s ($Fr = 11$). The time step between images is 4 ms.

$\tau \approx 28$ ms.

Qualitatively, the features of this cavity are similar to the one created by a sphere and described in figure 1. Looking more carefully to the pictures, one may however notice at least three differences:

- the radial extension of this cavity never exceed the size of the cylinder
- the hole of the crater at the surface scales with the diameter of the cylinder ($R/R_0 \approx 1$) and does not grow in time.
- the position of the neck is not at $H/2$ but closer to the interface ($H_p/H \approx 0.35$)

We come back more quantitatively to the differences between the cavities created by sphere and cylinders in the section dedicated to the modelisation of their dynamics.

4. Model

4.1. *The Besant (1859) - Rayleigh (1917) problem*

The first problem we consider, in order to model the cavity collapse, is the classical Besant-Rayleigh problem presented in Rayleigh (1917): "An infinite mass of homogeneous incompressible fluid acted upon by no forces is at rest, and a spherical portion of the fluid is suddenly annihilated; it is required to find the instantaneous alteration of pressure at any point of the mass, and the time in which the cavity will be filled up, the pressure at an infinite distance being supposed to remain constant". Experimentally, this mind experiment can be approached with collapsing bubbles, as presented in figure 10 extracted from Batchelor (2000).

We focus in this problem on inertial effects and neglect viscous ones. In this high Reynolds number limit, the fluid motion is described by the Euler equation:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\text{grad}} \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p \quad (4.1)$$

Since the fluid is initially at rest, the motion is irrotational at all times (Thomson

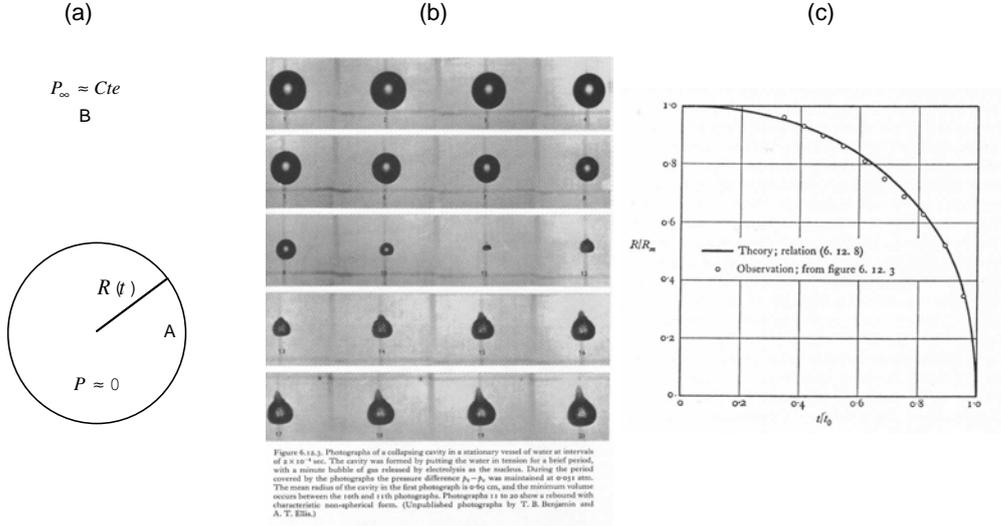


FIGURE 10. This figure is composed of a sketch of the problem (a) and of two figures from Batchelors' textbook Batchelor (2000) (their legends are unchanged) : (b) Photographs of a collapsing cavity in a stationary vessel of water at intervals of $2 \cdot 10^{-4}$ s. The cavity was formed by putting the water in tension for a brief period, with a minute bubble of gas released by electrolysis as the nucleus. During the period covered by the photographs the pressure difference $p_0 - p_v$ was maintained at 0.051 atm. The mean radius of the cavity in the first photograph is 0.69 cm, and the minimum volume occurs between the 10th and 11th photographs. Photographs 11 to 20 show a rebound with characteristic non-spherical form. (Unpublished photographs by T.B. Benjamin and A.T. Ellis.) (c) Collapse of a spherical cavity from rest with constant overall pressure difference. The value of R_m for the cavity photographed in figure (a) was found by extrapolation to be 0.72 cm, and the origin of time was located by the instant of complete collapse.

theorem) and its velocity can be described through a potential ϕ : $\underline{u} = grad \phi$. Equation (4.1) can be integrated in this limit and leads to the so-called generalised Bernoulli equation:

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right]_A^B = 0 \quad (4.2)$$

where A and B stand for two points in the fluid. For the Besant problem sketched in figure 10-(a), the point A is chosen on the cavity surface and the point B in a region far from the cavity where there is no motion. In this case, equation (4.2) writes :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_A + \frac{u_A^2}{2} = \frac{p_\infty}{\rho} \quad (4.3)$$

As usual, this momentum equation must be completed by the equation of mass conservation $\Delta \phi = 0$. Here, since the outer fluid is incompressible, the whole motion is fixed by that of the boundary. Noting $R(t)$ the radius of that cavity at time t and \dot{R} its velocity

one deduces the velocity u at any point $r > R$:

$$u = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \dot{R} \quad (4.4)$$

from which one finds $\phi(r, t) = -R(t)^2 \dot{R}/r$. The equation which describes the cavity collapse is thus :

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -\frac{p_\infty}{\rho} \quad (4.5)$$

which must be integrated with the initial conditions : $R(t = 0) = R_0$ and $\dot{R}(t = 0) = 0$. Solving in \dot{R} , equation (4.5) can be integrated once as :

$$\dot{R}^2 = \frac{2}{3} \frac{p_\infty}{\rho} \left[\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - 1 \right] \quad (4.6)$$

from which we get the time of collapse τ :

$$\tau = \int_0^{R_0} \frac{dR}{\sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_\infty}{\rho} \left[\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - 1 \right]}} = 0.914 \frac{R_0}{\sqrt{p_\infty/\rho}} \quad (4.7)$$

The trajectory $R(t)$ obtained through the integration $R(t) = \int_0^t \dot{R} dt$ is compared to the experimental collapse in figure 10-(c) and found in fair agreement.

If one considers the singularity $R \rightarrow 0$, equation (4.6) shows that

$$R(t) \sim \left(\frac{2}{3} \frac{p_\infty}{\rho} R_0^3\right)^{1/5} (\tau - t)^{2/5} \quad (4.8)$$

In this classical example, one obtains an exact solution for the velocity (eq. (4.6)) but no analytical expression of the evolution $R(t)$. This must be obtained through a numerical integration. There are cases where such an analytical expression, even approximate can be useful. This is the motivation for the method we develop now, the accuracy of which can be tested on the Besant problem.

Using the observation that $\ddot{R}^2 = 2(R\ddot{R} + \dot{R}^2)$, one can re-write the equation of the cavity (4.5) as:

$$\ddot{R}^2 + \dot{R}^2 = -\frac{2}{\rho} p_\infty \quad (4.9)$$

Since \dot{R} is null initially, the dynamics of the cavity is initially described by :

$$\ddot{R}^2 \approx -\frac{2}{\rho} p_\infty \quad (4.10)$$

The solution of which is:

$$R = R_0 \sqrt{1 - (t/\tau_0)^2} \quad (4.11)$$

with $\tau_0 \equiv R_0/\sqrt{p_\infty/\rho}$. This approximate analytical solution holds provided \ddot{R}^2 remains smaller than 2, that is provided $t^2/(1-t^2) \ll 2$. This solution is thus expected to be valid at the beginning of the collapse and is expected to fail close to the singularity. However, if one consider the time of collapse, this approximate solution gives $t = \tau_0$ which is 9% above the exact value (eq. (4.7)). This is an indication that this kind of approximation

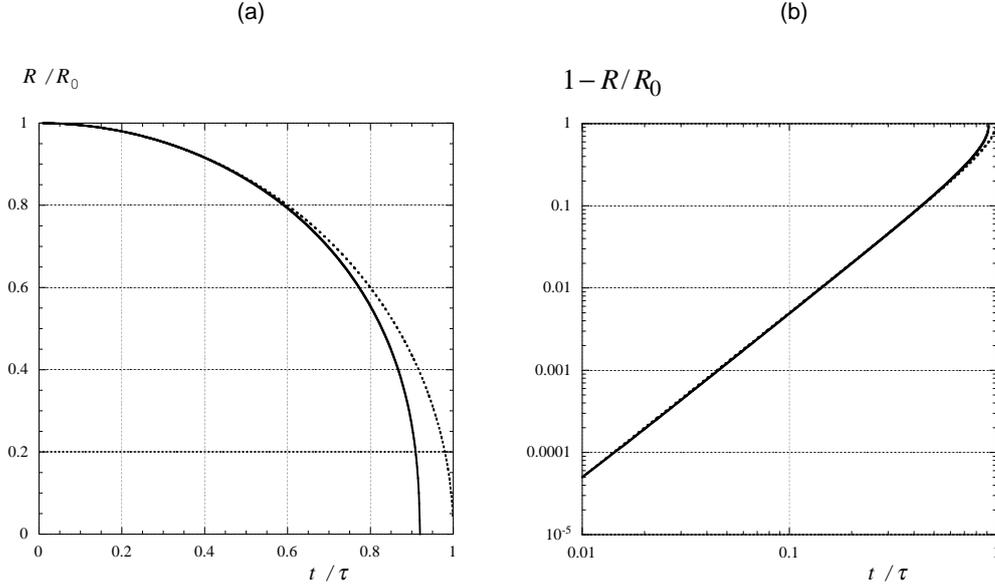


FIGURE 11. (a) Comparison between the exact solution of the Besant-Rayleigh problem (numerical integration of (4.5)) (solid line) and the approximate solution (4.11) (dash line): (a) $R/R_0(t/\tau)$ presented with a linear scale (b) $1 - R/R_0(t/\tau)$ presented with a log-log scale.

may often be useful. At the singularity for example, this approximate solution leads to:

$$R(t) \sim \left(\frac{4R_0^2 p_\infty}{\rho} \right)^{1/4} \sqrt{\tau_0 - t} \quad (4.12)$$

which is indeed different from the exact behavior (4.8), the scaling in time being 0.5 instead of 0.4. Considering equation (4.9), one observes that at the singularity, the second term \dot{R}^2 diverges while the third term (the pressure) remains constant. This can only be achieved if the first two terms compensate, that is if $\ddot{R}^2 + \dot{R}^2 = 0$, or $R \sim (\tau - t)^{2/5}$.

The comparison between the exact trajectory $R(t)$ (obtained numerically) and the approximate solution (4.11) is presented in figure 11. As expected, the behavior of the approximation is good for small time and deviate from the exact solution for times larger than 0.8.

A last comment on this Besant-Rayleigh problem deals with the kinetic energy T involved in the fluid motion:

$$T \equiv \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho u^2 d\Omega \quad (4.13)$$

where Ω is the total volume of liquid. Using the velocity field (4.4), this equation reduces to:

$$T \equiv 2\pi\rho R^3 \dot{R}^2 \quad (4.14)$$

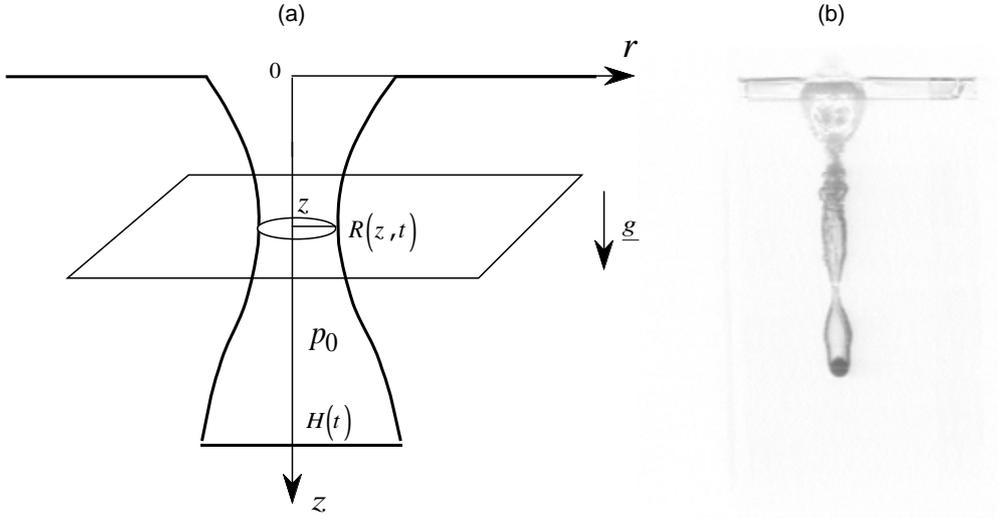


FIGURE 12. (a) Sketch and conventions for the cavity (b) picture of the cavity created by the impact of a sphere (radius $R = 12$ mm) with an impact velocity $U = 8$ m/s ($Fr \approx 670$).

