



**HAL**  
open science

# Contrôle stochastique et méthodes numériques en finance mathématique

Romuald Elie

► **To cite this version:**

Romuald Elie. Contrôle stochastique et méthodes numériques en finance mathématique. Mathématiques [math]. ENSAE ParisTech, 2006. Français. NNT: . tel-00122883

**HAL Id: tel-00122883**

**<https://pastel.hal.science/tel-00122883>**

Submitted on 5 Jan 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Contrôle optimal stochastique et méthodes numériques en finance mathématique

Romuald ELIE

ENSAE-CREST, CEREMADE

# Plan

- **Méthodes numériques probabilistes**
- **Gestion de portefeuille et contrainte drawdown**

# Plan

- **Méthodes numériques probabilistes**
  - Calcul des Grecques par estimateurs à noyaux
  
- **Gestion de portefeuille et contrainte drawdown**

# Plan

- **Méthodes numériques probabilistes**
  - Calcul des Grecques par estimateurs à noyaux
  - Résolution d'EDSPR découplée avec sauts
- **Gestion de portefeuille et contrainte drawdown**

# Plan

- **Méthodes numériques probabilistes**
  - Calcul des Grecques par estimateurs à noyaux
  - Résolution d'EDSPR découplée avec sauts
  
- **Gestion de portefeuille et contrainte drawdown**
  - Solution explicite en horizon infini

# Plan

- **Méthodes numériques probabilistes**
  - Calcul des Grecques par estimateurs à noyaux
  - Résolution d'EDSPR découplée avec sauts
  
- **Gestion de portefeuille et contrainte drawdown**
  - Solution explicite en horizon infini
  - Caractérisation par EDP en horizon fini

# Plan

- **Méthodes numériques probabilistes**
  - Calcul des Grecques par estimateurs à noyaux
  - Résolution d'EDSPR découplée avec sauts
  
- **Gestion de portefeuille et contrainte drawdown**
  - Solution explicite en horizon infini
  - Caractérisation par EDP en horizon fini

# Problème & Littérature

$Z_\lambda$  v. a. de densité  $f(\lambda, \cdot)$  dépendant d'un paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ .

Option de payoff actualisé  $\phi(Z_{\lambda^0})$

# Problème & Littérature

$Z_\lambda$  v. a. de densité  $f(\lambda, \cdot)$  dépendant d'un paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ .

Option de payoff actualisé  $\phi(Z_{\lambda^0})$

**Prix:**  $P(\lambda^0) := \mathbb{E}[\phi(Z_{\lambda^0})]$

# Problème & Littérature

$Z_\lambda$  v. a. de densité  $f(\lambda, \cdot)$  dépendant d'un paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ .

Option de payoff actualisé  $\phi(Z_{\lambda^0})$

**Prix:**  $P(\lambda^0) := \mathbb{E}[\phi(Z_{\lambda^0})]$

**Sensibilité:**  $\beta^0 := \nabla_\lambda \mathbb{E}[\phi(Z_{\lambda^0})]$

# Problème & Littérature

$Z_\lambda$  v. a. de densité  $f(\lambda, \cdot)$  dépendant d'un paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ .

Option de payoff actualisé  $\phi(Z_{\lambda^0})$

**Prix:**  $P(\lambda^0) := \mathbb{E}[\phi(Z_{\lambda^0})]$       **Sensibilité:**  $\beta^0 := \nabla_\lambda \mathbb{E}[\phi(Z_{\lambda^0})]$

**Comment calculer  $\beta_0$  ?**

# Problème & Littérature

$Z_\lambda$  v. a. de densité  $f(\lambda, \cdot)$  dépendant d'un paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ .

Option de payoff actualisé  $\phi(Z_{\lambda^0})$

**Prix:**  $P(\lambda^0) := \mathbb{E}[\phi(Z_{\lambda^0})]$       **Sensibilité:**  $\beta^0 := \nabla_\lambda \mathbb{E}[\phi(Z_{\lambda^0})]$

**Comment calculer  $\beta_0$  ?**

● Différences finies  $\beta_0 \sim \frac{1}{\epsilon} \{P(\lambda^0 + \epsilon) - P(\lambda^0)\}$  [LP94]

# Problème & Littérature

$Z_\lambda$  v. a. de densité  $f(\lambda, \cdot)$  dépendant d'un paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ .

Option de payoff actualisé  $\phi(Z_{\lambda^0})$

**Prix:**  $P(\lambda^0) := \mathbb{E}[\phi(Z_{\lambda^0})]$       **Sensibilité:**  $\beta^0 := \nabla_\lambda \mathbb{E}[\phi(Z_{\lambda^0})]$

**Comment calculer  $\beta_0$  ?**

- Différences finies       $\beta_0 \sim \frac{1}{\epsilon} \{P(\lambda^0 + \epsilon) - P(\lambda^0)\}$       [LP94]
- Pathwise       $\beta_0 = \mathbb{E}[\phi'(Z_{\lambda^0}) \nabla_\lambda Z_{\lambda^0}]$       [BG96]

# Problème & Littérature

$Z_\lambda$  v. a. de densité  $f(\lambda, \cdot)$  dépendant d'un paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ .

Option de payoff actualisé  $\phi(Z_{\lambda^0})$

**Prix:**  $P(\lambda^0) := \mathbb{E}[\phi(Z_{\lambda^0})]$       **Sensibilité:**  $\beta^0 := \nabla_\lambda \mathbb{E}[\phi(Z_{\lambda^0})]$

**Comment calculer  $\beta_0$  ?**

- Différences finies     $\beta_0 \sim \frac{1}{\epsilon} \{P(\lambda^0 + \epsilon) - P(\lambda^0)\}$       [LP94]
- Pathwise             $\beta_0 = \mathbb{E}[\phi'(Z_{\lambda^0}) \nabla_\lambda Z_{\lambda^0}]$       [BG96]
- Vraisemblance       $\beta_0 = \mathbb{E} \left[ \phi(Z_{\lambda^0}) \frac{\nabla_\lambda f}{f}(\lambda^0, Z_{\lambda^0}) \right]$       [BGP6]

# Problème & Littérature

$Z_\lambda$  v. a. de densité  $f(\lambda, \cdot)$  dépendant d'un paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ .

Option de payoff actualisé  $\phi(Z_{\lambda^0})$

**Prix:**  $P(\lambda^0) := \mathbb{E}[\phi(Z_{\lambda^0})]$       **Sensibilité:**  $\beta^0 := \nabla_\lambda \mathbb{E}[\phi(Z_{\lambda^0})]$

**Comment calculer  $\beta_0$  ?**

- Différences finies       $\beta_0 \sim \frac{1}{\epsilon} \{P(\lambda^0 + \epsilon) - P(\lambda^0)\}$       [LP94]
- Pathwise       $\beta_0 = \mathbb{E}[\phi'(Z_{\lambda^0}) \nabla_\lambda Z_{\lambda^0}]$       [BG96]
- Vraisemblance       $\beta_0 = \mathbb{E} \left[ \phi(Z_{\lambda^0}) \frac{\nabla_\lambda f}{f}(\lambda^0, Z_{\lambda^0}) \right]$       [BGP6]

**Que faire si  $f$  est inconnue et  $\phi$  irrégulière ?**

# Problème & Littérature

$Z_\lambda$  v. a. de densité  $f(\lambda, \cdot)$  dépendant d'un paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ .

Option de payoff actualisé  $\phi(Z_{\lambda^0})$

**Prix:**  $P(\lambda^0) := \mathbb{E}[\phi(Z_{\lambda^0})]$       **Sensibilité:**  $\beta^0 := \nabla_\lambda \mathbb{E}[\phi(Z_{\lambda^0})]$

**Comment calculer  $\beta_0$  ?**

- Différences finies       $\beta_0 \sim \frac{1}{\epsilon} \{P(\lambda^0 + \epsilon) - P(\lambda^0)\}$       [LP94]
- Pathwise       $\beta_0 = \mathbb{E}[\phi'(Z_{\lambda^0}) \nabla_\lambda Z_{\lambda^0}]$       [BG96]
- Vraisemblance       $\beta_0 = \mathbb{E} \left[ \phi(Z_{\lambda^0}) \frac{\nabla_\lambda f}{f}(\lambda^0, Z_{\lambda^0}) \right]$       [BGP6]
- Malliavin       $\beta_0 = \mathbb{E}[\phi(Z_{\lambda^0}) \pi]$       [FLLLT99]

**Que faire si  $f$  est inconnue et  $\phi$  irrégulière ?**

# Paramètre aléatoire

Prix

$$\mathbb{E} [\phi (Z_{\lambda^0})]$$

Sensibilité  $\beta^0$

$$\mathbb{E} \left[ \phi(Z_{\lambda^0}) \frac{\nabla_{\lambda} f}{f} (\lambda^0, Z_{\lambda^0}) \right]$$

# Paramètre aléatoire

Prix

$$\mathbb{E} [\phi (Z_{\lambda^0})]$$

Sensibilité  $\beta^0$

$$\mathbb{E} \left[ \phi(Z_{\lambda^0}) \frac{\nabla_{\lambda} f}{f} (\lambda^0, Z_{\lambda^0}) \right]$$

v.a.  $\Lambda$  de densité  $\ell$  donnée et  $Z_{\Lambda}$  tq  $Z_{\Lambda} | \Lambda$  de densité  $f$

$$\mathbb{E} [\phi(Z_{\Lambda}) | \Lambda = \lambda^0]$$

$$\mathbb{E} \left[ \phi(Z_{\Lambda}) \frac{\nabla_{\lambda} f}{f} (\Lambda, Z_{\Lambda}) | \Lambda = \lambda^0 \right]$$

# Paramètre aléatoire

Prix

$$\mathbb{E} [\phi (Z_{\lambda^0})]$$

Sensibilité  $\beta^0$

$$\mathbb{E} \left[ \phi(Z_{\lambda^0}) \frac{\nabla_{\lambda} f}{f} (\lambda^0, Z_{\lambda^0}) \right]$$

v.a.  $\Lambda$  de densité  $\ell$  donnée et  $Z_{\Lambda}$  tq  $Z_{\Lambda} \mid \Lambda$  de densité  $f$

$$\mathbb{E} [\phi(Z_{\Lambda}) \mid \Lambda = \lambda^0]$$

$$\mathbb{E} \left[ \phi(Z_{\Lambda}) \frac{\nabla_{\lambda} f}{f} (\Lambda, Z_{\Lambda}) \mid \Lambda = \lambda^0 \right]$$

Simulation de  $N$  réalisations i.i.d. de  $(\Lambda, Z_{\Lambda})$

Estimation non paramétrique: Noyau  $K$ , fenêtre  $h$

$$\frac{h^{-d}}{N \ell(\lambda^0)} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) K \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h} \right)$$

$$\frac{h^{-d}}{N \ell(\lambda^0)} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) \frac{\nabla_{\lambda} f}{f} (\Lambda_i, Z_i) K \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h} \right)$$

# Estimateurs

Prix

$$\frac{h^{-d}}{N \ell(\lambda^0)} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) K\left(\frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h}\right)$$

Sensibilité  $\beta^0$

$$\frac{h^{-d}}{N \ell(\lambda^0)} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) \frac{\nabla_{\lambda} f}{f}(\Lambda_i, Z_i) K\left(\frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h}\right)$$

Trois estimateurs non paramétriques

# Estimateurs

Prix

$$\frac{h^{-d}}{N \ell(\lambda^0)} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) K\left(\frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h}\right)$$

Sensibilité  $\beta^0$

$$\frac{h^{-d}}{N \ell(\lambda^0)} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) \frac{\nabla_{\lambda} f}{f}(\Lambda_i, Z_i) K\left(\frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h}\right)$$

Trois estimateurs non paramétriques

- On estime  $\frac{\nabla_{\lambda} f}{f}$  à l'aide d'un estimateur à noyau de  $f$

# Estimateurs

Prix

$$\frac{h^{-d}}{N \ell(\lambda^0)} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) K \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h} \right)$$

Sensibilité  $\beta^0$

$$\frac{h^{-d}}{N \ell(\lambda^0)} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) \frac{\nabla_{\lambda} f}{f}(\Lambda_i, Z_i) K \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h} \right)$$

Trois estimateurs non paramétriques

- On estime  $\frac{\nabla_{\lambda} f}{f}$  à l'aide d'un estimateur à noyau de  $f$
- On laisse  $N \rightarrow \infty$  à  $h$  fixe  $\rightarrow \mathbb{E} \left[ \phi(Z) \frac{\nabla_{\lambda} f}{f}(\Lambda, Z) K \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda}{h} \right) \right]$

# Estimateurs

Prix

$$\frac{h^{-d}}{N \ell(\lambda^0)} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) K \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h} \right)$$

Sensibilité  $\beta^0$

$$\frac{h^{-d}}{N \ell(\lambda^0)} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) \frac{\nabla_{\lambda} f}{f}(\Lambda_i, Z_i) K \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h} \right)$$

## Trois estimateurs non paramétriques

- On estime  $\frac{\nabla_{\lambda} f}{f}$  à l'aide d'un estimateur à noyau de  $f$
- On laisse  $N \rightarrow \infty$  à  $h$  fixe  $\rightarrow \mathbb{E} \left[ \phi(Z) \frac{\nabla_{\lambda} f}{f}(\Lambda, Z) K \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda}{h} \right) \right]$

Par une intégration par parties, ce terme est la limite de

$$\hat{\beta}_N := \frac{h^{-d-1}}{\ell(\lambda^0)N} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) \left( \nabla K \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h} \right) - h K \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h} \right) \frac{\nabla \ell}{\ell}(\Lambda_i) \right)$$

# Estimateurs

Prix

$$\frac{h^{-d}}{N \ell(\lambda^0)} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) K\left(\frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h}\right)$$

Sensibilité  $\beta^0$

$$\frac{h^{-d}}{N \ell(\lambda^0)} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) \frac{\nabla_{\lambda} f}{f}(\Lambda_i, Z_i) K\left(\frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h}\right)$$

## Trois estimateurs non paramétriques

- On estime  $\frac{\nabla_{\lambda} f}{f}$  à l'aide d'un estimateur à noyau de  $f$
- On laisse  $N \rightarrow \infty$  à  $h$  fixe  $\rightarrow \mathbb{E} \left[ \phi(Z) \frac{\nabla_{\lambda} f}{f}(\Lambda, Z) K\left(\frac{\lambda^0 - \Lambda}{h}\right) \right]$

Par une intégration par parties, ce terme est la limite de

$$\hat{\beta}_N := \frac{h^{-d-1}}{\ell(\lambda^0)N} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) \left( \nabla K\left(\frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h}\right) - h K\left(\frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h}\right) \frac{\nabla \ell}{\ell}(\Lambda_i) \right)$$

- On dérive l'estimateur du prix par rapport à  $\lambda^0$

# Convergence

$$\hat{\beta}_N := \frac{h^{-d-1}}{\ell(\lambda^0)N} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) \left( \nabla K \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h} \right) - hK \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h} \right) \frac{\nabla \ell}{\ell}(\Lambda_i) \right)$$

**Hypothèse:** Régularité de  $\ell$  et  $f$  et  $Nh^{d+2} \rightarrow 0$

$$\begin{cases} \text{Biais} & \sim Ch^p \\ \text{Variance} & \sim \frac{\Sigma_1}{Nh^{d+2}} \end{cases} \quad \sqrt{Nh^{d+2}} \left( \hat{\beta}_N - \beta^0 \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

