

Thèse de doctorat de l'université Paris VI

LJLL-18.11.05

# Développement et analyse de schémas adaptatifs pour les équations de transport

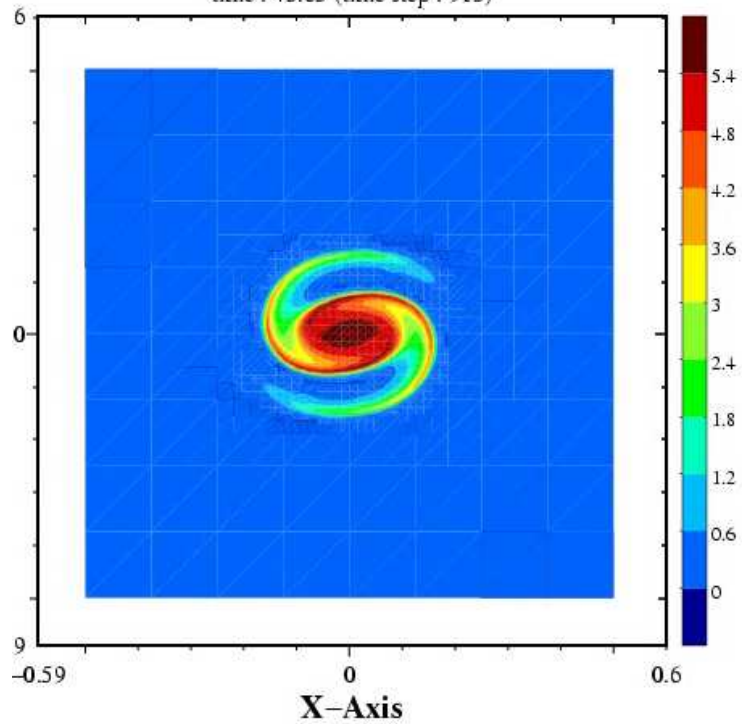
Martin Campos Pinto

Laboratoire Jacques-Louis Lions

LJLL - 18.11.05

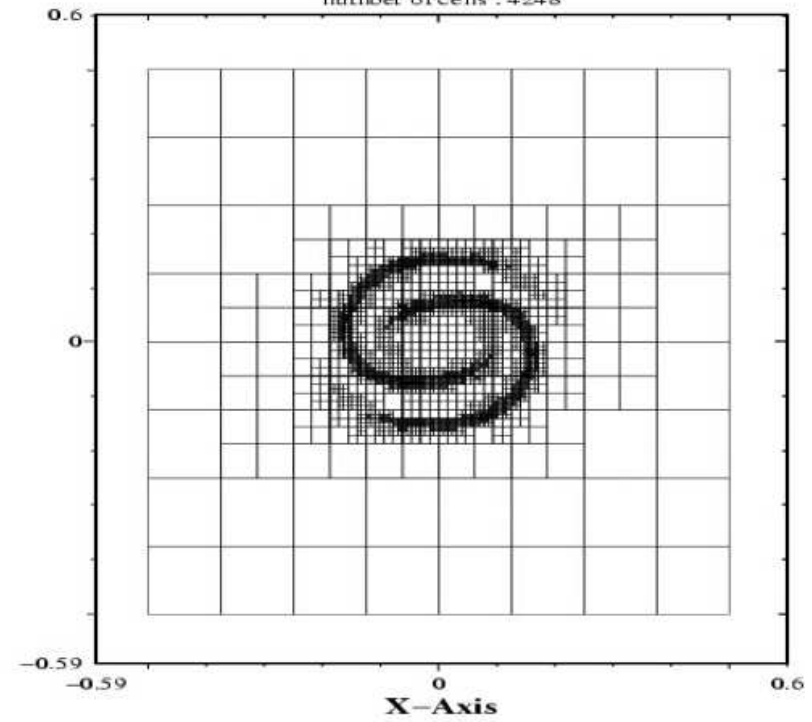
### Phase space density

time : 45.65 (time step : 913)



### Adaptive mesh

number of cells : 4248



LJLL - 18.11.05

- I. Approximation multi-échelle
- II. Un schéma adaptatif semi-lagrangien pour l'équation de Vlasov-Poisson
  - (a) Estimation d'erreur a priori dans  $L^\infty$
  - (b) Analyse de complexité
- III. Analyse des lois de conservation scalaires en distance uniforme
  - (a) Stabilité des lois à flux convexes
  - (b) Régularité des solutions

LJLL-18.11.05

## I. Approximation multi-échelle

LJLL - 18.11.05

- # On considère ici le problème consistant à approcher, en dimension 2, une fonction  $f$  donnée :
  - △ on notera  $P_{\mathcal{K}}$  l'interpolation affine par morceaux associée à une triangulation conforme  $\mathcal{K}$ ,
  - △ on supposera que  $f$  est continue,
  - △ et on mesurera l'erreur d'interpolation  $\|(I - P_{\mathcal{K}})f\|$  dans  $L^\infty$ .
  
- # On peut alors envisager deux questions :
  - △ pour un nombre maximal  $N$  de triangles, quelle est la plus petite erreur d'interpolation qu'on puisse réaliser ?
  - △ ou inversement, quel est le nombre minimal de triangles nécessaires pour atteindre une précision fixée  $\varepsilon$  ?

LJLL - 18.11.05

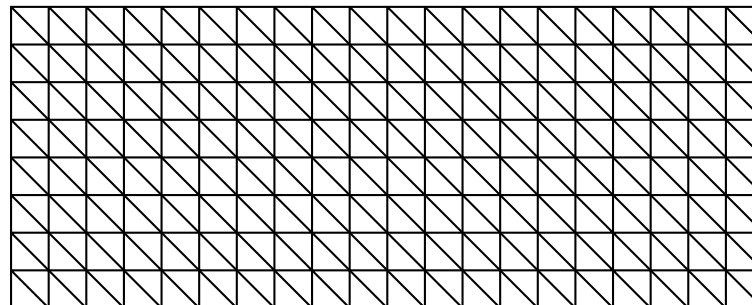
## Triangulations réalisant une erreur $\varepsilon$ prescrite

# Avec une régularité **uniforme** : si  $f \in W^{2,\infty}$ , on peut utiliser l'estimation

$$\|(I - P_{\mathcal{K}})f\|_{L^\infty(\Delta)} \lesssim (h_\Delta)^2 |f|_{W^{2,\infty}(\Delta)}.$$

→ en posant  $h_\Delta^2 = \varepsilon (|f|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)})^{-1}$ , on aura

$$\#(\mathcal{K}) \sim |f|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)} \varepsilon^{-1} \quad \text{et} \quad \|(I - P_{\mathcal{K}})f\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$$



LJLL - 18.11.05

## Triangulations réalisant une erreur $\varepsilon$ prescrite

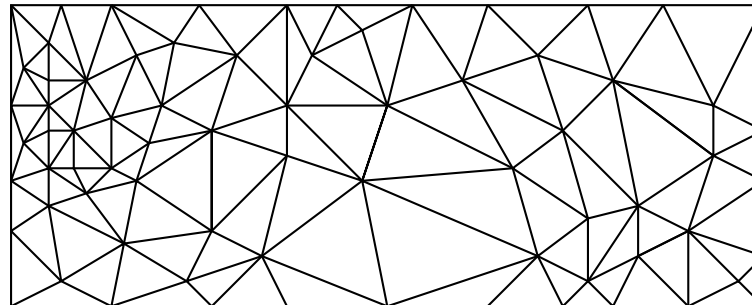
# On peut aussi utiliser une régularité plus faible, avec

$$\|(I - P_{\mathcal{K}})f\|_{L^\infty(\Delta)} \lesssim |f|_{W^{2,1}(\Delta)}$$

# et vouloir équilibrer la courbure : si tous les triangles vérifient

$$c\varepsilon \leq |f|_{W^{2,1}(\Delta)} \leq \varepsilon,$$

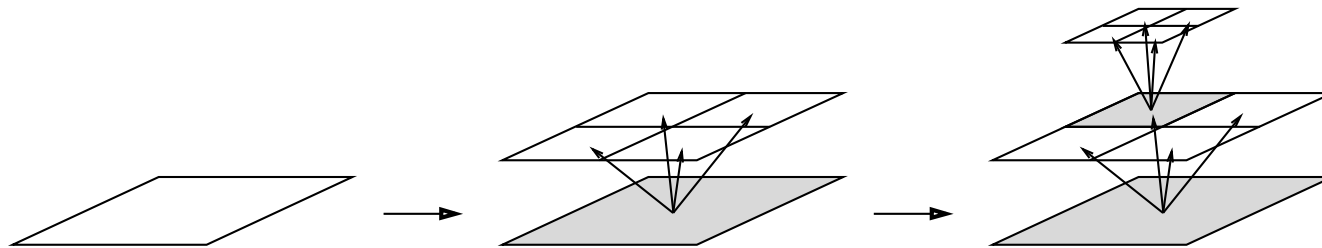
alors  $\#(\mathcal{K}) \lesssim |f|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^2)} \varepsilon^{-1}$  et  $\|(I - P_{\mathcal{K}})f\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$



