



**HAL**  
open science

# Méthode éléments finis étendus en espace et en temps : application à la propagation dynamique des fissures

Julien Réthoré

► **To cite this version:**

Julien Réthoré. Méthode éléments finis étendus en espace et en temps : application à la propagation dynamique des fissures. Mécanique [physics.med-ph]. INSA de Lyon, 2005. Français. NNT : . tel-00121172

**HAL Id: tel-00121172**

**<https://theses.hal.science/tel-00121172>**

Submitted on 19 Dec 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

## METHODE ELEMENTS FINIS ETENDUS EN ESPACE ET EN TEMPS : APPLICATION A LA PROPAGATION DYNAMIQUE DES FISSURES

Présentée devant

**l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

pour obtenir

**le GRADE DE DOCTEUR**

Ecole doctorale :

**Mécanique, Energétique, Génie civil, Acoustique**

Spécialité :

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

par

**Julien RÉTHORÉ**

**Agrégé de Mécanique**

Thèse soutenue le 10 juin 2005 devant la Commission d'examen

### Jury

GUYADER JEAN LOUIS	Professeur	Président
AUBRY DENIS	Professeur	Rapporteur
BUI HUI DUONG	Professeur	Rapporteur
BELYTSCHKO TED	Professeur	Examineur
DELETOMBE ERIC	Ingénieur	Examineur
COMBESURE ALAIN	Professeur	Directeur de thèse
GRAVOUIL ANTHONY	Maître de conference	Invité



Au terme de trois années de travail, il s'agit de n'oublier personne à l'heure des remerciements.

Mes premières pensées vont à mes encadrants Alain Combescure et Anthony Gravouil. Je leur suis infiniment reconnaissant de m'avoir permis de travailler durant trois années dans des conditions idéales. Ils ont su m'accorder la liberté dont j'avais besoin pour finaliser nos réflexions. Je les remercie aussi de m'avoir proposé un sujet aussi passionnant. Mes remerciements vont aussi à Eric Deletombe de l'unité de recherche RCS du centre de Lille de l'ONERA. Merci à lui, pour son soutien et sa ténacité auprès des instances administratives. Je souhaite également exprimer toute ma reconnaissance aux autres membres du jury : Jean Louis Guyader pour avoir accepté de présider ce jury, Ted Belytschko pour l'honneur qu'il nous fait de le recevoir pour cette soutenance. Hui Dong Bui et Denis Aubry ont accepté la fastidieuse mission de relire mon mémoire, merci à eux pour leur conseils précieux.

J'ai partagé le quotidien d'un certain nombre de personnes au LaMCoS et à l'ONERA. Je voudrais leur dire ici le plaisir que j'ai eu à partager les grandes joies et les petites misères de tout un chacun tentant de trouver quelque chose. Il est difficile de dresser une liste exhaustive, que ceux que je vais injustement oublier trouve l'expression de ma reconnaissance. Au LaMCoS : Stéphane, Thomas, Tomtom, Arnaud, Pauline, Viviane, David, Johann, Fabrice, Bertrand, Benoît, Tong, Michel, Fabrice, Héléne, Chouchou, Emanuelle, Rachelle, Sébastien...A l'ONERA : Anne Sophie, Jacky, Jean Michel, Alain, Gérard, Roland, David, Bertrand, Jean François...

A ma grande famille éparpillée aux quatre coins de l'hexagone (!), je suis fier et ému de dédier ce mémoire. A Fabienne et Stéphane mes parents, je suis infiniment reconnaissant de m'avoir toujours encouragé et poussé dans tous les domaines quelles que fussent les obstacles à franchir. Merci à eux pour cette enfance à la fois si riche et si simple que nous avons vécue avec mes soeurs Sabine et Stéphanie. Mes pensées vont à mes grand parents Jeanine, Guy, Anne Marie et André que je n'ai pas connu. A toutes ces tantes, tous ces oncles et tous ces cousins plus ou moins éloignés, plus ou moins artistes, plus ou moins sportifs, plus ou moins scientifiques, je voudrais dire toute la joie que j'ai à leur dédier ce travail. Et, enfin et surtout, à Marianne, ma princesse ...



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Liste des Figures</b>	<b>v</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	2
1.2 Théorie de la dynamique de la rupture fragile . . . . .	4
1.2.1 Problème de référence . . . . .	4
1.2.2 Analyse asymptotique . . . . .	6
1.2.3 Approche énergétique . . . . .	8
1.2.4 Critères de propagation . . . . .	11
1.3 Méthodes de simulation numérique : état de l'art . . . . .	12
1.3.1 Méthode des Eléments Finis . . . . .	12
1.3.2 Méthode des Eléments de frontière . . . . .	13
1.3.3 Méthode sans maillage . . . . .	13
1.3.4 Méthode utilisant une partition de l'unité . . . . .	13
1.3.5 Remarque sur la stabilité lors de changements de discrétisation . . . . .	14
<b>2 Modélisation de structures fissurées sous sollicitations dynamiques</b>	<b>15</b>
2.1 Introduction . . . . .	16
2.2 Problème test 1D . . . . .	16
2.3 Problème en espace . . . . .	17
2.3.1 Méthode de partition de l'unité . . . . .	17
2.3.2 Prise en compte de discontinuités en espace . . . . .	18
2.3.3 Modélisation de singularités dues à la présence de fissures . . . . .	19
2.4 Problème en temps . . . . .	20
2.4.1 Méthode de Newmark . . . . .	20
2.4.2 Méthode de Galerkin discontinue en temps . . . . .	28
<b>3 Calcul numérique des paramètres de fissuration</b>	<b>29</b>
3.1 Introduction . . . . .	30
3.2 Lagrangien d'interaction . . . . .	30
3.3 Intégrale indépendante du contour . . . . .	32
3.4 Lien avec les facteurs d'intensité des contraintes . . . . .	34
3.5 Intégrale d'interaction . . . . .	35

3.6	Calcul numérique des facteurs d'intensité des contraintes . . . . .	37
3.7	Exemples . . . . .	40
3.7.1	Flexion 3 points . . . . .	40
3.7.2	Fissure dans une plaque semi-infinie sous sollicitation mixte . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Propagation dynamique de surfaces de discontinuité</b>	<b>45</b>
4.1	Problème de référence discrétisé . . . . .	46
4.2	Calculs dynamiques à discrétisation variable . . . . .	47
4.2.1	Etude de stabilité . . . . .	47
4.2.2	Bilan d'énergie discrétisée . . . . .	48
4.2.3	Méthode de rééquilibrage . . . . .	49
4.2.4	Utilisation dans le cadre des Eléments Finis . . . . .	51
4.3	Utilisation dans le cadre des Eléments Finis Etendus . . . . .	59
4.3.1	Stratégie d'enrichissement . . . . .	59
4.3.2	Exemples . . . . .	60
4.4	Implémentation . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Prise en compte de discontinuités en temps</b>	<b>73</b>
5.1	Introduction . . . . .	74
5.2	Les premières approches Eléments Finis en temps . . . . .	74
5.2.1	L'approche de Zienkiewicz [ZIE 77] . . . . .	74
5.2.2	L'approche de Wood [WOO 84] . . . . .	75
5.3	Formulation en vitesse du problème en temps . . . . .	76
5.4	Méthode des Eléments Finis Etendus en temps . . . . .	78
5.4.1	Utilisation d'un enrichissement discontinu . . . . .	78
5.4.2	Une autre approche des méthodes de Galerkin discontinues . . . . .	81
5.4.3	Stabilité et précision . . . . .	82
5.4.4	Bilan d'énergie de la formulation discrétisée . . . . .	83
5.5	Problème test 1D . . . . .	88
5.6	Eléments Finis Etendus en espace et en temps . . . . .	91
5.6.1	Fissure semi-infinie dans milieu infini . . . . .	91
5.6.2	Propagation et arrêt d'une fissure en mode-mixte . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Mesure de facteurs d'intensité des contraintes</b>	<b>99</b>
6.1	Introduction . . . . .	100
6.2	Mesure de champ de déplacement par corrélation d'images . . . . .	100
6.3	Utilisation d'intégrales d'interaction . . . . .	102
6.4	Essais sur éprouvette CT . . . . .	103
6.4.1	Mesures des facteurs d'intensité des contraintes . . . . .	104
6.4.2	A propos des hypothèses de plasticité confinée . . . . .	106
6.5	Essais en mode mixte . . . . .	108
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>113</b>
	<b>Annexe A</b>	<b>117</b>

<b>Annexe B</b>	<b>121</b>
<b>Annexe C</b>	<b>129</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>131</b>



# Liste des Figures

1.1	Domaine considéré $\Omega$ . . . . .	6
1.2	Notations . . . . .	9
2.1	Géométrie du problème test 1D . . . . .	16
2.2	Maillages pour le problème test 1D . . . . .	19
2.3	Disposition des degrés de liberté enrichis . . . . .	20
2.4	Problème test 1D par la méthode de Newmark . . . . .	27
3.1	Différents contours pour l'intégration de $\delta l^{int}$ en 2D . . . . .	32
3.2	Différents contours pour l'intégration de $I^{int}$ en 3D . . . . .	37
3.3	$J$ -domaine utilisé pour le calcul de l'intégrale d'interaction en 2D . . . . .	38
3.4	Champs d'extension virtuelle pour une fissure courbe . . . . .	39
3.5	$J$ -domaine et repère local en 3D . . . . .	40
3.6	Géométrie flexion trois points . . . . .	40
3.7	Différents domaines utilisés pour le calcul de $K_1$ . . . . .	41
3.8	Maillage et éléments sous découpés d'une poutre en flexion 3 points . . . . .	41
3.9	$\bar{K}_1$ calculé pour différentes tailles de domaine . . . . .	42
3.10	Fissure dans une plaque semi-infinie sous sollicitation mixte . . . . .	42
3.11	Solution $\bar{K}$ pour différentes densités de maillage . . . . .	43
3.12	Distribution des contraintes à $t = 3t_c$ . . . . .	44
4.1	Différentes étapes d'un calcul à discrétisation variable . . . . .	46
4.2	Géométrie DCB . . . . .	51
4.3	Procédure de remaillage utilisée dans CAST3M . . . . .	52
4.4	Comparaison des évolutions de longueur de fissure . . . . .	53
4.5	Bilan énergétique : (a) sans rééquilibrage, (b) avec rééquilibrage . . . . .	55
4.6	Comparaison du déséquilibre énergétique cumulé . . . . .	56
4.7	Comparaison de l'instabilité cumulée . . . . .	56
4.8	Comparaison des évolutions de longueur de fissure . . . . .	57
4.9	Maillage pour la géométrie DCB . . . . .	57
4.10	Comparaison des évolutions de longueur de fissure . . . . .	58
4.11	Stratégie d'enrichissement en dynamique . . . . .	60
4.12	Fissure semi-infinie dans un milieu infini . . . . .	61
4.13	Solutions analytique et numérique $\bar{K}_1$ pour une fissure fixe ou mobile . . . . .	62
4.14	Solutions analytique et numérique $\bar{K}_1$ pour une fissure fixe puis mobile . . . . .	63
4.15	Déformées du front de fissure . . . . .	64

4.16	Evolution des contraintes de Von Mises . . . . .	65
4.17	Evolution de la quantité cumulée d'énergie introduite . . . . .	66
4.18	Géométrie et chargement . . . . .	67
4.19	Fissure finale . . . . .	67
4.20	Fissure pour $t = 25\mu s$ , $t = 50\mu s$ , $t = 75\mu s$ et $t = 100\mu s$ . . . . .	68
4.21	Evolution des contraintes de Von Mises . . . . .	69
5.1	Fonctions de forme dans $I_{n+1}$ . . . . .	78
5.2	Rayon spectral . . . . .	83
5.3	Facteur d'amortissement numérique . . . . .	84
5.4	Erreur relative de périodicité . . . . .	84
5.5	Erreur en norme $L_2$ . . . . .	85
5.6	Bilan énergétique de la formulation TX-FEM discrétisée . . . . .	87
5.7	Illustration des transferts d'énergie . . . . .	87
5.8	Problème test 1D par la méthode de Newmark et TX-FEM . . . . .	90
5.9	$\bar{K}_1$ numériques et analytique pour une fissure fixe puis mobile . . . . .	92
5.10	Géométrie et chargement pour une sollicitation en mode-mixte . . . . .	93
5.11	Maillage et géométrie initiale . . . . .	93
5.12	Evolution de l'abscisse du front $X_f$ pour un trou circulaire . . . . .	94
5.13	Trajet de la fissure à l'arrêt (trou circulaire) . . . . .	94
5.14	Fissure finale (trou circulaire) . . . . .	95
5.15	Evolution de l'abscisse du front $X_f$ pour un trou carré . . . . .	95
5.16	Fissure finale (trou carré) . . . . .	96
5.17	Norme du champ de déplacement (trou circulaire) . . . . .	98
6.1	Motif initial et motif final . . . . .	101
6.2	Domaine d'intégration utilisé pour calculer les $K_i$ . . . . .	102
6.3	Géométrie de l'éprouvette CT . . . . .	103
6.4	Grille de corrélation pour les mesures sur éprouvettes CT . . . . .	104
6.5	Comparaison des valeurs analytiques et expérimentales de $K_1$ . . . . .	105
6.6	Déplacement vertical normalisé par $\sqrt{r}$ . . . . .	107
6.7	Déplacement vertical et approximation en loi puissance . . . . .	107
6.8	Facteurs d'intensité des contraintes et angle d'initiation . . . . .	109
6.9	Déformation de Green-Lagrange pour l'essai en mode mixte . . . . .	111

# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1.2</b>	<b>Théorie de la dynamique de la rupture fragile</b>	<b>4</b>
1.2.1	Problème de référence	4
1.2.2	Analyse asymptotique	6
1.2.3	Approche énergétique	8
1.2.4	Critères de propagation	11
<b>1.3</b>	<b>Méthodes de simulation numérique : état de l'art</b>	<b>12</b>
1.3.1	Méthode des Eléments Finis	12
1.3.2	Méthode des Eléments de frontière	13
1.3.3	Méthode sans maillage	13
1.3.4	Méthode utilisant une partition de l'unité	13
1.3.5	Remarque sur la stabilité lors de changements de discrétisation	14

---

## 1.1 Introduction

Le développement de la mécanique de la rupture est assez récent (une quarantaine d'années environ), encore plus en ce qui concerne la dynamique de la rupture. Les motivations à l'origine de ce développement viennent du soucis dans de nombreux domaines industriels de prévoir le comportement des structures qu'ils conçoivent jusqu'à leur ruine. On fait généralement la distinction entre rupture fragile, rupture ductile et endommagement suivant le type de comportement du matériau étudié [ROS 86]. On s'intéressera, dans le cadre de cette thèse, uniquement à une rupture de type fragile [RAV 98]. Le cadre théorique est donc celui de la mécanique élastique linéaire de la rupture. Dans ce cadre théorique, on considère des matériaux au comportement élastique en autorisant la plasticité à se développer en pointe de fissure dans une zone de taille réduite devant les dimensions caractéristiques de la structure étudiée (hypothèse de Small Scale Yielding). Sous sollicitations statiques, le caractère menaçant d'une fissure pour l'intégrité d'une structure dépend du chargement appliqué et de la dimension de la fissure. Ce n'est pas le cas quand on se place dans le cas d'une sollicitation dynamique où une fissure présente les mêmes risques pour la structure quelle que soit sa taille. On voit alors l'importance de pouvoir, sinon maîtriser, au moins prévoir la propagation dynamique d'une fissure. Il apparaît alors nécessaire, comme dans de nombreux autres champs disciplinaires, de disposer de méthodes numériques fiables et robustes.

Dans le domaine de la mécanique de la rupture, comme dans beaucoup d'autres domaines de la simulation numérique, la méthode des Eléments Finis a été largement utilisée. Si l'utilisation de plus en plus fréquentes des outils de simulation numérique a conduit à améliorer cette méthode (pour traiter les problèmes présentant des non linéarités de comportement, géométriques ou de bord par exemple), un certain nombre de situations restent aujourd'hui difficilement accessibles aux Eléments Finis. C'est le cas des problèmes dans lesquels une discontinuité évolue au sein de la structure. Quel que soit le type de discontinuité (fissure, bande de cisaillement, interface entre deux matériaux, transition de phase, surface libre, interaction fluide structure . . .), une modélisation par la méthode des Eléments Finis nécessite une description explicite du support géométrique de cette discontinuité. Il est nécessaire que le maillage se conforme à cette géométrie ce qui pose des problèmes de pré-traitement lorsque qu'il s'agit de surface dont la topologie est complexe. Ces problèmes sont d'autant plus difficiles à appréhender si la géométrie des interfaces évolue au cours du temps. On a alors recours à des techniques de remaillage afin de prendre en compte les changements topologiques des supports des discontinuités. Pour des problèmes bidimensionnels, le remaillage est une opération qui peut être quasi-automatique, ce n'est pas le cas pour les problèmes tridimensionnels et le remaillage peut conduire à des coûts numériques importants. Lorsqu'il s'agit de problèmes où les champs qui s'appuient sur la discrétisation (noeuds, point de Gauss . . .) dépendent de l'histoire (problèmes transitoires, existence de phénomènes irréversibles. . .), il est nécessaire de procéder à des opérations de projection de ces champs d'une discrétisation à l'autre. Tout ceci, en plus de générer des coûts numériques pouvant être impor-

---

tants, posent des problèmes théoriques fondamentaux (vérification des équations de conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement, de la masse ). C'est pour ces raisons que de nombreuses méthodes ont été développées ces dernières années afin de se soustraire au problème de la description explicite des surfaces voulue par la méthode des Eléments Finis. Parmi ces nouvelles méthodes, celle qui nous intéresse ici est appelée méthode des Eléments Finis Etendus. Il s'agit d'une extension de la méthode des Eléments Finis qui exploite les propriétés de partition de l'unité des fonctions de forme Eléments Finis dans le but d'enrichir l'approximation. L'enrichissement utilisé est choisi de façon à pouvoir reproduire de manière quasi-exacte la solution du problème à traiter. Ainsi, les discontinuités sont prises en compte implicitement grâce à la base de fonctions d'interpolation étendue et le maillage n'a plus à se conformer aux surfaces physiques des discontinuités. De plus, l'évolution des interfaces est prise en compte en modifiant les fonctions d'interpolation enrichies sans avoir à modifier le maillage initial de la structure. Néanmoins, pour les problèmes non linéaires ou les problèmes dépendant du temps, des difficultés se posent en terme de choix de fonctions d'interpolation ou de stabilité des intégrateurs en temps. On s'intéressera dans cette thèse à un développement de la méthode des Eléments Finis Etendus pour les problèmes de mécanique élastique linéaire de la rupture dépendant du temps.

D'un point de vue théorique ou numérique, un problème de propagation dynamique de fissure peut être décomposé en trois phases. La première consiste à modéliser la présence de la fissure afin de capturer correctement la singularité des champs de déplacements et de contraintes due à la présence de cette fissure. Il faut aussi rendre compte du caractère dynamique du chargement et de la propagation des ondes dans la structure. La deuxième phase concerne la mise en place et l'estimation des paramètres caractéristiques de l'intensité de la sollicitation à laquelle est soumise la région entourant la pointe de la fissure. Ces paramètres permettent de décider si la fissure va se propager et si oui dans quelle direction et à quelle vitesse. La dernière phase est la propagation proprement dite. Il s'agit alors de rendre compte de la présence d'une discontinuité mobile. Cette décomposition du problème va guider la rédaction de ce mémoire dont le plan des trois premiers chapitres permet de décrire successivement les techniques existantes et les développements apportés concernant les différentes étapes à parcourir. Le premier chapitre concerne la modélisation de structures fissurées sous sollicitations dynamiques. On y décrit les bases de la méthode des Eléments Finis Etendus et les méthodes classiques d'intégration en temps des équations de la dynamique ainsi que leurs outils d'étude. Le support numérique des travaux présentés dans cette thèse étant la méthode des Eléments Finis Etendus, il est possible de développer des outils spécifiques prenant en compte les propriétés de cette technique. Le deuxième chapitre traite de la généralisation d'outils ayant fait l'objet de travaux antérieurs. Il s'agit ici de calculer les paramètres caractéristiques de la fissuration en utilisant au mieux les spécificités de la méthode des Eléments Finis Etendus dans le cas de fissures tridimensionnelles sous sollicitations dynamiques. Le troisième chapitre présente les développements effectués pour simuler la propagation d'une surface de discontinuité tout en garantissant la stabil-

ité du schéma d'intégration en temps et la conservation de l'énergie. Le problème est abordé dans un cadre tout à fait général et on présente des applications aux méthodes des Eléments Finis classiques et Etendus. Le quatrième chapitre présente des développements motivés par le constat fait dans les chapitres précédents sur la limitation des intégrateurs en temps classiques pour le traitement des phénomènes discontinus en temps. On y propose un formalisme unique pour la modélisation des problèmes de mécanique discontinus en espace et en temps.

Comme dans tous les domaines de la mécanique, la mise au point d'une méthode numérique n'a de sens que si la modélisation utilisée s'appuie sur des résultats expérimentaux. En dynamique de la rupture, les dispositifs à mettre en oeuvre pour une observation pertinente du phénomène sont complexes. Il existe de nombreux travaux mais le manque de fiabilité des méthodes numériques et la multiplicité des configurations possibles font qu'aujourd'hui encore, de nombreuses interrogations subsistent. Le dernier chapitre présente les travaux expérimentaux effectués au cours de cette thèse. On s'intéressera au développement d'une technique de mesure des paramètres de fissuration basée sur une mesure de champ de déplacement par corrélation d'images numériques.

On clôturera tout d'abord ce chapitre d'introduction en précisant le cadre théorique de l'étude et les concepts généraux en dynamique de la rupture. On dressera aussi un état de l'art concernant les méthodes numériques pour la simulation de la propagation dynamique de fissure.

## 1.2 Théorie de la dynamique de la rupture fragile

On présente les bases de la théorie de la mécanique de la rupture pour le cas de la propagation de fissure sous sollicitations dynamiques. Dans un premier temps, le problème de référence est formulé de façon continue en prenant en compte la propagation de la fissure comme une variation du domaine matériel. On présente ensuite les concepts de facteur d'intensité des contraintes et des déplacements en dynamique. Une vision énergétique du problème permet de donner un sens à la variation de domaine formulée dans le problème de référence et de définir le taux de restitution de l'énergie. Cette approche permet aussi d'écrire le taux de restitution de l'énergie sous la forme d'une intégrale le long d'un contour entourant la pointe de fissure. En introduisant les développements asymptotiques mentionnés précédemment, on peut alors relier le taux de restitution de l'énergie et les facteurs d'intensité de la singularité. La dernière partie est consacrée aux critères de propagation.

### 1.2.1 Problème de référence

On propose ici une vision globale du problème de la propagation dynamique d'une fissure. Dans ce type de problème, aux inconnues statiques et cinématiques, vient s'ajouter une inconnue supplémentaire  $\mathbf{a}(t)$  qui représente la position du front de la

fissure. On peut écrire le problème de référence de la façon suivante :

<b>Problème de référence:</b>	
Pour $\mathbf{x} \in \Omega(t), t \in [0; T]$ , connaissant	$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) \\ \mathbf{a}(0) \end{cases}, \text{ trouver } \begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in U \\ \sigma(\mathbf{x}, t) \in S \\ \mathbf{a}(t) \end{cases} \text{ tels}$
que :	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_1, \forall t \in [0; T]</math></li> </ul>	
$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_d \tag{1.1}$	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\forall t \in [0; T], \forall \mathbf{v} \in U_0</math></li> </ul>	
$\int_{\Omega(t)} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega(t)} \sigma : \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega(t)} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v} dS \tag{1.2}$	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\forall \mathbf{x} \in \Omega(t), \forall t \in [0; T]</math></li> </ul>	
$\sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbb{C} \varepsilon(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \tag{1.3}$	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\forall t \in [0; T]</math></li> </ul>	
$\dot{\mathbf{a}}(t) = \dot{\mathbf{a}}(\mathbf{a}(t), \mathbf{u}(x, t)) \tag{1.4}$	

où  $\Omega(t)$  est le domaine considéré,  $\partial\Omega_1$  la frontière sur laquelle on impose des déplacements  $\mathbf{u}_d$ ,  $\partial\Omega_2$  la frontière sur laquelle on impose des efforts  $\mathbf{F}_d$ ,  $\mathbf{f}_d$  les efforts volumiques imposés,  $\sigma$  et  $\varepsilon$  les tenseurs symétriques des contraintes et des déformations,  $\mathbb{C}$  l'opérateur de Hooke caractéristique du matériau,  $\rho$  sa masse volumique,  $\dot{\mathbf{a}}$  la vitesse d'avancée de la fissure ( $\dot{\phantom{x}} = \frac{\partial}{\partial t}$  désigne la dérivation partielle par rapport à la variable temporelle  $t$ ),  $U$  et  $S$  les espaces fonctionnels associés au problème et  $U_0$  l'espace vectoriel des champs virtuels défini par :

$$U_0 = \{\mathbf{v} / \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_1 + \text{régularité}\} \tag{1.5}$$

**Remarque 1** *Le problème est ici présenté sous forme variationnelle. Il est intéressant de rappeler les équations locales qui le régissent afin de préciser les conditions*

aux limites considérées :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_d & \text{sur } \partial\Omega_1 \\ \sigma(\mathbf{n}) = \mathbf{F}_d & \text{sur } \partial\Omega_2 \\ \sigma(\mathbf{n}) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma^+ \text{ et } \Gamma^- \\ \mathbf{div}(\sigma) + \mathbf{f}_d = \rho \ddot{\mathbf{u}} & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.6)$$

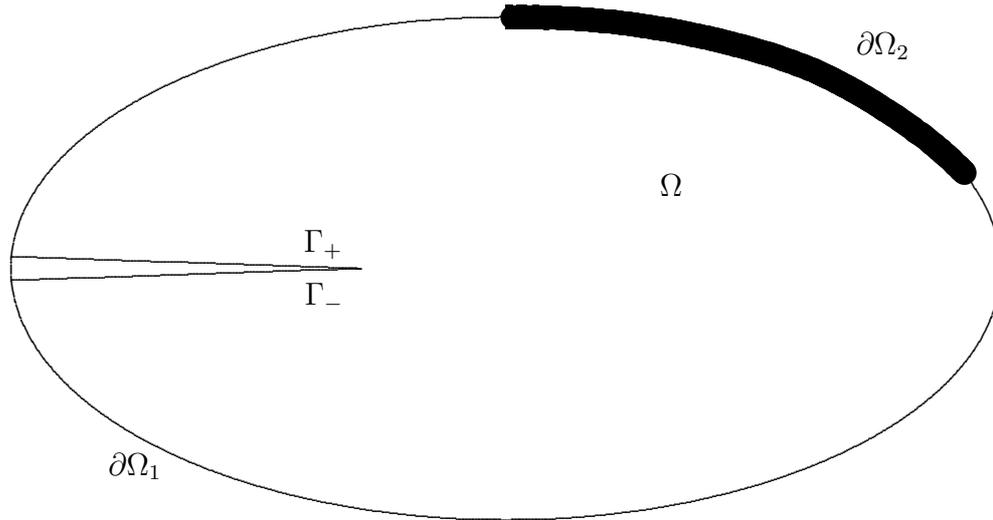


Figure 1.1: Domaine considéré  $\Omega$

**Remarque 2** On considère que le matériau est homogène et isotrope, et qu'il présente un comportement élastique linéaire. On se place alors dans le cadre de la mécanique élastique linéaire de la rupture.

**Remarque 3** Bien que l'on ait signifié une dépendance du domaine par rapport au temps ( $\Omega(t)$ ), celui-ci n'évolue que via  $\mathbf{a}(t)$ . On fera l'hypothèse simplificatrice de confondre les configurations initiale et déformée et on travaillera dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. La partie 1.2.3 permettra de faire le lien entre cette variation de domaine et la théorie énergétique de la mécanique de la rupture.

## 1.2.2 Analyse asymptotique

Comme c'est le cas en statique, une analyse asymptotique des champs de déplacement et de contrainte dynamiques permet de caractériser la singularité de ces champs en pointe de fissure. La théorie de Irwin [IRW 57] consiste à introduire des facteurs pour quantifier l'intensité de la singularité. Sous sollicitation statique, l'intensité de la singularité en déplacement est la même que l'intensité de la singularité en contrainte. Ce n'est pas le cas lors d'une propagation dynamique ( voir [BUI 78]) et

on introduit un facteur d'intensité des contraintes  $K_m^{dyn}$  et un facteur d'intensité des déplacements  $K_m^{cin}$  pour chaque mode  $m$  de sollicitation. Ces derniers caractérisent l'intensité de la discontinuité du champ de déplacement au niveau de la pointe de la fissure ( $\theta = \pi$  et  $r \rightarrow 0$ ) suivant les définitions :

$$K_1^{cin} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{4(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [[u_2(\theta = \pi)]]$$

$$K_2^{cin} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{4(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [[u_1(\theta = \pi)]]$$

$$K_3^{cin} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [[u_3(\theta = \pi)]]$$

où  $[[u_i(\theta = \pi)]] = u_i(\theta = \pi) - u_i(\theta = -\pi)$  sont les sauts de déplacement au passage de la discontinuité. Les facteurs d'intensité des contraintes sont définis par

$$K_1^{dyn} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(\theta = 0)$$

$$K_2^{dyn} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12}(\theta = 0)$$

$$K_3^{dyn} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(\theta = 0)$$

On peut alors montrer [BUI 78] que ces facteurs d'intensité des contraintes et leurs duaux sont reliés par des fonctions universelles  $f_i$  :

$$K_i^{cin} = f_i(\dot{a}) K_i^{dyn} \quad (1.7)$$

avec

$$f_i(\dot{a}) = \frac{4\alpha_i(1-\alpha_j^2)}{(\kappa+1)D(\dot{a})}, (i, j) \in \{1, 2\} \quad (1.8)$$

$$f_3(\dot{a}) = \frac{1}{\alpha_2} \quad (1.9)$$

$$\alpha_i = \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{a}}{c_i}\right)^2} \quad (1.10)$$

$$D(\dot{a}) = 4\alpha_1\alpha_2 - (1 + \alpha_2^2)^2 \quad (1.11)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont respectivement la célérité des ondes de compression et de cisaillement.  $D$  est la fonction dont le zéro définit la célérité des ondes de Rayleigh  $c_r$ .  $\kappa$  est une constante matériau qui dépend de l'hypothèse formulée pour le problème bidimensionnel ( $\kappa = 3 - 4\nu$  en déformations planes).

### 1.2.3 Approche énergétique

L'objectif de cette section est de faire le lien entre le problème de référence présenté plus haut et les théories énergétiques classiques de la mécanique de la rupture. Les principales références sont issues des travaux de Griffith [GRI 21], Rice [RIC 68a], Irwin [IRW 57], Freund [FRE 90] et Bui [BUI 78]. Pour simplifier les développements et en faciliter la compréhension et l'interprétation, les hypothèses simplificatrices suivantes sont formulées : on s'intéressera dorénavant à un problème bidimensionnel sans force volumique dans lequel la fissure se propage en ligne droite à la vitesse  $\dot{a}$  dans la direction tangente aux lèvres de la fissures. Dans une problème sans fissure, le choix du champ de vitesse  $(\dot{u} - \dot{u}_d)$  comme champ virtuel dans l'Equation (1.2.1) permet de démontrer le théorème de l'énergie cinétique. L'objectif étant d'établir un lien entre le problème de référence formulé de manière continue et les approches énergétiques en mécanique de la rupture, choisissons de même le champ  $(\dot{u} - \dot{u}_d)$  comme champ virtuel. On obtient :

$$\int_{\Omega(t)} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad (1.12)$$

en posant  $\tau = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^2$  et  $w = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  les densités surfaciques d'énergies cinétique et de déformation,  $w_{ext} = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dt$  la densité linéique de travail fourni par les actions mécaniques extérieures, il vient :

$$\int_{\Omega(t)} (\dot{\tau} + \dot{w}) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega(t)} \dot{w}_{ext} \, d\Gamma \quad (1.13)$$

Soient alors  $T = \int_{\Omega(t)} \tau \, d\Omega$ ,  $W = \int_{\Omega(t)} w \, d\Omega$  les énergies cinétique et de déformation du domaine entier,  $W_{ext} = \int_{\partial\Omega(t)} w_{ext} \, d\Gamma$  est le travail des actions extérieures. Comme on l'a mentionné plus haut, toutes ces quantités dépendent à la fois du temps  $t$  et de la longueur de la fissure  $a$ . Il est possible d'écrire la variation totale de  $W$  par exemple :

$$\frac{dW}{dt} = \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_a + \left( \frac{\partial W}{\partial a} \right)_t \dot{a} \quad (1.14)$$

avec

$$\left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_a = \int_{\Omega(t)} \dot{w} \, d\Omega \quad (1.15)$$

En substituant dans l'Equation (1.13), on a :

$$\frac{d(W + T)}{dt} - \left( \frac{\partial(W + T - W_{ext})}{\partial a} \right)_t \dot{a} = P_{ext} \quad (1.16)$$

où  $P_{ext} = \frac{dW_{ext}}{dt}$  est la puissance fournie par les actions extérieures.

On fait apparaître naturellement un terme de dissipation :

$$D = - \left( \frac{\partial(W + T - W_{ext})}{\partial a} \right)_t \dot{a}$$

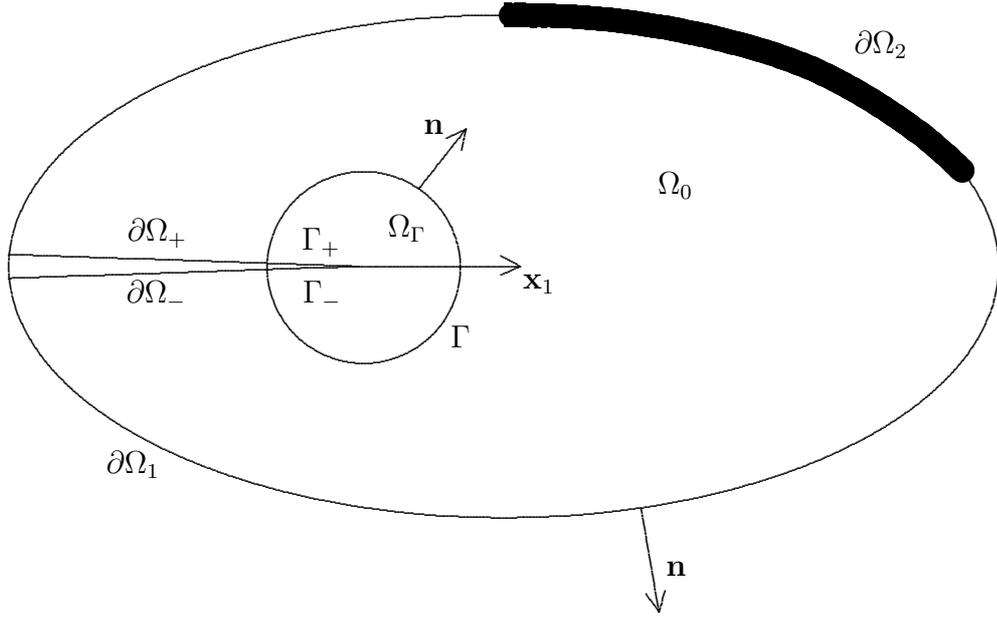


Figure 1.2: Notations

Le domaine  $\Omega$  ne dépendant du temps que par l'intermédiaire de  $a$ , on adoptera les notations de la Figure 1.2.  $\Omega_0$  est fixe et  $\Omega_\Gamma$  est défini par un contour  $\Gamma$  entourant la pointe de fissure avec laquelle il se déplace à la vitesse  $\dot{a}$  dans la direction  $x_1$  tangente aux lèvres de la fissure. On a alors :

$$\frac{d(W + T)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_0} (w + \tau) d\Omega + \int_{\Omega_\Gamma} (w + \tau) d\Omega \right) \quad (1.17)$$

Le premier terme de l'Equation (1.17) peut ensuite être développé :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_0} (w + \tau) d\Omega \right) = \int_{\Omega_0} (\dot{w} + \dot{\tau}) d\Omega - \int_{\Gamma} (w + \tau) \dot{a} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_1 d\Gamma \quad (1.18)$$

Concernant les actions extérieures, il vient :

$$P_{ext} = \frac{dW_{ext}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_{\partial\Omega} w_{ext} d\Gamma \right) \quad (1.19)$$

Comme les lèvres de la fissure sont considérées comme étant libres d'efforts, les actions extérieures s'appliquent uniquement sur des parties du contour qui ne dépendent pas de la longueur de la fissure. En conséquence, la dérivée totale est ici égale à la dérivée partielle par rapport au temps. On définit  $\partial\Omega = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_\Gamma$  avec  $\partial\Omega_0 = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_+ \cup \partial\Omega_- \cup -\Gamma$  et  $\partial\Omega_\Gamma = \Gamma \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ . Dans la mesure où les lèvres de la fissure sont libres d'effort, on peut écrire :

$$P_{ext} = \int_{\partial\Omega_0} \dot{w}_{ext} d\Gamma + \int_{\Gamma} \dot{w}_{ext} d\Gamma \quad (1.20)$$

**Remarque 4** *La proposition énoncée plus haut ( ici  $\frac{dW_{ext}}{dt} = \frac{\partial W_{ext}}{\partial t}$  ) peut aussi être démontrée en utilisant le fait qu'on introduit la contribution de l'intégrale sur  $\Gamma$  et sur  $-\Gamma$ , les termes correspondant à la variation du contour avec la longueur de la fissure lors de la dérivation totale s'annulant d'eux mêmes.*

En prenant en compte la définition de  $w_{ext}$ , il vient :

$$P_{ext} = \int_{\Omega_0} \text{div}(\sigma(\dot{\mathbf{u}})) d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (1.21)$$

or

$$\text{div}(\sigma(\dot{\mathbf{u}})) = \mathbf{div}(\sigma) \cdot \dot{\mathbf{u}} + \sigma : \nabla \dot{\mathbf{u}} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \sigma : \nabla \dot{\mathbf{u}} = \dot{w} + \dot{\tau}$$

et finalement

$$P_{ext} = \int_{\Omega_0} (\dot{w} + \dot{\tau}) d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (1.22)$$

En combinant les Equations (1.18) et (1.22) on peut calculer la dissipation  $D$  :

$$D = \int_{\Gamma} ((w + \tau)\dot{a}n_1 + \sigma(\mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}}) d\Gamma - \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_{\Gamma}} (w + \tau) d\Omega \right) \quad (1.23)$$

Dans cette expression, le premier terme peut être vu comme le flux d'énergie à travers le contour  $\Gamma$  quand celui-ci se déplace avec le front de la fissure à la vitesse  $\dot{a}$ . On notera  $F$  ce flux :

$$F = \int_{\Gamma} ((w + \tau)\dot{a}n_1 + \sigma(\mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}}) d\Gamma \quad (1.24)$$

Bien que  $D$  soit indépendant de  $\Gamma$ ,  $F$  ne l'est pas à cause du terme source d'intégrale de surface. En effet,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  étant deux contours entourant la pointe de fissure, on a :

$$F(\Gamma_2) - F(\Gamma_1) = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_{\Gamma_1}} (w + \tau) d\Omega \right) - \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_{\Gamma_2}} (w + \tau) d\Omega \right) \quad (1.25)$$

Freund [FRE 90] définit alors le taux de restitution de l'énergie en dynamique comme la limite, quand  $\Gamma$  est réduit au point du front de la fissure, du flux d'énergie par unité d'avance de la fissure ( $G$  est alors indépendant du choix de  $\Gamma$ ) :

$$G = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \frac{F}{\dot{a}} = \frac{1}{\dot{a}} \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma} ((w + \tau)\dot{a}n_1 + \sigma(\mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}}) d\Gamma \right]$$

Une hypothèse essentielle en dynamique de la rupture est l'hypothèse de stationnarité en pointe de fissure [FRE 90, BUI 78]. On considère alors que dans une zone proche de la pointe de la fissure la dérivée totale des différentes quantités par rapport au temps est nulle. En considérant un contour suffisamment proche de la pointe de fissure pour pouvoir utiliser cette hypothèse, le terme source présent dans l'expression de  $D$  s'annule et  $F$  devient indépendant du contour. Par conséquent, on peut s'affranchir du passage à la limite de l'équation précédente. Cette hypothèse

de stationnarité permet aussi d'écrire  $\dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{u}_{,1}\dot{a}$  où  $_{,1}$  désigne la dérivée par rapport à  $x_1$ . L'expression de  $G$  devient alors :

$$G = \int_{\Gamma} ((w + \tau)\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1})n_j d\Gamma \quad (1.26)$$

L'hypothèse de stationnarité impose de considérer un contour  $\Gamma$  proche de la pointe de la fissure. On peut alors légitimement supposer que les développements asymptotiques vus précédemment sont valides à l'intérieur de  $\Gamma$ . En injectant leurs expressions dans l'Equation (1.26), on retrouve l'équivalent dynamique de la relation de Irwin [IRW 57] :

$$G = \frac{1}{E^*} \left( K_1^{cin} K_1^{dyn} + K_2^{cin} K_2^{dyn} \right) \quad (1.27)$$

avec

$$E^* = \begin{cases} \frac{E}{1 - \nu^2} & \text{en déformation plane} \\ E & \text{en contrainte plane} \end{cases}$$

## 1.2.4 Critères de propagation

A l'heure actuelle la question des critères de propagation en dynamique de la rupture reste un sujet ouvert. De nombreux essais de propagation dynamique de fissure ont été menés depuis trente ans environ. Un des problèmes réside dans l'absence de méthode numérique suffisamment fiable pour identifier les paramètres d'éventuels critères et comparer la pertinence de ces derniers. La difficulté des essais à mettre en oeuvre ajoutée à celle posée par le problème de la simulation numérique de la propagation dynamique d'une fissure en font donc aujourd'hui encore un sujet d'actualité.

Lors d'une sollicitation en mode mixte, il est nécessaire de déterminer la vitesse et la direction de propagation de la fissure. On fait alors l'hypothèse que le mode 3 n'influence pas la direction de propagation dans un plan normal au front de la fissure. On considérera aussi que la direction de propagation est gouvernée par l'intensité de contrainte circonférentielle maximum. En recherchant le maximum de la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  obtenu à partir de l'expression des champs asymptotiques, on trouve l'angle de propagation critique  $\theta_c$  en fonction des facteurs d'intensité des contraintes  $K_1^{dyn}$  et  $K_2^{dyn}$  :

$$\theta_c = 2 \arctan \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{K_1^{dyn}}{K_2^{dyn}} - \text{sign}(K_2^{dyn}) \sqrt{8 + \left( \frac{K_1^{dyn}}{K_2^{dyn}} \right)^2} \right) \right] \quad (1.28)$$

On calcule alors un facteur d'intensité des contraintes équivalent  $K_{1eq}^{dyn}$ . Dans le cadre de l'utilisation du critère de contrainte circonférentielle maximale, il est égal au facteur d'intensité des contraintes en mode 1 que l'on obtiendrait si la fissure était orientée dans la direction  $\theta_c$  :

$$K_{1eq}^{dyn} = \cos^3 \left( \frac{\theta_c}{2} \right) K_1^{dyn} - \frac{3}{2} \cos \left( \frac{\theta_c}{2} \right) \sin(\theta_c) K_2^{dyn} \quad (1.29)$$

Ayant considéré que la propagation était orientée par la direction de contrainte circonférentielle maximale, l'initiation aura alors lieu lorsque le facteur d'intensité des contraintes équivalent atteint une valeur critique  $K_{1D}$ . On supposera ensuite que la propagation a lieu à intensité de contraintes circonférentielle égale à  $K_{1D}$ , la vitesse s'adaptant :

$$\begin{cases} \dot{a} = 0 & \text{si } K_{1eq} < K_{1D} \\ K_{1eq}^{dyn} = K_{1D} & \text{si } \dot{a} > 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

On s'attend de plus à ce que  $K_{1D}$  dépende de la vitesse de propagation. On trouve dans la littérature [KAN 85] la forme suivante :

$$K_{1D}(\dot{a}) = \begin{cases} K_{1c} & \text{si } \dot{a} = 0 \\ \frac{K_{1A}}{1 - (\frac{\dot{a}}{c_r})^m} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.31)$$

Par soucis de simplification mais surtout par manque de données expérimentales, on considérera que  $m$  vaut 1 et  $K_{1A} = K_{1c}$ .

## 1.3 Méthodes de simulation numérique : état de l'art

On trouve dans un article de Nishioka un état de l'art des méthodes de simulation numérique en dynamique de la rupture [NIS 97]. Cette publication datant de 1997, les développements récents n'y sont pas mentionnés. On tente de présenter ici un panel des méthodes ayant été ou étant utilisées dans le domaine.

### 1.3.1 Méthode des Eléments Finis

La méthode des Eléments Finis a été utilisée sous de nombreuses formes en dynamique de la rupture. Un des problèmes dans la modélisation des structures fissurées est la description géométrique de la fissure. Dans le cadre de la méthode de Eléments Finis, elle est décrite explicitement et fait partie intégrante des frontières du maillage. Suivant le type de fissure que l'on cherche à étudier, diverses solutions sont envisageables :

#### 1.3.1.1 fissure droite sollicitée en mode 1

Dans ce premier cas, le trajet de propagation suivi par la fissure peut être connu *a priori*, on trouve alors des méthodes dites de déboutonnage [CAR 00, KOB 76] dans lesquelles une moitié de structure est maillée et les noeuds situés sur la ligne de propagation sont libérés à mesure que la fissure avance. Les positions successives du front de la fissure sont alors imposée par la discrétisation de la ligne de propagation. La difficulté est de relâcher les noeuds progressivement en appliquant des forces nodales physiquement pertinentes. D'autres techniques ont été développées en utilisant un maillage mobile. Les cas d'applications sont plus ou moins restreints suivant que le maillage est entièrement [BAZ 78] ou localement déplacé [ATL 85].

---

### 1.3.1.2 fissure courbe

Dans le cas où la fissure est courbe, son trajet de propagation sera complexe et d'autres méthodes doivent être envisagées. On mentionnera deux grandes classes de méthodes : les méthodes de remaillage [SWE 88, BIT 96, NIS 01] et les méthodes utilisant des éléments d'interface [XU 94, CAM 96, ORT 99]. Il existe des méthodes de remaillage plus ou moins sophistiquées ayant pour but de restreindre au maximum la zone concernée par un changement de discrétisation. Concernant les méthodes utilisant des éléments d'interface, plusieurs problèmes majeurs se posent : le trajet de la fissure est imposée par la discrétisation (il doit suivre la frontières des éléments) et le choix de la loi de décohesion de l'interface. Il en résulte des problèmes de dépendance au maillage rendant ces méthodes assez peu objectives bien que des développements récents [ZHO 04] proposent des solutions pour les résoudre. Une des difficultés liée à l'utilisation d'Eléments Finis classiques est que l'interpolation nécessite d'utiliser une discrétisation fine pour capturer avec précision la singularité due à la présence de la fissure. C'est particulièrement vrai si on s'intéresse aux déformations ou aux contraintes. Les éléments munis d'un noeud supplémentaire au quart de ses côtés permet d'intégrer exactement la singularité élastique mais leur utilisation nécessite une procédure de remaillage pour simuler la propagation.

### 1.3.2 Méthode des Eléments de frontière

On trouve dans la littérature de nombreux développements de méthodes par éléments de frontière en mécanique de la rupture [CHI 94, ALB 04, SEE 99]. L'avantage immédiat est la simplicité de la description de la fissure et la gestion de son évolution. L'intégration en espace et en temps des solutions fondamentales doit être effectuée à chaque pas de temps et des problèmes numériques de conditionnement de matrices et de stockage de données sont les principales difficultés rencontrées par ce type de méthode.

### 1.3.3 Méthode sans maillage

Il existe de nombreuses variantes des méthodes dites sans maillage. La méthode EFG (Element Free Galerkin) est la plus utilisée en mécanique de la rupture. Ici, il n'est pas nécessaire de discrétiser la géométrie de la fissure mais apparaissent des critères de visibilité entre particules. Les principaux développements sont vus dans les travaux de [ORG 96, KRY 99]. Les problèmes de ces techniques sont la lourdeur du calcul des voisins avec application des critères de visibilité, le traitement des conditions aux limites cinématiques et la quadrature numérique. Une vision simplifiée de ces méthodes a été récemment présentée dans [RAB 04].

### 1.3.4 Méthode utilisant une partition de l'unité

L'idée de la méthode de partition de l'unité est d'utiliser, dans l'approximation Eléments Finis, des fonctions permettant de capturer au mieux la singularité du champ de déplacement. Le chapitre suivant permettra de redévelopper un certain nombre

de points concernant cette méthode et son utilisation en mécanique de la rupture. Un des avantages de ce type de technique est qu'il n'est pas nécessaire de mailler explicitement la fissure : sa description se fait au moyen d'éléments géométriques ou de fonctions de niveau pour le problème 3D [MOË 02b, GRA 02]. Les premiers travaux sont à attribuer à Benzley [BEN 74]. La technique de partition de l'unité formalisée de manière générale est présentée dans les travaux de Babuska et Melenk [BAB 97]. L'idée d'enrichir l'approximation a aussi été utilisée dans le cadre des EFG dans [FLE 97]. Une présentation plus détaillée et les travaux de références figurent au chapitre suivant. Concernant la propagation dynamique de fissure, les seuls travaux sont dus à Belytschko et Chen [BEL 03] qui adoptent une démarche différente de celle suivie dans cette thèse. Leurs travaux s'apparentent à ceux de de Borst et ses collaborateurs [WEL 02, WEL 01] dans le cadre quasi statique ou aux précédents articles publiés par Moës et Belytschko [MOË 02a]. Il s'agit d'utiliser un enrichissement discontinu associé à des segments cohésifs le long de la fissure afin d'introduire de la dissipation.