# Convergence

$$\hat{\beta}_N := \frac{h^{-d-1}}{\ell(\lambda^0)N} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) \left( \nabla K \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h} \right) - hK \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h} \right) \frac{\nabla \ell}{\ell}(\Lambda_i) \right)$$

**Hypothèse:** Régularité de  $\ell$  et  $f$  et  $Nh^{d+2} \rightarrow 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Biais} \quad \sim Ch^p \\ \text{Variance} \quad \sim \frac{\Sigma_1}{Nh^{d+2}} \end{array} \right. \quad \sqrt{Nh^{d+2}} \left( \hat{\beta}_N - \beta^0 \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

• Equilibre  $N$  et  $h \Rightarrow h^* \sim CN^{-\frac{1}{d+2p+2}} \Rightarrow$  Vitesse en  $N^{\frac{p}{d+2p+2}}$

# Convergence

$$\hat{\beta}_N := \frac{h^{-d-1}}{\ell(\lambda^0)N} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) \left( \nabla K \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h} \right) - hK \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h} \right) \frac{\nabla \ell}{\ell}(\Lambda_i) \right)$$

**Hypothèse:** Régularité de  $\ell$  et  $f$  et  $Nh^{d+2} \rightarrow 0$

$$\begin{cases} \text{Biais} & \sim Ch^p \\ \text{Variance} & \sim \frac{\Sigma_1}{Nh^{d+2}} \end{cases} \quad \sqrt{Nh^{d+2}} \left( \hat{\beta}_N - \beta^0 \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

- Equilibre  $N$  et  $h \Rightarrow h^* \sim CN^{-\frac{1}{d+2p+2}} \Rightarrow$  Vitesse en  $N^{\frac{p}{d+2p+2}}$
- Densité  $\ell$  de largeur  $h \Rightarrow$  Vitesse en  $N^{\frac{p}{2p+2}}$

# Convergence

$$\hat{\beta}_N := \frac{h^{-d-1}}{\ell(\lambda^0)N} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) \left( \nabla K \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h} \right) - hK \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h} \right) \frac{\nabla \ell}{\ell}(\Lambda_i) \right)$$

**Hypothèse:** Régularité de  $\ell$  et  $f$  et  $Nh^{d+2} \rightarrow 0$

$$\begin{cases} \text{Biais} & \sim Ch^p \\ \text{Variance} & \sim \frac{\Sigma_1}{Nh^{d+2}} \end{cases} \quad \sqrt{Nh^{d+2}} \left( \hat{\beta}_N - \beta^0 \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

- Equilibre  $N$  et  $h \Rightarrow h^* \sim CN^{-\frac{1}{d+2p+2}} \Rightarrow$  Vitesse en  $N^{\frac{p}{d+2p+2}}$
- Densité  $\ell$  de largeur  $h \Rightarrow$  Vitesse en  $N^{\frac{p}{2p+2}}$
- Différences finies pour  $\phi$  irrégulier  $\Rightarrow$  Vitesse en  $N^{\frac{2}{5}}$

# Convergence

$$\hat{\beta}_N := \frac{h^{-d-1}}{\ell(\lambda^0)N} \sum_{i=1}^N \phi(Z_i) \left( \nabla K \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h} \right) - hK \left( \frac{\lambda^0 - \Lambda_i}{h} \right) \frac{\nabla \ell}{\ell}(\Lambda_i) \right)$$

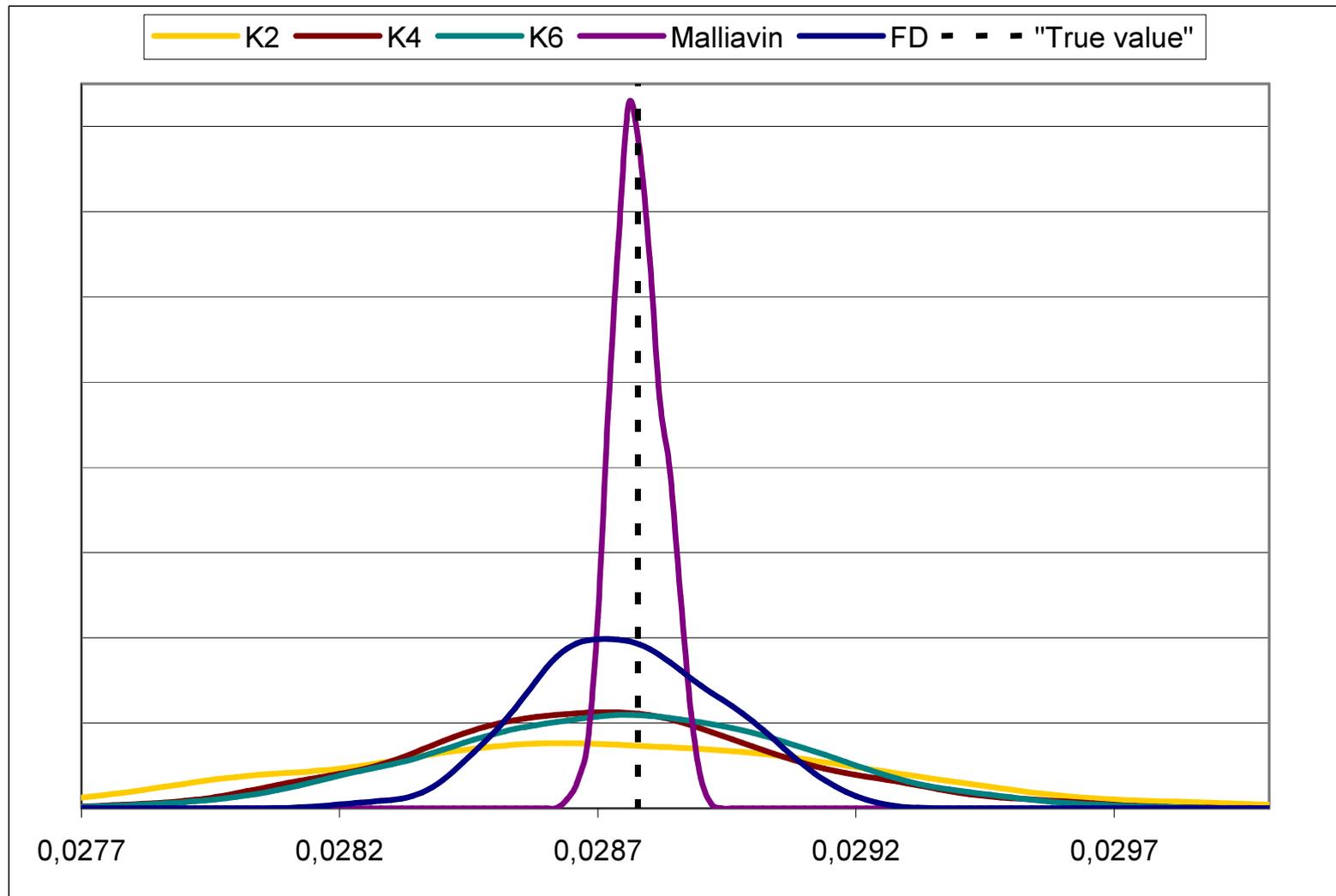
**Hypothèse:** Régularité de  $\ell$  et  $f$  et  $Nh^{d+2} \rightarrow 0$

$$\begin{cases} \text{Biais} & \sim Ch^p \\ \text{Variance} & \sim \frac{\Sigma_1}{Nh^{d+2}} \end{cases} \quad \sqrt{Nh^{d+2}} \left( \hat{\beta}_N - \beta^0 \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

- Equilibre  $N$  et  $h \Rightarrow h^* \sim CN^{-\frac{1}{d+2p+2}} \Rightarrow$  Vitesse en  $N^{\frac{p}{d+2p+2}}$
- Densité  $\ell$  de largeur  $h \Rightarrow$  Vitesse en  $N^{\frac{p}{2p+2}}$
- Différences finies pour  $\phi$  irrégulier  $\Rightarrow$  Vitesse en  $N^{\frac{2}{5}}$

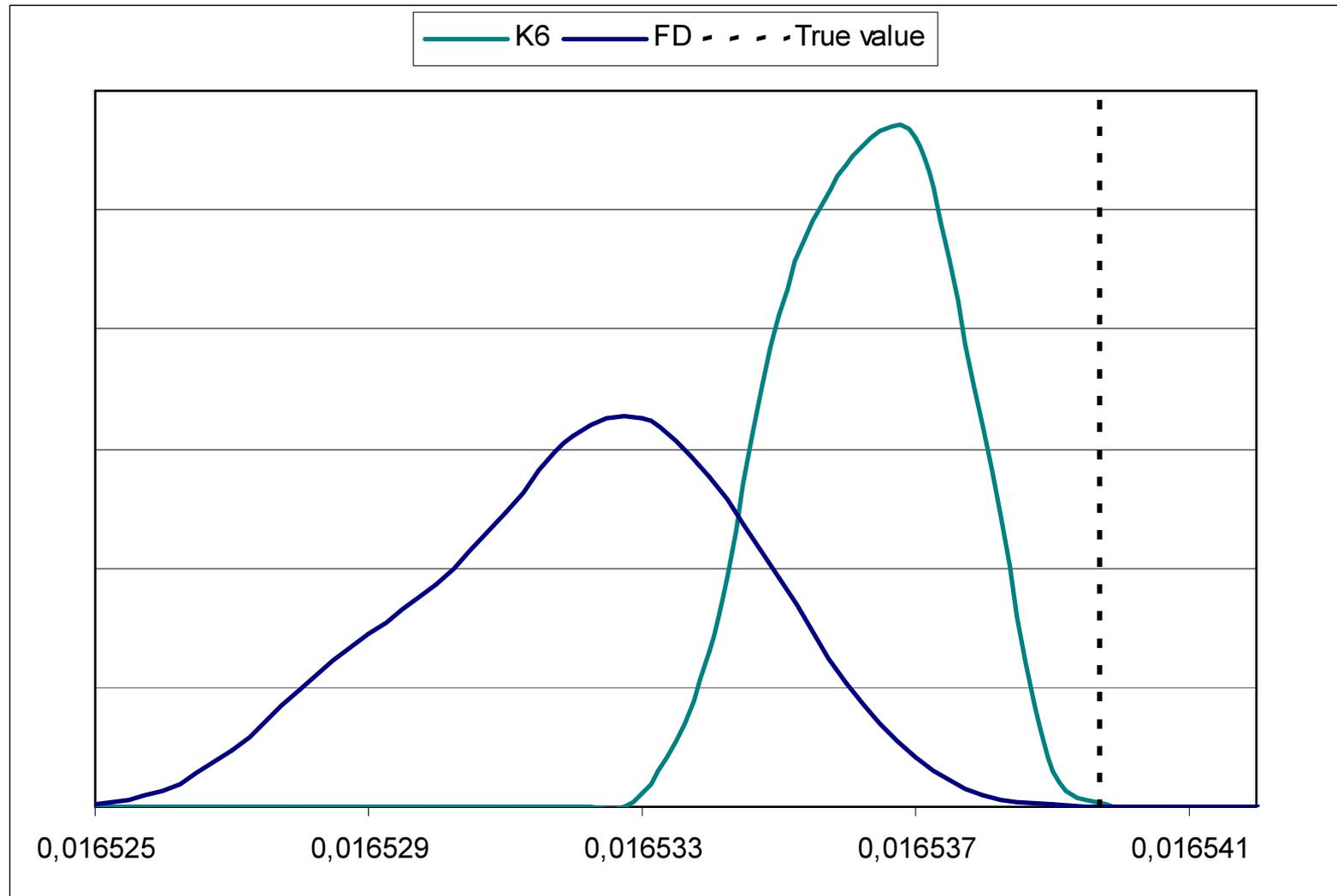
$\Rightarrow$  Plus rapide dès que  $p > 4$

# Call Digital Asiatic, $N=1$ Million



Distribution des estimateurs

# Call Digital Européen, N=1 Milliard



Distribution des estimateurs

# Plan

- **Méthodes numériques probabilistes**
  - Calcul des Grecques par estimateurs à noyaux
  - **Résolution d'EDSPR découplée avec sauts**
- **Gestion de portefeuille et contrainte drawdown**
  - Solution explicite en horizon infini
  - Caractérisation par EDP en horizon fini

# Problème et littérature

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e) \bar{\mu}(de, ds) , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s) ds - \int_t^1 Z_s dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e) \bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

avec  $\Gamma_s := \int_E U_s(e) \gamma(e) \lambda(de)$

## Hypothèses

- $W$  MB et  $\bar{\mu}$  mes. de Poisson indépendante compensée par  $\nu(de, dt) = \lambda(de) dt$ , avec  $\lambda(E) < \infty$

# Problème et littérature

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e) \bar{\mu}(de, ds) , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s) ds - \int_t^1 Z_s dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e) \bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

$$\text{avec } \Gamma_s := \int_E U_s(e) \gamma(e) \lambda(de)$$

## Hypothèses

- $W$  MB et  $\bar{\mu}$  mes. de Poisson indépendante compensée par  $\nu(de, dt) = \lambda(de)dt$ , avec  $\lambda(E) < \infty$
- Tous les coefficients sont Lipschitz et  $\gamma$  est bornée

# Problème et littérature

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e) \bar{\mu}(de, ds) , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s) ds - \int_t^1 Z_s dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e) \bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

$$\text{avec } \Gamma_s := \int_E U_s(e) \gamma(e) \lambda(de)$$

## Hypothèses

- $W$  MB et  $\bar{\mu}$  mes. de Poisson indépendante compensée par  $\nu(de, dt) = \lambda(de)dt$ , avec  $\lambda(E) < \infty$
- Tous les coefficients sont Lipschitz et  $\gamma$  est bornée

## Littérature

- Existence, unicité et lien avec EID [TL94] [BBP97]

# Problème et littérature

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e) \bar{\mu}(de, ds) , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s) ds - \int_t^1 Z_s dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e) \bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

avec  $\Gamma_s := \int_E U_s(e) \gamma(e) \lambda(de)$

## Hypothèses

- $W$  MB et  $\bar{\mu}$  mes. de Poisson indépendante compensée par  $\nu(de, dt) = \lambda(de)dt$ , avec  $\lambda(E) < \infty$
- Tous les coefficients sont Lipschitz et  $\gamma$  est bornée

## Littérature

- Existence, unicité et lien avec EID [TL94] [BBP97]
- Résolution numérique sans sauts [Z01] [BT04] [GLW05]

# Algorithme

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e) \bar{\mu}(de, ds) , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s) ds - \int_t^1 Z_s dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e) \bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

avec  $\Gamma_s := \int_E U_s(e) \gamma(e) \lambda(de)$

# Algorithme

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e) \bar{\mu}(de, ds) , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s) ds - \int_t^1 Z_s dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e) \bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

avec  $\Gamma_s := \int_E U_s(e) \gamma(e) \lambda(de)$

● Approximation **Progressive**  $X^\pi$  de  $X$

$$X_{t_i+1}^\pi := X_{t_i}^\pi + \frac{1}{n} \mu(t_i, X_{t_i}^\pi) + \sigma(t_i, X_{t_i}^\pi) \Delta W_{t_i} + \int_E \beta(t_i, X_{t_i}^\pi, e) \bar{\mu}(de, (t_i, t_{i+1}])$$

# Algorithmes

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e) \bar{\mu}(de, ds) , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s) ds - \int_t^1 Z_s dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e) \bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

avec  $\Gamma_s := \int_E U_s(e) \gamma(e) \lambda(de)$

● Approximation **Progressive**  $X^\pi$  de  $X$

$$X_{t_i+1}^\pi := X_{t_i}^\pi + \frac{1}{n} \mu(t_i, X_{t_i}^\pi) + \sigma(t_i, X_{t_i}^\pi) \Delta W_{t_i} + \int_E \beta(t_i, X_{t_i}^\pi, e) \bar{\mu}(de, (t_i, t_{i+1}])$$