LJLL-18.11.05

## Approche multi-échelle : un compromis

- # Pour des raisons de **simplicité géométrique** et **algorithmique**, nos maillages seront basés sur des cellules **carrées et dyadiques**
- # qui correspondent à des découpages **isotropes**, **récurifs** et **non-uniformes** :



- # **structure d'arbre** naturelle : on notera
  - $\mathcal{F}(\alpha)$  les 4 filles de  $\alpha$ ,
  - $\mathcal{P}(\alpha)$  la parente de  $\alpha$ ,
  - $l(\alpha)$  le niveau de  $\alpha$



LJLL - 18.11.05

## Algorithme d' $\varepsilon$ -adaptation

# partant d'un **niveau uniforme très large**  $\ell_0$  :

◇ poser  $\Lambda_{\ell_0} := \{\alpha : \ell(\alpha) = \ell_0\}$ ,

◇ ajouter des cellules plus fines par **découpages récursifs** :

$$\Lambda_{\ell+1} := \Lambda_{\ell} \cup \{\beta \in \mathcal{F}(\alpha) : \alpha \in \Lambda_{\ell} \text{ et } |f|_{W^{2,1}}(\alpha) > \varepsilon\}$$

jusqu'à ce que  $\Lambda_{L+1} = \Lambda_L$ ,

◇ considérer la **partition** composée des cellules **feuilles** :

$$M_{\varepsilon}(f) := \{\alpha \in \Lambda : \mathcal{F}(\alpha) \cap \Lambda_L = \emptyset\}$$

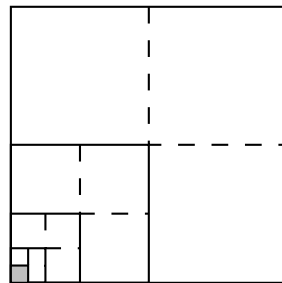
# Si  $f \in W^{2,1}$ , cet algorithme converge ( $L < \infty$ ) et clairement,

$$\sup_{\alpha \in M_{\varepsilon}(f)} |f|_{W^{2,1}}(\alpha) \leq \varepsilon$$

LJLL - 18.11.05

## Analyse de complexité

- # Observation : à cause de la structure d'arbre, il peut arriver que  $|f|_{W^{2,1}(\alpha)} \ll \varepsilon$  sur de nombreuses cellules de  $M_\varepsilon(f)$ .
- # **Exemple:** si le support de  $\psi$  est dans  $[0, 1]^2$ , le support de  $\psi_j := \psi(2^j x, 2^j v)$  sera dans  $[0, 2^{-j}]^2$ , et  $|\psi_j|_{W^{2,1}} = |\psi|_{W^{2,1}}$ .



$$\#((M_\varepsilon(\psi_j))) \geq j$$

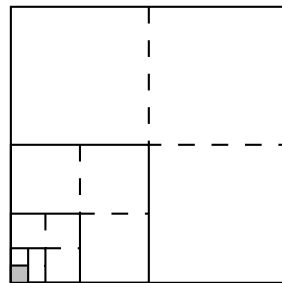
$$\text{dès que } \varepsilon < |\psi|_{W^{2,1}}$$

- # Pour un résultat de complexité, il nous faut donc prévenir tout phénomène de concentration par **plus de régularité**.

LJLL - 18.11.05

## Analyse de complexité

- # Observation : à cause de la structure d'arbre, il peut arriver que  $|f|_{W^{2,1}(\alpha)} \ll \varepsilon$  sur de nombreuses cellules de  $M_\varepsilon(f)$ .
- # **Exemple:** si le support de  $\psi$  est dans  $[0, 1]^2$ , le support de  $\psi_j := \psi(2^j x, 2^j v)$  sera dans  $[0, 2^{-j}]^2$ , et  $|\psi_j|_{W^{2,1}} = |\psi|_{W^{2,1}}$ .



$$\#(M_\varepsilon(\psi_j)) \geq j$$

$$\text{dès que } \varepsilon < |\psi|_{W^{2,1}}$$

- # Pour un résultat de complexité, il nous faut donc prévenir tout phénomène de concentration par **plus de régularité**. Ainsi,

$$f \in W^{2,p} \text{ with } p > 1 \implies \#(M_\varepsilon(f)) \leq C|f|_{W^{2,p}}\varepsilon^{-1}$$

LJLL - 18.11.05

## Graduation des niveaux

- # pour assurer la **stabilité du schéma**, nos partitions dyadiques  $M$  devront être **graduées** :

$$\alpha \in M, \beta \in M, \bar{\alpha} \cap \bar{\beta} \neq \emptyset \implies |\ell(\alpha) - \ell(\beta)| \leq 1$$

- # l'**algorithme d' $\varepsilon$ -adaptation** sera donc corrigé suivant

- ◇ partant de  $\Lambda_{\ell_0} := \{\alpha : \ell(\alpha) = \ell_0\}$
- ◇ construire pour  $\ell \geq \ell_0$ ,  $\Lambda_{\ell+1} := (\dots)$
- ◇ prendre pour  $M_\varepsilon(f)$  les feuilles de  $\Lambda_L$
- ◇ définir  **$A_\varepsilon(f)$**  comme le plus petit raffinement gradué de  $M_\varepsilon(f)$ .

- # Clairement, le maillage ainsi obtenu vérifie  $|f|_{W^{2,1}}(\alpha) \leq \varepsilon$  sur toutes ses cellules  $\alpha$ .

LJLL - 18.11.05

## Graduation des niveaux

- # pour assurer la **stabilité du schéma**, nos partitions dyadiques  $M$  devront être **graduées** :

$$\alpha \in M, \beta \in M, \bar{\alpha} \cap \bar{\beta} \neq \emptyset \implies |\ell(\alpha) - \ell(\beta)| \leq 1$$

- # l'**algorithme d' $\varepsilon$ -adaptation** sera donc corrigé suivant

- ◇ partant de  $\Lambda_{\ell_0} := \{\alpha : \ell(\alpha) = \ell_0\}$
- ◇ construire pour  $\ell \geq \ell_0$ ,  $\Lambda_{\ell+1} := (\dots)$
- ◇ prendre pour  $M_\varepsilon(f)$  les feuilles de  $\Lambda_L$
- ◇ définir  $\mathbf{A}_\varepsilon(f)$  comme le plus petit raffinement gradué de  $M_\varepsilon(f)$ .

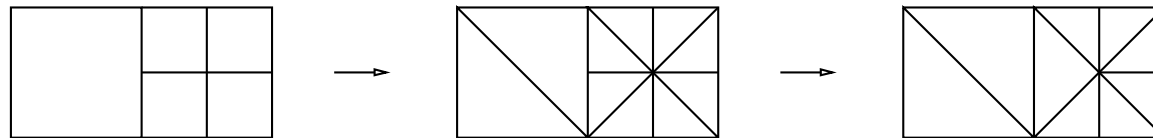
- # Clairement, le maillage ainsi obtenu vérifie  $|f|_{W^{2,1}}(\alpha) \leq \varepsilon$  sur toutes ses cellules  $\alpha$ .

