THESE

présentée à

l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble

et à

l'Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES
«Mathématiques»

par

Anestis ANTONIADIS

ETUDE DE CERTAINS PROBLEMES DE DECISION DANS LES

STRUCTURES STATISTIQUES GAUSSIENNES INFINIDIMENSIONNELLES.

Thèse soutenue le 16 juin 1983 devant la commission d'examen.

J.R. BARRA	Président
R. CARMONA	
S. CHEVET	
U. GRENANDER	Examinateurs
B. MAISONNEUVE	
J.L. SOLER	

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : M. TANCHE

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

(RANG A)

SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

ARNAUD Paul	Chimie organique
ARVIEU Robert	Physique nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S.
AYANT Yves	Physique approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale C.N.R.S. (labo de magnétisme)
BARJON Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose-Biologie
BARRA Jean-René	Statistiques - Mathématiques appliquées
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude (M.)	Mathématiques pures
BERNARD Alain	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
BILLET Jean	Géographie
BONNIER Jean-Marie	Chimie générale
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CRABBE Pierre (détaché)	C.E.R.M.O.
CYROT Michel	Physique du solide
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude (M.)	M.I.A.G. Mathématiques appliquées
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique

.../...

GASTINEL Noël	Analyse numérique - Mathématiques appliquées
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANE André (détaché DAFCO)	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques (détaché)	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
RICHARD Lucien	Biologie végétale
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
SENGEL Philippe	Biologie animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques pures
SOUTIF Michel	Physique
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEN Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VIALON Pierre	Géologie

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

ADIBA Michel	Mathématiques pures
ARMAND Gilbert	Géographie

.../...

AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
BEGUIN Claude (M.)	Chimie organique
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude (M.)	Géologie
LE BRETON Alain	Mathématiques appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude (détaché)	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
ROBERT Gilles	Mathématiques pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie animale
SOUTIF Jeanne	Physique
SCHOOL Pierre-Claude	Mathématiques appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	Chimie
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : D. BLOCH

Vice-Président : René CARRE
Hervé CHERADAME
Marcel IVANES

PROFESSEURS DES UNIVERSITES :

ANCEAU François	E.N.S.I.M.A.G.
BARRAUD Alain	E.N.S.I.E.G.
BAUDELET Bernard	E.N.S.I.E.G.
BESSON Jean	E.N.S.E.E.G.
BLIMAN Samuel	E.N.S.E.R.G.
BLOCH Daniel	E.N.S.I.E.G.
BOIS Philippe	E.N.S.H.G.
BONNETAIN Lucien	E.N.S.E.E.G.
BONNIER Etienne	E.N.S.E.E.G.
BOUVARD Maurice	E.N.S.H.G.
BRISSONNEAU Pierre	E.N.S.I.E.G.
BUYLE BODIN Maurice	E.N.S.E.R.G.
CAVAIGNAC Jean-François	E.N.S.I.E.G.
CHARTIER Germain	E.N.S.I.E.G.
CHENEVIER Pierre	E.N.S.E.R.G.
CHERADAME Hervé	U.E.R.M.C.P.P.
CHERUY Arlette	E.N.S.I.E.G.
CHIAVERINA Jean	U.E.R.M.C.P.P.
COHEN Joseph	E.N.S.E.R.G.
COUMES André	E.N.S.E.R.G.
DURAND Francis	E.N.S.E.E.G.
DURAND Jean-Louis	E.N.S.I.E.G.
FELICI Noël	E.N.S.I.E.G.
FOULARD Claude	E.N.S.I.E.G.
GENTIL Pierre	E.N.S.E.R.G.
GUERIN Bernard	E.N.S.E.R.G.
GUYOT Pierre	E.N.S.E.E.G.
IVANES Marcel	E.N.S.I.E.G.
JAUSSAUD Pierre	E.N.S.I.E.G.
JOUBERT Jean-Claude	E.N.S.I.E.G.
JOURDAIN Geneviève	E.N.S.I.E.G.
LACOUME Jean-Louis	E.N.S.I.E.G.
LATOMBE Jean-Claude	E.N.S.I.M.A.G.

.../...

LESSIEUR Marcel	E.N.S.H.G.
LESPINARD Georges	E.N.S.H.G.
LONGEQUEUE Jean-Pierre	E.N.S.I.E.G.
MAZARE Guy	E.N.S.I.M.A.G.
MOREAU René	E.N.S.H.G.
MORET Roger	E.N.S.I.E.G.
MOSSIERE Jacques	E.N.S.I.M.A.G.
PARIAUD Jean-Charles	E.N.S.E.E.G.
PAUTHENET René	E.N.S.I.E.G.
PERRET René	E.N.S.I.E.G.
PERRET Robert	E.N.S.I.E.G.
PIAU Jean-Michel	E.N.S.H.G.
POLOUJADOFF Michel	E.N.S.I.E.G.
POUPOT Christian	E.N.S.E.R.G.
RAMEAU Jean-Jacques	E.N.S.E.E.G.
RENAUD Maurice	U.E.R.M.C.P.P.
ROBERT André	U.E.R.M.C.P.P.
ROBERT François	E.N.S.I.M.A.G.
SABONNADIERE Jean-Claude	E.N.S.I.E.G.
SAUCIER Gabrielle	E.N.S.I.M.A.G.
SCHLENKER Claire	E.N.S.I.E.G.
SCHLENKER Michel	E.N.S.I.E.G.
SERMET Pierre	E.N.S.E.R.G.
SILVY Jacques	U.E.R.M.C.P.P.
SOHM Jean-Claude	E.N.S.E.E.G.
SOUQUET Jean-Louis	E.N.S.E.E.G.
VEILLON Gérard	E.N.S.I.M.A.G.
ZADWORNY François	E.N.S.E.R.G.

PROFESSEURS ASSOCIES

BASTIN Georges	E.N.S.H.G.
BERRIL John	E.N.S.H.G.
CARREAU Pierre	E.N.S.H.G.
GANDINI Alessandro	U.E.R.M.C.P.P.
HAYASHI Hirashi	E.N.S.I.E.G.

PROFESSEURS UNIVERSITE DES SCIENCES SOCIALES (Grenoble II)

BOLLIET Louis
Chatelin Françoise

PROFESSEURS E.N.S. Mines de Saint-Etienne

RIEU Jean
SOUSTELLE Michel

CHERCHEURS DU C.N.R.S.

FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
VACHAUD Georges	Directeur de Recherche

.../...

ALLIBERT Michel	Maître de Recherche
ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
ARMAND Michel	Maître de Recherche
BINDER Gilbert	
CARRE René	Maître de Recherche
DAVID René	Maître de Recherche
DEPORTES Jacques	
DRIOLE Jean	Maître de Recherche
GIGNOUX Damien	
GIVORD Dominique	
GUELIN Pierre	
HOPFINGER Emil	Maître de Recherche
JOUD Jean-Charles	Maître de Recherche
KAMARINOS Georges	Maître de Recherche
KLEITZ Michel	Maître de Recherche
LANDAU Ioan-Dore	Maître de Recherche
LASJAUNIAS J.C.	
MERMET Jean	Maître de Recherche
MUNIER Jacques	Maître de Recherche
PIAU Monique	
PORTESEIL Jean-Louis	
THOLENCE Jean-Louis	
VERDILLON André	

CHERCHEURS du MINISTERE de la RECHERCHE et de la TECHNOLOGIRE (Directeurs et Maîtres de Recherches, ENS Mines de St. Etienne)

LESBATS Pierre	Directeur de Recherche
BISCONDI Michel	Maître de Recherche
KOBYLANSKI André	Maître de Recherche
LE COZE Jean	Maître de Recherche
LALAUZE René	Maître de Recherche
LANCELOT Francis	Maître de Recherche
THEVENOT François	Maître de Recherche
TRAN MINH Canh	Maître de Recherche

PERSONNALITES HABILITEES à DIRIGER des TRAVAUX de RECHERCHE (Décision du Conseil Scientifique)

ALLIBERT Colette	E.N.S.E.E.G.
BERNARD Claude	E.N.S.E.E.G.
BONNET Rolland	E.N.S.E.E.G.
CAILLET Marcel	E.N.S.E.E.G.
CHATILLON Catherine	E.N.S.E.E.G.
CHATILLON Christian	E.N.S.E.E.G.
COULON Michel	E.N.S.E.E.G.
DIARD Jean-Paul	E.N.S.E.E.G.
EUSTAPOPOULOS Nicolas	E.N.S.E.E.G.
FOSTER Panayotis	E.N.S.E.E.G.

.../...

GALERIE Alain	E.N.S.E.E.G.
HAMMOU Abdelkader	E.N.S.E.E.G.
MALMEJAC Yves	E.N.S.E.E.G. (CENG)
MARTIN GARIN Régina	E.N.S.E.E.G.
NGUYEN TRUONG Bernadette	E.N.S.E.E.G.
RAVAINE Denis	E.N.S.E.E.G.
SAINFORT	E.N.S.E.E.G. (CENG)
SARRAZIN Pierre	E.N.S.E.E.G.
SIMON Jean-Paul	E.N.S.E.E.G.
TOUZAIN Philippe	E.N.S.E.E.G.
URBAIN Georges	E.N.S.E.E.G. (Laboratoire des ultra-réfractaires ODEILLON)
GUILHOT Bernard	E.N.S. Mines Saint Etienne
THOMAS Gérard	E.N.S. Mines Saint Etienne
DRIVER Julien	E.N.S. Mines Saint Etienne
BARIBAUD Michel	E.N.S.E.R.G.
BOREL Joseph	E.N.S.E.R.G.
CHOVET Alain	E.N.S.E.R.G.
CHEHIKIAN Alain	E.N.S.E.R.G.
DOLMAZON Jean-Marc	E.N.S.E.R.G.
HERAULT Jeanny	E.N.S.E.R.G.
MONLLOR Christian	E.N.S.E.R.G.
BORNARD Guy	E.N.S.I.E.G.
DESCHIZEAU Pierre	E.N.S.I.E.G.
GLANGEAUD François	E.N.S.I.E.G.
KOFMAN Walter	E.N.S.I.E.G.
LEJEUNE Gérard	E.N.S.I.E.G.
MAZUER Jean	E.N.S.I.E.G.
PERARD Jacques	E.N.S.I.E.G.
REINISCH Raymond	E.N.S.I.E.G.
ALEMANY Antoine	E.N.S.H.G.
BOIS Daniel	E.N.S.H.G.
DARVE Félix	E.N.S.H.G.
MICHEL Jean-Marie	E.N.S.H.G.
OBLED Charles	E.N.S.H.G.
ROWE Alain	E.N.S.H.G.
VAUCLIN Michel	E.N.S.H.G.
WACK Bernard	E.N.S.H.G.
BERT Didier	E.N.S.I.M.A.G.
CALMET Jacques	E.N.S.I.M.A.G.
COURTIN Jacques	E.N.S.I.M.A.G.
COURTOIS Bernard	E.N.S.I.M.A.G.
DELLA DORA Jean	E.N.S.I.M.A.G.
FONLUPT Jean	E.N.S.I.M.A.G.
SIFAKIS Joseph	E.N.S.I.M.A.G.
CHARUEL Robert	U.E.R.M.C.P.P.
CADET Jean	C.E.N.G.
COEURE Philippe	C.E.N.G. (LETI)

.../...

DELHAYE Jean-Marc	C.E.N.G. (STT)
DUPUY Michel	C.E.N.G. (LETI)
JOUVE Hubert	C.E.N.G. (LETI)
NICOLAU Yvan	C.E.N.G. (LETI)
NIFENECKER Hervé	C.E.N.G.
PERROUD Paul	C.E.N.G.
PEUZIN Jean-Claude	C.E.N.G. (LETI)
TAIEB Maurice	C.E.N.G.
VINCENDON Marc	C.E.N.G.

LABORATOIRES EXTERIEURS

DEMOULIN Eric	C.N.E.T.
DEVINE	C.N.E.T. (R.A.B.)
GERBER Roland	C.N.E.T.
MERCKEL Gérard	C.N.E.T.
PAULEAU Yves	C.N.E.T.
GAUBERT C.	I.N.S.A. Lyon

A Susan et Jennifer,

Mary et Ménélas.

Qu'il me soit permis de remercier Monsieur Jean René BARRA pour m'avoir initié aux charmes de la statistique mathématique et pour m'avoir fait l'honneur de présider le Jury.

Ces travaux doivent beaucoup à Messieurs René CARMONA et Jean-Louis SOLER, qui ont su, dans des styles bien différents, me guider, m'écouter, me corriger et m'encourager depuis plusieurs années ; qu'ils trouvent dans ces lignes le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Que Monsieur Ulf GRENANDER sache combien je suis sensible à l'intérêt qu'il a porté à ce travail et à l'honneur qu'il me fait de participer au Jury ; qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je désire également remercier Monsieur Bernard MAISONNEUVE et Mademoiselle Simone CHEVET pour l'attention qu'ils ont portée à mes travaux, pour leurs suggestions et pour l'honneur qu'ils m'ont fait de participer au Jury.

Mes remerciements vont aussi à tous mes amis qui, à des titres divers, m'ont apporté leur soutien. Que Monsieur Alain LE BRETON en particulier trouve ici le témoignage de ma reconnaissance.

Madame Anne-Marie STRANO a assuré avec la plus grande compétence, sans ménager sa peine ni son temps et toujours avec gentillesse, la dactylographie de tous mes travaux ; je l'en remercie vivement.

Mes remerciements vont enfin à Messieurs ANGUILLE et IGLESIAS et au service de tirage pour le soin et la qualité qu'ils ont apportés dans la réalisation matérielle de cette thèse.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Ce travail cherche à contribuer à l'analyse statistique de certaines mesures gaussiennes sur des espaces fonctionnels de dimension infinie (généralement des espaces de Banach) en ce qui concerne ses fondements et ses applications. Nous donnons ici une présentation unifiée de travaux déjà publiés ou acceptés pour publication. L'essentiel de la première partie de ce travail est consacré à certains problèmes d'estimation et de test de la moyenne d'un processus gaussien dont une trajectoire est observée. Les résultats obtenus nous ont permis de proposer une généralisation de l'analyse de la variance dans le cas de facteurs à variation continue et de traiter certaines applications. La dernière partie regroupe des résultats permettant l'évaluation numérique des régions critiques des tests présentés. Nous renvoyons le lecteur aux articles correspondants pour une étude détaillée et les démonstrations.

Depuis longtemps des statisticiens se sont intéressés à l'étude statistique des processus aléatoires gaussiens et plus particulièrement aux problèmes d'estimation de la moyenne de ces processus. Une solution générale du problème d'existence d'estimateurs linéaires de la moyenne fut donnée par U. GRENANDER ([26 a], [26 b]) ; il avait aussi envisagé ([26 b]) le calcul effectif de ces estimateurs pour certains processus stochastiques. L'outil principal utilisé alors par GRENANDER était une représentation en série orthogonale des processus en question, dite représentation de Karhunen-Loève. La théorie des espaces autoreproduisants fut pour la première fois appliquée dans les problèmes d'estimation par E. PARZEN ([38]), qui fournit des estimations basées sur une discrétisation de la trajectoire observée du processus. Plus tard, Y.V. ROZANOV ([45]) clarifiat le rôle des espaces autoreproduisants dans les problèmes d'estimation linéaire de la moyenne d'un processus gaussien et en donnait une représentation géométrique (développée également par T. KAILATH ([30 a]). En grande partie ces travaux ont en commun l'étude des problèmes de statistique issus d'observations de processus gaussiens dont le paramétrage est de dimension finie. Les solutions qui y sont proposées se prêtent mal au calcul pratique. Nous appuyant sur certains résultats sur les espaces de Wiener abstraits selon L. GROSS ([29]), dans le premier chapitre de ce travail nous formulons nos résultats dans l'esprit de la statistique mathématique infinidimensionnelle introduite par J.L. SOLER ([50]). Ce premier chapitre regroupe les résultats de deux articles ([3], [4]) et il développe des méthodes d'estimation et de test de la moyenne de fonction aléatoires gaussiennes en les présentant comme des généralisations naturelles des méthodes classiques d'analyse multidimensionnelle.

Un article ([6]) à paraître en 1984 et une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris ([5]) constituent le deuxième chapitre. La théorie des produits tensoriels d'espaces de Wiener abstraits et les résultats de S. CHEVET ([16]) et de R. CARMONA ([13]) sur ces produits tensoriels sont utilisés pour présenter une généralisation de l'analyse de la variance de la moyenne d'un processus gaussien lorsque l'ensemble des niveaux des facteurs est quelconque. Les tests d'hypothèses linéaires du chapitre I fournissent alors une solution satisfaisante au problème de l'analyse de la variance.

Le troisième chapitre est consacré à l'amélioration de certains travaux de J.B. WALSH ([5A]) sur un modèle probabiliste de la décharge électrique d'un neurone. Le formalisme des chapitres précédents conduit à la définition d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension infinie. Certains résultats de R. CARMONA et A. KLEIN ([15]) permettent de donner de nouvelles propriétés de ce processus. Sa covariance n'est plus un produit direct de covariances et les hypothèses du chapitre II sous lesquelles l'analyse de la variance a été développée ne sont pas satisfaites. Néanmoins les idées essentielles sont adaptées grâce à une représentation de l'espace autoreproduisant du processus d'Ornstein-Uhlenbeck en intégrale hilbertienne de produits tensoriels d'espaces autoreproduisants. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication ([7]).

Dans le dernier chapitre nous nous intéressons au calcul effectif des régions critiques des tests quadratiques utilisés dans les chapitres précédents. Nous y présentons les résultats d'un rapport de recherche ([9]) sur les formes quadratiques de processus gaussiens.
Après avoir passé en revue la plupart des méthodes d'évaluation exacte ou approchée des fonctions de répartition des statistiques utilisées nous nous contentons de réaliser ce calcul pour les tests qui impliquent le mouvement brownien. En effet un résultat, ayant un intérêt indépendant, paru dans une note aux Comptes Rendus ([8]), fournit une méthode assez générale de transformation d'un processus gaussien à covariance connue en un processus de Wiener à valeurs vectorielles. En annexe à ce chapitre les méthodes des chapitres précédents sont illustrées par des simulations et quelques tables statistiques des applications envisagées sont données.

D'une manière générale ce travail tente de donner un nouvel éclairage sur certains problèmes de décision sur les structures statistiques infinidimensionnelles. Les outils d'analyse utilisés permettent d'obtenir des réponses satisfaisantes à ces problèmes et de mener à bien certaines applications.

CHAPITRE I

PROBLEMES DE DECISION SUR STRUCTURES STATISTIQUES GAUSSIENNES DE DIMENSION INFINIE A MOYENNE INCONNUE

Nous résumons dans ce chapitre les principaux résultats de [3] et [4]. Une extension en dimension infinie de la théorie de l'estimation et des tests d'hypothèses linéaires sur la moyenne d'un processus gaussien est donnée et une méthode d'estimation de la dimension de certains espaces gaussiens est proposée. Nous rappelons brièvement les problèmes posés et nous les situons dans le contexte de la théorie des structures statistiques infinidimensionnelles.

Les résultats préliminaires utiles pour la suite ainsi que les notations qui seront valables tout au long de ce mémoire sont regroupés dans le premier paragraphe. Les résultats sont énoncés sous forme de proposition dans les paragraphes suivants. Le dernier paragraphe est consacré à des exemples illustratifs. ■

Nous observons une fonction aléatoire gaussienne réelle $(X_t)_{t \in T}$ à trajectoires continues de variance connue Q sur $T \times T$ et de moyenne inconnue m.

La structure statistique associée à cette observation est

$$(C(T) \, , \, \mathcal{B}(C(T)) \quad , \quad \{ N_{C(T)} (m , Q) \; ; \; m \in \Theta \subset \mathcal{H}(Q) \; \})$$

où $C(T)$ désigne l'espace des fonctions numériques continues sur l'espace topologique T.

L'ensemble Θ traduit une hypothèse a priori sur la moyenne inconnue m, la condition $\Theta \subset \mathcal{H}(Q)$ rendant la structure statistique dominée. Souvent Θ sera un sous-ensemble de $\mathcal{H}(Q)$ contenant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(Q)$. Nous obtenons alors des tests d'hypothèses linéaires sur m, c'est-à-dire des tests de l'hypothèse "$m \in V$" contre "$m \notin V$" pour certains sous-espaces V contenus dans Θ.

Dans le cas où T est un ensemble fini le test fait intervenir une forme quadratique de l'estimateur x_V de la moyenne m_V, projection orthogonale de l'observation x (resp. de m) sur un sous-espace vectoriel V contenu dans Θ. Lorsque T est infini, l'espace autoreproduisant $\mathcal{H}(Q)$ est de mesure nulle pour $N(0,Q)$ dès qu'il est de dimension infinie et donc l'observation x ne saurait être projetée sur un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(Q)$. Néanmoins, dans [3], nous avons conservé l'idée de projection et nous avons proposé une solution satisfaisante du problème, solution qui d'une part est adaptée au calcul et qui d'autre part permet de faire les liens avec les résultats existants sur l'estimation de formes linéaires de m obtenus par E. PARZEN ([38]) et Y.V. ROZANOV ([45]).

En général la dimension des sous-espaces V est inconnue. Nous proposons une méthode d'estimation de cette dimension et nous étudions ses propriétés asymptotiques.

§ 1. NOTATIONS - PRELIMINAIRES.

Sauf mention explicite du contraire tous les éléments aléatoires considérés seront définis sur le même espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{A}, P_r)$. Si B est un espace de Banach réel séparable, nous notons $\|\cdot\|_B$ sa norme, B^* son dual topologique et $(\cdot,\cdot)$ la forme bilinéaire canonique mettant B^* et B en dualité séparante (i.e si $f \in B^*$ et $x \in B$, $f(x)$ sera noté (f,x)). Tout opérateur linéaire continu et idempotant sur B sera un projecteur dans B et I_B désignera l'opérateur identité de B. Dans la suite μ sera une mesure de probabilité sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de B de carré fortement intégrable et centrée, c'est-à-dire telle que $\int_B \|x\|^2 \, d\mu(x) < +\infty$ et $\int_B x \, d\mu(x) = 0$.

Comme la mesure μ est de carré fortement intégrable, l'intégrale de Bochner $\int_B f(y) \, y \, d\mu(y)$ est parfaitement définie pour tout f dans $L^2(B, \mathcal{B}, \mu)$ et définit un élément de B . Soit S l'opérateur linéaire de $L^2(B, \mathcal{B}, \mu)$ dans B défini par

$$S f = \int_B f(y) \, y \, d\mu(y) .$$

Nous avons (cf. [32]) : $\|Sf\|_B \leq \left(\int_B \|y\|^2 \, d\mu(y) \right)^{1/2} \|f\|_{L^2}$ (1)

et par conséquent S est continu. En identifiant $L^2(B, \mathcal{B}, \mu)$ a son dual, il est possible de définir l'opérateur adjoint S^* de S selon

$$\langle S^* x^*, f \rangle_{L^2} = (x^*, Sf) = \int_B x^*(y) \, f(y) \, d\mu(y)$$

pour toute $f \in L^2(B, \mu)$ et tout $x^* \in B^*$. Il est clair que S^* n'est autre que l'application qui à tout élément de B^* associe sa classe d'équivalence dans $L^2(B, \mathcal{B}, \mu)$. Nous noterons H la fermeture dans $L^2(B, \mu)$ de $S^*(B^*)$; nous obtenons bien entendu un espace de Hilbert séparable. De plus $\operatorname{Ker} S = H^\perp$ et $\operatorname{Im} S = S(H)$. En effet $Sf = 0$ équivaut à $(x^*, Sf) = 0$ pour tout x^* de B^* , donc à $f \in S^*(B^*)^\perp = H^\perp$; il suffit ensuite de décomposer L^2 en $L^2 = H \oplus H^\perp$ pour voir que $\operatorname{Im} S = S(H)$. Nous poserons $S(H) = \mathcal{H}_\mu$ et nous désignerons par ψ l'application de H sur $\mathcal{H}_\mu$ restriction de S à H . Il est clair que ψ est bijective.

Ainsi $\mathcal{H}_\mu$ est en correspondance bijective linéaire avec l'espace de Hilbert H , de sorte qu'on peut transporter la structure hilbertienne de H sur l'espace $\mathcal{H}_\mu$. De plus avec l'inégalité (1) l'inclusion naturelle de $\mathcal{H}_\mu$ dans B , notée j , est continue et compacte (cf. [32]). En notant j^* l'opérateur $S \circ S^*$ de B^* dans $\mathcal{H}_\mu$ le mécanisme des applications introduites se résument avec le diagramme suivant :

$$B^* \xrightarrow[j^*]{} \mathcal{H}_\mu \xhookrightarrow[j]{} B$$

et permettront de résoudre certains des problèmes de statistique que nous avons envisagé.

Si $\{e_i^*, i \geq 1\}$ est une famille de B^* telle que $\{S^*(e_i^*), i \geq 1\}$ soit une base orthonormée de H alors $\{j^*(e_i^*), i \geq 1\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}_\mu$. Pour tout entier $n \geq 1$ nous noterons

$$\pi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (e_k^*, x)\, e_k \quad , \quad e_k = j j^*(e_k^*) \ , \ x \in B \ .$$

L'opérateur linéaire et continu de B dans B ainsi défini est idempotant : c'est un projecteur. Sa restriction à $\mathcal{H}_\mu$ est la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_n$ de $\mathcal{H}_\mu$ engendré par $\{e_i, i = \overline{1,n}\}$.

Dans la suite μ sera supposée gaussienne centrée (la condition $\int_B \|x\|^2 \, d\mu(x) < +\infty$ est alors satisfaite). L'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\mu$ est alors l'espace autoreproduisant associé au noyau de covariance K_μ de μ défini par

$$K_\mu(x^*, y^*) = \int_B x^*(z)\, y^*(z)\, d\mu(z) \qquad (x^*, y^*) \in B^* \times B^* \ .$$

Dans le cas gaussien nous avons $\mu(\mathcal{H}_\mu) = 0$ et $\mu(\overline{\mathcal{H}_\mu}) = 1$. De plus la suite des projecteurs $(\pi_n)_{n \geq 1}$ converge fortement vers l'identité I_B μ- presque sûrement. Le triplet $(j, \mathcal{H}_\mu, B)$ est ainsi un espace de Wiener abstrait (cf. [29]) dans le sens où j transforme la mesure cylindrique gaussienne canonique de $\mathcal{H}_\mu$ en une vraie mesure sur B, à savoir la mesure gaussienne μ.

Le plongement $j j^*$ de B^* dans B ayant un rôle important dans les applications envisagées il s'agira de le caractériser.

§2. ESTIMATION ET TESTS QUADRATIQUES.

Nous étudions successivement l'estimation sans biais de la moyenne m et certains tests quadratiques d'hypothèses linéaires dans la structure statistique gaussienne

$$\Sigma = (B, \mathcal{B}, \{P_m ; m \in \mathcal{H}(Q)\})$$

où $P_m = N_B(m,Q)$.

Donnons d'abord une définition ([3]).

Définition 1.2.

"Dans la structure statistique Σ un estimateur sans biais $\hat{m}$ de m est dit efficace si et seulement si pour tout estimateur sans biais $\tilde{m}$ de m et tout y dans B^* on a

$$\mathbb{E}_{P_m}\left((y, \hat{m}-m)^2_{B^*,B}\right) \leq \mathbb{E}_{P_m}\left((y, \tilde{m}-m)^2_{B^*,B}\right).$$

Dans les applications, on veut tester l'appartenance de m a des sous-espaces V de $\mathcal{H}(Q)$, quand V parcourt une famille donnée de sous-espaces $\mathcal{H}_n$ de $\mathcal{H}(Q)$ de la forme définie au paragraphe précédent et dont l'union $\bigcup_n \mathcal{H}_n$ est dense dans $\mathcal{H}(Q)$ (voir exemple 3.1. du paragraphe 3).

Pour tout entier $N \geq 1$, nous noterons Σ_N la structure gaussienne définie par

$$\Sigma_N = (B, \mathcal{B}, \{P_m ; m \in \mathcal{H}_N \subset \mathcal{H}(Q)\})$$

et Σ_ω sera la structure définie par :

$$\Sigma_\infty = (B\,,\ \mathcal{B}\{P_m\ ;\ m \in j^*(B^*) \subset \mathcal{H}(Q)\ \}\ )\ .$$

L'entier N définit la dimension du modèle linéaire gaussien. Nous pouvons maintenant énoncer ([4] prop.3.1, th.3.3)

PROPOSITION 1.2.

"Pour tout entier $n \geq 1$, la statistique $x \longrightarrow \pi_n(x)$ définie sur $\Sigma_n = (B, \mathcal{B}\{P_m\ ;\ m \in \mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}(Q)\ \})$ où π_n est le projecteur de B sur $\mathcal{H}_n$ définit un estimateur linéaire sans biais de m exhaustif et de variance minimum. De plus sur Σ_∞ la suite $(\pi_n(x)\ ,\ n \geq 1)$ est une suite d'estimateurs asymptotiquement efficaces ".

Pour tout $n \geq 1$, les structures statistiques Σ_n ainsi que Σ_∞ sont exponentielles canoniques saturées ([49]). La proposition est alors une conséquence de la proposition 4, chapitre IV, paragraphe 3 de [50]. Nous renvoyons le lecteur à [4] pour la démonstration complète.

REMARQUE 1.2. - Nous avons considéré dans la proposition 1.2 des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{H}(Q)$ contenus dans $j^*(B^*)$. Au cas où V serait un sous-espace vectoriel quelconque de $\mathcal{H}(Q)$ de dimension n ayant pour base les vecteurs $\{v_k\ ,\ k = \overline{1,n}\ \}$, chacun des éléments $\psi^{-1}(v_k)$ de H définit une variable aléatoire linéaire sur B, c'est-à-dire une fonctionnelle B-mesurable définie et linéaire sur un sous-espace vectoriel B_k de B de $P_o = \mu$ probabilité égale à 1. (cf. [38] ou [45]). Le choix d'une détermination de $\sum_{i=1}^{n} v_i\ \psi^{-1}(v_i)$ conduit à un estimateur linéaire sans biais de m de variance minimum, estimateur défini sur $\bigcap_{k=1}^{n} B_k$ à valeurs dans V. C'est la méthode d'estimation de m proposée par Y. ROZANOV dans [45] et par E. PARZEN dans [38]. Cette méthode reste néanmoins théorique car elle nécessite la connaissance de ψ et surtout une caractérisation de $\bigcap_{i\geq 1}^{n} B_i$. Le choix des $\mathcal{H}_n$ évite ce problème et permet le calcul immédiat de l'estimation au vu de l'observation.

La proposition 1.2. conduit à une extension simple en dimension infinie des tests d'hypothèses linéaires classiques. En particulier ([4])

PROPOSITION 2.2.

" Soit $(X(t))_{t\in T}$ une fonction aléatoire gaussienne à trajectoires continues sur un espace métrique compact T de noyau de covariance K continu sur $T\times T$ et de moyenne dans $\mathcal{H}(Q)$. Avec les notations précédentes, pour tout nombre réel α de $[0,1]$, il existe au moins un test déterministe de l'hypothèse linéaire " $m\in\mathcal{H}_n$ " contre " $m\notin\mathcal{H}_n$ " , sans biais, de seuil α . Ce test quadratique est de la forme

$$x\in C(T)\qquad \varphi_{\mu,\ell_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si}\quad [q_\mu\circ(I-\pi_n)(x)]^{1/2} > \ell_\alpha \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

où $q_\mu(x) = \int_T x^2(t)\,d\mu(t)$ et $\mu\in M^+(T)$ cône des mesures boréliennes positives sur T . "

L'objet du dernier chapitre de ce mémoire est en partie le calcul de la constante ℓ_α pour certains processus gaussiens et certaines mesures boréliennes positives μ .

La méthode d'estimation et de test de la moyenne des propositions précédentes repose sur une seule observation dans les structures statistiques correspondantes. En particulier l'estimation est optimale lorsque la dimension du modèle est connue. Nous nous proposons maintenant, lorsqu'on dispose d'un échantillon dans Σ_∞ d'estimer l'indice de la dernière composante non nulle de m sur la base $(e_i)_{i\geq 1}$ de $\mathcal{H}(Q)$ avec l'éventualité d'une détermination infinie au cas où m n'appartiendrait à aucun des sous-espaces vectoriels $\mathcal{H}_n$.

Le sous-ensemble $j^*(B^*)$ de $\mathcal{H}(Q)$ peut se partitionner sous la forme

$$j^*(B^*) = \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k \qquad .$$

avec $M_k = \mathcal{H}_k \setminus \mathcal{H}_{k-1}$, $\mu_o = 0$ et $M_\infty = j^*(B^*) \setminus \bigcup_{1\leq k<+\infty} \mathcal{H}_k$ ([ ]) .

Si dans la structure statistique Σ_∞ , le paramètre m appartient à M_k nous dirons que k est la dimension de m .

Avant d'énoncer les résultats, rappelons la définition suivante ([32]) :

DEFINITION 2.2.

Soit μ une mesure de probabilité sur $(B, \mathcal{B})$, centrée de noyau de covariance K et fortement d'ordre 2. On dit que la mesure μ satisfait la loi du logarithme itéré si et seulement si pour toute suite d'éléments aléatoires à valeurs dans B indépendants et de loi μ on a

$$P_r\left(\left\{\omega \,;\, \left\{\frac{S_n(\omega)}{\sqrt{2n \log\log n}} \,;\, n\geq 1\right\} \begin{array}{l}\text{est conditionnellement}\\ \text{compact dans } B\end{array}\right\}\right) = 1$$

où $(S_n)_{n\geq 1}$ désigne la suite des sommes partielles. ∎

Ainsi si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un échantillon de taille infinie dans Σ_∞ , la loi commune des variables aléatoires $(X_n - m)$ est P_o et P_o satisfait la loi du logarithme itéré (cf. [32]).

Pour tout x de B et tout ε réel strictement positif posons

$$r(x,\varepsilon) = \min\{k \in \mathbb{N} \; ; \; \|(I-\pi_k)(x)\|_B < \varepsilon\}$$

où I est l'opérateur identité de B et π_k est le projecteur de B sur $\mathcal{H}_k$. Nous avons alors ([3]) :

PROPOSITION 3.2.

"Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un échantillon de taille infinie sur Σ_∞. Il existe une constante réelle positive c telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, $r(\overline{X}_n, \varphi_n(\varepsilon, c))$ est un estimateur de la dimension du paramètre m Pr-presque sûrement convergent, où $\varphi_n(\varepsilon,c) = \left(\frac{2 \operatorname{Log} \log n}{n}\right)^{1/2} (\varepsilon + c)$ et $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$."

REMARQUE 2.2. - Nous renvoyons le lecteur à [3] pour une démonstration directe de cette proposition. Dans [4] une démonstration y est donnée mais nécessite une modification de B en un espace de Banach séparable B_o possédant une base de Schauder. La constante c est donnée par $c = \sup\{\|q_k(x)\|_B \; ; \; k \geq 1 \; , \; x \in K\}$ où $q_k = I_B - \pi_k$.

§3. EXEMPLES.

Nous nous proposons dans ce paragraphe de regarder certains exemples spécifiques illustrant les notions précédentes et qui seront repris tout au long de ce mémoire.

Notons ici qu'en analyse multidimensionnelle classique les structures statistiques auxquelles nous avons à faire sont toujours dominées. Pour des processus stochastiques gaussiens tels qu'ils ont été étudiés dans les paragraphes précédents l'hypothèse de l'appartenance de la moyenne à l'espace autoreproduisant est une condition nécessaire et suffisante d'absolue continuité des mesures P_m à P_o. Cette hypothèse pourrait être apparemment sujette à critiques. En fait, reprenant les arguments de SLEPIAN ([48]), une hypothèse de perpendicularité de P_m à P_o signifierait plutôt que le modèle statistique proposé manque de réalisme car trop spécifique. C'est ce point de vue que nous avons adopté dans la suite. D'autre part dans les modèles classiques finidimensionnels la covariance des éléments aléatoires observés est supposée connue à un facteur positif près. Apparemment donc, l'hypothèse d'une fonction de covariance entièrement connue dans les structures statistiques que nous considérons est assez restrictive. En réalité elle est simplement une conséquence du fait que l'on peut observer entièrement une ou plusieurs trajectoires des processus gaussiens en question, du moins pour les exemples que nous considérons.

<u>EXEMPLE 1.3</u>. - Soit $B = C([0,1])$ l'espace de Banach des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ (pour la norme de la convergence uniforme). Le dual topologique B^* de B est l'espace $M([0,1])$ des mesures boréliennes bornées sur $[0,1]$. Nous considérons ici le cas où P_o est la mesure de Wiener sur $C([0,1])$, c'est-à-dire la mesure gaussienne centrée sur B dont le noyau de covariance K est défini par

$$K(\mu,\nu) = \int_0^1 \int_0^1 \min(s,t)\ d\mu(s)\ d\nu(t) \qquad \mu,\nu \in M([0,1]) .$$

Nous avons alors ([3]) :

PROPOSITION 1.3.

L'espace autoreproduisant $\mathcal{H}(K)$ associé à la mesure de Wiener sur $C([0,1])$ est l'espace des fonctions continues de la forme $f(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ avec $g \in L^2([0,1], dt)$. Il est muni du produit scalaire défini par

$$\langle f , h \rangle_{\mathcal{H}(K)} = \int_0^1 \dot{f}(u)\ \dot{h}(u)\ du .$$

Le plongement naturel j^* de $M([0,1])$ dans $\mathcal{H}(K)$ est donné par

$$\mu \in M([0,1]) \qquad j^*(\mu)\ (x) = \int_0^x \mu([t,1])\ dt ,$$

et l'image $j^*(M([0,1]))$ contient tout polynôme défini sur $[0,1]$ et admettant zéro pour racine.

Nous obtenons ([4] Proposition 4.1)

PROPOSITION 2.3.

Soit la structure statistique de Wiener

$$[\ C([0,1]) ,\ \mathcal{B}(C([0,1])) ,\ \{N(m, Q_K) \ ;\ m \in \mathcal{H}(K)\ \}\ ]$$

et soit $\mathcal{H}_k$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(K)$ constitué des polynômes réels de degré au plus égal à k et admettant zéro pour racine.

La statistique π_k de $C([0,1])$ dans $\mathcal{H}_k$ est définie par :

$$x \longrightarrow \pi_k(x) \quad \text{où} \quad \pi_k(x)(t) = \sum_{i=1}^{k} h_i^{[k]}(x)\ t^i \quad , \ t \in [0,1] \ ,$$

avec pour x dans $C([0,1])$

$$h_i^{[k]}(x) = x(1)\, p_i(1) - \int_0^1 x(t)\, \mathring{p}_i(t)\, dt$$

où

$$p_i(t) = \frac{(-1)^{i-1}\, k(k+i-1)\,!}{i^2\, [(i-1)\,!]^2\, (k-i)\,!} \quad {}_3F_2(-k+1,\ k+1,\ i\,;\ i+1,\ 1\,;\ t) \ .$$

Les fonction hypergéométriques ${}_pF_q$. sont données par

$${}_pF_q(s_1, s_2, \ldots, s_p\ ;\ t_1, \ldots, t_q\ ;\ u) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(s_1)_r \ldots (s_p)_r}{(t_1)_r \ldots (t_q)_r} \ \frac{u^r}{r\,!}$$

avec $(s)_r = s(s+1)\ldots(s+r-1)$ et $(s)_o \equiv 1$.

PROPOSITION 3.3. ([9])

Soit la structure statistique de Wiener

$$[\ C([0,1])\ ,\ \mathcal{B}(C([0,1]))\ ,\ \{N(m, Q_K)\ ;\ m \in \mathcal{H}(K)\}\ ]$$

et soit $\mathcal{H}_{k+1}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(K)$ engendré par la famille de fonctions $\{\varphi_o, \varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ définies par

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n\pi\sqrt{2}} \sin(n\pi t) \ , \ n \geq 1 \ , \text{ et } \ \varphi_o(t) = t \ .$$

<u>Quel que soit</u> k <u>entier</u>, $\mathcal{H}_{k+1}$ <u>est contenu dans</u> $j^*(M([0,1]))$.

<u>La statistique</u> π_{k+1} <u>de</u> $C([0,1])$ <u>dans</u> $\mathcal{H}_{k+1}$ <u>est définie par</u>

$$\pi_{k+1}(x)\ (t) = \sum_{i=0}^{k} \xi_i(x)\, \varphi_i(t) \quad \underline{\text{avec}} \quad \xi_o(x) = x(1) \quad \underline{\text{et}}$$

$$\xi_i(x) = (-1)^i (\sqrt{2}) \ \ x(1) + (\sqrt{2}) \ \ i\pi \int_0^1 x(t) \sin(i\pi t)\, dt \quad \underline{\text{pour}} \quad i \geq 1 \ .$$

Pour terminer citons un deuxième exemple que nous utiliserons dans la suite.

<u>EXEMPLE 2.3</u>. Processus de vitesse d'Ornstein-Uhlenbeck réel.

Soit $B = C([0,T])$ l'espace de Banach des fonctions réelles continues sur $[0,T]$ où T est un nombre réel strictement positif. Nous considérons ici la mesure gaussienne centrée P_o sur B de noyau de covariance K défini sur B^* par

$$K(\mu,\nu) = \int_0^T \int_0^T \exp(-\alpha\,|t-s|)\ d\mu(s)\ d\nu(t) \qquad \mu,\nu \in M([0,T]) \ .$$

Notons ρ la mesure borélienne positive sur $[0,T]$ définie par

$$d\rho(u) = 2\,\alpha\ e^{-2\alpha u}\ du + e^{-2\alpha T}\ \delta_T\ (du)$$

où δ_T est la mesure de Dirac concentrée en $\{T\}$.

<u>PROPOSITION 4.3.</u>

<u>L'espace autoreproduisant</u> $\mathcal{H}(K)$ <u>associé au processus d'Ornstein-</u>

Uhlenbeck de paramètre α sur $[0,T]$ est l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ de la forme

$$f(t) = e^{\alpha t} \int_t^T g(u)\, d\rho(u) \qquad \text{avec} \qquad g \in L^2([0,T],\, d\rho) \ .$$

Il est muni du produit scalaire défini par

$$\langle f , h \rangle_{\mathcal{H}(K)} = \frac{1}{2} \{ f(0)\, h(0) + f(T)\, h(T) \} + \frac{1}{2\alpha} \int_0^T (\dot{f}\dot{h} + \alpha^2 f g)\, du \ .$$

Le plongement naturel j^* de $M([0,T])$ dans $\mathcal{H}(K)$ est donné par :

$$j^*(\mu)\,(t) = e^{\alpha t} \int_t^T \left(\int_0^u e^{\alpha y}\, d\mu(y) \right) d\rho(u) \quad , \quad \mu \in M([0,T])$$

et $j^*(M([0,T]))$ contient tout polynôme réel défini sur $[0,T]$.

Le lecteur se reportera à [4] pour la première partie de cette proposition. La deuxième partie est donnée dans [6].

Nous remarquerons ici que

$$1 = j^*(\mu_o)\,(t)$$

$$t = j^*(\mu_1)\,(t)$$

et $t^k = j^*(\mu_k)\,(t)$ pour $k \geq 2$ avec

$$d\mu_o(s) = \frac{1}{2} (\alpha ds + \delta_{\{0\}} + \delta_T)$$

$$d\mu_1(s) = \frac{1}{2\alpha} (\alpha^2 s\, ds - \delta_{\{0\}} + (1 + \alpha T)\, \delta_T)$$

et

$$d\mu_k(s) = \frac{k}{2\alpha} \left\{ \left[\frac{1}{k(k+1)} \alpha^2 s^k - s^{k-2} \right] ds + \frac{1}{k} (\alpha T^k - T^{k-1})\, \delta_T \right\} .$$

Nous pouvons ici aussi en déduire l'expression des statistiques π_n lorsque $\mathcal{H}_n$ est l'espace des polynômes de degré au plus égal à n sur $[0,T]$.