● Approximation **Rétrograde**  $(\bar{Y}^\pi, \bar{Z}^\pi, \bar{\Gamma}^\pi)$  de  $(Y, Z, \Gamma)$

$$\bar{Y}_1^\pi := g(X_1^\pi) \text{ et } \begin{cases} \bar{Z}_{t_i}^\pi &:= n \mathbb{E} \left[ \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \Delta W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi &:= n \mathbb{E} \left[ \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \int_E \gamma(e) \bar{\mu}(de, (t_i, t_{i+1}]) \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ \bar{Y}_{t_i}^\pi &:= \mathbb{E} \left[ \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] + \frac{1}{n} h \left( t_i, X_{t_i}^\pi, \bar{Y}_{t_i}^\pi, \bar{Z}_{t_i}^\pi, \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi \right) \end{cases}$$

# Algorithme: de $\bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi$ à $\bar{Y}_{t_i}^\pi$

$$Y_{t_i} = Y_{t_{i+1}} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} h(r, X_r, Y_r, Z_r, \Gamma_r) dr - \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_r dW_r - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U_r(e) \bar{\mu}(de, dr)$$

# Algorithme: de $\bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi$ à $\bar{Y}_{t_i}^\pi$

$$Y_{t_i} = Y_{t_{i+1}} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} h(r, X_r, Y_r, Z_r, \Gamma_r) dr - \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_r dW_r - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U_r(e) \bar{\mu}(de, dr)$$

- Générateur constant,  $(Z^\pi, U^\pi)$  donné par représentation de  $\bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi$

$$\bar{Y}_{t_i}^\pi = \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi + \frac{1}{n} h(t_i, X_{t_i}^\pi, \bar{Y}_{t_i}^\pi, \bar{Z}_{t_i}^\pi, \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_r^\pi dW_r - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U_r^\pi(e) \bar{\mu}(de, dr)$$

# Algorithme: de $\bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi$ à $\bar{Y}_{t_i}^\pi$

$$Y_{t_i} = Y_{t_{i+1}} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} h(r, X_r, Y_r, Z_r, \Gamma_r) dr - \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_r dW_r - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U_r(e) \bar{\mu}(de, dr)$$

- Générateur constant,  $(Z^\pi, U^\pi)$  donné par représentation de  $\bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi$

$$\bar{Y}_{t_i}^\pi = \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi + \frac{1}{n} h(t_i, X_{t_i}^\pi, \bar{Y}_{t_i}^\pi, \bar{Z}_{t_i}^\pi, \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_r^\pi dW_r - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U_r^\pi(e) \bar{\mu}(de, dr)$$

- Approximation dans  $\mathcal{L}^2(\Omega \times [t_i, t_{i+1}])$  de  $Z^\pi$  et  $\Gamma^\pi = \int_E U^\pi(e) \gamma(e) \lambda(de)$  par des v.a.  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurables

$$\bar{Z}_{t_i}^\pi := n \mathbb{E} \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_r^\pi dr \mid \mathcal{F}_{t_i} \right]$$

$$\bar{\Gamma}_{t_i}^\pi := n \mathbb{E} \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Gamma_s^\pi ds \mid \mathcal{F}_{t_i} \right]$$

# Algorithme: de $\bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi$ à $\bar{Y}_{t_i}^\pi$

$$Y_{t_i} = Y_{t_{i+1}} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} h(r, X_r, Y_r, Z_r, \Gamma_r) dr - \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_r dW_r - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U_r(e) \bar{\mu}(de, dr)$$

- Générateur constant,  $(Z^\pi, U^\pi)$  donné par représentation de  $\bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi$

$$\bar{Y}_{t_i}^\pi = \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi + \frac{1}{n} h(t_i, X_{t_i}^\pi, \bar{Y}_{t_i}^\pi, \bar{Z}_{t_i}^\pi, \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_r^\pi dW_r - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U_r^\pi(e) \bar{\mu}(de, dr)$$

- Approximation dans  $\mathcal{L}^2(\Omega \times [t_i, t_{i+1}])$  de  $Z^\pi$  et  $\Gamma^\pi = \int_E U^\pi(e) \gamma(e) \lambda(de)$  par des v.a.  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurables

$$\bar{Z}_{t_i}^\pi := n \mathbb{E} \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_r^\pi dr \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] = n \mathbb{E} \left[ \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \Delta W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i} \right]$$

$$\bar{\Gamma}_{t_i}^\pi := n \mathbb{E} \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Gamma_s^\pi ds \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] = n \mathbb{E} \left[ \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \int_E \gamma(e) \bar{\mu}(de, (t_i, t_{i+1}]) \mid \mathcal{F}_{t_i} \right]$$

# Algorithme: de $\bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi$ à $\bar{Y}_{t_i}^\pi$

$$Y_{t_i} = Y_{t_{i+1}} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} h(r, X_r, Y_r, Z_r, \Gamma_r) dr - \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_r dW_r - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U_r(e) \bar{\mu}(de, dr)$$

- Générateur constant,  $(Z^\pi, U^\pi)$  donné par représentation de  $\bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi$

$$\bar{Y}_{t_i}^\pi = \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi + \frac{1}{n} h(t_i, X_{t_i}^\pi, \bar{Y}_{t_i}^\pi, \bar{Z}_{t_i}^\pi, \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{Z}_r^\pi dW_r - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_E U_r^\pi(e) \bar{\mu}(de, dr)$$

- Approximation dans  $\mathcal{L}^2(\Omega \times [t_i, t_{i+1}])$  de  $Z^\pi$  et  $\Gamma^\pi = \int_E U^\pi(e) \gamma(e) \lambda(de)$  par des v.a.  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurables

$$\bar{Z}_{t_i}^\pi := n \mathbb{E} \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_r^\pi dr \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] = n \mathbb{E} \left[ \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \Delta W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i} \right]$$

$$\bar{\Gamma}_{t_i}^\pi := n \mathbb{E} \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Gamma_s^\pi ds \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] = n \mathbb{E} \left[ \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \int_E \gamma(e) \bar{\mu}(de, (t_i, t_{i+1}]) \mid \mathcal{F}_{t_i} \right]$$

- Conditionnant la première expression

$$\bar{Y}_{t_i}^\pi = \mathbb{E} \left[ \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] + \frac{1}{n} h(t_i, X_{t_i}^\pi, \bar{Y}_{t_i}^\pi, \bar{Z}_{t_i}^\pi, \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi)$$

# Algorithmes

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e) \bar{\mu}(de, ds) , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s) ds - \int_t^1 Z_s dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e) \bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

- Approximation **Progressive**  $X^\pi$  de  $X$
- Approximation **Rétrograde**  $(\bar{Y}^\pi, \bar{Z}^\pi, \bar{\Gamma}^\pi)$  de  $(Y, Z, \Gamma)$

$$\bar{Y}_1^\pi := g(X_1^\pi) \text{ et } \begin{cases} \bar{Z}_{t_i}^\pi &:= n \mathbb{E} \left[ \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \Delta W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi &:= n \mathbb{E} \left[ \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \int_E \gamma(e) \bar{\mu}(de, (t_i, t_{i+1}]) \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ \bar{Y}_{t_i}^\pi &:= \mathbb{E} \left[ \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] + \frac{1}{n} h \left( t_i, X_{t_i}^\pi, \bar{Y}_{t_i}^\pi, \bar{Z}_{t_i}^\pi, \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi \right) \end{cases}$$

# Algorithme

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e) \bar{\mu}(de, ds) , \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s) ds - \int_t^1 Z_s dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e) \bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

- Approximation **Progressive**  $X^\pi$  de  $X$
- Approximation **Rétrograde**  $(\bar{Y}^\pi, \bar{Z}^\pi, \bar{\Gamma}^\pi)$  de  $(Y, Z, \Gamma)$

$$\bar{Y}_1^\pi := g(X_1^\pi) \text{ et } \begin{cases} \bar{Z}_{t_i}^\pi &:= n \mathbb{E} \left[ \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \Delta W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi &:= n \mathbb{E} \left[ \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \int_E \gamma(e) \bar{\mu}(de, (t_i, t_{i+1}]) \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ \bar{Y}_{t_i}^\pi &:= \mathbb{E} \left[ \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] + \frac{1}{n} h \left( t_i, X_{t_i}^\pi, \bar{Y}_{t_i}^\pi, \bar{Z}_{t_i}^\pi, \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi \right) \end{cases}$$

Quelle est l'erreur d'approximation ?

# Algorithme

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t \int_E \beta(s, X_{s-}, e) \bar{\mu}(de, ds), \\ Y_t &= g(X_1) + \int_t^1 h(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s) ds - \int_t^1 Z_s dW_s - \int_t^1 \int_E U_s(e) \bar{\mu}(de, ds) \end{cases}$$

- Approximation **Progressive**  $X^\pi$  de  $X$
- Approximation **Rétrograde**  $(\bar{Y}^\pi, \bar{Z}^\pi, \bar{\Gamma}^\pi)$  de  $(Y, Z, \Gamma)$

$$\bar{Y}_1^\pi := g(X_1^\pi) \text{ et } \begin{cases} \bar{Z}_{t_i}^\pi &:= n \mathbb{E} \left[ \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \Delta W_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi &:= n \mathbb{E} \left[ \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \int_E \gamma(e) \bar{\mu}(de, (t_i, t_{i+1}]) \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ \bar{Y}_{t_i}^\pi &:= \mathbb{E} \left[ \bar{Y}_{t_{i+1}}^\pi \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] + \frac{1}{n} h \left( t_i, X_{t_i}^\pi, \bar{Y}_{t_i}^\pi, \bar{Z}_{t_i}^\pi, \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi \right) \end{cases}$$

Quelle est l'erreur d'approximation ?

Statistique / Discrétisation

# Convergence

## Erreur d'approximation

$$\text{Err}_n := \left( \sup_{t_i} \mathbb{E} [ |Y_{t_i} - \bar{Y}_{t_i}^\pi|^2 ] + \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z_s - \bar{Z}_{t_i}^\pi|^2 ds + |\Gamma_s - \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

# Convergence

## Erreur d'approximation

$$\text{Err}_n := \left( \sup_{t_i} \mathbb{E} [ |Y_{t_i} - \bar{Y}_{t_i}^\pi|^2 ] + \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z_s - \bar{Z}_{t_i}^\pi|^2 ds + |\Gamma_s - \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

## Représentation et régularité

- $Y_t$  s'écrit  $y(t, X_t)$  avec  $y$  lipschitz

# Convergence

## Erreur d'approximation

$$\text{Err}_n := \left( \sup_{t_i} \mathbb{E} [ |Y_{t_i} - \bar{Y}_{t_i}^\pi|^2 ] + \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z_s - \bar{Z}_{t_i}^\pi|^2 ds + |\Gamma_s - \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

## Représentation et régularité

- $Y_t$  s'écrit  $y(t, X_t)$  avec  $y$  lipschitz
- $U$  partie saut de  $Y \Rightarrow U_t(e) = y(t, X_{t-} + \beta(t, X_{t-}, e)) - y(t, X_{t-})$

# Convergence

## Erreur d'approximation

$$\text{Err}_n := \left( \sup_{t_i} \mathbb{E} [ |Y_{t_i} - \bar{Y}_{t_i}^\pi|^2 ] + \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z_s - \bar{Z}_{t_i}^\pi|^2 ds + |\Gamma_s - \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

## Représentation et régularité

- $Y_t$  s'écrit  $y(t, X_t)$  avec  $y$  lipschitz
- $U$  partie saut de  $Y \Rightarrow U_t(e) = y(t, X_{t-} + \beta(t, X_{t-}, e)) - y(t, X_{t-})$
- $Z$ , dérivée de Malliavin de  $Y$ , solution d'une EDSR linéaire

# Convergence

## Erreur d'approximation

$$\text{Err}_n := \left( \sup_{t_i} \mathbb{E} [ |Y_{t_i} - \bar{Y}_{t_i}^\pi|^2 ] + \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z_s - \bar{Z}_{t_i}^\pi|^2 ds + |\Gamma_s - \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

## Représentation et régularité

- $Y_t$  s'écrit  $y(t, X_t)$  avec  $y$  lipschitz
- $U$  partie saut de  $Y \Rightarrow U_t(e) = y(t, X_{t-} + \beta(t, X_{t-}, e)) - y(t, X_{t-})$
- $Z$ , dérivée de Malliavin de  $Y$ , solution d'une EDSR linéaire

## Vitesse

- Coefficients Lipschitz  $\Rightarrow \text{Err}_n \leq C_\varepsilon n^{-1/2+\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$

# Convergence

## Erreur d'approximation

$$\text{Err}_n := \left( \sup_{t_i} \mathbb{E} [ |Y_{t_i} - \bar{Y}_{t_i}^\pi|^2 ] + \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} |Z_s - \bar{Z}_{t_i}^\pi|^2 ds + |\Gamma_s - \bar{\Gamma}_{t_i}^\pi|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

## Représentation et régularité

- $Y_t$  s'écrit  $y(t, X_t)$  avec  $y$  lipschitz
- $U$  partie saut de  $Y \Rightarrow U_t(e) = y(t, X_{t-} + \beta(t, X_{t-}, e)) - y(t, X_{t-})$
- $Z$ , dérivée de Malliavin de  $Y$ , solution d'une EDSR linéaire

## Vitesse

- Coefficients Lipschitz  $\Rightarrow \text{Err}_n \leq C_\varepsilon n^{-1/2+\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$
- $\nabla X$  inversible **ou** coefficients  $C_b^1 \Rightarrow \text{Err}_n \leq C n^{-1/2}$

# Put avec risque de défaut du vendeur

- Temps de défaut  $\tau \sim \mathcal{E}(c)$

# Put avec risque de défaut du vendeur

- Temps de défaut  $\tau \sim \mathcal{E}(c)$   $\xrightarrow{\tau > T}$   $g_1(X_T) = [5 - X_T]^+$

# Put avec risque de défaut du vendeur

- Temps de défaut  $\tau \sim \mathcal{E}(c)$ 
  - $\tau > T \rightarrow g_1(X_T) = [5 - X_T]^+$
  - $\tau < T \rightarrow g_0(X_T) = g_1(X_T) \wedge 0.5$

# Put avec risque de défaut du vendeur

- Temps de défaut  $\tau \sim \mathcal{E}(c)$ 
  - $\tau > T \rightarrow g_1(X_T) = [5 - X_T]^+$
  - $\tau < T \rightarrow g_0(X_T) = g_1(X_T) \wedge 0.5$
- Prix:

$$u_0(t, x) := \mathbb{E}[g_0(X_T) / X_t = x]$$

$$u_1(0, x) := \mathbb{E}\left[g_1(X_T)e^{-cT} + \int_0^T u_0(s, X_s)ce^{-cs}ds / X_0 = x\right]$$

# Put avec risque de défaut du vendeur

- Temps de défaut  $\tau \sim \mathcal{E}(c)$ 
  - $\tau > T \rightarrow g_1(X_T) = [5 - X_T]^+$
  - $\tau < T \rightarrow g_0(X_T) = g_1(X_T) \wedge 0.5$
- Prix:

$$u_0(t, x) := \mathbb{E}[g_0(X_T) / X_t = x]$$

$$u_1(0, x) := \mathbb{E}\left[g_1(X_T)e^{-cT} + \int_0^T u_0(s, X_s)ce^{-cs}ds / X_0 = x\right]$$