Using equation (4.6), the kinetic energy (4.14) writes:

$$T \equiv \frac{4}{3} \pi (R_0^3 - R^3) p_\infty \quad (4.15)$$

Even if the velocity \dot{R} diverges at the singularity, the kinetic energy remains finite ($T \leq 4/3 \pi R_0^3 p_\infty$). Under this form of T one acknowledges the work W of pressure from R_0 to R . The equality $T = W$ is another way to derive the equation for the cavity (see Rayleigh (1917)).

4.2. The cylindrical cavity problem

We now turn to the cylindrical cavity problem presented in figure 12: a solid body impinges vertically through the surface and creates an axisymmetric cavity which first expands radially prior to closure. The characteristics of the cavity have been discussed in the *experimental results* section and we present here the modelisation of the dynamics using the notations presented in figure 12-(a).

Following the approach used to solve the Besant-Rayleigh problem, we first complete the generalised Bernoulli equation, taking gravity into account:

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - gz \right]_A^B = 0 \quad (4.16)$$

Choosing A at the interface and B at the same height ($z_A = z_B$) but far from the hole we get:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_R + \frac{\dot{R}^2}{2} = gz \quad (4.17)$$

The challenge is to make an appropriate choice for the potential ϕ . A direct (but dangerous) extension of the method used to solve the Besant-Rayleigh problem would consist in assuming a purely radial motion $ru = R\dot{R}$. That is $\phi = R\dot{R} \ln r$. This radial motion

is not so easy to justify since the solid body moves downwards. Moreover, this extension is dangerous in the sense that the log dependency on r implies that the kinetic energy in the liquid is not finite. It also does not lead to any analytical expression for the cavity shape. We have thus decided to use a different approach, based on the observation that this problem can be related to the classical destabilisation of the hollow jet Lord Rayleigh (1892), Chandrasekhar (1981). This relation is illustrated in figure 12-(b), where the long cavity (or hollow jet) created by the solid body seems to destabilises over a preferential wavelength. This suggest that an alternative way to solve the continuity equation $\Delta\phi = 0$ consists in expanding ϕ in series of terms like $K_0(kr).cos(kz)$, where K_0 is the K Bessel function which decreases exponentially at infinity. To simplify the presentation, we use this exponential asymptotic behavior and take for ϕ :

$$\phi \approx -R\dot{R}e^{(1-r/R)} \quad (4.18)$$

which confines the motion in a region close to the cavity, with an exponential decay similar to the one observed in surface wave on deep water. Using this expression, we can simplify the momentum equation (4.17) and get the equation for the cavity:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -gz \quad (4.19)$$

The only difference with the equation (4.5) obtained for the Besant-Rayleigh problem is that the pressure is not constant but depends linearly on z . At a given z , this equation for the cylindrical cavity can be integrated once :

$$\dot{R}^2 = \alpha U^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 + \frac{2}{3}gz \left[\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - 1 \right] \quad (4.20)$$

where we have used the limit condition $\dot{R}^2(R = R_0) = \alpha U^2$ with α a constant smaller than 1. If $H = Ut$ is the depth of the cavity at time t , we integrate numerically equation (4.20) from $z = 0$ to $z = H$ and for each z location from $t = 0$ to $(H - z)/U$, using the initial condition $R(t = 0) = R_0$. The results obtained are compared to the experimental observations in figure 13, where the solid sphere ($R = 11.5$ mm) impacts with a Froude number $Fr = 52$. The numerical integration is done with $\alpha = 0.1$. The comparison reveals that the general features observed experimentally are captured by the model : the cavity slightly expand radially during the digging of the cavity, prior to a pinching which occurs roughly at mid distance between the surface and the bottom of the hole.

This comparison enables us to check the validity of the assumptions used to guess the potential. We still have to integrate numerically equation (4.20) to get the evolution of the shape of the cavity and we do not dispose of an analytical expression for this shape which would allow us to determine its main characteristics: when does the pinching occur ? At which location ? How does the depth of the cavity (at pinching) vary with the Froude number ? It is to answer these basic questions that we have decided to derive an approximate analytical solution, using the method presented in the Besant-Rayleigh problem. The method consists in making the approximation $R\ddot{R} + 3/2\dot{R}^2 \approx \dot{R}^2/2$. This reduces equation (4.19) to:

$$\ddot{R}^2 \approx -2gz \quad (4.21)$$

which can be integrated twice :

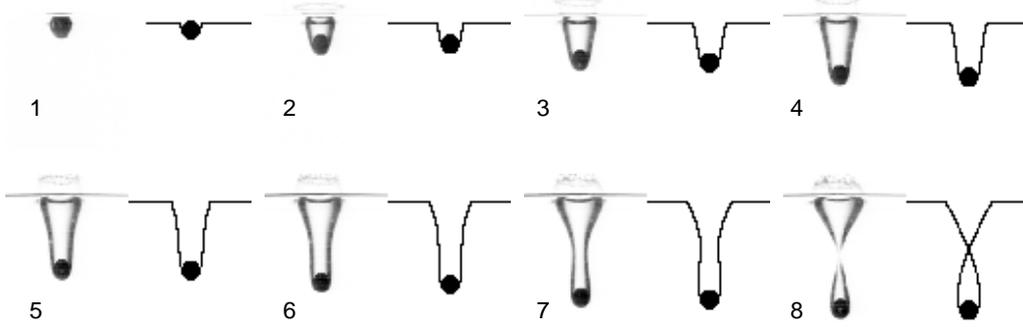


FIGURE 13. Comparison between the cavity observed experimentally with a solid sphere of radius $R = 11.5$ mm and Froude number $Fr = 52$ and the numerical integration of equation (4.20).

$$R^2 = R_0^2 + 2\sqrt{\alpha}R_0Ut - gzt^2 \quad (4.22)$$

where we have used the initial conditions : $R(t = 0) = R_0$ and $\dot{R}(t = 0) = \sqrt{\alpha}U$. This equation (4.22) describes the time evolution of the radius of the cavity at the depth z , starting at the time where the impactor reach z . When the impactor reach the depth $H > z$, the radius of the cavity at z is obtained from equation (4.22), taking $t \equiv (H - z)/U$. This is true as long as the velocity is constant during the digging of the cavity. Considering the experiments presented in figure 1, 3 and 7, this assumption is reasonable in a first step. The whole shape of the cavity when the impactor reaches H is thus obtained from equation (4.22) by changing t in $(H - z)/U$ and leads to:

$$R^2 = R_0^2 + 2\sqrt{\alpha}R_0U \left(\frac{H - z}{U} \right) - gz \left(\frac{H - z}{U} \right)^2 \quad (4.23)$$

Using $\eta \equiv H/R_0$, $\epsilon \equiv 1/Fr$, $\bar{z} \equiv z/H$ and $\bar{R} \equiv R/R_0$, the cavity shape can be written in a dimensionless form:

$$\bar{R}^2 = 1 + 2\sqrt{\alpha}\eta(1 - \bar{z}) - \epsilon\eta^3\bar{z}(1 - \bar{z})^2 \quad (4.24)$$

This approximate analytical solution is compared to the shape observed experimentally in figure 14. The main features of the cavity are captured by this analytical solution. We can now use this expression for the cavity shape to analyse in more detail the characteristics of the cavity.

The first question we address is the depth of the cavity at pinching. From equation (4.24), we look for η such that there is a \bar{z} where $R = 0$. This can be done by looking for the extremal location (places where $d\bar{R}/d\bar{z} = 0$). According to equation (4.24) there can be two such locations:

$$\bar{z}_{min} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{1 - 6\frac{\sqrt{\alpha}}{\epsilon\eta^2}} \quad \text{and} \quad \bar{z}_{max} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{1 - 6\frac{\sqrt{\alpha}}{\epsilon\eta^2}} \quad (4.25)$$

where \bar{z}_{min} and \bar{z}_{max} respectively correspond to the location of the minimum and maximum radial extension of the cavity. Since we are looking for the pinching position, we consider the minimum radius which writes:

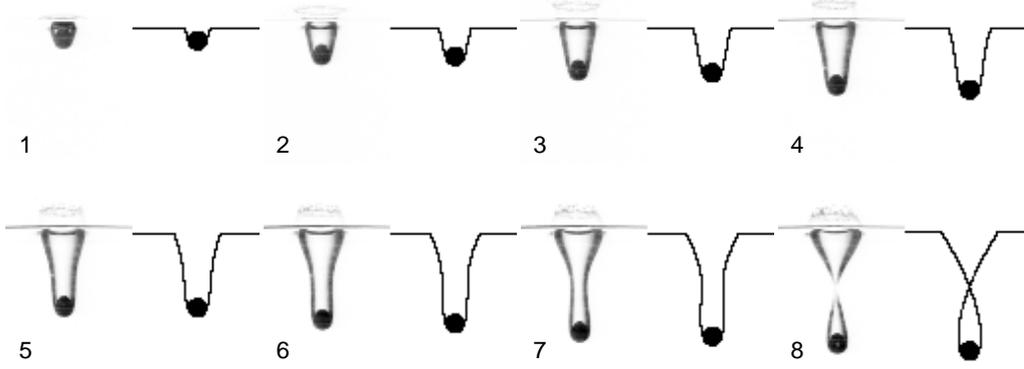


FIGURE 14. Comparison between the cavity observed experimentally with a solid sphere of radius $R = 11.5$ mm and Froude number $Fr = 52$ and the analytical solution (4.24).

$$\bar{R}_{min}^2 = 1 + \frac{2}{9}\sqrt{\alpha}\eta \left[3 + 2\sqrt{1 - \frac{6\sqrt{\alpha}}{\epsilon\eta^2}} \right] - \frac{2}{27}\epsilon\eta^3 \left[1 + \sqrt{1 - \frac{6\sqrt{\alpha}}{\epsilon\eta^2}} \right] \quad (4.26)$$

At pinching, $\bar{R}_{min} = 0$ and equation (4.26) gives the relation between the depth of the cavity ($\eta \equiv H/R_0$) and the Froude number ($\epsilon \equiv 1/Fr$). Two limits lead to simplified results:

- $\alpha = 0$

This limit corresponds to cavities created without any radial velocity. Experimentally, this limit can be achieved at the rear of long cylinders. In this limit, equation (4.26) reduces to:

$$\eta = \left(\frac{27}{4\epsilon} \right)^{1/3} \quad (4.27)$$

In this limit, the depth of the cavity thus increases as the 1/3 power of the Froude number, that is as $U^{2/3}$. From equation (4.25), one also gets that the pinching occurs at $H_p/H = 1/3$.

These properties are consistent with the regime observed by Lohse et al. (2004) during the impact in soft sand.

- $\alpha \neq 0$ and $\epsilon\eta^2 = O(1)$

In this limit, the pinching $\bar{R}_{min} = 0$ is achieved when the last two terms of the right hand side of equation (4.26) are equal to each other. This is achieved for

$$\eta = \left(\frac{8\sqrt{\alpha}}{\epsilon} \right)^{1/2} \quad (4.28)$$

In this limit, the depth of the cavity increases as the square root of the Froude number, that is linearly with the velocity. From equation (4.25), one also gets that the pinching location is $H_p/H = 1/2$.

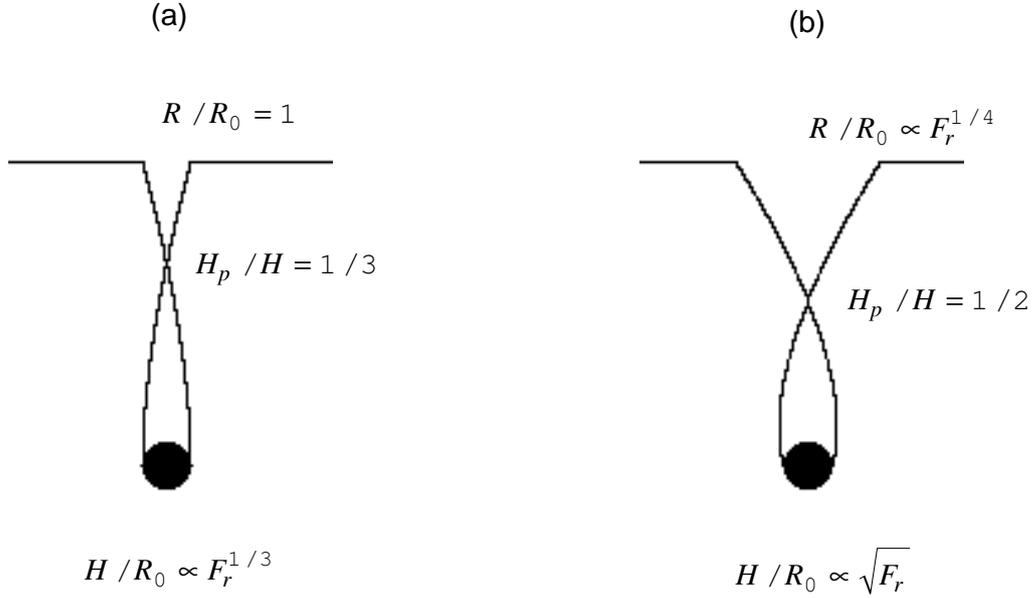


FIGURE 15. Characteristics of the cavities at the pinching for the two limits (a) $\alpha = 0$ (b) $\alpha \neq 0$ and $\epsilon\eta^2 = O(1)$.

