



**HAL**  
open science

# Contribution à la modélisation et à la commande des systèmes électrohydrauliques

Mohamed Tafraouti

► **To cite this version:**

Mohamed Tafraouti. Contribution à la modélisation et à la commande des systèmes électrohydrauliques. Automatique / Robotique. Université Henri Poincaré - Nancy I, 2006. Français. NNT : . tel-00121720

**HAL Id: tel-00121720**

**<https://theses.hal.science/tel-00121720>**

Submitted on 21 Dec 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Contribution à la modélisation et la commande des systèmes électrohydrauliques

## THESE

présentée et soutenue publiquement le 17 novembre 2006

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré – Nancy 1

(spécialité automatique)

par

Mohamed TAFRAOUTI

### Composition du jury

<i>Président :</i>	G. SALLET	Professeur des universités, LMAM, Université Paul Verlaine de Metz
<i>Rapporteurs :</i>	K.N. M'SIRDI	Professeur des universités, LSIS, Université Aix-Marseille
	W. PERRUQUETTI	Professeur des universités, LAGIS, Ecole Centrale de Lille
<i>Examineurs :</i>	A. EL-MOUDNI	Professeur des universités, SeT, Université de Technologie de Belfort-Montbéliard
	R. OUTBIB	Professeur des universités, L2ES, Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, (Directeur de thèse)
	A. RACHID	Professeur des universités, LTI, Université de Picardie Jules Verne d'Amiens
	H. RAFARALAHY	Maître de conférences, CRAN, Université Henri Poincaré, Nancy I, (Co-Directeur de thèse)
	M. ZASADZINSKI	Professeur des universités, CRAN, Université Henri Poincaré, Nancy I



## Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués, sous la responsabilité scientifique du Monsieur le Professeur Rachid OUTBIB et du Monsieur le Maître de conférence Hugues RAFARALAHY, au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN, UMR 7039, CNRS) dirigé par Monsieur le Professeur Alain RICHARD, plus particulièrement au sein de l'équipe de Longwy du CRAN, dirigée par Monsieur le Professeur Mohamed DAROUACH.

Je tiens d'abord à exprimer toute ma gratitude envers les membres du jury pour leur disponibilité et la qualité de leurs remarques dont ils m'ont fait part : Messieurs les Professeurs Kouider Nacer M'SIRDI et Wilfrid PERRUQUETTI pour le travail de rapporteurs ; leurs commentaires et leurs questions m'ont permis de clarifier ma rédaction et m'ont donné de nouvelles pistes de réflexion. Mes remerciements vont aussi à l'égard de Messieurs les Professeurs Abdellah EL-MOUDNI, Ahmed RACHID, Gauthier SALLET et Michel ZASADZINSKI pour leur participation à l'examen de ce mémoire.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Rachid OUTBIB, Professeur à Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, et membre du Laboratoire d'Electronique, Electro-technique et Systèmes, mon Directeur de Thèse, pour avoir encadré ce travail de thèse, avec beaucoup de compétence et d'enthousiasme. Ses qualités, tant humaines que scientifiques furent pour moi un apport inestimable. Je lui en suis très reconnaissant.

Mes grands remerciements vont également à Monsieur Hugues RAFARALAHY, Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et membre de l'équipe de Longwy du CRAN, pour avoir co-encadré mes travaux de recherche et pour ses conseils judicieux et nos discussions fructueuses, ainsi que pour sa disponibilité et son soutien permanent.

Que Monsieur Mohamed DAROUACH, Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et responsable de l'équipe de Longwy du CRAN et Monsieur Philippe PIERROT, Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et Directeur de l'Institut Universitaire de Technologie Henri Poincaré de Longwy, reçoivent toute ma gratitude pour m'avoir accueilli au sein de leur équipe, pour m'avoir encouragé et aidé tout au long de mes recherches et pour m'avoir offert de très bonnes conditions de travail.

Je tiens à remercier plus particulièrement Monsieur le Professeur Michel ZASADZINSKI, et Monsieur le Maître de Conférences Harouna SOULEY-ALI, pour leurs précieux conseils et leurs soutiens à tous les instants.

Je tiens à remercier Madame Joëlle PINELLI, secrétaire de l'équipe de Longwy du CRAN et Madame Nadine PETIT l'ancienne secrétaire, pour leurs soutiens et leurs sympathies.

J'adresse un grand merci à tous les membres de l'équipe de Longwy du CRAN que j'ai eu le plaisir de côtoyer pendant la durée de ma thèse : Mohamed BOUTAYEB, Christophe FONTE, Roland MUSSET, Jean Michel CHAMBAUD, Khirdine BOUAAZA, Latifa BOUTAT-BADDAS, Yasmina BECIS, Cédric DELATTRE, Souheil HALABI, Bou-laid BOULKROUNE, Adil ALIF, Benjamin GERARD et les deux frères CISTERMINO

Luigi et Mario etc. Ils ont tous, de près ou de loin, contribué, par les nombreuses discussions que nous avons pu tenir, leur conseils ou leur bonne humeur, à l'excellent déroulement de ma thèse. Je n'oublie pas Monsieur Michel BORDET, Bahram BASSIRI, Célia COQUILLARD et Olivier DELAFONT pour leur aide en informatique.

Je remercie également l'ensemble du personnel de l'Institut Universitaire de Technologie Henri Poincaré de Longwy.

Enfin, ces remerciements ne seraient pas complets sans remercier mes parents, Ahmed TAFRAOUTI et Rabiaa TAOUTAOU et mes frères et soeurs Souaad, Zakia, Mostapha, Abdel-El-Wahabe et Rajae, qui m'ont souvent permis de franchir des obstacles en apparence insurmontables durant cette thèse.

*Je dédie cette thèse  
à mes parents,  
mes frères, mes sœurs et ma nièce.*



# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>xi</b>
--------------------------	-----------

<b>Nomenclature</b>	<b>xv</b>
---------------------	-----------

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
------------------------------	----------

<b>Chapitre 1</b>	
<b>Modélisation des systèmes électrohydrauliques</b>	<b>5</b>

1.1	Introduction . . . . .	5
1.2	Eléments de modélisation . . . . .	5
1.2.1	Principe de la conservation de la masse . . . . .	6
1.2.1.1	Compressibilité . . . . .	6
1.2.1.1.1	Module de compressibilité isotherme . . . . .	6
1.2.1.1.2	Module de compressibilité effective . . . . .	6
1.2.1.2	Principe de la conservation de la masse . . . . .	8
1.2.2	Écoulement du fluide hydraulique . . . . .	10
1.2.2.1	Viscosité . . . . .	10
1.2.2.1.1	Viscosité absolue . . . . .	10
1.2.2.1.2	Viscosité cinématique . . . . .	10
1.2.2.1.3	Variation de la viscosité avec la température . . . . .	11
1.2.2.1.4	Variation de la viscosité avec la pression . . . . .	11
1.2.2.2	Types d'écoulement à travers un orifice étroit . . . . .	12
1.2.2.3	Relation de Bernoulli . . . . .	13
1.2.2.4	Equation du débit en écoulement turbulent . . . . .	14
1.2.2.5	Equation de débit lors d'un écoulement laminaire . . . . .	15
1.2.3	Dynamique des éléments mobiles . . . . .	15
1.2.3.1	Bilan des forces . . . . .	15



1.2.3.2	Partie mécanique . . . . .	17
1.3	Pré-actionneurs électrohydrauliques . . . . .	18
1.3.1	Distributeur proportionnel . . . . .	19
1.3.2	Servodistributeur . . . . .	19
1.3.3	Servovalve . . . . .	19
1.3.4	Caractéristiques statiques d'un distributeur . . . . .	20
1.3.4.1	Types de centre . . . . .	20
1.3.4.1.1	Centre à recouvrement positif . . . . .	21
1.3.4.1.2	Centre critique ou à recouvrement nul . . . . .	21
1.3.4.1.3	Centre à recouvrement négatif ou centre à décou- vrement . . . . .	22
1.3.4.2	Gain en pression . . . . .	22
1.3.4.3	Débit de fuites internes . . . . .	23
1.3.4.4	Débit nominal d'un distributeur . . . . .	23
1.3.4.5	Equation du débit d'un distributeur . . . . .	24
1.3.5	Caractéristiques dynamiques d'un distributeur . . . . .	26
1.3.5.1	Servovalves mono-étage . . . . .	26
1.3.5.2	Dynamique des distributeurs à deux étages . . . . .	27
1.3.5.3	Servovalves à trois étages . . . . .	28
1.3.5.4	Partie dynamique de la servovalve . . . . .	29
1.4	Modélisation des actionneurs hydrauliques . . . . .	30
1.4.1	Vérin linéaire à double effet . . . . .	31
1.4.1.1	Vérin asymétrique . . . . .	31
1.4.1.2	Vérin symétrique . . . . .	33
1.5	Modélisation d'un servovérin . . . . .	33
1.5.1	Partie mécanique . . . . .	33
1.5.2	Système avec deux distributeurs . . . . .	34
1.5.3	Cas d'un seul distributeur . . . . .	35
1.5.4	Modélisation par prise en compte de la pression différentielle . . . . .	35
1.5.4.1	Cas particulier . . . . .	38
1.6	Un modèle global . . . . .	40
1.7	Conclusion . . . . .	41

---

**Chapitre 2****Commande par approche linéaire****43**

2.1	Introduction . . . . .	43
2.2	Points d'équilibre . . . . .	45
2.2.1	Modèles avec la dynamique des pressions $P_1, P_2$ . . . . .	45
2.2.2	Modèle incluant la dynamique de la pression différentielle $P_L$ . . . . .	49
2.2.3	Conclusion . . . . .	51
2.3	Modèles linéarisés tangents . . . . .	52
2.3.1	Modèles d'état . . . . .	53
2.3.1.1	Système commandé par un seul distributeur . . . . .	53
2.3.1.1.1	Modèle ne tenant pas compte la dynamique du distributeur . . . . .	54
2.3.1.1.2	Cas particulier . . . . .	55
2.3.1.1.3	Modèle complet . . . . .	55
2.3.1.2	Système commandé par deux distributeurs . . . . .	56
2.3.1.2.1	Modèle sans prise en compte de la dynamique des distributeurs . . . . .	57
2.3.1.2.2	Cas particulier . . . . .	58
2.3.1.2.3	Modèle complet . . . . .	58
2.3.2	Fonctions de transfert en boucle ouverte . . . . .	59
2.3.2.1	Système commandé par un seul distributeur . . . . .	59
2.3.2.1.1	Modèle réduit . . . . .	59
2.3.2.1.2	Modèle complet . . . . .	60
2.3.2.2	Système commandé par deux distributeurs . . . . .	61
2.3.2.2.1	Modèle sans les dynamiques des distributeurs . . . . .	61
2.3.2.2.2	Modèle complet . . . . .	62
2.4	Analyse du modèle linéarisé tangent dans l'espace d'état . . . . .	63
2.4.1	Système commandé par un seul distributeur . . . . .	64
2.4.1.1	Modèle réduit . . . . .	64
2.4.1.1.1	Stabilisabilité . . . . .	65
2.4.1.1.2	DéTECTABILITÉ . . . . .	66
2.4.1.1.3	Stabilisabilité et détectabilité du cas particulier . . . . .	66
2.4.1.2	Modèle complet . . . . .	67
2.4.1.3	Conclusion . . . . .	68

2.4.2	Système commandé par deux distributeurs . . . . .	68
2.4.2.1	Modèle sans la dynamique du distributeur . . . . .	68
2.4.2.1.1	Stabilisabilité . . . . .	69
2.4.2.1.2	Déteçtabilité . . . . .	69
2.4.2.1.3	Stabilisabilité et déteçtabilité du cas particulier . . . . .	70
2.4.2.2	Modèle complet . . . . .	70
2.4.2.3	Conclusion . . . . .	71
2.5	Commande linéaire par retour de sortie . . . . .	71
2.5.1	Correcteur proportionnel $K_p$ . . . . .	73
2.5.2	Amélioration de la précision et de l'amortissement par un correcteur PI ou PID . . . . .	74
2.5.3	Solutions technologiques pour améliorer l'amortissement . . . . .	77
2.5.3.1	Amélioration de l'amortissement par fuites internes . . . . .	77
2.5.3.1.1	Fuites inter-chambres . . . . .	77
2.5.3.1.2	Fuites du distributeur . . . . .	78
2.5.3.2	Amélioration de l'amortissement par frottements . . . . .	78
2.5.4	Amélioration de l'amortissement par une boucle de rétroaction se- condaire . . . . .	78
2.5.4.1	Rétroaction de la vitesse . . . . .	78
2.5.4.2	Rétroaction de la pression différentielle ou de l'accélération . . . . .	82
2.6	Commande linéaire par retour d'état . . . . .	87
2.6.1	Commande par placement de pôles . . . . .	87
2.6.2	Commande optimale . . . . .	91
2.6.3	Commande proportionnelle intégrale par retour d'état . . . . .	93
2.7	Conclusion . . . . .	96

<b>Chapitre 3</b>
-------------------

<b>Commande par approche non linéaire</b>	<b>97</b>
---	-----------

3.1	Introduction . . . . .	97
3.2	Vérin commandé à travers deux distributeurs . . . . .	99
3.2.1	Introduction . . . . .	99
3.2.2	Commande du modèle réduit . . . . .	99
3.2.2.1	Méthode de stabilisation . . . . .	100
3.2.2.2	Synthèse de la commande . . . . .	101
3.2.3	Stabilisation du modèle global . . . . .	105

---

3.2.3.1	Méthode de stabilisation . . . . .	105
3.2.3.2	Synthèse de la commande . . . . .	108
3.2.4	Résultats de simulation . . . . .	110
3.3	Système électrohydraulique avec un seul distributeur . . . . .	114
3.3.1	Introduction . . . . .	114
3.3.2	Commande du modèle réduit . . . . .	114
3.3.2.1	Fonction de Lyapunov pour le modèle réduit . . . . .	115
3.3.2.2	Synthèse de la loi de commande . . . . .	117
3.3.3	Stabilisation du modèle global . . . . .	120
3.3.4	Résultats de simulation . . . . .	121
3.4	Conclusion . . . . .	122

<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>125</b>
--	------------

<b>Annexe A</b>	
<b>Feedback Control of an Electropneumatic System</b>	<b>127</b>

<b>Bibliographie</b>	<b>137</b>
----------------------	------------



# Table des figures

1.1	Volume de contrôle rempli d'un mélange gaz-huile sous pression. . . . .	7
1.2	Influence de l'air sur le module de compressibilité effective $\beta_e$ . . . . .	8
1.3	Volume de contrôle. . . . .	9
1.4	Schéma de principe de la viscosité. . . . .	10
1.5	Variation de la viscosité cinématique $\nu$ en fonction de la température. . . .	11
1.6	Variation de la viscosité cinématique $\nu$ en fonction de la pression. . . . .	12
1.7	Ecoulement d'un fluide à travers un orifice. . . . .	13
1.8	L'écoulement d'un fluide le long d'un tube de courant. . . . .	14
1.9	L'écoulement d'un fluide à travers un orifice étroit. . . . .	14
1.10	Bilan des forces du sous système (Masse-tige-piston). . . . .	15
1.11	Force due aux frottements secs (Modèle de Coulomb). . . . .	17
1.12	Servoventiles à deux étages. . . . .	18
1.13	Schéma de principe d'un pré-actionneur hydraulique. . . . .	20
1.14	Symbole d'un distributeur proportionnel à 4 orifices et 3 positions. . . . .	20
1.15	recouvrement positif (centre fermé). . . . .	21
1.16	recouvrement nul (centre critique). . . . .	21
1.17	Découvrement ou recouvrement négatif (Centre ouvert). . . . .	22
1.18	Schéma de principe pour mesurer le gain en pression et le débit de fuite. . .	22
1.19	La pression différentielle $P_1 - P_2$ en fonction du signal de commande. . . .	23
1.20	Le débit de fuite en fonction du signal de commande. . . . .	24
1.21	Représentation des deux fonctions $\varphi^+$ et $\varphi^-$ . . . . .	25
1.22	Principe de fonctionnement du tiroir d'un distributeur proportionnel 4/3. . .	25
1.23	Servoventile à mono-étage [Mer67]. . . . .	26
1.24	Schéma de principe d'une servoventile à mono-étage. . . . .	27
1.25	Schéma de principe d'un distributeur à deux étages avec rétroaction de position. . . . .	27
1.26	Schéma de principe d'une servoventile à deux étages avec retour de position (présence d'un ressort). . . . .	28
1.27	Schéma de principe d'une servoventile à trois étages. . . . .	28
1.28	Servoventile à trois étages. . . . .	29
1.29	Vérins linéaires. . . . .	30
1.30	Vérins rotatifs. . . . .	31
1.31	Vérin asymétrique à double effet considéré. . . . .	31
1.32	Système électrohydraulique avec deux servoventiles. . . . .	34
1.33	Vérin asymétrique commandé par une seule servoventile. . . . .	36

1.34	Les fonctions $\varphi^+$ et $\varphi^-$ pour $\alpha = 1$ . . . . .	39
1.35	Vérin symétrique actionné par une seule servovalve. . . . .	39
2.1	Schéma de principe : régulation de position du vérin. . . . .	73
2.2	Schéma fonctionnel : régulation de position du vérin. . . . .	73
2.3	Diagrammes de Bode. . . . .	75
2.4	Position $y$ du système linéaire. . . . .	76
2.5	Système non linéaire avec une position finale $y_f = 0.005$ m. . . . .	76
2.6	Réponse du système non linéaire un déplacement de 5 cm : méthode de Ziegler-Nichols . . . . .	77
2.7	Boucle fermée avec le retour de la vitesse. . . . .	79
2.8	Diagrammes de Bode du modèle nominal $G_v(s)$ et du correcteur $C_v(s)$ . . . . .	80
2.9	Réponses indicielles de la vitesse avant et après correction du modèle linéarisé tangent. . . . .	81
2.10	Diagrammes de Bode de la boucle externe. . . . .	81
2.11	Variables d'état du système non linéaire avec une rétroaction de la vitesse, pour les déplacements $y_f - y_i = 0.02$ m et $y_f - y_i = 0.16$ m. . . . .	82
2.12	Réponse indicielle du système linéaire corrigé par une rétroaction de la vitesse. . . . .	82
2.13	Boucle fermée avec le retour de la pression différentielle. . . . .	83
2.14	Diagrammes de Bode du modèle nominal $G_{\Delta P}(s)$ et du correcteur $C_{\Delta P}(s)$ . . . . .	84
2.15	Réponses indicielles de la pression différentielle avant et après la correction. . . . .	85
2.16	Diagrammes de Bode de la boucle externe. . . . .	85
2.17	Variables d'état du système non linéaire avec une rétroaction de la pression différentielle, pour les déplacements $y_f - y_i = 0.02$ m et $y_f - y_i = 0.16$ m. . . . .	86
2.18	Réponse indicielle du système linéaire corrigé par une rétroaction de la pression différentielle. . . . .	86
2.19	Commande par retour d'état. . . . .	87
2.20	Commande par placement de pôles. . . . .	88
2.21	Variables d'état du système non linéaire avec la commande par placement de pôles, pour les déplacements $y_f - y_i = 0.02$ m et $y_f - y_i = 0.12$ m. . . . .	89
2.22	Réponse indicielle du système linéaire avec la commande par placement de pôles. . . . .	89
2.23	Réponse indicielle du système linéaire avec la commande par placement de pôles. . . . .	90
2.24	Variables d'état du système non linéaire avec la commande par placement de pôles, pour les déplacements $y_f - y_i = 0.02$ m et $y_f - y_i = 0.12$ m. . . . .	91
2.25	Réponse indicielle du système linéaire avec la commande optimale. . . . .	92
2.26	Variables d'état du système non linéaire avec la commande optimale, pour les déplacements $y_f - y_i = 0.02$ m et $y_f - y_i = 0.12$ m. . . . .	92
2.27	Commande proportionnelle intégrale par retour d'état. . . . .	93
2.28	Variables d'état du système non linéaire avec la commande proportionnelle intégrale par retour d'état, pour les déplacements $y_f - y_i = 0.02$ m et $y_f - y_i = 0.12$ m. . . . .	95

---

2.29 Réponse indicielle du système linéaire avec la commande proportionnelle intégrale par retour d'état. . . . .	95
3.1 Schéma de simulations. . . . .	111
3.2 Simulation 1. . . . .	112
3.3 Simulation 2. . . . .	113
3.4 Simulation 3. . . . .	113
3.5 Représentation de la fonction $\bar{h}_C(y)$ . . . . .	119
3.6 Simulation 4. . . . .	123
3.7 Simulation 5. . . . .	123





# Nomenclature

## Paramètres du système

Paramètre	Définition	Unité
$b_v$	Coefficient de frottement visqueux	$\text{kg s}^{-1}$
$C_d$	Coefficient de décharge	
$F_0$	Force résistante	N
$k_{cy}, k_{cv}$	Gain des capteurs de la position et de la vitesse	
$k_d$	Constante positive caractérisant le distributeur	
$K_d$	Gain statique du distributeur	
$K_p, k_{i=1,3}$	Gains des différents correcteurs	
$K_s$	Gain statique du vérin	
$l_0$	Course du vérin	m
$M$	Masse entraînée	kg
$P_1, P_2$	Les pressions dans les chambres 1 et 2	Pa
$P_L$	Pression différentielle : $P_L = \alpha P_1 - P_2$	Pa
$P_r$	Pression de retour	Pa
$P_s$	Pression source	Pa
$P_{st}$	Pression statique	Pa
$\Delta P_{ef}$	Perte de charge effective	Pa
$\Delta P_n$	Perte de charge nominale	Pa
$Q_{ef}$	Débit effectif pour la perte de charge $\Delta P_{ef}$	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
$Q_{fe}$	Débit volumique des fuites externes	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
$Q_{fi}$	Débit volumique des fuites inter-chambres	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
$Q_n$	Débit nominal	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
$Re$	Nombre de Reynolds	
$Re_c$	Nombre de Reynolds critique	
$S_1, S_2$	Les sections utiles du piston avec $S_1 \geq S_2$	$\text{m}^2$
$S$	Section utile du piston lorsque $S_1 = S_2$	$\text{m}^2$
$s$	Variable de Laplace	
$T$	Température	$\text{K}^\circ$
$v$	Vitesse du piston	$\text{m s}^{-1}$
$v_f$	Vitesse du fluide	$\text{m s}^{-1}$
$V_0$	Demi-volume du vérin	$\text{m}^3$
$V_m$	Volume mort	$\text{m}^3$
$\omega_0$	pulsation propre du vérin	$\text{rd s}^{-1}$

## Nomenclature

---

$\omega_d$	pulsation propre de la servovalve	$\text{rd s}^{-1}$
$x_d$	Déplacement du tiroir	m
$y$	Position du piston	m
$z^0$	Valeur à l'équilibre de la variable $z$	
$\alpha = \frac{S_1}{S_2}$	Le rapport des sections utiles ( $\leq 1$ )	
$\beta_e$	Module de compressibilité effective	Pa
$\beta$	Module de compressibilité isotherme de l'huile	Pa
$\lambda_{fe}$	Coefficient de fuite externe du vérin	$\text{m}^3\text{s}^{-1}\text{Pa}^{-1}$
$\lambda_{fi}$	Coefficient de fuite inter-chambres	$\text{m}^3\text{s}^{-1}\text{Pa}^{-1}$
$\mu$	Viscosité absolue	$\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1} = \text{poiseuille (Pl)}$
$\mu_a$	Viscosité absolue à la pression atmosphérique	Pl
$\nu$	Viscosité cinématique du fluide	$\text{m}^2\text{s}^{-1} = 10^4 \text{ stoks}$
$\rho$	Masse volumique de l'huile	$\text{kg m}^{-3}$
$\tau_d$	Constantes de temps du distributeur	s
$\xi$	Coefficient d'amortissement du vérin	
$\zeta_d$	Facteur d'amortissement de la servovalve	

# Introduction générale

Le terme "électrohydraulique" désigne l'ensemble des activités (modélisation, conception, simulation, commande, ...) relatives aux composants et processus utilisant un fluide sous pression, à savoir de l'huile hydraulique ou de l'eau-glycol, comme support et élément de transmission de l'énergie et dont la commande est assurée par des composants et grandeurs électriques. Ce domaine repose sur la synergie de disciplines telles que l'automatique, l'électrotechnique, la mécanique des fluides et la mécanique du solide. L'intérêt de cette technologie est résumé dans ces quelques points forts :

- la possibilité de développer des efforts importants ;
- la mobilisation rapide d'une forte puissance ;
- une puissance massique élevée ;
- une grande plage d'utilisation pour un même actionneur.

De nombreuses industries sont concernées par ce domaine, notamment dans les applications nécessitant un contrôle précis de grandeurs mécaniques (position, vitesse, force) et/ou mettant en jeu des efforts ou couples importants. Les industries qui utilisent un fluide sous pression comme vecteur d'énergie ou pour produire un mouvement sont nombreuses et les applications sont très variées, aussi bien dans les moyens de production que dans les produits finis. Sans être exhaustif, on peut notamment citer les secteurs d'activités suivants : les industries de transformation (presses à injection, ...), la sidérurgie et la métallurgie (presses, laminoirs, ...), le génie civil (tracteurs, engins de terrassement, élévateurs, ...), l'industrie automobile (freins, suspensions actives, direction), l'aéronautique (commande de gouvernes et d'ailerons, commande électrohydraulique de trains d'atterrissage, simulateurs de vol,...), les industries mécaniques (machines outils, robots et équipements de manutention automatique, ...), les industries pétrolières (équipements de forage et d'inspection sous-marine, ...) etc. En outre, avec l'intégration des calculateurs numériques et des capteurs dans les corps des actionneurs, il est devenu possible d'appliquer des méthodes modernes de commande pour améliorer les performances dynamiques et la précision des asservissements.

Les modèles de connaissance des actionneurs électrohydrauliques, obtenus en utilisant les lois fondamentales de la mécanique et de la mécanique des fluides sont des équations différentielles fortement non linéaires et non réguliers. Les approches les plus utilisées pour commander ces actionneurs sont donc basées sur le modèle linéarisé tangent, c'est-à-dire une approximation au premier ordre autour d'un point de fonctionnement, du modèle non linéaire. Ces stratégies concernent l'asservissement de position, de vi-

tesse (pour les moteurs hydrauliques), de force ou de couple. On peut citer par exemple la commande par un correcteur PID [And88, JL92, HW95, Mer67], la commande  $H_\infty$  [LMC96, LM95, Mus01, RQ99], la commande prédictive [KCL94, WSZ98], la commande crone ou encore la commande floue [ZV95, Det99] ainsi que la commande par réseaux de neurones [PV96, DBM01]. La synthèse de ces correcteurs est basée sur le modèle linéaire calculé au voisinage d'un point de fonctionnement. Les résultats obtenus par ces approches ont un caractère local.

Les approches non linéaires ont été également utilisées pour la stabilisation des actionneurs hydrauliques. On peut citer par exemple la commande de type Jurdjevic-Quinn [RO95], la stabilisation par la passivité [MR01], la commande linéarisante [HPL94, KT00, VD95] ou la commande dite "backstepping" [LT02, UP02]. Notons que les approches non linéaires citées ci-dessus ne prennent pas en compte la dynamique des distributeurs.

La technologie des systèmes électrohydrauliques a connu un essor important depuis l'apparition de nouveaux composants comme les distributeurs proportionnels ou les servodistributeurs. Ces composants, suffisamment précis pour être utilisés en boucle fermée, sont moins rapides et aussi moins onéreux que les servovalves. Il nous a semblé donc intéressant d'étudier des lois de commande prenant en compte la dynamique des pré-actionneurs (servovalves, servodistributeurs, distributeurs proportionnels). Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéressons à la stabilisation d'un processus électrohydraulique décrit par des modèles non linéaires fondés sur une approximation de la dynamique de distributeur par une équation différentielle du premier ordre. Ces modèles peuvent être donnés sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, x_d) \\ \dot{x}_d &= u_d \end{cases} \quad (1)$$

où  $x$  désigne l'état de l'actionneur,  $x_d$  celui du ou des distributeurs et  $u_d$  est la commande.

Le résultat présenté dans [OA99] propose une loi de commande pour stabiliser le système (1) lorsque  $f$  est seulement continue. Ce résultat est fondé sur l'hypothèse que  $\dot{x} = f(x, 0)$  est asymptotiquement stable. Suite à une amélioration de ce résultat, nous allons appliquer ce nouveau résultat à la stabilisation des systèmes électrohydrauliques.

Le présent mémoire est articulé autour de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la modélisation des systèmes électrohydrauliques considérés. Dans ce chapitre, nous présentons les outils, issus de la mécanique classique et de la mécanique des fluides, nécessaires pour la modélisation de la partie hydraulique et la partie mécanique de l'ensemble vérin-charge. Une partie de ce chapitre est dédiée à l'étude des distributeurs et des servovalves et à la modélisation de leurs parties statique et dynamique.

Les modèles obtenus sont représentés par les dynamiques des pressions dans les deux chambres et les équations de mouvement du piston et de la charge lorsque le vérin est actionné par deux distributeurs. Dans le cas où un seul distributeur est utilisé, les deux

---

dynamiques des pressions sont remplacées par la dynamique de la pression différentielle. Le comportement des distributeurs est approximé par une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'ensemble d'équilibre, à l'analyse des modèles linéaires obtenus par approximation au premier ordre (au voisinage d'un point d'équilibre) et à la synthèse de lois de commande linéaires. L'analyse de la stabilisabilité et de la détectabilité locale est effectuée pour les différents modèles. Nous y abordons dans un premier temps la commande par rétroaction de la position en utilisant des correcteurs de type PID. Nous passons ensuite en revue les différentes façons pour améliorer l'amortissement du système soit en introduisant des éléments dissipatifs comme les fuites par exemple, soit en introduisant des boucles de rétroactions secondaires (rétroaction de la pression différentielle, de l'accélération ou de la vitesse). La dernière partie de ce chapitre concerne la synthèse de correcteur par retour d'état statique. Les stratégies proposées sont la commande par placement de pôles, la commande optimale et la commande proportionnelle intégrale par retour d'état. Les différentes lois de commande sont simulées sur le modèle non linéaire pour différentes consignes et ne tiennent pas compte de la dynamique du distributeur.

Le troisième chapitre sera dédié à la commande non linéaire. Dans un premier temps, nous présentons un résultat théorique sur la stabilisation des systèmes non linéaires par ajout d'intégrateur. Puis, nous appliquons ce résultat à la stabilisation des systèmes électrohydrauliques. Plus précisément, nous considérons deux types de modèle. Le premier type décrit le comportement d'un vérin commandé à travers deux distributeurs. Dans ce cas il s'agira de contrôler le piston ainsi que les pressions dans chacune des deux chambres. Le deuxième type est celui décrivant la dynamique de la pression différentielle est où le vérin est commandé par un seul distributeur. Dans les deux cas, la dynamique des distributeurs sera prise en compte et la stratégie de commande sera effectuée en deux étapes. Dans un premier temps, nous proposons une loi de commande pour le modèle ne tenant pas compte de la dynamique des distributeurs. Puis, en utilisant le résultat sur l'ajout d'intégrateur, nous déduisons un retour d'état stabilisant le système complet.

Finalement, des conclusions et perspectives à ce travail seront présentées dans la dernière partie du mémoire.



# Chapitre 1

## Modélisation des systèmes électrohydrauliques

### 1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la modélisation des actionneurs électrohydrauliques et plus précisément à la modélisation des servovérins simple ou double tige, double effets et des pré-actionneurs associés (distributeurs proportionnels, servodistributeurs, servovalves). L'approche que nous avons adoptée pour la modélisation consiste à utiliser les notions fondamentales de la mécanique classique et de la mécanique des fluides pour décrire le comportement dynamique du processus. Dans la première partie de ce chapitre, nous rappelons les lois fondamentales nécessaires à la modélisation des actionneurs électrohydrauliques et les propriétés des fluides hydrauliques usuels. La deuxième partie est dédiée à la classification et aux descriptions technologiques des pré-actionneurs utilisés en boucle fermée. Dans les deux parties suivantes, nous déduisons les modèles de connaissance utilisés pour l'asservissement de position lorsque le vérin est commandé par un ou deux distributeurs. Les modèles obtenus sont des équations différentielles non linéaires et décrivent d'une part l'évolution de la pression dans chaque chambre du vérin et, d'autre part, les équations de mouvement de l'ensemble charge et vérin. Nous proposons également un modèle de dimension réduite qui tient compte de la dynamique de la pression différentielle. Une conclusion clôturera ce chapitre.

### 1.2 Eléments de modélisation

Dans cette partie, les outils de modélisation que nous allons utiliser concernent principalement les deux parties du système électrohydraulique à savoir la partie hydraulique et la partie mécanique. Pour modéliser la partie constituée du vérin et de la servovalve, nous rappellerons deux éléments de la mécanique des fluides : le principe de la conservation de la masse et la relation de Bernoulli, puis nous donnerons les équations des débits à travers un orifice étroit. Concernant la modélisation de la partie mécanique nous rappellerons brièvement la loi fondamentale de la dynamique.



## 1.2.1 Principe de la conservation de la masse

Avant de donner le principe de la conservation de la masse, nous allons introduire la notion de compressibilité des huiles hydrauliques et définir les deux modules de compressibilité, à savoir la compressibilité isotherme et la compressibilité effective.

### 1.2.1.1 Compressibilité

La compressibilité représente l'aptitude du fluide à subir des variations de volume ou de masse lorsque lui sont imposées des variations de pression.

**1.2.1.1.1 Module de compressibilité isotherme** Les fluides utilisés en hydraulique sont considérés comme des liquides incompressibles, alors qu'en réalité, ils sont légèrement compressibles. Leur compressibilité est caractérisée par le paramètre  $\beta$  appelé module de compressibilité. Considérons un échantillon d'huile de volume initial  $V_0$  à une température constante  $T$ . Une variation de pression  $\partial P$  entraîne une variation de volume  $\partial V$ . Le module de compressibilité isotherme  $\beta$  est donné par [BRS66, Fai99, Mer67]

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = -V_0 \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \\ \beta = \rho_0 \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \end{array} \right. \quad (1.1 \text{ a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = -V_0 \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \\ \beta = \rho_0 \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \end{array} \right. \quad (1.1 \text{ b})$$

**Remarque 1.1.** *Le coefficient de compressibilité isotherme est défini comme étant l'inverse du module de compressibilité isotherme.* ■

**Remarque 1.2.** *Le signe négatif dans l'équation (1.1 a) indique que le volume diminue lorsque la pression augmente.* ■

**1.2.1.1.2 Module de compressibilité effective** Pour tenir compte des effets de l'air entraîné et dissous dans l'huile et de l'élasticité des enveloppes, nous devons définir le module de compressibilité effective  $\beta_e$  [MM80, Mer67].

Considérons un volume de contrôle  $V_t$ , initialement à la pression  $P$ , contenant un volume de gaz  $V_g$  dissous dans un volume d'huile  $V_h$  (voir FIG.1.1), soit

$$V_t = V_h + V_g \quad (1.2)$$

Le déplacement du piston vers la gauche entraîne une augmentation de la pression  $\Delta P$  et une variation du volume  $\Delta V_t$ , à savoir une diminution du volume d'huile  $-\Delta V_h$  et du volume de gaz  $-\Delta V_g$  et une augmentation du volume de l'enveloppe  $\Delta V_c$ , soit

$$\Delta V_t = -\Delta V_h - \Delta V_g + \Delta V_c \quad (1.3)$$

Le module de compressibilité effective  $\beta_e$  est alors défini par :

$$\frac{1}{\beta_e} = \frac{1}{V_t} \frac{\Delta V_t}{\Delta P} \quad (1.4)$$

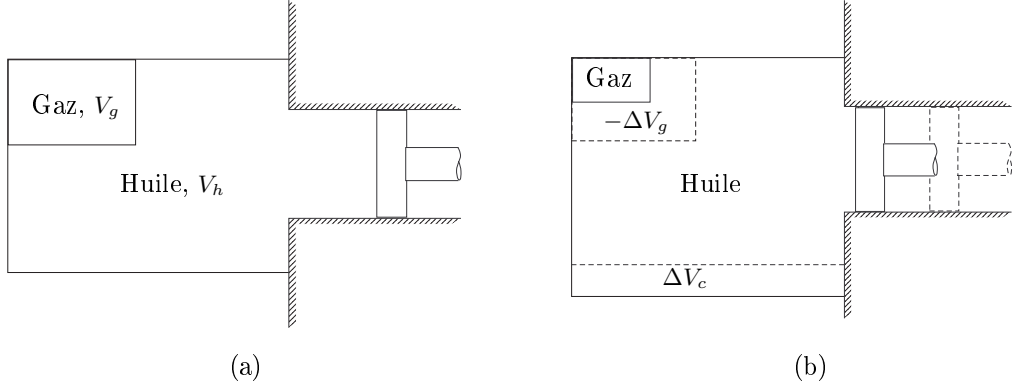


FIG. 1.1: Volume de contrôle rempli d'un mélange gaz-huile sous pression.

A partir des équations (1.2), (1.3) et (1.4), on déduit :

$$\frac{1}{\beta_e} = \frac{V_g}{V_t} \left( -\frac{1}{V_g} \frac{\Delta V_g}{\Delta P} \right) + \frac{V_h}{V_t} \left( -\frac{1}{V_h} \frac{\Delta V_h}{\Delta P} \right) + \left( \frac{1}{V_g} \frac{\Delta V_c}{\Delta P} \right) \quad (1.5)$$

En remplaçant les modules de compressibilité de l'huile, du gaz et de l'enveloppe donnés respectivement par :

$$\beta = -V_h \frac{\Delta P}{\Delta V_h}, \quad (1.6)$$

$$\beta_g = -V_g \frac{\Delta P}{\Delta V_g} \quad (1.7)$$

et

$$\beta_c = V_t \frac{\Delta P}{\Delta V_c} \quad (1.8)$$

dans (1.5) nous obtenons :

$$\frac{1}{\beta_e} = \frac{1}{\beta_g} \frac{V_g}{V_t} + \frac{1}{\beta} \frac{V_h}{V_t} + \frac{1}{\beta_c}. \quad (1.9)$$

Cette dernière relation est une équation générale qui donne le module de compressibilité d'un mélange gaz-huile dans un volume de contrôle. A partir de (1.2) et (1.9) on obtient :

$$\frac{1}{\beta_e} = \frac{V_g}{V_t} \left( \frac{1}{\beta_g} - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta_c}. \quad (1.10)$$

En utilisant une simple approximation, justifiée par le fait que  $\beta \gg \beta_g$ , nous aboutissons à une expression plus simple du module de compressibilité donnée par [Mer67] :

$$\frac{1}{\beta_e} = \frac{V_g}{V_t} \frac{1}{\beta_g} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta_c}. \quad (1.11)$$

A titre d'exemple [Fai70, Gui92], et pour une installation hydraulique classique, les valeurs du module de compressibilité de l'huile sont voisines de  $1,5 \cdot 10^9$  Pa.

Le graphe présenté par la figure (FIG.1.2) ci-dessous [JK03, Wat89], montre l'influence de l'air sur le module de compressibilité effective  $\beta_e$  dans le cas isotherme.  $\alpha$  est une constante égale à  $\frac{V_g}{V_t}$  et  $\beta$  est le module de compressibilité isotherme de l'huile sans tenir compte des effets de gaz dissous ni des effets de déformation de l'enveloppe.

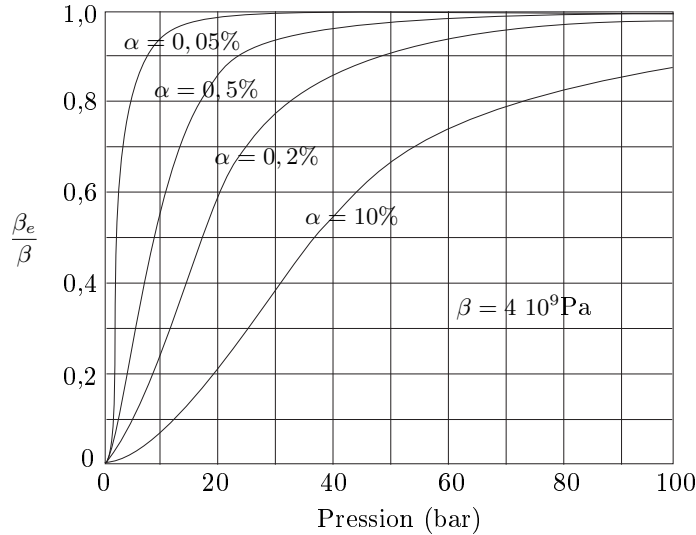


FIG. 1.2: Influence de l'air sur le module de compressibilité effective  $\beta_e$ .

**Remarque 1.3.** On peut remarquer que pour les valeurs basses de la pression, lorsque des bulles d'air sont dissoutes dans l'huile, le module de compressibilité se réduit d'une façon significative et entraîne un problème de cavitation [BRS66, MM80]. ■

**Remarque 1.4.** Le module de compressibilité  $\beta_e$  influence la dynamique du système hydraulique. ■

### 1.2.1.2 Principe de la conservation de la masse

L'équation exprimant la conservation de la masse est déduite à partir du bilan de masse. Considérons un volume de contrôle  $V$  rempli d'une huile de masse volumique  $\rho$  sous la pression  $P$  à une température  $T$  (voir FIG.1.3). La variation de la masse contenue dans le volume  $V$  est égale à la somme algébrique des débits massiques entrants  $\Sigma Q_e$  et des débits massiques sortants  $\Sigma Q_s$ . L'équation de bilan de masse s'écrit :

$$\rho \Sigma Q_e - \rho \Sigma Q_s = \frac{dm}{dt} \quad (1.12)$$

avec  $m = \rho V$ . En supposant que la masse volumique de l'huile n'est pas constante on obtient :

$$\Sigma Q_e - \Sigma Q_s = \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (1.13)$$

où

$\Sigma Q_e - \Sigma Q_s$  : exprime le débit de transfert ;

$\frac{dV}{dt}$  : présente le débit de déformation ou le débit utile ;

$\frac{V}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$  : exprime le débit de compressibilité. Il s'agit de la variation du volume du système due à la compressibilité du mélange gaz-huile et à la déformation des parois du volume.

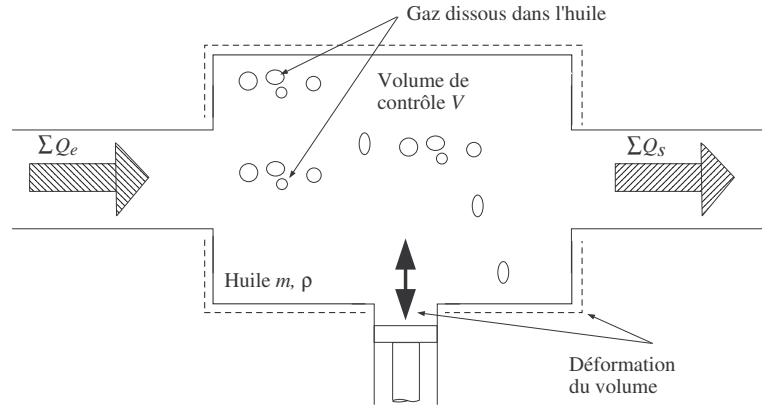


FIG. 1.3: Volume de contrôle.

En considérant que la température reste constante, l'expression de la masse volumique  $\rho$  [BRS66, Gui92, Mer67], peut être écrite sous la forme :

$$\rho = \rho^0 \left( 1 + \frac{P - P^0}{\beta} \right) \quad (1.14)$$

où  $\rho^0$  et  $P^0$  sont respectivement les valeurs de la masse volumique et la pression à l'état initial, et  $\beta$  est le module de compressibilité de l'huile.

A partir de la relation (1.14) ou de la définition de la compressibilité donnée par (1.1 b) nous obtenons l'égalité suivante [BRS66, Gui92, Mer67] :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\beta} \frac{dP}{dt} \quad (1.15)$$

Pour tenir compte des phénomènes de déformation des enveloppes (volume de contrôle) et de la quantité d'air dissous dans l'huile, on remplace le module de compressibilité isotherme de l'huile  $\beta$  par le module de compressibilité effective  $\beta_e$ . D'après l'expression (1.13) il vient alors :

$$\Sigma Q_e - \Sigma Q_s = \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\beta_e} \frac{dP}{dt} \quad (1.16)$$

Cette expression va nous servir pour modéliser la dynamique des pressions correspondant à l'actionneur utilisé, c'est-à-dire au vérin. Pour modéliser la partie mécanique du vérin nous utiliserons la loi fondamentale de la dynamique.

## 1.2.2 Écoulement du fluide hydraulique

### 1.2.2.1 Viscosité

La viscosité est une des propriétés physiques d'un fluide ; elle exprime la résistance et la durée de l'écoulement de celui-ci. Cette propriété est due essentiellement aux interactions entre les molécules du fluide. Nous verrons dans la suite que cette propriété va conditionner le type d'écoulement du fluide et donc les propriétés des modèles utilisés.

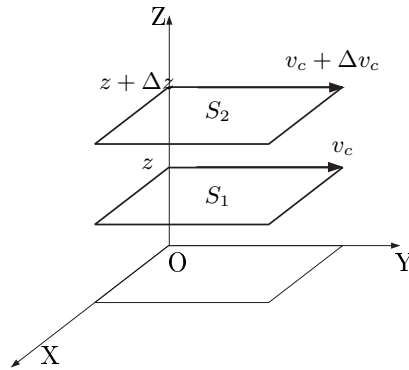


FIG. 1.4: Schéma de principe de la viscosité.

**1.2.2.1.1 Viscosité absolue** Considérons un écoulement fluide de type laminaire, c'est-à-dire des couches de fluide qui se déplacent parallèlement à un plan fixe, sans être mélangées. Supposons que la vitesse  $v_c$  d'une couche est une fonction de sa position horizontale  $z$  (FIG.1.4). Le frottement qui s'exerce à la surface de séparation de deux couches est donné par la loi de Newton [Fai70] :

$$F = \mu S \frac{dv_c}{dz} \quad (1.17)$$

où

- $\mu$  : la viscosité absolue exprimée en poiseuille (Pl) ;
- $S$  : la surface d'une couche ;
- $\frac{dv_c}{dz}$  : le gradient de vitesse.

En hydraulique, le paramètre de la viscosité le plus utilisé est la viscosité cinématique, elle est fonction de la viscosité absolue et de la masse volumique du fluide.

**1.2.2.1.2 Viscosité cinématique** La viscosité cinématique  $\nu$  est définie par le rapport de la viscosité absolue  $\mu$  et la masse volumique  $\rho$  :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.18)$$

Cette propriété traduit l'existence de frottements des molécules du liquide en mouvement et elle exprime la faculté d'un fluide de résister aux déformations. Elle dépend essentiellement de la température et de la pression. Elle est utilisée pour calculer le nombre de Reynolds et donc pour déterminer le type d'écoulement.

**1.2.2.1.3 Variation de la viscosité avec la température** La viscosité cinématique dépend fortement de la température. Il est donc nécessaire que la valeur de la viscosité soit donnée pour une température précise. L'équation qui lie la température et la viscosité cinématique est donnée par la relation de Mac Coull et Walther [BRS66, Fai70, Fai99, Mus01] :

$$\log(\log(\nu + a_1)) = a_2 \log T + a_3 \quad (1.19)$$

où

- $\nu$  : est la viscosité cinématique [cSt] ;
- $T$  : est la température absolue [K°] ;
- $a_1$  : est une constante (en général égale à 0.8) ;
- $a_2$  et  $a_3$  : sont des constantes caractéristiques de l'huile.

En utilisant en ordonnées  $y = \log(\log \nu)$  et en abscisses  $x = \log T$ , on représente d'une façon commode, sur le diagramme A.S.T.M. (American Society for Testing and Materials), la variation de la viscosité cinématique en fonction de la température (FIG.1.5).

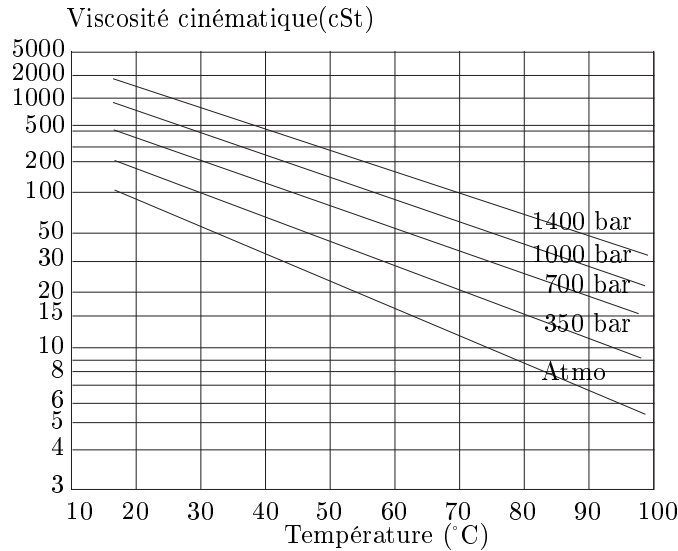


FIG. 1.5: Variation de la viscosité cinématique  $\nu$  en fonction de la température.

**1.2.2.1.4 Variation de la viscosité avec la pression** Pour une température constante, la viscosité augmente avec la pression suivant une loi exponentielle appelée loi de Barus [Fai70, Fai99, Mus01] :

$$\mu = \mu^a \exp(C_{\mu p} P) \quad (1.20)$$

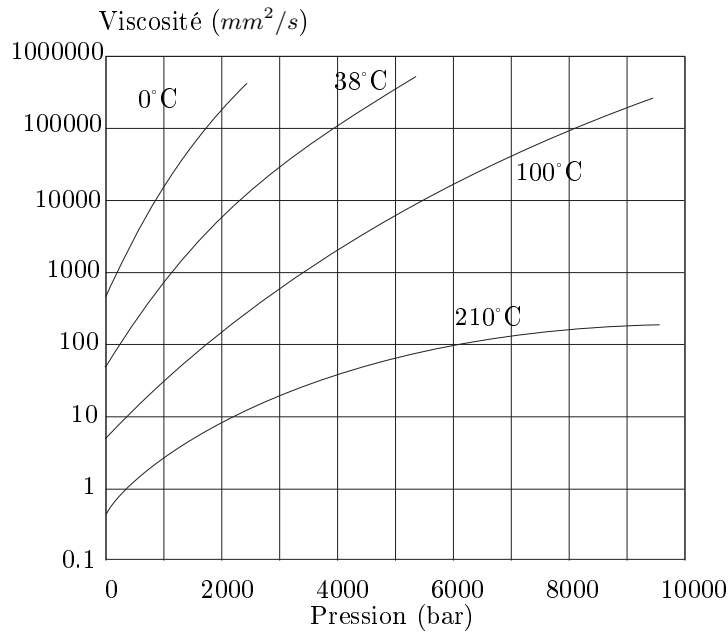


FIG.1.6: Variation de la viscosité cinématique  $\nu$  en fonction de la pression.

avec

- $\mu$  : la viscosité absolue à la pression  $P$  ;
- $\mu^a$  : la viscosité à la pression atmosphérique ;
- $C_{\mu p}$  : coefficient de la viscosité/pression  $\cong 0,002 \text{ bar}^{-1}$ .

La figure (FIG.1.6) donne les variations de la viscosité en fonction de la pression pour différentes valeurs de la température.

Il apparaît donc que la viscosité (absolue ou cinématique) varie considérablement en fonction de la température et de la pression. Nous verrons ci-après l'influence de la viscosité sur le type d'écoulement.

### 1.2.2.2 Types d'écoulement à travers un orifice étroit

L'expression qui donne la valeur du débit à travers un orifice étroit placé sur le trajet du fluide change en fonction de type d'écoulement : turbulent ou laminaire. Pour distinguer ces deux types d'écoulement on fait appel au nombre de Reynolds donné par :

$$Re_e = \frac{v_f D_h}{\nu} \quad (1.21)$$

avec

- $v_f$  : vitesse du fluide [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ];
- $D_h$  : diamètre hydraulique<sup>(1)</sup> [m];
- $\nu$  : viscosité cinématique du fluide en [ $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ]

<sup>(1)</sup>égal au diamètre pour une section circulaire, de façon plus générale, à quatre fois la surface de la section droite sur le périmètre de cette section.

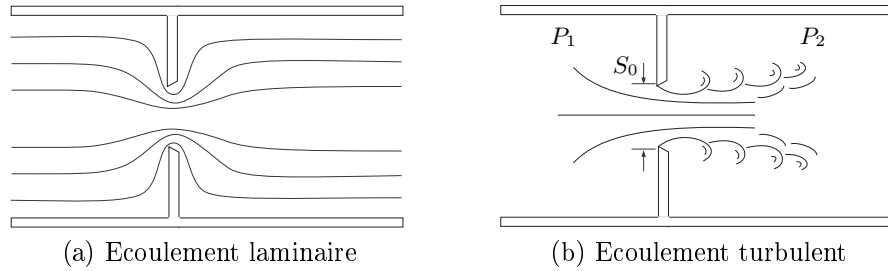


FIG. 1.7: Écoulement d'un fluide à travers un orifice.

Dans une conduite, la transition entre un écoulement laminaire et un écoulement turbulent est observée expérimentalement lorsque le nombre de Reynolds  $R_e$  est entre 2000 et 4000. Quand  $R_e$  est inférieur à 2000 l'écoulement est laminaire et quand il est supérieur à 4000 l'écoulement est souvent turbulent sauf dans des cas extrêmes [Jou98, Mer67]. En pratique, le nombre de Reynolds critique  $R_{ec}$  (en général égal à 2500) détermine la frontière entre les deux types d'écoulements, c'est-à-dire que l'écoulement est considéré laminaire lorsque  $R_e$  est inférieur à  $R_{ec}$  et turbulent lorsque  $R_e$  est supérieur à  $R_{ec}$ .

Il faut noter que la perte de charge laminaire, fonction du nombre de Reynolds, dépend beaucoup plus fortement de la viscosité du fluide, donc de sa nature et de sa température, que dans le cas d'un écoulement turbulent.

### 1.2.2.3 Relation de Bernoulli

Considérons un fluide incompressible de masse volumique  $\rho$ , en écoulement permanent<sup>(2)</sup> sans frottement le long d'un tube de courant<sup>(3)</sup>. Soit  $m$  la masse et  $V$  le volume du fluide qui passe à travers la section  $S_{01}$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . Pendant ce temps, la même masse et le même volume de fluide passe à travers la section  $S_{02}$ . En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à ce fluide entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , on obtient :

$$\rho \frac{v_f^2}{2} + \rho g z + P_{st} = Cte \quad (1.22)$$

où

- $P_{st}$  : est la pression statique<sup>(4)</sup> ;
- $\rho g z$  : la pression de la pesanteur ;
- $\rho \frac{v_f^2}{2}$  : la pression cinétique.

<sup>(2)</sup>Un régime d'écoulement est dit permanent ou stationnaire si les paramètres qui le caractérisent (pression, température, vitesse, masse volumique, ...), ont une valeur constante au cours du temps.

<sup>(3)</sup>Un tube de courant est l'ensemble de lignes de courant.

Une ligne de courant est une courbe suivant laquelle se déplace un élément de fluide.

<sup>(4)</sup>La pression statique est la pression que mesurerait un capteur qui se déplacerait à la vitesse du fluide en mouvement.



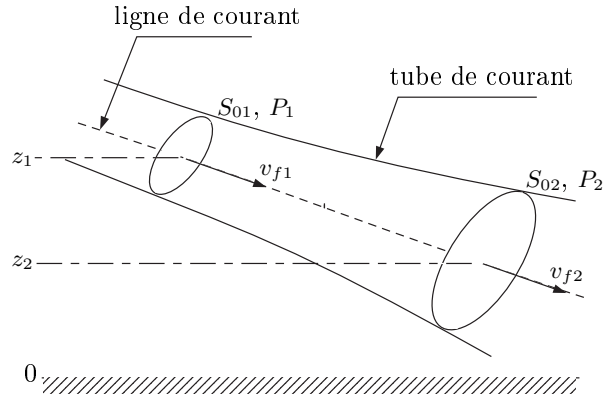


FIG. 1.8: L'écoulement d'un fluide le long d'un tube de courant.