- EDP:

$$\mathcal{L} u_0 = 0, \quad u_0(T, \cdot) = g_0$$

$$\mathcal{L} u_1 + c(u_0 - u_1) = 0, \quad u_1(T, \cdot) = g_1$$

# Put avec risque de défaut du vendeur

- Temps de défaut  $\tau \sim \mathcal{E}(c)$ 
  - $\tau > T \rightarrow g_1(X_T) = [5 - X_T]^+$
  - $\tau < T \rightarrow g_0(X_T) = g_1(X_T) \wedge 0.5$
- Prix:

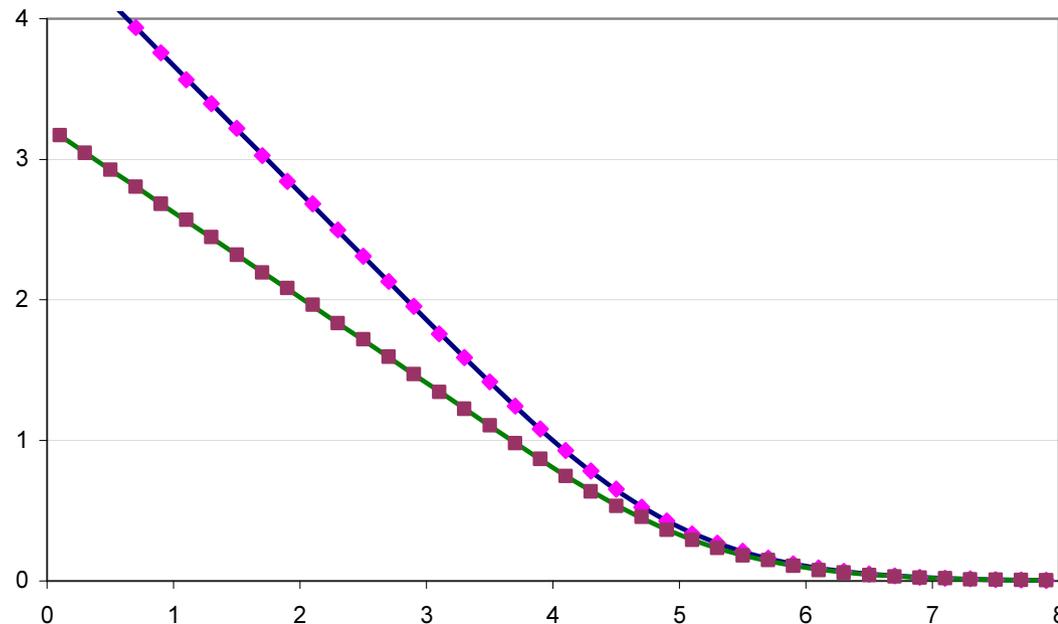
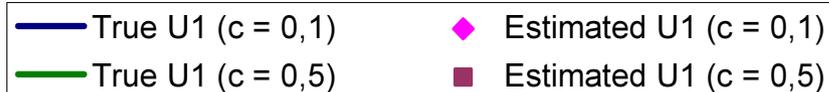
$$u_0(t, x) := \mathbb{E}[g_0(X_T) \mid X_t = x]$$

$$u_1(0, x) := \mathbb{E}\left[g_1(X_T)e^{-cT} + \int_0^T u_0(s, X_s)ce^{-cs}ds \mid X_0 = x\right]$$

- EDP:

$$\mathcal{L} u_0 = 0, \quad u_0(T, \cdot) = g_0$$

$$\mathcal{L} u_1 + c(u_0 - u_1) = 0, \quad u_1(T, \cdot) = g_1$$



# Plan

- **Méthodes numériques probabilistes**
  - Calcul des Grecques par estimateurs à noyaux
  - Résolution d'EDSPR découplée avec sauts
  
- **Gestion de portefeuille et contrainte drawdown**
  - **Solution explicite en horizon infini**
  - Caractérisation par EDP en horizon fini

# Problème

Un gestionnaire de fond dispose d'un capital initial  $x$  et peut

- investir  $\theta$  dans un actif risqué:  $dS_t = \sigma S_t(dW_t + \lambda dt)$
- consommer  $C$ : verser des dividendes aux investisseurs

# Problème

Un gestionnaire de fond dispose d'un capital initial  $x$  et peut

- investir  $\theta$  dans un actif risqué:  $dS_t = \sigma S_t (dW_t + \lambda dt)$
- consommer  $C$ : verser des dividendes aux investisseurs

Richesse: 
$$X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma \theta_r (dW_r + \lambda dr)$$

# Problème

Un gestionnaire de fond dispose d'un capital initial  $x$  et peut

- investir  $\theta$  dans un actif risqué:  $dS_t = \sigma S_t (dW_t + \lambda dt)$
- consommer  $C$ : verser des dividendes aux investisseurs

Richesse: 
$$X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma \theta_r (dW_r + \lambda dr)$$

Pour rassurer ses investisseurs, il s'impose une

**Contrainte drawdown :** 
$$X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha (X^{x,C,\theta})_t^*$$

# Problème

Un gestionnaire de fond dispose d'un capital initial  $x$  et peut

- investir  $\theta$  dans un actif risqué:  $dS_t = \sigma S_t (dW_t + \lambda dt)$
- consommer  $C$ : verser des dividendes aux investisseurs

Richesse: 
$$X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma \theta_r (dW_r + \lambda dr)$$

Pour rassurer ses investisseurs, il s'impose une

**Contrainte drawdown :** 
$$X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha (X_t^{x,C,\theta})^*$$

Quelle est la **stratégie**  $(C, \theta)$  optimale ?

# Littérature

Richesse: 
$$X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma \theta_r (dW_r + \lambda dr)$$

Contrainte drawdown : 
$$X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha (X^{x,C,\theta})_t^*$$

# Littérature

Richesse:  $X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma \theta_r (dW_r + \lambda dr)$

Contrainte drawdown :  $X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha (X_t^{x,C,\theta})^*$

- Taux de croissance à long terme [GZ93] [CK95]

$$u(x) = \sup_{\theta \in \mathcal{A}_D} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E} \left[ \left( X_t^{x,C,\theta} \right)^p \right]$$

# Littérature

Richesse: 
$$X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma \theta_r (dW_r + \lambda dr)$$

Contrainte drawdown : 
$$X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha (X_t^{x,C,\theta})^*$$

- Taux de croissance à long terme [GZ93] [CK95]

$$u(x) = \sup_{\theta \in \mathcal{A}_D} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E} \left[ \left( X_t^{x,C,\theta} \right)^p \right]$$

$\Rightarrow$  Investissement 
$$\theta_t = \pi \left( X_t^{x,C,\theta} - \alpha (X_t^{x,C,\theta})^* \right)$$

# Littérature

Richesse: 
$$X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma \theta_r (dW_r + \lambda dr)$$

Contrainte drawdown : 
$$X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha (X_t^{x,C,\theta})^*$$

- Taux de croissance à long terme [GZ93] [CK95]

$$u(x) = \sup_{\theta \in \mathcal{A}_D} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E} \left[ \left( X_t^{x,C,\theta} \right)^p \right]$$

⇒ Investissement 
$$\theta_t = \pi \left( X_t^{x,C,\theta} - \alpha (X_t^{x,C,\theta})^* \right)$$

- Utilité puissance intertemporelle [R06]

$$u(x) = \sup_{(C,\theta) \in \mathcal{A}_D} \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty e^{-\beta t} C_t^p dt \right]$$

# Modélisation

Richesse: 
$$X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma \theta_r (dW_r + \lambda dr)$$

Contrainte drawdown : 
$$X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha (X_t^{x,C,\theta})^*$$

- **Utilité générale intertemporelle**

$$u(x) := \sup_{(C,\theta) \in \mathcal{A}_D} \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty e^{-\beta t} U(C_t) dt \right]$$

# Modélisation

Richesse: 
$$X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma \theta_r (dW_r + \lambda dr)$$

Contrainte drawdown : 
$$X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha \left( X_t^{x,C,\theta} \right)^*$$

- **Utilité générale intertemporelle**

$$u(x) := \sup_{(C,\theta) \in \mathcal{A}_D} \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty e^{-\beta t} U(C_t) dt \right]$$

$\mathcal{A}_D$  contient l'ensemble des stratégies de la forme

$$[\theta_t, C_t] = [\pi_t, c_t] \left( X_t^{x,C,\theta} - \alpha \left( X_t^{x,C,\theta} \right)^* \right)$$

# Modélisation

Richesse: 
$$X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma \theta_r (dW_r + \lambda dr)$$

Contrainte drawdown : 
$$X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha (X^{x,C,\theta})_t^*$$

- **Utilité générale intertemporelle**

$$u(x) := \sup_{(C,\theta) \in \mathcal{A}_D} \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty e^{-\beta t} U(C_t) dt \right]$$

$\mathcal{A}_D$  contient l'ensemble des stratégies de la forme

$$[\theta_t, C_t] = [\pi_t, c_t] \left( X_t^{x,C,\theta} - \alpha (X^{x,C,\theta})_t^* \right)$$

**Clef:** 
$$M_t := \left[ X_t^{x,C,\theta} - \alpha (X^{x,C,\theta})^* \right] \left[ (X^{x,C,\theta})^* \right]^{\alpha/(1-\alpha)}$$

# Modélisation

Richesse: 
$$X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma \theta_r (dW_r + \lambda dr)$$

Contrainte drawdown : 
$$X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha Z_t^{x,z,C,\theta}$$
  
avec 
$$Z_t^{x,z,C,\theta} := z \vee \left( X_t^{x,C,\theta} \right)^*$$

## ● Utilité générale intertemporelle

$$u(x, z) := \sup_{(C,\theta) \in \mathcal{A}_D} \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty e^{-\beta t} U(C_t) dt \right]$$

$\mathcal{A}_D$  contient l'ensemble des stratégies de la forme

$$[\theta_t, C_t] = [\pi_t, c_t] \left( X_t^{x,C,\theta} - \alpha Z_t^{x,z,C,\theta} \right)$$

**Clef:** 
$$M_t := \left[ X_t^{x,C,\theta} - \alpha Z_t^{x,z,C,\theta} \right] \left[ Z_t^{x,z,C,\theta} \right]^{\alpha/(1-\alpha)}$$

# Propriétés

**Hypothèses:**  $U$  est  $C^2$ , croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

# Propriétés

**Hypothèses:**  $U$  est  $C^2$ , croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

**Propriétés de la fonction valeur**

$u(\cdot, z)$  est concave et croissante

# Propriétés

**Hypothèses:**  $U$  est  $C^2$ , croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

**Propriétés de la fonction valeur**

$u(\cdot, z)$  est concave et croissante

$u(x, \cdot)$  est décroissante

# Propriétés

**Hypothèses:**  $U$  est  $C^2$ , croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

**Propriétés de la fonction valeur**

$u(\cdot, z)$  est concave et croissante

$u(x, \cdot)$  est décroissante

$$u(x, z) \leq u_0(x, z)$$

# Propriétés

**Hypothèses:**  $U$  est  $C^2$ , croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

## Propriétés de la fonction valeur

$u(\cdot, z)$  est concave et croissante

$u(x, \cdot)$  est décroissante

$$u(x, z) \leq u_0(x, z) \leq K(1 + x^p)$$

# Propriétés

**Hypothèses:**  $U$  est  $C^2$ , croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

## Propriétés de la fonction valeur

$u(\cdot, z)$  est concave et croissante       $u(x, \cdot)$  est décroissante

$$u(x, z) \leq u_0(x, z) \leq K(1 + x^p) \quad u(\alpha z, z) = 0$$

# Propriétés

**Hypothèses:**  $U$  est  $C^2$ , croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

## Propriétés de la fonction valeur

$u(\cdot, z)$  est concave et croissante       $u(x, \cdot)$  est décroissante

$$u(x, z) \leq u_0(x, z) \leq K(1 + x^p) \quad u(\alpha z, z) = 0 \quad u_z(z, z) = 0$$

# Propriétés

**Hypothèses:**  $U$  est  $C^2$ , croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

## Propriétés de la fonction valeur

$u(\cdot, z)$  est concave et croissante       $u(x, \cdot)$  est décroissante

$$u(x, z) \leq u_0(x, z) \leq K(1 + x^p) \quad u(\alpha z, z) = 0 \quad u_z(z, z) = 0$$

## Programmation Dynamique

$$\beta u - \sup_{C \geq 0, \theta \in \mathbb{R}} \left[ U(C) + (\theta\sigma\lambda - C)u_x + \frac{\theta^2\sigma^2}{2}u_{xx} \right] = 0, \quad \alpha z < x < z$$

# Propriétés

**Hypothèses:**  $U$  est  $C^2$ , croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

## Propriétés de la fonction valeur

$u(\cdot, z)$  est concave et croissante       $u(x, \cdot)$  est décroissante

$$u(x, z) \leq u_0(x, z) \leq K(1+x^p) \quad u(\alpha z, z) = 0 \quad u_z(z, z) = 0$$

## Programmation Dynamique

$$\beta u - \sup_{C \geq 0, \theta \in \mathbb{R}} \left[ U(C) + (\theta\sigma\lambda - C)u_x + \frac{\theta^2\sigma^2}{2}u_{xx} \right] = 0, \quad \alpha z < x < z$$

$$\begin{cases} C^* &= -V'(u_x) \\ \theta^* &= -\lambda u_x / \sigma u_{xx} \end{cases} \Rightarrow \beta u - V(u_x) + \frac{\lambda^2}{2} \frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0, \quad \alpha z < x < z$$

# Dualité

$$v(y, z) := \sup_{x \geq 0} [u(x, z) - xy]$$

## EDP primale

$$\alpha z < x < z$$

$$\beta u - V(u_x) + \frac{\lambda^2}{2} \frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0$$

$$u_z(z, z) = 0$$

$$u(\alpha z, z) = 0$$

# Dualité

$$v(y, z) := \sup_{x \geq 0} [u(x, z) - xy]$$

## EDP primale

$$\alpha z < x < z$$

$$\beta u - V(u_x) + \frac{\lambda^2}{2} \frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0$$

$$u_z(z, z) = 0$$

$$u(\alpha z, z) = 0$$

## EDP Duale

$$\varphi(z) < y < \varphi_\alpha(z)$$

$$\beta v - \beta y v_y - \frac{\lambda^2}{2} y^2 v_{yy} = V(y)$$

$$\varphi(z) := u_x(z, z) \quad \text{et} \quad \varphi_\alpha(z) := u_x(\alpha z, z)$$

# Dualité

$$v(y, z) := \sup_{x \geq 0} [u(x, z) - xy]$$

## EDP primale

$$\alpha z < x < z$$

$$\beta u - V(u_x) + \frac{\lambda^2}{2} \frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0$$

$$u_z(z, z) = 0$$

$$u(\alpha z, z) = 0$$

## EDP Duale

$$\varphi(z) < y < \varphi_\alpha(z)$$

$$\beta v - \beta y v_y - \frac{\lambda^2}{2} y^2 v_{yy} = V(y)$$

$$v_z(\varphi(z), z) = 0$$

$$\varphi(z) := u_x(z, z) \quad \text{et} \quad \varphi_\alpha(z) := u_x(\alpha z, z)$$