### 1.3.5 Remarque sur la stabilité lors de changements de discrétisation

A l'exception des méthodes de relâchement de noeuds dont le champ d'application est très restreint, dans toutes les autres techniques évoquées ici, la propagation de la fissure est modélisée par un changement dans la discrétisation (remaillage, mouvement d'éléments, ajout de fonction de forme, modification des voisins...). Bien que cela soit rarement mentionné dans la littérature, la question de la stabilité du schéma d'intégration en temps lors de telles manipulations est loin d'être triviale. Dans [EIN 00], les auteurs mentionnent la possibilité d'instabilités après les opérations de remaillages et projections successives. Le problème est formalisé dans [NIS 01] sans que les auteurs n'attachent d'importance à l'étude de la stabilité du schéma. Dans le cadre de la méthode des Eléments Finis Etendus le problème vient essentiellement des enrichissements singuliers : après plusieurs tentatives dans [BEL 01a], Belytschko *et al.* ont finalement opté pour l'utilisation d'un enrichissement uniquement discontinu et d'une zone cohésive ou d'un matériau élastique endommageable.

# Chapitre 2

## Modélisation de structures fissurées sous sollicitations dynamiques

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>16</b>
<b>2.2</b>	<b>Problème test 1D</b>	<b>16</b>
<b>2.3</b>	<b>Problème en espace</b>	<b>17</b>
2.3.1	Méthode de partition de l'unité	17
2.3.2	Prise en compte de discontinuités en espace	18
2.3.3	Modélisation de singularités dues à la présence de fissures	19
<b>2.4</b>	<b>Problème en temps</b>	<b>20</b>
2.4.1	Méthode de Newmark	20
2.4.2	Méthode de Galerkin discontinue en temps	28

---

## 2.1 Introduction

Ce deuxième chapitre a pour objectif de dresser un état de l'art des méthodes auxquelles on s'intéressera plus particulièrement dans la suite des développements. On s'intéressera aussi bien au problème de la discrétisation spatiale que temporelle. On rappelle les fondements de la technique de partition de l'unité et ses applications les plus courantes telles que la prise en compte de la discontinuité et/ou de la singularité du champ de déplacement en présence d'une fissure. Concernant le problème en temps, la section 2.4.1 rappelle la méthode de Newmark et introduit des outils d'étude (méthode énergétique, matrice d'amplification, bilan d'énergie discrétisée) pour les schémas numériques d'intégration en temps. D'autres schémas comme celui de la méthode HHT ou les schémas de Galerkin discontinus en temps sont introduits en mentionnant les principaux travaux les concernant.

## 2.2 Problème test 1D

Pour illustrer les propriétés des différentes techniques présentées dans ce mémoire, on propose de définir un problème test. Problème test au sens où, d'un point de vue numérique, ce problème sera équivalent à celui à traiter pour la propagation dynamique de fissure. On considère donc un barreau (Figure 2.1) dont la longueur est  $10m$  et la largeur  $0.5m$ . Le problème est pseudo-1D : la géométrie est 2D mais les degrés de liberté concernent uniquement la direction longitudinale du barreau. Il est constitué d'un matériau homogène de densité  $\rho = 8000kgm^{-3}$  dont le comportement est considéré élastique, linéaire et isotrope. Le paramètre caractérisant ce comportement est le module d'Young  $E = 210GPa$  (modèle pseudo-1D, pas d'effets Poisson). On soumet cette structure à une contrainte de traction  $\sigma = 500MPa$  à une de ses extrémités, l'autre étant fixée. Pour avoir à simuler un problème type de dynamique de la rupture, on impose au barreau de se couper en deux au temps  $t/t_c = 2.5$  ( $t_c$  valant la moitié de temps de parcours des ondes de compression dans le barreau).

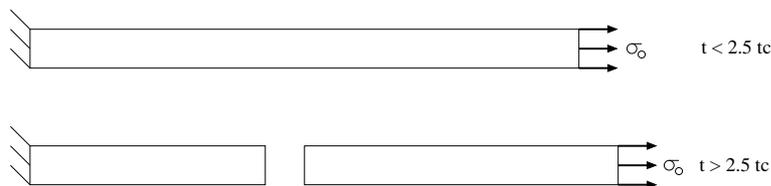


Figure 2.1: Géométrie du problème test 1D

---

## 2.3 Problème en espace

### 2.3.1 Méthode de partition de l'unité

Dans cette partie, on se propose de présenter la méthode de partition de l'unité développée par Babuska et Melenk [BAB 97] et conjointement par Duarte et Oden [DUA 96]. Cette méthode a ensuite été utilisée pour de nombreuses applications : la mécanique des fluides [WAG 01, WAG 03, CHE 03b, CHE 03a], l'interaction fluide structure, la modélisation de trous ou d'inclusion [SUK 00a], de transformation de phase [CHE 02, DOL 01a] et la mécanique de la rupture. Pour cette dernière application, citons le développement des Eléments Finis Etendus [BLA 99, BEL 01b, DOL 00, MOË 99] et des Eléments Finis Généralisés [STR 00a, STR 00b] qui utilisent une partition de l'unité locale. On peut aussi faire référence aux travaux menés par de Borst [WEL 02, WEL 01, REM 03].

Considérons un domaine  $\Omega$  discrétisé par un ensemble  $\mathcal{N}$  de  $N$  noeuds. Sur cet ensemble de noeuds s'appuie un ensemble de fonctions de forme  $N_i$ .

$$\bar{U} = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x}) U_i \quad (2.1)$$

Dans l'équation ci-dessus,  $\bar{U}$  constitue une approximation Eléments Finis standard de  $u$ . Il est possible de démontrer [BAB 97] qu'à la condition que les  $N_i$  constituent une partition de l'unité dans le domaine  $\Omega$ , c'est à dire :

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.2)$$

on peut enrichir l'approximation de  $u$  de la façon suivante :

$$U = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x}) U_i + \sum_{i \in \mathcal{N}^e} N_i(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) U_i^e \quad (2.3)$$

où  $\phi$  est la fonction d'enrichissement et  $\mathcal{N}^e$  l'ensemble des noeuds auxquels on choisit de placer des degrés de liberté enrichis  $U_i^e$ . L'idée d'exploiter le fait que les fonctions de forme constituent une partition de l'unité peut être illustrée de la façon suivante : si on prend  $\mathcal{N}^e = \mathcal{N}$ , que l'on met les degrés de liberté classiques  $U_i$  à 0 et les degrés de liberté enrichis  $U_i^e$  à 1, alors on reproduit exactement dans le domaine entier le fonction d'enrichissement  $\phi$  :

$$U = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

Dans la méthode des Eléments Finis Etendus, on exploite cette propriété localement. En effet pour des raisons de coût de calcul, l'enrichissement est localisé dans une certaine zone du maillage si bien que dans la couche d'éléments intermédiaire entre la zone enrichie et la zone non enrichie, on perd la propriété de partition de l'unité (car seulement une partie des noeuds de ces éléments portent des degrés de liberté

enrichis). Les travaux de [CHE 03c] montrent que la façon dont on traite cette zone peut avoir une influence sur l'ordre de convergence de la méthode. Pour palier à ce problème, une solution consiste à changer de fonction d'enrichissement de façon à ce que celle-ci soit nulle dans les éléments intermédiaires [ZI 03]. Dans [CHE 03c], on trouve d'autres développements permettant de traiter correctement cette couche d'éléments pour des enrichissements de type discontinuité de déformation. Ici, aucun traitement particulier n'est effectué, l'ordre de convergence de la méthode étant jugé suffisant et l'élaboration d'une zone de transition améliorée n'étant pas l'objet des travaux présentés.

La fonction d'enrichissement peut être choisie de façon à capturer efficacement la solution du problème traité. Il s'agit généralement de discontinuités géométriques ou matériaux. Dans ces cas là,  $\mathcal{N}^e$  est en rapport avec le support géométrique de la discontinuité. On peut également choisir d'utiliser plusieurs fonctions d'enrichissement si la discontinuité modélisée ne peut être capturée à l'aide d'une seule fonction. Les principaux intérêts de cette technique sont les suivants : un ordre de convergence plus élevé que pour les Elément Finis classiques, le découplage du problème du maillage et de la description implicite de la géométrie des discontinuités.

### 2.3.2 Prise en compte de discontinuités en espace

On s'intéresse ici au cas particulier de la prise en compte de discontinuités en espace. Il paraît alors judicieux de choisir comme enrichissement la fonction discontinue  $\mathcal{H}$  dont la définition peut être écrite de la façon suivante :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) \begin{cases} +1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ est au dessus de } \Omega_d \\ -1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ est en dessous de } \Omega_d \end{cases} \quad (2.5)$$

avec  $\Omega_d$  l'entité géométrique sur laquelle s'appuie la discontinuité à prendre en compte. On définira alors l'ensemble des noeuds portant un enrichissement par :

$$\mathcal{N}^e = \{n_i \in \mathcal{N}, \omega_i \cap \Omega_d \neq \emptyset\} \quad (2.6)$$

où  $\omega_i = \text{supp}(N_i)$  est le support de la fonction de forme  $N_i$ . L'approximation Eléments Finis Etendus se construit donc comme suit :

$$U = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x})U_i + \sum_{i \in \mathcal{N}^e} N_i(\mathbf{x})\mathcal{H}(\mathbf{x})U_i^e \quad (2.7)$$

#### 2.3.2.1 Problème test 1D

L'application de la procédure décrite précédemment dans le cas du problème test 1D est la suivante. Les noeuds enrichis sont ceux dont le support est coupé par la discontinuité. Comme on travaille avec des fonctions de forme dont le support est borné, leur nombre se limite à quatre. La Figure 3.2 montre les maillages utilisés avec une méthode Eléments Finis classique et la méthode des Eléments Finis

Etendus. Les noeuds enrichis sont entourés sur cette figure. On voit immédiatement que l'utilisation d'une fonction discontinue dans l'approximation permet de se dégager des contraintes du maillage des entités géométriques portant la discontinuité. Pour l'utilisation de la méthode des Eléments Finis Etendus en dynamique, on

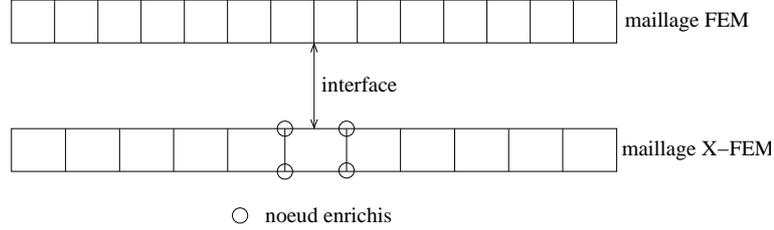


Figure 2.2: Maillages pour le problème test 1D

choisit d'utiliser la même technique de discrétisation pour toute les composantes du vecteur d'état (déplacement, vitesse et accélération). Ceci permet de conserver un formalisme classique pour l'étude des schémas d'intégration en temps.

**Remarque 5** *Concernant la dynamique, des problèmes de stabilité sont inhérents à l'utilisation des Eléments Finis Etendus : il a été montré dans [GER 99] que le pas de temps critique des éléments dans lesquels les fonctions d'enrichissement sont actives n'est pas égal au pas de temps critique de ce même élément sans fonction enrichie. En effet, l'enrichissement discontinu par exemple introduit des fréquences propres numériques qui tendent vers l'infini quand la géométrie de la discontinuité se rapproche des frontières des éléments. Par conséquent, le pas de temps critique tend vers 0 ; ce qui rend impossible l'utilisation de schémas dont la stabilité n'est pas inconditionnelle.*

### 2.3.3 Modélisation de singularités dues à la présence de fissures

On va dans cette partie reprendre la méthode de partition de l'unité présentée dans la partie 2.3.1 en vue d'utiliser des fonctions d'enrichissement capable de capturer la singularité du champ de déplacement d'une structure fissurée dont le comportement est élastique linéaire. De nombreux travaux ont été publiés pour ce type d'applications [BLA 99, MOË 99, SUK 00b, MOË 02b, DUA 01]. Il semble finalement qu'en élasticité linéaire, la base de fonction d'enrichissement la plus judicieuse aussi bien pour le 2D que pour le 3D soit la suivante :

$$[B_\alpha] = \left[ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right] \quad (2.8)$$

où  $(r, \theta)$  sont les coordonnées, dans le repère local lié au front de la fissure, d'un point appartenant à un plan normal au front. Il se trouve que les solutions asymptotiques du champ de déplacement peuvent être obtenues en combinant linéairement les fonctions de cette base. Elle présente de plus l'avantage de faire apparaître peu

de modes à énergie nulle et donc de fournir à la matrice de rigidité un conditionnement acceptable [ELG 04]. Les noeuds enrichis par ces fonctions singulières sont les noeuds  $\mathcal{N}_{front}$  dont le support contient le front (voir Figure 2.3). Un enrichissement discontinu est utilisé pour les noeuds  $\mathcal{N}_{cut}$  dont le support est complètement coupé par la surface de la fissure. Finalement l'approximation s'écrit :

$$U = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x}) U_i + \sum_{i \in \mathcal{N}_{cut}} N_i(\mathbf{x}) \mathcal{H}(\mathbf{x}) a_i + \sum_{i \in \mathcal{N}_{front}} \sum_{\alpha} N_i(\mathbf{x}) B_{\alpha}(\mathbf{x}) b_{i,\alpha} \quad (2.9)$$

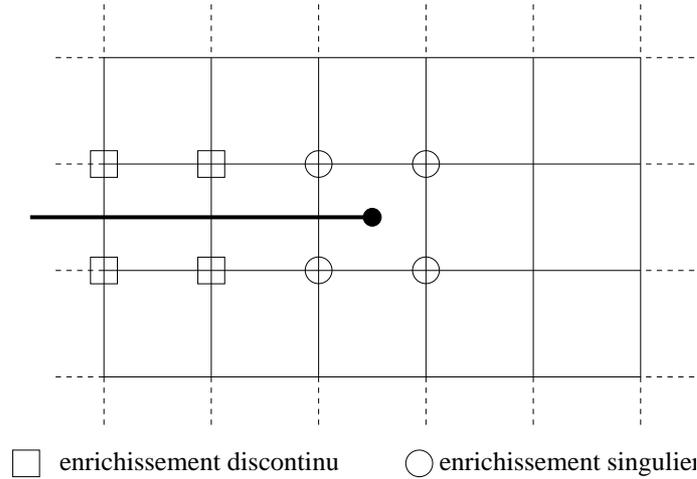


Figure 2.3: Disposition des degrés de liberté enrichis

## 2.4 Problème en temps

### 2.4.1 Méthode de Newmark

On s'intéresse à l'intégration numérique de l'équation de l'élasto-dynamique (Equation (2.10)). Pour une compréhension plus aisée, on ne considérera qu'un système masse  $m$  ressort  $k$  à un degré de liberté soumis à un effort extérieur  $f$ .  $x, \dot{x}, \ddot{x}$  sont respectivement le déplacement, la vitesse et l'accélération. On présente d'abord la méthode Newmark [NEW 59] qui servira de référence.

$$m\ddot{x} + kx - f = 0 \quad (2.10)$$

Dans le cadre de la famille des schémas de Newmark [NEW 59], aucune hypothèse n'est formulée sur le type de fonction décrivant les différentes quantités cinématiques. L'hypothèse émise concerne la dérivabilité de ces quantités dont l'ordre est supposé suffisamment élevé pour pouvoir écrire un développement limité de Taylor. L'idée est ensuite d'approximer le reste dans le développement de Taylor en introduisant deux paramètres  $\beta_N$  pour  $x$  et  $\gamma_N$  pour  $\dot{x}$  :

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \dot{x}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_n + \frac{\Delta t^3}{6} \left( 6\beta_N \frac{\ddot{x}_{n+1} - \ddot{x}_n}{\Delta t} \right) \quad (2.11)$$

---


$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \Delta t \ddot{x}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left( 2\gamma_N \frac{\ddot{x}_{n+1} - \ddot{x}_n}{\Delta t} \right) \quad (2.12)$$

L'équation de l'élasto-dynamique (Equation (5.1)) est écrite à l'instant  $n$  :

$$m\ddot{x}_n + kx_n - f_n = 0 \quad (2.13)$$

En considérant l'Equation (2.13) écrite pour les instants  $n-1$ ,  $n$ ,  $n+1$ , ainsi que les Equations (2.11) et (2.12) aux instants  $n$  and  $n+1$ , le problème peut être écrit en déplacement. Il en résulte une méthode à deux pas : connaissant  $x_{n-1}$  et  $x_n$ , trouver  $x_{n+1}$  tel que :

$$\begin{aligned} & [m + \beta_N \Delta t^2 k] x_{n+1} + [-2m + (\frac{1}{2} + \gamma_N - 2\beta_N) \Delta t^2 k] x_n \\ & \quad + [m + (\frac{1}{2} - \gamma_N + \beta_N) \Delta t^2 k] x_{n-1} \\ = & \Delta t^2 [(\frac{1}{2} - \gamma_N + \beta_N) f_{n-1} + (\frac{1}{2} + \gamma_N - 2\beta_N) f_n + \beta_N f_{n+1}] \end{aligned} \quad (2.14)$$

On pourrait également combiner les Equations (2.11), (2.12) et (2.13) pour écrire le problème en vitesse ou en accélération, sur un pas ou sur deux pas.

#### 2.4.1.1 Etude de stabilité par la méthode énergétique

On s'intéresse provisoirement à un problème multi-degrés de liberté. Les équations d'équilibre discrétisées en temps et en espace s'écrivent pour un matériau élastique linéaire en petites perturbations :

$$M\ddot{U}_n + KU_n = F_n \quad (2.15)$$

où  $U_n$  désigne le vecteur déplacement discrétisé à l'instant  $n$ ,  $\dot{U}_n$  la vitesse,  $\ddot{U}_n$  l'accélération,  $M$  et  $K$  les matrices respectivement de masse et de rigidité.

Les notions élémentaires pour l'étude d'un schéma sont la stabilité, la consistance et la convergence. La stabilité assure qu'une perturbation entraîne une modification non croissante de la solution. Le schéma est dit consistant si l'erreur locale de troncature est majorée par  $c\Delta t^k$  où  $k$  est le taux de convergence. La convergence permet d'écrire que la limite de  $U_n$  quand  $\Delta t$  tend vers 0 est le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  réel à l'instant considéré. Rappelons le théorème d'équivalence de Lax :

**Théorème 1** *Un schéma est convergent si et seulement si il est stable et consistant.*

Dans la suite, on se focalisera sur la stabilité, l'instabilité d'un schéma étant une condition suffisante de non convergence. L'intérêt est alors porté sur des méthodes énergétiques permettant de juger de la stabilité puis de la qualité des résultats obtenus. Ces méthodes sont présentées dans [HUG 00]. On propose de redévelopper ces méthodes afin de préciser les notations utilisées et de faire le point sur les conclusions qu'elles amènent.

Les équations définissant l'actualisation du vecteur d'état sont :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + \Delta t \dot{U}_n + \Delta t^2 (\frac{1}{2} - \beta_N) \ddot{U}_n + \Delta t^2 \beta_N \ddot{U}_{n+1} \\ \dot{U}_{n+1} = \dot{U}_n + \Delta t (1 - \gamma_N) \ddot{U}_n + \Delta t \gamma_N \ddot{U}_{n+1} \end{cases} \quad (2.16)$$

On définit les notations suivantes pour la moyenne et la différence d'une quantité entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  :

$$\begin{cases} \langle V \rangle = \frac{1}{2}(V_{n+1} + V_n) \\ [V] = V_{n+1} - V_n \end{cases} \quad (2.17)$$

avec la propriété

$$\langle V \rangle^T [V] = \frac{1}{2}[V^T V]$$

En utilisant ces opérateurs, on peut réécrire les équations du schéma de la façon suivante :

$$\begin{cases} [U] = \Delta t \langle \dot{U} \rangle + \frac{\Delta t^2}{2}(2\beta_N - \gamma_N) [\ddot{U}] \\ [\dot{U}] = \Delta t \langle \ddot{U} \rangle + \Delta t(\gamma_N - \frac{1}{2}) [\ddot{U}] \end{cases} \quad (2.18)$$

Considérons tout d'abord les équations d'équilibre discrétisées aux instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . La stabilité du schéma n'étant pas influencée par les efforts extérieurs [HUG 78b] (le schéma doit être stable quelque soit le problème posé), on s'intéressera à un problème avec efforts extérieurs nuls :

$$\begin{cases} M\ddot{U}_n + KU_n = 0 \\ M\ddot{U}_{n+1} + KU_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

En pré-multipliant les deux équations par  $[\dot{U}]$ , en faisant la différence des deux quantités obtenues et en utilisant les relations définies par le schéma, on obtient au final :

$$\frac{1}{2}[\ddot{U}^T A \ddot{U} + \dot{U}^T K \dot{U}] = -(\gamma_N - \frac{1}{2})[\ddot{U}]^T A [\ddot{U}] \quad (2.20)$$

où

$$A = M + \frac{\Delta t^2}{2}(2\beta_N - \gamma_N)K$$

On a alors le théorème suivant :

**Théorème 2** Si  $\gamma_N \geq \frac{1}{2}$  et  $A$  est définie positive, alors  $\ddot{U}_{n+1}$  et  $\dot{U}_{n+1}$  sont bornés [HUG 00].

**Corollaire 1** Si de plus  $K^{-1}$  existe, alors  $U_{n+1}$  est borné

Si ces propositions sont vérifiées, alors le schéma est stable. Pour cela, les valeurs propres de  $A$  doivent être positives. Ce qui impose aux solutions  $\omega_p$  du problème de vibration  $\det(K - \omega^2 M) = 0$  de vérifier :

$$1 + (\beta_N - \frac{\gamma_N}{2})(\omega_p \Delta t)^2 \geq 0$$

On retrouve alors les conditions de stabilité d'un schéma de Newmark :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leq \gamma_N \leq 2\beta_N & \text{schéma inconditionnellement stable,} \\ \frac{1}{2} \leq \gamma_N \text{ et } 2\beta_N \leq \gamma_N & \text{schéma stable si } \Delta t \leq \Delta t_c = \frac{1}{\omega_{pmax} \sqrt{\frac{\gamma_N}{2} - \beta_N}} \end{cases} \quad (2.21)$$

$\omega_{pmax}$  est la plus grande fréquence propre de la structure discrétisée. Dans la pratique,  $\omega_{pmax}$  est déterminée en calculant la plus grande fréquence propre du plus petit élément.

### 2.4.1.2 Matrice d'amplification

Ces résultats peuvent aussi être obtenus pour le système masse ressort en écrivant la relation de récurrence du schéma sous forme matricielle (cf. [GÉR 93] par exemple). On écrit alors :

$$\mathbb{H}_1 \mathbf{q}_{n+1} = \mathbb{H}_0 \mathbf{q}_n + \mathbf{F}_{n+1} \quad (2.22)$$

où  $\mathbf{q}$  est le vecteur d'état défini par :

$$\mathbf{q}_n = \begin{bmatrix} \dot{x}_n \\ x_n \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_1 &= \begin{bmatrix} m & \gamma_N \Delta t k \\ 0 & m + \beta_N \Delta t^2 k \end{bmatrix} \\ \mathbb{H}_0 &= \begin{bmatrix} m & (\gamma_N - 1) \Delta t k \\ m & m - \left(\frac{1}{2} - \beta_N\right) \Delta t^2 k \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_{n+1} &= \begin{bmatrix} \Delta t ((1 - \gamma_N) f_n + \gamma_N f_{n+1}) \\ \Delta t^2 \left( \left(\frac{1}{2} - \beta_N\right) f_n + \beta_N f_{n+1} \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

le problème sans efforts extérieurs peut être réécrit de la façon suivante :

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbb{A} \mathbf{q}_n \quad (2.23)$$

$\mathbb{A} = \mathbb{H}_1^{-1} \mathbb{H}_0$  est la matrice d'amplification et la stabilité du schéma dépend alors uniquement des valeurs propres de cette matrice. Elles sont calculées en résolvant l'équation suivante :

$$\det(\mathbb{H}_0 - r \mathbb{H}_1) = 0 \quad (2.24)$$

Ce qui nous ramène à

$$r^2 - \left(2 - (\gamma_N + \frac{1}{2}) \frac{\omega^2 \Delta t^2}{\zeta^2}\right) r + 1 - (\gamma_N - \frac{1}{2}) \frac{\omega^2 \Delta t^2}{\zeta^2} = 0 \quad (2.25)$$

avec  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $\zeta^2 = 1 + \beta_N \omega^2 \Delta t^2$ . Les valeurs propres se mettent alors sous la forme

$$r_i = R e^{\pm j \phi}$$

avec

$$R = \sqrt{1 - (\gamma_N - \frac{1}{2}) \frac{\omega^2 \Delta t^2}{\zeta^2}} \quad (2.26)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\omega \Delta t \sqrt{1 - \frac{1}{4} (\gamma_N + \frac{1}{2})^2 \frac{\omega^2 \Delta t^2}{\zeta^2}}}{\zeta \left(1 - \frac{1}{2} (\gamma_N + \frac{1}{2}) \frac{\omega^2 \Delta t^2}{\zeta^2}\right)} \right) \quad (2.27)$$

Le rayon spectral de la matrice d'amplification est défini par  $\rho = \max(|r_1|, |r_2|)$ . Les conditions de stabilité sont alors :

i  $\rho$  inférieur à 1

ii Le module de  $r_i$  est strictement inférieur à 1 si l'ordre de multiplicité de  $r_i$  est plus grand que 1

On en déduit les conditions de stabilité classiques pour les schémas de la famille de Newmark :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leq \gamma_N \leq 2\beta_N & \text{schéma inconditionnellement stable,} \\ \frac{1}{2} \leq \gamma_N \text{ et } 2\beta_N \leq \gamma_N & \text{schéma stable si } \Delta t \leq \Delta t_c = \frac{1}{\omega \sqrt{\frac{\gamma_N}{2} - \beta_N}} \end{cases} \quad (2.28)$$

### 2.4.1.3 Bilan énergétique de la formulation discrétisée

Parallèlement à l'étude de stabilité, il est possible d'écrire un bilan d'énergie discrétisée. Ce bilan n'est pas le même, dans le cas d'un choix quelconque de  $\gamma_N$  et  $\beta_N$ , que celui obtenu par le théorème de l'énergie cinétique. Il fait intervenir des termes de dissipation numérique provenant du schéma. Pour établir ce bilan, on utilise la même démarche que dans l'étude de stabilité en calculant la moyenne des équations d'équilibre et en les pré-multipliant par  $[U]$ . On obtient cette équation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\dot{U}^T M \dot{U} + U^T K U] &= \mathcal{W}_{ext} - \frac{\Delta t^2}{2}(2\beta_N - \gamma_N)[\ddot{U}]^T M \langle \ddot{U} \rangle \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{2}(\gamma_N - \frac{1}{2})(2\beta_N - \gamma_N)[\dot{U}]^T M \langle \dot{U} \rangle \\ &\quad - (\gamma_N - \frac{1}{2})[U]^T K [U] \end{aligned} \quad (2.29)$$

où  $\frac{1}{2}[\dot{U}^T M \dot{U} + U^T K U]$  est la différence d'énergie totale entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ ,  $\mathcal{W}_{ext} = (\gamma_N - \frac{1}{2})[U]^T [F] + [U]^T \langle F \rangle$  le travail des efforts extérieurs, le reste étant des termes de dissipation due au schéma.

**Remarque 6** Dans le cas de l'utilisation du schéma implicite de l'accélération moyenne ( $\gamma_N = \frac{1}{2}$ ,  $\beta_N = \frac{1}{4}$ ), on retrouve le théorème de l'énergie cinétique : l'énergie totale  $\frac{1}{2}(\dot{U}^T M \dot{U} + U^T K U)$  se conserve si les efforts extérieurs sont nuls.

**Remarque 7** Dans le cas de l'utilisation du schéma explicite de la différence centrée ( $\gamma_N = \frac{1}{2}$ ,  $\beta_N = 0$ ), ce n'est pas l'énergie totale qui se conserve mais  $\frac{1}{2}(\dot{U}^T M \dot{U} + U^T K U + \frac{\Delta t^2}{2}(2\beta_N - \gamma_N)\ddot{U}^T M \ddot{U})$

**Remarque 8** Il semble nécessaire de préciser un point souvent flou dans la littérature. Le bilan énergétique ne peut en aucun cas être utilisé pour démontrer la stabilité d'un schéma. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante : il ne suffit pas de montrer qu'un schéma dissipe ou au mieux conserve l'énergie pour démontrer sa stabilité. Le bilan énergétique permet néanmoins de vérifier la cohérence d'un calcul d'un point de vue énergétique.

---

#### 2.4.1.4 Problème test 1D

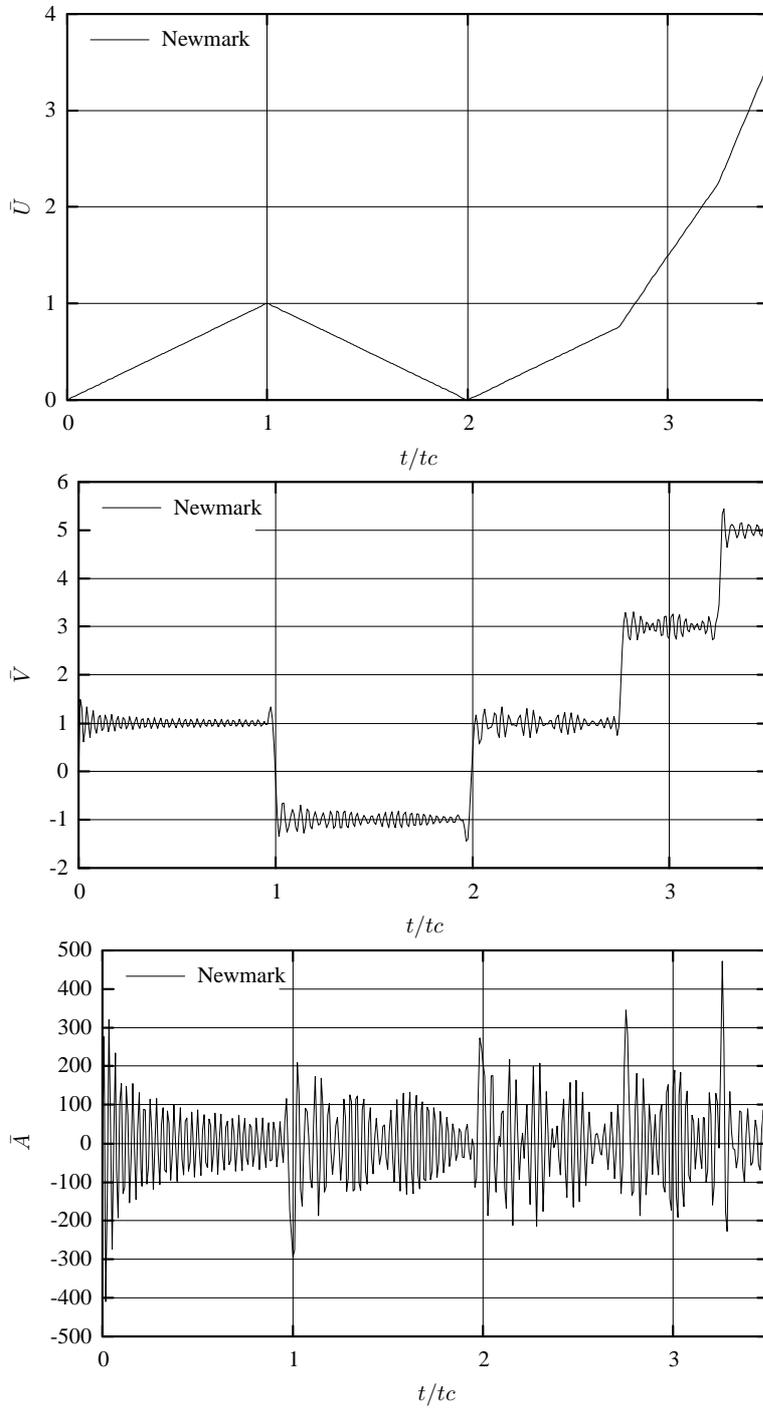
On présente ici les résultats obtenus avec la méthode de Newmark de l'accélération moyenne sur le problème test 1D défini plus haut pour lequel la discrétisation en espace a été effectuée avec la méthode des Eléments Finis Etendus. La valeur du pas de temps est de deux tiers du pas de temps critique défini précédemment pour une discrétisation Eléments Finis classique. La Figure 5.8 présente les évolutions des déplacement, vitesse et accélération normalisés à l'extrémité libre du barreau et à l'interface créé.

La qualité des résultats pour le déplacement est bonne mais celle-ci se dégrade pour la vitesse et plus encore pour l'accélération. A l'instant de la "rupture" du barreau les oscillations numériques s'aggravent surtout à l'endroit où la discontinuité en espace est apparue. Les accélérations ne semblent pas avoir une signification physique bien que la taille de pas de temps choisie soit assez petite. Ceci met en évidence la nécessité d'améliorer l'intégration des discontinuités temporelles. Cette nécessité apparaît d'autant plus clairement lors de l'apparition brutale de discontinuité d'espace comme c'est le cas dans les simulations de propagation dynamique de fissure.

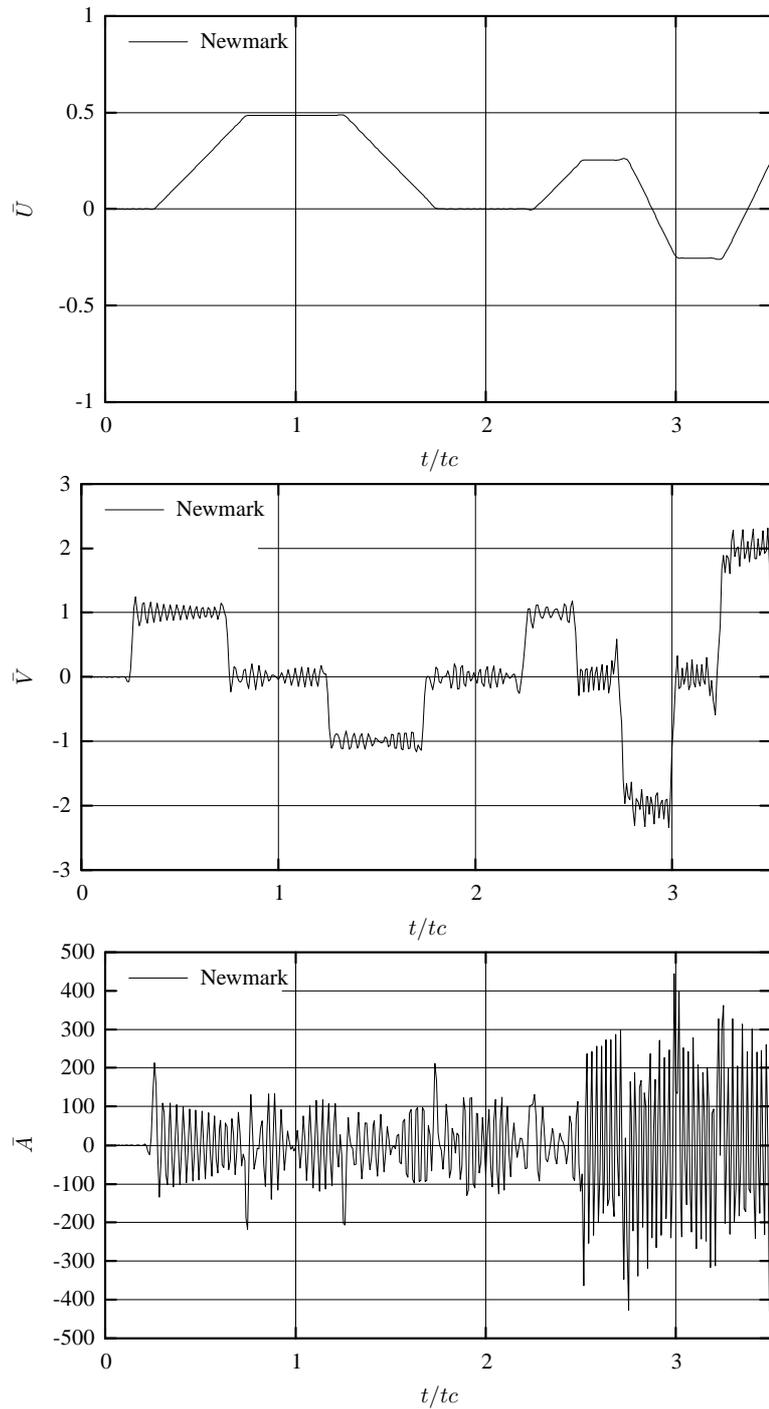
**Remarque 9** *Le choix du schéma de l'accélération moyenne n'est pas des plus judicieux pour ce problème. En effet, on peut montrer que, dans le cas considéré ici (avant rupture), le schéma explicite de la différence centrée permet de retrouver exactement la solution analytique si on choisit le pas de temps égal au pas de temps critique. Ceci n'est cependant valable que dans certaines applications très particulières. L'utilisation des Eléments Finis Etendus nous imposant de choisir un schéma inconditionnellement stable (cf. [GER 99]), on ne considérera désormais que le schéma de l'accélération moyenne.*

#### 2.4.1.5 Schémas voisins de la méthode de Newmark

De nombreux travaux ont été menés (voir [KUH 99] ou [NOE 04] pour une revue détaillée) dans le but d'atténuer les oscillations numériques précédemment évoquées ou de garantir la stabilité et la conservation de l'énergie en non-linéaire. Les objectifs étant de : conserver un ordre de convergence égal à 2 comme pour les schémas les plus utilisés parmi ceux de la famille de Newmark, éviter les oscillations numériques hautes fréquences en introduisant de la dissipation numérique sans perturber les basses fréquences ayant un caractère physique et de conserver l'énergie. Sur la base de la méthode de Newmark, Chung et Hulbert proposent dans [CHU 93] ce qu'ils nomment les méthodes  $\alpha$ -généralisées incluant les modifications apportées par Bossak [WOO 80] et Hilber [HIL 77] (méthode HHT). Le principe est de pondérer les différents termes de l'équation d'équilibre dynamique à l'aide de coefficients  $\alpha$  dont le choix influe sur les fréquences atténuées. Ces schémas permettent d'amortir les oscillations numériques mais ils ne garantissent ni la stabilité ni la conservation de l'énergie dans le cas non-linéaire. Il faut mentionner les travaux de Simo [SIM 92] qui dans un cadre non-linéaire (géométrique et/ou matériau) permettent de conserver



(a)



(b)

Figure 2.4: Problème test 1D par la méthode de Newmark  
 Schéma de l'accélération moyenne ( $\gamma_N = \frac{1}{2}$ ,  $\beta_N = \frac{1}{4}$ )  
 Déplacement, vitesse et accélération normalisés à l'extrémité libre du barreau (a)  
 et à l'interface créée (b)

exactement l'énergie, la quantité de mouvement et le moment cinétique avec un ordre de convergence égal à 2 (algorithme EMCA pour Energy Momentum Conserving Algorithm). Les algorithmes EMCA ne résolvant pas les problèmes des oscillations provoquées par la discrétisation spatiale, Armero et Romero [ARM 01a, ARM 01b] proposent de dégrader la conservation de l'énergie tout en préservant la conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique (Energy Dissipative Momentum Conserving). Une autre solution est proposée par Hughes *et al.* [HUG 78a] pour garantir la conservation de l'énergie dans le cadre de l'utilisation de méthodes  $\alpha$ -généralisées en non-linéaire. Il s'agit d'augmenter les équations avec des contraintes de conservation d'énergie (Constraint Energy Momentum Algorithm). Une approche similaire est proposée par Kuhl *et al.* [KUH 99] à partir d'une méthode EDMC (Modify Energy Momentum Method).

### 2.4.2 Méthode de Galerkin discontinue en temps

Un net regain d'intérêt pour les méthodes de Galerkin discontinue en temps semble avoir lieu ces dernières années. Les premières applications de ce type de méthode à l'élasto-dynamique datent des travaux de Hulbert et Hughes [HUG 88, HUL 90]. On distingue généralement deux grandes classes de méthode de Galerkin discontinue en temps. La première consiste à prendre comme inconnues primales les vitesses ( $v_n^+, v_{n+1}^-$ ) au début et à la fin de l'intervalle de temps, le déplacement étant obtenu par intégration directe de l'approximation de la vitesse. Dans ce type d'interpolation, la vitesse est dite  $P1$  (interpolation linéaire) et le déplacement  $P2$ . On trouve aussi des formulations  $P3 - P1$  (déplacement  $P3$ , vitesse  $P1$ ) qui donnent des résultats identiques aux instants discrets, la solution recalculée dans les intervalles de temps étant différente. La deuxième classe de méthode dites  $P1 - P1$  pose le déplacement et la vitesse comme inconnues primales adoptant la même interpolation linéaire pour ces deux quantités. Les propriétés des méthodes  $P1 - P1$  sont différentes dans la mesure où la relation cinématique entre le déplacement et la vitesse est rompue (le déplacement  $P1$  n'est pas obtenu par dérivation de la vitesse  $P1$ ). Ces méthodes sont tout à fait adaptées dans le cadre de l'utilisation de méthodes à maillages adaptatifs : elles permettent de calculer une solution continue en espace mais présentant des discontinuités en temps dues à des adaptations du maillage aux instants de discrétisation. Citons, en plus des travaux de Hughes et Hulbert, les références [FRE 93, JOH 93, HUL 92, AUB 99, LI 98, MIC 03, LI 03, TIE 03, HUA 02]. Les méthodes de Galerkin discontinues en temps conduisent la plupart du temps à des schémas implicites inconditionnellement stables d'ordre 3. Pour des applications au cas non-linéaire par exemple, on trouve le développement d'un schéma explicite dans [EKE 02, LI 99] en tronquant les itérations de la méthode de Newton-Raphson utilisée pour la version implicite.

# Chapitre 3

## Calcul numérique des paramètres de fissuration

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>30</b>
<b>3.2</b>	<b>Lagrangien d'interaction</b>	<b>30</b>
<b>3.3</b>	<b>Intégrale indépendante du contour</b>	<b>32</b>
<b>3.4</b>	<b>Lien avec les facteurs d'intensité des contraintes</b>	<b>34</b>
<b>3.5</b>	<b>Intégrale d'interaction</b>	<b>35</b>
<b>3.6</b>	<b>Calcul numérique des facteurs d'intensité des contraintes</b>	<b>37</b>
<b>3.7</b>	<b>Exemples</b>	<b>40</b>
3.7.1	Flexion 3 points	40
3.7.2	Fissure dans une plaque semi-infinie sous sollicitation mixte	43

---

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, l'objectif est d'écrire une intégrale indépendante du domaine qui permette de calculer les facteurs d'intensité des contraintes pour un problème tridimensionnel. On propose une extension des travaux de Attigui et Petit [ATT 97] au cas tridimensionnel avec fissure quelconque. Deux concepts utiles pour l'établissement de telles intégrales à partir des lois de conservation [NOE 18, CHE 77] sont le champ d'extension virtuelle de la fissure [DES 83, SUO 92] et les champs auxiliaires ou champs adjoints [BUI 78, BUI 83, CHE 77]. On peut trouver des utilisations de ces concepts pour diverses cas d'applications dans les références suivantes : [KRY 99, ORG 96, GOZ 97, GRA 02].

### 3.2 Lagrangien d'interaction

En conservant les mêmes notations que dans les chapitres précédents, on définit de manière un peu abusive un Lagrangien local par :

$$l = \tau - (w - w_{ext}) \quad (3.1)$$

Dans le but de séparer les contributions des différents modes de rupture, on écrit un problème à deux champs :  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}^{aux}$ .  $\mathbf{u}$  est le champ de déplacement solution et  $\mathbf{u}^{aux}$  un champ de déplacement auxiliaire. Ces deux champs sont cinématiquement admissibles. On peut écrire le Lagrangien local du champ de déplacement total  $\mathbf{u}^{tot} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^{aux}$  :

$$l(\mathbf{u}^{tot}) = l(\mathbf{u}) + l(\mathbf{u}^{aux}) + l^{int}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^{aux}) \quad (3.2)$$

Dans cette équation,  $l^{int}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^{aux})$  est le Lagrangien d'interaction dont l'expression peut être développée comme suit :

$$l^{int}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^{aux}) = w^{int} - \tau^{int} \quad (3.3)$$

avec

$$\begin{aligned} w^{int} &= \sigma : \nabla \mathbf{u}^{aux} = \sigma^{aux} : \nabla \mathbf{u} = [\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})] u_{i,j}^{aux} \\ \tau^{int} &= \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{aux} = \rho u_{i,t} \dot{u}_{i,t}^{aux} \end{aligned}$$

**Remarque 10** ou  $_{,t}$  désigne la dérivée partielle par rapport au temps et  $_{,i}$  les dérivées partielles spatiales.

**Remarque 11** Le travail des actions extérieures n'apparaît pas dans l'expression du Lagrangien d'interaction car c'est une forme linéaire du champ de déplacement.