Lors du passage du fluide à travers les surfaces  $S_{01}$  et  $S_{02}$ , la relation de Bernoulli peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\rho}{2}(v_{f1}^2 - v_{f2}^2) + \rho g(z_1 - z_2) + (P_1 - P_2) = 0 \quad (1.23)$$

#### 1.2.2.4 Equation du débit en écoulement turbulent

Lors d'un écoulement turbulent à travers un orifice étroit placé sur le trajet du fluide, il y a une accélération du liquide accompagnée d'une importante perte de charge ( $P_1 - P_2$ ). En appliquant la loi de Bernoulli (1.23) nous obtenons :

$$\left( \frac{P_1}{\rho} + \frac{v_{f1}^2}{2} \right) - \left( \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_{f2}^2}{2} \right) = \frac{1}{C_d^2} \frac{v_f^2}{2} \quad (1.24)$$

où  $v_{f2}$ ,  $v_{f1}$  et  $v_f$  sont respectivement les vitesses du fluide avant, après et à l'endroit de l'orifice et  $C_d$  est le coefficient de décharge.

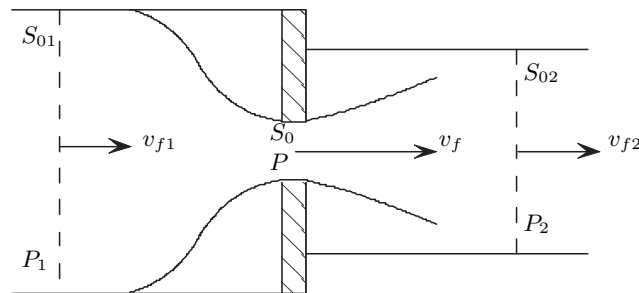


FIG. 1.9: L'écoulement d'un fluide à travers un orifice étroit.

En utilisant les relations de continuité entre les sections :  $S_{01}v_{f1} = S_{02}v_{f2} = S_0v_f$  nous obtenons l'expression du débit volumique suivante [Mar93, Mer67, Mus01] :

$$Q = S_0v_f = C_d S_0 \sqrt{\frac{2}{\rho}(P_1 - P_2)} \quad (1.25)$$

avec  $S_0$  est la section de l'orifice.

### 1.2.2.5 Equation de débit lors d'un écoulement laminaire

Dans un écoulement laminaire à travers un orifice étroit, le nombre de Reynolds  $R_e$  est faible. La perte de charge est due essentiellement au frottement visqueux entre les molécules du fluide. Le débit est proportionnel à  $(P_1 - P_2)$  et il dépend très fortement de la température à travers le coefficient de viscosité. L'expression du débit est la suivante [Mer67] :

$$Q = \frac{2\delta^2 D_h S_0}{\mu} (P_1 - P_2) \quad (1.26)$$

où  $\delta$  est une constante dépendant de la géométrie de l'orifice (par exemple  $\delta = 0,2$  pour un orifice circulaire).

### 1.2.3 Dynamique des éléments mobiles

Pour établir les équations dynamiques de l'ensemble mécanique en mouvement, il est nécessaire d'établir le bilan des forces extérieures appliquées à cet ensemble mobile puis d'appliquer la loi fondamentale de la dynamique.

#### 1.2.3.1 Bilan des forces

Considérons par exemple un vérin incliné d'un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontal entraînant une charge inertielle reliée à un ressort. Nous supposons que le corps du vérin est fixé à un bâti et que le piston est mobile. La figure (FIG.1.10) suivante représente les forces appliquées à ce système.

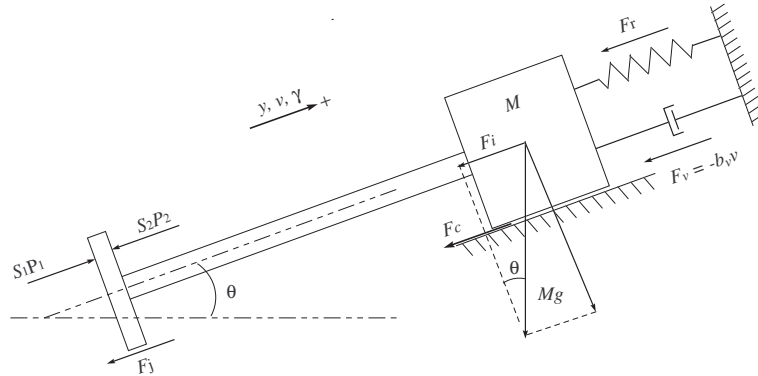


FIG. 1.10: Bilan des forces du sous système (Masse-tige-piston).

Nous supposons que la masse de l'ensemble mobile est égale à  $M$  et que toutes les liaisons mécaniques sont de raideurs infinies. Les forces appliquées sur le sous système mobile sont les suivantes

#### a. *Les forces de pression*

Les deux sections  $S_1$  et  $S_2$  du piston, sont soumises respectivement aux forces

suivantes

$$\begin{cases} F_{p1} = S_1 P_1 \\ F_{p2} = -S_2 P_2 \end{cases} \quad (1.27)$$

**b. La force de rappel du ressort**

La force de rappel d'un ressort est proportionnelle au déplacement, soit

$$F_r = -k_r (y - y^0) \quad (1.28)$$

où  $k_r$  est le coefficient de raideur du ressort exprimé en  $\text{N.m}^{-1}$  et  $y^0$  et la position de la masse au repos.

**c. La force gravitationnelle**

La force  $F_i$  est la force due à l'attraction gravitationnelle

$$F_i = -Mg \sin(\theta) \quad (1.29)$$

**d. Les forces dues aux frottements secs**

Parmi les différents types de modèles de frottements secs, les modèles les plus courants sont : le modèle de Coulomb, le modèle de Stribeck et le modèle de Tustin. Dans ce paragraphe nous nous intéressons essentiellement au modèle de Coulomb. Ce dernier est illustré par la figure (FIG.1.11) et défini par

$$F_{fs} = \begin{cases} -F_{sec}^M \text{Sgn}(v) & \text{si } v \neq 0 \\ \begin{cases} -F_{sec}^M & \text{si } F_{ext} > F_{sec}^M \\ -F_{ext} & \text{si } -F_{sec}^M \leq F_{ext} \leq F_{sec}^M \\ F_{sec}^M & \text{si } F_{ext} < -F_{sec}^M \end{cases} & \text{si } v = 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

avec

$$F_{sec}^M = -F_c - F_j \quad (1.31)$$

où  $F_c$  présente la force de frottement due à la charge inertielle donnée par

$$F_c = \bar{\mu} M g \cos(\theta) \quad (1.32)$$

$\bar{\mu}^{(5)}$  est le coefficient de frottement.

$F_j$  est la force de frottement due aux joints d'étanchéité : sa valeur est généralement fournie par le constructeur du vérin ou elle est approximée par

$$F_j = -0,1 F_{Max} \quad (1.33)$$

où  $F_{Max}$  désigne la force maximale admissible.

---

<sup>(5)</sup>c'est une constante sans unité. Elle est en général comprise entre 0,1 et 0,3.

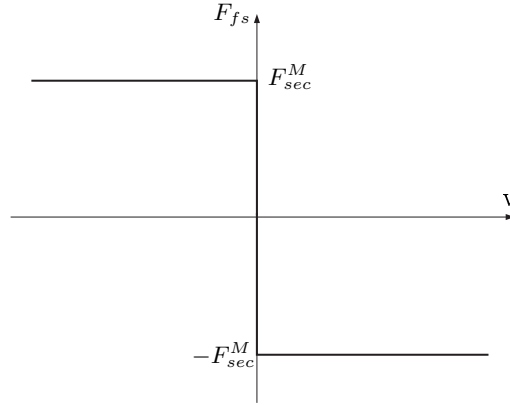


FIG. 1.11: Force due aux frottements secs (Modèle de Coulomb).

e. **La force due aux frottements visqueux**

Les frottements visqueux peuvent être représentés par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux  $b_v$ .

$$F_{fv} = -b_v v \quad (1.34)$$

### 1.2.3.2 Partie mécanique

La loi fondamentale de la dynamique ou la loi de Newton établit le lien entre les forces appliquées à un système et la nature de son mouvement. Elle est donnée par l'équation suivante :

$$\Sigma \vec{F} = M \vec{\gamma} \quad (1.35)$$

où

- $\Sigma \vec{F}$  : la somme algébrique des forces extérieures appliquées au système ;
- $\vec{\gamma}$  : l'accélération de son centre d'inertie ;
- $M$  : la masse du système considéré.

A partir du bilan des forces et en appliquant la loi fondamentale de la dynamique selon l'axe de déplacement du piston, nous obtenons

$$M\gamma = F_{p1} + F_{p2} + F_r + F_i + F_{fs} + F_{fv} \quad (1.36)$$

ce qui nous permet d'écrire les équations décrivant la dynamique de la partie mécanique de l'ensemble vérin-masse sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{1}{M}(S_1 P_1 - S_2 P_2 - k_r(y - y^0) - Mg \sin(\theta) + F_{fs} - b_v v) \\ \dot{y} = v \end{cases} \quad (1.37)$$

### 1.3 Pré-actionneurs électrohydrauliques

Les distributeurs (de débit) électrohydrauliques à action proportionnelle ont pour fonction de servir d'interface entre l'électronique de commande (correcteur, régulateur, calculateur, etc.) et l'actionneur (vérin ou moteur hydraulique). Ils permettent de commander simultanément la direction et le débit (FIG.1.12).

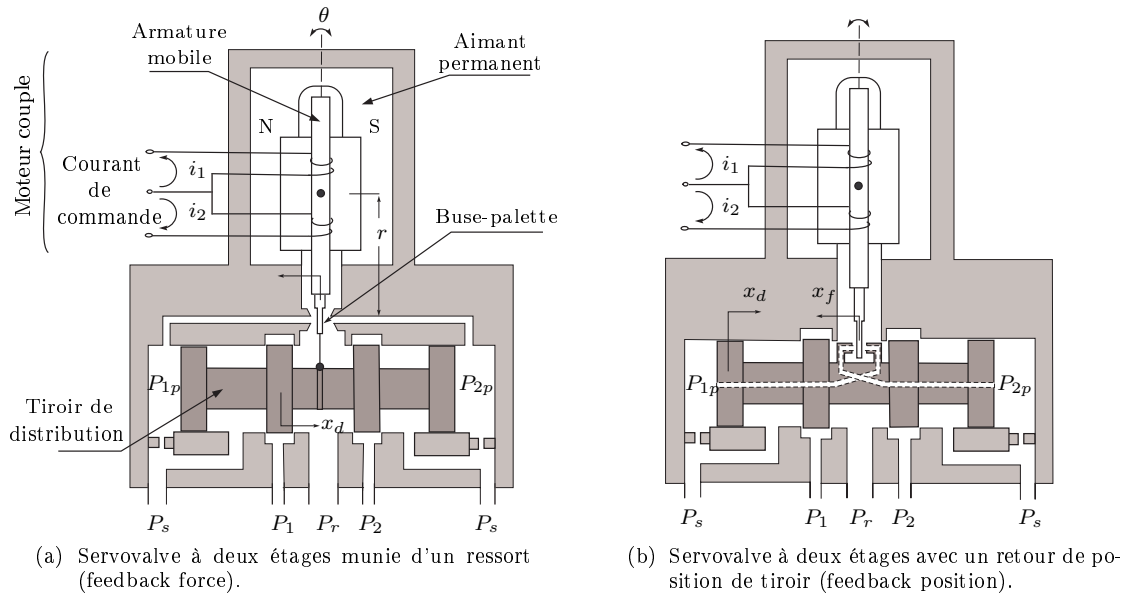


FIG. 1.12: Servovalves à deux étages.

Ils assurent en premier lieu le rôle de distribution, c'est-à-dire soit met un volume de contrôle (par exemple une chambre d'un vérin) en communication avec la pression source  $P_s$  (pompe) ou avec la pression de retour  $P_r$  (réservoir) soit l'isole du reste du circuit selon le signe et la valeur du signal électrique de commande. Ce rôle de distribution est assuré principalement par le tiroir de distribution dont le déplacement, contrairement aux électrodistributeurs Tout-Ou-Rien, est proportionnel au signal électrique de commande. Comme la section de l'orifice de passage du fluide est proportionnelle au déplacement du tiroir, le débit volumique est donc également proportionnel au courant de commande (voir équation (1.25)) pour une perte de charge donnée. En résumé, le tiroir de distribution est commandé en position soit en boucle ouverte pour les « distributeurs proportionnels » soit en boucle fermée pour les servodistributeurs et les servovalves.

Selon le cas, on distingue trois types de rétroaction :

- la rétroaction électrique : la position du tiroir est mesurée par un capteur magnétique de type LVDT : le noyau du capteur est solidaire du tiroir.
- la rétroaction mécanique : la rétroaction est assurée par le biais d'une liaison mécanique (tige flexible) reliant le moteur-couple au tiroir de distribution ;
- la rétroaction barométrique : la rétroaction est assurée par la différence de pression s'exerçant entre les faces du tiroir de distribution.

L'asservissement de position du tiroir permet de minimiser l'influence des perturbations comme les forces de frottements ou la variation de la température de l'huile, et permet ainsi d'obtenir une meilleure «répétabilité» et une meilleure précision : c'est le cas des servodistributeurs et des servovalves (voir les paragraphes suivants). Les applications en boucle fermée utilisent donc essentiellement les servovalves ou les servodistributeurs. Les distributeurs proportionnels sont uniquement utilisés pour les applications en boucle ouverte. Par conséquent, nous nous intéresserons uniquement aux servodistributeurs et aux servovalves. Dans la suite de ce document, et par abus de terminologie, nous les désignerons indifféremment distributeurs.

Les distributeurs à action proportionnelle peuvent être classés en trois catégories selon leur technologie, leur performance et leur utilisation.

### 1.3.1 Distributeur proportionnel

Le tiroir de distribution d'un distributeur proportionnel est commandé directement, de manière progressive, par un ou deux solénoïdes proportionnels. Les solénoïdes proportionnels constituent l'interface entre l'électronique et l'hydraulique et peuvent faire varier l'effort ou le déplacement de leur induit proportionnellement aux variations de courant. En général, le tiroir de distribution est maintenu en position médiane par des ressorts de rappel lorsque les solénoïdes ne sont pas excités. Leurs performances statiques et dynamiques étant relativement médiocres, les distributeurs proportionnels sont réservés à des applications en boucle ouverte.

### 1.3.2 Servodistributeur

Un servodistributeur est un distributeur proportionnel dont la position du tiroir est asservie en position. Le noyau d'un capteur magnétique de type LVDT est solidaire du tiroir de distribution et fournit une mesure de la position pour la rétroaction. L'asservissement de position du tiroir permet de minimiser l'influence des perturbations comme les forces de frottements ou la variation de la température de l'huile et permet ainsi d'obtenir une meilleure «répétabilité» et une meilleure précision. Leurs performances dynamiques sont inférieures à celles des servovalves tandis que leurs caractéristiques statiques sont équivalents voire quelquefois meilleurs. Les servodistributeurs sont utilisés aussi bien en boucle fermée qu'en boucle ouverte.

### 1.3.3 Servovalve

Les servovalves constituent le haut de gamme des distributeurs à action proportionnelle. Le déplacement du tiroir est commandé par l'étage buse-palette. La palette est solidaire à l'armature mobile d'un moteur-couple dont le déplacement est proportionnel au courant de commande. Le tiroir de distribution est asservi en position soit avec une contre-réaction électrique (capteur LVDT), soit avec une contre-réaction mécanique (la palette est reliée au tiroir par une tige flexible) soit avec une contre-réaction barométrique

(différence de pression sur les faces du tiroir). Les servovalves sont caractérisées par leurs performances statiques (précision, hystérésis, etc.) et dynamiques élevées mais aussi par leurs coûts d'acquisition et de maintenance plus élevés. Elles sont toujours utilisées comme élément d'un système de commande en boucle fermée.

Le modèle de ces distributeurs est constitué par une partie statique non linéaire en série avec une partie dynamique linéaire (voir FIG.1.13). La partie non linéaire représente la relation entre le débit volumique et le signal électrique ou la position du tiroir tandis que la partie linéaire est une approximation du comportement dynamique de l'ensemble.

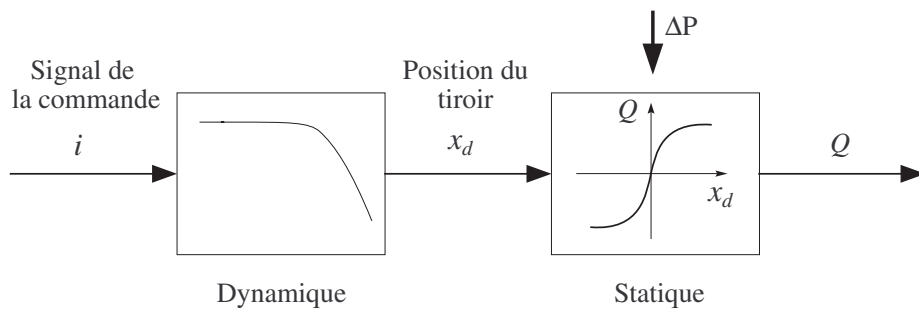


FIG. 1.13: Schéma de principe d'un pré-actionneur hydraulique.

### 1.3.4 Caractéristiques statiques d'un distributeur

Les caractéristiques statiques utiles pour la modélisation concernent essentiellement les dimensions et la géométrie du tiroir de distribution. Nous rappellerons dans cette partie les différents types de centre ainsi que la relation entre le débit volumique et le signal électrique de commande.

#### 1.3.4.1 Types de centre

Lorsque le composant électromagnétique (solénoïde proportionnel ou moteur-couple) n'est pas excité, le tiroir de distribution se trouve dans sa position médiane ou neutre. La courbe de débit volumique en fonction du courant de commande dépend de la structure de cette position médiane. La figure suivante représente un distributeur à action proportionnelle à 4 orifices et 3 positions (distributeur 4/3) où le carré central représente la position médiane.

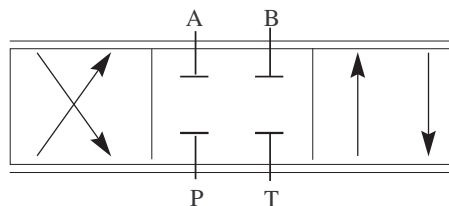


FIG. 1.14: Symbole d'un distributeur proportionnel à 4 orifices et 3 positions.

- A, B: orifices liés aux éléments commandés (moteur hydraulique, vérin);  
 P : orifices d'arrivée de la pression (pompe);  
 T : orifices de retour (reservoir).

**1.3.4.1.1 Centre à recouvrement positif** En position médiane, les orifices de passage de l'huile sont fermés et le débit est nul. Il faut un déplacement du tiroir  $|x_d| > \sigma$  avec  $\sigma > 0$  par rapport à la position médiane pour obtenir un débit. Il apparaît donc une zone morte. Par rapport aux caractéristiques réelles, le débit au point zéro est faible et le gain en pression est élevé. Ce type de recouvrement peut être utilisé en asservissement de vitesse ou de débit, mais n'est pas approprié pour l'asservissement de position ou de pression puisque la zone morte diminue la précision.

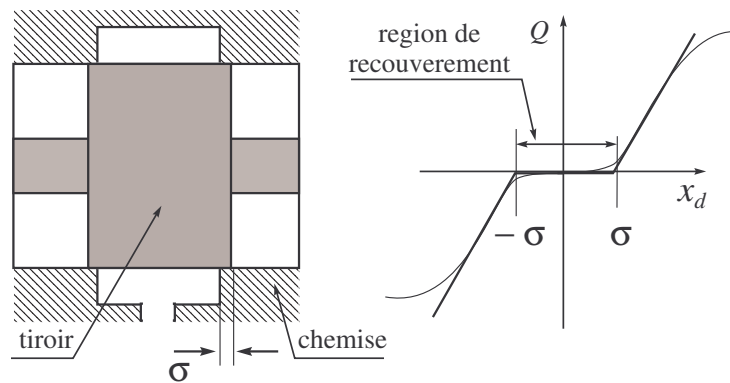


FIG. 1.15: recouvrement positif (centre fermé).

**1.3.4.1.2 Centre critique ou à recouvrement nul** En position médiane, les orifices de passage de l'huile sont fermés et le débit est nul. C'est le cas où  $\sigma = 0$ , un déplacement du tiroir fait apparaître un débit sur une arête du tiroir. Ce type de centre peut être utilisé pour tous les types d'asservissements.

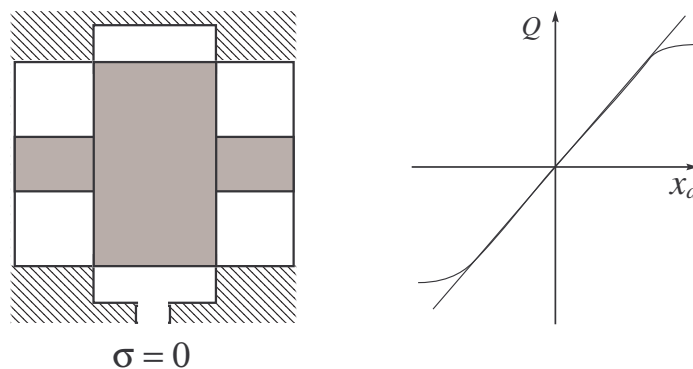


FIG. 1.16: recouvrement nul (centre critique).



**1.3.4.1.3 Centre à recouvrement négatif ou centre à découverture** Lorsque la position du tiroir est inférieure à  $\sigma$  ( $|x_d| < \sigma$ ) par rapport à la position médiane, il y a un débit volumique permanent au niveau des deux arêtes du tiroir. Par rapport aux caractéristiques réelles, le débit au point zéro est important et le gain en pression est faible. Le recouvrement négatif peut être utilisé en asservissement de position et de force.

**Remarque 1.5.** Dans la pratique et en fonction de la précision voulue, on peut accepter un recouvrement (positif ou négatif) inférieur à 0,5% de la course du tiroir ou du courant nominal pour l'asservissement de position. ■

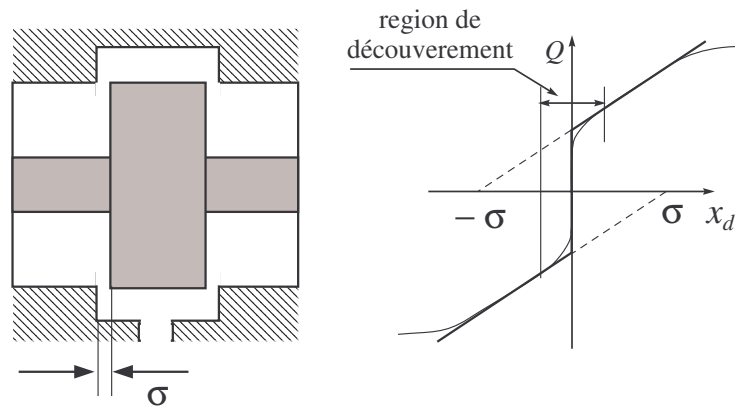


FIG. 1.17: Découverte ou recouvrement négatif (Centre ouvert).

### 1.3.4.2 Gain en pression

Considérons le montage hydraulique présenté par la figure (FIG.1.18), où le distributeur est alimenté sous une pression  $P_s$ , la pression du retour est  $P_r$  et les deux orifices A et B de la servovalve sont fermés. Lors d'un déplacement du tiroir autour de sa position médiane, la pression différentielle  $P_A - P_B$  varie rapidement de  $P_r - P_s$  à  $P_s - P_r$ .

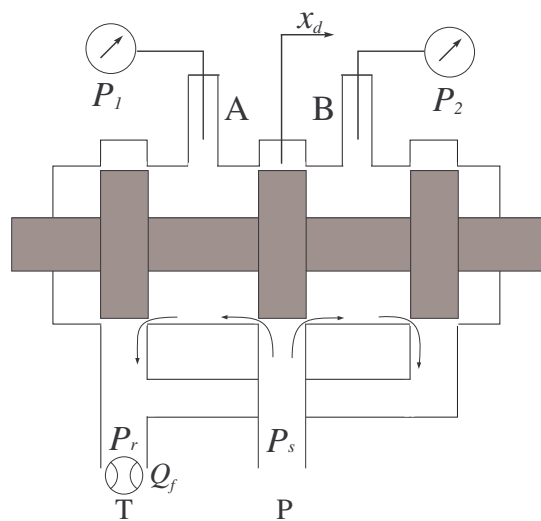


FIG. 1.18: Schéma de principe pour mesurer le gain en pression et le débit de fuite.

Le gain en pression du distributeur est la pente autour de zéro de la courbe (FIG.1.19) représentant la variation de la pression différentielle et le signal de commande [Fai99, Leb86].

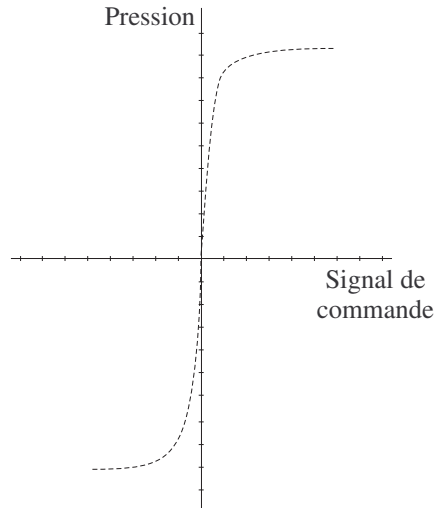


FIG. 1.19: La pression différentielle  $P_1 - P_2$  en fonction du signal de commande.

#### 1.3.4.3 Débit de fuites internes

En théorie, un distributeur est supposé être à géométrie parfaite et donc le débit de fuite est considéré nul au point critique  $x_d = 0$ . Or, en pratique, et pour de petites ouvertures (par exemple,  $|x_d| < 0,02$  mm), les performances sont détériorées par les défauts inévitables de sa géométrie. Cependant, il convient de préciser qu'au delà de cette région on retrouve des performances proches de celles prévues théoriquement.

La figure (FIG.1.20) ci-dessous donne le débit de fuites internes en fonction du signal de la commande [Fai99]. Un débit quasi-constant correspond au débit permanent quand le signal est nul. Le débit de fuites est maximal lorsqu'on est au zéro hydraulique c'est-à-dire quand le tiroir est au position centre qui correspond à un signal de commande nul. Le suivi dans le temps de l'évolution de cette caractéristique est un critère de jugement de l'usure d'un distributeur.

#### 1.3.4.4 Débit nominal d'un distributeur

A l'application d'un signal de commande nominal (courant ou tension maximum), le tiroir du distributeur découvre au maximum les sections de passage. Le débit fourni par le distributeur dans ce cas et pour une perte de charge nominale  $\Delta P_n$  est appelé le débit nominal. Son expression est donnée (voir par exemple [Fai99, Mer67]) sous la forme :

$$Q_n = u_n k \sqrt{\Delta P_n} \quad (1.38)$$

Les valeurs nominales du débit  $Q_n$ , du courant ou de la tension de commande  $u_n$  et de la perte de charge  $\Delta P_n$  sont données par les fabricants des pré-actionneurs. La perte de

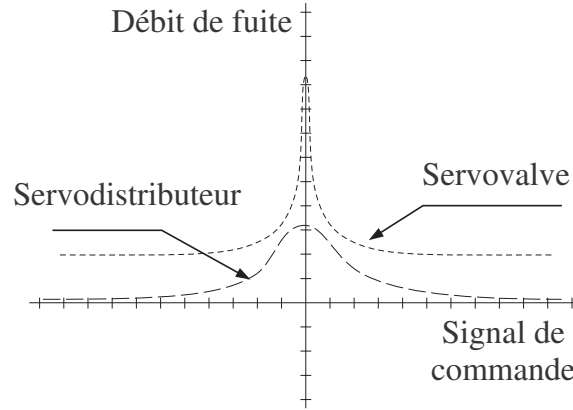


FIG. 1.20: Le débit de fuite en fonction du signal de commande.

charge nominale  $\Delta P_n$  est en général arbitrairement fixée à 35 bar par arête de distribution (500 PSI) pour les servovalves et à 5 bar par arête pour les distributeurs proportionnels. Le débit à travers une arête du distributeur pour une perte de charge  $\Delta P$  et une commande  $u$  est alors donnée par

$$Q = k u \operatorname{Sgn}(\Delta P) \sqrt{\Delta P} = \frac{u}{u_n} \operatorname{Sgn}(\Delta P) \sqrt{\frac{\Delta P}{\Delta P_n}} Q_n \quad (1.39)$$

#### 1.3.4.5 Equation du débit d'un distributeur

La modélisation de la partie statique consiste à mettre en équation les débits de la servovalve. Pour ce faire, on établit les équations décrivant les débits  $Q_1$  et  $Q_2$  fournis par la servovalve ou les deux servovalves aux chambres du vérin.

Dans la littérature [Leb86, Mar93, Mer67, Wan61, Wat89], différentes expressions des débits volumiques selon le degré de finesse du modèle retenu sont proposées. Dans ce travail, il est supposé que la servovalve est symétrique, c'est-à-dire que les restrictions de sortie et d'entrée sont identiques et à découverture nul. De plus, nous négligerons les fuites au niveau des interfaces et nous supposons que l'écoulement est turbulent. Sous ces hypothèses et en vertu des expressions du débit données précédemment, pour une servovalve à trois positions quatre voies (FIG.1.22), nous obtenons les équations de débit  $Q_1$  et  $Q_2$  suivantes :

$$Q_1 = \begin{cases} k_d x_d \operatorname{Sgn}(P_s - P_1) \sqrt{|P_s - P_1|} & \text{si } x_d \geq 0 \\ k_d x_d \operatorname{Sgn}(P_1 - P_r) \sqrt{|P_1 - P_r|} & \text{si } x_d < 0 \end{cases} \quad (1.40)$$

et

$$Q_2 = \begin{cases} k_d x_d \operatorname{Sgn}(P_2 - P_r) \sqrt{|P_2 - P_r|} & \text{si } x_d \geq 0 \\ k_d x_d \operatorname{Sgn}(P_s - P_2) \sqrt{|P_s - P_2|} & \text{si } x_d < 0 \end{cases}$$

Le système (1.40) peut être réécrit sous la forme

$$\begin{cases} Q_1 = x_d \varphi(P_1, x_d) \\ Q_2 = -x_d \varphi(P_2, -x_d) \end{cases} \quad (1.41)$$

avec

$$\varphi(P_i, x_d) = \begin{cases} \varphi^+(P_i) = k_d \operatorname{Sgn}(P_s - P_i) \sqrt{|P_s - P_i|} & \text{si } x_d \geq 0 \\ \varphi^-(P_i) = k_d \operatorname{Sgn}(P_i - P_r) \sqrt{|P_i - P_r|} & \text{si } x_d < 0 \end{cases} \quad (1.42)$$

où  $P_s$  est la pression source ou la pression d'alimentation,  $P_r$  la pression de retour,  $P_1$  et  $P_2$  les pressions à la sortie des orifices (1) et (2) respectivement. Les fonctions  $\varphi^+$  et  $\varphi^-$  sont illustrées par la figure (FIG.1.21) pour  $P_i \in ]0; 300.10^5[$

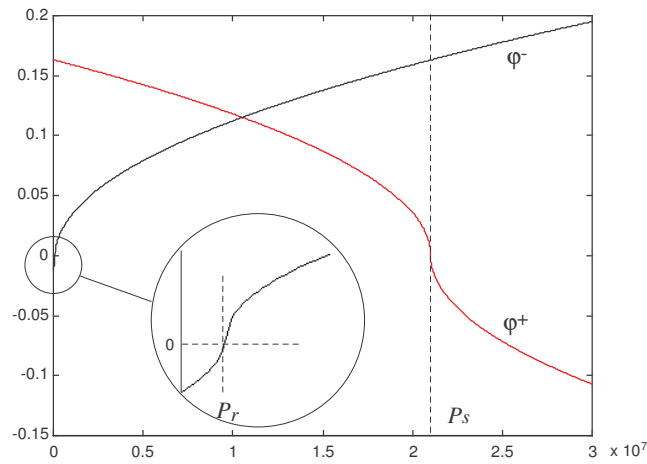


FIG. 1.21: Représentation des deux fonctions  $\varphi^+$  et  $\varphi^-$

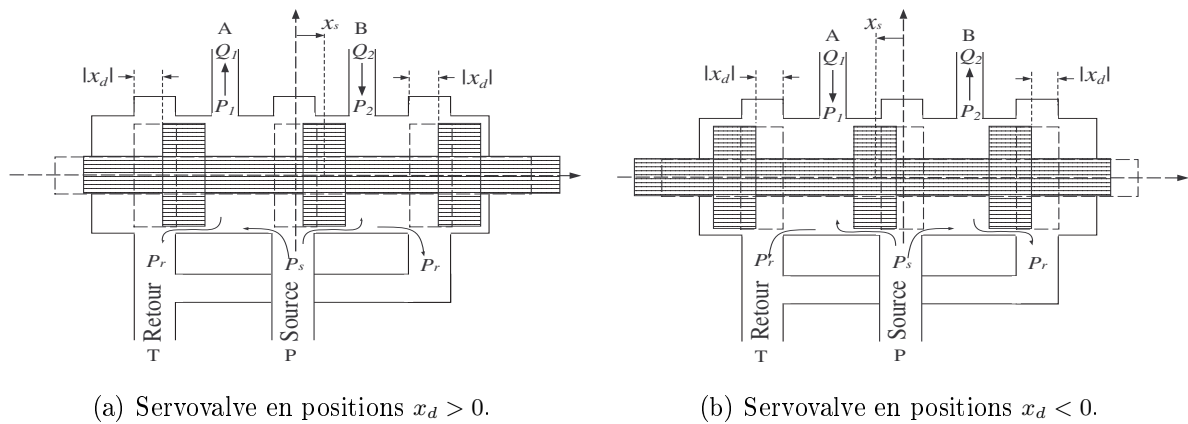


FIG. 1.22: Principe de fonctionnement du tiroir d'un distributeur proportionnel 4/3.

Dans le cas d'une servovalve à trois positions trois voies, l'expression du débit est donnée par l'équation (1.41).

### 1.3.5 Caractéristiques dynamiques d'un distributeur

La modélisation de la dynamique d'une servovalve dépend du nombre et de la nature des éléments intervenants entre son tiroir principal et le moteur-couple (tige, buse-palette, tiroir pilote, etc.) donc du type de la servovalve. Les caractéristiques dynamiques d'une servovalve sont déterminées essentiellement à partir de ses caractéristiques fréquentielles. Dans le cas où on considère que la servovalve n'est pas suffisamment rapide par rapport à l'actionneur, sa dynamique est généralement modélisée par une fonction de transfert linéaire.

#### 1.3.5.1 Servovalves mono-étage

Dans le cas d'un distributeur mono-étage, la palette, l'injecteur, le déflecteur ou le tiroir sont commandés directement par le moteur-couple. Un distributeur à étage à tiroir est appelé distributeur à commande directe (voir FIG.1.23). Il est constitué d'un moteur-couple relié au tiroir par une tige. Le positionnement du tiroir se fait à l'aide de l'armature du moteur-couple commandé par le signal électrique de la commande.

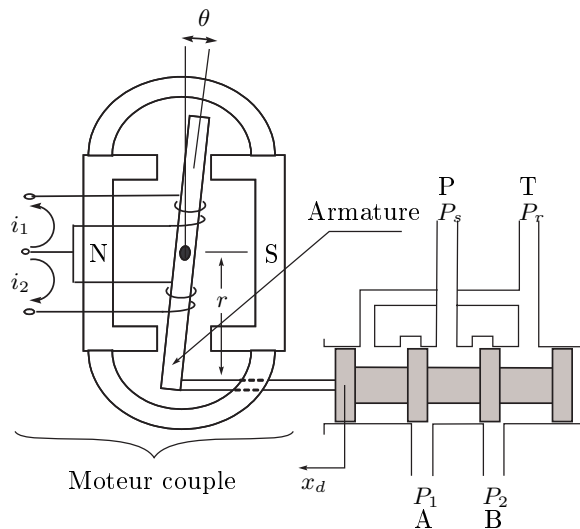


FIG. 1.23: Servovalve à mono-étage [Mer67].

Les distributeurs à commande directe sont des distributeurs relativement simples et économiques, mais ils ont deux défauts majeurs : leur débit est limité parce que les forces d'écoulement à l'équilibre tendent à caler le moteur-couple qui a une puissance faible, et à limiter la course du tiroir. Le deuxième inconvénient est dû au fait que la stabilité dépend largement de la dynamique de la charge, cela peut être réduit par une étude appropriée du distributeur pour assurer sa stabilité. La modélisation de la dynamique de ce type de servovalve passe par la modélisation de la partie électrique c'est-à-dire le transfert entre la tension et le courant, et par la modélisation de la partie mécanique qui est constituée du moteur-couple, de l'armature et du tiroir.

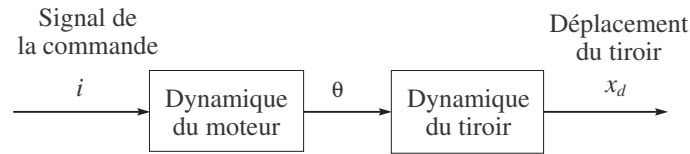


FIG. 1.24: Schéma de principe d'une servovalve à mono-étage.

### 1.3.5.2 Dynamique des distributeurs à deux étages

Les servovalves à deux étages ne présentent pas les mêmes inconvénients que celles à mono-étage ; à savoir, la limitation du débit et l'instabilité. Elles sont équipées d'un pré-amplificateur hydraulique qui transforme la force du moteur-couple en une force de débit suffisante pour vaincre les forces du frottement et les forces dues aux vibrations appliquées sur le tiroir. Les plus connues de ce type de servovalves sont celles avec une rétroaction de la position. Cela peut être fait soit directement par une rétroaction de la position (FIG.1.12(b)) soit à l'aide d'un ressort qui convertit la position en une force. Celle-ci agit contre la pression différentielle due à l'étage pilote pour centrer le tiroir (FIG.1.12(a)).

En appliquant un courant différentiel  $\Delta i$  positif ( $i_1 > i_2$ ) à une servovalve à deux étages avec une rétroaction de la position (FIG.1.12(b)), l'étage pilote constitué par la buse-palette se penche vers la gauche, la pression  $P_{1p}$  augmente et la pression  $P_{2p}$  diminue. Cette variation de pression entraîne le tiroir vers la gauche. Quand l'équilibre des pressions  $P_{1p}$  et  $P_{2p}$  est établi et la buse est centrée entre les palettes, le tiroir s'immobilise.

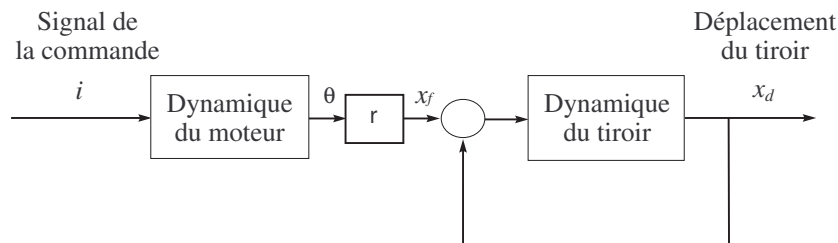


FIG. 1.25: Schéma de principe d'un distributeur à deux étages avec rétroaction de position.

Pour ce type de servovalves, c'est-à-dire les servovalves à deux étages avec une rétroaction de la position, la dynamique est constituée de deux parties ; comme présenté dans le schéma de la figure (FIG.1.25), on trouve dans la première partie la dynamique du moteur-couple, et dans la deuxième partie la dynamique du tiroir, cette dernière subit l'effet des deux pressions  $P_{1p}$  et  $P_{2p}$ . Il faut noter que la position de la buse est directement influencée par la position du tiroir.

Une autre méthode pour obtenir une rétroaction de la position est d'utiliser un ressort qui lie le tiroir à la buse et qui génère une force d'équilibrage (FIG.1.12(a)). Un courant différentiel  $\Delta i$  positif ( $i_1 > i_2$ ) crée un couple sur la buse pour la déplacer vers la gauche,

ce qui a pour conséquences d'augmenter la pression  $P_{1p}$  et de diminuer  $P_{2p}$ . A cause de la variation des pressions  $P_{1p}$  et  $P_{2p}$ , le tiroir se déplace vers la droite jusqu'à ce que le couple de l'armature, dû au ressort, compense le couple dû au courant d'alimentation. Le tiroir s'immobilise en une nouvelle position d'équilibre proportionnelle au courant.

Dans ce cas la dynamique de la servovalve contient deux dynamiques ; la dynamique du moteur-couple et celle du tiroir avec une rétroaction qui se fait par l'intermédiaire d'un ressort qui réagit afin d'équilibrer les forces générées par les pressions  $P_{1p}$  et  $P_{2p}$ . La figure (FIG.1.26) présente un schéma expliquant la dynamique d'une servovalve avec un ressort.

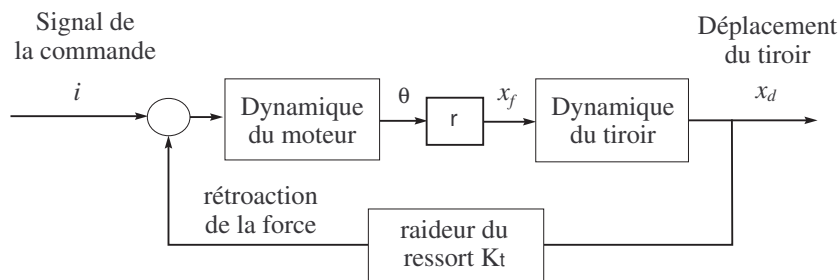


FIG. 1.26: Schéma de principe d'une servovalve à deux étages avec retour de position (présence d'un ressort).

### 1.3.5.3 Servovalves à trois étages

Les servovalves à trois étages sont les servovalves les plus performantes. On fait appel à ce type de servovalves dans le cadre des applications qui exigent des débits importants pour réaliser des performances dynamiques très élevées (par exemple  $1000 \text{ l min}^{-1}$  sous une perte de charge de 70 bar et un temps de réponse de 14 ms) [Fai99, JK03].

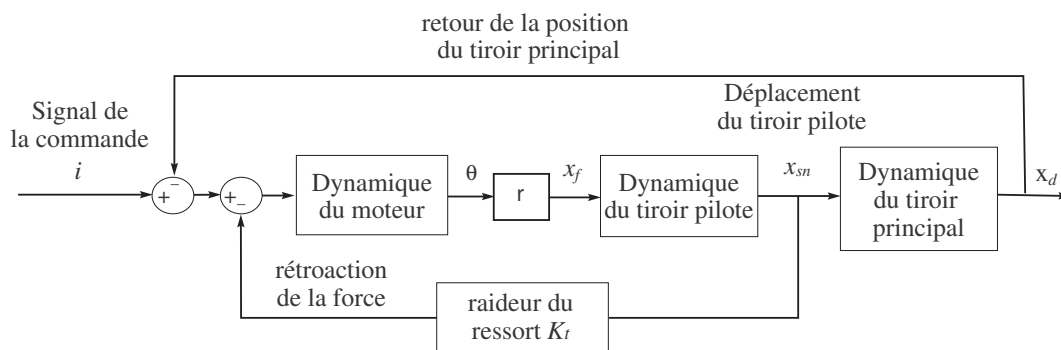


FIG. 1.27: Schéma de principe d'une servovalve à trois étages.

Ce type de servovalve est composé d'un étage pilote, généralement une servovalve à deux étages, et d'un tiroir de distribution. Le signal électrique de commande appliqué à l'étage pilote est transformé par ce dernier en un débit et en une différence de pression

(donc une force) permettant ainsi de déplacer le tiroir de distributeur. Le tiroir de distributeur est asservi en position par le biais d'un capteur LVDT permettant ainsi d'obtenir un débit proportionnel au courant de commande et pour une perte de charge donnée.

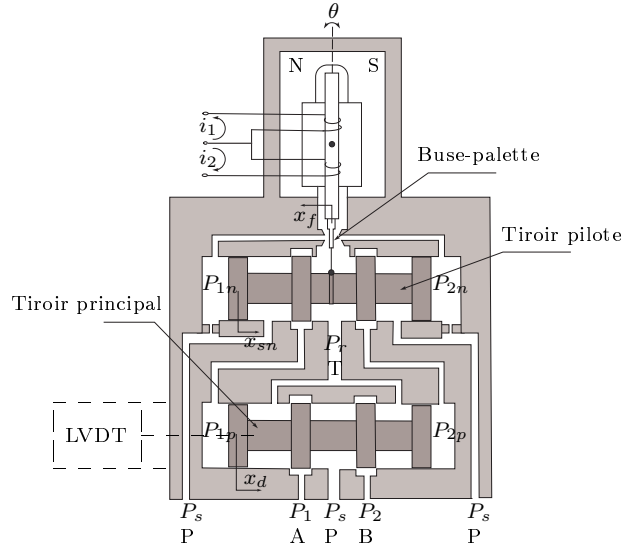


FIG. 1.28: Servovalve à trois étages.

#### 1.3.5.4 Partie dynamique de la servovalve

Les servovalves sont des éléments électrohydrauliques suffisamment rapides pour que leur partie dynamique soit négligée. En général, pour étudier les systèmes électrohydrauliques, on considère le déplacement du tiroir  $x_d$  du distributeur comme une commande au lieu du signal électrique appliqué au moteur-couple [GS04, HSUU04, KL02, KK04, Mer67, OR00, UP02, YBRC99]. Pour disposer d'un modèle pertinent, il est judicieux d'intégrer la dynamique existante entre le signal électrique de la commande et la position du tiroir. Le problème réside dans le fait que la plupart des variables intervenant dans les équations décrivant la dynamique du distributeur n'est pas accessible. Pour ce faire, le comportement du distributeur est approximé par un modèle linéarisé. Dans la littérature, la dynamique des distributeurs est souvent représentée par un système linéaire d'ordre un [AL00, KJ98, LT04, NWS00, UPU04, YBC98] ou deux [CDWD02, SS00, Wan61] (voire un ordre supérieur [JK03, Man00, Mer67]) et ceci selon les éléments considérés et la précision souhaitée. Dans ce paragraphe nous présentons quelques modèles utilisés dans la littérature pour décrire la dynamique de la servovalve ; le premier est d'ordre un [Fai99], il est donné sous la forme

$$\frac{X_d(s)}{U_d(s)} = \frac{K_d}{\tau_d s + 1} \quad (1.43)$$

où

- $\tau_d$  : la constante de temps de la servovalve ;
- $K_d$  : le gain statique.

Le deuxième est de second ordre et il est présenté par la fonction de transfert suivante [Fai99]



$$\frac{X_d(s)}{U_d(s)} = \frac{K_d}{s^2 + 2\zeta_d \omega_d s + \omega_d^2} \quad (1.44)$$

où

- $X_d$  et  $U_d$  : sont respectivement les transformés de Laplace de la position du tiroir  $x_d$  et le signal de commande  $u_d$  ;
- $\omega_d$  : la pulsation propre de la servovalve ;
- $\zeta_d$  : le facteur d'amortissement de la servovalve ;
- $K_d$  : le gain statique de la servovalve.

Enfin, la fonction de transfert de sixième ordre, représentant la dynamique de la servovalve proposée par [Man00], est obtenue par une méthode d'identification non paramétrique en négligeant les effets d'hystérésis et de la force du débit, elle est donnée par

$$\frac{X_d(s)}{U_d(s)} = \frac{a_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 + a_5 s^5 + a_6 s^6} \quad (1.45)$$

où  $a_i (i = 1 \dots 6)$  sont des réels positifs.

Cependant, il convient de noter que ce comportement linéaire n'est valable que pour de faibles amplitudes du signal. En effet, pour des grandes valeurs d'amplitude, un effet saturation apparaît.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude d'un système électrohydraulique en tenant compte de la dynamique de la servovalve ou du servodistributeur. La dynamique du distributeur considéré sera décrite par une fonction de transfert de premier ordre représentée par sa forme d'état

$$\dot{x}_d = -\frac{1}{\tau_d}(x_d - K_d u_d) \quad (1.46)$$

## 1.4 Modélisation des actionneurs hydrauliques

Un vérin hydraulique est un actionneur qui permet de transformer l'énergie hydraulique de l'huile en un travail mécanique. Il est soumis à des pressions d'huile qui permettent d'obtenir des mouvements. Il existe deux grandes familles de vérins, à savoir les vérins linéaires à simple et à double effet (FIG.1.29) et les vérins rotatifs à crémaillère et à palettes (FIG.1.30).

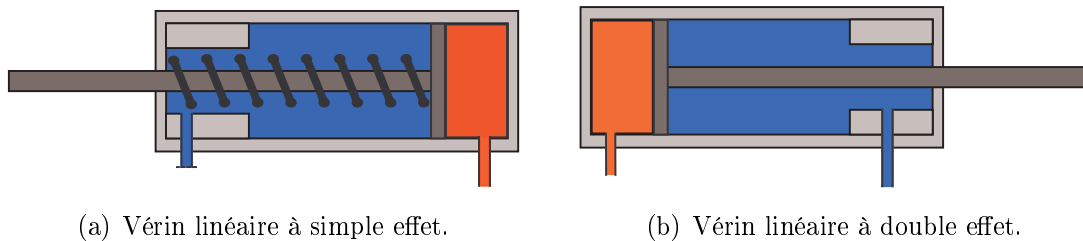


FIG. 1.29: Vérins linéaires.

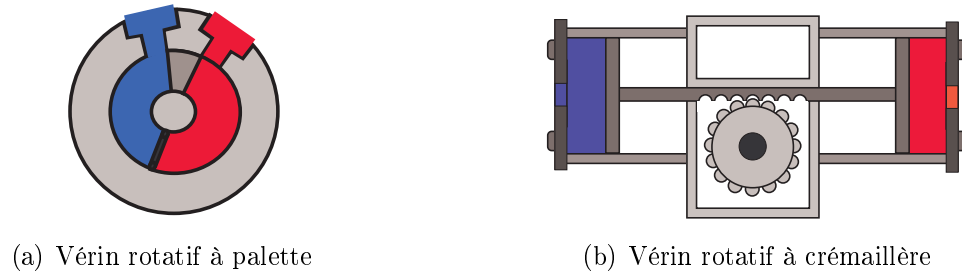


FIG. 1.30: Vérins rotatifs.

Tout au long de ce travail nous nous intéresserons uniquement aux vérins linéaires à double effet.

Pour la modélisation, un vérin linéaire à double effet est caractérisé essentiellement par :

- sa course  $l_0$  ;
- ses sections utiles  $S_1$  et  $S_2$  (ou  $S$  dans le cas d'un vérin symétrique) ;
- et son volume mort  $V_m$ .

## 1.4.1 Vérin linéaire à double effet

### 1.4.1.1 Vérin asymétrique

Le comportement dynamique d'un vérin dépend de l'évolution des pressions dans ses deux chambres. Considérons un vérin asymétrique à double effet représenté par la figure (FIG.1.31). A partir du principe de conservation de la masse (§1.2.1.2), la dynamique de la pression  $P$  dans une chambre à volume variable  $V$  est donnée par (1.16) :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\beta_e}{V} \left( \Sigma Q_e - \Sigma Q_s - \frac{dV}{dt} \right) \quad (1.47)$$

où  $\Sigma Q_e$  et  $\Sigma Q_s$  représentent respectivement la somme des débits volumiques entrants et sortants.  $\beta_e$  est le module de compressibilité effective qui tient compte de la compressibilité de l'huile, de l'effet de l'air entraîné et l'élasticité de l'enveloppe du vérin.

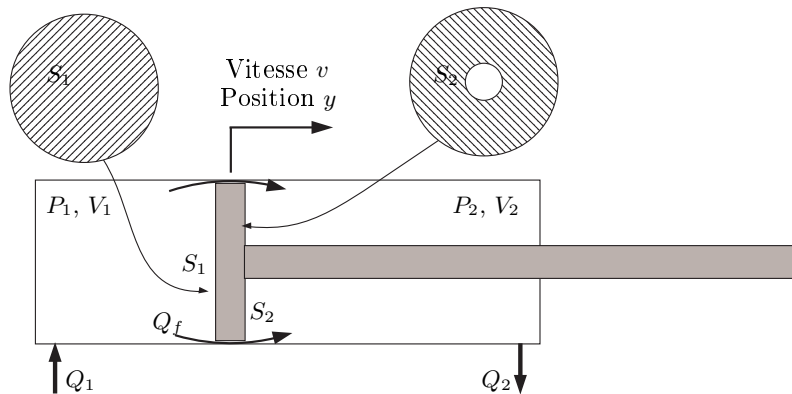


FIG. 1.31: Vérin asymétrique à double effet considéré.

Dans ce qui suit, nous considérons les hypothèses suivantes :

- (H1) *Le débit de fuite dans le vérin est laminaire et il est faible dans une section annulaire très mince.*
- (H2) *L'huile subit une évolution isotherme dans les chambres du vérin.*
- (H3) *La somme des volumes des deux chambres du vérin est constante et indépendante de la position du piston.*
- (H4) *La masse  $M$  est en mouvement de translation horizontale.*
- (H5) *Le système ne contient pas de ressort.*
- (H6) *Les forces de frottement, dues au joints, à la charge inertielle et aux frottements secs, sont négligeables.*
- (H7) *La pression source  $P_s$  et la pression de retour  $P_r$  sont constantes.* ■

Sous l'hypothèse (H1) les débits de fuites peuvent être modélisés par ([Mer67, Mus01, Wat89]) :

$$\begin{cases} Q_{fi} &= \lambda_{fi}(P_1 - P_2) \\ Q_{fej} &= \lambda_{fe}(P_i - P_r) \end{cases} \quad (1.48)$$

où

- $Q_{fi}$  : débit de fuites inter-chambres ;
- $Q_{fe}$  : débit de fuites externes ;
- $\lambda_{fi}$  : coefficient de fuites inter-chambres ;
- $\lambda_{fe}$  : coefficient de fuites externes du vérin ;
- $P_i$  : la pression dans la chambre  $i$  du vérin ( $i = 1; 2$ ) ;
- $P_r$  : la pression de retour.

Cela permet d'écrire les équations des débits entrant et sortant des deux chambres du vérin considéré sous la forme :

$$\begin{cases} \Sigma Q_{e_1} - \Sigma Q_{s_1} &= Q_1 - Q_{fi} - Q_{fe_1} \\ \Sigma Q_{e_2} - \Sigma Q_{s_2} &= Q_2 + Q_{fi} - Q_{fe_2} \end{cases} \quad (1.49)$$

$Q_i^{(6)}$  ( $i = 1; 2$ ) sont les valeurs algébriques des débits de l'huile entrant et sortant par les deux orifices des deux chambres, fournis par le (ou les) distributeur(s) alimentant le vérin. A partir de (1.47), (1.48) et (1.49) nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} &= \frac{\beta_e}{V_0 + S_1 y} (Q_1 - \lambda_{fi}(P_1 - P_2) - \lambda_{fe}(P_1 - P_r) - S_1 v) \\ \frac{dP_2}{dt} &= \frac{\beta_e}{V_0 - S_2 y} (Q_2 + \lambda_{fi}(P_1 - P_2) - \lambda_{fe}(P_2 - P_r) + S_2 v) \end{cases} \quad (1.50)$$

---

<sup>(6)</sup>Les expressions de  $Q_i$  seront données explicitement dans le sous-paragraphe suivant.

$y$  et  $v$  représentent respectivement le déplacement et la vitesse de la tige du vérin et  $V_0$  est le demi-volume du vérin défini par

$$V_0 = \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} l_0 + V_m \quad (1.51)$$

où  $S_1$  et  $S_2$  sont les surfaces utiles et  $l_0$  et  $V_m$  désignent respectivement la course du vérin et le volume mort.

#### 1.4.1.2 Vérin symétrique

Dans le cas symétrique, pour obtenir les équations décrivant l'évolution des pressions dans les deux chambres, il suffit de poser  $S_1 = S_2 = S$  dans l'équation (1.50). On déduit le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = \frac{\beta_e}{V_0 + Sy} (Q_1 - \lambda_{fi}(P_1 - P_2) - \lambda_{fe}(P_1 - P_r) - Sv) \\ \frac{dP_2}{dt} = \frac{\beta_e}{V_0 - Sy} (Q_2 + \lambda_{fi}(P_1 - P_2) - \lambda_{fe}(P_2 - P_r) + Sv) \end{cases} \quad (1.52)$$

Dans ce cas, l'expression de  $V_0$  devient :

$$V_0 = \frac{Sl_0}{2} + V_m$$

## 1.5 Modélisation d'un servovérin

Le servovérin est le système électrohydraulique qui sera étudié tout au long de ce travail. Il est constitué d'un vérin hydraulique double effet entraînant une charge et d'une (de deux) servovalve(s) (FIG.1.32). Dans la littérature, la modélisation de ces processus [BRS66, JK03, Leb86, Mar93, MM80, Mer67, Wat89] repose essentiellement sur les lois d'écoulement du fluide à travers des restrictions variables des servovalves et les lois de la mécanique appliquées à l'ensemble mobile constitué par la charge inertielle et la tige du vérin.