# Dualité

$$v(y, z) := \sup_{x \geq 0} [u(x, z) - xy]$$

## EDP primale

$$\alpha z < x < z$$

$$\beta u - V(u_x) + \frac{\lambda^2}{2} \frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0$$

$$u_z(z, z) = 0$$

$$u(\alpha z, z) = 0$$

$$\varphi(z) := u_x(z, z) \quad \text{et} \quad \varphi_\alpha(z) := u_x(\alpha z, z)$$

## EDP Duale

$$\varphi(z) < y < \varphi_\alpha(z)$$

$$\beta v - \beta y v_y - \frac{\lambda^2}{2} y^2 v_{yy} = V(y)$$

$$v_z(\varphi(z), z) = 0$$

$$v(\varphi_\alpha(z), z) = -\alpha z \varphi_\alpha(z)$$

# Dualité

$$v(y, z) := \sup_{x \geq 0} [u(x, z) - xy]$$

## EDP primale

$$\alpha z < x < z$$

$$\beta u - V(u_x) + \frac{\lambda^2}{2} \frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0$$

$$u_z(z, z) = 0$$

$$u(\alpha z, z) = 0$$

## EDP Duale

$$\varphi(z) < y < \varphi_\alpha(z)$$

$$\beta v - \beta y v_y - \frac{\lambda^2}{2} y^2 v_{yy} = V(y)$$

$$v_z(\varphi(z), z) = 0$$

$$v(\varphi_\alpha(z), z) = -\alpha z \varphi_\alpha(z)$$

$$\varphi(z) := u_x(z, z) \quad \text{et} \quad \varphi_\alpha(z) := u_x(\alpha z, z)$$

- $\varphi_\alpha = \infty$  mène à  $v_z$  comme fonction de  $\varphi$

# Dualité

$$v(y, z) := \sup_{x \geq 0} [u(x, z) - xy]$$

## EDP primale

$$\alpha z < x < z$$

$$\beta u - V(u_x) + \frac{\lambda^2}{2} \frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0$$

$$u_z(z, z) = 0$$

$$u(\alpha z, z) = 0$$

## EDP Duale

$$\varphi(z) < y < \varphi_\alpha(z)$$

$$\beta v - \beta y v_y - \frac{\lambda^2}{2} y^2 v_{yy} = V(y)$$

$$v_z(\varphi(z), z) = 0$$

$$v(\varphi_\alpha(z), z) = -\alpha z \varphi_\alpha(z)$$

$$\varphi(z) := u_x(z, z) \quad \text{et} \quad \varphi_\alpha(z) := u_x(\alpha z, z)$$

- $\varphi_\alpha = \infty$  mène à  $v_z$  comme fonction de  $\varphi$
- On déduit  $v_y$  en fonction de  $\varphi$

# Dualité

$$v(y, z) := \sup_{x \geq 0} [u(x, z) - xy]$$

## EDP primale

$$\alpha z < x < z$$

$$\beta u - V(u_x) + \frac{\lambda^2}{2} \frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0$$

$$u_z(z, z) = 0$$

$$u(\alpha z, z) = 0$$

## EDP Duale

$$\varphi(z) < y < \varphi_\alpha(z)$$

$$\beta v - \beta y v_y - \frac{\lambda^2}{2} y^2 v_{yy} = V(y)$$

$$v_z(\varphi(z), z) = 0$$

$$v(\varphi_\alpha(z), z) = -\alpha z \varphi_\alpha(z)$$

$$\varphi(z) := u_x(z, z) \quad \text{et} \quad \varphi_\alpha(z) := u_x(\alpha z, z)$$

- $\varphi_\alpha = \infty$  mène à  $v_z$  comme fonction de  $\varphi$
- On déduit  $v_y$  en fonction de  $\varphi$
- $\varphi$  déterminée implicitement par  $v_y(\varphi(z), z) = -z$

# Dualité

$$v(y, z) := \sup_{x \geq 0} [u(x, z) - xy]$$

## EDP primale

$$\alpha z < x < z$$

$$\beta u - V(u_x) + \frac{\lambda^2}{2} \frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0$$

$$u_z(z, z) = 0$$

$$u(\alpha z, z) = 0$$

## EDP Duale

$$\varphi(z) < y < \varphi_\alpha(z)$$

$$\beta v - \beta y v_y - \frac{\lambda^2}{2} y^2 v_{yy} = V(y)$$

$$v_z(\varphi(z), z) = 0$$

$$v(\varphi_\alpha(z), z) = -\alpha z \varphi_\alpha(z)$$

$$\varphi(z) := u_x(z, z) \quad \text{et} \quad \varphi_\alpha(z) := u_x(\alpha z, z)$$

- $\varphi_\alpha = \infty$  mène à  $v_z$  comme fonction de  $\varphi$
- On déduit  $v_y$  en fonction de  $\varphi$
- $\varphi$  déterminée implicitement par  $v_y(\varphi(z), z) = -z$
- $u$  déterminée implicitement si  $\gamma < (1 - \alpha)(1 + \gamma)$

# Vérification

**Hypothèses:**  $U$  est  $C^2$ , croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

# Vérification

**Hypothèses:**  $U$  est  $C^2$ , croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

## Théorème de vérification

•  $u \in C^0(\bar{\mathbf{D}}_\alpha) \cap C^{2,1}(\mathbf{D}_\alpha)$  avec  $\mathbf{D}_\alpha := \{(x, z) : \alpha z < x < z\}$

# Vérification

**Hypothèses:**  $U$  est  $C^2$ , croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

## Théorème de vérification

- $u \in C^0(\bar{\mathbf{D}}_\alpha) \cap C^{2,1}(\mathbf{D}_\alpha)$  avec  $\mathbf{D}_\alpha := \{(x, z) : \alpha z < x < z\}$
- $u$  est solution de l'EDP primale

# Vérification

**Hypothèses:**  $U$  est  $C^2$ , croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

## Théorème de vérification

- $u \in C^0(\bar{\mathbf{D}}_\alpha) \cap C^{2,1}(\mathbf{D}_\alpha)$  avec  $\mathbf{D}_\alpha := \{(x, z) : \alpha z < x < z\}$
- $u$  est solution de l'EDP primale
- Sol. unique à l'EDS de la richesse pour la stratégie optimale

# Vérification

**Hypothèses:**  $U$  est  $C^2$ , croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

## Théorème de vérification

- $u \in C^0(\bar{\mathbf{D}}_\alpha) \cap C^{2,1}(\mathbf{D}_\alpha)$  avec  $\mathbf{D}_\alpha := \{(x, z) : \alpha z < x < z\}$
- $u$  est solution de l'EDP primale
- Sol. unique à l'EDS de la richesse pour la stratégie optimale
- $u(x, z) \leq K (1 + z^{\alpha p} (x - \alpha z)^{(1-\alpha)p})$

# Vérification

**Hypothèses:**  $U$  est  $C^2$ , croissante, concave, satisfait Inada et

$$p := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < \frac{\gamma}{(1-\alpha)(1+\gamma)} < 1, \quad \text{avec } \gamma := \frac{2\beta}{\lambda^2}$$

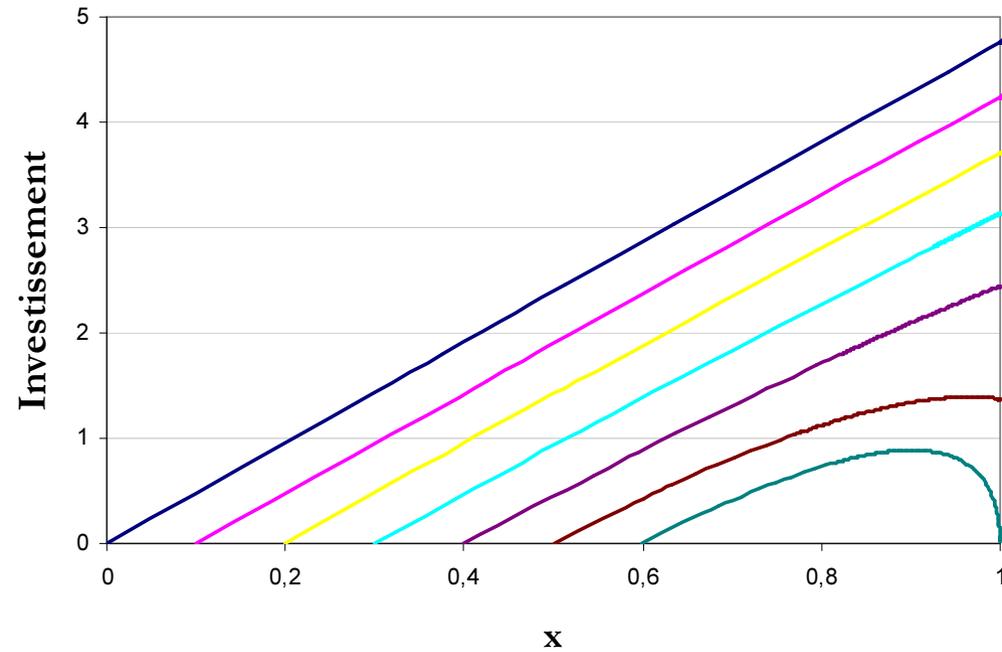
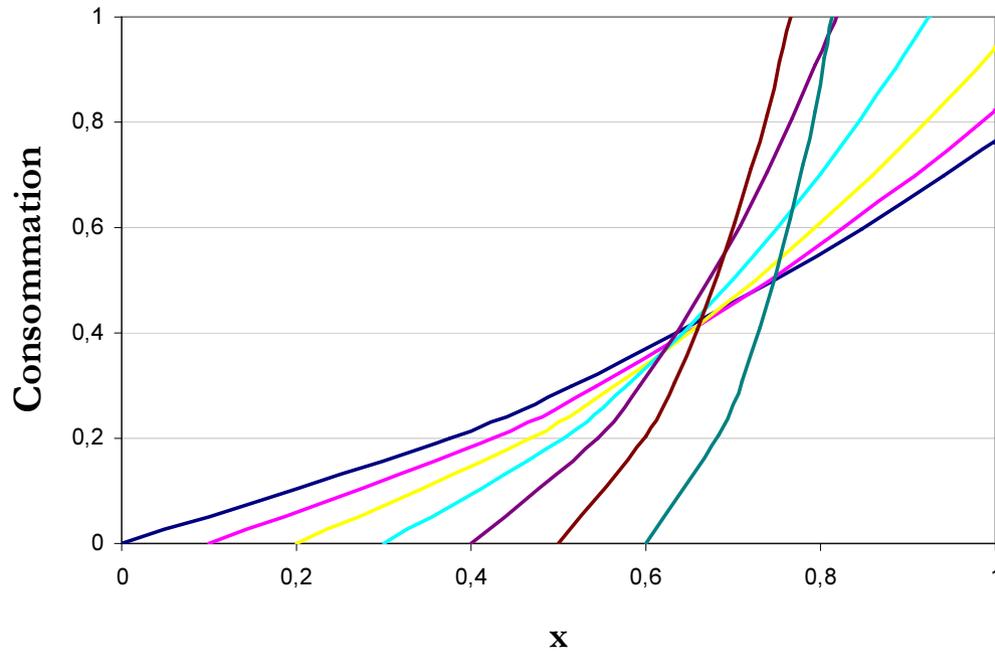
## Théorème de vérification

- $u \in C^0(\bar{\mathbf{D}}_\alpha) \cap C^{2,1}(\mathbf{D}_\alpha)$  avec  $\mathbf{D}_\alpha := \{(x, z) : \alpha z < x < z\}$
- $u$  est solution de l'EDP primale
- Sol. unique à l'EDS de la richesse pour la stratégie optimale
- $u(x, z) \leq K (1 + z^{\alpha p} (x - \alpha z)^{(1-\alpha)p})$

Martingale d'Azema-Yor, contrainte non-linéaire ? [EM06]

# Stratégie optimale

$$U(x) = x^p + x^q$$



Stratégie optimale en fonction de  $x$  pour différents  $\alpha$ .

# Plan

- **Méthodes numériques probabilistes**
  - Calcul des Grecques par estimateurs à noyaux
  - Résolution d'EDSPR découplée avec sauts
  
- **Gestion de portefeuille et contrainte drawdown**
  - Solution explicite en horizon infini
  - **Caractérisation par EDP en horizon fini**

# Drawdown en horizon fini

Richesse: 
$$X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma \theta_r (dW_r + \lambda dr)$$

Contrainte drawdown : 
$$X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha (X^{x,C,\theta})_t^*$$

# Drawdown en horizon fini

Richesse: 
$$X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma \theta_r (dW_r + \lambda dr)$$

Contrainte drawdown : 
$$X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha (X_t^{x,C,\theta})^*$$

Maximisation avec un horizon fixé  $T$

$$u(x) := \sup_{(C,\theta) \in \mathcal{A}_D} \mathbb{E} \left[ \int_0^T e^{-\beta s} U(C_s) ds \right]$$

# Drawdown en horizon fini

Richesse: 
$$X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma \theta_r (dW_r + \lambda dr)$$

Contrainte drawdown : 
$$X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha Z_t^{x,z,C,\theta}$$
  
avec 
$$Z_t^{x,z,C,\theta} := z \vee \left( X_t^{x,C,\theta} \right)^*$$

Maximisation avec un horizon fixé  $T$

$$u(x, z) := \sup_{(C,\theta) \in \mathcal{A}_D} \mathbb{E} \left[ \int_0^T e^{-\beta s} U(C_s) ds \right]$$

# Drawdown en horizon fini

Richesse: 
$$X_t^{x,C,\theta} = x - \int_0^t C_r dr + \int_0^t \sigma \theta_r (dW_r + \lambda dr)$$

Contrainte drawdown : 
$$X_t^{x,C,\theta} \geq \alpha Z_t^{x,z,C,\theta}$$
  
avec 
$$Z_t^{x,z,C,\theta} := z \vee \left( X_t^{x,C,\theta} \right)^*$$

Maximisation avec un horizon fixé  $T$

$$u(x, z) := \sup_{(C,\theta) \in \mathcal{A}_D} \mathbb{E} \left[ \int_0^T e^{-\beta s} U(C_s) ds \right]$$

Dépendance temporelle de la fonction valeur

$$u(t, x, z) := \sup_{(C,\theta) \in \mathcal{A}_D} \mathbb{E} \left[ \int_t^T e^{-\beta s} U(C_s) ds \right]$$

# Domaine et propriétés

Domaine de définition  $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$  de  $u$  se décompose en

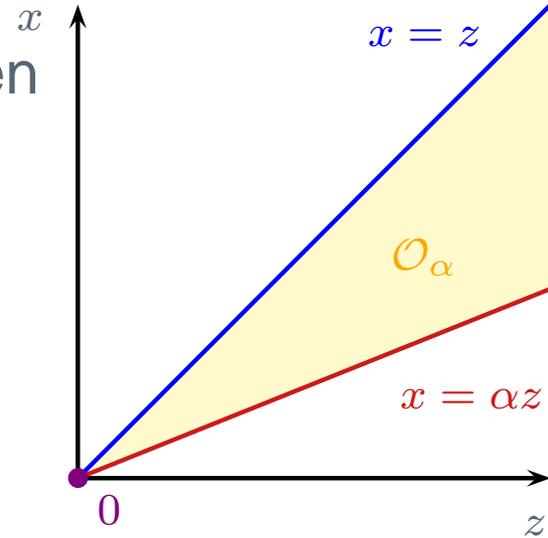
$$\mathcal{O}_\alpha := [0, T) \times \{(x, z) : 0 < \alpha z < x < z\},$$

$$\mathcal{B}_0 := [0, T] \times \{(0, 0)\},$$

$$\mathcal{B}_\alpha := [0, T] \times \{(\alpha z, z) : z > 0\},$$

$$\mathcal{B}_1 := [0, T) \times \{(z, z) : z > 0\},$$

$$\mathcal{B}_T := \{T\} \times \{(x, z) : 0 < \alpha z \leq x \leq z\}.$$



# Domaine et propriétés

Domaine de définition  $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$  de  $u$  se décompose en