On va calculer la variation de ce Lagrangien d'interaction pour une avancée virtuelle de la fissure  $\delta a$  dans la direction  $\mathbf{x}_1$  ( $\mathbf{x}_i$  est le repère accroché à la position initiale du front). On considère un champ d'extension virtuelle  $\mathbf{q}$  défini sur tout le domaine auquel on impose de valoir  $\delta a \mathbf{x}_1$  au front de la fissure. On se place dans la configuration Eulerienne qui suit la fissure lors de son extension virtuelle. En description

Eulerienne, la variation du Lagrangien d'interaction est due uniquement à la propagation virtuelle de la fissure. On peut tout d'abord l'écrire de la façon suivante en considérant  $l^{int}$  comme une fonction de la position  $\mathbf{x}$  :

$$\delta l^{int}(\mathbf{x}) = \frac{\partial l^{int}}{\partial x_j} q_j = \frac{\partial l^{int}}{\partial x_j} q_j - l^{int} q_{j,j} \quad (3.4)$$

Dans un deuxième temps,  $l^{int}$  est considéré comme une fonction des champs de déformation et de vitesse, réels et auxiliaires :  $l^{int}(\varepsilon(\mathbf{u}), \dot{\mathbf{u}}, \varepsilon(\mathbf{u}^{aux}), \dot{\mathbf{u}}^{aux})$ . On peut alors écrire la variation de  $l^{int}$  en fonction de la variation de ses variables :

$$\delta l^{int} = \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,j}} \delta u_{i,j} + \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,t}} \delta u_{i,t} + \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,j}^{aux}} \delta u_{i,j}^{aux} + \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,t}^{aux}} \delta u_{i,t}^{aux} \quad (3.5)$$

en remarquant que pour un champ  $v$  nous avons  $\delta v = \frac{\partial v}{\partial x_k} \delta q_k$ , on obtient :

$$\delta l^{int} = \left( \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,j}} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x_k} + \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,t}} \frac{\partial u_{i,t}}{\partial x_k} + \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,j}^{aux}} \frac{\partial u_{i,j}^{aux}}{\partial x_k} + \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,t}^{aux}} \frac{\partial u_{i,t}^{aux}}{\partial x_k} \right) q_k \quad (3.6)$$

En utilisant la régularité de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}^{aux}$ , on peut permuter l'ordre des dérivations pour écrire :

$$\delta l^{int} = \left( \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,j}} \frac{\partial u_{i,k}}{\partial x_j} + \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,t}} \frac{\partial u_{i,k}}{\partial t} + \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,j}^{aux}} \frac{\partial u_{i,k}^{aux}}{\partial x_j} + \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,t}^{aux}} \frac{\partial u_{i,k}^{aux}}{\partial t} \right) q_k \quad (3.7)$$

En jouant avec les règles de dérivation d'un produit, l'équation précédente se transforme en :

$$\begin{aligned} \delta l^{int} = & \left( \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,j}} u_{i,k} q_k + \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,j}^{aux}} u_{i,k}^{aux} q_k \right)_{,j} \\ & - \left( \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,j}} \right)_{,j} u_{i,k} q_k - \left( \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,j}^{aux}} \right)_{,j} u_{i,k}^{aux} q_k \\ & - \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,j}} u_{i,k} q_{k,j} - \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,j}^{aux}} u_{i,k}^{aux} q_{k,j} \\ & + \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,t}} u_{i,t k} q_k + \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,t}^{aux}} u_{i,t k}^{aux} q_k \end{aligned} \quad (3.8)$$

Or, d'après la définition de  $l^{int}$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,j}} &= \frac{\partial w^{int}}{\partial u_{i,j}} = \sigma_{ij}^{aux} & \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,j}^{aux}} &= \frac{\partial w^{int}}{\partial u_{i,j}^{aux}} = \sigma_{ij} \\ \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,t}} &= -\frac{\partial \tau^{int}}{\partial u_{i,t}} = -\rho u_{i,t}^{aux} & \frac{\partial l^{int}}{\partial u_{i,t}^{aux}} &= -\frac{\partial \tau^{int}}{\partial u_{i,t}^{aux}} = -\rho u_{i,t} \end{aligned}$$

d'où, en remplaçant dans l'Equation (3.8) :

$$\begin{aligned} \delta l^{int} = & \left( \sigma_{ij}^{aux} u_{i,k} q_k + \sigma_{ij} u_{i,k}^{aux} q_k \right)_{,j} \\ & - \sigma_{ij,j}^{aux} u_{i,k} q_k - \sigma_{ij,j} u_{i,k}^{aux} q_k \\ & - \sigma_{ij}^{aux} u_{i,k} q_{k,j} - \sigma_{ij} u_{i,k}^{aux} q_{k,j} \\ & - \rho u_{i,t}^{aux} u_{i,t k} q_k - \rho u_{i,t} u_{i,t k}^{aux} q_k \end{aligned} \quad (3.9)$$

L'étape suivante consiste à écrire l'égalité entre les deux expressions de la variation du Lagrangien d'interaction (Equations (3.9) et (3.4)). On obtient :

$$\begin{aligned}
 0 = & \left( l^{int} q_j - (\sigma_{ij}^{aux} u_{i,k} q_k + \sigma_{ij} u_{i,k}^{aux}) q_k \right)_{,j} \\
 & + \left[ (\sigma_{ij,j}^{aux} u_{i,k} + \sigma_{ij,j} u_{i,k}^{aux}) + (\rho u_{i,t}^{aux} u_{i,tk} + \rho u_{i,t} u_{i,tk}^{aux}) \right] q_k \\
 & + \left[ \sigma_{ij}^{aux} u_{i,k} + \sigma_{ij} u_{i,k}^{aux} \right] q_{k,j}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

On pose alors

$$\begin{aligned}
 P_{kj}^{int} &= l^{int} \delta_{kj} - (\sigma_{ij}^{aux} u_{i,k} + \sigma_{ij} u_{i,k}^{aux}) \\
 Q_k^{int} &= \left[ (\sigma_{ij,j}^{aux} u_{i,k} + \sigma_{ij,j} u_{i,k}^{aux}) + (\rho u_{i,t}^{aux} u_{i,tk} + \rho u_{i,t} u_{i,tk}^{aux}) \right] \\
 R_{kj}^{int} &= \left[ \sigma_{ij}^{aux} u_{i,k} + \sigma_{ij} u_{i,k}^{aux} \right]
 \end{aligned}$$

L'Equation (3.10) s'écrit avec ces notations :

$$(P_{kj}^{int} q_k)_{,j} + Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j} = 0 \tag{3.11}$$

**Remarque 12** Si on prend le champ  $\mathbf{q}$  constant, on peut obtenir un équation locale générale qui permettra ultérieurement de simplifier les expressions :

$$(P_{kj}^{int})_{,j} + Q_k^{int} = 0 \tag{3.12}$$

### 3.3 Intégrale indépendante du contour

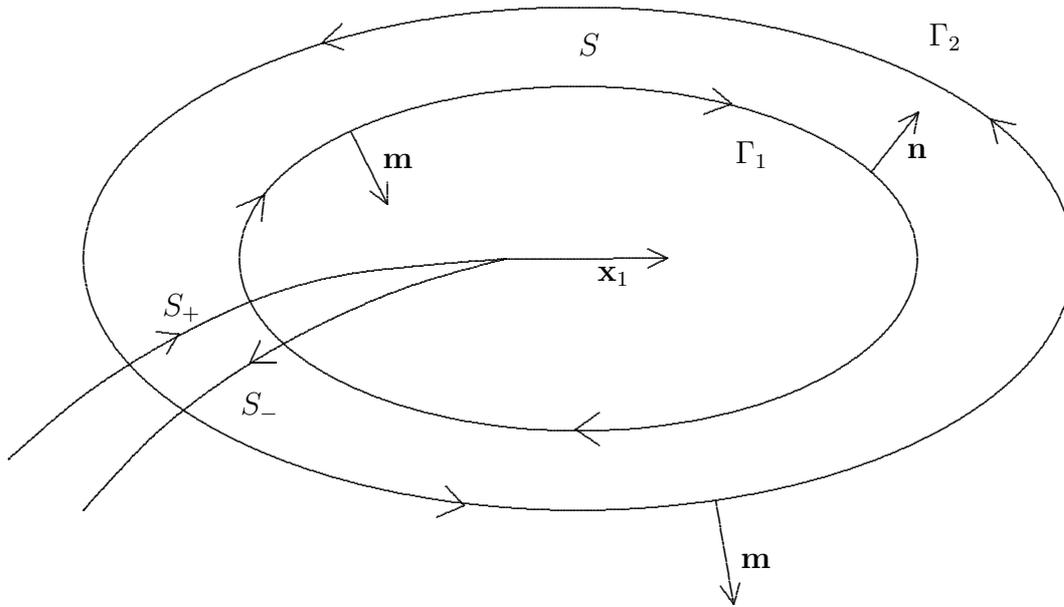


Figure 3.1: Différents contours pour l'intégration de  $\delta l^{int}$  en 2D

L'objectif de cette section est d'écrire, en intégrant sur un domaine bien choisi l'Equation (3.11), une intégrale indépendante du contour. Pour cela, on se restreint à un problème bidimensionnel dans un plan normal au front de la fissure. Dans ce plan, on définit un domaine d'intégration fermé  $S$  représenté sur la Figure 3.1 Son contour est  $\partial S = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup S_+ \cup S_-$  où  $S_+$  et  $S_-$  sont les lèvres de la fissure. En intégrant l'Equation (3.11) sur le domaine  $S$  qui ne contient pas de discontinuités on a :

$$\int_S \left[ (P_{kj}^{int} q_k)_{,j} + Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j} \right] dS = 0 \quad (3.13)$$

En notant  $\mathbf{m}$  la normale extérieure au contour  $\partial S$  et en utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradsky, on a :

$$\int_{\partial S} P_{kj}^{int} q_k m_j ds + \int_S [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS = 0 \quad (3.14)$$

Si on s'intéresse à la partie intégrale de surface, on peut définir  $A(\Gamma_1)$ , respectivement  $A(\Gamma_2)$ , l'aire du domaine à l'intérieur du contour  $\Gamma_1 \cup S_+ \cup S_-$ , respectivement  $\Gamma_2 \cup S_+ \cup S_-$ . On peut alors écrire :

$$\int_S [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS = \int_{A(\Gamma_2)} [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS - \int_{A(\Gamma_1)} [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS$$

Pour l'intégrale de contour, en notant  $\mathbf{n}$  la normale extérieure définie sur les contours  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , on a  $\mathbf{n} = -\mathbf{m}$  sur  $\Gamma_1$  et  $\mathbf{n} = \mathbf{m}$  sur  $\Gamma_2$ . On en déduit :

$$\int_{\partial S} P_{kj}^{int} q_k m_j ds = \int_{\Gamma_2} P_{kj}^{int} q_k n_j ds - \int_{\Gamma_1} P_{kj}^{int} q_k n_j ds + \int_{S_+ \cup S_-} P_{kj}^{int} q_k m_j ds$$

On fait l'hypothèse que les lèvres de la fissure sont libres dans la solution réelle ( $\sigma(\mathbf{m}) = \mathbf{0}$ ) et dans la solution auxiliaire ( $\sigma^{aux}(\mathbf{m}) = \mathbf{0}$ ). Si de plus on impose que le champ d'extension virtuelle de la fissure soit tangent aux lèvres en tout point ( $\mathbf{q} \cdot \mathbf{m} = 0$ ), le terme d'intégrale sur les lèvres s'annule :

$$\int_{S_+ \cup S_-} P_{kj}^{int} q_k m_j ds = 0$$

On obtient finalement l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{A(\Gamma_2)} [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS + \int_{\Gamma_2} P_{kj}^{int} q_k n_j ds \\ &= \int_{A(\Gamma_1)} [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS + \int_{\Gamma_1} P_{kj}^{int} q_k n_j ds \end{aligned} \quad (3.15)$$

Cette dernière équation montre que la quantité  $\Phi(\Gamma, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{aux})$  définie ci-dessous est indépendante du contour ( $\Gamma$  étant un contour quelconque entourant la pointe de la fissure) :

$$\Phi(\Gamma, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{aux}) = \int_{\Gamma} P_{kj}^{int} q_k n_j ds + \int_{A(\Gamma)} [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS \quad (3.16)$$

### 3.4 Lien avec les facteurs d'intensité des contraintes

La finalité des développements présentés dans ce chapitre étant d'écrire un quantité indépendante du contour permettant de calculer les facteurs d'intensité des contraintes, on va s'efforcer dans cette section de relier  $\Phi$  à ces derniers. Pour cela, il est nécessaire de se replacer sous les mêmes hypothèses que celles formulées pour obtenir l'intégrale  $J$  ou les développements asymptotiques (cf. chapitre 1). Nous verrons ensuite comment procéder dans le cadre plus général que nous envisageons ici. Faisons maintenant l'hypothèse que la fissure est droite. Le champ d'extension virtuelle est donc constant et s'écrit  $\mathbf{q} = \delta a \mathbf{x}_1$ . Dans ces conditions le terme faisant intervenir les dérivées de  $\mathbf{q}$  s'annule. Il vient :

$$\Phi(\Gamma, \delta a \mathbf{x}_1, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{aux}) = \int_{\Gamma} F_{1j}^{int} n_j \delta a ds + \int_{A(\Gamma)} Q_1^{int} \delta a dS \quad (3.17)$$

Pour retrouver le problème réel, prenons comme champ auxiliaire le champ réel ( $\dot{f} = f_{,t}$ ). On en déduit :

$$\begin{aligned} \Phi(\Gamma, \delta a \mathbf{x}_1, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Gamma} [(\sigma_{pq} u_{p,q} - \rho \dot{u}_p \dot{u}_p) \delta_{1j} - 2\sigma_{ij} u_{i,1}] n_j \delta a ds \\ + 2 \int_{A(\Gamma)} [\sigma_{ij,j} u_{i,1} + \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,1}] \delta a dS \end{aligned} \quad (3.18)$$

Le champ réel satisfaisant l'équation d'équilibre dynamique on a :

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i$$

et

$$\sigma_{ij,j} u_{i,1} + \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,1} = \rho \ddot{u}_i u_{i,1} + \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,1} = (\rho \dot{u}_i u_{i,1})_{,t}$$

On peut alors faire apparaître la dérivée totale :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{A(\Gamma)} \cdot dS \right) = \left( \int_{A(\Gamma)} (\cdot)_{,t} dS \right) + \int_{A(\Gamma)} (\cdot) n_1 \dot{a} dS$$

d'où on tire

$$\int_{A(\Gamma)} (\rho \dot{u}_i u_{i,1})_{,t} dS = \frac{d}{dt} \left[ \int_{A(\Gamma)} \rho \dot{u}_i u_{i,1} dS \right] - \int_{\Gamma} \rho \dot{u}_i u_{i,1} n_1 \dot{a} ds$$

Et finalement on trouve

$$\begin{aligned} \Phi(\Gamma, \delta a \mathbf{x}_1, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Gamma} [(\sigma_{pq} u_{p,q} - \rho \dot{u}_p \dot{u}_p - 2\rho \dot{u}_i u_{i,1}) \dot{a}] \delta_{1j} - 2\sigma_{ij} u_{i,1}] n_j \delta a ds \\ + 2 \frac{d}{dt} \left[ \int_{A(\Gamma)} \rho \dot{u}_i u_{i,1} \delta a dS \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

En prenant un  $\delta a$  unitaire on trouve :

$$\Phi(\Gamma, \mathbf{x}_1, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 2J \quad (3.20)$$

où  $J$  est la généralisation l'intégrale de Rice pour la dynamique donnée dans [BUI 78]. Le résultat obtenu en injectant l'expression des champs asymptotiques est identique

à celui obtenu avec le taux de restitution de l'énergie. En déformation plane, on obtient :

$$\Phi(\Gamma, \mathbf{x}_1, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 2 \frac{1 - \nu^2}{E} \left( f_1(\dot{a}) K_1^{dyn} K_1^{dyn} + f_2(\dot{a}) K_2^{dyn} K_2^{dyn} \right) \quad (3.21)$$

Si le champ auxiliaire n'est plus égal au champ réel, on a par conséquent :

$$\Phi(\Gamma, \mathbf{x}_1, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{aux}) = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \left( f_1(\dot{a}) K_1^{dyn} K_1^{aux} + f_2(\dot{a}) K_2^{dyn} K_2^{aux} \right) \quad (3.22)$$

Dans cette égalité, les  $K_i^{aux}$  sont les facteurs d'intensité des contraintes correspondant à la solution auxiliaire. L'intégrale que l'on obtient pour une fissure droite est identique à l'intégrale  $M$  vue dans [ATT 97]

Pour une fissure quelconque, un passage à la limite quand  $\Gamma$  tend vers le front de la fissure permet de conserver l'égalité à condition que  $\mathbf{q} = \mathbf{x}_1$  au niveau du front et  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur les lèvres de la fissure. On a alors :

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \Phi(\Gamma, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{aux}) = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \left( f_1(\dot{a}) K_1^{dyn} K_1^{aux} + f_2(\dot{a}) K_2^{dyn} K_2^{aux} \right)$$

### 3.5 Intégrale d'interaction

Le but de cette section est donc d'obtenir à partir de  $\Phi$  une intégrale de surface pour les problèmes 2D (de volume pour les problèmes 3D). On définit l'intégrale d'interaction  $I^{int}$  :

$$I^{int} = \lim_{\Gamma_1 \rightarrow 0} \Phi(\Gamma_1, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{aux})$$

où  $\Gamma_1$  est le contour intérieur du domaine  $S$  défini plus haut,  $\mathbf{q}$  est le champ d'extension virtuelle de la fissure. Pour pouvoir relier  $I^{int}$  aux facteurs d'intensité des contraintes, le champ d'extension virtuelle  $\mathbf{q}$  doit être égal à  $\mathbf{x}_1 \delta l$  au front de la fissure et doit respecter la géométrie de celle-ci ( $\mathbf{q}$  tangent aux lèvres de la fissure). Afin de pouvoir faire intervenir les intégrales sur  $\Gamma_2$  dans  $I^{int}$  on impose de plus à  $\mathbf{q}$  d'être nul sur ce contour :

$$\mathbf{q} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_2 \text{ et en dehors de } \Gamma_2 \\ \mathbf{x}_1 \delta l & \text{sur le front de la fissure} \\ \text{tangent aux lèvres de la fissure en tout point} \end{cases} \quad (3.23)$$

On peut écrire  $\Phi(\Gamma_1, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{aux})$  de la façon suivante :

$$\Phi(\Gamma_1, \mathbf{q}) = \int_{\Gamma_1} P_{kj}^{int} q_k n_j ds + \int_{A(\Gamma_1)} [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS \quad (3.24)$$

En utilisant les propriétés imposées à  $\mathbf{q}$ , il vient :

$$\begin{aligned} \Phi(\Gamma_1, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{aux}) &= - \int_{\partial S} P_{kj}^{int} q_k m_j ds + \int_{A(\Gamma_1)} [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS \\ &= - \int_S (P_{kj}^{int} q_k)_{,j} dS + \int_{A(\Gamma_1)} [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS \end{aligned} \quad (3.25)$$

Si on pose  $A = A(\Gamma_2)$ , on peut écrire la limite du premier terme de l'équation précédente :

$$\left( - \int_S (P_{kj}^{int} q_k)_{,j} dS \right) \longrightarrow - \int_A (P_{kj}^{int} q_k)_{,j} dS \quad (3.26)$$

Comme  $\mathbf{q}$  vaut  $\mathbf{0}$  dans  $\Omega - (S \cup A(\Gamma_1))$ , le deuxième terme devient :

$$\int_{A(\Gamma_1)} [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS = \int_{\Omega} [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS - \int_S [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS \quad (3.27)$$

D'où en passant à la limite

$$\int_{A(\Gamma_1)} [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS \longrightarrow \int_{\Omega} [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS - \int_A [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS \quad (3.28)$$

Mais  $\mathbf{q}$  vaut aussi  $\mathbf{0}$  dans  $\Omega - A$ , donc :

$$\int_{\Omega} [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS = \int_A [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS \quad (3.29)$$

ce qui donne pour la limite dans l'Equation (3.28) :

$$\lim_{\Gamma_1 \rightarrow 0} \left( \int_{A(\Gamma_1)} [Q_k^{int} q_k + R_{kj}^{int} q_{k,j}] dS \right) = 0$$

Et finalement on obtient  $I^{int}$  sous la forme d'un intégrale de surface indépendante du domaine :

$$I^{int} = - \int_A (P_{kj}^{int} q_k)_{,j} dS \quad (3.30)$$

En utilisant les définitions de  $\mathbb{P}^{int}$  et  $\mathbf{Q}^{int}$  ainsi que l'équation locale qui les relie (Equation (3.12)), on développe  $I^{int}$  comme suit :

$$I^{int} = - \int_A q_{k,j} [(\sigma_{pq}^{aux} u_{p,q} - \rho \dot{u}_p \dot{u}_p^{aux}) \delta_{kj} - (\sigma_{ij}^{aux} u_{i,k} + \sigma_{ij} u_{i,k}^{aux})] dS + \int_A q_k [(\sigma_{ij,j}^{aux} u_{i,k} + \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,k}^{aux}) + (\rho \dot{u}_i^{aux} \dot{u}_{i,k} + \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,k}^{aux})] dS \quad (3.31)$$

Dans cette expression,  $\sigma_{ij,j}$  a été remplacé par  $\rho \dot{u}_i$  car le champ réel vérifie l'équation d'équilibre dynamique. On a choisi de ne pas faire cette hypothèse pour le champ auxiliaire. En effet, l'intégrale écrite ici a été développée dans le cas d'une fissure de géométrie quelconque. Ceci implique que le champ auxiliaire doit s'appuyer sur cette géométrie. L'utilisation des Eléments Finis Etendus et des fonctions de niveaux pour représenter cette géométrie permet d'effectuer une transformation des champs asymptotiques connus pour une fissure droite afin de les faire épouser cette géométrie. Après une telle opération l'hypothèse de lèvres de fissure libre d'effort est encore satisfaite mais les champs déformés par cette opération ne vérifient plus strictement l'équilibre. Le terme  $\sigma_{ij,j}^{aux}$  est donc laissé tel quel.

Pour un problème 3D, le résultat est identique pour  $I^{int}$  ( en remplaçant le contour  $\Gamma_2$  par la surface  $C_2$  et la surface  $A$  par le volume  $V = V(C_2)$ ) en choisissant le

champ d'extension virtuelle suivant

$$\mathbf{q} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{sur } C_2 \cup S_1 \cup S_2 \text{ et en dehors de } C_2 \\ \mathbf{x}_1 \delta l & \text{sur le front de la fissure} \\ \text{tangent aux lèvres de la fissure en tout point} & \end{cases} \quad (3.32)$$

pour lequel les notations sont présentées sur la Figure (3.2)

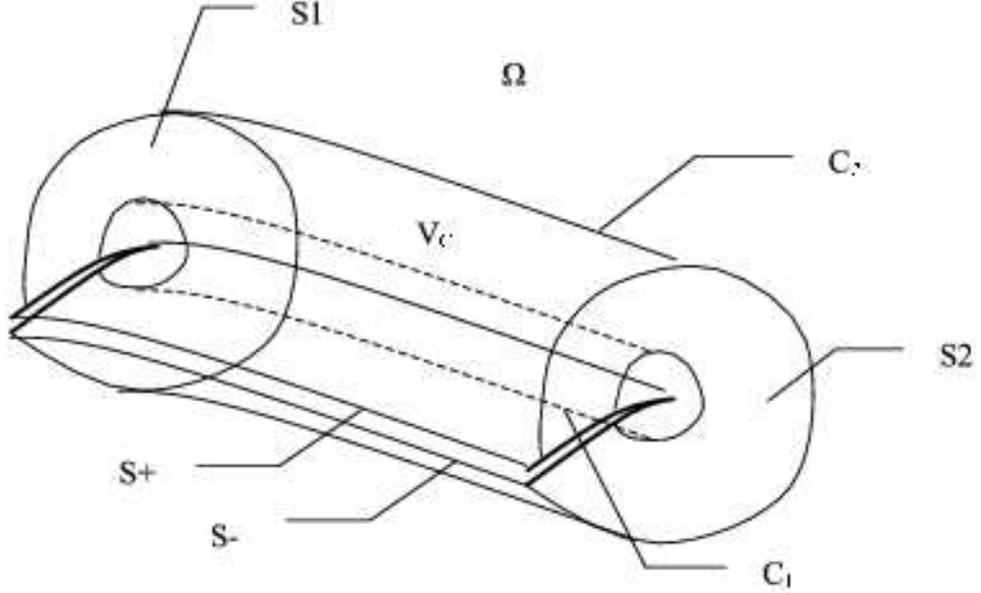


Figure 3.2: Différents contours pour l'intégration de  $I^{int}$  en 3D

### 3.6 Calcul numérique des facteurs d'intensité des contraintes

On va ici détailler la procédure permettant de calculer numériquement les facteurs d'intensité des contraintes en utilisant l'intégrale d'interaction. Comme on a montré que  $\Phi$  était égale à  $2J$  dans le cas où l'on choisit de travailler avec une fissure droite et où le champ réel est choisi comme champ auxiliaire. On peut écrire en utilisant l'équivalent dynamique de la relation de Irwin :

$$\frac{I^{int}}{\int_{front} \mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_1 ds} = \frac{2}{E^*} \left( f_1(\dot{a}) K_1^{dyn} K_1^{aux} + f_2(\dot{a}) K_2^{dyn} K_2^{aux} \right) + \frac{1}{\mu} f_3(\dot{a}) K_3^{dyn} K_3^{aux} \quad (3.33)$$

Par conséquent,  $K_1^{dyn}$ ,  $K_2^{dyn}$  et  $K_3^{dyn}$  sont calculés en choisissant successivement des champs auxiliaires tels que  $(K_1^{aux} = 1, K_2^{aux} = 0, K_3^{aux} = 0)$ ,  $(K_1^{aux} = 0, K_2^{aux} = 1, K_3^{aux} = 0)$  et  $(K_1^{aux} = 0, K_2^{aux} = 0, K_3^{aux} = 1)$ . Les solutions asymptotiques

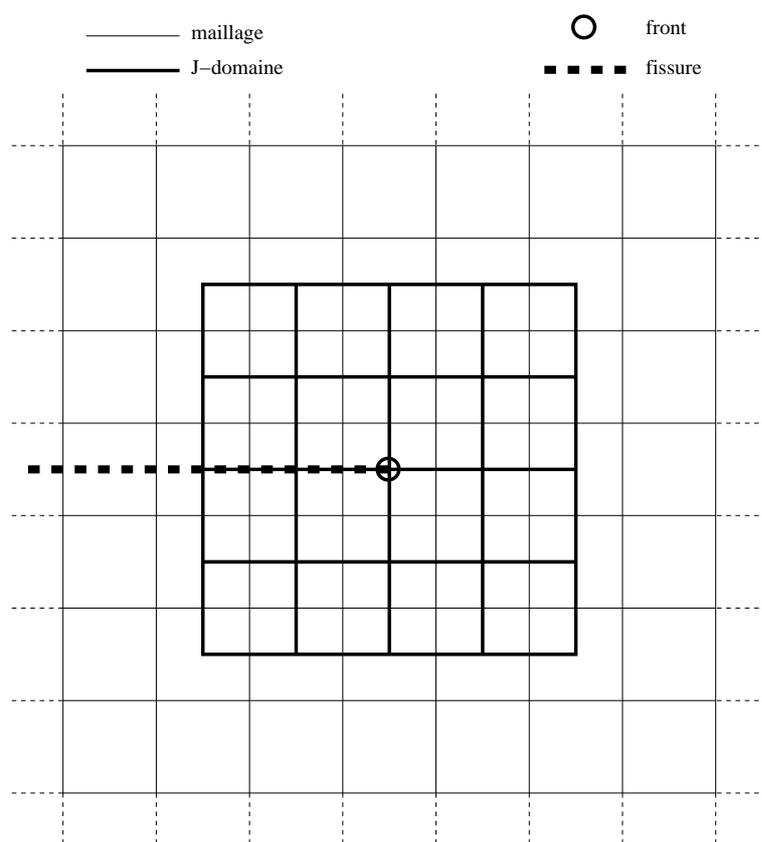


Figure 3.3:  $J$ -domain utilisé pour le calcul de l'intégrale d'interaction en 2D

---

en présence d'une fissure mobile [FRE 90] (voir Annexe 1) permettent d'obtenir le résultat souhaité. Pour le calcul numérique à proprement parler, on utilise un  $J$ -domaine [GOZ 97]. Il s'agit d'un maillage additionnel indépendant du maillage de la structure dont les éléments sont riches en point de Gauss (voir Figure 3.3) pour le  $J$ -domaine 2D). On peut choisir un champ d'extension virtuelle qui varie linéairement à l'intérieur de ce  $J$ -domaine :

$$\mathbf{q} = (1 - |\frac{x_1}{d}|)(1 - |\frac{x_2}{d}|)\mathbf{x}_1 \quad (3.34)$$

$x_i$  sont les coordonnées cartésiennes dans le repère local en front de fissure.  $d$  est la taille du  $J$ -domaine. En toute rigueur,  $\mathbf{q}$  doit être rendu compatible avec la fissure dans les cas où celle-ci est courbe. Celui-ci est donc courbé de manière à respecter la géométrie de la fissure à l'intérieur du  $J$ -domaine (voir Figure 3.4).

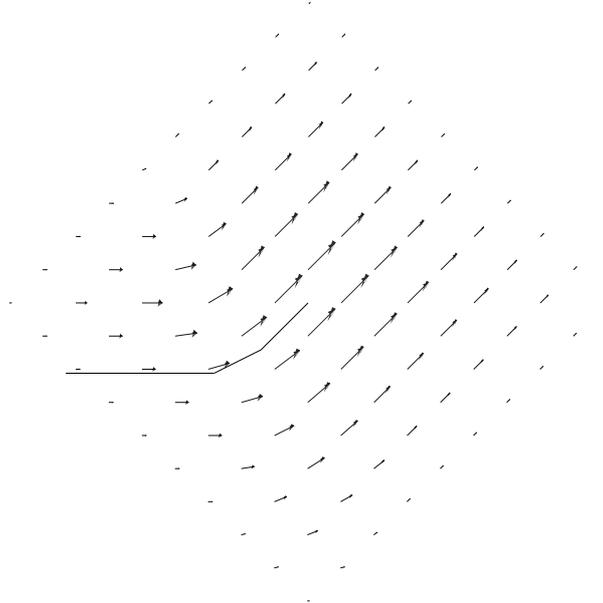


Figure 3.4: Champs d'extension virtuelle pour une fissure courbe

En 3D, on utilise la technique développée dans [GRA 02] en construisant un  $J$ -domaine formé d'éléments cubiques pouvant contenir jusqu'à 216 points de Gauss. Plusieurs  $J$ -domaines sont construits le long de la ligne du front de la fissure. Chacun d'eux est orienté par le repère local défini par la normale à la surface de la fissure, la tangente à la ligne du front qui sont deux directions orthogonales, la troisième direction étant définie de façon à former un trièdre direct (voir Figure 3.5). La norme du champ d'extension virtuelle dans le repère local varie linéairement entre 0 et 1 du centre du  $J$ -domaine à ses bords.

$$\mathbf{q} = (1 - |\frac{x_1}{d}|)(1 - |\frac{x_2}{d}|)(1 - |\frac{x_3}{e}|)\mathbf{x}_1 \quad (3.35)$$

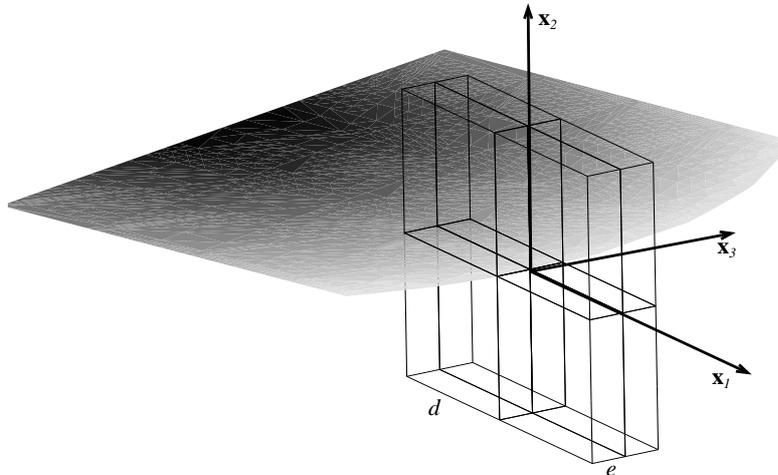


Figure 3.5:  $J$ -domaine et repère local en 3D

## 3.7 Exemples

On présente ici quelques exemples d'utilisation de cette technique appliquée à des structures fissurées sous sollicitation dynamique.

### 3.7.1 Flexion 3 points

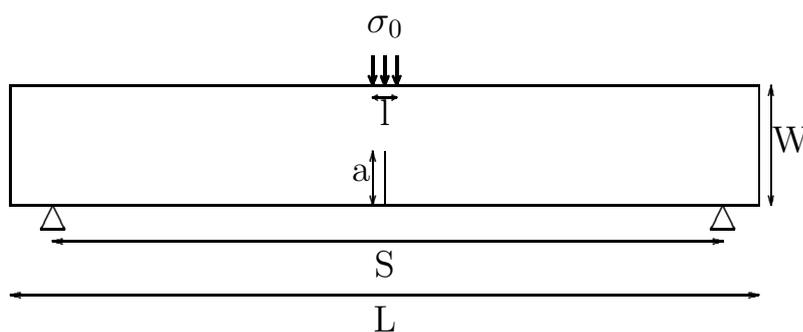


Figure 3.6: Géométrie flexion trois points

On considère le problème d'une poutre fissurée en son milieu sollicitée en flexion trois points. La géométrie est présentée par la Figure 3.6. La fissure est donc soumise à un chargement en mode 1 pur. Il est possible de montrer que dans le cas d'une sollicitation dynamique, le facteur d'intensité des contraintes dynamique varie entre 0 et 2 fois la valeur du facteur d'intensité des contraintes obtenu pour une

sollicitation statique. On peut en trouver une solution analytique dans [BUI 78] :

$$K_{1s} = \frac{6Sl\sigma_0}{4BW^2} \sqrt{\pi a \Phi\left(\frac{a}{W}\right)} \quad (3.36)$$

avec  $S$  ( $0.04m$ ) la longueur entre appuis,  $a$  ( $0.005m$ ) la longueur de la fissure,  $L$  la longueur totale de la poutre,  $W$  ( $0.01m$ ) sa hauteur et  $B$  ( $1.0m$ ) son épaisseur. Le chargement est appliqué sous la forme d'une contrainte  $\sigma_0$  ( $400Pa$ ) imposée sur une longueur  $l$  ( $0.0025m$ ). La fonction  $\Phi$  est définie par :

$$\Phi\left(\frac{a}{W}\right) = 1.09 - 1.735\frac{a}{W} + 8.2\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 14.18\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 14.57\left(\frac{a}{W}\right)^4 \quad (3.37)$$

Les paramètres matériau sont  $E = 200GPa$ ,  $\nu = 0.3$  et  $\rho = 7860kgm^{-3}$ .

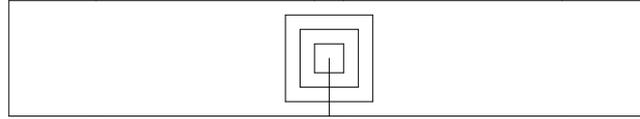


Figure 3.7: Différents domaines utilisés pour le calcul de  $K_1$

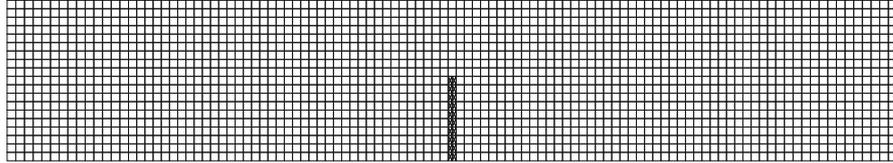


Figure 3.8: Maillage et éléments sous découpés d'une poutre en flexion 3 points

Les résultats numériques ont été obtenus en utilisant un maillage régulier constitué de  $20 \times 100$  quadrangles ( voir Figure 3.8). Sur la Figure 3.8, on peut voir les éléments sous découpés (éléments coupés par la fissure ou contenant le front de la fissure) utilisés pour l'intégration numérique des fonctions d'enrichissement singulières ou discontinues. Le schéma d'intégration en temps est le schéma de l'accélération moyenne de Newmark. La solution est calculé pour  $250\mu s$  divisées en 200 pas de temps.

Les résultats sont présentés sur la Figure 3.9. Le facteur d'intensité des contraintes  $K_1^{dyn}$  est normalisé par la valeur statique obtenue plus haut. La solution normalisée obtenue oscille comme prévu entre 0 et 2. On illustre ici la robustesse de la méthode utilisée pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes en constatant l'indépendance des résultats vis-à-vis de la taille du domaine d'intégration ( Figure 3.7).

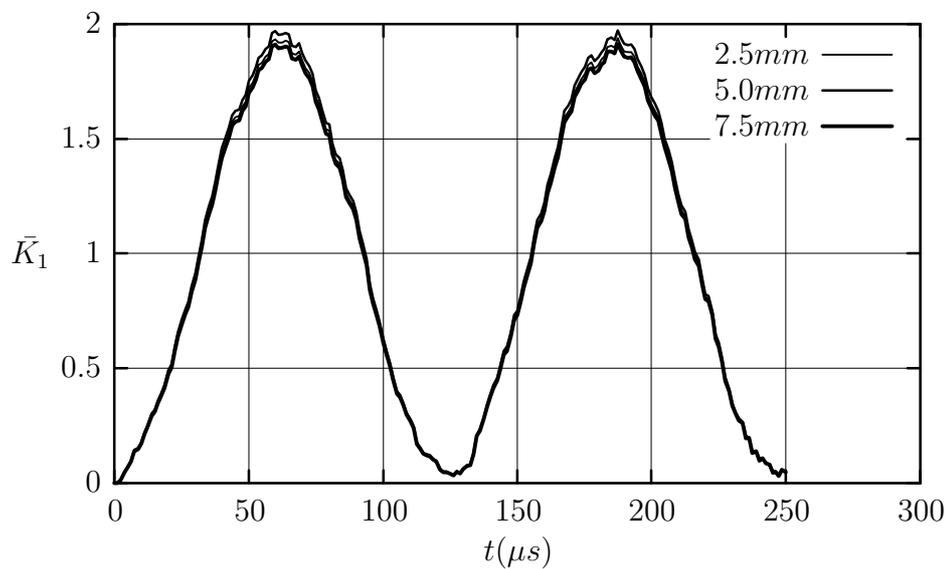


Figure 3.9:  $\bar{K}_1$  calculé pour différentes tailles de domaine

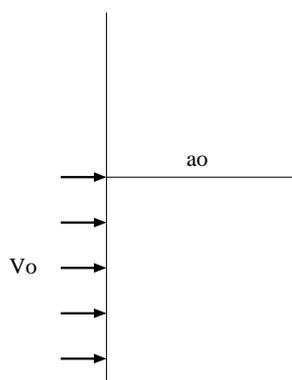


Figure 3.10: Fissure dans une plaque semi-infinie sous sollicitation mixte

### 3.7.2 Fissure dans une plaque semi-infinie sous sollicitation mixte

Le problème traité est présenté par la Figure 3.10. Lee et Freund ont obtenu une solution analytique pour ce problème dans [LEE 90]. Pour modéliser numériquement ce problème théorique, on utilise une géométrie rectangulaire de dimensions finies  $4m \times 6m$ . La longueur de la fissure est  $a_0 = 1m$ . Pour calculer une solution numérique qui ne soit pas perturbée par des réflexions ondes sur les frontières de la géométrie finie, l'intervalle d'étude est réduit à  $3t_c$  où  $t_c = \frac{c_d}{a_0}$ .  $c_d$  est la vitesse des ondes de compression dans le matériau dont les caractéristiques élastique sont fixées par  $E = 200GPa$ ,  $\nu = 0.25$  et  $\rho = 7833kgm^{-3}$ . La vitesse imposée est  $v_0 = 16.5ms^{-1}$ . Les valeurs des facteurs d'intensité des contraintes sont normalisées par  $-\frac{Ev_0}{2(1-\nu^2)c_d}\sqrt{\pi a_0}$

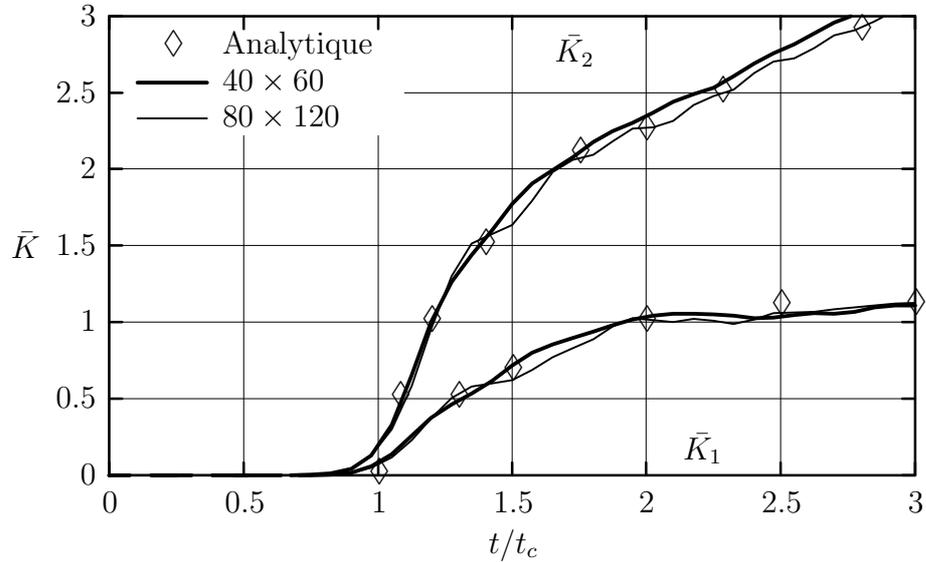


Figure 3.11: Solution  $\bar{K}$  pour différentes densités de maillage

La Figure 3.11 permet de comparer les valeurs normalisées  $\bar{K}$  des facteurs d'intensité des contraintes obtenues analytiquement dans [LEE 90] et pour différents maillages ( $40 \times 60$  et  $80 \times 120$  quadrangles). Le schéma de l'accélération moyenne est utilisé avec 40 pas de temps dans l'intervalle d'étude. La précision obtenue est satisfaisante. De plus, peu de dépendance par rapport à la taille de maille apparaît. On observe néanmoins une plus grande sensibilité aux oscillations numériques du schéma d'intégration temporelle pour le maillage fin (dont les fréquences propres se rapprochent de la fréquence de la discrétisation en temps).

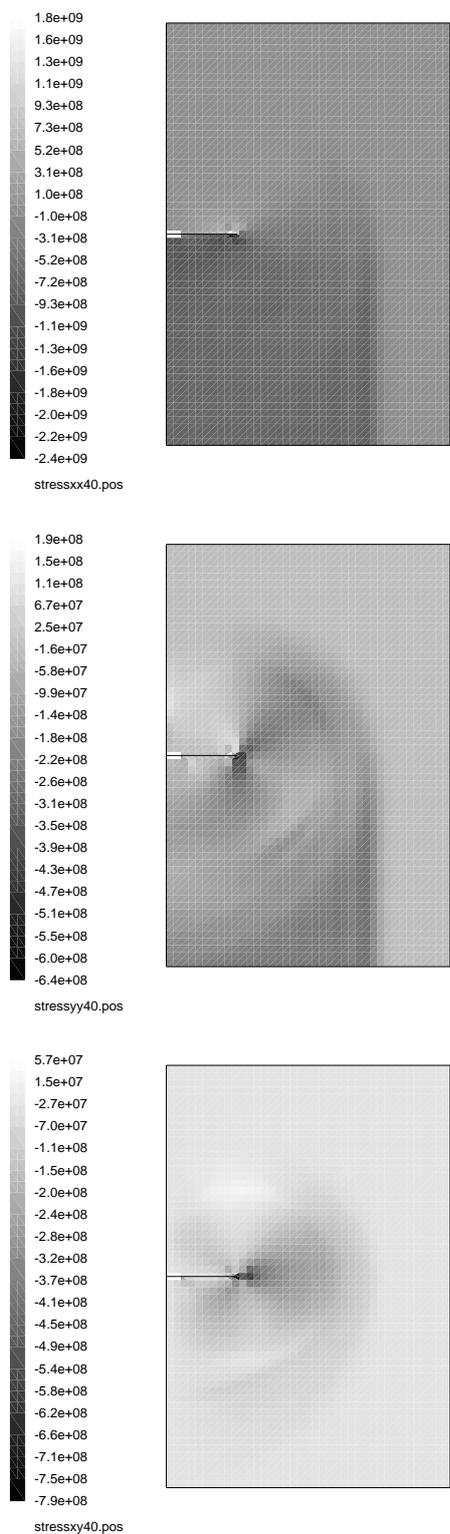


Figure 3.12: Distribution des contraintes à  $t = 3t_c$

# Chapitre 4

## Propagation dynamique de surfaces de discontinuité

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Problème de référence discrétisé</b>	<b>46</b>
<b>4.2</b>	<b>Calculs dynamiques à discrétisation variable</b>	<b>47</b>
4.2.1	Etude de stabilité	47
4.2.2	Bilan d'énergie discrétisée	48
4.2.3	Méthode de rééquilibrage	49
4.2.4	Utilisation dans le cadre des Eléments Finis	51
<b>4.3</b>	<b>Utilisation dans le cadre des Eléments Finis Etendus</b>	<b>59</b>
4.3.1	Stratégie d'enrichissement	59
4.3.2	Exemples	60
<b>4.4</b>	<b>Implémentation</b>	<b>70</b>

---

## 4.1 Problème de référence discrétisé

La discrétisation en espace est effectuée dans le cadre de la méthode des Eléments Finis. Pour la discrétisation en temps, et plus particulièrement le problème de l'intégration, on utilise un schéma de la famille de Newmark dont les constantes sont  $\gamma_N$  et  $\beta_N$ . La discrétisation du problème peut évoluer entre deux instants successifs à cause de la propagation éventuelle de la fissure. Le schéma d'intégration en temps nécessite de connaître les composantes du vecteur d'état à l'instant  $t_n$  pour calculer la solution à l'instant  $t_{n+1}$ . Le vecteur d'état de l'instant  $t_n$  doit donc être projeté sur la discrétisation en espace de l'instant  $t_{n+1}$ . On notera alors  $V_i^j$  la discrétisation d'un tenseur du premier ordre  $\mathbf{v}$  calculé à l'instant  $t_i$  sur la discrétisation de l'instant  $t_j$ . On peut alors définir l'opérateur de projection  $\Pi_{i,j}$  par :

$$V_i^i = \Pi_{i,j} V_i^j \quad (4.1)$$

En ce qui concerne les tenseurs du second d'ordre, on adoptera les notations suivantes pour les matrices de masse et de rigidité :

$$\begin{aligned} M_i^j &= \Pi_{i,j}^T M_i^i \Pi_{i,j} \\ K_i^j &= \Pi_{i,j}^T K_i^i \Pi_{i,j} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Comme le fait apparaître la figure 4.1, pour calculer la solution à l'instant  $t_{n+1}$ , l'étape (a) de changement de discrétisation demande la détermination de l'état  $X_n^{n+1}$ , elle est suivie de l'étape (b) au cours de laquelle on effectue la résolution des équations d'équilibre.

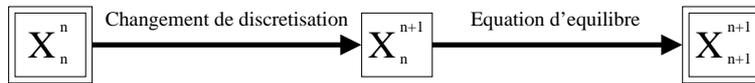


Figure 4.1: Différentes étapes d'un calcul à discrétisation variable

Le problème de référence discrétisé peut alors être posé :

**Problème de référence discrétisé:**

Connaissant  $\left\{ \begin{array}{l} U_n^n, \dot{U}_n^n, \ddot{U}_n^n \\ a_n, \dot{a}_n \end{array} \right.$ , trouver  $\left\{ \begin{array}{l} U_{n+1}^{n+1}, \dot{U}_{n+1}^{n+1}, \ddot{U}_{n+1}^{n+1} \\ U_{n+1}^{n+1}, \dot{U}_{n+1}^{n+1}, \ddot{U}_{n+1}^{n+1} \\ a_{n+1}, \dot{a}_{n+1} \end{array} \right.$  tels que:

- $$M_{n+1}^{n+1} \ddot{U}_{n+1}^{n+1} + K_{n+1}^{n+1} U_{n+1}^{n+1} = F_{n+1}^{n+1} \quad (4.3)$$
- $$\begin{cases} U_{n+1}^{n+1} = U_n^{n+1} + \Delta t \dot{U}_n^{n+1} + \Delta t^2 (\frac{1}{2} - \beta_N) \ddot{U}_n^{n+1} + \Delta t^2 \beta_N \ddot{U}_{n+1}^{n+1} \\ \dot{U}_{n+1}^{n+1} = \dot{U}_n^{n+1} + \Delta t (1 - \gamma_N) \ddot{U}_n^{n+1} + \Delta t \gamma_N \ddot{U}_{n+1}^{n+1} \end{cases} \quad (4.4)$$
- $$\dot{a}_{n+1} = \dot{a}_{n+1}(a_{n+1}, U_{n+1}^{n+1}, \dot{U}_{n+1}^{n+1}, \ddot{U}_{n+1}^{n+1}) \quad (4.5)$$

On a fait apparaître au rang des inconnues les quantités  $U_n^{n+1}$ ,  $\dot{U}_n^{n+1}$  et  $\ddot{U}_n^{n+1}$ . Ces quantités doivent en effet être déterminées pour résoudre entièrement le problème. Elles représentent la projection des quantités  $U_n^n$ ,  $\dot{U}_n^n$ ,  $\ddot{U}_n^n$  sur la discrétisation de l'instant  $t_{n+1}$ .

## 4.2 Calculs dynamiques à discrétisation variable

### 4.2.1 Etude de stabilité

On s'intéresse maintenant au cas d'un calcul avec changement de discrétisation. En étendant la méthode exposée dans [HUG 00] et [GRA 00] à ce type de calcul, la stabilité du schéma peut être étudiée. Le fait de travailler sur deux discrétisations différentes impose de réécrire :

- les équations d'équilibre aux instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  sur la même discrétisation :

$$\begin{cases} M_n^{n+1}\ddot{U}_n^{n+1} + K_n^{n+1}U_n^{n+1} = 0 \\ M_{n+1}^{n+1}\ddot{U}_{n+1}^{n+1} + K_{n+1}^{n+1}U_{n+1}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

- le schéma de Newmark :

$$\begin{cases} U_{n+1}^{n+1} = U_n^{n+1} + \Delta t\dot{U}_n^{n+1} + \Delta t^2(\frac{1}{2} - \beta_N)\ddot{U}_n^{n+1} + \Delta t^2\beta_N\ddot{U}_{n+1}^{n+1} \\ \dot{U}_{n+1}^{n+1} = \dot{U}_n^{n+1} + \Delta t(1 - \gamma_N)\ddot{U}_n^{n+1} + \Delta t\gamma_N\ddot{U}_{n+1}^{n+1} \end{cases} \quad (4.7)$$

- les opérateurs  $\langle \rangle$  et  $[]$  :

$$\begin{cases} \langle X \rangle = \frac{1}{2}(X_{n+1}^{n+1} + X_n^{n+1}) \\ [X] = X_{n+1}^{n+1} - X_n^{n+1} \end{cases} \quad (4.8)$$

En utilisant la démarche du Chapitre 2, et en remarquant que  $[M\ddot{U}] = M_{n+1}^{n+1}[\ddot{U}] + [M]\ddot{U}_n^{n+1}$ , et  $[KU] = K_{n+1}^{n+1}[U] + [K]U_n^{n+1}$ , la condition de stabilité s'écrit :

$$\langle \ddot{U} \rangle^T A_{n+1}^{n+1}[\ddot{U}] + \langle \dot{U} \rangle^T K_{n+1}^{n+1}[\dot{U}] = -(\gamma_N - \frac{1}{2})[\ddot{U}]^T A_{n+1}^{n+1}[\ddot{U}] - \frac{1}{\Delta t}[\dot{U}]^T ([M]\ddot{U}_n^{n+1} + [K]U_n^{n+1}) \quad (4.9)$$

avec  $A_{n+1}^{n+1} = M_{n+1}^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2}(2\beta_N - \gamma_N)K_{n+1}^{n+1}$

On reconnaît dans le membre de droite le terme en  $\gamma_N - \frac{1}{2}$  dont dépend la stabilité du schéma dans un calcul sans évolution de maillage dont les conditions de stabilité sont :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leq \gamma_N \leq 2\beta_N & \text{schéma inconditionnellement stable,} \\ \frac{1}{2} \leq \gamma_N \text{ et } 2\beta_N \leq \gamma_N & \text{schéma stable si } \Delta t \leq \Delta t_c = \frac{1}{\omega_{pmax} \sqrt{\frac{\gamma_N}{2} - \beta_N}} \end{cases} \quad (4.10)$$

Cependant, la présence d'un terme supplémentaire faisant intervenir  $[M]$  et  $[K]$  remet en cause les conditions de stabilité exprimées dans le cas précédent.

Si on se place dans les cas particuliers des schémas de la différence centrée ( $\gamma_N = \frac{1}{2}$ ,  $\beta_N = 0$ ) ou de l'accélération moyenne ( $\gamma_N = \frac{1}{2}$ ,  $\beta_N = \frac{1}{4}$ ), le terme  $-(\gamma_N - \frac{1}{2})[\dot{U}]^T A_{n+1}^{n+1}[\ddot{U}]$  est nul. La stabilité dépend alors de  $-\frac{1}{\Delta t}[\dot{U}]^T([M]\ddot{U}_n^{n+1} + [K]U_n^{n+1})$  dont on ne connaît pas le signe. Seule une étude numérique dans un cas particulier pourra permettre de conclure sur la stabilité du calcul lors du changement de discrétisation. La méthode présentée ici permet de faire l'étude de la stabilité du passage de l'état  $X_n^{n+1}$  à l'état  $X_{n+1}^{n+1}$  (étape (b)). Pour traiter le problème sur l'intégralité du pas temps, on doit s'intéresser au passage  $X_n^n$ ,  $X_{n+1}^{n+1}$ . Pour ce faire on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \ddot{U}_{n+1}^{n+1T} A_{n+1}^{n+1} \ddot{U}_{n+1}^{n+1} + \dot{U}_{n+1}^{n+1T} K_{n+1}^{n+1} \dot{U}_{n+1}^{n+1} \right] - \frac{1}{2} \left[ \dot{U}_n^{nT} A_n^n \dot{U}_n^n + \dot{U}_n^{nT} K_n^n \dot{U}_n^n \right] = \\ -(\gamma_N - \frac{1}{2})[\ddot{U}]^T A_{n+1}^{n+1}[\ddot{U}] \\ -\frac{1}{\Delta t}[\dot{U}]^T([M]\ddot{U}_n^{n+1} + [K]U_n^{n+1}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

**Remarque 13** *Le terme qui gouverne alors la stabilité ne fait pas intervenir les paramètres du schéma numérique. Les instabilités éventuelles proviennent des évolutions du maillage et des opérations de projections.*

### 4.2.2 Bilan d'énergie discrétisée

De la même façon que pour l'étude de stabilité, le bilan énergétique peut aussi être écrit avec les notations définies plus haut. On obtient alors :

$$\begin{aligned} [\dot{U}]^T M_{n+1}^{n+1} \langle \dot{U} \rangle + [U^T] K_{n+1}^{n+1} \langle U \rangle = \mathcal{W}_{ext} - \frac{\Delta t^2}{2}(2\beta_N - \gamma_N)[\ddot{U}]^T M_{n+1}^{n+1} \langle \ddot{U} \rangle \\ - \frac{\Delta t^2}{2}(\gamma_N - \frac{1}{2})(2\beta_N - \gamma_N)[\ddot{U}]^T M_{n+1}^{n+1} [\ddot{U}] \\ - (\gamma_N - \frac{1}{2})[U]^T K_{n+1}^{n+1} [U] \\ - (\gamma_N - 1)[U]^T ([M]\ddot{U}_n^{n+1} + [K]U_n^{n+1}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ici encore on retrouve les équations d'un problème sans évolution de maillage augmentées d'un terme faisant intervenir  $[M]$  et  $[K]$ .