CHAPITRE II

ANALYSE DE LA VARIANCE A VARIATION CONTINUE DU NIVEAU DES FACTEURS

Nous commençons par présenter (paragraphe I) les résultats de [14] et [16] sur le produit tensoriel d'espaces de Wiener abstraits et qui constituent le premier volet des publications [5] et [6]. Le paragraphe 2 résume les résultats de [6]. Enfin le dernier paragraphe est consacré à un exemple d'application. ∎

Les méthodes usuelles d'analyse de la variance d'ordre 2 ont pour but l'étude de l'influence, sur la moyenne d'un phénomène aléatoire gaussien, de deux facteurs prenant respectivement un nombre fini r et s de valeurs. Pour étendre ces méthodes au cas où les ensembles T_1 et T_2 des niveaux des facteurs sont quelconques, les trois espaces $\mathbb{R}^r$, $\mathbb{R}^s$ et $\mathbb{R}^{rs}$ de la théorie finidimensionnelle sont remplacés par les espaces autoreproduisants $\mathcal{H}_i$ $(i=1,2)$ de deux mesures gaussiennes centrées μ_i sur B_i et par leur produit tensoriel $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_2$, où B_i désigne un espace de Banach séparable de fonctions réelles sur T_i. En suivant une démarche analogue à celle de [10], chapitre IV, et grâce aux résultats du chapitre I du présent mémoire nous aboutissons à l'extension de l'analyse de la variance dans un cadre général.

§1. MESURES GAUSSIENNES SUR PRODUIT TENSORIEL D'ESPACES DE BANACH.

Nous rappelons brièvement quelques notions sur le produit tensoriel d'espaces de Banach. Les résultats établis par S. CHEVET et R. CARMONA ([14], [16]) sur le produit tensoriel d'espaces de Wiener abstraits et qui nous seront utiles, sont regroupés dans ce paragraphe sous forme de théorèmes.

Si B_1 et B_2 sont deux espaces de Banach réels séparables nous noterons $B_1 \otimes B_2$ leur produit tensoriel algébrique.
Nous désignerons par $B_1 \otimes_\varepsilon B_2$ l'espace de Banach $B_1 \otimes B_2$ muni de la norme

$$\varepsilon(u) = \sup \{ |(x^* \otimes y^*, u)| \; ; \; x^* \in U_{B_1} , y^* \in U_{B_2} \}$$

où U_{B_i} est la boule unité fermée de B_i, et $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ sera la complétion de $B_1 \otimes_\varepsilon B_2$. Rappelons ici quelques propriétés du ε-produit tensoriel ([19]). Comme B_1 et B_2 sont séparables l'espace $B_1^* \otimes B_2^*$ sépare les points de $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ et est faiblement * dense dans $(B_1 \otimes_\varepsilon B_2)^*$.
Si W est un sous-espace vectoriel fermé de B_1 alors $W \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ est un sous-espace vectoriel fermé de $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$. De plus si W est une droite, $W \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ est isomorphe à B_2. Si T_1 et T_2 sont deux espaces métriques compacts et si $(T_1 \times T_2)$ est l'espace métrique muni de la distance

$$d_{T_1 \times T_2}((s,t), (s',t')) = \max(d_{T_1}(s,s'), d_{T_2}(t,t'))$$

nous avons $C(T_1) \hat{\otimes}_\varepsilon C(T_2) \simeq C(T_1 \times T_2)$, lorsque ces espaces sont munis de la topologie de la convergence uniforme.

Si H_1 et H_2 sont deux espaces de Hilbert séparables, $H_1 \hat{\otimes}_2 H_2$ sera l'espace de Hilbert complété de l'espace préhilbertien $H_1 \otimes H_2$ muni du produit scalaire $\langle h_1 \otimes h_2 , k_1 \otimes k_2 \rangle_{H_1 \otimes H_2} = \langle h_1, k_1 \rangle_{H_1} \langle h_2, k_2 \rangle_{H_2}$.

Soient B_1 et B_2 deux espaces de Banach réels séparables munis de leurs tribus boréliennes $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ respectivement. Nous désignons par μ et ν deux mesures gaussiennes centrées sur $(B_1, \mathcal{B}_1)$ et $(B_2, \mathcal{B}_2)$ respectivement de noyaux de covariance K_μ et K_ν. Rappelons le résultat fondamental de S. CHEVET (Théorème 2.1 ci-dessous) (cf. [16]) et les améliorations apportées par R. CARMONA et S. CHEVET ([14], [17])) que nous utiliserons par la suite.

THEOREME 1.1.

Soient μ_1 *et* μ_2 *deux mesures gaussiennes centrées sur* $(B_1, \mathcal{B}_1)$ *et* $(B_2, \mathcal{B}_2)$ *de covariances respectives* K_1 et K_2 . *Il existe une unique mesure gaussienne centrée sur* $B_1 \hat{\otimes}_\epsilon B_2$, *notée* $\mu = \mu_1 \hat{\otimes}_\epsilon \mu_2$ *qui satisfait à*

$$K_\mu (x_1^* \otimes x_2^* , y_1^* \otimes y_2^*) = K_1(x_1^*, y_1^*)\, K_2(x_2^*, y_2^*)$$

pour tout (x_1^*, y_1^*) *dans* $B_1^* \times B_1^*$ *et* (x_2^*, y_2^*) *dans* $B_2^* \times B_2^*$.

Réciproquement, si μ *est une mesure gaussienne centrée de variance* Q *sur* $B_1 \hat{\otimes}_\epsilon B_2$, *une condition nécessaire et suffisante d'existence de mesures gaussiennes* μ_1 *et* μ_2 *sur* B_1 *et* B_2 *respectivement telles que* $\mu = \mu_1 \hat{\otimes}_\epsilon \mu_2$ *est qu'il existe des formes quadratiques positives* Q_1 *et* Q_2 *sur* B_1^* *et* B_2^* *telles que*

$$Q(x_1^* \otimes x_2^*) = Q_1(x_1^*)\, Q_2(x_2^*)$$

pour tout (x_1^*, x_2^*) *dans* $B_1^* \in B_2^*$.

THEOREME 2.1.

Si $(j_1, \mathcal{H}_1, B_1)$ *et* $(j_2, \mathcal{H}_2, B_2)$ *sont deux espaces de Wiener abstraits, le triplet* $(j_1 \otimes j_2 , \mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_2 , B_1 \hat{\otimes}_\epsilon B_2)$ *est encore un espace de Wiener abstrait.*

REMARQUE 1.1. - L'opérateur $j_1 \otimes j_2$ désigne le prolongement par continuité du produit tensoriel algébrique des applications linéaires continues

j_1 et j_2 ; notons que l'application $j_1 \otimes j_2$ ainsi obtenue est injective, continue et d'image dense. Compte tenu du fait que $B_1^* \otimes B_2^*$ est faiblement $*$ dense dans le dual de $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$, l'opérateur adjoint $(j_1 \otimes j_2)^*$ de $(j_1 \otimes j_2)$ est entièrement déterminé par ses valeurs sur $B_1^* \otimes B_2^*$ et nous avons $(j_1 \otimes j_2)^* (x_1^* \otimes x_2^*) = j_1^*(x_1^*) \otimes j_2^*(x_2^*)$ pour tout (x_1^*, x_2^*) de $B_1^* \times B_2^*$ (cf. [14]).

Dans la suite nous nous préoccuperons d'espaces de Banach B_1 et B_2 qui sont des espaces de fonctions réelles.

§ 2. ANALYSE DE LA VARIANCE.

Ici, B_1 et B_2 sont des espaces de Banach séparables de fonctions numériques définies respectivement sur des ensembles T_1 et T_2 . Nous disposons d'une observation d'un élément aléatoire gaussien X à valeurs dans $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ de moyenne inconnue m appartenant à l'espace autoreproduisant $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_2$ de la loi $\mu_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \mu_2$ de $(X-m)$. Le problème d'analyse de la variance est formulé dans la structure statistique gaussienne

$$\Sigma = (B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2 \ , \ \mathcal{B}(B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2) \ , \ \{ N(m, Q_1 \otimes Q_2) \ ; \ m \in \mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_2 \})$$

où Q_1 et Q_2 sont des formes quadratiques connues définies positives sur B_1^* et B_2^* respectivement.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

(H1) pour $i = 1,2$ il existe dans $\mathcal{H}_i$ un élément 1_{T_i} tel que $j_i(1_{T_i})$ soit la fonction constante égale à $1/\|1_{T_i}\|_{\mathcal{H}_i}$ sur T_i .

(H2) pour $i = 1,2$, l'élément 1_{T_i} est dans l'image de j_i^* ; il existe donc $e_i^* \in B_i^*$ tel que $j_i^*(e_i^*) = 1_{T_i}$.

REMARQUE 1.2. - L'hypothèse (H1) permet de s'assurer que l'espace autoreproduisant de $\mu_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \mu_2$ contient les fonctions constantes. L'hypothèse (H2) permet de résoudre le problème d'analyse de la variance en utilisant les tests d'hypothèses linéaires du Chapitre I. Ces deux hypothèses sont toujours satisfaites dans le cas finidimensionnel.

Le lemme suivant, qui généralise la décomposition de la moyenne obtenue dans [10], chap. IV, paragraphe 5, est démontrée dans [6] (Lemme 1).

LEMME 1.2.

Soit m un élément de $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_2$. Alors m peut s'écrire sous la forme :

$$m = m_o + m_1 + m_2 + m_{12}$$

où m_o est une fonction constante sur $T_1 \times T_2$, $m_i (i = 1,2)$ est soit nulle soit une fonction non constante sur T_i, m_{12} est soit nulle soit une fonction non nulle sur $T_1 \times T_2$ indécomposable en somme d'une fonction sur T_1 et d'une fonction sur T_2. Sous certaines contraintes cette décomposition est unique.

En termes d'analyse de la variance on peut considérer que m_i représente la contribution du facteur i à la moyenne inconnue m et que m_{12} est la contribution à m de l'intéraction des deux facteurs.

Avec les résultats du paragraphe 1, nous identifierons isométriquement $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon j_2(\mathbb{R}\, 1_{T_2})$ à B_1 et $j_1(\mathbb{R}\, 1_{T_1}) \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ à B_2. Désignant par I_{B_i} l'opérateur identité sur B_i, nous notons :

$$U_o = (e_1^*, .)_{B_1^*, B_1}\, j_1(1_{T_1}) \otimes (e_2^*, .)_{B_2^*, B_2}\, j_2(1_{T_2})$$

$$U_1 = (I_{B_1} - (e_1^*,.)\, j_1(1_{T_1})) \otimes (e_2^*,.)\, j_2(1_{T_2})$$

$$U_2 = (e_1^*,.)\, j_1(1_{T_1}) \otimes (I_{B_2} - (e_2^*,.)\, j_2(1_{T_2}))$$

$$U_{12} = I_{B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2} - U_o - U_1 - U_2$$

les opérateurs linéaires définis sur $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ à valeurs dans $j_1(\mathbb{R}\, 1_{T_1}) \hat{\otimes}_\varepsilon j_2(\mathbb{R}\, 1_{T_2})$, $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon j_2(\mathbb{R}\, 1_{T_2})$, $j_1(\mathbb{R}\, 1_{T_1}) \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ et $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ respectivement.

Nous avons alors ([6]) :

PROPOSITION 1.2.

Dans la structure statistique Σ , les statistiques $x \longrightarrow U_o(x)$, $x \longrightarrow U_1(x)$, $x \longrightarrow U_2(x)$ et $x \longrightarrow U_{12}(x)$ sont indépendantes et définissent des estimateurs sans biais de variance minimum pour m_o , m_1 , m_2 et m_{12} respectivement. Les structures statistiques images de Σ par U_o , U_1 et U_2 sont respectivement :

$$\Sigma_o = (\mathbb{R} \, , \, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \, , \, \{ N(m, Q_1(e_1^*)\, Q_2(e_2^*)\, h_1\, h_2) \ ; \ m \in \mathbb{R} \})$$

$$\Sigma_1 = (B_1, \mathcal{B}_1, \{N(m, h_2\, Q_2(e_2^*)\,(Q_1 \circ [I_{B_1} - (e_1^*,.)\, j_1(1_{T_1})]^*) \ ; \ m \in \mathcal{H}_1 \text{ et } \langle m, 1_{T_1} \rangle = 0 \})$$

et

$$\Sigma_2 = (B_2, \mathcal{B}_2, \{N(m, h_1\, Q_1(e_1^*)\,(Q_2 \circ [I_{B_2} - (e_2^*,.)\, j_2(1_{T_2})]^*) \ ; \ m \in \mathcal{H}_2 \text{ et } \langle m, 1_{T_2} \rangle = 0 \})$$

où $h_1 = \| J_1(1_{T_1}) \|^2_{B_1}$ et $h_2 = \| J_2(1_{T_2}) \|^2_{B_2}$.

PROPOSITION 2.2.

Si H_1 et H_2 sont satisfaites, soit Φ la structure statistique gaussienne à moyenne inconnue définie par :

$$\Phi = (C(T_1 \times T_2)\ ,\ \mathcal{B}(C(T_1 \times T_2))\ ,\ \{N(m, Q_1 \otimes Q_2)\ ;\ m \in \mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_2\})\ .$$

Pour tout réel α de $[0,1]$, il existe un test quadratique sans biais de niveau de signification α pour tester l'absence d'influence d'un des facteurs sur m (resp. l'absence d'intéraction). Un tel test est de la forme

$$x \in C(T_1 \times T_2) \qquad \varphi_{\xi,\ell_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } q_\xi(x)^{1/2} > \ell_\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où

$$q_\xi(x) = \int_{T_i} U_i(x)^2(s)\ d\xi(s) \quad \text{pour} \quad \xi \in M^+(T_i)\ ,\ i = 1,2$$

(resp. $\displaystyle q_\xi(x) = \int_{T_1 \times T_2} U_{12}(x)^2(s,t)\ d\xi(s,t)$ pour $\xi \in M^+(T_1 \times T_2)$) .

REMARQUE 2.2. Au cas où $\mathcal{H}_1 = \mathbf{R}^r$ et $\mathcal{H}_2 = \mathbf{R}^s$ les propositions précédentes conduisent aux énoncés de [10], chapitre IV, paragraphe 5. Remarquons aussi que l'analyse de la variance décrite ici pour deux facteurs se généralise directement au cas de plusieurs facteurs.

L'énoncé suivant ([6]) permet dans la plupart des applications de vérifier les hypothèses (H1) et (H2) ; notons $C^n([0,T])$ l'espace des fonctions n fois continûment différentiables sur $[0,T]$, muni de sa norme usuelle.

PROPOSITION 3.2.

Soit $\{X(t)\ ,\ t \geq 0\}$ un processus gaussien réel séparable stationnaire ayant une densité spectrale rationnelle f de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} q_k (ix)^k} \qquad n \geq 1\ , \quad q_o\, q_n \neq 0$$

les coefficients q_k étant réels. Alors pour tout T positif, si R_T est la restriction de la covariance de X à $[0,T] \times [0,T]$, les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites avec $B = C^{n-1}([0,T])$ et $\mathcal{H} = \mathcal{H}(R_T)$.

REMARQUE 3.2. - Les conditions de la proposition 3.2. ne sont que suffisantes pour la validité des hypothèses (H1) et (H2). Par exemple le noyau R défini par $R(s,t) = \begin{cases} 1 - |t-s| & \text{si } |t-s| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ satisfait les hypothèses (H1) et (H2) mains ne remplit pas les conditions de la proposition.

§3. EXEMPLE.

Nous reprenons ici un exemple de [25] . Une image arrêtée est observée par sa luminance $X(s,t)$, $s \in [0,T]$, $t \in [0,T_2]$.
Ce processus bitemporel a une partie aléatoire gaussienne de covariance $K((s,t)\ ,\ (s',t')) = d^2 \exp(-\beta_h |s-s'|)\ \exp(-\beta_v |t-t'|)$, les paramètres β_h et β_v étant spécifiques du nombre moyen de niveaux de luminance selon les directions horizontales et verticales respectivement (cf. [25], [52]). Si l'image observée est composée d'une suite d'objets de densité uniforme selon une direction, la moyenne du processus , $m(s,t)$ sera constante selon cette direction.

La covariance K du processus de luminance est le produit des noyaux K_i de la forme $K_i(s,s') = \exp(-\beta_i |s-s'|)$. Ces derniers sont associés à une densité spectrale du type $f_i(\lambda) = \dfrac{2\beta_i}{\beta_i^2 + 4\pi^2\lambda^2}$ et satisfont à la proposition 3.2. D'autre part pour $i=1,2$, les mesures e_i^* sont données par la proposition 4.3 du chapitre I. Nous obtenons ainsi :

<u>PROPOSITION 1.3</u>. <u>Soit</u>

$$\{ C([0,T_1]\times[0,T_2]) \; , \; \mathcal{B}(C([0,T_1]\times[0,T_2])) \; , \; \{N(m,K_1\otimes K_2) \; , \; m \in \mathcal{H}(K_1)\hat{\otimes}_2\mathcal{H}(K_2)\} \}$$

<u>la structure statistique associée au processus de luminance.</u>
<u>La statistique appropriée pour tester que la moyenne</u> m <u>est constante dans la direction horizontale est donnée par</u> :

$$\frac{x(s,0)}{2} + \frac{x(s,T_2)}{2} + \frac{\beta_2}{2}\int_0^{T_2} x(s,t)\,dt - \frac{\beta_1\beta_2}{4}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} x(s,t)\,ds\,dt$$

$$-\frac{\beta_2}{4}\int_0^{T_2} x(0,t)\,dt - \frac{\beta_2}{4}\int_0^{T_2} x(T_1,t)\,dt - \frac{\beta_1}{4}\int_0^{T_1} x(s,0)\,ds$$

$$-\frac{\beta_1}{4}\int_0^{T_1} x(s,T_2)\,ds - \frac{x(0,T_2)}{4} - \frac{x(T_1,0)}{4} - \frac{x(0,0)}{4} - \frac{x(T_1,T_2)}{4} .$$

Un résultat analogue est valable pour la direction verticale.

Nous verrons au cours du chapitre suivant une autre application des résultats de ce chapitre.

CHAPITRE III

ANALYSE DE LA VARIANCE POUR LA MOYENNE DE LA REPONSE EN POTENTIEL D'UN NEURONE

Comme nous l'avons déjà exposé dans l'introduction, nous étudions dans ce chapitre un modèle mathématique pour la réponse en potentiel d'un neurone proposé dans [54] par J.B. Walsh.

Le formalisme des probabilités gaussiennes sur un espace de Banach nous conduit à la définition d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension infinie dont diverses propriétés probabilistes sont étudiées dans [7]. Nous abordons ensuite un problème d'analyse de la variance pour la moyenne de ce processus en utilisant la méthode du chapitre précédent.

Le premier paragraphe de ce chapitre est consacré à la mise en place des notations et à la description du problème. Dans le deuxième paragraphe nous résumons les résultats de [7]. Parmi ces derniers ceux figurant sous forme de théorèmes appartiennent à J.B. WALSH tandis que les résultats nouveaux de [7] sont présentés sous forme de propositions. Enfin le dernier paragraphe est consacré à l'analyse de la variance. Nous renvoyons le lecteur à [7] pour avoir une idée précise des démonstrations. ■

Dans [54], J.B. WALSH propose une nouvelle modélisation pour le problème de la réponse en potentiel d'un neurone. En résumé, idéalisant un motoneurone comme un segment rectiligne de longueur L, il considère pour le potentiel électrique $V(t,x)$ du neurone en la position x et à l'instant t l'équation suivante :

$$(1.1) \qquad \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1)\, V(t,x) + W(t,x) \,.$$

Dans l'équation (1.1) , $W(t,x)$ désigne un bruit blanc gaussien à deux paramètres. Avec des conditions aux bords appropriées l'équation est résolue et son unique solution apparaît comme un processus gaussien à deux paramètres qui est étudié dans [54] par un développement en série.

Dans la première partie de [7] , nous décrivons le problème en termes de processus gaussiens à valeurs dans un espace de Banach. Cette démarche nous permet d'une part de retrouver plus facilement certains résultats de J.B. WALSH et d'autre part de développer de nouvelles propriétés. Enfin, dans la deuxième partie de [7] , nous illustrons la théorie du chapitre précédent par la résolution d'un problème d'analyse de la variance pour la moyenne du processus solution de (1.1).

§1. DESCRIPTION DU PROBLEME ET NOTATIONS.

Nous noterons $H = L^2([0,L], dx)$ l'espace Hilbertien des fonctions de carré intégrable sur $[0,L]$. Nous désignons par A l'opérateur linéaire sur H défini à partir de l'opérateur différentiel $\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+1\right)$ sur H en imposant à ce dernier des conditions aux bords de type Neumam. Le domaine $D(A)$ de l'opérateur autoadjoint, inférieurement borné par 1 , A est dense dans H . Le spectre $\sigma(A)$ de A est constitué de la suite $\{\lambda_k = (\frac{k\pi}{L})^2 + 1 \ ; \ k \geq 0\}$ avec pour fonctions propres correspondantes $\{\varphi_k \ , \ k \geq 0\}$ définies par

$$\varphi_k(x) = (2/L)^{1/2} \cos \frac{k\pi x}{L} \quad \text{pour} \quad k > 0 \quad \text{et} \quad \varphi_o(x) = \left(\frac{1}{L}\right)^{1/2} .$$

L'opérateur inverse $(2A)^{-1}$ de $2A$ est un opérateur de Hilbert Schmidt sur H admettant une représentation intégrale dont le noyau, que nous notons encore $(2A)^{-1}$ est défini par :

$$(2A)^{-1}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_k} \varphi_k(x)\, \varphi_k(y)$$

la convergence de cette série étant uniforme sur $[0,L]^2$.

Nous noterons $\{\mathcal{H}_\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}\}$ l'échelle Hilbertienne déduit de A c'est-à-dire la famille d'espaces hilbertiens

$$\mathcal{H}_\alpha = \{f \in \mathcal{D}(A^\alpha) \ /\ \langle f,g \rangle_{\mathcal{H}_\alpha} = \langle (2A)^\alpha f, (2A)^\alpha g \rangle_H \}.$$

Le semi-groupe fortement continu d'opérateurs autoadjoints sur H, engendré par A, sera noté $\{e^{-tA},\ t\geq 0\}$. Ces opérateurs admettent une représentation intégrale dont le noyau, noté encore e^{-tA} est défini par

$$e^{-tA}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x)\, \varphi_k(y) \qquad (x,y) \in [0,L]^2.$$

Le noyau $(2A)^{-1}$ est défini positif et vérifie l'inégalité

$$|(2A)^{-1}(x,x) - 2(2A)^{-1}(x,y) + (2A)^{-1}(y,y)| \leq \frac{4}{\pi} |x-y|, \quad (x,y) \in [0,L]^2.$$

Ainsi, si B est l'espace des fonctions numériques continues sur $[0,L]$, noté aussi $C([0,L])$, nous pouvons énoncer la proposition ([7], paragraphe 2).

PROPOSITION 1.1.

Il existe sur $(B,\mathcal{B})$ une mesure gaussienne μ centrée de covariance $(2A)^{-1}$. L'espace de Hilbert autoreproduisant $\mathcal{H}_\mu$ de μ est l'espace $\mathcal{H}_{1/2}$. Si $\mathcal{R}$ désigne l'identification de $\mathcal{H}_\mu^*$ à $\mathcal{H}_\mu$ imposée par la dualité naturelle de B et B^* on a pour tout ν dans B^*

$$(j \circ \mathscr{R} \circ j^*)(\nu) = (2A)^{-1}\nu(\,.\,) = \int (2A)^{-1}(x,.)\,\nu(dx)$$

où j est le plongement naturel de $\mathcal{H}_\mu$ dans B.

Nous sommes en mesure maintenant de définir un processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur B comme dans le cas finidimensionnel ([37]).

Nous noterons $\{W_t\ ,\ t \geq 0\}$ le processus de Wiener B-valué construit sur la mesure μ. Il s'agit d'un processus stochastique à trajectoires continues tel que $W_o = 0$ et tel que pour tous nombres réels $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n$ les éléments aléatoires à valeurs dans B, $\{[t_j - t_{j-1}]^{-1/2}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\ ,\ j=1,n\}$ sont indépendants et isonômes de loi μ. Nous désignerons dans la suite par $\{\mathcal{G}_t\ ,\ t>0\}$ la famille de sous tribus de t engendrée par le processus W.

Pour tout α de $]0,\frac{1}{4}[$, la famille $\{\xi_t(u)\ ;\ t \geq 0\ ,\ u \geq 0\}$ d'opérateurs définis par

$$\xi_t(u) = \begin{cases} (2A)^{1/2}\, e^{-(t-u)A} & \text{si} \quad 0 \leq u < t \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

constitue une famille d'opérateurs bornés de B dans $\mathcal{H}_\alpha$ telle que $\int_0^t \|\tilde{\xi}_t(u)\|^2_{H-S}\, du < +\infty$, ce qui, d'après [33], donne un sens à l'intégrale stochastique $\int_0^t \xi_t(u)\, dW(u)$. Nous avons alors ([7]) ($^*\tilde{\xi}_t(u)$ désigne la restriction de $\xi_t(u)$ à $\mathcal{H}_{1/2}$).

PROPOSITION 2.1.

Le processus stochastique $\{V(t) = \int_0^t \xi_t(u)\, dW(u)\ ,\ t>0\}$ est un processus gaussien centré B-valué à trajectoires continues. Il est isonôme

<u>à la solution de l'équation différentielle stochastique</u> (1.1) <u>avec pour condition initiale</u> $V(0,x) \equiv 0$.

Dans la suite nous considérons le processus $(Z_t^v\ ,\ t \geq 0)$ défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P_r)$ et à valeurs dans B par

$$Z_t^v = e^{-tA}\, v + V_t \qquad \text{avec} \quad v \in B\ .$$

Ce processus peut être considéré comme la solution de l'équation (1.1) avec pour condition initiale $V(0,x) = v(x)$.

§2. <u>UN PROCESSUS D'ORNSTEIN-UHLENBECK SUR</u> B .

Nous noterons $\mathcal{F}_t$ la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par $\{ Z_s^0\ ,\ 0 \leq s \leq t \}$ (pour tout $t \geq 0$ on a évidemment $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$) et $\Omega' = C([0,+\infty[\ ;\ B)$ sera l'espace des fonctions continues sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans B .
Pour tout $t \geq 0$, Y_t sera l'application de Ω' dans B définie par

$$Y_t : \omega \longrightarrow Y_t(\omega) = \omega(t)\ .$$

Nous noterons $\mathcal{M}$ la tribu de Ω' engendrée par la famille $(Y_t\ ;\ 0 \leq t < +\infty)$ et $\mathcal{M}_t$ la sous-tribu de $\mathcal{M}$ engendrée par $(Y_s\ ;\ 0 \leq s \leq t)$. Les opérateurs de translations θ_t sont définis par

$$[\ \theta_t\, \omega\ ](s) = \omega(s+t) \qquad s,t \geq 0\ ,\ \omega \in \Omega'\ .$$

Pour tout $v \in B$, nous désignerons par P_v la mesure de probabilité sur $(\Omega', \mathcal{M})$ telle que la loi de $Y = (Y_t\ ,\ t \geq 0)$ sous P_v soit la loi de probabilité sur $(B, \mathcal{B})$ de $(Z_t^v\ ,\ t \geq 0)$. Nous avons alors

THEOREME 1.2.

Le processus stochastique Z défini par

$$\underline{Z} = \{ [(\Omega', \mathcal{M}) , \mathcal{M}_t , Y_t , \theta_t , P_v] , t \geq 0 , v \in B \}$$

est un processus de Markov fort. Il définit la représentation canonique d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur B de paramètre l'opérateur A .

REMARQUE 1.2. - Ce théorème regroupe un certain nombre de résultats de J.B. WALSH mais est énoncé dans le cadre de la dimension infinie. Remarquons néanmoins que la propriété de Markov forte est énoncée dans cet article sans démonstration. Le lecteur est renvoyé à [7] pour une démonstration.

Nous résumons maintenant les résultats obtenus dans [7].

PROPOSITION 1.2.

Le processus stochastique

$$\underline{Z} = \{ [(\Omega', m) , m_t , Y_t , \theta_t , P_v] , t \geq 0 , v \in B \}$$

admet pour unique mesure invariante la mesure gaussienne μ .

PROPOSITION 2.2.

Pour tout $t > 0$ et tout v de B les probabilités de transition $P_t(v,.)$ de Z sont équivalentes à la mesure invariante μ de Z .

Rapellons ici que $P_t(v,.)$ pour $t \geq 0$ et $v \in B$ est la mesure sur $(B, \mathcal{B})$ définie par $P_t(v, \Lambda) = P_v(Y_t \in \Lambda)$. Nous supposons d'ailleurs de manière implicite que $P_0(v,.)$ est la mesure de Dirac concentrée en $\{v\}$.

Les résultats suivants sont relatifs au semi-groupe d'opérateurs $(U_t, t \geq 0)$, $U_0 = I_B$ sur $L^2(B, \mu)$, associé aux probabilités de transition de $\underline{Z}$. Nous avons pour toute fonction f positive $\mathcal{B}$-mesurable

$$(U_t f)(v) = \mathbb{E}_{P_v}(f(Y_t)) \qquad v \in B .$$

Notons $C_0^2(\mathbb{R}^k)$ la classe des fonctions réelles deux fois continûment différentiables à support compact dans $\mathbb{R}^k$ et soit $\mathbb{L}$ le générateur infinitésimal du semi-groupe $(U_t, t \geq 0)$ défini sur $L^2(B, \mu)$.
Nous obtenons la proposition ([7]) :

<u>PROPOSITION 3.2.</u>

<u>Si</u> $g \in C_0^2(\mathbb{R}^k)$, <u>la fonction</u> G <u>à valeurs réelles définie sur</u> B <u>par</u>

$$G(v) = g(v_1, \ldots, v_k) \quad \text{avec} \quad v_i = \langle \varphi_i, v \rangle_H, \quad i = 1, k$$

<u>appartient au domaine</u> $D(\mathbb{L})$ <u>de</u> $\mathbb{L}$ <u>et on a</u>

$$\mathbb{L}(G)(v) = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 g}{\partial v_i^2} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \frac{\partial g}{\partial v_i}\right)_{v_i = \langle \varphi_i, v \rangle_H} .$$

Pour tout entier n nous notons h_n le polynôme de Hermite défini par (cf. [35]) :

$$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) .$$

Rappelons alors ([40]) :

DEFINITION 1.2.

Pour toute suite entière $\{n_j\}_{j\geq 0} = [n_j]$ telle que $\sum_{j\geq 0} n_j < +\infty$ nous dirons que $O_{[n_j]}$ est une fonction cylindrique de Hermite définie sur B d'ordre $[n_j]$ si pour tout x de B on a :

$$O_{[n_j]}(x) = \Big(\prod_{j\geq 0} n_j!\, 2^{n_j}\Big)^{-1/2} \prod_{j\geq 0} h_{n_j}\big(\sqrt{\lambda_j}\,\langle \varphi_j , x\rangle_H\big) .$$

Avec cette définition nous avons ([7]) :

PROPOSITION 4.2.

La famille $\{O_{[n_j]}\}$ des fonctions cylindriques de Hermite sur B de tout ordre constitue une base orthogonale complète de $L^2(B,\mu)$. De plus pour toute $[n_j]$ on a

$$\mathbb{L}\, O_{[n_j]} = -\Big(\sum_{j\geq 0} \lambda_j n_j\Big) O_{[n_j]} .$$

DEFINITION 2.2. ([44])

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit h une fonction réelle définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs strictement positives. Une suite $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$ est dite h-mélangeante si et seulement si pour tout f dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}_m, P)$ et tout g de $L^2(\Omega, \mathcal{A}_n, P)$ on a

$$\Big|\int_\Omega f g\, dP - \Big(\int_\Omega f\, dP \int_\Omega g\, dP\Big)\Big| \leq h(|m-n|)\, \|f\|_2\, \|g\|_2 .$$

PROPOSITION 5.2.

La suite $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 1}$ de sous-tribus de $\mathcal{M}$ engendrées par $\{Y_t \, , \, n \leq t \leq n+1\}$ est h-mélangeante avec pour h la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par $h(n) = \exp\{-\alpha(n-1)\}$ où α est un nombre strictement positif.

COROLLAIRE 1.2.

Le processus de Markov Z est récurrent.

REMARQUE 2.2. - D'après la proposition 4.2. nous savons que 0 est une valeur propre simple et isolée du spectre $\sigma(\mathbb{L})$ du générateur $\mathbb{L}$. Cette remarque et la propriété de Markov de $\underline{Z}$ sont les clés de la démonstration de la proposition 5.2. Le corollaire 1.2. en est une conséquence immédiate. Il est également prouvé dans [34] en utilisant une décomposition très technique des trajectoires de $\underline{Z}$.

Enfin, pour terminer ce paragraphe, nous énonçons une propriété supplémentaire de $\underline{Z}$ qui n'est qu'une application directe d'un résultat plus général de R. CARMONA et KLEIN (cf. [15]) sur les temps d'atteinte de processus Markoviens uniformément ergodiques.

PROPOSITION 6.2.

Il existe une constante réelle strictement positive k telle que, pour tout $v \in B$ et tout Λ ouvert de B, on a

$$\mathbb{E}_{P_v}(e^{\alpha T_\Lambda}) < +\infty \quad \text{dès que} \quad \alpha < k\mu(\Lambda) \text{ , où}$$

T_Λ est le temps d'atteinte de Λ pour Z.

REMARQUE 3.2. - Si la décharge de potentiel du neurone a lieu en un point x_o de $[0,L]$, le premier instant de décharge est un temps d'arrêt de $\underline{Z}$, T_θ, défini dans [54] par $T_\theta = \inf\{t \geq 0 \,;\, (Y_t, \delta_{x_o}) > \theta\}$ où δ_{x_o} est la mesure de Dirac en x_o. Nous obtenons dans [7] pour T_θ l'inégalité suivante

$$(1.2) \qquad P_o(T_\theta > t) \geq 1 - 2\exp\left(-\frac{a\,\theta^2}{t}\right)$$

où a est une constante positive indépendante de t. Ainsi nous pouvons affirmer qu'une proportion importante de trajectoires de $(Z_t^v, t \geq 0)$ ne présenteront pas de décharge dans $[0,T]$ à condition que T soit suffisamment petit.

§3. ANALYSE DE LA VARIANCE POUR LA MOYENNE DU PROCESSUS D'ORNSTEIN-UHLENBECK SUR B.

Dans la suite $\{Z_t^v, t \geq 0\}$ désignera le processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur B issu de v et de paramètre l'opérateur A.
S'il n'y a pas de décharge ce processus est une modélisation réaliste pour le potentiel électrique d'un motoneurone. Généralement les biologistes supposent qu'à l'instant initial le potentiel est uniforme le long du neurone. Cette hypothèse se traduit par l'homogénéïté sur $[0,L]$ de la moyenne de $\{Z_t^v \,;\, t \geq 0\}$. Il est donc intéressant de tester une telle hypothèse au vu d'une ou plusieurs observations de $\{Z_t^v \,;\, t \geq 0\}$. En réalité nous ne pouvons observer une réalisation de ce processus car le neurone se décharge à l'instant aléatoire T_θ. Cependant la remarque 3.2 du paragraphe précédent nous permet de considérer raisonnablement le problème d'analyse de la variance pour la moyenne du processus $(Z_t^v, t \in [0,T])$ à condition de prendre T suffisamment petit. Nous utiliserons pour cela les notions du chapitre II.

Notons γ la mesure dénombrement sur $\mathbb{N}$ et S le produit

$[0,T] \times [0,L]$. Soit $\{K_k \, , \, k \in \mathbb{N}\}$ la famille de noyaux symétriques définis positifs sur $S \times S$ avec

$$K_k((s,x),(t,y)) = \frac{1}{2\lambda_k} \left(e^{-\lambda_k |t-s|} - e^{-\lambda_k (t+s)}\right) \varphi_k(x) \, \varphi_k(y)$$

où $((s,x),(t,y)) \in S \times S$. Nous avons :

<u>PROPOSITION 1.3</u>.

<u>L'espace de Hilbert autoreproduisant</u> $\mathcal{H}(\mathcal{K},S)$ <u>associé au processus d'Ornstein-Uhlenbeck</u> $(Z^o_t \, , \, t \in [0,T])$ <u>est isomorphe à l'intégrale Hilbertienne</u> $\int^{\oplus}_{\mathbb{N}} \mathcal{H}(K_k, S) \, d\gamma(k)$ <u>engendrée par la famille des espaces autoreproduisants associés aux noyaux</u> K_k .

Désignons par K^1_k le noyau défini sur $[0,T]^2$ par

$$K^k_1(s,t) = \frac{1}{2\lambda_k} \left(e^{-\lambda_k |t-s|} - e^{-\lambda_k (t+s)}\right)$$ et par K^2_k le noyau sur $[0,L] \times [0,L]$ défini par

$$K^2_k(x,y) = \varphi_k(x) \, \varphi_k(y) \; .$$

Nous pouvons énoncer la caractérisation suivante de $\mathcal{H}(\mathcal{K}, S)$ ([7]) :

<u>PROPOSITION 2.3</u>.

<u>L'espace de Hilbert autoreproduisant</u> $\mathcal{H}(\mathcal{K},S)$ <u>est l'espace des fonctions continues sur</u> S <u>définies pour</u> (t,x) <u>de</u> S <u>par</u>

(1.3) $$h(t,x) = \sum_{k \geq 0} f_k(t)\, \varphi_k(x)$$

avec f_k appartenant à $\mathcal{H}(K_k^1)$ et $(\|f_k\|^2_{\mathcal{H}(K_k^1)}\ ;\ k \geq 0) \in \ell^2$.

D'après (1.3) l'ensemble des fonctions constantes sur S est contenu dans $\mathcal{H}(\mathcal{K},S)$. En fait la décomposition orthogonale suivante de $\mathcal{H}(\mathcal{K},S)$ est immédiate :

$$\mathcal{H}(\mathcal{K},S) = \mathcal{H}(K_o, S) \oplus \int^{\oplus}_{\mathbb{N}-\{0\}} \mathcal{H}(K_k, S)\, d\gamma(k)$$

et nous pouvons énoncer :

PROPOSITION 3.3.

Soit $z = \{z(t,x)\ ,\ t \in [0,T]\ ,\ x \in [0,L]\}$ une observation du processus $\{Z_t^v\ ,\ 0 \leq t \leq T\ ,\ v \in B\}$. Pour tout α de $]0,1[$ il existe un test quadratique sans biais de seuil α pour tester l'hypothèse de non influence du facteur position sur la moyenne de $\{Z_t^v\ ,\ t \in [0,T]\ ,\ v \in B\}$. Ce test est de la forme

$$\varphi_{\eta,\ell_\alpha}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } q_\eta(y) > \ell_\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $y(t,x) = z(t,x) - \int_0^L z(t,x)\,dx$, $q_\eta(y) = \int_0^T \int_0^L y^2(t,x)\, d\eta(t,x)$ et η est une mesure borélienne positive sur S .

Les techniques de démonstration des propositions de ce paragraphe sont celles du chapitre II. Nous renvoyons le lecteur à [7] pour le détail des démonstrations.

CHAPITRE IV

TRANSFORMATIONS DE MESURES GAUSSIENNES SUR UN ESPACE DE BANACH - FORMES QUADRATIQUES ET APPLICATIONS

Dans les deux premiers chapitres du présent mémoire, nous avons obtenu une généralisation en dimension infinie de la théorie de l'estimation et des tests d'hypothèses linéaires dans les structures statistiques gaussiennes à moyenne inconnue. Les statistiques de test font intervenir des formes quadratiques de certaines fonctions aléatoires gaussiennes. Nous résumons ici les résultats de [9] relatifs au calcul de la loi exacte ou approchée de ces tests. ▫

Les problèmes de tests d'hypothèses linéaires que nous avons étudiés étaient posés dans la structure statistique gaussienne

$$\Sigma = (B, \mathcal{B}, \{N(m, Q_K) \; ; \; m \in \mathcal{H}(K)\})$$

avec B l'espace de Banach des fonctions numériques réelles continues sur l'intervalle $[0,T]$ et $\mathcal{H}(K)$ l'espace de Hilbert autoreproduisant associé à un noyau de type positif K continu sur $[0,T]^2$. Pour certains sous-espaces $\mathcal{H}_n$ de $\mathcal{H}(K)$, nous avons défini l'extension à B du projecteur orthogonal de $\mathcal{H}(K)$ sur $\mathcal{H}_n$, noté π_n. La statistique de test intervenant pour le test de l'hypothèse "$m \in \mathcal{H}_n$" contre $m \notin \mathcal{H}_n$ est de la forme

$$G_n^2 = \int_0^T (I_B - \pi_n)(x)^2(t) \, d\mu(t)$$

où μ est une mesure positive borélienne sur $[0,T]$.

Dans un premier paragraphe, nous énonçons un résultat général, publié en [8], sur la transformation de certaines fonctions aléatoires gaussiennes en processus du mouvement brownien. L'utilité de cette transformation dans le cas des tests d'hypothèses linéaires est soulignée. Ce résultat a été repris en [8bis], sous des conditions moins restrictives.

Le deuxième paragraphe est consacré au calcul de la loi exacte ou approchée de G_n^2. Nous établissons l'expression du noyau K_n du processus $(y_n = (I_B - \pi_n)(x))$ intervenant dans l'expression de G_n^2. Suivant l'expression de K_n nous proposons diverses méthodes de calcul. Les résultats sont illustrés par des exemples et des tabulations de la loi de G_n^2 pour certains noyaux K_n. (cf. annexe).

Enfin, en annexe nous avons simulé certaines structures statistiques gaussiennes à moyenne inconnue. L'estimation et les tests sont appliqués à ces simulations et les résultats sont discutés.

§1. TRANSFORMATION DE CERTAINES MESURES GAUSSIENNES A VALEURS DANS UN BANACH EN PROCESSUS DE WIENER.

Nous résumons dans ce paragraphe une méthode exposée dans [8bis] pour transformer, sous certaines hypothèses, une fonction aléatoire gaussienne à valeur dans un espace de Banach réel séparable B en un mouvement brownien sur B. Nous conserverons la plupart des notations utilisées dans les chapitres précédents. Ainsi, tous les éléments aléatoires considérés seront définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{Q}, P_r)$. Nous désignerons par μ une mesure gaussienne centrée sur $(B, \mathcal{B})$ de support l'espace tout entier B et d'espace autoreproduisant $\mathcal{H}_\mu$. Le triplet $(i, \mathcal{H}_\mu, B)$ sera l'espace de Wiener abstrait associé à μ. Pour T réel strictement positif $\{W(t)\ ,\ 0 \leq t \leq T\}$ sera le processus de Wiener dans B construit sur μ (cf. §1. Chapitre III).

Notons m la loi de probabilité d'un processus réel gaussien centré défini sur $[0,T]$ à trajectoires continues et de noyau de covariance

Γ . La mesure m est donc une mesure de probabilité gaussienne sur $B_T = C([0,T])$. Si j est le plongement naturel de l'espace autoreproduisant $\mathcal{H}(\Gamma)$ de m dans B_T , le triplet $(j, \mathcal{H}(\Gamma), B_T)$ est également un espace de Wiener abstrait.