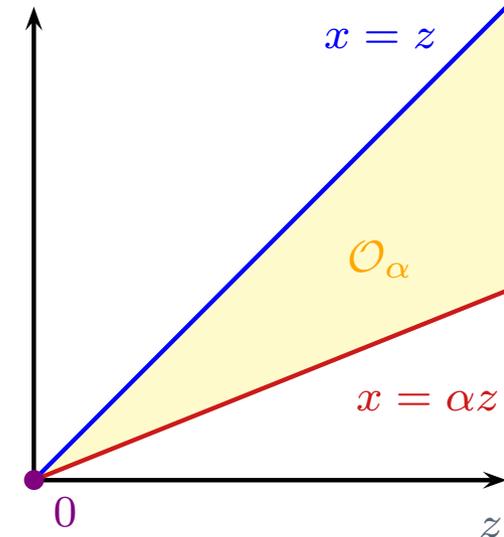
$$\mathcal{O}_\alpha := [0, T) \times \{(x, z) : 0 < \alpha z < x < z\},$$

$$\mathcal{B}_0 := [0, T] \times \{(0, 0)\},$$

$$\mathcal{B}_\alpha := [0, T] \times \{(\alpha z, z) : z > 0\},$$

$$\mathcal{B}_1 := [0, T) \times \{(z, z) : z > 0\},$$

$$\mathcal{B}_T := \{T\} \times \{(x, z) : 0 < \alpha z \leq x \leq z\}.$$



Propriétés de la fonction valeur

$$u(t \searrow, x \nearrow, z \searrow)$$

# Domaine et propriétés

Domaine de définition  $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$  de  $u$  se décompose en

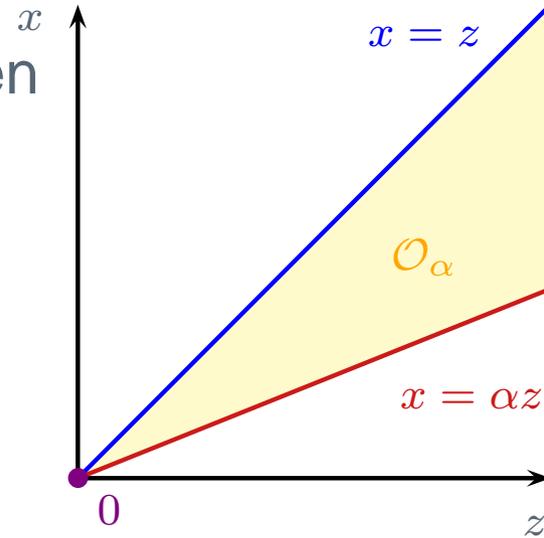
$$\mathcal{O}_\alpha := [0, T) \times \{(x, z) : 0 < \alpha z < x < z\},$$

$$\mathcal{B}_0 := [0, T] \times \{(0, 0)\},$$

$$\mathcal{B}_\alpha := [0, T] \times \{(\alpha z, z) : z > 0\},$$

$$\mathcal{B}_1 := [0, T) \times \{(z, z) : z > 0\},$$

$$\mathcal{B}_T := \{T\} \times \{(x, z) : 0 < \alpha z \leq x \leq z\}.$$



Propriétés de la fonction valeur

$$u(t \searrow, x \nearrow, z \searrow) \quad 0 \leq u(t, x, z) \leq K(1 + x^p)$$

# Domaine et propriétés

Domaine de définition  $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$  de  $u$  se décompose en

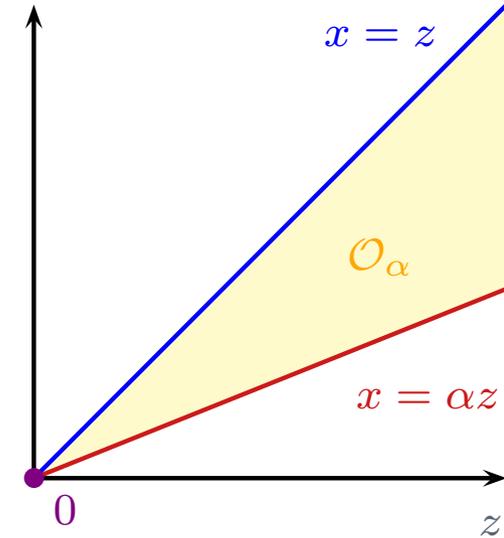
$$\mathcal{O}_\alpha := [0, T) \times \{(x, z) : 0 < \alpha z < x < z\},$$

$$\mathcal{B}_0 := [0, T] \times \{(0, 0)\},$$

$$\mathcal{B}_\alpha := [0, T] \times \{(\alpha z, z) : z > 0\},$$

$$\mathcal{B}_1 := [0, T) \times \{(z, z) : z > 0\},$$

$$\mathcal{B}_T := \{T\} \times \{(x, z) : 0 < \alpha z \leq x \leq z\}.$$



## Propriétés de la fonction valeur

$$u(t \searrow, x \nearrow, z \searrow) \quad 0 \leq u(t, x, z) \leq K(1 + x^p)$$

$$u = 0 \text{ sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_\alpha$$

# Domaine et propriétés

Domaine de définition  $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$  de  $u$  se décompose en

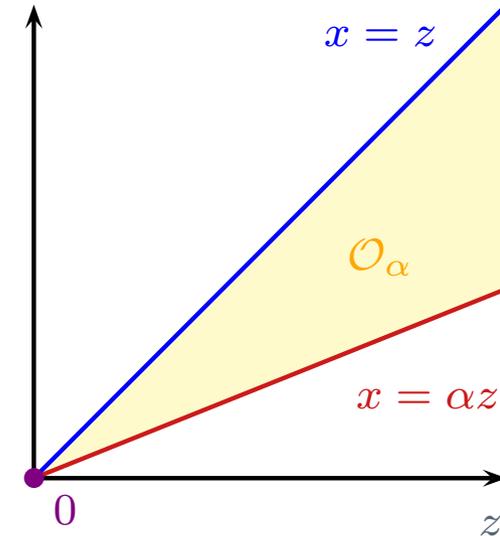
$$\mathcal{O}_\alpha := [0, T) \times \{(x, z) : 0 < \alpha z < x < z\},$$

$$\mathcal{B}_0 := [0, T] \times \{(0, 0)\},$$

$$\mathcal{B}_\alpha := [0, T] \times \{(\alpha z, z) : z > 0\},$$

$$\mathcal{B}_1 := [0, T) \times \{(z, z) : z > 0\},$$

$$\mathcal{B}_T := \{T\} \times \{(x, z) : 0 < \alpha z \leq x \leq z\}.$$



## Propriétés de la fonction valeur

$$u(t \searrow, x \nearrow, z \searrow) \quad 0 \leq u(t, x, z) \leq K(1 + x^p)$$

$$u = 0 \text{ sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_\alpha \quad u_z = 0 \text{ sur } \mathcal{B}_1$$

# Domaine et propriétés

Domaine de définition  $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$  de  $u$  se décompose en

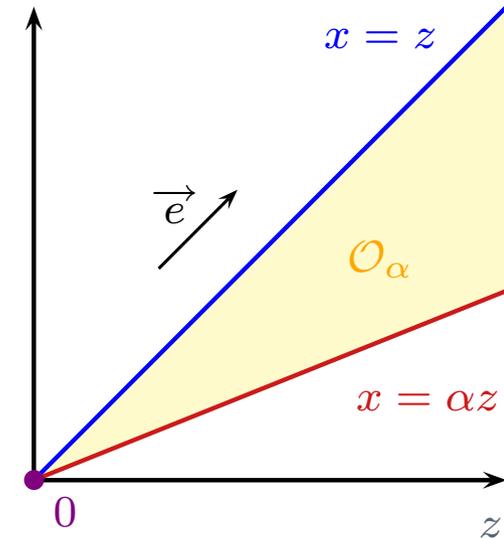
$$\mathcal{O}_\alpha := [0, T) \times \{(x, z) : 0 < \alpha z < x < z\},$$

$$\mathcal{B}_0 := [0, T] \times \{(0, 0)\},$$

$$\mathcal{B}_\alpha := [0, T] \times \{(\alpha z, z) : z > 0\},$$

$$\mathcal{B}_1 := [0, T) \times \{(z, z) : z > 0\},$$

$$\mathcal{B}_T := \{T\} \times \{(x, z) : 0 < \alpha z \leq x \leq z\}.$$



## Propriétés de la fonction valeur

$$u(t \searrow, x \nearrow, z \searrow) \quad 0 \leq u(t, x, z) \leq K(1 + x^p)$$

$$u = 0 \text{ sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_\alpha \quad u_z = 0 \text{ sur } \mathcal{B}_1$$

$$h \mapsto u[y + h\vec{e}] \text{ est concave sur } \mathbb{R}_+ \quad \text{avec } \vec{e} := (0, 1, 1)$$

# Domaine et propriétés

Domaine de définition  $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$  de  $u$  se décompose en

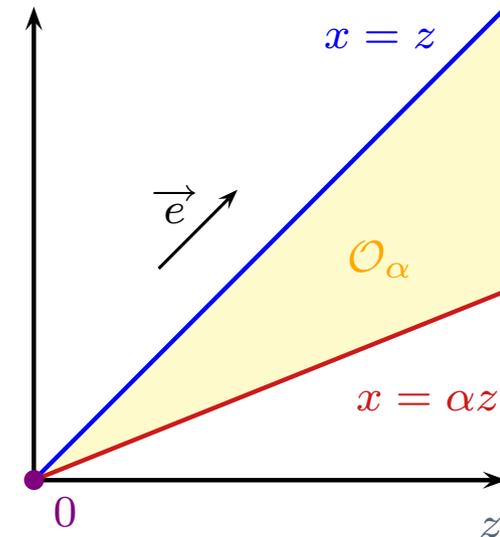
$$\mathcal{O}_\alpha := [0, T) \times \{(x, z) : 0 < \alpha z < x < z\},$$

$$\mathcal{B}_0 := [0, T] \times \{(0, 0)\},$$

$$\mathcal{B}_\alpha := [0, T] \times \{(\alpha z, z) : z > 0\},$$

$$\mathcal{B}_1 := [0, T) \times \{(z, z) : z > 0\},$$

$$\mathcal{B}_T := \{T\} \times \{(x, z) : 0 < \alpha z \leq x \leq z\}.$$



## Propriétés de la fonction valeur

$$u(t \searrow, x \nearrow, z \searrow) \quad 0 \leq u(t, x, z) \leq K(1 + x^p)$$

$$u = 0 \text{ sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_\alpha \quad u_z = 0 \text{ sur } \mathcal{B}_1$$

$$h \mapsto u[y + h\vec{e}] \text{ est concave sur } \mathbb{R}_+ \quad \text{avec } \vec{e} := (0, 1, 1)$$

$$\Rightarrow u \text{ est } C^0 \text{ à droite dans la direction } \vec{e} \text{ sur } \mathcal{O}_\alpha \cup \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_1$$

# Domaine et propriétés

Domaine de définition  $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$  de  $u$  se décompose en

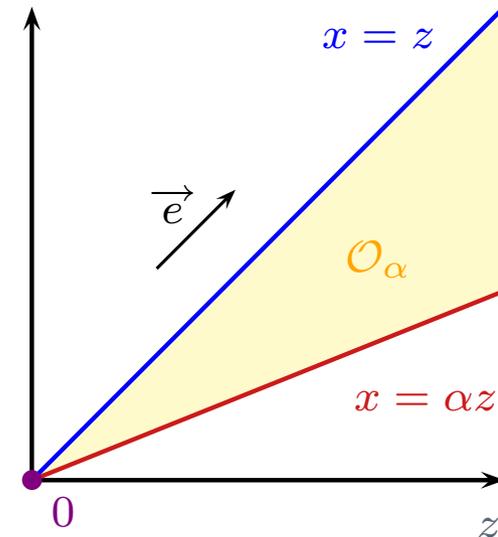
$$\mathcal{O}_\alpha := [0, T) \times \{(x, z) : 0 < \alpha z < x < z\},$$

$$\mathcal{B}_0 := [0, T] \times \{(0, 0)\},$$

$$\mathcal{B}_\alpha := [0, T] \times \{(\alpha z, z) : z > 0\},$$

$$\mathcal{B}_1 := [0, T) \times \{(z, z) : z > 0\},$$

$$\mathcal{B}_T := \{T\} \times \{(x, z) : 0 < \alpha z \leq x \leq z\}.$$



## Propriétés de la fonction valeur

$$u(t \searrow, x \nearrow, z \searrow) \quad 0 \leq u(t, x, z) \leq K(1 + x^p)$$

$$u = 0 \text{ sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_\alpha \quad u_z = 0 \text{ sur } \mathcal{B}_1$$

$$h \mapsto u[y + h\vec{e}] \text{ est concave sur } \mathbb{R}_+ \quad \text{avec } \vec{e} := (0, 1, 1)$$

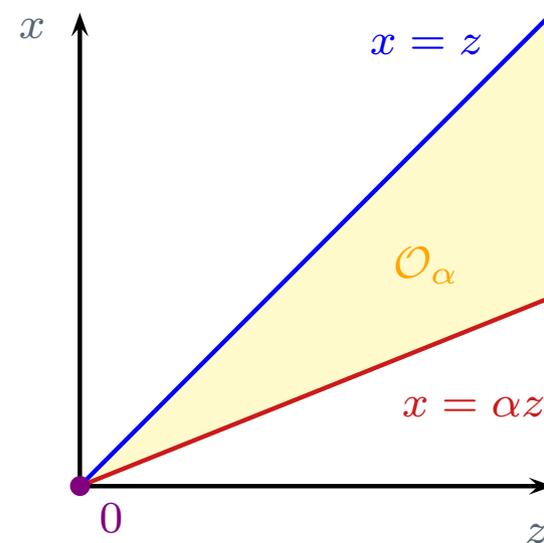
$$\Rightarrow u \text{ est } C^0 \text{ à droite dans la direction } \vec{e} \text{ sur } \mathcal{O}_\alpha \cup \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_1$$

$$0 \leq u(t, x, z) \leq u_\infty(x, z) \quad \Rightarrow \text{vrai sur } \overline{\mathcal{O}}_\alpha$$

# Solution de viscosité

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2} \frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E) \begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$

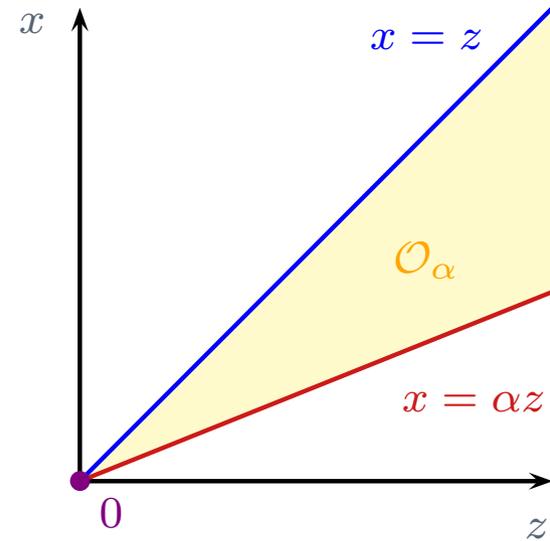


# Solution de viscosité

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2} \frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E) \begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$

