



HAL
open science

Rigidité des hypersurfaces en géométrie riemannienne et spinorielle: aspect extrinsèque et intrinsèque

Julien Roth

► **To cite this version:**

Julien Roth. Rigidité des hypersurfaces en géométrie riemannienne et spinorielle: aspect extrinsèque et intrinsèque. Mathématiques [math]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2006. Français. NNT : 2006NAN10161 . tel-01748157v2

HAL Id: tel-01748157

<https://theses.hal.science/tel-01748157v2>

Submitted on 18 Dec 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Thèse
présentée pour l'obtention du titre de
Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I
en Mathématiques
par
Julien ROTH

**Rigidité des hypersurfaces
en géométrie riemannienne et spinorielle :
aspect extrinsèque et intrinsèque**

Soutenue publiquement le 12 Décembre 2006

Membres du jury :

Rapporteurs :	Bruno Colbois	Professeur, Neuchâtel
	Sebastián Montiel	Professeur, Grenade
	Alessandro Savo	Professeur, Rome
Examineurs :	Gilles Courtois	Directeur de recherche, CNRS
	Jean-François Grosjean	MCF, Nancy I (co-directeur de thèse)
	Oussama Hijazi	Professeur, Nancy I (co-directeur de thèse)

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mes directeurs de thèse. Tout d'abord Oussama Hijazi, de qui j'ai beaucoup appris dès la licence de mathématiques. Je lui suis très reconnaissant d'avoir cru en moi et de m'avoir offert la possibilité de faire une thèse sous sa direction. Il a toujours été présent pour m'écouter et m'encourager (surtout dans les moments de doute). J'adresse également mes plus sincères remerciements à Jean-François Grosjean pour tout ce qu'il m'a apporté durant ces trois années (et dès le DÉA) tant au niveau mathématique qu'humain. J'ai pu profiter de ses conseils et de sa grande disponibilité. Pour ces raisons, je leur serai éternellement reconnaissant.

Bruno Colbois, Sebastián Montiel et Alessandro Savo ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. C'est un grand honneur pour moi, et je les remercie vivement pour le travail qu'ils ont accompli. Un grand merci également à Gilles Courtois d'avoir accepté de faire partie du jury.

Merci également aux membres de l'équipe de Géométrie Différentielle de l'Institut Élie Cartan pour leurs conseils : Bernd Ammann, Emmanuel Humbert, Julien Maubon, Marie-Amélie Paillusseau, Lars Schäfer. J'adresse un remerciement particulier à Georges Habib et Simon Raulot pour les nombreuses discussions mathématiques (et personnelles) que nous avons eu durant ces trois années.

Je tiens à remercier l'Institut Élie Cartan pour les conditions de travail exceptionnelles qu'il offre aux jeunes chercheurs.

Ces années passées au sein de l'IECN ont été rendues particulièrement agréables par la bonne ambiance qui régnait entre les doctorants, et surtout autour de la machine à café. Un grand merci à tous : Marie-Amélie, Lars, Pierre L-G., Manon, Georges et Simon ont été les compères de la première heure, puis François, Pierre D., Benoît, Stéphane et Lucas sont venus compléter le tableau.

J'adresse également un immense merci à une personne chère à mon coeur. L'amour qu'elle m'a donné depuis sept ans maintenant m'a permis d'affronter les difficultés et les périodes de doutes. Mille mercis Isa.

Merci aussi à tous mes amis d'enfance, en particulier à Antoine pour les nombreuses discussions passionnantes que nous avons pu avoir et l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail.

Enfin, merci à toute ma famille et à mes parents qui m'ont toujours encouragé à faire ce que j'aimais et pour tous les sacrifices qu'ils ont faits pour moi.

A tous, un grand merci.

À mon grand-père ...

Table des matières

Introduction	7
1 Pincement du rayon extrinsèque	19
1.1 Introduction	19
1.2 Préliminaires	20
1.2.1 Quelques rappels sur les hypersurfaces de $\mathbb{M}^{n+1}(\delta)$	20
1.2.2 Les courbures moyennes H_k	22
1.2.3 Un Lemme fondamental	24
1.2.4 Deux lemmes géométriques	28
1.3 Les résultats avec la courbure moyenne	34
1.3.1 Le cas hyperbolique	34
1.3.2 Les cas euclidien et sphérique	35
1.4 Preuve des Théorèmes de la Section 1.3	37
1.4.1 Une approche L^2	37
1.4.2 De L^2 vers L^∞	41
1.5 Les résultats avec les H_k	47
1.5.1 Une nouvelle minoration du rayon extrinsèque	47
1.5.2 Le problème de pincement	49
1.6 Preuve des Théorèmes de la Section 1.5	50
1.6.1 L'approche L^2	51
1.6.2 Le passage de L^2 vers L^∞	53
1.7 Raffinement dans le cas Euclidien	54
1.7.1 Les p -rayons extrinsèques	54
1.7.2 Le problème de pincement	55
1.7.3 Preuve des Théorèmes 1.29 et 1.30	56
2 Pincement du λ_1 du laplacien	61
2.1 Introduction	61
2.2 Une approche L^2 du problème	63
2.3 Preuve du Théorème 2.1	67
2.4 Preuve du Théorème 2.2	69
2.5 Application aux hypersurfaces presque Einstein	71
2.6 Preuve des lemmes techniques	74

3	Caractérisation spinorielle des surfaces	77
3.1	Introduction	77
3.2	Préliminaires	78
3.2.1	Variétés spinorielles	78
3.2.2	Restriction des spineurs à une hypersurface	80
3.3	Description de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$	82
3.3.1	Description de $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$	82
3.3.2	La base canonique de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, $\tau \neq 0$	82
3.3.3	Les variétés dont le groupe d'isométries est celui des sphères de Berger	83
3.3.4	Les variétés dont le groupe d'isométries est celui du groupe d'Heisenberg Nil_3	84
3.3.5	Les variétés dont le groupe d'isométries est celui de $PSL_2(\mathbb{R})$	84
3.3.6	Calcul du tenseur de courbure de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$	85
3.4	Équations de compatibilité pour les surfaces	86
3.4.1	Équations de compatibilité pour les surfaces de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	86
3.4.2	Équations de compatibilité pour les surfaces de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, $\tau \neq 0$	88
3.5	Champs de spineurs particuliers	90
3.5.1	Champs de spineurs particuliers sur les surfaces de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	90
3.5.2	Champs de spineurs particuliers sur les surfaces de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, $\tau \neq 0$	92
3.5.3	Spineurs de Killing généralisés	93
3.6	Immersion isométriques dans $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	97
3.6.1	Les résultats	97
3.6.2	Une condition nécessaire et suffisante	99
3.6.3	Spineurs de Killing généralisés et équations de compatibilité	99
3.6.4	Équation de Killing généralisée et équation de Dirac	102
3.6.5	Preuve des Théorèmes 3.14 et 3.15	113
3.7	Immersion isométriques dans $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$	113
3.7.1	Le résultat	113
3.7.2	Une condition nécessaire et suffisante	114
3.7.3	Spineurs de Killing généralisés et équations de compatibilité	115
3.7.4	Équation de Killing généralisée et équation de Dirac	118
3.7.5	Preuve du Théorème 3.32	123

Introduction

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur des résultats de rigidité concernant les hypersurfaces immergées isométriquement dans une variété ambiante donnée. Le but est de comprendre les conditions qui sont imposées à la géométrie d'une variété lorsqu'elle est immergée comme hypersurface, mais aussi de caractériser certaines propriétés topologiques ou métriques des hypersurfaces vérifiant des conditions limites concernant des théorèmes de comparaison. Ces résultats de comparaison mettent en relation les aspects extrinsèques de l'hypersurface liés à l'immersion, comme la courbure moyenne, et les aspects intrinsèques de celle-ci vue comme variété abstraite, comme la première valeur propre du laplacien ou la courbure scalaire.

Rappelons d'abord que lorsqu'une variété (M^n, g) est immergée isométriquement par ϕ dans une variété riemannienne (N^{n+p}, \bar{g}) , *i.e.*, $\phi^*\bar{g} = g$, alors la géométrie de la variété ambiante (N^{n+p}, \bar{g}) impose des obstructions à la géométrie de (M^n, g) qui découlent de la formule de Gauss reliant les tenseurs de courbure de M et de N et la seconde forme fondamentale B de ϕ .

Dans cette thèse, nous nous intéressons au cas particulier des hypersurfaces, c'est-à-dire, au cas où N est de dimension $n + 1$. Dans ce cas, le fibré normal est de rang 1 et on peut alors supposer la seconde forme fondamentale à valeurs réelles. À partir de celle-ci, on définit comme premier invariant géométrique extrinsèque la courbure moyenne H obtenue en traçant la seconde forme fondamentale, *i.e.*, $H = \frac{1}{n} \text{tr}(B)$. D'autres invariants géométriques appelés courbures moyennes d'ordre supérieur H_k sont définis comme étant les k -fonctions symétriques des courbures principales.

Dans la première partie de la thèse nous nous intéressons à des problèmes de pincement, c'est-à-dire des problèmes de presque égalité concernant des théorèmes de comparaison entre les courbures moyennes d'ordre supérieur d'une hypersurface M immergée dans un espace modèle et des invariants géométriques comme le rayon extrinsèque de l'hypersurface (*i.e.* le rayon de la plus petite boule fermée contenant M) ou la première valeur propre non nulle $\lambda_1(M)$ du laplacien. Le cas d'égalité de ces théorèmes de comparaison caractérisant les sphères géodésiques, nous montrons que sous réserve de contrôler certains invariants géométriques, le cas de presque égalité entraîne une proximité de M avec la sphère en un certain sens (topologique ou métrique).

Dans la deuxième partie de la thèse, partant d'une surface riemannienne M possédant un champ de spineurs particulier, nous nous intéressons à trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que celle-ci soit immergée isométriquement dans des espaces modèles particuliers et plus généralement des espaces homogènes de dimension 3.

Théorèmes de pincement

De nombreux problèmes consistent à rechercher des caractérisations de certaines variétés remarquables comme la sphère. L'un des résultats les plus célèbres en géométrie des sous-variétés est le théorème d'Alexandrov qui affirme que toute hypersurface compacte à courbure moyenne constante plongée dans l'espace euclidien est une sphère standard.

De nombreux autres résultats permettent de caractériser la sphère, principalement en considérant le cas d'égalité de certains résultats de comparaison.

Citons en premier le résultat de T. Vlachos([?]), comparant le rayon extrinsèque R d'une hypersurface compacte M de l'un des trois espaces modèles $\mathbb{M}^{n+1}(\delta)$ (c'est-à-dire \mathbb{R}^{n+1} , si $\delta = 0$, \mathbb{S}^{n+1} si $\delta = 1$ et \mathbb{H}^{n+1} si $\delta = -1$) avec la courbure moyenne d'ordre supérieur H_k : “*Soit (M^n, g) une hypersurface compacte, connexe, orientée, immergée isométriquement dans $(\mathbb{M}^{n+1}(\delta), can)$. Le rayon extrinsèque R de M satisfait*

$$(1) \quad t_\delta(R)^k \geq \frac{1}{\|H_k\|_\infty},$$

avec égalité si et seulement si M est la sphère de rayon $R = \frac{1}{H}$, où

$$t_\delta(s) = \begin{cases} \tan(s) & \text{si } \delta = 1, \\ s & \text{si } \delta = 0, \\ \tanh(s) & \text{si } \delta = -1. \end{cases}$$

D'autre part R. C. Reilly ([?]) a montré un résultat permettant de comparer la première valeur propre non nulle du laplacien $\lambda_1(M)$ avec les courbures moyennes d'ordre supérieur. Il montre en effet que : “*Si (M^n, g) est une hypersurface compacte, connexe, orientée et immergée isométriquement dans (\mathbb{R}^{n+1}, can) , alors la première valeur propre $\lambda_1(M)$ du laplacien vérifie*

$$(2) \quad \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} dv_g \right)^2 \leq nV(M) \int_M H_k^2 dv_g,$$

avec égalité si et seulement si M est la sphère de rayon $R = \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}$,

où dv_g et $V(M)$ sont respectivement l'élément de volume riemannien et le volume de (M^n, g) .

Nous voyons que dans ces deux théorèmes de comparaison, les cas d'égalité caractérisent exactement les sphères géodésiques. Ceci nous a conduit dans la première partie de cette thèse à nous intéresser aux problèmes de pincement associé, c'est-à-dire aux problèmes de presque égalité de ces estimations.

Remarquons que de nombreux théorèmes de pincement sont connus pour des estimations concernant des invariants géométriques intrinsèques sur des variétés à courbure de Ricci positive. Par exemple le diamètre ([?, ?, ?]), le volume ([?, ?]), le radius ([?, ?]) ou bien encore la borne inférieure de la première valeur propre du théorème de Lichnerowicz-Obata ([?, ?, ?]).

D'autres résultats existent avec des hypothèses affaiblies sur la courbure de Ricci

([?, ?]).

Récemment, B. Colbois et J.-F. Grosjean ([?]) ont montré un résultat de pincement où l'hypothèse sur la courbure de Ricci est remplacée par le fait que M est immergée isométriquement dans l'espace euclidien. Ils montrent en effet qu'il existe une constante C dépendant de la dimension n et de la norme L^∞ de la seconde forme fondamentale telle que si la condition de pincement

$$\frac{n}{V(M)^{1/p}} \|H\|_{2p}^2 - C < \lambda_1(M)$$

est vérifiée, alors M est difféomorphe et quasi-isométrique à une sphère de dimension n .

Dans cette thèse en supposant M immergée dans un espace modèle et en contrôlant certains invariants géométriques comme la courbure moyenne ou la longueur de la seconde forme fondamentale, nous montrons pour les pincements concernant les estimations sur le rayon extrinsèque et le λ_1 citées plus haut, des résultats de proximité de l'hypersurface M avec la sphère. Les différents types de proximité que nous obtenons sont les suivantes : M est proche d'une sphère géodésique de l'espace ambiant au sens de la distance de Hausdorff (cf Théorème 2), M est difféomorphe et quasi-isométrique à une sphère (cf Théorèmes 3 et 4).

Pincement du rayon extrinsèque

La première direction que nous suivons dans cette thèse est l'étude du rayon extrinsèque, auquel le premier chapitre est consacré.

Notre premier résultat est une amélioration de l'inégalité (1) dans le cas où $\delta \geq 0$. En effet, nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit (M^n, g) une hypersurface compacte sans bord, connexe, orientée et immergée isométriquement dans $(\mathbb{M}^{n+1}(\delta), \text{can})$, $\delta \geq 0$. Soit $k \geq 1$ tel que la courbure moyenne d'ordre k , H_k soit une fonction positive, alors pour tout $p \geq 1$, nous avons*

$$(3) \quad t_\delta(R)^k \geq \frac{V(M)^{1/p}}{\|H_k\|_p},$$

avec égalité si et seulement si M est une hypersphère géodésique de rayon R .

Dans un second temps, nous nous intéressons aux différents problèmes de pincement liés aux inégalités (1) et (3). En effet, nous donnons des résultats de pincement pour le rayon extrinsèque des hypersurfaces de l'espace euclidien, mais aussi de la sphère et de l'espace hyperbolique (cf. [?, ?]).

Nous donnons ici deux types de résultats de pincement associés aux différentes minoration du rayon extrinsèque que nous avons donné plus haut : (1) et (3). Le premier résultat donne, en cas de pincement, une proximité (assez faible et extrinsèque) au sens de la distance de Hausdorff. Voici le théorème formulé pour l'inégalité (3).

Théorème 2. *Soit $p \geq 1$. Soient (M^n, g) une variété compacte sans bord, connexe, orientée, immergée isométriquement dans $\mathbb{M}^{n+1}(\delta)$, $\delta \geq 0$ et p_0 le centre de la boule de rayon R qui contient $\phi(M)$. Supposons de plus que $V(M) = 1$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il*

existe une constante C_ε dépendant uniquement de ε , n , de la norme L^∞ de la courbure moyenne et de la norme L^{2p} de H_k telle que si la condition de pincement

$$R < \frac{1}{\|H_k\|_{2p}} + C_\varepsilon$$

est satisfaite, alors

$$d_H(\phi(M), S(p_0, R)) \leq \varepsilon.$$

Le second type de résultats donne une proximité beaucoup plus forte avec la sphère $S(p_0, R)$, à savoir, le difféomorphisme et la quasi-isométrie. Voici le théorème formulé pour l'inégalité (3).

Théorème 3. Soit $p \geq 1$. Soient (M^n, g) une variété compacte sans bord, connexe, orientée, immergée isométriquement dans $\mathbb{M}^{n+1}(\delta)$, $\delta \geq 0$ et p_0 le centre de la boule de rayon R qui contient $\phi(M)$. Supposons de plus que $V(M) = 1$, alors, il existe une constante C dépendant uniquement de n , de la norme L^∞ de la seconde forme fondamentale et de la norme L^{2p} de H_k telle que si la condition de pincement

$$t_\delta(R)^k < \frac{1}{\|H_k\|_{2p}} + C$$

est satisfaite, alors M est difféomorphe et quasi-isométrique à la sphère $S(p_0, R)$.

Nous préciserons dans le chapitre 1, ce que nous entendons par “quasi-isométrie”. On remarquera que dans ce second résultat, la proximité est plus forte que dans le cas précédent. Notons que l'on a supposé une condition de pincement plus forte puisque la constante C dépend cette fois-ci de la longueur de la seconde forme fondamentale.

D'autre part, la conclusion de ce théorème est intrinsèque. En effet, la proximité obtenue, à savoir le difféomorphisme et la quasi-isométrie sont des notions qui ont un sens pour des variétés riemanniennes quelconques.

Ces résultats ne sont pas valables dans le cas où $\delta < 0$, c'est-à-dire pour les hypersurfaces de l'espace hyperbolique. Cependant, nous obtenons des résultats comparables pour la condition de pincement suivante :

$$t_\delta(R) < \frac{1}{\|H\|_\infty} + C.$$

Pincement de la première valeur propre du laplacien

Dans le chapitre 2, nous nous intéressons à un autre type de problème de pincement, celui de la première valeur propre du laplacien des hypersurfaces de l'espace euclidien.

Soit (M^n, g) une variété de dimension n , compacte sans bord, connexe, orientée et immergée isométriquement dans l'espace euclidien de dimension $n + 1$, (\mathbb{R}^{n+1}, can) . Comme nous l'avons dit plus haut, Reilly ([?]) a démontré l'inégalité (2) qui donne une majoration de la première valeur propre non nulle du laplacien de (M^n, g) en fonction des courbures moyennes d'ordre supérieur avec égalité si et seulement si (M^n, g) est une hypersphère géodésique de \mathbb{R}^{n+1} .

En utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons des estimations similaires avec la norme L^{2p} ($p \geq 1$) de H :

$$(4) \quad \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} dv_g \right)^2 \leq nV(M)^{2-1/p} \|H_k\|_{2p}.$$

Comme pour l'inégalité (2), le cas d'égalité est caractérisé par les hypersphères géodésiques. Une question naturelle qui se pose est de savoir s'il existe un résultat de pincement comparable à celui obtenu par Colbois et Grosjean ([?]), à savoir que si nous sommes suffisamment proche du cas d'égalité, alors M est difféomorphe et quasi-isométrique à une sphère géodésique. La réponse à cette question est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4. *Soit $p \geq 2$. Soient (M^n, g) une variété compacte sans bord, connexe, orientée, immergée isométriquement dans \mathbb{R}^{n+1} et p_0 le centre de masse de M . Supposons de plus que $V(M) = 1$, alors il existe une constante C dépendant uniquement de n , $\|B\|_\infty$ et $\|H_k\|_{2p}$ telle que si la condition de pincement*

$$(P_C) \quad \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} dv_g \right)^2 - n\|H_k\|_{2p}^2 > -C$$

est satisfaite, alors M est difféomorphe et quasi-isométrique à la sphère $S \left(p_0, \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \right)$.

Ce théorème nous permettra alors d'obtenir comme application une caractérisation des hypersurfaces presque-Einstein de l'espace euclidien :

Théorème 5. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte sans bord, connexe, orientée, immergée isométriquement dans \mathbb{R}^{n+1} . Alors, pour tout réel $k > 0$, il existe un $\varepsilon(k, n, \|B\|_\infty)$ tel que si (M^n, g) est ε -presque-Einstein, c'est-à-dire,*

$$\|\text{Ric} - kg\|_\infty \leq \varepsilon,$$

alors M est difféomorphe et quasi-isométrique à $S^n \left(\sqrt{\frac{n-1}{k}} \right)$.

Les techniques que nous utilisons pour prouver ces différents résultats de pincement sont tout d'abord une estimation de la norme L^2 du vecteur position, puis une estimation de sa norme L^∞ obtenue par un processus d'itération de type Nirenberg-Moser basé sur une inégalité de Sobolev pour les hypersurfaces, faisant intervenir la courbure moyenne :

$$(5) \quad \left(\int_M f^{\frac{n}{n-1}} dv_g \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq K(n, \delta) \int_M (|df| + |H|f) dv_g,$$

pour une fonction f lisse et positive. La dépendance en la longueur de la seconde forme fondamentale apparaît lorsqu'avec les mêmes techniques, nous obtenons une estimation de la norme L^∞ de la projection du vecteur position sur l'espace tangent à l'hypersurface, pour l'obtention du difféomorphisme et de la quasi-isométrie.

Caractérisation spinorielle des surfaces dans les 3-variétés homogènes

Une question essentielle en géométrie des sous-variétés, et plus particulièrement des hypersurfaces, est de savoir “*A quelle condition une variété riemannienne orientée (M^n, g) de dimension n peut-elle être immergée isométriquement dans l’espace euclidien \mathbb{R}^{n+1} muni de sa métrique canonique ?*” Lorsque la variété est simplement connexe, la condition nécessaire et suffisante est bien connue, il faut et il suffit qu’il existe sur M un $(1, 1)$ -tenseur symétrique A qui satisfasse aux équations de Gauss et de Codazzi. En ce cas, A est alors le champ d’endomorphisme associé à la seconde forme fondamentale B . Par la suite, cette caractérisation a été étendue aux hypersurfaces de l’espace hyperbolique \mathbb{H}^{n+1} et de la sphère \mathbb{S}^{n+1} .

Plus récemment, de nombreux travaux ([?, ?] par exemple) ont permis de montrer (ou redémontrer) des résultats de géométrie des sous-variétés par des méthodes spinorielles. Nous citerons par exemple la preuve spinorielle du théorème d’Alexandrov dans l’espace euclidien ([?]) et dans l’espace hyperbolique ([?]), via l’étude du spectre de l’opérateur de Dirac.

Spineurs particuliers et rigidité des variétés

Rappelons tout d’abord que l’existence d’une structure spinorielle sur une variété riemannienne (M^n, g) est une propriété topologique, correspondant à une notion d’orientabilité d’ordre 2, se traduisant par la nullité de la seconde classe de Stiefel-Whitney.

Notons également que les trois espaces modèles standards \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n et \mathbb{H}^n sont des variétés spinorielles.

Étant donnée une structure spinorielle sur une variété riemannienne (M^n, g) , on construit de manière naturelle un fibré vectoriel, noté ΣM , et appelé *fibré des spineurs complexes*, dont les sections sont les champs de spineurs. Ces champs de spineurs peuvent être considérés comme des “*racines carrées*” de formes différentielles. Il existe cependant une différence fondamentale entre formes différentielles et spineurs. En effet, bien que le fait d’être spinorielle soit une propriété topologique pour les variétés riemanniennes, les champs de spineurs dépendent de la métrique.

L’opérateur de Dirac d’une variété riemannienne spinorielle est un opérateur différentiel linéaire du premier ordre agissant sur les champs de spineurs que l’on peut voir comme une “*racine carrée du laplacien*”. De plus, il est elliptique et si la variété est compacte, il est formellement auto-adjoint. Son spectre, qui est alors discret, a été et est toujours l’objet de recherches intensives.

Des informations géométriques subtiles peuvent être déduites de l’étude de la première valeur propre de l’opérateur de Dirac. T. Friedrich ([?]) l’a minoré par l’infimum de la courbure scalaire, à une constante multiplicative (positive) près. De plus, le cas d’égalité de cette estimation est caractérisé par l’existence sur la variété d’un champ de spineurs particulier. Il s’agit d’un champ dont la dérivée covariante est égale à l’action des champs de vecteurs sur le champ de spineurs par la multiplication de Clifford, à un coefficient multiplicatif près (appelé nombre de Killing). Un tel champ est appelé *spineur de Killing*, et l’existence d’un tel champ de spineurs impose de fortes restrictions sur la géométrie

et la topologie de la variété.

Par exemple, dans certaines dimensions, les sphères rondes sont caractérisées par l'existence d'un champ de Killing avec nombre de Killing réel. En dimension quelconque, elle caractérise les sphères standards et d'autres exemples exotiques, classifiés par C. Bär ([?]).

Il existe d'autres champs de spineurs particuliers comparables aux champs de Killing, appelés *spineurs de Killing généralisés*. Il s'agit de spineurs dont la dérivée covariante dans la direction d'un vecteur X est donnée non par l'action de ce champ de vecteurs X par multiplication de Clifford, mais par la multiplication de Clifford par le champ de vecteurs $A(X)$, où A est un champ d'endomorphisme symétriques. Dans ce cas, le champ d'endomorphisme A est alors (au signe près) le tenseur d'impulsion-énergie associé à ce spineur.

Les spineurs de Killing généralisés apparaissent naturellement en géométrie des hypersurfaces. Remarquons d'abord que si (M^n, g) est une hypersurface orientée d'une variété riemannienne spinorielle (N^{n+1}, h) , alors l'orientation de M permet d'induire sur M une structure spinorielle à partir de celle de N . De plus, il existe une identification naturelle entre les spineurs de M et la restriction des spineurs de N . D'autre part, les dérivées covariantes spinorielles de M et N sont reliées par l'application de Weingarten A de l'immersion grâce à la formule de Gauss spinorielle. Si la variété ambiante possède un spineur parallèle (comme par exemple \mathbb{R}^{n+1}), alors la restriction à M de ce spineur parallèle est un spineur de Killing généralisé et l'application de Weingarten est le tenseur d'impulsion-énergie associé à ce spineur.

La question de la réciproque se pose alors, "*si une variété riemannienne spinorielle possède un spineur de Killing généralisé, est-elle immergée isométriquement dans une variété admettant un spineur parallèle ?*"

Plusieurs résultats vont dans ce sens. Tout d'abord, Friedrich ([?]) a montré qu'en dimension 2, une surface simplement connexe possédant un spineur de Killing généralisé peut être immergée isométriquement dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Par la suite, B. Morel ([?]) a généralisé ce résultat aux surfaces de la sphère \mathbb{S}^3 et de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 (dans ce cas, l'expression des spineurs de Killing généralisés est différente car ces derniers sont obtenus par restriction de spineurs de Killing et non plus parallèles). En dimension plus grande, en supposant que de plus l'endomorphisme A est de Codazzi, la variété M peut être immergée en tant qu'hypersurface dans une variété N admettant un spineur parallèle (voir [?, ?]). Cette variété N n'est pas forcément l'espace euclidien, mais un produit tordu construit au dessus de M .

Les espaces homogènes de dimension 3 avec groupe d'isométrie de dimension 4

Parallèlement à ces travaux de caractérisation spinorielle des hypersurfaces, un intérêt grandissant a été porté aux surfaces des 3-variétés homogènes ces dernières années, en particulier par H. Rosenberg et U. Abresch ([?, ?] par exemple). Nous nous intéressons ici aux 3-variétés homogènes avec groupe d'isométrie de dimension 4. Une telle variété est une fibration riemannienne sur une variété de dimension 2 simplement connexe à courbure constante et dont les fibres sont géodésiques.

La majorité des travaux concerne les surfaces minimales ou à courbure moyenne constante dans les deux espaces produit $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, qui sont des cas particuliers d'espaces homogènes de dimension 3 avec groupe d'isométrie de dimension 4. Ces travaux ont permis d'obtenir de nouveaux exemples de surfaces minimales comme des caténoïdes, hélicoïdes ou unduloïds généralisés (voir [?] ou [?]).

En 2004, dans [?], U. Abresch et H. Rosenberg ont montré l'existence d'une différentielle de Hopf, c'est-à-dire une différentielle quadratique holomorphe, pour les surfaces à courbure moyenne constante dans $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Cette différentielle de Hopf leur a permis de démontrer un théorème de type Hopf pour ces deux espaces, c'est-à-dire une caractérisation des sphères à courbure moyenne constantes immergées dans $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Il reste encore de nombreuses questions ouvertes concernant les surfaces dans $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ et plus généralement dans les espaces homogènes de dimension 3 dont ces deux espaces sont des cas particuliers comme, par exemple, l'existence d'un théorème de type Alexandrov. Au vu des résultats passés, il est naturel de penser que l'utilisation des spineurs pourrait permettre d'obtenir de tels résultats.

Récemment, dans [?], B. Daniel a donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit immergée isométriquement dans $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Cette condition à remplir est l'existence d'un triplet (A, T, f) composé d'un 2-tenseur symétrique A , un champ de vecteurs T et d'une fonction f définis sur M , et qui satisfont aux équations de Gauss et Codazzi correspondantes, ainsi que deux relations supplémentaires. Daniel a également généralisé ce résultat au cas des autres 3-espaces homogènes avec groupe d'isométrie de dimension 4, à savoir le groupe d'Heisenberg, les sphères de Berger et le revêtement universel $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ du groupe de Lie $PSL_2(\mathbb{R})$ (voir [?]). Il a pu en combinant ces résultats donner un analogue à la correspondance de Lawson pour les surfaces de ces espaces homogènes.

La correspondance de Lawson est une correspondance naturelle entre surfaces à courbure moyenne constante dans les trois espaces modèles standards \mathbb{R}^3 , \mathbb{S}^3 et \mathbb{H}^3 . Par exemple, toute surface minimale simplement connexe dans \mathbb{S}^3 est isométrique à une surface simplement connexe à courbure moyenne constante 1 dans \mathbb{R}^3 , et toute surface minimale simplement connexe dans \mathbb{R}^3 est isométrique à une surface simplement connexe à courbure moyenne constante 1 dans \mathbb{H}^3 .

Dans les cas des 3-espaces homogènes, une telle correspondance existe également. Par exemple, toute surface minimale simplement connexe dans l'espace d'Heisenberg Nil_3 est isométrique à une surface simplement connexe à courbure moyenne constante $\frac{1}{2}$ dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Caractérisation spinorielle des surfaces dans les 3-variétés homogènes avec groupe d'isométrie de dimension 4

Comme nous l'avons mentionné plus haut, l'utilisation des spineurs s'est avérée être un outil efficace en géométrie des sous-variétés. Le champ d'investigations concernant les surfaces des 3-espaces homogènes étant encore ouvert, il est naturel de penser que les spineurs puissent jouer un rôle dans cette théorie et permettre d'obtenir des résultats intéressants.

Le troisième chapitre de cette thèse a pour but de comprendre la géométrie spinorielle des surfaces immergées isométriquement dans les 3-espaces homogènes avec groupe d'isométrie de dimension 4. Pour cela, nous commençons par donner l'expression des spineurs particuliers que possèdent ces surfaces, et que nous appellerons par analogie avec le cas des trois espaces modèles, *spineurs de Killing généralisés*. L'expression de ces spineurs étant donnée, la question naturelle qui se pose est la suivante : “*La donnée d'un tel spineur sur une surface abstraite est-elle une condition nécessaire et suffisante pour que cette surface soit immergée isométriquement dans la 3-variété homogène correspondante ?*”

La réponse à cette question passe par un décryptage des informations géométriques contenues dans les spineurs de Killing généralisés, particulièrement concernant la courbure de la surface. Nous pouvons alors répondre par l'affirmative . Voici le résultat que nous obtenons, énoncé pour les surfaces de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Théorème 6. *Soit $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une surface riemannienne connexe, simplement connexe et orientée. Soient T un champ de vecteurs, f et H deux fonctions sur N vérifiant :*

$$\begin{cases} f^2 + \|T\|^2 = 1, \\ \langle \nabla_X T, Y \rangle = \langle \nabla_Y T, X \rangle, \quad \forall X, Y \in \chi(N), \\ 2Hf = \operatorname{div}(T). \end{cases}$$

Enfin, soit A un champ d'endomorphismes sur N . Il y a équivalence entre la donnée :

- i) d'une immersion isométrique F de N dans $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ de courbure moyenne H telle que l'application de Weingarten associée à F par rapport à la normale ν est donnée par :

$$dF \circ A \circ dF^{-1}$$

et telle que

$$\frac{\partial}{\partial t} = dF(T) + f\nu.$$

- ii) d'un champ de spineurs φ sur N , solution de l'équation

$$\nabla_X \varphi = \frac{1}{2} X \cdot T \cdot \varphi + \frac{1}{2} f X \cdot \varphi + \frac{1}{2} \langle X, T \rangle \varphi - \frac{1}{2} AX \cdot \varphi,$$

où A vérifie de plus :

$$\nabla_X T = fAX,$$

et

$$df(X) = -\langle AX, T \rangle.$$

- iii) d'une solution φ de l'équation de Dirac

$$D\varphi = H\varphi - \frac{1}{2} T \cdot \varphi - f\varphi,$$

de norme constante et telle que

$$df = -2Q_\varphi(T) + fT,$$

où Q_φ est le tenseur d'impulsion-énergie associé au champ de spineurs φ , i.e. le 2-tenseur symétrique défini par :

$$Q_\varphi(X, Y) := \frac{1}{2} \Re \langle X \cdot \nabla_Y \varphi + Y \cdot \nabla_X \varphi, \varphi / |\varphi|^2 \rangle.$$

Nous obtenons également un résultat analogue pour les surfaces de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Comme nous l'avons vu, les trois autres 3-variétés homogènes qui nous intéressent, Nil_3 , $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ et les sphères de Berger, sont des fibrations riemanniennes sur une variété riemannienne simplement connexe à courbure constante. Nous noterons κ cette courbure de la base de fibration. D'autre part, contrairement à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, ces fibrations ne sont pas des produits riemanniens. Un invariant permet de mesurer le fait qu'une fibration est un produit ou pas. Il s'agit de la courbure de fibration notée τ . Nous noterons alors $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ ces 3-variétés homogènes, où κ est la courbure de la base et τ la courbure de la fibration. Enfin, signalons que $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ admet un champ de vecteurs de Killing ξ correspondant aux translations le long des fibres.

Nous obtenons un résultat comparable au Théorème 6 pour les surfaces de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$:

Théorème 7. *Soit $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une surface riemannienne connexe, simplement connexe et orientée. Soient T un champ de vecteurs, f et H deux fonctions sur N vérifiant :*

$$\begin{cases} f^2 + \|T\|^2 = 1, \\ \langle \nabla_X T, Y \rangle = \langle \nabla_Y T, X \rangle + 2\tau f \langle X, JY \rangle, \quad \forall X, Y \in \chi(N), \\ 2Hf = \operatorname{div}(T), \end{cases}$$

où J est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ sur TM . Enfin, soit A un champ d'endomorphismes sur N . Il y a équivalence entre la donnée :

- i) d'une immersion isométrique F de N dans $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ de courbure moyenne H telle que l'application de Weingarten associée à F par rapport à la normale ν est donnée par :

$$dF \circ A \circ dF^{-1}$$

et telle que

$$\xi = dF(T) + f\nu.$$

- ii) d'un spineur φ solution de l'équation

$$\nabla_X \varphi = -\frac{\tau}{2} X \cdot \omega \cdot \varphi + \left(\tau - \frac{\kappa}{4\tau} \right) \langle X, T \rangle T \cdot \omega \cdot \varphi - \left(\tau - \frac{\kappa}{4\tau} \right) f \langle X, T \rangle \omega \cdot \varphi - \frac{1}{2} AX \cdot \varphi,$$

où A vérifie de plus :

$$\nabla_X T = f(AX - \tau JX),$$

et

$$df(X) = -\langle AX - \tau JX, T \rangle.$$

iii) d'une solution φ de l'équation de Dirac

$$D\varphi = H\varphi + \tau\omega \cdot \varphi - \left(\tau - \frac{\kappa}{4\tau}\right) \|T\|^2 \omega \cdot \varphi - \left(\tau - \frac{\kappa}{4\tau}\right) fT \cdot \omega \cdot \varphi,$$

de norme constante et tel que

$$df = -(2Q_\varphi + B + \tau J)(T),$$

où Q_φ est le tenseur d'impulsion-énergie associé au champ de spineurs φ et B est un 2-tenseur symétrique à trace nulle, défini uniquement à partir de T .

Afin de prouver ce théorèmes, nous donnons l'expression des champs de spineurs particuliers que possèdent ces 3-variétés homogènes. Puis après un travail d'identification de la restriction de ces spineurs avec des spineurs intrinsèques de la surface, nous obtenons des champs de spineurs de Killing généralisés.

L'existence de tels champs de Killing généralisés sur une surface imposent alors des restrictions à la géométrie de cette surface, par exemple sur sa courbure. En particulier, on retrouve les équations de Gauss et Codazzi qui permettent alors d'immerger la surface dans l'espace homogène correspondant.

Chapitre 1

Le rayon extrinsèque des hypersurfaces des espaces modèles : inégalités optimales et pincements¹

1.1 Introduction

Soit (M^n, g) une variété connexe orientée, compacte sans bord, de dimension $n \geq 2$, immergée isométriquement par ϕ dans l'espace modèle simplement connexe, de courbure sectionnelle constante δ et de dimension $(n + 1)$, $\mathbb{M}^{n+1}(\delta)$, muni de sa métrique canonique g_{can} . Tout d'abord, la variété M étant compacte, on peut définir le rayon extrinsèque de M de la façon suivante :

Définition 1.1. *Le rayon extrinsèque de M est le nombre*

$$R = R(M) = \inf \{ r > 0 \mid \exists x \in \mathbb{M}^{n+1}(\delta) \text{ tel que } \phi(M) \subset B(x, r) \},$$

où $B(x, r)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r dans $\mathbb{M}^{n+1}(\delta)$.

Dans la suite, nous noterons par $\overline{B}(x, r)$ (*resp.* $S(x, r)$), la boule fermée (*resp.* la sphère) de centre x et de rayon r .

Remarque 1. *Une première conséquence de la définition ci-dessus est qu'il existe un point p_0 dans $\mathbb{M}^{n+1}(\delta)$ tel que*

- i) $\phi(M) \subset \overline{B}(p_0, R)$*
- ii) $\phi(M) \cap S(p_0, R) \neq \emptyset$.*

Fort de cette remarque, il est alors aisé de donner une minoration du rayon extrinsèque, en fonction de la courbure moyenne de l'immersion. En effet, $\phi(M)$ et $S(p_0, R)$ sont deux hypersurfaces dont l'une est "à l'intérieur" de l'autre et ayant un point de contact, noté x_0 . Il est alors possible de comparer les secondes formes fondamentales des deux hypersurfaces en ce point de contact. En effet, en ce point de contact, les courbures principales $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$ de M sont toutes supérieures à celles de la sphère $S(p_0, R)$, qui sont

¹Ce chapitre fait l'objet d'un article à paraître [?] et d'un article soumis [?]

toutes constantes et égales à $\frac{1}{t_\delta(R)}$. Donc en particulier, la courbure moyenne H de M en x_0 est supérieure à celle de $S(p_0, R)$, c'est-à-dire

$$(1.1) \quad |H(x_0)| \geq \frac{1}{t_\delta(R)},$$

où pour $s \in \mathbb{R}$,

$$t_\delta(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \tan(\sqrt{\delta} s) & \text{si } \delta > 0, \\ s & \text{si } \delta = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-\delta}} \tanh(\sqrt{-\delta} s) & \text{si } \delta < 0. \end{cases}$$

On en déduit donc la minoration suivante du rayon extrinsèque

$$(1.2) \quad t_\delta(R) \geq \frac{1}{\|H\|_\infty}.$$

On remarquera tout de même que dans le cas où $\delta > 0$, on doit supposer que $\phi(M)$ est incluse dans un hémisphère ouvert, c'est-à-dire dans une boule ouverte de $\mathbb{S}^{n+1}(\delta)$ de rayon inférieur à $\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$. En effet, dans ce cas, la fonction t_δ est une tangente qui n'est pas définie en $s = \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$. Cette inégalité reste valable pour les sous-variétés de dimension quelconque (voir [?, ?, ?]). Cependant, dans le cas particulier de la codimension 1, on peut caractériser le cas d'égalité par les hypersphères géodésiques. L'inégalité (1.2) est donc une inégalité géométrique optimale. Il est alors naturel de se poser la question du pincement, c'est-à-dire du cas de "*presque égalité*". Ce chapitre est dédié à l'étude de ce problème, ainsi qu'à des problèmes voisins pour d'autres inégalités optimales concernant le rayon extrinsèque que nous expliciterons par la suite.

