Sur les singularités de certains problèmes différentiels

Victor Devoue

UNIVERSITE DES ANTILLES ET DE LA GUYANE

Département de Mathématiques et Informatique

THESE

Spécialité : Mathématiques

Présentée

A L'UNIVERSITE DES ANTILLES ET DE LA GUYANE

FACULTE DE SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DES ANTILLES ET DE LA GUYANE

par

Victor DEVOUE

Sur les singularités de certains problèmes différentiels

soutenue le 11 avril 2005

JURY :

M. Jorge ARAGONA Rapporteur Professeur à l'Université de São Paulo

M. Jean-André MARTI Directeur Professeur à l'Université des Antilles et de la Guyane

M. Michael OBERGUGGENBERGER Président Professeur à l'Université d'Innsbruck

M. Alain PIETRUS Professeur à l'Université des Antilles et de la Guyane

M. Yakov V. RADYNO Rapporteur Professeur à l'Université d'Etat de Biélorussie

M. Dimitris SCARPALEZOS Maître de conférences à l'Université de Paris 7

Table des matières

Remerciements

Nous remercions Monsieur **Jean-André MARTI**, Professeur à l'Université des Antilles et de la Guyane, qui a dirigé avec patience et dévouement ce travail, nous a constamment soutenu de ses conseils vigilants et de ses précieux encouragements et qui a toujours fait preuve d'amitié et d'une très grande disponibilité à notre égard.

Nous tenons à lui exprimer toute notre reconnaissance, notre profonde gratitude et notre respectueuse considération.

Nous exprimons notre respectueuse reconnaissance à Monsieur **Jorge ARAGONA**, Professeur à l'Université de São Paulo, à Monsieur **Yakov V. RADYNO**, Professeur à l'Université d'Etat de Biélorussie et à Monsieur **Michael OBERGUGGENBERGER**, Professeur à l'Université d'Innsbruck, qui nous font l'honneur de participer au jury de notre thèse et ont accepté la lourde tâche de rapporteurs.

Nous exprimons notre respectueuse reconnaissance à Monsieur **Alain PIETRUS**, Professeur à l'Université des Antilles et de la Guyane, ainsi qu'à Monsieur **Dimitris SCARPALEZOS**, Maître de conférences à l'Université de Paris 7, qui nous font l'honneur d'accepter d'être membres du jury de notre thèse.

Nous remercions Monsieur **Antoine DELCROIX**, Maître de conférences à l'IUFM de Guadeloupe, pour ses encouragements, son soutien et son aide précieuse. Nous tenons à lui exprimer toute notre reconnaissance et notre profonde gratitude.

Nous remercions Monsieur **Vincent Sully VALMORIN**, Maître de conférences à l'Université des Antilles et de la Guyane, pour ses encouragements et son aide précieuse. Nous lui exprimons notre reconnaissance et notre profonde gratitude.

Nous remercions Monsieur **Maximilian F. HASLER,** Maître de conférences à l'Université des Antilles et de la Guyane et Monsieur **Abdellatif MOUDAFI**, Professeur à l'Université des Antilles et de la Guyane, pour leurs encouragements. Nous tenons à leur exprimer notre reconnaissance et notre profonde gratitude.

A mes Parents

A mes Soeurs

A mes Frères

Introduction

La solution de beaucoup de systèmes différentiels dépend des données de Cauchy ou conditions initiales. Cependant le problème de Cauchy n'est pas bien posé dans de nombreux cas, même hyperboliques.

Il en est ainsi quand les données sont trop irrégulières ou portées par une variété caractéristique.

Par exemple, pour un système différentiel non linéaire, l'examen des données comme la mesure de Dirac sur une variété (non caractéristique) n'a pas de sens dans la théorie des distributions. Et même pour un problème linéaire, si le critère du "Wave Front Set" de Hörmander sur la restriction des distributions à une sous variété n'est pas vérifié, il n'existe pas de moyens standard pour formuler correctement le problème de Cauchy dans le contexte distributionnel.

Dans le cas caractéristique, même si les données sont analytiques, le théorème de Cauchy Kowaleska ne peut être utilisé. Ce théorème propose une construction de la solution u au moins localement, à partir de données suffisamment régulières et portées par une variété sur laquelle on peut d'abord calculer formellement toutes les dérivées partielles de u. Une telle variété est dite non caractéristique et on peut dans le cas linéaire la caractériser assez simplement pour une équation et même un système.

Le cas non linéaire "non caractéristique" est plus difficile à formuler pour les ordres élevés et les systèmes ; il n'est pas sûr qu'il y ait consensus pour une définition générale relative aux systèmes différentiels non linéaire d'ordre quelconque.

Dans le cas caractéristique, le calcul formel des dérivées partielles sur la variété portant les données rencontre une obstruction géométrique difficile à contourner. Pour les problèmes caractéristiques linéaires, des résultats d'existence, mais non d'unicité, sont prouvés dans le cadre des distributions dans un demi-espace ([4], [6]). D'autres résultats sont prouvés

(Gårding, Kotake, Leray, Wagschal, Hamada, Dunau) dans le domaine complexe (où les solutions peuvent être holomorphes ramifiées autour des courbes caractéristiques issues des caractéristiques). Mais nous ne connaissons pas de réponse générale dans les cas analytiques réels ou C^∞ et pour les problèmes non linéaires. Pour ces cas, et aussi dans les cas linéaires, les problèmes caractéristiques sont ceux où nous "tombons dans les trous" de la stratification canonique définie dans la théorie de Shih Weishu [18], [19] et il est prouvé par Shi Wei Hui [17] que le problème de Cauchy n'est pas bien posé pour les équations de Navier-Stokes sur l'hyperplan {t=0}.

L'objectif de ce travail est de proposer une méthode permettant de résoudre certains problèmes de Cauchy à données irrégulières ou caractéristiques en utilisant les récentes théories de fonctions généralisées [1], [3], [15] et en particulier les $(\mathcal{C},\mathcal{E},\mathcal{P})$-algèbres [8], [11] définies dans les travaux de recherche du groupe d'Analyse Algébrique Non Linéaire.

• Nous cherchons, une solution u généralisée dans un sens qui sera précisé plus loin du problème de Cauchy suivant :

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}u = F(.,.,u) \\ u_{|\gamma} = \varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}_{|\gamma} = \psi \end{cases}$$

où φ et ψ sont des fonctions généralisées d'une variable. Les valeurs initiales sont données sur la courbe monotone γ d'équation $y = f(x)$. La notation $F(.,.,u)$ étend, d'une manière qui sera précisée plus loin, l'expression :

$$(x,y) \mapsto F(x,y,u(x,y))$$

au cas où u est une fonction généralisée des deux variables x et y.

Nous étudions le cas où les données sont situées sur la courbe caractéristique $\gamma = (Ox)$ à partir des résultats précédents.

• Nous cherchons une solution u généralisée dans un sens qui sera précisé plus loin du problème de Goursat suivant :

$$(P')\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}u = F(.,.,u) \\ u_{|(Ox)} = \varphi \\ u_{|\gamma} = \psi\end{cases}$$

où φ et ψ sont des fonctions généralisées d'une variable réelle. Les valeurs initiales sont données sur une courbe caractéristique $C : (Ox)$, et sur une courbe monotone γ d'équation $x = g\,(y)$. La notation $F(.,.,u)$ étend, d'une manière qui sera précisée plus loin, l'expression :

$$(x, y) \to F(x, y, u(x, y))$$

au cas où u est une fonction généralisée des deux variables x et y.

• Dans la **première partie** nous étudions d'abord des problèmes réguliers.

Nous résolvons le problème de Cauchy régulier suivant :

$$(P)\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}u = F(.,.,u) \\ u_{|\gamma} = \varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}_{|\gamma} = \psi\end{cases}$$

où φ et ψ sont des fonctions lisses d'une variable réelle. Les valeurs initiales sont données sur la courbe monotone γ d'équation $y = f(x)$ et l'application $(x, y) \mapsto F(x, y, u(x, y))$ est une fonction lisse de ses arguments.

Nous résolvons le problème de Goursat suivant :

$$(P')\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}u = F(.,.,u) \\ u_{|(Ox)} = \varphi \\ u_{|\gamma} = \psi\end{cases}$$

où φ et ψ sont des fonctions lisses d'une variable. Les valeurs initiales sont données sur une courbe caractéristique $C : (Ox)$, et sur une courbe monotone γ d'équation $x = g(y)$ et l'application $(x, y) \to F(x, y, u(x, y))$ est une fonction lisse de ses arguments.

• La **deuxième partie** est consacrée à la définition des algèbres de fonctions généralisées et à la mise en place d'une algèbre de fonctions généralisées adaptée au problème de Cauchy généralisé. Voici une idée de la construction de ces algèbres :

$\mathbb{K}$ est le corps des réels ou des complexes et Λ un ensemble d'indices. $\mathcal{C}$ est l'anneau quotient A/I où I est un idéal de A, un sous-anneau de l'anneau $\mathbb{K}^\Lambda$.

$(\mathcal{E}, \mathcal{P})$ est un faisceau de $\mathbb{K}$-algèbres topologiques sur un espace topologique X. Un faisceau de $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$-algèbres sur X est un faisceau quotient $\mathcal{A} = \mathcal{H}/\mathcal{J}$ où $\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathcal{H}$, sous faisceau de $\mathcal{E}^\Lambda$. Les sections de $\mathcal{H}$ (resp $\mathcal{J}$) doivent vérifier certaines estimations faisant intervenir $\mathcal{H}$ et A (resp I).

Dans ces algèbres, nous avons de bons outils pour poser et résoudre beaucoup de problèmes différentiels non linéaires à n données irrégulières [12], [14].

Nous choisissons $\mathcal{E} = \mathrm{C}^\infty$, $X = \mathbb{R}^d$ pour $d = 1, 2$, $E = \mathcal{D}'$ et $\Lambda =]0, 1]$. Pour tout Ω, ouvert de $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{E}(\Omega)$ est muni de la $\mathcal{P}(\Omega)$ topologie de la convergence uniforme de toutes les dérivées sur les espaces compacts de Ω. Cette topologie peut être définie par la famille de semi-normes $P_{K,l}(u_\varepsilon) = \sup\limits_{|\alpha| \leq l} \left(\sup\limits_{x \in K} |D^\alpha u_\varepsilon(x)| \right)$ avec $K \Subset \Omega$ et $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_d}}{\partial z_1^{\alpha_1} \ldots \partial z_d^{\alpha_d}}$ pour $z = (z_1, ..., z_d) \in \Omega$, $l \in \mathbb{N}$ et $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$.

Soit A un sous anneau de l'anneau $\mathbb{R}^\Lambda$ des familles de réels muni des lois habituelles et I_A un idéal de A tels que A et I_A soient stables par majoration. On suppose que $(1)_\varepsilon \in A$.

Pour simplifier, on notera $\mathcal{X} = \mathcal{H}_{(A,\mathrm{C}^\infty,\mathcal{P})}$, $\mathcal{N} = \mathcal{J}_{(I_A,\mathrm{C}^\infty,\mathcal{P})}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{X}/\mathcal{N}$. On pose :

$$\mathcal{X}(\Omega) = \left\{ (u_\varepsilon)_\varepsilon \in [\mathrm{C}^\infty(\Omega)]^\Lambda : \forall K \Subset \Omega, \forall l \in \mathbb{N},\ \left(P_{K,l}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+ \right\}$$
$$\mathcal{N}(\Omega) = \left\{ (u_\varepsilon)_\varepsilon \in [\mathrm{C}^\infty(\Omega)]^\Lambda : \forall K \Subset \Omega, \forall l \in \mathbb{N},\ \left(P_{K,l}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in I_A^+ \right\}.$$

L'anneau des constantes généralisées associé à l'algèbre quotient n'est autre que l'anneau quotient $\mathcal{C} = A/I_A$.

Nous introduisons la notion d'algèbre $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ stable par F (relativement à $\mathcal{C} = A/I_A$.)

Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^d$, pour $x \in \Omega$ et $u = [u_\varepsilon] \in \mathcal{A}(\Omega)$, nous définissons le $\mathcal{D}'$-spectre singulier paramétrique de $u \in \mathcal{A}(\Omega)$ comme le sous ensemble de $\Omega \times \mathbb{R}_+$: $S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}} u = \left\{ (x,r) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, r \in \Sigma_{\mathcal{D}',x}(u) \right\}$ où $\Sigma_{\mathcal{D}',x}(u) = \mathbb{R}_+ \backslash N_{\mathcal{D}',x}(u)$ est la $\mathcal{D}'$-fibre au dessus de x et $N_{\mathcal{D}',x}(u) = \left\{ r \in \mathbb{R}_+ ; \exists V_x \in \mathcal{V}(x) : \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon^r u_{\varepsilon|V_x}) \in \mathcal{D}'(V_x) \right\}$.

• Ces outils nous permettent d'aborder dans la **troisième partie** les problèmes généralisés.

Nous cherchons une solution u dans $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ du problème de Cauchy généralisé :

$$(P_G) \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = F(.,.,u) \\ u_{|\gamma} = \varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}_{|\gamma} = \psi. \end{cases}$$

Après avoir donné un sens à (P_G), nous montrons que si $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ est stable par F , si $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}\right)$ et $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ sont construits sur le même anneau $\mathcal{C} = A/I$ de constantes généralisées et si les données du problème (P_G) vérifient les conditions $\varphi \in \mathcal{A}\left(\mathbb{R}\right)$, $\psi \in \mathcal{A}\left(\mathbb{R}\right)$, $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$, alors le problème (P_G) admet une unique solution u dans $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Nous faisons ensuite une étude qualitative de la solution, notamment pour $F = 0$ et $f(x) = ax$.

Nous étudions de même le problème de Goursat généralisé :

$$(P_G) \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = F(.,.,u) \\ u_{|(Ox)} = \varphi \\ u_{|\gamma} = \psi. \end{cases}$$

• Nous pouvons alors nous intéresser aux problèmes caractéristiques dans la **quatrième partie.**

Nous nous proposons de prolonger certains résultats [10] à des cas généraux, en approchant des problèmes caractéristiques par des familles de problèmes non caractéristiques et en interprétant algébriquement les résultats.

Nous étudions le cas où les données sont situées sur la courbe caractéristique $\gamma = (Ox)$ à partir des résultats précédents.

Le problème de Cauchy caractéristique :

$$(P_C) \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = F(.,.,u) \\ u_{|(Ox)} = \varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}_{|(Ox)} = \psi \end{cases}$$

n'a pas de solution lisse (ni même C^2) même lorsque les données φ et ψ le sont. Nous approchons γ en considérant la famille de courbes $(\gamma_\varepsilon)_\varepsilon$ où γ_ε a pour équation $y = \varepsilon x$. Nous étudions d'abord le cas où les données sont régulières. Nous remplaçons le problème (P_C) par la famille de problèmes non caractéristiques $(P_\varepsilon)_\varepsilon$:

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = F(.,.,u) \\ u_{|\gamma_\varepsilon} = \varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}_{|\gamma_\varepsilon} = \psi \end{cases}$$

Nous essayons d'en traduire la famille de solutions en termes de fonction généralisée appartenant à une algèbre convenablement définie.

Si u_ε est la solution du problème (P_ε), la famille $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est le représentant d'une fonction généralisée appartenant à l'algèbre $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$. Alors $u = [u_\epsilon]$ est une fonction généralisée que nous considérons comme la solution généralisée du problème de Cauchy caractéristique (P_C).

Nous étudions alors le cas des données irrégulières.

Nous donnons aussi un sens au problème de Cauchy caractéristique (P_C) dans le cas où φ et ψ sont elles-mêmes des données irrégulières (par exemple des fonctions généralisées) en le remplaçant par la famille de problèmes non caractéristiques $\left(P_{(\varepsilon,\eta)}\right)_{(\varepsilon,\eta)}$ dans une algèbre convenable :

$$P_{(\varepsilon,\eta)} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_{(\varepsilon,\eta)}}{\partial x \partial y}(x,y) = F(x,y,u_{(\varepsilon,\eta)}(x,y)) \\ u_{(\varepsilon,\eta)}(x,\varepsilon x) = \varphi_\eta(x) \\ \dfrac{\partial u_{(\varepsilon,\eta)}}{\partial y}(x,\varepsilon x) = \psi_\eta(x) \end{cases}$$

où $(\varphi_\eta)_\eta$ et $(\psi_\eta)_\eta$ sont des représentants de φ et ψ.

Le paramètre ε permet de se ramener à un problème non caractéristique que le paramètre η rend régulier.

Si $u_{(\varepsilon,\eta)}$ est la solution du problème $P_{(\varepsilon,\eta)}$, la famille $(u_{(\varepsilon,\eta)})_{(\varepsilon,\eta)}$ est le représentant d'une fonction généralisée. Donc $u = \left[u_{(\varepsilon,\eta)}\right]$ est une fonction généralisée que nous considérons comme la solution généralisée du problème de Cauchy caractéristique (P_C).

Nous appliquons ces résultats pour quelques cas particuliers où $F = 0$.

Première partie

Problèmes réguliers

Chapitre 1

Un problème de Cauchy régulier

1.1 Enoncé du problème

1.1.1 Deux formulations (P_∞) et (P_{int})

On cherche une solution u du problème de Cauchy suivant

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = F(.,.,u) \\ u_{|\gamma} = \varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} |_\gamma = \psi \end{cases}$$

où $f, \varphi, \psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions lisses d'une variable, γ la courbe d'équation $y = f(x)$ et $F : (x, y) \mapsto F(x, y, u(x, y))$ est une fonction lisse de ses arguments.

Dans tous les cas on fera l'hypothèse suivante

$$(H) : \begin{cases} F \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \\ \forall K \Subset \mathbb{R}^2, \sup\limits_{(x,y)\in \mathbb{K}; z \in \mathbb{R}} |\partial_z F(x, y, z)| < +\infty \\ f \text{ est définie et strictement croissante sur } \mathbb{R}, \text{ d'image } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0, \end{cases}$$

où la notation $K \Subset \mathbb{R}^2$ signifie K est un compact contenu dans $\mathbb{R}^2$.

On désigne par (P_∞) le problème de la recherche d'une fonction $u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)$ vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = F(x,y,u(x,y)) & (1) \\ u\,(x, f(x)) = \varphi(x) & (2) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\,(x, f(x)) = \psi(x). & (3) \end{cases}$$

On désigne par (P_{int}) le problème de la recherche d'une fonction $u \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}^2)$ vérifiant

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \iint_{D(x,y,f)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi d\eta \qquad (4)$$

où

$$u_0(x,y) = \chi(y) - \chi(f(x)) + \varphi(x)$$

et χ désigne une primitive de $\psi \circ f^{-1}$, avec

$$D(x,y,f) = \begin{cases} \left\{(\xi,\eta) :\ f^{-1}(y) \le \xi \le x;\ y \le \eta \le f(\xi)\right\} \text{ si } y \le f(x) \\ \left\{(\xi,\eta) : x \le \xi \le f^{-1}(y);\ f(\xi) \le \eta \le y\right\} \text{ si } y \ge f(x). \end{cases}$$

1.1.2 Equivalence des deux formulations (P_∞) et (P_{int})

1.1.2.1. Théorème.

Soit $u \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}^2)$.

La fonction u est solution de (P_∞) si et seulement si u est solution de (P_{int}).

Démonstration.

Condition nécessaire.

L'existence de f^{-1} étant assurée par (H). On considère les points $M(x,y)$, $P(f^{-1}(y),y)$, $Q(x,f(x))$, l'hypothèse (H) assure que le domaine $D(x,y,f)$, défini en 1.1.1., limité par le "triangle curviligne MPQ " est borné.

Si u est solution de (P_∞) , supposons $y \geq f(x)$.

$$\begin{aligned}
\iint_{D(x,y,f)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\xi d\eta &= \int_{f(x)}^{y} \left(\int_{x}^{f^{-1}(\eta)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\xi \right) d\eta \\
&= \int_{f(x)}^{y} \left[\frac{\partial u}{\partial y}(\xi,\eta) \right]_{\xi=x}^{\xi=f^{-1}(\eta)} d\eta \\
&= \int_{f(x)}^{y} \frac{\partial u}{\partial y}(f^{-1}(\eta),\eta) d\eta - \int_{f(x)}^{y} \frac{\partial u}{\partial y}(x,\eta) d\eta \\
&= \int_{f(x)}^{y} \psi(f^{-1}(\eta)) d\eta - [u(x,\eta)]_{f(x)}^{y} \\
&= \chi(y) - \chi(f(x)) - u(x,y) + u(x, f(x)) \\
&= \chi(y) - \chi(f(x)) - u(x,y) + \varphi(x),
\end{aligned}$$

où χ désigne une primitive de $\psi \circ f^{-1}$.

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \chi(y) - \chi(f(x)) + \varphi(x) - \iint_{D(x,y,f)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta)) d\xi d\eta \\
&= u_0(x,y) - \iint_{D(x,y,f)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta)) d\xi d\eta,
\end{aligned}$$

où $u_0(x,y) = \chi(y) - \chi(f(x)) + \varphi(x)$.

On obtient le même résultat si on suppose $y \leq f(x)$.

Donc u vérifie (P_{int}) .

Condition suffisante.

Si u vérifie (P_{int}), on peut écrire, en supposant $y \geq f(x)$,

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= u_0(x,y) - \int_{x}^{f^{-1}(y)} \left(\int_{f(\xi)}^{y} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta)) d\eta \right) d\xi \\
&= u_0(x,y) - \int_{x}^{f^{-1}(y)} G(\xi,y) d\xi,
\end{aligned}$$

où $G(\xi,y) = \int_{f(\xi)}^{y} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta)) d\eta$.

Comme on a $u \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}^2)$, G est une fonction continue de ξ et y, d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x,y) + G(x,y) = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x,y) + \int_{f(x)}^{y} F(x,\eta,u(x,\eta))d\eta$$

et par suite

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x}(x,y) + F(x,y,u(x,y))$$

et comme

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x}(x,y) = 0,$$

on a

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) = F(x,y,u(x,y)).$$

Calculons encore $u(x,y)$ de la manière suivante

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u_0(x,y) - \int_{f(x)}^{y}\left(\int_{x}^{f^{-1}(\eta)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi\right)d\eta \\ &= u_0(x,y) - \int_{f(x)}^{y} H(x,\eta)\,d\eta, \end{aligned}$$

où $H(x,\eta) = \int_{x}^{f^{-1}(\eta)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi$.

Comme on a $u \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}^2)$, H est une fonction continue de x et η, d'où

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u_0}{\partial y}(x,y) - \int_{x}^{f^{-1}(y)} F(\xi,y,u(\xi,y))d\xi$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}(x,y) + F(x,y,u(x,y)) = F(x,y,u(x,y)).$$

Finalement on peut intervertir l'ordre des dérivations partielles et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = F(x,y,u(x,y)).$$

De plus

$$\begin{aligned} u(x,f(x)) &= u_0(x,f(x)) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,f(x)) &= \frac{\partial u_0}{\partial y}(x,f(x)) = \psi \circ f^{-1}(f(x)) = \psi(x). \end{aligned}$$

• Ces résultats sont inchangés si on suppose $y \leq f(x)$, donc u vérifie bien (P_∞).

Si u est de classe C^1 alors $(x,y) \mapsto F(x,y,u(x,y))$ est de classe C^1, alors

$$W : (x,y) \mapsto u_0(x,y) - \int_x^{f^{-1}(y)} \left(\int_{f(\xi)}^{y} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\eta \right) d\xi = u_0(x,y) - \int_x^{f^{-1}(y)} G(\xi,y)d\xi$$

admet une dérivée partielle en x de classe C^1, et

$$W : (x,y) \mapsto u_0(x,y) - \int_{f(x)}^{y} \left(\int_x^{f^{-1}(\eta)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi \right) d\eta = u_0(x,y) - \int_{f(x)}^{y} H(x,\eta)\, d\eta$$

admet une dérivée partielle en y de classe C^1. Comme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)(x,y) = F(x,y,u(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)(x,y)$$

est de classe C^1 alors $u = W$ est de classe C^2.

On remarque de plus que si u est de classe C^n alors $(x,y) \mapsto F(x,y,u(x,y))$ est de classe C^n, donc

$$W : (x,y) \mapsto u_0(x,y) - \int_x^{f^{-1}(y)} \left(\int_{f(\xi)}^{y} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\eta \right) d\xi = u_0(x,y) - \int_x^{f^{-1}(y)} G(\xi,y)d\xi$$

admet une dérivée partielle en x de classe C^n, et

$$W : (x,y) \mapsto u_0(x,y) - \int_{f(x)}^{y} \left(\int_x^{f^{-1}(\eta)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi \right) d\eta = u_0(x,y) - \int_{f(x)}^{y} H(x,\eta)\, d\eta$$

admet une dérivée partielle en y de classe C^n. Comme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)(x,y) = F(x,y,u(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)(x,y)$$

est de classe C^n alors $u = W$ est de classe C^{n+1}.

D'après le principe de récurrence u est donc de classe C^∞.

On a donc le

1.1.2.2. Corollaire

Si u est solution de (P_{int}) (ou de (P_∞)), alors u appartient à $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

1.1.2.3. Calcul des dérivées partielles d'ordre deux de u

Ce calcul sera utilisé au 4.2.

Si u est solution de (P_{int}) nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x,y) + G(x,y) = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x,y) + \int_{f(x)}^{y} F(x,\eta,u(x,\eta))d\eta.$$

Puisque $F(.,.,u)$ admet une dérivée partielle en x et que f est dérivable, nous en déduisons

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x,y) - f'(x)F(x,f(x),u(x,f(x))) + \\ &\qquad \int_{f(x)}^{y} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,\eta,u(x,\eta)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,\eta,u(x,\eta))\frac{\partial u}{\partial x}(x,\eta) \right) d\eta \\ &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x,y) - f'(x)F(x,f(x),\varphi(x)) + \\ &\qquad \int_{f(x)}^{y} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,\eta,u(x,\eta)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,\eta,u(x,\eta))\frac{\partial u}{\partial x}(x,\eta) \right) d\eta.\end{aligned}$$

Comme $u_0(x,y) = \chi(y) - \chi(f(x)) + \varphi(x)$, il vient succesivement

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_0}{\partial x}(x,y) &= -f'(x)\psi\left(f^{-1}(f(x))\right) + \varphi'(x) = -f'(x)\psi(x) + \varphi'(x) \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x,y) &= -f"(x)\psi(x) - f'(x)\psi'(x) + \varphi"(x).\end{aligned}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) &= -f"(x)\psi(x) - f'(x)\psi'(x) + \varphi"(x) - f'(x)F(x,f(x),\varphi(x)) \\ &\qquad + \int_{f(x)}^{y} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,\eta,u(x,\eta)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,\eta,u(x,\eta))\frac{\partial u}{\partial x}(x,\eta) \right) d\eta.\end{aligned}$$

Si u est solution de (P_{int})), on peut écrire, en supposant $y \geq f(x)$,

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \int_{x}^{f^{-1}(y)} \left(\int_{f(\xi)}^{y} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\eta \right) d\xi.$$

Calculons encore $u(x,y)$ de la manière suivante

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \int_{f(x)}^{y} \left(\int_{x}^{f^{-1}(\eta)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi \right) d\eta.$$

A partir de

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u_0}{\partial y}(x,y) - \int_x^{f^{-1}(y)} F(\xi, y, u(\xi, y))d\xi$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\right) F(f^{-1}(y), y, \varphi(f^{-1}(y))) \\ - \int_x^{f^{-1}(y)} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\xi, y, u(\xi, y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(\xi, y, u(\xi, y))\frac{\partial u}{\partial y}(\xi, y)\right) d\xi,\end{aligned}$$

$$u_0(x,y) = \chi(y) - \chi(f(x)) + \varphi(x).$$

Comme

$$\frac{\partial u_0}{\partial y}(x,y) = \psi(f^{-1}(y)),$$

on a

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}(x,y) = \left[(f^{-1})'(y)\right] \psi'\left(f^{-1}(y)\right) = \left[\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\right] \psi'\left(f^{-1}(y)\right)\ \square.$$

1.2 Résolution du problème

1.2.1 Résolution de (P_∞)

1.2.1.1. Théorème

Sous l'hypothèse (H) le problème (P_∞) admet une solution unique dans $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Démonstration.

D'après le théorème 1.1.2.1., résoudre (P_∞) revient à résoudre (P_{int}) c'est-à-dire à chercher $u \in C^0(\mathbb{R}^2)$ vérifiant

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \iint_{D(x,y,f)} F(\xi, \eta, u(\xi, \eta))d\xi d\eta. \ (4)$$

Pour tout compact de $\mathbb{R}^2$, nous pouvons trouver $\lambda > 0$ assez grand tel que ce compact soit contenu dans $K_\lambda = [-\lambda; \lambda] \times [f(-\lambda); f(\lambda)]$, car la famille $(K_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*}$ est une famille exhaustive de compacts.

a) Changement de variables.

Supposons toujours $y \geq f(x)$ et faisons le changement de variables

$$\begin{cases} X = x + \lambda \\ Y = y - f(-\lambda) \end{cases}$$

c'est-à-dire considérons comme nouvelle origine $\Omega(-\lambda, f(-\lambda))$.

Alors

$$\begin{cases} x = X - \lambda \\ y = Y + f(-\lambda) \end{cases}$$

La relation (4) s'écrit

$$u(X-\lambda, Y+f(-\lambda)) = u_0(X-\lambda, Y+f(-\lambda)) - \iint_{D(X-\lambda, Y+f(-\lambda), f)} F(\xi-\lambda, \eta+f(-\lambda), u(\xi-\lambda, \eta+f(-\lambda)))d\xi d\eta,$$

qui est de la forme

$$U(X,Y) = U_0(X,Y) - \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} \mathfrak{F}(\xi, \eta, U(\xi,\eta))d\xi d\eta, \qquad (5)$$

avec $g(X) = f(X-\lambda) - f(-\lambda)$; le compact $Q_\lambda = [0; 2\lambda] \times [0; g(2\lambda)]$ est le transformé de K_λ, car $g(2\lambda) = f(\lambda) - f(-\lambda)$. L'équation de (γ) s'écrit alors $Y = g(X)$ et $g(0) = 0$.

On a donc maintenant

$$\begin{cases} X \geq 0 \\ Y \geq g(X). \end{cases}$$

b) Résolution.

Posons, conformément à l'hypothèse (H)

$$m_\lambda = \sup_{(\xi,\eta) \in Q_\lambda;\ z \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}(\xi, \eta, z) \right|.$$

Définissons la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, U_n(X,Y) = U_0(X,Y) - \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} \mathfrak{F}(\xi,\eta,U_{n-1}(\xi,\eta))d\xi d\eta.$$

Posons pour tout compact $H \Subset \mathbb{R}^2$,

$$\|U_0\|_{\infty,H} = \sup_{(x,y)\in H} |U_0(x,y)|\,.$$

D'après le théorème des accroissements finis sous forme intégrale, nous pouvons écrire

$$\mathfrak{F}(\xi,\eta,t) - \mathfrak{F}(\xi,\eta,r) = (t-r)\int_0^1 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}(\xi,\eta,r+\sigma(t-r))d\sigma \qquad (6)$$

d'où : $\forall(\xi,\eta) \in \mathfrak{D}(X,Y,g)$

$$\mathfrak{F}(\xi,\eta,U_0(\xi,\eta)) - \mathfrak{F}(\xi,\eta,0) = U_0(\xi,\eta)\int_0^1 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}(\xi,\eta,\sigma U_0(\xi,\eta))d\sigma.$$

Donc

$$|\mathfrak{F}(\xi,\eta,U_0(\xi,\eta))| \leq |\mathfrak{F}(\xi,\eta,0)| + |U_0(\xi,\eta)|\int_0^1 m_\lambda d\sigma,$$

$$|\mathfrak{F}(\xi,\eta,U_0(\xi,\eta))| \leq |\mathfrak{F}(\xi,\eta,0)| + m_\lambda \|U_0\|_{\infty,Q_\lambda}\,.$$

Posons

$$\Phi_\lambda = \|\mathfrak{F}(.,.,0)\|_{\infty,Q_\lambda} + m_\lambda \|U_0\|_{\infty,Q_\lambda}\,,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, V_n = U_n - U_{n-1},$$

ce qui entraîne

$$V_1(X,Y) = U_1(X,Y) - U_0(X,Y) = -\iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} \mathfrak{F}(\xi,\eta,U_0(\xi,\eta))d\xi d\eta,$$

$$|V_1(X,Y)| \leq \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} |\mathfrak{F}(\xi,\eta,U_0(\xi,\eta))|\, d\xi d\eta \leq \Phi_\lambda \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} d\xi d\eta,$$

$$|V_1(X,Y)| \leq \Phi_\lambda A(X,Y),$$

où : $A(X,Y) = \int\int_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} d\xi d\eta$, désigne l'aire du domaine $\mathfrak{D}(X,Y,g)$ limité par le "triangle curviligne MPQ ".

On a :

$$\begin{aligned}|V_2(X,Y)| &= |U_2(X,Y) - U_1(X,Y)| \\ &\leq \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} |\mathfrak{F}(\xi,\eta,U_0(\xi,\eta)) - \mathfrak{F}(\xi,\eta,U_1(\xi,\eta))|\, d\xi d\eta.\end{aligned}$$

Utilisant alors la relation (6), on obtient

$$\begin{aligned}&|\mathfrak{F}(\xi,\eta,U_0(\xi,\eta)) - \mathfrak{F}(\xi,\eta,U_1(\xi,\eta))| \\ &\qquad \leq |U_0(\xi,\eta) - U_1(\xi,\eta)| \left| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{F}(\xi,\eta,U_1(\xi,\eta) + \sigma(U_1(\xi,\eta) - U_0(\xi,\eta)))d\sigma \right|,\end{aligned}$$

par conséquent

$$|\mathfrak{F}(\xi,\eta,U_0(\xi,\eta)) - \mathfrak{F}(\xi,\eta,U_1(\xi,\eta))| \leq |U_0(\xi,\eta) - U_1(\xi,\eta)|\, m_\lambda$$

$$|\mathfrak{F}(\xi,\eta,U_0(\xi,\eta)) - \mathfrak{F}(\xi,\eta,U_1(\xi,\eta))| \leq |V_1(\xi,\eta)|\, m_\lambda.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}|V_2(X,Y)| &\leq \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} m_\lambda\, |U_0(\xi,\eta) - U_1(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta \\ &\leq m_\lambda \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} |V_1(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta \\ &\leq m_\lambda \Phi_\lambda \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} A(\xi,\eta) d\xi d\eta.\end{aligned}$$

On peut remarquer que

$$A(X,Y) \leq (g^{-1}(Y) - X)(Y - g(X)) \leq (2\lambda - X)Y \leq (2\lambda)Y$$

et par suite

$$
\begin{aligned}
|V_2(X,Y)| &\leq m_\lambda \Phi_\lambda \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} A(\xi,\eta) d\xi d\eta \leq m_\lambda \Phi_\lambda \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} (2\lambda)\eta d\xi d\eta \\
&\leq m_\lambda \Phi_\lambda \int_0^Y \left(\int_0^{2\lambda} (2\lambda)\eta d\xi\right) d\eta \\
&\leq m_\lambda \Phi_\lambda \left((2\lambda)^2 \frac{Y^2}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\forall (\xi,\eta) \in \mathfrak{D}(X,Y,g), \ |V_2(\xi,\eta)| \leq m_\lambda \Phi_\lambda \left((2\lambda)^2 \frac{\eta^2}{2}\right).
$$

De même

$$
|V_3(X,Y)| = |U_3(X,Y) - U_2(X,Y)| \leq \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} |\mathfrak{F}(\xi,\eta,U_1(\xi,\eta)) - \mathfrak{F}(\xi,\eta,U_2(\xi,\eta))| \, d\xi d\eta.
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
|V_3(X,Y)| &\leq \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} m_\lambda \, |U_1(\xi,\eta) - U_2(\xi,\eta)| \, d\xi d\eta \\
&\leq m_\lambda \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} |V_2(\xi,\eta)| \, d\xi d\eta \\
&\leq m_\lambda \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} m_\lambda \Phi_\lambda \left((2\lambda)^2 \frac{\eta^2}{2}\right) d\xi d\eta \\
&\leq m_\lambda^2 \Phi_\lambda \int_0^Y \left(\int_0^{2\lambda} (2\lambda)^2 \frac{\eta^2}{2} d\xi\right) d\eta \\
&\leq m_\lambda^2 \Phi_\lambda \left((2\lambda)^3 \frac{Y^3}{3!}\right).
\end{aligned}
$$

Par récurrence

$$
|V_n(X,Y)| \leq m_\lambda^{n-1} \Phi_\lambda \left((2\lambda)^n \frac{Y^n}{n!}\right).
$$

D'où

$$
\|V_n\|_{\infty,Q_\lambda} \leq m_\lambda^{n-1} \Phi_\lambda \frac{[(2\lambda) g(2\lambda)]^n}{n!} = \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda} \frac{[(2\lambda) m_\lambda g(2\lambda)]^n}{n!},
$$

ce qui assure la convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n \geq 1} V_n$ sur Q_λ et par suite sur tout compact de $\mathbb{R}^2$.