### 1.5.1 Partie mécanique

Les équations mécaniques sont obtenues par application de la loi de Newton à la partie mobile constituée par la tige du vérin et la masse inertielle  $M$ . En considérant que la charge  $M$  est soumise à un effort résistant  $F_0$  et à un frottement visqueux nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{M} (S_1 P_1 - S_2 P_2 - F_0 - b_v v) \\ \frac{dy}{dt} = v \end{cases} \quad (1.53)$$

où  $v$  et  $y$  sont respectivement la vitesse et la position de la tige du vérin.  $S_1$  et  $S_2$  représentent les sections utiles des deux faces du piston et  $b_v$  est le coefficient de frottement visqueux.

## 1.5.2 Système avec deux distributeurs

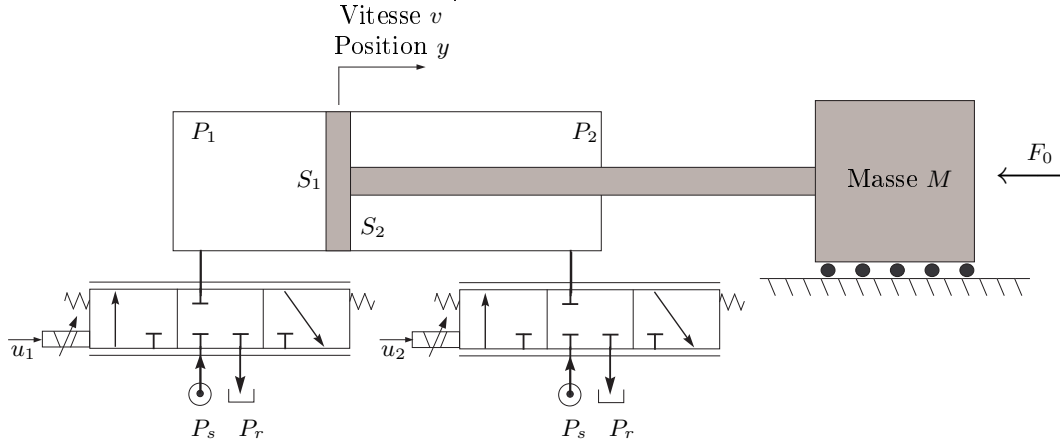


FIG. 1.32: Système électrohydraulique avec deux servovalves.

Dans un système électrohydraulique constitué d'un vérin asymétrique et de deux servovalves<sup>(7)</sup>, le débit de l'huile est commandé séparément dans chacune des deux chambres. A partir des équations d'évolution des pressions  $P_1$  et  $P_2$  présentées par (1.50) et celles qui donnent les débits d'une servovalve (1.41), nous obtenons le système décrivant le comportement de la partie hydraulique suivant

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = \frac{\beta_e}{V_0 + S_1 y} (x_{d_1} \varphi_1(P_1, x_{d_1}) - \lambda_{fi}(P_1 - P_2) - \lambda_{fe} P_1 - S_1 v) \\ \frac{dP_2}{dt} = \frac{\beta_e}{V_0 - S_2 y} (-x_{d_2} \varphi_2(P_2, -x_{d_2}) + \lambda_{fi}(P_1 - P_2) - \lambda_{fe} P_2 + S_2 v) \end{cases} \quad (1.54)$$

avec

$$\varphi_i(P_i, x_{d_i}) = \begin{cases} \varphi_i^+(P_i) = k_{di} S \operatorname{sgn}(P_s - P_i) \sqrt{|P_s - P_i|} & \text{si } x_{d_i} \geq 0 \\ \varphi_i^-(P_i) = k_{di} S \operatorname{sgn}(P_i - P_r) \sqrt{|P_i - P_r|} & \text{si } x_{d_i} < 0 \end{cases} \quad i = 1; 2 \quad (1.55)$$

où  $P_s$  est la pression source,  $P_r$  la pression de retour et  $P_1$  et  $P_2$  les pressions dans les deux chambres du vérin.  $x_{d_1}$  et  $x_{d_2}$  représentent les déplacements des tiroirs des deux servovalves utilisées.  $V_0$  est le volume donné par (1.51) et  $k_{s_1}$  et  $k_{s_2}$  des constantes positives caractérisant les servovalves et définis par

$$k_{di} = \frac{Q_{nj}}{u_{nj} \sqrt{\Delta P_n}} \quad j = 1; 2 \quad (1.56)$$

$Q_{nj}$ ,  $u_{nj}$  et  $\Delta P_n$  désignent respectivement les valeurs nominales du débit, du courant et de la perte de charge par arête active correspondant à la zone linéaire de la relation débit-courant du distributeur [Fai99].

<sup>(7)</sup>de type trois positions trois voies.

Le comportement du système électrohydraulique commandé par deux servovalves est donc décrit par le modèle non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{P}_1 &= \frac{\beta_e}{V_0 + S_1 y} (x_{d_1} \varphi_1(P_1, x_{d_1}) - \lambda_{fi}(P_1 - P_2) - \lambda_{fe} P_1 - S_1 v) \\ \dot{P}_2 &= \frac{\beta_e}{V_0 - S_2 y} (-x_{d_2} \varphi_2(P_2, -x_{d_2}) + \lambda_{fi}(P_1 - P_2) - \lambda_{fe} P_2 + S_2 v) \\ \dot{v} &= \frac{1}{M} (S_1 P_1 - S_2 P_2 - F_0 - b_v v) \\ \dot{y} &= v \end{cases} \quad (1.57)$$

où les expressions des deux fonctions  $\varphi_1(P_1, x_{d_1})$  et  $\varphi_2(P_2, x_{d_2})$  sont données par (1.55)

### 1.5.3 Cas d'un seul distributeur

Dans le cas où le système électrohydraulique est commandé à travers une seule servovalve, le modèle mathématique peut être déduit à partir de (1.57), en remplaçant  $x_{d_1}$  et  $x_{d_2}$  par une seule variable de commande  $x_d$

$$\begin{cases} \dot{P}_1 &= \frac{\beta_e}{V_0 + S_1 y} (x_d \varphi_a(P_1, x_d) - \lambda_{fi}(P_1 - P_2) - \lambda_{fe} P_1 - S_1 v) \\ \dot{P}_2 &= \frac{\beta_e}{V_0 - S_2 y} (-x_d \varphi_a(P_2, -x_d) + \lambda_{fi}(P_1 - P_2) - \lambda_{fe} P_2 + S_2 v) \\ \dot{v} &= \frac{1}{M} (S_1 P_1 - S_2 P_2 - F_0 - b_v v) \\ \dot{y} &= v \end{cases} \quad (1.58)$$

avec

$$\varphi_a(P_i, x_d) = \begin{cases} k_d \operatorname{Sgn}(P_s - P_i) \sqrt{|P_s - P_i|} & \text{si } x_d \geq 0 \\ k_d \operatorname{Sgn}(P_i - P_r) \sqrt{|P_i - P_r|} & \text{si } x_d < 0 \end{cases} \quad i = 1; 2 \quad (1.59)$$

### 1.5.4 Modélisation par prise en compte de la pression différentielle

Le modèle électrohydraulique présenté dans ce paragraphe décrit un système électrohydraulique commandé par une seule servovalve (FIG.1.33). C'est un modèle, où les dynamiques des pressions dans les chambres du vérin sont remplacées par celle de la pression différentielle notée  $P_L$ . Ce modèle offre l'avantage d'une réduction du nombre des équations d'état décrivant le fonctionnement du système électrohydraulique. Cette réduction permet également d'envisager l'utilisation d'un seul distributeur pour commander l'actionneur.

La pression différentielle  $P_L$  est définie par :

$$P_L = \alpha P_1 - P_2 \quad (1.60)$$

où  $\alpha = \frac{S_1}{S_2}$  représente le rapport des sections utiles.

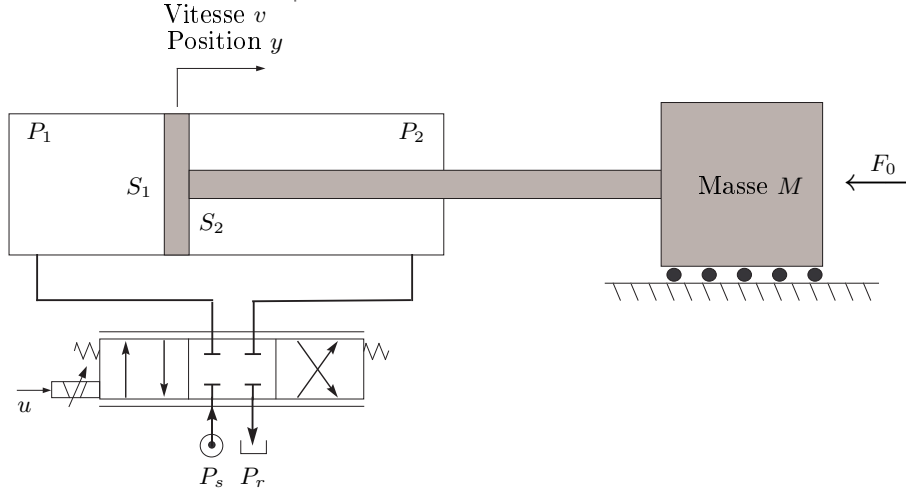


FIG. 1.33: Vérin asymétrique commandé par une seule servovalve.

En supposant, d'une part, qu'il n'y a pas de fuite ou les différents débits de fuites sont négligeables devant les débits de transfert  $Q_1$  et  $Q_2$  et, d'autre part, que le distributeur est parfaitement symétrique, nous pouvons déduire de l'équation de continuité la relation suivante [JK03] :

$$\frac{Q_1}{S_1} = -\frac{Q_2}{S_2} \quad (1.61)$$

Le modèle avec pression différentielle est obtenu à partir de celui donné par (1.58). Pour ce faire, nous donnons, dans un premier temps, l'expression de  $P_1$  et  $P_2$  en fonction de  $P_s$ ,  $P_r$  et  $P_L$  et ceci selon le signe de  $x_d$ .

Par la suite nous utiliserons  $Q_L$  pour désigner le débit de charge défini par

$$Q_L = \alpha Q_1 - Q_2. \quad (1.62)$$

Nous distinguons deux cas selon le signe de  $x_d$  :

–  $x_d \geq 0$ .

Dans ce cas, nous avons

$$\begin{cases} Q_1 = k_d x_d \operatorname{Sgn}(P_s - P_1) \sqrt{|P_s - P_1|} \\ Q_2 = k_d x_d \operatorname{Sgn}(P_r - P_2) \sqrt{|P_r - P_2|}. \end{cases} \quad (1.63)$$

En utilisant l'équation (1.61), nous obtenons les deux égalités suivantes

$$\operatorname{Sgn}(P_s - P_1) = \operatorname{Sgn}(P_2 - P_r) \quad (1.64)$$

et

$$\sqrt{|P_s - P_1|} = \alpha \sqrt{|P_2 - P_r|}. \quad (1.65)$$

Grâce aux équations (1.64) et (1.65) et à l'expression de  $P_L$ , donnée par (1.60), on peut déduire la valeur des deux pressions  $P_1$  et  $P_2$  en fonction de  $P_s$ ,  $P_r$  et  $P_L$ ; à savoir,

$$\begin{cases} P_1 = \frac{P_s + \alpha^2 P_r + \alpha^2 P_L}{\alpha^3 + 1} \\ P_2 = \frac{\alpha P_s + \alpha^3 P_r - P_L}{\alpha^3 + 1} \end{cases} \quad (1.66)$$

Par ailleurs, d'après les équations (1.62), (1.63) et (1.66), nous avons

$$Q_L = k_d x_d (\alpha^2 + 1) \text{Sgn}(\alpha P_s - P_r - P_L) \sqrt{\left| \frac{\alpha P_s - P_r - P_L}{\alpha^3 + 1} \right|} \quad (1.67)$$

–  $x_d < 0$ .

Nous avons les expressions des débits  $Q_1$  et  $Q_2$  suivantes

$$\begin{cases} Q_1 = k_d x_d \text{Sgn}(P_1 - P_r) \sqrt{|P_1 - P_r|} \\ Q_2 = k_d x_d \text{Sgn}(P_2 - P_s) \sqrt{|P_2 - P_s|} \end{cases} \quad (1.68)$$

D'après l'équation (1.61), nous avons

$$\text{Sgn}(P_s - P_1) = \text{Sgn}(P_2 - P_r) \quad (1.69)$$

et

$$\sqrt{|P_1 - P_r|} = \alpha \sqrt{|P_s - P_2|} \quad (1.70)$$

Ceci nous permet d'écrire les expressions des pressions  $P_1$  et  $P_2$  sous la forme

$$\begin{cases} P_1 = \frac{P_r + \alpha^2 P_s + \alpha^2 P_L}{\alpha^3 + 1} \\ P_2 = \frac{\alpha P_r + \alpha^3 P_s - P_L}{\alpha^3 + 1} \end{cases} \quad (1.71)$$

L'expression du débit  $Q_L$  dans le cas  $x_d < 0$ , est obtenue à partir des équations (1.62), (1.68) et (1.71) :

$$Q_L = -k_d x_d (\alpha^2 + 1) \text{Sgn}(\alpha P_r - P_s - P_L) \sqrt{\left| \frac{\alpha P_r - P_s - P_L}{\alpha^3 + 1} \right|} \quad (1.72)$$

En introduisant la variable  $P_\alpha$  définie par

$$P_\alpha = \begin{cases} P_\alpha^+ = P_s + \alpha^2 P_r & \text{si } x_d \geq 0 \\ P_\alpha^- = P_r + \alpha^2 P_s & \text{si } x_d < 0 \end{cases} \quad (1.73)$$

il vient que

$$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{\alpha^3 + 1} P_\alpha + \frac{\alpha^2}{\alpha^3 + 1} P_L \\ P_2 = \frac{\alpha}{\alpha^3 + 1} P_\alpha - \frac{1}{\alpha^3 + 1} P_L \end{cases} \quad (1.74)$$



La dynamique de la pression différentielle est déduite des relations (1.58), (1.67), (1.72), et (1.74). En effet, en dérivant les membres de l'équation (1.60), on peut montrer que

$$\begin{aligned} \dot{P}_L = & \frac{\beta_e}{(V_0 + S_1 y)(V_0 - S_2 y)} \left\{ \left( V_0 - S_1 \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 + 1} y \right) [\varphi_L(P_L, x_d) x_d - S_2(\alpha^2 + 1)v] \right. \\ & + \frac{\lambda_{fi} V_0}{\alpha^2 - \alpha + 1} [(\alpha - 1)P_\alpha - (\alpha^2 + 1)P_L] \\ & \left. + \lambda_{fe} \left[ -V_0 P_L + \frac{S_1 y}{\alpha^3 + 1} [(\alpha + 1)P_\alpha + (\alpha^2 - 1)P_L] + P_r [(\alpha - 1)V_0 - 2S_1 y] \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.75)$$

avec

$$\varphi_L(P_L, x_d) = \begin{cases} \varphi_L^+(P_L) = k_d(\alpha^2 + 1) \operatorname{Sgn}(\alpha P_s - P_r - P_L) \sqrt{\left| \frac{\alpha P_s - P_r - P_L}{\alpha^3 + 1} \right|} & \text{si } x_d \geq 0 \\ \varphi_L^-(P_L) = k_d(\alpha^2 + 1) \operatorname{Sgn}(P_s - \alpha P_r + P_L) \sqrt{\left| \frac{P_s - \alpha P_r + P_L}{\alpha^3 + 1} \right|} & \text{si } x_d < 0 \end{cases} \quad (1.76)$$

Finalement, le modèle avec pression différentielle d'un vérin actionné par un seul distributeur est donné par

$$\begin{cases} \dot{P}_L = \frac{\beta_e}{(V_0 + S_1 y)(V_0 - S_2 y)} \left\{ \left( V_0 - S_1 \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 + 1} y \right) [\varphi_L(P_L, x_d) x_d - S_2(\alpha^2 + 1)v] \right. \\ \quad + \frac{\lambda_{fi} V_0}{\alpha^2 - \alpha + 1} [(\alpha - 1)P_\alpha - (\alpha^2 + 1)P_L] \\ \quad \left. + \lambda_{fe} \left[ -V_0 P_L + \frac{S_1 y}{\alpha^3 + 1} [(\alpha + 1)P_\alpha + (\alpha^2 - 1)P_L] + P_r [(\alpha - 1)V_0 - 2S_1 y] \right] \right\} \\ \dot{v} = \frac{1}{M} (S_2 P_L - b_v v - F_0) \\ \dot{y} = v \end{cases} \quad (1.77)$$

où les expressions de  $P_\alpha$  et  $\varphi_L(P_L, x_d)$  sont données respectivement par (1.73) et (1.76).

#### 1.5.4.1 Cas particulier

Considérons le cas d'un vérin symétrique (FIG.1.35) sans force antagoniste et supposons que les fuites ainsi que les frottements visqueux sont négligeables. Dans ce cas le modèle avec pression différentielle est déduit directement du modèle (1.77) en prenant  $\alpha = 1$ ,

$\lambda_{fi} = 0$  et  $\lambda_{fe} = 0$

$$\begin{cases} \dot{P}_L &= \frac{\beta_e V_0}{V_0^2 - (S y)^2} [\varphi_L(P_L, x_d) x_d - 2S v] \\ \dot{v} &= \frac{S}{M} P_L \\ \dot{y} &= v \end{cases} \quad (1.78)$$

avec

$$\varphi_L(P_L, x_d) = \begin{cases} \varphi_L^+(P_L) = k_d \operatorname{Sgn}(P_s - P_r - P_L) \sqrt{2|P_s - P_r - P_L|} & \text{si } x_d \geq 0 \\ \varphi_L^-(P_L) = k_d \operatorname{Sgn}(P_s - P_r + P_L) \sqrt{2|P_s - P_r + P_L|} & \text{si } x_d < 0 \end{cases} \quad (1.79)$$

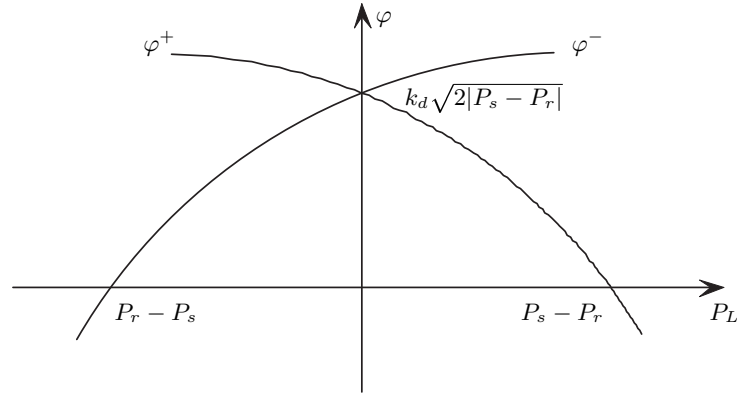


FIG. 1.34: Les fonctions  $\varphi^+$  et  $\varphi^-$  pour  $\alpha = 1$ .

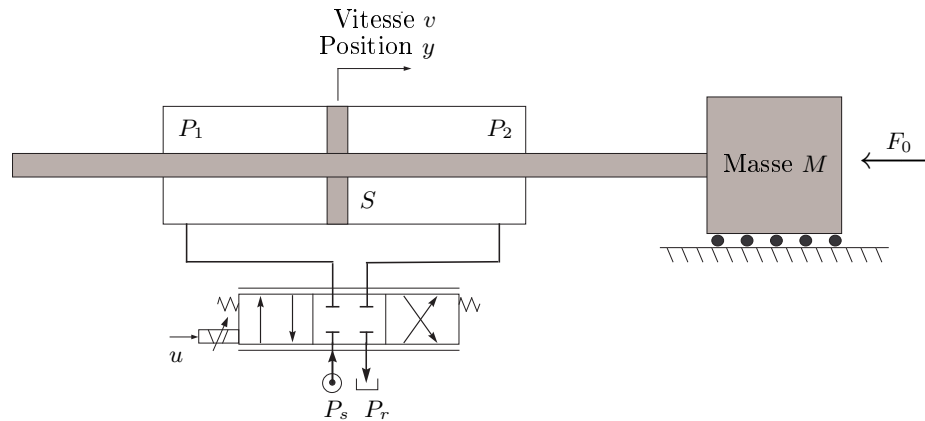


FIG. 1.35: Vérin symétrique actionné par une seule servovalve.

Pour conclure ce sous-paragraphe, nous souhaitons effectuer une brève comparaison entre les modèles présentés ici et ceux de la littérature.

En général, les travaux dédiés en partie ou complètement à la modélisation des systèmes électrohydrauliques, par utilisation de la pression différentielle [AL00, KL02, LK97, NWS00, YBC98], sont fondés sur un résultat donné dans [Mer67]. Ce résultat est basé sur l'hypothèse que la somme des pressions est constante lors de l'évolution du système. Plus précisément, on considère l'approximation  $P_1(t) + P_2(t) \approx P_s$  pour  $t \geq 0$ . Par conséquent, la dynamique de la somme des pressions peut être négligée dans l'expression du débit de charge. Ainsi, les expressions des pressions  $P_1$  et  $P_2$  en fonction de la pression différentielle sont facilement déterminées par :

$$\begin{cases} P_1 &= \frac{P_s + P_L}{2} \\ P_2 &= \frac{P_s - P_L}{2}. \end{cases} \quad (1.80)$$

Dans ce travail, et par un souci de précision, nous nous sommes affranchi de ce type d'hypothèse. C'est ainsi que le modèle proposé (1.77) est valide pour toute évolution du processus et même si par exemple les pressions seraient situées à l'extérieur de l'intervalle  $[P_r; P_s]$ . Néanmoins, il convient de préciser que certains travaux de la littérature (voir par exemple [JK03]) se basent sur une démarche similaire et les auteurs supposent les mêmes hypothèses que celles considérées ici. Ainsi, le modèle (1.58) a été introduit et utilisé dans plusieurs travaux [AL97, JK03, PSLO02, RO95, Wan61, Wan63, YBRC00]. Cependant, et à notre connaissance, le cas asymétrique n'a pas encore été traité. Ainsi, le nouveau modèle défini par (1.77) peut s'avérer pertinent.

## 1.6 Un modèle global

Le but de cette partie est de présenter un exemple de modèle complet tenant compte de la dynamique de la servovalve.

Considérons un système électrohydraulique constitué d'un vérin asymétrique, commandé par deux distributeurs. Le modèle (1.81), est obtenu à partir du modèle (1.57) et par considération de la dynamique des deux distributeurs. Cette dynamique est décrite par un système du premier ordre (voir (1.46))

$$\begin{cases} \dot{P}_1 &= \frac{\beta_e}{V_0 + S_1 y} (x_{d_1} \bar{\varphi}_1(P_1, x_{d_1}) - S_1 v) \\ \dot{P}_2 &= \frac{\beta_e}{V_0 - S_2 y} (-x_{d_2} \bar{\varphi}_2(P_2, -x_{d_2}) + S_2 v) \\ \dot{v} &= \frac{1}{M} (S_1 P_1 - S_2 P_2 - b_v v) \\ \dot{y} &= v \\ \dot{x}_{d_1} &= -\frac{1}{\tau_{d_1}} (x_{d_1} - K_{d_1} u_{d_1}) \\ \dot{x}_{d_2} &= -\frac{1}{\tau_{d_2}} (x_{d_2} - K_{d_2} u_{d_2}) \end{cases} \quad (1.81)$$

où  $\tau_{d_i}$  ( $i = 1; 2$ ) et  $K_{d_i}$  ( $i = 1; 2$ ) représentent respectivement les constantes de temps et les gains statiques des distributeurs. Les fonctions  $\bar{\varphi}_1$  et  $\bar{\varphi}_2$  sont données par

$$\bar{\varphi}_i(P_i, x_{d_i}) = \begin{cases} \bar{\varphi}_i^+(P_i) = \bar{k}_{d_i} \operatorname{Sgn}(P_s - P_i) \sqrt{|P_s - P_i|} & \text{si } x_{d_i} \geq 0 \\ \bar{\varphi}_i^-(P_i) = \bar{k}_{d_i} \operatorname{Sgn}(P_i - P_r) \sqrt{|P_i - P_r|} & \text{si } x_{d_i} < 0 \end{cases} \quad i = 1; 2 \quad (1.82)$$

où les constantes  $\bar{k}_{d_i}$  ( $i = 1; 2$ ) sont strictement positives telles que

$$\bar{k}_{d_i} = K_{d_i} k_{d_i} \quad (1.83)$$

Ce modèle sera considéré dans le chapitre consacré à la commande par utilisation de modèles non linéaires.

## 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la mise en œuvre de modèles de connaissance pour l'asservissement de position des actionneurs électrohydrauliques. Nous avons rappelé les différentes lois fondamentales nécessaires à cette modélisation. Par ailleurs, nous avons utilisé la loi de conservation de masse pour obtenir les équations différentielles de mise en pression dans les chambres du vérin. La relation de Bernoulli a été utilisée pour exprimer les débits volumiques passant au travers des orifices variables des pré-actionneurs. Finalement, le principe fondamental de la dynamique nous a permis d'établir les équations des mouvements du vérin et de la charge. Lorsque le vérin est commandé par deux distributeurs, le modèle obtenu est un système d'équations différentielles non linéaires de dimension quatre. Nous avons également proposé une approximation de ce modèle permettant ainsi de réduire sa dimension en exprimant, à la place des équations de mise en pression de chaque chambre, l'évolution de la pression différentielle. Nous avons aussi proposé d'intégrer la dynamique des distributeurs, modélisée par une équation différentielle linéaire de degré un, rendant ainsi le modèle plus représentatif de la réalité. Il convient de préciser que le fait de tenir compte de la dynamique des distributeurs revient à un ajout d'intégrateur par rapport au modèle initial.

Les équations différentielles obtenues dans ce chapitre serviront de modèle pour :

- l'analyse de l'ensemble d'équilibre,
- le calcul des modèles linéarisés tangents, et
- la synthèse de lois de commande linéaires ou non linéaires.

Ces différents points feront l'objet des chapitres suivants.



# Chapitre 2

## Commande par approche linéaire

### 2.1 Introduction

Pour tout système de commande, la connaissance de l'ensemble des points de fonctionnement autour desquels la régulation peut être effectuée est primordiale. Ainsi, la première étape consiste à définir l'ensemble des points d'équilibre en exploitant les équations mathématiques du modèle considéré. Ensuite, la seconde étape sera celle du choix, parmi les points d'équilibre, d'un point de fonctionnement en introduisant des contraintes physiques (par exemple la positivité des pressions) et les contraintes liées au cahier des charges.

Tout d'abord, nous allons préciser quelques aspects "technologiques" des systèmes électrohydrauliques qui peuvent influencer les calculs des points de fonctionnement.

Pour les dispositifs électrohydrauliques, comme pour tous les procédés industriels, la première phase lors de leur conception consiste à les dimensionner. En ce qui concerne les systèmes électrohydrauliques, le cahier des charges<sup>(8)</sup> est généralement lié aux critères suivants :

- la force exercée par le vérin ;
- la masse totale déplacée ;
- la vitesse maximale à vide ;
- etc.

Ainsi, lors de la conception d'un dispositif électrohydraulique, il est important de dimensionner convenablement les éléments suivants :

- les sections utiles du vérin,
- le débit nominal du pré-actionneur, et
- la pression source.

Il est à noter que les différents paramètres qui caractérisent le dispositif restant, par exemple la puissance de la centrale hydraulique, découlent généralement de ces éléments. Dans le processus de dimensionnement, on prend également en compte des limitations "physiques". Par exemple, en mode de fonctionnement "normal", il est également souhai-

---

<sup>(8)</sup>D'autres critères concernant l'asservissement, comme la précision ou le temps de réponse, peuvent être également pris en compte.

table que les pressions à l'équilibre dans les chambres du vérin soient bornées par  $P_s$  et  $P_r$  et ceci afin d'éviter, lorsque le distributeur est ouvert, les écoulements inverses<sup>(9)</sup> et les problèmes de cavitation. Il convient de préciser que ces considérations viennent compléter l'analyse réalisée à partir des modèles mathématiques. En effet, les modèles mathématiques considérés pour décrire le comportement des dispositifs électrohydrauliques, ne reflètent pas clairement et d'une façon explicite certaines contraintes physiques.

Ce chapitre est consacré au rappel des méthodes linéaires les plus utilisées pour la commande des actionneurs hydrauliques. Dans l'industrie, ces actionneurs sont appelés servovérins ou servomoteurs ou encore servo-actionneurs hydrauliques.

La commande des actionneurs hydrauliques a suscité l'intérêt de la communauté des automaticiens et des hydrauliciens depuis plusieurs années. Une large éventail de stratégies de commande a été appliquée pour ces actionneurs. Les méthodes classiques de type PID (retour de sortie) ont été utilisées par Merritt [Mer67], Viersma [Vie80] pour l'asservissement de position, et par Anderson [And88], Chern et Wu [CW92], Jen et Lee [JL92], et Huang et Wang [HW95] pour l'asservissement de vitesse. Dans [LMC96, LM95, MLM00] les auteurs ont utilisé la commande  $H_\infty$  sur le modèle linéarisé tangent pour asservir un actionneur hydraulique en force. Musset [Mus01] a appliqué sur un essieu directionnel actionné par des vérins symétriques la commande  $H_\infty$  et la commande basée sur un observateur. McClamroch [McC85], Bobrow et Lum [BL96], Polzer et Nissing [PN00] et Tafazoli et al. [TSL98], ont utilisé en plus un filtre de précompensation des "perturbations" mesurables (une force antagoniste par exemple) ou des non-linéarités "dures" (par exemple un recouvrement). Von Wierschem [Wie81], Köchemann et al. [KKL91], Neumann et al. [NEW91a, NEW91b], par exemple, ont appliqué la commande par retour d'état sur le modèle linéarisé tangent. Des stratégies de commande, moins classiques, mais toujours basées sur le modèle linéarisé tangent des actionneurs, ont été également appliquées. On peut citer par exemple la commande prédictive [KCL94, WSZ98], la commande floue [Det99], Behmenburg [Beh95], Boes [Boe95], Zhao et Virvalo [ZV95], Berger [Ber97], ou encore la commande par réseaux de neurones (Burton et al. [BSG92], Plummer et Vaughan [PV96] et [DBM01]).

Des méthodes issues de l'automatique non-linéaire ont été également appliquées sur les actionneurs électrohydrauliques. On peut citer par exemple la commande par modes glissants (Lee et Lee [LL90], Chern et Wu [CW92], Hwang et Lan [HL94]), la commande linéarisante (Del Re et Isidori [RI95], Vossoughi et Donath [VD95], Alleyne [All96]) et la commande adaptative (Porter et Tatnall [PT70] Kulkarni et al [KTC84])

Les principaux objectifs pour la commande des actionneurs électrohydrauliques sont les suivants :

- une stabilité du système bouclé qui soit robuste vis-à-vis des dynamiques non modélisées, des non-linéarités, des perturbations et des variations des paramètres, et

---

<sup>(9)</sup>c'est-à-dire, écoulement du réservoir vers une chambre ( $P_i < P_r$ ) ou d'une chambre vers la source ( $P_s < P_i$ )

- ceci pour tout le domaine de fonctionnement ;  
 – une réponse suffisamment rapide mais avec un amortissement correct.

Ces objectifs doivent être atteints sans pour autant surdimensionner, par exemple, la section utile du vérin ni la pression de la source. Compte tenu de ces conditions et de la complexité des modèles des systèmes électrohydrauliques, la mise au point de ces correcteurs est donc une tâche relativement difficile en pratique.

Dans le deuxième paragraphe de ce chapitre, nous discuterons les points d'équilibre des différents modèles représentant le comportement des systèmes électrohydrauliques. Puis, dans le troisième paragraphe nous déduirons les modèles linéarisés tangents ainsi que les fonctions de transfert associées. Par la suite, nous analyserons ces systèmes en étudiant leur stabilisabilité et leur détectabilité. Enfin, dans le quatrième paragraphe nous ferons la synthèse de lois de commande linéaires les plus utilisées pour les modèles linéarisés tangents.

## 2.2 Points d'équilibre

En automatique moderne, fondée sur l'utilisation de modèles mathématiques, les actions que sont la commande par retour d'état ou l'obtention d'un modèle linéarisé tangent nécessitent la détermination d'un point d'équilibre autour duquel l'opération doit être effectuée. Le résultat obtenu sera directement lié à ce point.

La détermination des ensembles des points d'équilibre des modèles liés aux systèmes électrohydrauliques, commandés avec un ou deux distributeurs, dépend de la nature du vérin utilisé (symétrique ou asymétrique), des valeurs des commandes à l'équilibre et du fait que les fuites sont supposées à effet négligeable ou non. Suivant ces considérations, il existe de nombreux cas. Il est à noter que les ensembles des points d'équilibre, liés aux différentes configurations, sont obtenus directement à partir des équations d'équilibre. Dans ce paragraphe, nous donnerons la définition d'un point d'équilibre et rappellerons les modèles mathématiques considérés. Pour chaque modèle nous donnerons les équations d'équilibre puis nous présenterons un calcul complet pour quelques configurations.

Tout au long de ce mémoire, nous considérons que  $P_s > P_r > 0$ ,  $\alpha = \frac{S_1}{S_2} \geq 1$  et que  $F_0$  est une constante.

**Définition 2.1.** *Considérons le système non-linéaire à temps continu suivant*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (2.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système,  $t$  désigne le temps et  $u \in \mathbb{R}^m$  est la commande.  $(x^0, u^0)$  est dit point d'équilibre du système (2.1) si :  $f(x^0, u^0) = 0$ . ■

### 2.2.1 Modèles avec la dynamique des pressions $P_1$ , $P_2$

Le modèle mathématique (2.2), déduit à partir du système (1.57), décrit le comportement d'un système électrohydraulique comprenant un vérin asymétrique, commandé par



deux distributeurs et tenant compte des fuites.

$$\begin{cases} \dot{P}_1 &= \frac{-\beta_e}{V_0 + S_1 y} [S_1 v + \lambda(P_1 - P_2) - \varphi_1(P_1, u_1)u_1] \\ \dot{P}_2 &= \frac{\beta_e}{V_0 - S_2 y} [S_2 v + \lambda(P_1 - P_2) - \varphi_2(P_2, -u_2)u_2] \\ \dot{v} &= \frac{1}{M}(S_1 P_1 - S_2 P_2 - b_v v - F_0) \\ \dot{y} &= v \end{cases} \quad (2.2)$$

avec

$$\varphi_i(P_i, u_i) = \begin{cases} \varphi_i^+(P_i) = k_{di} \operatorname{Sgn}(P_s - P_i) \sqrt{|P_s - P_i|} & \text{si } u_i \geq 0 \\ \varphi_i^-(P_i) = k_{di} \operatorname{Sgn}(P_i - P_r) \sqrt{|P_i - P_r|} & \text{si } u_i < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

et le terme  $b_v v$  représente les frottements visqueux.

L'équilibre<sup>(10)</sup> est déterminé par les équations suivantes :

$$\begin{cases} v^0 &= 0 \end{cases} \quad (2.4 \text{ a})$$

$$\begin{cases} P_1^0 &= \frac{P_2^0}{\alpha} + \frac{F_0}{S_1} \end{cases} \quad (2.4 \text{ b})$$

$$\begin{cases} \lambda(P_1^0 - P_2^0) - \varphi_1(P_1^0, u_1^0)u_1^0 &= 0 \end{cases} \quad (2.4 \text{ c})$$

$$\begin{cases} \lambda(P_1^0 - P_2^0) - \varphi_2(P_2^0, -u_2^0)u_2^0 &= 0 \end{cases} \quad (2.4 \text{ d})$$

D'après les équations (2.4 a) (2.4 c) et (2.4 d), on déduit que

$$\varphi_1(P_1^0, u_1^0)u_1^0 = \varphi_2(P_2^0, -u_2^0)u_2^0 \quad (2.5)$$

Comme  $\varphi_i (i = 1; 2)$  est positive pour  $P_i^0 \in [P_r; P_s]$  ( $i = 1; 2$ ) alors si  $u_1^0 u_2^0 < 0$  le système d'équation (2.4) ne possède pas de solution. Par la suite, on supposera donc que  $u_1^0 u_2^0 \geq 0$ . L'équation (2.4 b) donne une relation, dépendante de la valeur de  $F_0$ , entre  $P_1^0$  et  $P_2^0$ . Ainsi, pour que  $P_1^0$  soit à l'intérieur de l'intervalle  $[P_r; P_s]$ , la condition suivante doit être réalisée.

$$P_1^0 = \frac{P_2^0}{\alpha} + \frac{F_0}{S_1} \in [P_r; P_s] \quad (2.6)$$

ou encore

$$P_2^0 \in I_\alpha = \left[ \alpha \left( P_r - \frac{F_0}{S_1} \right); \alpha \left( P_s - \frac{F_0}{S_1} \right) \right]. \quad (2.7)$$

Or  $P_2^0$  doit aussi appartenir à  $[P_r; P_s]$ , il faut donc que

$$I_i = I_\alpha \cap [P_r; P_s] \neq \emptyset \quad (2.8)$$

où  $\emptyset$  désigne l'ensemble vide.

---

<sup>(10)</sup>Tout le long de ce mémoire on utilisera  $z^0$  (où  $z \in \{P_i, u_i, v, y\}$ ) pour désigner la valeur à l'équilibre de la grandeur physique  $z$ .

Un raisonnement simple montre que si

$$F_0 \in [S_1 P_r - S_2 P_s; S_1 P_s - S_2 P_r] \quad (2.9)$$

alors la condition (2.8) est réalisée. En outre, si

$$\frac{F_0}{S_1 - S_2} \in [P_r; P_s] \quad (2.10)$$

alors on peut déduire que

$$[P_r; P_s] \subset I_\alpha. \quad (2.11)$$

Par la suite, on supposera que la condition nécessaire (2.9) pour l'existence d'une solution au système (2.4) est vérifiée. L'état d'équilibre est donné par

$$P_2^0 \in I_i, \quad P_1^0 = \frac{P_2^0}{\alpha} + \frac{F_0}{S_1}, \quad v^0 = 0, \quad \text{et} \quad y^0 \in \left] -\frac{V_0}{S_1}; \frac{V_0}{S_2} \right[. \quad (2.12)$$

Pour calculer explicitement la valeur de  $u_i^0 (i = 1; 2)$  nous distinguons trois cas selon la valeur de  $P_2^0$  choisie. En fait, il s'agit implicitement d'une discussion selon le signe de  $P_1^0 - P_2^0$ .

Premièrement, supposons que

$$P_2^0 = \frac{F_0}{S_1 - S_2} \quad (2.13)$$

En vertu de (2.6), on a  $P_1^0 = P_2^0$ . Alors, les équations (2.4 c) et (2.4 d) sont réduites à

$$\begin{cases} \varphi_1(P_1^0, u_1^0) u_1^0 = 0 \\ \varphi_2(P_2^0, -u_2^0) u_2^0 = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Le système d'équations (2.14) peut aussi être exprimé sous la forme :

$$\begin{cases} \varphi_1(P_1^0, u_1^0) = 0 & \text{ou} & u_1^0 = 0 \\ \varphi_2(P_2^0, -u_2^0) = 0 & \text{ou} & u_2^0 = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

On remarque que

$$u_1^0 = u_2^0 = 0, \quad (2.16)$$

est une solution pour (2.15) indépendamment des valeurs de  $P_1^0$  et  $P_2^0$ . Les solutions de (2.15) qui vérifient en plus  $(u_1^0)^2 + (u_2^0)^2 \neq 0$ , dépendent des valeurs de  $P_1^0$  ou  $P_2^0$ . En effet, dans ce cas, les valeurs de  $u_i^0 (i = 1; 2)$ , quand elles existent<sup>(12)</sup>, peuvent être résumées de

<sup>(11)</sup> Cette hypothèse n'est envisageable que si  $\frac{F_0}{S_1 - S_2} \in I_i$ .

<sup>(12)</sup> c'est-à-dire que  $P_2^0 \in I_i$ .

la façon suivante

$$\begin{aligned}
 & \left( \text{si } (P_1^0 = P_s) \text{ alors } (u_1^0 > 0 \text{ et } [( \text{si } (P_2^0 = P_r) \text{ alors } u_2^0 > 0) \text{ ou } (u_2^0 = 0)]) \right) \\
 & \text{ou} \\
 & \left( \text{si } (P_1^0 = P_r) \text{ alors } (u_1^0 < 0 \text{ et } [( \text{si } (P_2^0 = P_s) \text{ alors } u_2^0 < 0) \text{ ou } (u_2^0 = 0)]) \right) \quad (2.17) \\
 & \text{ou} \\
 & \left( u_1^0 = 0 \text{ et } [( \text{si } (P_2^0 = P_r) \text{ alors } u_2^0 > 0) \text{ ou } ( \text{si } (P_2^0 = P_s) \text{ alors } u_2^0 < 0)] \right)
 \end{aligned}$$

Cependant, il faut noter que  $P_r$  et  $P_s$  n'appartiennent pas forcément à l'intervalle  $I_i$ . En fait, on a

$$P_r \in I_i \text{ si } F_0 \in [P_r(S_1 - S_2); S_1P_s - S_2P_r] \quad (2.18)$$

et

$$P_s \in I_i \text{ si } F_0 \in [S_1P_r - S_2P_s; P_s(S_1 - S_2)]. \quad (2.19)$$

Deuxièmement, supposons que

$$P_2^0 \in I_i - \left[ \frac{F_0}{S_1 - S_2}; +\infty \right[. \quad (2.20)$$

Dans ce cas, et d'après (2.6), on peut montrer que  $P_1^0 > P_2^0$ . Ainsi, et en vertu des équations (2.4 c) et (2.4 d), on en déduit que

$$u_1^0 = \frac{k_{d_1} \sqrt{|P_s - P_1^0|}}{\lambda(P_1^0 - P_2^0)} \quad \text{et} \quad u_2^0 = \frac{k_{d_2} \sqrt{|P_2^0 - P_r|}}{\lambda(P_1^0 - P_2^0)}. \quad (2.21)$$

Troisièmement, supposons que

$$P_2^0 \in I_i - \left] -\infty; \frac{F_0}{S_1 - S_2} \right]. \quad (2.22)$$

Il est aisé, en utilisant (2.6), de vérifier que  $P_1^0 < P_2^0$ . Dans ce cas, les équations (2.4 c) et (2.4 d) conduisent à

$$u_1^0 = \frac{k_{d_1} \sqrt{|P_1^0 - P_r|}}{\lambda(P_1^0 - P_2^0)} \quad \text{et} \quad u_2^0 = \frac{k_{d_2} \sqrt{|P_s - P_2^0|}}{\lambda(P_1^0 - P_2^0)}. \quad (2.23)$$

En conclusion, l'ensemble des points d'équilibre du système (2.2) peut être déterminé à partir de (2.12), (2.16), (2.17), (2.21) et (2.23).

**Remarque 2.1.** Dans le cas d'un vérin symétrique, une analyse similaire peut être faite pour déterminer l'ensemble d'équilibre. En effet, dans ce cas, les conditions (2.9) et (2.10) sont remplacées respectivement par

$$F_0 \in [S(P_r - P_s); S(P_s - P_r)] \quad (2.24)$$

et

$$F_0 = 0. \quad (2.25)$$

Par ailleurs, les conditions (2.13) (2.20) et (2.22) sont substituées respectivement par  $F_0 = 0$ ,  $F_0 < 0$  et  $F_0 > 0$ . ■



où

$$\varphi_L(P_L, u) = \begin{cases} \varphi_L^+(P_L) = k_d(\alpha^2 + 1) \operatorname{Sgn}(\alpha P_s - P_r - P_L) \sqrt{\left| \frac{\alpha P_s - P_r - P_L}{\alpha^3 + 1} \right|} & \text{si } u \geq 0 \\ \varphi_L^-(P_L) = k_d(\alpha^2 + 1) \operatorname{Sgn}(P_s - \alpha P_r + P_L) \sqrt{\left| \frac{P_s - \alpha P_r + P_L}{\alpha^3 + 1} \right|} & \text{si } u < 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

et

$$P_\alpha = \begin{cases} P_\alpha^+ = P_s + \alpha^2 P_r & \text{si } u \geq 0 \\ P_\alpha^- = \alpha^2 P_s + P_r & \text{si } u < 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

avec

$$P_L = \alpha P_1 - P_2 \quad (2.31)$$

A partir du système dynamique (2.28), nous obtenons à l'équilibre

$$\begin{cases} v^0 & = 0 \quad (2.32 \text{ a}) \\ S_2 P_L^0 - F_0 & = 0 \quad (2.32 \text{ b}) \\ \left[ V_0 - y^0 S_1 \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 + 1} \right] \varphi_L(P_L^0, u^0) u^0 + \frac{\lambda V_0}{\alpha^2 - \alpha + 1} [(\alpha - 1) P_\alpha - (\alpha^2 + 1) P_L^0] & = 0 \quad (2.32 \text{ c}) \end{cases}$$

D'après la définition de la variable  $P_L$  (voir (2.31)) et en tenant compte de l'hypothèse  $P_i^0 \in [P_r; P_s]$  ( $i = 1; 2$ ), la pression  $P_L^0$  vérifie

$$P_L^0 \in [\alpha P_r - P_s; \alpha P_s - P_r]. \quad (2.33)$$

D'après l'équation (2.32 c), la pression  $P_L^0$  à l'équilibre est donnée par

$$P_L^0 = \frac{F_0}{S_2} \quad (2.34)$$

et pour que ceci soit possible, d'après la relation (2.33), la force  $F_0$  doit vérifier la condition suivante

$$F_0 \in [S_1 P_r - S_2 P_s; P_s (S_1 - S_2)]. \quad (2.35)$$

On remarque que la condition (2.35) est identique à celle donnée dans le cas d'un modèle comprenant la dynamique des deux pressions  $P_1$  et  $P_2$ . Par la suite, on supposera que cette condition est vérifiée et que l'état d'équilibre est donné par

$$P_L^0 \in [\alpha P_r - P_s; \alpha P_s - P_r], \quad v^0 = 0, \quad \text{et} \quad y^0 \in \left[ -\frac{V_0}{S_1}; \frac{V_0}{S_2} \right] \quad (2.36)$$

D'après l'équation (2.32 c), on déduit que

$$\left[ V_0 - y^0 S_1 \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 + 1} \right] \varphi_L(P_L^0, u^0) u^0 = \frac{\lambda V_0}{\alpha^2 - \alpha + 1} [(\alpha - 1) P_\alpha - (\alpha^2 + 1) P_L^0] \quad (2.37)$$

Comme  $\varphi_L(P_L^0, u^0)$ ,  $\left(V_0 - y^0 S_1 \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 + 1}\right)$  et  $\left(\frac{\lambda V_0}{\alpha^2 - \alpha + 1}\right)$  sont des termes positifs pour un état d'équilibre donné par (2.36) alors  $u^0$  est de même signe que le terme  $[(\alpha - 1)P_\alpha - (\alpha^2 + 1)P_L^0]$ .

Pour déterminer la valeur de  $u^0$  nous discutons trois cas selon la valeur de  $P_L^0$ . En effet, des calculs directs conduisent aux cas suivants :

Si  $\alpha P_r - P_s \leq P_L^0 \leq \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 + 1} P_\alpha^+$  alors

$$u^0 = \frac{\lambda V_0 [(\alpha^2 + 1)P_L^0 - (\alpha - 1)P_\alpha^+] \sqrt{\alpha^3 + 1}}{k_d (\alpha^2 - \alpha + 1) [V_0 (\alpha^2 + 1) - y^0 S_1 (\alpha - 1)] \sqrt{|P_s - \alpha P_r + P_L^0|}} \leq 0 \quad (2.38)$$

Si  $\frac{\alpha - 1}{\alpha^2 + 1} P_\alpha^- \leq P_L^0 \leq \alpha P_s - P_r$  alors

$$u^0 = \frac{\lambda V_0 [(\alpha^2 + 1)P_L^0 - (\alpha - 1)P_\alpha^-] \sqrt{\alpha^3 + 1}}{k_d (\alpha^2 - \alpha + 1) [V_0 (\alpha^2 + 1) - y^0 S_1 (\alpha - 1)] \sqrt{|\alpha P_s - P_r - P_L^0|}} \geq 0 \quad (2.39)$$

Si  $\frac{\alpha - 1}{\alpha^2 + 1} P_\alpha^+ \leq P_L^0 \leq \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 + 1} P_\alpha^-$  alors la valeur de la commande à l'équilibre peut être choisie entre les deux expressions données par (2.38) et (2.39) en fonction du signe de  $u^0$ .

En conclusion, l'ensemble des points d'équilibre du système (2.28) est déduit à partir de (2.36), (2.38) et (2.39).

**Remarque 2.5.** Pour déduire l'ensemble des points d'équilibre du système électrohydraulique dans le cas d'un vérin symétrique, il suffit de remplacer  $S_1$  et  $S_2$  par  $S$ . ■

**Remarque 2.6.** En absence des fuites, l'étude de la détermination de la commande à l'équilibre change légèrement. En effet, avec  $\lambda = 0$ , l'équation (2.32c) s'écrit sous la forme :

$$\varphi_L(P_L^0, u^0) u^0 = 0 \quad (2.40)$$

Une solution évidente est de prendre

$$u^0 = 0 \quad (2.41)$$

Cette solution est indépendante de  $P_L^0$ . Les solutions qui vérifient en plus  $u^0 \neq 0$  existent si  $\varphi_L(P_L^0, u^0) = 0$ . Donc si  $P_L^0 = \frac{F_0}{S_2} = \alpha P_s - P_r$  ou  $P_L^0 = \frac{F_0}{S_2} = \alpha P_r - P_s$ , alors  $u^0$  peut prendre une valeur quelconque dans  $\mathbb{R}$ . ■

### 2.2.3 Conclusion

Dans ce paragraphe, nous avons donné les points d'équilibre des modèles décrivant le comportement du système électrohydraulique. Ainsi, nous pouvons conclure que l'ensemble des points d'équilibre dépend, d'une part, des composants hydrauliques, à savoir le

type de vérin (symétrique ou asymétrique), du nombre de distributeurs (système avec une ou deux commandes) et, d'autre part, du choix du modèle mathématique représentant les dynamiques de  $P_1^0$  et  $P_2^0$  ou de  $P_L^0$  et de la prise en compte des fuites ou non.

Il est à noter que, pour tous les ensembles des points d'équilibre, toutes les positions du piston sont des positions d'équilibre. Les pressions d'équilibre  $P_1^0$  et  $P_2^0$  prennent soit des valeurs particulières (par exemple :  $P_1^0 = P_s$  et  $P_2^0 = P_r$ ), soit ne sont pas déterminées mais sont reliées par une contrainte algébrique de la forme  $P_1^0 = \frac{P_2^0}{\alpha} + \frac{F_0}{S_1}$ .

Dans certains cas, il existe des contraintes sur la force antagoniste  $F_0$  (par exemple  $F_0 = \frac{S_1 - S_2}{2} P_s$ ), ce qui n'est pas toujours réalisable en pratique. Les points d'équilibre correspondants ne seront donc forcément choisis comme points de fonctionnement.

## 2.3 Modèles linéarisés tangents

L'étude et l'analyse d'un système électrohydraulique nécessite la connaissance d'un modèle représentant sa dynamique. Les modèles utilisés pour décrire son comportement sont fortement non linéaires. Cette non linéarité est présente essentiellement dans la dynamique des pressions où, en particulier, la fonction décrivant la loi débit n'est pas dérivable mais seulement continue. Vu la complexité du modèle due à la non linéarité inhérente du système, il est plus commode, quand c'est possible, d'utiliser des modèles linéarisés, notamment, lors d'une étude locale autour d'un point de fonctionnement. L'intérêt d'effectuer une analyse linéaire, en plus du caractère simple du modèle, vient du fait que la théorie des systèmes linéaires est relativement complète et abondante par rapport à celle des systèmes non linéaires. Cependant, et suite à une linéarisation, les résultats obtenus sont à caractère local.

Pour obtenir un modèle linéaire, on dispose de plusieurs approches : les méthodes d'identification, la linéarisation par feedback, les techniques d'approximation etc. Ici, nous allons nous intéresser au modèle linéarisé tangent. Il s'agit d'une approximation au premier ordre de la série de Taylor du modèle mathématique. L'analyse s'effectue donc autour d'un point de fonctionnement. C'est pourquoi les résultats d'analyse ou de commande ainsi obtenus revêtent un caractère local et dépendent donc du point de fonctionnement choisi.

Dans la littérature sur l'analyse linéaire des systèmes électrohydrauliques (voir par exemple [AL99, FdAQ02, JK03, KS03, KE02, LMC96, Li00, LN02, SGLB05, SU02, Wat89, ZS00]), les résultats sont souvent fondés sur des modèles et une approche proposée initialement dans [Mer67, Wan61]. Dans [JK03], on traite un modèle légèrement différent mais en utilisant la même approche que celle de [Mer67].

Dans son ouvrage, Merritt [Mer67] a donné une analyse complète du problème de la linéarisation de la dynamique du débit différentiel à travers les orifices d'un distributeur. Plus précisément, pour linéariser l'expression du débit, il utilise le développement en série de Taylor puis il introduit les coefficients  $G_q$ ,  $G_c$  et  $G_p$ , appelés coefficients de la valve

$$G_q = \frac{\partial Q_L}{\partial x_d}, \quad G_c = -\frac{\partial Q_L}{\partial P_L} \quad \text{et} \quad G_p = \frac{\partial P_L}{\partial x_d} \quad (2.42)$$

où  $P_L$  et  $Q_L$  désignent la pression et le débit différentiels et où  $x_d$  est le déplacement du distributeur.  $G_q$ ,  $G_c$  et  $G_p$  représentent respectivement le gain en débit, le coefficient débit-pression et la sensibilité de la pression. Ces coefficients (voir [Mer67]) sont importants pour déterminer la stabilité, la réponse fréquentielle et d'autres caractéristiques dynamiques. Leurs valeurs varient en fonction du point de fonctionnement et du signe du déplacement du distributeur.

Le point de fonctionnement à l'origine (c'est-à-dire  $Q_L = P_L = x_d = 0$ ) est un point très important d'un point de vue de la stabilité. En fait, il est possible de prouver qu'un système stable en ce point est pratiquement stable en tout point de fonctionnement [FdAQ02, Mer67].

### 2.3.1 Modèles d'état

Avant de proposer puis d'analyser les modèles linéarisés tangent, il convient de rappeler leur définition.

**Définition 2.2.** *Soit le système non linéaire contrôlé suivant*

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.43)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction supposée être au moins de classe  $C^1$ . En utilisant le développement en série de Taylor limité à l'ordre un de la fonction  $f$  au voisinage d'un point d'équilibre  $(x^0, u^0)$ , le modèle linéarisé tangent est donné par

$$\delta\dot{x} = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{(x^0, u^0)} \delta x + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{(x^0, u^0)} \delta u \quad (2.44)$$

où  $\delta x$  et  $\delta u$  sont donnés par (2.45). Ils représentent respectivement la variation de l'état et de la commande autour du point d'équilibre  $(x^0, u^0)$ .

$$\begin{cases} \delta x &= x - x^0 \\ \delta u &= u - u^0 \end{cases} \quad (2.45)$$

■

#### 2.3.1.1 Système commandé par un seul distributeur

Dans cette partie, nous donnons deux modèles représentant le système électrohydraulique considéré ; le premier tient compte de la dynamique du distributeur et le deuxième ne tient pas compte de cette dynamique. Le système électrohydraulique est supposé constitué d'un vérin asymétrique commandé à travers un distributeur et en absence d'une force antagoniste.