- # On peut également montrer que  $\#(\mathbf{A}_\varepsilon(f)) \leq C\#(M_\varepsilon(f))$

LJLL - 18.11.05

## Discretisations $\mathcal{P}^1$ adaptatives

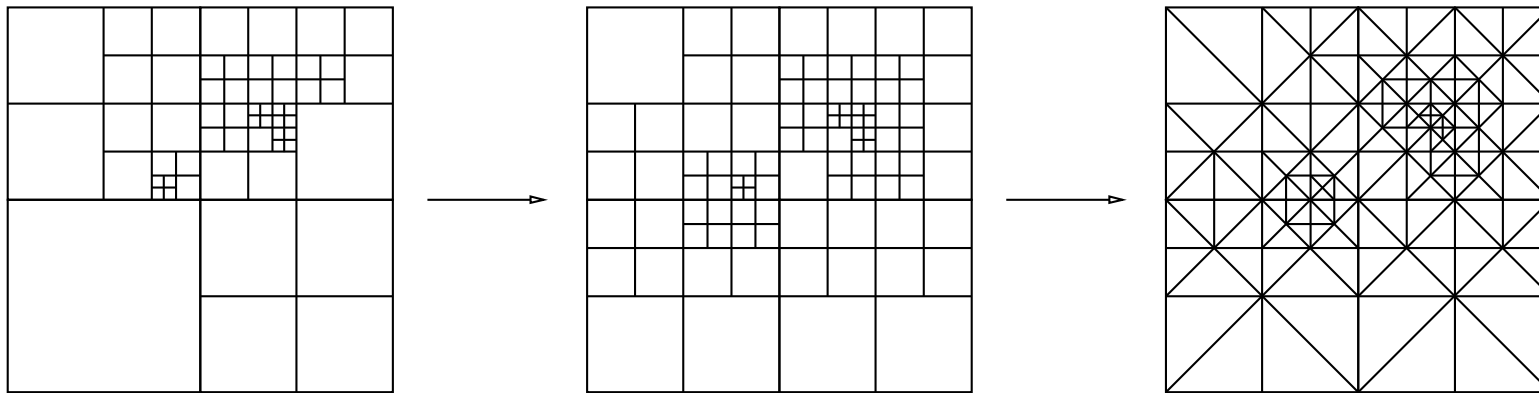
# Partant d'un maillage dyadique  $M$  gradué, on peut construire une triangulation conforme  $\mathcal{K}(M)$  suivant



LJLL - 18.11.05

## Discretisations $\mathcal{P}^1$ adaptatives

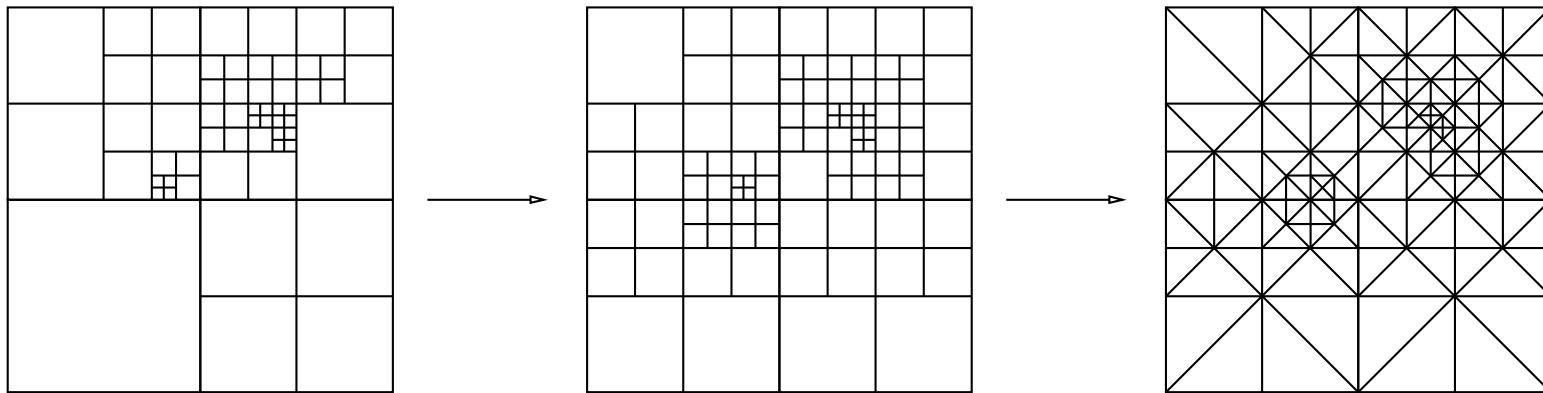
# Partant d'un maillage dyadique  $M$  gradué, on peut construire une triangulation conforme  $\mathcal{K}(M)$  suivant



LJLL - 18.11.05

## Discretisations $\mathcal{P}^1$ adaptatives

# Partant d'un maillage dyadique  $M$  gradué, on peut construire une triangulation conforme  $\mathcal{K}(M)$  suivant



# L'interpolation associée  $P_M := P_{\mathcal{K}(M)}$  vérifie alors

$$\|(I - P_M)f\|_{L^\infty} \lesssim \sup_{\alpha \in M} |f|_{W^{2,1}(\alpha)}$$



LJLL - 18.11.05

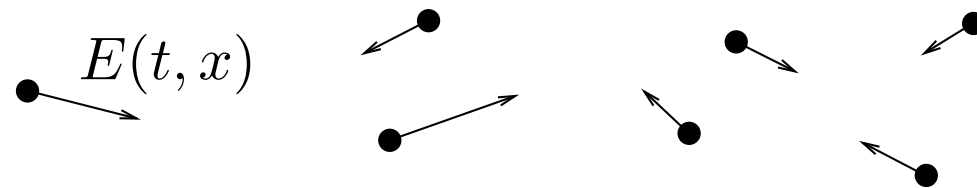
## II. Un schéma adaptatif semi-lagrangien pour l'équation de Vlasov-Poisson

travaux réalisés en collaboration avec  
Michel Mehrenberger

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Equation de Vlasov-Poisson



# Décrit l'évolution dynamique d'un plasma non-collisionnel dans l'espace des phases :

$$\partial_t f(t, x, v) + v \partial_x f(t, x, v) + E(t, x) \partial_v f(t, x, v) = 0 \quad (\text{V})$$

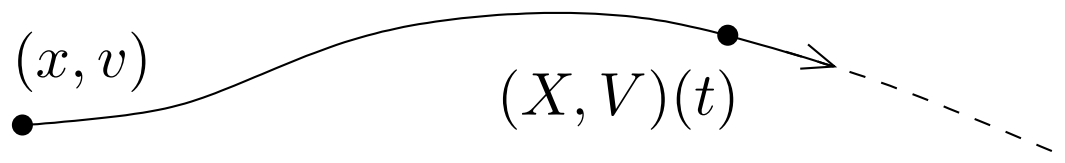
$$\partial_x E(t, x) = \int f(t, x, v) dv - 1 + \partial_x E_{app}(t, x) \quad (\text{P})$$

# à  $t$  fixé,  $f(t, \cdot, \cdot)$  est la densité de particules dans l'espace des phases  $(x, v)$ , de sorte que  $\iint_{\Omega} f(t, x, v) dx dv$  représente la charge contenue dans un domaine  $\Omega$ .

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Forme lagrangienne de l'équation de Vlasov



- # En désignant par  $(X, V)(t) = (X, V)(t; x, v)$  les **trajectoires caractéristiques**, solutions du système différentiel

$$(X, V)(0) = (x, v), \quad X'(t) = V(t), \quad V'(t) = E(t, X(t)),$$

l'équation de Vlasov

$$\partial_t f(t, x, v) + v \partial_x f(t, x, v) + E(t, x) \partial_v f(t, x, v) = 0 \quad (\text{V})$$

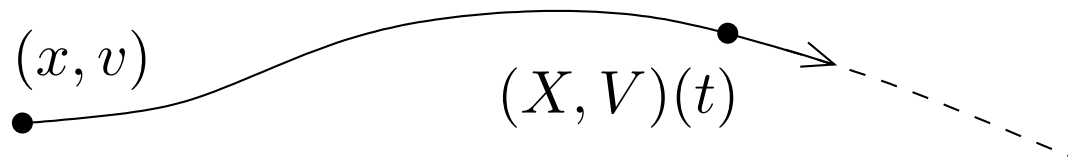
prend la forme  $\frac{d}{dt} f(t, X(t), V(t)) = 0$ , pour tout couple  $(x, v)$ .

- # Lorsque  $f_0 \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^2)$ , la forme “régularisante” du couplage de Poisson permet alors de **définir ces trajectoires en tout temps...**

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Forme lagrangienne de l'équation de Vlasov



# En désignant par  $(X, V)(t) = (X, V)(t; x, v)$  les **trajectoires caractéristiques**, solutions du système différentiel

$$(X, V)(0) = (x, v), \quad X'(t) = V(t), \quad V'(t) = E(t, X(t)),$$

l'équation de Vlasov

$$\partial_t f(t, x, v) + v \partial_x f(t, x, v) + E(t, x) \partial_v f(t, x, v) = 0 \quad (\text{V})$$

prend la forme  $\frac{d}{dt} f(t, X(t), V(t)) = 0$ , pour tout couple  $(x, v)$ .