These properties are consistent with the experimental results obtained by Glasheen and McMahon (1996-a). A closer comparison is done below.

The characteristics of the cavity at pinching are summarised in figure 15 for the two different regimes identified.

The transition between both regimes is expected when the second term in the right hand side of equation (4.26) becomes larger than 1. This condition implies that the first regime ($\alpha = 0$) can only be observed if $\alpha \ll 0.3\epsilon^{2/3}$.

5. Comparison between theory and experiments

Experimentally, we try to access both regimes using cylinders and spheres. Indeed, as shown in figure 5-(b) the impact of spheres are characterised by $\alpha > 0$, whereas the cavity created behind cylinders (figure 9) can be characterised by $\alpha \approx 0$.

5.1. Characteristics of the cavity at pinching

We first consider the cavities created by the impact of spheres:

The reduced depth of the cavity (H/R_0) obtained with different spheres is presented in figure 16-(a) as function of the Froude number. This reduced depth increases as $Fr^{1/2}$ as predicted by equation (4.28). More quantitatively, this equation is plotted in solid line for the value $\alpha = 0.1$. This theoretical evaluation of the cavity depth is in reasonable agreement with our experimental data.

With $\alpha = 0.1$ the theoretical law (4.28) is $H/R_0 = \sqrt{(8\sqrt{\alpha}) Fr} \approx 1.6\sqrt{Fr}$. This law is close to the one obtained experimentally by Glasheen and McMahon (1996-a) with

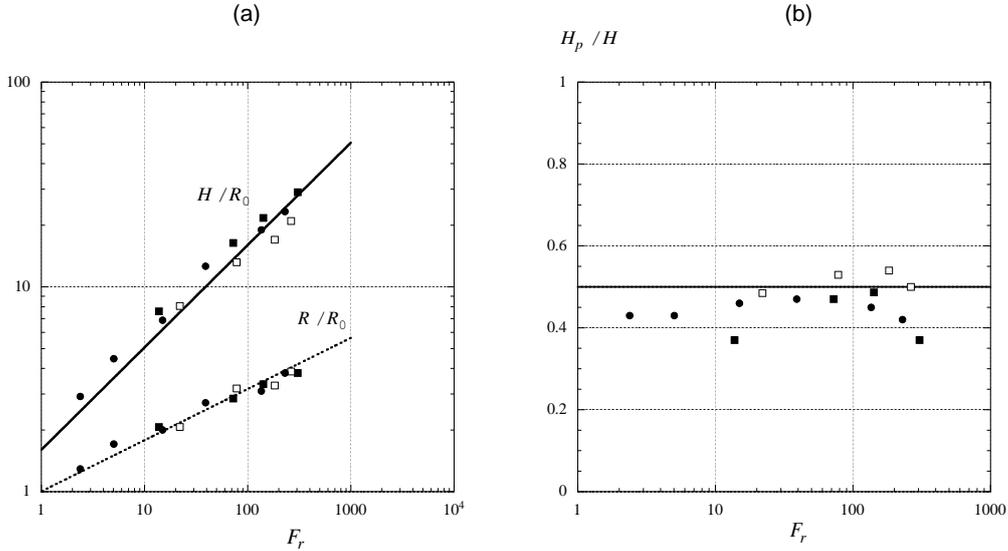


FIGURE 16. Characteristics of the cavities created by spheres: (a) Evolution of the reduced depth H/R_0 and reduced crater size R/R_0 as function of the Froude number for different sphere size: \blacksquare $R_0 = 6$ mm, \square $R_0 = 7.8$ mm and \bullet $R_0 = 12$ mm. The solid line is the law $H/R_0 = \sqrt{(8\sqrt{\alpha}) Fr}$, plotted for $\alpha = 0.1$. The dashed line is the law $R/R_0 = 2^{5/4}\alpha^{3/8}Fr^{1/4}$, plotted with $\alpha = 0.1$. (b) Evolution of the reduced neck location H_p/H as a function of the Froude number for different sphere size: \blacksquare $R_0 = 6$ mm, \square $R_0 = 7.8$ mm and \bullet $R_0 = 12$ mm. The solid line is the law $H_p/H = 1/2$.

impacting discs (radius R): $H/R \approx 2.297\sqrt{Fr}$. The scaling in Froude is the same and the prefactor is larger, which suggest that the value of α depends on the geometry of the solid body.

The reduced crater size (R/R_0) is also presented in figure 16-(a) and shows a $Fr^{1/4}$ dependency. The law derived in the limit $\alpha \neq 0$ and $\epsilon\eta^2 = O(1)$ writes $R/R_0 \approx 2^{5/4}\alpha^{3/8}Fr^{1/4}$. It is plotted in dashed line and is in good agreement with our experimental data.

The reduced neck position H_p/H is presented in figure 16-(b) as a function of the Froude number. The dispersion of the data is important but we notice no systematic variation of the reduced neck position with the Froude number but rather a constant value close to 0.45, which is not far from the value $1/2$ predicted by the theory.

The results obtained with spheres for the time τ at pinching are presented in figure 17. In figure 17-(a) we recover the observation made in figure 7 that the time at pinching τ does not depend on the Froude number. Here, we notice that τ increases with the radius of the sphere. This evolution can be understood with the theoretical results obtained in the limit $\alpha \neq 0$ and $\epsilon\eta^2 = O(1)$ and summarised in figure 15-(b). If $H/R_0 \sim Fr^{1/2}$, the time at pinching $\tau \sim H/U$ is independent of the velocity and depends linearly on $\sqrt{R_0/g}$. The relation $\tau \left(\sqrt{R_0/g} \right)$ is presented in figure 17-(b). The linearity is achieved and the best fit reveals that $\tau \approx 2.06\sqrt{R_0/g}$. This value 2.06 is higher than the one pre-

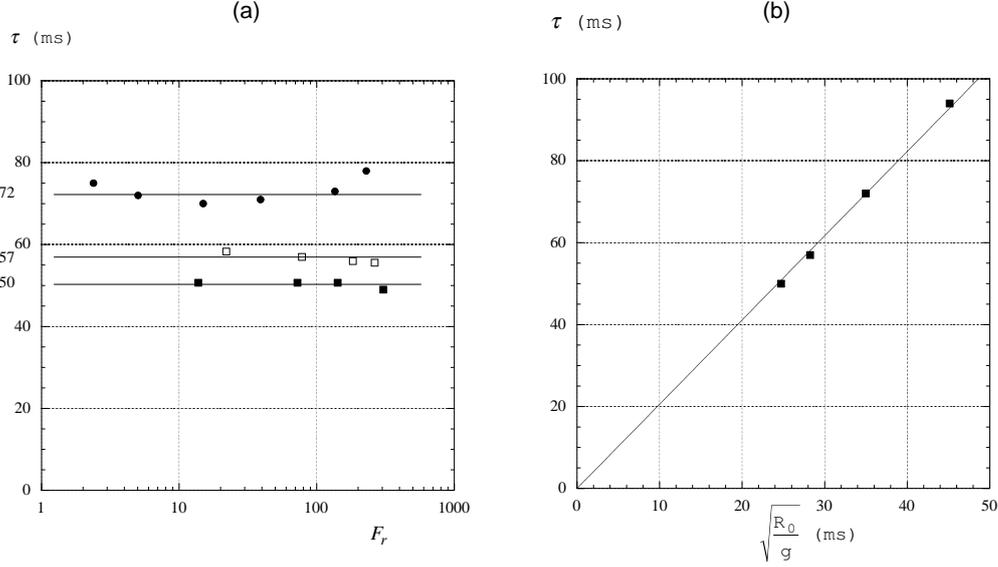


FIGURE 17. Characteristics of the cavities created by spheres: (a) Evolution of the time at pinching τ (ms) as function of the Froude number for different sphere size: \blacksquare $R_0 = 6$ mm, \square $R_0 = 7.8$ mm and \bullet $R_0 = 12$ mm. The solid lines are guide for the eyes. (b) Evolution of the time at pinching τ (ms) as a function of the time $\sqrt{R_0/g}$. The solid line is the best fit $\tau = 2.06\sqrt{R_0/g}$.

dicted by the theory for $\alpha = 0.1$ ($\tau = 1.6\sqrt{R_0/g}$). The discrepancy probably originates in the fact that the sphere does not have exactly a constant velocity as assume by the above theoretical argument.

Comparing with the experimental results of Glasheen and McMahon (1996-a) obtained with impacting disc (radius R) $\tau \approx 2.285\sqrt{R/g}$ we observed that the law is similar with a slight difference in the prefactor, which again suggest that the prefactor depends on the parameter α the value of which depends on the geometry.

The characteristics of the cavities created by cylinders are presented in figure 18: the reduced depth H/R_0 is plotted in figure 18-(a) as a function of the Froude number. The solid line represents the law $H/R_0 = (27/4 Fr)^{1/3}$ derived theoretically [equation (4.27)]. It stands 25% above the experimental values but seems to capture the evolution in Froude.

The reduced crater size R/R_0 is also presented in figure 18-(a). No clear dependency in Froude is observed, the data being scattered around a mean value of 1.3. This is above the theoretical expected value of $R/R_0 = 1$ but does not contradict the prediction of no dependency in Froude with a value close to the body size.

Finally, the reduced neck position H_p/H is presented in figure 18-(b) as a function of the Froude number. Contrary to the cavities created by spheres where $H_p/H \approx 0.5$, we observe here that the neck location is closer to the value $H_p/H \approx 0.35$, which is not far from the theoretical prediction $H_p/H = 1/3$.

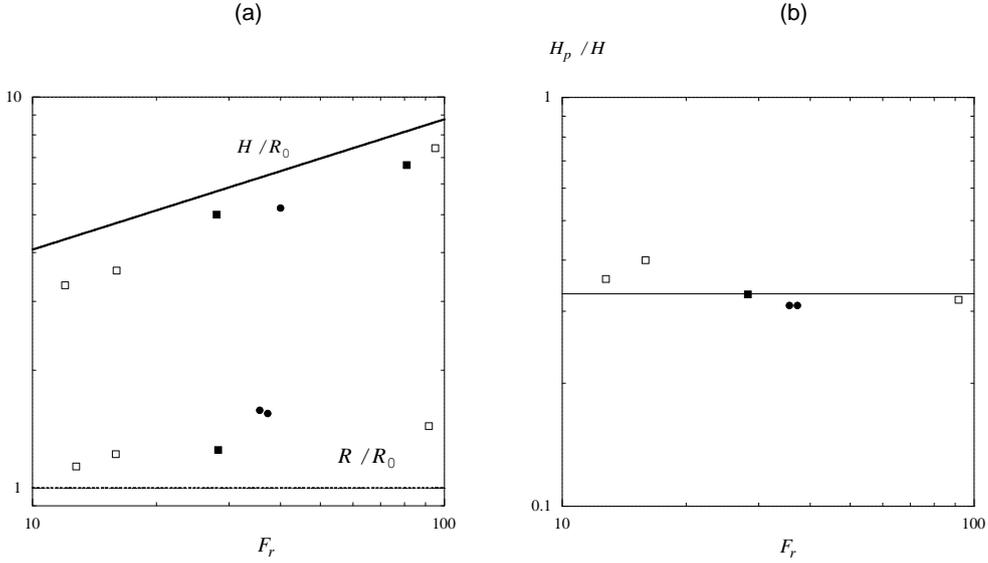


FIGURE 18. Characteristics of the cavities created by cylinders: (a) Evolution of the reduced depth H/R_0 and reduced crater size R/R_0 as function of the Froude number for different cylinder size: \blacksquare $R_0 = 6.1$ mm, \square $R_0 = 10.1$ mm and \bullet $R_0 = 20.1$ mm. The solid line is the law $H/R_0 = (27/4 Fr)^{1/3}$ derived theoretically in the limit $\alpha = 0$. The dashed line is the law $R/R_0 = 1$. (b) Evolution of the reduced neck location H_p/H as a function of the Froude number for different sphere size: cylinder size: \blacksquare $R_0 = 6.1$ mm, \square $R_0 = 10.1$ mm and \bullet $R_0 = 20.1$ mm. The solid line is the law $H_p/H = 1/3$ derived in the limit $\alpha = 0$.