1.2 Préliminaires

1.2.1 Quelques rappels sur les hypersurfaces de $\mathbb{M}^{n+1}(\delta)$

Tout d'abord, introduisons les fonctions suivantes :

$$s_\delta(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \sin(\sqrt{\delta} s) & \text{si } \delta > 0 \\ s & \text{si } \delta = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\delta}} \sinh(\sqrt{-\delta} s) & \text{si } \delta < 0 \end{cases}$$

et

$$c_\delta(s) = \begin{cases} \cos(\sqrt{\delta} s) & \text{si } \delta > 0 \\ 1 & \text{si } \delta = 0 \\ \cosh(\sqrt{-\delta} s) & \text{si } \delta < 0 \end{cases}$$

Il est bien connu que ces fonctions vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} c_\delta^2 + \delta s_\delta^2 = 1, \\ s'_\delta = c_\delta, \\ c'_\delta = -\delta s_\delta. \end{cases}$$

D'autre part, la fonction $t_\delta = \frac{s_\delta}{c_\delta}$ que nous avons déjà définie précédemment vérifie la relation

$$t'_\delta = 1 + \delta t_\delta^2.$$

Ces relations nous seront utiles par la suite dans la preuve des résultats (Section 1.4).

Afin de fixer les notations, nous introduisons les deux familles de variétés suivantes. Tout d'abord, on notera par $\mathcal{M}(n, \delta)$ la famille des *variétés connexes orientées, compactes sans bord, de dimension $n \geq 2$, immergées isométriquement dans $\mathbb{M}^{n+1}(\delta)$* . Si $\delta > 0$, on suppose de plus que l'image de M est contenue dans un hémisphère ouvert. Ensuite, on appelle $\mathcal{M}(n, \delta, R)$ l'ensemble des *variétés riemanniennes $(M, g) \in \mathcal{M}(n, \delta)$ de volume 1 et de rayon extrinsèque R* .

Intéressons-nous d'abord aux propriétés générales des variétés de $\mathcal{M}(n, \delta)$. Soit alors $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, \delta)$, comme M est orientée, il existe un champ normal unitaire ν , choisi sortant. La seconde forme fondamentale de l'immersion est le 2-tenseur symétrique B défini par

$$B(X, Y) = \langle \bar{\nabla}_X \nu, Y \rangle,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\bar{\nabla}$ sont respectivement la métrique et la connexion riemannienne de $\mathbb{M}^{n+1}(\delta)$. La courbure moyenne de l'immersion est

$$H = \frac{1}{n} \text{tr}(B).$$

Soit $p_0 \in \mathbb{M}^{n+1}(\delta)$ et soit \exp_{p_0} l'application exponentielle en ce point p_0 . Ce point p_0 va jouer le rôle de "*point de base*". Pour cela, on considère les coordonnées normales $(x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ centrées en p_0 . Enfin, pour tout $x \in \mathbb{M}^{n+1}(\delta)$, nous noterons par $r(x)$ la distance géodésique $d(p_0, x)$ de p_0 à x sur $(\mathbb{M}^{n+1}(\delta), g_{can})$.

Dans toute la suite, nous noterons respectivement par ∇ et $\bar{\nabla}$ les gradients associés à (M, g) et $(\mathbb{M}^{n+1}(\delta), g_{can})$. Les laplaciens correspondants seront notés Δ et $\bar{\Delta}$.

On considère le vecteur position Z défini par

$$Z := s_\delta(r) \bar{\nabla} r.$$

Les coordonnées de Z dans le système de coordonnées normales sont alors $\left(\frac{s_\delta(r)}{r} x_i\right)_{1 \leq i \leq n+1}$. Enfin, nous noterons $Z^T := s_\delta(r) \nabla r$ la projection du vecteur position Z sur le fibré tangent à $\phi(M)$.

Après avoir introduit ces notations, nous allons rappeler un certain nombre de propriétés de l'application exponentielle ainsi que de la hessienne $\bar{\nabla} dr$ de la fonction distance r (voir Corollaire 2.8 et Lemme 2.9 p153 dans [?]). La première propriété de l'application \exp_{p_0} est d'être une isométrie radiale, c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{M}^{n+1}(\delta)$ et tout vecteur $v \in T_{p_0} \mathbb{M}^{n+1}(\delta)$ nous avons :

$$(1.3) \quad \langle (\text{dexp}_{p_0})_X(X), (\text{dexp}_{p_0})_X(v) \rangle_x = \langle X, v \rangle_{p_0},$$

où X est le vecteur de $T_{p_0} \mathbb{M}^{n+1}(\delta)$ défini par $X := \exp_{p_0}^{-1}(x)$. D'autre part, l'application exponentielle satisfait l'égalité suivante. Pour $x \in \mathbb{M}^{n+1}(\delta)$ et v un vecteur de $T_x \mathbb{M}^{n+1}(\delta)$ orthogonal à $\bar{\nabla} r$, on a :

$$(1.4) \quad |(\text{dexp}_{p_0}^{-1})|_x(v)|_{p_0}^2 = \frac{r^2}{s_\delta^2(r)} |v|_x^2.$$

Nous allons maintenant donner l'expression de la hessienne $\overline{\nabla}dr$ de la fonction distance r . Si v est un vecteur de $T_x\mathbb{M}^{n+1}(\delta)$ orthogonal à $\overline{\nabla}r$, alors

$$(1.5) \quad \langle \overline{\nabla}_v \overline{\nabla}r, v \rangle_x = \frac{c_\delta(r)}{s_\delta(r)} |v|_x^2.$$

De plus, $\overline{\nabla}r$ est dans le noyau de $\overline{\nabla}dr$. En particulier, pour tout $v \in T_x\mathbb{M}^{n+1}(\delta)$ orthogonal à $\overline{\nabla}r$,

$$(1.6) \quad \langle \overline{\nabla}_{\overline{\nabla}r} \overline{\nabla}r, v \rangle = 0.$$

En résumé, dans une base adaptée $(e_1, \dots, e_n, \overline{\nabla}r)$, la matrice de la hessienne $\overline{\nabla}dr$ au point x est :

$$\frac{c_\delta(r)}{s_\delta(r)} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement, nous clôturons cette section de rappels par le lemme suivant (voir [?] pour la preuve) :

Lemme 1.2. *Nous avons :*

$$i) \operatorname{div}(Z^T) = nc_\delta(r) + nH \langle Z, \nu \rangle,$$

$$ii) \delta \int_M g(Z^T, Z^T) dv_g \geq n \int_M \left(c_\delta^2(r) - |H|c_\delta(r)s_\delta(r) \right) dv_g.$$

Remarque 2. *On remarquera que le premier point du lemme dans le cas $\delta = 0$ n'est rien d'autre que la formule de Hsiung-Minkowski (voir [?]) que nous retrouverons également dans le chapitre 2.*

1.2.2 Les courbures moyennes H_k

La seconde partie de cette section de préliminaires est consacrée aux courbures moyennes d'ordre supérieur. Il s'agit de quantités géométriques extrinsèques définies à partir de la seconde forme fondamentale et qui généralisent la notion de courbure moyenne. Nous avons vu précédemment que la courbure moyenne est définie comme la trace de la seconde forme fondamentale B (à un coefficient près) :

$$H = \frac{1}{n} \operatorname{tr}(B).$$

En d'autres termes, la courbure moyenne est égale à la somme des courbures principales (au coefficient $\frac{1}{n}$ près) ou bien encore,

$$H = \frac{1}{n} \sigma_1(k_1, \dots, k_n),$$

où σ_1 est le premier polynôme symétrique. Les courbures moyennes d'ordre supérieur sont alors définies de manière analogue pour $k \in \{1, \dots, n\}$ par

$$H_k = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sigma_k(k_1, \dots, k_n),$$

où σ_k est le k -ième polynôme symétrique, c'est-à-dire, pour tout n -uplet (x_1, \dots, x_n) ,

$$\sigma_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

De manière équivalente, les H_k s'écrivent

$$H_k = \frac{1}{k! \binom{n}{k}} \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n}} \epsilon \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k \end{matrix} \right) B_{i_1 j_1} \cdots B_{i_k j_k},$$

où les B_{ij} sont les coefficients de la seconde forme fondamentale B dans un repère orthonormé local $\{e_1, \dots, e_n\}$. D'autre part, les symboles $\epsilon \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k \end{matrix} \right)$ sont les symboles usuels de permutation, c'est-à-dire, sont nuls si les ensembles $\{i_1, \dots, i_k\}$ et $\{j_1, \dots, j_k\}$ sont différents ou si $i_p = i_q$ pour deux indices p et q différents. Dans les autres cas, $\epsilon \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k \end{matrix} \right)$ n'est rien d'autre que la signature de la permutation $\left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k \end{matrix} \right)$. Enfin, par convention, on pose $H_0 = 1$ et $H_{n+1} = 0$.

Remarque 3. On note généralement, dans la littérature, ces courbures moyennes d'ordre supérieur H_r . Cependant, afin d'éviter toute confusion avec la fonction distance r , nous les noterons H_k .

A chaque H_k , on associe un $(2, 0)$ -tenseur symétrique, défini de la manière suivante :

$$T_k = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i, i_1, \dots, i_k \\ j, j_1, \dots, j_k}} \epsilon \left(\begin{matrix} i, i_1, \dots, i_k \\ j, j_1, \dots, j_k \end{matrix} \right) B_{i_1 j_1} B_{i_2 j_2} \cdots B_{i_{k-1} j_{k-1}} B_{i_k j_k} e_i^* \otimes e_j^*.$$

Ces tenseurs vérifient un certain nombre de propriétés. Tout d'abord, les tenseurs T_k sont à divergence nulle.

De manière générale, à un $(2, 0)$ -tenseur symétrique quelconque T , on associe la fonction suivante :

$$(1.7) \quad H_T(x) = \sum_{i=1}^n T_x(Be_i, e_i),$$

où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est un repère orthonormé de $T_x M$. On justifie le fait que les tenseurs T_k sont associés aux H_k par le lemme suivant :

Lemme 1.3. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$i) \operatorname{tr}(T_k) = m(k)H_k,$$

$$ii) H_{T_k} = m(k)H_{k+1},$$

où $m(k) = (n - k) \binom{n}{k}$ et H_{T_k} est donné par la relation (1.7)

Enfin, nous donnons une version générale du Lemme 1.2 pour les $(1,1)$ -tenseurs symétriques à divergence nulle et définis positifs (voir [?]).

Lemme 1.4. *Soit T un $(1,1)$ -tenseur symétrique à divergence nulle et défini positif. Alors, on a :*

$$\operatorname{div}(TZ^T) \geq c_\delta(r)\operatorname{tr}(T) - \langle Z, H_T \rangle.$$

Remarque 4. *Ce lemme est une généralisation du premier point du Lemme 1.2. Le second point peut également être généralisé dans ce cadre, mais ne nous est pas utile ici.*

Ce lemme nous sera utile pour prouver des minoration plus fines du rayon extrinsèque dans les cas euclidien et sphérique, c'est-à-dire lorsque δ est positif ou nul.

Avant de donner ces inégalités et les différents résultats de pincements que nous avons obtenus, nous allons énoncer trois lemmes techniques qui nous seront utiles dans la preuve des théorèmes de pincement.

1.2.3 Un Lemme fondamental

Commençons par un premier lemme analytique qui permet d'obtenir une majoration de la norme L^∞ d'une fonction en fonction de sa norme L^2 . Ce lemme est réellement le résultat fondamental pour atteindre notre but. Une preuve a été donnée par B. Colbois et J.F. Grosjean dans [?] pour les hypersurfaces de l'espace euclidien. Nous en donnons ici la preuve dans les trois cas (euclidien, sphérique et hyperbolique).

Proposition 1.5. *Soit $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, \delta)$ et soit ξ une fonction réelle continue sur M telle que ξ^k est lisse pour tout $k \geq 2$. Supposons que $V(M) = 1$ et qu'il existe $0 \leq l < m \leq 2$ tels que*

$$\frac{1}{2}\xi^{2k-2}\Delta\xi^2 \leq \operatorname{div}\omega + (\alpha_1 + k\alpha_2)\xi^{2k-l} + (\beta_1 + k\beta_2)\xi^{2k-m},$$

où ω est une 1-forme et $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ et β_2 des constantes positives ou nulles. Alors, pour tout $\eta > 0$, il existe une constante positive L dépendant de $n, \delta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \|H\|_\infty$ et η telle que si $\|\xi\|_\infty > \eta$, alors

$$\|\xi\|_\infty \leq L\|\xi\|_2.$$

De plus, L est bornée lorsque $\eta \rightarrow +\infty$ et si $\beta_1 > 0$, alors $L \rightarrow +\infty$ si $\|H\|_\infty \rightarrow +\infty$ ou $\eta \rightarrow 0$.

Preuve : La preuve de ce lemme repose sur une inégalité de Sobolev extrinsèque, obtenue par D. Hoffman et J. Spruck, et un processus d'itération de type Nirenberg-Moser.

En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_M \xi^{2k-2} \Delta \xi^2 dv_g &= \frac{1}{2} \int_M \langle d\xi^2, d\xi^{2k-2} \rangle dv_g = 2 \left(\frac{k-1}{k^2} \right) \int_M |d\xi^k| dv_g \\ (1.8) \qquad \qquad \qquad &\leq A \int_M \xi^{2k-l} dv_g + B \int_M \xi^{2k-m} dv_g, \end{aligned}$$

où $A = (\alpha_1 + k\alpha_2)$ et $B = (\beta_1 + k\beta_2)$.

On rappelle l'inégalité de Sobolev extrinsèque de D. Hoffman et J. Spruck ([?, ?]). Si f est une fonction positive lisse, alors

$$(1.9) \quad \left(\int_M f^{\frac{n}{n-1}} dv_g \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq K(n, \delta) \int_M (|df| + |H|f) dv_g,$$

où $K(n, \delta)$ est une constante dépendant uniquement de n et δ . Cette inégalité est valable sans restrictions dans les cas euclidien et hyperbolique, c'est-à-dire $\delta \leq 0$. Dans le cas où la variété M est immergée dans une variété ambiante à courbure sectionnelle positive, il existe des conditions, sur le rayon d'injectivité de la variété ambiante ainsi que sur le support de la fonction f , qui doivent être vérifiées pour que l'inégalité soit valable. La première condition, qui porte sur le rayon d'injectivité, est la suivante :

$$i(\mathbb{S}^{n+1}(\delta)) \geq \pi\delta^{-1}.$$

Cette condition est clairement vérifiée puisque l'on a $i(\mathbb{S}^{n+1}(\delta)) = \pi\delta^{-1}$. La seconde condition porte sur le support de la fonction f et est la suivante :

$$\text{Vol}(\text{supp}(f)) \leq (1 - \alpha)\omega_n\delta^{-n},$$

pour un certain $\alpha \in]0, 1[$, et où ω_n est le volume de la boule euclidienne de dimension n . Si l'image de M est contenue dans un hémisphère ouvert de $\mathbb{S}^{n+1}(\delta)$, alors cette condition est satisfaite.

Si f est une fonction lisse, on peut appliquer l'inégalité de Sobolev (1.9) à la fonction positive f^2 et l'on obtient

$$\left(\int_M f^{\frac{2n}{n-1}} dv_g \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq K(n, \delta) \int_M (2|f||df| + |H|f^2) dv_g$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left(\int_M f^{\frac{2n}{n-1}} dv_g \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq K(n, \delta) \|f\|_2 \left(2\|df\|_2 + \|H\|_\infty \|f\|_2 \right)$$

En utilisant l'inégalité d'Hölder et en supposant que le volume de M est égal à 1, on a :

$$\left(\int_M f^2 dv_g \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_M f^{\frac{2n}{n-1}} dv_g \right)^{\frac{n-1}{2n}},$$

et finalement, on obtient

$$(1.10) \quad \|f\|_{\frac{2n}{n-1}} \leq K(n, \delta) \left(2\|df\|_2 + \|H\|_\infty \|f\|_2 \right).$$

Pour $k \geq 2$, ξ^k est lisse par hypothèse, donc on peut appliquer l'inégalité (1.10) à ξ^k pour obtenir :

$$\|\xi\|_{\frac{2kn}{n-1}}^k \leq K(n, \delta) \left[2 \left(\int_M |d\xi^k|^2 dv_g \right)^{1/2} + \|H\|_\infty \left(\int_M \xi^{2k} dv_g \right)^{1/2} \right].$$

Grâce à l'inégalité (1.8), on a :

$$\begin{aligned}
\|\xi\|_{\frac{2kn}{n-1}}^k &\leq K(n, \delta) \left[2 \left(\frac{k^2}{2(k-1)} \right)^{1/2} \left(A \int_M \xi^{2k-l} dv_g + B \int_M \xi^{2k-m} dv_g \right)^{1/2} \right. \\
&\quad \left. + \|H\|_\infty \left(\int_M \xi^{2k} dv_g \right)^{1/2} \right] \\
&\leq K(n, \delta) \left[2 \left(\frac{k^2}{2(k-1)} \right)^{1/2} \left(A \|\xi\|_\infty^{2-l} + B \|\xi\|_\infty^{2-m} \right)^{1/2} \|\xi\|_{2k-2}^{k-1} + \|H\|_\infty \|\xi\|_\infty \|\xi\|_{2k-2}^{k-1} \right] \\
&\leq K(n, \delta) \left[2 \left(\frac{k^2}{2(k-1)} \right)^{1/2} \left(\frac{A}{\|\xi\|_\infty^l} + \frac{B}{\|\xi\|_\infty^m} \right)^{1/2} + \|H\|_\infty \right] \|\xi\|_\infty \|\xi\|_{2k-2}^{k-1}.
\end{aligned}$$

Par concavité de la fonction $s \rightarrow \sqrt{s}$ et en supposant que $\|\xi\|_\infty > \eta$, la dernière inégalité devient

$$\begin{aligned}
\|\xi\|_{\frac{2kn}{n-1}}^k &\leq K(n, \delta) \left[2 \left(\frac{k^2}{2(k-1)} \right)^{1/2} \left(\frac{A^{1/2}}{\eta^{1/2}} + \frac{B^{1/2}}{\eta^{1/2}} \right) + \|H\|_\infty \right] \|\xi\|_\infty \|\xi\|_{2k-2}^{k-1} \\
&\leq \left[K_0 \left(\frac{k^2}{k-1} \right)^{1/2} + K' \right] \|\xi\|_\infty \|\xi\|_{2k-2}^{k-1},
\end{aligned}$$

où $K' = K(n, \delta) \|H\|_\infty$ et $K_0 = 2K(n, \delta) \left(\frac{A^{1/2}}{\eta^{1/2}} + \frac{B^{1/2}}{\eta^{1/2}} \right)$. On se rappelle maintenant que $A = (\alpha_1 + k\alpha_2)$ et $B = (\beta_1 + k\beta_2)$, et par conséquent, la dernière inégalité s'écrit

$$\|\xi\|_{\frac{2kn}{n-1}}^k \leq \left[(K_1 + k^{1/2}K_2) \left(\frac{k^2}{k-1} \right)^{1/2} + K' \right] \|\xi\|_\infty \|\xi\|_{2k-2}^{k-1},$$

avec $K_1 = \frac{(2\alpha_1)^{1/2}}{\eta^{l/2}} + \frac{(2\beta_1)^{1/2}}{\eta^{m/2}}$ et $K_2 = \frac{(2\alpha_2)^{1/2}}{\eta^{l/2}} + \frac{(2\beta_2)^{1/2}}{\eta^{m/2}}$. Soit $q = \frac{n}{n-1} > 1$ et pour $i \geq 0$, on pose $k = q^i + 1 \geq 2$. On a alors

$$\begin{aligned}
\|\xi\|_{2^{(q^i+1)+q}} &\leq \left((K_1 + (q^i + 1)^{1/2}K_2) \left(\frac{q^i + 1}{q^{i/2}} \right) + K' \right)^{\frac{1}{q^i+1}} \|\xi\|_\infty^{\frac{1}{q^i+1}} \|\xi\|_{2q^i}^{1 \frac{1}{q^i}} \\
&\leq (\tilde{K} q^i)^{\frac{1}{q^i+1}} \|\xi\|_\infty^{\frac{1}{q^i+1}} \|\xi\|_{2q^i}^{1 \frac{1}{q^i}},
\end{aligned}$$

où l'on a posé $\tilde{K} = 2K_1 + 2^{3/2}K_2 + K'$. Etant données les expressions de K_1 et K_2 ci-dessus, il est alors clair que \tilde{K} a une limite finie lorsque $\eta \rightarrow \infty$. De plus, comme $l < m$, si $\beta_1 > 0$, le terme dominant lorsque $\eta \rightarrow 0$ est supérieur à $\frac{(2\beta_1)^{1/2}}{\eta^{m/2}}$ et donc, dans ce cas, $\tilde{K} \rightarrow +\infty$ lorsque $\eta \rightarrow 0$. Enfin, on peut remarquer que la contribution de $\|H\|_\infty$ à \tilde{K} apparaît uniquement dans le terme $K' = K(n, \delta) \|H\|_\infty$. Par conséquent, $\tilde{K} \rightarrow +\infty$ lorsque $\|H\|_\infty \rightarrow +\infty$.

En utilisant une nouvelle fois l'inégalité de Hölder et le fait que $V(M) = 1$, on a

$$\|\xi\|_{2q^{i+1}} \leq \|\xi\|_{2^{(q^i+1)+q}},$$

ce qui implique

$$\|\xi\|_{2q^{i+1}} \leq \left(\tilde{K}q^i\right)^{\frac{1}{q^{i+1}}} \|\xi\|_{\infty}^{\frac{1}{q^{i+1}}} \|\xi\|_{2q^i}^{\frac{1}{q^{i+1}}}.$$

En itérant de 0 à i , on obtient

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{2q^{i+1}} &\leq \tilde{K}^{\left(1-\prod_{k=i-j}^i \left(1-\frac{1}{q^{k+1}}\right)\right)} q^{\sum_{k=i-j}^i \frac{k}{q^{k+1}}} \|\xi\|_{\infty}^{\left(1-\prod_{k=i-j}^i \left(1-\frac{1}{q^{k+1}}\right)\right)} \|\xi\|_{2q^{i-j}}^{\prod_{k=i-j}^i \left(1-\frac{1}{q^{k+1}}\right)} \\ (1.11) \quad &\leq \tilde{K}^{\left(1-\prod_{k=0}^i \left(1-\frac{1}{q^{k+1}}\right)\right)} q^{\sum_{k=0}^i \frac{k}{q^{k+1}}} \|\xi\|_{\infty}^{\left(1-\prod_{k=0}^i \left(1-\frac{1}{q^{k+1}}\right)\right)} \|\xi\|_2^{\prod_{k=0}^i \left(1-\frac{1}{q^{k+1}}\right)} \end{aligned}$$

Si l'on pose $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{q^{k+1}}$ et $\beta = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{q^{k+1}}\right) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+(1/q)^k}\right)$, en faisant tendre i vers $+\infty$, l'inégalité (1.11) devient

$$\|\xi\|_{\infty} \leq \tilde{K}^{1-\beta} q^{\alpha} \|\xi\|_{\infty}^{(1-\beta)} \|\xi\|_2^{\beta},$$

ce qui donne finalement

$$\|\xi\|_{\infty} \leq L \|\xi\|_2,$$

où $L = \tilde{K}^{\frac{(1-\beta)}{\beta}} q^{\frac{\alpha}{\beta}}$ est une constante qui dépend de n , δ , α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , $\|H\|_{\infty}$ et η . De plus, on peut voir facilement que $\beta \in [e^{-n}, e^{-n/2}]$, et donc $0 < \beta < 1$. En effet, on a

$$\ln \beta = \sum_{k=0}^{\infty} \ln \left(1 + \left(\frac{1}{q}\right)^k\right).$$

De plus, on a l'encadrement bien connu du logarithme :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x,$$

pour tout $x > 0$. De ce fait, on a d'une part

$$\ln \beta \geq -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^k} = -\frac{1}{1-\frac{1}{q}}.$$

Comme $q = \frac{n}{n-1}$, on a finalement :

$$\ln \beta \geq -\frac{1}{1-\frac{n-1}{n}} = -n.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \ln \beta &\leq -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q^k} - \frac{1}{2q^{2k}}\right) \\ &\leq -n + \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{(n-1)^2}{n^2}} \\ &\leq -n + \frac{n^2}{2(2n-1)} \leq -\frac{n}{2}. \end{aligned}$$

On obtient donc l'encadrement de $\ln \beta$ suivant :

$$-n \leq \ln \beta \leq -\frac{n}{2}.$$

D'où $\beta \in [e^{-n}, e^{-n/2}]$ comme annoncé ci-dessus. De ce fait, on déduit d'après l'étude du comportement asymptotique de la constante \tilde{K} effectuée précédemment que L est bornée lorsque $\eta \rightarrow +\infty$ et que $L \rightarrow +\infty$ lorsque $\|H\|_\infty \rightarrow +\infty$ ou $\eta \rightarrow 0$ si $\beta_1 > 0$. \square

1.2.4 Deux lemmes géométriques

Nous terminons cette section de préliminaires par deux lemmes géométriques qui nous seront utiles dans la preuve des Théorèmes 1.8, 1.12 et 1.23. Le premier de ces deux lemmes est dû à B. Colbois et J.F. Grosjean ([?]). Nous donnons ici une version avec des hypothèses affaiblies.

Lemme 1.6. *Soit x_0 un point de la sphère $S(0, R)$ de \mathbb{R}^{n+1} centrée en l'origine et de rayon R . Soit maintenant $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, 0)$. Si l'image de M est incluse dans $(B(0, R + \eta) \setminus B(0, R - \eta)) \setminus B(x_0, \rho)$ avec $\rho = 4(2n - 1)\eta$, alors il existe un point $y_0 \in M$ tel que la courbure moyenne de M en y_0 satisfait $|H(y_0)| \geq \frac{1}{4n\eta}$.*

Preuve : Nous reprenons le début de la preuve de B. Colbois et J.F. Grosjean. L'idée principale est de feuilleter la couronne $B(0, R + \eta) \setminus B(0, R - \eta)$ par des hypersurfaces de grande courbure moyenne puis de montrer que l'une d'entre elles a un point de contact avec M et qu'en ce point de contact, la courbure moyenne de M est supérieure.

Soit $e \in \mathbb{S}^n$ tel que $x_0 = Re$. Considérons $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}e$. Pour $a > 0$ et $L > l > 0$, on considère l'application

$$\begin{aligned} \Phi_{L,l,a} : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (\xi, \theta) &\longmapsto L\xi - l \cos(\theta)\xi + l \sin(\theta)e + ae \end{aligned}$$

Alors $\Phi_{L,l,a}$ est une famille de plongements de $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ dans \mathbb{R}^{n+1} . En orientant la famille d'hypersurfaces $\Phi_{L,l,a}(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$ par le vecteur normal unitaire sortant, on calcule leur courbure moyenne dont on peut montrer qu'elle ne dépend que de θ . Plus précisément, on a :

$$(1.12) \quad H(\theta) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{l} - \frac{(n-1) \cos(\theta)}{L - l \cos(\theta)} \right) \geq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{l} - \frac{n-1}{L-l} \right).$$

Plaçons nous maintenant dans les hypothèses du lemme et pour $t_0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, où $t_0 = 2 \arcsin\left(\frac{\rho}{2R}\right)$, posons $L = R \sin(t)$, $l = 2\eta$ et $a = R \cos(t)$. Avec ce choix, nous avons bien $L > l$ et on peut alors considérer pour $t_0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ la famille d'hypersurfaces $\mathcal{M}_{R,\eta,t}$ définies par

$$\mathcal{M}_{R,\eta,t} = \Phi_{R \sin(t), 2\eta, R \cos(t)}(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1).$$

D'après la relation (1.12), la courbure moyenne $H_{R,\eta,t}$ de $\mathcal{M}_{R,\eta,t}$ vérifie :

$$\begin{aligned} H_{R,\eta,t} &\geq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2\eta} - \frac{n-1}{R \sin(t) - 2\eta} \right) \geq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2\eta} - \frac{n-1}{R \sin(t_0) - 2\eta} \right) \\ &\geq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2\eta} - \frac{n-1}{R \sin(t_0/2) - 2\eta} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2\eta} - \frac{n-1}{\rho/2 - 2\eta} \right) \\ &\geq \frac{1}{4n\eta}. \end{aligned}$$

S'il existe un point $p \in M$ tel que pour tout $y \in \overline{B}(x_0, \rho)$, on a

$$(1.13) \quad \langle X(p), \vec{O}y \rangle > 0,$$

alors il existe $t \in]t_0, \frac{\pi}{2}[$ et un point $y_0 \in M$ qui est un point de contact avec $\mathcal{M}_{R,\eta,t}$ et tel qu'en plus, au voisinage de ce point y_0 , M est à l'intérieur du domaine délimité par le "tore" $\mathcal{M}_{R,\eta,t}$ (voir Figure 1.1). Donc, par comparaison des secondes formes fondamentales en ce point de contact, on trouve que

$$|H(y_0)| \geq H_{R,\eta,t} \geq \frac{1}{4n\eta}.$$

Si la condition (1.13) n'est pas satisfaite en x_0 , il est alors possible de trouver un point x_1 de $S(0, R)$ tel que l'image de M est incluse dans $(B(0, R+\eta) \setminus B(0, R-\eta)) \setminus B(x_0, \rho)$ et tel qu'un point p de M satisfasse la condition (1.13) pour tout $y \in \overline{B}(x_1, \rho)$. Ainsi, par l'argument précédent, on trouve un point de M de grande courbure moyenne. \square

On déduit de ce lemme une version pour les hypersurfaces des deux autres espaces modèles $\mathbb{S}_+^{n+1}(\delta)$ et $\mathbb{H}^{n+1}(\delta)$. Nous l'énonçons dans un cadre moins général, mais adapté au rayon extrinsèque :

Lemme 1.7. *Soit $M \in \mathcal{M}(n, \delta, R)$ immergée isométriquement par ϕ et p_0 le centre de la boule de rayon R qui contient M . Soit x_0 un point de la sphère $S(p_0, R)$ de $\mathbb{H}^{n+1}(\delta)$ (resp. $\mathbb{S}_+^{n+1}(\delta)$) tel que*

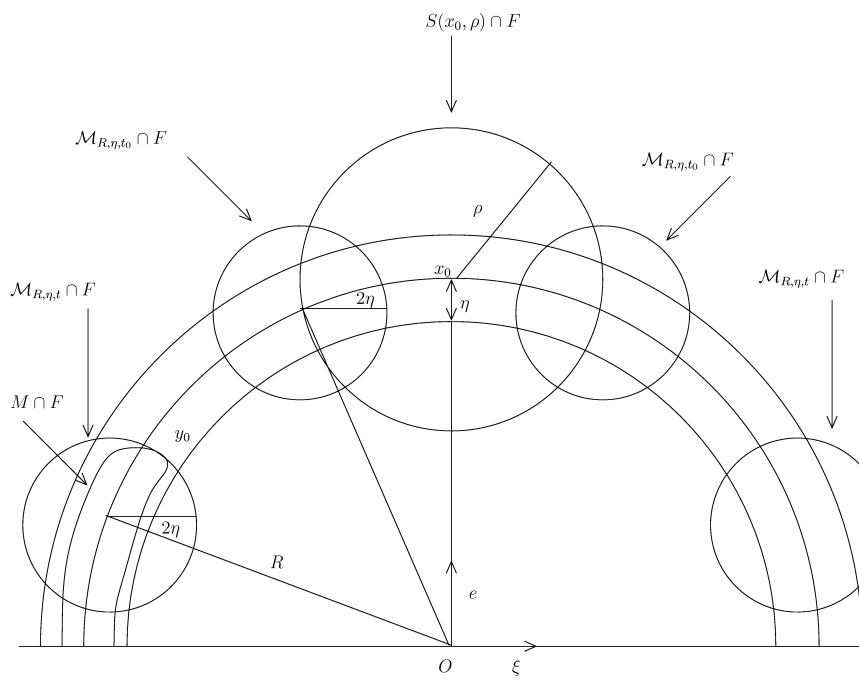
$$\phi(M) \subset \left(\overline{B}(p_0, R) \setminus B(p_0, R-\eta) \right) \setminus B(x_0, \rho)$$

avec ρ tel que

$$\begin{aligned} t_\delta \left(\frac{R+\rho}{2} \right) - t_\delta \left(\frac{R}{2} \right) &= 4(2n-1)\eta \\ \left(\text{resp. } t_\delta \left(\frac{R}{2} \right) - t_\delta \left(\frac{R-\rho}{2} \right) \right) &= 4(2n-1)\eta. \end{aligned}$$

Alors, il existe deux constantes D et E dépendant de n, δ et R telles que si $\eta \leq D$, alors il existe un point $y_0 \in M$ tel que la courbure moyenne de M satisfait

$$|H(y_0)| \geq \frac{E}{8n\eta}.$$



F est le sous-espace engendré par e et ξ

FIG. 1.1 –

Preuve : La preuve de ce lemme repose sur le lemme précédent et le fait que l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^{n+1}(\delta)$ et l'hémisphère $\mathbb{S}_+^{n+1}(\delta)$ sont conformes à la boule unité de \mathbb{R}^{n+1} . Nous allons donner ici la preuve dans le cas hyperbolique, $\delta = -1$. La preuve pour tout $\delta < 0$ est analogue.

On considère l'application conforme f de la boule unité $\tilde{B}(0, 1)$ de \mathbb{R}^{n+1} dans \mathbb{H}^{n+1} telle que $f(0) = p_0$. Le facteur conforme est la fonction h^2 , où h est définie par :

$$h : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ r \longmapsto \frac{2}{1-r^2}.$$

Pour tout $\rho > 0$, nous avons

$$(1.14) \quad B(p_0, \rho) = f \left(\tilde{B}(0, \tilde{\rho}) \right),$$

où $\tilde{B}(0, \tilde{\rho}) \subset \tilde{B}(0, 1)$ est la boule de rayon $\tilde{\rho} = a(\rho) := t_\delta(\rho/2)$. Posons $\tilde{\phi} = f^{-1} \circ \phi$. Par hypothèse, on a supposé

$$\phi(M) \subset \left(\overline{B}(p_0, R) \setminus B(p_0, R - \eta) \right) \setminus B(x_0, \rho),$$

avec $x_0 \in S(p_0, R)$ et ρ choisi tel que

$$a(R + \rho) - a(R) = 4(2n - 1)\eta.$$

On en déduit alors que

$$\tilde{\phi}(M) \subset \left(\overline{B}(0, a(R + \eta)) \setminus B(0, a(R - \eta)) \right) \setminus B(z_0, \rho'),$$

avec $z_0 = \frac{1}{2} [a(R + \rho) + a(R - \rho)] u$, où u un vecteur unitaire et avec

$$\rho' = \frac{1}{2} [a(R + \rho) - a(R - \rho)].$$

Ceci vient du fait que les boules de \mathbb{H}^{n+1} centrées en p_0 sont envoyées par f^{-1} sur les boules de \mathbb{R}^{n+1} centrées en 0, comme le montre la relation (1.14). D'autre part, les boules de \mathbb{H}^{n+1} dont le centre n'est pas p_0 sont également envoyées sur des boules de $\tilde{B}(0, 1)$. Cependant, l'image du centre n'est pas le centre de la boule image, ce qui explique l'expression de z_0 .

Étant donnée l'expression de la fonction a , on a

$$a(R + \eta) \leq a(R) + \eta \quad \text{et} \quad a(R - \eta) \geq a(R) - \eta,$$

ce qui implique que

$$\tilde{B}(0, a(R + \eta)) \setminus \tilde{B}(0, a(R - \eta)) \subset \tilde{B}(0, a(R) + \eta) \setminus \tilde{B}(0, a(R) - \eta).$$

De plus, par concavité de la fonction a , on a :

$$a(R + \rho) + a(R - \rho) \leq 2a(R),$$

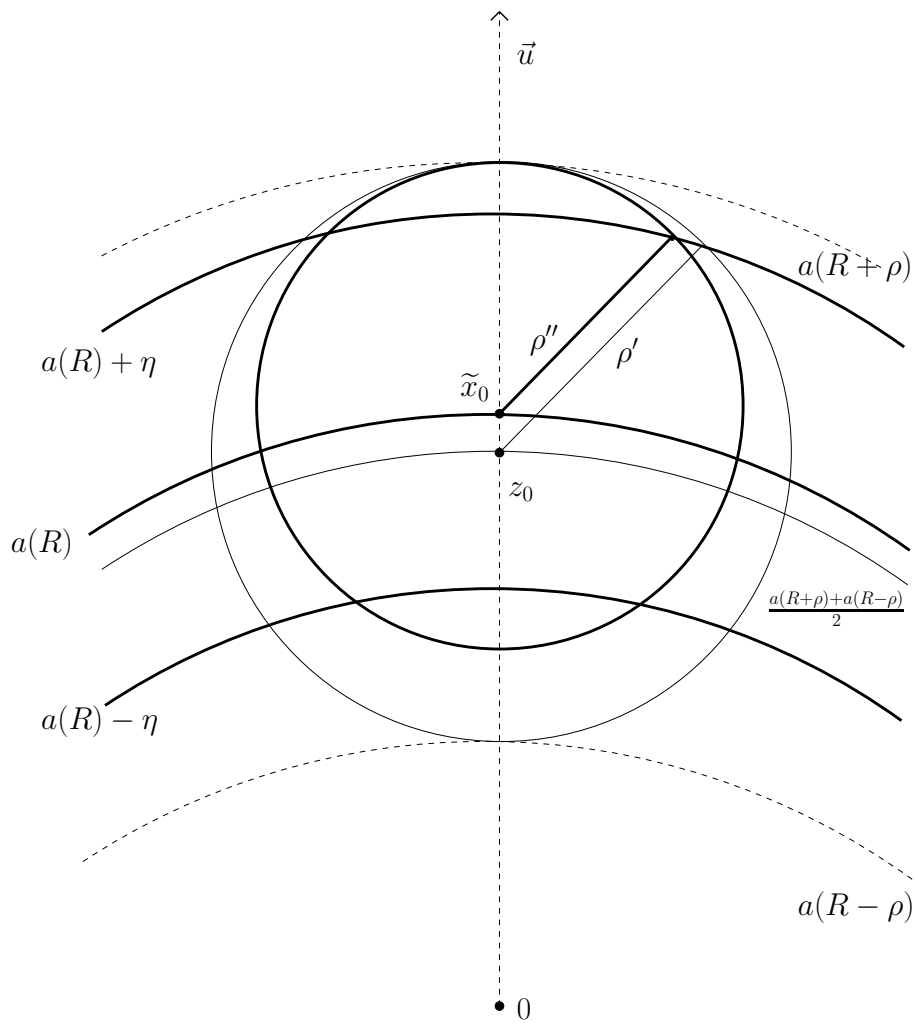


FIG. 1.2 –

et par conséquent :

$$\tilde{B}(z_0, \rho') \supset \tilde{B}(\tilde{x}_0, \rho''),$$

où $\tilde{x}_0 = a(R)u$ et $\rho'' = a(R + \rho) - a(R)$. Finalement, on obtient (voir Figure 1.2) :

$$\tilde{\phi}(M) \subset \left[\tilde{B}(0, a(R) + \eta) \setminus \tilde{B}(0, a(R) - \eta) \right] \setminus \tilde{B}(\tilde{x}_0, 4(2n - 1)\eta).$$

Nous sommes alors exactement dans les hypothèses du Lemme 1.6 et donc il existe un point $y_0 \in \tilde{\phi}(M)$ tel que la courbure moyenne \tilde{H} de $\tilde{\phi}(M)$ satisfait $|\tilde{H}(y_0)| \geq \frac{1}{4n\eta}$. D'autre part, nous avons la formule suivante qui permet de relier les courbures moyennes (voir par exemple [?]) :

$$H = h^{-1} \left(\tilde{H} + h^{-1} \langle \tilde{\nabla} h, \tilde{\nu} \rangle \right),$$

où $\tilde{\nabla}$ et $\tilde{\nu}$ sont respectivement le gradient et le vecteur normal unitaire sortant dans $\tilde{B}(0, 1)$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien dans $\tilde{B}(0, 1)$. De ce fait, on obtient

$$(1.15) \quad |H| \geq h^{-1}(\tilde{r}) \left(\tilde{H} - h^{-1}(\tilde{r}) |\tilde{\nabla} h| \right),$$

où $\tilde{r}(x)$ est la distance euclidienne de 0 à x . Il est évident que $a(R)$ est le rayon extrinsèque de $\tilde{\phi}(M)$ d'où on déduit

$$(1.16) \quad \frac{1 - a(R)^2}{2} \leq \frac{1 - \tilde{r}^2}{2} = h^{-1}(\tilde{r}) \leq \frac{1}{2}$$

et

$$(1.17) \quad |\tilde{\nabla} h| = \frac{4}{(1 - \tilde{r}^2)^2} |\tilde{r} \tilde{\nabla} \tilde{r}| \leq \frac{4}{(1 - a(R)^2)^2}.$$

Finalement, (1.15), (1.16) et (1.17) nous donnent

$$|H(f^{-1}(y_0))| \geq \frac{E}{4n\eta} - \frac{1}{4E^2},$$

où $E = \frac{1 - a(R)^2}{2}$ est une constante positive ne dépendant que de δ et R . De plus, il existe une constante D dépendant de n , δ et R telle que si $\eta \leq D$, alors $\frac{1}{4E^2} \leq \frac{E}{8n\eta}$, et alors :

$$|H(f(y_0))| \geq \frac{E}{8n\eta},$$

ce qui achève la preuve dans le cas $\delta < 0$. Pour $\delta > 0$, la seule différence est que la fonction n'est pas concave mais convexe et on doit alors prendre $\rho'' = a(R) - a(R - \rho)$. \square

Remarque 5. Nous verrons plus loin que sous les hypothèses de pincement que nous considérerons, la dépendance des constantes D et E peut être affaiblie. En effet, D et E dépendront de n , δ et $\|H\|_\infty$ si $\delta < 0$ et seulement n et δ si $\delta > 0$. La dépendance en R est supprimée.