Notons $H(m)$ (resp. $H(\mu)$) l'espace gaussien associé à la mesure m (resp. μ) et u (resp. V) l'isométrie de $H(m)$ (resp. $H(\mu)$) avec $\mathcal{H}(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{H}_\mu$) . Enfin $\{Y(t)\ ,\ t \in [0,T]\}$ sera la fonction aléatoire gaussienne à valeurs dans B associée à la mesure gaussienne produit $m \otimes \mu$ sur $B_T \times B$. Nous nous proposons de transformer le processus ainsi défini en un processus de Wiener sur B construit sur μ .

La restriction de noyau Γ à $[0,t] \times [0,t]$ où $t \in]0,T]$ sera notée Γ_t et O_t désignera l'opération de restriction à $[0,t]$ des fonctions numériques définies sur $[0,T]$. Le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}(\Gamma)$ engendré par la famille de fonctions $\{\Gamma(s,.)\ ,\ s \in [0,t]\}$ sera noté $\mathcal{H}_t$ et $P_{\mathcal{H}_t}$ sera le projecteur de $\mathcal{H}(\Gamma)$ sur $\mathcal{H}_t$. Si $H_t(m)$ désigne le sous-espace fermé de $H(m)$ engendré par $\{\delta_s\ ,\ 0 \le s \le t\}$, nous avons $u(H_t(m)) = \mathcal{H}_t$ et $u \circ E^{H_t(m)} = P_{\mathcal{H}_t}$ où $E^{H_t(m)}$ est l'espérance conditionnelle à $H_t(m)$. Nous formulons l'hypothèse suivante sur m :

(H) : Il existe f dans $\mathcal{H}(\Gamma)$ telle que la fonction positive ψ_f définie sur $[0,T]$ par

$$\psi_f(t) = \| O_t\, f \|^2_{\mathcal{H}(\Gamma_t)} = \| P_{\mathcal{H}_t}\, f \|^2_{\mathcal{H}(\Gamma)}$$

soit continue et strictement croissante.

Notons $\dot{X}$ l'élément de $H(m)$ associé à la fonction f de l'hypothèse, i.e $\dot{X} = u^{-1}(f)$. Pour tout t de $[0,T]$ nous pouvons choisir une version de $E^{H_t(m)}(\dot{X})$ définie sur B_T que nous notons $E^{H_t(m)}(X)$.
Soit alors $(X_t\ ,\ t \in [0,T])$ la fonction aléatoire sur $(B_T \times B\ ,\ \mathcal{B}_T \otimes \mathcal{B}\ ,\ m \otimes \mu)$ ($\mathcal{B}_T$ tribu complétée de B_T pour m) à valeurs dans $(B, \mathcal{B})$ définie par :

(2) $\quad X_t(x,y) = E^{H_t(m)}(X)\,(x)\,.\,y \quad$ pour $\quad (x,y) \in B_T \times B$.

Nous avons alors ([8 bis]) :

PROPOSITION 1.1.

La fonction aléatoire $X = \{X(t)\ ,\ t \in [0,T]\}$ à valeurs dans B définie par (2) est un processus gaussien centré sur B de covariance définie pour (x^*,y^*) dans $(B^*)^2$ par :

$$R_{s,t}(x^*,y^*) = \psi(\min(s,t))\ \langle i^*(x^*), i^*(y^*)\rangle_{\mathcal{H}_\mu} \ .$$

De plus X admet une modification séparable à trajectoires continues.

REMARQUE 1.1. - Le résultat est particulièrement intéressant si pour tout t de $[0,T]$, $E^{H_t(m)}(X)$ peut être identifié à une mesure μ_t élément de B_T^* . Avec cette hypothèse nous obtenons dans [8] la transformation de $m \hat{\otimes}_\varepsilon \mu$ en un mouvement brownien sur $[0,T]$.

Si γ désigne la fonction positive sur $[0,T]$ définie par

$$\gamma(t) = \psi(t) - \psi(0)$$

d'après (H) , γ est une bijection continue de $[0,T]$ sur $[0,\alpha]$ où $\alpha = \|f\|^2_{\mathcal{H}(\Gamma)} - \psi(0)$. Posons $Z(t) = X(t) - X(0)$ et désignons par $\{\tilde{Z}(t)\ ,\ t \in [0,\alpha]\}$ la fonction aléatoire à valeurs dans B définie par $\tilde{Z}(t) = Z(\gamma^{-1}(t))$. Nous pouvons énoncer :

PROPOSITION 2.1.

Le processus $\{Z(t)\ ,\ t \in [0,\alpha]\}$ est un processus de Wiener dans B construit sur la mesure gaussienne μ.

REMARQUE 1.1. - Les propositions 1.1 et 1.2 sont énoncées dans un cadre général. Au cas où $B = \mathbb{R}$, elles donnent une méthode pour transformer un processus gaussien centré réel de loi m sur $C([0,T])$ en un mouvement brownien réel sur $[0,\alpha]$. Dans le cadre des tests d'hypothèses linéaires, si la covariance du processus gaussien $y_n = (I-\pi_n)(x)$ vérifie l'hypothèse (H), la proposition 2.1 permet de transformer ce dernier en un processus $(\tilde{Z}_n(u)\ ,\ u \in [0,\alpha])$ qui sous l'hypothèse nulle "$m \in \mathcal{H}_n$" est un mouvement brownien réel. Une statistique de test équivalente à G_n^2 est alors $\tilde{G}_n^2 = \int_0^\alpha \tilde{Z}_n^2(u)\,du$, dont nous calculerons les quantiles dans le paragraphe suivant. Evidemment $\tilde{G}_n^2$ présente un intérêt comme test de "$m \in \mathcal{H}_n$" contre "$m \in D(f_n)$" où f_n est la fonction de l'hypothèse (H1) et $D(f_n) = \mathcal{H}_n^{\perp} \cap \{m \in \mathcal{H}(K_n)\ ;\ \langle O_t m\ ,\ O_t f_n \rangle_{\mathcal{H}(K_n^t)} \neq 0\}$.

Pour terminer ce paragraphe citons quelques exemples de mesures gaussiennes centrées m sur $C([0,T])$ qui satisfont à (H).

(1) Soit m une mesure gaussienne centrée de covariance triangulaire $\Gamma(s,t) = a(\min(s,t))\, b(\max(s,t))$ où a et b sont des fonctions continues sans 0 sur $[0,T]$ et telles que $\frac{a}{b}$ soit strictement croissante. Alors (H) est satisfaite avec $f = a$ et ψ_f est strictement croissante.

(2) Toute mesure gaussienne m sur $C([0,T])$ qui satisfait aux hypothèses de la proposition 3,2 du chapitre II, §2, vérifie H.

(3) La mesure gaussienne m centrée sur $C([0,T])$ de covariance

$$\Gamma(s,t) = \begin{cases} 1 - |s-t| & \text{si } |s-t| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

vérifie également H avec $f \equiv 1$ et ψ_f est strictement croissante.

§2. LOI DE FORMES QUADRATIQUES DE PROCESSUS GAUSSIENS.

Rappelons l'expression générale des opérateurs π_n de B sur $\mathcal{H}(K)$ tels qu'ils ont été définis dans le chapitre I. Pour tout x de B nous avons

$$\pi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (e_k^*, x)_{B^*, B}\; j^*(e_k) = \sum_{k=1}^{n} (e_k^*, x)_{B^*, B}\; e_k$$

la famille $(e_k)_{k \geq 1}$ étant une base orthonormée de $\mathcal{H}(K)$.
Notons Q_n le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}(K)$ sur $\mathcal{H}_n$. Nous obtenons ([9]):

PROPOSITION 1.2.

_Si_ $X = (X(t),\ t \in [0,T])$ _est un processus gaussien réel à trajectoires continues sur_ $[0,T]$ _de covariance_ K, _quel que soit_ $n \geq 1$ _le processus_ $Y_n = (Y_n(t),\ t \in [0,T])$ _défini par_ $Y_n(t) = (I_B - \pi_n)(X)(t)$ _est un processus gaussien de noyau de covariance_ K_n _défini par_

$$K_n(s,.) = (I_{\mathcal{H}(K)} - Q_n)\ (K(s,.)) \qquad s \in [0,T]$$

et d'espace autoreproduisant $\mathcal{H}(K_n)$ _l'orthogonal de_ $\mathcal{H}_n$ _dans_ $\mathcal{H}(K)$.
De plus l'expression analytique suivante est valable pour K_n :

$$K_n(s,t) = K(s,t) - \sum_{k=1}^{n} e_k(s)\, e_k(t) \quad , \ (s,t) \in [0,T]^2 .$$

En reprenant les résultats de [27] ou [48] la fonction caractéristique de $G_n^2 = \int_0^T Y_n^2\ dt$ s'exprime en fonction du déterminant de Fredholm du noyau K_n . Plus précisément

$$\varphi_{G_n^2}(s) = D_n(2is)^{-1/2} = \prod_{k \geq 1} (1-2is\,\lambda_k^{(n)})^{-1/2}$$

où $(\lambda_k^{(n)})_{k \geq 1}$ est la famille des valeurs propres de l'opérateur intégral associé au noyau K_n . On en déduit alors théoriquement par inversion de Fourier la densité de G_n^2 . Plusieurs auteurs ([27], [48], [42]) ont proposé des méthodes plus ou moins adaptées au calcul numérique pour l'inversion de $\varphi_{G_n^2}$ ou pour l'approximation numérique de la densité de G_n^2 . Comme il semble difficile et peu intéressant de condenser les résultats de ces approximations nous renvoyons le lecteur à la première partie de [9] pour en avoir une idée précise. Nous ne résumerons dans ce paragraphe que les résultats originaux de [9] sur la loi de G_n^2 pour certains noyaux K_n . Citons d'abord la proposition suivante qui établit le lien de ce paragraphe avec la remarque 1.1 du paragraphe précédent :

PROPOSITION 2.2.

Soit $(W(t)\ ,\ t \in [0,1])$ un processus de mouvement brownien sur $[0,1]$ de covariance $R(s,t) = s \wedge t$. La fonction de répartition de la variable aléatoire $G^2 = \int_0^1 W^2(t)\,dt$ a pour expression dans $\mathbb{R}^+$:

$$(1.2) \qquad F_{G^2}(x) = 2^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\Gamma(k+\frac{1}{2})}{k!\,\Gamma(\frac{1}{2})} \left(1 - \Phi\left(\frac{4k+1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite sur $\mathbb{R}$.

Nous donnons en annexe dans la table 1 la valeur de certains quantiles de cette loi. Pour les calculs seuls les dix premiers termes de la série (1.2) contribuent à l'expression numérique de F_{G^2} .

Citons également sous forme de théorème le résultat suivant de ANDERSON T.W. et DARLING [2] , qui nous sera utile par la suite.

THEOREME 1.2.

Soit $(Y(t)\ ,\ t \in [0,1])$ un pont brownien sur $[0,1]$ de covariance $R(s,t) = s \wedge t - st$. La fonction de répartition de la variable aléatoire $G_o^2 = \int_0^1 Y^2(t)\, dt$ a pour expression dans $\mathbb{R}^+$:

$$(2.2) \qquad F_{G_o^2}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+\frac{1}{2})}{\Gamma(1/2)j\,!} \sqrt{4j+1}\; e^{-\frac{(4j+1)^2}{16x}} \; K_{1/4}\left(\frac{(4j+1)^2}{16\,x}\right)$$

où $K_{1/4}(x)$ est une fonction de Bessel standard.

Une table de valeurs de $F_{G_o^2}$ est fournie dans [2] . La table 2 de l'annexe en est la reproduction.

Pour terminer ce paragraphe, nous proposons une méthode générale d'approximation de la loi de G_n^2 que nous avons appliqué dans certains exemples et qui donne des résultats très satisfaisants. Rappelons que pour tout entier n la variable aléatoire G_n^2 admet la représentation

$$(3.2) \qquad G_n^2 = \sum_{k \geq 1} \lambda_k^{[n]} \xi_k^2$$

où $(\xi_k)_{k \geq 1}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées réduites et $(\lambda_k^{[n]})_{k \geq 1}$ est la famille des valeurs propres du noyau K_n .

Nous savons également (voir par exemple [48]) que les cumulants $\varkappa_k^{[n]}$ de la loi de G_n^2 peuvent être calculés par

$$(4.2) \qquad \varkappa_k^{[n]} = 2^{k-1}\,(k-1)!\int_0^1 R_k^{[n]}(s,s)\,ds$$

où $R_1^{[n]}(s,t) = K_n(s,t)$ et $R_{k+1}^{[n]}(s,t) = \int_0^1 R_k^{[n]}(s,u)\;R_1^{[n]}(u,t)\,du$.

L'expression (3.2) permet alors de proposer pour les quantiles de la loi de G_n^2 des approximations de Cornish-Fischer ([1]). Plus précisément nous obtenons pour y_p tel que $F_{G_n^2}(y_p) = 1-p$ l'approximation

$$y_p = m + \sigma w$$

avec $w = x + \gamma_1\, h_1(x) + \gamma_2\, h_2(x) + \gamma_1^2\, h_{11}(x) + \dots + \gamma_1^4\, h_{1111}(x)$ où

$$x = \Phi^{-1}(p) \quad \text{et} \quad \gamma_{r-2} = \frac{\varkappa_r^{[n]}}{(\varkappa_2^{[n]})^{r/2}} \quad r = 3,4,\dots$$

Les fonctions $h_{ijk\ell}$ sont tabulées dans [1] pour diverses valeurs de p .

Reprenons maintenant la structure statistique de Wiener de la proposition 3.3 du paragraphe 3, chapitre I.

Les sous-espaces $\mathcal{H}_{k+1}$ de $\mathcal{H}(K)$ étant engendrés par la famille de fonctions $\{\varphi_0,\dots,\varphi_k\}$ définies pour t dans $[0,T]$ par :

$$\varphi_0(t) = t \quad , \quad \varphi_j(t) = \frac{\sqrt{2}}{j\pi}\sin(j\pi t) \quad j \geq 1 .$$

Nous avons

PROPOSITION 3.2.

Avec les notations précédentes, les semi-invariants $\varkappa_j^{[n]}$ de la loi de G_n^2, $n \geq 0$, sont donnés par l'expression

$$\varkappa_j^{[n]} = \frac{2^{3j-2}\,(j-1)\,!}{(2j)\,!}\,|B_{2j}| - \frac{2^{j-1}(j-1)\,!}{\pi^{2j}}\,A_j^{[n]} \qquad j=1,2,\ldots$$

où $(B_k)_{k\geq 1}$ est la suite des nombres de Bernoulli et où

$$A_j^{[n]} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2}\right)^j \quad \text{pour} \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad A_j^{[0]} = 0 \,.$$

La proposition 3.2. nous permet donc d'après ce qui précède d'approcher la loi de G_n^2 quel que soit $n \geq 0$. Nous donnons en annexe (table 3), les quantiles de G_n^2 pour $n = 0,1,\ldots,5$. Remarquons d'ailleurs la qualité de l'approximation en comparant les quantiles approchés de G_o^2 à ceux déterminés par la table exacte 2.

Par la même méthode, nous avons comparé les quantiles de G_o^2 pour un processud d'Ornstein-Uhlenbeck stationnaire aux quantiles exacts de la même loi, déterminés avec les méthodes de [48]. L'approximation de Cornish-Fischer est là aussi très bonne (cf. [9]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ABRAMOWITZ et I.A. STEGUN (1964)
Handbook of Mathematical Functions
Nat.Bur.Standards, n°55, Washington

[2] T.W.ANDERSON et D.A.DARLING (1952)
Asymptotic theory of certain "goodness of fit" criteria based on stochastic processes.
Ann.Math.Statist, vol 23, 193-212

[3] A.ANTONIADIS (1981)
Statistics on Banach spaces valued gaussian random variables.
Probability in Banach spaces III, 1-9, Lect.Notes in Mathematics, vol 860, Springer-Verlag, New-York

[4] A.ANTONIADIS (1982)
Sur certains problèmes d'estimation et de test concernant la moyenne d'un processus gaussien.
Ann.Inst.Hen.Poincaré, t 18, n°3, 223-236

[5] A.ANTONIADIS (1982)
Analyse de la variance à deux facteurs à ensembles de niveaux quelconques.
Note C.R.A.S, Série I, t.294, 417-419

[6] A.ANTONIADIS (1983)
Analysis of variance on function spaces.
A paraître dans Math.Oper.Forsch.and Statistik, Series Statistics, n° 1, 1984, Springer-Verlag.

[7] A.ANTONIADIS (1983)
Un processus d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension infinie.Aspects probabilistes et statistiques.
Publications du Séminaire de Statistique. Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

[8] A.ANTONIADIS (1983)
Transformation de certaines fonctions aléatoires gaussiennes à valeurs dans un espace de Banach en processus de Wiener.
Note C.R.A.S ,Série I, t 296,451-454

[9] A.ANTONIADIS (1983)
Quelques méthodes d'évaluation numérique de la fonction de répartition de certaines formes quadratiques de processus gaussiens.
Rapport de Recherche n° 376, I.M.A.G., Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

[10] J.R.BARRA (1971)
Notions fondamentales de statistique mathématique.
DUNOD, Paris

[11] A.T.BHARUCHA -REID (1972)
Random integral equations.
ACADEMIS PRESS, New-York

[12] S.CAMBANIS et B.S.RAJPUT (1972)
Gaussian processes and gaussian measures.
Ann.Math.Stat.,vol 43, n° 6,1944-1952

[13] R.CARMONA (1977)
Contribution à l'étude des mesures gaussiennes dans les espaces de Banach.
Thèse d' Etat,Université d' Aix-Marseille II .

[14] R. CARMONA (1977)
Tensor product of gaussian measures. Proceedings of the conference on vector valued measures. Dublin, June 1977.
Lecture notes in mathematics, vol 644, Springer-Verlag, New-York.

[15] R. CARMONA et A. KLEIN (1982)
Exponential moments for hitting times of uniformely ergodic Markov processes.
Preprint. A paraître dans Ann. of Probability.

[16] S. CHEVET (1977)
Un résultat sur les mesures gaussiennes.
Note C.R.A.S , Série A, t 284, 441-444

[17] S. CHEVET (1977)
Quelques résultats nouveaux sur les mesures cylindriques.
Proceedings of the Conference on vector valued measures Dublin
Lecture notes in Mathematics, vol 644, Springer - Verlag, New-York

[18] Y. L. DALETSKII (1967)
Infinite dimensional elliptic operators and parabolic equations associated with them.
Upsehi. Mat. Nauka, t 22, n° 4,3-54 (En Russe)

[19] J. DIESTEL et J.J. UHL (1977)
Vector measures
American Math. Socety, Providence, Rhode-Island.

[20] J. L. DOOB (1953)
Stochastic processes
John Wiley & Sons, New-York

[21] M.DUC-JACQUET (1973)
Approximation des fonctionnelles linéaires sur les espaces hilbertiens autoreproduisants.
Thèse d' état, Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

[22] N.DUNFORD et J.T.SCWARTZ (1963)
Linear operators Part II
John Wiley & Sons, New- York

[23] E.B.DYNKIN (1965)
Markov Processes,Vol I
Band 121, Springer -Verlag, New-York

[24] X.FERNIQUE (1964)
Continuïté des processus gaussiens.
Note C.R.A.S, Série A,t 258, 6058-6060

[25] L.E.FRANKS (1966)
A model for the random video process.
Bell.Syst.Tech.Journal, April 1966,609-630

[26] U.GRENANDER (1981)
Abstract Inference
John Wiley & Sons, New-York

[26a] U.GRENANDER (1949)
Stochastic processes and integral equations
Ark.Mat.,1, 67-70

[26b] U.GRENANDER (1950)
Stochastic processes and statistical inference
Ark.Mat.,1,195-277

[27] U.GRENANDER, H.O.POLLACK, D.SLEPIAN (1959)
The distribution of quadratic forms in normal variates : a small sample theory.
J.Soc.Ind.Appl. Math,vol 7, n°4 ,374-401

[28] L.GROSS (1962)
Measurable functions on Hilbert Spaces.
Trans.Amer.Math.Society, vol 105, 372-390

[29] L.GROSS (1965)
Abstract Wiener spaces
Proceedings of the fifth Berkeley Symp.Math.stat.and Prob,vol 2,31-42

[30] T.HIDA (1978)
Analysis of Brownian motion
Carleton Math.lecture notes,n° 13 Ottawa-CANADA

[31] N.KRASNOSELSKII &al (1976)
Integral Operators in spaces of summable functions.
Noordhoff International Publishing,Leyden,Hollande.

[32] J.KUELBS (1970)
Gaussian measures on Banach spaces
J.Funct.Analysis,vol 5,354-367

[33] H.H.KUO (1975)
Gaussian measures on Banach spaces
Lecture Notes in Math,vol 463,Springer-Verlag, New-York

[34] M.LIN (1974)
On the uniform ergodis theorem II
Proc.Amer.Math.society,t 146, 217-225

[35] W. MAGNUS & al (1966)
Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics. Band 52, third edition.
Springer-Verlag, New-York

[36] J. NEVEU (1968)
Processus aléatoires gaussiens
Les presses universitaires de Montréal, Canada.

[37] E. NELSON (1967)
Dynamical theories of brownian motion.
Princeton University Press, New-Jersey

[38] E. PARZEN (1967)
Time series analysis papers
Holden Day, California

[39] K.R. PARTHASARATHY (1967)
Probability measures on metric spaces.
Academic press, New-York

[40] M.A. PIECH (1975)
The Ornstein-Uhlenbeck semi-group in an infinite dimensional L^2-setting.
J. Funct. analysis, vol 18, 271-285

[41] C.R. RAO (1973)
Linear statistical inference and its applications, second edition.
John Wiley & Sons, New- York.

[42] S.O. RICE (1945)
Mathematical Analysis of random Noise
Bell Syst. Tech. Journal, vol 23, 282-332

[43] R.RIESZ et B.NAGY (1955)
Functional analysis
Unger, New-York

[44] J.ROSEN et B.SIMON (1976)
Fluctuations in $P(\emptyset)_1$ processes.
Ann.of Prob.,vol 4,n°2,154-174

[45] J.A.ROZANOV (1971)
Infinite dimensional gaussian distributions.
American Math.society,Providence

[46] L.A.SHEPP (1982)
On the integral of the absolute value of the pinned Wiener process.
Ann.of prob,vol 10, n°1, 234-239

[47] A.SKOROHOD (1974)
Integration in Hilbert Spaces.
Springer Verlag, Berlin

[48] D.SLEPIAN (1958)
Fluctuations on random noise power.
Bell Syst.tech.journal, vol 37, 163-184

[49] L.L.SOLER (1977)
Generalized exponential families.
Recent developments in statistics,North Holland Publ Comp.

[50] J.L.SOLER (1978)
Contribution à l'étude des structures statistiques infinidimensionnelles.
Thèse d' état,Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

[51] J.L.SOLER (1980)
Some results in the quadratic analysis of gaussian processes
Banach center publications,vol 6, 289-302. Pologne

[52] M.TASTO (1977)
Reconstruction of random objects from noisy projections.
Computer graphics and image processing, vol 6, 103-122

[53] R.L.TAYLOR (1978)
Stochastic convergence of weighted sums of random elements in linear spaces.
Lecture notes in Mathematics, vol 672, Springer-Verlag, New-York

[54] J.B.WALSH (1981)
A stochastic model for neural response
Adv.Appl.Prob., vol 13 , 231-281

[55] J.ZABCZYK (1981)
Linear stochastic systems in Hilbert spaces. Structural properties and limit behaviour.
Preprint n° 236. Institut of Mathematics, Polish Academy of Sciences. WARSAW

ANNEXE I

α	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
x_α	1.19582	1.65574	2.13471	2.78745	3.29191

TABLE 1. - Valeurs de certains quantiles de la loi de $\int_0^1 W^2(t)\,dt$ où W est un mouvement brownien standard sur $[0,1]$. Ces valeurs ont été calculées à l'aide de la Proposition 2.2 du chapitre IV. Pour α dans $[0,1]$, x_α désigne le nombre réel tel que $P(\int_0^1 W^2(t)\,dt \leq x_\alpha) = 1-\alpha$.

.02480	.01	.08562	.34	.17159	.67
.02878	.02	.08744	.35	.17568	.68
.03177	.03	.08928	.36	.17992	.69
.03430	.04	.09115	.37	.18433	.70
.03656	.05	.09306	.38	.18892	.71
.03865	.06	.09499	.39	.19371	.72
.04061	.07	.09696	.40	.19870	.73
.04247	.08	.09896	.41	.20392	.74
.04427	.09	.10100	.42	.20939	.75
.04601	.10	.10308	.43	.21512	.76
.04772	.11	.10520	.44	.22114	.77
.04939	.12	.10736	.45	.22748	.78
.05103	.13	.10956	.46	.23417	.79
.05265	.14	.11182	.47	.24124	.80
.05426	.15	.11412	.48	.24874	.81
.05586	.16	.11647	.49	.25670	.82
.05746	.17	.11888	.50	.26520	.83
.05904	.18	.12134	.51	.27429	.84
.06063	.19	.12387	.52	.28406	.85
.06222	.20	.12646	.53	.29460	.86
.06381	.21	.12911	.54	.30603	.87
.06541	.22	.13183	.55	.31849	.88
.06702	.23	.13463	.56	.33217	.89
.06863	.24	.13751	.57	.34730	.90
.07025	.25	.14046	.58	.36421	.91
.07189	.26	.14350	.59	.38331	.92
.07354	.27	.14663	.60	.40520	.93
.07521	.28	.14986	.61	.43077	.94
.07690	.29	.15319	.62	.46136	.95
.07860	.30	.15663	.63	.49929	.96
.08032	.31	.16018	.64	.54885	.97
.08206	.32	.16385	.65	.61981	.98
.08383	.33	.16765	.66	.74346	.99
				1.16786	.999

TABLE 2. – Cette table reproduit les valeurs de [2] sur la fonction de répartition de $\int_0^1 W^2(t)\,dt$ où W est le pont Brownien.

	α	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9975	0.999
N = 0	x_α	0.20247	0.34670	0.46717	0.59415	0.77407	0.90193	1.03636	1.21472
N = 1	x_α	0.08062	0.11737	0.14647	0.17611	0.21516	0.24393	0.27157	0.30575
N = 2	x_α	0.04900	0.06604	0.07891	0.09803	0.10875	0.12138	0.13374	0.14953
N = 3	x_α	0.03474	0.04488	0.05233	0.05972	0.06944	0.07674	0.08401	0.09351
N = 4	x_α	0.02677	0.03363	0.03856	0.04341	0.04979	0.05462	0.05948	0.06594

TABLE 3. Cette table donne l'approximation des quantiles de G_n^2 , $n = 0, \ldots 4$ obtenus à l'aide de la proposition 3.2 du chapitre IV. Ils sont donnés pour $\alpha = 0.75, 0.90, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995, 0.999$.

α	.25	.10	.05	0.025	.01	.005	.0025	.001
x	.67449	1.28155	1.64485	1.95996	2.32635	2.57583	2.80703	3.09022
$h_1(x)$	-.09084	.10706	.28426	.47358	.73532	.93915	1.14657	1.42491
$h_2(x)$	-.07153	-.07249	-.02018	.06872	.23379	.39012	.57070	.84331
$h_{11}(x)$	.07663	.06106	-.01878	-.14607	-.37634	-.59171	-.83890	-1.21025
$h_3(x)$	.00398	-.03464	-.04928	-.04410	-.00152	.06010	.14841	.30746
$h_{12}(x)$	.00282	.14644	.17532	.10210	-.17621	-.53531	-1.02868	-1.89355
$h_{111}(x)$	-.01428	-.11629	-.11900	-.02937	.25195	.59557	1.06301	1.86787
$h_4(x)$	.00998	.00227	-.01082	-.02357	-.03176	-.02621	-.00666	.04591
$h_{22}(x)$	-.03285	.00776	.05985	.09659	.07888	-.01226	-.19116	-.59060
$h_{13}(x)$	-.05126	.01086	.09462	.16106	.16058	.05366	-.17498	-.70464
$h_{112}(x)$	.14764	-.10858	-.39517	-.55856	-.36621	.35696	1.60445	4.29304
$h_{1111}(x)$	-.06898	.09585	.25623	.31624	.07286	-.46734	-1.39199	-3.32708

TABLE 4. - Coefficients pour l'utilisation du développement asymptotique de Cornish-Fisher.

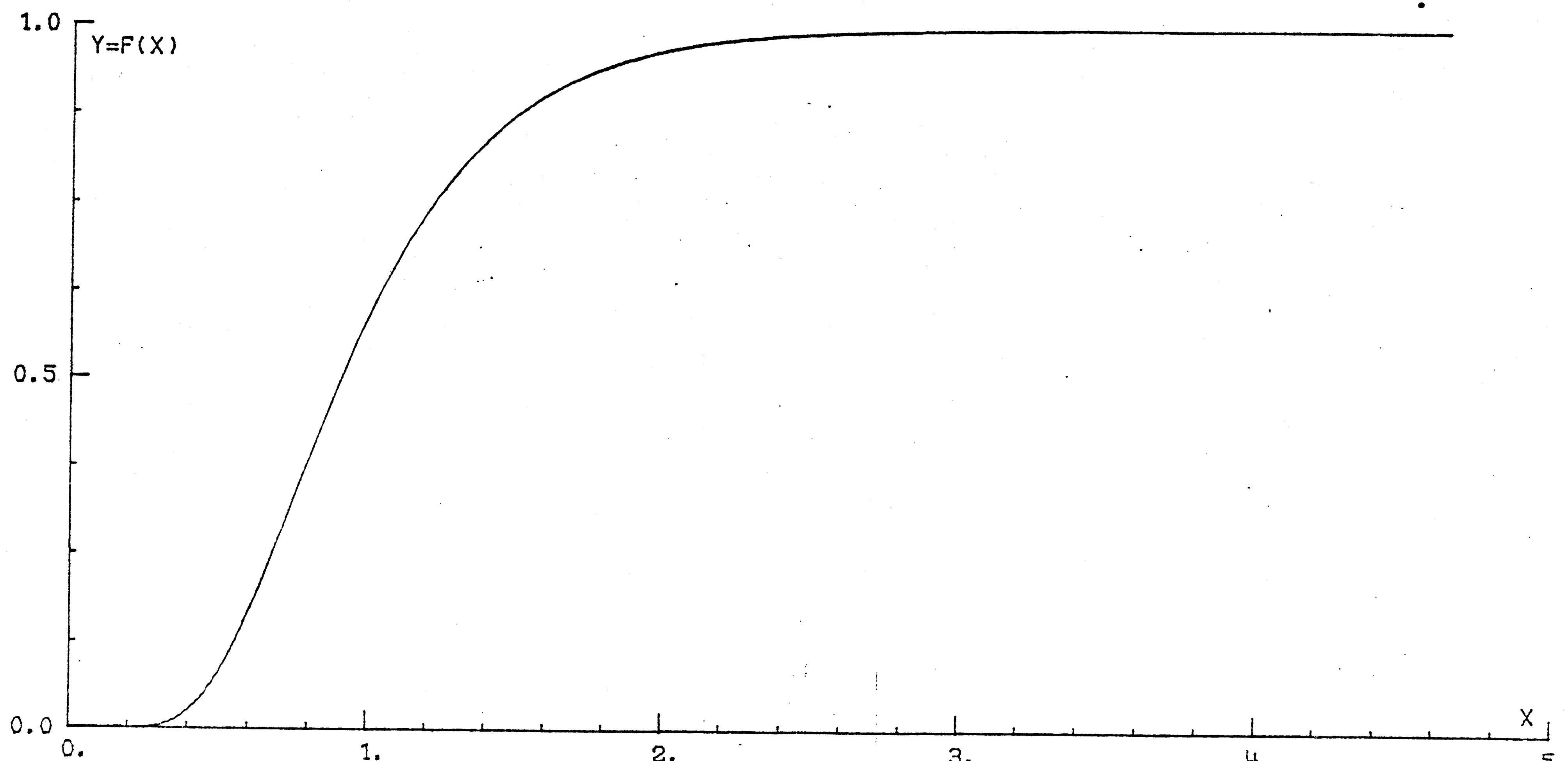

Figure 1

SIMULATIONS

Nous avons appliqué les méthodes d'estimations et de tests des chapitres précédents pour la structure statistique

$$\{ C([0,1]) \ , \ \mathcal{B}(C([0,1]) \ , \ \{ N(m,Q) \ ; \ m \in \mathcal{H}(Q) \})$$

où $N(0,Q)$ est la mesure de Wiener sur $C([0,1])$ et avec

$$m_o(t) = 10\,t - \frac{5\sqrt{2}\ \sin t}{\pi} + \frac{3\sqrt{2}\ \sin 2t}{\pi} = a_o\,\varphi_o(t) + a_1\,\varphi_1(t) + a_2\,\varphi_2(t) \ .$$

Les fonctions φ_i étant celles de la proposition 3.3 du chapitre I et $a_o = 10 \quad a_1 = -5 \quad a_2 = 6$.

Pour obtenir l'observation $y(t) = m_o(t) + w(t)$ nous avons généré un mouvement brownien d'après le théorème de Donsker avec $n = 1000$, et nous avons simulé 100 observations indépendantes de même loi que $\{ y(t) \ , \ t \in [0,1] \}$. Nos résultats sont résumés dans le tableau qui suit.

$\hat{a}_o = 9.8768$ $\qquad$ $\hat{a}_1 = -5.035$ $\qquad$ $\hat{a}_2 = 5.574$

$\hat{\sigma}_{a_1} = 0.78$ $\qquad$ $\hat{\sigma}_{a_1} = 0,49$ $\qquad$ $\hat{\sigma}_{a_2} = 1,03$

Nombres de rejets de "$m \in H_N$" pour les valeurs données de N dans 100 répétitions indépendantes

$1-\alpha$	$N = 3$	$N = 2$	$N = 1$	$N = 0$
0.90	13	37	53	92
0.95	8	21	42	78
0.99	3	15	32	61

ANNEXE II

STATISTICS ON BANACH SPACE VALUED GAUSSIAN RANDOM VARIABLES

by A. ANTONIADIS

1. Introduction.

Whereas the classical theory of statistical inference in finite dimensional gaussian models is almost completely developed, in the infinite dimensional case many problems are unsolved. It is the purpose of this paper to provide some methods of statistical inference on gaussian infinite dimensional models. Our approach is based on recent developments of the theory of infinite dimensional statistical spaces and on the use of techniques from the theory of gaussian measures on Banach spaces.

Let us now be more specific and introduce the basic notations and conventions in order to summarize the results.

Let $x = (x(t))_{t \in T}$ be an observation of a real random function $(X(t))_{t \in T}$ such that

$$X = \{ X(t) = m(t) + X_o(t) \ ; \ t \in T \}$$

where T is a compact metric space and $(X_o(t))_{t \in T}$ is a real gaussian function with zero mean and known covariance K on $T \times T$. We shall assume that the mean function m belongs to the reproducing kernel Hilbert space $\mathcal{H}(K)$ of K. The statistical space corresponding to this model is

$$\left(\mathbb{R}^T, \bigotimes_{t \in T} \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ , \ \left\{ \mathbb{N}_{\mathbb{R}^T}(m, K) \ ; \ m \in \mathcal{H}(K) \right\} \right) \tag{1.1}$$

where $N_{\mathbb{R}^T}(m,K)$ denotes the gaussian measure on $\mathbb{R}^T$ with mean m and covariance K. A statistical space is a triplet $(E, \mathcal{E}, \mathcal{P})$, that is, the mathematical model associated with a statistical experiment where E is a real vector space representing the set of all the possible observations x, $\mathcal{E}$ is the σ-field of subsets of E generated by the observable events and $\mathcal{P}$ is a family of hypotheses concerning the probability distribution of the observed random variable X in $(E, \mathcal{E})$. Assuming the model (1.1), statistics for estimating the mean function m are given and tests of hypotheses of the form "$m \in V$", where V is a finite dimensional subset of $\mathcal{H}(K)$, are performed.

An often adopted model for V is to regard it as the linear span of a family of known functions on T. The tests performed are optimal when the dimension of V is known. Thus, the next problem we are dealing with, is to define an estimation procedure for the dimension of V.

The representation of our model in terms of gaussian measures on Banach spaces is discussed in section 2.

In section 3, we survey some results of [1] which we shall need, concerning the estimation of the mean and the tests. Section 4 is devoted to the estimation of the dimension, which appears as an application of a result valid for models more general than model (1.1).

2. Notations, Preliminaries.

This section covers the basic definitions and notations necessary to the following work. All random variables considered from now on will be defined on a complete probability space $(\Omega, \mathcal{A}, P_r)$.

If B is a real separable Banach space with norm $\| \ \|$, B^* denotes the topological dual of B and the symbol $(\cdot,\cdot)$ denotes the duality between B and B^*. As usual $\mathcal{B}$ denotes the Borel σ-field of B.

Let μ be a centered probability measure on $(B, \mathcal{B})$ such that $\int_B \|x\|^2 d\mu(x) < +\infty$ and let K denote the covariance function of μ defined by

$$K(f,g) = \int_B (f,x)\,(g,x)\, d\mu(x) \qquad (f,g \in B^*)$$

Then according to lemma 2.1 of [3], the reproducing kernel hilbert space $\mathcal{H}(K)$ of K can be realized as a subset of B and the natural inclusion map of $\mathcal{H}(K)$ into B, say J, is linear, one to one and continuous. The same properties are true for the adjoint map J^* from B^* into $\mathcal{H}(K)$ if we identify $\mathcal{H}^*(K)$ and $\mathcal{H}(K)$ in the usual way. Furthermore, $J^*(B^*)$ is dense in

$\mathcal{H}(K)$. Hence, there is a subset $\{e_j^* ; j \geq 1\}$ of B^* such that $\{J^*(e_j^*)=e_j ; j \geq 1\}$ is a C.O.N.S in $\mathcal{H}(K)$. Further, the linear operators

$$\pi_N(x) = \sum_{k=1}^{N} (e_k^*, x)\, e_k \quad \text{and} \quad Q_N(x) = x - \pi_N(x) \quad , \quad N \geq 1$$

are continuous from B to B .

For every $N \geq 1$, let H_N denote the linear span of $\{e_j ; 1 \leq j \leq n\}$ which is also the range of π_N ; π_N and Q_N when restricted to $\mathcal{H}(K)$ are orthogonal projections onto their range.

Finally, if P_o denotes the gaussian measure on $(B, \mathcal{B})$ with zero mean and covariance K , then $\int_B \|x\|^2 dP_o(x) < +\infty$ and the above holds. For every m in $\mathcal{H}(K)$, let P_m be the image measure of P_o by the map $x \longmapsto x + m$, $x \in B$.

3. Estimation and quadratic tests.

For applications, it is natural to suppose that the C.O.N.S $\{e_j ; j \geq 1\}$ of $\mathcal{H}(K)$ is given. With the notations of the above section let Σ be the gaussian statistical space

$$\Sigma = (B , \mathcal{B}, \{P_m ; m \in H_N \subset \mathcal{H}(K)\})$$

Here, we give the estimation procedure of the unknown mean m and some quadratic tests of the hypothesis "$m \in H_N$" against "$m \notin H_N$" . The proof of these results will appear elsewhere [1] .

Proposition 3.1. Let $\Sigma = (B, \mathcal{B}, \{P_m ; m \in H_N \subset \mathcal{H}(K)\})$ be a gaussian statistical space. The statistic

$$x \longrightarrow \pi_N(x)$$

is sufficient for m , of maximum likelihood and defines an unbiased linear estimation of minimum variance.

Remark. In the statistical space $\Sigma_\infty = (B, \mathcal{B}, \{P_m ; m \in J^*(B^*)\})$

by using the extension of the Cramer-Rao inequality in Banach spaces as it is stated in [2], it is easy to check that the identity is an efficient estimator of m. By efficiency of an unbiased estimator $\hat{m}$ of m we mean that for any unbiased estimator $\bar{m}$ of m and any f in B^* we have

$$E_{P_m}\left((f, \hat{m}-m)^2\right) \leq E_{P_m}\left((f, \bar{m}-m)^2\right).$$

It is also known that in the gaussian case, $\pi_N(x)$ converges to x P_m a.s. It follows that the sequence $\{\pi_N(x) ; N \geq 1\}$ is asymptoticaly efficient.

Next, when we assume B to be the space $C(T)$ of continuous functions on a compact metric space T, we have

<u>Proposition 3.2.</u> Let $(X(t))_{t \in T}$ be a gaussian random function with a.s. continuous sample paths on T, with covariance function K continuous on $T \times T$ and mean function m in $\mathcal{H}(K)$. Then, for every α, $0 \leq \alpha \leq 1$, there exists an unbiased quadratic test of size α for testing "$m \in H_N$" against "$m \notin H_N$". Such a test is of the form

$$x \in C(T), \int_T (Q_N(x)(t))^2 \, d\nu(t) > \ell_\alpha \Longrightarrow m \in H_N$$

for some positive Borel measure ν on T and some positive real number ℓ_α.

4. Estimation of the dimension.

The estimation procedure presented in section 3, requires the knowledge of the dimension N and it is then optimal. Thus, we are faced with the problem of choosing the appropriate dimension that will fit a given set of observations. A typical example of this problem is the choice of degree for a polynomial regression. In this section we present an estimation of the dimension of the model. Before stating the main result we shall establish some terminology.

Let us consider an n-sample in the statistical space $\Sigma_\omega = (B, \mathcal{B}, \{P_m ; m \in J^*(B^*)\})$. Since we can consider the parameter space $J^*(B^*)$ partitioned in the following way

$$J^\star(B^\star) = \bigcup_{N=1}^{\infty} M_N$$

where $M_N = H_N \setminus H_{N-1}$ and $M_\infty = J^\star(B^\star) \setminus \bigcup_{1 \le N < +\infty} H_N$, we shall call dimension of our model the subscript N of M_N such that m belongs to M_N in Σ_∞.

For each x in B and φ strictly positive, set

$$r(x,\varphi) = \min \{ j \,;\, \|Q_j(x)\| < \varphi \} \qquad (4.1)$$

where $Q_j = I_d - \pi_j$, π_j being the orthogonal projector onto H_j.
The estimation procedure can be formulated in the following corollary whose proof will follow easily from the general convergence result obtained in theorem 4.1.

<u>Corollary 4.1</u>. Let $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of i.i.d random variables in Σ_∞. There is a positive constant M such that, for any $\varepsilon > 0$, $r(\bar{X}_n, \varphi_n(\varepsilon, M))$ defines an estimator of the dimension of the model, P_r a.s. convergent, where r is defined in (4.1), $\varphi_n(\varepsilon,M) = \left(\frac{2\log \log n}{n}\right)^{1/2} (\varepsilon + M)$ and $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Before stating our result let us recall a definition which is used in theorem 4.1.