L'égalité $\sum_{k=1}^{n} V_k = U_n - U_0$ entraîne que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Q_λ vers une fonction U. Comme chaque U_n est continue, la limite uniforme U est continue sur tout compact Q_λ donc sur $\mathbb{R}^2$.

Posons : $\varepsilon_n(X,Y) = U(X,Y) - U_n(X,Y)$, alors

$$\begin{aligned}
U(X,Y) - U_0(X,Y) &+ \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} \mathfrak{F}(\xi,\eta,U(\xi,\eta))d\xi d\eta \\
&= U(X,Y) - U_n(X,Y) + \left(U_n(X,Y) - U_0(X,Y) + \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} \mathfrak{F}(\xi,\eta,U(\xi,\eta))d\xi d\eta\right) \\
&= \varepsilon_n(X,Y) + \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} \left(\mathfrak{F}(\xi,\eta,U(\xi,\eta)) - \mathfrak{F}(\xi,\eta,U_{n-1}(\xi,\eta))\right) d\xi d\eta\ .
\end{aligned}$$

Comme

$$\forall(\xi,\eta) \in \mathfrak{D}(X,Y,g) : |\mathfrak{F}(\xi,\eta,U(\xi,\eta)) - \mathfrak{F}(\xi,\eta,U_n(\xi,\eta))| \leq |U(\xi,\eta) - U_{n-1}(\xi,\eta)|\, m_\lambda,$$

le second membre est majoré par

$$\left(\sup_{(X,Y)\in Q_\lambda} |\varepsilon_n(X,Y)|\right) + m_\lambda \left(\sup_{(X,Y)\in Q_\lambda} A(X,Y)\right) \left(\sup_{(X,Y)\in Q_\lambda} |U(X,Y) - U_{n-1}(X,Y)|\right),$$

c'est-à-dire par

$$\left(\sup_{(X,Y)\in Q_\lambda} |\varepsilon_n(X,Y)|\right) + m_\lambda\,(2\lambda \times g(2\lambda)) \left(\sup_{(X,Y)\in Q_\lambda} |\varepsilon_{n-1}(X,Y)|\right)$$

qui tend donc vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il en résulte donc que

$$U(X,Y) = U_0(X,Y) - \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} \mathfrak{F}(\xi,\eta,U(\xi,\eta))d\xi d\eta$$

pour $(X,Y) \in Q_\lambda \cap \{(X,Y)/Y \geq g(X)\} = Q_\lambda^+$.

c) Montrons que la solution est unique.

Soit W une autre solution de

$$U(X,Y) = U_0(X,Y) - \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} \mathfrak{F}(\xi,\eta,U(\xi,\eta))d\xi d\eta.$$

Posant : $\Delta = W - U$, on obtient

$$\Delta(X,Y) = \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} \left(-\mathfrak{F}(\xi,\eta,W(\xi,\eta)) + \mathfrak{F}(\xi,\eta,U(\xi,\eta))\right) d\xi d\eta.$$

Soit $(X,Y) \in Q_\lambda$, puisque $\mathfrak{D}(X,Y,g) \subset Q_\lambda$, on a

$$|\Delta(X,Y)| \leq \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} m_\lambda \left|W(\xi,\eta) - U(\xi,\eta)\right| d\xi d\eta \leq m_\lambda \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} |\Delta(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta.$$

Comme $Y \geq g(X)$

$$\begin{aligned} |\Delta(X,Y)| &\leq m_\lambda \int_X^{g^{-1}(Y)} \int_{g(X)}^{Y} |\Delta(\xi,\eta)|\, d\eta d\xi \leq m_\lambda \int_0^{2\lambda} \int_0^{Y} |\Delta(\xi,\eta)|\, d\eta d\xi \\ &\leq m_\lambda \int_0^{Y} \left(\int_0^{2\lambda} |\Delta(\xi,\eta)|\, d\xi\right) d\eta \\ &\leq m_\lambda \int_0^{Y} \left(\int_0^{2\lambda} \sup_{\xi\in[0;2\lambda]} |\Delta(\xi,\eta)|\, d\xi\right) d\eta. \end{aligned}$$

Pour tout $Y \in [0; g(2\lambda)]$, posons

$$E(Y) = \sup_{\xi\in[0;2\lambda]} |\Delta(\xi,Y)|,$$

alors

$$|\Delta(X,Y)| \leq m_\lambda \left|\int_0^{Y} \int_0^{2\lambda} E(\eta) d\xi d\eta\right| \leq m_\lambda 2\lambda \left|\int_0^{Y} E(\eta) d\eta\right|,$$

de sorte que

$$\forall Y \in [0; g(2\lambda)],\, E(Y) \leq m_\lambda 2\lambda \left|\int_0^{Y} E(\eta) d\eta\right|,$$

ainsi d'après le lemme de GRONWALL : $E = 0$ d'où $\Delta = 0$, ce qui prouve l'unicité de U dans Q_λ^+.

Posant alors $v_\lambda(x,y) = U(x+\lambda, y - f(-\lambda))$, il en résulte que v_λ est l'unique solution de (4) dans $K_\lambda \cap \{(x,y)/y \geq f(x)\} = K_\lambda^+$.

d) Cas $y \leq f(x)$

Dans le cas $y \leq f(x)$, faisons le changement de variables

$$\begin{cases} X = -x + \lambda \\ Y = -y + f(\lambda) \end{cases}$$

c'est-à-dire considérons comme nouvelle origine $\Omega(\lambda, f(\lambda))$ et inversons le sens des axes.

Alors

$$\begin{cases} x = -X + \lambda \\ y = -Y + f(\lambda) \end{cases}$$

et :

$$u(-X+\lambda, -Y+f(\lambda)) = u_0(-X+\lambda, -Y+f(\lambda)) \\ - \iint_{D(-X+\lambda,-Y+f(\lambda),f)} F(-\xi+\lambda, -\eta+f(\lambda), u(-\xi+\lambda, -\eta+f(\lambda)))d\xi d\eta,$$

qui est de la forme

$$W(X,Y) = W_0(X,Y) - \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} \mathfrak{F}(\xi, \eta, W(\xi,\eta))d\xi d\eta$$

avec $g(X) = f(\lambda) - f(\lambda - X)$; le compact $Q_\lambda = [0; 2\lambda] \times [0; g(2\lambda)]$ est le transformé de K_λ, car $g(2\lambda) = f(\lambda) - f(-\lambda)$.

Comme $y \leq f(x)$ équivaut à $-y \geq -f(x)$, on a donc

$$f(\lambda) - y \geq f(\lambda) - f(x),$$

c'est-à-dire $Y \geq f(\lambda) - f(\lambda - X)$, soit $Y \geq g(X)$. Nous sommes donc ramenés au cas

$$\begin{cases} X \geq 0 \\ Y \geq g(X) \end{cases}$$

qui se traite comme le cas précédent.

e) Solution.

Il en résulte que $w_\lambda(x,y) = W(-x+\lambda, -y+f(\lambda))$ est solution de (4) dans

$$K_\lambda \cap \{(x,y)/y \leq f(x)\} = K_\lambda^-.$$

De la continuité de U dans Q_λ^+ et de W dans Q_λ^- résulte la continuité de v_λ dans K_λ^+ et de w_λ dans K_λ^-. De plus, v_λ et w_λ se raccordent sur γ car $v_\lambda(x, f(x)) = w_\lambda(x, f(x)) = \varphi(x)$.

Finalement si on pose

$$u_\lambda(x,y) = \begin{cases} v_\lambda(x,y) \text{ pour } (x,y) \in K_\lambda^+ \\ w_\lambda(x,y) \text{ pour } (x,y) \in K_\lambda^- \end{cases}$$

alors u_λ est l'unique solution de (P_{int}) continue sur K_λ.

Il reste à prouver que ce procédé donne bien une solution globale continue u de (4) dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qui vérifie (P_{int}).

Si $\lambda_2 > \lambda_1$ alors $K_{\lambda_1} \subset K_{\lambda_2}$: il faut donc encore montrer que $u_{\lambda_2 | K_{\lambda_1}} = u_{\lambda_1}$.

Or

$$\forall (x,y) \in K_{\lambda_2},\, u_{\lambda_2}(x,y) = u_0(x,y) - \iint_{D(x,y,f)} F(\xi, \eta, u_{\lambda_2}(\xi,\eta))d\xi d\eta$$

et cette égalité a lieu *a fortiori* pour $(x,y) \in K_{\lambda_1}$. On a donc

$$u_{\lambda_2 | K_{\lambda_1}}(x,y) = u_0(x,y) - \iint_{D(x,y,f)} F(\xi, \eta, u_{\lambda_2 | K_{\lambda_1}}(\xi,\eta))d\xi d\eta.$$

Autrement dit $u_{\lambda_2 | K_{\lambda_1}}$ vérifie (4) dans K_{λ_1} et y coïncide donc avec son unique solution u_{λ_1}.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on peut alors poser :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u_\lambda(x,y) \\ &= u_0(x,y) - \iint_{D(x,y,f)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi d\eta, \quad (7) \end{aligned}$$

où u_λ vérifie (4) dans K_λ et $(x,y) \in K_\lambda$.

La définition de u par (7) étant indépendante du compact K_λ donne finalement la solution globale unique de (P_{int}) ou (P_∞). $\square$

Au chapitre 4, on aura besoin des estimations précisées par le résultat suivant.

1.2.1.2. Proposition.

Avec les notations précédentes, pour tout compact $K \Subset R^2$*, il existe un compact* K_λ*,* $K_\lambda \Subset R^2$*, défini précédemment, contenant* K*, tel que*

(i) $m_\lambda = \sup\limits_{(x,y)\in K_\lambda;\ t\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,t)\right|$; $\Phi_\lambda = \|F(.,.,0)\|_{\infty,K_\lambda} + m_\lambda \|u_0\|_{\infty,K_\lambda}$;

(ii) $\|u\|_{\infty,K} \leq \|u\|_{\infty,K_\lambda} \leq \|u_0\|_{\infty,K_\lambda} + \dfrac{\Phi_\lambda}{m_\lambda} \exp[2\lambda m_\lambda (f(\lambda) - f(-\lambda))]$.

Démonstration.

(i) De manière claire, on a

$$m_\lambda = \sup_{(\xi,\eta)\in Q_\lambda;\ t\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}(\xi,\eta,t)\right| = \sup_{(x,y)\in K_\lambda;\ t\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,t)\right| ;$$

$$\Phi_\lambda = \|\mathfrak{F}(.,.,0)\|_{\infty,Q_\lambda} + m_\lambda \|U_0\|_{\infty,Q_\lambda} = \|F(.,.,0)\|_{\infty,K_\lambda} + m_\lambda \|u_0\|_{\infty,K_\lambda} .$$

(ii) En conservant les notations précédentes, nous avons

$$u_n(x,y) = u_0(x,y) - \iint_{D(x,y,f)} F(\xi,\eta,u_{n-1}(\xi,\eta))d\xi d\eta, \quad n \geq 1,$$

$$u_0(x,y) = \chi(y) - \chi(f(x)) + \varphi(x).$$

$$u_{n,\lambda}(x,y) = \begin{cases} v_{n,\lambda}(x,y) \text{ pour } (x,y) \in K_\lambda^+ \\ w_{n,\lambda}(x,y) \text{ pour } (x,y) \in K_\lambda^-. \end{cases}$$

Comme

$$U_n(X,Y) = U_0(X,Y) - \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,g)} \mathfrak{F}(\xi,\eta,U_{n-1}(\xi,\eta))d\xi d\eta,$$

$$\Phi_\lambda = \|\mathfrak{F}(.,.,0)\|_{\infty,Q_\lambda} + m_\lambda \|U_0\|_{\infty,Q_\lambda} ,$$

$$V_n = U_n - U_{n-1},$$

où $Q_\lambda = [0; 2\lambda] \times [0; g(2\lambda)]$ est le transformé de K_λ par g, avec $K_\lambda = [-\lambda;\lambda]\times[f(-\lambda); f(\lambda)]$.

$$\begin{cases} \text{si } y \geq f(x),\ g(X) = f(X-\lambda) - f(-\lambda), \\ \text{si } y \leq f(x),\ g(X) = f(\lambda) - f(\lambda - X). \end{cases}$$

D'après la démonstration du théorème 1.2.1.1, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|V_n\|_{\infty,Q_\lambda} \leq m_\lambda^{n-1}\Phi_\lambda \frac{[(2\lambda)g(2\lambda)]^n}{n!} = \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda}\frac{[m_\lambda(2\lambda)g(2\lambda)]^n}{n!},$$

et par conséquent

$$\|U\|_{\infty,Q_\lambda} \leq \|U_0\|_{\infty,Q_\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty}\|V_n\|_{\infty,Q_\lambda} \leq \|U_0\|_{\infty,Q_\lambda} + \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda}\exp[m_\lambda(2\lambda)g(2\lambda)].$$

De plus

$$g(2\lambda) = f(\lambda) - f(-\lambda).$$

Comme on a les relations suivantes

$$\begin{cases} \|v_\lambda\|_{\infty,K_\lambda^+} = \|U\|_{\infty,Q_\lambda} \\ \\ \|w_\lambda\|_{\infty,K_\lambda^-} = \|W\|_{\infty,Q_\lambda} \end{cases}, \quad \begin{cases} \|u_0\|_{\infty,K_\lambda^+} = \|U_0\|_{\infty,Q_\lambda} \\ \\ \|u_0\|_{\infty,K_\lambda^-} = \|W_0\|_{\infty,Q_\lambda} \end{cases}, \; u_\lambda = \begin{cases} v_\lambda \text{ sur } K_\lambda^+ \\ \\ w_\lambda \text{ sur } K_\lambda^- \end{cases},$$

on en déduit que

$$\|u\|_{\infty,K_\lambda^+} \leq \|u_0\|_{\infty,K_\lambda^+} + \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda}\exp[m_\lambda(2\lambda)\,(f(\lambda) - f(-\lambda))],$$

et de même

$$\|u\|_{\infty,K_\lambda^-} \leq \|u_0\|_{\infty,K_\lambda^-} + \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda}\exp[m_\lambda(2\lambda)\,(f(\lambda) - f(-\lambda))].$$

Donc

$$\|u\|_{\infty,K_\lambda} \leq \|u_0\|_{\infty,K_\lambda} + \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda}\exp[m_\lambda(2\lambda)\,(f(\lambda) - f(-\lambda))].$$

Comme $\|u\|_{\infty,K} \leq \|u\|_{\infty,K_\lambda}$, l'inégalité précédente entraîne la conclusion (ii). $\square$

Chapitre 2

Un problème de Goursat régulier

2.1 Enoncé du problème

2.1.1 Deux formulations (P'_∞) et (P'_{int})

F est une fonction lisse de ses arguments et g, φ, ψ sont des fonctions numériques lisses d'une variable réelle avec de plus

$$\psi(0) = \varphi(g(0)).$$

Dans tous les cas nous ferons l'hypothèse suivante

$$(H) : \begin{cases} F \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \\ \forall K \Subset \mathbb{R}^2, \displaystyle\sup_{(x,y)\in K; z\in\mathbb{R}} |\partial_z F(x, y, z)| < +\infty \\ g \text{ est croissante sur } \mathbb{R}, \end{cases}$$

où la notation $K \Subset \mathbb{R}^2$ signifie K est un compact contenu dans $\mathbb{R}^2$.

Nous désignons par (P'_∞) le problème de la recherche d'une fonction $u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ vérifiant

$$(P'_\infty) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = F(x, y, u(x, y)) & (1) \\ u\,(x, 0)) = \varphi(x) & (2) \\ u(g\,(y)\,, y) = \psi(y). & (3) \end{cases}$$

Nous désignons par (P'_{int}) le problème de la recherche d'une fonction $u \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R})$ vérifiant

$$u(x,y) = u_0(x,y) + \iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi d\eta, \qquad (4)$$

où

$$u_0(x,y) = \psi(y) + \varphi(x) - \varphi(g(y)),$$

avec

$$D(x,y,g) = \begin{cases} \{(\xi,\eta) : g(y) \leq \xi \leq x;\ 0 \leq \eta \leq y\} \text{ si } g(y) \leq x \text{ et } 0 \leq y \\ \{(\xi,\eta) : x \leq \xi \leq g(y);\ 0 \leq \eta \leq y\} \text{ si } g(y) \geq x \text{ et } 0 \leq y \\ \{(\xi,\eta) : x \leq \xi \leq g(y);\ y \leq \eta \leq 0\} \text{ si } g(y) \geq x \text{ et } y \leq 0 \\ \{(\xi,\eta) : g(y) \leq \xi \leq x;\ y \leq \eta \leq 0\} \text{ si } g(y) \leq x \text{ et } y \leq 0. \end{cases}$$

2.1.2 Equivalence des deux formulations

2.1.2.1. Théorème

Soit $u \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}^2)$. La fonction u est solution de (P'_∞) si et seulement si u est solution de (P'_{int}).

Démonstration.

Condition nécessaire.

On considère les points $M(x,y)$, $N(x,0)$, $P(g(y),y)$, $Q(g(y),0)$.

L'hypothèse (H) assure que le domaine $D(x,y,g)$ est borné.

a) Supposons d'abord $0 \leq y$ et $g(y) \leq x$.

$D(x,y,g)$ a pour frontière le rectangle $PQNM$.

$$\iint_{D(x,y,g)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\xi d\eta = \int_{g(y)}^{x} \left(\int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\eta \right) d\xi = \int_{g(y)}^{x} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(\xi,\eta) \right]_0^y d\xi$$
$$= \int_{g(y)}^{x} \frac{\partial u}{\partial x}(\xi,y) d\xi - \int_{g(y)}^{x} \frac{\partial u}{\partial x}(\xi,0)) d\xi$$
$$= [u(\xi,y)]_{g(y)}^{x} - [\varphi(\xi)]_{g(y)}^{x}$$
$$= u(x,y) - u(g(y),y) - \varphi(x) + \varphi(g(y))$$
$$= u(x,y) - \psi(y) - \varphi(x) + \varphi(g(y)).$$

Nous en déduisons

$$u(x,y) = \psi(y) + \varphi(x) - \varphi(g(y)) + \iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta)) d\xi d\eta$$
$$= u_0(x,y) + \iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta)) d\xi d\eta,$$

où

$$u_0(x,y) = \psi(y) + \varphi(x) - \varphi(g(y)).$$

On a donc $u_0(x,0) = \psi(0) + \varphi(x) - \varphi(g(0))$, il en résulte que $u(x,0) = \varphi(x)$. De plus

$$u_0(g(y),y) = \psi(y) + \varphi(g(y)) - \varphi(g\ (y)) = \psi(y).$$

il en résulte que $u(g(y),y) = \psi(y)$. Donc u est solution de (P'_{int}).

Pour le calcul de

$$\iint_{D(x,y,g)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\xi d\eta$$

nous devons distinguer quatre cas :

le cas (1) : $(0 \leq y$ et $g\ \ (y) \leq x)$,

le cas (2) : $(0 \leq y$ et $x \leq g(y))$,

le cas (3) : $(\ y \leq 0$ et $x \leq g\ (y)\ ,$

le cas (4) : $(y \leq 0$ et $g(y) \leq x)$.

Traitons brièvement les autres cas :

b) Cas (2). Si $(0 \leq y$ et $x \leq g\,(y))$ alors

$$\iint_{D(x,y,g)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\xi d\eta = \int_x^{g(y)} \left(\int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\eta \right) d\xi = -\int_{g(y)}^x \left(\int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\eta \right) d\xi.$$

Cas (3). Si $(x \leq g(y)$ et $y \leq 0)$ alors

$$\iint_{D(x,y,g)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\xi d\eta = \int_x^{g(y)} \left(\int_y^0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\eta \right) d\xi = \int_{g(y)}^x \left(\int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\eta \right) d\xi.$$

Cas (4). Si $(y \leq 0$ et $g(y) \leq x)$ alors

$$\iint_{D(x,y,g)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\xi d\eta = \int_{g(y)}^x \left(\int_y^0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\eta \right) d\xi = -\int_{g(y)}^x \left(\int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\eta \right) d\xi.$$

Condition suffisante.

Si u vérifie (P'_{int}), on peut écrire, en supposant $g\,(y) \leq x$ et $0 \leq y$,

$$u(x,y) = u_0(x,y) + \iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta)) d\xi d\eta.$$

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{g(y)}^x \left(\int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\eta \right) d\xi = u_0(x,y) + \int_{g(y)}^x \left(\int_0^y F(\xi,\eta,u(\xi,\eta)) d\eta \right) d\xi \\ &= u_0(x,y) + \int_{g(y)}^x G(\xi,y) d\xi, \end{aligned}$$

où $G(\xi,y) = \int_0^y F(\xi,\eta,u(\xi,\eta)) d\eta$. G est une fonction continue de ξ et y, donc

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x,y) + G(x,y) = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x,y) + \int_0^y F(x,\eta,u(x,\eta)) d\eta$$

et par suite

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x}(x,y) + F(x,y,u(x,y))$$

et comme

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x}(x,y) = 0,$$

on a

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x,y)=F(x,y,u(x,y)).$$

Calculons encore $u(x,y)$ de la manière suivante

$$u(x,y)=u_0(x,y)+\int_0^y\left(\int_{g(y)}^x F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi\right)d\eta.$$

On a

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial u_0}{\partial y}(x,y)+\int_{g(y)}^x F(\xi,y,u(\xi,y))d\xi-g'(y)\int_0^y F(g(y),\eta,u(g(y),\eta))d\eta,$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y)=\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}(x,y)+F(x,y,u(x,y))=F(x,y,u(x,y)).$$

Finalement, on peut intervertir l'ordre des dérivations partielles et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)=F(x,y,u(x,y)).$$

De plus

$$u(g(y),y)=u_0(g(y),y)=\psi(y),$$

$$u\left(x,0\right)=u_0\left(x,0\right)=\varphi(x).$$

Ces résultats sont inchangés si on suppose $x\leq g\left(y\right)$ et $0\leq y$, donc u vérifie bien (P'_∞).

Si u est de classe C^1, la fonction $(x,y)\mapsto F(x,y,u(x,y))$ est de classe C^1, alors

$$W:(x,y)\mapsto u_0(x,y)+\int_{g(y)}^x\left(\int_0^y F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\eta\right)d\xi=u_0(x,y)+\int_{g(y)}^x G(\xi,y)d\xi,$$

admet une dérivée partielle en x de classe C^1, et

$$W:(x,y)\mapsto u_0(x,y)+\int_0^y\left(\int_{g(y)}^x F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi\right)d\eta=u_0(x,y)+\int_0^y H\left(x,\eta\right)d\eta$$

admet une dérivée partielle en y de classe C^1.

Comme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)(x,y)=F(x,y,u(x,y))=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)(x,y),$$

alors $u = W$ est de classe C^2.

On remarque de plus que

Si u est de classe C^n, la fonction $(x,y) \mapsto F(x,y,u(x,y))$ est de classe C^n, alors

$$W : (x,y) \mapsto u_0(x,y) + \int_{g(y)}^{x} \left(\int_0^y F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\eta \right) d\xi = u_0(x,y) + \int_{g(y)}^{x} G(\xi,y)d\xi,$$

admet une dérivée partielle en x de classe C^n, et

$$W : (x,y) \mapsto u_0(x,y) + \int_0^y \left(\int_{g(y)}^{x} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi \right) d\eta = u_0(x,y) + \int_0^y H\left(x,\eta\right) d\eta$$

admet une dérivée partielle en y de classe C^n.

Comme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)(x,y) = F(x,y,u(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)(x,y)$$

est de classe C^n alors $u = W$ est de classe C^{n+1}.

D'après le principe de récurrence u est donc de classe C^∞. $\square$

On a donc le

2.1.2.2. Corollaire

Si u est solution de (P'_{int}) (ou de (P'_∞)), alors u appartient à $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

2.1.2.3. Calcul des dérivées partielles d'ordre deux de u

Ce calcul sera utilisé au 6.2.

Supposons que u soit solution de (P'_{int}), $g\left(y\right) \leq x$ et $0 \leq y$.

Rappelons que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x,y) + G(x,y) = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x,y) + \int_0^y F(x,\eta,u(x,\eta))d\eta.$$

Comme : $\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x,y) = \varphi''(x)$, nous trouvons alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \varphi''(x) + \int_0^y \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,\eta,u(x,\eta)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,\eta,u(x,\eta))\frac{\partial u}{\partial x}(x,\eta) \right) d\eta.$$

Calculons encore $u(x,y)$ de la manière suivante

$$u(x,y) = u_0(x,y) + \int_0^y \left(\int_{g(y)}^x F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi \right) d\eta.$$

A partir de

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u_0}{\partial y}(x,y) + \int_{g(y)}^x F(\xi,y,u(\xi,y))d\xi - g'(y)\int_0^y F(g(y),\eta,u(g(y),\eta))d\eta$$

nous trouvons alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}(x,y) - 2g'(y)F(g(y),y,\psi(y)) - g''(y)\int_0^y F(g(y),\eta,u(g(y),\eta))d\eta$$
$$- \int_x^{g(y)} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\xi,y,u(\xi,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(\xi,y,u(\xi,y))\frac{\partial u}{\partial y}(\xi,y) \right) d\xi,$$

$$u_0(x,y) = \psi(y) + \varphi(x) - \varphi(g(y)),$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial y}(x,y) = \psi'(y) - \left[g'(y)\right]\varphi'(g(y)).$$

D'où

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}(x,y) = \psi''(y) - \left(g''(y)\varphi'(g(y)) + \left(g'(y)\right)^2 \varphi''(g(y)) \right).$$

□

2.2 Résolution du problème

2.2.1 Résolution de (P'_∞)

2.2.1.1. Théorème

Sous l'hypothèse (H) le problème (P'_∞) admet une unique solution u dans $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Démonstration.

a) Supposons : $0 \leq y$.

a1) Cas (1) $g(y) \leq x$.

D'après le théorème 2.1.2.1., résoudre (P'_∞) revient à résoudre (P'_{int}) c'est-à-dire à chercher $u \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R})$ vérifiant

$$u(x,y) = u_0(x,y) + \iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi d\eta, \qquad (4)$$

a11) Existence.

Pour tout compact de $\mathbb{R}^2$, nous pouvons trouver λ assez grand tel que ce compact soit contenu dans $K_\lambda = [g(-\lambda); g(\lambda)] \times [-\lambda; \lambda]$.

Nous cherchons u tel que

$$u(x,y) = u_0(x,y) + \iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta), u(\xi,\eta))d\xi d\eta.$$

Posons, conformément à l'hypothèse (H),

$$m_\lambda = \sup_{(\xi,\eta)\in K_\lambda;\ z\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial F}{\partial z}(\xi,\eta,z)\right|.$$

Définissons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(x,y) = u_0(x,y) + \iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,u_{n-1}(\xi,\eta))d\xi d\eta.$$

Posons pour tout compact $H \Subset \mathbb{R}^2$,

$$\|u_0\|_{\infty,H} = \sup_{(x,y)\in H} |u_0(x,y)|.$$

D'après le théorème des accroissements finis sous forme intégrale, nous pouvons écrire

$$F(\xi,\eta,t) - F(\xi,\eta,r) = (t-r)\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial z}(\xi,\eta,r+\sigma(t-r))d\sigma, \qquad (5)$$

d'où, pour tout $(\xi,\eta) \in D(x,y,g)$, on a

$$F(\xi,\eta,u_0(\xi,\eta)) - F(\xi,\eta,0) = u_0(\xi,\eta)\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial z}(\xi,\eta,\sigma u_0(\xi,\eta))d\sigma,$$

$$|F(\xi,\eta,u_0(\xi,\eta))| \leq |F(\xi,\eta,0)| + |u_0(\xi,\eta)| \int_0^1 m_\lambda d\sigma,$$

$$|F(\xi,\eta,u_0(\xi,\eta))| \leq |F(\xi,\eta,0)| + m_\lambda \|u_0\|_{\infty,K_\lambda}.$$

Posons

$$\Phi_\lambda = \|F(.,.,0)\|_{\infty,K_\lambda} + m_\lambda \|u_0\|_{\infty,K_\lambda},$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n = u_n - u_{n-1}.$$

Avec ces notations nous avons

$$V_1(x,y) = u_1(x,y) - u_0(x,y) = \iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,u_0(\xi,\eta))d\xi d\eta,$$

$$|V_1(x,y)| \leq \iint_{D(x,y,g)} |F(\xi,\eta,u_0(\xi,\eta))|\, d\xi d\eta \leq \Phi_\lambda \iint_{D(x,y,g)} d\xi d\eta,$$

$$|V_1(x,y)| \leq \Phi_\lambda A(x,y),$$

où $A(x,y) = \int\int_{D(x,y,g)} d\xi d\eta$ désigne l'aire du domaine $D(x,y,g)$.

De même

$$|V_2(x,y)| = |u_2(x,y) - u_1(x,y)| \leq \iint_{D(x,y,g)} |F(\xi,\eta,u_1(\xi,\eta)) - F(\xi,\eta,u_0(\xi,\eta))|\, d\xi d\eta.$$

Utilisant alors la relation (5) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&|F(\xi,\eta,u_1(\xi,\eta)) - F(\xi,\eta,u_0(\xi,\eta))| \\
&\qquad \leq |u_1(\xi,\eta) - u_0(\xi,\eta)| \times \left| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} F(\xi,\eta,u_1(\xi,\eta) + \sigma(u_1(\xi,\eta) - u_0(\xi,\eta)))d\sigma \right| \\
&\qquad \leq |u_1(\xi,\eta) - u_0(\xi,\eta)|\, m_\lambda \\
&\qquad \leq |V_1(\xi,\eta)|\, m_\lambda .
\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
|V_2(x,y)| &\leq \iint_{D(x,y,g)} m_\lambda |u_1(\xi,\eta) - u_0(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta \\
&\leq m_\lambda \iint_{D(x,y,g)} |V_1(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta \leq m_\lambda \Phi_\lambda \iint_{D(x,y,g)} A(\xi,\eta) d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que

$$A(x,y) \leq |g(y)-x|\, y \leq (g(\lambda)-g(-\lambda))\, y,$$

et, avec $(g(\lambda)-g(-\lambda)) = 2\lambda'$, on obtient

$$\begin{aligned}
|V_2(x,y)| &\leq m_\lambda \Phi_\lambda \iint_{D(x,y,g)} A(\xi,\eta) d\xi d\eta \leq m_\lambda \Phi_\lambda \iint_{D(x,y,g)} (2\lambda')\eta d\xi d\eta \\
&\leq m_\lambda \Phi_\lambda \int_0^y \Big(\int_0^{2\lambda} (2\lambda')\eta d\xi \Big) d\eta \\
&\leq m_\lambda \Phi_\lambda \left((2\lambda')^2 \frac{y^2}{2} \right).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\forall (\xi,\eta) \in D(x,y,g),\ |V_2(\xi,\eta)| \leq m_\lambda \Phi_\lambda \left((2\lambda')^2 \frac{\eta^2}{2} \right).$$

De même

$$|V_3(x,y)| = |u_3(x,y) - u_2(x,y)| \leq \iint_{D(x,y,g)} |F(\xi,\eta,u_1(\xi,\eta)) - F(\xi,\eta,u_2(\xi,\eta))|\, d\xi d\eta,$$

$$\begin{aligned}
|V_3(x,y)| &\leq \iint_{D(x,y,g)} m_\lambda\, |u_1(\xi,\eta) - u_2(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta \leq m_\lambda \iint_{D(x,y,g)} |V_2(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta \\
&\leq m_\lambda \iint_{D(x,y,g)} m_\lambda \Phi_\lambda \left((2\lambda')^2 \frac{\eta^2}{2} \right) d\xi d\eta \\
&\leq m_\lambda^2 \Phi_\lambda \int_0^y \Big(\int_{g-(\lambda)}^{g(\lambda)} (2\lambda')^2 \frac{\eta^2}{2} d\xi \Big) d\eta \leq m_\lambda^2 \Phi_\lambda \left((2\lambda')^3 \frac{y^3}{3!} \right).
\end{aligned}$$

Par récurrence

$$|V_n(x,y)| \leq m_\lambda^{n-1} \Phi_\lambda \left((2\lambda')^n \frac{y^n}{n!} \right).$$

D'où

$$\|V_n\|_{\infty, K_\lambda} \leq m_\lambda^{n-1} \Phi_\lambda \frac{[(2\lambda')\lambda]^n}{n!} = \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda} \frac{[(2\lambda') m_\lambda \lambda]^n}{n!}$$

ce qui assure la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geq 1} V_n$ sur K_λ et par suite sur tout compact de $\mathbb{R}^2$.

On a $\sum_{k=1}^{k=n} V_k = u_n - u_0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur K_λ vers une fonction u. Comme chaque u_n est continue, la limite uniforme u est continue sur tout compact K_λ donc sur $\mathbb{R}^2$.

Posons $\varepsilon_n(x,y) = u(x,y) - u_n(x,y)$ alors

$$\begin{aligned} u(x,y) - u_0(x,y) - &\iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi d\eta \\ &= u(x,y) - u_n(x,y) + \left(u_n(x,y) - u_0(x,y) - \iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi d\eta\right) \\ &= \varepsilon_n(x,y) - \iint_{D(x,y,g)} \left(F(\xi,\eta,u(\xi,\eta)) - F(\xi,\eta,u_{n-1}(\xi,\eta))\right) d\xi d\eta \ , \end{aligned}$$

comme pour tout $(\xi,\eta) \in D(x,y,g)$,

$$|F(\xi,\eta,u(\xi,\eta)) - F(\xi,\eta,u_n(\xi,\eta))| \leq |u(\xi,\eta) - u_{n-1}(\xi,\eta)|\, m_\lambda,$$

le second membre de l'égalité précédente est majoré par

$$\left(\sup_{(x,y)\in K_\lambda} |\varepsilon_n(x,y)|\right) + m_\lambda \left(\sup_{(x,y)\in K_\lambda} A(x,y)\right)\left(\sup_{(x,y)\in K_\lambda} |u(x,y) - u_{n-1}(x,y)|\right),$$

c'est-à-dire par

$$\left(\sup_{(x,y)\in K_\lambda} |\varepsilon_n(x,y)|\right) + m_\lambda \left(2\lambda' \times \lambda\right)\left(\sup_{(x,y)\in K_\lambda} |\varepsilon_{n-1}(x,y)|\right),$$

qui tend donc vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il en résulte donc que

$$u(x,y) = u_0(x,y) + \iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi d\eta$$

pour $(x,y) \in K_\lambda \cap \{(x,y), 0 \leq y, g\,(y) \leq x\} = K_{1,\lambda}^{-}$.

a12) Unicité.