L'Equation (4.12) permet d'écrire un bilan entre les énergies des états  $X_n^{n+1}$  et  $X_{n+1}^{n+1}$  (étape (b)). Ici encore, pour être complet, il faut calculer le bilan entre  $X_n^n$  et  $X_{n+1}^{n+1}$  (étape (a) et (b)), soit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \dot{U}_{n+1}^{n+1T} M_{n+1}^{n+1} \dot{U}_{n+1}^{n+1} + U_{n+1}^{n+1T} K_{n+1}^{n+1} U_{n+1}^{n+1} \right] - \frac{1}{2} \left[ \dot{U}_n^{nT} M_n^n \dot{U}_n^n + U_n^{nT} K_n^n U_n^n \right] = \mathcal{W}_{ext} \\ - \frac{\Delta t^2}{2}(2\beta_N - \gamma_N)[\ddot{U}]^T M_{n+1}^{n+1} \langle \ddot{U} \rangle \\ - \frac{\Delta t^2}{2}(\gamma_N - \frac{1}{2})(2\beta_N - \gamma_N)[\ddot{U}]^T M_{n+1}^{n+1} [\ddot{U}] \\ - (\gamma_N - \frac{1}{2})[U]^T K_{n+1}^{n+1} [U] \\ - (\gamma_N - 1)[U]^T ([M]\ddot{U}_n^{n+1} + [K]U_n^{n+1}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

**Remarque 14** *Dans ce bilan, on prend en compte la variation d'énergie totale lors du passage de l'état  $X_n^n$  à l'état  $X_{n+1}^{n+1}$  (étape (a)). Le changement de discrétisation*

ayant lieu à l'instant  $t_n$ , les efforts extérieurs ne travaillent pas et  $\mathcal{W}_{ext}$  désigne le travail de ces efforts entre  $X_n^{n+1}$  et  $X_{n+1}^{n+1}$  qui s'écrit  $\mathcal{W}_{ext} = (\gamma_N - \frac{1}{2})[U]^T[F] + [U]^T\langle F \rangle$ .

### 4.2.3 Méthode de rééquilibrage

On s'intéresse maintenant à un calcul de la propagation dynamique d'une fissure. Dans ce cas particulier, on sait quel phénomène physique provoque le changement de géométrie. En effet, supposons une extension de fissure  $\Delta a$  entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . Le vecteur d'état de l'instant  $t_n$  ne peut être en équilibre sur cette nouvelle géométrie que si on applique une distribution de force  $F_+$  sur l'extension de la fissure pour la refermer. La méthode de rééquilibrage permet via l'annulation du résidu défini par (4.14), de garantir l'équilibre du vecteur d'état projeté sur la nouvelle discrétisation (on considère un problème sans efforts extérieurs) :

$$R = M_{n+1}^{n+1}\ddot{U}_n^{n+1} + K_{n+1}^{n+1}U_n^{n+1} - F_+^{n+1} \quad (4.14)$$

On a alors les égalités suivantes :

$$[U]^T([M]\ddot{U}_n^{n+1} + [K]U_n^{n+1}) = [U]^T F_+^{n+1} \quad (4.15)$$

$$[\dot{U}]^T([M]\ddot{U}_n^{n+1} + [K]U_n^{n+1}) = [\dot{U}]^T F_+^{n+1} \quad (4.16)$$

Où  $[U]^T F_+^{n+1}$  et  $[\dot{U}]^T F_+^{n+1}$  correspondent respectivement à la puissance et au travail de la distribution de force  $F_+^{n+1}$ . Or, d'un point de vue physique, on sait ([BUI 78]) que ces deux termes sont égaux à, respectivement,  $-2G\Delta a$  et  $-2G\dot{a}$  ( $G$  est le taux de restitution de l'énergie, et  $\dot{a}$  la vitesse d'avance de la fissure). Dans l'algorithme utilisé, l'étape de rééquilibrage est effectuée après projection du vecteur d'état de l'instant  $t_n$  sur le nouveau maillage. Et elle permet de vérifier les égalités :

$$[U]^T([M]\ddot{U}_n^{n+1} + [K]U_n^{n+1}) = -2G\Delta a \quad (4.17)$$

$$[\dot{U}]^T([M]\ddot{U}_n^{n+1} + [K]U_n^{n+1}) = -2G\dot{a} \quad (4.18)$$

Revenons sur l'étude de stabilité. On définit :

$$I_n = -[\dot{U}]^T([M]\ddot{U}_n^{n+1} + [K]U_n^{n+1}) - 2G\dot{a}$$

D'après les Equations (4.9) et (4.18), calculer  $I_n$  permet de quantifier l'instabilité effectivement introduite lors du passage de l'état  $X_n^{n+1}$  à l'état  $X_{n+1}^{n+1}$  (étape (b)). Si on assure l'annulation du résidu (4.14), alors l'étape (b) n'introduit aucune instabilité. Par contre, on ne peut pas conclure sur l'étape (a) et la stabilité globale (voir Equation (4.11)).

Pour le bilan énergétique, on s'intéressera dans la suite à l'influence du rééquilibrage sur les deux étapes effectuées au cours du pas de temps  $[t_n, t_{n+1}]$ . Le terme

$\Delta(X_{n+1}^{n+1}, X_n^n)$  désignera le bilan énergétique complet obtenu en faisant la différence entre le membre de gauche et le membre de droite de l'Equation (4.13) en tenant compte de (4.17).  $\Delta(X_{n+1}^{n+1}, X_n^{n+1})$  est obtenu en faisant la différence entre le membre de gauche et le membre de droite de l'Equation (4.12) en tenant compte de l'Equation (4.17) :

$$\begin{aligned} \Delta(X_{n+1}^{n+1}, X_n^{n+1}) = & [\dot{U}]^T M_{n+1}^{n+1} \langle \dot{U} \rangle + [U^T] K_{n+1}^{n+1} \langle U \rangle - \mathcal{W}_{ext} \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} (2\beta_N - \gamma_N) [\dot{U}]^T M_{n+1}^{n+1} \langle \ddot{U} \rangle \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} (\gamma_N - \frac{1}{2}) (2\beta_N - \gamma_N) [\dot{U}]^T M_{n+1}^{n+1} [\ddot{U}] \\ & + (\gamma_N - \frac{1}{2}) [U]^T K_{n+1}^{n+1} [U] \\ & - (\gamma_N - 1) 2G\Delta a \end{aligned} \quad (4.19)$$

$\Delta(X_n^{n+1}, X_n^n)$  est défini par :

$$\begin{aligned} \Delta(X_n^{n+1}, X_n^n) = & \frac{1}{2} \left[ \dot{U}_n^{n+1T} M_n^{n+1} \dot{U}_n^{n+1} + U_n^{n+1T} K_n^{n+1} U_n^{n+1} \right] \\ & - \frac{1}{2} \left[ \dot{U}_n^{nT} M_n^n \dot{U}_n^n + U_n^{nT} K_n^n U_n^n \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

On peut immédiatement écrire

$$\Delta(X_{n+1}^{n+1}, X_n^n) = \Delta(X_{n+1}^{n+1}, X_n^{n+1}) + \Delta(X_n^{n+1}, X_n^n)$$

$\Delta(X_n^{n+1}, X_n^n)$  mesure la quantité d'énergie injectée ou dissipée dans les opérations de projection (de l'état  $X_n^n$  à l'état  $X_n^{n+1}$  (étape (a))) et  $\Delta(X_{n+1}^{n+1}, X_n^{n+1})$  dans le passage de l'état  $X_n^{n+1}$  à l'état  $X_{n+1}^{n+1}$  (étape (b)).

En annulant le résidu (4.14), on annule *a priori*  $\Delta(X_{n+1}^{n+1}, X_n^{n+1})$ . On minimise ainsi la quantité d'énergie introduite lors des changements de discrétisation successifs. Cependant, comme pour la stabilité, on ne peut rien assurer concernant  $\Delta(X_n^{n+1}, X_n^n)$ .

**Remarque 15** L'Equation (4.19) prend en compte l'énergie nécessaire pour faire propager la fissure. Ce terme apparaît naturellement du fait du travail de la distribution de force  $F_+$ .

**Remarque 16** L'étape consistant à annuler le résidu (4.14) n'est pas habituelle dans les codes de dynamique explicite. On peut donc se poser la question de la stabilité des calculs de dynamique explicite lors de remaillages successifs (voir [EIN 00]). L'utilisation d'une taille de pas de temps petite et de maillages fins minimise les erreurs effectuées lors des projections et permet souvent de maintenir la stabilité des calculs dans ce type de code sans pour autant assurer la conservation de l'énergie. La méthode proposée garantit la stabilité et la conservation de l'énergie globale lors de remaillages quelles que soient la taille du pas de temps, la finesse de maillage et la qualité des opérateurs de projection.

---

## 4.2.4 Utilisation dans le cadre des Eléments Finis

Dans la pratique, le résidu (4.14) est annulé grâce à l'utilisation d'une méthode itérative. La mise en oeuvre de cette méthode de rééquilibrage dans un code de calcul de dynamique explicite implique donc de faire des itérations pour garantir l'équilibre avant de reprendre le calcul dynamique. On initialise ces itérations grâce à une projection des déplacements, vitesses et accélérations de  $X_n^n$ . On calcule ensuite le résidu défini par (4.14), ce qui permet de calculer des incréments  $\Delta U_n^{n+1}$ ,  $\Delta \dot{U}_n^{n+1}$  et  $\Delta \ddot{U}_n^{n+1}$  vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta U_n^{n+1} = \Delta t^2 \beta_N \Delta \ddot{U}_n^{n+1} \\ \Delta \dot{U}_n^{n+1} = \Delta t \gamma_N \Delta \ddot{U}_n^{n+1} \\ -R = M_{n+1}^{n+1} \Delta \ddot{U}_n^{n+1} + K_{n+1}^{n+1} \Delta U_n^{n+1} \end{cases} \quad (4.21)$$

Un critère est mis en place sur la norme du résidu  $R$  pour arrêter les itérations. Cette procédure converge rapidement et quelques itérations suffisent pour satisfaire le critère adopté ce qui ne rend pas la méthode prohibitive d'un point de vue du surcoût de calcul. Ceci permet de déterminer les trois inconnues  $U_n^{n+1}$ ,  $\dot{U}_n^{n+1}$  et  $\ddot{U}_n^{n+1}$  afin de résoudre entièrement le problème discrétisé.

### 4.2.4.1 Propagation dynamique de fissures à déplacements imposés

Pour illustrer l'efficacité des méthodes présentées, on effectue le calcul de la propagation dynamique d'une fissure dans une éprouvette de type DCB avec remaillage (voir Figure 4.2 et 4.3). La simulation est programmée dans le code de calcul par Eléments Finis CASTEM 2000 dans lequel on utilise les intégrales indépendantes du contour pour le calcul du taux de restitution de l'énergie [ATT 97] [SUO 92]. Le schéma utilisé est celui de l'accélération moyenne ( $\gamma_N = \frac{1}{2}$ ,  $\beta_N = \frac{1}{4}$ ). Cette éprouvette est constituée d'un matériau linéaire élastique homogène et isotrope. Elle est soumise à un déplacement imposé vertical de  $0.0025m$  à ses extrémités. L'évolution de ce chargement est de type Heaviside avec une temps de montée de  $0.1ms$ . On donne aussi  $c = 0.01m$ ,  $b = 0.05m$ ,  $\frac{a}{b} = 0.2$  pour la géométrie et  $E = 186GPa$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 8000kgm^{-3}$ ,  $K_{1c} = 110MPa\sqrt{m}$  pour les propriétés du matériau. Pour ces simulations, on utilise le critère décrit dans le premier chapitre :

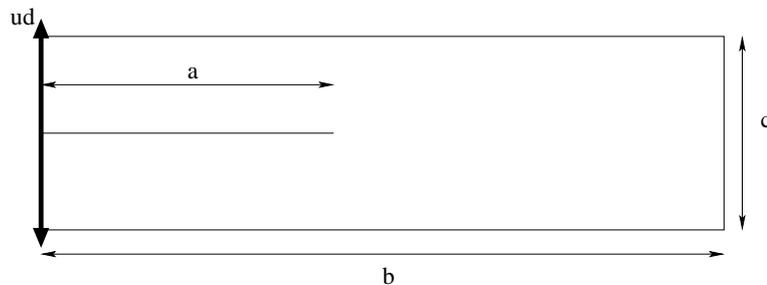


Figure 4.2: Géométrie DCB

$$\begin{cases} \dot{a} = 0 & \text{si } K_{1eq} < K_{1D} \\ K_{1eq} = K_{1D} & \text{si } \dot{a} > 0 \end{cases}$$

avec

$$K_{1D}(\dot{a}) = \begin{cases} K_{1c} & \text{si } \dot{a} = 0 \\ \frac{K_{1c}}{1-(\dot{a}/c_r)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'influence de la méthode de rééquilibrage sur les résultats obtenus pour le calcul défini plus haut. La Figure 4.4 présente les évolutions de la longueur de la fissure pour un calcul avec et sans rééquilibrage. Sans rééquilibrage, le temps à "rupture" (on arrête le calcul lorsque  $\frac{a}{b} = 0.7$ ) est environ deux fois plus court.

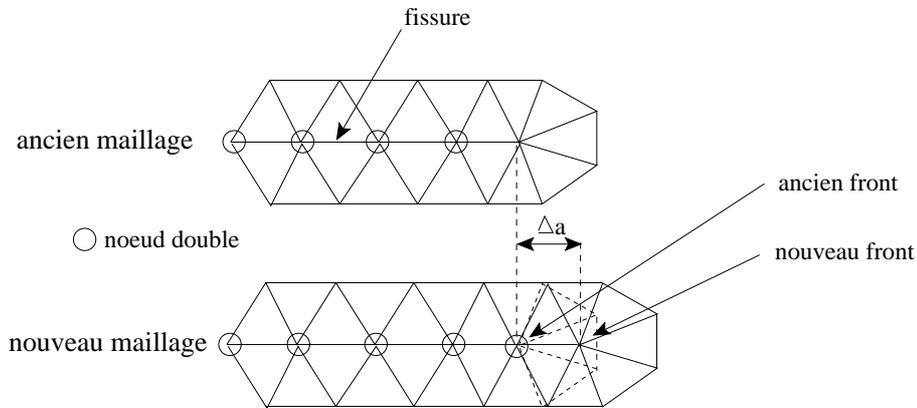


Figure 4.3: Procédure de remaillage utilisée dans CAST3M

Pour expliquer ces différences, on peut tracer les bilans énergétiques pour chacun des calculs. Dans les Figures 4.5,  $T$  est l'énergie cinétique,  $W$  l'énergie de déformation,  $W_{ext}$  le travail des efforts extérieurs et  $Balance$  désigne le terme  $\Delta(X_{n+1}^{n+1}, X_n^n)$  défini plus haut. Si on n'effectue pas d'étape de rééquilibrage, le déséquilibre énergétique est si important que l'échelle utilisée sur le graphique ne permet pas de distinguer les niveaux d'énergie mis en jeu au début du calcul. Pour juger de l'efficacité de la méthode de rééquilibrage, on compare le déséquilibre cumulé  $D = \sum_{i=0}^n \Delta(X_i^{i+1}, X_i^i)$  sur la Figure 4.6. Le rééquilibrage effectué sur les champs projetés permet donc à la fois de réduire  $\Delta(X_n^{n+1}, X_n^n)$ , et d'annuler  $\Delta(X_{n+1}^{n+1}, X_n^{n+1})$  pour obtenir finalement un déséquilibre énergétique négligeable par rapport à celui provoqué par des remaillages classiques. En effet, sans rééquilibrage, la quantité d'énergie injectée par les remaillages remet en cause la précision du calcul, et amène à s'interroger sur la stabilité de celui-ci.

D'un point de vue de la stabilité, on trace l'instabilité cumulée  $I = \sum_{i=0}^n I_i$  lors de la propagation de la fissure. Même si le calcul ne diverge pas complètement, on voit sur la Figure 4.7 que l'instabilité est bien présente si on n'effectue pas de rééquilibrage. Cet exemple met en évidence la qualité des résultats obtenus avec la méthode de rééquilibrage et ce, tant sur le plan de la conservation de l'énergie que

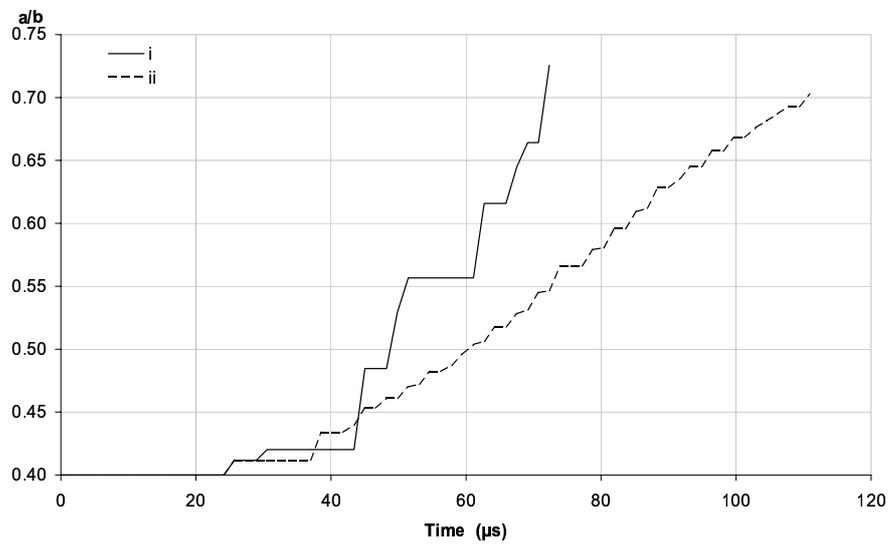


Figure 4.4: Comparaison des évolutions de longueur de fissure  
i : sans rééquilibrage ii : avec rééquilibrage

de la stabilité. Par rapport à un calcul sans rééquilibrage, ces résultats expliquent les différences constatées sur la Figure 4.4 en terme d'évolution de la longueur de la fissure. Cette méthode permet donc d'effectuer un calcul stable au cours duquel la conservation de l'énergie est respectée.

Nous allons nous intéresser maintenant à l'intégration en temps de l'équation donnant la longueur de la fissure à partir de sa vitesse. On se propose ici de tester un schéma d'intégration implicite pour calculer l'extension de la fissure à partir de la vitesse. On formule ce schéma sous la forme d'une loi trapézoïdale :

$$a_{n+1} = a_n + (1 - \alpha) \Delta t \dot{a}_n + \alpha \Delta t \dot{a}_{n+1} \quad (4.22)$$

On peut remarquer que si on fait le choix  $\alpha = 0$ , le calcul est identique à celui effectué au paragraphe précédent où l'on utilise seulement la méthode de rééquilibrage et une intégration explicite de l'avancée de la fissure. Pour que les résultats soient encore plus significatifs, on arrête les calculs pour  $\frac{a}{b} = 0.9$ . La Figure 4.8 présente les résultats obtenus pour un calcul sans rééquilibrage, un calcul avec  $\alpha = 0$  et un avec  $\alpha = 0.6$ . Le résultat est intéressant : pour un calcul sans rééquilibrage on prédit un rupture rapide de l'éprouvette, pour  $\alpha = 0$  la rupture a lieu environ deux fois plus tard, et pour  $\alpha = 0.6$  l'éprouvette ne "casse" pas. On observe une bifurcation entre les évolutions de la longueur de fissure prédites pour  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 0.6$  à partir  $0.1ms$ . Cet instant correspond au début du plateau défini par l'évolution du chargement. Sur la Figure 4.10, on montre l'évolution de la longueur de la fissure pour différente valeur de  $\alpha$ . Nous constatons que l'évolution de la longueur de la fissure est peu différente pourvu que  $\alpha$  soit supérieure à 0.5.

En effet, on peut penser que, comme c'est le cas pour l'intégration de équations d'équilibre élasto-dynamique, une intégration explicite n'est stable que si une condition de type Courant est satisfaite. Pour le cas de la propagation de la fissure, cette condition ferait intervenir la taille des élément proche de la pointe de la fissure et sa vitesse de propagation. Un minorant  $\Delta t_c^{fissure}$  du pas de temps critique ainsi calculé peut être obtenu avec la célérité des ondes de Rayleigh  $c_r$ . Celle-ci étant moins élevée que la célérité des ondes de compression  $c_1$ ,  $\Delta t_c^{fissure}$  sera supérieur à  $\Delta t_c$  (pas de temps critique relatif à la propagation des ondes élastiques). Dans le cas de l'utilisation d'une schéma explicite comme celui de la différence centrée pour l'équation d'équilibre, la condition  $\Delta t \leq \Delta t_c$  étant satisfaite, une intégration explicite de la longueur de la fissure n'est pas problématique dans la mesure où la condition  $\Delta t \leq \Delta t_c^{fissure}$  est automatiquement satisfaite. Ici, on utilise le schéma de l'accélération moyenne qui est inconditionnellement stable. De plus, la taille du pas de temps utilisée est supérieur au pas de temps critique  $\Delta t_c$ . Il est donc possible que la condition  $\Delta t \leq \Delta t_c^{fissure}$  concernant la propagation de la fissure ne soit pas satisfaite et qu'un schéma explicite ( $\alpha = 0$ ) fasse apparaître des instabilités. C'est ce que l'on constate en observant la Figure 4.8. La bifurcation entre les solutions  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 0.6$  se fait à l'instant où le chargement atteint sa valeur finale c'est à dire à l'instant où on cesse de fournir de l'énergie au système. On peut penser qu'un schéma explicite ( $\alpha = 0$ ) est ici instable. De plus on retrouve enfin grâce

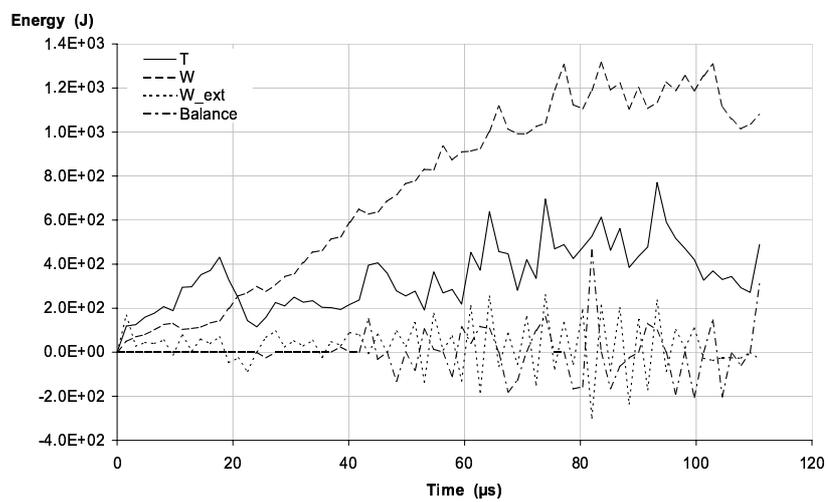
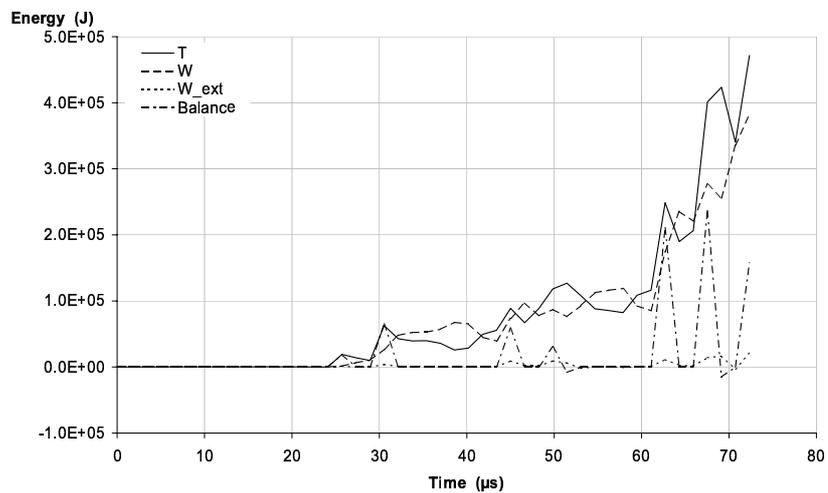


Figure 4.5: Bilan énergétique : (a) sans rééquilibrage, (b) avec rééquilibrage

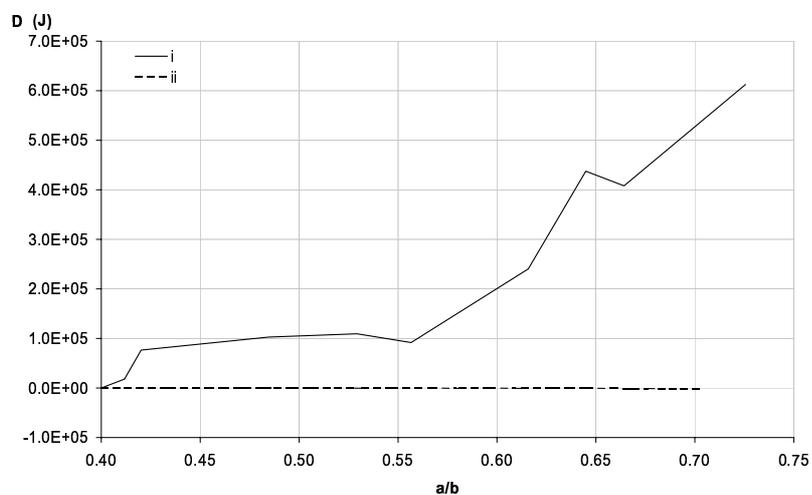


Figure 4.6: Comparaison du déséquilibre énergétique cumulé  
i : sans rééquilibrage ii : avec rééquilibrage

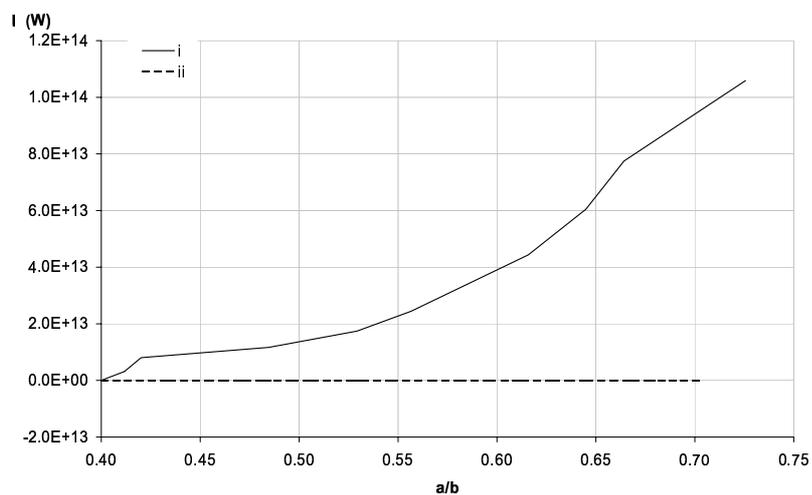


Figure 4.7: Comparaison de l'instabilité cumulée  
i : sans rééquilibrage ii : avec rééquilibrage

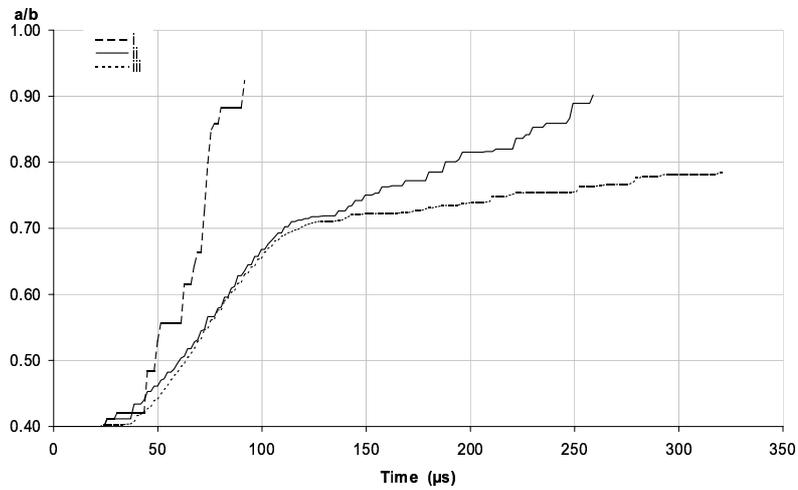


Figure 4.8: Comparaison des évolutions de longueur de fissure  
 i : sans rééquilibrage ii : avec rééquilibrage  $\alpha = 0$   
 iii : avec rééquilibrage  $\alpha = 0.6$

aux outils développés plus haut un résultat physique qui montre que pour l'exemple étudié la propagation de la fissure lors de sollicitations à déplacement imposé est théoriquement stable [FRE 90]. Ce résultats a aussi été observé expérimentalement dans [KAL 78].

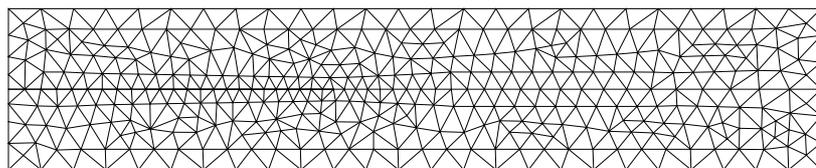


Figure 4.9: Maillage pour la géométrie DCB

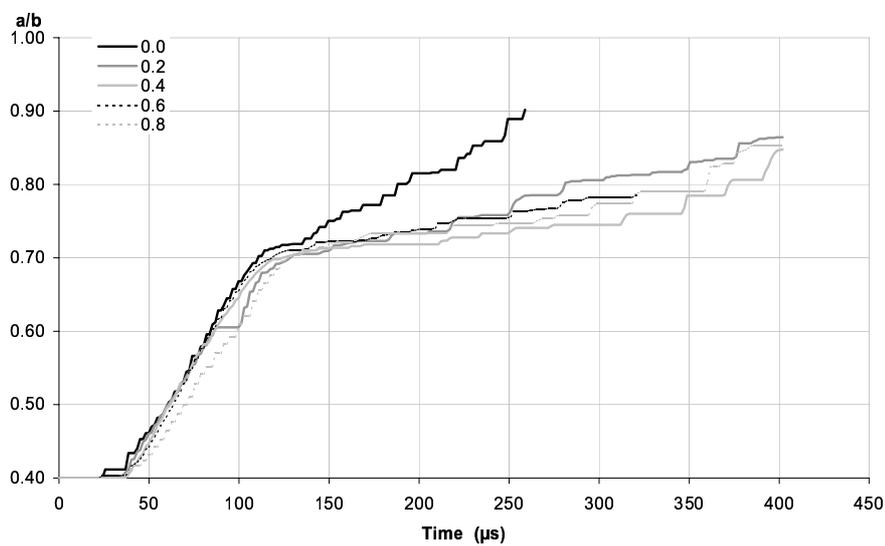


Figure 4.10: Comparaison des évolutions de longueur de fissure  $\alpha \in [0; 1]$

---

## 4.3 Utilisation dans le cadre des Eléments Finis Etendus

### 4.3.1 Stratégie d'enrichissement

Jusqu'à présent, des simulations à discrétisations variables ont été considérées. L'étude de stabilité des schémas de la famille de Newmark a permis de développer la méthode de rééquilibrage qui donne une signification physique aux champs projetés d'une discrétisation sur l'autre. On se propose ici d'appliquer cette technique dans le cadre de l'utilisation de la méthode de Eléments Finis Etendus. Dans ce cas particulier, il s'agit de mettre au point un stratégie d'enrichissement afin de prendre en compte l'avancée de la fissure tout en conservant les propriétés du schéma. On propose de conserver tous les enrichissements de l'instant  $t_n$  à l'instant  $t_{n+1}$  ( voir Figure (4.11)). La base des fonctions de forme grandit alors à chaque fois que la fissure se propage. L'initialisation des nouveaux degrés de liberté est faite à 0 si bien que le champ de déplacement projeté peut s'écrire de la façon suivante :

$$[U_n^{n+1}] = \begin{bmatrix} U_n^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

La nouvelle matrice de rigidité étant :

$$[K_{n+1}^{n+1}] = \left[ \begin{array}{c|c} K_n^n & \tilde{K}_{n,n+1} \\ \hline \tilde{K}_{n,n+1}^T & \tilde{K}_{n+1,n+1} \end{array} \right] \quad (4.24)$$

La distribution de force  $F_+$  est ici remplacée par l'initialisation à 0 des nouveaux degrés de libertés : l'extension de la fissure est fermée à l'instant  $t_n$ , et le vecteur d'état de cet instant annule le résidu (4.14). Par conséquent, la stratégie d'enrichissement définie ici présente toutes les propriétés découlant de l'utilisation de la méthode de rééquilibrage. De plus, grâce à l'initialisation des degrés de liberté modélisant l'extension de la fissure, on garantit la conservation de l'énergie lors de l'étape (a) du calcul (changement de discrétisation) :

$$U_n^{n+1T} K_{n+1}^{n+1} U_n^{n+1} = \left[ U_n^n \mid 0 \dots 0 \right] \left[ \begin{array}{c|c} K_n^n & \tilde{K}_{n,n+1} \\ \hline \tilde{K}_{n,n+1}^T & \tilde{K}_{n+1,n+1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_n^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = U_n^{nT} K_n^n U_n^n \quad (4.25)$$

Le même raisonnement peut être appliqué au vecteur vitesse. Finalement, appliquer la méthode de rééquilibrage dans le cadre de l'utilisation d'Eléments Finis Etendus revient tout simplement à initialiser les nouveaux degrés de libertés associés à l'extension de la fissure à 0 tout en conservant les anciens enrichissements. Cette stratégie présente en plus l'avantage de garantir la conservation de l'énergie

lors du changement de discrétisation et finalement durant les deux étapes du calculs sur un pas de temps. Concernant la stabilité, on peut répéter la même démarche. La conclusion étant que l'utilisation de cette stratégie d'enrichissement permet de ne pas dégrader les propriétés de stabilité de l'intégrateur en temps.

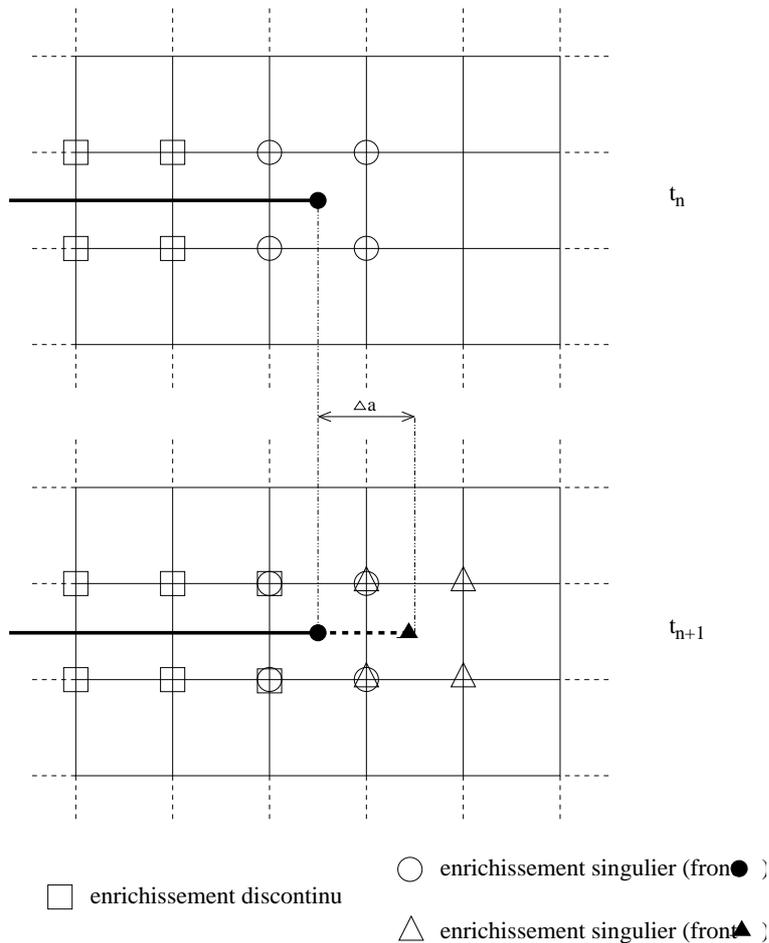


Figure 4.11: Stratégie d'enrichissement en dynamique

## 4.3.2 Exemples

### 4.3.2.1 Fissure semi-infinie dans un milieu infini

Dans cet exemple dont la solution analytique est donnée par Freund [FRE 73], on considère une fissure semi-infinie se propageant à la vitesse  $\dot{a}$  dans un milieu infini. On trouve des résultats numériques pour cet exemple dans la plupart des travaux dans le domaine de la simulation numérique en dynamique de la rupture, celui-ci servant souvent pour la validation des méthodes numériques. On peut citer [ORG 96, DUA 01, CHE 77, HUA 04]. Dans un milieu infini, l'évolution du facteur d'intensité des contraintes pour une fissure fixe sollicitée par un onde de traction est donnée en

fonction du temps :

$$K_1^{dyn}(0, t) = \frac{2\sigma_0}{1 - \mu} \sqrt{\frac{c_1 t (1 - 2\mu)}{\pi}} \quad (4.26)$$

Pour une fissure mobile, on écrit :

$$K_1^{dyn}(\dot{a}, t) = k(\dot{a}) K_1^{dyn}(0, t) \quad (4.27)$$

où  $k$  est une fonction universelle de la vitesse de propagation. cette fonction peut être approximée de la façon suivante :

$$k(\dot{a}) = \frac{1 - \frac{\dot{a}}{c_r}}{1 - \frac{\dot{a}}{2c_r}} \quad (4.28)$$

Finalement on a :

$$K_1^{dyn}(\dot{a}, t) = \frac{2\sigma_0}{1 - \mu} \sqrt{\frac{c_1 t (1 - 2\mu)}{\pi}} \frac{1 - \frac{\dot{a}}{c_r}}{1 - \frac{\dot{a}}{2c_r}} \quad (4.29)$$

Le modèle numérique utilisé est décrit par la Figure 4.12. Comme celui-ci est

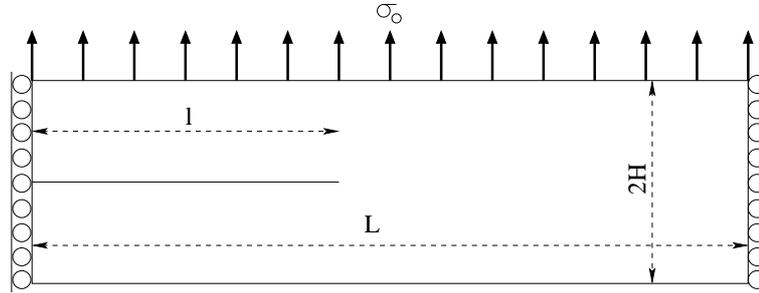


Figure 4.12: Fissure semi-infinie dans un milieu infini

de dimensions finies, on ne pourra comparer les résultats obtenus à la solution analytique que jusqu'au moment où l'onde réfléchie atteint le front de la fissure ( $t \leq 3t_c = 3H/c_1$ ). Les dimensions de la plaque sont  $H = 2m$ ,  $L = 10m$  et  $l = 5m$ , les paramètres matériau  $E = 210GPa$ ,  $\nu = 0.3$  et  $\rho = 8000kgm^{-3}$ . La contrainte appliquée est  $\sigma_0 = 500MPa$ . La dimension du J-domaine est  $d = 1.0m$ . Le maillage est constitué de  $40 \times 80$  éléments quadrangles linéaires. La solution est calculée jusqu'à  $t = T = 3t_c$  en utilisant 200 pas de temps quand la fissure est fixe.

On s'intéresse à trois cas : fissure fixe, fissure mobile à  $\dot{a} = v_0 = 1500m.s^{-1}$ , et fissure fixe puis mobile à partir de  $t = 1.5t_c$ . Pour le premier et le deuxième cas, les résultats sont présentés par la Figure 4.13. Dans le premier cas les résultats sont très bons, la solution numérique est presque superposée à la solution analytique. Quand la fissure se propage, on choisit d'utiliser un pas de temps dix fois plus grand que lorsque

celle-ci n'avance pas. La solution numérique oscille autour de la solution analytique. On observe aussi ces oscillations dans le troisième cas (voir Figure 4.14) à partir de l'instant où la fissure démarre. Ce phénomène a été constaté par l'ensemble des auteurs ayant tenté de simuler ce problème. Ces oscillations sont en grande partie dues au caractère discret des simulations. En effet, quand la fissure se propage, de nouveaux degrés de liberté sont ajoutés de façon soudaine pour prendre en compte son extension. Ceci provoque une discontinuité en temps dans la discrétisation est donc dans les matrices de masse et de rigidité. Cette discontinuité excite les modes numériques de vibrations haute fréquence due à la discrétisation. De plus, la solution analytique de champs de vitesse est elle aussi discontinue en temps. Malgré cela, la discontinuité en temps du facteur d'intensité des contraintes est bien capturée et la solution calculée d'une précision raisonnable (voir Figure 4.14). Les résultats présentés ici sont des résultats non filtrés. Néanmoins l'utilisation d'une taille de pas de temps relativement grande (le schéma implicite de l'accélération moyenne utilisé ici étant inconditionnellement stable) permet de 'filtrer' ces oscillations. Finalement, il semble que le choix d'un schéma de la famille de Newmark pour ce type d'application ne soit pas optimal. On voit ici l'intérêt d'utiliser un schéma capable d'intégrer de manière plus précise les phénomènes discontinus en temps.

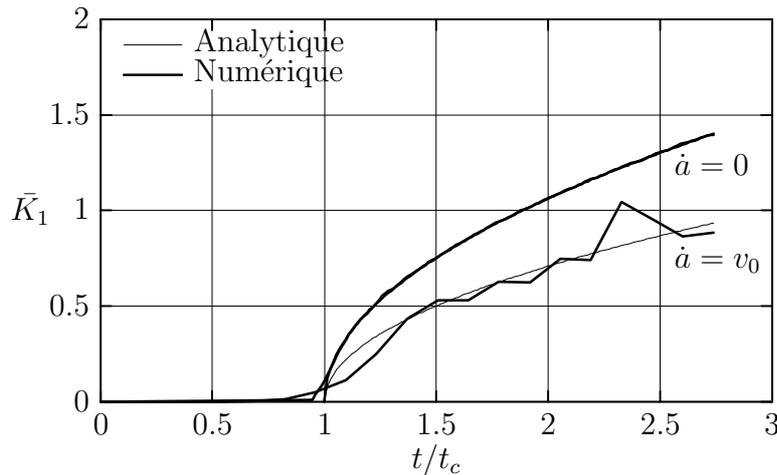


Figure 4.13: Solutions analytique et numérique  $\bar{K}_1$  pour une fissure fixe ou mobile

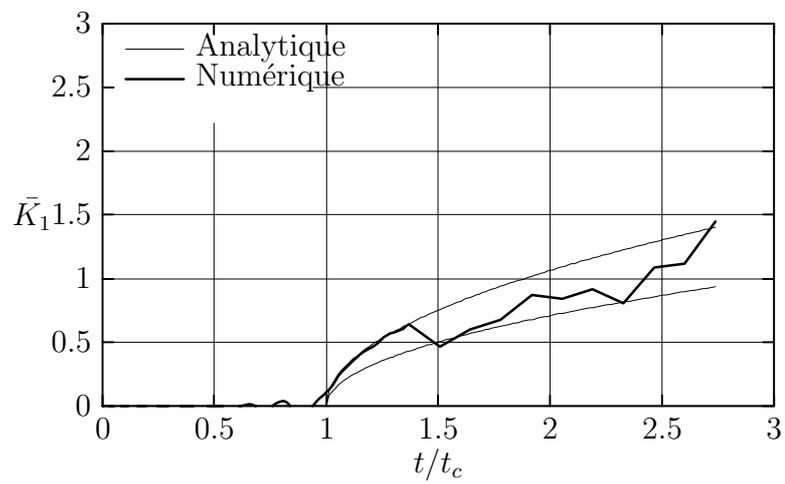


Figure 4.14: Solutions analytique et numérique  $\bar{K}_1$  pour une fissure fixe puis mobile

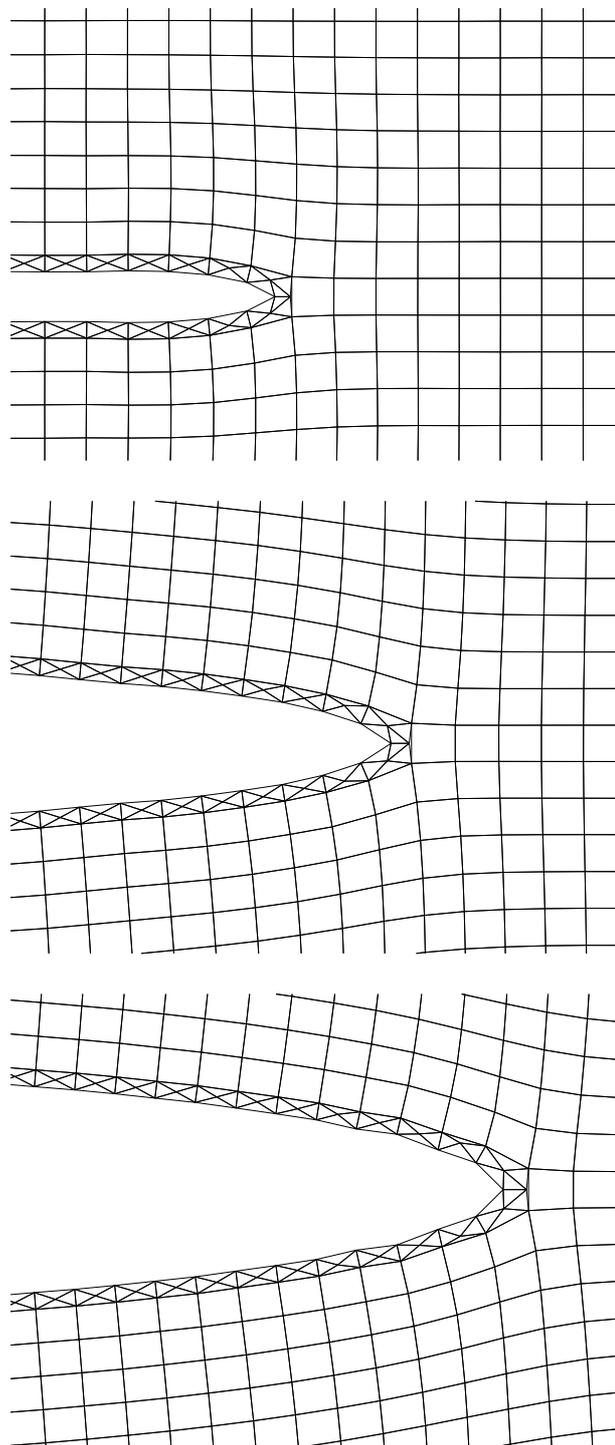


Figure 4.15: Déformées du front de fissure  
a.  $t = 1.50t_c$  b.  $t = 2.75t_c$  c.  $t = 3.00t_c$   
amplification 50

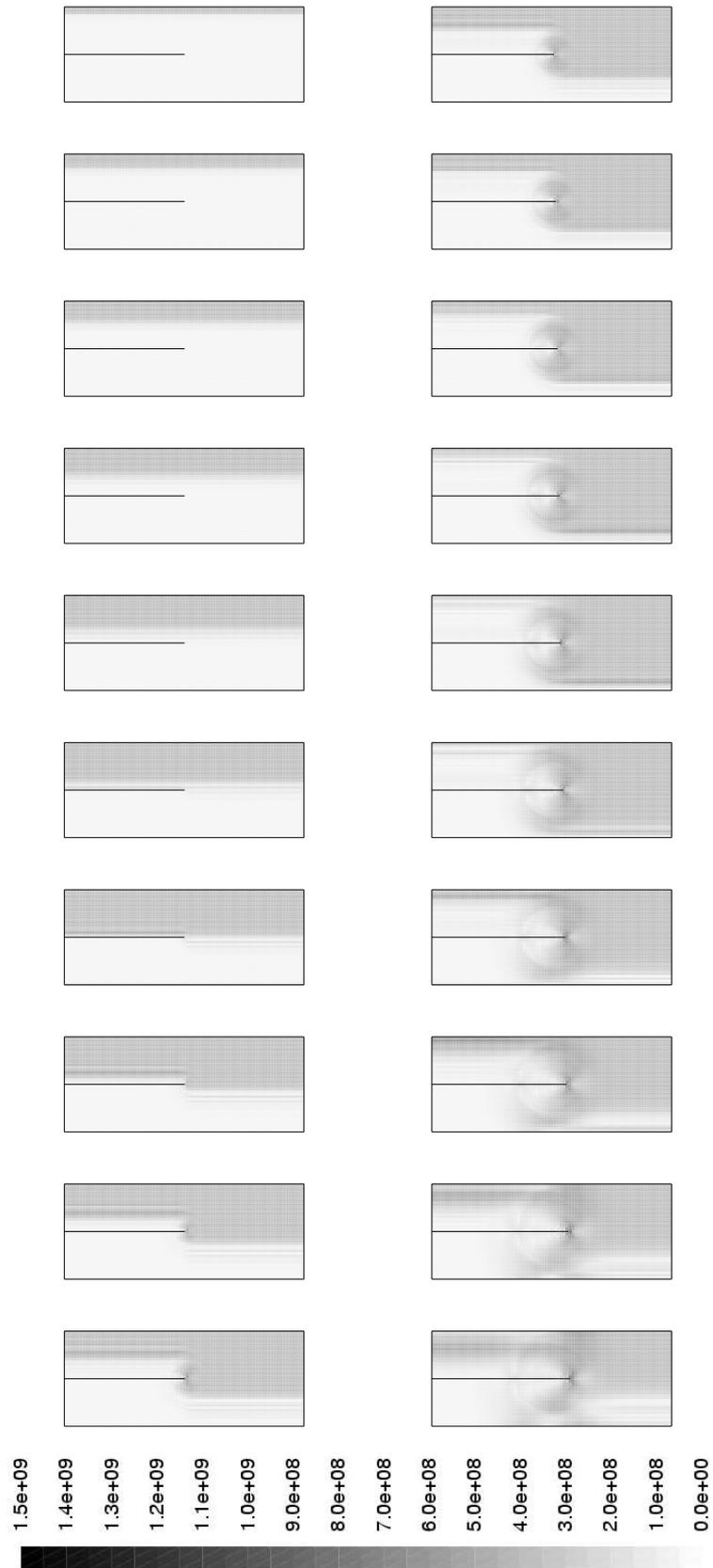


Figure 4.16: Evolution des contraintes de Von Mises

### 4.3.2.2 Propagation dynamique à déplacements imposés

Pour illustrer, les propriétés de conservation de l'énergie de la stratégie d'enrichissement proposée, l'exemple d'une fissure se propageant à déplacement imposé est simulé (voir 4.2.4.1). Cet exemple traité plus haut avec une méthode Eléments Finis classique permet de comparer la quantité d'énergie introduite au cours du calcul par différentes méthodes. La Figure 4.17 montre les résultats obtenus en utilisant une méthode Eléments Finis classique (FEM), une méthode Eléments Finis classique plus la méthode de rééquilibrage (FEM avec rééquilibrage) et la méthode des Eléments Finis Etendus avec la stratégie d'enrichissement développée. La méthode

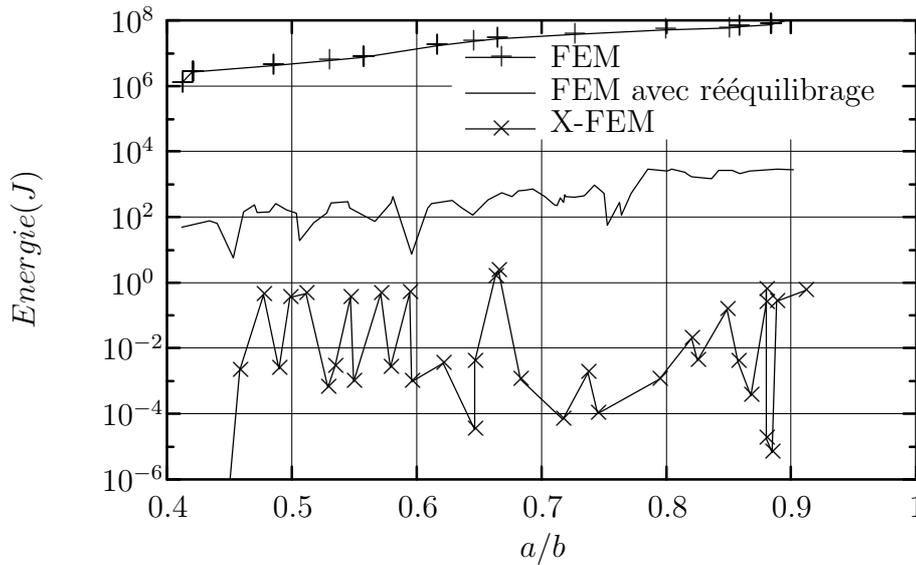


Figure 4.17: Evolution de la quantité cumulée d'énergie introduite

de rééquilibrage permet comme cela a été montré plus haut d'annuler les transferts d'énergie lors de l'étape (b) du calcul (voir Figure 4.1). On constate que la quantité d'énergie introduite au cours du calcul devient négligeable en utilisant les Eléments Finis Etendus. La stratégie d'enrichissement permettant d'annuler les transferts d'énergie durant l'étape (a), on garantit alors la conservation de l'énergie sur la totalité du calcul. Numériquement, la quantité d'énergie introduite, qui est théoriquement nulle, n'est pas de l'ordre du zéro numérique comme on aurait pu s'y attendre. Deux raisons peuvent être invoquées pour justifier ce phénomène : la première est que le bilan énergétique calculé pour estimer l'énergie introduite fait intervenir  $G$  le taux de restitution de l'énergie qui est ici calculé avant la propagation en utilisant l'intégrale d'interaction. Celui-ci est différent du taux de restitution de l'énergie "effectif" que l'on calculerait en utilisant la définition énergétique de  $G$ . Par conséquent, le bilan est quelque peu erroné. La deuxième raison est d'ordre purement numérique : les termes des matrices de masse et de rigidité correspondant aux degrés de liberté enrichis de l'instant  $t_n$  ne sont pas calculés avec la même quadrature numérique aux instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  dans les éléments coupés par la fissure lors de son extension entre ces deux instants. De fait,  $U_n^{n+1T} K_{n+1}^{n+1} U_n^{n+1}$  et  $U_n^{nT} K_n^n U_n^n$  diffèrent légèrement.