1.3 Les résultats avec la courbure moyenne

1.3.1 Le cas hyperbolique

Nous supposons ici que $\delta < 0$. Voici un premier résultat de pincement qui donne une proximité assez faible, en terme de distance, mais sans implication sur la topologie de la variété.

Théorème 1.8. *Soient $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, \delta, R)$, $\delta < 0$, et p_0 le centre de la boule de rayon R qui contient $\phi(M)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε dépendant uniquement de n , δ et de la norme L^∞ de la courbure moyenne telle que si la condition de pincement*

$$t_\delta(R) < \frac{1}{\|H\|_\infty} + C_\varepsilon$$

est satisfaite, alors

- i) $\phi(M) \subset \overline{B}(p_0, R) \setminus B(p_0, R - \varepsilon)$,*
- ii) $\forall x \in S(p_0, R)$, $B(x, \varepsilon) \cap \phi(M) \neq \emptyset$.*

On rappelle que la distance de Hausdorff entre deux sous-ensembles compacts A et B d'un espace métrique (E, d) est donnée par

$$d_H(A, B) = \inf \{ \eta \mid B \subset V_\eta(A) \text{ et } A \subset V_\eta(B) \},$$

où $V_\eta(A)$ est le voisinage tubulaire de A défini par $V_\eta(A) = \{x \in E \mid d(x, A) < \eta\}$. On déduit alors le corollaire suivant

Corollaire 1.9. *Soient $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, \delta, R)$, $\delta < 0$, et p_0 le centre de la boule de rayon R qui contient $\phi(M)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε dépendant uniquement de ε , n , δ et de la norme L^∞ de la courbure moyenne telle que si la condition de pincement*

$$t_\delta(R) < \frac{1}{\|H\|_\infty} + C_\varepsilon$$

est satisfaite, alors

$$d_H(\phi(M), S(p_0, R)) \leq \varepsilon.$$

Remarque 6. *Nous verrons dans la preuve que $C_\varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\|H\|_\infty \rightarrow +\infty$ ou $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Ces deux premiers résultats donnent, en cas de presque égalité, une proximité avec une hypersphère géodésique en un sens assez faible. Certes, l'hypersurface est proche d'une sphère pour la distance de Hausdorff, mais le résultat ne donne aucun renseignement intrinsèque comme une éventuelle proximité topologique ou géométrique. Pour obtenir une proximité plus forte, il nous faut supposer plus sur la constante de pincement C , à savoir, autoriser une dépendance en la norme L^∞ de la seconde forme fondamentale toute entière et plus seulement de la courbure moyenne. Dans ce cas, on obtient alors, sous une condition de pincement *ad hoc*, que l'hypersurface M est difféomorphe et quasi-isométrique à une hypersphère géodésique de rayon R . Le théorème suivant précise le sens que nous donnons au terme "quasi-isométrie"

Théorème 1.10. Soient $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, \delta, R)$, $\delta < 0$ et p_0 le centre de la boule de rayon R qui contient $\phi(M)$. Alors, il existe une constante C dépendant seulement de n , δ et de la norme L^∞ de la seconde forme fondamentale telle que si la condition de pincement

$$t_\delta(R) < \frac{1}{\|H\|_\infty} + C$$

est satisfaite, alors M est difféomorphe à $S(p_0, R)$.

Plus précisément, il existe un difféomorphisme F de M dans l'hypersphère géodésique $S(p_0, R)$ de rayon R qui est une quasi-isométrie. C'est-à-dire, pour tout $\theta \in]0, 1[$, il existe une constante C_θ dépendant uniquement de θ , n et $\|B\|_\infty$ telle que la condition de pincement pour C_θ implique

$$| |dF_x(u)|^2 - 1 | \leq \theta,$$

pour tout vecteur unitaire $u \in T_x M$.

Remarque 7. Dans tous ces résultats, nous avons supposé que le volume de M est 1. Par homothétie, on déduit les mêmes résultats pour des variétés de volume arbitraire. En effet, $(M, \tilde{g}) \in \mathcal{M}(n, \tilde{\delta}, \tilde{R})$ avec $\tilde{g} = V(M)^{-2/n}g$, $\tilde{\delta} = V(M)^{2/n}\delta$ et $\tilde{R} = V(M)^{-1/n}R$. Cette remarque sera également valable pour tous les résultats de pincement que nous énoncerons par la suite.

1.3.2 Les cas euclidien et sphérique

Dans le cas où $\delta \geq 0$, c'est-à-dire, lorsque l'espace ambiant est la sphère ou l'espace euclidien, la minoration du rayon extrinsèque donnée par l'inégalité (1.2) est bien sûr toujours optimale au sens où le cas d'égalité peut être atteint et caractérise les sphères, cependant, la borne inférieure, à savoir, $\frac{1}{\|H\|_\infty}$ peut être améliorée. En effet, nous avons la minoration plus fine suivante :

Proposition 1.11. Soit $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, \delta, R)$, $\delta \geq 0$. Alors, pour tout $p > 1$, on a :

$$(1.18) \quad t_\delta(R) \geq \frac{V(M)^{1/p}}{\|H\|_p},$$

avec égalité si et seulement si M est une sphère de rayon R .

Preuve : Après intégration, le premier point du Lemme 1.2 donne

$$\int_M c_\delta(r) dv_g \leq \int_M |H| s_\delta(r) dv_g.$$

Comme s_δ est une fonction croissante et c_δ une fonction décroissante, on obtient

$$c_\delta(R)V(M) \leq s_\delta(R)\|H\|_1.$$

L'inégalité d'Hölder donne le résultat pour toutes les normes L^p , $p > 1$.

Concernant le cas d'égalité, il est clair que si (M^n, g) est une sphère géodésique de rayon R , alors, on a égalité. Réciproquement, si l'égalité a lieu, alors

$$\left(\int_M s_\delta(r)^{p/(p-1)} \right)^{(p-1)/p} = s_\delta(R),$$

ce qui implique que $r \equiv R$ et alors (M^n, g) est une sphère géodésique de rayon R . \square

Remarque 8. *Il est clair que $\frac{V(M)^{1/p}}{\|H\|_p} \geq \frac{1}{\|H\|_\infty}$ et donc l'inégalité (1.18) est plus fine que l'inégalité (1.2).*

Remarque 9. *Comme la fonction c_δ n'est pas décroissante mais croissante dans le cas $\delta < 0$, la preuve que nous venons de donner ne fonctionne pas dans le cas hyperbolique. La décroissance de la fonction c_δ est véritablement le point clé qui fait la différence entre les cas $\delta < 0$ et $\delta \geq 0$. Nous rencontrerons à nouveau ce problème plus loin lorsque nous travaillerons avec les courbures moyennes d'ordre supérieur.*

Intéressons-nous maintenant à la question du pincement pour cette nouvelle inégalité optimale. Nous obtenons des résultats analogues à ceux de la Section 1.3.1, à savoir :

Théorème 1.12. *Soit $p \geq 1$. Soient $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, \delta, R)$, $\delta \geq 0$, et p_0 le centre de la boule de rayon R qui contient $\phi(M)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε dépendant uniquement de n , δ et de la norme L^∞ de la courbure moyenne telle que si la condition de pincement*

$$t_\delta(R) < \frac{1}{\|H\|_{2p}} + C_\varepsilon$$

est satisfaite, alors

- i) $\phi(M) \subset \overline{B}(p_0, R) \setminus B(p_0, R - \varepsilon)$,*
- ii) $\forall x \in S(p_0, R)$, $B(x, \varepsilon) \cap \phi(M) \neq \emptyset$.*

Comme précédemment, nous obtenons un corollaire immédiat avec la distance de Hausdorff.

Corollaire 1.13. *Soit $p \geq 1$. Soient $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, \delta, R)$, $\delta \geq 0$, et p_0 le centre de la boule de rayon R qui contient $\phi(M)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε dépendant uniquement de n , δ et de la norme L^∞ de la courbure moyenne telle que si la condition de pincement*

$$t_\delta(R) < \frac{1}{\|H\|_{2p}} + C_\varepsilon$$

est satisfaite, alors

$$d_H(\phi(M), S(p_0, R)) \leq \varepsilon.$$

Comme dans le cas hyperbolique, nous pouvons obtenir une meilleure proximité en supposant un pincement plus fort.

Théorème 1.14. *Soit $p \geq 1$. Soient $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, \delta, R)$, $\delta \geq 0$ et p_0 le centre de la boule de rayon R qui contient $\phi(M)$. Alors, il existe une constante C dépendant seulement de n , δ et de la norme L^∞ de la seconde forme fondamentale telle que si la condition de pincement*

$$t_\delta(R) < \frac{1}{\|H\|_{2p}} + C$$

est satisfaite, alors M est difféomorphe à $S(p_0, R)$.

Plus précisément, il existe un difféomorphisme F de M dans l'hypersphère géodésique $S(p_0, R)$ de rayon R qui est une quasi-isométrie. C'est-à-dire, pour tout $\theta \in]0, 1[$, il existe une constante C_θ dépendant uniquement de θ , n et $\|B\|_\infty$ telle que la condition de pincement pour C_θ implique

$$| |dF_x(u)|^2 - 1 | \leq \theta,$$

pour tout vecteur unitaire $u \in T_x M$.

Remarque 10. Il est évident compte tenu du fait que le volume de M est 1 et en utilisant l'inégalité d'Hölder que la condition de pincement

$$t_\delta(R) < \frac{1}{\|H\|_\infty} + C$$

implique cette autre condition de pincement

$$t_\delta(R) < \frac{1}{\|H\|_{2p}} + C.$$

De ce fait, nous obtenons facilement les mêmes résultats avec la condition de pincement $t_\delta(R) < \frac{1}{\|H\|_\infty} + C$.

Remarque 11. Comme précédemment, les constantes tendent vers 0 lorsque $\|H\|_\infty \rightarrow +\infty$ ou $\varepsilon \rightarrow 0$.

1.4 Preuve des Théorèmes de la Section 1.3

1.4.1 Une approche L^2

Une première étape dans la preuve des résultats de la Section 1.3 est de montrer que si la condition de pincement est satisfaite, alors l'hypersurface M est proche d'une sphère en un sens L^2 .

Le cas hyperbolique

Pour commencer, nous introduisons les deux fonctions suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(x) = t_\delta^2(R) - t_\delta^2(r), \\ \psi(x) = c_\delta(r) |Z^T|, \end{cases}$$

où $r(x)$ est la distance de x au point base p_0 et $Z^T = s_\delta(r) \nabla r$. On pose d'autre part $\alpha(\|H\|_\infty) := \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{-\delta}} - \frac{1}{\|H\|_\infty} \right)$. Si l'hypothèse de pincement

$$(P_C) \quad t_\delta(R) < \frac{1}{\|H\|_\infty} + C,$$

est satisfaite avec $C \leq \alpha(\|H\|_\infty)$, alors

$$t_\delta(R) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{-\delta}} + \frac{1}{\|H\|_\infty} \right) = \beta(\|H\|_\infty) < \frac{1}{\sqrt{-\delta}},$$

et ainsi $t_\delta(R)$ est majoré par une constante qui ne dépend que de $\|H\|_\infty$. Par conséquent, R est majoré par une constante qui ne dépend que de δ et $\|H\|_\infty$. Dans ce premier lemme, nous montrons que si l'hypothèse de pincement (P_C) est satisfaite, alors la norme L^2 de la fonction φ est proche de 0.

Lemme 1.15. *Si nous avons la condition de pincement (P_C) avec $C \leq \alpha(\|H\|_\infty)$, alors*

$$\|\varphi\|_2^2 \leq A_1 C,$$

où A_1 est une constante positive ne dépendant que de δ et $\|H\|_\infty$.

Preuve : Comme t_δ est une fonction croissante, nous avons

$$\|\varphi\|_2^2 \leq t_\delta^2(R) \int_M (t_\delta^2(R) - t_\delta^2(r)).$$

De plus, comme $t_\delta^2(R) - t_\delta^2(r) \geq 0$ et $c_\delta(r) \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} \int_M (t_\delta^2(R) - t_\delta^2(r)) &\leq t_\delta^2(R) \int_M c_\delta^2(r) - \int_M s_\delta^2(r) \\ &\leq t_\delta^2(R) \int_M c_\delta^2(r) - \frac{1}{\|H\|_\infty^2} \int_M H^2 s_\delta^2(r). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_M (t_\delta^2(R) - t_\delta^2(r)) \leq t_\delta^2(R) \int_M c_\delta^2(r) - \frac{1}{\|H\|_\infty^2} \frac{(\int_M |H| s_\delta(r) c_\delta(r))^2}{\int_M c_\delta^2(r)}$$

En utilisant la relation *ii*) du Lemme 1.2 et la condition de pincement (P_C) avec $C \leq \alpha(\|H\|_\infty)$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_M (t_\delta^2(R) - t_\delta^2(r)) &\leq \left(t_\delta^2(R) - \frac{1}{\|H\|_\infty^2} \right) \int_M c_\delta^2(r) \\ &\leq \left(C^2 + \frac{2C}{\|H\|_\infty} \right) c_\delta^2(R) \end{aligned}$$

et donc

$$\|\varphi\|_2^2 \leq s_\delta^2(R) \left(C^2 + \frac{2C}{\|H\|_\infty} \right) \leq A_1 C,$$

où A_1 dépend seulement de δ et $\|H\|_\infty$. □

Le lemme suivant nous donne une majoration de la norme L^2 de la fonction ψ sous l'hypothèse de pincement.

Lemme 1.16. *La condition de pincement (P_C) avec $C \leq \alpha(\|H\|_\infty)$ implique*

$$\|\psi\|_2^2 \leq A_2 C + A_3 \|\varphi\|_\infty,$$

où A_2 et A_3 sont des constantes positives. De plus, A_2 ne dépend que de δ et A_3 que de δ et $\|H\|_\infty$.

Preuve : Tout d'abord, on remarque que $|Z^T|^2 = |Z|^2 - \langle Z, \nu \rangle^2$. Comme $|Z| = s_\delta(r)$, nous avons :

$$\|\psi\|_2^2 \leq c_\delta^2(R) \left[s_\delta^2(R) - \frac{1}{\|H\|_\infty^2} \int_M (H^2 \langle Z, \nu \rangle^2) \right].$$

En utilisant l'inégalité d'Hölder et le Lemme 1.2 i), on obtient

$$\begin{aligned} \|\psi\|_2^2 &\leq c_\delta^2(R) \left[s_\delta^2(R) - \frac{1}{\|H\|_\infty^2} \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2 \right] \\ &= c_\delta^2(R) \left[s_\delta^2(R) - \frac{1}{\|H\|_\infty^2} c_\delta^2(R) - \frac{2c_\delta(R)}{\|H\|_\infty^2} \int_M (c_\delta(r) - c_\delta(R)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\|H\|_\infty^2} \left(\int_M c_\delta(r) - c_\delta(R) \right)^2 \right] \\ &\leq \left(\frac{2C}{\|H\|_\infty} + C^2 \right) c_\delta^4(R) + K \int_M |c_\delta(r) - c_\delta(R)| \end{aligned}$$

où K dépend de δ et $\|H\|_\infty$. Comme $t_\delta(R) \leq \beta(\|H\|_\infty) < \frac{1}{\sqrt{-\delta}}$, on en déduit qu'il existe $K' > 0$ dépendant de δ and $\|H\|_\infty$ tel que $\int_M |c_\delta(R) - c_\delta(r)| \leq K' \|\varphi\|_\infty$. Ceci achève la preuve. \square

Les cas euclidien et sphérique

Nous supposons ici que $\delta \geq 0$, et si $\delta > 0$, alors nous supposerons en plus que $\phi(M)$ est contenu dans un hémisphère ouvert (*i.e.* dans une boule ouverte de rayon $\frac{2}{\sqrt{\delta}}$ dans $\mathbb{S}^{n+1}(\delta)$). Pour commencer, nous introduisons les deux fonctions suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(x) = s_\delta^2(R) - s_\delta^2(r), \\ \psi(x) = c_\delta(r) |Z^T|, \end{cases}$$

où $r(x)$ est la distance de x au point base p_0 et $Z^T = s_\delta(r) \nabla r$.

Remarquons ensuite que si la condition de pincement

$$(\tilde{P}_C) \quad t_\delta(R) < \frac{1}{\|H\|_{2p}} + C,$$

pour $C < 1$, où l'on a supposé que $V(M) = 1$, alors il existe deux constantes α_n et β_n dépendant seulement de n et δ telles que $\|H\|_\infty \geq \|H\|_{2p} \geq \alpha_n$ et $t_\delta(R) \leq \beta_n$. Par

conséquent, R est majoré par une constante γ_n qui dépend de n et δ . En effet, ceci est une conséquence de l'inégalité de Sobolev (1.9) due à Hoffman et Spruck ([?, ?]). On rappelle que pour une fonction f positive, nous avons :

$$(1.19) \quad \left(\int_M f^{\frac{n}{n-1}} dv_g \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq K(n, \delta) \int_M (|df| + |H|f) dv_g,$$

où $K(n, \delta)$ est une constante dépendant uniquement de n et δ . En appliquant cette inégalité à la fonction $f \equiv 1$ et compte tenu du fait que $V(M) = 1$, on obtient :

$$(1.20) \quad 1 \leq K(n, \delta) \int_M |H| dv_g,$$

et on a bien :

$$(1.21) \quad \|H\|_\infty \geq \|H\|_{2p} \geq \alpha_n.$$

En utilisant la condition de pincement (\tilde{P}_C) avec $C < 1$, on obtient alors

$$(1.22) \quad t_\delta(R) \leq \beta_n.$$

Nous prouvons maintenant ce lemme qui donne une majoration de la norme L^2 de la fonction φ .

Lemme 1.17. *La condition de pincement (\tilde{P}_C) avec $C < 1$ implique*

$$\|\varphi\|_2^2 \leq \tilde{A}_1 C,$$

où $\tilde{A}_1 C$ est une constante positive qui ne dépend que de n et δ .

Preuve : Comme s_δ est une fonction croissante et c_δ une fonction décroissante, on a

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_2^2 &\leq s_\delta^2(R) \int_M (s_\delta^2(R) - s_\delta^2(r)) \\ &\leq s_\delta^2(R) \left[t_\delta^2(R) \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2 - \int_M s_\delta^2(r) \right] \end{aligned}$$

Par l'inégalité d'Hölder, on obtient

$$\|\varphi\|_2^2 \leq s_\delta^2(R) \left[t_\delta^2(R) \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2 - \frac{1}{\|H\|_{2p}^2} \left(\int_M H s_\delta(r) \right)^2 \right]$$

En utilisant le Lemme 1.2 *i*), on trouve

$$\|\varphi\|_2^2 \leq s_\delta^2(R) \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2 \left[t_\delta^2(R) - \frac{1}{\|H\|_{2p}^2} \right] \leq \tilde{A}_1 C,$$

où \tilde{A}_1 est une constante positive dépendant seulement de la dimension n et de δ grâce à l'inégalité (1.22). \square

Le lemme suivant donne une majoration de $\|\psi\|_2$ sous la condition de pincement.

Lemme 1.18. *La condition de pincement (\tilde{P}_C) avec $C < 1$ implique*

$$\|\psi\|_2^2 \leq \tilde{A}_2 C,$$

où \tilde{A}_2 est une constante positive dépendant seulement de n et δ .

Preuve : Puisque $|Z^T|^2 = |Z|^2 - \langle Z, \nu \rangle^2$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\psi\|_2^2 &\leq c_\delta^2(R) \left[\int_M s_\delta^2(R) - \frac{1}{\|H\|_{2p}^2} \left(\int_M H \langle Z, \nu \rangle \right)^2 \right] \\ &\leq c_\delta^2(R) \left[t_\delta^2(R) - \frac{1}{\|H\|_{2p}^2} \right] \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2 \\ &\leq \tilde{A}_2 C. \end{aligned}$$

Enfin, comme $R \leq \gamma_n$, alors \tilde{A}_2 dépend uniquement de n et δ . \square

1.4.2 De L^2 vers L^∞

Soient $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, \delta, R)$ et p_0 le centre de la boule de rayon R contenant M . Dans la section précédente, nous montrions que sous l'hypothèse de pincement, les fonctions φ et ψ avaient une norme L^2 petite. Nous donnons ici deux lemmes concernant la norme L^∞ de ces deux fonctions. Commençons avec la fonction φ :

Lemme 1.19. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe C_ε dépendant de n , δ et $\|H\|_\infty$ telle que si (P_{C_ε}) (ou $(\tilde{P}_{C_\varepsilon})$ pour $\delta \geq 0$) est vraie, alors*

$$\phi(M) \subset \overline{B}(p_0, R) \setminus B(p_0, R - \varepsilon).$$

De plus, $C_\varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\|H\|_\infty \rightarrow +\infty$ ou $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve : Nous donnons d'abord la preuve dans le cas $\delta < 0$. Pour le cas $\delta \geq 0$ des calculs analogues avec φ donnent le résultat.

Tout d'abord, on calcule $\varphi^{2k-2} \Delta \varphi^2$.

$$\begin{aligned} \varphi^{2k-2} \Delta \varphi^2 &= 2\varphi^{2k-1} \Delta \varphi - 2|\nabla \varphi|^2 \varphi^{2k-2} \\ &= -4t_\delta(r)(1 + \delta t_\delta^2(r))\varphi^{2k-1} \Delta r - 2|\nabla \varphi|^2 \varphi^{2k-2} \\ &\quad + 4\varphi^{2k-1} |\nabla r|^2 (1 + 3\delta t_\delta^2(r) + 2\delta^2 t_\delta^4(r)) \end{aligned} \tag{1.23}$$

Or,

$$\begin{aligned} (1 + \delta t_\delta^2) t_\delta \varphi^{2k-1} \Delta r &= -\operatorname{div} (\varphi^{2k-1} t_\delta (1 + \delta t_\delta^2) \nabla r) \\ &\quad + \langle \nabla r, \nabla (\varphi^{2k-1} t_\delta (1 + \delta t_\delta^2)) \rangle. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Comme $0 \leq t_\delta(r) \leq t_\delta(R) < \frac{1}{\sqrt{-\delta}}$ et $|\nabla r| \leq 1$, on déduit des relations (1.23) et (1.24) que

$$\varphi^{2k-2} \Delta \varphi^2 \leq \operatorname{div}(\omega) + (\alpha_1 + k\alpha_2)\varphi^{2k-1} + (\beta_1 + k\beta_2)\varphi^{2k-2}, \tag{1.25}$$

où ω est une 1-forme, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ et β_2 des constantes positives. On peut alors appliquer la Proposition 1.5 à la fonction φ avec $l = 1$ et $m = 2$. On en déduit que si $\|\varphi\|_\infty > \varepsilon$ alors il existe une constante L telle que

$$\|\varphi\|_\infty \leq L\|\varphi\|_2.$$

D'autre part, par le Lemme 1.17, nous savons que si la condition de pincement (P_C) est satisfaite pour $C \leq \alpha(\|H\|_\infty)$, alors

$$\|\varphi\|_2^2 \leq A_1 C.$$

Prenons alors $C = C_\varepsilon = \inf \left\{ \alpha(\|H\|_\infty), \frac{\varepsilon^2}{L^2 A_1} \right\}$. Ce choix implique

$$\|\varphi\|_\infty \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire, $t_\delta^2(R) - t_\delta^2(r) \leq \varepsilon$. Finalement, nous pouvons choisir C_ε suffisamment petit afin d'avoir $R - r \leq \varepsilon$, ce qui achève la démonstration du lemme. \square

Voici maintenant le second lemme, qui concerne la fonction ψ :

Lemme 1.20. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K_ε dépendant de n, δ et $\|B\|_\infty$ telle que si (P_{K_ε}) (ou $(\tilde{P}_{K_\varepsilon})$ pour $\delta \geq 0$) est vraie, alors*

$$\|\psi\|_\infty \leq \varepsilon.$$

De plus, $K_\varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\|H\|_\infty \rightarrow +\infty$ ou $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve : Rappelons d'abord que $\psi = c_\delta(r)|Z^T|$ où $Z^T = s_\delta(r)\nabla r$. Remarquons ensuite que

$$(1.26) \quad \nabla|Z|^2 = 2c_\delta(r)Z^T.$$

En utilisant la formule de Bochner, on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta\psi^2 &= \frac{1}{2}\Delta\left|\nabla|Z|^2\right|^2 \\ &= \langle \nabla^* \nabla d|Z|^2, d|Z|^2 \rangle - \left|\nabla d|Z|^2\right|^2 \\ &= \langle \Delta d|Z|^2, d|Z|^2 \rangle - \text{Ric}(d|Z|^2, d|Z|^2) - \left|\nabla d|Z|^2\right|^2 \\ &\leq \langle \Delta d|Z|^2, d|Z|^2 \rangle - \text{Ric}(d|Z|^2, d|Z|^2) \end{aligned}$$

Maintenant, par la formule de Gauss, nous pouvons exprimer la courbure de Ricci en termes de la seconde forme fondamentale B . Précisément, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta\psi^2 &\leq \langle \Delta d|Z|^2, d|Z|^2 \rangle - nH \langle B\nabla|Z|^2, \nabla|Z|^2 \rangle \\ &\quad + \left|B\nabla|Z|^2\right|^2 - 4\delta\left|\nabla|Z|^2\right|^2 \\ &\leq \langle \Delta d|Z|^2, d|Z|^2 \rangle - 4nHc_\delta^2(r) \langle BZ^T, Z^T \rangle \\ &\quad + 4c_\delta^2(r)|BZ^T|^2 - 4(n-1)c_\delta^2(r)\delta|Z^T|^2 \end{aligned}$$

Comme $|Z^T| \leq s_\delta(R)$, on voit facilement que la condition de pincement (P_C) avec $C < 1$ pour $\delta \geq 0$ ou (\tilde{P}_C) avec $C < \alpha(\|H\|_\infty)$ pour $\delta < 0$, implique

$$\|\psi\|_\infty \leq K_1,$$

où K_1 est une constante positive dépendant uniquement de n , δ et $\|B\|_\infty$. Il s'en suit que

$$\frac{1}{2} (\Delta\psi^2) \psi^{2k-2} \leq \langle \Delta d|Z|^2, d|Z|^2 \rangle \psi^{2k-2} + K_2 \psi^{2k-2}.$$

Soit maintenant $\omega = \Delta|Z|^2 \psi^{2k-2} d|Z|^2$, on a alors

$$\begin{aligned} \langle \Delta d|Z|^2, d|Z|^2 \rangle \psi^{2k-2} &= \operatorname{div}(\omega) + (\Delta|Z|^2)^2 \psi^{2k-1} \\ &\quad - 2(2k-2)c_\delta(r)\Delta|Z|^2 \langle Z^T, d\psi \rangle \psi^{2k-3}, \end{aligned}$$

De plus, un simple calcul utilisant les deux faits suivants :

$$e_i(|Z^T|) = \frac{1}{2} \frac{e_i(|Z^T|^2)}{|Z^T|},$$

et $|Z^T|^2 = s_\delta^2(r) - \langle Z, \nu \rangle^2$, nous donne

$$\begin{aligned} e_i(\psi) &= c_\delta(r) \frac{\delta c_\delta(r) s_\delta(r) e_i(r) - \langle Z, \nu \rangle (B_{ij} \langle Z, e_j \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_i} Z, \nu \rangle)}{|Z^T|} \\ &\quad - \delta s_\delta(r) |Z^T| e_i(r) \end{aligned}$$

Tous les termes peuvent être facilement bornés excepté $\langle \bar{\nabla}_{e_i} Z, \nu \rangle$ que nous allons examiner plus en détails. Comme $Z = s_\delta(r) \bar{\nabla} r$, ceci est équivalent à avoir un majorant de $\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla} r, \nu \rangle$. D'après (1.5) et (1.6), nous déduisons que

$$|\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla} r, \nu \rangle| = \frac{c_\delta(r)}{s_\delta(r)} \langle e_i^t, \nu^t \rangle,$$

où e_i^t et ν^t sont les parties de e_i et ν tangentes à la sphère géodésique de rayon r , c'est-à-dire, orthogonales à $\bar{\nabla} r$. De plus, comme

$$|\nu^t|^2 = 1 - \langle \nu, \bar{\nabla} r \rangle^2 = |\nabla r|^2,$$

nous avons

$$|\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla} r, \nu \rangle| \leq \frac{c_\delta(r)}{s_\delta(r)} |\nabla r|.$$

Alors

$$\begin{aligned} \langle \Delta d|Z|^2, d|Z|^2 \rangle \psi^{2k-2} &\leq \operatorname{div}(\omega) + (\Delta|Z|^2)^2 \psi^{2k-1} + 2(2k-2) |\Delta|Z|^2| \psi^{2k-2} \\ &\quad + K_4 K_3 |\Delta|Z|^2| \|B\|_\infty \psi^{2k-2}, \end{aligned}$$

où, K_3 et K_4 dépendent de n , δ et $\|H\|_\infty$. D'autre part, $\Delta|Z|^2 = -2\operatorname{div}(c_\delta(r)Z^T)$ et par le Lemme 1.2 *i*), nous déduisons qu'il existe une constante K_5 dépendant de n , δ et $\|H\|_\infty$ telle que

$$\Delta|Z|^2 \leq K_5.$$

Finalement, nous avons

$$\psi^{2k-2}\Delta\psi^2 \leq \operatorname{div}(\omega) + (\alpha_3 + k\alpha_4)\psi^{2k-1} + (\beta_3 + k\beta_4)\psi^{2k-2}$$

avec des constantes positives $\alpha_3, \alpha_4, \beta_3$ et β_4 dépendant de n , δ et $\|B\|_\infty$. Appliquons maintenant la Proposition 1.5 avec $l = 1$ et $m = 2$, pour obtenir que pour tout $\eta > 0$, il existe L dépendant de n , δ , $\|B\|_\infty$ et η tel que si $\|\psi\|_\infty > \eta$ alors

$$\|\psi\|_\infty \leq L\|\psi\|_2.$$

D'après les Lemmes 1.16 et 1.18 nous savons que si (P_C) est vraie avec $C < 1$ pour $\delta \geq 0$ ou (\tilde{P}_C) avec $C < \alpha(\|H\|_\infty)$ pour $\delta < 0$, alors

$$\|\psi\|_2^2 \leq A_2C + A_3\|\varphi\|_\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on pose $K_\varepsilon := \inf \left\{ \frac{\varepsilon^2}{2L^2A_2}, C_{\frac{\varepsilon^2}{2L^2A_3}} \right\}$ où C est la constante définie dans la preuve du Lemme 1.19. Alors, si (P_{K_ε}) est vraie, nous avons

$$\|\psi\|_\infty \leq L\|\psi\|_2 \leq \varepsilon.$$

□

Il ne nous reste plus maintenant qu'à achever la preuve des théorèmes grâce aux différents lemmes que nous avons déjà démontré.

Preuve des Théorèmes 1.8 et 1.12

Pour $\delta = 0$, la preuve est une conséquence immédiate des Lemmes 1.6 et 1.19. En effet, le Lemme 1.19 assure qu'il existe C_ε tel que (P_{C_ε}) implique $R - r \leq \varepsilon$, ce qui est le premier point du Théorème 1.12. Ensuite, soit $\varepsilon < \frac{2}{3\|H\|_\infty}$ et supposons que la condition de pincement est satisfaite pour $C_{\frac{\varepsilon}{4(2n-1)}}$. L'assertion *i*) du Théorème 1.12 est toujours valide. Si l'on suppose qu'il existe un point $x \in S(p_0, R)$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap M = \emptyset$, alors par le Lemme 1.6, il existe un point y_0 de M tel que la courbure moyenne de M vérifie en y_0

$$H(y_0) \geq \frac{2n-1}{n\varepsilon}.$$

Or, comme $\varepsilon < \frac{2}{3\|H\|_\infty}$, on obtient alors

$$H(y_0) \geq \frac{3(2n-1)\|H\|_\infty}{2n} > \|H\|_\infty.$$

C'est une contradiction. Par conséquent, l'hypothèse de départ est fautive donc pour tout $x \in S(p_0, R)$, $B(x, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$. De plus, grâce au Lemme 1.19, nous avons $C_\varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\|H\|_\infty \rightarrow \infty$ ou $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pour $\delta \neq 0$, soit $\varepsilon > 0$. On pose $0 < \eta = \inf \left\{ D, \varepsilon, \frac{\gamma(\varepsilon)}{8(2n-1)} \right\}$, où

$$\gamma(\varepsilon) = \begin{cases} t_\delta \left(\frac{R+\varepsilon}{2} \right) - t_\delta \left(\frac{R}{2} \right) & \text{si } \delta < 0 \\ t_\delta \left(\frac{R}{2} \right) - t_\delta \left(\frac{R-\varepsilon}{2} \right) & \text{si } \delta > 0. \end{cases}$$

Remarquons que γ est une fonction lisse et croissante avec $\gamma(0) = 0$. D'après le Lemme 1.19, il existe $K_\varepsilon = C_\eta$ telle que (P_{K_ε}) implique

$$R - r \leq \eta \leq \varepsilon.$$

C'est le premier point des Théorèmes 1.8 et 1.12. Supposons maintenant que $\varepsilon < \gamma^{-1} \left(\frac{2E}{3\|H\|_\infty} \right)$. Supposons également qu'il existe $x \in S(p_0, R)$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap M = \emptyset$. Comme $\gamma(\varepsilon) \geq 8(2n-1)\eta$, par le Lemme 1.7, il existe un point $y_0 \in M$ tel que

$$|H(y_0)| \geq \frac{E}{8n\eta} \geq \frac{(2n-1)E}{n\gamma(\varepsilon)} > \|H\|_\infty.$$

Il s'agit donc d'une contradiction et $B(x, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$. De plus, par le Lemme 1.19, $K_\varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\|H\|_\infty \rightarrow 0$ ou $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Preuve des Théorèmes 1.10 et 1.14

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < t_\delta^{-1} \left(\frac{1}{\|H\|_\infty} \right) < R$. Ce choix de ε implique que si (P_{C_ε}) (ou $(\tilde{P}_{C_\varepsilon})$) est vraie, alors $r(x)$ ne s'annule jamais. Nous pouvons alors considérer l'application suivante :

$$\begin{aligned} F : M &\longrightarrow S(p_0, R(M)) \\ x &\longmapsto \exp_{p_0} \left(R (\text{dexp}_{p_0})^{-1} (\overline{\nabla} r) \right). \end{aligned}$$

Soit $X = \exp_{p_0}^{-1}(x)$, on peut facilement voir que

$$\text{dexp}_{p_0}|_X(X) = |X| \overline{\nabla} r = r \overline{\nabla} r.$$

Dans le cas de l'espace euclidien ($\delta = 0$), $F(x)$ est précisément $R \frac{X}{|X|}$ où X est le vecteur position.

Nous allons prouver que F est une quasi-isométrie. En effet, nous allons prouver que pour tout $\theta \in]0, 1[$, il existe $\varepsilon(\theta)$ dépendant de $n, \delta, \|B\|_\infty$ et θ tel que pour tout $x \in M$ et tout vecteur unitaire $u \in T_x M$, la condition de pincement $(P_{C_{\varepsilon(\theta)}})$ implique

$$\left| |\text{d}_x F(u)|^2 - 1 \right| \leq \theta.$$

Pour cela, on calcule $d_x F(u)$ pour un vecteur unitaire $u \in T_x M$. Nous avons

$$(1.27) \quad dF_x(u) = \text{dexp}_{p_0} \Big|_{R \frac{X}{|X|}} \left(R \, d \left(\frac{X}{|X|} \right) \Big|_x (u) \right)$$

Soit $L(x) = \frac{X}{|X|} = \frac{\exp_{p_0}^{-1}(x)}{r}$. Nous avons alors

$$(1.28) \quad dL_x(u) = \frac{1}{r} \text{dexp}_{p_0}^{-1} \Big|_x (u) - \frac{dr(u)}{r^2} \exp_{p_0}^{-1}(x).$$

En utilisant (1.27) et (1.28), on obtient

$$(1.29) \quad dF_x(u) = \frac{R}{r} \text{dexp} \Big|_{R \frac{X}{|X|}} \left(\text{dexp}_{p_0}^{-1} \Big|_x (u) \right) - \frac{R}{r} dr(u) \bar{\nabla} r \Big|_{F(x)}$$

Calculons maintenant $|d_x F(u)|^2$. Par (1.29) et le fait que \exp_{p_0} est une isométrie radiale (cf. relation (1.3)), nous avons

$$(1.30) \quad |d_x F(u)|^2 = \frac{R^2}{r^2} \left[\left| \text{dexp}_{p_0} \Big|_{R \frac{X}{|X|}} \left(\text{dexp}_{p_0}^{-1} \Big|_x (u) \right) \right|^2 - dr(u)^2 \right]$$

Soit $v = u - \langle u, \nabla r \rangle \bar{\nabla} r$. C'est-à-dire, v est la partie de u normale à $\bar{\nabla} r$. Un simple calcul en utilisant (1.3) et (1.30) nous permet d'obtenir

$$(1.31) \quad |d_x F(u)|^2 = \frac{R^2}{r^2} \left| \text{dexp}_{p_0} \Big|_{R \frac{X}{|X|}} \left(\text{dexp}_{p_0}^{-1} \Big|_x (v) \right) \right|^2$$

Finalement, par (1.4), nous avons

$$\left| \text{dexp}_{p_0}^{-1} \Big|_x (v) \right|^2 = |v|^2 \frac{r^2}{s_\delta^2(r)},$$

et par (1.4) encore,

$$|d_x F(u)|^2 = |v|^2 \frac{s_\delta^2(R)}{s_\delta^2(r)}.$$

À partir de maintenant, nous considérons le cas $\delta < 0$, mais le reste de la preuve est similaire dans le cas $\delta \geq 0$.

Comme $|v|^2 = 1 - \langle u, \nabla r \rangle^2 \geq 1 - |\nabla r|^2$, nous déduisons que

$$\begin{aligned} \left| |d_x F(u)|^2 - 1 \right| &\leq \left| \frac{s_\delta^2(R)}{s_\delta^2(r)} - 1 \right| + |\nabla r| \frac{s_\delta^2(R)}{s_\delta^2(r)} \\ &\leq s_\delta^{-2}(r) |s_\delta^2(R) - s_\delta^2(r)| + \frac{s_\delta^2(R)}{c_\delta(r) s_\delta^3(r)} \|\psi\|_\infty. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.20, nous savons que pour tout $\eta > 0$, il existe une constante K_η telle que (P_{K_η}) implique $\|\psi\|_\infty \leq \eta$. De plus, d'après le Lemme 1.20, $C_\varepsilon \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, donc il existe $\varepsilon \leq \eta$ dépendant de $n, \delta, \|H\|_\infty$ et η tel que $C_\varepsilon \leq K_\eta$, et alors (P_{C_ε}) implique que $\|\psi\|_\infty \leq \eta$. D'autre part, nous avons vu que R est borné par une constante dépendant uniquement de n, δ et $\|H\|_\infty$, donc il existe trois constantes A_4, A_5 et A_6 dépendant de n, δ et $\|H\|_\infty$ telles que

$$\begin{aligned} \left| |d_x F(u)|^2 - 1 \right| &\leq A_4 \|R - r\|_\infty + A_5 \|\psi\|_\infty \\ &\leq A_4 \varepsilon + A_5 \eta \leq A_6 \eta \end{aligned}$$

Maintenant, en choisissant $\eta = \frac{\theta}{A_6}$, on obtient

$$(1.32) \quad \left| |d_x F(u)|^2 - 1 \right| \leq \theta.$$

Pour $\theta \in]0, 1[$, par (1.32), F est un difféomorphisme local de M dans $S(p_0, R)$. Comme pour $n \geq 2$, $S(p_0, R)$ est simplement connexe, F est un difféomorphisme global. Enfin, la relation (1.32) nous dit que F est une quasi-isométrie. \square

1.5 Les résultats avec les H_k

Les résultats obtenus dans la Section 1.3 peuvent être généralisés dans l'espace euclidien et la sphère, c'est-à-dire dans le cas $\delta \geq 0$. En effet, nous nous intéressons ici au problème de pincement concernant une inégalité plus fine que l'inégalité (1.2). Cette inégalité, due à T. Vlachos ([?]), minore le rayon extrinsèque par une courbure moyenne d'ordre supérieur. Précisément, nous avons pour $k \in \{1, \dots, n\}$

$$(1.33) \quad t_\delta^k(R) \geq \frac{1}{\|H_k\|_\infty},$$

avec égalité si et seulement si l'hypersurface M est une sphère géodésique de rayon R . Dans tout ce qui suit, nous noterons par $\mathcal{M}(n, \delta, R, k)$ l'ensemble des *variétés de* $\mathcal{M}(n, \delta, R)$ telles que $H_k > 0$.

1.5.1 Une nouvelle minoration du rayon extrinsèque

Avant de s'intéresser au problème de pincement, nous allons d'abord améliorer l'inégalité (1.33) en remplaçant la norme L^∞ de H_k par la norme L^p , pour $p \geq 1$, comme nous l'avons fait dans la Section 1.3.2 pour l'inégalité (1.2).