Soit W une autre solution de

$$u(x,y) = u_0(x,y) + \iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi d\eta.$$

Posant : $\Delta = W - u$, nous obtenons

$$\Delta(x,y) = \iint_{D(x,y,g)} \left(F(\xi,\eta,W(\xi,\eta)) - F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))\right) d\xi d\eta.$$

Soit $(x,y) \in K_\lambda$, puisque $D(x,y,g) \subset K_\lambda$, nous avons

$$|\Delta(x,y)| \leq \iint_{D(x,y,g)} m_\lambda \left|W(\xi,\eta) - u(\xi,\eta)\right| d\xi d\eta \leq m_\lambda \iint_{D(x,y,g)} |\Delta(\xi,\eta)| \, d\xi d\eta.$$

Comme $g(y) \leq x$

$$\begin{aligned}
|\Delta(x,y)| &\leq m_\lambda \int_{g(y)}^{x} \int_0^y |\Delta(\xi,\eta)| \, d\eta d\xi \leq m_\lambda \int_{g(-\lambda)}^{g(\lambda)} \int_0^y |\Delta(\xi,\eta)| \, d\eta d\xi \\
&\leq m_\lambda \int_0^y \Big(\int_{g(-\lambda)}^{g(\lambda)} |\Delta(\xi,\eta)| \, d\xi\Big) d\eta \\
&\leq m_\lambda \int_0^y \Big(\int_{g(-\lambda)}^{g(\lambda)} \sup_{\xi \in [0;2\lambda]} |\Delta(\xi,\eta)| \, d\xi\Big) d\eta.
\end{aligned}$$

Pour tout $y \in [0,\lambda]$ posons

$$E(y) = \sup_{\xi \in [0;2\lambda]} |\Delta(\xi,y)|,$$

alors

$$|\Delta(x,y)| \leq m_\lambda \left| \int_0^y \int_{-g(-\lambda)}^{g(\lambda)} E(\eta) d\xi d\eta \right| \leq m_\lambda 2\lambda' \left| \int_0^y E(\eta) d\eta \right|,$$

de sorte que

$$\forall Y \in y \in [0; f(\lambda)], E(y) \leq m_\lambda 2\lambda' \left| \int_0^y E(\eta) d\eta \right|,$$

ainsi d'après le lemme de GRONWALL : $E = 0$ d'où $\Delta = 0$, ce qui prouve l'unicité de u dans $K_{1,\lambda}^-$, solution que nous noterons v_λ^-.

a2) Cas (2) : $x \leq g(y)$.

On a

$$\iint_{D(x,y,g)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\xi d\eta = \int_x^{g(y)} \left(\int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\eta \right) d\xi = -\int_{g(y)}^{x} \left(\int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\eta \right) d\xi.$$

Ce cas se traite donc de façon semblable.

b) $y \leq 0$.

Dans le cas $y \leq 0$ faisons le changement de variables

$$\begin{cases} X = -x \\ Y = -y \end{cases}$$

c'est-à-dire que nous inversons le sens des axes (symétrie de centre O). Alors on a : $Y \geq 0$ et : $h(Y) = -g(-Y)$. Le compact $Q_\lambda = [h(-\lambda); h(\lambda)] \times [-\lambda; \lambda]$ est le transformé de K_λ et $h(\lambda) = -g(-\lambda)$.

On a donc maintenant

$$\begin{cases} g\,(y) \leq x \Leftrightarrow Y \geq h(X)\,;\, \mathfrak{D}(X,Y,h) = D(-X,-Y,g) = rectangle(MNQP)\,; \\ g\,(y) \geq x \Leftrightarrow Y \leq h(X)\,;\, \mathfrak{D}(X,Y,h) = D(-X,-Y,g) = rectangle(MPQN). \end{cases}$$

b1) Si $x \leq g\,(y)$ alors

$$\iint_{D(x,y,g)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\xi d\eta = \int_x^{g(y)} \left(\int_y^0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\eta \right) d\xi = \int_{g(y)}^x \left(\int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\eta \right) d\xi.$$

b2) Si $g\,(y) \leq x$ alors

$$\iint_{D(x,y,g)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\xi d\eta = \int_{g(y)}^x \left(\int_y^0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\eta \right) d\xi = -\int_{g(y)}^x \left(\int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) d\eta \right) d\xi.$$

Le changement de variables donne alors

$$u(x,y) = u(-X,-Y) = u_0(-X,-Y) + \iint_{D(-X,-Y,g)} F(-\xi,-\eta,u(-\xi,-\eta)) d\xi d\eta,$$

qui est de la forme

$$U(X,Y) = U_0(X,Y) + \iint_{\mathfrak{D}(X,Y,h)} \mathfrak{F}(\xi,\eta,u(\xi,\eta)) d\xi d\eta.$$

La résolution se traite donc comme les cas précédents avec

$$\|V_n\|_{\infty,K_\lambda} \leq m_\lambda^{n-1}\Phi_\lambda \frac{[(2\lambda)h(\lambda)]^n}{n!} = \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda}\frac{[(2\lambda')m_\lambda\lambda]^n}{n!} \leq \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda}\frac{[(2\lambda')m_\lambda\lambda]^n}{n!},$$

$$u(x,y) = U(-x,-y).$$

c) Existence d'une solution globale.

Nous avons quatre cas :

le cas : $(0 \leq y$ et $g(y) \leq x)$ et le cas : $(0 \leq y$ et $x \leq g(y))$,

le cas : $(y \leq 0$ et $x \leq g(y))$ et le cas : $(y \leq 0$ et $g(y) \leq x)$.

Finalement, si on pose

$$K_{1,\lambda}^- = K_\lambda \cap \{(x,y) : 0 \leq y \text{ et } g(y) \leq x\},$$

$$K_{2,\lambda}^+ = K_\lambda \cap \{(x,y) : y \leq 0 \text{ et } x \leq g(y)\},$$

$$K_{1,\lambda}^+ = K_\lambda \cap \{(x,y) : 0 \leq y \text{ et } x \leq g(y)\},$$

$$K_{2,\lambda}^- = K_\lambda \cap \{(x,y) : y \leq 0 \text{ et } g(y) \leq x\}$$

et si on appelle

v_λ^- la solution dans $K_{1,\lambda}^-$,

w_λ^+ la solution dans $K_{2,\lambda}^+$,

v_λ^+ la solution dans $K_{1,\lambda}^+$,

w_λ^- la solution dans $K_{2,\lambda}^-$, on peut alors poser

$$u_\lambda(x,y) = \begin{cases} v_\lambda^-(x,y) \text{ pour } (x,y) \in K_{1,\lambda}^- \\ w_\lambda^+(x,y) \text{ pour } (x,y) \in K_{2,\lambda}^+ \\ v_\lambda^+(x,y) \text{ pour } (x,y) \in K_{1,\lambda}^+ \\ w_\lambda^-(x,y) \text{ pour } (x,y) \in K_{2,\lambda}^-. \end{cases} \qquad (6)$$

v_λ^- et v_λ^+ se raccordent sur γ car $v_\lambda^-(g(y,y)) = v_\lambda^+(g(y,y)) = \psi(y)$,

w_λ^- et w_λ^+ se raccordent sur γ car $w_\lambda^-(g(y,y)) = w_\lambda^+(g(y,y)) = \psi(y)$,

w_λ^- et v_λ^- se raccordent sur $(y=0)$ car $v_\lambda^-(x,0) = w_\lambda^-(x,0) = \varphi(x)$,

w_λ^+ et v_λ^+ se raccordent sur $(y=0)$ car $v_\lambda^+(x,0) = w_\lambda^+(x,0) = \varphi(x)$,

ce qui assure l'existence et l'unicité de la solution u_λ dans $K_\lambda = K_{1,\lambda}^- \cup K_{2,\lambda}^+ \cup K_{1,\lambda}^+ \cup K_{2,\lambda}^-$.

d) Il reste à prouver que ce procédé donne bien une solution globale continue u dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qui vérifie (P'_{int}).

Si $\lambda_2 > \lambda_1$ alors $K_{\lambda_1} \subset K_{\lambda_2}$; il faut donc encore montrer que $u_{\lambda_2 | K_{\lambda_1}} = u_{\lambda_1}$.

Or

$$\forall (x,y) \in K_{\lambda_2},\ u_{\lambda_2}(x,y) = u_0(x,y) + \iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,u_{\lambda_2}(\xi,\eta))d\xi d\eta$$

et cette égalité a lieu *a fortiori* pour $(x,y) \in K_{\lambda_1}$. On a donc

$$u_{\lambda_2 | K_{\lambda_1}}(x,y) = u_0(x,y) + \iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,u_{\lambda_2 | K_{\lambda_1}}(\xi,\eta))d\xi d\eta.$$

Autrement dit : $u_{\lambda_2 | K_{\lambda_1}}$ vérifie (4) dans K_{λ_1} et y coïncide donc avec son unique solution u_{λ_1}.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on peut alors poser

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u_\lambda(x,y) \\ &= u_0(x,y) + \iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi d\eta \quad (7) \end{aligned}$$

où u_λ vérifie (4) dans K_λ et $(x,y) \in K_\lambda$.

La définition de u par (7) étant indépendante du compact K_λ donne finalement la solution globale unique de (P'_{int}) ou (P'_∞). $\Box$

Au chapitre 6, on aura besoin des estimations précisées par le résultat suivant.

2.2.1.2. Proposition

Avec les notations précédentes, pour tout compact $K \Subset \mathbb{R}^2$, il existe $K_\lambda \Subset \mathbb{R}^2$, contenant K, tel que

(i) $m_\lambda = \sup\limits_{(x,y)\in K_\lambda;\ t\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,t)\right|$; $\Phi_\lambda = \|F(.,.,0)\|_{\infty,K_\lambda} + m_\lambda \|u_0\|_{\infty,K_\lambda}$;

(ii) $\|u\|_{\infty,K} \leq \|u\|_{\infty,K_\lambda} \leq \|u_0\|_{\infty,K_\lambda} + \dfrac{\Phi_\lambda}{m_\lambda}\exp[2\lambda' m_\lambda \lambda]$.

Démonstration.

On a

$$u_n(x,y) = u_0(x,y) + \iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,u_{n-1}(\xi,\eta))d\xi d\eta, \quad n \geq 1,$$

$$u_0(x,y) = \psi(y) + \varphi(x) - \varphi(g(y)),$$

$$u_\lambda(x,y) = \begin{cases} v_\lambda^-(x,y) \text{ pour } (x,y) \in K_{1,\lambda}^- \\ w_\lambda^+(x,y) \text{ pour } (x,y) \in K_{2,\lambda}^+ \\ v_\lambda^+(x,y) \text{ pour } (x,y) \in K_{1,\lambda}^+ \\ w_\lambda^-(x,y) \text{ pour } (x,y) \in K_{2,\lambda}^-. \end{cases}$$

Comme

$$\Phi_\lambda = \|F(.,.,0)\|_{\infty,K_\lambda} + m_\lambda \|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda},$$

$$V_n = u_n - u_{n-1},$$

d'après la démonstration du théorème 2.2.1.1., nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|V_n\|_{\infty,K_{1,\lambda}^-} \leq m_\lambda^{n-1}\Phi_\lambda \frac{[(2\lambda')\lambda]^n}{n!} = \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda}\frac{[[2\lambda' m_\lambda \lambda]]^n}{n!}$$

et par conséquent

$$\|u\|_{\infty,K_{1,\lambda}^-} \leq \|u_0\|_{\infty,K_{1,\lambda}^-} + \sum_{n=1}^{\infty} \|V_n\|_{\infty,K_{1,\lambda}^-} \leq \|u_0\|_{\infty,K_{1,\lambda}^-} + \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda} \exp[[2\lambda' m_\lambda \lambda]].$$

On en déduit que

$$\|u\|_{\infty,K_{1,\lambda}^-} \leq \|u_0\|_{\infty,K_{1,\lambda}^-} + \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda} \exp[2\lambda' m_\lambda \lambda]]$$

et de même

$$\|u\|_{\infty,K_{2,\lambda}^+} \leq \|u_0\|_{\infty,K_{2,\lambda}^+} + \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda} \exp[2\lambda' m_\lambda \lambda],$$
$$\|u\|_{\infty,K_{1,\lambda}^+} \leq \|u_0\|_{\infty,K_{1,\lambda}^+} + \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda} \exp[2\lambda' m_\lambda \lambda],$$
$$\|u\|_{\infty,K_{2,\lambda}^-} \leq \|u_0\|_{\infty,K_{2,\lambda}^-} + \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda} \exp[2\lambda' m_\lambda \lambda].$$

Donc

$$\|u\|_{\infty,K_\lambda} \leq \|u_0\|_{\infty,K_\lambda} + \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda} \exp[2\lambda' m_\lambda \lambda],$$

d'où

$$\|u\|_{\infty,K} \leq \|u\|_{\infty,K_\lambda} \leq \|u_0\|_{\infty,K_\lambda} + \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda} \exp[2\lambda' m_\lambda \lambda].$$

□

Deuxième partie

Algèbres de fonctions généralisées

Chapitre 3

Les algèbres de fonctions généralisées

Les algèbres de fonctions généralisées sont l'outil adéquat pour résoudre les problèmes différentiels non linéaires à données irrégulières. Pour choisir une structure algébrique adaptée au problème de Cauchy considéré nous utilisons les résultats et les notations de Marti [8], [9], [10] et [11].

3.1 Les $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$ algèbres

3.1.1 Structure algébrique

3.1.1.1. Notations

a) On se donne :

1. un ensemble Λ d'indices,

2. un sous-anneau A de l'anneau $\mathbb{K}^{\Lambda}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$),

3. $A_+ = \{(r_\lambda)_\lambda \in A, r_\lambda \geq 0\}$,

4. la propriété suivante de "stabilité par majoration" pour A :

Si la famile $(s_\lambda)_\lambda \in \mathbb{K}^\Lambda$ vérifie :

$(|s_\lambda|)_\lambda \leq (r_\lambda)_\lambda$ (i.e. : pour tout λ, $|s_\lambda| \leq r_\lambda$) où $(r_\lambda)_\lambda \in A_+$, alors $(s_\lambda)_\lambda$ appartient à A,

5. un idéal I_A de A avec la même propriété,

6. un faisceau $\mathcal{E}$ de $\mathbb{K}$-algèbres topologiques sur un espace topologique X, tel que pour chaque ouvert Ω de X, la topologie de $\mathcal{E}(\Omega)$ soit définie par la famille $\mathcal{P}(\Omega) = (p_i)_{i \in I(\Omega)}$ de semi-normes vérifiant

$$\forall i \in I(\Omega), \exists (j,k,C) \in I(\Omega) \times I(\Omega) \times \mathbb{R}_+^*, \forall f,g \in \mathcal{E}(\Omega) : p_i(fg) \leq C p_j(f) p_k(g),$$

7. si Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts de X tels que $\Omega_1 \subset \Omega_2$, alors
$I(\Omega_1) \subset I(\Omega_2)$ et si ρ_1^2 est l'opérateur de restriction $\mathcal{E}(\Omega_2) \to \mathcal{E}(\Omega_1)$ pour tout $p_i \in \mathcal{P}(\Omega_1)$ la semi-norme $\widetilde{p_i} = p_i \circ \rho_1^2$ prolonge p_i à $\mathcal{P}(\Omega_2)$.

8. Soit $\mathcal{F} = (\Omega_h)_{h \in H}$ une famille quelconque d'ouverts de X et $\Omega = \underset{h \in H}{\cup} \Omega_h$. Alors, pour tout $p_i \in \mathcal{P}(\Omega)$, $i \in I(\Omega)$, il existe une sous famille finie de $\mathcal{F}$: $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_{n(i)}$ et des semi-normes $p_1 \in \mathcal{P}(\Omega_1), p_2 \in \mathcal{P}(\Omega_2), ..., p_{n(i)} \in \mathcal{P}(\Omega_{n(i)})$, telles que, pour tout $u \in \mathcal{E}(\Omega)$

$$p_i(u) \leq p_1\left(u_{|\Omega_1}\right) + p_2\left(u_{|\Omega_2}\right) + ... + p_{n(i)}\left(u_{|\Omega_{n(i)}}\right)$$

b) On pose alors

$$\mathcal{H}_{(A,\mathcal{E},\mathcal{P})}(\Omega) = \{(u_\lambda)_\lambda \in [\mathcal{E}(\Omega)]^\Lambda : \forall i \in I(\Omega), ((p_i(u_\lambda))_\lambda \in A_+\}$$

$$\mathcal{J}_{(I_A,\mathcal{E},\mathcal{P})}(\Omega) = \left\{(u_\lambda)_\lambda \in [\mathcal{E}(\Omega)]^\Lambda : \forall i \in I(\Omega), (p_i(u_\lambda))_\lambda \in I_A^+\right\}$$

$$\mathcal{C} = A/I_A.$$

c) Remarque : On voit aisément que A_+ n'est pas un sous-anneau de A, mais qu'il est stable pour l'addition et le produit. Il en est de même pour I_A^+.

3.1.1.2. Proposition

Si $|A| = \left\{(|r_\lambda|)_\lambda \in \mathbb{R}_+^\Lambda : (r_\lambda)_\lambda \in A\right\}$ *et* $|I_A| = \left\{(|r_\lambda|)_\lambda \in \mathbb{R}_+^\Lambda : (r_\lambda)_\lambda \in I_A\right\}$ *sont respectivement des sous ensembles de* A *et de* I_A *alors* $|A| = A_+$ *et* $|I_A| = I_A^+$.

Démonstration évidente car on a manifestement $A_+ \subset |A|$ et $I_A^+ \subset |I_A|$.

3.1.1.3. Proposition. Voir [12] **et** [13].

Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a :

(i) $\mathcal{H}_{(A,\mathcal{E},\mathcal{P})}$ *est un faisceau de sous algèbres du faisceau* ε^Λ *;*

(ii) $\mathcal{J}_{(I_A,\mathcal{E},\mathcal{P})}$ *est un faisceau d'idéaux de* $\mathcal{H}_{(A,\mathcal{E},\mathcal{P})}$.

Démonstration abrégée.

On utilise le fait que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^\Lambda$ sont déjà des faisceaux d'algèbres. En utilisant la donnée 7, on montre que $\mathcal{H}_{(A,\mathcal{E},\mathcal{P})}$ (et $\mathcal{J}_{(I_A,\mathcal{E},\mathcal{P})}$) est un préfaisceau (propriété de restriction). La localisation n'exige pas d'hypothèse mais, pour le recollement des morceaux, on utilise la donnée 8 qui est une généralisation de ce qui se passe pour $\mathcal{E} = \mathrm{C}^\infty$.

3.1.1.4. Proposition

Sous les hypothèses de la proposition précédente on a :

le faisceau constant $\mathcal{H}_{(A,\mathbb{K},|.|)}/\mathcal{J}_{(I_A,\mathbb{K},|.|)}$ *est exactement le faisceau* $\mathcal{C} = A/I_A$.

Démonstration évidente à partir de $\mathcal{H}_{(A,\mathbb{K},|.|)} = A$ et $\mathcal{J}_{(I_A,\mathbb{K},|.|)} = I_A$.

3.1.1.5. Définition

On peut donc appeler $(\mathcal{C},\mathcal{E},\mathcal{P})$*-algèbre l'algèbre quotient*

$$\mathcal{A} = \mathcal{H}_{(A,\mathcal{E},\mathcal{P})}/\mathcal{J}_{(I_A,\mathcal{E},\mathcal{P})}$$

et on note $[u_\lambda]$ *la classe définie par le représentant* $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

3.1.1.6. Remarque

Dans le contexte des $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$-algèbres, il est démontré que si $|A| = A_+$, alors

$$\mathcal{H}_{(A,\mathbb{K},|\,.\,|)}/\mathcal{J}_{(I_A,\mathbb{K},|\,.\,|)} = A/I_A = \mathcal{C}.$$

Mais le premier terme est *a priori* une $(\mathcal{C}, \mathbb{K}, |\,.\,|)$-algèbre et le second un anneau de constantes généralisées, qui se trouve donc être aussi une algèbre. En fait, on peut le voir directement au moyen de la proposition suivante :

3.1.1.7. Proposition

Si A est un sous anneau de $\mathbb{K}^\Lambda$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), stable par majoration, avec en plus $|A| = A_+$, alors A est une $\mathbb{K}$-sous algèbre de $\mathbb{K}^\Lambda$.

Démonstration.

Il suffit de démontrer que A reste stable par multiplication avec les éléments de $\mathbb{K}$.

On prend donc s dans $\mathbb{K}$ et $(r_\lambda)_\lambda$ dans A. Mais $\mathbb{K}^\Lambda$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dans lequel on a

$$s.\,(r_\lambda)_\lambda = (s_\lambda)_\lambda\,(r_\lambda)_\lambda = (sr_\lambda)_\lambda\,.$$

Mais encore il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $|s| \leq n$ de sorte que

$$|sr_\lambda| \leq |nr_\lambda| = |r_\lambda + ... + r_\lambda| = |\tau_\lambda|$$

où $\tau_\lambda \in A$.

On a donc $|sr_\lambda| \in |A|$ et comme $|A| = A_+$, on a bien $s.\,(r_\lambda)_\lambda \in A$. $\square$

3.1.2 Opérations et propriétés

3.1.2.1. Anneaux surgénérés

Dans la pratique, l'anneau A et l'idéal I_A sont surgénérés par des familles finies d'éléments selon la définition suivante :

Soit

$$B_p = \left\{ (r_{n,\lambda})_\lambda \in (\mathbb{R}_+^*)^\Lambda, n = 1, 2, ..., p \right\}$$

et B l'ensemble des éléments de $(\mathbb{R}_+^*)^\Lambda$ obtenus comme produits, quotients et combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{R}_+^*$, des éléments de B_p. On définit

$$A = \left\{ (a_\lambda)_\lambda \in \mathbb{K}^\Lambda : \exists \, (b_\lambda)_\lambda \in B, |a_\lambda| \leq b_\lambda \right\}.$$

Il est aisé de voir que A est un sous anneau de $\mathbb{K}^\Lambda$ stable par majoration et qu'en plus $A_+ = |A|$, d'où :

3.1.2.2. Définition

Dans la situation précédente A est dit surgénéré par B_p. Si I_A est un idéal de A avec la même propriété de stabilité par majoration, on dit que $\mathcal{C} = A/I_A$ est surgénéré par B_p.

3.1.2.3. Exemple

Comme idéal "canonique" de A on peut prendre

$$I_A = \left\{ (a_\lambda)_\lambda \in \mathbb{K}^\Lambda : \forall \, (b_\lambda)_\lambda \in B, |a_\lambda| \leq b_\lambda \right\}.$$

3.1.2.4. Le procédé d'association

Supposons Λ filtrant à gauche pour la relation d'ordre partiel donnée $\prec$.

Notons :

- Ω un ouvert quelconque de X,
- E un faisceau de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels topologiques contenant $\mathcal{E}$ comme sous-faisceau,
- Φ une application de Λ vers $\mathbb{K}$ telle que $(\Phi(\lambda))_\lambda = (\Phi_\lambda)_\lambda$ soit un élément de A.

Supposons aussi :

$$\mathcal{J}_{(I_A,\mathcal{E},\mathcal{P})}(\Omega) \subset \left\{ (u_\lambda)_\lambda \in \mathcal{H}_{(A,\mathcal{E},\mathcal{P})}(\Omega) : \lim_{\substack{E(\Omega)\\ \Lambda}} u_\lambda = 0 \right\}.$$

Alors, pour $u = [u_\lambda]$ et $v = [v_\lambda] \in \mathcal{E}(\Omega)$, on définit la Φ-E association.

3.1.2.5. Définition

On note :

$$u \underset{E(\Omega)}{\overset{\Phi}{\approx}} v$$

la Φ-E association entre u et v définie par :

$$\lim_{\substack{E(\Omega)\\ \Lambda}} \Phi_\lambda(u_\lambda - v_\lambda) = 0.$$

C'est-à-dire, pour chaque voisinage V de 0 pour la E-topologie, il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que :

$$\lambda \prec \lambda_0 \Longrightarrow \Phi_\lambda(u_\lambda - v_\lambda) \in V.$$

Pour vérifier que la condition ci-dessus est indépendante des représentants de u et v, nous devons montrer que si $\lim_{\substack{E(\Omega)\\ \Lambda}} \Phi_\lambda(w_\lambda) = 0$ pour $(w_\lambda)_\lambda \in \mathcal{H}_{(A,\mathcal{E},\mathcal{P})}(\Omega)$, alors, pour tout $(i_\lambda)_\lambda \in \mathcal{J}_{(I_A,\mathcal{E},\mathcal{P})}(\Omega)$, $\lim_{\substack{E(\Omega)\\ \Lambda}} \Phi_\lambda(w_\lambda + i_\lambda) = 0$.

Pour prouver cette dernière condition, il suffit de montrer que :

$$(\Phi_\lambda i_\lambda)_\lambda \in \mathcal{J}_{(I_A,\mathcal{E},\mathcal{P})}(\Omega).$$

Mais pour chaque $i \in I(\Omega)$, nous avons $p_i(\Phi_\lambda(i_\lambda)) = |\Phi_\lambda|\, p_i(i_\lambda)$. Et compte tenu des définitions et de la propriété de stabilité données ci-dessus, nous avons $|\Phi_\lambda|_\lambda \in A_+$ et $(p_i(i_\lambda))_\lambda \in I_A^+$. Alors nous avons aussi $(|\Phi_\lambda|\, p_i(i_\lambda))_\lambda \in I_A^+$, ce qui montre la condition voulue.

3.1.2.6. Remarque

Nous pouvons aussi définir un procédé d'association entre $u = [u_\lambda] \in E(\Omega)$ *et* $T \in E(\Omega)$ *en écrivant simplement*

$$u \sim T \Longleftrightarrow \lim_{\substack{E(\Omega) \\ \Lambda}} u_\lambda = T.$$

Alors, en prenant $E = \mathcal{D}'$, $\mathcal{E} = \mathrm{C}^\infty$, $\Lambda =]0,1]$, nous retrouvons le procédé d'association défini dans la littérature [1] et [3].

3.1.2.7. Remarque : Relation entre anneau unitaire et injection

Il est montré dans [11] qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un morphisme canonique de faisceau d'algèbres de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{A}$ est que l'anneau A soit unitaire. Si, de plus

$$I_A \subset \left\{ (a_\lambda)_\lambda \in A : \lim_{\Lambda} a_\lambda = 0 \right\}$$

et, pour chaque Ω, la $\mathcal{P}(\Omega)$ topologie de $\mathcal{E}(\Omega)$ est séparée, ce morphisme est injectif.

3.2 Une algèbre adaptée au problème de Cauchy généralisé

La première étape est de relier le problème et ses données à des paramètres algébriques et topologiques permettant la construction d'une $(\mathcal{C},\mathcal{E},\mathcal{P})$ algèbre appropriée.

3.2.1 Le faisceau $\mathcal{A}$

3.2.1.1. Définition

Nous choisissons $\mathcal{E} = \mathrm{C}^\infty$, $X = \mathbb{R}^d$ pour $d = 1, 2$, $E = \mathcal{D}'$ et $\Lambda =]0,1]$. Pour tout Ω, ouvert de $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{E}(\Omega)$ est muni de la $\mathcal{P}(\Omega)$ topologie de la convergence uniforme de toutes les dérivées sur les espaces compacts de Ω. Cette topologie peut être définie par la famille de semi-normes $P_{K,l}(u_\varepsilon) = \sup\limits_{|\alpha|\leq l}\left(\sup\limits_{x\in K}|D^\alpha u_\varepsilon(x)|\right)$ avec $K \Subset \Omega$ et $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_d}}{\partial z_1^{\alpha_1}\ldots\partial z_d^{\alpha_d}}$ pour $z = (z_1,...,z_d) \in \Omega$, $l \in \mathbb{N}$ et $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_d) \in \mathbb{N}^d$.

On vérifie qu'elle est compatible avec la structure d'algèbre de $\mathcal{E}(\Omega)$ car :

$$\forall K \Subset \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \exists C > 0, \forall f,g \in \mathrm{C}^\infty(\Omega), P_{K,l}(fg) \leq P_{K,l}(f)P_{K,l}(g).$$

On pose : $P_{K,\alpha}(u_\varepsilon) = \sup\limits_{x\in K}|D^\alpha u_\varepsilon(x)|$, donc : $P_{K,l}(u_\varepsilon) = \sup\limits_{|\alpha|\leq l}(P_{K,\alpha}(u_\varepsilon))$.

On prend $\Lambda =]0,1]$ et on indexe par ε au lieu de λ.

Soit A un sous anneau de l'anneau $\mathbb{R}^\Lambda$ des familles de réels muni des lois habituelles et I_A un idéal de A tels que A et I_A soient stables par majoration. On suppose que $(1)_\varepsilon \in A$.

Pour simplifier, on notera $\mathcal{X} = \mathcal{H}_{(A,\mathrm{C}^\infty,\mathcal{P})}$, $\mathcal{N} = \mathcal{J}_{(I_A,\mathrm{C}^\infty,\mathcal{P})}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{X}/\mathcal{N}$.

On pose :

$$\mathcal{X}(\Omega) = \left\{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in [\mathrm{C}^\infty(\Omega)]^\Lambda : \forall K \Subset \Omega, \forall l \in \mathbb{N},\ (P_{K,l}(u_\varepsilon))_\varepsilon \in A_+\right\},$$
$$\mathcal{N}(\Omega) = \left\{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in [\mathrm{C}^\infty(\Omega)]^\Lambda : \forall K \Subset \Omega, \forall l \in \mathbb{N},\ (P_{K,l}(u_\varepsilon))_\varepsilon \in I_A^+\right\}.$$

L'anneau des constantes généralisées associé à l'algèbre quotient n'est autre que l'anneau quotient $\mathcal{C} = A/I_A$. Enfin, la dérivation généralisée $D^\alpha : u(= [u_\varepsilon]) \mapsto D^\alpha u = [D^\alpha u_\varepsilon]$, muni $\mathcal{A}(\Omega)$ d'une structure d'algèbre différentielle.

3.2.1.2. Exemple

Si on considère :

$$A = \mathbb{R}_M^\Lambda = \left\{(m_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathbb{R}^\Lambda : \exists p \in \mathbb{R}_+^*, \exists C \in \mathbb{R}_+^*, \exists \mu \in]0,1], \forall \varepsilon \in]0,\mu], |m_\varepsilon| \leq C\varepsilon^{-p}\right\}$$

et l'idéal :

$$I_A = \left\{(m_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathbb{R}^\Lambda : \forall q \in \mathbb{R}_+^*, \exists D \in \mathbb{R}_+^*, \exists \mu \in]0,1], \forall \varepsilon \in]0,\mu], |m_\varepsilon| \leq D\varepsilon^q\right\},$$

alors $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^d\right) = \mathcal{G}\left(\mathbb{R}^d\right)$ est l'algèbre des fonctions généralisées de Colombeau.

3.2.2 Stabilité de $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ par une application

On étend la notation $F(.,.,u)$ au cas où u est une fonction généralisée de la variable x, $x \in \mathbb{R}^2$ et $F \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, de la manière suivante :

3.2.2.1. Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $F \in \mathrm{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. *On dit que l'algèbre* $\mathcal{A}(\Omega)$ *est* ***stable*** *par* F *si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) Pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$*, pour tout* $l \in \mathbb{N}$*, pour tout* $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)^{]0,1]}$*, il existe une suite finie positive* C_1*,* C_2*, ...,* C_l*, telle que :*

$$P_{K,l}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq \sum\nolimits_{i=0}^{l} C_i P_{K,l}^{i}(u_\varepsilon);$$

(ii) Pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$*, pour tout* $l \in \mathbb{N}$*, pour tout* $(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\Omega)$*,* $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\Omega)$*, il existe une suite finie positive* D_1*,* D_2*, ...,* D_l*, telle que :*

$$P_{K,l}(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon)) \leq \sum\nolimits_{j=0}^{l} D_j P_{K,l}^{j}(v_\varepsilon - u_\varepsilon).$$

3.2.2.2. Conséquence

Si $\mathcal{A}(\Omega)$ *est stable par* F *alors :*

(i) Pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$*, pour tout* $l \in \mathbb{N}$*, pour tout* $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)^{]0,1]}$*, on a*

$$(P_{K,l}(u_\varepsilon))_\varepsilon \in A_+ \Longrightarrow (P_{K,l}(F(.,.,u_\varepsilon)))_\varepsilon \in A_+;$$

(ii) Pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$*, pour tout* $l \in \mathbb{N}$*, pour tout* $(v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\Omega)$*,* $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\Omega)$*, on a*

$$(P_{K,l}(v_\varepsilon - u_\varepsilon))_\varepsilon \in I_A^+ \Longrightarrow (P_{K,l}(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon)))_\varepsilon \in I_A^+.$$

3.2.2.3. Conséquence

Si $\mathcal{A}(\Omega)$ *est stable par* F *alors, pour tout* $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\Omega)$ *et tout* $(i_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\Omega)$*, on a*

$$(i) \qquad (F(.,.,u_\varepsilon))_\varepsilon \in \mathcal{X}(\Omega),$$

$$(ii) \qquad (F(.,.,u_\varepsilon + i_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\Omega).$$

3.2.2.4. Exemple

Soit $F \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *définie par :* $F(x,y,z) = \dfrac{z}{1+z^2}$*, alors* $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ *est stable par* F.

Démonstration.

On pose

$$f(z) = \frac{z}{1+z^2},$$

$$\Phi_\epsilon(x,y) = F(x,y,u_\varepsilon(x,y)) = \frac{u_\varepsilon(x,y)}{1+u_\varepsilon^2(x,y)}.$$

a) Etude de f.

Pour tout réel z on a

$$f(z) = \frac{z}{1+z^2} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{1+iz} - \frac{1}{1-iz}\right).$$

On pose

$$g_\alpha(z) = \frac{1}{1+\alpha z},$$

avec $\alpha = i$ ou $\alpha = -i$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$g_\alpha^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n (n!)\, \alpha^n}{(1+\alpha z)^{n+1}}.$$

On a

$$g'_\alpha(z) = \frac{-\alpha}{(1+\alpha z)^2}.$$

Supposons que

$$g_\alpha^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n\,(n!)\,\alpha^n}{(1+\alpha z)^{n+1}},$$

alors

$$g_\alpha^{(n+1)}(z) = (-1)^n\,(n!)\,\alpha^n \left[\frac{-\,(n+1)\,(1+\alpha z)^n\,\alpha}{(1+\alpha z)^{2n+2}}\right] = \frac{(-1)^{n+1}\,((n+1)!)\,\alpha^{n+1}}{(1+\alpha z)^{n+2}},$$

donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

On a

$$f^{(n)}(z) = \frac{i}{2}\left(g_i^{(n)}(z) - g_{-i}^{(n)}(z)\right),$$

et, pour $\alpha = i$ ou $\alpha = -i$, on a

$$\left|g_\alpha^{(n)}(z)\right| \leq \left|\frac{(-1)^n\,(n!)\,\alpha^n}{(1+\alpha z)^{n+1}}\right| \leq (n!)\,\frac{|i|^n}{(1+z^2)^{n+1}} \leq n!,$$

donc

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\left|g_i^{(n)}(z)\right| + \left|g_{-i}^{(n)}(z)\right|\right) \leq n!.$$

Toutes les dérivées sucessives de f sont donc bornées sur $\mathbb{R}$, et pour tout entier n,

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|f^{(n)}(z)\right| \leq n!.$$

b) Montrons que pour tout n, il existe $C_{r,n} > 0$, $1 \leq r \leq n$, tels que l'on ait

$$P_{K,n}\left(F\left(.,.,u_\varepsilon\right)\right) \leq \sum\nolimits_{r=1}^{r=n} C_{r,n} P_{K,n}^r\left(u_\varepsilon\right).$$

Dans l'expression de $\Phi_\epsilon(x,y) = F(x,y,u_\varepsilon(x,y))$, x et y ont des rôles semblables donc l'étude de $\dfrac{\partial^n \Phi_\varepsilon}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ est semblable à celle de $\dfrac{\partial^n \Phi_\varepsilon}{\partial x^{n-k} \partial y^k}$. Il suffit alors de prouver la relation pour $\dfrac{\partial^n \Phi_\varepsilon}{\partial x^n}$.

b1) Majoration de $P_{K,1}(F(.,.,u_\varepsilon))$.

On a

$$\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x}(x,y) = f'(u_\varepsilon(x,y))\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x,y),$$

d'où

$$\forall K \Subset \mathbb{R}^2, P_{K,(1,0)}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq P_{K,(1,0)}(u_\varepsilon).$$

Par conséquent

$$\forall K \Subset \mathbb{R}^2, P_{K,1}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq P_{K,1}(u_\varepsilon).$$

b2) Majoration de $P_{K,2}(F(.,.,u_\varepsilon))$.

Pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x \partial y}(x,y) = f^{(2)}(u_\varepsilon(x,y))\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x,y)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x,y) + f'(u_\varepsilon(x,y))\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y}(x,y),$$

d'où

$$P_{K,(1,1)}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq 2P_{K,1}^2(u_\varepsilon) + P_{K,2}(u_\varepsilon) \leq 2P_{K,2}^2(u_\varepsilon) + P_{K,2}(u_\varepsilon).$$

On a

$$\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2}(x,y) = f^{(2)}(u_\varepsilon(x,y))\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right)^2(x,y) + f'(u_\varepsilon(x,y))\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x,y),$$

d'où

$$P_{K,(2,0)}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq 2P_{K,1}^2(u_\varepsilon) + P_{K,2}(u_\varepsilon) \leq 2P_{K,2}^2(u_\varepsilon) + P_{K,2}(u_\varepsilon).$$

Par conséquent

$$\forall K \Subset \mathbb{R}^2,\ P_{K,2}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq 2P_{K,2}^2(u_\varepsilon) + P_{K,2}(u_\varepsilon).$$

b3) Majoration de $P_{K,3}(F(.,.,u_\varepsilon))$.

Pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial^3 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = f^{(3)}(u_\varepsilon(x,y)) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x,y) \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right)^2 (x,y) + f^{(2)}(u_\varepsilon(x,y)) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x,y) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x,y)$$
$$+ 2 f^{(2)}(u_\varepsilon(x,y)) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x,y) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y}(x,y) + f'(u_\varepsilon(x,y)) \frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial^2 x \partial y}(x,y),$$

d'où

$$P_{K,(2,1)}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq 3! P_{K,1}^3(u_\varepsilon) + 3.2! P_{K,1}(u_\varepsilon) P_{K,2}(u_\varepsilon) + P_{K,3}(u_\varepsilon).$$

On a

$$\frac{\partial^3 \Phi_\varepsilon}{\partial x^3}(x,y) = f^{(3)}(u_\varepsilon(x,y)) \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right)^3 (x,y) + 3 f^{(2)}(u_\varepsilon(x,y)) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x,y) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x,y)$$
$$+ f'(u_\varepsilon(x,y)) \frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial x^3}(x,y),$$

d'où

$$P_{K,(3,0)}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq 6 P_{K,1}^3(u_\varepsilon) + 3.2! P_{K,1}(u_\varepsilon) P_{K,2}(u_\varepsilon) + 1 P_{K,3}(u_\varepsilon).$$

Par conséquent, pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} P_{K,3}(F(.,.,u_\varepsilon)) &\leq 6 P_{K,1}^3(u_\varepsilon) + 6 P_{K,1}(u_\varepsilon) P_{K,2}(u_\varepsilon) + P_{K,3}(u_\varepsilon) \\ &\leq 6 P_{K,3}^3(u_\varepsilon) + 6 P_{K,3}^2(u_\varepsilon) + P_{K,3}(u_\varepsilon). \end{aligned}$$

b4) *Lemme :*

La dérivée n-ième $(f \circ u)^{(n)}$ de $f \circ u$ s'écrit sous la forme

$$(f \circ u)^{(n)} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{i_1 \geq \ldots \geq i_r \\ i_1 + \ldots + i_r = n}} t_{i_1,\ldots,i_r} f^{(r)} \circ u . \prod_{k=1}^{r} u^{(i_k)}$$

où les coefficients $t_{i_1,\ldots,i_r}$ sont des entiers naturels.

Nous avons donc, pour $\alpha = n$ et $\beta = 0$:

$$\frac{\partial^n \Phi_\varepsilon}{\partial x^n}(x,y) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{i_1 \geq \ldots \geq i_r \\ i_1 + \ldots + i_r = n}} (t_{i_1,\ldots,i_r}) f^{(r)}(u_\varepsilon(x,y)) \prod_{k=1}^{r} \frac{\partial^{i_k} u_\varepsilon}{\partial x^{i_k}}(x,y),$$

Pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$, pour tout $i_k \in \mathbb{N}$, $i_k \leq n$, pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{(x,y)\in K)} \left| f^{(r)}(u_\varepsilon(x,y)) \right| \leq r! \leq n!,$$

donc

$$\max_{1\leq i_k \leq n} \left(\sup_{(x,y)\in K)} \left| f^{(i_k)}(u_\varepsilon(x,y)) \right| \right) \leq n!.$$

On a

$$\sup_{(x,y)\in K)} \left| \frac{\partial^{i_k} u_\varepsilon}{\partial x^{i_k}}(x,y) \right| \leq P_{K,i_k}(u_\varepsilon) \leq P_{K,n}(u_\varepsilon)$$

et

$$\sup_{(x,y)\in K)} \left(\left| \prod_{k=1}^{r} \frac{\partial^{i_k} u_\varepsilon}{\partial x^{i_k}}(x,y) \right| \right) \leq P_{K,n}^r(u_\varepsilon),$$

donc :

$$\sup_{(x,y)\in K)} \left| (t_{i_1,\ldots,i_r}) f^{(r)}(u_\varepsilon(x,y)) \prod_{k=1}^{r} \frac{\partial^{i_k} u_\varepsilon}{\partial x^{i_k}}(x,y) \right| \leq (t_{i_1,\ldots,i_r}) n! P_{K,n}^r(u_\varepsilon).$$

Par conséquent

$$\sup_{(x,y)\in K)} \left| \frac{\partial^n \Phi_\varepsilon}{\partial x^n}(x,y) \right| \leq \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{\substack{i_1 \geq \ldots \geq i_r \\ i_1+\ldots+i_r=n}} (t_{i_1,\ldots,i_r}) \right) n! P_{K,n}^r(u_\varepsilon).$$

c) Montrons que : pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, pour tout $(v_\varepsilon)_\varepsilon$, $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ éléments de $\mathcal{X}(\Omega)$, il existe un nombre positif D_l, tel que

$$P_{K,l}(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon)) \leq D_l P_{K,l}(v_\varepsilon - u_\varepsilon).$$

c1) Montrons d'abord la relation pour $l = 1$.

Pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$, pour tout $(x,y) \in K$, on a :

$$\begin{aligned} g_\alpha(v_\varepsilon(x,y)) - g_\alpha(u_\varepsilon(x,y)) &= \frac{1}{1+\alpha v_\varepsilon(x,y)} - \frac{1}{1+\alpha u_\varepsilon(x,y)} \\ &= \frac{\alpha\left(u_\varepsilon(x,y) - v_\varepsilon(x,y)\right)}{\left(1+\alpha v_\varepsilon(x,y)\right)\left(1+\alpha u_\varepsilon(x,y)\right)}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \left|g_\alpha(v_\varepsilon(x,y)) - g_\alpha(u_\varepsilon(x,y))\right| &\le \frac{|\alpha|\left|u_\varepsilon(x,y) - v_\varepsilon(x,y)\right|}{\left|1+\alpha v_\varepsilon(x,y)\right|\left|1+\alpha u_\varepsilon(x,y)\right|} \le \frac{\left|u_\varepsilon(x,y) - v_\varepsilon(x,y)\right|}{\left|1+v_\varepsilon^2(x,y)\right|\left|1+u_\varepsilon^2(x,y)\right|} \\ &\le \left|v_\varepsilon(x,y) - u_\varepsilon(x,y)\right|, \end{aligned}$$

car $\alpha = i$ ou $\alpha = -i$.

Comme

$$f(z) = \frac{z}{1+z^2} = \frac{i}{2}\left(g_i(z) - g_{-i}(z)\right),$$

alors

$$f(v_\varepsilon(x,y)) - f(u_\varepsilon(x,y)) = \frac{i}{2}\left[\left(g_i(v_\varepsilon(x,y)) - g_i(u_\varepsilon(x,y)) - \left(g_{-i}(v_\varepsilon(x,y)) - g_{-i}(u_\varepsilon(x,y))\right)\right)\right]$$

et

$$\begin{aligned} \left|f(v_\varepsilon(x,y)) - f(u_\varepsilon(x,y))\right| &\le \frac{1}{2}\left[\left|g_i(v_\varepsilon(x,y)) - g_i(u_\varepsilon(x,y))\right| + \left|g_{-i}(v_\varepsilon(x,y)) - g_{-i}(u_\varepsilon(x,y))\right|\right] \\ &\le \left|v_\varepsilon(x,y) - u_\varepsilon(x,y)\right|, \end{aligned}$$

par conséquent

$$P_{K,0}(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon)) \le P_{K,0}(v_\varepsilon - u_\varepsilon).$$

c2) Il suffit d'établir la relation pour g_α.

Pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$, pour tout $(x,y) \in K$, on a

$$\Psi_\varepsilon(x,y) = g_\alpha(v_\varepsilon(x,y)) - g_\alpha(u_\varepsilon(x,y)) = \frac{-\alpha}{\left(1+\alpha v_\varepsilon(x,y)\right)\left(1+\alpha u_\varepsilon(x,y)\right)}\left(v_\varepsilon(x,y) - u_\varepsilon(x,y)\right)$$

et

$$\left|\Psi_\varepsilon\left(x,y\right)\right| \leq \left|g_\alpha(v_\varepsilon\left(x,y\right)) - g_\alpha(u_\varepsilon\left(x,y\right))\right| \leq \left|v_\varepsilon\left(x,y\right) - u_\varepsilon\left(x,y\right)\right|,$$

donc

$$\sup_{(x,y)\in K}\left|\Psi_\varepsilon\left(x,y\right)\right| \leq P_{K,0}(v_\varepsilon - u_\varepsilon).$$

On pose

$$h_\varepsilon\left(x,y\right) = \frac{-\alpha}{\left(1+\alpha v_\varepsilon\left(x,y\right)\right)\left(1+\alpha u_\varepsilon\left(x,y\right)\right)} = -\alpha g_\alpha(v_\varepsilon\left(x,y\right))g_\alpha(u_\varepsilon\left(x,y\right)).$$

Donc, g_α et ses dérivées successives étant bornées, pour tout entier n, $\dfrac{\partial^n h_\varepsilon}{\partial x^n}$ est majoré sur K par un polynôme en $\|v_\varepsilon\|_{\infty,K}$, $\|u_\varepsilon\|_{\infty,K}$, $\left\|\dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}\right\|_{\infty,K}$, $\left\|\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right\|_{\infty,K}$, ..., $\left\|\dfrac{\partial^n v_\varepsilon}{\partial x^n}\right\|_{\infty,K}$, $\left\|\dfrac{\partial^n u_\varepsilon}{\partial x^n}\right\|_{\infty,K}$, à coeficients positifs, que nous notons $d_n(K,u_\varepsilon,v_\varepsilon)$.

Selon la formule de Leibniz pour les dérivées successives d'un produit, on a

$$\frac{\partial^n\Psi_\varepsilon}{\partial x^n}\left(x,y\right) = -\alpha\sum_{i=0}^{i=n}C_n^i\frac{\partial^i h_\varepsilon}{\partial x^i}\left(x,y\right)\frac{\partial^{n-i}\left(v_\varepsilon - u_\varepsilon\right)}{\partial x^{n-i}}\left(x,y\right).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\sup_{(x,y)\in K)}\left|\frac{\partial^n\Psi_\varepsilon}{\partial x^n}\left(x,y\right)\right| &\leq \sum_{i=0}^{i=n}C_n^i d_i(K,u_\varepsilon,v_\varepsilon)P_{K,n-i}\left(v_\varepsilon - u_\varepsilon\right)\\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{i=n}C_n^i d_i(K,u_\varepsilon,v_\varepsilon)\right)P_{K,n}\left(v_\varepsilon - u_\varepsilon\right).\end{aligned}$$

On en déduit

$$P_{K,n}(F(.,.,v_\varepsilon) - F\left(.,.,u_\varepsilon\right)) \leq D_n P_{K,n}(v_\varepsilon - u_\varepsilon).$$

□

3.3 Spectre singulier paramétrique

3.3.1 Analyse des singularités distributions d'une fonction généralisée

3.3.1.1. Notations

On suppose que

$$\mathcal{N}_{\mathcal{D}'}^{\mathcal{A}}(\Omega) = \left\{(u_\varepsilon) \in \mathcal{X}(\Omega) : \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon = 0, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\right\} \supset \mathcal{N}(\Omega).$$

On pose alors

$$\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}(\Omega) = \left\{[u_\varepsilon] \in \mathcal{A}(\Omega) : \exists T \in \mathcal{D}'(\Omega) \lim_{\varepsilon \to 0} (u_\varepsilon) = T, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\right\}.$$

$\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}(\Omega)$ est bien défini car la limite est indépendante du représentant choisi ; en effet

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathcal{D}'(\Omega)}} (u_\varepsilon + i_\varepsilon) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathcal{D}'(\Omega)}} u_\varepsilon + \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathcal{D}'(\Omega)}} i_\varepsilon = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathcal{D}'(\Omega)}} u_\varepsilon \text{ puisque : } \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathcal{D}'(\Omega)}} i_\varepsilon = 0.$$

$\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}(\Omega)$ apparait comme un $\mathbb{R}$-sous espace vectoriel de $\mathcal{A}(\Omega)$.

On peut donc considérer $\mathcal{O}_{D'_{\mathcal{A}}}$ "l'ensemble des x au voisinage desquels u est associée à une distribution"

$$\mathcal{O}_{D'_{\mathcal{A}}}(u) = \left\{x \in \Omega : \exists V \in \mathcal{V}(x), u\,|_V \in \mathcal{D}'_{\mathcal{A}}(V)\right\},$$

où $\mathcal{V}(x)$ est l'ensemble des voisinages de x.

3.3.1.2. Définition

Le $\mathcal{D}'$-support singulier de $u \in \mathcal{A}(\Omega)$ est sing $\text{supp}_{\mathcal{D}'}(u) = S_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}^{\mathcal{A}}(u) = \Omega \backslash O_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(u)$.

3.3.2 Eléments d'Analyse microlocale paramétrique

Soient $u \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Il se peut que $u = [u_\varepsilon]$ ne soit pas associée à une distribution au voisinage de x, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de voisinage ouvert V_x de x pour lequel $\lim_{\varepsilon \to 0}(u_{\varepsilon|V_x})$ appartienne à $\mathcal{D}'(V_x)$. [13]

Mais dans ce cas, il se peut qu'il existe un réel r et un voisinage ouvert V_x de x tel que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^r u_{\varepsilon|V_x})$ appartienne à $\mathcal{D}'(V_x)$, autrement dit que $[\varepsilon^r u_\varepsilon]$ appartienne à $\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}(V_x)$, le sous espace vectoriel de $\mathcal{A}(V_x)$ des éléments u associés à une distribution de $\mathcal{D}'(V_x)$.

Par exemple, prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi \geq 0$, $\int \varphi(x)dx = 1$ et $u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2}\varphi(x\varepsilon^{-1})$. Alors, $u = [u_\varepsilon]$ est une fonction généralisée de $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ qui n'est pas (associée à) une distribution au voisinage de 0, mais pour $r \geq 1$, $[\varepsilon^r u_\varepsilon]$ en est une.

Cela conduit au concept suivant :

3.3.3 Spectre singulier paramétrique

3.3.3.1. Notations

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour $x \in \Omega$ et $u = [u_\varepsilon] \in \mathcal{A}(\Omega)$, on pose :

$$N_{\mathcal{D}',x}(u) = \left\{ r \in \mathbb{R}_+ : \exists V_x \in \mathcal{V}(x), \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^r u_{\varepsilon|V_x}) \in \mathcal{D}'(V_x) \right\}$$

On montre que $N_{\mathcal{D}',x}(u)$ ne dépend pas de la représentation de u et que si $N_{\mathcal{D}',x}(u)$ contient un $r_0 \in \mathbb{R}_+$, il contient tous les r, $r \geq r_0$.

On définit alors la $\mathcal{D}'$-fibre au dessus de x : $\Sigma_{\mathcal{D}',x}(u) = \mathbb{R}_+ \backslash N_{\mathcal{D}',x}(u)$.

C'est soit un intervalle de $\mathbb{R}_+$ de la forme $[0, r[$ ou $[0, r]$, soit $\mathbb{R}_+$ lui même, soit l'ensemble vide.

On peut donc donner la définition du spectre singulier paramétrique d'une fonction généralisée suivante :

3.3.3.2. Définition

On définit le $\mathcal{D}'$-spectre singulier paramétrique de $u \in \mathcal{A}(\Omega)$ comme le sous ensemble de $\Omega \times \mathbb{R}_+$:

$$S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}} u = \left\{ (x, r) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : r \in \Sigma_{\mathcal{D}',x}(u) \right\}.$$

3.3.3.3. Remarque

On constate que $\Sigma_{\mathcal{D}',x}(u) = \varnothing$ si, et seulement si, il existe un voisinage V_x de x tel que l'on ait :

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(u_{\varepsilon|V_x}) \in \mathcal{D}'(V_x),$$

c'est-à-dire si, et seulement si, x n'appartient pas au $\mathcal{D}'$-support singulier de u : $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(u)$.

Il en résulte que la projection sur Ω de $S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}} u$ est exactement $S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}} u$.

3.3.4 Quelques propriétés du $\mathcal{D}'$-spectre singulier paramétrique $S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}} u$ d'une fonction généralisée $u \in \mathcal{A}(\Omega)$

3.3.4.1. Théorème

Soit u et $v \in \mathcal{A}(\Omega)$. Alors on a

$$S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(u+v) \subset S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(u) \cup S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(v)\,.$$

Démonstration.

Soit $r \in N_{\mathcal{D}',x}(u) \cap N_{\mathcal{D}',x}(v)$, alors il existe un $V_x \in \mathcal{V}(x)$ et un $W_x \in \mathcal{V}(x)$ tel que

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(\varepsilon^r u_{\varepsilon|V_x}) \in \mathcal{D}'(V_x) \text{ et } \lim_{\varepsilon \to 0}(\varepsilon^r v_{\varepsilon|W_x}) \in \mathcal{D}'(W_x).$$

On en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(\varepsilon^r\,(u_\varepsilon + v_\varepsilon)_{|V_x \cap W_x}) \in \mathcal{D}'(V_x \cap W_\varepsilon),$$

ce qui prouve qu'on a

$$r \in N_{\mathcal{D}',x}(u+v),$$

autrement dit que

$$N_{\mathcal{D}',x}(u) \cap N_{\mathcal{D}',x}(v) \subset N_{\mathcal{D}',x}(u+v).$$

En passant au complémentaire par rapport à $\mathbb{R}_+$ on obtient alors le résultat. $\square$

3.3.4.2. Corollaire

Si u, u_0, u_1 sont des éléments de $\mathcal{A}(\Omega)$ avec

(i) $u = u_0 + u_1$,

(ii) $S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(u_0) = \varnothing$,

alors on a

$$S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(u) = S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(u_1) \,.$$

Démonstration.

Le théorème précédent et la condition (ii) permettent d'écrire

$$S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(u) \subset S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(u_1) \,.$$

Mais si on écrit (i) sous la forme

$$u_0 = u - u_1,$$

on obtient évidemment l'inclusion inverse, d'où le résultat. □

3.3.4.3. Théorème

Soit $u \in \mathcal{A}(\Omega)$. Alors on a, pour tout D^α, $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$$S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(D^\alpha u) \subset S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(u) \,.$$

Démonstration.

Soit $r \in N_{\mathcal{D}',x}(u)$. Il existe un $V_x \in \mathcal{V}(x)$ tel que : $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}(\varepsilon^r u_{\varepsilon|V_x}) = T \in \mathcal{D}'(V_x)$.

On en déduit que

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0}(\varepsilon^r D^\alpha u_{\varepsilon|V_x}) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} D^\alpha(\varepsilon^r u_{\varepsilon|V_x}) = D^\alpha T \in \mathcal{D}'(V_x)$.

Il en résulte que $N_{\mathcal{D}',x}(u) \subset N_{\mathcal{D}',x}(D^\alpha u)$; ce qui prouve le résultat par passage au complémentaire dans $\mathbb{R}_+$. □

3.3.4.4. Théorème

Soient $f \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ *et* $u \in \mathcal{A}(\Omega)$*. Alors on a*

$$S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(fu) \subset S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(u)\,.$$

Démonstration.

Soit $r \in N_{\mathcal{D}',x}(u)$. Il existe un $V_x \in \mathcal{V}(x)$ tel que : $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^r u_{\varepsilon|V_x}) = T \in \mathcal{D}'(V_x)$ c'est-à-dire que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(V_x)$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int \varepsilon^r u_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,dx = \langle T,\varphi\rangle\,.$$

On en déduit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int \varepsilon^r (fu_\varepsilon)(x)\,\varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \varepsilon^r u_\varepsilon(x)\,(f\varphi)(x)\,dx = \langle T,f\varphi\rangle = \langle fT,\varphi\rangle\,,$$

ce qui prouve bien que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^r f u_{\varepsilon|V_x}) = fT \in \mathcal{D}'(V_x),$$

donc que r est dans $N_{\mathcal{D}',x}(fu)$.

De l'estimation

$$N_{\mathcal{D}',x}(u) \subset N_{\mathcal{D}',x}(fu),$$

on en déduit donc le résultat. □

3.3.4.5. Corollaire

Soit $P(D) = \sum\limits_{|\alpha|\le m} C_\alpha D^\alpha$ *un polynôme différentiel à coefficients dans* $\mathrm{C}^\infty(\Omega)$*.*
Alors, pour tout $u \in \mathcal{A}(\Omega)$ *on a*

$$S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(P(D)u) \subset S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}(u)\,.$$

Démonstration.

Il suffit d'écrire

$$P(D)u = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha D^\alpha u$$

et d'appliquer les théorèmes 3.3.4.1, 3.3.4.3., 3.3.4.4. $\square$

Troisième partie

Problèmes généralisés

Chapitre 4

Un problème de Cauchy généralisé

4.1 Enoncé du problème

4.1.1 Problème (P_G)

On reprend la formulation du problème de Cauchy posé au 1.1.1. sous la forme

$$(P_G)\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = F(.,.,u) \\ u_{|\gamma} = \varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \,|_\gamma = \psi, \end{cases}$$

où $\varphi = [\varphi_\varepsilon]$ et $\psi = [\psi_\varepsilon]$ et les hypothèses sur F, f, φ_ε, ψ_ε sont conservées mais u est maintenant cherché dans une algèbre de fonctions généralisées $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ définie au chapitre précédent.

On suppose que $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ est stable par F, que $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}\right)$ et $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ sont construits sur le même anneau de constantes généralisées.

On suppose que les problèmes

$$P_\infty(\varphi_\varepsilon,\psi_\varepsilon)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x\partial y}(x,y)=F(x,y,u_\varepsilon(x,y)) \\ u_\varepsilon(x,f(x))=\varphi_\varepsilon(x) \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x,f(x))=\psi_\varepsilon(x) \end{cases}$$

admettent pour tout ε une solution $u_\epsilon\in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

4.1.2 Donner un sens à (P_G)

Donner un sens à (P_G) c'est d'abord donner un sens à

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}u=F(.,.,u) & (1_G) \\ u_{|\gamma}=\varphi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}) & (2_G) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}{}_{|\gamma}=\psi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}) & (3_G) \end{cases}$$

lorsque $u\in\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ et γ est la sous variété lisse de $\mathbb{R}^2$ définie par $y=f(x)$.

Donner un sens à (1_G), sous l'hypothèse que $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ est stable par F, signifie que pour un représentant $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ de u on doit avoir, pour tout $(i_\varepsilon)_\varepsilon\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right)$ et $(j_\varepsilon)_\varepsilon\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right)$,

$$\left(\frac{\partial^2(u_\varepsilon+i_\varepsilon)}{\partial x\partial y}-F(.,.,u_\varepsilon+j_\varepsilon)\right)_\varepsilon\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Comme $\left(\dfrac{\partial^2(u_\varepsilon+i_\varepsilon)}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x\partial y}\right)_\varepsilon\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right)$ et que $\left(F(.,.,u_\varepsilon+j_\varepsilon)-F(.,.,u_\varepsilon)\right)_\varepsilon\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right)$, ceci se ramène à vérifier que

$$\underline{\left(\frac{\partial^2(u_\varepsilon)}{\partial x\partial y}-F(.,.,u_\varepsilon)\right)_\varepsilon\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right).}$$

Donner un sens à (2_G) et (3_G) signifie d'abord définir $u_{|\gamma}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}_{|\gamma}$ et, comme γ est une sous variété lisse de $\mathbb{R}^2$ représentable par une seule carte ($\gamma=f(x)$), on peut identifier $\mathcal{A}(\gamma)$ et $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ et donc $u_{|\gamma}$ à l'élément de $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ dont un représentant est $(x\mapsto u_\varepsilon(x,f(x))_\varepsilon$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}_{|\gamma}$ à l'élément de $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ dont un représentant est $\left(x\mapsto\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x,f(x))\right)_\varepsilon$.

(2_G) équivaut donc à :

$(x \mapsto ((u_\varepsilon + i_\varepsilon)(x, f(x)) - (\varphi_\varepsilon + \alpha_\varepsilon)(x))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$.

(3_G) équivaut donc à :

$$(x \mapsto ((\frac{\partial u_\varepsilon + i_\varepsilon}{\partial y})(x, f(x)) - (\psi_\varepsilon + \beta_\varepsilon)(x))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$$

pour tout $(i_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^2)$, $(\alpha_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$, $(\beta_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$, et compte tenu que :

$$(x \mapsto ((u_\varepsilon + i_\varepsilon)(x, f(x)) - u_\varepsilon(x, f(x)))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}),$$

$$(x \mapsto ((\varphi_\varepsilon + \alpha_\varepsilon)(x) - \varphi_\varepsilon(x))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}),$$

$$(x \mapsto ((\frac{\partial u_\varepsilon + i_\varepsilon}{\partial y})(x, f(x)) - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x, f(x)))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}),$$

$$(x \mapsto ((\psi_\varepsilon + \beta_\varepsilon)(x) - \psi_\varepsilon(x))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}),$$

$$(x \mapsto (j_\varepsilon(x) - i_\varepsilon(x, f(x))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}),$$

ceci se ramène à

$$\underline{(x \mapsto (u_\varepsilon(x, f(x)) - \varphi_\varepsilon(x)))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R})},$$

$$\underline{(x \mapsto (\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x, f(x)) - \psi_\varepsilon(x))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}).}$$

En résumé, (P_G) a un sens si, et seulement si, il est représenté par un $(u_\varepsilon)_\varepsilon$vérifiant

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2(u_\varepsilon)}{\partial x \partial y} - F(.,.,u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right) \\ (x \mapsto (u_\varepsilon(x, f(x)) - \varphi_\varepsilon(x)))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}) \\ (x \mapsto (\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x, f(x)) - \psi_\varepsilon(x))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Si donc, pour tout ε, la solution u_ε de $P_\infty(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ est telle que $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ alors les relations ci-dessus sont *a fortiori* vraies et $[u_\varepsilon]$ est une solution de (P_G). $\square$

4.2 Résolution du problème

4.2.1 Résolution de (P_G)

4.2.1.1. Théorème

Supposons que $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ *soit stable par* F, *supposons que* $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ *et* $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ *soient construits sur le même anneau* $\mathcal{C} = A/I$ *de constantes généralisées. Supposons que les données du problème* (P_G) *vérifient les conditions* $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$.
Alors le problème (P_G) *admet une unique solution* u *dans* $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Démonstration.

Soit $u_\varepsilon = SP_\infty(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ la solution de $P_\infty(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ avec les conditions initiales $\varphi_\varepsilon \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\psi_\varepsilon \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$.

D'après ce qui précède, il suffit de vérifier que $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ pour que $u = [u_\varepsilon]$ soit solution de (P_G).

Toute autre solution v de (P_G) est de la forme $v = [v_\varepsilon]$, où $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ vérifie

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2(v_\varepsilon)}{\partial x \partial y} - F(.,.,v_\varepsilon)\right)_\varepsilon = (i_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right) \\ (v_\varepsilon(.,f(.)) - \varphi_\varepsilon(.))_\varepsilon = (\alpha_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}) \\ (\dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}(.,f(.)) - \psi_\varepsilon(.))_\varepsilon = (\beta_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

et donc l'unicité de la solution de (P_G) sera la conséquence de

$$(v_\varepsilon - u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^2).$$

a) Montrons que $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$.

Il s'agit de prouver que

$$\forall K \Subset \mathbb{R}^2, \forall l \in \mathbb{N}, \left(P_{K,l}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+.$$

Procédons par récurrence en montrant d'abord que l'on a a1)

$$\forall K \Subset \mathbb{R}^2, \left(P_{K,(0,0)}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+,$$

avec

$$P_{K,(0,0)}(u_\varepsilon) = \sup_K |u_\varepsilon(x)| = \|u_\varepsilon\|_{\infty,K}$$

c'est-à-dire que la majoration d'ordre 0 est vérifiée. Posons

$$u_{0,\varepsilon}(x,y) = \chi_\varepsilon(y) - \chi_\varepsilon(f(x)) + \varphi_\varepsilon(x)$$

où χ_ε désigne une primitive de $\psi_\varepsilon \circ f^{-1}$.

D'après la proposition 1.2.1.2., $\forall K \Subset \mathbb{R}^2, \exists K_\lambda \Subset \mathbb{R}^2, K \subset K_\lambda,$

$$\|u_\varepsilon\|_{\infty,K} \leq \|u_\varepsilon\|_{\infty,K_\lambda} \leq \|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda} + \frac{\Phi_{\lambda,\varepsilon}}{m_\lambda}\exp[2\lambda m_\lambda(f(\lambda) - f(-\lambda))].$$

On a $\left(\|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda}\right)_\varepsilon \in A$ car $[\varphi_\varepsilon]$ et $[\psi_\varepsilon]$ sont des éléments de $\mathcal{A}(\mathbb{R})$.

$$m_\lambda = \sup_{(x,y)\in K_\lambda;\, t\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,t)\right|$$

est une constante ne dépendant que de F, K_λ.

$c(K_\lambda) = \dfrac{1}{m_\lambda}\exp[2\lambda m_\lambda(f(\lambda) - f(-\lambda))]$ est une constante ne dépendant que de F, f, K_λ.

$\Phi_{\lambda,\varepsilon} = \|F(.,.,0)\|_{\infty,K_\lambda} + m_\lambda \|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda}$ donc

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_{\lambda,\varepsilon}}{m_\lambda}&\exp[2\lambda m_\lambda(f(\lambda) - f(-\lambda))]\\ &= c(K_\lambda)\Phi_{\lambda,\varepsilon}\\ &= c(K_\lambda)\|F(.,.,0)\|_{\infty,K_\lambda} + \exp[2\lambda m_\lambda(f(\lambda) - f(-\lambda))]\|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda}.\end{aligned}$$

$c_1(K_\lambda) = c(K_\lambda)\|F(.,.,0)\|_{\infty,K_\lambda}$ est une constante ne dépendant que de F, K_λ ;

$\exp[2\lambda m_\lambda(f(\lambda) - f(-\lambda))]$ est une constante $c_2(K_\lambda)$ ne dépendant que de K_λ, F, f.

Par conséquent

$$\|u_\varepsilon\|_{\infty,K} \leq \|u_\varepsilon\|_{\infty,K_\lambda} \leq \|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda} + c_1(K_\lambda) + c_2(K_\lambda)\|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda}\ ;$$

donc

$$\|u_\varepsilon\|_{\infty,K} \leq \|u_\varepsilon\|_{\infty,K_\lambda} \leq (1 + c_2(K_\lambda)) \|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda} + c_1(K_\lambda).$$

$\left(\|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda}\right)_\varepsilon \in A$ donc $\left((1 + c_2(K_\lambda)) \|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda}\right)_\varepsilon \in A$ (si $(r_\varepsilon)_\varepsilon \in A$ alors $(cr_\varepsilon)_\varepsilon \in A$) et comme $c_1(K_\lambda)$ est une constante ($(1)_\varepsilon \in A$), on en déduit que

$$((1 + c_2(K_\lambda)) \|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda} + c_1(K_\lambda))_\varepsilon \in A.$$

A étant stable par majoration $\left(\|u_\varepsilon\|_{\infty,K_\lambda}\right)_\varepsilon \in A_+$ et donc $\left(\|u_\varepsilon\|_{\infty,K}\right)_\varepsilon \in A_+$ c'est-à-dire $\left(P_{K,0}\left(u_\varepsilon\right)\right)_\varepsilon \in A_+$.

a2) Montrons que

$$\left(P_{K,1}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+.$$

On a

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial x}(x,y) + \int_{f(x)}^{y} F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))d\eta,$$

d'où

$$\begin{aligned} P_{K,(1,0)}(u_\varepsilon) &= \left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right\|_{\infty,K} = \sup_K \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x,y)\right| \\ &\leq \sup_K \left|\frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial x}(x,y)\right| + (f(\lambda) - f(-\lambda)) \left(\sup_{K_\lambda} |F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))|\right). \end{aligned}$$

$\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ étant stable par F, il existe $C > 0$ tel que

$$P_{K_\lambda,(0,0)}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq P_{K_\lambda,0}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq C. \quad (1)$$

On a

$$\frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial x}(x,y) = f'(x)\psi_\varepsilon(x) + \varphi_\varepsilon'(x),$$

d'où

$$\left(\left\|\frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial x}\right\|_{\infty,K}\right)_\varepsilon \in A_+$$

car $[\varphi_\varepsilon]$ et $[\psi_\varepsilon]$ sont des éléments de $\mathcal{A}(\mathbb{R})$.

Donc

$$P_{K,(1,0)}(u_\varepsilon) \leq \left\| \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial x} \right\|_{\infty,K} + C\left(f(\lambda) - f(-\lambda)\right).$$

A étant stable par majoration $\left(P_{K,(1,0)}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A^+$.

On a

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial y}(x,y) - \int_x^{f^{-1}(y)} F(\xi, y, u_\varepsilon(\xi,y))d\xi,$$

donc

$$P_{K,(0,1)}(u_\varepsilon) = \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} \right\|_{\infty,K} = \sup_K \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x,y) \right| \leq \sup_K \left| \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial y}(x,y) \right| + 2\lambda \left(\sup_{K_\lambda} \left| F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta)) \right| \right).$$

On a

$$\frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial y}(x,y) = \psi_\varepsilon(f^{-1}(y)),$$

donc

$$\left(\left\| \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial y} \right\|_{\infty,K} \right)_\varepsilon \in A_+$$

car $[\psi_\varepsilon]$ est élément de $\mathcal{A}(\mathbb{R})$; d'où

$$P_{K,(0,1)}(u_\varepsilon) \leq \left\| \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial y} \right\|_{\infty,K} + C2\lambda$$

et donc, comme précédemment

$$\left(\left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} \right\|_{\infty,K} \right)_\varepsilon \in A_+.$$

a3) Récurrence.

Supposons que, pour tout $l \leq n$, on ait $\left(P_{K,l}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+$ et montrons que cela entraîne $\left(P_{K,n+1}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+$.

On a en fait

$$P_{K,n+1} = \max\left(P_{K,n}, P_{1,n}, P_{2,n}, P_{3,n}, P_{4,n}\right)$$

avec

$$P_{1,n} = P_{K,(n+1,0)},$$

$$P_{2,n} = P_{K,(0,n+1)},$$

$$P_{3,n} = \sup_{\alpha+\beta=n;\beta\geq 1} P_{K,(\alpha+1,\beta)},$$

$$P_{4,n} = \sup_{\alpha+\beta=n;\alpha\geq 1} P_{K,(\alpha,\beta+1)}.$$

a3.1) Montrons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(P_{1,n}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+,\ \left(P_{2,n}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+.$$

Comme on a

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial x}(x,y) + \int_{f(x)}^{y} F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))d\eta,$$

on en déduit que

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 u_{0,\varepsilon}}{\partial x^2}(x,y) - f'(x)F(x,f(x),\varphi(x)) + \int_{f(x)}^{y} \frac{\partial}{\partial x}F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))d\eta$$

et par dérivations successives, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+1} u_\varepsilon}{\partial x^{n+1}}(x,y) = {}& \frac{\partial^{n+1} u_{0,\varepsilon}}{\partial x^{n+1}}(x,y) \\ & - \sum_{j=0}^{n-1} C_n^j f^{(n-j)}(x)\frac{\partial^j}{\partial x^j}F(x,f(x),\varphi_\varepsilon(x)) + \int_{f(x)}^{y} \frac{\partial^n}{\partial x^n}F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))d\eta.\end{aligned}$$

Comme on a pris $K \subset K_\lambda$, on peut écrire

$$\sup_{(x,y)\in K}\left|\frac{\partial^{n+1}u_{\varepsilon}}{\partial x^{n+1}}(x,y)\right| \leq$$

$$\left\|\frac{\partial^{n+1}u_{0,\varepsilon}}{\partial x^{n+1}}\right\|_{\infty,K} + \sup_{x\in[-\lambda,\lambda]}\sum\nolimits_{j=0}^{n-1} C_n^j \left|f^{(n-j)}(x)\right| \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}F(x,f(x),\varphi_{\varepsilon}(x))\right|$$

$$+ \left(f\left(\lambda\right) - f\left(-\lambda\right)\right)\left(\sup_{(x,y)\in K}\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n}F(x,y,u_{\varepsilon}(x,y))\right|\right).$$

On a

$$\left(\sup_{(x,y)\in K}\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n}F(x,y,u_{\varepsilon}(x,y))\right|\right) = P_{K,(n,0)}(F(.,.,u_{\varepsilon})) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_{\varepsilon})),$$

et

$$\sup_{x\in[-\lambda,\lambda]}\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}F(x,f(x),\varphi_{\varepsilon}(x))\right| \leq P_{K,(j,0)}(F(.,.,u_{\varepsilon}))$$

$$\leq P_{K,(n,0)}(F(.,.,u_{\varepsilon})) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_{\varepsilon})),$$

de plus

$$\left(\left\|\frac{\partial^{n+1}u_{0,\varepsilon}}{\partial x^{n+1}}\right\|_{\infty,K}\right)_{\varepsilon} \in A_{+},$$

car $[\varphi_{\varepsilon}]$ et $[\psi_{\varepsilon}]$ sont des éléments de $\mathcal{A}(\mathbb{R})$.