**2.3.1.1.1 Modèle ne tenant pas compte la dynamique du distributeur** A partir du modèle (1.58) et en utilisant le développement en série de Taylor, limité à l'ordre un, nous obtenons le modèle linéarisé tangent suivant

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{P}_1 \\ \delta \dot{P}_2 \\ \delta \dot{v} \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Lambda_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & -\Lambda_2 & c_2 & 0 \\ m_1 & -m_2 & -m_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta P_1 \\ \delta P_2 \\ \delta v \\ \delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda_{+u} \\ -\Lambda_{-u} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta u \quad (2.46)$$

où  $(\delta x, \delta u) = (\delta P_1, \delta P_2, \delta v, \delta y, \delta u)^T$  représente de petites variations de  $(x, u) = (P_1, P_2, v, y, u)^T$  autour d'un point d'équilibre  $(x^0, u^0)$  donné par

$$(x^0, u^0) = (P_1^0, P_2^0, v^0, y^0, u^0)^T \quad (2.47)$$

Les pressions  $P_1^0$  et  $P_2^0$  sont supposées évoluer dans  $\mathbb{R}_+$  et sont liées par l'équation mécanique à l'équilibre  $S_1 P_1^0 = S_2 P_2^0$ , la position à l'équilibre  $y^0$  est dans l'intervalle  $y^0 \in \left] -\frac{V_0}{S_1}; \frac{V_0}{S_2} \right]$ , la vitesse  $v^0 = 0$ . Le point d'équilibre doit être choisi telle que le champ de vecteurs définissant le système soit dérivable. Les constantes  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_{+u}$  et  $\Lambda_{-u}$  sont définies par

$$\begin{cases} \Lambda_1 = -\frac{\beta_e}{V_0 + S_1 y^0} \frac{\partial[\varphi_a(P_1, u)u]}{\partial P_1} \Big|_{(P_1^0, u^0)} > 0 \\ \Lambda_2 = \frac{\beta_e}{V_0 - S_2 y^0} \frac{\partial[\varphi_a(P_2, -u)u]}{\partial P_2} \Big|_{(P_2^0, u^0)} > 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

et

$$\begin{cases} \Lambda_{+u} = \frac{\beta_e}{V_0 + S_1 y^0} \frac{\partial[\varphi_a(P_1, u)u]}{\partial u} \Big|_{(P_1^0, u^0)} \\ \Lambda_{-u} = \frac{\beta_e}{V_0 - S_2 y^0} \frac{\partial[\varphi_a(P_2, -u)u]}{\partial u} \Big|_{(P_2^0, u^0)} \end{cases} \quad (2.49)$$

avec

$$\frac{\partial[\varphi_a(P_1, u)u]}{\partial P_1} \Big|_{(P_1^0, u^0)} = \begin{cases} u^0 \frac{\partial[\varphi_a^+(P_1)]}{\partial P_1} \Big|_{P_1^0} = \frac{-k_d u^0}{2\sqrt{|P_s - P_1^0|}} < 0 & \text{si } u^0 > 0 \\ u^0 \frac{\partial[\varphi_a^-(P_1)]}{\partial P_1} \Big|_{P_1^0} = \frac{k_d u^0}{2\sqrt{|P_1^0 - P_r|}} < 0 & \text{si } u^0 < 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial[\varphi_a(P_2, -u)u]}{\partial P_2} \Big|_{(P_2^0, u^0)} = \begin{cases} u^0 \frac{\partial[\varphi_a^-(P_2)]}{\partial P_2} \Big|_{P_2^0} = \frac{k_d u^0}{2\sqrt{|P_2^0 - P_r|}} > 0 & \text{si } u^0 > 0 \\ u^0 \frac{\partial[\varphi_a^+(P_2)]}{\partial P_2} \Big|_{P_2^0} = \frac{-k_d u^0}{2\sqrt{|P_s - P_2^0|}} > 0 & \text{si } u^0 < 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

et

$$\frac{\partial[\varphi_a(P_i, \pm u)u]}{\partial u} \Big|_{(P_i^0, u^0)} = \varphi_a(P_i^0, \pm u^0) \text{ avec } u \neq 0 \quad (i = 1; 2). \quad (2.52)$$

Dans le modèle (2.46) les constantes positives  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_b$  sont données par

$$c_1 = \frac{\beta_e S_1}{V_0 + S_1 y^0}, \quad c_2 = \frac{\beta_e S_2}{V_0 - S_2 y^0}, \quad m_1 = \frac{S_1}{M}, \quad m_2 = \frac{S_2}{M} \quad \text{et} \quad m_b = \frac{b_v}{M}. \quad (2.53)$$

**2.3.1.1.2 Cas particulier** Considérons le système électrohydraulique considéré dans le paragraphe 2.3.1.1.1, autour du point d'équilibre

$$(x^0, u^0) = (P_1^0, P_2^0, v^0, y^0, u^0)^T \quad (2.54)$$

avec  $P_1^0 = P_2^0 = \frac{P_s + P_r}{2}$  et  $y^0 = 0$ . Le modèle linéarisé tangent (2.46) est donné par

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{P}_1 \\ \delta \dot{P}_2 \\ \delta \dot{v} \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Lambda_c & 0 & -c_{c1} & 0 \\ 0 & -\Lambda_c & c_{c2} & 0 \\ m_1 & -m_2 & -m_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta P_1 \\ \delta P_2 \\ \delta v \\ \delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda_u \\ -\Lambda_u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta u \quad (2.55)$$

où les constantes  $\Lambda_c$ ,  $\Lambda_u$ ,  $c_{c1}$  et  $c_{c2}$ , sont données par

$$\Lambda_c = \frac{\beta_e}{V_0} \frac{k_d |u^0|}{\sqrt{2(P_s - P_r)}}, \quad \Lambda_u = \frac{\beta_e k_d \sqrt{P_s - P_r}}{V_0} \frac{1}{2}, \quad (2.56)$$

$$c_{c1} = \frac{\beta_e S_1}{V_0} \quad \text{et} \quad c_{c2} = \frac{\beta_e S_2}{V_0} \quad (2.57)$$

**2.3.1.1.3 Modèle complet** Dans cette partie, on s'intéresse à l'étude d'un système électrohydraulique à travers un modèle complet tenant compte de la dynamique du distributeur. Plus précisément, considérons le modèle non linéaire (1.58) avec une dynamique du distributeur décrite par une équation différentielle d'ordre un, donnée sous la forme

$$\dot{x}_d = -\frac{1}{\tau_d}(x_d - K_d u_d) \quad (2.58)$$

où  $\tau_d$  est la constante de temps du distributeur,  $K_d$  son gain statique,  $x_d$  la position de son tiroir et  $u_d$  est la nouvelle commande. En utilisant le développement en série de Taylor, limité à l'ordre un, le modèle linéarisé tangent global est défini par

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{P}_1 \\ \delta \dot{P}_2 \\ \delta \dot{v} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \dot{x}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Lambda_1 & 0 & -c_1 & 0 & \Lambda_{+x_d} \\ 0 & -\Lambda_2 & c_2 & 0 & -\Lambda_{-x_d} \\ m_1 & -m_2 & -m_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta P_1 \\ \delta P_2 \\ \delta v \\ \delta y \\ \delta x_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_d}{\tau_d} \end{pmatrix} \delta u_d \quad (2.59)$$

$(\delta x, \delta u)$  représente une petite variation de  $(x, u)$  autour du point d'équilibre  $(x^0, u^0)$  donné par

$$(x^0, u^0) = (P_1^0, P_2^0, v^0, y^0, x_d^0, u_d^0)^T \quad (2.60)$$

Les pressions  $P_1^0$  et  $P_2^0$  sont supposées évoluées dans  $\mathbb{R}_+$  et sont liées par l'équation mécanique à l'équilibre

$$S_1 P_1^0 = S_2 P_2^0, \quad (2.61)$$

la position à l'équilibre  $y^0$  est dans l'intervalle  $y^0 \in \left] -\frac{V_0}{S_1}; \frac{V_0}{S_2} \right]$ , la vitesse  $v^0 = 0$ , la position du tiroir  $x_d^0$  est différente de zéro et la commande  $u_d^0$  prend une valeur dans  $\mathbb{R}$ . Les constantes  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_{+x_d}$  et  $\Lambda_{-x_d}$  sont données par

$$\begin{cases} \Lambda_1 = -\frac{\beta_e}{V_0 + S_1 y^0} \frac{\partial[\varphi_a(P_1, x_d)x_d]}{\partial P_1} \Big|_{(P_1^0, x_d^0)} > 0 \\ \Lambda_2 = \frac{\beta_e}{V_0 - S_2 y^0} \frac{\partial[\varphi_a(P_2, -x_d)x_d]}{\partial P_2} \Big|_{(P_2^0, x_d^0)} > 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

et

$$\begin{cases} \Lambda_{+x_d} = \frac{\beta_e}{V_0 + S_1 y^0} \frac{\partial[\varphi_a(P_1, x_d)x_d]}{\partial x_d} \Big|_{(P_1^0, x_d^0)} \\ \Lambda_{-x_d} = \frac{\beta_e}{V_0 - S_2 y^0} \frac{\partial[\varphi_a(P_2, -x_d)x_d]}{\partial x_d} \Big|_{(P_2^0, x_d^0)} \end{cases} \quad (2.63)$$

avec

$$\frac{\partial[\varphi_a(P_1, x_d)x_d]}{\partial P_1} \Big|_{(P_1^0, x_d^0)} = \begin{cases} x_d^0 \frac{\partial[\varphi_a^+(P_1)]}{\partial P_1} \Big|_{P_1^0} = \frac{-k_d x_d^0}{2\sqrt{|P_s - P_1^0|}} < 0 & \text{si } x_d^0 > 0 \\ x_d^0 \frac{\partial[\varphi_a^-(P_1)]}{\partial P_1} \Big|_{P_1^0} = \frac{k_d x_d^0}{2\sqrt{|P_1^0 - P_r|}} < 0 & \text{si } x_d^0 < 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial[\varphi_a(P_2, -x_d)x_d]}{\partial P_2} \Big|_{(P_2^0, x_d^0)} = \begin{cases} x_d^0 \frac{\partial[\varphi_a^-(P_2)]}{\partial P_2} \Big|_{P_2^0} = \frac{k_d x_d^0}{2\sqrt{|P_2^0 - P_r|}} > 0 & \text{si } x_d^0 > 0 \\ x_d^0 \frac{\partial[\varphi_a^+(P_2)]}{\partial P_2} \Big|_{P_2^0} = \frac{-k_d x_d^0}{2\sqrt{|P_s - P_2^0|}} > 0 & \text{si } x_d^0 < 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

et

$$\frac{\partial[\varphi_a(P_i, \pm x_d)x_d]}{\partial x_d} \Big|_{(P_i^0, x_d^0)} = \varphi_a(P_i^0, \pm x_d^0) \text{ avec } x_d \neq 0 \quad (i = 1; 2) \quad (2.66)$$

$c_1, c_2, m_1, m_2$  et  $m_b$  sont des constantes positives données par (2.53).

### 2.3.1.2 Système commandé par deux distributeurs

D'une façon similaire que dans le cas d'un système électrohydraulique commandé par un seul distributeur, nous donnons deux modèles représentant le système électrohydraulique selon la prise en compte ou pas de la dynamique des distributeurs. Le système électrohydraulique est supposé constitué d'un vérin asymétrique commandé par deux distributeurs et en absence d'une force antagoniste.

**2.3.1.2.1 Modèle sans prise en compte de la dynamique des distributeurs**

Par utilisation de deux distributeurs, le modèle linéarisé tangent décrivant le système électrohydraulique est défini par

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{P}_1 \\ \delta \dot{P}_2 \\ \delta \dot{v} \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Lambda_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & -\Lambda_2 & c_2 & 0 \\ m_1 & -m_2 & -m_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta P_1 \\ \delta P_2 \\ \delta v \\ \delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda_{u_1} & 0 \\ 0 & -\Lambda_{u_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

où  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ ,  $\Lambda_{u_1}$  et  $\Lambda_{u_2}$  sont définies par

$$\begin{cases} \Lambda_1 = -\frac{\beta_e}{V_0 + S_1 y^0} \frac{\partial[\varphi_1(P_1, u_1)u_1]}{\partial P_1} \Big|_{(P_1^0, u_1^0)} > 0 \\ \Lambda_2 = \frac{\beta_e}{V_0 - S_2 y^0} \frac{\partial[\varphi_2(P_2, -u_2)u_2]}{\partial P_2} \Big|_{(P_2^0, u_2^0)} > 0 \end{cases} \quad (2.68)$$

et

$$\begin{cases} \Lambda_{u_1} = \frac{\beta_e}{V_0 + S_1 y^0} \frac{\partial[\varphi_1(P_1, u_1)u_1]}{\partial u_1} \Big|_{(P_1^0, u_1^0)} \\ \Lambda_{u_2} = \frac{\beta_e}{V_0 - S_2 y^0} \frac{\partial[\varphi_2(P_2, -u_2)u_2]}{\partial u_2} \Big|_{(P_2^0, u_2^0)} \end{cases} \quad (2.69)$$

avec

$$\frac{\partial[\varphi_1(P_1, u_1)u_1]}{\partial P_1} \Big|_{(P_1^0, u_1^0)} = \begin{cases} u_1^0 \frac{\partial[\varphi_1^+(P_1)]}{\partial P_1} \Big|_{P_1^0} = \frac{-k_{d_1} u_1^0}{2\sqrt{|P_r - P_1^0|}} < 0 & \text{si } u_1^0 > 0 \\ u_1^0 \frac{\partial[\varphi_1^-(P_1)]}{\partial P_1} \Big|_{P_1^0} = \frac{k_{d_1} u_1^0}{2\sqrt{|P_1^0 - P_s|}} < 0 & \text{si } u_1^0 < 0 \end{cases} \quad (2.70)$$

et

$$\frac{\partial[\varphi_2(P_2, -u_2)u_2]}{\partial P_2} \Big|_{(P_2^0, u_2^0)} = \begin{cases} u_2^0 \frac{\partial[\varphi_2^-(P_2)]}{\partial P_2} \Big|_{P_2^0} = \frac{k_{d_2} u_2^0}{2\sqrt{|P_2^0 - P_s|}} > 0 & \text{si } u_2^0 > 0 \\ u_2^0 \frac{\partial[\varphi_2^+(P_2)]}{\partial P_2} \Big|_{P_2^0} = \frac{-k_{d_2} u_2^0}{2\sqrt{|P_r - P_2^0|}} > 0 & \text{si } u_2^0 < 0 \end{cases} \quad (2.71)$$

et

$$\frac{\partial[\varphi_i(P_i, (-1)^{(i+1)}u_i)u_i]}{\partial u_i} \Big|_{(P_i^0, u_i^0)} = \varphi_i(P_i^0, (-1)^{(i+1)}u_i^0) \text{ avec } u_i \neq 0 \quad (i = 1; 2) \quad (2.72)$$

$c_1$ ,  $c_2$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_b$  sont des constantes positives données par (2.53).

Le modèle linéarisé tangent (2.67) est calculé au voisinage du point d'équilibre

$$(x^0, u^0) = (P_1^0, P_2^0, v^0, y^0, u_1^0, u_2^0)^T \quad (2.73)$$

où  $P_1^0$  et  $P_2^0$  sont deux constantes dans  $\mathbb{R}_+$  qui représentent les pressions à l'équilibre, et sont liées par l'équation mécanique à l'équilibre  $S_1 P_1^0 = S_2 P_2^0$ . La position  $y^0$  du piston à l'équilibre prend une valeur dans l'intervalle  $y^0 \in \left] -\frac{V_0}{S_1}; \frac{V_0}{S_2} \right]$ , et la vitesse à l'équilibre vérifie  $v^0 = 0$ .

**2.3.1.2.2 Cas particulier** Le modèle (2.67) décrivant le comportement d'un système électrohydraulique commandé par deux distributeurs identiques ( $k_{d_1} = k_{d_2} = k_d$ ), au point d'équilibre  $x^0 = (P_1^0, P_2^0, v^0, y^0)^T$  et  $u^0 = (u_1^0, u_2^0)^T$  tel que  $P_1^0 = P_2^0 = \frac{P_s + P_r}{2}$ ,  $y^0 = 0$  et où  $u_1^0 = u_2^0 = u^0$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{P}_1 \\ \delta \dot{P}_2 \\ \delta \dot{v} \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Lambda_c & 0 & -c_{c1} & 0 \\ 0 & -\Lambda_c & c_{c2} & 0 \\ m_1 & -m_2 & -m_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta P_1 \\ \delta P_2 \\ \delta v \\ \delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda_u & 0 \\ 0 & -\Lambda_u \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

$\Lambda_c$  et  $\Lambda_u$  désignent les constantes suivantes

$$\Lambda_c = \frac{\beta_e}{V_0} \frac{k_d |u^0|}{\sqrt{2(P_s - P_r)}} \quad (2.75)$$

et

$$\Lambda_u = \frac{\beta_e k_d \sqrt{P_s - P_r}}{V_0} \frac{1}{2} \quad (2.76)$$

où  $c_{c1}$  et  $c_{c2}$  sont définies par (2.57).

**2.3.1.2.3 Modèle complet** Dans cette partie, on s'intéresse à l'étude d'un système électrohydraulique à travers un modèle qui tient compte de la dynamique des distributeurs. A partir du modèle non linéaire (1.81), représentant un système électrohydraulique commandé par deux distributeurs, nous déduisons le modèle linéarisé tangent suivant

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{P}_1 \\ \delta \dot{P}_2 \\ \delta \dot{v} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \dot{x}_{d_1} \\ \delta \dot{x}_{d_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Lambda_1 & 0 & -c_1 & 0 & \Lambda_{x_{d_1}} & 0 \\ 0 & -\Lambda_2 & c_2 & 0 & 0 & -\Lambda_{x_{d_2}} \\ m_1 & -m_2 & -m_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_{d_1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_{d_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta P_1 \\ \delta P_2 \\ \delta v \\ \delta y \\ \delta x_{d_1} \\ \delta x_{d_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{d_1}}{\tau_{d_1}} & 0 \\ 0 & \frac{K_{d_2}}{\tau_{d_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{d_1} \\ \delta u_{d_2} \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

où  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ ,  $\Lambda_{x_{d_1}}$  et  $\Lambda_{x_{d_2}}$  sont déduites à partir des expressions (2.68), (2.69), (2.70), (2.71) et (2.72) en remplaçant  $u_1$  et  $u_2$  par  $x_{d_1}$  et  $x_{d_2}$ . Les constantes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_b$  sont données par (2.53).  $\tau_{d_1}$  et  $\tau_{d_2}$  représentent les constantes de temps des deux distributeurs

et  $K_{d_1}$  et  $K_{d_2}$  désignent leurs gains statiques.

Les modèles d'état présentés dans cette partie sont utilisés pour le calcul des fonctions de transfert du système électrohydraulique ainsi que pour l'étude de sa stabilisabilité et de sa détectabilité.

## 2.3.2 Fonctions de transfert en boucle ouverte

Après avoir donné les modèles d'état représentant le système électrohydraulique, nous allons présenter les fonctions de transfert en boucle ouverte associées à ces différents modèles en vue d'une régulation en position.

### 2.3.2.1 Système commandé par un seul distributeur

Considérons un système électrohydraulique commandé par un seul distributeur. Dans ce paragraphe nous donnerons les fonctions de transfert en boucle ouverte dans deux cas selon qu'on néglige la dynamique du distributeur ou non.

**2.3.2.1.1 Modèle réduit** Dans cette partie, notre analyse ne tient pas compte de la dynamique du distributeur. A partir du modèle linéarisé tangent (2.46) et en considérant la matrice de mesure  $\mathcal{C}$  donnée par

$$\mathcal{C} = ( 0 \ 0 \ 0 \ 1 ) \quad (2.78)$$

nous obtenons la fonction de transfert suivante :

$$\mathcal{G}_{bo}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} \quad (2.79)$$

soit

$$\mathcal{G}_{bo}(s) = \frac{b_{a1}s + b_{a0}}{s(s^3 + a_{a2}s^2 + a_{a1}s + a_{a0})} \quad (2.80)$$

où  $b_{a0}$ ,  $b_{a1}$ ,  $a_{a0}$ ,  $a_{a1}$  et  $a_{a2}$  sont donnés par

$$\begin{cases} b_{a0} &= m_1\Lambda_{+u}\Lambda_2 + m_2\Lambda_{-u}\Lambda_1 \\ b_{a1} &= m_1\Lambda_{+u} + m_2\Lambda_{-u} \end{cases} \quad (2.81a)$$

et

$$\begin{cases} a_{a0} &= \Lambda_1\Lambda_2m_b + \Lambda_2m_1c_1 + \Lambda_1m_2c_2 \\ a_{a1} &= \Lambda_1m_b + \Lambda_2m_b + \Lambda_1\Lambda_2 + m_1c_1 + m_2c_2 \\ a_{a2} &= m_b + \Lambda_1 + \Lambda_2 \end{cases} \quad (2.81b)$$

Dans le cas particulier où on considère un système électrohydraulique avec un vérin symétrique (c'est-à-dire,  $S_1 = S_2 = S$ ) autour du point d'équilibre  $(x^0, u^0) = (P_1^0, P_2^0, v^0, y^0, u^0)^T$  tel que  $P_1^0 = P_2^0 = \frac{P_s + P_r}{2}$  et  $y^0 = 0$ , nous avons

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_c, \quad \Lambda_{+u} = \Lambda_{-u} = \Lambda_u, \quad m_1 = m_2 = m_c, \quad \text{et} \quad c_1 = c_2 = c_c \quad (2.82)$$

où les constantes  $\Lambda_c$  et  $\Lambda_u$  sont données par (2.56).  $m_c$  et  $c_c$  sont les suivantes

$$c_c = \frac{\beta_e S}{V_0} \quad \text{et} \quad m_c = \frac{S}{M}. \quad (2.83)$$

La fonction de transfert  $\mathcal{G}_{bo}$  présentée par la relation (2.80) devient

$$\mathcal{G}_{bo}(s) = \frac{2m_c \Lambda_u}{s(s^2 + s(m_b + \Lambda_c) + m_b \Lambda_c + 2m_c c_c)} \quad (2.84)$$

ou plus explicitement

$$\mathcal{G}_{bo}(s) = \frac{2\beta_e S k_d \sqrt{\frac{P_s - P_r}{2}}}{MV_0} \frac{1}{s \left( s^2 + s \left( \frac{b_v}{M} + \frac{\beta_e}{V_0} \frac{k_d |u^0|}{\sqrt{2(P_s - P_r)}} \right) + \frac{b_v \beta_e}{M V_0} \frac{k_d |u^0|}{\sqrt{2(P_s - P_r)}} + \frac{2\beta_e S^2}{MV_0} \right)} \quad (2.85)$$

**Remarque 2.7.** On peut constater que, dans ce cas particulier, un pôle stable  $s = -\Lambda_c$  est simplifié par un zéro. ■

**Remarque 2.8.** Dans le cas où  $u^0 = 0$ , on retrouve le résultat classique sur la pulsation propre non amortie du vérin  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\beta_e S^2}{MV_0}}$  et l'amortissement du système est dû aux frottements visqueux. ■

**2.3.2.1.2 Modèle complet** Dans cette partie, on s'intéresse au modèle tenant compte de la dynamique du distributeur. Considérons que la dynamique du distributeur est décrite par une fonction de transfert  $H_d$  d'ordre un, soit

$$H_d(s) = \frac{K_d}{1 + \tau_d s} \quad (2.86)$$

nous rappelons que  $\tau_d$  est la constante de temps du distributeur et  $K_d$  est son gain statique. La fonction de transfert en boucle ouverte du système électrohydraulique complet, c'est-à-dire du système tenant compte de la dynamique du distributeur, peut être déduite à partir du système (2.59) et de la matrice de mesure  $\mathcal{C}_d$  considérée sous la forme

$$\mathcal{C}_d = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) \quad (2.87)$$

En calculant  $\mathcal{C}_d(sI - \mathcal{A}_d)^{-1} \mathcal{B}_d$ , nous obtenons la fonction de transfert en boucle ouverte suivante

$$\mathcal{G}_{bod}(s) = \frac{Y(s)}{U_d(s)} = H_d(s) \mathcal{G}_{bo}(s) = \frac{K_d(b_{a1}s + b_{a0})}{s(1 + \tau_d s)(s^3 + a_{a2}s^2 + a_{a1}s + a_{a0})} \quad (2.88)$$

Pour un système électrohydraulique avec un vérin symétrique autour du point d'équilibre particulier  $(x^0, u^0) = (P_1^0, P_2^0, v^0, y^0, x_d^0)^T$  où  $P_1^0 = P_2^0 = \frac{P_s + P_r}{2}$  et  $y^0 = 0$ , la fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par

$$\mathcal{G}_{bod}(s) = \frac{2K_d m_c \Lambda_{x_d}}{s(1 + \tau_d s)(s^2 + s(m_b + \Lambda_c) + m_b \Lambda_c + 2m_c c_c)} = \frac{\text{Num}(\mathcal{G}_{bod}(s))}{\text{Den}(\mathcal{G}_{bod}(s))} \quad (2.89)$$

où

$$\text{Num}(\mathcal{G}_{bod}(s)) = \frac{2K_d\beta_e S k_d \sqrt{\frac{P_s - P_r}{2}}}{MV_0} \quad (2.90a)$$

et

$$\begin{aligned} \text{Den}(\mathcal{G}_{bod}(s)) = s(1 + \tau_d s) & \left( s^2 + s \left( \frac{b_v}{M} + \frac{\beta_e}{V_0} \frac{k_d |u^0|}{\sqrt{2(P_s - P_r)}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{b_v \beta_e}{M V_0} \frac{k_d |u^0|}{\sqrt{2(P_s - P_r)}} + \frac{2\beta_e S^2}{MV_0} \right). \end{aligned} \quad (2.90b)$$

### 2.3.2.2 Système commandé par deux distributeurs

De façon similaire au paragraphe précédent, et en considérant un système électrohydraulique commandé par deux distributeurs, nous donnons dans ce paragraphe les fonctions de transfert en boucle ouverte dans le cas où on néglige les dynamiques des distributeurs et dans le cas où on tient compte de ces dynamiques.

**2.3.2.2.1 Modèle sans les dynamiques des distributeurs** La fonction de transfert en boucle ouverte entre la sortie  $y$  et l'entrée  $u = (u_1 \ u_2)^T$  du système électrohydraulique commandé par deux distributeurs est déduite à partir du modèle linéarisé tangent (2.67). Elle s'écrit telle que

$$Y(s) = \mathcal{G}_{bo}(s)U(s) = (\mathcal{G}_{bo1}(s) \ \mathcal{G}_{bo2}(s))U(s) \quad (2.91)$$

où

$$\mathcal{G}_{bo1}(s) = \frac{b_{11}s + b_{10}}{s(s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)} \quad (2.92a)$$

et

$$\mathcal{G}_{bo2}(s) = \frac{b_{21}s + b_{20}}{s(s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)} \quad (2.92b)$$

et les constantes  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont données par

$$\begin{cases} a_0 = \Lambda_1\Lambda_2m_b + \Lambda_2m_1c_1 + \Lambda_1m_2c_2 \\ a_1 = \Lambda_1m_b + \Lambda_2m_b + \Lambda_1\Lambda_2 + m_1c_1 + m_2c_2 \\ a_2 = m_b + \Lambda_1 + \Lambda_2 \end{cases} \quad (2.93)$$

et  $b_{10}$ ,  $b_{20}$ ,  $b_{11}$ ,  $b_{21}$  prennent les valeurs suivantes :

$$b_{10} = m_1\Lambda_{u_1}\Lambda_2, \quad b_{11} = m_1\Lambda_{u_1}, \quad b_{20} = m_2\Lambda_{u_2}\Lambda_1 \quad \text{et} \quad b_{21} = m_2\Lambda_{u_2} \quad (2.94)$$

Considérons le cas particulier d'un système électrohydraulique avec un vérin symétrique commandé par deux distributeurs identiques ( $k_{d_1} = k_{d_2} = k_d$ ). Au point d'équilibre



$(x^0, u^0) = (P_1^0, P_2^0, v^0, y^0, u_1^0, u_2^0)^T$  avec  $P_1^0 = P_2^0 = \frac{P_s + P_r}{2}$ ,  $y^0 = 0$  et  $u_1^0 = u_2^0 = u^0$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_c & & \Lambda_{u_1} = \Lambda_{u_2} = \Lambda_u \\ c_1 = c_2 = c_c = \frac{\beta_e S}{V_0} & & m_1 = m_2 = m_c = \frac{S}{M} \end{aligned} \quad (2.95)$$

où  $\Lambda_c$  et  $\Lambda_u$  sont respectivement données par (2.75) et (2.76).

A partir de la fonction de transfert  $\mathcal{G}_{bo}$  définie par la relation (2.91), on déduit

$$\mathcal{G}_{bo} = (\mathcal{G}_{boc} \quad \mathcal{G}_{boc}) \quad (2.96)$$

où

$$\mathcal{G}_{boc}(s) = \frac{m_c \Lambda_u}{s(s^2 + s(m_b + \Lambda_c) + m_b \Lambda_c + 2m_c c_c)} \quad (2.97)$$

ou plus explicitement

$$\mathcal{G}_{boc}(s) = \frac{\frac{\beta_e S k_d \sqrt{\frac{P_s - P_r}{2}}}{M V_0}}{s \left( s^2 + s \left( \frac{b_v}{M} + \frac{\beta_e}{V_0} \frac{k_d |u^0|}{\sqrt{2(P_s - P_r)}} \right) + \frac{b_v \beta_e}{M V_0} \frac{k_d |u^0|}{\sqrt{2(P_s - P_r)}} + \frac{2\beta_e S^2}{M V_0} \right)} \quad (2.98)$$

**2.3.2.2.2 Modèle complet** Soit un système électrohydraulique commandé par deux distributeurs différents ayant comme fonctions de transfert  $H_{d_1}$  et  $H_{d_2}$ , telles que

$$H_{d_1}(s) = \frac{K_{d_1}}{1 + \tau_{d_1} s} \quad (2.99a)$$

et

$$H_{d_2}(s) = \frac{K_{d_2}}{1 + \tau_{d_2} s} \quad (2.99b)$$

où  $\tau_{d_1}$  et  $\tau_{d_2}$  sont les constantes de temps des deux distributeurs et  $K_{d_1}$  et  $K_{d_2}$  leurs gains statiques.

La fonction de transfert en boucle ouverte du système électrohydraulique complet est la suivante

$$\mathcal{G}_{bod} = (\mathcal{G}_{bod1} \quad \mathcal{G}_{bod2}) \quad (2.100)$$

où

$$\mathcal{G}_{bod1}(s) = H_{d_1}(s) \mathcal{G}_{bo1}(s) = \frac{K_{d_1} (b_{11} s + b_{10})}{s(1 + \tau_{d_1} s)(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)} \quad (2.101a)$$

et

$$\mathcal{G}_{bod2}(s) = H_{d_2}(s) \mathcal{G}_{bo2}(s) = \frac{K_{d_2} (b_{21} s + b_{20})}{s(1 + \tau_{d_2} s)(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)} \quad (2.101b)$$

Les fonctions de transfert que nous venons de donner dans ce paragraphe seront utilisées, par la suite, pour la synthèse des lois de commande linéaire.

## 2.4 Analyse du modèle linéarisé tangent dans l'espace d'état

Dans la littérature sur les systèmes électrohydrauliques, très peu de travaux traitent du problème de la stabilisabilité et de la détectabilité des modèles linéarisés tangents (voir [Mus01, RQ99]). En outre, les modèles considérés représentent des situations particulières, essentiellement, lorsque l'état d'équilibre est caractérisé par des pressions identiques dans chacune des chambres et le piston est supposé en position centrale (c'est-à-dire,  $\Lambda_1 = \Lambda_2$ ). Dans ce cas particulier, la dynamique libre est décrite par un système linéaire d'ordre quatre présente la particularité de posséder deux valeurs propres réelles, dont une est nulle et l'autre est à partie réelle négative, et deux valeurs propres complexes à partie réelle négative.

Dans la présente étude, nous allons considérer un cas plus général. En effet, il s'agit de prendre les pressions  $P_1^0$  et  $P_2^0$  telles que l'équation mécanique à l'équilibre  $S_1 P_1^0 = S_2 P_2^0$  soit vérifiée et ceci sans imposer de contraintes supplémentaires.

Pour étudier la stabilisabilité et/ou la détectabilité des modèles d'état, nous utiliserons le théorème énoncés ci-dessous. Ces théorèmes ont été établis dans le cas du système linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \quad (2.102)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de la commande et  $y \in \mathbb{R}^\ell$  est le vecteur de la sortie. Les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont respectivement dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbb{R}^{n \times m}$  et  $\mathbb{R}^{\ell \times n}$ .

Le premier théorème concerne la stabilisabilité du système (2.102).

**Théorème 2.1.** [Hau80, ZDG95] *Un système linéaire sous la forme (2.102) est dit stabilisable si et seulement si les valeurs propres  $s_i$  instables de  $A$  sont commandables, c'est-à-dire que le critère de rang suivant est vérifié*

$$\mathcal{Rang}(s_i I - A \begin{array}{c} \vdots \\ B \end{array}) = n \quad \forall s_i / \Re(s_i) \geq 0 \quad (2.103)$$

■

Le deuxième théorème donne un résultat sur la détectabilité.

**Théorème 2.2.** [Hau80, ZDG95] *Un système linéaire sous la forme (2.102) est dit détectable si et seulement si les valeurs propres  $s_i$  instables de  $A$  sont observables, c'est-à-dire que le critère de rang suivant est vérifié*

$$\mathcal{Rang} \left( \begin{array}{c} s_i I - A \\ \dots \\ C \end{array} \right) = n \quad \forall s_i / \Re(s_i) \geq 0 \quad (2.104)$$

■

## 2.4.1 Système commandé par un seul distributeur

Dans cette partie, nous considérons un système électrohydraulique constitué d'un vérin asymétrique commandé à travers un distributeur et en absence d'une force antagoniste ( $F_0 = 0$ ). L'étude de ce système sera effectuée en négligeant les fuites externes et les fuites inter-chambres.

### 2.4.1.1 Modèle réduit

Dans cette partie, notre analyse ne tient pas compte de la dynamique du distributeur. Considérons le système (2.46) que nous pouvons réécrire sous la forme

$$\delta\dot{x} = \mathcal{A}\delta x + \mathcal{B}\delta u \quad (2.105)$$

Avant d'analyser la stabilisabilité et la détectabilité du système linéaire (2.105), nous allons tout d'abord étudier la stabilité de la matrice  $\mathcal{A}$ . Pour ce faire, on utilise le critère de Routh. La structure de cette matrice, avec une colonne nulle, implique la présence d'une valeur propre nulle et que le polynôme caractéristique<sup>(13)</sup> associé à la matrice  $\mathcal{A}$  peut être écrit sous la forme suivante

$$\mathcal{D}et(sI - \mathcal{A}) = s\mathcal{D}et(sI - \Delta) \quad (2.106)$$

avec

$$\Delta = \begin{pmatrix} -\Lambda_1 & 0 & -c_1 \\ 0 & -\Lambda_2 & c_2 \\ m_1 & -m_2 & -m_b \end{pmatrix} \quad (2.107)$$

Après calcul, nous obtenons

$$\mathcal{D}et(sI - \Delta) = s^3 + a_{a2}s^2 + a_{a1}s + a_{a0} \quad (2.108)$$

où  $a_{a0}$ ,  $a_{a1}$  et  $a_{a2}$  sont donnés par

$$\begin{cases} a_{a0} = \Lambda_1\Lambda_2m_b + \Lambda_2m_1c_1 + \Lambda_1m_2c_2 \\ a_{a1} = \Lambda_1m_b + \Lambda_2m_b + \Lambda_1\Lambda_2 + m_1c_1 + m_2c_2 \\ a_{a2} = m_b + \Lambda_1 + \Lambda_2 \end{cases} \quad (2.109)$$

Des calculs directs montrent que les coefficients  $a_{a0}$ ,  $a_{a1}$ ,  $a_{a2}$ ,  $b_{a3} = -\frac{a_{a0} - a_{a1}a_{a2}}{a_{a2}}$  et  $c_{a3} = a_{a0}$  sont de même signe, donc d'après le critère de Routh, toutes les valeurs propres de la matrice  $\Delta$  sont à partie réelle négative.

---

<sup>(13)</sup>Il s'agit du polynôme  $\mathcal{D}et(sI - \mathcal{A})$  où  $\mathcal{D}et$  désigne le déterminant et où  $I$  est la matrice identité.

**2.4.1.1.1 Stabilité** Pour déterminer la stabilité du système (2.46) nous utiliserons le Théorème 2.1.

Dans le cas considéré, il suffit de vérifier le critère de Hautus pour la valeur propre  $s_i = 0$ . Nous avons

$$\mathcal{Rang}(-\mathcal{A} : \mathcal{B}) = \mathcal{Rang} \left( \begin{array}{cccc|c} \Lambda_1 & 0 & c_1 & 0 & \Lambda_{+u} \\ 0 & \Lambda_2 & -c_2 & 0 & -\Lambda_{-u} \\ -m_1 & m_2 & m_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (2.110)$$

l'élément  $(4;3)^{(14)}$  de la matrice donnée par (2.110) est un pivot d'où nous obtenons le résultat suivant

$$\mathcal{Rang}(-\mathcal{A} : \mathcal{B}) = 1 + \mathcal{Rang} \left( \begin{array}{ccc} \Lambda_1 & 0 & \Lambda_{+u} \\ 0 & \Lambda_2 & -\Lambda_{-u} \\ -m_1 & m_2 & 0 \end{array} \right) \quad (2.111)$$

Pour déterminer la condition qui assure que le rang est plein pour la matrice donnée par (2.111), nous calculons le déterminant suivant, soit

$$\mathcal{Det}(D_S) = \mathcal{Det} \left( \begin{array}{ccc} \Lambda_1 & 0 & \Lambda_{+u} \\ 0 & \Lambda_2 & -\Lambda_{-u} \\ -m_1 & m_2 & 0 \end{array} \right) \quad (2.112)$$

Des calculs directs conduisent à

$$\mathcal{Det}(D_S) = \Lambda_{+u}\Lambda_2m_1 + \Lambda_{-u}\Lambda_1m_2. \quad (2.113)$$

Cette égalité peut être réécrite explicitement sous la forme

$$\mathcal{Det}(D_S) = \frac{\beta_e^2 \left( S_1\varphi_a(P_1^0, u^0) \frac{\partial[\varphi_a(P_2, -u)u]}{\partial P_2} \Big|_{(P_2^0, u^0)} - S_2\varphi_a(P_2^0, -u^0) \frac{\partial[\varphi_a(P_1, u)u]}{\partial P_1} \Big|_{(P_1^0, u^0)} \right)}{M(V_0 + S_1y^0)(V_0 - S_2y^0)} \quad (2.114)$$

Un raisonnement simple montre qu'il n'existe pas de point d'équilibre pour lequel  $\mathcal{Det}(D_S) = 0$ . Alors la matrice  $D_S$  est de rang plein (c'est-à-dire,  $\mathcal{Rang}(D_S) = 3$ ). Finalement, on déduit que

$$\mathcal{Rang}(-\mathcal{A} : \mathcal{B}) = 4. \quad (2.115)$$

Ce qui implique, en vertu du Théorème 2.1, que le système (2.46) est stabilisable au voisinage du point d'équilibre considéré.

<sup>(14)</sup>On utilisera  $(i; j)$  pour désigner l'élément situé à la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne.

**2.4.1.1.2 Détectabilité** D'une façon analogue que dans le paragraphe précédent, nous allons vérifier la détectabilité pour la valeur propre  $s_i = 0$ . Ce qui conduit à calculer le rang suivant

$$\mathcal{Rang} \left( \begin{array}{c} -\mathcal{A} \\ \hline \mathcal{C} \end{array} \right) = \mathcal{Rang} \left( \begin{array}{cccc} \Lambda_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & -c_2 & 0 \\ -m_1 & m_2 & m_b & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2.116)$$

Les éléments (4;3) et (5;4) de la matrice donnée par (2.116) sont des pivots d'où nous obtenons le résultat suivant

$$\mathcal{Rang} \left( \begin{array}{c} -\mathcal{A} \\ \hline \mathcal{C} \end{array} \right) = 2 + \mathcal{Rang}(D_D) \quad (2.117)$$

où la matrice  $D_D$  est donnée par

$$D_D = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \\ -m_1 & m_2 \end{pmatrix}. \quad (2.118)$$

Puisque  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont différents de zéro alors  $\mathcal{Rang}(D_D) = 2$  et donc

$$\mathcal{Rang} \left( \begin{array}{c} -\mathcal{A} \\ \hline \mathcal{C} \end{array} \right) = 4 \quad (2.119)$$

Par conséquent, et en vertu du Théorème 2.2, le système (2.46) est détectable au voisinage du point d'équilibre considéré.

**2.4.1.1.3 Stabilisabilité et détectabilité du cas particulier** Pour effectuer l'étude de la stabilisabilité et de la détectabilité du modèle (2.55), et en suivant la démarche du paragraphe précédent, nous allons tout d'abord étudier la stabilité de la matrice  $\mathcal{A}_c$ . En calculant le polynôme caractéristique associé à la matrice  $\mathcal{A}_c$  nous obtenons

$$\mathcal{Det}(sI - \mathcal{A}_c) = s(s + \Lambda_c)(s^2 + (\Lambda_c + m_b)s + \Lambda_c m_b + m_1 c_{c1} + m_2 c_{c2}). \quad (2.120)$$

Nous déduisons donc que la matrice  $\mathcal{A}_c$  possède une valeur propre nulle et trois autres à partie réelle négative.

Pour  $s = -\Lambda_c$  nous avons

$$\mathcal{Rang} \left( sI - \mathcal{A}_c \begin{array}{c} \vdots \\ \mathcal{B}_c \end{array} \right) = 3 < 4 \quad (2.121)$$

et

$$\mathcal{Rang} \left( \begin{array}{c} sI - \mathcal{A}_c \\ \hline \mathcal{C} \end{array} \right) = 3 < 4. \quad (2.122)$$

donc le mode associé à la valeur propre stable  $s = -\Lambda_c$  est non commandable et est non observable.

### 2.4.1.2 Modèle complet

Le système (2.59) peut être réécrit sous la forme

$$\delta\dot{x} = \mathcal{A}_d\delta x + \mathcal{B}_d\delta u_d \quad (2.123)$$

De la même manière que dans le paragraphe précédent, nous allons analyser la stabilité de la matrice  $\mathcal{A}_d$ . Puis nous étudierons la stabilisabilité et la détectabilité du modèle linéarisé tangent considéré.

Le polynôme caractéristique associé à la matrice  $\mathcal{A}_d$  est de la forme

$$\mathcal{D}et(sI - \mathcal{A}_d) = s\left(s + \frac{1}{\tau_d}\right)\mathcal{D}et(sI - \Delta) \quad (2.124)$$

où la matrice  $\Delta$  est donnée par (2.107).

Comme la valeur propre  $s = -\frac{1}{\tau_d}$  est un réel négatif, démontrer la stabilisabilité du modèle linéarisé tangent revient à vérifier le critère de Hautus pour la valeur propre  $s_i = 0$ . Nous avons

$$\mathcal{R}ang(-\mathcal{A}_d \vdots \mathcal{B}_d) = \mathcal{R}ang \left( \begin{array}{ccccc|c} \Lambda_1 & 0 & c_1 & 0 & -\Lambda_{+x_d} & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & -c_2 & 0 & \Lambda_{-x_d} & 0 \\ -m_1 & m_2 & m_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_d} & \frac{K_d}{\tau_d} \end{array} \right) \quad (2.125)$$

Les éléments (4;3) et (5;6) de la matrice (2.125) sont des pivots. Ce qui donne

$$\mathcal{R}ang(-\mathcal{A}_d \vdots \mathcal{B}_d) = 2 + \mathcal{R}ang(D_S) \quad (2.126)$$

où

$$D_S = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & -\Lambda_{+x_d} \\ 0 & \Lambda_2 & \Lambda_{-x_d} \\ -m_1 & m_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.127)$$

Nous avons  $\mathcal{D}et(D_S) \neq 0$  car par définition  $m_1\Lambda_2\Lambda_{+x_d} \neq -m_2\Lambda_1\Lambda_{-x_d}$  donc

$$\mathcal{R}ang(-\mathcal{A}_d \vdots \mathcal{B}_d) = 5 \quad (2.128)$$

ce qui implique que le système (2.59) est stabilisable au voisinage du point d'équilibre considéré.

Pour l'étude de la détectabilité du modèle linéarisé tangent nous considérons la matrice

$C_d$  donnée par (2.87). Le critère de Hautus pour la valeur propre  $s_i = 0$  s'écrit

$$\mathcal{Rang} \begin{pmatrix} -\mathcal{A}_d \\ \hline C_d \end{pmatrix} = \mathcal{Rang} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & c_1 & 0 & -\Lambda_{+x_d} \\ 0 & \Lambda_2 & -c_2 & 0 & \Lambda_{-x_d} \\ -m_1 & m_2 & m_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_d} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.129)$$

Les éléments (4;3), (5;5) et (6;4) de la matrice donnée par (2.129) sont des pivots, donc

$$\mathcal{Rang} \begin{pmatrix} -\mathcal{A}_d \\ \hline C_d \end{pmatrix} = 3 + \mathcal{Rang}(D_D) \quad (2.130)$$

où  $D_D$  est la matrice définie par (2.118). Cette matrice est de rang égal à deux. Donc

$$\mathcal{Rang} \begin{pmatrix} -\mathcal{A}_d \\ \hline C_d \end{pmatrix} = 5 \quad (2.131)$$

Alors le système (2.59) est détectable au voisinage du point d'équilibre considéré.

### 2.4.1.3 Conclusion

L'analyse du modèle linéarisé au voisinage d'un point de fonctionnement quelconque montre que le système est localement stabilisable et localement détectable quelque soit la position d'équilibre  $y^0$  du vérin. Cependant, un mode stable devient non observable et non commandable dans le cas particulier du modèle d'un vérin symétrique calculé au point de fonctionnement  $\left( P_1^0 = P_2^0 = \frac{P_s + P_r}{2}, v^0 = 0, y^0 = 0, u^0 = 0 \right)$ .

## 2.4.2 Système commandé par deux distributeurs

Dans cette partie, nous considérons un système électrohydraulique constitué d'un vérin asymétrique commandé par deux distributeurs.

### 2.4.2.1 Modèle sans la dynamique du distributeur

Pour étudier la stabilisabilité et la détectabilité du modèle (2.67), nous le réécrivons sous la forme suivante

$$\delta \dot{x} = \mathcal{A} \delta x + \mathcal{B} \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{pmatrix} \quad (2.132)$$

Dans un premier temps, nous allons analyser les valeurs propres de la matrice  $\mathcal{A}$ . Comme dans le cas précédent, et à partir de la structure de la matrice  $\mathcal{A}$ , nous pouvons déduire que

cette dernière admet une valeur propre nulle et que le polynôme caractéristique associé à la matrice  $\mathcal{A}$  est donné par

$$\mathcal{D}et(sI - \mathcal{A}) = s\mathcal{D}et(sI - \Delta) \quad (2.133)$$

avec

$$\Delta = \begin{pmatrix} -\Lambda_1 & 0 & -c_1 \\ 0 & -\Lambda_2 & c_2 \\ m_1 & -m_2 & -m_b \end{pmatrix} \quad (2.134)$$

ce qui implique

$$\mathcal{D}et(sI - \Delta) = s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 \quad (2.135)$$

avec  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont les suivants

$$\begin{cases} a_0 = \Lambda_1\Lambda_2m_b + \Lambda_2m_1c_1 + \Lambda_1m_2c_2 \\ a_1 = \Lambda_1m_b + \Lambda_2m_b + \Lambda_1\Lambda_2 + m_1c_1 + m_2c_2 \\ a_2 = m_b + \Lambda_1 + \Lambda_2 \end{cases} \quad (2.136)$$

Des calculs directs montrent que les coefficients  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_3 = -\frac{a_0 - a_1a_2}{a_2}$  et  $c_3 = a_0$  sont de même signe, alors d'après le critère de Routh, toutes les valeurs propres de la matrice  $\Delta$  sont à partie réelle négative. Donc la matrice  $\mathcal{A}$  possède trois valeurs propres à partie réelle négative et une valeur propre nulle.

**2.4.2.1.1 Stabilisabilité** Pour étudier la stabilisabilité du système (2.67) nous appliquons le Théorème 2.1. Pour ce faire, il suffit de vérifier le critère de Hautus pour la valeur propre  $s_i = 0$ . Pour cela, calculons le rang suivant

$$\mathcal{R}ang(-\mathcal{A} \mid \mathcal{B}) = \mathcal{R}ang \left( \begin{array}{cccc|cc} \Lambda_1 & 0 & c_1 & 0 & \Lambda_{u_1} & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & -c_2 & 0 & 0 & -\Lambda_{u_2} \\ -m_1 & m_2 & m_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (2.137)$$

Les éléments (1;5), (2;6) et (4;3) de la matrice donnée par (2.137) sont des pivots. Nous obtenons donc le résultat suivant

$$\mathcal{R}ang(-\mathcal{A} \mid \mathcal{B}) = 3 + \mathcal{R}ang \begin{pmatrix} -m_1 & m_2 \end{pmatrix} = 4 \quad (2.138)$$

D'où nous déduisons que le système (2.67) est stabilisable.

**2.4.2.1.2 Détectabilité** D'une façon similaire au cas avec une seule commande (voir paragraphe 2.4.1.1.2) on démontre que pour  $s_i = 0$  nous avons

$$\mathcal{R}ang \left( \begin{array}{c} s_i I - \mathcal{A} \\ \hline \mathcal{C} \end{array} \right) = 4 \quad (2.139)$$

avec  $\mathcal{C}$  est donnée par (2.78), d'où on déduit que le système (2.67) est détectable.



**2.4.2.1.3 Stabilisabilité et détectabilité du cas particulier** Soient les matrices  $\mathcal{A}_c$  et  $\mathcal{B}_c$  définies par le système (2.74). A partir de l'égalité suivante

$$\mathcal{D}et(sI - \mathcal{A}_c) = s(s + \Lambda_c)(s^2 + (\Lambda_c + m_b)s + \Lambda_c m_b + m_1 c_{c1} + m_2 c_{c2}) \quad (2.140)$$

nous déduisons que la matrice  $\mathcal{A}_c$  admet une valeur propre nulle et trois autres à partie réelle négative.

Pour  $s = -\Lambda_c$  nous avons

$$\mathcal{R}ang \left( sI - \mathcal{A}_c \begin{array}{c} \vdots \\ \mathcal{B}_c \end{array} \right) = 4 \quad (2.141)$$

et

$$\mathcal{R}ang \left( \begin{array}{c} sI - \mathcal{A}_c \\ \hline \mathcal{C} \end{array} \right) = 3 < 4 \quad (2.142)$$

donc le mode associé à la valeur propre stable  $s = -\Lambda_c$  est commandable mais il est non observable.

### 2.4.2.2 Modèle complet

Soit

$$\delta \dot{x} = \mathcal{A}_d \delta x + \mathcal{B}_d \begin{pmatrix} \delta u_{d1} \\ \delta u_{d2} \end{pmatrix} \quad (2.143)$$

une représentation du système (2.77).

Nous avons

$$\mathcal{D}et(sI - \mathcal{A}_d) = s \left( s + \frac{1}{\tau_{d1}} \right) \left( s + \frac{1}{\tau_{d2}} \right) \mathcal{D}et(sI - \Delta) \quad (2.144)$$

où  $\Delta$  est donnée par (2.134). Puisque cette matrice (c'est-à-dire, la matrice  $\Delta$ ) est Hurwitz (voir le paragraphe 2.4.2.1) nous sommes donc en présence d'une valeur propre nulle et de cinq modes stables.

Après calcul, on montre facilement que

$$\mathcal{R}ang(-\mathcal{A}_d \begin{array}{c} \vdots \\ \mathcal{B}_d \end{array}) = 6 \quad (2.145)$$

et

$$\mathcal{R}ang \left( \begin{array}{c} s_i I - \mathcal{A}_d \\ \hline \mathcal{C}_d \end{array} \right) = 6 \quad (2.146)$$

avec

$$\mathcal{C}_d = ( 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 ) \quad (2.147)$$

D'où nous déduisons que le système (2.77) est stabilisable et détectable au voisinage du point d'équilibre considéré.

### 2.4.2.3 Conclusion

Nous avons constaté dans cette partie qu'un vérin commandé par deux distributeurs est localement stabilisable et détectable quelque soit le point d'équilibre considéré. Dans le cas particulier où le modèle linéarisé tangent est calculé au voisinage du point de fonctionnement  $\left( P_1^0 = P_2^0 = \frac{P_s + P_r}{2}, v^0 = 0, y^0 = 0, u_1^0 = u_2^0 = 0 \right)$  il existe un mode stable non détectable mais commandable. Rappelons que ce mode n'est pas commandable dans le cas d'un vérin commandé par un seul distributeur.

## 2.5 Commande linéaire par retour de sortie

La majorité des asservissements électrohydrauliques est réalisée par un correcteur de type PID en mesurant uniquement la variable à asservir ou à réguler. La synthèse du correcteur est basée sur la fonction de transfert entre la variable à réguler et le signal de commande du modulateur de puissance. Cette approche donne satisfaction dans la plupart des situations industrielles, néanmoins les résultats obtenus revêtent un caractère local.

Pour illustrer les méthodes utilisées, nous considérons la régulation de position d'un vérin symétrique sous les hypothèses suivantes :

- (H8) *la force antagoniste et la commande à l'équilibre sont nulles ;*
- (H9) *le modulateur de puissance est parfaitement symétrique et à centre critique ;*
- (H10) *les dynamiques du modulateur de puissance et du capteur sont suffisamment rapides en comparaison avec celle de l'actionneur ; elles sont donc négligées ;*
- (H11) *l'actionneur, soumis à une charge inertielle, est commandé par un seul modulateur de puissance ;*
- (H12) *les frottements secs sont négligés ;*
- (H13) *les capteurs sont parfaitement linéaires sur toute l'étendue de mesure ;*
- (H14) *les raideurs d'ancrage du vérin et des capteurs sont infinies.*
- (H15) *Le point de fonctionnement choisi correspond à la position centrale du vérin c'est-à-dire  $y^0 = 0$  et les pressions d'équilibre sont  $P_1^0 = P_2^0 = \frac{P_s + P_r}{2}$ . Ce point de fonctionnement correspond au cas le plus défavorable car d'une part le linéarisé tangent n'est pas commandable mais seulement stabilisable et, d'autre part, la pulsation propre non amortie  $\omega_0$  est minimale pour la position d'équilibre  $y^0 = 0$  ;*
- (H16) *la synthèse des correcteurs est réalisée sur le modèle linéarisé ;*

La synthèse du correcteur et les simulations numériques dans ce chapitre sont réalisées dans les conditions suivantes :

- L'actionneur est un vérin symétrique double tige double effet de diamètre d'alésage  $D = 50 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  et de diamètre de tige  $d = 36 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ; la course utile  $l_0 = 0,2 \text{ m}$  et nous supposons que le volume mort correspond à 10% du volume du vérin;
- Nous supposons que l'amortissement du vérin est égal à  $\xi = 0,15$  ce qui correspond à un coefficient de frottement visqueux  $b_v = 5 \cdot 10^4 \text{ kg s}^{-1}$  et à un coefficient de fuites  $\lambda = 2.37 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-1}$ ;
- Les correcteurs proposés sont simulés sur le modèle linéarisé tangent et sur le modèle non linéaire;
- Pour tester les correcteurs proposés, les réponses indicielles correspondent d'une part à un échelon de faible amplitude au voisinage du point d'équilibre choisi pour le calcul du correcteur et, d'autre part, à un échelon d'amplitude plus importante.

Les paramètres caractérisant les composants hydrauliques sont donnés dans le tableau TAB.2.1.

Paramètre du système hydraulique	Valeur	Unité
$M$ : masse	500	Kg
$P_s$ : pression source	$210 \cdot 10^5$	Pa
$P_r$ : pression retour	$1 \cdot 10^5$	Pa
$\beta_e$ : module de compressibilité	$1,4 \cdot 10^9$	Pa
$\omega_0$ : pulsation propre du vérin	219.41	rad s <sup>-1</sup>

TAB. 2.1: Paramètres du système hydraulique.

Compte tenu de ces hypothèses, la fonction de transfert entre la position  $Y$  et le courant de commande  $I$  est

$$G(s) = \frac{Y(s)}{I(s)} = \frac{K_s \omega_0^2}{s(s^2 + 2\xi \omega_0 s + \omega_0^2)} \quad (2.148)$$

avec  $K_s = \frac{k_d}{S} \sqrt{\frac{P_s - P_r}{2}}$  le gain statique,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\beta_e S^2}{MV_0}}$  la pulsation propre non amortie et  $\xi$  est le coefficient d'amortissement (voir [Gui92, Mer67]).

**Remarque 2.9.** Le coefficient d'amortissement  $\xi$  est en général très difficilement mesurable. Pour les vérins hydrauliques, ce coefficient est compris entre 0,1 et 0,25 [Gui92]. Pour les calculs on considère souvent le cas le plus défavorable, c'est-à-dire 0,1. ■

Le schéma de principe et le schéma fonctionnel de ce type de régulation sont donnés par les figures FIG.2.1 et FIG.2.2.