Commençons par prouver la proposition suivante :

Proposition 1.21. *Soit $k \in \{1, \dots, n\}$, si H_k est strictement positive, alors pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, la fonction H_j est positive strictement et*

$$\int_M H_{j-1} c_\delta(r) dv_g \leq \int_M H_j s_\delta(r) dv_g.$$

Preuve : Par le Lemme 1.4, nous avons

$$\begin{aligned} \int_M c_\delta(r) \operatorname{tr}(T) dv_g &\leq \int_M |\langle Z, H_T \rangle| dv_g \\ &\leq \int_M |H_T| s_\delta(r) dv_g \end{aligned}$$

Si $T = T_{j-1}$ est le $(1, 1)$ -tenseur associé à H_{j-1} , alors

$$\int_M c_\delta(r) H_{j-1} dv_g \leq \int_M |H_j| s_\delta(r) dv_g$$

De plus, Barbosa and Colares ont prouvé dans [?] que si H_k est strictement positive, alors pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, H_j est strictement positive. Donc pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, nous avons

$$\int_M H_{j-1} c_\delta(r) dv_g \leq \int_M H_j s_\delta(r) dv_g.$$

□

Nous déduisons alors de cette proposition les estimations suivantes :

Théorème 1.22. *Soit $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, \delta, R, k)$ (on peut omettre $V(M) = 1$). Alors pour tout $p \geq 1$, nous avons*

$$(1.34) \quad t_\delta(R) \geq \frac{V(M)^{1/pk}}{\|H_k\|_p^{1/k}}.$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si M est une hypersphère géodésique.

Preuve : Nous utilisons la Proposition 1.21 et le fait que les fonctions s_δ et c_δ sont respectivement croissante et décroissante.

$$\begin{aligned} c_\delta(R)^k V(M) &\leq c_\delta(R)^{k-1} \int_M c_\delta(r) dv_g \\ &\leq c_\delta(R)^{k-1} \int_M H s_\delta(r) dv_g \\ &\leq c_\delta(R)^{k-2} s_\delta(R) \int_M H c_\delta(r) dv_g \\ &\leq c_\delta(R)^{k-2} s_\delta(R) \int_M H_2 s_\delta(r) dv_g \\ &\leq \dots \\ &\leq s_\delta(R)^k \int_M H_k dv_g. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$t_\delta(R)^k \geq \frac{V(M)}{\|H_k\|_1},$$

et l'égalité a lieu si et seulement si $r(x) = R$ pour tout $x \in M$. Finalement, l'inégalité d'Hölder donne le résultat avec toute norme L^p , $p \geq 1$. □

Remarque 12. 1. Ces minorations améliorent les inégalités (1), (1.18) et (1.33).

2. Dans le cas où $k = 2$, cette inégalité (1.34) devient

$$(1.35) \quad R^2 \geq \frac{n(n-1)}{\|\text{Scal}\|_1}, \text{ si } \delta = 0$$

$$(1.36) \quad \tan^2(R) \geq \frac{n(n-1)}{\|\text{Scal} - n(n-1)\|_1}, \text{ si } \delta = 1.$$

L'inégalité (1.35) a été prouvée par S. Deshmukh ([?]). Dans le cas sphérique, notre inégalité améliore l'inégalité suivante due à L.J Alias ([?])

$$(1.37) \quad \sin^2(R) \geq \frac{n(n-1)}{\|\text{Scal}\|_1}.$$

En effet, Alias a démontré l'inégalité (1.37) sous l'hypothèse que $\text{Ric}(M) \geq (n+2)(n-1)$. Avec une telle hypothèse, les inégalités (1.36) et (1.37) sont les mêmes, mais l'inégalité (1.36) est valable sans aucune supposition sur la courbure de Ricci de M .

1.5.2 Le problème de pincement

L'inégalité (1.34) étant optimale, nous nous intéressons dans cette section au problème de pincement qui lui est naturellement associé. Voici les résultats que nous allons démontrer :

Théorème 1.23. Soit $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, \delta, R, k)$, $\delta \geq 0$ et p_0 le centre de la boule de rayon R qui contient M . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε dépendant seulement de n , δ , la norme L^∞ de la courbure moyenne et la norme L^{2p} de la k -ième courbure moyenne H_k telle que si

$$(Q_{C_\varepsilon}) \quad t_\delta(R)^k < \frac{1}{\|H_k\|_{2p}} + C_\varepsilon$$

alors

- i) $\phi(M) \subset B(p_0, R) \setminus B(p_0, R - \varepsilon)$.
- ii) $\forall x \in S(p_0, R), \quad B(x, \varepsilon) \cap \phi(M) \neq \emptyset$.

Remarque 13. 1) Nous verrons dans la preuve que $C_\varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\|H\|_\infty \rightarrow \infty$ ou $\varepsilon \rightarrow 0$.

2) Une conséquence immédiate des parties i) et ii) du Théorème 3.14 est que la distance de Hausdorff entre M et $S(p_0, R)$ satisfait

$$d_H(M, S(p_0, R)) \leq \varepsilon.$$

Comme précédemment, si la condition de pincement est suffisamment forte, avec un contrôle sur la norme L^∞ de la seconde forme fondamentale, nous obtenons que M est difféomorphe et quasi-isométrique à une hypersphère géodésique :

Théorème 1.24. Soit $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, \delta, R, k)$, $\delta \geq 0$ et p_0 le centre de la boule de rayon R qui contient M . Alors il existe une constante C dépendant seulement de n, δ , la norme L^∞ de la courbure moyenne et la norme L^{2p} de la k -ième courbure moyenne H_k telle que si

$$(Q_C) \quad t_\delta(R)^k < \frac{1}{\|H_k\|_{2p}} + C$$

alors M est difféomorphe à $S(p_0, R)$.

Plus précisément, il existe un difféomorphisme F de M dans l'hypersphère $S(p_0, R)$ de rayon R qui est une quasi-isométrie. C'est-à-dire, pour tout $\theta \in]0, 1[$, il existe une constante C_θ dépendant de $n, \delta, \|B\|_\infty, \|H_k\|_{2p}$ et θ telle que la condition de pincement (Q_{C_θ}) implique

$$|dF_x(u)|^2 - 1 \leq \theta,$$

pour tout vecteur unitaire $u \in T_x M$.

Remarque 14. 1. Il est évident que la condition de pincement

$$(\widetilde{Q}_C) \quad t_\delta(R)^k < \frac{1}{\|H_k\|_\infty} + C$$

implique la suivante

$$(Q_C) \quad t_\delta(R)^k < \frac{1}{\|H_k\|_{2p}} + C$$

Donc nous déduisons immédiatement des Théorèmes 1.23 et 1.24 les mêmes résultats avec la seconde condition de pincement (\widetilde{Q}_C) .

2. En général, les constantes C, C_ε et C_θ des Théorèmes 1.23 et 1.24 dépendent de $\|H_k\|_{2p}$. Cependant, dans un grand nombre de cas, elles n'en dépendent pas. Précisément, la constante C_ε du Théorème 1.23 ne dépend pas de $\|H_k\|_{2p}$ quand
 - (a) $\delta > 0$
 - (b) $\delta = 0$ et $k \geq 4$,
 - (c) $\delta = 0$ et $p \geq \frac{n}{2k}$,
 et la constante C_θ du Théorème 3.15 ne dépend pas de $\|H_k\|_{2p}$ quand $\delta = 0$ et $p \geq \frac{n}{2k}$.
3. Les techniques utilisées pour prouver ces Théorèmes ne marchent pas dans le cas $\delta < 0$. Comme nous allons le voir, cela est dû au fait que la fonction c_δ est croissante si $\delta < 0$.

1.6 Preuve des Théorèmes de la Section 1.5

La preuve des Théorèmes 1.23 et 1.24 est structurée comme celle des Théorèmes de la Section 1.3, à savoir, une approche L^2 puis le passage de L^2 vers L^∞ . Une grande partie du travail a d'ailleurs déjà été fait dans la Section 1.3. En effet, le passage de L^2 vers L^∞ est identique.

1.6.1 L'approche L^2

Considérons comme précédemment les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(x) = s_\delta^2(R) - s_\delta^2(r), \\ \psi(x) = c_\delta(r)|Z^T|. \end{cases}$$

Nous allons montrer que la condition de pincement (Q_C) implique que les fonctions φ et ψ sont petites en norme L^2 . Concernant la fonction φ , nous avons le lemme suivant :

Lemme 1.25. *La condition de pincement (Q_C) avec $C < 1$ implique*

$$\|\varphi\|_2^2 \leq B_1 C,$$

où B_1 est une constante positive dépendant uniquement de la dimension n , δ et $\|H_k\|_{2p}$. De plus, dans certains cas, la dépendance en $\|H_k\|_{2p}$ peut être remplacée par une dépendance en $\|H\|_\infty$, précisément quand

1. $\delta > 0$,
2. $\delta = 0$ et $k \geq 4$,
3. $\delta = 0$ et $p \geq \frac{n}{2k}$.

Preuve : Comme s_δ et c_δ sont respectivement croissante et décroissante, nous avons

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_2^2 &\leq s_\delta^2(R) \int_M (s_\delta^2(R) - s_\delta^2(r)) \\ &\leq s_\delta^2(R) \left[t_\delta^2(R) \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2 - \int_M s_\delta^2(r) \right] \end{aligned}$$

Par l'inégalité d'Hölder, on obtient

$$\|\varphi\|_2^2 \leq s_\delta^2(R) \left[t_\delta^2(R) \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2 - \frac{1}{\|H_k\|_{2p}^2} \left(\int_M H_k s_\delta(r) \right)^2 \right]$$

En utilisant la Proposition 1.21, on a

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_2^2 &\leq s_\delta^2(R) \left[t_\delta^2(R) \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2 - \frac{1}{\|H_k\|_{2p}^2} \left(\int_M H_{k-1} c_\delta(r) \right)^2 \right] \\ &\leq s_\delta^2(R) \left[t_\delta^2(R) \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2 - \frac{1}{\|H_k\|_{2p}^2 t_\delta^{2k-2}(R)} \left(\int_M H_{k-1} s_\delta(r) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

En utilisant encore la Proposition 1.21 ($k-2$) fois, on trouve

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_2^2 &\leq s_\delta^2(R) \left[t_\delta^2(R) \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2 - \frac{1}{\|H_k\|_{2p}^2 t_\delta^{2k-2}(R)} \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2 \right] \\ &\leq \frac{s_\delta^2(R)}{t_\delta^{2k-2}(R)} \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2 \left[t_\delta^{2k}(R) - \frac{1}{\|H_k\|_{2p}^2} \right] \end{aligned}$$

Comme nous avons supposé (Q_C) avec $C < 1$, si $\delta > 0$, alors

$$\|\varphi\|_2^2 \leq \frac{C}{\delta t_\delta^{2k-2}(R)} \left[1 + \frac{2}{\|H_k\|_{2p}} \right]$$

De plus, nous avons

$$\frac{1}{t_\delta(R)} \leq \|H_k\|_{2p}^{1/k},$$

donc

$$\|\varphi\|_2^2 \leq \frac{C}{\delta} \left[\|H_k\|_{2p}^{\frac{2k-2}{k}} + 2\|H_k\|_{2p}^{\frac{k-2}{k}} \right]$$

Comme $H_k > 0$, nous avons $H \geq H_k^{1/k}$ et donc $\|H_k\|_{2p} \leq \|H\|_\infty^k$. Finalement, pour $k \geq 2$, on a

$$\|\varphi\|_2^2 \leq \frac{C}{\delta} [\|H\|_\infty^{2k-2} + 2\|H\|_\infty^{k-2}] \leq B_1 C,$$

où B_1 est une constante positive dépendant de n , δ et $\|H\|_\infty$.

Si $\delta = 0$, alors

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_2^2 &\leq \frac{C}{R^{2k-4}} \left[1 + \frac{2}{\|H_k\|_{2p}} \right] \\ &\leq C \left[\|H_k\|_{2p}^{\frac{2k-4}{k}} + 2\|H_k\|_{2p}^{\frac{k-4}{k}} \right] \leq B_1 C, \end{aligned}$$

où B_1 est une constante positive dépendant de n , δ et $\|H_k\|_{2p}$. Si, en plus, $4 \leq k \leq n$, par le même argument que ci-dessus, B_1 dépend de n et $\|H\|_\infty$.

De plus, pour $\delta = 0$, nous avons la minoration suivante pour la k -ième courbure moyenne (voir [?] pages 221-222)

$$\int_M H_k^{n/k} dv_g \geq \omega_n,$$

où ω_n est le volume de la sphère euclidienne de dimension n . Alors, pour $p \geq \frac{n}{2k}$, nous avons

$$\omega_n^{k/n} \leq \|H_k\|_{2p} \leq \|H\|_\infty^k.$$

Par conséquent, la dépendance en $\|H_k\|_{2p}$ peut être remplacée par une dépendance en $\|H\|_\infty$. \square

Nous prouvons ce second lemme concernant cette fois la fonction ψ .

Lemme 1.26. *La condition de pincement (Q_C) avec $C < 1$ implique*

$$\|\psi\|_2^2 \leq B_2 C,$$

où B_2 est une constante positive dépendant uniquement de n et $\|H\|_\infty$.

Preuve : Comme $c_\delta(r) \leq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\psi\|_2^2 &\leq \int_M |Z^T|^2 \leq \int_M |Z|^2 - \langle Z, \nu \rangle^2 \\ &\leq \int_M s_\delta^2(r) - \frac{1}{\|H_k\|_{2p}^2} \left(\int_M H_k \langle Z, \nu \rangle \right)^2 \end{aligned}$$

Par le Lemme 1.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\psi\|_2^2 &\leq t_\delta^2(R) \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2 - \frac{1}{\|H_k\|_{2p}^2} \left(\int_M c_\delta(r) H_{k-1} \right)^2 \\ &\leq t_\delta^2(R) \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2 - \frac{1}{t_\delta^2(R) \|H_k\|_{2p}^2} \left(\int_M s_\delta(r) H_{k-1} \right)^2 \end{aligned}$$

La Proposition 1.21 nous donne alors

$$\begin{aligned} \|\psi\|_2^2 &\leq t_\delta^2(R) \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2 - \frac{1}{t_\delta^2(R) \|H_k\|_{2p}^2} \left(\int_M c_\delta(r) H_{k-2} \right)^2 \\ &\leq t_\delta^2(R) \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2 - \frac{1}{t_\delta^4(R) \|H_k\|_{2p}^2} \left(\int_M s_\delta(r) H_{k-2} \right)^2 \\ &\leq \dots \\ &\leq t_\delta^2(R) \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2 - \frac{1}{t_\delta^{2k-2}(R) \|H_k\|_{2p}^2} \left(\int_M c_\delta(r) \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{t_\delta^{2k-2}(R)} \left(t_\delta^2(R) - \frac{1}{\|H_k\|_{2p}^2} \right) \end{aligned}$$

Donc la condition (Q_C) avec $C < 1$ implique

$$\begin{aligned} \|\psi\|_2^2 &\leq \frac{C}{t_\delta^{2k-2}(R)} \left(1 + \frac{2}{\|H_k\|_{2p}} \right) \\ &\leq C \|H_k\|_{2p}^{\frac{2k-2}{k}} \left(1 + \frac{2}{\|H_k\|_{2p}} \right) \\ &\leq C \left(\|H_k\|_{2p}^{\frac{2k-2}{k}} + 2 \|H_k\|_{2p}^{\frac{k-2}{k}} \right) \\ &\leq C \left(\|H\|_\infty^{2k-2} + 2 \|H\|_\infty^{k-2} \right) \leq B_2 C, \end{aligned}$$

où B_2 est une constante positive dépendant de n et de $\|H\|_\infty$. □

1.6.2 Le passage de L^2 vers L^∞

L'étape suivante dans la preuve des Théorèmes 1.23 et 1.24 est le passage d'une proximité L^2 à une proximité L^∞ . Pour cela, nous utilisons le Lemme 1.5.

La majeure partie de ce travail a déjà été effectuée lors de la preuve des Théorèmes 1.8, 1.10, 1.12 et 1.14. En effet, Il suffit de majorer les deux termes suivants :

$$\begin{cases} \varphi^{2k-2} \Delta \varphi^2, \\ \psi^{2k-2} \Delta \psi^2, \end{cases}$$

ce que nous avons fait dans la section 1.4 indépendamment de tout pincement.

1.7 Raffinement dans le cas Euclidien

1.7.1 Les p -rayons extrinsèques

Définition

Dans le cas euclidien, nous pouvons définir des invariants plus généraux que le rayon extrinsèque. Il s'agit plus précisément d'une famille d'invariants géométriques extrinsèques définis à partir du vecteur position de l'immersion de la manière suivante :

Définition 1.27. Soit $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, 0)$. Pour $p \geq 1$, on définit :

$$R_p(M) = \frac{\|X\|_p}{V(M)^{1/p}} = \frac{(\int_M |X|^p)^{1/p}}{V(M)^{1/p}},$$

où X est le vecteur position de l'immersion centrée en p_0 (centre de la boule de rayon R qui contient M). On appelle $R_p(M)$ le p -rayon extrinsèque de M .

On remarque tout d'abord que pour tout $p \geq 1$,

$$R_p(M) \leq R(M),$$

et que l'égalité n'est possible que pour les sphères de rayon $R(M)$. Cela vient simplement de la définition de $R_p(M)$.

Une inégalité plus fine

La formule de Hsuing-Minkowski donnée par le Lemme 1.2 permet d'obtenir une nouvelle inégalité extrinsèque faisant intervenir le p -rayon extrinsèque d'une part et la courbure moyenne d'autre part.

Proposition 1.28. Soit $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, 0)$. Alors pour tout $p > 1$, le p -rayon extrinsèque vérifie

$$R_p(M) \geq \frac{V(M)^{1/q}}{\|H\|_q},$$

où H est la courbure moyenne de l'immersion et $q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

De plus, l'inégalité a lieu si et seulement si M est une sphère de rayon $R_p(M)$.

Preuve : On rappelle la formule de Hsiung-Minkowski :

$$\int_M (H \langle X, \nu \rangle - 1) = 0.$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} V(M) &= \int_M (H \langle X, \nu \rangle) \\ &\leq \int_M (|H| |\langle X, \nu \rangle|). \end{aligned}$$

Par l'inégalité d'Hölder, on en déduit pour $p > 1$

$$\begin{aligned} V(M) &\leq \|H\|_q \|\langle X, \nu \rangle\|_p \\ &\leq \|H\|_q \|X\|_p, \end{aligned}$$

ce qui donne bien l'inégalité annoncée :

$$R_p(M) \geq \frac{V(M)^{1/q}}{\|H\|_q}.$$

Si l'égalité a lieu, alors $\|\langle X, \nu \rangle\|_p = \|X\|_p$, ce qui n'est possible que si X et ν sont colinéaires, c'est-à-dire, si M est une sphère. L'égalité a lieu uniquement pour les sphères de rayon $R_p(M)$. \square

Remarque 15. 1. Cette inégalité améliore l'inégalité (1.18).

2. De cette inégalité on déduit par l'inégalité d'Hölder :

$$R_p(M) \geq \frac{V(M)^{1/l}}{\|H\|_l} \geq \frac{1}{\|H\|_\infty},$$

où $l \geq q$, avec $q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1.7.2 Le problème de pincement

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser plus particulièrement au cas où $p \geq 4$ et à l'inégalité suivante :

$$R_p(M) \geq \frac{V(M)^{1/p}}{\|H\|_p}.$$

Il est encore une fois naturel de se poser la question de savoir ce qui se passe en cas de presque égalité. A-t'on des résultats analogues à ceux que nous avons énoncés dans la Section 1.3? Nous pouvons répondre par l'affirmative dans le cas que nous venons d'évoquer. Plus précisément, nous avons :

Théorème 1.29. *Soient $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, 0)$ et $p \geq 4$. Supposons que $V(M) = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε dépendant de n et $\|H\|_\infty$ telle que si la condition de pincement*

$$(R_{C_\varepsilon}) \quad R_p(M) < \frac{V(M)^{1/p}}{\|H\|_p} + C_\varepsilon,$$

alors

- i) $\phi(M) \subset \overline{B}(p_0, R) \setminus B(p_0, R - \varepsilon)$,
- ii) $\forall x \in S(p_0, R)$, $B(x, \varepsilon) \cap \phi(M) \neq \emptyset$.

.

Remarque 16. *Comme dans tous les résultats précédents, nous avons $C_\varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\|H\|_\infty \rightarrow 0$ ou $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Nous avons également une version plus forte avec une proximité au sens “*difféomorphisme et quasi-isométrie*” :

Théorème 1.30. *Soient $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, 0)$ et $p \geq 4$. Supposons que $V(M) = 1$. Il existe une constante C telle que la condition de pincement*

$$(R_C) \quad R_p(M) < \frac{V(M)^{1/p}}{\|H\|_p} + C$$

implique que M est difféomorphe et quasi-isométrique à la sphère $S(0, R_p(M))$ au sens du Théorème 1.14

1.7.3 Preuve des Théorèmes 1.29 et 1.30

Compte tenu du travail déjà effectué pour les résultats de pincement du rayon extrinsèque, la preuve des Théorèmes 1.29 et 1.30 est assez courte. Comme précédemment, considérons les deux fonctions suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(x) = R_p(M)^2 - |X|^2, \\ \psi(x) = |X^T| \end{cases}$$

Le schéma de la preuve est identique, on montre d’abord une proximité L^2 puis on passe de L^2 à L^∞ grâce au Lemme 1.5. Commençons par ce premier lemme :

Lemme 1.31. *La condition de pincement (R_C) avec $C < 1$ implique*

$$\|\varphi\|_2^2 \leq B_1 C,$$

où B_1 est une constante positive ne dépendant que de n .

Preuve : Nous avons :

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_2^2 &= R_p(M)^4 - 2R_p(M)^2 \left(\int_M |X|^2 dv_g \right) + \int_M |X|^4 dv_g \\
&= R_p(M)^4 + \|X\|_4^4 - 2R_p(M)^2 \frac{\|H\|_p^2}{\|H\|_p^2} \\
&\leq R_p(M)^4 + \|X\|_4^4 - 2 \frac{R_p(M)^2}{\|H\|_p^2} \left(\int_M H \langle X, \nu \rangle \right)^2 \\
&\leq R_p(M)^4 + \|X\|_4^4 - 2 \frac{R_p(M)^2}{\|H\|_p^2}.
\end{aligned}$$

Comme $p \geq 4$, par l'inégalité d'Hölder, on obtient

$$\|\varphi\|_2^2 \leq 2R_p(M)^2 \left(R_p(M)^2 - \frac{1}{\|H\|_p^2} \right).$$

Comme dans la preuve du Lemme 1.18, en utilisant la condition de pincement et l'inégalité de Sobolev extrinsèque, on obtient

$$\|\varphi\|_2^2 \leq B_1 C,$$

où B_1 est une constante positive ne dépendant que de n . □

Nous avons ce second lemme, concernant la fonction ψ :

Lemme 1.32. *La condition de pincement (R_C) avec $C < 1$ implique*

$$\|\psi\|_2^2 \leq B_2 C,$$

où B_1 est une constante positive ne dépendant que de n .

Preuve : Nous avons :

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_2^2 &= \int_M |X|^2 dv_g - \int_M \langle X, \nu \rangle^2 dv_g \\
&\leq \|X\|_2^2 - \frac{1}{\|H\|_p^2} \left(\int_M H \langle X, \nu \rangle \right)^2 \\
&\leq R_p(M)^2 - \frac{1}{\|H\|_p^2},
\end{aligned}$$

et l'on conclut comme précédemment que

$$\|\psi\|_2^2 \leq B_2 C,$$

où B_2 est une constante positive ne dépendant que de n . □

Pour le passage de L^2 à L^∞ , nous avons les deux lemmes suivants qui sont les analogues des Lemmes 1.19 et 1.20.

Lemme 1.33. *Pour tout $\varepsilon < 0$, il existe C_ε dépendant de n et $\|H\|_\infty$ telle que si (R_{C_ε}) est vraie alors*

$$\|\varphi\|_\infty \leq \varepsilon.$$

De plus, $C_\varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\|H\|_\infty \rightarrow 0$ ou $\varepsilon \rightarrow 0$.

Lemme 1.34. *Pour tout $\varepsilon < 0$, il existe K_ε dépendant de n et $\|H\|_\infty$ telle que si (R_{K_ε}) est vraie alors*

$$\|\psi\|_\infty \leq \varepsilon.$$

De plus, $K_\varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\|H\|_\infty \rightarrow 0$ ou $\varepsilon \rightarrow 0$.

La preuve de ces deux lemmes est identique à la preuve des Lemmes 1.19 et 1.20 à une petite différence près. En effet, pour les Lemmes 1.19 et 1.20, nous utilisons la majoration de $|X|$ par le rayon extrinsèque R . Ceci ne convient plus ici car R n'apparaît pas et d'autre part, $|X|$ n'est pas inférieur à $R_p(M)$ en général. Cependant, nous avons la relation suivante :

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = nH \langle X, \nu \rangle - n,$$

qui implique pour $k \geq 2$:

$$\frac{1}{2}|X|^{2k-2}\Delta|X|^2 \leq n\|H\|_\infty|X|^{2k-1}.$$

Supposons par l'absurde que $\|X\|_\infty$ n'est pas majoré par une constante η ne dépendant que de n et $\|H\|_\infty$. Nous pouvons donc appliquer le Lemme 1.5 à la fonction $\xi = |X|$ avec $l = 0$ et $m = 1$. Nous obtenons ainsi que si $\|X\|_\infty > E$, il existe une constante $L(n, \|H\|_\infty, E)$ telle que $\|X\|_\infty \leq L(n, \|H\|_\infty, E)\|X\|_2$. De plus, on voit facilement que la condition de pincement (R_C) implique $\|X\|_2^2 \leq \gamma_n$, où γ_n est une constante ne dépendant que de n . En effet, on a :

$$\begin{aligned} \|X\|_2^2 &\leq \|X\|_p^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{\|H\|_p} + C \right)^2. \end{aligned}$$

Or par l'inégalité de Sobolev extrinsèque, on sait que $\|H\|_p \geq \alpha_n$, d'où

$$\|X\|_2^2 \leq \gamma_n.$$

Comme L est bornée lorsque $E \rightarrow +\infty$, on peut trouver $E = E(n, \|H\|_\infty)$ assez grand tel que

$$L(n, \|H\|_\infty, E)\gamma_n < E.$$

Dans ce cas, nous avons $\|X\|_\infty \leq E(n, \|H\|_\infty)$. C'est une contradiction et donc il existe une constante E ne dépendant que de n et $\|H\|_\infty$ telle que $\|X\|_\infty \leq E(n, \|H\|_\infty)$.

Le problème de majorer $\|X\|_\infty$ étant résolu, les Lemmes 1.33 et 1.34 se démontrent comme les Lemmes 1.19 et 1.20. \square

La fin de la preuve des Théorèmes 1.29 et 1.30 est strictement identique à celle des Théorèmes 1.12 et 1.14.

Remarque 17. *Les Théorèmes 1.29 et 1.30 restent valables pour la condition de pincement suivante :*

$$R_p(M) < \frac{1}{\|H\|_l} + C$$

pour $l \geq p$, ou $l = \infty$.

Chapitre 2

Pincement de la première valeur propre du laplacien des hypersurfaces de \mathbb{R}^{n+1} et variétés presque Einstein

2.1 Introduction

Dans ce second chapitre, nous nous intéressons toujours à des problèmes de pincement, mais cette fois concernant la première valeur propre du laplacien sur les hypersurfaces de l'espace euclidien. Nous utiliserons les mêmes notations et conventions que celles introduites dans le chapitre 1.

Soit $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, 0)$, c'est-à-dire, une variété de dimension n , compacte sans bord, connexe, orientée et immergée isométriquement par ϕ dans l'espace euclidien (\mathbb{R}^{n+1}, can) , c'est-à-dire $\phi^*can = g$. Reilly ([?]) a démontré l'inégalité suivante qui donne une majoration de la première valeur propre non nulle du laplacien de (M^n, g) en fonction de la norme L^2 de la courbure moyenne :

$$(2.1) \quad \lambda_1(M) \leq \frac{n}{V(M)} \int_M H^2 dv_g,$$

ainsi que

$$(2.2) \quad \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2 \leq nV(M) \int_M H_k^2 dv_g,$$

avec également égalité si et seulement si (M^n, g) est une hypersphère géodésique de \mathbb{R}^{n+1} .

En utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons des estimations similaires avec la norme L^{2p} ($p \geq 1$) de H_k :

$$(2.3) \quad \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2 \leq nV(M)^{2-1/p} \|H_k\|_{2p}^2 dv_g.$$

Comme pour les inégalités (2.1) et (2.2), le cas d'égalité est caractérisé par les hypersphères géodésiques. Nous nous intéressons ici au pincement associé à cette inégalité (2.3). Voici les résultats que nous allons démontrer.

Théorème 2.1. *Soient $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, 0)$ et p_0 le centre de masse de M . Supposons que $V(M) = 1$ et $H_k > 0$. Alors, pour $p \geq 2$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε dépendant uniquement de ε , n , $\|H\|_\infty$ et $\|H_k\|_{2p}$ telle que*

$$(P_{C_\varepsilon}) \quad \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2 - \|H_k\|_{2p}^2 dv_g > -C_\varepsilon$$

est satisfaite, alors

$$i) \quad \phi(M) \subset B \left(x_0, \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} + \varepsilon \right) \setminus B \left(x_0, \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} - \varepsilon \right).$$

$$ii) \quad \forall x \in S \left(x_0, \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \right), \quad B(x, \varepsilon) \cap \phi(M) \neq \emptyset.$$

Comme nous l'avons déjà vu, les points *i)* et *ii)* du Théorème 2.1 implique que la distance de Hausdorff entre M et $S \left(x_0, \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \right)$ est inférieur à ε .

Remarque 18. *Nous verrons dans la preuve que $C_\varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\|H\|_\infty \rightarrow \infty$ ou $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Dans le théorème qui suit, en imposant un pincement assez fort, avec un contrôle sur la norme L^∞ de seconde forme fondamentale B , nous obtenons que M est difféomorphe et quasi-isométrique à une sphère ronde dans le sens suivant :

Théorème 2.2. *Soient $(M^n, g) \in \mathcal{M}(n, 0)$ et p_0 le centre de masse de M . Supposons que $V(M) = 1$ et $H_k > 0$. Alors, pour $p \geq 2$, il existe une constante C dépendant uniquement de n , $\|B\|_\infty$ et $\|H_k\|_{2p}$ telle que si la condition de pincement*

$$(P_C) \quad \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2 - \frac{n}{V(M)^{1/p}} \|H_k\|_{2p}^2 dv_g > -C$$

est satisfaite, alors M est difféomorphe à $S(p_0, R)$.

Plus précisément, il existe un difféomorphisme F de M dans l'hypersphère géodésique $S(p_0, R)$ de rayon R qui est une quasi-isométrie. C'est-à-dire, pour tout $\theta \in]0, 1[$, il existe une constante C_θ dépendant uniquement de θ , n , $\|B\|_\infty$ et $\|H_k\|_{2p}$ telle que la condition de pincement pour C_θ implique

$$| |dF_x(u)|^2 - 1 | \leq \theta,$$

pour tout vecteur unitaire $u \in T_x M$.

Remarque 19. 1. *Nous verrons dans la preuve que les constantes C , C_ε et C_θ intervenant dans les Théorèmes 2.1 et 2.2 ne dépendent pas de $\|H_k\|_{2p}$ si $p \geq \frac{n}{2k}$.*

2. *Par homothétie, nous obtenons le résultat pour $V(M)$ quelconque.*

Ces résultats ont un double intérêt. Tout d'abord, ils constituent une généralisation des théorèmes prouvés par Colbois et Grosjean dans [?], ensuite, le cas $k = 2$ est particulièrement intéressant. En effet, pour les hypersurfaces de l'espace euclidien, la seconde courbure moyenne H_2 est, à une constante multiplicative près, la courbure scalaire. Plus précisément, $H_2 = \frac{1}{n(n-1)} \text{Scal}$. Ces résultats de pincement vont alors nous permettre de déduire un corollaire de nature géométrique concernant les hypersurfaces presque Einstein (voir Section 2.5).

Rappelons enfin l'identité bien connue suivante :

$$(2.4) \quad \frac{1}{2} \Delta |X|^2 = nH \langle \nu, X \rangle - n.$$

Achevons ces préliminaires par quelques rappels supplémentaires sur les courbures moyennes d'ordre supérieur.

Lemme 2.3. *Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, nous avons*

$$\int_M (H_{k-1} - H_k \langle X, \nu \rangle) dv_g.$$

Enfin, concluons cette section par le lemme suivant :

Lemme 2.4. *Soit $k \in \{1, \dots, n\}$, si H_k est strictement positive, alors, on a :*

$$H_k^{\frac{1}{k}} \leq H_{k-1}^{\frac{1}{k-1}} \leq \dots \leq H_2^{\frac{1}{2}} \leq H.$$

2.2 Une approche L^2 du problème

Comme dans le chapitre précédent, la preuve des Théorèmes 2.1 et 2.2 s'effectue en deux temps. La première étape consiste à montrer que si la condition de pincement (P_C) est satisfaite, alors M est proche d'une sphère en un sens L^2 . Pour cela, commençons par un premier lemme qui donne une majoration de la norme L^2 du vecteur position.

Lemme 2.5. *Si la condition de pincement (P_C) est satisfaite pour $C < \frac{n}{2} \|H_k\|_{2p}^2$, alors :*

$$\frac{n\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^4}{\left(C + \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2 \right)^2} \leq \|X\|_2^2 \leq \frac{n}{\lambda_1(M)} \leq A_1,$$

où A_1 est une constante positive ne dépendant que de n , $\|H\|_\infty$ et $\|H_k\|_{2p}$.

Preuve : Si (P_C) est satisfaite, on a alors :

$$\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} dv_g \right)^2 \geq n \|H_k\|_{2p}^2 - C.$$

Si l'on suppose de plus que $C < \frac{n}{2} \|H_k\|_{2p}^2$, on obtient alors

$$\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} dv_g \right)^2 \geq \frac{n}{2} \|H_k\|_{2p}^2,$$

et donc

$$\frac{n}{\lambda_1(M)} \leq \frac{2 \left(\int_M H_{k-1} \right)^2}{\|H_k\|_{2p}^2} \leq \frac{2 \|H\|_\infty^{2(k-1)}}{\|H_k\|_{2p}^2}.$$

D'autre part, de la caractérisation variationnelle de $\lambda_1(M)$, nous avons :

$$\lambda_1(M) \int_M |X|^2 dv_g \leq \int_M \left(\sum_{i=1}^{n+1} |dX_i|^2 \right) = n,$$

où les fonctions X_i sont définies par $X = \sum_{i=1}^{n+1} X_i \partial_i$, où $\{\partial_1, \dots, \partial_{n+1}\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} . De ce fait, nous avons $\|X\|_2^2 \leq \frac{n}{\lambda_1(M)}$, et par conséquent :

$$\|X\|_2^2 \leq A_1(n, \|H\|_\infty, \|H_k\|_{2p}).$$

Pour le membre de gauche de l'inégalité, nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda_1(M) \int_M |X|^2 \left(\int_M H_{k-1} \right)^4 &\leq n \left(\int_M H_{k-1} \right)^4 \\ &\leq n \left(\int_M H_k \langle X, \nu \rangle \right)^4 \\ &\leq n \left(\int_M H_k^2 \right)^2 \left(\int_M |X|^2 \right)^2. \end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^4 \leq n \|H_k\|_{2p}^2 \left(\int_M |X|^2 \right),$$

d'où avec la condition de pincement :

$$\|X\|_2^2 \geq \frac{n \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^4}{\left(C + \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2 \right)^2}.$$

□

À partir de maintenant, nous noterons X^T la projection orthogonale du vecteur position X sur M . Autrement dit, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthonormée de $T_x M$, alors

$$X^T = \sum_{i=1}^n \langle X, e_i \rangle e_i = X - \langle X, \nu \rangle \nu.$$

Dans le lemme suivant, nous montrons que la condition de pincement (P_C) implique que la norme L^2 de X^T est proche de 0.

Lemme 2.6. *La condition de pincement (P_C) avec $C < \frac{n}{2} \|H_k\|_{2p}^2$ implique*

$$\|X^T\|_2^2 \leq A_2 C,$$

où A_2 est une constante positive ne dépendant que de n , $\|H\|_\infty$ et $\|H_k\|_{2p}$.

Preuve : Nous venons de voir que

$$\lambda_1(M) \int_M |X|^2 dv_g \leq n,$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda_1(M) \int_M |X|^2 dv_g \left(\int_M H_{k-1} dv_g \right)^2 &\leq n \left(\int_M H_{k-1} dv_g \right)^2 \\ &= n \left(\int_M H_k \langle X, \nu \rangle dv_g \right)^2 \\ &\leq \|H_k\|_2^2 \int_M \langle X, \nu \rangle^2 \\ &\leq \|H_k\|_{2p}^2 \int_M \langle X, \nu \rangle^2 \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que

$$\begin{aligned} n \|H_k\|_{2p}^2 \|X^T\|_2^2 &\leq n \|H_k\|_{2p}^2 \left(\int_M (|X|^2 - \langle X, \nu \rangle^2) dv_g \right) \\ &\leq n \|H_k\|_{2p}^2 \int_M |X|^2 dv_g - \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} dv_g \right)^2 \int_M |X|^2 dv_g \\ &\leq \left[n \|H_k\|_{2p}^2 - \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} dv_g \right)^2 \right] \|X\|_2^2 \\ &\leq C \|X\|_2^2 \leq A_1 C. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\|X^T\|_2^2 \leq \frac{A_1 C}{n \|H_k\|_{2p}^2} = A_2 C.$$

□

Afin de prouver l'assertion *i*) du Théorème 2.1, nous devons montrer que

$$\left\| |X| - \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \right\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Pour cela, nous allons avoir besoin d'une majoration de la norme L^2 de la fonction $\varphi := |X| \left(|X| - \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \right)^2$. Avant d'obtenir une telle majoration, nous introduisons les deux champs de vecteurs suivants :

$$\begin{cases} Y = n H_k \nu - \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right) X, \\ Z = \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \frac{|X|^{1/2} H_k}{\left(\int_M H_{k-1} \right)} \nu - \frac{X}{|X|^{1/2}}. \end{cases}$$

Nous avons

Lemme 2.7. *La condition de pincement (P_C) implique*

$$\|Y\|_2^2 \leq nC.$$

Preuve : Nous avons :

$$\begin{aligned} \|Y\|_2^2 &= n^2 \int_M H_k^2 + \lambda_1(M)^2 \left(\int_M H_{k-1} \right)^2 \int_M |X|^2 - 2n\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right) \int_M H_k \langle X, \nu \rangle \\ &\leq n^2 \|H_k\|_{2p}^2 + n\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2 - 2n\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2 \\ &\leq n \left(n \|H_k\|_{2p}^2 - \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2 \right) \\ &\leq nC, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la formule de Hsiung-Minkowski (Lemme 2.3), ainsi que le fait que $\|X\|_2^2 \leq \frac{n}{\lambda_1(M)}$. \square

Nous avons également

Lemme 2.8. *Si la condition de pincement (P_C) est satisfaite, avec $C < \frac{n}{2} \|H_k\|_{2p}^2$, alors*

$$\|Z\|_2^2 \leq A_3 C,$$

où A_3 est une constante positive ne dépendant que de n , $\|H\|_\infty$ et $\|H_k\|_{2p}$.