Compte tenu de l'hypothèse de stabilité, un calcul simple montre alors que, pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$,

$$\left(P_{K,(n+1,0)}\left(u_{\varepsilon}\right)\right)_{\varepsilon} \in A_{+}.$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(P_{2,n}(u_{\varepsilon})\right)_{\varepsilon} \in A_{+}$.

Comme on a

$$\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial y}(x,y) - \int_{x}^{f^{-1}(y)} F(\xi,y,u_{\varepsilon}(\xi,y))d\xi.$$

On en déduit que

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 u_{0,\varepsilon}}{\partial y^2}(x,y) - \left(\left(f^{-1}\right)'(y)\right) F(f^{-1}(y), y, \varphi_\varepsilon(f^{-1}(y)))$$
$$- \int_x^{f^{-1}(y)} \frac{\partial}{\partial y} F(\xi, y, u_\varepsilon(\xi, y)) d\xi$$

et, par dérivations successives, pour $n \geq 1$,

$$\frac{\partial^{n+1} u_\varepsilon}{\partial y^{n+1}}(x,y) = \frac{\partial^{n+1} u_{0,\varepsilon}}{\partial y^{n+1}}(x,y) - \int_x^{f^{-1}(y)} \frac{\partial^n}{\partial y^n} F(\xi, y, u_\varepsilon(\xi, y)) d\xi$$
$$- \sum\nolimits_{j=0}^{n-1} C_n^j \left(f^{-1}\right)^{(n-j)}(y) \frac{\partial^j}{\partial y^j} F(f^{-1}(y), y, \varphi_\varepsilon(f^{-1}(y))).$$

Comme on a pris $K \subset K_\lambda$, on peut écrire

$$\sup_{(x,y)\in K} \left| \frac{\partial^{n+1} u_\varepsilon}{\partial y^{n+1}}(x,y) \right|$$
$$\leq \left\| \frac{\partial^{n+1} u_{0,\varepsilon}}{\partial y^{n+1}} \right\|_{\infty,K} + (2\lambda) \left(\sup_{(x,y)\in K} \left| \frac{\partial^n}{\partial y^n} F(x, y, u_\varepsilon(x,y)) \right| \right)$$
$$+ \sup_{y\in[f(-\lambda), f(\lambda)]} \sum\nolimits_{j=0}^{n-1} C_n^j \left| \left(f^{-1}\right)^{(n-j)}(y) \right| \left| \frac{\partial^j}{\partial y^j} F(f^{-1}(y), y, \varphi_\varepsilon(f^{-1}(y))) \right|.$$

On a

$$\left(\sup_{(x,y)\in K} \left| \frac{\partial^n}{\partial y^n} F(x, y, u_\varepsilon(x,y)) \right| \right) = P_{K,(0,n)}(F(.,.,u_\varepsilon))$$
$$\leq P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon))$$

et

$$\sup_{y\in[f(-\lambda), f(\lambda)]} \left| \frac{\partial^j}{\partial y^j} F(f^{-1}(y), y, \varphi_\varepsilon(f^{-1}(y))) \right| \leq \left(\sup_{(x,y)\in K} \left| \frac{\partial^i}{\partial y^i} F(x, y, u_\varepsilon(x,y)) \right| \right)$$
$$\leq P_{K,i}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon)).$$

Compte tenu de l'hypothèse de stabilité, un calcul simple montre alors que, pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(P_{K,(0,n+1)}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+.$$

a3.2) Pour $\alpha+\beta=n$ et $\beta\geq 1$, on a maintenant

$$\begin{aligned}
P_{K,(\alpha+1,\beta)}(u_\varepsilon) &= \sup_{(x,y)\in K}\left|D^{(\alpha+1,\beta)}u_\varepsilon\left(x,y\right)\right| = \sup_{(x,y)\in K}\left|D^{(\alpha,\beta-1)}D^{(1,1)}u_\varepsilon\left(x,y\right)\right| \\
&= \sup_{(x,y)\in K}\left|D^{(\alpha,\beta-1)}F(x,y,u_\varepsilon\left(x,y\right))\right| = P_{K,(\alpha,\beta-1)}(F(.,.,u_\varepsilon)) \\
&\leq P_{K,n-1}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon)).
\end{aligned}$$

On a donc finalement

$$P_{3,n}(u_\varepsilon) = \sup_{\alpha+\beta=n;\beta\geq 1} P_{K,(\alpha+1,\beta)}(u_\varepsilon) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon))$$

et l'hypothèse de stabilité assure alors que

$$\left(P_{3,n}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+.$$

De même pour $\alpha+\beta=n$ et $\alpha\geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
P_{K,(\alpha,\beta+1)}(u_\varepsilon) &= \sup_{(x,y)\in K}\left|D^{(\alpha,\beta+1)}u_\varepsilon\left(x,y\right)\right| = \sup_{(x,y)\in K}\left|D^{(\alpha-1,\beta)}D^{(1,1)}u_\varepsilon\left(x,y\right)\right| \\
&= \sup_{(x,y)\in K}\left|D^{(\alpha-1,\beta)}F(x,y,u_\varepsilon\left(x,y\right))\right| = P_{K,(\alpha-1,\beta)}(F(.,.,u_\varepsilon)) \\
&\leq P_{K,n-1}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon)).
\end{aligned}$$

On a donc

$$P_{4,n}(u_\varepsilon) = \sup_{\alpha+\beta=n;\alpha\geq 1} P_{K,(\alpha,\beta+1)}(u_\varepsilon) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon))$$

et l'hypothèse de stabilité assure alors que

$$\left(P_{4,n}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+.$$

Finalement, on a bien

$$\left(P_{K,n+1}(u_\varepsilon)\right)_\epsilon \in A_+.$$

b) Montrons que u est l'unique solution de (P_G).

Soit $v = [v_\varepsilon]$ une autre solution de (P_G).

Il existe $(i_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right)$, $(\alpha_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$, $(\beta_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$, tels que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x \partial y}(x,y) = F(x,y,v_\varepsilon(x,y)) + i_\varepsilon(x,y) \\ v_\varepsilon\left(x, f(x)\right) = \varphi_\varepsilon(x) + \alpha_\varepsilon(x) \\ \dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}\left(x, f(x)\right) = \psi_\varepsilon(x) + \beta_\varepsilon(x). \end{cases}$$

Il est facile de voir que

$$\left(\iint_{D(x,y,f)} i_\varepsilon(\xi,\eta)) d\xi d\eta \right)_\varepsilon \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Il existe donc $(j_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right)$ tel que

$$v_\varepsilon(x,y) = v_{0,\varepsilon}(x,y) - \iint_{D(x,y,f)} F(\xi,\eta,v_\varepsilon(\xi,\eta)) d\xi d\eta + j_\varepsilon(x,y),$$

avec $v_{0,\varepsilon}(x,y) = u_{0,\varepsilon}(x,y) + \theta_\varepsilon(x,y)$, où $u_{0,\varepsilon}(x,y) = \chi_\varepsilon\left(y\right) - \chi_\varepsilon(f\left(x\right)) + \varphi_\varepsilon(x)$ et

$$\theta_\varepsilon(x,y) = B_\varepsilon(y) - B_\varepsilon(f\left(x\right)) + \alpha_\varepsilon(x)$$

où B_ε est une primitive de $\beta_\varepsilon \circ f^{-1}$. Donc $(\theta_\varepsilon)_\varepsilon$ appartient à $\mathcal{N}(\mathbb{R}^2)$.

Il existe donc $(\sigma_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^2)$ tel que :

$$v_\varepsilon(x,y) = u_{0,\varepsilon}(x,y) + \sigma_\varepsilon(x,y) - \iint_{D(x,y,f)} F(\xi,\eta,v_\varepsilon(\xi,\eta)) d\xi d\eta.$$

b1) Posons $w_\varepsilon = v_\varepsilon - u_\varepsilon$ et montrons que : $(w_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^2)$.

Il s'agit de prouver que

$$\forall K \Subset \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \left(P_{K,n}(w_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in I_A^+.$$

Procédons par récurrence en montrant d'abord que l'on a

$$\left(P_{K,1}\left(w_{\varepsilon}\right)\right)_{\varepsilon} \in I_A.$$

On a

$$w_{\varepsilon}(x,y) = \iint_{D(x,y,f)} \left(-F(\xi,\eta,v_{\varepsilon}(\xi,\eta)) + F(\xi,\eta,u_{\varepsilon}(\xi,\eta))\right) d\xi d\eta + \sigma_{\varepsilon}(x,y),$$

or

$$\begin{aligned} F(\xi,\eta,v_{\varepsilon}(\xi,\eta)) - F(\xi,\eta,u_{\varepsilon}(\xi,\eta)) = \\ (v_{\varepsilon}(\xi,\eta) - u_{\varepsilon}(\xi,\eta)) \left(\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial z}(\xi,\eta,u_{\varepsilon}(\xi,\eta) + \theta(v_{\varepsilon}(\xi,\eta) - u_{\varepsilon}(\xi,\eta)))d\theta\right), \end{aligned}$$

donc

$$w_{\varepsilon}(x,y) = -\iint_{D(x,y,f)} w_{\varepsilon}(\xi,\eta) \left(\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial z}(\xi,\eta,u_{\varepsilon}(\xi,\eta) + \theta(w_{\varepsilon}(\xi,\eta)))d\theta\right) d\xi d\eta + \sigma_{\varepsilon}(x,y). \tag{3}$$

Soit $(x,y) \in K_{\lambda}$, puisque $D(x,y,f) \subset K_{\lambda}$, si $y \geq f(x)$, on a

$$\begin{aligned} |w_{\varepsilon}(x,y)| &\leq m_{\lambda} \int_x^{f^{-1}(y)} \int_{f(\xi)}^{y} |w_{\varepsilon}(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta + \|\sigma_{\varepsilon}\|_{\infty,K_{\lambda}} \\ &\leq m_{\lambda} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \int_{f(x)}^{y} |w_{\varepsilon}(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta + \|\sigma_{\varepsilon}\|_{\infty,K_{\lambda}}. \end{aligned}$$

Posons : $e_{\varepsilon}(y) = \sup\limits_{\xi \in [-\lambda;+\lambda]} |w_{\varepsilon}(\xi,y)|$, alors

$$|w_{\varepsilon}(x,y)| \leq m_{\lambda} 2\lambda \int_{f(-\lambda)}^{y} e_{\varepsilon}(\eta) d\eta + \|\sigma_{\varepsilon}\|_{\infty,k_{\lambda}},$$

on en déduit

$$\forall y \in [f(-\lambda); f(+\lambda)], \text{si } y \geq f(x),\ e_{\varepsilon}(y) \leq m_{\lambda} 2\lambda \int_{f(-\lambda)}^{y} e_{\varepsilon}(\eta) d\eta + \|\sigma_{\varepsilon}\|_{\infty,K_{\lambda}}.$$

Rappel : *Lemme de Gronwall.*

Soit $\alpha : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue positive et* u_0 *une constante positive.*

Toute fonction f telle que $0 \leq f(t) \leq u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\alpha(s)ds$, vérifie l'estimée explicite

$$0 \leq f(t) \leq u_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds\right).$$

Ainsi, d'après le lemme de Gronwall,

$$\forall y \in [f(-\lambda); f(+\lambda)]\,, \text{si } y \geq f(x),\ e_\varepsilon(y) \leq \left(\exp(\int_{f(-\lambda)}^{y} m_\lambda 2\lambda d\eta)\right) \|\sigma_\varepsilon\|_{\infty,K_\lambda}.$$

On obtient le même résultat pour $y \leq f(x)$, d'où, pour tout $y \in [f(-\lambda); f(+\lambda)]$,

$$\begin{aligned} e_\varepsilon(y) &\leq (\exp(m_\lambda 2\lambda\,(y - f(-\lambda)))\,\|\sigma_\varepsilon\|_{\infty,K_\lambda} \\ &\leq [\exp(m_\lambda(2\lambda)(f(\lambda) - f(-\lambda))]\,\|\sigma_\varepsilon\|_{\infty,K_\lambda}\,, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\|w_\epsilon\|_{\infty,K_\lambda} \leq [\exp(m_\lambda(2\lambda)(f(\lambda) - f(-\lambda))]\,\|\sigma_\varepsilon\|_{\infty,K_\lambda}\,,$$

$(\sigma_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^2)$ donc $\left(\|\sigma_\varepsilon\|_{\infty,K_\lambda}\right)_\varepsilon \in I_A$.

$[\exp(m_\lambda(2\lambda)(f(\lambda) - f(-\lambda))]$ est une constante par conséquent $\left(\|w_\varepsilon\|_{\infty,K_\lambda}\right)_\varepsilon \in I_A$.

Ce qui entraîne l'estimation d'ordre 0.

b2) Récurrence.

Supposons que pour tout $l \leq n$, on ait $(P_{K,l}(w_\varepsilon))_\varepsilon \in I_A^+$ et montrons que cela entraîne $(P_{K,n+1}(w_\varepsilon))_\varepsilon \in I_A^+$.

b2.1) Montrons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(P_{1,n}(w_\varepsilon))_\varepsilon \in I_A^+.$$

On a

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \sigma_\varepsilon}{\partial x}(x,y) + \int_{f(x)}^{y} \left(F(x,\eta,v_\varepsilon(x,\eta)) - F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))\right) d\eta$$

et par dérivations successives, pour $n \geq 1$,

$$\frac{\partial^{n+1} u_{\varepsilon}}{\partial x^{n+1}}(x,y) = \frac{\partial^{n+1} u_{0,\varepsilon}}{\partial x^{n+1}}(x,y)$$
$$- \sum\nolimits_{j=0}^{n-1} C_n^j f^{(n-j)}(x) \frac{\partial^j}{\partial x^j} F(x, f(x), \varphi_{\varepsilon}(x)) + \int_{f(x)}^{y} \frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x, \eta, u_{\varepsilon}(x,\eta)) d\eta.$$

Donc

$$\frac{\partial^{n+1} w_{\varepsilon}}{\partial x^{n+1}}(x,y) = \frac{\partial^{n+1} \sigma_{\varepsilon}}{\partial x^{n+1}}(x,y) + \delta_{\varepsilon}(x) +$$
$$\int_{f(x)}^{y} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(F(x,\eta, v_{\varepsilon}(x,\eta)) - F(x,\eta,u_{\varepsilon}(x,\eta)\right) d\eta,$$

avec

$$\delta_{\varepsilon}(x) = \sum\nolimits_{j=0}^{n-1} C_n^j f^{(n-j)}(x) \left(\frac{\partial^j}{\partial x^j} F(x, f(x), \varphi_{\varepsilon}(x)) - \frac{\partial^j}{\partial x^j} F(x, f(x), \varphi_{\varepsilon}(x) + \alpha_{\varepsilon}(x)) \right),$$

$(\delta_{\varepsilon})_{\varepsilon} \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$. D'où

$$P_{K,(n+1,0)}(w_{\varepsilon}) \leq P_{K,(n+1,0)}(\sigma_{\varepsilon}) + \sup_{x \in [-\lambda,\lambda]} |\delta_{\varepsilon}(x)|$$
$$+ \left(f(\lambda) - f(-\lambda)\right) \left(\sup_{(x,y)\in K} \left| \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(F(x,\eta,v_{\varepsilon}(x,\eta)) - F(x,\eta,u_{\varepsilon}(x,\eta)\right) \right| \right).$$

On a

$$\left(\sup_{(x,y)\in K} \left| \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(F(x,\eta,v_{\varepsilon}(x,\eta)) - F(x,\eta,u_{\varepsilon}(x,\eta)\right) \right| \right) = P_{K,(n,0)} \left(F(.,.,v_{\varepsilon}) - F(.,.,u_{\varepsilon}) \right)$$
$$\leq P_{K,n} \left(F(.,.,v_{\varepsilon}) - F(.,.,u_{\varepsilon}) \right).$$

Compte tenu de l'hypothèse de stabilité, pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$,

$$\left(P_{K,(n+1,0)}(w_{\varepsilon}) \right)_{\epsilon} \in I_A^+.$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_{2,n}(w_{\varepsilon}))_{\varepsilon} \in I_A^+$.

On a

$$\frac{\partial^{n+1} u_{\varepsilon}}{\partial y^{n+1}}(x,y) = \frac{\partial^{n+1} u_{0,\varepsilon}}{\partial y^{n+1}}(x,y) - \sum\nolimits_{j=0}^{n-1} C_n^j \left(f^{-1}\right)^{(n-j)}(y) \frac{\partial^j}{\partial y^j} F(f^{-1}(y), y, \varphi_{\varepsilon}(f^{-1}(y)))$$
$$- \int_{x}^{f^{-1}(y)} \frac{\partial^n}{\partial y^n} F(\xi, y, u_{\varepsilon}(\xi,y)) d\xi.$$

Donc

$$\frac{\partial^{n+1} w_\varepsilon}{\partial y^{n+1}}(x,y) = \frac{\partial^{n+1}\sigma_\varepsilon}{\partial y^{n+1}}(x,y)+\mu_\varepsilon(y)-\int_x^{f^{-1}(y)}\left(\frac{\partial^n}{\partial y^n}F(x,y,v_\varepsilon(x,y)) - \frac{\partial^n}{\partial y^n}F(x,y,u_\varepsilon(x,y))\right)d\xi,$$

avec

$$\begin{aligned}\mu_\varepsilon(y) &= \sum\nolimits_{j=0}^{n-1} C_n^j \left(f^{-1}\right)^{(n-j)}(y)\left(\frac{\partial^j}{\partial y^j}F(f^{-1}(y),y,\varphi_\varepsilon(f^{-1}(y)))\right)\\ &\quad -\sum\nolimits_{j=0}^{n-1} C_n^j \left(f^{-1}\right)^{(n-j)}(y)\left(\frac{\partial^j}{\partial y^j}F(f^{-1}(y),y,\varphi_\varepsilon(f^{-1}(y))+\alpha_\varepsilon(f^{-1}(y))\right),\end{aligned}$$

$(\mu_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$. D'où

$$\begin{aligned}P_{K,(0,n+1)}(w_\varepsilon) &\leq P_{K,(0,n+1)}(\sigma_\varepsilon) + \sup_{y\in[f(-\lambda),f(\lambda)]}|\mu_\varepsilon(y)|\\ &\quad + (2\lambda)\left(\sup_{(x,y)\in K}\left|\frac{\partial^n}{\partial y^n}F(x,y,v_\varepsilon(x,y)) - \frac{\partial^n}{\partial y^n}F(x,y,u_\varepsilon(x,y))\right|\right).\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\left(\sup_{(x,y)\in K}\left|\frac{\partial^n}{\partial y^n}F(x,y,v_\varepsilon(x,y)) - \frac{\partial^n}{\partial y^n}F(x,y,u_\varepsilon(x,y))\right|\right) &= P_{K,(0,n)}(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon))\\ &\leq P_{K,(0,n)}(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon)).\end{aligned}$$

Compte tenu de l'hypothèse de stabilité, pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$,

$$\left(P_{K,(0,n+1)}(w_\varepsilon)\right)_\epsilon \in I_A.$$

b2 2)

Pour $\alpha+\beta = n$ et $\beta \geq 1$, on a

$$P_{K,(\alpha+1,\beta)}(w_\varepsilon) = P_{K,(\alpha,\beta-1)}(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon)) \leq P_{K,n-1}(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon)).$$

On a donc finalement

$$P_{3,n}(w_\varepsilon) = \sup_{\alpha+\beta=n,\beta\geq 1} P_{K,(\alpha+1,\beta)}(w_\varepsilon) \leq P_{K,n-1}(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon))$$

et l'hypothèse de stabilité assure alors que

$$\left(P_{3,n}(w_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in I_A^+.$$

Pour $\alpha+\beta=n$ et $\alpha \geq 1$, on a maintenant

$$P_{K,(\alpha,\beta+1)}(w_\varepsilon) = P_{K,(\alpha-1,\beta)}(F(.,.,v_\varepsilon)-F(.,.,u_\varepsilon)) \leq P_{K,n-1}(F(.,.,v_\varepsilon)-F(.,.,u_\varepsilon)).$$

On a donc finalement

$$P_{4,n}(w_\varepsilon) = \sup_{\alpha+\beta=n,\alpha\geq 1} P_{K,(\alpha,\beta+1)}(w_\varepsilon) \leq P_{K,n-1}(F(.,.,v_\varepsilon)-F(.,.,u_\varepsilon))$$

et l'hypothèse de stabilité assure alors que

$$\left(P_{4,n}(w_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in I_A^+.$$

Donc pour tout $l \leq n+1$, on a

$$\left(P_{K,l}(w_\varepsilon)\right)_\epsilon \in I_A^+.$$

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(P_{K,n}(w_\varepsilon)\right)_\epsilon \in I_A^+.$$

Donc $(w_\epsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^2)$; par conséquent u est l'unique solution de (P_G). $\square$

Chapitre 5

Etude qualitative de la solution

5.1 Spectre singulier paramétrique de la solution du problème de Cauchy

5.1.1 Relation entre le $\mathcal{D}'$-spectre singulier paramétrique de la solution u et le $\mathcal{D}'$-spectre singulier paramétrique de u_0

5.1.1.1. Théorème

O*n pose* $u_0 = [u_{0,\varepsilon}]$ *avec*

$$u_{0,\varepsilon}(x,y) = \chi_\varepsilon\,(y) - \chi_\varepsilon(f(x)) + \varphi_\varepsilon(x)$$

où χ_ε désigne une primitive de $\psi_\varepsilon \circ f^{-1}$, *et on suppose que*

$(H_2)\quad \forall K \Subset \mathbb{R}^2, \mathcal{M}_F(K) = \sup\limits_{(x,y)\in K, z\in\mathbb{R}} |F(x,y,z)| < +\infty.$

Alors la restriction au support singulier paramétrique de u_0 *du* $\mathcal{D}'$*-spectre singulier paramétrique de la solution* u *du problème de Cauchy* (P_G) *est contenue dans la restriction au support singulier paramétrique de* u_0 *du* $\mathcal{D}'$*-spectre singulier paramétrique de* u_0*. Autrement dit, au dessus du support singulier de* u_0*, il n'y a pas d'accroissement des singu-*

larités distributionnelles de u par rapport à celles de u_0.

Démonstration.

Soient $(x_0, y_0) = X \in S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}} u_0$ et $r \in N_{\mathcal{D}',X}(u_0)$. Il résulte des définitions que l'on a $\Sigma_{\mathcal{D}',X}(u_0) \neq \emptyset$, et donc que $N_{\mathcal{D}',X}(u_0) \subset]0, +\infty[$ ce qui entraîne $r > 0$.

Montrons qu'alors : $r \in N_{\mathcal{D}',X}(u)$.

Par définition de $N_{\mathcal{D}',X}(u_0)$, il existe un voisinage V_X de X tel que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon^r u_{\varepsilon|_{V_X}}) \in \mathcal{D}'(V_X).$$

Soit $g \in \mathcal{D}(V_X)$. Il existe donc une distribution $T \in \mathcal{D}'(V_X)$ telle que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{V_X} \varepsilon^r u_{0,\varepsilon}(x,y) g(x,y) dxdy = T(g).$$

Montrons que

$$\iint_{V_X} \varepsilon^r \left[u_\varepsilon(x,y) - u_{0,\varepsilon}(x,y) \right] g(x,y) dxdy$$

admet pour limite 0, quand ε tend vers 0.

Supposons encore $y \geq f(x)$.

Comme

$$u_\varepsilon(x,y) - u_{0,\varepsilon}(x,y) = -\iint_{D(x,y,f)} F(\xi, \eta, u_\varepsilon(\xi,\eta)) d\xi d\eta$$

et que (avec les notations précédentes)

$$\begin{aligned}
&\left| \iint_{V_X} \left[\iint_{D(x,y,f)} F(\xi, \eta, u_\varepsilon(\xi,\eta)) d\xi d\eta \right] g(x,y) dxdy \right| \\
&\qquad \leq \mathcal{M}_F(\mathrm{supp} g) \left| \iint_{\mathrm{supp} g} \left[\iint_{D(x,y,f)} d\xi d\eta \right] g(x,y) dxdy \right| \\
&\qquad \leq \mathcal{M}_F(\mathrm{supp} g) \left| \iint_{\mathrm{supp} g} (A(x,y))\, g(x,y) dxdy \right| \\
&\qquad \leq \mathcal{M}_F(\mathrm{supp} g) \left| \iint_{\mathrm{supp} g} (2\lambda |y|)\, g(x,y) dxdy \right| \\
&\qquad \leq 2\lambda \mathcal{M}_F(\mathrm{supp} g) \iint_{\mathrm{supp} g} |y| \, |g(x,y)| \, dxdy < +\infty,
\end{aligned}$$

nous avons alors

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to 0}\left|\iint_{V_X}\varepsilon^r\left[u_\varepsilon(x,y)-u_{0,\varepsilon}(x,y)\right]g(x,y)dxdy\right| \\
&\qquad\le \limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^r\left|\iint_{V_X}\left[\iint_{D(x,y,f)}F(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta))d\xi d\eta\right]g(x,y)dxdy\right| \\
&\qquad\le \limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^r\left[2\lambda\left(\mathcal{M}_F(\mathrm{supp}g)\right)\iint_{\mathrm{supp}g}|y|\,|g(x,y)|\,dxdy\right]=0,
\end{aligned}$$

car $r\neq 0$. Et donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{V_X}\varepsilon^r u_\varepsilon(x,y)g(x,y)dxdy=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{V_X}\varepsilon^r u_{0,\varepsilon}(x,y)g(x,y)dxdy=T(g).$$

Il en résulte que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^r u_{\varepsilon}|_{V_X})=\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^r u_{0,\varepsilon}|_{V_X})\in\mathcal{D}'(V_X).$$

Nous avons donc $r\in N_{\mathcal{D}',X}(u)$, ce qui prouve l'inclusion $N_{\mathcal{D}',X}(u_0)\subset N_{\mathcal{D}',X}(u)$, et par suite, $\Sigma_{\mathcal{D}',X}(u)\subset\Sigma_{\mathcal{D}',X}(u_0)$, par conséquent

$$S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}u\Big|_{S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}u_0}\subset S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}u_0\Big|_{S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}}u_0}.$$

□

5.1.2 Exemples.

Prenons $g\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $g\geq 0$, $\int_{\mathbb{R}}g(x)dx=1$.

Avec les notations précédentes nous avons $\varphi=[\varphi_\varepsilon]$ et $\chi=[\chi_\varepsilon]$ où χ_ε est une primitive de $\psi_\varepsilon\circ f^{-1}$ et

$$u_{0,\varepsilon}(x,y)=\chi_\varepsilon(y)-\chi_\varepsilon(f(x))+\varphi_\varepsilon(x).$$

$f(x)=ax$, $a>0$. Considérons les cas suivants

1)

$$\chi_\varepsilon(y)=\varepsilon^{-1}g(y\varepsilon^{-1})\text{ et }\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-1}g(x\varepsilon^{-1}),$$

donc

$$\chi_\varepsilon(f(x)) = \varepsilon^{-1} g(f(x)\varepsilon^{-1}) = \varepsilon^{-1} g(ax\varepsilon^{-1}).$$

$N_{\mathcal{D}',X}(u_0) = [1, +\infty[$, nous avons alors $S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}} u \subset \mathbb{R}^2 \times [0,1[$.

2)

$$\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} g(x\varepsilon^{-1}) \text{ et } \varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2} g(x\varepsilon^{-1}) = \varepsilon^{-1}\left[\varepsilon^{-1} g(x\varepsilon^{-1})\right].$$

$N_{\mathcal{D}',X}(u_0) = [2, +\infty[$, nous avons alors $S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}} u \subset \mathbb{R}^2 \times [0,2[$.

3)

$$\chi_\varepsilon(x) = g(x\varepsilon^{-1}) \text{ et } \varphi_\varepsilon(x) = g(x\varepsilon^{-1}) = \varepsilon[\varepsilon^{-1} g(x\varepsilon^{-1})]$$

$N_{\mathcal{D}',X}(u_0) = [0, +\infty[$, nous avons alors : $S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}} u \subset \mathbb{R}^2 \times \varnothing$. $\square$

5.2 Etude qualitative de la solution. Cas : $F = 0$

5.2.1 Enoncé du problème

On cherche une solution u généralisée du problème de Cauchy suivant

$$(P_G)\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = 0 \\ u_{|\gamma} = \varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}_{|\gamma} = \psi \end{cases}$$

en considérant comme donnée la courbe γ d'équation $y = f(x)$.

Soit

$$P_\infty(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \\ u_\varepsilon(x, f(x)) = \varphi_\varepsilon(x) \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x, f(x)) = \psi_\varepsilon(x). \end{cases}$$

Avec les notations précédentes, nous avons

$$\varphi = [\varphi_\varepsilon], \psi = [\chi_\varepsilon] \text{ et } u_\varepsilon(x,y) = \chi_\varepsilon(y) - \chi_\varepsilon(f(x)) + \varphi_\varepsilon(x).$$

5.2.2 Etude qualitative de la solution. Cas : $F = 0,\ f(x) = ax,\ (a > 0)$

Cas : $f(x) = ax$, $(a > 0)$, $\varphi \sim \delta$, $\psi \sim \delta$,

l'association étant définie comme suit :

Considérons g paire dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, vérifiant $\int_{\mathbb{R}} g(\xi)d\xi = 1$. Posons : $\varphi_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon} g(\dfrac{x}{\varepsilon}) = \psi_\varepsilon(x)$. Alors $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\psi_\varepsilon)_\varepsilon$ convergent au sens des distributions vers δ. Donc $\varphi = [\varphi_\varepsilon]$ et $\psi = [\psi_\varepsilon]$ sont bien associées à δ.

La solution de $P_\infty(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ est définie par $u_\varepsilon(x,y) = \chi_\varepsilon(y) - \chi_\varepsilon(f(x)) + \varphi_\varepsilon(x)$, avec

$$\chi_\varepsilon(y) = \int_0^y \psi_\varepsilon\left(f^{-1}(\eta)\right) d\eta = \int_0^y \psi_\varepsilon\left(\frac{\eta}{a}\right) d\eta = a\int_0^{\frac{y}{a}} \psi_\varepsilon(t)\, dt = a\left(\Psi_\varepsilon\left(\frac{y}{a}\right) - \Psi_\varepsilon(0)\right)$$

où Ψ_ε est une primitive de ψ_ε

Donc

$$u_\varepsilon(x,y) = a\Psi_\varepsilon\left(\frac{y}{a}\right) - a\Psi_\varepsilon(x) + \varphi_\varepsilon(x).$$

On peut choisir Ψ_ε telle que $\Psi_\varepsilon(0) = \dfrac{1}{2}$, de sorte que

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathcal{D}'(\mathbb{R})}} \Psi_\varepsilon = Y \text{ et } \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathcal{D}'(\mathbb{R})}} \left(y \mapsto \Psi_\varepsilon\left(\frac{y}{a}\right)\right) = Y.$$

Nous avons alors la décomposition

$$[u_\varepsilon] = [w_{\varepsilon,1}] + [w_{\varepsilon,2}] + [w_{\varepsilon,3}],$$

avec

$$\begin{cases} [w_{\varepsilon,1}] \sim a(1_x \otimes Y_y) \\ [w_{\varepsilon,2}] \sim -a\,(Y_x \otimes 1_y) \\ [w_{\varepsilon,3}] \sim \delta_x \otimes 1_y. \end{cases}$$

□

Cas : $f(x) = ax$**,** $(a > 0)$**,** $\varphi \sim \delta$**,** $\psi = \Psi'$**, avec** $\Psi \sim \delta$**,**

l'association étant réalisée comme suit :

Considérons $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, vérifiant $\int_{\mathbb{R}} g(\xi)d\xi = 1$. Posons : $\varphi_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}g(\dfrac{x}{\varepsilon}) = \Psi_\varepsilon(x)$. Alors $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\Psi_\varepsilon)_\varepsilon$ convergent au sens des distributions vers δ. On pose alors $\varphi = [\varphi_\varepsilon]$ et $\Psi = [\Psi_\varepsilon]$.

La solution de $P_\infty(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ est définie par

$$u_\varepsilon(x,y) = \chi_\varepsilon(y) - \chi_\varepsilon(f(x)) + \varphi_\varepsilon(x) = a\Psi_\varepsilon\left(\frac{y}{a}\right) - a\Psi_\varepsilon(x) + \varphi_\varepsilon(x).$$

On calcule

$$\frac{1}{a}\int \Psi_\varepsilon\left(\frac{y}{a}\right)dy = \frac{1}{a}\frac{1}{\varepsilon}\int g(\frac{y}{a\varepsilon})dy = \frac{1}{\varepsilon}\int g(\frac{x}{\varepsilon})dx = 1.$$

Il en résulte que

$$\frac{1}{a}\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathcal{D}'(\mathbb{R})}}\left(y \mapsto \Psi_\varepsilon\left(\frac{y}{a}\right)\right) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathcal{D}'(\mathbb{R})}}\Psi_\varepsilon = \delta.$$

Donc

$$[u_\varepsilon] = [w_{\varepsilon,1}] + [w_{\varepsilon,2}] + [w_{\varepsilon,3}],$$

avec

$$\begin{cases} [w_{\varepsilon,1}] \sim a^2(1_x \otimes \delta_y) \\ [w_{\varepsilon,2}] \sim -a(\delta_x \otimes 1_y) \\ [w_{\varepsilon,3}] \sim \delta_x \otimes 1_y, \end{cases}$$

d'où

$$u \sim a^2(1_x \otimes \delta_y) - a(\delta_x \otimes 1_y) + \delta_x \otimes 1_y.$$

□

Cas : $f(x) = ax$, $(a > 0)$, $\varphi \sim S$, $\psi = \Psi'$ **et** $\Psi \sim T$ **;** $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

l'association étant réalisée en choisissant

$$\varphi = [g_\varepsilon * S] \text{ et } \Psi = [g_\varepsilon * T]$$

puisque

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathcal{D}'(\mathbb{R})}} (g_\varepsilon * S)_\varepsilon = S \text{ et } \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathcal{D}'(\mathbb{R})}} (g_\varepsilon * T)_\varepsilon = T.$$

On a donc ici

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x,y) &= \chi_\varepsilon(y) - \chi_\varepsilon(f(x)) + \varphi_\varepsilon(x) = a\Psi_\varepsilon\left(\frac{y}{a}\right) - a\Psi_\varepsilon(x) + \varphi_\varepsilon(x) \\ &= a\,(g_\varepsilon * T)\left(\frac{y}{a}\right) - a\,(g_\varepsilon * T)(x) + (g_\varepsilon * S)(x)\,. \end{aligned}$$

Evaluons la fonction $y \mapsto (g_\varepsilon * T)\left(\frac{y}{a}\right)$ sur une fonction test $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Posant $H(z) = h(az)$, on peut écrire

$$\int (g_\varepsilon * T)\left(\frac{y}{a}\right) h(y)dy = a\int (g_\varepsilon * T)(z)\, h(az)dz.$$

Définissons alors $\widetilde{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par

$$< \widetilde{T}, h >= \langle aT, [z \mapsto h(az)] \rangle = \langle aT, H \rangle\,.$$

D'où

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int (g_\varepsilon * T)\left(\frac{y}{a}\right) h(y)dy = \lim_{\varepsilon \to 0} a\int (g_\varepsilon * T)(z)\, H(z)dz = \langle aT, H \rangle =< \widetilde{T}, h > \,,$$

puis

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathcal{D}'(\mathbb{R})}} \left[y \mapsto (g_\varepsilon * T)\left(\frac{y}{a}\right)\right] = \widetilde{T}.$$

Nous pouvons alors écrire la décomposition : $[u_\varepsilon] = [w_{\varepsilon,1}] + [w_{\varepsilon,2}] + [w_{\varepsilon,3}]$, avec

$$\left\{ \begin{array}{c} [w_{\varepsilon,1}] \sim a(1_x \otimes \widetilde{T}_y) \\ [w_{\varepsilon,2}] \sim -a(T_x \otimes 1_y) \\ [w_{\varepsilon,3}] \sim S_x \otimes 1_y \end{array} \right.$$

et donc

$$u \sim a(1_x \otimes \widetilde{T}_y) - a\,(T_x \otimes 1_y) + S_x \otimes 1_y\,.$$

On peut remarquer que

$$< \widetilde{\delta}, h >= a\delta\,[z \mapsto h\,(az)] = ah(0) = a < \delta, h >,$$

donc que $\widetilde{\delta} = a\delta$, il en résulte que pour $T = \delta$, on retrouve bien le résultat précédent.