# ... et le **flot**  $(x, v) \rightarrow (X, V)(t; x, v)$  est un **difféomorphisme**.

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL-18.11.05

## Principe du schéma semi-lagrangien

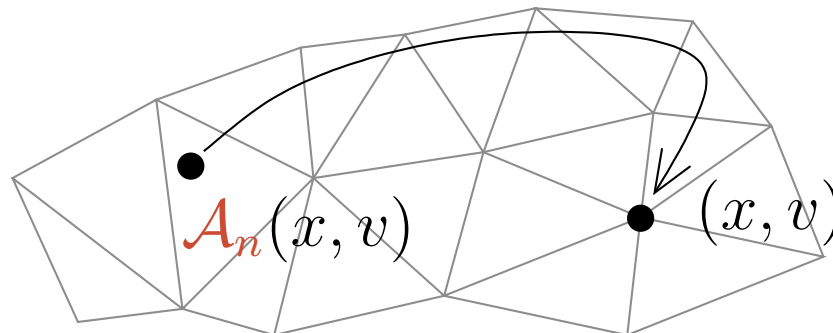
# Connaissant  $f_n \approx f(t_n)$  (où  $t_n = n\Delta t$ ), on approche le **flot arrière**

$$\mathcal{A}(t_n) : (x, v) \rightarrow (X, V)(t_n; t_{n+1}, x, v)$$

par un difféomorphisme  $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}[f_n]$ .

# La solution numérique est alors **transportée** par  $\mathcal{T} : f_n \rightarrow f_n \circ \mathcal{A}_n$ ,

# puis **interpolée** sur une triangulation  $\mathcal{K}$ , suivant  $f_{n+1} := P_{\mathcal{K}} \mathcal{T} f_n$



# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Analyse d'erreur - approche uniforme

# En décomposant l'erreur  $e_{n+1} := \|f(t_{n+1}) - f_{n+1}\|_{L^\infty}$  suivant

$$e_{n+1} \leq \|f(t_{n+1}) - \mathcal{T}f(t_n)\|_{L^\infty} + \|\mathcal{T}f(t_n) - \mathcal{T}f_n\|_{L^\infty} + \|(I - P_K)\mathcal{T}f_n\|_{L^\infty},$$

et en utilisant un **schéma de splitting** pour calculer  $\mathcal{T}$ , on peut établir (Besse  $\sim$  04) que lorsque  $f_0 \in W_c^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)$ ,

$$e_{n+1} \leq (1 + C(T)\Delta t)e_n + C(T)(\Delta t^3 + h^2), \quad n\Delta t \leq T.$$

# D'où l'on déduit (Gronwall) que  $e_n \leq C(T)(\Delta t^2 + h^2/\Delta t)$ .

# **Complexité** : avec  $\Delta t^2 \sim h^2/\Delta t$ , on obtient  $e_n \leq C(T)h^{4/3}$ , de sorte que la taille  $N_h \sim h^{-2}$  du maillage associé vérifie

$$e_n \leq C(T)N_h^{-2/3}$$

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL-18.11.05

## Principe du schéma semi-lagrangien adaptatif

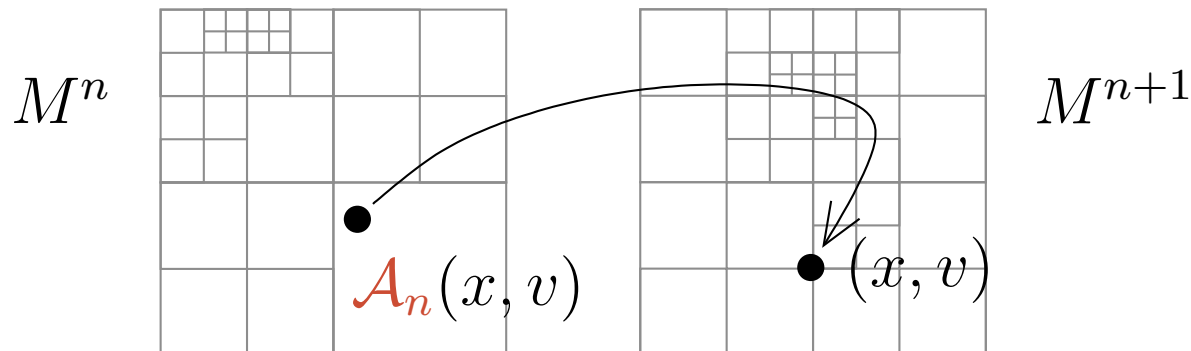
# Connaissant  $f_n \approx f(t_n)$  (où  $t_n = n\Delta t$ ), on approche le **flot arrière**

$$\mathcal{A}(t_n) : (x, v) \rightarrow (X, V)(t_n; t_{n+1}, x, v)$$

par un difféomorphisme  $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}[f_n]$ .

# La solution numérique est alors **transportée** par  $\mathcal{T} : f_n \rightarrow f_n \circ \mathcal{A}_n$ ,

# puis **interpolée** sur un **nouveau maillage** :  $f_{n+1} := P_{M^{n+1}} \mathcal{T} f_n$



# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Analyse d'erreur - approche adaptative

# En décomposant l'erreur  $e_{n+1} := \|f(t_{n+1}) - f_{n+1}\|_{L^\infty}$  suivant

$$e_{n+1} \leq \|f(t_{n+1}) - \mathcal{T}f(t_n)\|_{L^\infty} + \|\mathcal{T}f(t_n) - \mathcal{T}f_n\|_{L^\infty} + \|(I - P_{M^{n+1}})\mathcal{T}f_n\|_{L^\infty},$$

et en utilisant le même schéma de splitting pour  $\mathcal{T}$ , on peut encore établir (C.P.) que lorsque  $f_0 \in W_c^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ ,

$$e_{n+1} \leq (1 + C(T)\Delta t)e_n + C(T)\Delta t^3 + \|(I - P_{M^{n+1}})\mathcal{T}f_n\|_{L^\infty}, \quad n\Delta t \leq T.$$



# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Analyse d'erreur - approche adaptative

# En décomposant l'erreur  $e_{n+1} := \|f(t_{n+1}) - f_{n+1}\|_{L^\infty}$  suivant

$$e_{n+1} \leq \|f(t_{n+1}) - \mathcal{T}f(t_n)\|_{L^\infty} + \|\mathcal{T}f(t_n) - \mathcal{T}f_n\|_{L^\infty} + \|(I - P_{M^{n+1}})\mathcal{T}f_n\|_{L^\infty},$$

et en utilisant le même schéma de splitting pour  $\mathcal{T}$ , on peut encore établir (C.P.) que lorsque  $f_0 \in W_c^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ ,

$$e_{n+1} \leq (1 + C(T)\Delta t)e_n + C(T)\Delta t^3 + \|(I - P_{M^{n+1}})\mathcal{T}f_n\|_{L^\infty}, \quad n\Delta t \leq T.$$

# Pour estimer l'erreur numérique, il est donc naturel de vouloir prédire un maillage  $M^{n+1}$  qui soit  $\varepsilon$ -adapté à  $\mathcal{T}f_n$  :

$$\sup_{\alpha \in M^{n+1}} |\mathcal{T}f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} \leq \varepsilon$$

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Prédiction du maillage, I

# **Objectif** : étant donné  $M^n$  et  $f_n$ , **construire**  $M^{n+1}$  de façon que

$$\sup_{\alpha \in M^{n+1}} |\mathcal{T} f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} \leq \varepsilon$$

# **Idée** : utiliser un algorithme de **découpages adaptatifs**.

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Prédiction du maillage, I

# **Objectif** : étant donné  $M^n$  et  $f_n$ , construire  $M^{n+1}$  de façon que

$$\sup_{\alpha \in M^{n+1}} |\mathcal{T} f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} \leq \varepsilon$$

# **Idée** : utiliser un algorithme de découpages adaptatifs.

# On doit alors se demander :

◦  $Q_1$  : quelles cellules doit-on découper pour construire  $M^{n+1}$  ?