6. Conclusion

We report the study of transient cavities created by the impact of a solid body in water at high Reynolds and high Weber numbers. In this limit, we show theoretically that an approximate analytical solution can be derived to describe the evolution in time of the cavity, from its creation to pinching.

This approximate analytical solution predicts the existence of two very different cavities dynamics, one being characterised by a reduced depth evolution $H/R_0 \sim Fr^{1/2}$ and the other by the evolution $H/R_0 \sim Fr^{1/3}$. The reduced crater size is also different, one predicting $R/R_0 \sim Fr^{1/4}$, and the other $R/R_0 \sim 1$.

Experimentally, we have found both solutions, using spheres for the first regime and cylinders for the second. This geometrical parameter indeed enables to change the limit condition at the contact between the solid body and the liquid, which controls the nature of the cavity dynamics. The characteristics of the experimental cavities are in fair agreement with the cavities expected from the theory.

REFERENCES

BATCHELOR G.K. 2000 An introduction to fluid dynamics. *Cambridge Mathematical Library*

- BIRKHOFF G. AND ZARANTONELLO E.H. 1957 Jets, wakes and cavities. In *Academic Press Inc.*
- CHANDRASEKHAR S. 1981, Hydrodynamic and hydromagnetic stability *Dover*, New-York.
- COINTEM R. 1989 Two-Dimensional Water-Solid Impact. In *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering* **111**
- FRIDMAN G.M. 1998 Matched asymptotics for two-dimensional planing hydrofoils with spoilers In *J. Fluid Mech.* **358** pp. 259–281
- GLASHEEN J.W. AND MCMAHON T.A. 1996 Vertical water entry of disks at low Froude numbers In *Phys. Fluids* **8** pp. 2078–2083
- GLASHEEN J.W. AND MCMAHON T.A. 1996 A hydrodynamic model of locomotion in the basilisk lizard In *Nature* **380** pp. 340–342
- HOWISON S.D. , OCKENDON J.R., AND WILSON S.K. 1991 Incompressible water-entry problems at small deadrise angle In *J. Fluid Mech.* **222** pp. 215–230
- VON KARMAN T. 1929 The Impact on Seaplane Floats During Landing. In *NACA TN* **321**
- KOROBKIN A.A. AND PUKHNACHOV V.V. 1988 Initial stages of water impact In *Ann. Rev. Fluid Mech.* **20** pp. 159–185
- LOHSE D., BERGMANN R., MIKKELSEN R., ZEILSTRA C., VAN DER MEER D., VERSLUIS M., VAN DER WEELE K., VAN DER HOEF M. AND KUIPERS H. 2001 Impact on soft sand: void collapse and jet formation In *Phys. Rev. Lett.* **93** pp. 198003-1–198003-4
- MAY A. 1952 Vertical Entry of Missiles into Water. In *Journal of Applied Physics.* **23** pp. 1362–1372
- OLIVER, J.M. 2002 Water entry and related problems In *PhD/DPhil thesis, University of Oxford.*
- LORD RAYLEIGH 1917, On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *Phil. Mag.*, **XXXIV**, pp. 94-98.
- RAYLEIGH LORD 1892 On the instability of cylindrical fluid surfaces. In *Philosophical Magazine* **34** pp. 177–180
- THORODDSEN S.T. AND SHEN A.Q. 2001 Granular jets In *Phys. Fluids* **13** pp. 4–6
- WAGNER H. 1932 Phenomena associated with impacts and sliding on liquid surfaces In *ZAMM* **12** pp. 193–235
- WORTHINGTON A.M. 1908 A Study of Splashes. In *Longmans Green and Company, New York*
- WORTHINGTON A.M. AND COLE R.S. 1900 Impact with a liquid surface studied by the aid of instantaneous photography. Paper II In *Phil. Trans. Roy. Soc. London, A* **194** pp. 175–199.

Eyelids and windshield wipers: Liquid coating by an elastic sheet

By CHRISTOPHE CLANET, BERTRAND SELVA,
AND VIRGINIE DUCLAUX¹

¹ IRPHE, UMR 6594, 49 rue F. Joliot-Curie, BP 146, 13384 Marseille, France

(Received 18 July 2006)

We study the thickness h_∞ of a liquid film (dynamic viscosity μ) when deposited on a rigid surface by an elastic sheet (length L , bending stiffness B) moving at the relative velocity V . We first show experimentally that :

$$h_\infty \approx 0.065L \left(\frac{\mu V L^2}{B} \right)^{3/4}$$

Theoretically, we approach this law with an extension of the Landau-Levich-Derjaguin problem.

1. Introduction

The deposition of a constant thickness liquid film (dynamic viscosity μ , density ρ , surface tension σ) on a solid surface (coating) can be achieved by removing the solid from a liquid bath at a constant velocity V [Kistler and Schweizer (1997), Quéré (1999)].

When the solid reduces to a flat plate [figure 1-(a)], the thickness h_∞ of the extracted film has first been studied experimentally [Goucher and Ward (1922), Morey (1940)], and has led to the LLD theory [Landau and Levich (1942), Derjaguin (1943)] which gives (see section 4.2):

$$h_\infty = 0,94.a.Ca^{2/3}, \quad (1.1)$$

where $a \equiv \sqrt{\sigma/\rho g}$ is the capillary length and $Ca \equiv \mu V/\sigma$ the capillary number. The above expression holds in the low capillary limit $Ca \ll 1$, where the pressure at the interface mainly depends on surface tension.

This law for the film thickness does not result from a balance between gravity and viscosity which would lead to the scaling $h_\infty \sim a.Ca^{1/2}$ not observed experimentally [Kitzio (1999)].

To reach the law (1.1), one must consider the role of the liquid meniscus which imposes, right at the exit of the bath a film thickness much smaller than the one which could have been obtained by gravitational drainage. In this sense, one can say that the meniscus acts as a "liquid wiper".

The problem we address is to find the law for h_∞ , when the capillary wiper is replaced by an elastic sheet wiper [figure 1-(b)].

The experimental set-up is presented in section 2, the results in section 3 and the model in section 4.

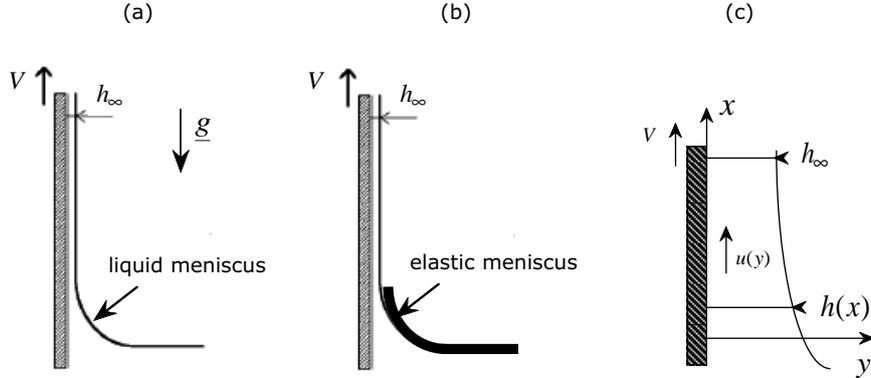


FIGURE 1. Plate coatings (a) through a capillary meniscus (b) through an elastic sheet (c) conventions used to describe the coating problem.

thickness h_s μm	density ρ_s kg.m^{-3}	bending stiffness B $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}$	Young modulus $E \equiv 12(1-\nu^2) B/h_s^3$ GPa	\mathcal{L} cm
55	1280	57.10^{-6}	3.7	4.3
75	1344	162.10^{-6}	4.0	5.4
100	1387	354.10^{-6}	3.7	6.3
150	1337	795.10^{-6}	2.5	7.3
180	1338	1232.10^{-6}	2.2	8.0
490	906	$10\,041.10^{-6}$	0.9	13.1

TABLE 1. Physical properties of the different mylar sheets.

2. Experimental set-up and protocol

The experimental set-up is presented on figure 2-(a): the elastic sheet of length L and width b (1) is clamped on a support (2) at a distance y_0 from the solid support to be coated (3).

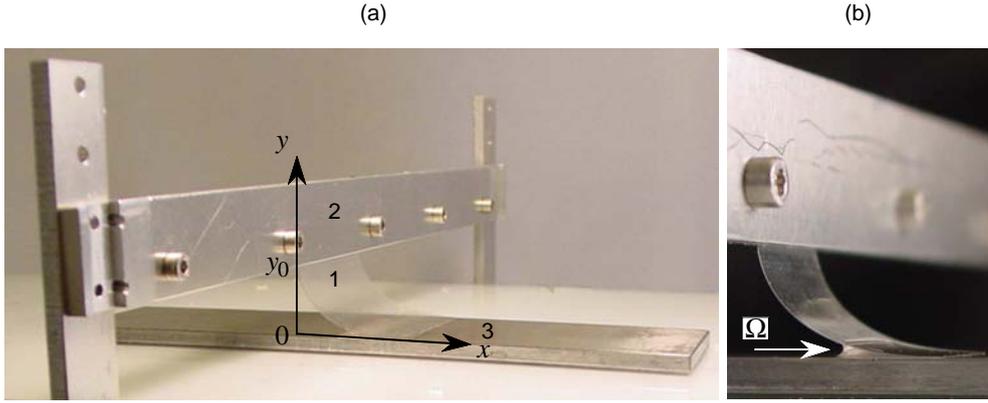
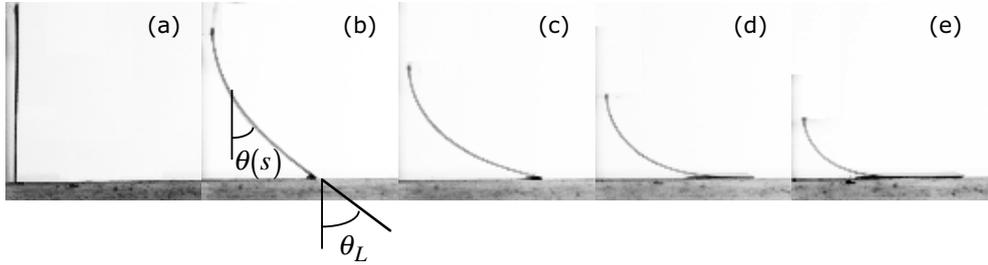
The physical properties of the mylar sheets we have used are reported on table 1. Apart from the sheet thickness h_s and density ρ_s , we present on table 1 the measured values of the bending stiffness per unit width B and the deduced value of the Young modulus $E \equiv 12(1-\nu^2) B/h_s^3$. In this expression, the Poisson ratio is taken constant $\nu = 1/3$. The last column presents the value of the characteristic length $\mathcal{L} \equiv [B/(\rho_s.h_s.g)]^{1/3}$ under which gravity does not affect the equilibrium shape of the sheet. The whole study is conducted in the limit $L/\mathcal{L} < 1$, where gravity can be neglected to describe the shape of the sheet of length L .

The liquid (silicone oil) is chosen to wet both the elastic sheet and the solid support. It is initially deposited with a micropipet between the sheet and the solid surface as presented on figure 2-(b). The deposited volume Ω is of the order of $1000 \mu\text{l}$ and we always manage to keep it to a value much larger than the coating volume. In this limit, there is no influence of Ω on the deposited film thickness as will be shown in section 3. The physical properties of the silicone oils used (S.O.) are presented on table 2.

Once the liquid is deposited, the solid support is moved at a constant velocity in the

Liquid	ρ kg m ⁻³	μ kg m ⁻¹ s ⁻¹	σ N m ⁻¹	a m
S.O. V100	952	0.1	0,0225	1,6 10 ⁻³
S.O. V1000	965	1	0,0225	1,5 10 ⁻³

TABLE 2. Physical properties of the different Newtonian liquids used (at 25°C).