$u$  est solution de viscosité contrainte de  $(E)$

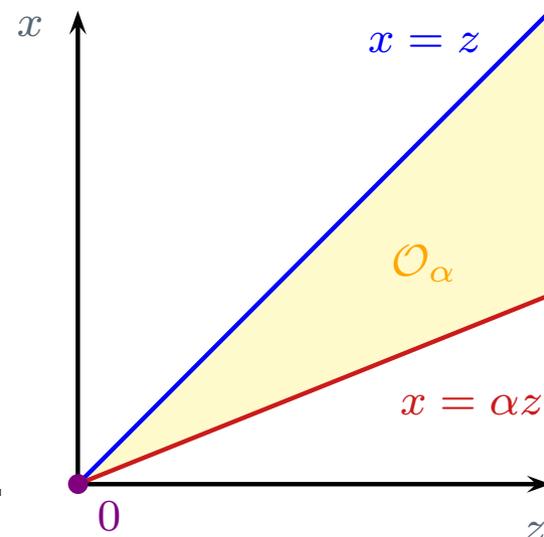


# Solution de viscosité

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2} \frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E) \begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$

$u$  est solution de viscosité contrainte de  $(E)$ , i.e.



sur-solution

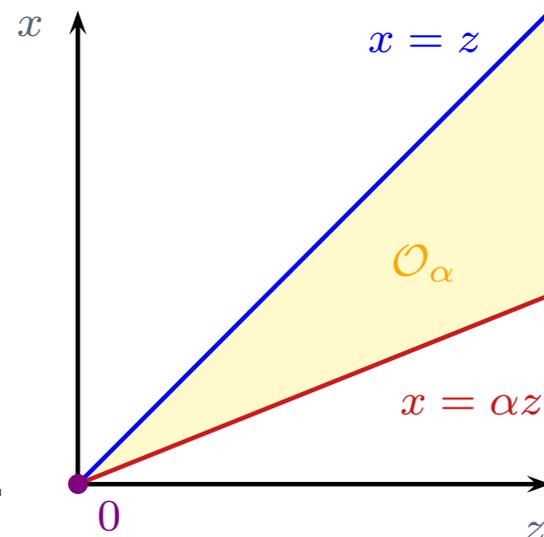
- $u_* \geq 0$  sur  $\mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0$ ,
- $\forall y_0 \in \overline{\mathcal{O}_\alpha}$ ,  $\varphi \in C^{1,2,1}(\overline{\mathcal{O}_\alpha})$  tq  $0 = (u_* - \varphi)(y_0) = \inf_{\overline{\mathcal{O}_\alpha}} (u_* - \varphi)$ , on a  
 $-\mathcal{L}\varphi(y_0) \geq 0$  si  $y_0 \in \mathcal{O}_\alpha$  et  $-\varphi_z(y_0) \geq 0$  si  $y_0 \in \mathcal{B}_1$ .

# Solution de viscosité

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2} \frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E) \begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$

$u$  est solution de viscosité contrainte de (E), i.e.



sur-solution

- $u_* \geq 0$  sur  $\mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0$ ,
- $\forall y_0 \in \overline{\mathcal{O}_\alpha}$ ,  $\varphi \in C^{1,2,1}(\overline{\mathcal{O}_\alpha})$  tq  $0 = (u_* - \varphi)(y_0) = \inf_{\overline{\mathcal{O}_\alpha}} (u_* - \varphi)$ , on a  $-\mathcal{L}\varphi(y_0) \geq 0$  si  $y_0 \in \mathcal{O}_\alpha$  et  $-\varphi_z(y_0) \geq 0$  si  $y_0 \in \mathcal{B}_1$ .

sous-solution

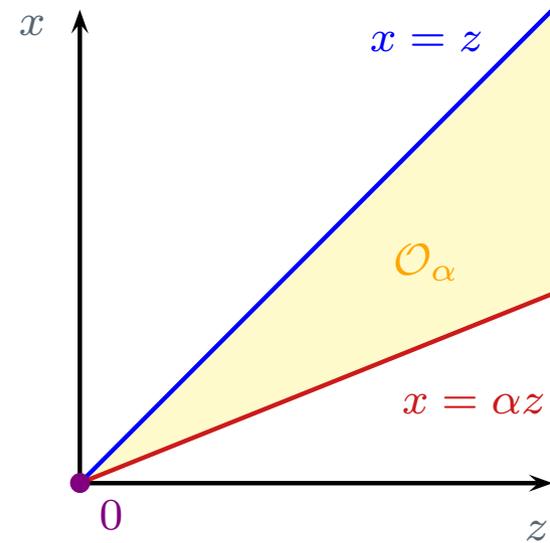
- $u^* \leq 0$  sur  $\mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0$ ,
- $\forall y_0 \in \overline{\mathcal{O}_\alpha}$ ,  $\varphi \in C^{1,2,1}(\overline{\mathcal{O}_\alpha})$  tq  $0 = (u^* - \varphi)(y_0) = \sup_{\overline{\mathcal{O}_\alpha}} (u^* - \varphi)$ , on a  $-\mathcal{L}\varphi(y_0) \leq 0$  si  $y_0 \in \mathcal{O}_\alpha \cup \mathcal{B}_\alpha$  et  $\min\{-\mathcal{L}\varphi, -\varphi_z\}(y_0) \leq 0$  si  $y_0 \in \mathcal{B}_1$

# Unicité de la solution

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2} \frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E) \begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$

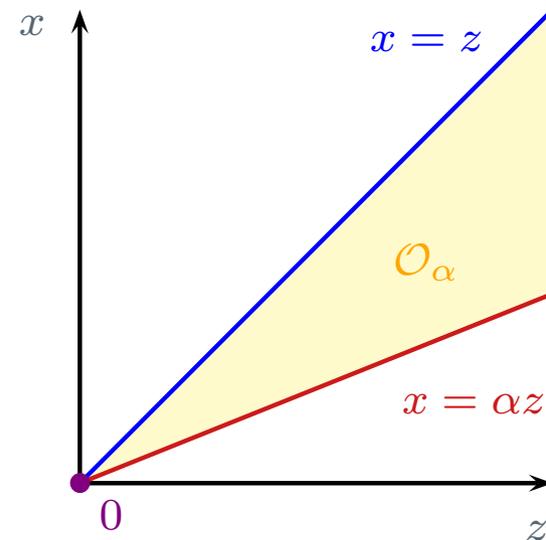
Théorème de comparaison



# Unicité de la solution

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2} \frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E) \begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$



**Théorème de comparaison** [Z94]

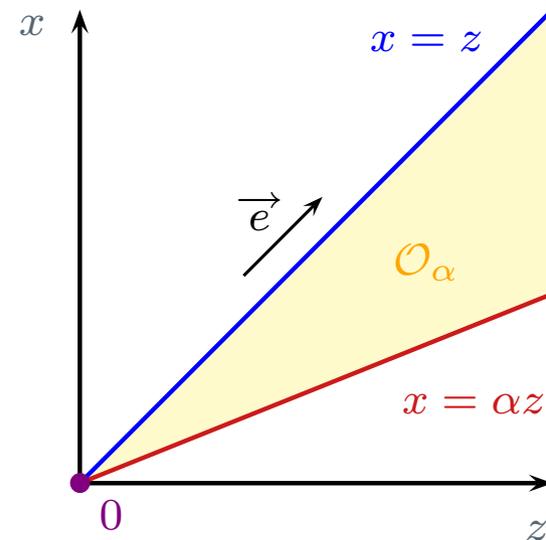
Soient  $w$  sous-solution s.c.s. et  $v$  sur-solution s.c.i. de  $(E)$  tq

•  $([w]^+ + [v]^-)(t, x, z) \leq K(1 + x^p)$  sur  $\overline{\mathcal{O}_\alpha}$

# Unicité de la solution

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2} \frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E) \begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$



**Théorème de comparaison** [Z94]

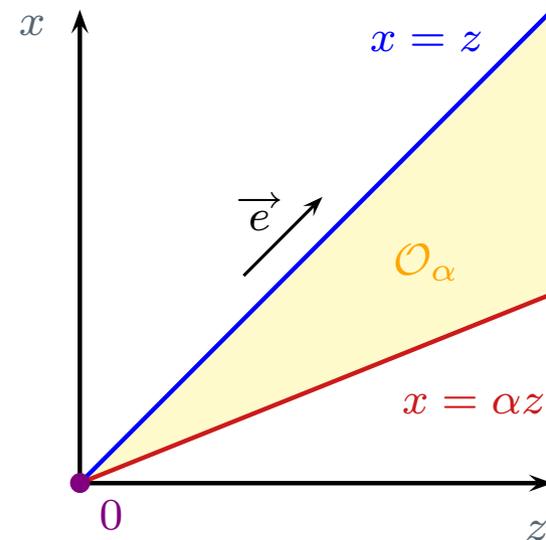
Soient  $w$  sous-solution s.c.s. et  $v$  sur-solution s.c.i. de  $(E)$  tq

- $([w]^+ + [v]^-)(t, x, z) \leq K(1 + x^p)$  sur  $\overline{\mathcal{O}_\alpha}$
- $v$  est  $C^0$  à droite dans la direction  $\vec{e}$  sur  $\mathcal{O}_\alpha \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_\alpha$

# Unicité de la solution

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2} \frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E) \begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$



**Théorème de comparaison** [Z94]

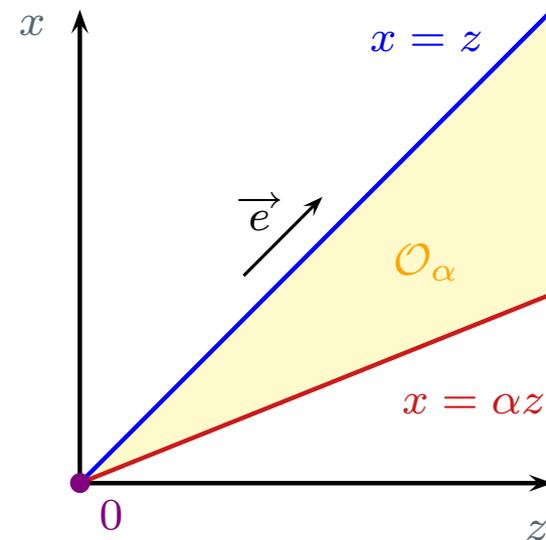
Soient  $w$  sous-solution s.c.s. et  $v$  sur-solution s.c.i. de  $(E)$  tq

- $([w]^+ + [v]^-)(t, x, z) \leq K(1 + x^p)$  sur  $\overline{\mathcal{O}_\alpha}$
- $v$  est  $C^0$  à droite dans la direction  $\vec{e}$  sur  $\mathcal{O}_\alpha \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_\alpha$
- $w \leq v$  sur  $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_T$

# Unicité de la solution

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2} \frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E) \begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$



**Théorème de comparaison** [Z94]

Soient  $w$  sous-solution s.c.s. et  $v$  sur-solution s.c.i. de  $(E)$  tq

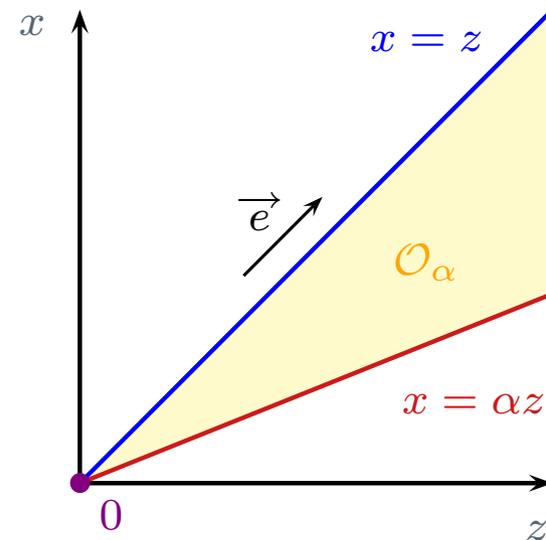
- $([w]^+ + [v]^-)(t, x, z) \leq K(1 + x^p)$  sur  $\overline{\mathcal{O}_\alpha}$
- $v$  est  $C^0$  à droite dans la direction  $\vec{e}$  sur  $\mathcal{O}_\alpha \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_\alpha$
- $w \leq v$  sur  $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_T$

**Alors  $w \leq v$  sur  $\overline{\mathcal{O}_\alpha}$ .**

# Unicité de la solution

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2} \frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E) \begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$



**Théorème de comparaison** [Z94]

Soient  $w$  sous-solution s.c.s. et  $v$  sur-solution s.c.i. de  $(E)$  tq

- $([w]^+ + [v]^-)(t, x, z) \leq K(1 + x^p)$  sur  $\overline{\mathcal{O}_\alpha}$
- $v$  est  $C^0$  à droite dans la direction  $\vec{e}$  sur  $\mathcal{O}_\alpha \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_\alpha$
- $w \leq v$  sur  $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_T$

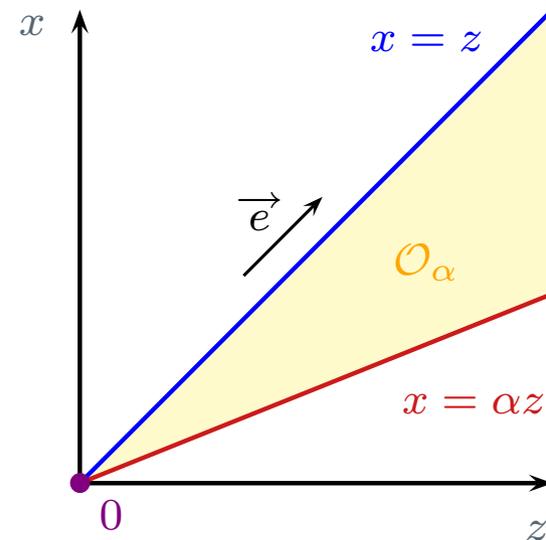
Alors  $w \leq v$  sur  $\overline{\mathcal{O}_\alpha}$ .