---

### 4.3.2.3 Plaque fissurée sous sollicitation mixte

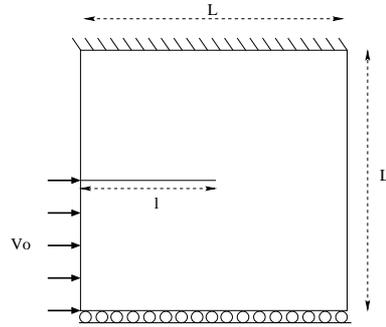


Figure 4.18: Géométrie et chargement

On cherche ici à simuler numériquement les essais menés par Kalthoff [KAL 00]. Comme le montre la Figure 4.18, cette configuration expérimentale permet d'initier la rupture en mode 2 pur. Suivant la vitesses d'impact  $v_0$  du projectile, Kalthoff observe une transition entre la formation de bande de cisaillement pour les hautes vitesses d'impact et la propagation d'une macro fissure de type rupture fragile pour les vitesse d'impact plus faibles. On choisira une vitesse  $v_0 = 16.5ms^{-1}$  comme vitesse type pour la quelle une rupture fragile se produit avec un angle de propagation global de la fissure de  $70^\circ$ . Le matériau est un acier de type maraging (18Ni1900) dont les caractéristiques sont les suivantes :  $E = 190GPa$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 8000kgm^{-3}$ ,  $K_{Ic} = 68MPa\sqrt{m}$ . Dans la géométrie présentée par la Figure 4.18,  $L$  vaut  $0.1m$  et la longueur initiale de la fissure  $l = 0.05m$ . Les résultats ont

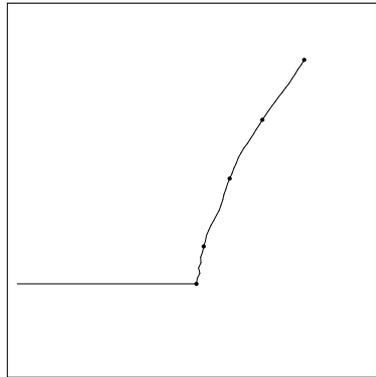


Figure 4.19: Fissure finale

été obtenus en utilisant le critère de contrainte circonférentielle maximum pour la direction de propagation. La vitesse de propagation est choisie constante et égale à  $\dot{a} = 750ms^{-1}$ . L'angle final de propagation obtenu est d'environ  $65^\circ$  ce qui concorde assez bien avec la valeur expérimentale de  $70^\circ$ . Ce résultat est de plus parfaitement en accord avec celui obtenu dans [BEL 03] lorsque les auteurs utilisent le même critère pour la direction de propagation.

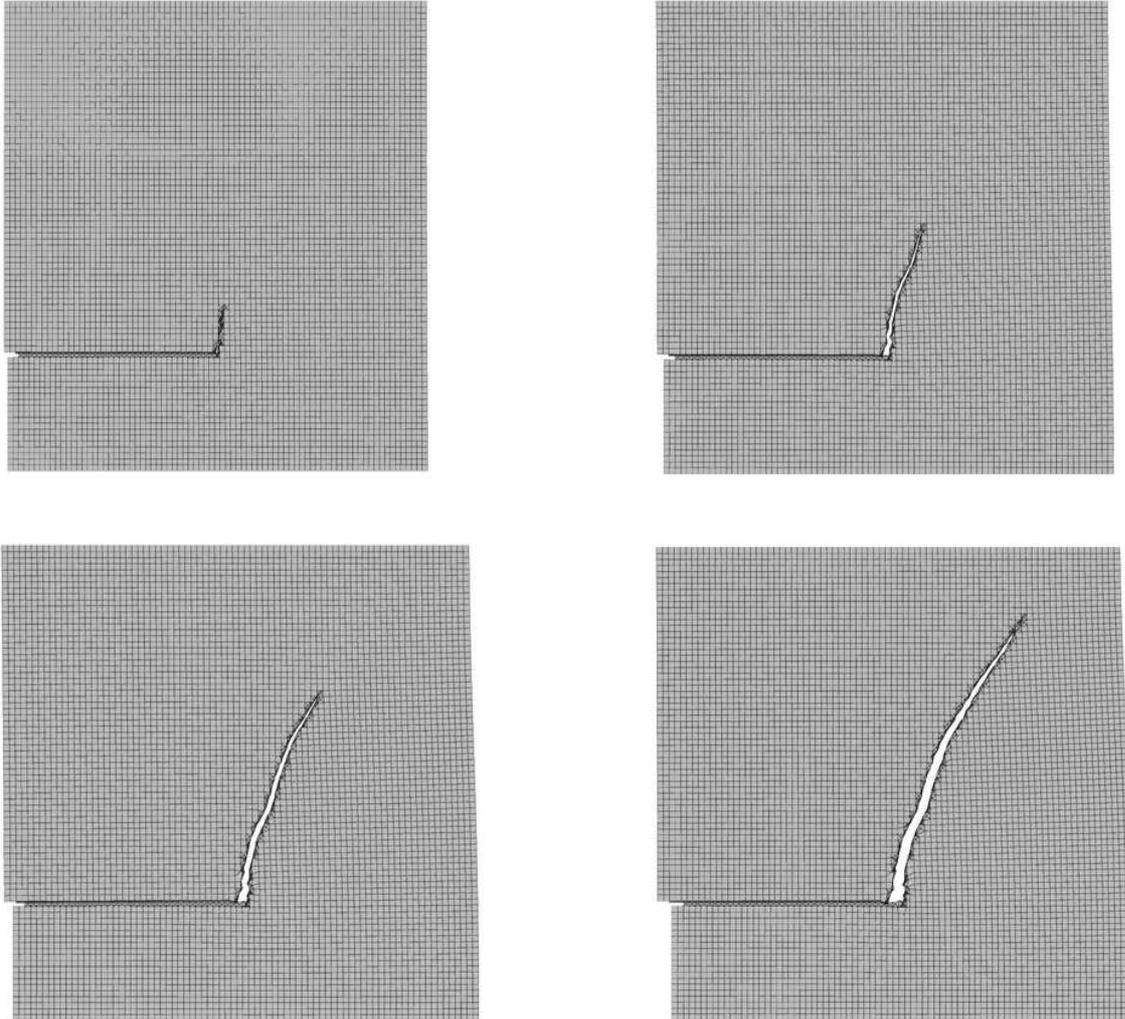


Figure 4.20: Fissure pour  $t = 25\mu s$ ,  $t = 50\mu s$ ,  $t = 75\mu s$  et  $t = 100\mu s$

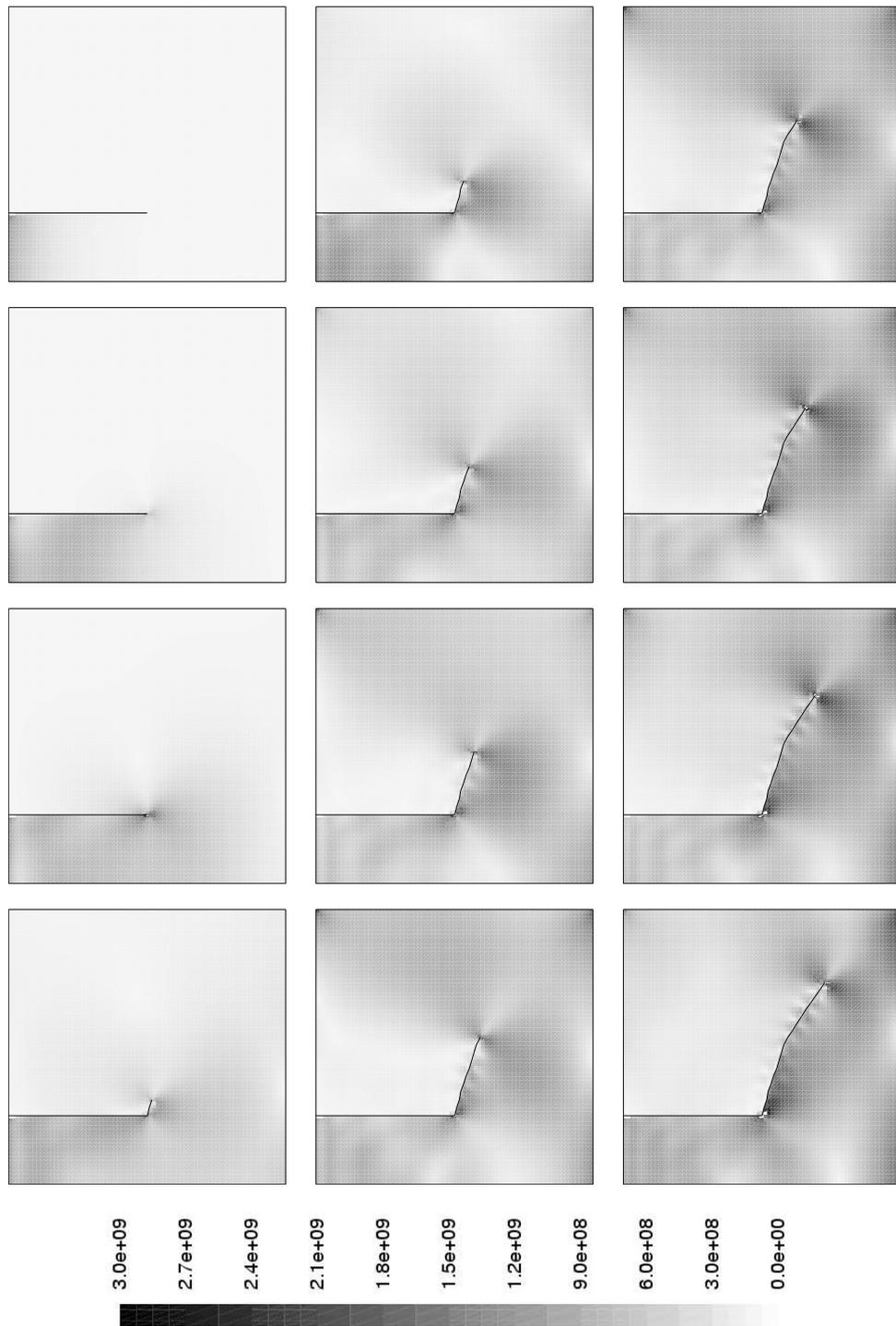


Figure 4.21: Evolution des contraintes de Von Mises  
( $8\mu s$  entre chaque image)

## 4.4 Implémentation

Ce paragraphe a pour objectif de décrire brièvement la façon dont les développements présentés dans ce mémoire ont été implémentés dans le code de calcul **xfem**. Ce code est écrit dans le langage orienté objet C++. Il a d'abord été développé à l'université de Northwestern depuis 1999 par Nicolas Moës, John Dolbow et N Sukumar entre autres. Ce code est actuellement développé par le LaMCos à l'INSA de Lyon où la gestion du développement est assurée par Anthony Gravouil depuis 2001. L'architecture du code est relativement complexe mais elle permet grâce aux possibilités offertes par le langage C++ de travailler avec une sorte de langage dédié à l'instar de ce qui est fait dans le logiciel Cast3M. Le pré et le post- traitement sont effectués à l'aide du logiciel libre Gmsh.

Les fichiers sont placés dans différents dossiers :

**DofManager** : gestion des degrés de libertés, de la discrétisation, des assembleurs, de la structure du système

**Forms** : calcul des quantités élémentaires associées aux formes linéaires ou bilinéaire

**Formulations** : description des algorithmes correspondants aux différents types de calculs susceptibles d'être effectués, interface avec le reste du code

**Fracture** : calcul des intégrales d'interaction et des champs auxiliaires

**Libgx** : interface avec le modéleur géométrique des supports des enrichissements, gestion des interactions entre le maillage et cette géométrie

**Libix** : interface avec le mailleur, gestion des connectivités, des zones

**Libplot** : interface avec les logiciels de post-traitement

**LinearAlgebra** : calcul d'algèbre linéaire, interface avec les solveurs

**LSCRACK** : gestion et évolution des fissures décrites par fonctions de niveaux

**LSET** : classes dédiées aux fonctions de niveaux

**Materials** : gestion des différents types de matériaux, évolution des variables internes

**Numerics** : données relatives aux éléments finis, fonctions de forme, intégration numérique

**Solvers** : différents solveurs et pré-conditionneur (gradient conjugué (CG) pour les systèmes symétriques, résidus minimum généralisés (GMRES) pour les systèmes non symétriques)

---

Les données numériques codées "en dur" se trouvent uniquement dans le répertoire **Numerics**. Le répertoire **Formulations** contient les classes décrivant les algorithmes associés au type de calcul à effectuer, par exemple : calcul statique (Mechanics), calcul thermique (Thermic), calcul de dynamique implicite (ImplicitDynamics),... Il est à noter que ces différentes formulations sont organisées de façon hiérarchique :

- MechanicsBase
  - Elasticity
  - Mechanics
    - MechanicsContact
    - MechanicsPlasticity
    - MechanicsCohesive
- CrackGrowth
  - CohesiveCrackGrowth
  - LevelsetCrackGrowth
- Dynamics
  - ExplicitDynamics
  - ImplicitDynamics
- DynamicCrackGrowth
  - ExplicitCrackGrowth
  - ImplicitCrackGrowth
  - ImplicitLevelSetCrackGrowth
- Mitc4
- Stokes
- Thermic

Notons également que ces différentes formulations peuvent faire appel à une formulation auxiliaire (par exemple CohesiveCrackGrowth utilise le calcul de mécanique effectué dans Mechanics).

Le fait d'utiliser la méthode des Eléments Finis Etendus nécessite une gestion avancée des degrés de liberté. Dans un cadre Eléments Finis classique, on doit pouvoir connaître la nature physique d'un degré de liberté ( déplacement suivant  $\mathbf{x}$ , vitesse suivant  $\mathbf{z}$ , température, contrainte,...), le type d'entité à laquelle il est rattaché (noeud, arrête, point de Gauss,...), le numéro de cette entité. Ici, l'utilisation de degrés de liberté enrichis impose de connaître en plus le numéro de

l'entité géométrique relative à l'enrichissement. De plus en dynamique, on a vu plus haut que la stratégie d'enrichissement impose d'associer aux enrichissements le front dont ils doivent représenter la singularité. On doit donc encore ajouter une clef qui informe sur l'instant auquel le degré de liberté a été créé. De cette façon, on peut, lors du calcul de la valeur des fonctions enrichies, retrouver la géométrie de la fissure à cet instant du calcul. En Annexe B, on trouve le code de la formulation `ImplicitCrackGrowth` qui permet d'effectuer un calcul de dynamique de propagation de fissure en utilisant le schéma de Newmark de l'accélération moyenne.

Les données à fournir pour effectuer un calcul sont écrites dans plusieurs fichiers :

**exemple.DAT** nom et type des autres fichiers de donnée, type de calcul à effectuer, affectation des matériaux aux différentes zones, conditions aux limites, conditions initiales, type d'enrichissement

**maillage.UNV** maillage au format universel unv

**geometrie.GEF** description géométrique des supports des enrichissements

**materiau.MAT** données relativement au comportement du matériau

**procedure.PAR** information pour la propagation (critère pour l'avancée, pour la direction, valeur de la ténacité,...)

**formulation.PAR** information pour la formulation (nombre de pas de temps, durée calculée, fréquence des sorties,...)

L'Annexe C contient un exemple de fichiers de données pour un calcul de propagation dynamique de fissure.

# Chapitre 5

## Prise en compte de discontinuités en temps

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>74</b>
<b>5.2</b>	<b>Les premières approches Eléments Finis en temps</b>	<b>74</b>
5.2.1	L'approche de Zienkiewicz [ZIE 77]	74
5.2.2	L'approche de Wood [WOO 84]	75
<b>5.3</b>	<b>Formulation en vitesse du problème en temps</b>	<b>76</b>
<b>5.4</b>	<b>Méthode des Eléments Finis Etendus en temps</b>	<b>78</b>
5.4.1	Utilisation d'un enrichissement discontinu	78
5.4.2	Une autre approche des méthodes de Galerkin discontinues	81
5.4.3	Stabilité et précision	82
5.4.4	Bilan d'énergie de la formulation discrétisée	83
<b>5.5</b>	<b>Problème test 1D</b>	<b>88</b>
<b>5.6</b>	<b>Eléments Finis Etendus en espace et en temps</b>	<b>91</b>
5.6.1	Fissure semi-infinie dans milieu infini	91
5.6.2	Propagation et arrêt d'une fissure en mode-mixte	92

---

## 5.1 Introduction

Les chapitres précédents ont mis en évidence la difficulté de traiter des problèmes présentant des phénomènes discontinus en temps en utilisant des intégrateurs classiques type Newmark. Ceci est d'autant plus net lorsque des discontinuités numériques en espace apparaissent au cours du calcul comme c'est le cas quand on simule la propagation d'une fissure (cf. exemples du chapitre précédent et problème test 1D). L'idée est d'introduire la discontinuité dans l'approximation en temps utilisée. C'est cette idée qui est exploitée dans les méthodes de Galerkin discontinue. Les développements présentés dans ce chapitre utilisent un formalisme différent mais conduisent à des schémas similaires. Il s'agit, comme on l'a fait pour le problème en espace, d'utiliser la technique de partition de l'unité pour prendre en compte des discontinuités en temps en enrichissant l'approximation pour cette dimension. Pour ce faire, on rappelle d'abord les premières approches Eléments Finis du problème en temps vues dans la littérature. Ceci a pour but de valider la formulation en vitesse proposée dans la section suivante. La formulation proposée pour traiter le problème en temps à l'aide des Eléments Finis Etendus est ensuite présentée dans un cadre général puis appliquée à la prise en compte de discontinuités en temps. Un des résultats les plus intéressants est l'équivalence que l'on peut établir entre le schéma développé ici et certaines méthodes de Galerkin discontinues en temps. Les conclusions concernant la stabilité, la précision, la convergence et la conservation de l'énergie sont donc valables pour ces deux approches (Eléments Finis Etendus en temps et méthode de Galerkin discontinue en temps). En outre, la qualité des résultats fournis par ces schémas pour les applications nous concernant est remarquable.

## 5.2 Les premières approches Eléments Finis en temps

Il s'agit d'étudier l'intégration numérique de l'équation de l'élasto-dynamique (Equation (5.1)). Pour une compréhension plus aisée, on ne considérera qu'un système masse  $m$  ressort  $k$  à un degré de liberté soumis à un effort extérieur  $f$ .  $x, \dot{x}, \ddot{x}$  sont respectivement le déplacement, la vitesse et l'accélération.

$$m\ddot{x} + kx - f = 0 \quad (5.1)$$

On s'intéresse aux approches présentées par Zienkiewicz [ZIE 77] puis Wood [WOO 84] qui formulent le problème en utilisant une vision éléments finis.

### 5.2.1 L'approche de Zienkiewicz [ZIE 77]

Le déplacement est interpolé en temps en écrivant :

$$x(t) = \sum_{n-1}^{n+1} L_i(t)x_i \quad (5.2)$$

où  $L_i$  sont des fonctions de forme quadratiques. Ensuite, on substitue l'Equation (5.2) dans l'équation d'équilibre élasto-dynamique (Equation (5.1)) écrite en utilisant la méthode des résidus pondérés entre  $-\Delta t$  et  $\Delta t$ ,  $W$  étant une fonction poids :

$$\int_{-\Delta t}^{\Delta t} W(t) \left[ m \sum \ddot{L}_i(t)x_i + k \sum L_i(t)x_i \right] dt = \int_{-\Delta t}^{\Delta t} W(t)f(t)dt \quad (5.3)$$

On obtient :

$$\left[ m + \beta_z \Delta t^2 k \right] x_{n+1} + \left[ -2m + \left( \frac{1}{2} + \gamma_z - 2\beta_z \right) \Delta t^2 k \right] x_n \quad (5.4)$$

$$+ \left[ m + \left( \frac{1}{2} - \gamma_z + \beta_z \right) \Delta t^2 k \right] x_{n-1} \quad (5.5)$$

$$= \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \gamma_z + \beta_z \right) f_{n-1} + \left( \frac{1}{2} + \gamma_z - 2\beta_z \right) f_n + \beta_z f_{n+1} \right] \quad (5.6)$$

où

$$\begin{aligned} 2\beta_z \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t}^{\Delta t} W(t)dt &= \frac{1}{\Delta t^2} \int_{-\Delta t}^{\Delta t} W(t)t dt + \frac{1}{\Delta t^3} \int_{-\Delta t}^{\Delta t} W(t)t^2 dt \\ \gamma_z \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t}^{\Delta t} W(t)dt &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\Delta t^2} \int_{-\Delta t}^{\Delta t} W(t)t dt \end{aligned} \quad (5.7)$$

L'Equation (5.4) est écrite formellement de la même façon que l'Equation (2.14) mais  $\beta_z$  et  $\gamma_z$  sont définis par l'Equation (5.7). Par conséquent,  $\beta_z, \gamma_z$  correspondent à une interpolation polynomiale du déplacement et la méthode de Zienkiewicz n'est équivalente à la méthode de Newmark que pour des couples de paramètres  $\beta_N, \gamma_N$  bien particuliers. Autrement dit un choix quelconque de paramètres  $\beta_N, \gamma_N$  n'est pas cohérent avec une interpolation polynomiale. Cette formulation du problème en utilisant une vision Eléments Finis en temps permet cependant de faire le lien avec la méthode de Newmark. Son écriture n'est pas des plus pratiques car elle n'autorise en particulier pas une variation aisée de la valeur du pas temps.

### 5.2.2 L'approche de Wood [WOO 84]

Wood choisit d'écrire une interpolation quadratique du déplacement en utilisant les variables  $x_n, x_{n+1}$  et  $\dot{x}_n$  :

$$x(t) = x_n + t\dot{x}_n + \frac{t^2}{\Delta t^2} (x_{n+1} - x_n - \Delta t\dot{x}_n) \quad (5.8)$$

En utilisant la même démarche que dans l'approche de Zienkiewicz mais en utilisant les résidus pondérés entre 0 et  $\Delta t$ , on a :

$$\left[ 2m + \beta_w \Delta t^2 k \right] (x_{n+1} - x_n - \Delta t\dot{x}_n) - \Delta t^2 k x_n + \gamma_w \Delta t^2 \dot{x}_n = \Delta t^2 F \quad (5.9)$$

où  $F$  est le membre de droite de l'Equation (5.4) et  $\beta_w, \gamma_w$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}\beta_w \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} W(t) dt &= \frac{1}{\Delta t^3} \int_0^{\Delta t} W(t) t^2 dt \\ \gamma_w \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} W(t) dt &= \frac{1}{\Delta t^2} \int_0^{\Delta t} W(t) t dt\end{aligned}\quad (5.10)$$

On obtient ensuite  $\dot{x}_{n+1}$  en dérivant l'Equation (5.8) :

$$\Delta t \dot{x}_{n+1} = 2(x_{n+1} - x_n) - \Delta t \dot{x}_n \quad (5.11)$$

Cette méthode est équivalente à l'approche de Zienkiewicz et donc à celle de Newmark mais encore une fois uniquement pour un choix particulier de  $\beta_N, \gamma_N$ . Néanmoins, on obtient ici une méthode à un pas qui permet donc une taille de pas de temps variable. On peut aussi généraliser la démarche (c.f. Zienkiewicz *et al.* [ZIE 84]) à une interpolation polynomiale d'ordre  $p$  pour obtenir un ensemble cohérent de méthode à un pas.

### 5.3 Formulation en vitesse du problème en temps

L'idée émise plus haut étant de travailler sur l'interpolation de la vitesse, on va s'inspirer des travaux de Zienkiewicz et Wood pour formuler le problème en vitesse. Pour plus de clarté, on change de notation :  $u$  est le déplacement,  $v$  la vitesse et  $a$  l'accélération. On propose donc d'interpoler la vitesse dans l'intervalle  $[t_n; t_{n+1}]$ . Le choix d'une interpolation par des fonctions de forme linéaires est immédiat (Zienkiewicz et Wood interpolent de déplacement par des fonctions quadratiques) :

$$v(t) = v_n \lambda_n(t) + v_{n+1} \lambda_{n+1}(t) \quad (5.12)$$

où

$$\lambda_n(t) = \frac{t_{n+1} - t}{t_{n+1} - t_n}; \lambda_{n+1}(t) = \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} \quad (5.13)$$

On obtient ensuite le déplacement par intégration directe de l'Equation (5.12) en considérant la condition initiale  $u(t_n) = u_n$  :

$$u(t) = u_n + \int_{t_n}^t v(\tau) d\tau \quad (5.14)$$

La méthode des résidus pondérés est ensuite utilisée entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  (avec  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ ). Comme le problème est écrit en vitesse, il vient : connaissant  $v_n$  et  $u_n$  trouver  $v_{n+1}$  tel que :

$$[m + \beta \Delta t^2 k] v_{n+1} = -\Delta t k u_n + [m + (\beta - \gamma) \Delta t^2 k] v_n \quad (5.15)$$

$$+\Delta t [(1 - \gamma) f_n + \gamma f_{n+1}] \quad (5.16)$$

où

$$\begin{aligned}\beta \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} W(t) dt &= \frac{1}{\Delta t^3} \int_{t_n}^{t_{n+1}} W(t) (t - t_n)^2 dt \\ \gamma \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} W(t) dt &= \frac{1}{\Delta t^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} W(t) (t - t_n) dt\end{aligned}\quad (5.17)$$

On peut aussi obtenir cette formule à partir de la méthode de Newmark dans le cas où  $2\beta_N = \gamma_N$ .  $u_{n+1}$  est ensuite calculé grâce à l'Equation (5.14) :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2} (v_{n+1} + v_n) \quad (5.18)$$

Ce résultat avait été obtenu en utilisant l'approche de Wood (c.f. Equation (5.11)) et peut aussi être obtenu en combinant les Equations (2.11) et (2.12) de la méthode de Newmark quand  $2\beta_N = \gamma_N$ . La formulation présentée ici est donc équivalente à celles de Zienkiewicz et Wood à ceci près que les efforts extérieurs sont ici interpolés linéairement ( alors qu'ils font l'objet d'une interpolation quadratique dans les approches de Zienkiewicz et Wood).

**Formulation en vitesse du problème en temps** (interpolation Eléments Finis)

Connaissant  $v_n$  et  $u_n$  trouver  $u_{n+1}$  et  $v_{n+1}$  tel que :

$$\begin{aligned}[m + \beta \Delta t^2 k] v_{n+1} &= -\Delta t k u_n + [m + (\beta - \gamma) \Delta t^2 k] v_n + \Delta t [(1 - \gamma) f_n + \gamma f_{n+1}] \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{\Delta t}{2} (v_{n+1} + v_n)\end{aligned}$$

**Remarque 17** *La vitesse étant linéaire par morceaux, l'accélération est constante par morceaux. Dans l'intervalle de temps  $I_{n+1} = ]t_n; t_{n+1}[$ , en dérivant l'Equation (5.12), on a :*

$$a(t) = a_{n+1} = \frac{1}{\Delta t} (v_{n+1} - v_n) \quad (5.19)$$

*Dans cette approche, l'accélération n'est donc pas définie de manière unique aux piquets de temps. Dans la méthode de Newmark, les hypothèses concernent la régularité du déplacement, ce qui permet de définir l'accélération. En utilisant un développement de Taylor, on peut ici écrire le développement limité de  $u$  et  $v$  de façon abusive en définissant  $\ddot{u}(t_n) = \ddot{u}_n$  et  $\dot{v}(t_n) = \dot{v}_n$  :*

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_n \quad (5.20)$$

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t \dot{v}_n \quad (5.21)$$

Pour être en accord avec la méthode de Newmark, on pourrait alors définir  $\ddot{u}_n$  et  $\dot{v}_n$  par :

$$\begin{aligned}\ddot{u}_n &= (1 - 2\beta_N) a_n + 2\beta_N a_{n+1} \\ \dot{v}_n &= (1 - \gamma_N) a_n + \gamma_N a_{n+1}\end{aligned}\quad (5.22)$$

Ces définitions sont cinématiquement cohérentes si  $\ddot{u}_n = \dot{v}_n$  i.e. si  $2\beta_N = \gamma_N$ . En effet, dans la méthode de Newmark, les relations cinématiques entre déplacement vitesse et accélération ne sont satisfaites exactement, pour  $u$  quadratique et  $v$  linéaire, seulement si  $\beta_N, \gamma_N$ .

## 5.4 Méthode des Eléments Finis Etendus en temps

Dans cette partie, on se propose d'utiliser la méthode de partition de l'unité présentée dans le chapitre 2 afin d'enrichir l'interpolation de la vitesse. L'objectif étant d'enrichir l'interpolation par des fonctions discontinues pour traiter de manière plus précise les problèmes dans lesquels la vitesse montre des discontinuités en temps. Comme l'ensemble des fonctions  $\{\lambda_i\}_{i=0..N}$  constitue une partition de l'unité dans l'intervalle  $[0; T]$ , on peut enrichir cette base de fonction de forme linéaire :

$$v(t) = \sum_{i=0}^N \lambda_i(t) v_i^c + \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^{\mathcal{N}_j} \lambda_i(t) \phi_j(t) v_{i,j}^e \quad (5.23)$$

où  $v_i^c$  sont les degrés de liberté classiques,  $\phi_j$  les fonctions de forme enrichies et  $v_{i,j}^e$  les degrés de liberté additionnels correspondant à ces fonctions enrichies et  $\mathcal{N}_j$  l'ensemble des noeuds qui portent ces degrés de liberté enrichis. Les  $\phi_j$  peuvent alors être choisies de manière à capturer précisément la discontinuité.

### 5.4.1 Utilisation d'un enrichissement discontinu

On considère ici l'utilisation de la fonction de Heaviside  $H$  comme fonction d'enrichissement. On place ces fonctions à chaque piquet de temps (cf. Figure 5.1). Considérons main-

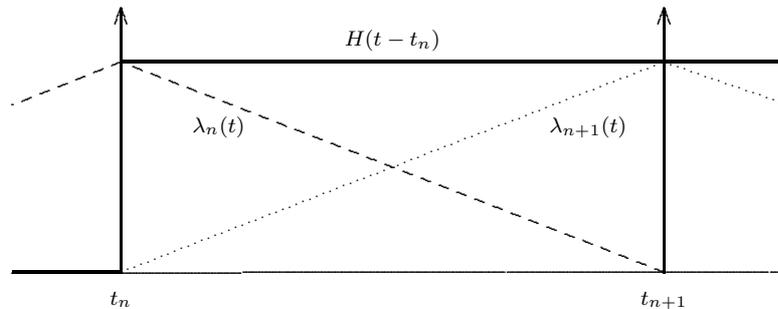


Figure 5.1: Fonctions de forme dans  $I_{n+1}$

tenant l'intervalle de temps  $I_{n+1} = ]t_n; t_{n+1}[$ . Dans  $I_{n+1}$ , la vitesse et le déplacement sont décomposés en une contribution continue et une contribution discontinue :

$$\begin{aligned} v(t) &= v^c(t) + v^e(t) \\ u(t) &= u^c(t) + u^e(t) \end{aligned} \quad (5.24)$$

On choisit de placer un enrichissement  $\phi_j = H(t - t_j)$  à chaque piquet de temps  $t_j$  et de limiter son support  $\mathcal{N}_j$  à ce seul piquet de temps. Comme  $\lambda_j$  a un support compact  $[t_{j-1}; t_{j+1}]$  et que  $\phi_j = H(t - t_j)$  est nul pour tout instant antérieur à  $t_j$ ,  $\phi_n = H(t - t_n)$  est la seule fonction enrichie active dans  $I_{n+1}$ . L'Equation (5.23) donne pour les contributions continue et discontinue de la vitesse :

$$\begin{aligned} v^c(t) &= v_n^c \lambda_n(t) + v_{n+1}^c \lambda_{n+1}(t) \\ v^e(t) &= v_{n+1}^e \lambda_n(t) H(t - t_n) \end{aligned} \quad (5.25)$$

avec

$$\lambda_n(t) = \frac{t_{n+1} - t}{t_{n+1} - t_n}; \lambda_{n+1}(t) = \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} \quad (5.26)$$

On note abusivement  $v_{n+1}^e = v_{n,n}^e$  car ce degré de liberté est obtenu lors de la résolution sur l'intervalle  $I_{n+1}$ . On se propose ensuite d'imposer de façon forte la continuité du déplacement aux piquets de temps ( $u(t_n^+) = u(t_n^-)$ ) et la relation cinématique entre le déplacement et la vitesse ( $\dot{u} = v$ ). On peut alors écrire les parties continue et discontinue du déplacement comme suit :

$$\begin{aligned} u^c(t) &= u_n^c + \int_{t_n}^t v^c(\tau) d\tau \\ u^e(t) &= u_n^e + \int_{t_n^+}^t v^e(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.27)$$

En utilisant la méthode des résidus pondérés dans  $I_{n+1}$ , la continuité de la vitesse étant imposée de façon faible à l'instant  $t_n$ , on a :

$$\int_{t_n^+}^{t_{n+1}^-} W(t) [m\dot{v}(t) + ku(t)] dt + W(t_n^+) m v_{n+1}^e = \int_{t_n^+}^{t_{n+1}^-} W(t) f(t) dt \quad (5.28)$$

Comme des degrés de libertés ont été ajoutés, il est nécessaire de choisir deux fonctions poids indépendantes  $\{W_i\}_{i=1,2}$  pour résoudre le problème qui peut être écrit

de la façon suivante :

**Formulation Eléments Finis Etendus du problème en temps**

Connaissant  $u_n^c, u_n^e, v_n^c$  et  $v_n^e$ , trouver  $u_{n+1}^c, u_{n+1}^e, v_{n+1}^c$  et  $v_{n+1}^e$  tels que :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^c &= u_n^c + \frac{\Delta t}{2} (v_{n+1}^c + v_n^c) \\ u_{n+1}^e &= u_n^e + \frac{\Delta t}{2} v_{n+1}^e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [m + \beta_1 \Delta t^2 k] v_{n+1}^c + [(\delta_1 - 1)m + (\gamma_1 - \beta_1) \Delta t^2 k] v_{n+1}^e &= -\Delta t k u_n^c - \Delta t k u_n^e \\ &+ [m + (\beta_1 - \gamma_1) \Delta t^2 k] v_n^c + \Delta t [(1 - \gamma_1) f_n + \gamma_1 f_{n+1}] \\ [m + \beta_2 \Delta t^2 k] v_{n+1}^c + [(\delta_2 - 1)m + (\gamma_2 - \beta_2) \Delta t^2 k] v_{n+1}^e &= -\Delta t k u_n^c - \Delta t k u_n^e \\ &+ [m + (\beta_2 - \gamma_2) \Delta t^2 k] v_n^c + \Delta t [(1 - \gamma_2) f_n + \gamma_2 f_{n+1}] \end{aligned}$$

Soit en écriture matricielle :

$$\mathbb{H}_1 \mathbf{q}_{n+1} = \mathbb{H}_0 \mathbf{q}_n + \mathbf{F}_{n+1} \quad (5.29)$$

avec

$$\mathbb{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2} \\ 0 & 0 & m + \beta_1 \Delta t^2 k & (\delta_1 - 1)m + (\gamma_1 - \beta_1) \Delta t^2 k \\ 0 & 0 & m + \beta_2 \Delta t^2 k & (\delta_2 - 1)m + (\gamma_2 - \beta_2) \Delta t^2 k \end{bmatrix}, \mathbf{q}_n = \begin{bmatrix} u_n^c \\ u_n^e \\ v_n^c \\ v_n^e \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{H}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\Delta t}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\Delta t k & -\Delta t k & m + (\beta_1 - \gamma_1) \Delta t^2 k & 0 \\ -\Delta t k & -\Delta t k & m + (\beta_2 - \gamma_2) \Delta t^2 k & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta t ((1 - \gamma_1) f_n + \gamma_1 f_{n+1}) \\ \Delta t ((1 - \gamma_2) f_n + \gamma_2 f_{n+1}) \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \beta_i \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n^+}^{t_{n+1}^-} W_i(t) dt &= \frac{1}{\Delta t^3} \int_{t_n^+}^{t_{n+1}^-} W_i(t) (t - t_n^+)^2 dt \\ \gamma_i \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n^+}^{t_{n+1}^-} W_i(t) dt &= \frac{1}{\Delta t^2} \int_{t_n^+}^{t_{n+1}^-} W_i(t) (t - t_n^+) dt \\ \delta_i \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n^+}^{t_{n+1}^-} W_i(t) dt &= W_i(t_n^+) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Pour résumer, cette formulation a les propriétés suivantes : le déplacement est continu, la vitesse est linéaire dans l'intervalle de temps et peut présenter des discontinuités aux piquets de temps (car la continuité de la vitesse est imposée de façon faible), la contrainte cinématique est satisfaite. Il reste à choisir les fonctions poids  $W_1, W_2$  pour donner à ce schéma d'intégration en temps les meilleurs propriétés.

---

**Remarque 18** Concernant l'accélération, celle-ci peut être définie comme une fonction constante par morceaux dont la valeur dans  $I_{n+1}$  est obtenue par dérivation de l'Equation (5.27) :

$$a(t) = a_{n+1} = \frac{1}{\Delta t} (v_{n+1}^c - v_{n+1}^e - v_n^c) \quad (5.31)$$

### 5.4.2 Une autre approche des méthodes de Galerkin discontinues

Comme il est possible de retrouver les formules de la méthode Newmark en utilisant une vision Eléments Finis du problème en temps, le concept d'Eléments Finis Etendus en temps permet d'approcher les méthodes de Galerkin discontinues en temps sous un angle nouveau. Considérons le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} v_n^+ &= v_n^c + v_{n+1}^e \\ v_{n+1}^- &= v_{n+1}^c \end{aligned} \quad (5.32)$$

et choisissons les fonctions poids comme étant les fonctions de forme linéaires

$$\begin{aligned} W_1 &= \lambda_n \\ W_2 &= \lambda_{n+1} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Les paramètres sont alors :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{12}, \gamma_1 = \frac{1}{3}, \delta_1 = 2 \\ \beta_2 &= \frac{1}{4}, \gamma_2 = \frac{2}{3}, \delta_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Le système à résoudre (Equation (5.29)) est alors le même que celui obtenu avec une approximation P3-P1 dans la méthode de Galerkin discontinue ([LI 03, HUL 92]) ou avec une formulation en vitesse comme dans [MIC 03].

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{\Delta t}{2} (v_{n+1}^- + v_n^+) \\ \begin{bmatrix} m + \frac{\Delta t^2}{12}k & -\frac{\Delta t^2}{12}k \\ \frac{\Delta t^2}{3}k & m + \frac{\Delta t^2}{6}k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_n^+ \\ v_{n+1}^- \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} mv_n^- + \frac{\Delta t^2}{6}(f_n - f_{n+1}) \\ mv_n^- - \Delta t k u_n + \frac{\Delta t^2}{2}(f_n + f_{n+1}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.35)$$

La méthode présentée ici a les mêmes propriétés que la formulation proposée par Michler *et al.* [MIC 03]. Ces deux méthodes de Galerkin discontinues ( [MIC 03] et P3 – P1) sont similaires : les valeurs calculées aux piquets de temps sont identiques mais l'interpolation du déplacement dans l'intervalle diffère. En effet, quand le déplacement est P3, la contrainte cinématique ( $\dot{u} = v$ ) n'est pas satisfaite contrairement à ce qui est fait ici et dans [MIC 03]. Dans les méthodes de Galerkin discontinues la notion de vecteur d'état n'a pas de sens et il n'est donc pas possible d'en étudier la stabilité en utilisant les méthodes classiques. Pour certains cas particuliers, celle-ci peut néanmoins être étudiée comme cela est fait dans [EKE 02]

### 5.4.3 Stabilité et précision

Tous les résultats numériques présentés dans ce paragraphe sont obtenus pour le système masse ressort sans effort extérieur mais avec une vitesse initiale non nulle. Les fonctions poids sont  $W_1 = \lambda_n, W_2 = \lambda_{n+1}$ . Les résultats sont valables pour ce choix particulier des fonctions de poids et ils le sont aussi pour les méthodes de Galerkin discontinues mentionnées plus haut. En utilisant l'Equation (5.29), le problème peut être réécrit de la façon suivante :

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbb{A}\mathbf{q}_n \quad (5.36)$$

$\mathbb{A} = \mathbb{H}_1^{-1}\mathbb{H}_0$  est la matrice d'amplification du schéma dont la stabilité dépend alors uniquement des valeurs propres de cette matrice. Elles sont calculées en résolvant l'équation suivante :

$$\det(\mathbb{H}_0 - r\mathbb{H}_1) = 0 \quad (5.37)$$

Ce qui nous ramène à

$$r(r-1)(\alpha_2 r^2 - \alpha_1 r + \alpha_0) = 0 \quad (5.38)$$

où

$$\alpha_2 = \left[ \frac{\omega^2 \Delta t^2}{\zeta^2} \right] \left\langle \delta - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{\zeta^2} (1 - \gamma \zeta^2) \right\rangle - \left\langle \frac{\omega^2 \Delta t^2}{\zeta^2} \right\rangle \left[ \delta - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{\zeta^2} (1 - \gamma \zeta^2) \right] \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & \left[ \frac{\omega^2 \Delta t^2}{\zeta^2} \left( 2 - \left( \gamma + \frac{1}{2} \right) \zeta^2 \right) \right] \left\langle \delta - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{\zeta^2} \left( 1 - \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \zeta^2 \right) \right\rangle \\ & - \left\langle \frac{\omega^2 \Delta t^2}{\zeta^2} \left( 2 - \left( \gamma + \frac{1}{2} \right) \zeta^2 \right) \right\rangle \left[ \delta - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{\zeta^2} \left( 1 - \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \zeta^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\alpha_0 = \left[ \frac{\omega^2 \Delta t^2}{\zeta^2} \left( 1 - \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \zeta^2 \right) \right] \langle \delta \rangle - \left\langle \frac{\omega^2 \Delta t^2}{\zeta^2} \left( 1 - \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \zeta^2 \right) \right\rangle [\delta] \quad (5.41)$$

avec  $\langle b \rangle = \frac{1}{2}(b_2 + b_1), [b] = b_2 - b_1$  pour les paramètres constants. Les valeurs propres 0 et 1 correspondent aux modes triviaux des équations de réactualisation. L'intérêt est d'étudier les racines de l'équation du second ordre  $\alpha_2 r^2 - \alpha_1 r + \alpha_0$ . Dans les Equations (5.39, 5.40, 5.41), on reconnaît à l'intérieur des opérateurs  $\langle \rangle$  et  $[\ ]$  les termes qui gouvernent la stabilité des schémas de Newmark.  $r_1, r_2$  sont les racines de cette équation.

Le rayon spectral de la matrice d'amplification est comparé à celui obtenu dans l'étude de la méthode de Newmark de l'accélération moyenne ( $\gamma_N = \frac{1}{2}, \beta_N = \frac{1}{4}$ ) et de la méthode HHT avec  $\alpha = -0.3$ . La Figure 5.2 montre l'évolution du rayon spectral pour ces trois méthodes en fonction du paramètre fréquentiel  $\omega \Delta t$ . La première observation est que la méthode est inconditionnellement stable pour ce choix de fonctions poids ( $W_1 = \lambda_n, W_2 = \lambda_{n+1}$ ). Contrairement au cas de la méthode

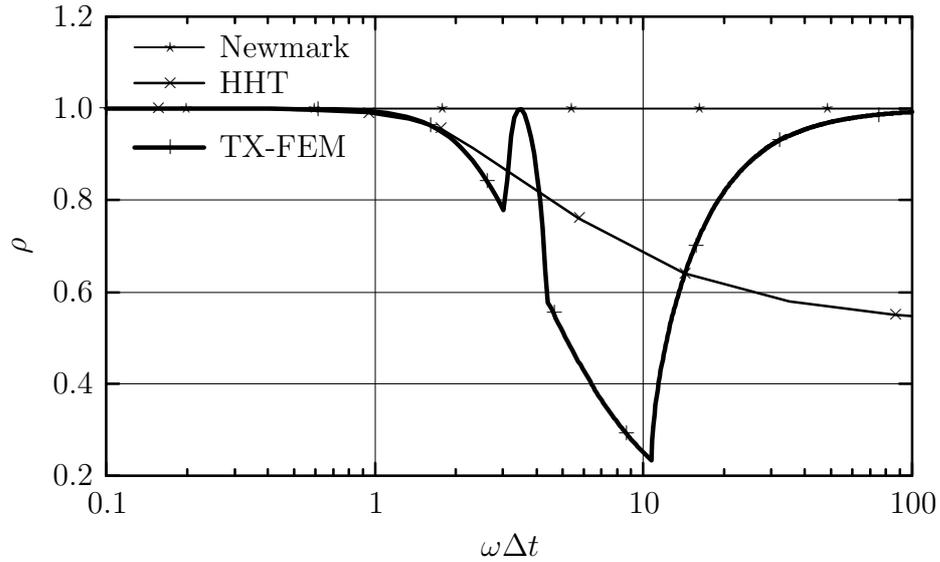


Figure 5.2: Rayon spectral  
Newmark ( $\gamma_N = \frac{1}{2}, \beta_N = \frac{1}{4}$ ), HHT ( $\alpha = -0.3$ ) et TX-FEM

de l'accélération moyenne de Newmark, le rayon n'est pas toujours égal à 1 et la méthode présentera de l'amortissement numérique comme la méthode HHT. On distingue deux régions de  $\omega\Delta t$  ( $\omega\Delta t \approx \pi$  et  $\omega\Delta t \geq 10$ ) pour lesquelles le comportement de la méthode diffère de celui de Newmark et HHT. Pour ces valeurs de  $\omega\Delta t$ , les racines de l'Equation (5.37) ne sont plus complexes conjuguées comme c'est le cas habituellement mais réelles distinctes. Ceci implique que, dans ces domaines fréquentiels, la réponse du schéma est apériodique et peut s'écrire sous cette forme :

$$q_n = \sum e^{-\frac{n\Delta t}{\tau_i}} \eta_i$$

avec  $\eta_i$  le vecteur propre correspondant à la valeur propre réelle  $r_i = e^{-\frac{\Delta t}{\tau_i}}$ . Une conséquence de cette propriété est que la réponse du schéma dans le cas d'un problème multi-degrés de liberté sera exempte d'oscillations numériques pour les valeurs correspondantes du paramètre fréquentiel  $\omega\Delta t$ . Les exemples présentés plus loin illustreront ce phénomène plus explicitement.