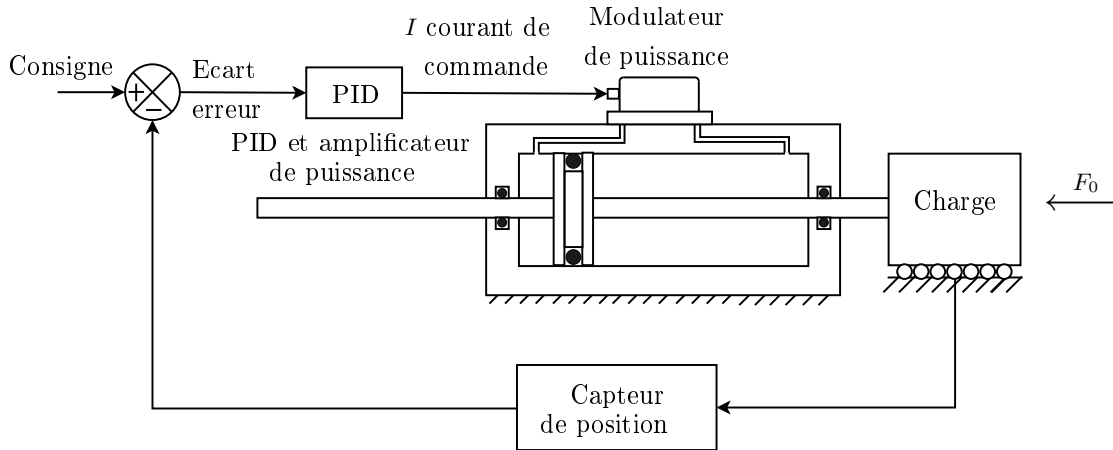


FIG. 2.1: Schéma de principe : régulation de position du vérin.

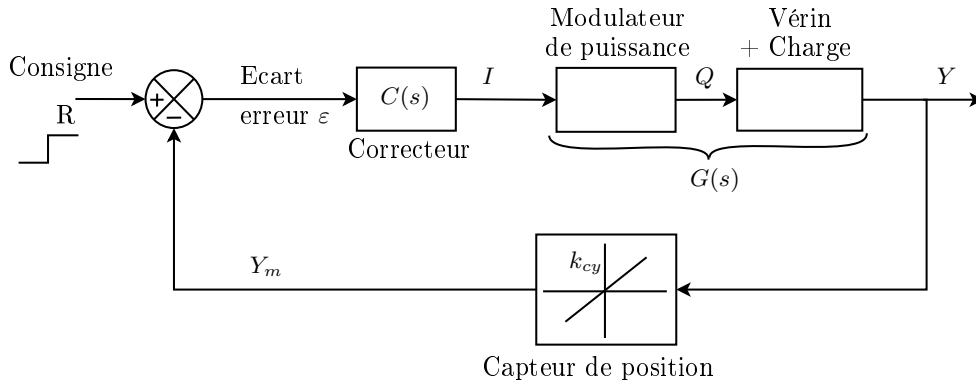


FIG. 2.2: Schéma fonctionnel : régulation de position du vérin.

### 2.5.1 Correcteur proportionnel $K_p$

Compte tenu de la présence d'un intégrateur pur dans la fonction de transfert  $G(s)$ , on peut se contenter, dans un premier temps, d'utiliser un correcteur proportionnel. La fonction de transfert en boucle ouverte est donc donnée par

$$F_{bo}(s) = \frac{k_{cy} K_s K_p \omega_0^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)} \quad (2.149)$$

où  $k_{cy}$  représente le gain du capteur et  $K_p$  le gain proportionnel du correcteur.

L'analyse dans le domaine fréquentiel montre que le lieu du transfert passe par le point critique -1 pour :

- une pulsation critique  $\omega_{osc} = \omega_0$
- un gain proportionnel limite  $K_{p_{osc}} = \frac{2\xi\omega_0}{k_{cy} K_s}$

La condition de stabilité est donc donnée par [Gui92]

$$K_p < K_{p_{osc}} \quad (2.150)$$

De manière réaliste, il est d'usage de prendre une marge de gain de 6 db [Gui92], soit

$$K_p = \frac{K_{p_{osc}}}{2} = \frac{\xi\omega_0}{k_{cy}K_s} \quad (2.151)$$

**Remarque 2.10.** *Théoriquement, ce système est précis car il comporte un intégrateur pur. En réalité, ce n'est pas le cas et l'erreur statique est due essentiellement :*

- au seuil du modulateur de puissance
- aux forces antagonistes
- et au fait que le modèle utilisé pour l'analyse de régulation et la synthèse du correcteur néglige tous les phénomènes non linéaires.



## 2.5.2 Amélioration de la précision et de l'amortissement par un correcteur PI ou PID

Le réglage des correcteurs de type PID pour commander un processus électrohydraulique s'avère souvent délicat en pratique dû au fait, d'une part, que le processus est fortement non linéaire avec des paramètres à temps variant et, d'autre part, que le système en boucle ouverte est très peu amorti.

L'introduction d'un intégrateur dans le correcteur permet d'éliminer l'erreur statique due à la présence de force antagoniste ou de frottements secs. L'action dérivée sert à rajouter une phase positive dans la bande de fréquences où l'on désire calculer la marge de phase améliorant ainsi l'amortissement du système bouclé.

La méthode la plus utilisée est celle de Ziegler-Nichols en boucle fermée [ZN42, GGS01]. Les paramètres des correcteurs ont été obtenus (de manière empirique) en minimisant le critère  $J = \int_0^\infty |\varepsilon(t)|dt$ . Ces paramètres sont donnés, en fonction des paramètres du modèle linéarisé tangent, par le tableau TAB.2.2.

Type de correcteur	Fonction de transfert
P	$C(s) = \frac{\xi\omega_0}{k_{cy}K_s}$
PI	$C(s) = 0,9 \frac{\xi\omega_0}{k_{cy}K_s} \left(1 + \frac{1,2}{T_{osc}s}\right)$
PID	$C(s) = 1,2 \frac{\xi\omega_0}{k_{cy}K_s} \left(1 + \frac{2}{T_{osc}s} + \frac{T_{osc}}{8}s\right)$

TAB. 2.2: Paramètres des différents correcteurs par la méthode de Ziegler-Nichols.

avec  $T_{osc} = 2\pi\sqrt{\frac{MV_0}{2\beta_e S^2}}$ .

Notons que la réponse en boucle fermée du système obtenue par ces réglages est souvent peu amortie (voir FIG.2.4-FIG.2.6). Les réglages doivent donc être affinés expérimentalement [GGS01]. Dans les figures FIG.2.3-FIG.2.6, les réponses correspondant aux correcteurs P, PI et PID appliqués aux systèmes linéaire et non linéaire, avec un retour de sortie, sont représentées respectivement par un trait continu (—), par un trait discontinu (---) et par un trait pointillé (.....).

La figure FIG.2.3 présente les courbes du module et de la phase dans le domaine fréquentiel (diagrammes de Bode) pour le système linéaire représenté par (2.148) et commandé par trois types de correcteurs P, PI et PID. Les courbes données par la figure FIG.2.4 représentent l'évolution de la sortie de ce système (c'est-à-dire, la position  $y$ ) dans le domaine temporel, ces courbes présentent des oscillations pour les trois correcteurs et des dépassements importants pour les correcteurs PI et PID.

Dans les figures FIG.2.5 et FIG.2.6, les réponses du système non linéaire (2.2) avec un retour de sortie en utilisant les correcteurs P, PI et PID sont présentées. Ces simulations sont effectuées pour deux valeurs de positions finales. La figure FIG.2.5 montre les résultats obtenus pour un petit déplacement (la position initiale  $y_i = 0$  m et la position finale  $y_f = 0.005$  m). Pour  $y_i = 0$  m et  $y_f = 0.05$  m, les résultats sont représentés par la figure FIG.2.6.

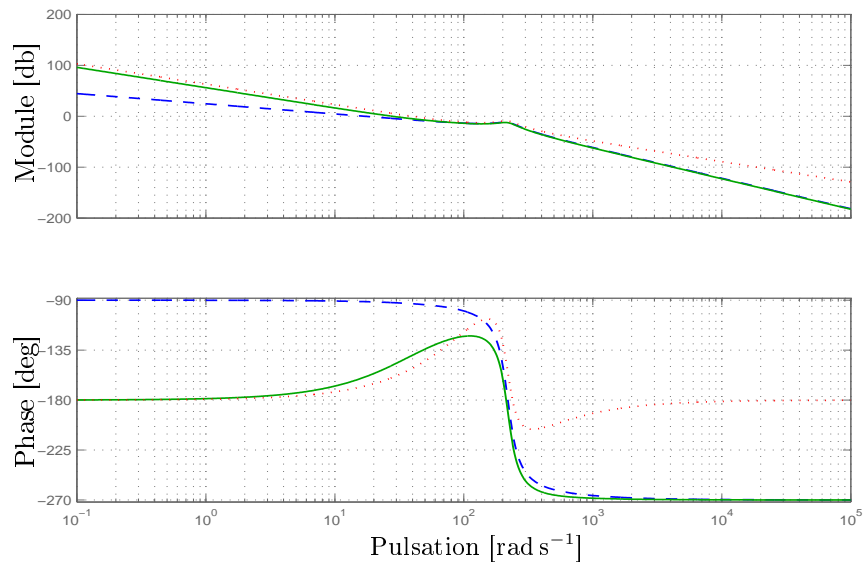


FIG. 2.3: Diagrammes de Bode.

Les réponses indicielles du système non linéaire montrent que :

- pour un faible déplacement de 5 mm (FIG.2.5), le correcteur proportionnel donne des résultats très satisfaisants. Les réponses du système avec un correcteur PI et PID présentent par contre un amortissement trop faible et un dépassement de l'ordre de 50 %.
- pour un déplacement plus important de 5 cm (FIG.2.6), nous pouvons faire les mêmes constats avec un dépassement plus important (de l'ordre de 90 %) pour les correcteurs PI et PID. Notons que si l'on augmente encore l'amplitude de la consigne, ces

effets indésirables s'aggravent et le piston peut facilement atteindre la fin de course avant de se stabiliser.

- le temps de réponse du système augmente en fonction de l'amplitude de la consigne.

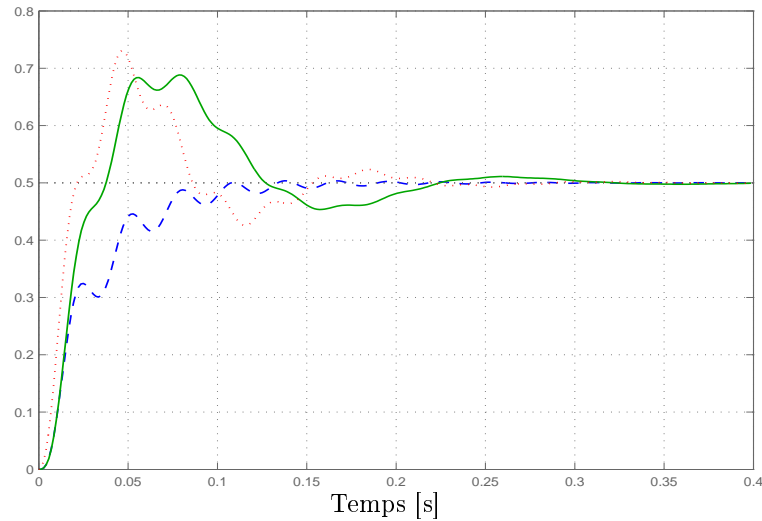


FIG. 2.4: Position  $y$  du système linéaire.

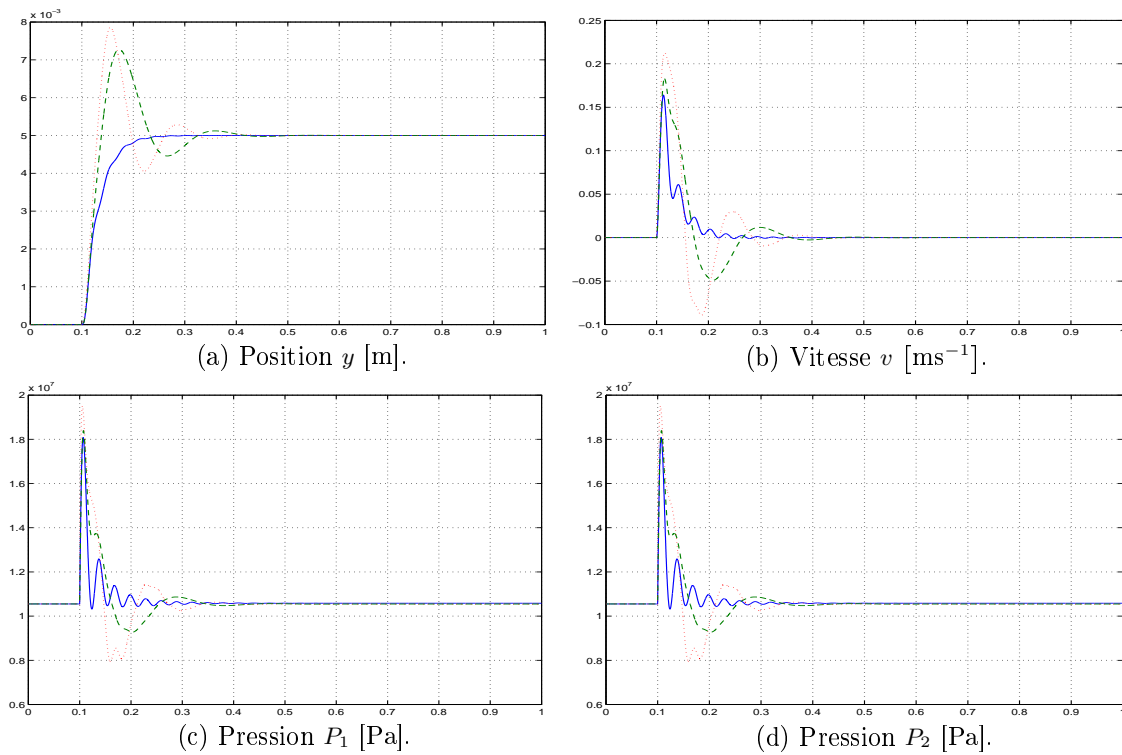


FIG. 2.5: Système non linéaire avec une position finale  $y_f = 0.005$  m.

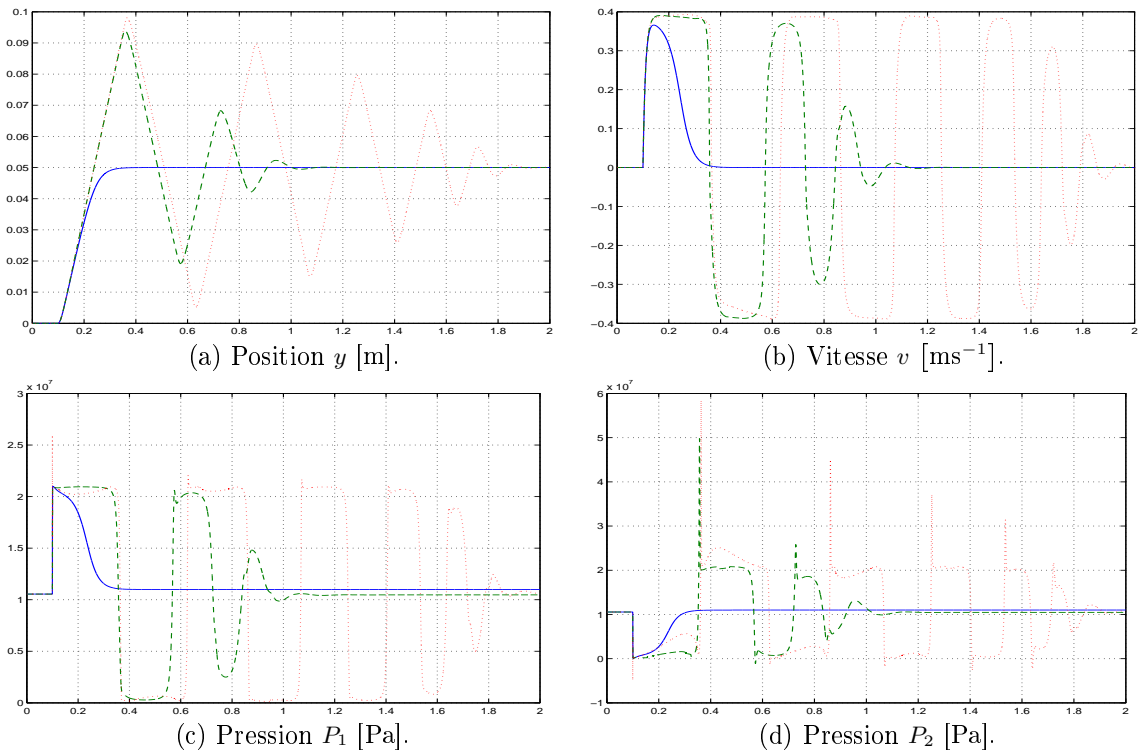


FIG. 2.6: Réponse du système non linéaire un déplacement de 5 cm : méthode de Ziegler-Nichols

### 2.5.3 Solutions technologiques pour améliorer l'amortissement

En général, un correcteur proportionnel ne peut pas amortir suffisamment le servovérin sans dégrader les performances temporelles. Pour améliorer le comportement du système en boucle fermée, c'est-à-dire mieux amortir le système sans dégrader fortement ni la rapidité ni la précision de la réponse, on peut essentiellement considérer deux approches technologiques. La première consiste à introduire une boucle de régulation supplémentaire en mesurant la pression différentielle, la vitesse ou l'accélération. L'idée de la seconde méthode consiste à introduire physiquement sur le processus un élément dissipateur d'énergie permettant ainsi d'amortir les éventuelles oscillations. Ces deux approches sont présentées brièvement dans les paragraphes suivants et nous donnons quelques indications concernant leurs avantages et inconvénients.

#### 2.5.3.1 Amélioration de l'amortissement par fuites internes

Une façon de réduire les oscillations de la réponse consiste à créer une fuite soit entre les chambres du vérin, soit au niveau du distributeur.

**2.5.3.1.1 Fuites inter-chambres** Une fuite inter-chambres améliore la marge de stabilité des servovérins essentiellement pour les faibles vitesses [MM80]. Néanmoins, cette solution présente les inconvénients suivants [Fai99, Gui92, MM80] :



- Une fuite inter-chambres amplifie les effets négatifs des frottements et ainsi génère une erreur statique. En effet, le distributeur doit fournir un débit (donc non nul) pour pouvoir vaincre les frottements ;
- De plus, un orifice de fuite dégrade considérablement la bande passante et le rendement du système.

Cette solution, facilement réalisable, peut être envisagée lorsque ni une précision importante ni une dynamique élevée ne sont nécessaires.

**2.5.3.1.2 Fuites du distributeur** Cette solution consiste à utiliser un distributeur à découverture [Fai99, Gui92, MM80]. Elle présente comme principaux inconvénients :

- L'introduction d'une zone morte et ainsi que la diminution de la précision ;
- Une consommation d'huile non nulle en position repos.

Pour ces raisons, cette solution est généralement à proscrire.

Notons que les servovalves ont, de par leur technologie, une fuite interne relativement importante (buses-palette). Néanmoins, l'utilisation d'une servovalve n'introduit pas une diminution de la pression puisque ce sont généralement des pré-actionneurs à centre critique.

### 2.5.3.2 Amélioration de l'amortissement par frottements

Les frottements visqueux peuvent améliorer, de manière marginale, la stabilité d'un servovérin (voir par exemple l'équation (2.98)). Cette solution n'est donc pas satisfaisante.

## 2.5.4 Amélioration de l'amortissement par une boucle de rétroaction secondaire

Introduire une boucle de régulation supplémentaire consiste à mesurer, en plus de la position, une autre grandeur physique. Cette solution nécessite donc l'achat d'un capteur supplémentaire avec l'électronique associée. Son prix de revient est donc supérieur à ceux des solutions technologiques précédentes.

Lorsque la vitesse ou la pression différentielle ou encore l'accélération du vérin n'est pas mesurée, un correcteur de type PID estime ces variables de manière implicite et les estimations sont très sensibles aux erreurs de modélisation [GGS01]. L'utilisation d'une ou de plusieurs boucles supplémentaires rend ainsi la commande plus robuste. De plus, dans le cas de la commande des servovérins, la ou les rétroactions supplémentaires servent essentiellement à déplacer les modes peu amortis de manière à augmenter la marge de stabilité.

### 2.5.4.1 Rétroaction de la vitesse

La mesure de la vitesse est peu utilisée pour la commande des servovérins [Fai99, Gui92]. Une rétroaction de la vitesse utilisant un simple gain proportionnel est en effet inefficace pour amortir le système. Il est aisé de montrer, par un simple calcul, que le

coefficient d'amortissement  $\xi'$  ainsi obtenu est encore plus faible :

$$\xi' = \xi \frac{\omega_0}{\omega'_0} < \xi \quad (2.152)$$

avec  $\omega'_0 = \sqrt{1 + K_p k_{cv} K_s} \omega_0$  la pulsation propre non amortie de la boucle interne I, où  $k_{cv}$  représente le gain du capteur de vitesse. Cette approche est donc très peu utilisée en hydraulique.

Une solution pour améliorer l'amortissement en utilisant la mesure de la vitesse consiste à utiliser un correcteur avance de phase pour cette boucle secondaire. Le schéma de principe est représenté sur la figure ci-dessous

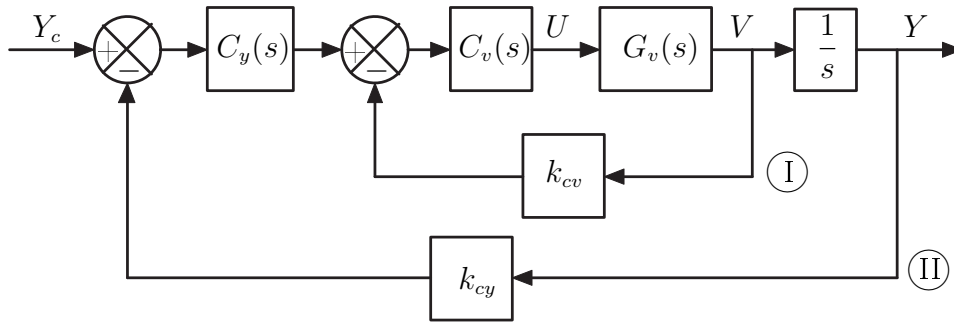


FIG. 2.7: Boucle fermée avec le retour de la vitesse.

avec  $G_v(s) = \frac{B_v(s)}{A_v(s)} = \frac{K_s \omega_0^2}{s^2 + 2\xi \omega_0 s + \omega_0^2}$  le modèle nominal représentant le transfert entre la commande et la vitesse. Le correcteur doit être synthétisé de manière à obtenir, pour la boucle interne, une marge de phase acceptable permettant aussi d'améliorer l'amortissement du système. La boucle secondaire étant suffisamment amorti, la synthèse du correcteur principal  $C_y(s)$  devient plus aisée. Dans l'exemple suivant, nous avons choisi un gain proportionnel  $K_{py}$  pour le correcteur principal.

Le correcteur proposé pour la boucle interne est de la forme suivante

$$C_v(s) = K_{pv} \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \quad (2.153)$$

avec  $K_{pv} > 0$ ,  $a > 0$  et  $T > 0$ . C'est un correcteur à avance de phase c'est-à-dire  $\theta(j\omega) = \text{Arg}(C_v(j\omega)) \geq 0$  pour tout  $\omega \geq 0$ . Cette fonction passe par un maximum en  $\omega = \omega_M$  telle que

$$\sin(\theta(\omega_M)) = \frac{a-1}{a+1} \quad (2.154)$$

Une procédure de synthèse de ce correcteur est la suivante :

1. La correction de phase est effectuée de manière à augmenter la marge de phase  $M_\theta$  et donc d'augmenter l'amortissement, soit

$$M_\theta(\text{désirée}) - M_\theta(\text{initiale}) = \text{Arcsin} \left( \frac{a-1}{a+1} \right) \quad (2.155)$$

ce qui permet de calculer  $a$ .

2. Le paramètre  $T$  est calculé de manière à ce que l'apport de phase maximale se situe à la pulsation de coupure désirée  $\omega_{cv}$  (désirée) =  $\omega_M$  soit

$$T = \frac{1}{\omega_{cv}\sqrt{a}} \quad (2.156)$$

3. Finalement, le paramètre  $K_{pv}$  est calculé de manière à ce que le gain en boucle ouverte du système corrigé soit égal à 1 à la pulsation de coupure désirée

$$|k_{cv}C_v(j\omega_{cv})G_v(j\omega_{cv})| = 1 \quad (2.157)$$

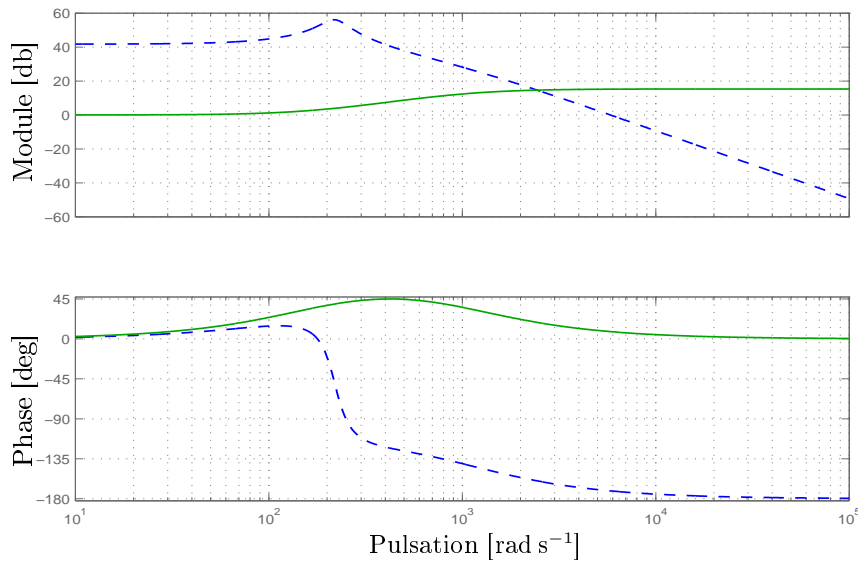


FIG. 2.8: Diagrammes de Bode du modèle nominal  $G_v(s)$  et du correcteur  $C_v(s)$ .

Pour montrer l'efficacité du correcteur calculé dans cette partie, nous avons effectué quelques simulations. Ces simulations sont réalisées pour le modèle linéaire représenté par le schéma bloc de la figure FIG.2.7 et pour le modèle non linéaire donné par (2.2). Les paramètres du système électrohydraulique considéré correspondent au paragraphe précédent.

Les résultats de simulations du modèle linéaire sont représentés par les figures FIG.2.8, FIG.2.9, FIG.2.10 et FIG.2.12 ceux du modèle non linéaire sont donnés par la figure FIG.2.11. De manière plus détaillée,

- la figure FIG.2.8 représente les diagrammes de Bode du modèle nominal  $G_v(s)$  (trait discontinu (---)) et du correcteur  $C_v(s)$  (trait continu (—));
- la figure FIG.2.9 représente les réponses indicielles de la pression différentielle avant (trait continu (—)) et après (trait pointillé (⋯)) la correction;
- les figures FIG.2.10 et FIG.2.12 correspondent respectivement aux diagrammes de Bode et à la réponse indicielle au modèle linéaire corrigé;

- les réponses du système non linéaire en appliquant une rétroaction de la vitesse, relatives aux deux valeurs de déplacement  $y_f - y_i = 0.02$  m (trait continu (—)) et  $y_f - y_i = 0.16$  m (trait discontinu (- · - · -)), sont représentées par la figure FIG.2.11.

Nous pouvons constater que la réponse indicielle de la vitesse (FIG.2.9) est suffisamment amortie par le correcteur secondaire. Les réponses sur le système non linéaire sont également satisfaisants (FIG.2.11) aussi bien pour un faible déplacement de 2 cm ou de 16 cm du piston. Ces réponses sont suffisamment amorties avec un temps de réponse acceptable.

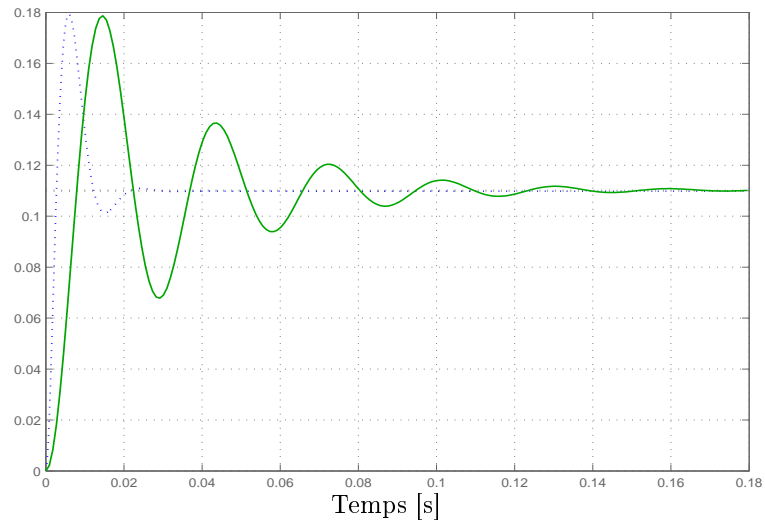


FIG. 2.9: Réponses indicielles de la vitesse avant et après correction du modèle linéarisé tangent.

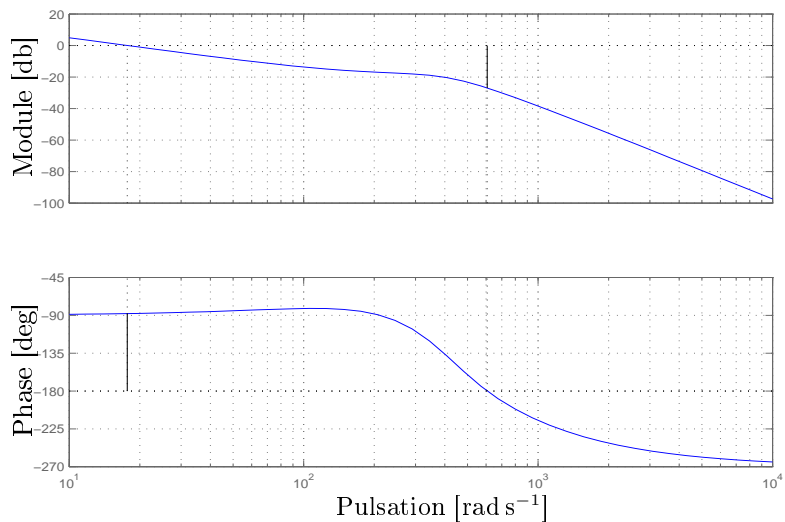


FIG. 2.10: Diagrammes de Bode de la boucle externe.

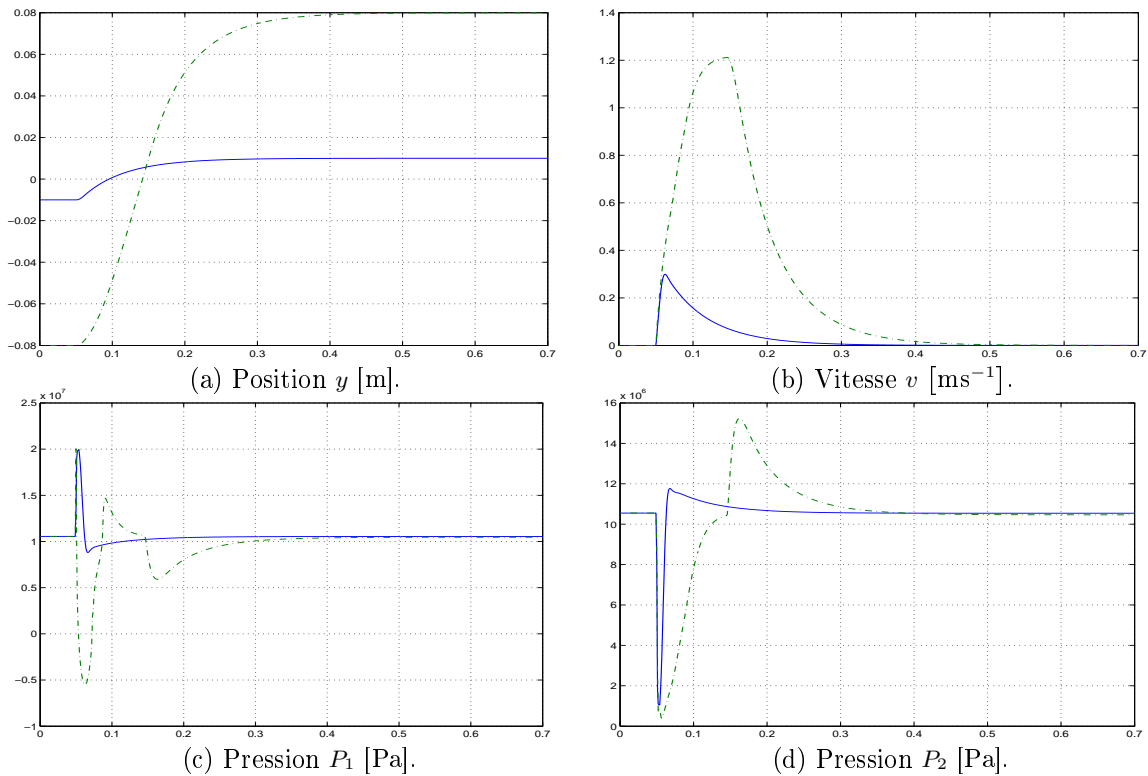


FIG. 2.11: Variables d'état du système non linéaire avec une rétroaction de la vitesse, pour les déplacements  $y_f - y_i = 0.02$  m et  $y_f - y_i = 0.16$  m.

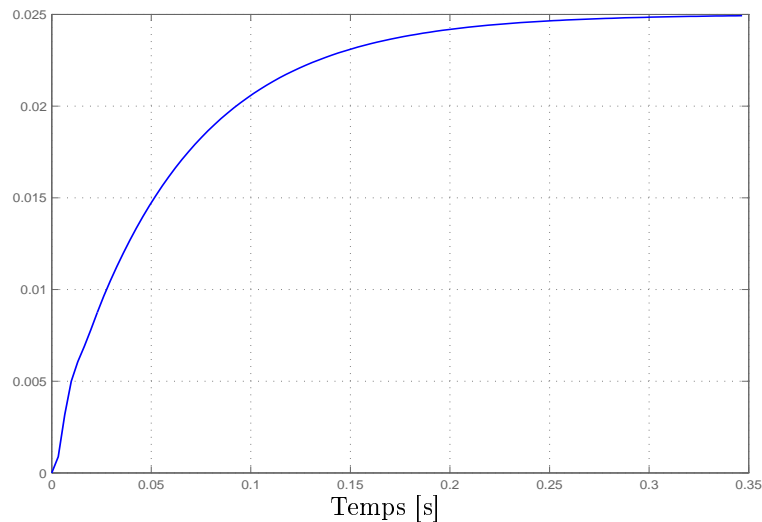


FIG. 2.12: Réponse indicielle du système linéaire corrigé par une rétroaction de la vitesse.

### 2.5.4.2 Rétroaction de la pression différentielle ou de l'accélération

Une autre façon pour améliorer l'amortissement du système, sans détériorer les performances dynamiques du système en boucle fermée, consiste à insérer un rétroaction de

la pression différentielle ou de l'accélération [Fai99, Gui92, MM80].

Les effets d'une rétroaction de la pression différentielle ou de l'accélération sur le comportement du vérin sont relativement identiques. En effet, ces deux variables peuvent amortir efficacement le système tout en augmentant la bande passante en boucle fermée. Néanmoins, la mesure de l'accélération est actuellement considérée comme plus délicate et surtout plus onéreuse que la mesure de la pression différentielle [JK03]. La majorité des installations industrielles nécessitant des hautes performances (précision et bande passante élevées) utilisent donc une rétroaction de la pression différentielle.

Nous présentons dans ce paragraphe la régulation de position d'un vérin symétrique avec une rétroaction secondaire de la pression différentielle. La démarche utilisée est analogue à celle présentée au paragraphe précédent, c'est-à-dire que la rétroaction secondaire servira en premier lieu à amortir le système. En pratique, la boucle secondaire doit permettre d'obtenir un amortissement supérieur à 0,5. Notons cependant que, contrairement à une rétroaction secondaire de la vitesse, un gain proportionnel permet de réaliser cet objectif. La boucle principale servira ensuite à atteindre les performances désirées. Dans le domaine industriel, la bande passante en boucle fermée est généralement comprise entre 1,3 et 1,7 fois la bande passante en boucle ouverte en utilisant une rétroaction de la pression différentielle. Le schéma de principe de cette régulation est représenté par la figure suivante.

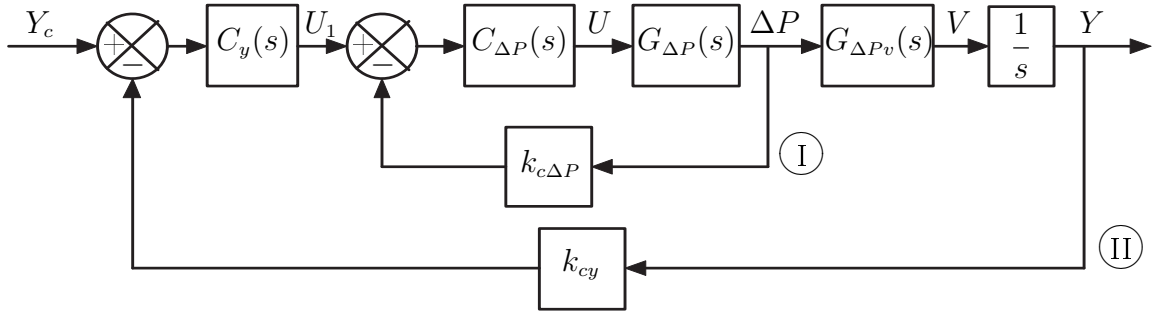


FIG. 2.13: Boucle fermée avec le retour de la pression différentielle.

$$\text{avec } G_{\Delta P}(s) = \frac{2k_d\beta_e}{V_0} \sqrt{\frac{P_s - P_r}{2}} \left( s + \frac{b_v}{M} \right), \quad G_{\Delta Pv}(s) = \frac{S}{s + \frac{b_v}{M}}, \quad \text{où } k_{c\Delta P} \text{ et } k_{cy} \text{ repré-}$$

sentent respectivement les gains du capteur de pression différentielle et du capteur de position. La fonction de transfert de la boucle interne en boucle fermée est donnée par

$$G_{\Delta Pbf}(s) = \frac{\Delta P}{U_1} = \frac{K_{p1}k_1 \left( s + \frac{b_v}{M} \right)}{s^2 + (2\xi\omega_0 + k_{c\Delta P}k_1K_{p1})s + \omega_0^2 + k_{c\Delta P}k_1K_{p1}\frac{b_v}{M}} \quad (2.158)$$

$$\text{avec } k_1 = \frac{2k_d\beta_e}{V_0} \sqrt{\frac{P_s - P_r}{2}} \text{ et } K_{p1} \text{ le gain proportionnel de la boucle secondaire.}$$

Le gain  $K_{p1}$  est calculé de manière à obtenir une valeur acceptable  $\xi'$  de l'amortissement de la boucle I, soit

$$\xi' = \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma \frac{b_v}{M}}} \left( \xi + \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{k_{c\Delta P} k_1 K_{p1}} \right) \quad (2.159)$$

avec  $\sigma = \frac{k_{c\Delta P} k_1 K_{p1}}{\omega_0^2}$ .

On peut également constater que la bande passante du système en boucle fermée est améliorée puisque  $\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 + k_{c\Delta P} k_1 K_{p1} \frac{b_v}{M}} > \omega_0$ .

Les simulations concernant cette partie sont représentées par les figures FIG.2.14-FIG.2.18 pour le système linéaire et par la figure FIG.2.17 pour le système non linéaire. Dans cette partie :

- la figure FIG.2.14 donne les diagrammes de Bode du modèle nominal  $G_{\Delta P}(s)$  (trait discontinu (---)) et du correcteur  $C_{\Delta P}(s)$  (trait continu (—));
- les réponses indicielles de la pression différentielle avant et après l'intégration du correcteur, représentées respectivement par un trait continu (—) et un trait pointillé (⋯⋯), sont données par la figure FIG.2.15. Nous pouvons aisément constater un amortissement très correct et une amélioration substantielle du temps de réponse du système corrigé ;
- les figures FIG.2.16 et FIG.2.18 représentent respectivement les diagrammes de Bode et la réponse indicielle relatives au modèle linéaire corrigé ;
- les réponses du système non linéaire en appliquant une rétroaction de la pression différentielle, relatives aux deux valeurs de déplacement  $y_f - y_i = 0.02$  m (trait continu (—)) et  $y_f - y_i = 0.16$  m (trait discontinu (- · - · -)), sont représentées par la figure FIG.2.17.

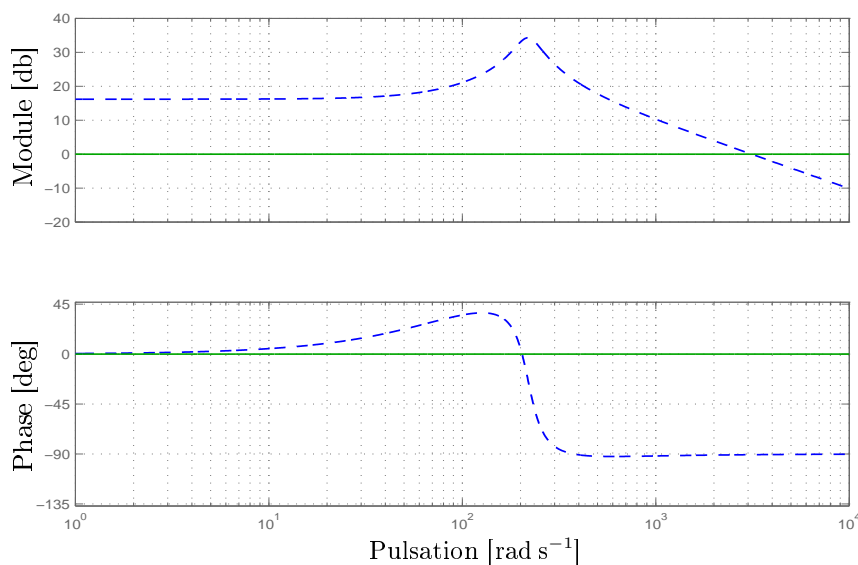


FIG. 2.14: Diagrammes de Bode du modèle nominal  $G_{\Delta P}(s)$  et du correcteur  $C_{\Delta P}(s)$ .

Comme illustré par la figure FIG.2.15, la réponse indicielle de la pression différentielle a été améliorée par la boucle interne et les oscillations sont atténuées. Les performances du système non linéaire sont satisfaisants pour les petits déplacements avec une légère dégradation du temps de réponse pour les déplacements importants.

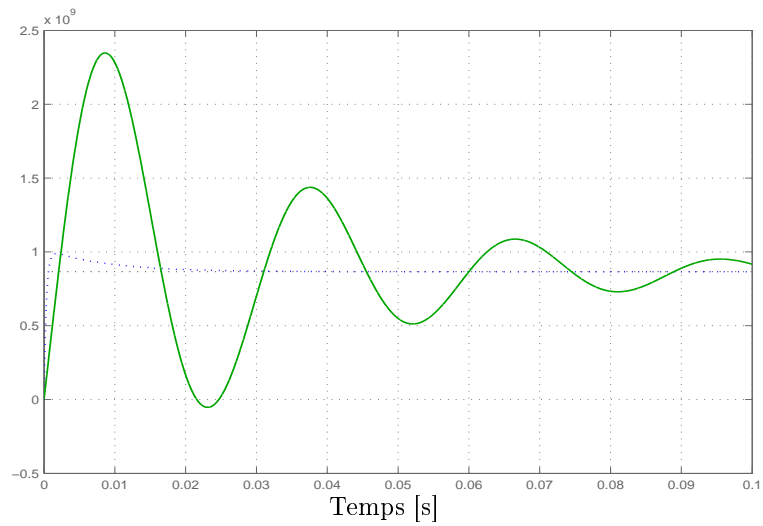


FIG. 2.15: Réponses indicielles de la pression différentielle avant et après la correction.

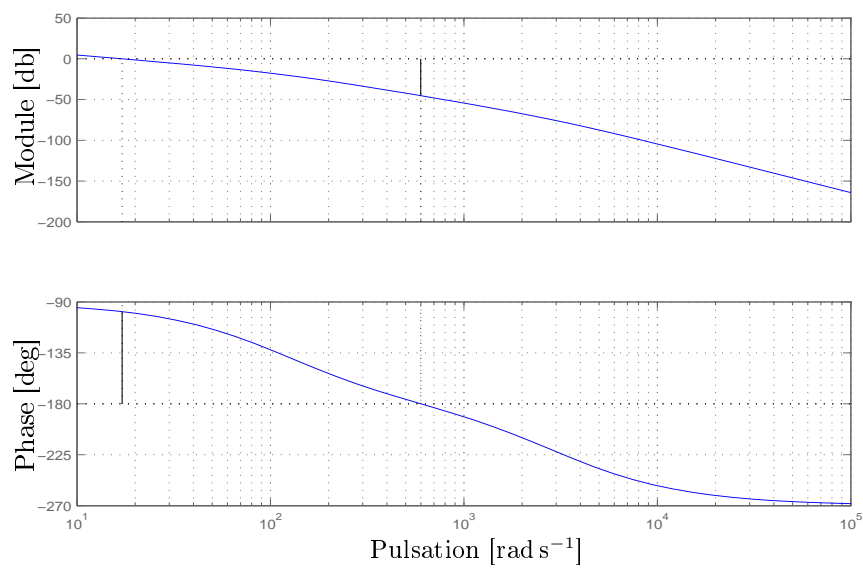


FIG. 2.16: Diagrammes de Bode de la boucle externe.



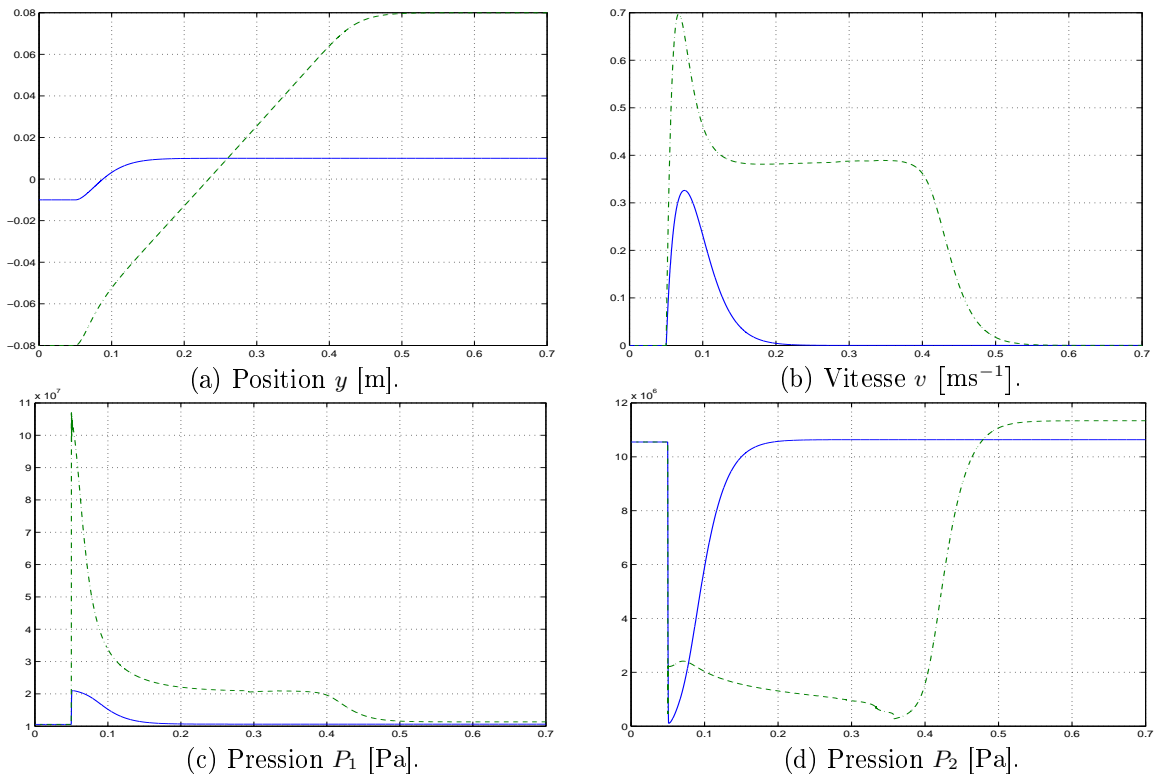


FIG. 2.17: Variables d'état du système non linéaire avec une rétroaction de la pression différentielle, pour les déplacements  $y_f - y_i = 0.02$  m et  $y_f - y_i = 0.16$  m.

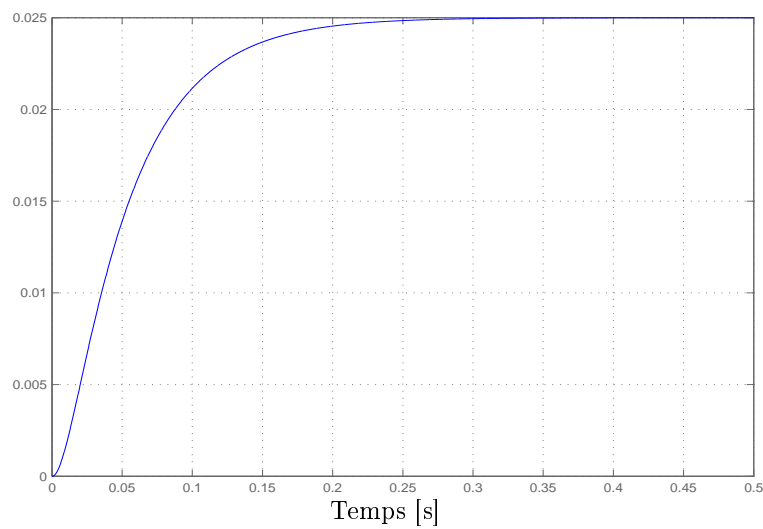


FIG. 2.18: Réponse indicielle du système linéaire corrigé par une rétroaction de la pression différentielle.

## 2.6 Commande linéaire par retour d'état

Ce paragraphe est dédié à la commande par retour d'état statique calculé sur la base du modèle linéarisé tangent du vérin symétrique, au point de fonctionnement défini au paragraphe 2.5 (voir **(H15)**). Nous avons vu que le modèle linéarisé tangent obtenu possède un mode stable non observable et non commandable. Ainsi la première étape consiste à proposer une réalisation minimale dans l'espace d'état avant de calculer une loi de commande de la forme  $u = -Kx + Fy_{ref}$  où  $K$  est le gain à calculer,  $y_{ref}$  la consigne en position et  $F$  est un pré-filtre permettant par exemple d'éliminer l'erreur statique. Le schéma de principe est le suivant :

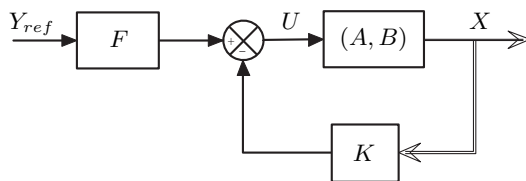


FIG. 2.19: Commande par retour d'état.

Nous proposons donc comme vecteur d'état  $x = (y \ v \ \gamma)^T$ , ce qui nous permet d'obtenir la représentation sous la forme canonique commandable suivante :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_s\omega_0^2 \end{pmatrix}}_B u \quad (2.160)$$

avec  $u = -Kx = - \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  où les constantes  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  sont à déterminer.

### 2.6.1 Commande par placement de pôles

Le système en boucle fermée s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1K_s\omega_0^2 & -k_2K_s\omega_0^2 - \omega_0^2 & -2\xi\omega_0 - k_3K_s\omega_0^2 \end{pmatrix}}_{A_{bf}=A-BK} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_s\omega_0^2 \end{pmatrix} Fy_{ref} \quad (2.161)$$

dont le polynôme caractéristique est donné par

$$\begin{aligned} \Pi(s) &= |sI - A_{bf}| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ k_1 K_s \omega_0^2 & k_2 K_s \omega_0^2 + \omega_0^2 & s + 2\xi\omega_0 + k_3 K_s \omega_0^2 \end{vmatrix} \\ &= s^3 + (2\xi\omega_0 + k_3 K_s \omega_0^2)s^2 + (k_2 K_s \omega_0^2 + \omega_0^2)s + k_1 K_s \omega_0^2 \end{aligned} \quad (2.162)$$

Ce polynôme peut se mettre sous la forme désirée suivante

$$\Pi(s) = (s^2 + 2\xi_{bf}\omega_{bf}s + \omega_{bf}^2)(s + \omega_1) \quad (2.163)$$

en choisissant des valeurs de  $\omega_1$  et  $\omega_{bf}$  comprises entre 1,3 et 1,7 fois  $\omega_0$  et  $\xi_{bf}$  supérieur à 0,5. On obtient donc le gain  $K$  par simple identification entre les polynômes (2.162) et (2.163)

$$K = \left( \frac{\omega_{bf}^2 \omega_1}{K_s \omega_0^2} \quad \frac{\omega_{bf}^2 + 2\xi_{bf}\omega_{bf}\omega_1 + \omega_0^2}{K_s \omega_0^2} \quad \frac{2\xi_{bf}\omega_{bf} + \omega_1 - 2\xi\omega_0}{K_s \omega_0^2} \right) \quad (2.164)$$

Le filtre  $F$ , égal à l'inverse du gain statique en boucle fermée, permet d'éliminer l'erreur statique et son expression est

$$F = (C^T (A - BK)^{-1} B) \quad (2.165)$$

avec  $C = (1 \ 0 \ 0)$ .

Pour éviter l'utilisation du pré-filtre  $F$ , le schéma de principe FIG.2.19 peut être transformé de la façon suivante

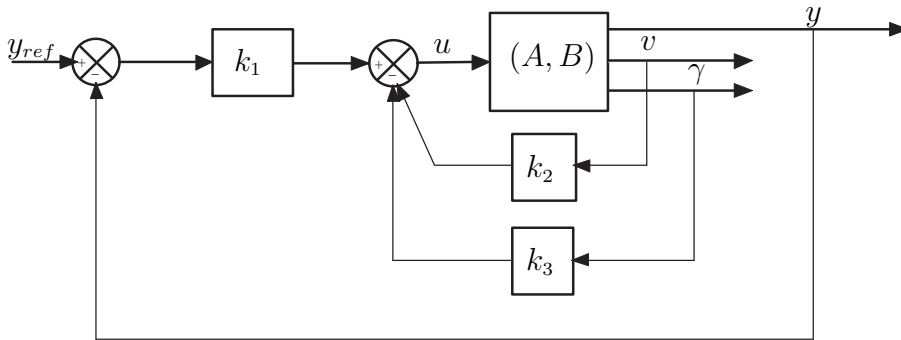


FIG. 2.20: Commande par placement de pôles.

Les simulations effectuées dans cette partie, concernent le modèle linéaire et non linéaire. La figure FIG.2.22 représente la réponse indicielle du système linéaire auquel nous avons appliqué une commande par placement de pôles. Cette commande est appliquée également au modèle non linéaire, l'évolution des variables de l'état de ce système dans ce cas est représentée par FIG.2.21.