Preuve : Nous avons

$$\begin{aligned} \|Z\|_2^2 &= \frac{n}{\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2} \int_M |X| H_k^2 + \int_M |X| - 2 \frac{\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}}{\int_M H_{k-1}} \int_M H_k \langle X, \nu \rangle \\ &= \frac{n}{\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2} \int_M |X| H_k^2 + \int_M |X| - 2 \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\|Z\|_2^2 \leq \frac{n}{\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2} \left(\int_M H_k^4 \right)^{1/2} \left(\int_M |X|^2 \right)^{1/2} + \left(\int_M |X|^2 \right)^{1/2} - 2 \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}$$

Comme $\int_M |X|^2 \leq \frac{n}{\lambda_1(M)}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|Z\|_2^2 &\leq \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \left[\frac{n}{\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2} - 1 \right] \\ &\leq \left(\frac{n}{\lambda_1(M)} \right)^{3/2} \frac{1}{\left(\int_M H_{k-1} \right)^2} \left[n \|H_k\|_{2p}^2 - \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2 \right] \\ &\leq A_3 C, \end{aligned}$$

où A_3 dépend de n , $\|H\|_\infty$ et $\|H_k\|_{2p}$. Nous avons utilisé fait que

$$\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2 > \frac{n}{2} \|H_k\|_{2p}^2 \text{ et } \frac{n}{\lambda_1(M)} \leq \frac{2\|H\|_\infty^{2(k-1)}}{\|H_k\|_{2p}^2}. \quad \square$$

Nous pouvons maintenant donner une majoration de la norme L^2 de la fonction φ . Nous avons

Lemme 2.9. *La condition de pincement (P_C) avec $C < \frac{n}{2} \|H_k\|_{2p}^2$ implique*

$$\|\varphi\|_2 \leq A_4 \|\varphi\|_\infty^{3/4} C^{1/4}.$$

Preuve : Nous avons :

$$\|\varphi\|_2 = \left(\int_M \varphi^{3/2} \varphi^{1/2} \right)^{1/2} \leq \|\varphi\|_\infty^{3/4} \|\varphi^{1/2}\|_1^{1/2}.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \int_M \varphi^{1/2} &= \left\| |X|^{1/2} X - \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \frac{X}{|X|^{1/2}} \right\|_1 \\ &= \left\| -\frac{|X|^{1/2}}{\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)} Y + \frac{n}{\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)} \nu - \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \frac{X}{|X|^{1/2}} \right\|_1 \\ &\leq \left\| \frac{|X|^{1/2}}{\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)} Y \right\|_1 + \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \|Z\|_1. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Sewharz, on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{|X|^{1/2}}{\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)} Y \right\|_1 &\leq \frac{1}{\lambda_1(M)} \left(\int_M |X|^2 \right)^{1/4} \|Y\|_2 \\ &\leq \frac{A_1^{3/4}}{n^{1/2}} C^{1/2}. \end{aligned}$$

Finalement, grâce aux Lemmes 2.7 et 2.8, on arrive à

$$\|\varphi^{1/2}\|_1^{1/2} \leq A_4 C^{1/4},$$

où A_4 est une constante positive qui ne dépend que de n , $\|H\|_\infty$ et $\|H_k\|_{2p}$. □

2.3 Preuve du Théorème 2.1

La preuve du Théorème 2.1 est une conséquence immédiate du Lemme 1.6 ainsi que du lemme suivant :

Lemme 2.10. *Pour $p \geq 2$ et tout $\eta > 0$, il existe $K_\eta(n, \|H\|_\infty, \|H_k\|_{2p})$ tel que si (P_{K_η}) est vraie, alors $\|\varphi\|_\infty \leq \eta$. De plus, $K_\eta \rightarrow 0$ lorsque $\|H\|_\infty \rightarrow \infty$ ou $\eta \rightarrow 0$.*

Nous prouverons le Lemme 2.10 dans la Section 2.6. Grâce à ces deux lemmes, nous pouvons prouver le Théorème 2.1.

Preuve du Théorème 2.1 Soit $\varepsilon > 0$ et considérons la fonction $f(t) := t \left(t - \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \right)^2$.

Posons $\varepsilon_0 := \min \left(\varepsilon, \frac{2}{3\|H\|_\infty} \right)$ et

$$\eta(\varepsilon) := \inf \left\{ f \left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} - \varepsilon_0 \right), f \left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} + \varepsilon_0 \right), \frac{1}{27\|H\|_\infty^3} \right\}.$$

Par définition, pour ε suffisamment petit, $\eta(\varepsilon) > 0$, et donc, par le Lemme 2.10, il existe $K_{\eta(\varepsilon)}$ tel que pour tout $x \in M$,

$$(2.5) \quad f(|X|) \leq \eta(\varepsilon).$$

Nous allons montrer que soit

$$\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} - \varepsilon \leq |X| \leq \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} + \varepsilon$$

soit

$$|X| < \frac{1}{3} \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}$$

En étudiant la fonction f , il est facile de voir que f a un unique maximum local en $\frac{1}{3} \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}$. De plus, grâce à la définition de $\eta(\varepsilon)$ et la majoration de $\lambda_1(M)$ en fonction de H , nous avons

$$\eta(\varepsilon) < \frac{4}{27\|H\|_\infty^3} \leq \frac{4}{27} \left(\frac{n}{\lambda_1(M)} \right)^{3/2} = f \left(\frac{1}{3} \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \right).$$

Comme nous avons supposé $\varepsilon_0 < \frac{2}{3\|H\|_\infty} \leq \frac{2}{3} \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}$, nous avons donc

$$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} < \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} - \varepsilon_0,$$

ce qui, combiné avec (2.5) donne bien l'alternative annoncée ci-dessus pour $|X|$.

D'autre part, le Lemme 2.5 assure qu'il existe un point $y_0 \in M$ tel que :

$$|X(y_0)|^2 \geq \frac{n\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^4}{\left(K_{\eta(\varepsilon)} + \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2 \right)^2}.$$

Comme $K_{\eta(\varepsilon)} < \frac{n}{2} \|H_k\|_{2p}^2$, la condition $(P_{K_{\eta(\varepsilon)}})$ implique

$$K_{\eta(\varepsilon)} < \frac{n}{2} \|H_k\|_{2p}^2 \leq \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2 \leq 2\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2.$$

Nous en déduisons alors que

$$|X(y_0)| \geq \frac{1}{3} \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}.$$

La variété M étant connexe, nous en déduisons que pour tout $x \in M$,

$$\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} - \varepsilon \leq |X| \leq \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} + \varepsilon,$$

ce qui prouve l'assertion *i*) du théorème pour la condition $(P_{K_{\eta(\varepsilon)}})$.

Pour prouver l'assertion *ii*), considérons la condition de pincement (P_{C_ε}) avec $C_\varepsilon = K_{\eta(\frac{\varepsilon}{4(2n-1)})}$. L'assertion *i*) est toujours valable. Soit $x = \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} e \in S\left(0, \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\right)$, avec $e \in \mathbb{S}^n$ et supposons que $B(x, \varepsilon) \cap M = \emptyset$. On peut appliquer le Lemme 1.6. Ainsi, il existe un point $y_0 \in M$ tel que $|H(y_0)| \geq \frac{2n-1}{n\varepsilon} > \|H\|_\infty$ puisque nous avons supposé $\varepsilon < \frac{2}{3\|H\|_\infty} \leq \frac{2n-1}{n\|H\|_\infty}$. Nous obtenons ainsi une contradiction et donc $B(x, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$. L'assertion *ii*) est vérifiée et de plus, $C_\varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\|H\|_\infty \rightarrow \infty$ ou $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

2.4 Preuve du Théorème 2.2

Par le Théorème 2.1, nous savons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe C_ε dépendant uniquement de n , $\|H\|_\infty$ et $\|H_k\|_{2p}$ tel que si (P_{C_ε}) est vraie, alors

$$\left| |X|_x - C_\varepsilon \right| \leq \varepsilon$$

pour tout $x \in M$. Comme $\sqrt{n}\|H\|_\infty \leq \|B\|_\infty$, il est facile de voir d'après les preuves précédentes que l'on peut supposer que C_ε dépend uniquement de n , $\|B\|_\infty$ et $\|H_k\|_{2p}$.

La preuve du Théorème 2.2 est alors une conséquence immédiate du lemme suivant sur la norme L^∞ de X^T .

Lemme 2.11. *Pour $p \geq 2$ et tout $\eta > 0$, il existe $K_\eta(n, \|B\|_\infty, \|H_k\|_{2p})$ tel que si (P_{K_η}) est vraie, alors $\|X^T\|_\infty \leq \eta$.*

Nous prouverons ce lemme dans la section 2.6

Preuve du Théorème 2.2 Soit $\varepsilon < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{\|B\|_\infty}} \leq \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}$. Ce choix de ε nous dit que si la condition de pincement (P_{C_ε}) est vraie, alors $|X|$ ne s'annule jamais, et nous pouvons alors considérer l'application

$$\begin{aligned} F : M &\longrightarrow S\left(0, \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\right) \\ x &\longmapsto \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \frac{X_x}{|X_x|}. \end{aligned}$$

Calculons $dF_x(u)$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
dF_x(u) &= \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \nabla_u \left(\frac{X}{|X|} \right) \\
&= \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} u \left(\frac{1}{|X|} \right) X + \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \frac{1}{|X|} \nabla_u X \\
&= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \frac{1}{|X|^3} u(|X|^2) + \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \frac{1}{|X|} u \\
&= -\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \frac{1}{|X|^3} \langle u, X \rangle X + \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \frac{1}{|X|} u \\
&= \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} \frac{1}{|X|} \left(-\frac{\langle u, X \rangle}{|X|^2} X + u \right).
\end{aligned}$$

Or, nous avons :

$$\begin{aligned}
\left| |dF_x(u)|^2 - 1 \right| &= \left| \frac{n}{\lambda_1(M)} \frac{1}{|X|^2} \left(1 - \frac{\langle u, X \rangle^2}{|X|^2} \right) - 1 \right| \\
&\leq \left| \frac{n}{\lambda_1(M)} \frac{1}{|X|^2} - 1 \right| + \frac{n}{\lambda_1(M)} \frac{1}{|X|^4} \langle u, X \rangle^2.
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que

$$(2.6) \quad \left| |dF_x(u)|^2 - 1 \right| \leq \left| \frac{n}{\lambda_1(M)} \frac{1}{|X|^2} - 1 \right| + \frac{n}{\lambda_1(M)} \frac{1}{|X|^4} \langle u, X \rangle^2,$$

pour tout vecteur unitaire $u \in T_x M$. Or,

$$\left| \frac{n}{\lambda_1(M)} \frac{1}{|X|^2} - 1 \right| = \frac{1}{|X|^2} \left| \frac{n}{\lambda_1(M)} - |X|^2 \right| \leq \varepsilon \frac{\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)} + |X|}}{|X|^2} \leq \varepsilon \frac{2\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)} + \varepsilon}}{\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} - \varepsilon \right)^2}$$

Rappelons que nous avons $\frac{n}{A_1} \leq \lambda_1 \leq \|B\|_\infty^2$. Puisque nous avons supposé $\varepsilon < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{\|B\|_\infty}}$, le membre de droite peut être majoré par une constante ne dépendant que de n , $\|B\|_\infty$ et $\|H_k\|_{2p}$, et l'on a

$$(2.7) \quad \left| \frac{n}{\lambda_1(M)} \frac{1}{|X|^2} - 1 \right| \leq \varepsilon \gamma(n, \|B\|_\infty, \|H_k\|_{2p}).$$

D'autre part, comme $C_\varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, il existe $\varepsilon(n, \|B\|_\infty, \|H_k\|_{2p}, \eta)$ tel que $C_{\varepsilon(n, \|B\|_\infty, \|H_k\|_{2p}, \eta)} \leq K_\eta(n, \|B\|_\infty, \|H_k\|_{2p})$ (où K_η est la constante du Lemme 2.11) et ainsi, $\|X^T\|_\infty \leq \eta$. De plus, comme précédemment, il existe une constante δ dépendant de n , $\|B\|_\infty$ et $\|H_k\|_{2p}$ telle que

$$(2.8) \quad \frac{n}{\lambda_1(M)} \frac{1}{|X|^4} \langle u, X \rangle^2 \leq \frac{n}{\lambda_1(M)} \frac{1}{|X|^4} \|X^T\|_\infty^2 \leq \eta^2 \delta(n, \|B\|_\infty, \|H_k\|_{2p}).$$

Ainsi, par (2.6), (2.7) et (2.8), nous déduisons que (P_{C_ε}) implique

$$\left| |dF_x(u)|^2 - 1 \right| \leq \varepsilon \gamma(n, \|B\|_\infty, \|H_k\|_{2p}) + \eta^2 \delta(n, \|B\|_\infty, \|H_k\|_{2p}).$$

Choisissons alors $\eta = \sqrt{\frac{\theta}{2\delta}}$. On peut supposer que $\varepsilon(n, \|B\|_\infty, \|H_k\|_{2p}, \eta)$ est suffisamment petit pour que $\varepsilon(n, \|B\|_\infty, \|H_k\|_{2p}, \eta) \gamma(n, \|B\|_\infty, \|H_k\|_{2p}) \leq \frac{\theta}{2}$. Dans ce cas, nous avons

$$\left| |dF_x(u)|^2 - 1 \right| \leq \theta.$$

Il suffit maintenant de fixer $\theta \in]0, 1[$ et ainsi, F est un difféomorphisme local de M dans $S\left(0, \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\right)$. Comme $S\left(0, \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\right)$ est simplement connexe pour $n \geq 2$, F est un difféomorphisme global. \square

2.5 Application aux hypersurfaces presque Einstein

Dans cette section, nous donnons une application du Théorème 2.1 pour les hypersurfaces presque Einstein de l'espace euclidien. Rappelons d'abord qu'une hypersurface Einstein de l'espace euclidien est une sphère. Il s'agit d'un résultat de Thomas et Cartan, démontré également par Fialkow (voir [?, ?] ou [?], chapitre 7). Récemment, J.F. Grosjean [?] a redémontré ce résultat grâce à une majoration de la première valeur propre du laplacien. En effet, il a d'abord montré que si la courbure scalaire de M est strictement positive, alors la première valeur propre du laplacien satisfait :

$$\lambda_1(M) \leq \frac{1}{n-1} \|\text{Scal}\|_\infty,$$

avec égalité uniquement pour les sphères géodésiques. Si de plus, (M, g) est d'Einstein, par exemple, $\text{Ric} = (n-1)\text{Id}$, alors d'un part, le théorème de Lichnerowicz assure que $\lambda_1 \geq n$ et d'autre part,

$$(2.9) \quad \lambda_1(M) \leq \frac{1}{n-1} \|\text{Scal}\|_\infty = n.$$

Par conséquent, $\lambda_1(M) = n$, nous sommes dans le cas d'égalité de la majoration (2.9) et du théorème de Lichnerowicz-Obata, ce qui implique que $M = \mathbb{S}^n$.

Cette approche permet de penser qu'un résultat de pincement sur la première valeur propre du laplacien pourrait permettre de montrer qu'une hypersurface presque Einstein de \mathbb{R}^{n+1} est proche d'une sphère en un sens à préciser.

En fait, nous obtenons trois résultats avec des proximités différentes. Le premier résultat est le suivant :

Théorème 2.12. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte sans bord, connexe, orientée, immergée isométriquement dans \mathbb{R}^{n+1} et soit $p > \frac{n}{2}$. Alors, pour tout $k > 0$, il*

existe un $\varepsilon(k, n, \|K\|_{2p})$ (où K est la courbure sectionnelle de M) tel que si (M^n, g) est ε -presque-Einstein, c'est-à-dire,

$$\|\text{Ric} - kg\|_\infty \leq \varepsilon,$$

alors M est homéomorphe à \mathbb{S}^n .

Voici un second théorème avec un conclusion plus forte, mais en contrepartie un pincement plus fort dépendant de la norme $\|B\|_\infty$.

Théorème 2.13. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte sans bord, connexe, orientée, immergée isométriquement dans \mathbb{R}^{n+1} . Alors, pour tout $k > 0$, il existe un $\varepsilon(k, n, \|B\|_\infty)$ tel que si (M^n, g) est ε -presque-Einstein, c'est-à-dire,*

$$\|\text{Ric} - kg\|_\infty \leq \varepsilon,$$

alors M est difféomorphe et quasi-isométrique à $\mathbb{S}^n \left(\sqrt{\frac{n-1}{k}} \right)$.

Remarque 20. *La proximité obtenue dans le Théorème 2.13 est plus forte que celle du Théorème 2.12, mais en contrepartie le pincement plus fort. En effet, le contrôle de la longueur de la seconde forme fondamentale B implique grâce à la formule de Gauss un contrôle de la courbure sectionnelle K .*

Enfin, nous avons un troisième résultat avec une proximité de nature extrinsèque, en terme de distance de Hausdorff

Théorème 2.14. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte sans bord, connexe, orientée, immergée isométriquement dans \mathbb{R}^{n+1} . Alors, pour tout $k > 0$, il existe un $\varepsilon(k, n, \|H\|_\infty)$ tel que si (M^n, g) est ε -presque-Einstein, c'est-à-dire,*

$$\|\text{Ric} - kg\|_\infty \leq \varepsilon,$$

alors $d_H \left(M, \mathbb{S}^n \left(\sqrt{\frac{n-1}{k}} \right) \right) \leq \varepsilon$.

Preuve du Théorème 2.12 L'hypothèse

$$\|\text{Ric} - k\|_\infty \leq \varepsilon,$$

implique que la courbure scalaire vérifie :

$$0 < n(k - \varepsilon)\text{Scal} \leq n(k + \varepsilon).$$

Nous pouvons donc majorer la première valeur propre du laplacien par l'inégalité (2.9) :

$$\lambda_1(M) \leq \frac{n(k + \varepsilon)}{n - 1}.$$

D'autre part, le théorème de Lichnerowicz nous assure que

$$\lambda_1(M) \geq \frac{n(k - \varepsilon)}{n - 1}.$$

Rappelons maintenant le théorème suivant du à E. Aubry ([?])

Théorème (Aubry [?]). *Soient p, R et A des nombres réels tels que $p > \frac{n}{2}$, $R > 0$ et $A > 0$. Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète. Il existe un $\alpha(p, n, A) > 0$ tel que si $\text{Sup}_x \frac{\|(\underline{\text{Ric}} - (n-1))^- \|_{L^p(B(x,R))}}{V(B(x,R))} \leq \alpha(p, n, A)$, $\|K\|_{2p} \leq A$ et*

$$\lambda_1(M) \leq n(1 + \alpha(p, n, A)),$$

alors M est homéomorphe à \mathbb{S}^n .

Dans ce théorème, $\underline{\text{Ric}}(x)$ est la plus petite valeur propre de la forme bilinéaire symétrique $\text{Ric}(x)$ sur $T_x M$, et $(\underline{\text{Ric}} - (n-1))^- = \max(0, -\underline{\text{Ric}} + (n-1))$.

Comme M est presque Einstein, nous sommes précisément dans les hypothèses de ce théorème. En effet, il suffit de choisir un $\varepsilon(k, n, \|K\|_{2p}) > 0$ suffisamment petit pour lequel M est homéomorphe à \mathbb{S}^n . \square

Preuve du Théorème 2.13 Dans la preuve du Théorème 2.12, nous utilisons un résultat de pincement pour la première valeur propre du laplacien pour sa borne inférieure (inégalité de Lichnerowicz). Pour la preuve du Théorème 2.13, nous allons toujours utiliser un résultat de pincement pour la première valeur propre du laplacien, mais cette fois pour sa borne supérieure (inégalité de Reilly). Comme M est ε -presque-Einstein, nous savons que $\text{Ric} \geq k - \varepsilon$. Afin de simplifier les calculs, nous supposons $k = n - 1$. Par le Théorème de Lichnerowicz, nous pouvons majorer la première valeur propre du laplacien :

$$\lambda_1(M) \geq \frac{n(n-1-\varepsilon)}{n-1} = n - \frac{n\varepsilon}{n-1}.$$

De ce fait, nous avons pour $p \geq 2$

$$\begin{aligned} \lambda_1(M) \left(\int_M H \right)^2 - n \|H_2\|_{2p}^2 &\geq \left(n - \frac{n\varepsilon}{n-1} \right) \left(\int_M H_2^{1/2} \right)^2 - n \|H_2\|_{2p}^2 \\ &\geq \left(n - \frac{n\varepsilon}{n-1} \right) \inf \{H_2\} - n \text{Sup} \{H_2\} \\ &\geq \left(n - \frac{n\varepsilon}{n-1} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{n-1} \right) - n \left(1 + \frac{\varepsilon}{n-1} \right) \\ &\geq \frac{n\varepsilon^2}{(n-1)^2} - \frac{3n\varepsilon}{n-1} = -\beta_n(\varepsilon), \end{aligned}$$

où β_n est une fonction positive telle que $\beta_n(\varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Si ε est suffisamment petit pour que $\beta_n(\varepsilon) \leq C(n, \|B\|_\infty, \|H_2\|_{2p})$ du Théorème 2.2, alors M est difféomorphe et quasi-isométrique à \mathbb{S}^n . Choisir un tel ε est possible, et nous en déduisons qu'il existe un ε dépendant uniquement de n et $\|B\|_\infty$ tel que si $\|\text{Ric} - (n-1)\|_\infty \leq \varepsilon$, alors M est difféomorphe et quasi-isométrique à \mathbb{S}^n . Comme $1 - \frac{\varepsilon}{n-1} \leq H_2 \leq 1 + \frac{\varepsilon}{n-1}$, la dépendance en $\|H_2\|_{2p}$ disparaît.

D'autre part, on notera que le volume n'étant pas fixé à 1, la constante de pincement du Théorème 2.2 dépend également du volume. Or l'inégalité de Sobolev extrinsèque

(1.9) permet de minorer le volume en fonction de $\|H\|_\infty$, et d'autre part, comme la courbure de Ricci est positive, le théorème de Bishop permet de majorer le volume en fonction de n uniquement. De ce fait, il n'y a pas de dépendance en le volume. Enfin, par homothétie, on retrouve le résultat pour tout $k > 0$. \square

Remarque 21. *La preuve du Théorème 2.14 est identique, à la différence qu'on utilise le Théorème 2.1 au lieu du Théorème 2.2.*

2.6 Preuve des lemmes techniques

La preuve des Lemmes 2.10 et 2.11 repose comme dans le cas du rayon extrinsèque sur la Proposition 1.5. Pour prouver les Lemmes 2.10 et 2.11, il suffit alors de majorer le laplacien des fonctions φ^2 et $|X^T|^2$. Pour cela, l'hypothèse de pincement (P_C) intervient à un seul moment, pour obtenir un majorant de $\|X\|_\infty$ ne dépendant que de n , $\|H\|_\infty$ et $\|H_k\|_{2p}$.

Lemme 2.15. *Si la condition de pincement (P_C) est satisfaite avec $C < \frac{n}{2}\|H_k\|_{2p}^2$, alors il existe $E(n, \|H\|_\infty, \|H_k\|_{2p})$ tel que $\|X\|_\infty \leq E$.*

Preuve : Nous savons par (2.4) que

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2|X|^{2l-2} \leq n\|H\|_\infty|X|^{2l-1}.$$

En appliquant la Proposition 1.5 à la fonction $\xi = |X|$, nous savons que si $\|X\|_\infty > E$, alors il existe une constante $L(n, \|H\|_\infty, E)$ telle que

$$\|X\|_\infty \leq L\|X\|_2.$$

Or sous la condition de pincement (P_C) avec $C < \frac{n}{2}\|H_k\|_{2p}^2$, nous obtenons par le Lemme 2.5 que

$$\|X\|_\infty \leq LA_1(n, \|H\|_\infty, \|H_k\|_{2p})^{1/2}.$$

Or, L est bornée lorsque $E \rightarrow 0$, donc nous pouvons choisir $E = E(n, \|H\|_\infty, \|H_k\|_{2p})$ suffisamment grand pour que

$$LA_1(n, \|H\|_\infty, \|H_k\|_{2p})^{1/2} < E.$$

Dans ce cas, nous avons $\|X\|_\infty \leq E(n, \|H\|_\infty, \|H_k\|_{2p})$. \square

La preuve du Lemme 2.11 est identique à celle du Lemme 1.20. Nous donnerons donc ici uniquement la preuve du Lemme 2.10.

Preuve du Lemme 2.10 Nous allons utiliser la Proposition 1.5. Pour cela, commençons par calculer le laplacien de φ^2 .

$$\begin{aligned}\Delta\varphi^2 &= \Delta\left(|X|^4 - 2\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}|X|^3 + \frac{n}{\lambda_1(M)}|X|^2\right) \\ &= -2|X|^2\left|d|X|^2\right|^2 + 2|X|^2\Delta|X|^2 + \frac{n}{\lambda_1(M)}\Delta|X|^2 \\ &\quad - 2\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\left(-\frac{3}{4}|X|^{-1}\left|d|X|^2\right|^2 + \frac{3}{2}|X|\Delta|X|^2\right).\end{aligned}$$

Un simple calcul montre que $\left|d|X|^2\right|^2 \leq 4|X|^2$. De plus, le Lemme 1.2 implique.

$$\Delta|X|^2 \leq 2n\|H\|_\infty|X| + n.$$

Donc, en appliquant la Proposition 1.5 et le Lemme 2.15, nous obtenons

$$\Delta\varphi^2 \leq \alpha(n, \|H\|_\infty),$$

et

$$\frac{1}{2}\varphi^{2k-2}\Delta\varphi^2 \leq \alpha(n, \|H\|_\infty)\varphi^{2k-2}.$$

Nous pouvons appliquer une nouvelle fois la Proposition 1.5 avec $r = 0$ et $s = 2$. Si $\|\varphi\|_\infty > \eta$, alors il existe une constante $L(n, \|H\|_\infty)$ telle que

$$\|\varphi\|_\infty \leq L\|\varphi\|_2.$$

Or, si la condition de pincement (P_C) est vraie avec $C < \frac{n}{2}\|H_k\|_{2p}^2$, alors nous avons :

$$\|\varphi\|_2 \leq A_4\|\varphi\|_\infty^{3/4}C^{1/4}.$$

Par conséquent,

$$\|\varphi\|_\infty \leq (LA_4)^4C.$$

Si nous choisissons $C = K_\eta = \inf\left\{\frac{\eta}{(LA_4)^4}, \frac{n}{2}\|H_k\|_{2p}^2\right\}$, nous obtenons

$$\|\varphi\|_\infty \leq \eta.$$

□

Chapitre 3

Une caractérisation spinorielle des surfaces immergées isométriquement dans un espace homogène de dimension 3

3.1 Introduction

Récemment, l'outil spinoriel s'est révélé efficace dans l'étude des sous-variétés des espaces modèles \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n et \mathbb{H}^n . L'approche spinorielle permet de résoudre de manière naturelle des problèmes de géométrie des sous-variétés. C'est le cas par exemple du théorème d'Alexandrov dans l'espace euclidien ([?]) et dans l'espace hyperbolique ([?]) ou bien encore de certaines propriétés des variétés d'Einstein ([?]) ou des sous-variétés lagrangiennes de variétés kähleriennes ([?]).

Parallèlement, l'intérêt manifesté pour les espaces produits $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ est croissant depuis quelques années. La majeure partie du travail effectué autour de ces espaces consiste en l'étude des surfaces minimales ou à courbure moyenne constante. La première étape d'une telle approche est bien sûr de comprendre la géométrie spinorielle de ces surfaces et en premier lieu, ce qui est le but de ce chapitre (voir Théorème 3.14), de caractériser les surfaces isométriquement immergées dans $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ par l'existence d'un champ de spineurs spécial, plus précisément un champ de spineurs solution de l'équation des spineurs de Killing généralisés (voir Section 3.5.3). L'immersion est caractérisée de manière équivalente par l'existence d'un champ de spineurs solution de l'équation de Dirac correspondant à l'équation des spineurs de Killing généralisés et vérifiant une condition supplémentaire sur sa norme.

Nous donnons ici une généralisation des résultats de Friedrich ([?]) et Morel ([?]) aux espaces homogènes de dimension 3 avec groupe d'isométries de dimension 4, avec l'objectif d'étudier les surfaces isométriquement immergées dans ces espaces.

3.2 Préliminaires

Nous commençons ce chapitre par cette section de rappels des principaux résultats de base de la géométrie spinorielle des hypersurfaces. Pour plus de détails, on pourra se référer aux livres [?], [?] ou [?] pour les propriétés générales des variétés spinorielles, et aux articles [?], [?] ou [?] pour la restriction aux hypersurfaces. Nous n'insisterons pas ici sur l'aspect algébrique des algèbres de Clifford, du groupe spinoriel et des représentations.

3.2.1 Variétés spinorielles

Une variété riemannienne (M^n, g) est dite spinorielle s'il existe sur M une structure spinorielle $(\text{Spin } M, \eta)$, constituée d'un fibré principal $\text{Spin } M$ de groupe structural Spin_n et d'un revêtement à deux feuillets η du fibré principal $SO M$ des repères linéaires g -orthonormés orientés par le fibré $\text{Spin } M$. L'existence d'une telle structure est une propriété topologique. En effet, elle est équivalente à la nullité de la seconde classe de Stiefel-Whitney.

A partir d'une structure spinorielle et en utilisant des résultats classiques sur les représentations complexes du groupe spinoriel Spin_n , on construit de manière canonique un fibré vectoriel associé au fibré principal $\text{Spin } M$. Ce fibré, que nous noterons ΣM , est appelé *fibré des spineurs complexes*, et ses sections sont les *champs de spineurs*. Notons que ce fibré dépend de la métrique g .

De même, on construit un fibré vectoriel dont la fibre au-dessus d'un point x est l'algèbre de Clifford complexe $Cl(T_x M, g_x)$. Ce fibré est appelé *fibré de Clifford*, que nous noterons ClM .

Regardons tout d'abord les différents objets que l'on peut construire sur le fibré ΣM . Tout d'abord, il existe une action naturelle du fibré de Clifford sur le fibré des spineurs appelée *multiplication de Clifford* et donnée localement par :

$$\begin{aligned} \gamma : \quad ClM \otimes \Sigma M &\longrightarrow \Sigma M \\ \Phi \otimes \Psi = [\tilde{s}, \alpha] \otimes [\tilde{s}, \sigma] &\longmapsto \Phi \cdot \Psi := [\tilde{s}, \rho_n(\alpha)\sigma] \end{aligned}$$

où $[\tilde{s}, \alpha]$ et $[\tilde{s}, \sigma]$ sont les expressions locales des sections $\Phi \in \Gamma(Cl(M))$ et $\Psi \in \Gamma(\Sigma M)$, et où ρ_n est la représentation spinorielle.

De même, on construit sur ΣM un produit hermitien unitaire, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et provenant du produit hermitien de l'espace de représentation du groupe Spin_n . Ce produit hermitien vérifie alors la propriété suivante :

$$(3.1) \quad \langle \gamma(X)\psi, \varphi \rangle = - \langle \psi, \gamma(X)\varphi \rangle,$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et tous $\psi, \varphi \in \Gamma(\Sigma M)$.

D'autre part, la 1-forme de connexion induite par la connexion de Levi-Civita riemannienne ∇ agissant sur le fibré tangent se relève en une connexion sur le fibré principal $\text{Spin } M$. Cette 1-forme de connexion permet alors de construire une dérivée covariante associée appelée connexion de Levi-Civita spinorielle. Nous la noterons également ∇ .

Dans un ouvert de trivialisat on U de ΣM , la connexion de Levi-Civita est donnée par

$$(3.2) \quad \nabla_X \psi = X(\psi) + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_X e_i, e_j) \gamma(e_i) \gamma(e_j) \psi,$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$, tout $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$, et où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est un repère g -orthonorm e local. Grâce à cette expression locale, on peut voir facilement que la connexion de Levi-Civita spinorielle est compatible avec le produit hermitien et la multiplication de Clifford, c'est-à-dire pour $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\psi, \varphi \in \Gamma(\Sigma M)$, on a :

$$\begin{aligned} X \langle \psi, \varphi \rangle &= \langle \nabla_X \psi, \varphi \rangle + \langle \psi, \nabla_X \varphi \rangle. \\ \nabla_X (\gamma(Y) \psi) &= \gamma(\nabla_X Y) \psi + \gamma(Y) \nabla_X \psi. \end{aligned}$$

Le tenseur de courbure spinorielle associ e est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{X,Y} \psi &:= [\nabla_X, \nabla_Y] \psi - \nabla_{[X,Y]} \psi \\ &= \nabla_X \nabla_Y \psi - \nabla_Y \nabla_X \psi - \nabla_{[X,Y]} \psi, \end{aligned}$$

et on déduit alors facilement de (3.2) son expression locale :

$$(3.3) \quad \mathcal{R}_{X,Y} \psi = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(R_{X,Y} e_i, e_j) \gamma(e_i) \gamma(e_j) \psi,$$

où R est le tenseur de courbure de Riemann. Nous déduisons de cette expression locale de la courbure spinorielle l'identité de Ricci :

$$(3.4) \quad \sum_{i=1}^n \gamma(e_i) \mathcal{R}_{X,e_i} \psi = -\frac{1}{2} \gamma(\text{Ric}(X)) \psi,$$

où Ric est la courbure de Ricci de (M^n, g) .

Enfin, nous définissons l'opérateur de Dirac par :

$$D := \gamma \circ \nabla,$$

ce qui localement s'écrit

$$(3.5) \quad D\psi = \sum_{i=1}^n \gamma(e_i) \nabla_{e_i} \psi.$$

Nous nous intéressons plus particulièrement au cas où la dimension n de la variété est paire. Dans ce cas, le fibré des spineurs se décompose en deux facteurs irréductibles sous l'action de l'élément de volume complexe $\omega_{\mathbb{C}} = i^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \gamma(e_1) \cdots \gamma(e_n)$, où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthonormée locale de $T_x M$. En effet,

$$\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M,$$

où $\Sigma^{\pm} M$ sont les espaces propres associ es aux valeurs propres ± 1 de l'action de $\omega_{\mathbb{C}}$. En se plaçant dans un système de coordonnées locales normales au point x , il est facile de

voir que $\omega_{\mathbb{C}}$ est parallèle pour la dérivée covariante ∇ . On en déduit alors que pour tout champ de vecteurs X , nous avons :

$$X \cdot \omega_{\mathbb{C}} = -\omega_{\mathbb{C}} \cdot X.$$

Par conséquent, la multiplication de Clifford par le champ de vecteurs X vérifie alors :

$$\gamma(X) : \Gamma(\Sigma^{\pm}M) \longrightarrow \Gamma(\Sigma^{\mp}M).$$

De plus, comme $\omega_{\mathbb{C}}$ est parallèle, il est clair que ∇ préserve cette décomposition. Ainsi, nous avons :

$$D : \Gamma(\Sigma^{\pm}M) \longrightarrow \Gamma(\Sigma^{\mp}M).$$

3.2.2 Restriction des spineurs à une hypersurface

Soit (M^{n+1}, g) une variété riemannienne spinorielle. Notons ΣM son fibré des spineurs. On notera par ∇ la connexion de Levi-Civita sur TM , ainsi que celle sur ΣM . La multiplication de Clifford sera notée γ et on note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit hermitien naturel sur ΣM , compatible avec ∇ et γ . Enfin, nous noterons l'opérateur de Dirac par D .

Soit N une hypersurface orientable de M . Le fibré normal étant trivial, l'hypersurface N est spinorielle. En effet, l'existence de ce champ normal unitaire ν défini globalement permet de munir N d'une structure spinorielle induite de celle de M . Tout d'abord, on peut identifier le fibré des repères orthonormés au dessus de N , SON comme un sous-fibré du fibré $SOM|_N$. Cette identification est donnée par l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \quad SON &\longrightarrow SOM|_N \\ \{e_1, \dots, e_n\} &\longmapsto \{e_1, \dots, e_n, \nu\} \end{aligned}$$

et l'on construit ainsi une structure spinorielle au dessus de N en remarquant que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin } N = \Phi^*(\text{Spin } M|_N) & \xrightarrow{\Phi^*} & \text{Spin } M|_N \\ \downarrow \eta & & \downarrow \eta \\ SON & \xrightarrow{\Phi} & SOM|_N. \end{array}$$

On voit alors que l'hypersurface N est munie naturellement d'une structure spinorielle héritée de celle de M . On peut alors considérer le fibré intrinsèque des spineurs que l'on notera ΣN . Nous noterons respectivement par ∇^{Σ} , γ^N et D^N , la connexion de Levi-Civita, la multiplication de Clifford et l'opérateur de Dirac intrinsèque sur N . On peut également définir un fibré extrinsèque des spineurs sur N par $\mathbf{S} := \Sigma M|_N$. On rappelle alors que l'on a l'identification entre ces deux fibrés des spineurs (cf [?],[?],[?],[?],[?],[?] entre autres) :

$$(3.6) \quad \mathbf{S} \equiv \begin{cases} \Sigma N & \text{si } n \text{ est pair} \\ \Sigma N \oplus \Sigma N & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

L'intérêt d'une telle identification est qu'elle permet d'utiliser les spineurs ambiants restreints pour étudier l'opérateur de Dirac intrinsèque de N . Nous pouvons définir la connexion extrinsèque $\nabla^{\mathbf{S}}$ et la multiplication de Clifford $\gamma^{\mathbf{S}}$ sur \mathbf{S} , par :

$$(3.7) \quad \nabla^{\mathbf{S}} = \nabla + \frac{1}{2}\gamma(\nu)\gamma(A),$$

$$(3.8) \quad \gamma^{\mathbf{S}} = \gamma(\nu)\gamma,$$

où ν est un champ normal unitaire et A l'opérateur de Weingarten associé. Grâce à l'identification donnée en (3.6), nous pouvons également identifier connexions et multiplications de Clifford :

$$(3.9) \quad \nabla^{\mathbf{S}} \equiv \begin{cases} \nabla^N & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \nabla^N \oplus \nabla^N & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

$$(3.10) \quad \gamma^{\mathbf{S}} \equiv \begin{cases} \gamma^N & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \gamma^N \oplus -\gamma^N & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On peut alors associer un opérateur de Dirac extrinsèque sur N , agissant sur les sections de \mathbf{S} , noté \mathbf{D} et localement donné par :

$$(3.11) \quad \mathbf{D} = \sum_{i=1}^n \gamma^{\mathbf{S}}(e_i) \nabla_{e_i}^{\mathbf{S}},$$

où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est un repère orthonormé local de TN. Il est alors immédiat, par (3.7), que :

$$(3.12) \quad \mathbf{D} = \frac{n}{2}H - \gamma(\nu) \sum_{i=1}^n \gamma(e_i) \nabla_{e_i},$$

ou bien encore, pour tout $\psi \in \Gamma(\mathbf{S})$

$$(3.13) \quad \mathbf{D}\psi := \frac{n}{2}H\psi - \gamma(\nu)D\psi - \nabla_{\nu}\psi.$$

De plus, les opérateurs intrinsèque et extrinsèque sont reliés de la façon suivante :

$$(3.14) \quad \mathbf{D} \equiv \begin{cases} D^N & \text{si } n \text{ est pair} \\ D^N \oplus -D^N & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Il est facile de voir d'après les définitions que :

$$(3.15) \quad \nabla^{\mathbf{S}}\gamma(\nu) = \gamma(\nu)\nabla^{\mathbf{S}} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}\gamma(\nu) = -\gamma(\nu)\mathbf{D}.$$

Ceci permet d'affirmer que si N est compacte, le spectre de \mathbf{D} est symétrique et même :

$$(3.16) \quad \text{spec } \mathbf{D} \equiv \begin{cases} \text{spec } (D^N) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \text{spec } (D^N) \cup -\text{spec } (D^N) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

3.3 Espaces homogènes de dimension 3 avec groupe d'isométries de dimension 4

Dans cette section, nous donnons une description des espaces homogènes de dimension 3 avec groupe d'isométries de dimension 4. Une telle variété est une fibration riemannienne sur une variété simplement connexe de dimension 2 à courbure constante κ dont les fibres sont géodésiques. Nous noterons par τ la courbure de la fibration, qui “quantifie” le défaut de la fibration à être un produit. Nous allons donc diviser notre description en deux parties. Tout d'abord, le cas où $\tau = 0$ qui correspond aux deux espaces produit $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, et ensuite le cas où $\tau \neq 0$ qui comprend les trois types suivants de variétés : les variétés ayant le groupe d'isométries des sphères de Berger, de l'espace d'Heisenberg Nil_3 ou du revêtement universel $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ de $PSL_2(\mathbb{R})$. Dans tout ce qui suit, nous noterons ces espaces homogènes $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Nous allons commencer par étudier plus en détails le cas où $\tau = 0$ puis nous étudierons ensuite le cas $\tau \neq 0$, qui est légèrement plus élaboré. Pour plus de détails, on pourra se référer à [?] ou [?]

3.3.1 Les espaces produit $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$

Dans cette section et tout ce qui suit, lorsque nous parlons de l'espace produit $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, il s'agit de la variété produit $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ munie de la métrique riemannienne produit $h = g_{\mathbb{M}^2(\kappa)} \oplus dt^2$, où $g_{\mathbb{M}^2(\kappa)}$ est la métrique canonique de $\mathbb{M}^2(\kappa)$. Nous noterons dans toute la suite η tel que $\kappa = 4\eta^2$. Nous supposons $\kappa = 1$ ou -1 , mais tous les résultats sont valables pour $\kappa \neq 0$ quelconque.

Nous choisissons comme base canonique de $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, $\{e_1, e_2, \frac{\partial}{\partial t}\}$, où $\{e_1, e_2\}$ est une base orthonormée locale de $\mathbb{M}^2(\kappa)$ et $\frac{\partial}{\partial t}$ le champ de vecteurs unitaire qui donne l'orientation de \mathbb{R} .

3.3.2 La base canonique de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, $\tau \neq 0$

Soit $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ un espace homogène de dimension 3 dont le groupe d'isométries est de dimension 4. Supposons que $\tau \neq 0$, c'est-à-dire $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ n'est pas un espace produit $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$. Comme nous l'avons signalé ci-dessus, $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ est une fibration riemannienne sur une variété simplement connexe de dimension 2 à courbure constante κ dont les fibres sont géodésiques. Soit alors ξ un champ de vecteurs unitaire tangent aux fibres, que nous appellerons le champ de vecteur vertical. Ce champ est un champ de Killing (qui correspond aux translations le long des fibres).