$\square$

Chapitre 6

Un problème de Goursat généralisé

6.1 Enoncé du problème

6.1.1 Problème (P'_G)

Nous cherchons une solution u du problème de Goursat

$$(P'_G)\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = F(.,.,u) \\ u_{|(Ox)} = \varphi \\ u_{|_\gamma} = \psi \end{cases}$$

dans une algèbre de fonctions généralisées $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ définie au chapitre précédent.

On suppose que $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ est stable par F, que $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ sont construits sur le même anneau de constantes généralisées.

On suppose que les problèmes

$$P'_\infty(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y}(x,y) = F(x,y,u_\varepsilon(x,y)) \\ u_\varepsilon\left(x,0)\right) = \varphi_\varepsilon(x) \\ u_\varepsilon\left(g(y),y\right) = \psi_\varepsilon(y), \end{cases}$$

admettent pour tout ε une solution $u_\epsilon \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

6.1.2 Donner un sens à (P'_G)

Donner un sens à (P'_G) c'est d'abord donner un sens à

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = F(.,.,u) & (1_G) \\ u_{|(Ox)} = \varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R}) & (2_G) \\ u_{|_\gamma} = \psi \in \mathcal{A}(\mathbb{R}) & (3_G) \end{cases}$$

lorsque $u \in \mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ et γ est la sous variété lisse de $\mathbb{R}^2$ définie par $x = g(y)$.

Donner un sens à (1_G), sous l'hypothèse que $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ est stable par F, signifie que pour un représentant $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ de u on doit avoir, pour tout $(i_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right)$ et $(j_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right)$, $\left(\dfrac{\partial^2(u_\varepsilon + i_\varepsilon)}{\partial x \partial y} - F(.,.,u_\varepsilon) + j_\varepsilon\right)_\varepsilon \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right)$.
Comme $\left(\dfrac{\partial^2(u_\varepsilon + i_\varepsilon)}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y}\right)_\varepsilon \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right)$ et que $\left(F(.,.,u_\varepsilon) + j_\varepsilon - F(.,.,u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right)$, ceci se ramène à vérifier que

$$\underline{\left(\frac{\partial^2(u_\varepsilon)}{\partial x \partial y} - F(.,.,u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right).}$$

Donner un sens à (2_G) et (3_G) signifie d'abord définir $u\mid_{(Ox)}$ et $u\mid_\gamma$ et, comme γ est une sous variété lisse de $\mathbb{R}^2$ représentable par une seule carte $(\gamma : x = g(y))$, on peut identifier $\mathcal{A}(\gamma)$ et $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ et donc $u\mid_\gamma$ et $u\mid_{(Ox)}$ aux éléments de $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ dont des représentants respectifs sont $(y \mapsto u_\varepsilon(g(y), y))_\varepsilon$ et $(x \mapsto u_\varepsilon(x, 0))_\varepsilon$.

(2_G) équivaut donc à

$(x \mapsto ((u_\varepsilon + i_\varepsilon)(x, 0) - (\varphi_\varepsilon + \alpha_\varepsilon)(x))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$.

(3_G) équivaut donc à

$(y \mapsto ((u_\varepsilon + i_\varepsilon)(g(y), y) - (\psi_\varepsilon + \beta_\varepsilon)(y)))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$, pour tout $(i_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^2)$, $(\alpha_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$,

$(\beta_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$, et, compte tenu que

$$(x \mapsto ((u_\varepsilon + i_\varepsilon)(x,0) - (u_\varepsilon(x,0)))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}),$$

$$(x \mapsto ((\varphi_\varepsilon + \alpha_\varepsilon)(x) - \varphi_\varepsilon(x)))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}),$$

$$(y \mapsto ((u_\varepsilon + i_\varepsilon)\,(g(y),y) - u_\varepsilon\,(g(y),y))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}),$$

$$(x \mapsto ((\psi_\varepsilon + \beta_\varepsilon)(x) - \psi_\varepsilon(x)))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}),$$

$$(y \mapsto (j_\varepsilon(y) - i_\varepsilon\,(g(y),y))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$$

ceci se ramène à

$$(x \mapsto (u_\varepsilon(x,0) - \varphi_\varepsilon(x)))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}),$$

$$(y \mapsto (u_\varepsilon\,(g(y),y) - \psi_\varepsilon(y))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}).$$

En résumé, (P'_G) a un sens si, et seulement si, il est représenté par un $(u_\varepsilon)_\varepsilon$vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y} - F(.,.,u_\varepsilon) \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right) \\ (x \mapsto (u_\varepsilon(x,0) - \varphi_\varepsilon(x)))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}) \\ (y \mapsto (u_\varepsilon\,(g(y),y) - \psi_\varepsilon(y))_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}). \end{array} \right.$$

Si donc pour tout ε la solution u_ε de $P'_\infty\,(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ est telle que $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ alors les relations ci-dessus sont *a fortiori* vraies et $[u_\varepsilon]$ est une solution de (P'_G). □

6.2 Résolution du problème

6.2.1 Résolution de (P'_G)

6.2.1.1. Théorème

Supposons que $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ soit stable par F, supposons que $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}\right)$ et $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ soient construits sur le même anneau $\mathcal{C} = A/I$ de constantes généralisées. Supposons que les données du *problème* (P'_G) *vérifient les conditions* $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, $g \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ $\varphi = [\varphi_\varepsilon]$, $\psi = [\psi_\varepsilon]$;

$\psi_\varepsilon(0) = \varphi_\varepsilon(g(0))$.

Alors le problème (P'_G) *admet une unique solution* u *dans* $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Démonstration.

Supposons $g(y) \leq x$.

Soit $u_\varepsilon = SP'_\infty(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ la solution de $P'_\infty(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ avec les conditions initiales $\varphi_\varepsilon \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\psi_\varepsilon \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$; cela signifie que u_ε vérifie le problème

$$P'_\infty(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y}(x,y) = F(x,y,u_\varepsilon(x,y)) \\ u_\varepsilon(x,0) = \varphi_\varepsilon(x) \\ u_\varepsilon\left(g(y),y\right) = \psi_\varepsilon(y). \end{cases}$$

D'après ce qui précède, il suffit de vérifier que $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ pour que $u = [u_\varepsilon]$ soit solution de (P'_G).

Toute autre solution v de (P'_G) étant de la forme : $v = [v_\varepsilon]$, où $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x \partial y} - F(.,.,v_\varepsilon) = (i_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^2\right) \\ (x \mapsto (v_\varepsilon(x,0) - \varphi_\varepsilon(x)))_\varepsilon = (\alpha_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}) \\ (y \mapsto (v_\varepsilon\left(g(y),y\right) - \psi_\varepsilon(y))_\varepsilon = (\beta_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

l'unicité de la solution de (P'_G) sera donc la conséquence de : $(v_\varepsilon - u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^2)$

a) Montrons que $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$.

Il s'agit de prouver que

$$\forall K \Subset \mathbb{R}^2, \forall l \in \mathbb{N}, \left(P_{K,l}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+.$$

Procédons par récurrence en montrant d'abord que l'on a

a1)

$$\forall K \Subset \mathbb{R}^2, \left(P_{K,0}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+$$

avec

$$P_{K,0}(u_\varepsilon) = \sup_K |u_\varepsilon(x)| = \|u_\varepsilon\|_{\infty,K}\,,$$

c'est-à-dire que la majoration d'ordre 0 est vérifiée.

D'après la proposition 2.2.1.2., on a : $\forall K \Subset \mathbb{R}^2, \exists K_\lambda \Subset \mathbb{R}^2, K \subset K_\lambda,$

$$\|u_\varepsilon\|_{\infty,K} \leq \|u_\varepsilon\|_{\infty,K_\lambda} \leq \|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda} + \frac{\Phi_{\lambda,\varepsilon}}{m_\lambda}\exp[2\lambda' m_\lambda\,(2\lambda)].$$

D'où $\left(\|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda}\right)_\varepsilon \in A$ car $[\varphi_\varepsilon]$ et $[\psi_\varepsilon]$ sont des éléments de $\mathcal{A}(\mathbb{R})$.

$$m_\lambda = \sup_{(x,y)\in K_\lambda;\ t\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,t)\right|$$

est une constante ne dépendant que de F, K_λ.

$c(K_\lambda) = \dfrac{1}{m_\lambda}\exp[4\lambda' m_\lambda \lambda]$ est une constante ne dépendant que de F, g, K_λ.

$\Phi_{\lambda,\varepsilon} = \|F(.,.,0)\|_{\infty,K_\lambda} + m_\lambda \|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda}$ donc

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_{\lambda,\varepsilon}}{m_\lambda}\exp[4\lambda' m_\lambda \lambda] &= c(K_\lambda)\Phi_{\lambda,\varepsilon}\\ &= c(K_\lambda)\|F(.,.,0)\|_{\infty,K_\lambda} + \exp[4\lambda' m_\lambda\lambda]\|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda}\,.\end{aligned}$$

$c_1(K_\lambda) = c(K_\lambda)\|F(.,.,0)\|_{\infty,K_\lambda}$ est une constante ne dépendant que de F, K_λ.

$\exp[4\lambda' m_\lambda\lambda]$ est une constante $c_2(K_\lambda)$ ne dépendant que de K_λ, F, g.

Par conséquent

$$\|u_\varepsilon\|_{\infty,K} \leq \|u_\varepsilon\|_{\infty,K_\lambda} \leq \|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda} + c_1(K_\lambda) + c_2(K_\lambda)\|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda}\,,$$

donc : $\|u_\varepsilon\|_{\infty,K} \leq \|u_\varepsilon\|_{\infty,K_\lambda} \leq (1 + c_2(K_\lambda))\|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda} + c_1(K_\lambda)$.

On a $\left(\|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda}\right)_\varepsilon \in A$, donc $\left((1+c_2(K_\lambda))\|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda}\right)_\varepsilon \in A$, (si $(r_\varepsilon)_\varepsilon \in A$, alors $(cr_\varepsilon)_\varepsilon \in A$) et comme $c_1(K_\lambda)$ est une constante ($1 \in A$) on en déduit que

$$((1+c_2(K_\lambda))\|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty,K_\lambda} + c_1(K_\lambda))_\varepsilon \in A.$$

A étant stable par majoration $\left(\|u_\varepsilon\|_{\infty,K_\lambda}\right)_\varepsilon \in A$ et donc $\left(\|u_\varepsilon\|_{\infty,K}\right)_\varepsilon \in A$.

a2) Montrons que

$$\left(P_{K,1}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+.$$

On a

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial x}(x,y) + \int_0^y F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))d\eta,$$

d'où

$$\begin{aligned} P_{K,(1,0)}(u_\varepsilon) = \left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right\|_{\infty,K} &= \sup_K \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x,y)\right| \\ &\leq \sup_K \left|\frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial x}(x,y)\right| + |y| \left(\sup_{K_\lambda} |F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))|\right) \\ &\leq \sup_K \left|\frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial x}(x,y)\right| + \lambda \left(\sup_{K_\lambda} |F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))|\right). \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ est stable par F il existe C, tel que

$$P_{K_\lambda,(0,0)}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq C P_{K_\lambda,(0,0)}(u_\varepsilon). \qquad (1)$$

On a

$$\frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial x}(x,y) = \varphi'_\varepsilon(x),$$

d'où $\left(\left\|\frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial x}\right\|_{\infty,K}\right)_\varepsilon \in A$ car $[\varphi_\varepsilon]$ est un élément de $\mathcal{A}(\mathbb{R})$.
Donc

$$P_{K,(1,0)}(u_\varepsilon) \leq \left\|\frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial x}\right\|_{\infty,K} + C\lambda P_{K_\lambda,(0,0)}(u_\varepsilon).$$

A étant stable par majoration $\left(P_{K,(1,0)}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A$.

On a

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial y}(x,y) + \int_{g(y)}^x F(\xi,y,u_\varepsilon(\xi,y))d\xi - g'(y)\int_0^y F(g(y),\eta,u(g(y),\eta))d\eta,$$

$$
\begin{aligned}
P_{K,(0,1)}(u_\varepsilon) &= \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} \right\|_{\infty,K} = \sup_K \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x,y) \right| \\
&\leq \sup_K \left| \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial y}(x,y) \right| + (x - g(y) + |y|\, g'(y)) \left(\sup_{K_\lambda} |F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))| \right) \\
&\leq \sup_K \left| \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial y}(x,y) \right| + \big(g(\lambda) - g(-\lambda) + \lambda g'(y)\big) \left(\sup_{K_\lambda} |F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))| \right).
\end{aligned}
$$

$\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ étant stable par F : $\exists C$, $P_{K_\lambda,(0,0)}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq C P_{K_\lambda,(0,0)}(u_\varepsilon)$.

On a

$$
\frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial y}(x,y) = \psi'_\varepsilon(y) + g'(y)\varphi'_\varepsilon\left(g\left(y\right)\right),
$$

donc

$$
\left(\left\| \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial y} \right\|_{\infty,K} \right)_\varepsilon \in A_+,
$$

car $[\psi_\varepsilon]$ et $[\varphi_\varepsilon]$ sont éléments de $\mathcal{A}(\mathbb{R})$.

D'où

$$
P_{K,(0,1)}(u_\varepsilon) \leq \left\| \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial y} \right\|_{\infty,K} + C\left(g\left(\lambda\right) - g\left(-\lambda\right) + \lambda g'(y)\right) P_{K_\lambda,(0,0)}(u_\varepsilon)
$$

et donc, comme précédemment,

$$
\left(\left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} \right\|_{\infty,K} \right)_\varepsilon \in A_+.
$$

a3) Récurrence.

Supposons que pour tout $l < n$ on ait $\left(P_{K,l}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+$ et montrons que cela entraîne $\left(P_{K,l+1}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+$. On a en fait,

$$
P_{K,n+1} = \max\left(P_{K,n}, P_{1,n}, P_{2,n}, P_{3,n}, P_{4,n}\right)
$$

avec

$$
\begin{aligned}
P_{1,n} &= P_{K,(n+1,0)}, \\
P_{2,n} &= P_{K,(0,n+1)}, \\
P_{3,n} &= \sup_{\alpha+\beta=n;\beta\geq 1} P_{K,(\alpha+1,\beta)}, \\
P_{4,n} &= \sup_{\alpha+\beta=n;\alpha\geq 1} P_{K,(\alpha,\beta+1)}.
\end{aligned}
$$

a3 1) Montrons d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(P_{1,n}(u_\varepsilon))_\varepsilon \in A_+,\ (P_{2,n}(u_\varepsilon))_\varepsilon \in A_+.$$

On a

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x,y) = \varphi"(x) + \int_0^y \frac{\partial}{\partial x} F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))d\eta$$

et par dérivations successives, pour $n \geq 1$,

$$\frac{\partial^{n+1} u_\varepsilon}{\partial x^{n+1}}(x,y) = \frac{\partial^{n+1} u_{0,\varepsilon}}{\partial x^{n+1}}(x,y) + \int_0^y \frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))d\eta d\eta,$$

avec $\dfrac{\partial^{n+1} u_{0,\varepsilon}}{\partial x^{n+1}}(x,y) = \varphi^{(n+1)}(x)$.

Comme on a pris $K \subset K_\lambda$, on peut écrire

$$\sup_{(x,y)\in K} \left| \frac{\partial^{n+1} u_\varepsilon}{\partial x^{n+1}}(x,y) \right| \leq \left\| \frac{\partial^{n+1} u_{0,\varepsilon}}{\partial x^{n+1}} \right\|_{\infty,K} + \lambda \left(\sup_{(x,y)\in K} \left| \frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x,y,u_\varepsilon(x,y)) \right| \right).$$

On a

$$\left(\sup_{(x,y)\in K} \left| \frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x,y,u_\varepsilon(x,y)) \right| \right) = P_{K,(n,0)}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon)),$$

de plus,

$$\left\| \frac{\partial^{n+1} u_{0,\varepsilon}}{\partial x^{n+1}} \right\|_{\infty,K} \in A_+.$$

Compte tenu de l'hypothèse de stabilité, un calcul simple montre alors que, pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$,

$$\left(P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon))\right)_\varepsilon \in A_+.$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(P_{2,n}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+$.

Comme on a

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial y}(x,y) + \int_{g(y)}^{x} F(\xi, y, u_\varepsilon(\xi,y))d\xi - g'(y)\int_0^y F(g(y),\eta,u(g(y),\eta))d\eta,$$

et par dérivations successives, on en déduit que, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^{n+1} u_\varepsilon}{\partial y^{n+1}}(x,y) = \frac{\partial^{n+1} u_{0,\varepsilon}}{\partial y^{n+1}}(x,y)\\ &- \sum\nolimits_{j=0}^{n-1} C_n^j g^{(n-j)}(y)\frac{\partial^j}{\partial y^j}F(g(y),y,\psi_\varepsilon(y)) - \int_x^{g(y)} \frac{\partial^n}{\partial y^n}F(\xi,y,u_\varepsilon(\xi,y))d\xi\\ &\quad - \sum\nolimits_{j=0}^{n-1} C_n^{j+1} g^{(n-j)}(y)\frac{\partial^j}{\partial y^j}F(g(y),y,\psi_\varepsilon(y)) - g^{(n+1)}(y)\int_0^y F(g(y),\eta,u_\varepsilon(g(y),\eta))d\eta.\end{aligned}$$

Comme on a pris $K \subset K_\lambda$, on peut écrire

$$\begin{aligned}&\sup_{(x,y)\in K}\left|\frac{\partial^{n+1} u_\varepsilon}{\partial y^{n+1}}(x,y)\right| \leq \left\|\frac{\partial^{n+1} u_{0,\varepsilon}}{\partial y^{n+1}}\right\|_{\infty,K} + (g(\lambda) - g(-\lambda))\left(\sup_{(x,y)\in K}\left|\frac{\partial^n}{\partial y^n}F(x,y,u_\varepsilon(x,y))\right|\right)\\ &+ \sup_{y\in[-\lambda,\lambda]}\sum\nolimits_{j=0}^{n-1} C_{n+1}^{j+1}\left|g^{(n-j)}(y)\right|\left|\frac{\partial^j}{\partial y^j}F(g(y),y,\psi_\varepsilon(y))\right| + \lambda g^{(n+1)}(y)\sup_{(x,y)\in K}\left|F(x,y,u_\varepsilon(x,y))\right|.\end{aligned}$$

On a

$$\left(\sup_{(x,y)\in K}\left|\frac{\partial^n}{\partial y^n}F(x,y,u_\varepsilon(x,y))\right|\right) = P_{K,(0,n)}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon)),$$

et, comme $\psi_\varepsilon(y) = u_\varepsilon(g(y),y)$,

$$\begin{aligned}\sup_{y\in[-\lambda,\lambda]}\left|\frac{\partial^j}{\partial y^j}F(g(y),y,\psi_\varepsilon(y))\right| &\leq \left(\sup_{(x,y)\in K}\left|\frac{\partial^i}{\partial y^i}F(x,y,u_\varepsilon(x,y))\right|\right)\\ &\leq P_{K,i}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon)).\end{aligned}$$

$$\sup_{(x,y)\in K}\left|F(x,y,u_\varepsilon(x,y))\right| \leq P_{K,1}(F(.,.,u_\varepsilon)).$$

Compte tenu de l'hypothèse de stabilité, un calcul simple montre alors que pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(P_{K,(0,n+1)}\left(u_\varepsilon\right)\right)_\varepsilon \in A_+.$$

a3 2) Pour $\alpha+\beta=n$ et $\beta \geq 1$, on a maintenant

$$\begin{aligned}
P_{K,(\alpha+1,\beta)}(u_\varepsilon) &= \sup_{(x,y)\in K}\left|D^{(\alpha+1,\beta)}u_\varepsilon\left(x,y\right)\right| = \sup_{(x,y)\in K}\left|D^{(\alpha,\beta-1)}D^{(1,1)}u_\varepsilon\left(x,y\right)\right| \\
&= \sup_{(x,y)\in K}\left|D^{(\alpha,\beta-1)}F(x,y,u_\varepsilon\left(x,y\right))\right| = P_{K,(\alpha,\beta-1)}(F(.,.,u_\varepsilon)) \\
&\leq P_{K,n-1}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon)).
\end{aligned}$$

On a donc finalement

$$P_{3,n}(u_\varepsilon) = \sup_{\alpha+\beta=n;\beta\geq 1} P_{K,(\alpha+1,\beta)}(u_\varepsilon) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon))$$

et l'hypothèse de stabilité assure alors que

$$\left(P_{3,n}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+.$$

De même pour $\alpha+\beta=n$ et $\alpha \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
P_{K,(\alpha,\beta+1)}(u_\varepsilon) &= \sup_{(x,y)\in K}\left|D^{(\alpha,\beta+1)}u_\varepsilon\left(x,y\right)\right| = \sup_{(x,y)\in K}\left|D^{(\alpha-1,\beta)}D^{(1,1)}u_\varepsilon\left(x,y\right)\right| \\
&= \sup_{(x,y)\in K}\left|D^{(\alpha-1,\beta)}F(x,y,u_\varepsilon\left(x,y\right))\right| = P_{K,(\alpha-1,\beta)}(F(.,.,u_\varepsilon)) \\
&\leq P_{K,n-1}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon)).
\end{aligned}$$

On a donc finalement

$$P_{4,n}(u_\varepsilon) = \sup_{\alpha+\beta=n;\alpha\geq 1} P_{K,(\alpha,\beta+1)}(u_\varepsilon) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon))$$

et l'hypothèse de stabilité assure alors que

$$(P_{4,n}(u_\varepsilon))_\varepsilon \in A_+.$$

Finalement on a bien

$$(P_{K,n+1}(u_\varepsilon))_\epsilon \in A_+.$$

Donc $u = [u_\varepsilon]$ est solution de (P'_G).

b) Montrons que u est l'unique solution de (P'_G).

Soit $v = [v_\varepsilon]$ une autre solution de (P'_G).

Il existe $(i_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^2)$, $(\alpha_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$, $(\beta_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$ tels que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x \partial y}(x,y) = F(x,y,v_\varepsilon(x,y)) + i_\varepsilon(x,y), \\ v_\varepsilon(x,0)) = \varphi_\varepsilon(x) + \alpha_\varepsilon(x), \\ \dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}(g(y),y)) = \psi_\varepsilon(y) + \beta_\varepsilon(x). \end{cases}$$

Il est facile de voir que

$$\left(\iint_{D(x,y,g)} i_\varepsilon(\xi,\eta)) d\xi d\eta \right)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^2).$$

Il existe donc $(j_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^2)$ tel que

$$v_\varepsilon(x,y) = v_{0,\varepsilon}(x,y) + \iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,v_\varepsilon(\xi,\eta)) d\xi d\eta + j_\varepsilon(x,y),$$

avec $v_{0,\varepsilon}(x,y) = u_{0,\varepsilon}(x,y) + \theta_\varepsilon(x,y)$, où $u_{0,\varepsilon}(x,y) = \psi_\varepsilon(y) + \varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(g(y))$ et

$$\theta_\varepsilon(x,y) = \beta_\varepsilon(y) + \alpha_\varepsilon(x) - \alpha_\varepsilon(g(y))$$

Donc $(\theta_\varepsilon)_\varepsilon$ appartient à $\mathcal{N}(\mathbb{R}^2)$. Il existe donc $(\sigma_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^2)$

$$v_\varepsilon(x,y) = u_{0,\varepsilon}(x,y) + \sigma_\varepsilon(x,y) + \iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,v_\varepsilon(\xi,\eta)) d\xi d\eta.$$

b1) Posons $w_\varepsilon = v_\varepsilon - u_\varepsilon$ et montrons que $(w_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^2)$.

Il s'agit de prouver que

$$\forall K \Subset \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \left(P_{K,n}(w_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in I_A^+.$$

Procédons par récurrence en montrant d'abord que l'on a

$$\left(P_{K,1}\left(w_\varepsilon\right)\right)_\varepsilon \in I_A.$$

On a

$$w_\varepsilon(x,y) = \iint_{D(x,y,g)} \left(F(\xi,\eta,v_\varepsilon(\xi,\eta)) - F(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta))\right) d\xi d\eta + \sigma_\varepsilon(x,y),$$

or

$$F(\xi,\eta,v_\varepsilon(\xi,\eta)) - F(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta)) =$$
$$(v_\varepsilon(\xi,\eta) - u_\varepsilon(\xi,\eta)) \left(\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial z}(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta) + \theta(v_\varepsilon(\xi,\eta) - u_\varepsilon(\xi,\eta)))d\theta\right),$$

donc :

$$w_\varepsilon(x,y) = -\iint_{D(x,y,g)} w_\varepsilon(\xi,\eta) \left(\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial z}(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta) + \theta(w_\varepsilon(\xi,\eta)))d\theta\right) d\xi d\eta + \sigma_\varepsilon(x,y). \quad (3)$$

Soit $(x,y) \in K_\lambda$, puisque $D(x,y,g) \subset K_\lambda$, si $g\left(y\right) \leq x$, on a

$$\begin{aligned}
|w_\varepsilon(x,y)| &\leq m_\lambda \int_{g(y)}^{x} \int_0^y |w_\varepsilon(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta + \|\sigma_\varepsilon\|_{\infty,K_\lambda} \\
&\leq m_\lambda \int_{-g(\lambda)}^{+g(\lambda)} \int_0^y |w_\varepsilon(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta + \|\sigma_\varepsilon\|_{\infty,K_\lambda}.
\end{aligned}$$

Posons : $e_\varepsilon(y) = \sup\limits_{\xi \in [g(-\lambda);g(\lambda)]} |w_\varepsilon(\xi,y)|$, alors

$$|w_\varepsilon(x,y)| \leq m_\lambda 2\lambda' \int_0^y e_\varepsilon(\eta)d\eta + \|\sigma_\varepsilon\|_{\infty,k_\lambda},$$

on en déduit que, pour tout $y \in [0;\lambda]$, si $g\left(y\right) \leq x$,

$$e_\varepsilon(y) \leq m_\lambda 2\lambda' \int_0^y e_\varepsilon(\eta)d\eta + \|\sigma_\varepsilon\|_{\infty,K_\lambda}.$$

Ainsi d'après le lemme de Gronwall, pour tout $y \in [0;\lambda]$, si $g\left(y\right) \leq x$,

$$e_\varepsilon(y) \leq \left(\exp(\int_0^y m_\lambda 2\lambda d\eta)\right) \left\|\sigma_\varepsilon\right\|_{\infty,K_\lambda}.$$

Pour tout $y \in [0;\lambda]$, si $g\left(y\right) \leq x$,

$$e_\varepsilon(y) \leq \left(\exp(m_\lambda 2\lambda' y)\right) \left\|\sigma_\varepsilon\right\|_{\infty,K_\lambda} \leq \left(\exp(m_\lambda 2\lambda' \lambda)\right) \left\|\sigma_\varepsilon\right\|_{\infty,K_\lambda} \leq \left(\exp(m_\lambda 2\lambda' \lambda)\right) \left\|\sigma_\varepsilon\right\|_{\infty,K_\lambda}.$$

On obtient des résultats semblables dans les autres cas, d'où

$$\forall y \in \left[-\lambda;\lambda\right], e_\varepsilon(y) \leq \left\|\sigma_\varepsilon\right\|_{\infty,K_\lambda} \left(\exp(m_\lambda 2\lambda'\lambda)\right),$$

par conséquent

$$\left\|w_\epsilon\right\|_{\infty,K_\lambda} \leq \left\|\sigma_\varepsilon\right\|_{\infty,K_\lambda} \left(\exp(m_\lambda 2\lambda'\lambda\right),$$

$\left(\sigma_\varepsilon\right)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^2)$ donc $\left(\left\|\sigma_\varepsilon\right\|_{\infty,K_\lambda}\right)_\varepsilon \in I_A$.

$(\exp(m_\lambda 2\lambda'\lambda)) \left\|\sigma_\varepsilon\right\|_{\infty,K_\lambda}$ est une constante par conséquent $\left(\left\|w_\varepsilon\right\|_{\infty,K_\lambda}\right)_\varepsilon \in I_A$.

Ce qui entraîne l'estimation d'ordre 0.

b2) Récurrence.

Supposons que pour tout $l \leq n$, on ait : $\left(P_{K,l}\left(w_\varepsilon\right)\right)_\varepsilon \in I_A^+$ et montrons que cela entraîne $\left(P_{K,n+1}\left(w_\varepsilon\right)\right)_\varepsilon \in I_A^+$.

b21) Montrons d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(P_{1,n}\left(w_\varepsilon\right)\right)_\varepsilon \in I_A^+.$$

On a

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \sigma_\varepsilon}{\partial x}(x,y) + \int_0^y \left(F(x,\eta,v_\varepsilon(x,\eta)) - F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))\right) d\eta$$

et par dérivations successives, pour $n \geq 1$,

$$\frac{\partial^{n+1} u_\varepsilon}{\partial x^{n+1}}(x,y) = \frac{\partial^{n+1} u_{0,\varepsilon}}{\partial x^{n+1}}(x,y) + \int_0^y \frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta)) d\eta,$$

donc

$$\frac{\partial^{n+1} w_\varepsilon}{\partial x^{n+1}}(x,y) = \frac{\partial^{n+1}\sigma_\varepsilon}{\partial x^{n+1}}(x,y) + \int_0^y \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(F(x,\eta,v_\varepsilon(x,\eta)) - F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta)\right) d\eta.$$

D'où

$$\begin{aligned} P_{K,(n+1,0)}(w_\varepsilon) &\leq P_{K,(n+1,0)}(\sigma_\varepsilon) + \\ &+ \lambda\left(\sup_{(x,y)\in K}\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(F(x,\eta,v_\varepsilon(x,\eta)) - F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta)\right)\right|\right). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \left(\sup_{(x,y)\in K}\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(F(x,\eta,v_\varepsilon(x,\eta)) - F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta)\right)\right|\right) &= P_{K,(n,0)}\left(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon)\right) \\ &\leq P_{K,n}\left(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon)\right). \end{aligned}$$

Compte tenu de l'hypothèse de stabilité, pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$,

$$\left(P_{K,(n+1,0)}(w_\varepsilon)\right)_\epsilon \in I_A^+.$$

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(P_{2,n}(w_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in I_A^+$.

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+1} u_\varepsilon}{\partial y^{n+1}}(x,y) &= \frac{\partial^{n+1} u_{0,\varepsilon}}{\partial y^{n+1}}(x,y) - \int_x^{g(y)} \frac{\partial^n}{\partial y^n} F(\xi,y,u_\varepsilon(\xi,y))d\xi \\ &- \sum\nolimits_{j=0}^{n-1} C_{n+1}^{j+1} g^{(n-j)}(y)\frac{\partial^j}{\partial y^j}F(g(y),y,\psi_\varepsilon(y)) - g^{(n+1)}(y)\int_0^y F(g(y),\eta,u_\varepsilon(g(y),\eta))d\eta, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+1} w_\varepsilon}{\partial y^{n+1}}(x,y) &= \frac{\partial^{n+1}\sigma_\varepsilon}{\partial y^{n+1}}(x,y) + \mu_\varepsilon(y) - \int_x^{g(y)}\left(\frac{\partial^n}{\partial y^n}F(x,y,v_\varepsilon(x,y)) - \frac{\partial^n}{\partial y^n}F(x,y,u_\varepsilon(x,y))\right)d\xi \\ &- g^{(n+1)}(y)\int_0^y \left(F(g(y),\eta,v_\varepsilon(g(y),\eta)) - F(g(y),\eta,u_\varepsilon(g(y),\eta))\right) d\eta \end{aligned}$$

avec

$$\mu_\varepsilon(y) = \sum\nolimits_{j=0}^{n-1} C_{n+1}^{j+1}\left(g\right)^{(n-j)}(y)\left(\frac{\partial^j}{\partial y^j}F(g(y),y,\psi_\varepsilon(y)) - \frac{\partial^j}{\partial y^j}F(g(y),y,\psi_\varepsilon(y)+\beta_\varepsilon(y))\right),$$

$(\mu_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$. D'où

$$P_{K,(0,n+1)}(w_\varepsilon) \leq P_{K,(0,n+1)}(\sigma_\varepsilon) + \sup_{y\in[-\lambda,\lambda]} |\mu_\varepsilon(y)|$$
$$+ (g(\lambda) - g(-\lambda)) \left(\sup_{(x,y)\in K} \left| \frac{\partial^n}{\partial y^n} F(x,y,v_\varepsilon(x,y)) - \frac{\partial^n}{\partial y^n} F(x,y,u_\varepsilon(x,y)) \right| \right)$$
$$+ \lambda g^{(n+1)}(y) \left(\sup_{(x,y)\in K} |F(x,\eta,v_\varepsilon(x,\eta)) - F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))| \right).$$

On a

$$\sup_{(x,y)\in K} \left| \frac{\partial^n}{\partial y^n} F(x,y,v_\varepsilon(x,y)) - \frac{\partial^n}{\partial y^n} F(x,y,u_\varepsilon(x,y)) \right| = P_{K,(0,n)}(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon))$$
$$\leq P_{K,(0,n)}(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon)).$$

$$\sup_{(x,y)\in K} |F(x,\eta,v_\varepsilon(x,\eta)) - F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))| \leq P_{K,1}(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon))$$

Compte tenu de l'hypothèse de stabilité, pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$, $\left(P_{K,(0,n+1)}(w_\varepsilon)\right)_\epsilon \in I_A$.

b2 2) Pour $\alpha + \beta = n$ et $\beta \geq 1$, on a

$$P_{K,(\alpha+1,\beta)}(w_\varepsilon) = P_{K,(\alpha,\beta-1)}(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon)) \leq P_{K,n-1}(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon)).$$

On a donc finalement :

$$P_{3,n}(w_\varepsilon) = \sup_{\alpha+\beta=n,\beta\geq 1} P_{K,(\alpha+1,\beta)}(w_\varepsilon) \leq P_{K,n-1}(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon))$$

et l'hypothèse de stabilité assure alors que

$$(P_{3,n}(w_\varepsilon))_\varepsilon \in I_A^+.$$

Pour $\alpha + \beta = n$ et $\alpha \geq 1$, on a maintenant

$$P_{K,(\alpha,\beta+1)}(w_\varepsilon) = P_{K,(\alpha-1,\beta)}(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon)) \leq P_{K,n-1}(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon)).$$

On a donc finalement

$$P_{4,n}(w_\varepsilon) = \sup_{\alpha+\beta=n,\alpha\geq 1} P_{K,(\alpha,\beta+1)}(w_\varepsilon) \leq P_{K,n-1}(F(.,.,v_\varepsilon) - F(.,.,u_\varepsilon))$$

et l'hypothèse de stabilité assure alors que

$$\left(P_{4,n}(w_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in I_A^+.$$

Donc pour tout $l \leq n+1$, on a

$$\left(P_{K,l}(w_\varepsilon)\right)_\epsilon \in I_A^+.$$

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(P_{K,n}(w_\varepsilon)\right)_\epsilon \in I_A^+.$$

Donc $(w_\epsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^2)$; par conséquent u est l'unique solution de (P'_G). $\square$

6.3 Un problème de Goursat (dégénéré) dans les $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$-algèbres

6.3.1 Enoncé du problème

Nous cherchons une solution u généralisée du problème de Goursat irrégulier suivant :

$$\left(P'_G\right) \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = F(.,.,u) \\ u_{|(Ox)} = \varphi_\varepsilon \\ u_{|(Oy)} = \psi_\varepsilon \end{cases}$$

où φ et ψ sont des fonctions généralisées d'une variable. La notation $F(.,.,u)$ étend, d'une manière précisée plus haut, l'expression $(x,y) \mapsto F(x,y,u(x,y))$ au cas où u est une fonction généralisée des deux variables x et y.