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Prédiction du maillage, I

# **Objectif** : étant donné  $M^n$  et  $f_n$ , **construire**  $M^{n+1}$  de façon que

$$\sup_{\alpha \in M^{n+1}} |\mathcal{T} f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} \leq \varepsilon$$

# **Idée** : utiliser un algorithme de **découpages adaptatifs**.

# On doit alors se demander :

- ◊  $Q_1$  : quelles cellules doit-on découper pour construire  $M^{n+1}$  ?
- ◊  $Q_2$  : que peut valoir  $|\mathcal{T} f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} = |f_n \circ \mathcal{A}_n|_{W^{2,1}(\alpha)}$  ?

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Prédiction du maillage, I

# **Objectif** : étant donné  $M^n$  et  $f_n$ , **construire**  $M^{n+1}$  de façon que

$$\sup_{\alpha \in M^{n+1}} |\mathcal{T} f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} \leq \varepsilon$$

# **Idée** : utiliser un algorithme de **découpages adaptatifs**.

# On doit alors se demander :

- ◊  $Q_1$  : quelles cellules doit-on découper pour construire  $M^{n+1}$  ?
- ◊  $Q_2$  : que peut valoir  $|\mathcal{T} f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} = |f_n \circ \mathcal{A}_n|_{W^{2,1}(\alpha)}$  ?
- ◊  $Q_3$  : le transport approché  $\mathcal{T}$  est-il **stable** vis-à-vis de la courbure,

$$|\mathcal{T} f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} \leq C |f_n|_{W^{2,1}(\mathcal{A}_n(\alpha))} \quad ?$$

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Prédiction du maillage, II

#  $Q_3$  : le transport approché  $\mathcal{T}$  est-il stable vis-à-vis de la courbure,

$$|\mathcal{T} f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} \leq C |f_n|_{W^{2,1}(\mathcal{A}_n(\alpha))} \quad ?$$

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Prédiction du maillage, II

#  $Q_3$  : le transport approché  $\mathcal{T}$  est-il stable vis-à-vis de la courbure,

$$|\mathcal{T} f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} \leq C |f_n|_{W^{2,1}(\mathcal{A}_n(\alpha))} \quad ?$$

# La réponse est : **non**...

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Prédiction du maillage, II

#  $Q_3$  : le transport approché  $\mathcal{T}$  est-il stable vis-à-vis de la courbure,

$$|\mathcal{T} f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} \leq C |f_n|_{W^{2,1}(\mathcal{A}_n(\alpha))} \quad ?$$

# La réponse est : **non**...

# ... mais s'il on introduit une **courbure géométrique**  $|\cdot|_*$  pour les fonctions affines par morceaux, et sous réserve d'une borne  $L_t^\infty(W_x^{2,\infty})$  sur le champ électrique approché, on peut montrer que  $\mathcal{T}$  **stabilise l'énergie**

$$\mathcal{E}(f_n, \alpha) := |f_n|_*(\alpha) + \Delta t \text{Vol}(\alpha) |f_n|_{W^{1,\infty}}.$$

→ par simplicité, on supposera donc que la réponse est : **oui**.



# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL-18.11.05

## Prédiction du maillage, III

#  $Q_2$  : que peut valoir  $|\mathcal{T} f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} = |f_n \circ \mathcal{A}_n|_{W^{2,1}(\alpha)}$  ?

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

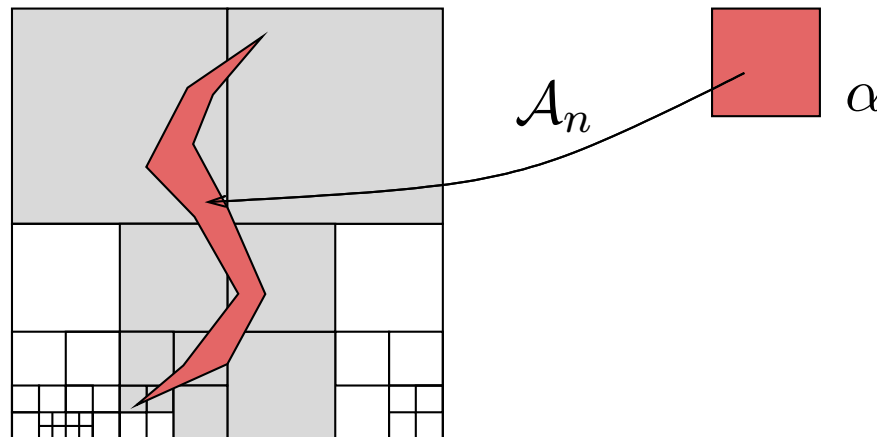
## Prédiction du maillage, III

#  $Q_2$  : que peut valoir  $|\mathcal{T} f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} = |f_n \circ \mathcal{A}_n|_{W^{2,1}(\alpha)}$  ?

# Réponse :

$$|\mathcal{T} f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} \leq C |f_n|_{W^{2,1}(\mathcal{A}_n(\alpha))} \leq C \sum_{\beta \in \mathcal{I}(\alpha)} |f_n|_{W^{2,1}(\beta)},$$

où  $\mathcal{I}(\alpha)$  désigne les cellules de  $M^n$  qui intersectent  $\mathcal{A}_n(\alpha)$  :



# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

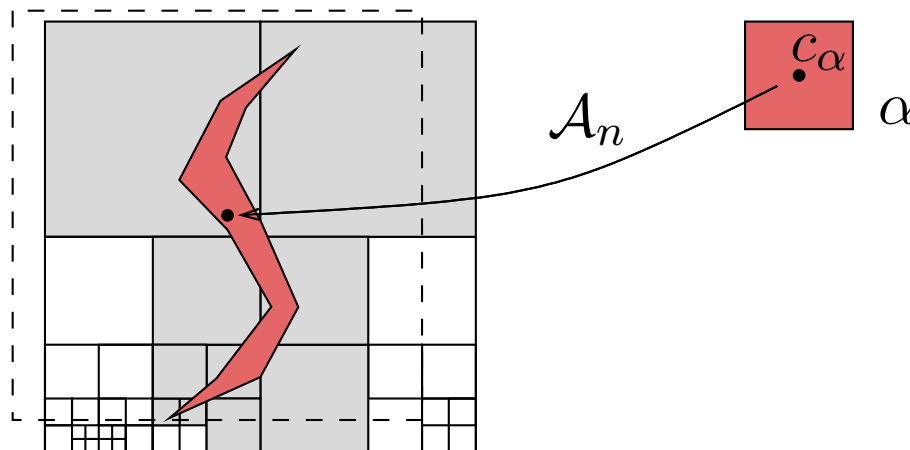
## Prédiction du maillage, III

#  $Q_2$  : que peut valoir  $|\mathcal{T} f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} = |f_n \circ \mathcal{A}_n|_{W^{2,1}(\alpha)}$  ?

# Réponse :

$$|\mathcal{T} f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} \leq C |f_n|_{W^{2,1}(\mathcal{A}_n(\alpha))} \leq C \sum_{\beta \in \mathcal{I}(\alpha)} |f_n|_{W^{2,1}(\beta)},$$

où  $\mathcal{I}(\alpha)$  désigne les cellules de  $M^n$  qui intersectent  $\mathcal{A}_n(\alpha)$  :



# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

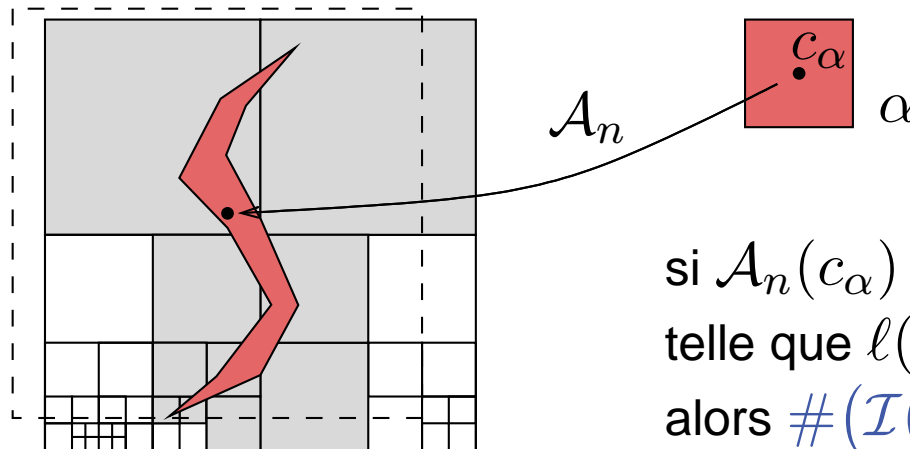
## Prédiction du maillage, III

#  $Q_2$  : que peut valoir  $|\mathcal{I} f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} = |f_n \circ \mathcal{A}_n|_{W^{2,1}(\alpha)}$  ?