Nous noterons respectivement par $\overline{\nabla}$ et \overline{R} la connexion de Levi-Civita et le tenseur de courbure de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. La variété $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ admet alors une base orthonormée directe locale $\{e_1, e_2, e_3\}$ avec

$$e_3 = \xi$$

et dont les symboles de Christoffel $\bar{\Gamma}_{ij}^k = \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, e_k \rangle$ sont

$$(3.17) \quad \begin{cases} \bar{\Gamma}_{12}^3 = \bar{\Gamma}_{23}^1 = -\bar{\Gamma}_{21}^3 = -\bar{\Gamma}_{13}^2 = \tau, \\ \bar{\Gamma}_{32}^1 = -\bar{\Gamma}_{31}^2 = \tau - \sigma, \\ \bar{\Gamma}_{ii}^i = \bar{\Gamma}_{ij}^i = \bar{\Gamma}_{ji}^i = \bar{\Gamma}_{ii}^j = 0, \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \end{cases}$$

où $\sigma = \frac{\kappa}{2\tau}$. Nous avons alors

$$[e_1, e_2] = 2\tau e_3, \quad [e_2, e_3] = \sigma e_1, \quad [e_3, e_1] = \sigma e_2.$$

Nous appellerons $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Grâce à (3.17), on voit facilement que pour tout champ de vecteurs X ,

$$(3.18) \quad \bar{\nabla}_X e_3 = \tau X \wedge e_3,$$

où \wedge est le produit vectoriel dans $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, c'est-à-dire, pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$,

$$\langle X \wedge Y, Z \rangle = \det_{\{e_1, e_2, e_3\}}(X, Y, Z).$$

3.3.3 Les variétés dont le groupe d'isométries est celui des sphères de Berger

Nous sommes ici dans le cas où $\kappa > 0$ et $\tau \neq 0$. Ces variétés sont des fibrations au-dessus de 2-sphères rondes et sont obtenues en modifiant la métrique d'une 3-sphère ronde en préservant la fibration de Hopf et en modifiant la longueur des fibres.

On peut voir \mathbb{R}^3 muni de la métrique

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (\tau(ydx - xdy) + dz)^2$$

avec

$$\lambda(x, y, z) = \frac{1}{1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)}$$

comme le revêtement universel d'une telle 3-variété homogène ($\kappa > 0$ et $\tau \neq 0$) privée de la fibre correspondant au point à l'infini de la base $\mathbb{S}^2(\kappa)$. Avec ces coordonnées, les fibres sont alors $\{x = x_0, y = y_0\}$. La base canonique est alors $\{e_1, e_2, e_3\}$ définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} e_1 = \lambda^{-1}(\cos(\sigma z)\partial_x + \sin(\sigma z)\partial_y) + \tau(x \sin(\sigma z) - y \cos(\sigma z))\partial_z, \\ e_2 = \lambda^{-1}(-\sin(\sigma z)\partial_x + \cos(\sigma z)\partial_y) + \tau(x \cos(\sigma z) + y \sin(\sigma z))\partial_z, \\ e_3 = \xi, \end{cases}$$

toujours avec

$$\sigma = \frac{\kappa}{2\tau}.$$

Cette base vérifie alors

$$[e_1, e_2] = 2\tau e_3, \quad [e_2, e_3] = \frac{\kappa}{2\tau} e_1, \quad [e_3, e_1] = \frac{\kappa}{2\tau} e_2,$$

et est définie sur l'ouvert $\mathbb{E}(\kappa, \tau)'$ qui est $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ privé de la fibre correspondant au point à l'infini de la base $\mathbb{S}^2(\kappa)$.

Remarque 22. *Les sphères de Berger au sens strict du terme correspondent au cas où $\kappa = 4$.*

3.3.4 Les variétés dont le groupe d'isométries est celui du groupe d'Heisenberg Nil_3

Il s'agit de fibrations sur l'espace euclidien \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire $\kappa = 0$ et $\tau \neq 0$. Rappelons que le groupe d'Heisenberg est le groupe de Lie Nil_3 défini par

$$Nil_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

muni d'une métrique invariante à gauche. Il est commode d'utiliser des coordonnées exponentielles qui permettent de voir le groupe d'Heisenberg comme \mathbb{R}^3 muni de la métrique suivante

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (\tau(ydx - xdy) + dz)^2.$$

Dans ces coordonnées, les fibres sont données par $\{x = x_0, y = y_0\}$ et la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ est définie par :

$$\begin{cases} e_1 = \partial_x - \tau y \partial_z, \\ e_2 = \partial_y + \tau x \partial_z, \\ e_3 = \partial_z. \end{cases}$$

De plus, la base canonique vérifie

$$[e_1, e_2] = 2\tau e_3, \quad [e_2, e_3] = 0, \quad [e_3, e_1] = 0.$$

3.3.5 Les variétés dont le groupe d'isométries est celui de $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$

Nous sommes ici dans le cas $\kappa < 0$ et $\tau \neq 0$. Une telle variété est une fibration sur un plan hyperbolique. En prenant le modèle du disque de Poincaré pour le plan hyperbolique, on peut l'identifier à la variété $\mathbb{D}^2\left(\frac{2}{\sqrt{-\kappa}}\right) \times \mathbb{R}$, munie de la métrique

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + (\tau(ydx - xdy) + dz)^2,$$

avec

$$\lambda(x, y, z) = \frac{1}{1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)},$$

et où $\mathbb{D}^2(\rho)$ est le disque ouvert de rayon ρ dans \mathbb{R}^2 . On obtient ainsi une variété homogène dont la courbure de la base est κ et la courbure de la fibration est τ . Les

fibres sont alors $\{x = x_0, y = y_0\}$. La base canonique est alors $\{e_1, e_2, e_3\}$ définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} e_1 = \lambda^{-1}(\cos(\sigma z)\partial_x + \sin(\sigma z)\partial_y) + \tau(x \sin(\sigma z) - y \cos(\sigma z))\partial_z, \\ e_2 = \lambda^{-1}(-\sin(\sigma z)\partial_x + \cos(\sigma z)\partial_y) + \tau(x \cos(\sigma z) + y \sin(\sigma z))\partial_z, \\ e_3 = \xi, \end{cases}$$

où

$$\sigma = \frac{\kappa}{2\tau}.$$

Cette base vérifie donc

$$[e_1, e_2] = 2\tau e_3, \quad [e_2, e_3] = \frac{\kappa}{2\tau} e_1, \quad [e_3, e_1] = \frac{\kappa}{2\tau} e_2.$$

3.3.6 Calcul du tenseur de courbure de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

D'après la description des espaces homogènes $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ que nous venons de donner, nous pouvons calculer explicitement leur tenseur de courbure. Dans les trois cas ci-dessus, il existe une base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ dont les symboles de Christoffel sont donnés par la relation (3.17). Grâce à ces relations, on peut voir que l'opérateur de courbure \bar{R} agissant sur les 2-formes défini par :

$$\langle \bar{R}(X \wedge Y), Z \wedge W \rangle := \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle$$

est diagonal dans la base $\{e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2\}$ et sa matrice s'écrit alors

$$(3.19) \quad \bar{R} = \text{diag}(\tau^2, \tau^2, \kappa - 3\tau^2).$$

En raison des symétries du tenseur de courbure, celui-ci est entièrement déterminé par (3.19). Précisément, la proposition suivante donne son expression.

Proposition 3.1. *Pour $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}(\kappa, \tau))$, on a*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = (\kappa - 3\tau^2) \langle R_0(X, Y)Z, W \rangle + (\kappa - 4\tau^2) \langle R_1(\xi; X, Y)Z, W \rangle,$$

où R_0 et R_1 sont définis par :

$$R_0(X, Y)Z = \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X,$$

et

$$\begin{aligned} R_1(V; X, Y)Z &= \langle Y, V \rangle \langle Z, V \rangle X + \langle Y, Z \rangle \langle X, V \rangle V \\ &\quad - \langle X, Z \rangle \langle Y, V \rangle V - \langle X, V \rangle \langle Z, V \rangle Y \end{aligned}$$

Preuve : Tout vecteur X se décompose en une partie verticale et une partie horizontale, $X = \tilde{X} + x\xi$, où $x = \langle X, \xi \rangle$. On décompose de la même manière les vecteurs Y, Z et W . Par la multilinéarité du tenseur de courbure, le terme $\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle$ est une somme de 16 termes. Or, en raison des symétries du tenseur de courbure, plusieurs de ces termes sont nuls. En effet, le terme s'annule lorsque le vecteur vertical ξ apparaît trois fois,

quatre fois, ou bien deux fois, mais en position 1 et 2, ou en position 3 et 4. Enfin, par (3.19), lorsque le vecteur ξ n'est présent qu'une seule fois, le terme s'annule également. Finalement, il reste

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle \\
&\quad + yw \langle \bar{R}(\tilde{X}, \xi)\tilde{Z}, \xi \rangle + yz \langle \bar{R}(\tilde{X}, \xi)\xi, \tilde{W} \rangle \\
&\quad + xw \langle \bar{R}(\xi, \tilde{Y})\tilde{Z}, \xi \rangle + xz \langle \bar{R}(\xi, \tilde{Y})\xi, \tilde{W} \rangle \\
&= (\kappa - 3\tau^2) \left(\langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle - \langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle \right) \\
&\quad + \tau^2 \left(yw \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle - yz \langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle - xw \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle + xz \langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle \right) \\
&= (\kappa - 3\tau^2) (\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle) \\
&\quad - (\kappa - 4\tau^2) (\langle X, Z \rangle \langle Y, \xi \rangle \langle W, \xi \rangle + \langle Y, W \rangle \langle X, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle \\
&\quad - \langle X, W \rangle \langle Y, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, \xi \rangle \langle W, \xi \rangle).
\end{aligned}$$

□

3.4 Équations de compatibilité pour les surfaces

Dans cette section, nous donnons les équations de compatibilité qui comme nous le verrons plus tard sont des conditions nécessaires et suffisantes pour que la surface soit immergée isométriquement dans l'espace ambiant *ad hoc*.

3.4.1 Équations de compatibilité pour les surfaces de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Bien que nous intéressent au cas $n = 2$, toute cette section est également valable pour $n \geq 2$. Soit $\mathbb{M}^n = \mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{M}^n = \mathbb{H}^n$. On notera κ la courbure sectionnelle (constante) de \mathbb{M}^n qui sera respectivement 1 ou -1 . Nous noterons $\bar{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita de $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$ et \bar{R} son tenseur de courbure. D'autre part, nous noterons par $\frac{\partial}{\partial t}$ le champ de vecteurs unitaire qui donne l'orientation de \mathbb{R} dans $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$.

Soit N une hypersurface orientable de $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$ et ν un vecteur normal unitaire. Soit A la seconde forme fondamentale associée à l'immersion de N dans $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$ et définie par

$$AX = -\bar{\nabla}_X \nu.$$

Soit également T la projection du vecteur $\frac{\partial}{\partial t}$ sur le fibré tangent TN . Considérons enfin la fonction f définie par :

$$f := \left\langle \nu, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle.$$

Il est clair que :

$$\frac{\partial}{\partial t} = T + f\nu,$$

et par conséquent comme $\frac{\partial}{\partial t}$ est unitaire :

$$\|T\|^2 + f^2 = 1.$$

Intéressons-nous au tenseur de courbure de $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$ pour des vecteurs tangents à N .

Proposition 3.2. *Pour $X, Y, Z, W \in \Gamma(TN)$, on a :*

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \kappa(\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle \\ &\quad - \langle Y, T \rangle \langle W, T \rangle \langle X, Z \rangle - \langle X, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle Y, W \rangle \\ &\quad + \langle X, T \rangle \langle W, T \rangle \langle Y, Z \rangle + \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle X, W \rangle), \end{aligned}$$

et

$$\langle \bar{R}(X, Y)\nu, Z \rangle = \kappa f(\langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, T \rangle).$$

Preuve : Comme $\frac{\partial}{\partial t}$ est parallèle, on a :

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \bar{R}_{\mathbb{M}^n}(X_t, Y_t)Z_t, W_t \rangle \\ &= \kappa(\langle X_t, Z_t \rangle \langle Y_t, W_t \rangle - \langle Y_t, Z_t \rangle \langle X_t, W_t \rangle) \end{aligned}$$

où pour un vecteur X , X_t représente la partie tangente à \mathbb{M}^n , c'est-à-dire

$$X_t = X - \left\langle X, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t}.$$

En remarquant simplement que si X est tangent à N , alors $\langle X, \frac{\partial}{\partial t} \rangle = \langle X, T \rangle$ et en remplaçant dans l'expression du tenseur de courbure que nous venons de donner, on obtient le résultat.

Pour la seconde identité, on utilise la relation

$$\nu_t = \nu - f \frac{\partial}{\partial t}.$$

□

Remarque 23. *Si le couple (X, Y) est orthonormé, on obtient :*

$$\langle \bar{R}(X, Y, X, Y) \rangle = \kappa(1 - \langle Y, T \rangle^2 - \langle X, T \rangle^2),$$

ce qui, dans le cas où $n = 2$, donne :

$$\bar{R}_{1212} = \kappa(1 - \|T\|^2) = \kappa f^2.$$

Le fait que $\frac{\partial}{\partial t}$ soit parallèle permet de plus d'obtenir les identités suivantes :

Proposition 3.3. *Pour $X \in \mathfrak{X}(N)$, on a :*

$$\nabla_X T = fAX,$$

et

$$df(X) = -\langle AX, T \rangle.$$

Preuve : On sait que $\bar{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial}{\partial t} = T + f\nu$, d'où :

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\nabla}_X T + df(X)\nu + f\bar{\nabla}_X \nu \\ &= \nabla_X T + \langle AX, T \rangle\nu + df(X)\nu - fAX. \end{aligned}$$

Il suffit de considérer les parties tangentielles et normales pour obtenir les deux identités. \square

Définition 3.4 (Équations de compatibilité). *On dit que $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle, A, T, f)$ vérifie les équations de compatibilité pour $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(N)$:*

$$(3.20) \quad \begin{aligned} R(X, Y)Z &= \langle AX, Z \rangle AY - \langle AY, Z \rangle AX \\ &\quad + \kappa \left(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X - \langle Y, T \rangle \langle X, Z \rangle T \right. \\ &\quad \left. - \langle X, T \rangle \langle Z, T \rangle Y + \langle X, T \rangle \langle Y, Z \rangle T + \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle X \right), \end{aligned}$$

$$(3.21) \quad \nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X, Y] = \kappa f(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y),$$

$$(3.22) \quad \nabla_X T = fAX, \text{ et}$$

$$(3.23) \quad df(X) = -\langle AX, T \rangle.$$

Remarque 24. *Les relations (3.20) et (3.21) sont les équations de Gauss et Codazzi pour une immersion isométrique dans $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$.*

3.4.2 Équations de compatibilité pour les surfaces de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, $\tau \neq 0$

Soit $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ un 3-espace homogène dont le groupe d'isométries est de dimension 4, dont la courbure de la base est κ et celle de la fibration τ . Nous noterons $\bar{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ et \bar{R} son tenseur de courbure. Soit N une hypersurface orientable de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, ∇ sa connexion de Levi-Civita et ν le champ normal unitaire sortant à N . Soit A la seconde forme fondamentale associée à l'immersion de N dans $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, définie par

$$AX = -\bar{\nabla}_X \nu.$$

Le vecteur vertical ξ se décompose en une partie tangente et une partie normale à N , ce que l'on peut écrire

$$\xi = T + f\nu,$$

où $T \in \mathfrak{X}(N)$ et $f = \langle \xi, \nu \rangle$. De plus, ξ étant unitaire, on a

$$\|T\|^2 + f^2 = 1.$$

Nous pouvons maintenant donner les équations de Gauss et Codazzi pour les surfaces de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Proposition 3.5. *Pour $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(N)$, on a*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = (\kappa - 3\tau^2) \langle R_0(X, Y)Z, W \rangle + (\kappa - 4\tau^2) \langle R_1(T; X, Y)Z, W \rangle,$$

et

$$\bar{R}(X, Y)\nu = (\kappa - 4\tau^2)f(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y),$$

où R_0 et R_1 sont les tenseurs définis dans la Proposition 3.1.

Preuve : On utilise la Proposition 3.1 en remarquant que pour un vecteur X tangent à N , on a $\langle X, \xi \rangle = \langle X, T \rangle$. \square

On déduit de cette proposition le corollaire suivant :

Corollaire 3.6. *Les équations de Gauss et Codazzi dans $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ sont*

$$(3.24) \quad K = \det(A) + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)f^2,$$

$$(3.25) \quad \nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X, Y] = (\kappa - 4\tau^2)f(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y),$$

où K est la courbure de Gauss de N .

Le fait que $\bar{\nabla}_X \xi = \tau X \wedge \xi$ permet d'obtenir la Proposition suivante :

Proposition 3.7. *Pour tout $X \in \mathfrak{X}(N)$, on a*

$$(3.26) \quad \nabla_X T = f(AX - \tau JX),$$

$$(3.27) \quad df(X) = -\langle AX - \tau JX, T \rangle,$$

où J est la rotation positive d'angle $\frac{\pi}{2}$ sur TN .

Preuve : D'une part, on a

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \xi &= \bar{\nabla}_X(T + f\nu) \\ &= \bar{\nabla}_X T + df(X)\nu + f\bar{\nabla}_X \nu \\ &= \nabla_X T + \langle AX, T \rangle \nu + df(X)\nu - fAX. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X \xi &= \tau X \wedge \xi \\ &= \tau X \wedge (T + f\nu) \\ &= \tau(\langle JX, T \rangle \nu - fJX).\end{aligned}$$

En identifiant les parties normales et tangentielles, on trouve les deux identités. \square

Définition 3.8. *On dit que $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle, A, T, f)$ vérifie les équations de compatibilité pour $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ si et seulement si les équations de Gauss et Codazzi et les équations (3.26) et (3.27) sont satisfaites.*

3.5 Champs de spineurs particuliers

La technique de caractérisation spinorielle des surfaces repose sur l'étude de la restriction aux surfaces de champs de spineurs ambiants particuliers comme les spineurs parallèles de \mathbb{R}^3 , les spineurs de Killing réels de \mathbb{S}^3 ou les spineurs de Killing imaginaires de \mathbb{H}^3 . Les espaces homogènes ne possèdent ni champs de spineurs parallèles, ni champs de spineurs de Killing, mais des champs suffisamment particuliers pour obtenir des informations géométriques sur la surface et notamment sur sa courbure. Nous allons ici donner l'expression de ces spineurs particuliers qui généralisent les spineurs parallèles et de Killing.

3.5.1 Champs de spineurs particuliers sur les surfaces de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Avant de donner l'expression de ces spineurs particuliers pour le cas des espaces produit $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, nous allons voir que le fibré des spineurs de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ s'exprime respectivement en fonction de celui de \mathbb{S}^2 et \mathbb{H}^2 . Pour voir ceci, commençons par quelques rappels sur la restriction des spineurs à une hypersurface.

Fibré des spineurs de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

Tout d'abord, en toute dimension, comme \mathbb{M}^n porte une structure spinorielle, $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$ en porte une également et les structures spinorielles de \mathbb{M}^n et $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$ sont en correspondance. En effet, si on connaît une structure spinorielle sur $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$, il est bien connu qu'elle induit une structure spinorielle sur \mathbb{M}^n . D'autre part, si on se donne une structure spinorielle sur \mathbb{M}^n , alors, on peut la relever sur $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$, ce qui donne un $\widetilde{Gl}^+(n, \mathbb{R})$ -fibré principal sur $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$. On agrandit le groupe structural via le plongement :

$$\widetilde{Gl}^+(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow \widetilde{Gl}^+(n+1, \mathbb{R}),$$

obtenu grâce au plongement standard :

$$Gl^+(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow Gl^+(n+1, \mathbb{R})$$

donné par :

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

En restreignant cette structure à \mathbb{M}^n , on retrouve notre structure spinorielle de départ (cf [?]).

À partir de maintenant, nous nous intéressons au cas où $n = 2$. Nous allons déterminer explicitement le fibré des spineurs de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Nous avons vu dans la section 3.2.2 que

$$\Sigma(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R})|_{\mathbb{M}^2} \cong \Sigma\mathbb{M}^2.$$

Donc si $\varphi \in \Gamma(\Sigma(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}))$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(\cdot, t) \in \Gamma(\Sigma\mathbb{M}^2).$$

On a donc l'isomorphisme de fibrés vectoriels suivant :

$$\begin{aligned} \beta : \Sigma(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}) &\longrightarrow \Sigma(\mathbb{M}^2) \oplus \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto (\widetilde{\varphi}, 0), \end{aligned}$$

où \oplus est une somme directe de fibrés vectoriels et \mathbb{R} le fibré sur \mathbb{R} de fibre $\{0\}$. Cela signifie simplement que la fibre $\Sigma_{(x,t)}(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R})$ au dessus de chaque point $(x, t) \in \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ n'est rien d'autre que la fibre $\Sigma_x\mathbb{M}^2$ du fibré des spineurs de \mathbb{M}^2 .

Une section de $\Sigma(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R})$ sera alors une application \mathcal{C}^∞

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \Gamma(\Sigma(\mathbb{M}^2)) \\ t &\longmapsto \varphi_t. \end{aligned}$$

Les champs particuliers

Dans toute la suite, nous privilégions des sections particulières intéressantes, les sections constantes par rapport au paramètre t .

Nous avons la formule de Gauss spinorielle,

$$\overline{\nabla}_X \varphi = \nabla_X \varphi + \frac{1}{2} \gamma(AX) \gamma(\nu) \varphi,$$

où $\overline{\nabla}$ est la connexion spinorielle sur $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, ∇ la connexion spinorielle sur \mathbb{M}^2 , γ la multiplication de Clifford sur $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ et A l'application de Weingarten de l'immersion de \mathbb{M}^2 dans $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Or, \mathbb{M}^2 étant totalement géodésique dans $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, on obtient en choisissant $\varphi_t = \varphi_0$ un spineur de Killing sur \mathbb{M}^2 , *i.e.* $\nabla_X \varphi_0 = \eta \gamma^{\mathbb{M}^2}(X) \varphi_0$:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X \varphi &= \nabla_X \varphi_0 \\ &= \eta \gamma^{\mathbb{M}^2}(X) \varphi_0 \\ &= \eta \gamma(X) \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \varphi_0 \\ &= \eta \gamma(X) \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \varphi \end{aligned}$$

D'autre part, l'élément de volume complexe $\omega_{\mathbb{C}} = -e_1 \cdot e_2 \cdot \frac{\partial}{\partial t}$ agissant comme l'identité, on a donc

$$\begin{aligned} \gamma(e_1)\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi &= \gamma(e_2)\gamma(e_1)\gamma(e_2)\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi \\ &= -\gamma(e_2)\varphi. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \gamma(e_2)\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi &= -\gamma(e_1)\gamma(e_1)\gamma(e_2)\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi \\ &= \gamma(e_1)\varphi. \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$(3.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla}_{e_1}\varphi = -\eta\gamma(e_2)\varphi, \\ \bar{\nabla}_{e_2}\varphi = \eta\gamma(e_1)\varphi, \\ \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\varphi = 0. \end{array} \right.$$

Ces champs de spineurs particuliers sont les champs particuliers qui jouent le rôle des champs de Killing dans \mathbb{S}^3 ou \mathbb{H}^3 .

3.5.2 Champs de spineurs particuliers sur les surfaces de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, $\tau \neq 0$

Nous allons ici donner l'expression de spineurs définis sur $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ et qui vont jouer le rôle que jouent les spineurs de Killing dans les espaces modèles. Pour cela, nous allons munir $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ de sa structure spinorielle triviale. Nous considérons alors une section constante φ . Grâce à l'expression locale de la dérivée covariante spinorielle et de l'expression de symboles de Christoffel Γ_{ij}^k donnée dans la section 3.3.2, on peut calculer explicitement $\bar{\nabla}_X\varphi$. On rappelle que l'élément de volume complexe $\omega_3^{\mathbb{C}} = -e_1 \cdot e_2 \cdot \xi$ agit comme l'identité, ce qui implique

$$\begin{aligned} \gamma(e_1)\gamma(e_2)\varphi &= -\gamma(e_1)\gamma(e_2)\gamma(e_1)\gamma(e_2)\gamma(\xi)\varphi \\ &= \gamma(\xi)\varphi. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\gamma(e_2)\gamma(\xi)\varphi = \gamma(e_1)\varphi \quad \text{et} \quad \gamma(\xi)\gamma(e_1)\varphi = \gamma(e_2)\varphi.$$

L'expression de la dérivée covariante spinorielle étant donnée pour $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}(\kappa, \tau))$ par

$$\bar{\nabla}_X\varphi = X(\varphi) + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^3 \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle \gamma(e_i)\gamma(e_j)\varphi,$$

on en déduit

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{e_1}\varphi &= \frac{1}{4}(\Gamma_{12}^3\gamma(e_2)\gamma(\xi)\varphi + \Gamma_{13}^2\gamma(\xi)\gamma(e_2)\varphi) \\ &= \frac{1}{2}\tau\gamma(e_2)\gamma(\xi)\varphi \\ &= \frac{1}{2}\tau\gamma(e_1)\varphi.\end{aligned}$$

De la même manière, on montre que

$$\bar{\nabla}_{e_2}\varphi = \frac{1}{2}\tau\gamma(e_2)\varphi.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\xi}\varphi &= \frac{1}{4}(\Gamma_{31}^2\gamma(e_1)\gamma(e_2)\varphi + \Gamma_{32}^1\gamma(e_2)\gamma(e_1)\varphi) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{2\tau} - \tau\right)\gamma(e_1)\gamma(e_2)\varphi \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{2\tau} - \tau\right)\gamma(\xi)\varphi.\end{aligned}$$

Nous avons donc un spineur particulier φ qui vérifie

$$(3.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla}_{e_1}\varphi = \frac{1}{2}\tau\gamma(e_1)\varphi, \\ \bar{\nabla}_{e_2}\varphi = \frac{1}{2}\tau\gamma(e_2)\varphi \\ \bar{\nabla}_{\xi}\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{2\tau} - \tau\right)\gamma(\xi)\varphi. \end{array} \right.$$

Remarque 25. *Il y a un second spineur qui vérifie les mêmes relations et linéairement indépendant de φ . Il est obtenu en prenant une section constante orthogonale à celle prise pour φ . En effet, l'espace des spineurs de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ est de dimension complexe 2.*

3.5.3 Spineurs de Killing généralisés

Dans les Sections 3.5.1 et 3.5.2, nous avons donné l'expression de champs de spineurs particuliers sur $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Nous nous intéressons ici à la restriction de ces champs particuliers à une hypersurface, afin d'obtenir un champ de spineurs privilégié sur une telle surface.

Sur les hypersurfaces de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

Soit $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une surface orientable de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, orientée par ν . La surface $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ étant orientée, elle est munie d'une structure spinorielle induite de celle de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. De plus, on a l'identification suivante entre les fibrés des spineurs :

$$\Sigma(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R})|_N \cong \Sigma N.$$

Comme nous l'avons déjà signalé plus haut, la formule de Gauss spinorielle relie la connexion spinorielle ambiante à celle de la surface. Pour tout $X \in \mathfrak{X}(N)$ et tout $\psi \in \Gamma(\Sigma(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}))$, nous avons

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X \psi)|_N &= \nabla_X(\psi|_N) + \frac{1}{2}\gamma^N(AX)\psi|_N \\ &= \nabla_X(\psi|_N) + \frac{1}{2}\gamma(AX)\gamma(\nu)\psi|_N, \end{aligned}$$

où γ est la multiplication de Clifford dans $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, γ^N la multiplication de Clifford dans N et A l'opérateur de Weingarten de l'immersion de N dans $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Si on applique cette formule au champ de spineurs particulier de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ donné en (3.28), on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla_X \varphi &= \bar{\nabla}_X \varphi - \frac{1}{2}\gamma^N(AX)\varphi \\ &= \eta\gamma(X_t)\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi - \frac{1}{2}\gamma^N(AX)\varphi, \end{aligned}$$

où X_t est la partie de X tangente à \mathbb{M}^2 , c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} X_t &= X - \left\langle X, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t} \\ &= X - \langle X, T \rangle T - f \langle X, T \rangle \nu. \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} \nabla_X \varphi &= \eta\gamma(X)\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi - \eta\left\langle X, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi - \frac{1}{2}\gamma^N(AX)\varphi \\ &= \eta\gamma(X)\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi + \eta\left\langle X, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \varphi - \frac{1}{2}\gamma^N(AX)\varphi \\ &= \eta\gamma(X)\gamma(T)\varphi + \eta f\gamma(X)\gamma(\nu)\varphi + \eta\langle X, T \rangle \varphi - \frac{1}{2}\gamma^N(AX)\varphi. \end{aligned}$$

D'autre part, si l'on note $\omega = e_1 \cdot e_2$ l'élément de volume réel sur N , on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} \gamma(X) = -\gamma^N(X)\gamma^N(\omega), \\ \gamma(\nu) = \gamma^N(\omega). \end{cases}$$

En remplaçant, et en utilisant le fait que $\omega^2 = -1$ et que ω anticommute avec les vecteurs tangents à N , on obtient

$$\nabla_X \varphi = \eta\gamma^N(X)\gamma^N(\omega)\gamma^N(T)\gamma^N(\omega)\varphi + \eta\langle X, T \rangle \varphi - \eta f\gamma^N(X)\gamma^N(\omega)\gamma^N(\omega)\varphi - \frac{1}{2}\gamma^N(AX)\varphi$$

Nous pouvons réécrire cette relation de la façon suivante :

$$(3.30) \quad \nabla_X \varphi = \eta X \cdot T \cdot \varphi + \eta f X \cdot \varphi + \eta \langle X, T \rangle \varphi - \frac{1}{2} AX \cdot \varphi.$$

où “ \cdot ” représente la multiplication de Clifford sur N .

Définition 3.9. *Un spineur vérifiant l'équation (3.30) est appelé un spineur de Killing généralisé.*

Proposition 3.10. *i) Si $\eta = \frac{1}{2}$, alors la norme d'un spineur de Killing généralisé est constante.*

ii) Si $\eta = \frac{i}{2}$, alors la norme d'un spineur de Killing généralisé satisfait pour tout $X \in \mathfrak{X}(N)$:

$$X|\varphi|^2 = \Re \langle iX \cdot T \cdot \varphi + i f X \cdot \varphi, \varphi \rangle.$$

Preuve : Il suffit de calculer $X|\varphi|^2$ pour tout $X \in \mathfrak{X}(N)$. En effet,

$$X|\varphi|^2 = 2\Re \langle \nabla_X \varphi, \varphi \rangle.$$

On remplace $\nabla_X \varphi$ par son expression donnée par (3.31), et dans le cas où $\eta = \frac{1}{2}$, on utilise le lemme suivant :

Lemme 3.11. *Soit ψ un champ de spineurs et β une 1-forme ou une 2-forme réelle, alors on a :*

$$\Re \langle \beta \cdot \psi, \psi \rangle = 0.$$

On déduit alors facilement de ce lemme que

$$\Re \langle A(X) \cdot \varphi, \varphi \rangle = 0,$$

ainsi que

$$\Re \langle f X \cdot \varphi, \varphi \rangle = 0.$$

Enfin, toujours grâce à ce même lemme, on voit facilement que :

$$\Re \langle X \cdot T \cdot \varphi, \varphi \rangle + \Re \langle \langle X, T \rangle \varphi, \varphi \rangle = 0.$$

Si $\eta = \frac{i}{2}$, les trois premiers termes ne sont plus nuls et un calcul immédiat donne le résultat attendu. \square

Remarque 26. *Dans le cas où $\eta = \frac{i}{2}$, la norme de φ n'est pas constante. Cependant, on peut voir que φ ne s'annule jamais.*

Sur les Hypersurfaces de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

Dans cette section, nous allons donner l'expression de la restriction à une surface d'un 3-espace homogène $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Soit $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une surface orientable de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, orientée par ν . La surface $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ étant orientée, elle est munie d'une structure spinorielle induite de celle de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. De plus, on a l'identification suivante entre les fibrés des spineurs

$$\Sigma \mathbb{E}(\kappa, \tau)|_N \cong \Sigma N.$$

D'autre part, pour tout $X \in \mathfrak{X}(N)$ et tout $\psi \in \Gamma(\Sigma \mathbb{E})$, nous avons la formule de Gauss qui relie les connexions spinorielles

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X \psi)|_N &= \nabla_X(\psi|_N) + \frac{1}{2} \gamma^N(AX)\psi \\ &= \nabla_X(\psi|_N) + \frac{1}{2} \gamma(AX)\gamma(\nu)\psi, \end{aligned}$$

où γ est la multiplication de Clifford dans $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, γ^N la multiplication de Clifford dans N et A l'opérateur de Weingarten de l'immersion de N dans $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Pour le champ de spineurs particulier défini en (3.29), l'équation de Gauss spinorielle devient

$$\nabla_X(\varphi|_N) = \frac{\tau}{2} \gamma(\tilde{X})\varphi|_N + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{2\tau} - \tau \right) x \gamma(\xi)\varphi|_N - \frac{1}{2} \gamma^N(AX)\varphi|_N,$$

où \tilde{X} et x sont définis comme dans la section 3.3.6 par :

$$X = \tilde{X} + x\xi,$$

c'est-à-dire $x = \langle X, T \rangle$ et

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= X - \langle X, T \rangle \xi \\ &= X - \langle X, T \rangle T - f \langle X, T \rangle \nu. \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\begin{aligned} \nabla_X \varphi &= \frac{\tau}{2} \gamma(X)\varphi - \frac{\tau}{2} \langle X, T \rangle \gamma(T)\varphi - \frac{\tau}{2} f \gamma(\nu)\varphi \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{2\tau} - \tau \right) \langle X, T \rangle \gamma(T)\varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{2\tau} - \tau \right) f \langle X, T \rangle \gamma(\nu)\varphi - \frac{1}{2} \gamma^N(AX)\varphi \\ &= \frac{\tau}{2} \gamma(X)\varphi - \frac{\alpha}{2} \langle X, T \rangle \gamma(T)\varphi - \frac{\alpha}{2} f \langle X, T \rangle \gamma(\nu)\varphi - \frac{1}{2} \gamma(AX)\gamma(\nu)\varphi, \end{aligned}$$

où l'on a posé $\alpha = 2\tau - \frac{\kappa}{2\tau}$. D'autre part, si l'on note $\omega = e_1 \cdot_N e_2$ l'élément de volume réel sur N , on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} \gamma(X) = -\gamma^N(X)\gamma^N(\omega), \\ \gamma(\nu) = \gamma^N(\omega). \end{cases}$$

En remplaçant, et en utilisant le fait que $\omega^2 = -1$, on obtient

$$(3.31) \quad \nabla_X \varphi = -\frac{\tau}{2} X \cdot \omega \cdot \varphi + \frac{\alpha}{2} \langle X, T \rangle T \cdot \omega \cdot \varphi - \frac{\alpha}{2} f \langle X, T \rangle \omega \cdot \varphi - \frac{1}{2} AX \cdot \varphi,$$

où “ \cdot ” représente sans ambiguïté la multiplication de Clifford sur N .

On rappelle que le fibré des spineurs ΣN se décompose en

$$\Sigma N = \Sigma^+ N \oplus \Sigma^- N,$$

où $\Sigma^\pm N$ est l'espace propre pour la valeur propre ± 1 sous l'action de l'élément de volume complexe $\omega_2 = i\omega$. Dans cette décomposition, φ s'écrit $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$, et l'on définit

$$\bar{\varphi} = \omega_2 \cdot \varphi = \varphi^+ - \varphi^-.$$

L'équation (3.31) peut alors se réécrire sous la forme

$$(3.32) \quad \nabla_X \varphi = i \frac{\tau}{2} X \cdot \bar{\varphi} - i \frac{\alpha}{2} \langle X, T \rangle T \cdot \bar{\varphi} + i \frac{\alpha}{2} f \langle X, T \rangle \bar{\varphi} - \frac{1}{2} AX \cdot \varphi.$$

Définition 3.12. *Un spineur vérifiant l'équation (3.32) est appelé un spineur de Killing généralisé.*

Proposition 3.13. *La norme d'un spineur de Killing généralisé est constante.*

Preuve : Il suffit de calculer $X|\varphi|^2$ pour tout $X \in \mathfrak{X}(N)$. En effet,

$$X|\varphi|^2 = 2\Re \langle \nabla_X \varphi, \varphi \rangle.$$

On remplace $\nabla_X \varphi$ par son expression donnée par (3.31), et on utilise le Lemme 3.11 pour conclure. \square

3.6 Immersions isométriques dans $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Dans cette section nous donnons une caractérisation spinorielle des surfaces immergées isométriquement dans les espaces produit $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

3.6.1 Les résultats

Voici les deux théorèmes que nous allons démontrer :

Théorème 3.14. *Soit $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une surface riemannienne connexe, simplement connexe et orientée. Soient T un champ de vecteurs, f et H deux fonctions sur N vérifiant :*

$$\begin{cases} f^2 + \|T\|^2 = 1, \\ \langle \nabla_X T, Y \rangle = \langle \nabla_Y T, X \rangle, \quad \forall X, Y \in \chi(N), \\ 2Hf = \operatorname{div}(T). \end{cases}$$

Enfin, soit A un champ d'endomorphismes sur N . Il y a équivalence entre la donnée :

- i) d'une immersion isométrique F de N dans $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ de courbure moyenne H telle que l'application de Weingarten associée à F par rapport à la normale ν est donnée par :*

$$dF \circ A \circ dF^{-1}$$

et telle que

$$\frac{\partial}{\partial t} = dF(T) + f\nu.$$

ii) d'un spineur φ solution de l'équation

$$\nabla_X \varphi = \frac{1}{2} X \cdot T \cdot \varphi + \frac{1}{2} f X \cdot \varphi + \frac{1}{2} \langle X, T \rangle \varphi - \frac{1}{2} AX \cdot \varphi,$$

où A vérifie de plus :

$$\nabla_X T = fAX,$$

et

$$df(X) = -\langle AX, T \rangle.$$

iii) d'une solution φ de l'équation de Dirac

$$D\varphi = H\varphi - \frac{1}{2} T \cdot \varphi - f\varphi,$$

de norme constante et telle que

$$df = -2Q_\varphi(T) + fT.$$

Nous avons l'analogie pour le cas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire $\eta = \frac{i}{2}$.

Théorème 3.15. Soit $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une surface riemannienne connexe, simplement connexe et orientée. Soient T un champ de vecteurs, f et H deux fonctions sur N vérifiant :

$$\begin{cases} f^2 + \|T\|^2 = 1, \\ \langle \nabla_X T, Y \rangle = \langle \nabla_Y T, X \rangle, \quad \forall X, Y \in \chi(N), \\ 2Hf = \operatorname{div}(T). \end{cases}$$

Enfin, soit A un champ d'endomorphismes sur N . Il y a équivalence entre la donnée :

i) d'une immersion isométrique F de N dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ de courbure moyenne H telle que l'application de Weingarten associée à F par rapport à la normale ν est donnée par :

$$dF \circ A \circ dF^{-1}$$

et telle que

$$\frac{\partial}{\partial t} = dF(T) + f\nu.$$

ii) d'un spineur φ solution de l'équation

$$\nabla_X \varphi = \frac{i}{2} X \cdot T \cdot \varphi + \frac{i}{2} f X \cdot \varphi + \frac{i}{2} \langle X, T \rangle \varphi - \frac{1}{2} AX \cdot \varphi,$$

où A vérifie de plus :

$$\nabla_X T = fAX,$$

et

$$df(X) = -\langle AX, T \rangle.$$

iii) d'une solution φ de l'équation de Dirac

$$D\varphi = H\varphi - \frac{i}{2}T \cdot \varphi - if\varphi,$$

ne s'annulant jamais, vérifiant :

$$X|\varphi|^2 = \Re e(iX \cdot T \cdot \varphi + ifX \cdot \varphi\varphi)$$

et

$$df = -2Q_\varphi(T) - B(T),$$

où B est le tenseur défini dans le Lemme 3.19.

3.6.2 Une condition nécessaire et suffisante

Commençons par rappeler ce résultat de B. Daniel ([?]) qui donne une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une immersion isométrique d'une surface N simplement connexe et orientée dans $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Théorème 3.16 (Daniel [?]). *Soit $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une surface simplement connexe orientée et ∇ sa connexion de Levi-Civita. Soit A un champ d'endomorphismes symétriques $A_y : T_y N \rightarrow T_y N$, T un champ de vecteurs sur N et f une fonction lisse sur N , tels que $\|T\|^2 + f^2 = 1$. Si $(\langle \cdot, \cdot \rangle, A, T, f)$ satisfait aux équations de compatibilité pour $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Alors, il existe une immersion isométrique :*

$$F : N \rightarrow \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$$

tel que l'opérateur de Weingarten de l'immersion par rapport à la normale ν associée à F soit :

$$dF \circ A \circ dF^{-1}$$

et telle que

$$\frac{\partial}{\partial t} = dF(T) + f\nu.$$

De plus, l'immersion est unique à une isométrie globale de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ qui préserve l'orientation de \mathbb{R} .

3.6.3 Spineurs de Killing généralisés et équations de compatibilité

Dans un premier temps, nous montrons que l'existence d'un spineur de Killing généralisé implique les équations de Gauss et Codazzi. Soit alors $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une surface orientable qui possède un spineur de Killing généralisé, c'est-à-dire un spineur solution de l'équation (3.30). Nous allons voir que les conditions d'intégrabilité pour cette équation sont exactement les conditions de Gauss et Codazzi.