<u>Definition 4.1</u>. Let μ a probability measure on $(B, \mathcal{B})$, with mean zero, covariance K and such that $E_\mu(\|X\|^2) < +\infty$. The measure μ is said to satisfy the law of the iterated logarithm if for any sequence of i.i.d B-valued random variables on $(\Omega, \mathcal{Q}, P_r)$ such that $\mathcal{L}(X_1) = \mu$, we have

$$P_r \left(\left\{ \omega \in \Omega \,;\, \left\{ \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{2n \log \log n}} \,;\, n \ge 1 \right\} \text{ is conditionally compact in } B \right\} \right) = 1$$

where $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

If μ satisfies the LIL then, according to [3],

$$P_r(\lim d\,(\,(2n \log\log n)^{-1/2} S_n\,,\, S) = 0) = 1 \qquad (4.2.)$$

where S denotes the unit ball of $\mathcal{H}(K)$.

set

$$\varphi_n(\epsilon, M) = \left(\frac{2 \log \log n}{n}\right)^{1/2} (\epsilon + M)$$

It follows from (4.3), (4.6) and (4.1) that for any $n \geq n(\epsilon, \omega)$

$$r(\overline{X}_n(\omega), \varphi_n(\epsilon, M)) \leq d$$

and consequently

$$P_r(\limsup_n r(\overline{X}_n, \varphi_n) \leq d) = 1 \quad (4.7).$$

Set $F = \{\omega \in \Omega ; \liminf r(\overline{X}_n(\omega), \varphi_n) < d\}$ and let ω be an element of F. Thus, for any integer n there exists $k(\omega) \geq n$ such that

$$r(\overline{X}_k(\omega), \varphi_k) < d$$

and since $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \ldots \subseteq H_d$ it follows that

$$d(\overline{X}_k(\omega), H_{d-1}) < \varphi_k \quad (4.8).$$

But $d(\overline{X}_k(\omega), H_{d-1}) = d(\overline{X}_k(\omega) - m, H_{d-1} - m)$ and therefore

$$d(m, H_{d-1}) \leq d(\overline{X}_k(\omega), m) + \varphi_k$$

or equivalently

$$\left(\frac{k}{2 \log \log k}\right)^{1/2} d(m, H_{d-1}) \leq \| \xi_k(\omega) \| + (\epsilon + M) \quad (4.9).$$

Since the dimension of m is d, we have $d(m, H_{d-1}) > 0$. Hence, for any ω in F we have $\limsup_n \| \xi_n(\omega) \| = +\infty$. Combining this with (4.2) we then have $P_r(F) = 0$. Now (4.7) and $P_r(F) = 0$ implies the assertion of the theorem 4.1.

To finish the proof, let us consider the case of an infinite d, that is $m \in J^*(B^*) \setminus \bigcup_{\infty > N \geq 1} H_N$. We will prove here that

$$P_r(\liminf r(\overline{X}_n, \varphi_n) = +\infty) = 1 \quad (4.10).$$

Set $\Lambda = \{\omega \in A \,;\, \liminf r(\overline{X}_n, \varphi_n) < +\infty\}$ and let ω be an element of F. There exists an integer $K(\omega)$ such that for any n, there is a $k \geq n$ which satisfies

$$r(\overline{X}_k\,,\, \varphi_k) < K(\omega)\ .$$

Thus inequality (4.8) holds with $d-1 = K(\omega)-1$. Hence we have

$$(4.11)\qquad \left(\frac{k}{2\log\log k}\right)^{1/2} d\left(m, H_{K(\omega)-1}\right) - (\varepsilon + M) \leq \|\xi_k(\omega)\|\ .$$

But $d = +\infty$ and therefore $d\left(m, H_{K(\omega)-1}\right) > 0$. Now (4.10) follows from (4.11) and (4.2), so the proof is complete.

The proof of corollary 4.1 is immediate since the law P_o satisfies the LIL. However we stated it because it is the most useful in applications.

Acknowledgement

The author would like to thank R. CARMONA for helpful comments.

References

[1] A. ANTONIADIS, Sur certains problèmes d'estimation et de test concernant la moyenne d'un processus gaussien, submitted for publication.

[2] U. GRENANDER, Abstract Inference, manuscript, to appear.

[3] J. KUELBS, A strong convergence theorem for Banach space valued random variables, Annals of Probability, vol.4, 1976, 744-771.

Anestis ANTONIADIS
Institut de Recherche en Mathématiques Avancées
Université Scientifique et Médicale de Grenoble
B.P. 53 X
38041 Grenoble Cédex
FRANCE

SUR CERTAINS PROBLEMES D'ESTIMATION ET DE TEST CONCERNANT LA MOYENNE D'UN PROCESSUS GAUSSIEN

par

Anestis ANTONIADIS
Institut de Recherche en Mathématiques Avancées
Université Scientifique et Médicale de Grenoble
B.P. 53 X , 38041 Grenoble Cédex

RESUME. - Le but de cet article est d'étudier certains problèmes d'estimation et de tests concernant la moyenne dans des modèles linéaires gaussiens de dimension infinie. Notre approche est basée sur les développements récents de la théorie des structures statistiques infinidimensionnelles et sur les résultats concernant les probabilités gaussiennes sur un espace de Banach.

Les deux principaux résultats que nous obtenons sont d'abord une extension en dimension infinie de la théorie des tests d'hypothèses linéaires de dimension finie ; ensuite une méthode d'estimation de la dimension de certains espaces gaussiens.

ABSTRACT. - In this paper we are concerned with some problems of estimation and tests on the mean in infinite dimensional gaussian linear models. Our approach is based on recent developments of the theory of infinite dimensional statistical spaces and on the use of techniques from the theory of gaussian measures on Banach spaces.

More precisely, if μ is the mean function of a gaussian process whose sample paths fall in some Banach space B, we obtain tests of the linear hypothesis $\mu \in H_n$ against $\mu' \in H_n$, where the H_n are n dimensional subspaces of B.

Furthermore an estimation procedure of the dimension n is proposed and it's asymptotic properties are studied.

1. INTRODUCTION

Tandis que la théorie statistique de l'estimation des paramètres et des tests quadratiques dans les modèles linéaires gaussiens est très avancée en dimension finie, en dimension infinie plusieurs problèmes demeurent sans solution. Néanmoins certains résultats de J.L. Soler [8] nous ont permis d'envisager la construction de tests d'hypothèses linéaires concernant la moyenne d'un processus gaussien au vu d'une trajectoire de celui-ci.

Plus précisément on dispose d'une observation $x = (x(t))_{t \in T}$ d'une fonction aléatoire réelle $(X(t))_{t \in T}$ de la forme

$$X = \{ X(t) = X_o(t) + m(t) \; ; \; t \in T \}$$

où T est un ensemble, et $(X_o(t))_{t \in T}$ une fonction aléatoire réelle gaussienne centrée et de variance Q connue sur $T \times T$. La structure statistique associée à cette observation est

$$(\mathbb{R}^T , \bigotimes_{t \in T} \mathcal{B}(\mathbb{R}) , \{ N_{\mathbb{R}^T}(m,Q) \; ; \; m \in \Theta \subset \mathcal{H}(Q) \}) \; .$$

L'ensemble Θ traduit une hypothèse a priori sur la moyenne inconnue m, l'hypothèse $\Theta \subset \mathcal{H}(Q)$ rendant la structure dominée. Sous ces conditions nous obtenons des tests d'hypothèses linéaires concernant m, c'est-à-dire des tests de l'hypothèse " $m \in V$ " contre " $m \notin V$ " pour certains sous-espaces V de Θ.

Dans le cas où T est un ensemble fini (cf. par exemple [1]) le test fait intervenir une forme quadratique de l'estimateur x_V de la moyenne inconnue m_V, projection orthogonale de x (resp. m) sur le sous-espace vectoriel V de Θ.

Lorsque T est infini, l'espace autoreproduisant $\mathcal{H}(Q)$ de la loi de X_o est de probabilité nulle dès qu'il est de dimension infinie et donc l'observation x ne saurait être projetée sur un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(Q)$. Néanmoins en conservant l'idée de "projection" nous proposons une solution satisfaisante du problème, solution qui nous permet en outre de faire le lien avec les résultats existants sur l'estimation de m obtenus par E. Parzen [6] et Ju. A. Rozanov [7].

Le test proposé est optimal lorsque la dimension du sous-espace V est connue. Nous définissons donc un estimateur de cette dimension.

Les hypothèses utilisées reposent sur la théorie des probabilités dans les espaces de Banach, c'est pourquoi le §2 sera consacré à l'introduction des notations et au rappel des résultats que nous utiliserons. Après les §3 et §4 sur l'étude de l'estimation et des tests sur la moyenne, nous consacrons le §5 à l'estimation des dimensions.

2. NOTATIONS - PRELIMINAIRES.

Le but de ce paragraphe est de fixer les notations et d'énoncer les résultats nécessaires pour la suite. A moins que le contraire ne soit explicitement mentionné nous supposerons toujours qu'un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{A}, P_r)$ est donné et tous les éléments aléatoires considérés seront implicitement définis sur cet espace probabilisé.

Si B est un espace de Banach réel séparable, nous noterons $\|\cdot\|$ sa norme, B^* son dual topologique et $(\cdot,\cdot)$ la forme bilinéaire canonique mettant ces deux espaces en dualité séparante. L'espace B

sera muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et la topologie de B^* sera celle de la convergence uniforme sur les compacts de B. Nous parlerons de π projecteur dans B pour dire que π est un opérateur linéaire continu sur B vérifiant $\pi^2 = \pi$.

Nous dirons que P_o est la mesure de probabilité gaussienne sur B, centrée et de variance la forme quadratique définie positive Q sur B^*, si pour tout y de B^* les variables aléatoires réelles

$$(\cdot, y) : x \longmapsto (x,y)$$

définies sur $(B, \mathcal{B}, P_o)$ sont gaussiennes centrées de variance $Q(y)$ et telles que

$$\int_B (x,y)\,(x,y')\; dP_o(x) = K(y,y')$$

où K est le noyau symétrique de type positif relié à Q. Enfin un élément aléatoire X défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P_r)$ à valeur dans B sera dit gaussien si sa loi de probabilité est une mesure gaussienne sur $(B, \mathcal{B})$.

Le caractère gaussien de P_o permet de définir l'application linéaire I de B^* dans $L^2(B, \mathcal{B}, P_o)$ telle que pour tout y de B^*, $I(y)$ soit la classe de P_o-équivalence associée à la variable aléatoire $(\cdot, y)$ définie sur $(B, \mathcal{B}, P_o)$. L'adhérence de $I(B^*)$ dans $L^2(B, \mathcal{B}, P_o)$ sera notée H et n'est autre que l'espace gaussien associé à la f.a.r. linéaire $(I(y))_{y \in B^*}$ ([2]).

La formule

$$(I^*(f), y) = \langle f, I(y) \rangle_{L^2}, \quad f \in L^2(B, \mathcal{B}, P_o), \; y \in B^*$$

définit l'opérateur adjoint I^* de I qui est une application linéaire continue de $L^2(B, \mathcal{B}, P_o)$ dans B.

On notera $\mathcal{H}(Q)$ l'espace $I^*(H)$ et on désignera par ψ l'application de H dans $\mathcal{H}(Q)$, restriction de I^* à H .

$\mathcal{H}(Q)$ est un espace de Hilbert réel séparable mis en correspondance bijective avec H par ψ dont la fermeture dans B est le support de P_o ([2]) . C'est l'espace autoreproduisant de P_o . Sans perdre de généralité nous supposerons dans la suite que le support de P_o est l'espace B tout entier.

Nous désignerons enfin par J l'injection canonique continue de $\mathcal{H}(Q)$ dans B et J^* sa transposée. En identifiant $\mathcal{H}(Q)$ et son dual $\mathcal{H}^*(Q)$ les applications introduites se résument sur le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
B^* \arrow[d, "I"'] \arrow[dr, "J^*"] & & \\
H \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, dash] & \mathcal{H}(Q) \arrow[r, "J"] & B \\
L^2(B, \mathcal{B}, P_o) \arrow[ur, "I^*"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$J^*(B^*)$ étant dense dans $\mathcal{H}^*(Q) \equiv \mathcal{H}(Q)$ il existe un sous-ensemble $\{ e_j^* \ ; \ j \geq 1 \}$ de B^* tel que $\{ J^*(e_j^*) \ j \geq 1 \}$ soit une base orthonormée de $\mathcal{H}(Q)$.

Pour tout entier $n \geq 1$ nous définissons le projecteur π_n de rang fini de B par

$$\pi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j^*) \ J^*(e_j^*)$$

(π_n n'est rien d'autre que le prolongement à B du projecteur orthogonal Q_n de $\mathcal{H}(Q)$ sur le sous-espace H_n engendré par $\{ J^*(e_j^*) \ ; \ 1 \leq j \leq n \}$) . Il est bien connu par ailleurs (voir [2]) que pour

P_o presque tout x $\pi_n(x)$ converge vers x quand $n\to\infty$ (au sens de la norme de B).

L'espace vectoriel engendré par $\{ J^*(e_j^*) = e_j \ ; \ 1 \le j \le n \}$ sera noté H_n dans la suite.

Enfin, σ désignera la norme du plongement canonique de $\mathcal{H}(Q)$ dans B.

3. ESTIMATION - TESTS QUADRATIQUES

On supposera donnée dans tout ce paragraphe une structure statistique gaussienne décrite avec les notations du paragraphe précédent par :

$$(B \ , \mathcal{B} \ , \{ P_m \ ; m \in \mathcal{H}(Q) \})$$

où P_m désigne la mesure gaussienne sur B , image de P_o par l'application linéaire $x \longrightarrow x+m$ et où $\mathcal{H}(Q)$ est l'espace autoreproduisant de P_o .

On étudiera successivement l'estimation sans biais du paramètre m et certains tests quadratiques d'hypothèses linéaires sur m .

On a, avec les notations précédentes,

PROPOSITION 3.1.

Soit $\Sigma = (B, \mathcal{B}, \{ P_m \ ; m \in H_n \subset \mathcal{H}(Q))$ une structure statistique gaussienne. Soit π_n le projecteur orthogonal de B sur H_n . Alors la statistique

$$x \longrightarrow \pi_n(x)$$

est exhaustive, de maximum de vraisemblance et définit un estimateur linéaire sans biais de m de variance minimum.

PREUVE. - L'espace H_n est un élément de la famille des sous-espaces vectoriels de dimension finie de $\mathcal{H}(Q)$, de dimension n . En prenant $\pi_n(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} (\cdot, e_i^*) e_i$ le projecteur de B sur H_n , où $(e_i, i=1, \dots, n)$ est une base de H_n , la statistique linéaire $x \longrightarrow \pi_n(x)$ est à valeurs dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ et la structure image est une structure gaussienne

$$\{ \mathbb{R}^n , \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} , (\pi_n(P_m) ; m \in H_n) \}$$

où $\pi_n(P_m)$ désigne la loi de probabilité image de P_m par π_n ; cette dernière est une loi gaussienne sur $\mathbb{R}^n$ de moyenne m et de variance connue $\pi_n \circ Q \circ {}^t\pi_n$. On se ramène donc à l'étude d'un problème dans une structure gaussienne classique de dimension finie et le résultat de la proposition est immédiat. ■

REMARQUE 3.2. - Nous avons considéré dans cette proposition des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{H}(Q)$ contenus dans $J^*(B^*)$. Au cas où H_n est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{H}(Q)$ quelconque, ayant pour base $(v_i ; i=1, \dots, n)$, chacun des éléments de H , $\psi^{-1}(v_i)$ définit une variable aléatoire réelle linéaire sur B , c'est-à-dire une fonctionnelle B mesurable définie et linéaire sur un sous-espace vectoriel B_i de B de probabilité égale à 1 . (cf. par exemple [8] ou [7]) . Le choix d'une détermination de $\sum_{i=1}^{n} v_i \psi^{-1}(v_i)$ conduit à un estimateur linéaire sans biais de m de variance minimum, estimateur défini sur $\bigcap_{i=1}^{n} B_i$ à valeurs dans H_n . C'est la méthode d'estimation proposée par Ju. A. Rozanov dans [7] ainsi que par E. Parzen dans [6] . Cette méthode suppose donc une caractérisation de $\bigcap_{i=1}^{n} B_i$.

Le choix de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{H}(Q)$ contenus dans $J^*(B^*)$ évite ce problème et permet le calcul immédiat de l'estimation au vu de l'observation. ■

La proposition précédente conduit finalement à une extension simple en dimension infinie des tests d'hypothèses linéaires classiques ; en particulier,

THEOREME 3.3. - Soient T un espace métrique compact et $(X_t)_{t\in T}$ une fonction aléatoire réelle gaussienne presque sûrement à trajectoires continues sur T de moyenne m, de fonction de covariance K continue sur $T \times T$ et telle que $m \in \mathcal{H}(K)$. Avec les notations précédentes, pour tout réel α de $[0,1]$, il existe au moins un test déterministe de l'hypothèse linéaire " $m \in H_n$ " contre " $m \notin H_n$ ", sans biais, de seuil α. Ce test est de la forme :

$$x \in C(T) \qquad \varphi_{\mu,\ell_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } [\, q_\mu \ (I-\pi_n)(x)\,]^{1/2} > \ell_\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $q_\mu(x) = \int_T x^2(t)\, d\mu(t)$ et $\mu \in M^+(T)$ cône des mesures boréliennes positives sur T.

En effet ici $B = C(T)$ et $(X_t)_{t\in T}$ peut être considérée comme un élément aléatoire gaussien à valeurs dans B. La structure correspondante au problème de test est alors :

$$(B, \mathcal{B}, \{ P_m \ ; m \in \mathcal{H}(K) \subset B \})$$

et le test de l'hypothèse " $m \in H_n$ " contre " $m \notin H_n$ " équivaut au test " $\pi_n(m) = 0$ " contre " $\pi_n(m) \neq 0$ ". On peut alors utiliser un test quadratique de seuil α proposé dans [8].

4. EXEMPLE

Soit $B = C([0,1])$ l'espace de Banach des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ (pour la norme sup). Le dual topologique B^* de B est l'espace $M([0,1])$ des mesures boréliennes bornées sur $[0,1]$.

La mesure de probabilité gaussienne centrée P_o de covariance K définie par

$$K(\mu, \nu) = \int_0^1 \int_0^1 \min(s,t) \; d\mu(s) \; d\nu(t) \; ; \; \mu, \nu \in M([0,1])$$

est la mesure de Wiener sur $C([0,1])$.

Un calcul élémentaire donne le résultat suivant pour l'opérateur J^* du paragraphe 2 :

$$\mu \in M([0,1]) \qquad J^*(\mu)(x) = \int_0^x \mu([t,1]) \, dt \tag{4.1}$$

Rappelons également que l'espace de Hilbert autoreproduisant $\mathcal{H}(K)$ associé à la mesure de Wiener sur $C([0,1])$ est l'espace des fonctions de la forme

$$f(x) = \int_0^x g(t) \, dt \quad \text{où} \quad g \in L^2([0,1], dt) \; ,$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, h \rangle_{\mathcal{H}(K)} = \int_0^1 f'(t) \; h'(t) \; dt \; . \tag{4.2}$$

Soit H_n l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à n définis sur $[0,1]$. Nous remarquerons que $H_n \subset J^*(M([0,1]))$. En effet si f_p définit la fonction

$$f_p(u) = u^p$$

alors $f_p(u) = \int_0^u g_p(t) \, dt$ avec $g_p(t) = p\, t^{p-1}$.

En prenant alors

$$\mu_{p+1} = (p+1)\,\delta_1 - (p+1)\,\mu_{g_p} \quad \text{avec} \quad g_o \equiv 0$$

où δ_1 est la mesure de Dirac au point 1 et μ_{g_p} la mesure sur $\mathcal{B}([0,1])$ admettant g_p pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue, nous avons pour tout $p \geq 0$

$$\mu_{p+1}([t,1]) = (p+1)\,t^p \quad \text{et} \quad J^*_{\mu_{p+1}}(x) = f_{p+1}(x) \qquad (4.3)$$

Vu ces diverses correspondances, construire une base de H_n revient à déterminer des polynômes orthonormés dans $L^2([0,1],dt)$ d'où

PROPOSITION 4.1. - Soit la structure statistique de Wiener

$$(C([0,1]), B(C([0,1])), \{N(m,Q_K) ; m \in \mathcal{H}(K)\})$$

et soit H_n le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(K)$ constitué des polynômes de degré au plus égal à n et admettant zéro pour racine. Alors la statistique π_n de $C([0,1])$ dans H_n est définie par :

$$x \longmapsto \pi_n(x) \quad \text{où} \quad \pi_n(x)(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i^{[n]}(x)\,t^i \quad , \quad t \in [0,1]$$

avec pour tout x de $C([0,1])$

$$h_i^{[n]}(x) = x(1)\,p_i(1) - \int_0^1 x(t)\,p_i'(t)\,dt \quad \text{où}$$

$$p_i(t) = \frac{(-1)^{i-1}\,n(n+i-1)\,!}{(i)^2\,[(i-1)!]^2(n-i)\,!}\;{}_3F_2(-n+1, n+1, i\,; i+1, 1\,; t)$$

Les fonctions hypergéométriques ${}_pF_q$ sont données par

$${}_pF_q(s_1, s_2, \ldots, s_p\,;\, t_1, \ldots, t_q\,;\, u) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(s_1)_r \ldots (s_p)_r}{(t_1)_r \ldots (t_q)_r} \frac{u^r}{r!} \quad \text{où}$$

$$(s)_r = s(s+1)\ldots(s+r-1) \quad \text{et} \quad (s)_o = 1 \, .$$

La démonstration de cette proposition est donnée en annexe, ainsi que quelques valeurs particulières des coefficients $h_i^{[n]}(x)$.

5. ESTIMATION DE LA DIMENSION

La méthode d'estimation et de test de la moyenne dans les paragraphes précédents repose sur une seule observation et est optimale lorsque la dimension n de H_n est supposée connue. Nous nous proposons ici, au vu d'un échantillon dans la structure statistique

$$\Sigma = (B, \mathcal{B}, \{P_m \,;\, m \in J^*(B^*) \subset \mathcal{H}(Q)\})$$

d'estimer l'indice de la dernière composante non nulle de la moyenne m sur la base $(e_i)_{i \geq 1}$ de $\mathcal{H}(Q)$ avec l'éventualité d'une détermination infinie au cas où m n'appartiendrait à aucun des sous-espaces vectoriels H_n .

Nous noterons S la boule unité fermée de $\mathcal{H}(Q)$:

$$S = \{ x \in \mathcal{H}(Q) \,;\, \|x\|_{\mathcal{H}(Q)} \leq 1 \}$$

et σ la norme du plongement canonique J de $\mathcal{H}(Q)$ dans B . Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat de J. Kuelbs que nous utiliserons, non pas sous sa forme générale ([4]) mais sous une forme adaptée à l'utilisation que nous allons en faire :

LEMME 5.1. - Soit B un espace de Banach séparable. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments aléatoires indépendants définis sur $(\Omega, \mathcal{a}, P_r)$ à valeurs dans B, de loi gaussienne centrée P de covariance Q. Alors la suite $(\xi_n)_{n\geq 3}$ d'éléments aléatoires définis par :

$$\xi_n = (2n \log \log n)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

est telle que

$$P_r(\lim_{n\to+\infty} d(\xi_n, S) = 0) = 1 .$$

Pour tout δ réel strictement positif et pour tout x de B nous notons

$$i(x,\delta) = \min\{ j \mid \| x - \pi_j(x) \| < \delta \} \qquad (5.1)$$

les opérateurs π_j étant les projecteurs sur H_j. Comme nous l'avons rappelé dans les préliminaires $\pi_j(x)$ tend P presque sûrement vers x et donc $i(x,\delta)$ est P-presque sûrement fini quel que soit δ.

En utilisant les mêmes notations que dans le lemme 5.1 nous obtenons

THEOREME 5.2. - Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments aléatoires indépendants de même loi P_m dans la structure statistique Σ. Il existe une constante positive M, telle que, pour tout $\epsilon > 0$, si on pose pour $n \geq 3$

$$\delta_n = \left(\frac{2\log\log n}{n}\right)^{1/2} \sigma(1+\epsilon)M$$

on a

(i) si $m \in H_N \setminus H_{N-1}$, $i(\overline{X}_n, \delta_n)$ est un estimateur de N, P_r-presque sûrement convergent

(ii) si $m \in J^*(B^*) \setminus \bigcup_{i=1} H_i$, $P_r(\lim_{n\to+\infty} i(\bar{X}_n, \delta_n) = \omega) = 1$ où

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

DEMONSTRATION. - Avant de commencer la démonstration nous remarquerons (voir Remarque 5.3) qu'il est possible, quitte à modifier l'espace B, de supposer que la suite des projecteurs $(\pi_n)_{n\geq 1}$ est uniformément bornée par une constante c . Nous étudierons séparément les cas (i) et (ii) .

Cas (i) : $m \in H_N \setminus H_{N-1}$. Cette condition équivaut à

$$\pi_N(m) = m \quad \text{et} \quad \pi_{N-1}(m) \neq m .$$

Pour $n \geq 3$ nous avons

$$\|\bar{X}_n - m\| = \left(\frac{2\log\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)}{(2n\log\log n)^{1/2}} \right\|$$

$$\leq \left(\frac{2\log\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ d\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)}{(2n\log\log n)^{1/2}}, S\right) + \sup_{y\in S}(\|y\|) \right\}$$

Or $\sup_{y\in S}(\|y\|) = \sigma$ norme du plongement canonique de $\mathcal{H}(Q)$ dans B .
D'où :

$$\|\bar{X}_n - m\| \leq \left(\frac{2\log\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} (d(\xi_n, K) + \sigma) \qquad (5.2)$$

où

$$\xi_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)}{(2n\log\log n)^{1/2}} .$$

Considérons maintenant

$$\| \overline{X}_n - \pi_N(\overline{X}_n) \| \leq \| \overline{X}_n - m \| + \| \pi_N(m) - \pi_N(\overline{X}_n) \|$$

Les projecteurs π_N étant uniformément bornés par c nous avons :

$$\| \overline{X}_n - \pi_N(\overline{X}_n) \| \leq (c+1) \quad \| \overline{X}_n - m \| \qquad (5.3)$$

En réunissant (5.2) et (5.3) nous obtenons finalement, avec $M = c+1$:

$$\| \overline{X}_n - \pi_N(\overline{X}_n) \| \leq M \left(\frac{2 \log \log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \{ d(\xi_n, S) + \sigma \} \qquad (5.4)$$

La suite $(\xi_n)_{n \geq 3}$ satisfait aux conditions du lemme 5.1. Par conséquent il existe $A \in \mathcal{A}$ avec $P_r(A) = 1$ tel que, pour tout $\omega \in A$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $n(\varepsilon, \omega) \in \mathbb{N}$, et pour tout $n \geq n(\varepsilon, \omega)$ on ait $d(\xi_n(\omega), S) < \varepsilon \sigma$.

L'expression (5.4) devient alors

$$\| \overline{X}_n(\omega) - \pi_N \overline{X}_n(\omega) \| < M \left(\frac{2 \log \log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1+\varepsilon)\, \sigma$$

Posons $\delta_n = M \left(\frac{2 \log \log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} (1+\varepsilon)\sigma$.

Nous avons alors pour tout $n \geq n(\varepsilon, \omega)$ d'après (5.1)

$$i(\overline{X}_n(\omega), \delta_n) \leq N$$

et par conséquent

$$P_r(\lim \sup i(\overline{X}_n, \delta'_n) \leq N) = 1 \qquad (5.5) .$$

Notons $F = \{ \omega \in \Omega \, ; \lim \inf i(\overline{X}_n(\omega), \delta_n) < N \}$ et soit ω un élément de F . Nous avons alors

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k(\omega) \geq n$ tel que $i(\overline{X}_k(\omega), \delta_k) < N$.

Mais alors $d(\bar{X}_k(\omega), H_{N-1}) < \delta_k$ car les sous-espaces H_i sont emboités.

Or $d(\bar{X}_k(\omega), H_{N-1}) = d(\bar{X}_k(\omega) - m, H_{N-1} - m)$ et

donc $d(m, H_{N-1}) \leq d(\bar{X}_k(\omega), m) + \delta_k$

et

$$\left(\frac{k}{2 \log \log k}\right)^{\frac{1}{2}} d(m, H_{N-1}) \leq \|\xi_k(\omega)\| + \sigma(1+\epsilon)M \qquad (5.6)$$

Mais comme $m \in H_N$ on a pour tout h de H_{N-1}

$$(m, e'_N)\, e_N = (\pi_N - \pi_{N-1})\,(m-h)$$

et donc $d(m, H_{N-1}) \geq \dfrac{|(m, e'_N)|\ \|e_N\|}{2c}$

Finalement nous obtenons en reportant dans (5.6)

$$\|\xi_k(\omega)\| \geq \frac{\|e_N\|}{2c} \left(\frac{k}{2 \log \log k}\right)^{\frac{1}{2}} |(m, e'_N) - \sigma(1+\epsilon)M|$$

d'où pour tout ω de F

$$\limsup \|\xi_k(\omega)\| = +\infty$$

D'après le lemme 5.1 nous avons $P_r(F) = 0$ et donc

$$P_r(\lim (i(\bar{X}_n, \delta_n) = N) = 1 \ .$$

Cas (ii) : $m \in J^*(B^*) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} H_i$. Nous montrerons dans ce cas que

$$P_r(\liminf i(\bar{X}_n, \delta_n) = +\infty) = 1 \ .$$

Soit $F = \{\omega \in \Omega \, ; \liminf \, i(\overline{X}_n, \delta_n) < +\infty\}$ et soit $\omega \in F$. Il existe donc $K(\omega) < +\infty$ tel que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $k \geq n$ satisfaisant à

$$i(\overline{X}_k(\omega), \delta_k) < K(\omega)$$

En reprenant l'inégalité (5.6) avec $K(\omega)$ à la place de $N-1$ nous obtenons

$$\left(\frac{k}{2 \log\log k}\right)^{\frac{1}{2}} d(m, H_{K(\omega)}) - \sigma(1+\varepsilon) M \leq \| \xi_k(\omega) \| \qquad (5.7)$$

Or $m \in J^*(B^*) \setminus \bigcup\limits_{i=1} H_i$ et donc $d(m, H_{K(\omega)}) > 0$ car $K(\omega) < +\infty$.

Nous déduisons donc de (5.7) que $\liminf \| \xi_k(\omega) \| = +\infty$ pour tout ω de F et d'après le lemme 5.1 , $P_r(F) = 0$. ∎

REMARQUE 5.3. La remarque sur laquelle s'appuie la démonstration du théorème 5.2 est basée sur les résultats de L. Gross ([3]) repris par H.H. Kuo dans [5] (cor. 4.2. page 43). Il est démontré qu'il existe un espace de Banach séparable B_o contenu dans B tel que $P(B_o) = 1$, $\overline{\mathcal{H}(Q)} = B_o$, de norme plus forte que celle de B et pour lequel la famille $(J(e_i))_{i \geq 1}$ constitue une base de Schauder.

Les projecteurs π_n sont dans ce cas uniformément bornés (cf. [10] page 15).

Annexe

I. Démonstration de la proposition 4.1.

Notons $(\pi_k)_{k\geq 0}$ les polynômes de Legendre sur $[-1,+1]$. Rappelons que

$$\int_{-1}^{1} \pi_n(u)\, \pi_m(u)\, du = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1} & \text{si } n=m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En posant $\varphi_n(t) = \sqrt{2n+1}\ \pi_n(2t-1)$, $t \in [0,1]$ la famille $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ de polynômes ainsi définis, forme une base orthonormée de $L^2([0,1],dt)$. La famille des polynômes $\{\psi_n\ ;\ n=0,\dots,k\}$ où

$$\psi_n(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\, dt$$

est alors une base orthonormée de $\mathcal{H}_{k+1}$.

Posons

$$\psi_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^{(n+1)}\, x^i \qquad (1)$$

Il est aisé de voir que la mesure ν_n de $M([0,1])$ telle que $J^*\nu_n = \psi_n$, est définie par

$$\nu_n = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^{(n+1)}\, \mu_i \quad \text{où} \quad \mu_i = i\,\delta_1 - i\,\mu_{g_{i-1}}$$

Nous avons alors

$$\pi_{k+1}(x)\,(t) = \sum_{j=0}^{k} (x,\nu_j)\,\psi_j(t) = \sum_{\ell=1}^{k+1} t^{\ell} \sum_{j=\ell-1}^{k} a_{\ell}^{(j+1)} \sum_{i=1}^{j+1} a_i^{(j+1)} (\mu_i, x)$$

et la mesure correspondant au $\ell^{\text{ième}}$ coefficient est

$$\xi_{\ell}^{[k+1]} = \sum_{j=\ell-1}^{k} a_{\ell}^{(j+1)} \sum_{i=1}^{j+1} a_{i}^{(j+1)} \mu_i \qquad (2)$$

D'après les propriétés des polynômes de Legendre (voir [9] par exemple) on a

$$\pi_n(2x-1) = (-1)^n \, {}_2F_1(-n, n+1 ; 1 ; x) \quad \text{et}$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} (\pi_{n+1}(2x-1) - \pi_{n-1}(2x-1)) .$$

Après identification avec (1) nous retrouvons alors d'après (2) l'expression de $\xi_{\ell}^{[k+1]}$ qui conduit à la proposition.

Valeurs particulières des expressions $h_i^{[n]}(x)$:

$n = 3$

$$h_1^{[3]}(x) = 3\,x(1) - 60 \int_0^1 t\,x(t)\,dt + 36 \int_0^1 x(t)\,dt$$

$$h_2^{[3]}(x) = -12\,x(1) + 180 \int_0^1 t\,x(t)\,dt - 96 \int_0^1 x(t)\,dt$$

$$h_3^{[3]}(x) = 10\,x(1) - 120 \int_0^1 t\,x(t)\,dt + 60 \int_0^1 x(t)\,dt .$$

REFERENCES

[1] BARRA J.R. Notions fondamentales de statistique mathématique, Dunod, éditeur, Paris, 1971.

[2] CARMONA R. Contribution à l'étude des mesures gaussiennes dans les espaces de Banach, Thèse, Université d'Aix-Marseille II, U.E.R. Marseille-Luminy, 1977.

[3] GROSS L. Abstract Wiener spaces, Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. 2 (1965) p. 31-42.

[4] KUELBS J. Gaussian measures on Banach spaces. J. Functional Analysis 5 (1970) p.354-367.

[5] KUO H.H. Gaussian measures in Banach spaces, Lecture Notes in Math. 463, Springer-Verlag, éditeur, Berlin, 1975.

[6] PARZEN E. Time series analysis papers, Holden-Day, San-Francisco (1967).

[7] ROZANOV Ju. A. Infinite dimensional gaussian distribution, American mathematical society, Providence, 1971.

[8] SOLER J.L. Contribution à l'étude des structures statistiques infini-dimensionnelles, Thèse, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, Grenoble, 1978.

[9] SONI R.P. MAGNUS W. OBERHETTINGER F. Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics. Spriger-Verlag, éditeur, New-York (1966).

[10] TAYLOR R.L. Stochastic convergence of weighted sums of Random elements in linear spaces, Lect. notes in math, 672, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

ANALYSIS OF VARIANCE ON FUNCTION SPACES

A. ANTONIADIS [1]

Summary. In this paper, we introduce the notion of analysis of variance on spaces of real functions defined on a product set and the ordinary analysis of variance in two way arrays appears as a special case. In order to obtain the results the theory of gaussian measures on Banach spaces is employed and a decomposition into orthogonal subspaces of a direct product type Hilbert space is discussed. The details of the analysis are illustrated by an example.

Key words : Analysis of variance, gaussian process, Banach space, tensor product, reproducing kernel Hilbert space, quadratic tests, random pictures.

1. Introduction

Our approach into the formulation of a method of analysis of variance on function spaces relies upon certain tests concerning the mean function of gaussian processes (see A. ANTONIADIS (1980, 1981)).

Let $(x(s,t))_{(s,t)\in S\times T}$ be an observed sample of a real random function of the following form :

$$X(s,t) = m(s,t) + X_o(s,t) \qquad s \in S \ , \ t \in T \qquad (1.1)$$

where S and T are compact metric spaces and where $\{X_o(s,t)\ ,\ (s,t) \in S\times T\}$ denotes the zero mean gaussian process with known covariance function K on $(S\times T)\times(S\times T)$. We shall assume that the mean function m belongs to the reproducing kernel Hilbert space of K (R.H.K.S),

---

1 Laboratoire I.M.A.G. B.P. 53 X 38041 Grenoble-Cédex

$\mathcal{H}(K)$; in this case, the statistical space corresponding to (1.1) is dominated. With the use of this structure, tests of hypotheses are performed to analyse the effect of the continuous factors s and t on the mean function.

Models of the above form have been succesfully used in problems concerning scanning processes of random pictures (see L.E. FRANKS (1966) and M. TASTO (1977)). In such problems, a still picture is scanned via its luminance $X(s,t)$. Usually, this luminance has a gaussian random part $X_o(s,t)$ with a covariance of the form

$$K((s,t),(s',t')) = d^2 \exp(-\beta_h |s-s'|) \exp(-\beta_v |t-t'|)$$

where the parameters β_h and β_v specify the average number of luminance levels in a unit distance along the horizontal and the vertical directions respectively. If the scanned picture is composed of a continuous sequence of objects with uniform density in one direction, the mean $m(s,t)$ will be constant in this direction. It seems therefore, interesting to test such an hypothesis.

The representation of our model in terms of gaussian measures on tensor product Banach spaces plays an important role in our analysis and is discussed in section 2.

The analysis of variance is discussed in section 3 in terms of the model provided in section 2.

This formulation is an appealing one because the abstract setting looks exactly like the finite dimensional and because it provides a unified treatment of the analysis of variance problem. In practical applications we shall be concerned with finding the corresponding abstract formulation which leads to an easy treatment of the problem. Such an application is given in section 4 for the luminance process described above.

2. Preliminaries.

This section covers the basic notations, definitions and properties necessary for the present work. All theorems of this section are known and have been proved by S. CHEVET (1977) and R. CARMONA (1977) and we include their statements for the sake of completeness.

2.1. Tensor products of Banach spaces.

Here and in the following all the vector spaces are real. If B is a Banach space, its norm will be denoted by $\| \ \|_B$. The symbol $(\, ,)_B$ will be used to denote the duality between B and its dual B^*. The closed unit ball of B will be denoted by U_B. Hilbert spaces will be identified to their duals via the Riesz identification.

If B_1 and B_2 are two Banach spaces, $B_1 \otimes B_2$ will denote the algebraic tensor product of B_1 and B_2. We shall denote by $B_1 \otimes_\varepsilon B_2$ the space $B_1 \otimes B_2$ equiped with the following norm

$$\varepsilon(u) = \sup \{ \, | (x^* \otimes y^*, u) | \ ; \ x^* \in U_{B_1^*} , y^* \in U_{B_2^*} \}$$

and $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ will denote the completion of $B_1 \otimes_\varepsilon B_2$. Let us point out here some of the properties of the ε-tensor product. If we assume that B_1 and B_2 are separable Banach spaces, then $B_1^* \otimes B_2^*$ separates points of $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ and $B_1^* \otimes B_2^*$ is weakly $*$ dense in $(B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2)^*$ (see J. DIESTEL and J. UHL (1977)). If W denotes a closed linear subspace of B_1, then $W \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ is a closed linear subspace of $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$. Moreover if $\dim W = 1$, the linear subspace $W \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ is isomorphic to B_2. In the following the identification of $W \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ to B_2 will be isomorphic.

A typical and extremely useful class of examples is obtained when we take B_1 to be the space $C(T)$ of continuous functions on a compact metric space (T, d_T) and B_2 to be $C(S)$ where (S, d_S) is another compact metric space. Let $S \times T$ be the metric space defined by the distance

$$d_{S \times T} ((s,t), (s',t')) = \max (d_S(s,s'), d_T(t,t')) .$$

In this case we have $C(T) \hat{\otimes}_{\epsilon} C(S) \simeq C(S \times T)$, the norm of these spaces being the supremum norm.
Another example of tensor product B-spaces useful in applications is obtained when we take B_1 to be the space $C^k([a,b])$ of all real functions defined on $[a,b]$ which have continuous derivatives of order up to and including k , B_2 to be $C^{\ell}([c,d])$, the corresponding norm being

$$\|f\|_{C^k[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} \cdot \left(\max_{0 \le i \le k} |D^i f(x)| \right) .$$

If H_1 and H_2 are two real Hilbert spaces, $H_1 \hat{\otimes}_2 H_2$ denotes the Hilbert space obtained by completing the prehilbertian space $H_1 \otimes H_2$ for the scalar product $\langle h_1 \otimes h_2 , k_1 \otimes k_2 \rangle_{H_1 \otimes H_2} = \langle h_1 , k_1 \rangle_{H_1} \langle h_2 , k_2 \rangle_{H_2}$.

This subsection will be closed with a few words about induced operators. If B_1 , B_2 , B_3 and B_4 are Banach spaces and $O_1 : B_1 \longrightarrow B_2$ and $O_2 : B_3 \longrightarrow B_4$ are bounded linear operators, consider $O_1 \otimes O_2 : B_1 \otimes B_3 \longrightarrow B_2 \otimes B_4$ defined by

$$(O_1 \otimes O_2) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right) = \sum_{i=1}^{n} O_1(x_i) \otimes O_2(y_i) .$$

The operator $O_1 \otimes O_2$ is a well defined operator sending $B_1 \otimes B_3$ into $B_2 \otimes B_4$ and has an unique bounded linear extension to an operator $O_1 \hat{\otimes}_{\epsilon} O_2 : B_1 \hat{\otimes}_{\epsilon} B_3 \longrightarrow B_2 \hat{\otimes}_{\epsilon} B_4$.

2.2. Gaussian measures on tensor product B-spaces.

The notion of gaussian tensor measures on Banach spaces is well known. Nevertheless, we shall recall here some results on tensor gaussian measures in order to make the paper understandable to the reader who is not quite familiar with this notion.

Let B_1 and B_2 be two separable Banach spaces and let $\mathcal{B}_1$ and $\mathcal{B}_2$ be the σ-field of Borel subsets of B_1 and B_2 respectively. Let μ and ν be two gaussian measures on B_1 and B_2 respectively, with covariance functions K_μ and K_ν. Our concern in the following is with a gaussian measure on $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ whose covariance is the "product" of K_μ and K_ν. This problem was examined by S. CHEVET (1977a, 1977b) in a very general context. More precisely we have :

Proposition 1. Let μ_1 and μ_2 be centered gaussian measures on B_1 and B_2 with covariance functions K_{μ_1} and K_{μ_2} respectively. There exists a unique gaussian measure on $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$, denoted by $\mu = \mu_1 \otimes_\varepsilon \mu_2$, which satisfies :

$$K_\mu (x_1^* \otimes x_2^*, y_1^* \otimes y_2^*) = K_{\mu_1} (x_1^*, y_1^*)\ K_{\mu_2} (x_2^*, y_2^*)$$

for all (x_1^*, y_1^*) in $B_1^* \times B_1^*$ and (x_2^*, y_2^*) in $B_2^* \times B_2^*$.

We have the following characterisation :

Proposition 2. Let B_1 and B_2 be two real separable Banach spaces and let μ be a centered gaussian probability measure on $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$. For gaussian measures μ_1 and μ_2 to exist on B_1 and B_2 respectively, such that $\mu = \mu_1 \otimes_\varepsilon \mu_2$ it is necessary and sufficient that there exists positive definite quadratic forms Q_1 and Q_2 on B_1^* and B_2^* which satisfies

$$Q(x_1^* \otimes x_2^*) = Q_1(x_1^*)\ Q_2(x_2^*)$$

for all (x_1^*, x_2^*) in $B_1^* \times B_2^*$.