FIGURE 2. Experimental set-up: (a) general view showing the elastic plate (1), its clamping support (2) and the coated solid plate (3). (b) close view on the elastic plate and the liquid reservoir of volume Ω .FIGURE 3. Shape of the elastic sheet obtained with $L = 28.5$ mm, $h_s = 100$ μ m and : (a) $y_0/L = 1$, $\theta_L = 0^\circ$ (b) $y_0/L = 0.8$, $\theta_L = 52^\circ$ (c) $y_0/L = 0.6$, $\theta_L = 75^\circ$ (d) $y_0/L = 0.44$, $\theta_L = 90^\circ$ (e) $y_0/L = 0.3$, $\theta_L = 90^\circ$.

direction of positive x . The velocity is controlled by a step motor (Cool Muscle, CM1 series) and can be varied from 100 μ m/s to 14 cm/s.

After the coating of the whole surface, the solid is weighted and we deduce from the difference of mass before and after deposition, the value of the mean thickness h_∞ .

3. Experimental results

3.1. Influence of the reduced distance y_0/L .

The shape of the elastic sheet is presented on figure 3 for different values of the reduced solid surface distance y_0/L . We observe on this figure that the angle at the end of the sheet θ_L increases from 0 at $y_0/L = 1$ to $\pi/2$ at $y_0/L = 0.44$. For smaller values of the

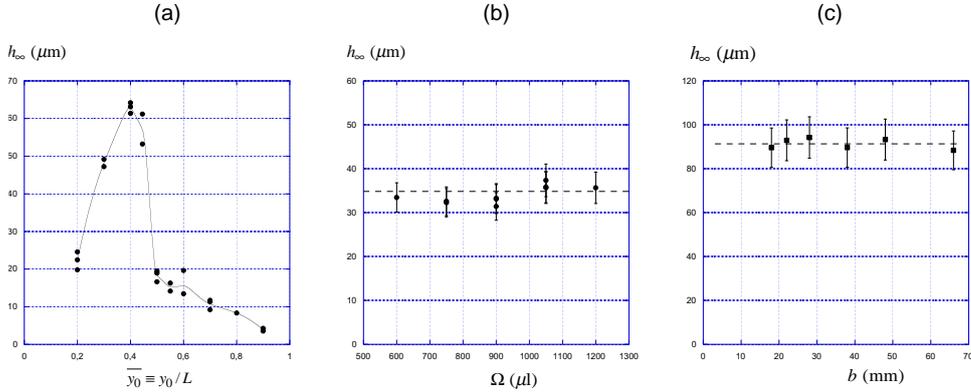


FIGURE 4. Experimental results : (a) Influence of the reduced distance y_0/L on the film thickness h_∞ obtained with V100, $V = 28.8$ mm/s, $b = 38$ mm, $L = 28.5$ mm, $h_s = 180$ μm . (b) Influence of the reservoir volume Ω obtained with V100, $V = 12$ mm/s, $b = 3.8$ cm, $y_0/L = 0.44$, $L = 45.5$ mm and $h_s = 100$ μm (c) Influence of the sheet width b obtained with V100, $V = 28.8$ mm/s, $y_0/L = 0.44$, $L = 35.5$ mm, $h_s = 100$ μm .

reduced distance, this angle remains equal to $\pi/2$ and the horizontal fraction of the sheet length increases, as well as its initial curvature.

The evolution of the film thickness h_∞ with the reduced distance y_0/L is presented on figure 4-(a). This evolution presents a maximum for $y_0/L \approx 0.4 - 0.45$, that is when the sheet gets in contact with the solid with a $\pi/2$ contact angle θ_L [see figure 3-(d)] and with almost a zero contact surface. The whole study is conducted in the limit $y_0/L = 0.44$.

3.2. Influence of the reservoir volume Ω .

The influence of the volume of the reservoir Ω [figure 2-(b)] on the film thickness h_∞ is presented on figure 4-(b). These measurements have been performed with V100, $V = 12$ mm/s, $b = 38$ mm, $y_0 = 0.44$, $L = 45.5$ mm and $h_s = 100$ μm .

We observe on this figure that within the experimental error on the measure of h_∞ (of the order of $\pm 10\%$) the film thickness is independent of the volume of the reservoir.

3.3. Influence of the sheet width b .

The evolution of the film thickness h_∞ with the sheet width b is presented on figure 4-(c): Within the experimental error on the measurement of h_∞ (10%) the film thickness is independent of the width b .

3.4. Influence of the velocity V and viscosity μ .

The evolution of the film thickness h_∞ with the velocity is presented on figure 5-(a): the thickness of the coating increases with V as a power law $h_\infty \sim V^\alpha$ with $\alpha \approx 3/4$. We also observe on this figure that the thickness increases with the viscosity of the liquid: using a silicone oil ten times more viscous (V1000 instead of V100) leads to a thickness ten times larger.

3.5. Influence of the sheet length L .

The evolution of the film thickness h_∞ with the sheet length L is presented on figure 5-(b): in these experiments, all the parameters are kept constant (in particular the ratio y_0/L) except the length L . We observe a strong power law dependency of the film thickness $h_\infty \sim L^\beta$ with $\beta \approx 5/2$.

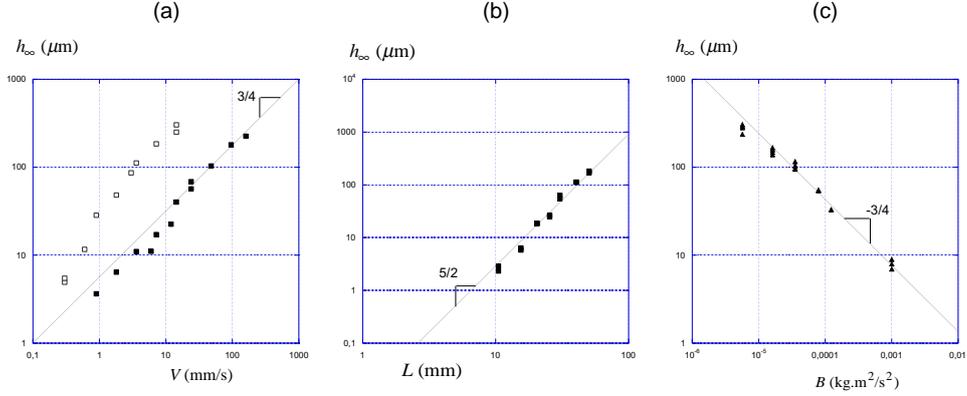


FIGURE 5. Experimental results : (a) Influence of the velocity V obtained with V100 (■) and V1000 (□) using the elastic sheet defined by $b = 38$ mm, $y_0/L = 0.44$, $L = 35.5$ mm and $h_s = 100$ μm . (b) Influence of the sheet length L obtained with V100, $V = 28.8$ mm/s, $b = 38$ mm, $y_0/L = 0.44$, and $h_s = 100$ μm (c) Influence of the sheet bending stiffness B obtained with V100, $V = 28.8$ mm/s, $b = 38$ mm, $y_0/L = 0.44$, $L = 55.5$ mm.

3.6. Influence of the sheet bending stiffness B .

The influence of the sheet bending stiffness B is presented on figure 5-(c): again, all the parameters are kept constant except B which is varied using the different mylar sheets presented on table 1. We observe on this figure that the coating thickness h_∞ decreases with B following a power law $h_\infty \sim B^\gamma$ with $\gamma \approx -3/4$.

4. Model

In this section, we first present some scaling arguments intended to capture the physical skeleton which sustains the delicate LLD theory [Landau and Levich (1942), Derjaguin (1943)]. This theory is then more deeply presented and in a second step adapted to the coating by an elastic sheet.

4.1. Some scaling arguments

The idea developed by Landau, Levich and Derjaguin to reach the expression of h_∞ in the case of plate coating [figure 1-(a)] is to consider the liquid motion in a region located in between the liquid meniscus (where the fluid is mainly at rest) and the film region (where the liquid mainly move at the velocity of the wall). In this intermediate region (of vertical extension λ), the motion of the fluid must satisfy (in the low Reynolds number limit) the Stokes equation which can be dimensionally written :

$$\mu \frac{V}{h_\infty^2} \sim \sigma \frac{h_\infty}{\lambda^3} \quad (4.1)$$

where $\sigma h_\infty/\lambda^3$ represents the gradient of the capillary pressure. This equation states that the liquid is entrained by viscosity and retained by surface tension. The value of the thickness h_∞ results from this equilibrium. To evaluate the gradient of the capillary pressure, the idea is that the value of the curvature changes from 0 in the film region to $1/a$ in the meniscus region over the distance λ : $h_\infty/\lambda^3 \sim 1/(\lambda a)$. This matching of the two zones leads to the scaling of the film thickness:

$$h_\infty \sim a Ca^{2/3} \quad (4.2)$$

If one transposes this approach to the problem of the elastic meniscus, the first modification lies in the expression of the pressure gradient:

$$\mu \frac{V}{h_\infty^2} \sim B \frac{h_\infty}{\lambda^5} \quad (4.3)$$

The second difference lies in the matching which is done here on the force (instead of the pressure) and leads to the evaluation of $\lambda : h_\infty/\lambda^3 \sim 1/L^2$. As for the LLD problem, the Stokes equation and the matching condition with the unperturbed meniscus provides the scaling for the film thickness:

$$h_\infty \sim L Ce^{3/4} \quad \text{where} \quad Ce \equiv \frac{\mu V L^2}{B} \quad (4.4)$$

4.2. The LLD theory.

The problem of dragging a liquid by an upward moving vertical plate [figure 1-(a)] is discussed using the conventions presented in figure 1-(c).

We describe the flow in the "small slope region" ($h_x \equiv dh/dx \ll 1$), where we assume that the velocity is mainly aligned with x and mainly depends on y ($\underline{U} \approx u(y)\underline{e}_x$). We don't know exactly where this region is but we are sure that it exists by continuity between the zero slope region ($h = h_\infty$) located at $x = +\infty$ and the infinite slope region located at the junction with the bath $x = -\infty$.

In this small slope region the conservation of mass imposes

$$h \langle u \rangle = h_\infty \langle u \rangle_\infty \quad (4.5)$$

where $\langle u \rangle$ is the mean velocity defined by $h \langle u \rangle = \int_0^h u(y) dy$.

In the limit of small Reynolds number $Re \approx V h_\infty / \nu$ the steady motion of the Newtonian liquid is described by the Stokes equation:

$$\mu \Delta \underline{U} = \underline{\text{grad}} p - \rho \underline{g} \quad (4.6)$$

Along the y direction, this equation reduces to $\partial p / \partial y = 0$ which states that the pressure at any x location can be deduced from its value at the interface [$y = h(x)$] where the continuity of stresses imposes:

$$-p \cdot \underline{n} + (\underline{\tau} \cdot \underline{n}) = -p_0 \cdot \underline{n} + \sigma C \cdot \underline{n}. \quad (4.7)$$

Here p_0 is the pressure in the surrounding gas, \underline{n} the outward normal vector, $\underline{\tau} \equiv \mu (\underline{\text{grad}} \underline{U} + {}^T \underline{\text{grad}} \underline{U})$ the fluid stress tensor and C the curvature of the interface which imposes the Laplace pressure jump. In the limit of small capillary number $Ca \equiv \mu V / \sigma \ll 1$, the pressure jump at the interface is mainly related to the capillary effect and the above equation (4.7) reduces to $p = p_0 - \sigma h_{xx}$ along the normal \underline{n} and to $\partial u / \partial y = 0$ along the tangential direction. This expression of the pressure in the liquid enables the integration of the equation of motion (4.6) along the x direction, which leads to:

$$h \langle u \rangle = hV - \frac{h^3}{3\nu} \left(g - \frac{\sigma}{\rho} h_{xxx} \right) \quad (4.8)$$

Using h_∞ to scale the film thickness ($\bar{h} \equiv h/h_\infty$) and $\mathcal{L}_x \equiv h_\infty / (3Ca)^{1/3}$ to scale the lengths along the x direction ($\bar{x} \equiv x/\mathcal{L}_x$), the above equation (4.8) becomes, using (4.5):

$$\bar{h}^3 \bar{h}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = 1 - \bar{h} + \left(\frac{h_\infty}{a} \right)^2 \frac{1}{3Ca} (\bar{h}^3 - 1) \quad (4.9)$$

The last term in equation (4.9) represents the effect of gravity. Since we will show that

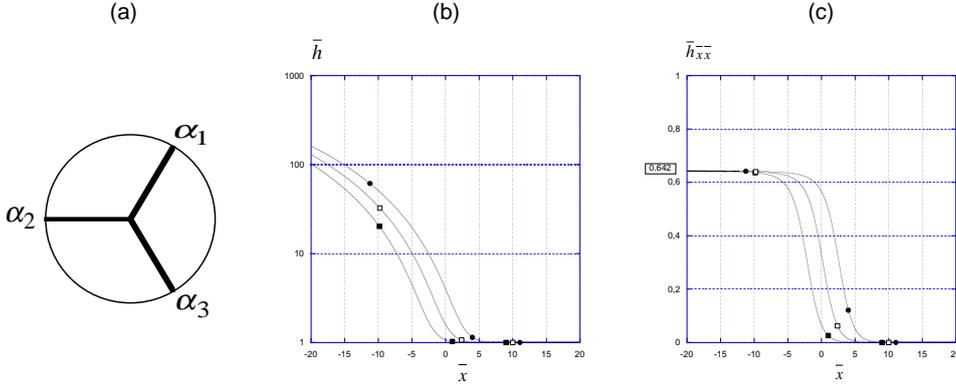


FIGURE 6. (a) visualisation on the unit circle of the three solutions of the equation $\alpha_i^3 = -1$. (b) evolution of the reduced thickness $\bar{h}(\bar{x})$ obtained through the numerical integration of equation (4.10) with different values of the constant A : $A = 0.1$ (■), $A = 1$ (□) and $A = 10$ (●). (c) evolution of the reduced curvature $\bar{h}_{\bar{x}\bar{x}}(\bar{x})$ obtained through the numerical integration of equation (4.10) with different values of the constant A : $A = 0.1$ (■), $A = 1$ (□) and $A = 10$ (●).