Dans tous les cas, on fera l'hypothèse suivante

$$(H) : \begin{cases} F \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \\ \forall K \Subset \mathbb{R}^2, \ \sup\limits_{\substack{(x,y)\in K \\ z \in \mathbb{R}}} |\partial_z F(x,y,z)| < +\infty \end{cases}$$

où la notation $K \Subset \mathbb{R}^2$ signifie K est un compact contenu dans $\mathbb{R}^2$.

L'hypothèse (H) étant satisfaite, $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ étant stable par F. Si les données du problème (P'_G) vérifient les conditions

$$\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R})\,,\ \psi \in \mathcal{A}(\mathbb{R})\,,\ g(y) = 0,$$

le problème admet une unique solution $[u_\varepsilon] \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$.

$$u_\varepsilon(x,y) = u_{0,\varepsilon}(x,y) + \iint_{D(x,y,0)} F(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta))d\xi d\eta;$$

$$u_{0,\varepsilon}(x,y) = \psi_\varepsilon(y) + \varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(0)\,.$$

$$u_{\varepsilon,n}(x,y) = u_{0,\varepsilon}(x,y) + \iint_{D(x,y,0)} F(\xi,\eta,u_{\varepsilon,n-1}(\xi,\eta))d\xi d\eta,\ n \geq 1.$$

6.3.2 Résolution du problème

6.3.2. Théorème

La solution u généralisée du problème de Goursat suivant

$$(P'_G)\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}u = F(.,.,u) \\ u_{|(Ox)} = \varphi \\ u_{|(Oy)} = \psi \end{cases}$$

où φ et ψ sont des fonctions généralisées d'une variable, est $u = [u_\varepsilon]$ avec

$$u_\varepsilon = \lim_{n\to+\infty} u_{\varepsilon,n} \text{ et } u_{\varepsilon,n}(x,y) = u_{0,\varepsilon}(x,y) + \int_0^x \left(\int_0^y F(\xi,\eta,u_{\varepsilon,n-1}(\xi,\eta))d\eta\right)d\xi\,;$$

$$u_{0,\varepsilon}(x,y) = \varphi_\varepsilon(x) + \psi_\varepsilon(y) - \varphi_\varepsilon(0).$$

(on prend $g = 0$). □

6.3.3. Corollaire

On a alors

$$u_\varepsilon\,(x,y) = u_{0,\varepsilon}(x,y) + \int_0^x \left(\int_0^y F(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta))d\eta \right) d\xi.$$

$\square$

Chapitre 7

Etude qualitative de la solution

7.1 Spectre singulier paramétrique de la solution du problème de Goursat

7.1.1 Relation entre le $\mathcal{D}'$-spectre singulier paramétrique de la solution u et le $\mathcal{D}'$-spectre singulier paramétrique de u_0

7.1.1.1. Théorème

O*n pose* $u_0 = [u_{0,\varepsilon}]$ *avec*

$$u_{0,\varepsilon}(x,y) = \psi_\varepsilon(y) + \varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(g(y)),$$

et on suppose que

$$(H_2) \quad \forall K \Subset \mathbb{R}^2, \mathcal{M}_F(K) = \sup_{(x,y)\in K, z\in\mathbb{R}} |F(x,y,z)| < +\infty.$$

Alors la restriction au support singulier paramétrique de u_0 *du* $\mathcal{D}'$*-spectre singulier paramétrique de la solution* u *du problème de Goursat* (P'_G) *est contenue dans la restriction au support singulier paramétrique de* u_0 *du* $\mathcal{D}'$*-spectre singulier paramétrique de* u_0*. Autrement dit, au* *dessus du support singulier de u_0, il n'y a pas d'accroissement des singularités distributionnelles de u par rapport à celles de u_0.*

Démonstration.

Soient $(x_0, y_0) = X \in S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}} u_0$ et $r \in N_{\mathcal{D}',X}(u_0)$. Il résulte des définitions que l'on a : $\Sigma_{\mathcal{D}',X}(u_0) \neq \emptyset$, et donc que $N_{\mathcal{D}',X}(u_0) \subset]0, +\infty[$ ce qui entraîne $r > 0$.

Montrons qu'alors $r \in N_{\mathcal{D}',X}(u)$.

Par définition de $N_{\mathcal{D}',X}(u_0)$, il existe un voisinage V_X de X tel que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon^r u_{\varepsilon|_{V_X}}) \in \mathcal{D}'(V_X).$$

Soit $f \in \mathcal{D}(V_X)$. Il existe donc une distribution $T \in \mathcal{D}'(V_X)$ telle que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{V_X} \varepsilon^r u_{0,\varepsilon}(x,y) f(x,y) dxdy = T(f).$$

Montrons que

$$\iint_{V_X} \varepsilon^r \left[u_\varepsilon(x,y) - u_{0,\varepsilon}(x,y)\right] f(x,y) dxdy$$

admet pour limite 0, quand ε tend vers 0.

Supposons encore $g(y) \leq x$.

Comme $u_\varepsilon(x,y) - u_{0,\varepsilon}(x,y) = \iint_{D(x,y,g)} F(\xi, \eta, u_\varepsilon(\xi,\eta)) d\xi d\eta$

et que (avec les notations précédentes)

$$\begin{aligned}
&\left| \iint_{V_X} \left[\iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta)) d\xi d\eta \right] f(x,y) dxdy \right| \\
&\qquad \leq \mathcal{M}_F(\mathrm{supp} f) \left| \iint_{\mathrm{supp} f} \left[\iint_{D(x,y,g)} d\xi d\eta \right] f(x,y) dxdy \right| \\
&\qquad \leq \mathcal{M}_F(\mathrm{supp} f) \left| \iint_{\mathrm{supp} f} (A(x,y)) f(x,y) dxdy \right| \\
&\qquad \leq \mathcal{M}_F(\mathrm{supp} f) \left| \iint_{\mathrm{supp} f} (2\lambda |y|) f(x,y) dxdy \right| \\
&\qquad \leq 2\lambda' \mathcal{M}_F(\mathrm{supp} f) \iint_{\mathrm{supp} f} |y| \, |f(x,y)| \, dxdy < +\infty,
\end{aligned}$$

en posant toujours $2\lambda' = g(\lambda) - g(-\lambda)$, nous avons alors

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to 0}\left|\iint_{V_X} \varepsilon^r \left[u_\varepsilon(x,y) - u_{0,\varepsilon}(x,y)\right] f(x,y)dxdy\right| \\
&\qquad \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^r \left|\iint_{V_X} \left[\iint_{D(x,y,g)} F(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta))d\xi d\eta\right] f(x,y)dxdy\right| \\
&\qquad \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^r \left[2\lambda' \left(\mathcal{M}_F(\mathrm{supp} f)\right) \iint_{\mathrm{supp} f} |y| \left|f(x,y)\right| dxdy\right] = 0,
\end{aligned}$$

car $r \neq 0$. Et donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{V_X} \varepsilon^r u_\varepsilon(x,y) f(x,y)dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{V_X} \varepsilon^r u_{0,\varepsilon}(x,y) f(x,y)dxdy = T(f).$$

Il en résulte que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^r u_{\varepsilon|_{V_X}}) = \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^r u_{0,\varepsilon|_{V_X}}) \in \mathcal{D}'(V_X).$$

Nous avons donc $r \in N_{\mathcal{D}',X}(u)$, ce qui prouve l'inclusion $N_{\mathcal{D}',X}(u_0) \subset N_{\mathcal{D}',X}(u)$, et par suite, $\Sigma_{\mathcal{D}',X}(u) \subset \Sigma_{\mathcal{D}',X}(u_0)$, par conséquent

$$S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}} u_{\left|S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}} u_0\right.} \subset S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}} u_{0\left|S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}} u_0\right.}.$$

□

7.1.2 Exemples

Prenons $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ f \geq 0,\ \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.

Avec les notations précédentes nous avons

$\varphi = [\varphi_\varepsilon]$ et $\psi = [\psi_\varepsilon]$; $u_{0,\varepsilon}(x,y) = \psi_\varepsilon(y) + \varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(g(y))$.

$g(y) = \frac{y}{a}$, $a > 0$.

Considérons les cas suivants :

1) $\psi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-1} f(y\varepsilon^{-1})$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} f(x\varepsilon^{-1})$ donc

$$\varphi_\varepsilon(g(y)) = \varepsilon^{-1} f((g(y)\varepsilon^{-1}) = \varepsilon^{-1} f(y(a\varepsilon)^{-1}) = a(\frac{1}{a\varepsilon}) f(\frac{y}{a\varepsilon}),$$

$$u_{0,\varepsilon}(x,y) = \psi_\varepsilon(y) + \varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(g(y)) = \varepsilon^{-1} f(y\varepsilon^{-1}) + \varepsilon^{-1} f(x\varepsilon^{-1}) - a(\frac{1}{a\varepsilon}) f(\frac{y}{a\varepsilon}).$$

$N_{\mathcal{D}',X}(u_0) = [1, +\infty[$, nous avons alors $S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}} u \subset \mathbb{R}^2 \times [0,1[$.

2) $\psi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-1} f(y\varepsilon^{-1})$ et

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2} f(x\varepsilon^{-1}) = \varepsilon^{-1} \left[\varepsilon^{-1} f(x\varepsilon^{-1})\right],$$

$$\varphi_\varepsilon(g(y)) = \varepsilon^{-2} f((g(y)\varepsilon^{-1}) = \varepsilon^{-2} f(y(a\varepsilon)^{-1}) = a(\frac{1}{(a\varepsilon)^2}) f(\frac{y}{a\varepsilon}),$$

donc

$N_{\mathcal{D}',X}(u_0) = [2, +\infty[$, nous avons alors $S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}} u \subset \mathbb{R}^2 \times [0,2[$.

3) $\psi_\varepsilon(y) = f(y\varepsilon^{-1})$ et

$$\varphi_\varepsilon(x) = f(x\varepsilon^{-1}) = \varepsilon[\varepsilon^{-1} f(x\varepsilon^{-1})],$$

$$\varphi_\varepsilon(g(y)) = \varepsilon[\varepsilon^{-1} f((g(y)\varepsilon^{-1})] = \varepsilon[\varepsilon^{-1} f(y(a\varepsilon)^{-1})] = a\varepsilon[(\frac{1}{(a\varepsilon)}) f(\frac{y}{a\varepsilon})].$$

$N_{\mathcal{D}',X}(u_0) = [0, +\infty[$, nous avons alors $S_\varepsilon S^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}} u \subset \mathbb{R}^2 \times \varnothing$.

$\square$

7.2 Etude qualitative de la solution. Cas : $F = 0$

7.2.1 Enoncé du problème

On cherche une solution u généralisée du problème suivant

$$(P'_G) \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = F(.,.,u) \\ u_{|(Ox)} = \varphi \\ u_{|_\gamma} = \psi \end{cases}$$

en considérant comme donnée la courbe γ d'équation $x = g(y)$.

Soit

$$P'_\infty(\varphi_\varepsilon,\psi_\varepsilon)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x\partial y}(x,y)=0\\ u_\varepsilon(x,0)=\varphi_\varepsilon(x)\\ u_\varepsilon\left(g(y),y\right)=\psi_\varepsilon(y)\end{cases}$$

Avec les notations précédentes nous avons

$$\varphi=[\varphi_\varepsilon]\,,\ \psi=[\psi_\varepsilon]\ \text{ et } u_\varepsilon(x,y)=\psi_\varepsilon(y)+\varphi_\varepsilon(x)-\varphi_\varepsilon(g(y)).$$

□

7.2.2 Etude qualitative de la solution. Cas : $F=0$, $g(y)=\frac{y}{a}$, $(a>0)$

Remarque

On a alors $\psi(0)=\varphi(g(0))$, or $g(0)=0$, par conséquent $\psi(0)=\varphi(0)$.

Cas : $g(y)=\frac{y}{a}$, $(a>0)$, $\varphi\sim\delta$, $\psi\sim\delta$,

l'association étant définie comme suit :

considérons $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, vérifiant $\int_{\mathbb{R}} f(\xi)d\xi=1$. Posons $\varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}f(\frac{x}{\varepsilon}),\psi_\varepsilon(y)=\frac{1}{\varepsilon}f(\frac{y}{\varepsilon})$. Alors $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ converge au sens des distributions vers δ_x et $(\psi_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers δ_y. Donc $\varphi=[\varphi_\varepsilon]$ est associée à δ_x et $\psi=[\psi_\varepsilon]$ est associée à δ_y.

La solution w de $P'_\infty(\varphi_\varepsilon,\psi_\varepsilon)$ est définie par

$$w_\varepsilon(x,y)=\varphi_\varepsilon(x)+\psi_\varepsilon(y)-\varphi_\varepsilon(g(y))\,;$$

$$w_\varepsilon=w_{\varepsilon,1}+w_{\varepsilon,2}+w_{\varepsilon,3}.$$

Si φ_ε et ψ_ε sont régularisantes, nous avons

$$\lim_{\substack{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\\ \varepsilon\longrightarrow 0}}\varphi_\varepsilon=\delta_x \text{ et } \lim_{\substack{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\\ \varepsilon\longrightarrow 0}}\psi_\varepsilon=\delta_y,$$

$$\varphi_\varepsilon(g(y)) = \varepsilon^{-1} f((g(y)\varepsilon^{-1}) = \varepsilon^{-1} f(y(a\varepsilon)^{-1}) = a(\frac{1}{a\varepsilon}) f(\frac{y}{a\varepsilon}),$$

$$\psi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-1} f(y\varepsilon^{-1}) = (\frac{1}{\varepsilon}) f(\frac{y}{\varepsilon}).$$

Nous avons alors

$$[u_\varepsilon] = [w_{\varepsilon,1}] + [w_{\varepsilon,2}] + [w_{\varepsilon,3}]\,,$$

avec

$$\begin{cases} [w_{\varepsilon,1}] \sim \delta_x \otimes 1_y \\ [w_{\varepsilon,2}] \sim (1_x \otimes \delta_y) \\ [w_{\varepsilon,3}] \sim -a(1_x \otimes \delta_y). \end{cases}$$

$\square$

Cas : $g(y) = \frac{y}{a}$, $(a > 0)$, $\varphi \sim S$, $\psi \sim T$; $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

l'association étant réalisée en choisissant

$$\varphi = [f_\varepsilon * S] \text{ et } \Psi = [f_\varepsilon * T]$$

puisque

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathcal{D}'(\mathbb{R})}} (f_\varepsilon * S)_\varepsilon = S \text{ et } \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathcal{D}'(\mathbb{R})}} (f_\varepsilon * T)_\varepsilon = T.$$

On a donc ici

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x,y) &= \varphi_\varepsilon(x) + \psi_\varepsilon(y) - \varphi_\varepsilon(g(y)) \\ &= (f_\varepsilon * S)(x) + (f_\varepsilon * T)(y) - (f_\varepsilon * S)\left(\frac{y}{a}\right). \end{aligned}$$

Définissons $\widetilde{S} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par

$$< \widetilde{S}, h >= \langle aS, [z \mapsto h(az)] \rangle = \langle aS, H \rangle\,.$$

D'où

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathcal{D}'(\mathbb{R})}} \left[y \mapsto (f_\varepsilon * S)\left(\frac{y}{a}\right) \right] = \widetilde{S}.$$

Nous pouvons alors écrire la décomposition $[u_\varepsilon] = [w_{\varepsilon,1}] + [w_{\varepsilon,2}] + [w_{\varepsilon,3}]$ avec

$$\begin{cases} [w_{\varepsilon,1}] \sim S_x \otimes 1_y \\ [w_{\varepsilon,2}] \sim 1_x \otimes T_y \\ [w_{\varepsilon,3}] \sim -\left(1_x \otimes \widetilde{S}_y\right) \end{cases}$$

et donc

$$u \sim S_x \otimes 1_y + 1_x \otimes T_y - \left(1_x \otimes \widetilde{S}_y\right).$$

Comme $\widetilde{\delta} = a\delta$, il en résulte que pour $S = \delta$, on retrouve bien le résultat précédent.

□

Quatrième partie

Problèmes caractéristiques

Chapitre 8

Un problème de Cauchy caractéristique dans les $(\mathcal{C},\mathcal{E},\mathcal{P})$-algèbres

8.1 Problème (P_c)

8.1.1 Enoncé du problème

Le problème de Cauchy caractéristique

$$(P_C)\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = F(.,.,u) \\ u_{|(Ox)} = \varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \ |_{(Ox)} = \psi, \end{cases}$$

n'a pas de solution lisse (ni même C^2) même lorsque les données φ et ψ le sont.

Nous pouvons alors l'approcher par la famille de problèmes non caractéristiques $(P_\varepsilon)_\varepsilon$

$$P_\varepsilon \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = F(.,.,u) \\ u_{|\gamma_\varepsilon} = \varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \;|_{\gamma_\varepsilon} = \psi, \end{cases}$$

en considérant comme donnée la courbe γ_ε d'équation $y = \varepsilon x$ et essayer d'en traduire la famille de solutions en termes de fonction généralisée appartenant à une algèbre convenablement définie.

8.2 Le cas des données régulières

8.2.1.1. Notations, rappels et hypothèses

Réécrivant la solution de P_ε, on remplace $f(x)$ par εx et K_λ par $\left[-\frac{a}{\varepsilon}; +\frac{a}{\varepsilon}\right] \times [-a; +a]$.

On a ici

$$u_\varepsilon(x,y) = u_{0,\varepsilon}(x,y) - \iint_{D_\varepsilon(x,y)} F(\xi, \eta, u_\varepsilon(\xi,\eta)) d\xi d\eta,$$

où $u_{0,\varepsilon}(x,y) = \varphi(x) - \varepsilon \Psi(x) + \varepsilon \Psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$

et

1) Ψ est une primitive de ψ,

2)

$$D_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} \left\{(\xi,\eta) / x \leq \xi \leq \frac{y}{\varepsilon}, \varepsilon\xi \leq \eta \leq y\right\}, \text{ si } y \geq \varepsilon x, \\ \left\{(\xi,\eta) / \frac{y}{\varepsilon} \leq \xi \leq x, y \leq \eta \leq \varepsilon\xi\right\}, \text{ si } y \leq \varepsilon x. \end{cases}$$

On pose

$$K_\varepsilon = \left[-\frac{a}{\varepsilon}, \frac{a}{\varepsilon}\right] \times [-a, a],$$
$$m_\varepsilon = \sup_{(\xi,\eta)\in K_\varepsilon;\ t \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial F}{\partial z}(\xi,\eta,t) \right|,$$
$$\Phi_\varepsilon = \sup_{K_\varepsilon} |F(x,y,0)| + m_\varepsilon \|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty, K_\varepsilon}.$$

On fait les hypothèses suivantes

$$(H_1)\begin{cases} \forall K \Subset \mathbb{R}^2, \forall l \in \mathbb{N}, \exists m(K,l), \max\limits_{\alpha\in\mathbb{N}^3,|\alpha|\leq l}\left(\sup\limits_{(x,y)\in K;\ z\in\mathbb{R}}|D^\alpha F(x,y,z)|\right) \leq m(K,l) \\ \exists\left(M_\varepsilon\right)_\varepsilon \in \mathbb{R}_*^{]0,1]}, \exists C(l)\in\mathbb{R}_+^*, m(K_\varepsilon,l)\leq C(l)M_\varepsilon \end{cases}$$

$$(H2)\begin{cases} \exists\left(r_\varepsilon\right)_\varepsilon \in \mathbb{R}_*^{]0,1]} \text{ tel que } \forall K_2 \Subset \mathbb{R}, \forall\alpha_2\in\mathbb{N}, \exists D_2\in\mathbb{R}_+^*, \exists p\in\mathbb{N}, \\ \max\left[\sup\limits_{K_2}\left|D^{\alpha_2}\varphi(\frac{y}{\varepsilon})\right|, \sup\limits_{K_2}\left|D^{\alpha_2}\Psi(\frac{y}{\varepsilon})\right|\right] \leq \frac{D_2}{(r_\varepsilon)^p} \end{cases}$$

$$(H_3)\begin{cases} \mathcal{C} = A/I_A \text{ est surgénéré par les éléments suivants de } \mathbb{R}_*^{]0,1]} : \\ (\varepsilon)_\varepsilon ; (r_\varepsilon)_\varepsilon ; \left(e^{\frac{m_\varepsilon}{\varepsilon}}\right)_\varepsilon ; (M_\varepsilon)_\varepsilon . \end{cases}$$

$$(H_4)\begin{cases} \mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)/\mathcal{N}(\mathbb{R}^2) \text{ est construit sur } \mathcal{C} \text{ avec} \\ (\mathcal{E},\mathcal{P}) = \left(\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2), (P_{K,l})_{K\Subset\mathbb{R}^2, l\in\mathbb{N}}\right) \\ \text{et } \mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right) \text{ est stable par } F \text{ relativement à } \mathcal{C}. \end{cases}$$

8.2.1.2. Théorème

Avec les notations et les hypothèses du paragraphe 8.2.1.1. précédent, si u_ε est la solution du problème P_ε, la famille $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est le représentant d'une fonction généralisée appartenant à l'algèbre $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$.

Démonstration.

On a

$$u_\varepsilon(x,y) = u_{0,\varepsilon}(x,y) - \iint_{D_\varepsilon(x,y)} F(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta))d\xi d\eta = u_{0,\varepsilon}(x,y) - u_{1,\varepsilon}(x,y),$$

où

$$u_{0,\varepsilon}(x,y) = \varphi(x) - \varepsilon\Psi\left(x\right) + \varepsilon\Psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right),$$

Ψ étant une primitive de ψ, et

$$u_{1,\varepsilon}(x,y) = \iint_{D_\varepsilon(x,y)} F(\xi,\eta,u_\varepsilon(\xi,\eta))d\xi d\eta.$$

a) Pour $K = K_1 \times K_2 = [-a; a] \times [-a; a]$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, il existe $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que

$$\sup_{K_1} |D^{\alpha_1} \varphi(x)| \leq C_1 (K_1, \alpha_1) \ ;$$

$$\varepsilon \sup_{K_1} |D^{\alpha_1} \Psi(x)| \leq \varepsilon C_2 (K_1, \alpha 1) \, .$$

$G(y) = \Psi \circ f_\varepsilon^{-1}(y) = \Psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$, on peut écrire

$$\varepsilon \sup_{K_2} |D^{\alpha_2} G(y)| \leq \frac{D_2}{\varepsilon^{\alpha_2 - 1} (r_\varepsilon)^{p(\alpha_2, K_2)}},$$

donc $(P_{K,\alpha}(u_{0,\varepsilon}))_\varepsilon \in A_+$.

b) On doit montrer que : $(P_{K,\alpha}(u_\varepsilon))_\varepsilon \in A_+$.

Or on a

$$u_{1,\varepsilon}(x, y) = \iint_{D_\varepsilon(x,y)} F(\xi, \eta, u_\varepsilon(\xi, \eta)) d\xi d\eta.$$

D'après les résultats précédents

$$\sup_K \left| \iint_{D_\varepsilon(x,y)} F(\xi, \eta, u_\varepsilon(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right| \leq \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda} \exp[2\lambda m_\lambda (f(\lambda) - f(-\lambda))],$$

avec $f(x) = \varepsilon x$; $\lambda = \dfrac{a}{\varepsilon}$; $m_\lambda = m_\varepsilon$; donc $(f(\lambda) - f(-\lambda)) = 2a$ et

$$2\lambda m_\lambda (f(\lambda) - f(-\lambda)) = 2\frac{a}{\varepsilon} 2a m_\varepsilon = 4\frac{a^2}{\varepsilon} m_\varepsilon,$$

d'où

$$\sup_{K\varepsilon} |u_{1,\varepsilon}(x, y)| \leq \frac{\Phi_\varepsilon}{m_\varepsilon} e^{\frac{4a^2}{\varepsilon} m_\varepsilon},$$

avec

$$\Phi_\varepsilon = \sup_{K\varepsilon} |F(x, y, 0)| + m_\varepsilon \|u_{0,\varepsilon}\|_{\infty, K_\varepsilon} \leq C(0) M_\varepsilon + m_\varepsilon \left(\frac{3D_2}{(r_\varepsilon)^{p1}} \right),$$

où $p1 = p([-a, a], 0)$.

Donc $\left(P_{K,0}\left(u_{1,\varepsilon}\right)\right)_\varepsilon \in A_+$, d'où $\left(P_{K,0}\left(u_\varepsilon\right)\right)_\varepsilon \in A_+$.

D'autre part

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial x}(x,y) + \int_{f(x)}^{y} F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))d\eta.$$

On a

$$\frac{\partial u_{1,\varepsilon}}{\partial x} = \int_{f(x)}^{y} F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))d\eta,$$

donc, d'après l'hypothèse (H_1),

$$\sup_{K_\varepsilon}\left(\int_{f(x)}^{y} \left|F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))\right| d\eta\right) \leq 2a\left(m(K_\varepsilon,0)\right),$$

donc $\left(P_{K,(1,0)}(u_{1,\varepsilon})\right)_\varepsilon \in A_+$, d'où $\left(P_{K,(1,0)}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+$.

On a

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial y}(x,y) - \int_{x}^{f^{-1}(y)} F(\xi,y,u_\varepsilon(\xi,y))d\xi.$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned}\sup_{K_\varepsilon}\left|\frac{\partial u_{1,\varepsilon}}{\partial y}(x,y)\right| &\leq \sup_{K_\varepsilon}\left(\int_{x}^{f^{-1}(y)} |F(\xi,y,u_\varepsilon(\xi,y)|)d\xi\right)\\ &\leq \frac{2a}{\varepsilon}m(K_\varepsilon,0)\\ &\leq \frac{2a}{\varepsilon}C(0)M_\varepsilon,\end{aligned}$$

donc $\left(P_{K,(0,1)}(u_{1,\varepsilon})\right)_\varepsilon \in A_+$, $\left(P_{K,(0,1)}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+$.

Par conséquent $\left(P_{K,1}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+$.

c) Récurrence.

Supposons que, pour tout $l \leq n$, on ait : $\left(P_{K,l}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+$ et montrons que cela entraîne $\left(P_{K,n+1}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+$.

On utilise les notations du théorème 4.2.1.1.

c1) Montrons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(P_{1,n}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+,\ \left(P_{2,n}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+.$$

Comme on a

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial x}(x,y) + \int_{\varepsilon x}^{y} F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))d\eta,$$

on en déduit que

$$\frac{\partial^2 u_{1,\varepsilon}}{\partial x^2}(x,y) = -\varepsilon F(x,\varepsilon x,\varphi(x)) + \int_{\varepsilon x}^{y} \frac{\partial}{\partial x} F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))d\eta$$

et par dérivations successives, pour $n \geq 1$,

$$\frac{\partial^{n+1} u_{1,\varepsilon}}{\partial x^{n+1}}(x,y) = -n\varepsilon \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} F(x,\varepsilon x,\varphi(x)) + \int_{\varepsilon x}^{y} \frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x,\eta,u_\varepsilon(x,\eta))d\eta.$$

On a

$$\sup_{(x,y)\in K_\varepsilon} \left|\frac{\partial^{n+1} u_\varepsilon}{\partial x^{n+1}}(x,y)\right| \leq \sup_{x\in\left[-\frac{a}{\varepsilon},\frac{a}{\varepsilon}\right]} n\varepsilon \left|\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} F(x,\varepsilon x,\varphi(x))\right| + 2a \sup_{(x,y)\in K_\varepsilon} \left|\frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x,y,u_\varepsilon(x,y))\right|,$$

or, d'après la propriété de stabilité,

$$\begin{aligned}\left(\sup_{(x,y)\in K_\varepsilon} \left|\frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x,y,u_\varepsilon(x,y))\right|\right) &= P_{K_\varepsilon,(n,0)}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq P_{K_\varepsilon,n}(F(.,.,u_\varepsilon)) \\ &\leq \sum\nolimits_{i=0}^{i=n} C_i P^i_{K_\varepsilon,n}(u_\varepsilon)\end{aligned}$$

et

$$\sup_{x\in\left[-\frac{a}{\varepsilon},\frac{a}{\varepsilon}\right]} n\varepsilon \left|\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} F(x,\varepsilon x,\varphi(x))\right| \leq n\varepsilon\left(m\left(K_\varepsilon, n-1\right)\right) \leq n\varepsilon C\left(n-1\right) M_\varepsilon,$$

donc $\left(P_{K,(n+1,0)}\left(u_{1,\varepsilon}\right)\right)_\varepsilon \in A_+$,d'où : $\left(P_{K,(n+1,0)}\left(u_\varepsilon\right)\right)_\varepsilon \in A_+$.

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(P_{2,n}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+$.

Comme on a

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u_{0,\varepsilon}}{\partial y}(x,y) - \int_{x}^{\frac{y}{\varepsilon}} F(\xi,y,u_\varepsilon(\xi,y))d\xi,$$

on en déduit que

$$\frac{\partial^2 u_{1,\varepsilon}}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{\varepsilon}F(\frac{y}{\varepsilon}, y, \varphi(\frac{y}{\varepsilon})) - \int_x^{\frac{y}{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial y}F(\xi, y, u_\varepsilon(\xi, y))d\xi$$

et, par dérivations successives, pour $n \geq 1$,

$$\frac{\partial^{n+1} u_{1,\varepsilon}}{\partial y^{n+1}}(x,y) = -n\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}F(\frac{y}{\varepsilon}, y, \varphi(\frac{y}{\varepsilon})) - \int_x^{\frac{y}{\varepsilon}} \frac{\partial^n}{\partial y^n}F(\xi, y, u_\varepsilon(\xi, y))d\xi.$$

On a

$$\sup_{(x,y)\in K_\varepsilon}\left|\frac{\partial^{n+1} u_{1,\varepsilon}}{\partial y^{n+1}}(x,y)\right| \leq \sup_{y\in[-a,a]} n\frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}F(\frac{y}{\varepsilon}, y, \varphi(\frac{y}{\varepsilon}))\right| + 2\lambda \sup_{(x,y)\in K_\varepsilon}\left|\frac{\partial^n}{\partial y^n}F(x, y, u_\varepsilon(x, y))\right|,$$

or, d'après la propriété de stabilité,

$$\begin{aligned}\sup_{(x,y)\in K_\varepsilon}\left|\frac{\partial^n}{\partial y^n}F(x, y, u_\varepsilon(x, y))\right| &= P_{K,(0,n)}(F(.,.,u_\varepsilon)) \\ &\leq P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon)) \\ &\leq \sum\nolimits_{i=0}^{i=n} C_i P^i_{K_\varepsilon,n}(u_\varepsilon)\end{aligned}$$

et

$$\sup n\frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}F(\frac{y}{\varepsilon}, y, \varphi(\frac{y}{\varepsilon}))\right| \leq n\frac{1}{\varepsilon}\left(m\left(K_\varepsilon, n-1\right)\right) \leq n\frac{1}{\varepsilon}C\left(n-1\right)M_\varepsilon$$

donc, pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(P_{K,(0,n+1)}\left(u_{1,\varepsilon}\right)\right)_\varepsilon \in A_+,$$

d'où $\left(P_{K,(0,n+1)}\left(u_\varepsilon\right)\right)_\varepsilon \in A_+$.

c2) Pour $\alpha + \beta = n$ et $\beta \geq 1$, on a maintenant

$$\begin{aligned}P_{K,(\alpha+1,\beta)}(u_\varepsilon) &= \sup_{(x,y)\in K}\left|D^{(\alpha+1,\beta)}u_\varepsilon\left(x,y\right)\right| = \sup_{(x,y)\in K}\left|D^{(\alpha,\beta-1)}D^{(1,1)}u_\varepsilon\left(x,y\right)\right| \\ &= \sup_{(x,y)\in K}\left|D^{(\alpha,\beta-1)}F(x,y,u_\varepsilon\left(x,y\right))\right| = P_{K,(\alpha,\beta-1)}(F(.,.,u_\varepsilon)) \\ &\leq P_{K,n-1}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon)).\end{aligned}$$

On a donc

$$P_{3,n}(u_\varepsilon) = \sup_{\alpha+\beta=n;\beta\geq 1} P_{K,(\alpha+1,\beta)}(u_\varepsilon) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon))$$

et l'hypothèse de stabilité assure alors que

$$\left(P_{3,n}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+.$$

De même, pour $\alpha + \beta = n$ et $\alpha \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} P_{K,(\alpha,\beta+1)}(u_\varepsilon) &= \sup_{(x,y)\in K} \left|D^{(\alpha,\beta+1)} u_\varepsilon\,(x,y)\right| = \sup_{(x,y)\in K} \left|D^{(\alpha-1,\beta)} D^{(1,1)} u_\varepsilon\,(x,y)\right| \\ &= \sup_{(x,y)\in K} \left|D^{(\alpha-1,\beta)} F(x,y,u_\varepsilon\,(x,y))\right| = P_{K,(\alpha-1,\beta)}(F(.,.,u_\varepsilon)) \\ &\leq P_{K,n-1}(F(.,.,u_\varepsilon)) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon)). \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$P_{4,n}(u_\varepsilon) = \sup_{\alpha+\beta=n;\alpha\geq 1} P_{K,(\alpha,\beta+1)}(u_\varepsilon) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_\varepsilon))$$

et l'hypothèse de stabilité assure alors que

$$\left(P_{4,n}(u_\varepsilon)\right)_\varepsilon \in A_+.$$

En conclusion, on a bien

$$\left(P_{K,n+1}(u_\varepsilon)\right)_\epsilon \in A_+.$$

□

8.2.1.3. Conséquence

Donc $u = [u_\epsilon]$ est une fonction généralisée que l'on peut considérer comme la solution généralisée du problème de Cauchy caractéristique P_C.

8.2.1.4. Question ouverte

Comment cette fonction généralisée dépend de l'approximation de $\{y = 0\}$ par $\{y = \varepsilon x\}$?

C'est une question ouverte.

8.3 Le cas de données irrégulières

8.3.1.1.Notations, rappels et hypothèses

On peut donner aussi un sens au problème de Cauchy caractéristique (P_C) dans le cas où φ et ψ sont elles-mêmes des données irrégulières (par exemple des fonctions généralisées) en commençant par résoudre

$$P_{(\varepsilon,\eta)} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_{(\varepsilon,\eta)}}{\partial x \partial y}(x,y) = F(x,y,u_{(\varepsilon,\eta)}(x,y)) \\ u_{(\varepsilon,\eta)}(x,\varepsilon x) = \varphi_\eta(x) \\ \dfrac{\partial u_{(\varepsilon,\eta)}}{\partial y}(x,\varepsilon x) = \psi_\eta(x), \end{cases}$$

où $(\varphi_\eta)_\eta$ et $(\psi_\eta)_\eta$ sont des représentants de φ et ψ dans une algèbre convenable.

Le paramètre ε permet de se ramener à un problème non caractéristique que le paramètre η rend régulier.

$$u_{0,(\varepsilon,\eta)}(x,y) = \varphi_\eta(x) - \varepsilon\Psi_\eta(x) + \varepsilon\Psi\eta\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) ;$$

$$u_{(\varepsilon,\eta)}(x,y) = u_{0,(\varepsilon,\eta)}(x,y) - \iint_{D_\varepsilon(x,y)} F(\xi,\theta,u_{(\varepsilon,\eta)}(\xi,\theta))d\xi d\theta.$$

On fait ici les hypothèses suivantes

On conserve les hypothèses $(H1)$ du théorème précédent.