Proposition 3.17. *Soit $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une surface orientable admettant une solution non triviale de l'équation (3.30) et telle que les équations (3.22) et (3.23) soient vérifiées. Alors les équations de Gauss et Codazzi pour $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ sont satisfaites.*

Preuve : La preuve de cette proposition repose sur le calcul du tenseur de courbure spinoriel appliqué au champ de spineurs φ solution de l'équation (3.30), *i.e.*

$$\mathcal{R}(X, Y)\varphi = \nabla_X \nabla_Y \varphi - \nabla_Y \nabla_X \varphi - \nabla_{[X, Y]}\varphi,$$

pour $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$. En utilisant l'expression donnée par (3.30), les équations (3.22) et (3.23), le fait que $\omega^2 = -1$ et que ω anticommute avec les vecteurs tangents à N , on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y \varphi = & \underbrace{\eta f Y \cdot AX \cdot \varphi}_{\alpha_1(X, Y)} + \underbrace{\eta^2 Y \cdot T \cdot X \cdot T \cdot \varphi}_{\alpha_2(X, Y)} + \underbrace{\eta^2 f Y \cdot T \cdot X \cdot \varphi}_{\alpha_3(X, Y)} \\ & - \underbrace{\frac{\eta}{2} Y \cdot T \cdot AX \cdot \varphi}_{-\alpha_4(X, Y)} - \underbrace{\eta \langle AX, T \rangle Y \cdot \varphi}_{-\alpha_5(X, Y)} + \underbrace{\eta^2 f Y \cdot X \cdot T \cdot \varphi}_{\alpha_6(X, Y)} \\ & + \underbrace{\eta^2 \langle X, T \rangle Y \cdot T \cdot \varphi}_{\alpha_7(X, Y)} + \underbrace{\eta^2 f^2 Y \cdot X \cdot \varphi}_{\alpha_8(X, Y)} + \underbrace{\eta^2 f \langle X, T \rangle Y \cdot \varphi}_{\alpha_9(X, Y)} \\ & - \underbrace{\frac{\eta}{2} f Y \cdot AX \cdot \varphi}_{-\alpha_{10}(X, Y)} + \underbrace{\eta f \langle Y, AX \rangle \varphi}_{\alpha_{11}(X, Y)} + \underbrace{\eta^2 \langle Y, T \rangle X \cdot T \cdot \varphi}_{\alpha_{12}(X, Y)} \\ & + \underbrace{\eta^2 f \langle Y, T \rangle X \cdot \varphi}_{\alpha_{13}(X, Y)} + \underbrace{\eta^2 \langle X, T \rangle \langle Y, T \rangle \varphi}_{\alpha_{14}(X, Y)} - \underbrace{\frac{\eta}{2} \langle Y, T \rangle AX \cdot \varphi}_{-\alpha_{15}(X, Y)} \\ & - \underbrace{\frac{1}{2} \nabla_X (AY) \cdot \varphi}_{-\alpha_{16}(X, Y)} - \underbrace{\frac{\eta}{2} AY \cdot X \cdot T \cdot \varphi}_{-\alpha_{17}(X, Y)} - \underbrace{\frac{\eta}{2} f AY \cdot X \cdot \varphi}_{-\alpha_{18}(X, Y)} \\ & - \underbrace{\frac{\eta}{2} \langle X, T \rangle AY \cdot \varphi}_{-\alpha_{19}(X, Y)} + \underbrace{\frac{1}{4} AY \cdot AX \cdot \varphi}_{\alpha_{20}(X, Y)} + \underbrace{\eta \nabla_X Y \cdot T \cdot \varphi}_{\alpha_{21}(X, Y)} \\ & + \underbrace{\eta f \nabla_X Y \cdot \varphi}_{\alpha_{22}(X, Y)} + \underbrace{\eta \langle \nabla_X Y, T \rangle \varphi}_{\alpha_{23}(X, Y)} \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\nabla_X \nabla_Y \varphi = \sum_{i=1}^{23} \alpha_i(X, Y),$$

et il est alors clair que par symétrie,

$$\nabla_Y \nabla_X \varphi = \sum_{i=1}^{23} \alpha_i(Y, X).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \nabla_{[X, Y]}\varphi = & \underbrace{\eta [X, Y] \cdot T \cdot \varphi}_{\beta_1([X, Y])} + \underbrace{\eta f [X, Y] \cdot \varphi}_{\beta_2([X, Y])} \\ & + \underbrace{\eta \langle [X, Y], T \rangle \varphi}_{\beta_3([X, Y])} - \underbrace{\frac{1}{2} A [X, Y] \cdot \varphi}_{-\beta_4([X, Y])}. \end{aligned}$$

Comme la connexion ∇ est sans torsion, on a :

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0,$$

et de ce fait

$$\begin{aligned}\alpha_{21}(X, Y) - \alpha_{21}(Y, X) - \beta_1([X, Y]) &= 0, \\ \alpha_{22}(X, Y) - \alpha_{22}(Y, X) - \beta_2([X, Y]) &= 0, \\ \alpha_{23}(X, Y) - \alpha_{23}(Y, X) - \beta_3([X, Y]) &= 0.\end{aligned}$$

D'autre part, par symétrie, il est clair que

$$\alpha_{11}(X, Y) - \alpha_{11}(Y, X) = 0$$

et

$$\alpha_{14}(X, Y) - \alpha_{14}(Y, X) = 0.$$

D'autres termes se simplifient par symétrie. Plus précisément, nous avons :

$$\alpha_1(X, Y) + \alpha_{10}(X, Y) + \alpha_{18}(X, Y) - \alpha_1(Y, X) - \alpha_{10}(Y, X) - \alpha_{18}(Y, X) = 0,$$

ainsi que

$$\alpha_3(X, Y) + \alpha_6(X, Y) - \alpha_3(Y, X) - \alpha_6(Y, X) = 0,$$

et enfin,

$$\begin{aligned}\alpha_4(X, Y) + \alpha_5(X, Y) + \alpha_{15}(X, Y) + \alpha_{17}(X, Y) + \alpha_{19}(X, Y) \\ - \alpha_4(Y, X) - \alpha_5(Y, X) - \alpha_{15}(Y, X) - \alpha_{17}(Y, X) - \alpha_{19}(Y, X) = 0.\end{aligned}$$

D'autre part, les termes α_2 , α_7 , α_8 et α_{12} se combinent. En effet, si on pose

$$\alpha = \alpha_2 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_{12},$$

alors :

$$\begin{aligned}\alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) &= \eta^2 \left[f^2 (Y \cdot X - X \cdot Y) + Y \cdot T \cdot X \cdot T - X \cdot T \cdot Y \cdot T \right] \cdot \varphi \\ &= \eta^2 \left[f^2 (Y \cdot X - X \cdot Y) + \|T\|^2 (Y \cdot X - X \cdot Y) \right] \cdot \varphi \\ &\quad - 2\eta^2 (\langle X, T \rangle Y \cdot T - \langle Y, T \rangle X \cdot T) \cdot \varphi\end{aligned}$$

En faisant maintenant le choix de prendre pour X et Y une base orthonormée $\{e_1, e_2\}$, on a

$$\begin{aligned}\alpha(e_1, e_2) - \alpha(e_2, e_1) &= -2\eta^2 e_1 \cdot e_2 \cdot \varphi + 2\eta^2 \left[-T_1 e_2 (T_1 e_1 + T_2 e_2) + T_2 e_2 (T_1 e_1 + T_2 e_2) \right] \cdot \varphi \\ &= -2\eta^2 \omega \cdot \varphi + 2\eta^2 (T_1^2 \omega \cdot + T_1 T_2 - T_1 T_2 + T_2^2 \omega \cdot) \varphi \\ &= -2\eta^2 f^2 \omega \cdot \varphi.\end{aligned}$$

Enfin, toujours avec $X = e_1$ et $Y = e_2$, nous avons :

$$\alpha_9(e_1, e_2) + \alpha_{13}(e_1, e_2) - \alpha_9(e_2, e_1) - \alpha_{13}(e_2, e_1) = 2T \cdot \omega \cdot \varphi = -2J(T) \cdot \varphi,$$

où J est la rotation positive d'angle $\frac{\pi}{2}$ sur TM . Nous obtenons donc finalement :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(e_1, e_2)\varphi &= \frac{1}{4}(Ae_2 \cdot Ae_1 - Ae_1 \cdot Ae_2) \cdot \varphi - 2\eta^2 f^2 \omega \cdot \varphi \\ &\quad - \frac{1}{2}d^\nabla A(e_1, e_2) \cdot \varphi - 2JT \cdot \varphi. \end{aligned}$$

En utilisant l'identité de Ricci (3.4)

$$\mathcal{R}(e_1, e_2)\varphi = -\frac{1}{2}R_{1212}e_1 \cdot e_2 \cdot \varphi,$$

nous obtenons :

$$\left(\underbrace{R_{1212} - \det(A) - \kappa f^2}_G \right) \omega \cdot \varphi = \left(\underbrace{d^\nabla A(e_1, e_2) + \kappa^2 f J(T)}_C \right) \cdot \varphi,$$

c'est-à-dire

$$G\omega \cdot \varphi = C \cdot \varphi,$$

où G est une fonction et C un champ de vecteurs. Or on rappelle que $\omega \cdot \varphi = -i\bar{\varphi}$, d'où

$$C \cdot \varphi^\pm = \pm iG\varphi^\mp.$$

On en déduit donc

$$\|C\|^2 \varphi^\pm = -G^2 \varphi^\pm.$$

Comme φ est un champ de spineur non trivial solution de (3.30), par la Proposition 3.10, φ^+ et φ^- ne peuvent pas être nuls en même temps. Donc $C = 0$ et $G = 0$. Or le fait que $G = 0$ n'est autre que la condition de Gauss et $C = 0$ la condition de Codazzi, ce qui achève la preuve. \square

3.6.4 Équation de Killing généralisée et équation de Dirac

Si un champ de spineur φ est solution de l'équation des spineurs de Killing (3.30), alors en traçant cette équation, φ est également solution de l'équation de Dirac correspondante :

$$(3.33) \quad D\varphi = H\varphi - \eta T \cdot \varphi - 2\eta f\varphi.$$

Nous allons voir que cette équation pour un spineur dont la norme satisfait à la Proposition 3.10 est équivalente à l'équation (3.30). Pour montrer cela, commençons par le lemme suivant :

Lemme 3.18. *Soit φ une solution non triviale de l'équation des spineurs de Killing généralisé (3.30). Alors l'endomorphisme symétrique A est donné par :*

$$A(X, Y) = 2Q_\varphi(X, Y) + B(X, Y),$$

où Q_φ est le tenseur d'impulsion-énergie associé au spineur φ , et B le l'endomorphisme symétrique défini par :

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= -2\Re \langle \eta \langle X, Y \rangle T \cdot \varphi, \varphi \rangle - 2\Re \langle \eta f \langle X, Y \rangle \varphi, \varphi \rangle \\ &\quad - \Re \langle \eta (\langle X, T \rangle Y + \langle Y, T \rangle X) \cdot \varphi, \varphi \rangle \end{aligned}$$

On rappelle que le tenseur d'impulsion-énergie associé au spineur φ est le 2-tenseur symétrique défini par :

$$Q_\varphi(X, Y) := \frac{1}{2} \Re \langle X \cdot \nabla_Y \varphi + Y \cdot \nabla_X \varphi, \varphi / |\varphi|^2 \rangle.$$

Preuve : Il suffit de calculer le tenseur d'impulsion-énergie Q_φ en utilisant le fait que φ est solution de l'équation (3.30). \square

Lemme 3.19. *– Si $\eta = \frac{1}{2}$, alors $B = -f\text{Id}$.
– Si $\eta = \frac{i}{2}$, alors B vérifie :*

$$\begin{cases} B_{11} = -\Re \langle iT \cdot \varphi, \varphi \rangle - \Re \langle iT_1 e_1 \cdot \varphi, \varphi \rangle \\ B_{12} = B_{21} = \frac{1}{2} \Re \langle i(T_1 e_2 + T_2 e_1) \cdot \varphi, \varphi \rangle \\ B_{22} = -\Re \langle iT \cdot \varphi, \varphi \rangle - \Re \langle iT_2 e_2 \cdot \varphi, \varphi \rangle \end{cases}$$

Preuve : Il suffit de remplacer dans l'expression du Lemme 3.18. \square

Rappelons que tout spineur φ se décompose sous l'action de la forme volume complexe ω_2 en $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$, avec $\omega_2 \cdot \varphi^\pm = \pm \varphi^\pm$. Nous avons alors :

$$(3.34) \quad D\varphi^\pm = H\varphi^\mp - \eta T \cdot \varphi^\pm - 2\eta f\varphi^\mp.$$

On définit les endomorphismes suivants :

$$Q_\varphi^\pm(X, Y) = \Re \langle \nabla_X \varphi^\pm, Y \cdot \varphi^\mp \rangle,$$

et

$$\begin{aligned} B^\pm(X, Y) &= -\Re \langle \eta X \cdot T \cdot \varphi^\pm, Y \cdot \varphi^\mp \rangle - \Re \langle \eta \langle X, T \rangle \varphi^\pm, Y \cdot \varphi^\mp \rangle \\ &\quad - \Re \langle \eta f X \cdot \varphi^\mp, Y \cdot \varphi^\mp \rangle \end{aligned}$$

D'autre part, nous posons

$$A^\pm = Q_\varphi^\pm + B^\pm,$$

et

$$W = \frac{A^+}{|\varphi^-|^2} - \frac{A^-}{|\varphi^+|^2}.$$

À partir de maintenant, nous allons diviser notre étude en deux cas, $\eta = \frac{1}{2}$ et $\eta = \frac{i}{2}$.

Le cas $\eta = \frac{1}{2}$: Dans ce cas, nous supposons que le spineur φ est de norme constante et nous allons montrer qu'alors W est identiquement nul. Pour cela, nous allons montrer qu'il est symétrique, à trace nulle et de rang inférieur à 1. Commençons par la trace avec le lemme suivant :

Lemme 3.20. *Les endomorphismes Q_φ^\pm et B^\pm vérifient :*

1. $\text{tr}(Q_\varphi^\pm) = -H|\varphi^\mp|^2 + \frac{1}{2}\Re\langle T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle + f|\varphi^\mp|^2$.
2. $\text{tr}(B^\pm) = -\frac{1}{2}\Re\langle T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle - f|\varphi^\mp|^2$.

Preuve : Pour Q_φ^\pm , nous avons :

$$\begin{aligned} \text{tr}(Q_\varphi^\pm) &= Q_\varphi^\pm(e_1, e_1) + Q_\varphi^\pm(e_2, e_2) \\ &= \Re\langle \nabla_{e_1}\varphi^\pm, e_1 \cdot \varphi^\mp \rangle + \langle \nabla_{e_2}\varphi^\pm, e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle \\ &= -\Re\langle D\varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle \\ &= -H|\varphi^\mp|^2 + \frac{1}{2}\Re\langle T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle + \Re\langle f\varphi^\mp, \varphi^\mp \rangle. \end{aligned}$$

Pour B^\pm , nous avons

$$\begin{aligned} \text{tr}(B^\pm) &= B^\pm(e_1, e_1) + B^\pm(e_2, e_2) \\ &= -\Re\langle T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle + \frac{1}{2}\Re\langle T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle - \Re\langle f\varphi^\mp, \varphi^\mp \rangle \\ &= -\frac{1}{2}\Re\langle T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle - f|\varphi^\mp|^2. \end{aligned}$$

□

Passons maintenant au lemme suivant qui donne le défaut de symétrie des endomorphismes Q_φ^\pm et B^\pm .

Lemme 3.21. *Les endomorphismes Q_φ^\pm et B^\pm vérifient :*

1. $Q_\varphi^\pm(e_1, e_2) = Q_\varphi^\pm(e_2, e_1) + \frac{1}{2}\Re\langle \omega \cdot T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle$,
2. $B^\pm(e_1, e_2) = B^\pm(e_2, e_1) - \frac{1}{2}\Re\langle \omega \cdot T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle$.

Preuve : Calculons $Q_\varphi^\pm(e_1, e_2)$.

$$\begin{aligned} Q_\varphi^\pm(e_1, e_2) &= \Re\langle \nabla_{e_1}\varphi^\pm, e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle \\ &= \Re\langle e_1 \cdot \nabla_{e_1}\varphi^\pm, e_1 \cdot e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle \\ &= \Re\langle D\varphi^\pm, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle - \Re\langle e_2 \cdot \nabla_{e_2}\varphi^\pm, e_1 \cdot e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle \\ &= \Re\langle D\varphi^\pm, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle + Q_\varphi^\pm(e_2, e_1). \end{aligned}$$

En utilisant (3.34), on obtient :

$$\begin{aligned} \Re\langle D\varphi^\pm, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle &= \Re\langle H\varphi^\mp, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle - \frac{1}{2}\Re\langle T \cdot \varphi^\pm, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle - f\Re\langle \varphi^\mp, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle \\ &= -\frac{1}{2}\Re\langle T \cdot \varphi^\pm, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle \\ &= \frac{1}{2}\Re\langle \omega \cdot T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle. \end{aligned}$$

Calculons maintenant $B^\pm(e_1, e_2) - B^\pm(e_2, e_1)$

$$\begin{aligned}
B^\pm(e_1, e_2) - B^\pm(e_2, e_1) &= -\frac{1}{2}\Re \langle e_1 \cdot T \cdot \varphi^\pm, e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle - \frac{1}{2}\Re \langle T_1 \varphi^\pm, e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle \\
&\quad - \frac{1}{2}\Re \langle f e_1 \cdot \varphi^\mp, e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle + \frac{1}{2}\Re \langle e_2 \cdot T \cdot \varphi^\pm, e_1 \cdot \varphi^\mp \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}\Re \langle T_2 \varphi^\pm, e_1 \cdot \varphi^\mp \rangle + \frac{1}{2}\Re \langle f e_2 \cdot \varphi^\mp, e_1 \cdot \varphi^\mp \rangle \\
&= \frac{1}{2}\Re \langle e_2 \cdot e_1 \cdot T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle - \frac{1}{2}\Re \langle e_1 \cdot e_2 \cdot T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}\Re \langle (T_1 e_2 - T_2 e_1) \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle \\
&= -\Re \langle \omega \cdot T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle + \frac{1}{2}\Re \langle \omega \cdot T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle \\
&= -\frac{1}{2}\Re \langle \omega \cdot T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle.
\end{aligned}$$

□

Nous déduisons de ces deux lemmes le corollaire suivant :

Lemme 3.22. *L'endomorphisme W est symétrique et à trace nulle.*

Preuve : On déduit du Lemme 3.20 que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A^\pm) &= \operatorname{tr}(Q_\varphi^\pm) + \operatorname{tr}(B^\pm) \\
&= -H|\varphi^\mp|^2 + \frac{1}{2}\Re \langle T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle + f|\varphi^\mp|^2 - \frac{1}{2}\Re \langle T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle - f|\varphi^\mp|^2 \\
&= -H|\varphi^\mp|^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{tr}(W) = \frac{\operatorname{tr}(A^+)}{|\varphi^-|^2} - \frac{\operatorname{tr}(A^-)}{|\varphi^+|^2} = 0.$$

D'autre part, grâce au Lemme 3.21, nous avons :

$$\begin{aligned}
A^\pm(e_1, e_2) &= Q_\varphi^\pm(e_1, e_2) + B^\pm(e_1, e_2) \\
&= Q_\varphi^\pm(e_2, e_1) + \frac{1}{2}\Re \langle \omega \cdot T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle + B^\pm(e_2, e_1) - \frac{1}{2}\Re \langle \omega \cdot T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle \\
&= Q_\varphi^\pm(e_2, e_1) + B^\pm(e_2, e_1) = A^\pm(e_2, e_1).
\end{aligned}$$

Par conséquent, A^+ et A^- sont symétriques et donc W aussi. □

Enfin, nous avons ce dernier lemme qui assure que W est de rang inférieur à 1.

Lemme 3.23. *Le champ d'endomorphisme W vérifie :*

$$\Re \langle W(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle = 0$$

pour tout vecteur tangent X .

Preuve : Tout d'abord, comme φ est de norme constante, pour tout champ de vecteur tangent X , nous avons :

$$\begin{aligned}
 0 &= X|\varphi|^2 \\
 &= X(|\varphi^+|^2 + |\varphi^-|^2) \\
 &= 2\Re(\nabla_X \varphi^+, \varphi^+) + 2\Re(\nabla_X \varphi^-, \varphi^-) \\
 (3.35) \quad &= 2\Re(U(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+),
 \end{aligned}$$

où $U(X) := \frac{Q_\varphi^+(X)}{|\varphi^-|^2} - \frac{Q_\varphi^-(X)}{|\varphi^+|^2}$. Pour simplifier les notations on pose

$$U^+(X) := \frac{Q_\varphi^+(X)}{|\varphi^-|^2} \quad \text{et} \quad U^-(X) := \frac{Q_\varphi^-(X)}{|\varphi^+|^2}.$$

On pose d'autre part

$$V^+(X) := \frac{B^+(X)}{|\varphi^-|^2}, \quad V^-(X) := \frac{B^-(X)}{|\varphi^+|^2} \quad \text{et} \quad V = V^+ - V^-.$$

Calculons alors $\Re(V(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+)$.

$$\begin{aligned}
 \Re(V(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+) &= \Re(V^+(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+) - \Re(V^-(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+) \\
 &= \Re(V^+(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+) + \Re(V^-(X) \cdot \varphi^+, \varphi^-).
 \end{aligned}$$

Or,

$$\Re(V^+(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+) = \Re(V^+(X, e_1)e_1 \cdot \varphi^-, \varphi^+) + \Re(V^+(X, e_2)e_2 \cdot \varphi^-, \varphi^+).$$

Regardons de plus près le terme $V^+(X, e_1)$

$$\begin{aligned}
 V^+(X, e_1) &= -\frac{1}{2}\Re\left\langle X \cdot T \cdot \varphi^+, e_1 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|^2} \right\rangle - \frac{1}{2}\Re\left\langle X, T \right\rangle \left\langle \varphi^+, e_1 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|^2} \right\rangle \\
 &\quad - \frac{1}{2}\Re\left\langle fX \cdot \varphi^-, e_1 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|^2} \right\rangle
 \end{aligned}$$

De même, nous avons :

$$\begin{aligned}
 V^+(X, e_2) &= -\frac{1}{2}\Re\left\langle X \cdot T \cdot \varphi^+, e_2 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|^2} \right\rangle - \frac{1}{2}\Re\left\langle \langle X, T \rangle \varphi^+, e_2 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|^2} \right\rangle \\
 &\quad - \frac{1}{2}\Re\left\langle fX \cdot \varphi^-, e_2 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|^2} \right\rangle
 \end{aligned}$$

Comme $\left(e_1 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|}, e_2 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|}\right)$ est une base orthonormée locale de $\Gamma(\Sigma^+N)$ pour le produit scalaire $\Re\langle \cdot, \cdot \rangle$, on en déduit que

$$V^+(X) \cdot \varphi^- = -\frac{1}{2}X \cdot T \cdot \varphi^+ - \frac{1}{2}\langle X, T \rangle \varphi^+ - \frac{1}{2}fX \cdot \varphi^-.$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} \Re \langle V^+(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle &= -\frac{1}{2} \Re \langle X \cdot T \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle - \frac{1}{2} \Re \langle \langle X, T \rangle \varphi^+, \varphi^+ \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \Re \langle fX \cdot \varphi^+, \varphi^- \rangle. \end{aligned}$$

On peut voir facilement que pour tout champ de vecteur X ,

$$\Re \langle X \cdot T \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle + \Re \langle \langle X, T \rangle \varphi^+, \varphi^+ \rangle = 0,$$

ce qui donne finalement :

$$\Re \langle V^+(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle = -\frac{1}{2} \Re \langle fX \cdot \varphi^+, \varphi^- \rangle.$$

De la même manière, on montre que :

$$\Re \langle V^-(X) \cdot \varphi^+, \varphi^- \rangle = -\frac{1}{2} \Re \langle fX \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle.$$

On en conclut alors que

$$(3.36) \quad \Re \langle V(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle = 0.$$

Comme $W = U + V$, on déduit de (3.35) et (3.36) que

$$\Re \langle W(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle = 0.$$

Ceci achève la preuve du lemme. □

Le fait que

$$\Re \langle W(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle = 0$$

implique que l'endomorphisme W est de rang inférieur ou égal à 1. Comme W est également symétrique et à trace nulle, nous en déduisons

Proposition 3.24. *Le champ d'endomorphismes W est identiquement nul.*

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante :

Proposition 3.25. *Si φ est une solution non triviale de norme constante de l'équation de Dirac (3.33), alors φ est une solution de l'équation des spineurs de Killing généralisés (3.30).*

Preuve : On pose $F := A^+ + A^-$. Le fait que $W = 0$ implique

$$(3.37) \quad \frac{F}{|\varphi|^2} = \frac{A^+}{|\varphi^-|^2} = \frac{A^-}{|\varphi^+|^2}.$$

D'autre part, nous avons vu précédemment que pour tout champ de vecteurs X , nous avons :

$$\begin{aligned}\nabla_X \varphi &= U^+(X) \cdot \varphi^- + U^-(X) \cdot \varphi^+ \\ &= \frac{A^+}{|\varphi^-|^2} \cdot \varphi^- + \frac{A^-}{|\varphi^+|^2} \cdot \varphi^+ - V^+(X) \cdot \varphi^- - V^-(X) \cdot \varphi^+, \end{aligned}$$

ce qui donne grâce à (3.37)

$$(3.38) \quad \nabla_X \varphi = \frac{F(X)}{|\varphi|^2} \cdot \varphi - V^+(X) \cdot \varphi^- - V^-(X) \cdot \varphi^+.$$

Le tenseur F est symétrique car A^+ et A^- le sont, est il est facile de vérifier que le tenseur $A := -2F$ est bien comme dans le Lemme 3.18 et que (3.42) donne :

$$\nabla_X \varphi = \frac{1}{2} X \cdot T \cdot \varphi + \frac{1}{2} f X \cdot \varphi + \frac{1}{2} \langle X, T \rangle \varphi - \frac{1}{2} A X \cdot \varphi,$$

ce qui conclut la preuve. \square

Il nous reste juste à finir la démonstration du Théorème 3.14, ce que nous ferons dans la Section 3.6.5, la preuve étant la même dans les cas $\eta = \frac{1}{2}$ et $\eta = \frac{i}{2}$.

Le cas $\eta = \frac{i}{2}$: Le schéma de preuve est le même que dans le cas $\eta = \frac{1}{2}$. Les différences n'interviennent que dans les calculs et sont les suivantes. Nous supposons pas ici que le spineur φ est de norme constante, mais que sa norme vérifie :

$$X|\varphi|^2 = \Re \langle iX \cdot T \cdot \varphi + ifX \cdot \varphi, \varphi \rangle.$$

D'autre part, le fait que η est imaginaire pur et non plus réel va modifier les calculs puisque nous considérons le produit scalaire réel $\Re \langle \cdot, \cdot \rangle$. Comme précédemment, nous allons montrer que W est identiquement nul. Nous utiliserons le même argument, à savoir qu'il est symétrique, à trace nulle et de rang inférieur à 1. Commençons par la trace avec le lemme suivant :

Lemme 3.26. *Les endomorphismes Q_φ^\pm et B^\pm vérifient :*

1. $\text{tr}(Q_\varphi^\pm) = -H|\varphi^\mp|^2 + \frac{1}{2} \Re \langle iT \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle$.
2. $\text{tr}(B^\pm) = -\frac{1}{2} \Re \langle iT \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle$.

Preuve : Pour Q_φ^\pm , nous avons :

$$\begin{aligned}\text{tr}(Q_\varphi^\pm) &= Q_\varphi^\pm(e_1, e_1) + Q_\varphi^\pm(e_2, e_2) \\ &= \Re \langle \nabla_{e_1} \varphi^\pm, e_1 \cdot \varphi^\mp \rangle + \langle \nabla_{e_2} \varphi^\pm, e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle \\ &= -\Re \langle D\varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle \\ &= -H|\varphi^\mp|^2 + \frac{1}{2} \Re \langle iT \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle + \Re \langle if\varphi^\mp, \varphi^\mp \rangle \\ &= -H|\varphi^\mp|^2 + \frac{1}{2} \Re \langle iT \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle.\end{aligned}$$

Pour B^\pm , nous avons

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(B^\pm) &= B^\pm(e_1, e_1) + B^\pm(e_2, e_2) \\ &= -\Re \langle iT \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle + \frac{1}{2} \Re \langle iT \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle - \Re \langle if \varphi^\mp, \varphi^\mp \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \Re \langle iT \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle. \end{aligned}$$

□

Passons maintenant au lemme suivant qui donne le défaut de symétrie des endomorphismes Q_φ^\pm et B^\pm .

Lemme 3.27. *Les endomorphismes Q_φ^\pm et B^\pm vérifient :*

1. $Q_\varphi^\pm(e_1, e_2) = Q_\varphi^\pm(e_2, e_1) \mp \frac{1}{2} \Re \langle \omega \cdot T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle \pm f |\varphi^\mp|^2$,
2. $B^\pm(e_1, e_2) = B^\pm(e_2, e_1) \pm \frac{1}{2} \Re \langle \omega \cdot T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle \mp f |\varphi^\mp|^2$.

Preuve : Calculons $Q_\varphi^\pm(e_1, e_2)$.

$$\begin{aligned} Q_\varphi^\pm(e_1, e_2) &= \Re \langle \nabla_{e_1} \varphi^\pm, e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle \\ &= \Re \langle e_1 \cdot \nabla_{e_1} \varphi^\pm, e_1 \cdot e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle \\ &= \Re \langle D\varphi^\pm, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle - \Re \langle e_2 \cdot \nabla_{e_2} \varphi^\pm, e_1 \cdot e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle \\ &= \Re \langle D\varphi^\pm, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle + Q_\varphi^\pm(e_2, e_1). \end{aligned}$$

En utilisant (3.34), on obtient :

$$\Re \langle D\varphi^\pm, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle = \Re \langle H\varphi^\mp, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle - \frac{1}{2} \Re \langle iT \cdot \varphi^\pm, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle - f \Re \langle i\varphi^\mp, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle +$$

Or, nous savons que $i\omega \cdot \varphi^\pm = \pm \varphi^\pm$, d'où, nous avons :

$$\Re \langle D\varphi^\pm, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle = \mp \frac{1}{2} \Re \langle T\varphi^\pm, \cdot \varphi^\mp \rangle \pm f |\varphi^\mp|^2.$$

Calculons maintenant $B^\pm(e_1, e_2) - B^\pm(e_2, e_1)$

$$\begin{aligned} B^\pm(e_1, e_2) - B^\pm(e_2, e_1) &= -\frac{1}{2} \Re \langle ie_1 \cdot T \cdot \varphi^\pm, e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle - \frac{1}{2} \Re \langle iT_1 \varphi^\pm, e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \Re \langle ife_1 \cdot \varphi^\mp, e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle + \frac{1}{2} \Re \langle ie_2 \cdot T \cdot \varphi^\pm, e_1 \cdot \varphi^\mp \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \Re \langle iT_2 \varphi^\pm, e_1 \cdot \varphi^\mp \rangle + \frac{1}{2} \Re \langle ife_2 \cdot \varphi^\mp, e_1 \cdot \varphi^\mp \rangle \\ &= -\Re \langle i\omega \cdot T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle + \frac{1}{2} \Re \langle i(T_1 e_2 - T_2 e_1) \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle \\ &\quad + f \Re \langle i\omega \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle \end{aligned}$$

Or, $(T_1e_2 - T_2e_1) = \omega \cdot T$, d'où, nous obtenons :

$$\begin{aligned} B^\pm(e_1, e_2) - B^\pm(e_2, e_1) &= -\frac{1}{2}\Re \langle i\omega \cdot T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle + f\Re \langle i\omega \varphi^\pm, \varphi^\pm \rangle \\ &= \mp \Re \langle \omega \cdot T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle \pm f|\varphi^\mp|^2 \end{aligned}$$

□

Nous déduisons de ces deux lemmes le corollaire suivant :

Lemme 3.28. *L'endomorphisme W est symétrique et à trace nulle.*

Preuve : On déduit du Lemme 3.26 que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A^\pm) &= \operatorname{tr}(Q_\varphi^\pm) + \operatorname{tr}(B^\pm) \\ &= -H|\varphi^\mp|^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{tr}(W) = \frac{\operatorname{tr}(A^+)}{|\varphi^-|^2} - \frac{\operatorname{tr}(A^-)}{|\varphi^+|^2} = 0.$$

D'autre part, grâce au Lemme 3.27, nous avons :

$$\begin{aligned} A^\pm(e_1, e_2) &= Q_\varphi^\pm(e_1, e_2) + B^\pm(e_1, e_2) \\ &= Q_\varphi^\pm(e_2, e_1) + B^\pm(e_2, e_1) = A^\pm(e_2, e_1). \end{aligned}$$

Par conséquent, A^+ et A^- sont symétrique et donc W aussi. □

Enfin, nous avons ce dernier lemme qui assure que W est de rang inférieur à 1.

Lemme 3.29. *Le champ d'endomorphisme W vérifie :*

$$\Re \langle W(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle = 0$$

pour tout vecteur tangent X .

Preuve : Tout d'abord, comme la norme de φ satisfait pour tout champ de vecteur tangent X :

$$X|\varphi|^2 = \Re \langle iX \cdot T \cdot \varphi + ifX \cdot \varphi, \varphi \rangle,$$

nous avons :

$$\begin{aligned} (3.39) \quad 2\Re \langle U(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle &= 2\Re \langle \nabla_X \varphi, \varphi \rangle \\ &= \Re \langle iX \cdot T \cdot \varphi^-, \varphi^- \rangle + \Re \langle iX \cdot \varphi^+, \varphi^- \rangle \\ &\quad \Re \langle iX \cdot T \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle + \Re \langle iX \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle \end{aligned}$$

où $U(X) := \frac{Q_\varphi^+(X)}{|\varphi^-|^2} - \frac{Q_\varphi^-(X)}{|\varphi^+|^2}$. Comme précédemment, on pose

$$U^+(X) := \frac{Q_\varphi^+(X)}{|\varphi^-|^2}, \quad U^-(X) := \frac{Q_\varphi^-(X)}{|\varphi^+|^2} \quad \text{et} \quad V = V^+ - V^-.$$

On pose d'autre part

$$V^+(X) := \frac{B^+(X)}{|\varphi^-|^2} \quad \text{et} \quad V^-(X) := \frac{B^-(X)}{|\varphi^+|^2}.$$

Calculons alors $\Re(V(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+)$.

$$\begin{aligned} \Re(V(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+) &= \Re(V^+(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+) - \Re(V^-(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+) \\ &= \Re(V^+(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+) + \Re(V^-(X) \cdot \varphi^+, \varphi^-). \end{aligned}$$

Or,

$$\Re(V^+(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+) = \Re(V^+(X, e_1)e_1 \cdot \varphi^-, \varphi^+) + \Re(V^+(X, e_2)e_2 \cdot \varphi^-, \varphi^+).$$

Regardons de plus près le terme $V^+(X, e_1)$

$$\begin{aligned} V^+(X, e_1) &= -\frac{1}{2}\Re \left\langle iX \cdot T \cdot \varphi^+, e_1 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|^2} \right\rangle - \frac{1}{2}\Re \left\langle i \langle X, T \rangle \varphi^+, e_1 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|^2} \right\rangle \\ &\quad - \frac{1}{2}\Re \left\langle ifX \cdot \varphi^-, e_1 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|^2} \right\rangle \end{aligned}$$

De même, nous avons :

$$\begin{aligned} V^+(X, e_2) &= -\frac{1}{2}\Re \left\langle iX \cdot T \cdot \varphi^+, e_2 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|^2} \right\rangle - \frac{1}{2}\Re \left\langle i \langle X, T \rangle \varphi^+, e_2 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|^2} \right\rangle \\ &\quad - \frac{1}{2}\Re \left\langle ifX \cdot \varphi^-, e_2 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|^2} \right\rangle \end{aligned}$$

Comme $\left(e_1 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|}, e_2 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|} \right)$ est une base orthonormée locale de $\Gamma(\Sigma^+N)$ pour le produit scalaire $\Re \langle \cdot, \cdot \rangle$, on en déduit que

$$V^+(X) \cdot \varphi^- = -\frac{i}{2}X \cdot T \cdot \varphi^+ - \frac{i}{2}\langle X, T \rangle \varphi^+ - \frac{i}{2}fX \cdot \varphi^-.$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} \Re \langle V^+(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle &= -\frac{1}{2}\Re \langle iX \cdot T \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle - \frac{1}{2}\Re \langle i \langle X, T \rangle \varphi^+, \varphi^+ \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2}\Re \langle ifX \cdot \varphi^+, \varphi^- \rangle. \end{aligned}$$

On peut voir facilement que pour tout champ de vecteur X ,

$$\Re \langle i \langle X, T \rangle \varphi^+, \varphi^+ \rangle = 0,$$

ce qui donne finalement :

$$\Re \langle V^+(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle = -\frac{1}{2}\Re \langle ifX \cdot \varphi^+, \varphi^- \rangle - \frac{1}{2}\Re \langle iX \cdot T \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle.$$

De la même manière, on montre que :

$$\Re \langle V^-(X) \cdot \varphi^+, \varphi^- \rangle = -\frac{1}{2} \Re \langle ifX \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle - \frac{1}{2} \Re \langle iX \cdot T \cdot \varphi^-, \varphi^- \rangle.$$

On en conclut alors que

$$(3.40) \quad \begin{aligned} \Re \langle V(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle &= -\frac{1}{2} \Re \langle iX \cdot T \cdot \varphi^-, \varphi^- \rangle - \frac{1}{2} \Re \langle iX \cdot \varphi^+, \varphi^- \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \Re \langle iX \cdot T \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle - \frac{1}{2} \Re \langle iX \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle. \end{aligned}$$

Comme $W = U + V$, on déduit de (3.39) et (3.40) que

$$\Re \langle W(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle = 0.$$

Ceci achève la preuve du lemme. \square

Le fait que

$$\Re \langle W(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle = 0$$

implique que l'endomorphisme W est de rang inférieur ou égal à 1. Comme W est également ssymétrique est à trace nulle, nous en déduisons

Proposition 3.30. *Le champ d'endomorphismes W est identiquement nul.*

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante :

Proposition 3.31. *Si φ est une solution non triviale de norme constante de l'équation de Dirac (3.33), alors φ est une solution de l'équation des spineurs de Killing généralisés (3.30).*

Preuve : On pose $F := A^+ + A^-$. Le fait que $W = 0$ implique

$$(3.41) \quad \frac{F}{|\varphi|^2} = \frac{A^+}{|\varphi^-|^2} = \frac{A^-}{|\varphi^+|^2}.$$

D'autre part, nous avons vu précédemment que pour tout champ de vecteurs X , nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla_X \varphi &= U^+(X) \cdot \varphi^- + U^-(X) \cdot \varphi^+ \\ &= \frac{A^+(X)}{|\varphi^-|^2} \cdot \varphi^- + \frac{A^-(X)}{|\varphi^+|^2} \cdot \varphi^+ - V^+(X) \cdot \varphi^- - V^-(X) \cdot \varphi^+, \end{aligned}$$

ce qui donne grâce à (3.41)

$$(3.42) \quad \nabla_X \varphi = \frac{F(X)}{|\varphi|^2} \cdot \varphi - V^+(X) \cdot \varphi^- - V^-(X) \cdot \varphi^+.$$

Le tenseur F est symétrique car A^+ et A^- le sont, est il est facile de vérifier que le tenseur $A := -2F$ est bien comme dans le Lemme 3.18 et que (3.42) donne :

$$\nabla_X \varphi = \frac{i}{2} X \cdot T \cdot \varphi + \frac{i}{2} fX \cdot \varphi + \frac{i}{2} \langle X, T \rangle \varphi - \frac{1}{2} AX \cdot \varphi,$$

ce qui conclut la preuve. \square

Nous pouvons maintenant passer à la preuve des Théorèmes 3.14 et 3.15.

3.6.5 Preuve des Théorèmes 3.14 et 3.15

L'équivalence entre les points (i) et (ii) a été démontrée dans la section 3.6.3. Il est d'autre part évident que (ii) implique (iii), il suffit de tracer. Enfin, il reste à montrer que (iii) implique (ii). Nous avons vu dans la section 3.6.4 qu'un spineur solution de l'équation de Dirac (3.33) et de norme constante est solution de l'équation des spineurs de Killing généralisés (3.30). Il reste juste à montrer que l'on a

$$\nabla_X T = fAX$$

et

$$df(X) = -\langle AX, T \rangle.$$

La seconde identité est claire étant donné que

$$df = -2Q_\varphi(T) - B(T)$$

et l'expression de A .

Pour montrer le premier point, on pose

$$a(X) := \nabla_X T - fAX.$$

Étant donné l'hypothèse $\langle \nabla_X T, Y \rangle = \langle \nabla_Y T, X \rangle$, il est clair que a est symétrique. D'autre part, comme $2Hf = \operatorname{div}(T)$, on déduit que a est à trace nulle. Enfin, le fait que $\nabla_T T = -fd f$ implique la relation

$$\nabla_T T = -2Q_\varphi(T) - B(T),$$

ce qui est équivalent à $a(T) = 0$. Par conséquent, a est de rang inférieur à 1. On en conclut donc que a est identiquement nul, ce qui signifie que pour tout champ de vecteurs X sur N , on a :

$$\nabla_X T = fAX.$$

Ceci achève la preuve. □

3.7 Immersions isométriques dans $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

Nous donnons ici une caractérisation spinorielle des surfaces immergées isométriquement dans $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, avec $\tau \neq 0$.