$h_\infty/a \sim Ca^{2/3}$, this term is of order $Ca^{1/3} \ll 1$ compared to the entrainment term and the capillary term. The motion of the liquid is thus governed by the parameter free equation:

$$\frac{d}{d\bar{x}} \bar{h}_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{1 - \bar{h}}{\bar{h}^3} \quad (4.10)$$

which must be integrated with the limit condition $\bar{h}(\bar{x} = +\infty) = 1$. In this quasi-constant thickness region we seek an asymptotic solution under the form $\bar{h}(\bar{x}) = 1 + \epsilon(\bar{x})$. According to equation (4.10), the function $\epsilon(\bar{x})$ must satisfy the linear equation $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = -\epsilon$. We deduce that $\epsilon(\bar{x}) = A_i e^{\alpha_i \bar{x}}$, where $\alpha_i^3 = -1$. The three solutions of this equation are presented on figure 6-(a). Two of them (α_1 and α_3) have positive real part and thus diverge in $\bar{x} = +\infty$. The vanishing condition impose $\epsilon(\bar{x}) = A_2 e^{\alpha_2 \bar{x}} = A e^{-\bar{x}}$. This asymptotic function is used to impose the three initial conditions which are needed to integrate equation (4.10). The results of the numerical integration of this equation are presented on figures 6-(b) for $\bar{h}(\bar{x})$ and - (c) for $\bar{h}_{\bar{x}\bar{x}}(\bar{x})$ using three different values of the constant A (0.1, 1 and 10). We observe on figure 6-(b) that the film thickness increases when $\bar{x} \rightarrow -\infty$. As expected, this increase occurs sooner with high values of A . This free parameter A is related to the fuzzy location of the small slope region. It does not change the main characteristic of equation (4.10) which states that the curvature $\bar{h}_{\bar{x}\bar{x}}$ becomes constant when \bar{h} goes to infinity. Figure 6-(c) shows that this constant is independent of A and equals 0.642.

In the limit $\bar{x} \rightarrow -\infty$, the small slope region much connect the meniscus region. The above property of the Stokes equation suggests that the constant curvature obtained in this limit must be equal to the curvature of the meniscus in the region of small slope, that is at the contact with the wall. This static meniscus curvature is known since the work of Laplace [Clanet and Quéré (2002)] and is equal to $\sqrt{2}/a$ at the wall. The matching of curvatures between both regions thus writes:

$$\frac{h_\infty}{\mathcal{L}_x^2} \bar{h}_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\sqrt{2}}{a} \quad (4.11)$$

which finally leads to $h_\infty = 0,94.a.Ca^{2/3}$.

4.3. Theory for the coating by an elastic sheet.

The theoretical approach we use to evaluate the film thickness h_∞ deposited by an elastic membrane is similar to the LLD theory: We first focus on the flow in the small slope region and then consider the matching with the shape of the elastic meniscus.

Concerning the flow in the small slope region, the equation of mass (4.5) remains unchanged whereas the equation of Stokes simplifies:

$$\mu \Delta \underline{U} = \text{grad} p \quad (4.12)$$

We work here in the low gravity limit $\rho g h_\infty^2 / \mu V \ll 1$. The pressure is deduced from the continuity of stresses at the solid-liquid interface, the projection of which along the normal \underline{n} writes in the stationary limit [Hosoi and Mahadevan (2004)]:

$$-p + (\underline{\tau} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n} = \frac{Eb(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \gamma h_{xx} - Bh_{xxxx} \quad (4.13)$$

where γ is the in-plane elastic strain, Bh_{xxxx} the bending contribution. In the working domain, the mylar sheets we use do not experience any elongation and we thus take the limit $\gamma = 0$. In this limit, the pressure at the solid-liquid interface reduces to $p = B.h_{xxxx}$ (instead of $p = p_0 - \sigma.h_{xx}$ for the LLD problem). This expression for the pressure, together with the zero velocity condition at the membrane, enables the integration of the Stokes equation (4.12) along the x direction, which leads to:

$$h \langle u \rangle = \frac{1}{2} hV - \frac{B}{12\mu} h^3 h_{xxxx} \quad (4.14)$$

Using h_∞ to scale the thickness and $\mathcal{L}_{xe} = h_\infty / Ce^{1/5}$ ($Ce \equiv 6\mu V h_\infty^2 / B$) to scale the lengths along the x direction, we obtain the nondimensional (and parameter free) version of equation (4.14):

$$\frac{d}{d\bar{x}} \bar{h}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = \frac{\bar{h} - 1}{\bar{h}^3} \quad (4.15)$$

This equation is "similar" to the one obtained in the LLD theory (4.10) and must be solved with the same limit condition : $\bar{h}(\bar{x} = +\infty) = 1$. Looking for an asymptotic function $\bar{h}(\bar{x}) = 1 + \epsilon(\bar{x})$, we get $\epsilon(\bar{x}) = A_i e^{\alpha_i \bar{x}}$, where $\alpha_i^5 = +1$. Among the five solutions of this equation presented on figure 7-(a), only two (α_3 and α_4) lead to vanishing function at $\bar{x} = +\infty$. The asymptotic function for $\bar{h}(\bar{x})$ thus writes: $\bar{h}(\bar{x}) = 1 + A.e^{\cos(4\pi/5).\bar{x}} \cdot \cos[\sin(4\pi/5).\bar{x}] + B.e^{\cos(4\pi/5).\bar{x}} \cdot \sin[\sin(4\pi/5).\bar{x}]$, where A and B are two constants. This asymptotic function is used to provide the five initial conditions needed to integrate equation (4.15). The evolution of the film thickness $\bar{h}(\bar{x})$ obtained by numerical integration is presented on figure 7-(b), for different couples of constant A and B . In the limit $\bar{x} \rightarrow -\infty$, the thickness of the film increases and we deduce from equation (4.15) that the reduced fourth derivative $\bar{h}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}}$ must become constant. As for the LLD problem, the value of this constant must be deduced by matching with the shape of the elastic meniscus.

The elastic meniscus is described by the Elastica equation [Landau and Lifchitz (1967)]:

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} = -\frac{F}{B} \sin \theta \quad (4.16)$$

where $\theta(s)$ is the local angle presented on figure 3-(b), s the curvilinear coordinate ($s = 0$ at the clamping location) and F is the intensity of the force exerted by the solid surface on the elastic sheet (by unit width). Equation (4.16) must be solved with the two limit conditions: $\theta(s = 0) = 0$ and $d\theta/ds(s = L) = 0$. This integration shows that F is related

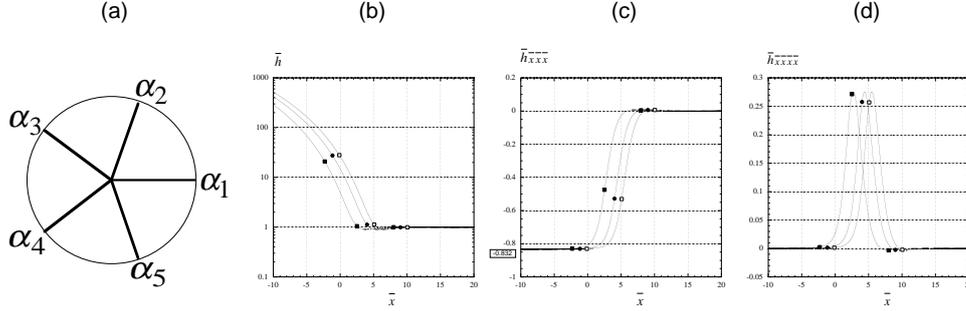


FIGURE 7. (a) visualisation on the unit circle of the five solutions of the equation $\alpha_i^5 = +1$. (b) evolution of the reduced thickness $\bar{h}(\bar{x})$ obtained through the numerical integration of equation (4.15) with different values of the constants A and B : $A = 3.355$, $B = 0$ (■), $A = 0$, $B = 29.267$ (□) and $A = 7.803$, $B = 10$ (●). (c) evolution of the reduced third derivative $\bar{h}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}(\bar{x})$ obtained through the numerical integration of equation (4.15) with different values of the constants A and B : $A = 3.355$, $B = 0$ (■), $A = 0$, $B = 29.267$ (□) and $A = 7.803$, $B = 10$ (●). (d) evolution of the reduced fourth derivative $\bar{h}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}}(\bar{x})$ obtained through the numerical integration of equation (4.10) with different values of the constant A : $A = 0.1$ (■), $A = 1$ (□) and $A = 10$ (●).

to the reduced distance y_0/L and for $y_0/L = 0.44$, we find $F = 3,43$. B/L^2 . In this limit, where $\theta(L) = \pi/2$, we observe that equation (4.16) can be expanded in $s = L$ as: $h_{xxx} = -F/B$ and $h_{xxxx} = 0$. The constant for the matching is thus null and the free parameters A and B must be chosen to verify this condition. This condition is fulfilled for the three couples used to integrate numerically equation (4.15), as shown on figure 7-(d).

Since $h_{xxxx} = 0$, one deduces that h_{xxx} is constant and the matching can be done on the third derivative. According to figure 7-(c) the limit $\bar{h}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = -0.832$ and the matching with the Elastica gives:

$$-0.832 \frac{h_\infty}{\mathcal{L}_{xe}^3} = -\frac{3.43}{L^2} \quad (4.17)$$

From which we deduce:

$$h_\infty = 0,65. L \left(\frac{\mu V L^2}{B} \right)^{3/4} \quad (4.18)$$

The comparison between the measured thickness h_∞ and the theoretical characteristic length $L. (\mu V L^2 / B)^{3/4}$ is shown on figure 8 for all the different experimental conditions presented on figures 5. We observe that the measured thickness is a linear function of the theoretical thickness with a coefficient of proportionality of 0.065, different from the 0.65 expected from equation (4.18). This difference comes from the fact that we have assumed in our model that all the liquid entrained by the solid surface goes into the coating film. The experiments tell us that this is not the case and that some recirculation must take place in the reservoir.

5. Conclusion

We have conducted a series of experiments on the coating of a flat solid surface by an elastic sheet. Experimentally, we show that the film thickness, h_∞ , is very sensitive to the shape of the membrane [figure 4-(a)]. For a fixed shape ($y_0/L = 0.44$), we show that the thickness follows the law $h_\infty \approx 0.065L Ce^{3/4}$, where $Ce \equiv \mu.V.L^2/B$. Theoretically, we

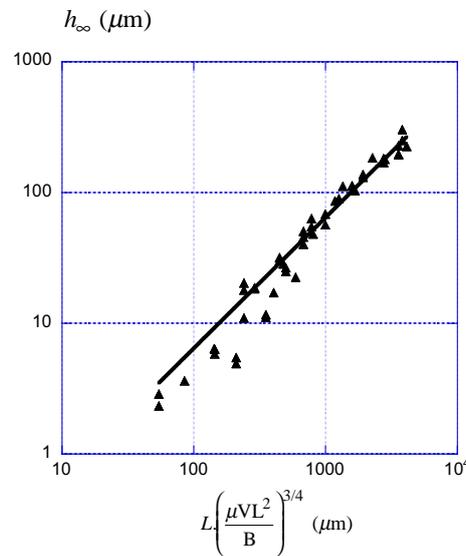


FIGURE 8. Evolution of the film thickness h_∞ as a function of the characteristic length scale $L \cdot (\mu \cdot V \cdot L^2 / B)^{3/4}$: experimental points presented in figures 5 (■), best fit (solid line) $h_\infty = 0.065L \cdot C e^{3/4}$.

recover this scaling through an extension of the LLD theory and show that the maximal film thickness is $h_\infty = 0.65L C e^{3/4}$. The recirculation in the region in front of the wiper must be considered to reach the experimental prefactor.