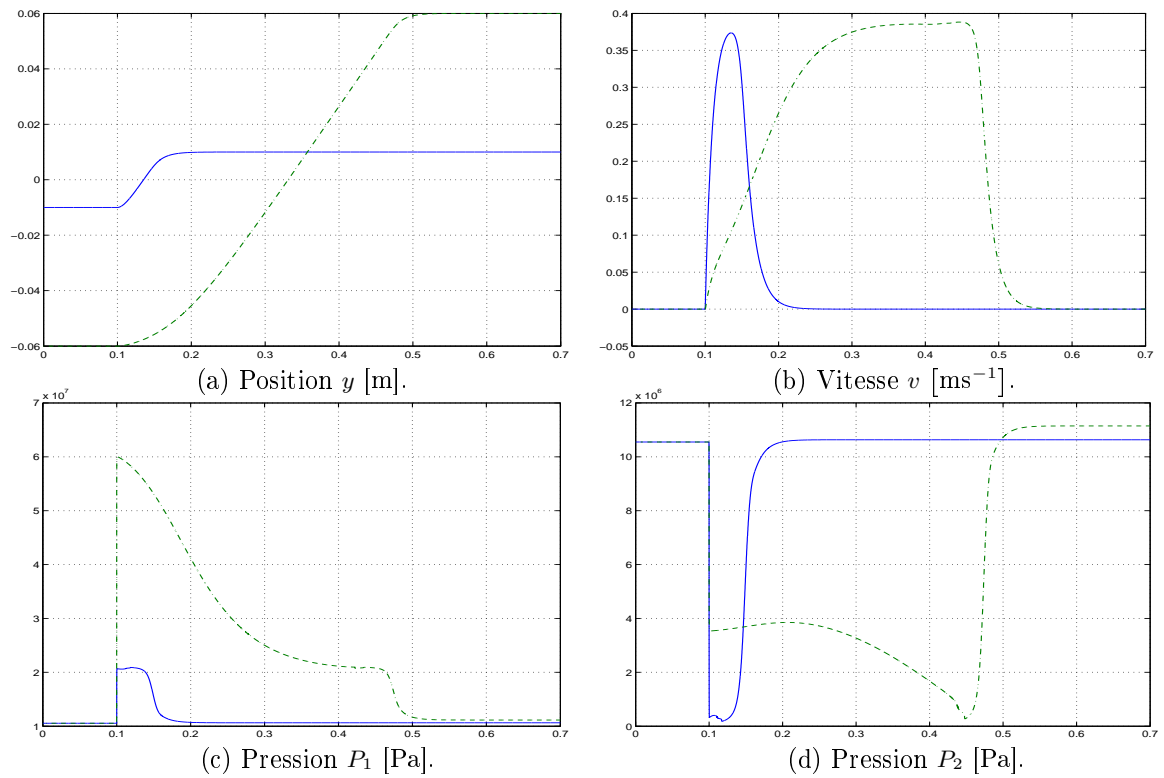


FIG. 2.21: Variables d'état du système non linéaire avec la commande par placement de pôles, pour les déplacements  $y_f - y_i = 0.02$  m et  $y_f - y_i = 0.12$  m.

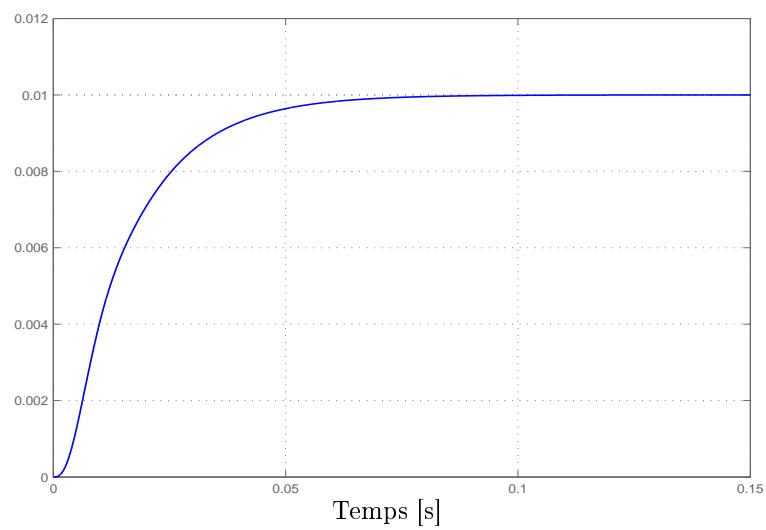


FIG. 2.22: Réponse indicielle du système linéaire avec la commande par placement de pôles.

Le modèle linéaire, avec la commande synthétisée par placement de pôles ci-dessus, a un temps de réponse très rapide et il ne présente aucune oscillation (FIG.2.22). Cependant, cette commande appliquée au modèle non linéaire donne un temps de réponse plus lent notamment pour un déplacement important (FIG.2.21).

Une autre façon de placer les pôles consiste à utiliser le polynôme de degré 3 de Graham et Lathrop, correspondant à une transmittance à erreur de position nulle.

$$\Pi(s) = s^3 + 1,75\omega_{bf}s^2 + 2,15\omega_{bf}^2s + \omega_{bf}^3 \quad (2.166)$$

La méthode consiste à minimiser un critère de la forme

$$J = \int_0^{+\infty} t|\varepsilon(t)|dt \quad (2.167)$$

La minimisation de ce critère permet d'obtenir un amortissement convenable en boucle fermée. Le gain  $K$  est donc obtenu par simple identification entre les polynômes (2.162) et (2.166) soit

$$K = \left( \frac{\omega_{bf}^3}{K_s\omega_0^2} \quad \frac{2,15\omega_{bf}^2 - \omega_0^2}{K_s\omega_0^2} \quad \frac{1,5\omega_{bf} - 2\xi\omega_0}{K_s\omega_0^2} \right) \quad (2.168)$$

Comme dans le cas précédent, la pulsation  $\omega_{bf}$  est choisie en fonction du temps de réponse en boucle fermée désiré.

La réponse indicielle du modèle linéaire (FIG.2.23) est très rapide et présente une faible oscillation amortie dans sa partie transitoire. Lorsque l'on applique ce correcteur au modèle non linéaire, le temps de réponse est plus long surtout pour les déplacements importants (FIG.2.24).

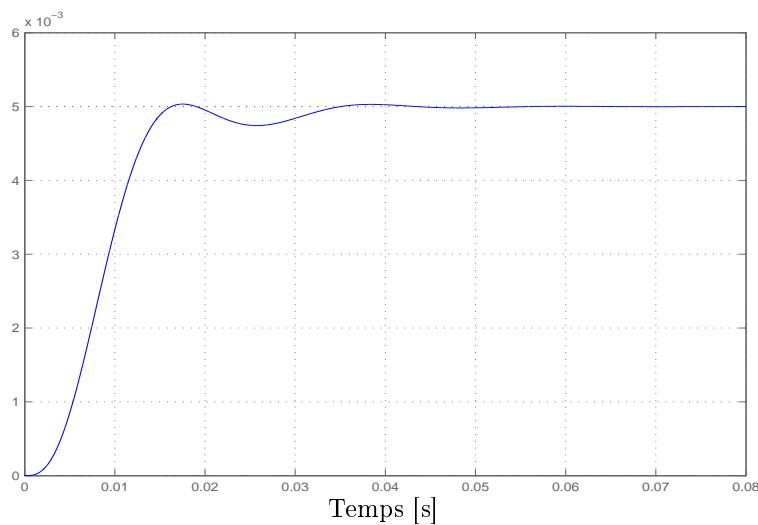


FIG. 2.23: Réponse indicielle du système linéaire avec la commande par placement de pôles.

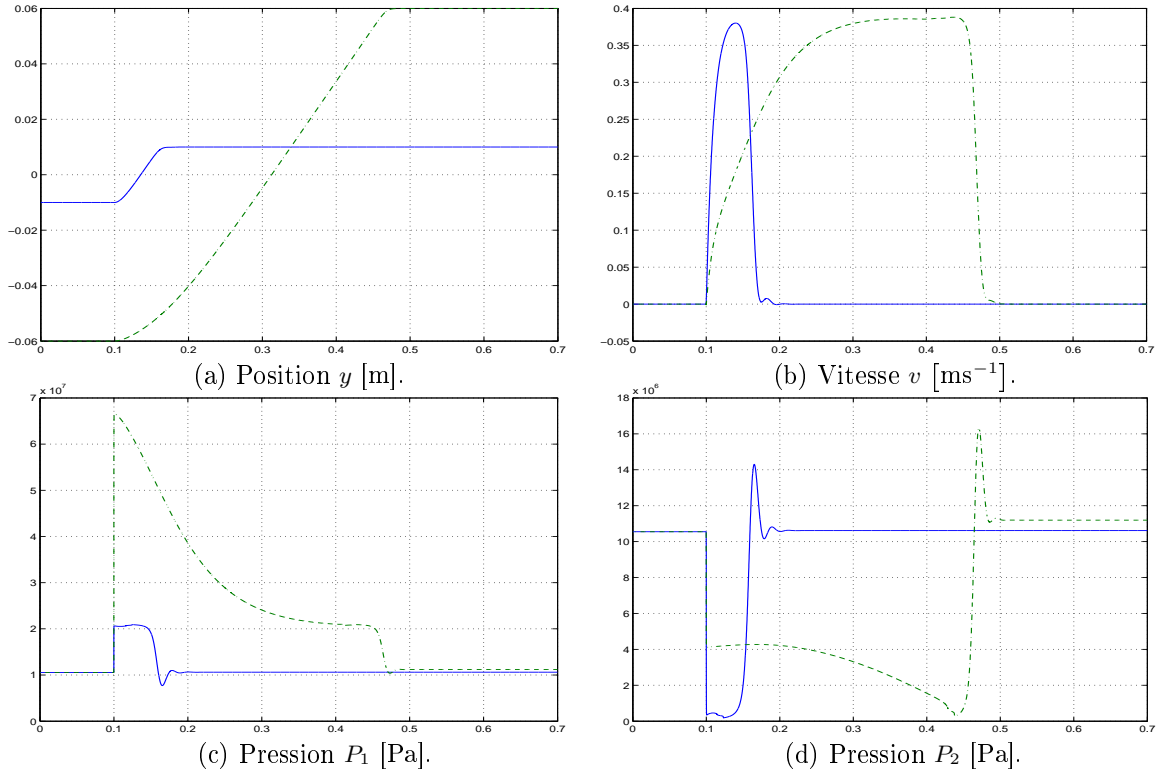


FIG. 2.24: Variables d'état du système non linéaire avec la commande par placement de pôles, pour les déplacements  $y_f - y_i = 0.02$  m et  $y_f - y_i = 0.12$  m.

## 2.6.2 Commande optimale

La commande optimale appliquée au modèle linéarisé tangent représenté dans l'espace d'état consiste à minimiser la fonctionnelle quadratique à horizon infini suivante

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt \quad (2.169)$$

où  $R$  est une matrice symétrique définie positive et  $Q$  une matrice symétrique semi-définie positive. La loi de commande minimisant ce critère est

$$u = -R^{-1}B^T Sx \quad (2.170)$$

où  $S$  est la solution de l'équation algébrique de Riccati suivante

$$SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + Q = 0 \quad (2.171)$$

Comme dans le paragraphe précédent, un pré-filtre est nécessaire pour éliminer l'erreur statique. Les matrices de pondération  $Q$  et  $R$  sont choisies de manière à trouver un compromis sur l'importance de la commande ou de l'évolution de l'état du système.

Un système linéaire utilisant une commande optimale est toujours stable en boucle fermée

et présente une marge de phase supérieure à  $60^\circ$ . Néanmoins, compte tenu du caractère local de cette loi de commande, la stabilité asymptotique du système non linéaire n'est pas garantie. Le choix des matrices de pondération  $Q$  et  $R$  s'avère donc délicat.

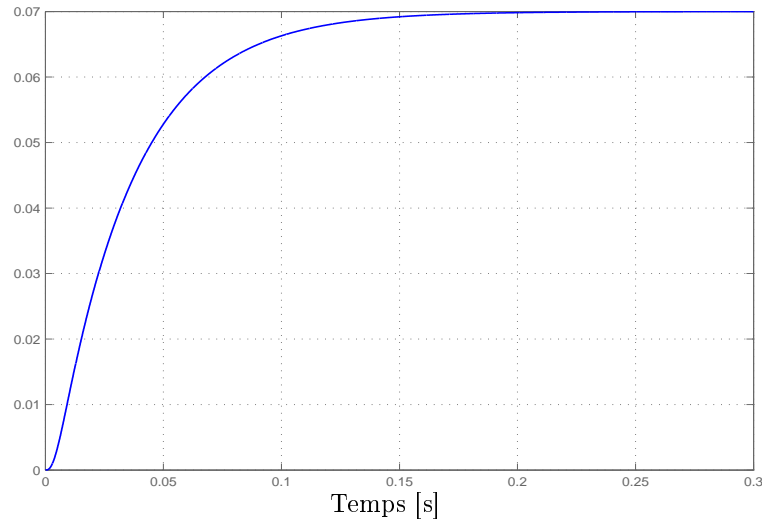


FIG. 2.25: Réponse indicielle du système linéaire avec la commande optimale.

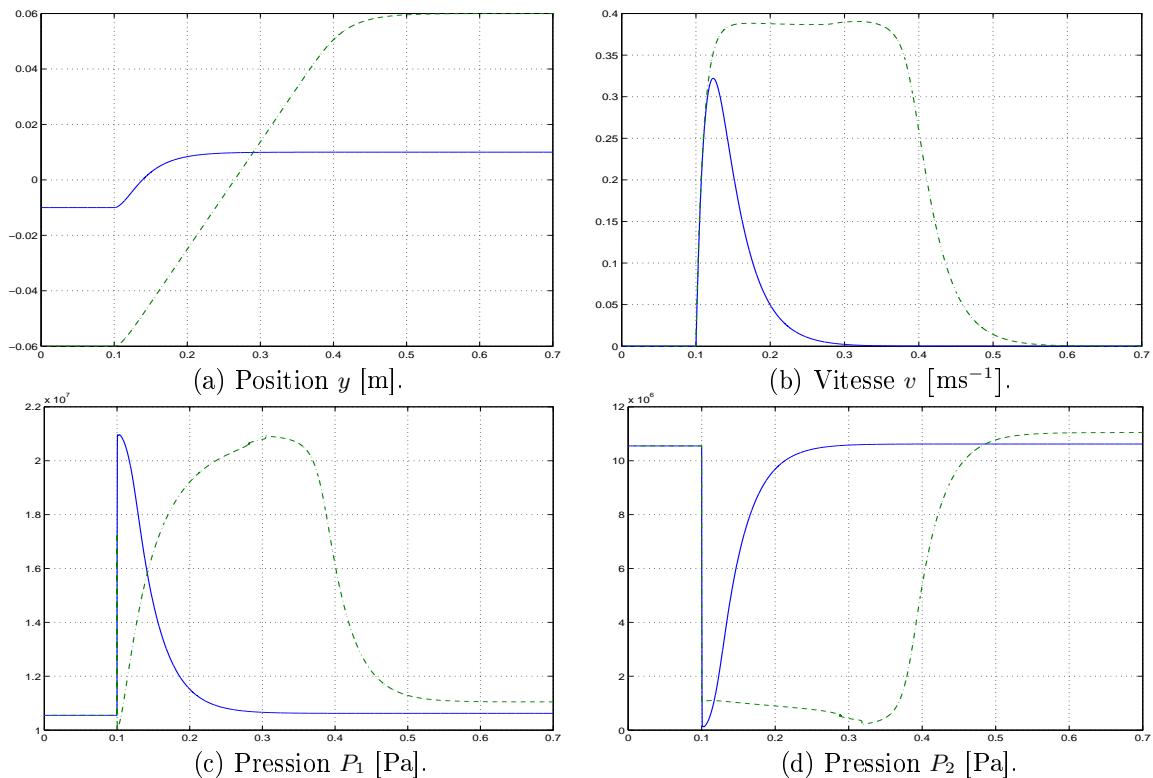


FIG. 2.26: Variables d'état du système non linéaire avec la commande optimale, pour les déplacements  $y_f - y_i = 0.02$  m et  $y_f - y_i = 0.12$  m.

Cette loi de commande a été appliquée en simulation au modèle linéaire et au modèle non linéaire. La figure FIG.2.25 représente la réponse indicielle du système linéaire. L'évolution des composantes de l'état du système non linéaire est représentée sur la FIG.2.26.

La réponse indicielle du système linéaire avec la commande optimale, est très rapide et elle ne présente aucun dépassement (voir FIG.2.25). Lorsque cette loi de commande est appliquée au modèle non linéaire, le temps de réponse est relativement long et ceci pour un grand déplacement (12 cm) (voir FIG.2.26).

### 2.6.3 Commande proportionnelle intégrale par retour d'état

Le principe de la commande proportionnelle intégrale par retour d'état consiste à introduire un intégrateur de l'écart entre la consigne et la sortie à réguler (voir par exemple [Oga90, JK03]), soit

$$\dot{\varepsilon} = y_{ref} - y = y_{ref} - Cx \quad (2.172)$$

et la commande prend la forme suivante

$$u = Kx - K_I \varepsilon \quad (2.173)$$

Le schéma de principe de cette loi de commande est le suivant

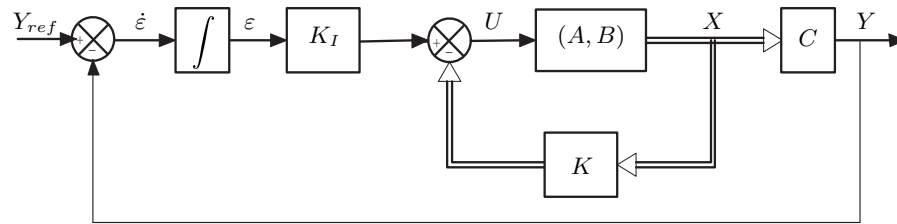


FIG. 2.27: Commande proportionnelle intégrale par retour d'état.

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ \varepsilon \end{pmatrix}$  le vecteur d'état augmenté, le système commandé devient

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A_1 X(t) + B_1 u(t) + B_r y_{ref} \\ u = -K_1 X \end{cases} \quad (2.174)$$

avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, B_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } K_1 = \begin{pmatrix} K & -K_I \end{pmatrix} \quad (2.175)$$

ou de manière équivalente

$$\dot{X}(t) = (A_1 - B_1 K_1) X(t) + B_r y_{ref} \quad (2.176)$$



Il est aisé de montrer que si la paire  $(A, B)$  est commandable, alors la paire  $(A_1, B_1)$  est commandable. Soit  $\mathcal{C}_1$  la matrice de commandabilité de la paire  $(A_1, B_1)$ , alors

$$\begin{aligned} \mathcal{Rang}(\mathcal{C}_1) &= \mathcal{Rang} \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \\ 0 & -CB & -CAB & -CA^2B \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{Rang} \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \\ 0 & 0 & 0 & -K_s\omega_0^2 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{Rang} \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} + 1 = 4 \end{aligned} \quad (2.177)$$

puisque la paire  $(A, B)$  est commandable. Il existe donc un gain  $K_1$  tel que  $(A_1 - B_1K_1)$  soit stable. Le gain  $K_1$  peut être calculé, par exemple, en minimisant un critère quadratique de la forme

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (X^T(t)Q_1X(t) + u^T(t)R_1u(t)) dt \quad (2.178)$$

où  $R_1$  est une matrice symétrique définie positive et  $Q_1$  une matrice symétrique semi-définie positive. La loi de commande minimisant ce critère est

$$u = -R_1^{-1}B_1^T S_1 X \quad (2.179)$$

où  $S_1$  est la solution de l'équation algébrique de Riccati suivante

$$S_1 A_1 + A_1^T S_1 - S_1 B_1 R_1^{-1} B_1^T S_1 + Q_1 = 0 \quad (2.180)$$

L'utilisation de cet intégrateur permettra par exemple d'améliorer la précision de la régulation en présence de forces antagonistes ou de frottements secs.

On peut également utiliser la méthode par placement de pôles compte tenu du fait que la paire  $(A, B)$  est commandable. C'est cette méthode que nous appliquons pour les simulations ci-dessous.

Les réponses du système (FIG.2.28) sont satisfaisants aussi bien pour les faibles déplacements que pour les déplacements les plus importants du piston. Notons que les temps de réponse du système corrigé semblent plus rapide que pour la commande par retour d'état sans intégrateur. Néanmoins, la réponse pour un déplacement de 6 cm présente un léger dépassement.

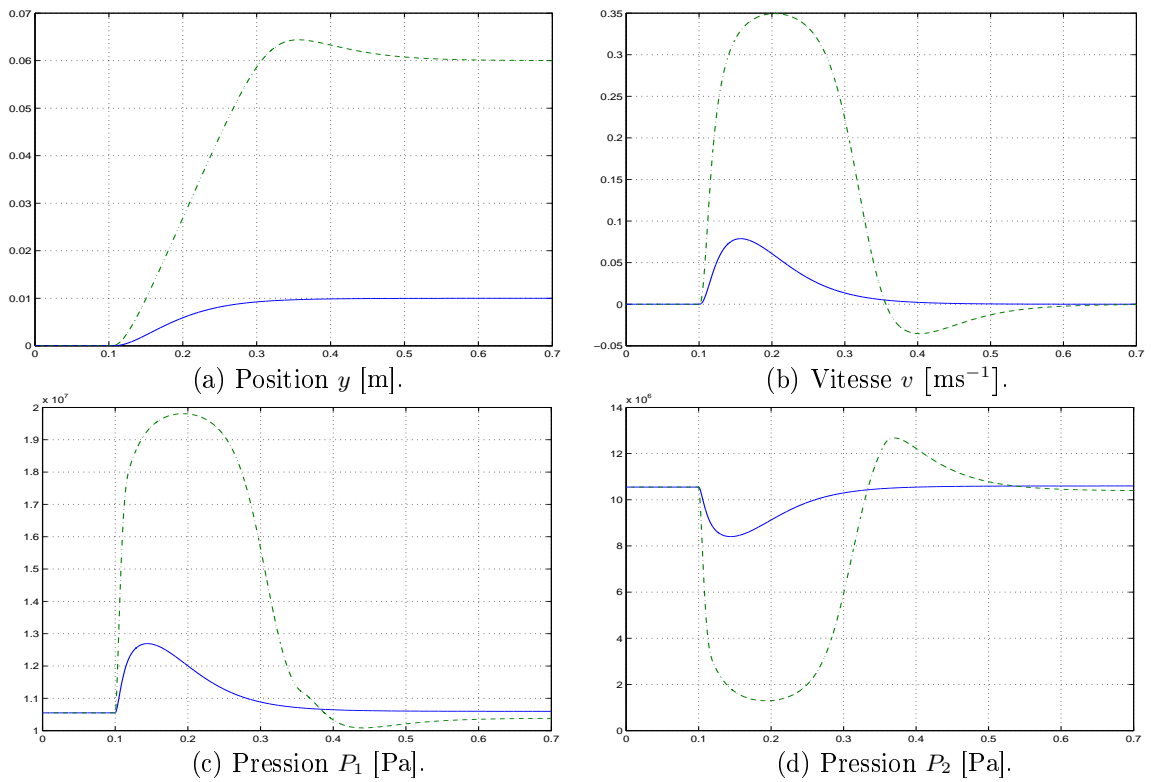


FIG. 2.28: Variables d'état du système non linéaire avec la commande proportionnelle intégrale par retour d'état, pour les déplacements  $y_f - y_i = 0.02\text{ m}$  et  $y_f - y_i = 0.12\text{ m}$ .

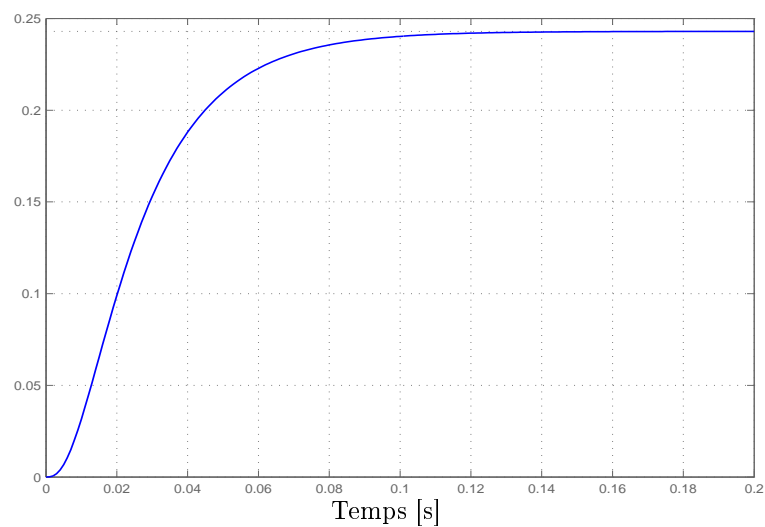


FIG. 2.29: Réponse indicielle du système linéaire avec la commande proportionnelle intégrale par retour d'état.

## 2.7 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre l'étude de l'ensemble d'équilibre et des points de fonctionnement selon le cas où le vérin est actionné par un ou deux distributeurs. Cette analyse s'avère nécessaire car le modèle de connaissance est seulement continu, c'est-à-dire n'est pas dérivable en tout point. Le modèle linéarisé tangent ne peut donc pas être calculé sur l'ensemble des points d'équilibre. Puis, en supposant que l'étude se fait autour d'un point d'équilibre où la dérivée de la fonction de débit existe, nous avons calculé les différents modèles linéarisés tangents correspondant au système électrohydraulique avec un ou deux distributeurs. La deuxième partie de ce chapitre a été consacrée à l'analyse de la stabilisabilité et de la détectabilité des modèles linéaires obtenus en fonction du point d'équilibre choisi et du nombre de distributeurs. Enfin, la troisième partie a concerné la synthèse des lois de commande les plus utilisées pour la régulation de position des servovérins commandés par une servovalve. Ces lois de commande sont calculées dans le cas le plus défavorable c'est-à-dire pour la position  $y^0 = 0$ . Les résultats obtenus font ressortir qu'il est préférable d'utiliser au moins une rétroaction secondaire pour obtenir de bonnes performances. Notons également que, ces correcteurs fonctionnent de manière satisfaisante lors d'un déplacement de faible amplitude au voisinage du point de fonctionnement. Lorsque la consigne est d'amplitude plus importante, il est souvent nécessaire de modifier le réglage des correcteurs.

Le chapitre suivant sera dédié à la synthèse de loi de commande non linéaire lorsque le vérin est commandé respectivement par un ou deux distributeurs.

# Chapitre 3

## Commande par approche non linéaire

### 3.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à la commande des systèmes électrohydrauliques par des approches non-linéaires. Plus précisément, il s'agit d'une stabilisation par rétroaction des modèles établis dans le Chapitre 1. Cette stabilisation sera effectuée sans aucun type de linéarisation.

Dans la littérature sur les systèmes électrohydrauliques, et depuis plusieurs décennies, les techniques les plus utilisées pour la commande sont celles fondées sur des approches de linéarisation. Ces techniques ont permis de répondre à de nombreux problèmes et conduisent à de bons résultats tant simulés qu'expérimentaux. Ce sont des techniques à caractère systématique et qui permettent d'assigner facilement un comportement dynamique. Cependant, elles ne confinent pas l'évolution de l'état du système dans un domaine donné ni ne garantissent la stabilité dans un domaine large de fonctionnement. Par exemple, le modèle utilisé lors de l'approche par linéarisation tangente dépend fortement du point de fonctionnement et ignore les non linéarités inhérentes du système. On effectue donc une analyse locale et on ne peut pas établir des résultats globaux ou semi-globaux. Par ailleurs, les méthodes fondées sur la linéarisation peuvent présenter des inconvénients dus à la non prise en compte de certaines contraintes physiques (saturations, course limitée de l'actionneur, positivité des pressions, etc.)

Récemment, l'approche par utilisation directe des modèles tenant compte des non linéarités du système a suscité un intérêt croissant dans la communauté. Ainsi, plusieurs travaux ont été consacrés à ce sujet (voir par exemple [HSUU04, KK04, MR01, ORT05, RO95, ROT97]). Cependant, les résultats établis concernent essentiellement le comportement de l'actionneur électrohydraulique et ne prennent pas en compte la dynamique des distributeurs. Concernant la commande des processus électrohydrauliques prenant en compte la dynamique des distributeurs, des travaux de recherche ont été dédiés à ce sujet (voir par exemple [KT00]). Néanmoins, les résultats proposés reposent en général sur des techniques de linéarisation.

Les modèles issus du domaine de l'électrohydraulique sont fortement non linéaire. Ils présentent, en plus, la particularité d'être non réguliers (c'est-à-dire, continu mais non dérivable). Dans ce travail on se propose de donner des résultats sur la commande

des systèmes électrohydrauliques en tenant compte de la dynamique des distributeurs et sans aucun type de linéarisation. La stratégie de commande est constituée de deux étapes. Une première étape consiste à stabiliser le système sans tenir compte de la dynamique des distributeurs. Pour ce faire, la synthèse de la loi de commande est fondée sur une méthode conçue pour la stabilisation des systèmes à fluide sous pression (voir [OR00, RO95, ROT97]). Il s'agit d'une adaptation de la méthode de Jurdjevic-Quinn (voir par exemple [JQ78, OS92]) à ce type de système. La deuxième étape est celle de la prise en compte de la dynamique du distributeur. Le modèle décrivant l'évolution du processus électrohydraulique fondé sur une première approximation des dynamiques des distributeurs, et suite à un retour d'état préliminaire, peut être exprimé sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} &= \chi(x, z) \\ \dot{z} &= u \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  désigne l'état de l'actionneur,  $z \in \mathbb{R}^m$  celui du ou des distributeurs et  $u \in \mathbb{R}^m$  est la commande.

D'une façon générale, et indépendamment des modèles issus de l'électrohydraulique, la stabilisation du système non linéaire (3.1), a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs (voir par exemple [BI89, CP91, IS94, KS89, OS98, OJ96, OA99]). Pour stabiliser le système (3.1), une méthode classique consiste d'abord à stabiliser le système réduit

$$\dot{x} = \chi(x, u) \quad (3.2)$$

puis de déduire un retour d'état stabilisant pour le système (3.1) à partir de celui de (3.2). A l'origine, ce résultat a été établi dans le cas où  $\chi$  est au moins de classe  $C^1$ . Le principe de la démonstration repose sur la régularité de  $\chi$ . Plus précisément, et comme  $\chi$  est dérivable, il est possible d'effectuer la décomposition suivante :

$$\chi(x, z) = \chi_0(x) + \bar{\chi}(x, z)z \quad (3.3)$$

où  $\chi_0(x) = \chi(x, 0)$  et  $\bar{\chi}$  une fonction continue. Ainsi, et pour s'affranchir de l'hypothèse de dérivabilité de  $\chi$ , on peut supposer que  $\chi$  est seulement continue mais qu'elle vérifie l'hypothèse (3.3) (voir par exemple [FK96], page 108). Depuis, plusieurs généralisations de ce résultat ont été proposées. On peut citer, par exemple, les deux améliorations suivantes. La première (cf. [TK03], Théorème 1), et sous l'hypothèse (3.3), concerne le cas où  $\chi_0$  et  $\bar{\chi}$  sont des fonctions discontinues. La deuxième (cf. [OA99]) traite du cas où l'hypothèse (3.3) n'est pas vérifiée et s'intéresse à la stabilisation du système (3.1) par retour d'état continu. Un exemple simple, qui ne peut pas s'exprimer sous la forme (3.3), est le système scalaire suivant

$$\chi(x, z) = -x + z^{\frac{1}{3}} \quad (3.4)$$

où  $(x, z) \in \mathbb{R}^2$ .

Dans ce travail la synthèse de loi de commande pour les systèmes de type (3.1) sera fondée sur une amélioration du résultat principal de [OA99] proposée dans le paragraphe suivant (voir Théorème 3.1).

Le chapitre est organisé de la façon suivante. Dans le deuxième paragraphe, on présente un résultat de stabilisation du système électrohydraulique dans le cas d'un vérin commandé à travers deux distributeurs. Il s'agit de stabiliser le système autour d'un point de fonctionnement composé des deux pressions respectivement dans chacune des chambres du vérin, la position du piston et sa vitesse. Le troisième paragraphe est dédié à la commande du système par utilisation d'un seul distributeur. Plus précisément la stabilisation sera effectuée autour d'un point de fonctionnement constitué de valeurs de référence pour une pression différentielle, une position et une vitesse du piston.

Pour conclure cette introduction, nous souhaitons signaler que la méthodologie proposée ici pour la stabiliser les systèmes électrohydrauliques a aussi été utilisée dans le cadre des systèmes électropneumatiques et a donné lieu à une publication [ORT04] (voir Annexe B).

## 3.2 Vérin commandé à travers deux distributeurs

### 3.2.1 Introduction

Considérons un système électrohydraulique constitué d'un vérin (symétrique ou asymétrique), commandé par deux distributeurs différents caractérisés par les constantes  $k_{di}$  ( $i = 1; 2$ ). Il est à noter que l'utilisation de deux distributeurs permet de commander séparément le débit de l'huile dans chacune des deux chambres.

L'objectif de ce paragraphe est la stabilisation du système électrohydraulique considéré. Tout d'abord nous allons proposer une loi de commande pour le modèle réduit, il s'agit du système ne tenant pas compte des dynamiques des distributeurs. La synthèse de cette loi de commande est basée sur la théorie des systèmes non linéaires. Plus précisément sur méthodologie développée dans [OR00, RO95, ROT97] et qui s'appuie sur le principe d'invariance de LaSalle [LL61]. Puis, et en utilisant cette loi de commande, nous synthétisons une loi de commande pour le système complet (c'est-à-dire, le modèle tenant compte des dynamiques des distributeurs). En se basant sur un nouveau théorème qui est en fait une amélioration du résultat principal proposé dans [OA99].

### 3.2.2 Commande du modèle réduit

Considérons le modèle suivant où les fuites inter-chambres, les fuites externes et les frottements visqueux sont négligés.

$$\begin{cases} \dot{P}_1 &= \frac{-\beta_e}{V_0 + S_1 y} (S_1 v - u_1 \varphi_1(P_1, u_1)) \\ \dot{P}_2 &= \frac{\beta_e}{V_0 - S_2 y} (S_2 v - u_2 \varphi_2(P_2, -u_2)) \\ \dot{v} &= \frac{1}{M} (S_1 P_1 - S_2 P_2) \\ \dot{y} &= v \end{cases} \quad (3.5)$$

avec

$$\varphi_i(P_i, u_i) = \begin{cases} \varphi_i^+(P_i) = k_{di} \operatorname{Sgn}(P_s - P_i) \sqrt{|P_s - P_i|} & \text{si } u_i \geq 0 \\ \varphi_i^-(P_i) = k_{di} \operatorname{Sgn}(P_i - P_r) \sqrt{|P_i - P_r|} & \text{si } u_i < 0 \end{cases} \quad i = 1; 2 \quad (3.6)$$

Ce modèle est déduit à partir du système (1.57) décrivant la dynamique d'un système électrohydraulique constitué d'un vérin asymétrique commandé à travers deux distributeurs dont les dynamiques sont négligées.

Dans cette partie, nous nous intéressons à la stabilisation par retour d'état continu du système non linéaire (3.5). La loi de commande est déduite de la méthode de Jurdjjevic-Quinn [BIW91, JQ78, OS92].

Considérons un point d'équilibre  $x^0 = (P_1^0, P_2^0, v^0, y^0)^T$  tel que  $P_1^0$  et  $P_2^0$  sont deux constantes positives vérifiant :

$$S_1 P_1^0 = S_2 P_2^0 \quad (3.7)$$

$$v^0 = 0 \text{ et } y^0 \in \left] -\frac{V_0}{S_1}; \frac{V_0}{S_2} \right[.$$

L'objectif est de stabiliser le système (3.5) au point d'équilibre  $x^0 = (P_1^0, P_2^0, v^0, y^0)^T$  [RO95] par un retour d'état continu. Il s'agit de trouver deux fonctions  $u_1$  et  $u_2$  qui soient au moins continues et qui vérifient

$$u_1 = u_1(P_1, P_2, v, y), \quad u_2 = u_2(P_1, P_2, v, y) \text{ et } u_1(x^0) = u_2(x^0) = 0 \quad (3.8)$$

telles que le système bouclé (3.5)(3.8) soit asymptotiquement stable en  $x^0$ .

### 3.2.2.1 Méthode de stabilisation

Avant de donner les résultats sur la commande des systèmes électrohydrauliques, nous allons introduire le théorème concernant la stabilisation d'une classe de systèmes dissipatifs affines en la commande [OR00, RO95, ROT97]. Soit le système non linéaire suivant

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) \varphi_i(x, u_i) u_i \quad (3.9)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système et  $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$  désigne la commande. Les fonctions  $f, g_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) sont de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\varphi_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m - \{0\})$ . Considérons  $(x^0, u^0 = 0)$  un point d'équilibre du système (3.9) c'est-à-dire  $f(x^0) = 0$ .

Dans ce qui suit nous utiliserons les notations suivantes : si  $V$  est une fonction différentiable, alors on définit sa dérivée le long du champ  $f$  par

$$L_f V(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x) = \left\langle \frac{\partial V(x)}{\partial x}, f(x) \right\rangle \quad (3.10)$$

et par récurrence

$$L_f^0 = V(x) \quad \text{et} \quad L_f^k = L_f(L_f^{k-1}V(x)) \quad / \quad k \geq 1 \quad (3.11)$$

Le Théorème 3.1 suivant, énonce un résultat sur la stabilisation des systèmes non linéaires dont la structure est celle décrite par (3.9), et ceci indépendamment des modèles issus de l'électrohydraulique.

**Théorème 3.1.** [OR00, RO95, ROT97] *Si le système non linéaire (3.9) vérifie les conditions suivantes :*

1. *Il existe deux fonctions  $r_i$  et  $q_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) de classe  $C^1$  telles que*
  - (C1)  $r_i(x) > 0$  sur  $\mathbb{R}^n$  ;
  - (C2)  $zq_i(z) < 0 \forall z \neq 0$  et  $q_i(0) = 0$  ;
2. *Il existe une fonction de Lyapunov  $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que*
  - (C3)  $V(x) > 0, \forall x \neq x^0$  et  $V(x^0) = 0$  ;
  - (C4)  $L_f V(x) \leq 0$  sur  $\mathbb{R}^n$  ;
  - (C5)  $\varphi_i(x, r_i(x)q_i(L_{g_i}V(x))) > 0$  ;
  - (C6)  $W = \{x \in \mathbb{R}^n / L_f^{k+1}V(x) = L_f^k L_{g_i}V(x) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}; i = 1, \dots, m\} = \{x^0\}$ .

Alors le système commandé par la loi de commande donnée par

$$u_i(x) = r_i(x)q_i(L_{g_i}V(x)) \quad i = 1, \dots, m \quad (3.12)$$

est asymptotiquement stable au point d'équilibre  $x^0$ . ■

*Démonstration.* La dérivée de la fonction de Lyapunov par rapport au temps, le long des trajectoires du système bouclé (3.9)(3.12) est donnée par

$$\dot{V}(x) = L_f V(x) + \sum_{i=1}^m L_{g_i} V(x) \varphi_i(x, r_i(x)q_i(L_{g_i}V(x))) \times r_i(x)q_i(L_{g_i}V(x)) \quad (3.13)$$

A partir des conditions (C1), (C2), (C3), (C4), et (C5) du Théorème 3.1, nous avons  $\dot{V}(x) \leq 0$ .

Maintenant, en utilisant la condition (C6) du Théorème 3.1, nous avons

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n / \dot{V}(x) = 0 \right\} = \{x^0\} \quad (3.14)$$

D'après le principe d'invariance de LaSalle [LL61], on déduit que le point d'équilibre  $x^0$  est globalement asymptotiquement stable. ●

### 3.2.2.2 Synthèse de la commande

Le modèle d'état (3.5) décrivant le comportement d'un système électrohydraulique avec un vérin asymétrique et commandé à travers deux distributeurs, peut être écrit sous



la forme donnée par (3.9) en posant

$$\begin{aligned}
 x &= \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ v \\ y \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} \frac{-\beta_e S_1 v}{V_0 + S_1 y} \\ \frac{\beta_e S_2 v}{V_0 - S_2 y} \\ \frac{1}{M}(S_1 P_1 - S_2 P_2) \\ v \end{pmatrix}, \\
 g_1(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\beta_e}{V_0 + S_1 y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\beta_e}{V_0 - S_2 y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

et la fonction  $\varphi_i(x, u_i)$ , pour  $i = 1$  ou  $2$ , est donnée par (3.6).

La méthode de calcul de la loi de commande utilisée pour la stabilisation du système (3.5) repose sur l'existence d'une fonction de Lyapunov. En mettant en évidence les intégrales premières naturelles du système non commandé et en prenant en compte des considérations énergétiques, nous arrivons à construire une fonction de Lyapunov convenable notée  $V_1$ .

En effet, sous l'hypothèse que l'évolution du système est isotherme, la somme de l'énergie cinétique de la masse en mouvement et de l'énergie libre du fluide contenu dans les chambres du vérin constitue une grandeur dissipative de la dérive. Compte tenu de l'expression de la masse volumique en fonction de la pression donnée par (1.14), on montre que l'énergie du système non commandé s'écrit sous la forme

$$E(x) = \frac{1}{2} M v^2 + \beta_e (V_0 + S_1 y) \gamma(P_1 - P_1^0) + \beta_e (V_0 - S_2 y) \gamma(P_2 - P_2^0) \tag{3.16}$$

où  $\gamma$  est la fonction scalaire suivante

$$\gamma(\bullet) = \exp\left(\frac{\bullet}{\beta_e}\right) - \frac{\bullet}{\beta_e} - 1 \tag{3.17}$$

Afin de construire, à partir de la quantité  $E$ , une fonction de Lyapunov  $V_1$  qui soit définie positive et qui vérifie la condition (C3) du Théorème 3.1, il suffit de rajouter une quantité positive  $R$  choisie convenablement, soit

$$V_1(x) = E(x) + R(x) \tag{3.18}$$

Un choix possible pour la fonction  $R$  (voir par exemple [RO95]) est donné par

$$\begin{aligned}
 R(x) &= \frac{b}{2} \left( \left( (V_0 + S_1 y) \exp\left(\frac{P_1 - P_1^0}{\beta_e}\right) - (V_0 + S_1 y^0) \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left( (V_0 - S_2 y) \exp\left(\frac{P_2 - P_2^0}{\beta_e}\right) - (V_0 - S_2 y^0) \right)^2 \right) \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

où  $b$  est un réel positif suffisamment petit de sorte que la condition (C5) du Théorème 3.1 soit satisfaite [RO95, ROT97]. Les fonctions  $r_i$  et  $q_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont telles que

$$r_i(x) \equiv \bar{r}_i \in \mathbb{R}_+ \text{ et } q_i(\bullet) = \left( \frac{\bullet}{S_i} \right)^{1+\frac{2}{p}} \quad (3.20)$$

Par ailleurs, nous avons

$$L_{g_1} V_1(x) = \beta_e \exp\left(\frac{P_1 - P_1^0}{\beta_e}\right) \left\{ 1 - \exp\left(\frac{P_1^0 - P_1}{\beta_e}\right) + \frac{b}{\beta_e} \left( (V_0 + S_1 y) \exp\left(\frac{P_1 - P_1^0}{\beta_e}\right) - (V_0 + S_1 y^0) \right) \right\} \quad (3.21)$$

$$L_{g_2} V_1(x) = -\beta_e \exp\left(\frac{P_2 - P_2^0}{\beta_e}\right) \left\{ 1 - \exp\left(\frac{P_2^0 - P_2}{\beta_e}\right) + \frac{b}{\beta_e} \left( (V_0 - S_2 y) \exp\left(\frac{P_2 - P_2^0}{\beta_e}\right) - (V_0 - S_2 y^0) \right) \right\} \quad (3.22)$$

$$L_f L_{g_1} V_1(x) = \frac{-S_1 v}{(V_0 + S_1 y)} \exp\left(\frac{P_1 - P_1^0}{\beta_e}\right) \left\{ \beta_e + b \left( (V_0 + S_1 y) \exp\left(\frac{P_1 - P_1^0}{\beta_e}\right) - (V_0 + S_1 y^0) \right) \right\} \quad (3.23)$$

$$L_f L_{g_2} V_1(x) = \frac{-S_2 v}{(V_0 - S_2 y)} \exp\left(\frac{P_2 - P_2^0}{\beta_e}\right) \left\{ \beta_e + b \left( (V_0 - S_2 y) \exp\left(\frac{P_2 - P_2^0}{\beta_e}\right) - (V_0 - S_2 y^0) \right) \right\} \quad (3.24)$$

et

$$L_f^2 L_{g_1} V_1(x) = \left\{ \frac{2S_1^2 v^2}{(V_0 + S_1 y)^2} - \frac{S_1(S_1 P_1 - S_2 P_2)}{M(V_0 + S_1 y)} \right\} \exp\left(\frac{P_1 - P_1^0}{\beta_e}\right) \left\{ \beta_e + b \left( (V_0 + S_1 y) \exp\left(\frac{P_1 - P_1^0}{\beta_e}\right) - (V_0 + S_1 y^0) \right) \right\} \quad (3.25)$$

Nous allons montrer que si  $x$  est solution de

$$L_{g_1} V_1(x) = L_{g_2} V_1(x) = L_f L_{g_1} V_1(x) = L_f L_{g_2} V_1(x) = L_f^2 L_{g_1} V_1(x) = 0 \quad (3.26)$$

alors  $x = x^0$ . Autrement dit que la condition (C6) du Théorème 3.1 est vérifiée.

Soit  $\bar{x} = (\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{v}, \bar{y})^T$  une solution de (3.26). On distingue deux cas selon la valeur de  $\bar{v}$ . Supposons que  $\bar{v}$  est non nulle. Alors, les équations (3.23) et (3.24) conduisent à

$$\begin{cases} \beta_e + b \left( (V_0 + S_1 \bar{y}) \exp\left(\frac{\bar{P}_1 - P_1^0}{\beta_e}\right) - (V_0 + S_1 y^0) \right) = 0 \\ \beta_e + b \left( (V_0 - S_2 \bar{y}) \exp\left(\frac{\bar{P}_2 - P_2^0}{\beta_e}\right) - (V_0 - S_2 y^0) \right) = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Un raisonnement simple montre, et en utilisant les équations (3.21) et (3.22), qu'on aboutit à une des deux équations sans solutions dans  $\mathbb{R}$

$$\exp\left(\frac{P_1^0 - \bar{P}_1}{\beta_e}\right) = 0 \text{ ou } \exp\left(\frac{P_2^0 - \bar{P}_2}{\beta_e}\right) = 0. \quad (3.28)$$

Finalement, et par la suite, on suppose que  $\bar{v} = 0$ .

Par ailleurs, d'après l'équation (3.25) et vu que  $\bar{v} = 0$ , il vient que

$$S_1 \bar{P}_1 - S_2 \bar{P}_2 = 0 \quad (3.29)$$

Il est à noter que  $P_1^0$  et  $P_2^0$  sont aussi liées par une relation similaire à (3.29) à savoir

$$S_1 P_1^0 - S_2 P_2^0 = 0 \quad (3.30)$$

En vertu de (3.29) et (3.30) et en utilisant (3.21) et (3.22), on déduit

$$\begin{cases} \exp\left(\frac{P_1^0 - \bar{P}_1}{\beta_e}\right) - 1 &= \frac{b}{\beta_e} \left( (V_0 + S_1 \bar{y}) \exp\left(\frac{\bar{P}_1 - P_1^0}{\beta_e}\right) - (V_0 + S_1 y^0) \right) \\ \exp\left(\frac{S_1 P_1^0 - \bar{P}_1}{S_2 \beta_e}\right) - 1 &= \frac{b}{\beta_e} \left( (V_0 - S_2 \bar{y}) \exp\left(\frac{S_1 \bar{P}_1 - P_1^0}{S_2 \beta_e}\right) - (V_0 - S_2 y^0) \right) \end{cases} \quad (3.31)$$

On distingue trois cas selon la valeur de  $\bar{P}_1$ . Tout d'abord supposons que  $\bar{P}_1 > P_1^0$ . Alors le système (3.31) admet une solution si

$$\begin{cases} (V_0 + S_1 \bar{y}) \exp\left(\frac{\bar{P}_1 - P_1^0}{\beta_e}\right) < (V_0 + S_1 y^0) \\ (V_0 - S_2 \bar{y}) \exp\left(\frac{S_1 \bar{P}_1 - P_1^0}{S_2 \beta_e}\right) < (V_0 - S_2 y^0), \end{cases} \quad (3.32)$$

comme  $\exp\left(\frac{\bar{P}_1 - P_1^0}{\beta_e}\right) > 1$ , le système (3.32) peut se réécrire comme suit

$$\begin{cases} (V_0 + S_1 \bar{y}) < (V_0 + S_1 y^0) \\ (V_0 - S_2 \bar{y}) < (V_0 - S_2 y^0). \end{cases} \quad (3.33)$$

Le système (3.33) ne possédant pas de solution, l'hypothèse  $\bar{P}_1 > P_1^0$  est donc à rejeter. Avec un argument similaire on peut prouver que si  $\bar{P}_1 < P_1^0$  alors le système (3.31) ne possède pas non plus de solution. Maintenant, si  $\bar{P}_1 = P_1^0$ , un raisonnement simple montre que  $\bar{y} = y^0$  est solution. Ceci termine la preuve que  $\bar{x} = x^0$  est la seule solution de (3.26).

Donc, et en utilisant la fonction  $V_1$  définie par (3.18), un retour d'état stabilisant pour le système (3.5) est donné par

$$\begin{cases} u_1 &= -r_1(x) \left( \frac{L_{g_1} V_1(x)}{S_1} \right)^{1+\frac{2}{p}} \\ u_2 &= -r_2(x) \left( \frac{L_{g_2} V_1(x)}{S_2} \right)^{1+\frac{2}{p}} \end{cases} \quad (3.34)$$

La suite de cette partie est consacrée à la synthèse d'un retour d'état stabilisant pour le modèle décrivant le comportement du système électrohydraulique tenant compte des dynamiques des distributeurs.

### 3.2.3 Stabilisation du modèle global

Le modèle considéré dans cette partie prend en compte les dynamiques des distributeurs et représente un système électrohydraulique constitué d'un vérin asymétrique commandé à travers deux distributeurs sans tenir compte des fuites inter-chambres et externes.

$$\begin{cases} \dot{P}_1 &= \frac{-\beta_e}{V_0 + S_1 y} (S_1 v - x_{d_1} \varphi_1(P_1, x_{d_1})) \\ \dot{P}_2 &= \frac{\beta_e}{V_0 - S_2 y} (S_2 v - x_{d_2} \varphi_2(P_2, -x_{d_2})) \\ \dot{v} &= \frac{1}{M} (S_1 P_1 - S_2 P_2) \\ \dot{y} &= v \\ \dot{x}_{d_1} &= -\frac{1}{\tau_{d_1}} (x_{d_1} - K_{d_1} u_{d_1}) \\ \dot{x}_{d_2} &= -\frac{1}{\tau_{d_2}} (x_{d_2} - K_{d_2} u_{d_2}) \end{cases} \quad (3.35)$$

L'objectif de cette partie est double. D'une part, nous allons donner un résultat sur la stabilisation du système (3.1) lorsque le champ de vecteurs définissant le système est seulement continu. Il s'agit d'une amélioration du résultat principal proposé dans [OA99]. D'autre part, nous allons proposer une nouvelle stratégie de commande, fondée sur ce nouveau résultat, pour synthétiser un retour d'état stabilisant pour les systèmes électrohydrauliques en tenant compte des dynamiques des distributeurs et des non-linéarités naturelles du système, et ceci sans effectuer aucune linéarisation.

#### 3.2.3.1 Méthode de stabilisation

Le modèle décrivant l'évolution du système électrohydraulique intégrant les dynamiques des distributeurs donné par le système (3.35), peut être exprimé sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} &= \bar{f}(x, x_d) \\ \dot{x}_d &= u_d \end{cases} \quad (3.36)$$

où  $x \in \mathbb{R}^4$  désigne l'état de l'actionneur,  $x_d \in \mathbb{R}^2$  celui des distributeurs et  $u_d \in \mathbb{R}^2$  est la commande.

Pour stabiliser le système (3.36), comme il a été mentionné ci-dessus, une méthode classique consiste d'abord à stabiliser le système réduit

$$\dot{x} = \bar{f}(x, u) \quad (3.37)$$

puis de déduire un retour d'état stabilisant pour le système global (3.36) à partir de celui de (3.37). A l'origine, ce résultat a été établi dans le cas où  $\bar{f}$  est au moins de classe  $C^1$ . Le principe de la démonstration repose sur la régularité de  $\bar{f}$ . Plus précisément, si  $\bar{f}$  est dérivable alors, il est possible d'effectuer la décomposition suivante :

$$\bar{f}(x, u) = \bar{f}_0(x) + F(x, u)u \quad (3.38)$$

où  $\bar{f}_0(x) = \bar{f}(x, 0)$  et  $F$  une fonction continue. Ainsi, et pour s'affranchir de l'hypothèse de dérivabilité de  $\bar{f}$ , on peut supposer que  $\bar{f}$  est seulement continue mais qu'elle vérifie l'hypothèse (3.38) (voir par exemple [FK96]). Depuis, plusieurs généralisations de ce résultat ont été proposées. On peut citer, par exemple, les deux améliorations suivantes. La première, et sous l'hypothèse (3.38), concerne le cas où  $\bar{f}_0$  et  $F$  sont des fonctions discontinues [TK03]. la deuxième amélioration traite le cas où l'hypothèse (3.38) n'est pas vérifiée et s'intéresse à la stabilisation du système (3.36) par retour d'état continu [OA99].

Dans cette partie, nous nous intéressons à la stabilisation par retour d'état continu du système non linéaire (3.36) quand la fonction  $\bar{f}$  est seulement continue et où la condition (3.38) n'est pas forcément vérifiée. Il est bien connu que si le système (3.37) est stabilisable par une commande  $u$  de classe  $C^1$ , alors le système (3.36) est stabilisable par une loi de commande au moins continue si  $\bar{f}$  est au moins de classe  $C^1$  ou si elle est continue mais vérifie l'hypothèse (3.38). La démonstration de ce résultat est fondée essentiellement sur la décomposition donnée par (3.38). Il est à noter que cette démonstration n'est plus valide si  $\bar{f}$  est seulement continue mais ne vérifiant pas (3.38). Il a été montré dans [OA99] que ce résultat reste valide pour toute fonction  $\bar{f}$  continue et même si l'hypothèse (3.38) n'est pas vérifiée. Cependant, ce résultat de stabilisation (voir [OA99]) concerne le cas particulier où le retour d'état stabilisant  $u$  du système réduit (3.37) vérifie  $u \equiv 0$ . Dans ce qui suit, nous proposons de donner une extension de ce résultat dans le cas général, même si  $u \neq 0$ .

En utilisant le Lemme 2 de [OA99], nous pouvons écrire :

$$\bar{f}(x, x_d) - \bar{f}(x, u(x)) = F(x, x_d)H(x_d - u(x)) \quad (3.39)$$

où  $F$  et  $H = (h_1, \dots, h_m)^T$  sont des fonctions continues telles que :

- (C7)  $zh_i(z) > 0$  pour  $z \neq 0$  ;
- (C8)  $\lim_{z \rightarrow +\infty} |h_i(z)| = +\infty$  pour  $i = 1, \dots, m$ .

En utilisant l'égalité (3.39) ci-dessus, on peut réécrire le système (3.36) sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} &= \bar{f}(x, u(x)) + F(x, x_d)H(x_d - u(x)) \\ \dot{x}_d &= u_d \end{cases} \quad (3.40)$$

Il convient de préciser que l'existence de  $F$  et  $H$  est assurée par la continuité de  $\bar{f}$  (voir le Lemme 2 de [OA99]).

Maintenant nous allons énoncer et démontrer le théorème principal dont le résultat sera utilisé pour la synthèse de la loi de commande tout au long de ce chapitre.

**Théorème 3.2.** *Considérons le système non linéaire (3.36) et supposons que  $\bar{f}$  est au moins continue. Soit  $u$  la commande, au moins de classe  $C^1$  avec  $u(0) = 0$ , telle que le système bouclé suivant*

$$\dot{x} = \bar{f}(x, u(x)) \quad (3.41)$$

*est globalement asymptotiquement stable à l'origine. Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov  $V_1$ , connue, telle que :*

$$\dot{V}_1(x) = \langle \nabla V_1(x), \bar{f}(x, u(x)) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.42)$$

où  $\nabla$  désigne le gradient. Alors, la loi de commande suivante

$$u_d(x, x_d) = \frac{\partial u(x)}{\partial x} \bar{f}(x, x_d) - \nabla V_1(x) F(x, x_d) - \kappa(x_d - u(x)) \quad (3.43)$$

où  $\kappa$  est une constante strictement positive, rend l'origine du système (3.36) globalement asymptotiquement stable. ■

*Démonstration.* Soit  $V_2$  la fonction de Lyapunov définie par

$$V_2(x, x_d) = V_1(x) + \sum_{i=1}^m \left( \int_0^{x_{di}-u_i(x)} h_i(\tau) d\tau \right) \quad (3.44)$$

La dérivée de  $V_2$  le long des trajectoires du système (3.40) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x, x_d) &= \langle \nabla V_1(x), \bar{f}(x, u(x)) \rangle + \nabla V_1(x) F(x, x_d) H(x_d - u(x)) \\ &\quad - \left\langle \left( \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^T H(x_d - u(x)), \bar{f}(x, x_d) \right\rangle + \langle H(x_d - u(x)), u \rangle \\ &= \langle \nabla V_1(x), \bar{f}(x, u(x)) \rangle \\ &\quad + \left\langle \left( \nabla V_1(x) F(x, x_d) - \frac{\partial u(x)}{\partial x} \bar{f}(x, x_d) + u \right), H(x_d - u(x)) \right\rangle \end{aligned} \quad (3.45)$$

En considérant la loi de commande (3.43), nous obtenons

$$\dot{V}_2(x, x_d) = \langle \nabla V_1(x), \bar{f}(x, u(x)) \rangle - \kappa \langle (x_d - u(x)), H(x_d - u(x)) \rangle \quad (3.46)$$

Maintenant en utilisant l'inégalité (3.42) et en tenant compte des propriétés de la fonction  $H$ , nous déduisons que

$$\dot{V}_2(x, x_d) \leq 0 \quad \forall (x, x_d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (3.47)$$

Donc, le système bouclé défini à partir de (3.36) avec (3.43), est stable à l'origine.