Comme mentionné plus haut, la méthode présente un amortissement numérique. La Figure 5.3 présente l'évolution du facteur d'amortissement numérique  $\xi$ . L'amortissement est ici comparable à celui de la méthode HHT. Mais comme le montre les Figures 5.4 et 5.5, la précision obtenue n'est pas affectée par cet amortissement numérique : l'erreur relative sur la période est environ dix fois plus faible que celle obtenue par la méthode de Newmark et la convergence est du troisième ordre.

#### 5.4.4 Bilan d'énergie de la formulation discrétisée

Un des intérêts de la formulation Eléments Finis Etendus en temps et de son écriture matricielle est qu'elle offre la possibilité d'étudier facilement les propriétés de stabilité et de précision comme au paragraphe précédent. Les résultats obtenus sont

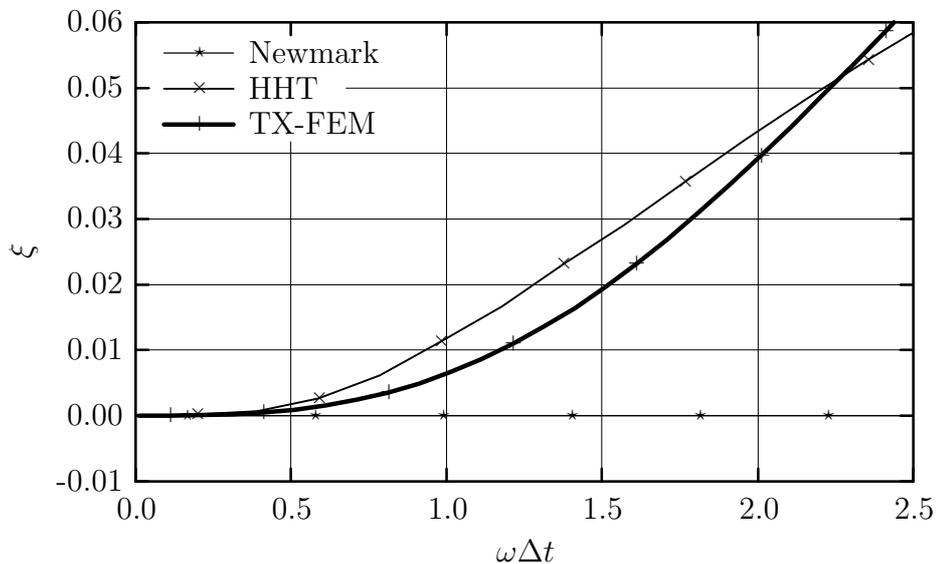


Figure 5.3: Facteur d'amortissement numérique  
Newmark ( $\gamma_N = \frac{1}{2}, \beta_N = \frac{1}{4}$ ), HHT ( $\alpha = -0.3$ ) et TX-FEM

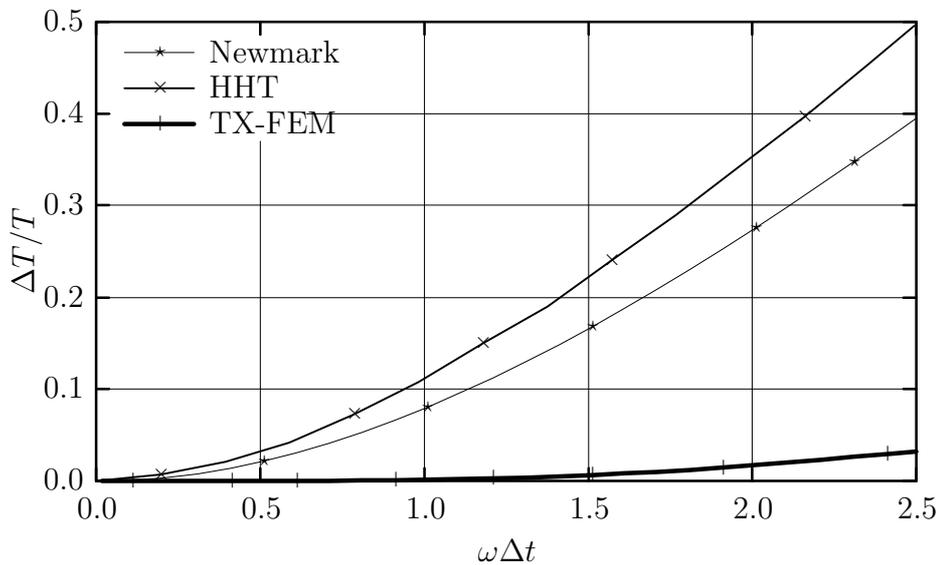


Figure 5.4: Erreur relative de périodicité  
Newmark ( $\gamma_N = \frac{1}{2}, \beta_N = \frac{1}{4}$ ), HHT ( $\alpha = -0.3$ ) et TX-FEM

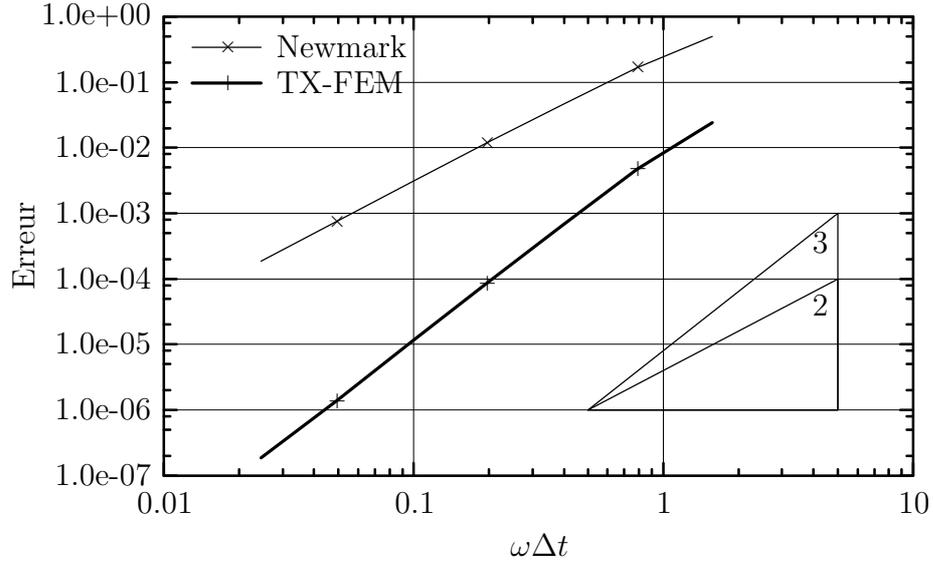


Figure 5.5: Erreur en norme  $L_2$   
Newmark ( $\gamma_N = \frac{1}{2}, \beta_N = \frac{1}{4}$ ) et TX-FEM

évidemment valables pour les méthodes de Galerkin discontinues équivalentes pour lesquelles la notion de vecteur n'a pas de sens. Ici, on étudie les propriétés du schéma d'un point de vue de la conservation de l'énergie. On définit les notations suivantes pour les quantités cinématiques :

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \frac{1}{2}(x_{n+1}^- + x_n^+) \\ [x] &= x_{n+1}^- - x_n^+ \\ [[x]] &= x_n^+ - x_n^- \end{aligned} \quad (5.42)$$

Puis, en utilisant les définitions de  $v_n^+$  et  $v_{n+1}^-$  (Equation (5.32)) et en pré-multipliant les Equations (5.29c,d) par  $[u]$ , on a :

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}mv^2\right] + \left[\frac{1}{2}ku^2\right] + \langle \beta - \frac{\gamma}{2} \rangle \Delta t^2 \left[\frac{1}{2}kv^2\right] + 2\langle \gamma - \frac{1}{2} \rangle \frac{1}{2}k[u]^2 + \langle \delta \rangle m \langle v \rangle [[v]] = \\ \langle \gamma - \frac{1}{2} \rangle [u][f] + [u]\langle f \rangle \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\left[\beta - \frac{\gamma}{2}\right] \Delta t^2 \left[\frac{1}{2}kv^2\right] + 2\left[\gamma - \frac{1}{2}\right] \frac{1}{2}k[u]^2 + [\delta]m \langle v \rangle [[v]] = \left[\gamma - \frac{1}{2}\right][u][f] \quad (5.44)$$

Le choix des fonctions poids  $W_1 = \lambda_n, W_2 = \lambda_{n+1}$  fixe les valeurs des paramètres du schéma par l'intermédiaire de l'Equation (5.34) :

$$\begin{aligned} \langle \beta - \frac{\gamma}{2} \rangle &= -\frac{1}{12}, [\beta - \frac{\gamma}{2}] = 0 \\ \langle \gamma - \frac{1}{2} \rangle &= 0, [\gamma - \frac{1}{2}] = \frac{1}{3} \\ \langle \delta \rangle &= -2, [\delta] = 1 \end{aligned} \quad (5.45)$$

En considérant un système masse ressort sans effort extérieur, on peut avoir l'interprétation simplifiée suivante : de l'énergie est créée au piquet de temps (Equation (5.43b))

puis de l'énergie est dissipée dans l'intervalle de temps (Equation (5.43a)). Comme l'énergie créée  $m\langle v\rangle[[v]] = \frac{2[\gamma-\frac{1}{2}]}{[\delta]}\frac{1}{2}k[u]^2$  vient d'un terme dissipatif le schéma n'est pas conservatif. Mais tel serait le cas si le saut d'énergie totale (énergie de déformation  $\frac{1}{2}ku^2$ , énergie cinétique  $\frac{1}{2}mv^2$  et énergie numérique  $\langle\beta - \frac{\gamma}{2}\rangle\Delta t^2\frac{1}{2}kv^2$ ) était égal aux termes non conservatifs de l'Equation (5.43a)  $2\langle\gamma - \frac{1}{2}\rangle\frac{1}{2}k[u]^2 + \langle\delta\rangle m\langle v\rangle[[v]]$ . Soit en utilisant la continuité de  $u$  et l'Equation (5.43b) :

$$\begin{aligned} [[\frac{1}{2}mv^2]] + \langle\beta - \frac{\gamma}{2}\rangle\Delta t^2[[\frac{1}{2}kv^2]] &= 2\langle\gamma - \frac{1}{2}\rangle\frac{1}{2}k[u]^2 \\ -\frac{\langle\delta\rangle}{[\delta]} \left( [\beta - \frac{\gamma}{2}]\Delta t^2[\frac{1}{2}kv^2] + 2[\gamma - \frac{1}{2}]\frac{1}{2}k[u]^2 \right) & \end{aligned} \quad (5.46)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( m + \langle\beta - \frac{\gamma}{2}\rangle\Delta t^2k \right) [[v^2]] &= \\ \frac{1}{2}\Delta t^2k \left( 2 \left( \langle\gamma - \frac{1}{2}\rangle - \frac{\langle\delta\rangle}{[\delta]}[\gamma - \frac{1}{2}] \right) \langle v \rangle - \frac{\langle\delta\rangle}{[\delta]}[\beta - \frac{\gamma}{2}][v] \right) \langle v \rangle & \end{aligned} \quad (5.47)$$

Pour ce choix de fonction poids ( $W_1 = \lambda_n, W_2 = \lambda_{n+1}$ ), la méthode ne conserve pas l'énergie discrète bien que la conservation de l'énergie continue soit assurée dans l'intervalle de temps par la formulation elle-même (cf. Equation (5.28)). Le bilan d'énergie discrète ne s'écrit pas comme le bilan continu écrit à partir du théorème de l'énergie cinétique (celui-ci pouvant être retrouvé dans  $I_{n+1}$  grâce à l'Equation (5.28)). Ceci peut être observé sur les Figures 5.6 et 5.7. Le fait que le schéma ne préserve pas l'énergie discrète pouvait être déduit de la présence d'amortissement numérique observée plus haut. Le bilan énergétique de la formulation discrétisée est tracé sur la Figure 5.6 ( $W, T, N$  sont respectivement les énergies de déformation, cinétique et numérique, les valeurs sont ici normalisées par la quantité d'énergie initialement introduite de la système par la condition initiale). La Figure 5.7 est un agrandissement de la Figure 5.6. On y voit clairement la création d'énergie aux piquets de temps puis sa dissipation durant l'intervalle de temps suivant. La quantité d'énergie dissipée en moyenne reste néanmoins négligeable par rapport à la quantité d'énergie du système.

Au final, et ce bien que le schéma présente de l'amortissement et de la dissipation numériques, la précision est du troisième ordre pour le choix  $W_1 = \lambda_n, W_2 = \lambda_{n+1}$ . Tous les résultats présentés ici sont valables pour les méthodes de Galerkin discontinues. Les aptitudes de la méthode pour l'intégration de phénomènes discontinus sont illustrées dans le paragraphe suivant.

**Remarque 19** *Le choix de fonctions poids effectué ici semble raisonnable mais on peut néanmoins se demander s'il n'existe pas de choix plus judicieux. De nombreux essais ont été tentés sans aboutir à un résultat plus convainquant. Le choix d'autres fonctions poids semble dégrader les propriétés du schéma, donnant parfois des résultats pour le moins exotiques au niveau du rayon spectral notamment et donc de la stabilité.*

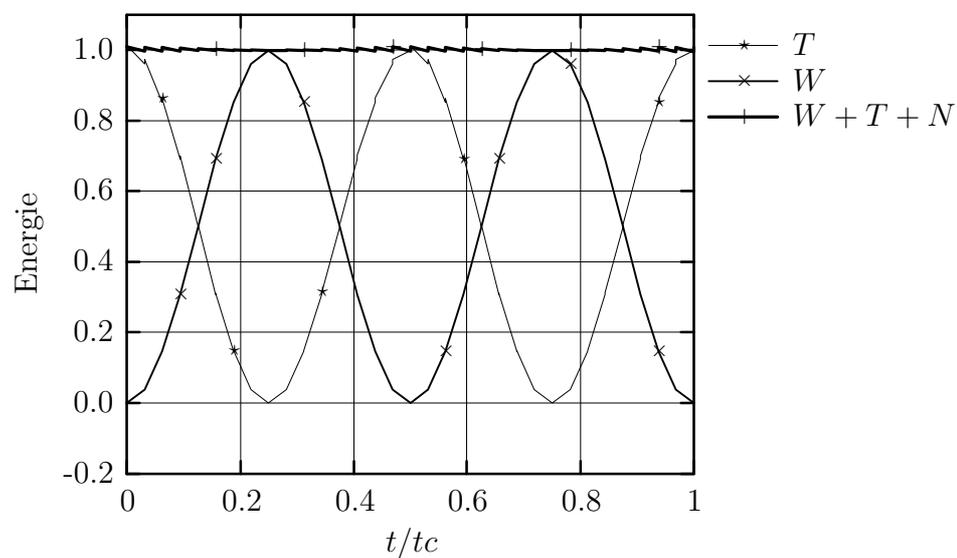


Figure 5.6: Bilan énergétique de la formulation TX-FEM discrétisée  
 $\omega\Delta t \approx 0.2$

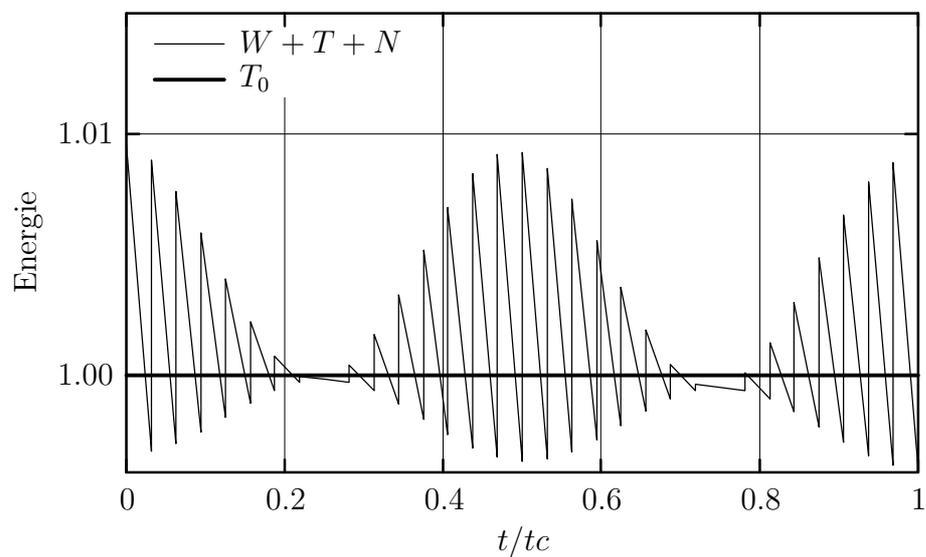


Figure 5.7: Illustration des transferts d'énergie  
 $\omega\Delta t \approx 0.2$

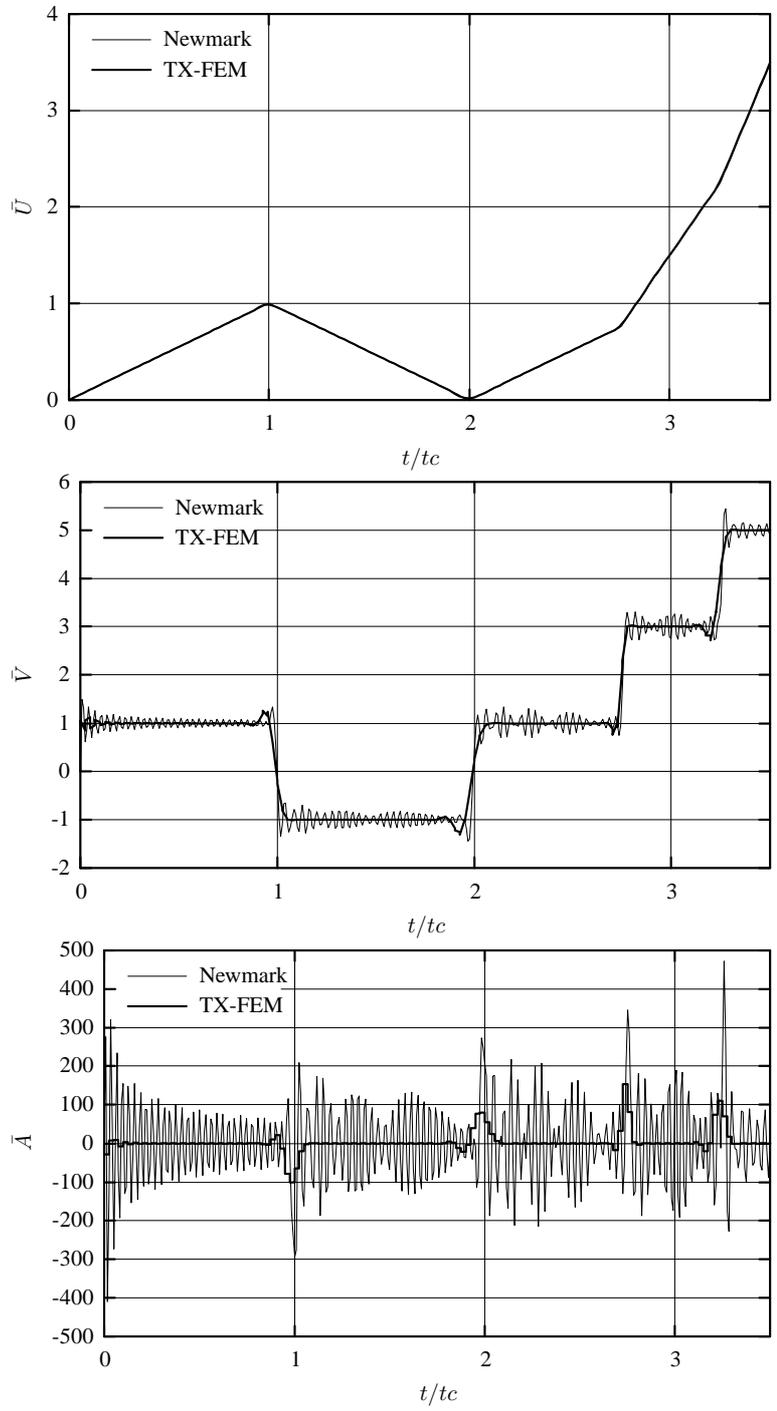
**Remarque 20** Concernant la conservation de l'énergie de la formulation discrétisée, on pourrait vouloir opter pour un jeu de paramètres pour lequel les termes non conservatifs soient tous nuls. Il se trouve qu'un tel choix conduit à  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$  et  $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{4}$ , soit finalement le schéma de Newmark de l'accélération moyenne. On perd alors tout le bénéfice apporté par l'enrichissement discontinu. Le choix  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  n'a en effet pas de sens ici dans la mesure où il supprime la contribution des enrichissements, conduisant à un système d'équations liées équivalent à un schéma de Newmark. Si on cherche un jeu de paramètres pour lequel le système est conservatif avec  $\delta_1 \neq 0; \delta_2 = 0$  par exemple, on se ramène à trouver un jeu de paramètres satisfaisant l'Equation (5.47) quelque soit le système masse ressort étudié (i.e.  $\forall(m, k)$ ). Par identification des termes en facteur de  $m$  et  $k$  entre les deux membres de l'Equation (5.47), on voit qu'il faudrait imposer  $[[v^2]] = 0$ . Ce raisonnement nous conduit donc à penser qu'il n'existe aucun schéma de ce type (formulation Eléments Finis Etendus en temps avec enrichissement discontinu) qui conserve l'énergie discrète.

**Remarque 21** On pourrait aussi envisager, comme c'est le cas pour les problèmes en espace, d'utiliser d'autres fonctions d'enrichissement en temps pour d'autres applications.

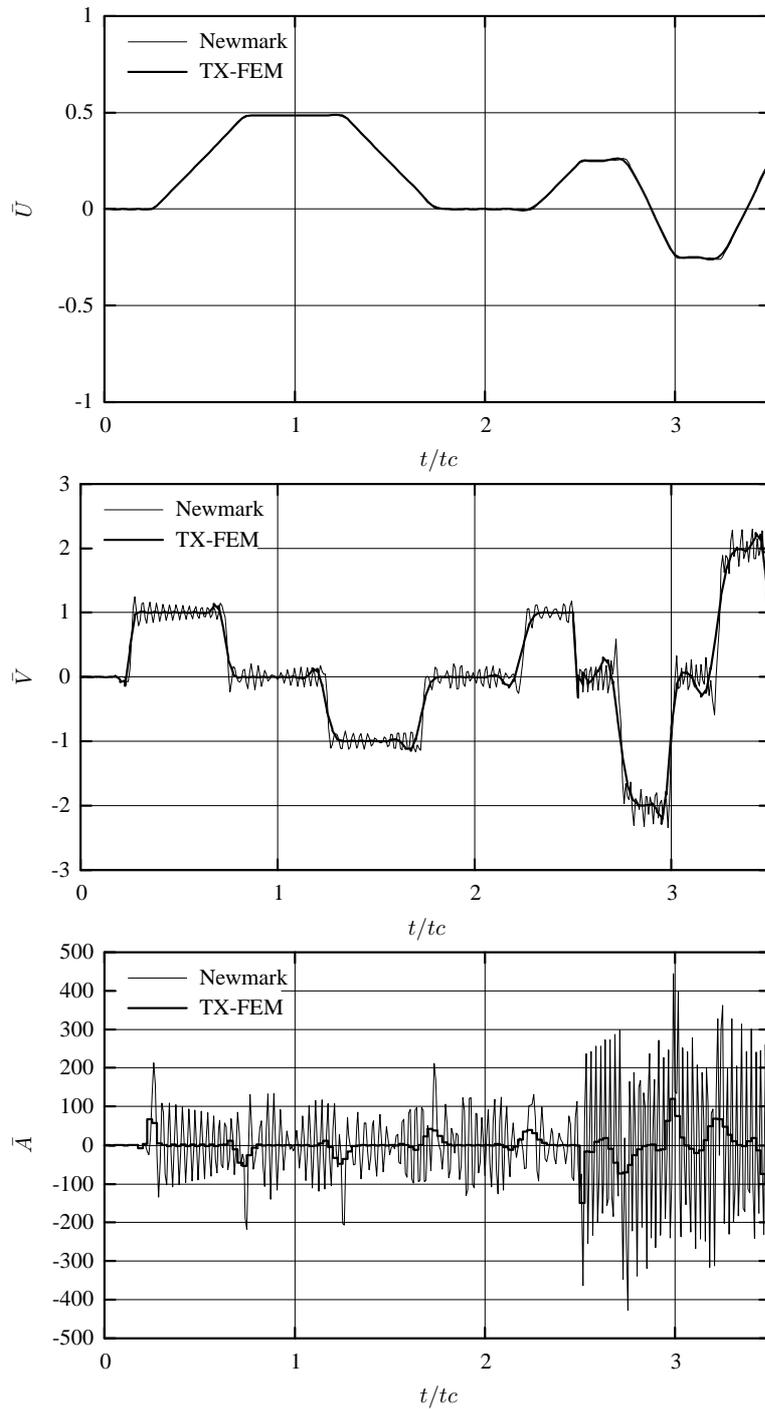
## 5.5 Problème test 1D

La Figure 5.8 compare les résultats obtenus sur le problème test du barreau avec la méthode de Newmark et la méthode des Eléments Finis Etendus en temps. Pour cette dernière la taille du pas de temps a été choisie de façon à ce que les résultats concernant le déplacement aient la même précision que ceux obtenus avec la méthode de Newmark. La taille de ce pas de temps est donc de deux fois la valeur du pas de temps critique, soit trois fois celle utilisée avec la méthode de Newmark

Les évolutions du déplacement pour les deux méthodes sont donc identiques. Par contre les oscillations numériques du schéma de l'accélération moyenne sont grandement atténuées avec la méthode proposée ici. En particulier, on s'aperçoit que la période typique des oscillations numériques obtenues avec la méthode de Newmark est de deux fois la taille du pas de temps utilisé. C'est à dire que les modes de vibration de la structure discrétisée dont la période propre est  $T = 2\Delta t$  sont excités. Pour ces oscillations numériques la valeur du paramètre fréquentiel  $\omega\Delta t = \frac{2\pi\Delta t}{T}$  est  $\pi$ . Cette valeur étant dans un des deux domaines mis en évidence sur la Figure 5.2 dans lesquels le schéma développé ici répond de façon apériodique, ces oscillations numériques sont évitées. Cela donne à la méthode des Eléments Finis Etendus en temps une aptitude remarquable pour traiter les discontinuités en temps et encore une fois, d'autant plus que ces discontinuités sont dues à l'apparition soudaine de discontinuités en espace.



(a)



(b)

Figure 5.8: Problème test 1D par la méthode de Newmark et TX-FEM  
 Newmark ( $\gamma_N = \frac{1}{2}, \beta_N = \frac{1}{4}$ )  
 Déplacement, vitesse et accélération normalisés à l'extrémité libre du barreau (a)  
 et à l'interface créée (b)

---

## 5.6 Eléments Finis Etendus en espace et en temps

Pour palier aux difficultés mises en évidence dans l'exemple 4.3.2.1 lors de l'utilisation d'un schéma de la famille de Newmark, on propose ici de combiner l'utilisation des Eléments Finis Etendus en espace et en temps. La solution du problème continu fait dans un premier temps l'objet d'une approximation en espace. On approxime la vitesse  $v$  continue par :

$$v(x, t) = V^h(t) \quad (5.48)$$

Ensuite, on approxime cette solution discrète en espace  $V^h$  en fonction du temps en écrivant :

$$V^h(t) = V^{h,\Delta t} = \sum_{j=0}^N \lambda_j(t) \left( V_j^{h,c} + H(t - t_j) V_{j+1}^{h,e} \right) \quad (5.49)$$

où les quantités  $V_j^{h,*}$  sont discrétisées en espace selon l'équation suivante :

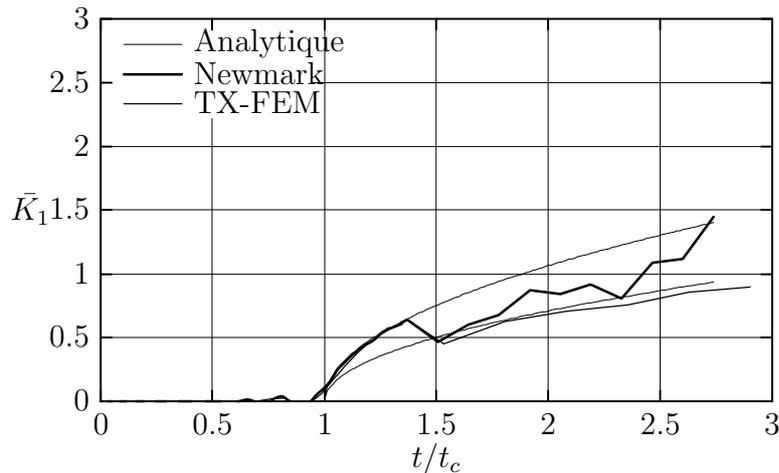
$$V_j^{h,*} = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(x) v_i + \sum_{i \in \mathcal{N}_{cut}} N_i(x) \mathcal{H}(x) a_i + \sum_{i \in \mathcal{N}_{branch}} \sum_{\alpha} N_i(x) B_{\alpha}(x) b_{i,\alpha} \quad (5.50)$$

**Remarque 22** *L'approche présentée diffère de celle développée dans [CHE 04] où les auteurs s'intéressent à une discontinuité en espace évoluant dans un cadre élément finis espace-temps. Ici, la discontinuité modélisée concerne à la fois l'espace et le temps mais la formulation permet de conserver un découplage entre la résolution en espace et la résolution en temps.*

### 5.6.1 Fissure semi-infinie dans milieu infini

On s'intéresse d'abord à l'exemple 4.3.2.1 en utilisant ici les Eléments Finis Etendus en espace et en temps. La taille de pas de temps utilisée ici est quatre fois plus grande qu'avec le schéma de l'accélération moyenne. Les résultats sont présentés sur la Figure 5.9. Comme pour le problème test 1D, l'utilisation du schéma relatif aux Eléments Finis Etendus en temps permet de réduire significativement les oscillations numériques obtenues avec un schéma de la famille des schéma de Newmark. Ici, ces oscillations sont quasi-imperceptibles est le résultat obtenu en terme de facteur d'intensité des contraintes est tout à fait satisfaisant. La technique consistant à utiliser simultanément la méthode des Eléments Finis Etendus en espace et en temps s'avère donc être un outil numérique performant pour simuler la propagation dynamique de fissure.

**Remarque 23** *Cette remarque concerne le calcul des facteurs d'intensité des contraintes et la différence fondamentale qui existe entre méthode de Newmark et méthode des Eléments Finis Etendus en temps. Lors d'un calcul numérique de propagation dynamique de fissure, la discrétisation est différente à chaque piquet de temps. Avec un schéma de la famille des schémas de Newmark, bien que chacune des discrétisations ne soit définie qu'aux piquets de temps, la formulation du problème en temps est telle que tout se passe comme si la discrétisation évoluait au cours du*

Figure 5.9:  $\bar{K}_1$  numériques et analytique pour une fissure fixe puis mobile

temps. Par conséquent, un tel calcul fournit directement  $K_1^{dyn}(\dot{a}, t)$ . Avec la méthode des Eléments Finis Etendus en temps cette fois, la formulation est telle que la discrétisation est considérée comme étant fixée dans l'intervalle de temps. La discrétisation évolue donc de façon instantanée au piquets de temps si bien que le calcul fournit alors non pas  $K_1^{dyn}(\dot{a}, t)$  mais  $K_1^{dyn}(O, t)$ . Il est donc nécessaire de multiplier le résultat obtenu par  $k$  fonction universelle de  $\dot{a}$  définie dans l'exemple 4.3.2.1. L'idée aurait alors consisté à introduire dans la formulation Eléments Finis Etendus en temps des masses et rigidités variables linéairement en fonction du temps. Ceci conduit à un système à résoudre dont la matrice est un peu plus coûteuse à assembler et les résultats obtenus sur l'exemple en question n'ont pas donné satisfaction. L'idée de prendre en compte l'évolution de la position d'une discontinuité au cours du temps a été exploitée dans [CHE 04] pour des problèmes hyperboliques du premier ordre. La stratégie d'enrichissement employée dans ces travaux nécessite cependant une projection au niveau des interfaces entre les éléments espace-temps ce qui ne permet pas de garantir la conservation de l'énergie.

### 5.6.2 Propagation et arrêt d'une fissure en mode-mixte

Avec ce dernier exemple, nous voulons montrer les capacités de la méthode des Eléments Finis Etendus en espace et en temps pour simuler la propagation dynamique d'une fissure sous sollicitation en mode-mixte. La géométrie choisie est une plaque trouée (voir Figure 5.10). Une fissure excentrée est pratiquée à partir du trou (de forme circulaire) parallèlement à la ligne moyenne de l'éprouvette pour obtenir une sollicitation mixte. Le matériau est élastique linéaire homogène et isotrope :  $E = 210GPa$ ,  $\nu = 0.25$  et  $\rho = 8000kgm^{-3}$ . On soumet cette éprouvette à une contrainte de compression  $\sigma = 500MPa$  à une de ses extrémités, l'autre étant fixée. Les dimensions sont  $L = 1m$ ,  $H = 0.5m$ ,  $l = \frac{L}{2} = 0.5m$ ,  $r = 0.125m$  et  $e = 0.05m$ . Pour prédire le trajet de la fissure, on utilise les critères présentés dans le chapitre 1 avec  $K_{1c}$  valant  $100MPa\sqrt{m}$ . Pour les simulations numériques, on utilise un enrichissement en espace pour modéliser le trou et la fissure. Comme le montre la

---

Figure 5.11, la géométrie n'est pas décrite explicitement par le maillage.

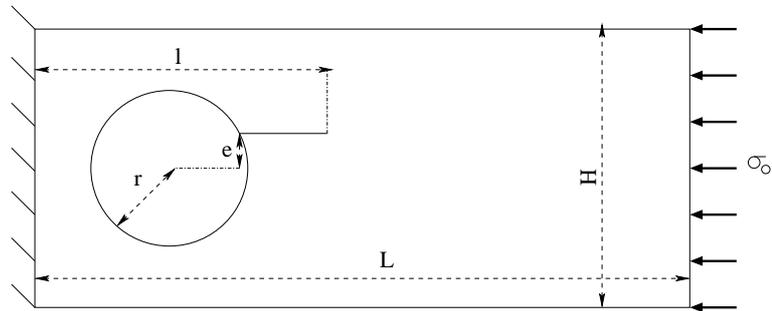


Figure 5.10: Géométrie et chargement pour une sollicitation en mode-mixte

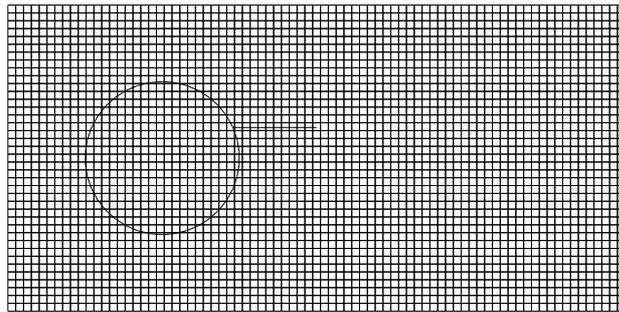
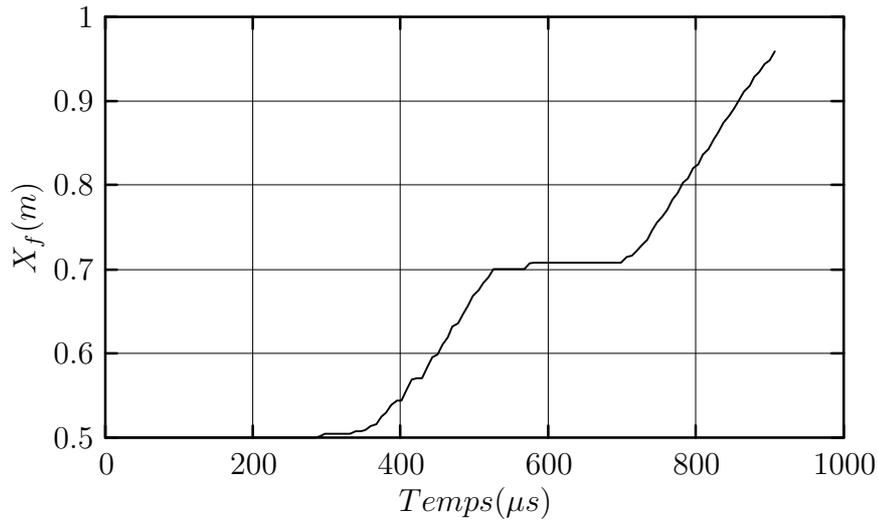


Figure 5.11: Maillage et géométrie initiale

Cette configuration géométrique particulière est intéressante : Carin, Maigre et Bui [CAR 00] ont observé expérimentalement l'arrêt puis le redémarrage de la fissure dans du PMMA quand celle-ci est dans l'axe de l'éprouvette. Les conditions aux limites expérimentales sont différentes, mais par manque d'informations elles ont ici été simplifiées. On supposera que dans une configuration expérimentale, les lèvres de la fissure initiale sont séparées par un espace. On autorisera donc, dans les simulations, les lèvres de la fissure à s'interpénétrer. Par conséquent, l'arrivée de l'onde de compression sur la pointe de la fissure sera accompagnée d'un facteur d'intensité des contraintes en mode I négatif.

On calcule la solution sur une durée de  $900\mu s$  en 130 pas de temps. La Figure 5.12 montre l'évolution de la coordonnée  $X_f$  du front de la fissure selon la ligne moyenne de l'éprouvette. On peut avoir l'interprétation suivante. L'onde de compression se propage à travers l'éprouvette pour se transformer après réflexion au niveau de l'encastrement et grâce à un effet "tonneau" en une onde d'ouverture de la fissure

Figure 5.12: Evolution de l'abscisse du front  $X_f$  pour un trou circulaire

( $0 < t < 2t_c = \frac{L}{c_d} \approx 200\mu s$ ). Ensuite, la fissure commence à s'ouvrir ( $2t_c < t < 3t_c$ ) et la propagation est initiée ( $t \approx 3t_c$ ). Juste après l'initiation, le front de la fissure rejoint la ligne moyenne de l'éprouvette en se propageant à une vitesse à peu près constante (environ  $1300ms^{-1}$ ). A l'instant  $t \approx 4t_c$ , l'onde principale de contrainte est réfléchiée sur la face où le chargement est appliqué et la fissure s'arrête quand l'onde revient sur le front ( $t \approx 5t_c$ ). Finalement, la fissure repart à la même vitesse constante quand l'onde (réfléchiée une seconde fois sur la face fixée) revient sur la fissure  $t \approx 7t_c$ . Les Figures 5.13 et 5.14 montrent respectivement le trajet de la fissure quand elle s'arrête et à la fin de la simulation.

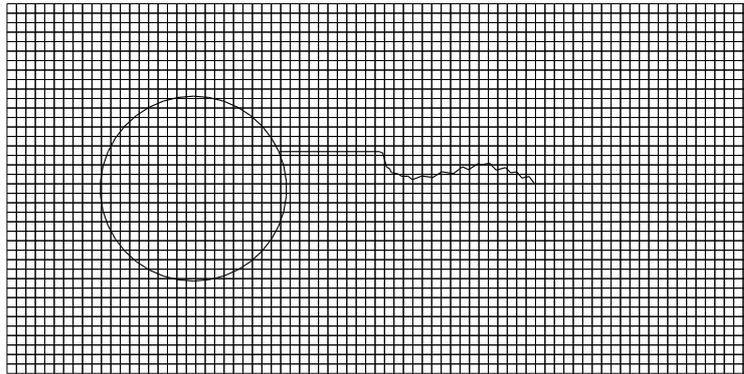


Figure 5.13: Trajet de la fissure à l'arrêt (trou circulaire)

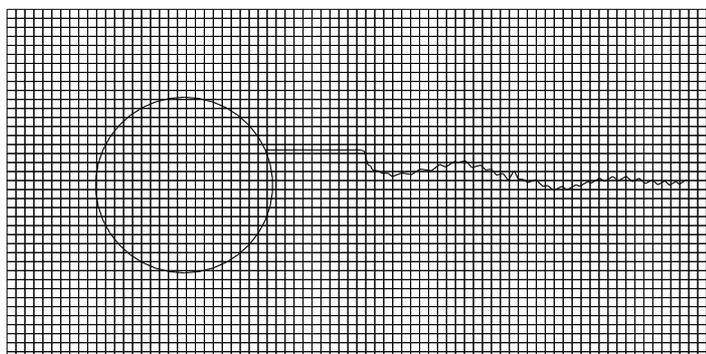


Figure 5.14: Fissure finale (trou circulaire)

La géométrie avec un trou circulaire permet une interprétation simplifiée des résultats numériques. On peut en effet coordonner l'histoire de l'avancée du front avec la propagation des ondes dans l'éprouvette. Ceci est possible avec un trou circulaire car la géométrie de la surface libre qu'il présente au front de l'onde agit comme un sorte de diffuseur et permet de transformer l'onde de compression en une onde d'ouverture sans trop de réflexions parasites. Ce n'est pas le cas si le trou est de forme carrée (voir Figure 5.16). La propagation des ondes est alors beaucoup plus complexe et le trajet de la fissure complètement différent puisqu'on n'observe plus d'arrêt significatif (voir Figure 5.15).

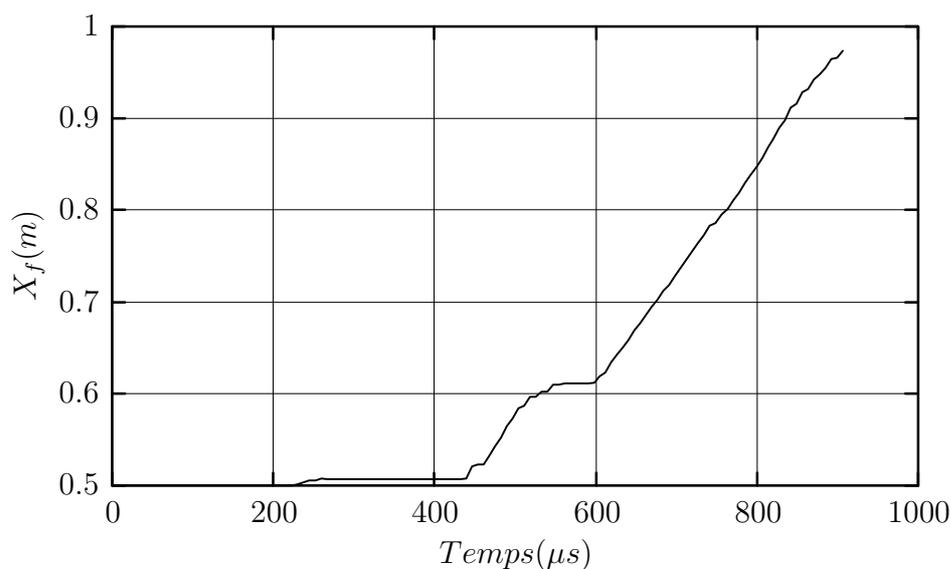


Figure 5.15: Evolution de l'abscisse du front  $X_f$  pour un trou carré

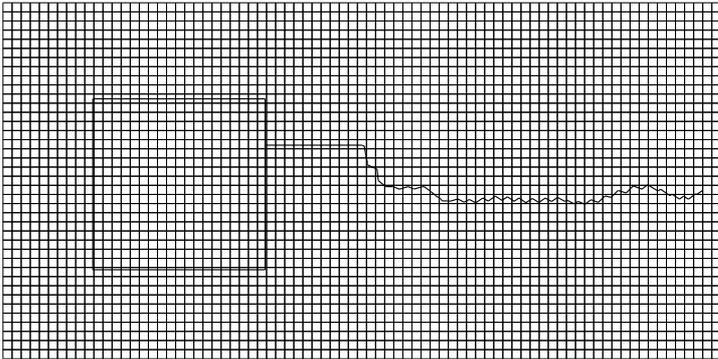
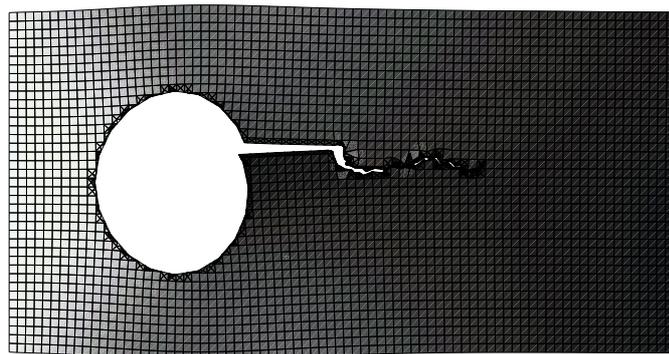
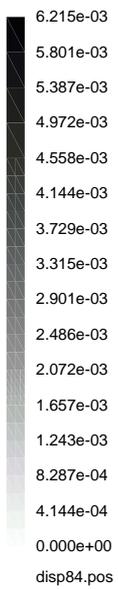
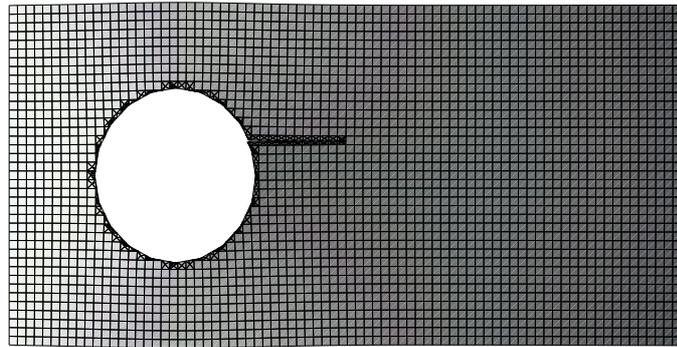
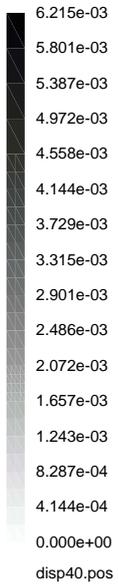


Figure 5.16: Fissure finale (trou carré)



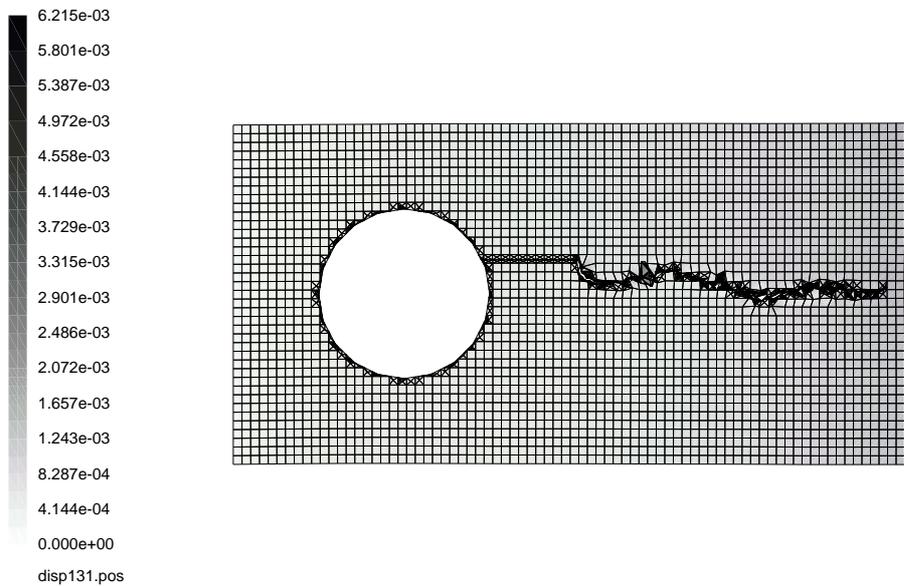
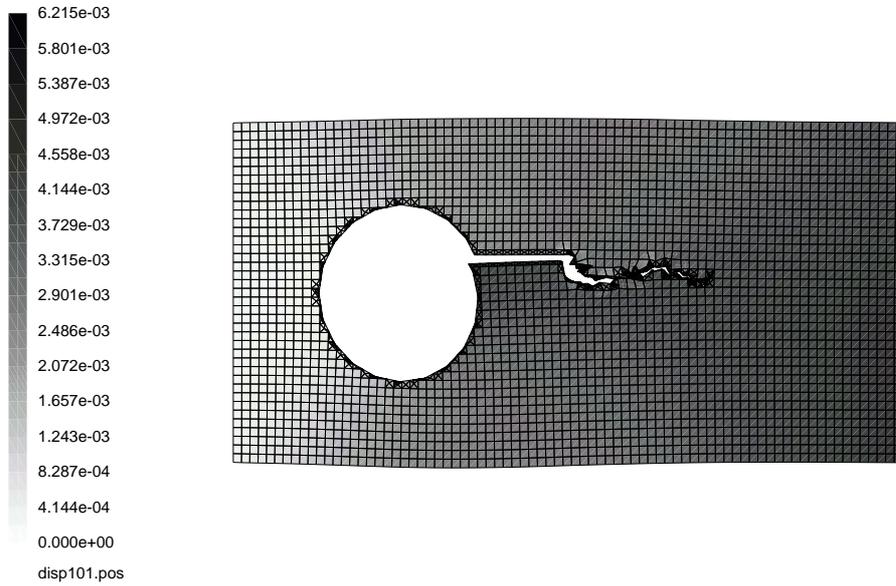


Figure 5.17: Norme du champ de déplacement (trou circulaire)  
Déformées amplifiée 5 fois a. Initiation b. Arrêt c. Redémarrage d. Rupture  
complète

# Chapitre 6

## Mesure de facteurs d'intensité des contraintes

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>100</b>
<b>6.2</b>	<b>Mesure de champ de déplacement par corrélation d'images</b>	<b>100</b>
<b>6.3</b>	<b>Utilisation d'intégrales d'interaction</b>	<b>102</b>
<b>6.4</b>	<b>Essais sur éprouvette CT</b>	<b>103</b>
6.4.1	Mesures des facteurs d'intensité des contraintes	104
6.4.2	A propos des hypothèses de plasticité confinée	106
<b>6.5</b>	<b>Essais en mode mixte</b>	<b>108</b>

---

## 6.1 Introduction

Comme on l'a mentionné dans l'introduction de ce mémoire, il nous semblait important de disposer de moyens expérimentaux de validation cohérent vis-à-vis des méthodes numériques développées. La base théorique et les critères, exposés dans ce même chapitre d'introduction, font du concept de facteur d'intensité des contraintes la grandeur gouvernant la propagation d'une fissure. Ces grandeurs ne sont pas directement observables et les mesures ainsi que l'identification des valeurs critiques utilisées dans les critères ne sont pas immédiates.