# Réponse :

$$|\mathcal{I} f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} \leq C |f_n|_{W^{2,1}(\mathcal{A}_n(\alpha))} \leq C \sum_{\beta \in \mathcal{I}(\alpha)} |f_n|_{W^{2,1}(\beta)},$$

où  $\mathcal{I}(\alpha)$  désigne les cellules de  $M^n$  qui intersectent  $\mathcal{A}_n(\alpha)$  :



si  $\mathcal{A}_n(c_\alpha)$  est dans une  $\beta \in M^n$   
telle que  $\ell(\beta) \leq \ell(\alpha)$ ,  
alors  $\#(\mathcal{I}(\alpha)) \leq C$

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL-18.11.05

## Prédiction du maillage, IV

#  $Q_1$  : quelles cellules doit-on découper pour construire  $M^{n+1}$  ?

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Prédiction du maillage, IV

#  $Q_1$  : quelles cellules doit-on découper pour construire  $M^{n+1}$  ?

# Réponse :

◇ on découpe  $\alpha$  lorsque  $\mathcal{A}_n(c_\alpha)$  “tombe” dans une petite cellule  $\beta \in M^n$ , i.e. telle que  $\ell(\beta) > \ell(\alpha)$ .

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Prédiction du maillage, IV

#  $Q_1$  : quelles cellules doit-on découper pour construire  $M^{n+1}$  ?

# Réponse :

◇ on découpe  $\alpha$  lorsque  $\mathcal{A}_n(c_\alpha)$  “tombe” dans une petite cellule  $\beta \in M^n$ , i.e. telle que  $\ell(\beta) > \ell(\alpha)$ .

# Si  $\Delta t \leq C(f_0, T)$ , le maillage ainsi prédit  $\mathcal{T}[\mathcal{A}_n]M^n$  vérifie alors :  
 $\#(\mathcal{I}(\alpha)) \leq C$  sur toutes ses cellules,

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Prédiction du maillage, IV

#  $Q_1$  : quelles cellules doit-on découper pour construire  $M^{n+1}$  ?

# Réponse :

◇ on découpe  $\alpha$  lorsque  $\mathcal{A}_n(c_\alpha)$  “tombe” dans une petite cellule  $\beta \in M^n$ , i.e. telle que  $\ell(\beta) > \ell(\alpha)$ .

# Si  $\Delta t \leq C(f_0, T)$ , le maillage ainsi prédit  $\mathbf{T}[\mathcal{A}_n]M^n$  vérifie alors :  
 $\#(\mathcal{I}(\alpha)) \leq C$  sur toutes ses cellules, de sorte que l'on a

$$|\mathcal{T}f_n|_{W^{2,1}(\alpha)} \leq C \sum_{\beta \in \mathcal{I}(\alpha)} |f_n|_{W^{2,1}(\beta)} \leq C \sup_{\beta \in M^n} |f_n|_{W^{2,1}(\beta)},$$

c'est-à-dire

$$M^n \text{ est } \varepsilon\text{-adapté à } f_n \implies \mathbf{T}[\mathcal{A}_n]M^n \text{ est } C\varepsilon\text{-adapté à } \mathcal{T}f_n$$



# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Forme complète du schéma adaptatif

# Muni des algorithmes :

- d' $\varepsilon$ -adaptation de maillage  $A_\varepsilon$  à une fonction connue,
- de prédiction (transport) de maillage  $T[\mathcal{A}_n]$ ,

# on calcule à chaque pas de temps, connaissant  $(M^n, f_n)$  :

- ◊ un maillage **prédict**  $\tilde{M}^{n+1} := T[\mathcal{A}_n]M^n$
- ◊ une solution **intermédiaire**  $\tilde{f}_{n+1} := P_{\tilde{M}^{n+1}} T f_n$
- ◊ un maillage **corrigé**  $M^{n+1} := A_\varepsilon(\tilde{f}_{n+1})$
- ◊ et la solution **interpolée**  $f_{n+1} := P_{M^{n+1}} \tilde{f}_{n+1}$

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Forme complète du schéma adaptatif

# Muni des algorithmes :

- d' $\varepsilon$ -adaptation de maillage  $A_\varepsilon$  à une fonction connue,
- de prédiction (transport) de maillage  $T[\mathcal{A}_n]$ ,

# on calcule à chaque pas de temps, connaissant  $(M^n, f_n)$  :

- ◊ un maillage **prédict**  $\tilde{M}^{n+1} := T[\mathcal{A}_n]M^n$
- ◊ une solution **intermédiaire**  $\tilde{f}_{n+1} := P_{\tilde{M}^{n+1}} T f_n$
- ◊ un maillage **corrigé**  $M^{n+1} := A_\varepsilon(\tilde{f}_{n+1})$
- ◊ et la solution **interpolée**  $f_{n+1} := P_{M^{n+1}} \tilde{f}_{n+1}$

# **Théorème 1** (Mehrenberger et C. P.)

Si  $\Delta t \leq C(f_0, T)$ ,

$$\|f(t_n) - f_n\|_{L^\infty} \lesssim \Delta t^2 + \varepsilon/\Delta t$$

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Forme complète du schéma adaptatif

# Muni des algorithmes :

- d' $\varepsilon$ -adaptation de maillage  $A_\varepsilon$  à une fonction connue,
- de prédiction (transport) de maillage  $T[\mathcal{A}_n]$ ,

# on calcule à chaque pas de temps, connaissant  $(M^n, f_n)$  :

- ◊ un maillage **prédict**  $\tilde{M}^{n+1} := T[\mathcal{A}_n]M^n$
- ◊ une solution **intermédiaire**  $\tilde{f}_{n+1} := P_{\tilde{M}^{n+1}} T f_n$
- ◊ un maillage **corrigé**  $M^{n+1} := A_\varepsilon(\tilde{f}_{n+1})$
- ◊ et la solution **interpolée**  $f_{n+1} := P_{M^{n+1}} \tilde{f}_{n+1}$

# **Théorème 1** (Mehrenberger et C. P.)

Si  $\Delta t \leq C(f_0, T)$ ,

$$\|f(t_n) - f_n\|_{L^\infty} \lesssim \varepsilon^{2/3}$$

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Forme complète du schéma adaptatif

# Muni des algorithmes :

- d' $\varepsilon$ -adaptation de maillage  $A_\varepsilon$  à une fonction connue,
- de prédiction (transport) de maillage  $T[\mathcal{A}_n]$ ,

# on calcule à chaque pas de temps, connaissant  $(M^n, f_n)$  :

- ◊ un maillage **prédict**  $\tilde{M}^{n+1} := T[\mathcal{A}_n]M^n$
- ◊ une solution **intermédiaire**  $\tilde{f}_{n+1} := P_{\tilde{M}^{n+1}} T f_n$
- ◊ un maillage **corrigé**  $M^{n+1} := A_\varepsilon(\tilde{f}_{n+1})$
- ◊ et la solution **interpolée**  $f_{n+1} := P_{M^{n+1}} \tilde{f}_{n+1}$

# **Théorème 2** (Mehrenberger et C. P.)

Si  $\Delta t \leq C(f_0, T)$ ,

$$\#(\tilde{M}^{n+1}) \lesssim \#(M^n)$$

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Perspectives

- # Conclure l'analyse de complexité
  - △ point clé : évolution de la courbure totale  $|f_n|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^2)}$  lors des interpolations
- # Mettre au point des méthodes adaptatives qui **conservent la masse**  $\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$  des solutions
- # Mettre en œuvre des ordres d'interpolation plus élevés
- # Etudier le passage aux dimensions supérieures
  - △ schémas basés sur des “sparse grids” adaptatives

# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

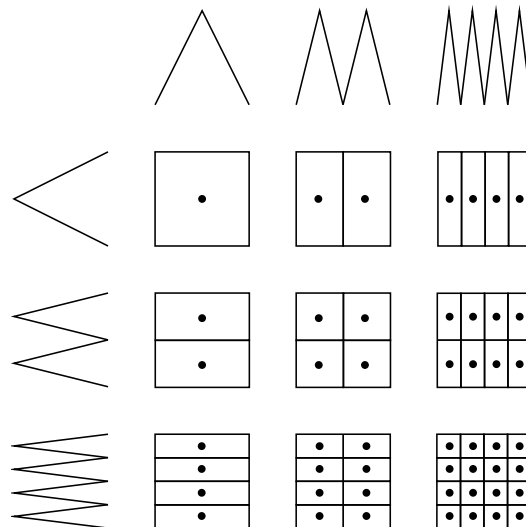
## Perspectives : Sparse Grids

# Éléments finis hiérarchiques obtenus par produits tensoriels

△ En dimension 1 :