Acknowledgements: We thank D.Quéré for enjoyable discussions on the LLD problem and T.Bohr, J.Bico and L.Bocquet for their remarks on the first version of the manuscript.

REFERENCES

- CLANET, C. AND QUERE, D. 2002 Onset of menisci. *J.Fluid Mech.* **460**, 131–149
- DERJAGUIN B.V. 1943 On the thickness of the liquid film adhering to the walls of a vessel after emptying. *Acta Physicochim. USSR* **20**, 349–52.
- GOUCHER F.S., WARD H. 1922 The thickness of liquid films formed on solid surfaces under dynamic condition. *Phil. Mag.* **44**, 1002–1014.
- HOSOI A.E. AND MAHADEVAN L. 2004 Peeling, healing, and bursting in a lubricated elastic sheet. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 137802.
- KISTLER S.F. AND SCHWEIZER P.M. 1997 Liquid Film Coating *Chapman & Hal*
- KORB D.R., HERMAN J.P., GREINER J.V., SCAFFIDI R.C., FINNEMORE V.M., EXFORD J.M., BLACKIE C.A. AND DOUGLASS T. 2005 Lid wiper epitheliopathy and dry eye symptoms. *Eye Contact Lens* **31**, 2–8.
- LANDAU L. AND LIFCHITZ E. 1967 Theory of elasticity. *Editions Mir, Moscou*
- QUÉRÉ D. 1999 Fluid coating on a fiber. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **31**, 347–84.
- KITZIO J.P., KAMOTANI Y. AND OSTRACH S. 1999 free coating flows at high capillary and Reynolds number. *Exp. Fluid.* **27**, 235–43.
- LANDAU L.D., LEVICH B. 1942 Dragging of a liquid by a moving plate. *Acta Physicochim. USSR* **17**, 42–54.
- MOREY FC. 1940 Thickness of a film adhering to a surface slowly withdrawn from the liquid. *J. Res. Natl. Bur. Stand.* **25**, 385–93.

Annexe E

Références bibliographiques

Remarque : les nombres qui suivent l'année de publication renvoient aux pages contenant les citations.

Références concernant les occlusions pulmonaires

- [1] P. Aussillous and D. Quéré. Quick deposition of a fluid on the wall of a tube. *Physics of Fluids*, 12(2367-2371), 2000. 28, 70
- [2] A.L. Biance, C. Clanet, and D. Quéré. First steps in the spreading of a liquid droplet. *Physical Review E*, 69(016301), 2004. ii
- [3] C. Brennen and H. Winet. Fluid mechanics of propulsion by cilia and flagella. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 9 :339–398, 1977. 18
- [4] F.P. Bretherton. The motion of long bubbles in tubes. *Journal of Fluid Mechanics*, 10 :166, 1961. 27, 28, 70
- [5] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamics and hydromagnetic stability*. Dover, 1961. 20
- [6] P.G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quéré. *Gouttes, Bulles, Perles et Ondes*. Belin, 2002. 45
- [7] L. Duchemin, J. Eggers, and C. Josserand. Inviscid coalescence of drops. *Journal of Fluid Mechanics*, 487(167-178), 2003. ii
- [8] J. Eggers. Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows. *Review of Modern Physics*, 69 :865–930, 1997. 20
- [9] J. Eggers, J.R. Lister, and H.A. Stone. Coalescence of liquid drops. *Journal of Fluid Mechanics*, 401 :293–310, 1999. 49, 53, ii
- [10] M. Fermigier, L. Limat, J. E. Wesfreid, P. Boudinet, and C. Quillet. Two-dimensional patterns in rayleigh-taylor instability of a thin layer. *Journal Fluid Mechanics*, 236 :346–383, 1992. 44, 45
- [11] H.L. Goldsmith and S.G. Mason. The flow of suspensions through tubes ii. single large bubbles. *Journal of Colloid Science*, 18 :237–261, 1963. 38, 39
- [12] S.L. Goren. The instability of an annular thread of fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 12 :309, 1961. 42

- [13] J.B. Grotberg. Pulmonary flow and transport phenomena. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 26 :529–571, 1994. [15](#), [16](#), [17](#), [18](#), [19](#), [22](#)
- [14] J.B. Grotberg. Biofluid mechanics in flexible tubes. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36 :121–147, 2004. [19](#), [109](#)
- [15] E. Guyon, J.P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. Editions du CNRS, 1991. [36](#)
- [16] M. Heil and J. P. White. Airway closure : surface-tension-driven non axisymmetric instabilities of liquid-lined elastic rings. *Journal of Fluid Mechanics*, 462 :79–109, 2002. [16](#), [19](#), [26](#)
- [17] P.D. Howell, S.L. Waters, and J.B. Grotberg. The propagation of a flexible liquid bolus along a liquid-lined flexible tube. *Journal of fluid mechanics*, 406 :309–335, 2000. [24](#), [47](#)
- [18] H. Jeffreys. The draining of a vertical plate. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 26 :204–205, 1930. [39](#)
- [19] R.D. Kamm and R.C.Schroter. Is airway closure caused by a liquid film instability? *Respiratory Physiology*, 75 :141–156, 1989. [19](#), [22](#), [26](#), [34](#), [49](#)
- [20] M. King and B.K. Rubin. *Acute respiratory failure in chronic obstructive pulmonary disease*, chapter 13 : Mucus physiology and pathophysiology, pages 391–411. Dekker, New York, 1996. [18](#), [19](#), [22](#), [23](#), [24](#)
- [21] L. Mougey. *Contribution à l'étude de l'écoulement de l'air dans les fosses nasales humaines*. PhD thesis, Institut national des sciences appliquées de Lyon, 2000. [15](#)
- [22] T.J. Pedley. Pulmonary fluid dynamics. *Annual review of fluid mechanics*, 9 :229–274, 1977. [15](#), [16](#), [17](#), [19](#), [22](#)
- [23] J. Plateau. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules force moléculaires*. Gauthier-Villars et Cie, 1873. [20](#)
- [24] D. Quéré. Thin films flowing on vertical fibers. *Europhysics Letters*, 13(8) :721–726, 1990. [44](#)
- [25] J.W. Lord Rayleigh. On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force. *Philosophical Magazine*, 34(207), 1892. [20](#)
- [26] J.W. Lord Rayleigh. On the instability of cylindrical fluid surfaces. *Philosophical Magazine series 5*, 34(207) :177–180, 1892. [20](#), [130](#)
- [27] F. Savart. Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. *Annales de Chimie*, 53 :337–386, 1833. [20](#)
- [28] P.W. Scherer and L. Burtz. Fluid mechanical experiments relevant to coughing. *Journal of biomechanics*, 11 :183–187, 1978. [24](#)
- [29] G.I. Taylor. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes i. *Proceedings of the Royal Society of London Serie A*, 201(1065) :192–196, 1950. [44](#)

-
- [30] G.I. Taylor. Deposition of a visous fluid on the wall of a tube. *Journal of Fluid Mechanics*, 10 :161, 1961. [27](#), [28](#)
 - [31] S.T. Thoroddsen, K. Takehara, and T.G. Etoh. The coalescence of a pendant ans a sessile drop. *Journal of Fluid Mechanics*, 527 :85–114, 2005. [49](#), [53](#), [ii](#)
 - [32] E.W. Washburn. The dynamics of capillary flow. *Physical Review*, 17 :273, 1921. [55](#)
 - [33] E.R. Weibel. *Morphometry of the human lung*. New York Academic, 1963. [16](#)
 - [34] B.J. West, V. Bhargava, and A.L. Golberger. Beyond the principle of similitude : renormalization in the bronchial tree. *Journal of Americal Physiology*, pages 1089–1097, 1986. [16](#), [45](#)
 - [35] J.H. Widdicombe. Regulation of the depth and composition of airway surface liquid. *Journal of Anatomy*, 201 :313–318, 2002. [17](#), [18](#), [19](#), [22](#), [23](#), [24](#)

Références concernant l'entropion oculaire

- [36] M. Al-Abdulmunem and S.T. Briggs. Spontaneous blink rate of a normal population sample. *International Contact Lens Clinic*, 26 :29–32, 1999. [68](#)
- [37] T.D. Blake and JK.J. Ruschak. A maximum speed of wetting. *Nature*, 282 :489–491, 1979. [70](#)
- [38] A.J. Bron, J.M. Tiffany, S. M. Gouveia, N. Yokoi, and L.W. Voon. Functional aspects of the tear film lipid layer. *Experimental eye research*, 78 :647–360, 2004. [67](#), [75](#)
- [39] C. Clanet and D. Quéré. Onset on menisci. *Journal of Fluid mechanics*, 460 :131–149, 2002. [82](#)
- [40] A. de Ryck and D. Quéré. Gravity and inertia effects in plate coating. *Journal of Colloid and Interface Science*, 203 :278–285, 1998. [70](#)
- [41] B. Derjaguin. n the thickness of the liquid film adhering to the walls of a vessel after emtying. *Acta Physicochimica U.R.S.S.*, XX(3) :349–352, 1945. [70](#)
- [42] Collège des ophtalmogogistes universitaires de France. *Polycopié national du collège des ophtalmogogistes universitaires de France*, chapter deuxième partie : Maladies et grands syndrômes. 271 : Pathologies des paupières, pages 137–143. Université de Rouen, 2003. [68](#), [69](#)
- [43] R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M.L. Sands. *Le cours de physique de Feynman. I Traitant surtout de la mécanique, du rayonnement et de la chaleur. Deuxième partie*. InterEditions, 1979. [65](#)
- [44] F.S. Goucher and H. Ward. A problem in viscosity : the thickness of liquid films formed on solid surfaces under dynamic conditions. *Philosophical magazine*, 6(44) :1002–1014, 1922. [70](#)
- [45] S. M. Gouveia and J.M. Tiffany. Human tear viscosity : an interactive role for proteins and lipids. *biochimica et biophysica acta*, 1753(155-163), 2005. [67](#)

- [46] A.E. Hosoi and L. Mahadevan. Peeling, healing and bursting in a lubricated elastic sheet. *Physical review letters*, 93(137802), 2004. [70](#), [84](#)
- [47] M.B. Jones, C.P. Please, D.L.S. McElwain, G.R. Fulford, A.P. Roberts, and M.J. Collins. Dynamics of tear film deposition and draining. *Mathematical medicine and biology*, 22 :265–288, 2005. [66](#), [67](#), [68](#), [69](#), [75](#)
- [48] H-Y Kim and L. Mahadevan. Capillary rise between elastic sheets. *Journal of Fluid mechanics*, 548 :141–150, 2006. [84](#)
- [49] L. Landau and B. Levich. Dragging of a liquid by a moving plate. *Acta Physicochimica U.R.S.S.*, 17(1-2), 1942. [69](#), [70](#)
- [50] L. Landau and F. Lifshitz. *Physique théorique. VII Théorie de l'élasticité*. Moscou : Mir, 1967. [74](#), [85](#)
- [51] W. Mathers. Evaporation from the ocular surface. *Experimental eye research*, 78 :389–394, 2004. [66](#), [69](#)
- [52] J.H. Snoeijer, G. Delon, M. Fermigier, and B. Andreotti. Avoided critical behavior on dynamically forced wetting. *Physical Review Letters*, 2005. [70](#)
- [53] J.M. Tiffany. Physiological functions of the meibomian glands. *Progress in retinal and eye research*, 14(1) :47–74, 1995. [66](#), [67](#), [68](#), [69](#)
- [54] H. Wong, I. Fatt, and C.J. Radke. Deposition and thinning of the human tear film. *Journal of colloid and interface science*, 184 :44–51, 1996. [66](#), [67](#), [68](#), [69](#), [70](#), [75](#)