Le moyen le plus élémentaire de mesurer la ténacité d'un matériau reste d'effectuer des essais sur des géométries d'éprouvettes pour lesquelles on connaît une solution analytique. Cela reste toutefois très limité et essentiellement restreint aux sollicitations en mode 1 pur. Dans le même esprit, il est possible d'évaluer le facteur d'intensité des contraintes en mode 1 en mesurant l'ouverture de la fissure (ou COD pour Crack Opening Displacement). Les capteurs permettant ces mesures restent très encombrants et peu pratiques à utiliser. De plus, les deux techniques évoquées sont limitées au cas d'une fissure fixe alors que lors d'une propagation dynamique il semble intéressant de pouvoir mesurer l'évolution des facteurs d'intensité des contraintes. Une idée assez employée est d'effectuer une minimisation en utilisant la technique des moindres carrés entre un champ mesuré (déplacement ou contrainte) et un champ asymptotique pour identifier les facteurs d'intensité des contraintes comme paramètres de cette minimisation. On trouve dans la littérature un certain nombre de travaux utilisant cette idée. A partir d'une mesure de champ de contrainte, on trouve la technique de CGS (Coherent Gradient Sensing) [LEE 96, AND 02]. La mesure globale d'un champ de déplacement s'est développée essentiellement avec l'avènement des techniques de corrélation d'images numériques [SUT 83, SUT 86, TOU 97]. Avec l'idée évoquée plus haut, dans [ANB 02, MCN 87] les auteurs proposent de mesurer les facteurs d'intensité des contraintes en statique en utilisant la corrélation. D'autres méthodes optiques comme le Moiré [LIU 75], les caustiques [ROS 93], sont aussi beaucoup utilisées mais elles nécessitent un appareillage important et une mise en oeuvre fastidieuse. Dans un esprit tout à fait différent, on trouve les travaux de [MAI 95, RIT 96b, RIT 96a] qui utilise le principe de réciprocité pour formuler l'intégrale  $H$  [BUI 93] qui permet de calculer les facteurs d'intensité des contraintes jusqu'à l'initiation. Il s'agit d'une méthode expérimentale / numérique pour laquelle seule la mesure des conditions imposées sur les frontières non libres des éprouvettes est nécessaire.

## 6.2 Mesure de champ de déplacement par corrélation d'images

La technique de corrélation d'images numériques a principalement été développée par Sutton et ses collaborateurs [SUT 83, SUT 86]. La corrélation d'images numériques est basée sur les principes suivants : l'image d'un corps sur lequel se trouve une ré-

partition aléatoire de niveau de gris est décrite par une fonction discrète représentant le niveau de gris de chacun des pixels. En corrélant les informations provenant de deux images on peut envisager estimer le déplacement de différents points de l'image initiale vers l'image finale. Le calcul de corrélation s'effectue sur des ensembles de pixels appelés motifs dont les centres sont disposés régulièrement aux centres des éléments d'une grille créée sur l'image initiale et dont le pas est inférieur à la taille du motif.

Soient  $f(x, y)$  et  $f^*(x^*, y^*)$  les fonctions discrètes décrivant l'image initiale et l'image finale.  $x, y$  et  $x^*, y^*$  sont respectivement les coordonnées du centre d'un pixel de l'image initiale et de l'image finale (voir Figure 6.1). Il s'agit alors de déterminer un champ de déplacement  $u, v$  de l'image initiale qui satisfasse au mieux la relation :

$$f^*(x^*, y^*) - f(x + u(x, y), y + v(x, y)) = 0 \quad (6.1)$$

On suppose dans un premier temps que le champ de déplacement est homogène à

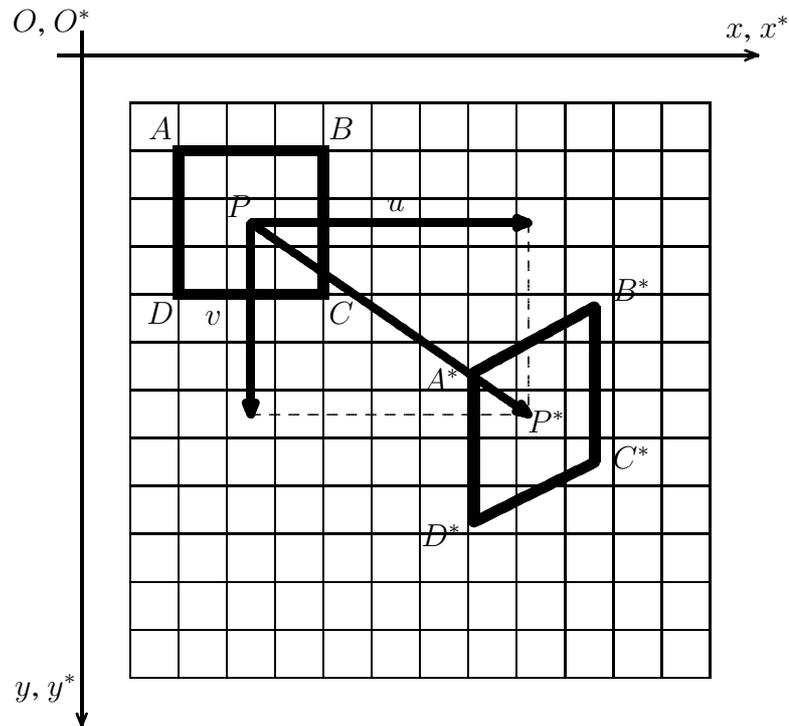


Figure 6.1: Motif initial et motif final

Motif initial ( $ABCD$  centré en  $P$ ) Motif final ( $A^*B^*C^*D^*$  centré en  $P^*$ )

Pour un meilleure compréhension les images initiale et finale sont représentées dans le même repère.

l'intérieur d'un motif et on choisit l'approximation suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= au.x + bu.y + cu.x.y + du \\ v(x, y) &= av.x + bv.y + cv.x.y + dv \end{aligned} \quad (6.2)$$

Cette approximation permet de mesurer les déplacements provoqués par des mouvements de corps rigide et des déformations linéaires. La corrélation est ensuite basée sur une interpolation spline-cubique des niveaux de gris ( pour obtenir une précision sub-pixel) et un coefficient de corrélation croisé :

$$C = 1 - \frac{\int_{\Delta_M} f(x, y) f^*(x^*, y^*) dx dy}{\sqrt{\int_{\Delta_M} (f(x, y))^2 dx dy \int_{\Delta_M} (f^*(x^*, y^*))^2 dx dy}} \quad (6.3)$$

On obtient grâce à la corrélation d'image un champ de déplacement discrétisé sur la grille de corrélation avec une précision de 1/100 pixel. Etant donnée la forme de l'approximation du champ de déplacement, on peut utiliser les outils numériques de la méthode des Eléments Finis pour post-traiter les données fournies par la corrélation.

### 6.3 Utilisation d'intégrales d'interaction

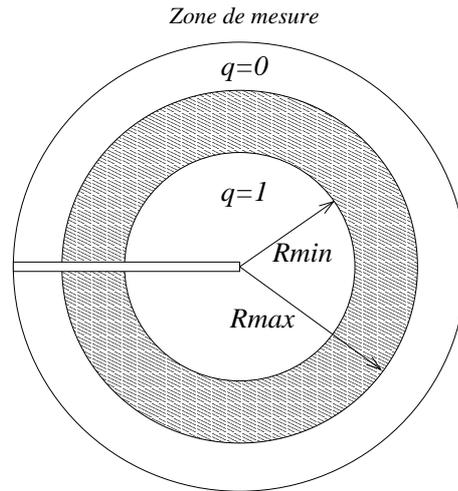


Figure 6.2: Domaine d'intégration utilisé pour calculer les  $K_i$

Comme on l'a mentionné ci-dessus, les données fournies par un calcul de corrélation d'images pour le champ de déplacement se prête parfaitement à un post-traitement par les outils numériques de la méthode des Eléments Finis. En particulier, on peut penser utiliser les techniques mises en oeuvre dans cette méthode pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes afin de les estimer à partir du champ de déplacement mesuré par corrélation. On se placera d'abord dans une configuration expérimentale avec une fissure rectiligne et une sollicitation quasi-statique. Dès lors, on peut particulariser l'intégrale d'interaction écrite au chapitre 3. On obtient :

$$I^{stat} = - \int_{\Omega} q_{k,j} [\sigma_{ml}^{aux} u_{m,l} \delta_{kj} - (\sigma_{ij}^{aux} u_{i,k} + \sigma_{ij} u_{i,k}^{aux})] dS \quad (6.4)$$

On choisit ici d'utiliser un champ d'extension virtuelle défini par :

$$\mathbf{q} = \begin{cases} \mathbf{x}_1 & \text{for } r \leq R_{min} \\ (1 - \frac{R_{max} - r}{R_{max} - R_{min}})\mathbf{x}_1 & \text{for } R_{max} \leq r \leq R_{min} \\ \mathbf{0} & \text{for } r \geq R_{max} \end{cases} \quad (6.5)$$

$R_{max}, R_{min}$  sont les dimensions caractéristiques du domaine d'intégration (voir Figure 6.2). On utilise ici un champ d'extension virtuelle constant à l'intérieur de la zone  $r \leq R_{min}$  afin que les gradients du champ de déplacement mesuré à proximité du front de la fissure ne perturbent pas la mesure des facteurs d'intensité des contraintes. En calculant cette intégrale d'interaction, on doit pouvoir calculer directement les facteurs d'intensité des contraintes en mode mixte à partir de la mesure du champ de déplacement.

## 6.4 Essais sur éprouvette CT

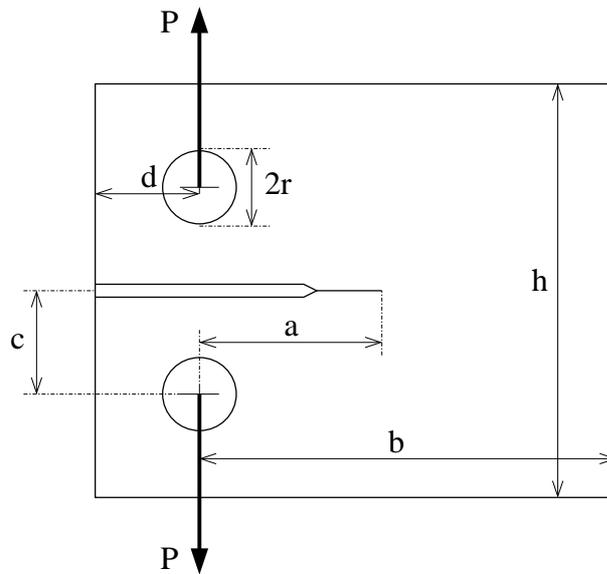


Figure 6.3: Géométrie de l'éprouvette CT

Le premier exemple que nous avons choisi de traiter est celui de l'éprouvette CT (Compact Tension). Cette géométrie d'éprouvette est normalisée et on l'utilise généralement pour mesurer la ténacité statique d'un matériau. Dans le cadre d'essais normalisés, une pré-fissure est obtenue en sollicitant l'éprouvette en fatigue de façon à obtenir un front de fissure dont le rayon de courbure se rapproche de 0. Ici, une pré-fissure a été pratiquée par électro-érosion et le rayon de courbure du front de fissure est d'environ  $0.1mm$ .

Pour la géométrie CT normalisée ( voir Figure 6.3), toutes les longueurs sont données en fonction de l'épaisseur  $e$  qui vaut ici  $20mm$ . On trouve les dimensions caractéristiques de l'éprouvette par les relations suivantes :

$$b = 2e \quad d = \frac{e}{2} \quad r = \frac{e}{4} \quad h = 2.4e \quad c = 0.55e$$

La longueur de la fissure est  $a = 26mm$  et l'effort appliqué est noté  $P$ . Pour cette géométrie, on trouve dans [BUI 78] une solution analytique par Tada pour le facteur d'intensité des contraintes statique en mode 1 :

$$K_1 = \frac{P\sqrt{a}}{eb} \left[ 29.6 - 185.5\frac{a}{b} + 655.7\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1017.0\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 638.9\left(\frac{a}{b}\right)^4 \right] \quad (6.6)$$

Le matériau constituant ces éprouvettes est un acier maraging (EZ2NKD18) de chez Aubert et Duval. Un durcissement structural a été obtenu en chauffant les éprouvettes à  $480^{\circ}C$  pendant 4 heures. Bien que la partie non-linéaire du comportement de cet acier soit assez limitée, pour des valeurs d'effort proches de la rupture, les hypothèses de plasticité confinée risquent d'être invalidées.

#### 6.4.1 Mesures des facteurs d'intensité des contraintes

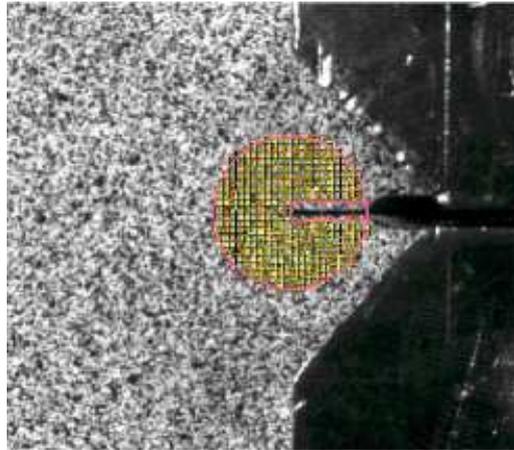


Figure 6.4: Grille de corrélation pour les mesures sur éprouvettes CT

Pour cet exemple, le rayon de la zone de corrélation est  $8mm$  (voir Figure 6.4) et les dimensions  $R_{min}$  et  $R_{max}$  valent respectivement  $3.2mm$  et  $6.4mm$ . La Figure 6.5 montre l'évolution des valeurs analytiques et expérimentales pour  $K_1$ . Pour des valeurs moyennes de chargement (jusqu'à  $40kN$ ), on observe une très bonne concordance entre les valeurs mesurées par la technique présentée plus haut et les valeurs théoriques. Pour des valeurs d'effort élevées, on observe une déviation et les valeurs mesurées deviennent supérieures aux valeurs théoriques. On peut penser qu'alors les hypothèses de small scale yielding ne sont plus satisfaites, la zone plastique s'étendant au fur et à mesure que l'effort augmente. La théorie de la mécanique élastique linéaire de la rupture utilisée pour déterminer la solution analytique du problème n'est plus valable dans ces conditions. Nous verrons au paragraphe suivant ce qu'il en est des valeurs mesurées.

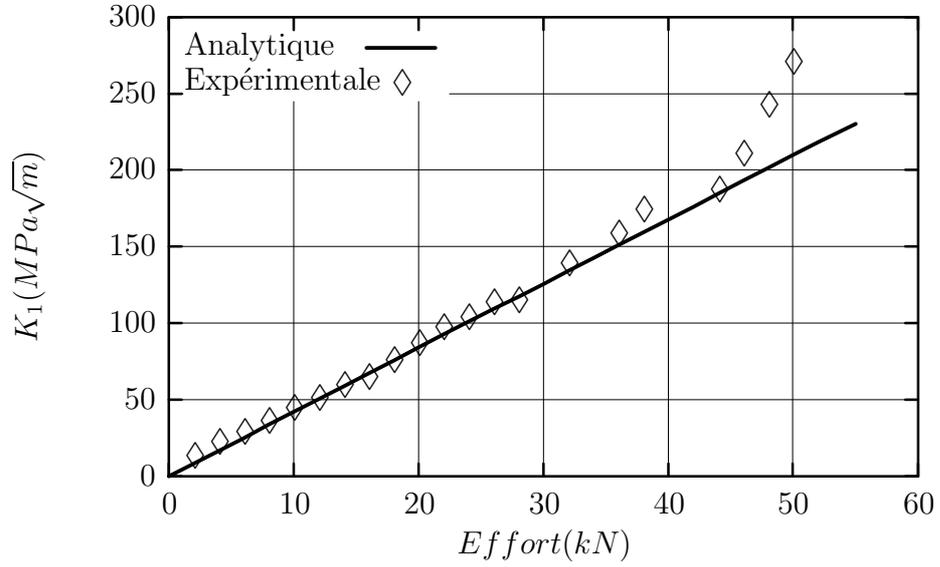


Figure 6.5: Comparaison des valeurs analytiques et expérimentales de  $K_1$

$\frac{\Delta K}{K}$	$R_{min} (mm)$					
	2.4	3.2	4.0	4.8	5.6	
$R_{max} (mm)$	4.0	1.20%				
	4.8	0.42%	1.16%			
	5.6	0.17%	0.58%	0.86%		
	6.4	0.27%	0.08%	1.25%	1.31%	
	7.2	0.12%	0.07%	0.77%	0.66%	0.69%

Tableau 6.1: Influence de la taille et de la position du domaine d'intégration sur l'erreur relative en  $K_1$

Le Tableau 6.1 permet d'évaluer la robustesse de cette technique de mesure. On y trouve l'erreur relative faite sur l'estimation de  $K_1$  pour différentes combinaisons de tailles et de positions du domaine d'intégration. L'erreur n'excédant pas 1.5%, on peut vérifier l'indépendance de l'intégrale calculée par rapport au domaine d'intégration. Pour autant que l'on se place dans des conditions satisfaisant les hypothèses fondamentales de la mécanique élastique linéaire de la rupture, la mesure des facteurs d'intensité des contraintes par corrélation d'images numériques suivant la technique développée fournit des résultats à la fois précis et robustes.

### 6.4.2 A propos des hypothèses de plasticité confinée

Comme le montre la Figure 6.5, on observe une déviation dans l'évolution du facteur d'intensité des contraintes mesuré pour un effort supérieur à  $40kN$ . Nous allons aborder dans ce paragraphe la transition élastique élasto-plastique. On peut en effet penser que lorsque que l'on approche la charge critique la zone plastique s'étend au delà des limites fixées par les hypothèses de small scale yielding ( $r_p/a \leq 0.02$ ). Si on décrit le comportement du matériau dans sa partie non linéaire avec une loi puissance type Ramberg-Osgood, la relation contrainte-déformation unidimensionnelle s'écrit :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (6.7)$$

où  $\sigma_0$  est la contrainte de référence,  $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$  la déformation de référence,  $\alpha$  un paramètre matériau et  $n$  l'exposant de la loi puissance. Dans ces conditions, Hutchinson, Rice et Rosengren ont montré que la singularité des champs asymptotiques change et le développement des champs de type HRR [HUT 68, RIC 68b]. Le déplacement peut être écrit comme suit :

$$\mathbf{u} = \alpha \varepsilon_0 r \left( \frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \bar{\mathbf{u}}(\theta, n) \quad (6.8)$$

Dans cette équation,  $J$  est l'intégrale de Rice,  $I_n$  une constante adimensionnée qui dépend de  $n$  et,  $\bar{\mathbf{u}}$  une fonction adimensionnée de  $\theta$  et  $n$ . Pour  $n$  valant 1 (respectivement  $\infty$ ), le comportement est élastique linéaire (respectivement plastique parfait) et la singularité est en  $r^{\frac{1}{2}}$  (respectivement  $r^0$ ).

Pour illustrer ce propos, on peut étudier la transition depuis les champs asymptotiques élastiques vers les champs asymptotiques élasto-plastiques en observant les valeurs de déplacement mesurées par corrélation. La Figure 6.6 montre les valeurs du déplacement vertical  $v$  normalisé par  $\sqrt{r}$ . Ces valeurs sont prises sur un rayon faisant un angle de  $45^\circ$  avec les lèvres de la fissure. On trace l'évolution de  $v$  en fonction de  $r/a$  pour différentes valeurs de  $P$ . Pour  $P = 18kN$ , comme  $v/\sqrt{r}$  reste constant à proximité du front de la fissure ( $r/a \leq 0.1$ ), la singularité est clairement établie. Plus loin du front, il semble que la singularité ne domine plus. Pour  $P = 35kN$ , on distingue trois zones :  $r/a \leq 0.06$ ,  $0.06 \leq r/a \leq 0.125$  et  $r/a \geq 0.125$ . La deuxième et la troisième correspondent à celles décrites plus haut pour  $P = 18kN$ .

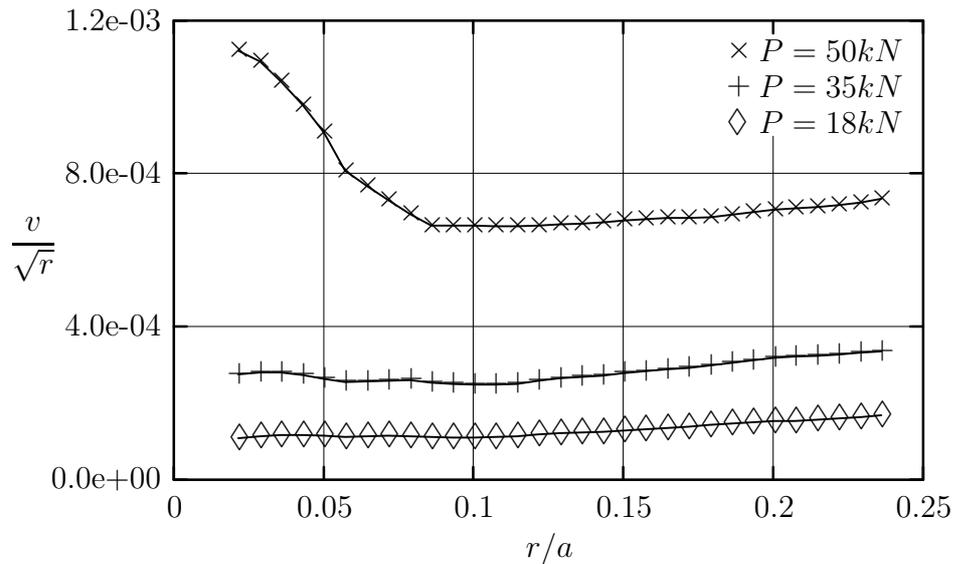


Figure 6.6: Déplacement vertical normalisé par  $\sqrt{r}$

Dans la première zone, il devient difficile d'affirmer la dominance d'une singularité en  $\sqrt{r}$ . Ces trois valeurs évoluent quand l'effort augmente et elles correspondent pour  $P = 50kN$  à :  $r/a \leq 0.08$ ,  $0.08 \leq r/a \leq 0.18$  et  $r/a \geq 0.18$ . Ici, la première zone est la plus étendue et on y observe une singularité dont l'exposant est inférieur à 0.5. Dans la deuxième zone, les champs asymptotiques élastiques dominent mais sont encore une fois atténués loin du front.

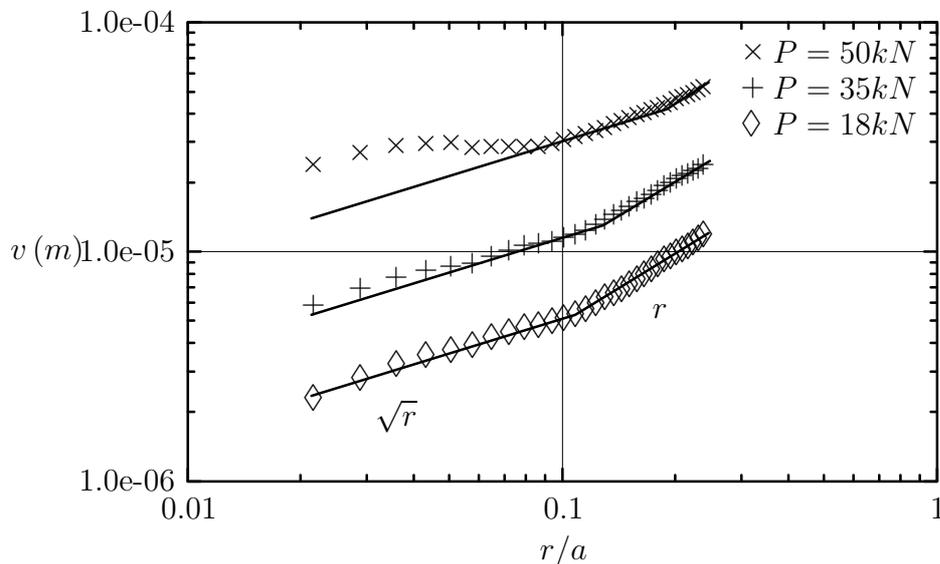


Figure 6.7: Déplacement vertical et approximation en loi puissance

Pour approfondir l'analyse menée précédemment, on trace sur la Figure 6.7 le même déplacement vertical en échelle logarithmique. Dans les zones situées loin du front de la fissure, le déplacement présente clairement une dépendance en  $r^{-1}$ . En effet, dans ces zones les champs asymptotiques sont dominés par des champs de type rotation

de corps rigide. On peut alors estimer la taille de la zone dite de  $K$ -dominance où les champs asymptotiques élastiques sont prépondérants. Pour  $P = 18kN$ , on observe à nouveau la singularité élastique à proximité du front ( $r/a \leq 0.1$ ). Pour  $P = 35kN$ , dans la zone proche du front  $r/a \approx 0.06$  la corrélation avec une singularité en  $\sqrt{r}$  n'est pas aussi nette. Une transition très marquée est observée pour  $P = 50kN$  aux environs de  $r/a \approx 0.08$  et une singularité élasto-plastique se développe près du front. Pour la plus grande valeur de  $P$ , on observe donc une singularité d'ordre inférieure à 0.5 et on peut estimer que dans ces conditions le rayon de la zone plastique peut être minoré par  $0.08a$ . On se trouve alors largement au delà des limites fixées par les hypothèses de plasticité confinée ( $r_p/a \leq 0.02$ ) ce qui explique les différences entre les valeurs mesurées de  $K_1$  et celles calculées dans le cadre de la mécanique élastique linéaire de la rupture.

**Remarque 24** *Les résultats présentés par la Figure 6.5 ont été obtenus avec des valeurs de  $R_{min}$  et  $R_{max}$  correspondant à  $r/a = 0.1$  et  $r/a = 0.2$ . Pour de faibles valeurs d'effort, l'estimation de  $K_1$  est précise bien que la zone  $0.1 \leq r/a \leq 0.2$  ne soit pas dominée par une singularité élastique. La technique de l'intégrale d'interaction permet donc de capturer la singularité en pointe de fissure grâce aux champs auxiliaires et d'estimer précisément les facteurs d'intensité des contraintes même si le domaine d'intégration n'est pas situé à l'intérieur de la zone de  $K$ -dominance. Cette technique ne nécessite donc pas une détermination a priori de cette zone de  $K$ -dominance.*

**Remarque 25** *On peut montrer dans le cadre de la mécanique non-linéaire de la rupture que les concepts d'intégrale  $J$  et de facteurs d'intensité des contraintes restent valables. On peut aussi montrer que ces facteurs d'intensité des contraintes peuvent être calculés grâce à l'intégrale d'interaction présenté plus haut à condition que la zone plastique ne pénètre pas dans le domaine d'intégration. C'est le cas ici, même pour  $P = 50kN$  ( $r_p \approx 0.08a$ ,  $R_{min} = 0.1a$  et  $R_{max} = 0.2a$ ). Il semble donc que les valeurs mesurées ici pour des charges élevées puissent être considérées comme des facteurs d'intensité des contraintes élasto-plastiques.*

**Remarque 26** *[ROS 00] ont montré que, pour une épaisseur d'éprouvette donnée, une zone 3D s'étend jusqu'à un rayon d'environ la moitié de l'épaisseur. Dans leur travail la zone 3D est une zone autour du front de la fissure à l'intérieur de laquelle l'hypothèse 2D de contrainte plane n'est plus valide. Dans cette zone, le déplacement hors plan ne peut être déduit des champs de contraintes élastiques en utilisant la relation de comportement 2D en contrainte plane. Ici, on utilise un objectif télécentrique de sorte que l'on mesure uniquement les composantes du déplacement dans le plan de l'image. On peut observer grâce à cela que les déplacements dans le plan conservent un comportement singulier en pointe de fissure.*

## 6.5 Essais en mode mixte

Le deuxième essai présenté est une plaque fissurée sous sollicitation en mode mixte. La technique présentée plus haut permet en effet d'obtenir directement les facteurs

d'intensité des contraintes  $K_1$  et  $K_2$  à partir du calcul des intégrales d'interaction avec les données fournies par la corrélation d'images. Cet essai a été effectué sur une plaque constitué d'un acier inoxydable au comportement assez ductile. Les dimensions de cette plaque sont  $120mm \times 30mm \times 5mm$ . Afin de comparer les valeurs critiques des facteurs d'intensité des contraintes en mode 1 pur et en mode mixte, deux types d'éprouvettes ont été fabriquées : avec une pré-fissure droite ou avec une pré-fissure à  $40^\circ$ . On propose de comparer les valeurs limites de  $K_1$  et  $K_2$  ainsi que de  $K_{1eq}$  facteur d'intensité des contraintes équivalent introduit au premier chapitre et un facteur d'intensité des contraintes équivalent d'un point de vue énergétique  $K_{PM1}$ . On peut aussi estimer l'angle d'initiation  $\theta_c$  correspondant au critère de la contrainte circonférentielle maximum :

$$\theta_c = 2 \arctan \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{K_1}{K_2} - \text{sign}(K_2) \sqrt{8 + \left( \frac{K_1}{K_2} \right)^2} \right) \right] \quad (6.9)$$

On rappelle l'expression alors obtenue pour  $K_{1eq}$  :

$$K_{1eq} = \cos^3 \left( \frac{\theta_c}{2} \right) K_1 - \frac{3}{2} \cos \left( \frac{\theta_c}{2} \right) \sin(\theta_c) K_2 \quad (6.10)$$

et on définit  $K_{PM1}$  :

$$K_{PM1} = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \quad (6.11)$$

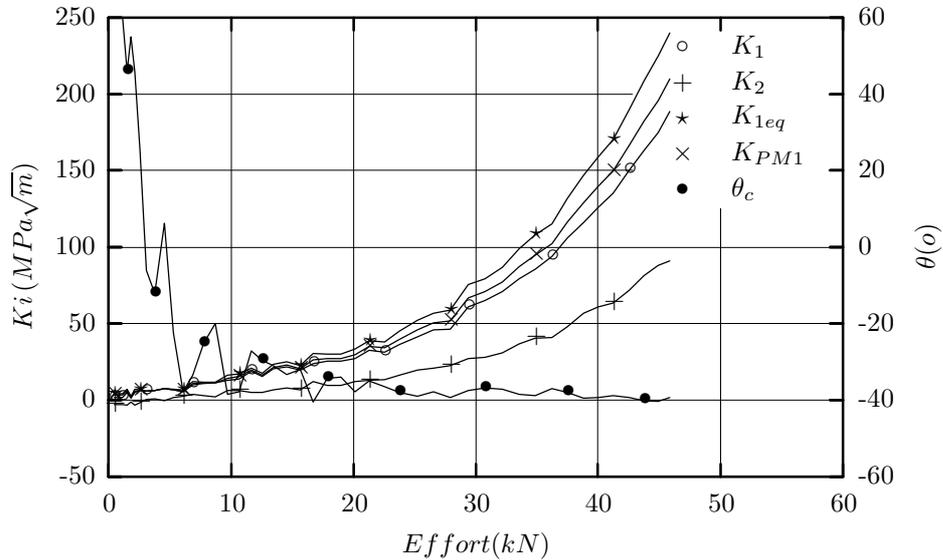


Figure 6.8: Facteurs d'intensité des contraintes et angle d'initiation

La Figure 6.8 montre les résultats obtenus concernant l'évolution des différentes grandeurs mentionnées précédemment en fonction de l'effort appliqué. Comme pour l'essai sur éprouvette CT, l'évolution des différents facteurs d'intensité des contraintes n'est pas linéaire à cause du comportement ductile du matériau. Pour les

faibles charges ( $P \leq 10kN$ ), la mixité des modes 1 et 2 n'est pas encore bien établie et  $\theta_c$  varie beaucoup. Ensuite ( $P \geq 15kN$ ),  $\theta_c$  atteint une valeur stabilisée d'environ  $-40^\circ$  ce qui est parfaitement en accord avec l'observation post mortem des éprouvettes. Quand la mixité des modes est établie les valeurs des deux facteurs d'intensité des contraintes équivalents qu'on propose de comparer commencent à différer. Le Tableau 6.2 résume les valeurs finales des différents  $K_i$  en mode 1 pur et en mode mixte.

	$K_1$	$K_2$	$K_{1eq}$	$K_{PM1}$
Mode 1	235	–	235	235
Mode 1&2	189	91	240	210

Tableau 6.2: Valeurs critiques des  $K_i(MPa\sqrt{m})$ 

La direction de propagation étant bien prédite par un critère en contrainte de traction maximale, on peut penser que, pour ce matériau, le mécanisme de rupture est gouverné par l'intensité des contraintes de traction. On constate en effet que les valeurs limites en mode 1 pur et en mode mixte pour  $K_{1eq}$  sont proches (235 et  $240MPa\sqrt{m}$ ) alors que le critère énergétique donne des valeurs plus éloignées (235 et  $210MPa\sqrt{m}$ ). Si on observe la distribution des déformations de Green-Lagrange, on remarque aussi que la direction d'initiation prédite (matérialisée par une flèche) est la direction de symétrie pour  $\varepsilon_{11}$  et  $\varepsilon_{22}$ , d'anti-symétrie pour  $\varepsilon_{12}$ , ce qui confirme que le mécanisme de rupture pour le matériau étudié est principalement gouverné par la traction.

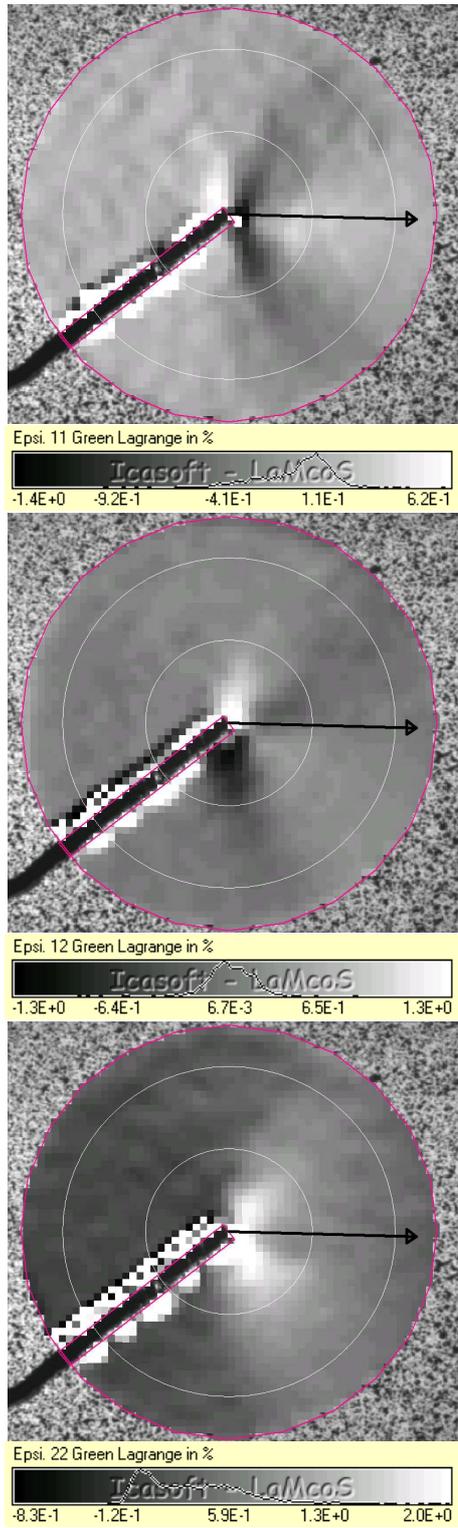


Figure 6.9: Déformation de Green-Lagrange pour l'essai en mode mixte



# Conclusions et perspectives

Après avoir défini le problème de référence et les concepts de base de la dynamique de la rupture et des Eléments Finis Etendus, nous avons dressé un état de l'art des méthodes de simulation numérique en dynamique de la rupture. Les travaux effectués au cours de cette thèse concernent le développement de techniques numériques exploitant les propriétés de partition de l'unité de la méthode des Eléments Finis pour la simulation numérique de la propagation dynamique de fissure.

Dans le contexte de la mécanique de la rupture, les paramètres de fissuration sont le taux de restitution de l'énergie et les facteurs d'intensité des contraintes. La méthode des Eléments Finis Etendus permet une représentation implicite de la fissure (grâce à des fonctions de niveaux ou des éléments géométriques). Le traitement des fissures de géométrie quelconque en est facilité. En particulier, il est possible en tout point du maillage d'obtenir des informations sur la topologie des surfaces de discontinuité (tangente, courbure, repère local). Afin de calculer les facteurs d'intensité des contraintes pour des fissures non planes, on peut alors étendre les raisonnements suivis dans le développement des intégrales d'interaction en travaillant sur les champs d'extension virtuelle et les champs auxiliaires. Ces champs sont rendus compatibles avec la géométrie de la fissure. Les hypothèses formulées pour des fissures droites (lèvres libres et extension virtuelle tangente aux lèvres) se généralisent alors au cas des fissures quelconques. On obtient ainsi une intégrale indépendante du domaine permettant de calculer les facteurs d'intensité des contraintes pour des fissures mobiles de géométrie complexe.

L'étape suivante consiste à faire propager la fissure dans une direction et à une vitesse déterminées par des critères faisant intervenir les facteurs d'intensité des contraintes calculés grâce aux intégrales d'interaction. Afin de suivre l'évolution de la fissure lorsqu'elle se propage, la discrétisation du problème varie. On propose de distinguer deux étapes : le changement de discrétisation (on projette les champs de l'instant initial sur la nouvelle discrétisation) puis l'évolution (on progresse d'un incrément de temps en écrivant l'équilibre dynamique pour obtenir les champs à l'instant final). C'est le cas pour des calculs effectués dans un cadre Eléments Finis classique (remaillage) mais aussi pour des calculs utilisant la méthode des Eléments Finis Etendus (évolution des fonctions enrichies). Il s'agit d'étudier la stabilité et la conservation de l'énergie des schémas de la famille de Newmark dans le cas où la discrétisation spatiale du problème change d'un pas de temps à l'autre [RÉT 04]. La démarche suivie est tout à fait générale et peut être appliquée à d'autres types de

simulation nécessitant des évolutions de la discrétisation. On obtient les équations de stabilité par la méthode énergétique ainsi qu'un bilan d'énergie de la formulation discrétisée quand la discrétisation du problème varie. Dans le cas de la propagation dynamique de fissure, on connaît le phénomène physique provoquant le changement de discrétisation. L'idée consiste alors à redonner un sens physique aux champs après projection d'une discrétisation sur l'autre. En effet, ceux-ci sont écrits sur une discrétisation prenant en compte l'extension de la fissure. Mais ils doivent satisfaire les équations d'équilibre dynamique avec une fissure non propagée. On propose de "refermer" la fissure à l'aide d'une distribution de force appliquée sur l'extension de la fissure. En garantissant l'équilibre dynamique des champs projetés avec cette distribution de force, on fait apparaître sa contribution dans les équations de stabilité et de bilan énergétique. On montre que l'on maintient dans ces conditions les propriétés de stabilité et de conservation de l'énergie du schéma d'intégration en temps lors de l'étape d'évolution. De plus, le bilan énergétique discrétisé fait apparaître l'énergie dissipée par la propagation de la fissure par l'intermédiaire du travail de la distribution de force. Cela permet de juger de la qualité des résultats numériques en terme de conservation de l'énergie (le calcul dissipe-t-il de l'énergie ou bien est-ce qu'il en introduit ?). Néanmoins, l'étape de changement de discrétisation ne peut être maîtrisée si on utilise une procédure de remaillage dans un cadre Eléments Finis classique. Des instabilités numériques peuvent subsister à cause de transferts d'énergie non contrôlés lors des projections.

Ce n'est pas le cas dans le cadre de la méthode des Eléments Finis Etendus. L'étape de changement de discrétisation (remaillage et projections) se réduit à choisir une stratégie d'enrichissement. On propose de conserver l'ensemble des fonctions enrichies au cours de la propagation puis d'ajouter des nouvelles fonctions permettant de modéliser l'extension de la fissure. Une simple initialisation à zéro des nouveaux degrés de liberté permet de garantir la conservation de l'énergie lors de l'étape de changement de discrétisation (les nouveaux degrés de liberté n'apportant aucune contribution à l'énergie des champs "projetés"). De plus, cette initialisation permet de maintenir l'extension de la fissure fermée à l'instant initial ce qui est équivalent à appliquer la distribution de force. La stabilité et la conservation de l'énergie sont alors assurées au cours des deux étapes du calcul. Ceci met en évidence un avantage essentiel de la méthode des Eléments Finis Etendus qui, grâce à la stratégie d'enrichissement élaborée ici, permet d'assurer la stabilité du calcul et la conservation de l'énergie [RÉT 05a].

Les divers exemples présentés permettent de juger de la qualité des résultats obtenus aussi bien en ce qui concerne le calcul des facteurs d'intensité des contraintes que la conservation de l'énergie. Néanmoins, les intégrateurs en temps de la famille de Newmark semblent atteindre leurs limites pour traiter des problèmes dans lesquels une discontinuité spatiale se déplace en faisant apparaître des discontinuités en temps. Afin d'améliorer le traitement des discontinuités temporelles, on étend le concept d'Eléments Finis Etendus pour discrétiser le problème en temps. En exploitant les propriétés de partition de l'unité des fonctions de forme Eléments Finis en temps,

---

on propose d'enrichir l'interpolation temporelle de la solution. On développe le concept d'Eléments Finis Etendus en temps dans un cadre général. Les développements sont ensuite menés pour l'utilisation de fonctions d'enrichissement discontinues dans l'approximation en temps de la vitesse. On impose de manière forte la continuité du déplacement et son admissibilité cinématique (sa dérivée doit être égale à la vitesse). L'équilibre dynamique est ensuite écrit sous une forme résidus pondérés incluant une condition de continuité faible sur la vitesse. L'intégrateur en temps ainsi obtenu généralise les méthodes de Galerkin discontinues en temps. La formalisme développé permet d'étudier la stabilité et la conservation de l'énergie de ces schémas d'une manière originale [RÉT 05b].

La précision, la robustesse et la fiabilité de la méthode des Eléments Finis Etendus en espace et en temps, permettent d'envisager de rendre compte de phénomènes physiques complexes comme l'arrêt et le redémarrage d'une fissure ayant un trajet quelconque comme dans les exemples traités. De plus, la technique de mesure des facteurs d'intensité des contraintes par corrélation d'images numériques que nous proposons [RÉT 05c] pourra être directement utilisée pour les essais dynamiques. En effet, les derniers avancements dans le domaine de la cinématographie numérique haute vitesse permettent de filmer à des cadences supérieures à un million d'images par seconde. L'ONERA, centre de Lille, qui a participé au financement de cette thèse envisage d'acquérir un dispositif permettant d'obtenir 32 images de  $1024 \times 1024$  pixels codées sur 10 bits à une cadence de  $400000 \text{ img/s}$ . Il sera intéressant de mettre au point la technique proposée ici pour des essais de fissuration en dynamique. Et, même si un certain nombre de difficultés sont à prévoir (corrélations entre images provenant de capteurs différents, recalage des images dû au positionnement des capteurs...), le principe est identique et on connaît l'intégrale d'interaction à utiliser pour la dynamique.

Au niveau des méthodes numériques utilisant la partition de l'unité, on voit aujourd'hui de nombreux travaux où l'utilisation des enrichissements est réduite aux fonctions discontinues. Certains auteurs combinent leur utilisation avec des modèles cohésifs ou des matériaux endommageables [MOË 02a, ZI 03, BEL 03, WEL 02, WEL 01, MER 05]. Une autre alternative (tout en restant dans le cadre de la mécanique élastique linéaire de la rupture) consiste à ne pas utiliser de fonctions singulières au prix du raffinement de maillage nécessaire pour capturer correctement la singularité en pointe de fissure. En effet, l'utilisation des enrichissements singuliers pose certaines difficultés : raccordement avec l'enrichissement discontinu [BEL 03], perte des propriétés de partition de l'unité dans la couche d'éléments intermédiaire (blending elements) [CHE 03c], intégration numérique, préconditionnement [LAB 05], stabilité de l'intégrateur en temps en dynamique [BEL 03, GER 99]. Mais, ces fonctions singulières offrent plusieurs avantages : elles permettent de capturer la singularité de manière quasi-exacte en autorisant l'utilisation de maillages plus grossiers, de calculer précisément les facteurs d'intensité des contraintes et elles permettent aussi une discrétisation intégrant la localisation précise du front de la fissure (via les fonctions de  $r$  et  $\theta$ ). La stratégie d'enrichissement développée dans cette thèse répond au problème de la stabilité de l'intégrateur en temps et permet

de conserver les enrichissements singuliers dans les problèmes dépendant du temps (cette démarche diffère de celle de [BEL 03] où seul un enrichissement discontinu est utilisé). On peut grâce à la démarche proposée modéliser la propagation dynamique d'une fissure de géométrie quelconque sans pour autant avoir à supposer le trajet de la fissure (comme dans [BEL 01a]).

La vision énergétique globale de la mécanique élastique linéaire de la rupture fournit un cadre bien adapté à la simulation numérique. Les paramètres de fissuration (qu'ils soient globaux comme le taux de restitution de l'énergie ou locaux comme les facteurs d'intensité des contraintes) peuvent être calculés aux moyens d'intégrales indépendantes du domaine (du volume en 3D). On limite par conséquent l'influence des erreurs numériques faites sur l'approximation des champs de déplacement ou de contrainte à proximité du front de la fissure. Ceci permet d'éviter les problèmes de dépendance vis-à-vis de la discrétisation souvent rencontrés lors de l'utilisation de critères de rupture locaux. Et, bien qu'une approche locale de la rupture soit nécessaire pour initier une macro-fissure dans l'étude de la ruine d'une structure saine [BOR 04, JIR 00] ou dans le cas de la plasticité étendue, une extension des développements effectués ici aux hypothèses de la mécanique élasto-plastique de la rupture permettra certainement de couvrir un grand nombre de cas d'application. Dans cette optique, les développements dans le cadre non-linéaire de la méthode des Eléments Finis Etendus deviennent nécessaires. Les premiers travaux concernant la prise en compte d'irréversibilités de comportement dans un cadre quasi-statique, ont d'ores et déjà montré l'efficacité de la méthode des Eléments Finis Etendus pour modéliser ce type de non-linéarité [ELG 04, RAO 04]. C'est le cas aussi pour les non-linéarités de type géométrique [LEG 05, PED 05] ou de conditions aux limites [RIB 05, DOL 01b].

# Annexe A

## Champs asymptotiques

On rappelle dans cette annexe les expressions des champs asymptotiques utilisés comme champs auxiliaires dans les intégrales d'interaction du chapitre 3. Freund a montré [FRE 90] que les deux premiers termes du développement asymptotique de ces champs sont identiques pour des conditions stationnaires ou transitoires ce qui justifie leur utilisation en tant que champs auxiliaires pour les problèmes que nous envisageons.

On définit les notations suivantes :

$$\alpha_i = \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{a}}{c_i}\right)^2} \quad (6.12)$$

$$r_i = \sqrt{x^2 + \alpha_i^2 y^2} \quad (6.13)$$

$$\theta_i = \tan^{-1} \frac{y\alpha_i}{x} \quad (6.14)$$

$$D(\dot{a}) = 4\alpha_1\alpha_2 - (1 + \alpha_2^2)^2 \quad (6.15)$$

Les indices  $i$  prennent les valeurs 1 et 2 pour les grandeurs relatives aux ondes de pression et aux ondes de cisaillement. Les champs sont écrits dans un repère mobile avec la pointe de la fissure.