Without loss of generality, we can assume that the topological supports of μ_1 and μ_2 are the entire spaces B_1 and B_2. To end this section we shall expose briefly some known results on the relationship existing between a gaussian measure and its reproducing kernel Hilbert space. Let $\mathcal{H}_{\mu_1}$ and $\mathcal{H}_{\mu_2}$ be the R.K.H.S'S of the measures μ_1 and μ_2. Then, according to the abstract Wiener space theory (see L. GROSS (1965)), for each $i\,(i=1,2)$, the space $\mathcal{H}_{\mu_i}$ can be realised as a subset of B_i and the natural inclusion map of $\mathcal{H}_{\mu_i}$ into B_i, say J_i, is continuous linear, one to one, with dense range. The linear map J_i^* (transposed of J_i) from B_i^* into $\mathcal{H}_{\mu_i}$ is also continuous and with dense range. With this terminology, one can prove that $(J_1 \hat{\otimes}_\epsilon J_2, \mathcal{H}_{\mu_1} \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_{\mu_2}, B_1 \hat{\otimes}_\epsilon B_2)$ is an abstract Wiener space (see R. CARMONA (1977)).

Now, since $B_1^* \otimes B_2^*$ is weakly *dense in $(B_1 \hat{\otimes}_\epsilon B_2)^*$, the adjoint operator $(J_1 \hat{\otimes}_\epsilon J_2)^*$ of $J_1 \hat{\otimes}_\epsilon J_2$ is entirely defined by its values on $B_1^* \otimes B_2^*$ and we have

$$(J_1 \hat{\otimes}_\epsilon J_2)^* (x_1^* \otimes x_2^*) = J_1^*(x_1^*) \otimes J_2^*(x_2^*)$$

for all (x_1^*, x_2^*) of $B_1^* \times B_2^*$.

In the following, we shall deal with Banach spaces B_1 and B_2 which are spaces of real functions.

3. Analysis of variance.

3.1. The Problem.

Let B_1 and B_2 be separable Banach spaces of numerical functions defined respectively on sets T_1 and T_2. Let x be an observation of a random gaussian $B_1 \hat{\otimes}_\epsilon B_2$ valued vector X, with mean m belonging to the reproducing kernel $(J_1 \hat{\otimes}_\varepsilon J_2)(\mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_2)$ the law of $X-m$ being $\mu_1 \otimes_\varepsilon \mu_2$. From now on the reproducing kernel Hilbert space $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_2$ will be identified with the dense subspace $(J_1 \hat{\otimes}_\varepsilon J_2)(\mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_2)$ of $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$. So, within the framework of section 2 the corresponding statistical space which we will use is

$$(B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2 \, , \, \mathcal{B}(B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2) \, , \, N(m, Q_1 \otimes Q_2) \, ; \, m \in \mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_2) \qquad (3.1)$$

For example, if S and T are compact metric spaces and if we consider a random gaussian process $(X(s,t) \, ; \, (s,t) \in S \times T)$ with a.s. continuous sample paths on $(S \times T, d_{S \times T})$ and with covariance $K = K_1 \otimes K_2$ the random process $\{X(s,t) \, ; \, (s,t) \in S \times T\}$ defines a random vector X taking on its values in the space $C(S \times T)$ and the corresponding statistical space is

$$\Sigma = \{ C(S) \hat{\otimes}_\varepsilon C(T), \mathcal{B}(C(S \times T)), N(m, Q_{K_1} \otimes Q_{K_2}) \, ; \, m \in \mathcal{H}_{K_1} \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_{K_2} \} .$$

We can also consider with some additional assumption on X, statistical spaces of the form

$$\psi = \{ C^k([a,b]) \hat{\otimes}_\varepsilon C^\ell([c,d]) \, , \, \mathcal{B} \, ; \, N(m, Q_1 \otimes Q_2) \, ; \, m \in \mathcal{H}(Q_1) \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}(Q_2) .$$

In order to tackle the analysis of variance problem we assume

Assumption 1. For $i = 1,2$ there exists in $\mathcal{H}_i$ an element 1_{T_i}, such that $J_i(1_{T_i})$ is the constant function equal to $1/\|1_{T_i}\|$ on T_i.

Assumption 2. For $i = 1,2$, 1_{T_i} is in the range of J_i^*; let $e_i^* \in B_i^*$ such that $J_i^*(e_i^*) = 1_{T_i}$.

Assumption 1 is used to ensure that the reproducing kernel Hilbert space of the process contains the constant functions on $T_1 \times T_2$ and also the constant functions on T_i $(i=1,2)$. Assumption 2 is used to assure that a solution to the analysis of variance problem exist. These conditions are automatically satisfied in the finite dimensional case.

Lemma 1. Let m be an element of $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_2$.
Then m can be written as

$$m = m_o + m_1 + m_2 + m_{12}$$

where m_o is a constant function on $T_1 \times T_2$, $m_i (i=1,2)$ is either zero or a non constant function on T_i and m_{12} is either zero or a non zero function on $T_1 \times T_2$, which can not be written as the sum of a function on T_1 and a function on T_2. Moreover, such a decomposition is unique.

Proof. According to Assumption 1, $1_{T_1} \otimes 1_{T_2} = 1_{T_1 \times T_2}$ is an element of $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_2$.

Let $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_{1,2}$ be the linear subspaces (closed) of $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}$, spanned respectively by the functions 1_{T_1}, 1_{T_2} and $1_{T_1 \times T_2}$. If $\mathcal{K}_1^{\perp}$ and $\mathcal{K}_2^{\perp}$ denotes the orthogonal subspaces of $\mathcal{K}_1$ and $\mathcal{K}_2$, then according to the preliminaries of section 2, $\mathcal{K}_1 \hat{\otimes}_2 \mathcal{K}_2^{\perp}$ and $\mathcal{K}_1^{\perp} \hat{\otimes}_2 \mathcal{K}_2$ are closed linear subspaces of $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_2$, isomorphic to $\mathcal{K}_2^{\perp}$ and $\mathcal{K}_1^{\perp}$ respectively. Moreover it is obvious that they are orthogonal in $\mathcal{H}$ and orthogonal to $\mathcal{K}_{1,2}$. According to this orthogonal decomposition of $\mathcal{H}$, for every element m of $\mathcal{H}$ we have

$$m = m_o + m_1 + m_2 + m_{12}$$

where m_o denotes the orthogonal projection of m on $\mathcal{K}_{1,2}$, m_1 the projection of m on $\mathcal{K}_1^{\perp} \hat{\otimes}_2 \mathcal{K}_2$ m_2 the projection of m on $\mathcal{K}_1 \hat{\otimes}_2 \mathcal{K}_2^{\perp}$ and $m_{12} = m - m_o - m_1 - m_2$. ∎

We have $m_o = \langle m, 1_{T_1} \otimes 1_{T_2} \rangle_{\mathcal{H}} 1_{T_1} \otimes 1_{T_2}$.

If $\mathbb{I}_{\mathcal{H}_1}$ denotes the identity operator on $\mathcal{H}_1$, by identifying $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathbb{R}$ with $\mathcal{H}_1$ we consider the operator

$$U_1 = (\mathbb{I}_{\mathcal{H}_1} - \langle 1_{T_1}, . \rangle_{\mathcal{H}_1} 1_{T_1}) \otimes \langle 1_{T_2}, . \rangle_{\mathcal{H}_2} 1_{T_2}$$

as a projector from $\mathcal{H}$ onto $\mathcal{K}_1^{\perp} \hat{\otimes}_2 \mathcal{K}_2$ (isomorphic to $\mathcal{K}_1^{\perp}$).

According to this we have $m_1 = U_1(m)$. In fact if m is of the form $m = f \otimes g$ with $f \in \mathcal{H}_1$ and $g \in \mathcal{H}_2$ we have

$$m_1 = U_1(m) = (f - \langle f, 1_{T_1} \rangle_{\mathcal{H}_1} 1_{T_1}) \otimes \langle 1_{T_2}, g \rangle_{\mathcal{H}_2} 1_{T_2}$$

and for $(s,t) \in T_1 \times T_2$

$$m_1(s,t) = \alpha f(s) - \alpha\beta \quad \text{where} \quad \alpha, \beta \text{ are real.}$$

In a similar way, we have

$$m_2 = U_2(m) \quad \text{where}$$

$$U_2 = \langle 1_{T_1}, . \rangle_{\mathcal{H}_1} 1_{T_1} \otimes (\Pi_{\mathcal{H}_2} - \langle 1_{T_2}, . \rangle_{\mathcal{H}_2} 1_{T_2}) .$$

In terms of analysis of variance, we can formalize the above by saying that the function m_1 represents the effect of the factor T_1 on the unknown mean m, the function m_2 the effect or influence of the second factor T_2 on m and that m_{12} is the interaction of T_1 and T_2 on m.

Remark 1. In the case that $T_1 = \{1,\dots,n\}$ $T_2 = \{1,\dots,p\}$ the statistical space related to the analysis of variance problem is

$$\{ \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^p , \mathcal{B}(\mathbb{R}^{np}) , N(m, \Pi_{\mathbb{R}^n} \otimes \Pi_{\mathbb{R}^p}) ; m \in \mathbb{R}^{np} \} .$$

The RKHS is the all space. With the previous notations we have

$$m_o = \overline{m} = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} m(i,j)$$

$$m_1(i) = U_1(m)(i) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} m(i,j) - \overline{m}$$

$$m_2(j) = U_2(m)\ (j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m(i,j) - \overline{m}$$

These are the classical formulas which are handled in a two way analysis of variance (see for ex. C.R.RAO (1973) p.247).

3.2. Estimation and tests.

We assume here that assumption A2 holds. This is not a very restrictive hypothesis as we shall see later. Consequently there exists $e_i^* \in B_i^*$ $(i = 1,2)$ such that $J_i^*(e_i^*) = 1_{T_i}$.
By identifying $B_1 \hat{\otimes}_\epsilon J_2(\mathbb{R})$ to B_1 and $J_1(\mathbb{R}) \hat{\otimes}_\epsilon B_2$ to B_2 , we may consider

$$\mathcal{U}_1 = (\mathbb{I}_{B_1} - (e_1^*, .)\ J_1(1_{T_1})) \otimes (e_2^*, .)\ J_2(1_{T_2})$$

and

$$\mathcal{U}_2 = (e_1^*, .)\ J_1(1_{T_1}) \otimes (\mathbb{I}_{B_2} - (e_2^*, .)\ J_2(1_{T_2}))$$

as operators from $B_1 \hat{\otimes}_\epsilon B_2$ on B_1 and from $B_1 \hat{\otimes}_\epsilon B_2$ on B_2 respectively. Let us also consider the operator $\mathcal{U}_o = (e_1^*, .)\ J_1(1_{T_1}) \otimes (e_2^*, .)\ J_2(1_{T_2})$.
In fact the operator $\mathcal{U}_i$ $(i = 0,1,2)$ is the extension to $B_1 \hat{\otimes}_\epsilon B_2$ of the orthogonal projection U_i of $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_2$ onto the subspace $\mathcal{H}_i$ $(i=0,1,2)$. Then if Σ denotes the ϵ-product gaussian statistical space defined by (3.1), we have, with $h_i = \|J_i(1_{T_i})\|_{B_i}^2$, $i = 1,2$:

Proposition 4. With the above notations, the image statistical spaces of Σ by $\mathcal{U}_o, \mathcal{U}_1$ and $\mathcal{U}_2$ respectively are :

$$\Sigma_o = (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}, N(m; Q_1(e_1^*)\ Q_2(f_2^*))\ h_1 h_2\ ;\ m \in \mathbb{R}).$$

$$\Sigma_1 = (B_1, \mathcal{B}_1, N(m, h_2 Q_2(e_2^*)\ (Q_1 \circ [\mathbb{I}_{B_1} - (e_1^*, .)\ J_1(1_{T_1})]^*); m \in \mathcal{H}_1^\perp \subset \mathcal{H}_1)$$

$$\Sigma_2 = (B_2, \mathcal{B}_2, N(m, h_1 Q_1(e_1^*)\ (Q_2 \circ [\mathbb{I}_{B_2} - (e_2^*, .)\ J_2(1_{T_2})]^*); m \in \mathcal{H}_2^\perp \subset \mathcal{H}_2).$$

Moreover, the statistics $x \to \mathcal{U}_o(x)$, $x \to \mathcal{U}_1(x)$, $x \to \mathcal{U}_2(x)$ and $x \to \mathcal{U}_{12}(x)$ where $\mathcal{U}_{12} = \Pi_{B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2} - \mathcal{U}_o - \mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_2$ and $x \in B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ are independant and sufficient for m_o, m_1, m_2, m_{12} .

Proof. The details of the proof are mainly computational and therefore we shall prove here only one of the assertions ; the others can be obtained in a similar way.

Let μ be the gaussian measure $N(m, Q_1 \otimes Q_2)$ on $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ and let $\mathcal{U}_1(\mu) = \nu$ be the image of μ by $\mathcal{U}_1$. The measure ν is a gaussian measure on B_1 with mean $U_1(m)$ and $U_1(m)$ belongs to $\mathcal{H}_1^\perp \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_2$ which is isomorphic to $\mathcal{H}_1^\perp$. For the covariance of ν we have

$$Q_\nu(x^*) = Q_2(e_2^*) \quad Q_1(x^* - (J_1(1_{T_1}), x^*)_{B \times B^*} e_1^*) \text{ for all } x^* \text{ in } B_1^* .$$

Hence, the image of Σ by $\mathcal{U}_1$ is Σ_1 given in the proposition. The independancy follows from the normality of x and the orthogonality of the projectors $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_{12}$ and $\mathcal{U}_o$. The sufficiency follows from the fact that Σ is of canonical exponential type statistical space (see J.L. SOLER (1977)). ∎

The above proposition allows us to propound a class of tests usefull in analysis of variance. More precisly

Theorem 1. Let us consider the gaussian statistical space

$$\{ C(T_1 \times T_2), \mathcal{B}(C(T_1 \times T_2)), (N(m, Q_1 \otimes Q_2) ; m \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \}$$

where T_1 and T_2 are compact metric spaces. If A_1 and A_2 holds, for every α , $0 \leq \alpha \leq 1$, there exists an unbiased quadratic test of size α for testing the effect of one of the factors on m (resp. the presence of interaction). Such a test is of the form

$$x \in C(T_1 \times T_2) \qquad \Phi_{\xi,\ell_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } q_\xi(x)^{1/2} > \ell_\alpha \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where

$$q_\xi(x) = \int_{T_i} \mathfrak{U}_i(x)^2(s)\, d\xi(s) \quad \text{for} \quad \xi \in M^+(T_i) \quad i = 1,2$$

$$\text{(resp.} \quad q_\xi(x) = \int_{T_1 \times T_2} \mathfrak{U}_{12}(x)^2(s,t)\, d\xi(s,t) \quad \text{for} \quad \xi \in M^+(T_1 \times T_2))$$

where $M^+(T)$ denotes the cone of borel regular positive measures on $\mathcal{B}(T)$.

Proof. Since the statistics $\mathfrak{U}_i(x)$ are sufficient for m_i $(i=1,2)$, to test the hypothesis "$m_i = 0$" against "$m_i \neq 0$" we can restrict ourselves on the statistical space Σ_i of proposition 4. The assertion of the theorem follows immediatly from proposition 5.1 of J.L. SOLER (1980).

Remark. The critical level ℓ_α can be at least theoriticaly computed by the remark following proposition 5.1 of J.L. SOLER (1980).

4. Applications.

In this section we consider some examples illustrating the analysis of variance. To apply our results to these situations, the corresponding R.K.H.S. must contain the constant functions. We shall give some sufficient conditions in order to ensure this. To conclude, the computations are given in detail for the random picture process of our introduction and for testing the homogeneity in the mean of two or more gaussian processes.

Let $\{X(t), t \geq 0\}$ be a real separable stationary gaussian process with a spectral density function f and covariance kernel R. We shall denote by R_T the restriction of R to $[0,T] \times [0,T]$ where $T > 0$. We have then :

Theorem 2. Let $\{X(t) ; t \geq 0\}$ be a real separable stationary gaussian process with a rational spectral density function of the form

$$f(\lambda) = \frac{1}{\left| \sum_{j=0}^{n} q_j (i\lambda)^j \right|^2} \qquad n > 0 \ , \ q_o q_n \neq 0 \qquad (4.1)$$

where the polynomial $Q(x) = \sum_{j=0}^{n} q_j x^j$ is real. Then for every $T > 0$, assumptions A1 and A2 hold with $B = C^{n-1}([0,T])$ and $\mathcal{H} = \mathcal{H}(R_T)$.

Remark 2. It is known that if g is a rational spectral density of a real stochastic process (see J.L. DOOB (1953)), it is even and can always be represented in the form

$$g(\lambda) = \frac{|P(i\lambda)|^2}{|Q(i\lambda)|^2} \qquad (4.2)$$

where the polynomials $P(z) = \sum_{k=0}^{m} p_k z^k$ and $Q(z) = \sum_{k=0}^{n} q_k z^k$ $(n > m)$ have no common roots, $p_m q_o q_n \neq 0$ and are such that all the roots of the denominator are non real and lie in the upper half of the complex plane. The function f given in (4.1) is a special case of a rational spectral density with $m = 0$ and $p_o = 1$ and covers an important class of stationary processes.

Remark 3. It is known that every stationary separable gaussian process $(X(t) ; t \geq 0)$ with a rational spectral density of the general form (4.2), has a version with a.s. continuous sample paths in $C^{n-m-1}([0, +\infty[)$ and therefore $(X(t) ; t \in [0,T])$ defines a random vector with values in the Banach space $C^{n-m-1}([0,T])$ (see RAJPUT and S. CAMBANIS (1972)).

Proof of theorem 2. To prove the theorem, we note that for $T > 0$, the following functions

$$\int_0^T R(s,t)\,dt \quad , \quad \frac{\partial^k}{\partial s^k} R_T(s,.)\ ,\ k = 1,\dots,n-1$$

are in $\mathcal{H}(T_T)$. This is an immediate consequence of theorem (7C) of PARZEN (1967) (p.330) since

(i) $\int_0^T \int_0^T R(s,t)\,ds\,dt < +\infty$ (R is continuous)

and

(ii) for $1 \leq k \leq n-1$ which also means $2k \leq 2n-1$ the partial derivatives $\dfrac{\partial^{2k}}{\partial s^k \partial t^k} R(s,t)$ are finite on $[0,T] \times [0,T]$ according to Ch. XI, th.10, p.545 of J.L. DOOB (1953).

Furthermore, we have

$$\int_0^T R(s,t)\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2i\pi x}\left(e^{2i\pi xt} + e^{2i\pi x(T-t)}\right) f(x)\,dx \tag{4.3}$$

and

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial^k}{\partial s^k} R(s,t)\right)_{s=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2i\pi x)^k\, e^{2i\pi xt} f(x)\,dx \\ &\left(\frac{\partial^k}{\partial s^k} R(s,t)\right)_{s=T} = \int_{-\infty}^{+\infty} (2i\pi x)^k\, e^{2i\pi x(T-t)} f(x)\,dx \end{aligned} \right. \tag{4.4}$$

Expression (4.3) is an application of FUBINI'S Theorem and follows from the fact that f is a density and an even function. Expressions (4.4) are immediate after justification of differentiation under the integral. This is obvious since f is continuous on $\mathbb{R}$ and $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k f(x)\,dx$ is finite for all k

lower than $n-1$. The next step in the proof is to show that for any t in $[0,T]$ we have

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q_o \frac{Q(ix)}{2i\pi x} (e^{2i\pi xt} + e^{2i\pi x(T-t)}) f(x)\, dx = 1 \qquad (4.5)$$

The integrand in expression (4.5) is a function u defined on $\mathbb{R}-\{0\}$ by

$$u(x) = \frac{q_o}{2i\pi x} \frac{1}{\overline{Q(ix)}} (e^{2i\pi xt} + e^{2i\pi x(T-t)})$$

where $\bar{Q}(ix)$ denotes the conjugate of $Q(ix)$. Since $Q(ix)$ has all its roots non real and lying in the upper half complex plane, u is a holomorphic function in the neighbourhood of every point of the upper (closed) half plane, except at 0 which is a simple pole for u . According to a standard residue arguement, (4.5) follows since

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, dx = i\pi \operatorname{Res}(u,o) = i\pi \left(\frac{2}{2i\pi}\right) = 1 .$$

Now from (4.5), (4.4) and (4.3) we obtain

$$1 = q_0^2 \int_0^T R(s,t)\, ds + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{q_o q_{j+1}}{(2\pi)^{j+1}} \frac{\partial^j}{\partial s^j} (R(s,t))_{s=T} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{q_o q_{j+1}}{(-2\pi)^{j+1}} \frac{\partial^j}{\partial s^j} (R(s,t))_{s=0}$$

so 1_T belongs to $\mathcal{H}(R_T)$ as a linear combination of elements of $\mathcal{H}(R_T)$ and assumption A1 is satisfied. On the other hand, according to remark 2, the corresponding stochastic process defines a gaussian measure on $C^{n-1}([0,T])$ and since 1_T is a linear combination of linear continuous functionals of R , assumption A2 holds.. ∎

Remark 4. The conditions of theorem 2 are only sufficient to ensure that $1_T \in \mathcal{H}(R_T)$. For example, the kernel R defined by $R(s,t) = \min\left(\frac{1}{s+\beta}, \frac{1}{t+\beta}\right)$ $\beta > 0$ is such that $1_T \in \mathcal{H}(R_T)$ but does not satisfy the conditions of theorem 2.

Let us now consider the random picture process X of our introduction, with covariance kernel on $[0,T_1] \times [0,T_2]$ given by $K((s,t),(s',t')) = \exp(-\beta_1|s-s'|)\exp(-\beta_2|t-t'|)$. This covariance kernel K is the "product" of covariance kernels $K_i(s,s') = \exp(-\beta_i|s-s'|)$ on $[0,T_i]$ $(i=1,2)$. The spectral density function corresponding to K_i is given by $f_i(\lambda) = \dfrac{2\beta_i}{\beta_i^2 + 4\pi^2\lambda^2}$ and satisfies the conditions of theorem 2.

Therefore, the corresponding gaussian measures μ_i are on $B_i = C([0,T_i])$ and according to the results of section 2, X can be realised as a gaussian vector with values in $C([0,T_1] \times [0,T_2])$. The assumptions A1 and A2 hold and we have for each i

$$1_{T_i} = \frac{1}{2} K_i(0,.) + \frac{1}{2} K_i(T_i,0) + \frac{\beta_i}{2} \int_0^{T_i} K_i(s,.)\,ds \qquad (4.6)$$

Moreover, it can be seen easily that $\mathcal{H}(K_i)$ $(i=1,2)$ is the space of functions on $[0,T_i]$ of the form

$$f(s) = e^{\beta_i s} \int_s^{T_i} g(u)\, dm_i(u) \quad , \quad g \in L^2([0,T_i], dm_i)$$

where $dm_i(u) = 2\beta_i e^{-2\beta_i u} du + e^{-2\beta_i T_i} \delta_{T_i}$, δ_{T_i} being the dirac measure concentrated at $\{T_i\}$.

The following expression holds for the operator $J_i^* : M([0,T_i]) \to \mathcal{H}_i$

$$(J_i^* \mu)(s) = e^{\beta_i s} \int_s^{T_i} \left(\int_0^u e^{\beta_i y} d\mu(y)\right) dm_i(u) \qquad \mu \in M([0,T_i])$$

and from (4.6) it follows that the regular borel measure on $[0, T_i]$ corresponding to 1_{T_i} is

$$\mu_i = \frac{\beta_i \, ds}{2} + \frac{\delta_o}{2} + \frac{\delta_{T_i}}{2} \quad . \quad .$$

Assuming that the unknown mean of the luminance process is in $\mathcal{H}(K_1) \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}(K_2)$, the appropriate statistic for testing that m is constant in the horizontal direction for example (i.e $m_1 = 0$) is given by theorem 1 :

$$\mathcal{U}_1(X)(s) = \frac{X(s,0)}{2} + \frac{X(s,T_2)}{2} + \frac{\beta_2}{2} \int_0^{T_2} X(s,t)\,dt - \frac{\beta_1 \beta_2}{4} \int_0^{T_1}\int_0^{T_2} X(s,t)\,ds\,dt$$

$$- \frac{\beta_2}{4} \int_0^{T_2} X(0,t)\,dt - \frac{\beta_2}{4} \int_0^{T_2} X(T_1,t)\,dt - \frac{\beta_1}{4} \int_0^{T_1} X(s,0)\,ds$$

$$- \frac{\beta_1}{4} \int_0^{T_1} X(s,T_2)ds - \frac{X(0,T_2)}{4} - \frac{X(T_1,0)}{4} - \frac{X(0,0)}{4} - \frac{X(T_1,T_2)}{4} \qquad (4.7) .$$

Another example of application is to test the homogeneity in the mean of several stochastic processes with the covariance kernel K but not necessarily independant. For example if K is of the form

$$K(s,t) = e^{-\beta|s-t|}$$

such a problem can be formulated by observing the gaussian process $(X(i,t)\ ;\ i=1,\dots,n\ ;\ t \in [0,T])$ on $\mathbb{R}^n \hat{\otimes}_\varepsilon C([0,T])$ whose known covariance kernel is given by

$$K((i,i')\ ;\ (s,t)) = a_{ii'}\, e^{-\beta|s-t|} \quad .$$

Furthermore, we shall assume that the matrix $A = (a_{ij})$ is positive definite and we shall denote by $B = (b_{ij})$ its inverse.

The statistical space we are dealing with is then

$$\{ \mathbb{R}^n \hat{\otimes}_\epsilon C([0,T]) \; ; \; N(m, A \otimes Q_K) \; ; \; m \in \mathbb{R}^n \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}(K) \}$$

Thus by applying the results of section 3, it is easy to establish that for every x in $\mathbb{R}^n \hat{\otimes}_\epsilon C([0,T])$ the statistics $\mathfrak{U}_o(x)$, $\mathfrak{U}_1(x)$, $\mathfrak{U}_2(x)$ are defined by

$$\mathfrak{U}_o(x) = \frac{1}{2\,\mathrm{Tr}(A)} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta\, b(i,j) \int_0^T x(i,t)\,dt + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, x(i,0) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, x(i,T) \right)$$

$$\mathfrak{U}_1(x)(i) = \frac{1}{2} \left(\beta \int_0^T x(i,t)\,dt + x(i,0) + x(i,T) \right) - \mathfrak{U}_o(x)$$

$$\mathfrak{U}_2(x)(t) = \frac{1}{\mathrm{Tr}(A)} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, x(i,t) - \mathfrak{U}_o(x) \; .$$

Finally, results of this type are quite general and the extension of analysis of variance to the infinite dimensional case comes out directly and naturally.

Aknowledgment. The author would like to thank R. CARMONA and J.L. SOLER for helpful comments. He also wishes to thank the referees for their suggestions.

REFERENCES

A. ANTONIADIS (1980) Statistics on Banach space valued gaussian random variables, Probability in Banach spaces III pp.1-8 Lecture Notes in Mathematics, Vol. 860, Springer-Verlag Berlin, Heildelberg, New-York.

A. ANTONIADIS (1981) Sur certains problèmes d'estimation et de test concernant la moyenne d'un processus gaussien (to appear in An. Inst. Henry Poinc.). Serie B, Vol.18.

S. CAMBANIS and B.S. RAJPUT (1972) Gaussian processes and gaussian measures, A.M.S., Vol.43, n°6, pp.1944-1952.

R. CARMONA (1977) Tensor product of gaussian measures. Proceedings of the conference on vector valued measures. Dublin, June 1977, Lecture notes in Math, Vol.644, Springer-Verlag.

S. CHEVET (1977 a) Un résultat sur les mesures gaussiennes. C.R.A.S. Paris, ser.A, 284, pp.441-444.

S. CHEVET (1977 b) Quelques résultats nouveaux sur les mesures cylindriques. Proceedings of the Conference on vector valued measures. Dublin, June 1977, Lecture notes in Math, Vol.644, Springer-Verlag.

J. DIESTEL and J.J. UHL (1977) Vector measures. American Math society. Providence, Rhode-Island.

J.L. DOOB (1953) Stochastic Processes. John Wiley & Sons, New-York.

L.E. FRANKS (1966) A model for the random video process. Bell. syst. Tech.J. April 1966, pp.609-630.

L. GROSS (1965) Abstract Wiener spaces. Proceeding Fifth Berkeley symp. Math. Stat. and Prob. 2, pp.31-42.

E. PARZEN (1967) Time series analysis papers Holden-day series in time series analysis Holden-day California.

C.R. RAO(1973) Linear statistical inference and its applications, second edition, John Wiley & sons, New-York.

J.L. SOLER (1977) Generalized exponential families, Recent developments in statistics, North Holland Publ. Comp.

J.L. SOLER (1980) Some results for the quadratic analysis of gaussian processes, Banach center publications, Vol.6, pp.289-302 Poland.

M. TASTO (1977) Reconstruction of random objects from noisy projections, Computer graphics and image processing, Vol.6, pp.103-122.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 294 (22 mars 1982) Série I — 417

PROBABILITÉS. — *Analyse de la variance à deux facteurs à ensembles de niveaux quelconques.* Note (*) de **Anestis Antoniadis**, présentée par Robert Fortet.

Le but de cette Note est d'étendre les méthodes classiques de l'analyse de la variance à deux facteurs au cas où les ensembles de niveaux des facteurs sont quelconques.

PROBABILITY THEORY. — Analysis of Two Way Variance for Arbitrary Level Sets.

The aim of this paper is to extend the ordinary two way analysis of variance in the case of factors with arbitrary level sets.

1. PRÉLIMINAIRES. — Les méthodes usuelles d'analyse de la variance d'ordre deux ont pour but l'étude de l'influence, sur la moyenne d'un phénomène aléatoire gaussien, de deux facteurs prenant respectivement un nombre fini r et s de valeurs. Pour étendre ces méthodes au cas où les ensembles T_1 et T_2 des niveaux des facteurs sont quelconques, les trois espaces de fonctions $\mathbb{R}^r$, $\mathbb{R}^s$ et $\mathbb{R}^{rs}$ de la théorie usuelle sont remplacés par les espaces autoreproduisants $\mathscr{H}_i (i=1,2)$ de deux mesures gaussiennes centrées μ_i sur B_i et par leur produit tensoriel $\mathscr{H}_1 \hat{\otimes} \mathscr{H}_2$, où B_i désigne un espace de Banach séparable de fonctions réelles sur T_i. En suivant une démarche analogue à celle de [4], chap. IX, on aboutit à l'extension de l'analyse de la variance dans un cadre général. Par la suite le triplet $(J_i, \mathscr{H}_i, B_i)$ $(i=1,2)$ désignera l'espace de Wiener abstrait associé à la mesure μ_i (*cf.* [1]). En désignant par $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ le produit tensoriel inductif de B_1 et B_2 et $J_1 \otimes_\varepsilon J_2$ le prolongement par continuité à l'espace de Hilbert produit tensoriel $\mathscr{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathscr{H}_2$ de $J_1 \hat{\otimes} J_2$ on sait (*cf.* [2]) que $(J_1 \otimes_\varepsilon J_2, \mathscr{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathscr{H}_2, B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2)$ est aussi un triplet de Wiener, la mesure gaussienne correspondante sur $B_1 \hat{\otimes} B_2$ étant notée $\mu_1 \otimes_\varepsilon \mu_2$. Enfin si T est un espace métrique C(T) désignera l'espace des fonctions numériques continues sur T. Si T est un intervalle de $\mathbb{R}$, $C^k(T)$ désigne l'espace des fonctions k fois continument dérivables sur T.

2. POSITION DU PROBLÈME ET HYPOTHÈSES. — On suppose que l'on observe un élément aléatoire gaussien X à valeurs dans $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$, de moyenne m inconnue appartenant à l'espace autoreproduisant $\mathscr{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathscr{H}_2$, la loi de $X - m$ étant $\mu_1 \otimes_\varepsilon \mu_2$. On est conduit à formuler le problème de l'analyse de la variance dans la structure statistique gaussienne :

$$(1) \qquad (B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2, \mathscr{B}(B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2), \{ N(m, Q_1 \otimes Q_2); m \in \mathscr{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathscr{H}_2 \}),$$

où Q_1 et Q_2 (covariances de μ_1 et μ_2) sont des formes quadratiques définies positives sur B_1^* et B_2^* respectivement et $\mathscr{B}(B_1 \otimes_\varepsilon B_2)$ est la tribu borélienne de $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$.

On fait de plus les hypothèses suivantes :

(H1) pour $i=1,2$ il existe dans $\mathscr{H}_i$ un élément 1_{T_i} tel que $J_i(1_{T_i})$ soit la fonction constante égale à 1 sur T_i.

(H2) pour $i=1,2$, l'élément 1_{T_i} est dans l'image de J_i^*; il existe donc e_i^* élément de B_i^* tel que $J_i^*(e_i^*) = 1_{T_i}$.

Dans le cas finidimensionnel les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées.

Pour que la démarche de l'Analyse de la variance usuelle s'applique il convient de disposer d'une décomposition orthogonale de $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathscr{H}$.

(H1) étant satisfaite, on peut considérer $\mathscr{K}_1$, $\mathscr{K}_2$, $\mathscr{K}_{1,2}$ les sous-espaces vectoriels (fermés) de $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ et $\mathscr{H}$ engendrés respectivement par les fonctions 1_{T_1}, 1_{T_2}, et $1_{T_1 \times T_2}$. Si $\mathscr{K}_1^\perp$ et $\mathscr{K}_2^\perp$ désignent les supplémentaires orthogonaux de $\mathscr{K}_1$ et $\mathscr{K}_2$, $\mathscr{K}_1 \hat{\otimes}_2 \mathscr{K}_2^\perp$ et $\mathscr{K}_1^\perp \hat{\otimes}_2 \mathscr{K}_2$ sont des sous-espaces fermés de $\mathscr{H}$ isomorphes à $\mathscr{K}_2^\perp$ et $\mathscr{K}_1^\perp$ respectivement.

De plus ils sont orthogonaux dans $\mathscr{H}$ et orthogonaux à $\mathscr{H}_{1,2}$. D'après cette décomposition orthogonale de $\mathscr{H}$ on peut alors obtenir (*cf.* [3]) la représentation suivante pour les éléments de $\mathscr{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathscr{H}_2$.

2.1. Lemme. – *Soit m un élément de $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathscr{H}_2$. Alors m peut s'écrire de manière unique sous la forme :*

$$m = m_0 + m_1 + m_2 + m_{12}, \tag{2}$$

où m_0 est une fonction constante sur $T_1 \times T_2$, m_i $(i = 1, 2)$ est soit nulle soit une fonction non constante sur T_1, m_{12} est soit nulle soit une fonction non nulle sur $T_1 \times T_2$ indécomposable en somme d'une fonction sur T_1 et d'une fonction sur T_2.

En termes d'analyse de la variance on peut considérer que la fonction m_1 représente la contribution du facteur T_1 à la moyenne inconnue m, que m_2 représente la contribution du facteur T_2 et que m_{12} est la contribution de l'interaction des deux facteurs à m. L'analyse de la variance est alors ramenée aux problèmes d'estimation et de test de l'influence d'un des deux facteurs ou de leur interaction.

2.2. *Remarque.* – Au cas où $\mathscr{H}_1 = \mathbb{R}^r$ et $\mathscr{H}_2 = \mathbb{R}^s$ on retrouve la décomposition de la moyenne obtenue dans [4], chap. IX, paragraphe 5, conduisant aux formules classiques de l'analyse de la variance finidimensionnelle.

3. Résultats. – En identifiant $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \mathbb{R}$ à B_1 et $\mathbb{R} \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ à B_2 et en désignant par I_{B_i} l'opérateur identité sur B_i, on note :

$$U_1 = (I_{B_1} - (e_1^*, .)\, J_1(1_{T_1})) \otimes (e_2^*, .)\, J_2(1_{T_2}),$$

$$U_2 = (e_1^*, .)\, J_1(1_{T_1}) \otimes (I_{B_2} - (e_2^*, .)\, J_2(1_{T_2})),$$

les opérateurs définis sur $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ à valeurs dans B_1 et B_2 respectivement. De plus, U_0 désignant l'opérateur défini sur $B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2$ par $U_0 = (e_1^*, .)\, J_1(1_{T_1}) \otimes (e_2^*, .)\, J_2(1_{T_2})$, on a (*cf.* [3]) :

3.1. Proposition. – *Les structures statistiques images du modèle* (1) *par* U_0, U_1, U_2 *sont respectivement :*

$$\Sigma_0 = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \{ N(m; Q_1(e_1^*)\, Q_2(e_2^*));\ m \in \mathbb{R} \}),$$

$$\Sigma_1 = (B_1, \mathscr{B}_1, \{ N(m; Q\ (e^*)\, (Q_1 \circ [I_{B_1} - (e_1^*, .)]\, J_1(1_{T_1})]^*));\ m \in \mathscr{H}_1 \ et\ \langle m, 1_{T_1} \rangle = 0 \}),$$

$$\Sigma_2 = (B_2, \mathscr{B}_2, \{ N(m; Q_1(e_1^*)\, (Q_2 \circ [I_{B_2} - (e_2^*, .)\, J_2(1_{T_2})]^*));\ m \in \mathscr{H}_2 \ et\ \langle m, 1_{T_2} \rangle = 0 \}).$$

De plus, les statistiques $x \to U_0(x)$, $x \to U_1(x)$, $u \to U_2(x)$ et $x \to U_{12}(x)$ où $U_{12} = I_{B_1 \hat{\otimes}_\varepsilon B_2} - U_0 - U_1 - U_2$ sont indépendantes et exhaustives pour m_0, m_1, m_2 et m_{12} respectivement.

Au cas où T_1 et T_2 sont des espaces métriques compacts et où $B_i = C(T_i)$ on peut en utilisant la proposition 5.1 de [5] démontrer (*cf.* [3]) le résultat suivant :

3.2. Proposition. – *Soit Σ la structure statistique gaussienne définie par :*

$$\Sigma = (C(T_1 \times T_2), \mathscr{B}(C(T_1 \times T_2)), \{ N(m, Q_1 \otimes Q_2);\ m \in \mathscr{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathscr{H}_2 \}).$$

Pour tout réel α, $0 \leqq \alpha \leqq 1$ il existe un test quadratique sans biais de niveau de signification α pour tester l'absence d'influence d'un des facteurs sur m (resp. l'absence d'interaction). Un *tel test est de la forme :*

$$x \in C(S \times T), \quad \varphi_{\xi, l_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad q_\xi(x)^{1/2} > l_\alpha, \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

où :

$$q_\xi(x) = \int_{T_i} U_i(x)^2(s)\, d\xi(s) \qquad pour \quad \xi \in M^+(T_i), \qquad i = 1, 2$$

$$\left[resp.\ q_\xi(x) = \int_{T_1 \times T_2} U_{12}(x)^2(s, t)\, d\xi(s, t)\, pour\, \xi \in M^+(T_1 \times T_2) \right]$$

en désignant par $M^+(T)$ *le cône des mesures boréliennes régulières positives sur* $\mathscr{B}(T)$.

Enfin l'énoncé suivant (*cf.* [3]) permet dans la plupart des applications de vérifier les hypothèses (H1) et (H2).

3.3. PROPOSITION. — *Soit* $\{X(t), t \geqq 0\}$ *un processus gaussien réel séparable stationnaire ayant une densité spectrale rationnelle* f *de la forme :*

$$f(x) = \frac{1}{\left| \sum_{j=0}^{n} q_j (ix)^j \right|^2}, \qquad n \geqq 1, \quad q_0 q_n \neq 0,$$

les coefficients q_j *étant réels. Alors quel que soit* $T > 0$, *si* R_T *désigne la restriction à* $[0, T] \times [0, T]$ *du noyau de covariance de* X, *les hypothèses* (H1) *et* (H2) *sont satisfaites avec* $B = C^{n-1}([0, T])$ *et* $\mathscr{H} = \mathscr{H}(R_T)$.

3.4. *Remarque.* — Au cas où $\mathscr{H}'_1 = \mathbb{R}^r$ et $\mathscr{H}_2 = \mathbb{R}^s$, les propositions 3.1 et 3.2 précédentes conduisent aux énoncés de [4], chap. IX, paragraphe 5. Remarquons aussi que l'analyse de la variance et les tests associés décrits ici pour deux facteurs se généralisent de manière directe au cas de plusieurs facteurs.

(*) Remise le 25 janvier 1982, acceptée après révision le 22 février 1982.

[1] L. GROSS, *J. Funct. Anal.*, 1, 1967, p. 123-181.
[2] S. CHEVET, *Comptes rendus*, 284, série A, 1977, p. 441.
[3] A. ANTONIADIS (à paraître).
[4] J. R. BARRA, *Notions fondamentales de statistique mathématique*, Dunod, Paris, 1971.
[5] J. L. SOLER, *Banach Center Publications*, Pologne, 6, 1980, p. 289-302.

I.R.M.A., Université scientifique et médicale,
B.P. n° 53 X, 38041 *Grenoble Cedex.*

UN PROCESSUS D'ORNSTEIN-UHLENBECK EN DIMENSION INFINIE

ASPECTS PROBABILISTES ET STATISTIQUES

par

Anestis ANTONIADIS

Institut de Recherche en Mathématiques Avancées,
Université Scientifique et Médicale de Grenoble
B.P. 53 X, 38041 Grenoble Cédex

RESUME. - Un modèle mathématique pour la réponse en potentiel d'un neurone a été proposé dans [23] par J.B. Walsh. On en donne une nouvelle formulation en termes de probabilités gaussiennes sur un espace de Bànach B . Cela conduit à la définition d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension infinie dont diverses propriétés sont étudiées. Enfin une analyse de la variance est effectuée pour la moyenne du processus en question.

ABSTRACT. - A new formulation in terms of Banach valued gaussian processes is given for a mathematical model of neural response proposed by J.B. Walsh [21] . This formulation allows us to define a prototype of a Ornstein-Uhlenbeck process in infinite dimension whose main properties are studied. The final part of this paper is devoted to an analysis of variance problem for the mean of the process introduced above.

1. INTRODUCTION.

Dans [23], J.B. Walsh propose une nouvelle modélisation mathématique pour le problème de la réponse en potentiel d'un motoneurone. En résumé, idéalisant un motoneurone comme un segment rectiligne de longueur L, il a considéré l'équation suivante

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1\right) V(t,x) + W(t,x) \tag{1.1}$$

pour le potentiel électrique $V(t,x)$ du neurone à l'instant t, à la position x. Dans l'équation (1.1), $W(t,x)$ désigne un bruit gaussien blanc en les deux variables, apparaissant comme limite de bruits poissonniens. Avec des conditions aux bords appropriées l'équation (1.1) est résolue et l'unique solution $\{V(t,x)\ ,\ t \geq 0\ ,\ x \in [0,L]\}$ apparaît comme un processus gaussien à deux paramètres qui est étudié dans [23] par un développement en série.

Dans un premier temps on se propose de décrire le problème en termes de processus gaussiens à valeurs dans un espace de Banach. Cette formulation nous conduit à définir le processus $\{V(t,x)\ , t \geq 0, x \in [0,L]\}$ comme un processus d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension infinie. Cela permet d'une part de démontrer plus facilement certains résultats de B.J. Walsh, et d'autre part de développer de nouvelles propriétés. Enfin, la dernière partie de ce travail est consacrée à un problème d'analyse de la variance pour la moyenne du processus $\{(V(t,x))\ t \geq 0\ ,\ x \in [0,L]\}$.

2. NOTATIONS ET PRELIMINAIRES.

Le but de ce paragraphe est de fixer les notations et d'énoncer quelques résultats nécessaires pour la suite.