Références concernant les anévrismes

- [55] J.J. Albrand and et al. *Anévrismes de l'Aorte abdominale, Guide à l'Usage du Praticien*. Institut phocéen de chirurgie cardio-vasculaire et thoracique, 2002. [97](#), [140](#), [143](#)
- [56] J.J. Alexander. The pathobiology of aortic aneurysms. *Journal of surgical research*, 117 :163–175, 2004. [98](#), [140](#)
- [57] M. Belkin, M.C. Donaldson, and A.D. Whittemore. Abdominal aortic aneurysms. *Current Opinion in Cardiology*, 9 :581–590, 1994. [97](#)
- [58] H. Bouasse and Z. Carrière. Sur les courbes de traction du caoutchouc vulcanisé. *Annales de la faculté de Toulouse, série 2, tome 5(3)* :257–283, 1903. [108](#)
- [59] P.W. Carpenter and T.J. Pedley. *Flow in collapsible tubes and past other highly compliant boundaries*. Kluwer, 2003. [110](#)
- [60] K.B. Chandran and T.L. Yearwood. Experimental study of physiological pulsatile flow in a curved tube. *JFM*, 111(59-85), 1981. [102](#), [116](#), [117](#), [118](#)
- [61] E. Chater and J.W. Hutchinson. Mechanical analog of coexistent phases. *Proceedings of Conference on Phase Transformations and Material Instabilities in Solids*, pages 21–36, 1984. [110](#), [113](#)

-
- [62] E. Chater and J.W. Hutchinson. On the propagation of bulges and buckles. *Journal of Applied Mechanics*, 51 :269, 1984. [110](#), [113](#)
- [63] C.P. Cheng, R.J. Herfkens, and C.A. Taylor. Abdominal aortic hemodynamic conditions in healthy subjects aged 50–70 at rest and during lower limb exercise : in vivo quantification using mri. *Atherosclerosis*, 51 :323–331, 2003. [102](#), [103](#), [140](#)
- [64] Laboratoire d’analyse et de traitement informatique de la langue française. Trésors informatisés de la lanque française. [97](#)
- [65] G. de Chauillac. *La grande chirurgie*. Claude Michel, Imprimeur de l’Université de Montpellier, 1373. [97](#)
- [66] J.F. Dyet. Pictorial review : endovascular repair of abdominal aortic aneurysms. *British Journal of Radiology*, 69(1069-1074), 1996. [98](#)
- [67] Y. C. Fung. *Biodynamics : circulation*. Springer-Verlag, New York, 1984. [116](#), [118](#)
- [68] Y. C. Fung. *Biomechanics : Motion, Flow, Stress and Growth*. Springer, New York, 1990. [100](#), [102](#), [117](#), [147](#)
- [69] Y. C. Fung. *Biomechanics : circulation*. Springer, New York, 1997. [101](#), [108](#)
- [70] C. Galien. De pulsibus. 131. [99](#)
- [71] S. Glagov, D.A. Rowley, and R. Kohut. Atherosclerosis of human aorta and its coronary and renal arteries. *Archives of Pathology and Laboratory Medicine*, 72 :558, 1961. [97](#)
- [72] Henry Gray. *Anatomy of the human body*. Lea and Febiger, Philadelphia, 1918. [108](#)
- [73] M. Groenink and et al. The influence of aging and aortic stiffness on permanent dilation and breaking stress of the thoracic descending aorta. *Cardiovascular research*, 43 :471–480, 1999. [101](#), [108](#), [117](#)
- [74] E.M. Guirguis and G.G. Barber. The natural history of abdominal aortic aneurysms. *American Journal of Surgery*, 162 :481–483, 1991. [98](#)
- [75] S. Hales. *Statistical essays II, containing haemastaticks*. Innays and Marby, London, reprinted by Haffner, New York, 1733-1964. [146](#)
- [76] W. Harvey. *Traité anatomique sur les mouvements du coeur et du sang chez les animaux*. (Traduction française par C.Richet) G.Masson, 1628-1879. [99](#)
- [77] J. D. Humphrey and S. L. Delange. *An introduction to biomechanics (Solids and Fluids, Analysis ans Design)*. Springer, New York, 2004. [98](#), [102](#), [108](#), [117](#), [118](#), [xv](#)
- [78] Roberts J.C., Moses C., and Wilkins R.H. Autopsy studies in atherosclerosis : distribution and severity of atherosclerosis in patients dying without any morphologic evidence of atherosclerotic catastrophe. *Circulation*, 20 :511, 1959. [97](#)
- [79] D.N. Ku. Blood flow in arteries. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 29 :399–434, 1997. [102](#), [117](#), [118](#)

- [80] R.T.H Laennec. *De l'auscultation médiate, ou Traité du diagnostic des maladies des poumons et du coeur, fondé principalement sur ce nouveau moyen d'exploitation*. J.A.Brosson et J.S. Chaudé, Paris, 1978. 97
- [81] J.K. Li, J. Malbin, R.A. Riffle, and A. Noodergraaf. Pulse wave propagation. *Circulation research*, 49 :442–452, 1981. 105, 108
- [82] J. Lighthill. *Mathematical Biofluidynamics*. SIAM, Philadelphia, 1975. 100, 101
- [83] J. Lighthill. *Waves in fluids*. Cambridge university press, 1978. 112, 114, 118, 127, 128, 140
- [84] L.M. McAuley, A. Fisher, A.B. Hill, and J. Joyce. *Les implants endovasculaires comparativement à la chirurgie sanglante dans la réparation de l'anévrisme de l'aorte abdominale : pratique au Canada et examen systématique*, volume Rapport technologique no 33. Office canadien de coordination de l'évaluation des technologies de la santé, 2002. 98
- [85] D.A. McDonald. Regional pulse-wave velocity in the arterial tree. *Journal of applied physiology*, 24 :73–78, 1968. 100
- [86] D.A. McDonald. *Blood flow in arteries*. Williams and Wilkins, Baltimore, M.D., 1974. 100, 116, 118, 120, 140
- [87] A.O. Medynsky, D.W. Holdsworth, M.H. Sherebrin, R.N. Rankin, and M.R. Roach. Elastic response of human iliac arteries in-vitro to balloon angioplasty using high-resolution ct1. *Journal of Biomechanics*, 31(8) :747–751, 1998. 108
- [88] S. Middleman. *An introduction to fluid dynamics*. Wiley and son's, New York, 1998. 130
- [89] Mullins. Effect of stretching on the properties of rubber. *Journal of Rubber Research*, 16(12) :275–289, 1947. 108
- [90] W. M. Nichols and M. F. O'Rourke. *McDonald's blood flow in arteries*. Lippincott Williams and Wilkins, London, 1999. 105, 164
- [91] M.P. Païdoussis. Wave propagation in physiological collapsible tubes and a proposal for a shapiro number. *Journal of Fluids and Structure*, 22 :721–725, 2006. 117
- [92] A. Pascal-Mousselard. *Étude des effets de la mise en mouvement d'un fluide sur les régimes instationnaires : application aux écoulements cardiovasculaires*. PhD thesis, Univ. Aix-Marseille II, 1998. 116
- [93] C. Patterson. Screening for abdominal aortic aneurysm. *Canadian Task Force on the Periodic Health Examination*, 2002. 97
- [94] T.J. Pedley. *The fluid mechanics of large blood vessels*. Cambridge university press, 1980. 102, 117, 118, 127, 131
- [95] G. Pedrizzetti. Fluid flow in a tube with an elastic membrane insertion. *Journal of Fluid Mechanics*, 375 :39–64, 1998. 140, xv

-
- [96] G. Pedrizzetti, F. Domenichini, A. Tortoriello, and L. Zovatto. Pulsatile flow inside moderately elastic arteries, its modelling and effects of elasticity. *Computer methods in biomechanics and biomechanical engineering*, 5(3) :219–231, 2002. [xv](#)
- [97] M. Peyrard and T. Dauxois. *Physique des solitons*. CNRS éditions, 2004. [114](#)
- [98] W. Reinke, P.C. Johnson, and P. Gaehtgens. Effect of shear rate variation on apparent viscosity of human blood in tubes of 29 to 94 microns diameter. *Circulation Research*, 59 :124–132, 1986. [102](#)
- [99] J. Salençon. *Mécanique des Milieux continus : 2. Thermoélasticité*. École Polytechnique, 2000. [110](#)
- [100] P.F. Salisbury, C.E. Cross, and P.A. Rieben. Ventricular performance modified by elastic properties of outflow system. *Circulation Research*, 11 :319–328, 1962. [146](#)
- [101] T.W. Secomb. Flow in a channel with pulsating walls. *Journal of Fluid Mechanics*, 88(2) :273–288, 1978. [xv](#)
- [102] A.H. Shapiro. Steady flow in collapsible tubes. *ASME Journal of Biomechanics Engineering*, 99 :126–147, 1977. [117](#)
- [103] Encyclopædia universalis, editor. *Dictionnaire de la physique*, volume mécanique et thermodynamique. Albin Michel, 2001. [114](#)
- [104] J.R. Womersley. Oscillatory flow in arteries : the constrained elastic tube as a model of arterial flow and pulse transmission. *Phys. Med. Biol.*, 3 :178–187, 1957. [102](#)
- [105] T. Young. Hydraulic investigations, subservient to an intended croonian lecture on the motion of the blood. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 98 :164–186, 1808. [111](#), [119](#)

Resumé

Ce manuscrit traite de trois problématiques physiologiques qui mettent en jeu des écoulements de liquide, et parfois des interactions fluide-structure. Nous épurons chaque situation pour en extraire un montage expérimental modèle conservant ses composantes physiques et mécaniques.

Les occlusions pulmonaires sont des lentilles de liquides qui peuvent être formées grâce à l'instabilité capillaire dans des tubes. Nous montrons que cette instabilité est affectée, et parfois supprimée, par la gravité, même aux faibles nombres de Bond : seules les plus petites bronchioles sont susceptibles de développer l'instabilité de Plateau-Rayleigh. Les étapes finales de la formation de la lentille liquide font intervenir une singularité spécifique à la géométrie tubulaire, que nous traitons par des modèles en loi d'échelle.

L'entropion est un enroulement de la paupière qui provoque un contact indésirable entre les cils et le globe oculaire. Nous étudions l'influence de l'élasticité de la paupière sur l'étalement du fluide lacrymal, grâce à un modèle de type Landau-Levich. Nous examinons ensuite la possibilité du retournement de la paupière lors de la fermeture de l'œil.

Un anévrisme de l'aorte abdominale (AAA) est une zone localement dilatée de la plus grosse artère du corps humain. Nous étudions expérimentalement, numériquement et théoriquement la réponse d'un tuyau élastique à un écoulement pulsé comme l'est celui du cœur. Sur l'échelle de temps du cycle cardiaque, nous mettons en lumière deux régimes possibles de déformation en fonction de la sollicitation : la membrane peut soit se dilater de façon synchrone à chaque cycle, soit propager des ondes de déformation. Le seuil de transition est explicité d'une part grâce à un modèle d'ondes élastiques, et d'autre part en considérant le temps nécessaire pour atteindre l'équilibre. Sur des échelles de temps très longues en comparaison du cycle cardiaque, un modèle moyen de type windkessel permet de rendre compte d'un débit critique au delà duquel le tube se dilate et forme un « anévrisme ». Les expériences numériques permettent de coupler les ondes avec le développement d'un anévrisme, ouvrant des pistes prometteuses en ce qui concerne la localisation préférentielle d'un anévrisme.

Abstract

This thesis deals with three physiological issues involving liquid flows and, for two of them, fluid-structure interactions. Each problem is reduced to an experimental set-up respecting its main mechanical and physical properties.

Liquid plugs can resist the air flow in the lungs. Those occlusions result sometimes from the capillary instability. We show that this instability is affected, and sometimes suppressed, by gravity, even at low Bond number : only the smallest airways develop plugs across their lumen. The final stage of the growing of the plugs leads to a singularity specific to the tubular geometry. We develop scaling laws in order to understand it.

The entropion is the turning inward of the border of the eyelid against the eyeball. Previous modelings of the eyelid assumed it was rigid. We study the importance of its elasticity on the coating of the cornea by a tear film. A Landau-Levich-type model is considered. We then look at the possible inversion of the eyelid.

An abdominal aortic aneurysm (AAA) is a locally swollen region of the main artery of the human body. We study experimentally, numerically and theoretically the response of an elastic tube submitted to a pulsatile heart-like flow. On the timescale of one cardiac cycle, we distinguish between two different modes of deformation : the tube can either dilate in a synchronous way on each cycle, or propagate deformation waves. We explain this transition both with a model of elastic waves and by considering the time required to reach equilibrium in the membrane. On very long timescales compared to the cardiac cycle, a windkessel model show a critical flowrate above which the tube grows and develops an "aneurysm". The numerical simulations allow us to couple both the waves and this aneurysm development : they show very interesting issues concerning the preferential location of an aneurysm.