$\Rightarrow u$  caractérisée comme **unique** solution de viscosité

# Unicité de la solution

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \beta\varphi + V(\varphi_x) - \frac{\lambda^2}{2} \frac{\varphi_x^2}{\varphi_{xx}}$$

$$(E) \begin{cases} -\mathcal{L}\varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{O}_\alpha \\ -\varphi_z = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_1 \\ \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_T \cup \mathcal{B}_0 \end{cases}$$



**Théorème de comparaison** [Z94]

Soient  $w$  sous-solution s.c.s. et  $v$  sur-solution s.c.i. de  $(E)$  tq

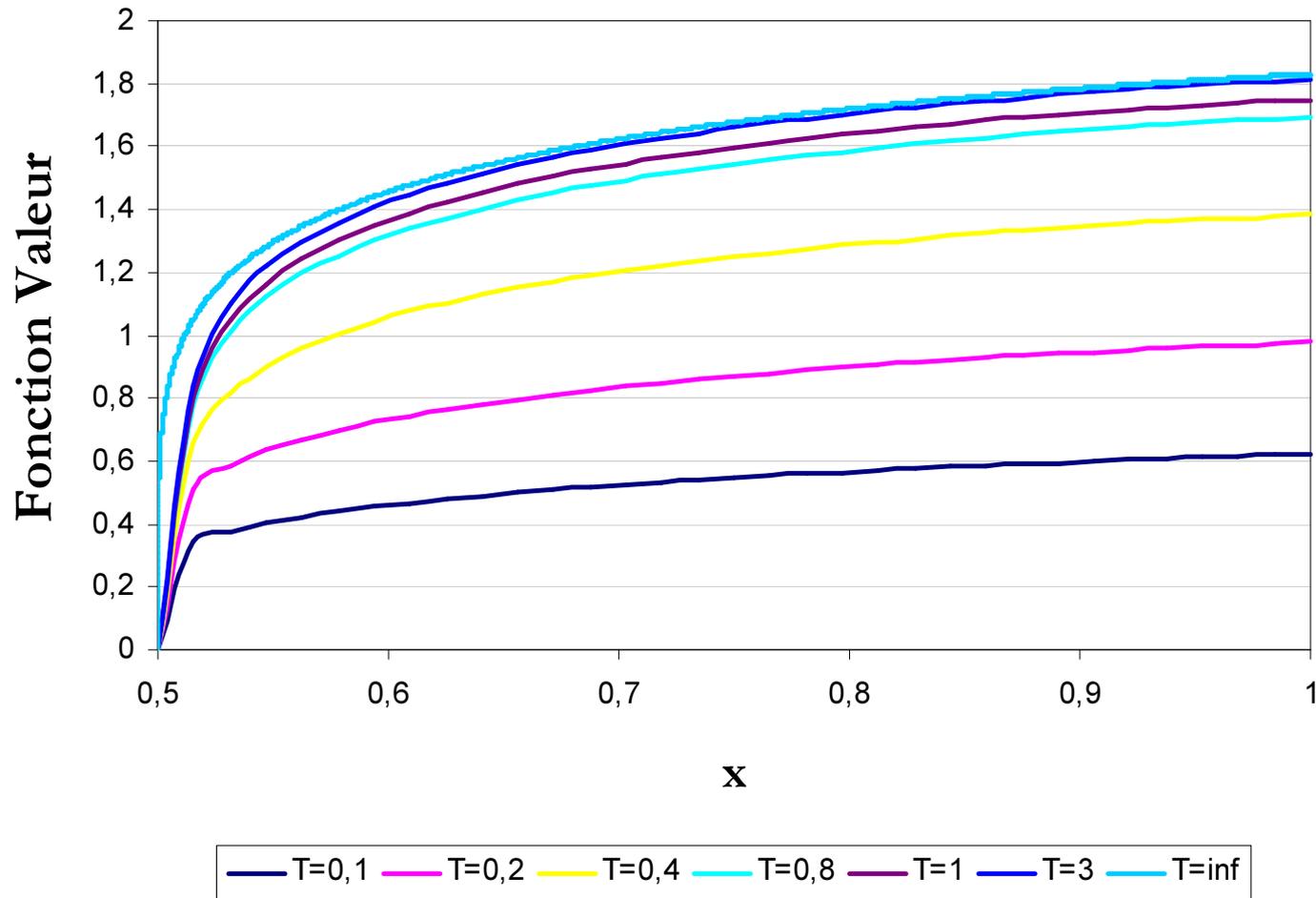
- $([w]^+ + [v]^-)(t, x, z) \leq K(1 + x^p)$  sur  $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$
- $v$  est  $C^0$  à droite dans la direction  $\vec{e}$  sur  $\mathcal{O}_\alpha \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_\alpha$
- $w \leq v$  sur  $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_T$

Alors  $w \leq v$  sur  $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$ .

$\Rightarrow u$  caractérisée comme **unique** solution de viscosité

$\Rightarrow$  Approximation numérique [BS91] [BDR94]

# Fonction valeur $u(x, 1)$



Fonction valeur  $u(x, 1)$  en fonct. de  $x$  pour différents horizons  $T$



Merci !



Merci !



Merci !



Merci !

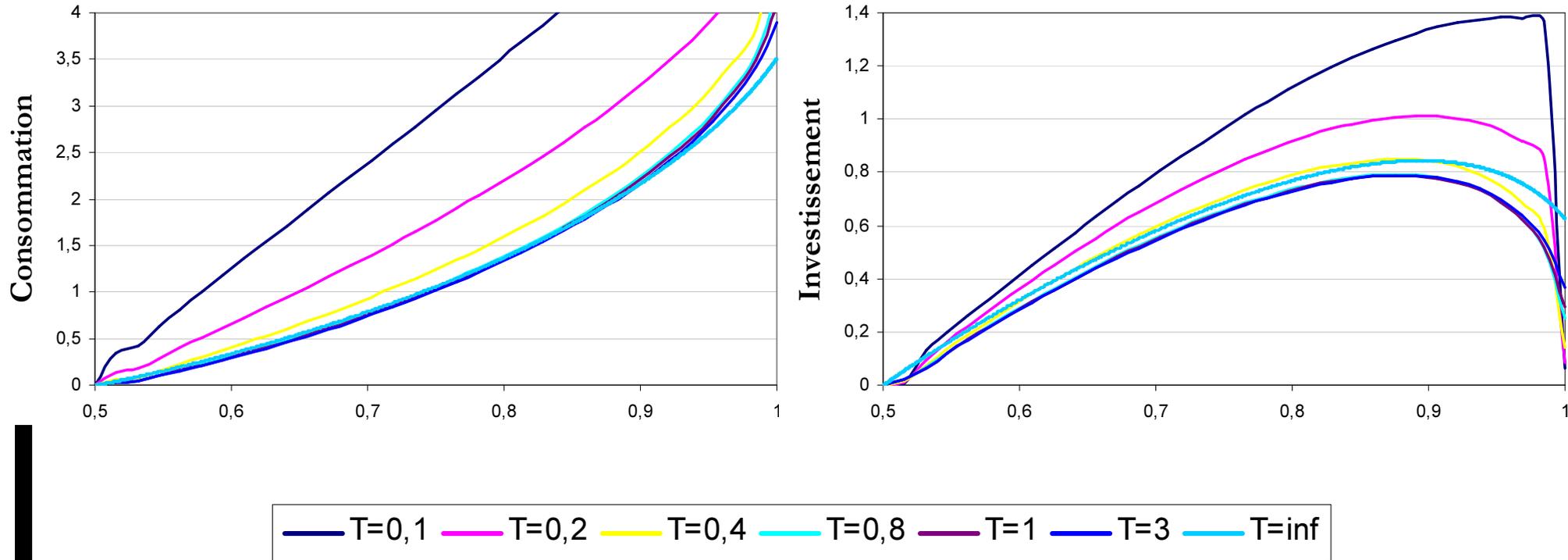


Merci !



Merci !

# Stratégie optimale



Stratégie optimale en fonction de  $x$  pour différents horizons  $T$ .

# Systeme couplé d'EDP

$$\begin{cases} y_t^0 + \mu^0 y_x^0 + \frac{1}{2}[\sigma^0]^2 y_{xx}^0 + h^0(\cdot, y^0, \sigma^0 y_x^0) = 0, & y^0(1, \cdot) = g^0 \\ y_t^1 + \mu^1 y_x^1 + \frac{1}{2}[\sigma^1]^2 y_{xx}^1 + h^1(\cdot, y^1, \sigma^1 y_x^1) = 0, & y^1(1, \cdot) = g^1 \end{cases}$$

# Systeme couplé d'EDP

$$\begin{cases} y_t^0 + \mu^0 y_x^0 + \frac{1}{2}[\sigma^0]^2 y_{xx}^0 + h^0(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^0 y_x^0) = 0, & y^0(1, \cdot) = g^0 \\ y_t^1 + \mu^1 y_x^1 + \frac{1}{2}[\sigma^1]^2 y_{xx}^1 + h^1(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^1 y_x^1) = 0, & y^1(1, \cdot) = g^1 \end{cases}$$

# Systeme couplé d'EDP

$$\begin{cases} y_t^0 + \mu^0 y_x^0 + \frac{1}{2}[\sigma^0]^2 y_{xx}^0 + h^0(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^0 y_x^0) = 0, & y^0(1, \cdot) = g^0 \\ y_t^1 + \mu^1 y_x^1 + \frac{1}{2}[\sigma^1]^2 y_{xx}^1 + h^1(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^1 y_x^1) = 0, & y^1(1, \cdot) = g^1 \end{cases}$$

- $\lambda > 0$ ,  $\mu$  mes. de Poisson sur  $E = \{1\}$  avec  $\lambda : A \mapsto \lambda \cdot \text{card}(A)$ .

# Systeme couplé d'EDP

$$\begin{cases} y_t^0 + \mu^0 y_x^0 + \frac{1}{2}[\sigma^0]^2 y_{xx}^0 + h^0(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^0 y_x^0) = 0, & y^0(1, \cdot) = g^0 \\ y_t^1 + \mu^1 y_x^1 + \frac{1}{2}[\sigma^1]^2 y_{xx}^1 + h^1(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^1 y_x^1) = 0, & y^1(1, \cdot) = g^1 \end{cases}$$

- $\lambda > 0$ ,  $\mu$  mes. de Poisson sur  $E = \{1\}$  avec  $\lambda : A \mapsto \lambda \cdot \text{card}(A)$ .
- Posons  $\tilde{h}^0 : (t, x, y, z, u) \mapsto h^0(t, x, (y, y + u), z) - \lambda u$

# Systeme couplé d'EDP

$$\begin{cases} y_t^0 + \mu^0 y_x^0 + \frac{1}{2}[\sigma^0]^2 y_{xx}^0 + h^0(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^0 y_x^0) = 0, & y^0(1, \cdot) = g^0 \\ y_t^1 + \mu^1 y_x^1 + \frac{1}{2}[\sigma^1]^2 y_{xx}^1 + h^1(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^1 y_x^1) = 0, & y^1(1, \cdot) = g^1 \end{cases}$$

- $\lambda > 0$ ,  $\mu$  mes. de Poisson sur  $E = \{1\}$  avec  $\lambda : A \mapsto \lambda \cdot \text{card}(A)$ .
- Posons  $\tilde{h}^0 : (t, x, y, z, u) \mapsto h^0(t, x, (y, y + u), z) - \lambda u$   
et  $\tilde{h}^1 : (t, x, y, z, u) \mapsto h^1(t, x, (y + u, y), z) - \lambda u$

# Systeme couplé d'EDP

$$\begin{cases} y_t^0 + \mu^0 y_x^0 + \frac{1}{2}[\sigma^0]^2 y_{xx}^0 + h^0(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^0 y_x^0) = 0, & y^0(1, \cdot) = g^0 \\ y_t^1 + \mu^1 y_x^1 + \frac{1}{2}[\sigma^1]^2 y_{xx}^1 + h^1(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^1 y_x^1) = 0, & y^1(1, \cdot) = g^1 \end{cases}$$

- $\lambda > 0$ ,  $\mu$  mes. de Poisson sur  $E = \{1\}$  avec  $\lambda : A \mapsto \lambda \cdot \text{card}(A)$ .
- Posons  $\tilde{h}^0 : (t, x, y, z, u) \mapsto h^0(t, x, (y, y + u), z) - \lambda u$   
et  $\tilde{h}^1 : (t, x, y, z, u) \mapsto h^1(t, x, (y + u, y), z) - \lambda u$

## EDSPR

$$J_t = \int_0^t \int_E e \mu(de, ds) \text{ [mod 2]}$$

# Systeme couplé d'EDP

$$\begin{cases} y_t^0 + \mu^0 y_x^0 + \frac{1}{2}[\sigma^0]^2 y_{xx}^0 + h^0(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^0 y_x^0) = 0, & y^0(1, \cdot) = g^0 \\ y_t^1 + \mu^1 y_x^1 + \frac{1}{2}[\sigma^1]^2 y_{xx}^1 + h^1(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^1 y_x^1) = 0, & y^1(1, \cdot) = g^1 \end{cases}$$

- $\lambda > 0$ ,  $\mu$  mes. de Poisson sur  $E = \{1\}$  avec  $\lambda : A \mapsto \lambda \cdot \text{card}(A)$ .
- Posons  $\tilde{h}^0 : (t, x, y, z, u) \mapsto h^0(t, x, (y, y + u), z) - \lambda u$   
et  $\tilde{h}^1 : (t, x, y, z, u) \mapsto h^1(t, x, (y + u, y), z) - \lambda u$

## EDSPR

$$J_t = \int_0^t \int_E e \mu(de, ds) \text{ [mod 2]}$$

$$X_t = \int_0^t \mu^{J_r}(r, X_r) dr + \int_0^t \sigma^{J_r}(r, X_r) dW_r,$$

# Systeme couplé d'EDP

$$\begin{cases} y_t^0 + \mu^0 y_x^0 + \frac{1}{2}[\sigma^0]^2 y_{xx}^0 + h^0(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^0 y_x^0) = 0, & y^0(1, \cdot) = g^0 \\ y_t^1 + \mu^1 y_x^1 + \frac{1}{2}[\sigma^1]^2 y_{xx}^1 + h^1(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^1 y_x^1) = 0, & y^1(1, \cdot) = g^1 \end{cases}$$

- $\lambda > 0$ ,  $\mu$  mes. de Poisson sur  $E = \{1\}$  avec  $\lambda : A \mapsto \lambda \cdot \text{card}(A)$ .
- Posons  $\tilde{h}^0 : (t, x, y, z, u) \mapsto h^0(t, x, (y, y + u), z) - \lambda u$   
et  $\tilde{h}^1 : (t, x, y, z, u) \mapsto h^1(t, x, (y + u, y), z) - \lambda u$

## EDSPR

$$J_t = \int_0^t \int_E e \mu(de, ds) \text{ [mod 2]}$$

$$X_t = \int_0^t \mu^{J_r}(r, X_r) dr + \int_0^t \sigma^{J_r}(r, X_r) dW_r,$$

$$Y_t = g^{J_T}(X_T) + \int_t^T \tilde{h}^{J_r}(r, X_r, Y_r, Z_r, U_r(1)) dr - \int_t^T Z_r dW_r - \int_t^T \int_E U_r(e) \bar{\mu}(de, dr)$$

# Systeme couplé d'EDP

$$\begin{cases} y_t^0 + \mu^0 y_x^0 + \frac{1}{2}[\sigma^0]^2 y_{xx}^0 + h^0(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^0 y_x^0) = 0, & y^0(1, \cdot) = g^0 \\ y_t^1 + \mu^1 y_x^1 + \frac{1}{2}[\sigma^1]^2 y_{xx}^1 + h^1(\cdot, (y^0, y^1), \sigma^1 y_x^1) = 0, & y^1(1, \cdot) = g^1 \end{cases}$$

- $\lambda > 0$ ,  $\mu$  mes. de Poisson sur  $E = \{1\}$  avec  $\lambda : A \mapsto \lambda \cdot \text{card}(A)$ .
- Posons  $\tilde{h}^0 : (t, x, y, z, u) \mapsto h^0(t, x, (y, y + u), z) - \lambda u$   
et  $\tilde{h}^1 : (t, x, y, z, u) \mapsto h^1(t, x, (y + u, y), z) - \lambda u$

## EDSPR

$$\Rightarrow Y_t = y^{J_t}(t, X_t)$$

$$J_t = \int_0^t \int_E e \mu(de, ds) \pmod{2}$$

$$X_t = \int_0^t \mu^{J_r}(r, X_r) dr + \int_0^t \sigma^{J_r}(r, X_r) dW_r,$$

$$Y_t = g^{J_T}(X_T) + \int_t^T \tilde{h}^{J_r}(r, X_r, Y_r, Z_r, U_r(1)) dr - \int_t^T Z_r dW_r - \int_t^T \int_E U_r(e) \bar{\mu}(de, dr)$$