On notera $H = L^2([0,L], dx)$ l'espace Hilbertien des fonctions de carré intégrable sur $[0, L]$. L'opérateur linéaire sur H défini à partir de l'opérateur différentiel $(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+1)$ sur L^2 en imposant à ce dernier des conditions aux bords de type Neumann est noté A . Il est connu (cf. [10]) que A est un opérateur autoadjoint borné inférieurement par 1 de domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans H . Le spectre $\sigma(A)$ de A est constitué de la suite $\{\lambda_k = (\frac{k\pi}{L})^2 + 1 \,;\, k \geq 0\}$ avec pour fonctions propres correspondantes $\{\varphi_k \,;\, k \geq 0\}$ définies par

$$\varphi_k(x) = (2/L)^{1/2} \cos \frac{k\pi x}{L} \quad \text{pour} \quad k > 0 \quad \text{et} \quad \varphi_o(x) = (2/L)^{1/2} .$$

L'ensemble $\{\varphi_k \,,\, k = 0, 1, \ldots\}$ est un système orthonormé complet dans H .

L'inverse $(2A)^{-1}$ de l'opérateur $2A$ est borné sur H . Il possède un noyau intégral, noté encore $(2A)^{-1}$, défini pour $(x,y) \in [0,L] \times [0,L]$ par

$$(2.1) \qquad (2A)^{-1}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_k} \varphi_k(x)\, \varphi_k(y)$$

où la convergence de cette série est uniforme sur $[0,L] \times [0,L]$.
De plus $(2A)^{-1}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt. On peut alors définir une échelle Hilbertienne déduite de A (cf. [4], [7]) i.e, une famille $\{\mathcal{H}_\alpha \,,\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ d'espaces Hilbertiens

$$\mathcal{H}_\alpha = \{ f \in \mathcal{D}(A^\alpha) \,/\, \langle f,g \rangle_{\mathcal{H}_\alpha} = \langle A^\alpha f \,,\, A^\alpha g \rangle_H \} .$$

D'après [14] pour tout $\alpha > 0$, $\mathcal{H}_\alpha$ est contenu dans l'espace de Banach B des fonctions continues sur $[0,L]$, l'injection de $\mathcal{H}_\alpha$ dans B étant continue quand B est muni de la norme uniforme. L'espace B sera également noté $C([0,L])$.

L'opérateur A engendre un semi-groupe fortement continu $\{e^{-tA}, t \geq 0\}$ d'opérateurs autoadjoints sur H. Ces opérateurs admettent une représentation intégrale dont le noyau est défini pour $(x,y) \in [0,L]^2$ par

$$(2.2) \qquad e^{-tA}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x)\, \varphi_k(y) .$$

En fait pour tout $t > 0$, l'opérateur e^{-tA} applique B dans l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $[0,L]$, noté $C_\infty(]0,L[)$. De plus pour $f \in B$ on a $(e^{-tA}f)'(0) = (e^{-tA}f)'(L) = 0$. Donc quel que soit l'élément f de B, $e^{-tA}f$ appartient au domaine $\mathcal{D}(A)$ de A. Soit alors $\alpha < \frac{1}{4}$. Comme $\alpha + \frac{1}{2} < 1$ implique $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{\alpha+\frac{1}{2}})$, on peut conclure que $(2A)^{1/2} e^{-tA} f \in \mathcal{H}_\alpha$ quel que soit $0 < \alpha < \frac{1}{4}$. De plus on a

$$(2.3) \qquad \| (2A)^{1/2} e^{-tA} f \|^2_{\mathcal{H}_\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} (2\lambda_k)^{\alpha+\frac{1}{2}} e^{-t\lambda_k} \langle f, \varphi_k \rangle^2_H \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t\lambda_k} (2\lambda_k)^{\alpha+\frac{1}{2}} \|f\|^2_\infty$$

Sauf mention explicite du contraire, tous les éléments aléatoires considérés sont supposés être définis sur le même espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{A}, P_r)$.

Le noyau $(2A)^{-1}$ étant défini positif, il existe une fonction aléatoire réelle gaussienne centrée notée $\{X(x), x \in [0,L]\}$ définie sur

$(\Omega, \mathcal{Q}, P_r)$ de covariance $(2A)^{-1}$. D'après le lemme 4.4 de [23] on a

$$\mathbb{E}_{P_r}((X(x)-X(y))^2) = (2A)^{-1}(x,x) - 2(2A)^{-1}(x,y) + (2A)^{-1}(y,y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varphi_k(x) - \varphi_k(y))^2}{2\lambda_k} \leq \frac{4}{\pi} |x-y| .$$

Par conséquent, la fonction aléatoire $\{X(x), x \in [0,L]\}$ définit un processus centré gaussien X, Pr p.s à trajectoires continues sur $[0,L]$ (cf. [18]). On peut donc considérer sur B la mesure centrée gaussienne μ de covariance $(2A)^{-1}$. Il est aisé de voir que l'espace Hilbertien autoreproduisant $\mathcal{H}_\mu$ de μ n'est autre que $\mathcal{H}_{1/2}$. Si B^* désigne le dual topologique de B et i l'injection canonique de $\mathcal{H}_\mu$ dans B on a le schéma suivant

$$(2.4) \qquad B^* \xhookleftarrow[i^*]{} \mathcal{H}_\mu^* \underset{\mathcal{R}^{-1}}{\overset{\mathcal{R}}{\rightleftarrows}} \mathcal{H}_\mu \xhookrightarrow[i]{} B .$$

La dualité entre B et B^* étant imposée il faut préciser l'identification $\mathcal{R}$ de $\mathcal{H}_\mu^*$ avec $\mathcal{H}_\mu$. Rappelons que l'ensemble des éléments de B^* de la forme $\nu(dx) = f\,dx$ où f est dans H est faiblement dense dans B^*. Donc il suffira d'identifier $\mathcal{R} \circ i^*$ sur cet ensemble. On a

$$(i^*(\nu), g)_{\mathcal{H}_\mu^*, \mathcal{H}_\mu} = (\nu, i(g))_{B^*, B} = (f,g)_H .$$

Par conséquent

$$i^*(f\,dx) : g \longrightarrow \int_0^L f(x)\, g(x)\, dx$$

et $i^*(\nu)$ doit être identifiée à la fonction f.

On a alors par définition de $\mathcal{H}_\mu$:

$$(2.5) \qquad ((\mathcal{R} \circ i^*)(\nu), g)_{\mathcal{H}_\mu} = \langle (2A)^{1/2}(\mathcal{R} \circ i^*)(\nu), (2A)^{1/2} g \rangle_H = \langle f, g \rangle_H .$$

En particulier pour g élément de $\mathcal{D}(A)$ l'équation (2.5) entraîne

$$((\mathcal{R} \circ i^*)(\nu), g)_{\mathcal{H}_\mu} = \langle (\mathcal{R} \circ i^*)(\nu), (2A)g \rangle_H = \langle (2A)^{-1} f, (2A)g \rangle_H .$$

Comme $\{(2A)(g) \; ; \; g \in \mathcal{D}(A)\}$ est dense dans H il s'ensuit que

$$(2.6) \qquad (i \circ \mathcal{R} \circ i^*)(\nu :) = (2A)^{-1} \nu$$

Le schéma de dualité (2.4) sera fréquemment utilisé dans la suite.

Nous sommes maintenant en mesure de définir un processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur B comme dans le cas finidimensionnel. Nous le comparerons avec la solution de l'équation (1.1).

3. UN PROCESSUS D'ORNSTEIN-UHLENBECK SUR $C([0,L])$.

Dans tout l'article on notera, selon la terminologie usuelle, $(W_t, t \geq 0)$ le processus de Wiener B-valué construit sur la mesure gaussienne μ. Ce processus fut introduit et étudié pour la première fois dans [12]. Il s'agit d'un processus stochastique à trajectoires continues tel que $W_o = 0$ et tel que pour tous nombres réels $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ les éléments aléatoires à valeurs dans B, $\{[t_j - t_{j-1}]^{-1/2} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}), \; j = 1, \ldots, n\}$ sont indépendants et isonômes de loi μ.

Selon les préliminaires du paragraphe 2, pour tout $t > 0$ l'opérateur $e^{-tA} \circ (2A)^{1/2} \circ i$ peut être considéré comme un opérateur de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{H}_{1/2}$ dans $\mathcal{H}_\alpha$ (avec $0 < \alpha < \frac{1}{4}$) . De plus pour $t > 0$ on a

$$\int_0^t \| e^{-(t-u)A} (2A)^{1/2} \circ i \|^2_{H-S} \, du = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2(t-u)\lambda_k} \, 2\lambda_k \, \| \frac{\varphi_k}{\sqrt{2\lambda_k}} \|^2_{\mathcal{H}_\alpha} du =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-2\lambda_k t}) \, \lambda_k^{2\alpha - 1}$$

Mais $\lambda_k \sim k^2$ et par conséquent les séries suivantes

$$\sum_{k \geq 0} (1 - e^{-2\lambda_k t}) \, \lambda_k^{2\alpha - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{1+\beta} \quad \text{avec} \quad \beta > 0$$

sont de même nature pour $0 < \alpha < \frac{1}{4}$. On peut donc considérer l'ensemble $\{ \xi_t(u) \ ; \ t \geq 0 \ \ u \geq 0 \}$ d'opérateurs bornés de B dans $\mathcal{H}_\alpha$ définis par :

$$\xi_t(u) = \begin{cases} (2A)^{1/2} \, e^{-(t-u)A} & \text{si} \quad 0 \leq u < t \\ 0 \quad \text{sinon.} & \end{cases}$$

Comme $\int_0^t \| \tilde{\xi}_t(u) \|^2_{H-S} \, du < +\infty$, l'intégrale stochastique $\int_0^t \xi_t(u) \, dW(u)$ a un sens d'après [15] .

De plus toujours grâce à [15] , le processus $\{ V(t) = \int_0^t \xi_t(u) \, dW(u), t > 0 \}$ est gaussien, centré, $\mathcal{H}_\alpha$ - valué, à trajectoires continues et définit une martingale sur $\mathcal{H}_\alpha$ relativement à la famille de sous-tribus $(\mathcal{G}_t)_{t>0}$ engendrée par le processus W . On peut vérifier que pour f et g dans $\mathcal{H}_\alpha^*$ on a

$$\mathbb{E}_{P_r}\left(\langle f, V(t) \rangle_{\mathcal{H}_\alpha^*, \mathcal{H}_\alpha} \langle g, V(s) \rangle_{\mathcal{H}_\alpha^*, \mathcal{H}_\alpha} \right) = \mathbb{E}_{P_r}\left(\langle A^{-\alpha} f, A^\alpha V(t) \rangle_H \langle A^{-\alpha} g, A^\alpha V(s) \rangle_H \right)$$

$$= \int_0^{s \wedge t} \langle \tilde{\xi}_t^*(u) f \, , \, \tilde{\xi}_s^*(u) g \rangle_{\mathcal{H}_\mu^*} \, du$$

où $\tilde{\xi}_t(u)$ désigne la restriction à $\mathcal{H}_\mu$ de l'opérateur $\xi_t(u)$. Il vient alors

$$\text{(3.2)} \qquad \mathbb{E}_{P_r}\left(\langle f, V(t) \rangle_{\mathcal{H}_\alpha^*, \mathcal{H}_\alpha} \langle g, V(s) \rangle_{\mathcal{H}_\alpha^*, \mathcal{H}_\alpha} \right) =$$

$$= \int_0^{s \wedge t} \langle R \circ \xi_t^*(u) \, f \, , \, R \circ \xi_s^*(u) g \rangle_{\mathcal{H}_\mu} \, du \, .$$

Dans le cas particulier où f et g sont égaux à φ_k , l'équation (3.2) donne

$$\mathbb{E}_{P_r}\left(\langle \varphi_k , V(t) \rangle_{\mathcal{H}_\alpha^*, \mathcal{H}_\alpha} \langle \varphi_k , V(s) \rangle_{\mathcal{H}_\alpha^*, \mathcal{H}_\alpha} \right) =$$

$$= \int_0^{s \wedge t} \langle (2A)^{-1/2} \, e^{-(t-u)A} \varphi_k \, , \, (2A)^{-1/2} e^{-(s-u)A} \varphi_k \rangle_{\mathcal{H}_{1/2}} \, du =$$

$$= \int_0^{s \wedge t} e^{-\lambda_k (t-u)} \, e^{-\lambda_k (s-u)} \, du = \frac{1}{2\lambda_k} \left(e^{-\lambda_k |t-s|} - e^{-\lambda_k (t+s)} \right)$$

Le processus $\left\{A_k(t) = \langle \varphi_k , V(t) \rangle_{\mathcal{H}^*_\alpha , \mathcal{H}_\alpha}\right\}$ est alors un processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}$ et $V(t)$ admet le développement suivant

$$(3.3) \qquad V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \varphi_k , V(t) \rangle_H \; \varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \, \varphi_k$$

Le processus $(V(t), t \geq 0)$ peut être considéré comme processus gaussien centré à valeurs dans B et à trajectoires continues, puisque d'après les résultats préliminaires l'injection de $\mathcal{H}_\alpha$ dans B est continue.

La représentation (3.3) entraîne que le processus $\{V(t,x) , t \geq 0 , x \in [0,L]\}$ est de même loi de probabilité que la solution donnée par Walsh à l'équation différentielle stochastique (1.1) avec pour condition initiale $V(0,x) = v_o(x) = 0$.

Dans la suite on considère le processus $(Z_t^v , t \geq 0)$ défini sur $(\Omega, \mathcal{a}, P_r)$ et à valeurs dans B par l'expression

$$(3.4) \qquad Z_t^v = e^{-tA} v + V_t \quad \text{où} \quad v \in B .$$

Naturellement $(Z_t^v , t \geq 0)$ peut être considéré comme la solution de l'équation (1.1) avec pour condition initiale $v_o = v$. Nous appellerons $(Z_t^v , t \geq 0)$ le processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur B , issu de v , de paramètre l'opérateur A . Nous allons maintenant étudier ce processus.

4. ETUDE DU PROCESSUS $(Z_t^v , t \geq 0)$.

On notera $\mathcal{G}_t$ la tribu engendrée par $\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$ et $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par $\{Z_t^o , t \geq 0\}$ (pour tout $t \geq 0$ on a évidemment

$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t)$. Si $s < t$ on a

$$(4.1) \qquad Z_t^v - e^{-At}v = V_t = e^{-(t-s)A} V_s + \int_s^t (2A)^{1/2} e^{-(t-u)A} dW(u) .$$

Le premier terme du membre de droite de (4.1) est $\mathcal{F}_s$ mesurable. Comme W est à accroissements indépendants le second terme est indépendant de $\mathcal{G}_s$ et donc de $\mathcal{F}_s$. Par suite V_t est conditionnellement indépendante de $\mathcal{F}_s$ sachant V_s . Pour tout borélien Λ de B , posons

$$(4.2) \qquad P_t(v, \Lambda) = P_r(Z_t^v \in \Lambda) .$$

L'expression ci-dessus définit une fonction de transition Markovienne. Plus précisément, pour tout v fixé dans B considérons la fonction h définie sur B par

$$h = 1_{\Lambda - e^{-(s+t)A}(v)}$$

où 1_C désigne la fonction indicatrice de l'ensemble C .

L'égalité (4.1) entraîne que

$$P_{t+s}(v, \Lambda) = \mathbb{E}_{P_r}(h(V_{t+s})) = \mathbb{E}_{P_r}(\mathbb{E}_{P_r}(h(V_{t+s}) / V_s)) =$$

$$= \mathbb{E}_{P_r}\left(\int_B h(e^{-At} V_s + z) \, dP_{V(t)}(z)\right) .$$

Il vient alors

$$P_{t+s}(v,\Lambda) = \int_B h(z)\, dP_{V(t+s)}(z) = \int_B \int_B h(e^{-At} y + z)\, dP_{V_t}(z)\, dP_{V_s}(y) .$$

Mais

$$\int_B P_s(y,\Lambda)\, P_t(v,dy) = \int_B P_s(z + e^{-At} v, \Lambda)\, P_t(0,dz) =$$

$$= \int_B P_r(V_s + e^{-As} z + e^{-(t+s)A} v \in \Lambda)\, dP_{V_t}(z) =$$

$$= \int_B \int_B h(y + e^{-As} z)\, dP_{V_s}(y)\, dP_{V_t}(z) .$$

On a donc

$$(4.3) \qquad P_{t+s}(v,\Lambda) = \int_B P_s(y,\Lambda)\, P_t(v,dy) .$$

De plus pour tout réel strictement positif t fixé et tout v de B, $P_t(v,.)$ est par définition une mesure de probabilité sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de B. Pour tout $t > 0$ fixé et Λ dans $\mathcal{B}$, $P_t(.,\Lambda)$ est une fonction mesurable sur B puisque $v \longrightarrow e^{-At} v$ est continue. Donc $P_t(v,\Lambda)$ définit une fonction de transition Markovienne sur B. De plus avec les mêmes notations on a

$$P(Z^v_{t+s} \in \Lambda / \mathcal{G}_t) = \mathbb{E}_{P_r}\Big(1_\Lambda (e^{-(t+s)A} v + \int_0^t \xi_{t+s}(u)\, dW(u) +$$

$$+ \int_t^{t+s} \xi_{t+s}(u)\, dW(u)) / \mathcal{G}_t\Big) =$$

$$= \mathbb{E}_{P_r}\Big(\mathbb{1}_\Lambda (e^{-sA} (Z^v_t) + \int_t^{t+s} \xi_{t+s}(u)\, dW(u)) / \mathcal{G}_t\Big) =$$

$$= \mathbb{E}_{P_r}\left(1_\Lambda (y + \int_t^{t+s} \xi_{t+s}(u)\ dW(u)) \,/\, \mathcal{G}_t\ )_{y = e^{-sA}(Z_t^v)} \right) =$$

$$= \mathbb{E}_{P_r}\left(1_\Lambda (y + \int_t^{t+s} (2A)^{1/2}\ e^{-(t+s-u)A}\ dW(u)) \,/\, \mathcal{G}_t\ )_{y = e^{-sA}(Z_t^v)} \right)$$

$$= \mathbb{E}_{P_r}\left(1_\Lambda (e^{-sA} z + \int_0^s \xi_s(w)\ dW(w))_{z = Z_t^v} \right) =$$

$$= P_s\ (Z_t^v\ ,\ \Lambda\ )\ .$$

Cela implique la propriété de Markov simple pour le processus Z_t^v . Le calcul ci-dessus ne diffère pas fondamentalement de celui de Walsh. Dans [23] la propriété de Markov forte est énoncée sans démonstration. En fait, si on regarde $Z^v = (Z_t^v\ ,\ t \geq 0)$ comme un processus de Markov simple associé au semi-groupe $(U_t\ ,\ t \geq 0)$ défini à partir des transitions, la propriété de Markov forte est facile à obtenir. Plus précisément, soit h une fonction continue bornée sur B .

Considérons la fonction

$$U_t(h) : v \longrightarrow U_t(h)\ v = \int_B P_t(v, dy)\ h(y)\ .$$

On a

$$|U_t h(f_n) - U_t h(f)| \leq \int_B |h(e^{-At} f_n + y) - h(e^{-At} f + y)|\ dP_{V_t}(y)\ .$$

L'opérateur e^{-At} de B dans B étant borné et h étant continue sur B on a

$$|h(e^{-At} f_n + y) - h(e^{-At} f + y)| \xrightarrow[f_n \xrightarrow[B]{} f]{} 0\ .$$

De plus h étant bornée on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue, et en déduire que $(U_t\,,\ t\geq 0)$ est fellerien. Ainsi, le processus stochastique $(Z_t^v\,,\ t\geq 0)$ est fèllerien à trajectoires continues ; il est donc de Markov fort d'après le théorème 3.10 de([11] (p.99)).

Soit $\Omega' = C([0,+\infty[\,, B)$ l'espace des fonctions continues sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans B. Pour tout $t\geq 0$ soit Y_t l'application de Ω' dans B définie par

$$Y_t\ :\ \omega \longmapsto Y_t(\omega) = \omega(t)\ .$$

On note $\mathcal{M}$ la tribu de Ω' engendrée par la famille $(Y_t\ ;\ 0\leq t<+\infty)$ et $\mathcal{M}_t$ la sous-tribu de $\mathcal{M}$ engendrée par $(Y_s\,,\ 0\leq s\leq t)$. On note aussi θ_t les opérateurs de translation définis par

$$[\theta_t\,\omega](s) = \omega(s+t) \qquad s,t\geq 0\ ,\ \omega\in\Omega'\ .$$

Pour tout $v\in B$ on désigne par P_v la mesure de probabilité sur $(\Omega',\mathcal{M})$ telle que la loi du processus $Y=(Y_t\,,t\geq 0)$ sous P_v soit la même que la loi de probabilité sur B du processus $(Z_t^v\,,\ t\geq 0)$. Ainsi, d'après les résultats précédents, le processus de Markov fort normal

$$Z = \{[(\Omega',\mathcal{M})\,,\ \mathcal{M}_t\,,\ Y_t\,,\ \theta_t\,,P_v]\ ,\ t\geq 0\ ,\ v\in B\}$$

à espace d'états B est la représentation canonique d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur B.

Cette nouvelle formulation permet de pousser plus loin l'analyse du modèle de Walsh.

PROPOSITION 4.1. - Le processus stochastique $\underline{Z} = \{(\Omega', \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, Y_t, \theta_t, P_v), t \geq 0, v \in B\}$ admet pour unique mesure invariante la mesure gaussienne μ.

Preuve. - Nous avons vu précédemment que pour toute mesure de Radon ν_k de B^* associée à la fonction φ_k, le processus stochastique $((Y_t, \nu_k)_{B,B^*}, t \geq 0)$ sous P_v est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}$ issu de $\langle e^{-At} v, \varphi_k \rangle_H$. La famille $\{(R \circ i^*)(\nu_k) = \varphi_k ; k \geq 0\}$ étant constituée d'éléments orthogonaux dans $\mathcal{H}_{1/2}$, quelle que soit la probabilité P_v, les processus réels $\{(Y_t, \nu_k)_{B,B^*}, t \geq 0\}$ $k = 0, \dots, n, \dots$ sont indépendants. Pour $k \geq 0$, les processus de Markov $\{(Y_t, \nu_k), t \geq 0, P_v)$ sur $\mathbb{R}$ ont une mesure invariante unique μ_k (cf. [19]) qui est la mesure centrée gaussienne de variance $\frac{1}{2\lambda_k}$. Si μ est la mesure de probabilité gaussienne centrée sur B de variance l'opérateur $(2A)^{-1}$, pour tout entier $k \geq 0$, la loi de probabilité de $\langle \nu_k, \cdot \rangle_{B^*,B}$ est μ_k et les éléments aléatoires $(\langle \nu_k, \cdot \rangle_{B^*,B}, k \geq 0)$ sont indépendants.
La mesure μ est donc une mesure invariante pour le processus $\underline{Z}$.
De plus, à partir de l'inégalité (2.3) du paragraphe 2, on a pour tout v dans B

$$\| (2A)^{1/2} e^{-tA} v \|_B \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \to +\infty .$$

Il découle alors de la proposition 6 de([24] (p.18)) que la mesure invariante μ de Z est unique. ∎

PROPOSITION 4.2. - Pour tout $t > 0$ et tout v de B les probabilités de transition $P_t(v, .)$
sont équivalentes à la mesure invariante μ de $\underline{Z}$.

Preuve. - Par définition pour tout $t > 0$ et v dans B la mesure $P_t(v,.)$ sur $\mathcal{B}$ est gaussienne de moyenne $e^{-At}v$ et de variance l'opérateur sur B^*

$$Q_t = (2A)^{-1}(I_{B^*} - e^{-2tA}) = (2A)^{-1/2}(I_{B^*} - e^{-2tA})(2A)^{-1/2}$$

car les opérateurs $(2A)^{-1/2}$ et $(I_{B^*} - e^{-2tA})$ commutent sur $B^* \hookrightarrow \mathcal{H}_{1/2}$. Pour prouver l'équivalence de $P_t(v,.)$ et $P_t(0,.)$ il suffit de montrer que $e^{-At}(v)$ appartient à l'espace de Hilbert autoreproduisant de Q_t. Or $(I_{B^*} - e^{-2tA})$ est défini positif et $e^{-2tA}(v) \in \mathcal{H}_{1/2}$. Donc d'après le théorème 3.3 de [15] les mesures $P_t(0,.)$ et μ sont équivalentes. Mais alors l'espace autoreproduisant de Q_t est le même que celui associé à μ, c'est-à-dire $\mathcal{H}_{1/2}$. Par conséquent $P_t(v,.)$ et $P_t(0,.)$ sont équivalentes. ∎

REMARQUE 4.1. - Les théorèmes 2 et 4 de ([22] (p.83)) permettent d'obtenir l'expression suivante des densités $\dfrac{dP_t(v,.)}{d\mu}$:

$$\frac{dP_t(v,.)}{d\mu}(y) = \prod_{k=0}^{\infty}(1-e^{-2\lambda_k t})^{-1/2} \exp - \frac{[\lambda_k(v_k^2+y_k^2)e^{-2\lambda_k t} - 2\lambda_k v_k y_k e^{-\lambda_k t}]}{(1-e^{-2\lambda_k t})} \tag{4.4}$$

où $v_k = (v, \nu_k)_{B,B^*} = (v, \varphi_k)_H$ et $y_k = (y, \nu_k)_{B,B^*} = (y, \varphi_k)_H$. ∎

On se propose maintenant d'étudier le semi-groupe d'opérateurs $(U_t)_{t \geq 0}$, $U_o = I_B$, associé aux probabilités de transition du processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur B.

Pour toute fonction f positive $\mathcal{B}$-mesurable on a

$$(4.5) \qquad (U_t f)(v) = \mathbb{E}_{P_v}(f(Y_t))$$

où $v \in B$ et $\mathbb{E}_{P_v}$ désigne l'espérance par rapport à la mesure de probabilité P_v sur Ω'. Notons ici que nous supposons de manière implicite que $P_o(v,.)$ est la mesure de Dirac en v. D'après la proposition 4.1 la mesure gaussienne μ est invariante pour $\underline{Z}$. On a donc

$$\int_B P_t(v,\Lambda)\,\mu(dv) = \mu(\Lambda) \quad t \geq 0 \quad , \quad \Lambda \in \mathcal{B} \, .$$

Le semi-groupe correspondant $(U_t\, ,\, t \geq 0)$ définit alors une famille d'opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert $L^2(B,\mu)$.

Soit $C_0^2(\mathbb{R}^k)$ la classe des fonctions deux fois continûment différentiables à support compact dans $\mathbb{R}^k$. La proposition suivante caractérise le générateur infinitésimal $\mathbb{L}$ du semi-groupe $(U_t\, ,\, t \geq 0)$.

PROPOSITION 4.3. - Si $g \in C_0^2(\mathbb{R}^k)$, la fonction G à valeurs réelles définie sur B par

$$G(v) = g(v_1,\dots,v_k) \quad \text{où} \quad v_i = \langle \varphi_i\, , v\rangle_H \quad , \quad i = \overline{1,k}$$

appartient au domaine $D(\mathbb{L})$ de $\mathbb{L}$ et on a

$$(4.6) \qquad (\mathbb{L}G)(v) = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 g}{\partial v_i^2} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \frac{\partial g}{\partial v_i}\right)_{v_i = \langle \varphi_i, v\rangle_H} .$$

Preuve. - Le processus vectoriel à valeurs dans $\mathbb{R}^k$

$Z^k = (\langle \nu_i , Y_t \rangle_{B^*,B} , i = \overline{1,k} , t \geq 0)$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

k-dimensionnel dont le générateur infinitésimal satisfait l'équation (4.6). (cf. [19]) d'où le résultat. ∎

En remarquant que $D(\mathbb{L}) \cap L^2(B,\mu)$ est dense dans $L^2(B,\mu)$ l'opérateur $\mathbb{L}$ se prolonge en un opérateur encore noté $\mathbb{L}$ sur $L^2(B,\mu)$.

Le caractère gaussien de la mesure μ sur $(B, \mathcal{B})$ conduit à la décomposition suivante (Chaos de Wiener) de $L^2(B,\mu)$ en somme directe de sous-espaces orthogonaux (cf. [18] ch. VII)

$$(4.7) \qquad L^2(B,\mu) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n .$$

Dans la décomposition (4.7), H_n est le sous-espace fermé de $L^2(B,\mu)$ engendré par la famille de fonction numériques sur B de la forme

$$\left\{ h_I(x) = \prod_{i \in I} h_{n_i} (\sqrt{\lambda_i} \langle \varphi_i , x \rangle_H) , \sum_{i \in I} n_i = n \right\}$$

où h_{n_i} désigne le n_i-ème unidimensionnel polynôme de Hermite défini par (cf. [17])

$$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) .$$

Pour toute suite $[n_j]_{j \geq 0}$ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{j \geq 0} n_j < +\infty$ la fonction cylindrique de Hermite $O_{[n_j]}$ est définie sur B par :

$$O_{[n_j]}(x) = \left(\prod_j n_j ! \, 2^{n_j} \right)^{-1/2} \prod_j h_{n_j} (\sqrt{\lambda_j} \langle \varphi_j , x \rangle_H)$$

La proposition 2 de [20] prouve que la famille $\{ O_{[n_j]} \}$ est une base orthonormée complète de $L^2(B,\mu)$. De plus pour toute $[n_j]$ on a

$$\mathbb{L}\, O_{[n_j]} = -\Big(\sum_j \lambda_j n_j\Big)\, O_{[n_j]} . \tag{4.8}$$

Soit G la fonction définie sur B par

$$G(x) = \prod_{j=1}^{k} h_{n_j}\left(\sqrt{\lambda_j}\, \langle \varphi_j, x \rangle_H\right) .$$

D'après la proposition 4.3 la fonction G appartient à $D(\mathbb{L})$ et

$$(\mathbb{L}(G))(x) = \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 g}{\partial y_j^2} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\, y_j\, \frac{\partial g}{\partial y_j}\right)_{y_j = \langle \varphi_j, x \rangle_H}$$

où $g(y_1,\ldots,y_k) = \prod_{j=1}^{k} h_{n_j}\left(\sqrt{\lambda_j}\, y_j\right)$.

D'où

$$(\mathbb{L}G)(x) = \sum_{j=1}^{k} \left[\left\{ \frac{1}{2}\lambda_j \frac{\partial^2 h_{n_j}}{\partial y_j^2} - \lambda_j\, y_j \frac{\partial h_{n_j}}{\partial y_j}\right\} \prod_{i \neq j} h_{n_i}\right]_{y_j = \sqrt{\lambda_j}\, \langle \varphi_j, x \rangle_H} .$$

En utilisant la formule

$$\frac{d^2}{dt^2} h_n - 2t\, \frac{d h_n}{dt} = -2 n h_n$$

on obtient

$$(\mathbb{L}G)\,(x) = -\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j\, n_j\right) \prod_{i=1}^{k} \cdot h_{n_i}\left(\sqrt{\lambda_i}\, \langle \varphi_i, x\rangle_H\right)$$

qui conduit à l'équation (4.8).

Comme $\{O_{[n_j]}\}$ est une base orthonormée complète de $L^2(B,\mu)$ l'équation (4.8) prouve que 0 est une valeur propre simple et isolée de l'opérateur $\mathbb{L}$. Le spectre $\sigma(\mathbb{L})$ peut s'écrire $\sigma(\mathbb{L}) = \Sigma \cup \{0\}$ où Σ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^-$ ne contenant pas l'origine. Les remarques précédentes vont nous permettre d'obtenir d'autres propriétés du processus Z. Rappelons d'abord la définition et le lemme suivant de [21].

DEFINITION 4.1. - Soit $(\Omega, \mathcal{a}, P)$ un espace probabilisé et soit h une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{N}$ et strictement positive. Une suite $(\mathcal{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-tribus de $\mathcal{a}$ est dite h-mélangeante si et seulement si, pour tout f dans $L^2(\Omega, \mathcal{a}_m, P)$ et tout g de $L^2(\Omega, \mathcal{a}_n, P)$ on a

$$\left| \int_\Omega fg\, dP - \left(\int_\Omega f\, dP\right)\left(\int_\Omega g\, dP\right) \right| \leq h(|m-n|)\, \|f\|_2\, \|g\|_2 .$$

LEMME 4.1. (cf. [21]). - Soit $(\mathcal{a}_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{a}$, h-mélangeante pour une fonction h telle que $\sum_{n\geq 1} h(n) = \beta < +\infty$. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements de $\mathcal{a}$ telle que pour tout n, $A_n \in \mathcal{a}_n$.

En notant $A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right)$ on a

$$P(A_\infty) = 0 \quad \text{si} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty \quad \text{et} \quad P(A_\infty) = 1 \quad \text{si} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty \ .$$

A présent considérons l'espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{M}, P_o)$ où $\Omega' = C([0,+\infty[\,, B)$, $\mathcal{M}$ désigne la tribu borélienne de Ω' et P_o correspond à la mesure invariante du processus $\underline{Z}$. Désignons par $\mathcal{B}_n$ la sous-tribu de $\mathcal{M}$ engendrée par $\{Y_t \ , \ t \in [n, n+1]\}$. On a alors

PROPOSITION 4.4. - La suite $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$ de sous-tribus de $\mathcal{M}$ engendrées par $\{Y_t \ , \ n \leq t \leq n+1\}$ est h-mélangeante avec pour fonction h la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par $h(n) = \exp\{-\alpha(n-1)\}$ où α est un nombre strictement positif.

Preuve. - Soient n et m deux entiers avec $n \leq m$. Pour tout élément X de $L^2(\Omega', \mathcal{B}_{n-1}, P_o)$ et U de $L^2(\Omega', \mathcal{B}_m, P_o)$ on a, d'après la propriété de Markov de $\underline{Z}$:

$$\mathbb{E}_{P_o}(XU) - \mathbb{E}_{P_o}(X)\,\mathbb{E}_{P_o}(U) = \mathbb{E}_{P_o}\left((X-\mathbb{E}_{P_o}(X))\,(U-\mathbb{E}_{P_o}(U))\right) =$$

$$= \mathbb{E}_{P_o}\left[\mathbb{E}_{P_o}\left\{\mathbb{E}_{P_o}((X-\mathbb{E}_{P_o}(X))\,(U-\mathbb{E}_{P_o}(U)) / \bigcup_{j=0}^{n} \mathcal{B}_j) / \bigcup_{j=0}^{m} \mathcal{B}_j\right\}\right] =$$

$$= \mathbb{E}_{P_o}\left(\mathbb{E}_{P_o}\left[X-\mathbb{E}_{P_o}(X)) / Y_n\right]\ \mathbb{E}_{P_o}\left[(U-\mathbb{E}_{P_o}(U)) / Y_m\right]\right) .$$

En utilisant maintenant la propriété de Markov

$$\mathbb{E}_{P_o}(XU) - \mathbb{E}_{P_o}(X)\,\mathbb{E}_{P_o}(U) = \mathbb{E}_{P_o}(f_1(Y_n)\,f_2(Y_m)) = \langle f_1, e^{-(m-n)\mathbb{L}} f_2 \rangle_{L^2(B,\mu)}$$

où $f_1(Y_n) = \mathbb{E}_{P_o}((X - \mathbb{E}_{P_o}(X))/Y_n)$ et $f_2(Y_m) = \mathbb{E}_{P_o}((U - \mathbb{E}_{P_o}(U))/Y_m)$.

Mais

$$\langle f_1, e^{-(m-n)\mathbb{L}} f_2 \rangle_{L^2(B,\mu)} = \langle f_1, e^{-(m-n)\mathbb{L}} f_2 \rangle_{L^2(B,\mu)} - \langle f_1, 1 \rangle \langle f_2, 1 \rangle ,$$

puisque par définition de f_1 et f_2 on a $\langle f_i, 1 \rangle = 0$, $i = 1,2$.
Nous avons remarqué précédemment que 0 était une valeur propre isolée de l'opérateur $\mathbb{L}$; donc l'opérateur $e^{-(m-n)\mathbb{L}}$ défini sur $L^2(B,\mu)$ admet 1 pour valeur propre isolée. En remarquant que $\alpha = \inf \{ \sigma(-\mathbb{L}) \setminus \{0\} \} > 0$ le théorème de représentation spectrale montre que

$$| \langle f_1, e^{-(m-n)\mathbb{L}} f_2 \rangle - \langle f_1, 1 \rangle \langle f_2, 1 \rangle | = | \int_{\alpha}^{+\infty} \langle f_1, e^{-(m-n)\lambda} E_{\mathbb{L}}(d\lambda) f_2 \rangle |$$

$$\leq e^{-\alpha |m-n|} \| f_1 \|_2 \| f_2 \|_2 = e^{-\alpha(m-n)} \| X \|_2 \| U \|_2 .$$

Donc $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$ est h-mélangeante pour P_o . ■

COROLLAIRE 4.1. - Le processus de Markov $\underline{Z}$ est récurrent.

Cela signifie que quel que soit l'ouvert Λ de B et l'élément v de B , $P_v(Y_t \in \Lambda$ pour une suite croissante de $t) = 1$.

Preuve. - Soit Λ un ouvert non vide de B . Pour tout entier n , $S_n = Y_n^{-1}(\Lambda)$ appartient à $\mathcal{B}_n$ et $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 1}$ est h-mélangeante d'après la proposition 4.4. De plus, les mesures $P_n(0,.)$ et μ étant équivalentes d'après la proposition 4.2 et puisque $\mu(\Lambda) > 0$ on a $P_n(0,\Lambda) = P_o(S_n) > 0$. La mesure μ étant invariante pour le semi-groupe $(U_t)_{t\geq 0}$ on a $\lim_{n\to+\infty} P_n(0,\Lambda) = \mu(\Lambda)$. Par conséquent la série $\sum_{n\geq 1} P_o(S_n) = +\infty$ et d'après le lemme 4.1 on a $P_o(S_\infty) = 1$ ce qui prouve bien la récurrence du processus $\underline{Z}$. ∎

REMARQUE 4.2. - La récurrence de $\underline{Z}$ était prouvée dans [23] en utilisant une décomposition très technique des trajectoires de $\underline{Z}$. Ici elle découle directement de la proposition 4.4 assez naturelle pour un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Un autre problème abordé par J.B. Walsh dans [23] est lié au premier instant à partir duquel le potentiel électrique du neurone dépasse un seuil donné. On se propose de montrer que cet instant possède des moments exponentiels en appliquant un théorème général sur les temps d'atteinte de processus Markoviens uniformément ergodiques énoncé et démontré dans [5]. Nous donnons d'abord une autre caractérisation de la décomposition $L^2(B,\mu)$ en somme directe d'espaces orthogonaux. Cette caractérisation apparaît clairement dans [5] et sera très utile par la suite. En effet dans la décomposition de $L^2(B,\mu)$ donnée par l'expression (4.7) les sous-espaces H_n peuvent être interprétés de manière différente. Plus précisément, H_o est le sous-espace vectoriel des fonctions constantes sur B qui sont toutes invariantes par U_t ; H_1 est le sous-espace fermé de $L^2(B,\mu)$ engendré par les fonctions de la forme $f : B \ni x \longmapsto (y,x)_{B^*,B}$ lorsque y parcourt le dual B^* de B. Plus généralement H_n est le sous-espace fermé de $L^2(B,\mu)$ engendré par les produits tensoriels symétrisés $y_1 \otimes_s y_2 \otimes_s \dots \otimes y_n$ où $(y_1,\dots,y_n) \in (B^*)^n$. Nous avons alors

PROPOSITION 4.5. - Il existe une constante réelle strictement positive k telle que, pour tout $v \in B$ et tout Λ ouvert de B, on a

$$\mathbb{E}_{P_v}\left(e^{\alpha T_\Lambda}\right) < +\infty \quad \text{dès que} \quad \alpha < k\mu(\Lambda) \text{ , où}$$

T_Λ désigne le temps d'atteinte de Λ pour $\underline{Z}$.

Preuve. - La clef de ce résultat est le théorème 2.1 de [5] dont nous allons vérifier les hypothèses.
Nous remarquerons d'abord que le semi-groupe de contractions $(U_t)_{t\geq 0}$ sur $L^2(B,\mu)$ est fortement continu. En fait sur H_1 on a

$$(U_t\, y)(x) = \mathbb{E}_{P_x}(y(Y_t)) = (y, e^{-At}x)_{B^*,B} \quad , \quad x \in B \; , \; y \in B^* \; , \; t > 0 \; .$$

Les opérateurs U_t et e^{-At} coïncident sur H_1 ; sur B^* leurs valeurs commune est la mesure de densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$[(e^{-tA})\,y\,](u) = [\int_0^L e^{-tA}(v,u)\; y(dv)\;] \; .$$

Plus généralement on a

$$U_t\,(y_1 \otimes_s y_2 \otimes_s \cdots \otimes_s y_n) \equiv (e^{-tA}y_1) \otimes_s (e^{-tA}y_2) \otimes_s \cdots \otimes_s (e^{-tA}\,y_n) \; .$$

Donc le semi-groupe $(U_t)_{t\geq 0}$ est fortement continu. De plus, comme le spectre du générateur infinitésimal $\mathbb{L}$ de $(U_t)_{t\geq 0}$ admet 0 pour valeur propre isolée, on a d'après [16]

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T U_t \, dt = \Pi$$

où Π est le projecteur orthogonal de $L^2(B,\mu)$ sur H_o. On en déduit que la famille $\{P_t(x,.) \; ; \; t \geq 0 \; , \; x \in B\}$ des probabilités de transition est μ-uniformément ergodique.

D'après la proposition 4.2. pour tout $t > 0$ et v dans B $P_t(v,.)$ est absolument continue par rapport à μ. Les hypothèses du théorème 2.1 de [5] sont maintenant satisfaites, d'où la proposition.

REMARQUE 4.3. - En supposant que la décharge de potentiel du neurone a lieu en un point x_o de $[0,L]$; le premier instant de décharge est défini dans [23] par $T_\theta = \inf\{t \geq 0 \; ; \; (Y_t, \delta_{x_o}) > \theta\}$ où δ_{x_o} désigne la mesure de Dirac en x_o. On a pour le temps d'arrêt T_θ défini sur $(\Omega', \mathcal{M})$:

$$P_o(T_\theta > t) \geq 1 - 2\exp\left(-\frac{a\theta^2}{t}\right) \tag{4.10}$$

où a est une constante indépendante de t.

En effet avec la proposition 4.2. de [23] on a

$$\mathbb{E}_{P_o}\left(\left[(Y_t, \delta_{x_o})^2_{B,B^*} - (Y_s, \delta_{x_o})^2_{B,B^*}\right]\right) \leq b \, |t-s|^{1/2}$$

où b est une constante positive indépendante de x_o et (t,s).
Si $(w(s), s \geq 0)$ est un mouvement Brownien réel standard sur $(\Omega, \mathcal{A}, P_r)$, on a alors l'inégalité

$$\mathbb{E}_{P_o}((Y_t(x_o) - Y_o(x_o))^2) \leq c\, \mathbb{E}_{P_r}(|w(s)|),$$

qui avec le lemme 5.2 de [12] donne

$$P_o\{(\sup_{0 \leq s \leq t} |Y_s(x_o) - Y_o(x_o)| > \theta)\} \leq P_r((\sup_{0 \leq s \leq t} |w(s)| > \lambda\theta))$$

où λ est une constante positive indépendante de t. En utilisant le corollaire 2.1. de [[6], p.244] on a

$$P_r(\sup_{0 \leq s \leq t} |w_s| > \lambda\theta) \leq 2\, P_r(|w(t)| > \lambda\theta) \leq 2\exp\left\{-\frac{\lambda^2\theta^2 \operatorname{Log} 3}{96t}\right\}$$

ce qui permet de conclure. ■

5. ANALYSE DE LA VARIANCE POUR LA MOYENNE DU PROCESSUS D'ORNSTEIN-UHLENBECK SUR B.

Dans la suite $\{Z^v(t), t \geq 0\}$ désignera le processus d'Ornstein-Uhlenbeck issu de $v \in B$ et de paramètre A. S'il n'y a pas de décharge, ce processus est une modélisation réaliste pour le potentiel électrique d'un motoneurone. Généralement les biologistes supposent qu'à l'instant initial le potentiel est uniforme le long du neurone. Cette hypothèse se traduit alors par l'homogénéïté sur $[0,L]$ de la moyenne du processus stochastique $(Z_t^v \,;\, t \geq 0)$. Il est donc intéressant de pouvoir tester une telle hypothèse au vu d'une ou plusieurs observations de $(Z_t^v \,,\, t \geq 0)$. En réalité on ne peut observer une réalisation du processus en question car le neurone se décharge à l'instant aléatoire T_θ. Cependant, avec l'inégalité (4.10) du paragraphe précédent, on peut affirmer qu'une proportion importante de trajectoires de $(Z_t^v \,,\, t \geq 0)$ ne présenteront pas de décharge dans l'intervalle $[0,T]$ à condition que T soit suffisamment petit. Il semble donc raisonnable, du moins théoriquement, de considérer le problème d'analyse de la variance pour la moyenne du processus $(Z_t^v \,;\, t \in [0,T]\,,\, v \in B)$. Pour cela nous utiliserons les notions d'analyse de la variance sur des espaces infinidimensionnels tels qu'il ont été introduits dans [2] et [3].