## Contrainte

### Mode 1

$$\sigma_{11} = \frac{K_1^{dyn}}{D\sqrt{2\pi}} \left[ (\alpha_2^2 + 1)(2\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 1) \frac{1}{\sqrt{r_1}} \cos \frac{\theta_1}{2} - 4\alpha_1\alpha_2 \frac{1}{\sqrt{r_2}} \cos \frac{\theta_2}{2} \right] \quad (6.16)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_1^{dyn}}{D\sqrt{2\pi}} \left[ -(\alpha_2^2 + 1)^2 \frac{1}{\sqrt{r_1}} \cos \frac{\theta_1}{2} + 4\alpha_1\alpha_2 \frac{1}{\sqrt{r_2}} \cos \frac{\theta_2}{2} \right] \quad (6.17)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_1^{dyn}}{D\sqrt{2\pi}} \left[ 2\alpha_1(\alpha_2^2 + 1) \frac{1}{\sqrt{r_1}} \sin \frac{\theta_1}{2} - 2(\alpha_1(\alpha_2^2 + 1)) \frac{1}{\sqrt{r_2}} \sin \frac{\theta_2}{2} \right] \quad (6.18)$$

**Mode 2**

$$\sigma_{11} = \frac{K_2^{dyn}}{D\sqrt{2\pi}} \left[ 2\alpha_2^2(\alpha_2 - 2\alpha_1^2 - 1) \frac{1}{\sqrt{r_1}} \sin \frac{\theta_1}{2} + 2\alpha_2(\alpha_2^2 + 1) \frac{1}{\sqrt{r_2}} \sin \frac{\theta_2}{2} \right] \quad (6.19)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_2^{dyn}}{D\sqrt{2\pi}} \left[ 2\alpha_2^2(\alpha_2 + 1) \frac{1}{\sqrt{r_1}} \sin \frac{\theta_1}{2} - 2\alpha_2(\alpha_2^2 + 1) \frac{1}{\sqrt{r_2}} \sin \frac{\theta_2}{2} \right] \quad (6.20)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_2^{dyn}}{D\sqrt{2\pi}} \left[ 4\alpha_1\alpha_2 \frac{1}{\sqrt{r_1}} \cos \frac{\theta_1}{2} - (\alpha_2^2 + 1)^2 \frac{1}{\sqrt{r_2}} \cos \frac{\theta_2}{2} \right] \quad (6.21)$$

**Mode 3**

$$\sigma_{13} = \frac{K_3^{dyn}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\alpha_2\sqrt{r_2}} \sin \frac{\theta_2}{2} \quad (6.22)$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_3^{dyn}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{r_2}} \cos \frac{\theta_2}{2} \quad (6.23)$$

**Déplacement****Mode 1**

$$u_1 = \frac{K_1^{dyn}}{\mu D} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ (\alpha_2^2 + 1)\sqrt{r_1} \cos \frac{\theta_1}{2} - 2\alpha_1\alpha_2\sqrt{r_2} \cos \frac{\theta_2}{2} \right] \quad (6.24)$$

$$u_2 = \frac{K_1^{dyn}}{\mu D} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ -\alpha_1(\alpha_2^2 + 1)\sqrt{r_1} \sin \frac{\theta_1}{2} + 2\alpha_1\sqrt{r_2} \sin \frac{\theta_2}{2} \right] \quad (6.25)$$

**Mode 2**

$$u_1 = \frac{K_2^{dyn}}{\mu D} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ 2\alpha_2\sqrt{r_1} \sin \frac{\theta_1}{2} - \alpha_2(\alpha_2^2 + 1)\sqrt{r_2} \sin \frac{\theta_2}{2} \right] \quad (6.26)$$

$$u_2 = \frac{K_2^{dyn}}{\mu D} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ 2\alpha_1\alpha_2\sqrt{r_1} \cos \frac{\theta_1}{2} - (\alpha_2^2 + 1)\sqrt{r_2} \cos \frac{\theta_2}{2} \right] \quad (6.27)$$

**Mode 3**

$$u_3 = \frac{K_3^{dyn}}{\mu\alpha_2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{r_2} \sin \frac{\theta_2}{2} \quad (6.28)$$

**Vitesse**

Les champs de vitesse sont dérivés des champs de déplacement en utilisant l'hypothèse de stationnarité en pointe de fissure discutée au chapitre 1 :

$$\dot{u}_j = -\dot{a}u_{j,1} \quad (6.29)$$

---

## Accélération

On procède de manière identique pour les accélérations :

$$\ddot{u}_j = -\ddot{a}u_{j,1} - \dot{a}\dot{u}_{j,1} \quad (6.30)$$



# Annexe B

## Classe ImplicitCrackGrowth\_c

```
#include <assert.h>
#include <vector>
#include <time.h>
#include "ImplicitCrackGrowth.H"
#include "DofTokens.H"
#include "CSR_Matrix.H"
#include "CSR_Vector.H"
#include "LinearSystem.H"
#include "SpecialRHSLinearSystem.H"
#include "LinearSystemSolverIML.H"
#include "Loading.H"
#include "Geometry.H"
#include "gxgeo.H"
#include "ExportOwner.H"
#include "TensorialCalculus.H"
#include "BilinearFormsDerived.H"
#include "AssemblerBase.H"
#include "AssemblerDerived.H"
#include "SystemStructure.H"
#include "stlex.h"
#include "ixgmf_memento.H"
#include "GeometryMemento.H"
#include "LinearSystemSolverSPARSE.H"
#include "LinearSystemSolverDIAG.H"
#include "PhysicalEnv.H"
#include "AssembledData.H"
#include "Region.H"

// Cette formulation permet d'effectuer un calcul de dynamique avec fissures mobiles.
// Elle utilise le schema de newmark de l'acceleration moyenne avec une formulation en deplacement
// On peut appliquer tous types de conditions aux limites : efforts et deplacements fixes ou variables

void ImplicitCrackGrowth_c :: TreatmentOfFormulation (Data_c *data) {

//Declarations diverses
    beta = 0.25;
    gamma = 0.5;
    double Error;
    bool cracksaregrowing, cracksweregrowing;
    int Step;
    double dt,tn;
    tn = 0.0;

    FILE *OUTPUT;
    std::string exp;
    char idchar[5];
    strcpy(idchar, "_0");

//Declaration des fonctions de forme
//Deplacement
    FunctionSpace_c dispX(DISPLACEMENT_X, INTERP_LAGRANGE, DEGREE_ONE, data->allElements);
```

```

FunctionSpace_c dispy(DISPLACEMENT_Y, INTERP_LAGRANGE, DEGREE_ONE, data->allElements);
FunctionSpaceData_c dispcla_l(disp_x, dispy);
if (data->Dimension == 3) {
    FunctionSpace_c dispz(DISPLACEMENT_Z, INTERP_LAGRANGE, DEGREE_ONE, data->allElements);
    dispcla_l.insert(dispz);
}
FunctionSpaceData_c disp_l;
FunctionSpaceData_c dispenrich_l;
//Vitesse
FunctionSpace_c velox(VELOCITY_X, INTERP_LAGRANGE, DEGREE_ONE, data->allElements);
FunctionSpace_c veloy(VELOCITY_Y, INTERP_LAGRANGE, DEGREE_ONE, data->allElements);
FunctionSpaceData_c velocla_l(velox, veloy);
if (data->Dimension == 3) {
    FunctionSpace_c veloz(VELOCITY_Z, INTERP_LAGRANGE, DEGREE_ONE, data->allElements);
    velocla_l.insert(veloz);
}
FunctionSpaceData_c velo_l;
FunctionSpaceData_c veloenrich_l;
//Acceleration
FunctionSpace_c accex(ACCELERATION_X, INTERP_LAGRANGE, DEGREE_ONE, data->allElements);
FunctionSpace_c accey(ACCELERATION_Y, INTERP_LAGRANGE, DEGREE_ONE, data->allElements);
FunctionSpaceData_c accecla_l(accex, accey);
if (data->Dimension == 3) {
    FunctionSpace_c accez(ACCELERATION_Z, INTERP_LAGRANGE, DEGREE_ONE, data->allElements);
    accecla_l.insert(accez);
}
FunctionSpaceData_c acce_l;
FunctionSpaceData_c acceenrich_l;
//Contraintes
Region_c allSubElements;
data->GMF->getRegionPhysPartition(data->allElements, allSubElements);
FunctionSpace_c stressxx(STRESS_XX, INTERP_DISCRETE_GAUSS, DEGREE_ELEMENT_DEPENDENT, allSubElements);
FunctionSpace_c stressyy(STRESS_YY, INTERP_DISCRETE_GAUSS, DEGREE_ELEMENT_DEPENDENT, allSubElements);
FunctionSpace_c stressxy(STRESS_XY_SYM, INTERP_DISCRETE_GAUSS, DEGREE_ELEMENT_DEPENDENT, allSubElements);
FunctionSpace_c stresszz(STRESS_ZZ, INTERP_DISCRETE_GAUSS, DEGREE_ELEMENT_DEPENDENT, allSubElements);
FunctionSpace_c stressxz(STRESS_XZ_SYM, INTERP_DISCRETE_GAUSS, DEGREE_ELEMENT_DEPENDENT, allSubElements);
FunctionSpace_c stressyz(STRESS_YZ_SYM, INTERP_DISCRETE_GAUSS, DEGREE_ELEMENT_DEPENDENT, allSubElements);
FunctionSpaceData_c stress_l(stressxx, stressxy, stressyy);
stress_l.insert(stresszz);
stress_l.insert(stressxz);
stress_l.insert(stressyz);

//Pas de temps 0 Resolution en acceleration
Step = DofData.SetTime(0, 0.0);

//Creation des zones a enrichir
fprintf(stderr, "Before SetMeshGeometryInteraction\n");
data->SetMeshGeometryInteraction();
fprintf(stderr, "Passed SetMeshGeometryInteraction\n");
fprintf(stderr, "Before PlotGeometricalEntities\n");
data->PlotGeometricalEntities(idchar);
fprintf(stderr, "Passed PlotGeometricalEntities\n");

//Stockage de la geometrie
fprintf(stderr, "Before Storing Front Coord and Map\n");
data->GEO->StoringGeometryHistory( Step);
fprintf(stderr, "Passed Storing Front Coord and Map\n");

//Enrichissement
TreatmentOfEnrichment(dispcla_l, dispenrich_l, data);
disp_l.insert(dispcla_l);
disp_l.insert(dispenrich_l);
TreatmentOfEnrichment(velocla_l, veloenrich_l, data);
velo_l.insert(velocla_l);
velo_l.insert(veloenrich_l);
TreatmentOfEnrichment(accecla_l, acceenrich_l, data);
TreatmentOfHoles(acce_l, data);

```

---

```

    acce_l.insert(accecla_l);
    acce_l.insert(acceenrich_l);

    ResolveDependencies(dispenrich_l, data, data->GMF, data->zones, data->allElements);
    ResolveDependencies(veloenrich_l, data, data->GMF, data->zones, data->allElements);
    ResolveDependencies(acceenrich_l, data, data->GMF, data->zones, data->allElements);

//Traitement des condition aux limites cinematiques
    TreatmentOfEssEnv(acce_l, data);

//On definit les degres de liberte inconnus
    printf("Before ActionOnElements for the init\n");
    ActionOnElements(DEFDOF_ACTION, acce_l, data->GMF, data->zones, data->allElements);
    printf("Passed ActionOnElements for the init\n");

//Pour l'algebre lineaire
    CSR_Vector_c SOLUTION_INIT;
    CSR_Vector_c RHS(DofData.GetNbrDof());
    CSR_Matrix_c A(DofData.GetNbrDof());
    LinearSystemSolverIML_c solver_init;
    LinearSystem_c system_init(&A, &RHS, &solver_init);

//Assemblage de la matrice de masse
    Assembler_c assembler(A, RHS, DofData);
    SetCurrentAssembler(&assembler);
    DispersiveVectorBilinearForm_c dispersive(acce_l, acce_l);
    AssembleBilinearTermWithLaw (dispersive, data, data->allElements);

//Assemblage du second membre
    TreatmentOfEssEnv(acce_l, data);

//Resolution
    system_init.Solve(SOLUTION_INIT);

//Stockage et exportation des resultats
    DofData.StoreResult(SOLUTION_INIT.GetArray());
    ExportResults(Step, data, disp_l, velo_l, acce_l, stress_l);
    ExportGroups(data);

//Calcul des FIC
    if (data->do_postpro && Pilot.PostproRequested(Step)) {
        sprintf(idchar, "%d", Step);
        stlext::strcat3(exp, "fracture_postpro", idchar, ".txt");
        TreatmentOfPostproWithBox (disp_l, velo_l, acce_l, exp, data);
    }

//Declaration pour les pas de calcul
    double G, ec, ec_new, ec_prev, ed, ed_new, ed_prev, wnum, wext, wcrack, balance;
    double coeff1, coeff2, coeff3;
    double extension=0.;
    int numdof, old_numdof;
    DofKey_c ekin_key(EKIN,0,0);
    DofKey_c estrain_key(ESTRAIN,0,0);
    DofKey_c balance_key(EBALANCE,0,0);
    DofKey_c wext_key(WEXT,0,0);
    DofKey_c G_key(NRJ_RELEASE,0,0);
    DofData.DefineValDof(ekin_key, 0.);
    DofData.DefineValDof(estrain_key, 0.);
    DofData.DefineValDof(balance_key, 0.);
    DofData.DefineValDof(wext_key, 0.);
    DofData.DefineValDof(G_key, 0.);
    SystemStructure_c STR_step, STR_iter;
    FunctionSpaceData_c disp_f, velo_f, acce_f;
    CSR_Matrix_c M, K, Mtilde;
    fprintf(stderr, "-----\n");
    fprintf(stderr, "-----Starting the Steps-----\n");
    fprintf(stderr, "-----\n");
    while ( Pilot.ComputationalTimeNotCompleted(tn, Step) ) {

```

---

```

dt = Pilot.GetTimeStep(Step);
Step = DofData.TimeStep(dt);
tn = DofData.GetCurrentTime();
if (Step == 1) {

//Initialisation au premier pas
printf("Before Initializing SystemStructure for the Steps\n");
disp_f.insert(dispcla_l); disp_f.insert(dispenrich_l);
velo_f.insert(velocla_l); velo_f.insert(veloenrich_l);
acce_f.insert(accecla_l); acce_f.insert(acceenrich_l);
DofData.ResetSystemDof();
ResolveDependencies(dispenrich_l, data, data->GMF, data->zones, data->allElements);
ResolveDependencies(veloenrich_l, data, data->GMF, data->zones, data->allElements);
ResolveDependencies(acceenrich_l, data, data->GMF, data->zones, data->allElements);

TreatmentOfEssEnv(disp_l, data);
TreatmentOfHoles(disp_l,data);

ActionOnElements(DEFDOF_ACTION, dispcla_l, data->GMF,data->zones,data->allElements);
ActionOnElements(DEFDOF_ACTION, dispenrich_l, data->GMF,data->zones,data->allElements);
cracksweregrowing = false;

printf("Assembling the Mass matrix\n");
Assembler_c assemblerM(M, RHS, DofData);
SetCurrentAssembler(&assemblerM);
DispersiveVectorBilinearForm_c dispersive(disp_l, disp_l);
AssembleBilinearTermWithLaw (dispersive, data, data->allElements);

printf("Assembling the Stiffness matrix\n");
Assembler_c assemblerK(K, RHS, DofData);
SetCurrentAssembler(&assemblerK);
DiffusiveVectorBilinearForm_c diffusive(disp_l, disp_l);
AssembleBilinearTermWithLaw (diffusive, data, data->allElements);
}
old_numdof = DofData.GetNbrDof();
sprintf(idchar, "%d", Step );
wext = 0.;
//Propagation de la fissure
Error = GrowCracks(data);
cracksaregrowing=CracksAreGrowing(data);

//RaZ des fonction de forme
disp_l.clear();disp_l.insert(disp_f);
velo_l.clear();velo_l.insert(velo_f);
acce_l.clear();acce_l.insert(acce_f);
dispenrich_l.clear();
veloenrich_l.clear();
acceenrich_l.clear();

if (cracksaregrowing||Iter>1) {
//Reactualisation des zones d'enrichissement
fprintf(stderr, "Before SetMeshGeometryInteraction\n");
data->SetMeshGeometryInteraction();
fprintf(stderr, "Passed SetMeshGeometryInteraction\n");
fprintf(stderr, "Before PlotGeometricalEntities\n");
data->PlotGeometricalEntities(idchar);
fprintf(stderr, "Passed PlotGeometricalEntities\n");
fprintf(stderr, "Before Storing Front Coord and Map\n");
data->GEO->StoringGeometryHistory(Step);
fprintf(stderr, "Passed Storing Front Coord and Map\n");

//Reactualisation des enrichissements
printf("Before Updating Enrichment\n");
TreatmentOfEnrichment(dispcla_l, dispenrich_l, data);
TreatmentOfHoles(disp_l,data);
TreatmentOfEnrichment(velocla_l, veloenrich_l, data);
TreatmentOfEnrichment(accecla_l, acceenrich_l, data);
ResolveDependencies(dispenrich_l, data, data->GMF, data->zones, data->allElements);

```

---

```

ResolveDependencies(veloenrich_l, data, data->GMF, data->zones, data->allElements);
ResolveDependencies(acceenrich_l, data, data->GMF, data->zones, data->allElements);
    printf("Passed Updating Enrichment\n");
}

//Traitement des condition aux limites cinématiques
    printf("Before TreatmentOfEssEnv\n");
    TreatmentOfEssEnv(displ, data);
    printf("Passed TreatmentOfEssEnv\n");

//Declaration des degres de liberte inconnus

    ActionOnElements(DEFDOF_ACTION, displ, data->GMF,data->zones,data->allElements);
    if (cracksaregrowing) {
ActionOnElements(DEFDOF_ACTION, dispenrich_l, data->GMF,data->zones,data->allElements);
ActionOnElements(FIXDOF_ACTION, veloenrich_l, data->GMF,data->zones,data->allElements,0.0);
ActionOnElements(FIXDOF_ACTION, acceenrich_l, data->GMF,data->zones,data->allElements,0.0);
//Initialisation des nouveaux enrichissements
ProjectingFields(dispenrich_l, veloenrich_l, acceenrich_l, data, data->allElements);
    displ.insert(dispenrich_l);
    velo_l.insert(veloenrich_l);
    acce_l.insert(acceenrich_l);
    }

    numdof = DofData.GetNbrDof();
    printf("Nbrdof before setsize is %d\n", numdof);

//Declaration des matrices et vecteurs
    CSR_Vector_c U, V;
    CSR_Vector_c RHSload, RHSmass, RHSrigi;
    CSR_Matrix_c AA;

    U.SetSize(numdof);
    V.SetSize(numdof);
    RHSload.SetSize(numdof);
    RHSmass.SetSize(numdof);
    RHSrigi.SetSize(numdof);
    AA.SetSize(numdof);

//Assemblage des Matrices
    Assembler_c assemblerM(M, RHSload, DofData);
    Assembler_c assemblerK(K, RHSload, DofData);
    DiffusiveVectorBilinearForm_c diffusive2(displ, displ);
    DispersiveVectorBilinearForm_c dispersive2(displ, displ);
    if (cracksaregrowing) {
M.ClearPub();M.SetSize(numdof);
K.ClearPub();K.SetSize(numdof);

//Matrice de Masse
printf("Assembling the Mass matrix\n");
SetCurrentAssembler(&assemblerM);
AssembleBilinearTermWithLaw (dispersive2, data, data->allElements);

//Matrice de Rigidité
printf("Assembling the Stiffness matrix\n");
SetCurrentAssembler(&assemblerK);
AssembleBilinearTermWithLaw (diffusive2, data, data->allElements);
    }
    coeff1 = 1./(beta *dt*dt);
    coeff2 = 1.+alpha;

    if(Step==1||cracksaregrowing) {
//Matrice Mtilde
    printf("Assembling the M~ matrix\n");
Mtilde.ClearPub();
Mtilde.SetSize(numdof);
CoeffAssembler_c assemblerMtM(Mtilde, RHSload, DofData, coeff1);

```

---

```
        CoeffAssembler_c assemblerMtK(Mtilde, RHSload, DofData, coeff2);
        SetCurrentAssembler(&assemblerMtM);
AssembleBilinearTermWithLaw (dispersive2, data, data->allElements);
        SetCurrentAssembler(&assemblerMtK);
AssembleBilinearTermWithLaw (diffusive2, data, data->allElements);
    }

//Chargement exterieur
printf("Before Computing External Load\n");
RHSload.ZeroArray();
Assembler_c assemblerZ2(AA, RHSload, DofData);
SetCurrentAssembler(&assemblerZ2);
TreatmentOfNatEnv (disp_l, data, data->allGroups);

Assembler_c assemblerAA(AA, RHSload, DofData);
DiffusiveVectorBilinearForm_c diffusiveaa(disp_l, disp_l);
DispersiveVectorBilinearForm_c dispersiveaa(disp_l, acce_l);
SetCurrentAssembler(&assemblerAA);
AssembleBilinearTermWithLaw (dispersiveaa, data, data->allGroupsElements);
AssembleBilinearTermWithLaw (diffusiveaa, data, data->allGroupsElements);

printf("Passed Computing External Load\n");
printf("Before Computing the RHS\n");
ExtractRHS ( RHSmass, RHSrigi, dts, STR_iter);
printf("Passed Computing the RHS\n");

//Resolution
printf("Before Solving\n");
LinearSystemSolverIML_c solver;
SpecialHHTLinearSystem_c system(&Mtilde, &RHSload, &M, &RHSmass, &K, &RHSrigi, &solver);
Mtilde.ExecuteReordering();
system.Solve(U);
printf("Passed Solving\n");

//Stockage et reactualisation
DofData.StoreResult(U.GetArray());
printf("Before Updating Fields\n");
NewmarkUpdateFields(disp_l, data, data->allElements);
printf("Passed Updating Fields\n");

//Calcul des FIC
if (data->do_postpro && Pilot.PostproRequested(Step)) {
printf("Before Compute SIF\n");
sprintf(idchar, "%d", Step );
stllex::strcat3(exp,"fracture_postpro", idchar, ".txt");
printf("Passed Compute SIF\n");
}

//Calcul du bilan energetique
if (Pilot.EnergyBalanceRequested() && Pilot.PostproRequested(Step)) {

printf("Before Energy Balance\n");
ec_prev = DofData.GetDofCurrentValue(ekin_key, -1);
ed_prev = DofData.GetDofCurrentValue(estrain_key, -1);
GetVector(V,STR_iter,0,-1);
ed_new = XTMX(K,V);
ed_new *=0.5;
GetVector(V,STR_iter,1,-1);
ec_new = XTMX(M,V);
ec_new *=0.5;
GetVector(V,STR_iter,1,0);
ec = XTMX(M,V);
ec *=0.5;
ed = XTMX(K,U);
ed *=0.5;
}
```

---

```

wnum = 0.0;

wext += ComputeExternalWork(RHSload ,U ,STR_iter,data->GMF->getNbElts());

if(Step==1) G=0.;
else G = (ed + ec - ed_prev - ec_prev - wext - wnum)/((gamma - 1.) * 2.) ;

wcrack = ComputeCrackGrowthEnergy(data);
wcrack *= (gamma - 1.) * 2. ;

if(Step==1) balance=0.;
else balance += ed_new + ec_new - ed_prev - ec_prev;

DofData.DefineValDof(ekin_key, ec);
DofData.DefineValDof(estrain_key, ed);
DofData.DefineValDof(balance_key, balance);
DofData.DefineValDof(wext_key, wext);
DofData.DefineValDof(G_key, G);
printf("Passed Energy Balance\n");
}

//Exportation des resultats
if (Pilot.ExportRequested(Step)||cracksaregrowing) {
    printf("Before Export\n");
    ExportResults(Step, data, disp_l, velo_l, acce_l, stress_l);
    printf("Passed Export\n");
}
printf("Before Export Groups\n");
ExportGroups(data);
printf("Passed Export Groups\n");

//finalisation du pas de temps
disp_f.insert(dispenrich_l);
velo_f.insert(veloenrich_l);
acce_f.insert(acceenrich_l);
cracksweregrowing=cracksaregrowing;

}
//Fin des pas de temps
fprintf(stderr, "-----\n");
fprintf(stderr, "-----Ending the Steps-----\n");
fprintf(stderr, "-----\n");

//Sorties des evolutions
printf("Before Export Groups History\n");
ExportGroupsHistory(data);
printf("Passed Export Groups History\n");

if (data->do_postpro) {
    printf("Before Export Postpro History\n");
    FinalizeSteps(data);
    printf("Passed Export Postpro History\n");
}

if (Pilot.EnergyBalanceRequested()) {
    printf("Before Export Energy Balance History\n");
    ExportEnergyHistory("ekin_evo.dat", ekin_key, data);
    ExportEnergyHistory("estrain_evo.dat", estrain_key, data);
    ExportEnergyHistory("wext_evo.dat", wext_key, data);
    ExportEnergyHistory("nrj_balance.dat", balance_key, data);
    ExportEnergyHistory("nrj_release.dat", G_key, data);
    printf("Passed Export Energy Balance History\n");
}
return;
}

```

---



# Annexe C

## Exemple de jeu de données xfem

Fichier principal  
exemple.DAT

```
# FICHER MAILLAGE
MESH_FILE_TYPE = unv
MESH_FILE      = lunv/maillage.UNV
# FICHER DE LE GEOMETRIE DE LA FISSURE
GEOM_FILE      = lgef/fissure.GEF
GEOM_TYPE      = classical
#FORMAT POUR L'EXPORT
EXPORT_FORMAT  = gmsh
#TYPE DE CALCUL
ANALYSIS       = implicit_crack_growth
# AUTRES FICHER DE DONNEE
FORMULATION_PARAM_FILE = lpar_form/formulation.PAR
PROCEDURE_PARAM_FILE = lpar_proc/procedure.PAR
#AFFECTATION DES MATERIAUX
ZONE 6 = {MAT_CLASS = elastic MAT_PARAM = lmat/materiau.MAT}
#CONDITIONS AUX LIMITE STATIQUES
GROUP 8 = {GROUP_ENV TRACTION_Y FIX = 500.0e+06}
#CONDITIONS AUX LIMITE CINEMATIQUES
GROUP 9 = {GROUP_ENV DISPLACEMENT_X FIX = 0.0}
# DEFINITION DE L'ENRICHISSEMENT
DO_ENRICH_AUTOMATIC
CRACK 1 = { DISPLACEMENT_X CRACK_DIS DISPLACEMENT_Y CRACK_DIS
            DISPLACEMENT_X NEAR_TIP DISPLACEMENT_Y NEAR_TIP
            VELOCITY_X CRACK_DIS VELOCITY_Y CRACK_DIS
            VELOCITY_X NEAR_TIP VELOCITY_Y NEAR_TIP
            ACCELERATION_X CRACK_DIS ACCELERATION_Y CRACK_DIS
            ACCELERATION_X NEAR_TIP ACCELERATION_Y NEAR_TIP }
# DONNES RELATIVES AU CALCUL DES FIC
DO_POSTPRO_AUTOMATIC
BOX_SIZE = 1.
```

Fichier de géométrie

**fissure.GEF**

# PARAMETRRS

VECTOR 1 = { POS\_X = 0.00e+00 POS\_Y = 2.00e+00 POS\_Z = 0.00e+00 }

VECTOR 2 = { POS\_X = 5.00e+00 POS\_Y = 2.00e+00 POS\_Z = 0.00e+00 }

# ELEMENTS

POINT 1 = { BY\_PARAM NB = 1 LIST = 1 }

POINT 2 = { BY\_PARAM NB = 1 LIST = 2 }

SEGMENT 3 = { BY\_POINTS NB = 2 LIST = 1 2 }

# FISSURE

CRACK 1 = { NB = 1 FRONT\_LIST = 2 NB = 1 INTERIOR\_LIST = 3 }

Fichier de paramètres pour la dynamique

**formulation.PAR**

COMPUTATIONAL\_TIME = 1000.00e-06

MAX\_STEPS = 200

EXPORT\_FREQUENCY = 10

POSTPRO\_FREQUENCY = 1

ENERGY\_BALANCE = false

Fichier de paramètres pour la propagation

**procedure.PAR**

CRACK\_GROWTH\_ANGLE\_LAW = max\_hoop\_stress

CRACK\_GROWTH\_DELTA\_LAW = k1\_critical

CRITICAL\_EQUIVALENT\_SIF = 100.e6

MAXIMUM\_CRACK\_VELOCITY = 2903.

Fichier principal

**materiau.MAT**

NAME = acier\_inox

YOUNG\_MODULUS = 2.0e11

POISSON\_RATIO = 0.25

DENSITY = 8000.0

# Bibliographie

- [ALB 04] ALBUQUERQUE E., SOLLERO P., ALIABADI M.  
Dual boundary element method for anisotropic dynamic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 59, 2004, p. 1187-1205.
- [ANB 02] ANBANTO-BUENO J., LAMBROS J.  
Investigation of crack growth in functionally graded materials using digital image correlation. *Engineering Fracture Mechanics* vol. 69, 2002, p. 1695-1711.
- [AND 02] ANDERSON D.  
Experimental investigation of quasistatic and dynamic fracture properties of titanium alloys. Thèse Californian Institute of Technology 2002.
- [ARM 01a] ARMERO F., ROMERO I.  
On the formulation of high-frequency dissipative time stepping algorithms for non-linear dynamics. Part I : low-order methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 190, 2001, p. 2603-2649.
- [ARM 01b] ARMERO F., ROMERO I.  
On the formulation of high-frequency dissipative time stepping algorithms for non-linear dynamics. Part II : second-order methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 190, 2001, p. 6783-6824.
- [ATL 85] ATLURI S., NISHIOKA T.  
Numerical studies in dynamic fracture mechanics. *International Journal of Fracture* vol. 27, 1985, p. 245-261.
- [ATT 97] ATTIGUI M., PETIT C.  
Mixed-mode separation in dynamic fracture mechanics : New path independent integrals. *International Journal of Fracture* vol. 84, n° 1, 1997, p. 19-36.
- [AUB 99] AUBRY D., LUCAS D., TIE B.  
Adaptative strategy for transient / coupled problems : applications to thermoelasticity and elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 176, 1999, p. 41-50.

- [BAB 97] BABUSKA I., MELENK J.  
The Partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 40, 1997, p. 727-758.
- [BAZ 78] BAZANT Z., GLAZIK J., ACHENBACH J.  
Elastodynamic fields near running cracks by finite elements. *Computers and Structures* vol. 8, 1978, p. 193-198.
- [BEL 01a] BELYTSCHKO T., CHEN H.  
Singular enrichment finite element method for elastodynamic crack propagation. *International Journal of Computational Methods* vol. 1, n° 1, 2001, p. 1-15.
- [BEL 01b] BELYTSCHKO T., MOËS N., USUI S., PARIMI C.  
Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 50, n° 4, 2001, p. 993-1013.
- [BEL 03] BELYTSCHKO T., CHEN H., JINGXIAO X., GOANGSEUP Z.  
Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 58, 2003, p. 1873-1905.
- [BEN 74] BENZLEY S.  
Representation of singularities with isoparametric finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 8, 1974, p. 537-545.
- [BIT 96] BITTENCOURT T., WAWRZYNEK P., INGRAFFEA A.  
Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2-D LEFM problems. *Engineering Fracture Mechanics* vol. 55, 1996, p. 321-334.
- [BLA 99] BLACK T., BELYTSCHKO T.  
Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 45, 1999, p. 601-620.
- [BOR 04] DE BORST R., REMMERS J., NEEDLEMAN A., ABELLAN M.  
Discrete vs smeared crack models for concrete fracture : bridging the gap. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* vol. 28, 2004, p. 583-607.
- [BUI 78] BUI H.  
*Mécanique de la rupture fragile*. Masson, Paris, 1978.
- [BUI 83] BUI H.  
Associated path independent  $J$ -integral for separating mixed modes. *Journal of Mechanics and Physics of Solids* vol. 31, 1983, p. 439-448.

- 
- [BUI 93] BUI H.  
Introduction au problèmes inverses en mécanique des matériaux. Ed. Eyrolles, Paris, 1993.
- [CAM 96] CAMACHO G., ORTIZ M.  
Computational modeling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures* vol. 33, 1996, p. 1267-1282.
- [CAR 00] CARIN T.  
Modélisation de la propagation dynamique de fissure. Thèse École Nationale des Ponts et Chaussées 2000.
- [CHE 77] CHEN H., SHIELD R.  
Conservation Laws in Elasticity of the J-Integral Type. *Journal of Applied Mathematics and Physics* vol. 28, 1977.
- [CHE 02] CHESSA J., SMOLINSKI P., BELYTSCHKO T.  
The extended finite element method for solidification problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 53, 2002, p. 1959-1977.
- [CHE 03a] CHESSA J., BELYTSCHKO T.  
An enriched finite element method and level sets for axisymmetric two-phase flow with surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 58, n° 13, 2003, p. 2041-2064.
- [CHE 03b] CHESSA J., BELYTSCHKO T.  
An enriched finite element method for two-phase fluids. *Journal of Applied Mechanics* vol. 70, n° 1, 2003, p. 10-17.
- [CHE 03c] CHESSA J., WANG H., BELYTSCHKO T.  
On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 57, 2003, p. 1015-1038.
- [CHE 04] CHESSA J., BELYTSCHKO T.  
Arbitrary discontinuities in space-time finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 61, n° 15, 2004, p. 2595-2614.
- [CHI 94] CHIRINO F., GALLEGRO R., SAEZ A., DOMINGUEZ J.  
A comparative study of three boundary element approaches to transient dynamic crack problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements* vol. 13, 1994, p. 11-19.

- [CHU 93] CHUNG J., HULBERT G.  
A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation : the generalized- $\alpha$  method. *Journal of Applied Mechanics* vol. 60, 1993, p. 371-375.
- [DES 83] DESTUYNDER P., DJAOUA M., LESCURE S.  
Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée* vol. 2, n° 1, 1983.
- [DOL 00] DOLBOW J., MOËS N., BELYTSCHKO T.  
Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 36, n° 3, 2000, p. 235-260.
- [DOL 01a] DOLBOW J., MERLE R.  
Solving thermal and phase change problems with the extended finite element method. *Computational mechanics* vol. 28, n° 5, 2001, p. 339-350.
- [DOL 01b] DOLBOW J., MOËS N., BELYTSCHKO T.  
An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 190, 2001, p. 6825-6846.
- [DUA 96] DUARTE C., ODEN J.  
 $hp$ -clouds : a meshless method to solve boundary-value problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 139, 1996, p. 237-262.
- [DUA 01] DUARTE C., HAMZEH O., LISKA T., TWORZYDLO W.  
A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 190, 2001, p. 2227-2262.
- [EIN 00] EINSFELD R., MARTHA L., BITTENCOURT T.  
Combination of smeared and discrete approaches with the use of interface elements. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering* 2000.
- [EKE 02] EKEVID T., WIBERG N.  
A comparison of parallel implementation of explicit DG and central difference method. *Communications in Numerical Methods in Engineering* vol. 18, 2002, p. 585-597.
- [ELG 04] ELGUEDJ T., GRAVOUIL A., COMBESCURE A.  
Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, soumis 2004.

- 
- [FLE 97] FLEMING M., CHU Y., MORAN B., BELYTSCHKO T.  
Enriched element free Galerkin methods for singular fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 40, 1997, p. 1483-1504.
- [FRE 73] FREUND L.  
Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading - Stress wave loading. *Journal of the Mechanics of Physics and Solids* vol. 21, 1973, p. 47-61.
- [FRE 90] FREUND L.  
*Dynamic fracture mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. (Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics)
- [FRE 93] FRENCH D.  
A space-time finite element method for the wave equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 107, 1993, p. 145-157.
- [GÉR 93] GÉRADIN M., RIXEN D.  
*Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*. Masson, Paris, 1993.
- [GER 99] GERLACH C.  
Computational methods for the dynamic response of cracked specimens. Thèse NorthWestern University 1999.
- [GOZ 97] GOZ M., DOLBOW J., MORAN B.  
Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface cracks. *International Journal of Solids and Structures* vol. 35, n° 15, 1997.
- [GRA 00] GRAVOUIL A.  
Méthode multi-échelles en temps et en espace avec décomposition de domaines pour la dynamique non-linéaire des structures. Thèse LMT-Cachan 2000.
- [GRA 02] GRAVOUIL A., MOËS N., BELYTSCHKO T.  
Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets. Part II : Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 53, n° 11, 2002, p. 2569-2586.
- [GRI 21] GRIFFITH A.  
*The phenomena of flow and rupture in solids* vol. A221. Phil. Trans. Roy. Soc. 1921.
- [HIL 77] HILBER H., HUGHES T., TAYLOR R.  
Improved numerical dissipation for the time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* vol. 5, 1977, p. 283-292.
-

- [HUA 02] HUANG H., COSTANZO F.  
On the use of space-time finite elements in the solution of elastodynamic problems with strain discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 191, 2002, p. 5315-5343.
- [HUA 04] HUANG H., COSTANZO F.  
On the use of space-time finite elements in the solution of elastodynamic fracture problems. *International Journal of Fracture* vol. 127, n° 2, 2004, p. 119-146.
- [HUG 78a] HUGHES T., CAUGHEY T., LIU W.  
Finite-element method for non-linear elastodynamics which conserve energy. *Journal of Applied Mechanics* vol. 45, 1978, p. 366-370.
- [HUG 78b] HUGHES T., LIU W.  
Implicit-Explicit Finite Element Transient Analysis : Stability Theory. *Journal of Applied Mechanics* vol. 45, 1978, p. 371-374.
- [HUG 88] HUGHES T., HULBERT G.  
Space-time finite element methods for elastodynamics : Formulations and error estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 66, 1988, p. 339-363.
- [HUG 00] HUGHES T., BELYTSCHKO T.  
*Nonlinear finite element analysis*. ICE Division, Zace Services Ltd. 2000.
- [HUL 90] HULBERT G., HUGHES T.  
Space-time finite element methods for second-order hyperbolic equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 84, 1990, p. 327-348.
- [HUL 92] HULBERT G.  
Discontinuity-capturing operators for elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 96, 1992, p. 409-426.
- [HUT 68] HUTCHINSON J.  
Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* vol. 16, 1968, p. 13-31.
- [IRW 57] IRWIN G.  
Analysis of Stress and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *Journal of Applied Mechanics* vol. 24, n° 3, 1957, p. 361-364.
- [JIR 00] JIRASEK M.  
Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 188, 2000, p. 307-330.

- 
- [JOH 93] JOHNSON C.  
Discontinuous Galerkin finite element methods for second order hyperbolic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 107, 1993, p. 117-129.
- [KAL 78] KALTHOFF J., BEINERT J., WINKLER S., KLEMM W.  
Experimental analysis of dynamic effects in different crack arrest test specimens. *ASTM E-24, Symp. on Crack Arrest Methodology and Applications* Philadelphia 1978.
- [KAL 00] KALTHOFF J.  
Modes of dynamic shear failure in solids. *International Journal of Fracture* vol. 101, 2000, p. 1-31.
- [KAN 85] KANNINEN M., POPELAR C.  
*Advanced fracture mechanics*. Oxford University Press, New York 1985.
- [KOB 76] KOBAYASHI A., EMERY A., MALL S.  
Dynamic finite element and photoelastic analyses of two fracture Homalite-100 plates. *Experimental Mechanics* vol. 13, 1976, p. 841-850.
- [KRY 99] KRYSL P., BELYTSCHKO T.  
Dynamic Propagation of Arbitrary 3-D Cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 44, n° 6, 1999, p. 767-800.
- [KUH 99] KUH D., CRISFIELD M.  
Energy-conserving and deaying algorithms in non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 45, 1999, p. 569-599.
- [LAB 05] LABORDE P., POMMIER J., RENARD Y. , SALAÜN M.  
High order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* soumis 2005.
- [LEE 90] LEE Y., FREUND L.  
Fracture initiation due to asymmetric impact loading of an edge cracked plate. *Journal of Applied Mechanics* vol. 57, 1990, p. 104-111.
- [LEE 96] LEE Y., LAMBROS J., ROSAKIS A.  
Analysis of Coherent Gradient Sensing by Fourier optics. *Optics and Lasers in Engineering* vol. 25, 1996, p. 25-53.
- [LEG 05] LEGRAIN G., MOËS N., VERRON E.  
Stress analysis around crack tips in finite strain problems using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , to appear 2005.
-

- [LI 98] LI X., WIBERG N.  
Implementation and adaptivity of a space-time finite element method for structural dynamics. *Communications in Numerical Methods in Engineering* vol. 156, 1998, p. 211-229.
- [LI 99] LI X., WIBERG N.-E.  
Adaptative finite element procedure for linear and non-linear dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 46, 1999, p. 1781-1802.
- [LI 03] LI X., YAO D., LEWIS R.  
A discontinuous Galerkin finite element method for dynamic and wave propagation problems in non-linear solids and saturated porous media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 57, 2003, p. 1775-1800.
- [LIU 75] LIU H., KE J.  
*Moire method*. In Kobayashi AS. Experimental techniques in fracture mechanics, N° 2. Iowa State University Press, Ames, 1975.
- [MAI 95] MAIGRE H., RITTEL D.  
Dynamic fracture detection using the force displacement reciprocity : application to the compact compression specimen. *International Journal of Fracture* vol. 73, 1995, p. 67-79.
- [MCN 87] MCNEILL S., PETERS W., SUTTON M.  
Estimation of stress intensity factor by digital image correlation. *Engineering Fracture Mechanics* vol. 28, n° 1, 1987.
- [MER 05] MERGHEIM J., KUHL E., STEINMANN P.  
A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 28, à paraître 2005, p. 583-607.
- [MIC 03] MICHLER C., VAN BRUMMELEN E., HULSHOFF S., DE BORST R.  
The relevance of conservation for stability and accuracy of numerical methods for fluid-structure interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 192, 2003, p. 4195-4215.
- [MOË 99] MOËS N., DOLBOW J., BELYTSCHKO T.  
A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 46, n° 1, 1999, p. 133-150.
- [MOË 02a] MOËS N., BELYTSCHKO T.  
Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics* vol. 69, 2002, p. 813-833.

- 
- [MOË 02b] MOËS N., GRAVOUIL A., BELYTSCHKO T.  
Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets. Part I : Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 53, n° 11, 2002, p. 2549-2568.
- [NEW 59] NEWMARK N.  
A method of computation for structural dynamics. *Proc. A.S.C.E.* vol. 85, 1959, p. 67-94.
- [NIS 97] NISHIOKA T.  
Computational dynamic fracture mechanics. *International Journal of Fracture* vol. 86, 1997, p. 127-159.
- [NIS 01] NISHIOKA T., TOKUDOME H., KINOSHITA M.  
Dynamic fracture-path prediction in impact fracture phenomena using moving finite element method based on Delaunay automatic mesh generation. *International Journal of Solids and Structures* vol. 38, 2001, p. 5273-5301.
- [NOE 18] NOETHER E.  
Invariante variations-problem. *Transport Theory and Statistical Physics* vol. 1, n° 3, 1918, p. 183-207.
- [NOE 04] NOELS L.  
Contributions aux algorithmes d'intégration temporelle conservant l'énergie en dynamique fortement non-linéaire des structures. Thèse Université de Liège 2004.
- [ORG 96] ORGAN D.  
Numerical Solutions to Dynamic Fracture Problems Using the Element-Free Galerkin Methods. Thèse Northwestern University 1996.
- [ORT 99] ORTIZ M., PANDOLFI A.  
Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 44, 1999, p. 1267-1282.
- [PED 05] PEDRO M., AREIAS A., BELYTSCHKO T.  
Non-linear analysis of shells with arbitrary evolving cracks using XFEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 62, n° 3, 2005, p. 384-415.
- [RÉT 04] RÉTHORÉ J., GRAVOUIL A., COMBESCURE A.  
A stable numerical scheme for the finite element simulation of dynamic crack propagation with remeshing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 193, 2004, p. 4493-4510.
-

- [RÉT 05a] RÉTHORÉ J., GRAVOUIL A., COMBESURE A.  
An Energy Conserving Scheme for Dynamic Crack Growth with the eXtended Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , vol. 63, n° 5, 2005, p. 631-659.
- [RÉT 05b] RÉTHORÉ J., GRAVOUIL A., COMBESURE A.  
A combined space time eXtended Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , to appear 2005.
- [RÉT 05c] RÉTHORÉ J., GRAVOUIL A., MORESTIN F., COMBESURE A.  
Estimation of mixed-mode stress intensity factors using digital image correlation and an interaction integral. *International Journal of Fracture* vol. 132, n° 1, 2005, p. 65-79.
- [RAB 04] RABCUK T., BELYTSCHKO T.  
Cracking particles : a simplified meshfree method for arbitrary evolving cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 61, 2004, p. 2316-2343.
- [RAO 04] RAO B., RAHMAN S.  
An enriched meshless method for non-linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 50, 2004, p. 197-223.
- [RAV 98] RAVI-CHANDAR K.  
Dynamic fracture of nominally brittle materials. *International Journal of Fracture* vol. 90, 1998, p. 83-102.
- [REM 03] REMMERS J., DE BORST R., NEEDLEMAN A.  
A cohesive segments method for the simulation of crack growth. *Computational Mechanics* vol. 31, 2003, p. 69-77.
- [RIB 05] RIBEAUCOURT R., BAIETTO-DUBOURG MC., GRAVOUIL A.  
A new mixed mode fatigue crack model with the coupled X-FEM/LATIN method for a steady state non monotonuous formulation *International Journal for Numerical Methods in Engineering* soumis 2005.
- [RIC 68a] RICE J.  
A path independant integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics* vol. 35, 1968, p. 379-386.
- [RIC 68b] RICE J., ROSENGREN G.  
Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* vol. 16, 1968, p. 1-12.

- 
- [RIT 96a] RITTEL D., MAIGRE H.  
An investigation of dynamic crack initiation in PMMA. *Mechanics of Materials* vol. 23, 1996, p. 229-239.
- [RIT 96b] RITTEL D., MAIGRE H.  
A study of mixed-mode dynamic crack initiation in PMMA. *Mechanics Research Communication* vol. 23, 1996, p. 475-481.
- [ROS 86] ROSAKIS A., RAVICHANDRAN G.  
Dynamic Failure Mechanics. *International Journal of Solids and Structures* vol. 22, n° 2, 1986, p. 121-136.
- [ROS 93] ROSAKIS A.  
Two optical techniques sensitive to gradient of optical path different : the method of caustics and the coherent gradient sensor. In *Jonathan S. Epstein, Experimental Techniques in Fracture* , 1993, p. 327-425.
- [ROS 00] ROSAKIS A., RAVI-CHANDAR K.  
On the crack tip stress state : an experimental evaluation of three-dimensional effects. *International Journal of Solids and Structures* vol. 37, 2000, p. 331-348.
- [SEE 99] SEELIG T., GROSS D., POTHMANN K.  
Numerical simulation of a mixed-mode dynamic fracture experiment. *International Journal of Fracture* vol. 99, 1999, p. 325-338.
- [SIM 92] SIMO J., TARNOW N., WONG K.  
Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic scheme for non-linear dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 100, 1992, p. 63-116.
- [STR 00a] STROUBOULIS T., BABUSKA I., COPPS K.  
The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 181, 2000, p. 43-69.
- [STR 00b] STROUBOULIS T., COPPS K., BABUSKA I.  
The generalized finite element method : an example of its implementation and illustration of its performance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 47, n° 8, 2000, p. 1401-1417.
- [SUK 00a] SUKUMAR N., CHOPP D., MOËS N., BELYTSCHKO T.  
Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 190, 2000, p. 6183-6200.

- [SUK 00b] SUKUMAR N., MOËS N., MORAN B., BELYTSCHKO T.  
Extended finite element method for three-dimensional crack modeling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 48, n° 11, 2000, p. 1549-1570.
- [SUO 92] SUO X., COMBESCURE A.  
On the application of the  $\mathcal{G}\theta$  method and its comparison with de Lorenzi's approach. *Nuclear Engineering and Design* vol. 135, 1992, p. 207-224.
- [SUT 83] SUTTON M., WOLTERS W., PETERS W., RANSON W., MCNEILL S.  
Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image Vision Computing* vol. 1, n° 3, 1983, p. 133-139.
- [SUT 86] SUTTON M., CHENG M., PETERS W., CHAO Y., MCNEILL S.  
Application of an optimized digital image correlation method to planar deformation analysis. *Image Vision Computing* vol. 4, n° 3, 1986, p. 143-150.
- [SWE 88] SWENSON D., INGRAFFEA A.  
Modeling mixed-mode dynamic crack propagation using finite elements : theory and applications. *Computational Mechanics* vol. 3, 1988, p. 381-397.
- [TIE 03] TIE B., AUBRY D., BOUILLARD A.  
Adaptive computation for elastic wave propagation in plate/shell structures under moving loads. *Revue Européenne des Eléments Finis* vol. 12, 2003, p. 717-736.
- [TOU 97] TOUCHAL-MGUIL S.  
Une technique de corrélation d'images numériques : application à la détermination de courbes limites de formages et proposition d'un critère de striction. Thèse INSA de Lyon 1997.
- [WAG 01] WAGNER G., MOËS N., LIU W., BELYTSCHKO T.  
The extended finite element method for rigid particles in Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 51, 2001, p. 293-313.
- [WAG 03] WAGNER G., GHOSAL S., LIU W.  
Particulate flow simulations using lubrication theory solution enrichment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 56, 2003, p. 1261-1289.
- [WEL 01] WELLS G., SLUYS L.  
A new method for modeling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 50, 2001, p. 2667-2682.

- 
- [WEL 02] WELLS G., DE BORST R., SLUYS L.  
A consistent geometrically non-linear approach for delamination. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 54, 2002, p. 1333-1355.
- [WOO 80] WOOD W., BOSSAK M., ZIENKIEWICZ O.  
An alpha modification of Newmark's method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 15, 1980, p. 1562-1566.
- [WOO 84] WOOD W.  
A further look at Newmark, Houbolt, etc., time-stepping formulae. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 20, 1984, p. 1009-1017.
- [XU 94] XU X., NEEDLEMAN A.  
Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* vol. 42, 1994, p. 1397-1434.
- [ZHO 04] ZHOU F., MOLINARI F.  
Dynamic crack propagation with cohesive elements : a methodology to address mesh dependency. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 59, 2004, p. 1-24.
- [ZI 03] ZI G., BELYTSCHKO T.  
New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 57, n° 15, 2003, p. 2221-2240.
- [ZIE 77] ZIENKIEWICZ O.  
A new look at Newmark, Houbolt and other time stepping formulae. A weighted residual approach. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* vol. 5, 1977, p. 413-418.
- [ZIE 84] ZIENKIEWICZ O., WOOD W., HINE N.  
A unified set of single step algorithms. Part I : General formulation and applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol. 20, 1984, p. 1529-1552.