Pour établir la stabilité asymptotique globale de l'origine nous utilisons le principe d'invariance de LaSalle [LL61].

Soit  $\Omega$  l'ensemble défini par

$$\Omega = \left\{ (x, x_d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \dot{V}_2(x, x_d) = 0 \right\} \quad (3.48)$$

ou, de manière équivalente,

$$\Omega = \left\{ (x, x_d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \langle \nabla V_1(x), \bar{f}(x, u(x)) \rangle = 0 \text{ et } x_d = u(x) \right\} \quad (3.49)$$

Soit  $\gamma(t) = (\gamma_1^T(t), \gamma_2^T(t))^T$  une trajectoire du système (3.36), bouclé par la loi de commande (3.43), pour laquelle  $V_2$  est constante (c'est-à-dire,  $V_2(\gamma(t)) = V_2(\gamma(0))$  pour  $t \geq 0$ ). D'après la définition de  $\Omega$ , nous avons

$$\gamma_2(t) = u(\gamma_1(t)). \quad (3.50)$$

Il vient donc que

$$V_2(\gamma(t)) = V_1(\gamma_1(t)) = V_2(\gamma(0)) \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (3.51)$$

Par ailleurs, et en vertu de (3.50),  $\gamma_1$  est solution du système (3.41). Compte tenu de l'hypothèse que le système (3.41) est globalement asymptotiquement stable alors  $\gamma_1(t) \equiv 0$ . Finalement, et d'après (3.50) et en utilisant le fait que  $u(0) = 0$ ,  $\gamma_2(t) \equiv 0$ . Le plus grand ensemble invariant de  $\Omega$  est donc réduit à l'origine.

Finalement, nous pouvons conclure que le système (3.36) bouclé par le retour d'état (3.43) est globalement asymptotiquement stable à l'origine. •

**Remarque 3.1.** *Le théorème précédent, pour des raisons de simplicité, a été énoncé dans le cas où le point de fonctionnement est l'origine. Il convient de préciser que ce résultat, modulo quelques modifications dans la démonstration, reste valable pour  $x^0$ , un point d'équilibre autre que l'origine.* ■

**Remarque 3.2.** *Comme la fonction  $F$  est utilisée pour synthétiser la loi de commande et qu'elle est assurée d'être continue mais pas forcément Lipschitz, alors le théorème classique sur l'unicité des solutions n'est pas applicable pour le système (3.40) bouclé par la loi de commande (3.43).* ■

### 3.2.3.2 Synthèse de la commande

Pour appliquer notre stratégie de stabilisation dans le cas du système électrohydraulique, nous utiliserons la loi de commande proposée dans le paragraphe précédent. Il s'agit de la loi de commande stabilisante calculée dans le cas où le modèle d'état ne tient pas compte des dynamiques des distributeurs.

Le modèle d'état (3.35) décrivant l'évolution du système électrohydraulique, et suite à un retour d'état préliminaire<sup>(15)</sup>, peut être écrit sous la forme (3.36) où  $x = (P_1, P_2, v, y)^T$ ,

---

<sup>(15)</sup> On pose 
$$\begin{cases} u_{d_1} := -\frac{1}{\tau_{d_1}}(x_{d_1} - K_{d_1}u_{d_1}) \\ u_{d_2} := -\frac{1}{\tau_{d_2}}(x_{d_2} - K_{d_2}u_{d_2}) \end{cases}$$

$x_d = (x_{d_1}, x_{d_2})^T$ ,  $u_d = (u_{d_1}, u_{d_2})^T$  et  $\bar{f}$  est le champ de vecteurs définissant le système, soit

$$\bar{f}(x, x_d) = \begin{pmatrix} \frac{-\beta_e}{V_0 + S_1 y} (S_1 v - x_{d_1} \varphi_1(P_1, x_{d_1})) \\ \frac{\beta_e}{V_0 - S_2 y} (S_2 v - x_{d_2} \varphi_2(P_2, -x_{d_2})) \\ \frac{1}{M} (S_1 P_1 - S_2 P_2) \\ v \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Un raisonnement simple montre que

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, x_d) - \bar{f}(x, u) &= \begin{pmatrix} \beta_e \frac{x_{d_1} \varphi_1(P_1, x_{d_1}) - u_1 \varphi_1(P_1, u_1)}{V_0 + S_1 y} \\ \beta_e \frac{u_2 \varphi_2(P_2, -u_2) - x_{d_2} \varphi_2(P_2, -x_{d_2})}{V_0 - S_2 y} \\ \frac{1}{M} (S_1 P_1 - S_2 P_2) \\ v \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{F(x, x_d)} \underbrace{\begin{pmatrix} (x_{d_1} - u_1)^{\frac{1}{3}} \\ (x_{d_2} - u_2)^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}}_{H(x_d - u)} \end{aligned} \quad (3.53)$$

où  $F_1$  et  $F_2$  sont définies par

$$F_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{d_1} = u_1 \\ \beta_e \frac{x_{d_1} \varphi_1(P_1, x_{d_1}) - u_1 \varphi_1(P_1, u_1)}{(V_0 + S_1 y)(x_{d_1} - u_1)^{\frac{1}{3}}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.54a)$$

et

$$F_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{d_2} = u_2 \\ \beta_e \frac{u_2 \varphi_2(P_2, -u_2) - x_{d_2} \varphi_2(P_2, -x_{d_2})}{(V_0 - S_2 y)(x_{d_2} - u_2)^{\frac{1}{3}}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.54b)$$

Pour utiliser le résultat du Théorème 3.2, il faut montrer que  $F_1$  et  $F_2$  sont bien des fonctions continues. Pour ce faire, on distingue deux cas.

Tout d'abord, supposons que  $x_{d_1} \neq u_1$ , alors il est facile de montrer que  $F_1$  est bien définie et est continue.

Considérons maintenant le cas où  $x_{d_1} = u_1$ . Il s'agit de montrer que pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , nous avons

$$\lim_{\substack{x_{d_1}, u_1 \rightarrow \lambda \\ x_{d_1} \neq u_1}} \frac{x_{d_1} \varphi_1(P_1, x_{d_1}) - u_1 \varphi_1(P_1, u_1)}{(x_{d_1} - u_1)^{\frac{1}{3}}} = 0 \quad (3.55)$$



Ce qui prouvera la continuité de  $F_1$ . Supposons que  $\lambda \neq 0$ . Alors pour  $|x_{d_1} - \lambda|$  et  $|u_1 - \lambda|$  suffisamment petits,  $x_{d_1}$  et  $u_1$  sont de même signe, et donc

$$\varphi_1(P_1, x_{d_1}) = \varphi_1(P_1, u_1) \quad (3.56)$$

On en déduit que

$$\beta_e \frac{x_{d_1} \varphi_1(P_1, -x_{d_1}) - u_1 \varphi_1(P_1, -u_1)}{(x_{d_1} - u_1)^{\frac{2}{3}}} = \beta_e \varphi_1(P_1, x_{d_1}) (x_{d_1} - u_1)^{\frac{2}{3}} \quad (3.57)$$

ainsi la relation (3.55) est vérifiée.

Supposons maintenant que  $\lambda = 0$ . Si  $x_{d_1}$  et  $u_1$  sont de même signe, il est alors facile de voir, en utilisant un raisonnement analogue à celui du cas  $\lambda \neq 0$ , que la relation (3.55) est vérifiée. Dans le cas où  $x_{d_1}$  et  $u_1$  sont de signes contraires, on peut utiliser la majoration suivante

$$\left| \frac{x_{d_1} \varphi_1(P_1, x_{d_1}) - u_1 \varphi_1(P_1, u_1)}{(x_{d_1} - u_1)^{\frac{1}{3}}} \right| < \sup(\varphi_1(P_1, x_{d_1}), \varphi_1(P_1, u_1)) \times (|x_{d_1}| + |u_1|)^{\frac{2}{3}} \quad (3.58)$$

Alors, et comme

$$\lim_{\substack{x_{d_1}, u_1 \rightarrow 0 \\ x_{d_1} \neq u_1}} \sup(\varphi_1(P_1, x_{d_1}), \varphi_1(P_1, u_1)) \times (|x_{d_1}| + |u_1|)^{\frac{2}{3}} = 0 \quad (3.59)$$

nous pouvons déduire que  $F_1$  est continue au point  $(x_{d_1}, u_1) = (0, 0)$ . Ceci termine la démonstration de la continuité de  $F_1$ .

D'une façon analogue, on peut montrer que  $F_2$  est continue.

Nous pouvons donc conclure qu'un retour d'état stabilisant pour le système (3.35) au voisinage du point de fonctionnement  $(x^{0T}, x_d^{0T}) = (P_1^0, P_2^0, 0, y^0, 0, 0)$  est donné par (3.43) où  $u$ ,  $V_1$  et  $F$  sont définies respectivement par (3.34), (3.18) et (3.54). Par ailleurs, une fonction de Lyapunov pour le système bouclé est la suivante

$$V_2(x, x_d) = V_1(x) + \frac{3}{4} \left( (x_{d_1} - u_1)^{\frac{4}{3}} + (x_{d_2} - u_2)^{\frac{4}{3}} \right) \quad (3.60)$$

où  $V_1$  est donnée par (3.18).

### 3.2.4 Résultats de simulation

Pour illustrer les performances de la loi de commande proposée dans ce chapitre (désignée dans cette partie par « commande I »), des résultats de simulations sont présentés. Ces résultats sont obtenus pour plusieurs valeurs de dynamiques des distributeurs. L'objectif est d'effectuer une comparaison des performances des systèmes bouclés obtenus, respectivement à partir de la loi de commande donnée dans ce chapitre et certaines lois de commande (désignée par « commande II ») proposées dans la littérature [RO95, ROT97].

Dans le cadre de ces simulations, nous avons considéré un actionneur électrohydraulique constitué par un vérin symétrique double effet commandé à travers deux distributeurs identiques. Les paramètres du vérin et de la source hydraulique sont donnés dans le tableau (TAB.3.1). Le schéma de simulation est représenté par la figure (FIG.3.1).

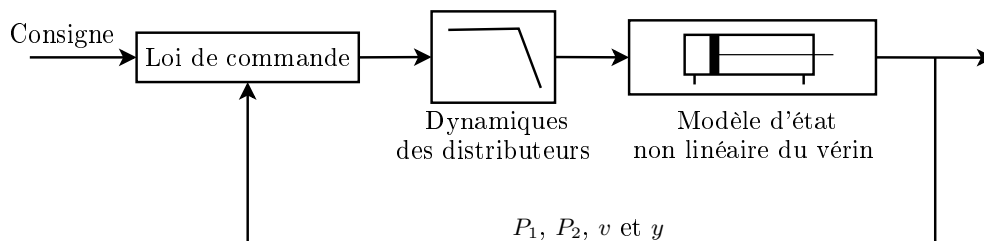


FIG. 3.1: Schéma de simulations.

Paramètre du système	Valeur	Unité
$M$ : masse	500	Kg
$S_1 = S_2$ : section du vérin	$9,4562 \cdot 10^{-4}$	m <sup>2</sup>
$l_0$ : course du vérin	0,4	m
$P_s$ : pression source	$210 \cdot 10^5$	Pa
$P_r$ : pression retour	$1 \cdot 10^5$	Pa
$\beta_e$ : module de compressibilité	$1,4 \cdot 10^9$	Pa

TAB. 3.1: Paramètres du modèle de simulation.

Comme il a été précisé précédemment, la dynamique d'un distributeur est supposée être décrite par un système linéaire du premier ordre caractérisé par sa constante de temps  $\tau_d$ . Plusieurs valeurs de  $\tau_d$  ont été considérées pour étudier l'influence de ce paramètre sur le comportement du système électrohydraulique en boucle fermée. Par ailleurs, il convient de préciser, et vu les caractéristiques considérées, que la pulsation propre du vérin est  $\omega_0=219,4$  rd/s.

Les figures FIG.3.2, FIG.3.3 et FIG.3.4 donnent l'évolution des variables  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $v$  et  $y$  pour différentes conditions initiales et finales (voir TAB.3.2) et ceci en faisant varier la constante de temps  $\tau_d$ . Plus précisément, les réponses des systèmes commandés sont tracées respectivement par un trait continu (—) pour la commande I, par un trait discontinu régulier (- - -) pour la commande II et pour  $\tau_d = 0,45$  ms, par un trait pointillé (.....) pour la commande II et pour  $\tau_d = 4,5$  ms et par un trait discontinu irrégulier (- · - · -) pour la commande II et pour  $\tau_d = 45$  ms. Le tableau TAB.3.3 donne les performances temporelles pour la simulation numéro 3 (voir TAB.3.2) sur la variable position  $y$  où  $t_s$  représente le temps de réponse à 2 %, à 5 % et à 10 %.

Les résultats de simulations montrent que les performances de la loi de commande proposée dans ce chapitre sont tout à fait satisfaisantes. Par ailleurs, les réponses en boucle fermée (voir TAB.3.3) ne sont pas influencées par les dynamiques des distributeurs. En revanche, on peut constater que les lois de commande données dans [ROT97], fondées sur l'hypothèse que les dynamiques des distributeurs sont suffisamment rapides par rapport

à celle de l'actionneur, sont sensibles aux dynamiques des distributeurs. En effet, les performances de ces lois de commande peuvent être détériorées, de manière significative, lors de dynamiques moins rapides des distributeurs.

	Position initiale (m)	Position finale (m)
Simulation 1	0	-0,19
Simulation 2	-0,05	0
Simulation 3	-0,1	0,1

TAB. 3.2: Paramètres des simulations.

		$\tau_d$ [ms] $\rightarrow$	0,45	4,5	45
Loi de commande I	$t_s$ [ms]	2 %	224	224	224
		5 %	213	213	213
		10 %	202	202	202
Loi de commande II	$t_s$ [ms]	2 %	182	192	378
		5 %	172	178	315
		10 %	161	166	267

TAB. 3.3: Performances temporelles pour la simulation 3.

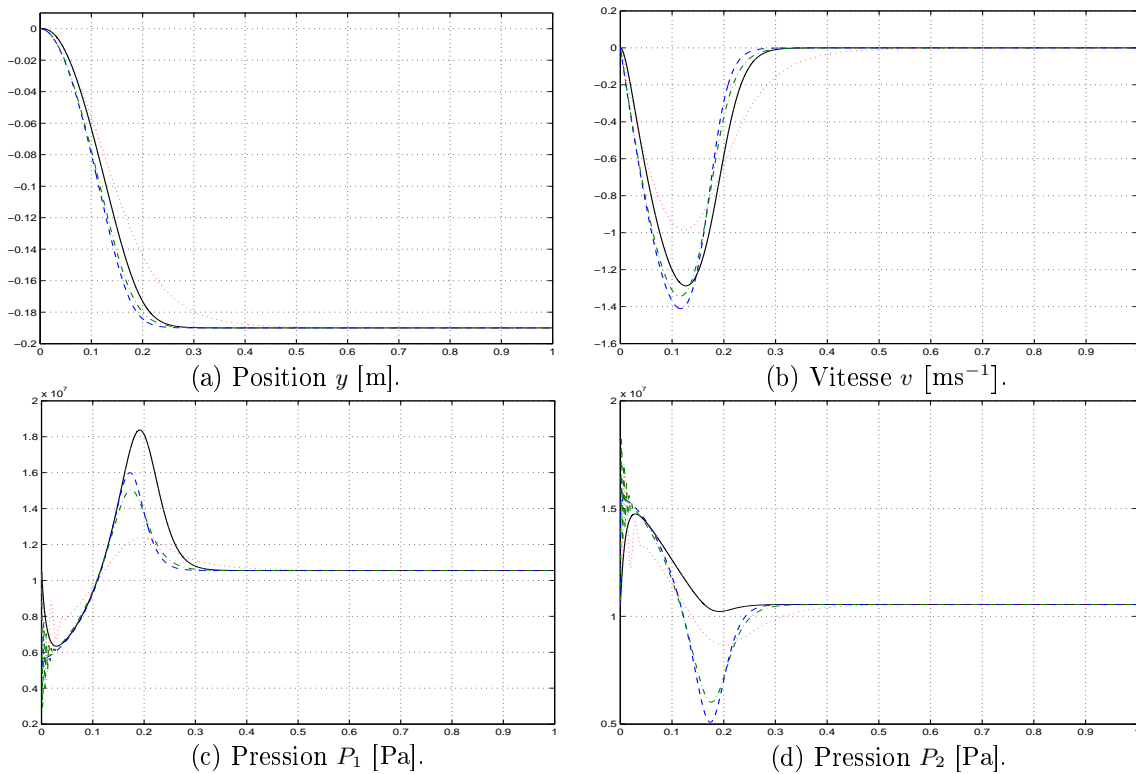


FIG. 3.2: Simulation 1.

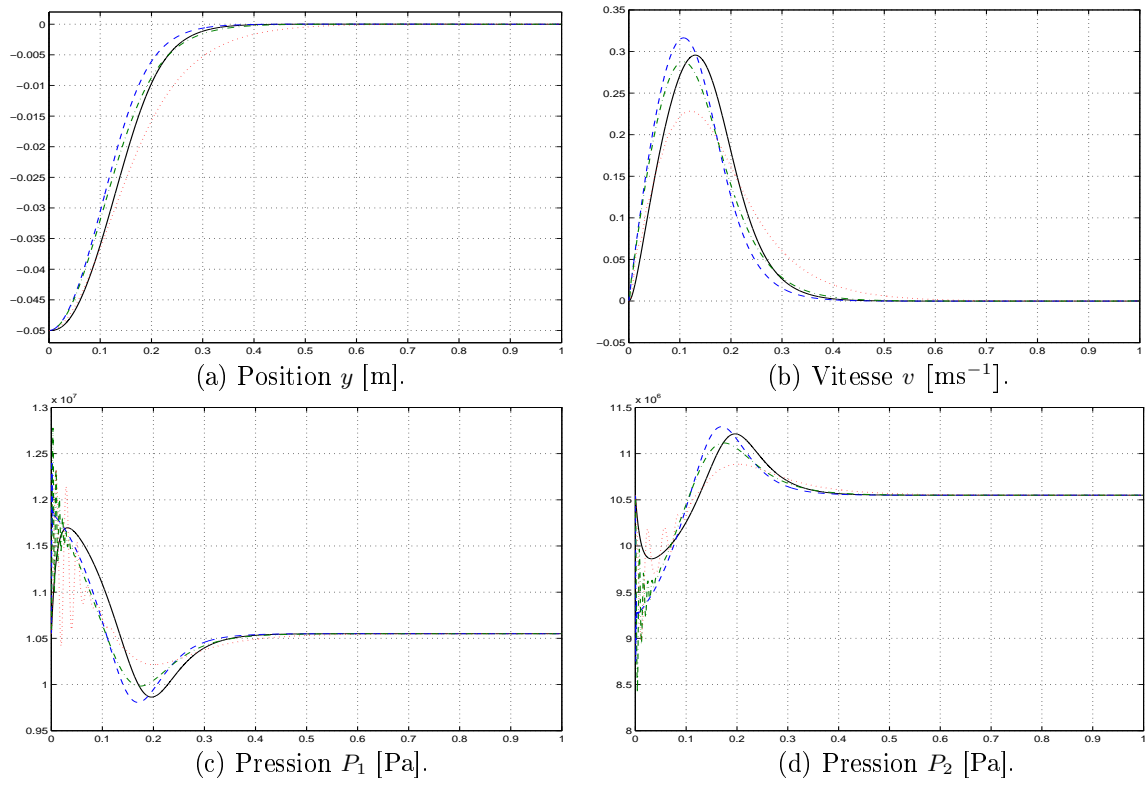


FIG. 3.3: Simulation 2.

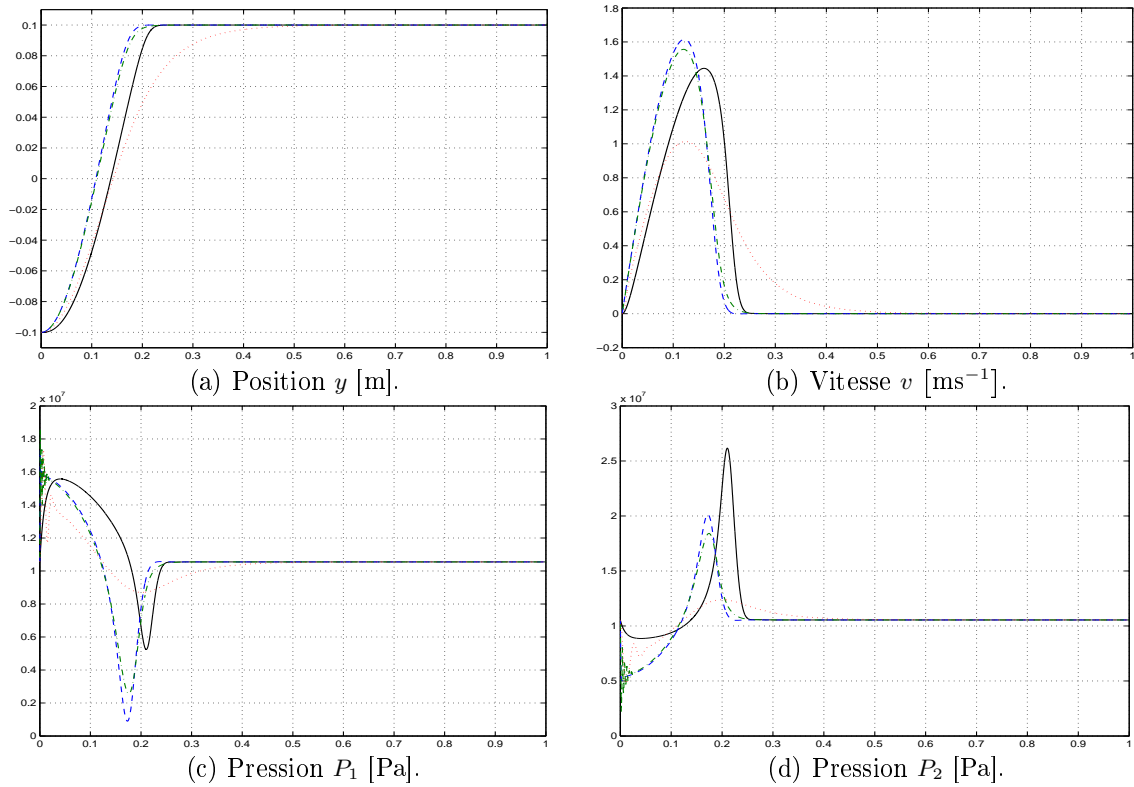


FIG. 3.4: Simulation 3.

## 3.3 Système électrohydraulique avec un seul distributeur

### 3.3.1 Introduction

Le système électrohydraulique considéré dans cette partie est constitué d'un vérin symétrique, commandé par un seul distributeur caractérisés par la constante  $k_d$ .

Dans ce paragraphe nous proposons de stabiliser le système électrohydraulique considéré. Suivant les mêmes démarches que la partie précédente, nous commençons par donner une loi de commande correspondante au modèle réduit qui ne tient pas compte de la dynamique du distributeur. La synthèse de cette loi de commande est similaire à celle utilisée dans le cas d'un système électrohydraulique commandé par deux distributeurs. Elle est basée sur la théorie des systèmes non linéaires plus précisément sur un théorème donné par [OR00, RO95, ROT97]. Par la suite, et en utilisant la loi de commande élaborée pour le modèle qui ne tient pas compte de la dynamique du distributeur, nous calculons une commande stabilisante le système complet tenant compte de la dynamique de distributeur. C'est une loi de commande résultante du théorème concernant les systèmes non linéaires avec intégrateur.

### 3.3.2 Commande du modèle réduit

Soit le modèle non linéaire ci-dessous, représentant le système électrohydraulique considéré

$$\begin{cases} \dot{P}_L &= \frac{\beta_e V_0}{V_0^2 - (Sy)^2} [\varphi_L(P_L, u)u - 2Sv] \\ \dot{v} &= \frac{S}{M} P_L \\ \dot{y} &= v \end{cases} \quad (3.61)$$

où

$$\varphi_L(P_L, u) = \begin{cases} \varphi_L^+(P_L) = k_d S \operatorname{sgn}(P_s - P_r - P_L) \sqrt{2|P_s - P_r - P_L|} & \text{si } u \geq 0 \\ \varphi_L^-(P_L) = k_d S \operatorname{sgn}(P_s - P_r + P_L) \sqrt{2|P_s - P_r + P_L|} & \text{si } u < 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

Ce modèle est donné dans le chapitre I (voir (1.78)), il ne tient pas compte ni des fuites ni des frottement ni de la force antagoniste.

Dans le but de donner une loi de commande  $u$  stabilisante le modèle réduit (3.61) autour d'un point d'équilibre  $x^0 = (P_L^0, v^0, y^0)^T$  tel que  $P_L^0 = 0$ ,  $v^0 = 0$  et  $y^0 \in \left] -\frac{V_0}{S}; \frac{V_0}{S} \right[$ . La position du vérin est centrée autour de  $y^0$ , c'est-à-dire  $y \in ]y^0 - \alpha_1; y^0 + \alpha_1[$  où  $\alpha_1$  est une constante positive qui sera définie plus tard. Nous allons tout d'abord donner une fonction de Lyapunov pour la dynamique libre du modèle réduit (3.61).

### 3.3.2.1 Fonction de Lyapunov pour le modèle réduit

La dynamique libre du modèle réduit (3.61) est donnée par

$$\begin{cases} \dot{P}_L &= \frac{-2S\beta_e V_0 v}{V_0^2 - (Sy)^2} \\ \dot{v} &= \frac{S}{M} P_L \\ \dot{y} &= v. \end{cases} \quad (3.63)$$

Le but ici est de proposer une fonction de Lyapunov pour le modèle (3.63). Pour ce faire, nous présentons notre démarche dans un cas plus général. En effet, considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 h(x_3) \\ \dot{x}_2 &= a x_1 \\ \dot{x}_3 &= x_2 \end{cases} \quad (3.64)$$

où  $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$  représente l'état du système non linéaire,  $a$  est une constante dans  $\mathbb{R}$  et  $h$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . Plus précisément, nous considérons le cas où la fonction  $h$  vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \left( \int_{x_3^0}^{x_3} \tau h(\tau) d\tau \geq x_3 \int_{x_3^0}^{x_3} h(\tau) d\tau \right) \\ \text{et} \\ \left( \int_{x_3^0}^{x_3} \tau h(\tau) d\tau = x_3 \int_{x_3^0}^{x_3} h(\tau) d\tau \Rightarrow x_3 = x_3^0 \right) \end{cases} \quad (3.65)$$

L'objectif de cette étude est de donner, d'une façon générale et indépendamment des systèmes hydrauliques, une fonction de Lyapunov des modèles non linéaires représentés par (3.64).

Soit  $x^0 = (0, 0, x_3^0)^T$  tel que  $x_3^0 \in \mathbb{R}$  un point d'équilibre du système (3.64) et soit  $V$  une fonction telle que

- $V(x) \geq 0$  pour  $x \in \mathbb{R}^3$  ;
- $V(x^0) = 0 \Leftrightarrow x = (0, 0, x_3^0)^T$  ;
- la dérivée de  $V$  le long des trajectoires du système (3.64) est négative.

Le système (3.64) possède les intégrales premières suivantes

$$\begin{cases} I_1(x) &= \int_{x_3^0}^{x_3} h(\tau) d\tau - x_1 \\ I_2(x) &= \frac{1}{2a} x_2^2 - x_1 x_3 + \int_{x_3^0}^{x_3} \tau h(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (3.66)$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}\dot{I}_1(x) &= h(x_3)\dot{x}_3 - \dot{x}_1 \\ &= x_2h(x_3) - x_2h(x_3) \equiv 0\end{aligned}\tag{3.67}$$

et

$$\begin{aligned}\dot{I}_2(x) &= \frac{1}{a}x_2\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_3 - x_1\dot{x}_3 + \dot{x}_3x_3h(x_3) \\ &= x_2x_1 - x_2h(x_3)x_3 - x_1x_2 + x_2x_3h(x_3) \equiv 0\end{aligned}\tag{3.68}$$

Pour obtenir une fonction  $V$  positive, il suffit de prendre

$$V(x) = W(I_1(x), I_2(x))\tag{3.69}$$

où  $W : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  avec  $W(z) = 0$  seulement pour  $z = 0$ . Un choix simple est celui où  $W(z) = \|z\|^2$ . Maintenant, et dans le but de garantir que  $V$  est une fonction définie positive, les intégrales premières  $I_i (i = 1; 2)$  doivent vérifier

$$(I_1(x) = I_2(x) = 0) \Leftrightarrow (x = (0, 0, x_3^0)^T)\tag{3.70}$$

En utilisant (3.66), il vient que

$$(I_1(x) = I_2(x) = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \int_{x_3^0}^{x_3} h(\tau)d\tau \\ \frac{1}{2a}x_2^2 - x_3 \int_{x_3^0}^{x_3} h(\tau)d\tau + \int_{x_3^0}^{x_3} \tau h(\tau)d\tau = 0. \end{cases}\tag{3.71}$$

En vertu de (3.65), un raisonnement simple montre que la condition (3.70) est satisfaite. Ceci prouve que la fonction  $V$  donnée par (3.69) est définie positive.

Dans le cas du système électrohydraulique considéré, la fonction  $h$  et la constante  $a$  sont définies par

$$h(y) = -\frac{2S\beta_e V_0}{V_0^2 - (Sy)^2} \quad \text{et} \quad a = \frac{S}{M}.\tag{3.72}$$

Des calculs simples conduisent à

$$\int_{y^0}^y \frac{d\tau}{V_0^2 - (S\tau)^2} = \frac{1}{2SV_0} \ln \left( \frac{(V_0 + Sy)(V_0 - Sy^0)}{(V_0 - Sy)(V_0 + Sy^0)} \right),\tag{3.73}$$

nous déduisons alors que

$$\int_{y^0}^y h(\tau)d\tau = -\beta_e \ln \left( \frac{(V_0 + Sy)(V_0 - Sy^0)}{(V_0 - Sy)(V_0 + Sy^0)} \right).\tag{3.74}$$

Par ailleurs, il est facile de vérifier que

$$\int_{y^0}^y \tau h(\tau)d\tau = \frac{\beta_e V_0}{S} \ln \left( \frac{V_0^2 - (Sy)^2}{V_0^2 - (Sy^0)^2} \right).\tag{3.75}$$

Soit  $\bar{h}$  la fonction suivante

$$\bar{h}(y) = -y \int_{y^0}^y h(\tau) d\tau + \int_{y^0}^y \tau h(\tau) d\tau. \quad (3.76)$$

La fonction  $\bar{h}$  est donnée explicitement par

$$\bar{h}(y) = y\beta_e \ln \left( \frac{(V_0 + Sy)(V_0 - Sy^0)}{(V_0 - Sy)(V_0 + Sy^0)} \right) + \frac{\beta_e V_0}{S} \ln \left( \frac{V_0^2 - (Sy)^2}{V_0^2 - (Sy^0)^2} \right). \quad (3.77)$$

Après calculs, on aboutit à

$$\frac{1}{\beta_e} \bar{h}'(y) = \ln \left( \frac{(V_0 + Sy)(V_0 - Sy^0)}{(V_0 - Sy)(V_0 + Sy^0)} \right). \quad (3.78)$$

En utilisant un raisonnement simple nous obtenons

$$((y - y^0)\bar{h}'(y) \geq 0) \text{ et } (\bar{h}'(y) = 0 \Leftrightarrow y = y^0). \quad (3.79)$$

Donc

$$(\bar{h}(y) > 0 \text{ pour } y \neq y^0) \text{ et } (\bar{h}(y^0) = 0). \quad (3.80)$$

Finalement, nous concluons que la fonction  $V_C$  définie par

$$V_C(P_L, v, y) = \frac{C}{2} \left[ P_L + \beta_e \ln \left( \frac{(V_0 + Sy)(V_0 - Sy^0)}{(V_0 - Sy)(V_0 + Sy^0)} \right) \right]^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{M}{2S} v^2 - yP_L + \frac{\beta_e V_0}{S} \ln \left( \frac{V_0^2 - (Sy)^2}{V_0^2 - (Sy^0)^2} \right) \right]^2 \quad (3.81)$$

où  $C^{(16)}$  est une constante positive, est une fonction de Lyapunov pour le modèle (3.63).

### 3.3.2.2 Synthèse de la loi de commande

Tout au long de cette partie nous utiliserons  $f$  et  $g$  pour désigner

$$f = \left( -\frac{2S\beta_e V_0 v}{V_0^2 - (Sy)^2}, \frac{S}{M} P_L, v \right)^T \quad (3.82)$$

et

$$g = \left( \frac{\beta_e V_0}{V_0^2 - (Sy)^2}, 0, 0 \right)^T, \quad (3.83)$$

le système (3.61) peut s'écrire sous la forme

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\varphi_L(x, u)u \quad (3.84)$$

où  $x = (P_L, v, y)^T$ .

Dans le but de montrer la stabilisabilité du système (3.61), nous utiliserons le résultat de la proposition suivante. En fait, cette proposition représente un cas particulier du Théorème 3.1.

<sup>(16)</sup>Cette constante sera définie par la suite.



**Proposition 3.1.** *supposons qu'il existe une fonction lisse  $V(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que*

(C9)  $V(x) > 0, \forall x \neq x^0$  et  $V(x^0) = 0$  ;

(C10)  $L_f V(x) \leq 0$  sur  $\mathbb{R}^3$  ;

(C11)  $\{x \in \mathbb{R}^3 / L_f^{k+1} V(x) = L_f^k L_g V(x) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}\} = \{x^0\}$  ;

(C12)  $\varphi_L(x, -L_g V(x)) > 0$  ;

Alors le système (3.84) en boucle fermée avec la loi de commande

$$u = -L_g V(x) \tag{3.85}$$

est asymptotiquement stable au point d'équilibre  $x^0$ . ■

Il est clair que les deux conditions (C9) et (C10) sont vérifiées. Par ailleurs, nous avons

$$-L_g V_C(x) = -\frac{\beta_e V_0}{V_0^2 - (Sy)^2} (CI_1(x) - yI_2(x)) \tag{3.86}$$

Plus explicitement nous avons

$$\begin{aligned} -L_g V_C(x) = \frac{-\beta_e V_0}{V_0^2 - (Sy)^2} \left[ C \left[ P_L + \beta_e \ln \left( \frac{(V_0 + Sy)(V_0 - Sy^0)}{(V_0 - Sy)(V_0 + Sy^0)} \right) \right] \right. \\ \left. - y \left[ \frac{M}{2S} v^2 - yP_L + \frac{\beta_e V_0}{S} \ln \left( \frac{V_0^2 - (Sy)^2}{V_0^2 - (Sy^0)^2} \right) \right] \right] \end{aligned} \tag{3.87}$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{Sgn}(-L_g V_C(x)) = \text{Sgn} \left[ y \left[ \frac{M}{2S} v^2 - yP_L + \frac{\beta_e V_0}{S} \ln \left( \frac{V_0^2 - (Sy)^2}{V_0^2 - (Sy^0)^2} \right) \right] \right. \\ \left. - C \left[ P_L + \beta_e \ln \left( \frac{(V_0 + Sy)(V_0 - Sy^0)}{(V_0 - Sy)(V_0 + Sy^0)} \right) \right] \right] \end{aligned} \tag{3.88}$$

Soit  $\alpha_1$  (utilisée pour la définition du point d'équilibre) tel que

$$\left| \beta_e \ln \left( \frac{(V_0 + Sy)(V_0 - Sy^0)}{(V_0 - Sy)(V_0 + Sy^0)} \right) \right| < P_s - P_r \tag{3.89}$$

Alors, pour  $P_L \notin ]P_r - P_s; P_s - P_r[$ , nous avons

$$P_L \left( P_L + \beta_e \ln \left( \frac{(V_0 + Sy)(V_0 - Sy^0)}{(V_0 - Sy)(V_0 + Sy^0)} \right) \right) > 0 \tag{3.90}$$

Ainsi, et pour  $C$  un réel positif suffisamment grand, nous obtenons

$$(P_L < P_r - P_s \Rightarrow \text{Sgn}(-L_g V_C(x)) > 0) \tag{3.91}$$

et

$$(P_L > P_s - P_r \Rightarrow \text{Sgn}(-L_g V_C(x)) < 0) \tag{3.92}$$

Finalement, nous déduisons que la condition (C12) est satisfaite.

Maintenant, nous allons démontrer que la condition (C11) est vérifiée. Plus précisément, nous montrons que

$$\{x \in \mathbb{R}^3 / L_g V_C(x) = L_f L_g V_C(x) = L_f^2 L_g V_C(x) = 0\} = \{x^0\}. \quad (3.93)$$

Un raisonnement basé sur la dérivé le long du champ  $f$  montre que si  $x$  est solution de

$$L_g V_C(x) = L_f L_g V_C(x) = L_f^2 L_g V_C(x) = 0 \quad (3.94)$$

alors  $x$  est aussi solution du système suivant

$$\begin{cases} C I_1(x) - y I_2(x) & = 0 & (3.95 \text{ a}) \\ v I_2(x) & = 0 & (3.95 \text{ b}) \\ P_L I_2(x) & = 0 & (3.95 \text{ c}) \end{cases}$$

Nous discutons deux cas selon la valeur de  $I_2$ . Premièrement, supposons que  $I_2(x) = 0$ . D'après (3.95 a) on a  $I_1(x) = I_2(x) = 0$ . Ce qui implique que  $x = x^0$ .

Deuxièmement, supposons que  $I_2(x) \neq 0$ . Alors  $v = P_L = 0$ . Ainsi l'équation (3.95 a) devient

$$\bar{h}_C(y) = C \ln \left( \frac{(V_0 + Sy)(V_0 - Sy^0)}{(V_0 - Sy)(V_0 + Sy^0)} \right) - y \frac{V_0}{S} \ln \left( \frac{V_0^2 - (Sy)^2}{V_0^2 - (Sy^0)^2} \right) = 0 \quad (3.96)$$

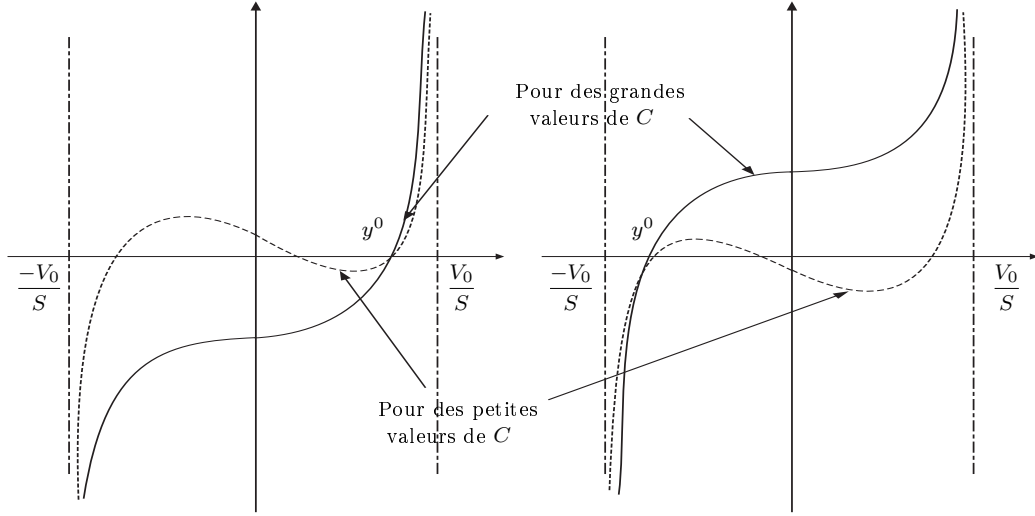


FIG. 3.5: Représentation de la fonction  $\bar{h}_C(y)$ .

Un raisonnement sur le comportement des courbes  $\bar{h}_C$  paramétrées par  $C$ , montre que, et pour  $C$  suffisamment grand,  $\bar{h}_C$  est une fonction qui vérifie que  $\bar{h}_C(y) = 0$  seulement pour  $y = y^0$  (voir FIG.3.5).

Ceci termine la démonstration que le système (3.84) avec la fonction de Lyapunov définie par (3.81) vérifie les conditions (C9)-(C12) de la Proposition 3.1.

Finalement, nous déduisons que le système en boucle fermée défini à partir de (3.84) avec (3.85) est asymptotiquement stable à l'origine.

### 3.3.3 Stabilisation du modèle global

Dans ce paragraphe nous considérons un modèle tenant compte de la dynamique du distributeur. Il s'agit du modèle (3.61) augmenté par un intégrateur, soit

$$\begin{cases} \dot{P}_L &= \frac{\beta_e V_0}{V_0^2 - (Sy)^2} [\varphi_L(P_L, x_d)x_d - 2Sv] \\ \dot{v} &= \frac{S}{M} P_L \\ \dot{y} &= v \\ \dot{x}_d &= u_d \end{cases} \quad (3.97)$$

Considérons la fonction  $\bar{f} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$\bar{f}(x, x_d) = f(x) + g(x)\varphi_L(x, x_d) \quad (3.98)$$

où  $x = (P_L, v, y)^T$  et  $f, g$  sont données par (3.82) et (3.83).

Alors, le système (3.97) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \bar{f}(x, x_d) \\ \dot{x}_d &= u_d \end{cases} \quad (3.99)$$

Soit  $F_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction donnée par

$$F_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } x_d = -L_g V_C(x) \\ \beta_e \frac{x_d \varphi_L(P_L, x_d) + L_g V_C(x) \varphi_L(P_L, -L_g V_C(x))}{(V_0^2 - (Sy)^2)(x_d + L_g V_C(x))^{\frac{1}{3}}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.100)$$

et posons  $F = (F_1, 0, 0, 0)^T$ . En utilisant un raisonnement analogue à celui fait dans la partie 3.2.3.2, on peut prouver que  $F$  est une fonction continue.

Par ailleurs, nous avons

$$\bar{f}(x, x_d) = \bar{f}(x, -L_g V_C(x)) + F(x, x_d)(x_d + L_g V_C(x))^{\frac{1}{3}} \quad (3.101)$$

Maintenant, nous sommes en mesure d'énoncer et de prouver un résultat sur la stabilisation du système (3.97).

**Proposition 3.2.** *Le système non linéaire (3.97) bouclé avec la loi de commande*

$$u_d = -\frac{\partial L_g V_C(x)}{\partial x} \bar{f}(x, x_d) - \nabla V_C(x) F(x, x_d) - (x_d + L_g V_C(x)) \quad (3.102)$$

*est asymptotiquement stable au point d'équilibre  $(0, 0, y^0, 0)^T$ .* ■

La démonstration de la Proposition 3.2 est basée sur le résultat du Théorème 3.2. En effet, dans la partie 3.3.2.2, il est montré que le système (3.84) ou encore

$$\dot{x} = \bar{f}(x, u) \quad (3.103)$$

est stabilisable avec  $u = -L_g V_C(x)$  où  $V_C(x)$  est la fonction de Lyapunov définie par (3.81) et qui clairement vérifie (3.42).

Par ailleurs, un raisonnement simple montre que le retour d'état défini par (3.102) est déduit de la commande stabilisante (3.43) du Théorème 3.2.

Ainsi le système (3.97) (3.102) est asymptotiquement stable au voisinage du point  $(0, 0, y^0, 0)^T$  et une fonction de Lyapunov pour le système bouclé est donnée par

$$W(x, x_d) = V_C(x) + \frac{3}{4}(x_d + L_g V_C(x))^{\frac{4}{3}}. \quad (3.104)$$

### 3.3.4 Résultats de simulation

Pour illustrer les performances des lois de commande proposées dans cette partie, nous avons considéré un système électrohydraulique constitué d'un vérin symétrique commandé à travers un seul distributeur. Les paramètres des composants hydrauliques sont donnés dans le tableau TAB.3.1. Les simulations ont été réalisées en utilisant respectivement la loi de commande tenant compte de la dynamique du distributeur ((3.85), Commande I) et celle qui néglige cette dynamique ((3.102), Commande II). Nous avons considéré plusieurs valeurs de temps de réponse du distributeur ; à savoir  $\tau_d = 0,45$  ms,  $\tau_d = 4,5$  ms et  $\tau_d = 54$  ms, pour mesurer l'influence de la dynamique du pré-actionneur sur les performances du système bouclé.

Les figures FIG.3.6 et FIG.3.7 représentent respectivement les résultats des simulations pour un déplacement de grande amplitude ( $y_i = -0,1$ m;  $y_f = 0,1$ m) et pour un déplacement de faible amplitude ( $y_i = 0$ m;  $y_f = 0,05$ m). Les réponses de la loi de commande I sont représentées respectivement par des traits discontinus (---) et des traits mixtes (- · - · -) pour  $\tau_d = 0,45$  ms et  $\tau_d = 54$  ms. Celles de la loi de commande II sont représentées respectivement par des traits continus (—) et des pointillés (·····) pour  $\tau_d = 0,45$  ms et  $\tau_d = 54$  ms.

Les performances temporelles des deux lois de commande mesurées sur la variable position du piston en utilisant le temps de réponse  $t_s$  à 2%, 5% et 10%. Les résultats de ces mesures sont donnés dans le tableau TAB.3.4.

Les résultats de simulations montrent que les performances des deux lois de commande sont satisfaisantes lorsque le distributeur est suffisamment rapide ( $\tau_d = 0,45$  ms et  $\tau_d = 4,5$  ms) et ceci pour toutes les amplitudes de déplacement du piston. Lorsque la constante de temps du distributeur augmente ( $\tau_d = 54$  ms) les performances du système bouclé par la loi de commande II se dégradent considérablement. En effet, on constate la

		$\tau_d$ [ms] $\rightarrow$	0,45	4,5	54
Commande I	$t_s$ [ms]	2 %	284	282	248
		5 %	210	210	194
		10 %	166	166	158
Commande II	$t_s$ [ms]	2 %	220	204	408
		5 %	181	170	365
		10 %	152	144	237

TAB. 3.4: Performances temporelles pour la simulation 4.

présence d'oscillations et de déplacements, c'est-à-dire une diminution de l'amortissement. La loi de commande I, par contre, est très peu sensible aux variations de la dynamique du distributeur. Notons que ces simulations ont été réalisées dans le cas le plus défavorable c'est-à-dire que le système considéré n'a aucun élément dissipatif (fuites et frottements visqueux négligés).

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons synthétisé, dans un premier temps, une commande non linéaire pour un système électrohydraulique sans tenir compte des dynamiques des distributeurs. Cette commande présente une amélioration par rapport à celle proposée dans la littérature d'un point de vu du choix du point de fonctionnement. Dans un second temps, nous avons présenté un nouveau résultat sur la stabilisation des systèmes non linéaires qui sont seulement continus (c'est-à-dire que les champs de vecteurs définissant les systèmes sont non dérivables). Nous avons ensuite appliqué ces résultats à la stabilisation d'actionneurs électrohydrauliques en tenant compte des dynamiques des distributeurs et ceci sans effectuer aucune linéarisation du modèle. Les simulations numériques montrent que les performances de notre approche sont meilleurs en comparaison avec une autre méthode non linéaire proposée dans la littérature.

La stratégie de stabilisation des processus électrohydrauliques, prenant en considération les dynamiques des distributeurs, présentée dans cette thèse a été donnée dans un cas ne tenant pas compte de toutes les contraintes d'un processus électrohydraulique. Néanmoins, et modulo de simples adaptations, cette stratégie peut être aisément étendue à certaines situations plus générales. On peut tenir compte par exemple, des frottements visqueux, des forces exogènes ou des fuites diverses.

Des travaux sont en cours pour étudier le cas où les dynamiques des distributeurs sont modélisées par une équation différentielle linéaire du second ordre. L'intérêt est dû au fait qu'une telle modélisation est encore plus réaliste. Cependant, et dans le cas d'une démarche similaire à celle présentée dans cet article, l'approche pose un problème d'ordre théorique qui n'est pas encore résolu à notre connaissance.

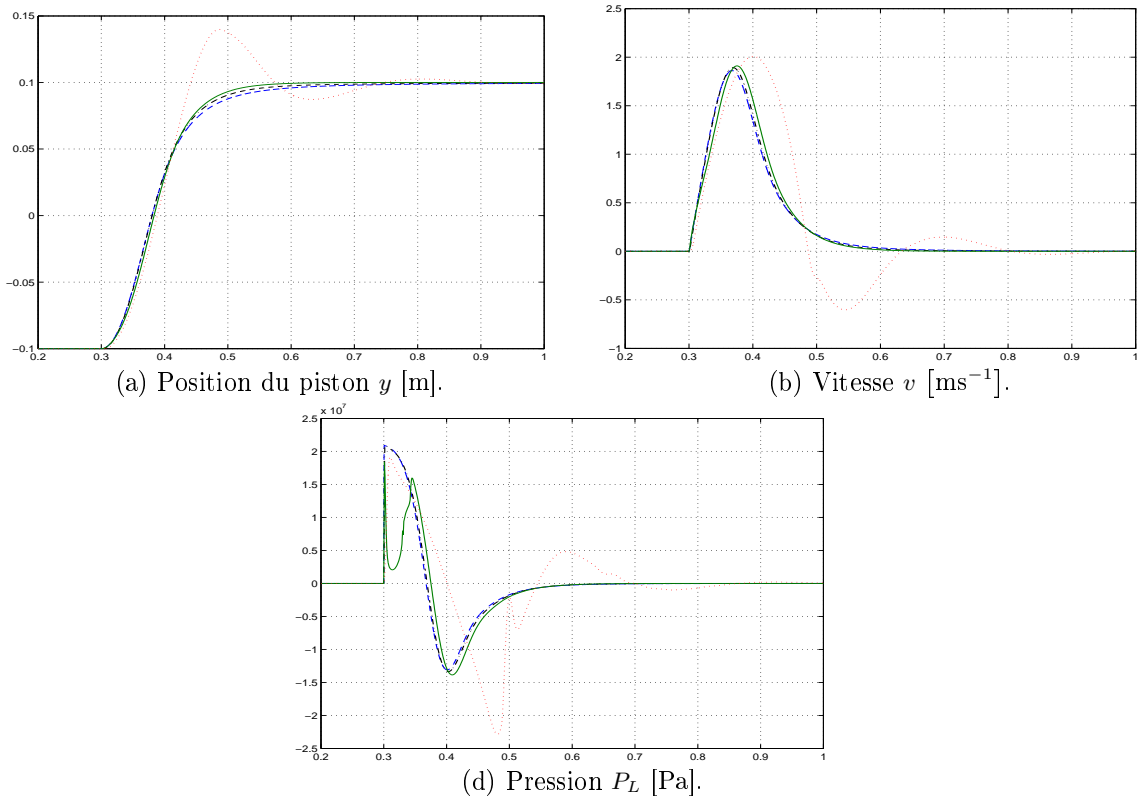


FIG. 3.6: Simulation 4.

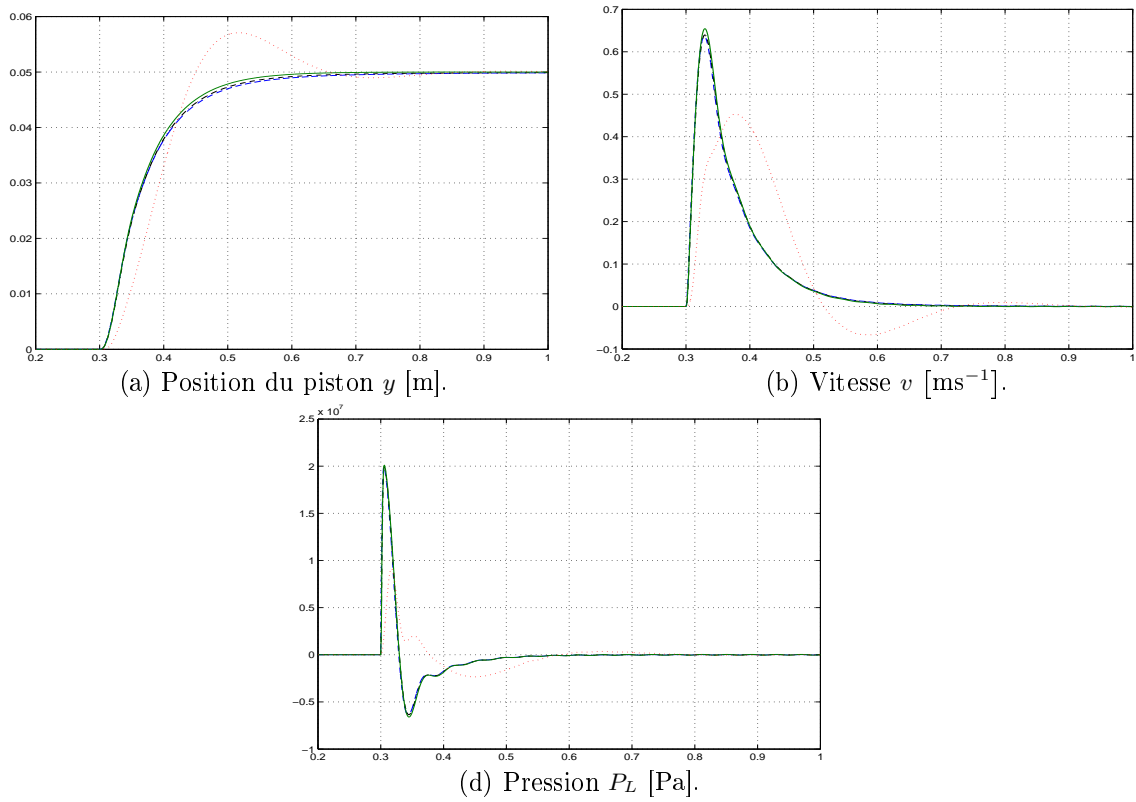


FIG. 3.7: Simulation 5.



# Conclusion générale et perspectives

Ce mémoire est dédié à la modélisation et à la commande par des approches respectivement linéaires et non linéaires des actionneurs électrohydrauliques.

Le premier chapitre de ce mémoire est dédié à la modélisation des actionneurs électrohydrauliques. Nous avons rappelé les notions fondamentales de la mécanique classique, de la mécanique des fluides et les propriétés des fluides hydrauliques usuels pour en déduire les modèles de connaissance des actionneurs électrohydrauliques utilisés pour l'asservissement de position. Les caractéristiques technologiques des pré-actionneurs généralement utilisés en boucle fermée sont passées en revue afin d'établir leurs modèles statiques et dynamiques. Les modèles obtenus sont des équations différentielles non linéaires seulement continues (c'est-à-dire non dérivables) et décrivent, d'une part, l'évolution de la pression dans chaque chambre du vérin et, d'autre part, les équations de mouvement de l'ensemble charge et vérin. Nous avons également proposé un nouveau modèle de dimension réduite qui tient compte de la dynamique de la pression différentielle. Ce modèle de la pression différentielle est moins restrictif que ceux présentés dans la littérature. Les modèles incluant la dynamique du ou des distributeurs, représentés par une équation différentielle linéaire du premier ordre, sont également proposés. Ces modèles ont été utilisés pour la synthèse des lois de commande.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'ensemble d'équilibre des modèles non linéaires, à l'analyse de la stabilisabilité et de la détectabilité des modèles linéaires obtenus par approximation au premier ordre (au voisinage d'un point d'équilibre) et à la synthèse de lois de commande linéaire des actionneurs hydrauliques. L'analyse de la stabilisabilité et de la détectabilité locale est effectuée pour les différents modèles proposés et montre que ces propriétés dépendent du point de fonctionnement choisi et de la configuration du système. Nous avons montré, plus particulièrement que, dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire pour la position d'équilibre  $y^0 = 0$ , il existe un mode stable non observable et non commandable lorsque le pré-actionneur est commandé à travers un distributeur. Dans le cas de deux distributeurs, ce mode est non observable mais commandable. Les lois de commande linéaires sont synthétisées lorsque le point de fonctionnement est choisi dans ce cas le plus défavorable. Nous avons, dans un premier temps, proposé une loi de commande par rétroaction de la position en utilisant des correcteurs de type PID. Nous avons ensuite passé en revue les différentes façons pour améliorer l'amortissement du système soit en introduisant des éléments dissipatifs comme les fuites par exemple, soit en introduisant des boucles de rétroactions secondaires (rétroaction de la pression différentielle, de l'accélération ou de la vitesse). La dernière partie de ce chapitre concerne la synthèse de correcteur par retour d'état statique de la forme  $u = -Kx$ . Les stratégies proposées



sont la commande par placement de pôles, la commande optimale et la commande proportionnelle intégrale par retour d'état. Les différentes lois de commande sont simulées sur le modèle non linéaire pour différentes consignes et ne tiennent pas compte de la dynamique du distributeur. Les résultats que nous avons présenté dans ce chapitre ont un caractère local. Ces résultats ne sont pas toujours satisfaisants lors d'un changement de point de fonctionnement ou lorsque, pour des raisons économiques, un distributeur proportionnel ou un servodistributeur (moins performants que les servovalves) est utilisé pour actionner le vérin.