Pour définir un test d'homogénéïté de la moyenne de $(Z_t^v \,,\, t \in [0,T])$ nous étudions d'abord la structure de l'espace autoreproduisant du processus centré $(Z_t^o \,,\, t \in [0,T])$. On note γ la mesure dénombrement sur $\mathbb{N}$ et S le produit cartésien $[0,T] \times [0,L]$. Soit $\{K_k \,,\, k \in \mathbb{N}\}$ la famille de noyaux symétriques définis positifs sur $S \times S$ avec

$$(5.1) \qquad K_k((s,x),(t,y)) = \frac{1}{2\lambda_k}\left(e^{-\lambda_k |t-s|} - e^{-\lambda_k |t+s|}\right) \varphi_k(x)\, \varphi_k(y)$$

où $((s,x),(t,y)) \in S \times S$ et où λ_k et φ_k sont les $k^{\text{ième}}$ valeurs propres et fonctions propres de A. On a

PROPOSITION 5.1. - L'espace de Hilbert autoreproduisant $\mathcal{H}(\mathcal{K},S)$ associé au processus d'Ornstein-Uhlenbeck $(Z_t^o \,,\, t \in [0,T])$ est isomorphe à l'intégrale Hilbertienne $\int_{\mathbb{N}}^{\oplus} \mathcal{H}(K_k,S)\, d\gamma(k)$ engendrée par la famille des espaces autoreproduisants associés aux noyaux K_k .

Preuve. - Remarquons d'abord que pour tout $((s,x),(t,y))$ de $S \times S$ la fonction réelle

$$k \longmapsto K_k((s,x),(t,y))$$

est mesurable sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \gamma)$. Donc, selon [18], on peut définir un champ mesurable d'espaces Hilbertiens $\{\mathcal{H}(K_k,S), k \in \mathbb{N}\}$ où $\mathcal{H}(K_k,S)$ est l'espace autoreproduisant du noyau K_k . On a aussi pour tout (s,x) de S

$$\int_{\mathbb{N}} K_k((s,x),(s,x))\ \gamma(dk) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2\lambda_k}(1-e^{-2\lambda_k s})\varphi_k^2(x) < +\infty .$$

Donc (cf [18]) l'intégrale Hilbertienne $\int_{\mathbb{N}}^{\oplus} \mathcal{H}(K_k,S)\ \gamma(dk)$ est bien définie. Elle est isomorphe à l'espace autoreproduisant du noyau $\mathcal{K}$ sur $S \times S$ défini par

$$\mathcal{K}((s,x),(t,y)) = \sum_{k \geq 0} K_k((s,x),(t,y)).$$

qui est le noyau du processus gaussien $(Z_t^o,\ t \in [0,T])$. ∎

Si K_k^1 désigne le noyau défini sur $[0,T] \times [0,T]$ par

$K_k^1(s,t) = \frac{1}{2\lambda_k}\left(e^{-\lambda_k|t-s|} - e^{-\lambda_k(t+s)}\right)$, l'espace autoreproduisant $\mathcal{H}(K_k^1,[0,T])$ de K_k^1 est donné (cf. [3]) par

$$\mathcal{H}(K_k^1,[0,T]) = \{f \in C([0,T]\,;\ f(u) = e^{-\lambda_k u}\int_u^T g(w)\,dm_k(w)\ ,\ g \in L^2([0,T],m_k)\}$$

où $$dm_k(w) = e^{-2\lambda_k w}\,dw + \frac{1}{2\lambda_k}\,e^{-2\lambda_k T}\,\delta_{\{T\}}\ .$$

De plus

$$\|f\|^2_{\mathcal{H}(K_1^k,[0,T])} = \int_0^T (\lambda_k f + \dot{f})^2(u)\,du + 2\lambda_k\, f^2(T)\ .$$

Avec ces notations on a la caractérisation suivante de $\mathcal{H}(\mathcal{K},S)$:

PROPOSITION 5.2. - L'espace de Hilbert autoreproduisant associé au noyau $\mathcal{K}$ est l'espace des fonctions continues sur $S = [0,T] \times [0,L]$ définies pour (t,x) dans S par

$$h(t,x) = \sum_{k\geq 0} f_k(t)\ \varphi_k(x) \tag{5.2}$$

avec $f_k \in \mathcal{H}(K_k^1,[0,T])$ et $(\|f_k\|_{\mathcal{H}(K_k^1,[0,T]}\ ;\ k\geq 0) \in \ell^2$.

Preuve. - Pour tout entier k, le noyau K_k sur S est un produit tensoriel des noyaux K_k^1 et K_k^2 sur $[0,T] \times [0,T]$ et $[0,L] \times [0,L]$ respectivement avec $K_k^2(x,y) = \varphi_k(x)\ \varphi_k(y)$. D'après le théorème III.2 de [9], le noyau K_k^2 est défini positif et $\mathcal{H}(K_k^2, [0,L])$ est le sous-espace de Hilbert de $L^2([0,L], dx)$ engendré par φ_k. Comme K_k est le produit tensoriel des noyaux K_k^1 et K_k^2, l'espace Hilbertien $\mathcal{H}(K_k, S)$ est le produit tensoriel $\mathcal{H}(K_k^1, [0,T]) \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}(K_k^2, [0,L])$ (cf. [3]). Donc pour tout k, $\mathcal{H}(K_k, S)$ est l'espace des fonctions sur S de la forme

$$h_k(t,x) = f_k(t)\ \varphi_k(x)$$

avec $f_k \in \mathcal{H}(K_k^1, [0,T])$. Le résultat est alors une conséquence immédiate de la proposition 5.1. ∎

Il est clair d'après l'expression (5.2) que l'ensemble des fonctions constantes sur S est contenu dans $\mathcal{H}(\mathcal{K}, S)$. En fait, $\mathcal{H}(\mathcal{K}, S)$ étant une intégrale hilbertienne on a la décomposition orthogonale suivante :

$$\mathcal{H}(\mathcal{K}, S) = \mathcal{H}(K_0, S) \oplus \int_{\mathbb{N}-\{0\}} \mathcal{H}(K_k, S)\ d\gamma(k)\ . \tag{5.3}$$

On peut maintenant énoncer :

PROPOSITION 5.3. - Soit $z = \{z(t,x)\ ;\ 0 \leq t \leq T\ ,\ x \in [0,L]\}$ une observation du processus $\{Z_t^v\ ,\ 0 \leq t \leq T\ ,\ v \in B\}$. Pour tout $\alpha \in]0,1[$ il existe un test quadratique sans biais de seuil α pour tester l'hypothèse de non influence du facteur position sur la moyenne de Z_t^v . Ce test est de la forme

$$\varphi_{\eta,\ell_\alpha}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } q_\eta(y) > \ell_\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $y(t,x) = z(t,x) - \int_0^L z(t,x)\,dx$, $q_\eta(y) = \int_0^T \int_0^L y^2(t,x)\,d\eta(t,x)$ et η est une mesure borélienne positive sur S .

Preuve. - L'hypothèse de non influence du facteur position sur la moyenne de $\{Z_t^v,\ 0 \le t \le T,\ v \in B\}$ signifie que la fonction f de $\mathcal{H}(\mathcal{K},S)$ définie par $f(t,x) = \mathbb{E}_{P_r}(Z_t^v)(x) = (e^{-At}v)(x)$ est constante en x sur $[0,L]$. L'hypothèse à tester est alors équivalente à l'hypothèse de nullité de $f - \Pi_{\mathcal{H}(K_o,S)}(f)$ où $\Pi_{\mathcal{H}(K_o,S)}$ est le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}(\mathcal{K},S)$ sur $\mathcal{H}(K_o,S)$. Le test linéaire correspondant découle des résultats de [1] à condition de trouver une expression de $\Pi_{\mathcal{H}(K_o,S)}$ et de son extension à $C([0,T]\times[0,L])$. Remarquons ici que puisque

$\int_{\mathbb{N}} K_k^1(s,x)\,d\gamma(k) = \sum_{k\ge 0} \frac{1}{2\lambda_k}(1-e^{-2\lambda_k s}) < +\infty$ on peut définir l'intégrale Hilbertienne

$$\mathcal{H}^1 = \int_{\mathbb{N}}^{\oplus} \mathcal{H}(K_k^1,[0,T])\,d\gamma(k) .$$

Soient $I_{\mathcal{H}^1}$ l'opérateur identité sur $\mathcal{H}^1$ et $\mathcal{O}$ le projecteur de H sur $\mathcal{K}(K_o^2,[0,L])$. L'opérateur $\mathcal{O}$ est défini par

$$\varphi \longmapsto \mathcal{O}(\varphi) = \langle \varphi , \varphi_o \rangle_H \, \varphi_o \, .$$

On a alors

$$\Pi_{\mathcal{H}(K_o,S)} = I_{\mathcal{H}^1} \otimes \mathcal{O}$$

où $I_{\mathcal{H}^1} \otimes \mathcal{O}$ est défini sur $\mathcal{H}(\mathcal{K},S)$ par

$$(I_{\mathcal{H}^1} \otimes \mathcal{O})(h) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} I_{\mathcal{H}^1}(f_k) \otimes \mathcal{O}(\varphi_k) = f_o \otimes \varphi_o$$

avec $h = \sum_{k \geq 0} f_k \otimes \varphi_k$ comme en (5.2).

En notant que $C([0,T] \times [0,L]) = C([0,T]) \hat{\otimes}_\varepsilon C([0,L])$ où $C([0,T]) \hat{\otimes}_\varepsilon C([0,L])$ désigne le ε-produit tensoriel complété de ces espaces de Banach (cf. [8]) , l'extension à $C([0,T] \times [0,L])$ de l'opérateur $\Pi_{\mathcal{H}(K_o,S)}$ est (cf. [8]) :

$$(5.4) \qquad I_B \hat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{O}^*$$

où I_B est l'opérateur identité de B et où $\mathcal{O}^*$ est défini sur $C([0,L])$ par $g \longrightarrow \mathcal{O}^*(g) = (\nu_o , g)_{C^*([0,L]),C([0,L])} \cdot \varphi_o$, ν_o étant la mesure de Lebesgue sur $[0,L]$.

Par conséquent, si $z = \{ z(t,x) \; ; \; 0 \leq t \leq T \, , \; x \in [0,L] \}$ est une observation du processus $(Z_t^v \, , \; t \in [0,T] \, , v \in B)$, la statistique appropriée pour le test de l'hypothèse $f - \Pi_{\mathcal{H}(K_o,S)}(f) = 0$ est donnée d'après (5.4) par

$$y = (I_{C([0,T] \times [0,L])} - I_B \hat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{O}^*) z \ .$$

La proposition est alors une conséquence du théorème 3.3. de [1]. ∎

REMERCIEMENTS. - Nous tenons à remercier Monsieur le Professeur René CARMONA pour nous avoir suggéré le problème et pour ses précieux commentaires sur les méthodes et les résultats du paragraphe 4.

REFERENCES

[1] A. ANTONIADIS (1982). - Sur certains problèmes d'estimation et de test concernant la moyenne d'un processus gaussien. Ann. Inst. H. Poincaré, t. XVIII, n°3, p.223-236.

[2] A. ANTONIADIS (1982). - Analyse de la variance à deux facteurs à ensembles de niveaux quelconques. Note C.R.A.S. Série I, t.294, p.417-419.

[3] A. ANTONIADIS (1982). - Analysis of variance on function spaces. A paraître dans Math. Oper. Forsch and Statistik, Series Statistics.

[4] A.T. BHARUCHA-REID (1972). - Random Integral Equations. Academic Press, New-York.

[5] R. CARMONA et A. KLEIN (1982). - Exponential Moments for Hitting times of uniformely ergodic Markov Processes. Preprint. A paraître dans Ann. of Probability.

[6] R. CARMONA et N. KÔNO (1976). - Convergence en loi et lois du logarithme itéré pour les vecteurs gaussiens. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete, Vol.36, p.241-267.

[7] Y.L. DALETSKII (1967). - Infinite dimensional elliptic operators and parabolic equations associated with them. Uspehi. Mat. Nauk 22 (4), p.3-54.

[8] J. DIESTEL et J.J. UHL (1977). - Vector measures. American Math. Society. Providence. Rhode Island.

[9] M. DUC-JACQUET (1973). - Approximation des fonctionnelles linéaires sur les espaces Hilbertiens autoreproduisants.
Thèse d'Etat. Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

[10] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ (1963). - Linear operators. Part.II. John Wiley & Sons. New-York.

[11] E.B. DYNKIN (1965). - Markov processes Vol. I. Band 121 Springer Verlag, Berlin.

[12] L. GROSS (1962). - Measurable functions on Hilbert Spaces. Trans. Amer. Math. Soc, t.105, p.372-390.

[13] T. HIDA (1978). - Analysis of Brownian motion. Carleton Math. Lecture notes n° 13, Ottawa, Canada.

[14] M. KRASNOSELSKII et al (1976). - Intégral Operators in spaces of summable functions.
Noordhoff International Publishing. Leyden.

[15] H.H. KUO (1975). - Gaussian measures on Banach Spaces. Lect. Not. in Math, Vol.463, Springer-Verlag, Berlin.

[16] M. LIN (1974). - On the uniform ergodic theorem II. Proc. Amer. Math. Soc, t.146, p.217-225.

[17] W. MAGNUS et al (1966). - Formulas and theorems for the special functions of Math. Physics. Band 52, third edition Springer-Verlag, Berlin.

[18] J. NEVEU (1968). - Processus aléatoires gaussiens. Les Presses de l'Université de Montréal.

[19] E. NELSON (1967). - Dynamical theories of Brownian motion. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

[20] M.A. PIECH (1975). - The Ornstein-Uhlenbeck semi-group in an infinite dimensional L^2 -setting. J. Funct. Anal, Vol.18, p.271-285.

[21] J. ROSEN et B. SIMON (1976). - Fluctuations in $P(\varphi)_1$ processes. Ann. of Prob., Vol.4, n°2, p.154-174.

[22] A. SKOROHOD (1974). - Integration in Hilbert Spaces. Springer Verlag, Berlin.

[23] J.B. WALSH (1981). - A stochastic model for neural response. Adv. Appl. Prob., Vol.13, p.231-281.

[24] J. ZABCZYK (1981). - Linear stochastic systems in Hilbert spaces ; Structural Properties and Limit Behaviour. Preprint n°236, Institut of Math., Polish Academy of Sciences. Warsaw-Poland.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 296 (14 mars 1983) Série I — 451

PROBABILITÉS. — *Transformation de certaines fonctions aléatoires gaussiennes à valeurs dans un espace de Banach en processus de Wiener.* Note (*) de **Anestis Antoniadis**, transmise par Robert Fortet.

Dans cette Note on propose une méthode pour transformer, sous certaines hypothèses, une fonction aléatoire gaussienne à valeurs dans un espace de Banach réel séparable B en un mouvement brownien sur B.

PROBABILITY THEORY. — Change of Some Random Gaussian Functions with Values in a Banach Space into Wiener Process.

This paper provides a method for transforming a random gaussian function with values in real separable Banach space B into a B-valued Brownian motion.

1. NOTATIONS. PRÉLIMINAIRES. — Tous les éléments aléatoires considérés seront définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit B un espace de Banach réel séparable. Nous noterons $\| \cdot \|_B$ sa norme et $\langle \, , \, \rangle_{B^*, B}$ la dualité $\langle B^*, B \rangle$. Nous désignerons par μ une mesure gaussienne centrée sur $(B, \mathscr{B})$ où $\mathscr{B}$ est la tribu borélienne de B. Nous supposerons, sans perdre de généralité, que B est égal au support de la mesure μ; ainsi, l'espace de Hilbert $\mathscr{H}_\mu$, espace autoreproduisant de μ, peut être identifié à un sous-ensemble de B par une injection continue i et le triplet $(i, \mathscr{H}_\mu, B)$ est un espace de Wiener abstrait (*cf.* [1]). Si T est un réel strictement positif nous noterons $\{ W(t), 0 \leqq t \leqq T \}$ le processus de Wiener dans B construit sur μ, c'est-à-dire la fonction aléatoire gaussienne centrée définie sur $[0, T]$ à valeurs dans B telle que ses trajectoires soient continues, ses accroissements soient indépendants et, une fois normalisés, aient pour loi la mesure gaussienne μ (*cf.* [1]).

Nous noterons m la loi de probabilité d'un processus réel gaussien centré défini sur $[0, T]$, à trajectoires continues et de covariance Γ. La mesure m est donc une probabilité gaussienne sur l'espace de Banach réel séparable B_Γ, noté aussi $C([0, T])$, des fonctions réelles continues sur $[0, T]$. Si $\mathscr{H}(\Gamma)$ est l'espace autoreproduisant de m et si j est le prolongement naturel de $\mathscr{H}(\Gamma)$ dans B_Γ le triplet $(j, \mathscr{H}(\Gamma), B_\Gamma)$ est également un espace de Wiener abstrait.

La proposition 3 de [2], page 122, nous assure de l'existence d'une mesure de probabilité gaussienne P sur $C([0, T]) \hat{\otimes}_\varepsilon B = C([0, T]; B)$, où $C([0, T]) \hat{\otimes}_\varepsilon B$ désigne le produit tensoriel inductif complété de ces deux espaces de Banach. Pour cette mesure P, les fonctions coordonnées $Y(t)$ de $C([0, T]; B)$ définissent une fonction aléatoire gaussienne centrée $Y = \{ Y(t), 0 \leqq t \leqq T \}$ à valeurs dans B, à trajectoires continues dont la covariance est donnée pour s et t dans $[0, T]$ et x' et y' dans B^* par :

$$\mathbb{E}_P(\langle x', Y(s) \rangle_{B^*, B} \langle y', Y(t) \rangle_{B^*, B}) = \Gamma(s, t) \langle i^*(x'), i^*(y') \rangle_{\mathscr{H}_\mu},$$

où i^* désigne la transposée de i.

2. POSITION DU PROBLÈME ET HYPOTHÈSES. — Nous nous proposons dans la suite de transformer la fonction aléatoire gaussienne $\{ Y(t), 0 \leqq t \leqq T \}$ en un processus de Wiener $\{ W(t), 0 \leqq t \leqq \alpha \}$ construit sur μ. Pour cela nous sommes conduits à formuler certaines hypothèses sur la mesure gaussienne m.

La restriction du noyau de covariance Γ à $[0, t] \times [0, t]$, où t appartient à $]0, T]$, sera notée Γ_t et O_t désignera l'opération de restriction à $[0, t]$ des fonctions définies sur $[0, T]$.

D'après la proposition 3.15 de [3], si $\mathscr{H}_t$ désigne le sous-espace fermé de $\mathscr{H}(\Gamma)$ engendré par la famille de fonctions $\{ \Gamma(s, \cdot), s \in [0, t] \}$, l'opérateur O_t est un isomorphisme de $\mathscr{H}_t$ sur $\mathscr{H}(\Gamma_t)$. Si f et g sont des éléments de $\mathscr{H}(\Gamma)$ nous avons :

$$(1) \qquad \langle O_t f, O_t g \rangle_{\mathscr{H}(\Gamma_t)} = \langle P_{\mathscr{H}_t} f, P_{\mathscr{H}_t} g \rangle_{\mathscr{H}(\Gamma)},$$

où $P_{\mathscr{H}_t}$ est le projecteur de $\mathscr{H}(\Gamma)$ sur $\mathscr{H}_t$. De plus le supplémentaire orthogonal de $\mathscr{H}_t$ dans $\mathscr{H}(\Gamma)$ est formé des fonctions de $\mathscr{H}(\Gamma)$ nulles sur $[0, t]$.

Nous ferons les hypothèses suivantes sur la mesure m :

(H 1) il existe une fonction f de $\mathscr{H}(\Gamma)$, appartenant à l'image $j^*(B_T^*)$ telle que la fonction positive ψ définie sur $[0, T]$ par :

$$\psi(t) = \| O_t f \|^2_{\mathscr{H}(\Gamma_t)},$$

soit strictement croissante et vérifie pour tout s et t dans $[0, T]$:

$$|\psi(t) - \psi(s)| \leq \varphi(|t-s|),$$

où φ est une fonction réelle continue croissante sur $\mathbb{R}^+$ avec $\varphi(0)=0$ et $\int_0^{+\infty} \varphi(e^{-x^2})\,dx < +\infty$.

(H 2) pour tout t dans $[0, T]$, il existe une mesure μ_t borélienne sur $[0, T]$ à support dans $[0, t]$ telle que :

$$j^*(\mu_t) = P_{\mathscr{H}_t}(f).$$

3. Résultats. — En identifiant $\mathbb{R}\hat{\otimes}_\varepsilon B$ à B et en désignant par I_B l'opérateur identité de B, nous noterons pour $t>0$:

$$U_t = (\mu_t, .)_{B_T^*, B_T} j(j^*(\mu_t)) \otimes I_B,$$

l'opérateur sur $C([0, T]; B)$ à valeurs dans B défini pour y dans $C([0, T]; B)$ par :

$$U_t(y) = \int_0^T y(u)\,\mu_t(du) = \int_0^t y(u)\,\mu_t(du). \tag{2}$$

3.1. Théorème. — *La fonction aléatoire* $X = \{ X(t), t \in [0, T] \}$ *à valeurs dans* B *définie par* $X(t) = U_t(Y)$ *est un processus aléatoire gaussien centré sur* B *de covariance :*

$$R_{(s,t)}(x', y') = \psi(\min(s, t)) \langle i^*(x'), i^*(y') \rangle_{\mathscr{H}_\mu} \quad \textit{pour} \quad (s, t) \in [0, T] \quad \textit{et} \quad (x', y') \in B^{*2}.$$

De plus, X *admet une modification séparable à trajectoires continues.*

Démonstration. — Les opérateurs U_t étant linéaires sur $C([0, T]; B)$ et Y étant gaussienne centrée, il en est de même pour le processus $\{ X(t), t \in [0, T] \}$. Pour s et t dans $[0, T]$ et x' et y' dans B^* nous avons par définition de U_t :

$$\begin{aligned} R_{s,t}(x', y') &= \mathbb{E}_P(\langle x', X(s) \rangle_{B^*, B} \langle y', X(t) \rangle_{B^*, B}) \\ &= \mathbb{E}_P(\langle x', U_s(Y) \rangle_{B^*, B} \langle y', U_t(Y) \rangle_{B^*, B}) \\ &= \langle j^*(\mu_s), j^*(\mu_t) \rangle_{\mathscr{H}(\Gamma)} \langle i^*(x'), i^*(y') \rangle_{\mathscr{H}_\mu}. \end{aligned}$$

Mais d'après l'hypothèse (H 2) nous avons :

$$\langle j^*(\mu_s), j^*(\mu_t) \rangle_{\mathscr{H}(\Gamma)} = \langle P_{\mathscr{H}_t} f, P_{\mathscr{H}_s} f \rangle_{\mathscr{H}(\Gamma)}.$$

D'autre part, si $s<t$, $\mathscr{H}_s$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{H}_t$ et :

$$\langle P_{\mathscr{H}_t} f, P_{\mathscr{H}_s} f \rangle_{\mathscr{H}(\Gamma)} = \langle P_{\mathscr{H}_s} f, P_{\mathscr{H}_s} f \rangle_{\mathscr{H}(\Gamma)}.$$

Or :

$$\langle P_{\mathscr{H}_s} f, P_{\mathscr{H}_s} f \rangle_{\mathscr{H}(\Gamma)} = \langle O_s f, O_s f \rangle_{\mathscr{H}(\Gamma_s)} = \psi(s).$$

Donc :

$$R_{(s,t)}(x', y') = \psi(s \wedge t) \langle i^*(x'), i^*(y') \rangle_{\mathscr{H}_\mu}.$$

Soit D la boule unité fermée de B^* (pour la topologie faible $\sigma(B^*, B)$ de B^*).

Pour tout t et s de $[0, T]$ et pour tout (u_1, u_2) de $D \times D$ nous avons :

$$R_{(t,t)}(u_1-u_2, u_1-u_2) \leqq (\sup_{t\in[0,T]} \psi(t)) \| i^*(u_2) \|^2_{\mathscr{H}_\mu} \tag{3}$$

et

$$\begin{aligned}(R_{(s,s)}(u_1, u_1) - 2R_{s,t}(u_1, u_1) + R_{t,t}(u_1, u_1)) \\ = |\psi(s)-\psi(t)| \; \| i^*(u_1) \|^2_{\mathscr{H}_\mu} \leqq k \, |\psi(s)-\psi(t)|.\end{aligned} \tag{4}$$

Le noyau symétrique défini positif $\psi(s \wedge t)$ peut être considéré comme la covariance d'un processus réel gaussien centré V sur $[0, T]$. D'après l'hypothèse (H 1) l'écart quadratique $d^2_V(s, t)$ de V est tel que :

$$d^2_V(t, s) = \mathbb{E}((V(t)-V(s))^2) = |\psi(t)-\psi(s)| \leqq \varphi(|t-s|).$$

D'après le lemme d'intégrabilité de Fernique (*cf.* [4]), V possède une modification séparable à trajectoires continues sur $[0, T]$. Avec les inégalités (3) et (4) les hypothèses de la proposition 2 de [2], chap. IV, page 118, sont satisfaites et donc le processus $\{ X(t), t\in[0, T] \}$ possède une modification séparable à trajectoires continues sur $[0, T]$. ■

Nous noterons γ la fonction positive sur $[0, T]$ définie pour t dans $[0, T]$ par :

$$\gamma(t) = \psi(t) - \psi(0).$$

D'après (H 1), γ est une bijection continue de $[0, T]$ sur $[0, \alpha]$ où $\alpha = \| f \|^2_{\mathscr{H}(\Gamma)} - \psi(0)$. Posons $Z(t) = X(t) - X(0)$ et désignons par $\{ \tilde{Z}(t), t\in[0, \alpha] \}$ la fonction aléatoire à valeurs dans B définie par $\tilde{Z}(t) = Z(\gamma^{-1}(t))$.

3.2. Corollaire. — *Le processus gaussien centré* $\{ Z(t), t\in[0, \alpha] \}$ *est un processus de Wiener dans* B *construit sur la mesure gaussienne* μ.

Démonstration. — Il est clair que $\{ \tilde{Z}(t), t\in[0, \alpha] \}$ est un processus gaussien centré à trajectoires continues tel que $\tilde{Z}(0) = 0$. La covariance de $\tilde{Z}$ est, pour s et t dans $[0, \alpha]$ et (x', y') dans B^{*2} :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\langle Z(s), x' \rangle_{B,B^*} \langle Z(t), y' \rangle_{B,B^*}) &= [\psi(\gamma^{-1}(s\wedge t)) - \psi(0)] \langle i^*(x'), i^*(y') \rangle_{\mathscr{H}_\mu} \\ &= \min(s, t) \langle i^*(x'), i^*(y') \rangle_{\mathscr{H}_\mu},\end{aligned}$$

d'où le corollaire. ■

3.3. EXEMPLES. — Citons quelques exemples de mesures gaussiennes m sur $C([0, T])$ qui vérifient les hypothèses (H 1) et (H 2).

(1). Soit m la mesure gaussienne centrée sur $C([0, T])$ de covariance :

$$\Gamma(s, t)=\alpha \min\left(\frac{1}{s+\gamma}, \frac{1}{t+\gamma}\right), \qquad \alpha, \gamma>0.$$

L'hypothèse (H 1) est vérifiée avec f la fonction constante sur $[0, T]$ égale à 1. En effet f pouvant aussi s'écrire sous la forme $(T+\gamma)/\alpha\,\Gamma(T, .)$ appartient donc à $\mathscr{H}(\Gamma)$ et nous avons $\psi(t)=(t+\gamma)/\alpha$. En considérant les mesures $\mu_t=(t+\gamma)/\alpha\,\delta_{\{t\}}$ où $\delta_{\{t\}}$ désigne la mesure de Dirac concentrée en $\{t\}$, nous avons $j^*(\mu_t)=(t+\gamma)/\alpha\,\Gamma(t, .)=P_{\mathscr{H}_t}f$. Donc l'hypothèse H 2 est également vérifiée.

(2). Soit m la mesure gaussienne sur $C([0, T])$ de covariance $\Gamma(s, t)=\alpha\min((s+\gamma)^p, (t+\gamma)^p)$ avec $p\in]0, 1]$ et $\alpha, \gamma>0$.

L'hypothèse (H 1) est vérifiée avec pour f la fonction définie sur $[0, T]$ par $f(u)=(u+\gamma)^p$. En effet $f=1/\alpha\,\Gamma(T, .)$ et appartient à $\mathscr{H}(\Gamma)$.

De plus $\psi(t)=(t+\gamma)^p/\alpha$ est strictement croissante et lipschitzienne. En notant μ_t la mesure borélienne égale à $\mu_t=1/\alpha\,\delta_t$, nous avons $j^*(\mu_t)=1/\alpha\,\Gamma(t, .)=P_{\mathscr{H}_t}f$. Donc l'hypothèse (H 2) est également vérifiée.

(3). Soit m la mesure gaussienne centrée sur $C([0, T])$ dont la covariance est la restriction de la covariance d'un processus réel gaussien stationnaire de densité spectrale rationnelle de la forme :

$$g(\lambda)=\frac{1}{\left|\sum_{j=0}^{n} a_j(i\lambda)^j\right|^2} \qquad \text{avec} \quad a_0 a_n\neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

D'après la proposition 3.3 de [5], la fonction constante égale à 1 sur $[0, T]$ appartient à $\mathscr{H}(\Gamma)$ et $\psi(t)=a_0^2 t+(a_1, a_0)/\pi$. Donc l'hypothèse (H 1) est vérifiée. De plus pour tout t dans $[0, T]$ il existe μ_t telle que $j^*(\mu_t)=P_{\mathscr{H}_t}f$.

(*) Remise le 28 février 1983.

[1] L. GROSS, *J. Funct. Anal.*, 1, 1967, p. 123-181.
[2] R. CARMONA, *Thèse d'Etat*, Aix-Marseille II, 1977.
[3] J. NEVEU, *Processus aléatoires gaussiens*, Presses universitaires de Montréal, 1968.
[4] X. FERNIQUE, *Comptes rendus*, 258, 1964, p. 6058.
[5] A. ANTONIADIS, *Comptes rendus*, 294, série I, 1982, p. 417.

Laboratoire I.M.A.G.,
Université scientifique et médicale, B.P. n° 53 X, 38041 *Grenoble Cedex.*

TRANSFORMATION DE CERTAINES FONCTIONS ALEATOIRES GAUSSIENNES REELLES EN PROCESSUS DE WIENER

(Annexe à la note aux COMPTES RENDUS)

1. NOTATIONS. PRELIMINAIRES. - Tous les éléments aléatoires considérés seront définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si T est un réel strictement positif, nous noterons $\{W(t),\ 0 \leq t \leq T\}$ le processus de Wiener réel sur $[0,T]$. Nous noterons m la loi de probabilité d'un processus réel gaussien centré défini sur $[0, T]$ à trajectoires continues et de covariance Γ. La mesure m est donc une probabilité gaussienne sur l'espace de Banach réel séparable B_T, noté aussi $C[0,T]$, des fonctions numériques continues sur $[0,T]$. Si $\mathcal{H}(\Gamma)$ est l'espace auteroproduisant de m et si j est le prolongement naturel de $\mathcal{H}(\Gamma)$ dans B_T le triplet $(j, \mathcal{H}(\Gamma), B_T)$ est un espace de Wiener abstrait ([1]).

Nous désignerons par H(m) l'espace gaussien associé à la mesure m sur B_T et nous noterons u l'isometrie de H(m) avec $\mathcal{H}(\Gamma)$. Enfin $(Y(t),\ t \in [0,T])$ sera la fonction aléatoire associée à: la mesure m.

2. POSITION DU PROBLEME ET HYPOTHESES. - Nous nous proposons dans la suite de transformer la fonction aléatoire gaussienne $\{Y(t),\ 0 \leq t \leq T\}$ en un processus de Wiener $\{W(t),\ 0 \leq t \leq \alpha\}$ où $\alpha > 0$. Pour cela nous sommes conduits à formuler certaines hypothèses sur la mesure gaussienne m.

La restriction du noyau de covariance Γ à $[0,t] \times [0,t]$, où t appartient à $]0,T]$, sera notée Γ_t et O_t désignera l'opération de restriction à $[0,t]$ des fonctions définies sur $[0,T]$.

D'après la proposition 3.15 de [3], si $\mathcal{H}_t$ désigne le sous-espace fermé de $\mathcal{H}(\Gamma)$ engendré par la famille de fonctions $\{\Gamma(s,.),\ s \in [0,t]\}$, l'opérateur O_t est un isomorphisme de $\mathcal{H}_t$ sur $\mathcal{H}(\Gamma_t)$. Si f et g sont des éléments de $\mathcal{H}(\Gamma)$ nous avons

$$(1) \qquad \langle O_t f, O_t g \rangle_{\mathcal{H}(\Gamma_t)} = \langle P_{\mathcal{H}_t} f, P_{\mathcal{H}_t} g \rangle_{\mathcal{H}(\Gamma)}$$

où $P_{\mathcal{H}_t}$ est le projecteur de $\mathcal{H}(\Gamma)$ sur $\mathcal{H}_t$. De plus le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{H}_t$ dans $\mathcal{H}(\Gamma)$ est formé des fonctions de $\mathcal{H}(\Gamma)$ nulles

De plus si $H_t(m)$ désigne le sous-espace vectoriel fermé de $H(m)$ engendré par la famille $\{\delta_s, s \leq t\}$ de B_T^*, nous avons $u(H_t(m)) = \mathcal{H}_t$ et $u \circ E^{H_t(m)} = P_{\mathcal{H}_t}$, $E^{H_t(m)}$ étant l'espérance conditionnelle à $H_t(m)$.

Nous ferons l'hypothèse suivante sur la mesure m :

(H) il existe une fonction f de $\mathcal{H}(\Gamma)$, telle que la fonction positive ψ_f définie sur $[0,T]$ par

$$(*) \qquad \psi(t) = \|0_t f\|^2_{\mathcal{H}(\Gamma_t)} = \|P_{H_t} f\|^2_{\mathcal{H}(\Gamma)}$$

soit continue.

REMARQUE 1. - Soit pour tout $t \in [0,T]$, $H_{t^+}(m) = \bigcap_{s>t} H_s(m)$.

Si pour tout f de $\mathcal{H}(R)$ la fonction ψ définie sur $[0,T]$ par $(*)$ est continue l'ensemble $\{t \in [0,T] \ ; \ H_t(m) \neq H_{t^+}(m)\}$ est vide et réciproquement. Cette condition est vraie en particulier pour tout processus gaussien markovien à trajectoires continues sur un intervalle ouvert contenant $[0,T]$ (cf. [3]).

3. RESULTATS. - Notons $\dot{X}$ l'élément de $H(m)$ associé à la fonction f de l'hypothèse H, i.e $\dot{X} = u^{-1}(f)$. Pour tout t de $[0,T]$, nous pouvons choisir une version de $E^{H_t(m)}(\dot{X})$ définie sur B_T que nous notons $E^{H_t(m)}(X)$. Soit alors $(X_t, t \in [0,T])$ la fonction aléatoire sur $(B_T, \mathcal{B}_T, m)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par

$$(2) \qquad X_t(x) = E^{H_t(m)}(X)(x) \qquad \text{pour } x \in B_T .$$

3.1. THEOREME. - La fonction aléatoire $(X_t, t \in [0,T]$ définie par (2) est un processus aléatoire gaussien sur $\mathbb{R}$, centré de covariance

$$R_{s,t} = \psi(\min(s,t)) \qquad \text{pour } (s,t) \in [0,T]^2 \text{ et}$$

De plus le processus admet une modification à trajectoires continues.

Démonstration.— Soit $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ un n-uple de points distincts de $[0,T]$. Pour tout i dans $[1,\ldots, n]$ la variable X_{t_i} est dans $H(m)$ par construction. Donc toute combinaison linéaire des X_{t_i} est dans $H(m)$ et est gaussienne centrée car $H(m)$ est un espace gaussien centré.

Pour (s,t) dans $[0,T]^2$ nous avons

$$R(s,t) = E_m\left(E^{H_t(m)}(X)\, E^{H_s(m)}(X)\right) = E\left(\left(E^{H_{s\wedge t}(m)}(X)\right)^2\right) = (\min(s,t)).$$

D' autre part

(3) $$R(s,s) - 2\,R(s,t) + R(t,t) = |\psi(s) - \psi(t)|$$

Le noyau symétrique défini positif $\psi(s\wedge t)$ peut être considéré comme la covariance d'un processus réel gaussien centré V sur $[0,T]$.

La continuité de ψ entraîne que V admet une modification séparable à trajectoires continues sur $[0,T]$ (cf. [3], Théorème 6, Chap.IV, §5). Avec les inégalités (3) et (4) les hypothèses de la proposition 2 de [2], chap. IV, page 118, sont satisfaites et donc le processus $\{X(t),\, t\in[0,T]\}$ possède une modification séparable à trajectoires continues sur $[0,T]$. ■

3.2. - REMARQUE. - Le théorème 3.1 est particulièrement intéressant dans les applications si pour tout t de $[0,T]$, $E^{H_t(m)}(X)$ peut être identifié à une mesure de Radon μ_t sur $[0,T]$ (élément de B_T^*). Du fait que (1) est vraie, cette mesure de Radon est alors à support dans $[0,t]$ et le processus $(X_t,\ t\in[0,T])$ peut être défini par $X_t = \int_0^t Y(s)\,\mu_t(ds)$.

Nous noterons γ la fonction positive sur $[0,T]$ définie pour t dans $[0,T]$ par

$$\gamma(t) = \psi(t) - \psi(0)\ .$$

Si de plus la fonction ψ de l'hypothèse H est strictement croissante alors γ est une bijection continue de $[0,T]$ sur $[0,\alpha]$ où $\alpha = \|f\|^2_{\mathcal{H}(\Gamma)} - \psi(0)$. Posons $Z(t) = X(t) - X(0)$ et désignons par

$\{\tilde{Z}(t),\ t\in[0,\alpha]\}$ la fonction aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $\tilde{Z}(t) = Z(\gamma^{-1}(t))$.

3.2. COROLLAIRE. - Le processus gaussien centré $\{Z(t), t \in [0,\alpha]\}$ est un processus de Wiener dans $\mathbb{R}$ construit sur la mesure gaussienne μ.

Démonstration. - Il est clair que $(\tilde{Z}(t), t \in [0,\alpha])$ est un processus gaussien centré à trajectoires continues tel que $\tilde{Z}(0) = 0$. La covariance de $\tilde{Z}$ est, pour s et t dans $[0,\alpha]$:

$$\mathbb{E}(\,Z(s)\quad Z(t)\,) = [\,\psi(\gamma^{-1}(s \wedge t)) - \psi(0)]$$

$= \min(s,t)$ d'où le corollaire. ∎

3.4. - EXEMPLES. - Citons quelques exemples de mesures gaussiennes centrées m sur $C([0,T])$ qui vérifient l'hypothèse H.

(i) Soit m une mesure gaussienne centrée sur $C([0,T])$ de covariance triangulaire $\Gamma(s,t) = a(\min(s,t))\, b(\max(s,t))$ où a et b sont des fonctions réelles continues sans 0 sur $[0,T]$ et telles que $\frac{a}{b}$ soit strictement croissante. Le fait que $\Gamma(s,t)$ est une covariance entraîne la positivité de $\frac{a}{b}$. Une telle mesure gaussienne m est markovienne (cf.[3]).

L'hypothèse H est satisfait pour une telle mesure m.
En effet soit $f = a$.

Nous avons $f = \Gamma(.,T)\,.\,\frac{1}{b(T)} = a$.

Donc f est un élément de $\mathcal{H}(\Gamma)$.

D'autre part $\|O_t f\|^2_{\mathcal{H}(\Gamma_t)} = \|O_t a\|^2_{\mathcal{H}(\Gamma_t)} =$

$$= \left\|\frac{\Gamma(.,t)}{b(t)}\right\|^2_{\mathcal{H}(\Gamma_t)} = \frac{1}{b^2(t)}\,\Gamma(t,t) = \frac{a(t)}{b(t)}\,.$$

Donc H est remplie. Mais de plus pour $\mu_t = \frac{1}{b(t)}\,\delta_t$ nous avons

$$j^*(\mu_t) = \frac{1}{b(t)}\,\Gamma(t,.) = P_{\mathcal{H}_t} f\,.$$

(ii) Considérons la covariance

$$\Gamma(s,t) = \begin{cases} 1 - |s-t| & \text{si } |s-t| < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de voir qu'il existe une mesure gaussienne centrée m sur $C([0,T])$ de covariance Γ.

Soit f la fonction constante et égale à 1 sur $[0,T]$.

Nous avons

$$f(t) = \frac{1}{2n_T - T} \sum_{j=0}^{n_T - 1} (n_T - j) \; [\, \Gamma(j,t) + \Gamma(T-j,t) \,]$$

où n_T est le nombre entier tel que $T \in [n_T - 1, n_T[$.

Donc f est un élément de $\mathcal{H}(\Gamma)$ et pour tout $t \geq 0$ et

$$(O_t f)(s) = \frac{1}{2n_T - T} \sum_{j=0}^{n_T - 1} (n_t - j) \; [\, \Gamma(j,s) + \Gamma(t-j,s) \,] \; .$$

Par un calcul direct on a

$$\| O_t f \|^2_{\mathcal{H}(\Gamma_t)} = \frac{n_t (n_t + 1)}{2n_t - t} \; .$$

Cette fonction est continue et strictement croissante. Donc l'hypothèse H est satisfaite. De plus en prenant pour tout $t \geq 0$

$$\mu_t = \frac{1}{2n_t - t} \sum_{j=0}^{n_t - 1} (n_t - j) \; (\delta_j + \delta_{t-j})$$

on a $j^*(\mu_t) = P_{\mathcal{H}_t} f$.