3.7.1 Le résultat

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème 3.32. Soit $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une surface riemannienne connexe, simplement connexe et orientée. Soient T un champ de vecteurs, f et H deux fonctions sur N vérifiant :

$$\begin{cases} f^2 + \|T\|^2 = 1, \\ \langle \nabla_X T, Y \rangle = \langle \nabla_Y T, X \rangle + 2\tau f \langle X, JY \rangle, \quad \forall X, Y \in \chi(N), \\ 2Hf = \operatorname{div}(T). \end{cases}$$

Enfin, soit A un champ d'endomorphismes sur N . Il y a équivalence entre la donnée :

- i) d'une immersion isométrique F de N dans $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ de courbure moyenne H telle que l'application de Weingarten associée à F par rapport à la normale ν est donnée par :

$$dF \circ A \circ dF^{-1}$$

et telle que

$$\xi = dF(T) + f\nu.$$

- ii) d'un spineur φ solution de l'équation

$$\nabla_X \varphi = -\frac{\tau}{2} X \cdot \omega \cdot \varphi + \frac{\alpha}{2} \langle X, T \rangle T \cdot \omega \cdot \varphi - \frac{\alpha}{2} f \langle X, T \rangle \omega \cdot \varphi - \frac{1}{2} AX \cdot \varphi,$$

où A vérifie de plus :

$$\nabla_X T = f(AX - \tau JX),$$

et

$$df(X) = -\langle AX - \tau JX, T \rangle.$$

- iii) d'une solution φ de l'équation de Dirac

$$D\varphi = H\varphi + \tau\omega \cdot \varphi - \frac{\alpha}{2} \|T\|^2 \omega \cdot \varphi - \frac{\alpha}{2} fT \cdot \omega\varphi,$$

de norme constante et tel que

$$df = -2Q_\varphi(T) - B(T) - \tau J(T),$$

où B est le tenseur défini dans le Lemme 3.35.

3.7.2 Une condition nécessaire et suffisante

On rappelle le résultat suivant dû à B. Daniel ([?]), qui donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une immersion isométrique d'une surface N simplement connexe et orientée dans $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Théorème 3.33 (Daniel [?]). Soit $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une surface simplement connexe orientée et ∇ sa connexion de Levi-Civita. Soit A un champ d'endomorphismes symétriques $A_y : T_y N \rightarrow T_y N$, T un champ de vecteurs sur N et f une fonction lisse sur N , tels que $\|T\|^2 + f^2 = 1$. Si $(\langle \cdot, \cdot \rangle, A, T, f)$ satisfait aux équations de compatibilité pour $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Alors, il existe une immersion isométrique :

$$F : N \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$$

telle que l'opérateur de Weingarten de l'immersion par rapport à la normale ν associée à F soit :

$$dF \circ A \circ dF^{-1}$$

et telle que

$$\xi = dF(T) + f\nu.$$

De plus, l'immersion est unique à une isométrie globale de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ qui préserve l'orientation de la base et des fibres.

3.7.3 Spineurs de Killing généralisés et équations de compatibilité

Si $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est une surface orientable de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, orientée par ν , alors, comme nous l'avons vu dans la section 3.5.3, il existe sur N un spineur de Killing généralisé. Supposons maintenant que $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est une surface orientable qui possède un spineur de Killing généralisé, c'est-à-dire un spineur solution de l'équation (3.31). Nous allons voir que les conditions d'intégrabilité pour cette équation sont exactement les conditions de Gauss et Codazzi.

Proposition 3.34. *Soit $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une surface orientable admettant une solution non triviale de l'équation (3.31) et telle que les équations (3.26) et (3.27) soient vérifiées. Alors les équation de Gauss et Codazzi pour $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ sont satisfaites.*

Preuve : Comme précédemment, la preuve de cette proposition repose sur le calcul du tenseur de courbure spinoriel appliqué au champ de spineurs φ solution de l'équation (3.31). En utilisant l'expression donnée par (3.31), les équations (3.26) et (3.27), le fait que $\omega^2 = -1$ et que ω anticommute avec les vecteurs tangents à N , on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y \varphi &= - \underbrace{\frac{\tau}{2} (\nabla_X Y) \cdot \omega \cdot \varphi}_{\alpha_1(X,Y)} + \underbrace{\frac{\tau^2}{4} Y \cdot X \cdot \varphi}_{\alpha_2(X,Y)} - \underbrace{\frac{\alpha\tau}{4} \langle X, T \rangle Y \cdot T \cdot \varphi}_{\alpha_3(X,Y)} \\ &- \underbrace{\frac{\alpha\tau}{4} f \langle X, T \rangle Y \cdot \varphi}_{\alpha_4(X,Y)} - \underbrace{\frac{\tau}{4} Y \cdot AX \cdot \omega \cdot \varphi}_{\alpha_5(X,Y)} + \underbrace{\frac{\alpha}{2} \langle \nabla_X Y, T \rangle T \cdot \omega \cdot \varphi}_{\alpha_6(X,Y)} \\ &+ \underbrace{\frac{\alpha}{2} f \langle Y, AX \rangle T \cdot \omega \cdot \varphi}_{\alpha_7(X,Y)} - \underbrace{\frac{\alpha\tau}{2} f \langle Y, JX \rangle T \cdot \omega \cdot \varphi}_{\alpha_8(X,Y)} \\ &+ \underbrace{\frac{\alpha}{2} f \langle Y, T \rangle AX \cdot \omega \cdot \varphi}_{\alpha_9(X,Y)} - \underbrace{\frac{\alpha\tau}{2} f \langle Y, T \rangle JX \cdot \omega \cdot \varphi}_{\alpha_{10}(X,Y)} \\ &- \underbrace{\frac{\alpha\tau}{2} f \langle Y, T \rangle T \cdot X \cdot \varphi}_{\alpha_{11}(X,Y)} - \underbrace{\frac{\alpha^2}{4} \langle X, T \rangle \langle Y, T \rangle \|T\|^2 \varphi}_{\alpha_{12}(X,Y)} \\ &+ \underbrace{\frac{\alpha^2}{4} f \langle X, T \rangle \langle Y, T \rangle T \cdot \varphi}_{\alpha_{13}(X,Y)} + \underbrace{\frac{\alpha}{4} \langle Y, T \rangle T \cdot AX \cdot \omega \cdot \varphi}_{\alpha_{14}(X,Y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{\frac{\alpha}{2} \langle Y, T \rangle \langle AX, T \rangle \omega \cdot \varphi}_{\alpha_{15}(X,Y)} - \underbrace{\frac{\alpha\tau}{2} \langle Y, T \rangle \langle JX, T \rangle \omega \cdot \varphi}_{\alpha_{16}(X,Y)} \\
& - \underbrace{\frac{\alpha}{2} \langle \nabla_X Y, T \rangle \omega \cdot \varphi}_{\alpha_{17}(X,Y)} - \underbrace{\frac{\alpha}{2} f^2 \langle Y, AX \rangle \omega \cdot \varphi}_{\alpha_{18}(X,Y)} \\
& + \underbrace{\frac{\alpha\tau}{2} f^2 \langle Y, JX \rangle \omega \cdot \varphi}_{\alpha_{19}(X,Y)} + \underbrace{\frac{\alpha\tau}{4} f \langle Y, T \rangle X \cdot \varphi}_{\alpha_{20}(X,Y)} \\
& + \underbrace{\frac{\alpha^2}{4} f \langle X, T \rangle \langle Y, T \rangle T \cdot \varphi}_{\alpha_{21}(X,Y)} - \underbrace{\frac{\alpha^2}{4} f^2 \langle X, T \rangle \langle Y, T \rangle \varphi}_{\alpha_{22}(X,Y)} \\
& - \underbrace{\frac{\alpha}{4} f \langle Y, T \rangle AX \cdot \omega \cdot \varphi}_{\alpha_{23}(X,Y)} - \underbrace{\frac{\tau}{2} (\nabla_X AY) \cdot \varphi}_{\alpha_{24}(X,Y)} \\
& + \underbrace{\frac{\tau}{4} AY \cdot X \cdot \omega \cdot \varphi}_{\alpha_{25}(X,Y)} - \underbrace{\frac{\alpha}{4} \langle X, T \rangle AY \cdot T \cdot \omega \cdot \varphi}_{\alpha_{26}(X,Y)} \\
& + \underbrace{\frac{\alpha}{4} \langle X, T \rangle AY \cdot \omega \cdot \varphi}_{\alpha_{27}(X,Y)} + \underbrace{\frac{1}{4} AY \cdot AX \cdot \varphi}_{\alpha_{28}(X,Y)}
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\nabla_X \nabla_Y \varphi = \sum_{i=1}^{28} \alpha_i(X, Y),$$

et il est alors clair que

$$\nabla_Y \nabla_X \varphi = \sum_{i=1}^{28} \alpha_i(Y, X).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\nabla_{[X,Y]} \varphi & = - \underbrace{\frac{\tau}{2} [X, Y] \cdot \omega \cdot \varphi}_{\beta_1([X,Y])} + \underbrace{\frac{\alpha}{2} \langle [X, Y], T \rangle T \cdot \omega \cdot \varphi}_{\beta_2([X,Y])} \\
& - \underbrace{\frac{\alpha}{2} f \langle [X, Y], T \rangle \omega \cdot \varphi}_{\beta_3([X,Y])} - \underbrace{\frac{1}{2} A[X, Y] \cdot \varphi}_{\beta_4([X,Y])}
\end{aligned}$$

Comme la connexion ∇ est sans torsion, on a :

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0,$$

et de ce fait

$$\begin{aligned}
\alpha_1(X, Y) - \alpha_1(Y, X) - \beta_1([X, Y]) & = 0 \\
\alpha_6(X, Y) - \alpha_6(Y, X) - \beta_2([X, Y]) & = 0 \\
\alpha_{17}(X, Y) - \alpha_{17}(Y, X) - \beta_3([X, Y]) & = 0
\end{aligned}$$

De plus, un certain nombre de termes disparaissent par symétrie, il s'agit des termes symétriques en X et Y , à savoir, $\alpha_7, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{18}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$. D'autres termes combinés sont également nuls par symétrie. En effet, on peut voir que

$$\begin{aligned}\alpha_5(e_1, e_2) - \alpha_5(e_2, e_1) + \alpha_{25}(e_1, e_2) - \alpha_{25}(e_2, e_1) &= 0 \\ \alpha_9(e_1, e_2) - \alpha_9(e_2, e_1) + \alpha_{23}(e_1, e_2) - \alpha_{23}(e_2, e_1) + \alpha_{27}(e_1, e_2) - \alpha_{27}(e_2, e_1) &= 0 \\ \alpha_{14}(e_1, e_2) - \alpha_{14}(e_2, e_1) + \alpha_{15}(e_1, e_2) - \alpha_{15}(e_2, e_1) + \alpha_{26}(e_1, e_2) - \alpha_{26}(e_2, e_1) &= 0\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\alpha_{24}(e_1, e_2) - \alpha_{24}(e_2, e_1) - \beta_4([e_1, e_2]) = -\frac{1}{2}d^\nabla A(e_1, e_2) \cdot \varphi.$$

On voit également que

$$\alpha_2(e_1, e_2) - \alpha_2(e_2, e_1) = -\frac{\tau^2}{2}\omega \cdot \varphi,$$

et

$$\alpha_3(e_1, e_2) - \alpha_3(e_2, e_1) + \alpha_{11}(e_1, e_2) - \alpha_{11}(e_2, e_1) = \frac{\alpha\tau}{2}\|T\|^2\omega \cdot \varphi.$$

Enfin, on trouve

$$\alpha_4(e_1, e_2) - \alpha_4(e_2, e_1) + \alpha_{20}(e_1, e_2) - \alpha_{20}(e_2, e_1) = -\frac{\alpha\tau}{2}fT\omega \cdot \varphi,$$

$$\alpha_8(e_1, e_2) - \alpha_8(e_2, e_1) + \alpha_{10}(e_1, e_2) - \alpha_{10}(e_2, e_1) = \frac{3\alpha\tau}{2}fT\omega \cdot \varphi$$

et

$$\alpha_{16}(e_1, e_2) - \alpha_{16}(e_2, e_1) + \alpha_{19}(e_1, e_2) - \alpha_{19}(e_2, e_1) = \frac{3\alpha\tau}{2}f^2\omega \cdot \varphi.$$

On a donc finalement

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(e_1, e_2) &= \frac{1}{4}(Ae_2 \cdot Ae_1 - Ae_1 \cdot Ae_2) \cdot \varphi - \frac{\tau^2}{2}\omega \cdot \varphi - \frac{1}{2}d^\nabla(e_1, e_2) \\ &\quad + \frac{\alpha\tau}{2}\|T\|^2\varphi + 2\alpha\tau f\omega \cdot \varphi + \frac{3\alpha\tau}{2}f^2\omega \cdot \varphi.\end{aligned}$$

On utilise maintenant l'identité de Ricci

$$\mathcal{R}(e_1, e_2)\varphi = -\frac{1}{2}R_{1212}e_1 \cdot e_2 \cdot \varphi,$$

pour obtenir

$$\left(\underbrace{R_{1212} - \det(A) - \tau^2 - (\kappa - 4\tau^2)f^2}_G \right) \omega \cdot \varphi = \left(\underbrace{d^\nabla(e_1, e_2) + (\kappa - 4\tau^2)fJT}_C \right) \cdot \varphi,$$

c'est-à-dire

$$G\omega \cdot \varphi = C \cdot \varphi,$$

où G est une fonction et C un champ de vecteurs. Or on rappelle que $\omega \cdot \varphi = -i\bar{\varphi}$, d'où

$$C \cdot \varphi^\pm = \pm iG\varphi^\mp.$$

On en déduit donc

$$\|C\|^2\varphi^\pm = -G^2\varphi^\pm.$$

Comme φ est un champ de spineur non trivial solution de (3.31), par la Proposition 3.13, sa norme est constante (non nulle) et par conséquent, φ^+ et φ^- ne peuvent pas être nuls en même temps. Donc $C = 0$ et $G = 0$. Or le fait que $G = 0$ n'est autre que la condition de Gauss et $C = 0$ la condition de Codazzi, ce qui achève la preuve. \square

3.7.4 Équation de Killing généralisée et équation de Dirac

Il est clair que si le champ de spineurs φ est solution de l'équation des spineurs de Killing généralisés, alors φ est également solution de l'équation de Dirac correspondante

$$(3.43) \quad D\varphi = H\varphi + \tau\omega \cdot \varphi - \frac{\alpha}{2}\|T\|^2\omega\varphi - \frac{\alpha}{2}fT \cdot \omega \cdot \varphi,$$

qui peut également s'écrire

$$(3.44) \quad D\varphi = H\varphi - i\tau\bar{\varphi} + i\frac{\alpha}{2}\|T\|^2\bar{\varphi} + i\frac{\alpha}{2}fT \cdot \bar{\varphi}.$$

Nous allons voir que l'équation (3.43) pour un spineur de norme constante est équivalente à l'équation (3.31). Pour cela, commençons par donner le lemme suivant :

Lemme 3.35. *Soit φ une solution non triviale de l'équation des spineurs de Killing généralisés. Alors l'endomorphisme symétrique A est donné par*

$$A(X) = 2Q_\varphi(X) + B(X),$$

où Q_φ est le tenseur impulsion-énergie associé au spineur φ et B est donné par la matrice symétrique à trace nulle

$$\begin{pmatrix} \alpha T_1 T_2 & \frac{\alpha}{2}(T_1^2 - T_2^2) \\ \frac{\alpha}{2}(T_1^2 - T_2^2) & -\alpha T_1 T_2 \end{pmatrix}.$$

Preuve : Il suffit de calculer le tenseur impulsion-énergie défini par

$$Q_\varphi(X, Y) = \frac{1}{2}\Re e(X \cdot \nabla_Y \varphi + Y \cdot \nabla_X \varphi)$$

en utilisant le fait que φ est solution de (3.31). \square

On rappelle que φ se décompose sous l'action de la forme volume complexe ω_2 en $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$. On a alors :

$$(3.45) \quad D\varphi^\pm = H\varphi^\mp + \tau\omega \cdot \varphi^\mp - \frac{\alpha}{2}\|T\|^2\omega \cdot \varphi^\mp - \frac{\alpha}{2}T \cdot \omega \cdot \varphi^\pm.$$

On pose d'une part

$$Q_\varphi^\pm(X, Y) := \Re(\nabla_X \varphi^\pm, Y \cdot \varphi^\mp)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} B^\pm(X, Y) &:= \mp \Re\left(i\frac{\alpha}{2}\langle X, T \rangle T \cdot \varphi^\mp, Y \cdot \varphi^\mp\right) \\ &\quad \mp \Re\left(i\frac{\alpha}{2}f\langle X, T \rangle \varphi^\pm, Y \cdot \varphi^\mp\right). \end{aligned}$$

Enfin, on pose $A^\pm := Q_\varphi^\pm + B^\pm$. Nous considérons le champ d'endomorphisme W défini par :

$$W(X) := \frac{A^+(X)}{|\varphi^-|^2} - \frac{A^-(X)}{|\varphi^+|^2}.$$

Proposition 3.36. *Le champ d'endomorphisme W est identiquement nul.*

Preuve : La preuve de cette proposition est composée de deux étapes. On montre d'abord que W est symétrique à trace nulle. Ensuite, on montre que W est de rang inférieur à 1, ce qui permet de conclure. Commençons par donner le lemme suivant :

- Lemme 3.37.**
1. $\text{tr}(Q_\varphi^\pm) = -H|\varphi^\pm|^2 \pm \frac{\alpha}{2}f\Re(iT \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp),$
 2. $Q_\varphi^\pm(e_1, e_2) = Q_\varphi^\pm(e_2, e_1) + \left(\tau - \frac{\alpha}{2}\|T\|^2\right)|\varphi^\mp|^2 + \frac{\alpha}{2}f\Re(T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp),$
 3. $\text{tr}(B^\pm) = \mp \frac{\alpha}{2}f\Re(iT \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp),$
 4. $B^\pm(e_1, e_2) = B^\pm(e_2, e_1) + \frac{\alpha}{2}\|T\|^2|\varphi^\mp|^2 - \frac{\alpha}{2}f\Re(T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp).$

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 3.38. *Les endomorphismes A^\pm vérifient :*

1. $\text{tr}(A^\pm) = -H|\varphi^\mp|^2,$
2. $A^\pm(e_1, e_2) = A^\pm(e_2, e_1) + \tau|\varphi^\mp|^2.$

Preuve du Lemme 3.37 : Grâce à la relation (3.43), on a :

$$\begin{aligned} \text{tr}(Q_\varphi^\pm) &= Q_\varphi^\pm(e_1, e_1) + Q_\varphi^\pm(e_2, e_2) \\ &= \Re\langle \nabla_{e_1} \varphi^\pm, e_1 \cdot \varphi^\mp \rangle + \Re\langle \nabla_{e_2} \varphi^\pm, e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle \\ &= -\Re\langle D\varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle \\ &= -H|\varphi^\mp|^2 - \tau\Re\langle \omega \cdot \varphi^\mp, \varphi^\mp \rangle + \frac{\alpha}{2}\|T\|^2\Re\langle \omega \cdot \varphi^\mp, \varphi^\mp \rangle \\ &\quad + \frac{\alpha}{2}f\Re\langle T \cdot \omega \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle \\ &= -H|\varphi^\mp|^2 \pm \frac{\alpha}{2}f\Re\langle iT \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle. \end{aligned}$$

Calculons $Q_\varphi^\pm(e_1, e_2)$.

$$\begin{aligned}
Q_\varphi^\pm(e_1, e_2) &= \Re \langle \nabla_{e_1} \varphi^\pm, e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle \\
&= \Re \langle e_1 \cdot \nabla_{e_1} \varphi^\pm, e_1 \cdot e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle \\
&= \Re \langle D\varphi^\pm, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle - \Re \langle e_2 \cdot \nabla_{e_2} \varphi^\pm, e_1 \cdot e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle \\
&= \Re \langle D\varphi^\pm, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle + Q_\varphi^\pm(e_2, e_1).
\end{aligned}$$

Toujours en utilisant la relation (3.43), on obtient

$$\begin{aligned}
\Re \langle D\varphi^\pm, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle &= \Re \langle H\varphi^\mp, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle + \tau \Re \langle \omega \cdot \varphi^\mp, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle \\
&\quad - \frac{\alpha}{2} \|T\|^2 \Re \langle \omega \cdot \varphi^\mp, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle - \frac{\alpha}{2} f \Re \langle T\omega \cdot \varphi^\pm, \omega \cdot \varphi^\mp \rangle \\
&= \tau |\varphi^\mp|^2 - \frac{\alpha}{2} \|T\|^2 |\varphi^\mp|^2 + \frac{\alpha}{2} f \Re \langle T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle.
\end{aligned}$$

Pour les troisième et quatrième points, remarquons d'abord que

$$\omega \cdot T = T_1 e_2 - T_2 e_1.$$

Calculons la trace de B^\pm .

$$\begin{aligned}
\text{tr}(B^\pm) &= B_{11}^\pm + B_{22}^\pm \\
&= \mp \frac{\alpha}{2} \Re \langle iT_1 T \cdot \varphi^\mp, e_1 \cdot \varphi^\mp \rangle \mp \frac{\alpha}{2} \Re \langle iT_2 T \cdot \varphi^\mp, e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle \\
&\quad \mp \frac{\alpha}{2} \Re \langle ifT_1 \varphi^\pm, e_1 \cdot \varphi^\mp \rangle \mp \frac{\alpha}{2} \Re \langle ifT_2 \varphi^\pm, e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle \\
&= \mp \frac{\alpha}{2} \|T\|^2 \Re \langle i\varphi^\mp, \varphi^\mp \rangle \pm \frac{\alpha}{2} \Re \langle ifT \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle \\
&= \pm \frac{\alpha}{2} \Re \langle ifT \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle.
\end{aligned}$$

Pour le défaut de symétrie de B^\pm , on a :

$$\begin{aligned}
B_{12}^\pm - B_{21}^\pm &= \mp \frac{\alpha}{2} \Re \langle iT_1 T \cdot \varphi^\mp, e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle \pm \frac{\alpha}{2} \Re \langle iT_2 T \cdot \varphi^\mp, e_1 \cdot \varphi^\mp \rangle \\
&\quad \mp \frac{\alpha}{2} \Re \langle ifT_1 \varphi^\pm, e_2 \cdot \varphi^\mp \rangle \pm \frac{\alpha}{2} \Re \langle ifT_2 \varphi^\pm, e_1 \cdot \varphi^\mp \rangle \\
&= \pm \frac{\alpha}{2} \Re \langle i(T_1 e_2 - T_2 e_1) \cdot T \cdot \varphi^\mp, \varphi^\mp \rangle \\
&\quad \pm \frac{\alpha}{2} f \Re \langle i(T_1 e_2 - T_2 e_1) \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle \\
&= \pm \frac{\alpha}{2} \Re \langle i\omega \cdot T \cdot T \cdot \varphi^\mp, \varphi^\mp \rangle \pm \frac{\alpha}{2} f \Re \langle i\omega \cdot T \cdot \varphi^\mp, \varphi^\mp \rangle \\
&= \mp \frac{\alpha}{2} \|T\|^2 \Re \langle i\omega \varphi^\mp, \varphi^\mp \rangle \pm \frac{\alpha}{2} f \Re \langle iT \cdot \omega \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle \\
&= \frac{\alpha}{2} \|T\|^2 |\varphi^\mp|^2 - \frac{\alpha}{2} f \Re \langle T \cdot \varphi^\pm, \varphi^\mp \rangle.
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du lemme. \square

Nous avons ce second lemme qui permet d'affirmer que W est de rang inférieur à 1.

Lemme 3.39. *Le champ d'endomorphisme W vérifie :*

$$\Re \langle W(X) \cdot \varphi^+, \varphi^- \rangle = 0.$$

Preuve : Tout d'abord, comme φ est de norme constante, pour tout champ de vecteurs tangents X , on a :

$$\begin{aligned} 0 &= X|\varphi|^2 \\ &= X(|\varphi^+|^2 + |\varphi^-|^2) \\ &= 2\Re(\nabla_X \varphi^+, \varphi^+) + 2\Re(\nabla_X \varphi^-, \varphi^-) \\ (3.46) \quad &= 2\Re(U(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+), \end{aligned}$$

où $U(X) := \frac{Q_\varphi^+(X)}{|\varphi^-|^2} - \frac{Q_\varphi^-(X)}{|\varphi^+|^2}$. On pose d'une part

$$U^+(X) := \frac{Q_\varphi^+(X)}{|\varphi^-|^2} \quad \text{et} \quad U^-(X) := \frac{Q_\varphi^-(X)}{|\varphi^+|^2},$$

et d'autre part

$$V^+(X) := \frac{B^+(X)}{|\varphi^-|^2}, \quad V^-(X) := \frac{B^-(X)}{|\varphi^+|^2} \quad \text{et} \quad V = V^+ - V^-.$$

Calculons alors $\Re(V(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+)$.

$$\begin{aligned} \Re(V(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+) &= \Re(V^+(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+) - \Re(V^-(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+) \\ &= \Re(V^+(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+) + \Re(V^-(X) \cdot \varphi^+, \varphi^-). \end{aligned}$$

Or,

$$\Re(V^+(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+) = \Re(V(X, e_1)e_1 \cdot \varphi^-, \varphi^+) + \Re(V(X, e_2)e_2 \cdot \varphi^-, \varphi^+).$$

Regardons de plus près le terme $V(X, e_1)$:

$$V^+(X, e_1) = -\frac{\alpha}{2}\Re\left(i \langle X, T \rangle T \cdot \varphi^-, e_1 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|^2}\right) - \frac{\alpha}{2}\Re\left(if \langle X, T \rangle \cdot \varphi^+, e_1 \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|^2}\right)$$

Bien sûr, on a de même :

$$V^+(X, e_2) = -\frac{\alpha}{2}\Re\left(i \langle X, T \rangle T \cdot \varphi^-, e_2 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|^2}\right) - \frac{\alpha}{2}\Re\left(if \langle X, T \rangle \varphi^+, e_2 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|^2}\right).$$

Comme $\left(e_1 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|}, e_2 \cdot \frac{\varphi^-}{|\varphi^-|}\right)$ est une base orthonormée locale de $\Gamma(\Sigma^+ N)$ pour le produit scalaire $\Re \langle \cdot, \cdot \rangle$, on en déduit que

$$V^+(X) \cdot \varphi^- = -i \frac{\alpha}{2} \langle X, T \rangle T \cdot \varphi^- - i \frac{\alpha}{2} f \langle X, T \rangle \varphi^-.$$

On en déduit alors facilement que

$$\Re \langle V^+(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle = \frac{\alpha}{2} \Re \langle \langle X, T \rangle T \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle.$$

De la même manière, on peut montrer que

$$\Re \langle V^-(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle = -\frac{\alpha}{2} \Re \langle \langle X, T \rangle T \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle.$$

On en conclut donc que

$$(3.47) \quad \Re (V(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+) = 0$$

Comme $W = U + V$, on déduit de (3.46) et (3.47) que

$$\Re (W(X) \cdot \varphi^-, \varphi^+) = 0.$$

Ceci achève la preuve du lemme □

Enfin, on conclut la preuve de la Proposition 3.36 en utilisant le fait qu'un 2-tenseur symétrique à trace nulle et de rang inférieur à 1 est identiquement nul, ce qui est le cas pour W . □

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante :

Proposition 3.40. *Si φ est une solution non triviale de norme constante de l'équation de Dirac (3.43), alors φ est une solution de l'équation des spineurs de Killing généralisés (3.31).*

Preuve : On pose $F := A^+ + A^-$. Le fait que $W = 0$ implique que

$$(3.48) \quad \frac{F}{|\varphi|^2} = \frac{A^+}{|\varphi^-|^2} = \frac{A^-}{|\varphi^+|^2}.$$

D'autre part, nous avons déjà vu que pour un champ de vecteurs X ,

$$\begin{aligned} \nabla_X \varphi &= U^+(X) \cdot \varphi^- + U^-(X) \cdot \varphi^+ \\ &= \frac{A^+}{|\varphi^-|^2} \cdot \varphi^- + \frac{A^-}{|\varphi^+|^2} \cdot \varphi^+ - V^+(X) \cdot \varphi^- - V^-(X) \cdot \varphi^+, \end{aligned}$$

ce qui donne grâce à (3.48)

$$(3.49) \quad \nabla_X \varphi = \frac{F(X)}{|\varphi|^2} \cdot \varphi - V^+(X) \cdot \varphi^- - V^-(X) \cdot \varphi^+.$$

Le tenseur F n'est pas symétrique, nous allons donc considérer le $(2, 0)$ -tenseur symétrique S défini par :

$$S(X, Y) := -\frac{1}{2|\varphi|^2} (F(X, Y) + F(Y, X)).$$

Il est facile de voir que S est bien défini comme dans le Lemme 3.35 et que d'autre part, grâce au Corollaire 3.38

$$\begin{cases} S(e_1, e_1) = -F(e_1, e_1)/|\varphi|^2, \\ S(e_2, e_2) = -F(e_2, e_2)/|\varphi|^2, \\ S(e_1, e_2) = -F(e_1, e_2)/|\varphi|^2 + \frac{\tau}{2}, \\ S(e_2, e_1) = -F(e_2, e_1)/|\varphi|^2 - \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Grâce à ces relations, ainsi qu'à la formule (3.49), on déduit :

$$\nabla_X \varphi = -\frac{\tau}{2} X \cdot \omega \cdot \varphi + \frac{\alpha}{2} \langle X, T \rangle T \cdot \omega \cdot \varphi - \frac{\alpha}{2} f \langle X, T \rangle \omega \cdot \varphi - \frac{1}{2} AX \cdot \varphi.$$

Ceci achève la preuve. \square

3.7.5 Preuve du Théorème 3.32

L'équivalence entre les points (i) et (ii) a été démontrée dans la section 3.7.3. Il est d'autre part évident que (ii) implique (iii), il suffit de tracer. Enfin, il reste à montrer que (iii) implique (i). Nous avons vu dans la section 3.7.4 qu'un spineur solution de l'équation de Dirac (3.43) et de norme constante est solution de l'équation des spineurs de Killing généralisés (3.31). Il reste juste à montrer que l'on a

$$\nabla_X T = f(AX - \tau JX)$$

et

$$df(X) = -\langle AX - \tau JX, T \rangle.$$

La seconde identité est claire étant donné que

$$df = -2Q_\varphi(T) - B(T) - \tau J(T)$$

et l'expression de A .

Pour montrer le premier point, on pose

$$a(X) := \nabla_X T - fAX + \tau fJX.$$

Étant donné l'hypothèse $\langle \nabla_X T, Y \rangle = \langle \nabla_Y T, X \rangle + 2\tau f \langle X, JY \rangle$, il est clair que a est symétrique. D'autre part, comme $2Hf = \operatorname{div}(T)$, on déduit que a est à trace nulle. Enfin, le fait que $\nabla_T T = -f df$ implique la relation

$$\nabla_T T = -2Q_\varphi(T) - B(T) - \tau J(T),$$

ce qui est équivalent à $a(T) = 0$. Par conséquent, a est de rang inférieur à 1. On en conclut donc que a est identiquement nul, ce qui signifie que pour tout champ de vecteurs X sur N , on a :

$$\nabla_X T = f(AX - \tau JX).$$

Ceci achève la preuve.

□

Bibliographie

- [1] U. Abresch and H. Rosenberg, *A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , À paraître dans Acta Math.
- [2] A.D. Alexandrov, *Uniqueness theorems for the surfaces in the large I*, Vesnik Leningrad Univ. **11** (1956), 5–17.
- [3] L.J. Alias, *An integral formula for compact hypersurfaces of space forms and its applications*, J. Aust. Math. Soc. **74** (2003), 239–248.
- [4] J. Aminov, *The exterior diameter of an immersed Riemannian manifold*, Math. USSR-Sb **21** (1973), 449–454, AMS translation.
- [5] E. Aubry, *Variétés de courbure de Ricci presque minorée : inégalités géométriques optimales et stabilité des variétés extrémales*, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2003.
- [6] C. Baikoussis and T. Koufogiorgos, *The diameter of an immersed Riemannian manifold with bounded mean curvature*, J. Austral. Soc. (Series A) **31** (1981), 189–192.
- [7] C. Bär, *Real Killing spinors and holonomy*, Commun. Math. Phys. **154** (1993), 509–521.
- [8] ———, *Extrinsic bounds for eigenvalues of the Dirac operator*, Ann. Glob. Anal. Geom. (1998).
- [9] C. Bär, P. Gauduchon, and A. Moroianu, *Generalized cylinders in semi-Riemannian and spin geometry*, Preprint, 2003.
- [10] J.L. Barbosa and A.G. Colares, *Stability of hypersurfaces with constant r -th mean curvature*, Ann. Global Anal. Geom. **15** (1997), 277–297.
- [11] H. Baum, Th. Friedrich, R. Grunewald, and I. Kath, *Twistor and Killing Spinors on Riemannian Manifolds*, Teubner-Verlag, Stuttgart/Leipzig, 1991.
- [12] E. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1961.
- [13] D. Blecker and J. Weiner, *Extrinsic Bounds on λ_1 of Δ on a Compact Manifold*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), 601–609.
- [14] J.P. Bourguignon and P. Gauduchon, *Spineurs, opérateurs de Dirac et variations de métriques*, Commun. Math. Phys. (1992).
- [15] J.P. Bourguignon, O. Hijazi, J.-L. Milhorat, and A. Moroianu, *A Spinorial Approach to Riemannian and Conformal Geometry*, Monograph (In Preparation).

- [16] Y.D. Burago and V.A. Zalgaller, *Geometric inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [17] B. Colbois and J.F. Grosjean, *A pinching theorem for the first eigenvalue of the Laplacian on hypersurfaces of the Euclidean space*, A paraître dans Comment. Math. Helv.
- [18] T.H. Colding, *Large manifolds with positive Ricci curvature*, Invent. Math. **124** (1996), 193–214.
- [19] ———, *Shape of manifolds with positive Ricci curvature*, Invent. Math. **124** (1996), 175–191.
- [20] C.B. Croke, *An eigenvalue pinching theorem*, Invent. Math. **68** (1982), 253–256.
- [21] B. Daniel, *Isometric immersions into 3-dimensional homogenous manifolds*, A paraître dans Comment. Math. Helv.
- [22] ———, *Isometric immersions into $S^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and application to minimal surfaces*, Preprint Arxiv math.DG/0406426.
- [23] S. Deshmukh, *An integral formula for compact hypersurfaces in a Euclidean space and its applications*, Glasgow Math. J. **34** (1992), 309–311.
- [24] J.H. Eschenburg, *Diameter, volume and topology for positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom. **33** (1991), 743–747.
- [25] J.F. Escobar, *Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary*, Ann. of Math. **136** (1992), 1–50.
- [26] A. Fialkow, *Hypersurfaces of a space of constant curvature*, Ann. of Math. **39** (1938), 388–391.
- [27] T. Friedrich, *Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten Riemannschen Manifoldigkeit nicht negativer Skalarkrümmung*, Math. Nach. **97** (1980), 117–146.
- [28] ———, *On the spinor representation of surfaces in euclidian 3-space*, J. Geom. Phys. **28** (1998), 143–157.
- [29] ———, *Dirac operators in Riemannian geometry*, vol. 25, A.M.S. Graduate Studies in Math., 2000.
- [30] J.F. Grosjean, *Upper bounds for the first eigenvalue of the Laplacian on compact manifolds*, Pac. J. Math. **206** (2002), no. 1, 93–111.
- [31] ———, *Extrinsic upper bounds for the first eigenvalue of elliptic operators*, Hokkaido Math. J **33** (2004), no. 2, 219–239.
- [32] T. Hasanis and D. Koutroufiotis, *Immersiones of bounded mean curvature*, Arc. Math. **33** (1979), 170–171.
- [33] E. Heintze, *Extrinsic upper bounds for λ_1* , Math. Ann. **280** (1988), 389–402.
- [34] O. Hijazi, *Spectral properties of the Dirac operator and geometrical structures*, Proceedings of the summer school on Geometrical Methods in Quantum Field Theory.
- [35] ———, *A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors*, Commun. Math. Phys. **104** (1986), 151–162.

- [36] O. Hijazi and S. Montiel, *Extrinsic Killing spinors*, Math. Zeit. **244** (2003), 337–347.
- [37] O. Hijazi, S. Montiel, and A. Roldán, *Eigenvalue Boundary Problems for the Dirac Operator*, Commun. Math. Phys. **231** (2002), 375–390.
- [38] ———, *Dirac operator on hypersurfaces in negatively curved manifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **23** (2003), 247–264.
- [39] O. Hijazi, S. Montiel, and F. Urbano, *Spin^c geometry of Kähler manifolds and the Hodge Laplacian on minimal Lagrangian submanifolds*, Math. Zeit. **253**, no. 4.
- [40] O. Hijazi, S. Montiel, and X. Zhang, *Dirac operator on embedded hypersurfaces*, Math. Res. Lett. **8** (2001), 195–208.
- [41] ———, *Eigenvalues of the Dirac operator on manifolds with boundary*, Comm. Math. Phys. **221** (2001), 255–265.
- [42] ———, *Conformal lower bounds for the Dirac operator of embedded hypersurfaces*, Asian J. Math. **6** (2002), 23–36.
- [43] D. Hoffman and J. Spruck, *Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds*, Comm. Pure. and Appl. Math. **27** (1974), 715–727.
- [44] ———, *Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds, Erratum*, Comm. Pure. and Appl. Math. **28** (1975), 765–766.
- [45] C.C. Hsiung, *Some integral formulae for closed hypersurfaces*, Math. Scand. **2** (1954), 286–294.
- [46] S. Ilias, *Un nouveau résultat de pincement de la première valeur propre du Laplacien et conjecture du diamètre pincé*, Ann. Inst. Fourier **43** (1993), no. 3, 843–863.
- [47] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. 2, Wiley Sons, New York, 1969.
- [48] B. Lawson and M.-L. Michelson, *Spin Geometry*, Princeton University Press, 1989.
- [49] A. Lichnerowicz, *Géométrie des groupes de transformation*, Dunod, 1958.
- [50] ———, *Spineurs harmoniques*, C. R. Acad. Sci. PARIS **257** (1963), 7–9, Série A-B.
- [51] S. Montiel and A. Ros, *Compact hypersurfaces : the Alexandrov theorem for higher order mean curvature*, Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math. **52** (1991), 279–286, in honor of M.P. Do Carmo ; edited by B. Lawson and K. Tenenblat.
- [52] B. Morel, *Eigenvalue estimates for the Dirac-Schrödinger operators*, J. Geom. Phys. **38** (2001), 1–18.
- [53] ———, *Surfaces in S^3 and H^3 via spinors*, Actes du séminaire de théorie spectrale et géométrie, Institut Fourier, Grenoble **23** (2005), 9–22.
- [54] ———, *Tenseur d'impulsion-énergie et géométrie spinorielle extrinsèque*, Ph.D. thesis, Université Henri Poincaré, Nancy I, Septembre 2002.
- [55] R. Pedrosa and M. Ritoré, *Isoperimetric domains in the Riemannian product of a circle with a simply connected space form and applications to free boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 1357–1394.

- [56] P. Petersen, *On eigenvalue pinching in positive Ricci curvature*, Invent. Math. **138** (1999), 1–21.
- [57] P. Petersen and C. Sprouse, *Integral curvature bounds, distance estimates and applications*, J. Diff. Geom. **50** (1998), 269–298.
- [58] R.C. Reilly, *Application of the Hessian operator in a Riemannian manifold*, Indian Univ. Math. J. **26** (1977), 459–472.
- [59] ———, *On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolds of Euclidean space*, Comment. Math. Helv. **52** (1977), 525–533.
- [60] H. Rosenberg, *Minimal surfaces in $\mathcal{M}^n \times \mathbb{R}$* , Illinois J. Math. **46(4)** (2002), 1177–1195.
- [61] J. Roth, *Extrinsic radius pinching for hypersurfaces of space forms*, Preprint IECN 2006/14, a paraître dans Diff. Geom. Appl.
- [62] ———, *Extrinsic radius pinching in space forms of nonnegative sectional curvature*, Preprint IECN 2006/34.
- [63] T. Sakai, *Riemannian geometry*, vol. 149, Amer. Math. Soc. Transl. Math. Monographs, 1996.
- [64] P. Scott, *The geometries of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983), no. 5, 401–487.
- [65] T.Y. Thomas, *On closed space of constant mean curvature*, Amer. J. Math. **58** (1936), 702–704.
- [66] A. Trautman, *The Dirac operator on hypersurfaces*, Acta Phys. Polon. **B 26** (1995), 1283–1310.
- [67] T. Vlachos, *A characterisation for geodesic spheres in space forms*, Geom. Dedic. **68** (1997), 73–78.
- [68] J.Y. Wu, *A diameter pinching sphere theorem for positive Ricci curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. **107** (1989), no. 3, 797–802.
- [69] C. Xia, *Rigidity of compact submanifold with boundary and nonnegative Ricci curvature*, Proc. AMS **125** (1997), 1801–1806.