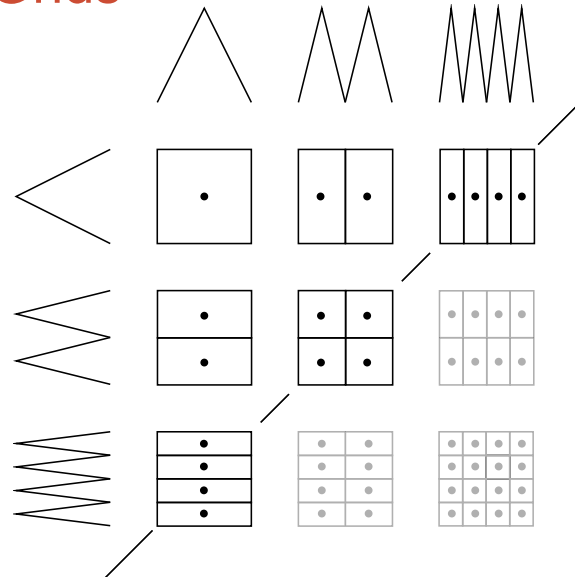
△ Produits tensoriels :



# Un schéma AdSL pour Vlasov-Poisson

LJLL - 18.11.05

## Perspectives : Sparse Grids



# Ne sont pas associées à des maillages, mais correspondent à des algorithmes de découpages récursifs

# Avantage : taille des bases “éparses”

◊ base complète :  $N_L \sim 2^{dL}$  ( $\approx 10^9$  pour  $d = 6$  et  $L = 5$ )

◊ base éparse :  $N_L \sim 2^L L^{d-1}$  ( $\approx 10^5$  pour  $d = 6$  et  $L = 5$ )

LJLL-18.11.05

### III. Analyse des lois de conservation scalaires en distance de Hausdorff

travaux réalisés en collaboration avec

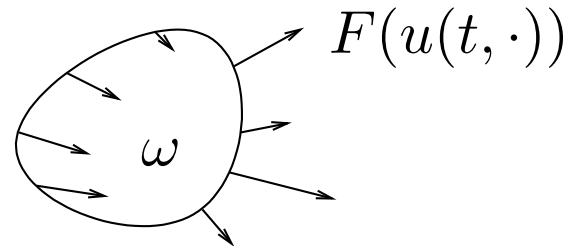
Albert Cohen, Wolfgang Dahmen, Ronald DeVore et Pencho Petrushev



# Analyse des lois de conservation en distance de Hausdorff

LJLL - 18.11.05

## Lois de conservation scalaires



$$\partial_t u(t, x) + \text{Div}_x [F(u(t, x))] = 0, \quad u(t=0, \cdot) = u_0 \quad (\text{LCS})$$

# Apparition de **discontinuités** au bout d'un temps fini, même pour des données initiales  $u_0$  très régulières.

# Kruzkov ( $\sim 70$ ) : existence et unicité de **solutions faibles entropiques** appartenant à  $L^\infty \cap L^1$  en tout temps  $t > 0$ .

◦ Monotonie :  $u_0 \leq v_0 \implies u(t, \cdot) \leq v(t, \cdot)$

◦ Stabilité  $L^1$  :  $\|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{L^1} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^1}$

# Analyse des lois de conservation en distance de Hausdorff

LJLL - 18.11.05

## La stabilité comme facteur de régularité, I

# Premier exemple : conservation de la régularité  $BV$  :

$$|u|_{BV} = \sup_{h \neq 0} \frac{\|u(\cdot) - u(\cdot - h)\|_{L^1}}{|h|}$$

#  $u(t, \cdot - h)$  étant la solution entropique issue de la donnée initiale translatée  $u_0(\cdot - h)$ , la stabilité  $L^1$  permet d'écrire

$$\|u(t, \cdot) - u(t, \cdot - h)\|_{L^1} \leq \|u_0 - u_0(\cdot - h)\|_{L^1} \leq |u_0|_{BV} |h|,$$

de sorte que

$$|u(t, \cdot)|_{BV} \leq |u_0|_{BV}.$$

# Analyse des lois de conservation en distance de Hausdorff

LJLL-18.11.05

## La stabilité comme facteur de régularité, II

- # Deuxième exemple : conservation de certaines **régularités Besov** (DeVore et Lucier, ~ 90).
- # **Espaces de Besov**  $B_q^\alpha(L^p)$  : de façon intuitive, une fonction  $u \in L^p$  appartient à l'espace  $B_q^\alpha(L^p)$  si elle possède  $\alpha > 0$  dérivées dans  $L^p$ .
- # Ces espaces permettent de **caractériser** les fonctions pouvant être approchées à un certain ordre par des **polynômes par morceaux** (DeVore, Popov et Petrushev, ~ 88).

# Analyse des lois de conservation en distance de Hausdorff

LJLL - 18.11.05

## Caractérisation des ordres d'approximation

- #  $\Sigma_N$  désigne ici l'ensemble des polynômes par morceaux de degré inférieur ou égal à  $k$  sur  $N$  intervalles arbitraires.
- # Espaces d'approximation  $\mathcal{A}^\alpha(L^p)$  : on notera

$$u \in \mathcal{A}^\alpha(L^p) \iff \inf_{S_N \in \Sigma_N} \|u - S_N\|_{L^p} \lesssim N^{-\alpha}$$

- # Théorème ( DeVore, Popov et Petrushev, ~ 88)

$$\mathcal{A}^\alpha(L^1) = B_q^\alpha(L^q) \quad \text{et} \quad \|u\|_{\mathcal{A}^\alpha(L^1)} \sim \|u\|_{B_q^\alpha(L^q)}$$

$$\text{pour } 1/q = \alpha + 1$$

# Analyse des lois de conservation en distance de Hausdorff

LJLL - 18.11.05

## Conservation de certaines régularités Besov

# **Théorème** (DeVore et Lucier, ~ 90)

$$u_0 \in B_q^\alpha(L^q) \implies u(t, \cdot) \in B_q^\alpha(L^q) \quad \text{pour tout } t, \text{ avec } 1/q = \alpha + 1$$

# Lorsque  $\alpha < 2$  et  $F(u) := u^2/2$ , la preuve est **élémentaire** :

◦ comme  $u_0 \in \mathcal{A}^\alpha(L^1)$ , il existe une suite  $S_N \in \Sigma_N$  telle que

$$\|u_0 - S_N\|_{L^1} \lesssim N^{-\alpha}$$

◦ Une **propriété de l'équation de Burgers** est que la solution  $s_N$  issue de  $S_N$  est encore affine sur  $2N$  morceaux.

◦ La stabilité  $L^1$  nous permet alors d'écrire

$$\|u(t, \cdot) - s_N\|_{L^1} \leq \|u_0 - S_N\|_{L^1} \lesssim (2N)^{-\alpha}$$

et le résultat découle du **théorème de caractérisation**.