[1] L. GROSS ,J. FUNCT.Anal, 1, 1967, 123-182

[2] R. CARMONA ,These d'état, 1977

[3] J. NEVEU Processus aléatoires gaussiens. Montréal

[4] GIKHMAN, I et SKOROHOD, A, V , 1965, SAUNDERS, Philadelphia

[5] A. ANTONIADIS Note CRAS, 294, 1982

QUELQUES METHODES D'EVALUATION NUMERIQUE DE LA FONCTION DE REPARTITION DE CERTAINES FORMES QUADRATIQUES DE PROCESSUS GAUSSIENS

par

Anestis ANTONIADIS
Laboratoire IMAG
Boite Postale 68
38402 SAINT-MARTIN-d'HERES CEDEX

SOMMAIRE. - Nous rappelons certaines propriétés des formes quadratiques de processus stochastiques gaussiens et nous passons en revue diverses méthodes d'évaluation de la fonction de répartition de ces formes quadratiques. Nous commençons par la présentation de méthodes plus ou moins classiques, soulignant quelques résultats originaux. Enfin nous proposons une méthode basée sur la transformation de certains processus gaussiens en mouvement brownien.

SUMMARY. - In this paper, we are giving a survey of different methods for the numerical evaluation of the distribution function of quadratic forms in gaussian stochastic processes with some new results. The second part of the paper is concerned with a transformation of some gaussian processes into a brownian motion.

§1. Introduction.

Dans un travail précédent ([3], [4]), nous avions étudié certains problèmes d'estimation et de test concernant la moyenne de processus aléatoires gaussiens. Nous avions obtenu une généralisation en dimension infinie de la théorie des tests d'hypothèses linéaires.

Plus précisément, disposant d'une ou de plusieurs observations d'une fonction aléatoire gaussienne $(X_t \,,\, t \in [0,T])$ sur l'intervalle réel $[0,T]$, à trajectoires continues de moyenne inconnue m et de noyau de covariance K connu sur $[0,T]^2$, nous avions étudié le problème de test d'hypothèses linéaires de la forme "$m \in H_n$" contre "$m \in H_n$" dans une structure statistique gaussienne

$$\Sigma = (B \,,\, \mathcal{B} \,,\, \{P_m \;;\; m \in \mathcal{H}(K)\})$$

où B est l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,T]$, P_m est une mesure gaussienne sur B de moyenne m et de noyau de covariance K et $\mathcal{H}(K)$ est l'espace autoreproduisant associé au noyau K.
Le caractère gaussien des mesures P_m nous avait permis de définir un espace de Wiener abstrait $(j \,,\, \mathcal{H}(K), B)$ associé à Σ et de choisir une base orthonormée de $\mathcal{H}(K)$ constituée de vecteurs de la forme $(j^*(e_k^*))_{k \geq 1}$ où e_k^* sont des éléments du dual topologique de B.
Les espaces H_n des hypothèses linéaires, sont les sous-espaces de $\mathcal{H}(K)$ engendrés par les n premiers vecteurs $(j^*(e_k^*), k = 1, \ldots, n)$. En notant π_n l'extension à B du projecteur orthogonal Q_n de $\mathcal{H}(K)$ sur H_n les tests étudiés font intervenir des statistiques de la forme

$$G_n^2 = \int_0^T (I_B - \pi_n)\,(x)^2(t)\; d\mu(t)$$

μ étant une mesure borélienne positive sur $[0,T]$.

Le but de ce rapport est de proposer et de discuter certaines techniques de calcul numérique pour la détermination des quantiles de la loi de probabilité des variables aléatoires G_n^2 . Notre approche sera comparée avec celle de la dimension finie.

Dans un premier temps, nous établissons l'expression générale de la covariance K_n des processus $(y_n(t)\ ,\ t\in[0,T])$ où $y_n = (I_B-\pi_n)(x)$. L'évaluation des quantiles de la loi des statistiques G_n^2 est alors un problème de détermination de la loi d'une forme quadratique d'un processus gaussien à trajectoires continues sur $[0,T]$, de covariance K_n . Suivant la forme des noyaux K_n , nous proposons des méthodes de calcul adaptées. Les résultats sont illustrés par plusieurs exemples.

La dernière partie de ce rapport est consacrée à une méthode permettant de transformer certains processus gaussiens en mouvement Brownien et l'utilité de cette méthode dans les tests d'hypothèses linéaires est soulignée.

§ 2. <u>Forme générale des noyaux de covariance</u> K_n <u>et de la fonction caractéristique des statistiques</u> G_n^2 .

2.1. - <u>Les noyaux</u> K_n .

Rappelons l'expression des opérateurs π_n de B sur $\mathcal{H}(K)$ telle qu'elle est donnée dans [3] .

Pour tout x de B nous avons

$$\pi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (\hat{e}_k, x)_{B^*,B}\ j^*(\hat{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} (\hat{e}_k, x)_{\hat{B},B}\ e_k$$

ou $(\, , \,)_{B^*,B}$ désigne la forme bilinéaire canonique mettant B et B^* en dualité séparante.

Le noyau de covariance K du processus observé $(X_t \, , \, t \in [0,T])$ étant continu sur $[0,T]^2$ et la famille $(e_k \, , \, k \geq 1)$ définissant une base orthonormée de $\mathcal{H}(K)$, de la proposition 3.7 de [8] nous déduisons

$$(2.1) \qquad K(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k(s)\, e_k(t) \qquad s,t \in [0,T]^2$$

la convergence de cette série étant uniforme et absolue sur $[0,T]^2$.
Désignons par Q_n le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}(K)$ sur H_n, dont π_n en est l'extension à B. D'après la proposition 3.15 de [8], le processus gaussien $(Y_n(t), \, t \in [0,T])$ défini par $(I-\pi_n)(X)(t) = Y_n(t)$ admet le noyau de covariance K_n avec

$$(2.2) \qquad K_n(s,.) = (I_{\mathcal{H}(K)} - Q_n)\,(K(s,.)) \quad s \in [0,T] \, .$$

L'espace autoreproduisant $\mathcal{H}(K_n)$ associé au noyau K_n est le sous-espace de Hilbert de $\mathcal{H}(K)$ orthogonal à $\mathcal{H}_n$. Grâce à (2.1) nous obtenons ainsi l'expression analytique suivante pour K_n :

$$(2.3) \qquad K_n(s,t) = \sum_{k \geq n+1} e_k(s)\, e_k(t) = K(s,t) - \sum_{k=1}^{n} e_k(s)\, e_k(t) \, .$$

<u>Exemple 2.1</u>. Considérons la structure statistique de Wiener

$$(C([0,1]), \, \mathcal{B}(C([0,1])) \, , \, \{N(m,K) \, ; \, m \in \mathcal{H}(K)\})$$

où $K(s,t) = \min(s,t)$ et notons $\mathcal{H}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(K)$ constitué des polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à n et admettant 0 pour racine. Si $n = 1$, nous avons pour π_1 (proposition 4.1 de [3])

$$\pi_1(x)(t) = x(1).t \qquad x \in C([0,T])$$

et $K_1(s,t) = \min(s,t) - st$.

Nous obtenons ainsi la covariance d'un pont Brownien sur $[0,1]$.

2.2. - Fonction caractéristique de G_n^2 .

Dans la suite, la mesure borélienne μ intervenant dans l'expression de G_n^2 sera la mesure de Lebesgue sur $[0,T]$. Nous avons donc

$$(2.4) \qquad G_n^2 = \int_0^T Y_n^2(t)\, dt$$

où Y_n est un processus gaussien, centré, sous l'hypothèse " $m \in H_n$ " , et de noyau de covariance K_n .

Si $(\lambda_k^{(n)}, k \geq 1)$ est l'ensemble des valeurs propres de l'équation intégrale associée au noyau K_n et si $(f_k^{(n)}, k \geq 1)$ est la famille des fonctions propres correspondantes, nous avons d'après le théorème de Mercer ([7]) ;

$$(2.5) \qquad K_n(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)} f_k^{(n)}(s)\, f_k^{(n)}(t) \qquad (s,t) \in [0,T]^2$$

la convergence du second membre de (2.5) étant uniforme et absolue sur $[0,T]^2$. Le noyau K_n étant symétrique défini positif toutes les valeurs propres $(\lambda_k^{(n)}, k \geq 1)$ sont positives et les fonctions propres correspondantes $(f_k^{(n)}, k \geq 1)$ forment une famille orthonormale dans $L^2([0,T], dx)$.

Il est connu ([7]) que le processus $(Y_n(t), t \in [0,T])$ est isonôme au processus $(Z_n(t), t \in [0,T])$ défini par

(2.6) $$Z_n(t) = \sum_{k\geq 1} \sqrt{\lambda_k^{(n)}}\; f_k^{(n)}(t)\; \xi_k$$

où $(\xi_k)_{k\geq 1}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes de loi gaussienne centrée réduite. Ainsi la loi de la variable aléatoire G_n^2 est identique à la loi de la variable aléatoire

(2.7) $$G_n'^2 = \int_0^T Z_n^2(t)\, dt = \sum_{k\geq 1} \lambda_k^{(n)}\, \xi_k^2$$

et donc la fonction caractéristique de G_n^2 est

(2.8) $$\varphi_{G_n^2}(s) = \prod_{k\geq 1} (1-2is\lambda_k^{(n)})^{-1/2} = D_n(2it)^{-1/2}$$

où D_n est le déterminant de Fredholm du noyau K_n ([7]) .

<u>Remarque 2.1</u>. - Nous pourrions d'une manière plus générale définir des formes quadratiques de Y_n de la forme

$$Q_n(\nu) = \int_0^T \int_0^T Y_n(t)\; Y_n(s)\;\; d\nu(s,t)$$

où ν est une mesure borélienne positive symétrique sur $[0,T]^2$.
En effet dans le cas finidimensionnel d'un vecteur réel gaussien Y non dégénéré centré et de covariance Λ sur $\mathbb{R}^p$ il est commode de considérer la forme quadratique Q_p associée à Λ^{-1} . Nous avons alors

$$\varphi_{Q_p(Y)}(u) = \varphi_{{}^tY\Lambda^{-1}Y}(u) = \det(\,1_p - 2iu)^{-p/2} .$$

Ainsi, par le choix de Q_p , ${}^tY\Lambda^{-1}Y$ s'exprime comme une somme non pondérée de carrés de var.al. gaussiennes centrées réduites indépendantes.

Il semblerait naturel d'étendre ce type de résultat dans le cas infinidimensionnel par le choix convenable d'une mesure ν . Pour cela il faudrait choisir une mesure ν de sorte que la forme quadratique $Q_n(\nu)$ soit non dégénérée et que l'opérateur linéaire U_ν défini sur $\mathcal{H}(K_n)$ par

$$(U_\nu(f))(t) = \int_{[0,T]^2} f(u)\, K_n(t,x)\, d\nu(x,u)$$

ait une valeur propre égale à 1 de multiplicité infinie. En particulier ceci signifierait que U_ν est de rang fini et donc Q_ν ne pourrait être non dégénérée ; une telle mesure ν n'existe pas. ∎

Dans la suite, nous nous proposons d'évaluer les quantiles de la loi de G_n^2 en utilisant soit l'expression (2.7) soit la formule (2.8). Certains des résultats ont été proposés par divers auteurs auxquels nous renvoyons le lecteur pour le détail des démonstrations.

§3. Densité de G_n^2 par inversion de la fonction caractéristique.

La fonction caractéristique de la loi de G_n^2 est donnée dans l'expression (2.8) du paragraphe précédent en fonction du déterminant de Fredholm du noyau K_n . La formule d'inversion de Fourier donne alors pour la densité de probabilité de la loi de G_n^2 l'expression

(3.1) $$g_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\, D_n(2it)^{-1/2}\, dt \quad , \; x \in \mathbb{R}^+ .$$

Sauf pour quelques cas particuliers que nous donnons dans la suite, le calcul de $D_n(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, est souvent difficile et même si nous disposons de $D_n(\lambda)$, l'inversion (3.1) ne présente qu'un intérêt théorique et est mal adaptée à tout calcul numérique.

Dans le cas où les valeurs propres $(\lambda_k^{(n)}, k \geq 1)$ de K_n sont toutes distinctes, (3.1) peut aussi s'écrire par le choix convenable d'un chemin d'intégration

$$(3.2) \qquad g_n(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \int_{\frac{1}{2\lambda_{k-1}}}^{\frac{1}{2\lambda_k}} e^{-xy}\, D_n(2y)^{-1/2}\, dy \ .$$

Par ailleurs (cf. [7]), si les valeurs propres s'accumulent dans un voisinage de 0, seuls les premiers termes de la série (3.2) contribuent significativement à la somme, pour x en dehors d'un voisinage de 0. Ainsi, si on dispose d'une approximation de $g_n(x)$ pour x petit, (3.2) permet le calcul d'une approximation de $g_n(x)$ en tout x positif. Lorsque cette approche est retenue, il est impératif de déterminer le déterminant D_n de K_n. Nous nous proposons d'énoncer un théorème de [13] utile pour la détermination de D_n lorsque le déterminant D du noyau K est connu. Pour cela notons $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ les valeurs propres de K et $(f_k)_{k \geq 1}$ les fonctions propres correspondantes, orthonormées dans $L^2([0,T], dt)$. De plus posons

$$\alpha_{k,j} = \langle e_k , f_j \rangle_{L^2} = \int_0^T e_k(t)\, f_j(t)\, dt \qquad k = 1,\dots,n\ ;\ j \geq 1$$

$$P_{kk}(\lambda) = 1 + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_{kj}^2}{1-\lambda/\lambda_j} \qquad \lambda \neq \lambda_j \qquad k = 1,\dots,n$$

$$P_{ik}(\lambda) = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_{ij}\,\alpha_{kj}}{1-\lambda/\lambda_j} \qquad \lambda \neq \lambda_j\ ,\ i \neq k\ ; \qquad i,k = 1,\dots,n\ .$$

Nous avons alors

Théorème 3.1. ([13], p.1918)

Le déterminant de Fredholm du noyau K_n *sur* $[0,T]^2$ *défini par*

$$K_n(s,t) = K(s,t) - \sum_{k=1}^{n} e_k(s)\, e_k(t)$$

est

$$D_n(\lambda) = D(\lambda)\ \Delta_n(\lambda)$$

où D *est le déterminant de Fredholm du noyau* K *et* $\Delta_n(\lambda)$ *est le déterminant de la matrice symétrique* $P(\lambda) = (P_{ij}(\lambda))_{i,j=\overline{1,\dots,n}}$.

Remarque 3.1. - Tout noyau K_n est différence d'un noyau K et d'un noyau de type positif de la forme $\sum_{k=1}^{n} e_k(s)\, e_k(t)$. D'après le principe du maximum des valeurs propres d'un opérateur intégral associé à un noyau de ce type (cf. [11]), les valeurs propres de K_n sont majorées par celles du noyau K . ▪

Nous terminons ce paragraphe en traitant quelques exemples.

Exemple 1. - Considérons le processus gaussien centré $(W_t\ ,\ t \in [0,1])$ de noyau de covariance $K(s,t) = \min(s,t)$. C'est le mouvement brownien sur $[0,1]$. Posons $G^2 = \int_0^1 W^2(t)\, dt$. Nous pouvons énoncer

Proposition 3.1.

La fonction de répartition de la loi de probabilité de $G^2 = \int_0^1 W^2(t)\, dt$ *où* W *est un mouvement brownien sur* $[0,1]$ *est donnée par :*

$$(3.3) \qquad F_{G^2}(s) = 2^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, \Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \, k\,!} \left(1 - \Phi\left(\frac{4k+1}{2\sqrt{s}}\right)\right)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Preuve : Les valeurs propres λ_k de l'équation intégrale associée au noyau de covariance K du processus $W = (W(t)\ ,\ t \in [0,1])$ sont (cf. [12], par exemple) :

$$\lambda_k = \frac{4}{(2k-1)^2 \, \pi^2} \qquad k = 1,2,\ldots$$

La transformée de Laplace de la loi de G^2 est donc

$$\psi_{G^2}(s) = \mathbb{E}(e^{-sG^2}) = \prod_{k \geq 1} (1 + 8s\,(2k-1)^{-2}\,\pi^{-2}) \qquad s \geq 0$$

qui n'est autre que le développement de $\cosh(\sqrt{2}s)^{-1/2}$.

Or (cf. [1]) , nous avons

$$(3.4) \qquad \cosh(\sqrt{2s})^{-1/2} = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, \Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \; k\,!} \exp\left(-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2s}\right)$$

D'autre part,

nous savons que pour tout réel α strictement positif, $\exp(-\alpha\sqrt{2s})$ est la transformée de Laplace en s de la fonction de répartition $H_\alpha(x) = 2(1-\Phi(\alpha/\sqrt{x}))$ (cf. [1]) . D'après le théorème d'unicité pour la transformation de Laplace (cf. [11]), l'expression (3.4) conduit à la formule de la proposition 3.1. ∎

Pour le calcul numérique, nous avons remarqué que seuls les dix premiers termes du second membre de (3.1) contribuent significativement à la somme. Nous avons ainsi obtenu les quantiles de G^2, qui sont reproduits dans la table I de ce rapport.

Exemple 2. Nous considérons ici la loi de la variable $G_0^2 = \int_0^1 Y_1^2(t)\,dt$ où $(Y_1(t),\ t \in [0,1])$ est un pont Brownien sur $[0,1]$, de covariance $K_1(s,t) = \min(s,t) - st$. Cet exemple est entièrement traité dans [2]. On y trouve l'expression de la fonction de répartition de G_o^2.

$$F_{G_o^2}(x) = \frac{1}{M\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\,k\,!} \sqrt{(4k+1)}\, e^{-\frac{(4k+1)^2}{16x}} K_{1/4}\left(\frac{(4k+1)^2}{16x}\right)$$

où $K_{1/4}$ est une fonction de Bessel standard.

La table II reproduit l'ensemble des valeurs de $F_{G_0^2}$ donné dans [2].

Pour terminer ce paragraphe, remarquons qu'il semble difficile, sauf pour certains cas particuliers, d'évaluer $D_n(\lambda)$ d'une part et $F_{G_n^2}(s)$ d'autre part. Dans le paragraphe suivant nous discuterons de certaines méthodes d'approximation de $F_{G_n^2}$.

§4. Méthodes d'approximation de la loi de G_n^2.

Nous avons vu dans le paragraphe 2 que la variable aléatoire G_n^2 admet la représentation

$$G_n^2 = \sum_{k \geq 1} \lambda_k^{(n)} \xi_k^2$$

où $\lambda_k^{(n)}$ sont les valeurs propres du noyau K_n et où $(\xi_k)_{k \geq 1}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées réduites. Pour la plupart des noyaux de covariance la suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ se comporte comme $(\frac{1}{k^2})_{k \geq 1}$ et donc d'après la remarque 3.1 du paragraphe précédent il en est de même pour la suite des valeurs propres des noyaux K_n.

Les cumulants de la loi de probabilité de G_n^2 sont donnés par

$$\varkappa_k^{(n)} = 2^{k-1} (k-1)! \sum_{j \geq 1} (\lambda_j^{(n)})^k .$$

Même si on ne connaît pas la suite des valeurs propres $(\lambda_j^{(n)}, j \geq 1)$, les cumulants peuvent être calculés en fonction des noyaux itérés de K_n. Ainsi, en posant

$$R_1^{(n)}(s,t) = K_n(s,t) \quad \text{et} \quad R_{k+1}^{(n)}(s,t) = \int_0^T R_k^{(n)}(s,u)\, R_1^{(n)}(u,t)\, du$$

on obtient

$$\varkappa_k^{(n)} = 2^{k-1} (k-1)! \int_0^T R_k^{(n)}(s,s)\, ds . \tag{4.1}$$

Dans le cas où les valeurs propres de K_n s'accumulent au voisinage de 0, S.O. RICE ([10]) propose une approximation de G_n^2 par une loi gamma centrée de densité

$$g(x) = \left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^r \frac{1}{\Gamma(r)}\, x^{r-1}\, e^{-\frac{mx}{\sigma^2}}\, 1_{[0,+\infty[}(x) \tag{4.2}$$

où $m = \kappa_1^{(n)}$, $\sigma^2 = \kappa_2^{(n)}$ et $r = \frac{m^2}{\sigma^2}$.

Dans le même ordre d'idée, vu la représentation de G_n^2 , les approximations de type Cornish-Fisher (cf. [1]) pour les quantiles de la loi de G_n^2 sont valables. Ainsi si y_α est le $(1-\alpha)$ quantile de G_n^2 nous avons

$$F_{G_n^2}(y_\alpha) = 1-\alpha$$

et

$$y_\alpha = m^{(n)} + \sigma^{(n)} \cdot w^{(n)}$$

où
$$w^{(n)} = x_\alpha + [\gamma_1^{(n)} h_1(x_\alpha)] + [\gamma_2^{(n)} h_2(x_\alpha) + (\gamma_1^{(n)})^2 h_{11}(x_\alpha)]$$
$$+ \dots + (\gamma_1^{(n)})^2 \gamma_2^{(n)} h_{112}(x_\alpha) + (\gamma_1^{(n)})^4 h_{1111}(x_\alpha)] + \dots$$

avec $x_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$ et $\gamma_{r-2}^{(n)} = \frac{\kappa_r^{(n)}}{(\kappa_2^{(n)})^{r/2}}$, $r = 3,4,\dots$,

les fonctions $h_{ijk\ell}$ étant tabulées dans [1] pour diverses valeurs de α .

En général, les cumulants $(\kappa_k^{[n]}, k=1,\dots,6)$ de G_n^2 sont rarement déterminés de manière analytique et il faut avoir recours à des méthodes d'intégration numérique de la trace des noyaux itérés $R_k^{(n)}$. Néanmoins nous avons leurs expressions dans un cas particulier intéressant.

Proposition 4.1.

Soit $(Y_n(t)\ ,\ t \in [0,1])$ un processus gaussien centré de noyau

<u>de covariance</u> K_n <u>défini par</u>

$$K_n(s,t) = \min(s,t) - \sum_{k=0}^{n} e_k(s)\, e_k(t) \qquad (s,t) \in [0,1]^2$$

<u>où</u> $e_o(t) = t$ <u>et</u> $e_k(t) = \frac{\sqrt{2}}{k\pi} \sin(k\pi t)$ <u>pour</u> $k \geq 1$. <u>Les cumulants</u> $\varkappa_k^{[n]}$ <u>de la variable aléatoire</u> $G_n^2 = \int_0^1 Y_n^2(t)\, dt$ <u>sont donnés par</u>

$$\varkappa_k^{[n]} = \frac{2^{3k-2}(k-1)!}{(2k)!} |B_{2k}| - \frac{2^{k-1}}{\pi^{2k}} (k-1)!\; A_k^{[n]}$$

<u>où</u> $(B_n)_{n\geq 0}$ <u>est la suite des nombres de Bernoulli et où</u> $A_k^{[n]} = \sum_{j=1}^{n} (\frac{1}{j^2})^k$ <u>si</u> $n \neq 0$, $A_k^{[0]} = 0$ <u>pour tout</u> k .

<u>Preuve</u> : Notons K le noyau symétrique défini positif sur $[0,T]^2$ déterminé par $K(s,t) = \min(s,t)$. La famille $(e_k)_{k\geq 0}$ des fonctions de la proposition 4.1 est une base orthonormée de l'espace autoreproduisant $\mathcal{H}(K)$, et possède de plus la particularité d'être une famille orthogonale dans $L^2([0,1], dt)$, (cf. [12]). D'après le § 2 de ce rapport nous obtenons donc l'expression suivante pour les noyaux K_n :

$$K_n(s,t) = \sum_{k\geq n+1} e_k(s)\, e_k(t)$$

et nous en déduisons par un calcul élémentaire la formule suivante pour les itérés de K_n :

$$(4.3) \qquad R_k^{(n)}(s,t) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{j^2\pi^2}\right)^{k-1} e_j(s)\, e_j(t) \ .$$

grâce à (4.3) nous obtenons pour les cumulants de G_n^2

$$\kappa_k^{(n)} = 2^{k-1}(k-1)!\int_0^1 R_k^{(n)}(s,s)\,ds = 2^{k-1}(k-1)!\sum_{j=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{j^2\pi^2}\right)^k$$

d'où l'expression des cumulants dans la proposition. ■

La table III est constituée des α quantiles de G_n^2 pour $n = 0,1,2,3,4$ et pour diverses valeurs de α. Nous remarquerons que la première ligne de cette table donne les quantités de G_0^2 qui sont d'autre part donnés de manière exacte dans la table II. La qualité des approximations par la méthode de Cornish-Fischer est remarquable. Par contre ayant utilisé l'approximation de RICE S.O. [10] pour ces mêmes exemples nous n'avons pas trouvé des approximations raisonnables.

Enfin signalons une méthode d'approximation par des schémas d'intégration numérique, décrite dans [7].

Cette méthode suppose d'une part qu'un certain nombre de valeurs propres du noyau K_n sont connues et que d'autre part on dispose d'une approximation de la densité de G_n^2 au voisinage de 0. La fonction caractéristique de G_n^2 est alors approchée par un produit fini

$$\varphi_k(t) = \prod_{j=1}^{k}\left(1-2it\,\lambda_j^{(n)}\right)^{-1/2} \tag{4.4}$$

à condition que les valeurs propres de K_n s'accumulent au voisinage de 0 en $\frac{1}{j^2}$. En prenant la dérivée logarithmique de (4.4) et en appliquant la transformation de Fourier inverse on obtient pour la densité de probabilité de G_n^2 l'équation

$$x\,g_n(x) = \int_0^x g_n(y)\,h_k^{(n)}(x-y)\,dy \tag{4.5}$$

avec $h_k^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} e^{-x/2\lambda_j^{(n)}}$.

L'équation (4.5) est alors utilisée comme base d'un schéma numérique d'intégration pour la loi de G_n^2 .

Pour x suffisamment petit une bonne approximation de g_n est donnée par (cf. [7]) :

$$g_n(x) = \frac{x^{(k/2)-1}}{2^{k/2} \left(\prod_{j=1}^{k} \lambda_j^{(n)} \right)^{1/2} \Gamma(\frac{k}{2})} \left(1 - \frac{x}{4(k/2)} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j^{(n)}} \right) .$$

En utilisant une formule d'intégration trapezoïdale l'approximation discrétisée de g_n est donnée par

$$g_n(p\Delta) = \frac{1}{(p-\frac{1}{2}h_k^{(n)}(0))} \sum_{\ell=1}^{p-1} g_n(\ell\Delta)\, h_k^{(n)}[(p-\ell)\Delta] \qquad p = 2, \ldots$$

qui exprime $g_n(p\Delta)$ en fonction de termes en g d'argument plus petit. Le lecteur désirant plus de détails se reportera à [7] .

Pour notre part nous avons appliqué ce schéma d'intégration pour un processus Y de noyau K donné par $K(s,t) = e^{-\alpha|s-t|}$ sur $[0,T] \times [0,T]$. Les figures 1 et 2 reproduisent respectivement la densité et la fonction de répartition de $G^2 = \frac{1}{T} \int_0^T Y^2(t)\, dt$ pour $T = 5$ et $\alpha = 2$, alors que la table IV donne les valeurs de la fonction de répartition. Nous avons comparé les résultats à ceux de la loi exacte de G^2 calculée autrement dans [7] et l'approximation s'avère excellente.

Enfin mentionnons également l'approximation de la fonction de répartition de la variable aléatoire G_n^2 par des méthodes de simulation.

En effet les processus $(Y_n(t)\ ,\ t \in [0,T])$ sont à trajectoires continues et nous savons alors (cf. [8]) que pour toute suite de sous-ensembles A_k de $[0,T]$ ayant un nombre fini d'éléments $\{t_1^k,\dots,t_k^k\}$ et de limite dense dans $[0,T]$, nous avons

$$\lim_{k \to +\infty} P\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} Y_n^2(t_i^k) \leq x\right) = P\left(\frac{1}{T} \int_0^T Y_n^2(t)\, dt \leq x\right).$$

Nous pouvons donc obtenir une approximation du second membre en simulant un nombre important de trajectoires indépendantes du processus $(Y_n(t)\ ,\ t \in [0,T])$. Remarquons que cette méthode est assez coûteuse.

§5. Autre approche du problème par transformation du processus Y_n en mouvement Brownien.

Nous supposons ici que le processus $(Y_n(t)\ ,\ t \in [0,T])$ admet un noyau de covariance K_n suffisamment complexe pour que les méthodes de calcul de la loi de G_n^2 décrites dans les paragraphes précédents ne puissent être appliquées. Nous nous proposons de transformer $(Y_n(t), t \in [0,T])$ en un mouvement brownien standard et définir ensuite une statistique de test équivalente à G_n^2. Nous énoncerons le résultat dans une forme générale et discuterons ensuite de son application.

Etudions d'abord le cas de la dimension finie. Soit $(Y(t), t=1,\dots,p)$ un vecteur gaussien centré sur $\mathbb{R}^p$ de covariance non dégénérée Λ.
Dans la plupart des problèmes liés à un tel vecteur il est commode de transformer Y en un vecteur X dont les composantes sont indépendantes.
Dans le cas continu il semble naturel de transformer un processus gaussien en mouvement brownien. Le caractère gaussien du vecteur aléatoire Y nous permet de définir un espace de Wiener abstrait $(j\ ,\ \mathcal{H}(\Lambda), B)$ avec $B = \mathbb{R}^p$, $\mathcal{H}(\Lambda) = \mathbb{R}^p$ muni du produit scalaire associé à Λ^{-1}, la transposée

j^* de j étant identifiée à l'application linéaire Λ de $(\mathbb{R}^p)^* \simeq \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p = \mathcal{H}(\Lambda)$.
Soit 1 le vecteur de $\mathbb{R}^p$ de composantes égales à 1 et notons Λ_k la restriction de Λ à $[1,2,\ldots,k]^2$ et 1_k la restriction de 1 à $[1,\ldots,k]$. Nous avons alors pour $k = 1,\ldots,p$

$$\psi(k) = \|1_k\|^2_{\mathcal{H}(\Lambda_k)} = \mathrm{Trace}\,(\Lambda^{-1}_{[k]})$$

où $\Lambda_{[k]}$ est la matrice carrée principale d'ordre k associée à Λ . Ainsi la fonction ψ est une application de $\{1,\ldots,p\}$ dans $\mathbb{R}^+$ strictement croissante.

Soit $(X(t),\ t=1,\ldots,p)$ le vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^p$ défini par

$$X(k) = \sum_{t=1}^{k} (\Lambda^{-1}1)(t)\ Y(t) .$$

Nous avons pour $(k,\ell) \in \{1,\ldots,p\}^2$

$$\mathbb{E}(X(k)\ X(\ell)) = \mathbb{E}\,((e_k, Y)\,(e_\ell, Y))$$

où e_k est la fonction sur $\{1,\ldots,p\}$ définie par

$$e_k(t) = \begin{cases} (\Lambda^{-1}1)(t) & \text{si } t \leq k \\ 0 & \text{si } t > k . \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi

$$\mathbb{E}(X(k)\ X(\ell)) = (j^* e_k, j^* e_\ell)_{\mathcal{H}(\Lambda)} = {}^t e_k\ \Lambda\, e_\ell = \|1_{\min(k,\ell)}\|^2_{\mathcal{H}(\Lambda\min(k)} =$$

$$= \psi(\min(k,\ell)) .$$

Le calcul précédent du cas finidimensionnel, nous conduit à définir une transformation séquentielle analogue dans le cas continu ; nous introduirons pour cela certaines notations et certaines hypothèses sur le processus $(Y(t)\ ,\ t \in [0,T])$.

Nous noterons ν la loi de probabilité du processus réel gaussien centré $(Y(t)\ ,\ t \in [0,T])$ à trajectoires continues et de noyau de covariance Γ . La mesure ν est donc une probabilité gaussienne centrée sur $C([0,T])$ noté encore B_T , et $(j\ ,\ \mathcal{H}(\Gamma), B_T)$ est un espace de Wiener abstrait.

Pour tout t dans $]0,T]$, notons Γ_t la restriction du noyau Γ à $[0,t]^2$ et désignons par O_t l'opérateur de restriction à $[0,t]$ des fonctions définies sur $[0,T]$.

D'après la proposition 3.15 de [8] , si $\mathcal{H}_t$ désigne le sous-espace fermé de $\mathcal{H}(\Gamma)$ engendré par la famille de fonctions $\{\Gamma(s,.)\ ,\ s \in [0,t]\}$, l'opérateur O_t est un isomorphisme de $\mathcal{H}_t$ sur $\mathcal{H}(\Gamma_t)$. Si f et g sont des éléments de $\mathcal{H}(\Gamma)$ nous avons

$$\text{(5.1)} \qquad \langle O_t f\ ,\ O_t g \rangle_{\mathcal{H}(\Gamma_t)} = \langle P_{\mathcal{H}_t} f\ ,\ P_{\mathcal{H}_t} g \rangle_{\mathcal{H}(\Gamma)}$$

où $P_{\mathcal{H}_t}$ est le projecteur de $\mathcal{H}(\Gamma)$ sur $\mathcal{H}_t$. De plus le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{H}_t$ dans $\mathcal{H}(\Gamma)$ est formé des fonctions de $\mathcal{H}(\Gamma)$ nulles sur $[0,t]$.

Nous ferons les hypothèses suivantes sur la mesure ν :

(H1) il existe une fonction f de $\mathcal{H}(\Gamma)$, appartenant à $j^*(B_T^*)$ telle que la fonction positive ψ définie sur $[0,T]$ par

$$\psi(t) = \| O_t f \|^2_{\mathcal{H}(\Gamma_t)}$$

soit strictement croissante et continue sur $[0,T]$.

(H2) pour tout t dans $[0,T]$, il existe une mesure μ_t borélienne sur $[0,T]$ telle que

$$j^*(\mu_t) = P_{\mathcal{H}_t}(f) .$$

Pour $t \in [0,T]$, notons U_t l'opérateur sur B_T à valeurs dans $\mathbb{R}$ défini pour y dans B_T par

$$U_t(y) = (\mu_t , y)_{B_T^*, B_T} = \int_0^t y(u) \, \mu_t(du) .$$

Nous avons :

<u>Proposition 5.1.</u> - <u>La fonction aléatoire</u> $X = \{X(t) , t \in [0,T]\}$ <u>à valeurs réelles définie par</u> $X(t) = U_t(Y)$ <u>est un processus gaussien centré de covariance</u>

$$R(s,t) = \psi(\min(s,t)) , \ (s,t) \in [0,T]^2 .$$

<u>De plus</u> X <u>admet une modification séparable à trajectoires continues</u>.

<u>Preuve</u> : Les opérateurs U_t sont des éléments de B_T^* et Y étant gaussien centré il en sera de même pour X . Pour (s,t) dans $[0,T]^2$ nous avons par définition de U_t :

$$R(s,t) = \mathbb{E}(U_t(Y), U_s(Y)) = \mathbb{E}\left((\mu_t, Y)_{B_T^*,B_T} (\mu_s, Y)_{B_T^*, B_T} \right) =$$

$$= \Gamma(\mu_t, \mu_s) = \langle j^*(\mu_t) , j^*(\mu_s) \rangle_{\mathcal{H}(\Gamma)} .$$

Mais d'après l'hypothèse (H2) nous avons

$$\langle j^*(\mu_s) , j^*(\mu_t) \rangle_{\mathcal{H}(\Gamma)} = \langle P_{\mathcal{H}_t} f , P_{\mathcal{H}_s} f \rangle_{\mathcal{H}(\Gamma)} .$$

D'autre part, si $s < t$, $\mathcal{H}_s$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}_t$ et

$$\langle P_{\mathcal{H}_t} f , P_{\mathcal{H}_s} f \rangle_{\mathcal{H}(\Gamma)} = \langle P_{\mathcal{H}_t} f , P_{\mathcal{H}_s} f \rangle_{\mathcal{H}(\Gamma)} = \langle O_s f , O_s f \rangle_{\mathcal{H}(\Gamma_s)} = \psi(s) .$$

Donc $R(s,t) = \psi(\min(s,t))$.

D'après le théorème 6, chap.IV, §5 de [6], X possède donc une modification séparable à trajectoires continues sur $[0,T]$. ∎

Nous noterons γ la fonction positive sur $[0,T]$ définie par $\gamma = \psi - \psi(0)$.
D'après (H1), γ est une bijection continue de $[0,T]$ dans $[0,\alpha]$ avec $\alpha = \|f\|^2_{\mathcal{H}(\Gamma)} - \psi(0)$. Posons $Z(t) = X(t) - X(0)$ et soit $\{\tilde{Z}(t) , t \in [0,\alpha]\}$ la fonction aléatoire réelle définie par $\tilde{Z}(t) = Z(\gamma^{-1}(t))$ sur $[0,\alpha]$.

<u>Proposition 5.2</u>. - <u>Le processus gaussien centré</u> $\{\tilde{Z}(t) , t \in [0,\alpha]\}$ <u>est un processus de Wiener standard sur</u> $[0,\alpha]$.

<u>Preuve</u> : Il est clair que $(\tilde{Z}(t) , t \in [0,\alpha])$ est un processus gaussien centré à trajectoires continues tel que $\tilde{Z}(0) = 0$. La covariance de $\tilde{Z}$ est pour $(s,t) \in [0,\alpha]^2$:

$$\mathbb{E}(\tilde{Z}(s)\tilde{Z}(t)) = [\psi(\gamma^{-1}(s \wedge t)) - \psi(0)] = \min(s,t)$$

d'où le résultat. ∎

Citons quelques exemples de mesures gaussiennes ν sur $C([0,T])$ qui vérifient les hypothèses (H1) et (H2) .

Exemple 1.

Soit m la mesure centrée gaussienne sur $C([0,T])$ de noyau de covariance $\Gamma(s,t) = \alpha \min\left(\frac{1}{s+\gamma}, \frac{1}{t+\gamma}\right)$ $\alpha, \gamma > 0$. L'hypothèse (H1) est vérifiée avec f la fonction constante sur $[0,T]$ égale à 1.
En effet $f = \frac{(T+\gamma)}{\alpha}\Gamma(T,.)$ appartient à $\mathcal{H}(\Gamma)$ et $\psi(t) = \frac{t+\gamma}{\alpha}$.

En considérant $\mu_t = \frac{(t+\gamma)}{\alpha}\delta_{\{t\}}$ où $\delta_{\{t\}}$ est la mesure de Dirac en $\{t\}$ nous avons $j^*(\mu_t) = P_{\mathcal{H}_t}(f)$. Donc (H2) est également vérifiée.

Exemple 2.

Soit ν la mesure gaussienne centrée sur $C([0,T])$ dont la covariance est la restriction de la covariance d'un processus réel gaussien stationnaire sur $[0,+\infty[$ de densité spectrale rationnelle de la forme

$$g(\lambda) = \frac{1}{\left|\sum_{j=0}^{n} a_j (i\lambda)^j\right|} \qquad a_o a_n \neq 0 \ , \ \lambda \in \mathbb{R} .$$

D'après la proposition 3.3 de [4], la fonction constante égale à 1 sur $[0,T]$ appartient à $\mathcal{H}(\Gamma)$ et $\psi(t) = a_o^2 t + \frac{a_1 \ a_0}{\pi}$. Donc (H1) est vérifiée. De plus pour tout t il existe μ_t telle que $j^*(\mu_t) = P_{\mathcal{H}_t}(f)$.

Nous avons vu que le processus $(Y_n(t) \ t \in [0,T])$ intervenant dans les tests d'hypothèses linéaires est un processus gaussien de covariance K_n et centré sous l'hypothèse nulle. Si donc, il existe $f_n \in \mathcal{H}_n^{\perp} = \mathcal{H}(K_n)$ vérifiant les hypothèses de la proposition 5.1, nous pouvons en déduire que sous l'hypothèse nulle, le processus $(\tilde{Z}_n(u) \ , \ u \in [0, \alpha_n])$ de la proposition 5.2 est un mouvement brownien standard sur $[0, \alpha_n]$. Une statistique G'^2_n équivalente à G^2_n est

alors $G_n'^2 = \int_0^T \tilde{Z}_n^2(u)\,du$ dont la tabulation est donnée dans la table I.
Bien évidemment ce test présente un intérêt comme test de "$m \in \mathcal{H}_n$" contre "$m \in Df_n$" où $Df_n = \mathcal{H}_n^{\perp} \cap \{ m \in \mathcal{H}(K_n) \,;\, \langle O_t m, O_t f_n \rangle_{\mathcal{H}(K_n, t)} \neq 0$ pour au moins un t dans $[0,T] \}$. ■

REFERENCES

[1] ABRAMOWITZ M. et STEGUN I.A. (1964)
Handbook of Mathematical Functions
Nat. Bur. Stadards N°55, Wash.

[2] ANDERSON T.W. et D.A. DARLING (1952)
Asymptotic theory of certain "goodness of fit" criteria based on stochastic processes.
Ann. Math. Statist. Vol.23, p.193-212.

[3] ANTONIADIS A. (1982)
Sur certains problèmes d'estimation et de test concernant la moyenne d'un processus gaussien.
Ann. Inst. H.Poinc. Série B, Vol.XVIII, n°3, p.223-236.

[4] ANTONIADIS A. (1982)
Analyse de la variance à deux facteurs à valeurs dans un ensemble quelconque.
C.R.A.S. t.294 ser.I, p.417-419.

[5] FERNIQUE X (1964)
Continuité des processus gaussiens
C.R.A.S. série A, 258, p.6058-6060.

[6] DOOB J.L. (1953)
Stochastic Processes
Wiley, New-York.

[7] GRENANDER ULF, POLLACK H.O et SLEPIAN D. (1959)
The distribution of quadratic forms in normal variates : a small sample theory.
J. Soc. Indust. Appl. Math vol.7, n°4, p.374-401.

[8] NEVEU J. (1968)
Processus aléatoires gaussiens
Les Presses universitaires de Montréal.

[9] C.R. RAO (1973)
Linear statistical inference and its applications
Second Edition John Wiley & Sons New-York.

[10] RICE S.O. (1945) (1944)
Mathematical analysis of random noise
Bell system Tech J vol.23 (1944) p.282-332, vol.24, p.46-156.

[11] RIESZ et NAGY B. (1955)
Functional Analysis
UNGER New-York.

[12] SHEPP L.A. (1982)
On the integral of the absolute value of the pinned wiener process.
Ann. Prob. vol.10, n° 1, p.234-239.

[13] SUKHATME S. (1972)
Fredholm determinant of a positive definite Kernel of a special type.
Ann. Math. Stat. Vol.43, n° 6, p.1914-1926.

dernière page de la thèse

AUTORISATION DE SOUTENANCE

VU les dispositions de l'article 5 de l'arrêté du 16 Avril 1974,

VU les rapports de M. René CARMONA ....

Mlle Simone CHEVET ....

M. Ulf GRENANDER ....

M. Jean-Louis SOLER

M. Anestis ANTONIADIS .... est autorisé

à présenter une thèse en soutenance pour l'obtention du grade de

DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES.

Fait à GRENOBLE, le 30 MAI 1983

Le Président de l'U.S.M.G.

Le Président
M. TANCHE

Le Président de l'I.N.P.G.

D. BLOCH
Président
de l'Institut National Polytechnique
de Grenoble

P.O. le Vice-Président.

Résumé: Ce travail se place dans le cadre de la statistique infinidimensionnelle. Par généralisation en dimension quelconque de certaines méthodes d'analyse multidimensionnelle classique il fournit des solutions satisfaisantes pour des problèmes de décision concernant la moyenne de certains processus gaussiens.

La première partie est consacrée à l'étude de tests quadratiques d'hypothèses linéaires et à l'extension en dimension infinie du modèle I d'analyse de la variance.

Dans la deuxième partie les aspects probabilistes d'un modèle mathématique pour la réponse en potentiel d'un neurone sont étudiés et une application de l'analyse de la variance est développée.

Enfin le dernier chapitre aborde les problèmes de calcul effectif des régions critiques des tests utilisés.

Mots clés

Structures statistiques infinidimensionnelles- Analyse de la variance- Tests quadratiques- Processus d' Ornstein-Uhlenbeck-Formes quadratiques de processus gaussiens.