On suppose de plus que

$$(H5)\left\{\begin{array}{l}\exists\left(r_{\varepsilon,\eta}\right)_{(\varepsilon,\eta)}\in\mathbb{R}_*^{]0,1]\times]0,1]} \text{ tel que } \forall K_2\Subset\mathbb{R},\forall\alpha_2\in\mathbb{N},\exists D_2\in\mathbb{R}_+^*,\exists p\in\mathbb{N},\\ \qquad\qquad \max\left[\sup\limits_{K_2}\left|D^{\alpha_2}\varphi_\eta(\frac{y}{\varepsilon})\right|,\sup\limits_{K_2}\left|D^{\alpha_2}\Psi_\eta(\frac{y}{\varepsilon})\right|\right]\le\frac{D_2}{(r_{\varepsilon,\eta})^p}\end{array}\right.$$

$$(H_6)\left\{\begin{array}{l}\mathcal{C}=A/I_A \text{ est surgénéré par les éléments suivants de } \mathbb{R}_*^{]0,1]\times]0,1]}:\\ \qquad\qquad (\varepsilon)_{(\varepsilon,\eta)};(r_{\varepsilon,\eta})_{(\varepsilon,\eta)};\left(e^{\frac{m_\varepsilon}{\varepsilon}}\right)_{(\varepsilon,\eta)};(M_\varepsilon)_{(\varepsilon,\eta)}.\end{array}\right.$$

$$(H_7)\left\{\begin{array}{l}\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)=\mathcal{X}(\mathbb{R}^2)/\mathcal{N}(\mathbb{R}^2) \text{ est construit sur } \mathcal{C}\\ \quad \text{avec } (\mathcal{E},\mathcal{P})=\left(\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2),(P_{K,l})_{K\Subset\mathbb{R}^2,l\in\mathbb{N}}\right)\\ \text{et } \mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right) \text{ est stable par } F \text{ relativement à } \mathcal{C}.\end{array}\right.$$

8.3.1.2. Théorème

Avec les notations et les hypothèses du paragraphe 8.3.1.1. précédent, si $u_{(\varepsilon,\eta)}$ est la solution du problème $P_{(\varepsilon,\eta)}$, la famille $(u_{(\varepsilon,\eta)})_{(\varepsilon,\eta)}$ est le représentant d'une fonction généralisée appartenant à l'algèbre $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$.

Démonstration.

On a

$$u_{(\varepsilon,\eta)}(x,y)=u_{0,(\varepsilon,\eta)}(x,y)-\iint_{D_\varepsilon(x,y)}F(\xi,\theta,u_{(\varepsilon,\eta)}(\xi,\theta))d\xi d\theta.$$

où

$$u_{0,(\varepsilon,\eta)}(x,y)=\varphi_\eta(x)-\varepsilon\Psi_\eta\left(x\right)+\varepsilon\Psi\eta\left(\frac{y}{\varepsilon}\right),$$

Ψ étant une primitive de ψ, et

$$u_{1,(\varepsilon,\eta)}(x,y)=\iint_{D_\varepsilon(x,y)}F(\xi,\theta,u_{(\varepsilon,\eta)}(\xi,\theta))d\xi d\theta$$

a) Pour $K=K_1\times K_2=[-a;a]\times[-a;a]$ et $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{N}^2$, il existe $C_1>0$ et $C_2>0$

tels que

$$\sup_{K_1} |D^{\alpha_1}\varphi_\eta(x)| \leq C_1 (K_1, \alpha_1) \ ;$$

$$\varepsilon \sup_{K_1} |D^{\alpha_1}\Psi_\eta(x)| \leq \varepsilon C_2 (K_1, \alpha 1) .$$

$G_\eta (y) = \Psi_\eta \circ f_\varepsilon^{-1} (y) = \Psi_\eta \left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$, on peut écrire

$$\varepsilon \sup_{K_2} |D^{\alpha_2} G_\eta (y)| \leq \frac{D_2}{\varepsilon^{\alpha_2 - 1} (r_{\varepsilon,\eta})^{p(\alpha_2, K_2)}},$$

donc $\left(P_{K,\alpha}\left(u_{0,(\varepsilon,\eta)}\right)\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+$.

b) On doit montrer que, pour tout entier n, $\left(P_{K,n}\left(u_{(\varepsilon,\eta)}\right)\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+$.

Or on a

$$u_{1,(\varepsilon,\eta)}(x,y) = \iint_{D_\varepsilon(x,y)} F(\xi, \theta, u_{(\varepsilon,\eta)}(\xi,\theta)) d\xi d\theta.$$

D'après les résultats précédents

$$\sup_K \left| \iint_{D_\varepsilon(x,y)} F(\xi, \theta, u_{(\varepsilon,\eta)}(\xi,\theta)) d\xi d\theta \right| \leq \frac{\Phi_\lambda}{m_\lambda} \exp[2\lambda m_\lambda (f(\lambda) - f(-\lambda))],$$

avec $f(x) = \varepsilon x$; $\lambda = \dfrac{a}{\varepsilon}$; $m_\lambda = m_\varepsilon$; donc $(f(\lambda) - f(-\lambda)) = 2a$ et

$$2\lambda m_\lambda (f(\lambda) - f(-\lambda)) = 2\frac{a}{\varepsilon} 2a m_\varepsilon = 4\frac{a^2}{\varepsilon} m_\varepsilon,$$

d'où

$$\sup_{K\varepsilon} \left| u_{1,(\varepsilon,\eta)}(x,y) \right| \leq \frac{\Phi_\varepsilon}{m_\varepsilon} e^{\frac{4a^2}{\varepsilon} m_\varepsilon},$$

avec

$$\Phi_\varepsilon = \sup_{K\varepsilon} |F(x,y,0)| + m_\varepsilon \left\| u_{0,(\varepsilon,\eta)} \right\|_{\infty, K_\varepsilon} \leq C(0) M_\varepsilon + m_\varepsilon \left(\frac{3D_2}{(r_{\varepsilon,\eta})^{p1}} \right),$$

où $p1 = p\left([-a,a], 0\right)$.

Donc $\left(P_{K,0}\left(u_{1,(\varepsilon,\eta)}\right)\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+$, d'où : $\left(P_{K,0}\left(u_{(\varepsilon,\eta)}\right)\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+$.

D'autre part

$$\frac{\partial u_{(\varepsilon,\eta)}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u_{0,(\varepsilon,\eta)}}{\partial x}(x,y) + \int_{f(x)}^{y} F(x, \theta, u_{(\varepsilon,\eta)}(x,\theta)) d\theta.$$

On a

$$\frac{\partial u_{1,(\varepsilon,\eta)}}{\partial x} = \int_{f(x)}^{y} F(x,\theta,u_{(\varepsilon,\eta)}(x,\theta))d\theta,$$

donc, d'après l'hypothèse (H_1),

$$\sup_{K_\varepsilon}\left(\int_{f(x)}^{y} F(x,\theta,u_{(\varepsilon,\eta)}(x,\theta))d\theta\right) \leq 2am(K_\varepsilon,0),$$

d'où $\left(P_{K,(1,0)}(u_{1,(\varepsilon,\eta)})\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+$, par conséquent : $\left(P_{K,(1,0)}(u_{(\varepsilon,\eta)})\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+$.

On a

$$\frac{\partial u_{(\varepsilon,\eta)}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u_{0,(\varepsilon,\eta)}}{\partial y}(x,y) - \int_{x}^{f^{-1}(y)} F(\xi,y,u_{(\varepsilon,\eta)}(\xi,y))d\xi.$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned}\sup_{K_\varepsilon}\left|\frac{\partial u_{1,(\varepsilon,\eta)}}{\partial y}(x,y)\right| &\leq \sup_{K_\varepsilon}\left(\int_{x}^{f^{-1}(y)} \left|F(\xi,y,u_{(\varepsilon,\eta)}(\xi,y)\right|)d\xi\right)\\ &\leq \frac{2a}{\varepsilon}m(K_\varepsilon,0)\\ &\leq \frac{2a}{\varepsilon}C(0)M_\varepsilon,\end{aligned}$$

donc : $\left(P_{K,(0,1)}(u_{1,(\varepsilon,\eta)})\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+$, $\left(P_{K,(0,1)}(u_{(\varepsilon,\eta)})\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+$.

Par conséquent $\left(P_{K,1}(u_{(\varepsilon,\eta)})\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+$.

c) Récurrence.

Supposons que pour tout $l \leq n$, on ait : $\left(P_{K,l}(u_{(\varepsilon,\eta)})\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+$ et montrons que cela entraîne $\left(P_{K,n+1}(u_{(\varepsilon,\eta)})\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+$.

On utilise les notations du théorème 4.2.1.1.

c1) Montrons d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(P_{1,n}(u_{(\varepsilon,\eta)})\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+,\ \left(P_{2,n}(u_{(\varepsilon,\eta)})\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+.$$

Comme on a

$$\frac{\partial u_{(\varepsilon,\eta)}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u_{0,(\varepsilon,\eta)}}{\partial x}(x,y) + \int_{\varepsilon x}^{y} F(x,\theta,u_{(\varepsilon,\eta)}(x,\theta))d\theta,$$

on en déduit que :

$$\frac{\partial^2 u_{1,(\varepsilon,\eta)}}{\partial x^2}(x,y) = -\varepsilon F(x,\varepsilon x,\varphi_\eta(x)) + \int_{\varepsilon x}^{y} \frac{\partial}{\partial x} F(x,\theta,u_{(\varepsilon,\eta)}(x,\theta))d\theta$$

et par dérivations successives, pour $n \geq 1$,

$$\frac{\partial^{n+1} u_{1,(\varepsilon,\eta)}}{\partial x^{n+1}}(x,y) = -n\varepsilon \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} F(x,\varepsilon x,\varphi_\eta(x)) + \int_{\varepsilon x}^{y} \frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x,\theta,u_{(\varepsilon,\eta)}(x,\theta))d\theta.$$

On a

$$\sup_{(x,y)\in K_\varepsilon} \left| \frac{\partial^{n+1} u_{1,(\varepsilon,\eta)}}{\partial x^{n+1}}(x,y) \right| \leq \sup_{x\in\left[-\frac{a}{\varepsilon},\frac{a}{\varepsilon}\right]} n\varepsilon \left| \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} F(x,\varepsilon x,\varphi_\eta(x)) \right| + 2a \sup_{(x,y)\in K_\varepsilon} \left| \frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x,y,u_{(\varepsilon,\eta)}(x,y)) \right|,$$

or, d'après la propriété de stabilité,

$$\begin{aligned}\left(\sup_{(x,y)\in K_\varepsilon} \left| \frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x,y,u_{(\varepsilon,\eta)}(x,y)) \right| \right) &= P_{K_\varepsilon,(n,0)}(F(.,.,u_{(\varepsilon,\eta)})) \leq P_{K_\varepsilon,n}(F(.,.,u_{(\varepsilon,\eta)})) \\ &\leq \sum\nolimits_{i=0}^{i=n} C_i P^i_{K_\varepsilon,n}(u_{(\varepsilon,\eta)}),\end{aligned}$$

et

$$\sup_{x\in\left[-\frac{a}{\varepsilon},\frac{a}{\varepsilon}\right]} n\varepsilon \left| \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} F(x,\varepsilon x,\varphi_\varepsilon(x)) \right| \leq n\varepsilon \left(m\left(K_\varepsilon, n-1\right)\right) \leq n\varepsilon C\left(n-1\right) M_\varepsilon,$$

donc

$$\left(P_{K,(n+1,0)}\left(u_{1,(\varepsilon,\eta)}\right)\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+,$$

d'où $\left(P_{K,(n+1,0)}\left(u_{(\varepsilon,\eta)}\right)\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+$.

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(P_{2,n}(u_{(\varepsilon,\eta)})\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+$.

Comme on a

$$\frac{\partial u_{(\varepsilon,\eta)}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u_{0,(\varepsilon,\eta)}}{\partial y}(x,y) - \int_x^{\frac{y}{\varepsilon}} F(\xi,y,u_{(\varepsilon,\eta)}(\xi,y))d\xi,$$

on en déduit que

$$\frac{\partial^2 u_{1,(\varepsilon,\eta)}}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{\varepsilon} F(\frac{y}{\varepsilon},y,\varphi_\eta(\frac{y}{\varepsilon})) - \int_x^{\frac{y}{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial y} F(\xi,y,u_{(\varepsilon,\eta)}(\xi,y))d\xi$$

et par dérivations successives pour $n \geq 1$,

$$\frac{\partial^{n+1} u_{1,(\varepsilon,\eta)}}{\partial y^{n+1}}(x,y) = -n\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}F(\frac{y}{\varepsilon},y,\varphi_\eta(\frac{y}{\varepsilon})) - \int_x^{\frac{y}{\varepsilon}} \frac{\partial^n}{\partial y^n}F(\xi,y,u_{(\varepsilon,\eta)}(\xi,y))d\xi.$$

On a

$$\begin{aligned}
&\sup_{(x,y)\in K_\varepsilon}\left|\frac{\partial^{n+1} u_{1,(\varepsilon,\eta)}}{\partial y^{n+1}}(x,y)\right| \\
&\quad \leq \sup_{y\in[-a,a]} n\frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}F(\frac{y}{\varepsilon},y,\varphi_\eta(\frac{y}{\varepsilon}))\right| + 2\lambda \sup_{(x,y)\in K_\varepsilon}\left|\frac{\partial^n}{\partial y^n}F(x,y,u_{(\varepsilon,\eta)}(x,y))\right|,
\end{aligned}$$

or, d'après la propriété de stabilité,

$$\begin{aligned}
\sup_{(x,y)\in K_\varepsilon}\left|\frac{\partial^n}{\partial y^n}F(x,y,u_{(\varepsilon,\eta)}(x,y))\right| &= P_{K_\varepsilon,(0,n)}(F(.,.,u_{(\varepsilon,\eta)})) \\
&\leq P_{K_\varepsilon,n}(F(.,.,u_{(\varepsilon,\eta)})) \\
&\leq \textstyle\sum_{i=0}^{i=n} C_i P^i_{K_\varepsilon,n}(u_{(\varepsilon,\eta)})
\end{aligned}$$

et

$$\sup_{y\in[-a,a]} n\frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}F(\frac{y}{\varepsilon},y,\varphi_\eta(\frac{y}{\varepsilon}))\right| \leq n\frac{1}{\varepsilon}m\left(K_\varepsilon,n-1\right) \leq n\frac{1}{\varepsilon}C\left(n-1\right)M_\varepsilon,$$

donc, pour tout $K \Subset \mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(P_{K,(0,n+1)}\left(u_{1,(\varepsilon,\eta)}\right)\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+,$$

d'où : $\left(P_{K,(0,n+1)}\left(u_{(\varepsilon,\eta)}\right)\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+$.

c2) Pour $\alpha+\beta=n$ et $\beta\geq 1$, on a maintenant

$$\begin{aligned}
P_{K,(\alpha+1,\beta)}(u_{(\varepsilon,\eta)}) &= \sup_{(x,y)\in K}\left|D^{(\alpha+1,\beta)}u_{(\varepsilon,\eta)}\left(x,y\right)\right| = \sup_{(x,y)\in K}\left|D^{(\alpha,\beta-1)}D^{(1,1)}u_{(\varepsilon,\eta)}\left(x,y\right)\right| \\
&= \sup_{(x,y)\in K}\left|D^{(\alpha,\beta-1)}F(x,y,u_{(\varepsilon,\eta)}\left(x,y\right))\right| = P_{K,(\alpha,\beta-1)}(F(.,.,u_{(\varepsilon,\eta)})) \\
&\leq P_{K,n-1}(F(.,.,u_{(\varepsilon,\eta)})) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_{(\varepsilon,\eta)})).
\end{aligned}$$

On a donc finalement

$$P_{3,n}(u_{(\varepsilon,\eta)}) = \sup_{\alpha+\beta=n;\beta\geq 1} P_{K,(\alpha+1,\beta)}(u_{(\varepsilon,\eta)}) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_{(\varepsilon,\eta)}))$$

et l'hypothèse de stabilité assure alors que

$$\left(P_{3,n}(u_{(\varepsilon,\eta)})\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+.$$

De même, pour $\alpha + \beta = n$ et $\alpha \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} P_{K,(\alpha,\beta+1)}(u_{(\varepsilon,\eta)}) &= \sup_{(x,y)\in K} \left| D^{(\alpha,\beta+1)} u_{(\varepsilon,\eta)}(x,y) \right| = \sup_{(x,y)\in K} \left| D^{(\alpha-1,\beta)} D^{(1,1)} u_{(\varepsilon,\eta)}(x,y) \right| \\ &= \sup_{(x,y)\in K} \left| D^{(\alpha-1,\beta)} F(x,y,u_{(\varepsilon,\eta)}(x,y)) \right| = P_{K,(\alpha-1,\beta)}(F(.,.,u_{(\varepsilon,\eta)})) \\ &\leq P_{K,n-1}(F(.,.,u_{(\varepsilon,\eta)})) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_{(\varepsilon,\eta)})). \end{aligned}$$

On a donc

$$P_{4,n}(u_{(\varepsilon,\eta)}) = \sup_{\alpha+\beta=n;\alpha\geq 1} P_{K,(\alpha,\beta+1)}(u_{(\varepsilon,\eta)}) \leq P_{K,n}(F(.,.,u_{(\varepsilon,\eta)}))$$

et l'hypothèse de stabilité assure alors que

$$\left(P_{4,n}(u_{(\varepsilon,\eta)})\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+.$$

En conclusion, on a bien

$$\left(P_{K,n+1}(u_{(\varepsilon,\eta)})\right)_{(\varepsilon,\eta)} \in A_+.$$

□

8.3.1.3. Conséquence

Donc $u = \left[u_{(\varepsilon,\eta)}\right]$ *est une fonction généralisée que l'on peut considérer comme la solution généralisée du problème de Cauchy caractéristique* P_C. □

8.4 Etude qualitative de la solution. Cas $F = 0$

$\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ est stable par F, $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^2\right)$ construits sur le même anneau de constantes généralisées comme précédemment.

Solution généralisée d'un problème de Cauchy caractéristique

8.4.1.1. Proposition

On considère le problème de Cauchy caractéristique

$$(P_C)\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = 0 \\ u_{|(Ox)} = \varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} |_{(Ox)} = \psi. \end{cases}$$

On suppose que φ et ψ sont lisses et que Ψ vérifie

$$\Psi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \Psi(t)dt = 1,$$
$$\forall K \Subset \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{N}, \exists C > 0, p \in \mathbb{N} : \sup_{y \in K} \left| \Psi^{(\alpha)}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \right| \leq \frac{C}{\varepsilon^p}.$$

Soit δ_x (resp δ_y) la distribution de Dirac opérant sur les fonctions de la variable x (resp y), 1_x (resp 1_y) la fonction constante égale à 1 de la variable x (resp y).

$$u_\varepsilon(x,y) = \varphi(x) - \varepsilon\Psi(x) + \varepsilon\Psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) = \varphi(x) - \varepsilon\Psi(x) + \varepsilon^2\left(\frac{1}{\varepsilon}\Psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right),$$

alors $[u_\varepsilon]$ est la solution généralisée du problème de Cauchy irrégulier caractéristique.

$$[u_\varepsilon] = [u_1] + [\varepsilon u_2] + \left[\varepsilon^2 u_{\varepsilon,3}\right],$$

avec

$$\begin{cases} u_1 = 1_y \otimes \varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2) \\ u_2 = -1_y \otimes \Psi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2) \\ [u_{\varepsilon,3}] \sim 1_x \otimes \delta_y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \end{cases}.$$

Démonstration.

$u_\varepsilon = u_1 + \varepsilon u_2 + \varepsilon^2 u_{\varepsilon,3}$, avec $u_2(x,y) = -\Psi(x)$ et

$$u_{\varepsilon,3}(X,Y) = \frac{1}{\varepsilon}\Psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$$

Alors, d'après l'hypothèse

$$\forall H \times K \Subset \mathbb{R}^2, \forall(\beta,\alpha) \in \mathbb{N}^2, \exists C_3 > 0, p \in \mathbb{N} : \sup_{H\times K}\left|\frac{\partial^{\beta+\alpha}}{(\partial x)^\beta(\partial y)^\alpha}u_{(\varepsilon,\eta),3}(x,y)\right| \leq \frac{C_3}{\varepsilon^{\alpha+1}\varepsilon^p},$$

d'où $(u_{\varepsilon,3})_\varepsilon \in \mathcal{H}_{(A,\varepsilon,\mathcal{P})}(\mathbb{R}^2)$.

On a auss : $(u_1 + \varepsilon u_2)_\varepsilon \in \mathcal{H}_{(A,\varepsilon,\mathcal{P})}(\mathbb{R}^2)$.

De plus

$$[\varepsilon^2 u_{\varepsilon,3}] = \left[\varepsilon^2.1_x \otimes \left(y \longmapsto \frac{1}{\varepsilon}\Psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right)\right],$$

et : $\lim\limits_{\substack{\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \\ \varepsilon \longrightarrow 0}} \left(y \longmapsto \frac{1}{\varepsilon}\Psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right) = \delta_y$. $\square$

Cas $\varphi = 0$, $\psi \sim \delta$

l'association étant définie comme suit

Considérons $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, vérifiant $\int_{\mathbb{R}} g(\xi)d\xi = 1$. Posons : $\frac{1}{\eta}g(\frac{x}{\eta}) = \psi_\eta(x)$. Alors $(\psi_\eta)_\eta$ converge au sens des distributions vers δ. Donc $\psi = [\psi_\eta]$ est bien associée à δ.

8.4.1.2. Proposition $(F = 0, \varphi = 0, \psi \sim \delta)$. **[10]**

La solution u généralisée du problème de Cauchy irrégulier caractéristique suivant

$$(P_C)\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}u = 0 \\ u_{|(Ox)} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\ |_{(Ox)} = \delta. \end{cases}$$

est $\left[u_{(\varepsilon,\eta)}\right] = \left[\varepsilon w_{(\varepsilon,\eta),1}\right] + \left[\varepsilon w_{(\varepsilon,\eta),2}\right]$, *avec*

$$\begin{cases} \left[w_{(\varepsilon,\eta),1}\right] \sim 1_x \otimes Y_y \\ \left[w_{(\varepsilon,\eta),2}\right] \sim -Y_x \otimes 1_y. \end{cases}$$

Démonstration.

En considérant comme donnée la courbe γ_ε d'équation $y = \varepsilon x$, nous pouvons résoudre le problème non caractéristique suivant :

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = 0 \\ u_{|\gamma_\varepsilon} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \;|_{\gamma_\varepsilon} = \delta \end{cases} ;$$

soit, en régularisant les données par des fonctions régularisantes ψ_η sur la courbe $\gamma_\varepsilon = \{y = \varepsilon x\}$, nous pouvons résoudre le problème régulier non caractéristique

$$\left(P_{(\varepsilon,\eta)}\right) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_{(\varepsilon,\eta)}}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \\ u_{(\varepsilon,\eta)}\,(x, \varepsilon x) = 0 \\ \dfrac{\partial u_{(\varepsilon,\eta)}}{\partial y}\,(x, \varepsilon x) = \psi_\eta(x). \end{cases}$$

Déterminons la solution u.

$$u_{(\varepsilon,\eta)}(x,y) = \int_0^y \psi_\eta(\frac{\theta}{\varepsilon})d\theta - \int_0^{\varepsilon x} \psi_\eta(\frac{\theta}{\varepsilon})d\theta - \iint_{D_\varepsilon(x,y)} F(\xi, \theta, u_{(\varepsilon,\eta)}(\xi,\theta))d\xi d\theta$$

donc $u_{(\varepsilon,\eta)}(x,y) = \varepsilon \Psi_\eta\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) - \varepsilon \Psi_\eta(x)$ où $\Psi_\eta(x) = \displaystyle\int_0^x \psi_\eta(t)dt.$

D'où $u_{(\varepsilon,\eta)}(x,y) = \varepsilon w_{(\varepsilon,\eta),1} + \varepsilon w_{(\varepsilon,\eta),2}$.

$$\lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \mathcal{D}'(\mathbb{R})}} \Psi_\eta = Y \text{ et } \lim_{\substack{(\varepsilon,\eta) \to (0,0) \\ \mathcal{D}'(\mathbb{R})}} (y \mapsto \Psi_\eta(\frac{y}{\varepsilon})) = Y,$$

donc

$$\begin{cases} \left[w_{(\varepsilon,\eta),1}\right] \sim 1_x \otimes Y_y \\ \left[w_{(\varepsilon,\eta),2}\right] \sim -Y_x \otimes 1_y, \end{cases}$$

d'où

$$\left[u_{(\varepsilon,\eta)}\right] = \left[\varepsilon w_{(\varepsilon,\eta),1}\right] + \left[\varepsilon w_{(\varepsilon,\eta),2}\right].$$

□

Cas : $\varphi \sim S,\ \Psi \sim T\ ;\ S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

l'association étant réalisée par

$$\varphi = [g_\eta * S] \text{ et } \Psi = [g_\eta * T]$$

puisque

$$\lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \mathcal{D}'(\mathbb{R})}} (g_\eta * S)_\eta = S \text{ et } \lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \mathcal{D}'(\mathbb{R})}} (g_\eta * T)_\eta = T.$$

Enoncé du problème.

Nous cherchons une solution u généralisée du problème de Cauchy irrégulier caractéristique suivant

$$(P_C)\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = 0 \\ u_{|(Ox)} = S \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \mid_{(Ox)} = T'. \end{cases}$$

En considérant comme donnée la courbe γ_ε d'équation $y = \varepsilon x$, nous pouvons résoudre le problème non caractéristique suivant

$$(P_\varepsilon)\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = 0 \\ u_{|\gamma_\varepsilon} = S \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \mid_{\gamma_\varepsilon} = T'. \end{cases}$$

Soit, en régularisant les données par des fonctions régularisantes g_η sur la courbe $\gamma_\varepsilon = \{y = \varepsilon x\}$, nous pouvons résoudre le problème non caractéristique

$$
\left(P_{(\varepsilon,\eta)}\right)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_{(\varepsilon,\eta)}}{\partial x\partial y}(x,y)=0\\ u_{(\varepsilon,\eta)}\left(x,\varepsilon x\right)=\left(g_\eta * S\right)(x)\\ \dfrac{\partial u_{(\varepsilon,\eta)}}{\partial y}\left(x,\varepsilon x\right)=\left(g_\eta * T'\right)(x).\end{cases}
$$

Résolution du problème.

Pour $g\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, avec supp$g=[-1;1]$, $0\leq g\leq 1$, $g(0)=1$, et $g^{(k)}(0)=0$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$; considérons, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$
g_\eta(x)=\frac{1}{\eta}g(\frac{x}{\eta}).
$$

Alors $\left(g_\eta\right)_\eta$ converge au sens des distributions vers δ_x.

Déterminons la solution $u_{(\varepsilon,\eta)}$ de$\left(P_{(\varepsilon,\eta)}\right)$.

On a

$$
\begin{aligned}
u_{(\varepsilon,\eta)}(x,y)&=\varepsilon\Psi_\eta(\frac{y}{\varepsilon})-\varepsilon\Psi_\eta(x)+\varphi_\eta(x)\\
&=\varepsilon\left(g_\eta * T\right)(\frac{y}{\varepsilon})-\varepsilon\left(g_\eta * T\right)(x)+\left(g_\eta * S\right)(x).
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\left[u_{(\varepsilon,\eta)}\right]=\left[\varepsilon u_{(\varepsilon,\eta),1}\right]+\left[\varepsilon u_{(\varepsilon,\eta),2}\right]+u_{(\varepsilon,\eta),3},
$$

avec

$$
\begin{cases}u_{(\varepsilon,\eta),1}(x,y)=\left(g_\eta * T\right)(\frac{y}{\varepsilon})\\ \left[u_{(\varepsilon,\eta),2}\right]\sim -T_x\otimes 1_y\\ \left[u_{(\varepsilon,\eta),3}\right]\sim S_x\otimes 1_y\end{cases}
$$

□

Cas : $\varphi\sim\delta$, $\psi\sim\delta$

$(\varphi\sim\delta,\,\psi\sim\delta\,;\,F=0)$ donc $(\varphi\sim S\sim\delta,\,\Psi\sim Y\sim T\,;\,F=0)$.

Nous cherchons une solution u généralisée du problème de Cauchy irrégulier caractéristique suivant

$$(P_C)\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}u=0\\ u_{|(Ox)}=\delta\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\,|_{(Ox)}=\delta.\end{cases}.$$

D'après les résultats précédents

$$u_{(\varepsilon,\eta)}(x,y)=\varepsilon\left(g_\eta*T\right)(\frac{y}{\varepsilon})-\varepsilon\left(g_\eta*T\right)(x)+\left(g_\eta*S\right)(x).$$

D'où

$$\left[u_{(\varepsilon,\eta)}\right]=\left[\varepsilon u_{(\varepsilon,\eta),1}\right]+\left[\varepsilon u_{(\varepsilon,\eta),2}\right]+u_{(\varepsilon,\eta),3}$$

avec

$$\begin{cases}\left[u_{(\varepsilon,\eta),1}\right]\sim 1_x\otimes Y_y\\ \left[u_{(\varepsilon,\eta),2}\right]\sim -Y_x\otimes 1_y\\ \left[u_{(\varepsilon,\eta),3}\right]\sim \delta_x\otimes 1_y\end{cases}.$$

Car si G est une primitive de g, $\lim\limits_{\eta\underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\to}0}G_\eta=Y$ et $\lim\limits_{(\varepsilon,\eta)\underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\to}(0,0)}\left(y\mapsto G_\eta(\frac{y}{\epsilon})\right)=Y$. □

Bibliographie

[1] COLOMBEAU J.F. : *Elementary introduction to new generalized functions.* North-Holland Math Studies 113, 1985.

[2] DELCROIX A., SCARPALEZOS D. : *Topology on Asymptotic Algebras of Generalized Functions and Applications.* Mh. Math. 129, 1-14 (2000).

[3] EGOROV Y.V. : *A contribution to the theory of generalized functions.* Russian Math. Surveys 43 ; n°5 p1-49, 1990.

[4] EGOROV Y.V., SHUBIN M.A. : *Partial Differential Equations.* Springer Verlag, 1993.

[5] GARABEDIAN P.R. : *Partial differential equations.* John Wiley & sons inc. (1964).

[6] HORMANDER L. : *The analysis of Partial Differential Operators II.* Springer Verlag. 1983.

[7] MARTI J.A. : *Analyse locale et microlocale des fonctions généralisées.* Prépublication de l'Université des Antilles et de la Guyane (mai 1995).

[8] MARTI J.A. : *Fundamental structures and asymptotic microlocalization in sheaves of generalized functions.* Integral Transforms Spec. Funct., 6(1-4) 1998, 223-228, MR 99f :58187, Zbl 0902.18005.

[9] MARTI J.A. : $(\mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$*-Sheaf Structures and Applications. Nonlinear Theory of Generalized Functions.* Research Notes in Mathematics Series, Chapman&Hall/CRC, 1999, 175-186, MR 2000f :46050, Zbl 0938.35008.

[10] MARTI J.A. : *Multiparametric Algebras and Characteristic Cauchy Problem.* Nonlinear algebraic analysis and applications, Proceedings of the International Conférence on Generalized functions (ICGF 2000), CSP p. 181-192, 2004.

[11] MARTI J.A. : *Non linear Algebric Analysis of Delta Shock wave solutions to Burger's Equation.* Pacific J. Math. 210 (1) : 165-187, 2003.

[12] MARTI J.A., NUIRO S. P., VALMORIN V.S. : *Algèbres différentielles et problème de Goursat non linéaire à données irrégulières.* Ann. Fac. Sci. Toulouse, VII (1) (1998),135-139, MR 99k :35012, Zbl 0915.35006.

[13] MARTI J.A., NUIRO S. P., VALMORIN V.S. : *A non linear Goursat problem with irregular data.* Integral Transforms Spec. Funct., 6 (1-4) (1998), 229-246, MR 99d :35025, Zbl 0912.35043.

[14] MARTI J.A. , NUIRO S P. : *Analyse algébrique d'un problème de Dirichlet non linéaire et singulier.* Topological Methods in Non Linear Analysis, vol 13, p301-311, 1999.

[15] OBERGUGGENBERGER M. : *Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations.* Longman Scientific & Technical, New York, 1992.

[16] OBERGUGGENBERGER M. : *Generalized solutions to nonlinear wave equations.* A paraître dans Mat. Contemporanea.

[17] SHI W.H. : *Sur les solutions analytiques de quelques équations aux dérivées partielles en mécanique des fluides.* Hermann, Editeur, Paris, 1992.

[18] SHIH W. : *Une méthode élémentaire pour l'étude des équations aux dérivées partielles.* Diagrammes vol 16, 1986.

[19] SHIH W. : *Equations aux dérivées partielles.* C. R. Acad. Sc. Paris, t 292, série I, (1981), 901-904 ; t 299, série I, (1984), 331-334 ; t 299, série I, (1984), 427-430. *Une remarque sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles analytiques réelles.* C. R. Acad. Sc. Paris, t 304, série I, (1987), 103-106.

[20] VALMORIN V.S. : *Fonctions généralisées périodiques et applications.* Thèse de doctorat, Université des Antilles et de la Guyane (février 1995).

[21] VALMORIN V.S. : *Fonctions généralisées périodiques et problème de Goursat. C. R.* Acad. Sci. Paris, Série I, 320 (1995), p. 537-540.

Résumé de la thèse

Sur les singularités de certains problèmes différentiels.

Dans cette thèse nous proposons une méthode pour résoudre certains problèmes de Cauchy à données irrégulières ou caractéristiques en utilisant les récentes théories des fonctions généralisées. Nous étudions dans la première partie un problème de Cauchy et un problème de Goursat réguliers avec des données sur une courbe monotone. La deuxième partie est consacrée à la mise en place d'une algèbre adaptée à la résolution du problème de Cauchy généralisé. Dans la troisième partie nous donnons un sens à un problème de Cauchy généralisé et nous montrons qu'il admet une unique solution. Nous étudions de même un problème de Goursat généralisé. Dans la quatrième partie nous approchons un problème de Cauchy caractéristique par une famille de problèmes non caractéristiques (P_ε) en considérant la droite d'équation $y = \varepsilon x$. Si u_ε est la solution du problème (P_ε), $u = [u_\epsilon]$ est une fonction généralisée que nous considérons comme la solution généralisée du problème dans une algèbre convenablement définie. Nous donnons un sens au problème de Cauchy caractéristique dans le cas de données irrégulières en le remplaçant par une famille de problèmes non caractéristiques $\left(P_{(\varepsilon,\eta)}\right)$ dans une algèbre convenable. Le paramètre ε permet de se ramener à un problème non caractéristique que le paramètre η rend régulier. Si $u_{(\varepsilon,\eta)}$ est la solution du problème $\left(P_{(\varepsilon,\eta)}\right)$, $u = \left[u_{(\varepsilon,\eta)}\right]$ est une fonction généralisée que nous considérons comme la solution généralisée du problème.

Mots clés

Equations différentielles partielles non linéaires. Algèbre de fonctions généralisées. Problème de Cauchy caractéristique

Abstract

On the singularities of some differential problems.

In this thesis, we propose a method to solve some Cauchy problems with irregular or characteristic data by using the recent theories of generalized functions. We study a regular Cauchy problem and a regular Goursat problem in the first part with data on a monotonous curve. The second part is devoted to the setting up of an algebra adapted to the generalized Cauchy problem. In the third part, we give a meaning to a generalized Cauchy problem and we show that the problem admits a unique solution. We study a generalized Goursat problem in the same way. In the fourth part, we approach a characteristic Cauchy problem by a family of non-characteristic ones (P_ε) by considering the straight line of equation $y = \varepsilon x$. If u_ε is the solution of problem (P_ε), $u = [u_\epsilon]$ is a generalized function that we consider as the generalized solution of the problem in an appropriate algebra. We give a meaning to the characteristic Cauchy problem with irregular data by replacing it by a family of non-characteristic problems $\left(P_{(\varepsilon,\eta)}\right)$ in an appropriate algebra. The parameter ε permits to replace the given problem by a non-characteristic one, whereas the parameter η makes it regular. If $u_{(\varepsilon,\eta)}$ is the solution of problem $\left(P_{(\varepsilon,\eta)}\right)$, $u = \left[u_{(\varepsilon,\eta)}\right]$ is a generalized function considered as the generalized solution of the problem.

Keywords

Non linear Partial Differential Equations ; Algebras of generalized functions ; Characteristic Cauchy Problem.

Université des Antilles et de la Guyane

Faculté de Sciences Exactes et Naturelles

Département de Mathématiques et Informatique

Laboratoire AOC (Analyse, Optimisation, Contrôle.)

Campus de Fouillole. 97157 Pointe-à-Pitre cedex