# Analyse des lois de conservation en distance de Hausdorff

LJLL - 18.11.05

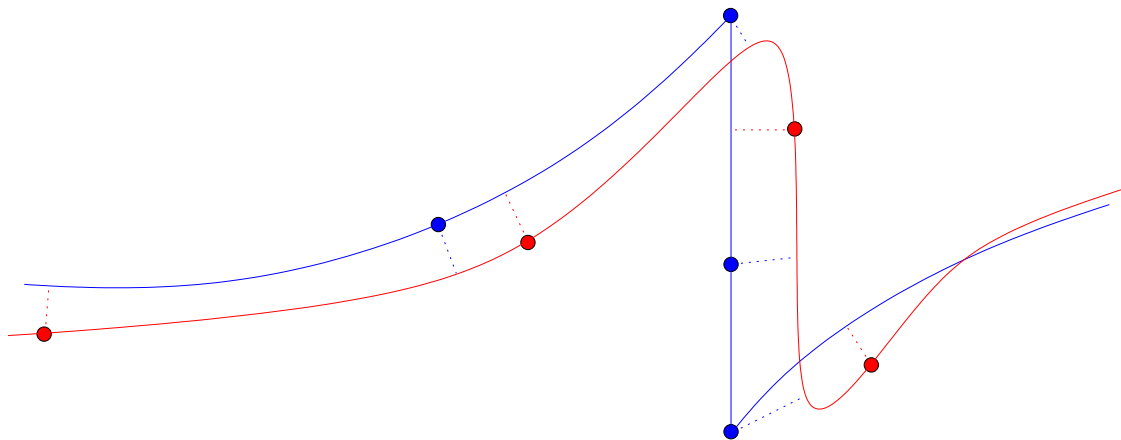
## Distance de Hausdorff

# Si  $u$  et  $v$  sont dans  $BV$ , on définit leur distance de Hausdorff par

$$d(u, v) := d_H(G_u, G_v),$$

autrement dit par la distance de Hausdorff **usuelle** entre leurs graphes respectifs :

$$d_H(G_u, G_v) := \max\left\{ \sup_{a \in G_u} \inf_{b \in G_v} |a - b|, \sup_{b \in G_v} \inf_{a \in G_u} |a - b| \right\}$$



# Analyse des lois de conservation en distance de Hausdorff

LJLL - 18.11.05

## Un résultat de stabilité uniforme

# **Théorème** (Cohen, Dahmen, DeVore et C. P.)

Si le flux  $F$  est **fortement convexe**

$$0 < A \leq F'' \leq B,$$

et si la donnée initiale  $u_0 \in BV$  est **semi-lipschitzienne**, alors

$$d(u, v) \leq C(t)d(u_0, v_0)$$

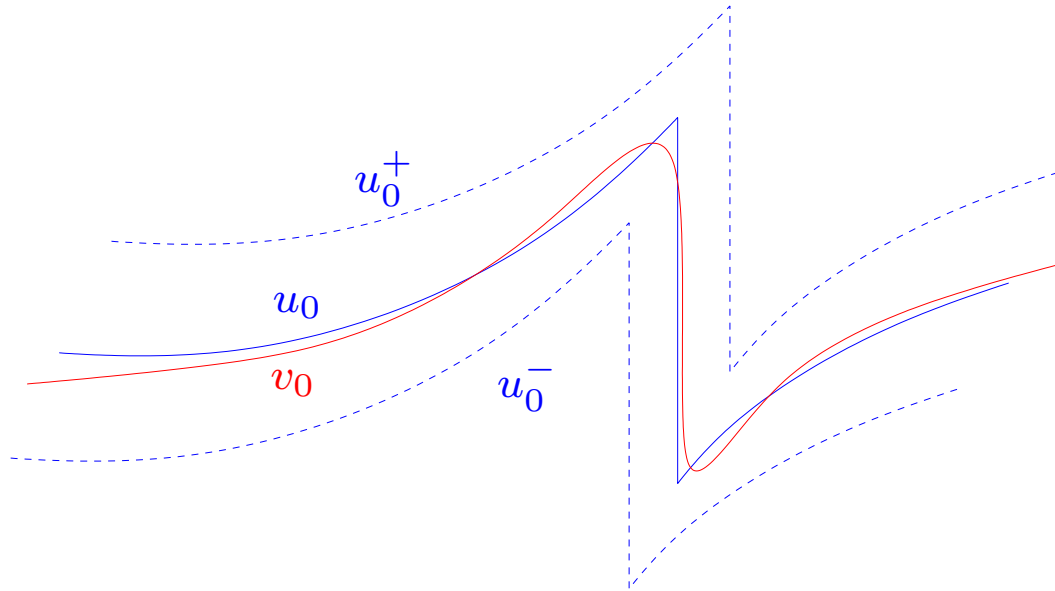
avec  $C(t) \lesssim 1 + t$ .

# Analyse des lois de conservation en distance de Hausdorff

LJLL - 18.11.05

## Principe de la preuve

# Encadrer  $v_0$  par des translations de  $u_0$ ,



# utiliser la **formule de Lax** pour estimer la distance entre  $u_0^+$  et  $u_0^-$ .



# Analyse des lois de conservation en distance de Hausdorff

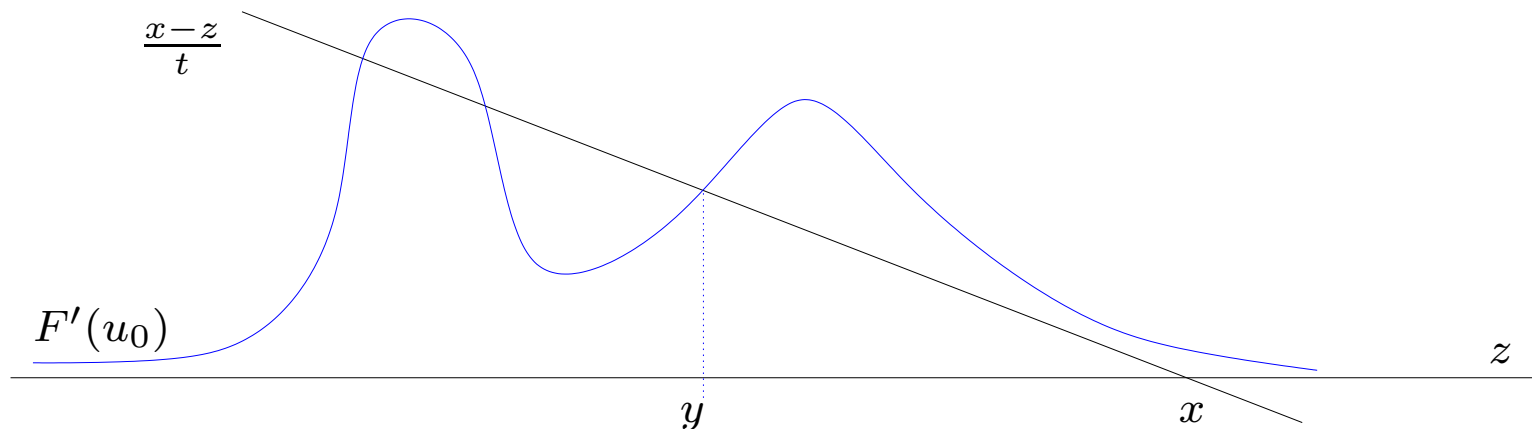
LJLL - 18.11.05

## Sélection des trajectoires entropiques

# **Théorème** (Lax, ~ 73) lorsque  $F$  est convexe,  $u$  est donnée par

$$u(x, t) = u_0(y), \text{ où } y \text{ minimise } \mathcal{L}_{u_0}(y, x) := \int_0^y u_0(s) ds + t F^*\left(\frac{x-y}{t}\right),$$

$F^*$  étant la transformée de Legendre de  $F$ .



# Analyse des lois de conservation en distance de Hausdorff

LJLL - 18.11.05

## Un résultat d'approximation uniforme

# **Théorème** (Cohen, Petrushev et C. P.)

Sous les hypothèses du théorème précédent, on montre que

$$u_0 \in \mathcal{A}^\alpha(L^\infty) \implies u(t, \cdot) \in \mathcal{A}^\alpha(d)$$

c'est-à-dire

$$\inf_{S_N \in \Sigma_N} \|u_0 - S_N\|_{L^\infty} \lesssim N^{-\alpha} \implies \inf_{S_N \in \Sigma_N} d(u(t, \cdot) - S_N) \lesssim N^{-\alpha}$$

pour tout ordre  $\alpha > 0$  et tout temps  $t$ .

# Analyse des lois de conservation en distance de Hausdorff

LJLL - 18.11.05

## Une application du théorème de stabilité

### # Théorème (Cohen et C. P.)

Pour une donnée initiale semi-lipschitzienne, le schéma **upwind** approchant l'advection linéaire

$$\partial_t u(t, x) + a \partial_x u(t, x) = 0$$

sur un maillage uniforme de pas  $h$  fait converger les solutions numériques en distance de Hausdorff suivant

$$d(U_N, u(n\Delta t)) \lesssim h^{1/3}$$

# Analyse des lois de conservation en distance de Hausdorff

LJLL - 18.11.05

## Perspectives

- # Analyse de méthodes existantes :
  - △ méthodes de viscosité évanescence
  - △ schémas ENO (Essentiellement Non Oscillants)
- # Développement de nouveaux schémas, notamment adaptatifs
- # Etude en dimensions supérieures (avec une notion de distance de Hausdorff entre deux graphes pris à des instants différents)
- # De façon plus générale, recherche de méthodes **atteignant les ordres d'approximation garantis par la théorie...**