Le troisième chapitre est dédié à la commande non linéaire par retour d'état des actionneurs hydrauliques commandés respectivement à travers un ou deux pré-actionneurs. La première partie est consacrée à la stabilisation d'un vérin commandé à travers deux distributeurs. Dans un premier temps, nous avons proposé un résultat théorique sur la commande par ajout d'intégrateur des systèmes seulement continus. Il s'agit d'une amélioration des résultats de la littérature. La première phase de l'application de ces résultats aux systèmes électrohydrauliques a consisté à synthétiser une loi de commande stabilisant le système sans la dynamique des distributeurs. Cette loi de commande est obtenue en appliquant une stratégie de type Jurdjevic-Quinn. Ensuite nous avons proposé une loi de commande par ajout d'intégrateur qui tient compte de la dynamique des distributeurs et ceci sans effectuer aucune linéarisation. La deuxième partie est consacrée la stabilisation des actionneurs électrohydrauliques commandés par un distributeur en utilisant le nouveau modèle réduit proposé au premier chapitre. La démarche adoptée est similaire au cas de deux distributeurs. Notons que les fonctions de Lyapunov, nécessaires à la synthèse de ces lois de commande, sont construites à partir des intégrales premières du système non commandé. Finalement, les stratégies de commande proposées dans ce chapitre ont été validées en simulation et ceci en prenant le cas le plus défavorable c'est-à-dire que le système considéré n'a aucun élément dissipatif (en négligeant les fuites et les frottements visqueux). En effet, nous avons montré en simulation que les performances des lois de commande proposées sont très peu sensibles aux variations de la dynamique des distributeurs et aux changements de points de fonctionnement. Notons que ces résultats peuvent être également transposés à la stabilisation des actionneurs électropneumatiques.

Les perspectives de ce travail représentent un aspect théorique et un aspect pratique :

- la suite logique de notre travail serait d'implémenter ces lois de commande sur les bancs d'essais électrohydrauliques du laboratoire et de réaliser une étude comparative avec les correcteurs industriels de type PID ;
- il serait intéressant et plus réaliste de modéliser les pré-actionneurs des systèmes à fluide sous pression par une équation différentielle du deuxième ordre. A notre connaissance, il n'y a aucun résultat concernant la stabilisation par ajout de deux intégrateurs des systèmes seulement continus ;
- il serait également intéressant d'étendre les résultats obtenus à la stabilisation par retour de sortie en utilisant un observateur d'ordre réduit pour estimer les composantes non mesurées de l'état ;
- les lois de commande proposées dans ce chapitre assurent la stabilité du système commandé en supposant que le modèle est parfaitement connu. Il serait donc utile d'analyser la robustesse de ces lois de commande en présence d'incertitudes paramétriques.

# Annexe A

## Feedback Control of an Electropneumatic System

ELETROMOTION 11 (2004) pp 174-181

## Feedback control of an electropneumatic system

R. Outbib, H. Rafaralahy and M. Tafraouti

**Abstract** – This paper is a contribution to the problem of global stabilization of non-linear systems by adding an integrator with application to an electropneumatic system. More precisely, we propose an adaptation of a classical result established for smooth system to systems that are only continuous. Afterwards, we show how to use this result to stabilize an electropneumatic system taking into account some realistic considerations.

### 1. Introduction

Feedback stabilization of nonlinear systems has attracted the attention of several authors. Among the addressed problem, the feedback stabilization by adding an integrator received much attention and several studies provided interesting results (see [1]-[4], [6]-[8]). Generally speaking, feedback stabilization by adding an integrator consists in deducing the stabilization of the augmented nonlinear system

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (1)$$

where  $x \in \mathcal{R}^n$  and  $u, y \in \mathcal{R}^m$ , from the stabilization of the following system

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2)$$

It is well-known that if (2) is stabilizable by means of  $\bar{u}$  of class  $C^1$  then (1) is stabilizable by a control law which is at least continuous as long as  $f$  is at least of class  $C^1$ . The proof of this result is based on the fact that if  $g: \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^n$ , is at least of class  $C^1$  and  $g(x, 0) \equiv 0$  then  $g$  has the following decomposition

$$g(x, y) = G(x, y)y \text{ for } (x, y) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m$$

where  $G$  is defined by

$$G(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial y}(x, ty) dt$$

Now, if  $f$  is continuous but not of class  $C^1$  this proof is not valid. However, it is established in [8] that this result still valid unless  $f$  is only continuous (in the case  $\bar{u} \equiv 0$ ).

A first goal of this paper is to provide a version for the classical result (when  $\bar{u} \neq 0$ ) in the case where  $f$  is continuous but not of class  $C^1$ . This part of the work is motivated by the fact that models of fluid power systems are not smooth.

In fact, a main goal of this paper is the feedback stabilization of an electropneumatic system taking into account the main nonlinearities and without any kind of linearization.

The paper is organized as follows. In section 2, a description of an electropneumatic system is given. Afterwards, in section 3, a result on feedback stabilization by adding an integrator is proposed. In section 4, we show the application of this result to the electropneumatic system under consideration. Finally in section 5, numerical simulations are proposed to illustrate the performances of the proposed control law.

### 2. Electropneumatic system under consideration

The system under consideration (see Fig. 1) is a position control servo of a pneumatic actuator. This system is composed of a double-rod double-

---

*This paper has been presented at the 5th International Symposium on Advanced Electromechanical Motion Systems - ELECTROMOTION 2003, Marrakesh, Morocco, November 26-28, 2003.*

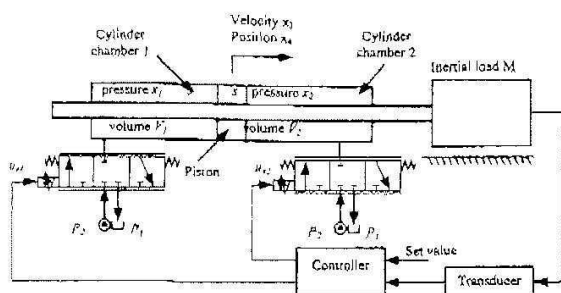


Fig. 1. Electropneumatic system.

acting linear cylinder controlled by two three-way valves and with inertial load.

The model of this system (see for instance [9] and the references therein) is based on the mechanical equations of the motion, the flow law through variable orifice and the pressure evolution into the chamber of variable volume. A classical model used to describe the behaviour of the process is

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{x_1 x_3}{l_0 + x_4} + \frac{\varphi(x_1, u_1)}{l_0 + x_4} u_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{x_2 x_3}{l_0 - x_4} - \frac{\varphi(x_2, -u_2)}{l_0 - x_4} u_2 \\ \dot{x}_3 = \frac{S}{M} (x_1 - x_2) \\ \dot{x}_4 = x_3 \end{cases} \quad (3)$$

where  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  and  $x_4$  are respectively the pressure in each chamber, the velocity of the load and the position of the load.  $l_0$  is the half length of the cylinder,  $S$  the piston area, and  $M$  the mass of the load.

$\varphi$  is defined by

$$\varphi(y, v) = \begin{cases} \varphi^+(y) & \text{if } v \geq 0 \\ \varphi^-(y) & \text{if } v < 0 \end{cases}$$

Various expressions of the functions  $\varphi^-(y)$  and  $\varphi^+(y)$  are available and a possible approximation is given by

$$\varphi^+(y) = \begin{cases} P_2 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{P_2}\right)^2} & \text{if } y \in ]0, P_2] \\ -y \sqrt{1 - \left(\frac{P_2}{y}\right)^2} & \text{if } y > P_2 \end{cases}$$

and

$$\varphi^-(y) = \begin{cases} -P_1 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{P_1}\right)^2} & \text{if } y \in ]0, P_1] \\ y \sqrt{1 - \left(\frac{P_1}{y}\right)^2} & \text{if } y > P_1 \end{cases}$$

Several works using different strategies of control were dedicated to the feedback stabilization of system (3) (see for instance [10], [13]). Unfortunately, the dynamics of the servovalve are neglected in those works. In order to be more realistic, a main goal of this paper is the stabilization of the electropneumatic process taking into account the dynamics of the servovalve. More precisely, we approximate the dynamics of the servovalve by a first order differential equation. So we consider the following more general model to describe the behaviour of the process

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{x_1 x_3}{l_0 + x_4} + \frac{\varphi(x_1, x_{s1})}{l_0 + x_4} x_{s1} \\ \dot{x}_2 = \frac{x_2 x_3}{l_0 - x_4} - \frac{\varphi(x_2, -x_{s2})}{l_0 - x_4} x_{s2} \\ \dot{x}_3 = \frac{S}{M} (x_1 - x_2) \\ \dot{x}_4 = x_3 \\ \dot{x}_{s1} = u_{s1} \\ \dot{x}_{s2} = u_{s2} \end{cases} \quad (4)$$

where  $x_{s1}$  and  $x_{s2}$  are the spool displacements,  $u_{s1}$  and  $u_{s2}$  are proportional to the corresponding electrical inputs.

The flow control is obtained by a 3 ports/3 positions slide servovalve with an electronic control supplying a flow-rate proportional to a

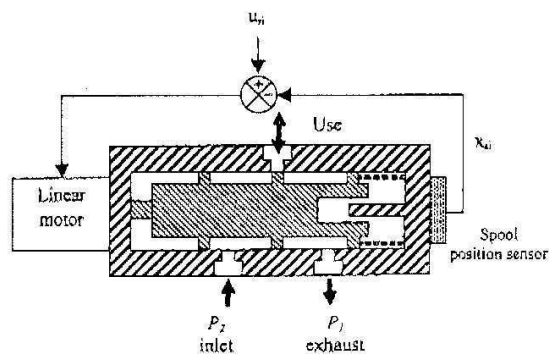


Fig. 2. Schematic diagram of the servovalve.

given set-point  $u_{st}$ .

The servovalve is composed of:

- a pneumatic distributor consisting of matching spool-sleeve assembly;
- an electric linear servomotor directly controlling the movement of the spool;
- a position sensor supplying an electrical signal proportional to the position of the spool;
- the position sensor signal is used as feedback to obtain better precision of the spool position.

The position of the spool and the flow are then proportional to the electrical input  $u_{st}$ .

Notice that some works were devoted to the problem of control taking into account the dynamics of the servovalve (see for instance [11], [12]). In general, those works are based on linearization methods. We would like to stress that our approach is based on nonlinear model without any kind of linearization.

### 3. Feedback stabilization by adding an integrator

In this section, the problem of feedback stabilization of nonlinear systems by adding an integrator is investigated. More precisely, our goal is to prove the following result.

#### Theorem 1

Consider system (1) where  $f$  is assumed to be only continuous. Let  $\bar{u}$  (at least of class  $C^1$ ) be a control law such that the closed-loop system

$$\dot{x} = f(x, \bar{u}(x)) \quad (5)$$

is globally asymptotically stable at the origin. Suppose there exists  $V$ , a known Lyapunov function such that

$$\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x, \bar{u}(x)) \rangle \leq 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Then, system (1) can be rendered globally asymptotically stable at the origin by means of a control law which can be given explicitly.

**Proof** – From lemma 2 of [8], one can write

$$f(x, y) - f(x, \bar{u}(x)) = G(x, y)H(y - \bar{u}(x))$$

where  $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$  is continuous and such that  $h_i(z)z > 0$  for  $z \neq 0$  and  $\lim_{z \rightarrow +\infty} h_i(z) = +\infty$  for  $i = 1 \dots m$ .

Let  $W$  be the Lyapunov function defined by

$$W(x, y) = V(x) + \sum_{i=1}^m \int_0^{y_i - \bar{u}_i(x)} h_i(\tau) d\tau. \quad (7)$$

The derivative of  $W$  along the trajectories of (1) is given by

$$\begin{aligned} \dot{W}(x, y) &= \langle \nabla V(x), f(x, \bar{u}(x)) \rangle + \nabla V(x)G(x, y)H(y - \bar{u}(x)) \\ &\quad - \left\langle \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x)H(y - \bar{u}(x)), f(x, y) \right\rangle + \langle H(y - \bar{u}(x)), u \rangle \\ &= \langle \nabla V(x), f(x, \bar{u}(x)) \rangle + \\ &\quad \left\langle \left( \nabla V(x)G(x, y) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x)f(x, y) + u \right), H(y - \bar{u}(x)) \right\rangle. \end{aligned}$$

For the control law  $u$  defined by

$$u = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x)f(x, y) - \nabla V(x)G(x, y) - (y - \bar{u}(x)) \quad (8)$$

we get

$$\begin{aligned} \dot{W}(x, y) &= \langle \nabla V(x), f(x, \bar{u}(x)) \rangle - \\ &\quad - \langle (y - \bar{u}(x)), H(y - \bar{u}(x)) \rangle. \end{aligned}$$

Now, using the inequality (6) and from the properties of  $H$ , we deduce that

$$\dot{W}(x, y) \leq 0 \text{ for all } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Then the system (1) closed with  $u$  is stable at the origin. To establish the global asymptotic stability of the origin, we use La Salle's invariance principle ([5]). Let  $\Omega$  be the set defined by

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m / \dot{W}(x, y) = 0\}$$

Clearly we have

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ &\quad / \langle \nabla V(x), f(x, \bar{u}(x)) \rangle = 0 \text{ and } y = \bar{u}(x)\}. \end{aligned}$$

Let  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  be a complete trajectory of the closed-loop system (1)-(8) along which  $W$  is constant. It is easy to see that  $\gamma_1(t)$  is a complete solution of the system (5) along which  $V$  is constant. Now, and since (6) is globally asymptotically stable, we deduce that

$\gamma_1(t) \equiv 0$ . This implies, using the definition of  $\Omega$  and the fact that  $\bar{u}(0) = 0$ , that  $\gamma_2(t) \equiv 0$ . Finally, the closed-loop system (1)-(8) is globally asymptotically stable at the origin. This ends the proof of Theorem 1.

#### 4. Stabilization of the electropneumatic system

The goal of this section is to propose a stabilizing feedback for the system (4). Indeed, from the work presented in [9] and using the result of Theorem 1, a stabilizing feedback law will be proposed.

In the sequel, we use  $F$  to designate the vector field which defines system (3). Clearly  $F$  is continuous but not of class  $C^1$ . One can rewrite the system (4) as

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, x_s) \\ \dot{x}_s = u_s \end{cases} \quad (9)$$

where  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ,  $x_s = \begin{pmatrix} x_{s1} \\ x_{s2} \end{pmatrix}$  and  $u_s = \begin{pmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \end{pmatrix}$ .

In [9], the problem of feedback stabilization of system (3) around equilibrium  $(P_0, P_0, 0, y_0)$  is investigated. More precisely, it is shown that the control law defined by

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = - \left[ S \ln \left( \frac{x_1}{P_0} \right) + 2b(x_1(l_0 + x_4) - \theta x_2(l_0 - x_4)) \right]^{\frac{5}{3}} \\ \bar{u}_2 = - \left[ -S \ln \left( \frac{x_2}{P_0} \right) + 2b\theta(x_1(l_0 + x_4) - \theta x_2(l_0 - x_4)) \right]^{\frac{5}{3}} \end{cases} \quad (10)$$

stabilize asymptotically the equilibrium  $(P_0, P_0, 0, y_0)$  where  $b$  and  $\theta$  are suitable constants. Notice that the Lyapunov function used in [9] to prove asymptotic stability of the closed-loop system is given explicitly by

$$V(x) = E(x) + R(x)$$

with

$$E(x) = \frac{1}{2} Mx_3^2 + 2l_0SP_0 + S \left( x_1(l_0 + x_4) \ln \left( \frac{x_1}{P_0 e} \right) + x_2(l_0 - x_4) \ln \left( \frac{x_2}{P_0 e} \right) \right) \quad (11a)$$

and

$$R(x) = b(x_1(l_0 + x_4) - \theta x_2(l_0 - x_4))^2 \quad (11.b)$$

A simple reasoning shows that

$$F(x, x_s) - F(x, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\varphi(x_1, x_{s1})x_{s1} - \varphi(x_1, \bar{u}_1)\bar{u}_1}{l_0 + x_4} \\ \frac{\varphi(x_2, -\bar{u}_2)\bar{u}_2 - \varphi(x_2, -x_{s2})x_{s2}}{l_0 - x_4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

or

$$F(x, x_s) - F(x, \bar{u}) = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_{s1} - \bar{u}_1)^{\frac{1}{3}} \\ (x_{s2} - \bar{u}_2)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}$$

with

$$g_1 = \begin{cases} 0 & \text{if } x_{s1} = \bar{u}_1 \\ \frac{\varphi(x_1, x_{s1})x_{s1} - \varphi(x_1, \bar{u}_1)\bar{u}_1}{(l_0 + x_4)(x_{s1} - \bar{u}_1)^{\frac{1}{3}}} & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (12)$$

and

$$g_2 = \begin{cases} 0 & \text{if } x_{s2} = \bar{u}_2 \\ \frac{\varphi(x_2, -\bar{u}_2)\bar{u}_2 - \varphi(x_2, -x_{s2})x_{s2}}{(l_0 - x_4)(x_{s2} - \bar{u}_2)^{\frac{1}{3}}} & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (13)$$

Now, we prove that  $g_1$  and  $g_2$  are continuous. In fact, we give the proof only for  $g_1$  since the proof for  $g_2$  is similar.

Clearly for  $x_{s1} \neq \bar{u}_1$ ,  $g_1$  is well defined and is continuous. So we focus our attention on the case  $x_{s1} = \bar{u}_1$ .

We prove that, for  $\lambda \in \mathbb{R}$ , we have

$$\lim_{\substack{x_{s1}, \bar{u}_1 \rightarrow \lambda \\ x_{s1} = \bar{u}_1}} \frac{\varphi(x_1, x_{s1})x_{s1} - \varphi(x_1, \bar{u}_1)\bar{u}_1}{(x_{s1} - \bar{u}_1)^{\frac{1}{3}}} = 0 \quad (14)$$

We discuss two cases according to the value of  $\lambda$ .

First, suppose  $\lambda \neq 0$ . For  $|x_{s1} - \lambda|$  and  $|\bar{u}_1 - \lambda|$  small enough, we have  $\varphi(x_1, x_{s1}) = \varphi(x_1, \bar{u}_1)$ . Then we deduce

$$\frac{\varphi(x_1, x_{s1})x_{s1} - \varphi(x_1, \bar{u}_1)\bar{u}_1}{(x_{s1} - \bar{u}_1)^{\frac{1}{3}}} = \varphi(x_1, x_{s1}) \left( \frac{x_{s1} - \bar{u}_1}{\bar{u}_1} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (15)$$

This implies that (14) holds.

Second, suppose that  $\lambda=0$ . If  $x_{s1}\bar{u}_1 > 0$ , then we get (15). Now if  $x_{s1}\bar{u}_1 < 0$ , it is easily shown that

$$\left| \frac{\varphi(x_1, x_{s1})x_{s1} - \varphi(x_1, \bar{u}_1)\bar{u}_1}{(x_{s1} - \bar{u}_1)^{\frac{1}{3}}} \right| < \text{Sup}(\varphi^+(x_1), \varphi^-(x_1)) \times (|x_{s1}| + |\bar{u}_1|)^{\frac{2}{3}}$$

Finally and since

$$\lim_{\substack{x_{s1}, \bar{u}_1 \rightarrow 0 \\ x_{s1} \neq \bar{u}_1}} \text{Sup}(\varphi^+(x_1), \varphi^-(x_1)) (|x_{s1}| + |\bar{u}_1|)^{\frac{2}{3}} = 0$$

we deduce that  $g_1$  is continuous at  $(x_{s1}, \bar{u}_1) = (0, 0)$ . This ends the proof.

Now we are in position to give explicitly a stabilizing feedback for system (4). Indeed, using (8), a stabilizing feedback is given by

$$u = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x)F(x, x_s) - \nabla VG - (x_s - \bar{u}(x))$$

where  $\bar{u}$  is given by (10) and F, V and G are defined as

$$F(x, x_s) = \begin{bmatrix} \frac{x_1 x_3}{l_0 + x_4} + \frac{\varphi(x_1, x_{s1})}{l_0 + x_4} x_{s1} \\ \frac{x_2 x_3}{l_0 - x_4} - \frac{\varphi(x_2, -x_{s2})}{l_0 - x_4} x_{s2} \\ \frac{S}{M}(x_1 - x_2) \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V(x) = E(x) + R(x)$$

where E and R are given by (11.a)-(11.b),  $g_i (i=1,2)$  are defined respectively by (12) and (13). The Lyapunov function of the closed-loop system (9) is given by

$$W = E(x) + R(x) + \frac{3}{4} \left( (x_{s1} - \bar{u}_1)^{\frac{4}{3}} + (x_{s2} - \bar{u}_2)^{\frac{4}{3}} \right)$$

### 5. Numerical simulations

To illustrate the performances of the proposed control law (controller I), some numerical simulations have been carried out taking into account the dynamics of the servovalve (continuous line). These performances are compared with those of the control law (controller II) proposed in ([9]) in which the servovalve dynamics is neglected for the control law synthesis (dashed line).

Figure 3 presents the scheme for the numerical simulations in which the servovalve dynamics are approximated with a first order differential equation.

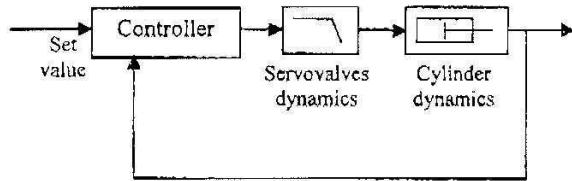


Fig. 3. Simulation diagram.

The proposed simulation results correspond to an ideal case (i.e. without modelling errors and measurement noises). The parameters of the system are given in table 1 and the initial conditions are given in table 2.

Table 1. System parameters.

System parameters	Value	Unit
M mass	20	Kg
S useful piston area	$3.768 \cdot 10^{-2}$	$m^2$
$l_0$ half cylinder length	0.4	m
$P_1$ exhaust pressure	$10^5$	Pa
$P_2$ supply pressure	$10^5$	Pa

Table 2. Simulation parameters.

Initial conditions	Value	Unit
$x_4^0$ position	0.33	m
$x_3^0$ velocity	0	$m \cdot s^{-1}$
$x_1^0 = x_2^0$ pressures	$5 \cdot 10^5$	Pa

Different values of the servovalve cut-off  $\omega_{sv}$  frequency have been considered. Notice that the natural frequency of the piston is  $\omega_0 = 21.7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

The following results concern the time response of the piston position  $x_4$  :

Table 3. Time responses performances.

	$\omega_{sv}$ [rd.s <sup>-1</sup> ]	217	21.7	2.17
Controller I	$t_s$ [s]	0.48	0.48	0.48
	$t_r$ [s]	0.29	0.29	0.29
	$M_o$ [%]	0.19	0.19	0.19
Controller II	$t_s$ [s]	0.40	0.76	1.50
	$t_r$ [s]	0.25	0.26	0.37
	$M_o$ [%]	0.27	4.73	30.00

with:

$t_s$  : settling time (2%);

$t_r$  : rise time;

$M_o$  : maximum overshoot.

First, one can see that the performances of our controller remain identical for all cut-off frequencies  $\omega_{sv}$  i.e. our controller is insensitive to the speed of the servovalve (see Table 3 and Fig. 4-6). In addition, the performances of the proposed controller are very satisfactory in comparison with the control law proposed in ([9]) associated with high speed servovalve (Fig. 4).

Second, the controller II is very sensitive to the cut-off frequencies of the servovalve. In fact, the performances of this control law are significantly deteriorated for low speed servovalve (see Fig. 6). Indeed, one can see that in this case the settling time and the maximum overshoot increase significantly and the time responses of all state variables have oscillatory behaviour.

### 6. Conclusion

We have presented a new result on feedback stabilization by adding an integrator. Afterwards, we have shown how to apply this result to a feedback stabilization of an electropneumatic system using a model which takes into account the dynamics of the servovalve. Simulation results show the effectiveness of the proposed control law in comparison with those given in ([9]).

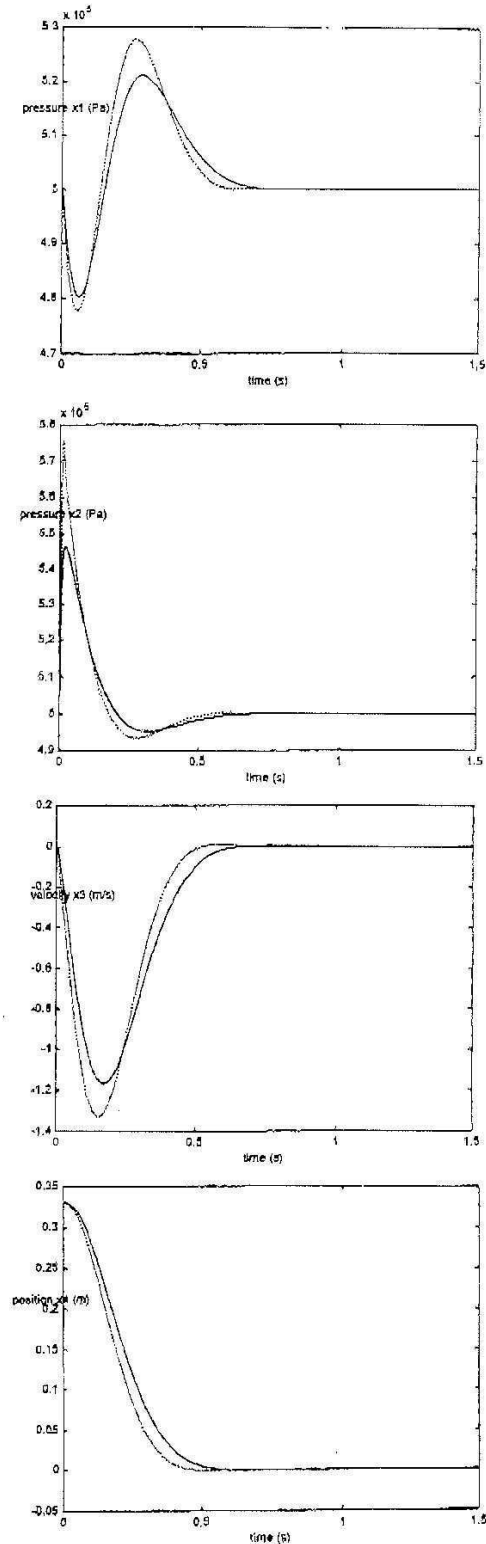


Fig. 4. Time response for  $\omega_{sv} = 217 \text{ rd.s}^{-1}$ .



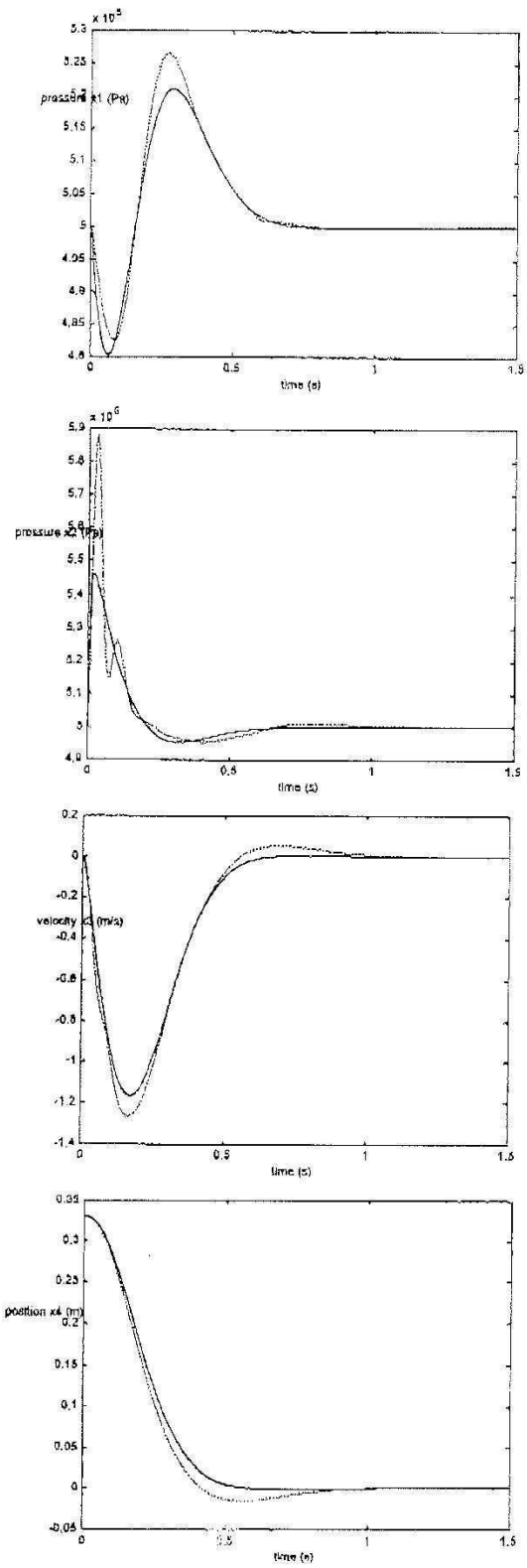


Fig. 5. Time response for  $\omega_{sv} = 21.7 \text{ rd.s}^{-1}$ .

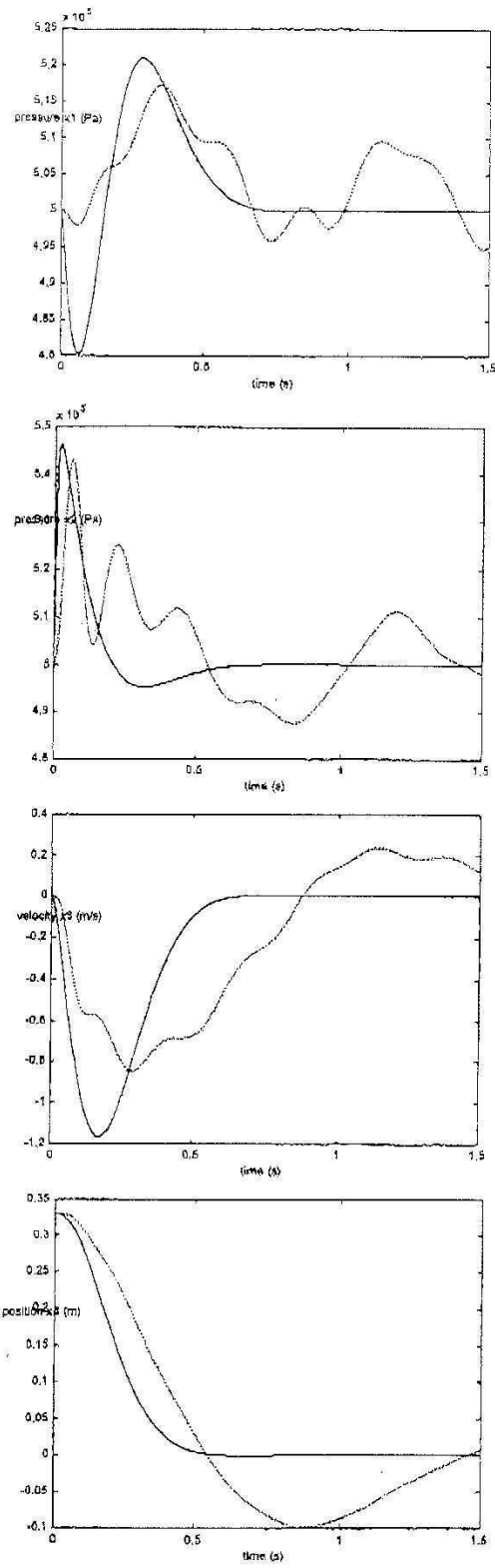


Fig. 6. Time response for  $\omega_{sv} = 2.17 \text{ rd.s}^{-1}$ .

Research is in progress to investigate the problem of feedback stabilization of electropneumatic system where the dynamics of the servovalve is approximated by a second order differential equation.

## REFERENCES

1. C.I. Byrnes, A. Isidori, "New results and examples in nonlinear feedback stabilization", *Syst. Contr. Letters*, Vol. 12, 1989, pp. 437-442.
2. J.-M. Coron, L. Praly, "Adding an integrator for the stabilization problem", *Syst. Contr. Letters*, Vol. 17, 1991, pp. 89-104.
3. A. Iggidr, G. Sallet, "Nonlinear stabilization by adding an integrator", *Kybernetika*, Vol. 30, N°5, 1994, pp. 499-506.
4. P.V. Kokotovic, H. Sussmann, "A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems", *Syst. Contr. Letters*, Vol. 13, 1989, pp. 125-133.
5. J.P. La Salle, S. Lefschetz, "Stability by Liapunov's direct method with applications", *Academic Press*, New York, 1961.
6. R. Outbib, G. Jghima, "Comments on the stabilization of nonlinear systems by adding an integrator", *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 41, N°12, 1998, pp. 1804-1807.
7. R. Outbib, G. Sallet, "A reduction principle for the stabilization of nonlinear systems", *Kybernetika*, Vol. 34, N°5, 1994, pp. 595-607.
8. R. Outbib, W. Aggoune, "Feedback stabilization of continuous systems by adding an integrator", *Int. J. Appl. Math. and Comp. Sci.*, vol. 9, n°4, 1999, pp. 71-88.
9. R. Outbib, E. Richard, "State feedback stabilization of an electropneumatic system", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 122, 2000, pp. 410-415.
10. E. Richard, S. Scavarda, "Découplage nonlinéaire Pression/position d'un axe électropneumatique", *API-AFCET Automatique*, 26, N°1, 1992, pp. 25-34.
11. E. Richer, Y. Hurmuzlu, "A high performance pneumatic force actuator system : Part I & II - Nonlinear mathematical model", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 2000, pp. 416-434.
12. S. Scavarda, S. Kellel, E. Richard, "Linearized model for an electropneumatic cylinder servovalve system", *3rd Int. Conf. On Advanced Robotics ICAR'87*, Versailles, France.
13. D. Thomasset, E. Richard, S. Scavarda, X.F. Lin, S. Sesmat, A. Bouhal, "Control of an electropneumatic servo-drive : a state affine or sliding approach", *IFAC World Congress*, Sydney, Australia, 1993.

Received January 29, 2004

Prof. Rachid Outbib

Université de Technologie de Belfort-Montbéliard  
Laboratoire d'Electronique, Electrotechnique et Systèmes  
Rue Thierry Mieg  
F-90 010 Belfort, France

Dr. H. Rafaralahy

Dr. M. Taфраouti

CRAN, UMR 7039  
Université Henri Poincaré - Nancy I  
IUT Henri Poincaré de Longwy  
186, rue de Lorraine  
F-54400 Cosnes-et-Romain, France



# Bibliographie

- [AL97] Y. Altıntaş and A. J. Lane. Design of an electro-hydraulic cnc press brake. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 37 :45–59, 1997.
- [AL99] A.G. Alleyne and R. Liu. On the limitations of force tracking control of hydraulic servosystems. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 121 :184–190, 1999.
- [AL00] A.G. Alleyne and R. Liu. A simplified approach to force control for electro-hydraulic systems. *Control Engineering Practice*, 8 :1347–1356, 2000.
- [All96] A. Alleyne. Nonlinear force control of an electro-hydraulic actuator. In *Japan-USA Symposium on Flexible Automation*, volume 1, pages 193–200, Boston, USA, 1996.
- [And88] W.R. Anderson. *Controlling Electrohydraulic Systems*. Marcel Dekker, 1988.
- [Beh95] C. Behmenburg. *Zur adaptiven Fuzzy-Regelung technischer Systeme*, Diss. University Duisburg. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 8 Nr. 485, VDI-Verlag, Düsseldorf, Germany, 1995.
- [Ber97] M. Berger. *Zur strukturellen Bewertung und automatischen Reglersynthese von Fuzzy-Systemem*, Diss. University Duisburg. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 8 Nr.679, VDI-Verlag, Düsseldorf, Germany, 1997.
- [BI89] C.I. Byrnes and A. Isidori. New results and examples in nonlinear feedback stabilization. *Systems & Control Letters*, 12 :437–442, 1989.
- [BIW91] C.I. Byrnes, A. Isidori, and J.C. Willems. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 36 :1228–1240, 1991.
- [BL96] J.E. Bobrow and K. Lum. Adaptive, high bandwidth control of a hydraulic actuator. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 118 :714–720, 1996.
- [Boe95] C. Boes. *Hydraulische Achsantriebe im digitalen Regelkreis*, Diss. Technical University of Aachen, Germany, 1995.

- [BRS66] J.F. Blackburn, G. Reethof, and J.L. Shearer. *Mécanismes Et Servomécanismes A Fluide Sous Pression*. Tome 1, Paris, 1966.
- [BSG92] R. Burton, C. Sargent, and G.Schoenau. an artificial neural network to direct a hydraulic circuit. In *Proc. 4<sup>th</sup> International Conference Fluid Power*, Chicago, USA, 1992.
- [CDWD02] J. Chen, W.E. Dixon, J.R. Wagner, and D.M. Dawson. Exponential tracking control of a hydraulic proportional directional valve and cylinder via integrator backstepping. In *ASME International Mechanical Engineering Congress and Expo*, pages 1–12, New Orleans, Louisiana, USA, 2002.
- [CP91] J.-M. Coron and L. Praly. Adding an integrator for the stabilization problem. *Systems & Control Letters*, 17 :89–104, 1991.
- [CW92] T.-L. Chern and Y.-C. Wu. An optimal variable structure control with integral compensation for electrohydraulic position servo control systems. *IEEE Trans. Ind. Elect.*, 5 :460–463, 1992.
- [DBM01] B. Daachi, A. Benallegue, and N.K. M’Sirdi. A stable neural adaptive force controller for a hydraulic actuator. In *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 4, pages 3465–3470, 2001.
- [Det99] E. Deticek. An intelligent position control of electrohydraulic drive using hybrid fuzzy control structure. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, volume 3, pages 1008–1013, 1999.
- [Fai70] J. Faisandier. *Les mécanismes hydrauliques et électrohydrauliques*. Dunod, Paris, 1970.
- [Fai99] J. Faisandier. *Mécanismes hydrauliques et pneumatiques*. Collection : Technique et ingénierie, série mécanique. Paris, 8 edition, 1999.
- [FdAQ02] J.A. Ferreira, F.G. de Almeida, and M.R. Quintas. Semi-empirical model for a hydraulic servo-solenoid valve. In *Proceedings of the I MECH E Part I Journal of Systems & Control Engineering*, volume 216, pages 237–248, 2002.
- [FK96] R.A. Freeman and P.V. Kokotovic. *Robust Nonlinear Control Design : State-Space and Lyapunov Techniques*. Basel, 1996.
- [GG01] G.C. Goodwin, S.F. Graebe, and M.E. Salgado. *Control System Design*. Prentice Hall, 2001.
- [GS04] D. Garagić and K. Srinivasan. Application of nonlinear adaptive control techniques to an electrohydraulic velocity servomechanism. *IEEE Trans. Contr. Syst. Techn.*, 12 :303–314, 2004.

- 
- [Gui92] M. Guillon. *Commandes et asservissement Hydrauliques et électrohydrauliques*. Lavoisier, Tec & Doc, Paris, 1992.
- [Hau80] M.L.J. Hautus.  $(A, B)$ -invariant and stabilizability subspaces, a frequency domain description. *Automatica*, 16 :703–707, 1980.
- [HL94] C.L. Hwang and C.H. Lan. The position control of electrohydraulic servomechanism via a novel variable structure control. *J. of Engineering Mathematics*, 4 :369–391, 1994.
- [HPL94] H. Hahn, A. Piepenbrink, and K.-D. Leimbach. Input/output linearization control of an electro servo-hydraulic actuator. In *Proceedings of the Third IEEE Conference on Control Applications*, volume 2, pages 995–1000, 1994.
- [HSUU04] A. Halanay, C.A. Safta, I. Ursu, and F. Ursu. Stability of equilibria in a four-dimensional nonlinear model of a hydraulic servomechanism. *J. of Engineering Mathematics*, 49 :391–405, 2004.
- [HW95] C.H. Huang and Y.T. Wang. Self-optimization adaptive velocity control of asymmetric hydraulic actuator. *Int. J. Adaptive Contr. Signal Processing*, 9 :271283, 1995.
- [IS94] A. Iggidr and G. Sallet. Nonlinear stabilization by adding integrators. *Kybernetika*, 30 :499–506, 1994.
- [JK03] M. Jelali and A. Kroll. *Hydraulic Servo-systems : Modelling, Identification and Control*. Advances in Industrial Control. London, 2003.
- [JL92] Y. Jen and C. Lee. Robust speed control of a pump-controller motor system. *IEEE Proceedings Control Theory and Applications*, 139 :503–510, 1992.
- [Jou98] R. Joulié. *Mécanique des Fluides Appliquée*. Paris, 1998.
- [JQ78] V. Jurdjevic and J.P. Quinn. Controllability and stability. *Journal of Differential Equations*, 28 :381–389, 1978.
- [KCL94] A. Kotzev, D.B. Cherkas, and P.D. Lawrence. Performance of generalized predictive control with on-line model order determination for a hydraulic robotic manipulator. *Robotics*, 13 :55–64, 1994.
- [KE02] Omer Keles and Yucel Ercan. Theoretical and experimental investigation of a pulse-width modulated digital hydraulic position control system. *Control Engineering Practice*, 10 :645–654, 2002.
- [KJ98] F. Khorrami and S. Jain. Drive flexibility and friction in control of hydraulic actuators : a robust adaptive nonlinear control design. In *Proc. Conf. Contr. & Applications*, volume 2, pages 1409–1413, Trieste, Italy, 1998.

- [KK04] A. Kugi and W. Kemmetmüller. New energy-based nonlinear controller for hydraulic piston actuators. *European J. Contr.*, 10 :163–173, 2004.
- [KKL91] A. Köchemann, J. Konertz, and H. Lausch. Regelung elektrohydraulischer antriebe unter berücksichtigung industrieller randbedingungen. *Automatisierungstechnik*, 39 :187–210, 1991.
- [KL02] Kailash Krishnaswamy and Perry Y. Li. On using unstable electrohydraulic valves for control. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 124 :183–190, 2002.
- [KS89] P.V. Kokotovic and H.J. Sussmann. A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 13 :125–133, 1989.
- [KS03] M. Karpenko and N. Sepehri. Robust position control of an electrohydraulic actuator with a faulty actuator piston seal. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 125 :413–423, 2003.
- [KT00] D.H. Kim and T.C. Tsao. A linearized electrohydraulic servovalve model for valve dynamics sensitivity analysis and control system design. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 122 :179–187, 2000.
- [KTC84] M.M. Kulkarni, D.B. Trivedi, and J. Chandrasekhar. an adaptive control of an electrohydraulic position control system. In *Proc. IEEE American Contr. Conf.*, pages 443–448, 1984.
- [Leb86] M. Lebrun. *Contribution à une aide à l'analyse dynamique et à la conception de système électrohydraulique*, Thèse d'état, Université C. Bernard, Lyon, 1986.
- [Li00] P.Y. Li. Towards safe and human friendly hydraulics : the passive valve. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 122 :402–409, 2000.
- [LK97] Jung-Shan Lin and I. Kanellakopoulos. Nonlinear design of active suspensions. *IEEE Contr. Syst. Magazine*, 17 :45–59, 1997.
- [LL61] J.P. LaSalle and S. Lefschetz. *Stability by lyapunov's direct method with applications*. Academic Press, New York, 1961.
- [LL90] K.-I. Lee and D.-K. Lee. Tracking control of a single-rod hydraulic cylinder using sliding mode. pages 865–868, Tokyo, Japan, 1990.
- [LM95] L. Laval and N.K. M'Sirdi. Modelling, identification and robust force control of a hydraulic actuator using  $H_\infty$  approach. In *Proc. IMACS Symp. on Syst. Analysis and Simu.*, Berlin, 1995.
- [LMC96] L. Laval, N.K. M'Sirdi, and J.-C. Cadiou.  $H_\infty$ -force control of a hydraulic servo-actuator with environmental uncertainties. In *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, pages 1566–1571, 1996.

- 
- [LN02] P.Y. Li and R.F. Ngwompo. Passification of electrohydraulic valves using bond graphs. In *IFAC 15<sup>th</sup> Triennial World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.
- [LT02] S.J. Lee and T.C. Tsao. Nonlinear backstepping control of an electrohydraulic material testing system. In *Proc. IEEE American Contr. Conf.*, volume 6, pages 4825–4830, Anchorage, Alaska, USA, 2002.
- [LT04] S.J. Lee and T.C. Tsao. Repetitive learning of backstepping controlled nonlinear electrohydraulic material testing system. *Control Engineering Practice*, 12 :1393–1408, 2004.
- [Man00] B. Manhartsgruber. Application of singular perturbation theory to hydraulic servo drives - system analysis and control design. In *Proc. 1<sup>st</sup> Fluid Power Net International*, pages 339–352, Hamburg, Germany, 2000.
- [Mar93] J.C. Maré. *Contribution à la modélisation, la simulation, l'identification et la commande d'actionneurs électrohydraulique*, Thèse d'état es-sciences, Institut National des Sciences Appliquées, Lyon, 1993.
- [McC85] N.H. McClamroch. Displacement control of flexible structures using electrohydraulic servo-actuators. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 107 :34–39, 1985.
- [Mer67] H.E. Merritt. *Hydraulic control systems*. John Wiley & Sons, New York, 1967.
- [MLM00] A. Mokhtari, L. Laval, and N.K. M'Sirdi. Commande en force explicite d'un système hydraulique par l'approche  $GH_\infty$  polynomiale. In *Conférence internationale francophone d'automatique (CIFA)*, Lille, 2000.
- [MM80] D. McCloy and H.R. Martin. *Control of fluid power : analysis and design*. Ellis Horwood Limited, Chichester, U.K., 1980.
- [MR01] F. Mazenc and E. Richard. Stabilization of hydraulic systems using a passivity property. *Syst. & Contr. Letters*, 44 :111–117, 2001.
- [Mus01] R. Musset. *Contribution à la Modélisation et à la Commande d'un Processus Electrohydraulique : Application à un Essieu Directionnel*, Thèse de Doctorat, Université Henri Poincaré - Nancy I, 2001.
- [NEW91a] R. Neumann, A. Engelke, and Moritz W. Digitale bahnregelung eines hydraulischen portalroboters. *Ölhydraulik und Pneumatik*, 35 :206–216, 1991.
- [NEW91b] R. Neumann, A. Engelke, and Moritz W. Robuster simultaner reglerbeobachterentwurf durch parameteroptimierung für einen hydraulischen portalroboter. *Automatisierungstechnik*, 39 :151–157, 1991.



- [NWS00] N. Niksefat, Q. Wu, and N. Sepehri. Stable control of an electro-hydraulic actuator during contact tasks : Theory and experiments. In *Proc. IEEE American Contr. Conf.*, volume 6, pages 4114–4118, 2000.
- [OA99] R. Outbib and W. Aggoune. Feedback stabilization of continuous systems by adding an integrator. *Int. J. Appl. Math. & Comp. Sci.*, 9 :871–881, 1999.
- [Oga90] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall International, Englewood Cliffs, NJ, second edition, 1990.
- [OJ96] R. Outbib and H. Jghima. Comments on the stabilization of nonlinear systems by adding an integrator. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 41 :1804–1807, 1996.
- [OR00] R. Outbib and E. Richard. State feedback stabilization of an electropneumatic system. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 122 :410–415, 2000.
- [ORT04] R. Outbib, H. Rafaralahy, and M. Taфраouti. Feedback control of an electro-pneumatic system. *Eletromotion*, 11 :174–181, 2004.
- [ORT05] R. Outbib, H. Rafaralahy, and M. Taфраouti. Stabilisation d’un actionneur électrohydraulique en considérant les dynamiques des distributeurs. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 39 :1025–1050, 2005.
- [OS92] R. Outbib and G. Sallet. Stabilizability of the angular velocity of a rigid body revisited. *Systems & Control Letters*, 18 :93–98, 1992.
- [OS98] R. Outbib and G. Sallet. A reduction principle for global stabilization of nonlinear systems. *Kybernetika*, 34 :595–607, 1998.
- [PN00] J. Polzer and D. Nissing. Trajectory adaptation for flatness based tracking and vibration control on a flexible robot. In *UKACC Int. Confer. Control*, pages 241–248, Cambridge, UK, 2000.
- [PSLO02] V. Pommier, J. Sabatier, P. Lanusse, and A. Oustaloup. Crone control of a nonlinear hydraulic actuator. *Control Engineering Practice*, 10 :391–402, 2002.
- [PT70] B. Porter and M.L. Tatnall. Performance characteristics of an adaptive hydraulic servo-mechanism. *Int. J. Contr.*, 11 :741–757, 1970.
- [PV96] A.R. Plummer and N.D. Vaughan. Robust adaptive control for hydraulic servosystems. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 118 :237–244, 1996.
- [RI95] L. Del Re and A. Isidori. Performance enhancement of nonlinear drives by feedback linearization of linear-bilinear cascade models. *IEEE Trans. Contr. Syst. Techn.*, 3 :299–308, 1995.

- 
- [RO95] E. Richard and R. Outbib. Feedback stabilization of an electrohydraulic system. In *Proc. European Contr. Conf.*, pages 330–335, Rome, Italy, 1995.
- [ROT97] E. Richard, R. Outbib, and D. Thomasset. Stabilisation d'un système électrohydraulique par retour d'état régulier. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 31 :1173–1195, 1997.
- [RQ99] M. Rodrigues-Quintas. *Contribution à la modélisation et à la commande robuste des systèmes électrohydrauliques*, Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées, Lyon, 1999.
- [SGLB05] Z. Shi, F. Gu, B. Lennox, and A.D. Ball. The development of an adaptive threshold for model-based fault detection of a nonlinear electrohydraulic system. *Control Engineering Practice*, 13 :1357–1367, 2005.
- [SS00] M.R. Sirouspour and S.E. Salcudean. On the nonlinear control of hydraulic servo-systems. In *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, pages 1276–1282, San Francisco, Ca, USA, 2000.
- [SU02] T. Sugiyama and K. Uchida. Gain-scheduled velocity and force controllers for the electro-hydraulic servosystem. In *Proc. IEEE American Contr. Conf.*, volume 6, pages 4433–4438, Anchorage, Alaska, USA, 2002.
- [TK03] H.G. Tanner and K.J. Kyriakopoulos. Backstepping for nonsmooth systems. *Automatica*, 39 :1259–1265, 2003.
- [TSL98] S. Tafazoli, C.W.de Silva, and P.D. Lawrence. Tracking control of an electrohydraulic manipulator in the presence of friction. *IEEE Trans. Contr. Syst. Techn.*, 6 :401–411, 1998.
- [UP02] I. Ursu and F. Popescu. Backstepping control synthesis for position and force nonlinear hydraulic servoactuators. In *10<sup>th</sup> International Conference on Applied and Industrial Mathematics*, volume 5, pages 16–21, Pitesti, Romania, 2002.
- [UPU04] I. Ursu, F. Popescu, and F. Ursu. Control synthesis methodology related to an advanced nonlinear electrohydraulic servo system. In *Proceedings of the Romanian Academy, Series A*, volume 5, pages 39–45, 2004.
- [VD95] G. Vossoughi and M. Donath. Dynamic feedback linearization for electrohydraulically actuated control systems. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 117 :468–477, 1995.
- [Vie80] T.J. Viersma. *Analysis, synthesis, and design of hydraulic servosystems and pipelines*. Elsevier, North-Holland, 1980.

- [Wan61] P.K.C. Wang. Mathematical models for time-domain design of electrohydraulic servomechanisms. *Trans. of the American Institute of Electrical Engineers. Part 1. Communication & Electronics*, 80 :252–260, 1961.
- [Wan63] P.K.C. Wang. Analytical design of electrohydraulic servomechanisms with near time-optimal responses. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 8 :15–27, 1963.
- [Wat89] J. Watton. *Fluid Power Systems*. Prentice Hall International, New York, 1989.
- [Wie81] T Von Wierschem. Lageregelung schwach gedämpfter antriebe durch zustandsrückführung. *Regelungstechnik*, 29 :11–19, 1981.
- [WSZ98] G. Wu, N. Sepehri, and K. Ziaei. Design of a hydraulic force control system using a generalised predictive control algorithm. In *IEEE Proceedings Control Theory and Applications*, volume 145, pages 428–436, 1998.
- [YBC98] Bin Yao, Fanping Bu, and G.T.-C. Chiu. Nonlinear adaptive robust control of electro-hydraulic servo systems with discontinuous projections. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, volume 2, pages 2265–2270, 1998.
- [YBRC99] B. Yao, F. Bu, J. Reedy, and G.T.-C. Chiu. Adaptive robust motion control of single-rod hydraulic actuators : theory and experiments. In *Proc. IEEE American Contr. Conf.*, volume 2, pages 759–763, 1999.
- [YBRC00] B. Yao, F. Bu, J. Reedy, and G.T.-C. Chiu. Adaptive robust motion control of single-rod hydraulic actuators : theory and experiments. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 5 :79–91, 2000.
- [ZDG95] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1995.
- [ZN42] J. Ziegler and N.B. Nichols. Optimum settings for automatic controllers. *Trans. of the ASME*, 64 :759–768, 1942.
- [ZS00] K. Ziaei and N. Sepehri. Modeling and identification of electrohydraulic servos. *Mechatronics*, 10 :761–772, 2000.
- [ZV95] T. Zhaoa and T. Virvalob. Development of fuzzy state controller and its application to a hydraulic position servo. *Fuzzy Sets and Systems*, 70 :213–221, 1995.

## Résumé

Dans ce mémoire nous avons donné un nouveau résultat sur la stabilisation des systèmes non linéaires qui sont seulement continus, il s'agit des systèmes définis par un champ de vecteur qui n'est pas dérivable. L'application de ce résultat, nous l'avons effectué pour la stabilisation des systèmes électrohydrauliques en tenant compte de la dynamique du ou des distributeurs utilisés, ceci sans effectuer aucune linéarisation des modèles représentants. En effet, nous avons traité le cas d'un système électrohydraulique commandé par un et deux distributeurs, ceci en tenant compte de leur dynamique. Les simulations effectuées montrent que les résultats obtenues sont très satisfaisants.

Afin d'effectuer une comparaison nous avons étudié différentes lois de commande linéaires, notamment, la commande par retour d'état ainsi la commande par retour de sortie ou encore par un correcteur PID. Ce type de commande s'avère donner des bons résultats. En effet, elles ont permis de répondre à plusieurs critères ; par exemple le temps de réponse, dépassement, etc. Et elles ont conduit à des bons résultats de simulation. Néanmoins, elles présentent quelques inconvénients. Par exemple une linéarisation autour d'un point de fonctionnement révèle un caractère local, et donc cette technique devient inappropriée si l'on cherche à opérer sur une plage de fonctionnement.

Ces travaux pourraient aussi s'appliquer à la stabilisation des actionneurs électropneumatiques.

*Mots clés : Systèmes non linéaires, Systèmes électrohydrauliques, Stabilisation par retour d'état, Ajout d'intégrateur, Fonction de Lyapunov.*

## Abstract

In this memory we gave a new result on the stabilization of the nonlinear systems which are only continuous, it acts of the systems defined by a field of vector which is not derivable. The application of this result, we carried out it for the stabilization of the electrohydraulic systems by taking account of the dynamics of the servovalves used, this without carrying out any linearization of the models representatives. Indeed, we treated the case of an electrohydraulic system ordered by one and two servovalves, this by taking account of their dynamics. Simulations carried out show that the results obtained are very satisfactory.

In order to carry out a comparison we studied various linear controls, in particular, the control by feedback thus the control by return of exit or by a corrector PID. This type of order proves to give good results. Indeed, they made it possible to answer several criteria ; for example the response time, going beyond, etc And they led to good results of simulation. Nevertheless, they present some disadvantages. For example a linearization around a point of equilibrium reveals a local character, and thus this technique becomes inappropriate if one seeks to operate on an operating range.

This work could also apply to the stabilization of the electropneumatic actuators.

**Key words** : *Electrohydraulic systems, Nonlinear Systems, Feedback stabilization, Adding of integrator, Function of Lyapunov.*